Ein neues Verfahren zur Lösung des Streuproblems der Maxwell-Gleichungen

Diplomarbeit

vorgelegt von M. Hassan Farshbaf Shaker
am Fachbereich Physik
der Universität Hamburg

angefertigt am
Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin (ZIB)
Betreuer: PD Dr. Frank Schmidt

September 2003

1. Gutachter: PD Dr. Frank Schmidt
2. Gutachter: Prof Dr. Douglas Fay

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Arbeit stellt ein neues Verfahren zur Behandlung des Streuproblems der Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}) - \omega^2\varepsilon\vec{E} = i\omega\vec{j}.$$

auf unbeschränkten Gebieten vor. Die Aufgabe zur Lösung solcher Streuprobleme tritt in vielen Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften auf. Die Optimierung bestimmter Eigenschaften von Photonischen Kristallen läßt sich auf diese Problemstellung zurückführen. Die Ermittlung der Oberflächenbeschaffenheit von Materialen durch Nahfeldmikroskopie ist ebenfalls ein solches Problem. Die mathematische Behandlung unseres Streuproblems ergibt zwei separate Probleme; ein Innenraumproblem mit dem Objekt, woran gestreut wird und ein Außenraumproblem, in dem das gestreute Feld berechnet wird. Diese beiden Probleme sind über den Rand des Innenraumes miteinander gekoppelt. Das Innenraumproblem liefert ein klassisches elliptisches Randwertproblem, falls die Randwerte bekannt sind. Dafür gibt es eine ausgearbeitete Existenz und Eindeutigkeitstheorie [16, 10]. Für die numerische Behandlung des Innenraumproblems werden klassische Finite-Elemente-Verfahren, die häufig zur Lösung solcher elliptischer Gleichungen eingesetzt werden [2], verwendet. Das Außenraumproblem liefert ebenfalls ein elliptisches Problem aber kein Randwertproblem. Zur Sicherung der Eindeutigkeit der Außenraumlösung hat man an das Problem eine zusätzliche Bedingung - die *Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung* - zu stellen. Durch diese Bedingung werden nur Außenraumlösungen zugelassen, die auslaufend sind. Dies läßt sich so verstehen: In der Natur lassen sich Wellenphänomene im allgemeinen als Überlagerung von einzelnen Wellenzügen (einlaufend und auslaufend) verstehen, die in verschiedene Richtungen laufen und miteinander interferieren. Die physikalische Natur der Wellenausbreitung verlangt es, dass Wellen, die durch endliche Hindernisse reflektiert, gebeugt oder gebrochen werden, im großen Abstand von diesen Hindernissen nur eine Bewegungsrichtung (auslaufend) besitzen. Die Forderung der Eindeutigkeit schließt also einlaufende Wellen aus. Die Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung gilt nur für homogene Außenräume. Für inhomogene Außenräume werden wir im Kapitel 3.2 die *Polbedingung* erläutern, die von Frank Schmidt [21] im ZIB (Zuse Institut Berlin) entwickelt wurde. Sie besagt, dass die Lösung einer Differentialgleichung ausstrahlend bzw. auslaufend ist, wenn die Laplace-Transformierte bezüglich einer Abstandsvariablen in der unteren komplexen Halbebene keinen Pol besitzt. Zu den Vorteilen der Polbedingung zählt ihre Dimensionsunabhängigkeit, und sie ist keine asymptotische Bedingung, sondern gilt auch bei kleinen Abständen vom Hindernis und stellt somit eine Alternative zu den gebräuchlichen asymptotische Bedingungen dar, die über Reihendarstellungen formuliert werden. Die Polbedingung wurde schon in der Habilitationsschrift von Frank Schmidt [21] erfolgreich auf die Helmholtz-Gleichung angewandt. Ziel dieser Arbeit ist die Anwendung der Polbedingung auf die Maxwell-Gleichungen. Dabei werden wir Ideen aus [21] auf unsere Arbeit übertragen. Wir werden dabei eine spezielle Formulierung für das Außenraumproblem der Maxwell-Gleichungen angeben. Dabei haben wir uns durch eine analoge Formulierung für die Helmholtz-Gleichung in [21] leiten lassen. Jedoch besteht die Außenraumlösung der Maxwell-Gleichungen aus der Tangentialkomponente und der Normalenkomponente. Wir wissen (siehe dazu Abschnitt 4.2), dass für die Lösung des Innenraumproblems lediglich die Angabe der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf dem Rand des Innenraumes ausreicht, um das Innenraumproblem (Randwertproblem) zu lösen. Wie ist es aber im Falle eines unbeschränkten Gebietes, wie das des Außenraumes? Reicht es für die asymptotische Bedingung aus, nur die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes zu verwenden?

In dieser Arbeit wird diese Frage für spezielle Koordinatensysteme (Zylinderkoordinaten in 3D und ein den physikalischen Problemen angepaßtes allgemeines Koordinatensystem in 2D) positiv beantwortet.

Die Fragestellung ist für die Erhaltung der Eindeutigkeit der Außenraumlösung von Bedeutung.
Die vorliegende Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. Im einführenden Kapitel 2 werden zwei Beispiele aus der Physik - Nahfeldmikroskopie und Photonische Kristalle - behandelt. Anschließend werden aus der Theorie der Maxwell-Gleichungen einige Resultate zusammengefasst, die für die Arbeit von Relevanz sind.

Im 3. Kapitel wird einführend ein kleiner Überblick über Streuprobleme gegeben. Der zweite Abschnitt behandelt die *Polbedingung [21]*. Sie wird anhand der Helmholtz-Gleichung erklärt. Zunächst wird die Idee der Polbedingung im eindimensionalen Fall erläutert. Weiterhin verallgemeinern wir die Polbedingung vom eindimensionalen auf den mehrdimensionalen Fall. Anschließend wird die *Reelle-Achse-Methode* eingeführt, die eine notwendige Bedingung zur Polbedingung darstellt.

Das 4. Kapitel behandelt die schwache Formulierung der Maxwell-Gleichung. Im einführenden Abschnitt werden das Innenraum- und Außenraumproblem der Maxwell-Gleichung motiviert und hergeleitet. Als Ausgangspunkt für die numerische Lösung wird im folgenden Abschnitt die schwache Formulierung des Innenraumproblems angegeben. Im letzten Abschnitt wird die "schwache" Formulierung des Außenraumproblems hergeleitet. Im Hinblick auf die Polbedingung und die Diskretisierung des Außenraumproblems in Kapitel 5 haben wir den Außenraum einer Parametertransformation (genauer: Transformation auf Kugelkoordinaten) unterzogen und anschließend eine Formulierung hergeleitet, die "schwach" bezüglich der Winkelvariablen und "stark" bzw. "klassisch" bezüglich der Abstandskoordinaten ist. Dies war notwendig, da sonst die Polbedingung auf die Maxwell-Gleichungen nicht anwendbar wäre. Die Polbedingung wird anschließend als zusätzliche Gleichung an die Formulierung gestellt. Im darauf anschließenden Unterabschnitt wird die innere Struktur der Formulierung des Außenraumproblems untersucht, wobei wir zwei Koordinatensysteme ("Parallele Streifen" und Zylinderkoordinaten) betrachten.
Wir stellen dabei fest, dass nicht die gesamte Außenraumlösung die Polbedingung zu erfüllen braucht. Wir erhalten durch diese Untersuchung ein wichtiges nichttriviales Resultat, das für die Eindeutigkeit der Außenraumlösung notwendig ist: *Für Zylinderkoordinaten im R^3 reicht es aus, die Polbedingung nur an die Tan-*

gentialkomponente der Außenraumlösung zu stellen.
Aufgrund der in dem Unterabschnitt erhaltenen Beziehungen zwischen der Tangential- und Normalenkomponenten gilt die Polbedingung dann automatisch auch für die Normalenkomponente der Lösung. In diesem Koordinatensystem kann es also nicht vorkommen, dass die eine Kompomonente der Außenraumlösung die Polbedingung erfüllt und die andere sie nicht erfüllt. Dies würde zum Verlust der Eindeutigkeit der Außenraumlösung führen.

Das 5. und letzte Kapitel behandelt die Diskretisierung der Maxwell-Gleichung in 2D, wobei dazu keine spezifischen 2D-Annahmen gestellt werden. Daher kann man die Diskretisierung unmittelbar auf 3D-Probleme übertragen. Im einführenden Abschnitt wird das Innenraumproblem diskretisiert. Wir verwenden dazu die häufig verwendete Finite-Elemente-Methode (FEM). In unserem Fall besteht der Unterschied zu den herkömmlichen FE-Methoden in der Verwendung von speziellen Basisfunktionen (Kantenelemente) für unsere FE-Räume. Die Basisfunktionen werden nicht mehr auf den Knoten (Lagrange-Elemente) definiert, sondern auf den Kanten. Die Kantenelemente erhalten die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang an Grenzflächen. Dadurch sind sie eine physikalisch natürliche Wahl für die Auswahl der Basisfunktionen. Im folgendem Abschnitt wird die Diskretisierung des Außenraumproblems behandelt. Dafür führen wir ein Koordinatensystem ein, das allgemein genug ist, um möglichst viele Arten von physikalischen Problemstellungen behandeln zu können. Die Parametrisierung ergibt halbunendliche Streifen (Rechtecke). Wir geben auf diesen Streifen Kantenelemente vor, die ebenfalls die Stetigkeitseigenschaften des elektrischen Feldes erfüllen. Außerdem erhalten wir auch für das Koordinatensysten ein wichtiges analoges Resultat wie bei den Zylinderkoordinaten im R^3:
Für unser 2D-Koordinatensystem reicht es aus, die Polbedingung nur an die Tangentialkoomponente der Lösung zu stellen; die Normalenkomponente erfüllt dann automatisch die Polbedingung.
Im letzten Abschnitt von Kapitel 5 koppeln wir das Innenraumproblem mit dem Außenraumproblem und geben an, wie man sie löst.

Danksagung. An dieser Stelle möchte ich all jenen herzlich danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und gefördert haben.

Mein erster Dank geht an Prof. Peter Deuflhard für die Ermöglichung meines Aufenthaltes am ZIB und die hervorragenden Arbeitsbedingungen.

Herr PD Dr. Frank Schmidt hatte stets ein offenes Ohr für die Fragen und Nöte seines Diplomanden. Für seine intensiven Bemühungen sei ihm besonders gedankt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Douglas Fay. Ohne ihn hätte ich diese Arbeit nicht in Berlin machen können.

Mein Dank gilt auch meinem Kollegen Lin Zschiedrich für die aufgebrachte Geduld und Mühe bei der Beantwortung meiner Fragen.

Herrn Dr. Sven Burger und Herrn Dr. Roland Klose verdanke ich zahlreiche Diskussionen und eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Meinen Eltern danke ich für die Ermöglichung des Studiums.

Kapitel 2

Einführung

Bei den folgenden physikalischen Beispielen geht es allgemein um die Ausbreitung und Streuung von Licht. Ihre mathematische Modellierung führt auf die Maxwell-Gleichungen auf unbeschränkten Gebieten, die wir in dieser Arbeit untersuchen werden.

2.1 Motivation

1. Beispiel: Optische Nahfeldmikroskopie (ONM)

In der klassischen (Fernfeld-) Mikroskopie wird die Auflösung durch die Beugung des Lichtes bestimmt [18]. Die Mikroskope sind in ihrer örtlichen Auflösung prinzipiell beschränkt (bekannt als Abbesche Schranke [13]). Abbe zeigte, dass das kleinste Objekt d, das durch ein optisches System aufgelöst werden kann, eine halbe Wellenlänge des verwendeten Lichtes beträgt,

$$d = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin\varphi},$$

wobei λ_0 die Vakuumwellenlänge des abbildenden Lichtes und n der Brechungsindex des Mediums (Luft $n = 1,0$) zwischen der Probe und der Objektivlinse ist. Der Öffnungswinkel des Lichtes im Gegenstandsraum ist φ ($\sin\varphi = 1,0$ falls der Winkel $90°$ beträgt - heute noch nicht möglich), und $n \sin\varphi$ nennt man numerische Apertur (NA) des Mikroskops.

Im Gegensatz zur Fernfeldmikroskopie erlaubt die optische Nahfeldmikroskopie die Abbildung von wesentlich kleineren Strukturen, als es mit konventionellen

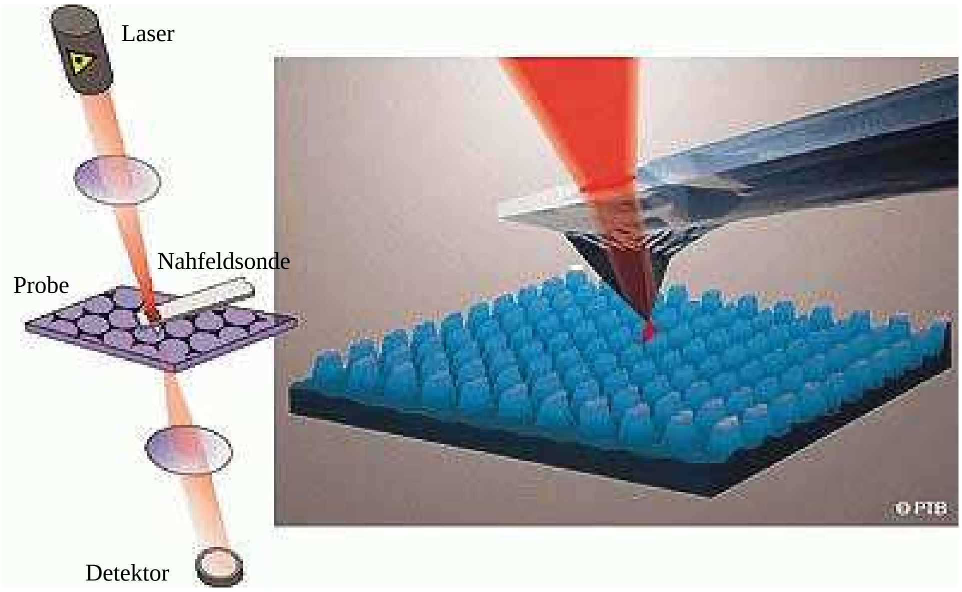

Abbildung 2.1: Typische Anordnung einer NFM. Der Lichtstrahl einer externen Lichtquelle wird mit Hilfe einer Linse in die spitze Cantileversonde fokussiert. Das aus der Apertur austretende Licht durchsetzt lokal die Probe. Dabei bestimmt die Aperturgröße im wesentlichen die laterale Auflösung. Mit einer weiteren Linse wird durch die Probe transmittiertes Licht aufgefangen.
Das Bild ist entnommen aus www.vdi.de

Mikroskopen möglich ist. Simultan zur Objekttopographie können damit jetzt optische Eigenschaften sogar von Mikro-und Nanostrukturen erfaßt werden.

Die Auflösung in der konventionellen optischen Mikroskopie ist wie schon erklärt durch Beugungseffekte auf rund die Hälfte ihrer Strahlungswellenlänge begrenzt. Diese Grenze wird durch die optische Nahfeldmikroskopie überwunden. Sie ist verwandt mit der Rastertunnel (STM)- und Rasterkraftmikroskopie (AFM).

Diese Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass eine entsprechend gestaltete kleine Spitze als Sonde die jeweils interessierenden Oberflächeneigenschaften mit höher lateraler und vertikaler Auflösung detektieren kann. Die Methoden sind sämtlich rasternd, d.h. Bilder werden durch punkt- und zeilenweises Zusammensetzen von vielen Einzelmeßwerten gewonnen.

Das Prinzip speziell der optischen Rasternahfeldmikroskopie besteht darin, eine submikroskopische Strahlungsquelle, die z.B. aus einer Glasfaser (siehe Abb.1) entstammt, auf der Probenoberfläche zu bewegen. Dabei wird die Strahlung von

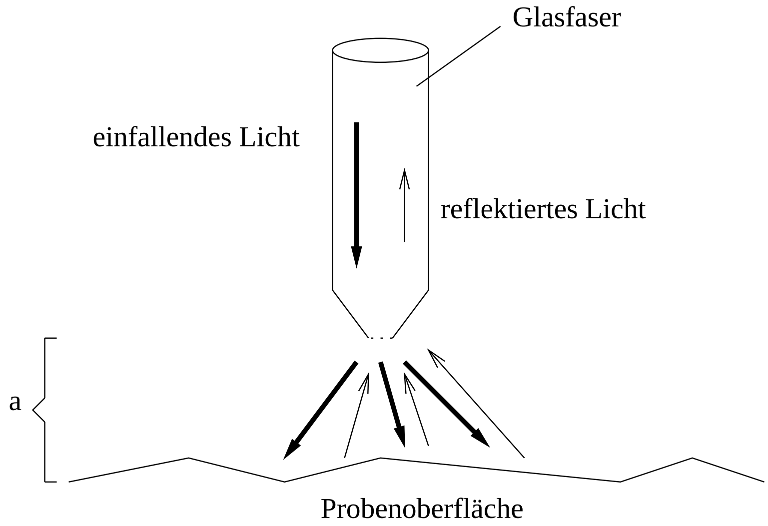

Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der optischen Nahfeldmikroskopie. Der Abstand a zwischen der Glasfaser und der Probenoberfäche ist stets kleiner als die verwendete Wellenlänge des Lichtes.

der Probenoberfläche reflektiert und gelangt schließlich wieder in die Glasfaser. Die Auflösung ist im wesentlichen durch die Geometrie der Sonde und nicht durch die Strahlungswellenlänge gegeben.

Interessante Einsatzgebiete der optischen Nahfeldmikroskopie eröffnen sich z.B. mit der Untersuchung der Materialzusammensetzung von submikroskopischen Strukturen, die für viele Fragestellungen in der Halbleitertechnologie von großer Bedeutung ist.
Die mathematische Modellierung beinhaltet die Rekonstruktion des Oberflächenprofils einer unbekannten Probe, falls die Intensität des in die Glasfaser zurückreflektierten Lichtes vorgegeben wurde. Eine andere Aufgabe ist die Berechnung der Intensität des in die Glasfaser zurückreflektierten Lichtes bei einer bekannten Probe.

2. Beispiel: Photonische Kristalle

Unter Photonischen Kristallen versteht man Materialien mit einem räumlich periodisch auf einer Skala der Lichtwellenlänge variierenden Brechungsindex [24]. Ähnlich wie sich die Periodizität eines Halbleiterkristalls auf die Ausbreitung von Elektronenwellen auswirkt [12], kommt es bei Photonischen Kristallen aufgrund der vielfachen Streuung des Lichtes an der periodischen Struktur zur Ausbildung einer Energiebandstruktur mit erlaubten bzw. verbotenen Frequenzbereichen [20, 23]. Dadurch wird es z.B. möglich, die Eigenschaften entsprechend eingebrachter optisch aktiver Materialien gezielt zu beeinflußen.

Photonische Kristalle kann man unter anderem als miniaturisierten Spiegel einsetzen: Sie reflektieren elektromagnetische Wellen der "verbotenen" Wellenlänge vollständig. Ähnlich den Halbleitern kann man Photonische Kristalle gezielt mit Störstellen versehen. Eine einzelne Fehlstelle in einem ansonsten ideal geordneten Kristall führt beispielsweise dazu, dass Licht einer "verbotenen" Wellenlänge an der Störstelle gefangen wird. Durch Verkettung von solchen Punktdefekten ermöglicht man es dem Licht bestimmter Wellenlänge, sich entlang der Defekte auszubreiten. Der Photonische Kristall wird zum Wellenleiter. Ein linienförmiger Defekt zwingt die Wellen, in ihrer Bahn der Linienführung des Defekts zu folgen, selbst um scharfe Kanten herum. Diese Eigenschaft ist für die Miniaturisierung von elektronischen Bauelementen von großem Interesse.

Photonische Kristalle ermöglichen es, die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes zu verringern. Zum Beispiel könnte mit großer Effizienz aus langwelliger elektromagnetischer Strahlung kurzwellige erzeugt werden, so dass in einigen Wellenlängenbereichen neuartige Lichtquellen zur Verfügung stünden. Für die Entwicklung neuer, einfach herzustellender Photonischer Kristalle mit gewünschten Eigenschaften ist deren mathematische Modellierung unerläßlich.
Sie beinhaltet die Rekonstruktion der physikalischen Eigenschaften des Kristalls, falls die Intensität des in den Photonischen Kristall gestreuten Lichtes vorgegeben wurde. Eine andere Aufgabe ist die Berechnung der Intensität des in den Photonische Kristall gestreuten Lichtes bei einem Photonisches Kristall mit bekannten Eigenschaften.

Unsere Aufgabe wird in dieser Arbeit darin bestehen, Streuprobleme der Maxwell-Gleichungen zu behandeln. Vorher werden wir aber einige Aspekte aus der bekannten Theorie der Maxwell-Gleichungen für unsere spätere Verwendung zusammenfassen.

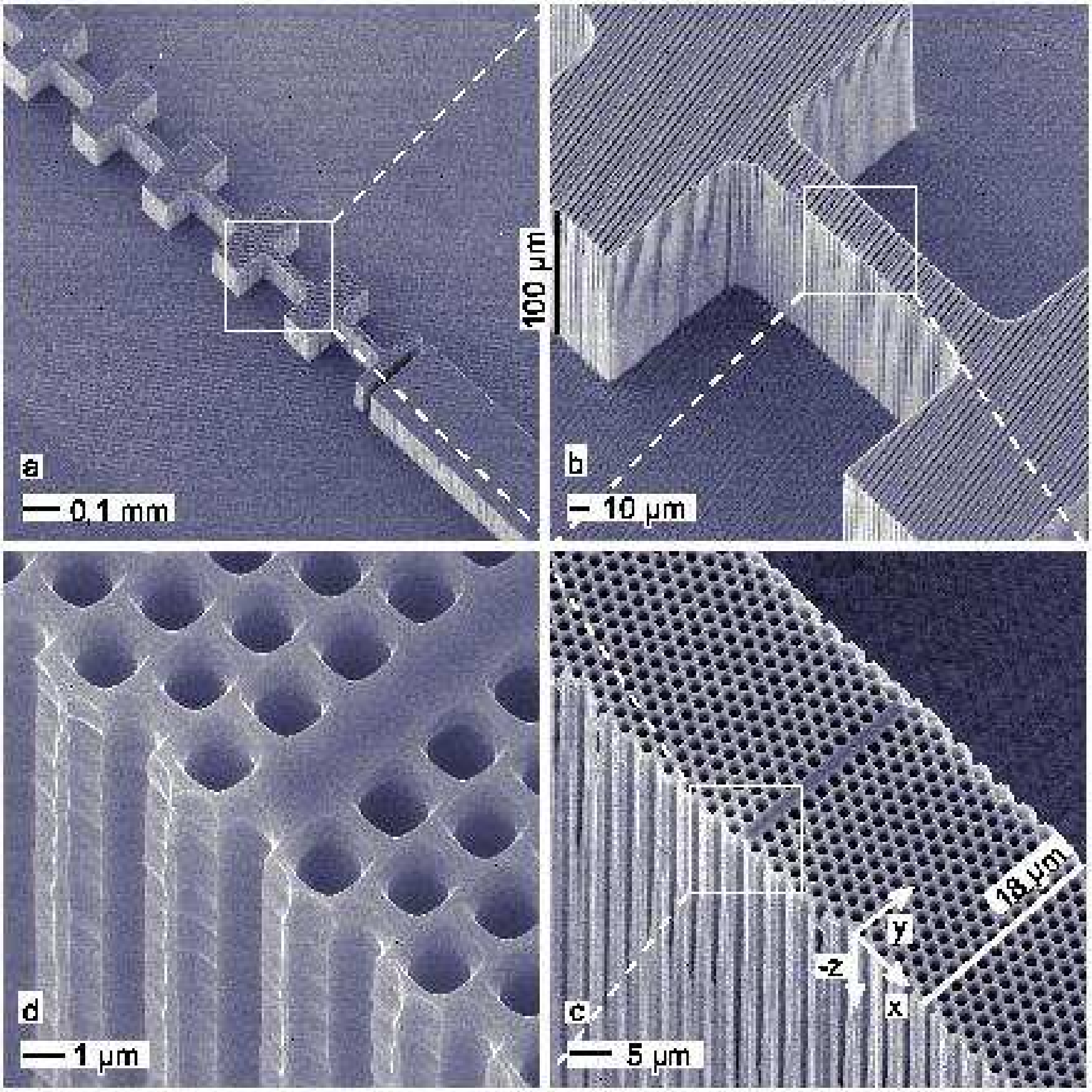

Abbildung 2.3: Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme eines Photonischen Kristalls aus makroporösem Silizium. Elektromagnetische Wellen in einem Wellenlängenbereich zwischen 3 und 5 Mikrometer können sich senkrecht zu den Poren nicht ausbreiten. Derzeit arbeitet man an der nächsten Generation solcher Kristalle, in denen die Lichtausbreitung bei dem für die Telekommunikation besonders wichtigen Wellenlängenbereich um 1,55 Mikrometer unterdrückt wird (U. Gösele, MPI für Mikrostrukturphysik, Halle; Infinion Technologies).

2.2 Maxwell-Gleichungen

Wir werden in diesem Abschnitt nur einige Begriffe aus der Theorie der Elektrodynamik mit den Maxwellgleichungen als Basisaxiomen zusammenfassen, die wir in den späteren Kapiteln benötigen werden. Dabei halten wir uns sehr eng an die Standardbücher [6, 8].

Maxwell-Gleichungen
Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen in R^3 (Feldgleichungen der Elektrodynamik in Materie) lauten in differentieller Form:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

Dabei sind
-$\vec{E}(\vec{x},t)$ das elektrische Feld
-$\vec{H}(\vec{x},t)$ das magnetische Feld
-$\vec{D}(\vec{x},t)$ die dielektrische Verschiebung
-$\vec{B}(\vec{x},t)$ die magnetische Flußdichte
-$\vec{j}(\vec{x},t)$ die Stromdichte
-$\rho(\vec{x},t)$ die Ladungsdichte.
Die Maxwell-Gleichungen sind partielle, lineare, gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung. Es gilt aufgrund der Linearität das Superpositionsprinzip. Damit sind die Interferenzerscheinungen elektromagnetischer Wellen, insbesondere auch die des sichtbaren Lichtes als spezielle elektromagnetische Wellen, sichergestellt.

Materialgleichungen
Zu den obigen Feldgleichungen kommen noch weitere, die die Materialeigenschaften der Medien charakterisieren und die Eindeutigkeit der Vektorfelder sichern. Diese sind die Verknüpfungsbeziehungen. Zu betrachten sind Feldstärkebereiche,

für die
• der Zusammenhang zwischen der Stromdichte $\vec{j}$ und der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ über das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma(\vec{x})\,\vec{E} \tag{2.5}$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit σ beschrieben wird.
• der Zusammenhang zwischen den Feldern $\vec{E}$ und $\vec{D}$ bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ linear ist und beschrieben wird durch die Materialeigenschaften

$$\vec{D} = \varepsilon_D(\vec{x})\,\vec{E} \tag{2.6}$$
$$\vec{B} = \mu(\vec{x})\,\vec{H} \tag{2.7}$$

mit der Dielektrizitätskonstanten ε_D und der Permeabilität μ.

Physikalische Bedeutung
Die physikalische Interpretation der Maxwell-Gleichungen ergibt sich durch die Formulierung der Gleichungen durch Integrale und Anwendung der Integralsätze von Green und Stokes[1].

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{j}\cdot d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\cdot d\vec{F} \tag{2.8}$$
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{F} \tag{2.9}$$
$$\int \vec{D}\cdot d\vec{F} = 0 \tag{2.10}$$
$$\int \vec{H}\cdot d\vec{F} = 0 \tag{2.11}$$

Die Gleichung (2.9) beschreibt das Faradaysche Induktionsgesetz. Michael Faraday erkannte durch empirische Versuche als erster, dass entlang eines Leiters in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine elektrische Spannung entsteht, die er Induktionsspannung U_{ind} nannte:

[1] Gaußscher Satz: $\int_V dV\,\mathrm{div}A = \oint_F dF\cdot A$
Stokescher Satz: $\int_F dF\cdot rotA = \oint_C dr\cdot A$

$$U_{ind} \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{F} \tag{2.12}$$

Oder anders ausgedrückt: *Ein magnetisches Feld, welches sich zeitlich ändert, erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.*
Gleichung (2.8) ist das durch Maxwell vervollständigte Ampère-Gesetz. Ampère fand experimentell heraus, dass Magnetfelder $\vec{H}$ nicht nur von Permanentmagneten sondern auch durch elektrische Ströme $\vec{j}$ erzeugt werden. Bei einem geschlossenen Weg um einen Leiter, in dem ein elektrischer Strom $\int_F \vec{j} \cdot d\vec{F}$ durch den Leiterquerschnitt F fließt, gilt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot d\vec{F} \Rightarrow \mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j}. \tag{2.13}$$

Der entscheidende Schritt zur Vervollständigung des Ampère-Gesetzes erfolgte durch Maxwell im Jahre 1864 [15]. Dazu ging Maxwell von der Kontinuitätsgleichung $-\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} = \mathrm{div}\, \vec{j}(\vec{x},t)$ aus, die aus der Ladungserhaltung[2] folgt. Die Kombination der Kontinuitätsgleichung mit (2.3) führt zu einem Widerspruch $\mathrm{div}\, \vec{j}(\vec{x},t) = 0$. Die Gleichungen werden konsistent, wenn man einen Zusatzterm, nämlich den Maxwellschen Verschiebungsstrom $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ zu $\vec{j}$ hinzufügt. Durch den Verschiebungsstrom wird eine Kopplung der elektromagnetischen Felder miteinander erreicht, und erst dadurch wird die Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung möglich.

Lösungsansatz
Wir suchen nach zeitharmonischen Lösungen der Form

$$\vec{H}(\vec{x},t) = \vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t} \qquad \text{und} \qquad \vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}. \tag{2.14}$$

Aus (2.1),(2.2),(2.6) und (2.7) folgen die stationären bzw. reduzierten Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}(\vec{x}) - i\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \tag{2.16}$$

[2]Für beliebige Prozesse ist die Summe der Ladungen in einem abgeschlossenen System konstant; die Ladung ist eine Erhaltungsgröße.

mit $\varepsilon := (\varepsilon_D + i\frac{\sigma}{\omega})$. Die beiden Gleichungen kann man zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen. Man erhält dann entweder eine Gleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ oder eine für das Magnetfeld $\vec{H}$. Wir geben hier aber nur die Gleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ an:

$$\mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}) - \omega^2\varepsilon\vec{E} = i\omega\vec{j}. \tag{2.17}$$

Mit dieser Gleichung werden wir uns im Laufe dieser Arbeit immer wieder befassen.

Übergangsbedingungen an Materialgrenzen

Durch die Gleichungen (2.3),(2.4),(2.10) und (2.11) ist das Verhalten der Vektorfelder beim Übergang zwischen zwei Medien festgelegt. Dazu zerlegen wir unser Gebiet Ω in zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2, die durch eine Grenzfläche ∂ getrennt sind. Die Gebiete haben unterschiedliche Materialkonstanten, (ε_1, μ_1) für Ω_1 und (ε_2, μ_2) für Ω_2. Auch die Felder werden unterschiedlich bezeichnet, $(\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1, \vec{H}_1)$ in Ω_1 und $(\vec{E}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2, \vec{H}_2)$ in Ω_2. Mit (2.10) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial\Omega_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{F}_1 + \oint_{\partial\Omega_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{F}_2 \\ &= \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{F} + \oint_{\partial} \vec{D}_1 \cdot d\vec{F}_1 + \oint_{\partial} \vec{D}_2 \cdot d\vec{F}_2 \\ &= \oint_{\partial} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_1 d\vec{F}_1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert uns die Stetigkeit der Normalenkomponente von $\vec{D}$ auf ∂ : $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0$ für alle $x \in \partial$. Eine analoge Berechnung für die Normalenkomponente des elektrischen Felden $\vec{E}$ ergibt:

$$\varepsilon_1 \left(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1\right) = \varepsilon_2 \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2\right).$$

Damit ist diese Komponente über die Grenzfläche hinweg unstetig. Ähnliche Überlegungen führen auf die folgende Tabelle:

	Tangentialkomponente	Normalenkomponente
$\vec{E}$	stetig	unstetig
$\vec{D}$	unstetig	stetig
$\vec{B}$	unstetig	stetig
$\vec{H}$	stetig	unstetig

Kapitel 3

Streuprobleme und Polbedingung

3.1 Streuprobleme

In vielen Gebieten der Natur- und Ingenieurwissenschaften treten Streuprobleme auf. Mathematisch handelt es sich dabei um Differentialgleichungen, die auf unbeschränkten Gebieten formuliert sind. Bisher wurden viele Methoden zu ihrer Lösung entwickelt [21, 1, 11].

Wir werden eine der klassischen Methoden anhand einer Modellgleichung erläutern. Wir entscheiden uns für die Helmholtz-Gleichung, da sie ausreichend untersucht ist. Außerdem läßt sich die Helmholtz-Gleichung aus den Maxwell-Gleichungen herleiten. Sie dient zur Modellierung einfacher Streuprobleme.

Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten Felder und Matrialien mit folgenden Eigenschaften: $\vec{E} = (0, 0, u(x, y))^T$, $\vec{j} = (0, 0, j_3)^T$, $k^2 := \omega^2 \varepsilon \mu$ und $f := -i\omega\mu j_3$. Wir erhalten damit aus (2.17) die Helmholtz-Gleichung

$$\triangle_{x,y} u + k^2 u = f.$$

Streuprobleme modelliert durch die Helmholtz-Gleichung:

Gegeben sei ein beschränktes zweidimensionales Gebiet R, und Γ sei sein stückweise glatter Rand.

Wir suchen nach Lösungen $u(x), x \notin \mathrm{R}$, die der folgenden Helmholtz-Gleichung genügen

$$\begin{aligned} \triangle u + k^2 u &= f && \text{außerhalb } R && (3.1)\\ \alpha u + \beta \partial_n u &= g && \text{auf}\,\Gamma && (3.2)\\ \partial_n u - iku &= o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) && \text{glm. in allen Richtungen } \frac{\mathrm{x}}{\mid \mathrm{x} \mid}. && (3.3) \end{aligned}$$

Dabei sind $k = k(x)$ die ortsabhängige Wellenzahl und $f(x)$ ein Quellterm mit einem beschränkten Träger in $\Omega \subset R^3$. Die Funktionen α, β und g sind gegeben. Gleichung (3.3) ist die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung.* Sie gestattet nur auslaufende Wellen im Unendlichen. Für beliebige Dimensionen läßt sie sich wie folgt formulieren

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho^{\frac{d-1}{2}} (\partial_\rho u - iku) = 0, \ \rho = \mid \mathrm{x} \mid, \text{glm. in allen Richtungen } \frac{\mathrm{x}}{\mid \mathrm{x} \mid}. \qquad (3.4)$$

Dabei ist d die Raumdimension. Sommerfeld formulierte diese Bedingung in seiner 1912 erschienenen Arbeit (siehe dazu [22]). Sie sichert die Eindeutigkeit der Lösung bei konstanten Wellenzahlen k. Im Falle der zeitharmonischen Wellengleichung - die Zeitabhängigkeit ist $e^{-i\omega t}$ - haben wir als Fundamentallösungen

1) Ebene Wellen für $d = 1$:

$$e^{+ikr} \text{ und } e^{-ikr} \qquad (3.5)$$

2) Zylindrische Wellen für $d = 2$:

$$H_0^{(1)}(kr) \text{ und } H_0^{(2)}(kr) \qquad (3.6)$$

3) Kugelwellen für $d = 3$:

$$\frac{e^{+ikr}}{r} \text{ und } \frac{e^{-ikr}}{r} \ . \qquad (3.7)$$

In (3.6) sind $H_0^{(1)}(kr)$ und $H_0^{(2)}(kr)$ Hankelfunktionen vom Typ 1 bzw. Typ 2. In den Fundamentallösungen (3.5),(3.6) und (3.7) charakterisiert der erste Term eine ausstrahlende Welle, während der zweite Term eine einstrahlende Welle charakterisiert.

Sommerfeld behauptete:
Um Eindeutigkeit für das Außenraumproblem der Helmholtz-Gleichung zu erreichen, reicht es nicht aus, dass die Funktionen im Unendlichen verschwinden. Sommerfeld interpretierte die Lösungen der Helmholtz-Gleichung als die räumlichen Anteile der zeitharmonischen Lösungen der Wellengleichung. Dadurch konnte er zwischen den auslaufenden und einlaufenden Wellen unterscheiden. Er behauptete, dass die physikalisch korrekte Lösung einer an einem Hindernis gestreuten Welle durch eine Superposition der auslaufenden Wellen erfolgen darf. Unter Verwendung der Greenschen Formeln und den Fundamentallösungen der Helmholtz-Gleichung erhielt er die Ausstrahlungsbedingung, die er noch durch eine Endlichkeitsbedingung ergänzte

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{d-1}{2}} u < \infty. \tag{3.8}$$

Mit diesen Bedingungen konnte er die Eindeutigkeit der Lösung der Helmholtz-Gleichung zeigen. Es ergibt sich sogar, dass aus der Ausstrahlungsbedingung die Endlichkeitsbedingung folgt. Rellich [19] war 1943 in der Lage, sogar mit einer schwachen Form der Ausstrahlungsbedingung die Eindeutigkeit der Lösung der Helmholtz-Gleichung zu zeigen

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \mid \partial_\rho u - iku \mid^2 ds = 0, \tag{3.9}$$

wobei Γ_R den Rand einer Sphäre mit Radius R um den Ursprung bezeichnet.

Wir formulieren nocheinmal unser Streuproblem:

$$\begin{aligned} \triangle u + k^2 u &= 0 && \text{außerhalb } R && (3.10)\\ \alpha u + \beta \partial_n u &= g && \text{auf } \Gamma && (3.11)\\ \partial_n u - iku &= o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) && \text{gleichmäßig in allen Richtungen } \frac{\mathrm{x}}{\mid \mathrm{x} \mid}\,. && (3.12)\end{aligned}$$

Um die folgenden Erläuterungen einfach zu halten, haben wir $f \equiv 0$ gesetzt.

Nun geht man bei der Lösung des obigen Problems wie folgt vor: Um eine einfache Darstellungsformel für den Außenraum zu erhalten, legt man einen Kreisring um R. Somit zerlegt man den Außenraum von R in eine Region innerhalb Ω und in eine außerhalb der Kreisscheibe B_{r_0}. Durch die 2. Greensche

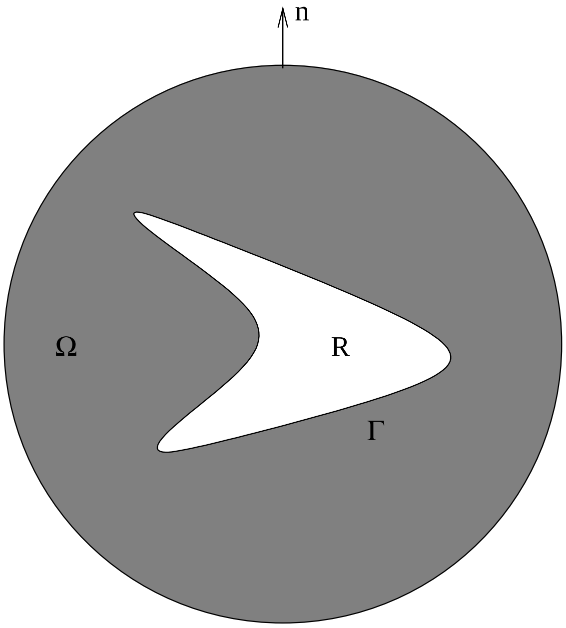

Abbildung 3.1: Das Rechengebiet Ω mit dem künstlichen Rand ∂B_{r_0}

Formel erhält man eine

Lösungsdarstellung für den Außenraum:

$$u(x) = \int_{\partial B_{r_0}} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) \right\} ds(y), \qquad x \in R^3 \setminus \overline{B_{r_0}} \quad (3.13)$$

wobei $\Phi(x, y)$ diejenigen Fundamentallösungen der Helmholtz-Gleichung bezeichnet, die die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Die Formel (3.13) stellt die Lösung $u(x)$ im Außenraum durch die Funktion $u(y)$ auf ∂B_{r_0} dar. Wir brauchen aber eine solche Beziehung auf dem künstlichen Rand ∂B_{r_0}. Dazu verschiebt man den Punkt x im Außenraum in einem Grenzprozess (siehe dazu [3]) auf den Rand ∂B_{r_0}. Schließlich erhält man

$$\frac{1}{2} u(x) = \int_{\partial B_{r_0}} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) \right\} ds(y), \qquad x \in \partial B_{r_0}. \quad (3.14)$$

Die Formel (3.14) ist eine Integralgleichung. Sie stellt auf dem künstlichen Rand

∂B_{r_0} eine Beziehung zwischen den Dirichlet- und den Neumanndaten her. Daher läßt sich ein Randoperator M definieren, der auf dem Rand Dirichlet-Daten in Neumann-Daten (DtN) abbildet,

$$\partial_n u = Mu \qquad \text{auf } \partial B_{r_0}, \tag{3.15}$$

wobei man noch die Stetigkeit von $\partial_n u$ und u beim Übergang durch den Rand ∂B_{r_0} berücksichtigt. Damit können wir unser Problem wie folgt schreiben:

Außenraumproblem P_A:

$$\begin{aligned} \triangle u + k^2 u &= 0 \qquad \text{außerhalb } \mathrm{B}_{\mathrm{r}_0} && (3.16)\\ \partial_n u &= M u_0 \qquad \text{auf } \partial B_{r_0} && (3.17) \end{aligned}$$

Innenraumproblem P_I:

$$\begin{aligned} \triangle u + k^2 u &= f \qquad \text{innerhalb } \mathrm{B}_{\mathrm{r}_0} && (3.18)\\ \alpha u + \beta \partial_n u &= g \qquad \text{auf}\,\Gamma && (3.19)\\ \partial_n u &= M u_0 \qquad \text{auf } \partial B_{r_0} && (3.20) \end{aligned}$$

Hier erscheint die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung nicht. Sie ist aber bereits für die Auswahl der Fundamentallösung verwendet worden. Die Funktion $u_0(x)$, $x \in \partial B_{r_0}$ ist gegeben.

Der DtN-Operator koppelt das Innenraumproblem mit dem Außenraumproblem. Aufgrund des DtN-Operators kann für jede gegebene Funktion u_0 auf ∂B_{r_0} das Außenraumproblem eindeutig gelöst werden. Man muß bei der Lösung des vollen Problems wie folgt vorgehen:

1. Löse $\mathrm{P_I}$
2. Setze $u_0(x) := u(x), x \in \partial B_{r_0}$
3. Löse $\mathrm{P_A}$

In vielen praktischen Beispielen kann der 3. Schritt ausgelassen werden, da man nur an $u(x)$, $x \in \Omega$ interessiert ist.
Man kann die Sommerfeldsche Austrahlungsbedingung nicht verwenden, wenn die Wellenzahl $k = k(x)$ explizit ortsabhängig ist. Physikalisch hat man dann einen inhomogenen Außenraum.

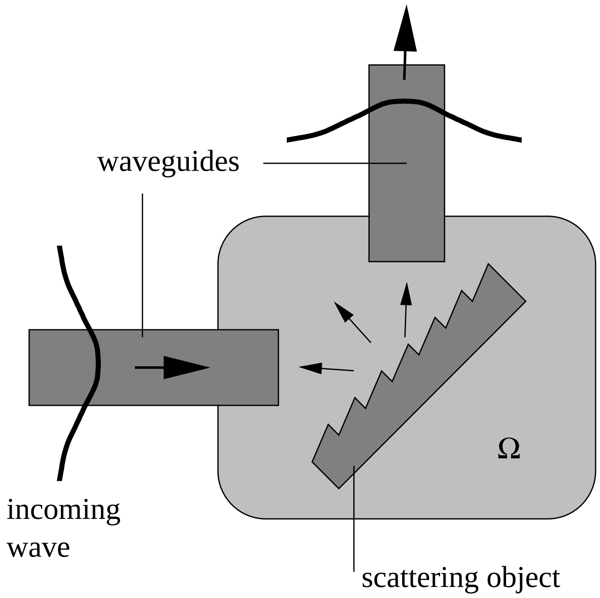

Abbildung 3.2: Streuproblem mit einem inhomogenen Außenraum. Die Wellenzahlen der Wellenleiter sind unterschiedlich zu der des umgebenden Mediums. (Bild stammt aus [21])

Um jedoch auch inhomogene Außenraumprobleme behandeln zu können, gibt Frank Schmidt in seiner Habilitationsschrift [21] eine neuartige Bedingung an, die er *Polbedingung* nennt. Diese Bedingung ist konstruktiv. Sie erlaubt den Randoperator auf viele verschiedene Arten zu konstruieren, und ermöglicht demnach Probleme von unbeschränkten Gebieten auf beschränkte Gebiete einzuschränken. Im Falle des homogenen Außenraumes ist die Polbedingung äquivalent zur Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (Beweis siehe [21] und die dort angegebene Literatur).
Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel aus der Integrierten Optik.

Beispiel : Inhomogener Außenraum

Die Abbildung (3.2) veranschaulicht ein typisch inhomogenes Außenraumproblem. Der linke Wellenleiter kommt vom Unendlichen und endet in unserem Rechengebiet. Er führt eine Mode vom Unendlichen zu seinem rechten Ende. Dort verläßt das Feld den Wellenleiter. Wir nehmen an, dass der Wellenleiter die Wellenzahl k_1 besitzt. Die Wellenzahl des umgebenden homogenen Mediums ist k_0 und es gilt $k_1 > k_0$. Die Wellenleiter-Mode zeigt bei Ankunft am rechten Ende des Wellenleiters keinerlei Abschwächung. Ihr Phasenfaktor beträgt $e^{i\beta x}$, wobei x die Achse der Glasfaser bezeichnet und $k_0 < \beta < k_1$. Es sei erwähnt, dass diese Mode nicht die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt, weil die Amplitude der Mode nicht einmal abfällt. Die Welle trifft auf einen Spiegel. Sie wird zu einem Teil zurückreflektiert und zum anderen in den zweiten Wellenleiter gestreut. Der Rest gelangt dann in den homogenen Teil des Außenraumes. Die gestreute Welle im zweiten Wellenleiter kann dann ohne Abschwächung ins Unendliche propagieren. Dieser Teil erfüllt ebenfalls nicht die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Wir nennen die beschriebenen Inhomogenitäten des Außenraumes Wellenleiter-typische Inhomogenitäten.

3.2 Polbedingung

In diesem Abschnitt erläutern wir das Konzept der Polbedingung, dabei orientieren wir uns an [21].

3.2.1 1D-Problem

Wir illustrieren die Polbedingung anhand der 1D-Helmholtz-Gleichung. Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung im Außenraum ($\mid x \mid > a$), und führen eine Parametertransformation $r = a + x$, $x \geq 0$ durch, um unsere theoretischen Überlegungen für den rechten und linken Außenraum gleichermaßen anwendbar zu machen. O.E.d.A. können wir $k^2 = 1$ setzen. Die Gleichung läßt sich dann schreiben als

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + u(x) = 0, \qquad x > 0. \tag{3.21}$$

Nun unterwerfen wir die Lösungen im Außenraum ($\mid x \mid > a$) einer Laplace-Transformation. Wir geben die Definition der Laplace-Transformation an (siehe Anhang von [21]). In unserem Falle heißt die Lösungsfunktion der 1D Helmholtz-Außenraum-Gleichung Laplace-Transformierbar, falls sie über die positive reelle Achse integrierbar ist und zusätzlich der exponentiellen Wachstumsbeschränkung

$$\mid u(x) \mid \leq Ce^{bx} \tag{3.22}$$

($\mathrm{Re}(s) > b \geq 0$) unterliegt. Die Laplace-Transformation sieht wie folgt aus

$$\hat{u}(s) = L\{u(x)\}(s) = \int_0^\infty dx\, e^{-sx} u(x), \qquad \mathrm{Re}\ s > 0. \tag{3.23}$$

Die komplexwertige Funktion $\hat{u}(s)$ mit komplexer Veränderlichen s bezeichnet man dann als die Laplace-Transformierte von $u(x)$. Das Integral konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > b$. Die Laplace-Transformierte ist also in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > b$ erklärt und dort auch analytisch. Es läßt sich noch zeigen, dass die Laplace-Transformierte für $\mathrm{Re}(s) \to \infty$ gegen 0 strebt. Nach dem Differentiationssatz

$$\widehat{u^{(n)}}(s) = s^n \hat{u}(s) - s^{n-1} u_0 - ... - s u_0^{n-2} - u_0^{n-1} \tag{3.24}$$

gilt für die Laplace-Transformierte der zweiten Ableitung

$$\widehat{u''}(s) = s^2\hat{u}(s) - su_0 - u_0^{'} \ , \tag{3.25}$$

wobei wir folgende Abkürzungen benutzt haben: $u_0 := u(0)$ und $\mathrm{u}_0^{'} := \partial_x u(0)$.

Durch die Transformation der 1D-Helmholtz-Gleichung erhält man mit (3.25)

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x)\right\} &= \widehat{u''}(s) + \hat{u}(s) && (3.26)\\ &= (s^2+1)\hat{u}(s) - su_0 - u_0^{'} && (3.27)\\ &= 0. && (3.28) \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir im Laplace-Raum eine Bestimmungsgleichung für die Lösung von (3.21)

$$\hat{u}(s) = \frac{su_0 + u_0^{'}}{(s^2+1)} \ . \tag{3.29}$$

Die komplexwertige Funktion $\hat{u}(s)$ ist holomorph in $C \setminus \{\pm i\}$ und enthält zwei isolierte Singularitäten bei $+i$ und $-i$. Wie sofort aus (3.29) ersichtlich ist, kann die Funktion $\hat{u}(s)$ mit Ausnahme der Singularitäten auf die gesamte komplexe Ebene fortgesetzt werden, obwohl sie zunächst nur für Re $s > 0$ erklärt war.

Bemerkung: Die Laplace-Transformation in der Nähe der Singularitäten bestimmt das Fernfeld, und umgekehrt wird $u(x)$ für kleine $\mid x \mid$ durch $\hat{u}$ für große $\mid s \mid$ bestimmt.

Nun bestimmen wir die Singularitäten der Gleichung (3.29) durch eine Partialbruchzerlegung

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{2}\frac{u_0 + iu_0^{'}}{s+i} + \frac{1}{2}\frac{u_0 - iu_0^{'}}{s-i} \ . \tag{3.30}$$

Wir erinnern uns nocheinmal an die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Für 1D lautet sie $u_0 + iu_0^{'} = 0$. Setzen wir sie oben ein, verschwindet der Pol in $s = -i$, d.h. $\frac{1}{2}\frac{u_0+iu_0^{'}}{s+i} = 0$. Dies nennt man die Polbedingung.

Definition: (Polbedingung in 1D)
Eine Funktion $u : R^{+} \to C$ *erfüllt die Polbedingung,falls ihre Laplace-Transformierte* $\hat{u}$ *eine holomorphe Fortsetzung in die untere Halbebene* $\{s \in C,\ \mathrm{Im}(s) < 0\}$ *besitzt.*

Die Rücktransformation von (3.30) ergibt folgende Darstellung:

$$u(x) = \frac{1}{2}(u_0 + iu_0^{'})\underbrace{L^{-1}\{\frac{1}{s+i}\}}_{e^{-ix}} + \frac{1}{2}(u_0 - iu_0^{'})\underbrace{L^{-1}\{\frac{1}{s-i}\}}_{e^{+ix}}. \tag{3.31}$$

Damit liefert die Laplace-Transformation zwei wesentliche Informationen.
1) Sie ermöglicht zum einen auf natürliche Weise eine Separation einer gegebenen Funktion in einen aymptotisch einstrahlenden und einen asymptotisch ausstrahlenden Anteil, denn wir können die komplexe Funktion $\hat{u}_{\pm}(s) = \frac{1}{s\mp i}$ mit den einstrahlenden $u_{-}(x) = e^{-ix}$ und ausstrahlenden $u_{+}(x) = e^{+ix}$ Wellen identifizieren.
2) Zum anderen liefert sie eine Beziehung zwischen den Neumann-Daten $u_0^{'}$ und den Dirichlet-Daten u_0, die man benötigt, um das Problem auf einen Typ von Randbedingungen zu beschränken.

3.2.2 Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall

Wir formulieren im Folgenden die Polbedingung in Dimensionen $d > 1$. Dazu geben wir eine Kugel mit Radius a vor und untersuchen Funktionen der Form $u : R^d \setminus \Omega_a \to C,$ wobei Ω_a das Innere der Kugel darstellt.

Nun gibt es zwei Möglichkeiten der Verallgemeinerung:
a) Produktansatz, d.h. die Funktion wird in einen winkelabhängigen und einen vom Abstand abhängigen Anteil zerlegt.
b) Allgemeine Parametrisierung des Außenraumes.

Bevor wir aber die Möglichkeiten erläutern, führen wir eine homöomorphe Abbildung $Q : (a+R_{+})\times S^{d-1} \to R^d\setminus\Omega_a)$ ein. Sie verallgemeinert Kugelkoordinaten zu Euklidischen Koordinaten außerhalb der Kugel. Wir verwenden diese Abbildung, um eine weitere Abbildung $u \to \tilde{u}$ via $\tilde{u}(\rho, x_{S^{d-1}}) := (u \circ Q)(x)$ zu definieren, die uns eine Funktion u in den verallgemeinerten Kugelkoordinaten gibt. Der Übersichtlichkeit wegen lassen wir die Tilde weg. Nun definieren wir die allgemeine Polbedingung:

Definition: *Eine Funktion $u(\cdot, x_{S^{d-1}})$ erfüllt die Polbedingung, falls sie für jedes $x \in S^{d-1}$ die eindimensionale Polbedingung erfüllt.*

Falls die Funktion u eine Darstellung

$$u(\rho, x_{S^{d-1}}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_{S^{d-1}}) \upsilon_j(\rho), \qquad \rho \geq a \tag{3.32}$$

besitzt (Wir fordern hier keine globale Orthogonalität der Funktionen ψ_j), kann folgende Definition für die Polbedingung verwendet werden. Diese Definition spielt eine wichtige Rolle für unsere numerischen Konzepte, die wir in späteren Kapiteln erläutern werden.

Definition: (Polbedingung für lokal separable Darstellungen)
Funktionen, die sich darstellen lassen wie in (3.32) erfüllen die Polbedingung, falls jede der Funktionen υ_j, $j \in N_0$ die eindimensionale Polbedingung bezüglich der Abstandsvariablen $(\rho - a)$ erfüllt.

Nun kommen wir zu Teil b), der eine noch allgemeinere Formulierung der Polbedingung zuläßt. Dazu machen wir folgende

Voraussetzungen: Sei $\Omega \subset R^d$ das Innere eines Gebietes und $\partial\Omega$ sein Rand.
Wir nehmen an, es gibt eine homöomorphe Abbildung Q , so dass gilt:
Voraussetzung 1) $Q : R_+ \times \partial\Omega \to R^d \setminus \Omega$
Voraussetzung 2) $\lim_{\xi\to\infty} \frac{|Q(\xi, x_{\partial\Omega})|}{\xi} = C > 0$ für alle $x_{\partial\Omega} \in \partial\Omega$.

Die erste Voraussetzung liefert eine verallgemeinerte Abstandsvariable ξ. Die zweite Voraussetzung sichert, dass die durch Q induzierte Metrik im asymptotischen Fall zu einer Euklidischen Metrik wird.
Wir können jetzt die allgemeinste Definition für die Polbedingung angeben.
Definition: (Allgemeine Polbedingung)

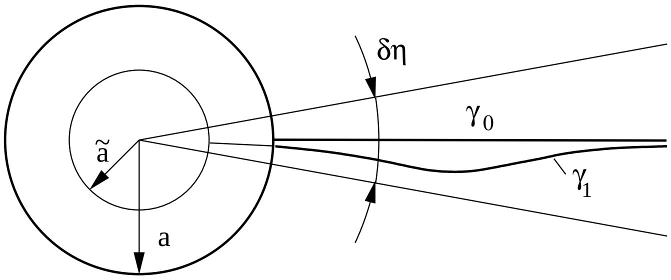

Abbildung 3.3: Der Pfad γ_0, auf dem die Polbedingung erfüllt ist, und der gestörte Pfad γ_1 (Bild stammt aus [21])

Eine Funktion $u(x)$ *erfüllt die Polbedingung, falls die Laplace-Transformierte von* $(u \circ Q)(\cdot, x_{\partial\Omega})$ *eine holomorphe Fortsetzung auf die untere Halbebene* $C^- := \{s \in C : \mathrm{Im}\ s < 0\}$ für alle $x_{\partial\Omega} \in \partial\Omega$ *besitzt.*

Definition: *Eine Funktion* $u(x)$*, die die Polbedingung erfüllt, nennen wir ausstrahlend.*

Die Laplace-Transformation bezüglich der Abstandsvariablen hat man sich so vorzustellen: Von jedem Punkt des Randes $\partial\Omega$ führt man einen Strahl ins Unendliche, dieser Strahl kann beliebig krumm sein, er muß aber im Unendlichen dem geraden Strahl beliebig nahe kommen, dazu ist **Voraussetzung 2)** notwendig.
Auf jedem dieser Strahlen vollzieht man die Laplace-Transformation und anschließend die holomorphe Fortsetzung. Das Resultat muß holomorph in C^- sein. Präziser läßt sich dies so formulieren:
Wir parametrisieren die nach außen führenden Strahlen mit der Parametrisierung Q. Die Polbedingung ist unabhängig von der speziellen Parametrisierung. Frank Schmidt zeigt in seiner Habilitationsschrift [21], dass, falls eine Funktion u die Polbedingung entlang eines gegebenen Pfades erfüllt, diese die Polbedingung auch entlang der Nachbarschaft des Pfades erfüllt, wobei Nachbarschaft gerade die Annäherung an die gerade Achse im Unendlichen bedeutet.

3.2.3 Reelle Achsen-Methode

Die folgenden Überlegungen basieren auf dem Cauchyschen Integralsatz.
Satz: *Sei* $D \subset C$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet und* $f : D \to C$

analytisch. Dann gilt für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ (Wir verwenden hier γ gleichzeitig für die Parametrisierung und für die Spur $Sp(\gamma)$), dessen Inneres $\overset{\circ}{\gamma}$ ganz in D enthalten ist:

$$\oint_\gamma f(\xi) d\xi = 0. \tag{3.33}$$

Den Beweis entnehme man aus [4].
Der Cauchy-Satz liefert eine notwendige Bedingung für das Abklingverhalten der Außenraumlösung. Dies zeigt das folgende

Lemma: *Die Funktion $\hat{u}$ erfülle die Polbedingung. Dann folgt*

$$\int_\infty^{-\infty} \frac{\hat{u}(\tau)}{\tau - s_+} d\tau = 0 \qquad \text{für alle}\, s_+ \in C \setminus \{\text{Singularitäten}\} \text{ mit Im } (s_+) > 0. \tag{3.34}$$

Beweis: [21] Wir verwenden den Integralsatz (3.33). Sei s_+ wie oben definiert gegeben. Wir legen einen Kreis um s_+. Falls s_+ der einzige Pol im Kreis ist, dann kann man schreiben

$$\hat{u}(s_+) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma d\zeta \frac{\hat{u}(\zeta)}{\zeta - s_+} \ . \tag{3.35}$$

Wir deformieren γ (dies dürfen wir aufgrund der Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes (3.33)) und zerlegen γ in γ_1 und γ_2, wie in der Abbildung 3.4 gezeigt. Folglich kann man auch $\hat{u}$ in $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ zerlegen, die noch vom Radius R abhängen. Wir schreiben

$$\hat{u}(s_+) = \hat{u}_1(s_+) + \hat{u}_2(s_+) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} d\zeta \frac{\hat{u}(\zeta)}{\zeta - s_+} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} d\zeta \frac{\hat{u}(\zeta)}{\zeta - s_+} \ . \tag{3.36}$$

Nun lassen wir $R \to \infty$ gehen. Die so gewonnenen Funktionen benennen wir genauso wie vorher. Da $\hat{u}(\zeta)$ holomorph ist (dies folgt aus der Eigenschaft der Laplace-Transformation), folgt mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (3.33)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} d\zeta \frac{\hat{u}(\zeta)}{\zeta - s_+} \qquad \text{für alle } s_+ \in V \text{ mit Im(s}_+) > 0. \tag{3.37}$$

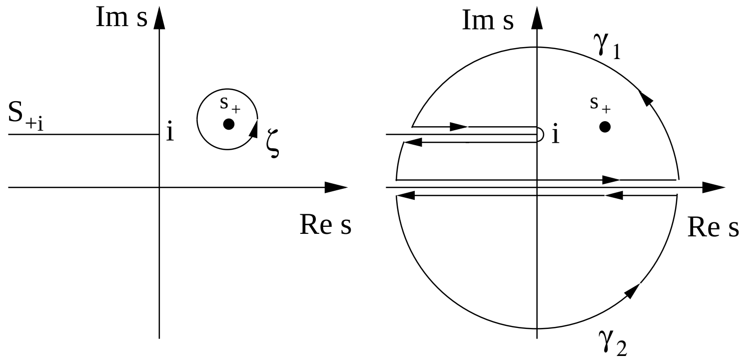

Abbildung 3.4: Deformation der Kontur (Bild entnommen aus [21])

Es ist eine asymptotische Eigenschaft der Laplace-Transformation, dass gilt:

$$\hat{u}(s) = O(\mid s \mid^{-1}), \text{ mit } \mid s \mid \to \infty \ .$$

Beweis: siehe [5].
Folglich haben wir $\mid \frac{\hat{u}(s)}{s-s_+} \mid = O(\mid s \mid^{-2})$ und das Integral auf dem großen Halbkreis (d.h. $\mid s \mid \to \infty$) verschwindet (genauer es fällt mit $\mid s \mid^{-1}$).

Kapitel 4

Schwache Form der Maxwell-Gleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir die schwachen Formulierungen der Maxwell-Gleichungen im Innenraum und Außenraum. Das Innenraumproblem ist ein elliptisches Randwertproblem. Wir geben seine schwache Formulierung genauso an, wie es sonst bei elliptischen Randwertproblemen üblich ist (siehe dazu [2, 7]). Neu ist die Behandlung des Außenraumproblems. Wir verwenden hier Ideen aus [21], die für die Außenraumformulierung der Helmholtz-Gleichung verwendet wurden. Wir berücksichtigen diese Ideen bei der Behandlung der Maxwell-Gleichungen. Dadurch erhalten wir eine Außenraumformulierung, die "schwach" bezülich der Winkelvariablen und "stark" bezüglich der Abstandsvariable ist. Ein weiteres Resultat ist, dass man beim Zylinderkoordinaten die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der Außenraumlösung zu stellen braucht. Dadurch ist bereits die Eindeutigkeit der Außenraumlösung gesichert. Die Normalenkomponente erfüllt dann die Polbedingung notwendig. Anderenfalls würde keine eindeutige Außenraumlösung existieren.

4.1 Innenraum- und Außenraumproblem der Maxwell-Gleichungen

Wir geben in diesem Abschnitt das Innenraum- und Außenraumproblem der Maxwell-Gleichungen an. Sei $\Omega \subset R^3$ ein beschränktes Gebiet mit dem Rand

$\partial\Omega$ und $R^3 \setminus \Omega$ der unbeschränkte Außenraum.

Innenraumproblem:

$$\mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}) - \omega^2\varepsilon\vec{E} = i\omega\vec{j} \text{ in } \Omega \tag{4.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} \times \vec{n} \text{ vorgegeben auf } \partial\Omega \tag{4.2}$$

Wie in der Literatur [7] üblich nennen wir (4.2) natürliche Neumann Randbedingung. Natürlich deshalb, weil im folgenden Abschnitt diese Bedingung in der schwachen Formulierung des Innenraumproblems auftauchen wird.

Außenraumproblem:

$$\mathrm{rot}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}) - \omega^2\varepsilon\vec{E} = i\omega\vec{j} \text{ in } R^3 \setminus \Omega \tag{4.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \vec{x}(\mathrm{rot}\vec{E} + i\omega\hat{x} \times \vec{E}) = 0 \tag{4.4}$$

Gleichung (4.4) bezeichnet man als die *Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung.* Sie garantiert die Eindeutigkeit der Außenraumlösung im homogenen Falle. Die Bedingung stellt das Pendant zu der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung für die Maxwell-Gleichungen dar. Wie im Kapitel (3.2) behandelt, läßt sie im Außenraum nur auslaufende Vektorfelder zu. Für inhomogene Außenräume (z.B. Wellenleiter) ist sie jedoch ungeeignet. Auch hier verwenden wir anstatt der Silver-Müller-Bedingung die Polbedingung, um das Außenraumproblem mit dem Innenraumproblem zu koppeln.

4.2 Schwache Form des Innenraumproblems

Das Innenraumproblem (4.1) ist im klassischen Sinne zu verstehen. Da der Rotationsoperator auf das Vektorfeld $\vec{E}$ angewandt wird, muß die Existenz zweiter Ableitungen von $\vec{E}$ in Ω gefordert werden. Es taucht folgende Frage auf: Unter welchen Bedingungen existiert eine klassische Lösung $\vec{E} \in (C^2(\Omega))^3$?
Antwort: Klassische Lösungen erhält man nur bei hinreichend glattem Rand. Diese Einschränkung überwindet man, indem man die Lösungen in geeigneten Sobolev-Räumen sucht. Man versucht zunächst eine schwache Formulierung des Innenraumproblems (4.1) zu finden, die dann die "richtigen" Sobolev-Räume liefert. Bei den folgenden Ausführungen halten wir uns an [25, 7, 16].

Um eine schwache Formulierung zu finden, multiplizieren wir die obige Gleichung (4.1) mit einer vektoriellen Testfunktion $\vec{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^3$ und integrieren anschließend:

$$\int_\Omega \operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}) \cdot \vec{\phi} - \omega^2 \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{\phi}\, dx = \int_\Omega i\omega\vec{j} \cdot \vec{\phi}\, dx \quad \forall \vec{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^3. \tag{4.5}$$

Durch partielle Integration (wir setzen ausreichende Differenzierbarkeitseigenschaften voraus) erhält man schließlich

$$\int_\Omega \mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{\phi} - \omega^2 \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{\phi}\, dx + \int_\Gamma (\operatorname{rot}\vec{E} \times \vec{n}) \cdot \vec{\phi}\, dx \tag{4.6}$$

$$= \int_\Omega i\omega\vec{j} \cdot \vec{\phi}\, dx \quad \forall \vec{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^3. \tag{4.7}$$

Damit die obige Gleichung erfüllt wird, muss man nur noch verlangen, dass $\operatorname{rot}\vec{E}$ ein Vektorfeld aus $(L^2(\Omega))^3$ ist. Nun definieren wir die Sobolev-Räume, die wir im Folgenden verwenden werden (siehe dazu [7, 25]). Vorher definieren wir den Differentialoperator Rotation im schwachen Sinne:

Hilbertraum $H^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)$:
Es sei $\vec{u} \in (L^2(\Omega))^3$ ein Vektorfeld und $(C_0^\infty(\Omega))^3$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren vektoriellen Testfunktionen mit kompaktem Träger. Dann ist
(i) $\vec{v} \in (L^2(\Omega))^3$ die Rotation im schwachen Sinne ($\vec{v} := \operatorname{rot}\vec{u}$), falls

$$(\vec{u}, \text{rot } \vec{\phi}) = (\vec{v}, \vec{\phi}) \qquad\qquad \forall \vec{\phi} \in (C_0^\infty(\Omega))^3, \tag{4.8}$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt in $(L^2(\Omega))^3$ bedeutet.
Der Funktionenraum

$$\mathrm{H}^1_{\text{rot}}(\Omega) := \{\vec{u} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \text{rot } \vec{u} \in (L^2(\Omega))^3\} \tag{4.9}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\mathrm{H}^1_{\text{rot}}(\Omega)} := (\vec{u}, \vec{v}) + (\text{rot } \vec{u}, \text{rot } \vec{u})$$

ist ein Hilbertraum [7]. Mit Hilfe dieser Räume und (4.6,4.7) läßt sich nun eine schwache Formulierung für das Innenraumproblem angeben. Nach der Greenschen Formel (siehe dazu [7]) setzen wir $\mu^{-1}\text{rot}\vec{E} \in \mathrm{H}^1_{\text{rot}}(\Omega)$ voraus und erhalten

$$(\mu^{-1}\text{rot}\vec{E}, \text{rot}\vec{\phi}) - \omega^2(\varepsilon\vec{E}, \vec{\phi}) + (\text{rot}\vec{E} \times \vec{n}, \vec{\phi})_\Gamma = (i\omega\vec{j}, \vec{\phi}) \qquad \forall \vec{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^3. \tag{4.10}$$

Für $\vec{E}$ braucht man nur noch zu verlangen, dass rot$\vec{E}$ im “schwachen Sinne” existiert. Dies ist der Grund, warum wir den Sobolev-Raum $\mathrm{H}^1_{\text{rot}}(\Omega)$ eingeführt haben. Im Folgenden geben wir die schwache Formulierung des Innenraumproblems an.

Definition: *Das Vektorfeld $\vec{E} \in V_{\vec{g}}$ mit*

$$\mathrm{V}_{\vec{g}} := \left\{\vec{E} \in \mathrm{H}^1_{\text{rot}}(\Omega) \mid \vec{E} \times \vec{n} = \vec{g} \text{ auf } \Gamma,\ \vec{g} \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}_{\text{rot}}(\Gamma)\right\} \tag{4.11}$$

heißt schwache Lösung des Innenraumproblems (4.1), falls

$$(\mu^{-1}\text{rot}\vec{E}, \text{rot}\vec{\phi}) - \omega^2(\varepsilon\vec{E}, \vec{\phi}) = (i\omega\vec{j}, \vec{\phi}) \qquad \forall \vec{\phi} \in \mathrm{H}(\text{rot}, \Omega) \tag{4.12}$$

gilt.

In analoger Weise läßt sich auch eine schwache Formulierung für das Magnetfeld $\vec{H}$ formulieren. Informationen zur Existenz- und Eindeutigkeitstheorie findet man in [16, 25].

Schwache Formulierung des Innenraumproblems
Man bestimme $\vec{E} \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)$, *so dass für alle* $\vec{\phi}$ *gilt:*

$$a(\vec{E},\vec{\phi}) := (\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E},\mathrm{rot}\vec{\phi}) - \omega^2(\varepsilon\vec{E},\vec{\phi}) + (\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n},\vec{\phi})_\Gamma = (i\omega\vec{j},\vec{\phi}), \qquad (4.13)$$

wobei $a(\cdot,\cdot)$ *eine Sesquilinearform* $a : \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega) \to \mathrm{C}$ *bezeichnet.*

Um das schwache Problem (4.13) zu lösen, benötigen wir den Neumann-Randwert $\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n}$. Jedoch ist das Innenraumproblem nicht immer eindeutig lösbar (siehe dazu [25]). Wir erinneren daran, dass das Innenraum- und Außenraumproblem miteinander über den Randwert gekoppelt sind. In unserem Falle kann der Randwert $\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n}$ nicht beliebig vorgegeben werden. Dieser Randwert wird auch für die Berechnung der Außenraumlösung, die der Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung erfüllt, verwendet werden. Durch diese Bedingung läßt sich ein DtN-Operator definieren (im Kapitel 3.1 wurde dies ausführlich erläutert), der eine Beziehung zwischen dem Dirichlet- $\vec{E}\times\vec{n}$ und dem Neumann-Datum $\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n}$ angibt, $\mathrm{DtN}(\vec{E}\times\vec{n}) = \mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n}$. Wächst der Rand des Innenraums ins Unendliche, geht der DtN-Operator in die Silver-Müller-Austrahlungsbedingung über. Damit erhalten wir:

Man bestimme $\vec{E} \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)$, *so dass für alle* $\vec{\phi}$ *gilt:*

$$a(\vec{E},\vec{\phi}) := (\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E},\mathrm{rot}\vec{\phi}) - \omega^2(\varepsilon\vec{E},\vec{\phi}) + (\mathrm{DtN}(\vec{E}\times\vec{n}),\vec{\phi})_\Gamma = (i\omega\vec{j},\vec{\phi}), \quad (4.14)$$

wobei $a(\cdot,\cdot)$ *eine Sesquilinearform* $a : \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega) \to \mathrm{C}$ *bezeichnet.*

Bemerkung:
(1) Da jetzt in der schwachen Formulierung nur das elektrische Feld $\vec{E}$ vorkommt, erhalten wir damit ein abgeschlossenes Innenraumproblem.
(2) Das Innenraumproblem (4.14), das den DtN-Operator enthält, ist eindeutig lösbar. Dies werden wir nicht beweisen. Siehe dazu [21].

4.3 Semi-schwache Form des Außenraumproblems

In diesem Abschnitt behandeln wir zwei Fragestellungen.
Frage 1) Wie sieht eine schwache Formulierung des Außenraumproblems aus, die die Anwendung der Polbedingung erlaubt?
Frage 2) Welche Komponente des elektrischen Feldes muß die Polbedingung erfüllen? Müssen alle Komponenten des elektrischen Feldes die Polbedingung erfüllen, oder reicht es aus, wenn z.B. die Tangentialkomponente die Polbedingung erfüllt?

Zu **Frage 1)**: Wir werden eine "angemessene" Formulierung für das Außenraumproblem in R^3 herleiten, die eines der Hauptresultate unserer Arbeit darstellt. Dabei verwenden wir Ideen aus [21], die dort dazu dienten eine Außenraumformulierung für die Helmholtz-Gleichung herzuleiten. Mit diesen Ideen leiten wir eine Außenraumformulierung der Maxwell-Gleichung her. Dabei erinnern wir uns an Abschnitt 3.2.2 (Definition der allgemeinen Polbedingung). Es war notwendig, den Außenraum einer verallgemeinerten Kugelkoordinatentransformation zu unterziehen. Erst dadurch erhielten wir eine Separation der Abstandsvariablen von den restlichen Winkelvariablen. Dann wurde die Laplace-Transformation entlang der Abstandsvariablen vorgenommen. Mit Berücksichtigung dieser Tatsache werden wir für das Außenraumproblem eine Formulierung herleiten, die "schwach" in verallgemeinerten Winkelvariablen (η, ζ) und "stark" in der Abstandsvariablen (ξ) ist.
Bei der Herleitung der Außenraumformulierung werden wir folgende Punkte behandeln:
• schwache Form von (4.3) in allen Variablen (x, y, z) in 3D
• schwache Form in verallgemeinerten Winkelvariablen (η, ζ) + starke Form in der Abstandsvariablen (ξ)

Die schwache Formulierung des Innenraumproblems der zeitharmonischen Maxwell-Gleichung (4.1) haben wir folgendermaßen erhalten:
Multiplikation von (4.1) mit einer vektoriellen Testfunktion $\vec{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^3$ und anschließende Integration über das Gebiet Ω. Diese Methode führt uns beim Außenraumproblem zu dem unbeschränkten und damit nichtintegrierbaren Aus-

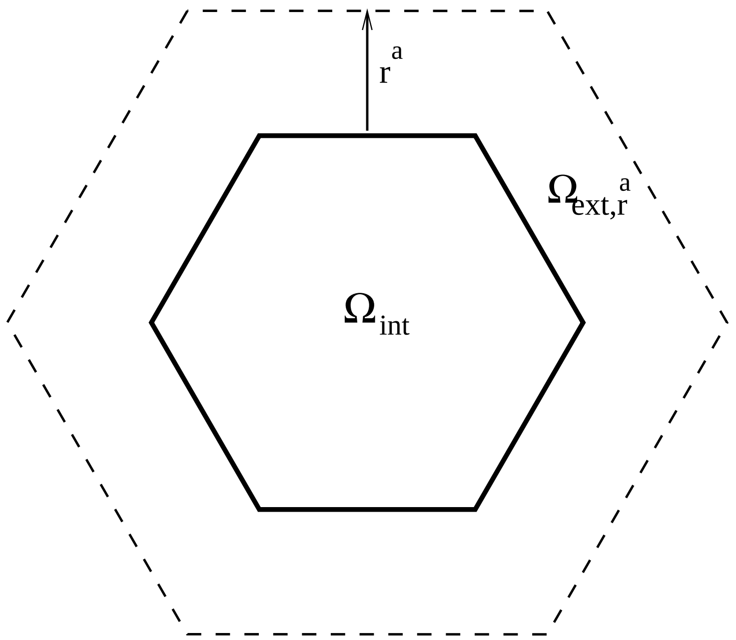

Abbildung 4.1: Behandlung des Außenraumproblems

druck

$$\mu^{-1}\int_{\Omega_{ext}} \text{rot rot}\vec{E}\cdot\vec{\phi} - \omega^2\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx = \int_{\Omega_{ext}} i\omega\vec{j}\cdot\vec{\phi}\,dx \quad \forall\vec{\phi}\in C^\infty(\Omega_{ext})^3. \quad (4.15)$$

Abhilfe schaffen wir uns dadurch, dass wir die Variationsformulierung für einen Ring Ω_{ext,r^a} mit endlichem Radius r^a angeben (siehe Abb. 4.1) und schließlich diesen Radius beliebig wachsen lassen ($r^a \to \infty$).

Dadurch lösen wir das Problem der Nichtintegriebarkeit. Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit $\vec{j} = 0$ annehmen und die gesamte Argumentation in 3D führen.
Wir stellen uns vor, dass wir einen Innenraum (z.B. einen Polyeder) haben. Um diesen herum legen wir einen dreidimensionalen Ring mit beschränktem Radius an. In diesem Ring werden wir die “schwache” Außenraumformulierung angeben. Wir erhalten also

$$\mu^{-1}\int_{\Omega_{ext,r^a}} \text{rot rot}\vec{E}\cdot\vec{\phi} - \omega^2\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx = 0 \quad \forall\vec{\phi}\in C^\infty(\Omega_{ext,r^a})^3. \quad (4.16)$$

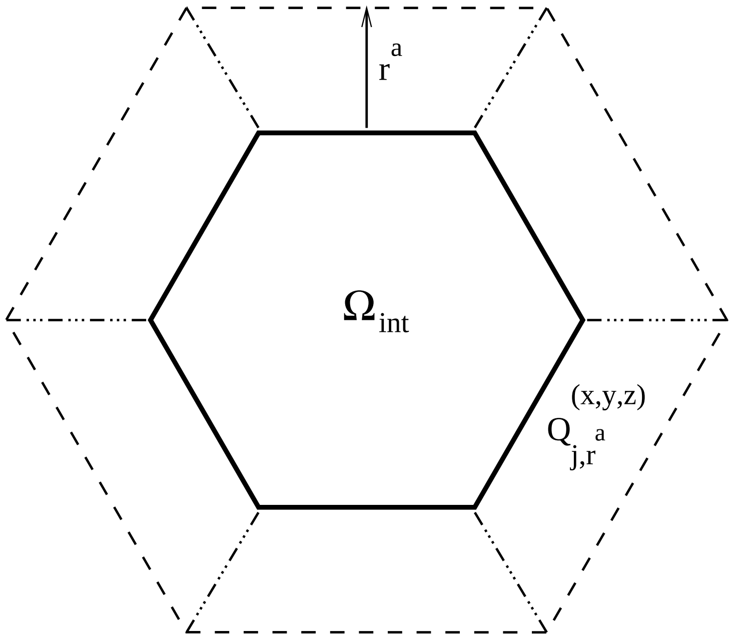

Abbildung 4.2: Zerlegung des Rings Ω_{ext,r^a} in Einzelsegmente $Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}$

Wir zerschneiden den Ring Ω_{ext,r^a} in einzelne Segmente $Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}$: Die Gleichung (4.16) gilt auch für jedes Einzelsegment $Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}$des Rings. Also erhalten wir

$$\mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \text{rot rot}\vec{E}\cdot\vec{\phi} - \omega^2\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx = 0 \quad \forall\vec{\phi} \text{ mit } \vec{\phi}\in C^\infty(\Omega_{ext,r^a})^3.$$

Anwendung der Regel $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{\phi}) = \vec{\phi}\cdot\nabla\times\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla\times\vec{\phi}$ (d.h. partielle Integration) mit $\vec{a} := \text{rot}\vec{E}$ und des Gaußschen Satzes ergibt für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
&\mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \text{rot rot}\vec{E}\cdot\vec{\phi}dV \\
&= \mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \nabla\cdot(\text{rot}\vec{E}\times\vec{\phi})dV + \mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \text{rot}\vec{E}\cdot\text{rot}\vec{\phi}dV \\
&= \mu^{-1}\int_{F_0+F_1+M} (\text{rot}\vec{E}\times\vec{\phi})d\vec{F} + \mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y)}} \text{rot}\vec{E}\cdot\text{rot}\vec{\phi}dV,
\end{aligned}$$

wobei das 1. Integral über die Oberfläche $F_0 + F_1 + M$ des jeweiligen Einzelsegments zu bilden ist. M ist die Mantelfläche des Einzelsegments und $F_0 + F_1$ sind die rechten und linken "Deckel". Als schwache Formulierung für ein Einzelsegment $Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}$ erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
&\mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \mathrm{rot}\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{\phi}dV + \mu^{-1}\int_{F_0+F_1+M}(\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{\phi})d\vec{F} \\
&\quad +\omega^2\varepsilon\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx = 0 \quad \forall\vec{\phi} \text{ mit } \vec{\phi}\in C^\infty(\Omega_{ext,r^a})^3.
\end{aligned}
$$

Im Hinblick auf die Anwendung der Polbedingung auf den Abstandsanteil des Außenraumproblems (die Laplace-Transformation wird bezüglich der Abstandsvariable durchgeführt), verwenden wir die Parametrisierung

$$
Q_{j,r^a}^{(loc)} : Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)} \to Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}
$$

um die Formulierung in eine Abstandsvariable ξ und zwei Winkelvariablen (η,ζ) zu zerlegen.

Die schwache Formulierung in den neuen Variablen lautet summandenweise:

$$
\mu^{-1}\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \mathrm{rot}\vec{\phi}\cdot\mathrm{rot}\vec{E}dV = \mu^{-1}\int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\frac{J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\widetilde{\phi}\right]^T\cdot\frac{J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\mid J\mid d\widetilde{V}
$$

$$
\mu^{-1}\int_{F_0+F_1+M}(\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{\phi})d\vec{F} = \mu^{-1}\int_{\widetilde{F}_0+\widetilde{F}_1+\widetilde{M}} J^{-T}(\frac{J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\times J^{-T}\widetilde{\phi})\mid J\mid d\widetilde{F}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^2\varepsilon\int_{Q_{j,r^a}^{(x,y,z)}} \vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx &= \omega^2\varepsilon\int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[J^{-T}\widetilde{E}\right]^T\cdot J^{-T}\widetilde{\phi}\mid J\mid d\widetilde{V} \\
&= \omega^2\varepsilon\int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \widetilde{E}^T\cdot J^{-1}J^{-T}\widetilde{\phi}\mid J\mid d\widetilde{V}
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen wir sämtliche Größen im Segment $Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}$ (d.h. in den neuen Variablen) mit einer Tilde. Wir werden im Folgenden unsere schwache Formulierung bezüglich der $\xi-$Variablen zurückintegrieren (Ziel: starke Formulierung bzgl. ξ). Wie früher erwähnt ist unser Ziel die Angabe einer "schwachen" Gleichung bezüglich der $(\eta,\zeta)-$Koordinaten und einer "starken" Gleichung in $\xi-$Koordinate. Dadurch erhalten wir eine "Evolutionsgleichung" bezüglich der $\xi-$Koordinaten.

$$
\mu^{-1}\int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\frac{J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\widetilde{\phi}\right]^T\cdot\frac{J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\mid J\mid d\widetilde{V}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \mathrm{rot}\widetilde{\phi}^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&= \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[(\partial_\xi \vec{e}_\xi + \nabla_\perp) \times \widetilde{\phi} \right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&= \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \widetilde{\phi} \right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&\quad + \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\nabla_\perp \times \widetilde{\phi} \right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&= \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \partial_\xi \vec{e}_\xi^{\,T} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&\quad + \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \widetilde{\phi}^T \cdot \left(\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&\quad + \mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\nabla_\perp \times \widetilde{\phi} \right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V}
\end{aligned}
$$

Wir unterziehen den 1. Summanden des letzten Ausdrucks einer partiellen Integration bezüglich ξ, um eine starke Formulierung der Außenraumgleichung bezüglich ξ zu erhalten

$$
\begin{aligned}
&\mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \partial_\xi \vec{e}_\xi^{\,T} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) d\widetilde{V} \\
&= \mu^{-1} \int_{\xi_0}^{\xi^a} d\xi \; \partial_\xi \int_{\widetilde{F}} \vec{e}_\xi^{\,T} dF_{\eta,\zeta} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) \\
&= -\mu^{-1} \int_{\widetilde{F}_0} \vec{e}_\xi^{\,T} dF_{\eta,\zeta} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right) \\
&\quad + \mu^{-1} \int_{\widetilde{F}_1} \vec{e}_\xi^{\,T} dF_{\eta,\zeta} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right)
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mu^{-1} \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \left[\frac{J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{\phi} \right]^T \cdot \frac{J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \mid J \mid d\widetilde{V} \\
&= -\mu^{-1} \int_{\widetilde{F}_0} \vec{e}_\xi^{\,T} dF_{\eta,\zeta} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid} \mathrm{rot}\widetilde{E} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu^{-1}\int_{\widetilde{F}_1} \vec{e}_\xi^{\,T} dF_{\eta,\zeta} \cdot \left(\widetilde{\phi} \times \frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) \\
&+\mu^{-1}\int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \widetilde{\phi}^T \cdot \left(\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) d\widetilde{V} \\
&+\mu^{-1}\int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \left[\nabla_\perp \times \widetilde{\phi}\right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) d\widetilde{V}
\end{aligned}
$$

Für den Randterm erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \mu^{-1}\int_{\widetilde{F}_0+\widetilde{F}_1+\widetilde{M}} \left(\frac{J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E} \times J^{-T}\widetilde{\phi}\right) J^{-T} \mid J \mid d\widetilde{F} \\
= \;& \mu^{-1}\int_{\widetilde{F}_0+\widetilde{F}_1+\widetilde{M}} J \; \mathrm{rot}\widetilde{E} \times J^{-T}\widetilde{\phi} J^{-T} d\widetilde{F} \\
= \;& \mu^{-1}\int_{\widetilde{F}_0+\widetilde{F}_1+\widetilde{M}} \left[J^T J \; \mathrm{rot}\widetilde{E} \times \widetilde{\phi}\right]^T \frac{1}{\mid J \mid} d\widetilde{F},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt von der Regel $J^{-1}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{|J|}(J^T\vec{a} \times J^T\vec{b})$ gebrauch gemacht haben. Insgesamt erhalten wir die Formulierung für ein Einzelsegment $Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}$:

$$
\begin{aligned}
& \mu^{-1}\int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \left[\nabla_\perp \times \widetilde{\phi}\right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) d\widetilde{V} \\
+ \;& \mu^{-1}\int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \widetilde{\phi}^T \cdot \left(\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) d\widetilde{V} \\
+ \;& \mu^{-1}\int_{\widetilde{M}} J^T J \; \mathrm{rot}\widetilde{E} \times \widetilde{\phi}\frac{1}{\mid J \mid} d\widetilde{F} \\
+ \;& \omega^2\varepsilon \int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \widetilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\widetilde{\phi} \mid J \mid d\widetilde{V} = 0
\end{aligned}
$$

Wir summieren über alle Einzelsegmente, dabei heben sich die übriggebliebenen Randterme (Mantelterme) $\mu^{-1}\int_{\widetilde{M}} \left[J^T J \; \mathrm{rot}\widetilde{E} \times \widetilde{\phi}\right]^T \frac{1}{|J|} d\widetilde{F}$ gegenseitig auf. Wir erhalten dadurch eine Formulierung im Ring Ω_{ext,ξ^a} :

$$
\mu^{-1}\int_{Q^{(\xi,\eta,\zeta)}_{j,\xi^a}} \left[\nabla_\perp \times \widetilde{\phi}\right]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J \mid}\mathrm{rot}\widetilde{E}\right) d\widetilde{V}
$$

$$+\mu^{-1}\int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \tilde{\phi}^T \cdot \left(\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^T J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\tilde{E}\right) d\tilde{V}$$
$$+\omega^2\varepsilon \int_{Q_{j,\xi^a}^{(\xi,\eta,\zeta)}} \tilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\tilde{\phi}\ \mid J\mid d\tilde{V} = 0$$

Man beachte, dass hier durch das Rückwärtsintegrieren und Summation über alle Einzelsegmente schließlich alle Randterme verschwinden. Dies war auch der Grund der Zerlegung des Rings in Einzelsegmente. Die obige Formulierung gilt für alle Testfunktionen, also speziell auch für Testfunktionen der Form $\tilde{\phi}(\xi,\eta,\zeta) = \delta(\xi)\vec{v}(\eta,\zeta)$, die dicht im Raum aller Testfunktionen liegen. Wir erhalten schließlich die endgültige Formulierung der zeitharmonischen Maxwell-Gleichung (4.3) im Außenraum.

Außenraumproblem “schwach” in (η,ζ) und “stark” in ξ

$$\overbrace{\mu^{-1}\int_F [\nabla_\perp \times \vec{v}(\eta,\zeta)]^T \cdot \left(\frac{J^T J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\tilde{E}\right) d\eta d\zeta}^{\text{schwache Formulierung in } (\eta,\zeta)} \tag{4.17}$$
$$\overbrace{+\mu^{-1}\int_F \vec{v}(\eta,\zeta)^T \cdot \left(\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^T J}{\mid J\mid}\mathrm{rot}\tilde{E}\right) d\eta d\zeta}^{\text{starke Formulierung in } \xi} \tag{4.18}$$
$$+\omega^2\varepsilon\int_F \tilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\vec{v}(\eta,\zeta)\ \mid J\mid d\eta d\zeta = 0 \tag{4.19}$$

Bemerkung:
(1) Im oberen Ausdruck wird über die Fläche F integriert. ξ^a taucht nicht mehr auf.
(2) Der Ausdruck (4.18) besitzt die Struktur einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE). Die obige Gleichung (4.17,4.18,4.19) ist als Anfangswertproblem lösbar, falls die Anfangswerte $\tilde{E}\mid_{\xi=0}$ und $\mathrm{rot}\tilde{E}\mid_{\xi=0}$ vorgegeben werden.
(3) Numerisch wird die obige Gleichung (4.17,4.18,4.19) jedoch nicht als Anfangswertproblem gelöst. Dabei würden analog wie bei der Helmholtz-Gleichung (siehe [21]) numerische Instabilitäten auftreten, die wir vermeiden möchten.

Zu **Frage 2)**: Im Verlauf dieser Arbeit werden wir diese Frage positiv beantworten, denn es reicht aus, die Polbedingung nur für die Tangentialkomponente zu fordern. Wir werden feststellen: Für Zylinderkoordinanten reicht es aus, die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der Außenraumlösung zu stellen. Die Normalenkomponente erfüllt dann die Polbedingung notwendig.

Innere Struktur der Gleichung

Wir werden in diesem Unterabschnitt die innere Struktur der obigen Außenraumformulierung untersuchen. Uns interessieren Beziehungen zwischen den Normalen- und Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes in der obigen Formulierung.

Für die Außenraumlösungen machen wir den physikalisch motivierten Ansatz

$$\widetilde{E}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_k u_{k,n}(\xi)\vec{v}_{k,n}(\eta,\zeta) + u_{k,t}(\xi)\vec{v}_{k,t}(\eta,\zeta). \tag{4.20}$$

Mit $\vec{v}_{k,n}(\eta,\zeta)$ bezeichnen wir den in $\xi-$Richtung zeigenden Vektor. Bei $\vec{v}_{k,t}(\eta,\zeta)$ unterscheiden wir stets zwischen dem in $\eta-$Richtung liegenden und dem in $\zeta-$Richtung liegenden Vektor. Das sind also zwei unterschiedliche Vektoren. Dieser Ansatzraum liegt im Lösungsraum dicht.

Mit dem Ansatz (4.20) wird (4.17,4.18,4.19) unter Verwendung der Regeln $\mathrm{rot}(u\vec{v}) = u\ \mathrm{rot}\vec{v} + \mathrm{grad}u \times \vec{v}$ und $\mathrm{grad}u_n \times \vec{v}_n = 0$ zu einem

System von Gleichungen aus Tangential- und Normalenkomponenten:

$$\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}]^T \cdot \frac{J^TJ}{\mid J\mid}\sum_k u_{k,n}\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + \mathrm{grad}u_{k,t}\times\vec{v}_{k,t} \tag{4.21}$$

$$+\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta \vec{v}^T \cdot (\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \frac{J^TJ}{\mid J\mid}\sum_k u_{k,n}\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t}\mathrm{grad}u_{k,t}\times\vec{v}_{k,t}) \tag{4.22}$$

$$+\omega^2\varepsilon\int_F(\sum_k u_{k,n}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}\vec{v}_{k,t}))J^{-1}J^{-T}\vec{v}\ \mid J\mid d\eta d\zeta = 0. \tag{4.23}$$

Bemerkung:

(a) Das System ist die geeignete Außenraumformulierung unter Verwendung von

(4.20) als Ansatz für die Außenraumlösung.
(b) Der obige Ausdruck ist ein "abstraktes Evolutionsproblem" in $\xi-$Richtung. Wir wissen, dass die obige Formulierung für alle $\vec{v}_{k,t}$, $\vec{v}_{k,n}$ und natürlich auch für alle $\vec{v} \in \{\vec{v}_{k,t}, \vec{v}_{k,n}\}_k$ gilt.

Wir kommen jetzt zur Frage 2, die wir am Anfang des Abschnittes gestellt haben. Dazu betrachten wir zwei Koordinatensysteme ("Parallele Streifen" und Zylinderkoordinaten). Wir werden feststellen, dass in diesen beiden Koordinatensystemen nur die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes die Polbedingung zu erfüllen braucht. Die Normalenkomponenten erfüllt die Polbedingung dann notwendig.

Beispiel (1): Parallele Streifen
Als ein sehr einfaches Beispiel nehmen wir die Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} Q &:= I, && (4.24)\\ \frac{J^T J}{\mid J \mid} &= I, && (4.25)\\ J^{-1}J^{-T} &= I. && (4.26) \end{aligned}$$

Wir erhalten aus (4.22) mit (4.24)

$$\begin{aligned} &\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\,[\nabla_\perp \times \vec{v}]^T \cdot \sum_k (u_{k,n}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + \mathrm{grad}u_{k,t}(\xi) \times \vec{v}_{k,t})\\ &+\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta \vec{v}^T \cdot (\partial_\xi \vec{e}_\xi \times \sum_k (u_{k,n}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t}\mathrm{grad}u_{k,t}(\xi) \times \vec{v}_{k,t})\\ &+\omega^2\varepsilon \int_F (\sum_k u_{k,n}(\xi)\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}(\xi)\vec{v}_{k,t}))\vec{v}\, d\eta d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Die obige Formulierung testen wir mit $\vec{v} = \vec{v}_n(\eta, \zeta)$, d.h. mit der Normalenkomponenten und erhalten

$$\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \sum_k (u_{k,n}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + \mathrm{grad} u_{k,t}(\xi) \times \vec{v}_{k,t})$$
$$+\omega^2\varepsilon \int_F (\sum_k u_{k,n}(\xi)\vec{v}_{k,n} + u_{k,t}(\xi)\vec{v}_{k,t}))\vec{v}_n\, d\eta d\zeta = 0.$$

Der mittlere Term ist verschwunden, da $\partial_\xi \vec{e}_\xi \times ...$ nur eine Tangentialkomponente besitzt und das Skalarprodukt mit $\vec{v}_n$ zu Null wird.

Wir erhalten schließlich eine funktionale Abhängigkeit der Normalenkomponente und der Tangentialkomponente

$$\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \sum_k (u_{k,n}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n}) + \omega^2\varepsilon \int_F (\sum_k u_{k,n}(\xi)\vec{v}_{k,n}) \tag{4.27}$$
$$= \mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \sum_k (u_{k,t}(\xi)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + \mathrm{grad} u_{k,t}(\xi) \times \vec{v}_{k,t}). \tag{4.28}$$

Dadurch erhalten wir das

Resultat (1): Ist die Tangentialkomponente bekannt, erhalten wir die Normalenkomponente durch die obige Funktionalbeziehung.

Wir unterziehen unsere Gleichung (4.27,4.28) einer Laplace-Transformation bezgl. ξ und erhalten

$$\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \sum_k \hat{u}_{k,n}(s)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + \omega^2\varepsilon \int_F \sum_k \hat{u}_{k,n}(s)\vec{v}_{k,n} \tag{4.29}$$
$$= \mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \sum_k \hat{u}_{k,t}(s)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + [s\hat{u}_{k,t}(s) - \hat{u}_{k,t}(0)] \times \vec{v}_{k,t}. \tag{4.30}$$

Für ein beliebiges aber festes k erhalten wir mit

$$A\hat{u}_{k,n} := \left(\mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n} + \omega^2\varepsilon \int_F (s)\vec{v}_{k,n}\right) \hat{u}_{k,n}$$

und

$$B\hat{u}_{k,t}(s) := \mu^{-1}\int_F d\eta d\zeta\, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \hat{u}_{k,t}(s)\ \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + [s\hat{u}_{k,t}(s) - \hat{u}_{k,t}(0)] \times \vec{v}_{k,t}$$

die Gleichung

$$A\hat{u}_{k,n}(s) = B\hat{u}_{k,t}(s) \tag{4.31}$$

Es folgt das wichtige

Resultat (2): Erfüllt die Tangentialkomponente $\hat{u}_{k,t}(s)$ die Polbedingung, so liefert uns die Gleichung (4.31), dass die Normalenkomponente $\hat{u}_{k,n}(s)$ ebenfalls die Polbedingung erfüllt.

Es gilt der

Satz: *Unter den Voraussetzungen*

(a) gegeben sei die Transformation (4.24),

(b) es existiert eine Lösung von (4.27,4.28),

(c) die Tangentialkomponente $u_{k,t}(\xi)$ erfüllt die Polbedingung ,

folgt, dass die zugehörige Normalenkomponente $u_{k,n}(\xi)$ die Polbedingung erfüllt.

Wir prüfen im Folgenden, ob dieser wichtige Sachverhalt auch für allgemeinere Koordinatensysteme gilt.

Beispiel (2): Zylinderkoordinaten

Wir behandeln das obige Problem in Zylinderkoordinaten. Dazu sei Q wie folgt definiert.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\cos(\eta) \\ \xi\sin(\eta) \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Mit

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \cos(\eta) & -\xi\sin(\eta) & 0 \\ \sin(\eta) & \xi\cos(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ J^TJ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$J^{-1}J^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mid J \mid = \xi$$

erhalten wir aus (4.17,4.18,4.19) durch testen mit $\vec{v} = \vec{v}_n(\eta, \zeta)$

$$\mu^{-1} \int_F d\eta d\zeta \, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \sum_k (u_{k,n}(\xi) \; \mathrm{rot}\vec{v}_{k,n})$$
$$+\omega^2 \varepsilon \int_F (\sum_k u_{k,n}(\xi)\vec{v}_{k,n}) \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix} \vec{v}_n d\eta d\zeta = r(\xi, \eta, \zeta),$$

wobei

$$r(\xi, \eta, \zeta) :=$$
$$\mu^{-1} \int_F d\eta d\zeta \, [\nabla_\perp \times \vec{v}_n]^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \sum_k (u_{k,t}(\xi) \; \mathrm{rot}\vec{v}_{k,t} + \mathrm{grad} u_{k,t}(\xi) \times \vec{v}_{k,t})$$

die gesamte rechte Seite bezeichnet, die nur die Tangentialkomponenten enthält. Wir testen die obige Gleichung mit speziellen Testfunktionen $\vec{v}_n(\eta, \zeta)$. Wir wissen, dass die $\vec{v}_n(\eta, \zeta)$ in $(L^2(\Omega_{ext}))^2$ liegen. Aus der Theorie der Hilberträume ist bekannt, dass die Fouriermoden $e^{i\nu\eta}\vec{e}_\xi, (\nu \in N)$ ein Orthonormalsystem (ONB) in $(L^2(\Omega_{ext}))^2$ bilden. Bei der Wahl der Testfunktionen reicht es daher aus, wenn wir uns auf diese Fouriermoden beschränken, d.h. $\vec{v}_{\nu,n}(\eta, \zeta) = e^{i\nu\eta}\vec{e}_\xi$. Achtung: Wir verwenden jetzt als Zählindex die Variable ν.

Mit $\vec{v}_{\nu,t,\eta}(\eta, \zeta) = e^{i\nu\eta}\vec{e}_\eta$ und $\vec{v}_{\nu,t,\zeta}(\eta, \zeta) = e^{i\nu\eta}\vec{e}_\zeta$ erhalten wir unter Verwendung von $\nabla \times \vec{v}_{\nu,n} = \nabla_\perp \times \vec{v}_{\nu,n} = (0, 0, -i\nu e^{i\nu\eta})^T$

$$\mu^{-1} \sum_\nu \frac{1}{\xi^2} u_{\nu,n}(\xi)(-\nu'\nu)(\int_0^{2\pi} d\eta e^{i\nu'\eta} e^{i\nu\eta}) + \omega^2 \varepsilon \sum_\nu u_{\nu,n}(\xi)(\int_0^{2\pi} d\eta e^{i\nu'\eta} e^{i\nu\eta})$$

$$= \frac{1}{\xi} r(\xi, \eta, \zeta).$$

Da die Fouriermoden ein ONS bilden, gilt

$$\int_0^{2\pi} d\eta e^{i\nu' \eta} e^{i\nu\eta} = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } \nu' = -\nu \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten deshalb die Gleichung

$$-\mu^{-1} \frac{(\nu')^2}{\xi^2} u_{\nu',n}(\xi) + \omega^2 \varepsilon u_{\nu',n}(\xi) = -\frac{1}{\xi} \left[\mu^{-1} \frac{\nu'}{\xi} \partial_\xi u_{\nu',t}(\xi) \right], \quad \forall \nu' \in N, \tag{4.33}$$

die eine vereinfachte Besselgleichung für die jeweiligen Komponenten darstellt.

Bemerkung:
(1) Im asymptotischen Fall, d.h. $\xi \to \infty$ erhalten wir

$$\omega^2 \varepsilon u_{\nu',n}(\xi) = -\frac{1}{\xi} \left[\mu^{-1} \frac{\nu'}{\xi} \partial_\xi u_{\nu',t}(\xi) \right], \text{ asymptotisch für } \xi \to \infty,$$

wobei der erste Summand in der linken Seite der Gleichung (4.33) (der Ausdruck mit $\frac{1}{\xi^2}$) verschwindet. Wir erhalten daher, dass im asymptotischen Fall die Normalenkomponente schneller (d.h. mit $\frac{1}{\xi}$) abfällt als die rechte Seite, die die Tangentialkomponente repräsentiert.

(2) Wie im Beispiel "Parallele Streifen" erhalten wir auch hier eine funktionale Beziehung zwischen der Normalen- und Tangentialkomponente der Lösung.

(3) Wie im Beispiel "Parallele Streifen" reicht es auch hier aus, die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der Lösung zu stellen.

Dabei transformieren wir die Gleichung (4.33) mittels $\xi \to \xi + \xi_0$ und unterziehen sie danach einer Laplace-Transformation L

$$\mu^{-1} (\nu')^2 L \left(\left(\frac{1}{\xi + \xi_0} \right)^2 u_{\nu',n}(\xi) \right) (s) - \omega^2 \varepsilon \hat{u}_{\nu',n}(s)$$

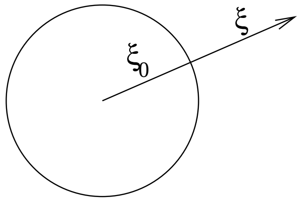

Abbildung 4.3: Translation der Gleichung (4.33) um ξ_0

$$= \mu^{-1}\nu' L\left(\left(\frac{1}{\xi+\xi_0}\right)^2 \partial_\xi u_{\nu',t}(\xi)\right)(s), \forall \nu' \in N$$

und erhalten mit der Regel (Beweis steht im Anhang von [21])

$$L\left(\left(\frac{1}{\xi+\xi_0}\right)^2 u(\xi)\right) = \int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)\xi_0}(s_1-s)\hat{u}(s_1) \tag{4.34}$$

schließlich

$$\begin{aligned}
&\mu^{-1}(\nu')^2 \int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)\xi_0}(s_1-s)\hat{u}_{\nu',n}(s_1) - \omega^2\varepsilon\hat{u}_{\nu',n}(s) \\
&= \mu^{-1}\nu' \int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)\xi_0}(s_1-s)(s\hat{u}_{\nu',t}(s_1) - u_{\nu',t}(0)), \forall \nu' \in N.
\end{aligned}$$

Diese ist eine Volterra-Integralgleichung

$$f(s) = g(s) + \int_s^\infty k(s,s_1)f(s_1)ds_1$$

mit

$$f(s) = \hat{u}_{\nu',n}(s),$$

$$g(s) = -\frac{\nu'}{\mu\varepsilon\omega^2}\int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)\xi_0}(s_1-s)(s\hat{u}_{\nu',t}(s_1) - u_{\nu',t}(0)),$$

$$k(s,s_1) = -\frac{(\nu')^2}{\mu\varepsilon\omega^2}e^{(s-s_1)\xi_0}(s_1-s).$$

Aus der allgemeinen Theorie der Volterra-Integralgleichungen (siehe dazu ***Theo-***

***rem 3.*6 in [14]) erhalten wir Existenz, Eindeutigkeit und Analytizität der Lösung $f(s)$, falls der Koeffizient $g(s)$ und der Kern $k(s, s_1)$ beide analytisch sind.

Da die Exponentialfunktion $e^{(s-s_1)\xi_0}$ und die Polynomfunktion $(s_1 - s)$ analytisch sind, folgt sofort die Analytizität des Kerns $k(s, s_1)$.
Ist $\hat{u}_{\nu',t}(s)$ auch analytisch, so folgt ebenfalls die Analytizität von $g(s)$. Insgesamt erhalten wir die Analyzität von $f(s) = \hat{u}_{\nu',n}(s)$. Damit folgt das wichtige

Resultat:
Erfüllt die Tangentialkomponente $u_{\nu',t}(\xi)$ bzw. $\hat{u}_{\nu',t}(s_1)$ die Polbedingung (d.h. Analytizität in der unteren komplexen Ebene nach der Laplace-Transformation) so folgt aus der allgemeinen Theorie der Volterra-Integralgleichungen die Analytizität der Normalenkomponente $\hat{u}_{\nu',n}(s)$ in der unteren komplexen Halbebene; damit erfüllt auch die Normalenkomponente die Polbedingung.

Wir erhalten damit einen ähnlichen Satz wie bei dem Fall der "Parallelen Streifen".

Satz: *Unter den Voraussetzungen*
(a) gegeben sei die Transformation (4.32),
(b) es existiert eine Lösung von (4.33),
(c) die Tangentialkomponente $u_{\nu',t}(\xi)$ erfüllt die Polbedingung ,
folgt, dass die zugehörige Normalenkomponente $u_{\nu',n}(\xi)$ die Polbedingung erfüllt.

Kapitel 5

Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen

Im 1. Abschnitt dieses Kapitels diskretisieren wir das schwache Innenraumproblem mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode in 2D, dabei halten wir uns an [9, 25]. Erwähnenswert ist die Verwendung anderer Basisfunktinen (Kantenelemente) im Falle der vektoriellen Maxwell-Gleichungen im Gegensatz zu den im skalaren Falle oft verwendeten Lagrange-Elementen. Diese Kantenelemente gehören heutzutage zu den Standardverfahren bei der numerischen Behandlung elektromagnetischer Felder. Im 2. Abschnitt diskretisieren wir das Außenraumproblem. Hierbei tritt das Problem eines unbeschränkten Gebietes auf. Wir verwenden eine spezielle Parametrisierung des Außenraumes, die zum einen allgemein genug ist, um möglichst viele Arten von physikalischen Problemstellungen behandeln zu können und die zum anderen das wichtige analoge Resultat wie bei den Zylinderkoordinaten im R^3 liefert, dass es ausreichend ist die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der diskreten Außenraumlösung zu stellen. Die Idee dieser speziellen Außenraumbehandlung stammt aus [21]. Wir haben es im Außenraum mit Rechtecken zu tun, daher sind die "klassischen" Kantenelemente (die für Dreiecke definiert sind) unbrauchbar. Wir geben spezielle Kantenelemente auf den Rechtecken vor, wobei wir uns an die Bedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponenten elektrischer Felder an Grenzflächen halten. Mit diesen Kantenelementen rechnen wir dann schließlich die Assemblierungsmatrizen des Außenraumes aus.

5.1 Diskretisierung des Innenraumproblems in 2D

Da man in der Numerik nur mit endlichdimensionalen Problemen rechnen kann, ist man gezwungen, Probleme in unendlichdimensionalen Räumen durch solche in endlichdimensionalen Räumen zu approximieren. Die Finite-Elemente-Diskretisierung besteht darin, den unendlichdimensionalen Raum $\mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ durch einen endlichdimensionalen Raum V_h zu ersetzen:

$$V_h \subset \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega), \qquad \dim V_h = 2N < \infty$$

Dabei steht h für einen Diskretisierungsparameter, und die Bezeichnung weist darauf hin, dass mit $h \to 0$ Konvergenz gegen die Lösung des gegebenen (kontinuierlichen) Problems erreicht werden soll.
V_h versehen mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)}$ ist wieder ein Hilbertraum. Da $V_h \subset \mathrm{H}^1_{\mathrm{rot}}(\Omega)$, ist $a(\vec{E},\vec{\phi})$ auch für $\vec{E}_h, \vec{\phi}_h \in V_h$ definiert, wobei der Index h die Zugehörigkeit zum Raum V_h ausdrückt. Damit läßt sich die Aufgabe

suche $\vec{E}_h \in V_h$, *so dass* $a(\vec{E}_h, \vec{\phi}_h) = (i\omega\vec{j}, \vec{\phi}_h)$ für alle $\vec{\phi}_h \in V_h$

stellen. Dabei ist $\vec{E}_h \in V_h$ die Lösung des endlichdimensionalen Problems.
Die Lösung, falls sie existiert, heißt die (zu V_h gehörende) Finite-Element-Lösung der Randwertaufgabe (4.1). Zur Berechnung von $\vec{E}_h$ wählt man eine Basis $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{2N}\}$ des endlichdimensionalen Raumes V_h.
Man erhält dann:

Suche $\vec{E}_h \in V_h$, *so dass* $a(\vec{E}_h, \vec{v}_i) = (i\omega\vec{j}, \vec{v}_i)$ für alle $i = 1, ..., 2N$.

Der Ansatz

$$\vec{E}_h = \sum_{k=1}^{2N} z_k \vec{v}_k$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{2N} a(\vec{v}_k, \vec{v}_i) z_k = (i\omega\vec{j}, \vec{v}_i), \quad i = 1, 2, ..., 2N.$$

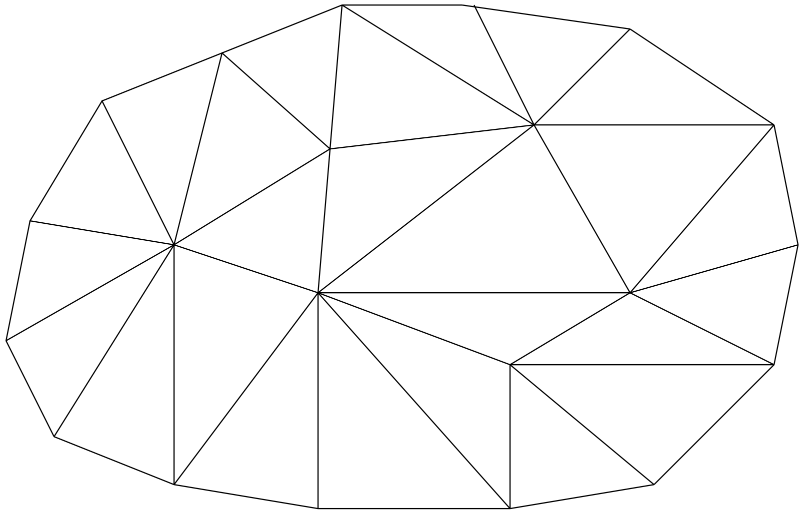

Abbildung 5.1: Triangulierung eines Gebietes in 2D

Mit $A_{ik} = a(\vec{v}_k, \vec{v}_i)$ und $f_i = (i\omega\vec{j}, \vec{v}_i)$ läßt sich das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form schreiben:

$$Az = f$$

Die Matrix A bezeichnet man als *Steifigkeitsmatrix*.

Man wählt in der Praxis eine Basis $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{2N}\}$, so dass die Steifigkeitsmatrix $A_{ik} = a(\vec{v}_k, \vec{v}_i)$ schwach besetzt ist. Solche Basisfunktionen sollten möglichst kleinen Träger haben. Wir werden im Folgenden einige Begriffe aus der Finite-Elemente-Theorie zusammenfassen. Dabei halten wir uns eng an [2, 9, 16, 25].

Definition: Es sei $\Omega \subset R^2$ polygonal berandet. Eine Menge $\mathcal{T}$ von Dreiecken T heißt *Triangulierung* von Ω, falls gilt:

(i) $\overline{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T$.

(ii) Der Schnitt zweier Dreiecke aus $\mathcal{T}$ ist entweder eine gemeinsame Kante, ein gemeinsamer Eckpunkt oder leer.

Definition: $\vec{x}$ heißt Knoten (von $\mathcal{T}$), falls $\vec{x}$ Eckpunkt eines $T \in \mathcal{T}$. Dabei unterscheidet man innere Knoten und Randknoten, je nachdem ob $\vec{x} \in \Omega$ oder $\vec{x} \in \partial\Omega$. N bezeichnet die Gesamtzahl der Knoten.

Definition:

Die **Hutfunktionen** λ_i sind an den Knoten $\vec{x}_j$ der Tringulierung $\mathcal{T}$ definiert

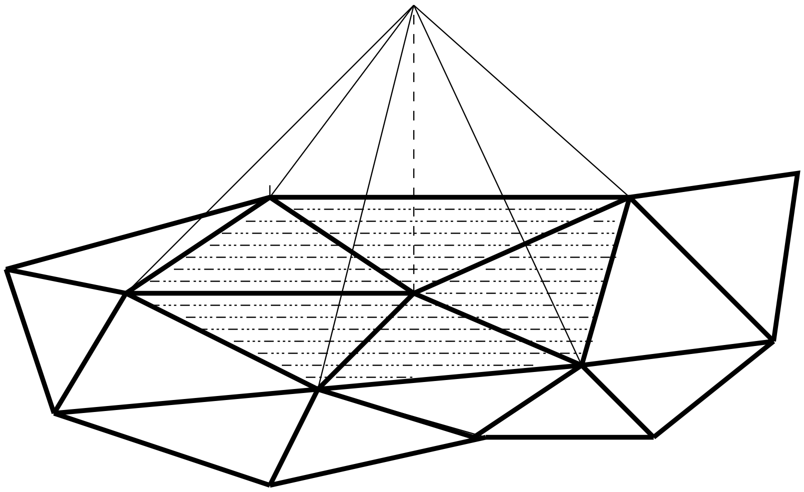

Abbildung 5.2: Hutfuktion

durch

$$\lambda_i(\vec{x}_j) = \delta_{ij}\,, \qquad \forall i, j = 1, ..., N.$$

$\lambda_i(\vec{x})$ ist eine elementweise affine und in $\overline{\Omega}$ global stetige Funktion, die dem Knoten i zugeordnet ist. Der Träger von $\lambda_i(\vec{x})$ besteht also aus den Dreiecken, die den gemeinsamen Knoten enthalten (siehe Abb. 5.2).

Wir wissen bereits aus dem ersten Abschnitt, dass eine wichtige physikalische Eigenschaft elektrischer Felder die Stetigkeit der Tangentialkomponente beim Übergang an Grenzflächen ist. Diese Stetigkeitseigenschaft elektrischer Felder sollte beim Übergang zu endlichdimensionalen Räumen erhalten bleiben, da sonst die endlichdimensionale Approximation die Physik nicht richtig berücksichtigen würde. Dazu betrachten wir das

Lemma: *Es sei $\Omega \subset R^2$ und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $\overline{\Omega}$. Eine Teilmenge $V_h \subset (L^2(\Omega))^2$ ist genau dann in $H^1_{rot}(\Omega)$ enthalten (d.h. konform), wenn die Komponente in Richtung der Tangente $\vec{u} \times \vec{n}$ für jedes $\vec{u} \in V_h$ an den Elementgrenzen (bzw. Dreiecksgrenzen) stetig ist.*
Beweis siehe [25].

Um also die Tangentialstetigkeit auf das diskrete Problem zu übertragen, reicht es *konforme* Finite-Elemente-Räume zu betrachten.

Wir geben Basisfunktionen an, die einen konformen Finite-Elemente-Raum aufspannen.

Lineare Lagrange-Elemente, deren Freiheitsgrade über die Knoten der Triangulierung definiert sind (analog zu den Hutfunktionen) erfüllen die Forderung aus dem obigen Lemma. Der Nachteil ist, dass bei ihnen auch die Stetigkeit der Normalenkomponente über Elementgrenzen hinweg festgeschrieben wird. Da aber die Normalenkomponente des elektrische Feldes unstetig an Materialgrenzen ist, kann dieses Phänomen in diesen Finite-Elemente-Räumen nicht abgebildet werden. Sie lassen sich modifizieren. Man muß zusätzliche Freiheitsgrade an den Knoten einführen, dies ist aber mit einem zu hohen Aufwand verbunden. Wir werden andere Finite-Elemente-Räume konstruieren, die die Forderung aus dem Lemma erfüllen und noch zusätzlich die physikalischen Eigenschaften der elektrischen Felder exakter berücksichtigen. Der wichtigste Unterschied liegt in der Wahl der Freiheitsgrade. Sie sind nicht mehr wie bei den Lagrage-Elementen den Knoten zugeordnet, sondern den Kanten der Triangulierung, d.h. anstelle der Auswertung an den Knoten der Triangulierung benutzt man die Zirkulation des Feldes entlang der Kanten der Triangulierung. Es werden Basisfunktionen angegeben, die das Analogon zu den Hutfunktionen für stetige Finite-Elemente darstellen. Diese Basisfunktionen wurden zum ersten Mal von Whitney [26] in einem anderen mathematischen Zusammenhang (Differentialgeometrie) angegeben. Erst später erkannte unteranderem Nedelec [17] ihre Anwendbarkeit auf die Finite-Elemente-Theorie der Maxwell-Gleichungen. Jeder Kante $e = \overline{i_0 i_1} \in \mathcal{E}$ mit den zugehörigen Knoten $i_0, i_1 \in \mathcal{K}$ wird eine vektorielle Basisfunktion (Kantenelement) zugeordnet,

$$\vec{w}_e = \lambda_0 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_0, \tag{5.1}$$

wobei hier λ_0 und λ_1 die Hutfunktionen bezeichnen.

Da in 2D an jeder Kante der Triangulierung zwei benachbarte Dreiecke angrenzen, erstreckt sich der Träger des Kantenelements nur über diese Dreiecke.

Die Basisfunktion $\vec{w}_e$ besitzt eine konstante Tangentialkomponente entlang der Kante $e = \overline{i_0 i_1}$. Dies sieht man so: Sei $\vec{e}$ der Einheitsvektor auf der Kante $e = \overline{i_0 i_1} \in \mathcal{E}$, der vom Knoten i_0 auf den Knoten i_1 zeigt. Die Funktion λ_0 ist affin. Sie nimmt vom Wert eins auf dem Knoten i_0 zum Wert Null auf dem Knoten i_1 ab. Eine analoge Begründung gilt für die Funktion λ_1. Wir erhalten also $\vec{e} \cdot \nabla \lambda_0 = -1/l^e$ und $\vec{e} \cdot \nabla \lambda_1 = 1/l^e$, wobei l^e die Länge der Kante e ist.

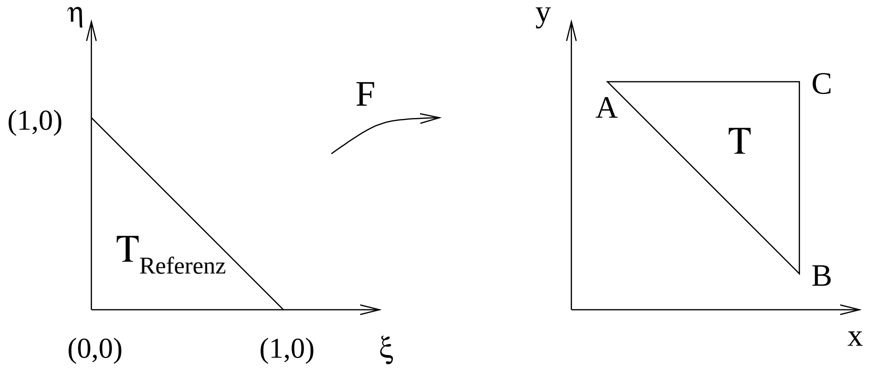

Abbildung 5.3: Affine Transformation

Insgesamt erhalten wir

$$\vec{e} \cdot \vec{w}_e = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{l^e} = \frac{1}{l^e} = \text{const.}$$

Die Funktion $\vec{w}_e$ besitzt entlang der anderen Kanten keine Tangentialkomponente, da dort die Hutfunktionen verschwinden. Der zu der Kante e zugehörige Freiheitsgrad z_e ist das Integral $\int_e \vec{w}_e \cdot d\vec{l} = z_e$ über die Kante e.

Wegen (5.1) können die Einträge der Steifigkeitsmatrix effizient berechnet werden. Außerdem ist die Steifigkeitsmatrix schwach besetzt, da die Basisfunktionen einen beschränkten Träger besitzen. Um die Approximationseigenschaft des mit diesen Basisfunktionen erzeugten Finite-Elemente-Raumes zu untersuchen, wendet man eine Technik an, die den Finite-Elemente-Raum bezüglich eines Referenzelementes beschreibt und über eine Affintransformation alle Eigenschaften anhand dieses Referenzelementes nachweist. Außerdem reicht es, die lokale Stetifigkeitsmatrix nur bezüglich des Referenzelementes zu berechnen. Mit der Affintransformation erhält man dann die Steifigkeitsmatrix bezüglich jedes der Dreiecke der Triangulierung. Man setzt dann die lokalen Matrizen geeignet zu einer Steifigkeitsmatrix zusammen.

Sei $\hat{T} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : \xi \geq 0, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1 \right\}$ das Referenzdreieck in R^2. Ein allgemeines Dreieck T läßt sich mit der invertierbaren affinen Abbildung $F : \hat{T} \to T$ der Form

$$(x, y)^T = F(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)^T + b, \quad b \in R^2, A = (a_{ij}) \in GL(2)$$

dem Referenzelement $\hat{T}$ zuordnen. Dabei bezeichnen A bzw. b zugehörig zum Teilgebiet T eine Matrix bzw. einen Vektor. Es besitze das Dreieck T die Eckpunkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt hierfür speziell

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt drei Kantenelemente (Basisfunktionen) auf dem Referenzdreieck. Sie haben dieselbe Form wie die Kantenelemente der Triangulierung. Auch die Freiheitsgrade auf den Kanten des Referenzdreieckes haben dieselbe Gestalt. Bei der Transformation von kontinuierlichen Vektorfeldern (wie z.B. $\vec{E}$) sind die Freiheitsgrade invariant bezüglich der Transformation F. Natürlich will man, dass diese Eigenschaft auch bei der Diskretisierung erhalten bleibt. Die Kantenelemente erfüllen diese Eigenschaft sehr gut. Bevor wir dies einsehen können, benötigen wir zunächst die Jakobimatix $J := A'$ und die Jakobideterminate $\mid J \mid$der invertierbaren affinen Abbildung A.

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\ \mid J \mid &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

Außerdem benötigen wir noch das

Transformationsverhalten elektrischer Felder (Tensoren) in 2D:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}(\xi, \eta) &= J^T(\vec{E}(x, y)) && (5.2) \\ \mathrm{rot}\vec{E}(x, y) &= \mid J \mid^{-1} \mathrm{rot}\widetilde{E} && (5.3) \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\int_e \vec{E}_h(x, y) \cdot d\vec{l} = \int_e \widetilde{E}(\xi, \eta) \cdot \widehat{d\vec{l}}$$

und

$$J^T(\lambda_0 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_0\ ) = \hat{\lambda}_0 \nabla \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_1 \nabla \hat{\lambda}_0.$$

mit der Transformation für skalare Funktionen $\hat{\lambda} = \lambda \circ F$. Wir werden im Folgendem manchmal das Dach für das Referenzelement weglassen, wenn dies aus dem Kontext klar sein sollte.

Durch die drei Kantenelemente auf jedem Dreieck (man braucht sich nur das Referenzdreieck anzuschauen) wird ein Polynomraum $P(T)$ aufgespannt. Auf dem Referenzdreieck hat man $\hat{P}(\hat{T})$. Üblich ist es, in der Finite-Elemente-Theorie einen Interpolationsoperator I (bzw.$\hat{I}$) einzuführen. Mithilfe dieses Operators erhält man einen Approximationssatz. Zunächst definieren wir den Interpolationsoperator für $W^{1,p}(T)$ mit $p > 2$:[1]

Definition:

Es sei $u \in W^{1,p}(T)$ mit $p > 2$. $\sum := \{\int_e p \cdot d\vec{l}$ für alle Kanten von $T\}$ sei die Menge der Freiheitsgrade, durch die ein Polynom $p \in P(T)$ eindeutig festgelegt ist. $\sum$ definiert einen Interpolationsoperator

$$I : W^{1,p}(T) \to P(T),$$

der jedem $u \in W^{1,p}(T)$ das durch die Forderung

$$\int_e (u - Iu) \cdot d\vec{l} = 0$$

für alle Kanten e von T eindeutig bestimmte Polynom $Iu \in P(T)$ zuordnet.

Bezeichnet man mit $\hat{I}$ den den Interpolationsoperator, der dem Referenzelement $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ zugeordnet wird und jedem $\hat{u} \in W^{1,p}(\hat{T})$ das durch

$$\int_{\hat{e}} (\hat{u} - \hat{I}\hat{u}) \cdot \widehat{d\vec{l}} = 0 \quad \forall \hat{e} \subset \partial \hat{T}$$

eindeutig bestimmte Polynom $\hat{I}\hat{u} \in \hat{P}(\hat{T})$ zuordnet, dann folgt aus den Invarianzeigenschaften der Affintransformation, dass es gleichgültig ist, ob man ein Vektorfeld $u \in W^{1,p}(T)$ zuerst interpoliert und dann auf das Referenzelement

[1] siehe Walsleben [25].

transformiert oder umgekehrt vorgeht. Dann gilt

$$\int_{\hat{e}} \widehat{Iu} \cdot \widehat{d\vec{l}} = \int_e Iu \cdot d\vec{l} = \int_e u \cdot d\vec{l} = \int_{\hat{e}} \hat{u} \cdot \widehat{d\vec{l}} = \int_{\hat{e}} \hat{I}\hat{u} \cdot \widehat{d\vec{l}} \quad \forall \hat{e} \subset \partial T.$$

Da aber $\widehat{Iu} - \hat{I}\hat{u} \in \hat{P}(\hat{T})$ durch

$$\int_{\hat{e}} (\widehat{Iu} - \hat{I}\hat{u}) \cdot \widehat{d\vec{l}} = 0 \quad \forall \hat{e} \subset \partial \hat{T}$$

eindeutig festgelegt ist, folgt

$$\widehat{Iu} = \hat{I}\hat{u} \quad \text{bzw.} \quad A^T[(Iu \circ F)] = \hat{I}[A^T(u \circ F)].$$

Mit diesem Interpolationsoperator kann man bekannte Finite-Elemente-Räume auch über

$$\mathcal{W}_h^1 := \{u_h \in H^1_{\text{rot}}(\Omega) \mid u_h \mid_T \in P(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

einführen. Der Interpolationsoperator

$$I_h : W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}_h^1$$

ist aufgrund der bisherigen Ergebnisse wohldefiniert. Nun kommen wir zum Approximationssatz. Genaueres dazu findet man in [16, 25].

Approximationssatz:
Es sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine reguläre Familie von Triangulierungen und $\mathcal{W}_h^1 \subset H^1_{rot}(\Omega)$ eine zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen zum Referenzelement $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\sum})$. Dann gilt für den Interpolationsoperator $I_h : (H^2(\Omega))^2 \to \mathcal{W}_h^1$

$$\| u - I_h u \|_{H^1_{rot}(\Omega)} \leq k_1 h \{ | u |_{1,\Omega} + | u |_{2,\Omega} \} \quad \forall u \in (H^2(\Omega))^2.$$

Den Beweis findet man in Nedelec [17].

Berechnung der Assemblierungsmatrizen (4.6,4.7):
Unser Ausgangspunkt ist die schwache Formulierung des Innenraumproblems nach Abschnitt 4.2, wobei wir hier $\vec{j} = 0$ setzen.

$$\int_\Omega \mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{\phi}\cdot\mathrm{rot}\vec{E} - \omega^2\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx + \int_\Gamma (\mathrm{rot}\vec{E}\times\vec{n})\cdot\vec{\phi}\,dx = 0 \quad \forall\vec{\phi}\in(C^\infty(\Omega))^2.$$

Wir werden den Randterm hier nicht diskretisieren. Für die restlichen Terme werden die Assemblierungsmatrizen nur für das Referenzdreieck berechnet.

Mit den Hutfunktionen bzw. linearen Formfunktionen (siehe dazu [9]) für das Referenzdreieck

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1-\xi-\eta,\\ \lambda_2 &= \xi,\\ \lambda_3 &= \eta,\end{aligned}$$

erhalten wir für die Kantenelemente

$$\begin{aligned} w_1 = \lambda_1\nabla\lambda_2 - \lambda_2\nabla\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 1-\eta \\ \xi \end{pmatrix},\\ w_2 = \lambda_2\nabla\lambda_3 - \lambda_3\nabla\lambda_2 &= \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix},\\ w_3 = \lambda_3\nabla\lambda_1 - \lambda_1\nabla\lambda_3 &= \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi-1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit (5.2,5.3) erhalten wir im Referenzdreieck

$$\begin{aligned} \mu^{-1}\int_T \mathrm{rot}\vec{\phi}\cdot\mathrm{rot}\vec{E}\,dx &= \mu^{-1}\int_{\hat{T}} \mid J\mid^{-1}\mathrm{rot}\widetilde{\phi}\cdot\mathrm{rot}\widetilde{E}\,d\xi d\eta\\ -\omega^2\varepsilon\int_T \vec{E}\cdot\vec{\phi}\,dx &= -\omega^2\varepsilon\int_{\hat{T}} \widetilde{\phi}\cdot J^{-1}J^{-T}\,\widetilde{E}\,\mid J\mid d\xi d\eta,\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{E} = (E_\xi, E_\eta)^T$ und $\widetilde{\phi} = (\phi_\xi,\phi_\eta)^T := (w_{i,\xi}, w_{i,\eta})^T$, $\forall i = 1,2,3$ die physikalischen Größen im Referenzdreieck bezeichnen.
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\int_{\hat{T}} \mathrm{rot}\widetilde{\phi}\cdot \mid J\mid^{-1} \mathrm{rot}\widetilde{E} d\xi d\eta \\
= &\frac{1}{\mu}\int_{\hat{T}} \partial_\xi \phi_\eta(\mid J\mid^{-1} \mathrm{rot}\widetilde{E}) d\xi d\eta \\
&-\frac{1}{\mu}\int_{\hat{T}} \partial_\eta \phi_\xi(\mid J\mid^{-1} \mathrm{rot}\widetilde{E}) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Mit

$$J^{-1}J^{-T} \mid J \mid = \frac{1}{\mid J\mid}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned}
b_{11} &= (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 \\
b_{12}=b_{21} &= -(y_3-y_1)(y_2-y_1)-(x_3-x_1)(x_2-x_1) \\
b_{22} &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2
\end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\mid J\mid^{-1}\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}} \partial_\xi\phi_{i,\eta}\partial_\xi\phi_{k,\eta} d\xi d\eta\right)\vec{z} \\
&-\frac{1}{\mu}\mid J\mid^{-1}\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}} \partial_\xi\phi_{i,\eta}\partial_\eta\phi_{k,\xi} d\xi d\eta\right)\vec{z} \\
&-\frac{1}{\mu}\mid J\mid^{-1}\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}} \partial_\eta\phi_{i,\xi}\partial_\xi\phi_{k,\eta} d\xi d\eta\right)\vec{z} \\
&+\frac{1}{\mu}\mid J\mid^{-1}\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}} \partial_\eta\phi_{i,\xi}\partial_\eta\phi_{k,\xi} d\xi d\eta\right)\vec{z} \\
&+\omega^2\varepsilon\mid J\mid\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}}(\phi_{i,\xi}b_{11}\phi_{k,\xi}+\phi_{i,\xi}b_{12}\phi_{k,\eta}) d\xi d\eta\right)\vec{z} \\
&+\omega^2\varepsilon\mid J\mid\left(\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\hat{T}}(\phi_{i,\eta}b_{12}\phi_{k,\xi}+\phi_{i,\eta}b_{12}\phi_{k,\eta}) d\xi d\eta\right)\vec{z}
\end{aligned}$$

Lokale Steifigkeitsmatrix für das Innenraumproblem:

$$
\begin{aligned}
A_{in}^{loc} &= \frac{1}{\mu}\frac{1}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\quad +\omega^2\varepsilon(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)b_{11}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&\quad +\omega^2\varepsilon(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)b_{22}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&\quad +\omega^2\varepsilon(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)b_{12}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Assembliert man über alle Dreiecke der Triangulierung erhält man schließlich die **Steifigkeitssmatrix des Innenraumproblems**

$$A_{in} = \sum_{T\in\mathcal{T}} A_{in}^{loc}. \tag{5.4}$$

5.2 Semidiskretisierung des Außenraumproblems in 2D

Variationsformulierung des Außenraumproblems in 2D

Wir geben (4.17,4.18,4.19) in 2D an. Dazu machen wir von einer speziellen Koordinatentransformation gebrauch.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Wir haben hier Indizes weggelassen, da aus dem Kontext klar ist, dass solche Abbildungen nur segmentweise definiert sind. Diese Abbildung soll nur andeuten, dass die 3. Komponete keine funktionale Beziehung aufweist. Dadurch werden wir aus unserem Variationsproblem in 3D ein 2D Problem erhalten.

Wir geben hier die Jakobi-Matrix der Abbildung (5.5) an.

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x & 0 \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^T J = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y & 0 \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x & 0 \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $F_{11} = (\partial_\xi x)^2 + (\partial_\xi y)^2$, $F_{12} = F_{21} = \partial_\xi x \partial_\eta x + \partial_\xi y \partial_\eta y$,$F_{22} = (\partial_\eta x)^2 + (\partial_\eta y)^2$.

$$J^{-1} J^{-T} = \frac{1}{\mid J \mid^2} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix}$$

wobei $G_{11} = (\partial_\eta x)^2 + (\partial_\eta y)^2$, $G_{12} = -\partial_\eta y \partial_\xi y - \partial_\eta x \partial_\xi x$, $G_{21} = -\partial_\eta y \partial_\xi y - \partial_\xi x \partial_\xi x$, $G_{22} = (\partial_\eta x)^2 + (\partial_\xi x)^2$, $G_{33} = \partial_\xi x \partial_\eta y - \partial_\xi y \partial_\eta x$.

Für die Lösungen und Testfunktionen machen wir den Ansatz

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} E_\xi(\xi,\eta) \\ E_\eta(\xi,\eta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}(\eta) = \begin{pmatrix} v_\xi(\eta) \\ v_\eta(\eta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind also unabhängig von der 3. Komponente (wir wollen ja schließlich ein 2D Problem erhalten) und die anderen Komponenten hängen nicht von ζ ab. Eingesetzt in (4.17,4.18,4.19) erhalten wir die Variationsformulierung in 2D

$$\begin{aligned}
&\mu^{-1}\int_{\Gamma_\eta} -\partial_\eta v_\xi \frac{1}{\mid J \mid}(\partial_\xi \widetilde{E}_\eta - \partial_\eta \widetilde{E}_\xi)d\eta \\
&+\mu^{-1}\int_{\Gamma_\eta} v_\eta[\partial_\xi(\frac{1}{\mid J \mid}(\partial_\xi \widetilde{E}_\eta - \partial_\eta \widetilde{E}_\xi))]d\eta \\
&+\omega^2\varepsilon\int_{\Gamma_\eta} \widetilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\vec{v}(\eta) \mid J \mid d\eta d\zeta = 0,
\end{aligned}$$

wobei jetzt die Größen folgendermaßen definiert sind

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} E_\xi(\xi,\eta) \\ E_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}(\eta) = \begin{pmatrix} v_\xi(\eta) \\ v_\eta(\eta) \end{pmatrix},$$

$$J^{-1}J^{-T} = \frac{1}{\mid J \mid^2}\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

Semidiskretisierung in 2D

Wir fassen die Terme, die zu einer Ableitung von $\widetilde{E}$ gehören, zusammen und erhalten die gewünschten Sesquilinearformen

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} \frac{1}{\mid J \mid} v_\eta \partial_{\xi\xi} \widetilde{E}_\eta, \\
a_1 &= -\mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} \frac{1}{\mid J \mid} \partial_\eta v_\xi \partial_\xi \widetilde{E}_\eta + \mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} (\partial_\xi \frac{1}{\mid J \mid}) v_\eta \partial_\xi \widetilde{E}_\eta \\
&\quad -\mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} \frac{1}{\mid J \mid} v_\eta \partial_\xi \partial_\eta \widetilde{E}_\xi, \\
a_0 &= \mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} \frac{1}{\mid J \mid} \partial_\eta v_\xi \partial_\eta \widetilde{E}_\xi - \mu^{-1} \int_{\Gamma_\eta} (\partial_\xi \frac{1}{\mid J \mid}) v_\eta \partial_\eta \widetilde{E}_\xi \\
&\quad +\omega^2 \varepsilon \int_{\Gamma_\eta} \widetilde{E}^T \cdot J^{-1} J^{-T} \vec{v}(\eta) \ \mid J \mid d\eta.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Sesqulinearformen leiten wir eine gewöhnliche FE-Diskretisierung entlang der $\eta-$Koordinate her.

Bei der folgenden Behandlung des Außenraumes lehnen wir uns an [21]. Wir zerlegen den Außenraum in eine endliche Zahl von Segmenten, wie in Abbildung 5.4 gezeigt. Jeder Knoten des polygonalen Randes wird durch einen geraden Strahl - wobei die einzelnen Strahlen sich nicht schneiden - mit dem Unendlichen verbunden. In jedem dieser Segmente wird die gesuchte Lösung approximiert. Wir werden die Approximation später noch genauer erläutern. Anschließend setzen wir die Funktionen zusammen und erhalten so eine globale Außenraumlösung. Es sei erwähnt, dass man für die Diskretisierung auch gekrümmte Strahlen nehmen kann.

Wir präzisieren unsere Überlegungen:

Definition: [21] Sei $\Omega_{ext} = R^2 \setminus \Omega_{int}$ der zugehörige Außenraum und $\partial\Omega_{int}$ sein polygonaler Rand mit den Knoten $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_N\}$. Wir identifizieren jeden Knoten p_j mit einem Strahl g_j. Die Menge $G = \{g_1, g_2, ..., g_N\}$ ist eine zulässige Menge von Strahlen, falls die folgenden Bedingungen für jedes $j \in 1, ..., N$ zutreffen:

(1) *(Linearität.)* Sei p_j gegeben. Die Kanten e_i und $e_k, i, k \in 1, ..., N, i \neq k$ haben p_j als gemeinsamen Knoten. Sei p_i der zweite Knoten von e_i und p_k der zweite Knoten von e_k. Nun definieren wir zwei Einheitsvektoren, die von p_j wegzeigen:

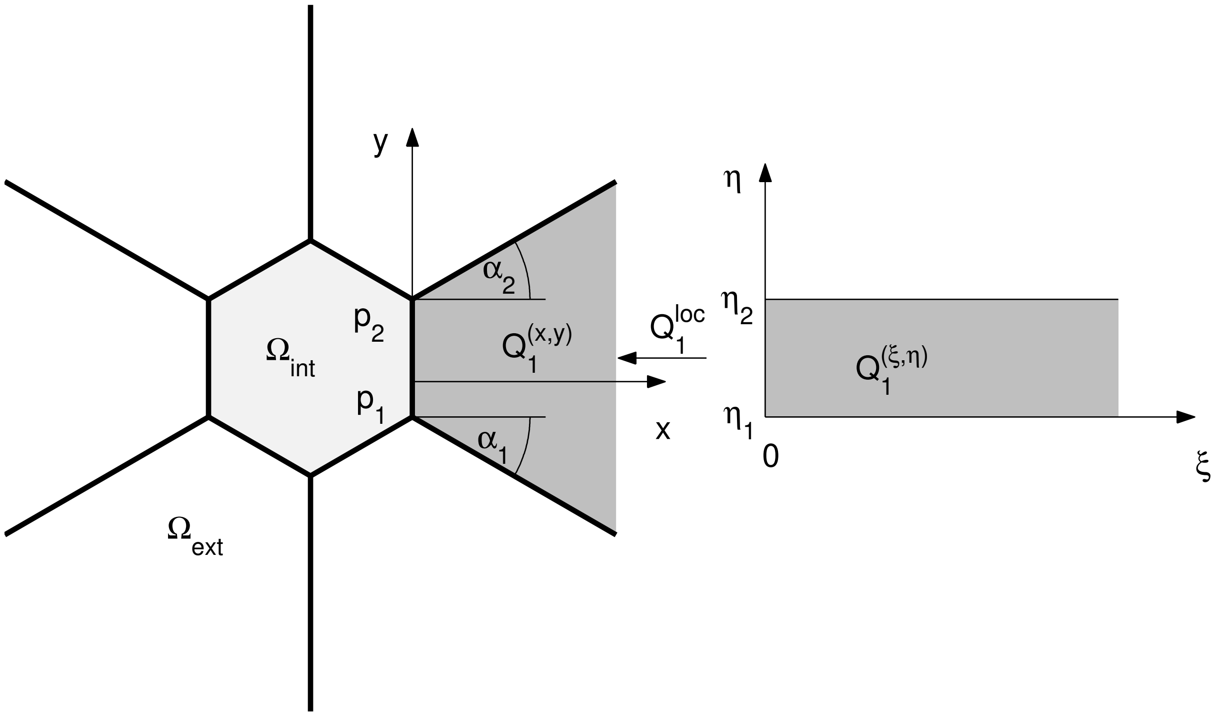

Abbildung 5.4: Diskretisierung des Außenraums durch Strahlen. (Bild aus [21])

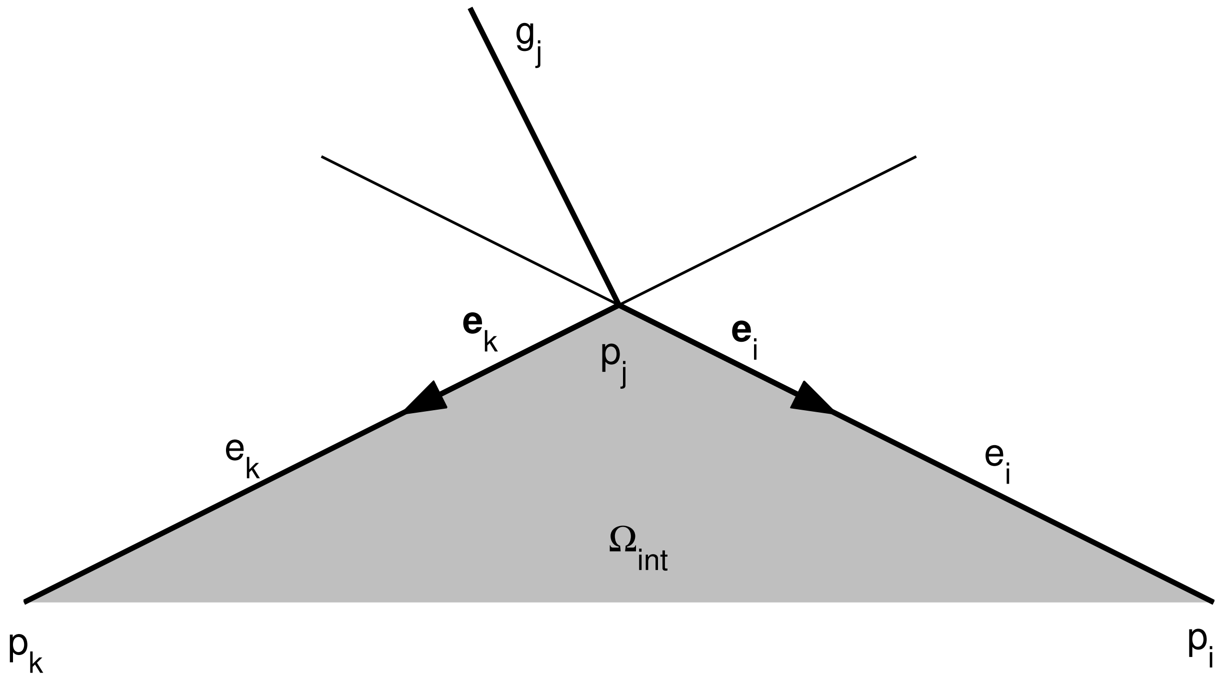

Abbildung 5.5: Konstruktion der Strahlen g_j, die mit den Ecken p_j assoziiert werden, falls der innere Winkel kleiner als ein Rechteckwinkel ist. (Bild aus[21])

$$e_i = \frac{(p_i - p_j)}{\mid p_i - p_j \mid} \text{ und } e_k = \frac{(p_k - p_j)}{\mid p_k - p_j \mid}$$

(a) Schneidet $\overline{p_i p_k}$ den Innenraum Ω_{int}, dann besitzt der Strahl g_j folgende Darstellung: $g_j(\tau) = p_j + \tau(c_i e_i + c_k e_k)$ mit $\tau \in R_+$, wobei c_i und c_j strikt negativ sind.

(b) Schneidet $\overline{p_i p_k}$ jedoch Ω_{ext}, dann verwenden wir wieder die obige Darstellung, nur mit strikt positiven c_i und c_j.

(c) Liegen p_i, p_j, p_k auf einem gemeinsamen Strahl, dann haben wir folgende Darstellung : $g_j(\tau) = p_j + \tau(c_i e_i + c_n n)$, wobei n der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor und c_n eine strikt positive Zahl ist.

(2) *(Schnittbedingung)* Die Strahlen schneiden sich nicht im Außenraum. Die einzigen gemeinsamen Punkte mit $\overline{\Omega_{int}}$ sind die Knoten auf dem polygonalen Rand.
(3) *(Geometrische Ähnlichkeit)* Es gibt positive Konstanten $\gamma_1, ..., \gamma_N$, so dass für alle $\tau > 0$ die Punkte $p_1^{'} = g_1(\gamma_1 \tau), ..., p_N^{'} = g_N(\gamma_N \tau)$ die Knoten eines neuen Polygons sind. Die neuen Knoten sind in ähnlicher Weise wie die Knoten des Originalpolygons miteinander verbunden. Die Kanten des neuen Polygons sind zu den Kanten des Originalpolygons parallel.

Wir werden zwei Verfahren angeben, mit denen man zulässige Mengen von Strahlen für konvexe und einige nichtkonvexe - diese müssen jedoch sternförmig sein - Gebiete konstruieren kann.
1. Radiale Strahlen. Gegeben sei ein nicht-leeres konvexes Gebiet. Wir fixieren einen beliebigen inneren Punkt. Wir verbinden ihn durch Geraden mit den Knoten des Randes, und führen die Geraden ins Unendliche. Genauso kann man Strahlen für sternförmige Nichtkonvexe Gebiete konstruieren, da die Verbindung des inneren Punktes mit den Knoten den Rand nur einmal durchquert.
2. Verallgemeinerte normale Strahlen. Gegeben sei wieder ein nicht-leeres konvexes Gebiet. Konstruiere für alle Knoten, bis auf einen, beliebige Strahlen. Der letzte Strahl wird wie folgt konstruiert:

(1) Fixiere einen beliebigen Punkt auf einem beliebigen Strahl.

(2) Zeichne von diesem Punkt aus zwei parallel zu den Kanten des Polygons verlaufende Linien, die die anderen Strahlen treffen. Der Treffpunkt wird als

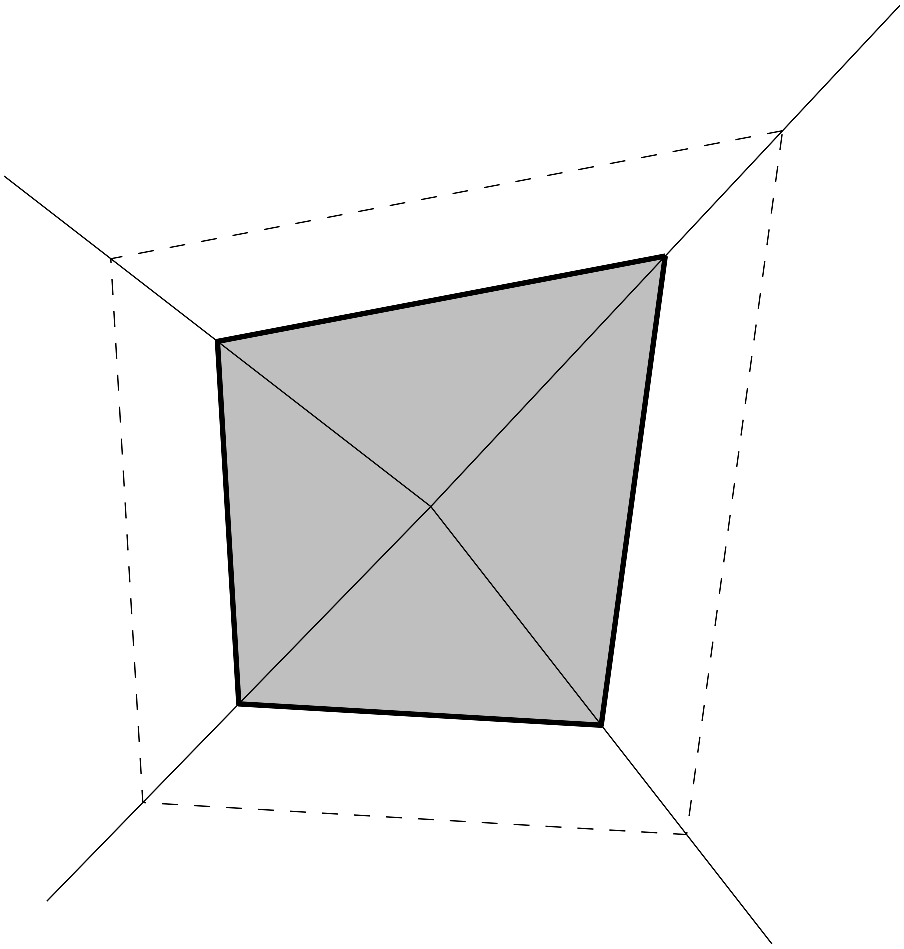

Abbildung 5.6: Konstruktion radialer Strahlen für konvexe Gebiete. (Bild aus [21])

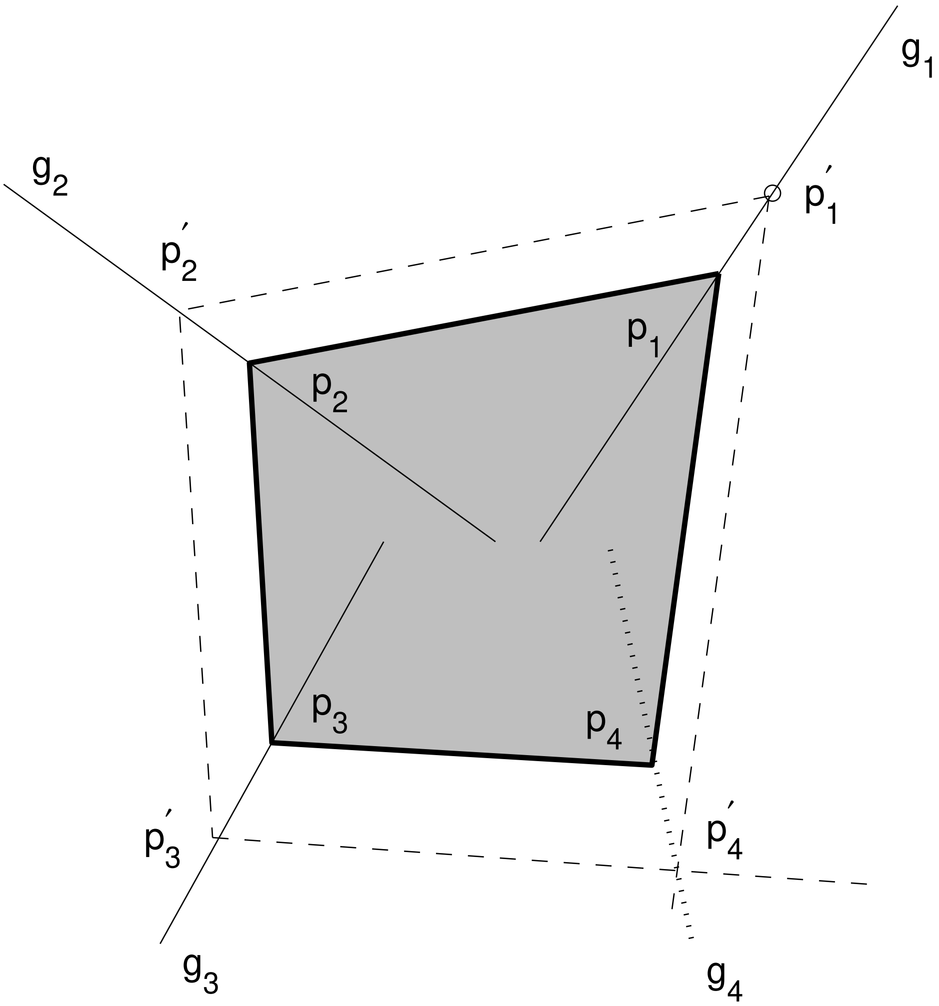

Abbildung 5.7: Konstruktion normaler Strahlen für konvexe Gebiete. (Bild aus [21])

neuer Punkt angenommen und die Prozedur fortgesetzt.

(3) Der letzte Strahl wird nun durch den Schnittpunkt der vorher konstruierten Linien gezeichnet, diese Konstruktion erfüllt die Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit.

Lemma: *Die beiden oben angegebenen Konstruktionen liefern eine zulässige Menge der geraden Strahlen.*

Wir definieren, was eine zulässige Zerlegung $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, ..., Q_N\}$ von $\overline{\Omega_{ext}}$

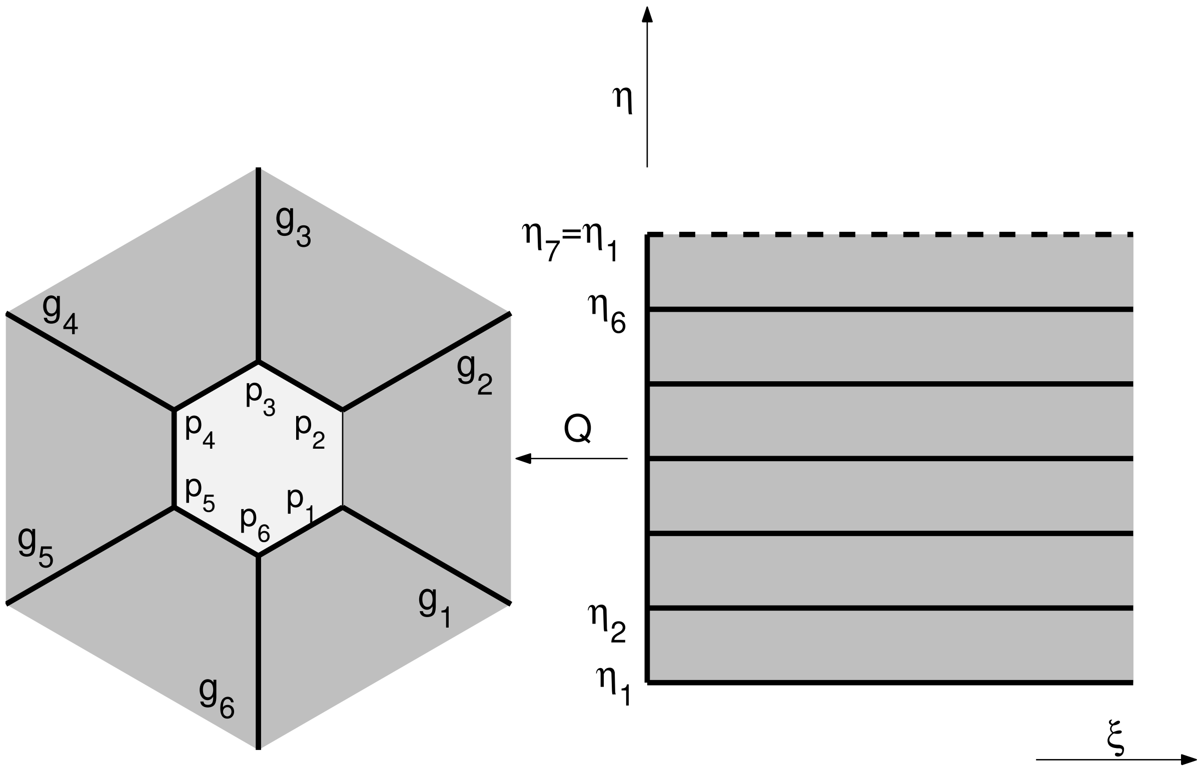

Abbildung 5.8: Abbildung eines halb-unendlichem Referenzrechtecks auf den Außenraum. (Bild aus [21])

ist.

Definition: *Eine auf geraden Strahlen basierende Zerlegung $\mathcal{Q}$ heißt zulässig, falls die folgenden Eigenschaften zutreffen:*
(1) Zwei Knoten von jedem Q_j sind auch Knoten von $\partial\Omega_{int}$.
(2) $\cup_{j=1}^{N} Q_j = \overline{\Omega_{ext}}$
(3) Falls $i \neq j$, dann ist der Durchschnitt $Q_i \cap Q_j$ entweder leer oder besteht aus einem geraden Strahl, der den Knoten aus $\partial\Omega_{int}$ mit dem Unendlichen verbindet. Dann ist dieser Knoten ein gemeinsamer Punkt von Q_i und Q_j.

Wir betrachten das halb-unendliche Viereck $Q_j^{(x,y)}$ als das Bild eines halb-unendlichen Einheitsvierecks $Q_j^{(\xi,\eta)}$ (Abb. 5.8)

$$Q_j^{(loc)} : Q_j^{(\xi,\eta)} \to Q_j^{(x,y)}, \tag{5.6}$$

wobei $Q_j^{(loc)}$ den j-ten Diffeomorphismus bezeichnet. Die lokalen Abbildungen werden so konstruiert, dass die globale Abbildung

$$Q : \overline{\Omega_{ext}^{(\xi,\eta)}} \to \overline{\Omega_{ext}^{(x,y)}}$$

ein Homöomorphismus ist und zusätzlich die Bedingungen

(1) Q ist mindestens zweimal in ξ stetig differenzierbar,

(2) Q ist stetig und stückweise stetig differenzierbar in η

erfüllt.

Im Folgendem geben wir eine Darstellung für die $j-$te lokale Abbildung $Q_j^{(loc)}$, vergleiche dazu (Abb. 5.8). Wir betrachten das halbunendliche, grau markierte Viereck in (Abb. 5.8). Dieses Viereck ist durch das Segment $\overline{p_1p_2}, p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ und durch die Strahlen g_1, g_2 begrenzt. Seien $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$ die Einheitsvektoren der Strahlen $g_1$und g_2. Dann besitzen sie folgende Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= p_1 + \tau\vec{g}_1 \\ g_2(\tau) &= p_2 + \gamma\tau\vec{g}_2, \ \tau \in R_+ \end{aligned}$$

Sei $\vec{n}$ der Einheitsnormalenvektor zu $\overline{p_1p_2}$. Aufgrund der *geometrischen Ähnlichkeit* wählen wir γ so, dass $\overline{g_1g_2} \perp \vec{n}$ gilt und erhalten so $\gamma = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$. Wir ersetzen den Parameter τ durch eine neue Abstandsvariable $\xi = \tau\cos\alpha_1$. Dadurch erhalten wir eine symmetrische Form der Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= p_1 + \frac{\xi}{\zeta\cos\alpha_1}\vec{g}_1 \\ g_2(\xi) &= p_2 + \frac{\xi}{\zeta\cos\alpha_2}\vec{g}_2, \ \xi \in R_+, \end{aligned}$$

wobei der Parameter ζ das stetige Ineinandergehen der lokalen Koordinatensysteme sichert. Mit Hilfe der Parameterdarstellungen wird jeder Punkt auf den Strahlen $g_1$und g_2 durch die Abstandsvariable ξ festgelegt. Um auch die Punkte, die zwischen den Strahlen liegen, darstellen zu können, führt man eine neue Variable η ein. Wir treffen folgende Festlegungen:

$$\eta_1 := \eta \mid_{g_1} \text{ und } \eta_2 := \eta \mid_{g_2} .$$

Dann erhalten wir für einen Punkt $p(x,y) \in Q_j^{(x,y)}$

$$p(x,y) = g_1(\xi) + \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}(g_2(\xi) - g_1(\xi)).$$

Mit den Einheitsvektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$ in kartesischen Koordinaten

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = : Q_j^{(loc)}(\xi,\eta) \text{ mit} \tag{5.7}$$

$$Q_j^{(loc)}(\xi,\eta) = \left(1 - \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}\right)\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{\xi}{\zeta\cos\alpha_1}\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix}\right] \tag{5.8}$$

$$+\frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}\left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{\xi}{\zeta\cos\alpha_2}\begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{pmatrix}\right]. \tag{5.9}$$

Lemma: *Die Abbildung $Q_j^{(loc)} : Q_j^{(\xi,\eta)} \to Q_j^{(x,y)}$ ist ein lokaler $C^\infty-$Diffeomorphismus.*

Den Beweis findet man in [21].

Korollar: Sei $\overline{\Omega_{ext}^{(\xi,\eta)}} = \cup_{j=1}^N \overline{Q_j^{(\xi,\eta)}}$ und $\overline{\Omega_{ext}^{(x,y)}} = \cup_{j=1}^N \overline{Q_j^{(x,y)}}$. Die zusammengesetzte Abbildung

$$Q : \overline{\Omega_{ext}^{(\xi,\eta)}} \to \overline{\Omega_{ext}^{(x,y)}},$$

die aus den einzelnen lokalen Abbildungen (5.7) für die Segmente $j = 1,...,N$ besteht, ist ein Homöomorphismus, falls ein Skalenparameter aus der Menge $\{\zeta_1,....,\zeta_N\}$ gegeben ist z.B. ζ_j und ein anderer ζ_{j+1} eine Winkelbedingung

$$\zeta_{j+1}\cos\alpha_{1,j+1} = \zeta_j\cos\alpha_{2,j}$$

erfüllt, wobei j und $j+1$ die benachbarten Segmentindizes bezeichnen.
Den Beweis findet man in [21].

Finite-Elemente-Diskretisierung:

Da wir unseren Außenraum nicht in Dreiecke zerlegen können, werden wir auch die Kantenelementkonstruktion für die Dreiecke, wie sie beim Innenraumproblem auftauchten, nicht verwenden. Wir werden hier lokale Kantenelemente auf den unendlichen Segmenten vorgeben.

Zu berücksichtigen ist: Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang zwischen den Segmenten ist stetig. Das semi-diskrete elektrische Vektorfeld $\widetilde{E}(\xi,\eta)$ in jedem Streifen $Q_j^{(\xi,\eta)}$ bezeichnen wir mit $\widetilde{E}_h(\xi,\eta)$. Wir machen den diskreten lokalen Produktansatz

$$\widetilde{E}_h(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{N} \vec{v}_k(\eta) u_k(\xi)$$

mit den Kantenelementen $\vec{v}_k(\eta)$. Sie haben auf den Kanten konstante Tangentialkomponenten, welche die Stetigkeit von $\vec{E}_h(\xi,\eta)$ bei Segmentübergängen sichert.

Wir betrachten die Sesqulinearformen getrennt. Aus dem lokalen Produktansatz folgt

$$\begin{aligned} A_{2,ik}\partial_{\xi\xi}u_k(\xi) &:= a_2(v_{i,\eta}, v_{k,\eta}\partial_{\xi\xi}u_k) \\ &= \left(\mu^{-1}\frac{1}{\mid J \mid}\int_{\Gamma_\eta} d\eta v_{i,\eta}v_{k,\eta}\right)\partial_{\xi\xi}u_k. \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{1,ik}\partial_{\xi}u_k(\xi) &:= a_1 \\ &= \mu^{-1}\left(-\frac{1}{\mid J \mid}\int_{\Gamma_\eta}\partial_\eta v_{i,\xi}v_{k,\eta} + (\partial_\xi\frac{1}{\mid J \mid})\int_{\Gamma_\eta} v_{i,\eta}v_{k,\eta}\right)\partial_\xi u_k \\ &\quad -\mu^{-1}\left(\frac{1}{\mid J \mid}\int_{\Gamma_\eta} v_{i,\eta}\partial_\eta v_{k,\xi}\right)\partial_\xi u_k. \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir die FE-Matrix, die zu $u_k(\xi)$ gehört,

$$\begin{aligned} A_{0,ik}u_k &:= a_0 \\ &= \mu^{-1}\left(\frac{1}{\mid J \mid}\int_{\Gamma_\eta}\partial_\eta v_{i,\xi}\partial_\eta v_{k,\xi} - (\partial_\xi \frac{1}{\mid J \mid})\int_{\Gamma_\eta} v_{i,\eta}\partial_\eta v_{k,\xi}\right) u_k \\ &\quad +\omega^2\varepsilon\int_{\Gamma_\eta}\widetilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\vec{v}(\eta) \mid J \mid d\eta. \end{aligned}$$

Lineare $\mathbf{C}^0-$Elemente

Die Kantenelemente auf einem Einheitssegment sind: $\vec{v}_1 = (0,1)^T$, $\vec{v}_2 = (\eta,0)^T$, $\vec{v}_3 = (1-\eta,0)^T$. Wir werden die Assemblierungsmatrizen für das Einheitselement angeben. Wir setzen unseren Ansatz in die obige Variationsgleichung ein und erhalten für das Einheitssegment

$$A_2^j\partial_{\xi\xi}\widetilde{u}(\xi) + A_1^j\partial_\xi\widetilde{u}(\xi) + A_0^j\widetilde{u}(\xi) = 0 \tag{5.10}$$

mit

$$\widetilde{u}(\xi) = \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \\ u_3(\xi) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} A_2^j &= (\mu^{-1}\frac{1}{\mid J \mid})\sum_{i,k=1}^{3} h\int_0^1 v_{i,\eta}v_{k,\eta}d\eta \\ A_1^j &= \mu^{-1}(\partial_\xi \mid J \mid^{-1})\sum_{i,k=1}^{3} h\int_0^1 v_{i,\eta}v_{k,\eta}d\eta \\ &\quad -(\mu^{-1} \mid J \mid^{-1})\sum_{i,k=1}^{3}\int_0^1 v_{i,\eta}\partial_\eta v_{k,\xi}d\eta \\ &\quad -(\mu^{-1} \mid J \mid^{-1})\sum_{i,k=1}^{3}\int_0^1 \partial_\eta v_{i,\xi}v_{k,\eta}d\eta \\ A_0^j &= -\mu^{-1}(\partial_\xi \mid J \mid^{-1})\sum_{i,k=1}^{3}\int_0^1 v_{i,\eta}\partial_\eta v_{k,\xi}d\eta \\ &\quad +(\mu^{-1} \mid J \mid^{-1})\sum_{i,k=1}^{3}\frac{1}{h}\int_0^1 \partial_\eta v_{i,\xi}\partial_\eta v_{k,\xi}d\eta \end{aligned}$$

$$+\omega^2\varepsilon \int_{\Gamma_\eta} \widetilde{E}^T \cdot J^{-1}J^{-T}\vec{v}(\eta) \mid J \mid d\eta.$$

Um die lokalen Matrizen zu berechnen, geben wir die Jakobimatrix J und die Determinate $\mid J \mid$ an. Weder J noch $\mid J \mid$ hängen von der Wahl des Ursprungs der $\xi, \eta-$ oder der $x, y-$Koordinatensysteme ab. Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 = x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = h, \eta_1 = 0, \eta_2 = h, \beta_1 = -\alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$. Unter Verwendung der Abkürzungen $a_1 = \tan\alpha_1, a_2 = \tan\alpha_2,$ und $a = \tan\alpha_1 + \tan\alpha_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\zeta} & 0 \\ -\frac{1-\eta}{\zeta}a_1 + \frac{\eta}{\zeta}a_2 & 1 + \frac{\xi}{h\zeta}a \end{pmatrix}, \\
J^{-1} &= \begin{pmatrix} \zeta & -\frac{\zeta h(-a_1+\eta a)}{h\zeta+a\xi} \\ 0 & \frac{\zeta h}{h\zeta+a\xi} \end{pmatrix}, \\
J^{-1}J^{-T} &= \begin{pmatrix} \zeta^2 + \frac{(\zeta h)^2(-a_1+\eta a)^2}{(h\zeta+a\xi)^2} & \frac{(\zeta h)^2(-a_1+\eta a)}{(h\zeta+a\xi)^2} \\ \frac{(\zeta h)^2(-a_1+\eta a)}{(h\zeta+a\xi)^2} & \frac{(\zeta h)^2}{(h\zeta+a\xi)^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mid J \mid &= \frac{h\zeta+\xi a}{h\zeta^2}, \\
\mid J \mid^{-1} &= \frac{h\zeta^2}{h\zeta+\xi a}
\end{aligned}$$

und

$$J^{-1}J^{-T} \mid J \mid = \begin{pmatrix} \frac{h\zeta+\xi a}{h} + \frac{h(-a_1+\eta a)^2}{h\zeta+a\xi} & \frac{h(-a_1+\eta a)}{h\zeta+a\xi} \\ \frac{h(-a_1+\eta a)}{h\zeta+a\xi} & \frac{h}{h\zeta+a\xi} \end{pmatrix}.$$

Mit den Abkürzungen $g_{11} = \frac{h\zeta+\xi a}{h} + \frac{h(-a_1+\eta a)^2}{h\zeta+a\xi}$, $g_{12} = g_{21} = \frac{h(-a_1+\eta a)}{h\zeta+a\xi}$, $g_{22} = \frac{h}{h\zeta+a\xi}$ erhalten wir für A_0^j:

$$A_0^j = -\mu^{-1}(\partial_\xi \mid J \mid^{-1}) \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Gamma_\eta} v_{i,\eta}\partial_\eta v_{k,\xi} d\eta$$

$$+(\mu^{-1} \mid J \mid^{-1}) \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Gamma_\eta} \partial_\eta v_{i,\xi} \partial_\eta v_{k,\xi} d\eta$$
$$+\omega^2 \varepsilon \left(\sum_k h \int_{\Gamma_\eta} v_{k,\xi} g_{11} v_{i,\xi} + v_{k,\xi} g_{12} v_{i,\eta} + v_{k,\eta} g_{21} v_{i,\xi} + v_{k,\eta} g_{22} v_{i,\eta} d\eta \right)$$

Basierend auf diesen Ergebnissen berechnen wir jetzt die elementaren FE-Matrizen. Wir kennzeichnen im Folgenden die Matrizen und die Größen $h, a_1, a_2, a,$ und ζ mit einem Index j und die Matrizen mit einen oberen Index (j) um anzudeuten, dass die Größen zu $Q_j^{(\xi,\eta)}$ gehören und sich ändern bei Änderung der lokalen Gebiete.
Wir erhalten also:

Lokale Assemblierungsmatrizen:

$$A_2^{(j)} = -\frac{h_j^2 \zeta_j^2}{h_j \zeta_j + \xi a_j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{(j)} = \frac{a_j h_j^2 \zeta_j^2}{(h_j \zeta_j + \xi a_j)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{h_j^2 \zeta_j^2}{h_j \zeta_j + \xi a_j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_0^{(j)} &= \frac{a_j h_j \zeta_j^2}{(h_j \zeta_j + \xi a_j)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\zeta_j^2}{h_j \zeta_j + \xi a_j} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &+\omega^2 \varepsilon (h_j \zeta_j + \xi a_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &+\omega^2 \varepsilon \frac{h^2}{(h_j \zeta_j + \xi a_j)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{3} & -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{6} \\ -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{3} & \frac{a_1^2}{3} - \frac{a_1 a}{2} + \frac{a^2}{5} & \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} \\ -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{6} & \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} & \frac{a_1^2}{3} - \frac{7 a_1 a}{6} + \frac{a^2}{30} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich in formaler Schreibweise die lokale Approximation

$$a_0 + a_1 + a_2 \overset{\text{lok.Approx}}{\longrightarrow} A_2^j \partial_{\xi\xi}\tilde{u}(\xi) + A_1^j \partial_\xi \tilde{u}(\xi) + A_0^j \tilde{u}(\xi). \tag{5.11}$$

Die globale Systemmatrix

$$A_{ext} = A_0 \vec{u}(\xi) + A_1 \partial_\xi \vec{u}(\xi) + A_2 \partial_{\xi\xi} \vec{u}(\xi) \tag{5.12}$$

erhält man, in dem man die lokalen Assemblierungsmatrizen, wie in FE-Methoden üblich ist, assembliert.
Die Matrizen hängen von der Größe $(h_j\zeta_j + \xi a_j)$ ab, die eine abstandsabhängige Breite $h(\xi)$ in jedem Segment darstellt. Wir beabsichtigen analog wie in [21] den rechten Ausdruck von (5.11) durch eine Summe über Matrizen zu berechnen, die neben der Ableitungsordnung auch die Ordnung von $(h_j\zeta_j + \xi a_j)$ berücksichtigen.
Wir führen die Matrizen $M_{i,j}^{(k)} \in R^{3\times 3}$

$$\sum_{j=0}^{2} \left(\sum_{i=-2}^{1} (h_j\zeta_j + \xi a_j)^i M_{i,j}^{(k)} \right) \partial_\xi^j \tilde{u}(\xi) := A_2^j \partial_{\xi\xi}\tilde{u}(\xi) + A_1^j \partial_\xi \tilde{u}(\xi) + A_0^j \tilde{u}(\xi) \tag{5.13}$$

ein, wobei

$$\begin{aligned}
M_{-2,0}^{(k)} &= a_j h_j \zeta_j^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{-2,1}^{(k)} &= a_j h_j \zeta_j^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{-1,0}^{(k)} &= \zeta_j^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
M_{-1,1}^{(k)} &= -h_j^2 \zeta_j^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \varepsilon h_j^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{3} & -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{6} \\ -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{3} & \frac{a_1^2}{3} - \frac{a_1 a}{2} + \frac{a^2}{5} & \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} \\ -\frac{a_1}{2} + \frac{a}{6} & \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} & \frac{a_1^2}{3} - \frac{7a_1 a}{6} + \frac{a^2}{30} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{-1,2}^{(k)} &= -h_j^2\zeta_j^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{1,0}^{(k)} &= \omega^2\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Für alle anderen Matrizen gilt $M_{i,j}^{(k)} = 0$.

Innere Struktur von (5.13) bei uniformen Gittern

Wie im Kapitel 4.3 für Parallelstreifen und Zylinderkoordinaten werden wir auch hier für unsere 2D-Transformation (5.7) hinsichtlich der Beziehung der Normalen- und Tangentialkomponente miteinander analoge Aussagen erhalten. Dazu treffen wir eine wichtige Vorraussetzung. Wir werden das Resultat für ***uniforme Gitter*** zeigen, d.h. wir haben $h_j = h = \mathrm{const}, \forall j$ und $\zeta_j = \zeta = \mathrm{const}, \forall j$. Eingesetzt in (5.13) und einmaliges Dividieren durch $(h\zeta + \xi a)$ ergibt sich

$$
\sum_{j=0}^{2} \left(\sum_{i=-3}^{0} (h\zeta + \xi a)^i M_{i,j}^{(k)} \right) \partial_\xi^j \tilde{u}(\xi) \tag{5.14}
$$

mit den jeweiligen lokalen Matrizen $M_{i,j}^{(k)}$. Aus diesen Matrizen gelangt man durch Summation über alle Segmente zu den Systemmatrizen $M_{i,j}^{(k),sys}$, die wir hier nicht explizit angeben werden. (5.14) wird zu

$$
\sum_{j=0}^{2} \left(\sum_{i=-3}^{0} (h\zeta + \xi a)^i M_{i,j}^{(k),sys} \right) \partial_\xi^j \vec{u}(\xi), \tag{5.15}
$$

wobei

$$
\vec{u}(\xi) = \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \\ \vdots \\ u_{N-1}(\xi) \\ u_N(\xi) \end{pmatrix}.
$$

Wir werden bei unseren Überlegungen lediglich die lokalen Matrizen heranziehen, woraus die innere Struktur von $M_{i,j}^{(k),sys}$ weitgehend ersichtlich ist. Eine Umordnung von (5.15),

$$\begin{pmatrix} M_{nn} & M_{nt} \\ M_{tn} & M_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_n \\ \vec{u}_t \end{pmatrix} = 0, \tag{5.16}$$

verdeutlicht die innere Struktur von (5.15) besser. Dabei bezeichnen M_{nn} bzw. M_{tt} die Matrizen mit reinen Normalenkomponenten bzw. reinen Tangentialkomponenten. Die Definition von M_{nn} wird z.B. durch $M_{-1,0}^{(k)}, M_{1,0}^{(k)}$ und den rechten Summanden von $M_{-1,1}^{(k)}$ motiviert. Die Matrizen M_{nt} bzw. M_{tn} enthalten sowohl Normalen- als auch Tangentialkomponenten. Es wird M_{nt} durch $M_{-1,1}^{(k)}$ vorgegeben.

Wir betrachten die erste Zeile von (5.16):

$$M_{nn}\vec{u}_n = -M_{nt}\vec{u}_t$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
M_{nn}^1 &= h^2 \begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{3} - \frac{a_1 a}{2} + \frac{a^2}{5} & \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} \\ \frac{a_1^2}{6} - \frac{a_1 a}{6} + \frac{a^2}{20} & \frac{a_1^2}{3} - \frac{7a_1 a}{6} + \frac{a^2}{30} \end{pmatrix}^{sys}, \\
M_{nn}^2 &= \zeta^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{sys}, \\
M_{nn}^3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{sys} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{3} & \cdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei die Matrizen mit einem oberen Index sys die dazugehörigen globalen Systemmatrizen bezeichnen, erhalten wir

$$\omega^2\varepsilon \frac{1}{(h\zeta + \xi a)^2} M_{nn}^1 \vec{u}_n - \frac{1}{(h\zeta + \xi a)} M_{nn}^2 \vec{u}_n + \omega^2 \varepsilon M_{nn}^3 \vec{u}_n = r, \tag{5.17}$$

wobei die rechte Seite durch $r := -M_{nt}\vec{u}_t$ definiert ist.

Wir unterwerfen (5.17) einer Laplace-Transformation

$$\omega^2\varepsilon L\left(\frac{1}{(h\zeta+\xi a)^2}M_{nn}^1\vec{u}_n\right)-L\left(\frac{1}{(h\zeta+\xi a)}M_{nn}^2\vec{u}_n\right)+\omega^2\varepsilon L\left(M_{nn}^3\vec{u}_n\right)=L(r),$$

und erhalten mit der Regel (4.34)

$$\omega^2\varepsilon\int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)h\zeta}(s_1-s)M_{nn}^1\hat{\vec{u}}_n(s_1) \tag{5.18}$$

$$-\int_s^\infty ds_1 e^{(s-s_1)h\zeta}M_{nn}^2\hat{\vec{u}}_n(s_1)+\omega^2\varepsilon M_{nn}^3\hat{\vec{u}}_n(s)=\hat{r}, \tag{5.19}$$

wobei die Größen mit einen Dach wie üblich die Laplace-Transformierte dieser Größen bezeichnen. Hier haben wir es im Gegensatz zu den Zylinderkoordinaten mit einem System von Volterra-Integralgleichungen

$$F(s)=G(s)+\int_s^\infty K(s,s_1)F(s_1)ds_1 \tag{5.20}$$

zu tun, wobei

$$F(s)=\hat{\vec{u}}_n(s_1)$$

$$G(s)=[M_{nn}^3]^{-1}\frac{1}{\omega^2\varepsilon}\hat{r}$$

$$K(s,s_1)=[M_{nn}^3]^{-1}[(s_1-s)M_{nn}^1-\frac{1}{\omega^2\varepsilon}M_{nn}^2]e^{(s-s_1)h\zeta}.$$

Bemerkung:

(1) Die Umformulierung von (5.18,5.19) zu (5.20) ist möglich, weil M_{nn}^3 positiv definit und damit invertierbar ist.

(2) Aus der Theorie der ***Volterra-Integralgleichungen für Systeme*** (***Theorem 3.12*** aus [14]) erhält man Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösung $F(s)$, falls der Koeffizient $G(s)$ und der Integralkern $K(s,s_1)$ beide beschränkt (in einer Matrixnorm) sind und ihre Matrixnorm durch eine stetige Funktion majorisiert wird.

Zur Beschränktheit von $G(s)$***:***

Die Matrix $[M_{nn}^3]^{-1}$ ist endlichdimensional und enthält konstante und beschränkte Einträge. Es folgt, dass $[M_{nn}^3]^{-1}$ beschränt ist.

Zur Beschränktheit von $K(s, s_1)$***:***

Auch die Matrizen M_{nn}^1 und M_{nn}^2 sind beide endlichdimansional und besitzen konstante und beschränkte Einträge; damit folgt die Beschränktheit von $K(s, s_1)$.

Wir benötigen aber die Analytizität der Lösung $F(s)$. Durch eine einfache Erweiterung des ***Theorems 3.12*** aus [14] unter Berücksichtigung bzw. der Kombination mit dem ***Theorem 3.6 aus [14]*** erhalten wir die gewünschte Analytizität von $F(s)$. Bei dieser Überlegung haben wir natürlich auch die Analytizität der Exponentialfunktion $e^{(s-s_1)h\zeta}$ und der Polynomfunktion $(s - s_1)$ mitberücksichtigt.

Wir wissen, dass $\hat{r}$ ein Integralausdruck ist, der samt Exponentialfunktion und der Polynomfunktion die Tangentialkomponente $\hat{\vec{u}}_t$ und eine beschränkte Matrix enthält. Ist die Tangentialkomponente $\hat{\vec{u}}_t$ analytisch, so erhält man die Analytizität von $G(s)$.

Mit den obigen Überlegungen erhält man insgesamt die Existenz, Eindeutigkeit und die Analytizität für $F(s) = \hat{\vec{u}}_n(s_1)$. Damit folgt das wichtige

Resultat: Erfüllt die Tangentialkomponente $\hat{\vec{u}}_t$ die Polbedingung, so erfüllt die Normalenkomponente $\hat{\vec{u}}_n$ ebenfalls die Polbedingung.

Somit erhalten wir ein analoges Resultat wie im Kapitel 4.3.

Satz: *Unter den Voraussetzungen*
(a) gegeben sei die Transformation (5.7) und eine uniforme Diskretisierung des Außenraumes,
(b) es existiert eine Lösung von (5.17),
(c) die Tangentialkomponente $\vec{u}_t$ *erfüllt die Polbedingung*
folgt, dass die zugehörige Normalenkomponente $\vec{u}_n$ *die Polbedingung erfüllt.*

Bemerkung: Der Satz ist nicht mehr so trivial wie bei den "Parallelen Streifen" oder wie bei den Zylinderkoordinaten. Dort hatten wir es mit orthogonalen Koordinatensystemen zu tun, wobei $J^T J$ eine Diagonalmatrix war. Hier haben wir es mit einer komplizierteren Abbildung zu tun. Es ist $J^T J$ keine Diagonalmatrix mehr.

5.3 Kopplung des Innenraumproblems mit dem Außenraumproblem

Wir sind jetzt in der Lage, das gesamte diskrete Problem zu assemblieren. Wir geben hier einen Überblick, wie dies geschieht. Näheres dazu findet man in [21].

Schritt 1: FE-Diskretisierung des schwachen Innenraumproblems (5.4): $A_{11} := A_{in}$.

Schritt 2: FE-Diskretisierung der schwachen Außenraumformulierung (5.12) ergibt A_{ext}. Laplace-Transformation von (5.12) bezüglich der Abstandsvariablen $\hat{A}_{ext}$, anschließende Diskretisierung bezüglich der Abstandsvariablen im Laplace-Raum $\widetilde{A_{ext}}$. Dies kann auf viele unterschiedliche Weisen geschehen. Damit erhält man $A_{22} = \widetilde{A_{ext}}$.

Schritt 3: Formulierung der Kopplungsbedingung wie im Kapitel 3.2.3 als Reelle -Achsen-Methode (3.34). Anschließende Diskretisierung im Laplace-Raum A_{32}. Die Diskretisierung der Reelle-Achsen-Methode kann auf viele verschiedene Arten erfolgen. Möglich ist eine Diskretisierung mit Hilfe der Spline-Funktionen; auf diese Methode wird in [21] ausführlich eingegangen. Andere Diskretisierungsmethoden sind verschiedenartige Kollokationsmethoden der numerischen Integration. Neuerlich wird auch mit der Methode der Fourier-Moden diskretisiert.

Schritt 4: Löse simultan das Innenraumproblem (im Ortsraum) und das Außenraumproblem (im Laplace-Raum):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \\ 0 & A_{32} \end{bmatrix}$$

Kapitel 6

Zusammenfassung

Eines der Hauptziele dieser Arbeit war die Herleitung einer “angemessenen” Formulierung des Außenraumproblems der Maxwell-Gleichungen, die die Anwendung der Polbedingung ermöglichen sollte. Dazu haben wir den Außenraum einer verallgemeinerten Kugelkoordinatentransformation unterzogen. Wir erhielten eine Formulierung, die “schwach” in den verallgemeinerten Winkelvariablen und “stark” bzw. ”klassisch” in der Abstandsvariable ist. Weiter ergab die Untersuchung der inneren Struktur der Formulierung in Zylinderkoordinaten das nichttriviale Resultat, dass es ausreicht, die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der Außenraumlösung zu stellen. Die Normalenkomponente erfüllt die Bedingung dann notwendig. Wir gehen davon aus, dass diese Aussage auch für allgemeinere orthogonale Koordinatensysteme gilt. Dies bleibt aber noch zu zeigen. Ein anderes Ziel war die Diskretisierung des Außenraumproblems in 2D. Wir verwendeten eine Parametrisierung des Außenraumes, die zum einen allgemein genug ist, um möglichst viele Arten von physikalischen Problemstellungen behandeln zu können und die zum anderen das wichtige analoge Resultat wie bei den Zylinderkoordinaten im R^3 liefert, dass es ausreichend ist die Polbedingung nur an die Tangentialkomponente der diskreten Außenraumlösung zu stellen. Die Parametrisierung des Außenraumes ergab halbunendliche Rechtecke (Streifen). Die Kantenelemente, die im Falle des Innenraumproblems für Dreiecke (Triangulierung) angegeben wurden, haben wir für halbunendliche Rechtecke nicht verwenden können. Stattdessen haben wir Kantenelemente vorgegeben, die auf die Kanten der halbunendlichen Rechtecke zugeschnitten waren. Mit diesen Elementen haben wir dann die Assemblierungsmatrizen für den Außenraum berechnet.

Zusammen mit den berechneten Assemblierungsmatrizen und der diskretisierten Polbedingung erhält man ein Gleichungssystem für das Gesamtproblem (Innenraumproblem im Ortsraum und Außenraumproblem im Laplace-Raum), das man dann einfach implementieren kann. Dadurch läßt sich das Innenraumproblem und Außenraumproblem simultan lösen.

Literaturverzeichnis

[1] J.P. Berenger. *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*. 1994.

[2] Dietrich Braess. *Finite Elemente*. Springer-Lehrbuch, 1991.

[3] Colton.Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer Verlag, 1997.

[4] Diedrich.Remmert. *Funktionentheorie I*. Springer Verlag, 1972.

[5] G. Dötsch. *Handbuch der Laplacetransformation Bd:1-3*. Birkhäuser, Basel, 1972.

[6] Torsten Fliessbach. *Elektrodynamik, Lehrbuch der Theoretischen Physik II*. Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

[7] Girault.Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Verlag, 1986.

[8] Walter Greiner. *Klassische Elektrodynamik,Theoretische Physik Band 3*. Harri Deutsch, 1991.

[9] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher, 1985.

[10] R. Hiptmaier. Finite elements in computational electromagnetics. *Acta Numerica, Volume 11*, 2002.

[11] I. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. vol.132 of Applied Mathematical Sciences,Springer Verlag, 1998.

[12] Charles Kittel. *Einführung in die Festkörperphysik.* R.Oldenburg Verlag, 1988.

[13] Klein.Furtak. *Optik.* Springer Lehrbuch, 1988.

[14] Peter Linz. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.* SIAM Philadelphia, 1985.

[15] J.C. Maxwell. *Treatise on electricity and magnetism.* unbekannt, 1873.

[16] Peter Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations.* CLARENDON PRESS.OXFORD, 2003.

[17] J.C. Nedelec. *Acoustic and Electromagnetic Equations.* Springer, 2000.

[18] Pedrotti.Bausch.Schmidt. *Optik, Eine Einführung.* Prentice Hall, 1996.

[19] F. Rellich. *Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen.* Math.Inst.Univ.Göttingen, 1952.

[20] K Sakoda. *Optical properties of Photonic Crystals.* Springer Series in Optical Sciences Vol.80, 2001.

[21] Frank Schmidt. *Habilitationsschrift: A New Approach to Coupled Interior-Exterior Helmhotz-Typ Problems: Theory and Algorithms.* ZIB, Freie Universität Berlin.

[22] Arnold Sommerfeld. *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Verlag Harri Deutsch, 1947.

[23] C.M. Soukoulis. Photonic band gap materials. *NATO ASI Series E315*, 1996.

[24] C.M. Soukoulis. Photonic crystals and light localization in the 21 st century. *NATO ASI Series C563*, 2001.

[25] A. Walsleben. *Whitney-Elemente zur Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen in inhomigenen Medien.* Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 1996.

[26] H. Whitney. *Geometric Integration Theory.* Princeton University Press, Princeton, 1957.

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, diese Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der in der Arbeit bezeichneten Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Berlin, den