FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK
ARBEITSGRUPPE MATHEMATISCHE GEOMETRIEVERARBEITUNG
PROF. DR. KONRAD POLTHIER

Diplomarbeit

angefertigt am
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin

Adaptives Remeshing von nicht-mannigfaltigen Dreiecksnetzen

Michael Zilske
(Geboren am 24. August 1979 in Hamburg)

Betreuer:
Dipl.-Phys. Hans Lamecker
Dr. Stefan Zachow

Berlin, 22. Oktober 2007

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema:

Adaptives Remeshing von nicht-mannigfaltigen Dreiecksnetzen

selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Berlin, den 22. Oktober 2007

Michael Zilske

Danksagung

Ich bedanke mich bei Hans Lamecker und Dr. Stefan Zachow, die mich bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit mit außergewöhnlicher Aufmerksamkeit, Geduld und Engagement betreut haben.

Bei Prof. Dr. Konrad Polthier bedanke ich mich für die Ausgabe des interessanten Themas und die wertvollen Gespräche.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Abteilung Visualisierung und Datenanalyse am ZIB unter der Leitung von Hon.-Prof. Hans-Christian Hege danke ich für die überaus freundschaftliche Arbeitsatmosphäre und die fachliche und moralische Unterstützung in Form von zahlreichen Gesprächen und Diskussionen.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern und meinen Freunden Rafael Pereira Monteiro und Stephan Scheying, die mir während der Schlussphase dieser Arbeit eine unersetzlich wertvolle Unterstützung waren.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

1.1 Remeshing 4

1.2 Motivation 5

1.3 Verwandte Arbeiten 7

1.4 Beitrag und Aufbau der Arbeit 9

2 Grundlagen **11**

2.1 Dreiecksnetze 11

2.2 Baryzentrische Koordinaten 13

2.3 Rekonstruktion der Originalfläche 15

2.4 Parametrisierung von Oberflächen 17

2.4.1 Diskrete Parametrisierung 17

2.4.2 Konvexkombinationsabbildungen 19

2.4.3 Formerhaltende Parametrisierungen 20

2.4.4 Mittelwertkoordinaten 22

3 Adaptives Remeshing von Dreiecksnetzen **23**

3.1 Die Dichtefunkion 24

3.2 Verbindung zur Ausgangsfläche 26

3.3 Lokale Gitteroperationen 28

3.3.1 Bewegen von Knoten 28

3.3.2 Kontraktion von Kanten 29

3.3.3 Teilen von Kanten 30

3.3.4 Kippen von Kanten 31

3.4 Flächenbasiertes Remeshing 32

3.5 Winkelbasierte Glättung 34

3.6 Lloyd-Relaxierung 37

3.7 Ausschnittweise überlappende Parametrisierung 39

3.7.1 Konstruktion von Ausschnitten durch Breitensuche 40
3.7.2 Verwaltung der Ausschnitte 41
3.8 Regularisierung der Konnektivität 42

4 Remeshing mit Merkmalslinien und Nähten 46
4.1 Merkmalsskelette 47
4.2 Bewegen von Skelettknoten 48
4.3 Operationen an der Konnektivität 49
4.4 Regularität von Skelettknoten 50
4.5 Kontrolle der Knotendichte auf dem Skelett 50
4.6 Abschneiden von Voronoizellen 53
4.7 Skelettsegmente und PN-Dreiecke 54

5 Implementierung und Ergebnisse 55
5.1 Datenstruktur für Dreiecksnetze 55
5.2 Benutzerschnittstelle 55
5.3 Qualitätsbewertung 57
5.4 Exemplarische Ergebnisse 59
5.5 Diskussion 61

6 Schlussfolgerung und Ausblick 66

Literaturverzeichnis 67

1 Einleitung

1.1 Remeshing

Dreiecksnetze sind ein wichtiges Mittel zur Modellierung von Oberflächen in zahlreichen Anwendungsfeldern wie computerunterstütztes Design (CAD), Computerspiele, Trickfilm, Chirurgieplanung und Baustatik.

Zu jeder Anwendung gehören bestimmte Arten der Gittergewinnung: In Reverse-Engineering-Prozessen wird ein Gegenstand mit einem 3D-Scanner abgetastet und so Punkte auf seiner Oberfläche gewonnen. Medizinische Diagnosegeräte erzeugen 3D-Bilddaten als Voxelgitter, aus denen Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Gewebetypen als Niveauflächen der Voxelintensität rekonstruiert werden können. Bei der Modellierung von Maschinenteilen mithilfe von Softwarewerkzeugen werden triangulierte parametrische Flächenstücke zu komplexen Modellen zusammengesetzt.

In der Regel müssen die so erzeugten Gitter vorverarbeitet werden. Sie sind häufig zu dicht abgetastet, haben also zahlreiche redundante Knoten, die zudem nicht nur die Geometrie der modellierten Fläche, sondern auch ein der jeweiligen Modalität der Gittergewinnung geschuldetes Rauschen wiedergeben. Auf diese Probleme sind Verfahren zur Dezimierung und Glättung angesetzt.

Viele Anwendungen stellen aber weitere Anforderungen an die für sie geeigneten Gitter, besonders an die Form der Dreiecke. Da jede geometrische Form im Rahmen einer vorgegebenen Approximationstoleranz durch die unterschiedlichsten Gitter repräsentiert werden kann, gibt es in der Regel einen Spielraum für Verbesserungen. Je nach Anwendung kann der Schwerpunkt dabei auf unterschiedlichen Qualitätsaspekten liegen.

Gitter, die als Grundlage für numerische Berechnungen dienen, z.B. nach der Methode der Finiten Elemente (FEM), sollen keine langen, spitzen Dreiecke enthalten. Idealerweise werden gleichseitige Dreiecke angestrebt. Die Knoten sollen gleichmäßig über die Oberfläche verteilt sein. Um die Anzahl der benötigten Dreiecke gering zu halten, ist die Knotendichte daran anzupassen, wie detailreich die Oberfläche in der jeweiligen Region ist.

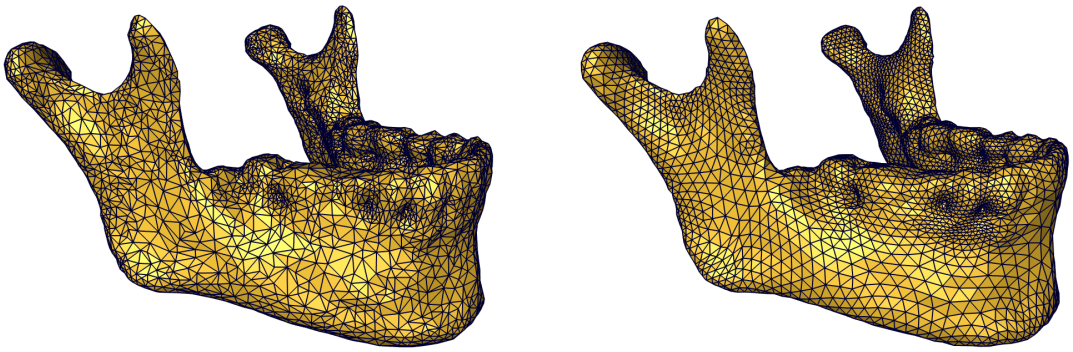


Abbildung 1.1: Ein medizinisches Modell eines Unterkiefers mit 5000 Knoten vor (links) und nach dem Remeshing (rechts).

Die speichereffiziente Darstellung großer Gitter profitiert besonders von *hochgradig regulären* Gittern, in denen möglichst viele Knoten genau sechs Nachbarn haben.

Ein Qualitätskriterium für spezielle Anwendungen wie die numerische Strömungsmechanik (CFD) ist die Vermeidung von zufälligen Sprüngen zwischen den Normalen benachbarter Dreiecke. Dieses sogenannte *Normalenrauschen* beeinträchtigt die Qualität der numerischen Simulation und entsteht entlang von scharfen oder fein abgerundeten Merkmalen der Oberfläche, wie sie besonders in technischen Modellen vorkommen. Es kann reduziert werden, indem die Dreieckskanten entlang dieser Merkmale ausgerichtet werden. Die Aufgabe, aus einem gegebenen Gitter ein neues Gitter mit oben genannten Eigenschaften zu erzeugen, welches dabei das Ausgangsgitter geometrisch möglichst originalgetreu wiedergibt, heißt *Remeshing*.

Die meisten aktuellen Remeshing-Verfahren sind für Ausgangsgitter mit mannigfaltiger Topologie vorgesehen, möglicherweise mit Rand. Das Remeshing von nicht-mannigfaltigen Dreiecksnetzen wird bisher wenig beachtet. Diesem Problem ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

1.2 Motivation

Nicht-mannigfaltige Dreiecksnetze, insbesondere solche mit Kanten, die zu mehr als zwei Dreiecken gehören, werden in realen Anwendungen benötigt. Sie sind dort ein erwünschter und wichtiger Teil des Modells, im Gegensatz zu topologischen Artefakten aus der Gittererzeugung, die in einem Vorverarbeitungsschritt entfernt werden können.

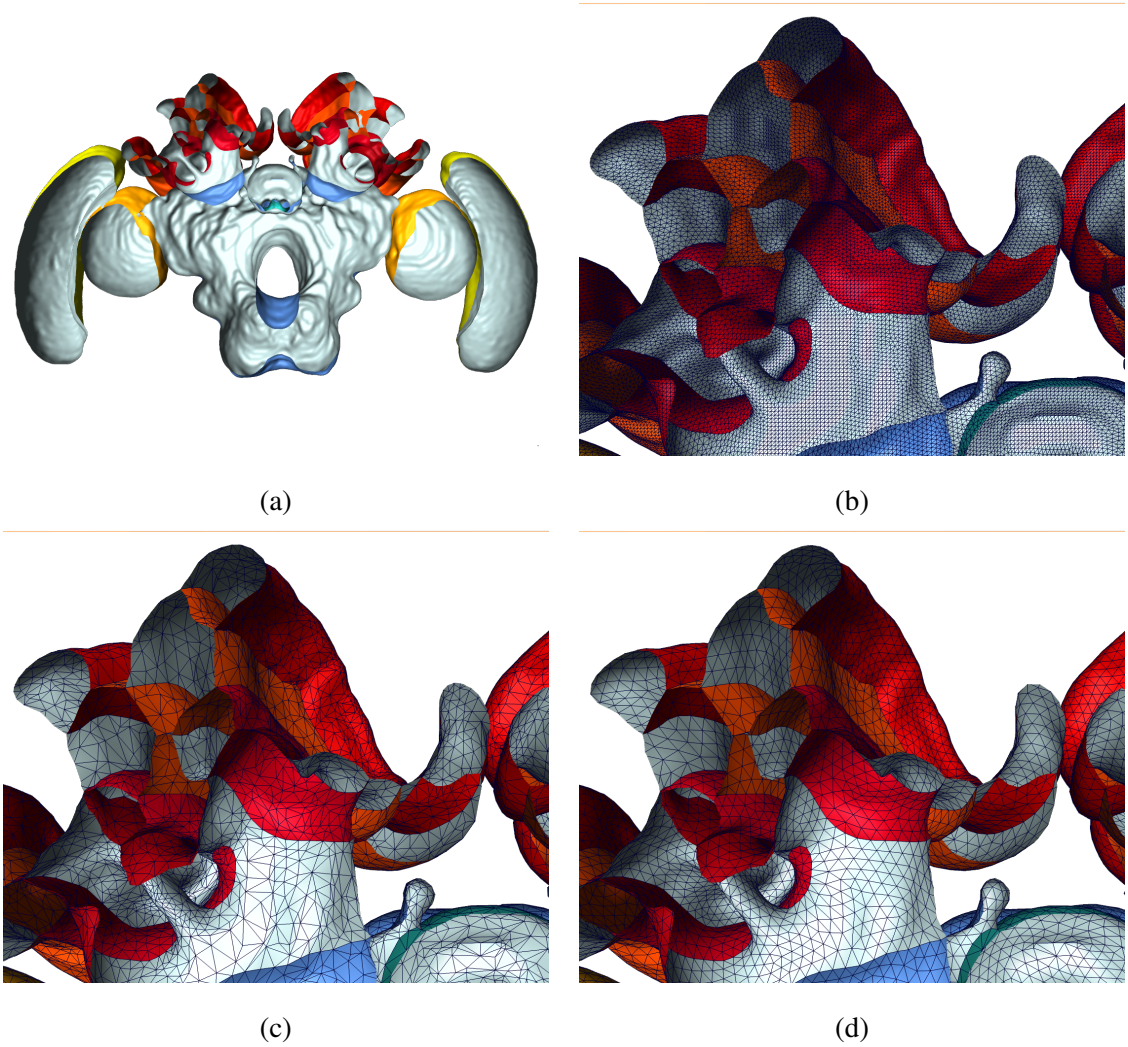


Abbildung 1.2: Ein Schnitt durch das nicht-mannigfaltige Modell des Gehirns einer Biene (a). Ausschnittvergrößerungen: Originalgitter mit 700.000 Knoten (b). Nach der Simplifizierung auf 50.000 Knoten (c). Nach dem Remeshing (d).

In Problemen der computergestützten Biomedizin, über die die vorliegende Arbeit motiviert ist, werden Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Gewebearten modelliert. Sie werden aus dreidimensionalen Bilddaten gewonnen, z.B. aus tomographischen Aufnahmen. Die in diesen Bildern enthaltenen anatomischen Strukturen werden automatisch oder von Hand klassifiziert, indem jeder Voxel einer Gewebeart zugeordnet wird. Die Flächen, die zusammenhängende Regionen der gleichen Gewebeart trennen, werden mit einer Variante des Marching-Cubes-Verfahren extrahiert, die nicht-binäre Voxelauszeichnungen verarbeiten kann [HSSZ97]. Dabei werden an Stellen, an denen mehr als zwei unterschiedliche Gewebearten aufeinandertreffen, nicht-mannigfaltige Kantenzüge erzeugt. Für solche Gitter wird ein Remeshing-Verfahren benötigt, das die kontrollierte Reduktion der Knotenzahl einschließt.

Dabei soll als zusätzliche Eingabe eine Menge von Kanten des Eingabegitters als *Merkmalskanten* markiert werden können, die beim Remeshing erhalten werden sollen, d. h., entlang von Kantenzügen aus Merkmalskanten verläuft auch im Ergebnisgitter ein Kantenzug. Dies ist wichtig, wenn der Kantenzug ein geometrisches Merkmal der Oberfläche modelliert [HPW05], aber auch, wenn die Fläche später entlang bestimmter Kurven geschnitten werden soll. Mit entsprechenden Softwarewerkzeugen kann man Kurven auf ein Gitter zeichnen [ZGSZ03], die durch das Einfügen von Knoten und lokale Retriangulierung in das Gitter integriert werden. So lässt sich interaktiv die Ausrichtung von Kanten im Ergebnisgitter bestimmen (siehe Abbildung 1.3).

Nicht-mannigfaltige Kantenzüge und Merkmalskantenzüge haben in Bezug auf das Remeshing eine wichtige Gemeinsamkeit: Beides sind Kantenzüge, von denen erwartet wird, dass sie im Ergebnisgitter originalgetreu wiedergegeben werden. So wie eine Kurve, die eine scharfe Kante in der Oberfläche modelliert, vor und nach dem Remeshing gleich verlaufen muss, darf sich auch die Berührungskurve unterschiedlicher Materialien nicht verschieben oder mit anderen Berührungskurven verschmelzen.

1.3 Verwandte Arbeiten

In einem ausführlichen Übersichtsartikel von Alliez et al. [AUGA05] werden zahlreiche aktuelle Remeshing-Verfahren diskutiert und systematisch nach ihren unterschiedlichen Qualitätszielen und Anwendungsbereichen geordnet.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Verfahren gehören zur Gruppe der *relaxierungsbasierten* Techniken, die eine initiale Knotenverteilung des Ausgabegitters durch wiederholtes Verschieben von Knoten und Anpassung der Konnektivität iterativ verbessern. Dem lassen sich *gierige* (greedy) Verfahren gegenüberstellen, die einen Knoten nach dem anderen an der zum jeweiligen Zeitpunkt optimalen Position in das neu generierte Ausgabegitter einfügen und bis auf Ausnahmen auch dort belassen.

In einem Verfahren von Alliez et al. wird die initiale Knotenverteilung mit einem Fehlerdiffusionsverfahren aus der Bildverarbeitung [AMD02] erzeugt. Die genaue isotrope Platzierung der Knoten erfolgt dann durch die Konstruktion eines gewichteten zentroidalen Voronoidiagramms mit dem Algorithmus von Lloyd [AVDI03]. Gegebene Merkmalskantenzügen werden vorab separat abgetastet, wobei darauf geachtet werden muss, dass die Abtastrate derjenigen der umliegenden Triangulierung entspricht. Weil in einer globalen Parametrisierung gearbeitet wird, werden geschlossene Flächen zuvor in Teile zerschnitten, die homöomorph zur Kreisscheibe sind. Die Schnittkurven werden wie Merkmalskantenzüge behandelt und bleiben dadurch im Ausgabegitter erhalten. Für Flächen mit hohem Genus, die zahlreiche Schnitte erfordern, ist dies ungünstig.

In [VRKS01] werden die Merkmalskantenzüge dagegen bei der Relaxierung außer Acht gelassen und in einem zweiten Schritt rekonstruiert, indem Knoten von in der Nähe liegenden Merkmalskanten des Ausgangsgitters angezogen werden und auf ihnen einrasten. Der Vorteil ist, dass die Knotenverteilung global ausgeglichen werden kann, ohne dass Merkmalskantenzüge der Relaxierung im Weg stehen. Dieser Ansatz lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres auf nicht-mannigfaltige Kantenzüge erweitern!

Schreiner et al. [SSFS06] verwenden die gierige, bei der Gittergenerierung gängige Advancing-Front-Technik zum Remeshing. Das Verfahren erhält eingegebene Merkmalskantenzüge, indem diese als initiale Fronten benutzt werden. Es eignet sich zum interaktiven lokalen Remeshing und scheint auch auf nicht-mannigfaltige Gitter erweiterbar zu sein. Entscheidend für eine hohe Dreiecksqualität ist dabei die präzise Vorausberechnung der idealen Kantenlänge für jede Stelle des Gitters in einem Vorverarbeitungsschritt. Die Methode ist sehr effizient und kommt hinsichtlich der Dreiecksqualität relaxierungsbasierten Verfahren nahe.

In all diesen Verfahren wie auch in der vorliegenden Arbeit werden Merkmalskantenzüge unter dem Gesichtspunkt betrachtet, dass sie die Ausrichtung je *eines* Kantenzugs in einem hochgradig regulären Ausgabegitter festlegen. Komplementär dazu werden sie in [BK01] als Repräsentanten größerer *blend regions* behandelt, um nicht nur scharfe, sondern auch abgerundete Merkmale zu berücksichtigen. Diese Regionen werden separat abgetastet, wobei die Knoten auf Kurven parallel und orthogonal zur Merkmalskurve platziert werden, um bei geringer Dreieckszahl gezielt das Auftreten geometrischer Artefakte zu minimieren. Das so erzeugte anisotrope Gitterstück wird übergangslos in das restliche Gitter eingenäht, worunter die Dreiecksqualität leidet.

1.4 Beitrag und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit wird eine Serie von Remeshing-Verfahren um die Berücksichtigung von nicht-mannigfaltigen Gittern und Merkmalskantenzügen erweitert. Dabei wird der Ansatz verfolgt, beide Arten von besonderen Kantenzügen aufgrund ihrer Gemeinsamkeiten einheitlich zu behandeln. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Nach einigen Definitionen über Dreiecksnetze wird beschrieben, wie ein Eingabegitter, das als Approximation einer glatten Originalfläche betrachtet wird, als Vorlage für das Remeshing dienen kann. Dabei wird auch darauf eingegangen, wie Ausschnitte des Gitters *parametrisiert* werden können, um die Berechnungen zur Optimierung der Dreiecksqualität in 2D durchzuführen (Kapitel 2).

Dann werden in Anlehnung an die entsprechenden Originalarbeiten [SG03][SAG03][SG02] zwei ausgewählte Remeshing-Verfahren vorgestellt. Sie verwenden ein gemeinsames Rahmenwerk zur Parametrisierung und zur Kontrolle des Abstands zur Ausgangsfläche. Beide bestehen in einer Kombination derselben elementaren Operationen (Kanten kippen, Kanten teilen, Kanten kontrahieren, Knoten verschieben) zur Realisierung unterschiedlicher Optimierungsziele (Kapitel 3).

Die betrachteten Verfahren arbeiten im Wesentlichen lokal. Daher können die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Erweiterungen, die nicht-mannigfaltige Kantenzüge und Merkmalskantenzüge betreffen, separat beschrieben werden. Sie bestehen zum einen darin, eine Korrespondenz zwischen Kantenzügen auf der Eingabe- und der Ausgabefläche zu erhalten [VRS03], indem die Remeshing-Operationen auf den Kantenzügen in entsprechend eingeschränkter Weise verwendet werden. Zweitens wird beschrieben, wie die Abtastdichte der Kantenzüge dynamisch an die Abtastdichte der Umgebung angepasst werden kann, um für weitgehende Isotropie in der Nähe von Merkmalskantenzügen zu sorgen. Die Erweiterungen lassen sich gut in die Originalverfahren integrieren, ohne sie in einen Vor- oder Nachbearbeitungsschritt auszulagern (Kapitel 4).

Das Verfahren wurde implementiert und an unterschiedlichen nicht-mannigfaltigen Modellen getestet. An einigen vergleichenden Darstellungen von Remeshing-Ergebnissen soll die Praxistauglichkeit des Ansatzes demonstriert werden (Kapitel 5).

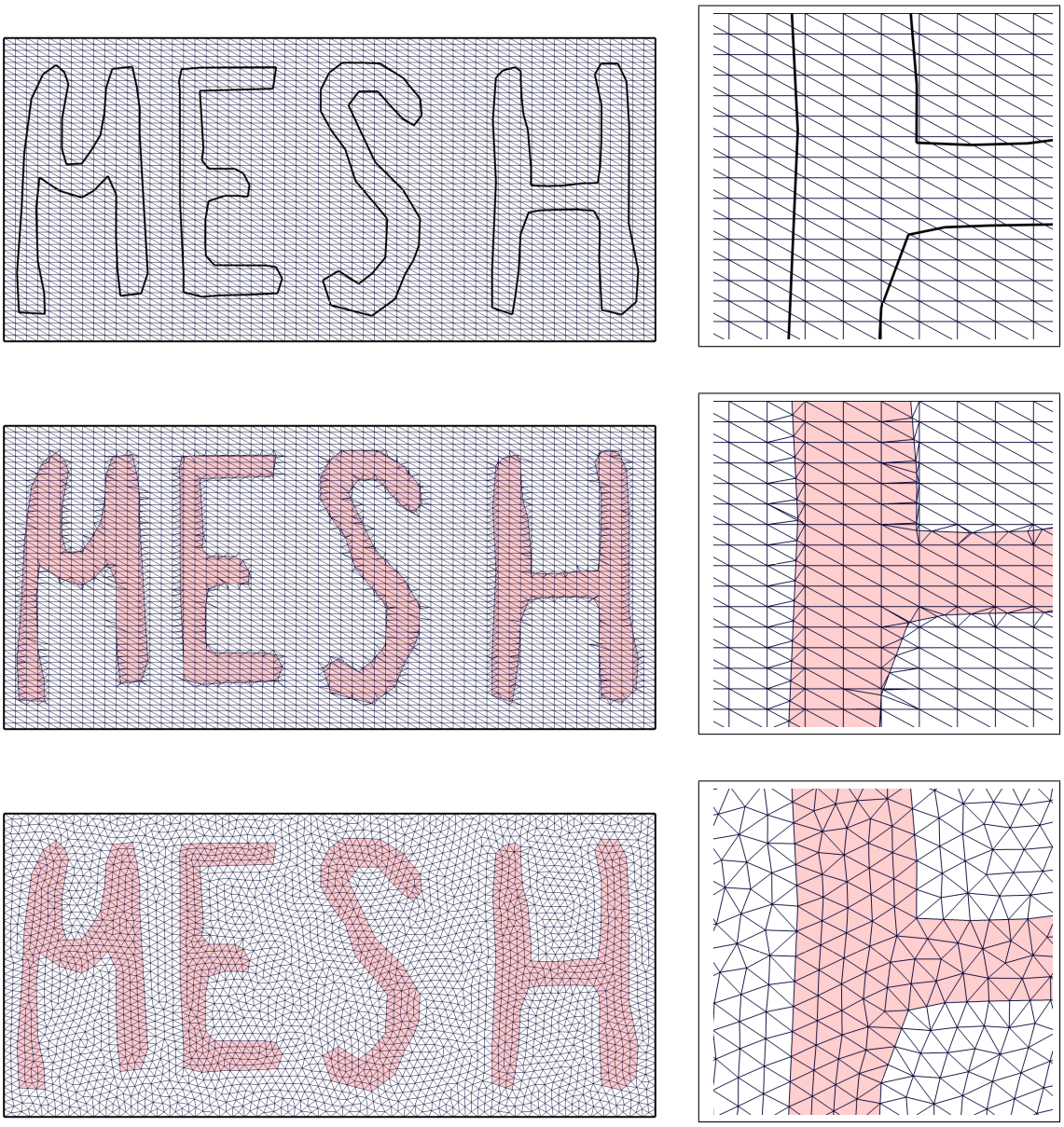


Abbildung 1.3: Auf ein Hintergrundgitter wird freihändig eine Schnittkurve gezeichnet (oben). Um sie als Kantenzug in das Gitter einzubetten, werden zusätzliche Knoten und Kanten eingefügt. Dadurch entstehen schlecht geformte Dreiecke (Mitte). Nach dem Remeshing (unten).

2 Grundlagen

Die Besonderheit des Remeshing im Gegensatz zu anderen Problemen der Gittergenerierung ist, dass die Eingabegeometrie bereits als Dreiecksnetz vorliegt. In diesem Kapitel sollen Dreiecksnetze mit einigen ihrer Eigenschaften definiert werden. Dann wird erklärt, wie ein eingegebenes Dreiecksnetz als Referenz für das neue Gitter dienen kann.

2.1 Dreiecksnetze

Ein Dreiecksnetz M ist zunächst eine Menge von Knoten

$$V = V(M) = \{v_1, \ldots, v_V\} \tag{2.1}$$

mit einer Menge von Dreiecken, deren Ecken Elemente von V sind:

$$F = F(M) = \{f_1, \ldots, f_F\}, f_i \in V \times V \times V \tag{2.2}$$

Dieser Teil der Definition, der noch nichts über die Lage der Dreiecke im Raum aussagt, heißt *Konnektivität* von M. Durch sie ist ein Graph über der Knotenmenge V gegeben, von dem auch manchmal die Kantenmenge betrachtet werden soll:

$$E = E(M) = \{e_1, \ldots, e_E\}, e_i \in V \times V \tag{2.3}$$

Eine Kante (v_i, v_j) gehört zu E genau dann, wenn es ein Dreieck in F gibt, das v_i und v_j enthält. Im Kontext dieser Arbeit werden nur solche Gitter betrachtet, in denen keine Knoten oder Kanten vorkommen, die nicht zu mindestens einem Dreieck gehören. Ebenso soll immer, wenn von einem Dreieck die Rede ist, sein Abschluss gemeint, also seine drei Kanten und drei Knoten einbezogen sein, genau wie der Begriff Kante immer die Endknoten einschließt.

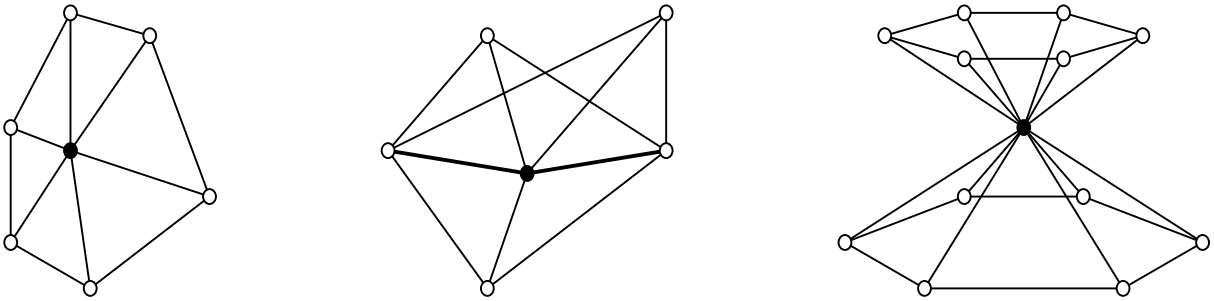


Abbildung 2.1: Ein mannigfaltiger Knoten (*links*). Ein Knoten, dessen Umgebung das Buch mit drei Seiten ist (*Mitte*). Ein nicht-mannigfaltiger Knoten ohne nicht-mannigfaltige Nachbarkanten (*rechts*).

Die geometrische Einbettung $X : V \to \mathbb{R}^3$ eines Dreiecksnetzes in $\mathbb{R}^3$ wird angegeben, indem jedem Knoten $v_i \in V$ eine 3D-Position p_i zugeordnet wird:

$$\mathbf{x}_i := \mathbf{x}(v_i) = \begin{pmatrix} x(v_i) \\ y(v_i) \\ z(v_i) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

Durch die Einbettung ist nun jedes Dreieck $f \in F$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^3$, definiert durch die Positionen seiner drei Ecken. Ein Dreiecksnetz ist eine explizite Repräsentation für eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$: Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gehört zu M genau dann, wenn $\mathbf{x}$ in der geometrischen Einbettung eines Dreiecks von M liegt.

Bei der Modellierung mit Dreiecksnetzen wird normalerweise davon ausgegangen, dass Dreiecke einander nicht geometrisch überschneiden. Daher sollen nur Einbettungen zulässig sein, für die $\mathbf{p}(v_i) \neq \mathbf{p}(v_j)$ für $i \neq j$ und unter denen die Schnittmenge zweier Dreiecke genau ihre gemeinsame Kante oder ein gemeinsamer Knoten ist, sofern solche existieren, und ansonsten leer ist.

Eine wichtige topologische Eigenschaft einer Fläche ist, ob sie *mannigfaltig* ist oder nicht. Dies ist der Fall, wenn jeder Punkt der Fläche eine Umgebung besitzt, die homöomorph zur Kreisscheibe ist. Wegen der zuvor gemachten Einschränkung auf überschneidungsfreie Einbettungen lässt sich die Mannigfaltigkeit eines Dreiecksnetzes allein über die Konnektivität charakterisieren.

Die zu einem Knoten v *benachbarten* Knoten sind diejenigen, mit denen er über eine Kante verbunden ist. Die Anzahl der Nachbarknoten heißt *Valenz* von v. Der *(abgeschlossene) Stern* eines Knotens oder einer Kante ist die Menge aller Dreiecke, zu denen er oder sie gehört, zusammen mit ihren Ecken und Kanten. Ein Knoten v heißt mannigfaltig, wenn sich alle seine Nachbarknoten zyklisch, wie die Streben eines Regenschirms, so anordnen lassen, dass immer je zwei aufeinanderfolgende Knoten zusammen mit v ein Dreieck bilden. Die durch die Einbettung von $Stern(v)$ definierte Fläche ist dann homöomorph zur Kreisscheibe. Die Menge der Kanten und Knoten von $Stern(v)$, die nicht v oder zu v inzident sind,

heißt $Link(v)$. Für mannigfaltige Knoten v ist $Link(v)$ ein geschlossener Kantenzug. Ein Dreiecksnetz M ist mannigfaltig, wenn es nur mannigfaltige Knoten besitzt.

Ein häufiger Spezialfall von nicht-mannigfaltigen Knoten soll gesondert betrachtet werden, weil er in der späteren Diskussion von *Nähten* eine Rolle spielt: Die Umgebung eines Knotens heißt *Buch mit k Seiten*, wenn sich seine Nachbarknoten statt zu einem Regenschirm zu k Fächern anordnen lassen, die an genau zwei gemeinsamen Kanten verschmolzen sind (siehe Abbildung 2.1). Das Buch mit zwei Seiten ist die Kreisscheibe – ein Knoten mit dieser Umgebung ist mannigfaltig. Ein Knoten, dessen Umgebung das Buch mit einer Seite ist, gehört zum *Rand* des Gitters.

Eine Kante e ist nicht-mannigfaltig, wenn $Stern(e)$ aus genau einem oder mehr als zwei Dreiecken besteht.

Eine andere typische Art von nicht-mannigfaltigen Knoten erhält man, indem man zwei unabhängige mannigfaltige Knoten miteinander verschmilzt. Die Umgebung solcher Knoten ist weder mannigfaltig noch ein Buch, aber alle seine Nachbarkanten sind mannigfaltig (siehe Abbildung 2.1).

Nicht-mannigfaltige Gitter sind ein Problem für viele Algorithmen, unter anderem weil wichtige geometrische Eigenschaften an nicht-mannigfaltigen Knoten nicht definiert sind, wie zum Beispiel Normalen und Krümmung. Im hier besprochenen Remeshing-Verfahren bilden nicht-mannigfaltige Kanten die Sonderfälle, deren Behandlung Kapitel 4 gewidmet ist.

2.2 Baryzentrische Koordinaten

Ein Dreiecksnetz ist zwar eine explizite, aber keine parametrische Repräsentation einer Fläche: Es gibt ohne weiteres keine natürliche Art, einen Punkt auf der Fläche zu referenzieren. Um dem beizukommen, werden Koordinatensysteme pro Dreieck eingeführt.

Man betrachte zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$ und die Gerade g durch diese Punkte. Ordnet man A und B Massen $m_A, m_B \in \mathbb{R}$ mit Gesamtmasse $M = m_A + m_B \neq 0$ zu, so ergibt sich der Schwerpunkt C, der auf g liegt:

$$C = \frac{m_A A + m_B B}{M} \tag{2.5}$$

Sind m_A und m_B positiv (oder beide negativ), liegt C auf der Strecke $\overline{AB}$, ansonsten auf einem der beiden unbegrenzten Geradenabschnitte. Umgekehrt lassen sich zu jedem Punkt P auf g zwei Massen m_A und m_B finden, so dass P der Schwerpunkt dieser Massen in A und B ist. Man nennt sie baryzentrische Koordinaten von P bezüglich A und B, und sie sind homogen, das heißt, die Multiplikation beider

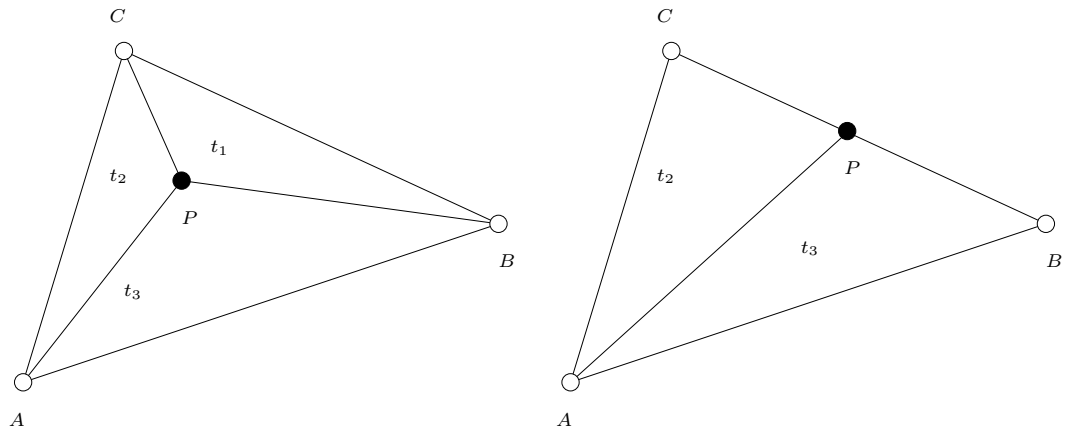


Abbildung 2.2: Baryzentrische Koordinaten bezüglich eines Dreiecks: Die Eckpunkte A, B und C haben Koordinaten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Die Koordinaten eines Punktes P im Inneren des Dreieck (*links*) sind die (normierten) Flächeninhalte der Teildreiecke t_1, t_2 und t_3. Ein Punkt mit nicht-negativen Koordinaten $(0, t_2, t_3)$ liegt auf der Strecke $\overline{BC}$ (*rechts*).

Koordinaten mit einem gemeinsamen Faktor bezeichnet denselben Punkt:

$$(m_A, m_B) = (\mu m_A, \mu m_B), \mu \neq 0 \tag{2.6}$$

Entsprechende Koordinaten lassen sich auch für Ebenen in $\mathbb{R}^3$ einführen. Die Bezugspunkte sind dann die Ecken eines nicht-entarteten Dreiecks ABC. Für $M = m_A + m_B + m_C \neq 0$ liegt der Schwerpunkt

$$P = \frac{m_A A + m_B B + m_C C}{M} \tag{2.7}$$

im Innern des Dreiecks, in jedem Fall aber in der durch ABC aufgespannten Ebene. Seine Koordinaten sind (m_A, m_B, m_C). A, B und C haben die Koordinaten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ beziehungsweise $(0, 0, 1)$. Ein Punkt mit Koordinaten $(0, m_B, m_C), m_B, m_C > 0$ liegt auf der Strecke $\overline{BC}$ und ist der Punkt, dessen eindimensionale Koordinaten bezüglich B und C gleich (m_B, m_C) sind. Entsprechendes gilt für die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CA}$. Auch diese Koordinaten sind homogen:

$$(m_A, m_B, m_C) = (\mu m_A, \mu m_B, \mu m_C), \mu \neq 0 \tag{2.8}$$

Die Koordinaten eines Punktes P bestimmt man, indem man zunächst den Schnittpunkt Q der Geraden AP und BC bestimmt. Nun berechnet man die Koordinaten m_B und m_C dieses Punktes. m_A wird nun so gewählt, dass P der Schwerpunkt der Massen m_A in A und $m_B + m_C$ in Q ist.

Liegt P im Dreieck (sind also m_A, m_B und m_C positiv), so zerlegt P das Dreieck ABC in drei Dreiecke t_1, t_2 und t_3. Die Flächen dieser Dreiecke sind proportional zu den baryzentrischen Koordinaten von P.

Da baryzentrische Koordinaten homogen sind, kann man sie durch M teilen und dadurch so normieren, dass sie sich zu 1 aufsummieren. Die Koordinaten (m_A, m_B, m_C) geben dann direkt die Flächenanteile

der Dreiecke t_1, t_2 beziehungsweise t_3 an der Gesamtfläche des Dreiecks ABC wieder (siehe Abbildung 2.2). Man kann die dritte normierte baryzentrische Koordinate aus den beiden anderen berechnen (sie wird nur aus Symmetriegründen beibehalten).

Damit kann nun jedem Punkt der Dreiecksfläche $\mathbf{x} \in M$ ein Paar $(f, \mathbf{b})$ aus einem Dreieck $f \in F(M)$ und normierten, nicht negativen baryzentrischen Koordinaten $\mathbf{b}$ bezüglich f zugeordnet werden. Diese Zuordnung ist eindeutig für Punkte im Innern von Dreiecken. Für Punkte, die auf Kanten von M liegen oder mit Knoten von M übereinstimmen, können Koordinaten bezüglich eines beliebigen der mit der Kante bzw. dem Knoten inzidenten Dreiecke gewählt werden, oder aber 1D-baryzentrische Koordinaten bezüglich einer Kante.

2.3 Rekonstruktion der Originalfläche

Das eingegebene Dreiecksnetz wird, außer an nicht-mannigfaltigen Stellen, als Interpolation einer glatten Fläche betrachtet. Im Zuge des Remeshing-Prozesses werden von dieser Originalfläche Positionen, Normalen und Krümmungen als geometrischer Hintergrund benötigt. Diese Information wird aus dem Dreiecksnetz hypothetisch rekonstruiert.

Zunächst wird für jeden Knoten $v \in V(M)$ die Knotennormale bestimmt als Abschätzung der Normalen der Originalfläche im Punkt $\mathbf{x}(v)$. Sofern diese Information nicht bereits aus der Gittergenerierung unabhängig vorliegt, kann sie als gewichteter Mittelwert der Normalen der Dreiecke von $Stern(v)$ berechnet werden. Um die Gewichte zu gewinnen, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Eine gängige Methode ist, die Gewichte so zu wählen, dass sie proportional zu den Winkeln der entsprechenden Dreiecke an v sind und sich zu 1 summieren. Es werden aber auch Einheitsgewichte verwendet.

Dann wird für jedes Dreieck $f \in F(M)$ ein dreieckiges kubisches Bézier-Flächenstück konstruiert, dessen Ecken hinsichtlich Position und Normale mit den Ecken von f übereinstimmen (siehe Abbildung 2.3). Die Beziér-Koeffizienten werden so gewählt, dass die Flächenstücke in den Ecken tangentenstetig aufeinander treffen. Diejenigen Koeffizienten, die jeweils die Form einer Beziér-Dreieckskante definieren, ergeben sich dabei allein aus Position und Normale der Endpunkte der entsprechenden Kante. Damit ist garantiert, dass die so konstruierte, stückweise Bézier-Fläche ohne Risse ist: Die einer gemeinsamen Kante zweier Dreiecke f_1 und f_2 entsprechenden Randkurvenabschnitte der zu f_1 und f_2 gehörenden Flächenstücke sind gleich.

Allerdings ist diese Fläche im Allgemeinen über Dreieckskanten nicht tangentenstetig, d.h. ein Punkt auf dem gemeinsamen Rand zweier Flächenstücke hat bezüglich beider Flächenstücke unterschiedliche Normalen. Deshalb wird das Normalenfeld der Originalfläche unabhängig von der Geometrie rekonstruiert,

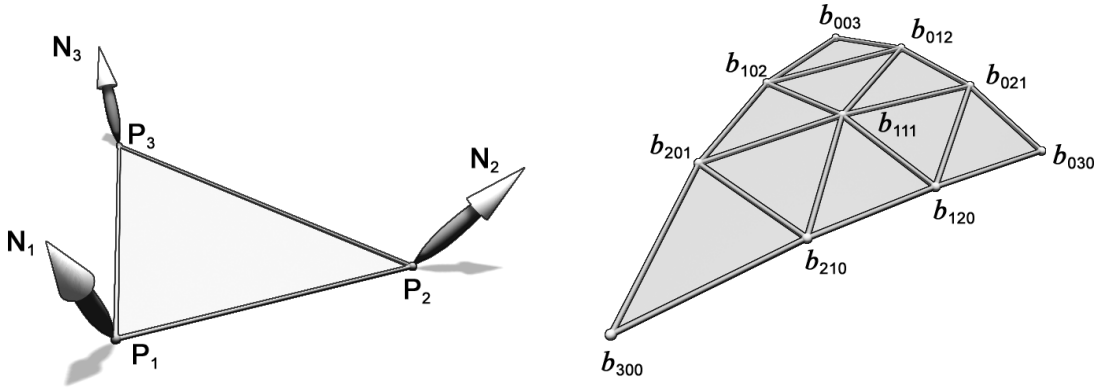


Abbildung 2.3: Konstruktion eines PN-Dreiecks: Aus den Positionen und Normalen der Eckpunkte eines Dreiecks (*links*) werden Koeffizienten b_{ijk} für ein dreieckiges Beziér-Flächenstück bestimmt (*rechts*), der die Punkte und Normalen interpoliert. Quelle: [VPBM01]

indem die Normale für jeden Punkt eines Dreiecks nicht etwa analytisch aus der Geometrie des entsprechenden Beziér-Flächenstücks berechnet wird, sondern als unabhängige quadratische Interpolation der gegebenen Knotennormalen definiert wird.

Diese Konstruktion heißt *gekrümmtes Punkt-Normalen-Dreieck* oder *PN-Dreieck* [VPBM01]. Jedes PN-Dreieck ist mit Koordinaten parametrisiert, die den baryzentrischen Koordinaten auf Dreiecken ähnlich sind. Durch gleiche Koordinaten wird jedes Dreieck von M bijektiv auf sein entsprechendes PN-Dreieck abgebildet. Im Zuge des Remeshing-Verfahrens werden Punkte auf M nach Position und Normale abgefragt. Diese Information wird nun aus dem entsprechenden PN-Dreieck gewonnen. Der maximale Abstand zwischen einem Dreieck und seinem PN-Dreieck ist auf $\frac{1}{6}$ der Länge der längsten Kante beschränkt.

PN-Dreiecke ebnen scharfe Kanten des Eingabegitters ein. Mit einer scharfen Kante ist hier eine Kante gemeint, in der die zwei Dreiecke einen besonders großen Dihedralwinkel miteinander bilden. Dieses Verhalten ist nicht immer erwünscht, denn die scharfe Kante kann ein beabsichtigtes Merkmal des Originalmodells sein. Für Dreiecke mit nicht-mannigfaltigen Kanten sind die Kantenkoeffizienten nicht definiert, weil keine eindeutigen Knotennormalen zur Verfügung stehen. Eine Abhilfe wird in Kapitel 4 im Zusammenhang mit Merkmalskantenzügen und Nähten diskutiert.

Die *Krümmung* einer mutmaßlich glatten Originalfläche aus einem Dreiecksnetz zu rekonstruieren ist ein anspruchsvolles Problem, zu dessen Lösung es unterschiedliche Verfahren gibt [DHKL01] [MDSB03]. Eine Möglichkeit, die Krümmung in einem Knoten abzuschätzen, ist die Erzeugung eines polynomiellen Flächenstücks, das an den Knoten, seine Nachbarn und deren Normalen bestmöglich angepasst wird. Die kontinuierliche Flächenkrümmung wird dann analytisch aus diesem Flächenstück gewonnen und mit der

Krümmung der Originalfläche im Knoten identifiziert [Pet02]. Die an den Knoten berechnete Krümmung wird über die PN-Dreiecke linear interpoliert und steht damit an jedem Punkt der Fläche zur Verfügung.

2.4 Parametrisierung von Oberflächen

Parametrisierungen von Oberflächen sind bijektive Abbildungen zwischen einer mannigfaltigen Oberfläche und einem zweidimensionalen Parametergebiet. Sie werden in Remeshing-Verfahren eingesetzt, um die Optimierung der Knotenverteilung und der Konnektivität in 2D berechnen und dann die korrespondierenden Knotenpositionen auf der Originalfläche finden zu können.

Manche Remeshing-Verfahren [AVDI03] berechnen initial eine Parametrisierung des gesamten Eingabegitters und erzeugen das komplette neue Gitter in der Ebene. Für solche Verfahren spielt der topologische Typ des Eingabegitters eine entscheidende Rolle, weil es nicht einfach ist, ein Gitter mit Löchern und Henkeln in geeigneter Weise in die Ebene abzubilden. In diesem Fall werden oft globale Schnitte berechnet, die das Eingabegitter in Segmente zerteilen, die homöomorph zur Kreisscheibe sind.

Andere Verfahren kommen ganz ohne Parametrisierung aus und berechnen neue Knotenpositionen direkt in 3D [SSFS06].

Die in dieser Arbeit besprochenen Verfahren nehmen eine Position dazwischen ein. Sie sind nicht parametrisierungsfrei, aber beschränken sich wie parametrisierungsfreie Verfahren auf lokale Modifikationen, statt eine globale Neuvergitterung vorzunehmen. Jede lokale Modifikation wird mit einer Parametrisierung eines mannigfaltigen Ausschnitts des Originalgitters als Referenz durchgeführt. Der Ausschnitt beinhaltet nur den für die jeweilige Operation relevanten Teil der Originalfläche. Dieser Ansatz stellt im Vergleich zu anderen parametrisierungsbehafteten Verfahren die geringsten Anforderungen an die Topologie des Ausgangsgitters. Im Folgenden soll daher betrachtet werden, wie eine Parametrisierung eines Ausschnitts aus einem Dreiecksgitter berechnet werden kann, der die Topologie der Kreisscheibe besitzt.

2.4.1 Diskrete Parametrisierung

Da die betrachtete Oberfläche ein Dreiecksnetz ist, interessiert man sich für *diskrete Parametrisierungen*. Es sei M ein Gitter mit geometrischer Einbettung $X : V(M) \to \mathbb{R}^3$, und sei N ein Ausschnitt von M mit $F(N) \subseteq F(M)$, der homöomorph zur Kreisscheibe ist, so ist durch jede gültige Einbettung $P : V(N) \to \mathbb{R}^2$ eine diskrete Parametrisierung von N gegeben. Mit baryzentrischen Koordinaten stehen lokale Koordinatensysteme für die einzelnen Dreiecke zur Verfügung. Jeder Punkt auf einem Dreieck in P wird auf den Punkt des korrespondierenden Dreiecks in X abgebildet, der dieselben Koordinaten hat.

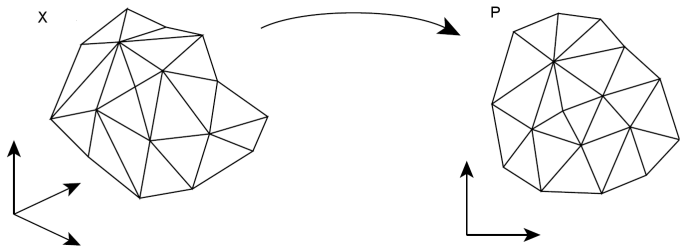


Abbildung 2.4: Parametrisierung eines Ausschnitts eines Dreiecksnetzes.

Dies ergibt eine stückweise lineare, stetige, bijektive Abbildung zwischen der 2D-Einbettung P und der auf N eingeschränkten 3D-Einbettung X.

Ein entscheidendes Kriterium bei der Wahl eines Parametrisierungsverfahrens ist, die *parametrische Verzerrung* gering zu halten: Damit die im Parameterraum getroffenen lokalen Remeshing-Entscheidungen sich gut auf das 3D-Gitter übertragen, ist eine Parametrisierung wünschenswert, die Längen, Flächeninhalte und Winkel so gut wie möglich erhält.

Parametrisierungen, die Flächen und Winkel erhalten, erhalten auch Längen. Längenerhaltende Parametrisierungen existieren schon im kontinuierlichen Fall nur für bestimmte Oberflächen wie Zylinder. Im diskreten Fall können auch winkel- *oder* flächenerhaltende Parametrisierungen nur angenähert werden. Oft ist ein Kompromiss zwischen beiden Optimierungszielen wünschenswert. Es gibt Verfahren, die beispielsweise unter Optimierung der Winkelerhaltungseigenschaft manchmal Abbildungen hervorbringen, die keine gültige Einbettung des Ausschnitts liefern. Im nachfolgend besprochenen Remeshing-Verfahren kommt eine Parametrisierung zur Anwendung, die überfaltungsfreie Einbettungen garantiert und unter dieser Vorgabe die parametrische Verzerrung gering hält [Flo97].

Zunächst ist darzulegen, wie man für einen Ausschnitt N überhaupt eine überschneidungsfreie Einbettung in $\mathbb{R}^2$ findet. Das Verfahren geht auf eine Arbeit von Tutte [Tut63] zurück, die sich mit Einbettungen allgemeiner planarer Graphen beschäftigt, bei denen jede Kante als gerade Strecke gezeichnet wird. Triangulierungen sind maximale planare Graphen, also ein Spezialfall dieser Anwendung.

Man gibt die Positionen der Randknoten so vor, dass sie ein konvexes Polygon bilden. Der Algorithmus liefert dann eindeutige Positionen für die inneren Knoten, so dass jeder Knoten auf dem Schwerpunkt des Polygons liegt, das durch seine Nachbarknoten gebildet wird.

In einer Arbeit von Floater [Flo97] wird dieses Verfahren verallgemeinert, indem gezeigt wird, dass man sich die Position jedes inneren Knotens als *beliebige* konvexe Kombination seiner Nachbarn wünschen kann und stets eine eindeutige Lösung erhält. In einer nachfolgenden Arbeit [Flo03] wird entwickelt, *welche* Koeffizienten man anhand der 3D-Einbettung von N am besten wählt, um eine möglichst verzer-

rungsarme Parametrisierung zu erhalten. Die so gewonnene Parametrisierung ist eine *Verflachung* von N in dem Sinn, dass sie eine affine Abbildung ist, falls N bereits vollständig in einer Ebene liegt, und dass die Knotenpositionen in 2D stetig von den Knotenpositionen in 3D abhängen.

Das gemeinsame Rahmenwerk der hier diskutierten Remeshing-Verfahren stützt sich ganz wesentlich auf die Konstruierbarkeit überschneidungsfreier, verzerrungsarmer Parametrisierungen von Flächenausschnitten. Daher soll die Struktur des Problems und seiner Lösung im Folgenden skizziert werden.

2.4.2 Konvexkombinationsabbildungen

Seien $v_1, \ldots, v_m$ die inneren Knoten von N und $v_{m+1}, \ldots, v_n$ die Knoten, die auf dem Rand ∂N liegen, gegen den Uhrzeigersinn nummeriert.

Die Positionen für die Randknoten $\mathbf{p}_{m+1}, \ldots, \mathbf{p}_n$ werden äquidistant auf dem Einheitskreis fixiert, so dass sie ein reguläres, konvexes Polygon bilden. Gesucht sind $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$.

Wähle für jeden Knoten $v_i, i \in \{1..m\}$ einen Satz reelle Zahlen $\lambda_{i,j}$ für $j = 1, \ldots, n$, die *Gewichte* genannt werden, so dass

$$\lambda_{i,j} = 0, \qquad (v_i, v_j) \in E(N) \tag{2.9}$$

$$\lambda_{i,j} > 0, \qquad (v_i, v_j) \notin E(N) \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} = 1 \tag{2.11}$$

und definiere $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ als die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} \mathbf{p}_j \tag{2.12}$$

Die Gleichungen 2.9, 2.10 und 2.11 verlangen, dass die Position jedes inneren Punktes eine konvexe Kombination der Positionen seiner Nachbarn ist.

Da jeder Knoten nur eine geringe Anzahl von Nachbarn im Vergleich zur Gesamtzahl der Knoten besitzt, handelt es sich bei 2.12 um ein *dünn besetztes lineares Gleichungssystem*. Es kann effizient mit entsprechenden Standardverfahren gelöst werden. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wird durch vollständige Induktion über die besondere Struktur der Matrix des Gleichungssystems bewiesen, die sich aus den Bedingungen 2.9, 2.10 und 2.11 ergibt [Flo03]. In [Tut63] wird bewiesen, dass die Lösung eine überschneidungsfreie Einbettung ist für den Fall, dass $\lambda_{i,j} = 1/d_i$ für $(i, j) \in E(N)$. Dabei ist d_i die

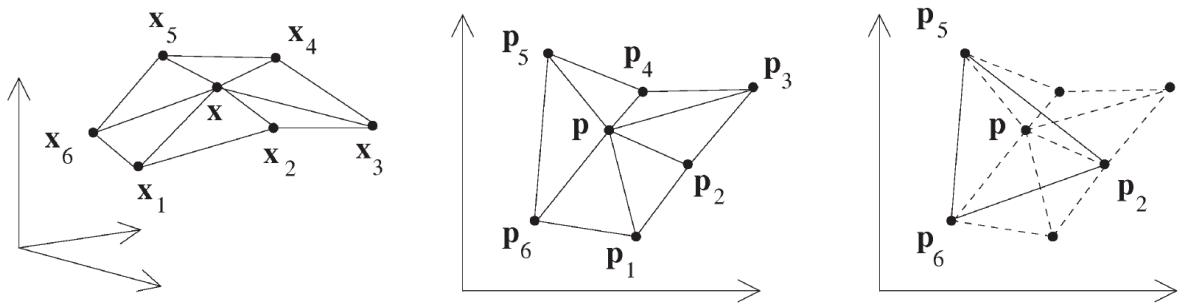


Abbildung 2.5: Die lokale Parametrisierung des Sterns eines Knoten. Ein Satz gültiger Gewichte ergibt sich bereits aus den baryzentrischen Koordinaten bezüglich eines beliebigen Dreiecks mit Ecken aus $\mathbf{p}_i$, auf dem $\mathbf{p}$ liegt. Quelle: [Flo97]

Valenz des Knotens v_i, so dass jeder Knoten in der Einbettung auf dem Schwerpunkt seiner Nachbarn liegt. Der Beweis wird von Floater [Flo97] auf allgemeine konvexe Kombinationen erweitert.

2.4.3 Formerhaltende Parametrisierungen

Ginge es nur darum, eine beliebige Parametrisierung für einen Ausschnitt N zu erhalten, wäre damit alles Nötige getan. Es sollen aber Gewichte gefunden werden, so dass die Verzerrung zwischen dem Gitterausschnitt in 3D und der resultierenden Parametrisierung möglichst gering ist.

Die Grundidee ist, für jeden Knoten $v \in V(N)$ *einzeln* nur $Stern(v)$ lokal formerhaltend in die Ebene abzubilden und aus diesen Abbildung je einen Satz Gewichte λ_j zu bestimmen.

Zunächst wird eine Abbildung angegeben, um einen Knoten v zusammen mit seinen Nachbarknoten $v_1, \ldots, v_k$ und den gemeinsamen Dreiecken in die Ebene abzubilden[WW94]. Die Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Knotennormalen von v wäre naheliegend, aber für besonders ungünstig geformte $Stern(v)$ ist sie nicht überschneidungsfrei.

Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ die 3D-Positionen der Knoten $v, v_1, \ldots, v_k$.

Gesucht sind 2D-Positionen $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$.

Der Knoten v wird auf den Ursprung eingebettet:

$$\mathbf{p} = (0, 0) \tag{2.13}$$

Die Abstände von v zu seinen Nachbarn sollen im Originalgitter und in der lokalen Parametrisierung gleich sein:

$$\|\mathbf{p}_i\| = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|, 1 \leq i \leq k \tag{2.14}$$

Die 2D-Winkel um v sollen proportional zu den entsprechenden 3D-Winkeln sein. Sie werden so skaliert, dass sie zusammen 2π ergeben:

$$\angle(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) = \frac{2\pi}{\theta}\angle(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}), 1 \leq i \leq k \tag{2.15}$$

$$\theta = \sum_{i=1\ldots k} \angle(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}) \tag{2.16}$$

Es gibt noch einen Freiheitsgrad, die Rotation um den Ursprung. Dieser wird aufgelöst, indem der erste Nachbarknoten auf der x-Achse fixiert wird:

$$\mathbf{p}_1 := (0, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|) \tag{2.17}$$

Mit der Verknüpfung mit baryzentrischen Koordinaten auf den Dreiecken und unter der Voraussetzung, dass die Dreiecke um v nicht degeneriert sind, also leeren Flächeninhalt haben, ist diese Abbildung bijektiv. Ist $Stern(v)$ bereits in 3D flach, liegen also alle zu v inzidenten Dreiecke in derselben Ebene, so sind die 2D-Winkel gleich den 3D-Winkeln und es handelt sich um eine affine Abbildung. Außerdem ist die Abbildung stetig in den 3D-Positionen der Knoten. Insbesondere ist also auch die Wirkung der Abbildung beim Übergang von einem bereits flachen zu einem *nicht* flachen Stern stetig. Deswegen kann bei dieser Abbildung von einer *Verflachung* gesprochen werden.

Aus dieser Projektion soll nun ein Satz Gewichte λ_j für den Knoten v gewonnen werden.

Nun gibt es für $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ im Allgemeinen unterschiedliche Sätze von Gewichten λ_j, so dass

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{p}_j = \mathbf{p} \tag{2.18}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \tag{2.19}$$

Betrachtet man zum Beispiel verschiedene Dreiecke aus je drei der Nachbarknoten von $\mathbf{p}$, so ist klar, dass für jedes dieser Dreiecke, das $\mathbf{p}$ enthält, einfach die baryzentrischen Koordinaten bezüglich dieses Dreiecks als Gewichte gewählt werden können (die restlichen Gewichte sind null) (siehe Abbildung

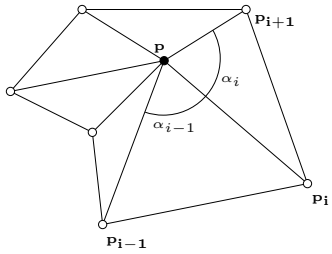


Abbildung 2.6: Mittelwertkoordinaten sind durch Winkel und Kantenlängen in der lokalen Parametrisierung definiert. Diese muss nicht explizit konstruiert werden, da die Verhältnisse der Winkel α_i und die Kantenlängen $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}\|$ in 3D und in der Parametrisierung gleich sind.

2.5). Die Wahl der Gewichte ist dennoch nicht ganz beliebig. Sie bestimmt, wie stark die Position des Knoten v in der globalen Parametrisierung P von den Positionen seiner Nachbarknoten abhängt. Im vorangegangenen Beispiel würde sie etwa nur von drei der Nachbarknoten abhängen.

Daher wird nun ein bestimmter Satz Koordinaten für ein gegebenes $\mathbf{p}$ bezüglich $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^2$ definiert, der zusätzlich die Stetigkeitseigenschaft der lokalen Verflachungen auf die globale Parametrisierung überträgt.

2.4.4 Mittelwertkoordinaten

Die Gewichte

$$\lambda_j = \frac{w_j}{\sum_{l=1}^{k} w_l}, \qquad w_j = \frac{\tan(\alpha_{j-1}/2) + \tan(\alpha_j/2)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}\|} \tag{2.20}$$

sind Koordinaten von $\mathbf{p}$ bezüglich $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$, erfüllen also die Gleichungen 2.18 und 2.19 [Flo03].

Diese sogenannten Mittelwertkoordinaten haben den Vorzug, dass man sie direkt aus den 3D-Koordinaten der beteiligten Punkte gewinnen kann. Sie hängen nur von den Verhältnissen der Winkel um $\mathbf{p}$ und den Abständen $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}\|$ ab, die in der lokalen Verflachung gerade den 3D-Winkeln um v und den Abständen $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\|$ entsprechen. Die explizite Konstruktion der lokalen Verflachung, wie im letzten Abschnitt beschrieben, entfällt also.

Mittelwertkoordinaten sind stetig in den Positionen aller Knoten. Die Positionen der Knoten in der globalen Parametrisierung wiederum hängen stetig von den Gewichten $\lambda_{i,j}$ ab. Unter der Konvexkombinationsabbildung mit Mittelwertkoordinaten hängen also die 2D-Positionen aller Knoten stetig von den 3D-Positionen ab.

3 Adaptives Remeshing von Dreiecksnetzen

In diesem Kapitel werden zwei Remeshing-Verfahren beschrieben, die ein gegebenes Gitter bei vorgegebener Knotenzahl nach folgenden Zielen optimieren:

Isotropie: Jedes Dreieck soll so gleichseitig wie möglich sein.

Adaptives Sampling: Die Knoten sollen angepasst an die Krümmung der Oberfläche über das Gitter verteilt sein. Intuitiv heißt das: In stärker gekrümmten Regionen soll die Knotenverteilung dichter und damit die Dreiecke zahlreicher und kleiner sein als in flacheren. Auf diese Weise kann mit der gleichen Anzahl an Dreiecken ein geringerer Approximationsfehler erreicht werden.

Regularität: Möglichst viele Knoten sollen Valenz 6 haben.

Adaptives Sampling und Dreiecksqualität müssen gegeneinander abgewogen werden, denn bei einer starken Abstufung der Knotenverteilung liegen große Dreiecke neben kleinen Dreiecken und haben damit unterschiedliche Seitenlängen. Aus diesem Grund wird dem Benutzer überlassen, in welchem Ausmaß die Knotendichte von der Krümmung abhängen soll (siehe Abschnitt 3.1).

Das neue Gitter M geht aus dem Eingabegitter M_0 hervor, indem eine Folge lokaler Operationen auf M_0 angewendet wird (siehe Abschnitt 3.3). Diese werden in verschiedenen Phasen des Remeshings auf unterschiedliche Weise kombiniert, um die gewünschte Knotenzahl zu erreichen, die Knotenverteilung an die Krümmung anzupassen, die Regularität des Gitters zu erhöhen und die Dreiecksqualität zu optimieren. In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Operationen definiert und der Ablauf der verschiedenen Phasen beschrieben. Dabei werden zwei verschiedene Strategien vorgestellt, um nach einer groben Anpassung der Knotenverteilung die Dreiecksqualität weiter zu verbessern. Der Rest dieses Abschnitts gibt einen Überblick über die implementierten Verfahren.

Zu Beginn wird M mit M_0 initialisiert. Dann wird M durch eine Folge von Kantenkontraktionen oder Kantenteilungen auf die vorgegebene Anzahl von Knoten gebracht. Dieser Vorgang wird nur grob durch ein über den Dreiecken definiertes Fehlermaß (siehe Abschnitt 3.2) gesteuert: Kanten, deren Nachbardreiecke minimalen bzw. maximalen Fehler haben, werden zuerst kontrahiert bzw. geteilt. Die Knotenpositionen werden erst durch das *flächenbasierte Remeshing* (siehe Abschnitt 3.4) optimiert: Es basiert auf iteriertem Verschieben von Knoten und Kippen von Kanten, um die Knotenverteilung lokal an die

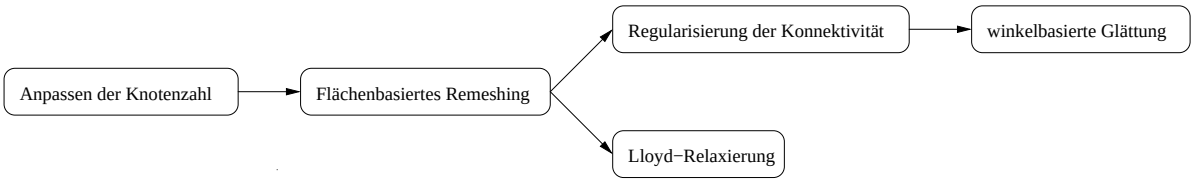


Abbildung 3.1: Überblick über den Ablauf des Remeshing-Verfahrens. Für die Phase nach der initialen Anpassung der Knotenverteilung durch das flächenbasierte Remeshing wurden zwei alternative Methoden implementiert.

Krümmung anzupassen und die Dreiecksqualität zu verbessern.

Für die darüber hinaus gehende Optimierung wurden zwei alternative Methoden implementiert:

Regularisierung: Durch eine Folge von Kipp-, Kontraktions- und Teilungsoperationen wird explizit die Konnektivität optimiert, indem möglichst viele Knoten auf ihre optimale Valenz gebracht werden. Die Qualität der Dreiecke des so entstandenen hochgradig regulären Gitters wird durch *winkelbasiertes Glätten* optimiert, ohne dabei die Konnektivität noch einmal zu verändern. Diese beiden Methoden erzeugen nur gemeinsam ein hochwertiges Gitter.

Lloyd-Relaxierung: Diese Methode optimiert ausschließlich durch Knotenverschieben und Kantenkippen präzise das Sampling und die Dreiecksqualität. Sie ist gewissermaßen eine verfeinerte Variante des flächenbasierten Remeshings und könnte auch allein angewendet werden.

3.1 Die Dichtefunkion

Damit das neue Gitter M bei einer vorgegebenen Knotenzahl die Ausgangsfläche möglichst originalgetreu wiedergibt, ist es wünschenswert, die Knotenverteilung und damit die Größe der Dreiecke an die Krümmung anzupassen. Eine Knotenverteilung ist gut angepasst, wenn jede Dreieckskante denselben Winkel ρ des lokalen Schmiegkreises der Ausgangsfläche abdeckt (siehe Abbildung 3.2). Der Schmiegkreis hat den Radius $r = \kappa_{max}^{-1}$. Eine in diesem Sinne optimale Knotenverteilung hat den Effekt, dass diejenigen Strukturen im Modell, die lokal wie Kugeln aussehen, mit der gleichen Anzahl von Dreiecken bedeckt werden, unabhängig vom Radius der Kugel.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich die optimale lokale Kantenlänge als Sehne des Schmiegkreises:

$$l = \frac{2\sin(\rho/2)}{\kappa_{max}} \tag{3.1}$$

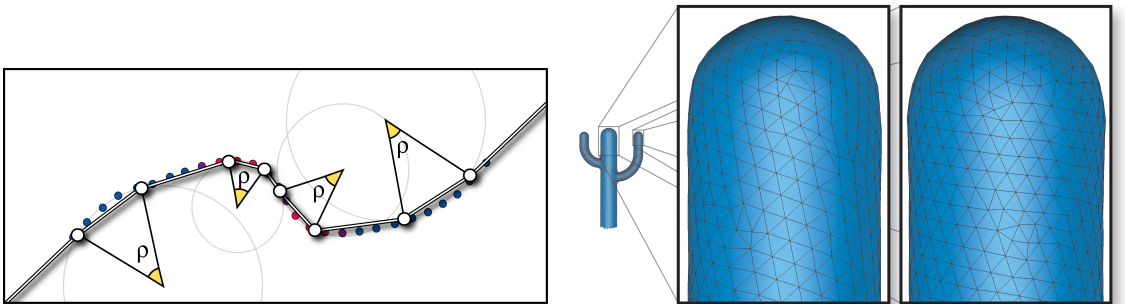


Abbildung 3.2: Bei optimal an die Krümmung angepasstem Sampling deckt jede Dreieckskante denselben Winkel des Schmiegkreises ab (links). Das Kaktusmodell (rechts, nicht mit diesem Verfahren erzeugt) illustriert diese Eigenschaft: Die Größe der Dreiecke ist proportional zum Krümmungsradius der Region. Quelle: [SFS05]

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge l beträgt:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{3}l^2 \tag{3.2}$$

Bei optimaler Krümmungsanpassung sind also die Dreiecksflächen proportional zu κ_{max}^{-2}. Der Winkel ρ bestimmt den Proportionalitätsfaktor und ist ein Maß für die Approximationsgenauigkeit.

Die hier verwendeten Remeshing-Verfahren orientieren sich an einer auf dem Ausgangsgitter definierten *Dichtefunktion* $\Psi : M_0 \mapsto \mathbb{R}$, um die Größe der Dreiecke von M zu kontrollieren. Sie wird für die Knoten von M_0 als $\Psi(v) = \kappa_{max}(v)^{-2}$ definiert und über den Dreiecken linear interpoliert. Die Grundidee ist, iterativ und lokal einen *relativen* Ausgleich der Dreiecksflächen gemäß Ψ zu erreichen. Der vom Winkel ρ abhängige Proportionalitätsfaktor taucht daher nicht explizit auf. Die absoluten Flächeninhalte der entstehenden Dreiecke und die resultierende Approximationsgenauigkeit ergeben sich implizit aus dem zu verteilenden Knotenvorrat.

Da κ_{max} eine aus M_0 berechnete diskrete Krümmungsgröße ist, können die Werte von Ψ starken Schwankungen und Rauschen unterliegen. Darum ist es sinnvoll, Extremwerte von Ψ abzuschneiden und Ψ anschließend einer Tiefpassfilterung zu unterziehen, indem der Wert von $\Psi(v)$ für jeden Knoten v mit Nachbarknoten $v_1, \ldots, v_k$ auf den Mittelwert seiner Nachbarn gesetzt wird:

$$\Psi(v) \leftarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \Psi(v_i) \tag{3.3}$$

Wie schon erwähnt ist es für die Dreiecksqualität wichtig, dass die Größe der Dreiecke nicht zu steil variiert. Um möglichst gleichseitige Dreiecke zu erhalten, dürfen die Kanten, die an einem Knoten zusammentreffen, nicht sehr unterschiedlich lang sein. Darum kann der Benutzer die Anzahl der Tiefpass-

filterungen n_{filter} sowie einen Parameter γ wählen, mit dem abschließend der *Kontrast* der Dichtefunktion durch $\Psi(v) \leftarrow \Psi(v)^\gamma$ angepasst wird. Der Exponent γ bestimmt, wie stark der Zusammenhang zwischen Krümmung und Dreiecksgröße sein soll. Durch n_{filter} wird die Größe des Einflussbereichs stark gekrümmter Regionen und damit die Abstufung der Dreiecksgrößen bestimmt.

Es gibt raffiniertere Verfahren zur Korrektur von Dichtefunktionen als Tiefpassfilterung [SSFS06] [Per06]. Man kann die Korrektur als Lösung eines Optimierungsproblems verstehen: Diese beschränkt den Gradienten $|\nabla\Psi|$ und damit die Abstufung der resultierenden Dreiecksflächen mit einer gegebenen Konstante η, erhöht dabei nirgendwo den ursprünglichen Wert von Ψ, damit eine eventuell verpflichtende Mindestdichte nicht unterschritten wird, und senkt die Werte von Ψ nur so wenig wie möglich, um mit größeren und damit weniger Dreiecken auszukommen. Solche Verfahren sind insbesondere für Remeshing-Verfahren relevant, bei denen die Dreiecksqualität *nur* oder hauptsächlich über die garantierte Einhaltung von bestimmten absoluten Kantenlängen erreicht wird.

3.2 Verbindung zur Ausgangsfläche

Die geometrische Originaltreue des Gitters M zur Ausgangsfläche wird folgendermaßen sichergestellt:

1. Die Knoten von M bleiben während des gesamten Verfahrens auf der Ausgangsfläche.
2. Es werden zwei Fehlermaße für die Dreiecke von M kontrolliert.

Zwischen M und dem Eingabegitter M_0 wird eine Verbindung aufrechterhalten, indem die Position jedes Knotens $v \in M$ durch ein Paar $(f, \mathbf{b})$ repräsentiert wird, wobei f ein Dreieck von M_0 und $\mathbf{b}$ ein baryzentrischer Koordinatenvektor bezüglich f ist. Die Position $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ und die Normale $\mathbf{N}$ von v ergeben sich durch Auswertung des zu f gehörenden PN-Dreiecks (siehe Abschnitt 2.3).

Diese explizite Verbindung zwischen M und M_0 ist entscheidend für die Bestimmung neuer Knotenpositionen auf M_0 durch Parametrisierung (siehe Abschnitte 3.3.1 und 3.7). Sie ermöglicht außerdem, die Dreiecke von M während des Remeshings mit den Regionen von M_0 zu vergleichen, die von ihnen repräsentiert werden. Hierfür werden folgende Fehlermaße verwendet, die für die Dreiecke von M definiert sind:

- Das erste Maß, E_{dist}, kontrolliert den Abstand zwischen einem Dreieck $f = (v_1, v_2, v_3)$ und der Ausgangsfläche:

$$E_{dist}(f) = \max_{i \in 1,2,3} (\mathbf{N}_{v_i} \cdot \mathbf{N}_{v_{i+1}}) > \cos \Theta_{dist} \tag{3.4}$$

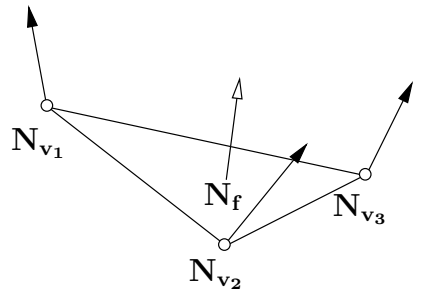


Abbildung 3.3: Die Ausgangsgrößen zur Bestimmung der Fehlermaße für ein Dreieck von M. Die Knotennormalen $\mathbf{N}_{v_1}$, $\mathbf{N}_{v_2}$ und $\mathbf{N}_{v_3}$ werden von der über PN-Dreiecke rekonstruierten Ausgangsfläche genommen.

Die Einheitsnormalen der Eckknoten, $\mathbf{N}_{v_i}$, werden von der Ausgangsfläche genommen, d.h. von der über die PN-Dreiecke definierten Interpolation der Knotennormalen von M_0. Ein größerer Wert des maximalen Winkels zeigt eine stärkere Krümmung der Ausgangsfläche über f an. Dieser Wert soll einen vom Benutzer gegebenen Schwellenwinkel Θ_{dist} nicht überschreiten.

E_{dist} lässt sich über den im vorigen Abschnitt eingeführten Winkel ρ motivieren: Für ausreichend kleine ρ, so dass die Geometrie der Fläche über der Kante durch den Krümmungskreis charakterisiert ist, gilt $E_{dist} = \cos\rho$, und der Abstand zwischen Kante und Krümmungskreis ist proportional zu dessen Radius [SFS05].

- Das zweite Maß, E_{glatt}, zeigt an, wie gut ein Dreieck mit den Tangentialebenen der Originalfläche an seinen Ecken übereinstimmt:

$$E_{glatt}(f) = \max_{i \in 1,2,3} (\mathbf{N}_f \cdot \mathbf{N}_{v_i}) > \cos\Theta_{glatt} \tag{3.5}$$

Dabei ist $\mathbf{N}_f$ die Einheitsnormale des Dreiecks f.

Für E_{dist} und E_{glatt} werden vom Benutzer Schwellenwinkel Θ_{dist} und Θ_{glatt} vorgegeben, die nicht überschritten werden dürfen. Nach jeder Remeshing-Operation werden beide Fehlermaße an allen durch die Operation geänderten Dreiecken ausgewertet. Ist eines der Maße schlechter als der vorgegebenen Schwellenwert, wird die Operation rückgängig gemacht.

Die Fehlermaße sagen etwas über das Verhältnis des aktuellen Gitters M zu der über PN-Dreiecke rekonstruierten, hypothetischerweise von M_0 approximierten kontinuierlichen Fläche aus. Insbesondere sind sie schon für M_0 selbst keineswegs überall optimal. Oft werden sinnvolle vom Benutzer gegebene Werte für Θ_{dist} und Θ_{glatt} an einigen detailreichen Stellen des Gitters bereits initial überschritten, so dass dort keine Remeshing-Operationen ausgeführt werden. Solche Gebiete könnten lokal verfeinert werden, oft lassen sich die Fehlermaße aber gar nicht oder nicht innerhalb einer vernünftigen Anzahl von Verfei-

nerungsschritten entscheidend senken. Dies bedeutet einerseits, dass feine Details von M_0 in M nicht verloren gehen können. Andererseits können solche Gebiete bei der Optimierung der Dreiecksqualität nicht berücksichtigt werden.

3.3 Lokale Gitteroperationen

Das Gitter M wird iterativ durch folgende Operationen verbessert: *Knoten bewegen*, *Kante kontrahieren*, *Kante teilen* und *Kante kippen*. Durch Kontraktion und Teilung von Kanten wird die Knotenzahl verändert. Durch das Bewegen von Knoten und das Kippen von Kanten wird die Dreiecksqualität erhöht. Durch die Kantenoperationen wird außerdem die Regularität des Gitters optimiert (siehe Abschnitt 3.8). Das Bewegen von Knoten ist am aufwendigsten, weil mittels Parametrisierung eine neue Knotenposition auf M_0 gefunden werden muss.

3.3.1 Bewegen von Knoten

Sei v ein Knoten von M mit den Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$. Für v soll eine neue Position $\mathbf{x}_{neu}(v)$ gefunden werden, die eine bestimmte Eigenschaft von v relativ zu seinen Nachbarn verbessert, zum Beispiel die angrenzenden Winkel oder das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke. Dabei soll $\mathbf{x}_{neu}(v)$ wieder auf der durch PN-Dreiecke approximierten Ausgangsfläche M_0 liegen. Anstatt dieses Problem direkt in 3D zu lösen, wird $Stern(v)$ mit der in Abschnitt 2.4.3 beschriebenen Methode bijektiv auf ein Gebiet in der Ebene abgebildet, so dass sich 2D-Knotenpositionen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ ergeben. Die Optimierung wird nun in der Ebene gelöst und ergibt eine neue Position $\mathbf{p}_{neu} \in \mathbb{R}^2$.

Zu $\mathbf{p}_{neu}$ muss nun eine entsprechende 3D-Position $\mathbf{x}_{neu}(v)$ auf M_0 gefunden werden. $\mathbf{p}_{neu}$ liegt auf einem der Dreiecke, die $\mathbf{p}$ mit $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ bildet. Dem entspricht ein Dreieck f von M. Dessen Ecken wiederum liegen auf M_0 (siehe Abschnitt 3.2). Der $\mathbf{p}_{neu}$ entsprechende Punkt auf $\mathbf{x}_{neu}(v) \in M_0$ wird mit Hilfe einer Parametrisierung eines Ausschnitts von M_0 bestimmt, der die Positionen der Ecken des Dreiecks f umfasst (siehe Abschnitt 3.7).

Bereits in der Ebene kann das Verschieben eines Knotens innerhalb seines Sterns eine Überfaltung auslösen, also dazu führen, dass sich zwei Dreiecke überlappen. Die analoge Situation in einem Dreiecksgitter in 3D ist, dass sich mit der neuen Knotenposition die Normale eines Dreiecks umdreht. Dies wird durch die Kontrolle des Fehlermaßes E_{glatt} verhindert. Die Operation wird verworfen, falls eine Normale dabei um einen zu großen Winkel gedreht werden würde.

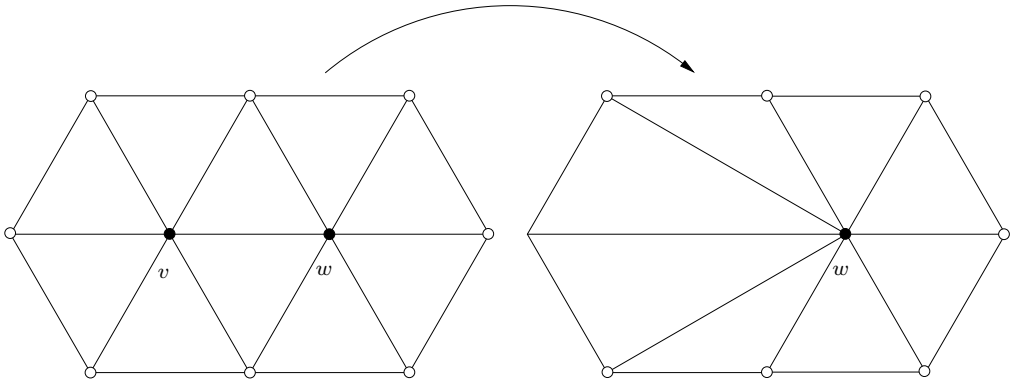


Abbildung 3.4: Kontraktion der Kante (v, w) auf den Knoten w.

Unabhängig davon kann prinzipiell jede geometrische Veränderung am Gitter zu einer *globalen* Selbstüberschneidung führen: Es ist jederzeit möglich, dass ein Dreieck ein anderes Dreieck schneidet, das in der Konnektivität vielleicht weit entfernt liegt, im Raum jedoch nicht. Will man diese Selbstüberschneidungen vollständig ausschließen, sind nach jeder Operation globale Tests erforderlich.

3.3.2 Kontraktion von Kanten

Die Grundoperation zum Entfernen eines Knotens ist die Kantenkontraktion. Die Kante (v, w) auf den Knoten w zu kontrahieren (siehe Abbildung 3.4), heißt:

1. Den Knoten v auf die Position des Knoten w zu bewegen.
2. Jedes Vorkommen des Knotens v in allen Dreiecken durch w zu ersetzen.
3. Alle degenerierten Dreiecke zu entfernen.

Diese Operation entfernt aus M einen Knoten und so viele Dreiecke, wie zu (v, w) inzident sind. In einem mannigfaltigen Gitter sind dies zwei. Man kann die Kantenkontraktion auch so verstehen, dass die neue Position des verbleibenden Knotens frei gewählt wird, zum Beispiel so, dass ein Maß für den Approximationsfehler minimiert wird [GH97]. Hier soll jedoch das Aussuchen einer neuen Knotenposition als separate Operation betrachtet werden. Soll die Position des neuen Knotens frei gewählt werden, kann man dies auch mit einer nachfolgenden Operation *Knoten bewegen* beschreiben.

Der Remeshing-Algorithmus wählt in seinen verschiedenen Phasen Kanten zur Kontraktion aus, um die Knotenzahl zu verringern und die Regularität der Konnektivität zu verbessern. Kantenkontraktionen können jedoch unerwünschte geometrische und topologische Nebenwirkungen haben. Genau wie beim Bewegen von Knoten kann es zu lokalen Überfaltungen kommen (siehe Abbildung 3.5, links). Diese können erkannt werden, indem geprüft wird, ob v auf die Position von w bewegt werden kann, ohne für eines der dabei nicht degenerierten Dreiecke die Fehlermaße (siehe Abschnitt 3.2) zu verletzen.

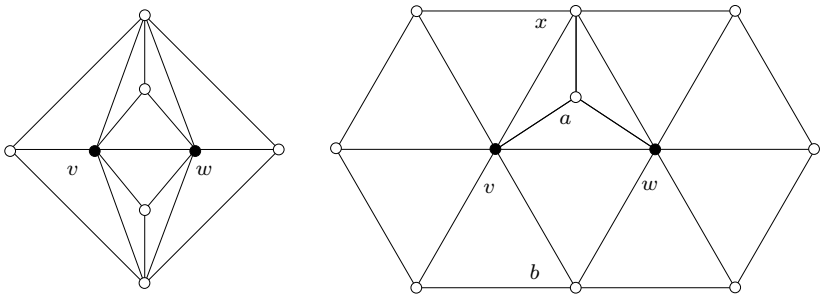


Abbildung 3.5: Zwei Kanten, die nicht kontrahiert werden können, weil dies eine Überfaltung verursachen (*links*) oder die Topologie des Gitters verändern würde (*rechts*). Der Knoten a würde nach dieser Operation zu nur einem Dreieck gehören, welches drei nicht-mannigfaltige Kanten hätte.

Darüber hinaus kann eine Kantenkontraktion aber auch die Topologie des Gitters verändern, was in dieser Anwendung unerwünscht ist und ausgeschlossen werden soll. Durch einen einfachen Test der Konnektivität kann überprüft werden, ob eine Kantenkontraktion lokal topologieerhaltend ist. Kanten, die diesen Test nicht bestehen, werden nicht kontrahiert.

Link Condition Lemma für Mannigfaltigkeiten: Eine Kante (v, w), die zu den beiden Dreiecken (v, w, a) und (v, w, b) inzident ist, darf nur kontrahiert werden, wenn v und w keine gemeinsamen Nachbarn außer a und b haben. Denn wenn es einen Knoten x und Kanten (x, v) und (x, w) gibt, aber kein Dreieck (v, w, x), dann gehören sowohl v als auch w, aber nicht die Kante (v, w), zu $Link(x)$. Durch die Kontraktion werden also zwei in $Link(x)$ nicht benachbarte Knoten miteinander identifiziert. $Link(x)$ wäre danach kein Kreis mehr, und $Stern(x)$ damit nicht mehr homöomorph zur Kreisscheibe (siehe Abbildung 3.5, rechts).

Eine gültige Kantenkontraktion senkt die Anzahl der Knoten um eins, die Anzahl der Dreiecke um zwei und die Anzahl der Kanten um drei. Die Valenzen der Knoten a und b sinken um jeweils eins, und die Valenz des Knotens w ist nach der Kontraktion

$$d_{neu}(w) = d(v) + d(w) - 4 \tag{3.6}$$

3.3.3 Teilen von Kanten

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, einen neuen Knoten in ein Gitter einzufügen. Eine besonders einfache Operation ist die Kantenteilung. Es sei $e = (v, w)$ eine Kante, die inzident zu zwei Dreiecken $f_1 = (v, w, a)$ und $f_2 = (v, w, b)$ ist. Nun wird auf den Mittelpunkt von e ein neuer Knoten u eingefügt, der e damit in zwei Hälften teilt (siehe Abbildung 3.6). Dabei wird e durch zwei neue Kanten $e_1 = (v, u)$

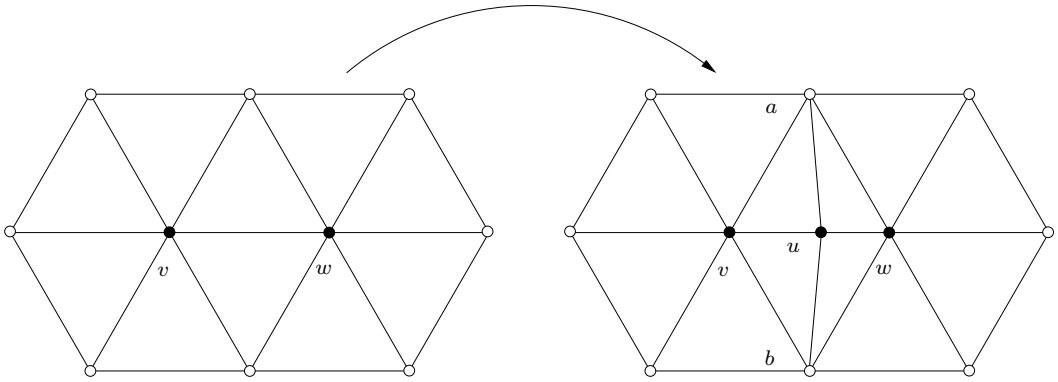


Abbildung 3.6: Die Kante (v, w) wird geteilt.

und $e_2 = (u, w)$ ersetzt. Um ein gültiges Dreiecksnetz zu erhalten, wird u noch an die beiden zu e gegenüberliegenden Knoten angeschlossen, indem $e_3 = (u, a)$ und $e_4 = (u, b)$ eingefügt werden. Die Dreiecke f_1 und f_2 werden dabei durch je zwei neue Dreiecke ersetzt, $f_{11} = (v, u, a)$ und $f_{12} = (u, w, a)$ bzw. $f_{21} = (v, b, u)$ und $f_{22} = (u, b, w)$.

Diese Operation erhöht die Anzahl der Knoten um eins, die Anzahl der Dreiecke um zwei und die Anzahl der Kanten um drei. Der neu eingefügte Knoten erhält die Valenz $d(u) = 4$, und die Valenzen der Knoten a und b steigen jeweils um eins.

3.3.4 Kippen von Kanten

Sei $e = (v, w)$ eine Kante in M. Sie ist inzident zu zwei Dreiecken, $f_1 = (v, w, a)$ und $f_2 = (v, w, b)$. Durch Entfernen der Kante e und Einfügen der Kante $e_{neu} = (a, b)$ werden f_1 und f_2 durch zwei neue Dreiecke $f_3 = (a, b, v)$ und $f_4 = (a, b, w)$ ersetzt. Diese Operation heißt *Kippen* der Kante e. Sie senkt die Valenz der Knoten v und w jeweils um eins und erhöht dafür die Valenz der Knoten a und b um eins.

In der Ebene ist diese Operation immer dann zulässig, wenn alle vier beteiligten Knoten ein konvexes Viereck bilden. Tun sie dies nicht, liegt die einspringende Ecke hinterher auf einem der beiden neuen Dreiecke. Der entsprechende Fall bei einem Dreiecksgitter in 3D ist nur der Grenzfall einer größeren Klasse von Kippoperationen, die zwar von der Konnektivität her erlaubt, aber geometrisch unerwünscht sind, nämlich dann, wenn der Winkel zwischen den Normalen der an der neuen Kante benachbarten Dreiecke besonders groß ist. Im Fall der koplanaren, invertierten Dreiecke beträgt er 180 Grad. Dieser und die übrigen Fälle, in denen die Normalen der neuen Dreiecke stark von der Originalfläche abweichen, insbesondere der Spezialfall der koplanaren Selbstüberschneidung, werden vom Fehlermaß E_{glatt} erfasst und die entsprechenden Operationen verworfen.

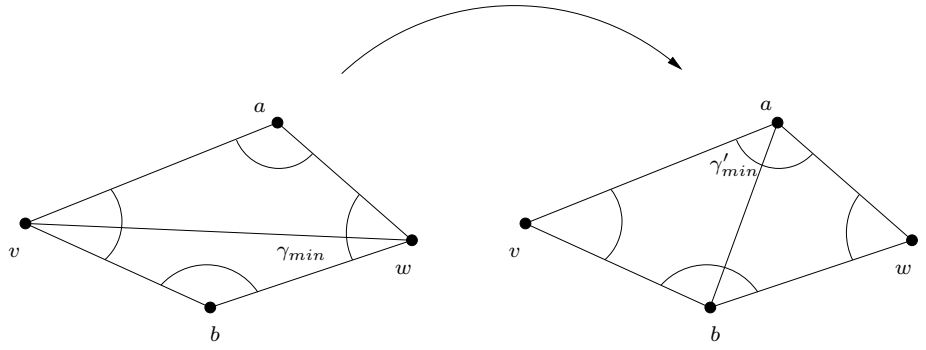


Abbildung 3.7: Die Kante (v, w) wird gekippt. Durch diese Operation ändern sich 6 Winkel, deren Minimum in diesem Fall vergrößert wird. Die neue Kante (a, b) besitzt die lokale Delaunay-Eigenschaft.

Zur Verbesserung der Dreiecksqualität werden Kanten gekippt, wenn dadurch das Minimum der sechs an dieser Operation beteiligten Winkel erhöht werden kann (siehe Abbildung 3.7). Die Eigenschaft einer Kante, sich hinsichtlich dieses Kriteriums im besseren der beiden Kippzustände zu befinden, heißt *lokale Delaunay-Eigenschaft*.

3.4 Flächenbasiertes Remeshing

In der Phase des flächenbasierten Remeshing wird die Knotenverteilung des Gitters verbessert. Die Grundidee besteht darin, durch das Verschieben von Knoten die Flächeninhalte der Dreiecke auszugleichen oder in ein vorgegebenes Verhältnis zu bringen. Im Allgemeinen ist dies allein kein gutes Optimierungskriterium, um ein hochwertiges Gitter zu erzeugen. Gitter mit Dreiecken gleichen oder ähnlichen Flächeninhalts haben aber die Eigenschaft, dass die Knoten gleichmäßig über die Oberfläche verteilt sind. Surazhsky und Gotsman haben demonstriert, dass in einer 2D-Triangulierung abwechselndes Ausgleichen der Dreiecksflächen und Wiederherstellen der lokalen Delaunay-Eigenschaft jeder Kante ein Gitter mit uniformer Knotenverteilung und guten Dreiecken ergibt (siehe Abbildung 3.8) [SG02]. Diese Methode wurde von ihnen in zwei Richtungen erweitert:

1. Zur Verarbeitung von 3D-Dreiecksgittern und
2. zur Anpassung der Knotenverteilung an eine gegebene Dichtefunktion.

Jeder Knoten wird so verschoben, dass die Flächeninhalte der inzidenten Dreiecke in vorgegebene Verhältnisse $\mu_1, \ldots, \mu_k$ zueinander gesetzt werden, die positiv sind und in der Summe 1 ergeben. Dies ist ein lokales Optimierungsproblem und wird, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, in der Ebene gelöst. Es sei also wiederum $\mathbf{p}$ die Position eines zu verschiebenden Knotens in der Ebene und $\mathbf{p_i} = (x_i, y_i)$

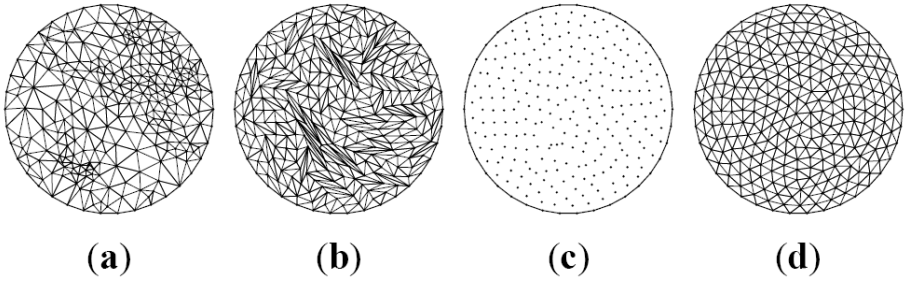


Abbildung 3.8: Der Effekt des flächenbasierten Remeshings in 2D. Das initiale Gitter (a). Durch iterierte Verschiebung von Knoten werden die Flächeninhalte der Dreiecke ausgeglichen (b). Ohne die Kanten betrachtet zeigt dies eine uniforme Knotenverteilung (c). Alternierendes Ausgleichen der Dreiecksflächen und Wiederherstellen der Delaunay-Eigenschaft durch Kantenkippen erzeugt ein Gitter mit wohlgeformten, annähernd gleich großen Dreiecken. Quelle: [SG03]

die Positionen seiner k Nachbarn. Nun gibt es im Allgemeinen keine Position $\mathbf{p}_{neu} = (x_{neu}, y_{neu})$, so dass die k inzidenten Dreiecke genau die Flächenverhältnisse μ_i haben. Das Ziel ist es aber, $\mathbf{p}_{neu}$ so zu wählen, dass diese Situation so weit wie möglich angenähert wird. Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung.

Wenn $A_i(\mathbf{p}_{neu})$ die Fläche des Dreiecks $\mathbf{p}_{neu}, \mathbf{p_i}, \mathbf{p_{i+1}}$ bezeichnet, dann ist

$$A_i(\mathbf{p}_{neu}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{neu} & y_{neu} & 1 \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Die Fläche A des Polygons $(\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_k})$ ist auf die Dreiecksflächen aufzuteilen und kann durch

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{p}) \tag{3.8}$$

berechnet werden. Die gesuchte neue Position ist dann der Punkt, der die quadratischen Abstände der Dreiecksflächen zu den gewünschten Dreiecksflächen minimiert.

$$\mathbf{p}_{neu} = \arg\min_{\mathbf{p}_{neu}} \sum_{i=1}^{k} (A_i(\mathbf{p}_{neu}) - \mu_i A)^2 \tag{3.9}$$

Die beiden partiellen Ableitungen dieser Summe nach den Koordinaten von $\mathbf{p}_{neu}$ sind lineare Funktionen. An deren gemeinsamer Nullstelle nimmt die Summe ihr Minimum an.

Es bleiben die Flächenverhältnisse μ_i zu definieren. Die Knotenverteilung soll an die Dichtefunktion Ψ angepasst werden (siehe Abschnitt 3.1). Es sei

$$\mu_i' = \frac{\Psi(v_i) + \Psi(v_{i+1})}{2} \tag{3.10}$$

Dieser Wert beschreibt die für das Dreieck (v, v_i, v_{i+1}) angestrebte Dichte. Die μ_i' werden normalisiert, um gültige μ_i zu erhalten, die sich zu 1 summieren.

Wenn Knoten auf diese Weise iteriert über das Gitter bewegt werden, entstehen dabei viele lange, dünne Dreiecke, was den Bewegungsspielraum der einzelnen Knoten einschränkt. Deswegen wird das flächenbasierte Knotenbewegen abwechselnd mit Delaunay-Kantenkippen durchgeführt. Diese Iteration kann über zwei Parameter, n_{step} und n_{area}, gesteuert werden.

In jedem Durchlauf wird jeder Knoten des Gitters bewegt. Nach n_{area} solchen Durchläufen werden alle möglichen winkelverbessernden Kantenkippungen durchgeführt. Das ganze wird n_{step} mal wiederholt.

Von den Autoren des Verfahrens wird $n_{area} = 3$ als gute Wahl genannt, um die Knoten ein Stück in die richtige Richtung für eine angepasste Knotendichte zu schieben. Ein angemessener Wert für n_{step} hängt aber stark von der Knotenzahl des Gitters sowie vom Unterschied zwischen der initialen und der durch Ψ vorgegebenen Dichteverteilung ab. In der Originalarbeit wird $n_{step} = 5$ als ausreichend genannt, um für Ausgabegitter mit einigen 10.000 Knoten ein an die Krümmung angepasstes Sampling zu erzielen, und dieser Wert wurde für die in dieser Arbeit gezeigten Modelle erfolgreich verwendet.

3.5 Winkelbasierte Glättung

Die winkelbasierte Glättung kommt zum Schluss des Remeshing-Verfahrens zum Einsatz. Das Ziel dieser Phase ist die Verbesserung der Dreicksqualität ohne weitere Veränderung der Konnektivität.

Die einfachste Glättungsmethode für zweidimensionale Dreiecksnetze ist die Laplace-Glättung. Dabei wird jeder Knoten auf den Schwerpunkt des durch seine Nachbarknoten gebildeten Polygons geschoben.

Zur Veranschaulichung dieser Methode kann das Gitter als ein System von Federn betrachtet werden, wobei jede Kante eine lineare Feder mit initialer Länge Null ist. Liegt der mittlere Knoten genau auf dem Mittelpunkt des Polygons, sind die auf ihn wirkenden Federkräfte ausgeglichen. Laplace-Glättung ist ein iterativer Weg, sich diesem Gleichgewichtszustand anzunähern. Sie kann als Optimierung von Knotenpositionen aufgefasst werden, wobei für jeden Knoten die Federenergie der inzidenten Kanten

minimiert wird:

$$E = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}\|^2 \tag{3.11}$$

Dabei ist $\mathbf{p}$ die Position des zu verschiebenden Knotens v in der lokalen Parametrisierung (siehe Abschnitt 3.3.1) und $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ die Positionen seiner k Nachbarn.

Die einzige Nullstelle der Ableitung dieser Energie nach der Knotenposition $\mathbf{p}$ ergibt als Minimum den Schwerpunkt:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i \tag{3.12}$$

Diese Zielfunktion ist jedoch selbst kein gutes Maß für die Qualität eines Gitters, und tatsächlich verbessert Laplace-Glättung ein Gitter längst nicht immer. Sie kann Überfaltungen verursachen, aber selbst wenn man dies durch explizite Kontrolle verhindert und einen Knoten nur verschiebt, wenn die Qualität der Dreiecksqualität durch diese Operation verbessert würde, führt dies oft nicht zu den erhofften Ergebnissen. Der Vorteil des Verfahrens ist seine Einfachheit hinsichtlich des Berechnungsaufwands.

Optimiert man nämlich anstelle der dargestellten Federenergie direkt ein Maß für die Qualität von Dreiecken, entstehen zwar keine entarteten Elemente, die Verbesserung der Dreiecksqualität wird sogar garantiert. Dafür sind die Ableitungen solcher Zielfunktionen komplizierter, und ihre Nullstellen haben im Allgemeinen keine geschlossene Form.

Die winkelbasierte Glättung ist ein Kompromiss zwischen Laplace-Glättung und expliziter Optimierung der Dreiecksqualität. Sie wurde ursprünglich von Zhou und Shimada für Triangulierungen der Ebene entwickelt [ZS00], dann von Surazhsky und Gotsman für eine 2D-Morphing-Anwendung verbessert [SG02] und schließlich auf triangulierte Oberflächen angewandt [SG03]. Auch das winkelbasierte Glätten lässt sich als Federsystem betrachten. Die Federn sind nun keine Zug-, sondern Drehfedern.

Die Energie eines solchen Systems ist:

$$E = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2} \Theta_i^2 \tag{3.13}$$

Dabei ist k die Anzahl der Nachbarn von v, und die Θ_i sind die Winkel zwischen den inzidenten Kanten des Mittelknotens und den Seiten des Polygons. Das Polygon hat k Ecken, in jeder Ecke ergeben sich zwei Winkel, also sind $2k$ Winkel zu berücksichtigen.

Es wird eine iterative Methode zur heuristischen Minimierung dieser Energie analog zur Laplace-Glättung implementiert. Der Unterschied besteht darin, dass bei der Laplace-Glättung das lokale Optimum für die Position eines Knotens explizit und in einem Schritt bestimmt werden kann (es ist der Schwerpunkt), während im vorliegenden Verfahren [ZS00] auch diese Größe heuristisch angenähert wird.

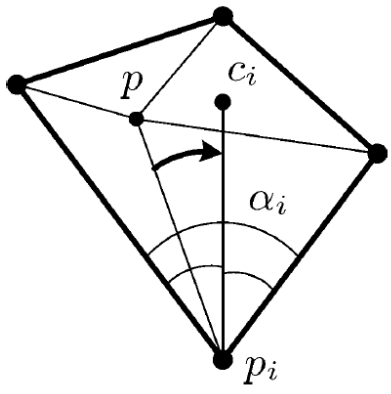


Abbildung 3.9: Der Knoten $\mathbf{p}$ soll bewegt werden. Jeder Nachbar $\mathbf{p}_i$ liefert einen Beitrag $\mathbf{c}_i$ zur neuen Position, indem die Kante $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p})$ um $\mathbf{p}_i$ auf die Winkelhalbierende von α_i gedreht wird. Quelle: [SG02]

Wie schon erwähnt, gibt es für jeden eingebetteten Knoten $\mathbf{p}$ k Paare von benachbarten Winkeln in den Ecken des Nachbarschaftspolygons. Die beiden Winkel an der Ecke $\mathbf{p}_i$ sind die folgenden:

$$\alpha_a = \cos^{-1}\left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_i)\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{i+1})}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}_i|\,|\mathbf{p}-\mathbf{p}_{i+1}|}\right) \tag{3.14}$$

$$\alpha_b = \cos^{-1}\left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_i)\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{i-1})}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}_i|\,|\mathbf{p}-\mathbf{p}_{i-1}|}\right) \tag{3.15}$$

Diese beiden Winkel werden nun angeglichen, indem die Kante $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)$ um den Winkel β_i auf die Winkelhalbierende des Gesamtwinkels an der Ecke $\mathbf{p}_i$ gedreht wird:

$$\beta_i = \frac{(\alpha_b - \alpha_a)}{2} \tag{3.16}$$

Diese Drehung ergibt eine neue Position $\mathbf{c}_i$ für v, die optimal hinsichtlich der Winkel an $\mathbf{p}_i$ ist:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{p}_i + (\mathbf{p}-\mathbf{p}_i)\begin{pmatrix} \cos\beta_i & -\sin\beta_i \\ \sin\beta_i & \cos\beta_i \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Wenn diese Berechnung für jede Ecke $\mathbf{p}_i$ durchgeführt wird, ergeben sich k neue Positionen für v. Seine letztendliche Position wird nun als *gewichtetes* Mittel aus all diesen Werten bestimmt. Die Gewichtung wird dabei so gewählt, dass die Beiträge aus kleineren Winkeln $\alpha_i = \alpha_a + \alpha_b$ stärker ins Gewicht fallen:

$$\mathbf{p}_{neu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} 1/\alpha_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i^2} \cdot \mathbf{c}_i \tag{3.18}$$

Für kleine Winkel α_i ist es schwieriger zu garantieren, dass die neue Position als Mittelwert nah an der Winkelhalbierenden zu liegen kommt. Deswegen soll ihr Beitrag stärker berücksichtigt werden. Diese Methode verbessert die Dreiecksqualität zuverlässiger und verursacht seltener Überfaltungen als winkelbasierte Glättung mit uniformen Gewichten [SG02]. Sie ist dabei ähnlich effizient wie Laplace-Glättung.

Im Rahmen des hier implementierten Verfahrens wird die winkelbasierte Glättung als letzte Phase eingesetzt, nach der Regularisierung der Konnektivität, um die Dreiecksqualität abschließend zu optimieren.

3.6 Lloyd-Relaxierung

Nach dem flächenbasierten Remeshing (siehe Abschnitt 3.4) weist das Gitter M eine erste an die Dichtefunktion Ψ angepasste Knotenverteilung auf. Diese Anpassung lässt sich lokal so auffassen, dass durch die Dreiecke ein 2D-Parametergebiet P so partitioniert wird, dass jedes Dreieck dort näherungsweise einen Bereich gleicher Masse von Ψ^{-1} abdeckt. Um ein Verfahren zu konstruieren, das stattdessen jedem *Knoten* einen Bereich gleicher Masse zuordnet, wird der Dualgraph der Triangulierung betrachtet. Jede Facette entspricht dort einem Knoten der Triangulierung. Für die Facetten wird sowohl die Erzielung der Gleiche-Masse-Eigenschaft als auch Isotropie angestrebt. Bei konstanter Dichtefunktion wäre ein reguläres Sechseckgitter optimal: Es ist der Dualgraph eines regulären Dreiecksgitters. Eine nichtkonstante Dichtefunktion führt zu einem Kompromiss zwischen der optimalen Form der Facetten und der optimalen Partitionierung der Dichtefunktion. Das *gewichtete zentroidale Voronoidiagramm* [SG03] weist diese beiden Eigenschaften auf.

Für eine gegebene Menge von eingebetteten Knoten $S = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}, \mathbf{p}_i \in P$ heißt

$$V_i = \{\mathbf{x} \in P \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|, \forall \mathbf{q} \in S\} \tag{3.19}$$

die Voronoizelle von $\mathbf{p}_i \in S$ und ist die Menge aller Punkte, die zu keinem Knoten geringeren Abstand haben als zu $\mathbf{p}_i$. Die Voronoizellen bilden eine Partitionierung von P. Sie heißt *Voronoidiagramm* von S.

Für ein in die Ebene eingebettetes Dreiecksgitter, in dem jede innere Kante die lokale Delaunay-Eigenschaft hat (siehe Abschnitt 3.3.4), ist die Voronoizelle jedes inneren Knotens das Polygon, das sich durch Verbindung der Umkreismittelpunkte seiner inzidenten Dreiecke ergibt.

Ein gewichtetes zentroidales Voronoidiagramm ist ein Voronoidiagramm mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jeder Knoten auf dem gewichteten Schwerpunkt bezüglich Ψ^{-1} seiner Voronoizelle liegt.

Der Schwerpunkt $\mathbf{c}_i$ einer Voronoizelle V_i ist

$$\mathbf{c}_i = \frac{\int_{V_i} \mathbf{x}\Psi^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{dx}}{\int_{V_i} \Psi^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{dx}} \tag{3.20}$$

Zentroidale Voronoidiagramme haben ein besonderes Verhältnis zu einer Energiefunktion, die sowohl die Form der Zellen als auch die Partitionierung der Dichtefunktion bewertet. Sie lautet:

$$E(S,V) = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \Psi^{-1}(\mathbf{x}) \left\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\right\|^2 \mathbf{dx} \tag{3.21}$$

Dabei bezeichnet V eine Partitionierung von P in Facetten $V_1, \ldots V_n$, jedes $\mathbf{p}_i$ einen Punkt in V_i und $S = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. Man kann zeigen, dass für eine gegebene Partitionierung V diese Funktion minimiert wird, wenn die $\mathbf{p}_i$ die Schwerpunkte der Facetten V_i sind, und dass umgekehrt für gegebene $\mathbf{p}_i$ das Minimum erreicht wird, wenn V das Voronoidiagramm ist [SAG03].

Ein Algorithmus zur Konstruktion eines gewichteten zentroidalen Voronoidiagramms ist die Lloyd-Relaxierung. Sie besteht darin, $E(S,V)$ abwechselnd bezüglich S und V zu minimieren:

1. Konstruiere das Voronoidiagramm bezüglich der gegebenen Knoten.
2. Berechne den Schwerpunkt jeder Voronoizelle bezüglich der Dichtefunktion in einer lokalen Parametrisierung. Bewege den entsprechenden Knoten auf diesen Schwerpunkt.
3. Dies wird so lange wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist, etwa, dass kein Knoten weiter als ein gewisses ϵ bewegt wird.

Im hier vorgestellten Remeshing-Verfahren [SAG03] wird der Lloyd-Relaxierungs-Algorithmus in einer Variante verwendet, um ohne globale Parametrisierung auf einem 3D-Dreiecksgitter die Knotenverteilung zu optimieren. Anstatt explizit mit einem Voronoidiagramm zu arbeiten, wird durch das Kippen von Kanten in 3D stets die lokale 3D-Delaunay-Eigenschaft des Gitters aufrechterhalten. In jedem Relaxierungsschritt wird dann für jeden Knoten die Voronoizelle in der lokalen Parametrisierung seines Sterns (siehe Abschnitt 3.3.1) konstruiert und der Knoten dann auf eine 3D-Position bewegt, die dem Schwerpunkt dieser Zelle entspricht (siehe Abbildung 3.11).

Es sei $\mathbf{p}$ die Position des zu verschiebenden Knotens in der Parametrisierung und es seien $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ die Positionen seiner k Nachbarn. Die Voronoizelle von $\mathbf{p}$ ist das Polygon aus den Umkreismittelpunkten der Dreiecke, die $\mathbf{p}$ mit den Punkten $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ bildet.

Die neue Position $\mathbf{p}_{neu}$ ist der Schwerpunkt dieses Polygons bezüglich einer Approximation der über dem Ausgangsgitter M_0 definierten Funktion Ψ^{-1}. Die Approximation besteht darin, Ψ^{-1} nur in den Knoten des Gitters M auszuwerten und über den Dreiecken der lokalen Parametrisierung linear zu interpolieren, anstatt die Voronoizelle in einer Parametrisierung von M_0 mit den Dreiecken des Eingabegitters

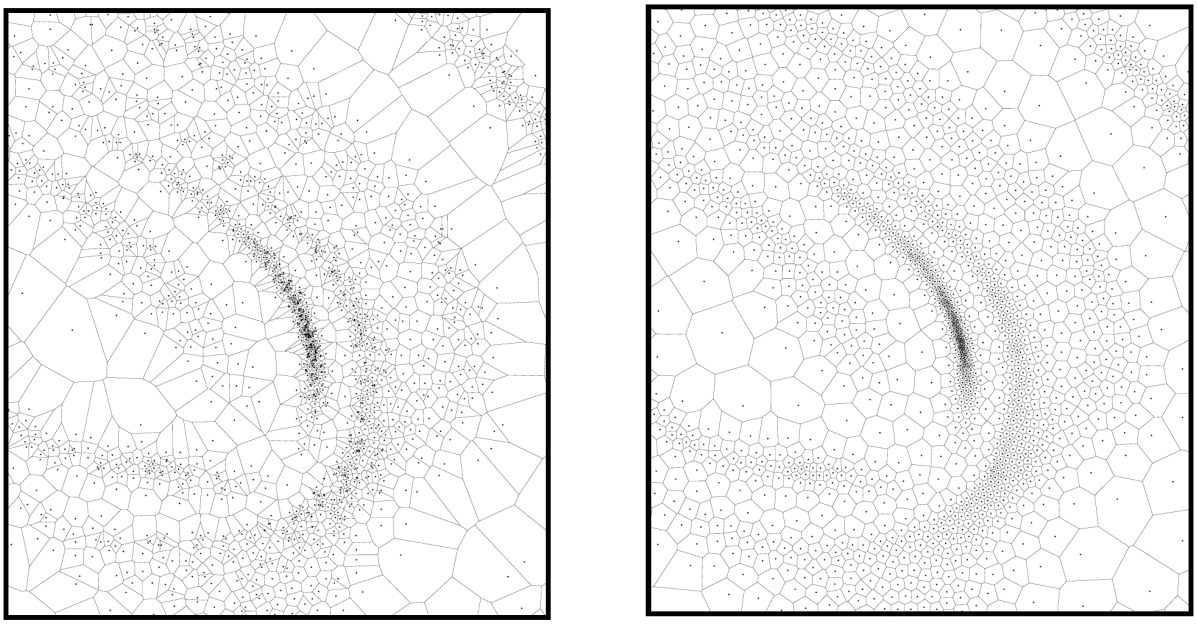


Abbildung 3.10: Das Voronoidiagramm einer nach einer Dichtefunktion verteilten Knotenmenge (*links*). Durch iterierte Lloyd-Relaxierung mit derselben Dichtefunktion entsteht ein gewichtetes zentroidales Voronoidiagramm. Jeder Knoten liegt auf dem Schwerpunkt seiner Voronoizelle. Quelle: [SAG03]

zu schneiden [AVDI03]. Eine weitere Vereinfachung erfolgt für den Fall, dass die Voroinoizelle die Dreiecke der lokalen Parametrisierung überragt. Für das entsprechende Teilstück der Voronoizelle steht die Dichtefunktion nicht zur Verfügung, so dass als die Dichte dieses Teilstücks die durchschnittliche Dichte der restlichen Voronoizelle angenommen wird. Dieser Fall tritt nach einigen Iterationen mit steigender Tendenz zu runderen Voronoizellen nur selten auf.

Es bleibt der Fall zu berücksichtigen, dass eine Kante des Gitters die lokale Delaunay-Eigenschaft in 3D nicht erfüllt, aber nicht gekippt werden kann, weil eines der Fehlermaße dadurch verletzt würde. Solche Kanten werden markiert und wie Merkmalskanten behandelt (siehe Abschnitt 4.6).

3.7 Ausschnittweise überlappende Parametrisierung

Jedes Mal, wenn mit einer der oben beschriebenen Strategien eine neue Position $\mathbf{p}_{neu}$ für einen Knoten von M in der Ebene bestimmt wurde (siehe Abschnitt 3.3.1), muss die entsprechende Position auf der durch PN-Dreiecke rekonstruierten Ausgangsfläche M_0 gefunden werden. Die Verbindung von M zu M_0 wird aufrechterhalten, indem die Position jedes Knotens von M durch ein Paar $(f, \mathbf{b})$ repräsentiert wird, wobei f ein Dreieck von M_0 ist und $\mathbf{b}$ baryzentrische Koordinaten bezüglich f sind.

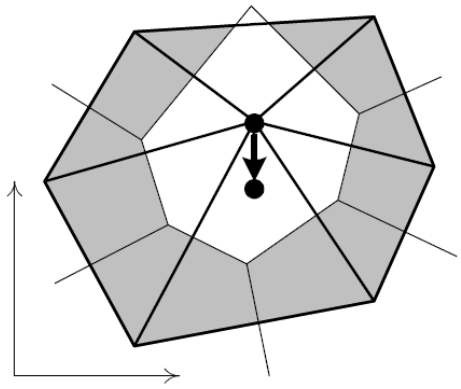


Abbildung 3.11: Die neue Position eines Knotens im Parameterraum ist der gewichtete Schwerpunkt seiner Voronoizelle. Quelle: [SAG03]

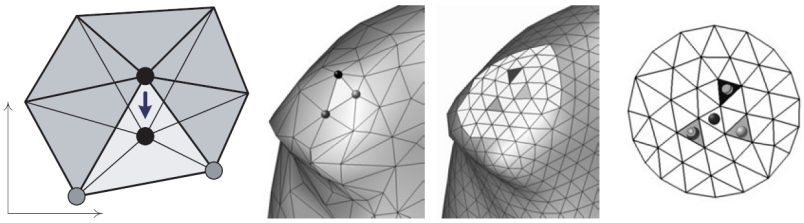
Es sei f_{2D} das Dreieck der Einbettung von M, in dem der Punkt $\mathbf{p}_{neu}$ liegt, und $\mathbf{b}_{2D}$ die baryzentrischen Koordinaten von $\mathbf{p}_{neu}$ bezüglich f_{2D}. Es seien weiterhin u_1, u_2, u_3 die Knoten des Dreiecks von M, das zu f_{2D} gehört. Deren Positionen auf M_0 sind durch $(f_1, \mathbf{b}_1), (f_2, \mathbf{b}_2), (f_3, \mathbf{b}_3)$ gegeben. Gesucht wird eine Position $(f_{neu}, \mathbf{b}_{neu})$, die $\mathbf{p}_{neu}$ entspricht. Dafür wird eine Parametrisierung eines Ausschnitts N von M_0 benötigt, der f_1, f_2 und f_3 enthält.

Es sei P eine solche Parametrisierung. Der Rand von P ist konvex, und die Dreiecke von P sind Einbettungen der Dreiecke von N. Zunächst werden aus $(f_1, \mathbf{b}_1), (f_2, \mathbf{b}_2)$ und $(f_3, \mathbf{b}_3)$ die Positionen $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ und $\mathbf{q}_3$ von u_1, u_2 und u_3 in P bestimmt. Der Punkt $\mathbf{q}_{neu}$ im Parameterraum, der $\mathbf{p}_{neu}$ entspricht, ist dann der Punkt mit baryzentrischen Koordinaten $\mathbf{b}_{2D}$ bezüglich $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ und $\mathbf{q}_3$. Weil P konvex ist, liegt $\mathbf{q}_{neu}$ in einem Dreieck von P. Diesem Dreieck entspricht ein Dreieck f_{neu} von M_0, das zusammen mit den dazugehörigen baryzentrischen Koordinaten $\mathbf{b}_{neu}$ bestimmt wird. Das Paar $(f_{neu}, \mathbf{p}_{neu})$ definiert eindeutig einen Punkt $\mathbf{x}_{neu}$ auf der durch PN-Dreiecke rekonstruierten Ausgangsfläche.

3.7.1 Konstruktion von Ausschnitten durch Breitensuche

Ein solcher Ausschnitt N wird konstruiert, indem auf M_0 nacheinander von f_1, f_2 und f_3 ausgehend mittels Breitensuche Dreiecke aufgesucht werden, bis die jeweils anderen beiden Dreiecke erreicht wurden. Jedes besuchte Dreieck wird zu N hinzugefügt, falls die Hinzufügung die Kreisscheibentopologie von N erhält. Ansonsten wird es in der Warteschlange der Breitensuche hinten angestellt.

In einem Nachverarbeitungsschritt wird N geglättet, indem sogenannte *Ohren* entfernt werden. Ohren sind Dreiecke, deren drei Ecken auf dem Rand von N liegen. Diese Operation rundet den Rand ab, was eine verzerrungsärmere Parametrisierung nach sich zieht, wenn er als reguläres Polygon eingebettet wird.



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 3.12: Die neue Position für einen Knoten wird in der lokalen Parametrisierung seines Sterns bestimmt (a). Das Dreieck der Fläche M, das die neue Position enthält (b). Die Ecken dieses Dreiecks liegen jede auf einem Dreieck des Eingabegitters M_0 (c). Es wird ein Ausschnitt von M_0 konstruiert und parametrisiert, der diese drei Dreiecke enthält. Dort wird die neue Knotenposition mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten aus der lokalen Parametrisierung (a) bestimmt. Quelle: [SG03]

Diese Art der Konstruktion ist nicht darauf optimiert, besonders kleine Ausschnitte mit den drei geforderten Dreiecken zu konstruieren. Ein größerer parametrisierter Ausschnitt hat den Vorteil, dass er für eine größere Anzahl weiterer Knotenbewegungen wieder verwendet werden kann. Die Strategie ist ein Kompromiss zwischen der berechnungsintensiveren Parametrisierung besonders großer Ausschnitte, die einer stärkeren parametrischen Verzerrung unterliegen, und besonders kleiner, die seltener verwendet werden können.

3.7.2 Verwaltung der Ausschnitte

Die Parametrisierung der Ausschnitte ist eine der berechnungsaufwendgigsten Operationen des gesamten Remeshing-Verfahrens und sollte deshalb so selten wie möglich ausgeführt werden müssen. Daher werden einmal erstellte Parametrisierungen P_i aufbewahrt. Wenn für die Bewegung eines Knotens eine Parametrisierung benötigt wird, die die Dreiecke f_1, f_2 und f_3 enthält, wird zunächst geprüft, ob eine solche bereits vorhanden ist. Dies wird implementiert, indem für jedes Dreieck f von M_0 die Menge der Indizes aller Parametrisierungen P_i im Speicher gehalten wird, die f enthalten. Enthält die Schnittmenge der f_1, f_2 und f_3 zugeordneten Mengen einen Index, so wird die entsprechende Parametrisierung verwendet. Ansonsten wird, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, eine neue konstruiert.

Im Laufe des Verfahrens kann es sein, dass einige Parametrisierungen nicht mehr benötigt werden. Insbesondere im Verlauf der Simplifzierung des Gitters werden die zu Anfang konstruierten Ausschnitte zu klein sein, um alle Ecken der dann auftretenden Dreiecke von M zu enthalten. Im Sinne einer effizienten Speicherverwaltung wird eine Parametrisierung aus dem Speicher gelöscht, wenn sie über eine festge-

legte Anzahl von Zeitschritten nicht mehr verwendet wurde. Ein Zeitschritt entspricht einem Zugriff auf den Parametrisierungsvorrat.

3.8 Regularisierung der Konnektivität

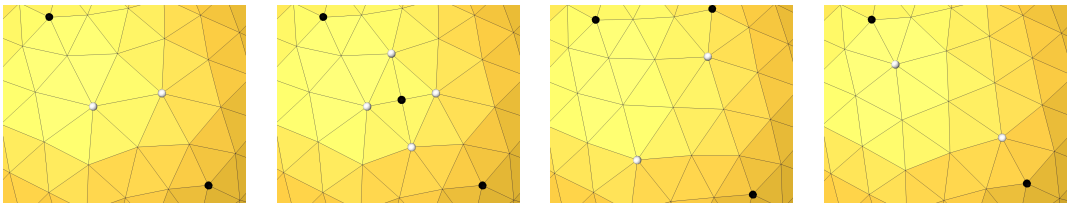
Das winkelbasierte Glätten ist umso erfolgreicher bei der Verbesserung der Dreiecksqualität, je regulärer das Gitter ist. Darum kommt vor der Glättungsphase ein Verfahren zur Anwendung, um das Gitter zu regularisieren. Es wird eine Folge von lokalen Operationen angewandt, die die Gitterkonnektivtät verändern, nämlich das Kippen, Kollabieren und Teilen von Kanten. Das Ziel ist, den Wert eines Energiefunktionals zu minimieren, das die Irregularität des Gitters misst:

$$R(M) = \sum_{v \in M} (d(v) - d_{opt}(v))^2 \tag{3.22}$$

Dabei ist $d(v)$ die Valenz des Knotens v und d_{opt} seine *optimale* Valenz. Für mannigfaltige Knoten ist $d_{opt} = 6$. In [SG03] wird eine Strategie vorgestellt, um durch eine Folge von lokalen Operationen die Regularität des Gitters sukzessive zu erhöhen.

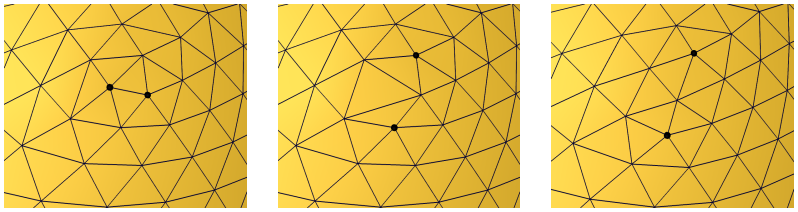
Oft kann $R(M)$ durch einfaches Kippen einer Kante gesenkt werden. Solche Kanten heißen deshalb *einfache Kanten*. Bereits das Kippen aller einfachen Kanten sorgt für einige Verbesserung der Regularität, lässt aber noch viele irreguläre Knoten übrig, denn $R(M)$ hat viele lokale Minima bezüglich des Kantenkippens. Die Frage ist nun, wie sich $R(M)$ aus so einem lokalen Minimum heraus weiter reduzieren lässt.

Bei der Lösung dieses Problems im Zusammenhang mit dem restlichen Remeshing-Verfahren ist die Einschränkung zu beachten, dass an dem Punkt des Prozesses, an dem die Regularisierung zum Einsatz



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 3.13: Eine lange Kante (a). Nach ihrer Teilung (b) entstehen zwei Paare von einfachen Kanten, die auf zwei Arten (c, d) aufgelöst werden können. Die weißen Knoten werden dabei auseinandergeführt. Im abgebildeten Fall entstehen dadurch ein (c) bzw. zwei (d) Treibkanten.



(a) (b) (c)

Abbildung 3.14: Eine kurze Kante (a). Die kurze Kante wurde kontrahiert (b). Derselbe Gitterausschnitt nach winkelbasierter Glättung (c).

kommt, die Anzahl und Verteilung der Knoten nur noch möglichst wenig verändert werden soll. Das Ziel ist deshalb, mit möglichst wenigen lokalen Kantenoperationen die Anzahl der irregulären Knoten zu senken. Werden zu viele Operationen durchgeführt, kann die krümmungsabhängige Knotenverteilung weitgehend verloren gehen.

Ein irregulärer Knoten v heißt *schwarz*, wenn $d(v) < d_{opt}(v)$, und *weiß*, wenn $d(v) > d_{opt}(v)$. Reguläre Knoten sind nicht markiert. Es wird die Situation betrachtet, dass keine einfachen Kanten mehr zu kippen sind, d.h. $R(M)$ hat bezüglich des Kantenkippens ein lokales Minimum angenommen. Die Grundidee ist, die schwarzen und weißen Markierungen ein Stück über das Gitter zu bewegen, damit dadurch einfache Kanten entstehen. Wenn diese gekippt werden, ergibt dies ein besseres lokales Minimum von $R(M)$.

Für die Formulierung einer Strategie werden nun neben den einfachen Kanten drei weitere Typen von Kanten ausgezeichnet.

Lange Kanten: Eine Kante heißt *lang*, wenn sie zwei weiße Knoten verbindet. Nach dieser Definition ist „lang“ ein rein auf die Konnektivität bezogener Begriff. Er ist dadurch motiviert, dass in einem winkelbasiert geglätteten Netz eine lange Kante tatsächlich (geometrisch) länger ist als die Kanten im umliegenden Gitter. Daher sollen solche Kanten geteilt werden. Die Teilung einer langen Kante erzeugt zunächst einen neuen schwarzen Knoten mit Valenz vier und macht die beiden Knoten, an die der neue Knoten angeschlossen wird, weiß. Dadurch werden jedoch vier Kanten einfach, nämlich die Kanten von $Link(u)$. Wenn von diesen vieren eines der beiden Paare einander gegenüberliegender Kanten gemeinsam gekippt wird, sind sowohl der neu eingefügte Knoten wie auch die beiden ursprünglich weißen Knoten unmarkiert, und die beiden weißen Knoten sind an zwei gegenüberliegenden Ecken des Vierecks um die ursprünglich lange Kante wieder aufgetaucht. Die Regularität hat sich damit zunächst nicht geändert (siehe Abbildung 3.13).

Kurze Kanten: Eine Kante heißt *kurz*, wenn sie zwei schwarze Knoten verbindet. Kurze Kanten sind nach winkelbasiertem Glätten kürzer als Kanten in ihrer Nähe. Diese Kanten werden kontrahiert. Nach der Kontraktion einer kurzen Kante sind die beiden schwarzen Knoten verschwunden, und der neue

Knoten ist unmarkiert. Die beiden der kurzen Kante gegenüberliegenden Knoten verlieren je eine Kante und werden dadurch schwarz. Auch hier ändert sich an $R(M)$ zunächst nichts, aber der Effekt ist, dass die beiden schwarzen Knoten nicht mehr benachbart sind.

Treibkanten: Eine Kante heißt *Treibkante*, wenn sie einen schwarzen und einen weißen Knoten verbindet. Jede Treibkante e hat folgende Eigenschaft: Es sei f eines der beiden zu e inzidenten Dreiecke und e' die Kante von f, die inzident zum weißen Knoten ist. Wenn e' gekippt wird, ist e anschließend keine Treibkante mehr. Dafür erscheint die Treibkante wieder, und zwar als die zu e gegenüberliegende Seite des Vierecks, dessen Diagonale e' war. Man kann eine Treibkante also bewegen. Wenn man dies wiederholt und in die gleiche Richtung über einem ansonsten regulären Gitterbereich tut, kann man die Kante über das Gitter treiben. Eine schwarze und eine weiße Markierung können also gemeinsam in eine von zwei Richtungen bewegt werden.

Nun wird folgende Strategie verfolgt: Einfache Kanten, kurze Kanten, lange Kanten und Treibkanten werden in einer Prioritätswarteschlange organisiert. Mit höchster Priorität werden einfache Kanten gekippt. Mit mittlerer Priorität werden kurze Kanten kontrahiert und lange Kanten geteilt. Mit niedrigster Priorität wird eine Treibkanten getrieben, bis dadurch eine lange, kurze oder einfache Kante entsteht. Nach jeder Operation wird die Warteschlange aktualisiert und eine Iteration der winkelbasierten Glättung (siehe Abschnitt 3.5) auf den von der Operation betroffenen Knoten und ihren Nachbarn ausgeführt, um eventuell weitere Operationen geometrisch zulässig zu machen.

So wird idealerweise verfahren, bis keine Treibkanten mehr übrig sind. Das Ergebnis ist ein Gitter, in dem nur wenige irreguläre Knoten übrig bleiben. Diese sind isoliert, haben also keinen irregulären Nachbarn.

Auch in diesem Teil des Verfahrens wird darauf geachtet, dass eine Operation nur ausgeführt wird, wenn die Fehlermaße (siehe Abschnitt 3.2) nicht verletzt werden. Jede gewählte Kantenoperation kann also scheitern, so dass eine lange, kurze oder auch einfache Kanten stehen gelassen werden muss.

Treibkanten müssen nicht auf andere irreguläre Knoten treffen. Es kann passieren, dass das Treiben einer Treibkante nicht terminiert, wenn sie zum Beispiel endlos um eine zylinderförmige Struktur wandert. In der Implementierung wird die Anzahl der Schritte, die eine Treibkante maximal bewegt wird, daher auf einen kleinen Wert (etwa 10) beschränkt, auch um die Aufrechterhaltung der an die Dichtefunktion angepassten Knotenverteilung sicherzustellen.

In der vorangegangenen Betrachtung der Effekte der unterschiedlichen Operationen wurde von zwei vereinfachenden Annahmen ausgegangen. Erstens, dass die beiden weißen bzw. schwarzen Knoten genau Valenz 7 bzw. 5 haben. Zweitens, dass die umliegenden Knoten unmarkiert sind. Das muss nicht so sein, aber in der Praxis ändert dies nichts am Erfolg dieser Heuristik. Theoretisch besteht die Möglichkeit,

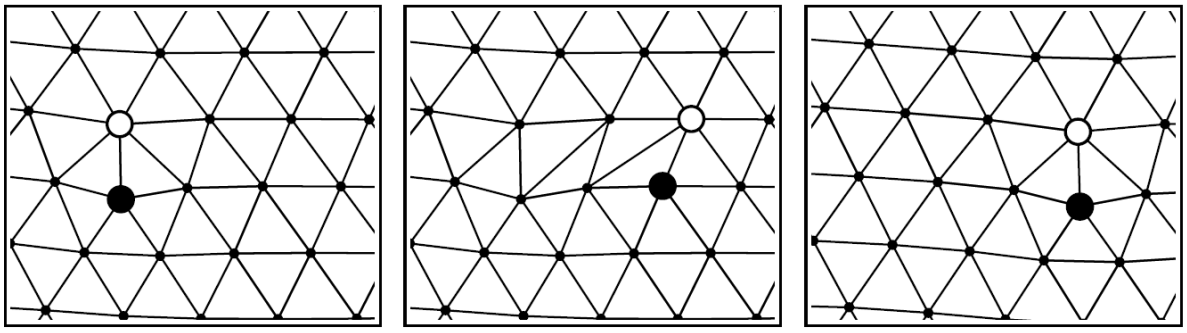


Abbildung 3.15: Eine Treibkante (*links*). Die Treibkante, nachdem sie zwei Schritte nach rechts bewegt wurde (*Mitte*). Der Gitterbereich nach der winkelbasierten Glättung (*rechts*). Quelle: [SG03]

dass das Teilen einer langen Kante oder die Kontraktion einer kurzen Kante mit anschließendem Kippen aller einfachen Kanten die Irregularität erhöht. Zum Beispiel könnten alle vier Knoten, die für die Aufnahme der weißen Markierungen bei der Teilung von langen Kanten in Frage kommen (siehe Abbildung 3.13), bereits weiß sein. Solche Situationen könnten durch vollständige Fallunterscheidung ausgeschlossen werden. In der Praxis sind die irregulären Knoten nach dem Kippen aller einfachen Kanten aber so verteilt, dass diese Möglichkeit kein Problem darstellt.

In der Originalarbeit [SG03] wird eine Methode in Aussicht gestellt, durch das Bewegen eines einzelnen irregulärer Knoten die Regularität weiter zu verbessern. Durch das Kippen einer benachbarten Kante wird der entsprechende Knoten regulär. Die Irregularität taucht am Ende einer benachbarten Kante wieder auf, dabei wird zusätzlich eine Treibkante abgespalten. Dies ist eine spekulative Operation, denn sie erhöht zunächst die Irregularität und ergibt daher nur Sinn, wenn sowohl der bewegte Knoten als auch die abgespaltenen Treibkanten auf geeignete Ziele treffen. Solche Operationen zur weiteren Erhöhung der Regularität zu nutzen setzt eine weitergehende Analyse der Konnektivität voraus. Es ist nicht klar, ob sich das lohnt, denn durch die hohe Zahl von Gitteroperationen kann sich die Anpassung des Samplings an die Dichtefunktion in zu großem Ausmaß verschlechtern.

4 Remeshing mit Merkmalslinien und Nähten

In den biomedizinischen Anwendungen, über die diese Arbeit motiviert ist, werden nicht-mannigfaltige Dreiecksgitter benötigt. Sie bestehen aus Flächenstücken, die eine Aufteilung des Raums in unterschiedliche Gewebetypen modellieren. In diesen Gittern gibt es Kantenzüge, in denen sich mehr als zwei Flächenstücke berühren, die also an mehr als zwei unterschiedliche Gewebetypen angrenzen. Diese Kantenzüge werden als *Nähte* bezeichnet und bestehen aus Kanten, die zu mehr als zwei Dreiecken gehören.

Merkmalslinien sind Kantenzüge auf dem Eingabegitter, die durch das Remeshing erhalten werden sollen. Oft modellieren sie scharfe Kanten der Originalfläche, aber es gibt auch Anwendungen, in denen es wünschenswert ist, weitere vom Benutzer gegebene Kanten oder Knoten zu erhalten, zum Beispiel wenn das Gitter nach dem Remeshing entlang eines Kantenzuges geschnitten werden soll (siehe Abbildung 4.4).

Im Folgenden wird beschrieben, wie die in Kapitel 3 vorgestellten Remeshing-Verfahren erweitert wurden, um

1. Nähte in das Remeshing einzubeziehen und
2. Merkmalslinien auf dem Eingabegitter zu erhalten.

Merkmalslinien werden erhalten, indem die in Abschnitt 3.3 eingeführten Remeshing-Operationen darauf in eingeschränkter Weise angewandt werden. Auf Nähten stehen nicht alle Remeshing-Operationen zur Verfügung: Das Kantenkippen ist für nicht-mannigfaltige Kanten nicht definiert, und bei der Kontraktion nicht-mannigfaltiger Kanten muss auf die Erhaltung der Topologie des Gitters geachtet werden. Das Bewegen von Knoten ist in den Verfahren, auf denen diese Arbeit aufbaut, nur für mannigfaltige Knoten erklärt.

Im Rahmen dieser Arbeit hat sich herausgestellt, dass die erforderlichen Einschränkungen für Merkmalslinien gerade den Satz von Operationen ergeben, mit dem das Remeshing auf Nähte erweitert werden kann.

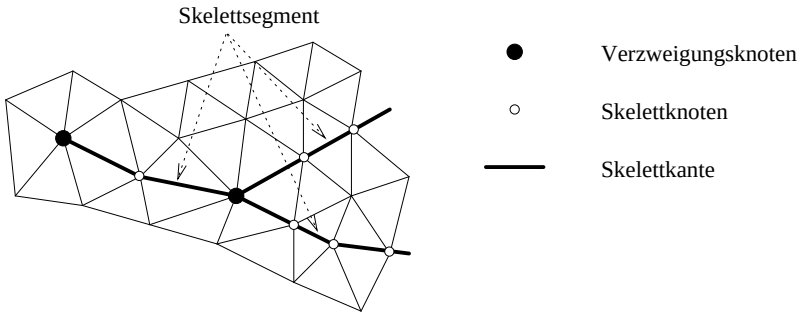


Abbildung 4.1: Die Elemente des Merkmalsskeletts.

4.1 Merkmalsskelette

Ähnlich wie in [VRS03] werden *Merkmalsskelette* verwendet, die mit den Gittern M_0 und M verbunden sind. Ein Merkmalsskelett ist zunächst eine Menge von Kanten und Knoten von M_0. Es setzt sich zusammen aus allen nicht-mannigfaltigen Kanten und Knoten, allen vom Benutzer definierten oder automatisch ausgezeichneten [HPW05] Merkmalskanten sowie einzelnen Knoten, die durch das Remeshing erhalten werden sollen.

Die Elemente des Merkmalsskeletts lassen sich wie folgt einteilen:

- **Skelettkanten** sind nicht-mannigfaltige Kanten sowie Merkmalskanten.
- **Skelettknoten** sind Knoten, die zu genau zwei Skelettkanten gehören und deren Stern homöomorph zu einem Buch mit k Seiten ist (siehe Abschnitt 2.1).
- **Verzweigungsknoten** sind Knoten, die zu genau einer oder mehr als zwei Skelettkanten gehören, außerdem vom Benutzer explizit fixierte Knoten und die nicht-mannigfaltigen Knoten, die keine Skelettknoten sind.

Ein *Skelettsegment* ist ein Kantenzug des Skeletts, dessen Endpunkte Verzweigungsknoten sind und auf dem keine weiteren Verzweigungsknoten liegen. Unter der Vereinfachung, dass jeder geschlossene Kantenzug aus Skelettkanten mindestens einen Verzweigungsknoten enthält (es kann ein beliebiger Knoten ausgezeichnet werden), gehören damit jede Skelettkante und jeder Skelettknoten zu genau einem Skelettsegment.

Jede Kante eines Skelettsegments besitzt die gleiche Anzahl k von angrenzenden Dreiecken. Ein Skelettsegment wird als Naht von k Flächenstücken betrachtet, die als die *Seiten* p des Skelettsegments bezeichnet werden. Mit $k = 2$ schließt dies Merkmalslinien, mit $k = 1$ die Randkurvenabschnitte des Gitters ein. Entlang eines Skelettsegments können Knoten verschoben und Kanten kontrahiert werden, ein Knoten darf sein Skelettsegment jedoch nicht verlassen.

Dieses mit M_0 verbundene Merkmalsskelett bleibt während des Remeshing-Verfahrens konstant. Weil M mit M_0 initialisiert wird, steht das Merkmalsskelett auch auf M zur Verfügung und ist dort veränderlich. Während des Remeshings werden die Skelettknoten nur entlang von Skelettkanten bewegt. Verzweigungsknoten werden nicht bewegt. Operationen an der Konnektivität (siehe Abschnitt 4.3) werden nur durchgeführt, wenn dabei die Struktur des Merkmalsskeletts erhalten bleibt.

4.2 Bewegen von Skelettknoten

Es sei $v \in V(M)$ ein Skelettknoten, der verschoben werden soll. Er kann nur auf den Skelettkanten von M_0 bewegt werden. Seine Position wird daher durch ein Paar $(e, \mathbf{b})$ repräsentiert, wobei $\mathbf{b}$ baryzentrische Koordinaten bezüglich der Skelettkante $e \in E(M_0)$ sind. Um v zu verschieben und dabei die Verbindung zu M_0 aufrechtzuerhalten, wird seine neue Position in einer *Bogenlängenparametrisierung* des Skelettsegments von M_0 bestimmt, zu dem e gehört:

Den Knoten $v_1, \ldots, v_k \in V(M_0)$ dieses Skelettsegments mit Kanten $e_j = (v_j, v_{j+1})$ wird die Parameterfolge $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$ mit

$$p_1 = 0 \tag{4.1}$$

$$p_j = \sum_{i=2}^{j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|, \qquad j \in \{2 \ldots k\} \tag{4.2}$$

zugeordnet. Die Kanten (v_j, v_{j+1}) werden in die Intervalle $[p_j, p_{j+1}]$ eingebettet.

Es seien $v_a, v_b \in V(M)$ die beiden Nachbarknoten von v auf dem Skelettsegment. Die Positionen p, p_a und p_b der Knoten v, v_a und v_b im Parameterraum ergeben sich durch ihre Verbindung zu M_0. Nun wird eine neue Position p_{neu} für v auf dem Intervall $[p_a, p_b]$ bestimmt. Die entsprechende Position auf M_0 ergibt sich, indem das Intervall $[p_j, p_{j+1}]$ und damit die Kante von M_0 bestimmt wird, auf dem p_{neu} liegt (siehe Abbildung 4.2).

Das flächenbasierte Remeshing und die Lloyd-Relaxierung (siehe Kapitel 3) können damit eindimensional auf den Skelettkomponenten durchgeführt werden. Die Werte der Dichtefunktion Ψ stehen an den Punkten $p_1, \ldots, p_k$ zur Verfügung und werden dazwischen linear interpoliert. Beim flächenbasierten Remeshing wird p_{neu} so gewählt, dass $\|p_{neu} - p_a\| / \|p_{neu} - p_b\| = \Psi(p_a)/\Psi(p_b)$. Bei der Lloyd-Relaxierung ist p_{neu} der Schwerpunkt bezüglich Ψ^{-1} der 1D-Voronoizelle von p. Experimente mit einer 1D-Einschränkung der winkelbasierten Glättung haben keinen Vorteil gegenüber der einfacheren Lloyd-Relaxierung gezeigt.

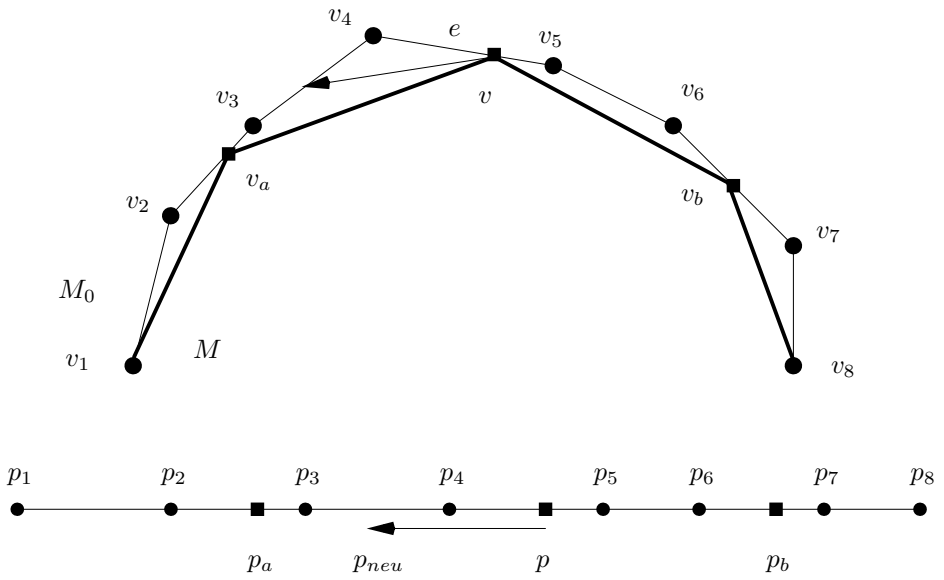


Abbildung 4.2: Verschiebung eines Skelettknotens. Die neue Position wird in einer 1D-Parametrisierung berechnet und die entsprechenden Position auf einer Skelettkante des Ausgangsgitters M_0 bestimmt.

4.3 Operationen an der Konnektivität

Zur Erhaltung der Struktur des Merkmalsskeletts werden das Kontrahieren, Teilen und Kippen von Kanten folgendermaßen eingeschränkt:

1. Verzweigungsknoten werden nicht durch Kantenkontraktionen entfernt.
2. Skelettknoten werden nur durch Kontraktion einer ihrer beiden Skelettkanten entfernt (Knoten, die nicht zum Skelett gehören, können jedoch auf einen Skelettknoten kontrahiert werden). Im Sonderfall, dass ein Skelettsegment nur aus den drei Kanten desselben Dreiecks besteht, dürfen diese Kanten nicht kontrahiert werden (dies würde einen Kreis aus dem Skelett entfernen und einen neuen Verzweigungsknoten erzeugen).
3. Skelettkanten werden nicht gekippt.
4. Wenn eine Skelettkante e geteilt wird, wird der eingefügte Knoten ein Skelettknoten, und die beiden aus e hervorgegangenen Kanten werden Skelettkanten des Skelettsegments, zu dem e gehört.

Wie bei mannigfaltigen Kanten darf eine Skelettkante $e = (v, w)$ zudem nicht kontrahiert werden, wenn v und w einen gemeinsamen Nachbarknoten haben, der nicht zu einem der Dreiecke von $Stern(e)$ gehört.

Eine darüber hinausgehende formale Betrachtung der topologischen Zulässigkeit von Kantenkontraktionen findet sich in [DEGN98].

4.4 Regularität von Skelettknoten

Es sei $\widehat{d}_p(v)$ die Anzahl der Nachbarknoten des Skelettknotens v auf der Seite p, ohne seine beiden Nachbarn auf dem Skelett. Das Skelettsegment wird als Approximation einer glatten Kurve betrachtet, so dass an jedem Skelettknoten die beiden Skelettkanten miteinander einen Winkel nahe bei 180 Grad bilden. In einem Gitter mit Dreieckswinkeln nahe bei 60 Grad sollte v also auf jeder Seite noch zwei weitere Kanten haben. Der optimale Wert für $\widehat{d}_p(v)$ ist damit 2 für jede Seite p. Hat das Skelettsegment an v dagegen einen Knick von 60 Grad oder mehr, sollte v als Verzweigungsknoten ausgezeichnet werden. Für Verzweigungsknoten wird $\widehat{d}_p$ nicht definiert.

Für die Klassifizierung von mannigfaltigen Kanten in lange Kanten, kurze Kanten und Treibkanten (siehe Abschnitt 3.8) wird die Valenz d_p eines Skelettknotens v bezüglich der Seite p bestimmt, in der die zu klassifizierende Kante liegt. Der Begriff „Valenz“ wird hier etwas gedehnt, indem definiert wird:

$$d_p(v) := 2\widehat{d}_p(v) + 2 \tag{4.3}$$

Damit ist auch für Skelettknoten das Optimum $d_{p_{opt}}(v) = 6$, und der Effekt ist, dass ein Knoten v mit z.B. $\widehat{d}_p(v) = 1$ vom Irregularitätsfunktional so stark bestraft wird wie ein mannigfaltiger Knoten w mit $d(w) = 4$. Das ist wünschenswert, denn beide Situationen entsprechen einander hinsichtlich der Auswirkung auf die besten erreichbaren Winkelverhältnisse um v bzw. w.

4.5 Kontrolle der Knotendichte auf dem Skelett

Um eine hohe Dreiecksqualität in Gitterbereichen in der Nähe des Merkmalsskeletts zu erreichen, muss die Knotendichte auf dem Skelett der des umliegenden Gitters entsprechen. Mit den in Kapitel 3 besprochenen Verfahren wird die Verteilung der Knoten über dem Gitter ausschließlich durch die Bewegung von Knoten angepasst. Da Skelettknoten sich aber nur auf dem Skelett bewegen können, wäre kein Ausgleich zwischen dem Skelett und dem umliegenden Gitter möglich. Die Anzahl der Knoten auf dem Skelett bliebe konstant, während sich die umliegenden Knoten zum Skelett hin oder davon weg bewegen können.

Die Knotenverteilung auf dem Skelett kann also nicht allein durch das Bewegen von Knoten erfolgen. Vielmehr müssen Skelettknoten entfernt oder eingefügt werden, um die Knotendichte des Skeletts an das umliegende Gitter anzupassen.

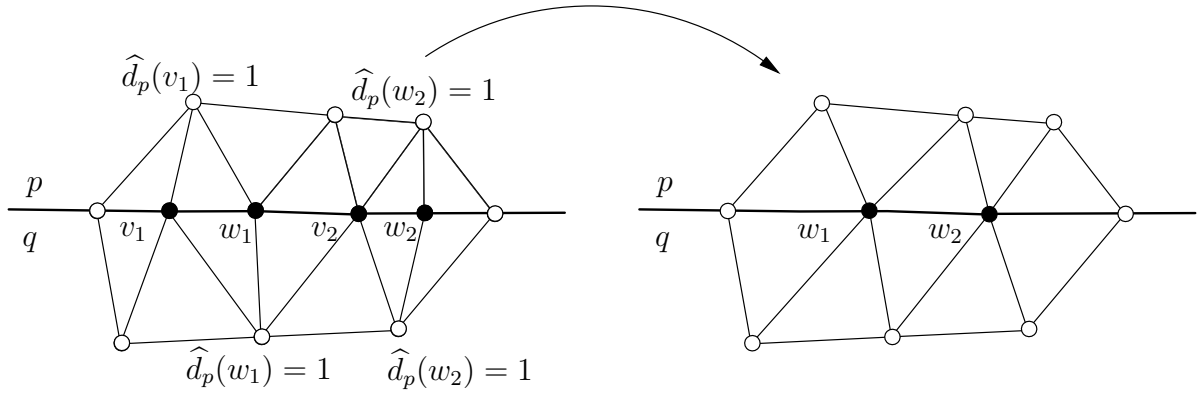


Abbildung 4.3: Ein Skelettsegment mit Seiten p und q. Die Kanten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) werden nach Kriterium 4.4 kontrahiert. Rechts der Zustand nach den Kontraktionen und Relaxierung der Skelettknoten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Problem gelöst, indem nach einem lokalen, allein auf der Konnektivität beruhenden Kriterium Skelettkanten kontrahiert oder geteilt werden. Die Methode ist motiviert durch das in Abschnitt 3.8 vorgestellte Regularisierungsverfahren. Die Idee ist, dafür zu sorgen, dass möglichst jeder Skelettknoten genau zwei Nachbarknoten auf jeder Seite des Skelettsegments hat.

Mit folgenden Kriterien wird nun die Anzahl der Knoten auf dem Skelett angepasst:

Eine Skelettkante $e = (v, w)$ soll kontrahiert werden, wenn für jede Seite p

$$(\widehat{d}_p(v) = 1) \wedge (\widehat{d}_p(w) \leq 2) \vee (\widehat{d}_p(w) = 1) \wedge (\widehat{d}_p(v) \leq 2) \tag{4.4}$$

Eine Skelettkante $e = (v, w)$ soll geteilt werden, wenn für jede Seite p

$$(\widehat{d}_p(v) >= 3) \wedge (\widehat{d}_p(w) >= 2) \vee (\widehat{d}_p(w) >= 3) \wedge (\widehat{d}_p(v) >= 2) \tag{4.5}$$

Nach jeder Operation werden alle umliegenden Kanten geprüft, ob sie gekippt werden können, um die Regularität zu verbessern. Neu eingefügte Knoten übernehmen dabei einen überschüssigen Nachbarknoten eines ihrer Skelettnachbarn, während durch die Kontraktionen die Fächer aus Knoten mit nur einer Kante pro Seite abgebaut werden, die bei zu hoher Knotendichte auf dem Skelett entstehen (siehe Abbildung 4.4).

Um eine Oszillation zwischen Kantenkontraktionen und Teilungen zu vermeiden, sind die Kriterien konservativ ausgelegt. Eine Kante wird nur kontrahiert oder geteilt, wenn damit für jede Seite des Skelettsegments eine Verbesserung erzielt wird.

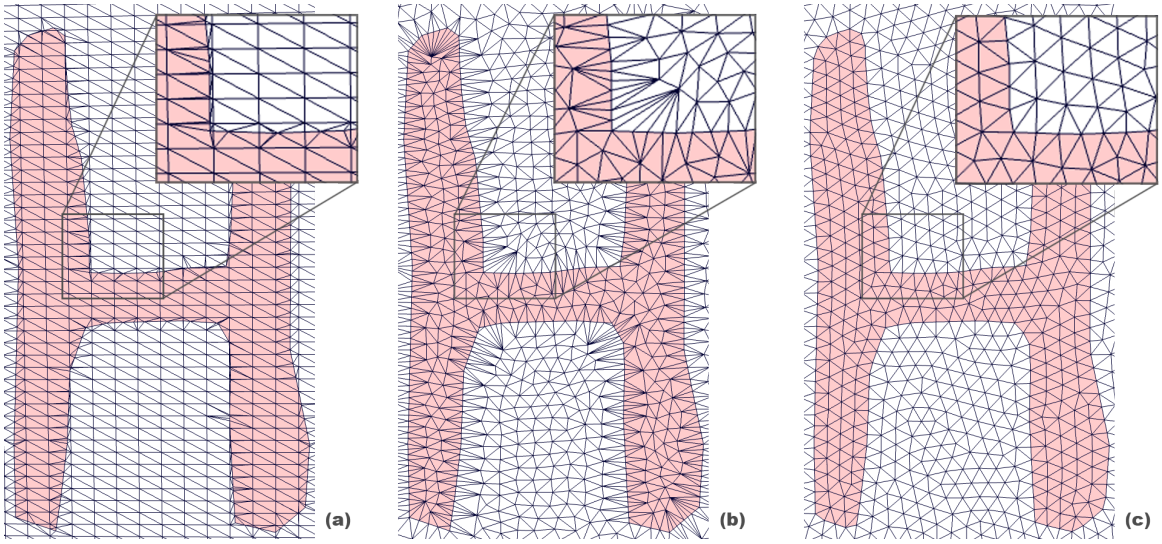


Abbildung 4.4: Anpassung der Knotendichte auf dem Merkmalsskelett. Das Originalgitter (a). Nach Relaxierung der Skelettknoten (b). Nach Reduzierung der Knotenzahl auf dem Skelett gemäß dem Kontraktionskriterium (c).

In der im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Implementierung wird diese Methode in jeder Phase des Remeshing-Verfahrens angewendet, alternierend mit den jeweiligen Relaxierungs- und Regularisierungsoperationen auf dem übrigen Gitter. Die Knotendichte des umliegenden Gitters bestimmt dynamisch, wie dicht das Skelett abgetastet sein soll. In den erzielten Ergebnissen weichen die Knotendichte auf dem Skelett und die Qualität der angrenzenden Dreiecke kaum vom umliegenden Gitter ab.

Diese Methode funktioniert nur dann optimal, wenn die Knotendichte in der Nähe des Skeletts auf jeder Seite annähernd gleich ist. Treffen an einem Skelettsegment dagegen zwei Seiten mit stark unterschiedlicher Knotendichte aufeinander, könnte selbst das beste Verfahren höchstens den Kompromiss erzielen, dass die Knotendichte des Skelettsegments irgendwo zwischen den Knotendichten der einzelnen Seiten liegt. Daher wird die Dichtefunktion im Vorverarbeitungsschritt (siehe Abschnitt 3.1) auch über das Skelett hinweg geglättet, um zu begünstigen, dass sich auf allen Seiten die gleiche Knotendichte einstellt. Eine Schwierigkeit des Verfahrens ist, dass die absolute Knotendichte auf jeder Seite von der Anzahl der auf dem entsprechenden Flächenstück zur Verfügung stehenden Knoten abhängt und daher auch durch das flächenbasierte Remeshing nicht immer angeglichen werden kann. Abhilfe könnte schaffen, mit weiteren Kriterien ein Dichtegefälle zwischen zwei Seiten eines Skelettsegments zu erkennen, um in diesem Fall einen Knoten von einer Seite zur anderen zu transportieren. Das Skelett würde damit *durchlässig* für einen Ausgleich der Knotendichte.

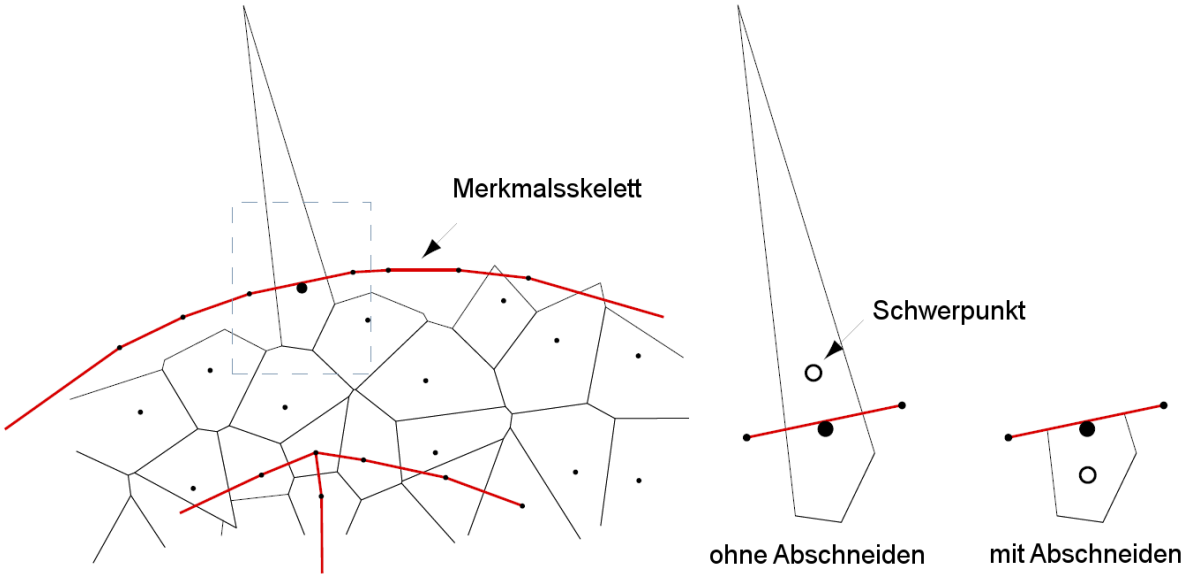


Abbildung 4.5: Ein Voronoidiagramm im Parameterraum. Den Schwerpunkt einer Voronoizelle zu berechnen, ohne sie am Merkmalsskelett abzuschneiden, macht die Knotenverteilung inkonsistent zur Tatsache, dass Skelettkanten nicht gekippt werden können. Der Effekt des Abschneidens ist, dass der Bereich jenseits des Merkmalsskeletts aus der Berechnung des Schwerpunkts herausgenommen wird und Knoten vom Merkmalsskelett abgestoßen werden. Quelle: [SAG03]

4.6 Abschneiden von Voronoizellen

Für Knoten in der Nähe des Merkmalsskeletts muss die Lloyd-Relaxierung (siehe Abschnitt 3.6) leicht abgewandelt werden. Der Grund liegt darin, dass Skelettkanten nicht gekippt werden können. Sie begrenzen den Bereich, über dem die Knotenverteilung durch die Lloyd-Relaxierung ausgeglichen werden kann. Deswegen werden die Voronoizellen der zum Merkmalsskelett benachbarten Knoten vor der Berechnung ihres Schwerpunkts an den Skelettkanten *abgeschnitten*. Ohne diese Operation könnte ein Knoten immer näher an das Skelett heranrücken, wenn er durch die Relaxierung sozusagen den Platz zwischen zwei Skelettknoten einnehmen soll. Der Schwerpunkt kann sogar jenseits des Skeletts liegen. Durch das Abschneiden werden Knoten vom Skelett eher abgestoßen. Dies führt zu einer Knotenverteilung, die konsistent zur Einschränkung der Bewegungsfreiheit der Knoten durch das Merkmalsskelett ist [SAG03] (siehe Abbildung 4.5).

4.7 Skelettsegmente und PN-Dreiecke

An Skelettsegmenten treffen Flächenstücke aufeinander, von denen jedes für sich als Modell einer glatten Fläche betrachtet wird. Das Skelettsegment selbst wird als Modell einer glatten Kurve betrachtet, die einen gemeinsamen Abschnitt der Randkurven der dort zusammentreffenden Flächen bildet. Diese Flächen haben an ihrem Rand im Allgemeinen unterschiedliche Normalen, so dass ein Skelettknoten für jede Seite eine eigene Knotennormale hat. Das stellt ein Problem für die Rekonstruktion der glatten Originalfläche durch PN-Dreiecke dar (siehe Abschnitt 2.3): Die zur Skelettkante gehörenden Kantenkoeffizienten sind auf jeder Seite unterschiedlich und damit auch die Randkurvenabschnitte der entsprechenden PN-Dreiecke, die eigentlich aneinander anschließen sollten.

Daher basieren die Koeffizienten entlang von Skelettkanten nicht auf den Flächennormalen, sondern das Skelettsegment wird unabhängig von seinen Seiten als stückweise Beziér-Raumkurve rekonstruiert. Betrachte den Skelettknoten v_i und seinen Vorgänger v_{i-1} und Nachfolger v_{i+1} auf dem Skelettsegment. Sei $\mathbf{c}_i$ der Mittelpunkt des Umkreises $\mathbf{U}_i$ um $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i+1}$ und $\mathbf{x}_{i-1}$. Der Vektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{c}_i$ wird als Approximation der Hauptnormalen dieser Raumkurve im Punkt $\mathbf{x}_i$ betrachtet. Anstatt auf eine Tangentialebene (wie in der PN-Dreieck-Konstruktion) werden die beiden zu v_i gehörenden Beziér-Koeffizienten nun auf die Tangentialgerade an $\mathbf{U}_i$ in $\mathbf{x}_i$ projiziert, so dass die rekonstruierte Kurve in $\mathbf{x}_i$ mit $\mathbf{N}_i$ übereinstimmt.

Unter diesem Vorgehen werden auch Merkmalslinien mit scharfen Kanten nicht mehr eingeebnet, weil Merkmalsknoten nun getrennte Normalen für alle Seiten haben und die Koeffizienten der PN-Dreiecke nicht durch die andere Seite der Merkmalslinie beeinflusst werden. Trotzdem entstehen keine Unstetigkeiten an den Kanten benachbarter PN-Dreiecken, weil übereinstimmende Kanten wiederum mit denselben Koeffizienten konstruiert werden.

5 Implementierung und Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die in den Kapitel 3 und 4 vorgestellten Remeshing-Verfahren implementiert. Die Grundlage bildete das interaktive Visualisierungssystem Amira [SWH05], ein modulares Softwarepaket zur Visualisierung, Analyse und Rekonstruktion von 3D-Daten. Es stellt umfassende Funktionalität zur Gewinnung, Bearbeitung und Darstellung von Oberflächenmodellen zur Verfügung. Bei der Implementierung konnte auf eine Klasse für triangulierte Oberflächen zurückgegriffen werden sowie auf Funktionen zur Parametrisierung von Flächenausschnitten, dabei insbesondere zur Lösung der linearen Gleichungssysteme. Es stehen Werkzeuge zur Konstruktion und Manipulation von Pfaden auf Dreiecksgittern zur Verfügung sowie ein Modul zur Berechnung der diskreten Flächenkrümmungen.

5.1 Datenstruktur für Dreiecksnetze

Ein Dreiecksnetz wird in Amira als eine Liste von 3D-Punkten repräsentiert, zusammen mit einer Liste von Tripeln aus Punktindizes für die Dreiecke. Viele der während des Remeshing verwendeten Operationen benötigen andere Repräsentationen der Konnektivität, um effizient ausführbar zu sein. So muss etwa für die Konstruktion der Gitterausschnitte zur Parametrisierung eine Breitensuche über die Dreiecke durchgeführt werden. Um dies effizient durchführen zu können, müssen für jedes Dreieck die Indizes der benachbarten Dreiecke vorgehalten werden. Andere Operationen benötigen in ähnlicher Weise z.B. die inzidenten Dreiecke zu einem Knoten. Diese redundanten Indexinformationen werden einmalig erzeugt und dann nach jeder Operation lokal aktualisiert.

Alternative Datenstrukturen zur Repräsentation von Dreiecksnetzen [CKS98] unterliegen oft Einschränkungen hinsichtlich der Topologie des Gitters. Die einfache Dreiecksliste ist dagegen eine universelle Datenstruktur für jedes Dreiecksnetz.

5.2 Benutzerschnittstelle

Das Remeshing-Verfahren wurde als Programm-Modul in Amira integriert und steht damit als Operation auf Oberflächen-Datenobjekten zur Verfügung. Neben dem Ausgangsgitter können die zu erhaltenden

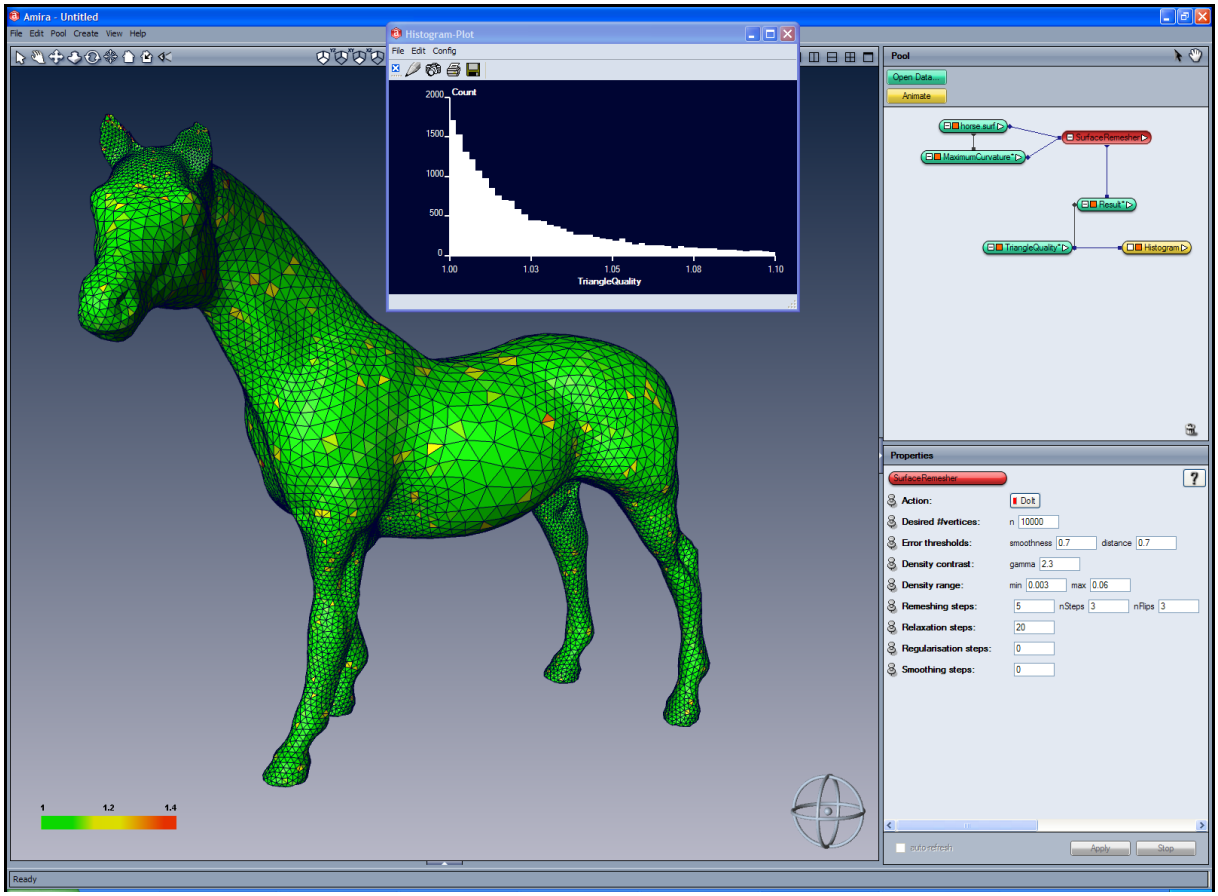


Abbildung 5.1: Das Remeshing-Modul im Visualisierungssystem Amira.

Merkmalslinien (siehe Kapitel 4) und die über den Knoten des Eingabegitters definierte Dichtefunktion Ψ als Datenobjekte eingegeben werden. Als Voreinstellung für Ψ wird κ_{max}^{-2} gewählt, so dass die Größe der Dreiecke lokal an die maximale Krümmung angepasst wird (siehe Abschnitt 3.1). Alternativ kann mit den in Amira zur Verfügung stehenden Werkzeugen zur Manipulation von Skalarfeldern auf Oberflächen eine eigene Dichtefunktion konstruiert werde.

Die wichtigsten Parameter sind die Knotenzahl des Zielgitters, die Anzahl der Tiefpassfilter-Iterationen $nFilter$ und der Kontrast γ für die Dichtefunktion. Durch γ wird bestimmt, wie stark die Knotendichte an die Werte von Ψ angepasst wird. Durch n_{filter} kann die Abstufung der Dreiecksgröße kontrolliert werden (siehe Abschnitt 3.1 und Abbildung 5.3).

Nach dem Remeshing kann der Benutzer die in Amira vorhandenen Funktionen zur visuellen Datenanalyse nutzen, um das Ergebnis zu beurteilen, zum Beispiel durch farbliche Abstufung der Dreiecke nach ihren Seitenverhältnissen (siehe Abbildung 5.1).

5.3 Qualitätsbewertung

Der Erfolg eines Remeshing-Verfahrens lässt sich durch zwei Eigenschaften des Ergebnisgitters charakterisieren: Die Dreiecksqualität und den Abstand zur Ausgangsfläche. Für beides sind Bewertungsmaße erforderlich.

Um den Abstand des Gitters M zur Ausgangsfläche M_0 zu bewerten, wird der Hausdorff-Abstand verwendet. Der einseitige Hausdorff-Abstand $H(A, B)$ ist der maximale minimale Abstand, das heißt, für zwei Flächen A und B ist

$$H(A, B) = \max_{p \in A} d(p, B) \tag{5.1}$$

$$= \max_{p \in A} \min_{q \in B} \|p - q\| \tag{5.2}$$

Im Allgemeinen ist $H(A, B) \neq H(B, A)$. Der beidseitige Hausdorff-Abstand ist der größere von beiden Werten:

$$H_S(A, B) = \max\{H(A, B), H(B, A)\} \tag{5.3}$$

Für die Auswertung der Ergebnisse (siehe Tabelle, S. 58)) wurde der beidseitige Hausdorff-Abstand zwischen Ausgangs- und Ergebnisgitter mit dem Programm Metro [CRS98] berechnet, das oft für die Auswertung von Remeshing-Verfahren verwendet wird.

Die Qualität eines Dreiecks wird oft durch sein Seitenverhältnis (*aspect ratio*) $Q = \frac{R}{2r}$ charakterisiert, wobei R und r die Radien des Um- bzw. Inkreises bezeichnen. Der kleinste (und beste) Wert für Q ist 1 und wird von gleichseitigen Dreiecken angenommen. Für schlecht geformte Dreiecke kann Q beliebig groß werden.

Die Konnektivität ist umso regulärer, je mehr Knoten die optimale Anzahl von Nachbarn haben. Für mannigfaltige Knoten ist dies 6, für Knoten auf Nähten mit p Seiten ist sie $2p + 2$, und für andere nicht-mannigfaltige Knoten ist sie nicht definiert. Um die Effektivität der Konnektivitätsregularisierung zu demonstrieren, wird der prozentuale Anteil der nicht-regulären Knoten vor und nach dem Remeshing bestimmt.

Modell	Knoten	Fehler (10^{-3})	Irreg. (%)	Q_{max}	$\overline{Q}$	Zeit (s)
Unterkiefer (Original)	5002	–	63,8	9,7	1,3	–
Unterkiefer (regulär)	5030	5,7	10,6	4,2	1,05	13
Bienengehirn (Original)	355384	–	36,7	–[a]	1,45	–[a]
Bienengehirn (regulär)	46843	3,3	11,8	–[a]	1,09	–[a]
Hüfte (Original)	46850	–	56,5	$1,8 * 10^7$	227	–
Hüfte (regulär)	20511	3,2	7,3	2,4	1,04	111
Hüfte (Lloyd, $nFilter = 10$)	10000	6,4	26,3	2,8	1,05	120
Hüfte (Lloyd, $nFilter = 50$)	10000	7,3	27,8	1,6	1,04	120
Zylinder (Original)	8374	–	59,1	5,2	1,6	–
Zylinder (Lloyd)	1000	4,9	34,2	2,1	1,1	12
Schiffsschraube (Original)	86505	–	0,002	28,0	2,25	–
Schiffsschraube (Lloyd)	19696	1,3	24,2	3,45	1,04	157
Schiffsschraube (Lloyd, ohne Merkmalslinie)	30703	2,2	40,5	3,72	1,12	181
Schiffsschraube (Lloyd, uniform)	1855	6,3	23,2	1,85	1,04	236

Tabelle 5.1: Statistische Auswertung der in dieser Arbeit abgebildeten Modelle: Anzahl der Knoten, Hausdorff-Abstand zur Ausgangsfläche normiert auf die Diagonalenlänge der *bounding box*, Anteil der irregulären Knoten, Seitenverhältnis des schlechtesten Dreiecks Q_{max}, mittleres Seitenverhältnis $\overline{Q}$ und Laufzeit.

[a] Das Originalmodell des Bienengehirns enthält einzelne degenerierte Dreiecke mit Selbstüberschneidungen als Artefakte aus der Gittererzeugung. Diese werden prinzipbedingt durch das Remeshing erhalten. Weil die extrem hohen Knotenzahl dieses Eingabegitters an die Grenzen der Implementierung der überlappenden Parametrisierung stößt, wurde es mit einem in Amira integrierten, parametrisierungsfreien Simplifizierungsverfahren [GH97] vereinfacht und das Remeshing auf das Simplifizierungsergebnis angewandt. Q_{max} und die Laufzeit werden daher für dieses Modell nicht erhoben. Der berechnete Fehler ist in Bezug auf das Originalgitter zu verstehen.

5.4 Exemplarische Ergebnisse

Abbildung 5.2 zeigt das mannigfaltige Modell einer menschlichen Hüfte (Genus 3). Es hat im Original 46.000 Knoten. Die Dezimierung auf 20.000 Knoten und die flächenbasierte, krümmungsabhängige Relaxierung der Samplingdichte haben auf einem Pentium 4 mit 3 GHz Taktfrequenz und 1GB Arbeitsspeicher 111 Sekunden in Anspruch genommen. Es wurden 10 Durchläufe des flächenbasierten Remeshings benötigt. Die Regularisierung der Konnektivität hat 5 Sekunden gedauert, und das abschließende winkelbasierte Glätten 16 Sekunden. Das Ergebnis ist ein Gitter mit hochgradig regulärer Konnektivität: Nur 7% der Knoten haben nicht die optimale Valenz. Die irregulären Knoten sind schwarz und weiß markiert. Abbildung 5.3 zeigt zwei weitere Remeshing-Ergebnisse desselben Modells mit jeweils 10.000 Knoten. Hier wurde die Lloyd-Relaxierung anstelle der Regularisierung verwendet. Gezeigt wird je ein Resultat, in dem die Dichtefunktion mit $nFilter = 10$ bzw. $nFilter = 50$ Iterationen des Tiefpassfilters geglättet wurde. Durch die Wahl von $nFilter$ kann eine kontinuierliche Auswahl zwischen präziserem krümmungsadaptivem Sampling und glatterer Abstufung der Dreiecksgröße getroffen werden.

Abbildung 5.4 zeigt ein uniformes Remeshing des nicht-mannigfaltigen *Zylinder*-Modells durch Lloyd-Relaxation. Das Original hat 8500 Knoten, für das Ergebnis wurden 1000 Knoten gewählt. Die Nahansicht illustriert, wie die Samplingraten der Nähte und ihrer Umgebung aufeinander abgestimmt sind, so dass auch die zu Nähten benachbarten Dreiecke weitgehend gut geformt sind.

Abbildung 5.5 zeigt das Modell einer Schiffsschraube mit etwa 85.000 Knoten. Es besteht aus anisotropen Elementen, die entlang den Rändern der Rotorblätter ausgerichtet sind. Wie viele Modelle aus dem CAD-Bereich ist es durch wiederholte Unterteilung eines grob aufgelösten Basisgitters entstanden, deswegen hat es eine besonders reguläre Konnektivität. Die Seitenverhältnisse der Dreiecke sind dagegen nicht optimal, und es ist viel zu hoch aufgelöst. Mit den in Amira zur Verfügung stehenden Werkzeugen wurden Merkmalslinien auf die Ränder der Rotorblätter gezeichnet. Das erste Remeshing-Ergebnis **(a)** hat 20.000 Knoten. Der Merkmalskantenzug forciert die Ausrichtung der Dreiecke an den Rand des Blattes, was für eine hinreichend genaue Auflösung des Randes mit Dreiecken guter Qualität, einen glatten optischen Eindruck und eine Reduzierung zufälliger Normalensprünge sorgt. Dies ist ein Erfolg der hier vorgestellten Erweiterung des Originalverfahrens: Bei rein isotroper Knotenplatzierung ohne Berücksichtigung von Merkmalslinien ist eine größere Anzahl von Elementen nötig, um den feinen Querschnitt des Rotorblattes hinreichend aufzulösen und um den Relaxierungsverfahren genügend Spielraum zur Verbesserung der Dreiecksqualität zu geben. Zum Vergleich wurde im Ergebnis **(b)** auf die Restriktion der Merkmalslinien verzichtet. Um die Knoten auf dem Rand in die Relaxierung einbeziehen zu können ohne die Fehlermaße (siehe Abschnitt 3.2) zu verletzen, wurde das Gitter dort lokal verfeinert. Das Ergebnis (ca. 30.000 Knoten) weist an den Rändern deutliche Normalensprünge zwischen benachbar-

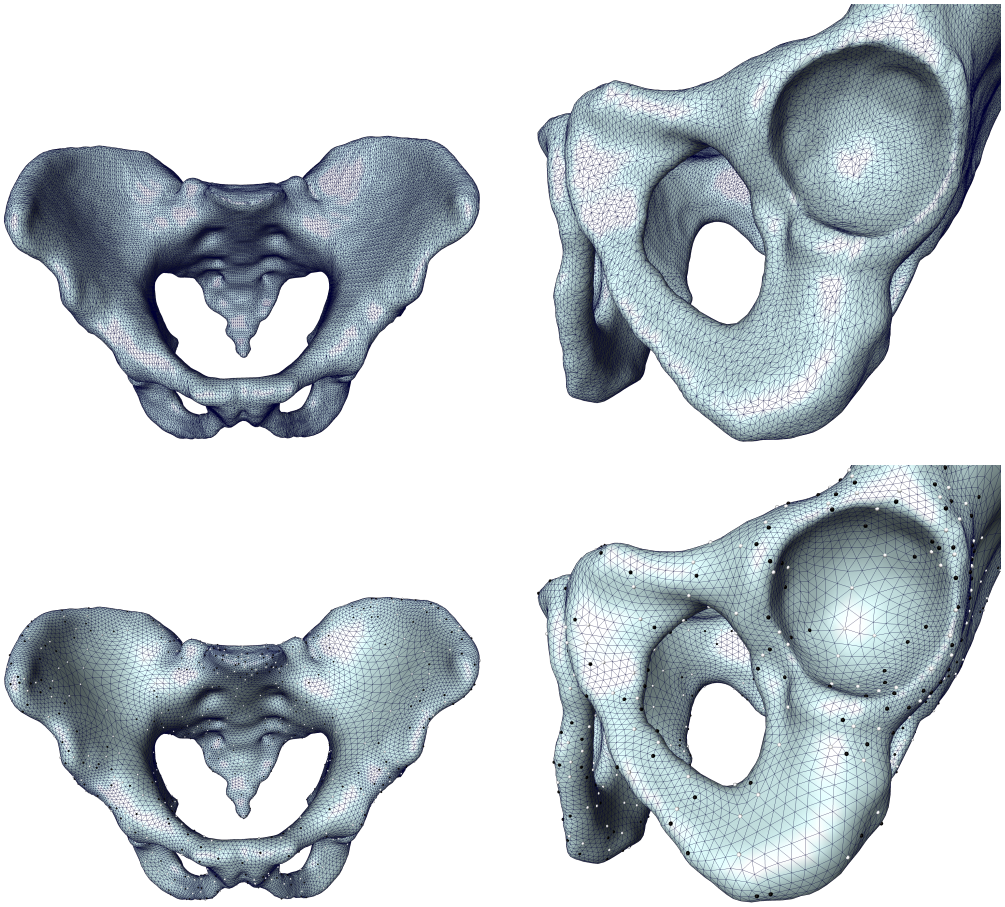


Abbildung 5.2: Das Original des Hüftmodells mit 46.000 Knoten (oben) und nach Dezimierung auf 20.000 Knoten, flächenbasiertem Remeshing und Regularisierung. Die verbliebenen Knoten mit irregulärer Valenz d sind markiert: weiß für $d > 6$, schwarz für $d < 6$.

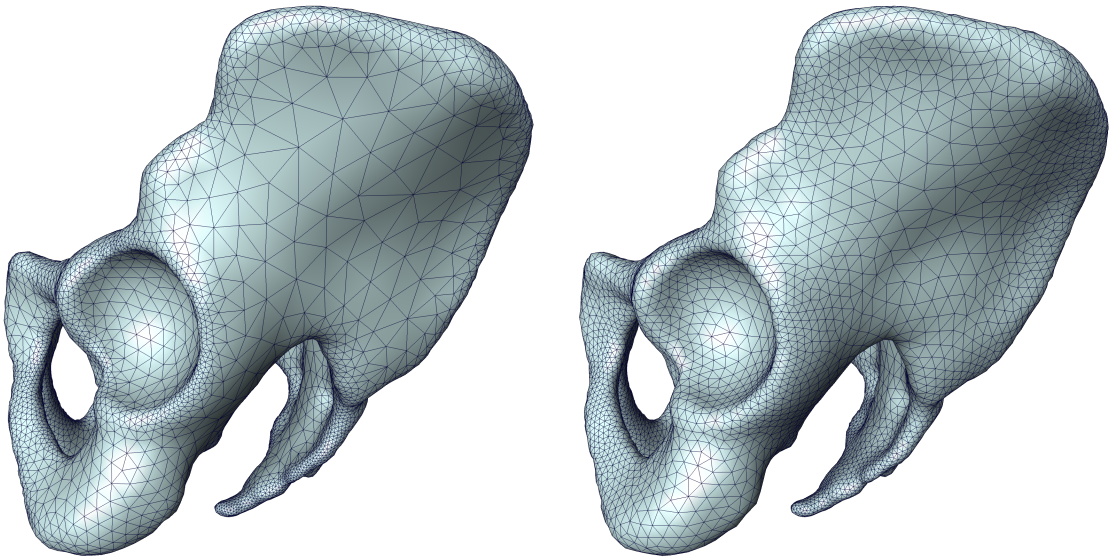


Abbildung 5.3: Krümmungsangepasstes Remeshing ($\gamma = 3$) durch Lloyd-Relaxierung. Die Abstufung des Gitters lässt sich über die Anzahl der Tiefpassfilterdurchläufe der Dichtefunktion regulieren. Links: Präzisere Krümmungsanpassung ($nFilter = 10$). Rechts: Glattere Abstufung des Gitters ($nFilter = 50$).

ten Dreiecken auf, wie Abbildung 5.6 zeigt. Bild **(d)** zeigt den Rotor nach uniformem Remeshing mit 1.800 Knoten. Dieses Ergebnis ist besonders auf die dynamische Anpassung der Knotendichte entlang der Merkmalslinien angewiesen.

5.5 Diskussion

Es wurden zwei Strategien besprochen, um nach der flächenbasierten Relaxierung der Knotenverteilung die Qualität der Dreiecke zu optimieren: Regularisierung und Lloyd-Relaxierung.

Die Lloyd-Relaxierung ist besser geeignet für die präzise lokale Anpassung des Samplings an eine vorgegebene Dichtefunktion. Auch in der Nähe von Merkmalslinien wird ein ausgeglichenes Sampling erreicht. Die Methode ergänzt sich sehr gut mit der dynamischen Anpassung der Knotenzahl auf Merkmalslinien, die darauf abzielt, dass Merkmalsknoten genau zwei Nachbarn auf jeder Seite haben. Der Effekt ist im Idealfall, dass die zu einer Merkmalslinie benachbarten Knoten durch einen durchgehenden Kantenzug verbunden sind, der überall den gleichen Abstand zur Merkmalslinie hat. In der Praxis wird dies natürlich nur näherungsweise erreicht. Das Ergebnis ist aber ein deutlich reduziertes Normalenrauschen an abgerundeten Merkmalen des Modells. In der Regel verbessert die Relaxierung das Gitter progressiv. Der Benutzer kann daher den Fortschritt beobachten und das Remeshing beenden, wenn das

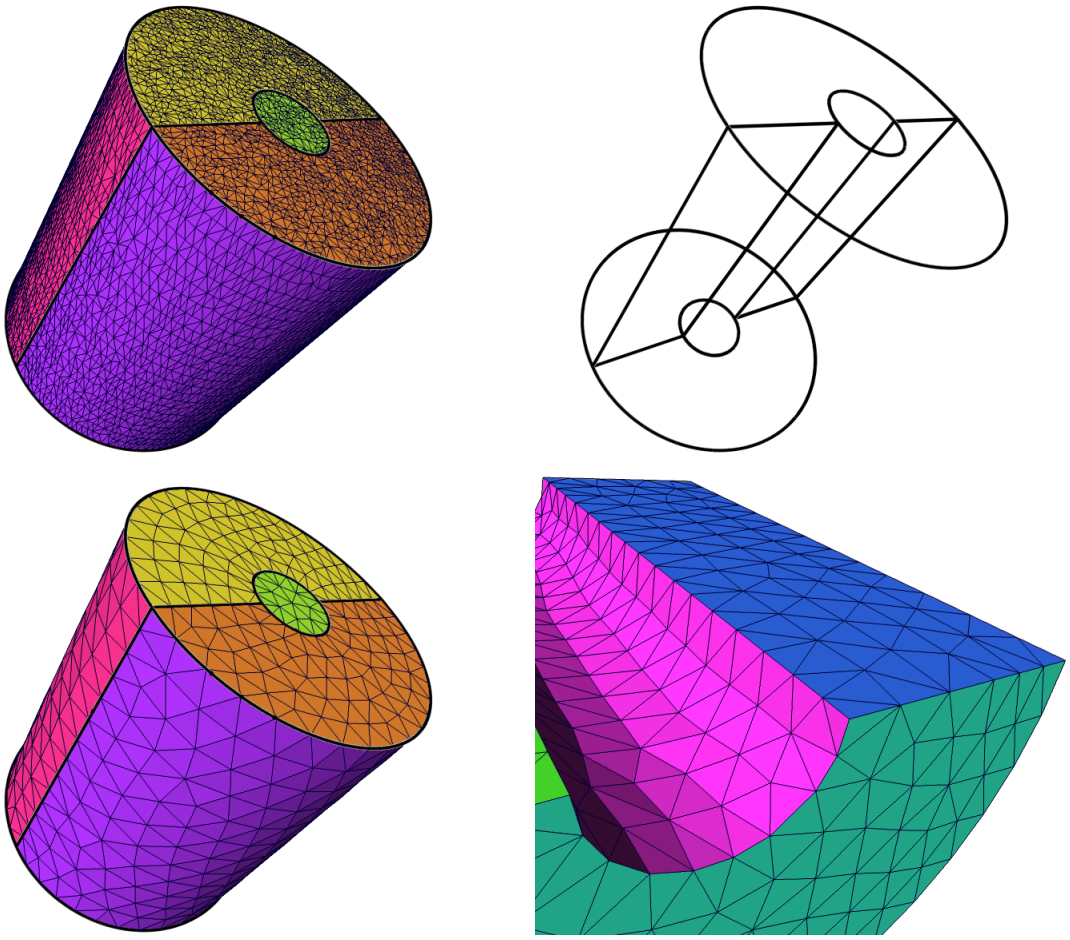


Abbildung 5.4: Das nicht-mannigfaltige *Zylinder*-Modell. Oben: Das Ausgangsgitter (8.500 Knoten) mit Merkmalsskelett. Unten: Ein Schnitt durch das Remeshing-Ergebnis (1.000 Knoten) mit der Nahansicht einer Naht.

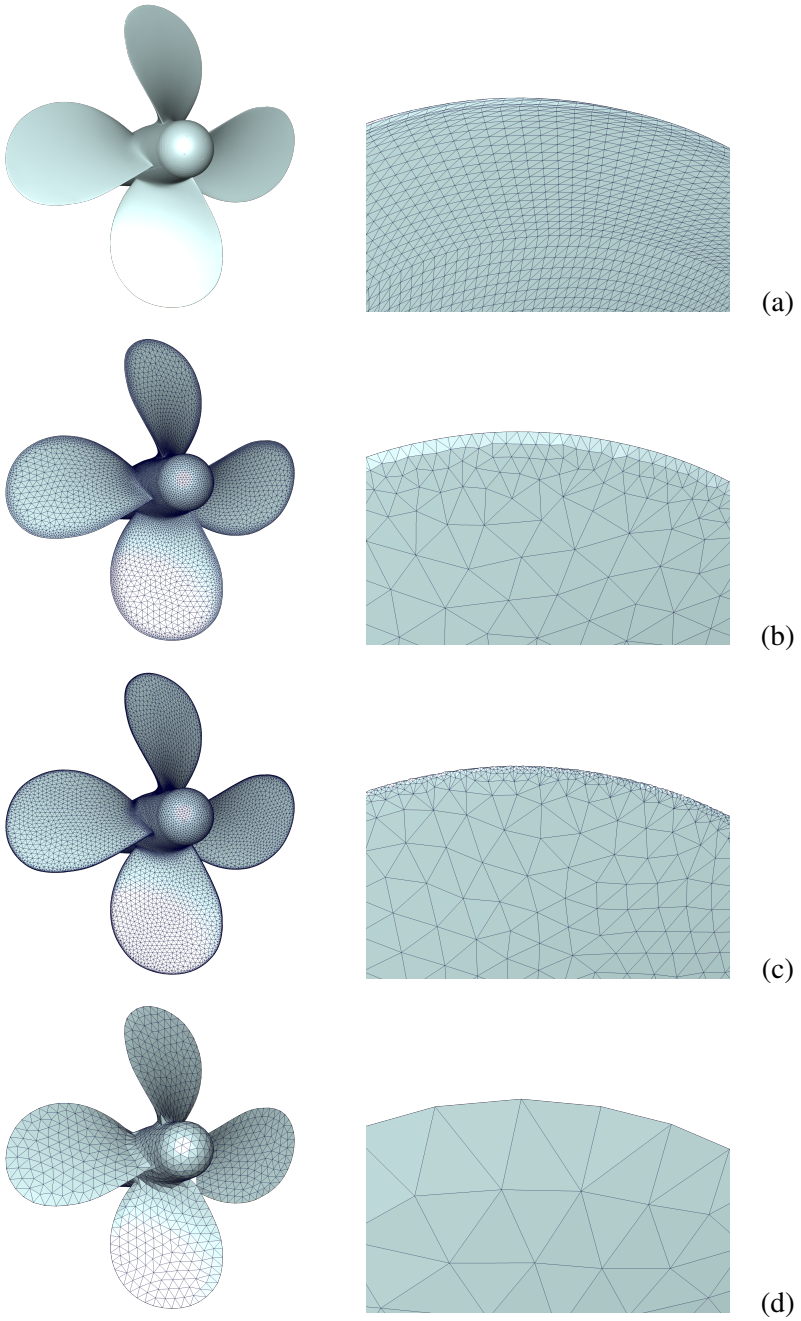


Abbildung 5.5: Ein Modell der Schiffsschraube INSEAN E779A mit 85.000 Knoten (a). Remeshing-Ergebnis mit (b) und ohne Erhalt von Merkmalslinien (c), mit 20.000 bzw. 30.000 Knoten. Uniformes Remeshing mit 1.800 Knoten (d).

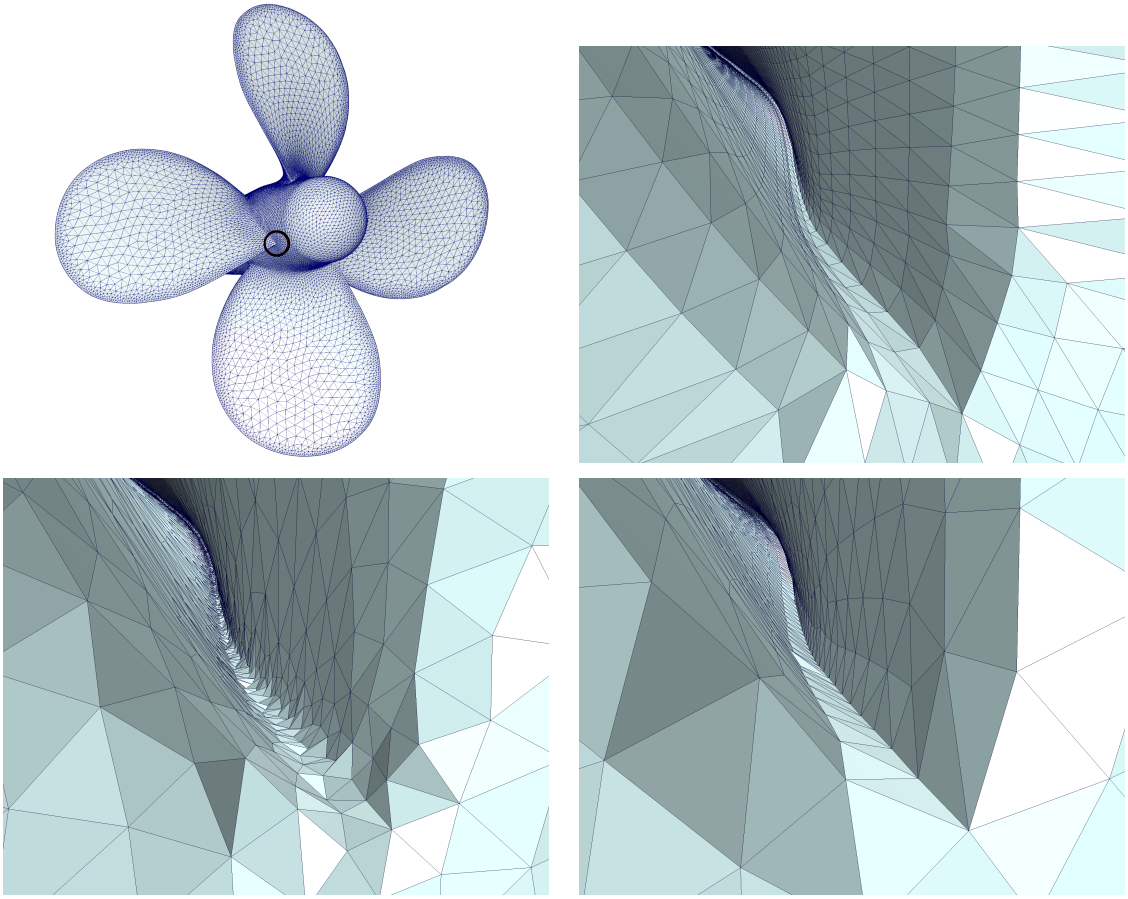


Abbildung 5.6: Querschnitt durch ein Rotorblatt. Triangulierung im Original (rechts oben). Im Remeshing-Ergebnis ohne Berücksichtigung der Merkmalslinie (links unten) zeigen sich starke Normalensprünge zwischen benachbarten Dreiecken. Durch die Ausrichtung der Dreieckskanten entlang der Merkmalslinie (rechts unten) wird dieser Effekt deutlich vermindert und es werden weniger Dreiecke benötigt.

Gitter den Anforderungen entspricht, oder ein Abbruchkriterium angeben. Es ist nicht nötig, die Anzahl der Iterationen vorab zu bestimmen. Die Nachteile sind die recht langsame Konvergenz und die Empfindlichkeit gegenüber Rauschen und zu steiler Abstufung der Dichtefunktion, da sich beides unmittelbar auf die Abstufung der Dreiecksflächen und damit auf die Dreiecksqualität überträgt.

Durch die Regularisierungsmethode kann in vielen Modellen die Anzahl irregulärer Knoten auf unter 10% der Gesamtknotenzahl reduziert werden. Die Methode ist etwas effizienter, denn die Regularisierungsoperationen an der Konnektivität sind im Vergleich zu Relaxierungsschritten unaufwendig. Die anschließend erforderliche winkelbasierte Glättung erfordert unabhängig von der Knotenzahl nur etwa 10 Iterationen. Der wichtigste Nachteil ist der schlecht vorhersehbare Effekt des Regularisierungsschritts. Dabei werden unter Umständen noch zahlreiche Knoten eingefügt und entfernt, so dass zugunsten einer hohen Regularität die durch das flächenbasierte Remeshing erzielte Abstimmung des Samplings an die Flächenkrümmung wieder verschlechtert wird. Gleichzeitig verliert der Benutzer die genaue Kontrolle über die Knotenanzahl.

Die winkelbasierte Glättung kann in der Nähe von Merkmalslinien den unerwünschten Effekt haben, zur Merkmalslinie benachbarte Knoten wieder abzudrängen. Ihre Wirkung hängt stark von den Valenzen der umliegenden Knoten ab. Sie funktioniert am besten in Regionen, wo alle Knoten sich uneingeschränkt bewegen können. Für die präzise Positionierung einzelner Knoten mit eingeschränkten Nachbarknoten ist sie weniger gut geeignet.

Wenn präzises, nicht-uniformes Sampling insbesondere bei Modellen mit abgerundeten Merkmalen angestrebt ist, sollte die Lloyd-Relaxierung verwendet werden. Für uniformes oder nur grob krümmungsadaptives Sampling ist die Regularisierungsmethode die bessere Wahl.

6 Schlussfolgerung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein relaxierungsbasiertes isotropes Remeshing-Verfahren um die Fähigkeit zur Verarbeitung nicht-mannigfaltiger Dreiecksgitter und zur Erhaltung von Merkmalslinien erweitert. Die Hauptidee der Erweiterung besteht darin, einen für Merkmalslinien etablierten Ansatz auch auf Nähte anzuwenden, um nicht-mannigfaltige Knoten entsprechend eingeschränkt in die Relaxierung einzubeziehen. Es wurde eine einfache Lösung für das Problem gefunden, die Samplingdichte dieser eingeschränkten Kantenzüge dynamisch auf ihre Umgebung abzustimmen, was wichtig für die Isotropie ist und in anderen Verfahren einen Vorverarbeitungsschritt erfordert [AVDI03]. Das Verfahren kann in einem interaktiven Softwaresystem zum lokalen Remeshing nach Editierung des Gitters eingesetzt werden, zum Beispiel nach dem Einfügen von Schnittkurven. Es kann Eingaben mit beliebiger Topologie verarbeiten und hochgradig reguläre Gitter erzeugen, in denen die Merkmalslinien und Nähte nur sehr geringe Störungen der Dreiecksqualität verursachen.

Die wichtigste Schwäche des Verfahrens und der Originalverfahren liegt in der Schwierigkeit, die Knotenverteilung global auszugleichen bzw. an die Dichtefunktion anzupassen. Das Konvergenzverhalten der flächenbasierten lokalen Relaxierung hängt letztlich mit davon ab, wie viele Schichten von Dreiecken zwei Regionen trennen, zwischen denen ein Ausgleich herbeigeführt werden soll: Weil jeder Knoten sich nur innerhalb seines Sterns bewegen kann, ist die Entfernung beschränkt, die ein Knoten pro Iteration zurücklegen kann. Merkmalslinien und Nähte können einen globalen Ausgleich sogar ganz verhindern, weil sie knotenundurchlässig sind. Dies ist ein Nachteil gegenüber Verfahren, die initial ein globales Resampling berechnen.

Als nächster Schritt sollen Merkmalslinien und Nähte für Knoten durchlässig gemacht werden. Für Merkmalslinien bestünde die Möglichkeit, die Einschränkung zunächst ganz aufzuheben und sie nach erfolgter Relaxierung zu rekonstruieren, z.B. durch *Feature-Snapping* [VRKS01]. Für Nähte ist dies aber keine Option. Stattdessen wäre mit einer Operation zu experimentieren, die ein Diffusionsgefälle zwischen zwei Seiten einer Naht lokal erkennt und einen Knoten von der einen zur anderen Seite transportiert. Der Kantenzug wäre dann vergleichbar mit einer Membran durchlässig für die Knotendiffusion und würde einem globalen Ausgleich des Samplings nicht mehr im Weg stehen.

Literaturverzeichnis

[AMD02] ALLIEZ, Pierre ; MEYER, Mark ; DESBRUN, Mathieu: Interactive Geometry Remeshing. In: *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference* 21(3) (2002), S. 347–354

[AUGA05] ALLIEZ, Pierre ; UCELLI, Giuliana ; GOTSMAN, Craig ; ATTENE, Marco: Recent Advances in Remeshing of Surfaces. In: *AIM@SHAPE Network of Excellence* (2005)

[AVDI03] ALLIEZ, Pierre ; ÉRIC COLIN DE VERDIÈRE ; DEVILLERS, Olivier ; ISENBURG, Martin: Isotropic Surface Remeshing. In: *SMI '03: Proceedings of the Shape Modeling International 2003*. Washington, DC, USA : IEEE Computer Society, 2003. – ISBN 0–7695–1909–1, S. 49

[BK01] BOTSCH, Mario ; KOBBELT, Leif P.: Resampling Feature and Blend Regions in Polygonal Meshes for Surface Anti-Aliasing. In: CHALMERS, A. (Hrsg.) ; RHYNE, T.-M. (Hrsg.): *EG 2001 Proceedings* Bd. 20(3). Blackwell Publishing, 2001, S. 402–410

[CKS98] CAMPAGNA, Swen ; KOBBELT, Leif ; SEIDEL, Hans-Peter: Directed Edges — A Scalable Representation for Triangle Meshes. In: *Journal of Graphics Tools: JGT* 3 (1998), Nr. 4, S. 1–12

[CRS98] CIGNONI, P. ; ROCCHINI, C. ; SCOPIGNO, R.: Metro: Measuring Error on Simplified Surfaces. In: *Computer Graphics Forum* 17 (1998), Nr. 2, S. 167–174

[DEGN98] DEY, T. ; EDELSBRUNNER, H. ; GUHA, S. ; NEKHAYEV, D. *Topology preserving edge contraction*. 1998

[DHKL01] DYN, Nira ; HORMANN, Kai ; KIM, Sun-Jeong ; LEVIN, David: Optimizing 3D triangulations using discrete curvature analysis. (2001), S. 135–146. ISBN 0–8265–1378–6

[Flo97] FLOATER, Michael S.: Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. In: *Computer Aided Geometric Design* 14 (1997), Nr. 4, S. 231–250

[Flo03] FLOATER, Michael S.: Mean Value Coordinates. In: *Computer Aided Geometric Design* 20 (2003), S. 19–27

[GH97] GARLAND, Michael ; HECKBERT, Paul S.: Surface Simplification Using Quadric Error Metrics. In: *Computer Graphics* 31 (1997), Nr. Annual Conference Series, S. 209–216

[HPW05] HILDEBRANDT, Klaus ; POLTHIER, Konrad ; WARDETZKY, Max: Smooth feature lines on surface meshes. In: *SGP '05: Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland : Eurographics Association, 2005. – ISBN 3–905673–24–X, S. 85

[HSSZ97] HEGE, Hans-Christian ; SEEBASS, Martin ; STALLING, Detlev ; ZÖCKLER, Malte. *A Generalized Marching Cubes Algorithm Based on Non-Binary Classifications*. ZIB Preprint SC-97-05. 1997

[MDSB03] MEYER, Mark ; DESBRUN, Mathieu ; SCHRÖDER, Peter ; BARR, Alan H.: Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds. In: HEGE, Hans-Christian (Hrsg.) ; POLTHIER, Konrad (Hrsg.): *Visualization and Mathematics III*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2003, S. 35–57

[Per06] PERSSON, Per-Olof: Mesh size functions for implicit geometries and PDE-based gradient limiting. In: *Eng. with Comput.* 22 (2006), Nr. 2, S. 95–109. – ISSN 0177–0667

[Pet02] PETITJEAN, Sylvain: A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. In: *ACM Comput. Surv.* 34 (2002), Nr. 2, S. 211–262. – ISSN 0360–0300

[SAG03] SURAZHSKY, Vitaly ; ALLIEZ, Pierre ; GOTSMAN, Craig: Isotropic Remeshing of Surfaces: a Local Parameterization Approach. In: *Proceedings of 12th International Meshing Roundtable*, 2003

[SFS05] SCHEIDEGGER, C. ; FLEISHMAN, S. ; SILVA, C.: Triangulating Point-Set Surfaces with Bounded Error. In: DESBRUN, M. (Hrsg.) ; POTTMAN, H. (Hrsg.): *Proceedings of the third Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing*, The Eurographics Association, 2005, S. 63–72

[SG02] SURAZHSKY, V. ; GOTSMAN, C.: High quality compatible triangulations. In: *Proceedings of 11th International Meshing Roundtable*, 2002, S. 183–192

[SG03] SURAZHSKY, Vitaly ; GOTSMAN, Craig: Explicit surface remeshing. In: *SGP '03: Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland : Eurographics Association, 2003. – ISBN 1–58113–687–0, S. 20–30

[SSFS06] SCHREINER, J. ; SCHEIDEGGER, C.E. ; FLEISHMAN, S. ; SILVA, C.T.: Direct (Re)Meshing for Efficient Surface Processing / University of Utah. 2006 (UUSCI-2006-013). – SCI Institute Technical Report

[SWH05] STALLING, Detlev ; WESTERHOFF, Malte ; HEGE, Hans-Christian: Amira: A highly interactive system for visual data analysis. In: HANSEN, Charles D. (Hrsg.) ; JOHNSON, Christopher R. (Hrsg.): *The Visualization Handbook*. Elsevier, 2005, Kapitel 38, S. 749–767

[Tut63] TUTTE, W.T.: How to draw a graph. In: *Proceedings of the London Mathematical Society*, The Eurographics Association, 1963, S. 743–767

[VPBM01] VLACHOS, Alex ; PETERS, Jörg ; BOYD, Chas ; MITCHELL, Jason L.: Curved PN triangles. In: *SI3D '01: Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics*. New York, NY, USA : ACM Press, 2001, S. 159–166

[VRKS01] VORSATZ, Jens ; RÖSSL, Christian ; KOBBELT, Leif ; SEIDEL, Hans-Peter: Feature Sensitive Remeshing. In: CHALMERS, Alan (Hrsg.) ; RHYNE, Theresa-Marie (Hrsg.): *Computer Graphics Forum, Proceedings of Eurographics 2001* Bd. 20. Manchester, Great Britain : Blackwell, 2001, S. 393–401

[VRS03] VORSATZ, J. ; RÖSSL, Ch. ; SEIDEL, H.-P.: Dynamic remeshing and applications. In: *SM '03: Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications*. New York, NY, USA : ACM Press, 2003. – ISBN 1–58113–706–0, S. 167–175

[WW94] WELCH, William ; WITKIN, Andrew: Free-form shape design using triangulated surfaces. In: *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA : ACM Press, 1994. – ISBN 0–89791–667–0, S. 247–256

[ZGSZ03] ZACHOW, Stefan ; GLADILIN, Evgeny ; SADER, Robert ; ZEILHOFER, Hans-Florian: Draw and cut: intuitive 3D osteotomy planning on polygonal bone models. In: LEMKE, Heinz U. (Hrsg.) ; VANNIER, Michael W. (Hrsg.) ; INAMURA, Kiyonari (Hrsg.) ; FARMAN, Allan G. (Hrsg.) ; DOI, Kunio (Hrsg.) ; REIBER, Johan H. C. (Hrsg.): *CARS* Bd. 1256, Elsevier, 2003. – ISBN 0–444–51387–6, S. 362–369

[ZS00] ZHOU, T. ; SHIMADA, K.: An angle-based approach to two-dimensional mesh smoothing. In: *Proceedings of Ninth International Meshing Roundtable*, 2000, S. 373–384