Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

MARTIN GRÖTSCHEL

Mathematik, Politik und Recht

ZIB-Report 11-33 (August 2011)

Mathematik, Politik und Recht

Martin GRÖTSCHEL, ML (Berlin)

(Kurzfassung des in der Sitzung der Nationalen Akademie der Wissenschaften Leopoldina am 26.01.2010 gehaltenen Vortrages)

Zusammenfassung

Politiker müssten doch in der Lage sein, faire Wahlverfahren, rationale gesellschaftliche Entscheidungsprozesse und schlupflochfreie Marktregulierungen zu finden. Und wenn sie sich nicht einigen können, so denkt fast jeder, dann sollen das eben unsere Gerichte regeln. Dies ist im Allgemeinen unerfüllbares Wunschdenken. Die Gründe dafür sind oft mathematischer Natur. Man kann z. B. mathematisch beweisen, dass es (in einem präzisierbaren Sinn) gar keine „fairen" Wahlverfahren und nur in seltenen Fällen „rationale" Entscheidungsprozesse gibt. Ein anderer Sachverhalt liegt z. B. bei Regulierungs- oder Deregulierungsmaßnahmen vor. Die dabei zu berücksichtigenden technischen Restriktionen sind häufig so kompliziert (man denke u. a. an die technischen Vorschriften im Schienen- oder Luftverkehr oder zum Betrieb von Pipelines), dass sie einfach nicht in juristischer Sprache formuliert werden können. Gut gemeinte Verordnungen sind nicht selten mathematisch widersprüchlich, führen auf praktisch unlösbare Probleme oder überfordern das Verständnis aller Beteiligten. Diese Beispiele legen nahe, dass bei einigen Gesetzgebungsprozessen und Verordnungen mathematischer Sachverstand erforderlich ist. Dieser wird derzeit aber nur sehr selten genutzt.

Mathematik

Es ist hier nicht der Ort, Mathematik zu definieren. Die Ableitung aus dem griechischen Wortstamm ist nicht mehr zielführend, denn die Mathematik hat sich über die Jahrtausende ihrer Existenz in vielfältiger Weise entwickelt. Mathematik entstand natürlich aus dem Rechnen mit Zahlen und der Untersuchung von „Figuren", z. B. zur Flächenberechnung. Häufig wird sie heute als die Wissenschaft beschrieben, die sich mit der Untersuchung selbst geschaffener abstrakter Strukturen beschäftigt. Die Schaffung abstrakter Strukturen ist jedoch kein Selbstzweck, sondern steht in engem Zusammenhang mit Versuchen, bestimmte Aspekte unserer Umwelt und unseres Daseins besser zu verstehen. Ich zitiere daher als ein Beispiel dieser stärker operationalen Sicht aus dem *Executive Summary* des im Jahr 2001 gestellten (erfolgreichen) Antrags einer Gruppe von Berliner Mathematikerinnen und Mathematikern auf Einrichtung eines DFG-Forschungszentrums mit dem Titel *Mathematics for key technologies: Modelling, simulation, and optimization of real-world processes*, das später den Namen MATHEON erhielt:

> *"Key technologies become more complex, innovation cycles get shorter. Flexible mathematical models open new possibilities to master complexity, to react quickly, and to explore new smart options. Such models can only be obtained via abstraction. This line of thought provides our global vision: Innovation needs flexibility, flexibility needs abstraction, the language of abstraction is mathematics. But mathematics is not only a language, it adds value: theoretical insight, efficient algorithms, optimal solutions. Thus, key technologies and mathematics interact in a joint innovation process."*

Die Entwicklung der modernen Mathematik, siehe z. B. ARNOLD et al. (2000) und HAWKING (2007), ist ohne die enge Verknüpfung mit der Physik kaum vorstellbar, siehe hierzu auch PENROSE (2005). Heute sind alle Naturwissenschaften in starkem Maße „mathematisiert". Gleiches gilt natürlich für die Technikwissenschaften; ein breit gefächerter Überblick zur Interaktion zwischen Mathematik und den Ingenieurwissenschaften findet sich in GRÖTSCHEL et al. (2009). Die mathematische Durchdringung der Wirtschaftswissenschaften befindet sich in fortschreitender Entwicklung. Bei den Rechts-, Sozial- und Geisteswissenschaften ist, abgesehen von ein wenig Statistik, nicht so klar, welche Hilfen die Mathematik bietet. In diesem Artikel soll auf einige Aspekte hingewiesen werden, die engen Bezug zu politischen und gesellschaftlichen Entscheidungsfindungen haben, bei denen Mathematik zur Verbesserung des Verständnisses wichtiger Teilbereiche unseres täglichen Lebens beitragen kann. Vieles davon ist der breiten Öffentlichkeit kaum bekannt.

Mathematik als Entscheidungshilfe: Spieltheorie & Entscheidungstheorie

Das ohne Zweifel einflussreichste Buch der Spieltheorie *Theory of Games and Economic Behavior* erschien 1944, siehe VON NEUMANN und MORGENSTERN (2007) und LEONARD (2011). John von Neumann und Oskar Morgenstern bauten durch die mathematische Analyse von gewissen ökonomischen Entscheidungs- und Verhandlungssituationen eine Brücke zwischen den Wirtschaftswissenschaften und der Mathematik. Ein wichtiger Aspekt war dabei das, was wir heute *Modellbildung* nennen; im Falle der Spieltheorie bedeutet das die Identifikation der möglichen Strategien der an einem „Spiel“ beteiligten Akteure und von Zuständen, die es in dem Spiel zu erreichen oder zu vermeiden gilt. Ziel der Analyse ist die Berechnung von „optimalen“ Strategien, also Verhaltensregeln, die das Erreichen gewisser Situationen garantieren. Teil der Modellbildung ist dabei natürlich auch die Klärung des Begriffs „optimal“, denn das, was man als optimal bezeichnet, hängt stark von den Vorstellungen der beteiligten Individuen ab. Die *Spieltheorie* ist heute eine in vielen Teilbereichen stark ausgebaute mathematische Theorie, bei der unter anderem – in ihrem ökonomischen Zweig – versucht wird, rationales Entscheidungsverhalten in sozialen, wirtschaftlichen und politischen Konfliktsituationen abzuleiten. Spieltheorie wird heute in vielen Bereichen qualitativ und quantitativ benutzt, um Verhandlungen vorzubereiten und Entscheidungen zu treffen.

Ich wage es nicht, hier in wenigen Worten *Entscheidungstheorie* zu definieren. Dieses Gebiet, bei dem es darum geht zu erklären, wie Entscheidungen getroffen werden bzw. getroffen werden sollten, hat sich parallel, und zum großen Teil unabhängig voneinander, in mehreren akademischen Disziplinen entwickelt, so u. a. in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, der Politikwissenschaft, der Statistik, der Psychologie und der Philosophie. Entscheidungstheorie ist daher ein stark interdisziplinäres Feld, das dadurch Bezug zur Mathematik hat, dass es (mindestens) eine mathematische Entscheidungstheorie gibt und dass in vielen Fällen mathematische Argumente herangezogen werden, um bestimmte Dinge zu beweisen oder zu widerlegen.

Ein Beispiel: „Die Dollarauktion“

Mit einem „simplen“ Beispiel soll die Vorgehensweise der Spieltheorie erklärt werden. Gleichzeitig wird dabei deutlich, wie schwierig es in der Praxis sein kann, sich „rational“ zu verhalten. Ich erläutere die von SHUBIK (1971) eingeführte und von O’NEILL (1986) ausführlich analysierte *Dollarauktion*.

Ein Auktionator bietet zwei Spielern einen Dollar an. Spieler 1 gibt ein Gebot ab, das Spieler 2 erhöhen kann. Die sukzessive Abgabe von Geboten wird so lange fortgesetzt, bis keine weitere Erhöhung erfolgt. Beide Spieler müssen nun ihr jeweils höchstes Gebot an den Auktionator bezahlen; der mit dem höheren Gebot erhält den Dollar. (Wichtig: Sieger und Verlierer müssen zahlen!)

Eine „vernünftige“ Überlegung könnte sein, dass der erste Spieler 50 Cents bietet. Er gewinnt 50 Cents, wenn Spieler 2 nichts bietet. Ist dieser auf diesen Gewinn neidisch, bietet er z. B. 51 Cents. Dann aber bemerkt 1, dass er nun 50 Cents bezahlen muss, während der zweite Spieler 49 Cents gewinnt. Ganz schnell kann es nun zu einer Eskalation kommen, so dass ein Spieler sogar 1 Dollar bietet und damit weder gewinnt noch verliert, der andere aber sein bisheriges Höchstgebot zahlen muss. Dieser könnte sich darüber ärgern und mehr als einen Dollar bieten, um dem anderen zu schaden. Die Eskalation kann sich fortsetzen, so dass beide nur noch um den „Sieg“ spielen, dabei aber signifikante Verluste in Kauf nehmen. Ganz offensichtlich geht es hier um Psychologie.

O’Neill beginnt seine Analyse mit: „Some social situations seem to be traps by their very structure and induce participants to waste their resources.“ Er fährt fort: “…I calculate the rational strategies for the two players and show that there would be no escalation of bids if both act rationally. … with $2.50 available to each, the first player should offer a bid of $.60 and the other should drop out. If the player opened with less than $.60, that player’s commitment to winning would be insufficient – the other player could then enter and rationally expect to gain. On the other hand, bidding more than $.60 would be a waste because $.60 is enough to induce the other to drop out.” Um eine „rationale“ Strategie ausrechnen zu können, muss O’Neill Annahmen über die bei beiden Spielern verfügbare Geldsumme machen. Hätten sie z. B. $2.90 zur Verfügung, sollte laut O’Neill Spieler 1 lediglich $.50 bieten.

Natürlich sollte man über solch ein Spiel und seine Regeln weiter nachdenken. Die Spieler müssen sich vielleicht gar nicht auf das Spiel einlassen, dann verliert oder gewinnt niemand etwas, und es kommt zu keiner Eskalation. Die Spieler könnten kooperieren. Würden Sie verabreden, dass der zweite Spieler nicht bietet und der Gewinn geteilt wird, könnte der erste $.02 bieten, und beide hätten $.49 gewonnen. Das setzt aber voraus, dass Absprachen erlaubt sind und die Spieler sich gegenseitig vertrauen. Die Dollarauktion ist ein gut erfundenes Spiel, kommt so etwas in der Realität vor? Wer macht eigentlich die Regeln? Sind diese fest, oder kann man sie verändern?

Bau von Abwasserkanälen

Hier schildere ich kurz ein eigenes reales spieltheoretisches Erlebnis, das zeigt, dass gesetzliche Vorgaben Personengruppen „Spiele“ aufzwängen können und dass man sich die Rahmenbedingungen von solchen Spielen nicht immer selbst aussuchen kann. In der Literatur werden Situationen, wie ich sie nachfolgend beschreibe, unter dem Namen *cost-sharing games* behandelt.

Meine Frau und ich besaßen in den 1990er Jahren in Berlin ein Haus, das nicht an das Abwassernetz angeschlossen war. Die zuständigen Behörden legten einen Abwasserkanal in unsere Straße und teilten uns bei Androhung einer signifikanten Geldstrafe mit, dass wir innerhalb einer gewissen Frist unsere Sickergruben stillegen und uns an den von den Wasserwerken festgelegten Übergabepunkt anschließen müssten. In Abb. 1

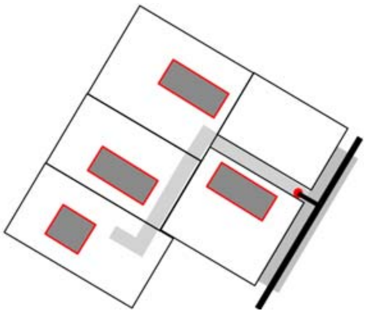

Abb. 1

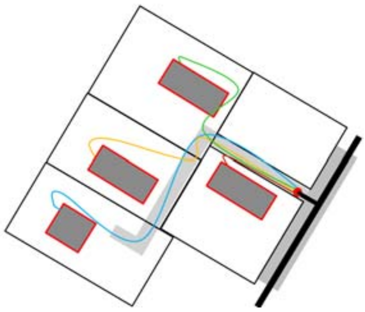

Abb. 2

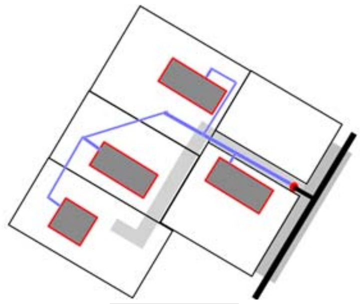

Abb. 3

sieht man rechts unten die graue Straße und in fettem Schwarz den neuen Abwasserkanal, von dem ein kurzes Stück zum Übergabepunkt abzweigt. Dieser liegt in einer grau gezeichneten über 100m langen Privatstraße mit vier Häusern (davon drei Mehrfamilienhäuser mit Eigentumswohnungen), an deren Ende unser Haus (Haus 1) lag. Die Wasserwerke schlugen vor, zu jedem Haus entlang der Privatstraße einen separaten Abwasserkanal zu legen, siehe Abbildung 2. Da der Kanal zu unserem Haus durch eine Senke hätte geführt werden und wir eine Pumpe hätten bauen müssen, hätten sich für uns Kosten von deutlich über 100.000 DM ergeben. Ich schlug daher den Nachbarn vor, einen gemeinsamen Kanal, zum Teil quer über die Gartengrundstücke, zur Verringerung der Länge und zur Vermeidung der Pumpstation zu bauen. Mit einigen aktiven Miteigentümern konnten wir uns auf eine Trasse einigen, siehe Abb. 3. Zur Kostenaufteilung schlug ich vor, dass bei jedem Kanalstück jedes Haus den jeweiligen Anteil an dem Kanalstück bezahlt. Unser Haus bezahlt also den Kanal bis zu dem Punkt an dem sich Haus 2 an den Kanal anschließt (die Zuführung bezahlt Haus 2 selbst), das nächste Stück bezahlen Haus 1 und 2 je zur Hälfte, bis Haus 3 dazukommt, etc. Die meisten Beteiligten fanden das fair, aber ich musste bei einigen Nachbarn mehrere Abende verbringen, um ihnen die Trassenführung und die Kostenaufteilung schmackhaft zu machen. Aus dem erzwungenen „Spiel“ haben die Hausgemeinschaften also ein kooperatives Spiel gemacht und sich auf ein Modell für die Aufteilung der Kosten geeinigt, im Prinzip also eine perfekte Anwendung der Spieltheorie. Unsere Kosten haben sich dadurch auf 19.159 DM reduziert.

Seinerzeit hatte ich mich nicht weiter mit den Konzepten der Spieltheorie beschäftigt, die auch die „Stärke“ der Spieler einbezieht. Die Eigentümer von Haus 2 hätten sich einfach weigern können, dass unser Kanal über ihr Grundstück geht. Dann hätten wir eine Pumpstation bauen müssen. Unsere Kosten waren also in sehr starkem Maße vom (zum Glück vorhandenen) guten Willen dieser Nachbarn abhängig. Die ökonomische Theorie würde nun sagen, dass die Macht von Haus 2 bei der Kostenaufteilung hätte berücksichtigt werden müssen. Aber wie?

	Player 1	Player 2	Player 3	Player 4
p	19159.02	13681.18	19981.51	8754.57
1-nucleolus	22525.69	6746.27	20964.54	11339.82
$\lvert\cdot\rvert$-nucleolus	22017.84	6238.42	21472.39	11847.67
c-nucleolus	20735.16	7749.11	20925.00	12167.05
$(1, r^1)$-least core	16545.02	12726.94	20964.54	11339.82
$(\lvert\cdot\rvert, r^1)$-least core	16520.70	11735.55	21472.39	11847.67
(c, r^1)-least core	16419.24	12065.03	20925.00	12167.05
$(1, r^2)$-least core	17924.60	11347.36	20964.54	11339.82
$(\lvert\cdot\rvert, r^2)$-least core	17302.64	10953.62	21472.39	11847.67
(c, r^2)-least core	17442.26	11042.01	20925.00	12167.05

Tab. 1

Es gibt sehr viele durchaus unterschiedliche Vorschläge zur Definition und Einbeziehung von „Spielerstärken“. Viele kranken daran, dass man Lösungen für relevante Fälle praktisch nicht berechnen und somit ihre Wirkung bei konkreten Anwendungen nicht analysieren kann. Hier kommt nun mein Doktorand Nam Dũng Hoàng ins Spiel. In seiner Dissertation, siehe HOÀNG (2010), sind für eine ganze Reihe derartiger (theoretischer) Vorschläge zur Lösung von

Kostenaufteilungsspielen neue Berechnungsmethoden entwickelt worden. Hoàng hat die Einsetzbarkeit und Effizienz der Algorithmen an Beispielen aus der Praxis demonstriert.

Tab. 1 (siehe HOÀNG-Dissertation Seite 134) zeigt die Ergebnisse für den Fall „meines Abwasserkanals“. In der ersten Spalte findet sich jeweils die Kurzbezeichnung des benutzten Kostenaufteilungskonzepts. Mit p wurde die von mir vorgeschlagene Lösung bezeichnet, die anderen neun Konzepte kann ich hier aus Platzmangel nicht erklären. Meine Frau und ich sind Player 1, Haus 2 ist Player 2. Die Stärke von Haus 2 wird aus der Tabelle deutlich. Statt 13.681 DM wie bei meinem Vorschlag, hätte Haus 2 bei jedem anderen Kostenaufteilungskonzept erheblich weniger zahlen müssen (zwischen 6.238 und 12.726 DM). Die auf dem sogenannten Nucleolus basierenden Konzepte hätten die Kosten für uns erhöht, die Core-Konzepte zu geringeren Kosten für meine Frau und mich geführt.

Ein Problem bleibt jedoch. Welche Kostenaufteilungsmethode soll man wählen? Und wie überzeuge ich meine Mitspieler von der Wahl? Ich muss zugeben, dass es mir nicht gelungen wäre, irgendeine der theoretisch z. T. wirklich interessanten und überzeugenden Konzepte meinen Nachbarn zu erklären. Aber hier könnte sich die „Überlegenheit“ des mathematischen Vorgehens zeigen. Bei meinem nächsten Fall dieser Art würde ich Herrn Hoàng bitten, alle Fälle durchzurechnen, dann würde ich die Lösung aussuchen, die für mich am günstigsten ist, und mich anstrengen, dieses Kostenaufteilungskonzept meinen Mitspielern „schmackhaft“ zu machen. Wie man die Dinge auch dreht und wendet, Mathematik kann helfen derartige Probleme zu lösen, aber vorab muss „ideologisch“ geklärt werden, welche Kostenaufteilungsmethode zum Einsatz kommt. Dies ist Psychologie!

Kostenaufteilungsprobleme

Der Leser mag sich jetzt fragen, was ist an Grötschels Abwasserproblem politisch oder rechtlich interessant? Zunächst einmal zeigt es uns, dass wir manchmal in Spiel- oder Verhandlungssituationen geraten, die wir gar nicht gewollt haben, dass wir aus gesetzlichen Gründen solche Spiele mitmachen müssen, dass wir die Spielregeln von außen vorgesetzt bekommen, aber dass wir doch durch etwas Kreativität die zunächst vorgeschlagenen Maßnahmen (zu jedem Haus ein separater Abwasserkanal) so verändern können, dass sie allen zum Vorteil gereichen. Wichtig war hier der Übergang von einem nicht-kooperativen zu einem kooperativen Spiel bei Einigung auf die Regeln zur Kostenaufteilung.

Probleme dieser Art treten im täglichen politischen Alltag dauernd auf. Sie sind häufig brisant. Wir bemerken sie jedoch nicht in der oben skizzierten Form als „Spiel“. Ich möchte hier nur einige wichtige Beispiele nennen. Wie soll das Preissystem für den öffentlichen Nahverkehr einer Region gestaltet werden (z. B. Fixpreis, Zonentarif, Km-Tarif)? Wie hoch dürfen die Kosten für eine Monatskarte im Vergleich zu einer Einzelfahrt sein? Preiserhöhungen im ÖPNV bestimmen häufig wochenlang die Lokalseiten von Zeitungen. Niemand weiß, wie man zu den Fahrpreisen kommt. Wer legt wie Wasser-, Strom- und Gaspreise fest? Soll eine Stadt Gebühren für den Schulbesuch von Kindern aus Vororten/Nachbarstädten verlangen? Ist eine Kopfpauschale bei der Krankenkasse gerechter als ein prozentualer Gehaltsabzug? Wer zahlt wie viel bei Gemeinschaftsanlagen (Privatstraßen, Pipelines, landwirtschaftliche Geräte)? Wie sollen Overheadkosten in Firmen den produzierenden Abteilungen zugerechnet werden? Die Liste kann man endlos fortsetzen, und es ist in vielen Fällen sinnvoll, sich aus mathematischer Sicht mit Gerechtigkeitsfragen dieser Art zu beschäftigen.

Arrow und Unmöglichkeitsresultate

Ein bedeutender Schritt bei der Anwendung von mathematischer Methodik auf wirtschaftswissenschaftliche Fragen war Arrows Unmöglichkeitsresultat. Kenneth Arrow hat dieses in seiner Dissertation formuliert, welche 1951 unter dem Titel *Social Choice and Individual Values* erschien. Hierfür hat er den Nobelpreis erhalten.

Es folgt eine kurze Darstellung des Problems. Gegeben seien eine Menge von Individuen $\{I_1,I_2,\ldots,I_k\}$ (eine Gesellschaft) und eine Menge von Objekten $\{O_1, O_2, \ldots,O_n\}$. Wir gehen davon aus, dass jedes Individuum I_i eine eigene Präferenzordnung bzgl. der Objekte hat: $O_{i1}>O_{i2}>O_{i3}>\ldots>O_{in}$, salopp gesagt, jeder hat eine klare Meinung zu den Objekten. Arrow fragt sich, ob man ein Verfahren (er nennt es *social welfare function*) erfinden kann, das aus den individuellen Präferenzen eine gemeinschaftliche Präferenzordnung formt. Natürlich kann man das, aber Arrow fordert, dass dabei einige Regeln eingehalten werden sollen. Er nennt sie *natural conditions*. Mathematiker würden sie heute Fairnessaxiome nennen. Arrow verlangt:

1. Alle möglichen individuellen Präferenzordnungen müssen zugelassen werden.
2. Wenn alle Individuen Objekt O_i Objekt O_j vorziehen, dann wird O_i gegenüber O_j kollektiv präferiert.

3. Die kollektive Präferenz bezüglich zweier Objekte wird nur durch die individuellen Präferenzen bzgl. dieser beiden Objekte bestimmt. (Man nennt das Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.)
4. Es darf keinen Diktator geben, der die kollektive Präferenzordnung festlegt.
5. Die Präferenzen sind transitiv.

Jeder, der sich mit Fragestellungen dieser Art beschäftigt, wird sofort zustimmen, dass diese fünf Axiome von jeder *social welfare function* erfüllt sein sollten.

Arrows Unmöglichkeitssatz: *Es gibt keine social welfare function, die alle fünf Axiome erfüllt.*

Es gibt verschiedene Versionen dieses Satzes mit leichten Variationen der Axiome. Man kann dann u.a. zeigen, dass es keine *social welfare function* gibt, die alle Axiome erfüllt, aber wenn man eines der Axiome weglässt, dann gibt es eine solche Funktion, die die restlichen Axiome erfüllt.

Arrow zeigte also, dass (in einem klar präzisierbaren Sinn) aus Einzelmeinungen keine Kollektivmeinung berechenbar ist, die allen sinnvollen Anforderungen auf fairen Umgang mit den Einzelmeinungen genügt. Dies bedeutet, dass man bei Kollektiventscheidungen so gut wie immer gewisse eigentlich wünschenswerte Regeln verletzt und dass man dies nicht vermeiden kann.

Arrows Ergebnis hat den Anstoß zu einer Vielzahl von Untersuchungen dieser Art gegeben, die sich mit den unterschiedlichsten Entscheidungsmechanismen im Bereich der Wirtschafts- und Sozialwissenschaft befassen und dort ähnliche Resultate ergeben haben. Manche sind durchaus überraschend, z. B., dass man eine effiziente Bereitstellung eines öffentlichen Gutes (u. a. nationale Sicherheit, Rechtsschutz) nicht mit freiwilligen Beiträgen finanzieren kann; man braucht dafür staatlichen Zwang. Viele Ergebnisse dieser Art findet man in der Literatur unter dem Begriff *Mechanismustheorie*.

Und damit komme ich zurück zum Abwasser. Auch bei Kostenallokationsmethoden kann man natürlich sinnvolle Fairnessaxiome bzw. faire Regeln zur Kostenverteilung aufstellen. NAM DŨNG HOÀNG hat das in seiner Dissertation getan. Ohne auf die genaue Definition der Begriffe *effizient*, *kostenstabil*, *monoton*, *subadditiv*, *nutzerfreundlich* einzugehen, hier sind einige der Unmöglichkeitsresultate von HOÀNG zusammengefasst:

Satz: *(a) Es gibt keine effiziente und koalitionsstabile Kostenallokationsmethode (selbst wenn man nur Kostenallokationsspiele mit monotonen und subadditiven Kostenfunktionen betrachtet).*
(b) Es gibt keine effiziente und nutzerfreundliche Kostenallokationsmethode.
(c) Es gibt keine effiziente und monotone Kostenallokationsmethode.

Die Konsequenz daraus ist, dass auch bei der Kostenaufteilung auf einige der sinnvollen Regeln verzichtet werden muss, so dass meistens ein Mitspieler auf irgendeine Weise benachteiligt wird. Da sich mit dem Thema jedoch nur wenige auskennen, fällt das in der Praxis seltener auf.

Wahlverfahren und Mathematik

Ganz anders ist die Situation bei Wahlen. Hier sind viele betroffen, sie analysieren die Ergebnisse genau und entdecken Ungereimtheiten.

Eine Überschrift aus ZEIT ONLINE vom 4.7.2008, 15:32: **Karlsruhe stoppt paradoxes Wahlrecht**. Ausschnitt aus dem Text: „Vor der Nachwahl fiel der CDU plötzlich auf, dass sie einen Sitz im Bundestag verlieren würde, sollte sie mehr als 41.000 Zweitstimmen erringen. Dann nämlich hätte sie ein Listenmandat in Sachsen zulasten von Nordrhein-Westfalen hinzugewonnen und gleichzeitig ein Überhangmandat eingebüßt. Also hatte die CDU fortan kein Interesse mehr daran, möglichst viele ihrer Wähler zur Nachwahl zu mobilisieren, da sie sich mit einem zu guten Zweitstimmenergebnis geschadet hätte. Die dosierte Mobilisierung gelang, das Direktmandat wurde gewonnen, doch hätten 5.000 Dresdener mehr mit ihrer Zweitstimme die CDU gewählt, hätte die Partei ein Bundestagsmandat weniger erhalten."

Der Streit der Parteien, wie man nun das Wahlrecht korrigieren sollte, um diesen „offensichtlichen Mangel" (negatives Stimmengewicht) zu beheben, ist noch immer nicht beendet, obwohl das Bundesverfassungsgericht den Juni 2011 als Frist für eine Neuregelung gesetzt hatte. Es gibt von allen Parteien Vorschläge, die alle angeblich besser, fairer oder was auch immer sind. Auch hier wäre es gut, einmal „rational" über Wahlverfahren nachzudenken. Man wird feststellen, dass jedes Verfahren Mängel hat und dass man immer Situationen begegnet, die man (durchaus berechtigt) als paradox bezeichnen kann. „Paradoxien" sind leider unvermeidbar und deswegen sollte die Politik lieber eine Liste von Fairnessaxiomen für Wahlen aufstellen und sich dann darauf einigen, welche man unbedingt haben möchte und auf welche man bewusst verzichten will. Und das sollte man dann auch ins Gesetz schreiben, damit nicht immer wieder Gerichte die Parlamente beauftragen, an den Wahlverfahren „herumzufummeln“.

Schaut man sich die Geschichte der in Deutschland verwendeten Sitzverteilungsverfahren an, so wird man sehen, dass mehrere in Gebrauch sind und jeweils immer wieder Änderungen vorgenommen werden. So wurde bei der Bundestagswahl 2009 das Hare/Niemeyer-Verfahren (erstmals 1987 für den Bundestag verwendet) durch das Verfahren nach Sainte-Laguë/Schepers ersetzt, „um mögliche Paradoxien zu vermeiden“. Zur Verwirrung kommt hinzu, dass ein und dasselbe Rechenverfahren in unterschiedlichen Staaten unterschiedliche Namen trägt und dass verschiedene Berechnungsverfahren (mit verschiedenen Namen) beweisbar immer zum selben Ergebnis führen. Das Hare-Niemeyer-Verfahren heißt im angelsächsischen Raum Hamilton-Verfahren; Mathematiker bezeichnen es als Quotenverfahren mit Restausgleich nach größten Bruchteilen. Das Sainte-Laguë/Schepers-Verfahren nennt man im angelsächsischen Raum Webster-Verfahren, mathematisch Divisorverfahren mit Standardrundung.

Wie geht man bei der Analyse von Wahlverfahren mathematisch vor? Ich erläutere das kurz am Fall eines Sitzzuteilungsverfahrens bei Verhältniswahl mit vorgegebener Anzahl von Sitzen. Hierbei sollen die Sitze so auf die Parteien verteilt werden, dass sie „möglichst gut“ der Verteilung der abgegebenen Stimmen entsprechen.

Die Anzahl der Parteien sei mit p, die Anzahl der zu vergebenden Sitze mit n bezeichnet. Für die p Parteien seien $s_1, s_2,\dots, s_p$ Stimmen abgegebenen worden. $g = s_1 + s_2 +\dots+ s_p$ ist dann die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen. Damit stünden der Partei i (im Prinzip)

$$q_i = n\,(s_i/g)$$

Sitze zu. Dies ist ein Wert, der in aller Regel jedoch keine ganze Zahl ist. Die q_i nennt man auch *Quoten*. Ein Sitzzuteilungsverfahren ordnet jeder Stimmenverteilung $(s_1, s_2,\dots, s_p)$ eine Sitzverteilung $(m_1, m_2,\dots, m_P)$ zu, wobei die m_i (*Mandate*) natürliche Zahlen sind, die in der Summe n ergeben.

Jetzt muss man sich Fairnessaxiome überlegen. Bei den Wahlverfahrensforschern kann man mehr als zehn jedem einleuchtende und sinnvolle Regeln finden. Literaturhinweis: TAYLOR; PACELLI (2008) und BALINSKI; YOUNG (2001). Ich betrachte eine ganz kleine Auswahl. Eine triviale (nullte) Regel muss unbedingt eingehalten werden.

0. Das Ergebnis der Sitzzuteilung soll nicht von der Reihenfolge der s_i abhängen, d. h. wenn s_i mit s_j vertauscht wird, dann sollen sich auch die zugeteilten Sitze m_i mit m_j vertauschen und sich sonst am Ergebnis nichts ändern.

Die nächsten beiden Regeln sollten sicherlich auch erfüllt sein.

1. Die *Quotenbedingung*: $|q_i-m_i|<1$, d.h. die tatsächlich zugesprochene Sitzanzahl darf von der Quote nur um weniger als 1 abweichen.

Es wäre schwer vermittelbar, wenn zwei Parteien mit Quoten von 11,7 und 14,2 jeweils 13 Sitze zugesprochen bekämen.

2. *Populations-Monotonie*: Wenn bei einer anderen Stimmenverteilung das Verhältnis der neuen Quoten q^*_i und q^*_j sich gegenüber dem Verhältnis der alten Quoten q_i und q_j zugunsten von Partei i verändert hat oder zumindest gleich geblieben ist (als Formel ausgedrückt: $q^*_i/q^*_j \geq q_i/q_j$), dann soll Partei i mindestens so viele Sitze wie zuvor bekommen oder Partei j höchstens so viele wie vorher, also: $m^*_i \geq m_i$ oder $m^*_j \leq m_j$.

Auch hier ist einleuchtend, dass eine Partei, die bei einer Neuwahl relativ besser abschneidet (das besagt die Quotenformel) als eine andere, bei der Sitzzahl auch relativ besser gestellt sein sollte. Das nachfolgende erstaunliche Ergebnis zeigt, dass selbst so einfache Bedingungen nicht immer gleichzeitig erfüllt werden können.

Der Unmöglichkeitssatz von BALINSKI und YOUNG: *Für $p \geq 4$ und $n \geq 7$ existiert kein populationsmonotones Zuteilungsverfahren, das der Quotenbedingung genügt.*

In der angegebenen Literatur ist eine Vielzahl ähnlicher Resultate zu finden, die Politikern Beweise dafür liefern, dass nicht alles Wünschbare auch erfüllbar ist. Insbesondere gibt es wiederum Sätze, die mit einer Liste von Fairnessaxiomen starten und dann zeigen, dass nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, aber wenn man ein beliebiges der Axiome weglässt, dann gibt es ein (häufig sogar genau ein) Sitzzuteilungsverfahren, das alle übrigen Axiome erfüllt. Die Einbeziehung einer mathematischen Analyse der hier skizzierten Art könnte zu etwas mehr Sachlichkeit in der Diskussion von Wahlverfahren führen. Auf der Homepage von F. Pukelsheim, siehe http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/pukelsheim/ und unter http://www.pukelsheim-ag.ch/ findet man hierzu mehr Material.

Die Eisenbahninfrastruktur-Benutzungsverordnung und gesetzliche Optimierung

Ein großes Problem überall in der Welt ist die angemessene Deregulierung bzw. Neuregulierung von (früher) in staatlichem Monopol betriebenen Dienstleistungen für den Bürger. Dies betrifft insbesondere Versorgungsdienstleistungen (Strom, Wasser, Eisenbahn, Straßen), bei denen hohe Kosten für die Bereitstellung der Infrastruktur (in der Regel Versorgungsnetzwerke) anfallen. Die Deregulierung des Flugverkehrs hat weltweit die Flugpreise erheblich reduziert, auch die Deregulierung des Telefonmarktes hat ohne Frage zu geringeren Kosten und besserem Service geführt. Konkurrenz belebt das Geschäft! Wie aber erzeugt man Konkurrenz, wenn es sich um „natürliche Monopole" handelt und es einfach nicht sinnvoll (nicht durchsetzbar, ökologisch unvernünftig, zu teuer) ist, zusätzliche Infrastruktur (wie z. B. Eisenbahnschienen parallel zu einer bestehenden Strecke) zu bauen, nur um Konkurrenz zu ermöglichen?

Das Schlagwort heißt *unbundelling*. Dies bedeutet z. B., dass man Netz und Netznutzung trennt. Bei der Eisenbahn spricht man von „Trennung von Rad und Schiene". In diesem Fall wird das Schienennetz als natürliches Monopol beibehalten, der Netzbesitzer ist jedoch staatlicher Regulierung unterworfen und muss allen Eisenbahnverkehrsunternehmen (EVUs) den Netzzugang *diskriminierungsfrei* anbieten. In Deutschland hat die Bundesnetzagentur die Aufsicht über den Wettbewerb auf der Schiene, verantwortet die Gewährung eines diskriminierungsfreien Zugangs zur Eisenbahninfrastruktur und legt die Konditionen für die Netznutzung fest.

Das hört sich alles gut an, führt jedoch in der Praxis zu Konflikten. Der Netzbetreiber fordert höhere Gebühren, um das Schienennetz in hoher Qualität zu erhalten, die EVUs finden die Gebühren immer zu hoch, beschweren sich über vermeintliche Diskriminierungen beim Zugang zu den Serviceeinrichtungen, etc. Das Problem aus mathematischer Sicht ist, dass es derzeit keine „adäquate Deregulierungs- bzw. Regulierungsmathematik" gibt. Es fehlt an mathematischen Modellen, mit denen man Regulierungsmaßnahmen angemessen bewerten könnte, und es fehlt auch mathematische Methodik, um die in Teilen bestehenden Modelle in konkreten Anwendungsfällen zu lösen.

Es fehlt aber auch in den Bereichen, wo man schon etwas machen könnte, bei den Beteiligten das Wissen, der Wille oder der Glaube (nicht selten alles gleichzeitig), dass Mathematik helfen könnte, einige der Probleme zu lösen. Und hier möchte ich ein Beispiel anführen, wo eine gesetzliche Vorschrift (die zwangsläufig den Einsatz von komplizierter Mathematik erfordert) einfach ignoriert wird.

In einem in einer ersten Phase durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) und anschließend durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie (BMWi) geförderten Projekt mit dem Titel „Trassenbörse", das ein Konsortium von Schienenverkehrsexperten, Unternehmensberatern, Infrastrukturökonomen und Mathematikern durchgeführt hat und an dem ich beteiligt war, wurde der Versuch unternommen, eine Auktion für Eisenbahnfahrtrassen zu entwerfen, die zu einer wettbewerbsorientierten Vermarktung eines Schienennetzes führt.

Dieser Versuch ist aus den verschiedensten Gründen gescheitert, nicht zuletzt dadurch, dass selbst die privaten EVUs (es gibt nur wenige Konkurrenten der Deutschen Bahn) Bedenken gegen ein so stark marktwirtschaftlich orientiertes Instrument hatten. In vielen Gesprächen wurde Zukunftsangst deutlich (Zitat): „Wir können die Konsequenzen einer Verauktionierung der Rechte, gewisse Bahnstrecken zu gewissen Zeiten mit bestimmten Zügen (das sind die Trassen) zu befahren, nicht überschauen." Klar, das bringen Veränderungen so mit sich. Hätte vor 20 Jahren jemand den heutigen Telefonmarkt prognostizieren können?

Das Ziel der Trassenbörse war natürlich Anreize zu einer besseren Netznutzung zu geben. Dies sollte u. a. dadurch erreicht werden, dass konkurrierende EVUs in einer Auktion für die für sie interessanten Trassen bieten können. Hat eine EVU eine gewünschte Trasse nicht bekommen (Konflikt mit einem Trassenwunsch einer anderen EVU), so kann sie in der nächsten Auktionsrunde ein höheres Gebot abgeben. Bei Beendigung der über mehrere Runden führenden Auktion werden die Trassen des gesamten Netzes für den betrachteten Planungszeitraum dann (durch Lösung eines sehr komplexen mathematischen Optimierungsproblems) so zugeteilt, dass der Netzbetreiber ein erlösmaximales Ergebnis erzielt und somit die teure Schieneninfrastruktur bestmöglich ausgelastet ist.

Am Ende des Projekts war meine Arbeitsgruppe in der Lage, derartige Zuteilungen für praxisrelevante Größenordnungen zu berechnen. Aber – abgesehen von einem Spezialprojekt bei den Schweizerischen Bundesbahnen (SBB) zur Optimierung des Verkehrs durch den Simplontunnel – ist unser Optimierungsverfahren nicht in den praktischen Einsatz gelangt. Dies ist umso verblüffender, da die deutsche Eisenbahninfrastruktur-Benutzungsverordnung (EIBV) aus dem Jahr 2005, wie wir erstaunt festgestellt haben, in §9 (5) folgendes aussagt:

„Bei der Entscheidung zwischen gleichrangigen Verkehren nach Absatz 4 hat der Betreiber der Schienenwege die Entgelte für die streitigen Zugtrassen gegenüberzustellen und

1. bei einem Konflikt zwischen zwei Zugtrassen der Zugtrasse den Vorrang einzuräumen, bei der das höchste Regelentgelt zu erzielen ist,
2. bei einem Konflikt zwischen mehr als zwei Zugtrassen den Zugtrassen den Vorrang einzuräumen, bei denen in der Summe das höchste Regelentgelt zu erzielen ist.“

Dies ist in der Tat staatlich verordnete Optimierung (Erzielung eines maximalen Einkommens unter Berücksichtigung aller möglichen Kombinationen von Geboten) und zwar genau in dem Sinn, wie wir es bei der Trassenbörse geplant hatten. Niemand schien das zu wissen, und dieser gesetzliche Auftrag scheint weiterhin ignoriert zu werden, obwohl wir alle Beteiligten darauf hingewiesen haben. Die Ausrede ist, solche Konflikte kommen selten vor, und wenn, dann werden sie durch Verhandlung gelöst. So erhält man Monopole!

Die Kapazität von Gasnetzen und Deregulierung

Meine Arbeitsgruppe am Zuse-Institut versucht derzeit mit mehreren akademischen Partnern, für eine führende Erdgastransportgesellschaft mathematische Methoden zu entwickeln, das Pipelinenetz der Firma optimal zu steuern und die Aus- und Umbauplanung für das Netz zu unterstützen. Auch in diesem Bereich sind durch Deregulierung Pipelinenetzbetreiber entstanden (durch Ausgliederung aus früheren Versorgungsunternehmen), die nun diskriminierungsfrei für jeden Nachfrager Gastransporte durchführen müssen. Falls ein Transportauftrag abgelehnt wird, kann der Kunde klagen. Das Gastransportunternehmen muss dann gerichtsfeste Argument dafür vorlegen, dass die vorhandene Kapazität für die Annahme des Auftrags nicht ausreicht.

Die Rechte, Pflichten und Regeln für den Gastransport sind in der Gasnetzzugangsverordnung (GasNZV) aus dem Jahre 2010 festgelegt. Ich diskutiere zwei Textstellen daraus.

§8 (2) beginnt mit: „Fernleitungsnetzbetreiber haben frei zuordenbare Kapazitäten anzubieten, die es ermöglichen, gebuchte Ein- und Ausspeisekapazitäten ohne Festlegung eines Transportpfads zu nutzen.“ Das bedeutet, dass ein Lieferant die Anlieferung einer bestimmten Gasmenge an einem bestimmten Einspeisepunkt buchen kann, dass er aber nicht sagen muss, wohin er das Gas liefern möchte. Ebenso können Abnehmer Gasmengen buchen, ohne festzulegen, woher sie diese beziehen wollen. Der Gasnetzbetreiber ist verpflichtet, für jeden möglichen Transportpfad ausreichende Kapazität frei zu halten. Wenn man diese Vorschrift ernst nimmt, führt das dazu, dass die Netze fast leer sind, weil das Transportunternehmen Kapazitäten frei halten muss für prinzipiell mögliche Transportpfade, die aber gar nicht genutzt werden. Die Vorschrift ist gut gemeint, aber in ihrem Wortsinn nicht wirtschaftlich umsetzbar.

§9 (1) besagt: „Fernleitungsnetzbetreiber sind verpflichtet, die technischen Kapazitäten im Sinne des § 8 Absatz 2 zu ermitteln. Sie ermitteln für alle Einspeisepunkte die Einspeisekapazitäten und für alle Ausspeisepunkte die Ausspeisekapazitäten.“ Auch das ist so nicht möglich, da die Kapazitäten natürlich von den Transportwegen abhängen und nicht einfach nur für die Netzknoten angegeben werden können.

Hier liegt der Fall einer gut gemeinten Regulierung vor, die aber in die betriebliche Praxis so, wie sie formuliert ist, nicht umgesetzt werden kann. Gasnetzbetreiber, Gaslieferanten und -abnehmer sowie Mathematiker arbeiten derzeit mit der Bundesnetzagentur kooperativ daran, ein mathematisches Modell zur Kapazitätsberechnung zu entwerfen, das dem Geist der Verordnung entspricht, praktisch vernünftige und gerichtsfeste Ergebnisse liefert und rechentechnisch auch gelöst werden kann.

Schlussbemerkungen

Auch wenn ich hier versucht habe, eine Lanze für den breiteren Einsatz von Mathematik im politischen, rechtlichen und gesellschaftlichen Bereich zu brechen, so bin ich mir natürlich bewusst, dass dies ein schwieriges Feld ist. Nicht alles ist mathematisierbar, und die „brutale Exaktheit“ der Mathematik ist sicherlich nicht überall das richtige Instrument zur Lösung von Fragen in diesen Bereichen. Die Mathematiker selbst sind in dieser Hinsicht meistens sehr vorsichtig und zögerlich, auch wenn Georg Christoph Lichtenberg das anders sieht und vor Mathematikern warnt: „Es gibt so genannte Mathematiker, die sich gerne ebenso für Gesandte der Weisheit gehalten wissen möchten als manche Theologen für Gesandte Gottes, und ebenso das Volk mit algebraischem Geschwätz, das sie Mathematik nennen, als jene mit Kauderwelsch hintergehen, dem sie den Namen biblisch beilegen.“

Literatur

ARNOLD, V.; ATIYAH, M.; LAX, P.; MAZUR, B. (eds.), *Mathematics: frontiers and perspectives*. Providence, RI: American Mathematical Society (2000).

BALINSKI, Michel; YOUNG, H. PEYTON, *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. 2nd edition, Washington DC.: The Brookings Institution Press (2001).

GRÖTSCHEL, Martin; LUCAS, Klaus; MEHRMANN, Volker (eds.), *Production factor mathematics*. Berlin: Springer (2009).

HAWKING, Stephen (ed.), *God created the integers: The mathematical breakthroughs that changed history*. Philadelphia, PA: Running Press. (2007).

Hoàng, Nam Dũng, *Algorithmic Cost Allocation Games: Theory and Applications*. Dissertation, Institut für Mathematik, TU Berlin, 2010.

LEONARD, Robert, *Von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory. From chess to social science. 1900–1960*. Cambridge: Cambridge University Press (2011).

VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar, *Theory of games and economic behavior.* With an introduction by Harold Kuhn and an afterword by Ariel Rubinstein. 4th print of the 2004 sixtieth anniversary ed. Princeton, N J: Princeton University Press. (2007).

O'NEILL, BARRY, " International Escalation and the Dollar Auction". Journal of Conflict Resolution 30 (1986) 33-50.

PENROSE, Roger, *The road to reality: A complete guide to the laws of the universe*. New York, NY: Alfred A. Knopf, Inc. (2005).

SHUBIK, Martin, "The Dollar Auction Game: A Paradox in Noncooperative Behavior and Escalation". The Journal of Conflict Resolution, 15 (1971) 109-111.

TAYLOR, Alan. D.; PACELLI, Allison M., *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, and Proof.* New York: Springer (2009).