Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

JÖRG RAMBAU

Triangulierungen von Punktmengen und Polyedern

ZIB-Report 00-46 (Dezember 2000)

Triangulierungen von Punktmengen und Polyedern

Vorlesung im Sommersemester 2000
Technische Universität Berlin

Jörg Rambau

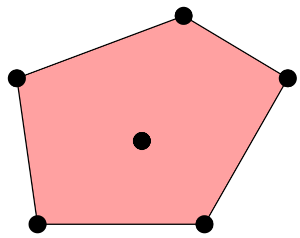
14. Dezember 2000

Zusammenfassung: Dieser Report wurde im Sommersemester 2000 an der TU Berlin in einer Spezialvorlesung über Triangulierungen von Punktmengen und Polyedern als Skriptum verwendet. Nach einem motivierenden Kapitel werden grundlegende Begriffe und Konstruktionen in der Theorie der Triangulierungen von Punktmengen und Polyedern vorgestellt. Danach werden als weiterführende Themen reguläre Triangulierungen, Sekundärpolytope, bistellare Operationen, höhere Stasheff-Tamari-Halbordnungen und Triangulierungen mit wenigen bzw. gar keinen Flips behandelt. Ein Kapitel über Enumeration und Optimierung beschließt die Zusammenstellung.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Beispiele

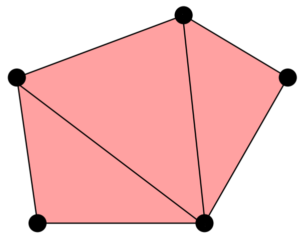
Wir wollen hier den Begriff der Triangulierungen von Punktmengen intuitiv einführen und einige Verbindungen zu anderen mathematischen Theorien aufzeigen. Die allgemeinen grundlegenden Definitionen bringen wir später.



Eine Punktmenge in der Ebene

1.1 Illustration des Grundproblems

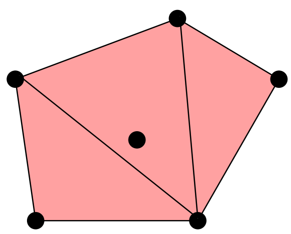
Gegeben sei eine endliche Punktmenge im euklidischen Raum. Zerlege ihre konvexe Hülle in Simplizes (Dreiecke, Tetraeder, ...), ohne andere als die ursprünglichen Punkte zu verwenden.



Eine Triangulierung eines 5-Ecks

1.1.1 Triangulierung eines n-Ecks

Die konvexe Hülle von n verschiedenen Punkten in der Ebene ist ein (konvexes) n-Eck. Eine maximale Menge von sich paarweise nicht kreuzenden Diagonalen bestimmt eine Triangulierung des n-Ecks. Innere Punkte dürfen hierbei nicht verwendet werden.

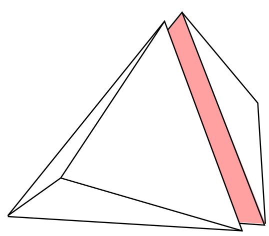


Eine Triangulierung muß nicht alle Punkte benutzen

1.1.2 Triangulierung einer Punktmenge

Wenn man auch vorgegebene innere Punkte benutzen darf, so spricht man von einer Triangulierung einer Punktmenge. In der Ebene gehören wieder alle maximalen Mengen von sich paarweise nicht kreuzenden Diagonalen dazu. Jedoch müssen die inneren Punkte nicht verwendet werden. Daher gibt es auch noch andere Triangulierungen.

Doppelte Punkte können zugelassen werden; die zur exakten Definition nötigen Begriffe werden allerdings formal etwas komplizierter.



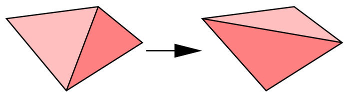
Triangulierung einer Bi-Pyramide über einem Dreieck

1.1.3 Triangulierung eines Polyeders

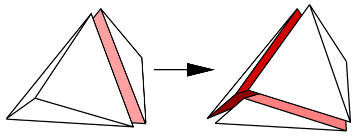
Triangulierungen eines (beschränkten) Polyeders – also der konvexen Hülle endlich vieler Punkte im euklidischen Raum – sind Triangulierungen der Eckenmenge des Polyeders. Beispiele für Polyeder sind Würfel, Prisma, Pyramide, Octaeder, ...

Jede Ecke eines Polyeders muß automatisch in jeder Triangulierung benutzt werden, da sie sich nach Definition nicht durch Kanten, Flächen, ... abdecken lassen.

1.1.4 Lokale Operationen



Ein Kantenflip



Ein Flip in Dimension Drei

Hat man schon eine Triangulierung eines Polygons, so kann man wie folgt eine neue gewinnen: Man ersetzt die Diagonale eines konvexen Vierecks der Triangulierung durch die andere Diagonale.

Auch in höheren Dimensionen gibt es Flips, deren allgemeine Definition aber komplizierter ist. Die allgemeine Idee ist: Man findet eine Teilmenge der Punkte, für die folgendes gilt:

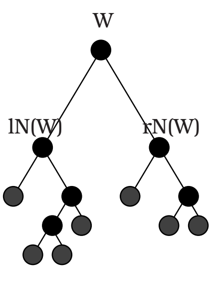
- Es existieren genau zwei Triangulierungen dieser Teilmenge.
- Eine der beiden ist in der betrachteten Triangulierung enthalten.

Dann ersetzt man in der betrachteten Triangulierung auf dieser Teilmenge die vorhandene Triangulierung durch die andere mögliche. Der Rest der Gesamt-Triangulierung bleibt erhalten.

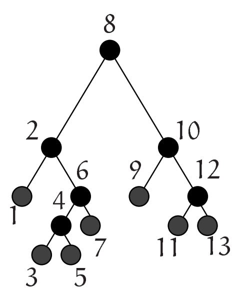
1.2 Zusammenhänge mit anderen mathematischen Objekten

Im folgenden zeigen wir einige auf den ersten Blick überraschende Verbindungen von Triangulierungen zu mathematischen Objekten, die eigentlich nicht aus der Geometrie stammen.

1.2.1 Rotation in Binärbäumen



Ein Binärbaum



Eine symmetrische Ordnung

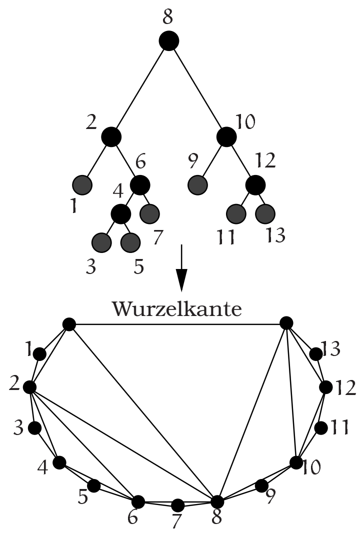
Ein *Binärbaum* ist ein graphentheoretischer Baum mit zwei Arten von Knoten: *internen Knoten* und *externen Knoten* oder *Blättern*. Es gibt drei Relationen unter den Knoten: Vorgänger, linker Nachfolger und rechter Nachfolger. Nur ein (interner) Knoten – die *Wurzel* – hat keinen Vorgänger; alle anderen Knoten haben genau einen Vorgänger. Alle internen Knoten haben mindestens eine Nachfolger, höchstens jedoch einen linken und höchstens einen rechten. Der Teilbaum eines Blattes ist nur das Blatt selbst. Der *Teilbaum* eines inneren Knotens besteht aus dem Knoten selbst sowie dem Teilbaum seines linken (*linker Teilbaum*) und dem seines rechten Nachfolgers (*rechter Teilbaum*).

Die *symmetrische Ordnung* auf den Knoten eines Baumes ist rekursiv wie folgt algorithmisch durch eine Besuchs-Tour durch den Baum definiert: Trifft man auf ein Blatt, so besucht man es einfach. Kommt man an einem inneren Knoten an, so besucht man seinen linken Teilbaum in symmetrischer Ordnung, besucht dann den inneren

Knoten und besucht dann den rechten Teilbaum in symmetrischer Ordnung.

Man kann sehr einfach Elemente einer geordneten Menge in den Knoten eines Binärbaums speichern, so daß die symmetrische Ordnung auf den Knoten gleich der Ordnung der Elemente in der geordneten Menge entspricht: Beim Einfügen eines Elementes vergleicht man das Element mit der Wurzel. Ist es kleiner als die Wurzel, so speichert man es rekursiv im linken Teilbaum, sonst im rechten Teilbaum.

Es gilt nun:



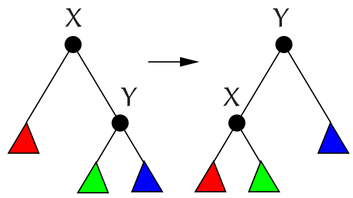
Die zugehörige Triangulierung eines 15-Ecks

Lemma 1.2.1. *Die Menge aller Binärbäume auf n Knoten ist bijektiv abbildbar auf die Menge aller Triangulierungen eines $(n+2)$-Ecks.*

Beweis. Nummeriere die Ecken des $(n+2)$-Ecks im Uhrzeigersinn von 0 bis $n+1$. Definiere $\{0, n+2\}$ als Wurzelkante.

Binärbäume → Triangulierungen: Numeriere die Knoten des Binärbaums in symmetrischer Ordnung durch. Sei W die Nummer der Wurzel. Füge das Dreieck $\{0, n+1, W\}$ in die Triangulierung ein. Dadurch wird das $(n+2)$-Eck zerlegt in ein $(W+1)$-Eck L, ein Dreick und ein $(n-W+2)$-Eck R. Die Triangulierung von L mit Wurzelkante $\{0, W\}$ wird nun rekursiv gegeben durch den linken Teilbaum von W, die von R mit Wurzelkante $\{W, n+2\}$ durch den rechten Teilbaum von W.

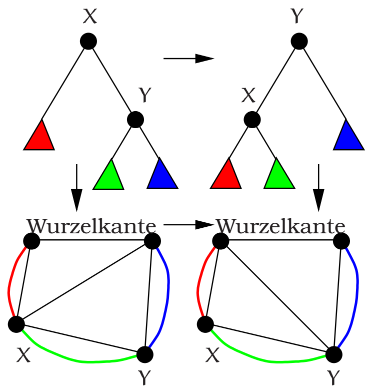
Triangulierungen → Binärbäume: Der Beweis geht analog in umgekehrter Richtung: Übungsaufgabe. □



Eine Links-Rotation an X und Y

Eine *Rotation* in einem Binärbaum ist eine lokale Veränderung der Vorgänger-Nachfolger-Relation, die die symmetrische Ordnung fest läßt. Mithilfe von Rotationen kann man Binärbäume *balancieren*. Die Zeit, die man benötigt, um ein Element in einen sortierten Binärbaum einzufügen, ist proportional zur *Tiefe* des Baums. Speichert man n Elemente z. B. in geordneter Reihenfolge, so hat der Baum Tiefe n. Durch eine geeignete Folge von Rotationen kann man erreichen, daß der Baum nur noch Tiefe $\log n$ hat.

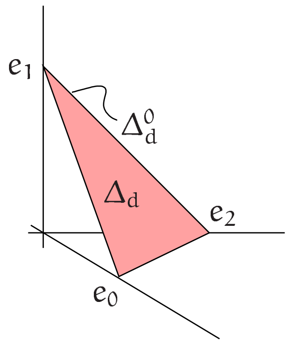
Der interessante Zusammenhang mit Triangulierungen eines n-Ecks ist wie folgt:



Eine Rotation im Binärbaum entspricht einem Kantenflip in der Zugehörigen Triangulierung

Lemma 1.2.2. *Die Rotationen in einem Binärbaum mit n Knoten entsprechen genau den Kantenflips in der zugehörigen Triangulierung des $(n+2)$-Ecks.*

Beweis. Da die Operation lokal ist, reicht eine Skizze als Beweis. □



Das zweidimensionale Standardsimplex

Wieviele Rotationen braucht man höchstens, um von einem Binärbaum zu einem anderen zu gelangen? Wir werden diese Frage später mithilfe des Triangulierungsmodells entscheiden.

1.2.2 Fixpunkte stetiger Abbildungen

Das d-*dimensionale Standardsimplex* ist definiert als die konvexe Hülle der affinen $d+1$ Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^{d+1}$, also $\Delta_d := \operatorname{conv}\{e_0, e_1, \dots, e_d\}$. Jeder Punkt $x \in \Delta_d$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=0}^d x_i e_i$ mit $\sum_{i=0}^d x_i = 1$. Die x_i heißen *baryzentrische Koordinaten* von x.

Sei $\Delta_d^i := \operatorname{conv}\{e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_d\}$ die Facette von Δ_d, die die Ecke i nicht enthält. Sei im folgenden $\mathcal{D}_d$ eine beliebige Punktkonfiguration mit $\operatorname{conv} \mathcal{D}_d = \Delta_d$.

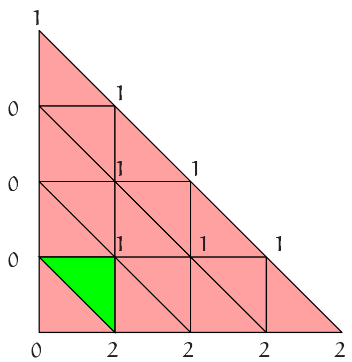
Mit Methoden der Abbildungsgrad-Theorie beweist man:

Theorem 1.2.3 (Brouwers Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung des d-dimensionalen Standardsimplex Δ_d auf sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Hieraus folgt leicht der Fixpunktsatz für alle stetigen Abbildungen einer abgeschlossenen d-*Zelle* (topologischer Raum *homöomorph* zu Δ_d) auf sich selbst.

Die elegantesten Beweise dieses Satzes sind leider nicht konstruktiv. Wie soll man also diesen Fixpunkt finden?

Hier hilft eine konstruktive Beweisidee des Fixpunktsatzes von Brouwer, der Triangulierungen benutzt. Dazu zitieren wir Sperners Lemma:



Ein voll numeriertes Simplex

Lemma 1.2.4 (Sperners Lemma). *Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{D}_d$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *Jede Ecke ist numeriert mit einer Nummer aus $[d]_0 := \{0, 1, 2, \dots .d\}$, d. h. T ist* numeriert.
- *Kein Simplex in Δ_d^i enthält eine Ecke mit der Nummer i, $i = 1, 2, \dots, d$, d. h. die Numerierung ist* zulässig.

*Dann gibt es ein Simplex mit allen möglichen Nummern (*voll numeriertes Simplex*).*

Wir diskutieren hier nicht, warum Brouwers Fixpunktsatz aus Sperners Lemma folgt. Wir stellen lieber den Zusammenhang zu Brouwers Fixpunktsatz über folgende Approximationsmethode für Fixpunkte her.

Lemma 1.2.5. *Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{D}_d$, in der der größte Durchmesser eines Simplexes höchstens δ ist, d. h.*

$$\max_{\sigma \in T} \sup_{x,z \in \sigma} \|x - z\|_\infty \le \delta.$$

Sei $f : \Delta_d \to \Delta_d$ *stetig mit:* $\|x - z\|_\infty < \delta$ *impliziert* $\|f(x) - f(z)\|_\infty \leq \epsilon$. *Numeriere jede Ecke* y *von* T *mit*

$$\ell(y) := \min\{\, j \in [d]_0 \,:\, f_j(x) \leq x_j > 0 \,\}$$

Dann gilt für jedes voll numerierte Simplex σ *und alle* $x^* \in \sigma$

$$\|f(x^*) - x^*\|_\infty \leq d(\epsilon + \delta).$$

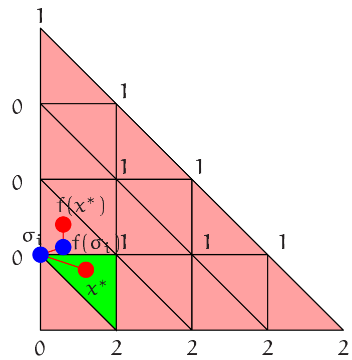
Beweis. Sei σ voll numeriert und $x^* \in \sigma$. Seien $\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^d$ die Ecken von σ, so daß σ^i die Nummer i hat. Dann gilt für alle $i = 0, 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} f_i(x^*) - x_i^* &= \underbrace{(f_i(x^*) - f_i(\sigma^i))}_{<\epsilon} + \underbrace{(f_i(\sigma^i) - \sigma_i^i)}_{\leq 0} + \underbrace{(\sigma_i^i - x_i^*)}_{\leq \delta} \\ &\leq \epsilon + \delta. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt wegen $\sum_{j=0}^d x_j^* = \sum_{j=0}^d f(x^*)_j = 1$, daß

$$-(f_i(x^*) - x_i^*) = \sum_{j \neq i} (f_j(x^*) - x_j^*) \leq d(\epsilon + \delta).$$

$\square$



Fast ein Fixpunkt

Bemerkung 1.2.6. Man beachte: man hat damit einen Punkt gefunden, der nahe bei seinem Bild liegt, nicht unbedingt einen Punkt, der nahe an einem Fixpunkt liegt.

Für die Aufgabe, ein voll numeriertes Simplex zu finden, existieren Algorithmen, die eine Triangulierung durchsuchen. Es hat sich gezeigt, daß die Effizienz solcher Algorithmen wesentlich von der Triangulierung abhängt.

Manche Algorithmen fassen die abgeschlossene d-Zelle als Würfel auf und zerlegen diesen Würfel in immer kleinere Würfel, die dann (konsistent) trianguliert werden. Daher sucht man z. B. nach Triangulierungen eines d-dimensionalen Würfels mit möglichst wenig Simplexen.

Ein anderer Ansatz besteht in Triangulierungen mit möglichst kleinem Durchmesser des *Adjazenzgraphen* der Triangulierung, da besagte Algorithmen i. d. R. von einem Simplex zu einem benachbarten vorgehen.

1.2.3 Algebraische Kurven

Wir wollen uns nun sehr skizzenhaft Viros Konstruktion anschauen.

Eine glatte algebraische Kurve vom Grad d „sieht aus wie" die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad d in drei Variablen. Diese Nullstellenmenge liegt in der projektiven Ebene und kann verschiedene

Gestalt haben: Die Zusammenhangskomponenten der Kurve sind geschlossene einfache Kreise, die die projektive Ebene zerlegen können oder nicht. Diese Komponenten können ineinander verschachtelt sein.

Welche „Muster“ können auftreten? Wie kann man glatte algebraische Kurven kombinatorisch erzeugen, ohne Polynome auszurechnen?

Wir führen anhand eines Beispiels Viros überraschende Konstruktion vor, ohne zu zeigen, warum sie funktioniert.

Betrachte für ein $k \in \mathbb{N}$ in der euklidischen Ebene die Menge der *Gitterpunkte*

$$\mathcal{A}_k^{++} := \Big\{ (i,j) \in \mathbb{Z}_0^2 : i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq d \Big\};$$
$$\mathcal{A}_k^{+-} := \Big\{ (i,j) \in \mathbb{Z}_0^2 : i \geq 0, j \leq 0, i+j \leq d \Big\};$$
$$\mathcal{A}_k^{-+} := \Big\{ (i,j) \in \mathbb{Z}_0^2 : i \leq 0, j \geq 0, i+j \leq d \Big\};$$
$$\mathcal{A}_k^{--} := \Big\{ (i,j) \in \mathbb{Z}_0^2 : i \leq 0, j \leq 0, i+j \leq d \Big\}.$$

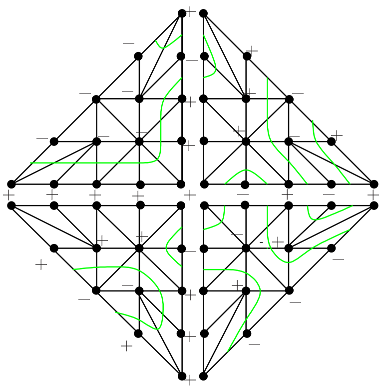
Verteile Vorzeichen $\sigma^{++}(i,j)$ aus $\{-,+\}$ auf die Ecken von $\mathcal{A}_k^{++}$ und konstruiere eine *reguläre* (s. u.) Triangulierung T von $\mathcal{A}_k^{++}$. Nun spiegeln wir T an den Koordinatenachsen und modifizieren die Vorzeichen in den drei Quadranten $\mathcal{A}^{+-}$, $\mathcal{A}^{-+}$ und $\mathcal{A}^{--}$ wie folgt:

- In $\mathcal{A}^{+-}$: $\sigma^{+-}(i,j) := \sigma^{++}(i,j)(-1)^j$.
- In $\mathcal{A}^{-+}$: $\sigma^{-+}(i,j) := \sigma^{++}(i,j)(-1)^i$.
- In $\mathcal{A}^{--}$: $\sigma^{-+}(i,j) := \sigma^{++}(i,j)(-1)^{i+j}$.

Wenn wir nun gegenüberliegende Seiten der konvexen Hülle in entgegengesetzter Orientierung identifizieren, so erhalten wir eine Triangulierung der projektive Ebene.

Nun bauen wir einen Graphen $G_{T,\sigma}$ als „Modell einer Kurve“ wie folgt:

1. Auf die Mitte jeder Kante, deren Ecken unterschiedliche Vorzeichen haben, setzen wir eine Ecke von $G_{T,\sigma}$.
2. Zwei Ecken sind adjazent, wenn sie das gleiche Dreieck beranden.



Viros Konstruktion einer eindimensionalen Kurve im projektiven Raum

Grundlagen

2

Wir wollen hier das Fundament für die mathematische Untersuchung der Kombinatorik von Triangulierungen bereitstellen. Wir benutzen im folgenden gelegentlich die Schreibweise $\binom{\mathcal{A}}{d+1}$ für die Menge aller $(d+1)$-elementigen Teilmengen von $\mathcal{A}$.

2.1 Unterteilungen von Multimengen

Nach der anschaulichen Einführung von Triangulierungen wollen wir nun die allgemeinen Definitionen nachreichen: sie gelten auch, wenn einige Punkte wiederholt auftreten, wenn wir also eine *Multimenge* triangulieren. Der Nutzen dieser Allgemeinheit wird sich erst später erschließen.

Definition 2.1.1 (Dimension). Die *Dimension* einer endlichen *Multimenge* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ist die Dimension des von ihr aufgespannten affinen Teilraums des $\mathbb{R}^d$.

Bei der konvexen Hülle gibt es nichts Neues:

Definition 2.1.2 (Konvexe Hülle einer Multimenge). Die *konvexe Hülle* einer endlichen Multimenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ist

$$\operatorname{conv} \mathcal{A} := \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a a \,:\, 0 \leq \lambda_a \leq 1, \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = 1 \right\}.$$

Die Menge $\operatorname{conv} \mathcal{A}$ heißt *Polytop*.

Verlangt man, daß alle Koeffizienten der Konvexkombination echt größer als Null sind, so erhält man das relativ Innere:

Definition 2.1.3 (Relativ Inneres). Das *relativ Innere* einer Multimenge $\mathcal{A}$ ist die Menge der Punkte

$$\operatorname{relint} \mathcal{A} := \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a a \,:\, 0 < \lambda_a \leq 1, \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = 1 \right\}.$$

Der Begriff der Seite einer Multimenge wird analog zur *Seitenfläche* in der Polyedertheorie definiert.

Definition 2.1.4 (Seite einer Multimenge). Sei $\psi \in (\mathbb{R}^d)^*$ ein lineares Funktional auf $\mathbb{R}^d$. Die *Seite* der Punktmenge $\mathcal{A}$ *in Richtung* ψ ist die Menge

$$\mathcal{A}^\psi := \left\{ b \in \mathcal{A} : \psi(b) = \min_{a \in \mathcal{A}} \psi(a) \right\}.$$

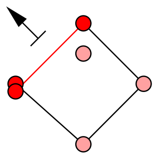
Ist F eine Seite von $\mathcal{A}$, so schreiben wir $F \leq \mathcal{A}$. Falls $F \neq \mathcal{A}$, so heißt F *echte* Seite von $\mathcal{A}$, und wir schreiben $F < \mathcal{A}$.

Die Hyperebene

$$H(\psi) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) = \min_{a \in \mathcal{A}} \psi(a) \right\}$$

heißt *unterstützende* Hyperebene von F^ψ.

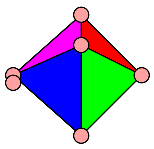
Für einen Punkt $x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}$ heißt die (eindeutige) Seite F von $\mathcal{A}$ mit $x \in \operatorname{relint} F$ der *Träger* von x in $\mathcal{A}$.



Eine Seite einer Multimenge

Bemerkung 2.1.5. Wenn F eine Seite von $\mathcal{A}$ ist, dann ist $\operatorname{conv} F$ eine Seite von $\operatorname{conv} A$.

Hier ist nun die grundlegende, allgemeine Definition:



Eine Unterteilung

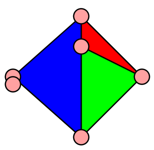
Definition 2.1.6 (Unterteilung einer Multimenge). Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ eine Punktmultimenge von n Punkten im d-dimensionalen euklidischen Raum. Eine Menge T von affin unabhängigen Teilmengen von $[n] := \{1, \ldots, n\}$, sogenannten *Zellen*, ist eine *Unterteilung* von $\mathcal{A}$, wenn gilt:

(UP) Die Vereinigung der konvexen Hüllen der Elemente von T ist die konvexe Hülle von $\mathcal{A}$ (*Union Property*), also

$$\bigcup_{S \in T} \operatorname{conv} S = \operatorname{conv} \mathcal{A}.$$

(IP) Die relativ Inneren der konvexen Hüllen aller Zellen in T und ihren Seiten schneiden sich nicht (*Intersection Property*), also

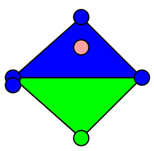
$$\operatorname{relint} F \cap \operatorname{relint} F' = \emptyset \quad \forall F \leq S; F' \leq S'; F \neq F'; S, S' \in T.$$



Keine Unterteilung: Simplexe schneiden sich im Inneren

(FP) Je zwei Elemente $S, S' \in T$ von T schneiden sich in einer echten gemeinsamen Seite oder gar nicht (*Face Property*), also

$$S \cap S' < S \quad \text{und} \quad S \cap S' < S' \quad \forall S, S' \in T.$$



Keine Unterteilung: Blaues Viereck und grünes Dreieck schneiden sich nicht in gemeinsamer Seite

T ist eine *Triangulierung*, wenn alle Zellen in T Kardinalität $d + 1$ haben. Solche Zellen heißen *Simplizes*.

Bemerkung 2.1.7. Für Triangulierungen folgt (FP) aus (IP), da (FP) nur für Zellen mit nicht simplizialen Seiten eine Zusatzbedingung darstellt, Simplizes aber wegen der affinen Unabhängigkeit ihrer Ecken keine nicht simplizialen Seiten enthalten können.

2.2 Beispiele für Triangulierungen

2.2.1 Dimension Null

In Dimension Null besteht $\mathcal{A}$ aus n Kopien des Nullpunkts. Die Menge aller Triangulierungen von $\mathcal{A}$ ist dann gleich $\mathcal{A}$. In der Tat: Eine Triangulierung besteht aus 1-elementigen Teilmengen, also aus Punkten. Jede Triangulierung muß mindestens einen Punkt enthalten, da $\operatorname{conv}\mathcal{A}$ wegen (UP) überdeckt werden muß. Da jeder Punkt gleich seinem relativ Inneren ist, kann jede Triangulierung wegen (IP) nur einen Punkt enthalten.

2.2.2 Dimension Eins

In Dimension Eins liegen alle Punkte auf einer Geraden. Eine Triangulierung besteht hier aus 2-elementigen Teilmengen. Wir konstruieren eine Triangulierung von $\mathcal{A}$ wie folgt:

1. Durchlaufe $\operatorname{conv}\mathcal{A}$ in einer festen Richtung „von links nach rechts“. Sei I die Multimengen der inneren Punkte in $\mathcal{A}$. Sei L die Multimenge der „ganz linken“ Punkte und R die Multimenge der „ganz rechten“ Punkte.

2. Wähle einen beliebigen Punkt $i_0 \in L$ und einen beliebigen Punkt $i_{k+1} \in R$.

3. Wähle eine beliebige Teilmenge (keine Multimenge) $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$.

4. Setze $T := \{\{i_j, i_{j+1} \,:\, 0 \leq j \leq k\}$.

Übung 2.2.1. Zeige, daß durch die obige Konstruktion alle Triangulierungen in Dimension Eins erzeugt werden.

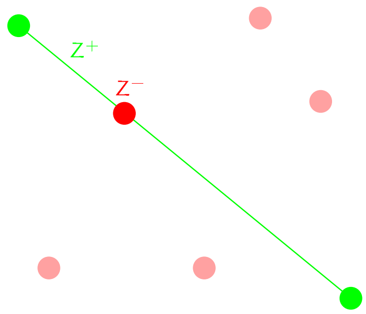
Gibt es keine Doppelpunkte, so ist die Menge aller Triangulierungen von $\mathcal{A}$ isomorph zur Menge aller Teilmengen der inneren Punkte von $\mathcal{A}$.

2.2.3 Dimension Zwei

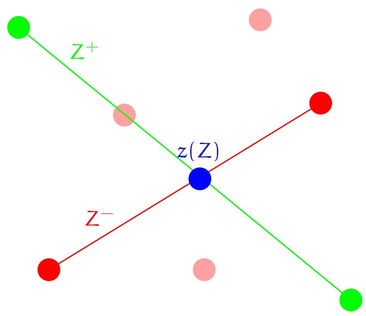
Wir haben bereits gesehen, daß die Triangulierungen eines n-Ecks genau den Binärbäumen zuf $n + 2$ Ecken entsprechen.

Übung 2.2.2. Beweise, daß in Dimension Zwei eine maximale Menge von Kanten mit „konsistent“ gewählten Eckpunkten eine Triangulierung im Sinne von Definition 2.1.6 ist. Was muß hier „konsistent“ heißen?

2.3 Eine kombinatorische Charakterisierung von Triangulierungen



Ein Kreis mit grünem Positiv- und rotem Negativteil



Ein Kreis in der gleichen Punktmenge mit blauem Schnittpunkt

Im folgenden wollen wir eine nützliche Charakterisierung angeben, die uns die Überprüfung der Bedingungen (IP) und (UP) für Triangulierungen auf rein kombinatorischer Ebene gestattet.

Dazu benötigen wir *Kreise* in $\mathcal{A}$ und *Facetten* von Simplizes aus T.

Sei im folgenden $\mathcal{A}$ eine Punktmenge in $\mathbb{R}^d$.

Definition 2.3.1 (Kreis). Eine affin abhängige Punktmenge $Z \subseteq \mathcal{A}$ heißt *Kreis*, wenn jede echte Teilmenge von Z affin unabhängig ist.

Bemerkung 2.3.2. Jeder Kreis Z hat $\dim Z + 2$ Elemente.

Dieser Begriff kommt aus der Matroid-Theorie. Es existiert für einen Kreis Z eine bis auf reelle Skalierung eindeutige affine Kombination des Nullpunktes des Form

$$0 = \sum_{z \in Z} \lambda_z z, \quad \sum_{z \in Z} \lambda_z = 0, \lambda_z \neq 0 \quad \forall z \in Z.$$

Daraus folgt, daß eindeutige disjunkte Teilmengen

$$Z^+, Z^- \subseteq Z, \quad Z^+ \cup Z^- = Z$$

existieren mit

$$\lambda_z > 0 \quad \forall z \in Z^+, \quad \lambda_z < 0 \quad \forall z \in Z^-.$$

Die Teilmengen Z^+ und Z^- heißen *Positiv*- bzw. *Negativteil* von Z.

Wie können Kreise uns bei der Aufgabe helfen, zu prüfen, ob eine gegebene Menge von $(d+1)$-elementigen Teilmengen eine Triangulierung von $\mathcal{A}$ ist?

Schreiben wir dazu die eindeutige affine Abhängigheit anders auf:

$$0 = \sum_{z \in Z} \lambda_z z \iff \sum_{z \in Z^+} \lambda_z z = \sum_{z \in Z^-} \lambda_z z.$$

Wir sehen nun, daß der Punkt

$$z(Z) := \sum_{z \in Z^+} \frac{\lambda_z}{\Lambda} z = \sum_{z \in Z^-} \frac{\lambda_z}{\Lambda} z, \quad \Lambda := \sum_{z \in Z^+} \lambda_z = -\sum_{z \in Z^-} \lambda_z$$

im Schnitt der relativ Inneren der konvexen Hüllen von Z^+ und Z^- liegt:

$$z(Z) \in \operatorname{relint} Z^+ \cap \operatorname{relint} Z^-.$$

Kreise sind also in gewisser Weise „minimale Verbrecher“ in Mengen von Simplizes, die (IP) verletzen.

Es gilt folgendes Theorem:

Theorem 2.3.3. *Sie $\mathcal{A}$ eine Multimenge in $\mathbb{R}^d$. Ferner sei T eine nicht-leere Menge von d-Simplizes aus $\binom{\mathcal{A}}{d+1}$. Dann ist T genau dann eine Triangulierung von $\mathcal{A}$, wenn T die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

(IP') Es existiert kein Kreis Z mit $Z^+ \subseteq S$ und $Z^- \subseteq S'$ für $S, S' \in T$.

(UP') Jede Facette F eines Simplexes S in T ist entweder in einer Facette von $\mathcal{A}$ enthalten oder sie ist Facette eines weiteren Simplexes $S' \in T$.

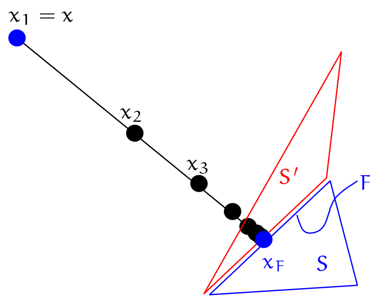
Beweis. (IP') und (UP') sind notwendig: Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$.

Angenommen, es existiert ein Kreis Z und Simplexe $S, S' \in T$ mit $Z^+ \subseteq S$ und $Z^- \subseteq S'$. Dann liegt der Punkt $z(Z)$ im Schnitt der relativ inneren konvexen Hüllen von $Z^+ \subseteq S$ und $Z^- \subseteq S'$; Widerspruch zu (IP).

Sei F eine Facette eines Simplexes $S \in T$, die nicht in einer Facette von $\mathcal{A}$ enthalten ist. Sei H eine unterstützende Hyperebene von F. Ferner seien H^+ der zugehörige offene Halbraum, der S enthält, und H^- der gegenüberliegende offene Halbraum. Betrachte einen Punkt $x \in H^- \cap \operatorname{conv} \mathcal{A}$. Solch ein Punkt existiert, da F andernfalls in einer Facette von $\mathcal{A}$ enthalten wäre. Sei außerdem x_F ein Punkt in $\operatorname{relint} F$.

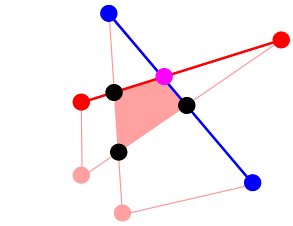
Wir betrachten definieren nun eine unendliche Folge von Punkten $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{conv} \mathcal{A}$:

$$x_1 := x;$$
$$x_{i+1} := \frac{x_i + x_F}{2}.$$

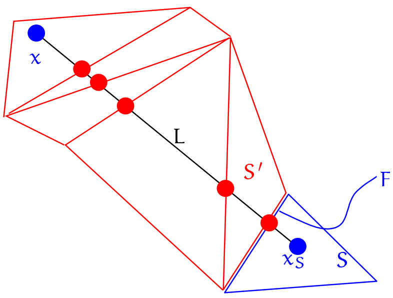


Das rote Simplex enthält x_F und damit F

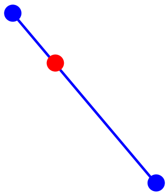
Diese Folge konvergiert gegen x_F. Da es nur endlich viele Simplizes in T gibt und die Folge konvergiert, gibt es ein Simplex $S' \in T$, in dessen konvexer Hülle $\operatorname{conv} S'$ unendlich viele der x_i liegen. Da $\operatorname{conv} S'$ abgeschlossen ist, liegt auch x_F in S'. Sei F' der Träger von x_F in S'. Dann schneiden sich $\operatorname{relint} F'$ und $\operatorname{relint} F$ in x_F. Also muß wegen (IP) $F' = F$ gelten, und S' ist das gesuchte Simplex.



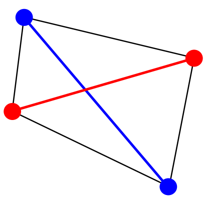
Zwei Simplizes, die sich im Innern schneiden, definieren mindestens eine Radon-Partition



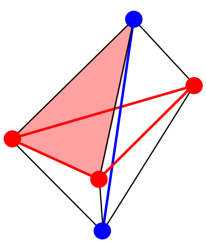
Die Linie L ist komplett durch Simplexe überdeckt, da (UP') gilt



Facetten eines Kreises in Dimension Eins, ...



... in Dimension Zwei ...



... und in Dimension Drei.

(IP') und (UP') sind hinreichend: Sei T eine nicht-leere Menge von d-Simplizes, die (IP') und (UP') erfüllt.

Angenommen, es existieren Seiten F und F' von Simplizes in T mit $\operatorname{relint} F \cap \operatorname{relint} F' \neq \emptyset$. Nach Radons Theorem gibt es dann Mengen $Z^+ \subseteq F$ und $Z^- \subseteq F'$ mit $\operatorname{relint} Z^+ \cap \operatorname{relint} Z^- = z(Z)$ (*Radon-Zerlegung*), so daß (IP') nicht erfüllt sein kann; Widerspruch. Also gilt (IP) für T.

Sei $x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}$ ein beliebiger Punkt und sei $S \in T$ ein beliebiges d-Simplex. Wenn x in $\operatorname{conv} S$ liegt, sind wir fertig. Andernfalls wähle einen beliebigen Punkt $x_S \in \operatorname{relint} S$ in allgemeiner Lage. Ferner sei L die Strecke von x_S nach x. Da x_S in allgemeiner Lage gewählt worden ist, schneidet L das Simplex $\operatorname{conv} S$ in genau einer Facette $\operatorname{conv} F$. Da x und x_S auf verschiedenen Seiten von der unterstützenden Hyperebene H von F liegen, kann F nicht in einer Facette von $\mathcal{A}$ enthalten sein. Also existiert nach (UP) ein anderes Simplex S' mit $F \subset S'$. Liegt x in $\operatorname{conv} S'$, sind wir fertig. Andernfalls schneidet L das Simplex $\operatorname{conv} S'$ in genau einer weiteren Facette $\operatorname{conv} F'$ von $\operatorname{conv} S'$. Wir fahren fort und erhalten auf diese Weise eine komplette Überdeckung von L inklusive x mit Simplizes aus T. Also gilt (UP). □

2.4 Erste Anwendung: Triangulierungen von Kreisen

Wir wollen zunächst wissen, was die Facetten eines Kreises sind, damit wir die Menge aller Triangulierungen eines Kreises bestimmen können. Triangulierungen von Kreisen spielen die Rolle von lokalen Teilkonfigurationen von Triangulierungen, auf denen wir lokale Operationen durchführen wollen.

Lemma 2.4.1. *Sei Z ein Kreis in $\mathcal{A}$. Dann ist die Menge $\mathcal{F}(Z)$ aller Facetten von Z wie folgt gegeben:*

$$\mathcal{F}(Z) = \left\{ F \in \binom{Z}{d} \,:\, Z^+ \not\subseteq F, Z^- \not\subseteq F \right\}.$$

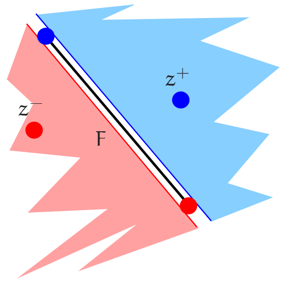
Beweis. Angenommen, eine Facette F von Z würde Z^+ oder Z^- enthalten. Dann würde $\operatorname{conv} F$ den Punkt $z(Z)$, der in $\operatorname{relint} \operatorname{conv} Z$ liegt, enthalten; Widerspruch.

Sei nun $F \in \left\{ F \in \binom{Z}{d} \,:\, Z^+ \not\subseteq F, Z^- \not\subseteq F \right\}$. Angenommen, für die Hyperebene H, die von F aufgespannt wird, existiert ein Punkt $z^+ \in Z \cap H^+$ und ein Punkt $z^- \in Z \cap H^-$. Dann ist $Z = z^+ \cup F \cup z^-$. Da F weder Z^+ noch Z^- komplett enthält, ist o. B. d. A. $z^+ \in Z^+$ und $z^- \in Z^-$. Das heißt aber, daß

$$\operatorname{relint} \operatorname{conv} Z^+ \cap \operatorname{relint} \operatorname{conv} Z^- \subset H^+ \cap H^- = \emptyset;$$

Widerspruch. □

Das folgende Lemma bildet das Fundament für die Definition bistellarer Operationen im nächsten Kapitel.



Ein $F \in \left\{ F \in \binom{Z}{d} : Z^+ \not\subseteq F, Z^- \not\subseteq F \right\}$ muß eine Facette von Z sein

Lemma 2.4.2. *Sei* Z *ein Kreis in* $\mathcal{A}$ *der Dimension* d*. Dann existieren genau zwei Triangulierungen von* Z*, nämlich*

$$T^+(Z) := \mathrm{st}_{\binom{Z}{d+1}}(Z^+) \quad \textit{und} \quad T^-(Z) := \mathrm{st}_{\binom{Z}{d+1}}(Z^-).$$

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung aus Theorem 2.3.3.

Wir beweisen zunächst, daß $T^+(Z)$ und $T^-(Z)$ Triangulierungen von Z sind. Da Z Kardinalität $d+2$ hat, gilt

$$T^+(Z) := \{ Z \backslash z : z \in Z^- \} \quad \text{und} \quad T^-(Z) := \{ Z \backslash z : z \in Z^+ \}.$$

Seien S und S' aus $T^+(Z)$. Daher gilt $Z^+ \subseteq S, S'$. Wegen $S, S' \neq Z$ ist Z^- weder in S noch in S' enthalten, also gilt (IP').

Sei nun F eine Facette eines Simplexes $S = Z \backslash z^-$ in $T^+(Z)$ mit $z^- \in Z^-$, die nicht in einer Facette von Z enthalten ist. Nach Lemma 2.4.1 enthält so eine Facette Z^+. Also ist F von der Form $F = Z \backslash \{z^-, z_F^-\}$ für ein $z_F^- \in Z^-$ ungleich z^-. Wir finden also $S' := F \cup z^-$, und (UP') ist erfüllt.

Gäbe es noch eine andere Triangulierung, so würde sie sowohl ein Simplex S^+ aus $T^+(Z)$ als auch ein Simplex S^- aus $T^-(Z)$ enthalten, da $T^+(Z) \cup T^-(Z) = \binom{Z}{d+1}$. Das würde aber bedeuten, daß $Z^+ \subseteq S^+$ und $Z^- \subseteq S^+$; Widerspruch zu (IP'). □

Konstruktionen

3

Wir zeigen hier einige nützliche Konstruktionen, um Triangulierungen zu erzeugen.

Wir benötigen einige Begriffe stammen aus der Theorie der Simplizialkomplexe: Ein *(abstrakter) Simplizialkomplex* ist ein bzgl. der Operation „Teilmenge" abgeschlossenes Mengensystem.

Ein *Teilkomplex* ist eine Teilmenge eines Simplizialkomplexes, die wieder ein Simplizialkomplex ist.

Nehmen wir zu einer Triangulierung T alle Seiten von Simplizes aus T hinzu, so erhalten wir einen Simplizialkomplex. Betrachten wir auf der anderen Seite in einem Simplizialkomplex nur die inklusionsmaximalen Elemente, die *Facetten*, so erhalten wir die Darstellung, die wir für Triangulierungen benutzen.

Einen *Teilkomplex* werden wir dementsprechend auch durch die Menge seiner inklusionsmaximalen Seiten notieren. Wir haben uns für diese kompaktere Darstellung für Triangulierungen entschieden, da wir auch algorithmische Fragestellungen im Auge behalten wollen.

Um bistellare Operationen zu definieren, benötigen wir wieder Kreise und einige Begriffe aus der Theorie der Simplizialkomplexe. Für eine Seite F eines Simplexes in einer Menge von Simplizes T heißt der Teilkomplex

$$\mathbf{st}_T(F) := \{ S \in T : F \subseteq S' \}$$

der *Stern* von F in T, der Teilkomplex

$$\mathbf{lk}_T(F) := \{ S \backslash F : S \in T \}$$

heißt der *Link* von F in T und der Teilkomplex

$$\mathbf{del}_T(F) := T - \mathbf{st}_T(F)$$

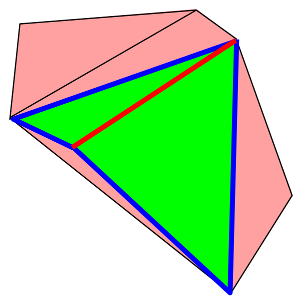
heißt die *Löschung* von F in T.

Seien T und T' Mengen von Simplexen T, deren Eckenmengen disjunkt sind. Die *Verbindungsmenge* von T und T' ist definiert als

$$T * T' := \{ S \cup S' : S \in T, S' \in T' \} .$$

Zum Beispiel gilt

$$\mathbf{st}_T(F) = \mathbf{lk}_T(F) * \{F\}.$$



Der Stern (grün), der Link (blau) und die Löschung (rosa) eines Simplexes (rot)

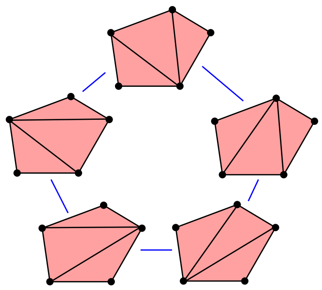
3.1 Bistellare Operationen

Wir sind nun in der Lage, bistellare Operationen zu definieren.

Definition 3.1.1 (Bistellare Operation). Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$ und Z ein Kreis in $\mathcal{A}$, so daß folgendes gilt:

(CP) T enthält (o. B. d. A.) $T^{-}(Z)$ als Teilkomplex (*Containment Property*).

(LP) Alle maximalen Simplizes in $T^{-}(Z)$ haben denselben Link L in T (*Link Property*).



Der Flip-Graph eines 5-Ecks

Dann heißt das Ersetzen von $T^{-}(Z)*L$ in T durch $T^{+}(Z)*L$ eine *bistellare Operation* in Z oder ein *Flip* in Z

Der *Typ* der bistellaren Operation wird mit $(\#Z^{-}, \#Z^{+})$ bezeichnet.

Diese Operation liefert eine Nachbarschaftsstruktur auf der Menge aller Triangulierungen einer festen Multimenge. Eine gute mathematische Struktur zur Beschreibung bietet ein Graph.

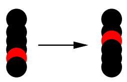
Definition 3.1.2 (Flip-Graph). Der *Graph aller Triangulierungen* oder der *Flip-Graph* von $\mathcal{A}$ ist definiert als

$$\begin{aligned} G(\mathcal{A}) &:= (V, E); \\ V &:= \{\text{alle Triangulierungen von } \mathcal{A}\}; \\ E &:= \left\{ (T, T') \,:\, T \overset{\text{Flip}}{\mapsto} T' \right\}. \end{aligned}$$

Eine wichtige Frage ist, welche Zusammenhangseigenschaften $G(\mathcal{A})$ hat.

3.2 Beispiele für bistellare Operationen

Wir fahren zunächst wieder mit Beispielen fort. Die Beispiele in den niedrigen Dimensionen sind zwar geometrisch trivial, zeigen jedoch deutlich den Einfluß der Mehrfachpunkte auf die kombinatorische Struktur von Triangulierungsmengen.



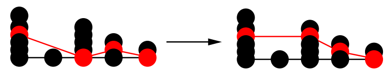
Ein Flip in Dimension Null

3.2.1 Dimension Null

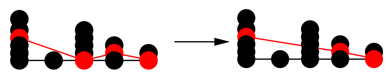
Ein Kreis Z in Dimension Null ist eine Multimenge von zwei Kopien a^{+}, a^{-} des Nullpunkts. Also sind alle Flips vom Typ $(1,1)$. Die beiden Triangulierungen von Z sind dann $T^{+}(Z) = \{a^{+}\}$ und $T^{-}(Z) = \{a^{-}\}$. Ein Flip ersetzt einfach eine Triangulierung komplett durch eine andere. Daher ist $G(\mathcal{A})$ der vollständige Graph auf $\#\mathcal{A}$ Knoten.

3.2.2 Dimension Eins

In Dimension Eins entspricht ein Flip dem Hinzunehmen neuer oder dem Wegnehmen vorhandener innerer Punkte von $\mathcal{A}$ (Typ $(1,2)$ bzw. $(2,1)$) oder aber dem Austausch zweier verschiedener Kopien von Punkten in $\mathcal{A}$ (Typ $(1,1)$).



Ein Flip in Dimension Eins vom Typ $(1,1)$



Ein Flip in Dimension Eins von Typ $(1,2)$

3.2.3 Dimension Zwei

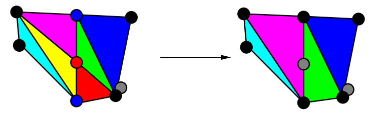
In Dimension Zwei gibt es folgende Flips:

Typ $(2,2)$**:** Kantenflip.

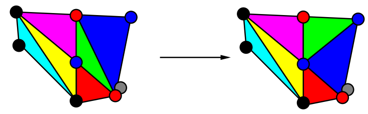
Typ $(1,3)$**:** Hinzunahme eines inneren Punktes in einem Dreieck und sternförmige Triangulierung.

Typ $(3,1)$**:** Umgekehrt.

Andere: Stern eines Flips niedrigerer Dimension.



Ein Flip in Dimension Zwei vom Typ $(2,1)$



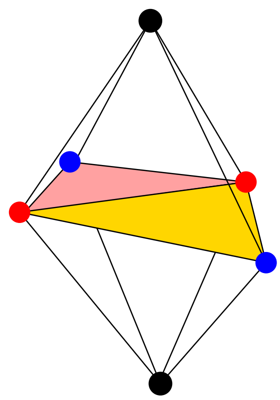
Ein Flip in Dimension Zwei von Typ $(2,2)$

Wir sehen, daß die Strukturen niedriger Dimensionen in höheren Dimensionen wieder auftauchen können. Daher wird die Struktur möglicher Flips in höheren Dimensionen sehr schnell unübersichtlich, wenn die Multimenge nicht in allgemeiner Lage ist. Im Falle allgemeiner Lage in Dimension d sind alle Flips vom Typ $(\#Z^+, \#Z^-)$ mit $\#Z^+ + \#Z^- = d+2$.

3.3 Der Flip-Graph in Dimension Zwei

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß in Dimension Zwei $G(\mathcal{A})$ zusammenhängend ist.

Theorem 3.3.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Punktmenge in allgemeiner Lage in der Ebene, und seien T_1 und T_2 zwei Triangulierungen von $\mathcal{A}$. Dann existiert eine Folge von Kantenflips, die T_1 in T_2 überführt.*

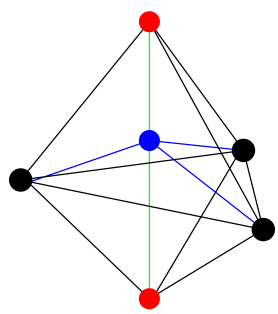


Ein gelifteter Flip vom Typ $(2,2)$

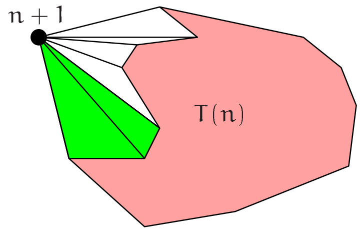
Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl n der Ecken.

Induktionsanfang: Für $n \leq 3$ ist nichts zu zeigen.

Induktionsschluß: Sei die Behauptung schon für ein n bewiesen. Sei $\mathcal{A}$ eine Punktkonfiguration in der Ebene mit $n+1$ Punkten, und sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$. Wir behaupten, daß T durch eine Folge von Kantenflips so in eine Triangulierung T' verändert werden kann, daß die Menge $\mathrm{del}_{T'}(n+1)$ aller Dreicke in T', die $n+1$ nicht enthalten, $\mathcal{A}\backslash\{n+1\}$ trianguliert. Dann ist T' die Triangulierung die aus $\mathrm{del}_{T'}(n+1)$ durch Plazieren von $n+1$ entsteht. Diese Konstruktion angewendet auf T_1 und T_2 zusammen mit der Induktionsvoraussetzung auf $\mathcal{A}\backslash\{n+1\}$ beweist das Theorem.



Ein gelifteter Flip vom Typ $(1,2)$



Ein Flip reduziert den Grad von $n+1$ in T

Angenommen, für eine Triangulierung T von $\mathcal{A}$ ist die Löschung $\mathrm{del}_T(n+1)$ der Ecke $n+1$ keine Triangulierung von $\mathcal{A}\setminus\{n+1\}$. Dann ist $\mathrm{del}_T(n+1)$ nicht konvex. Das bedeutet, daß zwei benachbarte Dreiecke in der Menge $\mathrm{st}_T(n+1)$ aller Dreiecke in T, die $n+1$ enthalten, existieren, die ein konvexes Viereck bilden. Ein Kantenflip in diesem Viereck reduziert den Grad von $n+1$ in T. Da der Grad von $n+1$ mindestens zwei sein muß in jeder Triangulierung von $\mathcal{A}$, erreicht man spätestens nach $\delta_T(n+1)-2$ Kantenflips eine Triangulierung T', so daß $\mathrm{del}_{T'}(n+1)$ eine Triangulierung von $\mathcal{A}\setminus\{n+1\}$ ist. $\square$

Übung 3.3.2. Gilt Satz 3.3.1 auch für Punktmengen, die nicht in allgemeiner Lage sind? Für Multimengen auch?

3.4 Einfache Methoden zur Triangulierung

Wie kommt man an eine Triangulierung? Wir zeigen hier einige elementare Methoden zur Konstruktion von Triangulierungen.

3.4.1 Gieriges Triangulieren

In Dimension Zwei kann man die Triangulierungen einer Punktmenge, die alle Punkte benutzen, durch einen maximale Menge von sich paarweise nicht kreuzenden Kanten charakterisieren. Daher kann man einfach eine Triangulierung erzeugen, indem man solange wie möglich zulässige Kanten einfügt. In allgemeiner Dimension geht das nicht mehr.

3.4.2 Lexikographische Triangulierungen

Wir erklären nun illustrativ in Dimension Zwei einige Methoden zur Konstruktion von Triangulierungen von Punktmengen, die auch in höheren Dimensionen funktionieren. Triangulierungen, die mit einer oder einer Kombination dieser Methoden erzeugt wurden, heißen *lexikographische* Triangulierungen, da ihre Gestalt von einer festgelegten Reihenfolge der Punkte abhängt.

Übung 3.4.1. Schreibe die Konstruktionen dieses Abschnitts exakt auf und beweise, daß es sich um Triangulierungen handelt.

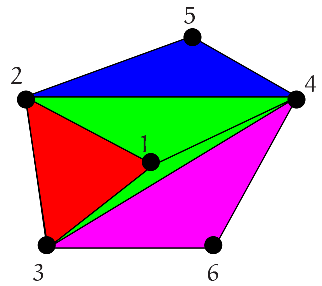
Wir nehmen hier an, daß unsere Punktmenge sich in allgemeiner Lage befindet, d. h. keine drei Punkte liegen auf einer Geraden. Seien die Punkte geordnet durch ihre Nummern $1, 2, 3, \ldots, n$.

Plazieren von Punkten

Beim Plazieren werden entsteht in Schritt $i-2$ eine Triangulierung von $\mathcal{A}_i := \{1,2,3,\ldots,i\}$ für $i = 3,4,\ldots,n$.

Start: Füge das Dreieck $\{1,2,3\}$ ein.

Plazieren von $i{+}1$*:* Sei T_i die Triangulierung aus Schritt $i-2$. Liegt der Punkt $i+1$ in der konvexen Hülle von $\mathcal{A}_i$, so setze $T_{i+1} := T_i$. Andernfalls sei F die Menge der von $i+1$ aus *sichtbaren Kanten* von $\mathcal{A}_i$, d. h. die Menge der Kanten von $\mathcal{A}_i$, die, zu Geraden erweitert, $i+1$ von $\operatorname{conv}\mathcal{A}_i$ trennen. Dann setze $T_{i+1} := T_i \cup F * \{i+1\}$.

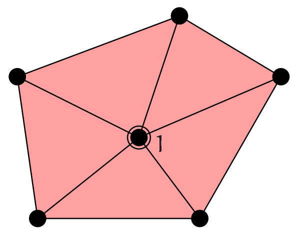


Plazieren

Übung 3.4.2. Wie kann man die Menge der von einem Punkt aus sichtbaren Kanten berechnen?

Ziehen von Punkten

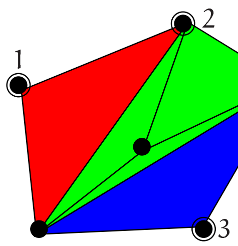
Das Ziehen von Punkten erzeugt in jedem Schritt eine teilweise Triangulierung der Punktmenge, d. h. in Dimension Zwei eine Zerlegung der konvexen Hülle in (konvexe) Polygone. Ziehen eines Punktes bedeutet anschaulich, daß man den Punkt nach oben aus der Ebene herauszieht und sich vorstellt, wie die konvexe Hülle der betrachteten Punkte nun von oben aussieht. Punkte mit größerer Nummer werden viel weniger weit gezogen, so daß keine bereits erzeugten Dreiecke verschwinden.



Ziehen

Schieben von Punkten

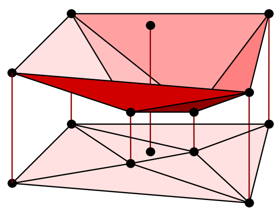
Das Ziehen von Punkten erzeugt in jedem Schritt eine teilweise Triangulierung der Punktmenge. Schieben eines Punktes bedeutet anschaulich, daß man den Punkt von oben in die Ebene hineindrückt und sich vorstellt, wie die konvexe Hülle der betrachteten Punkte von oben aussieht. Punkte mit größerer Nummer werden wieder viel weniger weit geschoben, so daß keine bereits erzeugten Dreiecke verschwinden.



Schieben

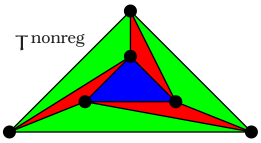
3.4.3 Reguläre Triangulierungen

Lexikographische Triangulierungen werden verallgemeinert durch die *regulären* Triangulierungen: Man ordnet jedem Punkt eine Höhe zu und betrachtet dann die konvexe Hülle von unten. Wählt man die Höhen ausreichend unabhängig voneinander (keine vier Punkte sind koplanar im Raum), so erhält man eine Triangulierung, ansonsten eine Unterteilung.


Eine reguläre Triangulierung

Übung 3.4.3. Zeige: Jede Triangulierung eines konvexen n-Ecks ist regulär.

Nicht alle Triangulierungen in Dimension Zwei sind regulär, wie die rotationssymmetrische Triangulierung



Eine nicht-reguläre Triangulierung von sechs Punkten in Dimension Zwei

T^{nonreg} von zwei konzentrischen Dreiecken mit parallelen Kanten zeigt. Zum Beweis nimmt man an, daß o. B. d. A. die Punkte des inneren Dreiecks alle Höhe Null bekommen. Eine Betrachtung der „Knickkanten" der äußeren Dreiecke ergibt, daß die Höhen im Uhrzeigersinn ansteigen müssen; Widerspruch.

Wir bezeichnen die Menge aller Kreise einer Punktmenge auch als die *Kombinatorik* der Punktmenge. (Das *orientierte Matroid* der Punktmenge ist durch die Menge der Kreise bestimmt.) Es gibt dann im allgemeinen mehrere Punktmengen (*geometrische Realisierungen*) mit der gleichen Kombinatorik. Wegen der rein kombinatorischen Charakterisierbarkeit von Triangulierungen haben Punktmengen mit gleicher Kombinatorik die gleichen Triangulierungen.

Während die Nicht-Regularität der obigen Triangulierung in Dimension Zwei von der *geometrischen Realisierung* abhängt, gibt es in Dimension Drei bereits nichtreguläre Triangulierungen, die in jeder geometrischen Realisierung nicht-regulär sind.

Übung 3.4.4. In welcher geometrischen Realisierung ist T^{nonreg} regulär?

4 Reguläre Triangulierungen: Die Delaunay-Triangulierung

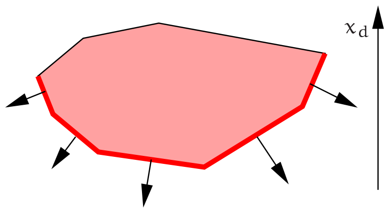
In diesem Kapitel werden wir genauer auf reguläre Unterteilungen eingehen und eine spezielle reguläre Triangulierung – die Delaunay-Triangulierung – genauer betrachten.

4.1 Konstruktion regulärer Triangulierungen

Hier wollen wir nun die im letzten Kapitel anschaulich vorgestellten *regulären* Unterteilungen bzw. Triangulierungen genau definieren. Dazu müssen wir zunächst wissen, was die unteren Facetten einer Punktkonfiguration sind.

Definition 4.1.1 (Untere Facetten). Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge im $\mathbb{R}^d$. Eine Facette $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ ist eine *untere* Facette von $\mathcal{A}$, wenn

$$\exists \psi \in (\mathbb{R}^d)^* : \psi_d < 0, F = \mathcal{A}^\psi.$$



Die Menge der unteren Facetten

Mit anderen Worten: $\operatorname{conv} F$ ist sichtbar, wenn man $\operatorname{conv} \mathcal{A}$ von einem Punkt mit stark negativer d-ter Koordinate aus betrachtet.

Die Menge aller unteren Facetten von $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{F}^l(\mathcal{A})$ bezeichnet.

Definition 4.1.2 (Reguläre Unterteilung). Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge im $\mathbb{R}^d$. Ferner sei eine *Höhenfunktion*

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}, \\ a & \mapsto & \alpha(a); \end{cases}$$

auf $\mathcal{A}$ gegeben.

Dann ist

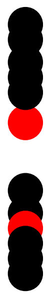
$$T(\mathcal{A}, \alpha) := \mathcal{F}^l(\{(a, \alpha(a)) \ : \ a \in \mathcal{A}\})$$

die *reguläre Unterteilung* von $\mathcal{A}$ bzgl. α. Ist $T(\mathcal{A}, \alpha)$ eine Triangulierung, so spricht man von der *regulären Triangulierung* von $\mathcal{A}$ bzgl. α.

Bemerkung 4.1.3. Wenn die Höhenfunktion α in allgemeiner Lage gewählt ist, d. h. keine $d+2$ Punkte sind auf ihrer Höhe affin abhängig, so ist $T(\mathcal{A}, \alpha)$ eine Triangulierung.

4.2 Einfache Beispiele für reguläre Triangulierungen

Bevor wir zu einer speziellen regulären Triangulierung kommen, schauen wir uns Beipiele in kleinen Dimensionen an.

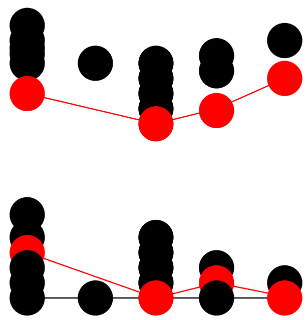


Höhen für eine reguläre Triangulierung in Dimension Null

Dimension Null

In Dimension Null sind alle Unterteilungen regulär. Die unterschiedlichen Unterteilungen sind bestimmt durch die Menge der Punkte, die den niedrigsten Wert der Höhenfunktion annehmen.

Die Unterteilung ist genau dann eine Triangulierung, wenn diese Menge nur einen Punkt enthält.



Höhen für eine reguläre Triangulierung in Dimension Eins

Dimension Eins

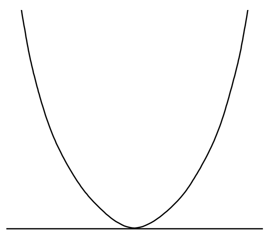
In Dimension Eins gibt es ebenfalls nur reguläre Unterteilungen. Die für die Unterteilung benutzten Punkte können von links nach rechts geordnet mit einer beliebigen konvexen Funktion geliftet werden.

4.3 Die Delaunay-Triangulierung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Höhenfunktion, die eine Triangulierung definiert, die in der algorithmischen Geometrie große Bedeutung besitzt.

Definition 4.3.1. Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge im $\mathbb{R}^d$. Definiere

$$\alpha_D : \begin{cases} \mathcal{A} & \to \quad \mathbb{R}, \\ a & \mapsto \quad a^2 := a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2. \end{cases}$$

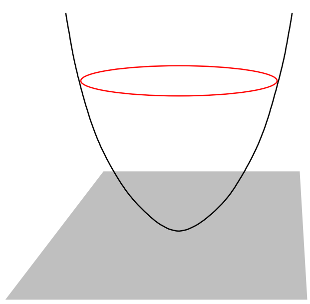


Das Einheitsparaboloid in Dimension Eins

Dann heißt $T_D := T(\mathcal{A}, \alpha_D)$ die *Delaunay-Unterteilung* von $\mathcal{A}$. Ist T_D eine Triangulierung, so spricht man von der *Delaunay-Triangulierung*.

Man projiziert also alle Punkte in $\mathcal{A}$ auf das d-dimensionale Paraboloid

$$P_d := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \; : \; x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} x_d^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$



Das Einheitsparaboloid in Dimension Zwei

und bildet die konvexe Hülle im $(d+1)$-dimensionalen Raum. Die unteren Facetten bilden dann die Delaunay-Unterteilung von $\mathcal{A}$.

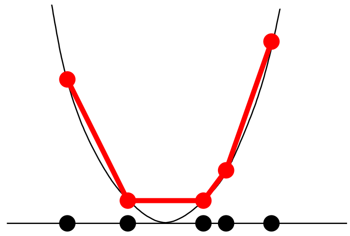
Wir werden nun eine nüzliche Beschreibung dieser Facetten präsentieren. Wir benutzen dabei die folgende Eigenschaft von Schnitten des Paraboloiden mit Hyperebenen.

Lemma 4.3.2. *Seien $a_0, a_1, \ldots, a_d$ affin unabhängig im $\mathbb{R}^d$. Dann ist die von $a_0, a_1, \ldots, a_d$ aufgespannte Hyperebene $H_{a_0,a_1,\ldots,a_d}$ gegeben durch*

$$H_{a_0,a_1,\ldots,a_d} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \; : \; \psi_{a_0,a_1,\ldots,a_d}(x) = 0 \right\},$$

wobei

$$\psi_{a_1,a_2,\ldots,a_d}(x) := \det \begin{bmatrix} x & a_0 & a_1 & \ldots & a_d \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$



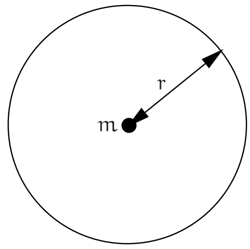
Eine Delaunay-Triangulierung in Dimension Eins

Im folgenden benötigen wir d-dimensionale Sphären:

Definition 4.3.3 (Sphäre). Eine Punktmenge S im $\mathbb{R}^d$ heißt $(d-1)$-Sphäre, wenn es einen Punkt $m \in \mathbb{R}^d$ gibt und eine positive Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x, m) = r \quad \forall x \in S,$$

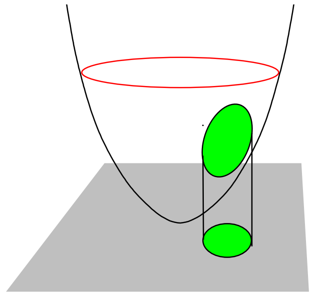
wobei $d(x, m) := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - m_i)^2}$ den euklidischen Abstand bezeichnet.



Eine eindimensionale Sphäre

Lemma 4.3.4. *Seien $a_0, a_1, \ldots, a_d$ Punkte in allgemeiner Lage in $\mathbb{R}^d$. Ferner sei $a'_i := (a_i, \alpha_D(a_i)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ für $i = 0, 1, \ldots, d+1$. $H := H_{a'_0,a'_1,\ldots,a'_d}$ die von diesen Punkten aufgespannte Hyperebene im $\mathbb{R}^{d+1}$.*

Dann ist die Projektion von $P_d \cap H$ auf $\mathbb{R}^d$ eine $(d-1)$-Sphäre, die die Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_d$ enthält.



Der Schnitt des Paraboloiden mit einer Hyperebene projiziert auf eine Sphäre

Wir nennen die Sphäre aus dem vorigen Lemma auch die von $a_0, a_1, \ldots, a_d$ *aufgespannte* Sphäre.

Beweis. Nach Lemma 4.3.2 ist die Hyperebene H ist definiert durch

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \; : \; \psi_{a'_0,a'_1,\ldots,a'_d}(x) = 0 \right\},$$

wobei

$$\psi_{a'_0,a'_1,\ldots,a'_d}(x) := \det \begin{bmatrix} x & a'_0 & a'_1 & \ldots & a'_d \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Für Punkte im Schnitt von H und P_d gilt demnach

$$\psi'_{a_0,a_1,\ldots,a_d}(x) := \det \begin{bmatrix} x & a_0 & a_1 & \ldots & a_d \\ \alpha_D(x) & \alpha_D(a_0) & \alpha_D(a_1) & \ldots & \alpha_D(a_d) \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Es ist nun eine Fleißaufgabe, den Mittelpunkt und den Radius anzugeben sowie die Abstandsbedingung zu checken. □

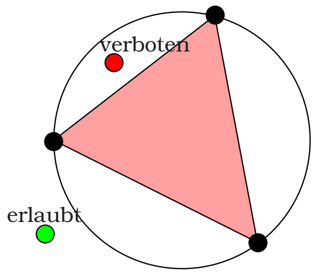
Der Name „Delaunay-Triangulierung" stammt von dem russischen Mathematiker Delone. Die Schreibweise „Delaunay" ist wahrscheinlich durch Veröffentlichung von Delone in französischer Sprache und die damit verbundene französische Umschrift des kyrillischen Alphabets verursacht worden.

Lemma 4.3.5. *Die Delaunay-Unterteilung ist genau dann eine Triangulierung, wenn keine $d+2$ Punkte in $\mathcal{A}$ auf einem Kreis liegen.*

Beweis. Eine Menge von $d+2$ Punkten $a_0, a_1, \dots, a_{d+1}$ liegt genau dann auf einem Kreis nach Lemma 4.3.4, wenn

$$\psi'_{a_0,a_1,\dots,a_d}(a_{d+1}) = 0.$$

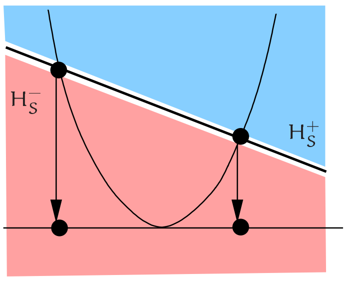
Das bedeutet aber auch, daß $a'_0, a'_1, \dots, a'_{d+1}$ genau dann auf $H_{a'_0,a'_1,\dots,a'_{d+1}}$ liegen. $\square$



Wegen des roten Punktes kann das Dreieck nicht in einer Delaunay-Triangulierung sein

Definition 4.3.6 (Umsphäre). Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ ein d-Simplex. Dann heißt von von S aufgespannte Sphäre die *Umsphäre* von S.

Theorem 4.3.7 (Umsphären-Charakterisierung). *Sie $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge. Sei T eine Unterteilung von $\mathcal{A}$. Dann ist T genau dann gleich der Delaunay-Unterteilung, wenn für jede Zelle $S \in T_D$ die offenen Umsphären von je $d+1$ Punkten aus S keine Punkte aus $\mathcal{A}$ enthalten.*



Liegt ein Punkt auf der „falschen" Seite der Hyperebene H_S, so liegt er in der Umsphäre

Beweis. Sei S eine $(d+1)$-elementige Teilmenge von $\mathcal{A}$, und sei H_S die von $\alpha_D(S)$ aufgespannte Hyperebene im $\mathbb{R}^{d+1}$. Ferner sei H_S^- der offene Halbraum im $\mathbb{R}^{d+1}$, der alle Punkte $(0,-M) \in \mathbb{R}^{d+1}$ für M ausreichend groß enthält. Alle Punkte in $P_d \cap H_S^+$ projizieren dann auf Punkte außerhalb der Umsphäre von S, und alle Punkte in $P_d \cap H_S^-$ liegen innerhalb der Umsphäre von S. Die Menge $B := H_S \cap \mathcal{A}$ ist genau dann eine untere Facette und somit eine Zelle in T_D, wenn $H_S^- \cap \mathcal{A} = \emptyset$, wenn also kein Punkt im Inneren der Umsphäre von S liegt. $\square$

4.4 Die Delaunay-Triangulierung in Dimension Zwei

In Dimension Zwei ist die Delaunay-Triangulierung in der algorithmischen Geometrie sehr gut untersucht. Wir zeigen hier einige der wesentlichen Resultate. Im folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß alle Punkte in besonders allgemeiner Lage sind, d. h. keine 3 Punkte liegen auf einer Geraden und keine 4 Punkte liegen auf einem Kreis.

4.4.1 Die Dualität zu Voronoi-Diagrammen

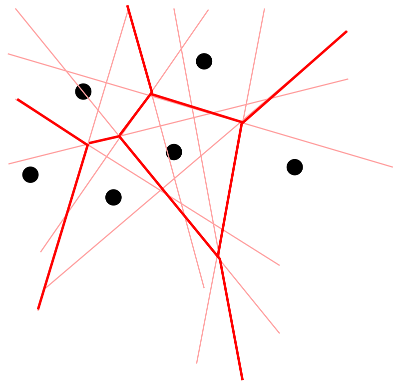
In diesem Abschnitt zeigen wir den Zusammenhang von Delaunay-Triangulierungen mit einem anderen wichtigen Objekt der algorithmischen Geometrie.

Definition 4.4.1 (Voronoi-Diagramm). Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, und sei $d(\cdot,\cdot)$ der euklidische Abstand. Das *Voronoi-Diagramm* $\mathrm{Vor}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ ist eine Zerlegung der Ebene in $\#\mathcal{A}$ Zellen $\mathrm{Vor}(a)$, so daß ein Punkt x in $\mathbb{R}^2$ genau dann in $\mathrm{Vor}(a)$ für ein $a \in A$ liegt, wenn

$$d(a,x) \leq d(b,x) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{A} \text{ mit } b \neq a.$$

Alle Zellen sind wegen des folgenden Lemmas konvexe Polyeder.

Definition 4.4.2. Die Gerade $H(a,b)$ mit $d(a,x) = d(b,x)$ für alle $x \in H(a,b)$ heißt *Bisektor* von a und b.



Ein Voronoi-Diagramm in Dimension Zwei

Lemma 4.4.3. *Sei* $H(a,b)$ *die Gerade mit* $d(a,x) = d(b,x)$ *für alle* $x \in H(a,b)$. *Ferner sei* $H^+(a,b)$ *die abgeschlossene Halbebene, die* a *enthält. Dann ist*

$$\mathrm{Vor}(a) = \bigcup_{b\in\mathcal{A}, b\neq a} H^+(a,b).$$

Ferner ist $x \in \mathrm{Vor}(a)$ *genau dann eine Ecke von* $\mathrm{Vor}(a)$, *wenn*

$$\begin{aligned} &x \in \mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(b) \cap \mathrm{Vor}(c), \\ &\qquad a, b, c \textit{ paarweise verschieden.} \end{aligned}$$

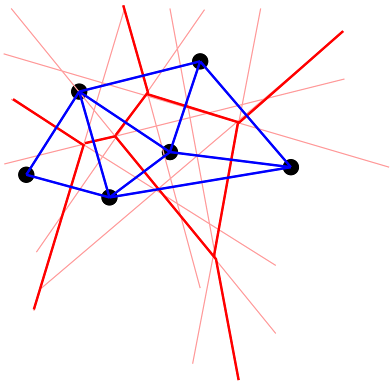
Beweis. Die erste Aussage ist nur eine Umformulierung der Definition.

Die Facetten der Voronoi-Zelle $\mathrm{Vor}(a)$ sind wegen allgemeiner Lage genau die nicht-leeren Schnitte $\mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(b)$ für $b \in \mathcal{A}$, $b \neq a$. Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} &x \in \mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(b) \cap \mathrm{Vor}(c), \\ &\qquad a, b, c \text{ paarweise verschieden} \\ \iff &x \in (\mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(b)) \cap (\mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(c)), \\ &\qquad a, b, c \text{ paarweise verschieden.} \end{aligned}$$

Also liegt x im Durchschnitt zweier Facetten von $\mathrm{Vor}(a)$. Der Durchschnitt zweier solcher Facetten ist (in Dimension Zwei) eine Ecke. □

Nun läßt sich die Dualität zwischen Delaunay-Triangulierungen und Voronoi-Diagrammen erklären.



Das duale Voronoi-Diagramm (blau) ist genau die Delaunay-Triangulierung

Theorem 4.4.4. *Sei $\mathcal{A}$ eine Punktmenge in der Ebene in allgemeiner Lage. Dann ist die Delaunay-Triangulierung von $\mathcal{A}$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} T_D(\mathcal{A}) &= \mathrm{Vor}^*(\mathcal{A}) \\ &:= \left\{ \{a, b, c\} \in \binom{\mathcal{A}}{3} \,:\, \mathrm{Vor}(a) \cap \mathrm{Vor}(b) \cap \mathrm{Vor}(c) \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Seien a, b und c aus $\mathcal{A}$ belienig. Betrachte den von a, b und c aufgespannten Kreis C. Dann haben a, b und c den gleichen Abstand vom Mittelpunkt von C.

Die Menge $\{a, b, c\}$ ist nach der Umsphäreneigenschaft 4.3.7 genau dann ein Dreieck in $T_D(\mathcal{A}$, wenn kein anderer Punkt $a' \in \mathcal{A}$ in $C(a, b, c)$ enthalten ist. Das ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft, das alle Punkte $a' \in \mathcal{A}$ vom Mittelpunkt von $C(a, b, c)$ einen größeren Abstand haben als a, b und c. Das heißt aber nach Definition der Voronoi-Zellen, daß der Mittelpunkt von C in den Voronoi-Zellen $\mathrm{Vor}(a)$, $\mathrm{Vor}(b)$ und $\mathrm{Vor}(c)$ liegt. □

4.4.2 Die max-min-Winkel-Eigenschaft

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts lassen sich einfach auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Anders verhält es sich mit der folgenden Eigenschaft der Delaunay-Triangulierung.

Definition 4.4.5 (Winkelvektor). Sei $\mathcal{A}$ eine Punktkonfiguration in allgemeiner Lage in der Ebene. Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$, die alle Punkte benutzt. Seien die Innenwinkel aller m Dreiecke in T gegeben durch

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_{3m}.$$

Dann heißt

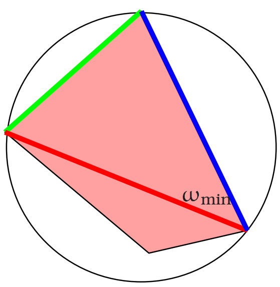
$$\omega(T) := (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{3m})$$

der Winkelvektor von T.

Für zwei Triangulierungen T, T' seien die Winkelvektoren lexikographisch geordnet, also

$$\omega(T) < \omega(T') :\Longleftrightarrow \ \omega_i(T) < \omega_i(T')$$

für das kleinste i mit $\omega_i(T) \neq \omega_i(T')$.



Eine illegale (rote) Kante: Wird die grüne Kante gegenüber dem minimalen Winkel $\omega_{\min}$ mit der anderen Ecke verbunden, so wird $\omega_{\min}$ wegen des Satzed von Thales im Winkelvektor durch einen größeren Winkel ersetzt; die Betrachtung der blauen Kante ist analog

Theorem 4.4.6. *Die Delaunay-Triangulierung von $\mathcal{A}$ hat minimalen Winkelvektor.*

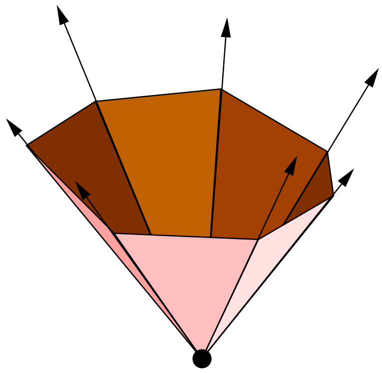
Beweis. Der Beweis ist einfach mit dem Satz von Thales und der Umsphären-Eigenschaft. □

Sekundärpolytop und Sekundärfächer

5

In diesem Kapitel werden wir eine erstaunliche Darstellung der Menge aller regulären Triangulierungen einer Multimenge kennenlernen. In dieser Darstellung wird sich eine überraschende Verbindung zur Theorie hypergeometrischer Funktionen offenbaren, die wir allerdings nur skizzieren können.

Die Ergebnisse dieses Kapitels stellen ein „Highlight" der Theorie polyedrischer Unterteilungen dar, das viele andere Untersuchungen erst ausgelöst hat.



Die Kegelhülle einer Vektormenge

5.1 Einige Begriffe aus der Polyedertheorie

Wir benötigen einige Begriffe aus der (geometrischen) Polyedertheorie.

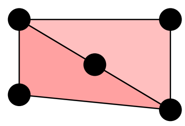
Definition 5.1.1 (Kegelhülle). Die *Kegelhülle* einer endlichen Menge V von Vektoren im $\mathbb{R}^d$ ist die Menge

$$\operatorname{cone}(V) := \left\{ \sum_{v \in V} \lambda_v v \,:\, \lambda_v \geq 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

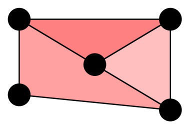
Die Menge $\operatorname{cone}(V)$ heißt dann *polyedrischer Kegel.*

Ein polyedrischer Kegel C ist *spitz*, wenn kein linearer Teilraum in C enthalten ist.

Beispielsweise kann man sich jedes Polyeder im $\mathbb{R}^d$ vorstellen als den Schnitt eines spitzen polyedrischen Kegels in $\mathbb{R}^{d+1}$ mit einer Hyperebene.



Ein polyedrischer Komplex



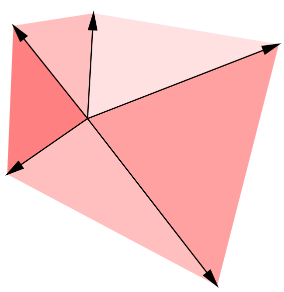
Kein polyedrischer Komplex

Definition 5.1.2 (Polyedrischer Komplex). Eine Menge $\mathcal{P}$ von Polyedern ist ein *polyedrischer Komplex*, wenn

(i) $P \cap Q \in \mathcal{P}$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$.

(ii) $P \cap Q \leq P$ und $P \cap Q \leq Q$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$.

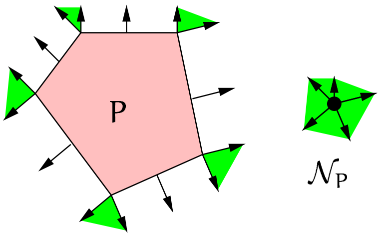
Zum Beispiel ist die Menge der konvexen Hüllen aller Seiten einer Triangulierung ein polyedrischer Komplex.



Ein Fächer in Dimension Zwei

Definition 5.1.3 (Fächer). Ein *Fächer* in $\mathbb{R}^d$ ist ein polyedrischer Komplex $\mathcal{P}$, in dem alle Elemente polyedrische Kegel sind.

Ein Fächer $\mathcal{P}$ ist vollständig, wenn er $\mathbb{R}^d$ überdeckt.



Normalenfächer eines 5-Ecks

Definition 5.1.4 (Normalenfächer). Sei P ein Polyeder im $\mathbb{R}^d$, und sei $F \leq P$ eine Seite von P. Dann ist

$$\mathcal{N}_P(F) := \left\{ \psi \in (\mathbb{R}^d)^* \;:\; F^\psi = F < P \right\}$$

ein polyedrischer Kegel, der *Normalenkegel* von F in P im $\mathbb{R}^d$.

Für einen Punkt $p \in P$ ist

$$\mathcal{N}_P(p) := \left\{ \psi \in (\mathbb{R}^d)^* \;:\; \psi(p) \leq \psi(p') \;\forall p' \in P \right\}.$$

der *Normalenkegel* von p in P.

Ist $[p]$ der Träger von p in P, so ist natürlich $\mathcal{N}_P(p) = \mathcal{N}_P([p])$.

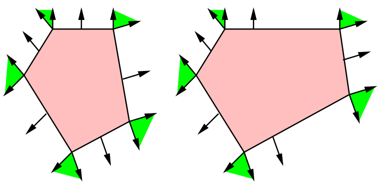
Die Menge

$$\mathcal{N}_P := \{ \mathcal{N}_P(F) \;:\; F \leq P \}$$

heißt *Normalenfächer* von P.

Zwei Polytope P und P' sind *normalen-äquivalent*, wenn

$$P \sim P' :\iff \mathcal{N}_P = \mathcal{N}_{P'}.$$


Zwei normalen-äquivalente 5-Ecke

5.2 Das Sekundärpolytop

Für eine reguläre Triangulierungen gibt es im allgemeinen viele äquivalente Höhenfunktionen, die diese Triangulierung erzeugen. In diesem Abschnitt werden wir die Äquivalenzklassen genau identifizieren.

5.2.1 GKZ-Vektoren

Wir definieren zunächst eine Zuordnung von Triangulierung einer Multimenge $\mathcal{A}$ zu Vektoren in $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$.

Definition 5.2.1 (GKZ-Vektor). Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge im $\mathbb{R}^d$, und sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$.

Dann ist

$$\phi_{\mathcal{A}}(T) := \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{S \in T, a \in S} \operatorname{vol}(S)\, e_a$$

der *Gelfand-Kapranov-Zelevinsky*-Vektor von T.

Definition 5.2.2 (Sekundärpolytop). Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge im $\mathbb{R}^d$. Dann heißt

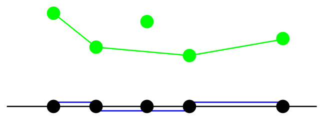
$$\Sigma(\mathcal{A}) := \operatorname{conv}\{ \phi_{\mathcal{A}}(T) \;:\; T \text{ Triangulierung von } \mathcal{A} \} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$$

das *Sekundärpolytop* von $\mathcal{A}$.

5.2.2 Der Sekundärfächer

Den Zusammenhang mit regulären Triangulierungen liefert die folgende Betrachtung. Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge im $\mathbb{R}^d$ und T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$. Wir betrachten nun einen beliebigen Höhenvektor $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Dann existiert eine eindeutige auf Simplizes in T affine Abbildung $g_{\alpha,T}$ auf $\operatorname{conv} \mathcal{A}$, die ddie Höhenfunktion $a \mapsto \alpha(a)$ erweitert. Mit anderen Worten:

$$g_{\alpha,T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{conv} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}; \\ \sum_{s \in S, S \in T} \lambda_s s & \mapsto & \sum_{s \in S, S \in T} \lambda_s \alpha(s). \end{array} \right.$$



Die stückweise lineare, konvexe Funktion induziert von einem Höhenvektor

Das heißt: Man vergißt alle Höhen auf Punkten, die nicht in T vorkommen, hebt alle übrigen Punkte entsprechend α an und bildet die konvexen Hüllen entsprechend den Simplizes in T.

Der Clou ist nun, daß man der Funktion $g_{\alpha,T}$ ansehen kann, ob α eine Höhenfunktion ist, so daß $T = T(\mathcal{A}, \alpha)$. Wann ist das der Fall? Da die Menge der Simplizes in $T(\mathcal{A}, \alpha)$ die Menge der unteren Facetten eines (konvexen) Polytops mit Ecken $(a, \alpha(a))$ für $a \in \mathcal{A}$ ist, ist für $x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}$ der Funktionswert $g_{\alpha,T(\mathcal{A},\alpha)}(x)$ genau der Punkt in $\operatorname{conv}\{\, (a, \alpha(a)) : a \in \mathcal{A} \,\}$ direkt „über“ x. Der Graph der Funktion $g_{\alpha,T(\mathcal{A},\alpha)}$ beschreibt also den (geometrischen) Simplizialkomplex der konvexen Hüllen der unteren Seiten von P. Also ist insbesondere $g_{\alpha,T(\mathcal{A},\alpha)}$ stückweise linear und (sonst) strikt konvex, und für jeden Punkt $b \in \mathcal{A}$, der in T nicht vorkommt, gilt $g_{\alpha,T}(b) \leq \alpha(b)$.

Umgekehrt: wenn $g_{\alpha,T}$ diese Eigenschaften hat, so ist T regulär mit Höhen $g_{\alpha,T}(a)$ für $a \in \mathcal{A}$.

Definition 5.2.3 (Konvexe Funtion). Ein Funktion $f : \operatorname{conv} \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f(tx+(1-t)) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall x, y \in \operatorname{conv} \mathcal{A}.$$

Wenn die Funktion f auf jedem Simplex einer Triangulierung T affin ist und

$$\begin{aligned} & f(tx + (1-t)) < tf(x) + (1-t)f(y) \\ & \forall t \in (0,1) \quad \forall x \in \operatorname{conv} S \setminus \operatorname{conv} S', y \in \operatorname{conv} S' \setminus \operatorname{conv} S, S, S' \in T, \end{aligned} \tag{5.1}$$

so nennen wir f *streng konvex außerhalb von Simplizes in* T.

Wir stellen diese Eigenschaften in einem Lemma zusammen:

Lemma 5.2.4 (Grundlegende Eigenschaften von $g_{\alpha,T}$). *Die Funktion $g_{\alpha,T}$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) T *ist genau dann regulär, wenn ein* $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ *existiert, so daß* $g_{\alpha,\mathsf{T}}$ *außerhalb von Simplizes in* T *strikt konvex ist.*

(ii) Wenn $\mathsf{T} = \mathsf{T}(\mathcal{A}, \alpha)$ *eine reguläre Triangulierung von* $\mathcal{A}$ *ist, dann ist* $g_{\alpha,\mathsf{T}} \leq g_{\alpha,\mathsf{T}'}$ *für alle Triangulierungen* T' *von* $\mathcal{A}$.

(iii) Für $\mathsf{T} = \mathsf{T}(\mathcal{A}, \alpha)$ *und* $\mathsf{T}' = \mathsf{T}(\mathcal{A}, \alpha')$ *gilt:*

$$g_{\alpha,\mathsf{T}} = g_{\alpha,\mathsf{T}'} \iff \mathsf{T} = \mathsf{T}'.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition:

Definition 5.2.5 (Sekundärfächer). Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge im $\mathbb{R}^d$.

Für eine Triangulierung T sei

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T}) := \Big\{\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}} : g_{\alpha,\mathsf{T}} \text{ konvex}, \ g_{\alpha,\mathsf{T}}(a) \leq \alpha(a) \ \forall a \notin \bigcup_{S \in \mathsf{T}} S\Big\}.$$

Der *Sekundärfächer* von $\mathcal{A}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} := \{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T}) : \mathsf{T} \text{ Triangulierung von } \mathcal{A}\}.$$

Lemma 5.2.6 (Grundlegende Eigenschaften von $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$). $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ *hat folgende Eigenschaften:*

(i) Wenn ein α', *für das* $\mathsf{T}' = \mathsf{T}(\mathcal{A}, \alpha')$ *eine Triangulierung ist, nicht im Sekundärkegel* $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T})$ *der regulären Triangulierung* $\mathsf{T} = \mathsf{T}(\mathcal{A}, \alpha)$ *liegt, so gilt*

$$g_{\alpha',\mathsf{T}} > g_{\alpha',\mathsf{T}'}.$$

(ii) Für reguläre Triangulierungen T, T' *von* $\mathcal{A}$ *gilt:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T}) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T}') \iff \mathsf{T} = \mathsf{T}'.$$

(iii) Für jede nicht reguläre Triangulierung T *von* $\mathcal{A}$ *gilt:*

$$\operatorname{relint} \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathsf{T}) = \emptyset.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Da für jede Höhenfunktion α in allgemeiner Lage $T(\mathcal{A}, \alpha)$ eine Triangulierung ist, liegt α wenigstens in $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T(\mathcal{A}, \alpha))$. Da jedes α' beliebig nahe an einem α in allgemeiner Lage liegt, überdecken die abgeschlossenen Kegel $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ den $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$.

Daß $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ ein Fächer ist, wird im Beweis des folgenden, großartigen Satzes gleich miterledigt.

In der Formulierung identifizieren wir $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ mit $(\mathbb{R}^{\mathcal{A}})^*$ auf die übliche Weise mithilfe des Skalarproduktes durch

$$\mathbb{R}^{\mathcal{A}} \ni \alpha \mapsto \langle \alpha, \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^{\mathcal{A}})^*.$$

Theorem 5.2.7 (Gel'fand, Kapranov & Zelevinsky [5]). *Der Normalenfächer des Sekundäpolytops ist gleich dem Sekundärfächer.*

Wir führen den Beweis nach [2].

Beweis. Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T) \subseteq \mathcal{N}_{\Sigma(\mathcal{A})}(\phi_{\mathcal{A}}(T))$. Sei $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$. Wir zeigen, daß

$$\langle \alpha, \phi_{\mathcal{A}}(T) \rangle \leq \langle \alpha, \phi_{\mathcal{A}}(T') \rangle$$

für alle Triangulierungen T' von $\mathcal{A}$.

Da nach Definition von $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$

$$g_{\alpha,T}(x) \leq g_{\alpha,T'}(x)$$

für alle Triangulierungen T' von $\mathcal{A}$ gilt, wissen wir

$$\int_{x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}} g_{\alpha,T}(x)\, dx \leq \int_{x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}} g_{\alpha,T'}(x)\, dx. \tag{5.2}$$

Da $g_{\alpha,T}$ stückweise linear ist, können wir die Integrale ausrechnen. Für eine beliebige Triangulierung T' von $\mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{x \in \operatorname{conv} \mathcal{A}} g_{\alpha,T'}(x)\, dx &= \sum_{S \in T'} \int_{x \in \operatorname{conv} S} g_{\alpha,T'}(x)\, dx \\
&= \sum_{S \in T'} \operatorname{vol}(\operatorname{conv} S) \tfrac{1}{d+1} \sum_{s \in S} \underbrace{g_{\alpha,T'}(s)}_{=\alpha(s)} \\
&= \tfrac{1}{d+1} \sum_{a \in \mathcal{A}} \alpha(a) \sum_{S \in T', a \in S} \operatorname{vol}(\operatorname{conv} S) \\
&= \tfrac{1}{d+1} \langle \alpha, \phi_{\mathcal{A}}(T') \rangle.
\end{aligned}$$

Diese Formel zusammen mit (5.2) ergibt

$$\langle \alpha, \phi_{\mathcal{A}}(T) \rangle \leq \langle \alpha, \phi_{\mathcal{A}}(T') \rangle$$

für alle Triangulierungen T' von $\mathcal{A}$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T) \supseteq \mathcal{N}_{\Sigma(\mathcal{A})}(\phi_{\mathcal{A}}(T))$. Diese Behauptung beweisen wir indirekt. Sei α' nicht in $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$ enthalten. Dann besagt Lemma 5.2.6(i):

$$g_{\alpha',T} > g_{\alpha',T'}.$$

Also gilt

$$\langle \alpha', \phi_{\mathcal{A}}(T) \rangle > \langle \alpha', \phi_{\mathcal{A}}(T') \rangle.$$

Also liegt α' nicht in $\mathcal{N}_{\Sigma(\mathcal{A})}(\phi_{\mathcal{A}}(T))$. □

Aus den Lemmata und dem Satz dieses Abschnitts folgt leicht:

Korollar 5.2.8. *Die GKZ-Vektoren der regulären Triangulierungen von $\mathcal{A}$ sind genau die Ecken des Sekundärpolytops $\Sigma(\mathcal{A})$.*

5.3 Der spitze Sekundärfächer

Wir wollen nun die analytische Beschreibung des letzten Abschnitts durch eine geometrische ergänzen. Hierzu benötigen wir die sogenannten Gale-Dagramme.

5.3.1 Gale-Transformation

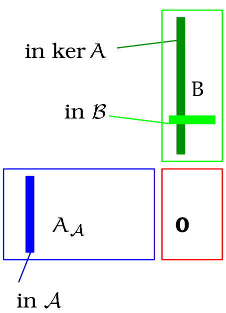
Für eine Multimenge $\mathcal{A}$ sei im folgenden n die Anzahl der Punkte in $\mathcal{A}$.

Definition 5.3.1 (Gale-Transformation). Für eine d-dimensionale Multimenge $\mathcal{A}$ im $\mathbb{R}^d$ betrachten wir die Matrix der homogenen Koordinaten

$$A_{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times n}$$

Sei nun B eine Basis von $\ker A$, d. h. eine Matrix in $\mathbb{R}^{n\times(n-d-1)}$ mit vollem Rang und

$$A \cdot B = \mathbf{0}.$$



Ein Schema der bei der Gale-Transformation beteiligten Matrizen

Dann heißt B eine *Gale-Transformierte* von $A_{\mathcal{A}}$. Die Menge aller Zeilenvektoren $\mathcal{B}$ von B heißt *Gale-Transformierte* oder *duale Vektorkonfiguration* von $\mathcal{A}$, und wir schreiben

$$\mathcal{B} \in \text{Gale}(\mathcal{A}).$$

Wir können nun noch die folgende Konstruktion vornehmen, die uns ein „semi-affines" Bild von einer Gale-Tranformierten verschafft:

Definition 5.3.2 (Gale-Diagramm). Sei $\mathcal{B} \in \text{Gale}(\mathcal{A})$ und $\psi \in (\mathbb{R}^{n-d-1})^*$ mit $\psi(b) \neq 0$ für alle $b \in \mathcal{B}$ mit $b \neq 0$.

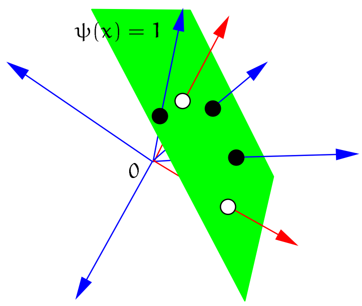
Dann heißt

$$\mathcal{B}/\psi := \\ \Big\{ \underbrace{\Big(\tfrac{b}{\psi(b)}, \operatorname{sign}(\psi(b))\Big)}_{b/\psi} \in (\mathbb{R}^{n-d-2})^* \times \{+,-\} : b \in \mathcal{B}, b \neq 0 \Big\}$$

ein *Gale-Diagramm* von $\mathcal{A}$, und wir schreiben

$$\mathcal{B}/\psi \in \mathrm{Gale}^{\mathrm{aff}}(\mathcal{A}).$$

Die Punkte $(b/\psi, +) \in \mathcal{B}/\psi$ heißen *positive* (gewöhnlich schwarz gezeichnet), die Punkte $(b/\psi, -)$ *negative* Punkte (gewöhnlich weiß gezeichnet). Punkte $b \in \mathcal{B}$ mit $b = 0$ heißen manchmal *spezielle* Punkte und werden grau gezeichnet.



Geometrische Konstruktion des Gale-Diagramms aus der Gale-Transformierten

Bemerkung 5.3.3. Die Punkte in $\mathcal{B}/\psi$ liegen alle auf der Hyperebene

$$H(\psi) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-d-1} \ : \ \psi(x) = 1 \right\}.$$

Daher können wir uns ein $(n-d-2)$-dimensionales Bild von der Situation machen.

5.3.2 Darstellung von regulären Triangulierungen in affinen Gale-Diagrammen

Schauen wir uns eine reguläre Triangulierung $T(\mathcal{A}, \alpha)$ einer Multimenge $\mathcal{A}$ an. Sei $\mathcal{A}'$ die Multimenge der geliften Punkte $(a, \alpha(a))$ im $\mathcal{R}^{d+1}$ und P ihre konvexe Hülle.

Die Addition einer affinen Funktion zu einer Höhe ergibt nach Definition eine affin äquivalente Punktkonfiguration im $\mathbb{R}^{d+1}$. Dies ändert nichts an der Facettenstruktur. Also gilt:

Lemma 5.3.4. *Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge und α ein Höhenvektor aus $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Ferner sei ψ eine affine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist*

$$T(\mathcal{A}, \alpha) = T(\mathcal{A}, \alpha + \psi),$$

d. h.

$$\alpha + \psi \sim \alpha.$$

□

Zu $S \in T(\mathcal{A}, \alpha)$ sei ψ_S die eindeutige affine Höhenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\psi(s) = \alpha(s)$ für alle $s \in S$. Dann ist

$$\alpha_S : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}, \\ a & \mapsto & \alpha(a) - \psi_S(a). \end{array} \right.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\alpha_S(a) \begin{cases} = 0 & \text{für } a \in S, \\ > 0 & \text{für } a \in S^*. \end{cases} \tag{5.3}$$

Ferner ist nach Lemma 5.3.4 $\alpha_S \sim \alpha$.

Es gilt sogar folgendes:

Lemma 5.3.5. *Die Funktion* $g_{\alpha,T}$ *ist genau dann strikt konvex, wenn für alle* $S \in T$ *eine affine Funktion* ψ_S *existiert, so daß für* $\alpha_S = \alpha - \psi_S$ *die Beziehung (5.3) gilt.*

Nun müssen wir nur noch α_S mit einer Gale-Transformierten B von $A_{\mathcal{A}}$ multiplizieren und die Operation interpretieren: Betrachte

$$\alpha_S \cdot B =: \nu \in \mathbb{R}^{n-d-1}. \tag{5.4}$$

Die Beziehungen (5.3) und (5.4) besagen, daß ν eine strikt positive Linearkombination von $S^* \subseteq \mathcal{B}$ ist. Also liegt ν im Innern des von den Zeilen von B mit Indizes in S^* erzeugten Kegels $\operatorname{cone} S^*$.

Wir sehen aber noch mehr: Sei T eine Menge von d-Simplexen in $\mathcal{A}$ und sei $S \in T$.

Für ein ν in Innern von $\operatorname{cone} S^*$ für alle $S \in T$ sei α ein beliebiges Urbild mit $\alpha \cdot B = \nu$. Für $S \in T$ sei ψ_S wieder die eindeutige affine Funktion auf $\mathcal{A}$ mit $\psi(s) = \alpha(s)$ für alle $s \in S$. Dann gilt (5.3) für $\alpha_S = \alpha - \psi_S$. Damit ist wegen Lemma 5.3.5 $g_{\alpha,T}$ strikt konvex, und es gilt

$$T = T(\mathcal{A}, \alpha) \quad \forall \alpha : \alpha \cdot B = \nu, \nu \in \bigcap_{S \in T} \operatorname{relint} \operatorname{cone} S^*.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jedes ν im $\mathbb{R}^{n-d-1}$ in mindestens einem Kegel $\operatorname{cone} S^*$ liegt. Wir haben damit (etwas skizzenhaft) folgendes Theorem bereits bewiesen:

Theorem 5.3.6 ([2]). *Sei* $\mathcal{A}$ *eine Multimenge im* $\mathbb{R}^d$ *und* $\mathcal{B}$ *eine Gale-Transformierte von* $\mathcal{A}$. *Ferner sei* $\nu \in \mathbb{R}^{n-d-1}$, *so daß* ν *nicht im Rand des Kegels* $\operatorname{cone} U$ *für alle* $U \in \binom{\mathcal{B}}{n-d-1}$ *liegt.*

Dann ist

$$T(\nu) := \left\{ S \in \binom{\mathcal{A}}{d+1} : \nu \in \operatorname{cone} S^* \right\}$$

eine reguläre Triangulierung von $\mathcal{A}$.

Ferner gilt

$$T(\nu) = T(\mathcal{A}, \alpha) \iff \alpha \cdot B = \nu.$$

□

Die folgende Definition erlaubt eine weitere Umformulierung:

Definition 5.3.7 (Spitzer Sekundärfächer). Der abgeschlossene Kegel

$$\mathcal{C}'_B(T) := \bigcap_{S \in T} \operatorname{cone} B_{S^*}$$

heißt *spitzer Sekundärkegel*.

Der Fächer

$$\mathcal{C}'_B = \bigcup \{ \mathcal{C}'_B(T) : T \text{ Triangulierung von } \mathcal{A} \}$$

heißt *spitzer Sekundärfächer* von $\mathcal{A}$.

Der Name ist gerechtfertigt durch folgendes Theorem, das aus den gleichen Überlegungen wie das vorige folgt:

Theorem 5.3.8 ([2]).

$$\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T) \iff \alpha \cdot B \in \mathcal{C}'_B(T).$$

□

5.4 Ein Beispiel

In diesem Abschnitt wollen wir alle regulären Triangulierungen eines Sechsecks bestimmen. Also $d = 2$ und $n = 6$. Die Koordinaten seien

$$\mathcal{A} := \{(-1,0),(0,1),(1,1),(1,0),(0,-1),(-1,-1)\}$$

Wir fassen diese Menge zunächst als Spalten einer Matrix $A_{\mathcal{A}}$ auf.

$$A_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen dann (z. B. mit Mathematika) eine Gale-Tranformierte B'. Deren Spalten bilden eine Basis des Kerns von $A_{\mathcal{A}}$.

Die Zeilen dieser Matrix definieren Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Um ein zweidimensionales Bild zu erhalten (und aus anderen Gründen ...), addieren wir die Differenz der ersten und der zweiten Spalte zur dritten Spalte.

Es gilt $A \cdot B = \mathbf{0}$. Die Menge $\mathcal{B}$ ist nun die Menge der Zeilen von B.

Für $\psi = (0,0,1)$ ist $\mathcal{B}/\psi$ dann:

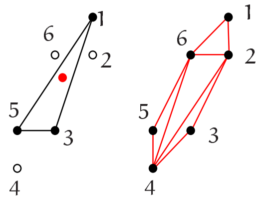
$$\mathcal{B}/\psi = \{\{2,2,-\},\{2,3,+\},\{1,2,-\},\{0,0,+\},\{0,-1,-\},\{1,0,+\}\}.$$

$$B' = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gale-Transformierte von $\mathcal{A}$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eine nützliche Transformation



Die reguläre Triangulierung eines 6-Ecks gegeben durch den „Mittelpunkt" des Gale-Diagramms

Wir wollen die Triangulierung bestimmen, die zum „Mittelpunkt" M dieses Gale-Diagramms gehört. Dazu ermitteln wir:

$$\begin{aligned} M &\in \operatorname{relint} \operatorname{cone}\{1,3,5\}, \\ M &\in \operatorname{relint} \operatorname{cone}\{1,2,3\}, \\ M &\in \operatorname{relint} \operatorname{cone}\{3,4,5\}, \\ M &\in \operatorname{relint} \operatorname{cone}\{1,5,6\}. \end{aligned}$$

Ferner liegt M nicht im Rand irgendeines anderen positiven Kegels in $\mathcal{B}$.

Also ist

$$T(M) = \{\{2,4,6\},\{4,5,6\},\{1,2,6\},\{2,3,4\}\}.$$

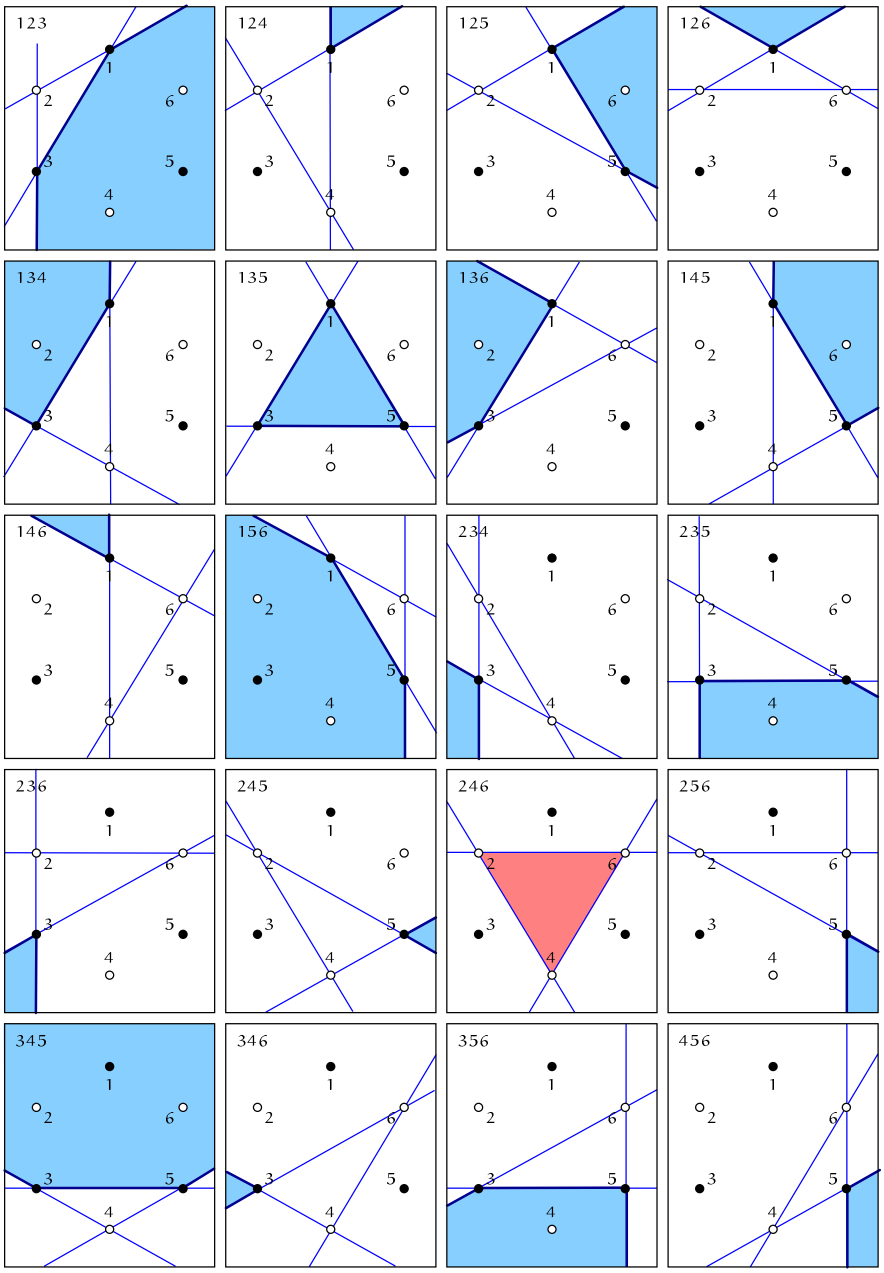
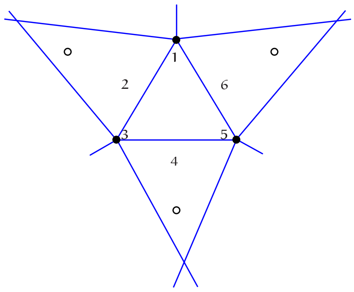


Abbildung 5.13: Die positiven Kegel aller möglichen Basen $S^* \in \binom{\mathcal{B}}{n-d-1}$ des Gale-Diagramms eines Sechsecks



Die durch den spitzen Sekundärfächer induzierte Zerlegung des „positiven" Teils des affinen Gale-Diagramms eines 6-Ecks

Mit ein bißchen Mühe (Abbildung 5.13) erarbeitet man sich die Zerlegung des Gale-Diagramms durch den spitzen Sekundärfächer.

Wir sehen auf der positiven Seite 4 Zellen, die nicht auf der negativen Seite erscheinen. Ferner existieren die analogen 4 Zellen auch auf der negativen Seite. Zusätzlich gibt es 6 Zellen, die sowohl auf der positiven als auch auf der negativen Seite liegen. Das macht zusammen 14 maximale Zellen. Also hat unser Sechseck 14 reguläre Triangulierungen.

6 Sekundärpolytop und bistellare Operationen

In diesem Kapitel werden wir bistellare Operationen zwischen regulären Triangulierungen verstehen.

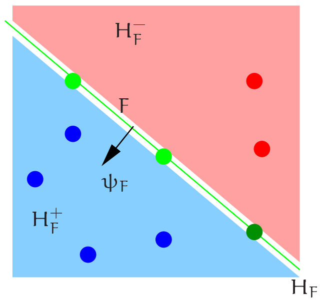
6.1 Kokreise

Kokreise in einer Multimenge $\mathcal{A}$ geben an, wie man $\mathcal{A}$ mit Hyperebenen in positive und negative Punkte aufteilen kann.

Definition 6.1.1 (Kokreis). Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge. Ferner sei H_F die vom $(d-1)$-Simplex $F \subseteq \mathcal{A}$ aufgespannte Hyperebene im $\mathbb{R}^d$. H_F^+ und H_F^- seien die beiden durch H_F bestimmten offenen Halbräume des $\mathbb{R}^d$. Definiere

$$\begin{aligned} Z_F^* &:= \mathcal{A} \cap H_F, \\ (Z_F^*)^+ &:= Z_F^* \cap H_F^+, \\ (Z_F^*)^- &:= Z_F^* \cap H_F^-. \end{aligned}$$

Dann heißt Z_F^* ein *Kokreis* von $\mathcal{A}$ induziert von F mit *Positivteil* $(Z_F^*)^+$ und *Negativteil* $(Z_F^*)^-$.

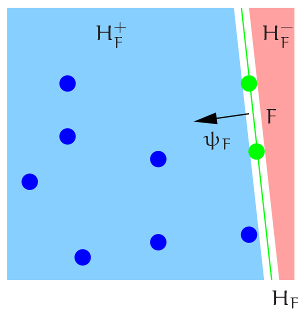


Ein durch ein $d-1$-Simplex induzierter Kokreis mit blauem Postiv- und rotem Negativteil

Während uns die Kreise die Information geben, welche Simplizes sich unzulässig schneiden, geben Kokreise uns u. a. die Information, welche $(d-1)$-Simplizes in Facetten von $\mathcal{A}$ liegen.

Lemma 6.1.2. *Ein $(d-1)$-Simplex F liegt genau dann in einer Facette von $\mathcal{A}$, wenn ein Kokreis Z^* in $\mathcal{A}$ existiert mit*

$$F \cap Z^* = \emptyset, \quad \textit{und} \quad (Z^*)^- = \emptyset.$$



Das Komplement eines positiven Kokreises ist eine Facette

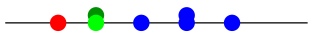
Beweis. Die Behauptung folgt aus der Definition einer Facette. □

6.2 Beispiele für Kokreise

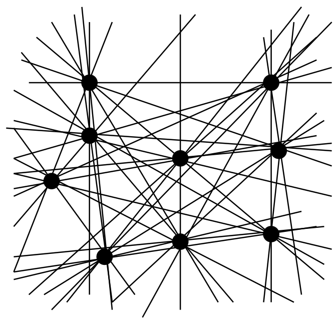
Wir handeln zunächst die niedrigdimensionalen Fälle ab.

6.2.1 Dimension Null

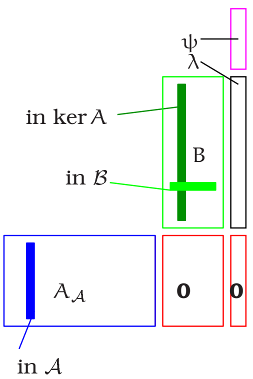
In Dimension Null gibt es keine Kokreise.



Die Kokreise in Dimension Eins entsprechen den unterschiedlichen Punkten



Die Kokreise Dimension Zwei entsprechen den Geraden durch mindestens zwei verschiedene Punkte.



Kokreise in der Gale-Transformierten als Spaltenvektoren ψ und Kreise in der Multimenge als Spaltenvektoren λ

6.2.2 Dimension Eins

In Dimension Eins bestimmt jeder Punkt in $\mathcal{A}$ einen Kokreis mit Positivteil „Punkte zur rechten“ und Negativteil „Punkte zur linken“. Alle Kopien desselben Punktes bestimmen denselben Kokreis.

6.2.3 Dimension Zwei

Hier sind die Kokreise bestimmt durch die Geraden, die durch mindestens zwei Punkte gehen. Die Punkte in den zwei offenen Halbräumen bestimmen Positiv- und Negativteil des Kokreises.

6.3 Kokreise im Gale-Diagramm

Sei F ein $(d-1)$-Simplex in $\mathcal{A}$. Ist ψ_F ein lineares Funktional in $(\mathbb{R}^d)^*$ mit $\psi_F(a) = 0$ für alle $a \in F$, so ist der Positivteil bzw. Negativteil von Z_F^* gegeben durch die Menge aller Punkte in $\mathcal{A}$, für die ψ_F echt größer bzw. kleiner als Null ist. Das lineare Funktional kann man sich als Zeilenvektor ψ_F vorstellen mit $\psi_F \cdot a = 0$ für alle $a \in F$.

Schauen wir uns nun eine Gale-Transformierte $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ an. Die Punkte aus $\mathcal{A}$ stellen wir wieder in homogenen Koordinaten als Spalten einer Matrix A dar, ebenso betrachten wir die Vektoren von $\mathcal{B}$ als Zeilen einer Matrix B mit $A \cdot B = 0$. Den zu $a \in \mathcal{A}$ gehörenden Vektor in $\mathcal{B}$ nennen wir b_a.

Einen Kokreis Z^* in $\mathcal{B}$ können wir uns nach der obigen Überlegung vorstellen als einen Spaltenvektor ψ mit $b \cdot \psi = 0$ für alle $b \in F$.

Einen Kreis Z in $\mathcal{A}$ können wir darstellen als einen Spaltenvektor λ aus dem Kern von A mit $\lambda_a = 0$ für alle $a \in \mathcal{A} \setminus Z$.

Genaues Hinsehen liefert das folgende Theorem:

Theorem 6.3.1 (Kreis-Kokreis-Dualität). *Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge mit n Punkten, uns sei $\mathcal{B}$ eine Gale-Transformierte von $\mathcal{A}$. Dann entsprechen die Kreise in $\mathcal{A}$ genau den Kokreisen in $\mathcal{B}$. Genauer gilt:*

(i) Sei ψ ein Spaltenvektor in $\mathbb{R}^{n-d-1}$, der einen Kokreis in $\mathcal{B}$ induziert, d. h. für den die Menge aller $b \in \mathcal{B}$ mit $b \cdot \psi = 0$ mindestens $n - d - 2$ linear unabhängige Elemente hat. Setze

$$\begin{aligned}
\lambda_\psi &:= B \cdot \psi, \\
Z_\psi &:= \{ a \in \mathcal{A} : \lambda_\psi \neq 0 \}, \\
Z_\psi^+ &:= \{ a \in \mathcal{A} : \lambda_\psi > 0 \}, \\
Z_\psi^- &:= \{ a \in \mathcal{A} : \lambda_\psi < 0 \},
\end{aligned}$$

Dann ist Z_ψ ist ein Kreis in $\mathcal{A}$ mit Positivteil Z_ψ^+ und Negativteil Z_ψ^-.

(ii) Sei λ ein Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$, der einen Kreis in $\mathcal{A}$ induziert, d. h. λ liegt im Kern von A mit inklusionsminimalen Support. Wähle ein

$$\psi_\lambda \in B^{-1}(\lambda)$$

und setze

$$\begin{aligned} Z_\lambda^* &:= \{\, b \in \mathcal{B} \,:\, b \cdot \psi_\lambda \neq 0 \,\}, \\ (Z_\lambda^*)^+ &:= \{\, b \in \mathcal{B} \,:\, b \cdot \psi_\lambda > 0 \,\}, \\ (Z_\lambda^*)^- &:= \{\, b \in \mathcal{B} \,:\, b \cdot \psi_\lambda < 0 \,\}. \end{aligned}$$

Dann ist Z_λ^* ein Kokreis in $\mathcal{B}$ mit Positivteil $(Z_\lambda^*)^+$ und Negativteil $(Z_\lambda^*)^-$.

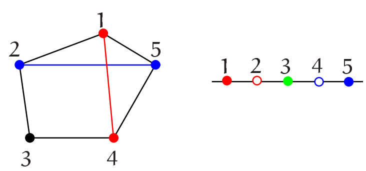
Beweis. (i) Wegen $A \cdot B = \mathbf{0}$ ist $A \cdot \lambda_\psi = 0$. Wir müssen nur noch zeigen, daß es keine echte affine abhängige Teilmenge von Z_ψ gibt. Angenommen, es gibt eine abhängige Teilmenge $Z \subsetneq Z_\psi$. Sei λ_Z der zugehörige Spaltenvektor aus dem Kern von A. Betrachte einen beliebigen Spaltenvektor ψ_Z aus $B^{-1}(\lambda_Z)$. Dann impliziert $b \cdot \psi = 0$ auch $b \cdot \psi_Z = 0$ für $b \in \mathcal{B}$. Nach Definition eines Kokreises gilt diese Gleichheit für mindestens $n - d - 2$ linear unabhängige Elemente $b \in \mathcal{B}$. Dadurch ist aber die Menge aller $b \in \mathcal{B}$ für die $b \cdot \psi_Z = 0$ bereits festgelegt, und wir haben

$$b \cdot \psi_Z = 0 \iff b \cdot \psi = 0.$$

Daraus folgt aber $Z = Z_\psi$, was zu zeigen war.

(ii) Natürlich definiert ψ_λ eine Hyperebene H_λ im $\mathbb{R}^{n-d-1}$. Wir müssen noch zeigen, daß mindestens $n - d - 2$ linear unabhängige Vektoren aus $\mathcal{B}$ auf dieser Hyperebene liegen, d. h. $b \cdot \psi_\lambda = 0$ für mindestens $n - d - 2$ linear unabhängige Vektoren in $\mathcal{B}$. Sie Z_ψ der durch λ definierte Kreis. Dann ist $b_a \cdot \psi_\lambda = 0$ für alle $a \in \mathcal{A} \backslash Z_\lambda$ und $b_a \cdot \psi_\lambda \neq 0$ für alle $a \in Z_\lambda$. Also spannen genau die b_a mit $a \in \mathcal{A} \backslash Z_\lambda$ den Kern von ψ_λ, aufgefaßt als Abbildung von $\mathbb{R}^{n-d-1}$ nach $\mathbb{R}$, auf. Der hat Dimension $n - d - 2$, und somit folgt die Behauptung. □

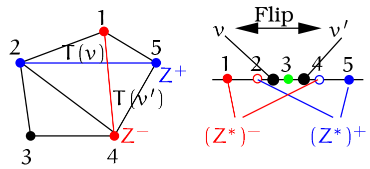
Man kann die Kokreise im Gale-Diagramm prima ablesen: Man betrachtet zunächst die Aufteilung der Punkte durch alle möglichen Hyperebenen durch mindestens $n - d - 2$ affin unabhängige Punkte. Dann modifiziert man die Einteilung, indem alle negativen Punkte „die Seite wechseln“.



Ein Kreis im Fünfeck und der zugehörige Kokreis im Gale-Diagramm

6.4 Flips im Gale-Diagramm

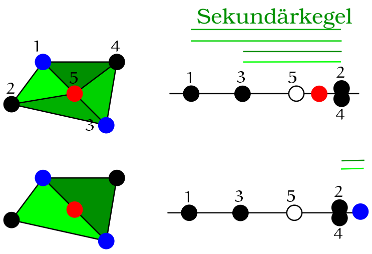
Wir wollen die Kreis-Kokreis-Dualität nutzen, um in der Darstellung regulärer Triangulierungen im Gale-Diagramm bistellare Operationen (Flips) wiederzufinden.



Ein Flip in einer Triangulierung eines Fünfecks, dargestellt im Gale-Diagramm

Theorem 6.4.1 (Flips im Gale-Diagramm). *Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge, und sei $\mathcal{B}$ eine Gale-Transformierte von $\mathcal{A}$. Ferner sei T eine reguläre Triangulierung von $\mathcal{A}$ und $T^* := \bigcap_{S \in T} \operatorname{cone} S^*$ der zugehörige Kegel in der Gale-Transformierten. Für eine Facette F von T^* sei Z_F^* der induzierte Kokreis. Der an F zu T^* benachbarte Kegel sei $(T')^*$ und T' sei die zugehörige Triangulierung.*

Dann induziert der zu Z_F^* duale Kreis Z_F einen Flip in T nach T'.



Ein degenerierter Flip, dargestellt im Gale-Diagramm

Beweisskizze. Die Simplizes S aus $T \backslash T'$ sind genau von der folgenden Form: S^* enthält zunächst $n-d-2$ Punkte auf der von F aufgespannten Hyperebene, in deren Kegelhülle F liegt. Außerdem enthält S^* einen Punkt im offenen positiven Halbraum H_F^+, also genau einen Punkt aus dem Positivteil von Z_F^* und keinen Punkt aus dem Negativteil von Z_F^*. Also enthält S alle Punkte aus dem Negativteil und alle bis auf einen aus dem Postivteil des dualen Kreises Z_F. Also induziert genau die Simplizes in $T \backslash T'$ die Triangulierung $T^+(Z_F)$ auf Z_F.

Analog induzieren die Simplizes in $T' \backslash T$ auf Z_F die Triangulierung $T^-(Z_F)$. Somit definiert Z_F einen Flip von T nach T'. □

Bemerkung 6.4.2. Die Link-Bedingung muß nicht geprüft werden, da nachgewiesen wurde, daß T und T' Triangulierungen sind, die sich nur auf dem Stern von Z_F unterscheiden.

Wir fassen zusammen und ziehen einige Folgerungen.

Theorem 6.4.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge.*

Dann gilt für die Menge aller regulären Triangulierungen von $\mathcal{A}$:

(i) Die regulären Triangulierungen entsprechen genau den Ecken des Sekundärpolytops.

(ii) Zwei reguläre Triangulierungen unterscheiden sich genau dann durch eine bistellare Operation, wenn sie im Sekundärpolytop durch eine Kante verbunden sind.

(iii) Der Graph aller regulären Triangulierungen ist $(n-d-1)$-zusammenhängend.

6.5 Bericht: Algebraische Interpretation des Sekundärpolytops

Wir betrachten eine Menge A von *Monomen* $x^z := x_1^{z_1} \dots x_d^{z_d}$ in d Variablen. Sei $\mathbb{C}^A$ der Raum aller Polynome mit komplexen Koeffizienten, deren Monome alle in A liegen, d. h. alle anderen Terme haben Koeffizienten identisch Null. Für $x^z \in A$ sei $\nu(x^z) := z = (z_1, \dots, z_d)$ der zugehörige Gitterpunkt in $\mathbb{R}^d$.

Sei nun $\mathcal{A}$ die Menge der Punkte $\nu(x^z)$ mit $x^z \in A$.

Die A-Diskriminante $\Delta_A(f)$ eines Polynoms

$$f = \sum_{x^z \in A} a_z x^z \in \mathbb{C}^A$$

ist ein Polynom in den Koeffizienten a_z von f, das verschwindet, wenn f eine d-fache Wurzel x mit $x_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, d$.

Die A-Resultante $R_A(f_1, \dots, f_m)$ von $f_1, \dots, f_m$ ist ein Polynom in den Koeffizienten $a_{1,z}, \dots, a_{m,z}$ von $f_1, \dots, f_m$, das verschwindet, wenn $f_1, \dots, f_m$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Die *prinzipale A-Determinante* $E_A(f)$ von f ist die folgende A-Resultante, aufgefaßt als Polynom in den Koeffizienten a_z von f:

$$E_A(f) := R_A\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_d \frac{\partial f}{\partial x_d}, f\right).$$

Das *Newton-Polytop* von f ist die konvexe Hülle

$$N(f) := \operatorname{conv}\{\nu(x^z) : x^z \text{ ist ein Monom in } f\} \subset \mathbb{R}^d$$

der Gitterpunkte, die zu den Monomen in f gehören.

Der überraschende Zusammenhang ist nun der folgende:

Theorem 6.5.1 ([5]). *Das Newton-Polytop der prinzipalen A-Determinante ist gleich dem Sekundärpolytop von $\mathcal{A}$.* □

Wir können in diesem Rahmen nur ein kleines Beispiel angeben:

Beispiel 6.5.2. Sei $A = \{1, x, x^2\}$. Dann ist $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ eine Menge von Gitterpunkten im $\mathbb{R}$. Ein Polynom in $\mathbb{C}^A$ hat die Form $f = ax^2 + bx + c$. Die Diskriminante von f ist $b^2 - 4ac$.

Die prinzipale A-Determinante ist gegeben durch

$$E_A = ac(b^2 - 4ac) = ab^2c - 4a^2c^2.$$

Deren Newton-Polytop ist also

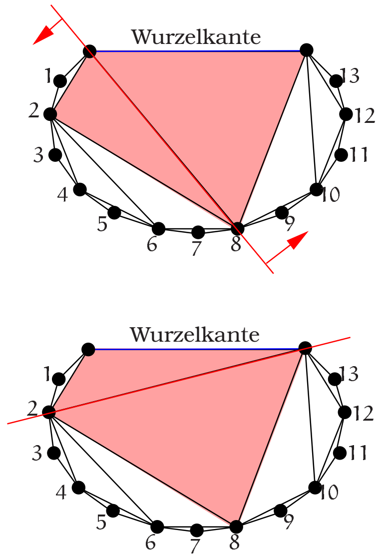
$$N(E_A) = \text{conv}\{(1,2,1),(2,0,2)\}.$$

Auf der anderen Seite hat $\mathcal{A}$ genau zwei Triangulierungen $\{01,12\}$ und $\{02\}$. Deren GKZ-Vektoren sind

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{A}}(\{01,12\}) &= (1,2,1),\\ \phi_{\mathcal{A}}(\{02\}) &= (2,0,2).\end{aligned}$$

7 Die Tamari-Halbordnung

In diesem Kapitel werden wir uns mit einer zusätzlichen Struktur auf der Menge aller Triangulierungen eines n-Ecks beschäftigen: der Tamari-Halbordnung.



Ein Flip ist aufwärtsgerichtet, wenn der Kantenflip durch eine zulässige Kantendrehung gegen den Uhrzeigersinn induziert wird

7.1 Geometrische Idee

Im folgenden sei $C(n)$ ein n-Eck, dessen Ecken gegen den Uhrzeigersinn durchnumeriert sind.

Die Idee für eine Halbordnung auf Triangulierungen von $C(n)$ ist die folgende: Die Kantenflips in einer Triangulierung eines n-Ecks können als eine „Rotation“ einer Kante e angesehen werden. Eine Rotation ist zulässig, wenn die durch e aufgespannte Gerade während der Rotation die Kante $\{1, n\}$ nicht schneidet.

Man beobachtet, daß jeder Kantenflip einer eindeutigen zulässigen Rotation und einer eindeutigen unzulässigen Rotation entspricht. Man kann nun einen Aufwärtsflip definieren als einen Kantenflip, dessen zulässige Rotation gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist; entsprechend ist ein Abwärtsflip ein Kantenflip mit Rotation im Uhrzeigersinn.

Dies induziert eine Relation auf der Menge aller Triangulierungen:

$$T \prec T' :\Longleftrightarrow T \overset{\text{Aufwärtsflip}}{\longrightarrow} T'.$$

Daß diese Relation eine Halbordnung definiert, liegt daran, daß keine Zykel

$$T_1 \prec T_2 \prec \cdots \prec T_1$$

existieren, wie wir im folgenden sehen werden.

7.2 Einige Begriffe aus der Ordnungstheorie

Wir machen einen kleinen Ausflug in die Theorie der Halbordnungen [12, Chapter III].

Definition 7.2.1 (Halbordung). Eine *Halbordnung* auf einer endlichen Menge S ist eine binäre Relation „$\leq$“ auf S, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das heißt:

(i) $x \leq x$ für alle $x \in S$,

(ii) $x \le y$ und $y \le x$ impliziert $x = y$,

(iii) $x \le y$ und $y \le z$ impliziert $x \le z$.

Das Paar $\mathcal{S} := (S, \le)$ wird *halbgeordnete Menge* oder wieder *Halbordnung* genannt.

Definition 7.2.2 (Transitiver Abschluß). Es sei „$<$" eine irreflexive, antisymmetrische, azyklische binäre Relation auf einer endlichen Menge S, d. h.

(i) $x \not< x$ für alle $x \in S$,

(ii) $x < y$ impliziert $y \not< x$,

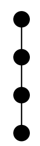
(iii) es gibt keine zyklische Kette von Relationen $x < \cdots < x$.

Dann ist der *transitive Abschluß* „$\le$" von „$<$" gegeben durch

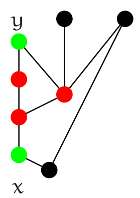
$$\begin{aligned} x \le y :\Longleftrightarrow\ & \text{entweder } x = y \\ & \text{oder } x = x_1 < x_2 < \dots x_r = y \\ & \text{für geeignete } x_1, \dots, x_r \in S. \end{aligned}$$

Lemma 7.2.3. *Der transitive Abschluß einer irreflexiven, antisymmetrischen, azyklischen binäre Relation ist eine Halbordnung.*

Beweis. Übungsaufgabe. □



Eine Kette der Länge Drei



Das intervall $[x, y]$ besteht aus den roten und grünen Elementen

Definition 7.2.4 (Grundbegriffe). Sei $\mathcal{S} = (S, \le)$ eine Halbordnung.

Eine *Kette* in $\mathcal{S} = (S, \le)$ ist eine totalgeordnete Teilmenge von S. Ihre *Länge* ist die Anzahl der Elemente minus Eins.

Das *Intervall* $[x, y]$ in $\mathcal{S}$ ist die Menge aller $z \in S$ mit $x \le z \le y$, teilweise geordnet mit „$\le$". Wenn $[x, y] = (\{x, y\}, \le)$, dann ist y eine Überdeckung von x, und $x \lessdot y$ bezeichnet die entprechende *Überdeckungsrelation*.

$\mathcal{S}$ ist *beschränkt*, wenn es ein eindeutiges minimales und ein eindeutiges maximales Element in S gibt, d. h, $\mathcal{S} = [\hat{0}, \hat{1}]$ für geeignete $\hat{0}$ und $\hat{1}$ in S. $\mathcal{S} \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}$ ist der *eigentliche Teil* von S.

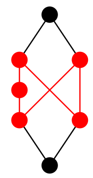
Eine beschränkte Halbordnung $\mathcal{S}$ ist *gradiert*, wenn all maximalen Ketten die gleiche Länge haben. Dann existiert eine *Rangfunktion* auf S, die jedem $x \in S$ den *Rang* von x, d. h. die Länge einer maximalen Kette in $[\hat{0}, x]$, zuordnet. Der *Rang* von $\mathcal{S}$ ist der Rang von $\hat{1}$ in $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ ist ein *Verband*, wenn es beschränkt ist und für je zwei Elemente x und y in S sowohl eine eindeutige kleinste gemeinsame obere Schranke $x \vee y$, der *Join* von x und y, als auch eine eindeutige größte gemeinsame untere Schranke $x \wedge y$, der *Meet* von x und y, existiert.

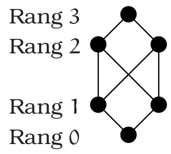
Definition 7.2.5 (Hasse-Diagramm). Sei $\mathcal{S} = (S, \leq)$ eine Halbordnung. Das *Hasse-Diagramm* von $\mathcal{S}$ ist ein gerichteter Graph $G = (S, A)$ mit $(x, y) \in A$ genau dann, wenn $x \lessdot y$.

Definition 7.2.6 (Ordnungserhaltende Abbildung). Eine Abbildung von Halbordnungen $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ heißt *ordnungserhaltend*, wenn $x \leq y$ in $\mathcal{P}$ impliziert, daß $f(x) \leq f(y)$ in $\mathcal{Q}$.

Eine bijektive ordnungserhaltende Abbildung $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, deren Umkehrung auch ordnungserhaltend ist, heißt *Isomorphismus von Halbordnungen*, und wir schreiben $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$.



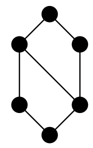
Eine beschränkte Halbordnung mit rotem eigentlichen Teil



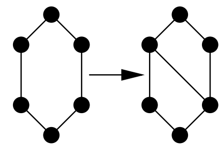
Eine gradierte Halbordnung

7.3 Drei Definitionen

In diesem Abschnitt werden wir drei äquivalente Definitionen der Tamari-Halbordung kennenlernen. Die erste ist die Originaldefinition in der Arbeit von TAMARI [13].



Ein Verband



Eine ordnungserhaltende bikektive Abbildung, deren Umkehrung nicht ordnungserhaltend ist

$$((x_0x_1)(((x_2x_3)x_4)x_5))$$

Ein Element in T_5

Definition 7.3.1 (Binärklammerungen/Assoziativität). Sei T_n die Menge aller vollständigen binären Klammerungen eines Strings $S = x_0x_1 \dots x_n$ der Länge $n+1$ (inklusive äußere Klammer). Definiere

$$\big((AB)C\big) < \big(A(BC)\big) \quad \text{für Teilstrings } A,\ B,\ C \text{ von } S.$$

Dann heißt der transitive Abschluß „$\leq$" von „$<$" die *Tamari-Halbordnung* $\mathcal{T}_n = (T_n, \leq)$ auf T_n.

Die folgenden beiden Definitionen haben wir schon im ersten Kapitel kennengelernt; dort war allerdings von einer Ordnung auf den lokalen Operationen noch keine Rede.

Definition 7.3.2 (Binärbäume/Rotationen). Sei B_n die Menge aller Binärbäume auf n Knoten. Definiere für B und B' in B_n

$$B < B' :\iff \quad B' \text{ entsteht aus } B \text{ durch Rotation nach rechts.}$$

Der transitive Abschluß „$\leq$" von „$<$" definiert die Halbordung $\mathcal{B}_n := (B_n, \leq)$.

Definition 7.3.3 (Triangulierungen/Kantenflips). Sei S_n die Menge aller Triangulierungen eines n-Ecks $C(n)$ mit gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken. Definiere für T und T' in S_n

$$\begin{aligned} T < T' :\iff\ & T \xrightarrow{\text{Aufwärtsflip}} T' \\ \iff\ & T' \text{ entsteht durch Ersetzen von} \\ & \big\{\{a,b,c\},\{a,c,d\}\big\} \text{ durch } \big\{\{a,b,d\},\{b,c,d\}\big\} \\ & \text{in einem konvexen Viereck } \{a<b<c<d\}. \end{aligned}$$

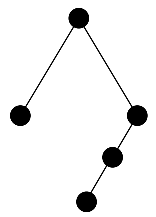
Der transitive Abschluß „$\leq$“ von „$<$“ definiert die Halbordnung $\mathcal{S}_n = (S_n, \leq)$: Zykel können nicht auftreten, da die Summe der maximalen Ecken aller Dreiecke in einer Triangulierung bei Aufwärtsflips stets größer wird.

Theorem 7.3.4. *Es gilt:*

$$\mathcal{T}_{n-2} \cong \mathcal{B}_{n-2} \cong \mathcal{S}_n.$$

Beweis. Um zu zeigen, daß $\mathcal{B}_n$ isomorph zu $\mathcal{S}_n$ ist, reicht es zu beobachten, daß die Bijektion aus Kapitel 1 ordnungserhaltend ist.

Aus einer Klammerung macht man einen Binärbaum wie folgt:



Der Binärbaum, der zu $((x_0x_1)(((x_2x_3)x_4)x_5))$ aus T_5 gehört

- Pro Klammerpaar haben wir einen Knoten.
- Die Wurzel des linken und rechten Teilbaums ist das äußere Klammerpaar des linken bzw. rechten Teilstrings.

Diese Zuordnung ist offensichtlich umkehrbar und ordnungserhaltend. □

Man kann die Elemente von $\mathcal{T}_n$ zählen:

Theorem 7.3.5. *Die Anzahl der Elemente in $\mathcal{T}_n$ ist gleich der n-ten Catalan-Zahl $\binom{2n}{n}/(n+1)$ [Euler, Catalan].*

Skizze. Folgende Rekursionformel für die erste Behauptung läßt sich leicht aus der rekursiven Struktur der Tamari-Halbordnung herleiten:

$$\#\mathcal{T}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \#\mathcal{T}_i \#\mathcal{T}_{n-i-1}.$$

Die Herleitung der geschlossenen Form erfordert einige Geschicklichkeit im Umgang mit *erzeugenden Funktionen* oder etwas Geduld in vollständiger Induktion. □

Korollar 7.3.6. *Ein n-Eck hat genau $\binom{2(n-2)}{n-2}/(n-1)$ Triangulierungen.* □

7.4 Die Tamari-Halbordnung ist ein Verband

In diesem Abschnitt skizzieren wir die konstruktiven Ideen des Beweises aus [6].

7.4.1 Rechtsklammerung

$$((x_0x_1)(((x_2x_3)x_4)x_5)) \longrightarrow x_0(x_1)(x_2(x_3)(x_4)(x_5))$$

Die Umwandlung einer vollständigen binären Klammerung in eine Rechtsklammerung

Wir wandeln eine Binärklammerung in eine Rechtsklammerung um, indem wir die öffnende Klammer eines Klammerpaares an die Stelle der „Multiplikation“ verschieben, also zwischen die Faktoren.

Dann steht zwischen benachbarten Elementen genau eine öffnende Klammer.

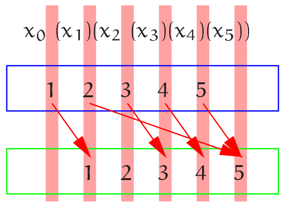
7.4.2 Klammerfunktionen

Wir können nun ein Element aus T_n darstellen als eine Funktion, die jedem Index $i \in [n]$, aufgefaßt als die Position der öffnenden Klammer links von x_i, $i \in [n]$, die Posititon der schließenden Klammer in Form des Elementes links von ihr zuordnet. Wir definieren eine Klammerfunktion axiomatisch wie folgt:

Definition 7.4.1 (Klammerfunktion). Eine Funktion $B : [n] \to [n]$ heißt *Klammerfunktion*, wenn gilt:

(i) $B(i) \leq i$ für alle $i \in [n]$;

(ii) $i \leq j \leq B(i)$ impliziert $B(j) \leq B(i)$.



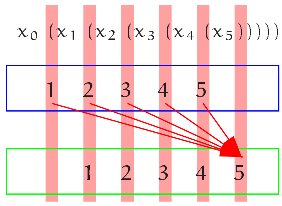
Eine Klammerungsfunktion zu einer Rechtsklammerung

Für eine Klammerfunktion B ist für alle $i \in [n]$ der Teilstsrings B_i von S definiert durch $B_i := \{i, \dots, B(i)\}$.

Spezielle Klammerfunktionen sind die konstante und die identische Funktion:

$$n : \begin{cases} [n] & \to & [n], \\ i & \mapsto & n; \end{cases}$$

$$id : \begin{cases} [n] & \to & [n], \\ i & \mapsto & i; \end{cases}$$

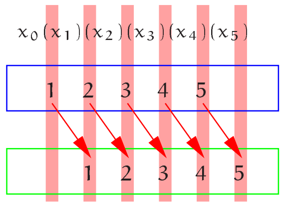


Die konstante Klammerungsfunktion

Das folgende Lemma ist leicht zu sehen:

Lemma 7.4.2. *T_n ist bijektiv abbildbar auf die Menge aller Klammerfunktionen auf $[n]$.*

Der Einfachheit halber werden wir die Menge der Klammerfunktionen auf $[n]$ wieder mit T_n bezeichnen.



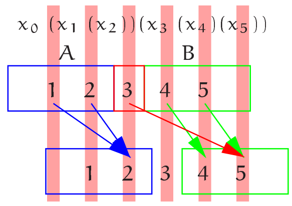
Die identische Klammerungsfunktion

7.4.3 Multiplikation

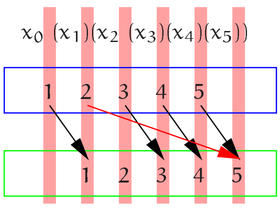
Die Multiplikation von Klammerfunktion modelliert das Zusammenhängen zweier vollständig geklammerter Strings zu einem neuen String.

Definition 7.4.3 (Multiplikation). Seien $A : [k] \to [k]$ und $B : [l] \to [l]$ Klammerfunktionen, und sei $n = k+l+1$. Dann ist $C := A + B : [n] \to [n]$ wie folgt definiert:

$$C(i) := \begin{cases} A(i) & \text{für } 1 \leq i \leq k, \\ n & \text{für } i = k+1, \\ B(i-(k+1)) + (k+1) & \text{für } k+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$



Das Produkt von A und B



Die maximale Kofinale ist die Klammer, die zum roten Pfeil gehört

7.4.4 Kofinale

Klammerpaare, deren schließende Klammer ganz rechts steht, heißen *Kofinale*. Das äußerste kofinale Klammerpaar in einem Teilstring B_i heißt *maximale Kofinale* von B_i.

In der Sprache der Klammerfunktionen sieht das wie folgt aus:

Definition 7.4.4 (Kofinale). Sei $B : [n] \to [n]$ eine Klammerfunktion und $i \in [n]$.

Die *maximale Kofinale* von B_i ist der Teilstring B_j mit $j = \min\{ k > i : B(k) = B(i) \}$.

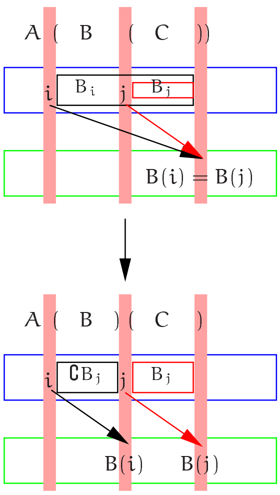
7.4.5 Faktorisierung

In einer vollständigen binären Klammerung ist die Faktorisierung einer Klammer in zwei Faktorklammern ablesbar. Dies kann man ebenfalls in der Sprache der Klammerfunktionen ausdrücken.

Definition 7.4.5. Sei $C : [n] \to [n]$ eine Klammerfunktion mit maximaler Kofinale C_j. Dann gibt es eine eindeutige Faktorisierung $C = A \cdot B$

$$A(i) : \begin{cases} [j-1] & \to & [j-1], \\ i & \mapsto & C(i); \end{cases} \quad B(i) \quad : \begin{cases} [n-j] & \to & [n-j], \\ i & \mapsto & C(i+j)-j. \end{cases}$$

Eine entsprechende eindeutige Zerlegung gibt es für alle C_i, $i = 1, \ldots, n$.



Die Anwendung des Semi-Assoziativgesetzes entspricht einer Umklammerung wie in der Definition der Tamari-Halbordnung

7.4.6 Das Semi-Assoziativgesetz

Nun müssen wir nur die Operation des Umklammerns in einem vollständig binär geklammerten String simulieren. Dies geht wie folgt:

Definition 7.4.6 (Semi-Assoziativgesetz). Das Semi-Assoziativgesetz angewendet an der Stelle i auf eine Klammerfunktion $B : [n] \to [n]$ ist die Transformation, die B_i durch das Komplement der maximalen Kofinalen in B_i ersetzt.

7.4.7 Eine „neue'"Halbordnung auf Klammerfunktionen

Dieser Abschnitt ist der Witz der Konstruktion: Wir definieren eine „neue“ Halbordnung auf der Menge aller Klammerfunktionen, die mehr oder minder offensichtlich ein Verband ist. Natürlich wird sich später herausstellen, daß diese „neue“ Halbordnung in Wahrheit gleich der alten ist.

Definition 7.4.7 (Intrinsische Halbordnung). Für Klammerfunktionen $A, B : [n] \to [n]$ definiere:

$$A \preceq B \iff A_i \subset B_i \iff A(i) \leq B(i) \quad \forall i \in [n];$$
$$A \prec B \iff A \preceq B \text{ und } A(j) < B(j) \text{ für mindestens ein } j.$$

In dieser Halbordnung können wir sofort den Meet zweier Elemente definieren.

Definition 7.4.8 (Meet). Der Meet $A \wedge B$ von Klammerfunktionen $A, B : [n] \to [n]$ ist definiert als

$$(A \wedge B)(i) := \min\{A(i), B(i)\}$$

Lemma 7.4.9. $(T_n, \preceq)$ *ist eine beschränkte Halbordung mit maximalem Element* n *und minimalem Element* id.

Lemma 7.4.10. *Für* $A, B \in T_n$ *ist* $A \wedge B$ *wieder in* T_n*.*

Beweis. Man muß nur die beiden Axiome für Klammerfunktionen nachprüfen. □

Damit haben wir:

Korollar 7.4.11. $(T_n, \preceq)$ *ist ein Verband.*

Beweis. Dies ist folgt im allgemeinen aus den Aussagen der Lemmata 7.4.9 und 7.4.10: Man muß zeigen, daß je zwei Elemente eine eideutige gemeinsame obere Schranke besitzen. Da $(T_n, \preceq)$ beschränkt ist, existiert mindesten eine gemeinsame obere Schranke. Annahme: es existieren zwei minimale gemeinsame obere Schranken, die nicht vergleichbar sind, dann ist ihr Meet auch eine gemeinsame obere Schranke: Widerspruch. □

Lemma 7.4.12. *Es gilt für* $A, B \in T_n$*:*

$$A \preceq B \iff A \leq B.$$

Beweis. Man muß das Semi-Assoziativitätsgesetz anwenden. □

Korollar 7.4.13 ([6]). $\mathcal{T}_n$ *ist ein Verband.*

Korollar 7.4.14. *Die Menge aller Triangulierungen eines* n*-Ecks halbgeordnet durch Aufwärtsflips ist ein Verband.*

Zyklische Polytope: Grundlagen

8

In diesem Kapitel sammeln wir Grundlagen über kombinatorische Eigenschaften zyklischer Polytope. Diese werden in den folgenden Kapiteln zur Erlangung interessanter Ergebnisse über Triangulierungen zyklischer Polytope benötigt.

8.1 Definition und Eigenschaften

In diesem Abschnitt einigen wir uns zunächst darüber, was wir unter zyklischen Polytopen verstehen wollen.

Definition 8.1.1 (Momentenkurve). Für $d \geq 0$ ist die d-*dimensionale Momentenkurve* definiert als

$$\nu_d : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \quad \mathbb{R}^d, \\ t & \mapsto \quad (t^0 : t^1 : t^2 : \cdots : t^d)^T. \end{cases}$$

Hierbei sind $(x_0 : x_1 : \cdots : x_d)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes im d-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^d$.

Definition 8.1.2 (Zyklisches Standard-Polytop). Die d-*dimensionale zyklische Standard-Punktmenge mit* n *Punkten* ist für alle $n > d \geq 0$ definiert als

$$\mathcal{C}(n, d) := \{\nu_d(1), \nu_d(2), \dots, \nu_d(n)\}.$$

Der Punkt $\nu_d(i)$ wird dabei einfach mit i numeriert für $i = 1, \dots, n$.

Für eine Teilmenge $A \subseteq [n]$ schreiben wir $\mathcal{C}(A, d)$ für die Menge der Punkte mit Nummern in A.

Die konvexe Hülle von $\mathcal{C}(n, d)$ heißt d-*dimensionales zyklisches Standard-Polytop*. Sie wird mit $C(n, d)$ bezeichnet.

Zur Beschreibung der Facettenstruktur benutzen wir den Begriff der Lücke: Ein Index, der nicht in einer Teilmenge der zyklischen Punktmenge ist.

Definition 8.1.3 (Lücken). Sei $F \subseteq \mathcal{C}(n, d)$ eine Teilmenge der Ecken des zyklischen Standard-Polytops $C(n, d)$.

Ein Element $i \in \mathcal{C}(n, d) \setminus F$ heißt *Lücke* von F in $\mathcal{C}(n, d)$.

Eine Lücke i von F in $\mathcal{C}(n, d)$ heißt *gerade*, wenn

$$\#\{j \in F : j > i\} \equiv 0 \mod 2,$$

ansonsten *ungerade*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_1	*	e	e	e	*	*	e	*	*
S_2	o	o	*	*	o	o	*	*	*

(a)

	~~1~~	2	3	~~4~~	~~5~~	6	7	8	9
S_1		e	*			*	e	*	*
S_2		*	*			*	o	o	*

(b)

Eine übersichtliche Darstellung von Lücken: Gerade Lücken sind mit e, ungerade mit o gekennzeichnet. Ein Sternchen bezeichnet ein Element. Man liest ab, daß S_1 (bzw. S_2) eine untere (bzw. obere) Facette von $\mathcal{C}(9,5)$ ist (a); in (b) liest man ab, daß $S_1 \setminus \{1,4,5\}$ (bzw. $S_2 \setminus \{1,4,5\}$) eine untere (bzw. obere) Facette von $\mathcal{C}(\{2,3,6,7,8,9\},5)$ ist.

Leicht zu sehen ist die folgende Eigenschaft.

Lemma 8.1.4. *Die Punkte in* $\mathcal{C}(n,d)$ *sind in allgemeiner Lage, d. h. keine* $d+1$ *Punkte liegen auf einer Hyperebene im* $\mathbb{R}^d$.

Das folgende Theorem ist berühmt unter dem Namen „Gale's Evenness Criterion“ (siehe z. B. [14]).

Theorem 8.1.5 (Facetten). *Die Facetten von* $\mathcal{C}(n,d)$ *sind genau die Teilmengen von* $\mathcal{C}(n,d)$ *mit nur geraden oder nur ungeraden Lücken.*

Mithilfe der Lücken lassen sich die Facetten noch in zwei Klassen einteilen.

Definition 8.1.6 (Obere/untere Facetten). Die Facetten mit nur ungeraden Lücken sind die *oberen Facetten*, und werden mit $\mathcal{F}^u(n,d)$ bezeichnet. Facetten mit nur geraden Lücken sind die *unteren Facetten*, und werden mit $\mathcal{F}^l(n,d)$ bezeichnet.

Beinahe noch einfacher ist die Struktur der Kreise, die wir hier ebenfalls nicht beweisen wollen.

Theorem 8.1.7 (Kreise). *Die Kreise in* $\mathcal{C}(n,d)$ *sind genau die alternierenden Paare* (Z^+, Z^-) *mit Kardinalität* $d+2$*, d. h.*

$$\begin{aligned} Z^+, Z^- &\subseteq \mathcal{C}(n,d), \\ \#(Z^+ \cup Z^-) &= d+2; \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Z^+ &= \{z_1, z_3, \dots\}, \\ Z^- &= \{z_2, z_4, \dots\}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} Z^- &= \{z_1, z_3, \dots\}, \\ Z^+ &= \{z_2, z_4, \dots\}. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft ist kennzeichnend für das sogenannte *alternierende orientierte Matroid*, und dieses wollen wir in Wahrheit untersuchen.

Definition 8.1.8 (Zyklische Punktmenge). Eine Multimenge im $\mathbb{R}^d$ mit n Punkten heißt *zyklisch*, wenn sie die gleichen Kreise wie $\mathcal{C}(n,d)$ hat.

Definition 8.1.9 (Kreisrichtung). Die Kreise (Z^+, Z^-) mit maximalem Element z_{d+2} in Z^+ (bzw. Z^-) heißen *Aufwärtskreise* (bzw. *Abwärtskreise*) und werden mit $\mathcal{Z}^+(n,d)$ (bzw. $\mathcal{Z}^-(n,d)$) bezeichnet.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_1	*		*			*		*	*
S_2		*		*		*	*	*	

(a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_1	*		*			*		*	*
S_2		*	*			*	*	*	

(b)

Eine übersichtliche Darstellung von unzulässigen Simplizes: „Verbotene“ Kreise entsprechen Zick-Zack-Pfaden der Länge $d+2$, die die Sternchen (Elemente der Simplizes) verbinden.

8.2 Beispiele für zyklische Polytope

Wir fahren mit Beispielen fort.

8.2.1 Dimension Null

$\mathcal{C}(n, 0)$ ist die Multimenge aus n Kopien des einzigen Punktes in $\mathbb{R}^0$. Damit sind alle nulldimensionalen Multimengen zyklisch.

8.2.2 Dimension Eins

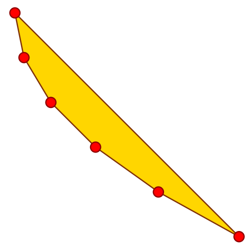
Ein zyklisches Polytop in Dimension Eins, ...

$\mathcal{C}(n, 1)$ besteht aus den n Punkten $1, 2, \ldots, n$ im $\mathbb{R}$ ohne Repetitionen. Alle eindimensionalen Punktmengen ohne Repetitionen sind zyklisch.

Die Facetten von $\mathcal{C}(n, 1)$ sind $\{1\}$ (untere Facette) und $\{n\}$ (obere Facette).

Aufwärtskreise sind genau die Paare $(\{i, k\}, \{j\})$ mit $i < j < k$.

8.2.3 Dimension Zwei



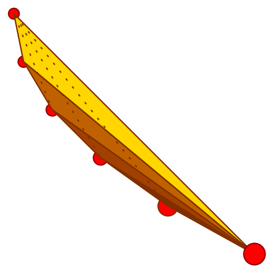
... in Dimension Zwei ...

$\mathcal{C}(n, 2)$ sind n Punkte ohne Repetitionen in konvexer Lage, also die Ecken eines n-Ecks. Alle solche Punktmengen sind zyklisch.

Die Facetten von $\mathcal{C}(n, 2)$ sind $\{1, n\}$ (obere Facette) und $\{i, i+1\}$ (untere Facetten) für $0 < i < n$.

Aufwärtskreise sind genau die Paare $(\{j, l\}, \{i, k\})$ mit $i < j < k < l$.

8.2.4 Dimension Drei



... und in Dimension Drei.

$\mathcal{C}(n, 3)$ ist nicht mehr „universell" in irgendeinem vernünftigen Sinne.

Die oberen Facetten von $\mathcal{C}(n, d)$ sind die Mengen $\{i, i+1, j\}$ mit $0 < i < j-1 < n$, die unteren Facetten sind die Mengen $\{i, j, j+1\}$ mit $1 < i+1 < j < n$.

8.2.5 Kodimension Null

$\mathcal{C}(d+1, d)$ ist ein d-Simplex.

Die oberen (bzw. unteren) Facetten sind genau die $\{1, 2, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, n\}$ mit $n - i$ ungerade (bzw. gerade).

Kreise gibt es keine.

8.2.6 Kodimension Eins

$\mathcal{C}(d+2, d)$ ist ein „Kreis" in Dimension d.

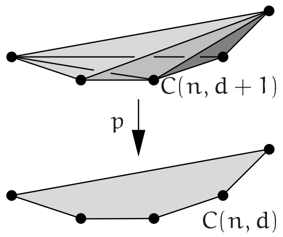
Das heißt, es gibt genau zwei (entgegengesetzt orientierte) Kreise in $\mathcal{C}(d+2, d)$. Der Aufwärtskreis ist gegeben durch den Positivteil $\{\ldots, d, d+2\}$, der Abwärtskreis durch den Positivteil $\{\ldots, d-1, d+1\}$.

8.3 Höhere Stasheff-Tamari-Halbordnungen

In diesem Abschnitt werden wir die beiden Verallgemeinerungen der Tamari-Halbordnung auf höhere Dimensionen kennenlernen.

8.3.1 Die kanonische Projektion

Die folgende Abbildung liefert einen einfachen Zusammenhang zwischen zyklischen Punktmengen verschiedener Dimension.



Die kanonische Projektion

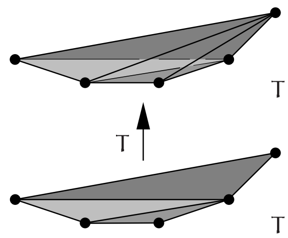
Definition 8.3.1 (Kanonische Projektion). Diejenige Abbildung zwischen zyklischen Polytopen, die die letzte Koordinate vergißt, also

$$p_{n,d} : \begin{cases} \mathcal{C}(n,d) & \to \quad \mathcal{C}(n,d-1), \\ \nu_d(i) & \mapsto \quad \nu_{d-1}(i), \end{cases}$$

heißt *kanonische Projektion*.

8.3.2 Der charakteristische Schnitt

Haben wir bereits eine Triangulierung eines zyklischen Polytops gegeben, so können wir sie uminterpretieren als eine stückweise lineare Hyperfläche in einer Dimension höher. Die genaue Formulierung lautet wie folgt:



Der charakteristische Schnitt

Definition 8.3.2 (Charakteristischer Schnitt). Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d)$. Dann heißt die eindeutige Abbildung

$$T : C(n,d) \to C(n,d+1)$$

mit

- $p_{n,d+1} \circ T = \mathrm{id}_{C(n,d)}$,
- T ist affin auf Simplexen in T,

der *charakteristische Schnitt* von T in $C(n,d+1)$.

8.3.3 Aufwärtsflips

Nun wird unsere Einteilung der Kreise in Aufwärts- und Abwärtskreise gerechtfertigt.

Definition 8.3.3 (Fliprichtung). Sei $T \in S(n,d)$. Ferner sei Z ein Kreis in $\mathcal{C}(n,d)$ mit

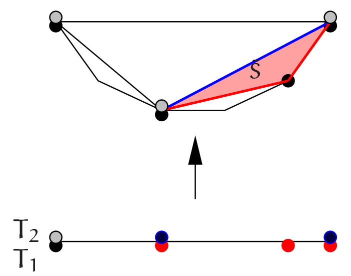
$$T^-(Z) \subseteq T.$$

Dann heißt die Operation

$$T \mapsto T' := T \backslash T^-(Z) \cup T^+(Z)$$

ein *Aufwärtsflip* (bzw. ein *Abwärtsflip*), wenn Z ein Aufwärtsflip (bzw. ein Abwärtsflip) ist.

Der Zusammenhang mit oberen und unteren Facetten ist gegebene durch die folgende alternative Beschreibung:



T_1 kann durch einen Aufwärtsflip $\tilde{S}$ in T_2 überführt werden.

Lemma 8.3.4. *Sei* $T \in S(n,d)$. *Ferner sei* $\mathcal{C}(\tilde{S}, d+1)$ *ein* $(d+1)$*-Simplex in* $\mathcal{C}(n, d+1)$ *mit* $\mathcal{F}^l(\tilde{S}, d+1) \subseteq T$. *Dann ist*

$$T \mapsto T' := T \backslash \mathcal{F}^l(\tilde{S}) \cup \mathcal{F}^u(\tilde{S})$$

ein Aufwärtsflip.

Beweis. Betrachte die kanonische Projektion $\mathcal{C}(\tilde{S}, d)$ von $\mathcal{C}(\tilde{S}, d+1)$ unter $p_{n,d+1}$; wir bezeichnen sie kurz mit Z. Diese Menge hat Kodimension Eins und ist somit ein Kreis in $\mathcal{C}(n, d)$.

Wir schließen

$$\begin{aligned} T^-(Z) &= \left\{ Z \backslash z^+ \ : z^+ \in Z^+ \right\} \\ &= \left\{ F \in \binom{Z}{d+1} : \begin{array}{l} \text{das größte, drittgrößte, } \ldots \\ \text{Element von } Z \text{ fehlt in } F \end{array} \right\} \\ &= \left\{ F \in \binom{Z}{d+1} : Z \backslash F \text{ gerade Lücke in } Z \right\} \\ &= \mathcal{F}^l(\tilde{S}, d+1). \end{aligned}$$

Genauso gilt $T^+(Z) = \mathcal{F}^u(\tilde{S}, d+1)$, und die Behauptung ist bewiesen. □

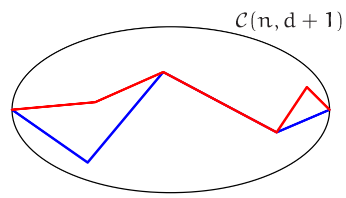
8.3.4 Zwei Halbordnungen

Nun können wir endlich zwei Halbordnungen ernten.

Definition 8.3.5 ($\mathcal{S}_1(n,d)$). Seien $T, T' \in S(n,d)$. Definiere

$$T < T' :\Longleftrightarrow T \overset{\text{Aufwärtsflip}}{\mapsto} T'.$$

Der transitive Abschluß von „<“ heißt *erste höhere Stasheff-Tamari-Halbordnung*, und wird mit $\mathcal{S}_1(n,d)$ bezeichnet.



Der rote Schnitt ist höher als der blaue, daher sind die zugehörigen Triangulierungen in $\mathcal{S}_2(n,d)$ entsprechend geordnet

Definition 8.3.6 ($\mathcal{S}_2(n,d)$). Die *zweite höhere Stasheff-Tamari-Halbordnung* ist definert durch

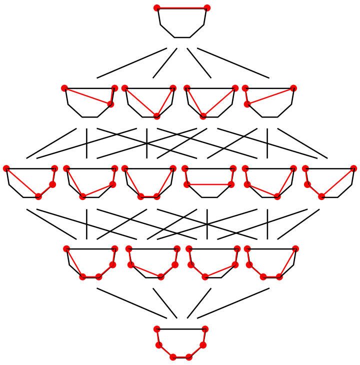
$$T \leq T' :\Longleftrightarrow T(x)_{d+1} \leq T'(x)_{d+1} \quad \forall x \in C(n,d).$$

8.4 Beispiele

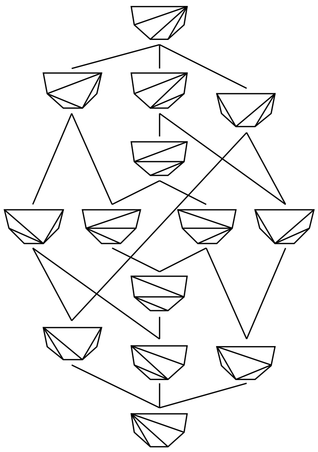
Wir schließen dieses Kapitel mit Beispielen.

8.4.1 Dimension Null

Die Halbordnung $\mathcal{S}_{12}(n, 0)$ ist isomorph zur total geordneten Menge $\{1, 2, \ldots, n\}_<$.



Eine Darstellung von $\mathcal{S}_{12}(6,1)$



Eine Darstellung von $\mathcal{S}_{12}(6,2)$

8.4.2 Dimension Eins

Eine Triangulierung von $\mathcal{C}(n,1)$ ist – da es keine Mehrfachpunkte gibt – gekennzeichnet durch eine Auswahl der inneren Punkte des Intervalls $[1,n] := \{1,2,\ldots,n\}$, die zur Triangulierung verwendet werden. Daher ist $S(n,1)$ isomorph zur Menge aller Teilmengen von $]1,n[:= \{2,3,\ldots,n-1\}$.

Ein Aufwärts-Flip ist ein Übergang zu einer Triangulierung mit einem inneren Punkt weniger. Daher ist $\mathcal{S}_{12}(n,1)$ anti-isomorph zur Halbordnung der Teilmengen von $]1,n[$ bzgl. „$\subseteq$“.

8.4.3 Dimension Zwei

$\mathcal{S}_1(n,2)$ ist nach Definition gleich der Tamari-Halbordnung $\mathcal{T}_n$. Ob $\mathcal{S}_2(n,2)$ ebenfalls gleich der Tamari-Halbordnung ist, ist nicht so einfach zu sehen (siehe [4]).

8.4.4 Kodimension Null

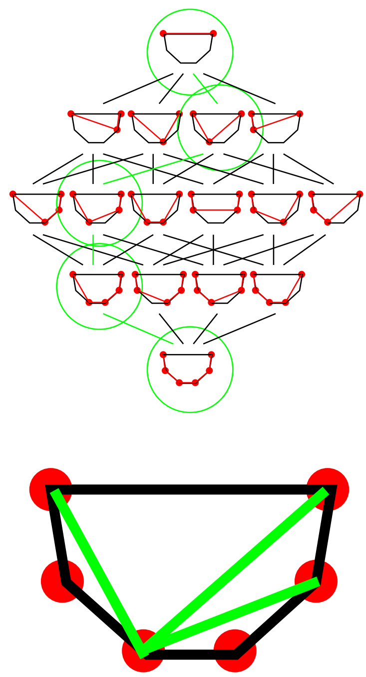
Es gibt nur eine Triangulierung, daher besteht $\mathcal{S}_{12}(d+1,d)$ nur aus einem Punkt, und es gibt nichts zu ordnen.

8.4.5 Kodimension Eins

Da $\mathcal{C}(d+2,d)$ genau einen Aufwärts- und einen Abwärtskreis enthält, ist $\mathcal{S}_{12}(d+2,d)$ isomorph zur Totalordnung zweier Elemente.

9 Zyklische Polytope: Struktur der HST-Halbordnungen

In diesem Kapitel werden wir die Struktur der ersten höheren Stasheff-Tamari-Halbordung (HST-Halbordnung) klären. Dies ist ein weiterer Höhepunkt in der kombinatorischen Theorie der Triangulierungen von Punktmengen.



Eine Kette (grün) in $\mathcal{S}_1(6,1)$ bestimmt eine Triangulierung von $\mathcal{C}(6,2)$

9.1 Die Struktur der ersten HST-Halbordnung

Anders als in den vorigen Kapiteln werden wir den wesentlichen Satz gleich zu Anfang präsentieren.

Theorem 9.1.1. *Für alle $n > d \geq 0$ ist die erste höhere Stasheff-Tamari-Halbordnung $\mathcal{S}_1(n,d)$ beschränkt.*

Außerdem gibt es eine eineindeutige Zuordnung

Flip-Ketten in $\mathcal{S}_1(n,d)$ mod. Flip-Reihenfolge	$\longleftrightarrow$	*Triangulierungen in $\mathcal{S}_1(n,d+1)$.*

Es ergeben sich sofort einige Folgerungen.

Korollar 9.1.2. *Für alle $n > d \geq 0$ gilt:*

(i) *Der Flip-Graph von $\mathcal{C}(n,d)$ ist zusammenhängend.*

(ii) *Die Anzahl der Simplizes in einer Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d)$ liegt zwischen der Anzahl der oberen Facetten und der Anzahl der unteren Facetten von $\mathcal{C}(n,d+1)$.*

(iii) *Die Länge einer maximalen Kette in $\mathcal{S}_1(n,d)$ liegt zwischen der Anzahl der oberne Facetten und der Anzahl der unteren Facetten von $\mathcal{C}(n,d+2)$.*

(iv) *Für gerades d haben alle Triangulierungen gleichviele Simplizes.*

(v) *Für ungerades d haben alle maximalen Ketten in $\mathcal{S}_1(n,d)$ die gleiche Länge.*

(vi) *Für gerades d liegt der Durchmesser des Flip-Graphen von $\mathcal{C}(n,d)$ zwischen $\binom{n-d/2-2}{d/2}$ und $2\binom{n-d/2-2}{d/2}$.*

(vii) *Für ungerades d ist der Durchmesser des Flip-Graphen von $\mathcal{C}(n,d)$ gleich $\binom{n-(d+1)/2-1}{(d+1)/2}$.*

9.2 Das Beweisprogramm

Schon im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß man einen Aufwärtsflip in einer Triangulierung einer zyklischen Punktmenge ansehen kann als das Ersetzen der unteren Facetten eines $(d+1)$-Simplexes durch seine oberen Facetten.

Angenommen, wir könnten von der Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d)$ bestehend aus allen unteren Facetten von $\mathcal{C}(n,d+1)$ mithilfe von Aufwärtsflips bis zur Triangulierung aus allen oberen Facetten von $\mathcal{C}(n,d+1)$ gelangen. Dann ist plausibel, daß die dabei benutzten $(d+1)$-Simplizes eine Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d+1)$ bilden.

Umgekehrt definiert eine Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d+1)$ eine Menge von Aufwärtsflips, die prinzipiell in der richtigen Anordnung eine maximale Kette in $\mathcal{S}_1(n,d)$ definieren könnten.

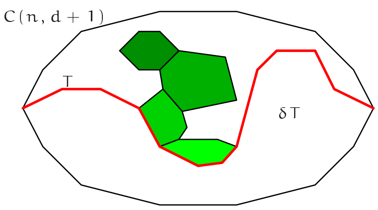
Um zu zeigen, daß $\mathcal{S}_1(n,d)$ beschränkt ist, werden wir die Richtigkeit der folgenden Behauptungen zeigen.

(i) Es reicht zu zeigen, daß für jede Triangulierung T von $\mathcal{C}(n,d)$ ungleich der Menge der oberen/unteren Facetten von $\mathcal{C}(n,d+1)$ ein Aufwärts-/Abwärtsflip existiert.

(ii) Zu jeder Triangulierung T von $\mathcal{C}(n,d)$ konstuieren wir eine Triangulierung δT von $\mathcal{C}(n,d+1)$, die den charakteristischen Schnitt von T als Teilkomplex enthält.

(iii) Der sukzessive Übergang von einem Simplex S einer Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d)$ auf ein anderes S', das an einer unteren Facette von S an S adjazent ist, erzeugt keine Zykel.

(iv) Dadurch kann man durch „Abwärts-/Aufwärtssuchen“ in den Simplexen von δT „oberhalb“/“unterhalb“ von T einen Aufwärts-/Abwärtsflip finden.



Durch die Zykelfreiheit des Übergangs auf ein Simplex direkt unter einem anderen in der Triangulierung δT kann man einen Aufwärtsflip in T finden

9.3 Konstruktionen auf zyklischen Punktmengen

Wir betrachten nun, was mit Facetten und Kreisen passiert, wenn man zu zyklischen Punktmengen anderer Parameter übergeht. Dazu betrachten wir zunächst einige Standardkonstruktionen, die aus der Theorie der orientierten Matroide stammen.

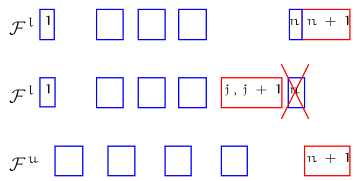
Definition 9.3.1 (Löschung). Die *(kombinatorische) Löschung* von n in $\mathcal{C}(n,d)$ ist die zyklische Punktmenge

$$\mathcal{C}(n,d)\backslash n := \mathcal{C}(n-1,d).$$

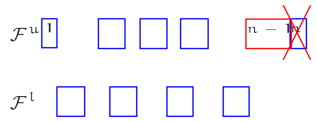
Im folgenden benutzen wir die Notation $F = \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ für die geordneten Elemente von Facetten von $\mathcal{C}(n,d)$; ebenso notieren wir die geordneten Elemente eines Kreises von $\mathcal{C}(n,d)$ mit $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{d+2})$.

Proposition 9.3.2. *Es gelten folgende Formeln für die Facetten von zyklischen Punktmengen verschiedener Parameter:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^u(n+1,d+1) &= \mathcal{F}^l(n,d) * \{n+1\},\\
\mathcal{F}^l(n+1,d+1) &= \mathcal{F}^u(n,d) * \{n+1\}\\
&\quad \cup \{\, F \backslash n \cup \{j, j+1\} \,:\, F \in \mathcal{F}^u(n,d), j \in]f_{d-1}, n[\,\},\\
\mathcal{F}^u(n-1,d) &= \mathrm{del}_{\mathrm{lk}_{\mathcal{F}^u(n,d)}(n)}(n-1) * \{n-1\},\\
\mathcal{F}^l(n-1,d) &= \mathrm{del}_{\mathcal{F}^l(n,d)}(n).
\end{aligned}$$



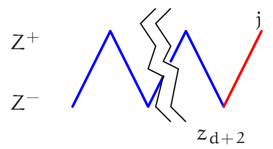
Die unteren Facetten in $\mathcal{F}^l(n+1,d+1)$ ergeben sich aus den Facetten in $\mathcal{F}(n,d)$ entweder durch Hinzufügen von $n+1$ oder durch Streichen von n und Anhängen eines Paares $j, j+1$ zu einer oberen Facette; die unteren Facetten in $\mathcal{F}^l(n+1,d+1)$ entstehen durch Hinzufügen von $n+1$ zu einer oberen Facette



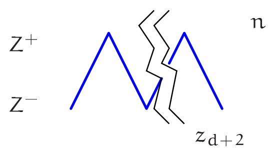
Die oberen Facetten in $\mathcal{F}^u(n-1,d)$ ergeben sich aus denjenigen oberen Facetten in $\mathcal{F}^u(n,d)$, die $n-1$ nicht enthalten, durch Ersetzen von n durch $n-1$; die unteren Facetten in $\mathcal{F}^l(n-1,d)$ sind genau denjenigen unteren Facetten in $\mathcal{F}^l(n,d)$, die n nicht enthalten

Proposition 9.3.3. *Es gelten folgende Formeln für die Kreise von zyklischen Punktmengen verschiedener Parameter:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^+(n+1,d+1) &= \left\{ (Z^+ \cup \{j\}, Z^-) \,:\, \substack{(Z^+,Z^-)\in\mathcal{Z}^-(n,d),\\ j>z_{d+2}} \right\},\\
\mathcal{Z}^-(n+1,d+1) &= \left\{ (Z^+, Z^- \cup \{j\}) \,:\, \substack{(Z^+,Z^-)\in\mathcal{Z}^+(n,d),\\ j>z_{d+2}} \right\},\\
\mathcal{Z}^+(n-1,d) &= \left\{ (Z^+, Z^-) \in \mathcal{Z}^-(n,d) \,:\, n \notin Z^+ \cup Z^- \right\},\\
\mathcal{Z}^-(n-1,d) &= \left\{ (Z^+, Z^-) \in \mathcal{Z}^+(n,d) \,:\, n \notin Z^+ \cup Z^- \right\}.
\end{aligned}$$



Die Kreise in $\mathcal{Z}(n+1,d+1)$ ergeben sich aus den Kreisen in $\mathcal{Z}(n,d)$ einfach durch Anhängen eines Elements



Die Kreise in $\mathcal{Z}(n-1,d)$ ergeben sich aus den Kreisen in $\mathcal{Z}(n,d)$ einfach durch Anhängen eines Elements

9.4 Konstruktionen auf Triangulierungen zyklischer Punktmengen

Wie benutzen im folgenden wieder die Schreibweise $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{d+1}\}$ für die geordneten Elemente eines Simplexes in einer Triangulierung von $\mathcal{C}(n,d)$. Zur Erinnerung: Die Menge aller Triangulierungen von $\mathcal{C}(n,d)$ bezeichnen wir mit $S(n,d)$; die Schreibweise $]i,j[$ bezeichnet die Menge $\{i+1, i+2, \dots, j-1\}$.

Die folgenden Konstruktionen sind Meilensteine auf dem Weg zum Beweis von Satz 9.1.1.

Definition 9.4.1 (Extension). Sei $T \in S(n,d)$. Dann heißt

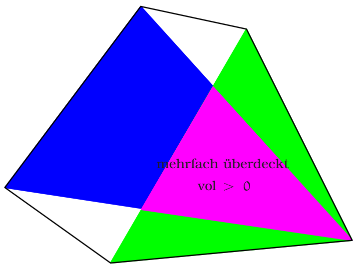
$$\hat{T} := T * \{n+1\} \cup \{\, S \backslash s_{d+1} \cup \{j, j+1\} \,:\, S \in T, j \in]s_d, s_{d+1}[\,\}$$

die *Extension* von T.

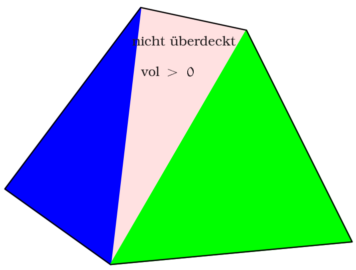
Definition 9.4.2 (Löschung). Sei $T \in S(n,d)$. Dann heißt

$$T \backslash n := \mathrm{del}_T(n) \cup \mathrm{del}_{\mathrm{lk}_t(n)}(n-1) * \{n-1\}$$

die *Löschung* von n in T.



Das d-dimensionale Volumen des mehrfach überdeckten Bereichs darf in einer gültigen Triangulierung nicht größer als Null sein



Das d-dimensionale Volumen des nicht überdeckten Bereichs darf in einer gültigen Triangulierung ebenfalls nicht größer als Null sein

Die folgende geometrische Charakterisierung von Triangulierungen von Punktkonfigurationen in allgemeiner Lage zeigt, das das Leben ohne Degeneriertheit erheblich einfacher ist.

Theorem 9.4.3. *Sei $\mathcal{A}$ ein d-dimensionale Punktkonfiguration in allgemeiner Lage. Ferner sei $T \subseteq \binom{\mathcal{A}}{d+1}$ eine Menge von d-Simplizes in $\mathcal{A}$. Dann ist T genau dann eine Triangulierung, wenn*

(i) Das totale d-dimensionale Volumen der Menge der Punkte in $\operatorname{conv}\mathcal{A}$, die in mehr als einem Simplex aus T liegen, ist Null Wir sagen auch, die Mehrfachüberdeckung *hat Volumen Null.*

(ii) Das totale d-dimensionale Volumen der Menge der Punkte in $\operatorname{conv}\mathcal{A}$, die in weniger als einem Simplex aus T liegen, ist Null. Wir sagen auch, die Überdeckungslücke *hat Volumen Null.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Theorem 9.4.4. *Sei $T \in S(n,d)$. Dann gilt für alle sinnvollen Parameter:*

$$\hat{T} \in S(n+1, d+1),$$
$$T \backslash n \in S(n-1, d).$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz mit unterschiedlichen Methoden. Ein rein kombinatorischer Beweis befindet sich in [9] und in [8].

Beweis von (i). Wir zeigen für $\hat{T}$, daß die Bedingungen (IP') und (UP') erfüllt sind.

Wir benutzen die folgenden Abkürzungen:

$$A := T * \{n+1\},$$
$$B := \{\, S \backslash s_{d+1} \cup \{j, j+1\} \,:\, S \in T, j \in]s_d, s_{d+1}[\,\}.$$

Dann ist $\hat{T} = A \cup B$, und wir müssen

- (IP') für die möglichen Kombinationen von Simplizes aus A und B zeigen und
- (UP') für Facetten von Simplizes aus A und B nachweisen.

(IP'). Die Bedingung (IP') für $R, S \in A$ ist klar.

Wir zeigen nun Bedingung (IP') für Simplizes $R, S \in B$. Angenommen, es existiert ein Kreis $Z \in \mathcal{Z}(n+1, d+1)$ mit $Z^+ \subseteq R$ und $Z^- \subseteq S$. Nach Konstruktion ist

$$R = R' \backslash r'_{d+1} \cup \{j, j+1\} \qquad \text{für } R \in T, j \in]r_d, r_{d+1}[,$$
$$S = S \backslash s'_{d+1} \cup \{k, k+1\} \qquad \text{für } S \in T, k \in]s_d, s_{d+1}[.$$

O. B. d. A. ist $k \leq j$ und $z_{d+3} = r_{d+2} = j+1$. Nach Proposition 9.3.3 ist $Z' := (Z^+ \backslash \{z_{d+3}\}, Z^-)$ ein Kreis in $\mathcal{Z}(n, d)$ mit

$$
\begin{aligned}
(Z')^+ &\subseteq R \backslash \{j+1\}, \\
(Z')^- &\subseteq S.
\end{aligned}
$$

Außerdem ist

$$z'_{d+2} \leq k+1 \leq s'_{d+1}.$$

Aber dann ist

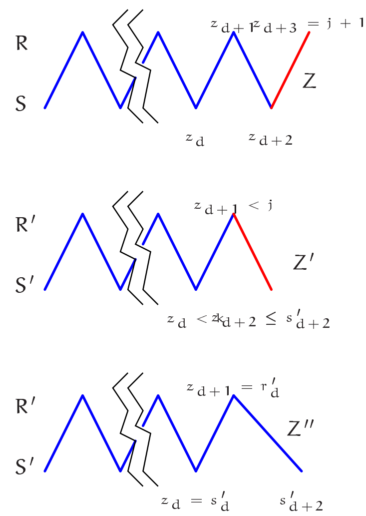
$$z'_{d+1} < j, \qquad z'_d < k.$$

Mit anderen Worten:

$$z'_{d+1} \in R', \qquad z'_d \in S'.$$

Also können wir in Z' das größte Element z'_{d+2} durch das mindestens ebenso große s'_{d+1} ersetzen, und wir erhalten einen weiteren Kreis Z'' in $\mathcal{Z}(n, d)$ mit

$$
\begin{aligned}
(Z'')^+ &:= (Z')^+ \subseteq R', \\
(Z'')^- &:= (Z')^- \backslash \{z'_{d+2}\} \cup \{s'_{d+1}\} \subseteq S'.
\end{aligned}
$$



Die Konstruktion des Kreises Z'' aus Z, der wegen der Zulässigkeit von R' und S' nicht existieren kann, also kann Z nicht existieren, und R und S sind zulässig

Das widerspricht allerdings der Tatsache, daß R' und S' aus derselben Triangulierung T in $S(n, d)$ stammen: Widerspruch.

Für $R \in A, S \in B$ geht der Beweis analog.

(UP'). Dieser Beweis ist sehr mühsam und erfordert viele Fallunterscheidungen. Wir werden an jeder Stelle, an der eine Fallunterscheidung auftritt, nur einen Fall exemplarisch verfolgen. Die anderen Fälle kann man mehr oder weniger analog abarbeiten.

Sei $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{d+1}\}$ mit $f_1 < f_2 < \cdots < f_{d+1}$ eine Facette eines Simplexes S aus $\hat{T}$, also $F \in A$ oder $F \in B$. Wir verfolgen $F \in A$.

Falls $F \in \mathcal{F}(n+1, d+1)$ so ist nichts zu zeigen. Also sei F keine Facette von $\mathcal{C}(n+1, d+1)$. Man muß nun drei Fälle unterscheiden: Entweder

- $f_{d+1} = n+1$, der einfachste Fall, oder
- nicht der vorige und $f_{d+1} - f_d > 1$ oder
- nicht der erste Fall und $f_{d+1} - f_d = 1$, der schwierigste Fall.

Wir zeigen den dritten Fall. Aus Proposition 9.3.2 kann man schließen, daß $F\backslash\{f_d\}$ keine Facette von $\mathcal{C}(n,d)$ ist (Übung). Die Eigenschaft (UP') für T besagt daher, daß ein Simplex $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_{d+1}$ in T existiert mit $F\backslash f_d \subseteq F'$ und $F' \neq F$. Nun impliziert (IP') für T, daß entweder

$$f'_{d+1} = f_{d+1} \qquad\qquad f'_{d-1} = f_d \tag{$*$}$$

oder

$$f'_{d+1} > f_{d+1} \qquad\qquad f'_{d-1} = f_d.$$

Im ersten Fall ist

$$F \subseteq \underbrace{F'\backslash f'_{d+1} \cup \{f_{d+1}-1, f_{d+1}\}}_{\neq S \text{ da } n+1 \in S} \in \hat{T},$$

wie verlangt. Im zweiten Fall löscht man wieder das d-te Element aus F' und verfährt mit $F'\backslash\{f'_d\}$ wie oben mit $F\backslash\{f_d\}$. Und so weiter, bis man schließlich zwangsläufig in Fall $(*)$ landet.

Auffinden eines benachbarten Simplexes durch das im Text beschriebene Verfahren

....	f'_{d-1}	...	f'_d	...	f'_{d+1}	....
....	$f^{(2)}_{d-1}$	....	$f^{(2)}_d$	...	$f^{(2)}_{d+1}$	....
			$\vdots$			
....	$f^{(r-1)}_{d-1}$	....	$f^{(r-1)}_d$	...	$f^{(r-1)}_{d+1}$	
f''_k	...	f''_d	....	f''_{d+1}		

Beweis von (ii). Auch hier kann man rein kombinatorisch vorgehen. Anschaulicher ist jedoch eine geometrische Methode:

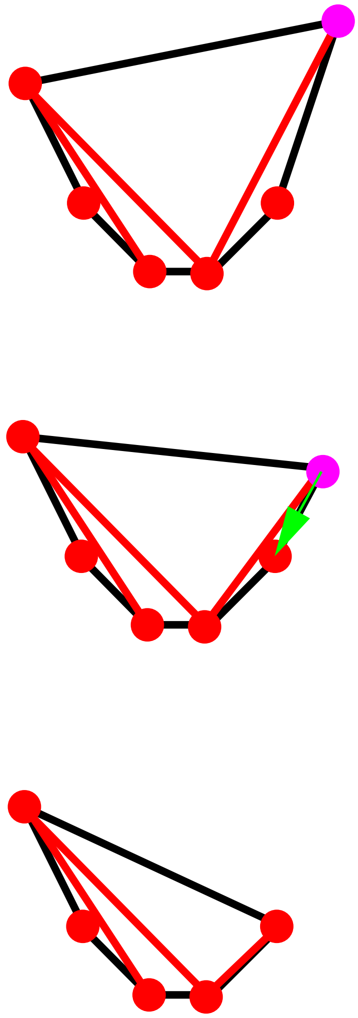
Wir betrachten die Löschung von n in $\mathcal{C}(n,d)$ wie folgt als einen kontinuierlichen Prozeß: Lasse den Punkt n in $\mathcal{C}(n,d)$ kontinuierlich im Zeitintervall $[0,1]$ entlang der Momentenkurve auf den Punkt $n-1$ zugleiten, so daß er zum Zeitpunkt 1 den Punkt $n-1$ erreicht. Dies liefert eine Familie $\mathcal{C}_t$ von zyklischen Punktmengen (als Mengen, nicht als Multimengen betrachet) mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= \mathcal{C}(n,d), \\
\mathcal{C}_t &\cong \mathcal{C}(n,d) \quad \forall t \in [0,1), \\
\mathcal{C}_1 &= \mathcal{C}(n-1,d).
\end{aligned}$$

Analog definieren wir durch die Triangulierung T von $\mathcal{C}(n,d)$ eine Familie von Simplizialkomplexen T_t, deren Simplexe durch die Eckennumern der Simplexe in T und den zugehörigen Koordinaten der Punkte in $\mathcal{C}_t$ gegeben sind.

Die Simplexe aus T_t bilden somit für alle $t \in [0,1)$ eine Triangulierung von $\mathcal{C}_t$. Daher ist das totale Volumen sowohl der Mehrfachüberdeckung als auch der Überdeckungslücke Null für alle $t \in [0,1)$.

Da das Volumen eine stetige Funktion der Koordinaten ist, sind diese Volumina auch für $T_1 = T \backslash n$ gleich Null. Also ist $T \backslash n$ eine Triangulierung von $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}(n-1, d)$. □



Die Darstellung der Löschung als ein kontinuierlicher Prozeß

9.5 Die Stapel-Halbordnung

Im diesem Abschnitt werden wir den letzten Baustein für den Beweis von Satz 9.1.1 liefern.

Zunächst erinnern wir an eine Standarddefinition aus der Ordnungstheorie.

Definition 9.5.1 (Lexikographische Ordnung). Sei A eine totalgeordnetes Alphabet und sei $\mathcal{S}$ die Menge der Zeichenketten mit Zeichen aus A. Die *lexikographische Ordnung* „$<_A$“ auf S ist die folgende Totalordnung:

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3\cdots <_A a_1'a_2'a_3'\ldots :\iff\ & a_1 < a_1' \text{ oder} \\ & a_1 = a_1' \text{ und } a_2a_3\cdots <_A a_2'a_3'\ldots \end{aligned}$$

Die folgende Relation ist der Schlüssel zum Auffinden von Flips:

Definition 9.5.2 (Stapel-Relation). Sei $T \in S(n,d)$, und seien $S, S' \in T$. Definiere

$$S < S' :\iff S \cap S' \in \mathcal{F}^u(S) \cap \mathcal{F}^l(S').$$

Wir sagen in diesem Falle, S *liegt direkt unter* S'.

Damit die Stapel-Relation nützlich ist, brauchen wir die folgende Aussage.

Proposition 9.5.3. *Die Stapel-Relation ist azyklisch.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage, indem wir eine spezielle lineare Erweiterung der Stapel-Relation angeben.

Dazu definieren wir die folgende Abbildung, die jedem Simplex $S \in \binom{\mathcal{C}(n,d)}{d+1}$ das n-Tupel seiner „Lückenbeschreibung“ zuordnet. In Formeln:

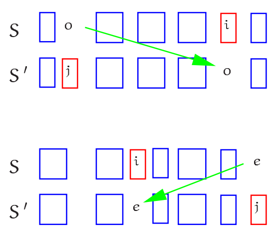
$$\gamma : \begin{cases} \dbinom{\mathcal{C}(n,d)}{d+1} & \to \quad \{o, *, e\}^{d+1}, \\ \gamma_i(S) & \mapsto \quad \begin{cases} o & \text{falls } i \text{ ungerade Lücke in } S \\ * & \text{falls } i \in S \\ e & \text{falls } i \text{ gerade Lücke in } S. \end{cases} \end{cases}$$

Wir behaupten:

Behauptung 9.5.4. *Die lexikographische Ordnung „$<_{o*e}$" der $\gamma(S)$ mit $S \in T$ bzgl. $o < * < e$ induziert eine Erweiterung der Stapelrelation, d. h.*

$$S < S' \implies \gamma(S) <_{o*e} \gamma(S') \quad \forall S, S' \in T.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, muß man nur betrachten, was mit Lücken passiert, wenn man von einem Simplex S zu einem direkt darüberliegenden S' übergeht:



Lücken beim Übergang zu einem direkt über einem Simplex S liegenden Simplex S′

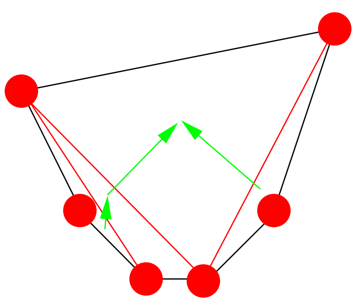
- Wir betrachten die Tabelle der Lücken von S und S' beschränkt auf $S \cup S'$.

- S und S' sind adjazent an einer oberen Facette F von S. Das bedeutet, wir müssen, um diese Facette zu erzeugen, ein Element aus S herausstreichen, das eine ungerade Lücke i von F in S hinterläßt.

- Um S' zu erhalten, müssen wir ein Element $j \neq i$ zu F hinzufügen. Das Entnehmen dieses Elementes hinterläßt eine gerade Lücke von F in S', da F eine untere Facette von S' ist.

- Mit den Lücken passiert beim Übergang von S zu direkt darüberliegenden S' folgendes:

  - Wenn $j > i$, dann ist die Parität von i in $S \cup S'$ anders als die von i in S, während die Parität von j in $S \cup S'$ die gleiche ist wie die von j in S'. Somit gilt: i ist eine gerade Lücke von S' in $S \cup S'$ und j ist eine gerade Lücke von S' in $S \cup S'$.
  - Wenn $j < i$, dann ist analog i eine ungerade Lücke von S' in $S \cup S'$ und j eine ungerade Lücke von S in $S \cup S'$.



Die Stapelrelation

- Mit anderen Worten: Beim Übergang von einem Simplex zu einem direkt darüberliegenden bewegen sich

  - gerade Lücken nach links und
  - ungerade Lücken nach rechts.

Das beweist die Behauptung und damit die Proposition. ☐

Mit anderen Worten: Wir haben eine nützliche Halbordnung auf der Menge der Simplexe einer Triangulierung von $\mathcal{C}(n, d)$.

Definition 9.5.5 (Stapelhalbordnung). Der transitive Abschluß der Stapelrelation „<" heißt *Stapelhalbordnung*.

9.6 Beweis des Hauptsatzes

In diesem Abschnitt beantworten wir nun endgülitg die Fragen aus Abschnitt 9.2.

Behauptung (i) ist richtig, da man durch sukzessives Anwenden von Aufwärts-/Abwärtsflips zur maximalen/minimalen Triangulierung gelangen muß.

Behauptung (ii) ist richtig mit

$$\delta T := \hat{T} \backslash (n+1).$$

Nach Konstruktion ist δT eine Triangulierung von $\mathcal{C}(n, d+1)$, die die Triangulierung T als Teilkomplex enthält.

Behauptung (iii) ist richtig, da die Stapelrelation eine Halbordnung ist.

Beahuptung (iv) ist richtig wegen der folgenden Betrachtung: Um z. B. einen Aufwärtsflip in T zu finden, konstruiert man δT und betrachtet die Zerlegung von δT in die Simplizes über und unter dem charakteristischen Schnitt von T. Sie A die Menge der Simplizes über dem charakteristischen Schnitt von T. Ist A leer, so sieht man leicht, daß T schon die Menge aller oberen Facetten von $\mathcal{C}(*n, d+1)$ gewesen sein muß. Sei also A nicht leer. Angenommen, es gäbe kein Simplex in A mit allen unteren Facetten in T. Sei S ein kleinstes solches bzgl. der Stapelhalbordnung. Sei F eine untere Facette von S, die nicht in T liegt. Da F noch über T liegt kann F keine untere Facette von $\mathcal{C}(n, d+1)$ sein. Wegen (UP') finden wir also ein weiteres Simplex $S'\ neqS$ in A direkt unterhalb von S. Da S das kleinste Simplex mit der Eigenschaft war, daß nicht alle unteren Facetten in T liegen, definiert S' einen Aufwärtsflip.

Abwärtsflips findet man genauso.

Damit ist bewiesen, daß $\mathcal{S}_1(n, d)$ stets beschränkt ist.

Um aus einer Triangulierung in $S(n, d+1)$ eine maximale Ketten in $\mathcal{S}_1(n, d)$ zu konstruieren, wendet man einfach das Finden von Aufwärtsflips auf die minimale Triangulierung von $\mathcal{C}(n, d)$ an.

Um aus einer maximalen Kette in $\mathcal{S}_1(n, d)$ eine Triangulierung in $S(n, d+1)$ zu konstruieren, betrachten wir einfach die Menge der Flips der Kette als Menge von Simplizes, für welche nach Konstruktion (IP') und (UP') gelten.

Damit ist der Hauptsatz dieses Kapitels bewiesen.

Flipdefizit

10

In diesem Kapitel starten wir die Untersuchung von Triangulierungen, die weniger Flips haben, als jede reguläre Triangulierung mindestens haben muß. Das Material stammt aus [3].

10.1 Flipdefizit

Aus der Theorie der Sekundärpolytope wissen wir, daß jede reguläre Triangulierung einer n-punktigen, d-dimensionalen Multimenge mindestens $n-d-1$ Flips hat. Gilt das auch für nicht-reguläre Triangulierungen?

Hat eine Triangulierung T einer n-punktigen, d-dimensionalen Multimenge $k < n-d-1$ Flips, so sagen wir, T hat ein *Flipdefizit* von $n-d-1-k$.

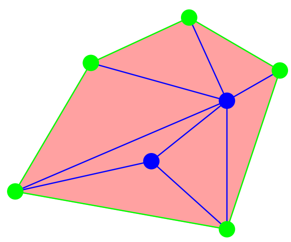
10.2 Fälle ohne Flipdefizit

Es gibt Fälle, in denen zwar nicht reguläre Triangulierungen existieren, diese jedoch kein Flipdefizit haben können. Diese werden wir im folgenden besprechen.

Zum Beweis ist die sogenannte Euler-Formel nützlich. Wir fassen die Fälle, die uns interessieren, zusammen.

Theorem 10.2.1 (Euler-Formel). *Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Punktmenge. Sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$. Ferner sei $(f_b)_k$ die Anzahl der k-dimensionalen Seiten von Simplizes in T, die im Rand von $\mathcal{A}$ liegen und f^k die Anzahl aller k-dimensionalen Seiten in T. Dann gilt:*

$$f_0 - f_1 + f_2 \mp \cdots + (-1)^d f_d = 1,$$
$$(f_b)_0 - (f_b)_1 + (f_b)_2 \mp \cdots + (-1)^{d-1}(f_b)_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}.$$

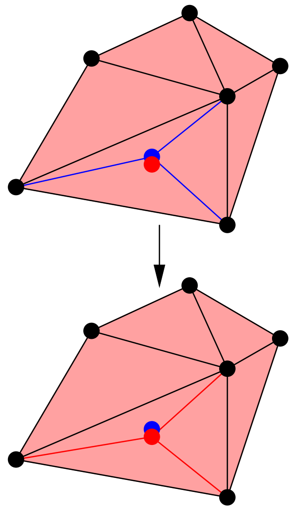


Die Euler-Formel für die Triangulierung ist ausgeschrieben $7-13+7=1$; die Formel für den Rand ist in diesem Beispiel $5-5=1+(-1)^1$

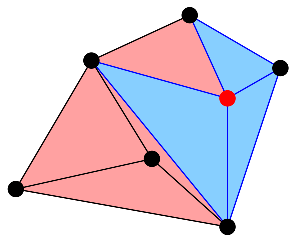
Beweis. Siehe z. B. [14]. □

Hier ist der erste Fall ohne Flipdefizit:

Theorem 10.2.2. *Jede Triangulierung einer zweidimensionalen Multimenge mit n Punkten hat mindestens $n-3$ Flips.*



Ein Doppelpunkt induziert immer einen Extra-Flip



Ein Punkt, der in mehr als drei Dreiecken liegt, kann nur für höchstens zwei Paare von Dreiecken Reflexpunkt sein

Beweis. Sei T eine Triangulierung einer Multimenge $\mathcal{A}$ mit n Punkten, und sei k die Anzahl der Flips in T.

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $\mathcal{A}$ keine Doppelpunkte hat: Enthält $\mathcal{A}$ einen Doppelpunkt a, a', so kann nur einer der beiden Punkte, sagen wir a, in T vorkommen (IP'). Dann existiert aber in jedem Fall der Flip, der a durch a' in allen Simplizes ersetzt, in denen a vorkommt. Löschen wir also den Doppelpunkt so löschen wir einen Flip und einen Punkt, und die Behauptung folgt nach Induktion nach der Anzahl der Punkte.

Wir können ferner aus dem gleichen Grund o. B. d. A. annehmen, daß kein Flip einen Punkt in T entfernt.

Eine Kante e in T heißt *flipbar*, wenn ein Flip existiert, der e entfernt.

Seien e_b, e_f, e_{nf} die Anzahlen der Randkanten, flipbaren Kanten bzw. nicht-flipbaren Kanten, und sei t die Anzahl der Dreiecke in T. Nach Eulers Formel 10.2.1 und Doppeltzählen der Dreieck-Kanten-Inzidenzen gilt:

$$n - e_f - e_{nf} - e_b + t = 1,$$
$$3t = 2(e_f + e_{nf}) + e_b.$$

Somit gilt:

$$3n - 3 - (e_{nf} + 2e_b) = e_f. \tag{10.1}$$

Wir zählen nun die nicht flipbaren Kanten. Sie a eine solche. Dann ist die Vereinigung der beiden Dreiecke, die a in T enthalten, ein nicht-konvexes Viereck Q. Wir ordenen nun a den konkaven Punkt dieses Viereckes zu, den *Reflexpunkt* von Q.

Nun kann eine Ecke v in T, die in mehr als drei Dreiecken liegt (ansonsten kann man sie „wegflippen"), nicht Reflexpunkt von mehr als zwei Vierecken in T sein: die beiden Dreiecke eines Vierecks, von dem v Reflexpunkt ist, überstreichen einen Winkel von mindestens 180 Grad. Die unterschiedlichen Dreiecke dreier solcher Vierecke würden also mindestens 360 Grad überstreichen. Falls alle Dreiecks-Winkel genau 90 Grad betragen, können wir v „wegflippen" : Widerspruch. Sonst überstreichen die Dreiecke in T, die v enthalten, mehr als 360 Grad: Widerspruch.

Gleichzeitig können nur innere Punkte Reflexpunkte sein. Da die Anzahl der Ecken von $\operatorname{conv} \mathcal{A}$ gleich e_b ist, gilt:

$$e_{nf} \leq 2(n - e_b).$$

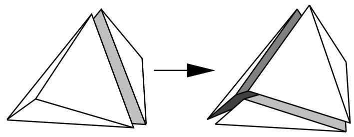
Zusammen mit (10.1) gilt also

$$e_f \geq n - 3,$$

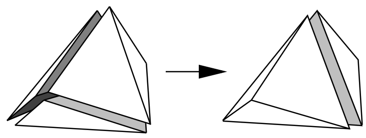
und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Auch in Dimension Drei können wir noch ein positives Resultat zeigen:

Theorem 10.2.3. *Jede Triangulierung einer dreidimensionalen Punktmenge in allgemeiner, konvexer Lage hat mindestens* $n-4$ *Flips.*



Ein Aufwärtsflip



Ein Abwärtsflip

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine Punktkonfiguration in allgemeiner, konvexer Lage, und sei T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$. Daraus folgt, daß es nur zwei Arten von Flips geben kann: Ein möglicher Flip ersetzt die zwei Tetraeder einer Bipyramide, die das mittlere Dreieck teilen, durch die die drei, die die mittlere Diagonale teilen (*Aufwärtsflip*); der andere mögliche Fliptyp entspricht dem umgekehrten Prozeß (*Abwärtsflip*).

Sei nun t die Anzahl der Tetraeder in T, und sei f_i bzw. f_b die Anzahl der Tetraeder im Innern bzw. im Rand von $\mathcal{A}$. Ferner seien e_i und e_b die entsprechenden Anzahlen für Kanten von T.

Wir starten wieder mit Eulers Formel 10.2.1 für T und den Rand von T:

$$\begin{aligned} f_i + f_b + n &= t + e_i + e_b + 1, \\ f_b + n &= e_b + 2. \end{aligned}$$

Zählen der Tetraeder-Dreieck-Inzidenzen ergibt

$$2f_i + f_b = 4t.$$

Zählen der Dreieck-Kanten-Inzidenzen im Rand von T ergibt

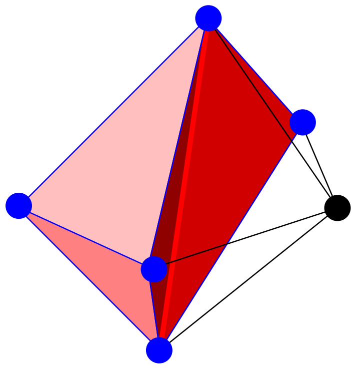
$$2e_b = 3f_b.$$

Auflösen nach f_i bzw e_i ergibt:

$$f_i = 2t - n + 2, \tag{10.2}$$

$$e_i = t - n + 3. \tag{10.3}$$

Betrachte ein inneres Dreieck c in T. Es gibt genau zwei Tetraeder in T, die c enthalten. Da $\mathcal{A}$ in allgemeiner, konvexer Lage ist, bilden diese beiden Tetraeder eine möglicherweise nicht konvexe Bipyramide B. Falls B konvex ist, so existiert ein eindeutiger Flip, der T genau auf B ändert und somit c aus T entfernt. Falls nicht, so ist mindestens eine Kante von c konkav in B. Sind zwei Kanten konkav, so liegt ihr gemeinsamer Punkt im Inneren von B; das geht aber nicht, da $\mathcal{A}$ in konvexer Lage ist. Daher hat jedes innere Dreieck, das nicht „weggeflippt“ werden kann, eine eindeutige konkave – und damit auch innern – Kante bzgl. T, die Reflexkante von B.



Eine innere Kante, die in mehr als drei Tetraedern liegt, kann Reflexkante von höchstens 2 Bipyramiden sein.

Umgekehrt: Eine innere Kante a kann die konkave Reflexkante von höchstens drei Dreiecken in T sein: Wieder beträgt der zylindrische Winkel um a nämlich höchstens 360 Grad. Falls a tatsächlich die Reflexkante von genau drei Dreiecken ist, so bilden die beteiligten Tetraeder einen Abwärtsflip. Umgekehrt enthält jeder Abwärtsflip genau eine Kante dieser Art, die Diagonale.

Wir zählen nun die inneren Kanten getrennt, je nachdem von wievielen Dreiecken sie die Reflexkante sind. Sei also $e_i^{(j)}$ die Anzahl der inneren Kanten in T, die Reflexkante von j Dreiecken sind. Die Anzahl der Aufwärtsflips sei z^+, die der Abwärtsflips sei z^-. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_i &= z^+ + e_i^{(1)} + 2e_i^{(2)} + 3e_i^{(3)} \\ &= z^+ + z^- + e_i^{(1)} + 2e_i^{(2)} + 2e_i^{(3)} \\ &\leq z^+ + z^- + 2e_i. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} z^+ + z^- &\geq 2e_i + f_i \\ &\geq n - 4. \qquad \text{(wegen (10.2) \& (10.3))} \end{aligned}$$

□

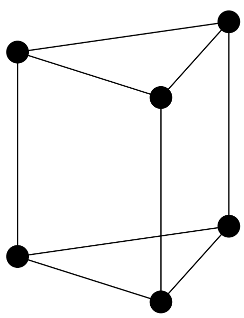
10.3 Flipdefizit in Dimension Drei

Dieser Abschnitt wird zeigen, daß die im vorigen Abschnitt erzielten Resultate das beste sind, was man erhoffen kann.

Theorem 10.3.1. *Es gibt eine Triangulierung einer dreidimensionalen Punktmenge in allgemeiner Lage mit neun Punkten, einer davon im Inneren, mit nur 4 Flips.*

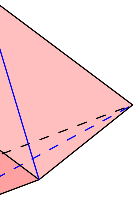
Beweis. Wir skizzieren eine Konstruktion in spezieller Lage. Durch leichtes Verschieben der Punkte in allgemeine Lage und Anpassen der Triangulierung kann gehen die Eigenschaften der Triangulierung nicht verloren.

Die Punktkonfiguration sieht wie folgt aus: Man nehme zwei Dreiecks-Prismen – d. h. Produkte eines Dreiecks mit einem Intervall – und klebe sie entlang einer viereckigen Seite so zusammen, daß die dreieckigen Seiten nicht benachbart sind. Die Punktkonfiguration $\mathcal{A}$ entsteht, indem wir den Mittelpunkt der Konstruktion hinzunehmen.



Ein Dreiecks-Prisma

Die Triangulierung von Interesse entsteht wie folgt: Die viereckigen Seitenflächen von $\mathcal{A}$ werden so durch Diagonalen trianguliert, daß sich je zwei Diagonalen nicht berühren. Dann wird jedes Dreieck auf dem Rand mit



mension Drei
zit

dem Mittelpunkt zu einem Tetraeder ergänzt, wodurch eine Triangulierung von $\mathcal{A}$ entsteht.

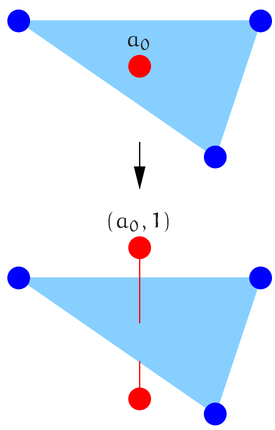
Wir behaupten, daß die vier Flips, die die Diagonalen auf den viereckigen Seiten tauschen, die einzigen sind. Wir gehen alle Fälle durch:

- Der Mittelpunkt kann nicht „weggeflippt" werden, da er in mehr als drei Tetraedern liegt.
- Innere Kanten können nicht „weggeflippt" werden, da sie stets in mehr als drei Tetraedern liegen.
- Innere Dreiecke können nicht „weggeflippt" werden, da die adjazenten Tetraeder stets nicht konvexe Bipyramiden formen.

□

10.4 Flipdefizit in Dimension Vier in konvexer Lage

Ein Standardverfahren, um aus einer nicht konvexen Punktmenge eine konvexe zu erzeugen ohne die entscheidenden kombinatorischen Eigenschaften zu verändern, ist die sogenannte Lawrence-Erweiterung. Hier werden innere Punkte durch Punktpaare ersetzt, die in eine zusätzliche Dimension hineinragen.



Ein Kreis, der a_0 enthält, in der Lawrence-Erweiterung

Definition 10.4.1 (Lawrence-Erweiterung). Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Punktmenge mit n Punkten, von denen k im Inneren liegen. Für einen Punkt a_0 im Inneren von $\mathcal{A}$ sei

$$\mathcal{A}^{(a_0)} := \{\,(a, 0)\ :\ a \in \mathcal{A}\backslash\{a_0\}\,\} \cup \{(a, 1), (a, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}.$$

Dann ist $\mathcal{A}^{(a_0)}$ eine $(d+1)$-dimensionale Punktmenge mit $n+1$ Punkten, von denen $k-1$ im Innern liegen, und wird als *Lawrence-Erweiterung im Punkt* a_0 bezeichnet.

Die Punktmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, die durch sukzessive Lawrence-Erweiterungen entsteht, heißt *Lawrence-Polytop* von $\mathcal{A}$.

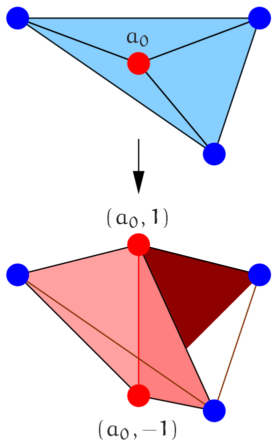
Die entscheidende Eigenschaft der Lawrence-Erweiterung ist, daß die Kombinatorik der neuen Punktmenge stark mit der der alten verknüpft ist.

Theorem 10.4.2. *Es gibt eine eineindeutige Zuordnung von Kreisen von $\mathcal{A}$ zu Kreisen von $\mathcal{A}^{(a_0)}$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\mathcal{A}) &\to \mathcal{Z}(\mathcal{A}^{(a_0)}),\\
(Z^+, Z^-) &\mapsto \begin{cases}
((Z^+\backslash\{a_0\}) \times \{0\} \cup \{(a_0, 1), (a_0, -1)\}, Z^-) \\
\quad \textit{falls } a_0 \in Z^+, \\
(Z^+, (Z^-\backslash\{a_0\}) \times \{0\} \cup \{(a_0, 1), (a_0, -1)\}) \\
\quad \textit{falls } a_0 \in Z^-, \\
(Z^+, Z^-) \\
\quad \textit{sonst.}
\end{cases}
\end{aligned}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Auch die Menge aller Triangulierungen $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ bleibt inklusive Flip-Adjazenz beim Übergang zur Lawrence-Erweiterung erhalten:



Simplizes, die a_0 enthalten, in der Lawrence-Erweiterung

Theorem 10.4.3. *Es gibt eine eineindeutige Zuordnung von Triangulierungen von $\mathcal{A}$ zu Triangulierungen von $\mathcal{A}^{(a_0)}$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(\mathcal{A}) & \to & \mathcal{T}(\mathcal{A}^{(a_0)}), \\ T \ni S & \mapsto & \begin{cases} \{(S \backslash \{a_0\}) \times \{0\} \cup \{(a_0, 1), (a_0, -1)\}\} \\ \quad \textit{falls } a_0 \in S, \\ \{S \times \{0\} \cup \{(a_0, 1)\}, S \times \{0\} \cup (a_0, -1)\} \\ \quad \textit{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Diese Zuordnung erhält die Nachbarschaft bzgl. bistellarer Flips.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wenden wir diese Konstruktion auf die dreidimensionale Punktmenge mit einem inneren Punkt an, so erhalten wir sofort:

Korollar 10.4.4. *Es existiert eine Triangulierung einer vierdimensionalen konvexen Punktmenge mit 10 Punkten in allgemeiner, konvexer Lage mit nur 4 Flips.*

Die Santos-Triangulierung

11

Die Santos-Triangulierung wurde in 1999 von Francisco Santos konstruiert. Ihre verblüffende Eigenschaft: Sie hat keine Flips.

In diesem Kapitel werden wir die Konstruktion der Santos-Triangulierung [11] skizzieren und plausibel machen, warum sie so besonders ist.

11.1 Triangulierungen von Dreiecksprismen

Zum Einstieg wollen wir Triangulierungen von Dreiecksprismen anschauen. An diesen Objekten kann man im Prinzip schon die wesentliche Eigenschaft der Santos-Triangulierung ablesen.

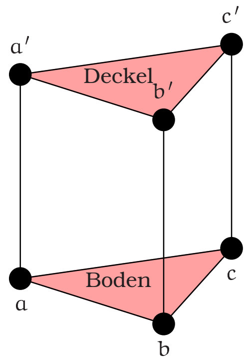
Wir benennen die Ecken eines Dreiecksprismas wie folgt:

- Die untere Dreiecksseite („Boden“) hat die Ecken a, b, c.
- Die obere Dreiecksseite („Deckel“) hat die Ecken a', b', c', so daß $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ und $\{c, {}'\}$ die senkrechten Kanten sind.

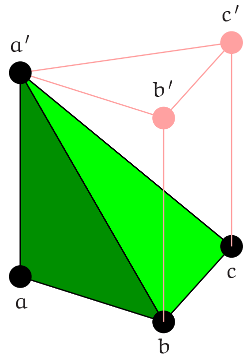
Um ein Dreiecksprisma zu triangulieren, kann man folgendermaßen vorgehen:

- Man nimmt das Basisdreieck her und fügt eine Ecke des „Deckeldreiecks“ hinzu, um das erste Simplex zu konstruieren.
- Der noch nicht triangulierte Teil ist nun ein „schiefes“ Dreiecksprisma, dessen Boden der oberen Dreiecksseite des ersten Simplexes entspricht.
- Diese Dreiecksfläche muß also auch mit einem Tetraeder abgedeckt werden. Dazu wählen wir einen weiteren Punkt aus dem „Deckel“, der mit dem augenblicklichen Boden ein Tetraeder bildet.
- Nun ist nur noch Platz für ein Tetraeder, welches die Triangulierung komplettiert.

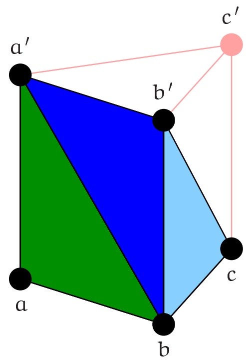
Also sind Triangulierungen von Dreiecksprismen in Wahrheit einfache Objekte.



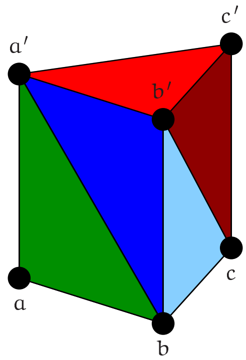
Die Bezeichnung der Ecken eines Dreiecksprismas



Das erste Simplex, ...



... das zweite Simplex ...



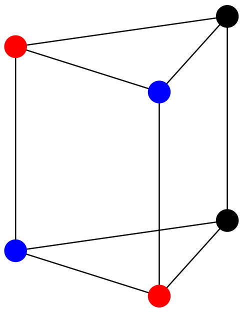
…und das dritte Simplex der Triangulierung induziert von $a < b < c$.

Beobachtung 11.1.1. *Die Triangulierungen des Dreiecksprismas entsprechen den Permutationen von drei Elementen.*

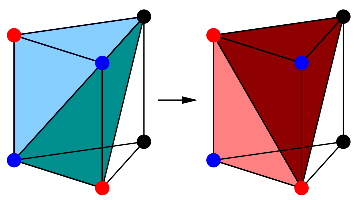
Flips in Triangulierungen von Dreiecksprismen haben ebenfalls eine einfache Form.

Beobachtung 11.1.2. *Jeder Flip in einer Triangulierung eines Dreiecksprismas hat die folgende Form:*

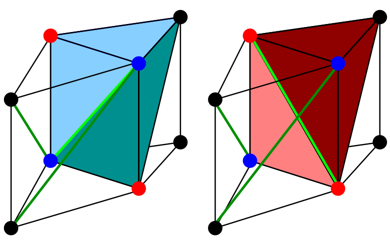
- *Der zugrundeliegende Kreis ist einer von den folgenden:*
  - $(\{a', b\}, \{a, b'\})$,
  - $(\{b', c\}, \{b, c'\})$ *oder*
  - $(\{c', a\}, \{c, a'\})$.
- *Der Flip entspricht einer Transposition in der Permutation.*
- *Der Flip induziert einen Flip auf genau einer der drei viereckigen Seiten des Dreiecksprismas.*



Alle Kreise im Dreiecksprisma sind von dieser Gestalt



Alle Flips im Dreiecksprisma sind von dieser Gestalt



Ein blockierter Flip

Nun kommt die entscheidende Eigenschaft der Dreiecksprismen: Es gibt Triangulierungen des Randes, die nicht induziert sein können von einer Triangulierung des ganzen Prismas. Das sieht man so: Bei der Konstruktion des ersten Simplexes nach der „Permutationsmethode“ existieren auf jeden Fall zwei Randkanten, die die neue Ecke enthalten. Das heißt, zwei Randkanten haben in jeder beliebigen Triangulierung eine gemeinsame Ecke. Das heißt nun wieder, daß eine der beiden Triangulierungen des Randes des Prismas, in der je zwei Randkanten sich nicht berühren, nicht durch eine Triangulierung des ganzen Prismas induziert sein kann.

Betrachte nun zwei triangulierte Dreiecksprismen und klebe sie an einer Viereckseite so zusammen, daß eine zulässige Gesamttriangulierung entsteht. Dann sind alle Flips, die in einem Prisma möglich waren und die Diagonale des Klebevierecks so drehen, daß sie für das andere Prisma zu einer der unzulässigen Randtriangulierungen führen würde, in der Gesamttriangulierung nicht möglich.

Dieses Phänomen nennen wir *Flipblockade durch Kleben.*

11.2 Produkte von Simplizes

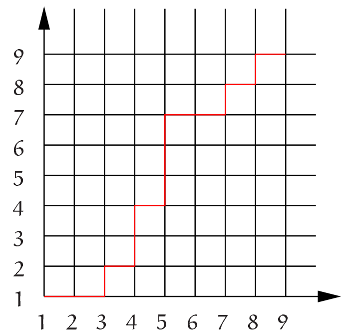
Eine Verallgemeinerung der Überlegungen zu den Dreiecksprismen bieten Produkte von Simplizes. Betrachten wir ein Dreiecksprisma als ddas Produkt von einem

Zwei-Simplex mit einem Eins-Simplex, so entspricht die Permutation einer azyklischen Orientierung der Kanten des Dreiecks, während die Konstruktionsreihenfolge „vom Boden zum Deckel“ einer azyklischen Orientierung der Kante entspricht.

In dieser Formulierung kann man die Konstruktion auf beliebige Produkte von Simplizes verallgemeinern.

Lemma 11.2.1. *Die Triangulierungen von $S_k \times S_l$ können wie folgt erzeugt werden:*

- *Wähle Permutationen ρ der Ecken $s_1, s_2, \ldots, s_k$ von S_k und σ der Ecken $s'_1, s'_2, \ldots, s'_l$ von S_l.*
- *Numeriere die Ecken von S_k und S_l neu, so daß $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ und $s'_1 < s'_2 < \cdots < s'_l$ bzgl. der Permutationen ρ bzw. σ.*
- *Die Menge aller Ketten in der Produkthalbordnung $\rho \times \sigma$ der Ecken von $S_k \times S_l$ bilden eine Triangulierung von $S_k \times S_l$.*



Ein Simplex der Treppentriangulierung von $S_8 \times S_8$ entspricht einem monotonen Pfad im (9×9)-Gitter

Diese Triangulierung nennen wir auch *Treppentriangulierung* bzgl. ρ und σ.

Flips sehen auch genau wie bei den Dreiecksprismen aus:

Lemma 11.2.2. *Ein Flip in einer Triangulierung von $S_k \times S_l$ hat die folgende Gestalt:*

- *Der zugehörige Kreis ist von der Form*

$$(\{(a, b'), (a', b)\}, \{(a, b), (a', b')\}).$$

- *Der Flip entspricht einer Transposition in der Permutation der Ecken von S_k und einer Transposition in der Permutation der Ecken von S_l.*
- *Der Flip induziert Flips auf den nicht simplizialen Facetten von $S_k \times S_l$, die sowohl (a, b') als auch (a', b) enthalten.*

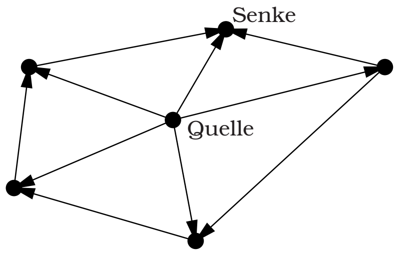
Die Transposition ist inder Sprache der azyklischen Orientierungen einfach die Umkehrung der Orientierung auf einer Kante. Das wird noch nützlich sein.

Und wieder gibt es Randtriangulierungen, die nicht durch eine volle Triangulierung induziert sein können, so daß auch hier Flipblockade von Flips innerhalb eines Produktes von Simplizes möglich ist.

11.3 Ein Programm zur Konstruktion einer Triangulierung ohne Flips

Hier ist nun die Strategie zur Erzeugung einer Triangulierung, die keine Flips zuläßt. Natürlich wollen wir aufgrund der Erkenntnisse des vorigen Abschnitts eine Produkttriangulierung konstruieren und irgendwie eine geschlossene Kurve von Flipblockaden erzeugen.

11.3.1 Lokal azyklisch orientierte Triangulierungen



Eine lokal azyklische Orientierung

Zunächst benötigen wir einen Begriff, der die Richtung von Flipblockaden beschreibt.

Definition 11.3.1 (Lokal azyklische Orientierung). Sei T eine Triangulierung einer Punktmenge $\mathcal{A}$. Eine *azyklische Orientierung* von T ist eine Orientierung jeder Kante von T, die azyklisch auf jedem Simplex in T ist.

Interessant sind Orientierungen, die sich lokal nicht ändern lassen.

Definition 11.3.2 (Irreversible Kanten). Eine orientierte Kante in einer lokal azyklischen Orientierung von T ist *irreversibel*, wenn die umgekehrte Orientierung dieser Kante in T nicht mehr lokal azyklisch ist.

Wir suchen also zunächst eine Triangulierung mit einer lokal azyklischen Orientierung mit nur irreversiblen Kanten. Unsere Intuition sagt dann, daß ein Produkt zweier solcher Triangulierungen zumindest auf innerhalb der Produkte ihrer Simplizes keine Flips mehr haben kann.

11.3.2 Die Treppenverfeinerung

Ein Produkt von zwei Triangulierungen ist eine Menge von Produkten von Simplizes. Wie man diese „Produktzellen“ mithilfe einer Ordnung auf den Ecken der Faktoren triangulieren kann, wissen wir bereits. Lokal azyklische Orientierungen liefern nun eine globale Vorschrift, wie die Ecken jedes Simplexes geordnet werden müssen. Dadurch sind die Triangulierungen der Produktzellen automatisch „kompatibel“.

Definition 11.3.3 (Treppenverfeinerung). Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Punktmengen und T und T' Triangulierungen von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$. Ferner seien lokal azyklische Orientierungen auf T und T' gegeben.

Die *Treppenverfeinerung* von $T \times T'$ bzgl. der lokal azyklischen Orientierungen ist eine Triangulierung von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$, die aus den Treppentriangulierungen bzgl. der induzierten Orientierungen der Mengen $S \times S'$ mit $S \in T$ und $S' \in T'$ besteht.

Daß dies wirklich auf den Rändern der Simplex-Produkte – „Produktzelle“ – konsistent ist, liegt also daran, daß die global vorgegebenen azyklischen Orientierungen auf den Rändern der Simplex-Produkte jeweils identische Permutationen und damit identische Triangulierungen erzeugt.

Hier ist die Hauptaussage dieses Abschnitts, die besagt, das man für einen Flip im Inneren einer Produktzelle der Treppenverfeinerung reversible Kanten in beiden Ursprungsorientierungen braucht.

Lemma 11.3.4. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Punktmengen und T und T' Triangulierungen von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$. Ferner seien lokal azyklische Orientierungen auf T und T' gegeben, von denen mindestens eine nur irreversible Kanten enhält.*

Dann „projiziert“ jeder Flip in der Treppenverfeinerung von $T \times T'$ entweder auf einen Flip in T oder einen Flip in T'.

11.3.3 Sandwich-Kreise

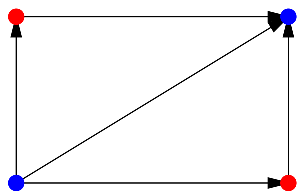
Was nun noch an Flips übrigbleibt, kann durch die folgende Betrachtung erledigt werden:

Definition 11.3.5 (Sandwich-Kreis). Sei $\mathcal{A}$ eine Punktmenge. Sei ferner T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$, die alle Punkte benutzt, und $Z = (Z^+, Z^-)$ ein Kreis, der einen Flip in T induziert. Außerdem sei eine lokal azyklische Orientierung auf T gegeben.

Dann Z heißt *Sandwich-Kreis*, wenn die lokal azyklische Orientierung auf T eine Ordnung der Form

$$Z_1^+ < Z^- < Z_2^+, \quad Z_1^+ \cup Z_2^+ = Z^+,$$

induziert.



Ein Sandwich-Kreis

11.3.4 Der Hauptsatz

Hier ist nun die Grundlage für die Eigenschaft der Santos-Triangulierung:

Theorem 11.3.6. *Sei $\mathcal{A}_0$ eine ebene Punktmenge bestehend aus einem Dreieck $\{p, q, r\}$ und einem inneren Punkt o. Ferner sei T_0 die Triangulierung von $\mathcal{A}_0$ mit drei Dreiecken. Die Kanten von T_0 seien von o weg und gegen den Uhrzeigersinn orientiert. Diese Orientierung ist lokal azyklisch.*

Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Punktmenge und T eine Triangulierung mit folgenden Eigenschaften:

- T *benutzt alle Punkte von $\mathcal{A}$.*
- T *hat eine lokal azyklische Orientierung mit nur irreversiblen Kanten.*

- *Diese Orientierung hat keine globale Senke, d. h. aus allen Ecken geht mindestens eine Kante heraus.*
- *Alle Kreise, die Flips induzieren, sind Sandwich-Kreise.*

Dann hat die Treppenverfeinerung von $T_0 \times T$ *keinen Flip.*

Beweisskizze. Wegen 11.3.4 reicht es zu zeigen, daß kein Flip in der Treppenverfeinerung auf einen Flip in T oder in T_0 projizieren kann. Dies kann man mit Fallunterscheidung und der Eigenschaften von Sandwich-Kreisen zeigen. □

11.4 Die Konstruktion

Wir berichten hier noch schnell über ein paar Eigenschaften der Punktmenge $\mathcal{A}$ und deren Triangulierung T, die Santos entsprechend Theorem 11.3.6 gebaut hat.

Theorem 11.4.1. *Es gibt eine vierdimensionale Punktmenge mit* 81 *Punkten und* 64 *Symmetrien mit einer Triangulierung, die eine lokal azyklische Orientierung mit ausschließlich irreversiblen Kanten und ohne eine globale Senke besitzt.*

Es folgt mit Theorem 11.3.6:

Korollar 11.4.2. *Es gibt eine seschsdimensionale Punktmenge mit* 324 *Punkten und* 192 *Symmetrien mit einer Triangulierung ohne Flips.*

Bemerkung 11.4.3. Mit dem Programm TOPCOM [10] kann man die Santos-Triangulierung konstruieren und aus alle möglichen Flips testen lassen. Die große Anzahl von 25920 Simplizes wird dabei durch Ausnutzung der Symmetrien bewältigt. Glücklicherweise kommt auch dort heraus, daß in der Santos-Triangulierung keine Flips existieren.

Enumeration und Optimierung

12

In diesem Kapitel wollen wir über Ansätze berichten, die es erlauben Triangulierungen zu enumerieren oder über allen Triangulierungen zu optimieren.

Die Enumerationsmethoden aus den Abschnitten 12.1 und 12.2 sind in dem frei verfügbaren Paket TOPCOM [10] realisiert worden. Diese wollen wir näher beschreiben.

Unter der Home-Page von Jesús de Loera[1] befindet sich unter „Recent Work" ein Link auf den *universal builder*, der Ungleichungen für das *Universal-Polytop* 12.4 zur Weiterverarbeitung in einem LP/IP-Solver generiert.

12.1 Enumeration der Sekundärkomponente

Die *Sekundärkomponente* ist ein Teilgraph des Flip-Graphen einer Multimenge. Er enthält die Zusammenhangskomponente des Flip-Graphen aller Triangulierungen, in der die regulären Triangulierungen liegen.

Auf dieser Komponente kann man im Prinzip alle bekannten Graphen-Enumerationsverfahren benutzen. Es hat sich gezeigt, daß trotz großen Speicherbedarfs sogenannte *Breadth-First-Search*-Verfahren (BFS) am besten funktionieren. Hier kann man am besten *Symmetrien* der Multimenge ausnutzen.

12.1.1 Kombinatorische Symmetrien

Wir wissen bereits, daß die Menge aller Triangulierungen einer Multimenge nur von der Menge ihrer Kreise abhängt, also der Kombinatorik der Multimenge. Daher sind wir auch an allen kombinatorischen Symmetrien interessiert.

Definition 12.1.1 (Symmetrie). Sei $\mathcal{A}$ eine Multimenge, deren $\#\mathcal{A} = n$ Punkte mit den Elementen von $[n] = \{1, 2 \ldots, n\}$ bezeichnet sind.

Eine Permutation π von n Elementen heißt *kombinatorische Symmetrie* von $\mathcal{A}$, wenn π einen Automorphismus der Menge $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ aller Kreise induziert, mit anderen Worten:

$$(\pi(Z^+), \pi(Z^-)) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \iff (Z^+, Z^-) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$$

[1] http://math.ucdavis.edu/ deloera/

Wir wollen nun nicht mehr alle Triangulierungen enumerieren, sondern nur noch die verschiedenen Symmetrieklassen.

Definition 12.1.2 (Symmetrieklasse). Sei $\mathcal{A}$ eine d-dimensionale Multimenge und $\mathcal{S}$ die Gruppe aller kombinatorischen Symmetrien von $\mathcal{A}$. Sei ferner T eine Triangulierung von $\mathcal{A}$.

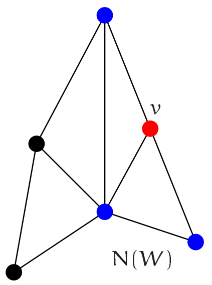
Für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}$ sei

$$\pi(T) := \{\{\pi(s_1), \pi(s)2, \ldots, \pi(s_{d+1})\} : \{s_1, s_2, \ldots s_{d+1}\} \in T\}.$$

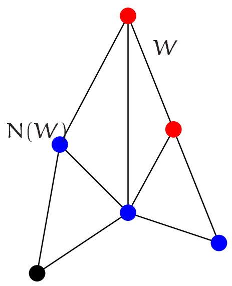
Definiere folgende Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{S}}$ auf der Menge $\mathcal{T}$ aller Triangulierungen von $\mathcal{A}$:

$$T \sim_{\mathcal{S}} T' \iff \exists \pi \in \mathcal{S} : \pi(T) = T'.$$

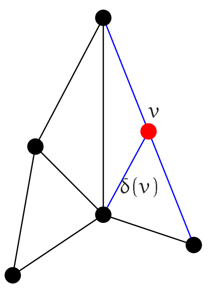
Die Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{S}}$ heißen *Symmetrieklassen*. Die Restklassenmenge $\mathcal{T}/\sim_{\mathcal{S}}$ aller Äquivalenzklassen wird mit $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ bezeichnet. Die Äquivalenzklasse $[T]$, die T enthält, ist die *Symmetrieklasse* von T.



Die Nachbarschaft eines Knotens



Die Nachbarschaft einer Knotenmenge



Der Schnitt eines Knotens

12.1.2 Breitensuche (BFS)

Die Breitensuche angepaßt auf Enumerierungsprobleme funktioniert grob beschrieben wie folgt:

1. Gegeben ist (implizit) ein Graph $G = (V, E)$. Die Menge der Nachbarn von $v \in V$ in G sei $N(v)$, die Menge der Nachbarn einer Teilmenge $W \subseteq V$ sei

$$N(W) := \bigcup_{v \in W} N(v).$$

   Die Menge der Kanten adjazent zu $v \in V$ sei mit $\delta(v)$ bezeichnet, die Menge der Kanten von $W \subseteq V$ in das Komplement von W in V (der *Schnitt* definiert durch W in G) sei

$$\delta(W) := \bigcup_{v \in W} \delta(v).$$

2. Initialisiere zwei Mengen $U = U' = \emptyset$, deren Elemente Paare $(v, E(v))$ aus Knoten und zugehörigen Kanten (ein Teil der Kanten aus dem Schnitt von v) sein werden.

3. Wähle einen beliebigen Knoten v aus V und setze $U := \{(v, E(v) := \delta(v))\}$ sowie $N := 1$. Bezeichne mit U_1 die Menge aller Knoten v mit $(v, E(v)) \in U$.

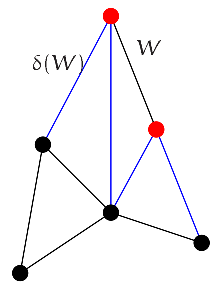
4. Für alle $v \in U_1$ und für alle $e \in E(v)$

- füge $(w, E(w)\backslash\{e\})$ mit $\{vw\} = e$ in U' ein, falls $w \notin U'_1 \cup U_1$.
- entferne e von $E(w)$, falls $w \in U'_1 \cup U_1$.

5. Wenn $U' = \emptyset$, gib N aus, sonst setze N auf $N + \#U'$.

6. Setze $U = U'$, $U' := \emptyset$ und gehe zu 4.

Dadurch, daß man alle „Rückwärtskanten“ entfernt, kann kein Knoten mehr als einmal gezählt werden.

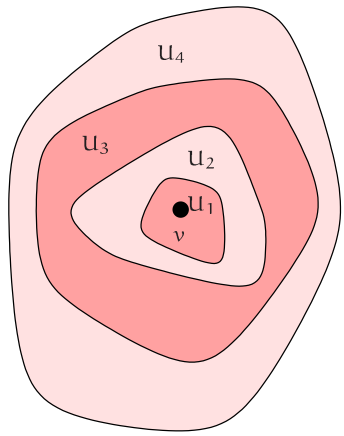


Der Schnitt einer Knotenmenge

12.1.3 Equivariante Breitensuche

In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie man in diesem Verfahren Nutzen aus Symmetrien einer Gruppe $\mathcal{S}$ ziehen kann. Die Idee ist, daß man in die Menge U' für jede Symmetrieklasse nur einen Knoten einfügt. Aber wie verhindert man, daß man über verschiedene Symmetrieklassen am selben Knoten nocheinmal ankommt?

Folgendes Verfahren zeigt, wie es geht. (Die Bezeichnungen sind wie oben, mit $\mathcal{S}(U)$ sei die Spur von U unter $\mathcal{S}$ bezeichnet.)



Schema der bei der Breitensuche entstehenden „Fronten“

1. Wähle $v \in V$ beliebig.

2. Setze $U := \{(v, \delta(v))\}$ und $N := 1$.

3. Für alle $v \in U_1$ und für alle $e \in E(v)$

   - füge $(w, E(w)\backslash\{\mathcal{S}(e)\})$ mit $\{vw\} = e$ in U' ein, falls $w \notin \mathcal{S}(U'_1 \cup U_1)$. Die Kante e nennen wir *benutzt*.
   - entferne $\pi(e)$ aus $E(w')$ für $\pi \in \mathcal{S}$, falls $\pi(w) = w' \in U'_1 \cup U_1$.

4. Wenn $U' = \emptyset$, gib N aus, sonst setze N auf $N + \#U'$.

5. Setze $U = U'$, $U' := \emptyset$ und gehe zu 3.

Folgendes Lemma zeigt, das das Verfahren wirklich alle Symmetrieklassen zählt. Sei dazu

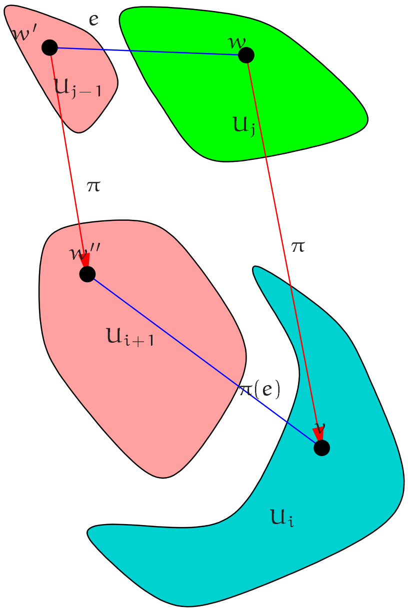
$$\{(v, \delta(v))\} = U_1, U_2, \ldots, U_k$$

die Folge der im obigen Verfahren als U bezeichneten Mengen.

Lemma 12.1.3. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$V/\mathcal{S} \cong U_1 \uplus U_2 \uplus \cdots \uplus U_k.$$

Mit anderen Worten: Für jedes $v \in V$ existiert genau ein w in genau einem U_i mit $v \sim_{\mathcal{S}} w$.



Es kann nicht passieren, daß man eine Spur mehrfach besucht

Beweis. Da Kanten nur gelöscht werden, wenn schon ein äquivalentes Element in einem der U_i vorhanden ist, gibt es zu jeder Symmetrieklasse einen Representanten in einem der U_i.

Annahme, es existieren $v \in U_i$ und $w \in U_j$ mit $v \sim_{\mathcal{S}} w$, o. B. d. A. $i \leq j$ und $j - i$ minimal mit dieser Eigenschaft.

Fall $j - i \leq 1$*:* Dies ist unmöglich, da dieser Fall durch Abfrage im Verfahren verhindert wird.

Fall $j - i > 1$*:* Sei $\pi \in \mathcal{S}$ der Automorphismus mit $v = \pi(w)$. Ferner sei $e = \{w', w\}$ die Kante, über die w erreicht worden ist, also $w' \in U_{j-1}$.

Betrachte die Kante $\pi(e) = \{\pi(w'), \pi(w)\}$. Das heißt, daß $\pi(e)$ in $N(\pi(w)) = N(v)$ liegt. Betrachte die Konstruktion von U_{i+1}:

Angenommen, $\pi(e)$ ist benutzt worden, dann ist aber $\pi(w')$ in U_{i+1} und $w' \in U_{j-1}$: Widerspruch zur Minimalität von $j - i$.

Angenommen, es existiert ein $\pi' \in \mathcal{S}$ mit $\pi'(\pi(w')) = w''$ für ein $w'' \in U_i$. Dann ist $\pi' \circ \pi(w') \in U_i$ und $w' \in U_{j-1}$: Widerspruch zur Minimalität von $j - i$.

Anderfalls ist $\pi(e)$ vor der Benutzung aus $E(v)$ entfernt worden. Das heißt, daß vorher eine Kante $e' = \{v, w''\}$ aus $E(v)$ benutzt worden ist mit $w'' = \pi'(\pi(w'))$. Daher ist $\pi' \circ \pi(w') \in U_{i+1}$ und $w' \in U_{j-1}$: Widerspruch zur Minimalität von $j - i$. □

12.2 Enumeration aller Triangulierungen

Um alle Triangulierungen einer beliebigen Multimenge zu enumerieren, kann man sich wegen Kapitel 10 offensichtlich nicht mehr auf Flips verlassen. Hier man jedoch die kombinatorische Charakterisierung von Triangulierungen benutzen, um jede Triangulierung Simplex für Simplex aufzubauen.

Das Verfahren funktioniert wie folgt:

1. Initialisiere für jedes d-Simplex S eine Menge von zulässigen Simplizes $Z(S)$, die alle d-Simplizes enthält, die sich mit S zulässig schneiden.

2. Setze
$$\mathcal{T} := \{\{S\} : S \text{ ist } d\text{-Simplex in } \mathcal{A}\}$$

3. Setze $N := 0$.

4. Für alle $T \in \mathcal{T}$ und für alle Simplizes S in $Z(T)$
   (a) $T' := \{S, S'\}$
   (b) $Z(T') := Z(T) \cap Z(S)$.
   (c) Setze $T := T'$ und $Z(T) := Z(T')$.

- Wenn (UP') für T gilt, so setze $N := N + 1$.
- Wenn $T(Z) \neq \emptyset$, gehe zu 3.

Es stellt sich die Frage, ob auch hier Symmtrien *effizient* eingebaut werden können, so daß Symmtrieklassen gezählt werden können. Diese Frage ist noch offen.

12.3 Bericht: Ausnutzung des Sekundärpolytops

Um reguläre Triangulierungen zu enumerieren, kann man jedes bekannte Ecken-Enumerationsverfahren auf Polytopen benutzen. Ein Beispiel ist das sogenannte „Reverse-Search"-Verfahren von Avis and Fukuda. Es benutzt die Tatsache, daß bei gegebenem linearen Funktional in allgemeiner Lage und einer festen Pivot-Regel der Kantenpfad von einer beliebigen Ecke zur optimalen Ecke eindeutig ist. Alle diese Pfade bilden also einen Baum, in dem man mit der sogannten *Depth-First-Search*-Methode (DFS) „rückwärts" alle Ecken wiederfindet [1].

Da im Sekundärpolytop die Kanten Flips entsprechen, kann man ohne Kenntnis der Facetten des Sekundärpolytops diese Suche durchführen.

Befindet man sich an einer Ecke, so fragt man, von welchen Nachbarecke diese Ecke pivotisiert worden wäre. DFS bedeutet, daß man hiervon zunächst eine Ecke auswählt und den Teilbaum unter dieser Ecke zunächst zuende numeriert, bevor man mit der nächsten Ecke fortfährt.

Der große Vorteil der DFS-Methode ist, daß von Beginn an Ecken berechnet werden, so daß man, sollte das Verfahren zu lange dauern, nach einem Abbruch wenigstens einige Ecken berechnet hat.

Der Nachteil ist, daß man nach jedem Flip die Regularität der neuen Triangulierung checken muß. Diese Rechnung entspricht der Lösung eines linearen Programms und dominiert die Zeitkomplexität dieser Enumerationsmethode.

12.4 Bericht: Das Universal-Polytop

Das *Universal-Polytop* ist ein 0-1-Polytop, in dem Triangulierungen 0-1-Indikator-Vektoren im Raum aller möglichen Simplizes entsprechen [7].

Ungleichungen ergeben sich im Prinzip durch die kombinatorische Charakterisierung von Triangulierungen.

Relaxiert man jedoch die Ganzzahligkeitsbedingungen, so erhält man i. A. gebrochene Ecken.

Trotzdem hat sich das Universalpolytop für die Bestimmung optimaler Triangulierungen in hohen Dimensionen durchgesetzt.

Literaturverzeichnis

[1] D. Avis and K. Fukuda. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration ofarrangements and polyhedra. *Discrete and Comp. Geom.*, 8:295–313, 1992.

[2] L. Billera, P. Filliman, and B. Sturmfels. Constructions and complexity of secondary polytopes. *Adv. in Math.*, 83:155–179, 1990.

[3] Jesús A. de Loera, Francisco Santos, and Jorge Urrutia. The number of geometric bistellar neighbors of a triangulation. Preprint, September 1996.

[4] P. H. Edelman and V. Reiner. The higher Stasheff-Tamari posets. *Mathematika*, 43:127–154, 1996.

[5] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Multidimensional Determinants, Discriminants and Resultants*. Birkhäuser, Boston, 1994.

[6] S. Huang and D. Tamari. Problems of associativity: A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13:7–13, 1972.

[7] J. A. De Loera, S. Hosten, F. Santos, and B. Sturmfels. The polytope of all triangulations of a point configuration. *Documenta Mathematica*, 1:103–119, 1996.

[8] Jörg Rambau. *Projections of Polytopes and Polyhedral Subdivisions*. Berichte aus der Mathematik. Shaker, Aachen, 1996. Dissertation, TU-Berlin.

[9] Jörg Rambau. Triangulations of cyclic polytopes and higher Bruhat orders. *Mathematika*, 44:162–194, 1997.

[10] Jörg Rambau. Topcom—triangulations of point configurations and oriented matroids. Software under the Gnu Public Licence, available for download[2], 1999.

[11] F. Santos. A point set whose space of triangulations is disconnected. J. AMS, to appear, 2000.

[12] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume I*. Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.

[13] D. Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, X:131–146, 1962.

[14] G. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] http://www.zib.de/rambau/TOPCOM.html