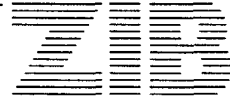


Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
Heilbronner Straße 10, D-1000 Berlin 31



Alexander Martin

**Packen von Steinerbäumen:
Polyedrische Studien und Anwendung**

Herausgegeben vom
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
Heilbronner Str. 10
1000 Berlin 31
Verantwortlich: Dr. Klaus André
Umschlagsatz und Druck: Rabe KG Buch- und Offsetdruck Berlin
D83
ISSN 0933-789X

**meinen Eltern
gewidmet**

Vorwort

Diese Dissertation wurde an der Universität Augsburg begonnen und am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin zu Ende geführt. Meinen ganz besonderen Dank möchte ich Professor Dr. Martin Grötschel aussprechen. Er hat mich das Gebiet der kombinatorischen Optimierung gelehrt und mich bei meinen Forschungsarbeiten geleitet und beraten. Ein ausdrückliches Dankeschön gilt vor allem Herrn Robert Weismantel für sein persönliches Engagement und seine Zusammenarbeit. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Robert E. Bixby, der mir hilfreiche Ratschläge für die Implementierung geben konnte. Weiterer Dank gilt den Herren Carlos Ferreira für die Korrektur meiner Arbeit sowie Ralf Borndörfer für die Hilfe bei $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Fragen. Besonders bedanken möchte ich mich auch bei der Siemens AG, München Neuperlach, insbesondere bei der Abteilung von Herrn Dr. Grüter für die finanzielle Zuwendung. Ein herzliches Dankeschön gilt schließlich meiner Frau Gabi, die mir jegliche Unterstützung im privaten Bereich gab.

Beim Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin bedanke ich mich für die Veröffentlichung meiner Arbeit.

Berlin, Mai 1992

Alexander Martin

Abstract

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit positiven Kantenkapazitäten c_e und Knotenmengen T_1, \dots, T_N . Das Steinerbaupackungs-Problem besteht darin, Kantenmengen S_1, \dots, S_N zu finden, so daß jedes S_k die Knoten aus T_k verbindet und jede Kante e in höchstens c_e Kantenmengen aus S_1, \dots, S_N vorkommt. Eine zulässige Lösung dieses Problems nennen wir eine Steinerbaupackung. Ist zusätzlich eine Gewichtung der Kanten gegeben und nach einer bezüglich dieser Gewichtung minimalen Steinerbaupackung gesucht, so sprechen wir vom gewichteten Steinerbaupackungs-Problem. Die Motivation zum Studium dieses Problems kommt aus dem Entwurf elektronischer Schaltungen. Ein dort auftretendes Teilproblem ist das sogenannte Verdrahtungsproblem, das im wesentlichen darin besteht, gegebene Punktmengen unter bestimmten Nebenbedingungen und Optimalitätskriterien auf einer Grundfläche zu verbinden. Wir studieren das Steinerbaupackungs-Problem aus polyedrischer Sicht und definieren ein Polyeder, dessen Ecken genau den Steinerbaupackungen entsprechen. Anschließend versuchen wir, dieses Polyeder durch "gute" beziehungsweise facetten-definierenden Ungleichungen zu beschreiben. Basierend auf diesen Ungleichungen entwickeln wir ein Schnittebenenverfahren. Die Lösung des Schnittebenenverfahrens liefert eine untere Schranke für die Optimallösung und dient als Grundlage für die Entwicklung guter Primalheuristiken. Wir haben das von uns implementierte Schnittebenenverfahren an einem Spezialfall des Verdrahtungsproblems, dem sogenannten Switchbox-Verdrahtungsproblem, getestet und vielversprechende Ergebnisse erzielt.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
Teil I. Einführung in das Problem	5
2. Grundlagen	6
2.1. Graphentheorie	6
2.2. Lineare Algebra, Polyedertheorie und lineare Programmierung	11
3. Beschreibung und Einordnung des Steinerbaumpackungs-Problems	14
3.1. Definition und Komplexität des Steinerbaumpackungs-Problems	14
3.2. Verwandte Probleme	18
3.2.1. Das Steinerbaum-Problem	18
Exakte Verfahren	19
Heuristische Verfahren	21
Polyedrische Ansätze	24
3.2.2. Weitere Packungsprobleme	25
Packen kantendisjunkter Wege	26
Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume	29
4. Herkunft und Motivation	32
4.1. Das Verdrahtungsproblem im VLSI-Design	32
4.2. Dekomposition des Verdrahtungsproblems	34
4.2.1. Globale Verdrahtung	35
4.2.2. Lokale Verdrahtung	36
4.3. Zusammenstellung einiger Lösungsverfahren	38
4.3.1. Globale Verdrahtung	38
Sequentielle Verfahren	39
Ein hierarchischer Ansatz	40
4.3.2. Switchbox Verdrahtung	42
Exakte Verfahren	43
Heuristische Verfahren	44

Teil II. Ein Polyedrischer Ansatz	46
5. Packen von Steinerbäumen als ganzzahliges lineares Programm	48
5.1. Eine kanonische Formulierung	48
5.2. Eine "gepackte" Formulierung	49
5.3. Eine explizite Formulierung	54
6. Das Steinerbaumpackungs-Polyeder	56
6.1. Grundlegende Resultate	56
6.2. Steinerbaum-Facetten	63
6.3. Kombinierte Facetten	67
6.3.1. Alternierende-Kreis-Ungleichungen	68
6.3.2. Alternierende-Weg-Ungleichungen	77
6.3.3. Matching-Ungleichungen	86
6.3.4. Matching-Baum-Ungleichungen	94
6.3.5. Kreisel-Ungleichungen	98
6.3.6. Gitter-Ungleichungen	102
6.3.7. Kritische-Schnitt-Ungleichungen	108
7. Ein Schnittebenenverfahren	113
7.1. Grundlegende Vorgehensweise	113
7.2. Separierungsverfahren	115
7.2.1. Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen	116
7.2.2. Separierung der Alternierenden-Kreis-Ungleichungen	123
7.2.3. Separierung der Gitter-Ungleichungen	142
7.2.4. Bestimmung kritischer Schnitte	145
7.3. Eine Primalheuristik	148
8. Implementierung und Testergebnisse	155
8.1. Details der Implementierung	155
8.2. Rechenergebnisse	166
9. Ausblick	182
Literaturliste	183
Index	187

1. Einleitung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit dem sogenannten Steinerbaumpackungs-Problem und entwickelt einen Ansatz zu seiner Lösung. Wir skizzieren zunächst die aus der Praxis kommenden Fragestellungen, die zu diesem Problem führen, und gehen dann auf das Modell und den Lösungsansatz ein.

Die enormen Fortschritte bei der Entwicklung elektronischer Schaltungen haben diese zu einem Rückgrat der modernen Technik werden lassen. Beispielsweise sind Fertigungs-, Kommunikations-, Meß- oder Regelungssysteme der heutigen Generation ohne elektronische Steuerungen nicht mehr vorstellbar.

Eine elektronische Schaltung stellt eine komplexe Verflechtung von Halbleiterbauelementen (sogenannten Transistoren) dar. Diese Verflechtung ist die physikalische Umsetzung einer logischen Funktion. Die derzeitigen technischen Möglichkeiten erlauben die Integration von mehreren Millionen Transistoren auf wenigen Quadratzentimetern. Die Größenordnungen und die Komplexität der Probleme, die beim Entwurf solcher Schaltungen auftreten, stellen eine große Herausforderung für die Entwickler elektronischer Schaltungen dar. Naturgemäß sind zur Lösung dieser Probleme Methoden aus den Gebieten der Ingenieurwissenschaften, der Informatik und der Mathematik erforderlich. Beispielsweise können eine Vielzahl von Problemen, die beim Entwurf elektronischer Schaltungen auftreten, als kombinatorische Optimierungsprobleme formuliert und damit zu ihrer Lösung Methoden dieses Gebiets eingesetzt werden. Dazu zählen unter anderem unterschiedliche Formen des sogenannten Verdrahtungsproblems. Dieses läßt sich — auf das Wesentliche beschränkt — folgendermaßen formulieren:

Gegeben ist eine Grundfläche und eine Liste von Punktmengen. Die Aufgabe besteht darin, auf dieser Grundfläche die Punkte einer jeden Menge miteinander zu verbinden (zu verdrahten), wobei verschiedene technische Nebenbedingungen berücksichtigt und gewisse Zielvorstellungen verwirklicht werden sollen.

Die Punktmengen werden auch Netze, die einzelnen Punkte Pins oder Terminals genannt. Eine Lösung des Problems heißt Verdrahtung der Netze. Das Problem ist technologieabhängig. Die für die zugrundeliegende Fabrikationstechnik gültigen "Entwurfsregeln" müssen beachtet werden, eine Zielfunktion wie beispielsweise die Verdrahtungslänge muß optimiert werden. Die Entwurfsregeln schränken zum Beispiel das Verdrahtungsgebiet ein, also den Teil der Grundfläche, der für die Verdrahtung zur Verfügung steht. Die Verdrahtung erfolgt in der Regel auf mehreren Schichten. Jede Schicht ist meistens in sogenannte Spuren unterteilt, auf denen die Verbindung der Netze erfolgen muß. Die Spuren und die Kontaktlöcher, an denen die Schichten gewechselt werden, müssen gewisse Mindestabstände einhalten.

Das Verdrahtungsproblem in seiner allgemeinen Form ist zu schwierig, um es direkt lösen zu können. In der Praxis wird daher das Problem meistens in zwei Teilprobleme dekomponiert. Im ersten wird versucht, den Verlauf der Netze zwischen den für die Verdrahtung blockierten Teilgebieten der Grundfläche zu bestimmen (globale Verdrahtung). Hierbei finden die Entwurfsregeln nur in abgeschwächter Form Beachtung. Anschließend werden

die Verbindungen der Netze den Schichten und Spuren unter Berücksichtigung der genauen Entwurfsregeln zugewiesen (lokale Verdrahtung). Im Rahmen dieser Dekomposition lassen sich zahlreiche Varianten des Verdrahtungsproblems studieren. Diese resultieren beispielsweise aus Einschränkungen an das Verdrahtungsgebiet oder die Kardinalität der Netze.

Viele dieser Verdrahtungsprobleme werden graphentheoretisch formuliert. Abhängig von den Entwurfsregeln definiert man einen Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Eine Möglichkeit besteht zum Beispiel darin, Teilgebiete des Verdrahtungsgebietes durch Knoten zu repräsentieren und Kanten zwischen Knoten einzuführen, wenn die zugehörigen Teilgebiete benachbart sind. Darüberhinaus erhält jede Kante eine Kapazität, die die Anzahl von Verbindungen, welche die Kante benutzen, beschränkt. Jedes Netz wird durch eine Teilmenge der Knotenmenge repräsentiert.

In der Sprache der Graphentheorie wird jede Verbindung eines Netzes als Steinerbaum bezeichnet. Das Problem, N Netze zu verdrahten, reduziert sich damit auf das Problem, N Steinerbäume in G zu finden (man sagt auch zu packen), so daß die Kapazitätsbedingungen eingehalten werden. Letzteres Problem nennen wir das Steinerbaumpackungs-Problem und jede Lösung des Problems eine Steinerbaumpackung. Ist zusätzlich eine Gewichtung der Kanten gegeben und nach einer bezüglich der Gewichtung minimalen Steinerbaumpackung gesucht, so sprechen wir vom gewichteten Steinerbaumpackungs-Problem.

Ziel dieser Dissertation ist es, unter Verwendung dieses graphentheoretischen Modells einen Lösungsansatz für das Verdrahtungsproblem zu entwickeln, der die folgenden Aspekte berücksichtigt.

Einerseits soll das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem global modelliert werden, das heißt, alle Netze sollen simultan behandelt werden. Eine globale Sichtweise ist unserer Meinung nach gerade bei den wachsenden Größenordnungen, wie sie beim Entwurf elektronischer Schaltungen vorkommen, wesentlich, um qualitativ gute Lösungen zu erhalten. Darin unterscheidet sich dieser Ansatz von vielen gängigen Verdrahtungsheuristiken, die meistens sequentiell, das heißt "Netz für Netz", verdrahten und in der Regel eine sehr lokale Sichtweise haben. Zum anderen soll das Verfahren gleichzeitig eine untere Schranke für die Optimallösung liefern. Diese zweite Eigenschaft ist nach unserer Auffassung von hohem praktischen Nutzen, da damit die Möglichkeit besteht, eine zum Beispiel durch eine Heuristik gefundene, zulässige Lösung qualitativ zu beurteilen oder zu entscheiden, ob ein gegebenes Problembeispiel überhaupt eine Lösung besitzt, das heißt, ob es überhaupt verdrahtbar ist.

Diese Ziele lassen sich unter Verwendung eines polyedrischen Ansatzes verwirklichen. Der polyedrische Ansatz gliedert sich in diesem Fall in die folgenden Teilschritte. Man definiert ein Polyeder, so daß jede Ecke des Polyeders einer Steinerbaumpackung entspricht, und umgekehrt jede Steinerbaumpackung zu einer Ecke des Polyeders korrespondiert. Anschließend wird versucht, das Polyeder durch gute gültige, beziehungsweise facettendefinierende Ungleichungen zu beschreiben. Basierend auf diesen Ungleichungen entwickelt man ein Schnittebenenverfahren. Die Lösung des Schnittebenenverfahrens liefert eine untere Schranke für die Optimallösung und dient als Grundlage für die Entwicklung guter Primalheuristiken.

Im Detail gliedert sich die Dissertation in zwei Teile, die sich wie folgt zusammensetzen.

Teil I dieser Arbeit dient der Einführung in die Problemstellung und umfaßt drei Kapitel.

Kapitel 2 beinhaltet wichtige Bezeichnungen und Begriffe, die wir in den nachfolgenden Kapiteln benötigen werden. Diese Begriffe stammen aus der Graphentheorie (Kapitel 2.1) sowie aus den Gebieten der linearen Algebra, Polyedertheorie und linearen Programmierung (Kapitel 2.2).

Eine genaue Beschreibung des Steinerbaumpackungs-Problems sowie einen Überblick über ähnliche in der Literatur studierte Probleme umfaßt Kapitel 3. Eine mathematische Definition des Steinerbaumpackungs-Problems ist in Kapitel 3.1 zu finden. Hierin befinden sich auch einige Komplexitätstheoretische Aussagen über dieses Problem. Kapitel 3.2 widmet sich verwandten Problemen des Steinerbaumpackungs-Problems. Wir geben darin einen Überblick über das Steinerbaum-Problem sowie über Probleme, die sich mit dem Packen kantendisjunkter Wege sowie dem Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume beschäftigen.

Kapitel 4 widmet sich der praktischen Seite des Problems. Wie schon eingangs angedeutet kommt die Motivation zum Studium des Steinerbaumpackungs-Problems aus dem Entwurf elektronischer Schaltungen (englisch: VLSI-Design). In Kapitel 4.1 werden wir uns zunächst mit der Sprache des VLSI-Designs vertraut machen und wichtige Begriffe klären. Wir haben bereits oben erwähnt, daß das Verdrahtungsproblem meistens in Teilprobleme zerlegt wird. Über die in der Praxis verwendeten Dekompositionsmethoden berichtet Kapitel 4.2. Wir werden sehen, daß sich daraus eine Vielzahl von Varianten des Verdrahtungsproblems ergeben. Auf zwei dieser Probleme, das globale Verdrahtungs- und das Switchbox-Verdrahtungsproblem, läßt sich unser Modell anwenden. Wir werden deshalb in Kapitel 4.3 einige in der Praxis verwendete Lösungsverfahren zu diesen beiden Problemklassen zusammenstellen.

Teil II dieser Dissertation beschäftigt sich mit der Entwicklung eines polyedrischen Ansatzes zur Lösung des (gewichteten) Steinerbaumpackungs-Problems.

Wir definieren ein Polyeder, dessen Ecken genau den Steinerbaumpackungen des zugrundeliegenden Problems entsprechen. Es gibt viele Möglichkeiten ein solches Polyeder einzuführen. In Kapitel 5 diskutieren wir drei Alternativen. Die erste führt für jede Kante des Graphen und für jedes Netz eine Variable ein. Diese Variablen zeigen an, welche Kanten zur Verbindung welches Netzes verwendet werden. Das zweite Modell versucht mit weniger Variablen auszukommen. Hier führen wir jeweils nur eine Variable für jede Kante ein. Die Werte der Variablen deuten wir als die Anzahl der Netze, zu deren Verbindung die jeweilige Kante benötigt wird. Die dritte Möglichkeit geht den umgekehrten Weg. Hier führen wir für jede mögliche Verbindung eines Netzes eine Variable ein. Dies liefert im allgemeinen eine exponentielle Anzahl von Variablen. Für jede der drei Alternativen definieren wir ausgehend von den eingeführten Variablen ein Polyeder, das genau die obige Eigenschaft hat. Nach Abwägung der Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle werden wir uns für die erste Alternative entscheiden. Das entsprechende Polyeder nennen wir das Steinerbaumpackungs-Polyeder.

Ziel von Kapitel 6 ist es, das Steinerbaumpackungs-Polyeder durch gute, wenn möglich facetten-definierende Ungleichungen zu beschreiben. Wir werden in Kapitel 6.1 jedoch sehen, daß bereits die Bestimmung der Dimension des Steinerbaumpackungs-Polyeders ein \mathcal{NP} -vollständiges Problem ist. Setzen wir voraus, daß der zugrundeliegende Graph vollständig ist und die Netze keine gemeinsamen Knoten haben, so kann die Dimension einfach bestimmt werden. Kapitel 6.1 beinhaltet außerdem einige Lemmata, durch die sichergestellt ist, daß die Kenntnisse, die wir über das Steinerbaumpackungs-Polyeder derjenigen Instanzen, die diese beiden Voraussetzungen erfüllen, erzielen, sich auf jede beliebige Problem Instanz (zumindest teilweise) übertragen lassen. Wir haben uns deshalb entschieden, das Steinerbaumpackungs-Polyeder für diese spezielle Instanzen zu studieren. Kapitel 6.2 untersucht, ob die Ungleichungen, die Facetten für das Steinerbaum-Polyeder sind, auch facetten-definierend für das Steinerbaumpackungs-Polyeder sind. Den Hauptteil von Kapitel 6 bildet der letzte Abschnitt. Hier untersuchen wir Ungleichungen, die mehrere Netze miteinander kombinieren.

In Kapitel 7 stellen wir ein Schnittebenenverfahren zur Lösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problem vor. Wir werden in Kapitel 7.1 zunächst die grundlegende Vorgehensweise eines solchen Verfahrens erläutern. Die Ausführungen werden deutlich machen, warum wir uns entschieden haben, ein Schnittebenenverfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem zu entwickeln. Den Kern eines Schnittebenenverfahrens bildet die Lösung des sogenannten Separierungsproblems. Damit befaßt sich Kapitel 7.2. Den Abschluß von Kapitel 7 bildet die Entwicklung einer Primalheuristik zur Bestimmung einer zulässigen Lösung.

Kapitel 8 berichtet über die Erfahrungen, die wir bei der Lösung einiger in der Literatur aufgeführter Switchbox-Verdrahtungsprobleme gemacht haben. Dabei werden wir zunächst auf einige Details der Implementierung eingehen. Wir werden sehen, daß uns viele kleine "Tricks" geholfen haben, das Programm auf größere Beispiele anwenden zu können. Schließlich analysieren wir in Kapitel 8.2 die Ergebnisse, die wir mit unserem Schnittebenenverfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem erzielt haben.

Den Abschluß dieser Dissertation bildet einen Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten zum Steinerbaumpackungs-Problem.

Teil I. Einführung in das Problem

Teil I dieser Dissertation gibt eine Einführung in die Problemstellung. Wir werden zunächst wichtige Begriffe aus den Gebieten der Graphentheorie, der linearen Algebra, der Polyedertheorie sowie der linearen Programmierung zusammenstellen. Diese Begriffe werden wir im Laufe der Dissertation immer wieder benötigen. Im daran anschließenden Kapitel 3 geben wir eine mathematische Definition des Steinerbaumpackungs-Problems. Wir werden sehen, daß dieses Problem eine Vielzahl von Spezialfällen enthält, die bereits \mathcal{NP} -vollständig beziehungsweise \mathcal{NP} -schwer sind. Danach beschäftigen wir uns mit Problemen, die zum Steinerbaumpackungs-Problem verwandt sind. Dazu zählen das Steinerbaum-Problem sowie Probleme wie das Packen kantendisjunkter Wege oder das Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume. Wir geben einen kleinen Überblick über die Literatur zu diesen Problemen. Das letzte Kapitel dieses Teils der Arbeit befaßt sich mit der Anwendung des Steinerbaumpackungs-Problems. Die Motivation zum Studium des Steinerbaumpackungs-Problems kommt aus dem Entwurf elektronischer Schaltungen. Ein dort auftretendes Teilproblem ist das sogenannte Verdrahtungsproblem. Wir werden uns zunächst mit den beim Entwurf elektronischer Schaltungen auftretenden Fachbegriffen vertraut machen. Anschließend werden wir einige Lösungsmethoden für das Verdrahtungsproblem vorstellen und deutlich machen, an welchen Stellen das Studium des Steinerbaumpackungs-Problems einen Beitrag zur Lösung des Verdrahtungsproblems liefern kann.

2. Grundlagen

Dieses Kapitel dient dazu, wichtige Begriffe und Bezeichnungen zu klären, die wir im Verlauf der Dissertation benötigen. Zunächst werden wir uns ausführlich mit den Bezeichnungen der Graphentheorie vertraut machen. Anschließend stellen wir einige wichtige Begriffe aus den Gebieten der linearen Algebra, der Polyedertheorie sowie der linearen Programmierung zusammen. Darüber hinaus werden wir in dieser Arbeit einige geläufige Begriffe aus der Komplexitätstheorie benötigen. Wir gehen davon aus, daß der Leser mit diesen Begriffen vertraut ist und verweisen auf das Buch von Garey und Johnson [GJ79].

2.1. Graphentheorie

In diesem Kapitel wollen wir wichtige graphentheoretische Begriffe und Bezeichnungen zusammenstellen. Wir stellen diese in einer Form dar, wie sie im weiteren benutzt werden sollen. Der Umfang dieses Kapitels überschreitet den Rahmen einer üblichen Einführung in die graphentheoretischen Konzepte, da wir eine Vielzahl von speziellen Begriffen im Verlauf der Arbeit benötigen werden.

Graphen

Ein (*ungerichteter*) *Graph* ist ein Tripel (V, E, ψ) bestehend aus einer nicht-leeren Menge V , einer Menge E und einer *Inzidenzfunktion* $\psi : E \mapsto V^{(2)}$. Dabei bezeichnet $V^{(2)}$ die Menge der ungeordneten Paare von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen aus V . Ein Element aus V heißt *Knoten*, ein Element aus E heißt *Kante*. Die Funktion ψ weist also jeder Kante e ein Paar von Knoten u und v zu durch $\psi(e) = uv = vu$. Häufig schreibt man in der Literatur auch $[u, v]$ oder $\{u, v\}$ anstelle von uv . Wir werden soweit möglich immer die Schreibweise uv verwenden, gegebenenfalls greifen wir auf das Klammersymbol $[u, v]$ zurück. Ein Graph heißt *endlich*, falls V und E endlich sind, andernfalls heißt G *unendlich*. Wir beschäftigen uns im Rahmen dieser Dissertation nur mit endlichen Graphen, so daß wir von nun auf das Präfix "endlich" verzichten.

Ist $\psi(e) = uv$ für eine Kante $e \in E$, dann nennen wir $u, v \in V$ *Endknoten* von e . Wir sagen, u und v sind *inzident zu e* beziehungsweise *liegen auf e* , die Kante e *verbindet u und v* , und die Knoten u und v sind *Nachbarn* beziehungsweise *adjazent*. Dagegen verwenden wir für zwei Kanten, die den selben Endknoten haben, sowohl den Begriff *inzident* als auch *adjazent*. Eine Kante e mit $\psi(e) = vv$ heißt *Schlinge*, und Kanten $e, f \in E$ mit $\psi(e) = \psi(f)$ heißen *parallel*. Ein Graph, der weder Schlingen noch parallele Kanten enthält, heißt *einfach*. Wir betrachten in dieser Arbeit nur Graphen, die keine Schlingen enthalten. (Zur einfacheren Darstellung von Beweisen erlauben wir manchmal Kanten der Form $vv = [v, v]$; wir setzen $vv = [v, v] = \emptyset$ und interpretieren diese Kanten als nicht-existent).

Neben ungerichteten Graphen werden auch gerichtete Graphen betrachtet. Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph* $D = (V, A, \psi)$ besteht aus einer (endlichen) nicht-leeren Menge

V , einer (endlichen) Menge A von *Bögen* und einer Inzidenzfunktion $\psi : A \mapsto V \times V$. Jeder Bogen $a \in A$ ist ein geordnetes Paar von Knoten, also $a = (u, v)$ für $u, v \in V$. Wir werden im Verlauf dieser Arbeit uns nahezu ausschließlich mit ungerichteten Graphen beschäftigen. Sprechen wir im folgenden von Graphen, so meinen wir immer einen ungerichteten Graphen. In dem Fall, daß wir uns mit gerichteten Graphen befassen, werden wir immer explizit das Präfix "gerichtet" mitführen.

Die Verwendung der Inzidenzfunktion ψ führt zu einem ziemlich aufwendigen Formalismus. Wir wollen soweit als möglich auf die Inzidenzfunktion verzichten. Wir schreiben von nun an $e = uv$ anstelle von $\psi(e) = uv$. Sofern der Graph einfach ist, ist diese Schreibweise korrekt. Gibt es mehrere zu e parallele Kanten und sprechen wir von einer Kante uv , so meinen wir irgendeine der parallelen Kanten. Manchmal wird es notwendig sein zwischen verschiedenen parallelen Kanten zu unterscheiden (siehe Kapitel 6.3), dann greifen wir auf die Inzidenzfunktion ψ zurück. Ansonsten bezeichne von nun das Tupel $G = (V, E)$ einen Graphen.

Für eine Kantenmenge $F \subseteq E$ bezeichnen wir mit $V(F)$ die Menge aller Knoten, die zu einer Kante in F inzident sind, und umgekehrt bezeichnen wir für eine Knotenmenge $W \subseteq V$ mit $E(W)$ die Menge aller Kanten, für die beide Endknoten in W sind. Für zwei Knotenmengen $U, W \subseteq V$ bezeichnen wir mit $[U : W]$ beziehungsweise $\delta(U, W)$ die Menge der Kanten mit einem Endknoten in U und einem Endknoten in W . Anstelle von $\delta(W, V \setminus W) = [W : V \setminus W]$ schreiben wir auch kurz $\delta(W)$. Ebenso kürzen wir $\delta(\{v\})$ für ein $v \in V$ mit $\delta(v)$ ab. Eine Kantenmenge $F \subseteq E$ heißt *Schnitt*, wenn es eine Knotenmenge $W \subseteq V$ gibt mit $F = \delta(W)$. Wir nennen $\delta(W)$ auch den *von W induzierten Schnitt*. Ist $V_1, \dots, V_p \subseteq V$, $p \geq 1$, eine Menge von Knotenmengen, so bezeichnen wir mit $\delta(V_1, \dots, V_p)$ die Menge der Kanten, deren Endknoten in verschiedenen Knotenmengen liegen. Wir nennen nicht-leere Knotenmengen V_1, \dots, V_p eine *Partition* von V , falls die Vereinigung der Knotenmengen V ergibt und die Knotenmengen paarweise disjunkt sind.

Sei $F \subseteq E$ eine Kantenmenge von G . Wir bezeichnen mit $d_F(v) = |\delta(v) \cap F|$ den *Grad eines Knoten v bezüglich der Kantenmenge F* . Anstelle von $d_E(v)$ schreiben wir oft kurz $d(v)$ und sprechen vom Grad des Knoten v . Ist $d(v) = 0$, so nennen wir v einen *isolierten Knoten*. Ein Knoten v heißt *gerade (ungerade)*, falls $d(v)$ gerade (ungerade) ist. Eine Kantenmenge F heißt *Stern*, falls es einen Knoten v gibt mit $F \subseteq \delta(v)$.

Wir nennen einen Graphen $G = (V, E)$ *vollständig*, falls $uv \in E$ für alle $u, v \in V$. Manchmal bezeichnen wir den vollständigen Graphen mit K_n , wenn n die Kardinalität der Knotenmenge ist. Sprechen wir vom vollständigen Graphen G , so gehen wir immer davon aus, daß G einfach ist. Der *Kantengraph* von G ist der Graph, dessen Knotenmenge die Kantenmenge von G ist, und in dem zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn die zugehörigen Kanten in G inzident sind. Eine Kantenmenge M in G heißt *Matching*, wenn je zwei Kanten in M keinen gemeinsamen Endknoten haben. M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten in G Endknoten einer Kante des Matchings ist.

Betrachten wir mehrere Graphen gleichzeitig, so versehen wir jedes der eingeführten Symbole mit dem Index "G", also zum Beispiel $V_G(F)$, $\delta_G(v)$ etc.

Teilgraphen und Kontraktionsminoren

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : V \mapsto W$ gibt, so daß $uv \in E$ genau dann gilt, wenn $\phi(u)\phi(v) \in F$ ist. Sind $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ zwei Graphen, so bezeichnen wir mit $G + H$ den Graphen $(V \cup W, E \cup F)$.

Ein Graph $H = (W, F)$ heißt *Teilgraph* (oder *Untergraph*) eines Graphen $G = (V, E)$, falls $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt. Ist $W = V$, so sprechen wir auch von einem *Kanten-Teilgraphen* und verwenden das Symbol $G \setminus F$, (wobei wir $G \setminus f$ anstelle von $G \setminus \{f\}$ für ein $f \in E$ schreiben). Für eine Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnen wir mit $G - W$ den Graphen, den man durch Entfernen aller Knoten aus W und aller Kanten, die inzident zu einem Knoten aus W sind, erhält. Für eine Kantenmenge $F \subseteq E$ nennen wir den Graphen $(V(F), F)$ den *von F induzierten Graphen*. Entsprechend nennen wir für eine Knotenmenge $W \subseteq V$ den Graphen $(W, E(W))$ den *von W induzierten Teilgraphen*. Hier verwenden wir häufig die Kurzschreibweise $G[W]$ anstelle von $(W, E(W))$.

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnen wir mit $G(W)$ den Graphen, der durch *Kontraktion der Knotenmenge W* entsteht. Das heißt, die Knotenmenge von $G(W)$ besteht aus den Knoten $V \setminus W$ und einem neuen Knoten w , der an die Stelle der Knotenmenge W tritt. Die Kantenmenge von $G(W)$ enthält alle Kanten aus $E(V \setminus W)$ und alle Kanten aus $\delta(W)$, wobei der Endknoten aus W durch w ersetzt wird. Manchmal werden in der Literatur die Kanten aus $E(W)$ als Schleifen in $G(W)$ mitgeführt, was wir jedoch nicht tun. Ist $V_1, \dots, V_p \subseteq V$, $p \geq 1$, eine Partition von V , so bezeichnen wir mit $G(V_1, \dots, V_p)$ den Graphen, den man durch sukzessives Kontrahieren der Knotenmengen V_1, \dots, V_p erhält. Wir nennen einen Graphen $G' = (V', E')$ einen *Kontraktionsminor* von G , falls es eine Partition V_1, \dots, V_p der Knotenmenge von V gibt, so daß G zu $G(V_1, \dots, V_p)$ isomorph ist. Die *Kontraktion einer Kantenmenge $F \subseteq E$* definieren wir als Kontraktion von $V(F)$. Den zugehörigen Graphen bezeichnen wir mit $G/F = G(V(F))$, (wir verwenden wieder G/f anstelle von $G/\{f\}$ für ein $f \in E$). In der Literatur wird die Kontraktion einer Kante e oftmals definiert als die Kontraktion der beiden Endknoten, wobei parallele Kanten zu Schleifen in G/e werden, und die Kontraktion einer Kantenmenge F als sukzessive Kontraktion der Kanten in F .

Ketten, Wege, Kreise, Bäume

In einem Graphen heißt eine endliche Folge $K = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$, $k \geq 0$, eine *Kette*, falls die Folge mit einem Knoten beginnt und endet, die Knoten und Kanten alternierend auftreten und jede Kante e_i mit den beiden Knoten v_{i-1} und v_i inzidiert. Der Knoten v_0 heißt *Anfangsknoten*, der Knoten v_k *Endknoten*, und die Knoten v_1, \dots, v_{k-1} *innere Knoten*. Wir nennen K auch eine (v_0, v_k) -*Kette*. Ist der zugrundeliegende Graph gerichtet, so nennt man K eine *gerichtete Kette*, falls alle Bögen e_i von der Form (v_{i-1}, v_i) sind. Die Zahl k heißt die *Länge* der Kette. Jede Kante, die zwei Knoten aus K verbindet und nicht aus K ist, heißt *Diagonale*. Wir sagen, zwei Kanten uv und $u'v'$ mit $u, v, u', v' \in K$ *kreuzen sich bezüglich K* , falls beim Ablaufen der Kette die vier Knoten

in der Reihenfolge u, u', v, v' oder u, v', v, u' auftreten. Andernfalls nennen wir die Kanten *kreuzungsfrei bezüglich* K . Entsprechend heißen zwei Kantenmengen F_1 und F_2 , für die $V(F_1)$ und $V(F_2)$ aus K sind, *kreuzungsfrei bezüglich* K , falls jedes Paar von Kanten $e_1 \in F_1$ und $e_2 \in F_2$ *kreuzungsfrei* ist. Andernfalls, sagen wir F_1 und F_2 *kreuzen sich* bezüglich K . Eine Kette heißt *geschlossen*, falls ihre Länge positiv ist und Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.

Eine Kette, in der alle Knoten voneinander verschieden sind, heißt *Weg*. Beachte, daß in einem Weg auch alle Kanten voneinander verschieden sind. Sind in einer Kette nur alle Kanten verschieden, so sprechen wir von einem *Pfad*. Wie bei Ketten sprechen wir von (u, v) -Wegen und (u, v) -Pfad. In einem gerichteten Graphen heißt ein Weg oder Pfad, der eine gerichtete Kette ist, ein *gerichteter Weg* oder *gerichteter Pfad*. Ist C eine geschlossene Kette, deren Knoten alle verschieden sind, so nennen wir C einen *Kreis*. Ein Pfad in G , der jede Kante in G enthält, heißt *Eulerpfad*. Ein geschlossener Eulerpfad heißt *Eulertour*. Ein Graph, der eine Eulertour enthält, heißt *eulersch*. Es ist nicht schwer einzusehen, daß ein Graph genau dann eulersch ist, wenn jeder Knoten einen geraden Grad hat.

Wir interessieren uns im Rahmen dieser Arbeit meist für die Kantenmenge einer Kette, eines Weges oder Kreises. Wir werden daher von nun an eine Kette, einen Weg oder einen Kreis K immer als Kantenmenge, also $K \subseteq E$, auffassen. Die zugehörigen Knoten erhalten wir über $V(K)$.

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls es zu jedem Knotenpaar $s, t \in V$ einen (s, v) -Weg in G gibt. Die *Komponenten* von G sind die bezüglich Kanteninklusion maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G . Wir bezeichnen mit $\zeta(G)$ die Anzahl der Komponenten von G . Eine Kante e heißt *Brücke* von G , falls $\zeta(G \setminus e) > \zeta(G)$.

Eine Knotenmenge $W \subseteq V$ heißt *trennend*, falls $G - W$ nicht zusammenhängend ist. Für einen Graphen $G = (V, E)$, der den vollständigen Graphen nicht als Kanten-Teilgraphen enthält, setzen wir $\kappa(G) = \min\{|W| \mid W \subseteq V \text{ ist trennend}\}$. Andernfalls setzen wir $\kappa(G) = |V| - 1$. Die Zahl $\kappa(G)$ heißt die *Knotenzusammenhangszahl* von G . Gilt $\kappa(G) \geq k$, so nennen wir G *k-fach knotenzusammenhängend*.

Ein analoges Konzept führen wir für Kantenmengen ein. Eine Kantenmenge F eines Graphen G heißt *trennend*, falls $G \setminus F$ nicht zusammenhängend ist. Wir setzen $\lambda(G) = \min\{|F| \mid F \subseteq E \text{ ist trennend}\}$. Die Zahl $\lambda(G)$ heißt *Kantenzusammenhangszahl* von G . Gilt $\lambda(G) \geq k$, so nennen wir G *k-fach kantenzusammenhängend*. Offensichtlich ist jede Komponente von G 1-fach kantenzusammenhängend.

Wir nennen eine Kantenmenge B einen *Wald* in G , falls $(V(B), B)$ keinen Kreis enthält. Ist $(V(B), B)$ außerdem zusammenhängend, so heißt B ein *Baum*. Ein Baum B in einem Graphen heißt *aufspannend*, falls $V(B) = V$ ist. Ist B ein Baum und v ein Knoten mit $d_B(v) = 1$, so heißt v *Blatt* von B .

Planare Graphen

Jeder Graph $G = (V, E)$ kann in die Ebene gezeichnet werden, indem man jeden Knoten durch einen Punkt in der Ebene repräsentiert und jeder Kante eine Kurve (gerade Linie) zuordnet, die diejenigen Punkte verbindet, die die beiden Endknoten der Kante repräsentieren. Ein Graph heißt *planar*, falls er in die Ebene gezeichnet werden kann, so daß sich zwei Kanten (genauer, die sie repräsentierenden Kurven) höchstens in ihren Endknoten schneiden. Eine solche Darstellung eines planaren Graphen in der Ebene heißt *Einbettung* von G in der Ebene. Offensichtlich kann es zu einem Graphen G verschiedene Einbettungen geben. Wir gehen in dieser Arbeit immer davon aus, daß wir für einen planaren Graphen implizit eine Einbettung gegeben haben. Gibt es verschiedene Einbettungen, so meinen wir eine beliebige Einbettung, sofern wir diese nicht genauer spezifizieren. Wir unterscheiden also nicht zwischen einem planaren Graphen und seiner Einbettung.

Ein planarer Graph (genauer gesagt, die Einbettung des planaren Graphen) teilt die Ebene in eine Menge von Flächen \mathcal{F}_G ein. Diejenige Fläche, die den gesamten Graphen umschließt, heißt *äußere Fläche*. Zu jeder Fläche $F \in \mathcal{F}_G$, die nicht die äußere Fläche ist, gibt es genau einen Kreis $C_F \subseteq E$, der diese Fläche umschließt. Ein solcher Kreis heißt *Flächenkreis*. Ebenso gibt es eine Kantenmenge in G , die die äußere Fläche umschließt. Wir bezeichnen diese Kantenmenge mit O_G . Ist G 2-fach knotenzusammenhängend, so ist O_G ebenfalls ein Kreis. Die Kanten aus O_G nennen wir auch *Randkanten* und die Knoten aus $V(O_G)$ *Randknoten*. Führen wir einen Knoten für jede Fläche aus \mathcal{F}_G ein und Kanten zwischen Knoten, deren zugehörige Flächen benachbart sind (genauer gesagt, deren zugehörige Flächenkreise eine gemeinsame Kante haben), so erhalten wir einen neuen Graphen, den sogenannten *dualen Graphen* von G (in Zeichen $G^* = (V^*, E)$). Beachte, daß jede Kante im dualen Graphen genau einer Kante in G entspricht, so daß wir für beide Graphen die gleiche Kantenmenge E verwenden. In diesem Zusammenhang heißt G der *primale Graph*.

Wir nennen einen Graphen $G = (V, E)$ einen *Gittergraphen*, falls die Knotenmenge V so numeriert werden kann, daß $V \subseteq \{(i, j) \mid i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, b\}$ für ein $(h, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und für jede Kante $[(i, j), (i_0, j_0)] \in E$ gilt $|i - i_0| + |j - j_0| = 1$. Offensichtlich ist jeder Gittergraph planar. Wir gehen für einen Gittergraphen G immer von einer Einbettung aus, so daß jede Kante der Form $[(i, j), (i + 1, j)]$ durch eine vertikale Linie und jede Kante der Form $[(i, j), (i, j + 1)]$ durch eine horizontale Linie in der Ebene repräsentiert wird. Für einen Gittergraphen G sei (h_G, b_G) das kleinste Tupel, das obige Eigenschaften erfüllt. Die Zahl h_G heißt die *Gitterhöhe* und b_G die *Gitterbreite* von G . Wir bezeichnen mit $J_j := \{[(i, j), (i + 1, j)] \in E \mid i = 1, \dots, h_G - 1\}$ die *j-te Spalte* von G für $j \in \{1, \dots, b_G\}$. Ebenso bezeichnet $I_i := \{[(i, j), (i, j + 1)] \in E \mid j = 1, \dots, b_G - 1\}$ die *i-te Zeile* von G für $i \in \{1, \dots, h_G\}$. Wir nennen einen Schnitt F einen *vertikalen Schnitt*, wenn es ein $j \in \{1, \dots, b_G - 1\}$ gibt mit $F = [V(J_j) : V(J_{j+1})]$. Analog heißt ein Schnitt F *horizontal*, falls es ein $i \in \{1, \dots, h_G - 1\}$ gibt mit $F = [V(I_i) : V(I_{i+1})]$. Wir nennen einen Gittergraphen mit Gitterhöhe h und Gitterbreite b auch einen $h \times b$ Gittergraphen.

Wir werden im Rahmen dieser Arbeit nur zusammenhängende Gittergraphen betrachten und daher ab jetzt statt "zusammenhängender Gittergraph" einfach "Gittergraph" schreiben. Wir nennen eine Fläche eines Gittergraphen G , die nicht die äußere Fläche ist,

ein *Loch*, falls der zugehörige Flächenkreis mindestens die Länge 5 hat. Ein Gittergraph ohne Löcher heißt *vollständig*. Ein *rechtwinkliger Gittergraph* ist ein Gittergraph für den $|I_1| = |I_{h_G}| = b_G - 1$ und $|J_1| = |J_{b_G}| = h_G - 1$ gilt.

Bei den Anwendungen, vergleiche Kapitel 4, werden Gittergraphen manchmal anstatt in der Ebene im Raum betrachtet. Wir verwenden hier die in der Literatur üblichen Bezeichnungen und nennen einen Gittergraphen einen *k-dimensionalen Gittergraphen*, falls die Knotenmenge V so numeriert werden kann, daß $V \subseteq \{(t, i, j) \mid t = 1, \dots, k, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, b\}$ für ein $(k, h, b) \in \mathbb{N}^3$, und für jede Kante $[(t, i, j), (t_0, i_0, j_0)] \in E$ gilt $|t - t_0| + |i - i_0| + |j - j_0| = 1$, (wobei k die kleinste Zahl sei, für die diese Eigenschaft gilt). Die Zahl k steht also nicht für die Dimension in der der Graph betrachtet wird, sondern für die "Tiefe" des Gittergraphen. Sprechen wir im folgenden von einem planaren Gittergraphen, so meinen wir immer einen 1-dimensionalen Gittergraphen.

Im Zusammenhang mit planaren Graphen benötigen wir den Begriff der *Homotopie*. Betrachte p Flächen $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}_G$ im \mathbb{R}^2 . Eine *Kurve* K im $\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$ ist eine stetige Abbildung $K : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$. Zwei Kurven K_0 und K_1 *haben die gleiche Homotopie im* $\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$ (in Zeichen $K_0 \sim K_1$), falls es eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$ gibt mit $\varphi(0, x) = K_0(x)$, $\varphi(1, x) = K_1(x)$, $\varphi(x, 0) = K_0(0)$ und $\varphi(x, 1) = K_0(1)$ für alle $x \in [0, 1]$. In Worten ausgedrückt heißt das, zwei Kurven haben die gleiche Homotopie, falls sie die gleichen Endpunkte haben und eine Kurve in die andere übergeführt werden kann, ohne Punkte aus einer der Flächen F_1, \dots, F_p zu benutzen. Entsprechend sagen wir, daß zwei Wege P_1 und P_2 in G die gleiche Homotopie haben, falls die sie repräsentierenden Kurven in der Ebene die gleiche Homotopie haben.

2.2. Lineare Algebra, Polyedertheorie und lineare Programmierung

In diesem Kapitel möchten wir weitere Begriffe und Bezeichnungen einführen, die aus den Gebieten der linearen Algebra, der Polyedertheorie und der linearen Programmierung stammen. Diese Begriffe werden wir überwiegend in Teil II dieser Dissertation bei der Entwicklung des polyedrischen Ansatzes benötigen. Wir verwenden hier im wesentlichen die Notation aus [GLS88], wiederholen aber in diesem Kapitel die für uns wichtigen Begriffe. Wir gehen davon aus, daß der Leser mit den fundamentalen Begriffen der linearen Algebra wie lineare Unabhängigkeit, affine Unabhängigkeit etc. vertraut ist.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ die Menge der reellen (ganzen, natürlichen) Zahlen. Die Menge \mathbb{N} enthält die Null nicht. Für die Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit der Null verwenden wir das Symbol \mathbb{N}_0 . $\mathbb{R}_+(\mathbb{Z}_+)$ bezeichnet die Menge der nicht-negativen reellen (ganzen) Zahlen. Wir verwenden im folgenden das Symbol \mathbb{IK} , falls eine Bezeichnung oder Beziehung für jede der Mengen \mathbb{R} , \mathbb{Z} oder \mathbb{N} gilt. Für eine reelle Zahl x ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist. Für ein $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet \mathbb{IK}^n die Menge der Vektoren mit n Komponenten, deren Werte aus \mathbb{IK} sind. Den Nullvektor bezeichnen wir einfach mit 0 und den Vektor, dessen Komponenten alle den Wert Eins

haben, mit \mathbb{I} . Wir fassen eine Vektor x als Spaltenvektor auf. Mit dem oberen Index "T" bezeichnen wir die Transposition. Mit $\mathbb{IK}^{m \times n}$ bezeichnen wir die Menge der $m \times n$ - Matrizen mit Werten in \mathbb{IK} . Oftmals werden wir die Dimension der Matrizen und Vektoren nicht explizit spezifizieren. In solchen Fällen gehen wir davon aus, daß die Dimensionen verträglich sind.

Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, bezeichnen wir mit $\text{lin}(S)$ ($\text{aff}(S)$, $\text{cone}(S)$, $\text{conv}(S)$) die lineare (affine, konische, konvexe) Hülle von S . Für die leere Menge definieren wir $\text{lin}(\emptyset) := \text{cone}(\emptyset) := \{0\}$ und $\text{aff}(\emptyset) := \text{conv}(\emptyset) := \emptyset$. Die *Dimension* von S , in Zeichen $\text{dim}(S)$, ist die maximale Anzahl affin unabhängiger Vektoren aus S minus eins. Ist $\text{dim}(S) = n$, so heißt S *volldimensional*. Mit $\text{diff}(S) := \{x - y \mid x, y \in S\}$ bezeichnen wir die *Differenzmenge* von S .

Für eine endliche Menge E bezeichnen wir mit \mathbb{IK}^E die Menge der Abbildungen von E nach \mathbb{IK} . Es ist zweckmäßig die Elemente aus \mathbb{IK}^E als Vektoren mit $|E|$ Komponenten zu betrachten, wobei jede Komponente eines Vektors $x \in \mathbb{IK}^E$ mit einem Element aus E indiziert wird, das heißt $x = (x_e)_{e \in E}$. Für jede Teilmenge $F \subseteq E$ definieren wir den *Inzidenzvektor* $\chi^F \in \mathbb{R}^E$ von F durch $\chi_e^F = 1$, falls $e \in F$, und $\chi_e^F = 0$, falls $e \in E \setminus F$. Umgekehrt definieren wir für jeden 0/1 Vektor $x \in \mathbb{IK}^E$ durch $F_x := \{e \in E \mid x_e = 1\}$ die *Inzidenzmenge* von x .

Wir nennen $Ax \leq b$ ($Ax = b$) ein System von linearen Ungleichungen (Gleichungen), wenn A eine reelle $m \times n$ - Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ist. Die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ eines Systems von Ungleichungen heißt *Polyeder*. Ist $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so heißt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$ ein *Halbraum* und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \alpha\}$ eine *Hyperebene*. Ein Polyeder ist also nichts anderes als der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen.

Eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ heißt *gültig* für ein Polyeder P , falls $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$. Eine Menge $F \subseteq P$ heißt *Seitenfläche* von P , falls es eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ gibt mit $F = \{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$. Wir sagen auch, F wird von $a^T x \leq \alpha$ *induziert*. Ist die Menge $\{v\}$ eine Seitenfläche von P für einen Punkt $v \in P$, so nennt man v eine *Ecke* von P . Eine *Facette* von P ist eine bezüglich mengeninklusion maximale Seitenfläche von P mit $\emptyset \neq F \neq P$. Wir nennen eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$, so daß $F = \{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$ eine Facette von P ist, eine *facetten-definierende* oder *facetten-induzierende Ungleichung* von P . Für eine von einer Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ induzierte Seitenfläche F des Polyeders P sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) F ist eine Facette von P .
- (2) $\text{dim}(F) = \text{dim}(P) - 1$.
- (3) Ist P volldimensional und $b^T \leq \beta$ eine gültige Ungleichung für P mit $F \subseteq \{x \in P \mid b^T x = \beta\}$, dann existiert ein $\lambda > 0$ mit $a = \lambda b$ (und $\alpha = \lambda \beta$).

Es gibt auch noch eine andere Darstellungsform für Polyeder unter Verwendung der Operatoren für konvexe und konische Hüllen. Jedes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ läßt sich beschreiben durch

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E),$$

wobei V und E endliche Mengen aus \mathbb{R}^n sind. Hat P eine Ecke, so ist V die Menge der Ecken von P . Ist $E = \emptyset$, so nennt man P auch ein *Polytop*. Ein nicht-leeres Polytop P läßt sich also auch darstellen als die konvexe Hülle seiner Ecken.

Das Problem, eine lineare Funktion $c^T x$ über einem Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ zu minimieren (maximieren), heißt *lineares Programmierungsproblem* oder kurz *lineares Programm*. Lineare Programme werden häufig in der Form

$$\begin{array}{ccc} \max c^T x & \text{beziehungsweise} & \min c^T x \\ Ax \leq b & & Ax \leq b \end{array}$$

geschrieben. Ein Vektor \bar{x} mit $A\bar{x} \leq b$ heißt *zulässige Lösung* des linearen Programms, und eine zulässige Lösung \bar{x} mit $c^T \bar{x} \geq c^T x$ (beziehungsweise $c^T \bar{x} \leq c^T x$) für alle zulässigen Lösungen x heißt *Optimallösung*. Die lineare Funktion $c^T x$ heißt *Zielfunktion* des linearen Programms. Per Definition ist die Menge der Optimallösungen eine Seitenfläche des Polyeders. Falls ein Polyeder P eine Ecke hat, so hat auch jede nicht-leere Seitenfläche eine Ecke. Hat also ein Polyeder P eine Ecke und ist das lineare Programm $\max c^T x, x \in P$ (beziehungsweise $\min c^T x, x \in P$) beschränkt, so gibt es eine Optimallösung x^* , die eine Ecke von P ist. Insbesondere hat ein nicht-leeres Polytop immer eine optimale Ecklösung.

Es gibt auch eine ganzzahlige Version eines linearen Programms. Das Problem, eine lineare Funktion $c^T x$ über den ganzzahligen Vektoren eines Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ zu minimieren (maximieren), heißt *ganzzahliges lineares Programm*. Dasjenige lineare Programm, das sich aus einem ganzzahligen linearen Programm durch Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingungen ergibt, nennt man *LP-Relaxierung* des ganzzahligen linearen Programms. Die Großbuchstaben "LP" werden gerne als Kurzschreibweise für "lineares Programm" verwendet.

Zum Abschluß dieses Kapitels führen wir noch einige sehr spezielle Bezeichnungen ein, die wir im Verlauf der Arbeit fortwährend benötigen werden. Wir werden uns ständig mit einem Graphen $G = (V, E)$ und einer Knotenliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ beschäftigen. Wir betrachten dazu den $N \cdot |E|$ -dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^E \times \dots \times \mathbb{R}^E$, wobei $A \times B$ das kartesische Produkt zweier Mengen A und B bezeichnet. Wir werden für diesen Vektorraum im folgenden das Symbol $\mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ verwenden. Jede Komponente eines Vektors $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ indizieren wir mit x_e^k für $k \in \{1, \dots, N\}$, $e \in E$. Unter dem Vektor $x^k \in \mathbb{R}^E$, $k \in \{1, \dots, N\}$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ verstehen wir den Vektor $(x_e^k)_{e \in E}$. Wir schreiben für einen Vektor $x = ((x^1)^T, \dots, (x^N)^T)^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ oft kurz (x^1, \dots, x^N) , wenn aus dem Zusammenhang klar hervorgeht, daß x ein Spaltenvektor ist. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ und ein $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ definieren einen Vektor $a|_{E'} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E'}$ durch $(a|_{E'})_e^k := a_e^k$ für alle $k = 1, \dots, N$ und $e \in E'$. Wir definieren für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ den *Träger von a* durch $\text{supp}(a) := \{e \in E \mid a_e^k \neq 0 \text{ für ein } k \in \{1, \dots, N\}\}$. Schließlich bezeichnen wir die Menge von Vektoren aus $\mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$, deren Komponenten alle aus \mathbb{N} beziehungsweise \mathbb{Z} sind, mit $\mathbb{N}^{\mathcal{N} \times E}$ beziehungsweise $\mathbb{Z}^{\mathcal{N} \times E}$.

3. Beschreibung und Einordnung des Steinerbaumpackungs-Problems

Wir wollen in diesem Kapitel eine mathematische Definition des Steinerbaumpackungs-Problems geben. Wir werden bei dieser Gelegenheit gleich einige Bezeichnungen einführen und ein paar Eigenschaften herausstellen, die uns im weiteren hilfreich sein werden. Darüber hinaus beinhaltet Kapitel 3.1 einige Aussagen über die Komplexität des Problems. In Kapitel 3.2 studieren wir die Literatur in Bezug auf verwandte Probleme. Dazu zählen insbesondere das Steinerbaum-Problem, das Packen kantendisjunkter Wege sowie das Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume.

3.1. Definition und Komplexität des Steinerbaumpackungs-Problems

Bevor wir das Steinerbaumpackungs-Problem definieren können, benötigen wir den Begriff des Steinerbaums.

(3.1.1) Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $T \subseteq V$ eine Knotenmenge von G . Wir nennen eine Kantenmenge S einen *Steinerbaum in G bezüglich T* , falls $(V(S), S)$ einen (s, t) -Weg enthält für alle $s, t \in T$.

In der Literatur wird häufig von der Kantenmenge S zusätzlich gefordert, daß S ein Baum ist. Wir weichen hier von der in der Literatur üblichen Definition ab, weil uns Definition (3.1.1) für die Entwicklung des polyedrischen Ansatzes im Teil II dieser Arbeit geeigneter erscheint. Für die Lösbarkeit praktischer Probleme macht es keinen Unterschied, welche der Definitionen verwendet wird. Wir nennen einen Steinerbaum S , der zusätzlich ein Baum ist, so daß alle Blätter Terminals sind, einen *kantenminimalen Steinerbaum*.

Über die Geschichte, wie es zu dem Namen "Steinerbaum" kam, werden wir kurz in Kapitel 3.3.1 berichten.

Wir können nun das Steinerbaumpackungs-Problem definieren.

(3.1.2) Das Steinerbaumpackungs-Problem

Gegeben:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit positiven, ganzzahligen *Kantenkapazitäten* $c_e \in \mathbb{N}$.

Eine Liste von Knotenmengen $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $N \geq 1$, mit $T_k \subseteq V$ für $k = 1, \dots, N$.

Problem:

Finde Kantenmengen $S_1, \dots, S_N \subseteq E$, so daß gilt:

(i) S_k ist ein Steinerbaum in G bezüglich T_k für $k = 1, \dots, N$.

(ii) $\sum_{k=1}^N |S_k \cap \{e\}| \leq c_e$ für alle $e \in E$.

Wir nennen die Liste von Knotenmengen \mathcal{N} eine *Netzliste*. Die Zahl N bezeichnet die Mächtigkeit der Netzliste. Jedes Element T_k aus \mathcal{N} heißt *Terminalmenge* und jeder Knoten $t \in T_k$ heißt *Terminal*. Wir sprechen häufig auch von *Netz k* anstelle von Terminalmenge T_k . Diese Begriffe “Netz”, “Terminal”, etc. kommen aus dem VLSI-Design, dem Hauptanwendungsgebiet des Steinerbaumpackungs-Problems (vergleiche auch Kapitel 4).

Eine Instanz des Steinerbaumpackungs-Problems ist dann durch das Tripel (G, \mathcal{N}, c) festgelegt. Sprechen wir also im folgenden von einer Instanz des Steinerbaumpackungs-Problems, so meinen wir immer ein Tripel (G, \mathcal{N}, c) . Häufig hat man zusätzlich eine Gewichtung der Kanten gegeben, und man sucht nach einer Lösung von Problem (3.1.2), die minimal bezüglich dieser Gewichtung ist. Wir nennen das Problem, das sich daraus ergibt, das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem.

(3.1.3) Das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem

Gegeben:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen *Kantengewichten* $w_e \in \mathbb{R}_+$ und positiven, ganzzahligen *Kantenkapazitäten* $c_e \in \mathbb{N}$.

Eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $N \geq 1$, mit $T_k \subseteq V$ für $k = 1, \dots, N$.

Problem:

Finde Kantenmengen $S_1, \dots, S_N \subseteq E$, so daß gilt:

- (i) S_k ist ein Steinerbaum in G bezüglich T_k für $k = 1, \dots, N$.
- (ii) $\sum_{k=1}^N |S_k \cap \{e\}| \leq c_e$ für alle $e \in E$.
- (iii) $\sum_{k=1}^N \sum_{e \in S_k} w_e$ ist minimal.

Durch das Quadrupel (G, \mathcal{N}, c, w) ist also eine Instanz des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems festgelegt. Eine Instanz des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems (G, \mathcal{N}, c, w) nennen wir auch eine *gewichtete Instanz des Steinerbaumpackungs-Problems*.

Komplexitätsaussagen

Es ist nicht verwunderlich, daß das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem \mathcal{NP} -vollständig (\mathcal{NP} -schwer) ist. Problem (3.1.2) und Problem (3.1.3) enthalten eine Reihe von Spezialfällen, die bereits \mathcal{NP} -vollständig beziehungsweise \mathcal{NP} -schwer sind. Wir geben nun eine kleine Auswahl davon an.

Betrachten wir den Fall $N = 1$ und $c = \mathbb{1}$ für das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem, so erhalten wir das *Steinerbaum-Problem*.

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w_e , $e \in \mathbb{R}_+$, und eine Knotenmenge $T \subseteq V$. Finde einen Steinerbaum in G für T minimalen Gewichts.

Karp hat in [K72] gezeigt, daß das Steinerbaum-Problem für beliebige Graphen \mathcal{NP} -schwer ist. Garey und Johnson zeigen in [GJ77], daß das rechtwinklige Steinerbaum-Problem —

gegeben A Punkte in der Ebene, finde einen Baum minimaler Länge, der A durch horizontale und vertikale Linien verbindet — ebenfalls \mathcal{NP} -schwer ist. Aus deren Beweis folgt direkt, daß das Steinerbaum-Problem auch \mathcal{NP} -schwer bleibt, wenn der zugrundeliegende Graph G planar oder ein Gittergraph ist und die Kantengewichte alle gleichen Wert haben.

Das Steinerbaumpackungs-Problem beinhaltet beispielsweise das Problem, N kantendisjunkte Wege zu finden. Dieses Problem erhalten wir, wenn wir zusätzlich fordern, daß alle Terminalmengen Kardinalität zwei haben. Kramer und van Leeuwen geben in [KL84] den Beweis der \mathcal{NP} -Vollständigkeit für dieses Problem. Ein weiterer Spezialfall des Steinerbaumpackungs-Problems ergibt sich, wenn nur zwei Terminalmengen gegeben sind (also $N = 2$ gilt). Auch in diesem Fall ist das Problem \mathcal{NP} -vollständig (siehe KPS[90]).

Darüber hinaus gibt es \mathcal{NP} -Vollständigkeitsaussagen für sehr spezielle Probleminstanzen, die jedoch in den Anwendungen sehr häufig vorkommen (vergleiche Kapitel 4). Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger, rechtwinkliger $h \times b$ Gittergraph und \mathcal{N} eine Netzliste, deren Terminals nur an dem oberen und unteren Rand des Gittergraphen liegen (also $\mathcal{N} \subseteq V(I_1) \cup V(I_h)$ gilt). M. Sarrafzadeh konnte in [Sa87] zeigen, daß es \mathcal{NP} -vollständig ist zu entscheiden, ob es für die Instanz $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ eine Steinerbaumpackung gibt. Das Resultat bleibt gültig, falls jede Terminalmenge höchstens Kardinalität k hat für festes $k \geq 5$. Wir werden in Kapitel 3.2.2 beziehungsweise 4.3.2 sehen, daß dieses Problem für $k = 2$ in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Die Fälle $k = 3$ und $k = 4$ sind noch nicht beantwortet. Offensichtlich impliziert dieses Resultat auch, daß das Problem \mathcal{NP} -vollständig ist, wenn die Terminalmengen an allen vier Seiten des Gittergraphen erlaubt sind. Dieser Problemklasse werden wir uns noch ausführlich in Kapitel 7 und 8 widmen.

Diese Beispiele sollen einen Eindruck über die tatsächliche Schwierigkeit des Problems geben. Es sei nochmals herausgestellt, daß nicht nur das Optimierungsproblem (3.1.3) \mathcal{NP} -schwer ist, sondern auch das Entscheidungsproblem, “Gibt es eine zulässige Lösung für Problem (3.1.2) beziehungsweise (3.1.3)?”, bereits \mathcal{NP} -vollständig ist.

(3.1.4) Korollar *Das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem ist \mathcal{NP} -vollständig (\mathcal{NP} -schwer).*

Natürlich gibt es nicht nur “negative” Resultate über Problem (3.1.2) und (3.1.3). Wir werden in Kapitel 3.2 einige Spezialfälle des (gewichteten) Steinerbaumpackungs-Problems kennenlernen, die in polynomialer Zeit gelöst werden können.

Bezeichnungen

Wir wollen in diesem Kapitel abschließend einige Bezeichnungen und Begriffe einführen, die wir im weiteren Verlauf dieser Dissertation benötigen werden.

Sei $G = (V, E)$ und T eine Terminalmenge. Wir nennen eine Partition $V_1, \dots, V_p, p \geq 1$, eine *Steinerpartition bezüglich T* , falls $V_i \cap T \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, p$ ist. Wir nennen eine Kante $e \in E$ eine *Steinerbrücke bezüglich T* , falls jeder Steinerbaum S bezüglich T in G die Kante e enthält. Für einen Steinerbaum S bezüglich T in G definieren wir

$$\Upsilon(S) := \sum_{t \in T} (d_S(t) - 1) + \sum_{\substack{v \in V \setminus T \\ d_S(v) > 2}} (d_S(v) - 2).$$

Wir nennen $\Upsilon(S)$ die *Anzahl der Verzweigungen von S* . Für einen kantenminimalen Steinerbaum gilt

$$(3.1.5) \quad \Upsilon(S) = |T| - 2.$$

Diese Beziehung läßt sich leicht durch Induktion über die Anzahl Terminals sehen. Wir werden Eigenschaft (3.1.5) des öfteren in Kapitel 6 benötigen.

Seien S ein kantenminimaler Steinerbaum bezüglich einer Terminalmenge T und $u, v \in V(S)$ Knoten, die keine Blätter von S sind. Dann existieren Kantenmengen $S_1, S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, so daß $S = S_1 \cup S_2 \cup \{uv\}$ mit $u \in V(S_1), v \in V(S_2)$ gilt, und $(V(S_i), S_i)$, $i = 1, 2$ zusammenhängend ist. Wir nennen $S_1 \cup S_2 \cup \{uv\}$ eine *kantendisjunkte Zerlegung von S* . Ist u ein Blatt von S , so ist $S_1 = \emptyset$. Um in den nachfolgenden Kapiteln nicht unnötige Fälle unterscheiden zu müssen, sprechen wir auch in diesem Fall von einer kantendisjunkten Zerlegung und meinen mit $V(S_1)$ den Knoten u .

Sei nun (G, \mathcal{N}, c, w) beziehungsweise (G, \mathcal{N}, c) eine beliebige Instanz des (gewichteten) Steinerbaumpackungs-Problems. Wir nennen ein N -Tupel (S_1, \dots, S_N) von Kantenmengen eine *Steinerbaumpackung* oder eine *Packung von Steinerbäumen*, falls S_1, \dots, S_N eine Lösung des Steinerbaumpackungs-Problems ist. Jede Steinerbaumpackung ist auch eine *zulässige Lösung* des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems und eine Steinerbaumpackung, die zusätzlich Bedingung (3.1.3) (iii) erfüllt, ist eine *Optimallösung* von Problem (3.1.3). Eine Steinerbaumpackung (S_1, \dots, S_N) heißt *kantenminimal*, falls jeder Steinerbaum S_k für T_k kantenminimal ist. Wir werden uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit viel mit Steinerbaumpackungen beschäftigen. Um den Schreibaufwand möglichst klein zu halten, führen wir einige Operationen auf N -Tupeln von Kantenmengen ein. Sei $P = (F_1, \dots, F_N)$, $N \geq 1$, ein N -Tupel von Kantenmengen sowie $e \in E$ und $F \subseteq E$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} P \setminus_k e &:= (F_1, \dots, F_k \setminus \{e\}, \dots, F_N); \\ P \cup_k e &:= (F_1, \dots, F_k \cup \{e\}, \dots, F_N); \\ P \setminus e &:= (F_1 \setminus \{e\}, \dots, F_N \setminus \{e\}); \\ P \cup e &:= (F_1 \cup \{e\}, \dots, F_N \cup \{e\}); \\ P_k &:= F_k; \\ e \in P &\Leftrightarrow e \in \bigcup_{k=1}^N F_k; \\ P \subseteq F &\Leftrightarrow \bigcup_{k=1}^N F_k \subseteq F. \end{aligned}$$

Ist \mathcal{N} eine Netzliste und T ein Element dieser Liste, so schreiben wir $T \in \mathcal{N}$. Wir nennen eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ *disjunkt*, falls $T_i \cap T_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$. Wir schreiben $\mathcal{N} \subseteq W$, falls $\bigcup_{k=1}^N T_k \subseteq W$ für eine Knotenmenge W .

Um unnötige Spezialfälle zu vermeiden, gehen wir von nun an immer davon aus, daß jede Terminalmenge einer Netzliste \mathcal{N} immer mindestens Kardinalität zwei hat und $N \geq 1$ gilt.

3.2. Verwandte Probleme

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit einigen Problemen beschäftigen, die in engem Bezug, zum gewichteten Steinerbaumpackungs-Problem stehen. Dazu zählt in erster Linie das Steinerbaum-Problem. Diesem Problem ist Kapitel 3.2.1 gewidmet. In Kapitel 3.2.2 befassen wir uns mit Packungsproblemen, insbesondere mit dem Packen kantendisjunkter Wege sowie dem Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume. Die Tatsache, daß wir uns in diesem Kapitel nicht mit dem Packen kantendisjunkter Steinerbäume beschäftigen, liegt daran, daß uns keine Veröffentlichungen zu diesem Problem bekannt sind.

3.2.1. Das Steinerbaum-Problem

In diesem Kapitel möchten wir einen kurzen Überblick über das Steinerbaum-Problem geben. Ursprünglich wurde das Problem in der Ebene betrachtet. Wie in [Ci91] oder [Ma87] nachzulesen ist, hat Fermat Anfang des 17. Jahrhunderts folgendes Problem aufgeworfen: Gegeben drei Punkte in der Ebene, finde einen vierten Punkt, so daß die Summe der Abstände zu den drei Punkten minimal ist. Gelöst wurde dieses Problem um 1640 von Torricelli. Bekannt geworden ist dieses Problem beziehungsweise Verallgemeinerungen davon durch das Buch "What is Mathematics?" von Courant und Robbins [CR41]. Sie gaben dem Problem den Namen "Steiner-Problem", benannt nach dem Geometer Jakob Steiner. Das Steiner-Problem für n , $n \in \mathbb{N}$, gegebene Punkte in der Ebene kann wie folgt beschrieben werden:

Für eine endliche Menge von Punkten Y heißt die Vereinigung von Geradenstücken S *aufspannend für Y* , falls die Endpunkte jedes Geradenstückes aus Y sind und je zwei Punkte von Y in S miteinander verbunden sind. Die Länge $l(S)$ von S ist die Summe der euklidischen Längen der Geradenstücke. Wir bezeichnen mit $S(Y)$ eine aufspannende Menge von Geradenstücken für Y , die $l(S(Y)) = \min\{l(S) \mid S \text{ ist eine aufspannende Menge von Geradenstücken für } Y\}$ erfüllt.

Das Steinerbaum-Problem in der Ebene besteht darin, für eine gegebene endliche Menge von Punkten X in der Ebene eine endliche Menge von Punkten Y^* mit $X \subseteq Y^*$ zu finden, so daß

$$l(S(Y^*)) = \min_{X \subseteq Y} l(S(Y))$$

gilt. Dieses Problem nennt man auch das *euklidische Steinerbaum-Problem*. Wählt man als Längenmaß die L_1 -Norm anstelle der L_2 -Norm in obigem Problem, so spricht man vom *rechtwinkligen Steinerbaum-Problem*. Von besonderem Interesse für uns ist das Steinerbaum-Problem in Graphen (vergleiche Kapitel 3.1). Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w_e , $e \in E$, und eine Knotenmenge $T \subseteq V$. Finde einen Steinerbaum in G für T minimalen Gewichts.

Alle drei Varianten, das euklidische, das rechtwinklige Steinerbaum-Problem sowie das Steinerbaum-Problem in Graphen sind \mathcal{NP} -vollständig ([GGJ77], [GJ77], [K72]). Darüber hinaus wird das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen, mit Knotengewichten und

der gleichen mehr studiert. Die Literatur zu diesen Problemen ist so vielfältig und zahlreich, daß es bei weitem den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, einen umfassenden Überblick zu geben. Eine ausführliche Literaturliste zum Steinerbaum-Problem ist in [HR92] angegeben. Hier sind über 300 Referenzen zu finden. Ein guter Überblick über das Steinerbaum-Problem in Graphen einschließlich der Beschreibung einiger wesentlicher Ideen wird in [W87] gegeben. Neueste Literatur zum Steinerbaum-Problem wurde 1992 in einem Spezialband der Zeitschrift *Algorithmica* veröffentlicht.

Im folgenden zeigen wir einige interessante Ideen zur Lösung des Steinerbaum-Problem in Graphen auf. Beginnen wollen wir mit der Beschreibung zweier exakter Algorithmen. Anschließend skizzieren wir verschiedene Heuristiken zur Lösung des Steinerbaum-Problems in Graphen. Den Abschluß dieses Kapitels bildet die Darstellung einiger polyedrischer Ansätze. Da wir in dieser Arbeit ausschließlich das Steinerbaum-Problem in Graphen betrachten, werden wir von nun an auf den Zusatz "in Graphen" verzichten. Wir gehen im folgenden davon aus, daß ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w_e , $e \in \mathbb{R}_+$, sowie eine Terminalmenge $T \subseteq V$ gegeben ist.

Exakte Verfahren

Wir möchten zunächst ein enumeratives Verfahren beschreiben. Dieses Verfahren geht auf Dreyfus und Wagner [DW71] zurück. Die Idee dieser Vorgehensweise beruht auf der folgenden Beobachtung. Ein minimaler Steinerbaum S bezüglich T in G hat die Eigenschaft, daß es einen Knoten v gibt, an dem S in zwei Teilbäume aufgeteilt werden kann, so daß jeder dieser Teilbäume wiederum optimal bezüglich einer Teilmenge der Terminalmenge und v ist. Genauer gesagt, es existieren ein Knoten $v \in V(S)$, Kantemengen $S_1, S_2 \subset S$, $S_1, S_2 \neq \emptyset$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$ und Knotenmengen $T_1, T_2 \subset T$, $T_1, T_2 \neq \emptyset$ mit $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T$, so daß S_i ein minimaler Steinerbaum bezüglich $T_i \cup \{v\}$ für $i = 1, 2$ ist. Damit reduziert sich das Gesamtproblem auf die Lösung zweier kleinerer Teilprobleme. Im Detail stellt sich die Rekursion wie folgt dar.

Für $J \subseteq T$ und $v \in V$ sei $S(J \cup v)$ ein minimaler Steinerbaum in G bezüglich $J \cup \{v\}$ und $S_v(J \cup v)$ ein minimaler Steinerbaum in G bezüglich $J \cup \{v\}$, für den zusätzlich $d_{S_v(J \cup v)}(v) \geq 2$ gilt, falls $v \notin T$. Dann gilt (siehe [DW71]):

$$(3.2.1.1) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & w(S_v(J \cup v)) = \min_{\emptyset \subset I \subset J} w(S(I \cup v)) + w(S((J \setminus I) \cup v)), \\ \text{(ii)} \quad & w(S(J \cup v)) = \min_{u \in V} w(W(v, u)) + w(S_u(J \cup u)); \end{aligned}$$

wobei $W(u, v)$, $u, v \in V$ ein kürzester Weg von u nach v in G sei.

Zur Bestimmung des minimalen Steinerbaumes mit Hilfe dieser Rekursion wird ein dynamisches Programm entwickelt. Dabei werden zuerst minimale Steinerbäume $S(J \cup v)$ mit $|J| = 1$ für alle $v \in V$ bestimmt. Diese werden verwendet zur Berechnung der minimalen Steinerbäume $S(J \cup v)$ mit $|J| = 2$ und so weiter, bis die Optimallösung des Gesamtproblems erzielt ist. Optimallösungen für Teilprobleme werden also zur Bestimmung von

Optimallösungen von größeren Teilproblemen verwendet, wobei jedes Teilproblem nur einmal gelöst wird. Damit ergibt sich eine Laufzeit von $O(|V| \cdot 3^{|T|} + |V|^2 \cdot 2^{|T|} + \gamma)$ für das dynamische Programm, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren ist. Erickson, Monma und Veinott haben in [EMV87] gezeigt, daß das Verfahren polynomiale Laufzeit hat, falls der zugrundeliegende Graph planar ist und alle Terminals an höchstens k Flächen liegen, wobei k fest ist. Wir werden darauf nochmals in Kapitel 7.2.1 näher eingehen.

Das zweite exakte Verfahren, das wir vorstellen möchten, geht auf Aneja [A80] zurück. Er betrachtet zur Lösung des Steinerbaum-Problems das folgende ganzzahlige lineare Programm:

$$(3.2.1.2) \quad \begin{aligned} \min \quad & w^T x \\ & x(\delta(W)) \geq 1, \quad \text{für alle } W \subset V, W \cap T \neq \emptyset, (V \setminus W) \cap T \neq \emptyset, \\ & x_e \in \{0, 1\}, \quad \text{für alle } e \in E. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede zulässige Lösung von (3.2.1.2) der Inzidenzvektor eines Steinerbaumes. Ebenso erfüllt jeder Inzidenzvektor eines Steinerbaumes die Bedingungen in (3.2.1.2). Zur Lösung von (3.2.1.2) schlägt Aneja folgenden Algorithmus vor.

(3.2.1.3) Algorithmus (Aneja)

Input:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$, $e \in E$ sowie eine Terminalmenge $T \subseteq V$.

Output:

Ein minimaler Steinerbaum für T in G .

- (1) Setze $t = 1$ und sei (P_t) das ganzzahlige lineare Programm (3.2.1.2).
- (2) Bestimme einen kantenminimalen Steinerbaum S , so daß χ^S zulässig für (P_t) ist.
- (3) Bestimme eine Basis B (und die zugehörige Basismatrix) der linearen Relaxierung von (3.2.1.2), die χ^S erzeugt.
- (4) Bestimme für jede Kante die reduzierten Kosten bezüglich der Basis B . Sei Q die Menge derjenigen Kanten mit positiven reduzierten Kosten, also derjenigen Kanten, auf denen noch eine Verbesserung erzielt werden kann.
- (5) Ist $Q = \emptyset$, dann gib S aus, STOP.
- (6) Bestimme (P_{t+1}) aus (P_t) durch Hinzufügen der Bedingung

$$\sum_{e \in Q} x_e \geq 1,$$

setze $t = t + 1$ und gehe nach (2).

Schritt (2) von Algorithmus (3.2.1.3) löst Aneja, indem er die lineare Relaxierung von (P_t) löst. Sei x^* eine solche Lösung. Dann ist offensichtlich $[x^*]$ der Inzidenzvektor eines

Steinerbaumes S . Aneja löscht nun solange Kanten aus dem Steinerbaum S bis dieser kantenminimal ist. Zur Lösung der linearen Relaxierung von (P_t) verwendet er die Idee eines Schnittebenenverfahrens (vergleiche Kapitel 7.1). Die Bestimmung der Menge Q führt Aneja auf das Lösen von $|S|$ Maximal-Fluß-Problemen zurück.

Das Gesamtverfahren (3.2.1.3) von Aneja ist von der Idee ebenfalls ein Schnittebenenverfahren. Der Unterschied besteht darin, daß in Schritt (6) keine gültige Ungleichung für das Gesamtproblem hinzugefügt wird, sondern nur solche Ungleichungen betrachtet werden, die gültig für die Optimallösung sind. Die Rechenergebnisse, die Aneja mit diesem Verfahren erzielt, sind seiner Meinung nach noch nicht zufriedenstellend.

Wir haben hier nur zwei von vielen exakten Algorithmen zur Lösung des Steinerbaum-Problems vorgestellt. Unsere Wahl fiel auf diese beiden Verfahren, da wir das erste der beiden Verfahren noch in Kapitel 7.2 benötigen und das zweite sehr verwandt mit einem Schnittebenenansatz ist. Der an weiteren Verfahren interessierte Leser sei wieder auf die eingangs zitierte Literatur verwiesen.

Heuristische Verfahren

In diesem Abschnitt möchten wir zwei Heuristiken zur Bestimmung eines minimalen Steinerbaumes bezüglich T in G vorstellen. Beide Verfahren fassen zu Beginn jedes Terminal als isolierte Komponente auf. Anschließend werden iterativ jeweils zwei Komponenten miteinander verbunden bis alle Terminals zur gleichen Komponente gehören. Die Auswahl der Komponenten in den Verfahren beruht dabei auf der Information über die kürzesten Wege zwischen alle Knotenpaaren. Für den Rest dieses Abschnitts bezeichnen wir mit $W(u, v) \subseteq E$ einen kürzesten Weg von u nach v in G .

Das erste Verfahren, das wir betrachten wollen und das nach diesem Prinzip vorgeht, ist von Takahashi und Matsuyama [TM80] entwickelt worden. Die Heuristik beginnt mit einem beliebigen Terminal $t \in T$. Daraufhin wird aus $T \setminus \{t\}$ dasjenige Terminal t' gewählt, das unter allen Terminals aus $T \setminus \{t\}$ mit den geringsten Kosten auf einem Weg von t' nach t verbunden werden kann. Anschließend wird t' mit t auf einem kürzesten Weg verbunden. Dieser Vorgang wird solange wiederholt bis alle Terminals miteinander verbunden sind. Im Detail sieht der Algorithmus folgendermaßen aus.

(3.2.1.4) Steinerbaum-Heuristik (Takahashi und Matsuyama)

Input:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$ sowie eine Terminalmenge $T \subseteq V$.

Output:

Ein Steinerbaum S bezüglich T in G

- (1) Setze $S = \emptyset$ und $T' = \{t\}$ für ein $t \in T$.
- (2) Solange $T \setminus T' \neq \emptyset$, führe aus:

- (3) Bestimme $v \in T'$ und $t \in T \setminus T'$ mit

$$w(W(v, t)) = \min_{\substack{v' \in T' \\ t' \in T \setminus T'}} w(W(v', t'))$$

- (4) Setze $S = S \cup W(v, t)$ und $T' = T' \cup V(W(v, t))$.
 (5) Gib S aus.
 (6) STOP

Die Gesamtlaufzeit von Algorithmus (3.2.1.4) beträgt $O(|T| \cdot |V|^2)$. Beachte, daß in (3.2.1.4) kürzeste Wege nur zwischen jedem Terminal und jedem Knoten benötigt werden. Die Berechnung dieser Wege kann zum Beispiel mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus [D59] in einer Laufzeit von $O(|T| \cdot |V|^2)$ durchgeführt werden. Natürlich lassen sich vielerlei Varianten dieses Algorithmus betrachten. Beispielsweise können die Schritte (2) bis (4) nicht nur für ein beliebiges Terminal durchgeführt werden, sondern für alle Terminals. Einige dieser Möglichkeiten werden in [WS92] diskutiert. Takahashi und Matsuyama zeigen, daß für den Steinerbaum S aus (3.2.1.4) die Abschätzung $w(S) \leq 2(1 - \frac{1}{|T|}) \cdot w(S^*)$ gilt, wobei S^* ein minimaler Steinerbaum bezüglich T in G ist. Wir werden eine Variante dieses Algorithmus noch in den Kapiteln 7.2 und 7.3 verwenden.

Die zweite Heuristik, die auf Rayward-Smith [R83] zurückgeht, verbindet ebenfalls sukzessive zwei Komponenten. Die Bestimmung der Komponenten erfolgt, indem ein Knoten v ausgewählt wird, über den die zwei zu v nächstliegenden Komponenten verbunden werden. Die entscheidende Idee und der grundlegende Unterschied zu obigem Verfahren ist, daß alle noch nicht verbundenen Komponenten bei der Wahl des Knoten v berücksichtigt werden. Dies erfolgt über eine Funktion f . Rayward-Smith schlägt die folgende Funktion vor: Angenommen in der aktuellen Iteration des Algorithmus gibt es noch k isolierte Komponenten (V_i, E_i) , $i = 1, \dots, k$. Betrachten wir ein beliebiges $v \in V$ mit $\text{dist}(v, V_i) := \min\{w(W(v, u)) \mid u \in V_i\}$ für $i = 1, \dots, k$. Wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß $\text{dist}(v, V_i) \leq \text{dist}(v, V_{i+1})$ für $i = 1, \dots, k-1$ gilt. Dann ist die Funktion f folgendermaßen definiert:

$$f(v) := \min_{2 \leq r \leq k} \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r \text{dist}(v, V_i)$$

für alle $v \in V$. Es wird also derjenige Knoten ausgewählt, dessen "durchschnittliche Distanz" zu den isolierten Komponenten minimal ist. Der Algorithmus stellt sich nun wie folgt dar.

(3.2.1.5) Steinerbaum-Heuristik (Rayward-Smith)

Input:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$ sowie eine Terminalmenge $T \subseteq V$.

Output:

Ein Steinerbaum S bezüglich T in G

- (1) Setze $\mathcal{T} := \{(\{t\}, \emptyset) \mid t \in T\}$.
- (2) Solange $|\mathcal{T}| > 1$, führe aus:
- (3) Bestimme einen Knoten $v \in V$ mit

$$f(v) = \min_{u \in V} f(u).$$

- (4) Seien $(V_1, E_1), (V_2, E_2) \in \mathcal{T}$ zwei zu v nächstliegende Komponenten und $v_i \in V_i$ mit $w(W(v, v_i)) = \text{dist}(v, V_i)$ für $i = 1, 2$.
Setze $\mathcal{T} = \mathcal{T} \setminus \{(V_1, E_1), (V_2, E_2)\} \cup \{(V_1 \cup V_2 \cup V(W_1) \cup V(W_2), E_1 \cup E_2 \cup W_1 \cup W_2)\}$,
wobei $W_i = W(v, v_i)$ für $i = 1, 2$ ist.
- (5) Gib S aus, wobei $\mathcal{T} = \{(V_S, S)\}$ sei.
- (6) STOP

Rayward-Smith gibt in [R83] eine Implementierung von (3.2.1.5) mit Laufzeit $O(|T| \cdot |V|^2 + \gamma)$, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren ist. Die Idee, alle noch nicht verbundenen Komponenten bei der Auswahl des Knotens v zu berücksichtigen, scheint besonders dann sinnvoll zu sein, wenn die kürzesten Verbindungen zwischen Komponenten nicht eindeutig sind. Dies ist besonders häufig der Fall, wenn der zugrundeliegende Graph ein Gittergraph ist. Vergleiche zum Beispiel Abbildung 3.3.1.1. Um die beiden Komponenten $(\{t_1\}, \emptyset)$ und $(\{t_2\}, \emptyset)$ auf einem kürzesten Weg miteinander zu verbinden, ist sowohl der Weg über v_1 als auch über v_2 möglich. Wird jedoch die dritte Komponente $(\{t_3\}, \emptyset)$ berücksichtigt, so ist der Weg über v_2 dem Weg über v_1 vorzuziehen ($f(v_1) = 4, f(v_2) = 3.5$) für $w = \mathbb{1}$). Wir werden diese Idee bei der Entwicklung des Primalverfahrens in Kapitel 7.3 benutzen.

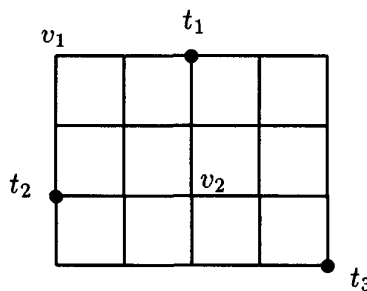


Abbildung 3.3.1.1

Wir haben uns entschieden, diese beiden Heuristiken vorzustellen, weil deren Ideen — wie oben bereits erwähnt — in unser Verfahren einfließen werden. Der an weiteren heuristischen Verfahren interessierte Leser sei wieder auf die eingangs erwähnten Überblicksartikel verwiesen. Ein Vergleich verschiedener Heuristiken ist zum Beispiel in [RC86] und [WS92] zu finden.

Polyedrische Ansätze

In diesem Abschnitt möchten wir kurz einige polyedrische Ansätze zur Lösung des Steinerbaum-Problems skizzieren. Wir haben in der Einleitung bereits kurz das Wesen eines polyedrischen Ansatzes erläutert. Die Idee ist, ein Polyeder zu definieren, so daß jede Ecke genau einem Steinerbaum in G entspricht. Einen minimalen Steinerbaum erhält man, indem die lineare Zielfunktion über diesem Polyeder minimiert wird. Die wesentlichen Aufgaben eines polyedrischen Ansatzes bestehen darin, eine gute Beschreibung des Polyeders durch Ungleichungen zu finden und darauf aufbauend ein Schnittebenenverfahren zu entwickeln.

Erstaunlicherweise werden in keinem der eingangs erwähnten Übersichtsartikel polyedrische Ansätze betrachtet. Wir geben im folgenden die Definition einiger in der Literatur studierter Steinerbaum-Polyeder und verweisen auf Artikel, in welchen darüber hinaus ein Schnittebenenverfahren implementiert wurde.

Grötschel und Monma betrachten in [GM90] eine verallgemeinerte Klasse von Problemen, worin das Steinerbaum-Problem als Spezialfall auftritt. Für den Fall des Steinerbaum-Problems läßt sich das Polyeder wie folgt angeben:

$$P(G, T) := \text{conv} \{ \chi^S \mid S \text{ ist Steinerbaum bezüglich } T \text{ in } G \}.$$

Sie beschreiben in [GM90] eine Klasse von Ungleichungen, die gültig für $P(G, T)$ ist und charakterisieren die Bedingungen unter welchen diese Ungleichungen facetten-definierend sind. Wir werden auf diese Klasse von Ungleichungen in Kapitel 7.1 noch näher eingehen.

Chopra und Rao beschäftigen sich in [CoR88a] und [CoR88b] mit nahezu dem gleichen Polyeder. Der einzige Unterschied besteht darin, daß sie auf die oberen Schranken der Variablen verzichten, das heißt, sie studieren das Polyeder

$$P^+(G, T) := P(G, T) + \mathbb{R}_+^E.$$

Diese Modifikation erleichtert die polyedrischen Untersuchungen, da sichergestellt ist, daß (sofern G zusammenhängend ist) $P^+(G, T)$ volldimensional ist, selbst wenn G Steinerbrücken enthält. Chopra und Rao geben in [CoR88a] und [CoR88b] viele Klassen von facetten-definierenden Ungleichungen an.

Häufig werden polyedrische Ansätze für das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen untersucht. Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Bogengewichten $w_a \in \mathbb{R}_+, a \in A$, $T \subseteq V$ eine Terminalmenge sowie $r \in T$. Eine Bogenmenge S heißt *Steinerarboreszenz bezüglich T mit Wurzel r* , falls für jedes $t \in T$ ein gerichteter Weg von r nach t in $(V(S), S)$ existiert. Das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen ist das Problem, eine (bezüglich der Gewichtsfunktion w) minimale Steinerarboreszenz bezüglich T mit Wurzel r in D zu finden. Eine Steinerarboreszenz S heißt *bogenminimal*, falls $S \setminus \{a\}$ keine Steinerarboreszenz für alle $a \in S$ ist. Offensichtlich kann das Steinerbaum-Problem im ungerichteten Graphen auch im gerichteten Graphen betrachtet werden, indem man a-priori eine Wurzel $r \in T$ festlegt und jede Kante uv durch zwei Bögen (u, v) und (v, u) ersetzt, deren beider Gewichte dem der (ungerichteten) Kante uv entsprechen.

Das Steinerbaum-Problem im gerichteten Graphen wird zum Beispiel von Fischetti in [Fi91] polyedrisch untersucht. Er betrachtet die Polyeder

$$P(D, T) := \text{conv} \{ \chi^S \mid S \text{ ist Steinerarboreszenz bezüglich } T \text{ mit Wurzel } r \text{ in } D \}$$

sowie das Polyeder

$$P^+(D, T) := P(D, T) + \mathbb{R}_+^A$$

und beschreibt Klassen von facetten-definierenden Ungleichungen. Letzteres Polyeder wird ebenfalls von Chopra und Rao studiert ([CoR88a], [CoR88b]).

Schließlich möchten wir noch auf eine Arbeit von Ball, Liu und Pulleyblank [BLP87] verweisen, die das Polyeder studieren, dessen Ecken genau den bogenminimalen Steinerarboreszenzen entsprechen. Sie beschränken sich bei Ihren Untersuchungen auf den Fall $|T| = 3$.

Implementierungen von Schnittebenenverfahren sind (zumindest dem Autor) nur sehr wenige bekannt. Chopra, Gorres und Rao ([CGR90]) haben ein solches sowohl für den gerichteten als auch für den ungerichteten Fall implementiert. Sie geben eine Vielzahl von Testergebnissen an; die Problembeispiele sind ausschließlich zufällig erzeugt. Ferreira [Fe89] verwendet im wesentlichen den Ansatz von Grötschel und Monma und entwickelt ein Schnittebenenverfahren für einige geometrische Beispiele.

3.2.2. Weitere Packungsprobleme

Das wohl bekannteste Packungsproblem ist das Rucksackproblem (Knapsack-Problem): Gegeben ein Rucksack mit Kapazität b und n Gegenstände, von denen jeder eine Größe und einen Wert hat. Die Aufgabe besteht darin, eine Auswahl an Gegenständen zu finden, die bezüglich ihrer Größe gemeinsam in den Rucksack passen und deren Gesamtwert maximal ist. Schon das Rucksackproblem kennt eine Vielzahl von Varianten, zum Beispiel das mehrdimensionale Rucksackproblem (anstatt eines Rucksacks sind m Rucksäcke gegeben, auf die die Gegenstände verteilt werden können; die Größe des Gegenstandes kann dabei noch vom Rucksack, in den er gepackt wird, abhängen) oder das Subset-Sum-Problem, bei dem Größe und Wert eines jeden Gegenstandes übereinstimmen. Alle diese Varianten sind \mathcal{NP} -vollständig [K72].

Darüber hinaus werden in der Literatur weitere Packungsprobleme studiert. Wir wollen im Rahmen dieser Arbeit keinen Überblick über die verschiedenen Packungsprobleme geben. Wir wollen vielmehr uns mit denjenigen Problemen beschäftigen, die in engem Bezug zu Problem (3.1.2) stehen. Dazu zählen in erster Linie das Packen von kantendisjunkten Wegen. Damit beschäftigen wir uns im folgenden. Fordern wir, daß die zu packenden Wege beziehungsweise Steinerbäume knotendisjunkt sind, so lassen sich Resultate für das Packen von Wegen oftmals auch auf das Packen von Steinerbäumen erweitern. Damit befassen wir uns zum Abschluß dieses Kapitels.

Packen kantendisjunkter Wege

Wir betrachten in diesem Kapitel folgenden Spezialfall von Problem (3.1.2):

(3.2.2.1) Packen kantendisjunkter Wege

Gegeben:

Ein Graph $G = (V, E)$ und N Knotenpaare $\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_N, t_N\}$.

Problem:

Finde N kantendisjunkte Wege P_1, \dots, P_N , so daß P_k s_k mit t_k verbindet.

Beachte, in (3.2.2.1) wird also nur nach einer zulässigen Lösung gesucht. Eine zu optimierende Zielfunktion wie die Minimierung der Weglängen wird hier nicht betrachtet.

Wie wir bereits aus Kapitel 3.1 wissen, ist Problem (3.2.2.1) \mathcal{NP} -vollständig, sogar für planare Graphen. Dagegen lösen Robertson und Seymour in [RS90] das Problem für festes N in polynomialer Zeit.

(3.2.2.2) Satz (Robertson und Seymour) Für festes N existiert ein polynomialer Algorithmus zur Lösung von (3.2.2.1).

Dieser Satz wurde von Robertson und Seymour für den knotendisjunkten Fall formuliert. Durch Betrachten des Problems im Kantengraphen, läßt sich daraus Satz (3.2.2.2) ableiten. Die Laufzeit des Algorithmus ist $O(|V|^2 \cdot |E|)$. Allerdings explodiert die Konstante mit wachsendem N sehr stark.

Zahlreiche Veröffentlichungen beschäftigen sich daher mit Fragen der folgenden Art. Gibt es Spezialfälle für die Problem (3.2.2.1) effizient gelöst werden kann? Gibt es notwendige Bedingungen, die auch hinreichend für die Lösbarkeit von (3.2.2.1) sind? Bevor wir uns diesen Fragen näher widmen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein.

Wir bezeichnen mit $H = (V, \{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_N, t_N\}\})$ den *Bedarfsgraphen*. Für ein beliebiges $X \subseteq V$ bezeichnen wir mit $f(X) := \delta_G(X) - \delta_H(X)$ den *Überschuß* oder die *freie Kapazität* des von X induzierten Schnitts. Wir sagen der von X induzierte Schnitt ist *saturiert*, wenn $f(X) = 0$. Der von X induzierte Schnitt wird *gerade* (*ungerade*) genannt, wenn $f(X)$ gerade (ungerade) ist.

Offensichtlich ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (3.2.2.1) die sogenannte Schnittbedingung.

(3.2.2.3) Schnittbedingung

$$f(X) \geq 0 \text{ für alle } X \subseteq V.$$

Leider ist diese Bedingung nicht hinreichend, vergleiche Abbildung 3.2.2.1.

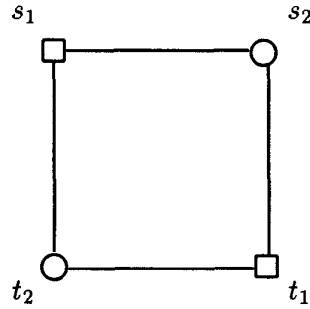


Abbildung 3.2.2.1

Jedoch gibt es eine Reihe von Spezialfällen, für die die Schnittbedingung auch hinreichend ist. Ein Beispiel hierfür gibt der folgende Satz von Okamura und Seymour [OS81].

(3.2.2.4) Satz (Okamura und Seymour) Sei G planar, $G + H$ eulersch und die Terminals an einer Fläche von G . Dann hat (3.2.2.1) genau dann eine Lösung, wenn die Schnittbedingung (3.2.2.3) erfüllt ist.

Okamura und Seymour geben einen algorithmischen Beweis von (3.2.2.4). Wir werden in Kapitel 4.3.2 nochmal darauf zurückkommen.

Die Aussage des Satzes (3.2.2.4) bleibt gültig, wenn die Terminals an zwei Flächen liegen, jedoch erfordert dies weitere Einschränkungen an den Bedarfsgraphen H ([O83], [S88a]). Verzichten wir auf die Planarität von G , so bleiben für H nur noch wenige Möglichkeiten offen. Genauer gesagt, ist $G + H$ eulersch und H (bis auf parallele Kanten) ein Doppelstern (d. h. es gibt höchstens zwei Knoten, zu denen alle Kanten adjazent sind), der K_4 , ein Kreis der Länge 5, oder ein Graph, dessen Kantenmenge aus drei paarweise nicht-inzidenten Kanten besteht, dann hat (3.2.2.1) genau dann eine Lösung, wenn die Schnittbedingung (3.2.2.3) erfüllt ist. Dieses Resultat geht auf Lomonosov ([Lo79], [Lo85]) zurück. In [F90] und [S90] sind Beispiele angegeben, die zeigen, daß dies die einzigen Möglichkeiten für H sind, falls nur $G + H$ eulersch vorausgesetzt wird.

Verzichtet man dagegen auf die Voraussetzung $G + H$ eulersch, so ist eine Charakterisierung der Problembeispiele, für die die Schnittbedingung (3.2.2.3) hinreichend ist, noch nicht bekannt. Es gibt jedoch für diesen Fall Resultate, die schärfere Bedingungen als die Schnittbedingung angeben, die die Lösbarkeit von (3.1.2) implizieren. Wir wollen exemplarisch eine solche Bedingung herausgreifen, die ausreicht, um die Lösbarkeit eines Spezialfalls, der uns in Kapitel 4.3.2 noch interessieren wird, vollständig zu charakterisieren.

Sei G ein vollständiger rechtwinkliger Gittergraph. Die Terminalmengen liegen paarweise disjunkt an der äußeren Fläche von G . Sei $\delta(C)$, $C \subset V$, ein vertikaler Schnitt und $\delta(R_1), \dots, \delta(R_t)$ die Menge der saturierten horizontalen Schnitte, wobei $R_1 \subset \dots \subset R_t \subset V$. Sei $D_i = (R_i \cap C) \setminus R_{i-1}$ für $i = 1, \dots, t + 1$, wobei $R_0 := \emptyset$ und $R_{t+1} := V$. Vergleiche dazu Abbildung 3.2.2.2 (dieses Beispiel ist aus [F90] entnommen). Der *Paritätsstau* $P(C)$ von C ist die Anzahl ungerader Schnitte aus $\delta(D_1), \dots, \delta(D_{t+1})$. In gleicher Weise

definiert man den Paritätsstau für einen horizontalen Schnitt. Offensichtlich gibt es für jeden ungeraden Schnitt in jeder Lösung von (3.2.2.1) eine Kante die unbenutzt bleibt. Da $\delta(R_1), \dots, \delta(R_t)$ saturiert sind, muß die unbenutzte Kante eines ungeraden Schnittes $\delta(D_i)$ auch in $\delta(C)$ liegen. Damit ist die folgende Bedingung notwendig für die Lösbarkeit von (3.2.2.1).

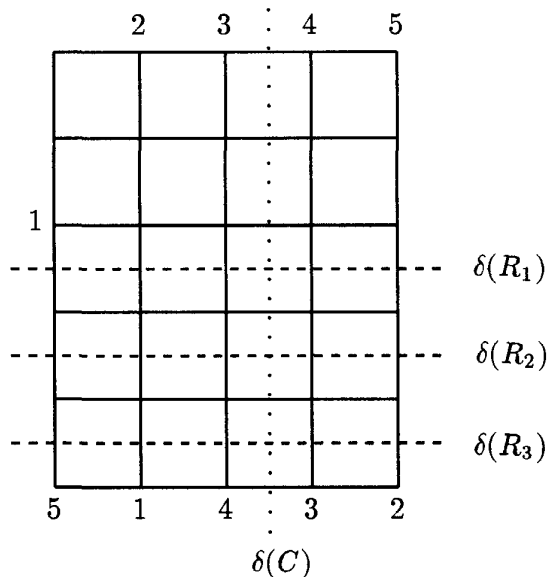


Abbildung 3.2.2.2

(3.2.2.5) Paritätsstau-Bedingung

$P(X) \leq f(X)$ für alle horizontalen und vertikalen Schnitte $\delta(X)$, $X \subseteq V$.

Die Paritätsstau-Bedingung ist unter den folgenden Voraussetzungen auch hinreichend.

(3.2.2.6) Satz (Frank [F82]) Gegeben ein vollständiger, rechtwinkliger Gittergraph und N paarweise disjunkte Terminalmengen der Kardinalität zwei an der äußeren Fläche. Dann gilt, Problem (3.2.2.1) hat genau dann eine Lösung, wenn die Paritätsstau-Bedingung (3.2.2.5) erfüllt ist.

Es gibt noch eine Vielzahl an derartigen Sätzen, die notwendige Bedingungen angeben, die auch hinreichend für spezielle Graphen G und H sind. Ein ausführlicher Überblick darüber ist in [F90] zu finden.

Interessant ist zu bemerken, daß bislang nicht bekannt ist (zumindest dem Autor nicht), ob sich diese Resultate auch auf das Packen kantendisjunkter Steinerbäume erweitern lassen. Für den knotendisjunkten Fall ist dies dagegen teilweise möglich. Damit beschäftigen wir uns im folgenden.

Packen knotendisjunkter Wege und Steinerbäume

In diesem Abschnitt betrachten wir die folgenden beiden Probleme.

(3.2.2.7) Packen knotendisjunkter Wege

Gegeben:

Ein Graph $G = (V, E)$ und N Terminalmengen $T_1 = \{s_1, t_1\}, \dots, T_N = \{s_N, t_N\}$.

Problem:

Finde N paarweise knotendisjunkte Wege P_1, \dots, P_N , so daß P_k s_k mit t_k verbindet.

(3.2.2.8) Packen knotendisjunkter Steinerbäume

Gegeben:

Ein Graph $G = (V, E)$ und N Terminalmengen T_1, \dots, T_N , $|T_k| \geq 2$, $k = 1, \dots, N$.

Problem:

Finde Steinerbäume S_k für T_k in G für $k = 1, \dots, N$, so daß die Steinerbäume paarweise knotendisjunkt sind.

Schrijver gibt in [S90] einen guten und nach unserem Kenntnisstand umfassenden Überblick über diese beiden Probleme. Wir skizzieren im folgenden einige Resultate daraus.

Problem (3.2.2.7), und damit auch (3.2.2.8), ist \mathcal{NP} -vollständig [Ly75]. Wie wir bereits im vorangegangenen Kapitel erwähnt haben, gibt es für festes N einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von (3.2.2.7). Ein ähnliches Resultat für (3.2.2.8) ist nicht bekannt.

Ist dagegen G planar, so lassen sich einige Aussagen, die für (3.2.2.7) gelten, auch auf (3.2.2.8) erweitern. Betrachten wir dazu zunächst notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit von (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8). Analog zum kantendisjunkten Fall läßt sich auch hier eine Schnittbedingung formulieren.

(3.2.2.9) Knoten-Schnittbedingung

Jede Knotenmenge $W \subseteq V$ trennt höchstens $|W|$ Terminalmengen, das heißt für höchstens $|W|$ Terminalmengen gibt es in $G - W$ keine Lösung.

Beschränken wir uns auf den Fall, daß G planar ist und alle Terminalmengen an einer Fläche, ohne Beschränkung der Allgemeinheit an der äußeren Fläche, von G liegen, so muß für die Lösbarkeit von (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8) auch noch folgende Bedingung erfüllt sein.

(3.2.2.10) Kreuzungsfreiheit

$[s_k, t_k]$ und $[s_l, t_l]$ sind kreuzungsfrei bezüglich O_G für alle $k, l \in \{1, \dots, N\}$, $k \neq l$.

Für den Fall, daß G planar ist und alle Terminalmengen an der äußeren Fläche von G liegen, sind die Bedingungen (3.2.2.9) und (3.2.2.10) auch hinreichend.

(3.2.2.11) Satz

Sei G planar und alle Terminalmengen aus $V(O_G)$. Dann gilt, (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8) hat genau dann eine Lösung, wenn (3.2.2.9) und (3.2.2.10) erfüllt sind.

Für Problem (3.2.2.7) geht der Satz auf Robertson und Seymour [RS86] zurück. Der Beweis ist algorithmisch und läßt sich leicht beschreiben.

Da nach (3.2.2.10) die Terminalmengen kreuzungsfrei sind, existiert eine Terminalmenge ohne Beschränkung der Allgemeinheit T_1 und zwei Terminals $s, t \in T_1$, so daß einer der beiden Wege (im folgenden mit P_1 bezeichnet) von s nach t in $(V(O_G), O_G)$ nur Terminals aus T_1 enthält, der andere nur Terminals aus T_k , $k = 2, \dots, N$. Gibt es nun eine Lösung von (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8), so gibt es auch eine Lösung, die P_1 zur Verbindung von T_1 benützt, (beachte, daß die Verbindungen knotendisjunkt sind und damit die Verbindung für T_1 gegen den Rand "geschoben" werden kann). Wir löschen nun P_1 aus G und lösen das Problem für $G - V(P_1)$ und T_2, \dots, T_N . Auf diese Weise finden wir eine Lösung für (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8) oder wir finden eine verletzte Knoten-Schnittbedingung (3.2.2.9).

Schrijver gibt in [S88b] eine Verallgemeinerung der Voraussetzungen in Satz (3.2.2.11), so daß (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8) immer noch polynomial lösbar bleibt.

(3.2.2.12) Satz

Ist G ein planarer Graph und liegen die Terminalmengen an höchstens p Flächen von G (p fest), dann läßt sich Problem (3.2.2.7) beziehungsweise (3.2.2.8) in polynomialer Zeit lösen.

Vereinfacht dargestellt, läßt sich das Verfahren von Schrijver folgendermaßen beschreiben. Er betrachtet zunächst das Problem (3.2.2.7), wobei er zusätzlich voraussetzt, daß die Homotopien für jeden Weg vorgegeben sind.

(3.2.2.13) Packen knotendisjunkter Wege bei gegebener Homotopie

Gegeben:

- Ein Graph $G = (V, E)$,
- p Flächen I_1, \dots, I_p von G ,
- N Terminalmengen $T_1 = \{s_1, t_1\}, \dots, T_N = \{s_N, t_N\}$, so daß jedes Terminal an einem Rand von I_1, \dots, I_p liegt,
- Kurven C_1, \dots, C_N in $\mathbb{R}^2 \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_p)$, so daß C_k s_k mit t_k verbindet.

Problem:

Finde N paarweise knotendisjunkte Wege P_1, \dots, P_N in G , so daß $P_k \sim C_k$ in $\mathbb{R}^2 \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_p)$ für $k = 1, \dots, N$.

Hat man (3.2.2.13) gelöst, so erhält man eine Lösung für das eigentliche Problem durch Enumeration über alle möglichen Homotopien. Es läßt sich zeigen, daß es davon höchstens $|V|^p$ verschiedene gibt. Zur Lösung von (3.2.2.13) geht Schrijver in folgenden Schritten vor:

- (1) Lege C_1, \dots, C_N kreuzungsfrei in G .
- (2) Bestimme ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$.
- (3) Bestimme eine ganzzahlige Lösung von $Ax \leq b$.
- (4) Verschiebe die Kurven entsprechend der Lösung in (3).

Die Variablen x geben an, wie weit und in welche Richtung die Kurven verschoben werden müssen. Das System von Bedingungen $Ax \leq b$ hat eine ganzzahlige Lösung genau dann,

wenn (3.2.2.13) eine Lösung hat. Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ hat spezielle Struktur und mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination läßt sich zeigen, daß (3) in polynomialer Zeit lösbar ist.

Damit ist insgesamt Problem (3.2.2.7) unter den Voraussetzungen in Satz (3.2.2.12) in polynomialer Zeit lösbar. Eine Lösung für (3.2.2.8) unter diesen Voraussetzungen erhält Schrijver, indem er das Problem auf (3.2.2.7) reduziert. Dazu wird jede Terminalmenge $T_k = \{t_1^k, \dots, t_{|T_k|}^k\}$ durch die Paare $T_k^i = \{t_i^k, t_{i+1}^k\}$, $i = 1, \dots, |T_k|$ mit $t_{|T_k|+1}^k = t_1^k$ ersetzt. Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ kann dabei so ergänzt werden, daß alle obigen Eigenschaften erhalten bleiben.

Eine interessante Beobachtung ist, daß sich hier das Steinerbaum-Problem auf das Wege-Problem reduzieren läßt ohne die Lösbarkeit des Problems zu verändern. Dies steht im Gegensatz zum kantendisjunkten Fall. Ein intuitives Argument für diesen Unterschied ist, daß sich im knotendisjunkten Fall die Steinerbäume beziehungsweise Wege nicht kreuzen dürfen und damit nur sehr eingeschränkt verlaufen können. Dagegen können im kantendisjunkten Fall die Steinerbäume beziehungsweise Wege dadurch, daß sie sich beliebig oft kreuzen können, sehr wild durcheinander verlaufen.

4. Herkunft und Motivation

Wie bereits eingangs erwähnt, kommt die Motivation für die Untersuchung des Steinerbaupackungs-Problems aus dem Bereich des Entwurfs elektronischer Schaltungen, auch hoch integrierte Schaltungen (englisch: Very Large Scale Integration) genannt. Ein wichtiges Teilproblem, das beim Entwurf elektronischer Schaltungen auftritt, ist das Verdrahtungsproblem. Wir werden in diesem Kapitel das Verdrahtungsproblem näher betrachten, die dabei auftretenden Probleme aufzeigen und einige Lösungsansätze skizzieren. Dazu werden wir uns zunächst in Kapitel 4.1 mit dem VLSI-Jargon vertraut machen und die wichtigsten Grundbegriffe klären. Da das Verdrahtungsproblem im allgemeinen zu schwierig ist, um es direkt zu lösen, wird das Problem in der Praxis weiter zerlegt. Die Variationsmöglichkeiten und die sich dadurch ergebenden Teilprobleme werden in Kapitel 4.2 beschrieben. Kapitel 4.3 beschäftigt sich mit Lösungsansätzen zweier Teilprobleme, auf die sich unser Modell anwenden läßt.

4.1. Das Verdrahtungsproblem im VLSI-Design

Der Entwurf hoch integrierter Schaltungen läßt sich in zwei Phasen einteilen. Gegeben ist eine Aufgabe, die eine Schaltung erfüllen soll. Genauer gesagt, ist eine solche Aufgabe eine komplexe logische Funktion, die sich aus vielen elementaren logischen Operationen (zum Beispiel der logischen Und-Verknüpfung) zusammensetzt. Meistens sind mehrere elementare logische Operationen bereits a-priori zu einer logischen Funktionseinheit (zum Beispiel einem Addierer) zusammengefaßt. Im *logischen Entwurf* wird einerseits spezifiziert, welche der logischen Funktionseinheiten verwendet werden, und zum anderen werden die zu realisierenden Verbindungen zwischen diesen Einheiten definiert. Diese Einheiten, die eine logische Funktion spezifizieren, werden *Zellen* genannt, die zu realisierenden Verbindungen als *Netze* bezeichnet. Die Liste der Zellen zusammen mit der Liste der Netze bildet den Input für die zweite Phase, den *physikalischen Entwurf*. Die Aufgabe besteht hier darin, den logischen Entwurf physikalisch zu realisieren, das heißt die Zellen auf einer gegebenen Fläche (Silizium) anzuordnen und die Netze zu realisieren, das heißt durch elektrische Leitungen zu verbinden. Die Aufgabe wird dadurch erschwert, daß je nach gewählter Technologie bestimmte Entwurfsregeln (z. B. Mindestabstand von gewissen Zellen oder Netzen) eingehalten werden müssen und eine Zielfunktion wie beispielsweise die resultierende Fläche minimiert werden soll. Dieses Problem ist im allgemeinen zu komplex, um es direkt lösen zu können. In der Regel wird das Problem in zwei Teilprobleme aufgeteilt, die nacheinander gelöst werden. Ersteres beschäftigt sich mit der Anordnung der Zellen (*Plazierungsproblem*) und letzteres mit der Realisierung der Netze (*Verdrahtungsproblem*). Wir interessieren uns im folgenden für das Verdrahtungsproblem.

Gegeben ist eine Liste von Netzen. Jedes solche Netz besteht aus einer Menge von Punkten, die die Anschlußstellen der zu verbindenden Zellen spezifizieren. Diese Punkte werden auch *Pins* oder *Terminals* genannt. Wir sagen ein Netz ist *verdrahtet*, wenn das Netz realisiert worden ist, das heißt wenn die Terminals des Netzes durch elektrische Leitungen (Drähte)

verbunden worden sind. Wir sprechen von einem *k-terminalen Netz*, wenn k die Anzahl der zu verbindenden Terminals des Netzes ist. Gilt $k > 2$, so wird auch der Begriff *multiterminales Netz* verwendet. Wir werden im folgenden zwischen einem Netz und der Verdrahtung eines Netzes nicht unterscheiden, wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, was gemeint ist.

Zur Verdrahtung der Netze stehen in der Regel mehrere Ebenen, sogenannte *Schichten* oder *Lagen*, zur Verfügung. Wechselt ein Netz (genauer, die Verdrahtung eines Netzes) die Lage, so muß an dieser Stelle ein Loch, genannt *Via*, gebohrt werden. Die Verdrahtung eines Netzes erfolgt normalerweise auf horizontalen und vertikalen Linien, sogenannten *Spuren* oder *Tracks*. Trifft dies nicht zu, so sprechen wir von einer *freien* oder *gitterfreien* Verdrahtung.

Wie bereits oben kurz angedeutet, besteht das Verdrahtungsproblem darin, für alle Netze eine Verdrahtung zu finden, wobei gegebene Entwurfsregeln eingehalten werden müssen, und eine Zielfunktion zu optimieren ist.

Die Entwurfsregeln legen zum Beispiel fest, welchen Mindestabstand zwei Netze haben müssen, ob zwei Netze auf verschiedenen Lagen übereinander verdrahtet werden dürfen, wie lang bestimmte Netze höchstens sein dürfen und der gleichen mehr. Welche der Entwurfsregeln nun eingehalten werden müssen, hängt sehr stark von dem verwendeten Entwurfsstil ab. Dies gilt im besonderen Maße auch für die Zielfunktion. Deshalb wollen wir im folgenden kurz die wichtigsten Stile vorstellen. Vorweg sei bemerkt, daß die Fläche auf der die Zellen und Netze realisiert werden sollen, eingeteilt ist in einen Kernbereich, den sogenannten *Master*, und den äußeren Bereich, auf dem die Ein- und Ausgabezellen platziert sind. Die Entwurfsstile unterscheiden sich im wesentlichen durch den Aufbau des Masters.

(i) Entwurf für Allgemeine Zellen

Bei diesem Entwurfsstil können die Zellen beliebig auf dem Master angeordnet werden. Auch die Ausmaße der Zellen sind keinerlei Einschränkungen unterworfen. Ziel ist es, die Zellen so anzuordnen und die Netze so zu verdrahten, daß die resultierende Fläche möglichst klein ist.

(ii) Standard-Zellen Entwurf

Hier ist der Master unterteilt in einen Platzierungs- und Verdrahtungsbereich. Der Platzierungsbereich ist in Reihen gleicher Höhe eingeteilt. Die Zellen haben alle eben diese Höhe, können jedoch in der Breite differieren. Die Zellen müssen nun auf die Reihen so verteilt werden, daß zum Beispiel die längste Reihe möglichst kurz ist oder die Verdrahtungslänge minimiert wird. Die anschließende Verdrahtung erfolgt in den zwischen den Reihen liegenden Kanälen.

(iii) Gate-Array Entwurf

Im Gegensatz zu den beiden ersten Entwurfsstilen ist hier die Größe des Masters fest vorgegeben, jedoch erfolgt wieder eine Einteilung in Platzierungs- und Verdrahtungsbereich. Der Platzierungsbereich ist matrixförmig unterteilt in sogenannte *Basiszellen*. Die Breite (Höhe) der zu platzierenden Zellen ist ein Vielfaches der Breite (Höhe) dieser Basiszellen. Die Verdrahtung erfolgt in dem a-priori festgelegten Verdrahtungsbereich.

(iv) Sea-of-cells Entwurf

Dieser Stil unterscheidet sich von letzterem nur dadurch, daß keine Einteilung in Platzierungs- und Verdrahtungsbereich erfolgt. Das bedeutet, daß der gesamte Master matrixförmig in Basiszellen unterteilt ist. Das Verdrahtungsgebiet bilden diejenigen Basiszellen, die nicht von den platzierten Zellen überdeckt sind.

Bei den ersten beiden Entwurfstilen ist das primäre Ziel, die Gesamtfläche des Masters zu minimieren, dagegen steht bei den letzten beiden die Verdrahtbarkeit im Vordergrund. Allerdings läßt sich die Verdrahtbarkeit nur sehr schwer, wenn überhaupt, garantieren. Deshalb wird meist die Minimierung der Verdrahtungslänge als Zielfunktion verwendet. Ein weiterer heuristischer Grund, warum (oftmals auch bei den beiden ersten Entwurfstilen) die Verdrahtungslänge minimiert wird, liegt daran, daß eine elektronische Schaltung mit geringerer Verdrahtungslänge in der Regel weniger Fläche benötigt und damit indirekt die Minimierung der Fläche in (i) und (ii) beziehungsweise die Flächenrestriktion in (iii) und (iv) Berücksichtigung findet.

4.2. Dekomposition des Verdrahtungsproblems

Um die enormen Größenordnungen, die beim Verdrahtungsproblem auftreten können, bewältigen zu können, wird das Problem in der Praxis meist dekomponiert. In einem ersten Schritt wird die Homotopie der Netze bestimmt, das heißt festgelegt, wie die Netze zwischen den Zellen zu verbinden sind. Dieser Schritt wird auch als *globale Verdrahtung* bezeichnet. Anschließend werden die Netze gemäß der in der globalen Verdrahtung festgelegten Homotopie den Spuren und Lagen zugewiesen. Die zweite Phase bezeichnet man als *lokale Verdrahtung* oder *detaillierte Verdrahtung*. Ersteres Teilproblem wird meist in einem Graphen, dem sogenannten *globalen Verdrahtungsgraphen*, betrachtet, dessen Knoten (Kanten) Teilgebiete des Verdrahtungsgebietes repräsentieren. Zusätzlich erhalten die Kanten Kapazitäten, die angeben, wieviele Netze zwischen zwei Teilgebieten (in einem Teilgebiet) maximal gelegt werden können. Die Teilgebiete sind dabei so konzipiert, daß sich die anschließenden lokalen Verdrahtungsprobleme vereinfachen. Ein Beispiel einer solchen Konstruktion ist im nächsten Kapitel beschrieben.

Diese Vorgehensweise setzt natürlich voraus, daß eine Einteilung des Verdrahtungsgebiets in Teilgebiete möglich ist. Beispielsweise ergeben sich Schwierigkeiten, wenn die Zellen sehr transparent sind. Die *Transparenz* einer Zelle gibt an, wieviele Drähte durch die Zelle hindurch gelegt werden können. Ein weiteres Problem tritt auf, wenn die Verdrahtung auf mehreren Schichten erfolgt. Dann läßt sich nur schwer a-priori die Kapazität einer jeden Kante im Verdrahtungsgraphen abschätzen.

In solchen Fällen bleibt einem in der Regel nichts anderes übrig, als das Gesamtproblem zu betrachten. Aufgrund der enormen Größenordnungen kommen daher für praktische Anwendungen nur schnelle Heuristiken in Frage (siehe Kapitel 4.3.1). Allerdings sind beim VLSI-Design die Voraussetzungen meist so, daß eine Einteilung in globale und lokale Verdrahtung sinnvoll ist. Von daher beschäftigen wir uns in den nächsten beiden Kapiteln intensiver mit beiden Teilproblemen.

4.2.1. Globale Verdrahtung

Wie bereits oben erwähnt, wird das globale Verdrahtungsproblem meistens graphentheoretisch formuliert. Die Aufgabe besteht zunächst darin, das gesamte Verdrahtungsgebiet in Teilgebiete aufzuteilen und diese entweder den Knoten oder Kanten zuzuordnen. Es gibt sehr viele Varianten, eine solche Einteilung vorzunehmen. Diese hängen unter anderem von der zugrundeliegenden Technologie und den verwendeten Verfahren ab. Exemplarisch wollen wir hier eine Möglichkeit aufzeigen. Vergleiche dazu Abbildung 4.2.1.1. Das umschließende Rechteck stellt den Master dar. Die Rechtecke, die mit einer Diagonalen durchzogen sind, repräsentieren die Zellen. Die Verdrahtungsfläche (Fläche des Masters abzüglich der Fläche der Zellen) ist in rechteckige Teilgebiete (siehe gepunktete Linien) unterteilt. Wir führen einen Knoten für jedes dieser rechteckigen Verdrahtungsteilgebiete ein und eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn die zugehörigen rechteckigen Verdrahtungsgebiete benachbart sind. Sei $G = (V, E)$ der Graph, der sich aus dieser Konstruktion ergibt. Zusätzlich erhält jede Kante $e = uv$ eine Kapazität $c_e \in \mathbb{N}$, die angibt, wieviele Netze maximal zwischen den mit Knoten u und v assoziierten Teilgebieten verlaufen können. Außerdem erhält jede Kante ein Gewicht $w_e \in \mathbb{R}_+$, das den Abstand (in L_1 - oder L_2 -Norm) zwischen den Mittelpunkten der entsprechenden Gebiete angibt. Die Pins der einzelnen Netze werden jeweils dem Knoten zugeordnet, dessen zugehöriges Gebiet das jeweilige Pin enthält beziehungsweise dem jeweiligen Pin am nächsten liegt. Die Aufgabe besteht nun darin, jedes Netz in G so zu verdrahten, daß die Kapazitätsbedingungen eingehalten werden und die Gesamtverdrahtungslänge minimiert wird.

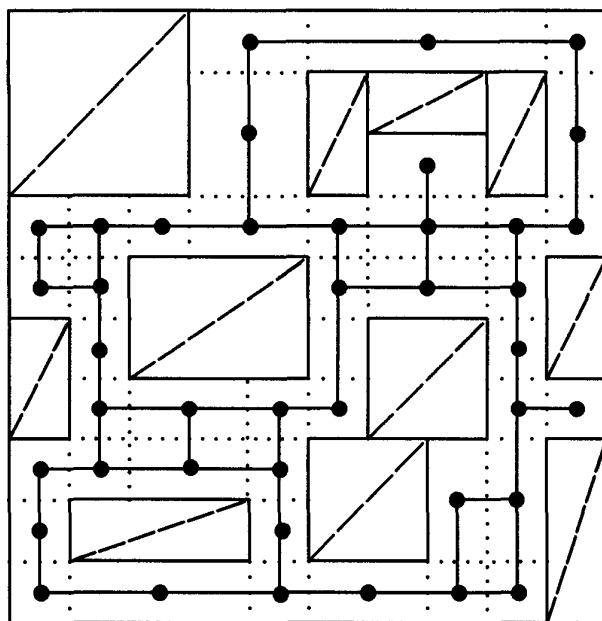


Abbildung 4.2.1.1

Wie leicht zu erkennen ist, entspricht die hier formulierte Aufgabe genau einer Instanz des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems. Wir werden deshalb in Kapitel 4.3.1

die Lösungsansätze, die aus dem Bereich des VLSI-Design zu diesem Problem kommen, genauer untersuchen.

4.2.2. Lokale Verdrahtung

Im Anschluß an das globale Verdrahtungsproblem muß das lokale Verdrahtungsproblem gelöst werden. Das heißt, die Teilverdrahtungsgebiete, die im globalen Verdrahtungsgraphen durch Knoten beziehungsweise Kanten repräsentiert wurden, müssen verdrahtet werden. Dabei sind die einzelnen Netze den Spuren und Lagen so zuzuweisen, daß die in der globalen Verdrahtung festgelegte Homotopie eingehalten wird. Meistens werden diese Probleme in Gittergraphen formuliert. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir uns auf Probleme im Gittergraphen beschränken. Der an gitterfreien Verdrahtungsmodellen interessierte Leser sei auf [Le90] verwiesen, in dem ein guter Überblick zu finden ist.

Abhängig von der Technologie und dem gewählten globalen Verdrahtungsgraphen ergeben sich unterschiedliche Formen des lokalen Verdrahtungsproblems. Diese können nach zwei voneinander unabhängigen Kriterien eingeteilt werden.

1. Zum einen lassen sich die lokalen Verdrahtungsprobleme unterscheiden, inwieweit bei der Auslegung der Netze auf die Spuren die Zuweisung zu den Lagen Berücksichtigung findet. Daraus resultieren die folgenden Modelle:

(a) Mehrlagen-Modell

Zugrunde liegt ein k -dimensionaler Gittergraph, wobei k der Anzahl der Lagen entspricht. Die Netze müssen in diesem Graphen knotendisjunkt verdrahtet werden. Dieses Modell kommt den Technologieanforderungen sicherlich sehr nah, hat allerdings den Nachteil, daß die sich ergebenden Graphen sehr groß sind.

(b) Planares Modell

Der Unterschied zu obigem Modell ist, daß nun ein planarer Gittergraph zugrunde liegt. Die Netze müssen ebenfalls knotendisjunkt verdrahtet werden. Zwar entfällt in diesem Modell die Lagenzuweisung, jedoch ist es sehr restringiert. Es gibt nur sehr wenige praktische Anwendungen dieses Modells.

(c) Manhattan Modell

Gegeben ist ein planarer Gittergraph. Die Netze müssen kantendisjunkt verdrahtet werden mit der Einschränkung, daß sich verschiedene Netze an einem Knoten nur kreuzen dürfen. Sogenannte *Knock-knees* (vgl. Abbildung 4.2.2.1) sind nicht erlaubt. Durch diese Einschränkung ist gewährleistet, daß eine Verdrahtung auf zwei Lagen immer möglich ist, jedoch verursacht diese Restriktion eventuell unnötig lange Verbindungen.

(d) Knock-knee Modell

Zugrunde liegt wieder ein planarer Gittergraph, gesucht ist eine kantendisjunkte Verdrahtung der Netze. Hier fällt die Einschränkung des Manhattan Modells weg, das heißt *Knock-knees* sind erlaubt. Somit ergeben sich oft kürzere Verbindungen als im letzteren Modell, der große Nachteil ist jedoch das die Lagenzuweisung unberücksichtigt bleibt. Brady und Brown geben in [BB84] einen Algorithmus an, der eine

Verdrahtung auf 4 Lagen immer gewährleistet. Jedoch ist es \mathcal{NP} -vollständig zu entscheiden, ob 3 Lagen ausreichen [Li84].

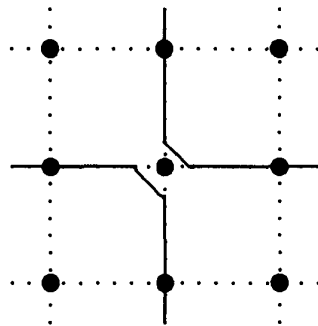


Abbildung 4.2.2.1

2. Die zweite Einteilung der lokalen Verdrahtungsprobleme ergibt sich aus dem Aufbau der Verdrahtungsgebiete.

(a) Kanal-Verdrahtung

Zugrundeliegt ein vollständiger, rechtwinkliger Gittergraph. Die Terminals der Netze sind nur am oberen und unteren Kanalrand erlaubt. Dieses Modell erlaubt es, die Breite des Kanals (= die Anzahl horizontaler Linien) zu variieren. Damit ist die Größe des Verdrahtungsgebiets a-priori nicht festgelegt.

(b) Switchbox-Verdrahtung

Gegeben ist ebenfalls ein vollständiger, rechtwinkliger Gittergraph. Die Terminals der Netze sind nun an allen vier Rändern verteilt. Dies legt die Größe des Verdrahtungsgebiets fest.

(c) Allgemeine Verdrahtung

Hier betrachtet man einen beliebigen Gittergraphen. Die Terminals der Netze dürfen an einem beliebigen Loch des Gittergraphen liegen. Zu beachten ist, daß im Gegensatz zu den beiden obigen Modellen die Homotopie der Netze nicht mehr trivial ist und deshalb mit berücksichtigt werden muß.

Diese zwei Arten der Kategorisierung lassen sich beliebig kombinieren. Zum Beispiel ergibt sich durch Kombination von (1)(d) und (2)(b) ein Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell. Hinzu kommt noch, daß je nach Modell unterschiedliche Zielfunktionen optimiert werden können. Mögliche Zielfunktionen sind die

- Minimierung des Verdrahtungsgebiets,
- Minimierung der Verdrahtungslänge,
- Minimierung der Anzahl von Vias.

Die Minimierung des Verdrahtungsgebiets findet überwiegend beim Kanal-Verdrahtungsproblem Anwendung, da hier, wie bereits erwähnt, die Größe des Verdrahtungsgebiets von vorn herein nicht festgelegt ist. Bei fest vorgegebenen Verdrahtungsgebiet wird dagegen

in der Regel die Verdrahtungslänge minimiert. Zusätzlich läßt sich zum Beispiel beim Mehrlagen-Modell die Anzahl der Vias minimieren.

Diese Kombinationsmöglichkeiten ergeben eine Vielzahl von Varianten des lokalen Verdrahtungsproblems, die alle in dieser oder leicht abgewandelter Form in der Literatur studiert und diskutiert werden. Einen umfassenden und hervorragenden Überblick über diese Probleme und deren Lösungsmethoden ist in [Le90] zu finden.

Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir dennoch die Lösungsansätze derjenigen lokalen Verdrahtungsprobleme näher betrachten, auf die sich unser Modell anwenden läßt. Dazu zählt das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell. Zugrunde liegt ein vollständiger, rechtwinkliger Gittergraph $G = (V, E)$. Wir versehen jede Kante mit Kapazität eins. Damit ist das Problem, die Netze kantendisjunkt in G zu verdrahten, äquivalent zum (gewichteten) Steinerbaumpackungs-Problem aus Kapitel 3.1. Daher wollen wir im nächsten Kapitel ausführlicher auf Switchbox-Verdrahtungsprobleme eingehen.

4.3. Zusammenstellung einiger Lösungsverfahren

Wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, lassen sich eine Vielzahl von Teilproblemen des Verdrahtungsproblems betrachten. Zu all diesen Modellen werden in der Literatur die unterschiedlichsten Lösungsansätze studiert und diskutiert. Wir werden uns in diesem Kapitel auf Verfahren zur Lösung des globalen Verdrahtungsproblems und des Switchbox-Verdrahtungsproblems beschränken, da sich unser Modell auf diese beiden Probleme anwenden läßt. Selbst hier ist die Palette der Lösungsvorschläge riesig. Es kann nicht Aufgabe dieser Dissertation sein, einen umfassenden Überblick über alle möglichen Verfahren zu geben. Ziel dieses Kapitels ist es vielmehr anhand einiger Ansätze einen Eindruck zu geben, wie in der Praxis die Probleme angegangen werden und welche Schwierigkeiten dabei auftreten. Der an einem umfassenden Überblick interessierte Leser sei wiederum auf [Le90] verwiesen.

4.3.1. Globale Verdrahtung

Zur Lösung des globalen Verdrahtungsproblems stellen wir zwei Ansätze vor. Zum einen wollen wir die sogenannten sequentiellen Verfahren betrachten. Diese werden in der Praxis wohl am meisten verwendet. Dies ist nicht zuletzt darin begründet, daß sie sich nicht nur auf das globale Verdrahtungsproblem, sondern auch auf das gesamte Verdrahtungsproblem sowie das lokale Verdrahtungsproblem anwenden lassen. Als Beispiel für ein Verfahren, das versucht die Netze simultan zu behandeln, wollen wir einen hierarchischen Ansatz von Burstein und Pelavin [BP83] vorstellen. Die Idee besteht darin das Gesamtproblem iterativ in kleine Teilprobleme zu zerlegen, die dann mit Hilfe eines ganzzahligen, linearen Programms gelöst werden.

Sequentielle Verfahren

Wie der Name bereits aussagt, werden bei sequentiellen Verfahren die Netze sequentiell, das heißt ein Netz nach dem anderen, abgearbeitet. Dabei wird a-priori eine Reihenfolge festgelegt, gemäß der die Netze verdrahtet werden. Bei der Suche nach einer Verbindung für ein Netz werden jedoch nur diejenigen Netze berücksichtigt, die bereits gelegt worden sind. Ein wesentlicher Nachteil dieser Vorgehensweise ist offensichtlich: Für Netze, die sehr spät an die Reihe kommen, müssen oft große Umwege in Kauf genommen werden, da viele Verbindungsmöglichkeiten durch bereits verdrahtete Netze ausgeschlossen sind.

Um diesen Nachteil zu kompensieren, werden meist sogenannte *ripup-and-reroute* Methoden verwendet. Dabei wird die Verbindung eines Netzes, die ein noch zu verdrahtendes Netz blockiert, zunächst gelöscht (= ripup). Danach wird letzteres Netz verdrahtet und anschließend versucht, das gelöschte Netz nochmals zu verbinden (= reroute).

Durch diese Methode der Nachbesserung läßt sich natürlich nicht sicherstellen, daß eine Verdrahtung aller Netze gefunden wird, falls eine existiert. Solche Verfahren scheitern in der Regel, wenn zwei Netze, die sich gegenseitig behindern, einen Umweg machen müssen. Vergleiche zum Beispiel den in Abbildung 4.3.1.1 dargestellten 3×3 Gittergraphen und die zwei zu verbindenden Netze, wobei die Terminals des einen Netzes durch Rechtecke, die des anderen durch Kreise dargestellt sind.

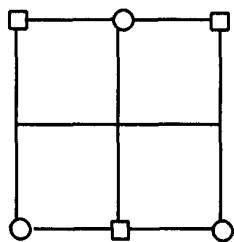


Abbildung 4.3.1.1

Dennoch sind sequentielle Verfahren in der Praxis sehr beliebt, da sie das Verdrahtungsproblem auf das Problem, ein Netz zu verdrahten, reduzieren und damit sehr vereinfachen. Das Problem, eine minimale Verbindung für ein Netz zu finden, ist jedoch, wie wir bereits aus Kapitel 3.1 wissen, immer noch \mathcal{NP} -schwer. Deshalb werden im allgemeinen Heuristiken zu dessen Lösung verwendet. Weist dabei der zugrundeliegende Graph keine besondere Struktur auf, so werden Steinerbaum-Heuristiken verwendet. Vergleiche dazu Kapitel 3.2.1. Oftmals sind die gegebenen Verdrahtungsgraphen spezielle (k -dimensionale) Gittergraphen. Dies gilt insbesondere dann, wenn eine Einteilung in globale und lokale Verdrahtung nicht möglich ist, und das gesamte Verdrahtungsproblem betrachtet werden muß (vergleiche Einleitung zu Kapitel 4.2). In solchen Fällen kommt erschwerend hinzu, daß die Graphen sehr groß sind. Dann wird das Problem oft noch weiter zerlegt, und nur das Problem, einen (kürzesten) Weg zwischen zwei Terminals zu finden, betrachtet. Ein Algorithmus, der die spezielle Struktur eines Gittergraphen ausnützt, um einen (kürzesten) Weg zwischen zwei Terminals zu finden, wird im VLSI-Jargon als *Maze Router* bezeichnet.

Ein erster Algorithmus, der die spezielle Struktur eines Gittergraphen ausnützt, um einen kürzesten Weg zwischen zwei Terminals zu finden, geht auf Lee [L61] zurück. Der Algorithmus läuft nach der Idee des Dijkstra-Algorithmus [D59] ab. Für dieses Problem wurden in der Folgezeit eine Reihe von schnelleren und effizienteren Algorithmen entwickelt. Dazu gehören Verfahren, die effiziente Datenstrukturen verwenden. Andere wiederum versuchen, nicht alle Knoten des Graphen abzulaufen oder nur einen Teilgraphen des zugrundeliegenden Graphen zu betrachten. Wir wollen hier nicht näher auf diese Möglichkeiten eingehen. Ein guter Überblick ist wiederum in [Le90] zu finden.

Ein hierarchischer Ansatz

Wir wollen in diesem Abschnitt die Idee eines hierarchischen Ansatzes, der auf Burstein und Pelavin [BP83] zurückgeht, skizzieren. Das Verfahren ist für den Sea-of-cells Entwurfstil konzipiert. Gegeben ist ein Master in Form einer $m \times n$ – dimensionalen Matrix $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Jedes Element b_{ij} repräsentiert eine Basiszelle des Masters. Um die Hierarchie leichter erklären zu können, gehen wir davon aus, daß $n = m = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ ist. In jedem Iterationsschritt t repräsentieren wir den Master durch eine $r(t) \times c(t)$ – dimensionale Matrix $S^t = (s_{ij}^t)_{\substack{i=1,\dots,r(t) \\ j=1,\dots,c(t)}}$. Jede sogenannte Superzelle s_{ij}^t repräsentiert eine $\frac{n}{r(t)} \times \frac{m}{c(t)}$ – dimensionale Matrix von Basiszellen. Wir beginnen mit $t = 1$, $r(1) = 1$ und $c(1) = 1$. In jedem Verfeinerungsschritt werden alle Superzellen alternierend in horizontaler und vertikaler Richtung halbiert. Dies wird solange durchgeführt, bis jede Superzelle einer Basiszelle entspricht ($t = T := 2 \cdot l$). Halbieren wir die Superzellen horizontal, so gilt $r(t + 1) = 2 \cdot r(t)$, $c(t + 1) = c(t)$ und s_{ij}^t wird durch $s_{2i-1,j}^{t+1}$ und $s_{2i,j}^{t+1}$ repräsentiert. Bei vertikaler Unterteilung gilt $r(t + 1) = r(t)$, $c(t + 1) = 2 \cdot c(t)$ und s_{ij}^t wird durch $s_{i,2j-1}^{t+1}$ und $s_{i,2j}^{t+1}$ repräsentiert.

Es bleibt die Frage zu klären, wie man aus einer Verdrahtung in Iteration t eine Verdrahtung in Iteration $t + 1$ erhält. Dazu interpretieren wir jede Matrix S^t , $t \in \{1, \dots, T\}$ als einen vollständigen, rechtwinkligen Gittergraphen, wobei jeder Knoten genau einer Superzelle entspricht.

Gehen wir davon aus, daß jedes Netz in Iteration t verbunden ist, das heißt es ist festgelegt durch welche Superzellen (beziehungsweise über welche Knoten im Gittergraphen) jedes Netz zu laufen hat (vgl. Abbildung 4.3.1.2 (a)). Wird nun beispielsweise eine horizontale Unterteilung vorgenommen, so versuchen Burstein und Pelavin eine zulässige Verdrahtung zu erhalten, indem sie $r(t)$ Probleme auf einem $2 \times c(t)$ Gitter betrachten (vgl. Abbildung 4.3.1.2 (b)). Die Lösungen dieser $r(t)$ Probleme setzen sie nun in natürlicher Weise zusammen und erhalten eine Verbindung für jedes Netz in Iteration $t + 1$ (vgl. Abbildung 4.3.1.2 (c)).

Damit reduziert sich das Gesamtproblem auf das Verdrahtungsproblem in einem $2 \times n$ Gittergraphen (beachte: $c(t) \leq n$). Zu dessen Lösung schlagen sie zwei Möglichkeiten vor.

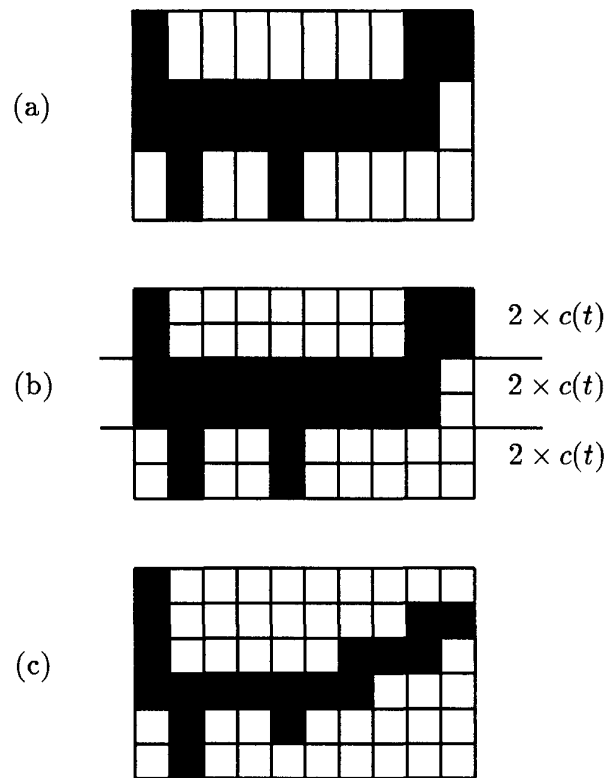
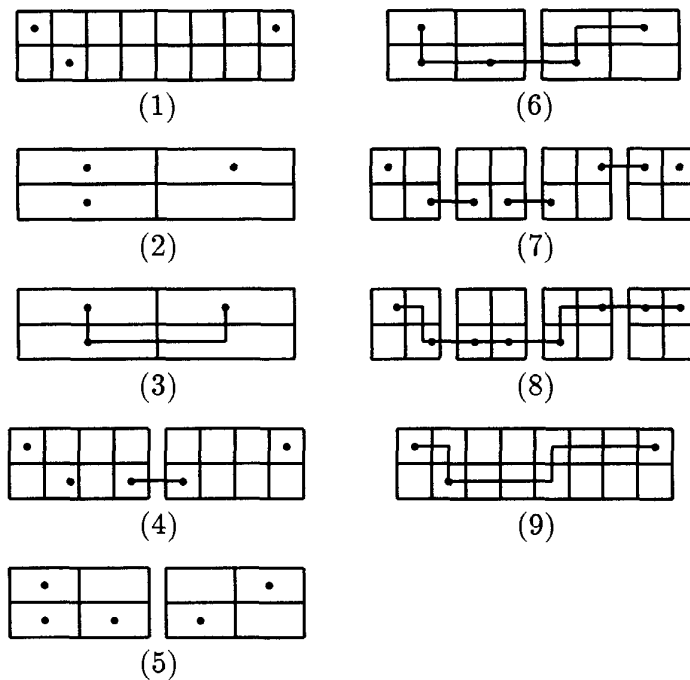


Abbildung 4.3.1.2

Der erste Vorschlag zerlegt das Verdrahtungsproblem auf einem $2 \times n$ Gittergraphen in eine Folge von Verdrahtungsproblemen auf einem 2×2 Gittergraphen (vgl. Abbildung 4.3.1.3). Auf einem 2×2 Gittergraph ist die Anzahl Terminals eines Netzes 2, 3 oder 4. Für 2-terminale Netze gibt es nur 6 unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten der Terminals (Burstein und Pelavin sprechen von Typen), für 3-terminale Netze gibt es 4 Typen und für 4-terminale Netze 1 Typ. Für jeden dieser Typen gibt es nun wiederum nur eine geringe Anzahl von unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten. Um dies zu modellieren, führen sie Variablen x_{ij} ein, die angeben, wie oft Lösungsmöglichkeit j für Typ i verwendet wird. Insgesamt erhält man durch Enumeration aller Möglichkeiten 28 Variablen. Durch Berücksichtigung von Kapazitätsbeschränkungen, Via-Restriktionen und durch Einführung von Schlupfvariablen erhalten sie ein ganzzahliges, lineares Programm mit 47 Variablen und 19 Nebenbedingungen. Eine Lösung dieses ganzzahligen, linearen Programms liefert eine Lösung des Verdrahtungsproblems in einem 2×2 Gittergraphen.

Vorteil dieser Vorgehensweise ist sicherlich, daß alle Netze simultan behandelt werden, und daß die Größe des ganzzahligen, linearen Programms unabhängig von der Anzahl der Netze ist. Ein großer Nachteil liegt darin, daß durch die Dekomposition des Problems nachfolgend auftretende Kapazitätsbeschränkungen nicht mehr erfüllt werden können. Dies tritt nach ihren Erfahrungen besonders dann auf, wenn die Kapazitäten sehr unterschiedlich sind.



Die Abbildungen (1) bis (9) zeigen an einem Netz T wie durch iteratives Lösen des Verdrahtungsproblems auf einem 2×2 Gittergraph eine Verdrahtung auf einem 2×8 Gitter bestimmt wird. In (1) sind die Terminals des Netzes auf einem 2×8 Gitter dargestellt. Zuerst wird das Verdrahtungsproblem auf dem in (2) dargestellten Gitter gelöst. In (3) ist die Lösung für das Netz T dargestellt. In (4) wird das Problem in zwei 2×4 Gitter zerlegt unter Berücksichtigung der Lösung in (3). Dieser Vorgang wird iteriert (Bilder (5) bis (8)) und die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammengesetzt (Bild (9)).

Abbildung 4.3.1.3

In solchen Fällen schlagen sie zur Lösung des Verdrahtungsproblems auf einem $2 \times n$ Gittergraphen ein sequentielles Verfahren vor. Für jedes Netz berechnen sie einen (minimalen) Steinerbaum mit Hilfe eines dynamischen Programms.

4.3.2. Switchbox-Verdrahtung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einigen Lösungsansätzen für das Switchbox-Verdrahtungsproblem beschäftigen. Wir werden zunächst exakte Verfahren behandeln. Unter einem exakten Verfahren verstehen wir in diesem Zusammenhang einen Algorithmus, der immer eine Lösung findet, falls eine existiert. Im zweiten Teil skizzieren wir einige heuristische Lösungsansätze. Meist wird hier direkt eine Lösung auf zwei Lagen beziehungsweise im 2-dimensionalen Gittergraphen gesucht.

Exakte Verfahren

Exakte Verfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem sind bislang nur für den Fall, 2-terminale Netze im Knock-knee Modus zu verdrahten, bekannt. Dies hat folgenden Grund. In diesem Fall ist das Problem, N Netze zu verdrahten, äquivalent zu dem Problem, N kantendisjunkte Wege in dem zugrundeliegenden Graphen zu packen. Exakte Verfahren können daher die theoretischen Resultate über das Packen kantendisjunkter Wege verwenden (vergleiche Kapitel 3.2.2). In diesem Kapitel wollen wir auf einige Verfahren verweisen, die diese Ergebnisse ausnützen.

Wir gehen also davon aus, daß wir einen Graphen $G = (V, E)$ gegeben haben und eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ mit $T_k = \{s_k, t_k\}$ für $k = 1, \dots, N$. Bezeichne ferner $H = (V, F)$ den Bedarfsgraphen.

Betrachten wir zunächst noch einmal den Fall, der in Satz (3.2.2.4) beschrieben ist. Sei G planar und $G + H$ eulersch. Ferner liegen alle Terminalmengen an einer Fläche, ohne Beschränkung der Allgemeinheit der äußeren Fläche O_G . Zur Erinnerung sei erwähnt, daß wir in Kapitel 3.2.2 $f(X) = \delta_G(X) - \delta_H(X)$ für einen von $X \subseteq V$ induzierten Schnitt definiert haben. Betrachten wir nun den folgenden Algorithmus.

(4.3.2.1) Algorithmus

Input:

G planar, $G + H$ eulersch, $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$.

Output:

N kantendisjunkte Wege P_1, \dots, P_N , so daß s_k mit t_k durch P_k verbunden wird für $k = 1, \dots, N$ oder die Meldung, daß keine Lösung existiert.

- (1) Falls G nicht 2-fach knotenzusammenhängend ist, zerlege G in seine 2-fach knotenzusammenhängenden Komponenten und wende die folgenden Schritte auf jede dieser Komponenten an.
- (2) Sei $e \in O_G$ eine Kante, die in einem von X induzierten Schnitt liegt, der minimal bzgl. f ist.
- (3) Gilt $f(X) < 0$, dann STOP (es existiert keine Lösung).
- (4) Nummeriere $V(O_G)$ zyklisch, so daß $V(O_G) = \{v_0, v_1, \dots, v_k = v_0\}$ mit $e = v_0 v_1$.
- (5) Gilt $f(X) = 0$, dann
- (6) wähle knotenminimalen, saturierten Schnitt X' mit $v_1 \in X'$ und $v_0 \notin X'$;
- (7) wähle $[v_i, v_j] \in \delta_H(X')$ mit $v_j \notin X'$, j maximal;
- (8) Gilt $f(X) > 0$, dann
- (9) wähle $[v_i, v_j] \in F$ beliebig;
- (10) Setze $G := G \setminus e$ und $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{v_i, v_j\} \cup \{\{v_j, v_0\}, \{v_i, v_1\}\}$.
- (11) Gilt $E \neq \emptyset$, gehe nach (1)
- (12) Gilt $s_k \neq t_k$ für ein $\{s_k, t_k\} \in \mathcal{N}$, dann STOP (es existiert keine Lösung).
- (13) Bestimme Wege P_1, \dots, P_N gemäß den Zerlegungen in (10) und gib diese aus.
- (14) STOP.

Der Beweis von Okamura und Seymour [OS81] zu Satz (3.2.2.4) zeigt die Korrektheit von Algorithmus (4.3.2.1). Der schwierige Teil besteht darin, zu zeigen, daß die Wahl

des Schnittes X' in Schritt (6) und die Wahl des Netzes in Schritt (7) garantieren, daß $G \setminus e$ und $\mathcal{N} \setminus \{v_i, v_j\} \cup \{\{v_j, v_0\}, \{v_i, v_1\}\}$ lösbar ist, wenn G und \mathcal{N} lösbar ist. Beachte, daß die Reduzierung des Problems in Schritt (10) gewährleistet, daß $G + H$ eulersch und $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$ bleibt. Die Behauptung folgt dann per Induktion über $|E|$. Es ist einfach zu sehen, wie die Netze in Schritt (1) auf die 2-fach knotenzusammenhängenden Komponenten aufgeteilt werden müssen. Schließlich sei noch zur Bestimmung der Wege in Schritt (13) bemerkt, daß ein Weg P für Terminalmenge $\{v_i, v_j\}$ in Schritt (10) sich zusammen setzt aus dem Weg P_1 für $\{v_j, v_0\}$, dem Weg P_2 für $\{v_i, v_1\}$ und der Kante e .

Becker und Mehlhorn geben in [BM86] eine Implementierung des Algorithmus in $O(n^2)$. Dieser Algorithmus eignet sich offenbar auch zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems, sofern die Voraussetzung, $G + H$ eulersch, erfüllt ist. Durch das Ausnützen der speziellen Struktur eines Switchboxes läßt sich die Laufzeit weiter reduzieren. Ist der dem Switchbox-Verdrahtungsproblem zugrundeliegende Gittergraph G vollständig, aber nicht notwendigerweise rechtwinklig, erhalten Kaufmann und Mehlhorn [KM86] eine Laufzeit von $O(n \log^2 n)$, falls $G + H$ eulersch ist. Ist dagegen $G + H$ nicht eulersch, so reduzieren Kaufmann und Mehlhorn das Problem auf ersteren Fall durch Einführen zusätzlicher Netze auf folgende Weise. Da G ein vollständiger Gittergraph ist, können ungerade Knoten von $G + H$ nur am Rand von G auftreten. Sei U die Menge der ungeraden Knoten. Es werden nun Netze eingeführt, die jeweils zwei Knoten aus U verbinden, so daß $G + H$ eulersch wird (beachte, $|U|$ gerade). Kaufmann und Mehlhorn geben an, wie die neuen Netze zu wählen sind, so daß die Lösbarkeit des Problems erhalten bleibt. Die Laufzeit des Algorithmus erhöht sich damit auf $O(n \log^2 n + |U|^2)$.

All diese Algorithmen verwenden Satz (3.2.2.4) als Basis für den Beweis ihrer Korrektheit. Dagegen verwenden Mehlhorn und Preparata [MP86] zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems, deren Gittergraph vollständig und rechtwinklig ist, die Charakterisierung von Frank [F82], siehe Satz (3.2.2.6). Damit erzielen sie eine Laufzeit von $O(b \log b)$, wobei $b = |V(O_G)|$ (= der Umfang des Rechtecks) ist.

Ein guter Überblick über exakte Algorithmen zur Lösung der verschiedenen Formen des Switchbox-Verdrahtungsproblems ist in [KM90] zu finden.

Heuristische Verfahren

In diesem Abschnitt möchten wir die Ideen einiger heuristischer Verfahren zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems aufzeigen. Alle Ansätze verwenden entweder das Mehrlagen Modell oder das Manhattan Modell. Veröffentlichungen zum Knock-knee Modell sind uns nicht bekannt.

Das erste Verfahren, das wir erwähnen wollen, haben wir bereits bei den globalen Verdrahtungsansätzen betrachtet. Der hierarchische Ansatz von Burstein und Pelavin [BP83] läßt sich offensichtlich auch direkt für das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Manhattan Modus anwenden: Zugrunde liegt ein vollständiger, rechtwinkliger Gittergraph, alle Kanten erhalten Kapazität eins. Die Via-Restriktionen, auf die oben nicht näher eingegangen

wurde, sind eine Einschränkung für die Knoten. Sie geben an, wieviele Vias an einem Gitterknoten des Graphen erlaubt sind. Setzen wir diese Schranke auf eins für alle Knoten, so erhalten wir das Manhattan Modell für das Switchbox-Verdrahtungsproblem.

Ein anderes Verfahren, das auf Luk [Lu85] zurückgeht, verwendet ebenfalls das Manhattan Modell. Er versucht, die Vorgehensweise eines Kanal-Verdrahtungsalgorithmus auf das Switchbox-Verdrahtungsproblem zu erweitern. Die Idee besteht darin, das Verdrahtungsgebiet spaltenweise von links nach rechts zu durchlaufen. In jeder Spalte (Iteration) werden die Netze den horizontalen Tracks zugeordnet. Genauer gesagt, werden die Netze, die bereits horizontale Tracks beanspruchen, weitergeführt unter Berücksichtigung der noch zu verbindenden (also weiter rechts liegenden) Terminals. Netze, die in der aktuellen Spalte ein Terminal haben, werden freien horizontalen Tracks zugewiesen. Reicht die aktuelle Anzahl horizontaler Tracks nicht aus, werden zusätzliche eingeführt. Ebenso werden am Ende weitere Spalten eingeführt, falls die rechts liegenden Terminals nicht angeschlossen werden können. Jede Entscheidung im Algorithmus basiert auf sehr heuristischen Argumenten. Das gilt insbesondere auch für die Auswahl der Richtung (von links nach rechts, von oben nach unten, oder jeweils umgekehrt), in der der Gittergraph durchlaufen wird.

Ein drittes Verfahren, genannt BEAVER [CH88], verwendet das 2-Lagen Modell. Es läuft in vier Phasen ab. In der ersten Phase werden nur Terminals betrachtet, die mit genau einem Richtungswechsel, einem sogenannten *bend*, verbunden werden können. Im zweiten Schritt sind zusätzlich geradlinige Verbindungen und Verbindungen mit zwei Richtungswechseln erlaubt, um zwei Komponenten eines Netzes zu verdrahten. Anschließend wird versucht, die noch verbleibenden Komponenten mit einem Maze Router zu verdrahten. Die letzte Phase weist Verbindungen, deren Lage noch nicht eindeutig festgelegt ist, eine solche zu. Dabei wird versucht, die Anzahl Vias zu minimieren. Die Idee dieser Aufteilung in vier Phasen ist, zeitintensive Algorithmen und Verbindungen mit vielen Richtungswechseln nur zu verwenden, wenn sie unbedingt notwendig sind. Allerdings läuft jede der vier Phasen sequentiell ab, das heißt es wird eine Reihenfolge festgelegt, in der die Netze abgearbeitet werden.

Die Qualität der aufgeführten heuristischen Verfahren läßt sich nur schwer beurteilen. Es gibt eine Reihe von Benchmarks, an denen sich die Verfahren messen. Diese Benchmarks legen allerdings nur das Switchbox (also die Größe des Verdrahtungsgebiets und die Lage der Terminals der Netze) fest, nicht jedoch den Verdrahtungsmodus. Ein exakter Vergleich ist deshalb selbst hier nicht möglich. Die meisten der in der Literatur verwendeten Benchmarks sind in [CH88] zu finden. Wir werden auf diese näher in Kapitel 8.2 eingehen.

Teil II. Ein polyedrischer Ansatz

Wir haben in Teil I dieser Arbeit das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem vorgestellt. Aus Kapitel 3 wissen wir, daß nicht nur das Optimierungsproblem \mathcal{NP} -schwer ist, sondern bereits das Problem, eine zulässige Lösung zu finden, \mathcal{NP} -vollständig ist. Wir haben in Kapitel 4 gesehen, welche hohe praktische Relevanz das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem hat. Außerdem haben wir dargelegt, wie in der Praxis versucht wird, dieses Problem zu lösen. Die meisten dieser Verfahren sind heuristischer Natur. Ausnahmen bilden die in Kapitel 3.2.2 dargestellten Verfahren. Für das Packen kantendisjunkter Steinerbäume sind bisher keine exakten Lösungsverfahren bekannt (zumindest dem Autor nicht). Darüber hinaus fand das Bestimmen von unteren Schranken in der Literatur bisher kaum Beachtung. Mit Hilfe unterer Schranken kann die Qualität einer (heuristisch) gefundenen Lösung beurteilt werden. Untere Schranken sind daher insbesondere für diejenigen Probleme wichtig, für die es nur schwer möglich ist, eine optimale Lösung zu bestimmen, aber für die es von Bedeutung ist, die Güte einer Lösung beurteilen zu können.

Untere Schranken und gegebenenfalls eine Optimallösung können unter Verwendung eines polyedrischen Ansatzes bestimmt werden. Polyedrische Ansätze wurden bereits für viele praxisrelevante, \mathcal{NP} -schwere Probleme erfolgreich eingesetzt. Dazu zählen zum Beispiel das Traveling-Salesman-Problem ([GH89], [PR91]), das lineare Anordnungsproblem [GJR84], der Entwurf ausfallsicherer Netzwerke [GMS92] und viele mehr. Der Erfolg dieser Verfahren motivierte uns, ein solches auch für das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem zu entwickeln. Allerdings sind wir bei diesem Problem mit der zusätzlichen Schwierigkeit konfrontiert, daß bereits das Finden einer zulässiger Lösung \mathcal{NP} -vollständig ist. Diese Tatsache erschwert die Aufgabe ungemein, macht es aber gleichzeitig interessant, sie zu studieren. Ein polyedrischer Ansatz für das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem gliedert sich im wesentlichen in die folgenden Schritte.

Zunächst definiert man ein Polyeder P_I , wobei jede Ecke des Polyeders genau einer Steinerbaumpackung entspricht und umgekehrt jede Steinerbaumpackung genau zu einer Ecke des Polyeders korrespondiert. Das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem reduziert sich damit auf das Problem, die gegebene lineare Zielfunktion über dem Polyeder P_I zu minimieren. Es gibt viele Möglichkeiten, ein solches Polyeder zu definieren. Wir beschäftigen uns damit in Kapitel 5.

Das Polyeder P_I ist durch seine Knoten beschrieben. Was wir allerdings brauchen, um Verfahren zur Lösung linearer Programme verwenden zu können, ist eine Beschreibung von P_I durch gültige beziehungsweise facetten-definierende Ungleichungen. Eine vollständige Beschreibung zu finden, können wir nicht erwarten, da das Problem \mathcal{NP} -schwer ist. Der Erfolg eines polyedrischen Ansatzes hängt jedoch in großem Maße davon ab, wie gut das Polyeder durch seine facetten-definierenden und gültigen Ungleichungen beschrieben werden kann. Deshalb beschäftigen wir uns in Kapitel 6 intensiv mit diesem Problem.

Die Anzahl gültiger Ungleichungen, die wir in Kapitel 6 für das Polyeder angeben, ist einfach zu groß, um das zugehörige lineare Programm explizit lösen zu können. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu vermeiden, bieten sogenannte Schnittebenenverfahren. Wir werden in Kapitel 7 ausführlich ein solches Schnittebenenverfahren für das Steinerbaumpackungs-Problem vorstellen.

Den Abschluß von Teil II dieser Arbeit bildet die Implementierung des in Kapitel 7 vorgestellten Verfahrens und die Darstellung der Ergebnisse.

5. Packen von Steinerbäumen als ganzzahliges lineares Programm

Ziel dieses Kapitels ist es, ein geeignetes Polyeder zur Entwicklung eines polyedrischen Ansatzes für das (gewichtete) Steinerbaumpackungs-Problem auszuwählen. Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, ein solches Polyeder zu definieren. Wir werden drei alternative Formulierungen in diesem Kapitel untersuchen, ihre Vor- und Nachteile abwägen und uns daraufhin für eine dieser Alternativen entscheiden. Wir gehen für dieses Kapitel immer davon aus, daß wir eine beliebige Instanz (G, \mathcal{N}, c, w) des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems gegeben haben.

5.1. Eine kanonische Formulierung

Nach unserem Verständnis ist eine erste und natürliche Art, das Problem als ganzzahliges, lineares Programm zu formulieren, für jede Kante des zugrundeliegenden Graphen und für jedes Netz eine Variable einzuführen. Dazu betrachten wir den $N \cdot |E|$ -dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^{N \times E}$ (vergleiche Kapitel 2.2) und führen Variablen x_e^k für alle Kanten $e \in E$ und alle Netze $k = 1, \dots, N$ ein, mit der Interpretation

$$x_e^k = \begin{cases} 1, & \text{falls Kante } e \text{ zur Verbindung von Netz } k \text{ verwendet wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir folgendes Polyeder:

$$(5.1.1) \quad \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) := \text{conv} \left\{ (\chi^{S_1}, \dots, \chi^{S_N}) \in \mathbb{R}^{N \times E} \mid \begin{array}{l} (i) \quad S_k \text{ ist ein Steinerbaum bezüglich } T_k \text{ in } G \\ \text{für } k = 1, \dots, N; \\ (ii) \quad \sum_{k=1}^N |S_k \cap \{e\}| \leq c_e, \text{ für alle } e \in E. \end{array} \right.$$

Unter dem *Inzidenzvektor einer Packung von Steinerbäumen* (S_1, \dots, S_N) verstehen wir den Vektor $(\chi^{S_1}, \dots, \chi^{S_N})$. $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ ist also nichts anderes als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Steinerbaumpackungen.

Alternativ hätten wir $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ auch wie folgt formulieren können. Betrachten wir dazu das folgende System von Ungleichungen:

$$(5.1.2) \quad \begin{array}{ll} (i) & x^k(\delta(W)) \geq 1, \quad \text{für alle } W \subset V, W \cap T_k \neq \emptyset, (V \setminus W) \cap T_k \neq \emptyset, \\ & k = 1, \dots, N. \\ (ii) & \sum_{k=1}^N x_e^k \leq c_e, \quad \text{für alle } e \in E. \\ (iii) & 0 \leq x_e^k \leq 1, \quad \text{für alle } e \in E, k = 1, \dots, N. \\ (iv) & x_e^k \in \{0, 1\}, \quad \text{für alle } e \in E, k = 1, \dots, N. \end{array}$$

Offensichtlich ist jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^{N \times E}$, der (5.1.2) (i) – (iv) erfüllt, Inzidenzvektor einer Packung von Steinerbäumen. Umgekehrt, erfüllt jeder Inzidenzvektor einer Packung von Steinerbäumen das Ungleichungssystem (5.1.2) (i) – (iv). Also gilt

$$(5.1.3) \quad \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) = \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{N \times E} \mid x \text{ erfüllt (5.1.2) (i), \dots, (iv)}\}.$$

Die Bedingungen in (5.1.2) (iii) werden auch *triviale Ungleichungen* genannt, die Ungleichungen in (5.1.2) (ii) heißen *Kapazitätsungleichungen*.

Damit können wir das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem über das folgende lineare Programm lösen:

$$(5.1.4) \quad \min \sum_{k=1}^N w^T x^k$$

$$x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c).$$

Wir werden später sehen, daß unter bestimmten Voraussetzungen eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung für das Polyeder $\text{STP}(G, \{T_k\}, c)$, $k \in \{1, \dots, N\}$, also für das Polyeder, das von einem einzelnen Steinerbaum definiert wird, auch eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definiert. Das bedeutet, daß die Kenntnisse, die wir über das einzelne Steinerbaum-Polyeder haben, bei der Beschreibung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ hilfreich sind.

Nachteil dieser Formulierung ist die Anzahl an Variablen ($N \cdot |E|$). Bei den Größenordnungen, die im VLSI-Design auftreten, geht diese Zahl im allgemeinen in die Millionen. Deshalb wollen wir im folgenden eine alternative Formulierung untersuchen, die weniger Variablen verwendet.

5.2. Eine “gepackte” Formulierung

Wir führen nun anstatt der $N \cdot |E|$ Variablen im obigen Modell für jede Kante e nur eine Variable x_e ein und betrachten den \mathbb{R}^E . Wir definieren

$$(5.2.1) \quad \text{STP}_p(G, \mathcal{N}, c) := \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^E \mid$$

- (i) $x_e = \sum_{k=1}^N \chi_e^{S_k}$, für alle $e \in E$;
- (ii) S_k ist ein Steinerbaum für T_k in G für $k = 1, \dots, N$;
- (iii) $x_e \leq c_e$, für alle $e \in E$

und betrachten dazu folgendes lineare Programm:

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} \min \quad & w^T x \\ & x \in \text{STP}_p(G, \mathcal{N}, c). \end{aligned}$$

Offensichtlich stimmt das Minimum von (5.2.2) mit dem Minimum des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems überein. Eine Lösung x_e^* , $e \in E$, gibt die Anzahl der Steinerbäume an, die Kante e benützen.

Damit haben wir zwar nach Lösung von (5.2.2) den Optimalwert bestimmt, es verbleibt allerdings noch die Aufgabe, diese Lösung x^* zu "entpacken". Das heißt, gesucht sind Kantenmengen S_1, \dots, S_N , so daß

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} & \text{(i) } S_k \text{ ist Steinerbaum für } T_k \text{ in } G \text{ für alle } k = 1, \dots, N, \\ & \text{(ii) } x_e^* = \sum_{k=1}^N \chi_e^{S_k}, \text{ für alle } e \in E, \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dieses "Entpackungsproblem" ist offensichtlich äquivalent zum Steinerbaumpackungs-Problem (3.1.2), also im allgemeinen \mathcal{NP} -vollständig. Aber selbst wenn wir davon ausgehen, daß wir das Entpackungsproblem (5.2.3) lösen könnten, stoßen wir auf enorme (polyedrische) Schwierigkeiten bei der Beschreibung der Facetten des Polyeders $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, c)$. Ein Indiz dafür geben die beiden folgenden Sätze.

Wir betrachten im folgenden nur den interessanten Fall, daß G 2-fach kantenzusammenhängend ist. Wir setzen $c = \infty$, falls die Bedingungen (5.1.1) (ii) beziehungsweise (5.2.1) (iii) weggelassen werden. Es ist leicht einzusehen, daß $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \infty)$, $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ und $\text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)$, $k = 1, \dots, N$ volldimensional sind. Unter diesen Voraussetzungen beschreiben die Facetten der einzelnen Steinerbaum-Polyeder $\text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)$, $k = 1, \dots, N$ das Polyeder $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \infty)$ vollständig.

(5.2.4) Lemma Das Polyeder $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \infty)$ wird vollständig durch die Facetten der einzelnen Steinerbaum-Polyeder $\text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)$, $k = 1, \dots, N$ beschrieben.

Beweis. Sei $a^T x \geq \alpha$ mit $a = (a^1, \dots, a^N)$ eine beliebige Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \infty)$. Sei $\alpha_k = \min\{(a^k)^T x^k \mid x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \infty)\}$ für $k = 1, \dots, N$. Da die Kapazitätsbedingungen wegfallen, gilt $\alpha_k = \min\{(a^k)^T x \mid x \in \text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)\}$ und $\alpha = \sum_{k=1}^N \alpha_k$. Damit ist $(a^k)^T x \geq \alpha_k$ eine gültige Ungleichung von $\text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)$ für $k = 1, \dots, N$. Da $a^T x \geq \alpha$ eine positive Linearkombination dieser gültigen Ungleichungen ist, folgt die Behauptung. \square

Eine ähnliche Aussage gilt für $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ nicht.

(5.2.5) Satz

Gegeben ein 2-fach kantenzusammenhängender Graph $G = (V, E)$ und eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$. Seien $F_a^{\alpha_k} := \{x \in \text{STP}(G, \{T_k\}, \infty) \mid a^T x = \alpha_k\} \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, N$ nichtleere Seitenflächen der einzelnen Steinerbaum-Polyeder. Gilt

$$\dim\left(\sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))\right) = |E| - 1,$$

dann definiert

$$a^T x \geq \sum_{k=1}^N \alpha_k =: \alpha$$

eine Facette von $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$.

Beweis.

(1) $a^T x \geq \alpha$ ist gültig für $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$.

Sei $x = \sum_{k=1}^N \chi^{S_k}$, wobei S_k beliebiger Steinerbaum in G für T_k ist für $k = 1, \dots, N$. Dann gilt, $a^T x = a^T(\sum_{k=1}^N \chi^{S_k}) = \sum_{k=1}^N (a^T \chi^{S_k}) \geq \sum_{k=1}^N \alpha_k = \alpha$.

(2) $a^T x \geq \alpha$ definiert eine Facette für $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$.

Sei $\{b_k^1, \dots, b_k^{r_k}\}$ eine affine Basis von $F_a^{\alpha_k}$ für $k = 1, \dots, N$. Damit ist $\{0, b_k^2 - b_k^1, \dots, b_k^{r_k} - b_k^1\}$ ein Erzeugendensystem von $\text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))$ und $\cup_{k=1}^N \{0, b_k^2 - b_k^1, \dots, b_k^{r_k} - b_k^1\}$ ein Erzeugendensystem von $\sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))$. Nach Voraussetzung existieren $|E| - 1$ linear unabhängige Vektoren $y_1, \dots, y_{|E|-1} \in \cup_{k=1}^N \{b_k^2 - b_k^1, \dots, b_k^{r_k} - b_k^1\}$, die $\sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))$ erzeugen. Außerdem gilt $a^T y_i = 0$, da $y_i \in \text{diff}(F_a^{\alpha_k})$ für ein k . Sei nun $v = b_1^1 + b_2^1 + \dots + b_N^1$. Dann sind $v, v + y_1, \dots, v + y_{|E|-1}$ affin unabhängig und $a^T v = \alpha$ sowie $a^T(v + y_i) = \alpha$ für alle $i = 1, \dots, |E| - 1$. Also ist $a^T x \geq \alpha$ Facette. \square

(5.2.6) Satz

Gegeben ein 2-fach kantenzusammenhängender Graph $G = (V, E)$ und eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$. Sei $a^T x \geq \alpha$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$.

Dann existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ mit

- (1) $\alpha = \sum_{k=1}^N \alpha_k$;
- (2) $F_a^{\alpha_k} := \{x \in STP(G, \{T_k\}, \infty) \mid a^T x = \alpha_k\}$ ist nichtleere Seitenfläche von $STP(G, \{T_k\}, \infty)$ für $k = 1, \dots, N$;
- (3) $\dim(\sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))) = |E| - 1$.

Beweis. Da $a^T x \geq \alpha$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ ist und $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ ein Polytop ist, existieren d Vektoren $Y^1, \dots, Y^d \in F_a^\alpha := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \infty) \mid a^T x = \alpha\}$ mit $\text{conv}(Y^1, \dots, Y^d) = F_a^\alpha$ und $Y^i = \sum_{k=1}^N \chi^{S_k^i}$, wobei S_k^i Steinerbaum in G für T_k ist $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, d$. Wir setzen $b_k^i := \chi^{S_k^i}$ für $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, d$ und definieren $\alpha_k := \min\{a^T b_k^i \mid 1 \leq i \leq d\}$.

(1) $\alpha = \sum_{k=1}^N \alpha_k$.

Sei $b_k^* \in \{b_k^1, \dots, b_k^d\}$ mit $a^T b_k^* = \alpha_k$. Offenbar ist $Y^* := \sum_{k=1}^N b_k^* \in STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$. Also gilt $\alpha \leq a^T Y^* = a^T(\sum_{k=1}^N b_k^*) = \sum_{k=1}^N a^T b_k^* = \sum_{k=1}^N \alpha_k$. Andererseits gilt $\alpha = a^T Y^1 = a^T(\sum_{k=1}^N b_k^1) = \sum_{k=1}^N a^T b_k^1 \geq \sum_{k=1}^N \alpha_k$.

(2) $F_a^{\alpha_k}$ ist nichttriviale Seitenfläche von $STP(G, \{T_k\}, \infty)$ für $k = 1, \dots, N$.

Wir zeigen zunächst, daß $a^T x \geq \alpha_k$ gültig für $STP(G, \{T_k\}, \infty)$ ist. Sei $\alpha'_k := \min\{a^T x \mid x \in STP(G, \{T_k\}, \infty)\}$ und S_k^* ein Steinerbaum in G für T_k mit $a^T \chi^{S_k^*} = \alpha'_k$. Angenommen $\alpha'_k < \alpha_k$, dann definiere $\bar{Y}^1 := Y^1 - b_k^1 + \chi^{S_k^*}$. Offensichtlich ist $\bar{Y}^1 \in STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$, andererseits gilt $a^T \bar{Y}^1 = a^T Y^1 - a^T b_k^1 + a^T \chi^{S_k^*} \leq \alpha - \alpha_k + \alpha'_k < \alpha$, ein Widerspruch.

Ferner ist $F_a^{\alpha_k} \neq \emptyset$ für alle $k = 1, \dots, N$, denn $\alpha = a^T Y^i = a^T (\sum_{k=1}^N b_k^i) = \sum_{k=1}^N a^T b_k^i \geq \sum_{k=1}^N \alpha_k = \alpha$ für alle $i = 1, \dots, d$. Also folgt $a^T b_k^i = \alpha_k$ für alle $i = 1, \dots, d$, $k = 1, \dots, N$.

$$(3) \dim(\sum_{k=1}^N \text{diff}(F_a^{\alpha_k})) = |E| - 1.$$

Da $a^T b_k^i = \alpha_k$ ist, existiert ein affines Erzeugendensystem $\{\chi^{\hat{S}_k^1}, \dots, \chi^{\hat{S}_k^{r_k}}\}$ von $F_a^{\alpha_k}$ mit $b_k^i \in \{\chi^{\hat{S}_k^1}, \dots, \chi^{\hat{S}_k^{r_k}}\}$ für alle $i = 1, \dots, d$, $k = 1, \dots, N$. Wir setzen $\hat{b}_k^i = \chi^{\hat{S}_k^i}$ für alle $i = 1, \dots, r_k$, $k = 1, \dots, N$ und definieren $B := \{\sum_{k=1}^N \hat{b}_k^{t_k} \mid t_k \in \{1, \dots, r_k\}, k = 1, \dots, N\}$. Offensichtlich ist $F_a^\alpha \supset \text{conv}(B)$. Umgekehrt, ist $Y^i \in B$ für alle $i = 1, \dots, d$, und damit $F_a^\alpha \subset \text{conv}(B)$. Also gilt.

$$\begin{aligned} \text{lin}(\text{diff}(F_a^\alpha)) &= \text{lin}(\text{diff}(\text{conv}(B))) \\ &= \text{lin}(\{\sum_{k=1}^N \hat{b}_k^{t_k} - \sum_{k=1}^N \hat{b}_k^1 \mid t_k \in \{1, \dots, r_k\}, k = 1, \dots, N\}) \\ &= \text{lin}(\{\hat{b}_N^2 - \hat{b}_N^1, \hat{b}_N^3 - \hat{b}_N^1, \dots, \hat{b}_N^{r_N} - \hat{b}_N^1, \\ &\quad \hat{b}_{N-1}^2 - \hat{b}_{N-1}^1, \hat{b}_{N-1}^3 - \hat{b}_{N-1}^1, \dots, \hat{b}_{N-1}^{r_{N-1}} - \hat{b}_{N-1}^1, \\ &\quad \vdots, \\ &\quad \hat{b}_1^2 - \hat{b}_1^1, \hat{b}_1^3 - \hat{b}_1^1, \dots, \hat{b}_1^{r_1} - \hat{b}_1^1\}) \\ &= \sum_{k=1}^N \text{lin}(\{\hat{b}_k^2 - \hat{b}_k^1, \hat{b}_k^3 - \hat{b}_k^1, \dots, \hat{b}_k^{r_k} - \hat{b}_k^1\}) \\ &= \sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k})). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\dim(\sum_{k=1}^N \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))) = \dim(\text{lin}(\text{diff}(F_a^\alpha))) = |E| - 1$. \square

(5.2.7) Korollar

Gegeben ein 2-fach kantenzusammenhängender Graph $G = (V, E)$ und eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$. Ist $a^T x \geq \alpha_1$ Facette von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \infty)$, dann definiert

$$a^T x \geq \alpha_1 + \sum_{k=2}^N \alpha_k, \quad \text{mit } \alpha_k := \min\{a^T x \mid x \in \text{STP}(G, \{T_k\}, \infty)\} \text{ für } k = 2, \dots, N,$$

eine Facette von $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$.

Wie aus Korollar (5.2.7) zu ersehen ist, müssen wir, um aus einer Ungleichung, die eine Facette für ein Steinerbaum-Polyeder definiert, eine Facette für $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ zu erhalten, die Werte α_k bestimmen. Die Bestimmung dieser Werte ist aber gleichbedeutend mit der Lösung eines Steinerbaum-Problems mit Zielfunktionsvektor a , also im allgemeinen ein \mathcal{NP} -schweres Problem. Damit aber noch nicht genug. Nicht jede facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ läßt sich aus einer facetten-definierende Ungleichung eines einzelnen Steinerbaum-Polyeders durch Ändern der rechten Seite erzeugen, wie folgendes Beispiel zeigt:

(5.2.8) Beispiel

Sei $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [1, 4]\})$ und $T_1 = \{1, 3\}$ sowie $T_2 = \{1, 2, 4\}$. Vergleiche dazu Abbildung 5.2.1. Sei außerdem $a = (2, 1, 1, 2)$, $\alpha_1 = 3$ und $\alpha_2 = 4$.

Die Ungleichung $a^T x \geq \alpha_1$ ist die Summe dreier facetten-definierender Ungleichungen von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \infty)$, siehe linke untere Bildhälfte von (5.2.1). Damit gilt für die von $a^T x \geq \alpha_1$ induzierte Seitenfläche $F_a^{\alpha_1} := \text{conv}(\{x \in \text{STP}(G, \{T_1\}, \infty) \mid 2x_{12} + x_{23} + x_{34} + 2x_{14} = 3\})$, daß $\dim(F_a^{\alpha_1}) = 1$ ist. Ebenso definiert $F_a^{\alpha_2} := \text{conv}(\{x \in \text{STP}(G, \{T_2\}, \infty) \mid 2x_{12} + x_{23} + x_{34} + 2x_{14} = 4\})$ eine Seitenfläche von $\text{STP}(G, \{T_2\}, \infty)$ mit $\dim(F_a^{\alpha_2}) = 2$, da $a^T x \geq \alpha_2$ die Summe zweier facetten-definierender Ungleichungen ist (siehe rechte untere Bildhälfte). Also definiert sowohl $F_a^{\alpha_1}$ als auch $F_a^{\alpha_2}$ keine Facette von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \infty)$ beziehungsweise $\text{STP}(G, \{T_2\}, \infty)$. Andererseits ist leicht nachzuprüfen, daß $\dim(\sum_{k=1}^2 \text{lin}(\text{diff}(F_a^{\alpha_k}))) = 3 = |E| - 1$ ist. Damit ist nach Satz (5.2.5) $a^T x \geq 7$ eine facetten-definierende Ungleichung für $\text{STP}(G, \{T_1, T_2\}, \infty)$.

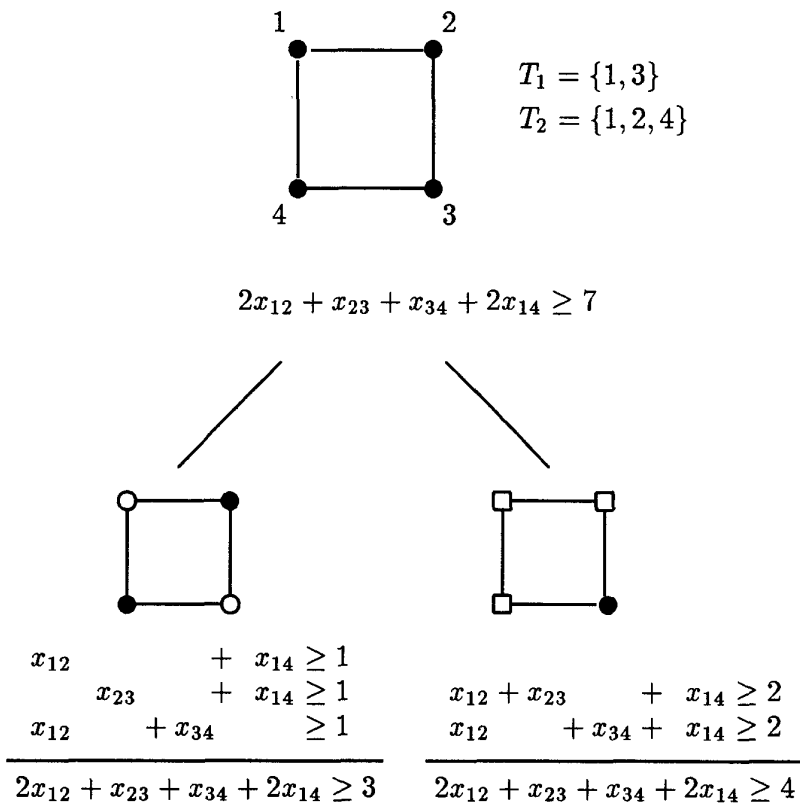


Abbildung 5.2.1

Zusammenfassend können wir feststellen, daß wir bei Verwendung dieses Modells auf enorme Schwierigkeiten bei der Beschreibung der Facetten von $\text{STP}_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ stoßen. Allein die Bestimmung der rechten Seiten ist im allgemeinen ein \mathcal{NP} -schweres Problem (vgl. Korollar (5.2.7)). Und selbst in dem "einfachen" Fall, in dem die Kapazitätsbeschränkungen vernachlässigt werden, reichen die Facetten der einzelnen Steinerbaum-Polyeder

nicht aus, um $STP_p(G, \mathcal{N}, \infty)$ vollständig zu beschreiben (vgl. Beispiel (5.2.8)). Hinzu kommt, daß nach Lösung des Problems (5.2.2) noch das "Entpackungsproblem" (5.2.3) gelöst werden muß, das im allgemeinen ebenfalls \mathcal{NP} -vollständig ist.

Zwar ist eine geringe Anzahl von Variablen sicherlich sehr wünschenswert, gerade im Hinblick auf das Lösen großer linearer Programme, doch halten wir es aufgrund der eben aufgeführten Nachteile nicht für sinnvoll, dieses Modell weiter zu verfolgen.

5.3. Eine explizite Formulierung

In diesem Kapitel wollen wir noch eine ganz andere Möglichkeit vorstellen, das Steinerbaumpackungs-Problem als ganzzahliges lineares Programm zu formulieren. Die Idee ist, für jede Kantenmenge, die ein Steinerbaum bezüglich einer Terminalmenge ist, eine Variable einzuführen. Sei dazu $\mathcal{S}_k := \{S \subseteq E \mid S \text{ ist ein Steinerbaum bezüglich } T_k \text{ in } G\}$ für $k = 1, \dots, N$. Wir numerieren die Elemente aus \mathcal{S}_k , so daß $\mathcal{S}_k = \{S_k^1, \dots, S_k^{s_k}\}$ mit $s_k \in \mathbb{N}_0$ für $k = 1, \dots, N$. Wir führen nun Variablen $x_{k,i}$ für $i = 1, \dots, s_k$, $k = 1, \dots, N$ ein mit der Interpretation

$$x_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{falls } S_k^i \text{ aus } \mathcal{S}_k \text{ gewählt wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir dazu das folgende ganzzahlige lineare Programm.

$$(5.3.1) \quad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{s_k} w(S_k^i) x_{k,i} \\ \text{(i)} \quad & \sum_{i=1}^{s_k} x_{k,i} = 1, & \text{für } k = 1, \dots, N. \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=1}^N \sum_{\{i \mid e \in S_k^i\}} x_{k,i} \leq c_e, & \text{für alle } e \in E. \\ \text{(iii)} \quad & x_{k,i} \in \{0, 1\}, & \text{für alle } i = 1, \dots, s_k, k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Offensichtlich definiert jeder 0/1 Vektor x , der die Bedingungen (i) bis (iii) aus (5.3.1) erfüllt, eine Packung von Steinerbäumen. Umgekehrt impliziert jede Steinerbaumpackung einen 0/1 Vektor x , der (5.3.1) (i) – (iii) erfüllt. Ebenso stimmen die jeweiligen Zielfunktionswerte überein. Folglich kann das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem über das ganzzahlige lineare Programm (5.3.1) gelöst werden.

Ein Nachteil dieser Formulierung ist sicherlich die Anzahl von Variablen. Die Zahlen s_k sind im allgemeinen exponentiell in der Größe der Eingabedaten. Ausnahmen stellen Problembeispiele dar, deren zugrundeliegender Graph sehr klein ist. Wir haben in Kapitel 4.3.1 bereits ein Verfahren vorgestellt, das auf diese Formulierung zurückgreift. Wir erinnern uns, daß der hierarchische Ansatz von Burstein und Pelavin das Verdrahtungsproblem im

Sea-of-Cells Entwurfsstil reduziert auf das Verdrahtungsproblem in einem 2×2 Gittergraphen. Zu seiner Lösung wird im wesentlichen eine Formulierung wie in (5.3.1) verwendet. Zur Lösung des Gesamtproblems verwenden Burstein und Pelavin letztendlich jedoch ein anderes Verfahren, da durch die Zerlegung auf 2×2 Gittergraphen das Gesamtproblem nicht hinreichend gut modelliert werden kann. Andere Verfahren, die diese Formulierung als Grundlage ihrer Methoden wählen, sind randomisierte Verfahren. Diese lösen die lineare Relaxierung von (5.3.1). Die Koeffizienten $x_{k,i}$ der Lösung x interpretieren sie als Wahrscheinlichkeiten für die Wahl von S_k^i in einer Gesamtlösung. Darauf aufbauend entwickeln sie ein Zufallsexperiment mit dem Ziel eine möglichst gute Lösung zu finden. Ein schöner Überblick über randomisierte Verfahren zur Lösung des Verdrahtungsproblems ist in [Le90] zu finden. Darüber hinaus wird die Formulierung (5.3.1) auch in [LL91] diskutiert. Für die Verwendung eines polyedrischen Ansatzes scheint uns diese Formulierung jedoch nicht geeignet. Der Grund dafür liegt in der exponentiellen Anzahl von Variablen. Außerdem ist zu erwarten, daß eine riesige Zahl von Ungleichungen notwendig sein wird, um eine gute Beschreibung des Polyeders $P_e := \text{conv} \{x \mid x \text{ erfüllt (5.3.1) (i) - (iii)}\}$ zu erhalten. Die dadurch entstehenden linearen Programme werden selbst für kleine Problembeispiele bereits sehr groß sein. Von daher vermuten wir, daß unter Verwendung dieser Formulierung ein polyedrischer Ansatz zum Scheitern verurteilt sein wird. Eine mögliche Alternative ist, die Mengen S_k a-priori so einzuschränken, daß die Anzahl Variablen akzeptable Größenordnungen erreicht. Allerdings hätten wir dadurch keine exakte Modellierung unseres Ausgangsproblems (3.1.4).

6. Das Steinerbaumpackungs-Polyeder

In diesem Kapitel studieren wir das in Kapitel 5.1 eingeführte Polyeder $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$. Wir haben es definiert als die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Steinerbaumpackungen einer gegebenen Instanz (G, \mathcal{N}, c, w) des (gewichteten) Steinerbaumpackungs-Problems. Das Ziel in diesem Kapitel ist, dieses Polyeder nicht durch seine Ecken, sondern durch seine Facetten zu beschreiben. Dazu müssen wir zunächst die Dimension des Polyeders bestimmen. Damit beschäftigen wir uns in Kapitel 6.1. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel einige einfache sogenannte Lifting-Resultate sowie Untersuchungen über die Kapazitätsungleichungen (5.1.2) (ii) und die trivialen Ungleichungen (5.1.2) (iii). Kapitel 6.2 beschäftigt sich mit der Frage, welche der Ungleichungen, die Facetten für das einzelne Steinerbaum-Polyeder definieren, auch Facetten von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ induzieren. Den Hauptteil dieses Kapitels bildet Kapitel 6.3. Hier untersuchen wir Ungleichungen, die zwei und mehr Netze miteinander kombinieren.

6.1. Grundlegende Resultate

Wir gehen von nun an davon aus, daß wir einen Graphen $G = (V, E)$, eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ und eine Kapazitätsfunktion $c : E \mapsto \mathbb{N}$ gegeben haben. Für die dadurch definierte Instanz (G, \mathcal{N}, c) eines Steinerbaumpackungs-Problems haben wir in Kapitel 5.1 folgendes Polyeder definiert.

$$(6.1.1) \quad \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) = \text{conv} \left\{ (\chi^{S_1}, \dots, \chi^{S_N}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E} \mid \begin{array}{l} (i) \quad S_k \text{ ist ein Steinerbaum für } T_k \text{ in } G \\ \text{für } k = 1, \dots, N; \\ (ii) \quad \sum_{k=1}^N |S_k \cap \{e\}| \leq c_e, \text{ für alle } e \in E. \end{array} \right.$$

Wir werden nachfolgend dieses Polyeder als *Steinerbaumpackungs-Polyeder* bezeichnen. Gilt $N = 1$, so nennen wir es auch nur *Steinerbaum-Polyeder*, da hier der Packungsaspekt wegfällt. Für den Inzidenzvektor einer Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, \dots, S_N)$ schreiben wir von nun an auch kurz χ^P anstelle von $(\chi^{S_1}, \dots, \chi^{S_N})$.

Wir wollen zuerst das Dimensionsproblem für das Steinerbaumpackungs-Polyeder betrachten.

(6.1.2) Dimensionsproblem des Steinerbaumpackungs-Polyeders

Instanz:

Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}, e \in E$, eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ mit $T_1, \dots, T_N \subseteq V$ und eine nicht negative ganze Zahl l .

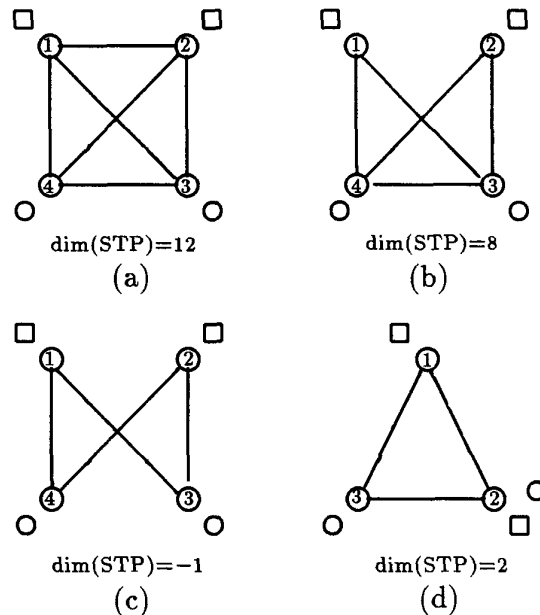
Problem:

Ist die Dimension von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ mindestens l ?

Wie wir in Kapitel 3.2 gesehen haben, ist bereits das Entscheidungsproblem, "Existiert für eine gegebene Instanz (G, \mathcal{N}, c) eine Packung von Steinerbäumen?", \mathcal{NP} -vollständig ([KL84], [KPS90]). Folglich ist auch das Dimensionsproblem (6.1.2) \mathcal{NP} -vollständig, sogar für den Fall $l = 0$.

(6.1.3) Bemerkung Das Dimensionsproblem des Steinerbaumpackungs-Polyeders ist \mathcal{NP} -vollständig.

Was läßt sich aus einer solchen Situation machen? Dieses Ergebnis zeigt uns, daß es nicht zweckdienlich ist, das Steinerbaumpackungs-Polyeder für beliebige Instanzen (G, \mathcal{N}, c) zu untersuchen. Abbildung 6.1.1 zeigt einige Beispiele und die entsprechenden Dimensionen. Aus unserer Sicht gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder man konzentriert sich direkt auf eine aus der Anwendung gegebene Problem Instanz. Dies hat sicherlich den Vorteil, daß für die konkret gegebene Instanz gute Ergebnisse erzielt werden können. Allerdings besteht die Gefahr, daß diese Ergebnisse für andere Problem Instanzen nicht verwendet werden können, und damit jede Instanz von neuem untersucht werden muß. Eine Alternative dazu ist, eine möglichst allgemeine Problem Instanz zu untersuchen, deren Ergebnisse sich auf jede andere Instanz (zumindest teilweise) übertragen lassen. Da wir im Augenblick nicht absehen können, für welche Problem Instanzen (z. B. Switchbox-Verdrahtungs-, globale Verdrahtungsprobleme, vgl. Kapitel 4) sich der von uns verfolgte Ansatz eignet, haben wir uns für die zweite Alternative entschieden.



Die Abbildungen (a) bis (d) zeigen einige Beispiele und die Dimension des zugehörigen Polyeders. Die beiden Terminalmengen sind als Rechtecke bzw. Kreise dargestellt ($T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{3, 4\}$ bzw. $T_2 = \{2, 3\}$) und STP steht für $STP(G, \mathcal{N}, \mathbf{1})$. Während das Polyeder in (a) volldimensional ist, verringert

sich die Dimension um 4 bei Wegnahme der Kante [1,2] (Bild (b)). Löscht man außerdem die Kante [3,4] (Bild (c)), so gibt es keine zulässige Lösung mehr. Bild (d) gibt ein Beispiel, in dem der Graph vollständig ist, das Polyeder jedoch nicht volldimensional.

Abbildung 6.1.1

Wir wählen als Graphen $G = (V, E)$ den vollständigen Graphen mit Knotenmenge V . Wie wir später noch sehen werden, bleibt eine Ungleichung, die gültig für $STP(G, \mathcal{N}, c)$ ist, gültig, falls aus G eine Kante gelöscht wird. Da sich jeder Graph $G = (V, E)$ einer Instanz (G, \mathcal{N}, c) durch Löschen von Kanten aus dem vollständigen Graphen auf der Knotenmenge V erzeugen läßt, erhalten wir damit gültige Ungleichungen für jede beliebige Instanz. Allerdings läßt sich allein unter der Voraussetzung, daß G vollständig ist, die Dimension von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ immer noch nicht einfach bestimmen (vergleiche Abbildung 6.1 (d)). Wir benötigen zusätzlich die Eigenschaft, daß die Terminalmengen disjunkt sind.

(6.1.4) Lemma

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V und Kantenkapazitäten $c_e = 1$, $e \in E$. Sei $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1, \dots, T_N \subset V$. Dann gilt

$$\dim(STP(G, \mathcal{N}, c)) = N \cdot |E|.$$

Beweis.

Es genügt zu zeigen, daß $\lambda^T x = 0$, $x \in \text{diff}(STP(G, \mathcal{N}, c))$, impliziert, daß $\lambda_e^k = 0$ gilt für alle $e \in E$ und $k \in \{1, \dots, N\}$. Sei $e \in E$ beliebig. Wähle Steinerbäume S_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, wie folgt. Ist $e \in E(T_k)$, so setze $S_k = [t : T_k]$ für ein $t \in V \setminus T_k$. Andernfalls setze $S_k = E(T_k)$. Da die Netzliste \mathcal{N} disjunkt ist, ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $e \notin P$. Damit gilt $\lambda_e^k = \lambda^T(\chi^P \cup_k e - \chi^P) = 0$. \square

Bevor wir intensiv Probleminstanzen, wie in Lemma (6.1.4) beschrieben, untersuchen, geben wir noch einige einfache Lemmata, die für beliebige Instanzen (G, \mathcal{N}, c) Gültigkeit haben. Diese Lemmata behandeln die Frage, wie sich Operationen im Graphen (Löschen einer Kante, Aufsplitten eines Knoten, etc.) auf die Eigenschaften (gültig, facettendefinierend) einer Ungleichung auswirken. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir sowohl für den Ausgangsgraphen als auch für den modifizierten Graphen den gleichen Kapazitätsvektor und Inzidenzvektor. Um formal korrekt zu sein, müßten wir zwischen den auf verschiedenen Kantenmengen definierten Inzidenzvektoren und Kapazitätsvektoren unterscheiden. Aber wir glauben, daß aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist, welche der Vektoren gemeint ist.

(6.1.5) Löschen einer Kante

Sei (G, \mathcal{N}, c) eine beliebige Instanz eines Steinerbaumpackungs-Problems. Sei $a^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, c)$. Wird $f \in E$ aus G gelöscht, dann ist $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung von $STP(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$ mit $\bar{a}_e^k = a_e^k$ für alle $e \in E$, $e \neq f$, $k \in \{1, \dots, N\}$.

Beweis.

Gilt $STP(G \setminus f, \mathcal{N}, c) = \emptyset$, so haben wir nichts zu zeigen. Andernfalls ist offensichtlich jede Packung von Steinerbäumen P für $(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$ auch eine Packung von Steinerbäumen

für (G, \mathcal{N}, c) . Daraus folgt, daß $\min\{\bar{a}^T x \mid x \in \text{STP}(G \setminus f, \mathcal{N}, c)\} = \min\{\bar{a}^T \chi^P \mid P \text{ ist eine Packung von Steinerbäumen von } (G \setminus f, \mathcal{N}, c)\} \geq \min\{a^T \chi^P \mid P \text{ ist eine Packung von Steinerbäumen von } (G, \mathcal{N}, c)\} = \min\{a^T x \mid x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c)\} \geq \alpha$. \square

Leider bleibt eine Ungleichung, die eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definiert, nicht notwendig eine Facette für $\text{STP}(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$, wie folgendes Beispiel zeigt.

(6.1.6) Beispiel

Betrachte das Beispiel in Abbildung 6.1.1 (a). Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Ungleichung $x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{34}^2 \geq 1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$ definiert. Den Graph in Abbildung 6.1.1 (b) erhält man durch Löschen der Kante $f = [1, 2]$. Die Ungleichung $x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{34}^2 \geq 1$ definiert jedoch keine Facette für $\text{STP}(G \setminus f, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$. Man erhält sie zum Beispiel durch Summation der Gleichung $x_{34}^2 = 1$ und den beiden facetten-definierenden Ungleichungen $x_{13}^2 \geq 0$ und $x_{23}^2 \geq 0$. \square

(6.1.7) Hinzufügen einer Kante

Sei (G, \mathcal{N}, c) eine beliebige Instanz eines Steinerbaumpackungs-Problems. Sei $f \in E$ mit $c_f = 1$ und $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$, dann definiert $a^T x \geq \alpha$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$, mit $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E, e \neq f, k \in \{1, \dots, N\}$ und $a_f^k = \alpha - \min\{\bar{a}^T \chi^P \mid P \text{ ist eine Packung von Steinerbäumen für } (G, \mathcal{N}, c) \text{ mit } f \in P_k\}$.

Beweis.

Betrachte eine beliebige Packung von Steinerbäumen P für (G, \mathcal{N}, c) . Gilt $f \notin P$, dann ist P auch eine Packung von Steinerbäumen für $\text{STP}(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$. Also gilt $\bar{a}^T \chi^P \geq \alpha$. Andernfalls sei $f \in P_k$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$. Da $c_f = 1$, gilt $a^T \chi^P = a_f^k + a^T \chi^{P \setminus f} \geq a_f^k + \min\{\bar{a}^T \chi^{P \setminus f} \mid P \text{ ist eine Packung von Steinerbäumen für } (G, \mathcal{N}, c) \text{ mit } f \in P_k\} = \alpha$.

Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Da $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine Facette von $\text{STP}(G \setminus f, \mathcal{N}, c)$ definiert und $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E, e \neq f, k \in \{1, \dots, N\}$, gibt es ein $\lambda > 0$ mit $b_e^k = \lambda a_e^k$ für alle $e \in E, e \neq f, k \in \{1, \dots, N\}$ und $\alpha = \lambda \beta$. Sei nun P' eine Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) mit $f \in P_{k_0}'$ und $\bar{a}^T \chi^{P' \setminus f} = \min\{\bar{a}^T \chi^{P \setminus f} \mid P \text{ ist eine Packung von Steinerbäumen für } (G, \mathcal{N}, c) \text{ mit } f \in P_{k_0}\}$. Aufgrund der Wahl von $a_f^{k_0}$ gilt $a^T \chi^{P'} = \alpha$. Da außerdem $\lambda \bar{a}_e^k = \lambda a_e^k = b_e^k$ für alle $e \in E, e \neq f, k \in \{1, \dots, N\}$ gilt, erhalten wir $\lambda \alpha = \beta = b^T \chi^{P'} = b_f^{k_0} + \lambda \bar{a}^T \chi^{P' \setminus f}$. Daraus folgt $b_f^{k_0} = \lambda a_f^{k_0}$. \square

(6.1.8) Aufsplitten eines Knoten

Sei (G, \mathcal{N}, c) eine beliebige Instanz eines Steinerbaumpackungs-Problems. Sei $f \in E$ und $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung für $\text{STP}(G / f, \mathcal{N}, c)$ (beachte, G / f ist der Graph, den man durch Verschmelzen der beiden Endknoten von f erhält). Dann ist $a^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung für $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ mit $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E, e \neq f$ und $a_f^k = 0$ für alle $k = 1, \dots, N$.

Beweis.

Ist $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c) = \emptyset$, so haben wir nichts zu zeigen. Andernfalls sei P eine beliebige Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) . Offensichtlich ist dann $P \setminus f$ auch eine Lösung

für $(G / f, \mathcal{N}, c)$. Also gilt $a^T \chi^P \geq \bar{a}^T \chi^{P \setminus f} \geq \alpha$, da $a_f^k = 0$ für alle $k = 1, \dots, N$. Folglich ist $a^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung für (G, \mathcal{N}, c) . \square

Leider ist es auch hier so, daß eine facetten-definierende Ungleichung für $\text{STP}(G / f, \mathcal{N}, c)$ nicht notwendigerweise eine Facette für $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definiert. Es kann sogar sein, daß es keine Lösung für (G, \mathcal{N}, c) gibt.

(6.1.9) Beispiel

Betrachte den Graphen G' in Abbildung 6.1.2 (a) und den Graphen G in Abbildung 6.1.2 (b), wobei jeweils $T_1 = \{1, 4, 5, 7\}$ und $T_2 = \{2, 3, 6\}$ ist. Es gilt $G' = G / [3, 3']$. Offensichtlich gibt es keine Packung von Steinerbäumen für $(G, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$, also ist $\text{STP}(G, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I}) = \emptyset$. Dagegen ist $\text{STP}(G', \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$ volldimensional. \square

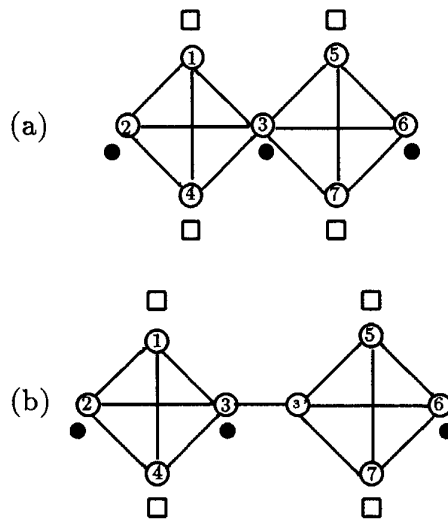


Abbildung 6.1.2

Betrachten wir zuletzt noch den umgekehrten Fall von (6.1.8), das Kontrahieren einer Kante. In diesem Fall ist es sogar so, daß eine Ungleichung $a^T x \geq \alpha$, die gültig für $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ ist, nicht notwendig gültig für $\text{STP}(G / f, \mathcal{N}, c)$ ist. Dies gilt auch für den Fall $a_f^k = 0$ für alle $k = 1, \dots, N$.

(6.1.10) Beispiel

Betrachte den Graphen G in Abbildung 6.1.3 (a) und den Graphen G' in Abbildung 6.1.3 (b) mit $T_1 = \{1, 9\}$ und $T_2 = \{2, 10\}$. Es gilt $G' = G / [3, 6]$. Offensichtlich ist $x_{47}^1 + x_{58}^1 + x_{47}^2 + x_{58}^2 \geq 1$ eine gültige Ungleichung für $\text{STP}(G, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$, jedoch nicht für $\text{STP}(G', \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$. \square

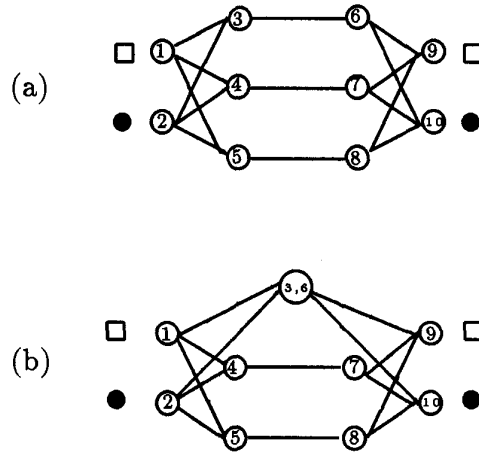


Abbildung 6.1.3

Damit schließen wir die Untersuchungen von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ für beliebige Probleminstanzen (G, \mathcal{N}, c) ab. Wir werden uns für den Rest dieses Kapitels mit Probleminstanzen, wie sie in Lemma (6.1.4) beschrieben wurden, beschäftigen. Wir betrachten den vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kapazitätsfunktion $c = \mathbb{I}$. Außerdem sei \mathcal{N} eine disjunkte Netzliste. Aufgrund der eben bewiesenen Lemmata wissen wir, daß jede gültige beziehungsweise facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ auch gültig für das Steinerbaumpackungs-Polyeder einer Probleminstanz $(\hat{G}, \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$ ist, falls \hat{G} einen Kontraktionsminor enthält, der Kanten-Teilgraph von G ist. Damit können wir, wenn auch in abgeschwächter Form, die Ergebnisse, die wir nachfolgend erzielen werden, für die aus der Anwendung kommenden Probleminstanzen verwenden.

Wir wollen zum Abschluß dieses Kapitels noch untersuchen, unter welchen Bedingungen die Kapazitätsungleichungen (5.1.2) (ii) und die einfachen Ungleichungen (5.1.2) (iii) eine Facette definieren.

(6.1.11) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V und Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $e \in E$ sowie $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $T_1, \dots, T_N \subset V$, $N \geq 2$, eine disjunkte Netzliste. Dann gilt für $e \in E$ und $k \in \{1, \dots, N\}$.

- (i) Die Ungleichung $x_e^k \geq 0$ definiert eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$, falls $|V| \geq 5$ gilt.
- (ii) Die Ungleichung $x_e^k \leq 1$ definiert genau dann eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$, wenn $c_e \geq 2$ gilt.

Beweis. Wir beginnen mit (i). Die Gültigkeit von $x_e^k \geq 0$ ist klar. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid x_e^k = 0\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Sei $e = uv$ und $e' = u'v' \in E \setminus \{e\}$. Da $|V| \geq 5$ existiert ein Knoten $w \in V \setminus \{u, v, u', v'\}$. Wir definieren uns für alle $i = 1, \dots, N$ Steinerbäume S_i folgendermaßen.

Ist $u, v, u', v' \in T_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, setze $S_i = E(T_i) \setminus \{e, e'\} \cup \{uw, vw, u'w, v'w\}$. Ist $u, v \in T_i$ und $u', v' \notin T_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, so wählen wir $S_i = E(T_i) \setminus \{e\} \cup \{uw, vw\}$.

Entsprechend wählen wir $S_i = E(T_i) \setminus \{e'\} \cup \{u'w, v'w\}$, falls $u', v' \in T_i$ und $u, v \notin T_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$. In allen anderen Fällen setzen wir $S_i = E(T_i)$. Da \mathcal{N} disjunkt ist, können u und v (beziehungsweise u' und v') zusammen höchstens in einer Terminalmenge sein. Damit ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi_e^{S_i} = 0$. Da $e, e' \notin P$, folgt daraus, daß $b_e^i = 0$ für alle $i = 1, \dots, N$, $e' \in E \setminus \{e\}$, und $b_e^i = 0$ für alle $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$. Damit ist (i) gezeigt.

Betrachten wir nun (ii). Die Gültigkeit von $x_e^k \leq 1$ ist wiederum klar. Wir beweisen zunächst, daß $x_e^k \leq 1$ eine Facette definiert, falls $c_e \geq 2$ gilt. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP (G, \mathcal{N}, c) mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid x_e^k = 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Sei $e' = u'v' \in E \setminus \{e\}$. Gilt $u', v' \in T_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, so wähle $S_i = E(T_i) \setminus \{e'\} \cup \{u'w, v'w\}$ mit $w \in V \setminus T_i$. Andernfalls setze $S_i = E(T_i)$. Da \mathcal{N} disjunkt ist, ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) für die gilt $\sum_{i=1}^N \chi_e^{S_i} \leq 1$ und $e' \notin P$. Da $c_e \geq 2$ ist auch $P' = P \cup_k e$ eine Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) mit $e' \notin P'$ und $\chi_e^{P'} = 1$. Dies impliziert $b_e^i = 0$ für alle $i = 1, \dots, N$, $e' \in E \setminus \{e\}$. Bleibt zu zeigen, daß $b_e^i = 0$ ist für alle $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$. Dazu wählen wir Steinerbäume S_1, \dots, S_N ähnlich wie oben. Gilt $u, v \in T_i$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, so wähle $S_i = E(T_i) \setminus \{e\} \cup \{uw, vw\}$ mit $w \in V \setminus T_i$. Andernfalls setze $S_i = E(T_i)$. Da \mathcal{N} disjunkt ist, ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) mit $e \notin P$. Damit ist $P' = P \cup_k e$ eine Packung von Steinerbäumen für (G, \mathcal{N}, c) mit $\sum_{i=1}^N \chi_e^{P'} = 1$ und $\chi_e^{P'} = 1$. Daraus folgt, daß auch $b_e^i = 0$ ist für alle $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$.

Schließlich zeigen wir noch, daß die Bedingung $c_e \geq 2$ notwendig ist. Nehmen wir an, daß $c_e = 1$ gilt. Dann erhält man die Ungleichung $x_e^k \leq 1$ durch Summation der Ungleichung $\sum_{i=1}^N x_e^i \leq c_e = 1$ zusammen mit den Ungleichungen $-x_e^i \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$. Also definiert in diesem Fall $x_e^k \leq 1$ keine Facette. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Eine interessante Bemerkung ist, daß wir zum Beweis von (i) in obigem Satz $|V| \geq 5$ fordern müssen. Diese Bedingung ist auch tatsächlich notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

(6.1.12) Beispiel

Betrachte das Problembeispiel in Abbildung 6.1.1 (a). Wie wir aus Lemma (6.1.4) wissen, ist STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ volldimensional. Es ist leicht nachzuprüfen, daß $x_{12}^1 + x_{34}^1 + x_{34}^2 \geq 1$ und $-x_{34}^1 - x_{34}^2 \geq -1$ facetten-definierende Ungleichungen von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ sind. Durch Summation dieser beiden Ungleichungen erhalten wir $x_{12}^1 \geq 0$. Also definiert $x_{12}^1 \geq 0$ keine Facette von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. \square

Der nun folgende Satz befaßt sich mit den Kapazitätsungleichungen.

(6.1.13) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V und Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $e \in E$ sowie $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $T_1, \dots, T_N \subset V$, $N \geq 2$, eine disjunkte Netzliste. Sei $e \in E$. Dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^N x_e^k \leq c_e$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ genau dann, wenn $c_e \leq N - 1$ gilt.

Beweis. Da man die Ungleichung $\sum_{k=1}^N x_e^k \leq N$ durch Summation der Ungleichungen $x_e^k \leq 1$ für $k = 1, \dots, N$ erhält, definiert $\sum_{k=1}^N x_e^k \leq c_e$ keine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, c)$, falls $c_e \geq N$ gilt.

Wir zeigen nun die Rückrichtung. Die Gültigkeit der Ungleichung ist klar. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, c) \mid \sum_{k=1}^N x_e^k = c_e\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Wir zeigen im folgenden, daß b ein Vielfaches von a ist.

Sei $e' = u'v' \in E \setminus \{e\}$. Wir definieren nun Steinerbäume S_1, \dots, S_N wie folgt. Ist $u'v' \in T_k$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$, so wähle $S_k = E(T_k) \setminus \{e'\} \cup \{u'w, v'w\}$ mit $w \in V \setminus T_k$. Andernfalls setze $S_k = E(T_k)$. Ist $e \in S_{k_0}$ für ein $k_0 \in \{1, \dots, N\}$, so wähle eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, N\}$ mit $k_0 \in I$ und $|I| = c_e$. Andernfalls wähle $I \subset \{1, \dots, N\}$ mit $|I| = c_e$ beliebig. Setze nun $S'_k = S_k \cup \{e\}$, falls $k \in I$, und $S'_k = S_k$, sonst. Dann ist $P' = (S'_1, \dots, S'_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^{P'} \in F_a$. Da $e' \notin P'$, folgt $b_e^k = 0$ für alle $k = 1, \dots, N$, $e' \in E \setminus \{e\}$.

Bleibt zu zeigen, daß $b_e^k = b_e^{k'}$ gilt für alle $k, k' \in \{1, \dots, N\}$. Wir wählen uns Steinerbäume S_1, \dots, S_N ähnlich zu oben. Ist $u, v \in T_k$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$, so wähle $S_k = E(T_k) \setminus \{e\} \cup \{uw, vw\}$ mit $w \in V \setminus T_k$. Andernfalls setze $S_k = E(T_k)$. Dann ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $e \notin P$. Wir konstruieren uns nun eine Packung von Steinerbäumen P' wie oben. Da wir nun $I \subset \{1, \dots, N\}$ mit $|I| = c_e$ beliebig wählen können, und $|I| = c_e < N$ gilt, folgt daraus, daß $b_e^k = b_e^{k'}$ gilt für alle $k, k' \in \{1, \dots, N\}$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

6.2. Steinerbaum-Facetten

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, welche der Kenntnisse über das Steinerbaum-Polyeder sich auf das Steinerbaumpackungs-Polyeder übertragen lassen. Wir beschränken uns wieder auf den Fall, daß G vollständig und die Netzliste \mathcal{N} disjunkt ist. Das Hauptresultat dieses Kapitels wird sein, daß jede nichttriviale facetten-definierende Ungleichung für $STP(G, \{T\}, c)$ mit $T \in \mathcal{N}$ auch eine Facette für $STP(G, \mathcal{N}, c)$ definiert. Wir zeigen dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit für $T = T_1$. Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

(6.2.1) Lemma

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der keine Steiner-Brücke bezüglich $T_1 \subset V$ enthält. Sei $a^T x \geq \alpha$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$. Dann ist $a^T x \geq \alpha$ entweder eine Ungleichung der Form $x_e^1 \leq 1$ für ein $e \in E$ oder es gilt $a \geq 0$.

Beweis. Angenommen $a^T x \geq \alpha$ ist nicht von der Form $x_e^1 \leq 1$ für ein $e \in E$. Sei $e \in E$ beliebig. Da $a^T x \geq \alpha$ eine Facette von $STP(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ definiert und G keine Steiner-Brücke enthält, existiert ein Steinerbaum S_1 für T_1 mit $a^T \chi^{S_1} = \alpha$ und $e \notin S_1$. Andernfalls wäre $\{x \in STP(G, \{T_1\}, \mathbb{I}) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq \{x \in STP(G, \{T_1\}, \mathbb{I}) \mid x_e^1 = 1\}$. Dann ist aber

auch $S'_1 = S_1 \cup \{e\}$ ein Steinerbaum für T_1 und es gilt $0 \leq a^T \chi^{S'_1} - a^T \chi^{S_1} = a_e$. Da wir $e \in E$ beliebig gewählt hatten, folgt die Behauptung. \square

Eine interessante Bemerkung in diesem Zusammenhang ist, daß ein analoges Resultat für das Steinerbaumpackungs-Polyeder nicht gilt.

(6.2.2) Beispiel

Betrachte die Problem Instanz aus Abbildung 6.2.1 mit $T_1 = \{1, 4\}$, $T_2 = \{2, 3\}$ und $T_3 = \{2, 4\}$. Wir setzen $c_e = 1$ für alle $e \in E \setminus \{[2, 4]\}$ und $c_{24} = 2$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ volldimensional ist und die Ungleichung $-x_{24}^1 + x_{14}^2 + x_{23}^2 + x_{14}^3 \geq 0$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definiert. \square

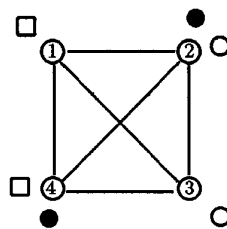


Abbildung 6.2.1

(6.2.3) Lemma

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V und $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $N \geq 2$, eine disjunkte Netzliste. Sei $a^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{1})$ mit $a \in \mathbb{R}^E$, $a \geq 0$. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen.

- (i) Für jede Kante $e \in E$ existiert eine Packung von Steinerbäumen P für $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ mit $e \notin P$ und $a^T \chi^{P_1} = \alpha$.
- (ii) Zu jedem kantenminimalen Steinerbaum S_1 für T_1 mit $a^T \chi^{S_1} = \alpha$ gibt es Kantenmengen S_2, \dots, S_N , so daß (S_1, \dots, S_N) eine Packung von Steinerbäumen ist für $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$.

Beweis. Wir beginnen mit (i). Sei $e \in E$ beliebig und S_1 ein beliebiger, kantenminimaler Steinerbaum mit $a^T \chi^{S_1} = \alpha$ und $e \notin S_1$. Ein solcher Steinerbaum S_1 existiert, da $a^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung mit $a \geq 0$ ist. Da S_1 kantenminimal ist, wissen wir aus (3.1.5), daß

$$(*) \quad \Upsilon(S_1) = |T_1| - 2$$

gilt. Wir setzen nun $S_k = ([T_1 : T_k] \cup E(T_k)) \setminus \{S_1 \cup e\}$ für $k = 2, \dots, N$. Sei $l(k)$ die Anzahl von (zusammenhängenden) Komponenten in $(V(S_k) \cup T_k, S_k)$. Offensichtlich gilt $l(k) \leq 2$ für alle $k = 2, \dots, N$, sonst enthielte S_1 einen Kreis. Damit erhalten wir für jedes $t \in T_1$, daß $d_{S_1}(t) \geq \sum_{k=2}^N (l(k) - 1) - 1$, falls $e \in [t : T_{k_0}]$ für ein $k_0 \in \{2, \dots, N\}$, und $d_{S_1}(t) \geq \sum_{k=2}^N (l(k) - 1)$, sonst, gilt. Andernfalls könnten zwei Komponenten für ein Netz

k über t verbunden werden. Damit gilt

$$\begin{aligned}\Upsilon(S_1) &\geq \sum_{t \in T_1} \left(\sum_{k=2}^N (l(k) - 1) - 1 \right) - 1 \\ &= |T_1| \cdot \sum_{k=2}^N (l(k) - 1) - |T_1| - 1 \\ &\geq |T_1| - 1, \quad \text{falls } \sum_{k=2}^N (l(k) - 1) \geq 2.\end{aligned}$$

Also kann es höchstens ein Netz k_1 geben mit $l(k_1) = 2$. Wenn es ein solches Netz k_1 nicht gibt, ist (i) gezeigt. Wir erweitern S_{k_1} um die noch unbesetzten Kanten in $E(T_1)$ und setzen $S_{k_1} = S_{k_1} \cup (E(T_1) \setminus \{S_1 \cup e\})$. Ist nun $(V(S_{k_1}) \cup T_{k_1}, S_{k_1})$ zusammenhängend, sind wir fertig. Andernfalls seien (\bar{V}_1, \bar{E}_1) und (\bar{V}_2, \bar{E}_2) die beiden zusammenhängenden Komponenten mit $|\bar{V}_1| \leq |\bar{V}_2|$. Beachte, daß $t \in \bar{V}_1$ oder $t \in \bar{V}_2$ für jedes $t \in T$ gilt, andernfalls enthielte S_1 einen Kreis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) $e \notin [\bar{V}_1 : \bar{V}_2]$.

In diesem Fall gilt $|\bar{V}_1| = 1$. Andernfalls würde S_1 einen Kreis enthalten, was der Kantenminimalität von S_1 widerspricht. Für $\{v\} = \bar{V}_1$ erhalten wir $d_{S_1}(v) \geq |T_1| + |T_{k_1}| - 1$, und damit $\Upsilon(S_1) \geq |T_1| + |T_{k_1}| - 1 - 2 \geq |T_1| - 1$, ein Widerspruch zu (*). Also gilt in diesem Fall $l(k) = 1$ für alle $k = 2, \dots, N$.

(2) $e \in [\bar{V}_1 : \bar{V}_2]$.

Wir unterscheiden nochmals zwei Fälle.

(a) $|T_1| \leq |V| - 3$.

Gilt $|T_{k_1}| = 2$, so existiert ein Knoten $v \notin T_{k_1} \cup T_1$, da $|T_1| \leq |V| - 3$. Dann ist $S_{k_1} \cup [v : T_{k_1}]$ ein Steinerbaum für T_{k_1} (beachte, daß $[v : T_{k_1}] \cap S_k = \emptyset$ für alle $k \neq k_1$). Bleibt der Fall $|T_{k_1}| \geq 3$. Dies impliziert, daß $|\bar{V}_1| + |\bar{V}_2| \geq 5$ gilt. Also muß $|\bar{V}_1| = 1$ gelten, andernfalls enthielte S_1 einen Kreis. Sei $\bar{V}_1 = \{v\}$. Dann gilt $\Upsilon(S_1) \geq d_{S_1}(v) - 2 = (|T_{k_1}| - 1) + |T_1| - 2 - 1 \geq |T_1| - 1$, ein Widerspruch zu (*).

(b) $|T_1| = |V| - 2$.

Da \mathcal{N} disjunkt ist, gilt damit $N = 2$ und $|T_2| = 2$ (sei $T_2 = \{t, t'\}$ und $T_1 = \{t_1, \dots, t_{|T_1|}\}$). Dieser Fall ist etwas lästig. Es kann nicht für jeden beliebigen Steinerbaum S_1 , wie oben definiert, Aussage (i) gezeigt werden. Beispielsweise gibt es für $S_1 = [t : T_1]$ und $e = tt'$ keine Packung von Steinerbäumen mit $e \notin P$. Wir zeigen in diesem Fall die Aussage (i) indirekt. Angenommen die Aussage,

(*) "Für alle Packungen von Steinerbäumen P mit $a^T \chi^P = \alpha$ gilt $e \in P$ ",

ist richtig. Wir betrachten zuerst den Fall $|\bar{V}_1| = 1$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bar{V}_1 = \{t\}$.

Betrachte zunächst $e = tt'$. Dann gilt $S_1 = [t : T_1]$. Aufgrund der Annahme (*) gilt damit (\diamond) $a_{tt_i} < a_{t_i t_j}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, |T_1|\}, i \neq j$. Da $a^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung mit $a \geq 0$ ist, gibt es einen kantenminimalen Steinerbaum S'_1 für T_1 mit $a^T \chi^{S'_1} = \alpha$, $e \notin S'_1$ und $S'_1 \cap E(T_1) \neq$

\emptyset , (angenommen ein solches S'_1 existiert nicht; aufgrund der Eigenschaften von $a^T x \geq \alpha$ existiert ein kantenminimaler Steinerbaum S für T_1 mit $a^T \chi^S = \alpha$ und $|S \cap E(T_1)| > 0$; aufgrund der Annahme ist $e \in S$; dann existieren i, j mit $t't_i, t_i t_j \in S$; da $a^T \chi^S = \alpha$ und $t_j t \notin S$ gilt $a_{t,t_j} < a_{t_i,t}$, ein Widerspruch zu (\diamond)). Sei o. B. d. A. $t_1 t_2 \in S'_1$. Aufgrund der Annahme (\star) gilt $tt_1 \in S'_1$ oder $t't_1 \in S'_1$ und $tt_2 \in S'_1$ oder $t't_2 \in S'_1$. Gilt $tt_1 \in S'_1$, dann ist $tt_2 \notin S'_1$, und wegen $a_{tt_2} < a_{t_1 t_2}$ ist $\bar{S}_1 = S'_1 \setminus \{t_1 t_2\} \cup \{tt_2\}$ ein Steinerbaum für T_1 mit $a^T \chi^{\bar{S}_1} < \alpha$, ein Widerspruch. Analog zeigt man, daß $tt_2 \notin S'_1$. Also ist $t't_2 \in S'_1$ und $t't_1 \in S'_1$, ein Widerspruch zur Kantenminimalität von S'_1 .

Sei nun $e = tt_i$ für ein $i \in \{1, \dots, |T_1|\}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i = 1$. Dann ist $S_1 = [t : T_1 \setminus t_1] \cup \{tt', t't_1\}$. Aufgrund der Annahme (\star) gilt demnach $a_{tt_2} < a_{t_2 t_1}$ und $a_{tt'} + a_{t't_1} < a_{t_2 t_1}$. Da $a^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung mit $a \geq 0$ ist, gibt es einen kantenminimalen Steinerbaum S'_1 für T_1 mit $a^T \chi^{S'_1} = \alpha$ und $t_1 t_2 \in S'_1$. Aufgrund der Annahme (\star) gilt jetzt $tt' \in S'_1$ oder $tt_1 \in S'_1$. Beide Alternativen führen zum Widerspruch, $tt' \in S'_1$ wegen $a_{tt_2} < a_{t_2 t_1}$ und $a_{t't_1} < a_{t_2 t_1}$, und $tt_1 \in S'_1$ wegen $a_{tt_2} < a_{t_2 t_1}$.

Zu guter Letzt bleibt der Fall $|\bar{V}_1| \geq 2$. Dann gilt $|\bar{V}_1| = 2$ und $|\bar{V}_2| = 2$ (insbesondere $|T_1| = 2$), andernfalls enthielte S_1 einen Kreis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hat{V}_1 = \{t, t_1\}$ und $\hat{V}_2 = \{t', t_2\}$. Da S_1 kantenminimal ist, bleibt nur der Fall $e = t_1 t_2$ zu untersuchen. Dann gilt $S_1 = \{t_1 t', t't, tt_2\}$. Aufgrund der Annahme (\star) gilt $a_{tt_2} + a_{tt'} < a_{t't_2}$ und $a_{t't_1} + a_{tt'} < a_{t't_1}$. Da $a^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung mit $a \geq 0$ ist, gibt es einen kantenminimalen Steinerbaum S'_1 für T_1 mit $a^T \chi^{S'_1} = \alpha$ und $t't_2 \in S'_1$. Dann gilt aufgrund der Annahme (\star), daß $S'_1 = \{t_2 t', t't, tt_1\}$ ist. Da aber $a_{tt_2} < a_{t't_2}$ und $a_{t't_1} < a_{t't_1}$, gilt $a^T \chi^{S_1} < a^T \chi^{S'_1} = \alpha$, ein Widerspruch.

Somit sind alle möglichen Fälle unter (b) zum Widerspruch geführt. Also war die Annahme (\star), für alle Packungen von Steinerbäumen P mit $a^T \chi^{P_1} = \alpha$ gilt $e \in P$, falsch.

Damit ist in allen Fällen gezeigt, daß es eine Packung von Steinerbäumen gibt mit den Eigenschaften in Aussage (i).

Der Beweis von Aussage (ii) geht völlig analog zu obigem Beweis. Da $e \notin P$ nicht mehr gefordert ist, gilt für die Abschätzung von $\Upsilon(S_1)$ sogar, daß $\Upsilon(S_1) \geq |T_1|$, falls $\sum_{k=2}^N (l(k) - 1) \geq 2$, und in obiger Fallunterscheidung kann nur Fall (1) eintreten. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Wir können nun das Hauptresultat dieses Kapitels angeben.

(6.2.4) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V und $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$, $N \geq 2$, eine disjunkte Netzliste. Sei $\bar{a}^T x \geq \alpha$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^E$, eine nichttriviale facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \{T_1\}, \mathbb{1})$. Dann definiert $a^T x \geq \alpha$ eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$, wobei $a \in \mathbb{R}^{N \times E}$ definiert ist als $a_e^1 = \bar{a}_e^1$, $a_e^k = 0$ für alle $k = 2, \dots, N$, $e \in E$.

Beweis.

Da $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine nichttriviale Ungleichung von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ ist, folgt aus Lemma (6.2.1), daß $\bar{a} \geq 0$ gilt. Damit sind die Aussagen aus Lemma (6.2.3) anwendbar.

Die Gültigkeit von $a^T x \geq \alpha$ ist klar. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Aussage (i) aus Lemma (6.2.3) impliziert, daß es zu jedem $e \in E$ eine Packung von Steinerbäumen P gibt mit $e \notin P$ und $\chi^P \in F_a$. Daraus folgt $b_e^k = 0$ für alle $k = 2, \dots, N$ und alle $e \in E$. Da $\bar{a}^T x \geq \alpha$ eine Facette von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ definiert und $\bar{a} \geq 0$ gilt, existieren kantenminimale Steinerbäume $S_1^1, \dots, S_1^{|E|}$ für T_1 , so daß $\chi^{S_1^1}, \dots, \chi^{S_1^{|E|}}$ affin unabhängig sind und $\bar{a}^T \chi^{S_1^i} = \alpha$ gilt für $i = 1, \dots, |E|$. Aus Lemma (6.2.3) (ii) folgt, daß jedes S_1^i zu einer Packung von Steinerbäumen P^i mit $P_1^i = S_1^i$ erweitert werden kann. Also gilt $a^T \chi^{P^i} = \alpha$ und damit auch $b^T \chi^{P^i} = \beta$ für $i = 1, \dots, |E|$. Da $b_e^k = 0$ für alle $k = 2, \dots, N$ und alle $e \in E$, erhalten wir $b^{1^T} \chi^{P^i} = \beta$. Aufgrund der Wahl von $S_1^1, \dots, S_1^{|E|}$ folgt damit, daß es ein $\lambda > 0$ gibt mit $b_e^1 = \lambda \bar{a}_e^1 = \lambda a_e^1$ für alle $e \in E$. Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist, und der Beweis ist vollständig. \square

(6.2.5) Bemerkung Die trivialen Facetten von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ definieren nicht notwendigerweise eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Betrachte zum Beispiel das Problembeispiel aus Abbildung 6.1.1 (a). Wie wir aus Beispiel (6.1.12) wissen, definiert $x_{12}^1 \geq 0$ keine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Allerdings ist leicht nachzurechnen, daß $x_{12}^1 \geq 0$ eine Facette von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ definiert. Außerdem folgt aus Satz (6.1.11) (ii), daß keine der Ungleichungen $x_e^1 \leq 1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definiert, obwohl jede dieser Ungleichungen eine Facette von $\text{STP}(G, \{T_1\}, \mathbb{I})$ definiert. \square

6.3. Kombinierte Facetten

In diesem Kapitel stellen wir Ungleichungen vor, die mehrere Netze miteinander kombinieren. Wir werden dabei so vorgehen, daß wir immer zuerst die Ungleichung beschreiben. Alle Ungleichungen, die in diesem Kapitel betrachtet werden, sind von der Form $a^T x \geq \alpha$, $a \geq 0$. Die Koeffizienten einiger Kanten erhalten den Wert Null für alle Netze. Wir nennen diese Kanten *Nullkanten* und den von den Nullkanten induzierten Graphen den *Nullgraphen*. Die Struktur des Nullgraphen ist so konzipiert, daß es keine Lösung für die involvierten Netze in diesem Graphen gibt. Damit muß jede Lösung Kanten, deren zugehörige Koeffizienten ungleich Null sind, enthalten. Die Ungleichung wird also im wesentlichen durch den Nullgraphen charakterisiert. Wir bezeichnen die Ungleichungen daher immer gemäß der Struktur des Nullgraphen. Wir weisen an dieser Stelle daraufhin, daß wir die Ungleichungen zunächst für jede beliebige Instanz definieren, wobei nicht garantiert ist, daß diese Ungleichungen auch gültig für das zugehörige Steinerbaumpackungs-Polyeder sind. Im daran anschließenden Satz spezifizieren wir Instanzen, für deren zugehöriges Steinerbaumpackungs-Polyeder die Ungleichung eine Facette definiert. Dabei können für die einzelnen Netze oft zusätzlich einige Kanten den Wert Null erhalten (wir versuchen diese Mengen immer mit F_1, \dots, F_N zu bezeichnen). Diese Kantenmengen F_1, \dots, F_N müssen

oftmals sehr technische Bedingungen erfüllen, damit die zugehörige Ungleichung eine Facette definiert. Oftmals lassen sich die Ergebnisse verallgemeinern, indem beispielsweise die Netzliste modifiziert wird oder Knoten hinzugefügt werden. Die Vielzahl an Erweiterungsmöglichkeiten ist dabei so groß, daß wir oft die Beweise nur skizzieren oder auf den Beweis ganz verzichten. Bevor wir mit der Beschreibung der ersten Ungleichung beginnen, geben wir eine Definition, die eine facetten-definierende Ungleichung mit dem zugrundeliegenden Graphen in Beziehung setzt.

(6.3.1) Definition

Sei (G, \mathcal{N}, c) eine beliebige Instanz eines Steinerbaumpackungs-Problems. Sei $a^T x \geq \alpha$ mit $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ eine Ungleichung definiert auf der Kantenmenge von G . Wir sagen G ist *facetten-definierend bezüglich der Ungleichung $a^T x \geq \alpha$* , falls $a^T x \geq \alpha$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definiert und für jeden Teilgraphen $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ von G mit $|\hat{V}| < |V|$ gilt $\text{supp}(a) \not\subseteq \hat{E}$.

6.3.1. Alternierende-Kreis-Ungleichungen

(6.3.1.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste. Ein Kreis C heißt *alternierender Kreis bezüglich T_1, T_2* , falls $V(C) \subseteq T_1 \cup T_2$, $C \subseteq [T_1 : T_2]$ und $V(C) \cap T_1 \cap T_2 = \emptyset$ gilt (vgl. Abbildung 6.3.1.1). Die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus C}, \chi^{E \setminus C})^T x \geq \frac{1}{2}|C| - 1$$

heißt *Alternierende-Kreis-Ungleichung*.

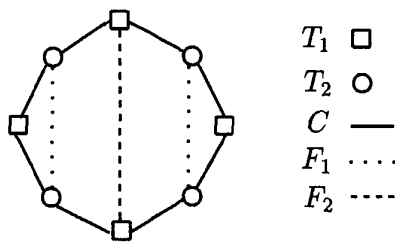


Abbildung 6.3.1.1

Seien $F_1 \subseteq E(T_2)$ und $F_2 \subseteq E(T_1)$ zwei Mengen von Diagonalen eines alternierenden Kreises C bezüglich T_1, T_2 . F_1 und F_2 heißen *maximal kreuzungsfrei bezüglich C* , falls F_1 und F_2 kreuzungsfrei sind, und jede Diagonale $e_1 \in E(T_1) \setminus F_2$ die Menge F_1 sowie jede Diagonale $e_2 \in E(T_2) \setminus F_1$ die Menge F_2 kreuzt (vgl. Abbildung 6.3.1.1). Dann gilt der folgende Satz.

(6.3.1.2) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 2$. Außerdem sei F ein alternierender Kreis bezüglich T_1, T_2 mit $V(F) = V$ sowie $F_1 \subseteq E(T_2)$, $F_2 \subseteq E(T_1)$. Die Alternierende-Kreis-Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l - 1$$

definiert eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ genau dann, wenn F_1 und F_2 maximal kreuzungsfrei sind.

Beweis. Sei $E_k = E \setminus (F \cup F_k)$, $k = 1, 2$ und $a := (\chi^{E_1}, \chi^{E_2})$. Wir zeigen zunächst, daß $a^T x \geq l - 1$ gültig ist, falls F_1 und F_2 kreuzungsfrei sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jede Packung von Steinerbäumen $(S_1, S_2) \mid |(S_1 \cap E_1) \cup (S_2 \cap E_2)| \geq l - 1$ gilt (beachte, $c = \mathbb{I}$).

Sei also (S_1, S_2) gegeben. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß S_1 und S_2 kantenminimal sind. Sei $T'_1 := \{t \in T_1 \mid \delta(t) \cap F \subset S_2\}$ und $T'_2 := \{t \in T_2 \mid \delta(t) \cap F \subset S_1\}$. Da S_1 und S_2 kantenminimal sind sowie $|F| = 2l$ ist, gilt $|T'_1| + |T'_2| \leq l - 1$. Das bedeutet, daß sowohl $T_1 \setminus T'_1$ als auch $T_2 \setminus T'_2$ nicht leer sind. Daraus folgt, daß mindestens $|T'_1| + |T'_2|$ Kanten $e \in S_1 \cap E_1 \cup S_2 \cap E_2$ notwendig sind, um T'_1 mit $T_1 \setminus T'_1$ und T'_2 mit $T_2 \setminus T'_2$ zu verbinden. Betrachten wir nun die verbleibenden Terminals $T_1 \setminus T'_1$ und $T_2 \setminus T'_2$. Sei $k_i = \zeta(V(S_i), S_i \setminus F_i)$ für $i = 1, 2$. Da F_1 und F_2 kreuzungsfrei sind, gilt $k_1 + k_2 \leq l + 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} a^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) &\geq (|T'_1| + |T'_2|) + (|T_1 \setminus T'_1| + |T_2 \setminus T'_2| - (k_1 + k_2)) \\ &\geq |T_1| + |T_2| - (k_1 + k_2) \geq l - 1. \end{aligned}$$

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^k = 0$ für $e \in F$, $k = 1, 2$.

Wähle $S_1 = F \setminus \{e\}$ und $S_2 = [t : T_2]$, $t \in T_2$. Sei ferner $S'_1 = S_1 \cup \{e\}$, dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^1$. Analog erhält man $b_e^2 = 0$.

(2) $b_e^k = 0$ für $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Wähle $S_1 = F$ und $S_2 = [t : T_2]$, $t \in T_2$. Sei ferner $S'_1 = S_1 \cup \{e\}$, dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^1$. Analog erhält man $b_e^2 = 0$.

(3) $b_e^k = b_{e'}^k$ für $e, e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv$ mit $u, v \in T_1$. Setze $S_2 = F$ sowie $S_1 = [v : T_1]$. Sei $e' \in [u : T_1] \setminus \{e\}$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{e'}^1 - b_e^1$, für alle $e, e' \in \delta(u)$, $u \in T_1$. Analog erhält man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

Für den Rest des Beweises sei $\bar{k} := 1$, falls $k = 2$, und $\bar{k} := 2$, falls $k = 1$.

(4) $b_e^k = b_{e'}^k$ für $e' \in E(T_k)$, $e \in [T_k : T_{\bar{k}}]$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uw$ mit $u \in T_1$, $w \in T_2$ und $v \in T_1$, so daß $vw \in F$. Wähle $S_2 = F \setminus \delta(v)$, $S_1 = [u : T_1]$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{uv\} \cup \{uw\} \cup \{vw\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{uw}^1 + b_{vw}^1 - b_{uv}^1 = b_{uw}^1 - b_{uv}^1$, da $b_{vw}^1 = 0$ (siehe (1)). Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung. Analog erhält man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

(5) $b_e^k = b_{e'}^k$ für $e \in E(T_{\bar{k}}) \setminus F_k$, $e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv \in E(T_2) \setminus F_1$. Da F_1 und F_2 maximal kreuzungsfrei sind, gibt es eine Kante $u_2v_2 \in F_2$, die e kreuzt. Sei $u^-, v^+ \in T_1$, so daß $u^-u, vv^+ \in F$ und uv die Kante u^-v^+ kreuzt. Wähle $S_1 = [u^- : E(T_1)]$ und $S_2 = F$. Außerdem sei $S'_1 = S_1 \setminus \{u^-v^+\} \cup \{u^-u, uv, vv^+\}$ und $S'_2 = S_2 \setminus \{u^-u, vv^+\} \cup \{u_2v_2\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) = b_{u^-v^+}^1 - b_{uv}^1$. Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung. Analog erhält man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

(6) $b_e^1 = b_{e'}^2$ für $e \in E(T_1)$, $e' \in E(T_2)$.

Sei $e = uv \in E(T_1)$ und $e' = wx \in E(T_2)$. Wähle $S_1 = [u : E(T_1)]$ und $S_2 = F$ sowie $S'_1 = F$ und $S'_2 = [w : E(T_2)]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) = \sum_{i \in T_2 \setminus \{w\}} b_{iw}^2 - \sum_{i \in T_1 \setminus \{u\}} b_{iu}^1 = (l-1) \cdot b_{xw}^2 - (l-1) \cdot b_{vu}^1$ wegen (3). Damit gilt $b_e^1 = b_{e'}^2$.

(1) - (6) implizieren, daß b ein Vielfaches von a .

Bleibt zu zeigen, daß F_1 und F_2 maximal kreuzungsfrei sind, falls $a^T x \geq l-1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ definiert.

Wir zeigen zuerst, daß F_1 und F_2 kreuzungsfrei sind. Angenommen, F_1 und F_2 sind nicht kreuzungsfrei. Dann existieren zwei sich kreuzende Diagonalen $e_1 = u_1v_1 \in F_1$ und $e_2 = u_2v_2 \in F_2$. Sei $u_1^-, v_1^+ \in T_1$, so daß $u_1^-u_1, v_1v_1^+ \in F$ und u_1v_1 die Kante $u_1^-v_1^+$ kreuzt. Wähle $S_1 = [u_1^- : E(T_1)] \setminus \{u_1^-v_1^+\} \cup \{u_1^-u_1, u_1v_1, v_1v_1^+\}$ und $S_2 = F \setminus \{u_1^-u_1, v_1v_1^+\} \cup \{u_2v_2\}$. Dann ist (S_1, S_2) eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = l-2$, ein Widerspruch.

Schließlich zeigen wir noch, daß F_1 und F_2 auch maximal kreuzungsfrei sind. Angenommen sie sind es nicht. Sei $F'_1 \subseteq E(T_2)$ und $F'_2 \subseteq E(T_1)$, so daß $F_1 \cup F_2 \subset F'_1 \cup F'_2$ sowie F'_1 und F'_2 maximal kreuzungsfrei sind. Gemäß Teil 1 des Beweises definiert $(\chi^{E \setminus (F \cup F'_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F'_2)})^T x \geq l-1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$. Durch Summation dieser facetten-definierenden Ungleichung zusammen mit den gültigen Ungleichungen $x_e^1 \geq 0$ für alle $e \in F'_1 \setminus F_1$ und $x_e^2 \geq 0$ für alle $e \in F'_2 \setminus F_2$ erhalten wir $a^T x \geq l-1$. Also definiert $a^T x \geq l-1$ keine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$, ein Widerspruch. \square

Verallgemeinerte Alternierende-Kreis-Ungleichungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Alternierenden-Kreis-Ungleichungen in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Zunächst betrachten wir den Fall, daß der in Satz (6.3.1.2) beschriebene Graph G parallele Kanten enthält. Außerdem soll das Hinzufügen eines

Knoten zu G untersucht werden. Abschließend verallgemeinern wir die Alternierenden-Kreis-Ungleichungen auf N Netze ($N \geq 3$).

Beginnen wir mit dem ersten Fall. Sei G erweitert durch parallele Kanten. Jede dieser Kanten, die nicht parallel zu einer Kante aus dem alternierenden Kreis F ist, erhält die gleichen Koeffizienten wie die "Originalkante" in G . Die Koeffizienten derjenigen Kanten, die parallel zu einer Kante aus F sind, erhalten alle den Wert 1. Von daher ändert sich an der Formulierung von Satz (6.3.1.2) im wesentlichen nichts.

(6.3.1.3) Korollar

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der als Kanten-Teilgraph den vollständigen Graphen auf der Knotenmenge V enthält, $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 2$. Außerdem sei F ein alternierender Kreis bezüglich T_1, T_2 mit $V(F) = V$ sowie $F_1 \subseteq E(T_2)$, $F_2 \subseteq E(T_1)$. Die Alternierende-Kreis-Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l - 1$$

definiert eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ genau dann, wenn F_1 und F_2 maximal kreuzungsfrei sind.

Beweis.

Der Beweis der Gültigkeit kann analog zu dem Beweis der Gültigkeit für Satz (6.3.1.2) geführt werden.

Sei wiederum wie im Beweis von Satz (6.3.1.2) $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1}) \mid b^T x = \beta\}$. Das Fixieren aller Kanten e , die nicht parallel zu einer Kante aus F sind, geht genauso wie im Beweis von Satz (6.3.1.2). Es verbleiben also die Koeffizienten derjenigen Kanten zu fixieren, die parallel zu einer Kante aus F sind. Sei $e = t_1 t_2$ mit $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ eine solche Kante und $f \in F$ parallel zu e . Ferner sei $e' = t' t_2 \in F$ mit $t' \in T_1$. Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$ und $S_2 = F \setminus \{e'\}$. Setze $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1 t'\} \cup \{e, e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_{t_1 t'}^1 - b_e^1$. Die gleiche Konstruktion ist offensichtlich für $k = 2$ möglich. Damit sind alle Koeffizienten fixiert. An dem Beweis, daß F_1 und F_2 maximal kreuzungsfrei sind, falls $a^T x \geq l - 1$ eine Facette definiert, ändert sich nichts. \square

Wir haben die Erweiterung auf parallele Kanten hier exemplarisch für die Alternierenden-Kreis-Ungleichungen vorgeführt. Entsprechende Resultate lassen sich auch für alle nun folgenden Klassen von Ungleichungen angeben. Es muß allerdings nicht immer sein, daß die Koeffizienten der Kanten, die nicht parallel zu einer Nullkante sind, das Gewicht des Koeffizienten der "Originalkante" erhalten. Für die Bestimmung der Koeffizienten paralleler Kanten kann Lemma (6.1.7) verwendet werden.

Nunmehr untersuchen wir den Fall, daß zu einem (bezüglich einer Alternierenden-Kreis-Ungleichung $a^T x \geq l - 1$) facetten-definierenden Graphen $G = (V, E)$ ein Knoten z hinzugefügt wird. Für die Koeffizienten \hat{a}_e^k , $e \in \delta(z)$, $k \in \{1, 2\}$, der neu hinzukommenden Kanten gibt es verschiedene Möglichkeiten. Zu deren Erläuterung sei F der alternierende Kreis, $F_1 \subseteq E(T_2)$, $F_2 \subseteq E(T_1)$ kreuzungsfreie Mengen von Diagonalen und $z \in V \setminus V(F)$.

(6.3.1.4) Wahlmöglichkeiten der neuen Koeffizienten bei Einführung eines Zusatzknoten

Sei $k \in \{1, 2\}$ mit $\bar{k} = 1$, falls $k = 2$, und $\bar{k} = 2$, falls $k = 1$ gilt.

(1) Ist z ein Terminal für Netz k ($z \in T_k$), so erhalten alle Koeffizienten den Wert 1, also

$$\hat{a}_e^k = 1, \quad \text{für alle } e \in \delta(z).$$

(2) Ist dagegen z kein Terminalknoten für Netz k ($z \notin T_k$), so gibt es die folgenden Möglichkeiten.

(i) $\hat{a}_e^k = \frac{l-1}{l}$, für alle $e \in \delta(z)$.

(ii) $\hat{a}_{zt}^k = 0$, für ein $t \in T_k$;
 $\hat{a}_e^k = 1$, für alle $e \in \delta(z) \setminus \{zt\}$.

(iii) $\hat{a}_{zt}^k = 0$, für ein $t \in T_k$;
 $\hat{a}_{zt'}^k = 0$, für alle $t' \in T_k, tt' \in F_k$;
 $\hat{a}_e^k = 1$, für alle anderen Kanten $e \in \delta(z)$.

(6.3.1.5) Korollar Sei $G = (V \cup \{z\}, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge $V \cup \{z\}$, $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste, so daß $T_1 \cap V, T_2 \cap V$ eine Partition von V ist mit $|T_1 \cap V| = |T_2 \cap V| = l, l \geq 2$. Außerdem sei F ein alternierender Kreis bezüglich T_1, T_2 mit $V(F) = V$ sowie $F_1 \subseteq E(T_2 \cap V)$ und $F_2 \subseteq E(T_1 \cap V)$ maximal kreuzungsfrei bezüglich F . Sei $\hat{a} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ ein Vektor, so daß $\hat{a}|_{\delta(z)}$ (6.3.1.4) erfüllt und $\hat{a}|_{E \setminus \delta(z)} = 0$ gilt. Schließlich sei $\alpha_k = |\{z\} \cap T_k|$ für $k = 1, 2$. Dann definiert

$$(\chi^{E(V) \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E(V) \setminus (F \cup F_2)})^T x + \hat{a}^T x \geq l - 1 + \alpha_1 + \alpha_2$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbf{1})$.

Beweis.

Sei $a = (\chi^{E(V) \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E(V) \setminus (F \cup F_2)}) + \hat{a}$ und $\alpha = l - 1 + \alpha_1 + \alpha_2$. Wir zeigen zuerst die Gültigkeit. Wir führen diese auf die Gültigkeit der Alternierenden-Kreis-Ungleichung zurück. Sei $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige kantenminimale Packung von Steinerbäumen. Sei $A_k^0 = \{e \in \delta(z) \mid a_e^k = 0\}$ für $k = 1, 2$. Wir zeigen zuerst, daß es eine Packung von Steinerbäumen $P' = (S'_1, S'_2)$ gibt, die

$$(*) \quad a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P \quad \text{und} \quad |S'_k \cap A_k^0| \leq 1 \quad \text{für } k = 1, 2$$

erfüllt. Angenommen es existieren Kanten $zt, zt' \in A_1^0$. Dann gilt gemäß (6.3.1.4), daß $tt' \in F_1$ ist. Wir setzen $S'_1 = S_1 \setminus \{tz\} \cup \{tt'\}$ (falls $|S_1 \cap \delta(z)| = 2$, so entferne auch zt' aus S'_1). Gilt $tt' \notin S_2$, dann setze $S'_2 = S_2$. Andernfalls sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{tt'\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t \in V(S_2^1)$ und $|V(S_2^1)| \leq |V(S_2^2)|$. Ist $[V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S'_1 \neq \emptyset$, so setze $S'_2 = S_2 \setminus \{tt'\} \cup \{e\}$ mit $e \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S'_1$. Andernfalls gilt $V(S_2^1) = \{t\}$, da S'_1 kantenminimal ist. Außerdem gilt $l - 1 \leq d_{S'_1}(t) \leq \Upsilon(S'_1) + 2 = |T_1| = l$, (beachte nur für (6.3.1.4) (iii) kann dieser Fall auftreten). Damit ist leicht zu sehen, daß es für den Fall $l \geq 3$ Knoten $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ gibt mit $t_1 t \in F$, $t_1 t \notin S'_1$ und $t_1 t_2 \notin S'_1$. Setze $S'_2 = S_2 \setminus \{tt'\} \cup \{tt_1, t_1 t_2\}$. Für den Fall $l = 2$ gilt entsprechend, daß es ein $t_1 \in T_1$ gibt mit $t_1 t \in F$, $t_1 t \notin S'_1$. Da S'_1 kantenminimal ist, ist

auch $t_1 t'_1, t'_1 t' \notin S'_1$ mit $\{t'_1\} = T_1 \setminus \{t_1\}$. Setze in diesem Fall $S'_2 = S_2 \setminus \{tt'\} \cup \{tt_1, t_1 t'_1, t'_1 t'\}$. Analog kann nun noch S'_2 modifiziert werden, so daß insgesamt (S'_1, S'_2) Eigenschaft (*) hat. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß bereits für P Eigenschaft (*) gilt.

Wir zeigen nun, daß es eine kantenminimale Steinerbaumpackung $P' = (S'_1, S'_2)$ gibt mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$ und $|\delta(z) \cap S'_k| = \alpha_k$ für $k = 1, 2$. Sei $\bar{P} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ eine kantenminimale Steinerbaumpackung, die minimal bezüglich $|\delta(z) \cap \bar{S}_1| + |\delta(z) \cap \bar{S}_2|$ ist unter allen kantenminimalen Steinerbaumpackungen \hat{P} mit $a^T \chi^{\hat{P}} \leq a^T \chi^P$. Angenommen, $|\delta(z) \cap \bar{S}_1| + |\delta(z) \cap \bar{S}_2| > \alpha_1 + \alpha_2$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\delta(z) \cap \bar{S}_1| > \alpha_1$. Wir zeigen nun, daß die Kanten von \bar{S}_1 aus $\delta(z)$ (bis auf eine, falls $z \in T_1$) ersetzt werden können durch Kanten aus $E(V)$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß \bar{P} Eigenschaft (*) erfüllt. Seien $(V_1, E_1), \dots, (V_l, E_l), (V_{l+1}, E_{l+1})$ die Komponenten von $(V(\bar{S}_1), \bar{S}_1 \setminus \delta(z))$ mit $V_{l+1} = \{z\}$, falls $z \in T_1$, und $V_{l+1} = \emptyset$, andernfalls. Da (*) gilt, ist $\hat{a}^T \chi^{S_1} \geq l_1 - 1 + \alpha_1$. Sei $G(V_1, \dots, V_l) = (V', E')$. Wir behaupten

- (\diamond) die Komponenten $1, \dots, l_1$ können mit Kanten aus $E(V) \setminus \bar{S}_2$ verbunden werden, deren aufsummierte Koeffizienten höchstens den Wert $l_1 - 1$ ergeben.

Ist $(V', E' \setminus \bar{S}_2)$ zusammenhängend, so ist dies offensichtlich möglich. Andernfalls gilt $|V_i| = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, l_1\}$ und $l_1 = 2$, da \bar{S}_2 kantenminimal ist. Sei $\{v\} = V_i$. Dann gilt $|T_1 \cap V| - 1 \leq d_{\bar{S}_2}(v) \leq \Upsilon(\bar{S}_2) + 2 = |T_2|$ (beachte, daß $\Upsilon(\bar{S}_2) \geq d_{\bar{S}_2}(v) - 2$ ist). Daraus folgt, daß es für $l \geq 3$ Knoten $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ gibt mit $vt_2, t_2 t_1 \notin \bar{S}_2$ und $vt_2 \in F$ oder $t_2 t_1 \in F$. Dies impliziert (\diamond). Für den Fall $l = 2$ und $z \notin T_2$ ist, wie leicht nachzuprüfen ist, (\diamond) auch richtig. Allerdings trifft dies nicht für den Fall $l = 2$ und $z \in T_2$ zu. Vergleiche Abbildung 6.3.1.2 (a). In diesem Fall muß auch \bar{S}_2 umgelegt werden, so daß (\diamond) gilt, vergleiche Abbildung 6.3.1.2 (b).

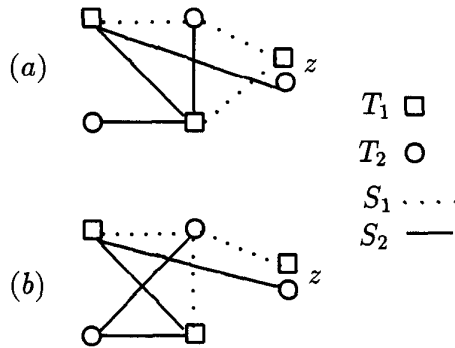


Abbildung 6.3.1.2

Sei $P' = (S'_1, S'_2)$ die so konstruierte Steinerbaumpackung. Dann gilt $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^{\bar{P}} + l_1 - 1 - \hat{a}^T \chi^{\bar{S}_1} + \alpha_1 \leq a^T \chi^{\bar{P}} \leq a^T \chi^P$ und $|\delta(z) \cap S'_1| + |\delta(z) \cap S'_2| < |\delta(z) \cap \bar{S}_1| + |\delta(z) \cap \bar{S}_2|$, ein Widerspruch. Also, existiert eine kantenminimale Steinerbaumpackung $P' = (S'_1, S'_2)$ mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$ und $|\delta(z) \cap S'_k| = \alpha_k$ für $k = 1, 2$. Aus Satz (6.3.1.2) folgt, daß $a^T \chi^{P'} \geq \alpha$ gilt. Dies impliziert die Gültigkeit.

Es bleibt zu zeigen, daß $a^T x \geq \alpha$ eine Facette definiert. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facettendefinierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Analog zum Beweis von Satz (6.3.1.2) können die Koeffizienten b_e^k für $e \in E(V)$, $k = 1, 2$ fixiert werden. Verbleiben die Koeffizienten der Kanten aus $\delta(z)$ zu fixieren.

Wir betrachten zuerst den Fall $z \in T_k$. Sei außerdem $z \in T_{\bar{k}}$ (der Fall $z \notin T_{\bar{k}}$ geht völlig analog durch jeweiliges Weglassen der Kante aus $\delta(z)$). Es sei wieder $\bar{k} = 3 - k$.

(1) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e, e' \in \delta(z)$.

Wähle $S_k = F \cup \{e\}$ und $S_{\bar{k}} = [t : T_{\bar{k}}] \cup \{f\}$ mit $t \in T_k$ und $f \in [z : T_{\bar{k}}] \setminus \{e, e'\}$ (eine solche Kante f gibt es für $l \geq 3$ oder $\{e, e'\} \neq [z : T_{\bar{k}}]$; für $l = 2$ und $\{e, e'\} = [z : T_{\bar{k}}]$ wähle $S_k = F \setminus \{t_1 t_2\} \cup \{e\}$ mit $t_1 t_2 \in F$, $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ und $S_{\bar{k}} = [t : T_{\bar{k}}] \cup \{t_1 t_2, t_k z\}$). Setze $S'_k = S_k \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ und $S'_{\bar{k}} = S_{\bar{k}}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_e^k - b_{e'}^k$.

(2) $b_{zt}^k = b_{tt'}^k$ für alle $t, t' \in T_k, t \neq t'$.

Wähle $S_k = [t : T_k] \cup \{t'z\}$ und $S_{\bar{k}} = F \cup \{f\}$ mit $f \in \delta(z) \setminus \{t'z, tz\}$. Setze $S'_k = S_k \setminus \{tt'\} \cup \{zt\}$ und $S'_{\bar{k}} = S_{\bar{k}}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_{tt'}^k - b_{zt}^k$.

Damit sind alle Koeffizienten fixiert, falls $z \in T_k$. Behandeln wir abschließend den Fall $z \notin T_k$. Aus dem gleichen Grund wie oben sei $z \in T_{\bar{k}}$. Wir skizzieren den Fall (2) (i) und (2) (iii) aus (6.3.1.4), der Fall (2) (ii) geht analog zu (iii). Beginnen wir mit (2) (i).

(3) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e, e' \in \delta(z)$.

Es genügt dies für $e = zt$ und $e' = zt'$ mit $tt' \in F, t \in T_k$, zu zeigen. Setze $S_k = [z : T_k]$ und $S_{\bar{k}} = F \setminus \{tt'\} \cup \{f\}$ mit $f \in \delta(z) \setminus ([z : T_k] \cup \{zt'\})$. Setze $S'_k = S_k \setminus \{zt\} \cup \{zt', t't\}$ und $S'_{\bar{k}} = S_{\bar{k}}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_{zt}^k - b_{zt'}^k$.

(4) $b_{zt}^k = \frac{l-1}{l} b_{tt'}^k$ für alle $t, t' \in T_k$.

Setze $S_k = [z : T_k]$ und $S_{\bar{k}} = F \cup \{f\}$ mit $f \in \delta(z) \setminus [z : T_k]$. Setze $S'_k = [t : T_k]$ und $S'_{\bar{k}} = S_{\bar{k}}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt zusammen mit (3) $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = l \cdot b_{zt}^k - (l-1) \cdot b_{tt'}^k$.

Zum Schluß befassen wir uns noch mit dem Fall (2) (iii) aus (6.3.1.4).

(5) $b_e^k = 0$ für alle $e \in A_k^0 := \{e \in \delta(z) \mid a_e^k = 0\}$.

Dies kann analog zum Fall (1) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) gezeigt werden.

(6) $b_{zt}^k = b_e^k$ für alle $t \in T_k$ und $e \in E(T_k)$.

Punkt (4) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) impliziert diese Tatsache. Die Kante $t't$ ist dabei zu ersetzen durch die Kanten $t'z$ und zt , wobei $t' \in T_{\bar{k}}$ mit $t'z \in A_{\bar{k}}^0$ ist.

(7) $b_{zt}^k = b_e^k$ für alle $t \in T_{\bar{k}}$ und $e \in E(T_k)$.

Diese Behauptung folgt aus Punkt (5) des Beweises von Satz (6.3.1.2). Wie oben ist die Kante $t't$ zu ersetzen durch die Kanten $t'z$ und zt , wobei $t' \in T_{\bar{k}}$ mit $t'z \in A_{\bar{k}}^0$ ist.

Damit ist in allen Fällen gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist. Da es offensichtlich in allen Fällen eine Steinerbaumpackung P mit $a^T \chi^P > \alpha$ gibt, ist $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ volldimen-

sional, also insbesondere auch dann, wenn \mathcal{N} nicht disjunkt ist. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Wie in Korollar (6.3.1.3) kann der Fall betrachtet werden, daß der zugrundeliegende Graph parallele Kanten enthält. Es ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten derjenigen Kanten, die parallel zu einer Kante $e \in \delta(z)$ sind, den gleichen Koeffizienten wie die "Originalkante" erhalten. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis. Natürlich können in entsprechender Weise mehrere Zusatzknoten eingeführt werden und die Koeffizienten der neu hinzukommenden Kantenmengen entsprechend (6.3.1.4) belegt werden. Die Koeffizienten derjenigen Kanten, die zwei Zusatzknoten miteinander verbinden, können zum Beispiel mit Hilfe von Lemma (6.1.7) bestimmt werden. Dies führt abhängig von der Wahl in (6.3.1.4) zu unterschiedlichen Belegungen der Koeffizienten. Wir betrachten zum Abschluß dieses Abschnitts eine Erweiterung der Alternierenden-Kreis-Ungleichungen auf mehr als zwei Netze.

(6.3.1.6) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine disjunkte Netzliste mit $\cup_{k=1}^N T_k = V$ und $|T_k| = l$, $l \geq 2$ für $k = 1, \dots, N$. Sei C_k ein alternierender Kreis bezüglich T_1, T_k mit $V(C_k) = T_1 \cup T_k$ für $k = 2, \dots, N$. Sei $F = \cup_{k=2}^N C_k$ und $F_k = \{[T_p : T_q] \mid p = 1, \dots, N, q = 1, \dots, N, q \neq k, p \neq k\}$ für $k = 2, \dots, N$. (Vergleiche Abbildung 6.3.1.3.) Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus F}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \dots, \chi^{E \setminus (F \cup F_N)})^T x \geq l - 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

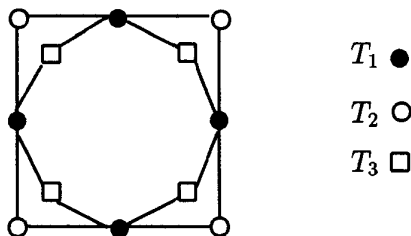


Abbildung 6.3.1.3

Beweis. Sei $a = (\chi^{E \setminus F}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \dots, \chi^{E \setminus (F \cup F_N)})$. Wir zeigen zuerst die Gültigkeit. Sei $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine beliebige kantenminimale Packung von Steinerbäumen. Sei $I_k = \{t \in T_k \mid \delta(t) \cap C_k \subset S_1\}$ die Menge der von S_1 isolierten Knoten. Da $A_1^0 := \{e \in E \mid a_e^1 = 0\} = F$ ist, gilt $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq l - 1 - \sum_{k=2}^N |I_k|$. Da S_1 kantenminimal ist, ist $T_k \setminus I_k \neq \emptyset$. Außerdem ist $\{e \in \delta(t) \mid a_e^k = 0\} \subset F$ für alle $t \in T_k, k = 2, \dots, N$. Diese beiden Tatsachen implizieren, daß $(a^k)^T x \geq |I_k|$ für $k = 2, \dots, N$ ist. Also erhalten wir insgesamt, $a^T \chi^P \geq l - 1 - \sum_{k=2}^N |I_k| + \sum_{k=2}^N |I_k| = l - 1$. Damit ist der Beweis der Gültigkeit erbracht.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist. Wir werden gegebenenfalls auf den Beweis von Satz (6.3.1.2) verweisen. Beachte, daß Netz 1 zusammen mit Netz k für $k \in \{2, \dots, N\}$ die Voraussetzungen von Satz (6.3.1.2) erfüllt, da $F_1 = \emptyset$ ist.

(1) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F$, $k = 1, \dots, N$.

Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$ für ein $t_1 \in T_1$ und $S_i = C_i \setminus \{e\}$ für $i = 2, \dots, N$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 2, \dots, N$.

Wähle $S_1 = C_k$, $S_k = [t_k : T_k]$ für ein $t_k \in T_k$ sowie $S_i = C_i$ für $i = 2, \dots, N$, $i \neq k$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(3) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e, e' \in E(T_k)$, $k = 1, \dots, N$.

Dies kann analog zu Punkt (3) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) gezeigt werden.

(4) $b_e^1 = b_{e'}^k$ für alle $e \in E(T_1)$, $e' \in E(T_k)$, $k = 2, \dots, N$.

Dies kann wie in Punkt (6) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) gezeigt werden.

Wir fixieren nun die restlichen Koeffizienten von b^1 .

(5) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für alle $e' \in E(T_1)$, $e \in [T_1 : T_k]$, $k = 2, \dots, N$.

Die gleiche Vorgehensweise wie unter Punkt (4) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) impliziert diese Behauptung.

(6) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für alle $e' \in E(T_1)$, $e \in E(T_k)$, $k = 2, \dots, N$.

Dies kann analog zu Punkt (5) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) gezeigt werden.

(7) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für alle $e' \in E(T_1)$, $e \in [T_p : T_q]$, $p, q \geq 2$, $p \neq q$.

Sei $e = t_p t_q$ mit $t_p \in T_p$, $t_q \in T_q$. Sei $t_1, t'_1 \in T_1$, $t_1 \neq t'_1$, so daß $t_1 t_p \in C_p$ und $t'_1 t_q \in C_q$ ist. Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$, $S_p = C_p \setminus \{t_1 t_p\}$, $S_q = C_q \setminus \{t'_1 t_q\}$ und $S_i = C_i$ für alle $i \in \{2, \dots, N\} \setminus \{p, q\}$. Außerdem sei $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1 t'_1\} \cup \{t_1 t_p, t_p t_q, t_q t'_1\}$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = (S'_1, S_2, \dots, S_N)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{t_p t_q}^1 - b_{t_1 t'_1}^1$. Dies zusammen mit (3) impliziert die Behauptung.

Damit sind alle Koeffizienten von b^1 fixiert. Es verbleibt also nur noch die Aufgabe, die restlichen Koeffizienten von b^k für $k \in \{2, \dots, N\}$ zu fixieren.

(8) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e \in E(T_k)$, $e' \in [T_1 : T_k]$.

Diese Tatsache kann entsprechend dem Punkt (4) aus dem Beweis von Satz (6.3.1.2) gezeigt werden.

(9) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e \in [T_k : T_p]$, $p \geq 2$, $p \neq k$ und $e' \in E(T_k)$.

Sei $e = t_k t_p$ für ein $t_k \in T_k$, $t_p \in T_p$. Sei $t'_k \in T_k \setminus \{t_k\}$ und $t_1 \in T_1$, so daß $t_1 t'_k \in C_k$ und $t_1 t_p \in C_p$ ist. Wähle $S_1 = C_k \setminus \{t_1 t'_k\}$, $S_k = [t_k : T_k]$ und $S_p = C_p \setminus \{t_1 t_p\}$ sowie $S_i = C_i$ für alle $i \in \{2, \dots, N\} \setminus \{p, k\}$. Außerdem setze $S'_k = S_k \setminus \{t_k t'_k\} \cup \{t_k t_p, t_p t_1, t_1 t'_k\}$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \setminus_k S_k \cup_k S'_k$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{t_k t_p}^k - b_{t_1 t'_k}^k$. Dies zusammen mit (3) impliziert die Behauptung.

Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist, und der Beweis ist abgeschlossen. \square

In gewisser Weise wird in (6.3.1.6) nur ein Spezialfall von Satz (6.3.1.2) auf beliebig viele Netze verallgemeinert, nämlich der Fall, daß $F_1 = \emptyset$ ist. Wir vermuten, daß es auch eine entsprechende Verallgemeinerung gibt, falls $F_1 \neq \emptyset$ ist. Allerdings reicht dann die Bedingung "kreuzungsfrei" nicht aus. Wir kennen bis jetzt keine vernünftige Charakterisierung für diesen verallgemeinerten Fall.

6.3.2. Alternierende-Weg-Ungleichungen

(6.3.2.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste. Ein Weg W heißt *alternierender Weg bezüglich T_1, T_2* , falls $V(W) \subseteq T_1 \cup T_2$, $W \subseteq [T_1 : T_2]$ und $V(W) \cap T_1 \cap T_2 = \emptyset$ gilt. Ein alternierender Weg W heißt *gerade*, falls $|V(W) \cap T_1| = |V(W) \cap T_2|$, andernfalls nennen wir ihn *ungerade*. Ist W ein gerader alternierender Weg, so heißt die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus W}, \chi^{E \setminus W})^T x \geq \frac{1}{2}|W| - 1$$

Gerade-Alternierende-Weg-Ungleichung. Ist dagegen W ein ungerader alternierender Weg, so heißt die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus W}, \chi^{E \setminus W})^T x \geq \frac{1}{2}(|W| - 1) - 1$$

Ungerade-Alternierende-Weg-Ungleichung.

Wir geben nun zwei Sätze, in denen Instanzen beschrieben sind, für deren zugehörige Steinerbaumpackungs-Polyeder die Ungleichungen aus einem ungeraden beziehungsweise geraden alternierenden Weg Facetten definieren.

(6.3.2.2) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 2$. Außerdem sei W ein ungerader alternierender Weg bezüglich T_1, T_2 von t_2 nach t'_2 mit $t_2, t'_2 \in T_2$ und $T_2 \subset V(W)$. Sei $t_1 \in T_1 \setminus V(W)$ (beachte, daß $|V(W)| = |T_1| + |T_2| - 1$) und $C = W \cup \{t_2 t_1, t_1 t'_2\}$. Seien $\hat{F}_1 \subseteq E(T_2)$ und $\hat{F}_2 \subseteq E(T_1)$ maximal kreuzungsfrei bezüglich C (beachte, C ist ein alternierender Kreis). Falls $\hat{F}_2 \cap \delta(t_1) \neq \emptyset$, wähle $\hat{t} \in T_1 \setminus \{t_1\}$, so daß $t_1 \hat{t} \in \hat{F}_2$, andernfalls sei $\hat{t} \in T_1 \setminus \{t_1\}$ beliebig. Setze $F_1 = \hat{F}_1 \cup \{t_1 t \mid t_2 t \in \hat{F}_1, t \in T_2\} \cup \{t_1 t \mid t'_2 t \in \hat{F}_1, t \in T_2\} \cup \{t t' \mid t_2 t \in \hat{F}_1 \text{ oder } t = t_2, t'_2 t' \in \hat{F}_1 \text{ oder } t' = t'_2, t, t' \in T_2\} \cup \{t_1 t_2, t_1 t'_2\}$ und $F_2 = \hat{F}_2 \cup \{t_1 t \mid t \hat{t} \in \hat{F}_2, t \in T_1\} \cup \{t_1 \hat{t}\}$. Vergleiche dazu auch Abbildung 6.3.2.1. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (W \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (W \cup F_2)})^T x \geq l - 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

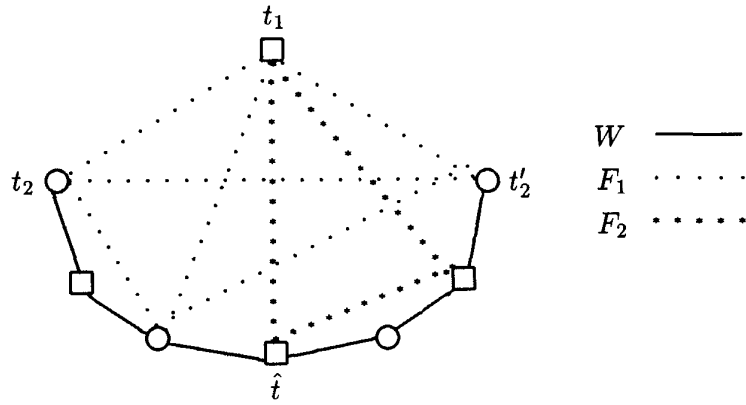


Abbildung 6.3.2.1

Beweis. Sei $a := (\chi^{E \setminus (W \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (W \cup F_2)})$. Wir zeigen zuerst, daß $a^T x \geq l - 1$ gültig ist für STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Dies zeigen wir indirekt. Dazu definieren wir uns zunächst die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{tt' \mid t_2t \in \hat{F}_1 \text{ oder } t = t_2, t_2't' \in \hat{F}_1 \text{ oder } t' = t_2', t, t' \in T_2\} \setminus \hat{F}_1, \\
 A_2 &= (\{t_1t \mid t_2t \in \hat{F}_1, t \in T_2\} \cup \{t_1t \mid t_2't \in \hat{F}_1, t \in T_2\}) \setminus \{t_1t_2, t_1t_2'\}, \\
 A_3 &= \{t_1t \mid t\hat{t} \in \hat{F}_2, t \in T_1\} \cup \{t_1\hat{t}\}.
 \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung, $F_1 = \hat{F}_1 \cup A_1 \cup A_2 \cup \{t_1t_2, t_1t_2'\}$ und $F_2 = \hat{F}_2 \cup A_3$. Außerdem definieren wir uns eine Funktion $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $f(E_1, E_2) = (|A_1 \cap E_1|, |A_2 \cap E_1|, |A_3 \cap E_2|)$ für $E_1, E_2 \subseteq E$. Sei $f_1(E_1, E_2) = |A_1 \cap E_1|$, $f_2(E_1, E_2) = |A_2 \cap E_1|$ und $f_3(E_1, E_2) = |A_3 \cap E_2|$ für $E_1, E_2 \subseteq E$. Wir definieren $f(E_1, E_2) < f(E_1', E_2')$ genau dann, wenn es ein $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ gibt, so daß $f_i(E_1, E_2) = f_i(E_1', E_2')$ für $i = 1, \dots, i_0 - 1$ und $f_{i_0}(E_1, E_2) < f_{i_0}(E_1', E_2')$ gilt. Wir zeigen im folgenden, daß, wenn es eine Packung von Steinerbäumen (S_1, S_2) mit $f(S_1, S_2) > 0$ gibt, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt, es auch eine Packung von Steinerbäumen (S_1', S_2') mit $f(S_1', S_2') = 0$ gibt, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt.

Sei also $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt, und minimal bezüglich f ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien S_1 und S_2 kantenminimal.

(1) $f_1(S_1, S_2) > 0$.

Sei $uv \in A_1 \cap S_1$, $u, v \in T_2$. Sei $S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 \cup \{uv\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_1 , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u, t_1 \in V(S_1^1)$ und $v \in V(S_1^2)$. Damit ist auch $S_1' = S_1 \setminus \{uv\} \cup \{vt_1\}$ ein Steinerbaum bezüglich T_1 (beachte, $vt_1 \in A_2$). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß S_1' kantenminimal ist. Gilt $vt_1 \notin S_2$, wähle $S_2' = S_2$. Andernfalls sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{vt_1\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit $v \in V(S_2^1)$. Beachte, daß $|V(S_2^2)| \geq 2$, da $t_1 \in V(S_2^2)$. Gilt auch $|V(S_2^1)| \geq 2$, so existiert eine Kante $e \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S_1'$, da S_1' kantenminimal ist. Wähle $S_2' = S_2 \setminus \{vt_1\} \cup \{e\}$. Andernfalls ist $V(S_2^1) = \{v\}$. In diesem Fall setze $S_2' = S_2 \setminus \{vt_1\} \cup \{uv\}$. Damit ist auch $P' = (S_1', S_2')$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$ (beachte, $a_{vt_1}^2 = 1$) und $f(S_1', S_2') < f(S_1, S_2)$, ein Widerspruch zur Wahl von (S_1, S_2) . Also gilt $f_1(S_1, S_2) = 0$.

(2) $f_2(S_1, S_2) > 0$.

Sei $ut_1 \in A_2 \cap S_1$, $u \in T_2$. Sei $S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 \cup \{ut_1\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_1 , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \in V(S_1^1)$ und $t_1 \in V(S_1^2)$. Da $ut_1 \in A_2$, ist $ut_2 \in \hat{F}_1$ oder $ut_2' \in \hat{F}_1$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $ut_2' \in \hat{F}_1$. Wir setzen $S_1' \setminus \{ut_1\} \cup \{ut_2', t_2't_1\}$, falls $t_2' \notin V(S_1)$, $S_1' \setminus \{ut_1\} \cup \{ut_2'\}$, falls $t_2' \in V(S_1^2)$, und $S_1' \setminus \{ut_1\} \cup \{t_2't_1\}$, falls $t_2' \in V(S_1^1)$. Damit ist S_1' ein kantenminimaler Steinerbaum mit $S_1' \cap A_1 = \emptyset$ und $(a^1)^T \chi^{S_1'} = (a^1)^T \chi^{S_1}$. Gilt $S_1' \cap S_2 = \emptyset$, so wählen wir $S_2' = S_2$. Andernfalls betrachte die folgenden Fälle.

(2.1) $S_1' \cap S_2 = \{ut_2'\}$.

Sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{ut_2'\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit $u \in V(S_2^1)$ und $t_2' \in V(S_2^2)$. Existiert eine Kante $e \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S_1'$, dann wähle $S_2' = S_2 \setminus \{ut_2'\} \cup \{e\}$. Andernfalls gilt $V(S_2^1) = \{u\}$ oder $V(S_2^2) = \{t_2'\}$, da S_1' kantenminimal ist. Wir betrachten den Fall $V(S_2^1) = \{u\}$ (der Fall $V(S_2^2) = \{t_2'\}$ läuft völlig analog). In diesem Fall existieren Knoten $t^1 \in T_1 \setminus \{t_1\}$ und $t^2 \in T_2 \setminus \{u\}$, so daß $ut^1, t^1t^2 \notin S_1'$, wobei entweder $ut^1 \in W$ oder $t^1t^2 \in W$. Andernfalls wäre $l - 2 = \Upsilon(S_1') \geq |V(S_2)| - 1 - 2 + |T_1 \setminus \{t_1\}| \geq 2l - 4 > l - 2$ für $l \geq 3$ (beachte $A_2 = \emptyset$, falls $l = 2$), ein Widerspruch. Also können wir $S_2' = S_2 \setminus \{ut_2'\} \cup \{ut^1, t^1t^2\}$ wählen. In allen Fällen gilt damit $(a^2)^T \chi^{S_2'} \leq (a^2)^T \chi^{S_2}$ und $S_1' \cap S_2' = \emptyset$.

(2.2) $S_1' \cap S_2 = \{t_1t_2'\}$.

Analog zu (2.1) läßt sich auch hier ein Steinerbaum S_2' wählen mit $(a^2)^T \chi^{S_2'} \leq (a^2)^T \chi^{S_2}$ und $S_1' \cap S_2' = \emptyset$.

(2.3) $S_1' \cap S_2 = \{ut_2', t_1t_2'\}$.

Analog zu (2.1) läßt sich zunächst ut_2' aus S_2 entfernen und entsprechend (2.2) auch t_1t_2' . Damit erhalten wir auch hier einen Steinerbaum S_2' mit $(a^2)^T \chi^{S_2'} \leq (a^2)^T \chi^{S_2}$ und $S_1' \cap S_2' = \emptyset$.

Damit ist in allen Fällen auch $P' = (S_1', S_2')$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$ und $f(S_1', S_2') < f(S_1, S_2)$, ein Widerspruch zur Wahl von (S_1, S_2) . Also gilt $f_2(S_1, S_2) = 0$.

(3) $f_3(S_1, S_2) > 0$.

Sei $ut_1 \in A_3 \cap S_2$, $u \in T_1$. Wir betrachten zwei Fälle.

(3.1) Es existiert $v \in T_1 \setminus \{u\}$ mit $vt_1 \in A_3 \cap S_2$.

Sei wiederum $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{ut_1\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \in V(S_2^1)$ und $v, t_1 \in V(S_2^2)$. Gilt $uv \notin S_1$, so wähle $S_2' = S_2 \setminus \{ut_1\} \cup \{uv\}$ und $S_1' = S_1$. Andernfalls sei $S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 \cup \{uv\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_1 mit $u \in V(S_1^1)$ und $v \in V(S_1^2)$. Gilt $t_1 \in V(S_1^1)$, so wählen wir $S_2' = S_2 \setminus \{vt_1\} \cup \{uv\}$ und $S_1' = S_1 \setminus \{uv\} \cup \{vt_1\}$, andernfalls wählen wir $S_2' = S_2 \setminus \{ut_1\} \cup \{uv\}$ und $S_1' = S_1 \setminus \{uv\} \cup \{ut_1\}$. Beachte, daß $ut_1, vt_1 \notin A_1 \cup A_2$ und $a_{uv}^2 = 0$.

(3.2) $A_3 \cap S_2 = \{ut_1\}$.

Sei $S_2 = S_2^0 \cup S_2^1 \cup \dots \cup S_2^q \cup \{ut_1, t_1v_1, \dots, t_1v_q\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit $q = d_{S_2}(t_1) - 1 \geq 1$, $v_i \in V(S_2^i)$ für $i = 1, \dots, q$ und $u \in V(S_2^0)$, $|V(S_2^0)| \geq 2$. Beachte, daß $a_{t_1v_i}^2 = 1$ für $i = 1, \dots, q$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[V(S_2^i) : V(S_2^0)] \subset S_1$ für $i = 1, \dots, q$ und

$[V(S_2^i) : V(S_2^0)] \setminus S_1 \neq \emptyset$ für $i = p + 1, \dots, q$. Offensichtlich gilt $|V(S_2^i)| = 1$ für $i = 1, \dots, p$, sonst enthält S_1 einen Kreis. Es gilt sogar $p \leq 1$, andernfalls wäre der Kreis $\{v_1u, uv_2, v_2v_0, v_0v_1\} \subset S_1$ mit $v_0 \in V(S_2^0) \setminus \{u\}$. Wir setzen $\bar{S}_2 = S_2 \setminus \{t_1v_1, \dots, t_1v_q\} \cup \{e^{p+1}, \dots, e^q\}$ mit $e^i \in [V(S_2^i) : V(S_2^0)] \setminus S_1$ für $i = p + 1, \dots, q$. Beachte, daß $e^i \notin A_3$ und $(a^2)^T \chi^{\bar{S}_2} \leq (a^2)^T \chi^{S_2}$ ist. Gilt $p = 0$, so wähle $S_2' = \bar{S}_2 \setminus \{ut_1\}$ und $S_1' = S_1$. Also bleibt der Fall $p = 1$. Wir wissen, daß $V(\bar{S}_2) = V(S_2)$, $v_1t_1, t_1u \in \bar{S}_2$, $d_{\bar{S}_2}(v_1) = 1$ und $d_{\bar{S}_2}(t_1) = 2$. Sei $\bar{S}_2^0 = \bar{S}_2 \setminus \{v_1t_1, t_1u\}$. Existiert eine Kante $e \in [v_1 : V(\bar{S}_2^0)] \setminus S_1$, so wähle $S_2' = \bar{S}_2 \setminus \{v_1t_1, t_1u\} \cup \{e\}$ und $S_1' = S_1$. Andernfalls gilt $l - 2 = \Upsilon(S_1) \geq d_{S_1}(v_1) - 2 \geq |V(\bar{S}_2^0)| - 2 = |V(S_2)| - 4 \geq l - 2$ (beachte, $u, t_1 \in V(S_2)$). Also gilt $d_{S_1}(u) = 1$. Wähle nun $S_1' = S_1 \setminus \{v_1u\} \cup \{ut_1\}$ und $S_2' = \bar{S}_2 \setminus \{v_1t_1, t_1u\} \cup \{v_1u\}$. Beachte, daß $ut_1 \notin A_1 \cup A_2$ und $v_1u \notin A_3$.

Damit ist $P' = (S_1', S_2')$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$ und $f(S_1', S_2') < f(S_1, S_2)$, ein Widerspruch zur Wahl von (S_1, S_2) . Also gilt $f_3(S_1, S_2) = 0$.

Damit wissen wir, daß, wenn es eine Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$ gibt mit $a^T \chi^P < l - 1$, es auch eine Packung von Steinerbäumen $P' = (S_1', S_2')$ gibt mit $a^T \chi^{P'} < l - 1$ und $f(S_1', S_2') = 0$. Gilt aber $f(S_1', S_2') = 0$, so wissen wir aus Satz (6.3.1.2), daß $a^T \chi^{P'} \geq l - 1$ ist. Also ist $a^T x \geq l - 1$ gültig.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^1 = 0$ für $e \in W \cup F_1$.

Wähle $S_1 = C \setminus \{e\}$ und $S_2 = [t : E(T_2)]$, $t \in T_2$. Sei ferner $S_1' = S_1 \cup \{e\}$, dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1'}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^1$.

(2) $b_e^2 = 0$ für $e \in W \cup F_2$.

Wähle $S_1 = C \setminus \{e\}$ und $S_2 = [t : E(T_2)]$, $t \in T_2$. Sei ferner $S_2' = S_2 \cup \{e\}$, dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1, S_2')$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2'}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^2$.

(3) $b_e^k = b_{e'}^k$, für $e, e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv$ mit $u, v \in T_1$. Setze $S_2 = W$ sowie $S_1 = [v : E(T_1)]$. Sei $e' \in [u : E(T_1)] \setminus \{e\}$ und $S_1' = S_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1'}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{e'}^1 - b_e^1$, für alle $e, e' \in \delta(u)$, $u \in T_1$. Analog erhält man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

(4) $b_e^1 = b_{e'}^2$, für $e \in E(T_1)$, $e' \in E(T_2)$.

Sei $e = uv \in E(T_1)$ und $e' = wx \in E(T_2)$. Wähle $S_1 = [u : E(T_1)]$ und $S_2 = W$ sowie $S_1' = C$ und $S_2' = [w : E(T_2)]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2')$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1'}, \chi^{S_2'}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = \sum_{i \in T_2 \setminus \{w\}} b_{iw}^2 - \sum_{i \in T_1 \setminus \{u\}} b_{iu}^1 = (l - 1) \cdot b_{xw}^2 - (l - 1) \cdot b_{vu}^1$ wegen (3). Damit gilt $b_e^1 = b_{e'}^2$.

(5) $b_e^1 = b_{e'}^1$, für $e' \in E(T_1)$, $e \in [T_1 \setminus \{t_1\} : T_2] \setminus W$.

Sei $e = uw$ mit $u \in T_1 \setminus \{t_1\}$, $w \in T_2$. Sei $u^-, u^+ \in T_2$, so daß $u^-u, uu^+ \in W$. Wähle $S_1 = C$ und $S_2 = [u^- : E(T_2)]$. Außerdem sei $S'_1 = S_1 \setminus \{u^-u, uu^+\} \cup \{e\}$ und $S'_2 = S_2 \setminus \{u^-u^+\} \cup \{u^-u, uu^+\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^1 - b_{u^-u^+}^2$. Dies zusammen mit (4) ergibt die Behauptung.

(6) $b_e^1 = b_e^1$, für $e' \in E(T_1)$, $e \in [t_1 : T_2] \setminus F_1$.

Sei $e = t_1v$ mit $v \in T_2$ und $e \notin F_1$. Da $e \notin F_1$, ist $t_2v, t'_2v \notin \hat{F}_1$. Damit gibt es aber eine Kante $ww' \in \hat{F}_2$ mit $w, w' \in T_1 \setminus \{t_1\}$, die t_1v kreuzt. Wähle nun $S_1 = [t_1 : T_1]$ und $S_2 = W$. Außerdem sei $S'_1 = S_1 \cup \{t_1v, vv'\} \setminus \{t_1v'\}$ mit $vv' \in W$, $v' \in T_1$, und $S'_2 = S_2 \setminus \{vv'\} \cup \{ww'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_e^1 - b_{t_1v'}^2$. Dies zusammen mit (3) ergibt die Behauptung.

(7) $b_e^2 = b_e^2$, für $e' \in E(T_2)$, $e \in [T_1 \setminus \{t_1\} : T_2] \setminus W$.

Sei $e = uw$ mit $u \in T_1 \setminus \{t_1\}$, $w \in T_2$ und $v \in T_2$, so daß $uv \in W$. Wähle $S_1 = C \setminus \{uv\}$, $S_2 = [w : T_2]$ und $S'_2 = S_2 \setminus \{vw\} \cup \{uw, uv\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{uw}^2 + b_{uv}^2 - b_{vw}^2 = b_{uw}^2 - b_{vw}^2$, da $b_{uv}^2 = 0$ (siehe (2)). Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung.

(8) $b_e^2 = b_e^2$, für $e' \in E(T_2)$, $e \in [t_1 : T_2] \setminus F_2$.

Sei $e = t_1v$ mit $v \in T_2$ (beachte, $v = t_2$ oder $v = t'_2$ auch möglich). Da $e \notin F_2$ und $F_2 \cap \delta(t_1) \neq \emptyset$, existiert eine Kante $t_1w \in F_2$ mit $w \in T_1$. Sei $w' \in T_2 \setminus \{v\}$ mit $w'w \in W$. Wähle $S_1 = C \setminus \{w'w, t_1v\} \cup \{t_2t'_2\}$ (beachte, $t_2t'_2 \in F_1$) sowie $S_2 = [v : T_2]$, falls $v \notin \{t_2, t'_2\}$, und $S_2 = \{[v : T_2], w't_2, w't'_2\} \setminus \{t_2t'_2\}$, falls $v \in \{t_2, t'_2\}$. Außerdem sei $S'_2 = S_2 \setminus \{vw'\} \cup \{vt_1, t_1w, ww'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{vt_1}^2 - b_{vw'}^2$. Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung.

(9) $b_e^1 = b_e^1$, für $e \in [\{t_2, t'_2\} : T_2] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = uv \in [\{t_2, t'_2\} : T_2] \setminus F_1$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \notin \{t_2, t'_2\}$ (beachte $uv \neq t_2t'_2$). Da \hat{F}_1 und \hat{F}_2 maximal kreuzungsfrei sind, gibt es eine Kante $u_2v_2 \in F_2$, die e kreuzt. Sei $u^- \in T_1 \setminus \{t_1\}$, so daß $u^-u \in C$ und uv die Kante u^-t_1 kreuzt. Setze $S_2 = W$ und wähle $S_1 = [u^- : T_1]$, falls $u^- \neq u_2, u^- \neq v_2$, und $S_1 = [t_1 : T_1]$, sonst. Außerdem sei $S'_1 = S_1 \setminus \{u^-t_1\} \cup \{u^-u, uv, vt_1\}$ und $S'_2 = S_2 \setminus \{u^-u\} \cup \{u_2v_2\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{uv}^1 - b_{u^-t_1}^1$. Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung.

(10) $b_e^1 = b_e^1$, für $e \in [T_2 \setminus \{t_2, t'_2\} : T_2 \setminus \{t_2, t'_2\}] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = uv$ mit $u, v \in T_2 \setminus \{t_2, t'_2\}$, $e \notin F_1$. Da $e \notin F_1$ sowie \hat{F}_1 und \hat{F}_2 maximal kreuzungsfrei sind, existiert eine Kante $u_1v_1 \in \hat{F}_2$ mit $u_1, v_1 \neq t_1$, die e kreuzt. Sei $u_1^-, v_1^+ \in T_2$, $u_1^- \neq v_1^+$, mit $u_1u_1^-, v_1v_1^+ \in W$. Wähle $S_1 = C$ und $S_2 = [u_1^- : T_2]$. Sei außerdem $S'_1 = S_1 \setminus \{u_1u_1^-, v_1v_1^+\} \cup \{uv\}$ und $S'_2 = S_2 \setminus \{u_1^-v_1^+\} \cup \{u_1u_1^-, u_1v_1, v_1v_1^+\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{uv}^1 - b_{u_1^-v_1^+}^2$. Dies zusammen mit (3) und (4) liefert die Behauptung.

(11) $b_e^2 = b_{e'}^2$ für $e \in E(T_1 \setminus \{t_1\}) \setminus F_2$, $e' \in E(T_2)$.

Sei $e = uv \in E(T_1) \setminus F_2$ mit $u, v \neq t_1$. Da \hat{F}_1 und \hat{F}_2 maximal kreuzungsfrei sind, gibt es eine Kante $u_1v_1 \in \hat{F}_1$, die e kreuzt. Sei $u^-, v^+ \in T_2$, so daß $u^-u, vv^+ \in W$, $u^-v^+ \neq u_1v_1$ und uv die Kante u^-v^+ kreuzt. Setze $S_1 = C$ und wähle $S_2 = [u^- : T_2]$, falls $u^- \neq u_1, u^- \neq v_2$ und $S_2 = [v^+ : T_2]$, sonst. Außerdem sei $S'_2 = S_2 \setminus \{u^-v^+\} \cup \{u^-u, uv, vv^+\}$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{u^-u, vv^+\} \cup \{u_1v_1\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{uv}^2 - b_{u^-v^+}^2$. Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung.

(12) $b_e^2 = b_{e'}^2$ für $e \in [t_1 : T_1] \setminus F_2$, $e' \in E(T_2)$.

Sei $e = vt_1$ mit $v \in T_1$. Da $\delta(t_1) \cap F_2 \neq \emptyset$, existiert ein $w \in T_1$ mit $t_1w \in F_2$. Außerdem existiert ein Kante $u_2v_2 \in F_1$, $u_2, v_2 \in T_2$, die wv kreuzt, andernfalls wäre $vt_1 \in F_2$. Sei ferner $v^+, w^+ \in T_2$, $v^+ \neq w^+, v^+w^+ \neq u_2v_2$, mit $v^+v, w^+w \in C$. Wähle $S_1 = C \setminus \{v^+v, w^+w\} \cup \{u_2v_2\}$ sowie $S_2 = [v^+ : T_2]$, falls $v^+ \neq u_2, v^+ \neq v_2$, und $S_2 = [w^+ : T_2]$, sonst. Außerdem sei $S'_2 = S_2 \setminus \{v^+w^+\} \cup \{v^+v, vt_1, t_1w, ww^+\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{vt_1}^2 - b_{v^+w^+}^2$. Dies zusammen mit (3) liefert die Behauptung.

(1) - (12) implizieren, daß b ein Vielfaches von a ist. \square

Im folgenden Satz befassen wir uns mit geraden, alternierenden Wegen.

(6.3.2.3) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 5$. Außerdem sei $t_1 \in T_1$, $t_2 \in T_2$ und W ein gerader alternierender Weg bezüglich T_1, T_2 von p_1 nach p_2 mit $p_1 \in T_1$, $p_2 \in T_2$ und $V(W) = T_1 \cup T_2 \setminus \{t_1, t_2\}$. Sei $C = W \cup \{p_2t_1, t_1t_2, t_2p_1\}$. Seien $\hat{F}_1 \subset E(T_2)$ und $\hat{F}_2 \subset E(T_1)$ maximal kreuzungsfrei bezüglich C (beachte, C ist ein alternierender Kreis), so daß $\delta(p_1) \cap \hat{F}_2 \neq \emptyset$, $\delta(t_1) \cap \hat{F}_2 \neq \emptyset$, $\delta(p_2) \cap \hat{F}_1 \neq \emptyset$ und $\delta(t_2) \cap \hat{F}_1 \neq \emptyset$. Wir setzen $W_1 = C \setminus \{t_2p_1\}$, $W_2 = C \setminus \{p_2t_1\}$ sowie $F_1 = \hat{F}_1 \cup \{t_1t \in E \mid p_2t \in \hat{F}_1, t \in T_2\}$ und $F_2 = \hat{F}_2 \cup \{t_2t \in E \mid p_1t \in \hat{F}_2, t \in T_1\}$. Vergleiche auch Abbildung 6.3.2.2. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (W_1 \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (W_2 \cup F_2)})^T x \geq l - 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

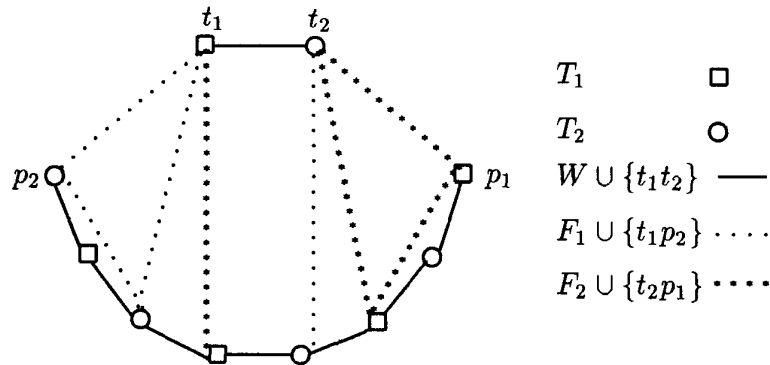


Abbildung 6.3.2.2

Beweis.

Zur einfacheren Erklärung sei die Knotenmenge $V = \{t_1, t_2, 0, 1, \dots, 2l - 3\}$, so daß $p_2 = 0$, $p_1 = 2l - 3$ und $W = \{[i, i+1] \mid i = 0, \dots, 2l - 4\}$. Sei $a = (\chi^{E \setminus (W_1 \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (W_2 \cup F_2)})$. Wir zeigen zuerst, daß $a^T x \geq l - 1$ gültig ist für STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Dies zeigen wir indirekt. Sei dazu $A_k = F_k \setminus \hat{F}_k$ für $k = 1, 2$. Außerdem definieren wir uns eine Funktion $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(E_1, E_2) = |A_1 \cap E_1| + |A_2 \cap E_2|$. Wir zeigen im folgenden, daß wenn es eine Packung von Steinerbäumen (S_1, S_2) gibt mit $f(S_1, S_2) > 0$, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt, es auch eine Packung von Steinerbäumen (S'_1, S'_2) gibt mit $f(S'_1, S'_2) = 0$, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt.

Sei also $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen, die $a^T x \geq l - 1$ verletzt, und minimal bezüglich f ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können S_1 und S_2 kantenminimal gewählt werden.

(1) $S_1 \cap A_1 \neq \emptyset$.

Sei $t_1 u \in S_1 \cap A_1$, $u \in T_2$. Sei $S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 \cup \{t_1 u\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_1 mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_1 \in V(S_1^1)$ und $u \in V(S_1^2)$. Da $t_1 u \in A_1$, ist $u p_2 \in \hat{F}_1$. Wir setzen $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1 u\} \cup \{u p_2, p_2 t_1\}$, falls $p_2 \notin V(S_1)$, $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1 u\} \cup \{u p_2\}$, falls $p_2 \in V(S_1^1)$, und $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1 u\} \cup \{p_2 t_1\}$, falls $p_2 \in V(S_1^2)$. Damit ist S'_1 ein kantenminimaler Steinerbaum mit $|A_1 \cap S'_1| = |A_1 \cap S_1| - 1$ und $(a^1)^T \chi^{S'_1} = (a^1)^T \chi^{S_1}$. Gilt $S'_1 \cap S_2 = \emptyset$, so wählen wir $S'_2 = S_2$. Andernfalls betrachte die folgenden Fälle.

(1.1) $S'_1 \cap S_2 = \{t_1 p_2\}$.

Sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{t_1 p_2\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_1 \in V(S_2^1)$ und $p_2 \in V(S_2^2)$. Damit ist $|V(S_2^1)| \geq 2$, da $t_1 \in V(S_2^1)$. Existiert eine Kante $e \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus (A_2 \cup S'_1)$, so wähle $S'_2 = S_2 \setminus \{t_1 p_2\} \cup \{e\}$. Andernfalls gilt $V(S_2^2) = \{p_2\}$, sonst würde S'_1 einen Kreis enthalten (beachte, daß $A_2 \subset [t_2 : T_1]$ und $l \geq 5$ gilt). Dann gilt $l - 2 = \Upsilon(S'_1) \geq d_{S'_1}(p_2) - 2 \geq |V(S_2)| - 3 \geq l - 2$, da $t_1 \in V(S_2)$. Also gilt überall Gleichheit. Folglich gilt $[p_2, p_2 + 1] \notin S'_1$ und $\delta(t_1) \cap S'_1 = \{t_1 p_2\}$. Somit können wir $S'_2 = S_2 \setminus \{t_1 p_2\} \cup \{[p_2, p_2 + 1], [p_2 + 1, t_1]\}$ wählen, wobei $[p_2, p_2 + 1], [p_2 + 1, t_1] \notin A_2$ und $(a^2)^T \chi^{S'_2} = (a^2)^T \chi^{S_2}$ ist.

(1.2) $S'_1 \cap S_2 = \{p_2 u\}$.

Sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{p_2 u\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \in V(S_2^1)$ und $p_2 \in V(S_2^2)$. Existiert eine Kante $e \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus (A_2 \cup S'_1)$, so wähle $S'_2 = S_2 \setminus \{p_2 u\} \cup \{e\}$. Andernfalls gilt aus dem gleichen Grund wie in (1.1) $V(S_2^1) = \{u\}$ oder $V(S_2^2) = \{p_2\}$. Wir betrachten den Fall $V(S_2^1) = \{u\}$ (der Fall $V(S_2^2) = \{p_2\}$ läuft völlig analog). Dann existieren Knoten $v, w \in V(W)$, $v \neq w$, mit $uv, vw \notin S'_1$, $w \in T_2$, wobei $vw \in W$ oder $uv \in W$. Andernfalls wäre $\Upsilon(S'_1) \geq |(V(S_2) \setminus \{u\}) \cup (T_1 \setminus \{t_1, p_1\})| - 2 \geq 2l - 5 \geq l$, ein Widerspruch. Also können wir $S'_2 = S_2 \setminus \{p_2 u\} \cup \{uv, vw\}$ wählen, wobei $uv, vw \notin A_2$ und $(a^2)^T \chi^{S'_2} = (a^2)^T \chi^{S_2}$ gilt.

(1.3) $S'_1 \cap S_2 = \{t_1 p_2, p_2 u\}$.

Analog zu (1.1) läßt sich zunächst $t_1 p_2$ aus S_2 entfernen und entsprechend (1.2) auch $p_2 u$. Damit erhalten wir auch hier einen Steinerbaum S'_2 mit $(a^2)^T \chi^{S'_2} = (a^2)^T \chi^{S_2}$, $|A_2 \cap S'_2| = |A_2 \cap S_2|$ und $S'_1 \cap S'_2 = \emptyset$.

Damit ist also in allen Fällen auch $P' = (S'_1, S'_2)$ eine Packung von Steinerbäumen

mit $a^T \chi^{P'} = a^T \chi^P$ und $f(S'_1, S'_2) < f(S_1, S_2)$, ein Widerspruch zur Wahl von P . Also gilt $S_1 \cap A_1 = \emptyset$.

(2) $S_2 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Analog zum Fall (1) läßt sich auch hier eine Packung von Steinerbäumen $P' = (S'_1, S'_2)$ konstruieren mit $a^T \chi^{P'} = a^T \chi^P$ und $f(S'_1, S'_2) < f(S_1, S_2)$.

Damit wissen wir, daß, wenn es eine Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$ gibt mit $a^T \chi^P < l - 1$, es auch eine Packung von Steinerbäumen $P' = (S'_1, S'_2)$ gibt mit $a^T \chi^{P'} < l - 1$ und $f(S'_1, S'_2) = 0$. Gilt aber $f(S'_1, S'_2) = 0$, so wissen wir aus Satz (6.3.1.2), daß $a^T \chi^{P'} \geq l - 1$ ist. Also ist $a^T x \geq l - 1$ gültig.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^k = 0$ für $e \in W$, $k = 1, 2$.

Sei $e = [u, u + 1] \in W$. Da $\delta(t_1) \cap \hat{F}_2 \neq \emptyset$ und $\delta(t_2) \cap \hat{F}_1 \neq \emptyset$, existiert eine Kante $t_2 w \in \hat{F}_1$, $u + 1 \leq w$ oder eine Kante $t_1 v \in \hat{F}_2$, $v \leq u$. Im ersten Fall wähle $S_1 = W_1 \setminus \{e\} \cup \{t_2 w\}$ und $S_2 = [p_2 : T_2]$. Im anderen Fall wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$ und $S_2 = W_2 \setminus \{e\} \cup \{t_1 v\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^1 = 0$ für $e = t_1 t_2, t_1 p_2$.

Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$ und $S_2 = W_2 \setminus \{e\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_1 e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^1$.

(3) $b_e^2 = 0$ für $e = t_1 t_2, t_2 p_1$.

Dies zeigt man analog zu (2).

(4) $b_e^k = 0$ für $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$ und $S_2 = W_2$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_1 e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^1$. Analog zeigt man $b_e^2 = 0$.

(5) $b_e^k = b_{e'}^k$ für $e, e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv$ mit $u, v \in T_1$. Setze $S_2 = W_2$ sowie $S_1 = [v : T_1]$. Sei $e' \in [u : T_1] \setminus \{e\}$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{e'}^1 - b_e^1$, für alle $e, e' \in \delta(u)$, $u \in T_1$. Analog erhält man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

(6) $b_e^1 = b_{e'}^2$ für $e \in E(T_1)$, $e' \in E(T_2)$.

Sei $e = uv \in E(T_1)$ und $e' = wx \in E(T_2)$. Wähle $S_1 = [u : E(T_1)]$ und $S_2 = W_2$ sowie $S'_1 = W_1$ und $S'_2 = [w : E(T_2)]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = \sum_{i \in T_2 \setminus \{w\}} b_{iw}^2 - \sum_{i \in T_1 \setminus \{u\}} b_{[i,u]}^2 = (l-1) \cdot b_{xw}^2 - (l-1) \cdot b_{vu}^1$ wegen (5). Damit gilt $b_e^1 = b_{e'}^2$.

In den nun folgenden Fällen (7) – (12) fixieren wir die restlichen Komponenten von b^1 .

(7) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für $e \in [T_1 \setminus \{t_1\} : T_2 \setminus \{t_2\}]$ $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = uv$, $u \in T_1, v \in T_2$. Setze $S_1 = [u : T_1]$. Gilt $p_2 v \in \hat{F}_1$, wähle $S'_1 = [u : T_1 \setminus \{t_1\}] \cup \{e, v p_2, p_2 t_1\}$ und $S_2 = W_2$. Andernfalls existiert eine Kante $u_1 w_1 \in \hat{F}_2$, $u_1, w_1 \in$

T_1 , $p_2 < u_1 < v$, die p_2v kreuzt. Wähle $S'_1 = [u : T_1 \setminus \{v-1\}] \cup \{e, [v, v-1]\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{[v, v-1]\} \cup \{u_1w_1\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_f^1 - b_e^1$, wobei $f = t_1u$ im ersten Fall und $f = [u, v-1]$ im zweiten Fall. Dies zusammen mit (5) ergibt die Behauptung.

(8) $b_e^1 = b_{e'}^1$, für $e \in [t_1 : T_2 \setminus \{t_2\}] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_1v$, $v \in T_2 \setminus \{t_2\}$. Da $e \notin F_1$, existiert entweder eine Kante $uw \in F_2$, $u, w \in T_1 \setminus \{t_1, p_1\}$ mit $u < v < w$ oder es existiert eine Kante $t_1u' \in F_2$, $u' \in T_1$ mit $u' < v$. Im ersten Fall setze $f = uw$ im zweiten Fall $f = t_1u'$. Wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{[p_1, v-1]\} \cup \{t_1v, [v, v-1]\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{[v, v-1]\} \cup \{f\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_{[t_1, v-1]}^1 - b_e^1$. Dies zusammen mit (5) ergibt die Behauptung.

(9) $b_e^1 = b_{e'}^1$, für $e \in [T_1 \setminus \{t_1, p_1\} : t_2] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_2v$, $v \in T_1 \setminus \{t_1, p_1\}$. Wähle $S_1 = [t_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{t_1v\} \cup \{e, t_1t_2\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{t_1t_2\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_{t_1v}^1 - b_e^1$. Dies zusammen mit (5) ergibt die Behauptung.

(10) $b_e^1 = b_{e'}^1$, für $e \in [T_2 \setminus \{t_2\} : T_2 \setminus \{t_2\}] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = uv$ mit $u, v \in T_2 \setminus \{t_2\}$, $e \notin F_1$. Dann existiert eine Kante $xw \in F_2$, $x, w \in T_1$ mit $u < w < v$, die e kreuzt. Wir betrachten zuerst den Fall $x < u$. Gilt $vp_2 \in F_1$, so wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{p_1t_1\} \cup \{[u-1, u], uv, vp_2, p_2t_1\}$ sowie $S_2 = W_2 \setminus \{[u-1, u]\} \cup \{xw\}$. Andernfalls existiert eine Kante $u'v' \in F_2$, $u', v' \in T_1$ mit $p_2 < u' < v$, die p_2v kreuzt. Wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{[p_1, u-1]\} \cup \{[u-1, u], uv, [v, v-1]\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{[u, u-1], [v, v-1]\} \cup \{xw, u'v'\}$. Wir erhalten also in beiden Fällen Packungen von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_f^1 - b_e^1$, wobei im ersten Fall $f = p_1t_1$ und im zweiten Fall $f = [p_1, u-1]$. In den verbleibenden Fällen $x > u$ und $x = t_1$ gehen wir analog vor. Entweder gilt $up_2 \in F_1$ oder es existiert eine Kante $u'v' \in F_2$, $u, v \in T_1$ mit $p_2 < u' < u$, die p_2u kreuzt. In beiden Fällen können entsprechend zu oben Steinerbäume S_1, S'_1 und S_2 gewählt werden.

(11) $b_e^1 = b_{e'}^1$, für $e \in [t_2 : T_2 \setminus \{t_2\}] \setminus F_1$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_2v$, $v \in T_2$ und $e \notin F_1$. Folglich existiert eine Kante $u'v' \in F_2$, $u'v' \in T_1$ mit $v' > v$, die e kreuzt. Gilt $u' \neq t_1$, so wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{p_1t_1\} \cup \{t_1t_2, t_2v, [v, v-1]\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{t_1t_2, [v, v-1]\} \cup \{u'v'\}$. Andernfalls ($u' = t_1$) können wir davon ausgehen, daß $u'v'$ die einzige Kante aus F_2 ist, die e kreuzt. Dann ist aber $vp_2 \in F_1$ und damit auch $vt_1 \in F_1$. Nach Voraussetzung existiert eine Kante $t_2w \in \delta(t_2) \cap F_1$, $w \in T_2$. Da $t_1v' \in F_2$, gilt $w > v'$. Somit können wir $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{p_1t_1\} \cup \{t_1v, e, t_2w, [w, w-1]\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{[w, w-1]\} \cup \{t_1v'\}$ wählen. Dann sind in beiden Fällen $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_{t_1p_1}^1 - b_e^1$. Dies zusammen mit (5) ergibt die Behauptung.

(12) $b_{t_2p_1}^1 = b_{e'}^1$, $e' \in E(T_1)$.

Da $\delta(p_1) \cap F_2 \neq \emptyset$ existiert eine Kante $t_2v \in F_2$ mit $v \in T_1 \setminus \{t_1, p_1\}$. Wähle $S_1 = [p_1 : T_1]$, $S'_1 = S_1 \setminus \{p_1t_1\} \cup \{t_1t_2, t_2p_1\}$ und $S_2 = W_2 \setminus \{t_1t_2, t_2p_1\} \cup \{t_2v\}$. Dann sind

$P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) = b_{t_1 p_1}^1 - b_{t_2 p_1}^1$. Dies zusammen mit (5) ergibt die Behauptung.

Völlig analog zu (7) – (12) lassen sich die verbleibenden Komponenten von b^2 fixieren. Damit ist insgesamt gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist. \square

Wie aus den Sätzen über alternierende Wege zu erkennen ist, benötigen wir in beiden Fällen jeweils zusätzliche Terminalknoten. Wir kennen bis jetzt noch keinen Graphen, der von einem alternierenden Weg induziert ist und facetten-definierend ist.

6.3.3. Matching-Ungleichungen

(6.3.3.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste. Sei $M \subseteq [T_1 : T_2]$ ein Matching. Die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus M}, \chi^{E \setminus M})^T x \geq |M|$$

heißt *Matching-Ungleichung*.

(6.3.3.2) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 4$. Sei F ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ sowie $\tau_1 \in T_1, \tau_2 \in T_2$ mit $\tau_1 \tau_2 \notin F$. Setze $F_1 = [\tau_2 : T_2]$ und $F_2 = [\tau_1 : T_1]$. Vergleiche dazu Abbildung 6.3.3.1. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

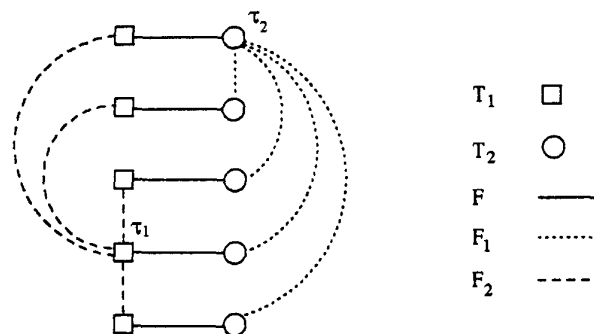


Abbildung 6.3.3.1

Beweis.

Wir zeigen zunächst, daß $a^T x \geq l$ gültig ist mit $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})$. Sei dazu $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien S_1 und S_2 kantenminimal. Sei $s_k = |F \cap S_k|$, $k = 1, 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) $s_1 = 0$ oder $s_2 = 0$.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_1 = 0$ (der Fall $s_2 = 0$ geht analog). Dann ist $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq l - 1$. Also ist $a^T x \geq l$ gültig, falls $(a^2)^T \chi^{S_2} > 0$. Andernfalls ist $S_2 = F \cup F_2$. Folglich ist $V(S_1) \cap T_2 \neq \emptyset$, da $[\tau_1 : T_1] \subset S_2$. Dann aber ist $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq l$.

(b) $s_1 > 0$ oder $s_2 > 0$.

Offensichtlich gilt in diesem Fall $m_k := \zeta((V(S_k), S_k \cap (F \cup F_k))) \geq l - s_k + 1$ für $k = 1, 2$. Also gilt $a^T(\chi_1^S, \chi_2^S) \geq (m_1 - 1) + (m_2 - 1) = (l - s_1) + (l - s_2) = l$ (beachte, daß $s_1 + s_2 \leq l$).

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist. Zur einfacheren Darstellung sei im folgenden immer $\bar{k} = 1$, falls $k = 2$, und $\bar{k} = 2$, falls $k = 1$.

(1) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Sei A ein aufspannender Baum in $(T_k \setminus \{\tau_k\}, E(T_k \setminus \{\tau_k\}))$. Sei $u \in T_k \setminus \{\tau_k\}$, $v \in T_{\bar{k}}$ mit $uv \notin F$ und $\tau_k v \notin F$ (diese Knoten existieren für $l \geq 3$). Setze $S_k = A \cup \{uv, \tau_k v\}$ und $S_{\bar{k}} = F \cup F_{\bar{k}}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv \in F$, $u \in T_1, v \in T_2$. Nach Voraussetzung ist $uv \neq \tau_1 \tau_2$. Wir betrachten den Fall $v \neq \tau_2$ (der verbleibende Fall geht analog). Sei $e' \in [u : T_1]$. Wähle $S_1 = F \cup F_1 \cup \{e'\} \setminus \{e, \tau_2 v\}$ und $S_2 = [v : T_2]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_e^k$.

(3) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e, e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $u \in T_k$ mit $u\tau_{\bar{k}} \notin F$. Sei $e_1, e_2 \in [u : T_k]$, $e_1 \neq e_2$ und $v \in T_{\bar{k}}$ mit $uv \in F$. Wähle $S_k = F \cup F_k \cup \{e_1\} \setminus \{uv, \tau_{\bar{k}} v\}$, $S_{\bar{k}} = [v : T_{\bar{k}}]$ sowie $S'_k = S_k \setminus \{e_1\} \cup \{e_2\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \setminus_k S_k \cup_k S'_k$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_{e_2}^k - b_{e_1}^k$. Dies impliziert die Behauptung.

(4) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e \in E(T_{\bar{k}} \setminus \{\tau_{\bar{k}}\}), e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv$, $u, v \in T_{\bar{k}} \setminus \{\tau_{\bar{k}}\}$. Sei $w, x \in T_k$ mit $uw, vx \in F$. Wähle $S_k = F \cup F_k \cup \{e\} \setminus \{u\tau_{\bar{k}}\}$ und $S'_k = S_k \setminus \{e\} \cup \{wx\}$. Außerdem sei $S_{\bar{k}}$ ein aufspannender Baum in $(T_{\bar{k}}, E(T_{\bar{k}}) \setminus S_k)$ (dies ist möglich, da $l \geq 4$). Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \setminus_k S_k \cup_k S'_k$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_{wx}^k - b_e^k$. Dies zusammen mit (3) impliziert die Behauptung.

(5) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e \in [T_{\bar{k}} : T_k] \setminus F, e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e = uv$, $u \in T_{\bar{k}}, v \in T_k$. Sei $w \in T_k, x \in T_{\bar{k}}$ mit $uw, vx \in F$. Ist $u = \tau_{\bar{k}}$, so setze $t = x$, andernfalls sei $t = u$. Wähle $S_k = F \cup F_k \cup \{e\} \setminus \{\tau_{\bar{k}} t\}$, $S_{\bar{k}} = [t : T_{\bar{k}}]$ und $S'_k = S_k \setminus \{e\} \cup \{vw\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \setminus_k S_k \cup_k S'_k$ Packungen von

Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_{vw}^k - b_e^k$. Dies zusammen mit (3) impliziert die Behauptung.

(6) $b_e^1 = b_e^2$, für alle $e \in E(T_1), e' \in E(T_2)$.

Sei A_k ein aufspannender Baum in $(T_k \setminus \{\tau_k\}, E(T_k \setminus \{\tau_k\}))$. Sei $u_k \in T_k \setminus \{\tau_k\}, v_k \in T_k$ mit $u_k v_k \notin F$ und $\tau_k v_k \notin F$ (diese Knoten existieren für $l \geq 3$). Setze $S_k = A_k \cup \{u_k v_k, \tau_k v_k\}$ für $k = 1, 2$ und $S'_k = F \cup F_k$. Dann sind $P = (S'_1, S_2)$ und $P' = (S_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es folgt mit (3) und (5), daß $0 = \chi^{P'} - \chi^P = l \cdot b_{u_1 \tau_1}^1 - l \cdot b_{u_2 \tau_2}^2$. Dies impliziert die Behauptung.

Aus (1) – (6) folgt, daß b ein Vielfaches von a ist. Damit ist gezeigt, daß $a^T x \geq l$ eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definiert. \square

Eine interessante Bemerkung ist, daß die Matching-Ungleichung in der Form von Satz (6.3.3.2) keine Facette definiert, falls die Kante $\tau_1 \tau_2 \in M$ ist. Nach leichter Modifikation der Ungleichung erhält man jedoch wieder eine Facette.

(6.3.3.3) Korollar

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l, l \geq 3$. Sei M ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ sowie $\tau_1 \in T_1, \tau_2 \in T_2$ mit $\tau_1 \tau_2 \in M$. Setze $F = M \setminus \{\tau_1 \tau_2\}$ sowie $F_1 = [\tau_2 : T_2]$ und $F_2 = [\tau_1 : T_1]$. Vergleiche Abbildung 6.3.3.2. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l + 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

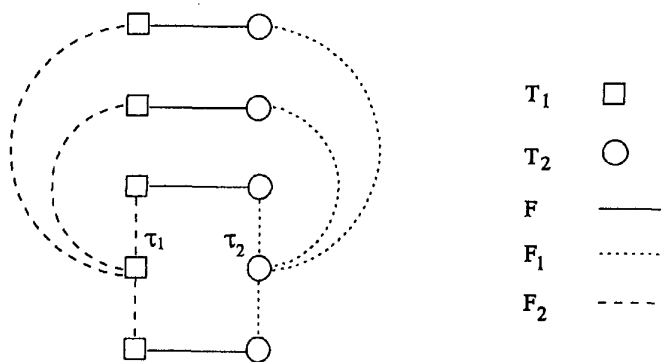


Abbildung 6.3.3.2

Beweis.

Zum Beweis der Gültigkeit gehen wir ähnlich wie in Beweis zu Satz (6.3.3.2) vor. Sei $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})$ und $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige ohne Beschränkung der Allgemeinheit kantenminimale Packung von Steinerbäumen sowie $s_k = |F \cap S_k|, k = 1, 2$. Beachte vorab, daß $(a^k)^T \chi^{S_k} \geq 1$ für $k = 1, 2$, da $\delta(\tau_k) \cap (F \cup F_k) = \emptyset$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

(a) $s_1 = 0$ oder $s_2 = 0$.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_1 = 0$ (der Fall $s_2 = 0$ geht analog). Dann ist $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq l - 1$. Also ist $a^T x \geq l$ gültig, falls $(a^2)^T \chi^{S_2} \geq 2$. Andernfalls ($(a^2)^T \chi^{S_2} = 1$) ist $S_2 = F \cup F_2$, da $l \geq 3$. Folglich ist $V(S_1) \cap T_2 \neq \emptyset$, da $[\tau_1 : T_1] \subset S_2$. Dies impliziert, daß $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq l$, und damit gilt insgesamt $a^T \chi^P \geq l + 1$.

(b) $s_1 > 0$ oder $s_2 > 0$.

Offensichtlich gilt in diesem Fall $m_k := \zeta((V(S_k), S_k \cap (F \cup F_k))) \geq l - s_k + 1$ für $k = 1, 2$. Also gilt $a^T(\chi_1^S, \chi_2^S) \geq (m_1 - 1) + (m_2 - 1) = (l - s_1) + (l - s_2) = l + 1$ (beachte, daß $s_1 + s_2 \leq l - 1$).

Um zu zeigen, daß $a^T x \geq l + 1$ eine Facette definiert, gehen wir wie in Satz (6.3.3.2) vor. Mit einer Ausnahme können wir alle Lösungen aus dem Beweis von Satz (6.3.3.2) exakt übernehmen, um die entsprechenden Koeffizienten von b zu fixieren. Für $l = 3$ ist Punkt (4) aus Satz (6.3.3.2) zu ersetzen durch

(4') $b_{uv}^k = b_{wx}^k$ mit $u, v \in T_1 \setminus \{\tau_1\}$, $w, x \in T_2 \setminus \{\tau_2\}$, $k = 1, 2$.

Setze $S_1 = F \cup \{\tau_1 w, uv\}$, $S'_1 = F \cup \{\tau_1 w, wx\}$ und $S_2 = [\tau_2 : T_2]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_{wx}^1 - b_{uv}^1$. Analog zeigt man $b_{uv}^2 = b_{wx}^2$.

Damit sind alle Koeffizienten von b bis auf $b_{\tau_1 \tau_2}^k$ für $k = 1, 2$ fixiert.

(7) $b_{\tau_1 \tau_2}^k = b_e^k$ mit $e \in [\tau_k : T_k]$ für $k = 1, 2$.

Wähle $S_k = [\tau_k : T_k] \cup F \cup \{\tau_1 \tau_2\}$ und $S'_k = S_k \setminus \{\tau_1 \tau_2\} \cup \{e\}$ mit $e \in [\tau_k : T_k]$. Sei A ein aufspannender Baum in $(T_k \setminus \{\tau_k\}, E(T_k \setminus \{\tau_k\}))$. Außerdem sei $u \in T_k \setminus \{\tau_k\}$ und $v \in T_k \setminus \{\tau_k\}$ mit $uv \notin F$. Setze $S_k = A \cup \{uv, v\tau_k\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \setminus_k S_k \cup_k S'_k$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_e^k - b_{\tau_1 \tau_2}^k$.

Damit ist insgesamt gezeigt, daß $a^T x \geq l + 1$ eine Facette definiert. \square

Eine interessante Feststellung ist, daß Korollar (6.3.3.3) im Gegensatz zu Satz (6.3.3.2) auch für $l = 3$ gilt. Allerdings gibt es für $l = 2$ keine facetten-definierende Ungleichung der obigen Form, wie wir in der nächsten Bemerkung feststellen.

(6.3.3.4) Bemerkung

Für $l = 2$ gilt eine entsprechende Aussage wie in Korollar (6.3.3.3) nicht. Beispielsweise ist $P = (S_1, S_2)$ mit $S_k = E(T_k)$ für $k = 1, 2$ eine Packung von Steinerbäumen für die gilt $a^T \chi^P = 2 < l + 1$.

Spezialfälle und Erweiterungen der Matching-Ungleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die Spezialfälle $l = 2$ und $l = 3$ für Satz (6.3.3.2) untersuchen. Daran anschließend befassen wir uns mit dem Hinzufügen eines Knoten zu G ähnlich wie in Abschnitt 6.3.1. Zum Abschluß dieses Abschnitts geben wir eine alternative Möglichkeit, die Kantenmengen F_1 und F_2 zu definieren.

Wir beginnen mit den Spezialfällen $l = 2$ und $l = 3$. In diesen Fällen können die Mengen F_1 und F_2 erweitert werden. Anstatt einen Stern innerhalb der anderen Kantenmenge zu

bilden, können jetzt alle Kanten innerhalb der anderen Terminalmengen hinzugenommen werden. Vergleiche Abbildung 6.3.3.3

(6.3.3.5) Korollar

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, wobei $l = 2$ oder $l = 3$ sei. Sei F ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$. Setze $F_1 = E(T_2)$ und $F_2 = E(T_1)$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

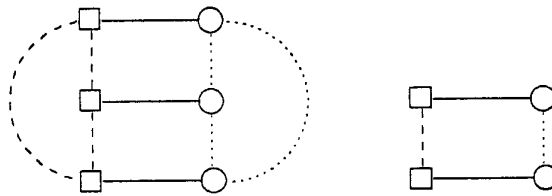


Abbildung 6.3.3.3

Beweis.

Wir können große Teile des Beweises von Satz (6.3.3.2) verwenden. Dazu sei $\bar{\tau}_1 \in T_1$, $\bar{\tau}_2 \in T_2$ mit $\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \notin F$, $\hat{F}_1 = [\bar{\tau}_2 : T_2]$ und $\hat{F}_2 = [\bar{\tau}_1 : T_1]$. Im folgenden ist bei jedem Verweis auf den Beweis von Satz (6.3.3.2) F_1, F_2, τ_1, τ_2 in Satz (6.3.3.2) jeweils zu ersetzen durch $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$. Wir betrachten zuerst den Fall $l = 2$.

$l = 2$.

Zum Beweis der Gültigkeit sei wieder $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen und s_1, s_2 wie in Satz (6.3.3.2). Der Fall $s_1 > 0$ oder $s_2 > 0$ geht analog zu Fall (b) in Satz (6.3.3.2). Für $s_1 = 0$ gilt wieder $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq 1$. Also ist $a^T x \geq 2$ gültig, falls $(a^2)^T \chi^{S_2} > 0$. Andernfalls ist $S_2 = F \cup F_2$. Dann aber ist $S_1 = F_1 \cup [T_1 : T_2] \setminus F$, folglich $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq 2$.

Um zu zeigen, daß $a^T x \geq 2$ eine Facette definiert, gehen wir wie in Satz (6.3.3.2) vor. Wir zeigen dies in den folgenden Schritten.

(1') $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Sei $u, v \in T_1$ und $w, x \in T_2$ mit $uw, vx \in F$. Wähle $S_1 = \{uw, wv\}$ und $S_2 = \{wx\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_2 uv$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = \chi^{P'} - \chi^P = b_{uv}^2$. Analog zeigt man $b_{wx}^1 = 0$.

(2') $b_e^k = 0$ für alle $e \in F$, $k = 1, 2$.

Geht analog zu Punkt (2) in Satz (6.3.3.2).

(3') $b_e^k = b_e^k$ für alle $e \in [T_k : T_k] \setminus F$, $e' \in E(T_k)$, $k = 1, 2$.

Geht analog zu Punkt (5) in Satz (6.3.3.2).

(4') $b_{uv}^1 = b_{wx}^2$.

Sei wieder $u, v \in T_1$ und $w, x \in T_2$ mit $uw, vx \in F$. Wähle $S_1 = \{uw, wx, xv\}$ und $S_2 = \{wv, vu, ux\}$ sowie $S'_1 = \{ux, xw, wv\}$ und $S'_2 = \{wu, uv, vx\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es folgt mit (3'), daß $0 = \chi^{P'} - \chi^P = 2 \cdot b_{uv}^1 - 2 \cdot b_{wx}^2$.

$l = 3$.

Zum Beweis der Gültigkeit sei wieder $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen (ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien S_1 und S_2 kantenminimal) und s_1, s_2 wie in Satz (6.3.3.2). Der Fall $s_1 > 0$ oder $s_2 > 0$ geht analog zu Fall (b) in Satz (6.3.3.2). Für $s_1 = 0$ gilt $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq 2$. Also ist $a^T \chi^P \geq 3$, falls $(a^2)^T \chi^{S_2} > 0$. Andernfalls ist $S_2 = F \cup [t : T_1]$ für ein $t \in T_1$, da $l = 3$ und S_2 kantenminimal ist. Folglich ist $V(S_1) \cap T_2 \neq \emptyset$, da $[t : T_1] \subset S_2$. Dann aber ist $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq 3$.

Um zu zeigen, daß $a^T x \geq 3$ eine Facette ist, gehen wir wie in Satz (6.3.3.2) vor. Der Beweis, daß b ein Vielfaches von a ist, geht völlig analog zu (1) – (6) in Satz (6.3.3.2) mit der Ausnahme, daß Punkt (4) wegfällt.

Damit ist gezeigt, daß in beiden Fällen $a^T x \geq l$ eine Facette definiert. \square

Wir geben nun eine Möglichkeit an, wie bei Hinzufügen eines Knoten zu einem (bezüglich der Matching-Ungleichungen) facetten-definierenden Graphen die Koeffizienten der neu hinzukommenden Kanten gewählt werden können, damit die Ungleichung eine Facette definiert.

(6.3.3.6) Koeffizienten bei Einführung eines Zusatzknoten

Sei $G = (V, E)$ ein facetten-definierender Graph aus Satz (6.3.3.2) beziehungsweise Korollar (6.3.3.3) und z ein zusätzlicher Knoten. Ferner sei $F_1 = [\tau_2 : T_2]$, $F_2 = [\tau_1 : T_1]$ sowie M das Matching. Sei $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste, die auf der Knotenmenge V die Eigenschaften aus (6.3.3.2) beziehungsweise (6.3.3.3) hat. Wir setzen $\alpha_k = |T_k \cap \{z\}|$ für $k = 1, 2$. Dann setze die Koeffizienten \hat{a}_e^k , $e \in \delta(z)$, $k = \{1, 2\}$ wie folgt (wobei $\bar{k} = 3 - k$):

$$\begin{aligned} \hat{a}_e^k &= 2, \quad \text{für alle } e \in [z : T_k \setminus \{\tau_k\}]; \\ \hat{a}_e^k &= 1, \quad \text{für alle } e \in [z : T_{\bar{k}}]; \\ \hat{a}_e^k &= \alpha_k, \quad \text{für } e = z\tau_k. \end{aligned}$$

\square

Interessant ist, daß für beide Fälle, $\tau_1\tau_2 \in M$ und $\tau_1\tau_2 \notin M$, die gleichen Koeffizienten gewählt werden können. Wir geben nun eine Formulierung für die Erweiterung des Graphen aus Satz (6.3.3.2).

(6.3.3.7) Korollar Sei $G = (V \cup \{z\}, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge $V \cup \{z\}$, $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste, so daß $T_1 \cap V, T_2 \cap V$ eine Partition von V ist mit $|T_1 \cap V| = |T_2 \cap V| = l$, $l \geq 4$. Sei F ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ sowie $\tau_1 \in T_1, \tau_2 \in T_2$ mit $\tau_1\tau_2 \notin F$. Setze $F_1 = [\tau_2 : T_2]$ und $F_2 = [\tau_1 : T_1]$. Sei $\hat{a} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ ein Vektor, so daß $\hat{a}|_{\delta(z)}$ (6.3.3.6) erfüllt und $\hat{a}|_{E \setminus \delta(z)} = 0$ gilt. Schließlich sei $\alpha_k = |\{z\} \cap T_k|$ für $k = 1, 2$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x + \hat{a}^T x \geq l + \alpha_1 + \alpha_2$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

Beweis. Sei $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}) + \hat{a}$ und $\alpha = l + \alpha_1 + \alpha_2$. Wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß $T_k \setminus \{z\} = \{t_1^k, \dots, t_l^k\}$, $k = 1, 2$ und $M = \{t_i^1 t_i^2 \mid i = 1, \dots, l\}$ ist.

Wir zeigen zuerst die Gültigkeit. Sei $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige kantenminimale Steinerbaumpackung. Wir definieren folgende Zahlen:

$$\begin{aligned} s_1^1 &= |\{i \mid t_i^1 z \in S_1\}|; \\ s_1^2 &= |\{i \mid t_i^1 t_i^2 \in M, t_i^2 z \in S_1\}|; \\ s_1^F &= |\{i \mid t_i^1 t_i^2 \in M, t_i^2 z \notin S_1\}|. \end{aligned}$$

Entsprechend seien die Zahlen s_2^1, s_2^2 und s_2^F definiert. Gilt $s_1^1 + s_1^2 = \alpha_1$ und $s_2^1 + s_2^2 = \alpha_2$, so folgt die Behauptung aus (6.3.3.2). Andernfalls sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_1^1 + s_1^2 > \alpha_1$. Insbesondere gilt $s_1^1 + s_1^2 \geq 2$, da S_1 kantenminimal ist. Es ist nicht schwer einzusehen, daß (i) $(a^2)^T \chi^{S_2} \geq s_1^F + s_1^2 + \alpha_2$ ist, da S_2 die entsprechenden Kanten aus F nicht enthalten kann. Ferner gilt (ii) $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq 2(s_1^1 - 1) + s_1^2 + \alpha_1 + (l - s_1^F - s_1^2 - s_1^1)$, (die ersten drei Summanden sind die Gewichte der Kanten von S_1 aus $\delta(z)$; der letzte Summand bildet eine untere Schranke für die Gewichte der Kanten, die zur Verbindung der restlichen Terminals notwendig sind). Damit erhalten wir aus (i) und (ii)

$$\begin{aligned} a^T \chi^{(S_1, S_2)} &\geq 2(s_1^1 - 1) + s_1^2 + \alpha_1 + (l - s_1^F - s_1^2 - s_1^1) + s_1^F + s_1^2 + \alpha_2 \\ &= l + \alpha_1 + \alpha_2 + s_1^1 + s_1^2 - 2 \\ &\geq l + \alpha_1 + \alpha_2, \end{aligned}$$

da $s_1^1 + s_1^2 \geq 2$. Damit ist die Gültigkeit gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, daß $a^T \geq \alpha$ eine Facette definiert. Wir führen den Beweis für den Fall $z \in T_1$ und $z \in T_2$. Alle anderen Fälle können auf analoge Weise gezeigt werden. Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Analog zum Beweis von Satz (6.3.3.2) können die Koeffizienten b_e^k für $e \in E(V)$, $k = 1, 2$ fixiert werden. Verbleiben die Koeffizienten der Kanten aus $\delta(z)$ zu fixieren.

(1) $b_e^k = b_{e'}^k$ für alle $e, e' \in [z : T_k] \cup \{\tau_k z\}$.

Wähle $S_1 = F \cup F_1 \cup \{e\}$ und $S_2 = [t_i^2 : T_2 \setminus \{\tau_2\}] \cup \{t_i^2 t_j^1, t_j^1 \tau_2, f\}$ mit $t_i^2, t_j^2 \in T_2 \setminus \{\tau_2\}$, $i \neq j$ und $f \in [z : T_2] \setminus \{e, e'\}$ (diese Knoten und Kanten existieren, da $l \geq 4$ gilt). Außerdem setze $S_1' = S_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_e^1 - b_{e'}^1$. Analog zeigt man $b_e^2 = b_{e'}^2$.

(2) $b_e^k = 2b_{e'}^k$ für alle $e \in [z : T_k \setminus \{\tau_k\}]$, $e' \in E(T_k)$.

Sei $e = z t_i^1$ für ein $t_i^1 \in T_1 \setminus \{\tau_1\}$. Wähle $S_1 = [t_i^1 : T_1 \setminus \{\tau_1\}] \cup \{e, \tau_1 z\}$ und $S_2 = F \cup F_2 \cup \{\tau_2 z\}$. Setze $S_1' = S_1 \setminus \{e\} \cup \{t_i^1 t_j^2, t_j^2 \tau_1\}$ mit $t_j^2 \in T_2$, $i \neq j, t_j^2 \tau_1 \notin F$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und

es gilt zusammen mit (5) aus dem Beweis von Satz (6.3.3.2), daß $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_e^1 - (b_{t_i^1 t_j^2}^1 - b_{t_j^2 \tau_1}^1) = b_e^1 - 2 b_e^1$, ist. Analog zeigt man $b_e^2 = 2 b_e^2$.

(3) $b_e^k = b_e^k$, für alle $e \in [z : T_k]$, $e' \in E(T_k)$.

Sei $e = z t_i^2$ für ein $i \in \{1, \dots, l\}$, $t_i^1 \neq \tau_1$, $t_i^2 \neq \tau_2$. Wähle $S_1 = F \cup F_1 \setminus \{t_i^2 \tau_2\} \cup \{t_i^2 z, \tau_1 z\}$ und $S_2 = [t_i^2 : T_2] \cup \{\tau_2 z\}$. Außerdem sei $S_1' = S_1 \setminus \{t_i^2 z\} \cup \{t_i^1 \tau_1\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S_1', S_2)$ Steinerbaumpackungen mit $a^T \chi^P, a^T \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^P - b^T \chi^{P'} = b_e^1 - b_{t_i^1 \tau_1}^1$. Dies zusammen mit (1) und (3) aus dem Beweis von Satz (6.3.3.2) impliziert die Behauptung. Analog zeigt man $b_e^2 = b_e^2$.

Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist. Da es offensichtlich eine Steinerbaumpackung P mit $a^T \chi^P > \alpha$ gibt, ist $STP(G, \mathcal{N}, c)$ volldimensional. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Schließlich geben wir noch die Formulierung für den Fall, daß wir einen Knoten zu dem facetten-definierenden Graphen aus Korollar (6.3.3.3) hinzufügen.

(6.3.3.8) Korollar Sei $G = (V \cup \{z\}, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge $V \cup \{z\}$, $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste, so daß $T_1 \cap V, T_2 \cap V$ eine Partition von V ist mit $|T_1 \cap V| = |T_2 \cap V| = l$, $l \geq 3$. Sei M ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ sowie $\tau_1 \in T_1, \tau_2 \in T_2$ mit $\tau_1 \tau_2 \in M$. Setze $F = M \setminus \{\tau_1 \tau_2\}$ sowie $F_1 = [\tau_2 : T_2]$ und $F_2 = [\tau_1 : T_1]$. Sei $\hat{a} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ ein Vektor, so daß $\hat{a}|_{\delta(z)}$ (6.3.3.6) erfüllt und $\hat{a}|_{E \setminus \delta(z)} = 0$ gilt. Schließlich sei $\alpha_k = |\{z\} \cap T_k|$ für $k = 1, 2$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x + \hat{a}^T x \geq l + 1 + \alpha_1 + \alpha_2$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$.

Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis, da er im wesentlichen dem Beweis von Korollar (6.3.3.7) gleicht. Zum Abschluß dieses Abschnitts geben wir noch eine alternative Möglichkeit, die Mengen F_1 und F_2 zu definieren.

(6.3.3.9) Korollar

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 4$. Sei F ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ sowie $\tau_1 \in T_1, \tau_2 \in T_2$ mit $\tau_1 \tau_2 \in F$. Setze $F_1 = [\tau_2 : T_2]$ und $F_2 = E(T_1) \setminus [\tau_1 : T_1]$. Vergleiche dazu Abbildung 6.3.3.4. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$.

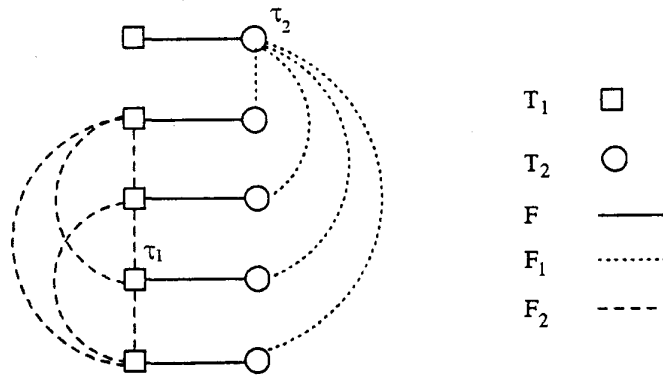


Abbildung 6.3.3.4

Auch hier verzichten wir auf einen Beweis, da dieses Resultat entsprechend dem Beweis von Satz (6.3.3.2) gezeigt werden kann. Damit schließen wir den Abschnitt über Matching-Ungleichungen ab.

6.3.4. Matching-Baum-Ungleichungen

(6.3.4.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste. Sei M ein Matching mit $M \subseteq [T_1 : T_2]$ und B ein aufspannender Baum in $(V(M) \cap T_2, E(V(M) \cap T_2))$. Vergleiche Abbildung 6.3.4.1. Dann nennen wir die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus (M \cup B)}, \chi^{E \setminus (M \cup B)})^{T_x} \geq |B|$$

eine *Matching-Baum-Ungleichung*.

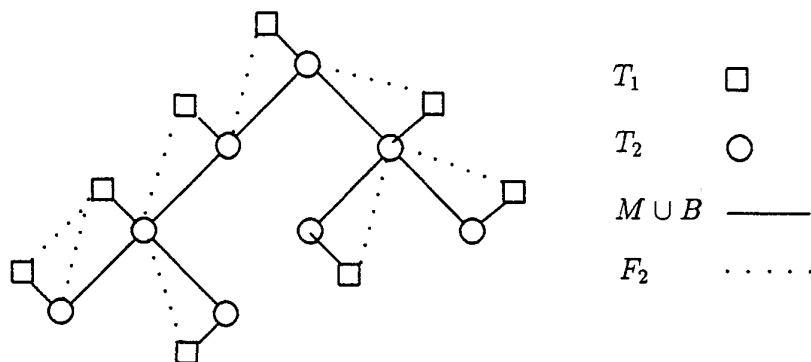


Abbildung 6.3.4.1

(6.3.4.2) Satz

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 = V$ und $|T_1| = |T_2| = l$, $l \geq 2$. Sei B ein aufspannender Baum in $(T_2, E(T_2))$ und M ein perfektes Matching in $(V, [T_1 : T_2])$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Terminalmengen $T_k = \{t_1^k, \dots, t_l^k\}$, $k = 1, 2$ so numeriert, daß $M = \{t_i^1 t_i^2 \mid i = 1, \dots, l\}$ ist). Für zwei Indices $i, j \in \{1, \dots, l\}$ definieren wir eine Distanzmarke $bd(i, j) = |P(t_i^2, t_j^2)|$, wobei $P(t_i^2, t_j^2)$ der eindeutige Weg von t_i^2 nach t_j^2 in (T_2, B) ist. Schließlich sei $F = B \cup M$ und $F_1, F_2 \subset E \setminus F$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq l - 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ genau dann, wenn F_1 und F_2 die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (i) $F_1 = \emptyset$
- (ii) $(V, M \cup F_2)$ ist zusammenhängend.
- (iii) Für alle $i, j \in \{1, \dots, l\}$ und für alle $r, s = 0, 1$ mit $bd(i, j) \geq 1 + r + s$ existiert kein Weg von t_i^{2-r} nach t_j^{2-s} in $(V(F_2), F_2)$.
- (iv) F_1 und F_2 sind maximal bezüglich der Eigenschaften (i) – (iii).

Beweis.

Sei $a := (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})$. Wir zeigen zuerst, daß $a^T x \geq l - 1$ gültig ist. Sei dazu $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen, wobei S_1 und S_2 kantenminimal seien. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß für alle $i = 1, \dots, l$ die Aussage

- (A) " $t_i^2 t_i^1 \in S_1$, falls $\delta(t_i^2) \cap S_1 \cap B \neq \emptyset$ "

gilt.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $\delta(t_i^2) \cap S_1 \cap B \neq \emptyset$ und $t_i^2 t_i^1 \notin S_1$. Dann gibt es eine Kante $e \in \delta(t_i^2) \cap S_1$, so daß $S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 \cup \{e\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_1 ist mit $t_i^1 \in V(S_1^1)$, $t_i^2 \in V(S_1^2)$ und $a_e^1 = 1$. Setze $S_1' = S_1 \setminus \{e\} \cup \{t_i^2 t_i^1\}$. Wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß S_1' kantenminimal ist. Gilt $t_i^2 t_i^1 \notin S_2$, so wähle $S_2' = S_2$. Andernfalls sei $S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 \cup \{t_i^2 t_i^1\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von S_2 mit $t_i^1 \in V(S_2^1)$ und $t_i^2 \in V(S_2^2)$. Existiert eine Kante $e' \in [V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S_1'$, so wähle $S_2' = S_2 \setminus \{t_i^2 t_i^1\} \cup \{e'\}$. Andernfalls (beachte, dieser Fall ist nur für $l \geq 3$ möglich) ist $V(S_2^2) = \{t_i^2\}$, da S_1' kantenminimal ist. Ferner gilt $l - 2 = \Upsilon(S_1') \geq d_{S_1'}(t_i^2) - 2 = |V(S_2) \setminus \{t_i^2\}| - 2 \geq l - 2$. Folglich ist $d_{S_1'}(t_i^2) = l$ und $d_{S_1'}(t_j^2) = 1$ für alle $j = 1, \dots, l$. Außerdem implizieren die Bedingungen (ii) bis (iv) zusammen mit $l \geq 3$, daß $F_2 \cap [T_1 : T_2] \neq \emptyset$ ist, insbesondere, daß es eine Kante $t_u^1 t_v^2 \in F_2$ gibt mit $v = i$ oder $u \neq i$. Gilt $v = i$, so wähle $S_2' = S_2 \setminus \{t_i^2 t_i^1\} \cup \{t_u^1 t_i^2, t_u^1 t_j^2\}$, $j \neq i$, $t_u^1 t_j^2 \notin S_1'$. Andernfalls ($v \neq i$ und $u \neq i$) wähle $S_2' = S_2 \setminus \{t_i^2 t_i^1\} \cup \{t_i^2 t_u^1, t_u^1 t_v^2\}$, falls $t_u^1 t_v^2 \notin S_1'$, und $S_2' = S_2 \setminus \{t_i^2 t_i^1\} \cup \{t_i^2 t_u^1, t_u^1 t_u^2\}$, sonst. Beachte, daß $t_i^2 t_u^1 \notin S_1'$, weil $d_{S_1'}(t_i^2) = l$ und $[V(S_2^1) : V(S_2^2)] \setminus S_1' = \emptyset$. Damit ist $P' = (S_1', S_2')$ ebenfalls eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^{P'} \leq a^T \chi^P$, und P' erfüllt Eigenschaft (A).

Zum Beweis der Gültigkeit benötigen wir noch die folgende Eigenschaft.

(B) Falls $t_i^2 t_j^2 \in S_1$ mit $bd(i, j) = 1$, dann existiert kein Weg von t_i^2 nach t_j^2 in $(V, F \cup F_2 \setminus S_1)$.

Beweis: Wir wissen aufgrund von Eigenschaft (A), daß $t_i^2 t_i^1 \in S_1$ und $t_j^2 t_j^1 \in S_1$. Sei $B = B_1 \cup B_2 \cup \{t_i^2 t_j^2\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von B mit $t_i^2 \in V(B_1)$ und $t_j^2 \in V(B_2)$. Angenommen es existiert ein Weg W von t_i^2 nach t_j^2 in $(V, F \cup F_2 \setminus S_1)$. Dann existiert eine Kante $t_u^p t_v^q \in F_2 \cap [V(B_1) : V(B_2)]$, $t_u^p \in V(B_1)$, $t_v^q \in V(B_2)$, $p, q \in \{1, 2\}$. Eigenschaft (iii) impliziert, daß $bd(u, v) \leq 2$. Gilt $bd(u, v) = 2$, dann ist $p = q = 1$ und $u = i$ oder $v = j$. Wir behandeln den Fall $u = i$ ($v = j$ geht analog). Aufgrund von (iii) gilt jedoch, daß $[t_u^1 : V(B_1)] \cap F_2 = \emptyset$, und, da $t_i^2 t_i^1 \in S_1$, kann damit kein solcher Weg W existieren. Bleibt der Fall $bd(u, v) = 1$. Dann ist $p = 1$ oder $q = 1$. In beiden Fällen gilt die gleiche Argumentation wie oben. Somit ist Eigenschaft (B) gezeigt.

Seien nun $(V_1, B_1), \dots, (V_s, B_s)$ die (zusammenhängenden) Komponenten von $(T_2, B \setminus S_1)$ und $(V'_1, B'_1), \dots, (V'_s, B'_s)$ die (zusammenhängenden) Komponenten von $(T_2, B \cap S_1)$. Dann gilt offensichtlich $s + s' = (|B \setminus S_1| + 1) + (|B \cap S_1| + 1) = |B| + 2 = |T_2| + 1 = l + 1$. Eigenschaft (B) impliziert, daß es keinen Weg von t_u^2 nach t_v^2 in $(V, F \cup F_2 \setminus S_1)$ gibt für alle $t_u^2 \in V_i$ und $t_v^2 \in V_j$, $i \neq j$. Also gilt $(a^2)^T \chi^{S_2} \geq s - 1$. Da $F_1 = \emptyset$, gilt ebenso, daß es keinen Weg von t_u^1 nach t_v^1 in $(V, (F \cup F_1) \cap S_1)$ gibt für alle $t_u^1 \in V'_i$ und $t_v^1 \in V'_j$, $i \neq j$. Also gilt $(a^1)^T \chi^{S_1} \geq s' - 1$. Damit erhalten wir insgesamt $a^T \chi^P \geq s + s' - 2 = l - 1$.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = l - 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^k = 0$ für $e \in M$, $k = 1, 2$.

Wähle $S_1 = [t_1^1 : T_1]$ und $S_2 = B$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^2 = 0$ für $e \in F_2$.

Wähle $S_1 = [t_1^1 : T_1]$ und $S_2 = B$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_2 e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^2$.

(3) $b_e^k = 0$ für $e \in B$, $k = 1, 2$.

Sei $B = B_1 \cup B_2 \cup \{e\}$ eine kantendisjunkte Zerlegung von B . Aus (ii) folgt, daß es eine Kante $e' = t_u^p t_v^q \in F_2$ gibt mit $t_u^p \in V(B_1)$ und $t_v^q \in V(B_2)$. Gilt $l = 2$, so kann e' so gewählt werden, daß $p \neq q$ gilt, und wir setzen $S_1 = [t_u^1 t_v^1]$ und $S_2 = M \cup \{e'\}$. Andernfalls ($l \geq 3$) sei $i \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq u, i \neq v$. Wir setzen $S_1 = [t_i^1 : T_1]$ und $S_2 = B_1 \cup B_2 \cup M \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(4) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für $e, e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_u^1 t_v^1$ mit $t_u^1, t_v^1 \in T_1$. Setze $S_2 = B$ sowie $S_1 = [t_v^1 : T_1]$. Sei $e' \in [t_u^1 : T_1] \setminus \{e\}$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = b_{e'}^1 - b_e^1$, für alle $e, e' \in \delta(t_u^1)$, $t_u^1 \in T_1$.

(5) $b_e^1 = b_{e'}^1$ für $e \in E \setminus (E(T_1) \cup F)$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_u^p t_v^q$ mit $e \notin E(T_1) \cup F$. Setze $S_2 = B$ sowie $S_1 = [t_u^1 : T_1]$ und $S'_1 = S_1 \setminus \{t_u^1 t_v^1\} \cup M \cup \{e\}$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit

$\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) = b_{t_i^1 t_i^1}^1 - b_e^1$. Dies zusammen mit (4) liefert die Behauptung.

(6) $b_e^2 = b_e^1$, für $e \in E \setminus (F \cup F_2)$, $e' \in E(T_1)$.

Sei $e = t_i^s t_j^r$ mit $e \notin F \cup F_2$. Wegen (iii) und (iv) existieren $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $s, r \in \{0, 1\}$ mit $bd(i, j) \geq 1 + s + r$, so daß es einen Weg W von t_i^{2-s} nach t_j^{2-r} in $(V(F_2 \cup \{e\}), F_2 \cup \{e\})$ gibt, wobei $e \in W$ (ist W nicht eindeutig, so wähle W so, daß $|W \cap E(T_1)|$ minimal ist). Wir unterscheiden 3 Fälle.

(a) $s = r = 1$.

Da $bd(i, j) \geq 3$ gilt, existieren $i_0, j_0 \in \{1, \dots, l\}$ mit $i_0 \neq i, j_0 \neq j$, $bd(i_0, j_0) = 1$, $bd(i_0, i) < bd(j_0, i)$ und $bd(i_0, j) > bd(j_0, j)$. Setze $M_2 = \{t_i^1 t_i^2, t_j^1 t_j^2\}$.

(b) $s = 0, r = 1$ (der Fall $s = 1, r = 0$ geht analog).

Da $bd(i, j) \geq 2$, existiert $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ mit $j_0 \neq i, j_0 \neq j$, $bd(i, j_0) = 1$ und $bd(j_0, j) < bd(i, j)$. Wir setzen $i_0 = i$ und $M_2 = \{t_j^1 t_j^2\}$.

(c) $s = 0, r = 0$.

Da $bd(i, j) \geq 1$, existiert $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ mit $j_0 \neq i$, $bd(i, j_0) = 1$ und $bd(j_0, j) < bd(i, j)$. Wir setzen $i_0 = i$ und $M_2 = \emptyset$.

Setze $U = \{t_{i_0}^1 t_{i_0}^2, t_{i_0}^2 t_{j_0}^2, t_{j_0}^2 t_{j_0}^1\}$ (beachte $U \cap M_2 = \emptyset$). Wähle $S_2 = B \cup M_2 \cup W$ sowie $S'_1 = [t_{i_0}^1 : T_1]$ und $S'_2 = B$. Gilt $l = 2$, so wähle $S_1 = U$. Gilt $l = 3$, dann existiert nach Wahl von i_0, j_0 und W eine Kante $\bar{e} \in E(T_1) \setminus W$ mit $\bar{e} \neq t_{i_0}^1 t_{j_0}^1$. Setze $S_1 = \{\bar{e}\} \cup U$. Für $l \geq 4$ existiert ein aufspannender Baum A in $(T_1, E(T_1) \setminus W)$, da W ein Weg ist. Sei $\hat{e} \in A$, so daß $A \setminus \{\hat{e}\} \cup \{t_{i_0}^1 t_{j_0}^1\}$ ebenfalls ein aufspannender Baum ist. Setze $S_1 = A \setminus \{\hat{e}\} \cup U$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = (S'_1, S'_2)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) - b^T(\chi^{S'_1}, \chi^{S'_2}) = b_e^2 - b_{t_{i_0}^1 t_{j_0}^1}^1$. Dies zusammen mit (4) liefert die Behauptung.

(1) – (6) implizieren, daß b ein Vielfaches von a ist.

Bleibt zu zeigen, daß die Bedingungen (i) – (iv) auch notwendig sind.

- (i) Angenommen $F_1 \neq \emptyset$. Sei $e = t_u^p t_v^q \in F_1$, $e \notin F$. Wähle $S_1 = [t_u^1 : T_1 \setminus \{t_v^1\}] \cup M \cup \{e\}$ und $S_2 = B$. Dann ist $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen, und es gilt $a^T \chi^P = l - 2$, ein Widerspruch. Also gilt $F_1 = \emptyset$.
- (ii) Angenommen $(V, M \cup F_2)$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $i, j \in \{1, \dots, l\}$, so daß es keinen Weg von t_i^2 nach t_j^2 in $(V, M \cup F_2)$ gibt, und $bd(i, j) = 1$ gilt. Da $a^T x \geq l - 1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definiert, existiert eine Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$ mit $a^T \chi^P = l - 1$ und $t_i^2 t_j^2 \notin P$. Andernfalls wäre $F_a \subseteq \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid x_{t_i^2 t_j^2}^1 + x_{t_i^2 t_j^2}^2 = 1\}$ (vergleiche Satz (6.1.13)). Sei W der eindeutige Weg von t_i^2 nach t_j^2 in $(V(S_2), S_2)$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß S_2 kantenminimal ist. Da $t_i^2 t_j^2 \notin S_2$, und es keinen Weg von t_i^2 nach t_j^2 in $(V, M \cup F_2)$ gibt, existiert eine Kante $e \in W$ mit $a_e^2 = 1$. Wähle $S'_2 = S_2 \setminus \{e\} \cup \{t_i^2 t_j^2\}$. Beachte, $t_i^2 t_j^2 \notin S_1$. Dann ist $P' = (S_1, S'_2)$ ebenfalls eine Packung von Steinerbäumen, und es gilt $a^T \chi^{P'} = a^T \chi^P - 1 = l - 2$, ein Widerspruch.
- (iii) Angenommen, es existieren $i, j \in \{1, \dots, l\}$ und $r, s \in \{0, 1\}$ mit $bd(i, j) \geq 1 + r + s$, so daß es einen Weg W von t_i^{2-r} nach t_j^{2-s} in $(V(F_2), F_2)$ gibt. Dann kann analog zu (6)

eine Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$ konstruiert werden mit $a^T \chi^P = l - 2$, ein Widerspruch.

- (iv) Angenommen F_1 und F_2 sind nicht maximal bezüglich der Bedingungen (i) – (iii). Dann wähle $F'_2 \subset E \setminus F$, so daß $F_2 \subset F'_2$ und F_1 und F_2 maximal sind bezüglich der Bedingungen (i) – (iii). Gemäß Teil 1 des Beweises definiert $(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F'_2)})^T x \geq l - 1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Durch Summation dieser facetten-definierenden Ungleichung zusammen mit den gültigen Ungleichungen $x_e^2 \geq 0$ für alle $e \in F'_2 \setminus F_2$ erhalten wir $a^T x \geq l - 1$. Also definiert $a^T x \geq l - 1$ keine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$, ein Widerspruch. \square

6.3.5. Kreisel-Ungleichungen

(6.3.5.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2, T_3\}$ eine Netzliste. Sei C ein alternierender Kreis bezüglich T_2, T_3 und $t_1^1, t_2^1 \in T_1 \setminus V(C)$. Ferner sei $e_i, e_j \in [t_1^1 : T_2 \cap V(C)]$, $e_i \neq e_j$ und $e_r, e_s \in [t_2^1 : T_3 \cap V(C)]$, $e_r \neq e_s$. Dann nennen wir $K = C \cup \{e_i, e_j, e_r, e_s\}$ einen *Kreisel* (vgl. Abbildung 6.3.5.1). Die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus K}, \chi^{E \setminus K}, \chi^{E \setminus K})^T x \geq 1$$

heißt *Kreisel-Ungleichung*.

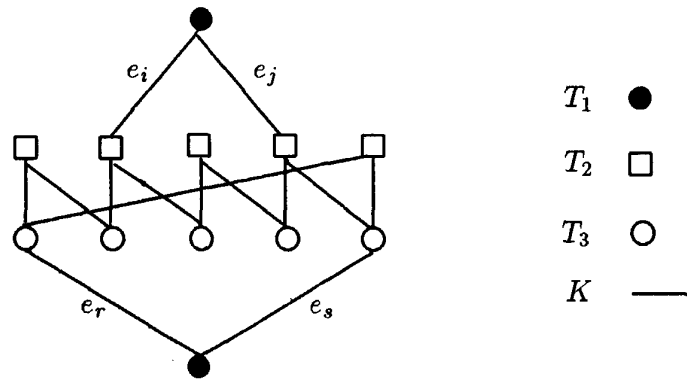


Abbildung 6.3.5.1

(6.3.5.2) Satz Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2, T_3\}$ eine disjunkte Netzliste mit $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = V$ und $|T_2| = |T_3| = l$, $l \geq 3$. Sei $T_1 = \{t_1^1, t_2^1\}$, $e_i, e_j \in [t_1^1 : T_2]$, $e_i \neq e_j$ und $e_r, e_s \in [t_2^1 : T_3]$, $e_r \neq e_s$. Sei C ein alternierender Kreis bezüglich T_2, T_3 mit $V(C) = T_2 \cup T_3$. Wir setzen $F = C \cup \{e_i, e_j, e_r, e_s\}$, $F_1 = E(T_2) \cup E(T_3)$, $F_2 = E(T_3) \cup ([t_2^1 : T_3] \setminus \{e_r, e_s\})$ und $F_3 = E(T_2) \cup ([t_1^1 : T_2] \setminus \{e_i, e_j\})$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_3)})^T x \geq 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$.

Beweis.

Zuerst zeigen wir, daß $a^T x \geq 1$ gültig ist mit $a := (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_3)})$. Sei $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen. Ist $(a^2)^T \chi^{S_2} > 0$ oder $(a^3)^T \chi^{S_3} > 0$, dann ist die Ungleichung offensichtlich gültig. Gilt $(a^2)^T \chi^{S_2} = 0$ und $(a^3)^T \chi^{S_3} = 0$, so ist $C \subset S_2 \cup S_3$. Folglich ist $S_1 \not\subset F \cup F_1$. Also ist $a^T x \geq 1$ gültig.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

Sei $C = M_1 \cup M_2$, wobei M_i ein perfektes Matching in $(T_2 \cup T_3, [T_2 : T_3])$ für $i = 1, 2$ ist. Sei $T_i = \{t_1^i, \dots, t_k^i\}$, $i = 1, 2$, so daß $M_1 = \{t_1^1 t_1^2 \mid i = 1, \dots, k\}$. Wir wollen uns zunächst noch Wälder definieren, die häufig als Teilmengen von Steinerbäumen auftreten. Vergleiche dazu Abbildung 6.3.5.2. Sei $e \in C$. Zur einfacheren Erklärung numerieren wir die Kanten, so daß $C = \{e_1, \dots, e_{2k}\}$ mit $e = e_1$. Sei $\{t\} = V(\{e\}) \cap V(\{e_2\})$. Sei l_2 der kleinste Index, so daß e_{l_2} adjazent ist zu e_i oder e_j , aber nicht zu e . Beachte, l_2 ist ungerade, falls $t \in T_2$, und gerade, sonst. Wir definieren $S_e^2 = \bigcup_{i=1}^{\frac{l_2-1}{2}} \{e_{2i}\} \cup \bigcup_{i=1}^{\frac{2k-l_2-1}{2}} \{e_{l_2+2i}\} \cup \{e_i, e_j\}$, falls $t \in T_2$, vergleiche Abbildung 6.3.5.2 (a). Ist $t \in T_3$, dann setzen wir $S_e^2 = \bigcup_{i=1}^{\frac{l_2-1}{2}} \{e_{1+2i}\} \cup \bigcup_{i=1}^{\frac{2k-l_2}{2}} \{e_{l_2+2i}\} \cup \{e_i, e_j\}$, vergleiche Abbildung 6.3.5.2 (b). Völlig analog lassen sich Wälder S_e^3 für $e \in C$ definieren.

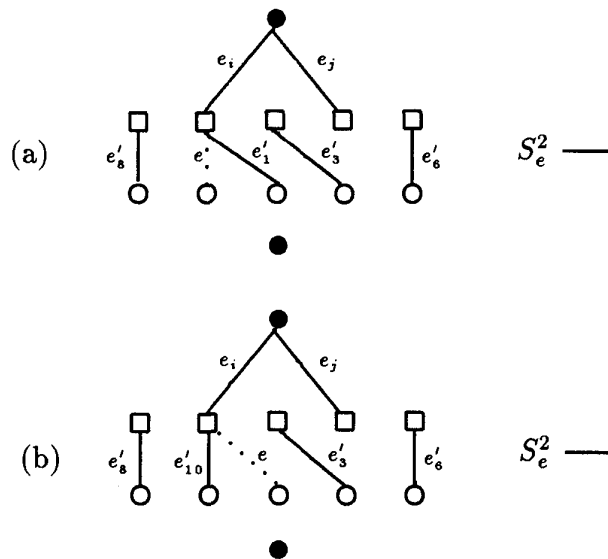


Abbildung 6.3.5.2

Wir beginnen nun mit dem Fixieren der Koeffizienten.

(1) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 1, 2, 3$.

Wähle $S_1 = \{t_1^1 t_2^1\}$, und sei B_{1+i} ein aufspannender Baum in $(T_{4-i}, E(T_{4-i}) \setminus \{e\})$, $i = 1, 2$. Dies ist möglich, da $l \geq 3$. Setze $S_2 = M_1 \cup B_2$ und $S_3 = M_2 \cup B_3$. Dann sind $P = (S_1, S_2, S_3)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $e \notin P$, $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_{e_i}^k = b_{e_j}^k = b_{e_r}^k = b_{e_s}^k = 0$ für $k = 1, 2, 3$.

Um dies zu zeigen, wähle eine Packung von Steinerbäumen P wie in (1).

(3) $b_e^k = 0$ für alle $e \in C$, $k = 1, 2, 3$.

Sei $e \in C$. Wähle $S_1 = \{t_1^1 t_2^1\}$, $S_2 = S_e^2 \cup E(T_3)$ und $S_3 = C \setminus (S_2 \cup \{e\}) \cup E(T_2)$. Dann sind $P = (S_1, S_2, S_3)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $e \notin P$, $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

Im folgenden sei $t_i, t_j \in T_2$, so daß $e_i = t_i t_1^1$ und $e_j = t_j t_1^1$ ist. Ferner sei $t_r, t_s \in T_3$ mit $e_r = t_r t_2^1$ und $e_s = t_s t_2^1$.

(4) $b_{t_1^1 t_2^1}^1 = \beta$

Wähle eine Packung von Steinerbäumen P wie in (1). Dann ist $\chi^P \in F_a$. Dies zusammen mit (1) und (3) impliziert, daß $\beta = b^T \chi^P = b_{t_1^1 t_2^1}^1$.

(5) $b_e^1 = \beta$ für alle $e = t_1^1 t$, $t \in T_3$.

Sei B_{1+i} ein aufspannender Baum in $(T_{4-i}, E(T_{4-i}) \setminus \{tt_r\})$, $i = 1, 2$. Dies ist möglich, da $l \geq 3$. Setze $S_2 = M_1 \cup B_2$ und $S_3 = M_2 \cup B_3$. Wähle $S_1 = \{e_r, tt_r, e\}$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^1$.

(6) $b_e^1 = \beta$ für alle $e = t_2 t_3$, $t_2 \in T_2$, $t_3 \in T_3$, $e \notin C$.

Sei B_2 ein aufspannender Baum in $(T_3, E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$, B_3 ein aufspannender Baum in $(T_2, E(T_2) \setminus \{t_2 t_i\})$. Setze $S_2 = M_1 \cup B_2$, $S_3 = M_2 \cup B_3$ und $S_1 = \{e_r, t_3 t_r, e_i, t_2 t_i, e\}$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^1$.

(7) $b_e^1 = \beta$ für alle $e = t_1^1 t_2$, $t_2 \in T_2 \setminus \{t_i, t_j\}$.

Sei $e' = t_2 t_3 \in C$, $t_3 \in T_3$. Wähle $S_1 = \{e, e', t_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = S_e^2 \cup (E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$ und $S_3 = C \setminus (S_e^2 \cup \{e'\}) \cup E(T_2)$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^1$.

Aus Symmetriegründen lassen sich analog zu (5) – (7) die verbleibenden Koeffizienten von b^1 auf β fixieren. In den nun folgenden Punkten (8) – (13) zeigen wir, daß die verbleibenden Koeffizienten von b^2 ebenfalls gleich β sind.

(8) $b_{t_1^1 t_2^1}^2 = \beta$

Sei $e' = t_i t_3 \in M_1$, $t_3 \in T_3$. Setze $S_1 = \{e_j, t_i t_j, e', t_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e_i, e_s, t_1^1 t_2^1\} \cup (E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i, t_j\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_{t_1^1 t_2^1}^2$.

(9) $b_e^2 = \beta$ für alle $e = t_1^1 t_2$, $t_2 \in T_2$, $e \neq e_i, e \neq e_j$.

Sei $e' = t_2 t_3 \in M_1$, $t_3 \in T_3$. Setze $S_1 = \{e_i, t_i t_2, e', t_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e_j, e\} \cup (E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i, t_2\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^2$.

(10) $b_e^2 = \beta$ für alle $e = t_1^1 t_3$, $t_3 \in T_3$.

Sei $e' = t_j t'_3 \in M_1$. Setze $S_1 = \{e_i, t_i t_j, e', t'_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e_j, e\} \cup (E(T_3) \setminus \{t'_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i t_j\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^2$.

(11) $b_e^2 = \beta$ für alle $e = t_2 t_3$, $t_2 \in T_2$, $t_3 \in T_3$, $e \notin C$.

Sei $e' = t_2 t'_3 \in M_1$. Setze $S_1 = \{e_i, t_i t_2, e', t'_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e\} \cup (E(T_3) \setminus \{t'_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i t_2\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^2$.

(12) $b_e^2 = \beta$ für alle $e = t_2 t_2^1$, $t_2 \in T_2$.

Sei $e' = t_2 t_3 \in M_1$. Setze $S_1 = \{e_i, t_i t_2, e', t_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e, e_s\} \cup (E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i t_2\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^2$.

(13) $b_e^2 = \beta$ für alle $e = t_2 t_2'$, $t_2 \in T_2$, $t_2' \in T_2 \setminus \{t_i\}$, $t_2 \neq t_2'$.

Sei $e' = t_2 t_3 \in M_1$. (Falls $l = 3$ ist, gilt $t_2 = t_i$ oder $t_2 = t_j$. Wir behandeln den Fall $t_2 = t_i$. Der andere Fall kann entsprechend gezeigt werden.) Setze $S_1 = \{e_i, t_i t_2, e', t_3 t_r, e_r\}$, $S_2 = M_1 \setminus \{e'\} \cup \{e\} \cup (E(T_3) \setminus \{t_3 t_r\})$ und $S_3 = M_2 \cup (E(T_2) \setminus \{t_i t_2, e\})$. Dann ist $P = (S_1, S_2, S_3)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es gilt $\beta = b^T \chi^P = b_e^2$.

Die gleichen Argumente wie in (8) – (13) können verwendet werden, um die entsprechenden Koeffizienten von b^3 auf β zu fixieren. Damit ist gezeigt, daß $a^T x \geq 1$ eine Facette von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbf{1})$ definiert. \square

Ergänzungen

Wir stellen in diesem Abschnitt noch zwei Ergänzungen zu den Kreisel-Ungleichungen dar. Zunächst gilt Satz (6.3.5.2) auch für $l = 2$. Wir haben diesen Fall deshalb nicht in Satz (6.3.5.2) berücksichtigt, da die meisten Steinerbaum-Konstruktionen in dem Beweis für $l = 2$ nicht möglich sind. Durch einfache Enumeration aller Möglichkeiten, kann man zeigen, daß Satz (6.3.5.2) auch für $l = 2$ richtig ist.

(6.3.5.3) Bemerkung Satz (6.3.5.2) ist auch für $l = 2$ richtig.

Wir geben schließlich noch eine Formulierung der Kreisel-Ungleichungen, wobei die Netzliste nicht disjunkt ist.

(6.3.5.4) Korollar

Sei $G = (V, E)$ der vollständige Graph mit Knotenmenge V , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2, T_3\}$ eine Netzliste mit $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = V$, $|T_2| = |T_3| = l + 1$, $l \geq 3$ und $T_1 = \{t_1^1, t_2^1\}$, so daß $T_1 \cap T_2 = \{t_1^1\}$ und $T_1 \cap T_3 = \{t_2^1\}$ ist. Ferner sei $e_i, e_j \in [t_1^1 : T_2]$, $e_i \neq e_j$ und $e_r, e_s \in [t_2^1 : T_3]$, $e_r \neq e_s$. Sei C ein alternierender Kreis bezüglich T_2, T_3 mit $V(C) = (T_2 \cup T_3) \setminus T_1$. Schließlich sei $f_2 \in [t_2^1 : T_2]$ und $f_3 \in [t_1^1 : T_3]$ beliebig. Wir setzen $F = C \cup \{e_i, e_j, e_r, e_s\}$, $F_1 = E(T_2) \cup E(T_3)$, $F_2 = (E(T_3) \cup [t_2^1 : T_3] \cup \{f_2\}) \setminus \{e_r, e_s\}$ und $F_3 = (E(T_2) \cup [t_1^1 : T_2] \cup \{f_3\}) \setminus \{e_i, e_j\}$. Vergleiche Abbildung 6.3.5.3. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_3)})^T x \geq 1$$

eine Facette von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbf{1})$.

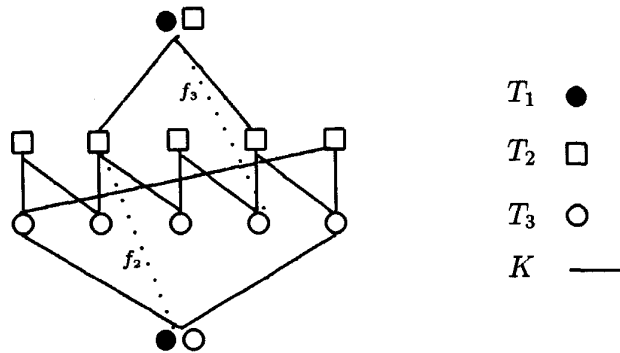


Abbildung 6.3.5.3

Beweis.

Sei $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_3)})$. Wir können große Teile des Beweises von Satz (6.3.5.2) verwenden. Wir zeigen zuerst die Gültigkeit. Angenommen es gibt eine kantenminimale Steinerbaumpackung $P = (S_1, S_2, S_3)$ mit $a^T \chi^P = 0$. Dann gilt entweder $f_2 \in S_2$ oder $f_3 \in S_3$. Andernfalls widerspricht die Annahme Satz (6.3.5.2). Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f_3 \in S_3$. Da S_3 kantenminimal ist, existiert eine Kante $f \in (\delta(t_1^1) \cap S_3) \setminus \{f_3\}$. Da $|\delta(t_1^1) \cap \{e \in E \mid a_e^k = 0 \text{ für ein } k \in \{1, 2, 3\}\} \setminus \{f_3\}| = 2$ sowie $t_1^1 \in T_1$ und $t_1^1 \in T_2$ ist, muß $a^T \chi^P > 0$ sein. Damit ist die Gültigkeit gezeigt.

Um zu zeigen, daß $a^T x \geq 1$ eine Facette definiert, gehen wir wie im Beweis von Satz (6.3.5.2) vor. Sei wieder $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Außerdem sei $e_i = t_1^1 t_i$, $e_j = t_1^1 t_j$, $e_r = t_2^1 t_r$ und $e_s = t_2^1 t_s$. Für alle in Beweis (6.3.5.2) konstruierten Steinerbaumpackungen (mit Ausnahme der unter Punkt (8) und (12)) gilt, daß (a) $\{e_i, e_j\} \setminus (S_1 \cup S_3) \neq \emptyset$ und $t_i, t_j \in V(S_2)$ ist. Genauso gilt (b) $\{e_r, e_s\} \setminus (S_1 \cup S_2) \neq \emptyset$ und $t_r, t_s \in V(S_3)$. Für die unter (8) und (12) konstruierten Steinerbaumpackungen muß die Kante e_s durch f_2 ersetzt werden, damit (a) und (b) gilt. Also erfüllen alle im Beweis von Satz (6.3.5.2) betrachteten Steinerbaumpackungen (a) und (b). Damit können nun in jedem der Fälle (1) - (13) die zwei Terminals $t_1^1 \in T_2$ und $t_2^1 \in T_3$ durch eine Nullkante verbunden werden. Insbesondere kann mit Hilfe der Steinerbaumpackungen unter Punkt (1) gezeigt werden, daß $b_{f_2}^2 = 0$ und $b_{f_3}^3 = 0$ ist. Damit gilt, daß b ein Vielfaches von a ist. Da es offensichtlich auch eine Steinerbaumpackung P mit $a^T \chi^P > 1$ gibt, ist damit gezeigt, daß $a^T x \geq 1$ eine Facette von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definiert. \square

6.3.6. Gitter-Ungleichungen

(6.3.6.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste. Sei $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein Teilgraph von G , so daß \hat{G} ein vollständiger rechtwinkliger $2 \times h$ Gittergraph ist mit $h \geq 3$. Die

Knoten von V seien so numeriert, daß $\hat{V} = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, h, j = 1, 2\}$ ist. Außerdem seien $(1, 1), (h, 2) \in T_1$ und $(1, 2), (h, 1) \in T_2$. Dann nennen wir die Ungleichung

$$(\chi^{E \setminus (\hat{E})}, \chi^{E \setminus (\hat{E})})^T x \geq 1$$

eine $2 \times h$ Gitter-Ungleichung.

Wir werden uns im Rahmen dieses Abschnitts nur mit $2 \times h$ Gitter-Ungleichungen beschäftigen, und deshalb auf das Präfix " $2 \times h$ " verzichten. Sprechen wir im folgenden von einem $2 \times h$ Gittergraphen, so gehen wir implizit immer davon aus, daß die Knotenmenge gemäß Definition (6.3.6.1) numeriert ist. Falls wir einen $2 \times h$ Gittergraphen, der Teilgraph eines gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ist, betrachten, nehmen wir zur Vereinfachung der Notation ferner an, daß die Knotenmenge V so numeriert ist, daß die Knoten des Gittergraphen eine Numerierung wie in Definition (6.3.6.1) erhalten.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $F \subset E$ und $u, v \in V$. Einen Weg $Q_F(u, v)$ von u nach v in G nennen wir einen *Quasi-Weg bezüglich F von u nach v* , falls es ein $e \in Q_F(u, v)$ gibt mit $e \in E \setminus F$ und $Q_F(u, v) \setminus \{e\} \subset F$. Dann gilt der folgende Satz.

(6.3.6.2) Satz

Sei $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein vollständiger rechtwinkliger $2 \times h$ Gittergraph mit $h \geq 3$. Seien J_1 und J_2 die beiden Spalten von \hat{G} . Sei $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste mit $T_1 = \{(1, 1), (h, 2)\}$ und $T_2 = \{(1, 2), (h, 1)\}$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\hat{V} \subset V$, $\hat{E} \subset E$, so daß $[V(J_1) : V(J_2)]$ einen Schnitt in G definiert. Wir setzen $F = \hat{E}$. Sei $F_1, F_2 \subset E \setminus F$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$, falls F_1 und F_2 die folgenden Bedingungen erfüllt (vergleiche dazu Abbildung 6.3.6.1):

- (i) Für alle $i \in \{1, \dots, h\}$ ist in $(V, E \setminus F)$ (mindestens) eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:
 - (a) Es existiert ein Quasi-Weg $Q_{F_k}((r, l), (s, l))$, $k, l \in \{1, 2\}$, $r, s \in \{1, \dots, h\}$ mit $r \leq i - |k - l|$ und $s \geq i + 2 - |k - l|$.
 - (b) Es existiert ein Quasi-Weg $Q_{F_k}((r_l, l), (s_l, l))$, $k_l \in \{1, 2\}$, $r_l, s_l \in \{1, \dots, h\}$ mit $r_l \leq i < i + 1 \leq s_l$ für $l = 1, 2$ und ein Quasi-Weg $Q_{F_k}((r, l), (s, l))$, $k, l \in \{1, 2\}$, $r, s \in \{1, \dots, h\}$, $r < s$ für den gilt:
 - $s - r \geq 2$, falls $r \in \{i - 1, i\}$,
 - $r \neq i$, falls $k \neq l$,
 - $s \neq i$, falls $k = l$.
- (ii) $\bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q = \emptyset$, wobei $\mathcal{Q} = \{Q \subset E \mid \text{es existieren } u, v \in V, \text{ so daß } Q \text{ ein Quasi-Weg von } u \text{ nach } v \text{ bezüglich } F_1 \text{ oder } F_2 \text{ in } (V, E \setminus F) \text{ ist}\}$.
- (iii) Für alle $u, v \in V(F)$, $u \neq v$ existiert kein Weg von u nach v in (V, F_k) für $k = 1, 2$.
- (iv) F_1 und F_2 sind maximal bezüglich der Eigenschaften (i) – (iii).

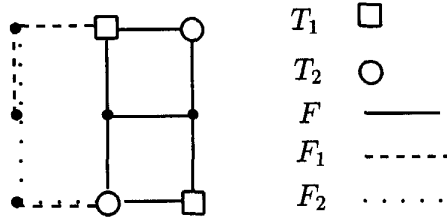


Abbildung 6.3.6.1

Beweis.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir die nachfolgenden Abkürzungen. Setze $Q_2^+(r, s) = Q_{F_2}((r, 2), (s, 2))$, $Q_2^-(r, s) = Q_{F_2}((r, 1), (s, 1))$, $Q_1^-(r, s) = Q_{F_1}((r, 1), (s, 1))$ sowie $Q_1^+(r, s) = Q_{F_1}((r, 2), (s, 2))$ (beachte, daß es keinen Weg $Q((r, 1), (s, 2))$, $r, s \in \{1, \dots, h\}$ in $(V, E \setminus F)$ gibt). Außerdem sei $J_{i_0, i_1}^s = \{[(i, s), (i+1, s)] \mid i = i_0, \dots, i_1 - 1\}$ für $s = 1, 2$, $i_0, i_1 \in \{1, \dots, h\}$, $i_0 \leq i_1$. Schließlich sei $S_1^i = J_1^{1, i} \cup \{[(i, 1), (i, 2)]\} \cup J_2^{i, h}$ und $S_2^i = J_2^{1, i} \cup \{[(i, 2), (i, 1)]\} \cup J_1^{i, h}$ für $i = 1, \dots, h$.

Die Gültigkeit von $a^T x \geq 1$ mit $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})$ ist leicht einzusehen. Offensichtlich gibt es keine Packung von Steinerbäumen in $(V(F), F)$, da alle Knoten aus $V(F)$ höchstens Grad drei bezüglich F haben, und da die Terminalknoten Grad zwei bezüglich F haben. Dies zusammen mit Bedingung (iii) impliziert die Gültigkeit.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Wegen (ii) existiert ein Quasi-Weg \bar{Q} mit $e \notin \bar{Q}$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit \bar{Q} ein Quasi-Weg bezüglich F_1 . Da $[V(J_1) : V(J_2)]$ einen Schnitt in G definiert, gilt $\bar{Q} = Q_1^+(r, s)$ oder $\bar{Q} = Q_1^-(r, s)$ mit $r, s \in \{1, \dots, h\}$, $r < s$. Wir betrachten den Fall $\bar{Q} = Q_1^+(r, s)$ (der zweite Fall geht analog). Setze $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r, s}$ und $S_2 = S_2^s$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^{P'}, \chi^P \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^k = 0$ für $e \in F$, $k = 1, 2$.

Die Bedingung, es gibt einen Quasi-Weg $Q_{F_k}((r, l), (s, l))$, $r, s \in \{1, \dots, h\}$, $k, l \in \{1, 2\}$ mit $r \leq i - |k - l|$ und $s \geq i + 2 - |k - l|$, ist offensichtlich äquivalent zu der Bedingung, es existiert ein Quasi-Weg

- $Q_{F_2}((r, 2), (s, 2))$ mit $r \leq i < i + 1 < s$ oder
- $Q_{F_2}((r, 1), (s, 1))$ mit $r < i < i + 1 \leq s$ oder
- $Q_{F_1}((r, 1), (s, 1))$ mit $r \leq i < i + 1 < s$ oder
- $Q_{F_1}((r, 2), (s, 2))$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle. Wir setzen von nun an immer $r, s \in \{1, \dots, h\}$ voraus.

(a) $e = [(i, 1), (i + 1, 1)]$ mit $i \in \{1, \dots, h - 1\}$. Gemäß Bedingung (i) gibt es einen der folgenden Quasi-Wege.

- $Q_2^+(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^i$ und $S_2 = S_2^s \cup Q_2^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$.
- $Q_2^-(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^i$ und $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$.
- $Q_1^-(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^s \cup Q_1^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{i+1}$.
- $Q_1^+(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{i+1}$.
- $Q_k^+(r, s)$ mit $k \in \{1, 2\}$ und $r \leq i < i + 1 \leq s$.
Falls $k = 1$, wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^s$. Andernfalls wähle $S_1 = S_1^r$ und $S_2 = S_2^s \cup Q_2^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$.

(b) $e = [(i, 2), (i + 1, 2)]$ mit $i \in \{1, \dots, h - 1\}$. Gemäß Bedingung (i) gibt es einen der folgenden Quasi-Wege.

- $Q_2^+(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^{i+1}$ und $S_2 = S_2^s \cup Q_2^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$.
- $Q_2^-(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^{i+1}$ und $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$.
- $Q_1^-(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^s \cup Q_1^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$ und $S_2 = S_2^i$.
- $Q_1^+(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^i$.
- $Q_k^-(r, s)$ mit $k \in \{1, 2\}$ und $r \leq i < i + 1 \leq s$.
Falls $k = 1$, wähle $S_1 = S_1^s \cup Q_1^-(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^r$. Andernfalls wähle $S_1 = S_1^s$ und $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_2^{r,s}$.

(c) $e = [(i, 1), (i, 2)]$ mit $i \in \{1, \dots, h - 1\}$. Gemäß Bedingung (i) gibt es einen der folgenden Quasi-Wege.

- $Q_2^+(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^{i+1}$ und $S_2 = S_2^s \cup Q_2^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$.
- $Q_2^-(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^{i+1}$ und $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$.
- $Q_1^-(r, s)$ mit $r \leq i < i + 1 < s$.
Wähle $S_1 = S_1^s \cup Q_1^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{i+1}$.
- $Q_1^+(r, s)$ mit $r < i < i + 1 \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{i+1}$.
- $Q_{F_k}((r, l), (s, l))$, $k, l \in \{1, 2\}$, $r < s$ mit $s - r \geq 2$, falls $r \in \{i - 1, i\}$ sowie $r \neq i$, falls $k \neq l$, und $s \neq i$, falls $k = l$.

Wir betrachten zuerst den Fall $r \notin \{i - 1, i\}$. Gilt $s \neq i$, dann wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^s$, falls $k = 1$ und $l = 2$ (die anderen Fälle gehen analog). Gilt $s = i$, so gilt $k \neq l$. Wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{s-1}$, falls $k = 1$, $l = 2$, andernfalls setze $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$ und $S_1 = S_1^{s-1}$. Gilt $r = i - 1$, so ist $s \geq i + 1$. Entsprechend zu $r \notin \{i - 1, i\}$ und $s \neq i$ lassen sich hier Steinerbäume S_1 und S_2 konstruieren. Gilt $r = i$, so ist $s \geq i + 2$ und $k = l$. Für $k = 1$ wähle $S_1 = S_1^s \cup Q_1^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{s-1}$. Andernfalls sei $S_2 = S_2^s \cup Q_2^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_1 = S_1^{s-1}$.

(d) $e = [(h, 1), (h, 2)]$. Gemäß Bedingung (i) gibt es einen der folgenden Quasi-Wege.

- $Q_2^-(r, s)$ mit $r < h - 1 < h \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^{h-1}$ und $S_2 = S_2^r \cup Q_2^-(r, s) \setminus J_1^{r,s}$.
- $Q_1^+(r, s)$ mit $r < h - 1 < h \leq s$.
Wähle $S_1 = S_1^r \cup Q_1^+(r, s) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{h-1}$.
- $Q_{F_k}((r, l), (h, l))$, $k, l \in \{1, 2\}$, $r < s$ mit $r \leq h - 2$ und $s \neq h$, falls $k = l$.
Dies ist ein Spezialfall des entsprechenden Falles in (c).

Damit sind in allen Fällen $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^{P'}, \chi^P \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(3) $b_e^k = \beta$ für alle $e \in E \setminus (F \cup F_k)$, $k = 1, 2$.

Sei $e \in E \setminus (F \cup F_1)$. Wegen Bedingung (iv) existiert ein Quasi-Weg $Q_{F_1}(u, v)$ von u nach v mit $e \in Q_{F_1}(u, v)$. Sei $u = (r, 2)$ und $v = (s, 2)$ mit $r < s$. Der Fall $u = (r, 1)$ und $v = (s, 1)$ geht analog (beachte wieder, daß $[V(J_1) : V(J_2)]$ einen Schnitt in G definiert). Wir wählen $S_1 = S_1^r \cup Q_{F_1}(u, v) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^s$. Dann ist $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es folgt zusammen mit (1) und (2), daß $\beta = b^T \chi^P = b_e^1$. Analog zeigt man $b_e^2 = \beta$.

Es verbleibt zu zeigen, daß $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ volldimensional ist. Wegen (1) – (3) genügt es eine Packung von Steinerbäumen P anzugeben mit $a^T \chi^P \geq 2$. Sei $e \in E \setminus (F \cup F_1)$. Bedingung (iii) und (iv) implizieren, daß es einen Quasi-Weg $Q_{F_1}(u, v)$ von u nach v mit $e \in Q_{F_1}(u, v)$ gibt. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u = (r, 2)$ und $v = (s, 2)$ mit $r < s$. Aus (ii) folgt, es existiert ein Quasi-Weg Q' bezüglich F_k , $k \in \{1, 2\}$, mit $e \notin Q'$. Da $Q_{F_1}(u, v) \cap (E \setminus (F \cup F_1)) = \{e\}$, folgt, daß $(Q' \cap (E \setminus (F \cup F_1))) \setminus \{e\} \neq \emptyset$. Sei $e' \in (Q' \cap (E \setminus (F \cup F_1))) \setminus \{e\}$. Wir wählen $S_1 = S_1^r \cup Q_{F_1}(u, v) \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^s$. Dann ist $P = (S_1, S_2) \cup_k e'$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^P = 2$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

An dieser Stelle sei angemerkt, daß der in Satz (6.3.6.2) zugrundeliegende Graph G nicht notwendigerweise vollständig ist. Wir geben im folgenden eine Formulierung für den vollständigen Graphen.

(6.3.6.3) Satz

Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit Knotenmenge V , so daß G einen vollständigen rechtwinkligen $2 \times h$ Gittergraphen als Kanten-Teilgraph enthält mit $h \geq 3$. Sei $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eine Netzliste mit $T_1 = \{(1, 1), (h, 2)\}$ und $T_2 = \{(1, 2), (h, 1)\}$. Setze $F = \hat{E}$ und sei $F_1, F_2 \subset E \setminus F$. Ferner sei $\bar{k} = 3 - k$ für $k = 1, 2$. Dann definiert

$$(\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})^T x \geq 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ genau dann, wenn F_1 und F_2 die folgenden Bedingungen erfüllt (vergleiche Abbildung 6.3.6.2):

- (i) $F_k \subseteq \mathcal{F}_k := \{[(i, \bar{k}), (i + 1, k)] \mid i = 1, \dots, h - 1\}$ für $k = 1, 2$.
- (ii) Für alle $[(i_k, \bar{k}), (i_k + 1, k)] \in F_k$, $k = 1, 2$ gilt $i_1 \neq i_2$.
- (iii) F_1 und F_2 sind maximal bezüglich (i) und (ii).

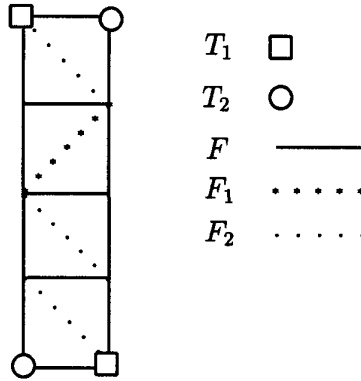


Abbildung 6.3.6.2

Beweis.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir die folgenden Abkürzungen. Sei $J_s^{i_0, i_1} = \{[(i, s), (i+1, s)] \mid i = i_0, \dots, i_1 - 1\}$ für $s = 1, 2$, $i_0, i_1 \in \{1, \dots, h\}$, $i_0 \leq i_1$. Außerdem sei $S_1^i = J_1^{1, i} \cup \{[(i, 1), (i, 2)]\} \cup J_2^{i, h}$ und $S_2^i = J_2^{1, i} \cup \{[(i, 2), (i, 1)]\} \cup J_1^{i, h}$ für $i = 1, \dots, h$.

Die Gültigkeit von $a^T x \geq 1$ mit $a = (\chi^{E \setminus (F \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2)})$ ist leicht einzusehen. Sei $P = (S_1, S_2)$ eine beliebige Packung von Steinerbäumen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien S_1 und S_2 Wege. Angenommen, $a^T \chi^P = 0$. Offensichtlich existiert in (V, F) keine Packung von Steinerbäumen. Also gilt $(S_1 \cap F_1) \cup (S_2 \cap F_2) \neq \emptyset$. Sei $[(i_k, \bar{k}), (i_k + 1, k)] \in (S_1 \cap F_1) \cup (S_2 \cap F_2)$ mit i_k minimal. Wir betrachten den Fall $k = 1$ (der Fall $k = 2$ geht analog). Offensichtlich ist damit $J_k^{1, i_k} \subset S_k$ für $k = 1, 2$. Da $[(i_k, \bar{k}), (i_k + 1, k)] \in S_1$ und S_1 ein Weg ist, ist entweder $[(i_1, 1), (i_1, 2)], [(i_1 + 1, 1), (i_1 + 1, 2)] \in S_1$ oder $[(i_1, 1), (i_1 + 1, 1)], [(i_1, 2), (i_1 + 1, 2)] \in S_1$. Im ersten Fall sei $W = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, i_1 - 1, j = 1, 2\} \cup \bigcup_{i \in I} \{[(i, 2), (i + 1, 2)]\}$ mit $I = \{i \in \{i_1, \dots, h\} \mid [(i, 2), (i + 1, 1)] \in F_1 \cap S_1 \text{ und } [(i', 2), (i' + 1, 1)] \in F_1 \cap S_1 \text{ für alle } i' = i_1, \dots, i - 1\}$, im zweiten Fall setze $W = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, i_1, j = 1, 2\}$. Bedingung (i) und (ii) implizieren, daß $(\delta(W) \cap (F \cup F_2)) \setminus S_1 = \emptyset$. Da $(1, 2) \in W$ und $(h, 1) \in V \setminus W$, folgt $(a^2)^T \chi^{S_2} \geq 1$, ein Widerspruch.

Sei nun $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{I}) \mid b^T x = \beta\}$. Im folgenden zeigen wir, daß b ein Vielfaches von a ist.

(1) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F$, $k = 1, 2$.

Sei $e \in F$. Da (V, F) zweifach-kantenzusammenhängend ist, existiert ein Weg S_1 in (V, F) , der die Terminals aus T_1 verbindet und $e \notin S_1$. Setze $S_2 = [(1, 2), (h, 1)]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^{P'}, \chi^P \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^k = 0$ für alle $e \in F_k$, $k = 1, 2$.

Setze $S_1 = F$ und $S_2 = [(1, 2), (h, 1)]$. Dann sind $P = (S_1, S_2)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^{P'}, \chi^P \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(3) $b_e^k = \beta$ für alle $e \in E \setminus (F \cup F_k)$, $k = 1, 2$.

Wir behandeln den Fall $k = 1$ (der Fall $k = 2$ geht analog). Sei $e = [(r, p), (s, q)] \in E \setminus (F \cup F_1)$, $r < s$, $p, q \in \{1, 2\}$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

- (a) $p = 1$ (mit $s > r + 1$, falls $q = 1$).
Setze $S_1 = S_1^s \cup \{e\} \setminus J_1^{r,s}$ und $S_2 = S_2^r$.
- (b) $p = 2$ und $q = 2$ (mit $s > r + 1$).
Setze $S_1 = S_1^r \cup \{e\} \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^s$.
- (c) $p = 2$, $q = 1$ und $s > r + 1$.
Setze $S_1 = S_1^r \cup \{e, [(s, 1), (s, 2)]\} \setminus J_2^{r,s}$ und $S_2 = S_2^{s-1}$.
- (d) $p = 2$, $q = 1$ und $s = r + 1$.
Da $e \notin F_1$, folgt aus Bedingung (iii), daß $e' = [(r, 1), (s, 2)] \in F_2$. Setze $S_1 = J_1^{1,r} \cup \{[(r, 1), (r, 2)], e, [(s, 1), (s, 2)]\} \cup J_2^{s,h}$ und $S_2 = J_2^{1,s} \cup \{e'\} \cup J_1^{r,h}$.

Dann ist in allen Fällen $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $\chi^P \in F_a$, und es folgt zusammen mit (1) und (2), daß $\beta = b^T \chi^P = b_e^1$. Analog zeigt man $b_e^2 = \beta$.

Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist.

Im folgenden zeigen wir, daß die Bedingungen (i) – (iii) auch notwendig sind.

- (i) Angenommen es existiert ein $e \in F_k$ mit $e \notin \mathcal{F}_k$. Sei $e = [(r, p), (s, q)]$, $r < s$, $p, q \in \{1, 2\}$. Dann gilt einer der Fälle (3) (a) – (d). Wähle S_1 und S_2 analog wie in den entsprechenden Fällen. Da $e \in F_k$ folgt damit aber, daß $a^T(\chi^{S_1}, \chi^{S_2}) = 0$ gilt, ein Widerspruch.
- (ii) Angenommen es existiert ein $i \in \{1, \dots, h-1\}$ mit $[(i, 2), (i+1, 1)] \in F_1$ und $[(i, 1), (i+1, 2)] \in F_2$. Dann wähle $S_1 = J_1^{1,i} \cup \{[(i, 1), (i, 2)], [(i, 2), (i+1, 1)], [(i+1, 1), (i+1, 2)]\} \cup J_2^{i+1,h}$ und $S_2 = J_2^{1,i+1} \cup \{[(i, 1), (i+1, 2)]\} \cup J_1^{i,h}$. Dann ist $P = (S_1, S_2)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^P = 0$, ein Widerspruch.
- (iii) Angenommen F_1 und F_2 sind nicht maximal bezüglich der Bedingungen (i) und (ii). Dann wähle $F_1' \subseteq E \setminus F$ und $F_2' \subseteq E \setminus F$, so daß $F_1 \cup F_2 \subset F_1' \cup F_2'$, und F_1' und F_2' maximal bezüglich der Bedingungen (i) und (ii) sind. Gemäß Teil 1 des Beweises definiert $(\chi^{E \setminus (F \cup F_1')}, \chi^{E \setminus (F \cup F_2')})^T x \geq 1$ eine Facette von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$. Durch Summation dieser facetten-definierenden Ungleichung zusammen mit den gültigen Ungleichungen $x_e^1 \geq 0$ für alle $e \in F_1' \setminus F_1$ und $x_e^2 \geq 0$ für alle $e \in F_2' \setminus F_2$ erhalten wir $a^T x \geq 1$. Also definiert $a^T x \geq 1$ keine Facette von STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$, ein Widerspruch.

Damit ist der Beweis vollständig. \square

6.3.7. Kritische-Schnitt-Ungleichungen

Wir wollen hier eine recht “kleine” Klasse von Facetten vorstellen. Sie haben sich jedoch zur Lösung praktischer Probleme als sehr nützlich erwiesen.

(6.3.7.1) Definition

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph mit Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $e \in E$. Außerdem sei $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine beliebige Netzliste. Für eine Knotenmenge $W \subseteq V$ definieren wir $S(W) = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid T_k \cap W \neq \emptyset, T_k \cap (V \setminus W) \neq \emptyset\}$.

- (a) Wir nennen den von einer Knotenmenge W induzierten Schnitt *kritisch für* (G, \mathcal{N}, c) , falls $s(W) := c(\delta(W)) - |S(W)| \leq 1$ gilt.
- (b) Ist V_1, V_2, V_3 eine Partition von V , so daß $\delta(V_1)$ ein kritischer Schnitt ist sowie $T_1 \cap V_1 = \emptyset$ und $T_1 \cap V_i \neq \emptyset$ für $i = 2, 3$ gilt, dann nennen wir die Ungleichung

$$x^1([V_2 : V_3]) \geq 1$$

eine *Kritische-Schnitt-Ungleichung* (bezüglich T_1).

Im folgenden Satz betrachten wir einen (bezüglich der Kritischen-Schnitt-Ungleichungen) facetten-definierenden Graphen, der parallele Kanten enthält. Um formal korrekt zu sein, greifen wir in diesem Fall auf die in Kapitel 2.1 eingeführte Inzidenzfunktion zurück.

(6.3.7.2) Satz

Sei $G = (V, E, \psi)$ ein Graph mit $V = \{u, v, w\}$ und $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Netzliste mit $T_1 = \{u, v\}$. Sei $E_{ij} := \{e \in E \mid \psi(e) = ij\}$ für $i, j \in V$ und $N_i = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid i \in T_k\}$ für $i \in V$. Es gelte $|E_{uv}| \geq 2$, $|N_w| = N - 1$, $|N_u| + |N_v| = N + 1$, $|E_{uw}| \geq |N_u| - 1$, $|E_{vw}| \geq |N_v| - 1$ und $|E_{uw}| + |E_{vw}| = |N_u| + |N_v| - 1$. Dann definiert

$$x^1(E_{uv}) \geq 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbf{1})$.

Beweis.

Sei $a = (\chi^{E_{uv}}, 0, 0) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$. Wir zeigen zuerst die Gültigkeit. Sei S_1 ein Steinerbaum für T_1 mit $S_1 \cap E_{uv} = \emptyset$. Dann gilt $S_1 \cap E_{uw} \neq \emptyset$ und $S_1 \cap E_{vw} \neq \emptyset$. Damit gilt $|\delta(w) \setminus S_1| \leq |N_u| + |N_v| - 3 = N - 2$. Da $|N_w| = N - 1$ und $1 \notin N_w$ kann es keine Steinerbäume S_2, \dots, S_N geben, so daß $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen definiert. Also ist $a^T x \geq 1$ gültig.

Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $STP(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, c) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in STP(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Wir zeigen im folgenden, daß b ein Vielfaches von a ist. Wir zeigen dies für $|E_{uw}| = |N_u|$. Der Fall $|E_{vw}| = |N_v|$ geht völlig analog. Beachte auch noch vorab, daß alle Terminalmengen Kardinalität zwei haben, da $|N_w| = N - 1$ und $|N_u| + |N_v| = N + 1$.

(1) $b_e^k = 0$ für $e \in E_{uw}$ und $k = 1, \dots, N$.

Wir setzen $S_1 = \{f\}$ für ein $f \in E_{uv}$. Außerdem wähle für S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, eine Kante aus $E_{uw} \setminus \{e\}$, so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Ebenso wähle für S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{vw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Dies ist in beiden Fällen möglich, da $|E_{vw}| = |N_v| - 1$ und $|E_{uw} \setminus \{e\}| = |N_u| - 1$ ist. Damit sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(2) $b_e^k = 0$ für $e \in E_{uv}$ und $k = 2, \dots, N$.

Wir setzen $S_1 = \{f\}$ für ein $f \in E_{uv} \setminus \{e\}$. Dies ist möglich, da $|E_{uv}| \geq 2$. Außerdem wähle für S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{uw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Ebenso wähle für S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{vw} , so daß die

Kantenmengen S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Dies ist in beiden Fällen möglich, da $|E_{vw}| = |N_v| - 1$ und $|E_{uw}| = |N_u|$ ist. Damit sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(3) $b_e^k = 0$ für $e \in E_{vw}$ und $k = 1, \dots, N$.

Wir setzen $S_1 = \{f\}$ für ein $f \in E_{uv}$. Außerdem wähle für S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{uw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Dies ist möglich, da $|E_{uw}| = |N_u|$ ist. Sei $k_0 \in N_v$ und $\{f_1\} = E_{uw} \setminus \bigcup_{k \in N_u \setminus \{1\}} S_k$. Diese Kante f_1 existiert, da $|E_{uw}| = |N_u|$. Sei außerdem $f_2 \in E_{uv} \setminus S_1$. Diese Kante existiert ebenfalls, da $|E_{uv}| \geq 2$. Ebenso wähle für S_k , $k \in N_v \setminus \{1, k_0\}$, eine Kante aus $E_{vw} \setminus \{e\}$, so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_v \setminus \{1, k_0\}$, paarweise disjunkt sind. Dies ist wiederum möglich, da $|E_{vw} \setminus \{e\}| = |N_v| - 2$ ist. Damit sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(4) $b_e^1 = b_f^1$ für $e, f \in E_{vw}$.

Wir setzen $S_1 = \{f\}$ und $S'_1 = \{e\}$. Außerdem wähle für S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{uw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Ebenso wähle für S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{vw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Dies ist in beiden Fällen möglich, da $|E_{vw}| = |N_v| - 1$ und $|E_{uw}| = |N_u|$ ist. Damit sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = (S'_1, \dots, S_N)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^1 - b_f^1$.

Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist. Bleibt zu zeigen, daß $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ volldimensional ist. Andernfalls würde $a^T x \geq 1$ eine Gleichung von $STP(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definieren. Zusammen mit (1) – (4) genügt es eine Packung von Steinerbäumen P anzugeben mit $a^T \chi^P \geq 2$. Wähle $S_1 = E_{uv}$. Außerdem wähle für S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{uw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Ebenso wähle für S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, eine Kante aus E_{vw} , so daß die Kantenmengen S_k , $k \in N_v \setminus \{1\}$, paarweise disjunkt sind. Dann ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen, und es gilt $a^T \chi^P = |E_{uv}| \geq 2$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Wir formulieren nun eine Ungleichung für eine Instanz, die sehr viel Ähnlichkeit mit der in obigem Satz geforderten Instanz hat. Wir reduzieren die Anzahl paralleler Kanten soweit wie möglich und stellen die notwendigen Bedingungen anstatt an die Anzahl paralleler Kanten an die Kantenkapazitäten. Allerdings können wir auf parallele Kanten nicht ganz verzichten. Vergleiche dazu die Bemerkung im Anschluß an den folgenden Satz.

(6.3.7.3) Satz

Sei $G = (V, E, \psi)$ ein Graph mit $V = \{u, v, w\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und $\psi(e_1) = uw$, $\psi(e_2) = vw$, $\psi(e_3) = \psi(e_4) = uv$. Sei $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Netzliste mit $T_1 = \{u, v\}$. Sei $N_i := \{k \in \{1, \dots, N\} \mid i \in T_k\}$ für $i \in V$, so daß $|N_w| = N - 1$ und $|N_u| + |N_v| = N + 1$ gilt. Für die Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $e \in E$ gelte $c_{e_3} + c_{e_4} \geq 3$, falls $N_u \setminus \{1\} \neq \emptyset$ ist, sowie $c_{e_1} \geq |N_u| - 1$, $c_{e_2} \geq |N_v| - 1$ und $c_{e_1} + c_{e_2} = |N_u| + |N_v| - 1$. Dann definiert

$$x_{e_3}^1 + x_{e_4}^1 \geq 1$$

eine Facette von $STP(G, \mathcal{N}, c)$.

Beweis. Sei $a = (\chi^{\{e_3, e_4\}}, 0, 0) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$. Die Gültigkeit geht analog zu obigem Beweis. Sei S_1 ein Steinerbaum für T_1 mit $e_3, e_4 \notin S_1$. Dann gilt $S_1 = \{e_1, e_2\}$. Damit bleiben die Restkapazitäten $c'_{e_1} = c_{e_1} - 1$, $c'_{e_2} = c_{e_2} - 1$, $c'_{e_3} = c_{e_3}$ und $c'_{e_4} = c_{e_4}$. Also gilt $c'(\delta(w)) = c(\delta(w)) - 2 = N - 2$. Da $|N_w| = N - 1$ und $1 \notin N_w$ kann es keine Steinerbäume S_2, \dots, S_N geben, so daß $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen definiert. Also ist $a^T x \geq 1$ gültig.

Sei $b^T x \geq \beta$ eine facetten-definierende Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ mit $F_a := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid a^T x = 1\} \subseteq F_b := \{x \in \text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \mid b^T x = \beta\}$. Wir zeigen im folgenden, daß b ein Vielfaches von a ist. Wir zeigen dies für $c_{e_1} = |N_u|$. Der Fall $c_{e_2} = |N_v|$ geht völlig analog. Beachte auch noch vorab, daß alle Terminalmengen Kardinalität zwei haben, da $|N_w| = N - 1$ und $|N_u| + |N_v| = N + 1$. Wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß $c_{e_3} \geq 2$ gilt.

(1) $b_{e_1}^k = 0$ für $k \notin N_u \setminus \{1\}$.

Wir setzen $S_1 = \{e_3\}$, $S_i = \{e_1\}$ für $i \in N_u \setminus \{1\}$ und $S_i = \{e_2\}$ für $i \in N_v \setminus \{1\}$. Damit ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen. Da $c_{e_1} = |N_u|$ ist und $e_1 \notin S_i$ für $i \notin N_u \setminus \{1\}$, ist auch $P' = P \cup_k e_1$ eine Packung von Steinerbäumen. Außerdem gilt $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$. Daraus folgt, daß $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{e_1}^k$.

(2) $b_{e_1}^k = 0$ für $k \in N_u \setminus \{1\}$.

Wir setzen $S_1 = \{e_3\}$ und $S_k = \{e_2, e_3\}$. Sei $k_0 \in N_v \setminus \{1\}$. Wir setzen $S_{k_0} = \{e_1, e_4\}$. Ansonsten setzen wir $S_i = \{e_1\}$ für $i \in N_u \setminus \{1, k\}$ und $S_i = \{e_2\}$ für $i \in N_v \setminus \{1, k_0\}$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e_1$ Packungen von Steinerbäumen (beachte, daß $c_{e_3} \geq 2$ und $c_{e_4} \geq 1$ ist) mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{e_1}^k$.

(3) $b_{e_2}^k = 0$ für $k = 1, \dots, N$.

Wir setzen $S_1 = \{e_3\}$ und $S_k = \{e_1, e_3\}$. Außerdem sei $S_i = \{e_1\}$ für $i \in N_u \setminus \{1, k\}$ und $S_i = \{e_2\}$ für $i \in N_v \setminus \{1, k\}$. Dann ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $e_2 \notin P_k$ (beachte, daß $c_{e_1} = |N_u|$ ist). Da $c_{e_2} = |N_v| - 1$ ist auch $P' = P \cup_k e_2$ eine Packung von Steinerbäumen. Es gilt $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und damit $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{e_2}^k$.

(4) $b_e^k = 0$ für $e \in \{e_3, e_4\}$ und $k = 2, \dots, N$.

Wir setzen $S_1 = \{e_3\}$, falls $e = e_4$, und $S_1 = \{e_4\}$, falls $e = e_3$. Außerdem sei $S_i = \{e_1\}$ für $i \in N_u \setminus \{1\}$ und $S_i = \{e_2\}$ für $i \in N_v \setminus \{1\}$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = P \cup_k e$ Packungen von Steinerbäumen (beachte, daß $c_{e_3} \geq 1$ und $c_{e_4} \geq 1$ ist) mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_e^k$.

(5) $b_{e_3}^1 = b_{e_4}^1$.

Wir setzen $S_1 = \{e_3\}$ und $S'_1 = \{e_4\}$. Außerdem sei $S_i = \{e_1\}$ für $i \in N_u \setminus \{1\}$ und $S_i = \{e_2\}$ für $i \in N_v \setminus \{1\}$. Dann sind $P = (S_1, \dots, S_N)$ und $P' = (S'_1, \dots, S_N)$ Packungen von Steinerbäumen mit $\chi^P, \chi^{P'} \in F_a$, und es gilt $0 = b^T \chi^{P'} - b^T \chi^P = b_{e_4}^1 - b_{e_3}^1$.

Damit ist gezeigt, daß b ein Vielfaches von a ist. Bleibt zu zeigen, daß $\text{STP}(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ volldimensional ist. Dazu genügt es eine Packung von Steinerbäumen P mit $a^T \chi^P \geq 2$ anzugeben. Wähle $S_1 = \{e_3, e_4\}$. Außerdem wähle $S_k = \{e_1\}$ für $k \in N_u \setminus \{1\}$ und $S_k = \{e_2\}$ für $k \in N_v \setminus \{1\}$. Dann ist $P = (S_1, \dots, S_N)$ eine Packung von Steinerbäumen mit $a^T \chi^P = 2$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Interessant sind im Zusammenhang mit den beiden Sätzen die folgenden Bemerkungen.

(6.3.7.4) Bemerkungen

- (1) In Satz (6.3.7.3) müssen wir gegebenenfalls (das heißt, falls $N_u \setminus \{1\} \neq \emptyset$) $c_{e_3} + c_{e_4} \geq 3$ fordern, während in Satz (6.3.7.2) die Bedingung $|E_{uv}| \geq 2$ ausreicht. Diese schärfere Bedingung benötigen wir, um die Koeffizienten b_e^k , $k \in N_u \setminus \{1\}$, $\psi(e) = uv$, fixieren zu können.
- (2) Verzichten wir vollkommen auf parallele Kanten, und legen den einfachen Graphen zugrunde, so definiert $x_{uv}^1 = 1$ eine Gleichung von $STP(G, \mathcal{N}, c)$. Dies folgt direkt aus dem Gültigkeitsbeweis.

Wir haben in diesem Kapitel einige Klassen von Ungleichungen für das Steinerbaum-packungs-Polyeder vorgestellt. Wir haben in Kapitel 6.2 gesehen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die nichttrivialen facetten-definierenden Ungleichungen der einzelnen Steinerbaum-Polyeder auch Facetten des Steinerbaumpackungs-Polyeders definieren. In Kapitel 6.3 haben wir Ungleichungen beschrieben, die mehrere Netze miteinander kombinieren. Die meisten dieser Ungleichungen definieren Facetten, falls der zugrundeliegende Graph vollständig ist, die Netzliste disjunkt ist und die Kantenkapazitäten eins sind. Ausnahmen bilden beispielsweise die in Satz (6.3.7.3) beschriebenen Kritischen-Schnitt-Ungleichungen (hier sind die Kantenkapazitäten größer eins und die Netzliste ist nicht disjunkt) oder die in Satz (6.3.6.2) beschriebenen Gitter-Ungleichungen (hier ist der zugrundeliegende Graph nicht notwendigerweise vollständig). Darüber hinaus haben wir facetten-definierende Ungleichungen kennengelernt, deren Koeffizienten beliebig groß werden können (vergleiche (6.3.1.4) und (6.3.1.5)). Basierend auf den vorgestellten Ungleichungen entwickeln wir nun im nächsten Kapitel ein Schnittebenenverfahren.

7. Ein Schnittebenenverfahren

In diesem Kapitel wollen wir ein Schnittebenenverfahren zur Lösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems vorstellen. Kapitel 7.1 beschreibt die grundlegende Idee und prinzipielle Vorgehensweise eines solchen Schnittebenenverfahrens. Es wird sich herausstellen, daß der Kern eines Schnittebenenverfahrens die Lösung des sogenannten Separierungsproblems ist. Diesem Problem ist Kapitel 7.2 gewidmet. Ein nicht unwesentlicher Teil für den Erfolg eines solchen Verfahrens ist die Bestimmung guter zulässiger Lösungen. Wir werden uns damit in Kapitel 7.3 beschäftigen.

7.1 Grundlegende Vorgehensweise

Unser Ziel ist es, das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem zu lösen, indem wir die gegebene lineare Zielfunktion über dem Steinerbaumpackungs-Polyeder minimieren. Wir haben in Kapitel 6 eine Vielzahl gültiger und facetten-definierender Ungleichungen für das Steinerbaumpackungs-Polyeder kennengelernt. Die Zahl dieser Ungleichungen ist einfach zu groß, um das zugehörige lineare Programm explizit lösen zu können. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, bieten sogenannte *Schnittebenenverfahren*. Die Idee eines Schnittebenenverfahrens zur Lösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems ist die folgende.

Zu Beginn wählt man eine kleine Teilmenge der gültigen Ungleichungen, zum Beispiel nur die trivialen Ungleichungen, aus. Diese Ungleichungen definieren ein Polyeder P' , das das gegebene Steinerbaumpackungs-Polyeder $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ enthält. Die lineare Zielfunktion wird nun über dem Polyeder P' optimiert. Sei y eine Optimallösung. Da $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c) \subseteq P'$ gilt, liefert y eine untere Schranke für das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem. Definiert y auch eine zulässige Lösung, so ist y eine Optimallösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems. Andernfalls gibt es eine gültige Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$, die y verletzt. Das Problem, eine solche Ungleichung zu finden, nennt man das *Separierungsproblem*. Wird eine verletzte Ungleichung gefunden, so wird diese dem linearen Programm hinzugefügt. Geometrisch veranschaulicht bedeutet das, daß die Lösung y von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ abgeschnitten wird. Daher nennt man die Hyperebene, die eine verletzte Ungleichung definiert, eine *Schnittebene*. Anschließend löst man das aktualisierte lineare Programm von neuem. Diese iterative Vorgehensweise des Lösen linearer Programme und Hinzufügens verletzter Ungleichungen nennt man ein *Schnittebenenverfahren*.

Ein Schnittebenenverfahren endet also entweder mit einer Optimallösung oder (zumindest) mit einer unteren Schranke des Steinerbaumpackungs-Problems. Wir können nicht erwarten, daß das Schnittebenenverfahren mit einer Optimallösung endet. Es wird sogar der Regelfall sein, daß y keine zulässige Lösung definiert. Dies hat im wesentlichen zweierlei Gründe. Erstens, kennen wir keine vollständige Beschreibung des Steinerbaumpackungs-Polyeders. Daher können wir nicht alle notwendigen Ungleichungen dem linearen Programm hinzufügen. Zweitens, stehen nicht für alle bekannten Klassen von gültigen Ungleichungen exakte Algorithmen zur Lösung des Separierungsproblems zur Verfügung. Ein bedeutender Satz von Grötschel, Lovász und Schrijver [GLS88] sagt aus, daß für ein gegebenes System von Ungleichungen $Ax \geq b$ das lineare Programm $\min\{w^T x \mid Ax \geq b\}$ genau

dann in polynomialer Zeit lösbar ist, wenn das Separierungsproblem für dieses System von Ungleichungen in polynomialer Zeit lösbar ist. Da das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem \mathcal{NP} -schwer ist, werden wir also nicht für alle Klassen von gültigen Ungleichungen exakte, polynomiale Separierungsverfahren finden können.

Endet das Schnittebenenverfahren mit einer Lösung y , die nicht zulässig ist, so kann das Verfahren in ein Enumerationsschema gebettet werden. Wir teilen das Problem in zwei Teilprobleme auf, indem wir in einem Teilproblem eine Variable auf Null setzen und im anderen Teilproblem die gleiche Variable auf Eins setzen. Diese Vorgehensweise generiert einen binären Baum, auch *Verzweigungsbaum* genannt. In jedem Knoten dieses Baums wird das zugehörige Teilproblem wieder über das Schnittebenenverfahren gelöst. Ein entscheidender Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß jede für ein Teilproblem gefundene Schnittebene für alle anderen Teilprobleme ebenfalls gültig ist. Dieses Gesamtverfahren nennt man auch ein *Branch & Cut-Verfahren*.

Ein Branch & Cut-Verfahren läßt sich zur Lösung praktischer Probleme nur dann einsetzen, wenn der generierte Verzweigungsbaum klein gehalten wird. Wichtige Voraussetzungen dafür sind, zum einen eine möglichst gute Beschreibung des Steinerbaumpackungs-Polyeders zu kennen. Wir haben in Kapitel 6 versucht, dies zu erreichen. Ein zweiter wesentlicher Punkt ist die Entwicklung guter Separierungsverfahren. Wir beschäftigen uns ausführlich in Kapitel 7.2 mit diesem Problem. Drittens, ist mit ausschlaggebend für den Erfolg eines solchen Verfahrens die Bestimmung guter zulässiger Lösungen. Ein Teilproblem des Verzweigungsbaumes ist nämlich dann gelöst, wenn der auf die nächste ganze Zahl aufgerundete Wert der unteren Schranke mit dem Zielfunktionswert der besten Lösung übereinstimmt. Darüber hinaus ist es für praktische Zwecke oftmals ausreichend, eine beweisbar gute Lösung, das heißt eine Lösung, die vom Optimum höchstens um einen gewissen vorgegebenen Prozentsatz abweicht, zu finden. In diesem Fall kann das Verfahren bereits vorzeitig beendet werden, ohne den gesamten Baum abgearbeitet zu haben. Allerdings ist, wie aus Kapitel 3.1 bekannt ist, das Bestimmen einer zulässigen Lösung \mathcal{NP} -vollständig. Wir werden in Kapitel 7.3. eine Heuristik zur Bestimmung einer Steinerbaumpackung vorstellen. Es wird sich zeigen, daß die durch das Schnittebenenverfahren gegebene untere Schranke y wichtige Informationen liefert, um eine zulässige Lösung zu finden.

Wie wir eben ausgeführt haben, müssen wir zur Lösung des Separierungsproblems und zur Bestimmung einer zulässigen Lösung im allgemeinen auf Heuristiken zurückgreifen. Zur Lösung praktischer Probleme ist es zweifelsohne notwendig, gute und effiziente Heuristiken zur Verfügung zu haben. Um dieses Ziel erreichen zu können, scheint es vernünftig, die spezielle Struktur der gegebenen Probleme auszunützen. Wir haben in Kapitel 4 gesehen, daß sich unser Modell sowohl auf das globale Verdrahtungsproblem als auch auf das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell anwenden läßt. Für beide Problemklassen ist das gewichtete Steinerbaumpackungs-Problem \mathcal{NP} -schwer und das Entscheidungsproblem, existiert eine zulässige Lösung, \mathcal{NP} -vollständig (vergleiche Kapitel 3.1). Bei letzterem Problem liegt ein Gittergraph zugrunde, wobei die Anzahl der Knoten im Bereich mehrerer Hundert liegt. Die Kantenkapazitäten haben den Wert Eins und die Anzahl der Netze ist verhältnismäßig gering. Dagegen sind die Graphen des globalen Verdrahtungsproblems

kleiner, dafür gehen die Anzahl Netze in die Tausende und die Kantenkapazitäten sind entsprechend hoch. Allein diese unterschiedlichen Daten mögen verdeutlichen, daß es für die Entwicklung guter Heuristiken notwendig ist, zwischen diesen beiden Problemstrukturen zu differenzieren.

Wir haben uns an dieser Stelle entschieden, ein Schnittebenenverfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell zu entwickeln. Nach unserem momentanen Kenntnisstand erscheint uns dieses Problem das "einfachere" zu sein. Vorteile dieses Problems, die wir uns zu Nutze machen können, sind zum einen, daß die Kantenkapazitäten den Wert Eins haben. Die meisten Instanzen der facetten-definierenden Ungleichungen aus Kapitel 6 haben ebenfalls Kantenkapazität Eins. Wir hoffen, daß diese Ungleichungen die Steinerbaumpackungs-Polyeder aus dieser Problemklasse recht gut beschreiben. Dagegen vermuten wir, daß für höhere Kantenkapazitäten noch wesentlich komplexere Ungleichungen notwendig sein werden. Ein zweiter Grund für unsere Entscheidung ist, daß der dem Switchbox-Verdrahtungsproblem zugrundeliegende Graph planar ist und alle Terminals an der äußeren Fläche des Graphen liegen. Diese Eigenschaften werden uns sehr hilfreich sein, gute Separierungsverfahren zu entwickeln (siehe Kapitel 7.2).

7.2. Separierungsverfahren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Separierungsproblem für einige der in Kapitel 6 vorgestellten Klassen von Ungleichungen. Wir stellen uns vor, wir befinden uns mitten in einem Schnittebenenverfahren zur Lösung des Steinerbaumpackungs-Problems einer gegebenen Instanz (G, \mathcal{N}, c) . Sei $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$, $y \geq 0$, die Optimallösung des aktuellen linearen Programs. Wir prüfen zuerst, ob y der Inzidenzvektor eine Steinerbaumpackung ist. Wenn nicht, so muß es eine gültige Ungleichung für STP (G, \mathcal{N}, c) geben, die y verletzt. Die Aufgabe besteht nun darin, eine solche Ungleichung zu finden. Natürlich müssen wir uns bei der Suche nach verletzten Ungleichungen auf solche beschränken, die wir kennen, also auf diejenigen, die wir in Kapitel 6 vorgestellt haben. Wir haben dabei zu beachten, daß wir die Gültigkeit beziehungsweise facetten-definierende Eigenschaft der Ungleichungen meistens nur für den vollständigen Graphen bewiesen haben. Wir werden deshalb für die Klassen, die wir nachfolgend untersuchen, vorab klären, welche dieser Ungleichungen auch gültig für die konkret gegebene Instanz sind, und wie sie gegebenenfalls modifiziert werden können, so daß sie eine gültige Ungleichung für STP (G, \mathcal{N}, c) definieren.

Bevor wir mit der Vorstellung des ersten Separierungsverfahrens beginnen, möchten wir noch auf zwei Punkte hinweisen. Wie wir aus Kapitel 3.1 wissen, ist das Entscheidungsproblem, "Gibt es eine Steinerbaumpackung für das Switchbox-Verdrahtungsproblem?", \mathcal{NP} -vollständig. Damit ist auch das Problem, die Dimension des zugehörigen Steinerbaumpackungs-Polyeders zu bestimmen, \mathcal{NP} -vollständig (vergleiche Bemerkung 6.1.3). Dies wiederum impliziert, daß es \mathcal{NP} -vollständig ist zu entscheiden, ob eine gegebene Ungleichung eine Facette des Steinerbaumpackungs-Polyeders für das Switchbox-Verdrahtungsproblem definiert. Wir beschränken uns daher bei der Suche nach verletzten Ungleichungen auf solche, die gültig sind. Die in den Sätzen aus Kapitel 6 angegebenen Bedingungen, die

notwendig sind, um zeigen zu können, daß eine Ungleichung eine Facette definiert, werden wir im folgenden oft nicht einhalten oder einhalten können.

Zweitens, wir werden in den nachfolgenden Abschnitten meistens Separierungsprobleme für Ungleichungen betrachten, die nur auf einer Teilmenge der Netzliste aus der gegebenen Instanz (G, \mathcal{N}, c) definiert sind. Genauer gesagt, sei $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ und $\mathcal{N}' = \{T_{i_1}, \dots, T_{i_n}\}$ sowie $\bar{a}^T x \geq \alpha$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}' \times E}$, eine gültige Ungleichung für $\text{STP}(G, \mathcal{N}', c)$. Dann ist offensichtlich $a^T x \geq \alpha$, $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ mit $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für $k \in I$ und $a_e^k = 0$ für $k \notin I$ eine gültige Ungleichung für $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$. Außerdem ist für ein gegebenes $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ genau dann $a^T y < \alpha$, wenn $\bar{a}^T \bar{y} < \alpha$ gilt mit $\bar{y} = (y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$. Es genügt also insbesondere bei eventuellen Modifikationen einer Ungleichung die Gültigkeit für das Steinerbaumpackungs-Polyeder der "Teilinstanz" (G, \mathcal{N}', c) nachzuweisen, und das Separierungsproblem für diese Teilinstanz zu betrachten.

7.2.1. Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen

In diesem Abschnitt soll eine Klasse von Ungleichungen untersucht werden, die gültig für das Steinerbaum-Polyeder ist. Sei $G = (V, E)$ der gegebene Graph mit Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $e \in E$ und $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ die gegebene Netzliste. Betrachte für ein $T \subseteq V$ das folgende System von Ungleichungen im \mathbb{R}^E .

$$(7.2.1.1) \quad x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1, \quad V_1, \dots, V_p, p \geq 2, \text{ ist eine Steinerpartition von } V \text{ bezüglich } T.$$

Jede Ungleichung aus (7.2.1.1) heißt *Steinerpartitions-Ungleichung bezüglich T*. Gilt $p = 2$, so spricht man häufig auch von *Steinerschnitt-Ungleichungen*. Steinerschnitt-Ungleichungen haben wir bereits in Kapitel 5.1 bei der Formulierung des Steinerbaumpackungs-Polyeders als ganzzahliges lineares Programm kennengelernt. Die Steinerpartitions-Ungleichungen stellen offensichtlich eine Verallgemeinerung der Steinerschnitt-Ungleichungen dar. Es ist klar, daß jede Steinerpartitions-Ungleichung gültig für $\text{STP}(G, \{T\}, \mathbb{I})$ ist. Wie eingangs erwähnt, kann jede dieser Ungleichungen zu einer gültigen Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ erweitert werden, falls $T \in \mathcal{N}$ ist. Wir wollen daher das Separierungsproblem für das System von Ungleichungen in (7.2.1.1) betrachten.

(7.2.1.2) Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und $T \subseteq V$ eine Terminalmenge sowie Werte $y_e \geq 0$ für alle $e \in E$. Entscheide, ob y alle Ungleichungen aus (7.2.1.1) erfüllt. Wenn nicht, finde eine Ungleichung aus (7.2.1.1), die y verletzt.

Das Separierungsproblem (7.2.1.2) ist \mathcal{NP} -vollständig (siehe [GMS92]). Dieses Ergebnis ist zunächst recht entmutigend. Es gibt jedoch Spezialfälle, für die das Problem (7.2.1.2) in polynomialer Zeit exakt gelöst werden kann. Einen solchen Spezialfall erhalten wir, wenn wir zusätzlich fordern, daß G planar und $T \subseteq V(O_G)$ ist. Dieser Fall ist für uns sogar von besonderem Interesse, da er zum Beispiel das Switchbox-Verdrahtungsproblem beinhaltet.

Im folgenden wollen wir nun einen exakten, polynomialen Separierungsalgorithmus für diesen Spezialfall entwickeln. Eine Kurzfassung dieses Algorithmus und seiner Herleitung wurde bereits vom Autor in [M90] veröffentlicht.

Zunächst stellen wir fest, daß wir das Separierungsproblem nicht für das gesamte System von Ungleichungen in (7.2.1.1) betrachten müssen, sondern nur für das System von Ungleichungen, die eine Facette von STP $(G, \{T\}, \mathbb{I})$ definieren. Grötschel und Monma haben in [GM90] gezeigt, daß, sofern der Graph G zusammenhängend ist und keine Steinerbrücke enthält, das folgende System ein nicht-redundantes, facetten-definierendes System von Ungleichungen für STP $(G, \{T\}, \mathbb{I})$ ist.

$$(7.2.1.3) \quad x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1, \quad V_1, \dots, V_p, p \geq 2, \text{ ist eine Steinerpartition von } V \text{ bezüglich } T, \text{ so daß gilt: } G[V_i] \text{ ist zusammenhängend, } G[V_i] \text{ enthält keine Steinerbrücke bezüglich } V_i \cap T \text{ für } i = 1, \dots, p \text{ und } G(V_1, \dots, V_p) \text{ ist 2-fach knoten-zusammenhängend.}$$

Es ist leicht zu sehen, daß sich jede Ungleichung aus (7.2.1.1), die nicht aus (7.2.1.3) ist, als positive Linearkombination der Ungleichungen aus (7.2.1.3) und den trivialen Ungleichungen darstellen läßt. Damit genügt es also, das folgende Separierungsproblem zu betrachten.

(7.2.1.4) Separierung facetten-definierender Steinerpartitions-Ungleichungen

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und $T \subseteq V$ eine Terminalmenge sowie Werte $y_e \geq 0$ für alle $e \in E$. Entscheide, ob y alle Ungleichungen aus (7.2.1.3) erfüllt. Wenn nicht, finde eine Ungleichung aus (7.2.1.3), die y verletzt.

Wir gehen von nun an davon aus, daß G planar ist, und $T \subseteq V(O_G)$ gilt (das heißt, die Terminals liegen alle an der äußeren Fläche von G). Außerdem sei die Terminalmenge $T = \{t_1, \dots, t_z\}$ entlang der äußeren Fläche im Uhrzeigersinn durchnummeriert. Wie wir bereits aus Kapitel 3.2.1 wissen, kann unter diesen Voraussetzungen ein minimaler (bezüglich einer Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}$) Steinerbaum für T in polynomialer Zeit mit Hilfe eines dynamischen Programms berechnen werden. Wir erinnern uns, daß das dynamische Programm auf der folgenden Rekursion beruht (siehe [DW71]):

$$(7.2.1.5) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad w(S_v(J \cup v)) &= \min_{\emptyset \subset I \subset J} w(S(I \cup v)) + w(S((J \setminus I) \cup v)), \\ \text{(ii)} \quad w(S(J \cup v)) &= \min_{u \in V} w(W(v, u)) + w(S_u(J \cup u)); \end{aligned}$$

dabei bezeichnet $S(J \cup v)$ für $J \subseteq T$, $v \in V$ einen minimalen Steinerbaum in G bezüglich $J \cup \{v\}$ und $S_v(J \cup v)$ einen minimalen Steinerbaum in G bezüglich $J \cup \{v\}$, für den zusätzlich $d_{S_v(J \cup v)}(v) \geq 2$ gilt, falls $v \notin T$. Außerdem sei $W(u, v)$, $u, v \in V$ ein kürzester Weg von u nach v in G . Wir wissen, daß die Laufzeit des Algorithmus für einen beliebigen Graphen G und eine beliebige Terminalmenge T exponentiell in der Anzahl Terminals ist. Unter

der Annahme, daß G planar ist und $T \subseteq V(O_G)$, konnten Erickson, Monma und Veinott in [EMV87] zeigen, daß es genügt, Teilmengen $J \subseteq T$ von der Form $J = \{t_i, \dots, t_{i+j}\}$ für $i = 1, \dots, z$, $j = 1, \dots, z - 1$ (alle Indizes seien modulo z mit $t_0 = t_z$) zu betrachten. Da es nur eine quadratische Anzahl solcher Teilmengen gibt, kann mit Hilfe des auf der Rekursion (7.2.1.5) basierenden dynamischen Programms ein minimaler Steinerbaum in polynomialer Zeit bestimmt werden.

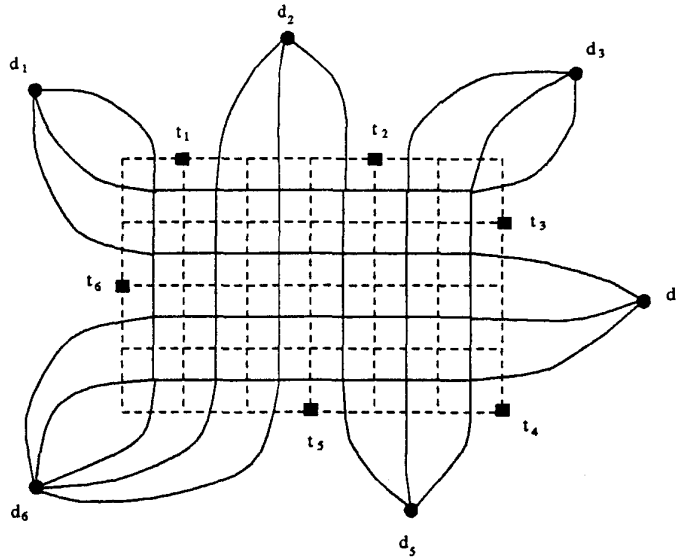


Abbildung 7.2.1.1

Wir verwenden diesen Algorithmus in leicht modifizierter Form, um das Separierungsproblem für die Steinerpartitions-Ungleichungen zu lösen. Betrachte dazu den dualen Graphen $G^* = (V^*, E)$ von G und teile den Knoten, der die äußere Fläche repräsentiert, in z Knoten d_1, \dots, d_z ein, so daß jede Kante, die in G auf dem Weg von t_i nach t_{i+1} entlang der äußeren Fläche liegt, inzident zu d_{i+1} für $i = 1, \dots, z$ ist. Wir bezeichnen den Graphen, der durch diese Konstruktion entsteht, mit $G_D = (V_D, E)$ und $D = \{d_1, \dots, d_z\}$. Vergleiche dazu Abbildung 7.2.1.1. Zur Vereinfachung der Darstellung erlauben wir im folgenden Indizes $i > z$ und meinen damit jeweils den Index $((i - 1) \text{ modulo } z) + 1$.

Wir definieren die folgenden Mengen für $i = 2, \dots, z$.

$$\mathcal{D}_i = \{S_J \subseteq E \mid S_J \text{ ist ein kantenminimaler Steinerbaum in } G_D$$

bezüglich $J \subseteq D$, $|J| = i$, mit

$$d_S(j) = 1 \text{ für alle } j \in J,$$

$$d_S(t) = 0 \text{ für alle } t \in D \setminus J\};$$

$$\mathcal{P}_i = \{\delta(V_1, \dots, V_i) \mid V_1, \dots, V_i \text{ ist eine Steinerpartition von } V \text{ bezüglich } T$$

$G[V_k]$ ist zusammenhängend für $k = 1, \dots, i$,

$G(V_1, \dots, V_i)$ ist 2-fach knotenzusammenhängend }.

Dann gilt folgendes Lemma.

(7.2.1.6) **Lemma** $\mathcal{D}_i = \mathcal{P}_i$ für alle $i = 2, \dots, z$.

Der Beweis ist nicht schwer und kann in [M88] nachgelesen werden. Abbildung 7.2.1.2 veranschaulicht die Beziehung aus Lemma (7.2.1.6). V_1, V_2, V_3 ist eine Partition von V , wobei $\delta(V_1, V_2, V_3)$ durch die dick-gestrichelten Kanten in Abbildung 7.2.1.2 dargestellt ist. Diese Kanten bilden in G_D einen Steinerbaum bezüglich der Terminalmenge $\{d_1, d_2, d_3\} \subset D$, siehe die dicken durchgehend gezeichneten Linien in Abbildung 7.2.1.2.

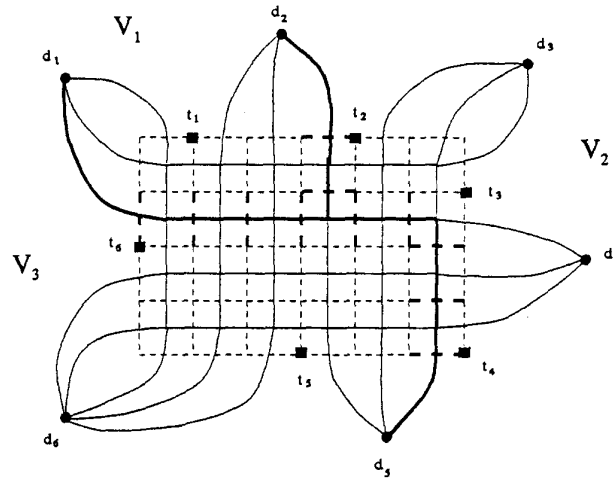


Abbildung 7.2.1.2

Sei $\mathcal{D} = \bigcup_{i=2}^z \mathcal{D}_i$. Als nächstes bestimmen wir

$$(7.2.1.7) \quad \alpha = \min_{S_J \in \mathcal{D}} y(S_J) - |J|,$$

für ein $y \in \mathbb{R}^E$, $y \geq 0$. Zur Berechnung von α können wir das auf der Rekursion (7.2.1.5) basierende dynamische Programm verwenden, wobei wir zwei Änderungen vornehmen müssen. Erstens, müssen wir von dem Gewicht jedes Steinerbaums die Anzahl seiner Terminals abziehen. Dies läßt sich leicht bewerkstelligen, da wir wissen, daß jedes Terminal Endknoten des Steinerbaums S mit $S \in \mathcal{D}$ sein muß. Das zweite Problem besteht darin, daß in (7.2.1.7) das Minimum über eine Menge, deren Kardinalität exponentiell in der Anzahl der Terminals ist, gebildet wird. Welches Terminal in einer Optimallösung von (7.2.1.7) ist, können wir jedoch lokal entscheiden. Wir machen dazu die folgende Beobachtung. Ein kürzester Weg $P(v, t)$, $v \in V_D \setminus D$, $t \in D$, kann nur dann ein Endzweig eines minimalen Steinerbaums sein, falls $y(P(v, t)) < 1$ gilt. Der Grund dafür ist, daß sich bei Addition eines solchen Weges zu einem Steinerbaum, die linke Seite der zugehörigen Steinerpartitions-Ungleichung um das Gewicht des Weges erhöht, die rechte Seite jedoch nur um den Wert Eins (vergleiche Lemma (7.2.1.6)). Damit erhalten wir folgende Rekursion.

$$(7.2.1.8) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & y_{i,0}^v = \min\{y(W(v, d_i)) - 1, 0\}, & \text{für alle } v \in V_D \setminus D, i = 1, \dots, z; \\ \text{(ii)} \quad & \psi_{i,j}^v = \min_{1 \leq l \leq j} (y_{i,l-1}^v + y_{i+l,j-l}^v), & \text{für alle } v \in V_D \setminus D, \\ & & i = 1, \dots, z, j = 1, \dots, z-1; \\ \text{(iii)} \quad & y_{i,j}^v = \min_{u \in V_D \setminus D} (y(W(v, u)) + \psi_{i,j}^u), & \text{für alle } v \in V_D \setminus D, \\ & & i = 1, \dots, z, j = 1, \dots, z-1; \end{aligned}$$

wobei $W(u, v)$, $u, v \in V_D$ ein kürzester Weg von u nach v in G_D bezeichne mit $D \cap V(W(u, v)) \setminus \{u, v\} = \emptyset$. Diese zusätzliche Bedingung ist notwendig, um die Eigenschaften, die in \mathcal{D} gefordert werden, einzuhalten. (7.2.1.8) (i) beinhaltet beide Änderungen der Rekursion (7.2.1.5). (7.2.1.8) (ii) beziehungsweise (iii) entspricht genau Schritt (7.2.1.5) (i) beziehungsweise (ii) mit der einen Ausnahme, daß wir in Schritt (iii) das Minimum nur über alle Nicht-Terminalknoten bilden, um die Eigenschaften von \mathcal{D} einzuhalten. Dann gilt das folgende Lemma.

(7.2.1.9) Lemma

Für die in (7.2.1.8) rekursiv bestimmten Werte gilt

$$y_{i,j}^v \leq \min_{\emptyset \subseteq J \subseteq \{d_i, \dots, d_{i+j}\}} y(S(J \cup v)) - |J|,$$

für alle $v \in V_D \setminus D$, $i = 1, \dots, z, j = 0, \dots, z-1$.

Beweis.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über j . Für $j = 0$ ist die Behauptung richtig. Angenommen die Behauptung ist richtig für alle $k = 0, \dots, j-1$. Sei $v \in V_D \setminus D$ und $i \in \{1, \dots, z\}$ beliebig. Außerdem sei $D_{i,j} \subseteq \{d_i, \dots, d_{i+j}\}$, so daß $y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}| = \min_{\emptyset \subseteq J \subseteq \{d_i, \dots, d_{i+j}\}} y(S(J \cup v)) - |J|$. Es ist zu zeigen, daß $y_{i,j}^v \leq y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}|$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) $|\delta(v) \cap S(D_{i,j} \cup v)| \geq 2$.

Da G planar ist und $D \subseteq V_D(O_{G_D})$ gilt, existiert ein $r \in \{1, \dots, j\}$ mit $S(D_{i,j} \cup v) = S((D_{i,j} \cap \{d_i, \dots, d_{i+r-1}\}) \cup v) + S((D_{i,j} \cap \{d_{i+r}, \dots, d_{i+j}\}) \cup v)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}| &= y(S((D_{i,j} \cap \{d_i, \dots, d_{i+r-1}\}) \cup v)) - |D_{i,j} \cap \{d_i, \dots, d_{i+r-1}\}| \\ &\quad + y(S((D_{i,j} \cap \{d_{i+r}, \dots, d_{i+j}\}) \cup v)) - |D_{i,j} \cap \{d_{i+r}, \dots, d_{i+j}\}| \\ &\geq y(S(D_{i,r-1} \cup v)) - |D_{i,r-1}| + y(S(D_{i+r,j-r} \cup v)) - |D_{i+r,j-r}| \\ &\geq y_{i,r-1}^v + y_{i+r,j-r}^v \geq \psi_{i,j}^v \geq y_{i,j}^v. \end{aligned}$$

(2) $|\delta(v) \cap S(D_{i,j} \cup v)| = 1$.

Wir unterscheiden drei Fälle.

(a) $|D_{i,j}| \geq 2$.

Dann existiert ein $u \in V_D \setminus D$ mit $|\delta(u) \cap S(D_{i,j} \cup v)| \geq 2$, so daß $S(D_{i,j} \cup v) = W(v, u) \cup S(D_{i,j} \cup u)$ gilt. Damit erhalten wir zusammen mit (1)

$$\begin{aligned} y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}| &= y(W(v, u)) + y(S(D_{i,j} \cup u)) - |D_{i,j}| \\ &\geq y(W(v, u)) + \psi_{i,j}^u \geq y_{i,j}^v. \end{aligned}$$

(b) $D_{i,j} = \{d_u\}$ mit $u \in \{i, \dots, i+j\}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}| &= y(W(v, d_u)) - 1 \\ &\geq y(S(D_{i,u-i} \cup v)) - |D_{i,u-i}| + 0 \\ &\geq y_{i,u-i}^v + y_{u+1,i+j-u-1}^v \geq y_{i,j}^v. \end{aligned}$$

(c) $D_{i,j} = \emptyset$.

Dann gilt $y(S(D_{i,j} \cup v)) - |D_{i,j}| = 0 \geq \psi_{i,j}^v \geq y_{i,j}^v$.

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Sei nun $\beta = \min_{v \in V_D \setminus D} y_{1,z-1}^v$ und S^* die zugehörige Kantenmenge, die man leicht bestimmen kann durch Markieren der entsprechenden Minima in Rekursion (7.2.1.8). Offensichtlich ist $(V_D(S^*), S^*)$ zusammenhängend und es gilt gemäß Lemma (7.2.1.9) $\beta \leq \alpha$. Gilt $\beta \geq -1$, so gibt es gemäß Lemma (7.2.1.6) keine verletzte Steinerpartitions-Ungleichung. Gilt $\beta < -1$, so gilt $p^* = |V_D(S^*) \cap D| \geq 2$, da $y \geq 0$ gilt. Folglich ist $S^* \in \mathcal{D}$, und damit ist $\alpha = \beta$. Aufgrund von Lemma (7.2.1.6) existiert eine Steinerpartition V_1, \dots, V_{p^*} mit $\delta(V_1, \dots, V_{p^*}) = S^*$, und es gilt $0 > \beta + 1 = y(\delta(V_1, \dots, V_{p^*})) - p^* + 1$. Also definiert V_1, \dots, V_{p^*} eine verletzte Steinerpartitions-Ungleichung. Damit erhalten wir folgenden Algorithmus:

(7.2.1.10) Separierungsalgorithmus für die Steinerpartitions-Ungleichungen

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Terminalmenge T mit $T \subseteq V(O_G)$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^E$, $y \geq 0$.

Output:

Eine der beiden folgenden Möglichkeiten:

- eine verletzte Steinerpartitions-Ungleichung,
- die Meldung "Es gibt keine verletzte Steinerpartitions-Ungleichung".

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ mit $D = \{d_1, \dots, d_z\}$.
- (2) Bestimme kürzeste Wege $W(u, v)$ für alle $u, v \in V_D$, so daß kein innerer Knoten der jeweiligen Wege aus D ist.
- (3) Bestimme $y_{1,z-1}^v$ für alle $v \in V_D \setminus D$ gemäß der Rekursion (7.2.1.8).
- (4) Setze $\beta = \min_{v \in V_D \setminus D} y_{1,z-1}^v$.
- (5) Gilt $\beta \geq -1$, dann gib die Meldung "Es gibt keine verletzte Steinerpartitions-Ungleichung" aus, STOP.
- (6) Bestimme die zu β gehörende Kantenmenge S^* .
- (7) Gib die verletzte Ungleichung $(\chi^{S^*})^T x \geq |V_D(S^*) \cap D| - 1$ aus.
- (8) STOP.

Die Laufzeit zur Bestimmung von β in Algorithmus (7.2.1.10) beträgt offensichtlich $O(|V|^2 \cdot |T|^2)$. Schließlich sei noch bemerkt, daß die Forderungen in (7.2.1.3), $G[V_i]$ enthält keine Steinerbrücke, bei der Auswahl des Minimums in (7.2.1.8) (i) berücksichtigt werden kann. Damit erhalten wir folgenden Satz.

(7.2.1.11) Satz Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $T \subseteq V$ eine Terminalmenge mit $T \subseteq V(O_G)$. Dann löst Algorithmus (7.2.1.10) Problem (7.2.1.4) mit einer Laufzeit von $O(|V|^2 \cdot |T|^2 + \gamma)$, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren ist.

Darüber hinaus haben wir eine Heuristik zur Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen entwickelt. Wir berechnen einen Steinerbaum für D in G_D bezüglich der Gewichtsfunktion y mit Hilfe einer Heuristik anstelle des exakten Verfahrens aus (7.2.1.10). Wir verwenden dazu die in Kapitel 3.2.1 vorgestellte Heuristik (3.2.1.4) von Matsuyama und Takahashi [TM80]. Wir erinnern uns, daß die Heuristik mit einem beliebigen Terminal $d \in D$ beginnt. Daraufhin wird aus $D \setminus \{d\}$ dasjenige Terminal d' gewählt, das unter allen Terminals aus $D \setminus \{d\}$ mit den geringsten Kosten auf einem Weg von d' nach d verbunden werden kann. Anschließend wird d' mit d auf einem kürzesten Weg verbunden. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis alle Terminals miteinander verbunden sind. Wir verwenden diese Heuristik in leicht modifizierter Form. Zum einen müssen wir beachten, daß kein innerer Knoten der konstruierten Wege aus D ist, damit Lemma (7.2.1.6) angewendet werden kann. Zum anderen berechnen wir, um eine möglichst große Zahl von Ungleichungen zu generieren, einen Steinerbaum nicht nur von einem beliebigen $d \in D$, sondern von jedem Knotenpaar $d_i, d_j \in D$, $d_i \neq d_j$ ausgehend. Der Vorteil dieser Heuristik ist, daß nicht nur der Steinerbaum bezüglich der Gesamtmenge D , sondern jeder konstruierte Teilbaum eine Steinerpartitions-Ungleichung definiert (vergleiche Lemma (7.2.1.6)). Mit dieser Vorgehensweise erhalten wir eine Vielzahl von Steinerpartitions-Ungleichungen. Jede dieser Ungleichungen überprüfen wir, ob sie eine verletzte Ungleichung definiert. Im Detail sieht der Algorithmus folgendermaßen aus.

(7.2.1.12) Separierungsheuristik für die Steinerpartitions-Ungleichungen

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Terminalmenge $T \subseteq V$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^E$, $y \geq 0$.

Output:

Verletzte Steinerpartitions-Ungleichungen, falls welche gefunden werden.

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ mit $D = \{d_1, \dots, d_{|T|}\}$.
- (2) Bestimme einen kürzesten Weg $W(u, v)$ von u nach v bezüglich der Gewichtsfunktion y für alle $u, v \in V_D$, so daß kein innerer Knoten der jeweiligen Wege aus D ist.
- (3) Für alle Knotenpaare $d_i, d_j \in D$, $d_i \neq d_j$ führe aus:
- (4) Setze $S = W(d_i, d_j)$ und $D' = D \setminus \{d_i, d_j\}$.
- (5) Ist $y(S) < 1$, gib die verletzte Ungleichung $(\chi^S)^T x \geq 1$ aus.
- (6) Solange $D' \neq \emptyset$ führe aus:
- (7) bestimme $d \in D'$ und $v \in V(S) \setminus D$ mit

$$y(W(v, d)) = \min_{d' \in D'} \min_{v' \in V(S) \setminus D} y(W(v', d')).$$

- (8) Setze $S = S \cup W(v, d)$ und $D' = D' \setminus \{d\}$.
- (9) Ist $y(S) < |D \setminus D'| - 1$, gib die verletzte Ungleichung $(\chi^S)^T x \geq |D \setminus D'| - 1$ aus.
- (10) STOP.

Die Laufzeit zur Berechnung eines einzigen Steinerbaumes bezüglich D in Algorithmus (7.2.1.12) beträgt $O(|T|^2 \cdot |V_D|)$. Damit erhalten wir gegenüber dem dynamischen Programm (7.2.1.10) eine Laufzeitreduzierung um den Faktor $|V_G|$. Die Gesamtlaufzeit von Algorithmus (7.2.1.12) beträgt $O(|T|^4 \cdot |V_D| + \gamma)$, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren ist. Da in den Anwendungsbeispielen $|T|$ sehr klein ist, ist die Laufzeit immer noch akzeptabel. Unsere Erfahrungen beim Lösen der Probleme in Kapitel 8.2 haben gezeigt, daß diese Heuristik gute Ergebnisse liefert und nur selten das dynamische Programm aufgerufen werden muß. Insbesondere werden mit Algorithmus (7.2.1.12) alle Steinerschnitt-Ungleichungen exakt separiert.

7.2.2. Separierung der Alternierenden-Kreis-Ungleichungen

Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit den in Kapitel 6.3.1 definierten Alternierenden-Kreis-Ungleichungen. Sei eine Instanz $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ des Steinerbaumpackungs-Problems mit $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ gegeben. Wir erinnern uns (vergleiche Definition (6.3.1.1)), daß eine Alternierende-Kreis-Ungleichung von der Form

$$(\chi^{E \setminus C}, \chi^{E \setminus C})^T x \geq \frac{1}{2}|C| - 1$$

ist, wobei C ein alternierender Kreis bezüglich T_1, T_2 ist. Wir werden im folgenden oftmals auf das Präfix “Alternierende” verzichten und anstatt “Alternierende-Kreis-Ungleichung” kurz “Kreis-Ungleichung” schreiben. Wir haben in Kapitel 6.3.1 bisher nur gezeigt, daß eine Alternierende-Kreis-Ungleichung gültig beziehungsweise facetten-definierend ist, falls der zugrundeliegende Graph vollständig ist und gewisse Bedingungen an die Netzliste erfüllt sind. Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen in diesem Abschnitt auf Alternierende-Kreis-Ungleichungen, die in Satz (6.3.1.2), in Korollar (6.3.1.3) (Erweiterung in Bezug auf parallele Kanten) und in Korollar (6.3.1.5) (Erweiterung hinsichtlich des Hinzufügens von Knoten) beschrieben sind. Wir nennen jede dieser Kreis-Ungleichungen eine *verallgemeinerte Kreis-Ungleichung*. Wir wollen von diesen verallgemeinerten Kreis-Ungleichungen ausgehend zunächst eine größere Klasse von gültigen Ungleichungen für $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$ definieren. Dabei benötigen wir des öfteren für eine gegebenen Instanz $(\hat{G}, \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$ Kontraktionsminoren und Kanten-Teilgraphen G' des Graphen \hat{G} . Wir bezeichnen die auf G' definierte Instanz mit dem Tripel $(G', \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$. Um formal korrekt zu sein, müßten wir die Netzliste $\hat{\mathcal{N}}$ und den Kapazitätsvektor \hat{c} entsprechend modifizieren. Um die Notation zu vereinfachen, verzichten wir aber darauf.

Wir beobachten zunächst das folgende.

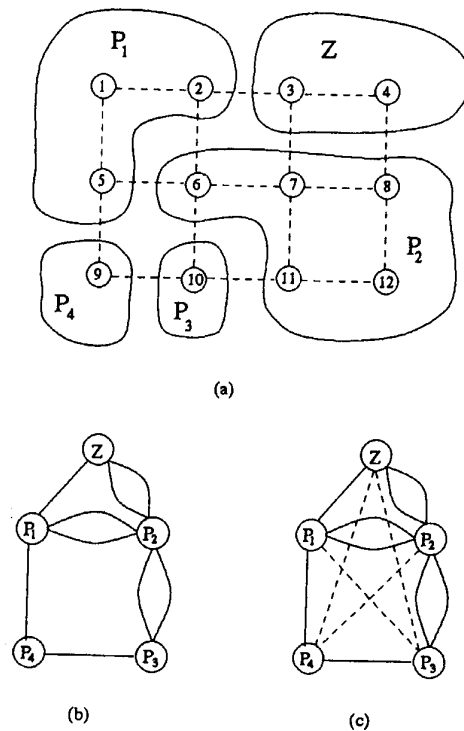
- (1) Das Aufsplitten von Knoten erhält die Gültigkeit einer Ungleichung. Genauer gesagt, ist $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein bezüglich einer Kreis-Ungleichungen $\hat{a}^T x \geq \alpha$ facetten-definierender Graph, der Kontraktionsminor von G ist, dann ist $a^T x \geq \alpha$ mit $\text{supp}(a) = \text{supp}(\hat{a})$ eine gültige Ungleichung von $\text{STP}(G, \mathcal{N}, c)$.
- (2) Löschen von Kanten erhält die Gültigkeit einer Ungleichung. Genauer gesagt, ist $a^T x \geq \alpha$ eine facetten-definierende Kreis-Ungleichungen von $\text{STP}(\hat{G}, \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$ für eine

gegebene Instanz $(\hat{G}, \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$, und ist $G' = (\hat{V}, E')$ ein Kanten-Teilgraph von $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$, dann ist $(a|_{E'})^T x \geq \alpha$ eine gültige Ungleichung für STP $(G', \hat{\mathcal{N}}, \hat{c})$.

Eigenschaft (1) beziehungsweise (2) folgt direkt aus Lemma (6.1.5) beziehungsweise Lemma (6.1.8). Wir wollen uns diese zwei Tatsachen zu Nutze machen und die Klasse der verallgemeinerten Kreis-Ungleichungen erweitern.

(7.2.2.1) Definition

Wir nennen $a^T x \geq \alpha$ eine *erweiterte Kreis-Ungleichung* für STP (G, \mathcal{N}, c) , falls es einen Kontraktionsminor $G' = (V', E')$ von G gibt mit $\text{supp}(a) \subseteq E'$, und es existiert ein bezüglich einer verallgemeinerten Kreis-Ungleichungen $\bar{a}^T x \geq \alpha$ facetten-definierender Graph $G'' = (V', E'')$ mit $E' \subseteq E''$ und $\bar{a}|_{E'} = a|_{E'}$.



Betrachte in Bild (a) den Graphen G mit $c=1$ sowie $T_1 = \{1, 3, 5, 10\}$ und $T_2 = \{4, 9, 12\}$. Die Ungleichung $\sum_{k=1}^2 x_{[2,3]}^k + x_{[3,7]}^k + x_{[4,8]}^k + x_{[5,6]}^k + x_{[6,10]}^k \geq 3$ ist eine erweiterte Kreis-Ungleichung. Der Graph G' ist in Bild (b), der Graph G'' in Bild (c) dargestellt.

Abbildung 7.2.2.1

Zur Veranschaulichung der in (7.2.2.1) gegebenen Definition vergleiche Abbildung 7.2.2.1. Die Gültigkeit der erweiterten Kreis-Ungleichungen folgt direkt aus (1) und (2). Den Kontraktionsminor G' in Definition (7.2.2.1) nennen wir auch den *charakteristischen Graphen* von $a^T x \geq \alpha$ (in Zeichen $G_a = (V_a, E_a)$). Wir betrachten nun das folgende Separierungsproblem.

(7.2.2.2) Separierung der erweiterten Kreis-Ungleichungen

Gegeben eine Instanz (G, \mathcal{N}, c) , $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ eines Steinerbaumpackungs-Problems und ein $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$, $y \geq 0$. Entscheide, ob y alle erweiterten Kreis-Ungleichungen erfüllt. Wenn nicht, finde eine erweiterte Kreis-Ungleichungen, die y verletzt.

Wir wissen nicht, ob es einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von Problem (7.2.2.2) gibt. Wir haben daher versucht, das Separierungsproblem für eine spezielle Problem Instanz zu untersuchen. Wir betrachten Problem Instanzen (G, \mathcal{N}, c) mit den Einschränkungen, daß G planar ist und $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$ gilt. Desweiteren beschränken wir uns auf erweiterte Kreis-Ungleichungen $a^T x \geq \alpha$, für die $a \in \{0, 1\}^{\{T_1, T_2\} \times E}$ ist und deren charakteristischer Graph bestimmte Eigenschaften erfüllt. Genauer gesagt, betrachten wir Partitionen $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2k}, Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l}\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, 2k\}$, $k \geq 2$, die die folgenden Eigenschaften erfüllen (mit $P_{2k+1} = P_1$):

- (1) $G[\mathcal{P}]$ ist zusammenhängend für alle $P \in \mathcal{P}$;
- (2) für die Mengen P_1, \dots, P_{2k} gilt:
 - (2.1) $P_{2i+1} \cap T_1 \neq \emptyset, P_{2i+1} \cap T_2 = \emptyset$, für $i = 0, \dots, k-1$;
 $P_{2i} \cap T_1 = \emptyset, P_{2i} \cap T_2 \neq \emptyset$, für $i = 1, \dots, k$;
 - (7.2.2.3) (2.2) $[P_i : P_{i+1}] \neq \emptyset$ für $i \notin I$;
- (3) für die Mengen Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l} gilt:
 - (3.1) $[P_i : Z_i] \neq \emptyset, [P_{i+1} : Z_i] \neq \emptyset$ für $i \in I$;
 - (3.2) $[P : Z_i] = \emptyset$, für alle $P \in \mathcal{P} \setminus \{P_i, P_{i+1}\}$, $i \in I$;
- (4) $Z_i \cap (T_1 \cup T_2) \neq \emptyset$, für alle $i \in I$.

Per Definition (vergleiche Kapitel 2.1) gibt es zu jedem Kontraktionsminor G' von G eine Partition $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_p\}$ der Knotenmenge V , so daß G' isomorph zu $G(V_1, \dots, V_p)$ ist. Ist G_a der charakteristische Graph einer gültigen Ungleichung $a^T x \geq \alpha$, so bezeichnen wir die zugehörige Partition mit \mathcal{P}_a .

Ein paar Erläuterungen zu den Bedingungen in (7.2.2.3) sind angebracht. Die Mengen P_1, \dots, P_{2k} korrespondieren genau zu den Knoten des alternierenden Kreises. Die Knotenmengen Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l} bilden die Zusatzknoten gemäß Korollar (6.3.1.5). Wir erlauben Zusatzknoten nur unter bestimmten Einschränkungen. Zum einen darf keine Kante zwischen zwei Zusatzknoten verlaufen (vergleiche Bedingung (3.2)). Zum anderen muß jeder Zusatzknoten ein Terminal für mindestens ein Netz sein. Außerdem fordern wir, daß zwei aufeinanderfolgende Knoten auf dem alternierenden Kreis durch eine Kante verbunden sind, sofern nicht beide zum gleichen Zusatzknoten benachbart sind (vergleiche Bedingung (2) und (3)). Außerdem erlauben wir (siehe oben) nur Kreis-Ungleichungen $a^T x \geq \alpha$ für die $a \in \{0, 1\}^{\{T_1, T_2\} \times E}$ ist. Das heißt wir erlauben für die Koeffizienten der Kanten, die inzident zu einem Zusatzknoten sind, die Wahlmöglichkeit (2) (i) aus (6.3.1.4) nicht. Diese Bedingungen schränken offensichtlich die Menge der erweiterten Kreis-Ungleichungen ein. Diese Restriktionen haben wir vorgenommen, da wir das Separierungsproblem in voller Allgemeinheit nicht lösen konnten. Wir nennen eine erweiterte Kreis-Ungleichung $a^T x \geq \alpha$,

für die $a \in \{0, 1\}^{\{T_1, T_2\} \times E}$ gilt und deren zugehörige Partition (7.2.2.3) erfüllt, eine *bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung*. Die Ungleichung, die in Abbildung 7.2.2.1 beschrieben wird, ist beispielsweise eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen auch gültig sind, falls die Indexmenge I in (7.2.2.3) mehr als ein Element enthält. Wir haben in Korollar (6.3.1.5) den Fall behandelt, daß ein einzelner Knoten hinzugefügt wird. Da jedoch zwischen den verschiedenen Zusatzknoten keine Kante existiert (siehe Bedingung (7.2.2.3) (3.2)), können die Koeffizienten der Kanten, die inzident zu den jeweiligen Zusatzknoten sind, unabhängig voneinander gemäß (6.3.1.4) bestimmt werden.

Unser Ziel ist es, die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen zu separieren. Wir wollen dazu ähnlich wie bei der Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen vorgehen. Wir werden zeigen, daß jede bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung zu einem Steinerbaum in einem noch zu definierenden Graphen korrespondiert. Allerdings muß dieser Steinerbaum eine Vielzahl von technischen Bedingungen erfüllen. Eine zusätzliche Schwierigkeit tritt auf, daß die Kantenmenge des charakteristischen Graphen einer bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichung $a^T x \geq \alpha$ nicht die Koeffizienten der Kanten festlegt. Der Vektor a "filtert" sozusagen aus, welche der Kanten Nullkanten sind und welche der Kanten zu den Mengen F_1 und F_2 gehören. Wir müssen deshalb für den zugehörigen Steinerbaum ebenfalls eine solche "Filterfunktion" definieren, die genau dem Vektor a der Kreis-Ungleichung entspricht. Dies führt zu recht technischen Definitionen und Notationen.

Wir führen nun eine ähnliche Transformation wie bei der Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen durch. Sei $T = T_1 \cup T_2$. Wir numerieren $T = \{t_1, \dots, t_z\}$ entlang der äußeren Fläche im Uhrzeigersinn. Betrachte den dualen Graphen $G^* = (V^*, E)$ von G und teile den Knoten, der die äußere Fläche repräsentiert, in z Knoten d_1, \dots, d_z auf, so daß jede Kante, die in G auf dem Weg von t_i nach t_{i+1} entlang der äußeren Fläche liegt, inzident zu d_{i+1} für $i = 1, \dots, z$ ist. Wir bezeichnen den Graphen, der sich aus dieser Konstruktion ergibt, mit $G_D = (V_D, E)$ und setzen $T_D = \{d_1, \dots, d_z\}$. Vergleiche dazu Abbildung 7.2.2.2, in der der in Abbildung 7.2.2.1 gezeichnete Graph in gestrichelten Linien und der zugehörige Graph G_D in durchgezogenen schwarzen Linien dargestellt ist. Zur Vereinfachung der Beschreibung erlauben wir im folgenden Indizes $i > z$ und meinen damit jeweils den Index $((i - 1) \text{ modulo } z) + 1$.

Wir führen zunächst die folgenden Bezeichnungen ein. Sei S ein kantenminimaler Steinerbaum in G_D . Für zwei Knoten $u, v \in V_{G_D}(S)$ bezeichne $P_S(u, v) \subseteq S$ den eindeutigen Weg von u nach v in $(V_{G_D}(S), S)$. Für jedes $uv \in S$ gibt es eine kantendisjunkte Zerlegung von S mit $S = S_1 \cup S_2 \cup \{uv\}$, $u \in V_{G_D}(S_1)$ und $v \in V_{G_D}(S_2)$. Wir bezeichnen S_1 mit S_u und S_2 mit S_v . Ferner sei $V_S^3 = \{v \in V_{G_D}(S) \mid d_S(v) \geq 3\}$ die Menge der Verzweigungsknoten und $L_S = \{t \in V_{G_D}(S) \mid d_S(t) = 1\}$ die Menge der Blätter von S .

Falls $V_S^3 \neq \emptyset$, definieren wir eine Funktion $f_S : L_S \mapsto V_S^3$ mit $V_{G_D}(P_S(f_S(t), t)) \cap V_S^3 = \{f_S(t)\}$ für $t \in L_S$. Die Funktion f_S ordnet jedem Blatt den nächstliegenden Verzweigungsknoten zu.

Sei $[d_i, d_j]$ ein beliebiges Intervall mit $d_i, d_j \in T_D$, $d_i \neq d_j$. Wir betrachten nun kantenminimale Steinerbäume S bezüglich $C \cup Z$ mit $C, Z \subseteq [d_i, d_j]$, $C \cap Z = \emptyset$ in G_D , die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) $d_S(d) = 1$, für alle $d \in C \cup Z$;
 $d_S(d) = 0$, für alle $d \in [d_i, d_j] \setminus (C \cup Z)$;
 - (2) Z kann in eine Menge von Tupeln $Z_T = \{(d_{i_1}, d_{j_1}), \dots, (d_{i_l}, d_{j_l})\}$,
 $(d_{i_s} \neq d_{j_s} \text{ für } s = 1, \dots, l)$ eingeteilt werden, so daß gilt:
- (7.2.2.4)
- (2.1) $[d_{i_s}, d_{j_s}] \cap [d_{i_r}, d_{j_r}] = \emptyset$, für alle $r, s = 1, \dots, l$, $r \neq s$;
 - (2.2) $t_{i_s-1} \in T_1$, $t_{j_s} \in T_2$ oder $t_{i_s-1} \in T_2$, $t_{j_s} \in T_1$, für $s = 1, \dots, l$;
 - (2.3) $f_S(d_{i_s}) = f_S(d_{j_s})$ für $s = 1, \dots, l$;
- (3) $C \subseteq M$;
 - (4) für alle $d \in (M \cap [d_i, d_j]) \setminus C$ gilt: $d \in [d_{i_s}, d_{j_s}]$ für ein $s \in \{1, \dots, l\}$.

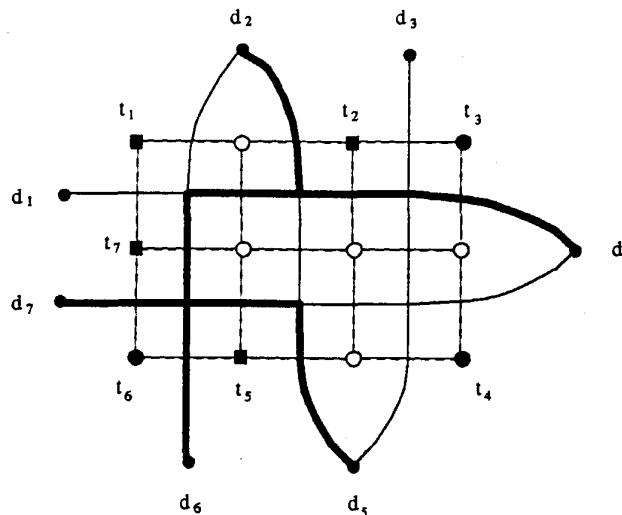


Abbildung 7.2.2.3

Wir geben eine kurze, informelle Erläuterung der Bedingungen (7.2.2.4). Die Bedingungen bilden, wie wir in Lemma (7.2.2.6) noch sehen werden, die Kantenmenge des charakteristischen Graphen einer bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichung. Die Eigenschaften, daß S ein kantenminimaler Steinerbaum ist, der (1) erfüllt, implizieren wie in Abschnitt 7.2.1, daß der charakteristische Graph 2-fach knotenzusammenhängend ist, und damit den geforderten Kreis enthält. Jeder Weg von d_i nach d_j in S für ein Tupel $(d_i, d_j) \in Z_T$ definiert genau den Schnitt, der von einem Zusatzknoten induziert wird. Die Bedingungen (3) und (4) stellen sicher, daß je zwei Knoten $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$, die auf der äußeren Fläche benachbart sind, entweder zu einem Zusatzknoten gehören oder zwei benachbarte Knoten

auf dem alternierenden Kreis bilden. Vergleiche dazu auch Abbildung 7.2.2.3. Die mit dicken schwarzen Linien gezeichnete Kantenmenge ist ein Steinerbaum in G_D bezüglich $\{d_2, d_4, d_5, d_6, d_7\} \subset T_D$ mit $C = \{d_5, d_6, d_7\}$ und $Z = \{d_2, d_4\}$. Dieser Steinerbaum erfüllt obige Bedingungen; er entspricht der Kantenmenge des Graphen G' in Abbildung 7.2.2.1. Wir definieren $\mathcal{S}_{i,j} = \{S \subset E \mid S \text{ ist kantenminimaler Steinerbaum bezüglich einer Terminalmenge } C \cup Z, \text{ so da\ss (7.2.2.4) bez\u00fcglich } [d_i, d_j] \text{ erf\u00fcllt ist}\}$. Mit \mathcal{S} bezeichnen wir die Menge $\{S \subset E \mid S \text{ ist kantenminimaler Steinerbaum bez\u00fcglich einer Terminalmenge } C \cup Z, \text{ so da\ss (7.2.2.4) bez\u00fcglich } T_D \text{ erf\u00fcllt ist}\}$, wobei wir die Bedingungen (7.2.2.4) entsprechend f\u00fcr T_D definieren.

Wir m\u00fcssen nun noch eine Filterfunktion definieren, die entsprechend dem Vektor a der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichung die Koeffizienten der Kanten des Steinerbaumes festlegt. Dazu ben\u00f6tigen wir weitere Bezeichnungen.

F\u00fcr einen Steinerbaum S bez\u00fcglich $C \cup Z$, der (7.2.2.4) f\u00fcr ein Intervall $[d_i, d_j]$ erf\u00fcllt, bezeichne $W_S = \{f_S(d) \mid d \in Z\}$. Wir erweitern die Grundmenge der Funktion f_S von L_S auf $L_S \cup W_S$ wie folgt: Ist $d_S(t) = 3$ f\u00fcr $t \in W_S$ und $d_1, d_2 \in Z$ mit $f_S(d_1) = f_S(d_2) = t$, so gibt es genau ein $w_t \in (V_S^3 \cup L_S) \setminus \{d_1, d_2\}$, so da\ss $(V_D(P_S(w_t, t)) \setminus \{t\}) \cap V_S^3 = \{w_t\}$ ist. Wir setzen $f_S(t) = w_t$. Ist $d_S(t) \neq 3$ f\u00fcr $t \in W_S$, so setzen wir $f_S(t) = w_t$. Schlie\u00dflich sei $F_S = \bigcup_{d \in C \cup Z \cup W_S} P_S(f_S(d), d)$ und $V_Z(S) = \bigcup_{d \in Z} (V_D(P_S(f_S(d), d)) \setminus \{f_S(d)\})$ sowie $\alpha(S) = \frac{1}{2}(|C| + \frac{1}{2}|Z|) + \sum_{(d_i, d_j) \in Z_T} \alpha([d_i, d_j])$. Die Kanten aus F_S sind die Kanten, die in dem charakteristischen Graphen der zugeh\u00f6rigen Kreis-Ungleichung, inzident zu einem Zusatzknoten sind, eine Kante des alternierenden Kreises sind oder parallel zu einer Kante des alternierenden Kreises sind. Das hei\u00dft, die Menge F_S enth\u00e4lt insbesondere alle Nullkanten der zugeh\u00f6rigen Kreis-Ungleichung. $\alpha(S)$ setzt sich zusammen aus der halben L\u00e4nge des zugeh\u00f6rigen alternierenden Kreises (vergleiche Satz (6.3.1.2)) und der Summe der \u00c4nderungen der rechten Seite gem\u00e4\u00df Korollar (6.3.1.5).

Wir nennen einen Vektor $a \in \{0, 1\}^{\{T_1, T_2\} \times E}$ eine *Filterung* f\u00fcr einen kantenminimalen Steinerbaum S bez\u00fcglich $C \cup Z$ mit $S \in \mathcal{S}_{i,j}$ oder $S \in \mathcal{S}$, falls a die folgenden Eigenschaften erf\u00fcllt. (Zur Erinnerung, $F_x = \{e \in E \mid x_e = 1\}$ ist die Inzidenzmenge von x f\u00fcr $x \in \mathbb{R}^E$, vergleiche Kapitel 2.2).

- (1) $P_S(f_S(d), d) \cap F_{a^1} = P_S(f_S(d), d) \cap F_{a^2}$,
 $|P_S(f_S(d), d) \cap F_{a^1}| \geq |P_S(f_S(d), d)| - 1$, f\u00fcr alle $d \in C \cup W_S$;
- (2) f\u00fcr alle $(d_i, d_j) \in Z_T$, $k = 1, 2$ mit $P = P(f_S(d_i), d_i) \cup P(f_S(d_j), d_j)$ gilt:
 - (2.1) $P \cap F_{a^k} = P(f_S(d_j), d_j)$ oder
 - (7.2.2.5) $P \cap F_{a^k} = P(f_S(d_i), d_i)$, falls $[t_i, t_{j-1}] \cap T_k = \emptyset$,
 - (2.2) $P \subset F_{a^k}$, falls $[t_i, t_{j-1}] \cap T_k \neq \emptyset$;
- (3) f\u00fcr alle $uv \in S \setminus F_S$ mit $d_i = l(S_u)$ und $d_j = r(S_u)$ gilt:
 $uv \in F_{a^k}$, falls $t_{i-1} \in T_k$ oder $t_j \in T_k$, f\u00fcr $k = 1, 2$;
- (4) $F_{a^1} \cup F_{a^2} \subseteq S$.

Wir erkl\u00e4ren kurz die Eigenschaften. Die in (1) betrachteten Wege bilden die Kanten zwischen zwei Knoten, die auf dem alternierenden Kreis der zugeh\u00f6rigen Kreis-Ungleichung

benachbart sind. Bedingung (1) sagt aus, daß unter diesen Kanten höchstens eine Nullkante sein darf und die Koeffizienten für Netz 1 und 2 übereinstimmen müssen. Bedingung (2) legt die Koeffizienten der Kanten, die inzident zu einem Zusatzknoten sind, gemäß (6.3.1.4) fest. Schließlich werden durch (3) die Koeffizienten der Diagonalen des alternierenden Kreises bestimmt. Nun gilt die folgende Beziehung.

(7.2.2.6) Lemma

Sei $G = (V, E)$ planar und $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$. Dann gilt:

- (i) Ist $a^T x \geq \alpha$ eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung, dann ist $S = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_a} \delta(P) \in \mathcal{S}$, a eine Filterung für S und $\alpha = \alpha(S) - 1$.
- (ii) Ist $S \in \mathcal{S}$ ein kantenminimaler Steinerbaum in G_D für $C \cup Z$ mit $C, Z \subseteq T_D$, $C \cap Z = \emptyset$, $|C| + \frac{1}{2}|Z| \geq 4$, und a ist eine Filterung für S , dann definiert $a^T x \geq \alpha(S) - 1$ eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung.

Beweis.

Wir beginnen mit (i). Sei $\mathcal{P}_a = \{P_1, \dots, P_{2k}, Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l}\}$, $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, 2k\}$ die zugehörige Partition der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichung. Da $G[P_i]$ zusammenhängend ist und $P \cap T \neq \emptyset$ existieren Knoten $d_i^1, d_i^2 \in T_D$, so daß $W(d_i^1, d_i^2) = \delta(P_i)$ ein Weg von d_i^1 nach d_i^2 in G_D ist für $i = 1, \dots, 2k$. Entsprechend existieren Knoten $\bar{d}_{i_s}^1, \bar{d}_{i_s}^2 \in T_D$, so daß $W(\bar{d}_{i_s}^1, \bar{d}_{i_s}^2) = \delta(Z_{i_s})$ ein Weg von $\bar{d}_{i_s}^1$ nach $\bar{d}_{i_s}^2$ in G_D ist für $s = 1, \dots, l$. Wegen $[P_i : P_{i+1}] \neq \emptyset$ und Bedingung (7.2.2.3) (3) gilt: $d_i^2 = d_{i+1}^1$, falls $i \notin I$ sowie $d_i^2 = \bar{d}_i^1$, $d_{i+1}^1 = \bar{d}_i^2$, falls $i \in I$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{i \notin I} d_{i+1}^1; \\ Z &= \bigcup_{i \in I} (\bar{d}_i^1 \cup \bar{d}_i^2); \\ Z_T &= \{(\bar{d}_i^1, \bar{d}_i^2) \mid i \in I\}; \\ S &= \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \delta(P). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist S ein Steinerbaum in G_D bezüglich $C \cup Z$. Da $P \cap T \neq \emptyset$ für $P \in \mathcal{P}$, ist S kantenminimal. Bedingung (7.2.2.4) (1) folgt aus der Tatsache, daß $[P_i : P_{i+1}] \neq \emptyset$ ist, zusammen mit Bedingung (7.2.2.3) (3.1). Bedingung (7.2.2.4) (2.1) folgt direkt aus (7.2.2.3) (3.2) und der Konstruktion von Z . Bedingung (7.2.2.4) (2.2) folgt direkt aus (7.2.2.3) (3.1) zusammen mit (7.2.2.3) (2.1). Offensichtlich ist $P_S(f_S(\bar{d}_i^1), \bar{d}_i^1) = [P_i : Z_i]$ und $P_S(f_S(\bar{d}_i^2), \bar{d}_i^2) = [P_{i+1} : Z_i]$. Bedingung (7.2.2.3) (3.1) und (7.2.2.3) (3.2) implizieren, daß $\delta(Z_i) = [P_i : Z_i] \cup [P_{i+1} : Z_i]$. Folglich ist $f_S(\bar{d}_i^1) = f_S(\bar{d}_i^2)$, und damit gilt (7.2.2.4) (2.3). Bedingung (7.2.2.3) (2.1) impliziert (7.2.2.4) (3). Die Tatsache, daß \mathcal{P} eine Partition ist, und (7.2.2.3) (2.1) implizieren (7.2.2.4) (4). Außerdem gilt $\alpha = k - 1 + \sum_{(d_i, d_j) \in Z_T} \alpha([d_i, d_j]) = \frac{1}{2}(|C| + \frac{1}{2}|Z|) - 1 + \sum_{(d_i, d_j) \in Z_T} \alpha([d_i, d_j]) = \alpha(S) - 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß a eine Filterung definiert. Offensichtlich gilt $[P_i : P_{i+1}] = P_S(f_S(d_{i+1}^1), d_{i+1}^1)$ für $i \notin I$ und $[P_i : P_{i+1}] = P_S(f_S(d), d)$ mit $d = f_S(\bar{d}_i^1)$ für $i \in I$. Außerdem gilt $[P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^1} = [P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^2}$ und $|[P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^1}| \geq |[P_i : P_{i+1}]| - 1$ für $i = 1, \dots, 2k$. Diese beiden Tatsachen implizieren (7.2.2.5) (1). Wir wissen bereits, daß $P_S(f_S(\bar{d}_i^1), \bar{d}_i^1) = [P_i : Z_i]$, $P_S(f_S(\bar{d}_i^2), \bar{d}_i^2) = [P_{i+1} : Z_i]$ und $\delta(Z_i) = [P_i : Z_i] \cup [P_{i+1} : Z_i]$ gilt. Da a aus $\{0, 1\}^{\{T_1, T_2\} \times E}$ ist und (6.3.1.4) erfüllt, folgt damit (7.2.2.5) (2). Sei

$uv \in S \setminus F_S$ mit $d_i = l(S_u)$ und $d_j = r(S_u)$. Da $uv \notin F_S$, existiert ein P_r mit $t_{i-1} \in P_r$ und ein P_s mit $t_j \in P_s$, $r, s \in \{1, \dots, 2k\}$, und es gilt $r \neq s + 1$, $r \neq s - 1$. Da $a^T x \geq \alpha$ eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung ist, gilt $uv \in F_{a^*}$, falls $P_s \cap T_k \neq \emptyset$ oder $P_r \cap T_k \neq \emptyset$ für $k = 1, 2$. Dies zusammen mit Bedingung (7.2.2.3) (2.1) impliziert (7.2.2.5) (3). Aus $\text{supp}(a) \subseteq \bigcup_{P \in \mathcal{P}_a} \delta(P)$ folgt (7.2.2.5) (4).

Wir zeigen nun noch (ii). Sei $S \subset \mathcal{S}$ ein kantenminimaler Steinerbaum bezüglich $C \cup Z$ mit $C, Z \subseteq T_D$, $C \cap Z = \emptyset$ und $|C| + \frac{1}{2}|Z| \geq 4$. Sei $J = C \cup Z$ mit $J = \{d_{q_1}, \dots, d_{q_{|J|}}\}$, so daß $q_1 < q_2 < \dots < q_{|J|}$ gilt. Da S kantenminimal ist, existiert ein $W_{q_i} \subset V$ mit $t_{q_i} \in W_{q_i}$ und $\delta(W_{q_i}) = P_S(d_{q_i}, d_{q_{i+1}})$ für alle $i = 1, \dots, |J|$. Ebenso impliziert die Kantenminimalität von S , daß $\mathcal{I}P = \{W_{q_1}, \dots, W_{q_{|J|}}\}$ eine Partition von V ist. Offensichtlich ist $G[W]$ zusammenhängend für $W \in \mathcal{I}P$. Aufgrund von (7.2.2.4) (1) gilt, daß

(*) $[W_{q_i} : W_{q_{i+1}}] \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, |J|$.

Wir setzen für $i = 1, \dots, |J|$

$$\begin{aligned} Z_{q_i} &= W_{q_i}, & \text{falls } (d_{q_i}, d_{q_{i+1}}) \in Z_T; \\ P_{q_i} &= W_{q_i}, & \text{sonst.} \end{aligned}$$

Sei außerdem $I_Z = \{q_i \mid (d_{q_i}, d_{q_{i+1}}) \in Z_T\}$ und $I_P = \{q_i \mid W_{q_i} = P_{q_i}\}$. Wir zeigen zuerst, daß $|I_P| \geq 4$. Es gilt $|I_P| = |J| - |I_Z| = |J| - \frac{1}{2}|Z| = |C| + |Z| - \frac{1}{2}|Z| = |C| + \frac{1}{2}|Z| \geq 4$.

Wir zeigen nun Bedingung (7.2.2.3) (2.1). Wir wissen, daß $t_{q_i} \in P_{q_i}$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $t_{q_i} \in T_1$. Zu zeigen ist $P_{q_i} \cap T_2 = \emptyset$. Angenommen es existiert ein $t_2 \in P_{q_i} \cap T_2$. Dann existiert ein $d \in M \setminus C$ mit $d \in [d_{q_i}, d_{q_{i+1}}]$ und $d \neq d_{q_i}, d \neq d_{q_{i+1}}$. Dies ist ein Widerspruch zu (7.2.2.4) (4), da $(d_{q_i}, d_{q_{i+1}}) \notin Z_T$.

Als nächstes zeigen wir (7.2.2.3) (2.2). Betrachte ein beliebiges P_{q_i} , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T_1 \cap P_{q_i} \neq \emptyset$ ist. Läuft man die äußere Fläche im Uhrzeigersinn ausgehend von t_{q_i} ab, so sei q_j der erste Index für den gilt $W_{q_i} = P_{q_i}$. Zu zeigen ist $P_{q_i} \cap T_2 \neq \emptyset$. Wir unterscheiden drei Fälle:

(a) $q_j = q_{i+1}$.

Da $d_{q_i} \in J$ und $d_{q_j} \notin Z$ gilt, ist $d_{q_i} \in C$. Da $C \subseteq M$, folgt $P_{q_i} \cap T_2 \neq \emptyset$.

(b) $q_j = q_{i+2}$.

Dann gilt $W_{q_{i+1}} = Z_{q_{i+1}}$. Da $P_{q_i} \cap T_2 = \emptyset$ und $t_{q_{i+1}-1} \in P_{q_i}$, folgt mit (7.2.2.4) (2.2), daß $t_{q_{i+2}} \in T_2$. Da $t_{q_{i+2}} \in P_{q_{i+2}}$, folgt die Behauptung.

(c) $q_j > q_{i+2}$.

Dann gilt $W_{q_{i+1}} = Z_{q_{i+1}}$ und $W_{q_{i+2}} = Z_{q_{i+2}}$, und damit ist $(d_{q_i}, d_{q_{i+1}}) \in Z_T$ und $(d_{q_{i+1}}, d_{q_{i+2}}) \in Z_T$. Dies ist ein Widerspruch zu (7.2.2.4) (2.1).

Wir zeigen schließlich noch (7.2.2.3) (3). Aus (c) folgt $[Z_i : Z_j] = \emptyset$ für alle $i, j \in I_Z$, $i \neq j$. Eigenschaft (*) zusammen mit (7.2.2.4) (2.3) (beachte, daß $\delta(W_{q_i}) = P_S(d_{q_i}, d_{q_{i+1}})$) implizieren damit (7.2.2.3) (3). Bedingung (7.2.2.3) (4) gilt offensichtlich, da $t_{q_i} \in W_{q_i}$ für alle $i = 1, \dots, |J|$.

Zum Schluß zeigen wir noch, daß die Filterung a die linke Seite einer bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichung ist. Wir numerieren die Elemente der Partition $\{W_{q_1}, \dots, W_{q_{|J|}}\}$ neu. Die Mengen aus $\{P_{q_i} \mid q_i \in I_P\}$ numerieren wir von 1 bis $2k$ mit $2k = |I_P|$ entlang der äußeren Fläche im Uhrzeigersinn. Wir indizieren entsprechend die Mengen $\{Z_{q_i} \mid q_i \in I_Z\}$

mit i_1 bis i_l (mit $l = |I_Z|$), so daß $[P_i : Z_i] \neq \emptyset$ und $[P_{i+1} : Z_i] \neq \emptyset$ für $i \in \{i_1, \dots, i_l\}$ ist. Sei $G' = G(P_1, \dots, P_{2k}, Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l})$ mit Kantenmenge E' und Knotenmenge $V' = \{p_1, \dots, p_{2k}, z_{i_1}, \dots, z_{i_l}\}$, so daß p_i beziehungsweise z_i die kontrahierte Menge P_i beziehungsweise Z_i repräsentiert. Bedingung (7.2.2.5) (4) impliziert, daß $\text{supp}(a) \subseteq E'$ gilt. Es bleibt also zu zeigen, daß es einen bezüglich einer verallgemeinerten Kreis-Ungleichung $\bar{a}^T x \geq \alpha$ facetten-definierenden Graphen $G'' = (V', E'')$ mit $E' \subseteq E''$ und $\bar{a}|_{E'} = a|_{E'}$ gibt (vergleiche Definition 7.2.2.1), und $\alpha = \alpha(S) - 1$ gilt. Offensichtlich existiert ein solcher Graph, falls a die folgenden drei Bedingungen erfüllt.

- (i') $a|_{\delta(Z_{i_s})}$ erfüllt (6.3.1.4) für $i_s \in \{i_1, \dots, i_l\}$.
- (ii') $[P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^2} = [P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^1}$ und $|[P_i : P_{i+1}] \cap F_{a^2}| \geq |[P_i : P_{i+1}]| - 1$ für $i = 1, \dots, 2k$.
- (iii') $[P_r : P_s] \cap F_{a^k} = [P_r : P_s]$, falls $P_r \cap T_k \neq \emptyset$ oder $P_s \cap T_k \neq \emptyset$ für alle $r, s \in \{1, \dots, 2k\}$, $r \neq s + 1$, $r \neq s - 1$ und für $k = 1, 2$.

Zu (i'): Sei $Z_{i_s} \in \{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_l}\}$. Es existiert ein $(d_i, d_j) \in Z_T$ mit $\delta(Z_{i_s}) = P_S(f_S(d_i), d_i) \cup P_S(f_S(d_j), d_j)$. Dies impliziert, daß $\delta(Z_{i_s}) = [P_{i_s} : Z_{i_s}] \cup [P_{i_s+1} : Z_{i_s}]$ ist. Gilt $T_k \cap Z_{i_s} \neq \emptyset$, so gilt gemäß (7.2.2.5) (2.2), daß $[P_{i_s} : Z_{i_s}] \cup [P_{i_s+1} : Z_{i_s}] \subset F_{a^k}$. Also gilt (1) aus (6.3.1.4). Entsprechend impliziert für $T_k \cap Z_{i_s} = \emptyset$ Bedingung (7.2.2.5) (2.1) Eigenschaft (2) (ii) beziehungsweise (2) (iii) aus (6.3.1.4).

Zu (ii'): Da $[P_i : P_{i+1}] = P_S(f_S(d), d)$ für ein $d \in C \cup W_S$ gilt, folgt (ii') aus (7.2.2.5) (1).

Zu (iii'): Sei $uv \in [P_r : P_s]$ mit $P_r \cap T_k \neq \emptyset$ oder $P_s \cap T_k \neq \emptyset$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_s \cap T_k \neq \emptyset$. Sei $S = S_u \cup S_v \cup \{uv\}$ mit $d_i = l(S_u)$ und $d_j = r(S_u)$. Da $r \neq s - 1$ und $r \neq s + 1$, gilt $uv \notin F_S$. Offensichtlich ist der eindeutige Weg von u nach d_i in $(V_D(S), S)$ Teilmenge von $\delta(P_s)$ oder $\delta(P_r)$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit Teilmenge von $\delta(P_s)$). Dann gilt $t_{i-1} \in P_s$. Da $P_s \cap T_k \neq \emptyset$ und $P_s \cap T_{3-k} = \emptyset$ ist (diese Eigenschaft wurde bereits oben gezeigt), gilt $t_{i-1} \in T_k$. Also folgt aus (7.2.2.5) (3), daß $uv \in F_{a^k}$ ist.

Offensichtlich ist $\alpha = k - 1 + \sum_{(d_i, d_j) \in Z_T} \alpha([d_i, d_j]) = \alpha(S) - 1$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

Sei $\mathcal{F}(S) = \{a \in \mathbb{R}^{\{T_1, T_2\} \times E} \mid a \text{ ist Filterung für } S\}$ für $S \in \mathcal{S}_{i,j}$, $i, j \in \{1, \dots, z\}$ beziehungsweise für $S \in \mathcal{S}$. Zur Lösung des Separierungsproblems der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen für ein $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$, $y \geq 0$ bestimmen wir nun das folgende Minimum.

$$(7.2.2.7) \quad \beta = \min_{S \in \mathcal{S}} \min_{a \in \mathcal{F}(S)} y^1(S \cap F_{a^1}) + y^2(S \cap F_{a^2}) - \alpha(S).$$

Sei S_m und a_m mit $y^1(S_m \cap F_{a_m^1}) + y^2(S_m \cap F_{a_m^2}) - \alpha(S_m) = \beta$ sowie $C_m \cup Z_m \subseteq T_D$ die zugehörige Terminalmenge von S_m . Gilt $\beta \geq -1$, dann existiert aufgrund von (7.2.2.6) (i) keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung. Gilt $\beta < -1$ und $|C_m| + \frac{1}{2}|Z_m| \geq 4$, so definiert gemäß (7.2.2.6) (ii) $a_m^T x \geq \alpha(S_m) - 1$ eine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung. Der Fall $\beta < -1$ und $|C_m| + \frac{1}{2}|Z_m| < 4$ kann unter den zusätzlichen Annahmen, daß alle Steinerschnitt-Ungleichungen erfüllt sind und $|M| \geq 4$ (für $|M| = 2$ ist a-priori klar, daß es keine bedingt-erweiterte Kreisungleichung gibt), ausgeschlossen werden.

(7.2.2.8) **Bemerkung** Ist keine Steinerschnitt-Ungleichung bezüglich T_1 und T_2 verletzt und gilt $|M| \geq 4$, so gilt $\beta \geq -1$ oder $|C_m| + \frac{1}{2}|Z_m| \geq 4$. Der Beweis ist leicht einzusehen. Ist $|C_m| + \frac{1}{2}|Z_m| < 4$, so gibt es für S_m nur zwei Möglichkeiten. Betrachte dazu Abbildung 7.2.2.4. Für den Fall in Abbildung 7.2.2.4 (a) gilt, $\beta = y^1(S_m \cap F_{a_m^1}) + y^2(S_m \cap F_{a_m^2}) - \alpha(S_m) = y^1(\delta(Z_1) \cap F_{a_m^1}) + y^2(\delta(Z_1) \cap F_{a_m^2}) - \alpha([d_1, d_2]) + y^1([P_1 : P_2] \cap F_{a_m^1}) + y^2([P_1 : P_2] \cap F_{a_m^2}) - 1 \geq 0 + 0 - 1 = -1$. Entsprechend erhält man auch für den Fall in Abbildung 7.2.2.4 (b), daß $\beta \geq -1$ gilt.

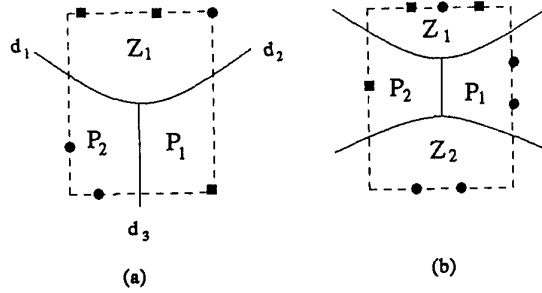


Abbildung 7.2.2.4

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle Steinerschnitt-Ungleichungen erfüllt sind, genügt es also zur Lösung des Separierungsproblems für die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen das Minimum in (7.2.2.7) zu bestimmen. Betrachte dazu die folgende Rekursion und die daran anschließenden Erläuterungen.

(7.2.2.9) Rekursion

Für alle $i = 1, \dots, z$, $j = 0, \dots, z - 1$, $v \in V_D \setminus T_D$ und $k = 1, 2$ (mit $\bar{k} = 3 - k$), setze

- (1) $l_1(v, i, 0) = y_{-1}(v, d_i) - \frac{1}{2}$, falls $d_i \in M$;
 $l_1(v, i, 0) = 0$, falls $d_i \in T_D \setminus M$;
- (2) $l_Z(v, i, j) = y(v, d_i) + y(v, d_{i+j}) - 2$, falls $T_1 \cap [t_i, t_{i+j-1}] \neq \emptyset$
und $T_2 \cap [t_i, t_{i+j-1}] \neq \emptyset$;
 $l_Z(v, i, j) = y^{\bar{k}}(v, d_i) + y^{\bar{k}}(v, d_{i+j})$
 $+ \min\{y^k(v, d_i), y^k(v, d_{i+j})\} - 1$, falls $T_k \cap [t_i, t_{i+j-1}] = \emptyset$
und $T_{\bar{k}} \cap [t_i, t_{i+j-1}] \neq \emptyset$;
- (3) $l_2(v, i, j) = \min_{1 \leq k \leq j} l_1(v, i, k - 1) + l_1(v, i + k, j - k)$;
- (4) $l_1(v, i, j) = \min_{u \in V_D \setminus T_D} y^k(v, u) + l_2(u, i, j)$, falls $t_{i-1}, t_{i+j} \in T_k$;
- (5) $l_1(v, i, j) = \min \left\{ \min_{u \in V_D \setminus T_D} y(v, u) + l_2(u, i, j), \right.$
 $\left. \min_{u \in V_D \setminus T_D} y_{-1}(v, u) + l_Z(u, i, j) - \frac{1}{2} \right\}$, falls $t_{i-1} \in T_k, t_{i+j} \in T_{\bar{k}}$.

Dabei bezeichnet $y^k(u, v)$ den Wert eines kürzesten Weges von u nach v bezüglich der Gewichtsfunktion y^k , $y(u, v)$ den Wert eines kürzesten Weges von u nach v bezüglich der Gewichtsfunktion $y^1 + y^2$, und $y_{-1}(u, v) = \min\{\hat{y}(W) - \max_{e \in W} \hat{y}_e \mid W \text{ ist ein Weg von } u \text{ nach } v\}$ mit $\hat{y} = y^1 + y^2$.

Wir geben eine Erläuterung der Rekursion. Im wesentlichen entspricht die Rekursion derjenigen aus (7.2.1.8). Schritt (1) und (2) ersetzen (7.2.1.8) (i), Schritt (3) entspricht genau (7.2.1.8) (ii) und die Punkte (4) und (5) korrespondieren zu (7.2.1.8) (iii). Allerdings werden in Rekursion (7.2.2.9) wesentlich mehr Fälle unterschieden, um die Eigenschaften (7.2.2.4) an den Steinerbaum und die Bedingungen (7.2.2.5) an die Filterfunktion zu berücksichtigen. Die in der Rekursion subtrahierten Werte $\frac{1}{2}, 1$ und 2 ergeben in der Summe genau den Wert $\alpha(S)$ des zugehörigen Steinerbaumes S . Punkt (1) der Rekursion berücksichtigt die Eigenschaften (7.2.2.4) (1), (3) und (4) sowie (7.2.2.5) (1). Schritt (2) beachtet (7.2.2.5) (2) sowie (7.2.2.4) (2.2) und (2.3). Die Unterteilung in Schritte (4) und (5) ist notwendig, um (7.2.2.5) (3) zu erfüllen. Informell ausgedrückt, bestimmen wir mit $l_r(v, i, j)$ eine untere Schranke für den minimalen Steinerbaum $S \in \mathcal{S}_{i, i+j}$ mit $d_S(v) \geq r$ für $r = 1, 2$. Ferner ist $l_Z(v, i, j)$ die Bewertung eines Teilbaumes von S mit $d_S(v) \geq 3$, der dem von einem Zusatzknoten induzierten Schnitt entspricht. Eine formal korrekte Formulierung gibt das folgende Lemma.

(7.2.2.10) Lemma

Für die in (7.2.2.9) rekursiv bestimmten Werte gilt

$$l_1(v, i, j) \leq \min_{\substack{S \in \mathcal{S}_{i, i+j} \\ v \in V(S) \setminus V_Z(S)}} \min_{a \in \mathcal{F}(S)} y^1(S \cap F_{a^1}) + y^2(S \cap F_{a^2}) - \alpha(S)$$

für alle $v \in V_D \setminus T_D$, $i = 1, \dots, z$, $j = 0, \dots, z-1$. (Wir erlauben auch den Fall $\emptyset \in \mathcal{S}_{i, i+j}$, falls die leere Menge (7.2.2.4) bezüglich $[d_i, d_j]$ erfüllt. Die Forderung $v \in V(S) \setminus V_Z(S)$ ist dann zu vernachlässigen).

Beweis.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über j . Für $j = 0$ ist die Behauptung richtig. Angenommen die Behauptung ist richtig für alle $k = 0, \dots, j-1$. Sei $v \in V_D \setminus T_D$ und $i \in \{1, \dots, z\}$ beliebig. Sei $\bar{S} \in \mathcal{S}_{i, i+j}$ ein kantenminimaler Steinerbaum bezüglich $\bar{C} \cup \bar{Z}$ mit $v \in V(\bar{S}) \setminus V_Z(\bar{S})$ und $\bar{a} \in \mathcal{F}(\bar{S})$ mit

$$y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) = \min_{\substack{S \in \mathcal{S}_{i, i+j} \\ v \in V(S) \setminus V_Z(S)}} \min_{a \in \mathcal{F}(S)} y^1(S \cap F_{a^1}) + y^2(S \cap F_{a^2}) - \alpha(S).$$

Es ist zu zeigen, daß $l_1(v, i, j) \leq y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S})$ gilt. Wir gehen dazu wie in dem Beweis von Lemma (7.2.1) vor und zeigen, daß es eine Aufteilung von \bar{S} in zwei Teilbäume gibt, die wiederum die Bedingungen (7.2.2.4) erfüllen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) $|\delta(v) \cap \bar{S}| \geq 2$.

Betrachte zuerst den Fall $|V(\bar{S}) \cap T_D| \geq 3$. Vergleiche dazu auch Abbildung 7.2.2.5. Die Tatsache, daß $v \notin V_Z(\bar{S})$ ist, und Bedingung (7.2.2.4) (2.3) implizieren, daß

$v \notin V(F_{\bar{S}})$ ist. Damit gibt es eine Aufteilung von \bar{S} in $\bar{S} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ mit $v \in V(\bar{S}_1)$, $v \in V(\bar{S}_2)$ und $l(\bar{S}) \in V(\bar{S}_1)$, so daß gilt: $\bar{S}_1 \in \mathcal{S}_{i,i_1}$ und $\bar{S}_2 \in \mathcal{S}_{i_2,i_1+j}$, wobei $d_{i_1} = r(\bar{S}_1)$ und $d_{i_2} = l(\bar{S}_2)$ sei. (Wir erlauben auch den Fall $\bar{S}_1 = \emptyset$ oder $\bar{S}_2 = \emptyset$; die Forderung $v \in V(\bar{S}_k)$ ist dann hinfällig, und wir setzen $i_1 = i$, falls $\bar{S}_1 = \emptyset$ und $i_2 = i_1 + 1$, falls $\bar{S}_2 = \emptyset$).

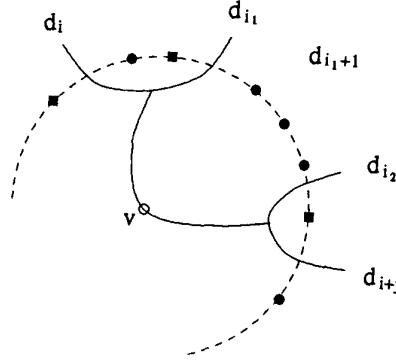


Abbildung 7.2.2.5

Da $v \notin V_Z(\bar{S})$ gilt, ist auch $v \notin V_Z(\bar{S}_i)$ für $i = 1, 2$. Da $\bar{S} \in \mathcal{S}_{i,i+j}$, ist auch $\bar{S}_2 \in \mathcal{S}_{i_1+1,i_1+j}$. Setze $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E \setminus \bar{S}_2$ und $a_e^k = 0$ für alle $e \in \bar{S}_2$, $k = 1, 2$. Ebenso sei $b_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E \setminus \bar{S}_1$ und $b_e^k = 0$ für alle $e \in \bar{S}_1$, $k = 1, 2$. Da \bar{a} eine Filterung für \bar{S} ist, ist offensichtlich a eine Filterung für \bar{S}_1 und b eine Filterung für \bar{S}_2 . Außerdem ist $\alpha(\bar{S}) = \alpha(\bar{S}_1) + \alpha(\bar{S}_2)$. Damit erhalten wir zusammen mit der Induktionsannahme und $j_0 = i_1 - i + 1$:

$$\begin{aligned} y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) &= y^1(\bar{S}_1 \cap F_{a^1}) + y^2(\bar{S}_2 \cap F_{a^2}) - \alpha(\bar{S}_1) \\ &\quad + y^1(\bar{S}_2 \cap F_{b^1}) + y^2(\bar{S}_2 \cap F_{b^2}) - \alpha(\bar{S}_2) \\ &\geq l_1(v, i, j_0 - 1) + l_1(v, i + j_0, j - j_0) \\ &\geq l_2(v, i, j) \geq l_1(v, i, j). \end{aligned}$$

Bleibt der Fall $|V(\bar{S}) \cap T_D| = 2$ zu untersuchen. Sei $\{d_{i_1}, d_{j_1}\} = V(\bar{S}) \cap T_D$. Gilt $d_{i_1} \neq d_i$ oder $d_{j_1} \neq d_{i+j}$, dann ist $\emptyset \in \mathcal{S}_{i,i_1}$ oder $\emptyset \in \mathcal{S}_{j_1,i+j}$, und es gilt die gleiche Argumentation wie im obigen Fall. Das Gleiche gilt für den Fall $(d_i, d_{i+j}) \notin \bar{Z}_T$. Sei also $(d_i, d_{i+j}) \in \bar{Z}_T$. In diesem Fall ist \bar{S} ein Weg. Da $v \in V(\bar{S}) \setminus V_Z(\bar{S})$ ist $f_{\bar{S}}(d_i) = v$, also ist v der Verzweigungsknoten von \bar{S} (vergleiche Definition der Funktion $f_{\bar{S}}$). Da a Filterung von \bar{S} ist, folgt mit (7.2.2.5) (2)

$$\begin{aligned} y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) &= l_Z(v, i, j) \\ &\geq l_1(v, i, j). \end{aligned}$$

(2) $|\delta(v) \cap \bar{S}| = 1$.

Sei $d_i = l(\bar{S})$ und $d_j = r(\bar{S})$. Gilt $d_{i_1} \neq d_i$ oder $d_{j_1} \neq d_{i+j}$, dann gilt $\emptyset \in \mathcal{S}_{i,i_1}$ oder $\emptyset \in \mathcal{S}_{j_1,i+j}$. Damit folgt die Behauptung analog zum Fall (1). Andernfalls existiert ein Knoten $u \in V_{\bar{S}}^3$, so daß $\bar{S} = P_{\bar{S}}(u, v) \cup S'$ ist mit $d_{S'}(u) \geq 2$ und $S' \in \mathcal{S}_{i,i+j}$ (beachte, daß $j > 0$ ist). Gilt $(d_i, d_j) \in \bar{Z}_T$, so erhalten wir aus (7.2.2.5) (1) und (7.2.2.5) (2)

$$\begin{aligned} y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) &\geq y_{-1}(v, u) + l_Z(u, i, j) \\ &\geq l_1(v, i, j). \end{aligned}$$

Ansonsten sei $a_e^k = \bar{a}_e^k$ für alle $e \in E \setminus P_{\bar{S}}(u, v)$ und $a_e^k = 0$ für alle $e \in P_{\bar{S}}(u, v)$, $k = 1, 2$. Offensichtlich ist a eine Filterung für S' , und es gilt $\alpha(\bar{S}) = \alpha(S')$. Bedingung (7.2.2.5) (3) zusammen mit (1) von oben implizieren, daß, falls $t_{i-1}, t_{i+j} \in T_k$ für ein $k \in \{1, 2\}$ gilt,

$$\begin{aligned} y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) &\geq y^k(v, u) + y^1(S' \cap F_{a^1}) + y^2(S' \cap F_{a^2}) - \alpha(S') \\ &\geq y^k(v, u) + l_2(u, i, j) \\ &\geq l_1(v, i, j), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y^1(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^1}) + y^2(\bar{S} \cap F_{\bar{a}^2}) - \alpha(\bar{S}) &\geq y(v, u) + y^1(S' \cap F_{a^1}) + y^2(S' \cap F_{a^2}) - \alpha(S') \\ &\geq y(v, u) + l_2(u, i, j) \\ &\geq l_1(v, i, j), \end{aligned}$$

falls $t_{i-1} \in T_k, t_{i+j} \in T_k$ gilt.

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Sei $l_{min} = \min_{v \in V_D \setminus T_D} \min_{1 \leq i \leq z} l_1(v, i, z-1)$. Offensichtlich gilt für jedes $S \in \mathcal{S}$, daß $V(S) \setminus V_Z(S) \neq \emptyset$ ist. Damit erhalten wir mit Lemma (7.2.2.10) $l_{min} \leq \beta$. Sei S_l die zu l_{min} gehörige Kantenmenge. Ebenso lassen sich die zugehörigen Terminalmengen C_l und T_l sowie ein Vektor $a_l \in \mathbb{R}^{N \times E}$, der die in der Rekursion vorgenommene Bewertung von S_l widerspiegelt, bestimmen.

Gilt $l_{min} \geq -1$, so wissen wir, daß es keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung gibt. Im Gegensatz zur Separierung der Steinerpartitions-Ungleichungen können wir für $l_{min} < -1$ nicht garantieren, daß S_l und a_l eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung definieren. Zum einen können wir zwar den Fall $S_l \in \mathcal{S}$ und $|C_l| + \frac{1}{2}|Z_l| < 4$ wie in Bemerkung (7.2.2.8) ausschließen, jedoch kann der Fall auftreten, daß $S_l \notin \mathcal{S}$ ist, obwohl $l_{min} < -1$ gilt. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

(7.2.2.11) Beispiel

Betrachte das Beispiel in Abbildung 7.2.2.6. Zugrundeliegt ein vollständiger rechtwinkliger 4×3 Gittergraph, die Terminals von Netz 1 sind als schwarze Rechtecke, die von Netz 2 als schwarze Kreise gezeichnet. Durchgezogene schwarze Linien bedeuten, daß die zugehörige Kante e den Wert $y_e^1 = 1$ hat. Entsprechend bedeuten gestrichelte Linien den Wert $y_e^2 = 0.5$ und gepunktete Linien den Wert $y_e^1 = 0.5$. Die zu l_{min} gehörende Kantenmenge in G_D ist

mit dicken schwarzen Linien gezeichnet. l_{min} setzt sich zusammen aus $l_{min} = (y_{-1}(4, 6) + l_Z(6, 4, 1) - 0.5) + l_1(4, 3, 0) + y^1(4, 2) + l_1(2, 1, 0) + l_1(2, 2, 0) = (0 + 1 - 1 - 0.5) + (0 - 0.5) + 0.5 + (0 - 0.5) + (0 - 0.5) = -1.5$. Die Verzweigungsknoten der Rekursion sind also die Knoten 6, 4 und 2, das heißt die Kante $[1, 2]$ wird zweimal durchlaufen. Die Vereinigung der zugehörigen Kantenmengen S_l hat dadurch als Verzweigungsknoten die Knoten 6, 4 und 1. Damit definiert a_l keine Filterung für S_l . Es läßt sich allerdings a_l in eine Filterung \bar{a}_l für S_l verändern, jedoch gilt dann $y^1(S_l \cap F_{\bar{a}_1^1}) + y^2(S_l \cap F_{\bar{a}_1^2}) - \alpha(S_l) = -1.0$. Das heißt die zugehörige Kreis-Ungleichung ist nicht verletzt.

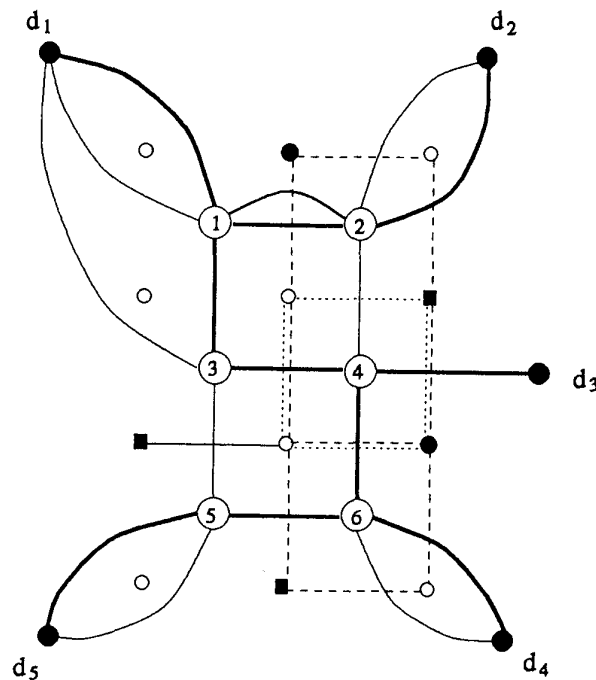


Abbildung 7.2.2.6

Wir sehen leider keine Möglichkeit, wie wir diese Fälle vermeiden können. Uns bleibt nichts anderes übrig als am Ende zu überprüfen, ob S_l und a_l tatsächlich eine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung definieren. Damit ist das hier entwickelte Verfahren leider kein exaktes Separierungsverfahren. Es ist jedoch in gewissem Sinne mehr als eine Heuristik, denn wir wissen, daß, wenn $l_{min} \geq -1$ ist, es keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung gibt. Wir fassen abschließend das vorgestellte Verfahren in algorithmischer Form zusammen und bestimmen die Laufzeit des Verfahrens.

(7.2.2.12) Algorithmus zur Separierung der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{\{T_1, T_2\} \times E}$, $y \geq 0$.

Output:

Eine der folgenden drei Möglichkeiten:

- eine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung,
- die Meldung "Es gibt keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung"
- die Meldung "Keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung gefunden"

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ und setze $T_D = \{d_1, \dots, d_{|T_1|+|T_2|}\}$ sowie $M = \{d_i \in T_D \mid t_i \in T_1 \text{ und } t_{i+1} \in T_2 \text{ oder } t_i \in T_2 \text{ und } t_{i+1} \in T_1\}$.
- (2) Ist $|M| = 2$, gib die Meldung "Es gibt keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung" aus, STOP.
- (3) Bestimme die Werte $y(u, v)$, $y_{-1}(u, v)$ und $y^k(u, v)$, $k = 1, 2$ für alle $u, v \in V_D$.
- (4) Bestimme $l_1(v, i, z - 1)$ für alle $v \in V_D \setminus T_D$ und $i = 1, \dots, z$ gemäß der Rekursion (7.2.2.9).
- (5) Setze $l_{min} = \min_{v \in V_D \setminus T_D} \min_{1 \leq i \leq z} l_1(v, i, z - 1)$.
- (6) Gilt $l_{min} \geq -1$, dann gib die Meldung "Es gibt keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung" aus, STOP.
- (7) Bestimme S_l und a_l .
- (8) Definiert S_l und a_l eine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung, dann gib die Ungleichung $a_l^T x \geq \alpha(S_l) - 1$ aus, STOP.
- (9) Gib die Meldung "Keine verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung gefunden" aus.
- (10) STOP.

Tatsächlich überprüfen wir nicht nur für l_{min} , ob die zugehörige Kantenmenge S_l und der Vektor a_l eine verletzte Kreis-Ungleichung definieren. Wir tun dies zusätzlich für alle während der Rekursion bestimmten Werte $l_2(v, i, j)$. Damit erhalten wir in der Regel eine Vielzahl von verletzten Kreis-Ungleichungen.

Betrachten wir nun noch die Laufzeit von Algorithmus (7.2.2.12). Die Laufzeit zur Bestimmung der Werte $l_1(v, i, z - 1)$ in Schritt (4) beträgt $O(|V_D|^2 \cdot (|T_1| + |T_2|)^2)$. Die Werte $y(u, v)$ und $y^k(u, v)$, $k = 1, 2$ können mit Hilfe eines Kürzesten-Wege-Algorithmus bestimmt werden. Es ist a-priori nicht klar, daß die Werte $y_{-1}(u, v)$ in polynomialer Zeit bestimmt werden können. Wir geben im folgenden einen Algorithmus an, der diese Werte in polynomialer Zeit berechnet. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Wir nennen für einen Weg W von u nach v den Wert $c(W) - \max_{e \in W} c_e$ die *Pseudodistanz* von W bezüglich der Kantengewichtsfunktion c . Ein Weg W^* heißt *kürzester Pseudoweg von u nach v* , falls $c(W^*) - \max_{e \in W^*} c_e = \min\{c(W) - \max_{e \in W} c_e \mid W \text{ ist ein Weg von } u \text{ nach } v\}$. Betrachten wir den folgenden Algorithmus.

(7.2.2.13) Algorithmus zur Bestimmung kürzester Pseudowege von s zu allen anderen Knoten

Input:

Ein Graph $G = (V, E)$, Kantengewichte $c_e \geq 0$, $e \in E$ und ein Knoten $s \in V$.

Output:

Für alle $v \in V$ die Pseudodistanz eines kürzesten Pseudoweges von s nach v und den Vorgängerknoten von v auf diesem Weg.

Datenstrukturen:

$d(v)$ = Länge eines kürzesten (s, v) -Weges.

$m(v)$ = Länge eines kürzesten Pseudoweges von s nach v .

$p(v)$ = Vorgängerknoten von v auf dem kürzesten Pseudoweg von s nach v .

- (1) Bestimme $d(v)$ für alle $v \in V$ mit Hilfe eines Kürzesten-Wege-Algorithmus.
Sei $p(v)$ der Vorgängerknoten auf dem kürzesten (s, v) -Weg.
- (2) Initialisiere $m(v) = d(v)$ für alle $v \in V$.
- (3) Setze $m(s) = 0$;
Markiere s , (alle anderen Knoten seien unmarkiert).
Für alle Knoten v , die zu s benachbart sind, setze
 $m(v) = 0$ und $p(v) = s$.
- (4) Solange noch nicht alle Knoten markiert sind, führe aus:
 - (5) Bestimme unmarkierten Knoten v mit $m(v) = \min\{m(u) \mid u \text{ ist unmarkiert}\}$.
 - (6) Markiere v .
 - (7) Für alle Knoten u , die zu v benachbart sind, führe aus:
Falls $\min\{m(v) + c_{vu}, d(v)\} < m(u)$, dann setze
 $m(u) = \min\{m(v) + c_{vu}, d(v)\}$ und $p(u) = v$.
- (8) Gib die Werte $m(v)$ und $p(v)$ für alle $v \in V$ aus.
- (9) STOP.

Algorithmus (7.2.2.13) ist nur eine leichte Modifikation des Dijkstra-Algorithmus zur Berechnung kürzester Wege (siehe [D59]). Der Dijkstra-Algorithmus ist nicht unbedingt der effizienteste Algorithmus, der verwendet werden kann, um kürzeste Pseudowege zu bestimmen. Dies war auch nicht unser Ziel. Wir wollen an dieser Stelle nur zeigen, daß es überhaupt möglich ist, kürzeste Pseudowege in polynomialer Zeit bestimmen zu können. Daß Algorithmus (7.2.2.13) korrekt arbeitet, zeigen wir im folgenden Satz.

(7.2.2.14) Satz

Algorithmus (7.2.2.13) arbeitet korrekt.

Beweis.

Wir beweisen durch Induktion über die Anzahl der markierten Knoten folgendes. Ist v markiert, so enthält $m(v)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, v) -Pseudoweges. Ist v unmarkiert und $m(v) < d(v)$, so enthält $m(v)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, v) -Pseudoweges, wobei als innere Knoten nur markierte Knoten erlaubt sind. Daraus folgt offensichtlich die Behauptung.

Ist nur ein Knoten (also s) markiert, so ist die Behauptung aufgrund von Schritt (3) richtig. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für $i - 1$ markierte Knoten richtig ist, und in Schritt (5) ein i -ter Knoten, sagen wir v , ausgewählt wurde. Wir behaupten, daß $m(v)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, v) -Pseudoweges ist. Angenommen, es existiert ein kürzerer Pseudoweg von s nach v . Sei P ein solcher Weg mit Pseudodistanz m_P . Dann muß P eine Kante von einem markierten Knoten zu einem unmarkierten Knoten enthalten. Sei uw (mit w unmarkiert) die erste solche Kante. Sei $P_1 \subset P$ der Weg von s nach w und $e \in P$ mit $c_e = \max_{e \in P} c_e$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) $e \in P_1$.

Sei m_{P_1} die Pseudodistanz von P_1 . Gilt $m(w) < d(w)$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $m(w)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, w) -Pseudoweges, dessen innere Knoten alle markiert sind. Da P_1 ebenfalls ein solcher Weg ist, gilt $m(w) \leq m_{P_1}$ und damit $m_P \geq m_{P_1} \geq m(w) \geq m(v)$, (die erste Ungleichung gilt, da es nur positive Kantengewichte gibt, die letzte Ungleichung gilt aufgrund der Wahl von v), ein Widerspruch. Es bleibt der Fall $m(w) = d(w)$. Da u vor v markiert wurde, gilt $m(w) \leq \min\{m(u) + c_{uw}, d(u)\} \leq m_{P_1}$ (vergleiche Schritt (7)). Damit erhalten wir wie oben einen Widerspruch.

(b) $e \in P \setminus P_1$.

Dann gilt $m_P \geq m_{P_1} \geq d(w) \geq m(w) \geq m(v)$ (die erste Ungleichung gilt, da es nur positive Kantengewichte gibt und $d(w)$ die Länge eines kürzesten (s, w) -Weges ist, die letzte Ungleichung gilt aufgrund der Wahl von v), ein Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen, daß für die unmarkierten Knoten u mit $m(u) < d(u)$ der Wert $m(u)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, u) -Pseudoweges ist, der nur markierte Knoten als innere Knoten enthält. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Vor der Abfrage in Schritt (7) war bereits $m(u) < d(u)$ erfüllt.

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $m(u)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, u) -Pseudoweges, der als innere Knoten nur markierte Knoten verschieden von v enthält. Dieser Wert wird in Schritt (7) verglichen mit der Pseudodistanz eines kürzesten (s, u) -Pseudoweges, dessen Vorgänger v ist und der nur markierte Knoten enthält. Angenommen es gibt einen kürzeren (s, u) -Pseudoweg P über markierte Knoten mit $v \in V(P)$ und $wu \in P$, $w \neq v$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit P der kürzeste Pseudoweg und m_P die Pseudodistanz von P . Ist $m_P = d(w)$ (also wu die maximale Kante), so gilt $m_P = d(w) \geq d(v) \geq m(u)$, ein Widerspruch. Andernfalls ist $m_P = m(w) + c_{wu}$. Da w vor v markiert wurde, existiert nach Induktionsvoraussetzung ein (s, w) -Pseudoweg P' über markierte Knoten, der v nicht enthält. Sei $m_{P'}$ die Pseudodistanz von P' . Dann gilt $m_P = m(w) + c_{wu} \geq m_{P'} + c_{wu} \geq m(u)$, ein Widerspruch.

(2) Vor der Abfrage in Schritt (7) war $m(u) = d(u)$.

Da nach Ausführung von Schritt (7) $m(u) < d(u)$ gilt, ist $m(u)$ die Pseudodistanz eines kürzesten (s, u) -Pseudoweges, dessen Vorgänger v ist und der nur markierte Knoten enthält. Angenommen es gibt einen kürzeren (s, u) -Pseudoweg P über markierte Knoten, dessen Vorgängerknoten (= w) verschieden von v ist. Sei m_P die Pseudodistanz von P . Offensichtlich ist $m_P = \min\{d(w), m(w) + c_{wu}\}$. Da w vor v markiert wurde und $m(u) = d(u)$ vor Ausführung von Schritt (7) galt, folgt, daß $d(u) \leq \min\{d(w), m(w) + c_{wu}\} = m_P$ gilt, ein Widerspruch.

Damit ist der Beweis vollständig. □

Damit können wir nun auch die Laufzeit von Algorithmus (7.2.2.12) angeben.

(7.2.2.15) Korollar

Die Laufzeit von Algorithmus (7.2.2.12) beträgt $O(|V_D|^2 \cdot (|T_1| + |T_2|)^2 + \gamma)$, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren (mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus) ist.

Darüber hinaus haben wir eine Heuristik zur Separierung der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen implementiert. Wir verwenden dazu wieder die Idee von Matsuyama und Takahashi [TM80] zur Berechnung eines minimalen Steinerbaumes. Wir betrachten die Menge $M \subseteq T_D$. (Zur Erinnerung, wir hatten $M = \{d_i \in T_D \mid t_i \in T_1 \text{ und } t_{i+1} \in T_2 \text{ oder } t_i \in T_2 \text{ und } t_{i+1} \in T_1\}$ definiert.) Ist $|M| < 4$, so existiert offensichtlich keine bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung. Andernfalls berechnen wir ausgehend von jedem Terminalpaar $d_i, d_j \in M$ analog zur Vorgehensweise in Heuristik (7.2.1.12) einen Steinerbaum S bezüglich M in G_D mit $d_S(d) = 1$ für $d \in M$ und $d_S(d) = 0$ für $d \in T_D \setminus M$. Damit erfüllt S die Bedingungen (7.2.2.4). Wir berechnen nun noch eine Filterung a für S und überprüfen, ob die dadurch induzierte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung verletzt ist. Detailliert stellt sich der Algorithmus folgendermaßen dar.

(7.2.2.16) Separierungsheuristik für die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, T_2\}$ mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{\{T_1, T_2\} \times E}$, $y \geq 0$.

Output:

Verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichungen, falls welche gefunden werden.

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ mit $T_D = \{d_1, \dots, d_{|T_1|+|T_2|}\}$.
- (2) Setze $M = \{d_i \in T_D \mid t_i \in T_1 \text{ und } t_{i+1} \in T_2 \text{ oder } t_i \in T_2 \text{ und } t_{i+1} \in T_1\}$.
- (3) Bestimme einen kürzesten Weg $W(u, v)$ von u nach v in G_D bezüglich der Gewichtsfunktion $\psi = y^1 + y^2$ für alle $u, v \in V_D$, so daß kein innerer Knoten der jeweiligen Wege aus T_D ist.
- (4) Für alle Knotenpaare $d_i, d_j \in M$, $d_i \neq d_j$ führe aus:
 - (5) Setze $S = W(d_i, d_j)$ und $M' = M \setminus \{d_i, d_j\}$.
 - (6) Solange $M' \neq \emptyset$ führe aus:
 - (7) bestimme $d \in M'$ und $v \in V(S) \setminus T_D$ mit

$$\psi(W(v, d)) = \min_{d' \in M'} \min_{v' \in V(S) \setminus T_D} \psi(W(v', d')).$$

- (8) Setze $S = S \cup W(v, d)$ und $M' = M' \setminus \{d\}$.
- (9) Bestimme eine Filterung a für S .
- (10) Ist $a^T y < \alpha(S) - 1$, dann gib die Ungleichung $a^T x \geq \alpha(S) - 1$ aus.
- (11) STOP.

Die Laufzeit von Algorithmus (7.2.1.16) beträgt $O(|M|^4 \cdot |V_D| + \gamma)$, wobei γ die Laufzeit zur Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren ist. In den meisten Anwendungsbeispielen ist $|M|$ sehr klein, so daß mit dieser Heuristik eine beträchtliche Laufzeitreduzierung gegenüber dem dynamischen Programm (7.2.2.12) erzielt wird. Allerdings liefert Algorithmus (7.2.1.16) nicht so gute Ergebnisse wie (7.2.2.12), wie wir in Kapitel 8.2 noch sehen werden.

7.2.3. Separierung der Gitter-Ungleichungen

In diesem Abschnitt soll eine Heuristik zur Separierung der Gitter-Ungleichungen aus Abschnitt 6.3.6 entwickelt werden. Wir vermuten, daß die in Satz (6.3.6.2) beschriebenen Instanzen uns stärker verletzte Ungleichungen für die Switchbox-Verdrahtungsprobleme liefern als die in Satz (6.3.6.3) angegebenen. Daher betrachten wir im folgenden nur die in Satz (6.3.6.2) dargelegten Ungleichungen. Ferner beschränken wir uns aus den bereits eingangs erwähnten Gründen nicht nur auf solche Ungleichungen, die eine Facette für das Steinerbaumpackungs-Polyeder der gegebenen Instanz definieren. In unserem Fall bedeutet das, daß wir die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz (6.3.6.2) nicht berücksichtigen. Ebenso können wir auf die Eigenschaft, daß $[V(J_1) : V(J_2)]$ einen Schnitt in dem facettendefinierenden Graphen aus (6.3.6.2) definiert, verzichten.

Sei also $G = (V, E)$ der zugrundeliegende Graph der gegebenen Instanz $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ sowie T_1 und T_2 zwei Terminalmengen der Netzliste \mathcal{N} . Außerdem sei $\bar{y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$, $\bar{y} \geq 0$, (die Lösung des aktuellen linearen Programms) gegeben. Wir setzen $y = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$. Wir suchen gemäß Satz (6.3.6.2) einen Teilgraphen $\hat{G} = (V, \hat{E})$ und Kantenmengen $F_1, F_2 \subset E \setminus \hat{E}$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) \hat{G} ist ein vollständiger rechteckiger $2 \times h$ Gittergraph mit $h \geq 3$.
- (ii) $T_1 = \{(1, 1), (h, 2)\}$ und $T_2 = \{(1, 2), (h, 1)\}$.
- (iii) Für alle $u, v \in V(\hat{E})$, $u \neq v$, existiert kein Weg von u nach v in (V, F_k) für $k = 1, 2$.
- (iv) F_1 und F_2 sind maximal bezüglich der Eigenschaft (iii).
- (v) $(\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T y < 1$.

Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation wie in Abschnitt 6.3.6 an, daß die Knotenmenge V so numeriert ist, daß \hat{V} eine Numerierung wie in Definition (6.3.6.1) erhält.

Wie aus dem Beweis zu Satz (6.3.6.2) ersichtlich ist, implizieren die Bedingungen (i) – (iii) die Gültigkeit der Ungleichung $(\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T x \geq 1$ für STP $(G, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$. Allerdings sind die Bedingungen (i) und (ii) sehr restriktiv. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß es für eine gegebene Instanz (G, \mathcal{N}, c) zwei Terminalmengen $T_1, T_2 \in \mathcal{N}$ und einen Teilgraphen $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ gibt, die (i) und (ii) erfüllen. Unser Ziel ist daher zunächst die Bedingungen (i) und (ii) zu entschärfen.

Sei $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein vollständiger rechteckiger $2 \times h$ Gittergraph. Offensichtlich ist $C = O_{\hat{G}}$ ein Kreis. Bedingung (ii) impliziert unter anderem, daß T_1 und T_2 in alternierender Reihenfolge auf C vorkommen und kein Terminal inzident zu einer Kante aus $\hat{E} \setminus C$ ist. Die Menge $\hat{E} \setminus C$ ist eine Teilmenge der Diagonalen von C mit der Eigenschaft, daß keine zwei Kanten zum gleichen Knoten adjazent sind. Das heißt insbesondere, kein Knoten aus \hat{V} ist zu mehr als drei Kanten inzident. Wir ersetzen nun \hat{G} durch einen Graphen, so daß diese Eigenschaften erhalten bleiben.

(7.2.3.1) Lemma

Sei $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ein planarer Graph, so daß $O_{\hat{G}}$ ein Kreis ist. Seien $T_1 = \{t_1^1, t_2^1\}$ und $T_2 = \{t_1^2, t_2^2\}$ zwei disjunkte Terminalmengen mit $T_1, T_2 \subset \hat{V}(O_{\hat{G}})$, so daß die Terminals beim Abläufen von $O_{\hat{G}}$ (im oder gegen den Uhrzeigersinn) in der Reihenfolge $t_1^1, t_2^1, t_1^2, t_2^2$

vorkommen. Außerdem gelte $\delta(v) \leq 3$ für alle $v \in \hat{V} \setminus (T_1 \cup T_2)$ und $\delta(v) = 2$ für $v \in T_1 \cup T_2$. Dann existiert keine Packung von Steinerbäumen für die Instanz $(\hat{G}, \{T_1, T_2\}, \mathbb{I})$.

Die Korrektheit von Lemma (7.2.3.1) ist folgendermaßen einzusehen. Angenommen, es gibt eine Packung von Steinerbäumen $P = (S_1, S_2)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind S_1 und S_2 Wege. Da alle Terminals Grad zwei haben, müssen sich die Wege in einem inneren Knoten v kreuzen. Dies impliziert, daß der Knoten v einen Grad größer als drei hat, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit können wir die Bedingungen (i) und (ii) durch die Voraussetzungen in Lemma (7.2.3.1) ersetzen.

Wir wollen nun noch die Bedingung, $T_1, T_2 \subset \hat{V}(O_{\hat{G}})$, verallgemeinern. Statt dieser Bedingung fordern wir, daß es für jedes Terminal $t \in T_k$ einen Weg $W(t, v_t)$ von t nach v_t mit $v_t \in \hat{V}(O_{\hat{G}})$ und $W(t, v_t) \subset F_k$ gibt für $k = 1, 2$. Daß diese Änderung an der Gültigkeit nichts ändert, ist wie folgt einzusehen. Seien $W(t_1^1, v_1^1)$, $W(t_2^1, v_2^1)$, $W(t_1^2, v_1^2)$ und $W(t_2^2, v_2^2)$ vier Wege, die die Terminals mit dem Kreis $O_{\hat{G}}$ verbinden. Die vier Knoten $v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2$ sind eindeutig aufgrund der Bedingung (iii). Für jede Packung von Steinerbäumen (S_1, S_2) , die $(\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T x \geq 1$ verletzt, gilt also $v_1^1, v_2^1 \in V(S_1)$ und $v_1^2, v_2^2 \in V(S_2)$. Damit gibt es aber auch eine Lösung für die Instanz $(\hat{G}, \{T_1', T_2'\}, \mathbb{I})$ mit $T_1' = \{v_1^1, v_2^1\}$ und $T_2' = \{v_1^2, v_2^2\}$, ein Widerspruch zu Lemma (7.2.3.1).

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Ungleichung offensichtlich gültig bleibt, falls die beiden Terminalmengen Kardinalität größer zwei haben.

Wir suchen nun nach einem Teilgraphen $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ und Kantenmengen $F_1, F_2 \subset E \setminus \hat{E}$, die an Stelle der Bedingungen (i) – (v) die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i') $O_{\hat{G}}$ ist ein Kreis.
- (ii') Es existieren Terminals $t_1^1, t_2^1 \in T_1$ und $t_1^2, t_2^2 \in T_2$ sowie Knoten $v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2 \in V(O_{\hat{G}})$, so daß es für $k = 1, 2$ einen Weg von t_1^k nach v_1^k und einen Weg von t_2^k nach v_2^k in $(V(F_k), F_k)$ gibt. Zusätzlich gilt, daß die Knoten $v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2$ beim Ablaufen von $O_{\hat{G}}$ (im oder gegen den Uhrzeigersinn) in der Reihenfolge $v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2$ vorkommen.
- (iii') $\delta_{\hat{G}}(v) \leq 3$ für alle $v \in \hat{V} \setminus \{v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2\}$ und $\delta_{\hat{G}}(v) = 2$ für $v \in \{v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2\}$.
- (iv') Für alle $u, v \in V(\hat{E})$, $u \neq v$, existiert kein Weg von u nach v in (V, F_k) für $k = 1, 2$.
- (v') F_1 und F_2 sind maximal bezüglich der Eigenschaft (iv').
- (vi') $(\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T y < 1$.

Aufgrund obiger Vorbemerkungen ist klar, daß ein Teilgraph $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ und Kantenmengen $F_1, F_2 \subset E \setminus \hat{E}$, die die Bedingungen (i') – (vi') erfüllen, eine gültige Ungleichung $(\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T x \geq 1$ für STP $(G, \mathcal{N}, \mathbb{I})$ definieren. Außerdem ist offensichtlich, daß Teilgraphen und Kantenmengen, die (i) – (iv) erfüllen, auch (i') – (vi') erfüllen. Wir wollen deshalb eine Ungleichung, die von einem Teilgraphen und Kantenmengen, die (i') – (vi') erfüllen, induziert wird, eine *verallgemeinerte Gitter-Ungleichung* nennen. Im folgenden Algorithmus stellen wir eine Heuristik zur Separierung der verallgemeinerten Gitter-Ungleichungen dar.

(7.2.3.2) Separierungsheuristik für die verallgemeinerten Gitter-Ungleichungen

Input:

Ein planarer Graph G , Terminalmengen $T_1, T_2 \subset V(O_G)$ und $y \in \mathbb{R}^{\{T_1, T_2\} \times E}$.

Output:

Eine verallgemeinerte Gitter-Ungleichung, die y verletzt, oder die Meldung, daß keine verletzte verallgemeinerte Gitter-Ungleichung gefunden wurde.

- (1) Bestimme einen 2-fach knotenzusammenhängenden Teilgraphen G' von G .
- (2) Sei $C = O_{G'}$ und $I \subset E$ die Menge aller Kanten, die innerhalb von C liegen und $A \subset E$ die Menge aller Kanten, die außerhalb von C liegen.
- (3) Bestimme für jedes Terminal $t_i^k \in T_k$ einen Knoten $v_i^k \in V(C)$, so daß es einen Weg $W_{i,k}$ von t_i^k nach v_i^k gibt mit $W_{i,k} \subset A$ für $k = 1, 2$.
- (4) Wähle aus den in (3) bestimmten Knoten vier Knoten $\bar{v}_1^1, \bar{v}_2^1, \bar{v}_1^2, \bar{v}_2^2$ aus, die Bedingung (ii') erfüllen (seien $\bar{W}_1^1, \bar{W}_2^1, \bar{W}_1^2, \bar{W}_2^2$ die dazugehörigen Wege).
- (5) Existieren solche Knoten nicht, dann STOP (keine verletzte Ungleichung gefunden).
- (6) Sortiere die Kanten in I in absteigender Reihenfolge bezüglich der Gewichtsfunktion $y^1 + y^2$.
- (7) Setze $\hat{E} = C$.
- (8) Füge Kanten aus I gemäß der Sortierung zu \hat{E} hinzu, so daß Bedingung (iii') erfüllt bleibt.
- (9) Setze $F_1 = \bar{W}_1^1 \cup \bar{W}_2^1$.
- (10) Sortiere die Kanten in $A \setminus F_1$ in absteigender Reihenfolge bezüglich der Gewichtsfunktion y^1 .
- (11) Füge Kanten aus $A \setminus F_1$ gemäß der Sortierung zu F_1 hinzu, so daß Bedingung (iv') erfüllt bleibt.
- (12) Zur Bestimmung von F_2 führe die Schritte (9) – (11) entsprechend aus.
- (13) Gilt $a = (\chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_1)}, \chi^{E \setminus (\hat{E} \cup F_2)})^T y < 1$, so gib die Ungleichung $a^T x \geq 1$ aus.
- (14) Andernfalls gib die Meldung "Keine verletzte Ungleichung gefunden" aus.
- (15) STOP.

Ein paar Anmerkungen zur Implementierung von Algorithmus (7.2.3.2) sind angebracht. In Schritt (1) suchen wir eine 2-fach knotenzusammenhängende Komponente G' in dem Graphen (V, \bar{E}) mit $\bar{E} = \{e \in E \mid y^1 + y^2 \geq \text{TRESH}\}$. TRESH ist ein Parameter, der in der aktuellen Implementierung auf 0.25 gesetzt ist. Die Idee, die dahinter steckt, ist die folgende. Die Kanten der gewählten 2-fach knotenzusammenhängende Komponente erhalten überwiegend Koeffizient 0 in der zu konstruierenden Ungleichung. Daher ist es sinnvoll, möglichst Kanten mit hohem Gewicht zu wählen. Das gleiche Argument trifft für die Auswahl der Wege in Schritt (3) zu. Wir bestimmen durch Tiefensuche (besser bekannt unter dem englischen Namen "Depth First Search") die jeweiligen Wege, wobei wir in jedem Schritt die Kante mit maximalen Gewicht (bezüglich y^k) wählen. In Schritt (4) wählen wir diejenigen vier Knoten $\bar{v}_1^1, \bar{v}_2^1, \bar{v}_1^2, \bar{v}_2^2$ aus, die $y^+(I \cap \delta(\bar{v}_1^1)) + y^+(I \cap \delta(\bar{v}_2^1)) + y^+(I \cap \delta(\bar{v}_1^2)) + y^+(I \cap \delta(\bar{v}_2^2))$ minimieren (mit $y^+ = y^1 + y^2$), da die entsprechenden Kanten derjenigen Knoten, die gewählt werden, alle Koeffizient Eins in der resultierenden Ungleichung erhalten. Die Vorgehensweise in den Schritten (8) und (11) versucht nach lokalen Gesichtspunkten die verbleibenden Kanten auszuwählen.

7.2.4. Bestimmung kritischer Schnitte

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Problem, kritische Schnitte zu finden. Gemäß Definition (6.3.7.1) aus Kapitel 6.3.7 ist ein von einer Knotenmenge W induzierter Schnitt kritisch für eine gegebene Instanz (G, \mathcal{N}, c) , falls $s(W) = c(\delta(W)) - |S(W)| \leq 1$ gilt, wobei $S(W) = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid T_k \cap W \neq \emptyset, T_k \cap (V \setminus W) \neq \emptyset\}$ ist. Warum wir uns für das Auffinden kritischer Schnitte und nicht für das Separieren der Kritischen-Schnitt-Ungleichungen aus Kapitel 6.3.7 direkt interessieren, wird aus den folgenden Erläuterungen klar.

Zunächst beobachten wir folgendes: Es existiert keine Packung von Steinerbäumen für die gegebene Instanz (G, \mathcal{N}, c) , falls es eine Knotenmenge W gibt, für die $s(W) < 0$ gilt. Finden wir also einen solchen Schnitt, so können wir a-priori feststellen, daß die gegebene Problem Instanz keine Lösung hat.

Darüber hinaus sind aber auch von einer Knotenmenge W induzierte Schnitte mit $s(W) = 0$ von besonderer Wichtigkeit. Diese implizieren nämlich die folgenden Gleichungen.

$$(7.2.4.1) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & x^k(\delta(W)) = 1, \quad \text{für alle } k \in S(W); \\ \text{(ii)} & x_e^k = 0, \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, N\} \setminus S(W), e \in \delta(W). \end{array}$$

Gehen wir noch einen Schritt weiter. Aus praktischer Sicht sind wir nur an Packungen von Steinerbäumen interessiert, wobei jeder Steinerbaum kantenminimal ist (vergleiche auch Bemerkung im Anschluß an Definition (3.1.1)). Wir wissen, daß wir aufgrund der Minimierung einer positiven Zielfunktion in jedem Fall kantenminimale Steinerbäume erhalten. Wir können jedoch die Eigenschaft kantenminimaler Steinerbäume bereits an dieser Stelle ausnützen. Betrachte dazu einen von W induzierten Schnitt mit $s(W) = 1$. Offensichtlich kann kein kantenminimaler Steinerbaum S_k , $k \notin S(W)$, einer Packung von Steinerbäumen eine Kante aus $\delta(W)$ enthalten. Also können wir ebenfalls (7.2.4.1) (ii) fordern, wenn wir uns auf kantenminimale Lösungen einschränken.

Untersuchen wir die Ungleichungen (7.2.4.1) (ii) noch etwas genauer. Da W einen Schnitt induziert, bedeutet das, daß ein kantenminimaler Steinerbaum S_k für T_k mit $T_k \subseteq W$ auch keine der Kanten aus $E(V \setminus W)$ enthalten kann. Genauso kann umgekehrt kein kantenminimaler Steinerbaum S_k für T_k mit $T_k \subseteq V \setminus W$ eine der Kanten aus $E(W)$ enthalten. Also können wir zusätzlich fordern

$$(7.2.4.2) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & x_e^k = 0, \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, N\} \setminus S(W), T_k \subseteq W, e \in E(V \setminus W); \\ \text{(ii)} & x_e^k = 0, \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, N\} \setminus S(W), T_k \subseteq V \setminus W, e \in E(W). \end{array}$$

Wir sehen also, daß mit Hilfe von kritischen Schnitten eine Vielzahl von Variablen fixiert werden können. Damit lassen sich die Größenordnungen der Probleme beträchtlich reduzieren.

An dieser Stelle sieht man nun auch sehr schön den Zusammenhang mit den in Kapitel 6.3.7 definierten Kritischen-Schnitt-Ungleichungen. Betrachten wir nochmals die Voraussetzungen von Satz (6.3.7.2). Gegeben ein Graph $G = (V, E, \psi)$ mit $V = \{u, v, w\}$

und $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Netzliste mit $T_1 = \{u, v\}$. Ferner gelte $|E_{uv}| \geq 2$, $|N_w| = N - 1$, $|N_u| + |N_v| = N + 1$, $|E_{uw}| \geq |N_u| - 1$, $|E_{vw}| \geq |N_v| - 1$ und $|E_{uw}| + |E_{vw}| = |N_u| + |N_v| - 1$ (zur Definition von E_{ij} , N_i , $i, j \in V$, vergleiche Satz (6.3.7.2)). Diese Bedingungen an N_i und E_{ij} für $i, j \in V$ implizieren, daß $\delta(\{w\})$ ein Schnitt ist für den gilt $|S(\{w\})| = N - 1$ und $|\delta(\{w\})| = |N_u| + |N_v| - 1 = N$. Da $c = \mathbb{1}$ gilt, folgt $s(\{w\}) = c(\delta(\{w\})) - |S(\{w\})| = |\delta(\{w\})| - |S(\{w\})| = (N + 1) - N = 1$. Also definiert $W = \{w\}$ einen kritischen Schnitt. Damit gilt (für kanteminimale Lösungen)

$$x_e^1 = 0, \quad \text{für alle } e \in \delta(W).$$

Durch Fixieren dieser Variablen können wir nun die Kritischen-Schnitt-Ungleichungen implizit über die Separierung der Steinerschnitt-Ungleichungen separieren. Eine Steinerschnitt-Ungleichung für T_1 aus der Instanz in Satz (6.3.7.2) hat beispielsweise die Form $x^1(\delta(u)) = x^1(E_{uw}) + x^1(E_{uv}) \geq 1$. Unter Berücksichtigung der fixierten Variablen erhalten wir daraus die Kritische-Schnitt-Ungleichung $x^1(E_{uv}) \geq 1$.

Wir sehen also, daß kritische Schnitte uns wichtige Informationen über die Lösbarkeit beziehungsweise die Lösung einer gegebenen Probleminstanz geben. Wir beschäftigen uns nun damit, wie wir für eine gegebene Instanz (G, \mathcal{N}, c) kritische Schnitte bestimmen können. Wir beschränken uns dabei auf Probleminstanzen $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$, wobei G ein vollständiger rechteckiger Gittergraph ist, und \mathcal{N} eine Netzliste mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$ ist. Wir machen zunächst die folgende Beobachtung.

(7.2.4.3) Lemma *Sei G ein vollständiger rechteckiger Gittergraph und \mathcal{N} eine Netzliste mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$. Sei $W \subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$, eine Knotenmenge, so daß der von W induzierte Schnitt kritisch für die Instanz $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ ist. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen.*

- (i) *Es existiert ein $w \in V$, so daß $\delta(w)$ ein kritischer Schnitt für $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ ist.*
- (ii) *Es existiert ein horizontaler oder vertikaler, kritischer Schnitt für $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$.*

Beweis. Sei $N_u = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid u \in T_k\}$ für $u \in V$ und $V_C = \{v \in V \mid |\delta(v)| = 2\}$. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann gilt $|N_v| \leq 1$ für alle $v \in V(O_G)$ und $|N_v| = 0$ für alle $v \in V_C$. Sei $W \subset V$ eine Knotenmenge, so daß der von W , $\emptyset \neq W \neq V$, induzierte Schnitt kritisch für die Instanz $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1})$ ist, und $s(W)$ minimal ist. Sei $\bar{W} = V \setminus W$. Seien $(W_i, E(W_i))$, $i = 1, \dots, l$ die Komponenten von $(W, E(W))$ sowie $(\bar{W}_i, E(\bar{W}_i))$, $i = 1, \dots, l$ die Komponenten von $(\bar{W}, E(\bar{W}))$. Wähle nun $U \in \{W_1, \dots, W_l, \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_l\}$ mit $(U \cap V(O_G), E(U) \cap O_G)$ zusammenhängend und $|U \cap V(O_G)|$ minimal. O. d. B. A. sei $U \in \{\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_l\}$. Da wir W mit $s(W)$ minimal gewählt haben, gilt $|U \cap V(O_G)| \geq 1$. Wir unterscheiden drei Fälle.

- (1) $U \cap V_C = \emptyset$.

Es gilt $|\delta(U)| \geq |U \cap V(O_G)| + 2 \geq |S(U)| + 2$, da $|N_v| \leq 1$ für alle $v \in V(O_G)$. Setze $W' = W \cup U$. Dann gilt $c(\delta(W')) = c(\delta(W)) - c(\delta(U))$ (beachte $c = \mathbb{1}$) und $|S(W')| \geq |S(W)| - |S(U)|$. Damit gilt $s(W') = c(\delta(W')) - |S(W')| \leq c(\delta(W)) - |S(W)| + (|S(U)| - |\delta(U)|) \leq c(\delta(W)) - |S(W)| - 2$. Da $s(W) \leq 1$ gilt, folgt damit $s(W') \leq -1$. Also ist $\emptyset \neq W' \neq V$. Dies widerspricht der Wahl von W .

(2) $|U \cap V_C| = 1.$

Dann gilt $|\delta(U)| \geq |U \cap V(O_G)| + 1 \geq |S(U)| + 2$, da $|N_v| = 0$ für alle $v \in V_C$. Genau wie oben erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von W .

(3) $|U \cap V_C| = 2.$

Gilt $|\delta(U)| \geq |S(U)| + 2$, so erhalten wir einen Widerspruch wie oben. Andernfalls seien $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in U \cap V(O_G)$ mit $\delta((i_0, j_0)) \cap \delta(U) \neq \emptyset$ und $\delta((i_1, j_1)) \cap \delta(U) \neq \emptyset$, wobei die Knoten so numeriert seien, daß $V = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, b\}$ ist. Wir behandeln o. B. d. A. den Fall $i_0 = 1, i_1 = h, j_0 \leq j_1$ und $(1, 1) \in U$. Die anderen Fälle gehen völlig analog. Da U kein vertikaler Schnitt ist, gilt $j_0 < j_1$. Sei $U' = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, j_0\}$. Dann ist U' ein vertikaler Schnitt mit $c(\delta(U')) \leq c(\delta(U)) - |j_1 - j_0|$ und $|S(U')| \geq |S(U)| - |j_1 - j_0|$, da $|N_v| \leq 1$ für alle $v \in V(O_G)$. Damit erhalten wir $c(\delta(U')) - |S(U')| \leq c(\delta(U)) - |j_1 - j_0| - (|S(U)| - |j_1 - j_0|) = c(\delta(U)) - |S(U)| \leq 1$. Also ist auch U' ein kritischer Schnitt, ein Widerspruch zur Annahme.

Der Fall $|U \cap V_C| \geq 3$ kann nicht auftreten aufgrund der Wahl von U . Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt. Also ist mindestens eine der Aussagen (i) und (ii) richtig. \square

Dieses Lemma verwenden wir als Basis zur Entwicklung eines Algorithmus zum Auffinden kritischer Schnitte. Wir untersuchen alle Knoten $v \in V$, ob sie einen kritischen Schnitt induzieren. Das Gleiche führen wir für alle horizontalen und vertikalen Schnitte durch. Ist darunter kein kritischer Schnitt, so existiert gemäß des Lemmas kein kritischer Schnitt. Andernfalls fixieren wir die entsprechenden Variablen. Um möglichst viele kritische Schnitte zu finden, erweitern wir jeden Knoten $w \in V$, der einen kritischen Schnitt induziert, in alle vier Richtungen solange das dadurch entstehende Rechteck ebenfalls einen kritischen Schnitt induziert. Im Detail sieht der Algorithmus wie folgt aus.

(7.2.4.4) Algorithmus zur Bestimmung kritischer Schnitte

Input:

Ein vollständiger rechteckiger Gittergraph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c = \mathbb{1}$, eine Netzliste \mathcal{N} mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$.

Output:

Eine Liste L fixierter Variablen

- (1) $L := \emptyset.$
- (2) Für alle $W \subset V$, die einen horizontalen oder vertikalen Schnitt induzieren, führe aus:
 - (3) Gilt $s(W) \leq 1$, dann setze
 - (4) $L := L \cup \{x_e^k\}$ für alle $e \in E(V \setminus W) \cup \delta(W)$, falls $k \notin S(W)$ und $T_k \subseteq W$;
 - (5) $L := L \cup \{x_e^k\}$ für alle $e \in E(W) \cup \delta(W)$, falls $k \notin S(W)$ und $T_k \subseteq V \setminus W$.
- (6) Für alle $(i_0, j_0) \in V$ mit $s(\{(i_0, j_0)\}) \leq 1$ führe aus:
 - (7) $t = \min\{i \leq i_0 \mid s(\{(i', j_0), (i' + 1, j_0), \dots, (i_0, j_0)\}) \leq 1 \text{ für } i \leq i' \leq i_0\}$;
 $d = \max\{i \geq i_0 \mid s(\{(i', j_0), (i' - 1, j_0), \dots, (i_0, j_0)\}) \leq 1 \text{ für } i \geq i' \geq i_0\}$;
 $l = \min\{j \leq j_0 \mid s(\{(i_0, j'), (i_0, j' + 1), \dots, (i_0, j_0)\}) \leq 1 \text{ für } j \leq j' \leq j_0\}$;
 $r = \max\{j \geq j_0 \mid s(\{(i_0, j'), (i_0, j' - 1), \dots, (i_0, j_0)\}) \leq 1 \text{ für } j \geq j' \geq j_0\}.$
 - (8) Für alle $\bar{t}, \bar{d}, \bar{r}, \bar{l}$ mit $t \leq \bar{t} \leq i_0 \leq \bar{d} \leq d$ und $l \leq \bar{l} \leq j_0 \leq \bar{r} \leq r$ führe aus:

- (9) Setze $W = \{(i, j) \mid \bar{l} \leq j \leq \bar{r}, \bar{t} \leq i \leq \bar{d}\}$.
- (10) Gilt $s(W) \leq 1$, so erweitere L wie in Schritt (4) und (5).
- (11) Fixiere alle Variablen aus L auf den Wert 0.
- (12) STOP.

Wir prüfen in Algorithmus (7.2.4.4) eine Vielzahl von Knotenmengen (vergleiche insbesondere Schritt (8)). Da durch kritische Schnitte eine Menge von Variablen fixiert werden können, und damit die Problemgrößen enorm reduziert werden können, nehmen wir eine höhere Laufzeit des Algorithmus in Kauf. Dennoch garantiert Algorithmus (7.2.4.4) nicht, alle kritischen Schnitte zu finden. Praktische Erfahrungen haben uns gezeigt, daß die Schritte (9) und (10) nur selten durchlaufen werden.

Es sei an dieser Stelle noch einmal deutlich darauf hingewiesen, daß Algorithmus (7.2.4.4) kein Separieralgorithmus im eigentlichen Sinne ist. Der Input hängt nur von der gegebenen Probleminstanz ab, und nicht zusätzlich von einem Vektor y . Daher wird Algorithmus (7.2.4.4) nur einmal aufgerufen, und zwar vor dem eigentlichen Schnittebenenverfahren. Die Kritischen-Schnitt-Ungleichungen werden, wie bereits oben erwähnt, implizit über die Separierung der Steinerschnitt-Ungleichungen separiert.

7.3. Eine Primalheuristik

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Lösung für das Steinerbaumpackungs-Problem zu entwickeln. Wie wir aus Kapitel 3.1 wissen, ist das Entscheidungsproblem, "Gibt es eine zulässige Lösung für das Steinerbaumpackungs-Problem", \mathcal{NP} -vollständig, selbst wenn die gegebene Instanz ein Switchbox-Verdrahtungsproblem definiert. Deshalb beschränken wir uns darauf, eine Heuristik zu entwickeln. Aus der Literatur sind uns keine heuristischen Verfahren zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems im Knock-knee Modell bekannt. Wir kennen aus Kapitel 4.3.2 Verfahren, die eine Lösung finden, falls eine existiert, allerdings nur unter der Voraussetzung, daß alle Terminalmengen Kardinalität zwei haben. Ebenso haben wir einige heuristische Verfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Manhattan Modell vorgestellt. Einige dieser Verfahren lassen sich sicherlich modifizieren, so daß sie für das Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell mit multiterminalen Netzen verwendet werden können. Wir haben jedoch zu wenig Kenntnisse darüber, welches dieser Verfahren dafür besonders prädestiniert ist. Wir haben uns daher entschieden, selbst eine Heuristik zu entwickeln. Unser primäres Ziel war dabei nicht, ein eigenständiges Verfahren, das besonders effizient zur Lösung praktischer Switchbox-Verdrahtungsprobleme eingesetzt werden kann, zu entwickeln. Vielmehr soll das Verfahren eine Ergänzung zu dem vorgestellten Schnittebenenverfahren bilden. Wie bereits in Kapitel 7.1 dargelegt, kann einerseits mit Hilfe einer guten zulässigen Lösung der Verzweigungsbaum klein gehalten werden, andererseits das Schnittebenen- beziehungsweise Branch & Cut-Verfahren vorzeitig beendet werden, falls eine gewisse vorgegebene Lösungsgarantie gegeben werden kann. Um dieses Ziel erreichen

zu können, kann uns — wie wir gleich sehen werden — die Lösung des aktuellen linearen Programms wichtige Informationen geben.

Wir haben uns entschieden, ein sequentielles Verfahren zu entwickeln. Wir fassen die Terminals eines Netzes als (isolierte) Komponenten des Netzes auf. Wir verbinden nun sukzessive zwei Komponenten eines Netzes gemäß einer vorher bestimmten Reihenfolge. Wir gehen dabei so vor, daß wir nicht ein Netz komplett verdrahten, sondern jeweils nur zwei Komponenten eines Netzes pro Iteration miteinander verbinden. Ähnliche Ideen werden auch in [KPS90] verwendet. Der Erfolg einer solchen Vorgehensweise hängt natürlich ganz entscheidend von der a-priori festgelegten Reihenfolge ab. Diese Reihenfolge wird in unserem Verfahren zum großen Teil von dem Lösungsvektor y des aktuellen linearen Programms bestimmt. Genauer gesagt, definieren wir eine von y abhängige Funktion f , gemäß der die Auswahl der als nächstes zu verbindenden Komponenten erfolgt. Die zwei ausgewählten Komponenten versuchen wir auf einem kürzesten Weg zu verbinden. Dieser Weg ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, da der zugrundeliegende Graph ein vollständiger rechtwinkliger Gittergraph ist. Wir haben daher eine Reihe weiterer Kriterien erstellt, um die Wahlmöglichkeiten einzuschränken. Einige dieser Kriterien hängen dabei wiederum von dem Lösungsvektor y ab. (Eine detaillierte Erläuterung dieser Auswahlkriterien und der Funktion f werden wir im Anschluß an die algorithmische Beschreibung des Verfahrens geben.) Ist es möglich, die zwei ausgewählten Komponenten auf einem kürzesten Weg unter Berücksichtigung dieser Kriterien zu verbinden, so verbinden wir diese beiden Komponenten, aktualisieren den Graphen und alle relevanten Datenstrukturen und wählen das nächste zu verbindende Paar von Komponenten aus. Andernfalls wird die Funktion f neu berechnet und die Reihenfolge neu bestimmt unter Berücksichtigung der bereits verbundenen Komponenten. Diese Vorgehensweise wird solange iteriert bis entweder alle Netze verbunden sind oder keine mehr verbunden werden können. Im Detail stellt sich das Verfahren folgendermaßen dar.

(7.3.1) Primalheuristik

Input:

Ein vollständiger rechtwinkliger $h \times b$ Gittergraph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c_e = 1, e \in E$ und Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$. Ferner eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}, y \geq 0$.

Output:

Eine zulässige Lösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems $(G, \mathcal{N}, \mathbb{1}, w)$ oder die Meldung "Keine zulässige Lösung gefunden".

- (1) Setze $S_k = \emptyset$ für $k = 1, \dots, N$.
- (2) Bestimme den Graphen $\hat{G} = (V, \hat{E})$ mit $\hat{E} = \{e \in E \mid c_e > 0\}$.
- (3) Bestimme einen kürzesten Weg zwischen allen Knotenpaaren in \hat{G} .
- (4) Für $k = 1, \dots, N$ führe aus:
- (5) Ist $S_k = \emptyset$, dann
bestimme $s_k, t_k \in T_k$, so daß

$$f_{y^k}(s_k, t_k) = \min_{\substack{s, t \in T_k \\ s \neq t}} f_{y^k}(s, t);$$

setze $T'_k = T_k \setminus \{t_k\}$.

- (6) Andernfalls
bestimme $s_k \in T'_k, t_k \in V(S_k)$, so daß

$$f_{y^k}(s_k, t_k) = \min_{s \in T'_k, t \in V(S_k)} f_{y^k}(s, t).$$

- (7) Solange noch weitere Verbindungen möglich sind, führe aus:
 (8) Bestimme $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit $f_{y^{k_0}}(s_{k_0}, t_{k_0}) = \min\{f_{y^k}(s_k, t_k) \mid k = 1, \dots, N\}$.
 (9) Versuche s_{k_0} mit t_{k_0} auf einem kürzesten Weg in \hat{G} zu verbinden unter Berücksichtigung bestimmter Kriterien (siehe (7.3.2)).
 (10) Ist die Verbindung auf einem kürzesten Weg möglich, dann
 sei W der gewählte Weg;
 setze $S_{k_0} = S_{k_0} \cup W, T'_{k_0} = T'_{k_0} \setminus \{s_{k_0}\}$ und $c_e = 0$ für alle $e \in W$;
 ist $T'_{k_0} = \emptyset$, dann setze $f_{y^{k_0}}(s_{k_0}, t_{k_0}) = \infty$;
 andernfalls bestimme ein neues Paar (s_{k_0}, t_{k_0}) wie in (6).
 (11) Andernfalls, gehe nach (2);
 (12) Sind alle Terminalmengen verbunden, gib die zulässige Lösung (S_1, \dots, S_N) aus.
 (13) Andernfalls, gib die Meldung "Keine zulässige Lösung gefunden" aus.
 (14) STOP.

Wir definieren nun die Funktion $f_{y^k} : V \times V \mapsto \mathbb{R}_+$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$. Wir geben zunächst eine formale Definition und erläutern anschließend die heuristische Idee, die dahintersteht. Zur einfacheren Darstellung gehen wir wieder davon aus, daß die Knoten so numeriert sind, daß $V = \{(i, j) \mid i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, b\}$ gilt. Außerdem definieren wir $V_{l,r,t,d} := \{(i, j) \mid i = l, \dots, r, j = t, \dots, d\}$ für $l, r \in \{1, \dots, b\}, l < r$ und $t, d \in \{1, \dots, h\}, t < d$. Wir betrachten nun die Ausführung von Schritt (5) beziehungsweise (6) in Algorithmus (7.3.1). Sei S_k die Kantenmenge, die zur Verbindung von T_k bereits bestimmt wurde, T'_k die Menge der noch nicht verbundenen Terminals und \hat{G} der zugrundeliegende Graph.

Wir behandeln zuerst den Fall $S_k = \emptyset$. Sei $(i_s, j_s), (i_t, j_t) \in T_k$ gegeben. Sei $l, r \in \{1, \dots, b\}, l < r$ und $t, d \in \{1, \dots, h\}, t < d$, so daß $(i_s, j_s), (i_t, j_t) \in V_{l,r,t,d}$ und $|V_{l,r,t,d}|$ minimal ist. Setze $E_{l,r,t,d} = \{e \in \hat{E}(V_{l,r,t,d}) \mid y_e^k > 0\}$. Sei (V_s, E_s) diejenige Komponente in $(V_{l,r,t,d}, E_{l,r,t,d})$ mit $(i_s, j_s) \in V_s$ und (V_t, E_t) diejenige Komponente mit $(i_t, j_t) \in V_t$. Vergleiche dazu Abbildung 7.3.1 (a). Wir setzen

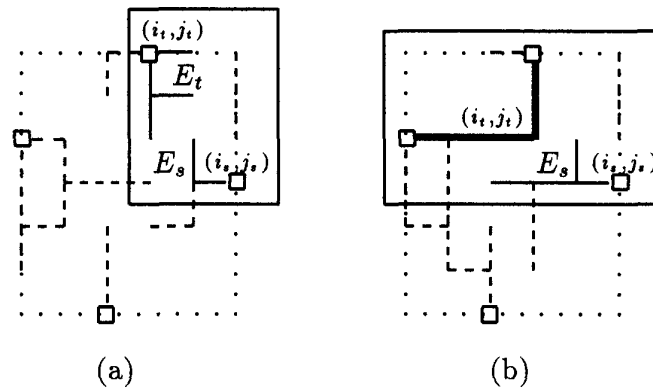
$$f_{y^k}((i_s, j_s), (i_t, j_t)) = |w(W((i_s, j_s), (i_t, j_t))) - \sum_{e \in E_s \cup E_t} w_e y_e^k|,$$

wobei $W((i_s, j_s), (i_t, j_t))$ ein kürzester Weg von (i_s, j_s) nach (i_t, j_t) in \hat{G} bezüglich der Gewichtsfunktion w sei.

Ist $S_k \neq \emptyset$, so gehen wir ähnlich vor. Sei $(i_s, j_s) \in T'_k$ und $(i_t, j_t) \in V(S_k)$ gegeben. Sei $l, r \in \{1, \dots, b\}, l < r$ und $t, d \in \{1, \dots, h\}, t < d$, so daß $(i_s, j_s), V(S_k) \in V_{l,r,t,d}$ und $|V_{l,r,t,d}|$ minimal ist. Setze $E_{l,r,t,d} = \{e \in \hat{E}(V_{l,r,t,d}) \mid y_e^k > 0\}$. Sei (V_s, E_s) diejenige Komponente in $(V_{l,r,t,d}, E_{l,r,t,d})$ mit $(i_s, j_s) \in V_s$. Vergleiche dazu Abbildung 7.3.1 (b). Wir setzen

$$f_{y^k}((i_s, j_s), (i_t, j_t)) = |w(W((i_s, j_s), (i_t, j_t))) - \sum_{e \in E_s} w_e y_e^k|,$$

wobei $W((i_s, j_s), (i_t, j_t))$ ein kürzester Weg von (i_s, j_s) nach (i_t, j_t) in \hat{G} bezüglich der Gewichtsfunktion w sei.



In den Abbildungen (a) und (b) ist der Gittergraph mit gepunkteten Linien und das minimal einschließende Rechteck mit durchgezogenen Linien angedeutet. Die in die Bewertung der Funktion f eingehenden Kanten sind mit dünnen schwarzen Linien gezeichnet, alle anderen Kanten mit positivem y^k -Wert sind gestrichelt dargestellt. Die dicken schwarzen Linien in Bild (b) repräsentieren die Kanten aus S_k .

Abbildung 7.3.1

Die heuristische Idee zur Definition der Funktion f ist die folgende. Wir bestimmen zunächst den Graphen $(V_{l,r,t,d}, E_{l,r,t,d})$. Dieser Graph ist der kleinste rechtwinklige Gittergraph, der die beiden zu verbindenden Komponenten einschließt. Man bezeichnet diesen Graphen daher oft als "minimal einschließendes Rechteck". Wir bestimmen nun innerhalb des minimal einschließenden Rechtecks die gewichtete Summe ($= \omega$) derjenigen Kanten, die in derselben Komponente wie (i_s, j_s) beziehungsweise (i_t, j_t) liegen, wobei nur Kanten mit $y_e^k > 0$ zugelassen sind. Diesen Wert ω vergleichen wir nun mit der Länge ($= \lambda$) eines kürzesten Weges zur Verbindung der beiden Knoten. Ist ω kleiner als λ , so interpretieren wir das als lieferte uns y^k zu wenig Information, wie die beiden Komponenten verbunden werden sollen. Je größer diese Differenz ist, umso weniger Information haben wir und umso größer wird der Wert von f . Ist dagegen ω größer als λ , so interpretieren wir das als müßten die beiden Komponenten über einen Umweg verbunden werden. Je größer diese Differenz umso größer der Wert von f . Es werden also zunächst diejenigen Komponenten verbunden, deren Wert ω ungefähr mit λ übereinstimmt.

Abschließend möchten wir noch bemerken, warum wir die Fälle $S_k = \emptyset$ und $S_k \neq \emptyset$ unterscheiden. Wir erlauben in unserem Algorithmus für jedes Netz höchstens eine Komponente, die mehr als ein Terminal enthält. Ist $S_k \neq \emptyset$, so existiert bereits eine Komponente, die mehr als ein Terminal enthält. Die Aufgabe besteht dann darin, die restlichen Terminals aus T'_k an diese Komponente anzuschließen. Daher berücksichtigen wir bei der Auswahl

des Terminals aus T'_k nur die Informationen, die uns die Komponente (nämlich (V_s, E_s)), zu der das jeweilige Terminal gehört, gibt. Ist dagegen $S_k = \emptyset$, so ist noch nicht festgelegt, welche Terminals zuerst verbunden werden. Wir beziehen daher beide Komponenten in die Bewertung mit ein.

Dies alles sind natürlich sehr heuristische Argumente und es gibt keinen beweisbaren Grund, daß diese Vorgehensweise gute Ergebnisse liefert. Aufgrund der vielen Tests, die wir durchgeführt haben, scheint uns diese Strategie vernünftig zu sein. Das Gleiche gilt für die Kriterien, die wir zur Auswahl des Weges in Schritt (9) festgelegt haben. Wir wollen diese im folgenden erläutern.

Wir betrachten die Ausführung von Schritt (9) in Algorithmus (7.3.1). Sei $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ das gewählte Netz sowie s_{k_0} und t_{k_0} die zu verbindenden Knoten und $W = \emptyset$. Wir versuchen nun von $s = s_{k_0}$ ausgehend sukzessive einen kürzesten Weg von s nach t_{k_0} zu bestimmen. Wir bestimmen zuerst alle Nachbarn v von s mit $c_{v,s} > 0$. Unter diesen wählen wir all diejenigen Knoten aus, die auf einem kürzesten Weg von s nach t_{k_0} liegen. Die Anzahl ($= \eta$) dieser Knoten kann variieren. Ist $\eta = 0$, so ist keine Verbindung auf einem kürzesten Weg möglich, und wir gehen nach Schritt (2). Beachte, daß dieser Fall durchaus auftreten kann, da kürzeste Wege jeweils nur in Schritt (3) bestimmt werden, die Kantenkapazitäten sich jedoch immer in Schritt (10) verändern. Ist $\eta = 1$, so sei v der eindeutige Knoten. Ist dagegen $\eta \geq 2$, so haben wir eine Reihe von Kriterien erstellt, mit deren Hilfe wir einen der Knoten auswählen. Wir geben zunächst die Kriterien an, wobei L die Knotenliste der Kandidaten sei.

(7.3.2) Kriterien zur Auswahl des Weges in Schritt (9) von Algorithmus (7.3.1)

- (1) Wähle denjenigen Knoten $v \in L$ mit

$$|N_v| = \min_{u \in L} |N_u|,$$

wobei $N_u = \{k = \{1, \dots, N\} \mid u \in T_k\}$ für ein $u \in V$ sei.

- (2) Wähle denjenigen Knoten $v \in L$ mit

$$y_{sv}^k = \max_{u \in L} y_{su}^k.$$

- (3) Wähle denjenigen Knoten $v \in L$ mit

$$\sum_{t \in T'_k} \omega(v, t) = \min_{u \in L} \sum_{t \in T'_k} \omega(u, t),$$

wobei $\omega(p, q)$ der Wert eines kürzesten (bezüglich w) Weges von p nach q in \hat{G} für $p, q \in V$ sei.

- (4) Wähle denjenigen Knoten $v \in L$ mit

$$\sum_{k \neq k_0} y_{sv}^k - y_{sv}^{k_0} = \min_{u \in L} \sum_{k \neq k_0} y_{su}^k - y_{su}^{k_0}.$$

- (5) Wähle denjenigen Knoten, der weniger Richtungswechsel verursacht. Betrachte dazu Abbildung 7.3.2. Wir wählen in beiden Fällen den Knoten v_1 anstelle von v_0 .

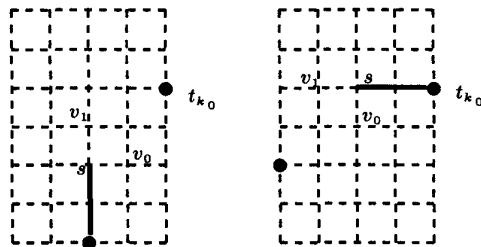


Abbildung 7.3.2

Bei der Auswahl des Knotens v gehen wir nun folgendermaßen vor. Wir untersuchen zuerst das erste Kriterium. Ist das Minimum eindeutig bestimmt, so sei v der zugehörige Knoten. Ist das Minimum nicht eindeutig bestimmt, so betrachten wir für alle Knoten, die das Minimum in (1) annehmen, das zweite Auswahlkriterium. Ist unter diesen Knoten das Minimum in (2) eindeutig bestimmt, so sei wieder v der zugehörige Knoten. Andernfalls fahren wir entsprechend mit den Kriterien (3) bis (5) fort. Ist in (5) immer noch kein eindeutiger Knoten ausgezeichnet, so wählen wir irgendeinen Knoten v . Wir erhalten also nach einem Durchlauf von (1) bis (5) einen Knoten v , der zu s benachbart ist. Wir führen nun die Kante sv zu dem Weg W hinzu, setzen $s = v$ und iterieren solange, bis $s = t_{k_0}$ ist oder kein Nachbarknoten, der auf einem kürzesten Weg liegt ($\eta = 0$), gefunden wurde.

Wir erläutern nun die heuristischen Ideen, die den Kriterien (1) bis (5) zugrundeliegen. Mit Kriterium (1) versuchen wir einen Weg zu wählen, der über möglichst wenig andere Terminals läuft, damit später noch zu verbindende Terminals nicht isoliert werden. In (2) wählen wir diejenige Kante, deren y^k -Komponente maximalen Wert hat. Wir interpretieren sozusagen die Komponenten von y^k als "Wahrscheinlichkeiten" in dem Sinne, daß wir sagen, "Mit Wahrscheinlichkeit y_e^k benutzt ein Steinerbaum für T_k die Kante e ". In (3) versuchen wir die noch nicht verbundenen Terminals von Netz k zu berücksichtigen. Wir wählen denjenigen Weg, dessen Abstand zu den noch nicht verbundenen Terminals minimal ist. Damit hoffen wir, die Gesamtlänge des endgültigen Steinerbaumes für T_k klein zu halten. Vergleiche dazu auch Abbildung 7.3.3. Wir wählen den Knoten v_1 anstelle von v_0 .

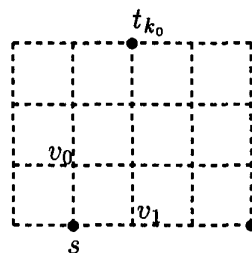


Abbildung 7.3.3

Mit Kriterium (4) versuchen wir diejenigen Kanten zu vermeiden, die von einem anderen Netz wahrscheinlich bevorzugt werden (in dem Sinne wie wir es unter Punkt (2) erläutert haben). Schließlich haben wir Kriterium (5) eingeführt, um die Anzahl Knock-knees klein zu halten.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß es durchaus vorkommen kann, daß Kriterium (5) geprüft wird. Da die Terminals nur am Rand des Gittergraphen liegen, fällt (1) für alle inneren Knoten des Gittergraphen weg. Es hat sich herausgestellt, daß sehr häufig die Komponenten eines Lösungsvektors den Wert $\frac{1}{2}$ haben. Damit ist das Minimum in (2) beziehungsweise (4) nicht eindeutig bestimmt. Kriterium (3) findet dagegen keine Anwendung, falls das Netz nur zwei Terminals hat.

Es sei abschließend zu diesem Kapitel 7.3 nochmals gesagt, daß das hier vorgestellte Verfahren auf sehr heuristischen Ideen beruht. Es gibt sicherlich viele Möglichkeiten und Tricks dieses Verfahren weiter zu verbessern. Jedoch sind dazu intensive Tests an unterschiedlichen Problembeispielen notwendig.

8. Implementierung und Testergebnisse

In diesem Kapitel möchten wir über das von uns implementierte Schnittebenenverfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem berichten und unsere Erfahrungen mit einigen Testbeispielen schildern. Wir werden in Kapitel 8.1 zunächst einige Schwierigkeiten aufzeigen, die wir bei der Lösung dieser Probleme hatten. Ebenso enthält dieses Kapitel viele kleine Ideen, ohne die das Programm auf größere Problembeispiele nicht anwendbar gewesen wäre. Als Testbeispiele dienten uns einige in der Literatur diskutierte Switchbox-Verdrahtungsprobleme. In Kapitel 8.2 werden wir unsere Ergebnisse zu diesen Problemen darlegen.

8.1. Details der Implementierung

Wir gehen davon aus, daß wir eine gewichtete Instanz eines Steinerbaumpackungs-Problems gegeben haben, die ein Switchbox-Verdrahtungsproblem definiert. Das heißt, gegeben ist ein vollständiger rechteckiger Gittergraph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c_e = 1, e \in E$ sowie eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$. Außerdem ist eine Gewichtsfunktion $w : E \mapsto \mathbb{R}_+$ gegeben. In allen Beispielen, die wir in der Literatur gefunden haben, ist die Gewichtsfunktion identisch Eins, also $w = \mathbb{1}$. Wir berichten nun über einige Schwierigkeiten, auf die wir beim Lösen der Probleme von diesem Typ gestoßen sind, und über einige Details, die uns helfen, die Probleme rechnerisch zu lösen. Die großen Beispiele, die in der Literatur diskutiert werden, haben zwischen 19 und 24 Netze. Die Gitterhöhe des zugrundeliegenden Gittergraphen liegt zwischen 15 und 18, die Gitterbreite reicht von 15 bis 23. Das ergibt eine Anzahl von 0/1 Variablen, die im Bereich von 9000 bis 17000 liegt.

Um Probleme dieser Größenordnung lösen zu können, ist es eine unabdingbare Notwendigkeit, einen sehr schnellen und robusten Code zur Lösung linearer Programme zur Verfügung zu haben. Wir verwenden in unserer Implementierung CPLEX, ein von R. E. Bixby (Houston, Texas) entwickeltes Simplex-Verfahren. Wir möchten an dieser Stelle herausstellen, daß wir, ohne ein ähnlich gutes Programmpaket wie CPLEX zur Verfügung zu haben, nicht in der Lage gewesen wären, die Probleme zu lösen.

Dennoch treten auch hier einige Schwierigkeiten bei der Lösung der linearen Programme auf. Um diese näher erläutern zu können, benötigen wir einige Fachbegriffe aus dem Bereich der linearen Programmierung. Der Leser, der damit nicht vertraut ist, sei auf [C83] verwiesen.

Das Hauptproblem, mit welchem wir beim Lösen der hier auftretenden linearen Programme konfrontiert sind, ist, daß die Probleme stark entartet sind. Das heißt, es existieren sehr viele verschiedene Basen zu einer Ecke des zugehörigen Polyeders. Nach einem Basisaustausch im Simplex-Verfahren kommt es daher häufig vor, daß die neue Basis wieder die gleiche Ecke definiert und damit kein Fortschritt in der Zielfunktion erreicht wird.

Eine häufig verwendete Methode, um die Entartung linearer Programme zu reduzieren, ist, die rechte Seite des linearen Programms zu perturbieren. Wir haben versucht, diese Möglichkeit auf unsere Problemklasse anzuwenden.

Dabei haben wir zunächst zu beachten, daß wir die linearen Programme, die wir während des Schnittebenenverfahrens erzeugen, mit dem dualen Simplex-Verfahren lösen. Der Grund dafür ist der folgende. Da sich die linearen Programme von einer auf die nächste Iteration nur in ihrer Ungleichungsstruktur ändern, kann die alte optimale Basis auf einfache Weise modifiziert werden, so daß sie dual zulässig für das aktuelle lineare Programm wird. Folglich kann diese Basis als Startbasis für das duale Simplex-Verfahren verwendet werden, und es muß zur Lösung des linearen Programms nicht mehr ganz von vorne angefangen werden.

Im Hinblick auf unser Ziel, die Entartung der zu lösenden linearen Programme zu verringern, bedeutet das, daß wir den Zielfunktionsvektor des Steinerbaumpackungs-Problems perturbieren müssen. Dabei tritt der folgende Interessenkonflikt auf. Einerseits möchte man die Zielfunktion möglichst stark perturbieren, um die Entartung möglichst auszuschließen. Andererseits soll nach Perturbation der Zielfunktion gewährleistet sein, daß die Optimallösung des perturbierten Problems auch eine Optimallösung des ursprünglichen Problems ist, und der aufgerundete optimale Zielfunktionswert des perturbierten Problems mit dem des ursprünglichen Problems übereinstimmt. Nach vielen Experimenten und Diskussionen mit Herrn Bixby sind wir zu folgender Entscheidung gelangt. Zur Erläuterung sei $\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ mit $\omega_e^k = w_e$ für alle $e \in E, k = 1, \dots, N$ der Zielfunktionsvektor des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems.

- (1) Wir bestimmen für jede Terminalmenge T_k heuristisch einen Steinerbaum S_k bezüglich der Gewichtsfunktion w . Jeder Zielfunktionskoeffizient ω_e^k mit $e \in S_k$ wird um den Wert η verringert. η ist in der aktuellen Implementierung auf $\frac{1}{2(n+1)}$ gesetzt, wobei n die Anzahl der Kanten ist.
- (2) Wir bestimmen zufällig Zahlen ε_e^k aus dem Intervall $[0, 1]$ für $k = 1, \dots, N$ und verringern jeden Zielfunktionskoeffizienten ω_e^k um den Wert $b\varepsilon_e^k$. Der Wert b ist in der aktuellen Implementierung auf das Minimum aus 10^{-5} und $\frac{1}{2(n+1)}$ gesetzt.

Insgesamt verwenden wir nun anstelle des Original-Zielfunktionsvektors ω den folgenden Vektor $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ mit

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_e^k &= \omega_e^k - b\varepsilon_e^k - \eta, & \text{falls } e \in S_k, \text{ für } k = 1, \dots, N; \\ \tilde{\omega}_e^k &= \omega_e^k - b\varepsilon_e^k, & \text{falls } e \notin S_k, \text{ für } k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die Parameter in (1) und (2) so gewählt sind, daß für die Probleme, die wir in Kapitel 8.2 betrachten, eine optimale Steinerbaumpackung bezüglich dem Zielfunktionsvektor $\tilde{\omega}$ auch optimal bezüglich dem Zielfunktionsvektor ω ist, und der aufgerundete Optimalwert des perturbierten Problems mit dem Optimalwert des Originalproblems übereinstimmt. Sei y^* die Optimallösung bezüglich der Original-Zielfunktion ω und y_p die Optimallösung bezüglich der perturbierten Zielfunktion $\tilde{\omega}$. Dann

gilt

$$\begin{aligned}
 \omega^T y^* &\geq \tilde{w}^T y^* \geq \tilde{w}^T y_p \\
 &\geq \omega^T y_p - bn - \eta n \\
 &\geq \omega^T y_p - \frac{n}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)} \\
 &\geq \omega^T y_p - \frac{n}{n+1} \\
 &> \omega^T y_p - 1,
 \end{aligned}$$

wobei n die Anzahl der Kanten sei. Beachte, daß die Abschätzung in Zeile 2 wegen $c = \mathbb{I}$ gilt. Also gilt aufgrund der obigen Abschätzung, daß $\omega^T y_p < \omega^T y^* + 1$ ist. Da für unsere Problembeispiele $\omega = \mathbb{I}$ ist, ist auch y_p eine Optimallösung bezüglich der Original-Zielfunktion.

In der folgenden Tabelle 8.1.1. ist an dem Beispiel "difficult switchbox" aufgezeigt, wie sich die Verwendung des perturbierten Zielfunktionsvektors auf den Fortschritt des Verfahrens auswirkt. Zur Beschreibung des Beispiels sei auf das nachfolgende Kapitel verwiesen. Spalte 1 gibt die Anzahl an Iterationen des Schnittebenenverfahrens wieder. Die Spalten 2 bis 4 enthalten die Ergebnisse bei Verwendung der perturbierten Zielfunktion, die Spalten 5 bis 7 die Ergebnisse bei Verwendung der Original-Zielfunktion. In Spalte 2 beziehungsweise 5 steht jeweils der Wert der Optimallösung des aktuellen linearen Programms, in den Spalten 3 und 6 die Anzahl Pivotoperationen, die zur Lösung des linearen Programms notwendig waren. Schließlich ist in den Spalten 4 und 7 jeweils die kumulierte CPU-Zeit in Minuten angegeben. Die Zahlen in der Tabelle sprechen für sich insbesondere, wenn man die letzten Zeilen betrachtet.

Iter.	perturbierte Zielfunktion			Original-Zielfunktion		
	LP-Lösung	Pivots	CPU-Zeit	LP-Lösung	Pivots	CPU-Zeit
1	0.000	0	0:53	0.000	0	0:52
2	456.562	1163	3:25	456.850	2646	5:35
3	457.571	420	5:07	457.100	4656	19:49
4	457.589	548	7:28	457.350	5995	40:39
5	457.746	800	10:25	457.417	7001	67:37
6	457.793	1224	14:36	457.417	7657	97:55
7	458.014	3175	24:03	457.515	11367	149:21
8	458.314	2007	31:07	457.748	23718	244:11
9	458.625	2554	40:19	458.149	49393	456:26

Tabelle 8.1.1

Wir wollen uns nun einem anderen Problem zuwenden, nämlich dem Problem, die richtige Auswahl aus der Menge der verletzten Ungleichungen zu treffen. Unsere Erfahrungen haben gezeigt, daß bei der Bestimmung von verletzten Ungleichungen einige wichtige Regeln beachtet werden sollten.

Ein wichtiger Punkt, der berücksichtigt werden sollte, ist, daß möglichst Ungleichungen mit unterschiedlichem Träger generiert werden. Wir sagen, zwei Ungleichungen $a^T x \geq \alpha$ und $b^T x \geq \beta$ mit $a, b \in \mathbb{R}^{N \times E}$ sind *disjunkt*, falls $\{e \in E \mid a_e^k \neq 0\} \cap \{e \in E \mid b_e^k \neq 0\} = \emptyset$ für $k = 1, \dots, N$. Wir wollen im folgenden einige Aspekte ansprechen, die versuchen, nach Möglichkeit disjunkte Ungleichungen zu generieren, oder zumindest solche Ungleichungen zu konstruieren, deren Träger in nur wenigen Koeffizienten übereinstimmen. Der Grund für diese Zielsetzung ist klar. Haben wir beispielsweise eine Menge verletzter Ungleichungen $a_1^T x \geq \alpha_1, \dots, a_m^T x \geq \alpha_m$ gefunden mit $a_i^T y - \alpha_i \geq -1$, $(a_i)_e^k = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $y_e^k = 0$ für ein $e \in E$, $k \in \{1, \dots, N\}$. Um all diese Ungleichungen zu erfüllen, genügt es also die Variable y_e^k auf den Wert Eins zu setzen, und der Wert der Optimallösung des nächsten linearen Programms wird kaum ansteigen. Deshalb möchte man solche Eigenschaften möglichst vermeiden.

Betrachten wir dazu nochmals Algorithmus (7.2.1.12) zur Bestimmung verletzter Steinerpartitions-Ungleichungen. Wir geben nachfolgend zwei Varianten dieser Heuristik, die versuchen obigen Gesichtspunkt zu beachten.

Die erste Variante beginnt wie Algorithmus (7.2.1.12) mit zwei Terminals $d_i, d_j \in D$, $d_i \neq d_j$. Von diesem Terminalpaar ausgehend wird nun anstelle der $|D| - 1$ möglichen Ungleichungen in den Schritten (5) und (9) von Algorithmus (7.2.1.12) nur eine Ungleichung bestimmt, und zwar diejenige mit minimaler Differenz aus dem Wert der linken Seite und dem Wert der rechten Seite. Ist diese Ungleichung verletzt, so geben wir diese aus, löschen aber gleichzeitig alle Kanten im Graphen, die im Träger dieser Ungleichung sind. Damit wird erreicht, daß nachfolgend generierte Ungleichungen zu der eben konstruierten disjunkt sind. Anschließend wählen wir das nächste Terminalpaar aus, und fahren entsprechend fort, bis in dem reduzierten Graphen zwischen zwei Terminals kein Weg mehr existiert oder alle Terminalpaare geprüft wurden. Im Detail stellt sich der Algorithmus folgendermaßen dar.

(8.1.2) Variante A von Heuristik (7.2.1.12)

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Terminalmenge $T \subseteq V$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^E$, $y \geq 0$.

Output:

Verletzte Steinerpartitions-Ungleichungen, falls welche gefunden werden.

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ mit $D = \{d_1, \dots, d_{|T|}\}$.
- (2) Setze $\hat{E} = \emptyset$.
- (3) Für alle Knotenpaare $d_i, d_j \in D$, $d_i \neq d_j$ führe aus:
 - (4) Bestimme die Länge ($= \lambda(u, v)$) eines kürzesten Weges von u nach v in $(V_D, E \setminus \hat{E})$ bezüglich der Gewichtsfunktion y für alle $u, v \in V_D$, so daß kein innerer Knoten der jeweiligen Wege aus D ist.
 - (5) Bestimme einen (d_i, d_j) -Weg W mit $y(W) = \lambda(d_i, d_j)$.
 - (6) Existiert kein (d_i, d_j) -Weg, dann bestimme das nächste Terminalpaar und gehe nach (5).
 - (7) Setze $S = W$ und $D' = D \setminus \{d_i, d_j\}$.
 - (8) Setze $S_{opt} = S$ und $D_{opt} = \{d_i, d_j\}$.

- (9) Solange $D' \neq \emptyset$ führe aus:
 (10) bestimme $d \in D'$ und $v \in V(S) \setminus D$ mit

$$\lambda(v, d) = \min_{d' \in D'} \min_{v' \in V(S) \setminus D} \lambda(v', d').$$

- (11) Bestimme einen (v, d) -Weg W mit $y(W) = \lambda(v, d)$.
 (12) Falls kein solcher Weg existiert, setze $D' = D \setminus \{d\}$ und gehe nach (9).
 (13) Setze $S = S \cup W$ und $D' = D \setminus \{d\}$.
 (14) Ist $y(S) - |D \setminus D'| < y(S_{opt}) - |D_{opt}|$, setze
 $S_{opt} = S$ und $D_{opt} = D \setminus D'$.
 (15) Ist $y(S_{opt}) < |D_{opt}| - 1$, dann
 gib die verletzte Ungleichung $(\chi^{S_{opt}})^T x \geq |D_{opt}| - 1$ aus.
 Setze $\hat{E} = \hat{E} \cup S_{opt}$.
 (16) STOP.

Die schlechtest mögliche Laufzeit von Algorithmus (8.1.2) ist relativ hoch, da innerhalb der Hauptschleife (3) bis (15) in Schritt (4) kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren berechnet werden. Praktische Erfahrungen haben gezeigt, daß Schritt (4) nicht jedesmal durchlaufen wird und die Laufzeit im allgemeinen akzeptabel ist.

Natürlich ist in dem Zusammenhang der Bestimmung disjunkter Ungleichungen nicht nur von Bedeutung, verletzte Ungleichungen, die untereinander disjunkt sind, zu konstruieren. Darüber hinaus sollte die Trägerstruktur derjenigen Ungleichungen berücksichtigt werden, die in dem aktuellen linearen Programm auftreten. Die zweite Variante von Heuristik (7.2.1.12), die wir vorstellen möchten, versucht diesem Aspekt Rechnung zu tragen. Zu diesem Zweck haben wir eine Datenstruktur eingeführt, die angibt wie oft die Variable x_e^k in einer Ungleichung des aktuellen linearen Programms vorkommt. Um dies bei der Auswahl verletzter Ungleichungen zu beachten, verwenden wir in (7.2.1.12) eine modifizierte Zielfunktion bezüglich der die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren berechnet werden. Anstelle von y verwenden wir die Funktion $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times E}$ mit

$$(8.1.3) \quad \tilde{y}_e^k = y_e^k \cdot M + \nu_e^k, \text{ für alle } e \in E, k = 1, \dots, N,$$

wobei ν_e^k die Anzahl von Ungleichungen angibt, die Variable x_e^k enthalten. Für die Konstante M verwenden wir in der aktuellen Implementierung den Wert

$$M = \max_{\substack{e \in E \\ k=1, \dots, N}} \nu_e^k.$$

Ansonsten läuft die zweite Variante völlig analog zu Algorithmus (7.2.1.12) ab.

(8.1.4) Variante B von Heuristik (7.2.1.12)

Input:

Ein planarer Graph $G = (V, E)$, eine Terminalmenge $T \subseteq V$ sowie Vektoren $y \in \mathbb{R}^E$, $y \geq 0$ und $\nu \in \mathbb{N}_0^{\mathcal{N} \times E}$.

Output:

Verletzte Steinerpartitions-Ungleichungen, falls welche gefunden werden.

- (1) Konstruiere den Graphen $G_D = (V_D, E)$ mit $D = \{d_1, \dots, d_{|T|}\}$.
- (2) Bestimme $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{N \times E}$ wie in (8.1.3).
- (3) Bestimme einen kürzesten Weg $W(u, v)$ von u nach v bezüglich der Gewichtsfunktion \tilde{y} für alle $u, v \in V_D$, so daß kein innerer Knoten der jeweiligen Wege aus D ist.
- (4) Führe die Schritte (3) bis (9) von Algorithmus (7.2.1.12) aus.
- (5) STOP.

In Tabelle 8.1.2 haben wir am Beispiel "difficult switchbox" Algorithmus (7.2.1.12) verglichen mit den beiden Varianten (8.1.2) und (8.1.4). In den Spalten 1 bis 3 sind die Ergebnisse aufgelistet, wenn wir als Separierungsverfahren (8.1.2) und (8.1.4) verwenden, in den Spalten 4 bis 6 sind die Ergebnisse unter Verwendung von (7.2.1.12) aufgeführt. Die erste und vierte Spalte geben die Iteration des Schnittebenenverfahren an. In Spalte 2 und 5 ist der optimale Zielfunktionswert des aktuellen linearen Programms angegeben. Schließlich ist in den verbleibenden beiden Spalten die kumulierte CPU-Zeit in Minuten aufgeführt, die benötigt wurde, um die untere Schranke in den Spalten 2 beziehungsweise 5 zu erreichen.

Algorithmen (8.1.2), (8.1.4)			Algorithmus (7.2.1.12)		
Iter.	LP-Lösung	CPU-Zeit	Iter.	LP-Lösung	CPU-Zeit
2	456.562	3:30	2	456.562	3:25
3	457.572	4:55	3	456.563	4:23
4	457.582	7:01	4	456.565	5:09
5	457.595	10:09	5	457.065	6:35
10	458.991	67:58	10	457.246	11:28
12	459.850	102:36	50	458.572	239:11
15	460:788	164:25	75	459.570	568:12

Tabelle 8.1.2

Der Vergleich ist zwar einerseits nicht ganz fair, da in dem Test, dessen Ergebnisse in den Spalten 1 bis 3 wiedergegeben sind, zwei Separierungsalgorithmen verwendet werden, während in dem zweiten Testlauf nur ein Verfahren aufgerufen wird. Dies spiegelt sich auch in der prozentualen CPU-Zeit wieder, die die Separierungsalgorithmen benötigen. Algorithmus (7.2.1.12) benötigt in etwa 0.5% der Gesamtzeit, dagegen beanspruchen Algorithmen (8.1.2) und (8.1.4) zusammen ungefähr 1.4% der Laufzeit. Tabelle 8.1.2 macht aber auch deutlich, daß durch Verwendung von (8.1.2) und (8.1.4) anstelle von (7.2.1.12) eine deutliche Verbesserung der unteren Schranke erzielt werden kann. So wird beispielsweise die Schranke 459.570, die von Algorithmus (7.2.1.12) nach 75 Iterationen erzielt wird, bereits nach $\frac{1}{5}$ der Zeit erreicht, wenn die beiden Varianten (8.1.2) und (8.1.4) verwendet werden.

Nachdem das erste lineare Programm (mit Optimallösung $y = 0$) gelöst wurde, also beim ersten Aufruf der Separierungsalgorithmen, haben wir in obiger Testreihe nicht die Algorithmen (7.2.1.12) beziehungsweise (8.1.2) und (8.1.4) aufgerufen. In diesem Fall fügen wir eine spezielle Klasse von (verletzten) Ungleichungen dem aktuellen linearen Programm hinzu. Wir wollen im folgenden diese Klasse kurz vorstellen und ihre Auswirkungen auf den Fortschritt des Verfahrens an einem Beispiel aufzeigen.

Da wir einen vollständigen rechtwinkligen Gittergraphen zugrundeliegen haben, bietet sich an, zu Beginn alle Steinerschnitt-Ungleichungen, die von einem horizontalen oder vertikalen Schnitt induziert werden, dem linearen Programm hinzuzufügen. Der Vorteil ist, daß alle diese Ungleichungen paarweise disjunkt sind (vergleiche dazu Abbildung 8.1.3), und somit ein beträchtlicher Fortschritt der unteren Schranke zu erwarten ist.

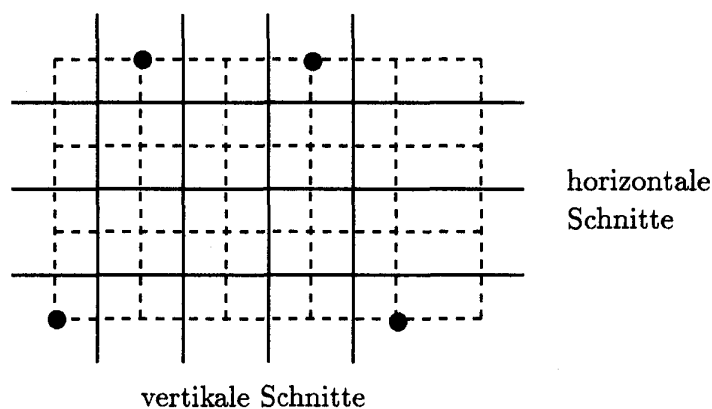


Abbildung 8.1.3

Insbesondere wird mit diesen Ungleichungen erreicht, daß für ein 2-terminales Netz k der Wert $\sum_{e \in E} w_e y_e^k$ größer gleich der Länge eines kürzesten Weges (bezüglich der Gewichtsfunktion w) ist, der die beiden Terminals verbindet, wobei y die Optimallösung desjenigen linearen Programms ist, das aus dem ersten linearen Programm durch Hinzufügen dieser Ungleichungen entsteht.

Für multiterminale Netze können diese Ungleichungen noch erweitert werden, indem nicht nur Steinerschnitt-Ungleichungen hinzugefügt werden, sondern zusätzlich auch Steinerpartitions-Ungleichungen, deren rechte Seite größer als zwei ist. Betrachte dazu ein Netz k mit $|T_k| = p$, $p \geq 3$. Von jedem horizontalen und vertikalen Schnitt, der eine Steinerschnitt-Ungleichung induziert, ausgehend konstruieren wir die folgende Steinerpartitions-Ungleichung. Sei F ein solcher Schnitt und $W \subset V$ mit $\delta(W) = F$. Wir betrachten den Fall, daß F ein vertikaler Schnitt ist. Wir suchen nun nach einer Steinerpartition W_1, \dots, W_q von W , so daß $[W_i : W_{i+1}]$ einen horizontalen Schnitt in $G[W]$ definiert für $i = 1, \dots, q - 1$ und q maximal ist. Die einzigen Knotenmengen aus W_1, \dots, W_q , die mehr als ein Terminal enthalten können, sind W_1 und W_q . Für diese beiden Knotenmengen bestimmen wir entsprechend Steinerpartitionen $W_r^1, \dots, W_r^{l_r}$ für $r = 1$ und $r = q$, so daß $[W_r^i : W_r^{i+1}]$ einen vertikalen Schnitt in $G[W_r]$ für $i = 1, \dots, l_r - 1$ definiert und l_r

maximal ist. Numerieren wir die konstruierten Knotenmengen um, so ist W_1, \dots, W_s mit $s = q - 2 + l_1 + l_2$ eine Steinerpartition von W , und es gilt $|W_i \cap T_k| = 1$ für $i = 1, \dots, s$. Die gleiche Konstruktion führen wir nun für $V \setminus W$ durch und erhalten eine Steinerpartition $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{\bar{s}}$ von $V \setminus W$. Insgesamt definiert damit $W_1, \dots, W_s, \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{\bar{s}}$ eine Steinerpartition von V mit $s + \bar{s} = p$ und $x(\delta(W_1, \dots, W_s, \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{\bar{s}})) \geq p - 1$ definiert eine Steinerpartitions-Ungleichung (vergleiche dazu Abbildung 8.1.4).

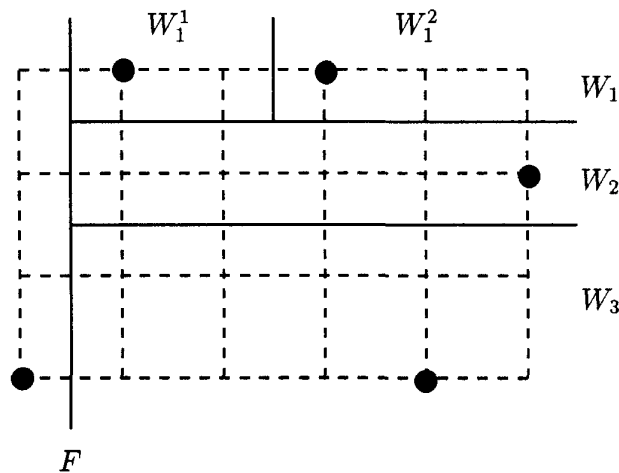


Abbildung 8.1.4

Für jeden horizontalen und vertikalen Schnitt, der eine Steinerschnitt-Ungleichung induziert, konstruieren wir eine Steinerpartitions-Ungleichung wie eben beschrieben. Wir versuchen diese Ungleichungen nach Möglichkeit disjunkt zu wählen. Es läßt sich allerdings nicht vermeiden, daß diese Ungleichungen nicht disjunkt sind. Dafür haben sie den Vorteil, daß die rechten Seiten verhältnismäßig groß sind. Wir wollen diese Ungleichungen zusammen mit den Steinerschnitt-Ungleichungen, die von horizontalen und vertikalen Schnitten induziert werden, als *spezielle Steinerpartitions-Ungleichungen* bezeichnen.

In Tabelle 8.1.5 ist wiederum am Beispiel "difficult switchbox" dargestellt, welche Auswirkungen es hat, wenn die speziellen Steinerpartitions-Ungleichungen in der zweiten Iteration des Schnittebenenverfahrens hinzugefügt werden. Spalte 1 gibt die Anzahl von Iterationen des Schnittebenenverfahrens an. In den Spalten 2 und 3 sind die Ergebnisse aufgeführt, die wir erzielt haben, wenn das erste lineare Programm um die speziellen Steinerpartitions-Ungleichungen erweitert wird und anschließend immer die Algorithmen (8.1.2) und (8.1.4) zum Auffinden verletzter Ungleichungen verwendet werden. In den Spalten 3 und 4 stehen die Resultate, wenn gleich von Beginn an, also nach dem Lösen des ersten linearen Programms, immer nur die Ungleichungen hinzugefügt werden, die von den Algorithmen (8.1.2) und (8.1.4) gefunden werden. Die Ergebnisse sind beeindruckend. Die untere Schranke, die mit den speziellen Steinerpartitions-Ungleichungen bereits in der zweiten Iteration erzielt wird, wird ohne die speziellen Steinerpartitions-Ungleichungen selbst nach 203 CPU-Minuten bei weitem nicht erreicht.

Iter.	mit spez. Steinerpart. ungl.		ohne spez. Steinerpart. ungl.	
	LP-Lösung	CPU-Zeit	LP-Lösung	CPU-Zeit
1	0.000	0:52	0.000	0:52
2	456.562	3:24	394.725	3:29
3	457.574	5:38	397.335	6:23
4	457.741	10:21	401.075	17:05
5	457.862	22:39	407.586	43:05
6	458.070	45:53	416.256	67:43
7	458.551	76:13	423.642	103:58
8	458.983	107:28	428.051	158:42
9	459.615	142:39	431.740	203:22

Tabelle 8.1.5

Als nächstes wollen wir uns mit der Separierung der bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen befassen. Wir haben dazu in Kapitel 7.2.2 zwei Verfahren vorgestellt, zum einen das dynamische Programm (7.2.2.12) mit Laufzeit $O(|V_D|^2 \cdot (|T_1| + |T_2|)^2 + \gamma)$, zum anderen Heuristik (7.2.2.16) mit Laufzeit $O(|V_D| \cdot |M|^4 + \gamma)$, wobei T_1 und T_2 das gegebene Paar von Terminalmengen, γ die Laufzeit zur Berechnung kürzester Wege zwischen allen Knotenpaaren und $M = \{d_i \in T_D \mid t_i \in T_1 \text{ und } t_{i+1} \in T_2 \text{ oder } t_i \in T_2 \text{ und } t_{i+1} \in T_1\}$ ist. Beide Verfahren benötigen also als Eingabe ein Paar von Terminalmengen. Das Problem, das sich uns in diesem Zusammenhang stellt, ist, für welche Netzpaare soll Heuristik (7.2.2.16) beziehungsweise das dynamische Programm (7.2.2.12) aufgerufen werden?

Algorithmus (7.2.2.12) oder (7.2.2.16) für alle Netzpaare aufzurufen, führt zu Laufzeiten, die nicht mehr akzeptabel sind. Bei Problembeispielen mit ungefähr 20 Netzen müßten die Algorithmen rund 200 Mal aufgerufen werden. Daher ist es unbedingt notwendig, eine Auswahl von Netzpaaren zu treffen, für die die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen separiert werden.

Dazu nützen wir die Informationen aus, die uns die Primalheuristik (7.3.1) liefert. Wir erinnern uns, daß in diesem Verfahren sukzessive zwei Komponenten eines Netzes miteinander verbunden werden. In Schritt (9) wird versucht jeweils zwei Komponenten auf einem kürzesten Weg in \hat{G} miteinander zu verbinden. Gelingt das nicht, so bedeutet das, daß ein anderes Netz diesen Weg blockiert hat. Offensichtlich bevorzugen also zwei Netze gewisse Kanten gleichzeitig. Das heißt, eines der beiden Netze muß einen Umweg machen. Da es zu diesem Konflikt kommt, ist offenbar aus der Lösung des linearen Programms nicht erkennbar, welches der Netze den Umweg machen soll. Daher ist zu vermuten, daß noch weitere Ungleichungen notwendig sind, die dieses Netzpaar miteinander kombinieren. Genau für diejenigen Netzpaare, für die dieser Konflikt auftritt, rufen wir die Separierungsverfahren für die bedingt-erweiterten Kreis-Ungleichungen auf. Unsere praktischen Erfahrungen haben gezeigt, daß ein solcher Konflikt zwischen 5 und 15 Mal bei einem Durchlauf von Heuristik (7.3.1) auftritt. Damit reduziert sich die Anzahl von Aufrufen

der Separiererroutinen (7.2.2.12) beziehungsweise (7.2.2.16) bis zu einem Faktor von 20. Es hat sich bei den Testbeispielen gezeigt, daß unter diesen Netzpaaren meistens verletzte bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichungen sind.

An dieser Stelle möchten wir herausstellen, daß also nicht nur die Lösung des linearen Programms wichtige Informationen für das Primalverfahren liefert, sondern auch umgekehrt, das Primalverfahren Hinweise gibt, welche Ungleichungen noch notwendig sind. Genau dieses Zusammenspiel zwischen den Verfahren zur Bestimmung der unteren beziehungsweise oberen Schranke ist unseres Erachtens wesentlich, um große Probleme lösen zu können.

Wir fassen nun zum Abschluß dieses Kapitels das Gesamtverfahren zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems in algorithmischer Form zusammen.

(8.1.5) Branch & Cut-Verfahren zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems

Input:

Ein vollständiger rechtwinkliger Gittergraph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c_e = 1, e \in E$ und Kantengewichten $w_e \in \mathbb{N}_0$ sowie eine Netzliste $\mathcal{N} = \{T_1, \dots, T_N\}$ mit $\mathcal{N} \subseteq V(O_G)$.

Output:

Eine Optimallösung des gewichteten Steinerbaumpackungs-Problems.

Initialisierung

- (1) Bestimme den perturbierten Zielfunktionsvektor \tilde{w} gemäß (8.1.1).
- (2) Bestimme kritische Schnitte mit Algorithmus (7.2.4.4) und fixiere die entsprechenden Variablen.
- (3) Initialisiere den Verzweigungsbaum mit dem Gesamtproblem.
- (4) Löse das folgende (triviale) lineare Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{w}^T x \\ & \sum_{k=1}^N x_e^k \leq c_e, \quad \text{für alle } e \in E. \\ & x_e^k \geq 0, \quad \text{für alle } e \in E, k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

- (5) Versuche mit dem Primalverfahren (7.3.1) eine zulässige Lösung zu bestimmen.
- (6) Wurde eine zulässige Lösung gefunden, dann
 setze b auf den Zielfunktionswert der Lösung.
 Andernfalls
 setze $b = \infty$.
- (7) Füge die speziellen Steinerpartitions-Ungleichungen dem linearen Programm hinzu.

Lösung und Auswertung des linearen Programms

- (8) Bestimme eine Optimallösung y des aktuellen linearen Programms.
- (9) Ist y der Inzidenzvektor einer Steinerbaumpackung, dann
 setze $b = \tilde{w}^T y$.

- (10) Andernfalls,
versuche die obere Schranke b mit dem Primalverfahren (7.3.1) zu verbessern.
- (11) Ist $[\tilde{w}^T y] = [b]$, dann führe aus:
Gibt es noch ein ungelöstes Teilproblem im Verzweigungsbaum, dann wähle eines aus und gehe nach (8).
Andernfalls, gib die zu b gehörende Optimallösung aus, STOP.
- (12) Eliminiere die Ungleichungen $a^T x \geq \alpha$ mit $a^T y > \alpha$ aus dem aktuellen linearen Programm.

Separierung

- (13) Bestimme verletzte Ungleichungen aus dem "Pool" sowie mit den Separierungsalgorithmen (8.1.2), (8.1.4), (7.2.2.16) und (7.2.3.2).
- (14) Wurden verletzte Ungleichungen gefunden, füge diese dem aktuellen linearen Programm hinzu und gehe nach (8).
- (15) Versuche mit Hilfe der dynamischen Programme (7.2.1.10) und (7.2.2.12) verletzte Ungleichungen zu finden.
- (16) Wurden verletzte Ungleichungen gefunden, füge diese dem aktuellen linearen Programm hinzu und gehe nach (8).

Verzweigung

- (17) Bestimme einen Variablenindex (e, k) mit $y_e^k \notin \{0, 1\}$.
- (18) Generiere zwei Teilprobleme, eines unter Hinzunahme der Bedingung $x_e^k = 0$ und das andere unter Hinzunahme der Bedingung $x_e^k = 1$.
- (19) Füge diese beiden Teilprobleme zum Verzweigungsbaum hinzu.
- (20) Wähle ein Teilproblem aus dem Verzweigungsbaum aus und gehe nach (8).

Das eigentliche Schnittebenenverfahren in Algorithmus (8.1.5) umfaßt (bis auf die Initialisierung) die Schritte (8) bis (16). Wir haben dieses Verfahren in das von M. Jünger (Universität zu Köln) entwickelte Branch & Cut-Rahmenprogramm integriert, das zur Lösung allgemeiner kombinatorischer Optimierungsprobleme verwendet werden kann. Wir haben die Enumerationsphase mit den Schritten (4) und (17) bis (20) nur angedeutet. In Wirklichkeit ist eine geschickte Implementierung der Verwaltung des Verzweigungsbaumes, der Auswahl der Teilprobleme etc. ein umfangreiches und äußerst komplexes Problem. Wir gehen im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter auf die Details ein, sondern verweisen auf das Programmpaket von M. Jünger.

In Schritt (12) löschen wir alle Ungleichungen (bis auf die Kapazitätsungleichungen und die trivialen Ungleichungen) des aktuellen linearen Programms, die nicht mit Gleichheit erfüllt sind, aus dem linearen Programm. Diesen Schritt führen wir mit dem Ziel durch, das lineare Programm klein zu halten, um somit die auftretenden linearen Programme schneller lösen zu können. Allerdings löschen wir diese Ungleichungen nicht ganz, sondern sammeln sie in einem sogenannten "Pool". In der Separierungsphase untersuchen wir zusätzlich den "Pool" auf verletzte Ungleichungen (vergleiche Schritt (13)).

Wird Schritt (17) durchlaufen, so ist sichergestellt, daß es in jedem Fall einen Variablenindex mit $0 < y_e^k < 1$ gibt. Dies folgt aus den beiden Tatsachen, daß y nicht der Inzidenzvektor einer Steinerbaumpackung ist (vergleiche Schritt (9)) und in Schritt (13) durch

Algorithmus (8.1.2) die Steinerschnitt-Ungleichungen exakt separiert werden. Aufgrund der Beziehung (5.1.3) ist damit gewährleistet, daß es einen solchen Index gibt.

Prinzipiell kann Algorithmus (8.1.5) dazu verwendet werden, die Optimallösung für das gegebene Switchbox-Verdrahtungsproblem zu finden oder festzustellen, daß keine Lösung existiert. Allerdings kann dies oftmals nicht in akzeptabler Rechenzeit gewährleistet werden. Wir haben deshalb in den Algorithmus eine Zeitschranke eingebaut, nach deren Überschreitung das Verfahren endet und die bis dahin beste untere Schranke und beste zulässige Lösung ausgibt. Wir werden bei einigen wenigen Beispielen des nächsten Kapitels davon Gebrauch machen müssen.

8.2. Rechenergebnisse

In diesem Kapitel wollen wir über unsere Testergebnisse berichten, die wir mit Hilfe des in (8.1.5) vorgestellten Verfahrens zur Lösung des Switchbox-Verdrahtungsproblems erzielt haben. Als Testdaten haben wir die in der Literatur aufgeführten Switchbox-Beispiele verwendet. In Tabelle 8.2.1 sind alle Testbeispiele zusammengestellt. In Spalte 1 ist der in der Literatur übliche Name aufgeführt. Spalte 2 beziehungsweise 3 gibt die Höhe beziehungsweise Breite des zugrundeliegenden Gittergraphen an. Aus Spalte 4 kann man die Anzahl der Netze des jeweiligen Problems ersehen. Die Spalten 5 bis 9 geben Auskunft über die Verteilung der Netze, genauer gesagt, Spalte 5 gibt an, wieviele 2-terminale Netze das Problem hat, Spalte 6 gibt an, wieviele 3-terminale Netze das Problem hat, und so weiter. Schließlich ist in der letzten Spalte die Referenz der Literaturstelle zu finden, aus der wir das jeweilige Beispiel entnommen haben.

Name	Höhe	Breite	Netze	Verteilung der Netze					Ref.
				2	3	4	5	6	
difficult switchbox	15	23	24	15	3	4	1	1	[BP83]
more difficult switchbox	15	22	24	15	3	5		1	[CH88]
terminal intensive switchbox	16	23	24	8	7	5	4		[Lu85]
dense switchbox	17	15	19	3	11	5			[Lu85]
augmented dense switchbox	18	16	19	3	11	5			[Lu85]
modified dense switchbox	17	16	19	3	11	5			[CH88]
pedagogical switchbox	16	15	22	14	4	4			[CH88]

Tabelle 8.2.1

In der Literatur ist es üblich, die Terminals der Netze nicht direkt an die Randknoten des Gittergraphen zu setzen, sondern jedes Terminal über eine Art "Anschlußkante" mit dem jeweiligen Randknoten des Gittergraphen zu verbinden. Vergleiche dazu Abbildung 8.2.2 (a). Der Grund dafür ist, daß in den praktischen Anwendungen (vergleiche Kapitel 4) der zugrundeliegende Gittergraph ein Teilgebiet des gesamten Verdrahtungsgebiets darstellt, und die Terminals Kontaktpunkte von bestimmten Zellen repräsentieren. Diese Zellen liegen am Rand des Gittergraphen. Durch Einführen dieser Kanten wird der Anschluß des Netzes an diese Kontaktpunkt angedeutet. Wir verzichten bei unseren Betrachtungen auf diese "Anschlußkanten", da von vornherein klar ist, welches der Netze die jeweiligen Kanten benutzt, und setzen die Terminals auf den Rand des Gittergraphen. Vergleiche Abbildung 8.2.2 (b).

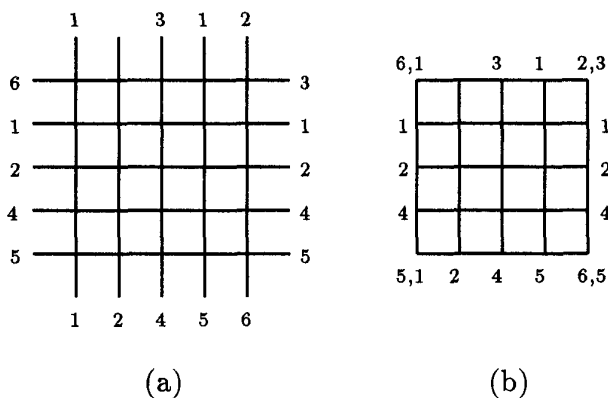


Abbildung 8.2.2

Das erste Beispiel "difficult switchbox" wurde von Burstein und Pelavin eingeführt. Das zweite Switchbox-Verdrahtungsproblem "more difficult switchbox" erhält man aus dem ersten durch Wegnahme der letzten Spalte. (Genauer gesagt, die Kanten $\{(i, 23), (i, 24)\}$ des ersten Gittergraphen werden für $i = 1, \dots, 15$ kontrahiert und parallele Kanten gelöscht.) Die Netzliste ist genau die gleiche. Der Unterschied in der Verteilung der Netze (in Spalte 7 und 8) kommt daher, daß bei obiger Konstruktion eine Kante kontrahiert wurde, deren beide Endknoten in derselben Terminalmenge sind. Das dritte Problembeispiel "terminal intensive switchbox" geht auf Luk zurück. Das besondere an diesem Beispiel ist, daß jeder Randknoten ein Terminal von mindestens einem Netz ist. Das vierte Switchbox-Verdrahtungsproblem stammt ebenfalls von Luk. Für dieses Problem ist bisher nicht bekannt, ob es bei Verwendung des Manhattan Modells oder des Mehrlagen-Modells (vergleiche Kapitel 4.2.2) eine zulässige Lösung gibt. Von daher entstanden zwei Varianten des Problems. Das erste "augmented dense switchbox" enthält rechts außen eine zusätzliche Spalte und ganz unten eine zusätzliche Zeile. Das zweite "modified dense switchbox" hat ungefähr in der Mitte des Gittergraphen eine zusätzliche Spalte. Das letzte Beispiel in der Tabelle "pedagogical switchbox" wurde von Cohoon und Heck eingeführt. An diesem Beispiel demonstrieren sie die Vorgehensweise ihres Algorithmus.

Die Kantengewichtsfunktion w ist in allen Beispielen identisch Eins, ebenso die Kantekapazitäten. Unser Modell (3.1.2) beziehungsweise (3.1.3) entspricht im VLSI-Jargon dem

Switchbox-Verdrahtungsproblem im Knock-knee Modell (vergleiche Kapitel 4). In der Literatur wurde das Knock-knee Modell für das Switchbox-Verdrahtungsproblem mit multi-terminalen Netzen unseres Wissens noch nicht untersucht. Alle uns bekannten Verfahren für das Switchbox-Verdrahtungsproblem verwenden entweder das Manhattan Modell oder das 2-Lagen Modell (vergleiche dazu auch Kapitel 4.3.2). Die Wahl des zugrundeliegenden Modells beeinflußt entscheidend die Lösbarkeit der Probleme. Beispielsweise ist es möglich, daß es für das 2-Lagen Modell eine Lösung gibt, während es für das Knock-knee Modell keine gibt. In Abbildung 8.2.2 ist ein solches Beispiel dargestellt. Letzteres haben wir der Literatur entnommen (siehe [CH88]). Darüber hinaus gibt es Problembeispiele, die eine kürzere Verbindung der Netze im 2-Lagen Modell als im Knock-knee Modell erlauben. Ebenso verhält es sich bei einem Vergleich des Knock-knee mit dem Manhattan Modell. Ein Vergleich der einzelnen Algorithmen ist deswegen nicht möglich. Wir beschränken uns daher auf die Vorstellung der Ergebnisse, die wir mit unserem Verfahren (8.1.5) erzielt haben.

Tabelle 8.2.3 gibt Auskunft über die Größenordnungen der Probleme. Spalte 2 informiert über die Gesamtzahl der Variablen für die jeweiligen Beispiele. Das größte Beispiel hat fast 17000 ganzzahlige Variablen. In Schritt (2) des Branch & Cut-Verfahrens (8.1.5) rufen wir Algorithmus (7.2.4.4) auf, um mit Hilfe der darin bestimmten kritischen Schnitte Variablen fixieren zu können. Die Anzahl der Variablen, die durch diesen Algorithmus fixiert werden, ist in Spalte 3 wiedergegeben. Daraus ist ersichtlich, daß mit Hilfe von Algorithmus (7.2.4.4) die Größenordnungen der Probleme beträchtlich reduziert werden können. Beispielsweise wird für das Switchbox-Verdrahtungsproblem "dense switchbox" die Variablenzahl um über die Hälfte reduziert. Dennoch verbleiben in allen Beispielen eine enorme Zahl von 0/1 Variablen (vergleiche die letzte Spalte der Tabelle).

Beispiel	Variablen	fixierte Variablen	verbleibende Variablen
difficult switchbox	15648	2224	13424
more difficult switchbox	14952	2450	12502
terminal intensive switchbox	16728	4913	11815
dense switchbox	9082	4831	4251
augmented dense switchbox	10298	2678	7620
modified dense switchbox	9709	4057	5652
pedagogical switchbox	9878	2039	7839

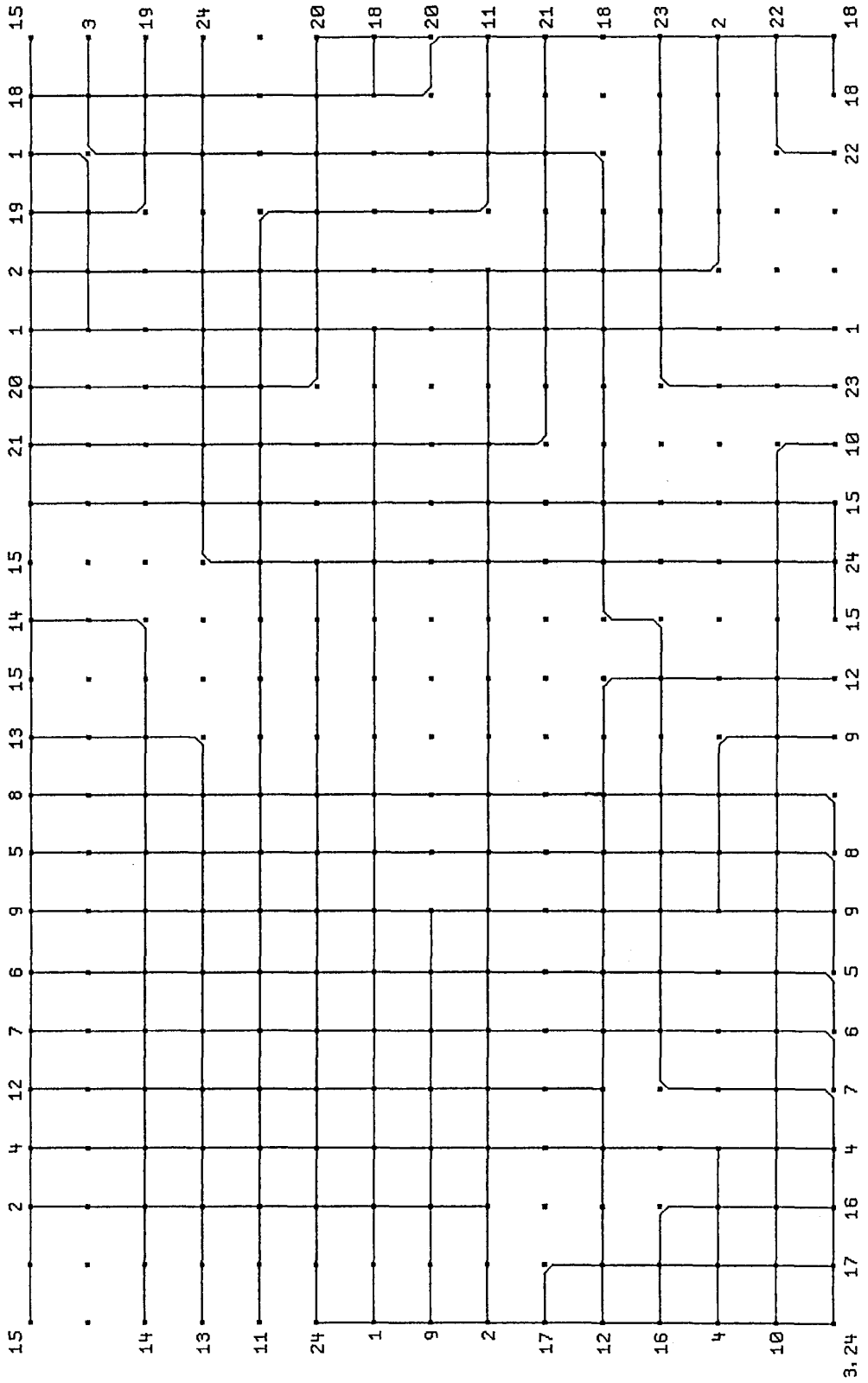
Tabelle 8.2.3

In der Tabelle 8.2.4 haben wir die Ergebnisse, die wir mit Algorithmus (8.1.5) erzielt haben, zusammengefaßt. Spalte 2 gibt die beste zulässige Lösung an, die wir im Laufe des

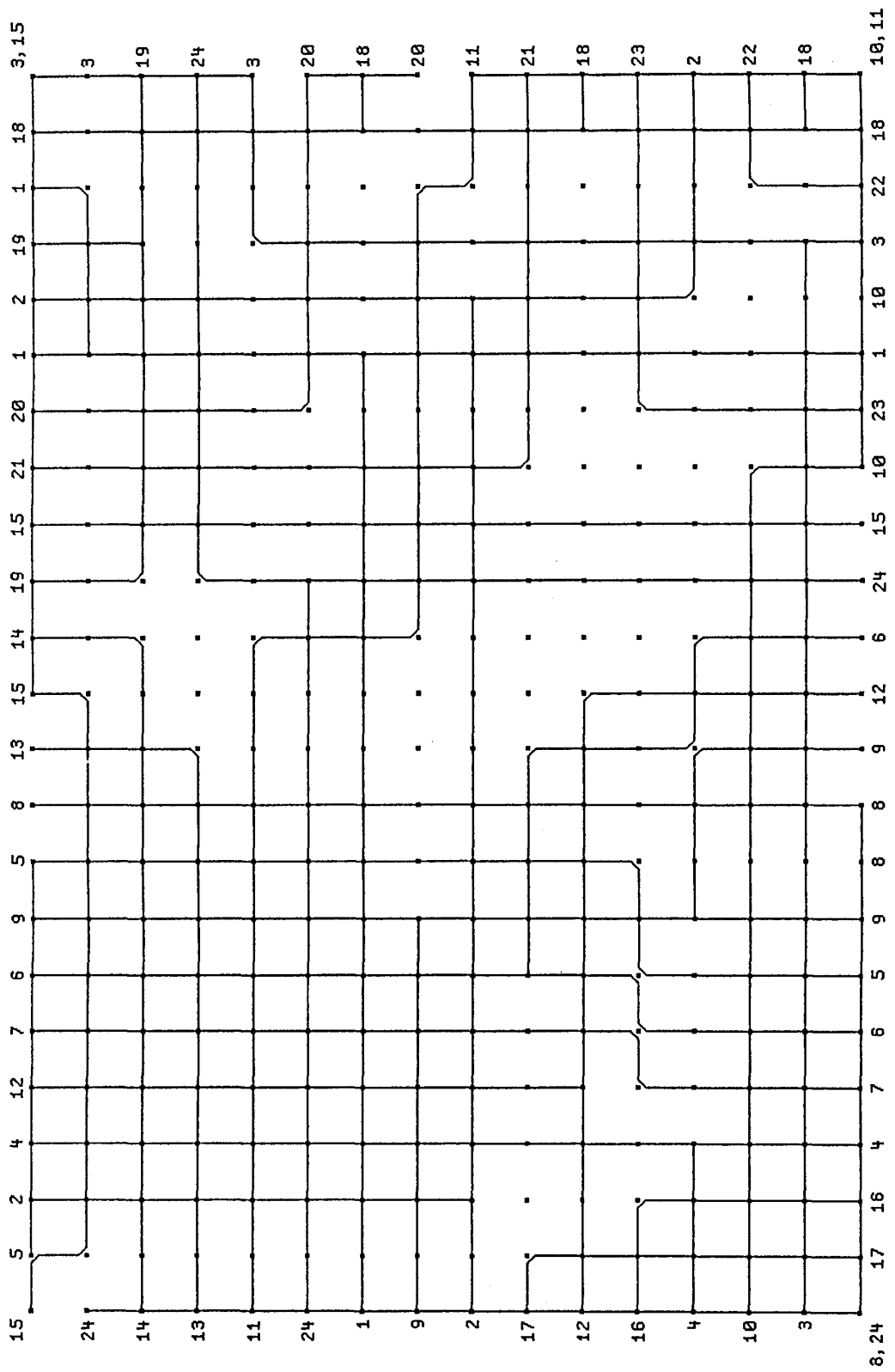
Verfahrens gefunden haben. Alle diese Werte wurden mit Hilfe der Primalheuristik (7.3.1) erzielt. In keinem der Fälle war die Optimalösung des linearen Programms der Inzidenzvektor einer Steinerbaumpackung. Die Zahlen in Spalte 2 sind gebrochen, da die Werte bezüglich der perturbierten Zielfunktion angegeben sind. Um die tatsächliche Lösung bezüglich der Original-Zielfunktion zu erhalten, müssen die Werte auf die nächste ganze Zahl aufgerundet werden. Jeder Eintrag in Spalte 3 ist der Zielfunktionswert der Optimallösung y des letzten linearen Programms vor der ersten Aufteilung des Gesamtproblems (vergleiche Schritt (17) bis (20) von Algorithmus (8.1.5)), also nachdem zum ersten Mal keine verletzten Ungleichungen mehr gefunden wurden. Dieser Wert $\tilde{w}^T y$ ist offensichtlich eine untere Schranke für das Gesamtproblem. Spalte 4 stellt die prozentuale Abweichung der besten zulässigen Lösung im Vergleich zu der unteren Schranke in Spalte 3 dar. In Formeln ausgedrückt, enthält Spalte 4 die Werte $\frac{\lceil \tilde{w}_2 \rceil - \lceil \tilde{w}_3 \rceil}{\lceil \tilde{w}_3 \rceil}$, wobei \tilde{w}_2 beziehungsweise \tilde{w}_3 die Werte aus Spalte 2 beziehungsweise 3 sind. Spalte 5 enthält die Anzahl der Iterationen des Schnittebenenverfahrens, die der Anzahl der gelösten linearen Programme entspricht. Die Zahl der Knoten im Verzweigungsbaum ist in der vorletzten Spalte dokumentiert. Schließlich berichtet die letzte Spalte über die Laufzeit des Verfahrens. Die Angaben sind in Minuten und wurden auf einer SUN 4/50 erzielt. Die mit einer Fußnote versehenen Beispiele "dense switchbox" und "augmented dense switchbox" haben wir nach der in der letzten Spalte angegebenen Zeit abgebrochen, da das Verfahren keine Fortschritte mehr erzielt hat. Wir vermuten, daß die in der Spalte 2 angegebenen Werte die Optimallösungen sind, jedoch konnten wir dies mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens nicht in angemessener Zeit beweisen. Alle anderen Probleme haben wir in der angegebenen Zeit optimal gelöst. Auf den nachfolgenden Seiten sind jeweils die Steinerbaumpackungen zu den in Spalte 2 dokumentierten Zahlen gezeichnet.

Beispiel	beste Lös.	LP-Lös.	proz. Abw.	Iter.	B&C	CPU-Zeit
difficult switchbox	463.711	463.709	0.0%	69	3	1564:15
more difficult switchbox	451.712	451.708	0.0%	53	1	983:23
terminal intensive switchbox	536.694	535.196	0.2%	163	13	3755:44
dense switchbox*	440.601	437.579	0.7%	119	4	1017:43
augmented dense switchbox*	468.600	466.006	0.4%	105	1	4561:41
modified dense switchbox	451.585	451.009	0.0%	51	1	387:03
pedagogical switchbox	330.770	330.760	0.0%	77	5	251:58

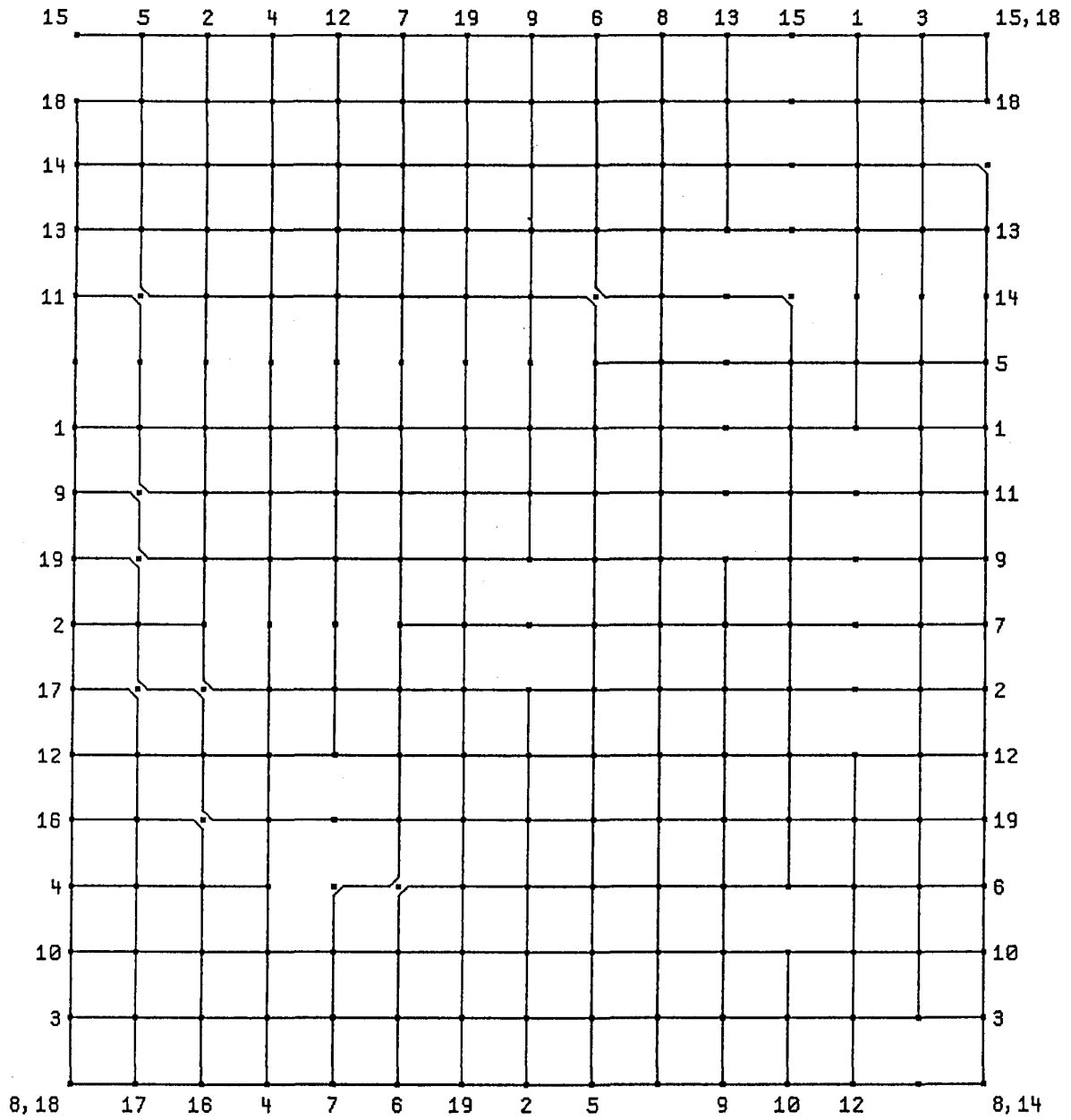
Tabelle 8.2.4



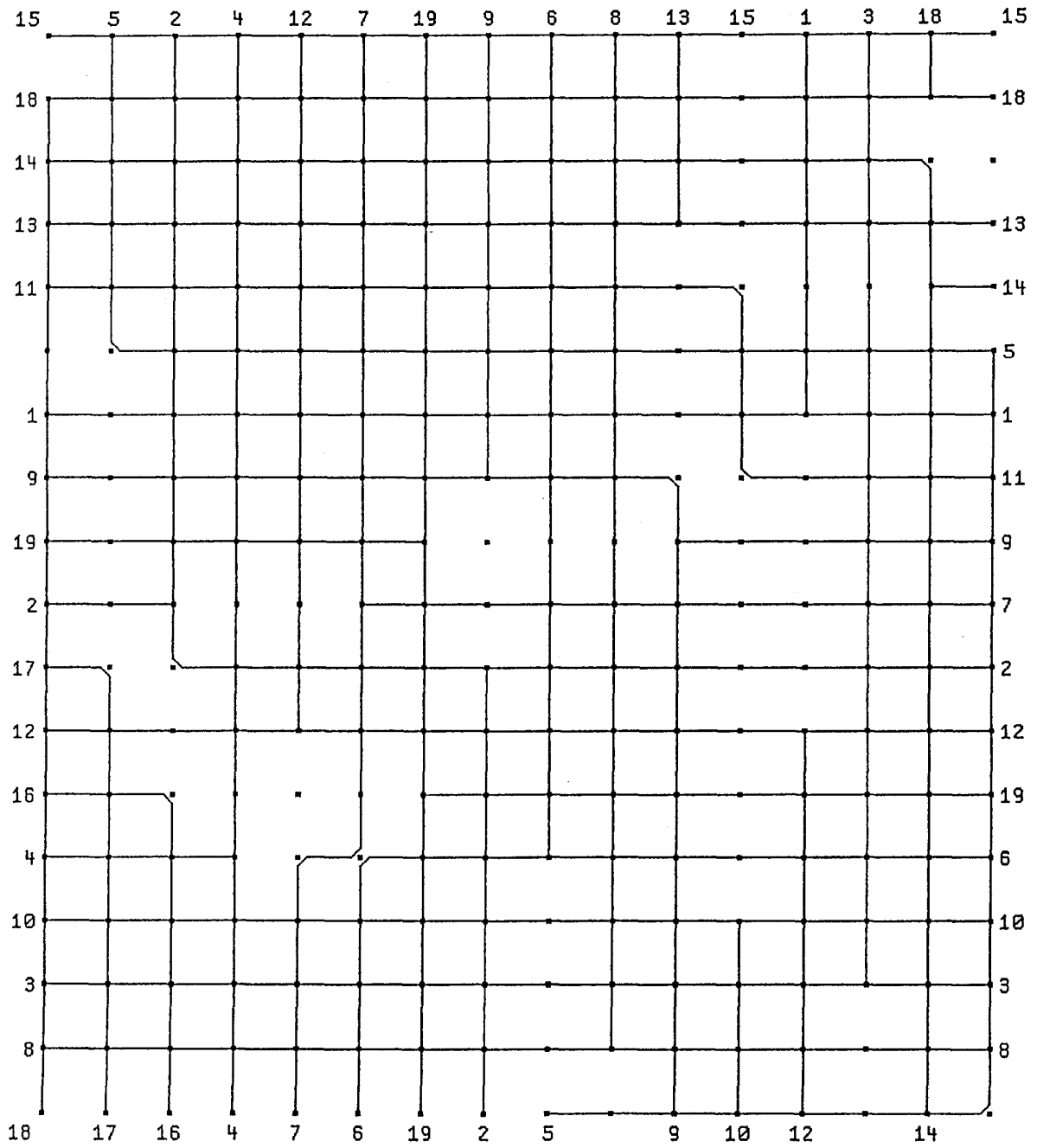
“difficult switchbox”
Abbildung 8.2.5



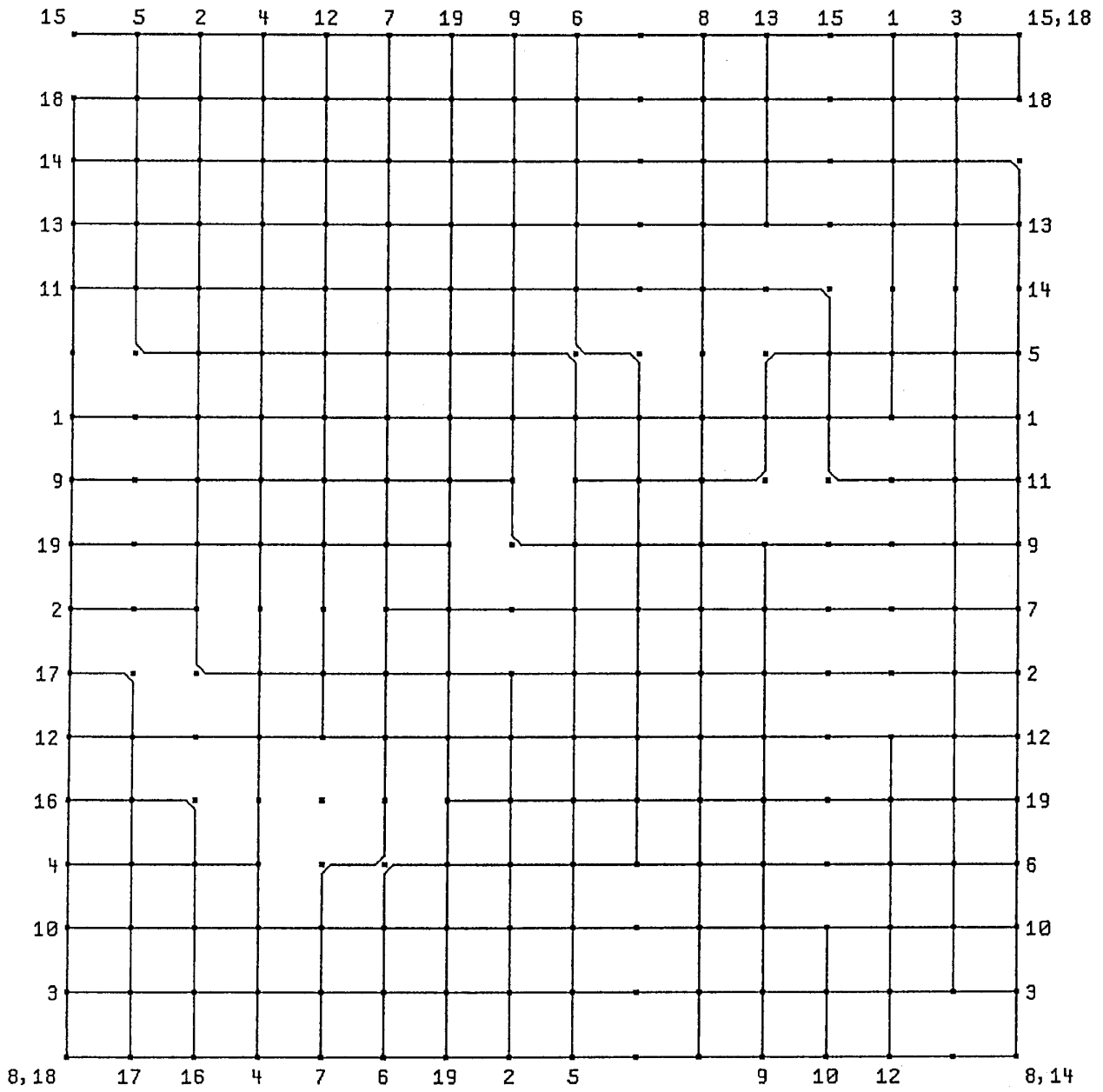
“terminal intensive switchbox”
Abbildung 8.2.7



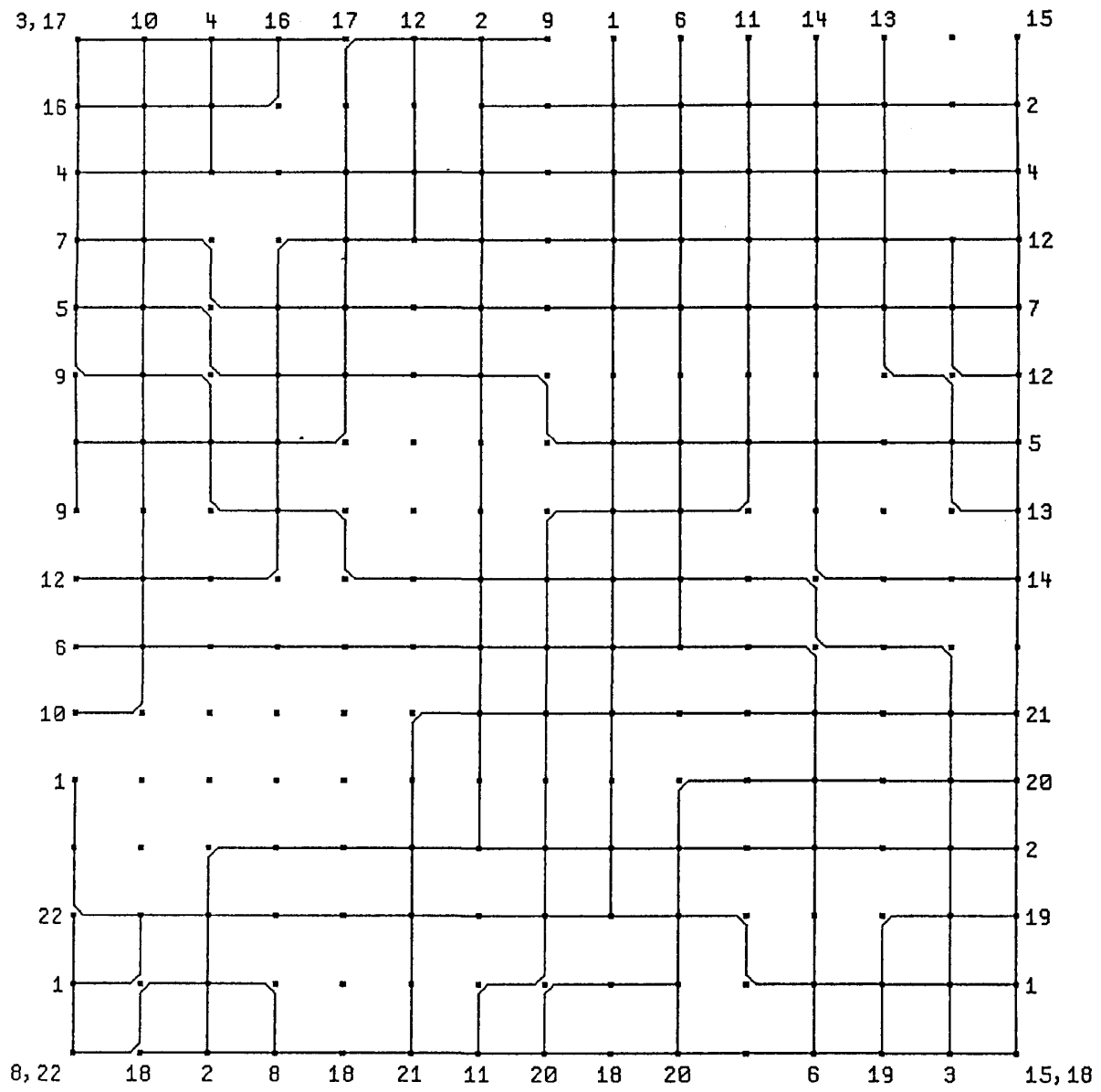
“dense switchbox”
Abbildung 8.2.8



“augmented dense switchbox”
Abbildung 8.2.9



“modified dense switchbox”
Abbildung 8.2.10



“pedagogical switchbox”
Abbildung 8.2.11

Die Zahlen aus Tabelle 8.2.4 sind recht erfreulich. In allen Beispielen garantiert der Wert der unteren Schranke in Spalte 3, daß die beste zulässige Lösung um höchstens 0.7% von der Optimallösung abweicht. Wir sehen darin den entscheidenden Vorteil dieses Verfahrens, daß mit Hilfe der unteren Schranke die Güte einer heuristisch gefundenen Lösung beurteilt werden kann. Gerade bei Problemen wie dem Verdrahtungsproblem im VLSI-Design, zu deren Lösung überwiegend nur heuristische Verfahren zur Verfügung stehen, können durch ein Schnittebenenverfahren nicht nur die verwendeten heuristischen Verfahren analysiert werden, sondern gleichzeitig wichtige Erkenntnisse über das Problem selbst gewonnen werden, insbesondere darüber, ob das Problem überhaupt eine zulässige Lösung hat oder ob gegebenenfalls noch Verbesserungen erzielt werden können.

Ein sicherlich nicht zu vernachlässigendes Problem bei Verwendung unseres Verfahrens ist die Laufzeit. Die Zahlen in der letzten Spalte von Tabelle 8.2.4 sind sehr hoch. Dies rührt einerseits daher, daß wir an einer Optimallösung der Probleme oder zumindest einer sehr guten oberen und unteren Schranke interessiert waren. Dafür ist ein immenser Zeitaufwand erforderlich. Für die Praxis ist es im allgemeinen ausreichend, eine Lösung zu finden, die eine gewisse vorgegebene Gütegarantie hat. Wir haben unter diesem Gesichtspunkt die mit dem Schnittebenenverfahren erzielten unteren Schranken analysiert. In Tabelle 8.2.12 ist dargestellt nach wievielen Minuten die untere Schranke von der besten Lösung um höchstens 5, 2, 1 und, falls erreicht, 0 Prozent abweicht.

Beispiel	5%	2%	1%	0%
difficult switchbox	3:24	3:24	90:12	688:49
more difficult switchbox	3:20	3:20	38:19	530:11
terminal intensive switchbox	5:44	83:24	239:10	–
dense switchbox*	2:00	2:00	103:07	–
augmented dense switchbox*	2:04	2:04	269:20	–
modified dense switchbox	2:04	2:04	2:04	387:03
pedagogical switchbox	1:46	2:27	15:04	117:55

Tabelle 8.2.12

Aus Spalte 2 entnehmen wir, daß in allen Beispielen nach spätestens 6 Minuten die untere Schranke nur noch um höchstens 5% von der besten Lösung abweicht. Damit zeigt sich, daß das Schnittebenenverfahrens bereits nach wenigen Minuten sehr gute untere Schranken erzielt. Tabelle 8.2.12 verdeutlicht außerdem, daß der Zeitaufwand enorm wächst, um eine Gütegarantie von weniger als einem Prozent geben zu können beziehungsweise die Optimalität einer Lösung beweisen zu können.

Die Zeiten in den ersten Spalten von Tabelle 8.2.12 sind unseres Erachtens überwiegend akzeptabel. Wir sollten uns aber bewußt machen, daß die Größenordnungen dieser Beispiele im Vergleich zu den in der Praxis auftretenden Problemgrößen im VLSI-Design noch verhältnismäßig klein sind. Unser langfristiges Ziel ist es, dieses Verfahren auch auf praktische Problemgrößen anzuwenden. Um dieses Ziel erreichen zu können, muß sicherlich die Laufzeit reduziert werden. Wir haben in Tabelle 8.2.13 das Laufzeitverhalten von Algorithmus (8.1.5) analysiert. Spalte 2 gibt an, wieviel Prozent der Gesamtlaufzeit zur Lösung der linearen Programme verwendet wurden. Die Spalten 3 und 4 informieren über die entsprechenden Zeiten in Prozent, die die Separierungsverfahren und das Primalverfahren in Anspruch genommen haben. Der prozentuale Zeitanteil, der für die Ein- und Ausgabe, das Zeichnen der Lösungen und der gleichen mehr, benötigt wurde, ist in der letzten Spalte zu finden.

Beispiel	LP	Separierung	Primalverfahren	Sonstiges
difficult switchbox	95.7%	1.1%	3.1%	0.1%
more difficult switchbox	95.6%	0.9%	3.4%	0.1%
terminal intensive switchbox	92.6%	4.0%	3.4%	0.0%
dense switchbox*	95.9%	1.5%	2.5%	0.1%
augmented dense switchbox*	99.0%	0.3%	0.7%	0.0%
modified dense switchbox	95.6%	1.3%	2.9%	0.2%
pedagogical switchbox	84.7%	5.8%	9.3%	0.2%

Tabelle 8.2.13

Aus Tabelle 8.2.13 ist klar ersichtlich, daß die Lösung der linearen Programme den überwiegenden Teil der Laufzeit beansprucht. Dies liegt sicherlich nicht an dem Code zur Lösung der linearen Programme. Das von R. E. Bixby implementierte Simplex-Verfahren ist einer der schnellsten und robustesten Codes zur Lösung linearer Programme, die weltweit zur Verfügung stehen. Die Ursache der hohen Laufzeiten liegt vielmehr in der starken Entartung und der Größe der linearen Programme. Wir vermuten, daß die folgenden beiden Vorschläge entscheidend dazu beitragen, die Laufzeit des Verfahrens zu verringern.

(1) Reduzierung der Variablen.

Die zu lösenden linearen Programme in unserem Verfahren haben bis zu 4000 Nebenbedingungen und 14000 Variablen. Eine uns vernünftig erscheinende Möglichkeit zur Reduzierung der Laufzeit ist, das Problem nicht auf dem vollen Variablensatz zu betrachten. Man beginnt beispielsweise für jedes Netz nur mit den Variablen, die innerhalb des minimal einschließenden Rechtecks liegen, oder einer noch kleineren Teilmenge. Nach Lösung des Problems auf dem eingeschränkten Variablensatz

überprüft man, ob die Lösung auch für das Gesamtproblem optimal ist. Wenn nicht, fügt man entsprechende Variablen hinzu und löst von neuem. Auf diese Weise ist es durchaus möglich, daß ein Großteil der Variablen während des gesamten Verfahrens explizit nicht hinzugefügt zu werden braucht. Diese Methode wird heute üblicherweise zur Lösung großer praktische Probleme mit Hilfe eines Schnittebenenverfahrens eingesetzt ([GH89], [PR91]). Wir haben diese Methode bis jetzt noch nicht in unser Verfahren integriert. Der Grund dafür ist, daß wir in erster Linie untersuchen wollten, ob der von uns entwickelte Ansatz zur Lösung von Verdrahtungsproblemen aus dem VLSI-Design überhaupt eingesetzt werden kann. Das Ziel, gleichzeitig ein schnelles Verfahren zu entwickeln, trat dabei zunächst in den Hintergrund. Die Integration dieser Methode in unser Verfahren wird eine völlige Umstrukturierung der verwendeten Datenstrukturen und implementierten Algorithmen nach sich ziehen.

(2) Dekomposition der linearen Programme.

Die Nebenbedingungsmatrix der in unserem Verfahren auftretenden linearen Programme hat spezielle Struktur. Ein Großteil der Nebenbedingungen hat Nicht-Null-Koeffizienten für jeweils nur ein Netz. Dazu zählen hauptsächlich die Steinerpartitions-Ungleichungen. Die anderen Ungleichungen kombinieren verschiedene Netze miteinander. Dazu gehören die Kapazitätsungleichungen, die Alternierenden-Kreis-Ungleichungen und andere. Im wesentlichen hat die Nebenbedingungsmatrix eine Blockgestalt wie in Abbildung 8.2.14 angedeutet.

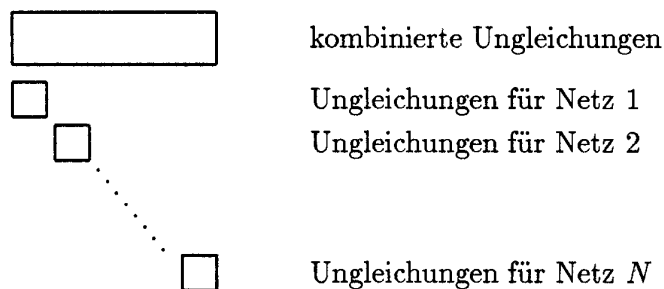


Abbildung 8.2.14

Es bietet sich daher an, das lineare Programm in eine Vielzahl von kleineren linearen Programmen zu zerlegen. Verfahren zur Dekomposition linearer Programme wurden bereits 1960 von Dantzig und Wolfe und 1962 von Benders vorgeschlagen ([DaW60], [B62]). Diese Verfahren fanden bis heute kaum Anwendung, da die linearen Programme meistens direkt schneller gelöst werden können. Unter Verwendung der heute zur Verfügung stehenden parallelen Rechnern können diese Methoden durchaus wieder interessant werden. Es wird eines unserer langfristigen Ziele sein zu untersuchen, ob mit Hilfe paralleler Rechner zusammen mit diesen Methoden die in unserem Fall auftretenden Probleme gelöst werden können.

Abschließend möchten wir die Separierungsverfahren beziehungsweise die hinzugefügten Ungleichungen analysieren. In Tabelle 8.2.15 ist aufgeführt, wieviele verletzte Ungleichungen von welchem Typ beziehungsweise welchem Verfahren gefunden wurden. Spalte 2 zeigt

an, wieviele Ungleichungen aus dem Pool verletzt waren und dem linearen Programm hinzugefügt wurden. Die Spalten 3 bis 6 geben Aufschluß über den Erfolg der heuristischen Separierungsalgorithmen. Die Anzahl der verletzten Steinerpartitions-Ungleichungen, die mit Hilfe der Algorithmen (8.1.2) und (8.1.4) entdeckt wurden, sind in Spalte 3 wiedergegeben. Die Spalte 4 beziehungsweise 5 gibt die Anzahl der verletzten Kreis- beziehungsweise Gitter-Ungleichungen an, die durch Algorithmus (7.2.2.16) beziehungsweise (7.2.3.2) gefunden wurden. Die letzten beiden Spalten informieren schließlich über das Ergebnis der beiden in Kapitel 7.2.1 und 7.2.2 entwickelten dynamischen Programme. Die vorletzte Spalte gibt die Anzahl der verletzten Ungleichungen wieder, die mit dem exakten Separierungsalgorithmus (7.2.1.10) für die Steinerpartitions-Ungleichungen gefunden wurden. Die letzte Spalte stellt die Ergebnisse von Algorithmus (7.2.2.12) dar.

Beispiel	Pool	Heuristiken			Dyn. Programme	
		Partitionen	Kreise	Gitter	Partitionen	Kreise
difficult switchbox	8303	5091	887	19	0	0
more difficult switchbox	6720	4516	646	8	0	0
terminal intensive switchbox	12593	6673	890	59	2	117
dense switchbox*	5688	4306	706	24	0	0
augmented dense switchbox*	8198	6024	827	14	0	0
modified dense switchbox	3165	3048	311	29	0	0
pedagogical switchbox	3792	2833	542	32	0	48

Tabelle 8.2.15

Die Ergebnisse aus Tabelle 8.2.15 lassen erkennen, daß der überwiegende Teil an Ungleichungen von Steinerpartitionen induziert wird. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, denn es ist zunächst sicherlich eine Vielzahl von Ungleichungen notwendig, um den Zusammenhang der einzelnen Terminalmengen herzustellen. Die Kreis- und Gitter-Ungleichungen sind schließlich erforderlich, um die bei verschiedenen Netzen auftretenden Konflikte zu lösen. Wir vermuten, daß wir noch weitere gute Klassen von Ungleichungen benötigen, die mehrere Netze miteinander kombinieren, um insbesondere die mit der Fußnote versehenen Beispiele "dense switchbox" und "augmented dense switchbox" optimal lösen zu können.

Eine interessante Feststellung ist, daß so gut wie keine Steinerpartitions-Ungleichungen mit dem exakten Verfahren gefunden wurden, falls die Heuristiken keine verletzte Ungleichung mehr gefunden haben. Für die Kreis-Ungleichungen ist dies zwar nicht in gleichem Maße der Fall, jedoch ist es auch hier so, daß ein Großteil der Ungleichungen durch die Heuristik

gefunden wurde. Diese Tatsachen geben Anlaß zur Hoffnung, daß ein solches Schnittebenenverfahren auch gute Ergebnisse für Probleminstanzen liefern kann, für die keine exakte Separierungsverfahren zur Verfügung stehen (beispielsweise für Probleme deren Terminalmengen nicht ausschließlich an der äußeren Fläche liegen).

Damit schließen wir die Analyse unserer Testbeispiele ab. Wir haben gesehen, daß dieser Ansatz recht erfolgsversprechend ist, wenn gleich noch viele offene Probleme gelöst werden müssen, um wirkliche praktische Größenordnungen lösen zu können.

9. Ausblick

In dieser Dissertation haben wir einen polyedrischen Ansatz zur Lösung des Steinerbaumpackungs-Problems entwickelt. Dieser Ansatz zeichnet sich durch die beiden folgenden Punkte aus. Einerseits wird das Problem global betrachtet, das heißt alle Netze werden simultan behandelt. Andererseits liefert das Verfahren eine untere Schranke für die Optimallösung, mit deren Hilfe heuristisch bestimmte Lösungen beurteilt werden können. Wir sind der Auffassung, daß diese beiden Eigenschaften wesentlich dazu beitragen, qualitativ gute Lösungen für Verdrahtungsprobleme aus dem VLSI-Design zu erhalten.

Allerdings sind wir momentan noch weit davon entfernt, mit diesem Verfahren die in der Praxis auftretenden Größenordnungen lösen zu können. Wir haben bislang diesen Ansatz an relativ kleinen Switchbox-Verdrahtungsproblemen getestet und dort vielversprechende Ergebnisse erzielt. Wir sind sogar in der Lage, die meisten der in der Literatur diskutierten Beispiele optimal zu lösen. Diese Resultate lassen hoffen, daß der Ansatz auch zur Lösung praxisrelevanter Problembeispiele verwendet werden kann.

Um dieses Ziel erreichen zu können, muß noch eine Vielzahl von Schwierigkeiten und Problemen gelöst werden.

Sicherlich werden wir ein noch tieferes Verständnis der entsprechenden Steinerbaumpackungs-Polyeder benötigen. Wir vermuten, daß, insbesondere wenn die Kantenkapazitäten sehr heterogen sind, viele weitere gültige und facetten-definierende Ungleichungen benötigt werden. Jedoch sind Kenntnisse über die Ungleichungsstruktur der Polyeder allein nicht ausreichend. Darüber hinaus sind gute, wenn möglich exakte, Algorithmen zur Lösung der zugehörigen Separierungsprobleme unerlässlich. Der Entwicklung solcher Algorithmen werden wir künftig hohe Beachtung schenken müssen, insbesondere wenn wir uns nicht nur auf das Lösen von Switchbox-Verdrahtungsproblemen beschränken wollen.

Der Hauptschwerpunkt künftiger Arbeit liegt sicherlich in der Reduzierung der Laufzeit. Wir haben im letzten Kapitel bereits angedeutet, wo wir Ansatzpunkte zur Lösung dieses Problems sehen. Eine sehr interessante Fragestellung diesbezüglich ist, inwieweit der Einsatz paralleler Rechner zur Laufzeitreduzierung beitragen kann. Es wird eines unserer langfristigen Ziele sein, darauf eine Antwort zu geben.

Literaturverzeichnis

- [A80] : Y. P. Aneja, *An integer programming approach to the Steiner problem in graphs*, Networks 10, 1980, 167 – 178.
- [B62] : J. F. Benders, *Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*, Numerische Mathematik 4, 1962, 238 – 252.
- [BB84] : M. L. Brady, D. J. Brown, *VLSI routing: Four layers suffice*, in: F. P. Preparata (Hrsg.): “Advances in Computing Research”, Bd. 2: VLSI theory, Jai Press, London, 1984, 245 – 258.
- [BLP87] : M. O. Ball, W. Liu, W. R. Pulleyblank, *Two terminal Steiner tree polyhedra*, Report No. 87466-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn, 1987.
- [BM86] : M. Becker, K. Mehlhorn, *Algorithms for routing in planar graphs*, Acta Informatica 23, 1986, 163 – 176.
- [BP83] : M. Burstein, R. Pelavin, *Hierarchical wire routing*, IEEE Transactions on Computer-Aided-Design CAD-2, 1983, 223 – 234.
- [C83] : V. Chvátal, *Linear programming*, Freeman, New York, 1983.
- [CGR90] : S. Chopra, E. Gorres, M. R. Rao, *Solving the Steiner tree problem on a graph using branch and cut*, Manuskript, 1990, erscheint in ORSA Journal on Computing.
- [CH88] : J. P. Cohoon, P. L. Heck, *BEAVER: A computational-geometry-based tool for switchbox routing*, IEEE Transactions on Computer-Aided-Design CAD-7, 1988, 684 – 697.
- [Ci91] : D. Cieslik, *Shortest trees in Banach-Minkowski spaces (the Steiner minimal tree problem)*, Preprint-Reihe Mathematik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Greifswald, 1991.
- [CR41] : R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1941.
- [CoR88a] : S. Chopra, M. R. Rao, *The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of facets*, Technical Report No. 88-82, Graduate School of Business Administration, New York University, New York, 1988.
- [CoR88b] : S. Chopra, M. R. Rao, *The Steiner tree problem II: Properties and classes of facets*, Technical Report No. 88-83, Graduate School of Business Administration, New York University, New York, 1988.
- [D59] : E. W. Dijkstra, *A note on two problems in connection with graphs*, Numerische Mathematik 1, 1959, 269 – 271.
- [DaW60] : G. B. Dantzig, P. Wolfe, *Decomposition principle for linear programs*, Operations Research 8, 1960, 101 – 111.
- [DW71] : S. E. Dreyfus, R. A. Wagner, *The Steiner problem in graphs*, Networks 1, 1971, 195 – 207.

- [EMV87] : R. E. Erickson, C. L. Monma, A. F. Veinott, *Send-and-split method for minimum concave-cost network flows*, Mathematics of Operations Research 12, 1987, 634 – 664.
- [F82] : A. Frank, *Disjoint paths in a rectilinear grid*, Combinatorica 2, 1982, 361 – 371.
- [F90] : A. Frank, *Packing paths, circuits, and cuts – a survey*, in: B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver (Hrsg.): “Paths, Flows, and VLSI-Layout”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, 47 – 100.
- [Fe89] : C. E. Ferreira, *O problema de Steiner em grafos: Uma abordagem poliédrica*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Brasil, 1989.
- [Fi91] : M. Fischetti, *Facets of two Steiner arborescence polyhedra*, Mathematical Programming 51, 1991, 401 – 419.
- [GGJ77] : M. R. Garey, L. R. Graham, D. S. Johnson, *The complexity of computing Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math. 32, 1977, 835 – 859.
- [GJ77] : M. R. Garey, D. S. Johnson, *The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete*, SIAM J. Appl. Math. 32, 1977, 826 – 834.
- [GJ79] : M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [GH89] : M. Grötschel, O. Holland, *Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems*, Mathematical Programming 51, 1991, 141 – 202.
- [GJR84] : M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt, *A cutting plane algorithm for the linear ordering problem*, Operations Research 32, 1984, 1195 – 1220.
- [GLS88] : M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [GM90] : M. Grötschel, C. L. Monma, *Integer polyhedra associated with certain network design problems with connectivity constraints*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 3, 1990, 502 – 523.
- [GMS92] : M. Grötschel, C. L. Monma, M. Stoer, *Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints*, Operations Research 40, 1992, 309 – 330.
- [HR92] : F. K. Hwang, D. S. Richards, *Steiner tree problems*, Networks 22, 1992, 55 – 89.
- [K72] : R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in: R. E. Miller, J. W. Thatcher (Hrsg.): “Complexity of Computer Computations”, Plenum Press, New York, 1972, 85 – 103.
- [KL84] : M. R. Kramer, J. van Leeuwen, *The complexity of wire-routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits*, F. P. Preparata (Hrsg.): “Advances in Computing Research”, Bd. 2: VLSI theory, Jai Press, London, 1984, 129 – 146.
- [KM86] : M. Kaufmann, K. Mehlhorn, *Routing through a generalized switchbox*, Journal of Algorithms 7, 1986, 510 – 531.

- [KM90] : M. Kaufmann, K. Mehlhorn, *Routing problems in grid graphs*, in: B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver (Hrsg.): "Paths, Flows, and VLSI-Layout", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, 165 – 184.
- [KPS90] : B. Korte, H. J. Prömel, A. Steger, *Steiner trees in VLSI-layout*, in: B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver (Hrsg.): "Paths, Flows, and VLSI-Layout", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, 185 – 214.
- [L61] : C. Y. Lee, *An algorithm for path connection and its applications*, IRE Transactions on Electronic Computers EC-10, 1961, 346 – 365.
- [Le90] : T. Lengauer, *Combinatorial algorithms for integrated circuit layout*, Wiley, Chichester, 1990.
- [Li84] : W. Lipski, *On the structure of three-layer wireable layouts*, F. P. Preparata (Hrsg.): "Advances in Computing Research", Bd. 2: VLSI theory, Jai Press, London, 1984, 231 – 244.
- [LL91] : T. Lengauer, M. Lügering, *Integer program formulations of global routing and placement problems*, Reihe Informatik Nr. 95, Universität-Gesamthochschule-Paderborn, Paderborn, 1991.
- [Lo79] : M. V. Lomonosov, *Multiflow feasibility depending on cuts*, Graph Theory Newsletters 9, 4.
- [Lo85] : M. V. Lomonosov, *Combinatorial approaches to multiflow problems*, Discrete Appl. Math. 11, 1 – 94.
- [Lu85] : W. K. Luk, *A greedy switch-box router*, Integration 3, 1985, 129 – 149.
- [Ly75] : J. F. Lynch, *The equivalence of theorem proving and the interconnection problem*, ACM SIGDA Newsletters 5, 1975, 31 – 65.
- [M88] : A. Martin, *Das Verdrahtungsproblem beim VLSI-Design*, Diplomarbeit, Universität Augsburg, Augsburg, 1988.
- [M90] : A. Martin, *A polynomially solvable case of the separation problem for the Steiner-partition inequalities*, Methods of Operations Research 62, 1990, 277 – 284.
- [Ma87] : N. Maculan, *The Steiner tree problem in graphs*, Annals of Discrete Mathematics 31, 1987, 185 – 212.
- [MP86] : K. Mehlhorn, F. P. Preparata, *Routing through a rectangle*, Journal for the Association for Computing Machinery 33, 1986, 60 – 85.
- [O83] : H. Okamura, *Multicommodity flows in planar graphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) 31, 1981, 75 – 81.
- [OS81] : H. Okamura, P. D. Seymour, *Multicommodity flows in graphs*, Discrete Applied Mathematics 6, 1983, 55 – 62.
- [PR91] : M. Padberg, G. Rinaldi, *A branch & cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems*, SIAM Review 33, 1991, 60 – 100.
- [R83] : V. J. Rayward-Smith, *The computation of nearly minimal Steiner problem in graphs*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 14, 1983, 15 – 23.

- [RC86] : V. J. Rayward-Smith, A. Clare, *On finding Steiner vertices*, Networks 14, 1986, 283 – 294.
- [RS86] : N. Robertson, P. D. Seymour, *Graph minors VI: Disjoint paths across a disc*, J. Comb. Theory (B) 41, 1986, 115 – 138.
- [RS90] : N. Robertson, P. D. Seymour, *An outline of a disjoint paths algorithm*, in: B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver (Hrsg.): “Paths, Flows, and VLSI-Layout”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, 267 – 292.
- [S88a] : A. Schrijver, *The Klein bottle and multicommodity flows*, Report OS-R8810, Mathematical Centre, Amsterdam, 1988, erscheint in Combinatorica.
- [S88b] : A. Schrijver, *Disjoint homotopic paths and trees in a planar graph. Part I: Description of the method. Part II: Correctness of the method. Part III: Disjoint trees.*, Manuscript, Department of Econometrics, Tilburg University, Tilburg, Niederlande, 1988.
- [S90] : A. Schrijver, *Homotopic routing methods*, B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver (Hrsg.): “Paths, Flows, and VLSI-Layout”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, 329 – 371.
- [Sa87] : M. Sarrafzadeh, *Channel-routing problem in the knock-knee mode is \mathcal{NP} -complete*, IEEE Transactions on Computer-Aided-Design CAD-6, 1987, 503 – 506.
- [TM80] : H. Takahashi, A. Matsuyama, *An approximate solution for the Steiner problem in graphs*, Math. Japonica 24, 1980, 573 – 577.
- [W87] : P. Winter, *Steiner problem in networks: A survey*, Networks 17, 1987, 129 – 167.
- [WS92] : P. Winter, J. MacGregor Smith, *Path-distance heuristics for the Steiner problem in undirected networks*, Algorithmica 7, 1992, 309 – 327.

Index

- adjazent 6
- Allgemeine Verdrahtung 37
- Alternierende-Kreis-Ungleichung 68
- alternierender Kreis 68
- alternierender Weg 77
- Anfangsknoten 8
- aufspannender Baum 9
- äußere Fläche 10
- Basiszelle 33
- Baum 9
- Bedarfsgraph 26
- bedingt-erweiterte Kreis-Ungleichung 126
- bend 45
- Blatt 9
- Bogen 7
- bogenminimale Steinerarboreszenz 24
- Branch & Cut-Verfahren 114
- Brücke 9
- charakteristischer Graph 124
- detaillierte Verdrahtung 34
- Diagonale 8
- Differenzmenge 12
- Digraph 6
- Dimension 12
- disjunkte Netzliste 17
- dualer Graph 10
- Ecke 12
- einfacher Graph 6
- Einbettung 10
- Endknoten 8
- endlicher Graph 6
- Entwurf für Allgemeine Zellen 33
- erweiterte Kreis-Ungleichung 124
- euklidisches Steinerbaum-Problem 18
- Eulerpfad 9
- eulerscher Graph 9
- Eulertour 9
- Facette 12
- facetten-definierender Graph 68
- facetten-definierende Ungleichung 12
- facetten-induzierende Ungleichung 12
- Filterung 129
- Flächenkreis 10
- freie Kapazität eines Schnittes 26
- ganzzahliges lineares Programm 13
- Gate-Array Entwurf 33
- Gerade-Alternierende-Weg-Ungleichung 77
- gerader alternierender Weg 77
- gerader Knoten 7
- gerader Schnitt 26
- gerichteter Graph 6
- gerichtete Kette 8
- gerichteter Pfad 9
- gerichteter Weg 9
- geschlossene Kette 9
- gewichtetes Steinerbaumpackungs-Problem 15
- Gittergraph 10
- , k -dimensionaler 11
- Gitterbreite 10
- Gitterhöhe 10
- gitterfreie Verdrahtung 33
- Gitter-Ungleichung 103
- globale Verdrahtung 34
- Grad 7
- Graph 6
- gültige Ungleichung 12
- Halbraum 12
- Homotopie 11
- horizontaler Schnitt 10
- Hyperebene 12
- induzierter Graph 8
- induzierter Schnitt 7
- induzierte Seitenfläche 12
- innerer Knoten 8
- inzident 6
- Inzidenzfunktion 6
- Inzidenzmenge 12
- Inzidenzvektor 12
- Inzidenzvektor einer Steinerbaumpackung 48
- isolierter Knoten 7
- isomorph 8
- Kanal-Verdrahtung 37

Kante 6
 kantendisjunkte Zerlegung 17
 Kantengraph 7
 kantenminimaler Steinerbaum 14
 kantenminimale Steinerbaumpackung 17
 Kanten-Teilgraph 8
 Kantenzusammenhangszahl 9
 Kapazitätsungleichung 49
 Kette 8
 Knock-knee 36
 Knock-knee Modell 36
 Knoten 6
 Knotenzusammenhangszahl 9
 Komponente 9
 Kontraktion einer Kantenmenge 8
 Kontraktion einer Knotenmenge 8
 Kontraktionsminor 8
 Kreis 9
 Kreisel 98
 Kreisel-Ungleichung 98
 kreuzen 8
 kreuzungsfrei 9
 kritischer Schnitt 109
 Kritische-Schnitt-Ungleichung 109
 Kurve 11
 kürzester Pseudoweg 138
 Lage 33
 Länge einer Kette 8
 lineares Programm 13
 lineares Programmierungsproblem 13
 Loch 11
 logischer Entwurf 32
 lokale Verdrahtung 34
 LP-Relaxierung 13
 Manhattan Modell 36
 Master 33
 Matching 7
 Matching-Baum-Ungleichung 94
 Matching-Ungleichung 86
 maximal kreuzungsfrei 68
 Maze Router 39
 Mehrlagen-Modell 36
 multiterminales Netz 33
 Nachbar 6
 Netz 15, 32
 —, k -terminales 33
 Netzliste 15
 Nullgraph 67
 Nullkante 67
 Optimallösung 13, 17
 Packung von Steinerbäumen 17
 parallele Kante 6
 Paritätsstau 27
 Partition 7
 perfektes Matching 7
 Pfad 9
 physikalischer Entwurf 32
 planarer Graph 10
 Planares Modell 36
 Plazierungsproblem 32
 Polyeder 12
 Polytop 13
 Pseudodistanz 138
 primaler Graph 10
 Quasi-Weg 103
 Randkanten 10
 Randknoten 10
 rechtwinkliger Gittergraph 11
 rechtwinkliges Steinerbaum-Problem 18
 saturierter Schnitt 26
 Schicht 33
 Schlinge 6
 Schnitt 7
 Schnittebene 113
 Schnittebenenverfahren 113
 Sea-of-cells Entwurf 33
 Seitenfläche 12
 Separierungsproblem 113
 Spalte 10
 Standard-Zellen Entwurf 33
 Steinerarboreszenz 24
 Steinerbaum 14
 Steinerbaumpackung 17
 Steinerbaumpackungs-Polyeder 56
 Steinerbaumpackungs-Problem 14
 Steinerbaum-Polyeder 56
 Steinerbaum-Problem 15
 Steinerbrücke 16

Steinerpartition 16
Steinerpartitions-Ungleichung 116
Steinerschnitt-Ungleichung 116
Spur 33
Stern 7
Switchbox-Verdrahtung 37
Teilgraph 8
Terminal 15, 32
Track 33
Träger 13
Transparenz 34
trennend 9
triviale Ungleichung 49
Überschuß eines Schnittes 26
Untergraph 8
Ungerade-Alternierende-Weg-Ungleichung 77
ungerader alternierender Weg 77
ungerader Knoten 7
ungerader Schnitt 26
ungerichteter Graph 6
verallgemeinerte Gitter-Ungleichung 143
verallgemeinerte Kreis-Ungleichung 123
verdrahtetes Netz 32
Verdrahtungsproblem 32
vertikaler Schnitt 10
Verzweigungsbaum 114
Via 33
volldimensional 12
vollständiger Gittergraph 11
vollständiger Graph 7
Wald 9
Weg 9
Zeile 10
Zellen 32
Zielfunktion 13
zulässige Lösung 13, 17
zusammenhängender Graph 9
—, k -fach knotenzusammenhängender 9
—, k -fach kantenzusammenhängender 9

Lebenslauf

- 10.05.1965 geboren in Memmingen als Sohn von Konrad Martin und Christa Maria Martin, geb. Laupheimer
- 1971–1974 Besuch der Nordschule Schwabach, Bayern
- 1974–1975 Besuch der Volksschule in Wolkersdorf, Bayern
- 1975–1981 Besuch des Adam-Kraft-Gymnasiums in Schwabach, Bayern
- 1981–1984 Besuch des Allgäu-Gymnasiums in Kempten, Bayern
- 29.06.1984 Abitur
- 1984–1988 Student der Wirtschaftsmathematik an der Universität Augsburg, Bayern
- 22.12.1988 Erlangung des Titels Dipl. Math. oec. (UNIV) an der Universität Augsburg, Bayern
- 01.01.1989 wissenschaftlicher Mitarbeiter am
bis 31.08.1991 Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II der Universität Augsburg
- seit 17.08.1991 verheiratet mit
Gabriele Roswitha Martin, geb. Buchmann
- seit 01.09.1991 wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin

