Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

AXEL WERNER

Kombinatorische Optimierung und die 40-Punkte-Regel

ZIB-Report 11-48 (Oktober 2011)

Herausgegeben vom
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem

Telefon: 030-84185-0
Telefax: 030-84185-125

e-mail: bibliothek@zib.de
URL: http://www.zib.de

ZIB-Report (Print) ISSN 1438-0064
ZIB-Report (Internet) ISSN 2192-7782

Kombinatorische Optimierung und die 40-Punkte-Regel

Axel Werner

1. Oktober 2011

Vor kurzem hat nach der Sommerpause die Fußball-Bundesliga wieder begonnen – eine Zeit besonderer Freude für Fußballfans, in der man endlich wieder nach Herzenslust fachsimpeln kann, wer die beginnende Saison wohl als Meister beenden, oder sich wenigstens für die Champions League oder die Europa League qualifizieren wird. Und bei manchen Vereinen stellt man sich die bange Frage, wieviele Punkte im Laufe der Saison erspielt werden müssen, um am Ende nicht abzusteigen.

Die 40-Punkte-Regel

Seit der Saison 1995/96 werden in der Bundesliga für jeden Sieg 3 Punkte und jedes Unentschieden 1 Punkt vergeben. Auf Basis dieser Zählung ist dann immer wieder von der sogenannten *40-Punkte-Regel* die Rede. Diese besagt, dass eine Mannschaft mit 40 Punkten auf dem Konto nicht mehr absteigt. Vereinfacht formuliert: Mit 40 Punkten ist man am Saisonende wenigstens Fünfzehnter. Der Sechzehnte hat zwar (aktuell zumindest, diese Regelung hat sich in den vergangenen Jahren auch hin und wieder geändert) noch die Chance, durch Relegationsspiele dem Abstieg zu entgehen, aber der Einfachheit halber betrachten wir auch den 16. Platz als Abstiegsplatz – da sich ein Team als Sechzehnter im Laufe der Saison meist nicht gerade mit Ruhm bekleckert hat, ist diese Vereinfachung vielleicht auch nicht ganz unangebracht.

Ein Blick in die Statistik vergangener Bundesligasaisons[1] bestätigt, dass die 40-Punkte-Regel offenbar nicht ganz unsinnig ist:

Saison	Punkte des 16.	Saison	Punkte des 16.
10/11	36	02/03	36
09/10	31	01/02	30
08/09	30	00/01	35
07/08	31	99/00	35
06/07	34	98/99	37
05/06	33	97/98	38
04/05	35	96/97	33
03/04	32	95/96	36

In den vergangenen 16 Jahren ist es demnach nie passiert, dass eine Mannschaft mit 40 Punkten absteigen musste – was noch nicht heißt, dass es nicht prinzipiell möglich

[1] Alle Spielergebnisse seit Gründung der Bundesliga – und mehr – findet man zum Beispiel auf `www.kicker.de`

wäre! Es stellt sich also die Frage, ob die 40-Punkte-Regel tatsächlich allgemein gültig ist, genauer: Ist es theoretisch möglich, am Ende der Saison mit 40 oder mehr Punkten als Sechzehnter oder sogar noch schlechter dazustehen? Oder allgemeiner:

Frage: Welches ist die größte mögliche Punktzahl, mit der eine Mannschaft der Fußball-Bundesliga am Ende der Saison auf einem Abstiegsplatz stehen kann?

Sieht man sich in den zahlreichen Fußball-Fan-Foren im Internet um, trifft man auf einige Diskussionen zu diesem Thema. Meistens sind die Beteiligten auf der richtigen Spur, ohne sich allerdings letztlich ganz sicher zu sein. Dass die 40-Punkte-Regel nicht kategorisch richtig sein kann, haben allerdings die meisten erkannt. Dafür finden sich tatsächlich einige Gegenbeispiele in der Fußball-Historie: „Auch 41 Punkte reichten der TSG Sprockhövel nicht zum Klassenerhalt in der Oberliga Westfalen 2003/2004“[2]. Die Fans der TSG Sprockhövel unter den Lesern werden sich sicher an diesen schmerzlichen Tag der Vereinsgeschichte erinnern! Einen anderen Ansatz versucht ein Blogger, der 1 Million möglicher Saisonverläufe mit einem Zufallsgenerator simulierte und dabei zu folgendem Ergebnis kam: „Es konnten sogar zwei Fälle gefunden werden, in denen 46 Punkte benötigt wurden.“[3] Wie wir gleich sehen werden, sind ihm dabei die interessanten Fälle durch die Lappen gegangen.

In der Tat könnte man auf die Idee kommen, einfach alle möglichen Saisonverläufe aufzuzählen, und sich einfach den mit der höchsten Punktzahl des Sechzehnten zu merken. Dazu muss man allerdings, selbst wenn man die Anzahl geschossener Tore ignoriert und als mögliche Spielausgänge lediglich „Heimsieg“, „Unentschieden“ oder „Auswärtssieg“ in Betracht zieht, bereits $3^{9\cdot 34}$ oder 3^{306} Möglichkeiten berücksichtigen, oder ausgeschrieben: 99793888233710926097676673961542382339552034110870991187709058567130998942396826836880350287497238272034603157195937657211050782186192219658614729 viele! Moderne Computer sind zwar durchaus in der Lage viele tausend Möglichkeiten pro Sekunde durchzuprobieren, aber selbst mit heutigen Hochleistungsrechnern bräuchte man für eine solche *vollständige Enumeration* noch Abermilliarden Jahre.

Um also unsere Frage von oben zu beantworten, ist ein wenig Überlegung unumgänglich. Beispielsweise kann man versuchen, besonders extreme Fälle zu konstruieren: So könnte es passieren, dass zwei besonders schlechte Mannschaften mitspielen, die jedes ihrer Spiele verlieren – außer natürlich die beiden, die sie gegeneinander bestreiten und in denen ja nicht beide verlieren können. Weiter nehmen wir an, dass die anderen 16 Mannschaften untereinander nur unentschieden spielen. Am Ende einer solchen denkwürdigen Saison stehen dann auf den Plätzen 1 bis 16 Mannschaften mit je $4 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 42$ Punkten, während die beiden letzten sicherlich auf nicht mehr als 6 Punkte kommen. Insbesondere hat damit der Sechzehnte mehr als 40 Punkte erreicht, was die 40-Punkte-Regel auf jeden Fall schon einmal widerlegt.

Strenggenommen müsste man sich natürlich noch über die Torverhältnisse, die ja über die Platzierung bei Punktegleichheit entscheiden, Gedanken machen. Es ist aber leicht zu sehen, dass mit den obigen Punktzahlen eine eindeutige Reihenfolge herzustellen ist, wenn die Siege der ersten Sechzehn gegen die beiden letzten Mannschaften nur geeignet hoch ausfallen.

Wie weiter oben bereits bemerkt, könnten allerdings sogar 46 Punkte benötigt werden, um nicht abzusteigen. Daher kann wohl auch 42 nicht die Antwort auf unsere gestellte Frage sein, auch wenn das für Galaxisreisende einleuchtend klingen mag. Es kann in der Tat noch schlimmer kommen für den Sechzehnten: Nehmen wir wie oben an, dass die beiden schlechten Mannschaften wieder jedes Spiel verlieren, außer die beiden untereinander. Wenn nun aber alle anderen Mannschaften jedes

[2] `http://www.hsv-forum.de/archive/index.php/t-60626.html`, abgerufen am 2.8.2011

[3] `http://delengkal.de/2010/02/zahlenspiele-am-wochenende-die-40-punkte-faustregel`, abgerufen am 2.8.2011

ihrer Heimspiele gewinnen, jedoch jedes Auswärtsspiel verlieren – außer die beiden gegen die besonders schlechten – dann ergibt sich am Saisonende eine Tabelle mit $19 \cdot 3 = 57$ Punkten für die ersten 16 Mannschaften. Jetzt verhindern sogar 57 Punkte nicht mehr den Abstieg des Sechzehnten!

Ein Beweis

Umgekehrt kann man auch mit einem einfachen Widerspruchsbeweis zeigen, dass man mit mehr als 57 Punkten nicht mehr Sechzehnter werden kann.

Behauptung: Am Ende einer Fußball-Bundesliga-Saison hat der Sechzehnte nicht mehr als 57 Punkte.

Beweis: Pro Spiel können höchstens 3 Punkte vergeben werden. Nach einer kompletten Saison, in der ja $34 \cdot 9 = 306$ Spiele absolviert wurden, können also höchstens $306 \cdot 3 = 918$ Punkte verteilt worden sein.

Angenommen, der Sechzehnte hätte am Ende der Saison 58 oder mehr Punkte. Dann müssten auch alle Mannschaften auf den Plätzen 1 bis 15 mindestens 58 Punkte haben und insgesamt wären dann im Laufe der Saison mindestens $16 \cdot 58 = 928$ Punkte verteilt worden. Das ist aber nach der obigen Rechnung unmöglich. □

Damit können wir die Antwort auf unsere Frage geben: Mit 57 Punkten könnte eine Mannschaft am Ende der Saison noch auf Platz 16 landen, mit 58 oder mehr Punkten ist sie auf jeden Fall dem Abstieg entronnen. Um alle theoretischen Fälle abzudecken, müsste also aus der 40-Punkte-Regel die 58-Punkte-Regel werden!

Natürlich schadet es nicht, bei aller schönen Theorie ab und zu wieder einen Blick auf die Realität zu werfen. In den vergangenen Bundesliga-Jahren reichten in der Tat 58 Punkte fast immer schon für die Qualifikation zum UEFA-Cup (bzw. die Europa League)! Es wäre also interessant, wenn man die ganz extremen Fälle ausschließen könnte – eine komplette Saison mit (fast) nur Heimsiegen wird es in der Fußball-Bundesliga wohl niemals geben.

Ein ganzzahliges Programm

Man kann das gesamte Problem auch noch aus einem etwas anderen Blickwinkel betrachten. Die Frage nach der maximal möglichen Punktzahl des Sechzehnten ist nämlich in Wirklichkeit ein *Optimierungsproblem*.

Problem: Maximiere die Punktzahl des Sechzehnten in einer gültigen Abschlusstabelle einer Fußball-Bundesliga-Saison.

Wenn man nun mathematisch beschreiben kann, was eine „gültige Abschlusstabelle“ ist, hat man ein sogenanntes *mathematisches Modell* aufgestellt, welches man dann zu lösen hat. In unserem Fall kann man sogar ein *ganzzahliges lineares Programm* formulieren, was deshalb besonders interessant ist, weil für solche Modelle eine recht umfangreiche Theorie von Lösungsmethoden zur Verfügung steht. Unser IP (kurz für *Integer Program*) ist in Abbildung 1 angegeben, zunächst in einer einfachen Version.

Warum beschreiben diese Formeln unser Problem? Wir nehmen es einmal genauer unter die Lupe, und fangen dabei ganz unten an. T (Definition (7)) bezeichnet die Menge der Teams, die wir einfach von 1 bis 18 durchnummerieren, und S (Definition (8)) steht für die Menge aller ausgetragenen Spiele. Da jedes Team (aus T) gegen jedes andere antreten muss (außer natürlich gegen sich selbst), und das einmal zu Hause und einmal auswärts, kann man die Spiele gerade als die geordneten Paare

$$
\begin{aligned}
&\text{maximiere} \quad p_{16} && && (1)\\
&\text{so dass} && x_s + y_s + z_s = 1 \quad \forall s \in S && (2)\\
& && \sum_{\tau \in T \setminus \{t\}} 3x_{(t,\tau)} + y_{(t,\tau)} + 3z_{(\tau,t)} + y_{(\tau,t)} = p_t \quad \forall t \in T && (3)\\
& && p_{t+1} \leq p_t \quad \forall t \in T \setminus \{18\} && (4)\\
& && x_s, y_s, z_s \in \{0,1\} \quad \forall s \in S && (5)\\
& && p_t \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in T && (6)\\
& && T := \{1, \ldots, 18\} && (7)\\
& && S := T \times T \setminus \{(t,t) \mid t = 1, \ldots, 18\} && (8)
\end{aligned}
$$

Abbildung 1: Ein IP-Modell für die Punkteverteilung einer Bundesligasaison

von verschiedenen Teams auffassen. Beispielsweise bezeichnet dann $(3,8) \in S$ das Heimspiel von Team 3 gegen Team 8, während $(8,3) \in S$ das entsprechende Spiel bedeutet, bei dem Team 8 Heimrecht hat.

Die Zeilen (5) und (6) enthalten die *Variablen* unseres Modells, das heißt, die Unbekannten, für die wir eine Lösung finden wollen. Eigentlich interessieren uns hauptsächlich die Variablen p_1 bis p_{18}, die Punktzahlen der entsprechenden Mannschaften. Für eine übersichtliche mathematische Formulierung müssen wir darüberhinaus alle möglichen Spielausgänge beschreiben können. Dafür legen wir Hilfsvariablen x_s, y_s und z_s an, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen (sogenannte Binärvariablen), und die für jedes Spiel s angeben, wie es ausgegangen ist: beispielsweise soll $x_{(3,8)} = 1$ bedeuten, dass Team 3 sein Heimspiel gegen Team 8 gewonnen hat, wohingegen ein Unentschieden in diesem Spiel durch $y_{(3,8)} = 1$ und ein Auswärtssieg von Team 8 durch $z_{(3,8)} = 1$ ausgedrückt wird.

Nun ist natürlich ganz klar, dass der Ausgang eines Spiels nicht gleichzeitig „Heimsieg“ und „Unentschieden“ sein kann. Demnach dürfen zum Beispiel für jedes $s \in S$ niemals x_s und y_s beide gleich 1 sein, genauso wie $z_s = 1$ nur dann erlaubt ist, wenn x_s und y_s beide 0 sind. Solche Forderungen werden in den *Bedingungen* des Modells formuliert, den Zeilen (2) bis (4). Diese Gleichungen oder Ungleichungen müssen von den Variablenwerten erfüllt werden und sind sozusagen verantwortlich dafür, dass das Ergebnis tatsächlich wie gewünscht eine „gültige Abschlusstabelle“ beschreibt.

Die Gleichung (2) fordert genau unsere Bedingung von eben: der Ausgang eines jeden Spiels muss entweder „Heimsieg“ oder „Unentschieden“ oder „Auswärtssieg“ sein, niemals dürfen zwei oder gar alle drei 0/1-Variablen für ein Spiel gleich 1 sein. Die etwas kompliziert erscheinende Gleichung (3) regelt die Punktevergabe für eine Mannschaft aufgrund der Spielergebnisse: ein Team t bekommt für jeden Heimsieg gegen eine andere Mannschaft τ – also wenn das zugehörige $x_{(t,\tau)}$ gleich 1 ist – 3 Punkte, ebenso für jeden Auswärtssieg – dazu muss $z_{(\tau,t)} = 1$ sein; für ein Unentschieden, ob zu Hause oder auswärts – also falls ein $y_{(t,\tau)}$ oder ein $y_{(\tau,t)}$ gleich 1 ist – fällt immerhin noch 1 Punkt an. Zusammengerechnet über sämtliche Spiele gegen alle anderen Teams ergibt sich somit die Gesamtpunktzahl p_t am Ende der Saison.

Um schließlich die Bedingung (4) zu erklären, müssen wir noch einen kleinen Trick offenlegen, der bis jetzt verschwiegen wurde. Dazu wenden wir uns zunächst der *Zielfunktion* in Zeile (1) zu. Diese gibt an, welchen Wert wir maximieren wollen.

Da wir ja an der maximal möglichen Punktzahl des Sechzehnten interessiert sind, sollte also diese Punktzahl in der Zielfunktion stehen. Das Problem dabei ist nur, dass wir zu Beginn ja noch gar nicht wissen, welche Mannschaft denn im Ergebnis auf Platz 16 landet, also welche der Zahlen p_1 bis p_{18} uns denn hier interessiert. Ganz offensichtlich wird das Problem, wenn man sich vorstellt, dass wir die Mannschaften nicht von 1 bis 18 durchnummeriert, sondern als Indizes immer den Vereinsnamen geschrieben hätten: dann wäre völlig unklar, ob nun zum Beispiel $p_{\text{Borussia Mönchengladbach}}$, $p_{\text{1. FC Köln}}$ oder (eher unwahrscheinlich) $p_{\text{FC Bayern München}}$ als Punktzahl des Sechzehnten in der Zielfunktion auftauchen sollte.

Der Trick ist nun, dass wir die Nummerierung gerade so wählen, dass die Mannschaft mit der Nummer 1 am Ende auf Platz 1 liegt, die mit der Nummer 2 auf Platz 2 und so weiter. Das funktioniert, weil es im Prinzip völlig unerheblich ist, welches Team welche Nummer bekommt – also können wir annehmen, dass wir gerade die beschriebene Nummerierung gewählt haben, auch wenn wir sie zunächst noch gar nicht explizit kennen. Mit dieser Annahme können wir nun zum einen in der Zielfunktion einfach p_{16} schreiben, müssen aber andererseits dafür sorgen, dass die Punkteverteilung konsistent mit der angenommenen Nummerierung ist. Genau das stellt die letzte Bedingung (4) sicher: sie verlangt, dass das Team Nr. 1 mindestens so viele Punkte haben muss wie Team Nr. 2, dieses wiederum mindestens so viele wie Nr. 3 und so weiter.

Nun da wir ein Modell für unser Optimierungsproblem haben, müssen wir es nur noch lösen. Dazu gibt es weitreichende theoretische Ergebnisse, deren Behandlung hier allerdings zu weit führen würde. Für interessierte Leser bietet der wikipedia-Artikel zur Ganzzahligen Linearen Optimierung[4] einige grundlegende Erklärungen und weiterführende Hinweise.

Mit der Lösung eines Modells wie des unseren betraut man am besten einen Computer mit einer Optimierungssoftware wie CPLEX[5] oder SCIP[6]. Solche Programme können IPs der hier vorliegenden Größenordnung in kürzester Zeit lösen:

```
MIP - Integer optimal solution: Objective = 5.7000000000e+01
Solution time = 0.02 sec. Iterations = 188  Nodes = 0
CPLEX> display solution variables p*
Incumbent solution
 Variable Name   Solution Value
 p#1                        57
 p#2                        57
 p#3                        57
 ⋮                           ⋮
 p#14                       57
 p#15                       57
 p#16                       57
 p#17                        3
 p#18                        3
```

Die Optimallösung bestätigt unsere Überlegungen von vorher: auf Platz 16 kann man mit maximal 57 Punkten landen, und die Werte für die p-Variablen in der angegebenen Optimallösung entsprechen auch tatsächlich unserer Beispiel-Saison.

Man sollte vielleicht bemerken, dass ganzzahlige lineare Programme nicht nur für Spielereien wie hier beschrieben nützlich sind, sondern auch für viele praktische

[4] siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Ganzzahlige_lineare_Optimierung`
[5] siehe `http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer`
[6] siehe `http://scip.zib.de`

$$u_s, v_s \in \mathbb{Z} \quad \forall s \in S \tag{9}$$
$$q_t, w_t \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in T \tag{10}$$

$$u_s, v_s \geq 0 \quad \forall s \in S \tag{11}$$
$$M \cdot (x_s - 1) + 1 \;\leq\; u_s - v_s \;\leq\; M \cdot x_s \quad \forall s \in S \tag{12}$$
$$M \cdot (z_s - 1) + 1 \;\leq\; v_s - u_s \;\leq\; M \cdot z_s \quad \forall s \in S \tag{13}$$
$$\sum_{\tau \in T \setminus \{t\}} u_{(t,\tau)} + v_{(\tau,t)} = w_t \quad \forall t \in T \tag{14}$$
$$w_t - \sum_{\tau \in T \setminus \{t\}} u_{(\tau,t)} + v_{(t,\tau)} = q_t \quad \forall t \in T \tag{15}$$
$$M\,(p_t - p_{t+1}) + q_t - q_{t+1} \geq 0 \quad \forall t \in T \setminus \{18\} \tag{16}$$
$$M\;(M(p_t - p_{t+1}) + q_t - q_{t+1}) + w_t - w_{t+1} \geq 1 \quad \forall t \in T \setminus \{18\} \tag{17}$$

$$M > 0, \text{ genügend groß} \tag{18}$$

Abbildung 2: Zusätzliche Variablen und Bedingungen zur Modellierung von Toren und Tordifferenzen

Zwecke. So werden sie beispielsweise mit großem Erfolg in der Logistik und Verkehrsoptimierung oder auch bei der Planung von Telekommunikationsnetzen eingesetzt[7], und auch der Spielplan von Sportligen (u. a. der ersten und zweiten Fußball-Bundesliga selbst) wird mit Hilfe solcher Methoden berechnet[8].

Erweiterungen

Aber zurück zu den unterhaltsamen Seiten der Mathematik. Mit unserem Modell kann man noch einiges mehr machen. So können wir es zum Beispiel etwas realistischer gestalten, indem wir auch die Anzahl der geschossenen Tore und die daraus resultierenden Tordifferenzen berücksichtigen. Das sollte zwar keine neue Antwort auf unsere ursprüngliche Frage liefern, ermöglicht aber die Formulierung von vielen weiteren Bedingungen. Abbildung 2 zeigt die Erweiterungen, die dazu am Modell aus Abbildung 1 vorzunehmen sind. Sie sind eingeladen, die vielen neuen, und jetzt nicht mehr ganz einfachen Bedingungen „in Alltagssprache zu übersetzen“! Ein kleiner Tipp: die Variablen u_s und v_s bezeichnen die Anzahl der von der Heim- bzw. der Auswärtsmannschaft in einem Spiel s geschossenen Tore und q_t die Tordifferenz des Teams t am Ende der Saison.

Damit ist es nun möglich, ganz absurde Szenarien auszuschließen, indem weitere Bedingungen an Variablen gestellt werden: so könnte man zum Beispiel annehmen, dass die Mannschaften im oberen Tabellendrittel ein positives Torverhältnis haben ($q_t \geq 0$), die ganz unten dagegen ein negatives, dass wohl jede Mannschaft nicht mehr als 100 Tore im Laufe der Saison schießt ($w_t \leq 100$), aber sicher mindestens 15, und noch einiges mehr. Die Erfahrung zeigt auch, dass es meist ein nicht allzu dichtes Mittelfeld gibt ($p_3 - p_{16} \geq 20$) und dass nur recht wenige Teams am Ende auf die gleiche Punktzahl kommen. Auch letzteres kann man in ein noch etwas allgemeineres Modell hineinformulieren.

[7] zum Beispiel am Zuse-Institut Berlin, siehe `http://www.zib.de/de/optimierung.html`
[8] siehe `http://num.math.uni-goettingen.de/~s.westphal/index.php`

Mit solcherlei Annahmen ergibt sich dann schon eine deutlich realistischer aussehende Tabelle:

```
MIP - Integer optimal solution: Objective = 4.4000000000e+01
Solution time = 23.72 sec. Iterations = 37540  Nodes = 491
CPLEX> display solution variables p*
Incumbent solution
 Variable Name   Solution Value
 p#1                          67
 p#2                          66
 p#3                          64
 p#4                          59
 p#5                          54
 p#6                          51
 p#7                          50
 p#8                          49
 p#9                          48
 p#10                         47
 p#11                         47
 p#12                         46
 p#13                         45
 p#14                         44
 p#15                         44
 p#16                         44
 p#17                         39
 p#18                         34
```

Und wie man sieht, erscheint unter diesen Voraussetzungen auch die ursprüngliche 40-Punkte-Regel gar nicht mehr so falsch.

Im Übrigen können wir auch mit wenigen Modifikationen an unserem IP eine ganze Reihe ähnlicher Fragen beantworten:

- Um herauszufinden, mit wievielen Punkten man sicher für die Europa League qualifiziert ist, ersetzen wir einfach unsere Zielfunktion durch „maximiere p_6“. Ergebnis: es könnte theoretisch passieren, dass man 88 Punkte braucht, um dabei zu sein!
- Als Zweitligamannschaft ist es gut zu wissen, wieviele Punkte mindestens gesammelt werden müssen, um in die 1. Liga aufzusteigen; dazu minimieren wir p_3. Ergebnis: mit weniger als 30 Punkten ist es gar nicht möglich aufzusteigen!
- Interessiert man sich weniger für die Bundesliga, als vielmehr für die Premier League, die Serie A oder die Primera División, dann sind 20 statt 18 Teams im Rennen und man maximiert p_{18}. Ergebnis: im schlimmsten Fall kann man dort mit 63 Punkten noch absteigen!

Für so manche Liga, wie die italienische oder seit neuestem auch die türkische, sollte man allerdings das Modell noch einmal überarbeiten und sicherheitshalber noch Variablen für Punktabzüge wegen illegaler Machenschaften vorsehen... solche Zusammenhänge sind dann aber womöglich nicht mehr ganz einfach mit mathematischen Mitteln zu beschreiben.