Mathematische Modellierung und Lösung von Optimierungsproblemen bei der Planung von Telefonnetzen

vorgelegt von
Diplom-Physiker
Hermann Stolle

Vom Fachbereich 3 Mathematik
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
-Dr. rer. nat.-
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender:	Prof. Dr. K.-H. Förster
Berichter:	Prof. Dr. M. Grötschel
Berichter:	Prof. Dr. G. Ziegler

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 16. Juni 2000

Berlin 2000

D 83

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Ausgangspunkt dieser Dissertation sind praktische Probleme, die bei der Planung von Telefonnetzen auftreten. In einem konkreten Beispiel sollen Endverteiler eines Stadtbereichs an Bereichsverteiler mit Kabeln und weiteren Verteilern angeschlossen werden. Die Kabel sind in Tiefbaugräben zu verlegen. Die Länge der Verbindungsleitungen ist beschränkt.

Die Modellierung dieses praktischen Problems wird ausführlich diskutiert. Es wird ein mathematisches Optimierungsproblem in gerichteten Graphen formuliert, das wir Kabelproblem nennen. Das Kabelproblem ist ein $\mathcal{NP}$-schweres Optimierungsproblem, welches das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen als Spezialfall enthält.

Die theoretische Untersuchung führen wir für eine Verallgemeinerung des Kabelproblems durch, die wir Netzproblem nennen, damit die Ergebnisse auch für Modifikationen des Kabelproblems gültig bleiben. Für das Netzproblem beschreiben wir Problemreduktionen und -transformationen und führen ein ganzzahliges lineares Programm ein. Vergleichend werden verschiedene LP-Relaxierungen bezüglich deren Einsatz in einem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren zur Lösung des Netzproblems diskutiert. Entsprechend der Erfordernisse in dem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren werden polyedrische Untersuchungen des Netzproblems durchgeführt. Abschließend werden ganzzahlige Programme und LP-Relaxierungen für das Netzproblem zueinander in Beziehung gesetzt und verglichen.

In den Lösungsverfahren für das Kabelproblem kommen Problemreduktionen, primale und duale Verbesserungs-Heuristiken, eine Lagrange-Heuristik und Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren zum Einsatz. Die Verfahren werden auf Instanzen angewandt, die im Zusammenhang mit der Planung von Telefonnetzen erzeugt werden. Die Ergebnisse für diese Instanzen sind gut. Die zweite Anwendung für unser Verfahren sind Steinerbaum-Probleme in Graphen, die im Zusammenhang mit VLSI-Problemen von praktischem Interesse sind. Für viele Standard-Testprobleme übertrifft unser Verfahren die besten bisher bekannten Rechenergebnisse in der Literatur. Dies zeigt die Leistungsfähigkeit unseres allgemeinen Frameworks zur Lösung von Kabelproblemen.

Vorwort

Ausgangspunkt dieser Dissertation sind praktische Probleme, die bei der Planung von Telefonnetzen auftreten. Die Dissertation wurde durch ein Stipendium der Siemens-AG ermöglicht. In Kooperation mit einer Projektgruppe des „Zentralbereich Forschung und Entwicklung“ der Siemens AG wurden mathematische Modelle entsprechend den Anforderungen der Planungsingenieure formuliert.

Die Zielvorgabe der Siemens AG für diese Dissertation ist, die Modellierung dieser praktischen Probleme gründlich zu untersuchen und weiterzuentwickeln. Für die entstehenden mathematischen Probleme sollen Lösungsverfahren implementiert werden, mit denen insbesondere untere Schranken für die Kosten des Netzwerks angegeben werden können. Die Qualität von heuristisch erhaltenen Lösungen kann durch den Vergleich mit den unteren Schranken bzw. mit der optimalen Lösung evaluiert werden.

Als Doktorand von Prof. Dr. M. Grötschel bin ich wechselweise am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin und am Siemens-Standort Neuperlach in München tätig gewesen. Mein Dank gilt allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppen in München und Berlin für die freundliche Aufnahme und für die Unterstützung.

Besonders herzlich bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. M. Grötschel für die Betreuung und die Ratschläge sowie bei Dr. Ralf Borndörfer, Thorsten Koch, Dr. Sven Krumke, Dr. Alexander Martin, Dr. Andreas Hefner, Oliver Malisch und Dr. Doris Tesch für viele ausführliche Diskussionen und hilfreiche Anregungen.

Ein herzlicher Dank gilt auch Prof. Dr. W. Büttner bzw. der Siemens AG für die Gewährung des Promotionsstipendiums sowie Prof. Dr. U. Lauther und Dr. Michael Hofmeister für die Betreuung und Hilfestellung am Siemens-Standort in Neuperlach.

Schließlich noch ein herzlicher Dank an meine Eltern, die mich während des Studiums unterstützt haben.

Berlin, den 29.September 1999

Hermann Stolle

Kapitel 1

Einleitung und Übersicht

1.1 Einleitung

Weltweit ist eine steigende Nachfrage nach Telekommunikations-Netzwerken zu beobachten. Unternehmen wie die Siemens AG bieten die Errichtung solcher Netzwerke an und bewerben sich bei entsprechenden Ausschreibungen. Um ein gutes Angebot abgeben zu können, werden halbautomatische Verfahren entworfen und eingesetzt, mit denen man die Kosten des Netzwerks schnell überschlagen und die Netzwerke nach Erteilung des Auftrags kostengünstig planen kann.

In dieser Dissertation werden mathematische Probleme formuliert und untersucht, die für die Lösung dieser praktischen Planungsprobleme eingesetzt werden sollen. Basierend auf dieser theoretischen Untersuchung wird ein Verfahren entworfen, implementiert und an praktisch relevanten Planungsproblemen getestet.

Zur Veranschaulichung dieser abstrakten Beschreibung des Dissertationsprojekts betrachten wir ein hierarchisch aufgebautes Telefonnetz in einer Stadt. An eine Zentralstation werden Bereichsverteiler angeschlossen, an die Bereichsverteiler Endverteiler und an die Endverteiler werden schließlich die Netzteilnehmer angeschlossen. Der Anschluß erfolgt mit Kabeln, Multiplexern und Verzweigern. Die Kabel sind in Tiefbaugräben zu verlegen. Das Ausheben eines Grabens ist nur an bestimmten Abschnitten des Planungsgebiets zulässig. Für die Leitungslänge zwischen den Verteilern sind Längenbeschränkungen zu beachten.

In der Praxis wird die Planung eines Telekommunikations-Netzwerks in aufeinanderfolgende Planungsschritte eingeteilt. In einem typischen Beispiel werden zuerst die Zentralstation, die Bereichsverteiler und die Endverteiler positioniert. Dann wird ein Netz von Tiefbaugräben entworfen. Schließlich werden die Standorte der Multiplexer und Verzweiger und die Routen der Verbindungskabel in diesem Tiefbaunetz festgelegt. Wir untersuchen speziell das Teilproblem, ein Tiefbaunetz für die Anbindung der Endverteiler an die Bereichsverteiler zu entwerfen. Das Planungsziel ist, die Kosten für die Tiefbaugräben und die Abstände der Endverteiler von den Bereichsverteilern in dem Tiefbaunetz gering zu halten. Für diese Abstände muß zusätzlich eine Längenbeschränkung eingehalten werden. Dieses Planungsproblem modellieren wir als mathematisches Optimierungsproblem in Digraphen:

Definition (Kabelproblem).
Gegeben sind ein Digraph $D = (V, A)$ mit **Quellen** $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, *und* **Senken** $T \subseteq V \backslash S$, $T \neq \emptyset$, *sowie jeweils nicht-negative* **Bogenlängen** $(l_a)_{a \in A}$, **Bogenkosten** $(c_a)_{a \in A}$, **Dipfadkostenfaktoren** $(\hat{d}_t)_{t \in T}$ *und* **Längenbeschränkungen** $(L_t)_{t \in T}$.

Eine Lösung des Kabelproblems ist ein Paar (B, Q) bestehend aus einer Bogenmenge $B \subseteq A$ und einer Dipfadfamilie $Q = (Q_t)_{t \in T}$ mit der Eigenschaft:
Für alle $t \in T$ ist Q_t ein (S, t)-Dipfad, für den $Q_t \subseteq B$ und die Längenbeschränkung $\sum_{a \in Q_t} l_a \leq L_t$ gilt.

Das Ziel ist, die Summe der Bogenkosten und der Dipfadkosten

$$\sum_{a \in B} c_a + \sum_{t \in T} \hat{d}_t \left(\sum_{a \in Q_t} l_a \right)$$

zu minimieren.

Die Quellen entsprechen den Bereichsverteilern und die Senken den Endverteilern. Die Bögen A entsprechen den möglichen Tiefbaugräben und die (S, t)-Dipfade entsprechen Kabelrouten. Eine detailliertere Beschreibung der praktischen Planungsprobleme findet sich in den Abschnitten 3.1 und 3.2. Eine ausführlichere Begründung der Formulierung des Kabelproblems enthalten die Abschnitte 3.3 und 3.4.

Der folgende Spezialfall des Kabelproblems ist identisch mit dem Steinerbaum-Problem in Digraphen: Die Menge S enthalte genau eine Quelle und alle Bogenlängen sind gleich null, so daß auch die Dipfadkosten $\sum_{t \in T} \hat{d}_t \left(\sum_{a \in Q_t} l_a \right)$ gleich null und die Längenbeschränkungen trivial erfüllt sind. Eine Übersicht über das Steinerbaum-Problem geben [Win87, Mac87, HR92, HRW92]. Bei dem Entwurf von Lösungsverfahren für das Kabelproblem orientieren wir uns an Untersuchungsergebnissen und -methoden für das Steinerbaum-Problem in Digraphen.

Da das Steinerbaum-Problem in Graphen ein $\mathcal{NP}$-schweres Optimierungsproblem ist, ist auch das Kabelproblem $\mathcal{NP}$-schwer. Ein erfolgreicher Ansatz, um $\mathcal{NP}$-schwere kombinatorische Optimierungsprobleme mit einer linearen Zielfunktion zu lösen, ist der folgende: Man ordnet jeder zulässigen Lösung des Optimierungsproblems einen 0/1-Vektor zu und bildet die konvexe Hülle über alle diese Vektoren. Anschließend bestimmt man ein System linearer Gleichungen und Ungleichungen, die für die konvexe Hülle gültig sind und diese möglichst gut beschreiben. Mit dieser Beschreibung und der Zielfunktion des Optimierungsproblems definiert man ein lineares Programm. Das lineare Programm wird entweder exakt gelöst, z. B. mit Schnittebenenverfahren, oder es werden Schranken für dessen Optimalwert mit dualen Heuristiken berechnet. Der Optimalwert des linearen Programms ist eine duale Schranke für den Optimalwert des Optimierungsproblems. So berechnete duale Schranken werden in einem Branch-and-Bound-Verfahren zur Lösung des kombinatorischen Optimierungsproblems eingesetzt.

Für $\mathcal{NP}$-schwere kombinatorische Optimierungsprobleme konnten vollständige Beschreibungen der konvexen Hülle der zulässigen Lösungen bislang noch nicht angegeben werden. Um eine möglichst gute Beschreibung der konvexen Hülle zu erhalten, ist oft eine exponentielle Anzahl von Gleichungen und Ungleichungen notwendig. Um lineare Programme mit einer exponentiellen Anzahl von Nebenbedingungen zu lösen, berücksichtigt man zuerst nur einen Teil dieser Nebenbedingungen und berechnet für das so vereinfachte lineare Programm eine optimale Lösung. Dann wird mit einem Separationsverfahren überprüft, ob alle Nebenbedingungen des originalen linearen Programms für diese Lösung gültig sind. Wenn nicht, werden die verletzten Nebenbedingungen zu der vereinfachten LP-Formulierung hinzugefügt und erneut optimiert. Grötschel, Lovász und Schrijver haben nachgewiesen, daß lineare Programme in polynomialer Laufzeit gelöst werden können, wenn das Separationsverfahren eine polynomiale Laufzeit hat (siehe dazu [GLS88]).

In ähnlicher Weise werden auch lineare Programme mit einer exponentiellen Anzahl von Variablen durch verzögerte Erzeugung von Variablen gelöst. Branch-and-Bound-Verfahren, in denen lineare Programme durch verzögerte Erzeugung von Variablen und Nebenbedingungen mit einem Schnittebenenverfahren gelöst werden, bezeichnet man als Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren.

Zu der Lösung von $\mathcal{NP}$-schweren kombinatorischen Optimierungsproblemen tragen noch weitere Verfahrensteile bei, insbesondere Heuristiken und Problemreduktionen. Mit den Heuristiken werden obere und untere Schranken für den Optimalwert des kombinatorischen Optimierungsproblems berechnet. Die Idee von Problemreduktionen ist es, unnötige Informationen aus der Problembeschreibung zu entfernen bzw. die Problembeschreibung durch Umformulierungen zu verringern.

In dieser Arbeit führen wir die theoretische Untersuchung für eine Verallgemeinerung des Kabelproblems, das Netzproblem, durch. Im einzelnen werden unterschiedliche LP-Formulierungen für das Netzproblem und Konzepte zu deren Lösung diskutiert sowie Problemreduktionen untersucht. Das Netzproblem enthält weitere mathematische Probleme, die als Spezialfall im Zusammenhang mit den praktischen Planungsproblemen diskutiert werden. Daher bleiben die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung auch für diese Probleme gültig.

Der Aufbau dieser Arbeit ist der folgende. Die wesentlichen Ergebnisse der theoretischen Untersuchung sind in Abschnitt 1.2 verzeichnet. Einen schnellen Überblick über Lösungsverfahren und deren experimentelle Ergebnisse liefern die Abschnitte 1.3 und 1.4. Die für diese Dissertation wichtigen mathematischen Definitionen und Begriffe werden in Kapitel 2 zusammenhängend dargestellt. In

Kapitel 3 werden die für Netzplanungen typischen Problemstellungen detailliert beschrieben und die Formulierung des Kabelproblems motiviert. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung des allgemeineren Netzproblems sind in Kapitel 4 aufgeführt. Dort werden insbesondere Problemreduktionen für das Netzproblem, Schnittebenenverfahren für lineare Programme mit einer exponentiellen Zahl von Variablen und von Nebenbedingungen und die Seitenflächenstrukturen der dem Netzproblem zugehörigen Polytope untersucht. In Kapitel 5 wird ein Verfahren zur Lösung des Kabelproblems beschrieben. Die experimentellen Ergebnisse dieses Verfahrens werden in Kapitel 6 vorgestellt.

1.2 Untersuchung des Netzproblems

Bei der Modellformulierung der praktischen Planungsprobleme wurden verschiedene Alternativen untersucht. Letztlich haben wir uns für das Kabelproblem entschieden. Allen Modellformulierungen ist gemeinsam, daß für den Anschluß einzelner Endverteiler bzw. für den Anschluß von Gruppen von Endverteilern Tiefbau, Kabel und elektronische Bauteile zur Verfügung gestellt werden müssen, und daß diese Netzbestandteile für den Anschluß von mehreren Endverteilern an das Telekommunikations-Netzwerk gemeinsam genutzt werden können.

Wenn zusätzliche Zielvorstellungen und technologische Nebenbedingungen für das Planungsproblem zu berücksichtigen sind, kann es erforderlich werden, das mathematische Problem allgemeiner zu formulieren. Damit die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung auch für solche Problemformulierungen genutzt werden können, wird eine Verallgemeinerung des Kabelproblems eingeführt, die wir Netzproblem nennen. Ein weiterer Vorteil der Betrachtung des Netzproblems ist, daß gut untersuchte kombinatorische Optimierungsprobleme als Spezialfall des Netzproblems interpretiert werden können. Die Ergebnisse für diese speziellen Probleme werden für das Netzproblem verallgemeinert. Auf diese Weise sind sie für das Kabelproblem und für andere Spezialfälle des Netzproblems anwendbar. Das Netzproblem lautet:

Definition (Netzproblem).
Gegeben sind eine Menge A von **Bauteilen** *eine Menge T von* **Zielpunkten***, eine Familie $(H_t)_{t \in T}$ von* **Anschlußmengen** $H_t \subseteq 2^A$, **Bauteilkosten** $(c_a)_{a \in A}$ *und* **Anschlußkosten** $(d_{t,P})_{t \in T, P \in H_t}$.

Eine zulässige Lösung des Netzproblems ist ein Paar (B, Q), bestehend aus einer Menge $B \subseteq A$ und einer Familie $Q = (Q_t)_{t \in T}$ von **Anschlüssen** $Q_t \in H_t$ *mit $Q_t \subseteq B$ für alle $t \in T$.*

Das Ziel ist, die Summe der Bauteilkosten und der Anschlußkosten

$$\sum_{a \in B} c_a + \sum_{t \in T} d_{t,Q_t}$$

zu minimieren.

Eine Instanz des Netzproblems notieren wir mit

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d).$$

Das Netzproblem ist sehr allgemein formuliert. Andere kombinatorische Optimierungsprobleme lassen sich als Spezialfall des Netzproblems darstellen. Dazu muß insbesondere angegeben werden, welche Eigenschaften die Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, haben und wie deren Anschlußkosten zu wählen sind.

Man betrachte das Kabelproblem als Spezialfall des Netzproblems: Die Bauteile sind die Bögen des Digraphen, die Zielpunkte sind die Senken und die Anschlüsse sind die zulässigen Dipfade. Die Bauteilkosten sind die Bogenkosten und die Anschlußkosten sind die Kosten des entsprechenden Dipfades.

Man betrachte mögliche Modellierungen der Planungsprobleme von Telefonnetzen als mathematisches Netzproblem. Die Bauteile entsprechen den möglichen Tiefbauabschnitten, den Kabeln und den elektronischen Bauteilen, deren Route bzw. Standort jeweils spezifiziert ist. Die Zielpunkte entsprechen einzelnen Endverteilern oder auch Gruppen von Endverteilern, und die Anschlußmengen entsprechen einer Liste von Tiefbauabschnitten, Kabeln und elektronischen Bauteilen, die für den Netzanschluß der Endverteiler benötigt werden.

Um die zulässigen Lösungen (B, Q) des Netzproblems Ψ als Inzidenzvektoren in einem geometrischen Raum darzustellen, werden unterschiedliche Variablenkonzepte diskutiert. Dazu werden die folgenden binären Auswahlvariablen eingeführt:

- Die **Bauteilvariablen** $(x_a)_{a \in A}$ haben die Bedeutung $x_a = 1$ genau dann, wenn das Bauteil a ausgewählt wurde, d. h. $a \in B$.

- Die **Anschlußvariablen** $(y_{t,P})_{t \in T, P \in H_t}$ haben die Bedeutung $y_{t,P} = 1$ genau dann, wenn der Anschluß P ausgewählt wurde, d. h. $P = Q_t$.

- Die **Nutzungsvariablen** $(z_{t,a})_{t \in T, a \in A}$ haben die Bedeutung $z_{t,a} = 1$ genau dann, wenn das Bauteil a für den Anschluß des Zielpunktes t genutzt wird, d. h. $a \in Q_t$.

Mit den Bauteilvariablen und den Anschlußvariablen definieren wir das ganzzahlige Programm

DEKO(Ψ) :

$$\min \quad c^T x + \sum_{t\in T, P\in H_t} y_{t,P} d_{t,P}$$

$$\begin{array}{llcclcl}
(1.1) & \forall\, t \in T: & & & \displaystyle\sum_{P\in H_t} y_{t,P} & = & 1 \\
(1.2) & \forall\, t \in T,\, a \in A: & x_a & - & \displaystyle\sum_{P\in H_t} y_{t,P}\chi_a^P & \geq & 0 \\
(1.3) & & x, & & y & & \text{sind 0/1-ganzzahlig.}
\end{array}$$

Der Vektor $\chi^P \in \mathbb{R}^A$ bezeichnet den Inzidenzvektor des Anschlusses $P \subseteq A$, das ist z. B. für Kabelprobleme der Inzidenzvektor eines Dipfades. Die Gleichungen (1.1) stellen sicher, daß für jeden Zielpunkt t ein Anschluß $P \in H_t$ ausgewählt wird. Die Ungleichungen (1.2) stellen sicher, daß für jeden ausgewählten Anschluß P auch die Bauteile aus P ausgewählt werden. Die Bezeichnung DEKO soll an das Dekompositionsprinzip von Dantzig und Wolfe erinnern [Dan63]. Die konvexe Hülle der zulässigen Lösungen des Programms DEKO(Ψ) bezeichnen wir mit PD(A, T, H) (**P**olytop **D**EKO).

Die lineare Relaxierung des Programms DEKO(Ψ), in der die Ganzzahligkeitsbedingungen (1.3) durch die Bedingungen $x, y \geq 0$ ersetzt werden, bezeichnen wir mit LDEKO(Ψ). Die oberen Schranken für die Anschlußvariablen sind in den Gleichungen (1.1) implizit enthalten. Die oberen Schranken für die Bauteilvariablen sind für nichtnegative Bauteilkosten überflüssig.

Dem Programm LDEKO(Ψ) ordnen wir das duale Programm DDEKO(Ψ) zu. Den Gleichungen (1.1) ordnen wir die dualen Variablen $(u_t)_{t\in T}$ zu. Den Ungleichungen (1.2) ordnen wir die dualen Variablen $(v_{t,a})_{t\in T, a\in A}$ zu.

Das duale Programm DDEKO(Ψ) lautet:

$$\max \sum_{t\in T} u_t$$

$$\begin{array}{llcclcl}
(1.5) & \forall\, a \in A: & & & \displaystyle\sum_{t\in T} v_{t,a} & \leq & c_a \\
(1.6) & \forall\, t \in T,\, P \in H_t: & u_t & - & \displaystyle\sum_{a\in P} v_{t,a} & \leq & d_{t,P} \\
(1.7) & & & & v & \geq & 0
\end{array}$$

Die Ungleichungen (1.5) sind den Bauteilvariablen x zugeordnet, die Ungleichungen (1.6) den Anschlußvariablen y.

Wir interpretieren das duale Programm DDEKO(Ψ) wie folgt: Für die Nutzung von Bauteilen $a \in A$ für den Anschluß von Zielpunkten $t \in T$ werden **Nutzpreise** $v_{t,a}$ mit $\sum_{t \in T} v_{t,a} \leq c_a$ festgelegt. Jedem Zielpunkt $t \in T$ wird ein Anteil an den primalen Kosten, der **Zielpreis** u_t, zugeordnet. Die Anschlußbedingungen sind gleichbedeutend mit den Ungleichungen

$$u_t \leq \min_{P \in H_t} \left(d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a} \right) \quad \text{für alle } t \in T.$$

Diese Minimierungsprobleme sind die **Pricingprobleme**, die in einem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren bei dem Unterproblem der verzögerten Erzeugung der Variablen zu lösen sind. Des weiteren sind Verfahren zur Lösung der Pricingprobleme wichtiger Bestandteil von dualen Heuristiken. Ist eine dual zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ gegeben, dann ist die Summe der Zielpreise $\sum_{t \in T} u_t$ eine untere Schranke für die Kosten der Lösung des Netzproblems Ψ.

Schnittebenenverfahren

Die Untersuchung des Netzproblems zielt darauf hin, ein Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren zu dessen Lösung zu entwerfen. In diesem Verfahren werden lineare Relaxierungen des ganzzahligen Programms DEKO(Ψ) formuliert und mit einem Schnittebenenverfahren gelöst. Die Probleme, die mit der verzögerten Erzeugung der Anschlußvariablen verbunden sind, werden im folgenden aufgezeigt.

Man betrachte ein Ungleichungssystem

$$\sum_{a \in A} \alpha_a(i) x_a + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t} \beta_{t,P}(i) y_{t,P} \geq \delta(i) \text{ für Indizes } i = 1, \ldots, n, \tag{1.8}$$

mit dem die folgende lineare Relaxierung des ganzzahligen Programms DEKO(Ψ) definiert wird:

$$\min \left\{ c^T x + d^T y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ist zulässig für LDEKO}(\Psi) \text{ und } \sum_{a \in A} \alpha_a(i) x_a + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t} \beta_{t,P}(i) y_{t,P} \geq \delta(i),\ i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{1.9}$$

Es wird angenommen, daß die Anschlußkosten $d_{t,P}$ wie beim Kabelproblem als Summe von nichtnegativen Nutzungskosten $\sum_{a \in P} \bar{d}_{t,a}$ gegeben sind. Den Ungleichungen des Systems (1.8) ordnen wir die dualen Variablen $(w_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, $w \geq 0$, zu. Das Pricingproblem des linearen Programms (1.9) lautet dann für die Anschlußvariablen des Zielpunktes $t \in T$:

$$\min_{P \in H_t} \left\{ \sum_{a \in P} \bar{d}_{t,a} + \sum_{a \in P} v_{t,a} - \sum_{i=1}^{n} \beta_{t,P}(i) w_i \right\}. \tag{1.10}$$

Wir diskutieren drei Fälle für die Auswahl der Ungleichungen des Systems (1.8).

1. Im allgemeinen Fall hängen die Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ nicht linear von den Bauteilen des Anschlusses P ab. Das Pricingproblem (1.10) ist dann ein nicht-lineares Optimierungsproblem. Wie gut dieses Optimierungsproblem für konkrete Probleminstanzen praktisch gut gelöst werden kann, zum Beispiel mit einem dynamischen Programm, hängt vom Einzelfall ab.

   Dieser allgemeine Fall findet auch auf die meisten Klassen von facettendefinierenden Ungleichungen für das Polytop PD zu. Die Facetten des Polytops PD sind von Bedeutung, da sie die stärksten Ungleichungen für lineare Relaxierungen des Programms LDEKO sind.

2. Die Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ hängen linear von den Bauteilen des Anschlusses P ab. Es existieren Koeffizienten $\gamma_{t,a}(i)$, $t \in T$, $a \in A$, mit $\beta_{t,P} = \sum_{a \in P} \gamma_{t,a}(i)$ für alle $t \in T$, $P \in H_t$. In diesem Fall ist das Pricingproblem (1.10) ein Optimierungsproblem, dessen Zielfunktion möglicherweise positive und negative Koeffizienten aufweist und linear in den Bauteilen A ist.

   Die stärksten Ungleichungen mit dieser Eigenschaft definieren Facetten für die konvexe Hülle der in dem Raum der Bauteilvariablen x und der Nutzungsvariablen z dargestellen Inzidenzvektoren der Lösungen des Netzproblems.

3. Alle Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ sind gleich null. Die Ungleichungen des Systems (1.8) lauten $\sum_{a \in P} \alpha_a(i) x_a \geq \delta(i)$, $i = 1, \ldots, n$. Das Pricingproblem (1.10) ist dann ein Optimierungsproblem mit nichtnegativer linearer Zielfunktion in den Bauteilen A.

   Die stärksten Ungleichungen mit dieser Eigenschaft definieren Facetten für die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der ausgewählten Bauteile in einer Lösung des Netzproblems.

Wenn die Anschlüsse der Anschlußmengen Dipfade in einem Digraphen sind, dann ist das Pricingproblem (1.10) das Problem, einen kürzesten Dipfad in einem Digraphen zu finden. Dieses Problem ist für nichtnegative Bogenkosten polynomial lösbar. Wenn andererseits die Anschlußmengen 0/1-Flüsse in einem Digraphen sind, dann ist das Pricingproblem (1.10) das Problem, einen billigsten 0/1-Fluß in einem Digraphen zu finden. Dieses Problem ist für beliebige Bogenkosten polynomial lösbar. Die Details dazu sind z. B. in dem Buch von Ahuja, Magnanti und Orlin [AMO93] zu finden.

Eine ausführlichere Diskussion von Schnittebenenverfahren für die Lösung von linearen Relaxierungen des ganzzahligen Programms DEKO(Ψ) wird in Abschnitt 4.3 durchgeführt.

Polyedrische Untersuchungen

Die Auswahl von Nebenbedingungen des linearen Programms (1.10) wirkt sich darauf aus, ob die Pricingprobleme in polynomialer Zeit lösbar sind. Im theoretischen Teil dieser Arbeit wird daher neben dem Polytop PD auch die konvexe Hülle der zulässigen Lösungen des Netzproblems Ψ im Raum der Bauteilvariablen und der Nutzungsvariablen polyedrisch untersucht.

Die zentrale Methode für die polyedrische Untersuchung des Netzproblems ist das sogenannte Lifting von Facetten. Bei dieser Methode wird eine Seitenfläche F des zu untersuchenden Polyeders P durch die Festlegung eines Teils der Auswahlvariablen auf null oder eins definiert. Für die Seitenflächen F werden facettendefinierende Ungleichungen gesucht, in denen die Koeffizienten der festgelegten Variablen gleich null sind. Anschließend werden Liftingkoeffizienten für die festgelegten Auswahlvariablen bestimmt und auf diese Weise die ursprüngliche Ungleichung zu einer facettendefinierenden Ungleichung für das Polyeder P geliftet.

Mit dem Lifting von Facetten sind also die Probleme verbunden, Facetten der Seitenfläche F zu bestimmen und zu separieren und Liftingkoeffizienten für die festgelegten Auswahlvariablen anzugeben und zu berechnen. Für das Netzproblem gehen wir dazu wie folgt vor. Durch eine geeignete Festlegung eines Teils der Auswahlvariablen definieren wir Seitenflächen F, die mit gut untersuchten Polytopen von Spezialfällen des Netzproblems identisch sind. Facetten dieser Polytope sind dementsprechend auch Facetten der Seitenfläche F. Für die Bestimmung von Liftingkoeffizienten kann die spezielle Struktur des Netzproblems ausgenutzt werden. Unter recht allgemeinen hinreichenden Kriterien, die insbesondere für praktisch relevante Facetten zutreffen, kann ein geschlossener Ausdruck für alle Liftingkoeffizienten angegeben werden.

Die Details der Anwendung von Liftingmethoden auf das Polytop PD und auf ein mit dem Netzproblem zusammenhängendes Polyeder im Raum der Bauteilvariablen und der Nutzungsvariablen sind in den Abschnitten 4.4 bzw. 4.5 wiedergegeben. In Abschnitt 4.5 wird eine Klasse von Ungleichungen, die Klasse der Blocker-PFL-Ungleichungen, angegeben. Diese Ungleichungen können für das Steinerbaum-Problem in Digraphen mit einem Min-Cut-Verfahren effizient separiert werden und in polynomial lösbaren LP-Formulierungen für das Steinerbaum-Problem in Digraphen eingesetzt werden. Unseres Wissens nach wird mit den Blocker-PFL-Ungleichungen die stärkste, bisher bekannte polynomial lösbare LP-Formulierung für das Steinerbaum-Problem in Digraphen erreicht. Die für das Steinerbaum-Problem in Digraphen formulierten Blocker-PFL-Ungleichungen sind auch für entsprechende Kabelprobleme gültig, wenn auch nicht notwendigerweise facettendefinierend.

Für das Netzproblem bzw. das speziellere Kabelproblem oder das Steinerbaum-Problem in Digraphen sind unterschiedliche Ansätze für LP-Formulierungen denkbar und sinnvoll. Diese unterscheiden sich insbesondere durch die verwendete Variablenmenge. Bei der Entscheidung für ein Variablenkonzept sind u. a. folgende Argumente abzuwägen. Eine große Anzahl von sinnvollen Variablen führt unter Umständen zu einer guten polyedrischen Beschreibung der zulässigen Lösungen des ganzzahligen Programms. Die Lösung des linearen Programms mit dem Simplexverfahren im Rahmen eines Schnittebenenverfahrens wird jedoch meistens stark erschwert. Wenn die Variablenmenge nur die notwendigsten Variablen enthält, dann sind die Auswahlmöglichkeiten für die lineare Zielfunktion eingeschränkt, und vielfach gestaltet sich die Suche nach einer guten polyedrischen Beschreibung des Problems schwierig. Die mit der Auswahl eines Variablenkonzepts zusammenhängenden Probleme werden in Abschnitt 4.6 diskutiert. LP-Formulierungen werden dort miteinander verglichen.

1.3 Lösungsverfahren

Für das Kabelproblem wurde das Lösungsverfahren Kabel-Opt entwickelt, das auf der LP-Formulierung LDEKO basiert. Für praktisch relevante Instanzen des Kabelproblems enthält das lineare Programm LDEKO jeweils mehr als einhunderttausend Variablen und Nebenbedingungen. Für die Lösung des linearen Programms LDEKO wird daher ein Schnittebenenverfahren entworfen, in dem die Variablen und die Nebenbedingungen verzögert erzeugt werden. Es stellt sich heraus, daß der Optimalwert des linearen Programms LDEKO den Optimalwert der betrachteten Instanzen des Kabelproblems sehr gut approximiert und häufig sogar erreicht. Andererseits ist ein geradlinig implementiertes Schnittebenenverfahren allein nicht in der Lage, für praktisch relevante Instanzen des Kabelproblems das lineare Programm LDEKO zu lösen oder gute untere Schranken zu berechnen.

Wir binden daher das Schnittebenenverfahren in einen größeren Rahmen innerhalb des Verfahrens Kabel-Opt ein. Das Verfahren Kabel-Opt enthält Problemreduktionen, primale und duale Verbesserungs-Heuristiken, eine Lagrange-Heuristik sowie ein Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren.

Das Konzept des Verfahrens Kabel-Opt ist, mit heuristischen Verfahren zuerst Lösungen des Kabelproblems und duale Lösungen des Programms LDEKO zu berechnen. Auf diese Weise können obere und untere Schranken für den Optimalwert der betrachteten Instanzen angegeben werden, die häufig nur wenige Prozentpunkte auseinanderliegen. Bezüglich der heuristischen Lösungen werden reduzierte Kosten insbesondere von Auswahlvariablen für Dipfade und Wurzelwälder abgeschätzt und dadurch Problemreduktionen bewirkt. Zur Verbesserung der heuristischen Lösungen werden auch die Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren für das Kabelproblem eingesetzt. Dazu werden Verbesserungsprobleme als Kabelprobleme so dimensioniert, daß die linearen Programme von den Schnittebenenverfahren bewältigt werden können.

Je mehr die primalen und die dualen Lösungen verbessert werden, desto mehr verringern Problemreduktionen die Größe des zu lösenden Kabelproblems. Zusätzlich wird in vielen Fällen die jeweilige Instanz des Kabelproblems bereits durch die heuristischen Verfahren optimal gelöst, ohne daß Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren eingesetzt werden müssen. Des weiteren werden die heuristischen dualen Lösungen genutzt, um bei der Initialisierung des Branch-and-Cut-and-

Price-Verfahrens Nebenbedingungen für eine Teilformulierung des linearen Programms LDEKO auszuwählen.

Das Verfahren Kabel-Opt wird in Kapitel 5 beschrieben. An vielen Stellen des Verfahrens tritt das Unterproblem auf, einen bezüglich einer Kostenfunktion kürzesten Weg mit beschränkter Länge zu finden. Dieses Unterproblem wird in Abschnitt 5.2 behandelt. Die Problemreduktionen sind in Abschnitt 5.3 aufgeführt. Abschnitt 5.4 enthält die Verbesserungsheuristiken und die Lagrange-Heuristik. Das Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren ist in Abschnitt 5.6 beschrieben.

1.4 Experimentelle Ergebnisse

Die Instanzen des Kabelproblems, die zum Test mit dem Verfahren Kabel-Opt berechnet wurden, haben den folgenden Ursprung. Die erste Gruppe wird aus Datensätzen von Stadtteilen erzeugt, in denen Telefonnetze geplant werden sollen. Die zweite Gruppe besteht zum einen aus Steinerbaum-Problemen in Graphen, die der Sammlung „SteinLib“ des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik entnommen wurden. Aus dieser Sammlung berechnen wir von Beasley erzeugte Zufallsinstanzen der Gruppen B-E, rechtwinklige Steinerbaum-Probleme der Gruppen ES10-ES40 mit 10 bis 40 Terminals und VLSI-Instanzen, die im Zusammenhang mit der Planung von elektronischen Schaltungen erzeugt wurden. In weiteren Berechnungen werden für die VLSI-Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen zusätzlich positive Längenbeschränkungen L und positive Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}$ eingeführt. Auf diese Weise wird der Zielvorstellung von kurzen Signallaufzeiten in der elektronischen Schaltung entsprochen.

Einen Überblick über die Ergebnisse für diese Instanzen liefert Tabelle 1.1. Die Zahlen der Tabelle geben an, wieviele Probleme eines gewissen Typs optimal oder nahezu optimal gelöst werden. Die Zeile Telefonnetz-Instanzen liest man wie folgt: Von insgesamt 105 Problemen dieses Typs wurden mit Kabel-Opt 65 optimal gelöst, bei insgesamt 87 (101) Instanzen wichen die obere und die untere Schranke um höchstens 2% (5%) ab. Nur vier Probleme hatten also eine schlechtere Gütegarantie.

Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen, die nicht mehr als 20 Senken aufweisen, werden besonders effektiv von dem Verfahren Kabel-Opt gelöst. Sechs VLSI-Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen, die Instanzen diw0795, diw0819, taq0365, dmxa1010, msm2492 und msm3829, die in der Forschungsliteratur noch ungelöst waren, wurden von dem Verfahren Kabel-Opt optimal gelöst.

Die Ergebnisse für die Instanzen der Telefonnetzplanung sind durchaus zufriedenstellend und für die Praxis akzeptabel. Für diese Instanzen ist die heuristisch berechnete Lösung im schlechtesten Fall höchstens zehn Prozent von der Optimallösung entfernt. In der Regel ist die Qualität der heuristischen Lösung jedoch

Tabelle 1.1: Ergebnisse des Verfahrens KABEL-OPT

	Gelöst	Garantie bis zu 2%	Garantie bis zu 5%	Gesamt
Kabelprobleme:				
Telefonnetz-Instanzen	65	87	101	105
VLSI-Instanzen mit $\hat{d}, L \neq 0$	85	96	112	116
Steinerbaum-Probleme:				
Gruppen B-E	54	69	76	78
Gruppen ES10-ES40	29	40	58	60
VLSI-Instanzen	83	93	107	116
Instanzen mit $\lvert T \rvert \leq 20$	132	135	137	137

besser als fünf Prozent (siehe Tabelle 1.1). Zur Lösung dieser praktisch relevanten Instanzen tragen alle Teile des Verfahrens KABEL-OPT bei.

Wesentlich für die Lösung der Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen ist die Kombination der heuristischen Verfahren mit den Problemreduktionen, die auf der Abschätzung reduzierter Kosten basieren. Diese in dem Verfahren KABEL-OPT enthaltenen Reduktionsverfahren sind neu und ermöglichen signifikante Reduktionen der jeweiligen Instanz auch dann, wenn die Lücke zwischen der unteren und der oberen Schranke noch ein Vielfaches der Bogenkosten beträgt. Die exakten Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren tragen zur Lösung von Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen nur wenig bei.

Zur Lösung von Steinerbaum-Problemen in Digraphen wurde von Koch und Martin ein leistungsfähiges Branch-and-Cut-Verfahren entwickelt, in dem weitere, speziell für das Steinerbaum-Problem in Digraphen entwickelte Reduktionsverfahren enthalten sind. Eine Kombination des Verfahrens von Koch und Martin [KM98] mit dem Verfahren KABEL-OPT halten wir für aussichtsreich.

Die experimentellen Ergebnisse des Verfahrens KABEL-OPT sind in Kapitel 6 beschrieben. Abschnitt 6.1 enthält die Beschreibung und die experimentellen Ergebnisse der Telefonnetz-Instanzen. Die Steinerbaum-Probleme und die VLSI-Probleme mit Dipfadkosten und Längenbeschränkungen werden in Abschnitt 6.2 mit den experimentellen Ergebnissen beschrieben.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel enthält Grundlagen aus den Bereichen Graphentheorie, Lineare Algebra, Lineare Programmierung und Komplexitätstheorie. Mit den Bezeichnungen und Begriffsbildungen in dieser Dissertation folgen wir fast vollständig dem Sprachgebrauch in [Grö85, Grö94]. Für Verweise auf weitere Literaturarbeiten empfehlen wir die Referenzen dort sowie in dem Buch [GLS88]. Begriffe und Bezeichnungen, die wir in abgeänderter Form verwenden werden in der Regel an der Stelle ihrer Verwendung nochmals kurz erläutert.

Es wird angenommen, daß der Leser mit den Grundbegriffen dieser Themengebiete vertraut ist. Dieses Kapitel dient daher hauptsächlich dazu, die Erklärung von Begriffen, die in dieser Dissertation benutzt werden, nachzuschlagen.

2.1 Graphen und Hypergraphen

2.1.1 Graphen und Digraphen

Ein **Graph** ist ein Tripel (V, E, ψ), bestehend aus einer nichtleeren Menge V, den **Knoten**, einer Menge E, den **Kanten** und einer **Inzidenzfunktion** ψ, die jeder Kante $e \in E$ ein ungeordnetes Paar ij von Knoten aus V zuordnet. Wir schreiben $\psi(e) = ij = ji$. Die Knoten i und j heißen **Endknoten** der Kante e. Wir sagen, daß die Knoten i und j mit der Kante e **inzidieren** und daß die Knoten i und j **Nachbarn** bzw. **adjazent** sind. Ein Knoten, der keine Nachbarn hat, heißt **isoliert**. Eine Kante e mit $\psi(e) = ii$ heißt **Schlinge**. Kanten e und f mit $\psi(e) = ij = \psi(f)$ heißen **parallel**. Graphen, die keine Schlingen enthalten und in denen keine zwei Kanten parallel sind, heißen **einfache Graphen**.

Ein Graph heißt **endlich**, wenn er endlich viele Knoten und Kanten enthält, andernfalls heißt er **unendlich**. Wir werden uns nur mit endlichen Graphen beschäftigen und sagen „Graph“ anstatt „endlicher Graph“. Die Benutzung der Inzidenzfunktion ψ führt zu einem relativ aufwendigen Formalismus. Wir vereinfachen daher die Notation und schreiben $e = ij$ anstatt $\psi(e) = ij$. Gibt es mehrere parallele Kanten mit den Endknoten i und j, und sprechen wir von der Kante ij, dann soll das heißen, daß wir eine der Kanten ij auswählen. Wir benutzen die Inzidenzfunktion nur, wenn Mehrdeutigkeiten vermieden werden müssen. Ansonsten schreiben wir $G = (V, E)$, um einen Graphen zu bezeichnen.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, dann heißt eine Menge F von Kanten ein **Schnitt**, wenn es eine Knotenmenge $W \subseteq V$ gibt, so daß

$$F = \delta(W) := \{ij \in E \mid i \in W \text{ und } j \notin W\}.$$

Anstatt $\delta(\{v\})$ schreiben wir $\delta(v)$. Wollen wir betonen, daß ein Schnitt $\delta(W)$ zwei Knotenmengen $S \subseteq W$ und $T \subseteq V \setminus W$ trennt, so sagen wir, daß $\delta(W)$ ein $[S, T]$-Schnitt ist. Einen $[\{s\}, \{t\}]$-Schnitt bezeichnen wir auch als $[s, t]$-Schnitt. Der **Grad** eines Knotens $i \in V$ ist die Anzahl der Kanten in dem Schnitt $\delta(i)$ plus die doppelte Anzahl der Schlingen $ii \in E$.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und ist $H = (W, F)$ ein Graph mit Knoten $W \subseteq V$ und Kanten $F \subseteq E$, dann heißt H ein **Untergraph** von G. Den Graphen, den wir durch Entfernen einer Teilmenge $F \subseteq E$ erhalten, bezeichnen wir mit $G - F$. Wir schreiben $G - f$, falls F nur die Kante f enthält.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $ij \in E$ eine Kante, dann bezeichnet man mit $G \cdot ij$ den Graphen, der nach **Kontraktion der Kante** ij erhalten wird. Die Knoten i und j ersetzen wir dabei durch einen Knoten v. Jede zu ij parallele Kante ersetzen wir durch eine Schlinge vv. Jede Kante ik oder jk ersetzen wir durch eine Kante vk.

Ein einfacher Graph heißt **vollständig**, wenn jedes Paar seiner Knoten durch eine Kante verbunden ist. Eine **Clique** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge Q, so daß je zwei Knoten aus Q benachbart sind. Eine **stabile Menge** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge S, so daß keine zwei Knoten aus S Nachbarn sind. Ein Graph G kann in die Ebene gezeichnet werden, indem man jeden Knoten durch einen Punkt repräsentiert und jede Kante durch eine Kurve, die die beiden Punkte verbindet. Ein Graph heißt **planar**, wenn er in die Ebene gezeichnet werden kann, so daß sich keine zwei Kanten bzw. deren Kurven außer in den Endpunkten berühren oder schneiden.

Ein **Digraph** oder **gerichteter Graph** $D = (V, A, \psi)$ besteht aus einer (endlichen) nichtleeren **Knotenmenge** V, einer (endlichen) Menge A von **Bögen** und einer Inzidenzfunktion ψ, die jedem Bogen $a \in A$ ein geordnetes Paar (i, j) von Knoten aus V zuordnet, d. h. $\psi(a) = (i, j)$. Wir werden die Inzidenzfunktion ψ in Unterabschnitt 5.3.3 verwenden. Ansonsten werden wir, genau wie für Graphen erläutert, $a = (i, j)$ schreiben. Der Knoten i heißt **Anfangsknoten**, der Knoten j heißt **Endknoten** des Bogens a. Der Bogen a **inzidiert** mit den Knoten i und j. Wie bei Graphen gibt es auch bei Digraphen **parallele Bögen** und **Schlingen**. Zwei Bögen (i, j) und (j, i) heißen **antiparallel**. Digraphen, die keine Schlingen enthalten und in denen keine zwei Kanten parallel sind, heißen **einfach**. Ein einfacher Digraph heißt **vollständig**, wenn jedes Paar seiner Knoten durch zwei antiparallele Bögen verbunden ist.

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph, $W \subseteq V$ eine Knotenmenge und $B \subseteq A$ eine Bogenmenge. Die Menge der Bögen, deren Anfangs- und Endknoten in W liegen, bezeichnen wir mit $A(W)$. Die Menge der Knoten, die mit einem Bogen aus B inzidieren, bezeichnen wir mit $V(B)$.

Ist $D = (V, A)$ ein Digraph und ist $D' = (W, B)$ ein Digraph mit $W \subseteq V$ und $B \subseteq A$, dann heißt D' der **Unterdigraph** von D. Den Digraphen, der durch das Entfernen einer Bogenmenge $B \subseteq A$ aus dem Digraphen D entsteht, bezeichnen wir mit $D - B$. Wir schreiben $D - b$, falls die Menge B nur den Bogen b enthält.

Ist $D = (V, A)$ ein Digraph und $(i, j) \in A$ ein Bogen, dann bezeichnet man mit $D \cdot (i, j)$ den Digraphen, der durch die **Kontraktion des Bogens** (i, j) entsteht. Wir ersetzen die Knoten i und j durch einen neuen Knoten v. Jeden zu (i, j) parallelen oder antiparallelen Bogen ersetzen wir durch eine Schlinge (v, v). Jeden Bogen (i, k) bzw. (j, k) ersetzen wir durch einen Bogen (i, v). Jeden Bogen (k, i) bzw. (k, j) ersetzen wir durch einen Bogen (v, k). In Unterabschnitt 5.3.3 beschreiben wir eine Digraphentransformation, die der Kontraktion eines Bogens ähnlich ist, aber von uns an spezielle Erfordernisse angepaßt wurde.

Eine Bogenmenge B heißt **Schnitt**, wenn es eine Knotenmenge $W \subseteq V$ gibt, so daß

$$B = \delta^+(W) := \{(i, j) \in A \mid i \in W \text{ und } j \notin W\}$$

Die Menge $\delta^+(W)$ ist also die Menge aller Bögen, deren Anfangsknoten in W und deren Endknoten in $V \backslash W$ liegt. Umgekehrt ist die Menge $\delta^-(W)$ die Menge aller Bögen, deren Endknoten in W liegt und deren Anfangsknoten in $V \backslash W$ liegt. Schließlich vereinbaren wir noch $\delta(W) = \delta^+(W) \cup \delta^-(W)$. Wenn die Menge W nur den Knoten i enthält, schreiben wir auch $\delta(i)$, $\delta^+(i)$ und $\delta^-(i)$. Wollen wir betonen, daß ein Schnitt $\delta^+(W)$ die Knotenmengen $S \subseteq W$ und $T \subseteq V \backslash W$ trennt, dann sprechen wir von einem (S, T)-Schnitt. Wir schreiben (s, t)-Schnitt, wenn die Menge S bzw. T nur das Element s bzw. nur das Element t enthält.

Ist $D = (V, A)$ ein Graph, dann ist der **Außengrad** eines Knotens i die Anzahl der Bögen aus A mit Startknoten i. Der **Innengrad** eines Knotens i ist die Anzahl der Bögen aus A mit Endknoten i.

2.1.2 Ketten, Pfade, Kreise und Bäume

Eine **Kette** in einem Graphen oder Digraphen ist eine endliche Folge

$$W = (i_0, e_1, i_1, \ldots, e_n, i_n),\ n \geq 0,$$

von Knoten $i_0, \ldots, i_n$ und Kanten $e_1 = i_0 i_1, \ldots, e_n = i_{n-1} i_n$ bzw. Bögen

$$e_1 \in \{(i_0, i_1), (i_1, i_0)\}, \ \ldots, \ e_n \in \{(i_{n-1}, i_n), (i_n, i_{n-1})\}.$$

Der Knoten i_0 ist der **Anfangsknoten** der Kette, der Knoten i_n ist der **Endknoten** der Kette. Die Knoten $i_1, \ldots, i_{n-1}$ heißen **innere Knoten** der Kette. Die Kette W wird auch $[i_0, i_n]$-Kette genannt. Falls in einem Digraphen alle Bögen $e_1, \ldots, e_n$ der Kette W gleichgerichtet sind, das heißt $e_m = (v_{m-1}, v_m)$, $1 \leq m \leq n$, dann heißt W **gerichtete Kette**. Für Indizes $0 \leq m \leq m' \leq n$ heißt die Kette $(i_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m'}, i_{m'})$ ein **$[i_m, i_{m'}]$-Segment** bzw. ein **$(i_m, i_{m'})$-Segment**, wenn die Kette W gerichtet ist. Wollen wir betonen, daß eine (gerichtete) Kette in einem Knoten der Menge S anfängt und in einem Knoten der Menge T endet, dann sprechen wir auch von einer $[S, T]$-Kette bzw. von einer gerichteten (S, T)-Kette.

Eine Kette, in der alle Knoten voneinander verschieden sind, heißt **Weg**. Eine Kette, in der alle Kanten bzw. alle Bögen verschieden sind, heißt **Pfad**. Eine Kette heißt **geschlossen**, falls sie mindestens eine Kante oder einen Bogen enthält und ihr Anfangsknoten mit ihrem Endknoten identisch ist. Eine geschlossene Kette, in der der Anfangsknoten und alle inneren Knoten paarweise verschieden sind, heißt **Kreis**. Ein Weg, ein Pfad oder ein Kreis in einem Digraphen, der eine gerichtete Kette ist, heißt **gerichteter Weg**, **gerichteter Pfad** bzw. **Dipfad** oder **gerichteter Kreis**. Wie bei Ketten sprechen wir auch von $[S, T]$-Wegen und von $[S, T]$-Pfaden bzw. von gerichteten (S, T)-Wegen und von (S, T)-Dipfaden.

In Wegen, Pfaden und Kreisen kommen Kanten bzw. Bögen nur einfach vor. Bei Wegen und Kreisen reicht die Angabe des Anfangsknotens, des Endknotens und der Kanten bzw. Bögen aus, um den Weg oder den Kreis festzulegen. Ein gerichteter Weg ist bereits durch die Angabe seiner Bögen festgelegt. Zur Vereinfachung der Bezeichnung werden wir daher Wege, Pfade und Kreise über die Menge ihrer Kanten bzw. Bögen ansprechen. Ist P die Menge der Kanten bzw. Bögen eines Pfades, so sprechen wir von dem Weg P. Ist C die Menge der Kanten bzw. Bögen eines Kreises, so sprechen wir von dem Kreis C.

Sind die Bögen A eines Digraphen mit reellen Längen l_a für alle $a \in A$ versehen, dann meinen wir mit der **Länge** eines Pfades P die Summe der Längen der Bögen aus P. Wir schreiben

$$l(P) := \sum_{a \in P} l_a$$

für die Länge des Pfades P. In ähnlicher Weise verfahren wir für andere Bogengewichte, z. B. Kosten oder Preise, und für andere Kanten- oder Bogenmengen, z. B. Kreise oder Schnitte.

Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, falls es zu jedem Paar s, t von Knoten einen $[s, t]$-Weg in G gibt. Ein Digraph D heißt **stark zusammenhängend**, falls es zu jedem Paar s, t von Knoten einen gerichteten (s, t)-Weg in D gibt. Die **Komponenten** eines Graphen G sind die bezüglich Kanteninklusion maximalen zusammenhängenden Untergraphen des Graphen G. Eine Kante e des Graphen G heißt **Brücke**, wenn der Graph $G - e$ mehr Komponenten hat als der Graph G.

Man betrachte einen Graphen $G = (V, E)$ und einen Digraphen $D = (V, A)$. Ein (gerichteter) Kreis, der alle Knoten V enthält, heißt **Hamilton-Kreis**. Ein (gerichteter) Weg, der alle Knoten V enthält, heißt **Hamilton-Weg**. Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt **azyklisch**.

Ein **Wald** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $F \subseteq E$, die keinen Kreis enthält. Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**. Ein Baum F in dem Graphen G heißt **aufspannend**, wenn er mit allen Knoten des Graphen inzidiert, d. h. $V = V(F)$. Ein **Wurzelwald** in einem Digraphen $D = (V, A)$ ist eine Bogenmenge $B \subseteq A$, so daß keine zwei Bögen aus B in demselben Knoten enden. Ein zusammenhängender Wurzelwald ist ein **Wurzelbaum**. Ein **aufspannender Wurzelbaum** ist ein Wurzelbaum B mit $V = V(B)$. In einem Wurzelbaum B bzw. in einem Wurzelwald B heißt ein Knoten $i \in V(B)$ eine Wurzel, wenn kein Bogen aus B in dem Knoten i endet. Jeder nichtleere Wurzelbaum enthält genau eine Wurzel.

2.1.3 Hypergraphen, Clutter und Blocker

Die in diesem Unterabschnitt vorgestellten Begriffsbildungen gehen auf Fulkerson zurück [Ful71]. Man beachte in diesem Zusammenhang auch [Ful72] und die Arbeit von Lehman [Leh79].

Ein **Hypergraph** H ist eine endliche Menge, deren Elemente $P \in H$ endliche Mengen sind. Die Elemente des Hypergraphen H sind die **Hyperkanten** des Hypergraphen H. Die Elemente der Hyperkanten $\bigcup_{P \in H} P$ sind die **Hyperknoten** des Hypergraphen H. Ein **Clutter** ist ein Hypergraph, in dem keine Hyperkante eine andere Hyperkante als Teilmenge enthält.

Wir bilden den Clutter $\mathrm{CL}(H)$ eines Hypergraphen H, indem wir alle Hyperkanten P aus H entfernen, die eine andere Hyperkante P' als echte Teilmenge enthalten.

Der **Blocker** $\mathrm{BL}(H)$ eines Hypergraphen H ist die Menge aller Teilmengen C der Hyperknoten des Hypergraphen H, für die gilt:

1. Die Menge C und jede Hyperkante $P \in H$ schneiden sich, d. h. $P \cap C \neq \emptyset$.

2. Für jede echte Teilmenge $C' \subsetneq C$ existiert eine Hyperkante $P \in H$, die C' nicht schneidet, d. h. $P \cap C' = \emptyset$.

Die Hyperkanten eines Blockers nennen wir auch **blockierende Mengen**. Der Blocker eines Hypergraphen ist ein Clutter.

Der Blocker eines Hypergraphen H ist durch den Clutter $\mathrm{CL}(H)$ bereits vollständig festgelegt. Es gilt

$$\mathrm{BL}(H) = \mathrm{BL}(\mathrm{CL}(H)).$$

Zur Veranschaulichung betrachte man einen Graphen $D = (V, A)$ und zwei seiner Knoten s und t. Die Menge der (s, t)-Dipfade $P \subseteq A$ in dem Digraphen D

sei $\mathcal{Q}$, die Menge der gerichteten (s,t)-Wege $P \subseteq A$ in dem Digraphen D sei $\mathcal{W}$ und die Menge der inklusionsminimalen (s,t)-Schnitte in dem Digraphen D sei $\mathcal{C}$.

Die Mengen $\mathcal{Q}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{C}$ sind Hypergraphen. Der Hypergraph $\mathcal{W}$ ist ein Clutter, denn kein gerichteter (s,t)-Weg ist in einem anderen gerichteten (s,t)-Weg als Teilmenge enthalten. Der Hypergraph $\mathcal{C}$ ist nach Definition ein Clutter.

Der Hypergraph $\mathcal{W}$ der gerichteten Wege ist der Clutter $\mathrm{CL}(\mathcal{P})$ des Hypergraphens der Dipfade. Jeder gerichtete Weg ist ein Dipfad, und jeder (s,t)-Dipfad enthält einen gerichteten (s,t)-Weg als Teilmenge.

Die Hypergraphen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{C}$ sind die Blocker des jeweils anderen Hypergraphen, das heißt $\mathcal{W} = \mathrm{BL}(\mathcal{C})$ und $\mathcal{C} = \mathrm{BL}(\mathcal{W})$. Jeder gerichtete (s,t)-Weg bildet mit jedem gerichteten (s,t)-Schnitt einen nichtleeren Durchschnitt. Wenn andererseits eine Bogenmenge B keinen gerichteten (s,t)-Weg (keinen gerichteten (s,t)-Schnitt) als Teilmenge enthält, dann existiert ein gerichteter (s,t)-Schnitt (ein gerichteter (s,t)-Weg) in dem Digraphen $D - B$.

2.2 Komplexitätstheorie

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige Grundbegriffe der Komplexitätstheorie. Die Darstellung erfolgt auf informellem Niveau. Für die kombinatorische Optimierung sind insbesondere die Klassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ und das Konzept der $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit wichtig. Diese Begriffe werden in Unterabschnitt 2.2.2 beschrieben. Der Unterabschnitt 2.2.1 erläutert zuvor die Begriffsbildungen, die wir für das Konzept der $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit benötigen.

2.2.1 Probleme, Komplexitäten und Laufzeiten

In der Mathematik kann das Wort „Problem“ sehr verschiedene Bedeutungen haben. Wir wollen ein **Problem** als eine Fragestellung auffassen, bei der mehrere Parameter offengelassen sind und für die wir eine Antwort oder eine Lösung suchen. Ein Problem wird dadurch definiert, daß alle seine Parameter beschrieben werden und daß genau angegeben wird, welche Eigenschaften eine Antwort oder eine Lösung haben soll. Wenn alle Parameter eines Problems mit expliziten Daten belegt sind, dann sprechen wir, wenn wir exakt sein wollen, von einer **Instanz** des Problems. In vielen Fällen bezeichnen wir aber auch eine Instanz eines Problems mit dem Begriff Problem, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Wir sagen, daß ein Verfahren ein Problem $\mathfrak{P}$ **löst**, wenn es für jede Instanz $\Pi \in \mathfrak{P}$ eine Lösung findet. Das Ziel des Entwurfs von Lösungsverfahren ist es, möglichst „effiziente“ Verfahren zu entwickeln. Wie messen wir die „Effizienz“ eines Verfahrens? Mathematiker und Informatiker haben hierzu verschiedene **Komplexitätsmaße** entwickelt. Wir diskutieren im folgenden die **Zeitkomplexität** und die **Speicherkomplexität** eines Verfahrens.

Wir wollen die Laufzeit und den Speicherbedarf eines Verfahrens mit der „Größe“ seiner Eingabedaten in Beziehung setzen. Die Größe der Eingabedaten messen wir entsprechend einem **Kodierungsschema**. Ganze Zahlen z kodieren wir binär. Dazu benötigen wir $\langle z \rangle := 1 + \lceil \log_2(|z|+1) \rceil$ Bits. Rationale Zahlen r haben eine Darstellung als Quotient ganzer Zahlen $r = \frac{p}{q}$. Die Kodierungslänge von rationalen Zahlen legen wir daher zu $\langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle$ fest. Die Kodierungslänge von Vektoren oder Matrizen ist die Summe der Kodierungslängen von ihren Einträgen. Einen Graphen $G = (V, E)$ kodieren wir als Kantenliste. Einen Digraph $D = (V, A)$ kodieren wir als Bogenliste. Dazu denken wir uns die Knoten von eins bis $|V|$ durchnumeriert. Die Nummer eines Knotens $i \in V$ sei $n(i)$. Eine Bogenliste entspricht einem Vektor, der für jeden Bogen $(i, j) \in A$ einen Vektoreintrag $(n(i), n(j))$ hat.

Wir stellen uns den Ablauf eines Verfahrens Φ auf einer Rechenanlage wie folgt vor. Das Verfahren Φ soll Instanzen Π eines Problems $\mathfrak{P}$ lösen. Die Instanzen liegen in kodierter Form vor. Die Anzahl der Zellen, die notwendig sind, um die Instanz Π vollständig anzugeben, nennen wir die **Kodierungslänge** $\langle \Pi \rangle$ der Instanz Π. Das Verfahren Φ liest die Daten und beginnt dann Operationen auszuführen, d. h. Zahlen zu berechnen, zu speichern, zu löschen und so weiter. Die Anzahl der Speicherzellen, die während der Ausführung des Verfahrens mindestens einmal benutzt werden, nennen wir den **Speicherbedarf** des Verfahrens Φ zur Lösung der Instanz Π.

Die **Laufzeit** des Verfahrens Φ zur Lösung der Instanz Π ist, vereinfachend beschrieben, die Anzahl der elementaren Operationen, die das Verfahren Φ bis zur Lösung der Instanz Π ausführt. Elementare Operationen sind das Lesen, das Schreiben und das Löschen von Speicherzellen sowie das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Vergleichen von rationalen oder von ganzen Zahlen. Um genauer zu sein, müssen wir diese elementaren Operationen mit der Kodierungslänge der involvierten Zahlen multiplizieren. In der Regel sind jedoch die Kodierungslängen der involvierten Zahlen nach oben beschränkt. Durch die Multiplikation der Laufzeit mit der oberen Schranke für die Kodierungslänge der involvierten Zahlen erhalten wir dann eine obere Schranke für die Anzahl der elementaren Rechenoperationen. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist diese Skalierung jedoch ohne Bedeutung.

Mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$. Die **Laufzeitfunktion** $f_\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eines Verfahrens Φ ist definiert durch

$$f_\Phi(n) := \max\{ \text{ Laufzeit von } \Phi \text{ zur Lösung von } \Pi \in \mathfrak{P} \text{ mit } \langle \Pi \rangle \leq n \ \}.$$

Die **Speicherplatzfunktion** $s_\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$s_\Phi(n) := \max\{ \text{ Speicherbedarf von } \Phi \text{ zur Lösung von } \Pi \in \mathfrak{P} \text{ mit } \langle \Pi \rangle \leq n \ \}.$$

Das Verfahren Φ hat eine **polynomiale Laufzeit**, wenn die Laufzeitfunktion f_Φ durch ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist, d. h. $f_\Phi(n) \leq p(n)$ für alle natürlichen Zahlen n. Wir sagen hierfür auch kurz, daß das Verfahren Φ ein **polynomiales Verfahren** ist.

Das Verfahren Φ hat einen **polynomialen Speicherbedarf**, wenn die Speicherplatzfunktion s_Φ durch ein Polynom $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist, d. h. $s_\Phi(n) \leq q(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

2.2.2 Die Klassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$, $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Ein **Entscheidungsproblem** ist ein Problem, dessen Antworten „ja“ oder „nein“ lauten. Zum Beispiel sind die Probleme „Ist eine natürliche Zahl n eine Primzahl?“ oder „Hat ein Graph G einen Hamilton-Kreis?“ Entscheidungsprobleme.

Die Klasse aller derjenigen Entscheidungsprobleme, für die ein polynomiales Lösungsverfahren existiert, wird mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Diese Definition ist recht informell. Um genauer zu sein, müßten wir zusätzlich über das Kodierungsschema und das Rechnermodell Rechenschaft ablegen. Wir verbleiben jedoch im weiteren auf dem informellen Niveau, um kompliziertere und unübersichtlichere Definitionen zu vermeiden.

Ein Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}$ gehört zur Klasse $\mathcal{NP}$ (co-$\mathcal{NP}$), wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für jede Instanz $\Pi \in \mathfrak{P}$, für welche die Antwort „ja“ („nein“) lautet, gibt es mindestens ein Objekt, mit dem die Korrektheit der Antwort überprüft werden kann.

2. Es gibt ein Verfahren Φ, das die Instanz Π und ein Zusatzobjekt Q als Eingabe akzeptiert und das in einer Laufzeit, die polynomial in $\langle \Pi \rangle$ ist, überprüft, ob die Instanz Π wegen des Objekts Q mit „ja“ („nein“) entschieden werden muß.

Zum Beispiel können wir das Problem, ob eine natürliche Zahl n eine Primzahl ist, dann leicht mit „nein“ entscheiden, wenn wir einen Teiler der Zahl n kennen. Wenn wir die Kantenfolge eines Hamilton-Kreises eines Graphen G kennen, dann können wir leicht mit „ja“ entscheiden, daß der Graph G einen Hamilton-Kreis enthält.

Sicher ist jedes Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}$ der Klasse $\mathcal{P}$ auch ein Entscheidungsproblem der Klasse $\mathcal{NP}$, d. h. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. Ein polynomiales Verfahren für das Problem $\mathfrak{P}$ benötigt keine Zusatzobjekte, um Instanzen $\Pi \in \mathfrak{P}$ zu lösen.

Gibt es Entscheidungsprobleme der Klasse $\mathcal{NP}$, für die kein polynomiales Lösungsverfahren existiert? Diese Frage ist offen. Man nimmt jedoch allgemein an, daß die Antwort positiv ausfällt und daß $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gilt. Wir wollen ein Kriterium dafür herausarbeiten, daß für ein Problem $\mathfrak{P} \in \mathcal{NP}$ „wahrscheinlich“ kein polynomiales Lösungsverfahren existiert.

Eine **polynomiale Transformation** eines Entscheidungsproblems $\mathfrak{P}$ in ein Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}'$ ist ein polynomiales Verfahren T, das eine kodierte Instanz $\Pi \in \mathfrak{P}$ in eine kodierte Instanz $\Pi' \in \mathfrak{P}'$ übersetzt, so daß die Antworten auf die Instanzen Π und Π' gleich lauten. Existiert für das Problem $\mathfrak{P}$ ein polynomiales Lösungsverfahren Φ', dann ist die Verkettung der Transformation T und des Lösungsverfahrens Φ' ein polynomiales Verfahren zur Lösung des Problems $\mathfrak{P}'$.

Ein Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}$ heißt **$\mathcal{NP}$-vollständig**, wenn $\mathfrak{P} \in \mathcal{NP}$ ist und wenn jedes Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}' \in \mathcal{NP}$ polynomial in $\mathfrak{P}$ transformiert werden kann. Eine Liste von $\mathcal{NP}$-vollständigen Problemen ist in dem Buch von Garey und Johnson [GJ79b] angegeben. Ein Entscheidungsproblem $\mathfrak{P}$, das $\mathcal{NP}$-vollständig ist, sehen wir als ein schwieriges Problem an. Wenn nämlich ein polynomiales Lösungsverfahren für das Problem $\mathfrak{P}$ existieren würde, dann ist jedes Entscheidungsproblem der Klasse $\mathcal{NP}$ durch ein polynomiales Verfahren lösbar. Dies wird jedoch allgemein bezweifelt. Trotz großer Forschungsanstrengungen ist es bisher nicht gelungen, ein polynomiales Lösungsverfahren für ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem anzugeben.

Wir wollen auch Optimierungsprobleme in diese Betrachtungen mit einbeziehen. Jedem Optimierungsproblem ordnen wir ein Entscheidungsproblem zu. Ist $\mathfrak{P}$ ein Minimierungsproblem, so legen wir zusätzlich zu jeder Instanz $\Pi \in \mathfrak{P}$ eine Schranke B fest und formulieren das Entscheidungsproblem Π':

Gibt es für die Instanz Π eine Lösung, deren Wert nicht größer als B ist?

Wenn wir ein Lösungsverfahren für das Optimierungsproblem Π kennen, dann können wir das Entscheidungsproblem Π' dadurch lösen, daß wir die optimale Lösung von Π berechnen und den Wert mit der Schranke B vergleichen. Wenn wir ein Lösungsverfahren für das Entscheidungsproblem Π' kennen, dann können wir das Optimierungsproblem Π mit einer Intervallschachtelung durch iteratives Lösen des Entscheidungsproblems Π lösen.

Wir nennen ein Optimierungsproblem **$\mathcal{NP}$-schwer**, wenn das zugeordnete Entscheidungsproblem $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Wenn jemand ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem mit einem polynomialen Verfahren lösen kann, dann hat er gleichzeitig $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ bewiesen.

Der wichtigste Aspekt dieses Abschnitts ist, eine Unterscheidung zwischen „einfachen“ Problemen und „schwierigen“ Problemen treffen zu können. Für schwierige Probleme, das sind die $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme, muß man andere Wege beschreiten als für polynomial lösbare Probleme.

2.3 Lineare Algebra und Polyedertheorie

2.3.1 Grundlegende Notation

Mit den Symbolen $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$) bezeichnen wir die Menge der reellen (natürlichen) Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Null nicht. Für eine natürliche Zahl n bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n$, ($\mathbb{N}^n$) die Menge der Vektoren mit n Einträgen in $\mathbb{R}$

($\mathbb{N}$). Für eine natürliche Zahl n bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_n$ die Zahlen 1, ... , n und mit $\mathbb{N}_n^0$ die Zahlen 0, 1, ... , n.

Wenn E und R Mengen sind, dann ist R^E die Menge der Abbildungen von E nach R. Wenn die Menge E endlich ist, fassen wir die Elemente von R^E als Vektoren mit $|E|$ Komponenten auf. Jede Komponente des Vektors $x \in R^E$ wird indiziert mit einem Element $e \in E$, d. h. $x = (x_e)_{e \in E}$. Sei F eine Teilmenge der Menge E. Mit dem Ausdruck $x(F)$ bezeichnen wir die Summe der Komponenten x_f, $f \in F$, d. h.

$$x(F) := \sum_{f \in F} x_f.$$

Wir nennen den Vektor $\chi^F \in \mathbb{R}^E$, der definiert ist durch

$$\chi_e^F = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in F \text{ und} \\ 0 & \text{falls } e \in E \setminus F \end{cases}$$

Inzidenzvektor. Vektoren fassen wir immer als Spaltenvektoren auf. Das hochgestellte „T" bedeutet **Transposition**. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist x^T ein Zeilenvektor. Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ bilden wir das **(Euklidische) innere Produkt** durch

$$x^T y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Wir werden häufig Vektoren x betrachten, deren Indizes Elemente (t, a) einer Menge I von geordneten Paaren sind. Wir notieren solche Vektoren mit $(x_{t,a})_{(t,a) \in I}$ oder auch mit $(x_{t,a})_{t \in T, a \in A}$, wenn die Menge $I = T \times A$ die Menge der geordneten Paare (t, a), $t \in T$, $a \in A$ ist.

Für eine reelle Zahl α bedeutet das Symbol $\lfloor \alpha \rfloor$ (alpha abgerundet) die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich α ist. Das Symbol $\lceil \alpha \rceil$ (alpha aufgerundet) bedeutet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich α ist und das Symbol $\lfloor \alpha \rceil := \lceil \alpha - \frac{1}{2} \rceil$ (alpha gerundet) bedeutet die nächste ganze Zahl zu α.

Für zwei Mengen M, N bedeutet der Ausdruck $M \subseteq N$, daß M eine Teilmenge von N ist. Der Ausdruck $M \subset N$ bedeutet, daß M eine echte Teilmenge von N ist, daß heißt $M \subseteq N$ und $M \neq N$. Die (mengentheoretische) Differenz zweier Mengen notieren wir mit $M \setminus N = \{x \in M | x \notin N\}$. Die **Potenzmenge** 2^M ist die Menge aller Teilmengen der Menge M. Für Teilmengen M, N des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$M + N := \{x + y \,|\, x \in M,\ y \in N\}.$$

Die **obere Dominante** $\mathrm{dmt}(M)$ der Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Summe von M mit dem positiven Orthanten, d. h.

$$\mathrm{dmt}(M) = M + \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq 0\}.$$

Für eine Menge R und natürliche Zahlen m und n bedeutet $R^{m\times n}$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in R. Für eine Matrix $A \in R^{m\times n}$ gehen wir davon aus, daß der Zeilenindex von eins bis m läuft und der Spaltenindex von eins bis n. Die Elemente der Matrix A schreiben wir $a_{i,j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Sei M die Menge der Zeilenindizes und N die Menge der Spaltenindizes einer Matrix $A = (a_{m,n})_{m\in M, n\in N}$. Für eine Teilmenge I der Zeilenindizes M und eine Teilmenge J der Spaltenindizes N bezeichnet $A_{I,J}$ die Matrix $(a_{i,j})_{i\in I, j\in J}$. Anstatt $A_{M,J}$ schreiben wir auch $A_{\cdot,J}$, und anstatt $A_{I,N}$ schreiben wir auch $A_{I,\cdot}$.

Wenn wir nicht explizit angeben, ob eine Zahl, ein Vektor oder eine Matrix ganzzahlig oder reell ist, dann nehmen wir implizit an, daß diese(r) reell ist. In einigen Fällen geben wir die Dimension der Vektoren oder Matrizen nicht an. Wenn wir mit diesen operieren, nehmen wir an, daß deren Dimensionen kompatibel sind.

Das Symbol 0 kennzeichnet eine Matrix oder einen Vektor, deren Einträge alle null sind. Den **j-ten Einheitsvektor** in $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit e_j.

2.3.2 Hüllen, Unabhängigkeit und Dimension

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird Linearkombination der Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ genannt, wenn ein Koeffizientenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^k$ existiert, so daß gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \,.$$

Wenn der Vektor λ nichtnegativ ist, dann nennen wir x auch eine **konische Kombination** . Wenn die Summe $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ der Koeffizienten gleich eins ist, dann nennen wir x auch eine **affine Kombination**. Eine Kombination, die affin und konisch ist, nennen wir eine **konvexe Kombination**. Wenn der Vektor λ null oder ein Einheitsvektor ist, nennen wir die Kombination **trivial**, ansonsten **nichttrivial**.

Für eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\operatorname{lin}(S)$ ($\operatorname{cone}(S)$, $\operatorname{aff}(S)$, $\operatorname{conv}(S)$) die **lineare (konische, affine, konvexe) Hülle** der Elemente von S, das ist die Menge der Vektoren, die eine lineare (konische, affine, konvexe) Kombination von endlich vielen Vektoren aus der Menge S sind. Für die leere Menge definieren wir $\operatorname{lin}(\emptyset) := \operatorname{cone}(\emptyset) := \{0\}$ und $\operatorname{aff}(\emptyset) := \operatorname{conv}(\emptyset) := \emptyset$.

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein **linearer (konischer, affiner, konvexer) Unterraum**, wenn die Teilmenge mit ihrer linearen (konischen, affinen, konvexen) Hülle identisch ist, das heißt $S = \operatorname{lin}(S)$, $S = \operatorname{cone}(S)$, $S = \operatorname{aff}(S)$ bzw. $S = \operatorname{conv}(S)$.

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **linear (affin) unabhängig**, wenn keines ihrer Elemente als eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der Menge S dargestellt werden kann. Andernfalls nennen wir die Menge S **linear (affin) abhängig**. Eine linear (affin) unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ enthält höchstens n

Elemente ($n+1$ Elemente). Die **Dimension** $\dim(S)$ einer Menge S ist die Kardinalität einer größtmöglichen affin unabhängigen Teilmenge der Menge S minus eins.

2.3.3 Polyeder und Ungleichungssysteme

Wenn A eine reelle $m \times n$-Matrix ist und b ein reeller Vektor mit Dimension m, dann ist $Ax \leq b$ ein **System von (linearen) Ungleichungen** und $Ax = b$ ein **System von (linearen) Gleichungen**. Die Menge der Lösungen

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

eines Systems von linearen Ungleichungen ist ein **Polyeder**. Ein Polyeder P, das Teilmenge einer Kugel

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x^T x} \leq R\}$$

mit irgendeinem positivem Radius R ist, ist ein **Polytop**. Ein **Kegel** ist die konische Hülle einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein **polyedrischer Kegel** ist ein Kegel, der ein Polyeder ist.

Wenn $a \neq 0$ ein reeller Vektor mit Dimension n ist und a_0 eine reelle Zahl, dann ist das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a_0\}$ ein **Halbraum** und das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = a_0\}$ eine **Hyperebene**. Um die Notation zu vereinfachen, sprechen wir auch von dem Halbraum $a^T x \leq a_0$ und der Hyperebene $a^T x = a_0$. Jedes Polyeder ist der Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

Eine Ungleichung $a^T x \leq a_0$ heißt **gültig** für ein Polyeder P, wenn das Polyeder P Teilmenge des Halbraums $a^T x \leq a_0$ ist. Eine Teilmenge F eines Polyeders P heißt **Seitenfläche** von P, wenn eine gültige Ungleichung $a^T x \leq a_0$ existiert, so daß die Menge F gleich dem Durchschnitt des Polyeders P mit der Hyperebene $a^T x = a_0$ ist. Wir sagen, daß die Menge F die durch $a^T x \leq a_0$ **definierte Seitenfläche** ist. Eine **Facette** eines Polyeders P ist eine nichtleere Seitenfläche des Polyeders P mit Dimension $\dim(P) - 1$.

Wenn v ein Punkt des Polyeders P ist und $\{v\}$ eine Seitenfläche des Polyeders P, dann ist v eine **Ecke** des Polyeders P. Ein Polyeder heißt **spitz**, wenn es mindestens eine Ecke enthält. Wenn für Vektoren $x, z \in \mathbb{R}^n$ und ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge

$$F = \{v\} + \mathrm{lin}(\{z\}) = \{x + \lambda z \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ bzw.}$$
$$F' = \{v\} + \mathrm{cone}(\{z\}) = \{x + \lambda z \mid \lambda \geq 0\}$$

eine Seitenfläche des Polyeders P ist, dann ist die Seitenfläche F eine **Extremallinie** bzw. die Seitenfläche F' ein **Extremalstrahl** des Polyeders P.

Ein Polyeder ist entweder spitz oder es enthält eine Extremallinie. Ein Polytop enthält weder Extremallinien noch Extremalstrahlen. Jedes Polytop P ist die konvexe Hülle seiner Ecken V, das heißt $P = \operatorname{conv}(V)$. Ein Polytop heißt **ganzzahlig**, wenn seine Ecken ganzzahlig sind. Der **Rezessionskegel** $\operatorname{rec}(S)$ einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$\operatorname{rec}(S) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid x + \lambda w \in S \text{ für alle } x \in S \text{ und alle } \lambda \geq 0\colon\}\,.$$

Jeder Kegel K ist die konische Hülle seiner Extremalstrahlen E, d. h.

$$K = \operatorname{cone}(E).$$

Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken. Jedes Polyeder hat eine Darstellung der Form

$$P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(E)\,,$$

wobei V und E endliche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind. Diese Darstellung nennt man die **innere Darstellung** des Polyeders P. Die Darstellung

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

nennt man die **äußere Darstellung** des Polyeders P.

2.4 Lineare und ganzzahlige Programmierung

Lineare Programmierungsprobleme bzw. lineare Programme bilden das theoretische Rückgrat der Optimierungsverfahren in dieser Dissertation. Unterabschnitt 2.4.1 definiert lineare Programme und duale Programme und stellt das Dualitätstheorem und den Satz vom komplementären Schlupf vor. Ganzzahlige lineare Programme werden in Unterabschnitt 2.4.2 definiert und das Reduzierte-Kosten-Kriterium beschrieben. In Unterabschnitt 2.4.3 wird dargestellt, wie kombinatorische Optimierungsprobleme als ganzzahlige lineare Programme dargestellt werden können.

2.4.1 Lineare Programme und Dualität

Ein **lineares Programm** ist das folgende Problem:
Gegeben sind ein Ungleichungssystem $Ax \geq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, und ein reeller n-dimensionaler **Kostenvektor** c. Finde einen Vektor

$$x^* \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

der die **Zielfunktion** $c^T x$ minimiert.

Wir notieren ein lineares Programm mit den Kurzschreibweisen

$$\begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{array} \quad \text{oder} \quad \min\{c^T x \mid Ax \geq b\} \quad \text{oder} \quad \min\{c^T x \mid x \in P\}.$$

Ein Vektor $\bar{x}$, der die Ungleichungen des Systems $Ax \geq b$ erfüllt, heißt **zulässige Lösung** des linearen Programms. Eine zulässige Lösung x^* ist eine **optimale Lösung** des linearen Programms, wenn für alle zulässigen Lösungen $\bar{x}$ des linearen Programms $c^T x^* \leq c^T \bar{x}$ gilt.

Wenn wir die Zielfunktion $c^T x$ maximieren wollen, anstatt sie zu minimieren, dann sprechen wir ebenfalls von einem linearen Programm und benutzen dieselbe Terminologie, wie oben eingeführt. Eine Zielfunktion $c^T x$ zu minimieren ist gleichbedeutend damit, eine Zielfunktion $(-c)^T x$ zu maximieren. Ein System von Ungleichungen $Ax \geq b$ können wir alternativ durch $(-A)x \leq (-b)$ darstellen. Ein System von Gleichungen $Ax = b$ können wir auch als System von Ungleichungen $\binom{A}{-A} x \geq \binom{b}{-b}$ darstellen. Wenn wir ein System von Ungleichungen $Ax \geq b$ durch ein System von Gleichungen darstellen wollen, dann führen wir für jede Ungleichung $A_{i,\cdot} x \geq b_i$, $i \in \mathbb{N}_m$, eine nichtnegative **Schlupfvariable** s_i ein. Auf diese Weise können wir das lineare Programm $\min\{c^T x \mid Ax \geq b\}$ alternativ durch

$$\min\{c^T x \mid Ax - s = b \text{ und } s \geq 0\}$$

darstellen. Nichtnegativitäts-Bedingungen für alle Variablen können wir dadurch erreichen, indem wir die Variablen x in einen positiven Anteil x^+ und einen negativen Anteil x^- aufspalten. Das lineare Programm $\min\{c^T x \mid Ax \geq b\}$ stellen wir dann alternativ dar durch

$$\min\{c^T (x^+ - x^-) \mid A(x^+ - x^-) \geq b \text{ und } x^+, x^- \geq 0\}\,.$$

Es gibt also viele verschiedene Möglichkeiten, ein lineares Programm darzustellen. Wir wählen im folgenden die Darstellung

$$\text{(LP)} \qquad \min\{c^T x \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0\}$$

mit einer reellen $m \times n$ Matrix und Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $b \in \mathbb{R}^m$.

Mit jedem linearen Programm (LP) ist ein **duales (lineares) Programm**

$$\text{(DP)} \qquad \max\{w^T b \mid w^T A \leq c \text{ und } w \geq 0\}$$

verbunden. Das lineare Programm (LP) heißt daher auch das **primale (lineare) Programm**. Der Vektor x heißt **(primaler) Variablenvektor**. Die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ des Vektors x heißen **(primale) Variablen**. Die Ungleichungen $A_{i\cdot} x \geq b_i$, $1 \leq i \leq m$ heißen **(primale) Nebenbedingungen**.

Jeder primalen Nebenbedingung $A_{i\cdot} x \geq b_i$ ordnen wir eine nichtnegative **duale Variable** w_i zu. (Primale Nebenbedingungen können auch als Gleichung z. B. $A_{i,\cdot} x - s_i = b_i$ dargestellt werden. Einer solchen Gleichung ordnen wir eine Vorzeichen-ungebundene duale Variable w_i zu.)

Jeder primalen Variablen $x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, ordnen wir die **duale Nebenbedingung** $w^T A_{\cdot j} \leq c_j$ zu. (Wenn die primale Variable x_j ungebunden ist, dann ordnen wir der Variablen x_j die duale Nebenbedingung $w^T A_{\cdot,j} = c_j$ zu.)

Sei $\bar{w}$ eine zulässige Lösung des dualen Programms (DP). Wir nennen den Vektor

$$r := r(\bar{w}) := c - \bar{w}^T A \geq 0$$

Vektor der reduzierten Kosten. Die Komponenten r_j des Vektors r nennen wir **reduzierte Kosten (der Variablen x_j)**.

Sei $\bar{x}$ eine zulässige Lösung des primalen Programms (LP). Der Vektor

$$s := s(\bar{x}) := A\bar{x} - b \geq 0$$

ist der **Schlupfvektor**. Die Komponenten s_i des Schlupfvektors sind die Schlupfvariablen.

Für eine primal zulässige Lösung $\bar{x}$ und eine dual zulässige Lösung $\bar{w}$ gilt:

$$c^T\bar{x} \geq c^T\bar{x} - r^T\bar{x} = \bar{w}^T A\bar{x} = \bar{w}^T b + \bar{w}^T s \geq \bar{w}^T b\,.$$

Das folgende fundamentale Theorem stellt eine weitere Beziehung zwischen dem primalen und dem dualen Programm her.

Theorem 2.4.1.1 (Dualitätstheorem). *Gegeben seien ein primales lineares Programm* (LP) *und ein duales Programm* (DP). *Wenn beide linearen Programme* (LP) *und* (DP) *zulässige Lösungen haben, dann existiert eine optimale Lösung x^* des linearen Programms* (LP) *und eine optimale Lösung w^* des dualen Programms* (DP), *deren Zielfunktionswert gleich ist, d. h. $c^T x^* = (w^*)^T b$.*

Wenn eines der linearen Programme (LP) *oder* (DP) *keine zulässige Lösung hat, dann ist das jeweils andere lineare Programm entweder unbeschränkt oder es hat auch keine zulässige Lösung. Wenn eines der linearen Programme* (LP) *oder* (DP) *unbeschränkt ist, dann hat das jeweils andere lineare Programm keine zulässige Lösung.*

Eine nützliche Bedingung für die optimale Lösung von linearen Programmen liefert das folgende Theorem.

Theorem 2.4.1.2 (Satz vom komplementären Schlupf).
Gegeben seien ein primales Programm (LP) *mit einer zulässigen Lösung $\bar{x}$ und ein duales Programm* (DP) *mit einer zulässigen Lösung $\bar{w}$.*

Die Lösungen $\bar{x}$ und $\bar{w}$ sind genau dann optimal für die linearen Programme (LP) *bzw.* (DP), *wenn gilt:*

$$r(\bar{w})^T\bar{x} = (c^T - \bar{w}^T A)\bar{x} = 0 \textit{ und } \bar{w}^T s(\bar{x}) = \bar{w}^T(A\bar{x} - b) = 0$$

Das ist gleichbedeutend mit den Implikationen

$$\begin{aligned} \bar{x}_j > 0 &\Rightarrow r_j = 0\,, \\ r_j > 0 &\Rightarrow \bar{x}_j = 0\,, \\ \bar{w}_i > 0 &\Rightarrow s_i = 0\,, \\ s_i > 0 &\Rightarrow \bar{w}_i = 0 \end{aligned}$$

für alle Spaltenindizes $j \in \mathbb{N}_n$ und alle Zeilenindizes $i \in \mathbb{N}_m$.

Da die Kostenfunktion einer zulässigen Lösung linear ist, ist die Menge der optimalen Lösungen eine Seitenfläche der Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

der zulässigen Lösungen. Wenn das Polyeder P spitz ist, dann enthält jede Seitenfläche des Polyeders P mindestens eine Ecke. Wenn das Polyeder P spitz ist und das lineare Programm $\min\{c^T x \mid x \in P\}$ beschränkt ist, dann existiert eine optimale Lösung $x^* \in P$, die eine Ecke des Polyeders P ist. Daraus folgt, daß jedes lineare Programm über ein nichtleeres Polytop eine optimale Ecke besitzt.

2.4.2 Ganzzahlige Programme

Ein **ganzzahliges (lineares) Programm** ist das folgende Problem:
Gegeben sind ein Ungleichungssystem $Ax \geq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, und ein reeller n-dimensionaler **Kostenvektor** c. Gesucht ist ein ganzzahliger Vektor

$$x^* \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

der die Zielfunktion $c^T x$ minimiert.

Wie schon für lineare Programme erläutert, lassen sich auch ganzzahlige Programme auf verschiedene Art darstellen. Wir wollen im folgenden die Darstellung

$$\text{(ILP)} \qquad \min\{c^T x \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0 \text{ ist ganzzahlig. }\}$$

für ein ganzzahliges Programm wählen.

Das lineare Programm, das durch die Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingung entsteht, ist die **LP-Relaxierung** bzw. die **lineare Relaxierung** des ganzzahligen Programms (ILP). Wir können die folgenden Relationen aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{(ILP)} & \min\{c^T x \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0 \text{ ist ganzzahlig. }\} \geq \\ \text{(LP)} & \geq \min\{c^T x \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0\} = \\ \text{(DP)} & = \max\{w^T b \mid w^T A \leq c \text{ und } w \geq 0\}. \end{array}$$

Wir sagen, daß das Ungleichungssystem $Ax \geq b$ **total primal ganzzahlig** ist, wenn A und b rational sind und für jeden Kostenvektor c die Optimalwerte der Programme (ILP) und (LP) gleich sind. Geometrisch gesprochen bedeutet total primale Ganzzahligkeit, daß das Polyeder P die konvexe Hülle seiner ganzzahligen Punkte ist.

Die Kosten einer optimalen Lösung des linearen Programms (LP) sind eine untere Schranke für den Optimalwert des ganzzahligen Programms (ILP). Die Kosten $\bar{w}^T b$ jeder zulässigen Lösung $\bar{w}$ des dualen Programms (DP) sind eine untere Schranke für den Optimalwert des linearen Programms (LP) und daher auch eine untere Schranke für den Optimalwert des ganzzahligen Programms (ILP).

Die Kosten jeder zulässigen Lösung des ganzzahligen Programms (ILP) sind eine obere Schranke für den Optimalwert des ganzzahligen Programms (ILP). Durch die Formulierung linearer Relaxierungen und die Suche nach zulässigen ganzzahligen Lösungen läßt sich also der Optimalwert eines ganzzahligen Programms einschränken.

Das folgende Theorem zieht Nutzen aus einer guten Einschränkung des Optimalwerts des ganzzahligen Programms (ILP).

Theorem 2.4.2.1 (Reduzierte-Kosten-Kriterium).
Seien ein ganzzahliges Programm (ILP) *mit einer zulässigen Lösung $\bar{x}$, ein lineares Programm* (LP) *und das dazu duale Programm* (DP) *mit einer zulässigen Lösung $\bar{w}$ gegeben.*

Dann gilt für jede Variable x_i^*, $1 \leq i \leq n$, einer optimalen Lösung x^* des ganzzahligen Programms (ILP)*, deren reduzierte Kosten $r_i = (c_i - \bar{w}^T A_{i,\cdot})$ positiv sind:*

$$x_i^* \leq \left\lfloor \frac{c^T\bar{x} - \bar{w}^T b}{r_i} \right\rfloor .$$

Insbesondere sind die Variablen x_i^* einer optimalen Lösung x^* dann auf null festgelegt, wenn die reduzierten Kosten r_i größer sind als die Lücke $c^T\bar{x} - \bar{w}^T b$ zwischen der oberen Schranke $c^T\bar{x}$ und den Kosten der zulässigen Lösung $\bar{w}^T b$.

2.4.3 Kombinatorische Optimierungsprobleme

Wir wollen uns in diesem Unterabschnitt (und in dieser Dissertation) mit kombinatorischen Optimierungsproblemen befassen, die mit einer linearen Zielfunktion versehen sind. Diese speziellen Probleme bezeichnen wir im folgenden kurz als kombinatorische Optimierungsprobleme.

Definition 2.4.3.1 (Kombinatorisches Optimierungsproblem).
Gegeben sind eine endliche Menge E, eine Teilmenge $\mathcal{F}$ der Potenzmenge 2^E, die **zulässigen Lösungen***, und ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^E$, durch den jeder Teilmenge $F \subseteq E$ Kosten $\sum_{e \in F} c_e$ zugewiesen werden. Gesucht ist eine zulässige Lösung $F^* \in \mathcal{F}$, die die Kosten $\sum_{e \in F^*} c_e$ minimiert (bzw. maximiert).*

Eine Instanz dieses allgemein formulierten Problems bezeichnen wir mit dem Tripel $(E, \mathcal{F}, c)$.

In der Regel werden die zulässigen Lösungen eines kombinatorischen Optimierungsproblems durch eine Eigenschaft bzw. eine Vorschrift definiert. Für schwere kombinatorische Optimierungsprobleme ist die Anzahl der zulässigen Lösungen zu groß, als daß diese in einem Lösungsverfahren in vertretbarem Zeitrahmen aufgezählt werden könnten.

Ein Ansatz für die Lösung eines kombinatorischen Optimierungsproblems besteht darin, dieses als ganzzahliges lineares Programm darzustellen. Für jedes

Element e der Menge E führen wir eine **binäre Auswahlvariable** x_e ein. Jede zulässige Lösung $F \in \mathcal{F}$ setzen wir in Beziehung zu dem Inzidenzvektor $\chi^F \in \mathbb{R}^E$. Jeder Instanz $(E, \mathcal{F}, c)$ des kombinatorischen Optimierungsproblems ordnen wir ein ganzzahliges Polytop

$$P_I(E, \mathcal{F}) := \operatorname{conv}\{\chi^F \in \mathbb{R}^E \mid F \in \mathcal{F}\}$$

zu. Das Polytop $P_I(E, \mathcal{F})$ ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der zulässigen Lösungen aus $\mathcal{F}$. Auf diese Weise führen wir das binäre Programm

$$\text{(BLP)} \qquad \min\{c^T x \mid x \in P_I(E, \mathcal{F}) \text{ und } x \text{ ist ein 0-1 Vektor. }\}$$

ein.

Um ein lineares Programm zu formulieren, suchen wir nach einer äußeren Darstellung

$$P_I(E, \mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid \bar{A}x \geq \bar{b}\}$$

des ganzzahligen Polytops $P_I(E, \mathcal{F})$. Ein solches Vorhaben ist grundsätzlich anspruchsvoll. Wenn das zugehörige kombinatorische Optimierungsproblem jedoch $\mathcal{NP}$-schwer ist, dann konnte eine vollständige äußere Darstellung des ganzzahligen Polytops $P_I(E, \mathcal{F})$ für beliebige Instanzen $(E, \mathcal{F}, c)$ bislang noch nicht angegeben werden.

Unser Ziel ist es daher, die facettendefinierenden Ungleichungen des Polytops $P_I(E, \mathcal{F})$ so gut wie möglich zu beschreiben. Als Resultat einer solchen Untersuchung des Polytops $P_I(E, \mathcal{F})$ formulieren wir eine lineare Relaxierung

$$\text{(LPR)} \qquad \min\{c^T x \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0\}.$$

Das Polytop

$$P_L(E, \mathcal{F}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0\} \supseteq \mathrm{P_I(E}, \mathcal{F})$$

enthält (in der Regel) das ganzzahlige Polytop $P_I(E, \mathcal{F})$ als Teilmenge.

Man betrachte ein kombinatorisches Optimierungsproblem mit nichtnegativen Kosten c. Dann sind die Optimalwerte des ganzzahligen Programms (BLP) und des Programms

$$\min\{c^T x \mid x \in \operatorname{dmt}(P_I(E, \mathcal{F})) \text{ und } x \text{ ist ganzzahlig. }\}$$

gleich. Die obere Dominante $\operatorname{dmt}(P_I(E, \mathcal{F}))$ ist entweder leer oder hat volle Dimension. Wenn die obere Dominante $\operatorname{dmt}(P_I(E, \mathcal{F}))$ nichtleer ist, dann definieren alle Ungleichungen

$$B \in \mathrm{BL}(\mathcal{F}): \quad \sum_{e \in B} x_e \geq 1$$

eine Facette des Polyeders $\operatorname{dmt}(P_I(E, \mathcal{F}))$.

Kapitel 3

Problemstellung und Modellierung

Weltweit ist eine steigende Nachfrage nach Telekommunikations-Netzwerken zu verzeichnen. Die Ursachen dieser Entwicklung sind vielfältig. In Schwellenländern werden neue Netzwerke errichtet oder veraltete Netzwerke modernisiert. Neue Technologien, wie das Kabelfernsehen, das Internet, Mobilfunk oder die Glasfasertechnik, führen in industrialisierten Ländern zur Errichtung neuer Netzwerke. Durch die Glasfasertechnik ist es möglich geworden, große Datenmengen zu übertragen. Entsprechend wachsen auch die Bedürfnisse der Kunden, so daß Bildtelefone oder Videokonferenzen im Internet immer mehr Einzug in das tägliche Leben halten. Die Monopolstellung von staatlichen Netzwerkbetreibern ist in vielen Ländern aufgehoben worden. Staatliche und private Firmen stehen in Konkurrenz zueinander und unterhalten mitunter Netzwerke, die das gleiche Gebiet versorgen.

Die Netzwerkbetreiber schreiben die Errichtung oder die Erweiterung eines Netzwerks in der Regel aus. Den Zuschlag erhält die Firma, die ein Netzwerk zu dem besten Preis-Leistungs-Verhältnis anbieten kann. Firmen, die auf die Planung und die Errichtung von Netzwerken spezialisiert sind, haben zuerst ein Angebot zu erstellen und müssen daher die Kosten für die Errichtung des Netzwerks abschätzen. Dazu ist es insbesondere vorteilhaft, mehrere Technologievarianten durchspielen zu können.

Wenn der Zuschlag für die Errichtung eines Netzwerks erteilt worden ist, muß die beauftragte Firma genaue Netzwerkpläne erstellen. In den Netzwerkplänen werden die Standorte und die Typen der Verteiler, Kabelmasten, Verstärker, bzw. Abzweiger, die Routen der Verbindungskabel und die Breite von Tiefbaugräben, in denen die Kabel verlegt werden, festgelegt. Diese Pläne werden den örtlichen Behörden zur Genehmigung vorgelegt. Die Behörden können das Ausheben von Tiefbaugräben untersagen, z. B. weil dadurch Versorgungsleitungen gefährdet würden. Die Einwendungen der Behörden müssen in einer Überarbeitung der Netzwerkpläne berücksichtigt werden.

Die manuelle Planung von Netzwerken wird mit hohem personellem Aufwand durchgeführt. Insbesondere für die Erstellung eines Angebots ist jedoch eine schnelle, automatisierte Planung wünschenswert, um die Kosten verschiedener Technologievarianten schnell abzuschätzen. Für die endgültige Erstellung eines Netzwerkplanes nach der Erteilung eines Auftrags können automatische Verfahren wie folgt eingesetzt werden: Die Verfahren berechnen für verschiedene Parametereinstellungen jeweils einen Lösungsvorschlag. Ein Planer kann einen dieser Lösungsvorschläge übernehmen oder manuel Änderungen an dem Plan vornehmen. Das automatische Verfahren unterstützt die manuelle Planung insbesondere dadurch, daß es auf die Einhaltung von technologischen Bedingungen, z. B. von Kapazitätsbeschränkungen, achtet.

In dieser Dissertation betrachten wir insbesondere ein Teilproblem bei der Planung von Netzwerken. Es ist das Teilproblem, ein Grabennetz zu entwerfen, in das Verbindungskabel unter Berücksichtigung verschiedener Nebenbedingungen und Zielvorstellungen verlegt werden sollen. Dieses Problem tritt für verschiedene Netzwerktypen in vielfältigen Modifikationen auf. Es wird in Abschnitt 3.2 an einem Beispiel, der Anbindung von Bereichsverteilern an Endverteiler in einem Stadtgebiet, ausführlich beschrieben. Zuvor führt Abschnitt 3.1 in den Aufbau und das von Ingenieuren durchgeführte Planen von Netzwerken ein. In Abschnitt 3.3 erläutern wir die Zielvorstellungen für den Entwurf des Grabennetzes. Das in der Einleitung beschriebene mathematische Kabelproblem wird in Abschnitt 3.4 diskutiert. Das Kabelproblem führt zu einem ganzzahligen linearen Programm, das im theoretischen Teil dieser Dissertation untersucht wird.

Wir wollen an dieser Stelle auf weitere Arbeiten verweisen, denen Planungsprobleme in der Telekommunikation zugrunde liegen. Das Problem, ausfallsichere Netzwerke zu planen, wird z. B. in Arbeiten von Stoer, Dahl, Grötschel und Monma behandelt [GM90, Sto91, GMS92, SD94]. In diesem Zusammenhang sind auch die Arbeiten von Goemans und Williamson über das generalisierte Steinerwald-Problem von Interesse [GW95, WGMV95]. Weiterführende Arbeiten, in denen auch Kapazitäten berücksichtigt werden, wurden u. a. von Alevras, Grötschel, Jonas, Paul und Wessäly durchgeführt [AGJ+96, AGW98]. Das Problem, in einem Mobilfunknetz Funkfrequenzen zuzuweisen, wird u. a. in Arbeiten von Borndörfer, Eisenblätter, Grötschel und Martin untersucht [BEGM98a, BEGM98b, Eis97].

3.1 Die Problemstellung

Ein Telekommunikations-Netzwerk ist hierarchisch aufgebaut. Wir betrachten ein Netzwerk mit vier Hierarchieebenen. An die **Zentralstation** werden **Bereichsverteiler** angeschlossen, an diese werden **Endverteiler** und an die Endverteiler werden **Netzteilnehmer** angeschlossen. Die Hierarchieebenen werden durch Kabel und durch weitere Komponenten, z. B. Multiplexer, Verstärker und Verteiler, verbunden. Die Kabel werden unterirdisch oder als Oberleitungen verlegt. In demselben Netzwerk können unterschiedliche Technologien und funktionsgleiche

Komponenten mit unterschiedlichen Kapazitäten gleichzeitig zum Einsatz kommen. Die Verbindung der Endverteiler mit den Netzteilnehmern kann etwa mit der billigeren Kupfertechnologie vorgenommen werden, die Zentralstation kann mit der leistungsfähigeren Glasfasertechnologie an die Bereichsverteiler angeschlossen werden.

In der Angebots- und Planungsphase wird eine Auswahl der Technologien und der Komponenten des Telekommunikations-Netzwerks vorgenommen. Dazu werden die Bedarfszahlen und die Bodenbeschaffenheit der unterschiedlichen Bereiche des Planungsgebiets bei einer Begehung geschätzt oder aus statistischen Daten erhoben. Entsprechend diesen Planungsdaten wird die Position der Endverteiler und die Anzahl der jeweils an einen Endverteiler anzuschließenden Netzteilnehmer festgelegt. Die Endverteiler werden in Bereichen zusammengefaßt, in denen Bereichsverteiler positioniert werden. Schließlich wird die Position der Zentralstation festgelegt. In einem nächsten Planungsschritt wird ein Tiefbaunetz und gegebenenfalls ein Oberleitungsnetz entworfen, in dem die Kabel zu verlegen sind. In diesem Netz werden die weiteren benötigten Multiplexer, Verstärker und Verteiler aufgestellt sowie die Verbindungskabel verlegt. In den einzelnen Abschnitten der Planung eines Telekommunikations-Netzwerks sollen die noch bevorstehenden Planungsentscheidungen mitberücksichtigt werden. Ebenso ist es möglich, bereits ergangene Planungsentscheidungen zu modifizieren.

Das Ziel der Planung ist, ein kostengünstiges und leistungsfähiges Telekommunikations-Netzwerk zu erstellen. Die Errichtungskosten setzen sich zusammen aus den Kosten für den Tiefbau und für die Oberleitungsmasten, den Kosten für die Kabel und den Kosten für die restlichen Komponenten des Netzwerks. Diese Kostenanteile variieren im Verhältnis zueinander entsprechend den Gegebenheiten des konkreten Netzwerks. Es kommt aber selten vor, daß einer dieser Kostenanteile vernachlässigt werden kann. Leistungsmerkmale eines Netzwerks sind Übertragungskapazität, Signalqualität und Ausfallsicherheit. Diese Leistungsmerkmale werden häufig durch Nebenbedingungen sichergestellt, so daß die Minimierung der Errichtungskosten dann die Zielfunktion bei der Planung des Netzwerks darstellt.

Um die Ingenieure bei der Planung von Telekommunikations-Netzwerken zu unterstützen, sollen automatische und optimierende Verfahren eingesetzt werden, um Lösungsvorschläge zu erzeugen und um die Kosten unterschiedlicher Technologievarianten abschätzen zu können. Die Lösungsvorschläge können von den Ingenieuren mit Rücksicht auf den Zusammenhang der einzelnen Planungsabschnitte und detaillierterer Kenntnis des Planungsgebiets modifiziert werden. In der Praxis werden daher schnelle Heuristiken eingesetzt, die ein interaktives Arbeiten ermöglichen. Im Rahmen dieser Dissertation ist es unsere Aufgabe, die eingesetzten Heuristiken durch Berechnung exakter Lösungen oder zumindest durch die Angabe von unteren und oberen Schranken zu bewerten.

3.2 Ein Planungsbeispiel

In diesem Abschnitt wird ein Unterproblem bei der Planung eines Telefonnetzwerks in der indischen Stadt Poona beschrieben. In Poona werden zur Übertragung der Informationen von und zu den Netzteilnehmern **Glasfaserkabel** und **Kupferkabel** eingesetzt. Glasfaserkabel werden zwischen der Zentralstation und den Bereichsverteilern verwendet und zwischen Bereichsverteilern und **Multiplexverteilern**. Die Glasfaserkabel können mit einem **Glasfaserkabelverteiler** verzweigt werden. An die Multiplexverteiler werden Endverteiler mit Kupferkabeln angeschlossen. Es besteht auch die Möglichkeit, Endverteiler mit Kupferkabeln direkt an die Bereichsverteiler anzuschließen. Die Telefone der Netzteilnehmer werden mit Kupferkabeln an die Endverteiler angeschlossen. Die Standorte der Endverteiler, Multiplexverteiler und der Glasfaserkabelverteiler sind auf die Wohnanlagen beschränkt.

In dem Poona-Beispiel versorgen Stromquellen der Bereichsverteiler die angeschlossenen Multiplexverteiler und die über Endverteiler angeschlossenen Telefone der Netzteilnehmer mit Betriebsspannung. In den Kupferkabeln übertragen die Kupferleitungen neben der Information auch die elektrische Energie. In die Glasfaserkabel, die die Multiplexverteiler an die Bereichsverteiler anschließen, sind entweder Stromleitungen integriert, oder es werden ein Glasfaserkabel und ein Stromkabel parallel verlegt. Unterschiedliche Routen für das Glasfaserkabel und das zugehörige Stromkabel sind durch den Kunden untersagt. Daher fassen wir die zwei parallel zu verlegenden Kabel im weiteren als Einheit auf, die mit dem Begriff „Glasfaserkabel“ bezeichnet wird.

Die Glasfaserkabel umhüllen vier oder sechszehn Glasfaseradern. Eine Glasfaserader ist eine ummantelte Glasfaser. Mit einem Glasfaserkabelverteiler kann der Bereichsverteiler wie folgt an die Multiplexverteiler angebunden werden: Die Multiplexverteiler sind mit bis zu vier vieradrigen Kabeln an den Glasfaserkabelverteiler angebunden. Der Glasfaserkabelverteiler ist durch ein sechzehnadriges Kabel an den Bereichsverteiler angebunden. In den Glasfaserkabelverteilern werden die plan geschliffenen Glasfaseradern auf Stoß aneinander gesetzt und so die Information weitergeleitet. Die Anbindung der Multiplexverteiler an den Glasfaserkabelverteiler oder direkt an den Bereichsverteiler geschieht so, daß eine Glasfaserader des Kabels an den Multiplexer angeschlossen wird, die restlichen, noch verfügbaren Glasfaseradern werden zu anderen Multiplexverteilern weitergeleitet. Auf diese Weise können an ein vieradriges Kabel vier Multiplexverteiler in Reihe angeschlossen werden. Die Länge der Stromverbindung von dem Bereichsverteiler zu den Multiplexverteilern darf 3000 Metern nicht überschreiten.

Die Kupferkabel umhüllen 20, 40 oder 60 (Kupfer-) Doppeladern. Eine Kupferader ist ein ummantelter Kupferdraht. Eine Doppelader wird für je einen Netzteilnehmer benötigt, um einen geschlossenen Stromkreis für die Stromversorgung des Telefons herzustellen und die Informationen zu übertragen. Um die nötige Betriebsspannung für das Telefon zu gewährleisten, ist die Länge der Kupferlei-

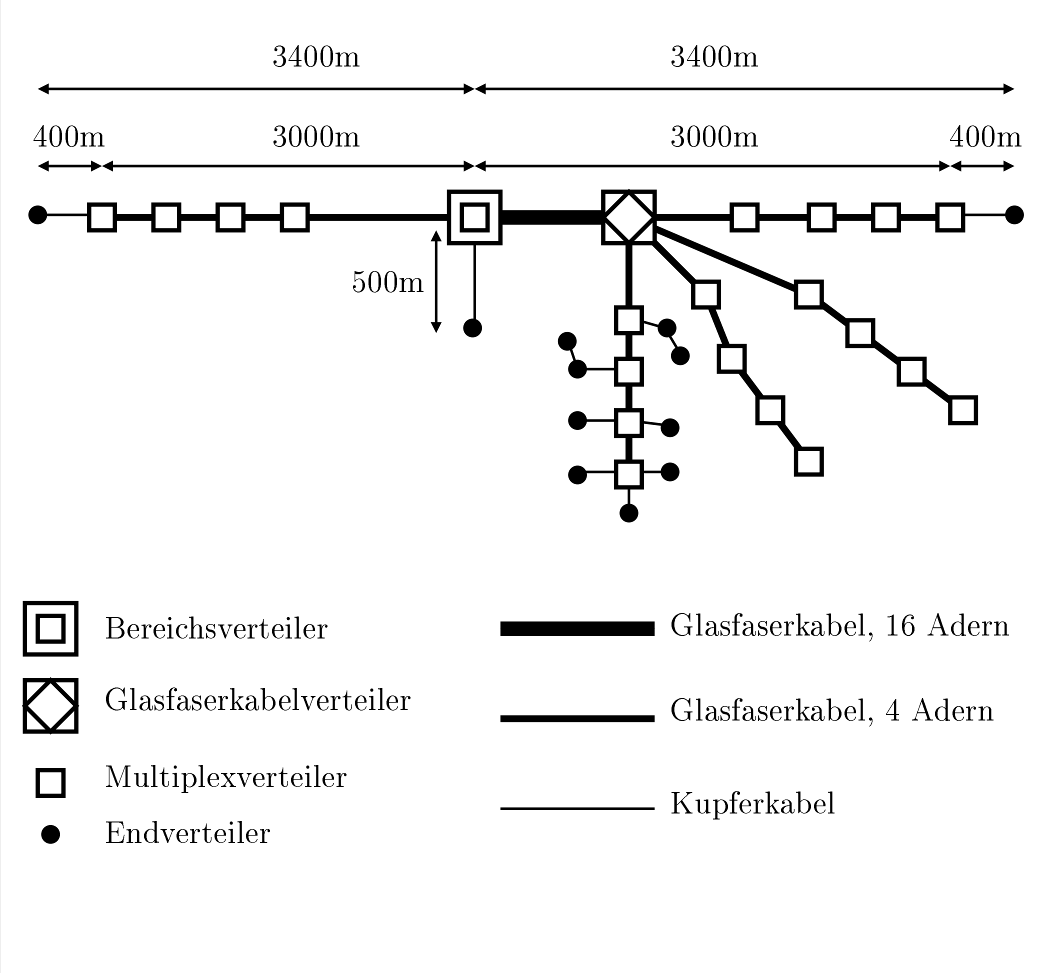

Abbildung 3.1: Technologische Randbedingungen

tung beschränkt. Die Länge der Kupferleitung von einem Multiplexverteiler zu einem Endverteiler darf 400 Meter nicht überschreiten. Die Länge der Kupferleitung von einem Bereichsverteiler zu einem direkt angebundenen Endverteiler darf 500 Meter nicht überschreiten.

In den Bereichsverteilern und, wie der Name andeutet, in den Multiplexverteilern sind Multiplexer enthalten, die die Informationen von mehreren Netzteilnehmern jeweils in eine Glasfaserader weiterleiten. Die Multiplexer sind so ausgelegt, daß an einen Multiplexverteiler 60 Netzteilnehmer und an einen Bereichsverteiler 3000 Netzteilnehmer angebunden werden können. Von diesen 3000 Netzteilnehmern sind nur bis zu 960 direkt über Endverteiler und die restlichen über Multiplexverteiler an den Bereichsverteiler anzubinden.

Als Nahbereich werden die Punkte des Stadtteils bezeichnet, die mit Kupferkabeln von 500 Metern Leitungslänge vom Bereichsverteiler aus erreichbar sind.

Die übrigen Punkte des Stadtteils bilden den Fernbereich. Da die Kosten für einen Multiplexverteiler vergleichsweise hoch sind, ist es eine sinnvolle Strategie, die Endverteiler des Nahbereichs mit Kupferkabeln direkt an einen Bereichsverteiler anzubinden und die Kapazität des Bereichsverteilers für die Direktanbindung vollständig auszunutzen.

In dem betrachteten Stadtteil von Poona werden als Endverteiler Klemmenkästen mit Klemmanschlüssen für 60 Netzteilnehmer eingesetzt. Sie werden zentral in den Wohnanlagen der Netzteilnehmer installiert. An die Klemmenkästen werden Telefone über hausinterne Leitungen angeschlossen. Eine Verzweigung der Kupferkabel ist nur in den Endverteilern zulässig. Sind an einem Endverteiler Doppeladern überzählig, so können diese mit einem Kupferkabel zu einem anderen Endverteiler weitergeleitet werden. Die Informationen der Netzteilnehmer eines Endverteilers sollen mit denselben Kabeln an die Bereichsverteiler weitergeleitet werden. Es ist nicht zulässig, die Informationen der Netzteilnehmer eines Endverteilers auf verschiedenen Routen zu dem Bereichsverteiler zu leiten.

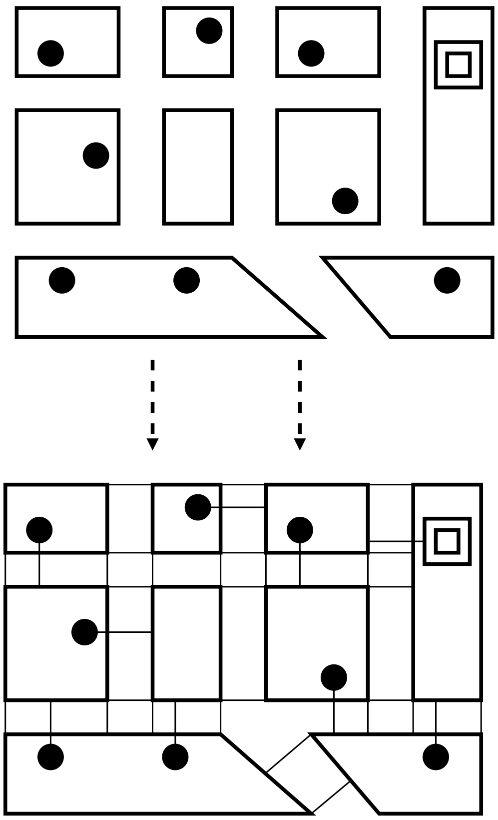

Abbildung 3.2: Erzeugung von Straßenüberquerungen und Verteiler-Anbindungen

Gräben für die Kabel können im Bereich der Bürgersteige entlang den Straßen ausgehoben werden, Straßenquerungen und Anbindungen der Standorte der Verteiler in den Wohnanlagen erfolgen rechtwinklig zum Straßenverlauf. Bei der

Kabelverlegung soll auch die freie Querschnittsfläche von Kabelkanälen bestehender Netzwerke genutzt werden. Es ist für unsere Modellbildungen vorteilhaft, nur bestimmte Tiefbauabschnitte des Stadtteils zuzulassen. Straßenüberquerungen werden nur in der Nähe von Kreuzungen, Kurven und dort zugelassen, wo eine Verteiler-Anbindung auf den Bürgersteig stößt. Entlang den Bürgersteigen wird nur eine Grabenlinie mit festgelegtem Abstand zur Straße berücksichtigt. Auf diese Weise ergibt sich in dem Stadtteil ein Netz von aneinanderstoßenden Abschnitten. Es ist zu entscheiden, auf welchen dieser Abschnitte Gräben ausgehoben werden sollen.

Vor den Grabungsarbeiten ist eine Genehmigung von den örtlichen Behörden einzuholen. Diese verlangen, daß Straßenquerungen, insbesondere Querungen von Hauptstraßen, auf ein „notwendiges Maß“ beschränkt werden. Desweiteren untersagen sie, solche Tiefbauabschnitte auszuheben, unter denen Wasser- oder Elektrizitätsleitungen vorhanden sind, welche durch die Arbeiten gefährdet würden. Bei einer Neuplanung, die durch solche Verbote erforderlich ist, sollen nur die dadurch verhinderten Kabelrouten umgeleitet werden müssen.

3.3 Die Zielvorstellung

Für das im vorherigen Abschnitt beschriebene Unterproblem, die Bereichsverteiler an die Endverteiler anzubinden, sollen Abschnitte für Grabungsarbeiten ausgewählt werden. Entsprechend dem so entworfenen Tiefbau-Netzwerk werden Multiplex- und Glasfaserkabelverteiler positioniert und Verbindungskabel verlegt. Um diese Verkabelung auf zulässige Weise durchführen zu können, dürfen die Bereichsverteiler von den Endverteilern im Fernbereich längs dem Tiefbau-Netzwerk höchstens 3400 Meter entfernt sein. Um die Endverteiler des Nahbereichs direkt an die Bereichsverteiler anbinden zu können, darf deren Entfernung zu dem Bereichsverteiler längs dem Tiefbau-Netzwerk 500 Meter nicht überschreiten.

Eine erste Zielvorstellung ist, die Tiefbaukosten des Tiefbau-Netzwerks zu minimieren. Jede Lösung, die eine entsprechende Zielfunktion minimiert und die Entfernungsbeschränkung von 3400 Metern einhält, führt zu einer unteren Schranke für die Tiefbaukosten des Gesamtproblems. In einigen Beispielen führte die Minimierung der Tiefbaukosten jedoch zu Lösungen, bei denen die Entfernungen der Bereichsverteiler zu vielen Endverteilern gerade noch unterhalb der erlaubten Schranke lagen. In dieser Konstellation erhöhen sich die Kosten für die Verbindungskabel. Desweiteren wurde die Freiheit für die Positionierung der Multiplexverteiler eingeschränkt.

In einer erweiterten Zielfunktion werden daher die Entfernungen der Endverteiler zu den Bereichsverteilern mitberücksichtigt. Um die Vorstellung zu vereinfachen, führen wir ein virtuelles **Anteilskabel** ein und formulieren das vereinfachte Problem, jeden Endverteiler mit einem Anteilskabel beschränkter Länge direkt an den Bereichsverteiler anzubinden. Die Kosten eines Anteilskabels sind das

Produkt aus der Länge des Anteilskabels und einem virtuellen Anteilskabelpreis, der in Abhängigkeit von dem angebundenen Endverteiler gewählt wird. Je höher der Anteilskabelpreis gewählt wird, desto stärker sind Lösungen mit geringen Entfernungen zwischen Bereichsverteilern und Endverteilern begünstigt.

Bei einem anderen Problem, der Planung eines Kabel-TV-Netzwerks, bedeutet eine größere Länge der Verbindungskabel eine schlechtere Qualität des TV-Signals. Auch für dieses Problem ist es also sinnvoll, kurze Entfernungen zwischen den Bereichsverteilern und den Endverteilern in die Zielfunktion aufzunehmen.

Durch die folgende Einstellung der Anteilskabelpreise kann eine untere Schranke für die Summe aus Tiefbaukosten und Kabelkosten berechnet werden. Dazu werden die Kosten der realen Kabel auf die Endverteiler, die durch dieses Kabel angeschlossen werden, proportional zu den angeschlossenen Telefonteilnehmern umgelegt. Zum Beispiel seien über ein Kupferkabel mit 60 Doppeladern 30 Telefonteilnehmer des Endverteilers A und 10 Telefonteilnehmer des Endverteilers B angeschlossen. Die restlichen 20 Doppeladern bleiben ungenutzt. In diesem Fall trägt der Endverteiler A drei Viertel und der Endverteiler B ein Viertel der Kosten dieses Kupferkabels. Eine untere Schranke für den Anteil an den Kabelkosten eines Endverteilers des Nahbereichs erhält man für den Fall, daß der Endverteiler mit vollständig ausgelasteten Kupferkabeln mit 60 Doppeladern an den Bereichsverteiler direkt angebunden wird.

Eine untere Schranke für den Anteil an den Kabelkosten eines Endverteilers des Fernbereichs erhält man für den Fall, daß der Endverteiler mit einem vollständig ausgelasteten Glasfaserkabel mit 16 Glasfaseradern an den Bereichsverteiler angebunden wird. Dies ist dann möglich, wenn der Multiplexverteiler an dem Ort des Endverteilers aufgestellt wird. Der virtuelle Anteilskabelpreis kann entsprechend diesen unteren Schranken festgelegt werden. Mit dieser Parametereinstellung wird eine Lösung gesucht, die die Summe aus Tiefbaukosten und Anteilskabelkosten minimiert. Der Kostenwert einer solchen Lösung ist eine untere Schranke für die Summe aus den Tiefbaukosten und den realen Kabelkosten. Die Kapazität eines Multiplexverteilers ist auf 60 Netzteilnehmer begrenzt. Daraus ergibt sich eine triviale untere Schranke für die Anzahl und die Kosten der benötigten Multiplexverteiler. Die Summe dieser getrennt ermittelten unteren Schranken ergibt eine untere Schranke für die Gesamtkostensumme aus Tiefbaukosten, Kabelkosten und den Kosten für die elektronischen Bauteile.

In ähnlicher Weise können den Anteilskabeln Anteilsquerschnitte zugeordnet werden, um die Beschränkung der freien Querschnittsfläche in den Kabelkanälen berücksichtigen zu können. In unserer Modellbildung haben wir die Kapazitätsrestriktionen der Kabelkanäle und der Bereichsverteiler vernachlässigt. Wir haben desweiteren erwogen, die Positionierung der Verteiler und die Auswahl der Kabeltypen der Verbindungskabel in unser Modell einzubinden. Dieses komplexere Modell beschreibt das Anwendungsproblem genauer. Es erscheint uns aber fraglich, ob für praktisch relevante Beispielprobleme gute untere Schranken für die Gesamtkosten mit vertretbarem Aufwand errechnet werden können. Das vereinfachte Modell, die Endverteiler mit Anteilskabeln direkt anzubinden, kann leichter an unterschiedliche Projekte und an unterschiedliche Netzwerktechnologien angepaßt werden. Es ist daher für den Planungsingenieur als interaktives Hilfsmittel von gutem Nutzen.

3.4 Das Kabelproblem

Unser Auftraggeber, die Siemens AG, hat zwei Zielvorstellungen für die Richtung unserer Forschungstätigkeit formuliert:

Erstens sollen heuristische Verfahren durch Berechnen von unteren Schranken für die Kosten der optimalen Lösung bewertet werden. Noch besser ist es, mit einem exakten Verfahren die optimale Lösung selbst berechnen zu können. Zu diesem Zweck definieren wir in Unterabschnitt 3.4.1 das Kabelproblem, das wir in Abschnitt 3.3 motiviert haben. In Unterabschnitt 3.4.2 beschreiben wir grundlegende Eigenschaften des Kabelproblems.

Zweitens sollen Konzepte für die Modellierung von Anwendungsproblemen im Bereich der Planung von Telekommunikations-Netzwerken und für die Lösung der formulierten mathematischen Probleme gefunden werden. Um dieser zweiten Zielvorstellung gerecht zu werden, verallgemeinern wir das Kabelproblem zu dem Netzproblem, das in Kapitel 4 untersucht wird. Zu dieser Verallgemeinerung führt u. a. ein ganzzahliges Programm für das Kabelproblem, das am Schluß dieses Abschnitts formuliert wird.

3.4.1 Definition des Kabelproblems

Wir fassen im folgenden (Di-)Pfade in einem (gerichteten) Graph als Kantenmengen (Bogenmengen) auf.

Definition 3.4.1.1. *Das* **Kabelproblem in Graphen** *ist das folgende Problem:*

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ mit **Quellen** *$S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ und* **Senken** *$T \subseteq V \backslash S$ und jeweils nicht-negativen* **Kantenlängen** *$(\tilde{l}_e)_{e \in E}$,* **Kantenkosten** *$(\tilde{c}_e)_{e \in E}$,* **Längenbeschränkungen** *$(L_t)_{t \in T}$ und* **Pfadkostenfaktoren** *$(\hat{d}_t)_{t \in T}$.*

Eine Lösung des Problems ist ein Paar (F, Q), bestehend aus einer Kantenmenge $F \subseteq E$ und einer Familie von Pfaden $Q = (Q_t)_{t \in T}$, für die gilt: Die Pfade Q_t, $t \in T$, sind in der Kantenmenge F enthalten, beginnen in irgendeiner Quelle, enden in der Senke t und sind längenbeschränkt, das heißt $\sum_{e \in Q_t} \tilde{l}_e \leq L_t$.

Das Ziel ist, die Summe der Kantenkosten und der Pfadkosten

$$\sum_{e \in F} \tilde{c}_e + \sum_{t \in T} \hat{d}_t \left(\sum_{e \in Q_t} \tilde{l}_e \right) \tag{3.1}$$

zu minimieren.

Eine Instanz des Kabelproblems in (ungerichteten) Graphen bezeichnen wir mit

$$\text{UKABEL}(G, S, T, \tilde{c}, \hat{d}, \tilde{l}, L). \tag{3.2}$$

Die Knoten $N = V \backslash (S \cup T)$ nennen wir **Netzknoten**.

Die Parameter des Kabelproblems in Graphen haben bezogen auf das Anwendungsproblem die folgende Bedeutung. Die Quellen sind die Bereichsverteiler. Die Senken sind die Endverteiler. Die Netzknoten sind die Punkte, an denen mögliche Tiefbauabschnitte zusammenstoßen. Die Kanten sind mögliche Tiefbauabschnitte. Die Kantenkosten sind die Tiefbaukosten und die Kantenlängen sind die Längen der Tiefbauabschnitte. Die Pfade von den Quellen zu den Senken entsprechen den Anteilskabeln. Die Längenbeschränkung und der Pfadkostenfaktor einer Senke entsprechen der Längenbeschränkung und dem Kostenfaktor für das Anteilskabel, das den entsprechenden Endverteiler anbindet.

Wir formulieren nun das Kabelproblem (in gerichteten Graphen).

Definition 3.4.1.2. *Das* **Kabelproblem (in gerichteten Graphen)** *ist das folgende Problem:*

Gegeben sind ein Digraph $D = (V, A)$ mit **Quellen** *$S \subset V$, $S \neq \emptyset$ und* **Senken** *$T \subseteq V \backslash S$, sowie jeweils nicht-negative* **Bogenlängen** *$(l_a)_{a \in A}$ und* **Bogenkosten** *$(c_a)_{a \in A}$,* **Dipfadkostenfaktoren** *$(\hat{d}_t)_{t \in T}$ sowie* **Längenbeschränkungen** *$(L_t)_{t \in T}$.*

Eine Lösung des Kabelproblems ist ein Paar (B, Q), bestehend aus einer Bogenmenge $B \subseteq A$ und einer Dipfadfamilie $Q = (Q_t)_{t \in T}$, für die gilt: Die Dipfade Q_t, $t \in T$, sind in der Bogenmenge B enthalten, beginnen in irgendeiner Quelle, enden in der Senke t und sind von beschränkter Länge, das heißt $\sum_{a \in Q_t} l_a \leq L_t$.

Das Ziel ist, die Summe der Bogenkosten und der Dipfadkosten

$$\sum_{a \in B} c_a + \sum_{t \in T} \hat{d}_t \left(\sum_{a \in Q_t} l_a \right) \tag{3.3}$$

zu minimieren.

Eine Instanz des Kabelproblems bezeichnen wir mit

$$\text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L). \tag{3.4}$$

3.4.2 Eigenschaften des Kabelproblems

Die Kantenmengen der Optimallösungen des Kabelproblems in ungerichteten Graphen mit positiven Kantenkosten sind Wälder. Daher ist eine Transformation von der ungerichteten auf die gerichtete Formulierung des Kabelproblems möglich. Diese Transformation wurde in ähnlicher Weise für das Steinerbaum-Problem in Graphen untersucht. Die Zusammenhänge sind in diesem Unterabschnitt beschrieben.

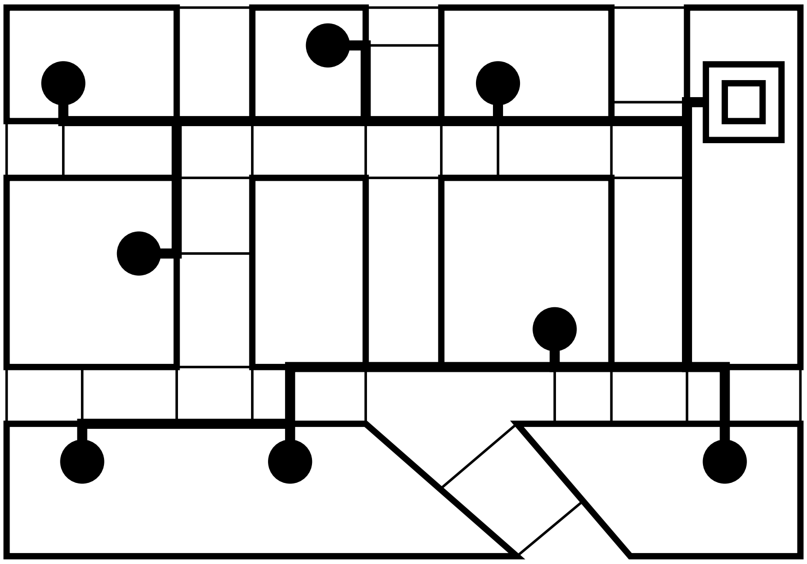

Abbildung 3.3: Ein Beispiel für eine Wurzelwald-Lösung eines Kabelproblems.

Theorem 3.4.2.1. *Jede lösbare Instanz des Kabelproblems hat mindestens eine Optimallösung, deren Bogenmenge ein Wurzelwald ist, dessen Wurzeln Quellen aus S sind und der die Senken T aufspannt.*

Beweis: Sei

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L) \tag{3.5}$$

eine Instanz des Kabelproblems und sei (B, Q) eine Lösung der Instanz Π. Sei die Bogenmenge $B' \subseteq B$ ein l-Kürzeste-Wege-Wurzelwald, dessen Wurzeln Quellen aus S sind und der die Senken T aufspannt. Seien $Q'_t \subseteq B'$, $t \in T$, die kürzesten Wege von einer (eindeutig bestimmten) Quelle zu der Senke t. Es gilt $\sum_{a \in Q'_t} l_a \leq \sum_{a \in Q_t} l_a$ für alle Senken $t \in T$. Daher ist das Paar (B', Q') eine zulässige Lösung der Instanz Π. Die Kosten der Lösung (B', Q') sind kleiner oder gleich den Kosten der Lösung (B, Q), da $\sum_{a \in B'} c_a \leq \sum_{a \in B} c_a$ und $\hat{d}_t \left(\sum_{a \in Q'_t} l_a \right) \leq \hat{d}_t \left(\sum_{a \in Q_t} l_a \right)$ gilt. Also existiert eine Optimallösung der Instanz Π, deren Bogenmenge ein Wurzelwald ist, dessen Wurzeln Quellen aus S sind und der die Senken T aufspannt. $\square$

Theorem 3.4.2.2. *Jede lösbare Instanz des Kabelproblems in ungerichteten Graphen hat mindestens eine Optimallösung, deren Kantenmenge ein Wald ist, dessen Wurzeln Quellen aus S sind und der die Senken T aufspannt.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Theorem 3.4.2.1 für den gerichteten Fall. □

Gegeben sei eine Instanz des Kabelproblems in Graphen

$$\tilde{\Pi} = \text{UKABEL}(G, S, T, \tilde{c}, \hat{d}, \tilde{l}, L), \quad G = (V, E). \tag{3.6}$$

Sei $D = (V, A)$ der Digraph, der für jede Kante $ij \in E$ genau zwei antiparallele Bögen $(i, j), (j, i) \in A$ enthält. Die Zuordnung

$$\eta : A \to E, \ \eta\left((i, j)\right) = ij \tag{3.7}$$

weist jeden Bogen aus A seiner erzeugenden Kante aus E zu. Damit sei die Instanz

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, \tilde{c} \circ \eta, \hat{d}, \tilde{l} \circ \eta, L) \tag{3.8}$$

des Kabelproblems definiert.

Theorem 3.4.2.3. *Gegeben sei eine Instanz $\tilde{\Pi}$ des Kabelproblems in Graphen wie in* (3.6)*. Die Instanz Π des Kabelproblems sei wie in (3.7) und (3.8) definiert. Für jede optimale Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π ist die Lösung $(\eta(B^*), Q')$, mit $Q'_t = \eta(Q^*_t)$ für alle $t \in T$, eine optimale Lösung der Instanz $\tilde{\Pi}$. Die Kosten der optimalen Lösungen sind gleich.*

Beweis: Die Längen und Kosten jedes Bogens $(i, j) \in A$ sind gleich der Länge und den Kosten der entsprechenden Kante $ij \in E$. Daher ist das Paar $(\eta(B^*), Q')$ eine zulässige Lösung der Instanz $\tilde{\Pi}$ und hat kleinere oder gleiche Kosten wie die Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π. Die Kosten der Lösungen sind dann gleich, wenn keine paarweise antiparallelen Bögen in B^* enthalten sind. Nach Theorem 3.4.2.1 existiert eine optimale Lösung $(F^+, \tilde{Q}^+)$ der Instanz $\tilde{\Pi}$, so daß die Kantenmenge F^+ ein Wald in dem Graphen G mit Wurzeln aus S ist. Sei $B \subseteq A$ der Wurzelwald, der dem Wald F^+ entspricht, das heißt $\eta(B) = F^+$. Seien $Q_t \subseteq B$ die gerichteten Pfade, die den Pfaden $\tilde{Q}^+_t$ entsprechen. Dann ist das Paar (B, Q) eine zulässige Lösung der Instanz Π und hat gleiche Kosten wie die Lösung $(F^+, \tilde{Q}^+)$. Daher sind die Optimalwerte der Instanz Π und der Instanz $\tilde{\Pi}$ gleich und die Lösung $(\eta(B^*), Q')$ ist eine optimale Lösung der Instanz $\tilde{\Pi}$. □

Man nehme an, wir wollten Kapazitätsbeschränkungen für das Kabelproblem in Graphen mitberücksichtigen. Eine Kapazitätsbeschränkung könnte lauten, daß eine ausgewählte Kante höchstens in n ausgewählten Pfaden enthalten sein darf. Eine optimale Lösung des Kabelproblems in Graphen mit Kapazitätsbeschränkungen ist dann nicht mehr notwendigerweise eine Wurzelwald-Lösung. Infolge dessen ist die Transformation eines zu definierenden Kabelproblems in Graphen mit Kapazitätsbeschränkungen auf ein analoges Problem in gerichteten Graphen nicht mehr zulässig. Unsere Verfahren sind für gerichtete Graphen entworfen worden. Wir können daher nicht ohne erheblichen Zusatzaufwand Kapazitätsbeschränkungen in unser Verfahren aufnehmen.

Zunächst beweisen wir, daß das Kabelproblem in gerichteten beziehungsweise ungerichteten Graphen $\mathcal{NP}$-schwer ist.

Das **Steinerbaum-Problem in Graphen** ist, für einen Graphen $G = (V, E)$ mit Terminals $T \subseteq V$ und Kantenkosten $(c_e)_{e \in E}$ eine kostenminimale Kantenmenge $F \subseteq E$ zu finden, die die Terminals T aufspannt.

Eine Instanz dieses Problems bezeichnen wir mit $\mathrm{STG}(G, T, c)$.

Theorem 3.4.2.4. *Das Kabelproblem in (gerichteten) Graphen ist $\mathcal{NP}$-schwer.*

Beweis: Das Steinerbaum-Problem in Graphen ist $\mathcal{NP}$-schwer [GJ79a]. Das Steinerbaum-Problem in Graphen ist im Wesentlichen in dem Kabelproblem als Spezialfall für Pfadkostenfaktoren gleich null und verschwindende Längenrestriktionen enthalten. Sei $\mathrm{STG}(G, T, c)$ eine gegebene Instanz des Steinerbaum-Problems in Graphen. Kanten mit negativen Kosten können wir kontrahieren und so zu einer neuen Instanz des Steinerbaum-Problems in Graphen übergehen, deren Kantenkosten alle nichtnegativ sind. Details dazu sind z. B. in [KM98] beschrieben. Seien daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kantenkosten c nichtnegativ. Ist die Menge der Terminals leer, dann ist das Problem trivial. Andernfalls wähle man ein Terminal $s \in T$ als Quelle aus. Gegeben sei die Instanz

$$\tilde{\Pi} = \mathrm{UKABEL}(G, \{s\}, T \backslash \{s\}, c, 0, 0, 0). \tag{3.9}$$

Jede Lösung (F, Q) der Instanz $\tilde{\Pi}$, hat die Eigenschaft, daß $F \subseteq E$ die Terminals T aufspannt. Ist andererseits F eine Lösung der Instanz $\mathrm{STG}(G, T, c)$, dann wähle man irgendwelche Verbindungspfade Q_t, $t \in T \backslash \{s\}$, von der Quelle s nach der Senke t für eine Lösung (F, Q) der Instanz $\tilde{\Pi}$ aus. Die Kosten der Lösungen sind jeweils gleich $\sum_{e \in F} c_e$. Ist das Paar (F^*, Q^*) eine optimale Lösung der Instanz Π, so ist die Kantenmenge F^* eine optimale Lösung der Instanz $\mathrm{STG}(G, T, c)$. Also ist das Kabelproblem in Graphen $\mathcal{NP}$-schwer. Nach Theorem 3.4.2.3 ist das Kabelproblem in Graphen auf das Kabelproblem in gerichteten Graphen transformierbar. Also ist auch das Kabelproblem in gerichteten Graphen $\mathcal{NP}$-schwer. □

Für das Steinerbaum-Problem in Graphen wurde in der Literatur eine Transformation auf das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen diskutiert.

Das **Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen** ist, für einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$, eine Wurzel $s \in V$, Terminals $T \subseteq V$ und Bogenkosten $(c_a)_{a \in A}$ eine kostenminimale Bogenmenge $B \subseteq A$ zu finden, welche die Terminals T von der Wurzel s her aufspannt. Eine Instanz dieses Problems bezeichnen wir mit $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$.

Diese Transformation ist der Transformation für das Kabelproblem in Graphen ähnlich. Schnittebenenverfahren und polyedrische Beschreibungen der konvexen Hülle der zulässigen Lösungen wurden für das Steinerbaum-Problem in

Graphen und in gerichteten Graphen untersucht und die Ergebnisse verglichen. Die Untersuchung von Schnittebenenverfahren für das ungerichtete Modell gehen auf Aneja zurück [Ane80]. Eine wichtige vergleichende Untersuchung des gerichteten und ungerichteten Modells wurde von Chopra, Gorres und Rao durchgeführt [CGR92, CR94a, CR94b]. Weitere vergleichende Betrachtungen wurden von Goemans und Myung angestellt [GM93]. Untersuchungen des ungerichteten Modells finden sich bei Grötschel und Monma [GM90] und bei Goemans [Goe94]. Flußformulierungen in gerichteten Graphen wurden von Wong [Won84] und von Beasley [Bea89] betrachtet.

Aus den Untersuchungen wurde der Schluß gezogen, daß die gerichtete Formulierung besser für die Entwicklung eines Schnittebenenverfahrens geeignet ist. Entsprechend diesem Untersuchungsergebnis untersuchen wir Verfahren für das Kabelproblem in gerichteten Graphen. In Abschnitt 4.6 werden wir am Ende einer theoretischen Untersuchung des Kabelproblems beziehungsweise des allgemeineren Netzproblems die theoretischen Gründe für die Auswahl der gerichteten Formulierung diskutieren können.

3.4.3 Ein ganzzahliges Programm für das Kabelproblem

Für das Kabelproblem (in gerichteten Graphen) führen wir das binäre lineare Programm DIPFAD ein. Sei

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L) \tag{3.10}$$

eine Instanz des Kabelproblems. Für jede Senke $t \in T$ sei $\mathcal{L}_t$ die Menge aller (S,t)-Dipfade P mit beschränkter Länge $\sum_{a \in P} l_a \leq L_t$. Der binäre Vektor der **Bogenvariablen** $(x_a)_{a \in A}$ hat die Bedeutung eines Inzidenzvektors für Bögen $B \subseteq A$, der binäre Vektor der **Dipfadvariablen** $(y_{t,P})_{t \in T,\, P \in \mathcal{L}_t}$ hat die Bedeutung eines Inzidenzvektors für die Dipfade Q_t einer Lösung (B, Q) der Instanz Π,

$$y_{t,P} = \begin{cases} 1 & P = Q_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.11}$$

Das binäre lineare Programm DIPFAD(Π) lautet mit diesen Variablen:

DIPFAD(Π)

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \min \quad c^T x & + & \displaystyle\sum_{t\in T}\sum_{P\in\mathcal{L}_t} y_{t,P}\hat{d}_t\left(\sum_{a\in P} l_a\right) & \\
(1) & (t\in T) & & & \displaystyle\sum_{P\in\mathcal{L}_t} y_{t,P} & = \ 1 \\
(2) & (t\in T) & x & - & \displaystyle\sum_{P\in\mathcal{L}_t} y_{t,P}\chi^P & \geq \ 0 \\
(3) & & x, & & y & \text{sind } 0,1 \text{ Vektoren.}
\end{array}
$$

Die Nebenbedingungen (1) besagen, daß jeder Endverteiler mit genau einem Anteilskabel angeschlossen wird. Die Nebenbedingungen (2) besagen, daß dort, wo ein Anteilskabel gezogen wird, auch gegraben werden muß. Auf diese Weise entspricht jede zulässige Lösung des Programmms DIPFAD(Π) genau einer zulässigen Lösung der Instanz Π. Im Bild des Anwendungsproblems formuliert: Jeder Endverteiler wird mit einem Anteilskabel angeschlossen (1). Dort wo ein Kabel verläuft muß auch gegraben werden (2). Halbe Gräben und Kabel sind ausgeschlossen (3).

Wir untersuchen das Programm DIPFAD in Kapitel 4 in allgemeinerer Form polyedrisch und entwickeln Lagrange-Heuristiken und Schnittebenenverfahren zu dessen Lösung.

Kapitel 4

Das Netzproblem

Das Kabelproblem besteht im Wesentlichen aus zwei Unterproblemen. Das erste Unterproblem ist, in einem Digraphen einen kostenoptimalen längenbeschränkten Dipfad zu finden. Ein Verfahren zur Lösung solcher Digraphenprobleme beschreiben wir in Kapitel 5 und insbesondere in Abschnitt 5.2. Das zweite Unterproblem ist, die Auswahl der längenbeschränkten Dipfade und die Auswahl der Netzwerkbögen zu koordinieren. Wir untersuchen das zweite Problem in diesem Kapitel.

Dazu führen wir das in der Einleitung beschriebene allgemeinere Netzproblem ein. Ein weiterer Zweck dieser Verallgemeinerung ist, andere kombinatorische Optimierungsprobleme als Netzprobleme darzustellen, wie in Unterabschnitt 4.1.4 beschrieben wird. Auf diese Weise können die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen des Netzproblems auf diese Probleme angewandt werden. Andererseits können die Ergebnisse der Untersuchungen der Spezialfälle teilweise für das Netzproblem verallgemeinert werden.

Die wesentlichen Begriffe und Definitionen dieses Kapitels stellen wir in Abschnitt 4.1 in zusammenhängender Form vor. Wir untersuchen in Abschnitt 4.2 Transformationen und Reduktionen des Netzproblems. Eine polyedrische Untersuchung des Netzproblems folgt in den Abschnitten 4.3 bis 4.6.

4.1 Einleitung

In diesem Abschnitt führen wir das Netzproblem und damit zusammenhängende ganzzahlige Programme und Polyeder ein. Die zulässigen Lösungen eines Netzproblems werden in einer Netzvereinbarung festgelegt. Wir definieren Netzvereinbarungen und Netzprobleme in Unterabschnitt 4.1.1. Dem Netzproblem ordnen wir das ganzzahlige Programm DEKO, ein lineares Programm LDEKO und das dazu duale lineare Programm DDEKO zu. Diese Programme und das dazugehörige Polytop der ganzzahligen Lösungen PD führen wir in Unterabschnitt 4.1.2 ein. Weitere ganzzahlige Programme und die Polytope PN und PB werden in

Unterabschnitt 4.1.3 diskutiert. Abschließend wird in Unterabschnitt 4.1.4 der Zuschnitt des Netzproblems auf das Kabelproblem und andere kombinatorische Optimierungsprobleme an Beispielen erläutert.

4.1.1 Netzvereinbarungen und Netzprobleme

Eine **Netzvereinbarung** (A, T, H) ist gegeben durch eine Menge von **Bauteilen** A, eine Menge von **Zielpunkten** T und eine Familie von Mengen H_t, $t \in T$, deren Elemente Teilmengen der Bauteile A sind. Wir nennen die Elemente der Mengen H_t, $t \in T$, **Anschlüsse**.

Wir interpretieren diese mathematischen Objekte wie folgt. Die Zielpunkte aus T sollen an das Netz angeschlossen werden. Dieses geschieht durch die Auswahl eines Anschlusses aus der Menge H_t für jeden Zielpunkt $t \in T$. Die Bauteile der ausgewählten Anschlüsse müssen in dem Netz enthalten sein. Ein Bauteil ist in diesem Sinne eine Komponente des Netzes, die gemeinsam für den Anschluß verschiedener Zielpunkte genutzt werden kann. Wir betrachten dabei stets Probleme ohne Kapazitätsbeschränkungen. Ein Bauteil kann in beliebig vielen ausgewählten Anschlüssen enthalten sein.

Definition 4.1.1.1 (Netzproblem).
Seien eine Netzvereinbarung (A, T, H), Bauteilkosten $(c_a)_{a \in A}$ und Anschlußkosten $(d_{t,P})_{t \in T, P \in H_t}$ gegeben.

Eine Lösung des Netzproblems ist ein Paar (B, Q), bestehend aus Bauteilen $B \subseteq A$ und einer Familie $Q = (Q_t)_{t \in T}$ von Anschlüssen $Q_t \in H_t$, $t \in T$, mit $Q_t \subseteq B$.

Das Ziel ist die Kostensumme aus Bauteilkosten und Anschlußkosten

$$\sum_{b \in B} c_b + \sum_{t \in T} d_{t,Q_t}$$

zu minimieren.

Eine Instanz des Netzproblems bezeichnen wir kurz mit

$$\mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

oder mit NETZ, wenn sich die Parameter aus dem Zusammenhang ergeben.

Für eine Netzvereinbarung (A, T, H) existiert genau dann keine zulässige Lösung, wenn für irgendeinen Zielpunkt t die Anschlußmenge H_t leer ist. Ein Bauteil, das in jedem Anschluß irgendeines Zielpunktes enthalten ist, nennen wir **unentbehrlich**, ansonsten heißt es **entbehrlich**. Alle unentbehrlichen Bauteile und alle Bauteile mit negativen Kosten sind in der Menge der Bauteile einer optimalen Lösung des Netzproblems enthalten. Wir bezeichnen eine Netzvereinbarung (A, T, H) als **real**, wenn die Bauteilmenge A, die Zielpunktmenge T und die Anschlußmengen H_t, $t \in T$, nichtleer sind und jedes Bauteil entbehrlich ist.

Ein Netzproblem NETZ(A, T, H, c, d) bezeichnen wir als **real**, wenn die Netzvereinbarung (A, T, H) real ist und die Bauteilkosten positiv sind.

Ein Bauteil, das für alle Zielpunkte $t \in T$ in keinem Anschluß aus H_t enthalten ist, nennen wir **überflüssig**. Alle überflüssigen Bauteile mit positiven Kosten sind sicher nicht in der Menge der Bauteile einer optimalen Lösung des Netzproblems enthalten.

In Abschnitt 4.2 zeigen wir, daß wir durch Problemreduktionen stets auf ein reales Netzproblem transformieren können, das keine überflüssigen Bauteile enthält.

4.1.2 Ein ganzzahliges Programm für das Netzproblem

Für das Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

führen wir ein ganzzahliges lineares Programm ein. Der Vektor der **Bauteilvariablen** $(x_a)_{a \in A}$ hat die Bedeutung eines Inzidenzvektors für die ausgewählten Bauteile.
Der Vektor der **Anschlußvariablen** $(y_{t,P})_{t \in T, P \in H_t}$ hat die Bedeutung eines Inzidenzvektors für die ausgewählten Anschlüsse.
Wir definieren das ganzzahlige lineare Programm

DEKO(A, T, H, c, d) :

$$\begin{array}{llllll}
 & & \min & c^T x + \sum\limits_{t \in T} \sum\limits_{P \in H_t} y_{t,P} d_{t,P} & & \\
(4.1) & \forall t \in T : & & \sum\limits_{P \in H_t} y_{t,P} & = & 1 \\
(4.2) & \forall t \in T : & x & - \sum\limits_{P \in H_t} y_{t,P} \chi^P & \geq & 0 \\
(4.3) & & x, & y & & \text{sind } 0, 1 \text{ Vektoren.}
\end{array}$$

Statt DEKO(A, T, H, c, d) schreiben wir auch DEKO(Ψ) oder DEKO, wenn sich die Parameter aus dem Zusammenhang ergeben. Die Menge der Paare (t, P) eines Zielpunktes t und eines Anschlusses $P \in H_t$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{E}(H) = \{(t, P) \mid t \in T, P \in H_t\}.$$

Diese Schreibweise benutzen wir beispielsweise um Unterräume der Anschlußvariablen bezeichnen zu können.

Den Gleichungen (4.1) ordnen wir duale Variablen $(u_t)_{t\in T}$ zu, die wir **Zielpreise** nennen. Wir bezeichnen die Gleichungen daher als **Zielpreisbedingungen**. Die Zielpreisbedingungen stellen sicher, daß für jeden Zielpunkt $t \in T$ genau ein Anschluß $P \in H_t$ ausgewählt wird. Die Ungleichung (4.2) erzwingt, daß für einen gewählten Anschluß P alle Bauteilvariablen x_a, $a \in P$, auf eins gesetzt werden. Den Ungleichungen (4.2) ordnen wir duale Variablen $(v_{t,a})_{t\in T, a\in A}$ zu, die wir **Nutzpreise** nennen. Wir nennen die Ungleichungen (4.2) daher **Nutzpreisbedingungen**.

Das Polytop

$$\mathrm{PD}(A,T,H) = \mathrm{conv}\left(\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x,\, y \text{ erfüllt (4.1)-(4.3)}\right\}\right)$$

ist die konvexe Hülle der zulässigen Lösungen des Programms DEKO.

Die lineare Relaxierung des Programms DEKO(Ψ), in dem die Ganzzahligkeitsbedingungen (4.3) durch die Bedingungen $x, y \geq 0$ ersetzt werden, bezeichnen wir mit LDEKO(Ψ). Die oberen Schranken für die Anschlußvariablen sind in den Gleichungen (4.1) implizit enthalten. Die oberen Schranken für die Bauteilvariablen sind für nichtnegative Bauteilkosten überflüssig. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir auch nur LDEKO.

Das lineare Programm DDEKO(A, T, H, c, d)

$$\begin{array}{lllrcl}
 & & \max \sum_{t\in T} u_t & & & \\
(4.5) & (a \in A) & & \sum_{t\in T} v_{t,a} & \leq & c_a \\
(4.6) & (t \in T),\ (P \in H_t) & u_t & - \sum_{a\in P} v_{t,a} & \leq & d_{t,P} \\
(4.7) & & & v & \geq & 0
\end{array}$$

ist das duale Programm des Programms LDEKO. Wir schreiben auch DDEKO(Ψ) oder nur DDEKO. Der Zielpreis u_t repräsentiert die Kosten, die für den Anschluß des Zielpunktes t aufgewandt werden müssen. Der Nutzpreis $v_{t,a}$ stellt einen Kostenanteil der Bauteilkosten von a dar, der für den Anschluß des Zielpunkts t verrechnet wird. Die Summe der Zielpreise ist zu maximieren.

Die Ungleichungen (4.6) korrespondieren zu den Anschlußvariablen y. Wir nennen die Ungleichungen (4.6) daher **Anschlußbedingungen**. Die Anschlußbedingungen haben die Bedeutung, daß sich der Zielpreis u_t eines Zielpunkts t aus den primalen Anschlußkosten d_{t,P^*} und den Nutzpreisen $\sum_{a\in P^*} v_{t,a}$ eines optimalen Anschlusses $P^* \in H_t$ zusammensetzt,

$$(t \in T) \;\; u_t \leq \min_{P \in H_t} \left(\sum_{a \in P} v_{t,a} + d_{t,P} \right). \tag{4.8}$$

Das Optimierungsproblem in (4.8) bezeichnen wir als das **Pricingproblem** des linearen Programms LDEKO(Ψ).

Die Ungleichungen (4.5) korrespondieren zu den Bauteilvariablen x. Wir nennen die Ungleichungen (4.5) daher **Bauteilbedingungen**. Die Bauteilbedingungen stellen sicher, daß die Summe der Nutzpreise $\sum_{t \in T} v_{t,a}$, $a \in A$, die Bauteilkosten c_a nicht überschreiten. Schließlich sind die Nutzpreise $v_{t,a}$ nichtnegativ. Es gilt $0 \leq v_{t,a} \leq c_a$. Sind nichtnegative Nutzpreise v gegeben, die die Bauteilbedingungen erfüllen, dann sind die Optima des Pricingproblems des Programms LDEKO die besten Belegungen für die Zielpreise u. In gleicher Weise kann die Zulässigkeit eines dualen Vektors $\binom{u}{v}$ durch (näherungsweises) Lösen des Pricingproblems des Programms LDEKO verifiziert werden.

Das folgende Bild soll die linearen Programme dieses Unterabschnittes veranschaulichen. Ein Planer wird von einem Kunden beauftragt, ein Netzproblem Ψ zu lösen und das Netzwerk zu installieren. Der Kunde will aber nur den Preis einer optimalen Lösung bezahlen. Um sich nicht lange mit dem Kunden über den Kostenwert einer optimalen Lösung zu streiten, legt der Planer nichtnegative Nutzpreise v fest, die die Bauteilbedingungen $\sum_{t \in T} v_{t,a} \leq c_a$ für alle Bauteile $a \in A$ erfüllen. Der Planer schlägt dem Kunden vor, sich für jeden Zielpunkt $t \in T$ einen Anschluß $Q_t \in H_t$ auszusuchen und die Summe der Anschlußkosten d_{t,Q_t} und der Preise für die genutzten Bauteile $\sum_{a \in Q_t} v_{t,a}$ zu zahlen. Um seine Kosten gering zu halten, wird der Kunde für jeden Zielpunkt $t \in T$ einen Anschluß mit optimalen Zielpreisen

$$u_t = \min \left\{ d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a} \mid P \in H_t \right\} \tag{4.9}$$

auswählen. Der Kunde ist mit dem Vorschlag des Planers einverstanden, da er für jedes beanspruchte Bauteil $a \in \bigcup_{t \in T} Q_t$ niemals mehr als die Bauteilkosten c_a entrichten muß. Für den Planer geht die Rechnung dann auf, wenn der Kunde jedes in Anspruch genommene Bauteil voll bezahlt, wenn also die Summe der entrichteten Nutzpreise und die Bauteilkosten für alle Bauteile $a \in \bigcup_{t \in T} Q_t$ gleich sind, das heißt

$$\sum_{t \in T} v_{t,a} \chi_a^{Q_t} = c_a. \tag{4.10}$$

Die Bedingungen in (4.9) und die Bedingungen in (4.10) entsprechen gerade den Bedingungen des Satzes vom komplementären Schlupf in Theorem 2.4.1.2.

Bei Verfahren zur Lösung des linearen Programms LDEKO gehen wir wie der Planer vor. Wir suchen nach Nutzpreisen, so daß die eigennützige Wahl des Kunden zu einer Lösung führt, mit der der Planer und der Kunde einverstanden sind.

4.1.3 Weitere ganzzahlige Programme für das Netzproblem

Gegeben sei das spezielle Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d),$$

so daß die Anschlußkosten $d_{t,P}$, $t \in T$, $P \in H_t$, linear von den Bauteilen des jeweiligen Anschlusses P abhängen. Dann existieren Koeffizienten $(\bar{d}_{t,a})_{t \in T, a \in A}$, so daß die Anschlußkosten durch die Beziehung $d_{t,P} = \sum_{a \in P} \bar{d}_{t,a}$, $t \in T$, $P \in H_t$ gegeben sind. Wir nennen die Koeffizienten $\bar{d}_{t,a}$ **Nutzungskosten**.

Wir führen die binären Variablen $(z_{t,a})_{t \in T, a \in A}$ ein, die wir **Nutzungsvariablen** nennen. Die Nutzungsvariable $z_{t,a}$ zeigt an, ob das Bauteil a für den Anschluß des Zielpunktes t genutzt wird. Jeder zulässigen ganzzahligen Ecke $\binom{x}{y}$ des Polytops PD ordnen wir einen ganzzahligen Punkt $\binom{x}{z}$,

$$\forall\, t \in T,\ a \in A: \ z_{t,a} = \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P, \tag{4.11}$$

im Raum der Bauteilvariablen und der Nutzungsvariablen zu. Die konvexe Hülle dieser Punkte definiert das Polytop

$$\mathrm{PN}(A, T, H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A, T, H): \ z \text{ erfüllt } (4.11) \right\}.$$

Wenn die Anschlußkosten linear mit den Bauteilen des jeweiligen Anschlusses zusammenhängen, dann ist das lineare Programm

$$\min \left\{ c^T x + \bar{d}^T z \,\middle|\, \binom{x}{z} \in \mathrm{PN}(A, T, H) \right\}$$

der Formulierung DEKO(Ψ) gleichwertig.

Gegeben sei das spezielle Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d), \ \text{mit } d_{t,P} = 0,\ t \in T,\ P \in H_t.$$

Dann sind die Kosten einer Lösung (B, Q) des Netzproblems Ψ nur von den ausgewählten Bauteilen B abhängig. Wir nennen eine Teilmenge B der Bauteile A eine **Bauteil-Lösung** der Netzvereinbarung (A, T, H), wenn sie zu einer Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) ergänzt werden kann. Die konvexe

Hülle der Inzidenzvektoren von Bauteillösungen der Netzvereinbarung (A, T, H) sei

$$\mathrm{PB}(A, T, H) = \mathrm{conv}\left(\left\{\chi^B \in \mathbb{R}^A \mid\ B \text{ ist eine Bauteillösung von } (A, T, H)\right\}\right).$$

Das Polytop $\mathrm{PB}(A, T, H)$ ist die Projektion des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ auf den Raum der Bauteilvariablen.

Wenn die Anschlußkosten des Netzproblems Ψ identisch null sind, dann ist das ganzzahlige Programm

$$\min\{c^T x \mid\ x \in \mathrm{PB}(A, T, H),\ x \text{ 0-1-ganzzahlig }\},$$

gleichwertig zu dem ganzzahligen Programm DEKO(Ψ).

Für Verschärfungen der linearen Relaxierung LDEKO werden wir facettendefinierende Ungleichungen der Polytope PD, PN und PB beschreiben und deren Einsatz in einem Schnittebenenverfahren diskutieren. Wir werden die Details in Abschnitt 4.3 diskutieren. Der Abschnitt 4.4 enthält eine polyedrische Untersuchung des Polytops PD und der Abschnitt 4.5 enthält eine polyedrische Untersuchung des Polytops PN. In dem Abschnitt 4.6 werden Relaxierungen des ganzzahligen Programms DEKO verglichen.

4.1.4 Beispiele für die Formulierung von Netzproblemen

Gegeben sei das Kabelproblem

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A).$$

Die Bauteile des Kabelproblems Π sind die Bögen des Digraphen D, die Zielpunkte sind die Senken T, und die Anschlüsse sind die Bogenmengen von längenbeschränkten Dipfaden. In gleicher Weise sind die Bauteile des Kabelproblems in ungerichteten Graphen die Kanten eines Graphen, die Zielpunkte sind die Senken, und die Kantenmengen von längenbeschränkten Pfaden sind die Anschlüsse. Man beachte, daß die (virtuellen) Anteilskabel nicht als Bauteile in die Formulierung des Kabelproblems aufgenommen wurden. Die Anteilskabel schließen genau einen Endverteiler an die Bereichsverteiler an. Daher werden die Kosten der Anteilskabel in den Anschlußkosten berücksichtigt.

Anwendungsprobleme bei der Planung von Telekommunikations-Netzwerken sind sehr vielfältig, wie wir in Abschnitt 3.4 ausgeführt haben. Das Kabelproblem soll den wichtigsten Zielvorstellungen und den wesentlichen technologischen Randbedingungen der praktischen Planungsprobleme gerecht werden. Das Netzproblem wurde auch deshalb formuliert, um über die Bedingungen des Kabelproblems hinausgehende Randbedingungen formulieren zu können, ohne das Modell vollständig ändern zu müssen. In diesem Sinne ist auch unsere Namensgebung erfolgt. Ein wesentliches Merkmal eines Netzwerks ist, daß bestimmte Zielpunkte,

z. B. Kunden oder Verteiler, angeschlossen werden, wobei Bauteile des Netzwerks, z. B. auch Verzweiger und Multiplexer, an dem Anschluß mehrerer Zielpunkte mitwirken.

Wie schon im Abschnitt 3.3 diskutiert, wird jedoch durch eine zu realistische Problemformulierung die Lösung praktisch relevanter Instanzen und die Berechnung unterer Schranken für die Kosten der praktischen Probleme möglicherweise stark erschwert.

Ein Spezialfall des Netzproblems ist das Plazierungsproblem von Fabriken ohne Kapazitäten UFLP (**U**ncapacitated **F**acility **L**ocation **P**roblem)

Definition 4.1.4.1 (Plazierungsproblem UFLP**).** *Gegeben sind eine Menge von Kunden T, eine Menge von Fabrik-Standorten A, Errichtungskosten $(c_a)_{a \in A}$ und Belieferungskosten $(d_{t,\{a\}})_{t \in T, a \in A}$. Gesucht sind Fabrik-Standorte $B \subseteq A$ und Kundenzuordnungen $b(t) \in B$ für alle Kunden $t \in T$ mit minimalen Kosten*

$$\sum_{a \in B} c_a + \sum_{t \in T} d_{t,\{b(t)\}}.$$

Dieses Problem läßt sich mit Anschlußmengen

$$H_t = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

für alle Kunden $t \in T$ als Netzproblem NETZ(A, T, H, c, d) darstellen. Eine Verallgemeinerung des Plazierungsproblems UFLP wurde von Caprara und Salazar-Gonzales in [CSG96] formuliert. Diese ist dem Netzproblem formal sehr ähnlich. Das Plazierungsproblem UFLP spielt eine wichtige Rolle bei der polyedrischen Untersuchung des Netzproblems in den Abschnitten 4.4 und 4.5. Eine polyedrische Untersuchung des Plazierungsproblems UFLP wurde unter anderen von Cho, Johnson, Padberg und Rao [CJPR83a] [CJPR83b] und von Cornuejols und Thizy [CT82] durchgeführt.

Ein Beispiel für ein Netzwerk-Design-Problem ist das folgende Problem:

Definition 4.1.4.2 (Netzwerk-Design-Problem ohne Kapazitäten). *Gegeben sind ein Digraph $D = (V, A)$, Bogenkosten $(c_a)_{a \in A}$, Paare von einer Quelle i_t und einer Senke j_t, $1 \leq t \leq n$, und Flußkosten $(\bar{d}_{t,a})_{1 \leq t \leq n}$. Gesucht sind eine Bogenmenge $B \subseteq A$ und n Güterflüsse $(z_{t,a})_{a \in A}$, $1 \leq t \leq n$, mit $z_{t,a} \in \{0, 1\}$ in dem Untergraph $D[B]$, jeweils von der Quelle i_t und zu der Senke j_t, die die Kosten*

$$\sum_{b \in B} c_b + \sum_{t=1}^{n} \sum_{a \in A} \bar{d}_{t,a} z_{t,a}.$$

minimieren.

Die Paare (i_t, j_t), $t = 1, \ldots, n$, entsprechen den Zielpunkten, die Bögen des Digraphen sind die Bauteile, und die Bogenmengen der Güterflüsse sind die Anschlüsse. Die Anschlußkosten eines Güterflusses $z_{t,\cdot}$ sind die Flußkosten

$$\sum_{a \in A} \bar{d}_{t,a} z_{t,a}.$$

Ein Diskussion dieses Problems im Zusammenhang mit Lagrange-Relaxierungen findet sich in [AMO93].

Im folgenden definieren wir das für die kombinatorische Optimierung wichtige Set-Covering-Problem und modellieren es als Netzproblem.

Definition 4.1.4.3 (Set-Covering-Problem).
Gegeben sind eine Menge A, nichtnegative Kosten c_a, $a \in A$, und eine Menge $\mathcal{C}$ von blockierenden Mengen $C \subseteq A$. Gesucht ist eine kostenminimale Teilmenge $B \subseteq A$ die mit allen Teilmengen $C \in \mathcal{C}$ einen nichtleeren Durchschnitt bildet.

Dieses Problem läßt sich auf die folgende Weise als Netzproblem modellieren. Sei T eine Indexmenge und seien Teilmengen $\mathcal{C}'_t \subseteq \mathcal{C}$ gegeben, so daß $\bigcup_{t \in T} \mathcal{C}'_t = \mathcal{C}$ gilt. Man definiere Anschlußmengen $H_t = \mathrm{BL}(\mathcal{C}'_t)$ für alle $t \in T$. Dann sind das oben definierte Set-Covering-Problem und das Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, 0)$$

äquivalent. Ist B eine Lösung des Set-Covering-Problems, dann gilt $B \cap C \neq \emptyset$ für alle $C \in \mathcal{C}'_t$ und alle $t \in T$. Daher existiert ein Anschluß $Q_t \in H_t$ mit $Q_t \subseteq B$ für alle $t \in T$. Also existiert auch eine Lösung (B, Q) des Netzproblems Ψ. Ist andererseits (B, Q) eine Lösung des Netzproblems, dann existiert für jede blockierende Menge $C \in \mathcal{C}$ ein Index $t \in T$ mit $C \in \mathcal{C}'_t$ und daher $B \cap C \supseteq Q_t \cap C \neq \emptyset$.

Ob die Modellierung des Set-Covering-Problems als Netzproblem von Nutzen ist, hängt von dem konkreten Problem und von der Auswahl der Teilmengen $\mathcal{C}'_t \subseteq \mathcal{C}$ ab. Man betrachte als konkretes Beispiel das Steinerbaum-Problem in Digraphen $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$, $D = (V, A)$. Dieses Problem kann zum Einen als Set-Covering-Problem dargestellt werden, indem $\mathcal{C}$ als Menge aller gerichteten (s,t)-Schnitte dargestellt wird. Zum anderen wird das Steinerbaum-Problem als Netzproblem dargestellt, indem Anschlußmengen H_t, $t \in T$, eingeführt werden, die genau die (s,t)-Dipfade enthalten.

4.2 Transformationen und Reduktionen

Wenn eine optimale Lösung eines Netzproblems Ψ existiert, in der eine Teilmenge der Bauteile und eine Teilmenge der Anschlüsse nicht ausgewählt wurde, dann dürfen wir diese Teilmenge aus der Instanz Ψ entfernen. Diese Reduktion beschreiben wir in Unterabschnitt 4.2.1.

Wenn eine optimale Lösung eines Netzproblems Ψ existiert, in der eine Teilmenge der Bauteile und eine Teilmenge der Anschlüsse ausgewählt wurde, dann können wir uns auf die Auswahl dieser Bauteile und Anschlüsse im voraus festlegen. Die zugehörige Reduktion beschreiben wir in Unterabschnitt 4.2.2.

In Unterabschnitt 4.2.3 beschreiben wir die Einführung von Variablen, die die gleichzeitige Auswahl von verschiedenen Anschlüssen anzeigen. In Unterabschnitt 4.2.4 beschreiben wir die Einführung von Variablen, die die gleichzeitige Auswahl von verschiedenen Bauteilen anzeigen. Mit diesem Vorgehen ist jeweils eine Transformation auf ein neues Netzproblem verbunden, dessen Anzahl an Bauteilen und Anschlüssen nicht notwendigerweise reduziert ist, sondern häufig vergrößert wird. In Verfahren zur Lösung des Kabelproblems spielen diese Transformationen als Zwischenschritte von komplexen Reduktionen von Instanzen des Kabelproblems eine bedeutende Rolle.

In jedem Unterabschnitt wird die jeweilige Reduktion oder Transformation einer Instanz Ψ des Netzproblems auf eine neue Instanz Ψ' beschrieben. Dann wird gezeigt, wie die Optimalwerte der Instanzen zusammenhängen und wie aus einer optimalen Lösung der neuen Instanz Ψ' eine optimale Lösung der Instanz Ψ berechnet wird. In dem Verfahren zur Lösung von Instanzen des Kabelproblems berechnen wir duale zulässige Lösungen des linearen Programms LDEKO und wenden das Reduzierte-Kosten-Kriterium zur Reduktion der Instanz an. Wir beschreiben daher, wie wir die duale Lösung des linearen Programms LDEKO(Ψ) auf eine duale Lösung des linearen Programms LDEKO(Ψ') mittransformieren.

Kriterien für die Zulässigkeit der jeweiligen Transformation besprechen wir im Wesentlichen im Zusammenhang mit dem Verfahren zur Lösung des Kabelproblems in Abschnitt 5.3.

4.2.1 Entfernen von Bauteilen und Anschlüssen

Wenn eine optimale Lösung eines Netzproblems Ψ existiert, in der eine Teilmenge der Bauteile und eine Teilmenge der Anschlüsse nicht ausgewählt wurde, dann dürfen wir diese Teilmengen aus dem Netzproblem Ψ entfernen. Anschließend suchen wir in der reduzierten Instanz des Netzproblems nach einer optimalen Lösung. Wir beschreiben in diesem Unterabschnitt das Entfernen von Bauteilen und Anschlüssen und geben in Theorem 4.2.1.3 zwei einfache allgemeine Kriterien dafür an, daß diese Reduktion zulässig ist.

Gegeben seien ein Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d) \tag{4.12}$$

und Teilmengen

$$A' \subseteq A \text{ und } H'_t \subseteq \{P \in H_t \,|\, P \subseteq A'\} \subset H_t,\ t \in T. \tag{4.13}$$

Wenn eine (jede) optimale Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ nur Bauteile aus A' und Anschlüsse aus H'_t, $t \in T$, enthält, das heißt

$$B^* \subseteq A' \text{ und } Q^*_t \in H'_t,\ t \in T,$$

dann sagen wir: **In dem Netzproblem Ψ ist die Nicht-Auswahl der Bauteile $A \backslash A'$ und der Anschlüsse aus den Teilmengen $H_t \backslash H'_t$, $t \in T$, zulässig (notwendig).** Wenn $A' = A$ gilt, sprechen wir einfach von der Nicht-Auswahl der Anschlüsse $H_t \backslash H'_t$. Wenn die Anschlußmengen $H_t \backslash H'_t$, $t \in T$, genau die Anschlüsse P mit $P \subseteq A'$ enthalten, sprechen wir einfach von der Nicht-Auswahl der Bauteile $A \backslash A'$. Wenn die Mengen $A \backslash A'$ bzw. die Mengen $H_t \backslash H'_t$ nur aus einem Element bestehen, sprechen wir auch von der Nicht-Auswahl eines Bauteils oder der Nicht-Auswahl eines Anschlusses.

Wir berücksichtigen die Nicht-Auswahl der Bauteile $A \backslash A'$ und der Anschlüsse aus den Teilmengen $H_t \backslash H'_t$, $t \in T$, für die Formulierung eines neuen Netzproblems

$$\Psi' = (A', T, H', c|_{A'}, d|_{\mathcal{E}(H')}). \tag{4.14}$$

Theorem 4.2.1.1. *Seien die Netzprobleme Ψ und Ψ' gegeben wie in* (4.12), (4.13) *und* (4.14). *Wenn die Nicht-Auswahl der Bauteile $A \backslash A'$ und der Anschlüsse aus H'_t, für alle $t \in T$, für das Netzproblem Ψ zulässig ist, dann gilt:*
Jede optimale Lösung des Netzproblems Ψ' ist eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ. Die Optimalwerte der Netzprobleme Ψ und Ψ' sind gleich.

Beweis: Jede zulässige Lösung des Netzproblems Ψ' ist eine zulässige Lösung des Netzproblems Ψ mit gleichen Kosten. Da eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ für das Netzproblem Ψ' zulässig ist, sind die Optimalwerte der Netzprobleme Ψ und Ψ' gleich. Daher ist jede optimale Lösung des Problems Ψ' auch eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ. □

Eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) transformieren wir wie folgt auf eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ').

Theorem 4.2.1.2. *Seien die Netzprobleme Ψ und Ψ' gegeben wie in* (4.12), (4.13) *und* (4.14). *Wenn die Nicht-Auswahl der Bauteile $A \backslash A'$ und der Anschlüsse aus H'_t, $t \in T$, für das Netzproblem Ψ zulässig ist, dann gilt:*
Für jede duale Lösung $\binom{u}{v}$ des linearen Programms LDEKO(Ψ) *ist der Vektor $\binom{u}{v|_{T \times A'}}$ eine duale Lösung des linearen Programms* LDEKO(Ψ').

Beweis: Die dualen Bedingungen des Programms LDEKO gelten auch für das neue Netzproblem, da

$$u_t \leq \min\{d_{t,P} + v_{t,\cdot}(P) \mid P \in H_t\} \leq \min\{d_{t,P} + v_{t,\cdot}(P) \mid P \in H'_t\}$$

gilt. □

Die Entfernung von Bauteilen einer zulässigen Lösung des Netzproblems Ψ, die kostengünstig ersetzt oder fortgelassen werden können, ist zulässig.

Bemerkung 4.2.1.3. *Sei ein lösbares Netzproblem*

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d) \tag{4.15}$$

mit nichtnegativen Bauteilkosten c gegeben. In dem Netzproblem Ψ ist die Nicht-Auswahl des Bauteils $a \in A$ zulässig (notwendig), wenn gilt:

1. *Das Bauteil a ist überflüssig (und die Bauteilkosten c_a sind positiv), oder:*
2. *Es existieren Ersatzbauteile $A' \subseteq A$, $a \notin A'$, so daß für alle Lösungen (B, Q) mit $a \in B$ eine Lösung billigere Lösung (B', Q') mit $B' = B \backslash \{a\} \cup A'$ existiert.*

Überflüssige Bauteile sind Bauteile, die in keinem Anschluß irgendeiner Anschlußmenge enthalten sind.

4.2.2 Vor-Auswahl von Bauteilen und Anschlüssen

Wenn eine optimale Lösung eines Netzproblems Ψ existiert, in der eine Teilmenge der Bauteile und eine Teilmenge der Anschlüsse ausgewählt wurde, dann ist die Festlegung auf eine Auswahl dieser Bauteile und Anschlüsse zulässig. Wir gehen zu einer reduzierten Instanz Ψ' über. Aus einer optimalen Lösung des Netzproblems Ψ' ergibt sich eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ (Theorem 4.2.2.1). Eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) transformieren wir auf eine zulässige Lösung des Programms DDEKO(Ψ') (Theorem 4.2.2.2).

Gegeben seien ein Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d), \tag{4.16}$$

Partitionen der Bauteile und der Zielpunkte

$$A' \dot\cup A'' = A,\ T' \dot\cup T'' = T \text{ und Anschlüsse } R_t \in H_t,\ t \in T'', \text{ mit } R_t \subseteq A''. \tag{4.17}$$

Wenn eine optimale Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ existiert, die alle Bauteile $A'' \subseteq B^*$ und alle Anschlüsse $R_t = Q^*_t$, $t \in T''$, enthält, dann sagen wir: **Die Vor-Auswahl der Bauteile A'' und der Anschlüsse R_t, $t \in T''$, ist**

zulässig. Für die Formulierung eines neuen Netzproblems beschränken wir uns auf die Bauteile A' und die Zielpunkte T'. Jedem Anschluß $P \in H_t$, $t \in T$, wird ein Anschluß $P' = P \cap A'$ einer neuen Anschlußmenge H'_t zugeordnet. Die neuen Anschlußkosten $d'_{t,P'}$ werden auf den minimalen Wert der Anschlußkosten der Anschlüsse $P \in H_t$ mit der Eigenschaft $P \cap A' = P'$ festgesetzt:

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\},\ t \in T', \tag{4.18}$$

$$d'_{t,P'} = \min\{d_{t,P} \mid P \in H_t : P \cap A' = P'\},\ t \in T',\ P' \in H'_t. \tag{4.19}$$

Auf diese Weise gelangen wir zu dem neuen Netzproblem

$$\Psi' = \mathrm{NETZ}(A', T', H', c|_{A'}, d'). \tag{4.20}$$

Aus einer optimalen Lösung des neuen Netzproblems Ψ' berechnet man wie folgt eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ:

Theorem 4.2.2.1. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in (4.16) bis (4.20) gegeben. Wenn die Vor-Auswahl der Bauteile A'' und der Anschlüsse $R_t \in H_t$, $t \in T''$, zulässig ist, dann gilt:*
Ist (B^+, Q^+) eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ', dann existiert eine optimale Lösung $(B^+ \cup A'', Q)$ des Netzproblems Ψ mit den Eigenschaften:

1. *$Q_t = R_t$ für alle $t \in T''$,*
2. *$Q_t \cap A' = Q^+_t$ und*
3. *$d_{t,Q_t} = d_{t,Q^+_t}$ für alle $t \in T'$.*

Der Optimalwert des Netzproblems Ψ ist um $c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t}$ größer als der Optimalwert des Netzproblems Ψ'.

Beweis: Man betrachte die oben eingeführte optimale Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ mit $A'' \subseteq B^*$ und $Q^*_t = R_t$, $t \in T''$. Die Lösung $(B^* \cap A', (Q^*_t \cap A')_{t \in T'})$ ist eine zulässige Lösung des Netzproblems Ψ'. Der Austausch des Anschlusses Q^*_t, $t \in T'$, durch einen Anschluß $P \in H_t$ mit der Eigenschaft $Q^*_t \cap A' = P \cap A'$ in der Lösung (B^*, Q^*) führt zu einer zulässigen Lösung des Problems Ψ. Da die Lösung (B^*, Q^*) optimal ist, gilt:

$$d_{t,Q^*_t} = \min\{d_{t,P} \mid P \in H_t : P \cap A' = Q^*_t \cap A'\} = d'_{t,Q^*_t \cap A'}.$$

Die Kosten K^* der optimalen Lösung (B^*, Q^*) sind um $c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t}$ größer als die Kosten K' der zulässigen Lösung $(B^* \cap A', (Q^*_t \cap A')_{t \in T})$,

$$\begin{aligned} K^* = c(B^*) + \sum_{t \in T} d_{t,Q^*_t} &= c(B^* \cap A') + c(A'') + \sum_{t \in T'} d'_{t,Q^*_t \cap A'} + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t} = \\ &= K' + c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t}. \end{aligned}$$

Die Kosten K^+ der optimalen Lösung (B^+, Q^+) des Netzproblems Ψ' sind um den Wert $c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t}$ geringer als die Kosten K der Lösung $(B^+ \cup A'', Q)$. Es gilt

$$K = c(B^+) + c(A'') + \sum_{t \in T'} d_{t,Q_t} + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t} = K^+ + c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t}.$$

Daraus folgt

$$K^* = K' + c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t} \geq K^+ + c(A'') + \sum_{t \in T''} d_{t,R_t} = K \geq K^*.$$

Daher ist die Lösung $(B^+ \cup A'', Q)$ optimal für das Problem Ψ. □

Eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) transformieren wir wie folgt auf eine zulässige Lösung des Programms DDEKO(Ψ'):

Theorem 4.2.2.2. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in (4.16) bis (4.20) gegeben. Wenn die Vor-Auswahl der Bauteile A'' und der Anschlüsse $R_t \in H_t$, $t \in T''$, zulässig ist, dann gilt:*
Ist $\binom{u}{v}$ eine Lösung des dualen Programms DDEKO(A, T, H, c, d), dann ist der duale Vektor $\binom{u'}{v'}$, definiert durch

$$\begin{aligned} u'_t &= u_t - \sum_{a \in A''} v_{t,a}, \ t \in T', \\ v' &= v|_{T' \times A'}, \end{aligned}$$

eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO$(A', T', H', c|_{A'}, d')$.

Beweis: Der Vektor $\binom{u'}{v'}$ erfüllt die Anschlußbedingungen:

$$\begin{aligned} (t \in T') \ \ u'_t = u_t - \sum_{a \in A''} v_{t,a} &\leq \min_{P \in H_t} \left\{ d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a} - \sum_{a \in A''} v_{t,a} \right\} \\ &\leq \min_{P \in H_t} \left\{ d'_{t,P \cap A'} + \sum_{a \in P \cap A'} v'_{t,a} \right\} \\ &\leq \min_{P' \in H'_t} \left(d'_{t,P'} + \sum_{a \in P'} v'_{t,a} \right) . \end{aligned}$$

Der Vektor $\binom{u'}{v'}$ erfüllt die Bauteilbedingungen:

$$(a \in A') \ \ \sum_{t \in T'} v'_{t,a} \leq \sum_{t \in T} v_{t,a} \leq c_a.$$

Schließlich gilt $v' \geq 0$. □

4.2.3 Bündeln von Zielpunkten

Während die vorherigen Unterabschnitte 4.2.1 und 4.2.2 Problemreduktionen beschreiben, ist dieser Abschnitt einer Umformulierung des Netzproblems gewidmet. Die Zielpunkte eines Netzproblems Ψ werden in nichtleeren Partitionsmengen gebündelt. Jede Partitionsmenge ist ein Zielpunkt eines neuen Netzproblems Ψ'. Die Anschlüsse des Netzproblems Ψ' korrespondieren zu einer Familie von Anschlüssen des Netzproblems Ψ.

Das Bündeln von Zielpunkten ist im Zusammenhang mit Schnittebenenverfahren von Interesse, die in Abschnitt 4.3 diskutiert werden. Der Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ') ist größer oder gleich dem Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ) (Theorem 4.2.3.2). Ein Schnittebenenverfahren zur Lösung des Kabelproblems wird in Abschnitt 5.6 beschrieben. Das Bündeln von Zielpunkten leistet auch gute konzeptionelle Dienste bei der YΔ-Transformation des Kabelproblems, die wir in Unterabschnitt 5.3.5 beschreiben.

Gegeben seien ein Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d) \tag{4.21}$$

und eine Partition $U_1, \dots U_n$, $n \geq 1$, der Zielpunkte T. Für jede Partitionsmenge U_i, $i \in \mathbb{N}_n$, führen wir einen neuen Zielpunkt ein. Für jeden neuen Zielpunkt $i \in \mathbb{N}_n$ und jede Familie $(Q_t)_{t \in U_i}$ von Anschlüssen $Q_t \in H_t$, $t \in U_i$, führen wir einen neuen Anschluß $Q' = \bigcup_{t \in U_i} Q_t$ ein. Wir definieren neue Anschlußmengen

$$H_i' = \left\{ \bigcup_{t \in U_i} Q_t \,|\, Q_t \in H_t,\, t \in U_i \right\},\ i \in \mathbb{N}_n. \tag{4.22}$$

Die Anschlußkosten der neuen Anschlüsse $Q' \in H_i'$ für einen Zielpunkt $i \in \mathbb{N}_n$ des neuen Netzproblems sind gleich dem Kostenminimum für eine Auswahl von Anschlüssen $Q_t \in H_t$, $t \in U_i$, mit $Q_t \subseteq Q'$, das heißt

$$d'_{i,Q'} = \sum_{t \in U_i} \min\{d_{t,Q_t} \,|\, Q_t \in H_t : Q_t \subseteq Q'\},\ i \in \mathbb{N}_n,\ Q' \in H_i'. \tag{4.23}$$

Das neue Netzproblem ist

$$\Psi' = (A, \mathbb{N}_n, H', c, d'). \tag{4.24}$$

Lösungen des neuen Netzproblems Ψ' korrespondieren in einfacher Weise mit Lösungen des Netzproblems Ψ.

Theorem 4.2.3.1. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in den Gleichungen* (4.21) *bis* (4.24) *gegeben. Für jede optimale Lösung (B^+, Q^+) des Netzproblems Ψ', ist jede Lösung (B^+, Q) des Netzproblems Ψ mit der Eigenschaft*

$$d_{t,Q_t} = \min\{d_{t,P} \,|\, P \in H_t :\ P \subseteq Q_i^+\},\ i \in \mathbb{N}_n,\ t \in U_i,$$

eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ mit gleichen Kosten.

Beweis: Sei (B^*, Q^*) eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ. Dann ist das Paar

$$(B^*, Q'),\ Q'_i = \bigcup_{t \in U_i} Q^*_t,\ i \in \mathbb{N}_n,$$

eine zulässige Lösung des Netzproblems Ψ'. Die Kosten K' der Lösung (B^*, Q') des Netzproblems Ψ' sind kleiner oder gleich den Kosten K^* der Lösung (B^*, Q^*).

$$K^* = c(B) + \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \sum_{t \in U_i} d_{t,Q_t} \geq c(B) + \sum_{i \in \mathbb{N}_n} d'_{i,Q'_i} = K'.$$

Die Kosten K der zulässigen Lösung (B^+, Q) des Netzproblems Ψ sind gleich den Kosten K^+ der optimalen Lösung (B^+, Q^+) des Netzproblems Ψ'. Es gilt:

$$K = c(B^+) + \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \sum_{t \in U_i} d_{t,Q_t} = c(B^+) + \sum_{i \in \mathbb{N}_n} d'_{i,Q^+_i} = K^+.$$

Wegen $K^* \leq K = K^+ \leq K' \leq K^*$ sind die Optimalwerte der Probleme Ψ und Ψ' gleich. Die Lösung (B^+, Q) ist eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ. □

Der Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ') ist größer oder gleich dem Optimalwert des Programms DDEKO(Ψ) Aus einer zulässigen Lösung des Programms DDEKO(Ψ) erhalten wir wie folgt eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ'):

Theorem 4.2.3.2. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in den Gleichungen* (4.21) *bis* (4.24) *gegeben. Sei $\binom{u}{v}$ eine zulässige Lösung des Programms* DDEKO(Ψ), *dann ist der Vektor $\binom{u'}{v'}$ mit*

$$u'_i = \sum_{t \in U_i} u_t \quad (1 \leq i \leq n),$$
$$v'_{i,a} = \sum_{t \in U_i} v_{t,a} \quad (1 \leq i \leq n)$$

eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ').

Der Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ') *ist gleich oder größer als der Optimalwert des dualen Programms* DDEKO(Ψ).

Beweis: Man betrachte den dualen Vektor $\binom{u'}{v'}$. Der Vektor v' ist nichtnegativ und erfüllt die Bauteilbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} v'_{i,a} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t \in U_i} v_{t,a} \leq c_a$$

für alle Bauteile $a \in A$. Die Anschlußbedingungen sind erfüllt, wenn für alle Zielpunkte $i \in \mathbb{N}_n$

$$u'_i \leq \min_{R \in H'_i} \{d'_{t,R} + v'_{i,\cdot}(R)\}$$

gilt. Das Minimierungsproblem auf der rechten Seite ist ein Netzproblem. Es ist das Netzproblem

$$\Psi''_i = \mathrm{NETZ}(A, U_i, H|_{U_i}, v'_{i,\cdot}, d|_{\mathcal{E}(H|_{U_i})}).$$

Der duale Vektor $(\,(u|_{U_i})^T, (v|_{U_i \times A})^T\,)^T$ ist eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ''_i), denn es gilt

$$\sum_{t \in U_i} v_{t,\cdot} = v'_{i,\cdot} \text{ und } u_t \leq \min_{P \in H_t} \{d_{t,P} + v_{t,\cdot}(P)\}$$

für alle Zielpunkte $t \in U_i$. Daher sind die dualen Kosten $u'_i = \sum_{t \in U_i} u_t$ eine untere Schranke für das Netzproblem Ψ''_i. Also werden die Anschlußbedingungen des dualen Programms DDEKO(Ψ') von dem dualen Vektor $\binom{u'}{v'}$ erfüllt.

Man nehme an, der Vektor $\binom{u}{v}$ sei eine optimale Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ). Der Vektor $\binom{u'}{v'}$ ist für das duale Programm DDEKO zulässig. Der Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ') ist daher größer oder gleich dem Optimalwert des dualen Programms DDEKO(Ψ). $\square$

Man beachte insbesondere, daß der Optimalwert des Programms DDEKO(Ψ') mindestens dann echt größer als der Optimalwert des Programms DDEKO(Ψ) ist, wenn für irgendeinen Zielpunkt $i \in \mathbb{N}_n$ der Optimalwert des Netzproblems Ψ''_i größer ist als der Optimalwert der linearen Relaxierung LDEKO(Ψ''_i).

4.2.4 Bündeln von Bauteilen

Das Bündeln von Bauteilen führt wie das Bündeln von Zielpunkten nicht notwendigerweise zu einer Reduktion einer Instanz

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d), c \geq 0, \tag{4.25}$$

des Netzproblems. Sei A'' eine Teilmenge der Bauteile A. Wir führen Variablen für die gleichzeitige Auswahl einer Teilmenge C der Menge A'' ein. Dies macht dann Sinn, wenn für alle ausgewählten Anschlüsse Q_t, $t \in T$, einer Lösung (B, Q) entweder $Q_t \cap A'' = C$ oder $Q_t \cap A'' = \emptyset$ gilt.

Das Konzept des Bündelns von Bauteilen wird angewandt bei der YΔ-Transformation des Kabelproblems, die in Unterabschnitt 5.3.5 beschrieben wird.

Gegeben seien das Netzproblem Ψ und eine Partition der Bauteile

$$A' \dot{\cup} A'' = A. \tag{4.26}$$

Man nehme an, daß eine optimale Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ existiert, mit der Eigenschaft: Es existiert eine Teilmenge C, so daß für alle Zielpunkte $t \in T$ entweder $Q_t^* \cap A'' = C$ oder $Q_t^* \cap A'' = \emptyset$ gilt. In diesem Fall sagen wir: **Die Zusammenfassung der Bauteile A'' zu Bauteilkomplexen ist zulässig.**

In folgender Weise berücksichtigen wir diese Zusammenfassung bei der Formulierung eines neuen Netzproblems: Wir brauchen nur diejenigen Bauteilkomplexe $C \subseteq A''$ als neue Bauteile zu berücksichtigen, für die mindestens ein Anschluß $P \in H_t$, $t \in T$, mit $P \cap A'' = C$ existiert. Wir definieren

$$\mathcal{C} = \left\{ \{ P \cap A'' \} \mid P \in H_t, t \in T \right\}. \tag{4.27}$$

Die neue Menge der Bauteile ist $A' \cup \mathcal{C}$. Die neuen Bauteilkosten c' bleiben für die Bauteile $a \in A'$ unverändert und sind für Bauteilkomplexe $C \in \mathcal{C}$ gleich $\sum_{b \in B} c_b$:

$$(c'_a)_{a \in A' \cup \mathcal{C}} : \begin{cases} c'_a = c_a & \text{falls } a \in A', \\ c_C = \sum_{a \in C} c_a & \text{falls } C \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{4.28}$$

Wir führen die Zuordnungen

$$(B \subseteq A): \qquad g(B) = (B \cap A') \cup (\{B \cap A''\}) \tag{4.29}$$

$$(B' \subseteq A', B'' \subseteq A''): \qquad g^{-1}(B' \cup \{B''\}) = B' \cup B'' \tag{4.30}$$

ein. Wir tauschen in den Anschlüssen P die Bauteile von $P \cap A''$ durch entsprechende Bauteilkomplexe von $\mathcal{C}$ aus und definieren so neue Anschlußmengen

$$H'_t \subseteq \{ g(P) \mid P \in H_t \}, \ t \in T. \tag{4.31}$$

Die neuen Anschlußkosten eines Anschlusses $P \in H'_t$, $t \in T$, sind gleich den alten Anschlußkosten des ursprünglichen Anschlusses $g^{-1}(P)$,

$$(d'_{t,P})_{t \in T, P \in H'_t}, \ \ d'_{t,P} = d_{t, g^{-1}(P)}, \ t \in T, \ P \in H'_t. \tag{4.32}$$

Das neue Netzproblem lautet

$$\Psi' = \mathrm{NETZ}(A' \cup \mathcal{C}, T, H', c', d'). \tag{4.33}$$

Aus einer optimalen Lösung des neuen Netzproblems Ψ' können wir eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ berechnen.

Theorem 4.2.4.1. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in den Gleichungen* (4.25) *bis* (4.33) *gegeben. Wenn die Zusammenfassung der Bauteile A'' zu Bauteilkomplexen zulässig ist, dann gilt: Für jede optimale Lösung (B^+, Q^+) des Netzproblems Ψ' ist das Paar*

$$(B, Q) = \left(\left[(B^+ \cap A') \cup \left(\bigcup_{C \in B^+ \cap \mathcal{C}} C \right) \right], \ (g^{-1}(Q_t^+))_{t \in T} \right)$$

eine optimale Lösung des Netzproblems Ψ. Die Optimalwerte der Netzprobleme Ψ und Ψ' sind gleich.

Beweis: Man betrachte die oben eingeführte optimale Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ mit der Eigenschaft: Für alle Zielpunkte $t \in T$ gilt $Q_t^* \cap A'' \in \{\emptyset, (B^* \cap A'')\}$. Daher ist das Paar $(g(B^*), (g(Q_t^*))_{t\in T})$ eine zulässige Lösung der Instanz Ψ'. Die Kosten K^* der Lösung (B^*, Q^*) und die Kosten K' der Lösung $(g(B^*), (g(Q_t^*))_{t\in T})$ sind gleich:

$$\begin{aligned} K^* &= c(B^* \cap A') + c(B^* \cap A'') + \sum_{t\in T} d_{t,Q_t^*} = \\ &= c'(B^* \cap A') + c'_{B^*\cap A''} + \sum_{t\in T} d'_{t,g(Q_t^*)} = K'. \end{aligned}$$

Das Paar (B, Q) ist eine zulässige Lösung des Netzproblems Ψ. Die Kosten K der Lösung (B, Q) des Netzproblems Ψ sind kleiner oder gleich den Kosten K^+ der optimalen Lösung (B^+, Q^+) des Netzproblems Ψ', da gilt:

$$\begin{aligned} K = c(B) + \sum_{t\in T} d_{t,Q} &= c(B^+ \cap A') + c\left(\bigcup_{C\in B^+\cap\mathcal{C}} C\right) + \sum_{t\in T} d'_{t,Q_t^+} \\ &\le c'(B^+ \cap A') + \sum_{C\in B^+\cap\mathcal{C}} c'_C + \sum_{t\in T} d'_{t,Q_t^+} = K^+. \end{aligned}$$

Wegen $K^* = K' \ge K^+ \ge K \ge K^*$ sind die Optimalwerte der Netzprobleme Ψ und Ψ' gleich. Die Lösung (B, Q) ist für das Netzproblem Ψ optimal. $\square$

Aus einer zulässigen Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) erhalten wir wie folgt eine zulässige Lösung des Programms DDEKO(Ψ'):

Theorem 4.2.4.2. *Seien Netzprobleme Ψ und Ψ' wie in den Gleichungen (4.25) bis (4.33) gegeben. Wenn die Zusammenfassung der Bauteile A'' zu Bauteilkomplexen zulässig ist, dann gilt:*
Ist $\binom{u}{v}$ eine Lösung des dualen Programms DDEKO(A, T, H, c, d), dann ist der duale Vektor $\binom{u'}{v'}$,

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v'_{t,a} &= \begin{cases} v_{t,a} & \textit{falls } a \in A', \\ \sum_{c\in C} v_{t,c} & \textit{falls } a = C \in \mathcal{C}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Lösung des dualen Programms DDEKO$(A \cup \mathcal{C}, T, H', c', d')$.

Beweis: Der Vektor $\binom{u'}{v'}$ erfüllt die Anschlußbedingungen:

$$\begin{aligned}(t \in T) \;\; u'_t = u_t \leq \min_{P \in H_t} &\left\{ d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a} \right\} = \\ = \min_{P \in H_t} &\left\{ d_{t,P} + \sum_{a \in P \cap A'} v_{t,a} + \sum_{a \in P \cap A''} v_{t,a} \right\} = \\ = \min_{P' \in H'_t} &\left\{ d_{t,P'} + \sum_{a \in P' \cap A'} v'_{t,a} + \sum_{a \in P \cap A''} v'_{t,a} \right\}\end{aligned}$$

Der Vektor $\binom{u'}{v'}$ erfüllt die Bauteilbedingungen:

$$\begin{aligned}(a \in A') \;\; &\sum_{t \in T} v'_{t,a} = \sum_{t \in T} v_{t,a} \leq c_a = c'_a \\ (C \in \mathcal{C}) \;\; &\sum_{t \in T} v'_{t,C} = \sum_{t \in T} \sum_{a \in C} v_{t,a} \leq c(C) = c'_C\end{aligned}$$

Schließlich gilt $v' \geq 0$. □

4.3 Schnittebenenverfahren

Das Ziel der polyedrischen Untersuchung des Netzproblems ist, lineare Programme zu formulieren und mit diesen untere Schranken für das Netzproblem zu berechnen. Die linearen Programme sollen nicht nur theoretisch eine gute untere Schranke darstellen, sondern auch mit praktischen Verfahren lösbar sein. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Anschlüsse gegebenenfalls implizit definiert sind, so daß deren Anzahl exponentiell von der Anzahl der Bauteile bzw. von der Inputgröße des Problems abhängen kann. In diesem Abschnitt stellen wir Ansätze für die Formulierung von linearen Programmen für das Netzproblem im Hinblick auf deren Einsatz in Schnittebenenverfahren vor.

4.3.1 Verzögerte Erzeugung von Variablen und von Nebenbedingungen

Wie löst man lineare Programme, deren Variablen und Nebenbedingungen sehr zahlreich sind? In diesem Unterabschnitt beschreiben wir Schnittebenenverfahren mit verzögerter Erzeugung sowohl von Variablen als auch von Nebenbedingungen. In diesen Schnittebenenverfahren beschränkt man sich zuerst auf einen Teil der Variablen und einen Teil der Nebenbedingungen. Wir bezeichnen diese Variablen und Nebenbedingungen als **aktiv**. Die nichtaktiven Variablen werden auf eine Voreinstellung, meistens null, festgelegt. Die nichtaktiven Nebenbedingungen werden zuerst fortgelassen. Jeder aktiven Nebenbedingung wird eine aktive duale Variable zugeordnet. Mit den aktiven Variablen und Nebenbedingungen wird ein aktives primales und ein duales lineares Programm formuliert. Die dualen Nebenbedingungen sind dabei primalen Variablen zugeordnet. Iterativ wird das aktive Programm gelöst. Entsprechend der Lösungen des aktiven Programms werden nichtaktive Variablen und Nebenbedingungen generiert und aktiviert, das heißt sie werden zu den aktiven Variablen und Nebenbedingungen hinzugefügt. Das Verfahren bricht spätestens dann ab, wenn die Lösungen des aktiven Programms zulässig für das vollständige lineare Programm sind.

Eine primale oder duale Lösung des aktiven Programms ist nicht notwendigerweise auch zulässig für das komplette Programm. Die Zulässigkeit wird mit einem Separationsorakel überprüft. Das Orakel entscheidet, ob ein gegebener primaler oder ein gegebener dualer Vektor für das komplette Programm zulässig ist. Ansonsten gibt das Orakel mindestens eine verletzte primale bzw. duale Nebenbedingungen an. Die verletzten Nebenbedingungen und die zugeordneten Variablen werden aktiviert. Das neue aktive Programm wird gelöst, das Separationsorakel befragt und so fort. Um zulässige Lösungen des vollständigen Programms frühzeitig zu berechnen, werden LP-Heuristiken eingesetzt. Die Eingabedaten der LP-Heuristiken sind die Lösungen des aktiven Programms. Eine weitere LP-Heuristik verarbeitet gebrochene Lösungen der linearen Programme zu ganzzahligen Lösungen eines dahinterliegenden ganzzahligen Programms.

Zulässige Lösungen des vollständigen linearen Programms schränken dessen Optimalwert ein. Dadurch ist der Einsatz eines Verzweigungsverfahrens möglich, bevor das lineare Programm gelöst worden ist. Durch das Fixieren von ganzzahligen Variablen auf diskrete Werte werden Unterprobleme erzeugt. Diese Unterprobleme können in weitere Unterprobleme aufgeteilt werden. Mit jedem Unterproblem ist ein großes lineares Programm verbunden, das mit der beschriebenen primalen und dualen Separation von Schnittebenen gelöst oder dessen Optimalwert eingeschränkt werden kann. Wenn für ein Minimierungsproblem die dualen Schranken eines Unterproblems größer ausfallen als die primalen Kosten einer ganzzahligen Lösung, dann kann die Variablenbelegung dieses Unterproblems für die Optimallösung ausgeschlossen werden. Das Unterproblem wird dann nicht weiter untersucht und unterteilt.

Um aktive lineare Programme zu lösen, wurden leistungsfähige Verfahren entwickelt. Hingegen sind die Separationsorakel und die LP-Heuristiken speziell für das konkrete Problem zu entwerfen. Das beschriebene Verfahren zur Lösung von großen linearen Programmen ist effizient, wenn das Separationsorakel mit einem effizienten Verfahren realisiert werden kann. Die Details dieses Zusammenhangs wurden von Grötschel, Lovász und Schrijver beschrieben [GLS88].

4.3.2 Lineare Relaxierungen des Programms DEKO

Das Ziel der polyedrischen Untersuchungen der folgenden Abschnitte ist es, lineare Relaxierungen des ganzzahligen Programms DEKO zu formulieren. Gegeben sei ein Kabelproblem

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A),$$

Dieses Kabelproblem soll durch ein Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

dargestellt werden. Für die Anschlußkosten gilt $d_{t,P} = \sum_{a \in P} \hat{d}_t l_a$. Die Anschlußmenge H_t, $t \in T$, ist die Menge aller (s,t)-Dipfade P mit $\sum_{a \in P} l_a$.

Sei ein System von gültigen Ungleichungen

$$\forall\, 1 \leq i \leq n: \quad \sum_{a \in A} \alpha_a(i) x_a + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t} \beta_{t,P}(i) y_{t,P} \geq \delta(i) \tag{4.34}$$

für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ gegeben. Mit diesem System von Ungleichungen verschärfen wir die lineare Relaxierung $\mathrm{LDEKO}(\Psi)$ zu

$$\min \left\{ c^T x + d^T y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{LPD}(A, T, H) \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ erfüllt (4.34)} \right\}. \tag{4.35}$$

Den Ungleichungen (4.34) ordnen wir die dualen Variablen $w_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, zu.

Sei $(u^T, v^T, w^T)^T$ eine dualer Vektor, dann bezeichnen wir die Optimierungsprobleme der dualen Nebenbedingungen

$$\forall\, t \in T: \quad u_t \leq \min_{P \in H_t} \left\{ \sum_{a \in P} \left(\hat{d}_t l_a + v_{t,a} \right) - \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_{t,P}(i) \right\} \tag{4.36}$$

als die **Pricingprobleme des linearen Programms** (4.35).

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle für das Ungleichungssystem (4.34):

1. Es gelten keine Einschränkungen für das Ungleichungssystem (4.34).
2. Die Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ hängen linear von den Bögen des Dipfads P ab.
3. Die Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ sind alle gleich null.

Wir betrachten ein Beispiel für den ersten Fall. Die Ungleichungen des Systems

$$\forall\, a,\, b \in A,\, \forall\, t,\, \tau \in T\colon \quad x_a + x_b - \sum_{\substack{P \in H_t: \\ P \cap \{a,b\} \neq \emptyset}} y_{t,P} - \sum_{\substack{P \in H_\tau: \\ \{a,b\} \subseteq P}} y_{\tau,P} \geq 0 \tag{4.37}$$

sind für das Polytop PD gültig. Wir diskutieren Ungleichungen wie die des Systems (4.37) in Abschnitt 4.4 und formulieren dort Bedingungen dafür, daß diese Facetten des Polytops PD definieren.

Den Ungleichungen des Systems (4.37) werden duale Variablen $w(a, b, t, \tau)$ zugeordnet. Mit diesen lauten die Pricingprobleme (4.36)

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in T: \quad \min_{P \in H_t} \Biggl\{ \sum_{a \in P} \left(\hat{d}_t l_a + v_{t,a} \right) \\ &\qquad + \sum_{a,b \in A} \sum_{\tau \in T} \left(w(a,b,t,\tau) \left\lceil \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rceil + w(a,b,\tau,t) \left\lfloor \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rfloor \right) \Biggr\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Diese Pricingprobleme sind nichtlineare Optimierungsprobleme. Wir können die Abschätzungen

$$\left\lceil \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rceil \geq \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \quad \text{und} \quad \left\lfloor \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rfloor \geq 0$$

in Ungleichung (4.38) einsetzen und dadurch das Pricingproblem linearisieren. Ein Verfahren zur Lösung dieses linearisierten Problems kann als LP-Heuristik zur Bestimmung von zulässigen Zielpreisen u_t, $t \in T$, eingesetzt werden. Dieses

Vorgehen allein führt jedoch nicht zu einer Verbesserung der unteren Schranken, im Vergleich zu den Schranken, die zum Beispiel mit dem linearen Programm LDEKO erreicht werden würden.

Genauso können wir die Abschätzungen

$$\left\lceil \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rceil \leq \chi_a^P + \chi_b^P \text{ und } \left\lfloor \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2} \right\rfloor \leq \frac{\chi_a^P + \chi_b^P}{2}$$

in Ungleichung (4.38) einsetzen und dadurch das Pricingproblem linearisieren. Ein Verfahren zur Lösung dieser linearisierten Pricingprobleme kann als Heuristik zur Erzeugung von verletzten dualen Nebenbedingungen bzw. zur Generierung von Anschlußvariablen eingesetzt werden.

Letztendlich ist jedoch für konkrete Netzprobleme zu untersuchen, inwieweit die Pricingprobleme (4.38) z. B. durch (implizit) enumerative Verfahren exakt gelöst werden können.

Wenn die Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$, $1 \leq i \leq n$, $t \in T$, $P \in H_t$ linear von den Bögen des Dipfads P abhängen, dann existieren Koeffizienten $\gamma_{t,a}(i)$, $a \in A$, so daß $\sum_{a \in P} \gamma_{t,a}(i) = \beta_{t,P}(i)$ gilt. Das System (4.34) läßt sich als Ungleichungssystem im Raum der Bauteilvariablen x und der Nutzungsvariablen z darstellen:

$$\forall\, 1 \leq i \leq n: \quad \sum_{a \in A} \alpha_a(i) x_a + \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} \gamma_{t,a}(i) z_{t,a} \geq \delta(i). \tag{4.39}$$

Entsprechend führt die Suche nach Ungleichungen mit der obigen Eigenschaft zu einer Untersuchung des Polytops PN. Die Facetten des Polytops PN sind die stärksten Ungleichungen des Typs (4.39). Die Pricingprobleme lauten dementsprechend:

$$\forall\, t \in T: \quad \min_{P \in H_t} \left\{ \sum_{a \in P} \left(\hat{d}_t l_a + v_{t,a} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{t,a}(i) w_i \right) \right\}. \tag{4.40}$$

Diese Probleme sind lineare Optimierungsprobleme mit möglicherweise negativen Koeffizienten in der Kostenfunktion. Es gelte der Steinerbaum-Spezialfall $\hat{d}, l, L = 0$ bzw. es sei ein Steinerbaum-Problem $\text{STD}(D, s, T, c)$ mit $D = (V, A)$ gegeben. Für jede Senke $t \in T$ sei $\mathcal{F}_t$ die Menge der 0/1-Flüsse mit Quelle in s und Senke in t und $\mathcal{W}_t$ die Menge der (s,t)-Dipfade. Jeder Fluß $F \in \mathcal{F}_t$ enthält also einen (s,t)-Dipfad. Es gilt $\mathcal{W}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $t \in T$. Die Netzprobleme

$$\text{NETZ}(A, T, \mathcal{W}, c, 0) \text{ und } \text{NETZ}(A, T, \mathcal{F}, c, 0)$$

haben die gleiche Optimallösung. Die Pricingprobleme in (4.40) sind für $H = \mathcal{W}$ Kürzeste-Wege-Probleme in Digraphen. Diese Probleme sind für beliebige Kostenfunktionen nicht effizient lösbar. Die Pricingprobleme in (4.40) sind für $H = \mathcal{F}$ Min-Cost-Flow-Probleme und daher mit polynomialen Verfahren lösbar. Man betrachte diesbezüglich [AMO93].

Wenn alle Koeffizienten $\beta_{t,P}(i)$ gleich null sind, dann lautet das Ungleichungssystem (4.34)

$$\forall\, 1 \le i \le n: \quad \sum_{a \in A} \alpha_a(i) x_a \ge \delta(i) \tag{4.41}$$

Die Suche nach Ungleichungen mit dieser Eigenschaft ist verbunden mit einer Untersuchung der Seitenflächenstruktur des Polytops PB. Die Facetten des Polytops PB sind die stärksten Ungleichungen des Typs (4.34).

Die Pricingprobleme sind gegenüber den Pricingproblemen des linearen Programms LDEKO unverändert:

$$\forall\, t \in T: \quad \min_{P \in H_t} \left\{ \sum_{a \in P} \left(\hat{d}_t l_a + v_{t,a} \right) \right\}. \tag{4.42}$$

Diese Probleme sind lineare Optimierungsprobleme mit nichtnegativer Kostenfunktion. Im Steinerbaum-Spezialfall $\hat{d}, l, L = 0$ sind diese Pricingprobleme effizient lösbar, da sie gleichbedeutend damit sind, kürzeste Wege in einem Digraphen mit positiven Bogengewichten zu finden.

4.3.3 Bündelung der Zielpunkte

Gegeben seien ein Steinerbaum-Problem STD(D, s, T, c), $D = (V, A)$, das dazugehörige Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, 0)$$

und das lineare Programm LDEKO(Ψ). Die Menge H_t, $t \in T$, sei dabei die Menge aller (s,t)-Dipfade in dem Digraphen D. In dem vorherigen Abschnitt wurde die Verschärfung des linearen Programms LDEKO(Ψ) durch die Hinzunahme von Nebenbedingungen diskutiert.

Ein anderes Vorgehen ist, das Variablenkonzept zu ändern. Sei eine Partition $U_1, \dots, U_n$ der Terminals T in nichtleere Teilmengen gegeben. Durch Bündelung der Zielpunkte können wir zu dem Netzproblem

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \mathrm{NETZ}(A, \{1, \dots, n\}, \bar{H}, c, 0) \quad \text{mit} \\ \bar{H}_i &= \left\{ \bigcup_{t \in U_i} Q_t \;\middle|\; Q_t \in H_t \text{ für alle } t \in T \right\} \quad \text{für alle } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

übergehen. Das Netzproblem $\bar{\Psi}$ kann reduziert werden. Zum Beispiel sind alle Anschlüsse aus $\bar{H}_i$, die nicht Wurzelbäume sind, überflüssig und dürfen eliminiert werden. Schließlich erhält man das Netzproblem

$$\Psi' = \mathrm{NETZ}\left(A, \{1, \dots n\}, H', c, 0\right).$$

Die Mengen H'_i, $1 \le i \le n$, enthalten dabei genau alle Wurzelbäume R mit Wurzel in s, die die Terminals U_i aufspannen und deren Blätter alle in U_i enthalten sind.

Das Pricingproblem des linearen Programms LDEKO(Ψ) entspricht dem Problem, in einem Digraphen einen kürzesten Weg zu finden. Die dualen Anschlußbedingungen des Programms LDEKO(Ψ') lauten für eine duale Lösung $\binom{u'}{v'}$:

$$\forall\, 1 \le i \le n: \quad u'_i \le \min_{R \in H'_i} \sum_{a \in R} v'_{i,a} \tag{4.43}$$

Die entsprechenden Pricingprobleme sind Steinerbaum-Probleme in gerichteten Graphen und als solche nicht polynomial lösbar. Aus diesem Grund scheint sich die Formulierung des Netzproblems Ψ' zunächst nicht auszuzahlen.

Der Hintergedanke für die Formulierung des Netzproblems Ψ' ist der folgende: Der Optimalwert des linearen Programms LDEKO(Ψ') ist gleich oder größer als der Optimalwert des linearen Programms LDEKO(Ψ). Die Anzahl der Nebenbedingungen des linearen Programms LDEKO(Ψ') ist in nichttrivialen Fällen kleiner als die Anzahl der Nebenbedingungen des linearen Programms LDEKO(Ψ).

Bei Testläufen zeigt sich, daß der überwiegende Anteil der Nutzpreisvariablen v während eines Branch-and-Cut-and-Price-Verfahrens den Wert null annimmt. Entsprechend vereinfachen sich die Pricingprobleme (4.43). Manche Verfahren zur Lösung von Steinerbaum-Problemen hängen sensibel von der Anzahl der Terminals ab. Dies gilt z. B. für das Verfahren Kabel-Opt, das für Steinerbaum-Probleme mit bis zu 20 Terminals sehr schnell die optimale Lösung berechnet. Die Pricingprobleme (4.43) sind daher unter Umständen wesentlich leichter zu lösen als das ursprüngliche Steinerbaum-Problem. Die Pricingprobleme (4.43) können problemlos parallel verarbeitet werden. Primale und duale Lösungen für die Pricingprobleme (4.43) müssen unter Umständen nur an die in einem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren (geringfügig) veränderte duale Lösung $\binom{u'}{v'}$ angepaßt werden. Die Pricingprobleme brauchen also nicht immer wieder völlig von vorn berechnet zu werden.

4.4 Eine Untersuchung des Polytops PD

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Polytop

$$\mathrm{PD}(A,T,H) = \mathrm{conv}\left(\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \{0,1\}^A \times \{0,1\}^{\mathcal{E}(H)} \;\middle|\; \begin{array}{llll} \forall\, t \in T: & & \sum_{P\in H_t} y_{t,P} & = 1, \\ \forall\, t \in T: & x & - \sum_{P\in H_t} y_{t,P}\chi^P & \geq 0. \end{array}\right\}\right)$$

für eine Netzvereinbarung (A,T,H). Die Untersuchung der Seitenflächenstruktur des Polytops PD orientiert sich an den praktischen Erfordernissen in einem Schnittebenenverfahren. Diese wurden in Abschnitt 4.3 diskutiert.

Wir greifen diese Ergebnisse auf und geben eine Übersicht über den Aufbau der polyedrischen Untersuchung dieses Abschnitts im folgenden.

Wir können die Zielpreisbedingungen $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1$ und die Nutzpreisbedingungen $x - \sum_{P\in H_t} y_{t,P}\chi^P \geq 0$ umformulieren, so daß diese die Gestalt von Cliquen-Ungleichungen des Stabile-Mengen-Problems annehmen. Dazu relaxieren wir die Zielpreisbedingungen zu $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} \leq 1$, $t \in T$, und formulieren die Nutzpreisbedingungen durch Bildung des Komplements $\bar{x}_a = 1 - x_a$, $a \in A$, um zu $\bar{x}_a + \sum_{P\in H_t} y_{t,P}\chi_a^P \leq 1$ für alle $t \in T$ und alle $a \in A$.

Das Netzproblem enthält das Plazierungsproblem UFLP (uncapacitated facility location problem), wie in Unterabschnitt 4.1.4 beschrieben. Das Plazierungsproblem UFLP hängt wiederum eng mit dem Stabile-Mengen-Problem zusammen. Dieser Zusammenhang wird zum Beispiel in den Untersuchungen des Plazierungsproblem UFLP durch Cho, Johnson, Padber und Rao [CJPR83a, CJPR83b] beschrieben.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß wir in diesem Kapitel in umfangreicher Weise Ergebnisse der polyedrischen Untersuchung des Stabile-Mengen-Problems und des Plazierungsproblems UFLP wiederverwenden und daß wir die Untersuchungsmethoden dieser Probleme kopieren.

Einen bloßen Verweis auf die Ergebnisse der polyedrischen Untersuchungen des Stabile-Mengen-Problems und des Plazierungsproblems UFLP halten wir jedoch nicht für ausreichend. Das Netzproblem stellt eine Verallgemeinerung des Plazierungsproblems UFLP dar und ist ein sehr spezielles Stabile-Mengen-Problem.

Bauteile einer Netzvereinbarung, die in jeder Lösung enthalten sind, nennen wir unentbehrlich. Unentbehrliche Bauteile führen in den meisten Fällen zu lästigen Fallunterscheidungen bei der Untersuchung der Seitenflächenstruktur. Wir nennen Netzvereinbarungen, die lösbar sind und keine unentbehrlichen Bauteile enthalten, real. Wir können stets auf Netzprobleme mit realen Netzvereinbarungen transformieren. Bei der Untersuchung des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ werden wir fast immer voraussetzen, daß die Netzvereinbarung (A,T,H) real ist. In Unterabschnitt 4.4.1 bestimmen wir grundlegende Eigenschaften des Polytops PD wie dessen Dimension und triviale Facetten.

Gegeben sei eine reale Netzvereinbarung (A, T, H). Wir sind interessiert daran, für Teilmengen $A' \subseteq A$ und $T' \subseteq T$ mit wenigen Elementen Facetten des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ von der Form

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T'} \sum_{P\in H_t : P\cap A' \neq \emptyset} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta,$$

zu finden und in Klassen zusammenzufassen. Zu diesem Zweck gehen wir in folgenden Schritten vor:

Gegeben seien die Netzvereinbarung $(A', T', H'|_{T'})$, die durch A' definierte Anschlußfamilie

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\}$$

und Teilmengen H''_t, $t \in T'$, der Anschlußmengen H'_t, so daß die Netzvereinbarung (A', T', H'') real ist.

Für das Polytop $\mathrm{PD}(A', T', H'')$ bestimmen wir zuerst facettendefinierende Ungleichungen, z. B. die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T', P\in H''_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta. \tag{4.44}$$

Diese Facetten nennen wir elementare Facetten. In Unterabschnitt 4.4.6 geben wir Beispiele für Klassen von elementaren Facetten an, die wir im Wesentlichen von dem Stabile-Mengen-Problem (Korollar 4.4.6.1 und Theorem 4.4.6.5) und dem Plazierungsproblem UFLP (Theoreme 4.4.6.3 und 4.4.6.4) entlehnen. Die Bedingung $\beta_{t,\emptyset} = 0$ für alle Anschlußpaare $(t, \emptyset) \in \mathcal{E}(H')$ erreichen wir jetzt oder später durch Addition von Vielfachen der Zielpreisbedingung $\sum_{P\in H'_t} y_{t,P} = 1$.

Für Ungleichungen wie in (4.44) bestimmen wir Liftingkoeffizienten $\beta_{t,P}$, für alle $t \in T'$, $P \in H'_t \backslash H''_t$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T', P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta \tag{4.45}$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A', T', H'|_{T'})$ definiert. Die Bestimmung von Liftingkoeffizienten, die sich am Vorgehen beim Stabile-Mengen-Problem orientiert, beschreiben wir in Unterabschnitt 4.4.4 in Theorem 4.4.4.2.

Wir untersuchen in Unterabschnitt 4.4.2 Voraussetzungen dafür, daß alle Ungleichungen, die für das Polytop $\mathrm{PD}(A', T', H'|_{T'})$ Facetten definieren, auch für das Polytop $\mathrm{PD}(A', T, H')$ eine Facette definieren. Die entsprechenden Aussagen werden in Theorem 4.4.2.2 und Korollar 4.4.2.4 formuliert.

Wir sagen in diesem Fall: Die Einschränkung der Netzvereinbarung (A', T, H') auf die Zielpunkte $T' \subseteq T$ ist zulässig. Wenn die Einschränkung nicht zulässig ist, dann ist die Ungleichung (4.45) zumindest gültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A', T, H')$. Diese Begriffsbildung wird bei der Untersuchung des Polytops PN in Abschnitt 4.5 wieder aufgegriffen werden. Das Plazierungsproblem UFLP weist ähnliche polyedrische Eigenschaften auf. Man vergleiche mit dem Theorem 4.4.6.3.

Für alle Teilmengen $B \subseteq A$ definieren wir das (Lifting)-Polytop

$$\mathrm{PDL}(B, A, T, H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A, T, H) \;\middle|\; x_b = 1, \text{ für alle } b \in A \backslash B \right\}.$$

Das Polytop $\mathrm{PDL}(B, A, T, H)$ ist eine Seitenfläche des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. Wenn die Ungleichung (4.45) eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A', T, H')$ definiert, dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H_t} \beta_{t, P \cap A'} y_{t,P} \geq \delta \tag{4.46}$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ (Siehe dazu Lemma 4.4.5.2). Die Ungleichung (4.46) ist gültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$. Für diese Ungleichung bestimmen wir Liftingkoeffizienten α_a, $a \in A \backslash A'$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H_t} \beta_{t, P \cap A'} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ definiert. Die entsprechende Untersuchung führen wir in Unterabschnitt 4.4.5 bei dem Beweis des Theorems 4.4.5.3 durch. Unsere Zielvorstellung ist, daß möglichst alle Koeffizienten α_a, $a \in A \backslash A'$, null sind. Dafür geben wir in Korollar 4.4.5.4 Kriterien an.

Das Theorem 4.4.5.5 beschreibt eine Lifting-Technik, die bei der Bestimmung von elementaren Facetten nützlich ist.

Unser Fazit der Untersuchung des Polytops PD lautet: Für Teilmengen A' und T' mit einer geringen Anzahl von Elementen, kann man Facetten für das Polytop $\mathrm{PD}(A', T', H'|_{T'})$ leicht bestimmen. Die Separation dieser Facetten ist mit polynomialen Verfahren möglich. Die Facetten des Polytops $\mathrm{PD}(A', T', H'|_{T'})$ können zu gültigen Ungleichungen für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ mit einfachen Methoden geliftet werden. Unter bestimmten hinreichenden Voraussetzungen definieren die gelifteten Ungleichungen Facetten des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

4.4.1 Grundlegende Betrachtungen

Wir diskutieren in Theorem 4.4.1.1 die Dimension der Polytope PD und PDL und triviale Facetten des Polytops PD. In Theorem 4.4.1.2 werden obere und untere Schranken für die Koeffizienten von facettendefinierenden Ungleichungen für das Polytop PD angegeben.

Den **Einheitsvektor des Bauteils** $a \in A$ im Raum der Bauteilmenge A bezeichnen wir in diesem Abschnitt mit $e(a)$. Den **Einheitsvektor des Anschlußpaares** $(t, P) \in \mathcal{E}(H)$ im Raum der Anschlußpaare $\mathcal{E}(H)$ bezeichnen wir in diesem Abschnitt mit $f(t, P)$.

Theorem 4.4.1.1. *Sei (A, T, H) eine reale Netzvereinbarung.*

1. *Das Polytop* $\mathrm{PD}(A, T, H)$ *hat die Dimension* $|A| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$.

2. *Für alle Teilmengen $A' \subseteq A$ hat das Polytop* $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ *die Dimension* $|A'| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$.

3. *Für alle Bauteile $a \in A$ definiert die Ungleichung $x_a \leq 1$ eine Facette des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

4. *Für alle Bauteile $a \in A$ definiert die Ungleichung $x_a \geq 0$ genau dann eine Facette des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T, H)$, *wenn alle Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, das Bauteil a nicht enthalten.*

5. *Genau dann definiert die Ungleichung $y_{t,P} \geq 0$, für alle $t \in T$ und $P \in H_t$ eine Facette des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T, H)$, *wenn für alle Bauteile $a \in A$ ein Anschluß $P' \in H_t$, $P' \neq P$, existiert, der a nicht enthält.*

Durch die Ungleichungen $x_a \leq 1$, $x_a \geq 0$, $a \in A$, und $y_{t,P} \geq 0$, $t \in T$, $P \in H_t$, definierte Facetten nennen wir **triviale Facetten**.

Beweis: Zu 1: Die Raumdimension des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ ist gleich der Anzahl der Bauteile und der Anzahl der Anschlußpaare. Die Zielpreisbedingungen $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 1$, $t \in T$, sind linear unabhängig. Daher ist die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ höchstens gleich $|A| + \mathcal{E}(H) - |T|$. Da die Netzvereinbarung (A, T, H) real ist, existieren (irgendwelche) Anschlüsse $Q_t \in H_t$, $t \in T$, und Anschlüsse $R_{t,a} \in H_t$, die das Bauteil a nicht enthalten, für alle $t \in T$ und alle $a \in A$. Die Punkte

$$
\begin{aligned}
p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \sum_{t \in T} f(t, Q_t) \end{pmatrix}, \\
q(a) &= \begin{pmatrix} x - e(a) \\ \sum_{t \in T} f(t, R_{t,a}) \end{pmatrix}, \quad a \in A, \text{ und} \\
r(t, P) &= \begin{pmatrix} x \\ y - f(t, Q_t) + f(t, P) \end{pmatrix}, \quad t \in T,\ P \in H_t,\ P \neq Q_t
\end{aligned}
$$

sind affin unabhängig und $1 + |A| + (|\mathcal{E}(H)| - |T|)$ viele. Daher ist die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ mindestens gleich $|A| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$.

Zu 2: Die Gleichungen $x_a = 1$, für alle Bauteile $a \in A \backslash A'$, und die Zielpreisbedingungen $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 1$, für alle Zielpunkte $t \in T$, sind linear unabhängig. Das Polytop $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ hat daher höchstens die Dimension $|A'| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$.

Die Punkte p, $q(a)$, für alle $a \in A \backslash A'$, und $r(t,P)$, für alle $(t,P) \in \mathcal{E}(H)$ sind affin unabhängig und $1 + |A'| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$ viele. Daher hat das Polytop $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ mindestens die Dimension $|A'| + |\mathcal{E}(H)| - |T|$.

Zu 3: Die Seitenfläche

$$\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PD}(A,T,H) \mid x_a = 1 \}$$

enthält die Punkte p, $q(b)$, $b \in A$, $b \neq a$, und die Punkte $r(t,P)$, für alle $t \in T$, $P \in H_t$, und $P \neq Q_t$. Daher definiert die Ungleichueng $x_a \leq 1$ eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ für alle Bauteile $a \in A$.

Zu 4: Wenn alle Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, das Bauteil $a \in A$ nicht enthalten, dann liegen auf der Seitenfläche

$$\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PD}(A,T,H) \mid x_a = 0 \}$$

die Punkte $p - \left(\begin{smallmatrix} e(a) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q(b) - \left(\begin{smallmatrix} e(a) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b \in B$, $b \neq a$, und $r(t,P) - \left(\begin{smallmatrix} e(a) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, für alle $t \in T$ und $P \in H_t$. Für diesen Fall definiert die Ungleichung $x_a \geq 0$ eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$.

Wenn ein Anschluß $P \in H_t$, $t \in T$, existiert, der das Bauteil $a \in A$ enthält, dann ist die Ungleichung $x_a - y_{t,P} \geq 0$ gültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Daher ist $x_a \geq 0$ eine nichttriviale konische Kombination der gültigen Ungleichungen $x_a - y_{t,P} \geq 0$ und $y_{t,P} \geq 0$. Für diesen Fall definiert die Ungleichung $x_a \geq 0$ keine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$.

Zu 5: Sei ein Anschlußpaar $(t,P) \in \mathcal{E}(H)$ gegeben. Für alle Bauteile $a \in A$ existiere ein von P verschiedener Anschluß $P' \in H_t$, der das Bauteil a nicht enthält. Dann kann man die Anschlüsse Q_t und die Anschlüsse $R_{t,a}$, $a \in A$, von P verschieden wählen. Man beachte, daß die Menge A nichtleer ist. Die Seitenfläche

$$F = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PD}(A,T,H) \mid y_{t,P} = 0 \},\ t \in T,\ P \in H_t$$

enthält dann die Punkte p, $q(a)$, $a \in A$, und die Punkte $r(t', P')$, für alle Anschlußpaare $(t', P') \neq (t, P)$. Daher definiert die Ungleichung $y_{t,P} \geq 0$ eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$.

Angenommen, es existiere ein Bauteil $a \in A$, das in allen, von P verschiedenen Anschlüssen $P' \in H_t$ enthalten ist. Dann gelten für alle Punkte der Seitenfläche F die linear unabhängigen Gleichungen $x_a = 1$, $y_{t,P} = 0$ und die Zielpreisbedingungen. Daher ist die Dimension der Seitenfläche F mindestens um zwei geringer als die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Also definiert die Ungleichung $y_{t,P} \geq 0$ keine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. □

Das folgende Theorem beschreibt obere und untere Schranken für Koeffizienten von facettendefinierenden Ungleichungen des Polytops PD.

Theorem 4.4.1.2. *Sei (A,T,H) eine reale Netzvereinbarung. Die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine nichttriviale Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ und $A' \subseteq A$ ist die Menge der Bauteile a mit positiven Koeffizienten α_a.
Es gilt:

1. *Alle Koeffizienten α_a, $a \in A$, sind nichtnegativ.*

2. *Für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T$, mit $P \cap A' \subseteq P' \cap A'$ gilt*

$$\beta_{t,P'} \leq \beta_{t,P} \leq \beta_{t,P'} + \alpha((P' \backslash P) \cap A').$$

3. *Für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T$, mit $P \cap A' = P' \cap A'$ gilt $\beta_{t,P} = \beta_{t,P'}$.*

Beweis: Zu 1: Für alle Bauteile $a \in A$ existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x_a = 0$, sonst ist die Facette F trivial. Der Punkt $((x + e(a))^T, y^T)^T$ ist ein Punkt des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Es gilt

$$\alpha^T x + \beta^T y = \delta \leq \alpha^T x + \alpha_a + \beta^T y\,.$$

Also ist der Koeffizient α_a nichtnegativ.

Zu 2: Die Facette F ist nichttrivial. Es gilt $\alpha_a = 0$, $a \in A \backslash A'$. Daher existiert ein Punkt $\binom{x'}{y'} \in F$ mit $y'_{t,P'} = 1$ und mit $x'_a = 1$, für alle $a \in A \backslash A'$. Sei der Vektor $\eta' = y' - f(t,P') + f(t,P)$. Dann ist der Punkt $\binom{x}{\eta'}$ ein Punkt des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Es gilt

$$\alpha^T x' + \beta^T y' = \delta \leq \alpha^T x' + \beta^T y' - \beta_{t,P'} + \beta_{t,P}\,.$$

Also gilt $\beta_{t,P} \geq \beta_{t,P'}$.

Weiterhin existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $y_{t,P} = 1$ und mit $x_a = 1$, für alle $a \in A \backslash A'$. Gegeben seien der Vektor $\eta = y - f(t,P) + f(t,P')$ und der Vektor

$$\xi = x + \sum_{a \in (P' \backslash P) \cap A'} e(a).$$

Dann ist der Punkt $\binom{\xi}{\eta}$ ein Punkt des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Es gilt

$$\alpha^T x + \beta^T y = \delta \leq \alpha^T x + \beta^T y - \beta_{t,P} + \beta_{t,P'} + \alpha((P' \backslash P) \cap A')\,.$$

Also gilt $\beta_{t,P} \leq \beta_{t,P'} + \alpha((P' \backslash P) \cap A')$.

Zu 3: Für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T$, mit $P \cap A' = P' \cap A'$ gilt nach 2. $\beta_{t,P} \geq \beta_{t,P'}$ und $\beta_{t,P} \leq \beta_{t,P'}$. Also sind die Koeffizienten $\beta_{t,P}$ und $\beta_{t,P'}$ gleich. $\square$

4.4.2 Einschränkung der Netzvereinbarung auf eine Teilmenge der Zielpunkte

Wir untersuchen im folgenden Voraussetzungen nach denen eine facettendefinierende Ungleichung des Polytops $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$, $T' \subseteq T$, $T' \neq \emptyset$, auch eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ definiert.

Die Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$, $T' \subseteq T$, $T' \neq \emptyset$, bezeichnen wir als **Einschränkung der Netzvereinbarung** (A, T, H) **(auf die Zielpunkte** T'**).** Die Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ ist real, wenn die Netzvereinbarung (A, T, H) real ist. Die Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ ist eine **zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung** (A, T, H), wenn für alle Lösungen (B, Q') der Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ eine Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) existiert. Mit der Einschränkung der Netzvereinbarung (A, T, H) auf die Zielpunkte T' verbinden wir eine lineare Abbildung, die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{PD}(A, T, H) &\to \mathrm{PD}(A, T', H|_{T'}), \\ \pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x \\ y|_{\mathcal{E}(H|_{T'})} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Genau dann ist $(A, T', H|_{T'})$ eine zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung (A, T, H), wenn die Projektion π das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ vollständig auf das Polytop $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ abbildet, d. h.

$$\pi(\mathrm{PD}(A, T, H)) = \mathrm{PD}(A, T', H|_{T'}).$$

Das folgende Lemma gibt hinreichende Kriterien dafür an, daß eine Einschränkung einer Netzvereinbarung zulässig ist.

Lemma 4.4.2.1. *Sei (A, T, H) eine reale Netzvereinbarung und T' eine nichtleere Teilmenge der Zielpunkte T. Die Netzvereinbarung $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$, ist dann eine zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung (A, T, H), wenn eines der folgenden Kriterien gilt:*

1. *Für alle Zielpunkte $t \in T \backslash T'$ existiert ein Zielpunkt $u(t) \in T'$ mit der Eigenschaft: Für alle Anschlüsse $P' \in H_{u(t)}$ existiert ein Anschluß $P \in H_t$, mit $P \subseteq P'$.*

2. *Alle Anschlußmengen H_t, $t \in T \backslash T'$, enthalten die leere Menge.*

3. *Die Projektionen der Polytope $\mathrm{PD}(A, T, H)$ und $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ auf den Raum der Bauteilvariablen x sind identisch, d. h.*

$$\mathrm{PB}(A, T, H) = \mathrm{PB}(A, T', H|_{T'}).$$

4. *Es existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in \mathrm{PD}(A, T, H)$ mit $x = 0$.*

5. *Die Ungleichung* $x(A) \geq 1$ *definiert jeweils eine Facette für die Projektionen der Polytope* $\mathrm{PD}(A, T, H)$ *und* $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ *auf die Bauteilvariablen* x.

Die Bedingungen 1 und 2 bedeuten, daß die Zielpunkte $t \in T \setminus T'$ hinreichend wenig auf die Bauteile aus A' angewiesen sind. Die Bedingungen 4 und 5 bedeuten, daß die Bauteilmenge A' hinreichend wenig notwendig für den Anschluß aller Zielpunkte aus T ist.

Beweis: Sei die Bedingung 1 vorausgesetzt. Zu jeder Lösung (B, Q') des Netzproblems $(A, T', H|_{T'})$ existiert dann eine Lösung

$$(B, Q) \text{ mit } Q_t \subseteq Q'_{u(t)} \subseteq B,\ t \in T' \text{ und } Q_{t'} = Q'_{t'},\ t \in T \setminus T'$$

des Netzproblems (A, T, H). Also ist (B, Q) für das Netzproblem (A, T, H) eine Lösung. Die Bedingung 2 ist hinreichend für die Bedingung 1. Die Bedingung 4 ist äquivalent mit der Bedingung 2 (und hinreichend für die Bedingung 3). Man setze die Bedingung 3 voraus. Für alle Punkte $\binom{x}{y'} \in \mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ existiert dann ein Punkt $\binom{x}{y} \in \mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$. Das bedeutet: Für alle Lösungen (B, Q') der Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ existiert eine Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H). Die Bedingung 5 ist hinreichend für die Bedingung 3. Ist $x(A) \geq 1$ eine Facette der Projektionen der Polytope $\mathrm{PD}(A, T, H)$ und $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$, dann sind beide Projektionen durch die Ungleichungen $0 \leq x_a \leq 1$, $a \in A$, und $x(A) \geq 1$ vollständig bestimmt. □

Das folgende Theorem sagt aus: Wenn die Einschränkung $(A, T', H|_{T'})$ der Netzvereinbarung (A, T, H) zulässig ist, dann definiert jede Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T', H'|_{T'})$ auch eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Theorem 4.4.2.2. *Sei* (A, T, H) *eine reale Netzvereinbarung und* $(A, T', H|_{T'})$ *eine zulässige Einschränkung von* (A, T, H). *Die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta \tag{4.47}$$

definiere eine Seitenfläche F' *des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ *und die Seitenfläche* F *des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Genau dann ist F *eine Facette von* $\mathrm{PD}(A, T, H)$, *wenn gilt:*

1. F' *ist eine Facette des Polytops* $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$.

2. *In jeder Gleichung*

$$\sum_{a \in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta',$$

die für F *gültig ist, sind die Koeffizienten* $\beta'_{t,P}$ *und* $\beta'_{t,P'}$ *für alle* $t \in T \setminus T'$ *und* $P, P' \in H_t$, *gleich.*

Beweis: Man betrachte die lineare Abbildung

$$\pi : \mathrm{PD}(A,T,H) \to \mathrm{PD}(A,T',H|_{T'}),$$
$$\pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y|_{\mathcal{E}(H|_{T'})} \end{pmatrix}.$$

Sei F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Es gilt

$$\pi(F) = F',$$
$$\pi(\mathrm{PD}(A,T,H)) = \mathrm{PD}(A,T',H|_{T'}) \text{ und}$$
$$\pi(\mathrm{PD}(A,T,H)\backslash F) = \mathrm{PD}(A,T',H|_{T'})\backslash F' \neq \emptyset,$$

da die Koeffizienten der Variablen $y_{t,P}$, $t \in T\backslash T'$, $P \in H_t$, in der definierenden Ungleichung (4.47) der Facette F gleich null sind und die Einschränkung der Netzvereinbarung (A,T,H) auf die Zielpunkte T' zulässig ist.

Da die Abbildung π linear ist, hat die Seitenfläche F' mindestens die Dimension einer Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T',H|_{T'})$. Da das Bild $\pi(\mathrm{PD}(A,T,H)\backslash F)$ nichtleer ist, ist F' eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T',H|_{T'})$. Jede Gleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta',$$

die für die Facette F gültig ist, ist linear abhängig von der Gleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T', P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} = \delta$$

und von den Zielpreisbedingungen $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1$, $t \in T$. Daher sind für alle Zielpunkte $t \in T\backslash T'$ und alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$ die Koeffizienten $\beta'_{t,P}$ und $\beta'_{t,P'}$ gleich.

Sei F' eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T',H|_{T'})$. Da F eine Seitenfläche des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ ist, existiert eine Ungleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} \geq \delta', \tag{4.48}$$

die eine Facette $\hat{F} \supseteq F$ des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ definiert. Wir können Vielfache der Zielpreisbedingungen $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1$, $t \in T$, zu der Ungleichung (4.48) addieren. Zusätzlich gilt $\beta'_{t,P} = \beta'_{t,P'}$, für alle $t \in T\backslash T'$, $P, P' \in H_t$, nach Bedingung 2. Daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß alle Koeffizienten $\beta'_{t,P}$, $t \in T\backslash T'$, $P \in H_t$, gleich null sind. Die Gleichung (4.48) ist mit dieser Annahme auch gültig für die Facette F', da $\pi(F) = F'$. Sie stellt dann eine konische Kombination aus der definierenden Gleichung und den Zielpreisbedingungen $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1$, $t \in T'$, dar. Daher ist $\hat{F} = F$ und F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. □

Das folgende Lemma bereitet die Formulierung einfacher Kriterien für die Zulässigkeit einer Einschränkung einer Netzvereinbarung vor.

Lemma 4.4.2.3. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H) und eine nichtleere Teilmenge $T' \subseteq T$. Die Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ sei eine zulässige Einschränkung von (A, T, H). Die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta,$$

definiere eine Seitenfläche F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T \backslash T'$ existiere eine Folge $Q(i) \in H_t$, $0 \leq i \leq n$, von $Q(0) = P$ nach $Q(n) = P'$, für die gilt: Für alle $0 \leq i \leq n-1$ existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x \geq \chi^{Q(i)}, \chi^{Q(i+1)}$.

Dann gilt: In jeder Gleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta', \tag{4.49}$$

die für F gültig ist, sind die Koeffizienten $\beta'_{t,P}$ und $\beta'_{t,P'}$ für alle $t \in T \backslash T'$ und $P, P' \in H_t$ gleich.

Beweis: Sei $\binom{x}{y} \in F$, $y_{t,R} = 1$ für irgendein $R \in H_t$ ein Punkt mit $x \geq \chi^{Q(i)}, \chi^{Q(i+1)}$ für einen Index $0 \leq i \leq n-1$. Dann existieren Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y - f(t, R) + f(t, Q(i)) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y - f(t, R) + f(t, Q(i+1)) \end{pmatrix}$$

auf der Seitenfläche F. Für diese Punkte gilt auch die Gleichung (4.49). Daraus folgt, daß die Koeffizienten $\beta'_{t,Q(i)}$ und $\beta'_{t,Q(i+1)}$ gleich sind. Mit vollständiger Induktion sieht man, daß die Koeffizienten $\beta'_{t,P} = \beta'_{t,Q(0)}$ und $\beta'_{t,P'} = \beta'_{t,Q(n)}$ gleich sind. □

Ein einfaches Kriterium für die Zulässigkeit der Einschränkung einer Netzvereinbarung liefert das folgende Korollar.

Korollar 4.4.2.4. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H) und eine nichtleere Teilmenge T' der Zielpunkte T. Wenn*

1. *für alle Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, ein Anschluß $P' \in H_t$, $t \in T'$, mit $P \subseteq P'$ existiert, und wenn*
2. *die Ungleichung $x(A) \geq 1$ entweder ungültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ ist oder für die Polytope $\mathrm{PB}(A, T, H)$ und $\mathrm{PB}(A, T', H|_{T'})$ facettendefinierend ist,*

dann gilt: Jede Ungleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta,$$

die eine nichttriviale Facette F' des Polytops $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ definiert, definiert auch eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Beweis: Wenn für alle Anschlüsse $P \in H'_t$, $t \in T \backslash T'$, ein Anschluß P' der Menge $H'_{t'}$, $t' \in T'$, existiert, der P enthält, dann existiert ein Punkt $\binom{x}{y'}$ auf der Facette F' mit $x \geq \chi^{P'}$, und somit auch ein Punkt $\binom{x}{y}$ auf der Seitenfläche F mit $x \geq \chi^P$.

Alle Anschlüsse H_t, $t \in T \backslash T'$, enthalten nach der Voraussetzung entweder die leere Menge oder die Anschlüsse $\{a\}$, $a \in A$.

Wenn die Anschlußmenge H_t, $t \in T \backslash T'$, die leere Menge enthält, dann gilt: Für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, existieren die Folge $P, \emptyset, P'$, und Punkte $\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'} \in F$ mit $x \geq \chi^P \geq \chi^\emptyset$ und $x' \geq \chi^{P'} \geq \chi^\emptyset$. Nach Lemma 4.4.2.3 sind daher in jeder Gleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta',$$

die für die Seitenfläche F gültig ist, die Koeffizienten $\beta'_{t,P}$ und $\beta'_{t,P'}$, für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, gleich.

Die Ungleichung $x(A) \geq 1$ sei ungültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$. Dann enthält jede Anschlußmenge H_t, $t \in T$, die leere Menge. Nach Lemma 4.4.2.1 ist die Netzvereinbarung $(A, T', H|_{T'})$ eine zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung (A, T, H). Nach Theorem 4.4.2.2 ist die Seitenfläche F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Die Ungleichung $x(A) \geq 1$ definiere eine Facette für die Projektionen der Polytope $\mathrm{PD}(A, T, H)$ und $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ auf die Bauteilvariablen x. Nach Lemma 4.4.2.1 ist die Einschränkung $(A, T', H|_{T'})$ der Netzvereinbarung (A, T, H) zulässig. Da die Netzvereinbarung (A, T, H) real ist, enthält die Menge A mindestens zwei Bauteile.

Wir setzen den Beweis des Korollars 4.4.2.4 mit dem folgenden Lemma fort.

Lemma 4.4.2.5. *Für jede Partition $B \dot{\cup} B' = A$ der Bauteile in nichtleere Mengen B und B' existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in A$ auf der Seitenfläche F mit der Eigenschaft $x(B) \geq 1$, $x(B') \geq 1$.*

Wenn einer der Koeffizienten α_b, $b \in B$, gleich null ist, dann gilt: Für jeden Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x_b = 0$ und $x(B') \geq 1$ liegt auch der Punkt $\binom{x+e(b)}{y}$ auf der Seitenfläche F. Entsprechendes gilt, falls $\alpha_b = 0$ für ein $b \in B'$ ist. Seien alle Koeffizienten α_a, $a \in A$, positiv. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}(H|_{T'})$ die Menge aller Paare (t, P) mit $P \subseteq B$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}(H|_{T'})$ die Menge aller Paare (t, P') mit $P' \subseteq B'$. Dann existieren höchstens $|B| + |\mathcal{E}| - |T'|$ affin unabhängige Punkte $\binom{x}{y} \in F'$ mit $x(B') = 0$ und $|B'| + |\mathcal{E}'| - |T'|$ affin unabhängige Punkte $\binom{x}{y} \in F'$ mit $x(B) = 0$. Daher liegen auf der Facette F' höchstens $|A| + |\mathcal{E}(H|_{T'})| - 2|T'|$ affin unabhängige Punkte mit $x(B) = 0$ oder $x(B') = 0$. Die Dimension der Facette F' ist $|A| + |\mathcal{E}(H|_{T'})| - |T'| - 1$. Es existiert also noch mindestens ein weiterer Punkt $\binom{x}{y}$ auf der Facette F', also auch auf der Seitenfläche F, mit der Eigenschaft $x(B), x(B') \geq 1$. Dies beendet den Beweis von Lemma 4.4.2.5.

Wenn die Anschlußmenge H_t, $t \in T \backslash T'$, die leere Menge nicht enthält, dann sind die Anschlüsse $\{a\}$ in der Menge H_t, für alle Bauteile $a \in A$, enthalten. Nach Lemma 4.4.2.5 existiert für alle Bauteile $a, a' \in A$ eine Folge $\{b_0\}, \ldots, \{b_n\}$ in der Menge H_t mit der Eigenschaft $a = b_0$ und $a' = b_n$, und für alle $0 \leq i \leq n-1$ existieren Punkte $\binom{x}{y} \in F$ mit $x_{b_i} = x_{b_{i+1}} = 1$. Daher existiert für alle $P, P' \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, eine Folge $Q_i \in H_t$, $0 \leq i \leq n$, für die gilt:

$$Q_0 = P,\, Q_n = P',\, Q_1 = \{b_1\} \subseteq P,\;\; Q_{n-1} = \{b_{n-1}\} \subseteq P'$$

und $Q_i = \{b_i\}$ für alle $2 \leq i \leq n-2$. Für die Folge Q_i, $0 \leq i \leq n$ gilt: Für alle $1 \leq i \leq n-2$ existieren Punkte $\binom{x}{y} \in F$ mit $x(b_i) = x(b_{i+1}) = 1$ und es existieren ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x \geq P$ und ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x \geq P'$. Nach Lemma 4.4.2.3 sind daher in jeder Gleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta',$$

die für die Seitenfläche F gültig ist, die Koeffizienten $\beta'_{t,P}$ und $\beta'_{t,P'}$, für alle Anschlüsse $P, P' \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, gleich. Dieses gilt auch, wenn die Anschlußmenge H_t die leere Menge enthält, wie oben gezeigt wurde. Nach Theorem 4.4.2.2 ist die Seitenfläche F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. □

Ein weiteres einfaches Kriterium für die Zulässigkeit der Einschränkung einer Netzvereinbarung ist im folgenden Korollar angegeben.

Korollar 4.4.2.6. *Gegeben sei eine reale Netzvereinbarung (A, T, H), mit der Eigenschaft $\emptyset, A \in H_t$ für alle $t \in T$.*

Für jede nichtleere Teilmenge $T' \subseteq T$ ist jede Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta, \tag{4.50}$$

die eine nichttriviale Facette F' des Polytops $\mathrm{PD}(A, T', H|_{T'})$ definiert, facettendefinierend für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Die Voraussetzungen an die Anschlußfamilie H treffen insbesondere für Anschlußmengen $H_t = 2^A$, $t \in T$, zu.

Beweis: Wir überprüfen die Voraussetzungen von Korollar 4.4.2.4.

Es existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in \mathrm{PD}(A, T, H)$ mit $x(A) = 0$. Für alle Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T \backslash T'$, existiert ein Anschluß, nämlich $A \in H_{t'}$, für alle $t' \in T'$, der P enthält. Also definiert die Ungleichung (4.50) eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. □

4.4.3 Das Stabile-Mengen-Polytop und das Polytop PD

Im folgenden untersuchen wir Liftingverfahren für das Polytop PD. Unsere Absicht ist diese: Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung PD(A, T, H), nichtleere Teilmengen $T' \subseteq T$ und $A' \subseteq A$ und Anschlußmengen

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\},\ t \in T,$$

sowie Teilmengen $H''_t \subseteq H'_t$. Für das Polytop PD$(A', T', H''|_{T'})$ wollen wir facettendefinierende Ungleichungen herleiten bzw. von polyedrischen Untersuchungen verwandter Polytope entleihen. Diese Ungleichungen sollen nacheinander zu Facetten der Polytope PD$(A', T', H'|_{T'})$, PD(A', T, H') und schließlich PD(A, T, H) geliftet werden. Das folgende Theorem 4.4.4.2 stellt sicher: Wenn die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H''_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette des Polytops PD$(A', T', H''|_{T'})$ definiert, dann existieren Koeffizienten $\beta_{t,P}$, $t \in T'$, $P \in H'_t \backslash H''_t$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T', P \in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette des Polytops PD$(A', T', H'|_{T'})$ definiert.

Für die Untersuchung des Stabile-Mengen-Problems werden Liftingverfahren erfolgreich angewandt. Das **Stabile-Mengen-Problem** ist das Problem, eine maximale stabile Menge in einem Graphen $G = (V, E)$ zu finden. Eine Instanz dieses Problems bezeichnen wir mit SSP(G) (**S**table **S**et **P**roblem). Eine stabile Menge W in einem Graphen G ist eine Knotenmenge, so daß keine zwei Knoten aus W durch eine Kante des Graphen G verbunden sind. Das Polytop STAB(G) ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der stabilen Mengen des Graphen G.

Polyedrische Untersuchungen über das Polytop STAB(G) wurden von Padberg angestellt [Pad73, Pad75, Pad80]. Man beachte auch den Übersichtsartikel von Balas und Padberg zum verwandten Set-Partitioning-Problem [BP76]. Die theoretischen Untersuchungen werden in Verfahren zur Lösung von Set-Partitioning-Problemen z. B. von Hoffman und Padberg [HP93] eingesetzt. Borndörfer gibt eine ausführliche Übersicht über die theoretischen und praktischen Aspekte des Set-Packing-, des Set-Partitioning- und des Set-Covering-Problems [Bor97].

Wir wollen den Bezug des Netzproblems zu dem Problem SSP(G) herstellen. Ordnen wir den Knoten des Graphen G Auswahlvariablen $(\xi_i)_{i \in V}$ zu, dann gilt für jede Kante $ij \in E$, $\xi_i = 0$ oder $\xi_j = 0$. Eine ähnliche Beziehung gilt für die Variablen des Polytops PD(A, T, H). Für je zwei Anschlüsse $P, P' \in H_t$ irgendeines Zielpunktes t gilt $y_{t,P} = 0$ oder $y_{t,P'} = 0$. Für ein Bauteil $a \in A$ und einen Anschluß $P \in H_t$, der a enthält, gilt $(1 - x_a) = 0$ oder $y_{t,P} = 0$.

Einer Netzvereinbarung (A, T, H) ordnen wir einen Intersektionsgraphen

$$G_I(A, T, H) = (V_I(A, T, H), E_I(A, T, H))$$

zu. Wir schreiben $G_I = (V_I, E_I)$, wenn sich die Parameter aus dem Zusammenhang ergeben. Die Knoten V_I des Intersektionsgraphen G_I sind die Bauteile A und die Anschlußpaare $(t, P) \in \mathcal{E}(H)$. Zwei verschiedene Anschlußpaare $(t, P), (t', P') \in \mathcal{E}(H)$ sind genau dann mit einer Kante von E_I verbunden, wenn die Zielpunkte t und t' übereinstimmen. Ein Bauteil $a \in V_I$ und ein Anschlußpaar $(t, P) \in \mathcal{E}(H)$ sind genau dann mit einer Kante von E_I verbunden, wenn der Anschluß P das Bauteil a enthält. Keine zwei Bauteile $a, b \in A$ sind mit einer Kante von E_I verbunden. Offensichtlich bilden also die Knoten (t, P), $t \in T$, und $P \in H_t$ eine Clique. Diese Clique ist bezüglich Inklusion maximal, wenn kein Bauteil $a \in A$ existiert, das in allen Anschlüssen $P \in H_t$ enthalten ist. Ebenso bilden der Knoten $a \in A$ und die Knoten (t, P), $t \in T$, $P \in H_t$, mit $a \in P$ eine Clique in dem Graphen G_I. Diese Clique ist bezüglich Inklusion maximal, wenn ein Anschluß $P \in H_t$ mit $a \in P$ existiert.

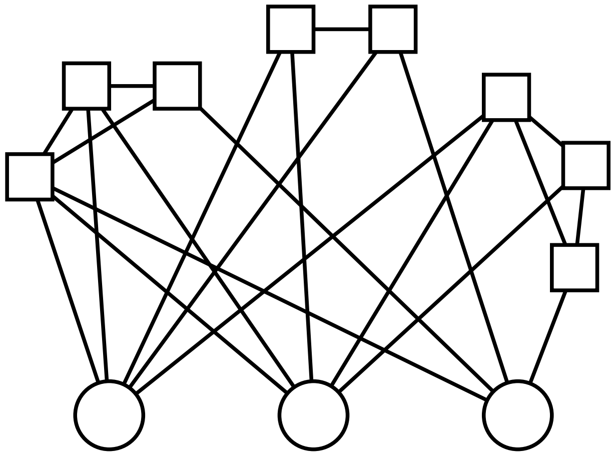

Abbildung 4.1: Ein Beispiel eines Intersektionsgraphen. Die Bauteile werden als Kreise, die Anschlußpaare als Quadrate dargestellt.

Als Auswahlvariablen des Stabile-Mengen-Problems $\mathrm{SSP}(G_I)$ verwenden wir die Anschlußvariablen $(y_{t,P})_{t \in T, P \in H_t}$ und das Komplement $(\bar{x}_a)_{a \in A}$ der Bauteilvariablen. Es gilt $\bar{x}_a = 1 - x_a$ für alle $a \in A$. Wir notieren

$$\mathrm{STAB}(G_I) = \mathrm{conv}\left(\left\{ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \end{pmatrix} \in \{0,1\}^A \times \{0,1\}^{\mathcal{E}(H)} \;\middle|\; \begin{array}{lcccl} \forall\, t \in T: & & & \sum_{P \in H_t} y_{t,P} & \leq 1, \\ \forall\, t \in T: & \bar{x} & + & \sum_{P \in H_t} y_{t,P}\chi^P & \leq \mathbb{1}. \end{array} \right\}\right).$$

Der Vektor $\mathbb{1}$ ist der Vektor, dessen Einträge sämtlich eins sind. Das Polytop $\mathrm{STAB}(G_I)$ entsteht also aus dem Polytop PD durch Komplementbildung der Bauteilvariablen x und durch Relaxierung der Zielpreisbedingungen $\sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1$. Das Polytop

$$\mathrm{PDS}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^{\mathcal{E}(H)} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} - x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{STAB}(G_I) \right\}$$

enthält das Polytop PD als Seitenfläche. Daher ist jede Facette des Polytops PD in einer Facette des Polytops PDS enthalten.

Theorem 4.4.3.1. *Sei (A,T,H) eine Netzvereinbarung und G ein Graph. Die Polytope $\mathrm{STAB}(G)$ und $\mathrm{PDS}(A,T,H)$ haben Raumdimension.*

Beweis: Für jeden Graphen $G = (V,E)$ enthält das Polytop $\mathrm{STAB}(G)$ den Ursprung und alle Einheitsvektoren. Das Polytop $\mathrm{PDS}(A,T,H)$ ist isomorph zu dem Polytop $\mathrm{STAB}(G_I(A,T,H))$. □

Wenn alle Anschlußmengen die leere Menge enthalten, dann können wir Facetten des Polytops $\mathrm{STAB}(G_I(A,T,H))$ zu Facetten des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ umformulieren.

Theorem 4.4.3.2. *Sei eine reale Netzvereinbarung (A,T,H) gegeben, deren Anschlußmengen H_t, $t \in T$, alle die leere Menge enthalten. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *Die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta, \qquad \beta_{t,\emptyset} = 0,\ t \in T,$$

definiert eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$.

2. *Die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta, \quad \beta_{t,\emptyset} = 0,\ t \in T$$

definiert eine Facette F' des Polytops $\mathrm{PDS}(A,T,H)$.

3. *Die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a - \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \leq \sum_{a\in A} \alpha_a - \delta, \quad \beta_{t,\emptyset} = 0,\ t \in T$$

definiert eine Facette des Polytops $\mathrm{STAB}(G_I(A,T,H))$.

Zu einer für das Polytop PD gültigen Ungleichung können Vielfache der Zielpreisbedingungen addiert werden. Jede Facette $\alpha^T x + \beta^T y \geq \delta$ des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ ist daher mit der Facette

$$\alpha^T x + \sum_{t \in T, P \in H_t} (\beta_{t,P} - \beta_{t,\emptyset}) y_{t,P} \geq \delta - \sum_{t \in T} \beta_{t,\emptyset}$$

identisch.

Beweis von Theorem 4.4.3.2: Die Äquivalenz von 2 und 3 ist offensichtlich, da jedem Punkt $\binom{x}{y}$ des Polytops $\mathrm{STAB}(G_I(A, T, H))$ der Punkt $((\mathbb{1} - x)^T, y^T)^T$ des Polytops $\mathrm{PDS}(A, T, H)$ entspricht und umgekehrt. Wir zeigen die Äquivalenz der Aussagen 1 und 2.

Das Polytop PDS enthält das Polytop PD. Die Seitenfläche F' enthält daher stets die Seitenfläche F. Sei F eine, von den Facetten $y_{t,\emptyset} \geq 0$, $t \in T$, verschiedene Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. Es existieren daher Punkte $p_t \in \binom{x}{y}$, $t \in T$, auf der Facette $F \subseteq F'$ mit $y_{t,\emptyset} = 1$. Da die Koeffizienten $\beta_{t,\emptyset}$ gleich null sind, liegen die Punkte $p'_t = p_t - (0, f(t, \emptyset)^T)^T$, $t \in T$, auf der Seitenfläche F'. Sei J eine Hyperebene, definiert durch die Gleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha'_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta'_{t,P} y_{t,P} = \delta', \tag{4.51}$$

die die Seitenfläche F' enthält Die Koeffizienten $\beta'_{t,\emptyset} = 0$, $t \in T$, sind gleich null, da die Punkte p_t und p'_t in der Facette F' enthalten sind. Die Gleichung (4.51) ist auch gültig für die Facette $F \subseteq F'$ und daher eine konische Kombination der Gleichungen $\alpha^T x + \beta^T y = \delta$ und $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 1$, $t \in T$. Da die Koeffizienten $\beta_{t,\emptyset}$ und $\beta'_{t,\emptyset}$ gleich null sind, ist die Gleichung $\alpha'^T x + \beta'^T y = \delta'$ bereits als konische Kombination der Gleichung $\alpha^T x + \beta^T y = \delta$ darstellbar. Daher ist F' eine Facette des Polytops $\mathrm{PDS}(A, T, H)$.

Um die Rückrichtung zu zeigen,nehmen wir an, daß die Seitenfläche F' eine Facette des Polytops $\mathrm{PDS}(A, T, H)$ ist. Wegen der Gleichung $\beta_{t,\emptyset} = 0$, ist die Facette F' nicht identisch mit den Seitenflächen (Facetten) $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} \leq 1$, $t \in T$ des Polytops $\mathrm{PDS}(A, T, H)$. Sei $p = \binom{x}{y}$ ein Punkt auf der Facette F' und $T' \subseteq T$ die Menge der Zielpunkte t mit $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 0$, dann definieren wir $r(p)$ durch

$$r(p) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{t \in T'} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, \emptyset) \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $r(p)$ liegt auf der Seitenfläche $F \subseteq F'$, da $\beta_{t,\emptyset} = 0$, $t \in T$. Sei die Gleichung $\alpha'^T x + \beta'^T y = \delta'$, $\beta'_{t,\emptyset} = 0$, $t \in T$, gültig für alle Punkte der Seitenfläche F. Die Gleichung $\alpha'^T x + \beta'^T y = \delta'$ ist gültig für alle Punkte p der Facette F', da sie für den Punkt $r(p) \in F$ gültig ist. Aus diesem Grund ist die Gleichung $\alpha'^T x + \beta'^T y = \delta'$ eine konische Kombination der Gleichung $\alpha^T x + \beta^T y = \delta$.

Sei ${\alpha''}^T x + {\beta''}^T y = \delta''$ eine Gleichung, die für die Seitenfläche F gültig ist. Dann ist die Gleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha''_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta''_{t,P} y_{t,P} - \sum_{t\in T} \beta_{t,\emptyset} \sum_{P\in H_t} y_{t,P} \geq \delta - \sum_{t\in T} \beta_{t,\emptyset}$$

ebenfalls gültig für die Seitenfläche F. Die Gleichung ${\alpha'}^T x + {\beta'}^T y = \delta'$ kann daher als konische Kombination der Gleichung $\alpha^T x + \beta^T y = \delta$ und der Zielpreisbedingungen dargestellt werden. Also ist F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. $\square$

4.4.4 Liften von Anschlußvariablen

Das Liften von Anschlußvariablen verläuft fast genauso wie beim Stabile-Mengen-Problem. Das folgende Lemma bereitet Theorem 4.4.4.2 vor.

Lemma 4.4.4.1. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H') und eine Netzvereinbarung (A, T, H), so daß*

$$\mathcal{E}(H) = \{(u, Q)\} \dot{\cup} \mathcal{E}(H')$$

gilt.

Die Netzvereinbarung (A, T, H) ist real. Wenn die Ungleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette F' des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H')$ definiert, dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

mit dem Liftingkoeffizienten

$$\beta_{u,Q} = \delta - \min \left\{ \alpha^T x + \sum_{t\in T, P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A, T, H),\ y_{u,Q} = 1 \right\}$$

eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Beweis: Nach Definition des Liftingkoeffizienten ist

$$\delta \geq \alpha^T x + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} + \beta_{u,Q} y_{u,Q}$$

für alle Punkte $\binom{x}{y} \in \mathrm{PD}(A,T,H)$. Jedem Punkt $\binom{x'}{y'}$ der Facette F' entspricht ein Punkt $\binom{x'}{y}$ der Seitenfläche F, mit $y_{u,Q} = 0$ und $y_{t,P} = y'_{t,P}$ für alle $t \in T$, $P \in H'_t$. Zusätzlich existiert mindestens ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $y_{u,Q} = 1$. Also ist die Dimension der Seitenfläche F mindestens um eins größer als die Dimension der Facette F'. Die Netzvereinbarung (A,T,H) ist real, da die Netzvereinbarung (A,T,H') real ist. Die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ ist um eins größer als die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H')$. Die Seitenfläche F stimmt für $y_{u,Q} = 0$ nicht mit dem Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$ überein. Daher ist die Seitenfläche F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$. □

Wir beschreiben nun das Liften von Anschlußvariablen.

Theorem 4.4.4.2. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A,T,H') und eine Netzvereinbarung (A,T,H), mit $H'_t \subseteq H_t$, $t \in T$. Wenn die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H')$ definiert, dann existieren Liftingkoeffizienten $\beta_{t,P}$, $t \in T$, $P \in H_t \backslash H'_t$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta \tag{4.52}$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ definiert. Die Liftingkoeffizienten $\beta_{t,P}$, können für alle $t \in T$ und alle $P \in H_t \backslash H'_t$, abgeschätzt werden durch:

$$\beta_{t,P} \geq \delta - \min\left\{ \alpha^T x + \sum_{t'\in T, P'\in H'_t} \beta_{t',P'} y_{t',P'} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A,T,\hat{H}),\ y_{t,P} = 1 \right\}$$

mit den Anschlußmengen $\hat{H}_u = H_u$, $u \in T$, $u \neq t$, und $\hat{H}_t = H_t \cup \{P\}$.

Beweis: Für die Anschlußpaare, die in $\mathcal{E}(H)$ aber nicht in $\mathcal{E}(H')$ enthalten sind, legt man irgendeine Reihenfolge (u_i, Q_i), $1 \leq i \leq n$, fest. Durch diese Reihenfolge werden Anschlußfamilien $J(i)$,

$$\mathcal{E}(J(i)) = \mathcal{E}(H') \cup \{(u_j, Q_j) \,|\, 1 \leq j \leq i\},\ 0 \leq i \leq n,$$

festgelegt. Es ist $J(0) := H'$ und $J(n) := H$. Eine facettendefinierende Ungleichung für das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,J(0))$ ist gegeben. Nach Lemma 4.4.4.1 berechnet man für jede facettendefinierende Ungleichung des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,J(i-1))$, für alle $1 \leq i \leq n$ einen Liftingkoeffizienten β_{u_i,Q_i} und dadurch eine facettendefinierende Ungleichung des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,J(i))$. Mit vollständiger Induktion sieht man, daß Koeffizienten β_{u_i,Q_i}, $1 \leq i \leq n$, gefunden werden können, so daß die Ungleichung (4.52) eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$ definiert. Umformung der Ungleichung (4.52) ergibt für ein Anschlußpaar $(t,P) \in \mathcal{E}(H)\backslash\mathcal{E}(H')$ und für Anschlußmengen $\hat{H}_\tau = H'_\tau$, $\tau \in T$, $\tau \neq t$, und $\hat{H}_\tau = H'_\tau \cup \{P\}$:

$$\begin{aligned}
&\beta_{t,P} \geq \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \\
&\quad \geq \delta - \sum_{a \in A} \alpha_a x_a - \sum_{\tau \in T, P' \in H'_\tau} \beta_{\tau,P'} y_{\tau,P'} - \sum_{\tau \in T, P' \in H_\tau \backslash \hat{H}_\tau} \beta_{\tau,P'} y_{\tau,P'} \geq \\
&\quad \geq \delta - \min \left\{ \alpha^T x + \sum_{t' \in T, P' \in H'_\tau} \beta_{\tau,P'} y_{\tau,P'} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A,T,\hat{H}),\ y_{t,P} = 1 \right\}
\end{aligned}$$

□

4.4.5 Liften von Bauteilvariablen

Um ein Liftingverfahren für die Koeffizienten α der Bauteilvariablen x durchführen zu können, haben wir die Seitenflächen PDL des Polytops PD durch Festlegung von Bauteilvariablen auf eins definiert. Sei eine reale Netzvereinbarung (A,T,H) gegeben und $A' \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge der Bauteile. Dann ist das Polytop PDL definiert durch

$$\mathrm{PDL}(A',A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A,T,H) \;\middle|\; x_a = 1,\ a \in A\backslash A' \right\}.$$

Das folgende Lemma bereitet Theorem 4.4.5.3 vor.

Lemma 4.4.5.1. *Die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine Facette F' des Polytops $\mathrm{PDL}(A',A,T,H)$. *Für alle $b \in A\backslash A'$ sei der Liftingkoeffizient α_b durch*

$$\alpha_b = \min \left\{ \sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \beta^T y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PDL}(A' \cup \{b\}, A, T, H),\ x_b = 0 \right\} - \delta$$

definiert. Dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a \in A' \cup \{b\}} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta + \alpha_b \tag{4.53}$$

eine Facette F des Polytops $\mathrm{PDL}(A' \cup \{b\}, A, T, H)$.

Beweis: Der Liftingkoeffizient α_b wurde so definiert, daß

$$\delta + \alpha_b \leq \alpha_b x_b + \sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P}$$

gültig ist. Die Facette F' ist in der Seitenfläche F enthalten. Zusätzlich existiert ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit $x_b = 0$. Die Dimension der Seitenfläche F ist mindestens um eins größer als die Dimension der Facette F'. Die Dimension des Polytops PDL$(A' \cup \{b\}, A, T, H)$ ist genau um eins größer als die Dimension des Polytops PDL(A', A, T, H). Die Seitenfläche F ist nicht identisch mit dem Polytop PDL$(A', \cup\{b\}, A, T, H)$, z. B. nicht auf dem Schnitt mit der Hyperebene $x_b = 1$. Daher ist die Seitenfläche F eine Facette des Polytops PDL$(A', \cup\{b\}, A, T, H)$. □

Das folgende Lemma wird ebenfalls für die Beschreibung des Liftings der Bauteilvariablen in Theorem 4.4.5.3 zum Einsatz kommen.

Lemma 4.4.5.2. *Seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H), eine nichtleere Teilmenge $A' \subseteq A$ und Anschlußmengen*

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\}$$

gegeben. Die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine nichttriviale Facette F' des Polytops PD(A', T, H'). *Dann definiert die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P \cap A'} y_{t,P} \geq \delta \tag{4.54}$$

eine Facette F des Polytops PDL(A', A, T, H).

Beweis: Die Ungleichung (4.54) ist gültig für das Polytop PD(A, T, H), also auch gültig für das Polytop PDL(A', A, T, H). Auf der Facette F' existieren

$$n = |A'| + |\mathcal{E}(H')| - |T| \text{ Punkte } \; p_i = \begin{pmatrix} x'(i) \\ y'(i) \end{pmatrix} \in F', \; 1 \leq i \leq n,$$

die affin unabhängig sind.

Für alle Anschlüsse $P' \in H'_t$, $t \in T$, sei der Anschluß $R(t, P') \in H_t$ mit $R(t, P') \cap A' = P'$ ein Repräsentant der Anschlüsse $P \in H_t$ mit der Eigenschaft $P \cap A' = P'$.

Für alle Punkte $p_i \in F'$, $1 \leq i \leq n$, existiert ein Punkt $q_i = \binom{x(i)}{y(i)} \in F$, so daß

$$x_a(i) = \begin{cases} x'_a(i) & \text{falls } a \in A', \\ 1 & \text{falls } a \in A \backslash A' \end{cases}$$
$$y_{t,P}(i) = \begin{cases} y'_{t,P\cap A'}(i) & \text{falls } P = R(t, P \cap A'), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Facette F' nichttrivial ist, existiert für alle $P \in H_t$ ein Index i mit $y_{t,P}(i) = y'_{t,P\cap A'} = 1$. Für alle Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, mit $P \neq R(t, P \cap A')$ existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß der Punkt

$$r(t,P) := q_i - \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,P) - f(t, R(t, P \cap A')) \end{pmatrix}$$

in dem Polyeder $\mathrm{PD}(A,T,H)$ und daher auf der Seitenfläche F liegt. Die Punkte q_i, $1 \leq i \leq n$, und $r(t,P)$, $t \in T$, $P \in H_t$, sind affin unabhängig. Die Anzahl dieser Punkte ist

$$n + |\mathcal{E}(H)| - |\mathcal{E}(H')| = |A'| + |\mathcal{E}(H)| - |T|.$$

Die Seitenfläche F ist nicht mit dem Polytop $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ identisch und daher eine Facette des Polytops $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$. □

Nach diesen Vorarbeiten beschreiben wir nun das Lifting der Bauteilvariablen.

Theorem 4.4.5.3. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung* (A,T,H) *und eine nichtleere Bauteilmenge* $A' \subseteq A$, *und Anschlußmengen*

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\}.$$

Die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine nichttriviale Facette F' *des Polytops* $\mathrm{PD}(A', T, H')$. *Dann existieren Koeffizienten* α_a, $a \in A\backslash A'$, *so daß die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta + \sum_{a\in A\backslash A'} \alpha_a \tag{4.55}$$

eine Facette F *des Polytops* $\mathrm{PD}(A,T,H)$ *definiert. Für die Liftingkoeffizienten* α_b, $b \in A\backslash A'$, *gilt die Abschätzung*

$$\alpha_b \leq \min \left\{ \sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \beta^T y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PDL}(A' \cup \{b\}, A, T, H),\, x_b = 0 \right\} - \delta\,. \tag{4.56}$$

Beweis: Nach Lemma 4.4.5.2 ist die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$. Für die Bauteile $A\backslash A'$ legen wir irgendeine Reihenfolge $b_1, b_2, \ldots, b_n$ fest. Sei eine Facette

$$\sum_{a\in A'\cup\{b_1,\ldots,b_{j-1}\}} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{b_k}, \text{ für ein } 1 \leq j \leq n,$$

des Polytops

$$\mathrm{PDL}(A' \cup \{b_1, \ldots, b_{j-1}\}, A, T, H)$$

gegeben. Nach Lemma 4.4.5.1 existiert ein Liftingkoeffizient α_{b_j}, so daß die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'\cup\{b_1,\ldots,b_j\}} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta + \sum_{k=1}^{j} \alpha_{b_k}$$

eine Facette des Polytops

$$\mathrm{PDL}(A' \cup \{b_1, \ldots, b_j\}, A, T, H)$$

definiert. Für $j = 1$ ist eine Facette des Polytops $\mathrm{PDL}(A', A, T, H)$ gegeben. Mit vollständiger Induktion sieht man, daß Koeffizienten α_a, $a \in A\backslash A'$, existieren, so daß die Ungleichung (4.55) eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ definiert. Umformung der Ungleichung (4.55) ergibt für $b \in A\backslash A'$:

$$\begin{aligned}\alpha_b &\leq \sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{a\in A\backslash(A'\cup\{b\})} \alpha_a (x_a - 1) + \alpha_b x_b + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} - \delta \leq \\ &\leq \min\left\{ \sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \beta^T y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PDL}(A' \cup \{b\}, A, T, H),\ x_b = 0 \right\} - \delta\end{aligned}$$

□

Unsere Zielvorstellung ist, daß die Liftingkoeffizienten der Bauteilvariablen alle null sind. Das folgende Korollar liefert dafür ein hinreichendes Kriterium.

Korollar 4.4.5.4. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H) und eine nichtleere Teilmenge $A' \subseteq A$ sowie Anschlußmengen*

$$H_t' = \{P \cap A' \mid P \in H_t\}.$$

Die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T', P\in H'_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine nichttriviale Facette F' des Polytops $\mathrm{PD}(A', T, H')$.

Genau dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T', P\in H_t} \beta_{t,P\cap A'} y_{t,P} \geq \delta$$

eine Seitenfläche F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$*, wenn für alle Bauteile $a \in A\backslash A'$ ein Punkt $\binom{x}{y}$ auf der Seitenfläche F mit der Eigenschaft $x_a = 0$ existiert.*

Beweis: Die Seitenfläche F ist von den trivialen Facetten $x_a \leq 1$ verschieden. Sei F eine Facette, dann existiert für alle Bauteile $a \in A\backslash A'$ ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit der Eigenschaft $x_a = 0$. Für alle Bauteile $a \in A\backslash A'$ existiere ein Punkt $\binom{x}{y} \in F$ mit der Eigenschaft $x_a = 0$. Für diesen Punkt können wir o. B. d. A. annehmen, daß $x_b = 1$, für alle $b \in A\backslash A'$, $a \neq b$, gilt. Demzufolge sind alle Liftingkoeffizienten entsprechend der Abschätzung (4.56) gleich null. □

Bei dem nächsten Theorem wollen wir ein Bauteil kopieren und ein Lifting von facettendefinierenden Ungleichungen beschreiben. Gegeben seien zwei reale Netzvereinbarungen

$$(A, T, H) \text{ und } (A', T, H') \tag{4.57}$$

mit den folgenden Eigenschaften: Die Bauteilmenge A' enthält genau die Bauteile A und ein weiteres Bauteil $b' \notin A$. Das Bauteil b' ist die Kopie eines Bauteils $b \in A$. Das bedeutet, daß die Anschlußmenge H'_t, $t \in T$, genau die Anschlüsse H_t enthält und für jeden Anschluß $P \in H_t$ mit $b \in P$ den Anschluß $(P\backslash\{b\}) \cup \{b'\}$,

$$H'_t = H_t \cup \{(P\backslash\{b\}) \cup \{b'\} \mid P \in H_t : \; b \in P\}. \tag{4.58}$$

Theorem 4.4.5.5 (Kopieren von Bauteilen). *Gegeben seien reale Netzvereinbarungen (A, T, H) und (A', T, H') und Bauteile $b, b' \in A$, wie oben in* (4.57) *und* (4.58) *beschrieben wurde.*

Die Ungleichung

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T, P\in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

definiere eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$*, die nicht mit einer Facette der Form*

$$\alpha'_b x_b + \sum_{t\in T} \sum_{P\in H_t : b\in P} \beta'_{t,P} y_{t,P} \geq \delta$$

identisch ist.

Dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \alpha_b x_{b'} + \sum_{t \in T, P \in H_t} \beta_{t,P} y_{t,P} + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t : P \ni b} \beta_{t,P} y_{t,(P \setminus \{b\}) \cup \{b'\}} \geq \delta$$

eine Facette F' des Polytops $\mathrm{PD}(A', T, H')$.

Beweis: Die Anzahl der Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, die das Bauteil b enthalten sei m, der Raum der zugehörigen Anschlußvariablen $y_{t,P}$ und der Bauteilvariable x_b sei R. Die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ sei n.

Es existieren $m+1$ affin unabhängige Punkte $p_1, \ldots, p_{m+1}$ auf der Facette F, deren Bauteilvariable x_b von null verschieden ist und deren kanonische Projektion auf den Raum R ebenfalls affin unabhängig ist. Ansonsten wäre eine Gleichung der Form

$$\alpha'_b x_b + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t : b \in P} \beta'_{t,P} y_{t,P} = 0$$

für alle Punkte der Facette F gültig. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir ergänzen die Punkte $p_1, \ldots, p_{m+1}$ zu n affin unabhängigen Punkten p_1, $\ldots$, p_n auf der Facette F und betten diese in die Facette F' ein. Für jeden Punkt $p_i = \binom{x}{y}$, $1 \leq i \leq n$, definieren wir einen Punkt $p'_i = \binom{x'}{y'}$ mit $x'_{b'} = 0$ und $x'_a = x_a$, $a \neq b'$ sowie $y'_{t,P} = 0$ für alle Anschlüsse $P \in H'_t$, die das Bauteil b' enthalten, und $y'_{t,P} = y_{t,P}$, $P \in H_t$.

Für jeden Punkt $p'_i = \binom{x}{y}$, $1 \leq i \leq m+1$, definieren wir einen Punkt $p'_{n+i} = \binom{x'}{y'}$ mit

$$x'_a = \begin{cases} x_a & a \in A \setminus \{b\}, \\ 0 & a = b, \\ x_b & a = b', \text{ und} \end{cases}$$

$$y'_{t,P} = \begin{cases} y_{t,P} & t \in T, P \in H'_t : b, b' \notin P, \\ 0 & t \in T, P \in H'_t : b \in P, \\ y(t, (P \setminus \{b'\}) \cup \{b\}) & t \in T, P \in H'_t : b' \in P. \end{cases}$$

In den Punkten p'_{n+i} sind also die Variablenbelegungen bezüglich der Bauteile b und b' und der diese Bauteile enthaltenen Anschlüsse vertauscht. Die Punkte p'_{n+i} liegen auf der Seitenfläche F'.

Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_{n+m+1}$ sind affin unabhängig. Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_n$ sind affin unabhängig und haben null Einträge für die Bauteilvariable $x_{b'}$ und die Anschlußvariablen $y_{t,P}$, deren Anschlüsse $P \in H_t$ das Bauteil b' enthalten. Die Punkte $p'_{n+1}, \ldots, p'_{n+m+1}$ sind affin unabhängig und deren kanonische Projektion auf den Raum der Bauteilvariablen $x_{b'}$ und der Anschlußvariablen $y_{t,P}$, deren Anschlüsse $P \in H_t$ das Bauteil b' enthalten, ist ebenfalls affin unabhängig.

Daher ist die Dimension der Seitenfläche F' mindestens $n + m$. Das Polytop $\mathrm{PD}(A', T, H')$ hat Dimension $n + m + 1$. Da die Seitenfläche F' nicht mit dem Polytop $\mathrm{PD}(A', T, H')$ identisch ist, ist die Seitenfläche F' eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A', T, H')$. □

4.4.6 Elementare Facetten des Polytops PD

Die folgenden Facetten des Polytops PD entsprechen Cliquenungleichungen des Polytops STAB.

Korollar 4.4.6.1. *Sei (A, T, H) eine reale Netzvereinbarung, $a \in A$ ein Bauteil und $t \in T$ ein Zielpunkt. Es existiere ein Anschluß $P \in H_t$, der das Bauteil a enthält. Genau dann definiert die Nutzpreisbedingung*

$$x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P \geq 0 \tag{4.59}$$

eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$, wenn für alle von a verschiedenen Bauteile $b \in A$ gilt:

1. *Es existiert ein Anschluß $Q(t, b) \in H_t$, der das Bauteil a, aber nicht das Bauteil b enthält oder*

2. *Für alle Zielpunkte $u \in T$ existieren Anschlüsse $R(u, b) \in H_u$, die die Bauteile a und b nicht enthalten.*

Beweis: Wenn ein von a verschiedenes Bauteil $b \in A$ existiert, so daß die Bedingungen 1 und 2 nicht gelten, dann ist die Ungleichung

$$x_b + x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P \geq 1 \tag{4.60}$$

für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ gültig. Die Ungleichung (4.59) ist dann nicht facettendefinierend, da sie eine konische Kombination der Ungleichung (4.60) und der Ungleichung $-x_b \geq -1$ ist.

Gegeben seien die Teilmengen $A' = \{a\}$ und $T' = \{t\}$ und die Anschlußmengen

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\} = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

Das Polytop $\mathrm{PD}(A', T', H'|_{T'})$ hat Dimension 2. Auf der Facette $x_a - y_{t,\{a\}} \geq 0$ liegen die affin unabhängigen Punkte $(0, f(t, \emptyset)^T)^T$ und $(e(a)^T, f(t, \{a\})^T)^T$. Nach Korollar 4.4.2.6 ist $x_a - y_{t,\{a\}} \geq 0$ eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A', T, H')$. Sei $b \in$

A ein von a verschiedenes Bauteil. Die Bedingung 1 treffe für das Bauteil b zu. Es existieren dann Anschlüsse $Q(u,b) \in H_t$ für alle Zielpunkte $u \in T$, $u \neq t$, die das Bauteil b nicht enthalten. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} - e(b) \\ \sum_{u \in T} Q(u,b) \end{pmatrix}$$

erfüllt wegen $a \in Q(t,b)$ die Ungleichung (4.59) mit Gleichheit. Die Bedingung 2 treffe für das Bauteil b zu. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} - e(a) - e(b) \\ \sum_{u \in T} R(u,b) \end{pmatrix}$$

erfüllt wegen $a, b \notin R(u,b)$, $u \in T$, die Ungleichung (4.59) mit Gleichheit. Wenn für alle von a verschiedenen Bauteile $b \in A$ die Bedingung 1 oder die Bedingung 2 zutrifft, dann ist nach Korollar 4.4.5.4 die Ungleichung (4.59) facettendefinierend für das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$. □

Bemerkung 4.4.6.2. *Es existieren höchstens $|A||T|$ facettendefinierende Nutzpreisbedingungen für eine reale Netzvereinbarung (A,T,H).*

In der Einleitung dieses Kapitels haben wir das Problem UFLP (uncapacitated facility location problem) eingeführt. Es ist das Problem, für mögliche Fabrikstandorte A mit Öffnungskosten $(c_a)_{a\in A}$ und Kundenstandorte T mit Belieferungskosten $(\hat{d}_{t,a})_{t\in T, a\in A}$, Fabriken an den Standorten $B \subseteq A$ zu öffnen und Kundenzuordnungen $\phi(t) \in B$, $t \in T$, vorzunehmen, so daß die Kosten

$$\sum_{a\in A} c_a + \sum_{t \in T} \hat{d}_{t,\phi(t)}$$

minimiert werden.

In unserer Notation ist dem Problem UFLP eine Netzvereinbarung (A,T,H) mit Anschlußmengen

$$H_t = \{\{a\} \,|\, a \in A\}$$

zugeordnet. Diese spezielle Netzvereinbarung ist auch von Bedeutung für die Untersuchung des Polytops PN. Die Netzvereinbarung (A,T,H) hängt offensichtlich nur von der Anzahl n der Bauteile und der Anzahl m der Zielpunkte ab. Wir wollen das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$, das für diesen speziellen Fall auch mit dem Polytop $\mathrm{PN}(A,T,H)$ identisch ist, mit einer eigenen Bezeichnung versehen. Wir definieren für natürliche Zahlen $n \geq 2$ und $m \geq 1$ und Anschlußmengen

$$H_j = \{\,\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\,\}$$

das Polytop PFL(n,m) durch

$$\mathrm{PFL}(n,m) = \mathrm{PD}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m, H).$$

Bei der Untersuchung des Problems UFLP werden normalerweise die Variablen $y_{i,j}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ und die Variablen $\bar{x}_i = 1 - x_i$, $1 \le i \le n$ eingeführt. Auf diese Weise kann man das Problem UFLP leicht mit dem Stabile-Mengen-Problem in Beziehung setzen. Berücksichtigen wir diesen Zusammenhang, so können wir die Ergebnisse der polyedrischen Untersuchungen für das Problem UFLP für die Beschreibung der Seitenflächenstruktur des Polytops PFL(n,m) übernehmen.

Seien nichtleere Mengen A, T, $A' \subseteq A$ und $T' \subseteq T$ und Anschlußmengen

$$H_t = \{\{a\} \mid a \in A\},\ t \in T,$$

gegeben. Sei $M = (m_{t,a})_{t \in T', a \in A'}$ eine 0-1 Adjazenz-Matrix, die den Untergraphen $G^M = (V^M, E^M)$ des Intersektionsgraphen $G_I(A,T,H)$,

$$\begin{aligned} V^M &= A' \cup \{(t,\{a\}) \in T' \times A' \mid m_{t,a} = 1\} \\ E^M &= \{\{a,(t,\{a\})\} \mid m_{t,a} = 1\} \cup \{\{(t,\{a\}),(t,\{b\})\} \mid m_{t,a} = m_{t,b} = 1\} \end{aligned}$$

definiert.

Die maximale Kardinalität einer stabilen Menge in G^M, heißt **Stabilitätszahl** $\alpha(G^M)$. Die minimale Kardinalität von Bauteilen $A'' \subseteq A'$, so daß für jeden Zielpunkt $t \in T'$ mindestens ein Knoten $(t,a) \in V^M$, $a \in A''$, existiert, nennen wir **Überdeckungszahl** $\beta(G^M)$ **der Matrix** M.

Die Matrix M nennen wir **maximal**, wenn durch das Ändern eines jeden null-Eintrages von M nach eins die Stabilitätszahl $\alpha(G^M)$ um eins zunimmt oder die Überdeckungszahl $\beta(G^M)$ um eins abnimmt.

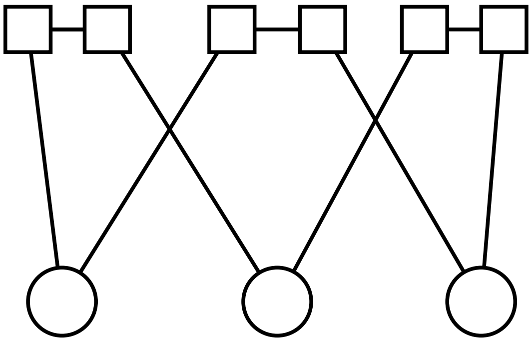

Abbildung 4.2: Der zu der maximalen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ korrespondierende Intersektionsgraph.

Theorem 4.4.6.3 (Cho, Johnson, Padberg, Rao).
Seien nichtleere Mengen A, T, $A' \subseteq A$, $T' \subseteq T$, Anschlußmengen

$$H_t = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

und eine 0-1 Adjazenz-Matrix $M = (m_{t,a})_{t \in T', a \in A'}$ gegeben.
Die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \bar{x}_a + \sum_{(t,a) \in T' \times A'} m_{t,a} y_{t,\{a\}} \leq \alpha(G^M)$$

ist genau dann facettendefinierend für das Polytop $\mathrm{STAB}(G_I(A,T,H))$*, wenn die Matrix M maximal ist.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Theorem 3.4 des Artikels [CJPR83b].

Theorem 4.4.6.4 (Cornuejols, Thizy). *Seien nichtleere Mengen A, T, und nichtleere Teilmengen $A' \subseteq A$, $T' \subseteq T$, Anschlußmengen*

$$H_t = \{\{a\} \mid a \in A\},\ t \in T,$$

und eine maximale 0-1 Adjazenz-Matrix $M = (m_{t,a})_{t \in T', a \in A'}$ gegeben.
Dann ist die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} x_a - \sum_{(t,a) \in T' \times A'} m_{t,a} y_{t,\{a\}} \geq |A'| - \alpha(G^M) \tag{4.61}$$

facettendefinierend für das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$.

Beweis: Dieses Theorem folgt direkt aus Theorem 4.4.6.3 und aus Theorem 11 des Artikels [CT82]. Das Theorem 11 von Cornuejols und Thizy besagt in unserer Notation das folgende: Jede Ungleichung des Typs (4.61), mit 0-1-Koeffizienten $m_{t,a}$ definiert eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A,T,H)$, wenn sie eine Facette des Polytops

$$\mathrm{PDS}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^{\mathcal{E}(H)} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \mathbb{1} - x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{STAB}(G_I) \right\}$$

definiert. Diese Voraussetzung ist nach Theorem 4.4.6.3 gegeben. □

Wir übertragen die Odd-Cycle-Ungleichungen des Polytops STAB auf die Verhältnisse des Polytops PD.

Theorem 4.4.6.5 (Odd-Cycle-Ungleichung). *Seien eine ganze Zahl $n \geq 2$, Bauteile $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_{n+1} = a_1$, Zielpunkte $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ eine Teilmenge $U \subseteq T$, $|U|$ ungerade, und Anschlußmengen*

$$H_t = \begin{cases} \{\emptyset, \{a_i, a_{i+1}\}\} & \text{falls } t_i \in T \backslash U, \\ \{\{a_i\}, \{a_{i+1}\}\} & \text{falls } t_i \in U, \end{cases}$$

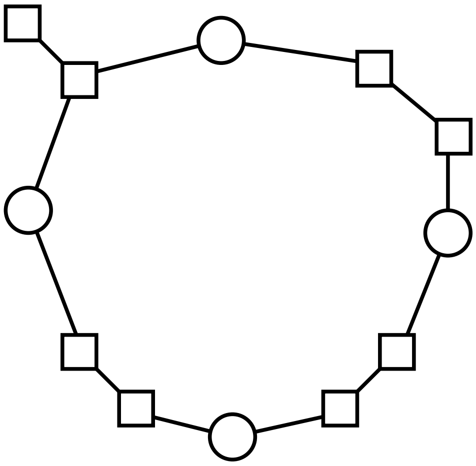

Abbildung 4.3: Ein ungerader Kreis in einem Intersektionsgraphen. In dem Kreis wechseln Anschlußpaare (Quadrate) mit Bauteilen (Kreise) ab.

gegeben.

Dann definiert die Ungleichung

$$\sum_{a \in A} x_a - \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t : P \neq \emptyset} y_{t,P} \geq - \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor \tag{4.62}$$

eine Facette F des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$.

Beweis: Gegeben seien ein Intersektionsgraph $G_I(A, T, H)$, die Knotenmenge

$$V = A \cup \{(t, P) \mid t \in T, P \in H_t : P \neq \emptyset\} \subseteq V_I(A, T, H)$$

und der Untergraph $G = G_I(A, T, H)[V]$. Der Graph G ist ein ungerader Kreis mit $n' = 2n + |U|$ aufeinanderfolgenden Knoten $v_1, \ldots, v_{n'} \in V$. Die Ungleichung

$$\sum_{a \in A} \bar{x}_a + \sum_{t \in T} \sum_{P \in H_t : P \neq \emptyset} y_{t,P} \leq n + \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor$$

definiert eine Facette F' des Polytops $\mathrm{STAB}(G)$. Daher ist die Ungleichung (4.62) gültig für das Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$. Es existieren $2n + |U|$ affin unabhängige ganzzahlige Punkte auf der Facette F'. Zwei aufeinanderfolgende Knoten, o. B. d. A. v_1 und v_2, sind in genau einer stabilen Menge $W \subseteq V$ mit maximaler Kardinalität $|W| = n + \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor$ nicht enthalten. Diese Knotenmenge ist

$$W = \{v_3, v_5, \ldots, v_{n'}\} .$$

Für alle $t_i \in U$, existiert daher genau ein ganzzahliger Punkt $\binom{\bar{x}}{y}$ auf der Facette F' mit $y(t_i, \{a_i\}) = 0$ und $y(t_i, \{a_{i+1}\}) = 0$. Für alle Punkte $\binom{x}{y'} \in F'$ mit der Eigenschaft $y(t_i, \{a_i\}) = 1$ oder $y(t_i, \{a_{i+1}\}) = 1$, liegt der Punkt $\binom{x}{y}$ des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$, der definiert ist durch

$$y(t_i, P) = \begin{cases} y'(t_i, P) & \text{für alle } t_i \in T,\ P \in H(t_i),\ P \neq \emptyset, \\ 1 - y'(t_i, \{a_i, a_{i+1}\}) & \text{für alle } t_i \in T \backslash U,\ P = \emptyset \end{cases}$$

auf der Seitenfläche F. Daher existieren mindestens $2n$ affin unabhängige ganzzahlige Punkte auf der Seitenfläche F. Die Dimension des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$ ist $2n$. Die Seitenfläche F ist nicht mit dem Polytop $\mathrm{PD}(A, T, H)$ identisch. Daher ist F eine Facette des Polytops $\mathrm{PD}(A, T, H)$. $\square$

Ein polynomiales Verfahren zur Separation von Odd-Cycle-Ungleichungen wurde von Grötschel in [GLS88] angegeben. Man vergleiche auch die experimentellen Erfahrungen von Hoffman und Padberg bei der Separation von Facetten des Stabile-Mengen-Problems [HP93]. Für das Problem UFLP haben Caprara und Fischetti ein spezialisiertes Verfahren zur Separation von Odd-Cycle-Ungleichungen vorgeschlagen [CF96]. Caprara und Salazar-Gonzales haben eine Generalisierung des Plazierungsproblems UFLP formuliert und die Separation von Odd-Cycle-Ungleichungen für dieses Problem angepaßt [CSG96]. Das von Caprara und Salazar-Gonzales beschriebene Problem und das Netzproblem sind sich formal sehr ähnlich.

4.5 Eine Untersuchung des Polyeders dmt(PN)

Sei (A,T,H) eine Netzvereinbarung, dann ist das Polytop $\mathrm{PN}(A,T,H)$ definiert durch

$$\mathrm{PN}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^{T\times A} \,\middle|\, \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{PD}(A,T,H) : \forall\, t \in T,\ a \in A : z_{t,a} = \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P \right\}. \tag{4.63}$$

Die Dimension des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H)$ ist nicht leicht zu bestimmen. Die Anschlußkosten der uns interessierenden Netzprobleme sind stets nichtnegativ. Daher untersuchen wir in diesem Abschnitt nicht die Seitenflächenstruktur des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H)$ sondern die Seitenflächenstruktur der oberen Dominante

$$\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H)) = \mathrm{PN}(A,T,H) + \mathbb{R}_+^A \times \mathbb{R}_+^{T\times A}.$$

Man setze voraus, daß die Netzvereinbarung (A,T,H) real ist. Dann hat das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ volle Dimension. Die Koeffizienten von allen für das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ gültigen Ungleichungen

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{t\in T} \sum_{a\in A} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta$$

sind nichtnegativ. Die Ungleichungen $x_a \geq 0$ und $z_{t,a} \geq 0$ definieren für alle $a \in A$ und alle $t \in T$ **triviale Facetten** des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$.

Der Unterabschnitt 4.5.1 enthält Lifting-Lemmata. Diese werden in Unterabschnitt 4.5.2 angewandt um die Facettenstruktur des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ zu beschreiben.

4.5.1 Liften von Facetten des Polyeders dmt(PN)

Dieser Unterabschnitt bereitet die Klassifizierung der Seitenflächenstruktur des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ vor.

Facetten $\alpha^T x + \gamma^T z \geq \delta$ des Polyeders dmt(PN) definieren auch eine Facette auf der kanonischen Projektion des Polyeders dmt(PN) auf die Variablen, deren Koeffizient positiv ist. Die wichtige Rückrichtung zeigt das folgende Lemma.

Lemma 4.5.1.1. *Sei (A,T,H) eine reale Netzvereinbarung, A' eine Teilmenge von Bauteilen aus A, und sei N eine Teilmenge von Paaren aus $T \times A$. Die Teilmenge A' oder die Teilmenge N seien nichtleer. Wenn die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A'} \alpha_a x_a + \sum_{(t,a)\in N} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta \tag{4.64}$$

eine Facette F' der Projektion

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} x|_{A'} \\ z|_N \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H)) \right\} \tag{4.65}$$

definiert, dann definiert sie auch eine Facette F des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$.

Beweis: Nach Voraussetzung existieren $m = |A'| + |N| > 0$ affin unabhängige Punkte $p_1, \ldots, p_m$ auf der Facette F'. Es existieren daher m affin unabhängige Punkte auf der Seitenfläche F, deren Projektion die Punkte $p_1, \ldots, p_m$ sind. Die Seitenfläche F enthält zusätzlich den Kegel mit Spitze in dem Punkt p_1 und Strahlen für alle Einheitsvektoren der Bauteilvariablen x_a, $a \in A \backslash A'$ und der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $(t,a) \in (T \times A) \backslash N$. Daher ist die Seitenfläche F eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$. □

Wie bei der Untersuchung des Polytops PD liften wir, für Bauteile $A' \subseteq A$ und Anschlußmengen $H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\}$, $t \in T$, die facettendefinierenden Ungleichungen des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A',T,H'))$.

Lemma 4.5.1.2. *Seien eine reale Netzvereinbarung (A,T,H), eine nichtleere Teilmenge $A' \subseteq A$ und Anschlußmengen*

$$H'_t = \{P \cap A' \mid P \in H_t\},\ t \in T,$$

gegeben. Wenn die Ungleichung

$$\sum_{a \in A'} \alpha_a x_a + \sum_{(t,a) \in T \times A'} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta \tag{4.66}$$

eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A',T,H'))$ *definiert, dann definiert sie auch eine Facette des Polyeders* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$.

Beweis: Die Projektion des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H)$ auf den Raum der Bauteilvariablen x_a, $a \in A'$, und der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $t \in T$, $a \in A'$, ist identisch mit dem Polytop $\mathrm{PN}(A',T,H')$. Das sieht man so:

Sei (B,Q) eine Lösung der Netzvereinbarung (A,T,H). Dann ist das Paar

$$(B \cap A', (Q_t \cap A')_{t \in T})$$

eine Lösung der Netzvereinbarung (A',T,H'). Die entsprechenden Ecken $\binom{x}{z}$ des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H)$ mit $x = \chi^B$ und $z_{t,\cdot} = \chi^{Q_t}$ und $\begin{pmatrix} x|_{A'} \\ z' \end{pmatrix}$ des Polytops $\mathrm{PN}(A',T,H')$ mit $z'_{t,\cdot} = z_{t,\cdot}|_{A'}$ stimmen für alle $t \in T$ auf den Bauteilen A' überein. Das gleiche gilt in umgekehrter Richtung. Sei (B',Q') eine Lösung der Netzvereinbarung (A',T,H'), dann existieren Anschlüsse $Q_t \in H_t$ mit $Q_t \cap A' = Q'_t$ für alle Zielpunkte $t \in T$.

Daher ist auch die Projektion des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ auf den Raum der Bauteilvariablen x_a, $a \in A'$, und den Raum der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $t \in T$, $a \in A'$, identisch mit dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A',T,H'))$.

Nach Lemma 4.5.1.1 definiert die Ungleichung (4.66) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$, wenn sie eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A',T,H'))$ definiert. □

Sei eine Netzvereinbarung (A,T,H) und eine nichtleere Teilmenge $T' \subseteq T$ gegeben. Die Netzvereinbarung $(A,T',H|_{T'})$ ist eine zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung (A,T,H), wenn für jede zulässige Lösung (B,Q') der Netzvereinbarung $(A,T',H|_{T'})$ eine zulässige Lösung (B,Q) der Netzvereinbarung (A,T,H) existiert. Ähnlich wie bei der Untersuchung des Polytops PD liften wir für Zielpunkte $T' \subseteq T$ die Facetten des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'}))$ zu Facetten des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$.

Lemma 4.5.1.3. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A,T,H) und eine Teilmenge $T' \subseteq T$. Die Netzvereinbarung $(A,T',H|_{T'})$ sei eine zulässige Einschränkung der Netzvereinbarung (A,T,H). Wenn die Ungleichung*

$$\sum_{a\in A} \alpha_a x_a + \sum_{(t,a)\in T'\times A} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta \tag{4.67}$$

eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'}))$ *definiert, dann definiert sie auch eine Facette des Polyeders* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$.

Beweis: Die Projektion des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H))$ in den Raum der Bauteilvariablen x_a, $a \in A$, und der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $t \in T'$, $a \in A$, ist identisch mit dem Polytop $\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'})$. Das sieht man so:

Das Paar (B',Q') sei eine Lösung der Netzvereinbarung $(A,T',H|_{T'})$. Die Lösung (B',Q') läßt sich zu einer Lösung (B',Q), $Q|_{T'} = Q'$, der Netzvereinbarung (A,T,H) erweitern, entsprechend der Definition einer zulässigen Einschränkung in Unterabschnitt 4.4.2. Die entsprechenden Punkte $\binom{x}{z}$ des Polytops $\mathrm{PN}(A,T,H)$ mit $x = \chi^{B'}$ und $z_{t,\cdot} = \chi^{Q_t}$, $t \in T$, und $\binom{x}{z'}$ des Polytops $\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'})$ mit $z'_{t,\cdot} = \chi^{Q'_t}$, $t \in T'$, stimmen auf den Bauteilvariablen und den Nutzungsvariablen der Paare aus $T' \times A$ überein. Das gleiche gilt auch in umgekehrter Richtung. Eine Lösung (B,Q) der Netzvereinbarung (A,T,H) läßt sich immer zu einer Lösung $(B,Q|_{T'})$ einschränken.

Daher ist die Projektion des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$ in den Raum der Bauteilvariablen x_a, $a \in A$, und der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $t \in T'$, $a \in A$, identisch mit dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'}))$.

Nach Lemma 4.5.1.1 gilt: Wenn die Ungleichung (4.67) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T',H|_{T'}))$ definiert, dann definiert sie auch eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,H))$. □

Sei eine reale Netzvereinbarung (A, T, H) mit Anschlußmengen

$$H_t = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

gegeben, wie für das Plazierungsproblem UFLP betrachtet. Die Bauteile dieser Netzvereinbarung sind jeweils Kopien voneinander, d. h. sie sind in der Netzvereinbarung (A, T, H) isomorph austauschbar. Das nächste Lemma behandelt Liftings für derartige Netzvereinbarungen. Ein ähnliches Theorem ist das Theorem 4.4.5.5, das wir bei der Untersuchung des Polytops PD formuliert haben.

Seien zwei reale Netzvereinbarungen

$$(A, T, H) \text{ und } (A', T, H') \tag{4.68}$$

mit den folgenden Eigenschaften gegeben: Die Bauteilmenge A' enthält genau die Bauteile A und eine Kopie $b' \notin A$ eines Bauteils $b \in A$, das bedeutet

$$A' = A \dot{\cup} \{b'\} \tag{4.69}$$

und

$$H'_t = H_t \cup \{(P \backslash \{b\}) \cup \{b'\} \mid P \in H_t : \ b \in P\} \text{ für alle } t \in T. \tag{4.70}$$

Lemma 4.5.1.4. *Seien reale Netzvereinbarungen (A, T, H) und (A', T, H') sowie Bauteile $b, b' \in A'$ gegeben, wie oben in (4.68) bis (4.70) beschrieben wurde.*

Die Ungleichung

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \sum_{t \in T, a \in A} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta \tag{4.71}$$

definiere eine nichttriviale Facette F des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$*. Dann definiert die Ungleichung*

$$\sum_{a \in A} \alpha_a x_a + \alpha_b x_{b'} + \sum_{t \in T, a \in A} \gamma_{t,a} z_{t,a} + \sum_{t \in T} \gamma_{t,b} z_{t,b'} \geq \delta \tag{4.72}$$

eine Facette F' des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A', T, H'))$*.*

Beweis: Es existieren $m = 1 + |T|$ affin unabhängige Punkte $p_1, \ldots, p_m$, auf der Facette F, deren Bauteilvariable x_b von null verschieden ist und deren kanonische Projektion auf den Raum der Bauteilvariablen x_b und der Nutzungsvariablen $z_{t,b}$, $t \in T$, ebenfalls affin unabhängig ist.

Ansonsten hätte die Ungleichung (4.71) die Form

$$\alpha_b x_b + \sum_{t \in T} \gamma_{t,b} z_{t,b} \geq \delta.$$

Die Facette F ist jedoch nichttrivial, daraus folgt $\delta > 0$, und die Netzvereinbarung (A, T, H) ist real, das heißt es existieren Punkte $\binom{x}{z} \in \mathrm{PN}(A, T, H)$ mit $x_b = 0$ und daher auch $z_{t,b} = 0$ für alle $t \in T$.

Wir ergänzen die Punkte $p_1, \ldots, p_m$ zu $n = |A|(1 + |T|)$ affin unabhängigen Punkten $p_1, \ldots, p_n$ auf der Facette F und betten diese in die Facette F' ein. Für jeden Punkt $p_i = \binom{x}{z}$, $1 \le i \le n$, definieren wir einen Punkt $p'_i = \binom{x'}{z'}$ mit $x'_{b'} = 0$ und $x'_a = x_a$, $a \ne b'$, sowie $z'_{t,b'} = 0$ und $z'_{t,a} = z_{t,a}$, $t \in T$, $a \ne b'$.

Für alle Punkte $p'_i = \binom{x}{y}$, $1 \le i \le m + 1$, definieren wir einen Punkt $p'_{n+i} = \binom{x'}{y'}$ mit

$$x'_a = \begin{cases} x_a & a \in A\backslash\{b\}, \\ 0 & a = b, \\ x_b & a = b', \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$\forall\, t \in T: \qquad z'_{t,a} = \begin{cases} z_{t,a} & a \in A\backslash\{b\}, \\ 0 & a = b, \\ z_{t,b} & a = b'. \end{cases}$$

In den Punkten p'_{n+i} sind die Variablenbelegungen bezüglich der Bauteile b und b' gerade vertauscht.

Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_{n+m}$ erfüllen die Ungleichung (4.72) mit Gleichheit und sind in dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A', T', H'))$ enthalten. Man beachte dazu, daß jede zulässige Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) auch eine zulässige Lösung der Netzvereinbarung (A', T, H') ist.

Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_{n+m}$ erfüllen die Ungleichung (4.72) mit Gleichheit und liegen in dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$. Man beachte dazu, daß man für jede zulässige Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) durch den Austausch des Bauteils b in der Menge B und den Anschlüssen Q_t, $t \in T$, eine zulässige Lösung der Netzvereinbarung (A', T, H') erhält.

Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_n$ sind affin unabhängig und deren Einträge für die Bauteilvariable $x_{b'}$ und die Nutzungsvariablen $z_{t,b'}$, $t \in T$, sind gleich null. Die Punkte $p'_{n+1}, \ldots, p'_{n+m+1}$ sind affin unabhängig, denn sie sind es schon bezüglich der kanonischen Projektion der auf den Raum der Bauteilvariablen $x_{b'}$ und der Nutzungsvariablen $z_{t,b'}$, $t \in T$. Die Punkte $p'_1, \ldots, p'_{n+m+1}$ sind daher affin unabhängig. Die Dimension der Seitenfläche F' ist deshalb mindestens $n + m - 1$. Das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A', T, H'))$ hat Dimension $(|A| + 1)(|T| + 1)$ gleich $n + m$. Daher ist die Seitenfläche F' eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A', T, H'))$. $\square$

4.5.2 Blocker-PFL-Ungleichungen

Die Anschlußmengen H_t, $t \in T$, einer realen Netzvereinbarung (A, T, H) sind Hypergraphen. Der **Clutter** $\mathrm{CL}(H_t) \subseteq H_t$ der Anschlußmenge H_t ist die Menge derjenigen Anschlüsse $P \in H_t$, die keinen anderen Anschluß $P' \in H_t$ als echte Teilmenge enthalten. Der **Blocker** $\mathrm{BL}(H_t)$ der Anschlußmenge H_t ist die Menge aller inklusionsminimalen Teilmengen $C \subseteq A$, die mit jedem Anschluß $P \in H_t$ einen nichtleeren Durchschnitt bilden. Die Elemente des Blockers eines Hypergraphen H nennen wir **blockierende Mengen (des Hypergraphen H)**.

Wir nennen eine Teilmenge B der Bauteile A, die sich zu einer Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) ergänzen läßt, eine **Bauteil-Lösung**. Die Menge aller Bauteil-Lösungen der Netzvereinbarung (A, T, H) bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathcal{B}(A, T, H)$. Für jede blockierende Menge $C \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}(A, T, H))$ existiert mindestens ein Zielpunkt $t \in T$ mit $C \in \mathrm{BL}(H_t)$.

Verändert man die Anschlußmengen H_t so, daß die Blocker $\mathrm{BL}(H_t)$ unverändert bleiben, dann bleibt das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$ unverändert.

Lemma 4.5.2.1. *Sei (A, T, H) eine reale Netzvereinbarung, dann gilt*

$$\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H)) = \mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H') \textit{ mit } H'_t = \mathrm{CL}(H_t) \textit{ für alle } t \in T.$$

Beweis: Für jede Lösung (B, Q) der Netzvereinbarung (A, T, H) existiert eine Lösung (B, Q') der Netzvereinbarung (A, T, H') mit $Q'_t \subseteq Q_t$. Daher liegt jeder Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$ auch in dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H'))$.
□

Bei der Untersuchung des Polytops PD haben wir in Unterabschnitt 4.4.6 das Polytop PFL (**P**olytope – **F**acility **L**ocation) eingeführt, das in enger Beziehung zu Polytopen steht, die im Zusammenhang mit dem Plazierungsproblem UFLP (**U**ncapacitated **f**acility **l**ocation **p**roblem) in der Forschungsliteratur beschrieben und untersucht wurden.

Für natürliche Zahlen $n \geq 2$ und $m \geq 1$ und Anschlußmengen

$$H_j = \{\, \{1\}, \{2\} \ldots, \{n\} \,\} \text{ für } j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, m,$$

ist das Polytop PFL festgelegt durch

$$\mathrm{PFL}(n, m) = \mathrm{PD}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\}, H) = \mathrm{PN}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\}, H).$$

Wir haben in Unterabschnitt 4.4.6 Facetten des Polytops PFL angegeben, wie sie in den Artikeln [CJPR83b] und [CT82] beschrieben wurden. Ist

$$\sum_{a=1}^{n} \alpha_a x_a + \sum_{t=1}^{m} \sum_{a=1}^{n} \beta_{t,\{a\}} y_{t,\{a\}} \geq \delta,$$

eine Facette des Polytops $\mathrm{PFL}(n, m)$, dann ist

$$\sum_{a=1}^{n} \alpha_a x_a + \sum_{t=1}^{m} \sum_{a=1}^{n} (\beta_{t,\{a\}} - \beta'_t) z_{t,a} \geq \delta - \sum_{t \in T} \beta'_t \tag{4.73}$$

mit

$$\beta'_t := \min_{a \in \{1,\ldots,n\}} \beta_{t,\{a\}},\ t \in \{1,\ldots,m\},$$

eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n,m))$.

Definition 4.5.2.2. *Gegeben seien*

- *eine reale Netzvereinbarung (A, T, H),*
- *natürliche Zahlen $n, m \geq 1$*
- *eine für das Polyeder* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n,m))$ *gültige Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} z_{j,i} \geq \delta, \tag{4.74}$$

- *paarweise verschiedene Zielpunkte $u(1), \ldots, u(m) \in T$,*
- *eine Menge $C \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}(A,T,H))$ mit $C \in \mathrm{BL}(H_{u(j)})$, $j = 1, \ldots, m$, und*
- *(möglicherweise leere) Mengen $B_1, \ldots, B_n \subseteq C$ mit $B_1 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n = C$.*

Die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} \geq \delta \tag{4.75}$$

nennen wir **Blocker-PFL-Ungleichungen***.*

Als Beispiel seien das Steinerbaum-Problem $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$, $D = (V, A)$ und dadurch die Mengen der (s,t)-Dipfade $\mathcal{W}_t$, $t \in T$, gegeben, so daß die Netzvereinbarung $(A, T, \mathcal{W})$ real ist. Die Ungleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + z_{1,1} + z_{2,2} + z_{3,3} \geq 2$$

ist facettendefinierend für das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(3,3))$. Seien drei paarweise verschiedene $u(1)$, $u(2)$ und $u(3)$ Terminals, ein gerichteter $(s, \{u(1), u(2), u(3)\})$-Schnitt C in dem Digraphen D und eine Partition B_1, B_2, B_3 des Schnittes C gegeben, dann lautet die entsprechende Blocker-PFL-Ungleichung

$$\sum_{a \in C} x_a + \sum_{i=1}^{3} \sum_{a \in B_i} z_{u(i),a} \geq 2$$

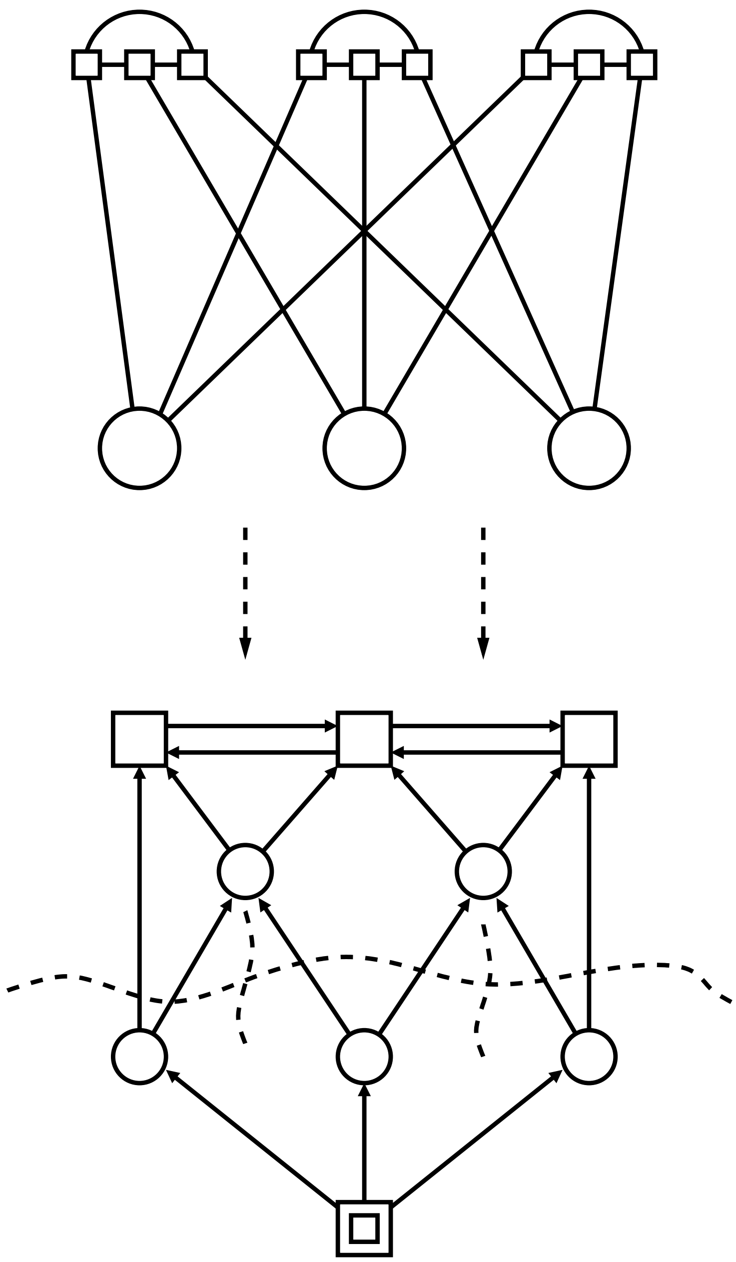

Abbildung 4.4: Eine Veranschaulichung für Definition 4.5.2.2. Oben ist ein Intersektionsgraph der Netzvereinbarung $(\mathbb{N}_3, \mathbb{N}_3, \{\mathbb{N}_3\}_{t\in\{1,2,3\}})$ dargestellt. Unten eine zugeordnete Instanz des Steinerbaum-Problems in Digraphen. Die Quelle ist als Doppelquadrat und die Senken sind als Quadrate dargestellt, die Netzknoten als Kreise. Der Schnitt C und dessen Partitionierung in drei nichtleere Bogenmengen ist gestrichelt angedeutet.

Theorem 4.5.2.3. *Sei* (A, T, H) *eine reale Netzvereinbarung und die Blocker-PFL-Ungleichung* (4.75) *wie in Definition 4.5.2.2 gegeben.*

1. *Die Ungleichung* (4.75) *ist gültig für das Polyeder* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$.
2. *Wenn die Ungleichung* $\alpha^T x + \gamma^T z \geq \delta$ *für das Polytop* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n, m))$ *eine Facette definiert und wenn für alle* $i = 1, \ldots, n$ *die Menge* B_i *nichtleer ist, dann definiert die Ungleichung* (4.75) *für das Polyeder* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$ *eine Facette.*

Beweis: Wir beweisen zuerst die Gültigkeit der Blocker-PFL-Ungleichung. Es reicht zu zeigen, daß alle Punkte $\binom{x}{z} \in \mathrm{PN}(A, T, H)$ die Ungleichung (4.75) erfüllen. Wir ordnen dem Punkt $\binom{x}{z}$ den Punkt $\binom{x'}{z'}$ im Raum des Polyeders $\mathrm{PFL}(n, m)$ mit

$$\forall\, 1 \leq i \leq n : \qquad x'_i = \sum_{a \in B_i} x_a$$

$$\forall\, 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n : \qquad z'_{j,i} = \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a}$$

zu. Es gilt für alle Indizes $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$:

$$x'_i - z_{j,i} \geq 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{m} z_{j,k} \geq 1.$$

Daher ist der Punkt $\binom{x'}{z'}$ in dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n, m))$ enthalten und erfüllt die Ungleichung $\alpha^T x' + \gamma^T z' \geq \delta$. Also ist die Blocker-PFL-Ungleichung für das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$ gültig.

Die Ungleichung $\alpha^T x + \gamma^T z \geq \delta$ definiere für das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(A, T, H))$ die Facette F'. Für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ sei die Menge B_i nichtleer. Die Blocker-PFL-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} \geq \delta \tag{4.76}$$

definiere die Seitenfläche F des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$. Wir zeigen durch aufeinanderfolgendes Lifting, daß F eine Facette ist.

1. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $b(i) \in B_i$ irgendein Bauteil. Mit $T' \subseteq T$ bezeichnen wir die Menge der Zielpunkte $\{u(1), \ldots, u(m)\}$.
   Die Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n, m))$ und

$$\Pi = \mathrm{dmt}\Big(\mathrm{PN}\big(\{b(1), \ldots, b(n)\},\, T',\, \{\,\{b(1)\}, \ldots, \{b(n)\}\,\}_{t \in T'}\,\big)\Big)$$

unterscheiden sich nur durch die Bezeichungen der Bauteilvariablen und der Nutzungsvariablen und sind also isomorph. Daher definiert die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_{b(i)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,i} z_{u(j),b(i)} \geq \delta$$

eine Facette des Polyeders Π.

2. Die Netzvereinbarung $(C, T', \{\{a\} \mid a \in C\}_{t\in T'})$ geht aus der Netzvereinbarung

$$\left(\{b(1), \dots, b(n)\},\ T',\ \{\ \{b(1)\}, \dots, \{b(n)\}\ \}_{t\in T'} \right)$$

durch aufeinanderfolgendes Kopieren einzelner Bauteile hervor. Nach Lemma 4.5.1.4 definiert daher die Ungleichung (4.76) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C\}_{t\in T'}))$.

3. Seien Anschlußmengen $(H'_t)_{t\in T}$ durch $H'_t = \{P \cap C \mid P \in H_t\}$ für alle Zielpunkte $t \in T$ definiert, dann gilt

$$\mathrm{CL}(H'_t) = \{\ \{a\} \mid a \in C\}$$

Man beachte, daß $C \in \mathrm{BL}(H_t)$ für alle $t \in T'$. Es gilt nach Lemma 4.5.2.1

$$\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C\}_{t\in T'})) = \mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', H'|_{T'}))$$

Also definiert die Ungleichug 4.76 für das Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', H'))$ eine Facette.

4. Die Polytope $\mathrm{PB}(C, T', H'|_{T'})$ und $\mathrm{PB}(C, T, H')$ sind gleich, da gilt $C \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}(A, T, H))$. Die Einschränkung der Netzvereinbarung (C, T, H') auf die Netzvereinbarung $(C, T', H'|_{T'})$ ist daher zulässig. Nach Lemma 4.5.1.3 ist daher die Ungleichung (4.76) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T, H'))$.

5. Wegen $H'_t = \{P \cap C \mid P \in H_t\}$, $t \in T$, folgt mit Lemma 4.5.1.2, daß die Ungleichung (4.76) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(PN(A, T, H))$ definiert.

□

Die Blocker-PFL-Ungleichungen haben für Steinerbaum-Probleme in Digraphen, gegeben durch $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$, $D = (V, A)$, eine besonders anschauliche Interpretation. Die blockierende Menge C ist dort ein (s, T')-Schnitt. Es existieren effiziente Verfahren, mit denen man kostenminimale Schnitte in einem Digraphen finden kann. Diese sind zum Beispiel in dem Buch von Ahuja, Magnanti und Orlin beschrieben [AMO93]. Sei eine Facette, z. B. die Facette

$$x_1 + x_2 + x_3 + z_{1,1} + z_{2,2} + z_{3,3} \geq 2$$

des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(3, 3))$, vorgeben. Mit dem im folgenden beschriebenen Verfahren Schnitt-Orakel werden zugehörigen Blocker-PFL-Ungleichungen separiert.

Das Verfahren Schnitt-Orakel

Das Verfahren Schnitt-Orakel erhält als Eingabe

- ein Steinerbaum-Problem in Digraphen gegeben durch $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$, $D = (V, A)$,
- einen Punkt $\binom{x}{z}$ im Raum des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, \mathcal{W}))$, wobei $\mathcal{W}_t$ die Menge der (s, t)-Dipfade in dem Digraphen D für alle $t \in T$, ist,
- zwei Zahlen $n, m \geq 1$ und eine Facette
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,i} z_{j,i} \geq \delta$$
des Polytops $\mathrm{PFL}(n, m)$.

Das Verfahren Schnitt-Orakel entscheidet, ob für alle paarweise verschiedenen Terminals

$$\{u(1), \ldots, u(m)\} = T' \subseteq T,$$

für alle (s, T')-Schnitte C und für alle Aufteilungen $B_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} B_n = C$ die Blocker-PFL-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} \geq \delta$$

gültig ist oder findet andernfalls eine solche verletzte Ungleichung. Es ist also ein exaktes Separationsverfahren.

Für alle paarweise verschiedenen Terminals $\{u(1), \ldots, u(m)\} = T' \subseteq T$ wird jeweils wie folgt vorgegangen:

Für alle Bögen $a \in A$ werden die Bogengewichte

$$w_a := \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \alpha_i x_a + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,i} z_{u(j),a}$$

festgelegt. Das Argument des Minimums sei $g(a) \in \{1, \ldots, n\}$. In dem Digraphen D wird ein gerichteter (s, T')-Schnitt C mit minimalem w-Gewicht bestimmt. Für alle Indizes $1 \leq i \leq n$ werden die Mengen

$$B_i = \{a \in C \mid g(a) = i\}$$

festgelegt. Nach Konstruktion des Schnittes C und der Mengen $B_1, \ldots, B_n$ gilt: Entweder ist die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} \geq \delta$$

verletzt oder für alle (s, T')-Schnitte C' und alle Partitionen $B'_1, \ldots, B'_n$ des Schnittes C' ist die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B'_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B'_i} z_{u(j),a} \geq \sum_{a \in C'} w_a$$
$$\geq \sum_{a \in C} w_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} \geq \delta$$

gültig.

Die Laufzeit des Verfahrens Schnitt-Orakel ist von der Ordnung $O(|T|^m \lambda)$ wobei λ die Laufzeit für die Berechnung des minimalen Schnittes bezeichnet. Das Verfahren Schnitt-Orakel ist daher für feste Senkenanzahl m ein polynomiales Verfahren.

Für den Einsatz in Schnittebenenverfahren erscheint die Enumeration aller m-elementigen Teilmengen der Senken sehr aufwendig zu sein. Es erscheint uns stattdessen vorteilhafter, mit heuristischen Verfahren m-elementige Senkenmengen auszuwählen und für diese w-minimale Schnittmengen wie oben zu berechnen. Aus dem gleichen Grund kommt den Blocker-PFL-Ungleichungen mit kleiner Senkenanzahl m größere praktischere Bedeutung zu. Dementsprechend ist die Untersuchung der Seitenflächenstruktur des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n, m))$ auch nur für kleine Zahlen $m = 3, 4, \ldots$ notwendig.

Verallgemeinerung der Blocker-PFL-Ungleichungen

Die Blocker-PFL-Ungleichungen des Steinerbaum-Problems $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$ sind auch für das Kabelproblem

$$\mathrm{KABEL}(D, \{s\}, T, c, \hat{d}, l, L)$$

gültig, da die Längenbeschränkung des Kabelproblems lediglich eine Einschränkung der zulässigen Lösungen des Steinerbaum-Problems zur Folge haben. Mit dem Verfahren Schnitt-Orakel können die Blocker-PFL-Ungleichungen des Steinerbaum-Problems $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$ separaiert werden um anschließend zu Facetten des Kabelproblems heruntergeliftet zu werden. Über die praktische Durchführbarkeit bzw. Relevanz dieses Herunterliftens können wir nur spekulieren. Wir wollen deswegen nur exemplarisch eine Verallgemeinerung der facettendefinierenden Blocker-PFL-Ungleichungen diskutieren.

Sei H_t, $t \in T$, die Menge der (s, t)-Dipfade in $D = (V, A)$ mit $\sum_{a \in P} l_a \leq L_t$. Ein (s, T')-Schnitt C in dem Digraphen D ist nicht notwendigerweise in dem Blocker $\mathrm{BL}(\mathcal{B}(A, T, H))$ enthalten. Es existieren aber möglicherweise Mengen $C'' \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}(A, T, H))$ mit $C'' \subseteq C$ und möglicherweise Mengen $C'_t \in \mathrm{BL}(H_t)$ mit $C'' \subset C'_t \subseteq C$.

Definition 4.5.2.4. *Gegeben seien*

- *eine reale Netzvereinbarung* (A, T, H),
- *natürliche Zahlen* $n, m \geq 1$ *und eine Facette*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{j,i} z_{j,i} \geq \delta \tag{4.77}$$

  des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PFL}(n+1, m))$ *(es gilt* $\alpha_{n+1} = 0$*)*,
- *paarweise verschiedene Zielpunkte* $u(1), \ldots, u(m) \in T$,
- *eine Menge* $C'' \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}(A, T, H))$,
- *eine Partition* $B_1, \ldots, B_n$ *von* C'' *und*
- *Mengen* $C'_t \in \mathrm{BL}(H_t)$ *mit* $C'' \subset C'_t$ *für alle* $t \in T'$.

Die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,n+1} \sum_{a \in C'_t \setminus C''} z_{u(j),a} \geq \delta \tag{4.78}$$

nennen wir **verallgemeinerte Blocker-PFL-Facetten**.

Theorem 4.5.2.5. *Sei eine reale Netzvereinbarung* (A, T, H) *gegeben. Die verallgemeinerte Blocker-PFL-Ungleichung* (4.78) *ist facettendefinierend für das Polyeder* $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$.

Beweisskizze: Die Menge C sei definiert durch $C = \bigcup_{t \in T'} C'_t$.

1. Nach Theorem 4.5.2.3 definiert die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,n+1} \sum_{a \in C \setminus C''} z_{u(j),a} \geq \delta \tag{4.79}$$

   eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C\}_{t \in T'}))$.

2. Die Ungleichung (4.78),

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{a \in B_i} x_a + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{j,i} \sum_{a \in B_i} z_{u(j),a} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,n+1} \sum_{a \in C'_t \setminus C''} z_{u(j),a} \geq \delta,$$

   definiert eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C'_t\}))$. Man beachte dazu, daß dieses Polyeder mit dem Polyeder $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C\}_{t \in T'}))$ auf der Seitenfläche mit $z_{t,a} = 0$ für alle $t \in T'$ und alle $a \in C \setminus C'_t$ übereinstimmt.

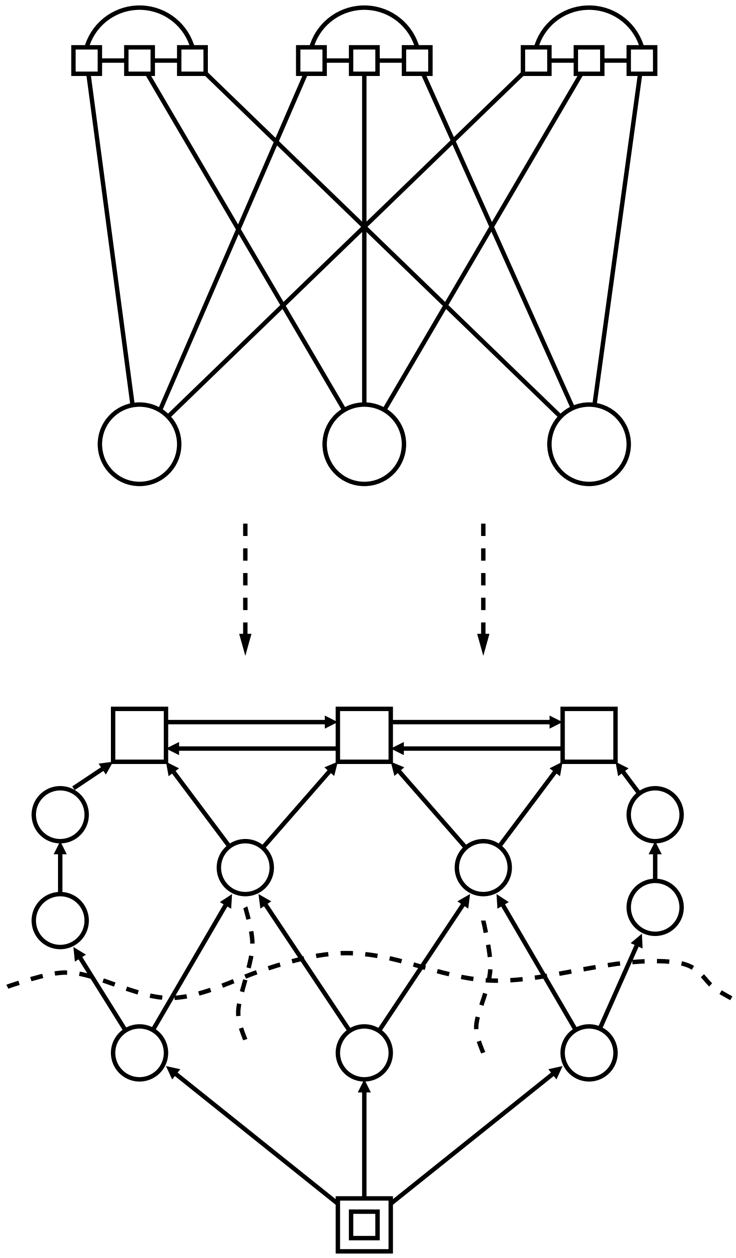

Abbildung 4.5: Eine Veranschaulichung für Definition 4.5.2.4. Oben ist ein Intersektionsgraph der Netzvereinbarung $(\mathbb{N}_3, \mathbb{N}_3, \{\mathbb{N}_3\}_{t \in \{1,2,3\}})$ dargestellt. Unten eine zugeordnete Instanz des Kabelproblems. Die Quelle ist als Doppelquadrat und die Senken sind als Quadrate dargestellt, die Netzknoten als Kreise. Die Länge aller Anschlußdipfade sei auf vier Bögen beschränkt. Der Schnitt C und dessen Partitionierung in drei Bogenmengen ist gestrichelt angedeutet. Die Menge $C'' \subseteq C$ enthält die beiden äußeren Bögen des Schnittes C nicht.

3. Seien Anschlußmengen $(H_t)_{t\in T}$ durch $H'_t = \{P \cap C \mid P \in H_t\}$ für alle $t \in T$ definiert. Die Projektionen des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T, H'))$ und des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T', \{\{a\} \mid a \in C'_t\}_{t\in T'}))$ auf den Raum der Bauteilvariablen x_a, $a \in C''$, und der Nutzungsvariablen $z_{t,a}$, $t \in T'$, $a \in C'_t$ sind gleich. Für diese Projektionen sind nämlich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & \sum_{a\in C''} x_a \geq 1 \\ \forall\, t \in T' : \quad & \sum_{a\in C'_t} z_{t,a} \geq 1 \end{aligned}$$

   neben der Ganzzahligkeitsbedingung und trivialen Ungleichungen maßgeblich.

   Also definiert die Ungleichung (4.78) eine Facette dieser Projektionen. Nach Lemma 4.5.1.1 definiert die Ungleichung (4.78) auch eine Facette des projezierten Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(C, T, H'))$.

4. Nach Definition der Anschlußmengen H' und nach Lemma 4.5.1.2 definiert die Ungleichung (4.78) eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(\mathrm{PN}(A, T, H))$.

$\square$

4.6 Ein Vergleich polyedrischer Beschreibungen für das Netzproblem

Das Kabelproblem wurde für gerichtete und ungerichtete Graphen definiert. Für das allgemeinere Netzproblem wurden drei Variablenkonzepte diskutiert, die mit den Polytopen PD, PN und PB verbunden sind. Wir wollen die unterschiedlichen Formulierungen und Konzepte vergleichen. Dazu setzen wir lineare Relaxierungen durch Projektion zueinander in Beziehung. Dem Verfahren KABEL-OPT liegt das Kabelproblem in gerichteten Graphen und das lineare Programm LDEKO zugrunde. Die primalen Variablen des Programms LDEKO sind die Bogenvariablen x und die Dipfadvariablen y. In diesem Abschnitt wird die Entscheidung für diese LP-Relaxierung begründet.

Die theoretische Grundlage dieses Abschnitts ist ein Theorem von Balas und Pulleyblank, das in Unterabschnitt 4.6.1 diskutiert wird. In diesem Zusammenhang besprechen wir auch die Transformation von dualen und primalen Lösungen linearer Programme, die mit den projezierten Polyedern assoziiert sind.

Das Theorem von Balas und Pulleyblank wenden wir insbesondere auf das Polyeder LPD der zulässigen Lösungen der linearen Relaxierung LDEKO in Unterabschnitt 4.6.2 an. Wir projezieren das Polyeder LPD in den Raum der Bauteilvariablen x auf das Polyeder LPB und beschreiben die für das Polyeder LPB gültigen Ungleichungen. Desweiteren untersuchen wir die Auswirkungen des Hinzufügens zusätzlicher Nebenbedingungen zu der Beschreibung des Polyeders LPD bezüglich der Projektion in den Raum der Bauteilvariablen x.

In Unterabschnitt 4.6.3 werden die gerichtete und die ungerichtete Formulierung des Kabelproblems verglichen. Durch das Ergebnis des Vergleichs wird die Wahl der gerichteten Formulierung begründet.

Insbesondere in Veröffentlichungen über das Steinerbaum-Problem in Graphen werden die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Formulierungen ganzzahliger Programme diskutiert. Wong [Won84] stellt einer Mehrgüter-Fluß-LP-Formulierung mit Bogenvariablen x und Flußvariablen z für das Steinerbaum-Problem in Digraphen die LP-Formulierung von Aneja [Ane80] für das Steinerbaum-Problem in Graphen, die nur Kantenvariablen enthält, gegenüber. Chopra und Rao vergleichen lineare Programme für das Steinerbaum-Problem in ungerichteten und in gerichteten Graphen [CR94a]. Goemans untersucht Polyeder für das Steinerbaum-Problem in Graphen mit Kantenvariablen x und zusätzlichen Auswahlvariablen für die Knoten [GM93, Goe94]. Die Facetten dieses Polyeders werden auf den Raum der Kantenvariablen projeziert. Auf diese Weise werden neue Klassen von Facetten für das Steinerbaum-Polytop gefunden. Das Steinerbaum-Polytop ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren zulässiger Lösungen des Steinerbaum-Problems in Graphen und entspricht in unserer Notation dem Polytop PB. Man beachte im Zusammenhang mit diesem Abschnitt auch die Arbeit von Borndörfer und Weismantel über die polyedrischen Zusammenhänge verschiedener kombinatorischer Optimierungsprobleme [BW97, Bor97].

4.6.1 Projektionen von Polyedern

Das Theorem von Balas und Pulleyblank

Gegeben seien natürliche Zahlen p, q und k, eine reelle Matrix $M \in \mathbb{R}^{k\times p}$, eine reelle Matrix $N \in \mathbb{R}^{k\times q}$, eine rechte Seite $r \in \mathbb{R}^k$ und ein Polyeder $Q \subseteq \mathbb{R}^p$, so daß das Polyeder

$$\mathrm{PXY} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{p+q} \,\middle|\, Mx + Ny \geq r,\ y \geq 0,\ x \in Q \right\}$$

nichtleer ist. Der Kegel

$$\mathrm{PK} = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \pi^T N \leq 0,\ \pi \geq 0 \right\}$$

enthält den Ursprung als einzige Ecke. Die **Extremalrichtungen** des Kegels PK sind die Vektoren π, so daß die Menge $\{\lambda\pi \mid \lambda \geq 0\}$ ein Extremalstrahl des Kegels PK ist.

Die Projektion des Polyeders PXY auf den Raum der x-Variablen bezeichnen wir mit

$$\mathrm{PX} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \exists\, y \in \mathbb{R}^q : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PXY}\}.$$

Das folgende Theorem von Balas und Pulleyblank [BP83] setzt die äußere Darstellung des Polyeders PX mit der äußeren Darstellung des Polyeders PXY und den Extremalrichtungen extr(PK) des Kegels PK in Beziehung.

Theorem 4.6.1.1 (Balas, Pulleyblank). *Seien Polyeder* PXY, PK *und* PX *wie oben gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{PX} = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \pi^T M x \geq \pi^T r,\ \forall\, \pi \in \mathrm{extr}(\mathrm{PK}),\ x \in Q \right\}.$$

Man beachte, daß im Fall $\mathrm{PK} = \{0\}$ die Beziehung $\mathrm{PX} = Q$ gilt.

Beweis: Der Kegel PK ist die konische Hülle seiner Extremalrichtungen. Genau dann erfüllt ein Vektor $x \in Q$ die Ungleichung $\pi^T Mx \geq \pi^T r$ für alle Vektoren $\pi \in \mathrm{PK}$, wenn der Vektor x sie für alle Extremalrichtungen $\pi \in \mathrm{extr(PK)}$ erfüllt.

Sei $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PXY}$ und daher $x \in Q$. Dann gilt $Mx + Ny \geq r$ und daher auch $\pi^T Mx + \pi^T Ny \geq \pi^T r$ für alle Vektoren $\pi \in \mathrm{PK}$, da $\pi \geq 0$. Wegen $\pi^T N \leq 0$ gilt daher $\pi^T Mx \geq \pi^T r$ für alle Vektoren $\pi \in \mathrm{PK}$ und somit $x \in \mathrm{PX}$.

Sei $x \in Q$ ein Vektor, so daß die Ungleichung $\pi^T Mx \geq \pi^T r$ für alle Extremalrichtungen aus extr(PK) gilt. Es existiert kein $\pi \in \mathbb{R}^k$, so daß die Ungleichungen $\pi^T(-N) \geq 0$, $\pi \geq 0$ und $\pi^T(Mx - r) < 0$ gelten. Aus dem Farkas-Lemma folgt, daß ein Vektor $y \in \mathbb{R}^q$ existiert, so daß $y \geq 0$ und $(-N)y \leq Mx - r$ gilt. Daher ist $\binom{x}{y} \in \mathrm{PXY}$ und $x \in \mathrm{PX}$. □

Seitenflächenstruktur des Polyeders PX

Wir können Extremalrichtungen des Kegels PK bestimmen, ohne die vollständige äußere Beschreibung des Polyeders PXY zu kennen.

Bemerkung 4.6.1.2. *Sei N' die Teilmatrix von N die genau die ersten k' Zeilen enthält und seien nur die ersten $k' \leq k$ Ungleichungen des Systems $Mx + Ny \geq r$ bekannt.*

Genau dann ist $\pi' \in \mathbb{R}^{k'}$ eine Extremalrichtung des Kegels $(\pi')^T N' \leq 0$, $\pi' \geq 0$, wenn $\binom{\pi'}{0} \in \mathbb{R}^k$ eine Extremalrichtung des Kegels PK *ist.*

Es ist also möglich, Klassen von Extremalrichtungen des Kegels PK zu beschreiben auch dann, wenn die äußere Beschreibung des Polytops PXY noch nicht vollständig bekannt ist. Die nächste Bemerkung stellt einen Zusammenhang zwischen den Facetten der Polytope PXY und PX und den Extremalrichtungen des Kegels PK heraus.

Bemerkung 4.6.1.3. *Die Facetten des Polyeders* PX *sind in der äußeren Beschreibung $\pi^T Mx \geq \pi^T r$, $\pi \in \mathrm{extr(PK)}$, und in der äußeren Beschreibung des Polyeders Q enthalten.*

Diese Beobachtung legt eine Strategie für die Untersuchung der Seitenflächenstruktur der Polytope PXY und vor allem PX nahe. Zuerst beschreibt man eine Relaxierung $M'x + N'y \geq r'$ des Polytops PXY, wobei M', N' und r' die ersten k' Zeilen der Matrizen M, N und r sind. Dann werden Extremalrichtungen $\binom{\pi'}{0}$, $\pi' \in \mathbb{R}^{k'}$, des Kegels PK ermittelt. Die Ungleichung $(\pi')^T M'x \geq (\pi')^T r$ ist gültig für das Polytop PX und ein Kandidat für eine Facette des Polytops PX. Man arbeite zusätzliche Kriterien dafür heraus, daß die Ungleichung $(\pi')^T M'x \geq (\pi')^T r$ tatsächlich eine Facette des Polytops PX ist.

Transformation von Lösungen linearer Programme

Gegeben seien eine Kostenfunktion $c \in \mathbb{R}^p$ und eine endliche Teilmenge R des Kegels PK und dadurch die linearen Programme

$$\text{(LX)} \qquad \min\{c^T x \mid \pi^T Mx \geq \pi^T r,\ \pi \in R,\ x \geq 0\} \text{ und}$$

$$\text{(LXY)} \qquad \min\{c^T x \mid Mx + Ny \geq r,\ y \geq 0,\ x \geq 0\}.$$

Den Ungleichungen des Programms (LX) ordnen wir duale Variablen $(w_\pi)_{\pi \in R}$ zu. Den Ungleichungen des Programms (LXY) ordnen wir die dualen Variablen

$(\phi_i)_{1\leq i\leq k}$ zu. Den linearen Programmen (LX) und (LXY) ordnen wir duale Programme

$$\text{(DX)} \qquad \max\left\{\sum_{\pi\in R}(\pi^T r)w_\pi \;\middle|\; \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi^T M \leq c^T,\ \pi\geq 0\right\} \text{ und}$$

$$\text{(DXY)} \qquad \max\left\{\sum_{i=1}^{k}\phi_i r_i \;\middle|\; \phi^T M \leq c^T,\ \phi^T N \leq 0,\ \phi\geq 0\right\}$$

zu. Wenn die Menge R alle Extremalrichtungen des Kegels PK enthält, dann sind die Optimalwerte der linearen Programme (LX) und (LXY) gleich.

Das folgende Korollar beschreibt den Zusammenhang zwischen zulässigen Lösungen der dualen Programme (DX) und (DXY). Das Korollar enthält eine Vorschrift, wie zulässige Lösungen der dualen Programme (DX) und (DXY) ineinander umgerechnet werden können.

Korollar 4.6.1.4. *Seien duale Programme* (DX) *und* (DXY) *wie oben gegeben. Für jede zulässige Lösung $(w_\pi)_{\pi\in R}$ des Programms* (DX) *ist $\phi = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi$ eine zulässige Lösung des Programms* (DXY).

Wenn die Menge R alle Extremalrichtungen des Kegels PK *enthält, dann existiert eine zulässige Lösung $(w_\pi)_{\pi\in R}$ des Programms* (DX) *für jede zulässige Lösung ϕ des Programms* (DXY) *mit $\phi = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi$.*

Die Kosten $\phi^T r$ bzw. $\sum_{\pi\in R} w_\pi(\pi^T r)$ der zulässigen Lösungen sind gleich.

Beweis: Die Kosten $\phi^T r$ der Lösung ϕ und die Kosten $\sum_{\pi\in R} w_\pi(\pi^T r)$ der Lösung w sind gleich, da $\phi = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi$ gilt.

Ist w eine zulässige Lösung des Programms (DX), dann gelten für die konische Kombination $\phi = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi$ die Beziehungen $\phi^T N \leq 0$, $\phi \geq 0$ und

$$\phi^T M = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi^T M \leq c^T.$$

Also ist ϕ eine zulässige Lösung des Programms (DXY).

Ist ϕ eine zulässige Lösung des Programms (DXY), dann gilt wegen $\phi^T N \leq 0$ und $\phi \geq 0$ auch $\phi \in$ PK. Da nach Voraussetzung R alle Extremalrichtungen des Kegels PK enthält, existiert eine Darstellung $\phi = \sum_{\pi\in R} w_\pi \pi$ von ϕ als konischer Kombination, d. h. $w_\pi \geq 0$. Es gilt

$$\sum_{\pi\in R} w_\pi \pi^T M = \phi^T M \leq c^T.$$

Also ist w eine zulässige Lösung des Programms (DX). □

Das Korollar 4.6.1.4 liefert eine wichtige Anwendung für das Steinerbaum-Problem in gerichteten Graphen, die wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

4.6.2 Projektion des Polyeders LPD auf den Raum der Bauteilvariablen x

Wir wollen die oben dargestellten Zusammenhänge auf die Polyeder $\mathrm{PD}(A,T,H)$ und $\mathrm{PB}(A,T,H)$ für eine reale Netzvereinbarung (A,T,H) anwenden. Entsprechend der Bemerkung 4.6.1.2 beziehen wir uns zuerst nur auf das Ungleichungssystem der linearen Relaxierung LDEKO. Das zugehörige Polytop der zulässigen primalen Lösungen ist

$$\mathrm{LPD}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^A \times (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{E}(H)} \;\middle|\; \begin{array}{lrlll} \forall\, t \in T: & & \sum_{P\in H_t} & y_{t,P} & \geq 1, \\ \forall\, t \in T: & - & \sum_{P\in H_t} & y_{t,P} & \geq -1, \\ \forall\, t \in T: \; x & - & \sum_{P\in H_t} & y_{t,P}\chi^P & \geq 0 \end{array} \right\}. \tag{4.80}$$

Die Projektion des Polytops $\mathrm{LPD}(A,T,H)$ auf den Raum der Bauteilvariablen x bezeichnen wir mit $\mathrm{LPB}(A,T,H)$. Wir führen den Kegel

$$\mathrm{LPK}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^- \\ \sigma \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^T \times (\mathbb{R}^+)^T \times (\mathbb{R}^+)^{T\times A} \;\middle|\; \rho_t^+ - \rho_t^- - \sum_{a\in A} \sigma_{t,a}\chi_a^P \leq 0, \forall\, t \in T,\ P \in H_t \right\}$$

ein. Den Einheitsvektor der Variablen ρ_t^+ bezeichnen wir mit e_t und den Einheitsvektor der Variablen $\sigma_{t,a}$ bezeichnen wir mit $f_{t,a}$ für alle $t \in T$ und $a \in A$. Die Polyeder LPD, LPB und LPK entsprechen den Polyedern PXY, PX und PK aus Theorem 4.6.1.1 . Die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der Anschlüsse $P \in H_t$ bezeichnen wir mit

$$Z(A,H_t) = \operatorname{conv}\left(\left\{\chi^P \in \mathbb{R}^A \mid P \in H_t\right\}\right).$$

Zuerst beschreiben wir die Extremalrichtungen des Kegels $\mathrm{LPK}(A,T,H)$.

Theorem 4.6.2.1. *Sei eine reale Netzvereinbarung (A,T,H) gegeben. Die Extremalrichtungen des Kegels $\mathrm{LPK}(A,T,H)$ sind zum einen die Einheitsvektoren der Variablen ρ_t^- und $\sigma_{t,a}$ für alle $t \in T$ und $a \in A$. Die restlichen Extremalrichtungen sind die Vektoren*

$$\left(\rho_t^+ e_t^T, 0, \sum_{a\in A} \sigma_{t,a} f_{t,a}^T\right)^T, \; t \in T,$$

des positiven Orthanten mit der Eigenschaft, daß die Ungleichung $\sum_{a\in A} \sigma_{t,a} z_{t,a} \geq \rho_t^+$ eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$ definiert.

Beweis: Gegeben sei eine Extremalrichtung

$$((\rho^+)^T, (\rho^-)^T, \sigma^T)^T$$

des Kegels $\mathrm{LPK}(A,T,H)$. Die Einheitsvektoren der Variablen ρ_t^- und $\sigma_{t,a}$ sind für alle $t \in T$ und alle $a \in A$ in dem Kegel $\mathrm{LPK}(A,T,H)$ enthalten und daher als Einheitsvektoren auch Extremalrichtungen.

Die den Variablen ρ_t^+, ρ_t^- und $\sigma_{t,a}$, $t \in T$, $a \in A$, zugeordneten Ungleichungen des Polytops $\mathrm{LPD}(A,T,H)$ enthalten für alle Anschlußvariablen $y_{t',P}$, $t' \neq t$, den Koeffizienten null. Sei der Vektor ρ^+ gleich null, dann ist genau ein Koeffizient des Vektors ρ^- oder des Vektors σ von null verschieden.

Sei für einen Zielpunkt $t \in T$ der Koeffizient ρ_t^+ positiv, dann sind die Koeffizienten der Vektoren ρ^- und $\sigma_{t',\cdot}$ und die Koeffizienten $\rho_{t'}^+$ gleich null für alle Zielpunkte $t' \neq t$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Ungleichung $\sum_{a \in A} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta$ ist für das Polyeder $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$ gültig.

2. Für alle Anschlüsse $P \in H_t$ gilt $\sum_{a \in P} \gamma_{t,a} \geq \delta$.

3. Der Vektor

$$\left(\delta e_t^T, 0, \sum_{a \in A} \gamma_{t,a} f_{t,a}^T\right)^T, \; t \in T,$$

ist Element des Kegels $\mathrm{LPK}(A,T,H)$.

Da der Vektor $((\rho^+)^T, (\rho^-)^T, \sigma^T)^T$ nach Voraussetzung eine Extremalrichtung ist, ist die Ungleichung $\sum_{a \in A} \sigma_{t,a} z_{t,a} \geq \rho_t^+$ eine Facette des Polyeders $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$. □

Korollar 4.6.2.2. *Sei eine reale Netzvereinbarung* (A,T,H) *gegeben, dann gilt für das Polytop* $\mathrm{LPB}(A,T,H)$*:*

$$\mathrm{LPB}(A,T,H) = \bigcap_{t \in T} \mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$$

Beweis: Das Polyeder $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$ ist der Durchschnitt aller Halbräume, die durch Facetten

$$\sum_{a \in A} \gamma_{t,a} z_{t,a} \geq \delta$$

des Polyeders $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$ gegeben sind. Nach Theorem 4.6.2.1 korrespondieren die Facetten des Polyeders $\mathrm{dmt}(Z(A,H_t))$ mit Extremalrichtungen des Kegels $\mathrm{LPK}(A,T,H)$. Die Behauptung gilt daher nach Theorem 4.6.1.1. □

Das folgende Korollar soll zum Ausdruck bringen, daß die polyedrische Beschreibung der zulässigen Lösungen des Netzproblems durch Bündelung der Zielpunkte verbessert wird.

Korollar 4.6.2.3. *Gegeben seien eine reale Netzvereinbarung (A, T, H) und eine reale Netzvereinbarung $(A, \{1, \ldots, n\}, H')$, die durch Bündelung der Zielpunkte T in nichtleere Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ entsteht, das heißt*

$$H'_i = \left\{ \bigcup_{t \in U_i} Q_t \;\middle|\; Q_t \in H_t,\ t \in U_i \right\},\ i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt:

$$\mathrm{LPB}(A, \{1, \ldots, n\}, H') = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{dmt}(\mathrm{PB}(A, U_i, H|_{U_i})) \subseteq \mathrm{LPB}(A, T, H).$$

Anwendung auf das Steinerbaum-Problem

Sei das Steinerbaum-Problem $\mathrm{STD}(D, s, T, c)$, $D = (V, A)$, gegeben. Diesem ordne man das Netzproblem $\mathrm{NETZ}(A, T, \mathcal{W}, c, 0)$ zu, so daß die Mengen $\mathcal{W}_t$, $t \in T$, genau die gerichteten (s, t)-Wege in D enthalten. Sei $\mathcal{C}_t$, $t \in T$, die Menge der inklusionsminimalen gerichteten (s, t)-Schnitte C in D. Die nichttrivialen Facetten des Polyeders $\mathrm{dmt}(Z(A, \mathcal{W}_t))$ werden genau durch die Ungleichungen $\sum_{a \in C} x_a \geq 1$ für alle Schnitte $C \in \mathcal{C}_t$ definiert.

Das Polyeder $\mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})$ ist daher bereits durch die Nichtnegativitätsbedingungen und durch die Ungleichungen

$$\forall\, t \in T,\ C \in \mathcal{C}_t: \quad \sum_{a \in C} x_a \geq 1$$

festgelegt. Wir ordnen diesen Ungleichungen die dualen Variablen $w_{t,C} \geq 0$ zu. Man beachte daß bei dieser Formulierung Ungleichungen in der Regel mehrfach vorkommen.

Wir wollen die primalen und die dualen Lösungen der linearen Programme

$$\mathrm{LDEKO}(A, T, \mathcal{W}, c, 0) \text{ und } \min\{c^T x \mid x \in \mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})\}$$

ineinander transformieren. Sei eine primale Lösung $x \in \mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})$ gegeben. Man berechne maximale (s, t)-Flüsse $z_{t,\cdot}$ mit $x_a \geq z_{t,a}$, $a \in A$, für alle Terminals $t \in T$. Für die Flüsse $z_{t,\cdot}$ wähle man eine Pfaddarstellung, das heißt man finde Anschlußvariablen y mit

$$z_{t,a} = \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P,\ t \in T,\ a \in A.$$

Für entsprechende Verfahren betrachte man [AMO93].

Da $x \in \mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})$ ist, gilt $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} \geq 1$ für alle $t \in T$. Gegebenenfalls durch Absenken einzelner Variablenwerte lassen sich somit Anschlußvariablen y' mit $0 \leq y' \leq y$ und $\sum_{P \in H_t} y'_{t,P} = 1$, $t \in T$, finden, so daß $\binom{x}{y'} \in \mathrm{LPD}(A, T, \mathcal{W})$ gilt.

Sei $(w_{t,C})_{t \in T, C \in \mathcal{C}_t}$ eine duale Lösung des Programms

$$\min\{c^T x \mid x \in \mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})\}.$$

Nach Korollar 4.6.1.4 ist für das Programm $\mathrm{LDEKO}(A, T, \mathcal{W}, c, 0)$ eine duale Lösung $\binom{u}{v}$ durch

$$u_t = \sum_{C \in \mathcal{C}_t} w_{t,C} \text{ und } v_{t,a} = \sum_{C \in \mathcal{C}_t} w_{t,C} \chi_a^C$$

für alle Terminals $t \in T$ und alle Bögen $a \in A$ gegeben.

Sei $\binom{u}{v}$ eine duale Lösung des Programms $\mathrm{LDEKO}(A, T, \mathcal{W}, c, 0)$. Der $v_{t,\cdot}$-kürzeste (s, t)-Dipfad in dem Digraphen D habe ein Gewicht $u'_t \geq u_t$ für alle Terminals $t \in T$. Das entsprechende Kürzeste-Wege-Problem

$$\min \left\{ \sum_{a \in A} v_{t,a} z_{t,a} \,\middle|\, \sum_{a \in C} z_{t,a} \geq 1,\ C \in \mathcal{C}_t \right\}$$

kann mit dem Verfahren von Dijkstra effizient gelöst werden, siehe dazu [AMO93]. Implizit wird dabei eine optimale Lösung $w^*_{t,\cdot}$ des dualen Programms

$$\max \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}_t} w_{t,C} \,\middle|\, \sum_{C \in \mathcal{C}_t} w_{t,C} \chi_a^C \leq v_{t,a},\ a \in A \right\}$$

jeweils für $t \in T$ berechnet. Der zusammengesetzte duale Vektor w^* dieser optimalen dualen Lösungen ist eine duale Lösung des Programms $\mathrm{LPB}(A, T, \mathcal{W})$. Die Kosten der dualen Lösung w^* sind wegen

$$\sum_{t \in T} \sum_{C \in \mathcal{C}_t} w^*_{t,C} = \sum_{t \in T} u'_t \geq \sum_{t \in T} u_t$$

gleich oder größer als die Kosten der dualen Lösung $\binom{u}{v}$. Der Zusammenhang mit Dijkstras Algorithmus ist z. B. in [GW95, WGMV95] beschrieben.

Projektion von Verschärfungen des Polytops LPD

Man betrachte für Teilmengen $T' \subseteq T$, (s, T')-Schnitte $C \subseteq A$ und Teilmengen $B_t \subseteq C$, $t \in T'$, Ungleichungen

$$\sum_{a \in C} x_a + \sum_{t \in T'} \sum_{a \in B_t} z_{t,a} \geq \delta, \tag{4.81}$$

die eine Facette des Polyeders $\operatorname{dmt}(\mathrm{PN}(A,T,\mathcal{W}))$ definieren. Alle Tripel (T',C,B) mit der obigen Eigenschaft fassen wir in der Menge $\mathcal{CB}$ zusammen.

Facetten wie die in (4.81) sind Spezialfälle der Blocker-PFL-Ungleichungen, die in Definition 4.5.2.2 eingeführt wurden. Aus der Gültigkeit der Ungleichungen (4.81) folgt die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\sum_{a\in C} x_a + \sum_{t\in T'} \sum_{\substack{P\in H_t:\\ P\cap B_t\neq\emptyset}} y_{t,P} \geq \delta \text{ für alle Tripel } (T',C,B)\in\mathcal{CB} \tag{4.82}$$

für das Polytop $\mathrm{PD}(A,T,H)$. Wir verschärfen die Relaxierung $\mathrm{LDEKO}(\Psi)$ durch die Ungleichungen (4.82).

Wir leiten aus den Ungleichungen (4.82) gültige Ungleichungen für das Polytop $\mathrm{PB}(A,T,H)$ ab. Gegeben seien die Polyeder

$$\begin{aligned}
\mathrm{CPD}(A,T,H) &= \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{LPD}(A,T,H) \mid \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \text{ erfüllt (4.82) } \} \text{ und}\\
\mathrm{CPB}(A,T,H) &= \{x\in\mathrm{LPB}(A,T,H) \mid \exists \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{CPD}(A,T,H)\}.
\end{aligned}$$

Jeder Ungleichung aus (4.82) ordnen wir eine duale Variable $\tau_{T',C,B}$ zu. Entsprechend der Definition des Kegels PK definieren wir den Kegel

$$\mathrm{CPK}(A,T,H) = \left\{ \begin{pmatrix} (\rho_t^+)_{t\in T}\\ (\rho_t^-)_{t\in T}\\ (\sigma_{t,a})_{t\in T,a\in A}\\ (\tau_{T',C,B})_{(T',C,B)\in\mathcal{CB}} \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; \forall\, t\in T,\ P\in H_t: \right.$$
$$\left. \rho_t^+ - \rho_t^- - \sum_{a\in A}\sigma_{t,a}\chi_a^P + \sum_{(T',C,B)\in\mathcal{CB}} \sum_{\substack{P\in H_t:\\ B_t\cap P\neq\emptyset}} \tau_{T',C,B} \leq 0 \right\}.$$

Gegeben seien ein einzelnes Tripel $(T',C,B)\in\mathcal{CB}$ und Hypergraphen

$$H_t' = \{P\in H_t \mid P\cap B_t\neq\emptyset\},\ t\in T'.$$

Für alle $t\in T'$ und alle blockierenden Mengen $B'\in\mathrm{BL}(H_t')$ gilt: Der 0/1-Vektor $(0,0,\sigma^T,\tau^T)\in\mathrm{CPK}(A,T,H)$, dessen Eins-Einträge genau durch $\tau_{T',C,B}=1$ und $\sigma_{t,a}=\chi_a^{B'}$, $a\in A$ definiert sind, ist eine Extremalrichtung des Kegels $\mathrm{CPK}(A,T,H)$. Entsprechend ist die Ungleichung

$$\sum_{a\in C} x_a + \sum_{t\in T}\sum_{a\in B_t'} x_a \geq \delta$$

für das Polytop $\mathrm{PB}(A,T,H)$ gültig.

4.6.3 Variablenkonzepte für das Kabelproblem

Sei eine Instanz des Kabelproblems in Graphen

$$\tilde{\Pi} = \mathrm{UKABEL}(G, S, T, \tilde{c}, \hat{d}, \tilde{l}, L),\ G = (V, E),$$

gegeben. Diese wird auf eine Instanz

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L)$$

des Kabelproblems in gerichteten Graphen transformiert. Der Digraph $D = (V, A)$ enthalte für jede Kante $ij \in E$ zwei antiparallele Bögen (i, j) und (j, i). Jedem Bogen $a = (i, j)$ aus A ordnet die Funktion g die erzeugende Kante $g(a) = ij$ aus E zu. Jeder Bogen $(i, j) \in A$ hat die Kosten $c_{(i,j)} = \tilde{c}_{ij}$ und die Länge $l_{(i,j)} = \tilde{l}_{ij}$.

Wir ordnen den Instanzen $\tilde{\Pi}$ und Π die Netzprobleme

$$\tilde{\Psi} = \mathrm{NETZ}(E, T, \tilde{H}, \tilde{c}, \tilde{d}) \text{ und } \Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

zu. Für alle $t \in T$ enthalten die Anschlußmengen $\tilde{H}_t$ genau die $[S, t]$-Wege P in G, deren Länge $\sum_{a \in P} \tilde{l}_a$ kleiner oder gleich der Längenbeschränkung L_t ist. Die Anschlußkosten $\tilde{d}_{t,P}$ sind gleich $\hat{d}_t \left(\sum_{a \in P} \tilde{l}_a \right)$. Für alle $t \in T$ enthalten die Anschlußmengen H_t genau die gerichteten (S, t)-Wege P in D, deren Länge $\sum_{a \in P} l_a$ kleiner oder gleich der Längenbeschränkung L_t ist. Die Anschlußkosten $d_{t,P}$ sind gleich $\sum_{a \in P} \hat{d}_t l_a$. Jeder gerichtete (S, t)-Weg P aus H_t entspricht genau dem $[S, t]$-Weg $g(P) \in \tilde{H}_t$. Es gilt $\tilde{H}_t = \{g(P) \mid P \in H_t\}$.

Jeder zulässigen Lösung $\binom{x}{y}$ des Programms LDEKO(Ψ) ordnet die Funktion f eine zulässige Lösung $f(\binom{x}{y}) = \binom{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ des Programms LDEKO($\tilde{\Psi}$) zu mit

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= \max_{t \in T} \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \left(\chi^P_{(i,j)} + \chi^P_{(j,i)} \right) \text{ für alle } ij \in E \text{ und} \\ \tilde{y}_{t,g(P)} &= y_{t,P} \text{ für alle } t \in T \text{ und alle } P \in H_t. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= \max_{t \in T} \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \left(\chi^P_{(i,j)} + \chi^P_{(j,i)} \right) \leq \\ &\leq \max_{t \in T} \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi^P_{(i,j)} + \max_{t \in T} \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi^P_{(j,i)} \\ &\leq x_{(i,j)} + x_{(j,i)} \,. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Kosten:

$$\tilde{c}^T \tilde{x} + \tilde{d}^T \tilde{y} \leq c^T x + d^T y.$$

Bemerkung 4.6.3.1. *Seien Netzprobleme* $\tilde{\Psi}$ *und* Ψ *wie oben für das Kabelproblem in Graphen bzw. in gerichteten Graphen gegeben. Der Optimalwert des linearen Programms* LDEKO(Ψ) *ist größer oder gleich dem Optimalwert des linearen Programms* LDEKO($\tilde{\Psi}$).

Wirksamkeit von Blocker-PFL-Ungleichungen

Gegeben seien eine Knotenmenge $W \subseteq V$, disjunkte Senken $u(1), \dots, u(m)$, eine Partition $B_1, \dots, B_n$ des gerichteten (s, T')-Schnittes $C = \delta^+(W)$ und eine Facette

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p + \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \gamma_{q,p} z_{q,p} \geq \delta$$

des Polytops PFL(n, m).

Gegeben seien die Blocker-PFL-Ungleichung

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p \sum_{a \in B_p} x_a + \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \gamma_{q,p} \sum_{a \in B_p} \sum_{P \in H_{u(q)}} y_{u(q),P} \chi_a^P \geq \delta \tag{4.83}$$

für das Polytop PD(A, T, H) bzw. die Blocker-PFL-Ungleichung

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p \sum_{e \in g(B_p)} \tilde{x}_e + \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \gamma_{q,p} \sum_{e \in B_p} \sum_{P \in \tilde{H}_t} \tilde{y}_{u(q),P} \chi_e^P \geq \delta \tag{4.84}$$

für das Polytop PD$(E, T, \tilde{H})$. Die Koeffizienten α_p und $\gamma_{q,p}$ sind alle nichtnegativ. Der gerichtete Schnitt C enthält keine antiparallelen Bögen. Sei $\binom{x}{y}$ eine zulässige Lösung des linearen Programms LDEKO(Ψ) und sei $f\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ wie oben definiert, dann gilt für alle $1 \leq p \leq n$ und alle $1 \leq q \leq m$:

$$\sum_{a \in B_p} x_a \leq \sum_{e \in g(B_p)} \tilde{x}_e \text{ und } \sum_{a \in B_p} \sum_{P \in H_{u(q)}} y_{u(q),P} \chi_a^P = \sum_{e \in g(B_p)} \sum_{P \in \tilde{H}_t} \tilde{y}_{u(q),P} \chi_e^P.$$

Die Ungleichung (4.83) ist daher „stärker“ als die Ungleichung (4.84).

Für den Steinerbaum-Spezialfall $\hat{d}, l, L = 0$ haben Chopra und Rao eine vergleichende Untersuchung der Polytope LPB(A, T, H) und LPB$(E, T, \tilde{H})$ durchgeführt [CR94a, CR94b]. Zusätzlich wurden die Ergebnisse von Schnittebenenverfahren, zur Lösung der linearen Programme $\min\{c^T x \mid x \in \text{LPB}(A, T, H)\}$ und $\min\{\tilde{c}^T \tilde{x} \mid \tilde{x} \in \text{LPB}(E, T, \tilde{H})\}$ verglichen. Die Untersuchung legt nahe, für LP-Formulierungen die gerichtete Formulierung des Steinerbaum-Problems in Graphen zugrunde zu legen.

Kapitel 5

Ein Verfahren zur Lösung des Kabelproblems

In diesem Kapitel werden das Lösungsverfahren Kabel-Opt für das Kabelproblem sowie zwei Modifikationen dieses Verfahrens beschrieben. Das Verfahren Kabel-Opt wurde mit der Absicht entwickelt, die praktisch relevanten Instanzen der Telefonnetz-Planungen möglichst gut zu lösen. Die Digraphen dieser Instanzen sind dünn besetzt. Die Senken sind gleichmäßig über den planaren Digraphen verteilt.

Das Verfahren Kabel-Opt enthält Problemreduktionen, primale und duale Heuristiken und ein exaktes Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren. Der Aufbau des Verfahrens wird in Abschnitt 5.1 vorgestellt. Dort werden auch die für dieses Kapitel wichtigen Bezeichnungen eingeführt. Am Ende des Abschnitts 5.1 wird das Verfahren Kabel-Opt mit Verfahren zur Lösung des Steinerbaum-Problems in Graphen verglichen.

In mehreren Unterverfahren des Verfahrens Kabel-Opt werden Wegeprobleme mit Längenbeschränkungen mit einem dynamischen Programm gelöst. Bei diesen Problemen sind kostenminimale Wege mit beschränkter Länge in einem Digraphen zu finden. Das dynamische Programm zur Lösung dieser Probleme wurde einem Verfahren von Joksch [Jok66] nachempfunden. Es wird in Abschnitt 5.2 beschrieben.

In Abschnitt 5.3 werden Reduktionsverfahren für das Kabelproblem und das Netzproblem sowie deren Zusammenspiel in den Verfahren Kabel-Reduktion und Netz-Reduktion beschrieben. Abschnitt 5.4 enthält primale und duale Heuristiken sowie Verfahren, in denen Verbesserungen von primalen und dualen Lösungen mit Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren berechnet werden. In Abschnitt 5.5 wird die Anordnung der Heuristiken und der Reduktionsverfahren in dem Verfahren Kabel-Opt dargestellt. In Abschnitt 5.6 sind die Unterverfahren des Branch-and-Cut-and-Price-Verfahrens zur Lösung von Netzproblemen, die aus Kabelproblemen erzeugt wurden, aufgeführt.

5.1 Übersicht

Während des gesamten Ablaufs des Verfahrens Kabel-Opt werden Problemreduktionen durchgeführt. Wir bezeichnen bei der Beschreibung des Verfahrens die **aktuelle Instanz** des Kabelproblems mit

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A).$$

Dieser Instanz wird ein **aktuelles Netzproblem**

$$\Psi = \text{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

zugeordnet. Reduktionsverfahren des Verfahrens Kabel-Opt entfernen aus dem Netzproblem Ψ Anschlußvariablen, lassen aber das Kabelproblem Π unverändert. Wir führen aus diesem Grunde **aktuelle Anschlußdigraphen**

$$\bar{D}_t = (V, \bar{A}_t), \text{ für alle } t \in T, \text{ mit } \bar{A}_t \subseteq A$$

ein. Die Anschlußmengen H_t, $t \in T$, werden festgelegt als die Mengen der (S, t)-Dipfade P in $\bar{D}_t$, die die Längenbeschränkung $\sum_{a \in P} l_a \leq L_t$ erfüllen.

Die grundlegende LP-Relaxierung, die zur Berechnung von unteren Schranken eingesetzt wird, ist die Formulierung LDEKO. Weitere Schnittebenen, die bei der polyedrischen Untersuchung in Kapitel 4 aufgeführt wurden, werden nicht eingesetzt.

Das Verfahren Kabel-Opt ist in drei Phasen eingeteilt.

1. Eröffnungsphase:

   Zur Eröffnung des Verfahrens werden Problemreduktionen mit dem Verfahren Kabel-Reduktion durchgeführt. Das Verfahren Kabel-Reduktion testet sowohl lokale Kriterien, die z. B. mit dem Grad von Knoten zusammenhängen, als auch globale Kriterien, die sich aus den Längenbeschränkungen des Kabelproblems ergeben.

   Mit Eröffnungs-Heuristiken wird eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) berechnet und eine primale Lösung des Kabelproblems Π jeweils mit weiteren Heuristiken verbessert.

2. Lagrange-Phase:

   Iterativ wird mit dem Verfahren Dual-Gradient die aktuelle duale Lösung entsprechend dem Gradienten einer Lagrange-Relaxierung verändert. Die veränderte duale Lösung wird mit heuristischen Verfahren sofort verbessert. Eine primale Lösung wird unter Ausnutzung der Informationen in der dualen Lösung konstruiert. Die heuristischen Verfahren brechen ab, wenn sich keine Verbesserungen mehr ergeben.

In dem Verfahren Netz-Reduktion führen Reduzierte-Kosten-Kriterien zu Reduktionen des Netzproblems, insbesondere zu Reduktionen der Anschlußdigraphen. Mit dem Verfahren Kabel-Reduktion werden weitere Reduktionen vorgenommen, wenn sich durch das Verfahren Netz-Reduktion auch Reduktionen des Kabelproblems bzw. des Digraphen D ergeben haben. Die aktuelle duale Lösung wird bei diesen Reduktionen mittransformiert, so daß die Qualität der unteren Schranke erhalten bleibt.

Die Lagrange-Phase fährt mit den heuristischen Verfahren iterativ solange fort, bis die Reduktionsverfahren zehnmal keine Reduktion des Kabelproblems erreicht haben.

3. Branch-and-Cut-and-Price-Phase (BCP-Phase):

   In der BCP-Phase werden exakte Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren zur Lösung von Netzproblemen eingesetzt. Die BCP-Phase unterteilt sich in zwei Phasen.

   (a) In der ersten Phase werden iterativ die Senken T in nichtleere Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ mit etwa gleichvielen Senken partitioniert. Die Anzahl n der Partitionsmengen nimmt in jeder Iteration ab.

   Die aktuelle primale Lösung des Kabelproblems Π sei (B, Q), und die aktuelle duale Lösung des Netzproblems Ψ sei $\binom{u}{v}$. Für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ löst ein Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren die Netzprobleme

$$\begin{aligned}\Psi' &= \mathrm{NETZ}(A, U_i, H|_{U_i}, c', (d_{t,P})_{t \in U_i, P \in H_t})\,,\\ \Psi'' &= \mathrm{NETZ}(A, U_i, H|_{U_i}, c'', (d_{t,P})_{t \in U_i, P \in H_t})\end{aligned}$$

   mit Bogenkosten

$$c'_a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in \bigcup_{t \in T \setminus U_i} Q_t \\ c_a & \text{sonst} \end{cases}$$

   bzw. mit Bogenkosten $c''_a = c_a - \sum_{t \in T \setminus U_i} v_{t,a}$ für alle $a \in A$.
   Die optimalen Lösungen der Netzprobleme Ψ' und Ψ'' werden mit den aktuellen Lösungen verglichen und gegebenenfalls zu einer Verbesserung der primalen bzw. der dualen Lösung herangezogen. Desweiteren wird durch die Lösung der Netzprobleme Ψ' und Ψ'' ein Pool von Dipfadvariablen aufgebaut, der für spätere Iterationen zur Verfügung steht.

   Am Schluß einer jeden Iteration wird das Verfahren Netz-Reduktion aufgerufen, um die Verbesserung von primalen und dualen Lösungen für weitere Problemreduktionen auszunutzen und die Lösung von Netzproblemen in den späteren Iterationen zu vereinfachen.

(b) Zum Abschluß der BCP-Phase wird das vollständige aktuelle Netzproblem mit einem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren gelöst.

Zwei Modifikationen des Verfahrens KABEL-OPT werden betrachtet. In der ersten Modifikation wird die Teilphase 3a ausgelassen und das Netzproblem Ψ direkt gelöst. Das entsprechende Verfahren nennen wir DIREKT-OPT.

In der zweiten Modifikation, die wir mit BÜNDEL-OPT bezeichnen, wird in der BCP-Phase das Netzproblem Ψ durch Bündeln der Zielpunkte transformiert. Sei $U_1, \ldots, U_n$ eine Partition der Zielpunkte in nichtleere Teilmengen. Dann lautet das transformierte Netzproblem

$$\bar{\Psi} = \mathrm{NETZ}(A, \{1, \ldots, n\}, \bar{H}, c, \bar{d}).$$

Die Anschlußmengen $\bar{H}_i$, $1 \leq i \leq n$ des Netzproblems $\bar{\Psi}$ enthalten dabei die Wurzelwälder aus $\{\bigcup_{t \in U_i} Q_t \,|\, Q_t \in H_t,\, t \in T\}$. Die Anschlußkosten $\bar{d}_{i,R}$ eines Wurzelwaldes $R \in \bar{H}_i$ mit $R = \bigcup_{t \in U_i} Q_t$, $Q_t \in H_t$, $t \in U_i$ sind gleich der Summe der Dipfadkosten $\sum_{t \in U_i} \sum_{a \in Q_t} \hat{d}_t l_a$. Das Netzproblem $\bar{\Psi}$ wird mit einem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren gelöst. Das Pricingproblem des linearen Programms LDEKO($\bar{\Psi}$) für eine duale Lösung $\binom{u}{v}$ ist das Problem

$$\min_{R \in \bar{H}_i} \left(\sum_{a \in R} v_{i,a} + \bar{d}_{i,R} \right) = \min_{R \in \bar{H}_i} \left\{ \sum_{a \in R} v_{i,a} + \sum_{t \in U_i} \sum_{a \in Q_t} \hat{d}_t l_a \;\middle|\; \bigcup_{t \in U_i} Q_t = R,\, Q_t \in H_t \right\}$$

für $1 \leq i \leq n$. Das Pricingproblem des linearen Programms LDEKO($\bar{\Psi}$) ist daher selbst ein Kabelproblem und schwerer zu lösen als die Pricingprobleme des linearen Programms LDEKO(Ψ). Die Pricingprobleme des linearen Programms LDEKO(Ψ) sind Wegeprobleme mit Längenbeschränkungen und können mit einem dynamischen Programm für die von uns betrachteten Instanzen vergleichsweise schnell gelöst werden. Andererseits enthält das Programm LDEKO($\bar{\Psi}$) weniger Nebenbedingungen als das Programm LDEKO(Ψ).

Das Verfahren KABEL-OPT wurde auch auf Steinerbaum-Probleme angewandt. Auf diese Weise ist ein Vergleich mit anderen in der Forschungsliteratur beschriebenen Optimierungsverfahren möglich. Man beachte aber, daß alle Unterverfahren des Verfahrens KABEL-OPT auch auf das allgemeinere Kabelproblem anwendbar sind. Eine Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften des Steinerbaum-Problems würde unserer Meinung nach die Leistungsfähigkeit des Verfahrens KABEL-OPT deutlich erhöhen.

Insbesondere werden in der Literatur in umfangreicher Weise Reduktionsverfahren beschrieben, die auf das allgemeinere Kabelproblem nicht mehr anwendbar sind. Ein Beispiel sind die Reduktionsverfahren von Duin und Volgenant [DV89a, DV89b] und die Reduktionsverfahren von Winter [Win95] für das rechtwinklige Steinerbaum-Problem.

Das exakte Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin [KM98] erweist sich als leistungsfähiger als das Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren in Kabel-Opt für die Lösung von Steinerbaum-Problemen. Das lineare Programm, das dem Schnittebenenverfahren von Koch und Martin zugrunde liegt, ist das Programm

$$\min\left\{ c^T x \;\middle|\; \sum_{a \in C} x_a \geq 1, \quad \text{für alle } t \in T \text{ und alle } (s,t)\text{-Schnitte } C \text{ in } D \right\}.$$

Die Reduktionen der Anschlußdigraphen, die in dem Verfahren Netz-Reduktion erreicht werden, führen im Rahmen des Verfahrens Kabel-Opt zu dem Programm

$$\min\left\{ c^T x \;\middle|\; \sum_{a \in C} x_a \geq 1, \quad \text{für alle } t \in T \text{ und alle } (s,t)\text{-Schnitte } C \text{ in } \bar{D}_t \right\},$$

das nach geringfügigen Anpassungen auch mit dem Verfahren von Koch und Martin gelöst werden kann. Die Reduktionen der Anschlußdigraphen wirken sich positiv aus, da die LP-Matrix weniger Einträge hat und die reduzierten Kosten der Bogenvariablen von sich entsprechenden dualen Lösungen größer sind.

Ein interessantes Verfahren für die Berechnung von ersten primalen und dualen Lösungen ist das primal-duale Approximationsverfahren von Goemans und Williamson [GW95, WGMV95]. Dieses Verfahren basiert auf der ungerichteten Formulierung des Steinerbaum-Problems in Graphen. Eine Anpassung des Konzepts von Goemans und Williamson auf die gerichtete Formulierung erscheint möglich. Das Dual-Ascent-Verfahren von Wong, das auf der gerichteten Formulierung basiert, enthält wesentliche Elemente des Verfahrens von Goemans und Williamson.

Für die Vorteile des Verfahrens Kabel-Opt im Vergleich mit anderen Verfahren zur Lösung des Steinerbaum-Problems halten wir die Kombination der Lagrange-Iterationen mit primalen und dualen Verbesserungsverfahren und die Reduktionen von Anschlußvariablen nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium. Insbesondere wird durch die heuristischen Verfahren der Lagrange-Phase für Instanzen mit weniger als 20 Terminals in kurzer Rechenzeit eine gute obere und untere Schranke für das jeweilige Steinerbaum-Problem berechnet. Für eine duale Lösung $\binom{u}{v}$ des linearen Programms LDEKO(Ψ) sind die reduzierten Kosten r_a, $a \in A$, der Bogenvariablen x_a durch $c_a - \sum_{t \in T} v_{t,a}$ gegeben. Die reduzierten Kosten der Anschlußvariablen $y_{t,P}$, $t \in T$, $P \in H_t$, sind nach der Addition der reduzierten Kosten r_a zu den Nutzpreisen $v_{t,a}$ der Lösung $\binom{u}{v}$ für alle $a \in A$ durch

$$\sum_{a \in P} (v_{t,a} + r_a) - u_t$$

gegeben. Man beachte, daß $u_t \leq \sum_{a \in P} v_{t,a}$ gilt und daher die reduzierten Kosten der Anschlußvariablen $y_{t,P}$ mindestens so groß wie die Summe der reduzierten

Kosten der Bogenvariablen x_a, $a \in P$, sind. Aus diesem Grunde setzen Reduktionen der Anschlußvariablen bzw. des Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$ schon wesentlich früher ein als Reduktionen der Bogenvariablen.

Um die in der Literatur beschriebenen Verfahren mit den für das Kabelproblem Π bzw. das Netzproblem Ψ entwickelten Verfahren verknüpfen zu können, ist es wichtig, die jeweiligen dualen und primalen Lösungen transformieren zu können. Verfahren für diese Variablentransformationen sind in Abschnitt 4.6.2 beschrieben.

5.2 Ein Kürzeste-Wege-Problem mit Zusatzbeschränkung

5.2.1 Einleitung

An mehreren Stellen des Verfahrens KABEL-OPT sind bezüglich Bogenkosten Kürzeste-Wege in einem Digraphen mit beschränkter Länge zu finden. Dieses Problem bezeichnen wir in diesem Abschnitt auch kürzer als Wegeproblem mit Längenbeschränkung. Gegeben seien das Kabelproblem Π und das zugeordnete Netzproblem Ψ, dessen Anschlußmengen längenbeschränkte Dipfade enthalten. Das Pricingproblem des linearen Programms LDEKO(Ψ) ist ein Wegeproblem mit Längenbeschränkung. Dieses Problem ist bei der heuristischen Berechnung einer dual zulässigen Lösung des Programms LDEKO(Ψ) und bei der verzögerten Erzeugung von Dipfadvariablen in einem Schnittebenenverfahren zu lösen. Bei der primalen Verbesserungs-Heuristik RIPUP-REROUTE, die in Unterabschnitt 5.4.1 beschrieben wird, werden Verbindungsdipfade einer Wurzelwaldlösung des Kabelproblems Π aufgelöst. Die dadurch getrennten Teile werden mit einem kostenoptimalen Dipfad, für den die Längenbeschränkungen des Kabelproblems zu berücksichtigen sind, wieder verbunden. Wir können die oben beschriebenen Probleme auf das wie folgt definierte Wegeproblem zurückführen.

Definition 5.2.1.1 (Wegeproblem mit Längenbeschränkung).
Gegeben sind ein Digraph $D = (V, A)$ mit nichtnegativen Bogenkosten ω, und nichtnegativen Bogenlängen l, nichtleere Quellen $S \subseteq V$ und nichtleere Senken $T \subseteq V$ sowie eine Längenbeschränkung $\hat{L}$.

Gesucht ist ein ein (S, T)-Dipfad P mit minimalen Kosten $\sum_{a \in P} \omega_a$, für den die Längenbeschränkung $\sum_{a \in P} l_a \leq \hat{L}$ gilt.

Eine Instanz dieses Problems bezeichnen wir mit

$$\mathrm{RCSP}(D, S, T, \omega, l, \hat{L}).$$

Die Abkürzung RCSP steht für die in der Forschungsliteratur gebräuchliche Bezeichnung „**R**essource **C**onstrained **S**hortest **P**ath Problem“ für ω-Kürzeste-Wege-Probleme mit Längenbeschränkungen. Das Wegeproblem RCSP ist $\mathcal{NP}$-schwer, da es bereits dann $\mathcal{NP}$-schwer ist, wenn S nur eine Quelle und T nur eine Senke enthält [GJ79a].

In der Forschungsliteratur werden Wegeprobleme mit Längenbeschränkung in der Regel für eine Quelle und eine Senke diskutiert. Teilweise werden für mehrere Vektoren von Bogengewichten Ressourcenbeschränkungen formuliert. Eine der ersten Veröffentlichungen über Wegeprobleme mit einer oder mehreren Längenbeschränkungen stammt von Joksch [Jok66]. Joksch stellt zwei grundlegende Verfahren zur Lösung von Wegeproblemen mit einer Längenbeschränkung vor. Das erste Verfahren basiert auf der Formulierung eines linearen Programms, das mit einer Lagrange-Heuristik gelöst wird. Dieser Ansatz wird in anderen Veröffentlichungen insbesondere für die Lösung von Wegeproblemen mit mehreren Längenbeschränkungen aufgegriffen [BC89, HZ80].

Das zweite Verfahren von Joksch ist ein dynamisches Programm, mit dem die Dipfade in dem Digraphen implizit enumeriert werden. In jedem Knoten i des Digraphen wird eine Liste von (S,i)-Dipfaden P vorgehalten, die als Teildipfade eines optimalen (S,T)-Dipfades in Frage kommen, z. B. weil sie kürzer oder billiger als jeweils ein anderer (S,i)-Dipfad der Liste sind. Durch Anhängen der von dem Knoten i inzidenten Bögen an die (S,i)-Dipfade der Liste werden die Daten der Listen der Nachbarknoten jeweils auf einen neueren Stand gebracht. Man kann Instanzen konstruieren, für die das von Joksch vorgeschlagene dynamische Programm eine exponentielle Anzahl von Teildipfaden in den Listen erzeugt. Das Verfahren von Joksch kann jedoch durch Skalierungstricks in ein vollpolynomiales Approximationsverfahren umgewandelt werden [War87, Has92].

Wir greifen das dynamische Programm von Joksch als Ansatz auf. Da wir das Verfahren zur Lösung der Wegeprobleme mit Längenbeschränkung mehrfach in dem Verfahren KABEL-OPT anwenden, werden zusätzliche Distanztabellen bereitgehalten, die eine frühzeitige Entfernung von (S,i)-Teildipfaden aus den Kandidatenlisten ermöglichen. Unsere Implementierung baut auf einer Implementierung von Lauther auf, dessen Datenstrukturen wir benutzt haben [Lau95]. Im folgenden beschreiben wir unser Verfahren zur Lösung des Wegeproblems RCSP. Dazu führen wir die folgenden Definitionen ein.

Ein Dipfad P **dominiert** einen Dipfad P', wenn

$$\sum_{a\in P} l_a \leq \sum_{a\in P'} l_a \text{ und } \sum_{a\in P} \omega_a \leq \sum_{a\in P'} \omega_a$$

gilt.

Eine (S,T)**-Dipfadtreppe** ist eine Familie von (S,T)-Dipfaden $Q_1, \ldots, Q_n$, für ein $n \geq 0$, in der kein Dipfad einen anderen dominiert. Wir ordnen die Dipfade so an, daß deren Längen streng monoton steigend und deren Kosten streng monoton fallend sind. Für die **leere Dipfadtreppe** notieren wir $Q = \emptyset$ und $n = 0$.

Eine (S,T)-Dipfadtreppe heißt **begrenzend**, wenn für jeden (S,T)-Dipfad P eine Treppenstufe Q_m, $1 \leq m \leq n$ existiert, die den Dipfad P dominiert.

Wenn die Menge der Quellen oder Senken nur ein Element s bzw. t enthalten, dann bezeichnen wir die Dipfadtreppe auch als (S,t)-, (s,T)- bzw. (s,t)-Dipfadtreppe. Trägt man die Dipfade einer begrenzenden (S,T)-Dipfadtreppe in ein Längen-Kosten-Diagramm ein und verbindet die entsprechenden Punkte mit waagerechten und senkrechten Linien, dann ergibt sich das Bild einer absteigenden Treppe. Alle Punkte für die anderen (S,T)-Dipfade befinden sich oberhalb dieser Treppenlinie.

Bemerkung 5.2.1.2. *Sei die Familie $Q_1, \ldots, Q_n$ eine begrenzende (S,T)-Dipfadtreppe und sei, für einen positiven Index $m \leq n$, Q_m der billigste Dipfad der*

Familie Q, dessen Länge kleiner oder gleich der Längenbeschränkung $\hat{L}$ ist, dann ist der Dipfad Q_m eine Lösung des Problems

$$\mathrm{RCSP}(D, S, T, \omega, l, \hat{L}).$$

5.2.2 Ein Verfahren für das Wegeproblem RCSP

Wir wollen zur Lösung des Problems RCSP mit einem dynamischen Programm begrenzende (S,T)-Dipfadtreppen (prinzipiell) berechnen. Für alle Knoten $i \in V$ seien (S,i)-Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ gegeben. Man betrachte für einen Bogen $(i,j) \in A$ die folgende dynamische Rekursion, um die (S,j)-Dipfadtreppe $R_{j,\cdot}$ abzusenken.

Sei $N \subseteq \{1, \ldots, n_i\}$ die Menge der Indizes m, so daß der Dipfad $Q_m = R_{i,m} \cup \{(i,j)\}$ von keinem Dipfad aus $R_{j,1}, \ldots, R_{j,n_j}$ dominiert wird. Sei $N' \subseteq \{1, \ldots, n_j\}$ die Menge der Indizes m', so daß der Dipfad $R_{j,m'}$ für alle $m \in N$ von keinem Dipfad Q_m dominiert wird. Die Dipfade Q_m, $m \in N$, und $R_{j,m'}$, $m' \in N'$ dominieren sich dementsprechend nicht gegenseitig, so daß wir sie in einer neuen (S,j)-Dipfadtreppe $Q'_1, \ldots, Q'_{n'}$ anordnen können. Wir notieren für dieses Verfahren

$$Q' := \textsc{Absenken}(R_{i,\cdot}, R_{j,\cdot}, (i,j), \omega, l).$$

Statt an (S,i)-Dipfaden Bögen anzuhängen, können auch vor (i,T)-Dipfaden Bögen gehängt werden. Für alle Knoten $i \in V$ seien (i,T)-Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ gegeben. Für einen Bogen (i,j) senken wir die Dipfadtreppe $R_{i,\cdot}$ wie oben beschrieben nach unten ab und können genauso

$$Q' := \textsc{Absenken}(R_{j,\cdot}, R_{i,\cdot}, (i,j), \omega, l),$$

notieren. Das Verfahren Absenken unterscheidet nicht, an welcher Stelle der Bogen (i,j) angefügt wird.

Seien für alle Knoten $i \in V$ untere Schranken ρ_i für die Längenabstände und untere Schranken $\hat{\omega}_i$ für ω-Kostenabstände jeweils des Knotens i von den Quellen S in dem Digraphen D berechnet. Dies kann zum Beispiel durch die Berechnung l- und ω-Kürzester-Wege geschehen sein. Sei weiterhin eine obere Schranke $\hat{\Omega}$ für die Kosten der optimalen Lösung des Wegeproblems RCSP gegeben, z. B. wegen der Kenntnis zulässiger Lösungen des Wegeproblems RCSP. Dann kommen (i,T)-Dipfade P, die länger sind als $\hat{L} - \rho_i$ oder die teurer sind als $\hat{\Omega} - \hat{\omega}_i$, nicht als Teildipfade eines optimalen Dipfades für das Wegeproblem RCSP in Betracht. Wir können solche Dipfade entfernen. Die übrigbleibenden Dipfade ordnen wir in einer (i,T)-Dipfadtreppe Q'' an. Wir notieren dafür

$$Q'' := \textsc{Abschneiden}(Q', \hat{\Omega}, \hat{L}).$$

Wir formulieren parallel zwei Varianten für ein dynamisches Programm zur Berechnung begrenzender Dipfadtreppen. In einer Variante wird von den Quellen aus expandiert, in der anderen von den Senken aus.

Algorithmus 5.2.2.1.
Eingabe:
Ein Digraph $D = (V, A)$ mit Bogenlängen l, Bogenkosten ω, Quellen $S \subseteq V$ und Senken $T \subseteq V$, eine Längenschranke $\hat{L}$ und eine Kostenschranke $\hat{\Omega}$ sowie für jeden Knoten $i \in V$ untere Schranken ρ_i für die Vervollständigungslängen und $\hat{\omega}_i$ für die Vervollständigungskosten der Dipfade in den Dipfadtreppen von i.

Ausgabe:
(S, i)-Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ für alle Knoten $i \in V$.

Datenstruktur:
Eine Prioritätsschlange aktiver Knoten W, reelle Prioritäten π_i für alle Knoten $i \in V$, Dipfadtreppen Q', Q'', Knoten $i, j, k \in V$ und ein Bogen $a \in A$.

Initialisiere:
$W := S \quad (W := T)$ *mit Priorität* $\pi_k := 0,\ k \in W$.
$R_{k,1} := \emptyset,\ n_k := 1$, *für alle aktiven Knoten* $k \in W$.
$n_i = 0$ *für alle* $i \in V \backslash W$.
SOLANGE die Prioritätsschlange W nichtleer ist:
  Entferne den Knoten $i \in W$ mit niedrigster Priorität π aus W.
  FÜR_ALLE $a := (i, j) \in \delta^+(i)$: $\quad$ (*FÜR_ALLE* $a := (j, i) \in \delta^-(i)$)
    $Q' := \text{ABSENKEN}(R_{i,\cdot}, R_{j,\cdot}, a, \omega, l)$
    $Q'' := \text{ABSCHNEIDEN}(Q', \hat{\Omega} - \hat{\omega}_i, \hat{L} - \rho_i)$
    $R_{j,\cdot} := Q''$.
    WENN $R_{j,\cdot}$ *einen neuen Dipfad enthält:*
      Setze die Priorität $\pi_j := \sum_{a \in R_{j,1}} l_a$.
      Füge den Knoten j in die Prioritätsschlange W ein.
    ENDE
  ENDE
ENDE

Dieser Algorithmus tritt als Unterverfahren in anderen Algorithmen auf und wird dort mit

$$R := \text{TREPPEN}(D, S, T, \omega, l, \hat{\omega}, \rho, \hat{\Omega}, \hat{L})$$

bzw. für die geklammerte Variante mit

$$R := \text{RÜCKTREPPEN}(D, T, S, \omega, l, \hat{\omega}, \rho, \hat{\Omega}, \hat{L})$$

bezeichnet.

Gegeben sei eine optimale Lösung, ein gerichteter Weg P^*, des Wegeproblems $\mathrm{RCSP}(D, S, T, \omega, l, \hat{L})$. Um die weitere Argumentation zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die optimale Lösung P^* eindeutig ist. Dies können wir z. B. durch infinitesimale Änderungen der Längen und Kosten erzwingen.

Bemerkung 5.2.2.2. *Die optimale Lösung P^* des Wegeproblems* RCSP *finden wir in den Dipfadtreppen R, wenn der Algorithmus 5.2.2.1 abbricht.*

Man betrachte den Algorithmus

$$R := \textsc{Treppen}(D, S, T, \omega, l, \hat{\omega}, \rho, \hat{\Omega}, \hat{L})$$

mit Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ für alle Knoten i des Digraphen D. Der Startknoten von P^* sei $s \in S$ der Endknoten von P^* sei $t \in T$. Der (s, j)-Teilweg von P^* sei Q_j für alle Knoten $j \in V(P^*)$. In jeder Dipfadtreppe $R_{j,\cdot}$ ist der gerichtete Weg Q_j enthalten, denn kein anderer (S, j)-Dipfad P dominiert Q_j. Andernfalls dominiert der Dipfad $P \cup (P^* \backslash Q_j)$ den Dipfad P^*, aber P^* ist die einzige optimale Lösung des Wegeproblems RCSP. Außerdem darf nach Konstruktion der Dipfad Q_j nicht abgeschnitten werden.

Wenn Instanzen des Steinerbaum-Problems in Digraphen mit dem Verfahren Kabel-Opt gelöst werden sollen, sind alle Bogenlängen in den zu lösenden Wegeproblemen RCSP gleich null und jede Dipfadtreppe enthält höchstens einen Dipfad. In dem Algorithmus 5.2.2.1 wird das Prioritätsgewicht π_j in diesem Fall gleich den Kosten dieses Dipfades gesetzt, bevor der aktive Knoten in die Prioritätsschlange eingefügt wird. Auf diese Weise verläuft der Algorithmus 5.2.2.1 wie das Verfahren von Dijkstra zur Berechnung von kürzesten Wegen.

Im schlimmsten Fall ist der Algorithmus 5.2.2.1 exponentiell. Für die von uns betrachteten Instanzen jedoch ist er sehr effektiv. Der Grund dafür ist, daß wegen der Kenntnis der unteren Schranken für die Vervollständigungskosten $\hat{\omega}$ und die Vervollständigungslängen ρ frühzeitig aussichtslose Teildipfade abgeschnitten werden. Ein vergleichbarer Dijkstra-Algorithmus, der die unteren Schranken für die ω-Vervollständigungskosten ausnutzt, löst die entsprechenden Instanzen ohne Längenbeschränkung in der Regel langsamer.

5.3 Reduktionen des Kabelproblems

In diesem Abschnitt beschreiben wir Reduktionen des Kabelproblems. Implizit wenden wir dabei die Ergebnisse der Reduktionen des Netzproblems aus Abschnitt 4.2 an. Alle Reduktionen beziehen sich auf das aktuelle Kabelproblem

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A),$$

und die aktuellen Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, sowie das zugehörige Netzproblem

$$\Psi = \text{NETZ}(A, T, H, c, d).$$

Leitlinie für den Entwurf der Reduktionsverfahren für das Kabelproblem sind zum einen Verfahren, die für das speziellere Steinerbaum-Problem in Graphen entworfen worden sind. Wir verweisen auf die Veröffentlichungen [Bea84, BP87, DV89b, CGR92, WS92, Dui93, Luc93, Win95] für einen Überblick über Reduktionen für das Steinerbaum-Problem in Graphen. Da für das Steinerbaum-Problem keine Dipfadkosten und keine Längenbeschränkungen zu berücksichtigen sind, können die Verfahren nur sehr eingeschränkt auf das allgemeinere Kabelproblem übertragen werden.

Eine andere Quelle für den Entwurf von Reduktionsverfahren sind die Reduzierte-Kosten-Kriterien des Theorems 2.4.2.1. Die Reduzierte-Kosten-Kriterien werden auf die Bogenvariablen und die Anschlußvariablen des Programms DEKO angewandt. Die reduzierten Kosten der Bogenvariablen sind durch die Bogenkosten nach oben beschränkt. Die reduzierten Kosten der Anschlußvariablen $y_{t,P}$, $t \in T$, $P \in H_t$, sind hingegen bei nichtnegativen Zielpreisen durch die Summe der Bogenkosten der Bögen des Anschlusses P und durch die Dipfadkosten von P nach oben beschränkt. Aus diesem Grund ist die erfolgreiche Anwendung des Reduzierte-Kosten-Kriteriums auf die Anschlußvariablen viel früher möglich als dessen Anwendung auf die Bogenvariablen. Da wir die Anschlußvariablen nicht explizit auflisten wollen, überprüfen die Reduktionstests, ob eine Bogen $a \in \bar{A}_t$ der Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, entfernt werden darf. Dies entspricht der Elimination aller Dipfade $P \in H_t$ mit $a \in P$.

Wir beschreiben für eine Reduktion immer zuerst die Konstruktion der neuen Instanz Π' des Kabelproblems, die Berechnung einer neuen zulässigen Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ') und die Berechnung einer optimalen Lösung der ursprünglichen Instanz bei Kenntnis einer optimalen Lösung der neuen Instanz Π'. Darauf folgend stellen wir Kriterien für die Zulässigkeit der Reduktion vor bzw. die Verfahren, um diese Kriterien zu überprüfen.

Die Entfernung von Bögen aus dem Digraphen D der Instanz Π bzw. aus Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, wird in den Unterabschnitten 5.3.1 und 5.3.2 diskutiert. Die Kontraktion eines Bogens, der in einer optimalen Lösung des Kabelproblems Π enthalten ist, wird in den Unterabschnitten 5.3.3 und 5.3.4 besprochen.

Für Netzknoten, in denen eine optimale Wurzelwald-Lösung nicht verzweigt, wird eine YΔ-Transformation in den Unterabschnitten 5.3.5 und 5.3.6 beschrieben.

Die einzelnen Verfahren setzen wir zu komplexeren Verfahren zusammen. In dem Verfahren Kabelreduktion werden vor allem lokale Tests aufgerufen. In dem Verfahren Netzreduktion werden die Tests aufgerufen, die auf dem Reduzierte-Kosten-Kriterium basieren. Wenn diese zu Problemreduktionen führen, wird das Verfahren Kabelreduktion aufgerufen. Die Details enthält der Unterabschnitt 5.3.7. Von dem Hauptverfahren zur Lösung des Kabelproblems wird das Verfahren Kabelreduktion beim Preprocessing und das Verfahren Netzreduktion im Rahmen der heuristischen Verfahren aufgerufen.

5.3.1 Entfernen von Bögen

Gegeben seien das aktuelle Kabelproblem

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A), \tag{5.1}$$

das zugeordnete Netzproblem Ψ sowie die Partition

$$A' \dot{\cup} A'' = A \tag{5.2}$$

der Bögen des Digraphen D. Wenn eine optimale Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π existiert, die nur Bögen der Menge A' enthält, dann sagen wir:
In der Instanz Π ist die Entfernung der Bögen A'' zulässig.
Die neue Instanz ist dann

$$\Pi' = \mathrm{KABEL}(D', S, T, c|_{A'}, \hat{d}, l|_{A'}, L), \quad D' = D[A']\,. \tag{5.3}$$

Eine optimale Lösung (B^+, Q^+) für die Instanz Π' ist auch eine optimale Lösung für die Instanz Π. Die Bögen A'' werden implizit auch aus den Senkendigraphen $\bar{D}_t$ entfernt. Das zu dem Kabelproblem Π' und den Senkendigraphen $\bar{D}_t$ gehörige Netzproblem nennen wir Ψ'. Ist $\binom{u}{v}$ eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ), dann ist $\binom{u}{v|_{T\times A'}}$ entsprechend Theorem 4.2.1.2 eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ'). Das Verfahren, das die Entfernung der Bögen A'' aus dem Kabelproblem Π und die Anpassung der aktuellen zulässigen Lösung $\binom{u}{v}$ realisiert, bezeichnen wir mit

Entferne(A'').

5.3.2 Testverfahren für die Entfernung von Bögen

Das Verfahren Gradtest1

Die Eingabe des Verfahrens Gradtest1 ist eine Liste von Knoten $V' \subseteq V$. Mit dem Verfahren Gradtest1 werden Netzknoten $V'' \subseteq V'$ gefunden, in denen kein

Bogen endet oder in denen kein Bogen beginnt. Die Bögen A'', die zu einem Knoten aus V'' inzident sind oder die in einer Quelle aus V' enden, sind überflüssig. Die Bögen A'' werden an das aufrufende Verfahren zurückgegeben. Wir notieren

$$\textsc{Gradtest1}(V').$$

Das Verfahren Umwegtest

Die Eingabe des Verfahrens Umwegtest ist eine Liste $B \subseteq A$ von Bögen. Das Verfahren Umwegtest prüft für jeden Bogen $(i, j) \in B$, ob ein (i, j)-Dipfad P in $D-(i, j)$ mit nicht mehr als drei Bögen sowie mit $c(P) \leq c_{(i,j)}$ und $l(P) \leq l_{(i,j)}$ existiert. Die Bögen $A'' \subseteq B$ mit dieser Eigenschaft sind überflüssig und werden an das aufrufende Verfahren zurückgegeben. Wir notieren

$$\textsc{Umwegtest}(\mathrm{B}).$$

Das Verfahren Erreichbarkeit

Das Verfahren Erreichbarkeit findet Bögen $A'' \subseteq A$, die für alle Senken $t \in T$ in keinem Anschluß-Dipfad $P \in H_t$ enthalten sind. Die Bögen A'' sind daher überflüssig.

Jedem Knoten $i \in V$ ordnen wir die Länge des l-kürzesten Weges ρ_i von irgendeiner Quelle mit Endknoten i zu. Die Länge des kürzesten Weges von dem Knoten i nach der Senke t bezeichnen wir mit $\sigma_{i,t}$. Wir definieren den erlaubten Abstand τ_i des Knotens i von den Quellen S in dem Digraphen D durch

$$\tau_i = \max_{t \in T} L_t - \sigma_{i,t}.$$

Es gilt die lokale Beziehung

$$\tau_i = \max_{j \in \delta^+(i)} \tau_j - l_{(i,j)},$$

die wir in einem dynamischen Programm nach Art des Moore-Algorithmus zur Berechnung des erlaubten Abstandes τ ausnutzen. Für alle Knoten $i \in V$ mit $\tau_i \leq \rho_i$, sind die Bögen aus $\delta(i)$ entfernbar, d. h. $A'' := A''\delta(i)$.

Das Verfahren Bogentest

Das Verfahren Bogentest findet Bögen $B \subseteq A$, deren Bogenvariable zu große reduzierte Kosten haben und die daher überflüssig sind.

Die Eingabeparameter des Verfahrens Bogentest sind die Kosten K einer zulässigen Lösung des Kabelproblems Π und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ). Wir notieren

$$\textsc{Bogentest}(K, \tbinom{u}{v})$$

Alle Bögen $a \in A$ deren reduzierte Kosten $c_a - \sum_{t \in T} v_{t,a}$ größer sind als die Lücke $K - \sum_{t \in T} u_t$ werden der Menge B zugewiesen.

Das Verfahren SENKENREICHWEITE

Das Verfahren SENKENREICHWEITE berechnet für jede Senke $t \in T$ eine Bogenmenge $B \subseteq A$, deren Bögen aus dem Senkendigraphen $\bar{D}_t$ entfernt werden können. Implizit werden dadurch alle Dipfad-Anschlüsse $P \in H_t$, die einen Bogen aus B enthalten, aus dem aktuellen Netzproblem Ψ entfernt. Die Berechnung basiert auf einer Abschätzung der reduzierten Kosten der Anschlußvariablen der Senke t.

Die Eingabe des Verfahrens sind die Kosten K einer primalen Lösung des Netzproblems Ψ und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des Programms DDEKO(Ψ).

Die Ausgabe des Verfahrens ist eine Menge von Bögen $A'' \subseteq A$, die aus dem Kabelproblem Π entfernt werden können, da sie in keinem Senkendigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, mehr enthalten sind. Wir notieren

$$\text{SENKENREICHWEITE}(K, \tbinom{u}{v}).$$

Für jede Senke $t \in T$ gehen wir implizit zu einer dualen Lösung $\binom{u}{v'}$ mit

$$v'_{t',a} = \begin{cases} c_a - \sum_{t'' \in T \setminus \{t\}} v_{t'',a} & t' = t \\ v_{t',a} & t' \neq t \end{cases}$$

über. Wir wollen die reduzierten Kosten

$$q_{t,P} = \hat{d}_t l(P) + \sum_{a \in P} (v_{t,a} + r_a) - u_t, \quad P \in H_t,$$

der Dipfadvariablen $y_{t,P}$ durch Berechnung kürzester Wege mit beschränkten Ressourcen abschätzen. Wir definieren Bogenkosten

$$\omega_a = \hat{d}_t l_a + v_{t,a} + r_a \quad (a \in \bar{A}_t).$$

Die Entfernung von Anschlüssen $P \in H_t$, deren Kosten $\omega(P)$ die obere Schranke

$$\hat{\Omega} = u_t + (K - u(T))$$

überschreiten, ist nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium zulässig. Sei ρ_i für alle Knoten $i \in V$ der Längenabstand des Knotens i von den Quellen S in dem Digraphen D. Als untere Schranke für den ω-Kostenabstand der Knoten V von den Quellen S in dem Digraphen D setzen wir $\hat{d}_t \rho$ ein. Wir berechnen Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ von der Senke t aus.

$$R := \text{RÜCKTREPPEN}(\bar{D}_t, t, S, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{d}_t \rho, \rho, \hat{\Omega}, L_t),$$

Danach expandieren wir von den Quellen S aus. Für alle Knoten $i \in V$ legen wir Längenabstände ρ'_i und die Kostenabstände $\hat{\omega}_i$ der Anschlüsse H_t zwischen den

Knoten i und der Senke t fest durch

$$i \in V: \quad \rho'_i = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ l(R_{i,1}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$i \in V: \quad \hat{\omega} = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ \omega(R_{i,n_i}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir berechnen Dipfadtreppen $R'_{i,1}, \ldots, R'_{i,n'_i}$ von den Quellen S aus:

$$R' := \textsc{Treppen}(\bar{D}_t, S, t, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{\omega}, \rho', \hat{\Omega}, L_t)\,.$$

Für alle Bögen $(i,j) \in \bar{A}_t$ berechnen wir eine untere Schranke ω^* für die ω-Kosten eines Anschluß-Dipfades $P^* \in H_t$ mit $(i,j) \in P$. Dazu kombinieren wir jeden Dipfad P der (j,t)-Dipfadtreppe $R_{j,\cdot}$ (prinzipiell) jeweils mit jedem Dipfad P' der (S,i)-Dipfadtreppe $R_{i,\cdot}$ und dem Bogen (i,j) zu einer (S,t)-Kette mit Kosten $\omega(P') + \omega_{(i,j)} + \omega(P)$ und Länge $l(P') + l_{(i,j)} + l(P)$. Wenn die untere Schranke ω^* größer ist als die obere Schranke Ω, dann ist nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium die Entfernung aller Dipfade $P \in H_t$, die den Bogen (i,j) enthalten, zulässig.

Eine etwas grobere Abschätzung erhalten wir, wenn wir jeden Dipfad der (i,t)-Dipfadtreppe mit jedem Dipfad der (S,i)-Dipfadtreppe zu einer (S,t)-Kette kombinieren. Analog zu dem obigen Vorgehen können wir dann entscheiden, ob die Entfernung aller Dipfade $P \in H_t$, die über den Knoten i führen, zulässig ist. In diesem Fall realisieren wir die Entfernung dieser Dipfade, indem wir alle inzidenten Bögen aus dem Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$ entfernen.

Die Nutzpreise $v_{t,a}$ der entfernten Bögen $a \in B$ setzen wir gleich null. Am Ende des Verfahrens Senkenreichweite weisen wir alle Bögen $a \in A$, die in keinem Senkendigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, mehr vorkommen, der Liste A'' zu.

5.3.3 Kontraktion eines Bogens

Gegeben seien eine Instanz

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A, \psi), \tag{5.4}$$

des Kabelproblems sowie ein Bogen

$$\hat{a} \in A,\ \psi(\hat{a}) = (i,j),\ j \notin S. \tag{5.5}$$

Wenn eine optimale Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π existiert, so daß B^* ein Wurzelwald ist und den Bogen $\hat{a}$ enthält, dann sagen wir:

In der Instanz Π ist die Kontraktion des Bogens $\hat{a}$ zulässig.

Wir können eine Vor-Auswahl des Bogens $\hat{a}$ für die Lösung des Kabelproblems Π

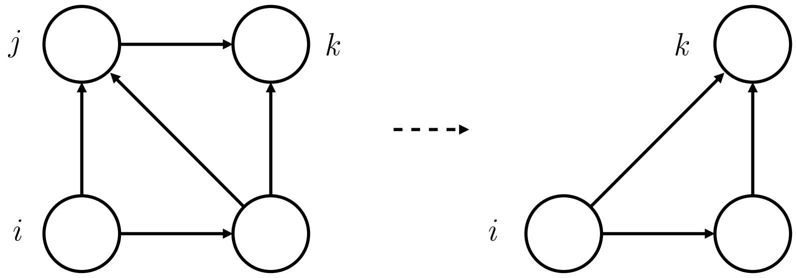

Abbildung 5.1: Kontraktion eines Bogens

treffen und diese durch eine Kontraktion des Bogens $\hat{a}$ in dem Digraphen D umsetzen. Die Kontraktion des Bogens $\hat{a}$ führt auf eine neue Instanz

$$\Pi' = \text{KABEL}(D', S, T', c', \hat{d}', l', L'), \quad D' = (V', A', \psi'). \tag{5.6}$$

Dem Kabelproblem Π ist ein Netzproblem Ψ zugeordnet, dem Kabelproblem Π' ist ein Netzproblem Ψ' zugeordnet. Die aktuelle zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) wird in eine zulässige Lösung $\binom{u'}{v'}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ') mittransformiert.

Das Verfahren, das diese Reduktion realisert, bezeichnen wir mit

$$\textsc{Kontrahiere}(\hat{a}).$$

Wir beschreiben das Verfahren $\textsc{Kontrahiere}(\hat{a})$ im folgenden:

Aus dem Digraphen D werden der Knoten j und die Bögen $a \in A$ entfernt, deren Endknoten j ist oder die zu dem Bogen $\hat{a}$ antiparallel verlaufen, das heißt

$$V' = V \backslash \{j\}, \qquad A' = A \backslash \{a \in A \mid \psi_2(a) = j \text{ oder } \psi(a) = (j, i)\} \tag{5.7}$$

Sei $A'' \subseteq A'$ die Menge der Bögen, deren Anfangsknoten j und deren Endknoten nicht i bezüglich der Inzidenzfunktion ψ ist. Die Inzidenzfunktion ψ' weist den Bögen $a \in A''$ den Anfangsknoten i und den alten Endknoten $\psi_2(a)$ zu. Man beachte, daß auf diese Weise parallele Bögen in dem Digraphen D' enthalten sein können. Die Bögen $a \in A''$ repräsentieren in dem neuen Graphen D' den Teildipfad $\{\hat{a}, a\}$. Zu ihren alten Längen wird daher die Länge des kontrahierten Bogens $\hat{a}$ hinzuaddiert, das heißt $l'_a = l_a + l_{\hat{a}}$. Die Kosten dieser Bögen bleiben unverändert, das heißt $c'_a = c_a$ für alle $a \in A''$. Ebenso unverändert bleiben die Kosten, Längen und Inzidenzen der anderen Bögen $a \in A' \backslash A''$, das heißt $c'_a = c_a$, $l'_a = l_a$ und $\psi'_a = \psi_a$.

Im Zusammenhang mit der Festlegung der Parameter des neuen Kabelproblems Π' wird gezeigt, wie aus aus einer (optimalen) Lösung (B', Q') der Instanz Π' eine (optimale) Lösung (B, Q) der Instanz Π erhalten wird und wie aus der optimalen Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π eine optimale Lösung (B^+, Q^+) der Instanz Π' erhalten wird.

Die Bogenmenge B der Lösung (B, Q) der Instanz Π setzt sich zusammen aus der Bogenmenge B' der Lösung (B', Q') und dem kontrahierten Bogen $\hat{a}$, das heißt $B = B' \cup \{\hat{a}\}$. Die Bögen B^+, der Lösung (B^+, Q^+) sind die Bögen B^* der Lösung (B^*, Q^*) ohne den kontrahierten Bogen $\hat{a}$, das heißt $B^+ = B^* \backslash \{\hat{a}\}$. Die Kosten der Bögen B bzw. B^* der Lösungen der Instanz Π sind daher um $c_{\hat{a}}$ größer als die jeweiligen Kosten der Bögen B', B^+ der Lösungen der neuen Instanz Π'. Für alle $t \in T$, $t \neq j$, definieren wir die Dipfade Q_t und Q_t^+ wie folgt: Wenn der Dipfad Q'_t einen Bogen $a \in A''$ enthält, dann ist $Q_t = Q'_t \cup \hat{a}$, sonst ist $Q_t = Q'_t$. Wenn der Dipfad Q_t^* den kontrahierten Bogen $\hat{a}$ und somit auch einen weiteren Bogen $a \in A''$ enthält, dann ist $Q_t^+ = Q_t^* \backslash \{\hat{a}\}$, sonst ist $Q_t^+ = Q_t^*$. In jedem Fall bleiben die Längen der Dipfade gleich, das heißt $l(Q_t) = l'(Q'_t)$ und $l(Q_t^*) = l'(Q_t^+)$, denn es gilt $l'_a = l_{\hat{a}} + l_a$.

Wir unterscheiden nun vier Fälle für die Festlegung der neuen Senken T', der neuen Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}'$, der neuen Längenbeschränkungen L', der neuen dualen Lösung $\binom{u'}{v'}$ sowie der noch nicht festgelegten Dipfade der Lösungen (B, Q) und (B^+, Q^+). Man beachte, daß durch diese Festlegungen die Längenbeschränkungen in den Lösungen (B, Q) und (B^+, Q^+) eingehalten werden.

1. Der Endknoten j des Bogens $\hat{a}$ ist keine Senke, das heißt $j \notin T$:
   Dann bleiben die Senken, Dipfadkostenfaktoren und Längenbeschränkungen unverändert, das heißt
   $$T' = T,\ \hat{d}' = \hat{d} \text{ und } L' = L.$$
   In diesem Fall sind alle Dipfade aus Q und Q^+ festgelegt. Die Kosten der Dipfade sind jeweils gleichgeblieben,
   $$\sum_{t \in T} \hat{d}_t l(Q_t) = \sum_{t \in T} \hat{d}'_t l'(Q'_t)$$
   $$\sum_{t \in T} \hat{d}_t l(Q_t^*) = \sum_{t \in T} \hat{d}'_t l'(Q_t^+)$$
   Die Kosten der Lösungen (B, Q) und (B^*, Q^*) sind jeweils um $c_{\hat{a}}$ größer als die Kosten der Lösungen (B', Q') und (B^+, Q^+).

   Die Nutzpreise bleiben unverändert. Von den Zielpreisen werden die Nutzpreise des Bogens $\hat{a}$ abgezogen, d. h.
   $$u'_t = u_t - v_{t,\hat{a}} \text{ und } v'_{t,a} = v_{t,a} \text{ für alle } t \in T' \text{ und alle } a \in A'.$$

2. Der Endknoten j des Bogens $\hat{a}$ ist eine Senke, das heißt $j \in T$:
   Wir verschieben die Senke j nach i und unterscheiden die Fälle:

   (a) Der Anfangsknoten i des Bogens $\hat{a}$ ist eine Quelle, das heißt $i \in S$:
   Dann fällt die Senke j fort, das heißt $T' = T \backslash \{j\}$, $\hat{d}' = \hat{d}|_{T'}$ und $L' =$

$L|_{T'}$. Wir definieren den Dipfad $Q_j = \{\hat{a}\}$. Da B^* ein Wurzelbaum ist, ist der Dipfad Q_j^* gleich dem Dipfad Q_j. Die Kosten der Dipfade Q_j und Q_j^* sind gleich $\hat{d}_j l_{\hat{a}}$. Die Nutzpreise bleiben unverändert. Von den Zielpreisen werden die Nutzpreise des Bogens $\hat{a}$ abgezogen, d. h.

$$u'_t = u_t - v_{t,\hat{a}} \text{ und } v'_{t,a} = v_{t,a} \text{ für alle } t \in T' \text{ und alle } a \in A'.$$

(b) Der Anfangsknoten i des Bogens $\hat{a}$ ist weder eine Senke noch eine Quelle, das heißt $i \notin S \cup T$: Dann wird der Knoten i zu einer Senke, das heißt $T' = (T \cup \{i\}) \setminus \{j\}$. Die neuen Längenbeschränkungen werden festgelegt durch

$$L'_i = L_j - l_{\hat{a}} \text{ und } L'_t = L_t \text{ für alle Senken } t \in T \setminus \{j\}.$$

Die neuen Dipfadkostenfaktoren werden festgelegt durch

$$\hat{d}'_i = \hat{d}_j \text{ sowie } \hat{d}'_t = \hat{d}_t \text{ für alle Senken } t \in T \setminus \{j\}.$$

Wir definieren den Dipfad $Q_j = Q'_i \cup \{\hat{a}\}$ und den Dipfad $Q_i^+ = Q_j^* \setminus \{\hat{a}\}$. Auf diese Weise ist die Länge des Dipfads Q_j gleich $l'(Q'_i) + l_{\hat{a}} \leq L_j$ und die Länge des Dipfads Q_i^+ gleich $Q_j^* - l_{\hat{a}} \leq L'_i$. Die Kosten der Dipfade Q_j und Q_j^* sind jeweils um $\hat{d}_j l_{\hat{a}}$ größer als die Kosten der Dipfade Q'_i und Q_i^+.
Die Nutzpreise bleiben unverändert. Von den Zielpreisen werden die Nutzpreise des Bogens $\hat{a}$ abgezogen, d. h.

$$u'_t = u_t - v_{t,\hat{a}} \text{ und } v'_{t,a} = v_{t,a} \text{ für alle } t \in T' \text{ und alle } a \in A'.$$

(c) Der Anfangsknoten i des Bogens $\hat{a}$ ist eine Senke, das heißt $i \in T$: Dann geht die Senke j in der Senke i auf, das heißt $T' = T \setminus \{j\}$. Die neuen Längenbeschränkungen werden festgelegt durch

$$L'_i = \min\{L_j - \hat{a}, L_i\} \text{ und } L'_t = L_t \text{ für die Senken } t \in T \setminus \{j\}.$$

Die neuen Dipfadkostenfaktoren werden festgelegt durch

$$\hat{d}'_i = \hat{d}_i + \hat{d}_j \text{ und } \hat{d}'_t = \hat{d}_t \text{ für alle Senken } t \in T \setminus \{j\}.$$

Wir definieren den Dipfad $Q_j = Q'_i \cup \{\hat{a}\}$. Die Dipfade $Q_i = Q'_i$ und $Q_i^+ = Q_i^*$ sind bereits festgelegt. Die Länge des Dipfads Q_j ist gleich

$$l(Q_j) = l'(Q'_i) + l_{\hat{a}} \leq L'_i + l_{\hat{a}} \leq L_j.$$

Für die Kosten der Dipfade gilt:

$$\hat{d}_i l(Q_i) + \hat{d}_j l(Q_j) = \hat{d}'_i l'(Q'_i) + \hat{d}_j l_{\hat{a}}$$
$$\hat{d}_i l(Q_i^*) + \hat{d}_j l(Q_j^*) = \hat{d}'_i l'(Q_i^+) + \hat{d}_j l_{\hat{a}}$$

(d) Die Nutzpreise und Zielpreise der Senken i und j werden aufaddiert. Ansonsten bleiben die Nutzpreise unverändert und von den Zielpreisen werden die Nutzpreise des Bogens $\hat{a}$ abgezogen, das heißt

$$u'_i = u_i + u_j - v_{t,\hat{a}} \text{ und } v'_{i,a} = v_{i,a} + v_{j,a} \text{ für alle } a \in A',$$
$$u'_t = u_t - v_{t,\hat{a}} \text{ und } v'_{t,a} = v_{t,a} \text{ für alle } t \in T \backslash \{i\} \text{ und alle } a \in A'.$$

Ist also $j \in T$ eine Senke, dann sind die Kosten der Lösungen (B, Q) und (B^*, Q^*) jeweils um $c_{\hat{a}} + \hat{d}_j l_{\hat{a}}$ größer als die Kosten der Lösungen (B', Q') und (B^+, Q^+).

Ist (B', Q') eine optimale Lösung der Instanz Π', dann sind die Kosten der Lösung (B, Q) höchstens so groß wie die Kosten der optimalen Lösung (B^*, Q^*). Also ist dann auch die Lösung (B, Q) optimal für die Instanz Π.

5.3.4 Testverfahren für die Kontraktion von Bögen

Wir bezeichnen einen Bogen bzw. ein Bauteil, das in jeder zulässigen Lösung einer Instanz des Kabelproblems bzw. des Netzproblems enthalten ist, als **unentbehrlich**. Ansonsten nennen wir den Bogen oder das Bauteil **entbehrlich**. In den nachfolgenden Testverfahren suchen wir nach unentbehrlichen Bögen.

Das Verfahren SENKENGRAD

Das Verfahren SENKENGRAD findet Senken aus $T' \subseteq T$, in denen genau ein Bogen endet. Die Bögen $\hat{A} \subseteq A$, die in den Senken T' enden, sind unentbehrlich.

Das Verfahren UMGEHUNGSTEST

Das Verfahren UMGEHUNGSTEST findet Bögen $\hat{A} \subseteq A$, die in jeder zulässigen Lösung der Instanz Π enthalten sind.

Zuerst berechnen wir einen spannenden l-Kürzeste-Wege-Wurzelwald $\hat{B}$ mit den Quellen S als Wurzeln. Dadurch erhalten wir erstens einen l-Kürzeste-Wege-Wurzelwald $B \subseteq \hat{B}$ mit Wurzeln in S, dessen Blätter die Senken T sind. Zweitens erhalten wir die Längenabstände ρ_i der Knoten i zu den Quellen aus S. Sicher sind höchstens die Bögen des Waldes B unentbehrlich. Wir testen einzeln, ob ein Bogen aus $a \in B$ unentbehrlich ist. Dazu berechnen wir die Abstände ρ'_i der Knoten i zu den Quellen S in dem Digraph $D-a$. Gleichzeitig berechnen wir einen Kürzeste-Wege-Wurzelwald B' in dem Digraph $D - a$ mit Wurzeln in S, dessen Blätter die Senken T sind. Ist für irgendeine Senke t die Längenbeschränkung L_t kleiner als der neue Abstand ρ'_t, dann ist der Bogen a unentbehrlich. Anderenfalls sind alle Bögen, die nicht in B' enthalten sind, entbehrlich. Die unentbehrlichen Bögen aus B vereinigen wir mit der Menge $\hat{A}$.

Das Verfahren BRÜCKENTEST

Das Verfahren BRÜCKENTEST findet Bögen $\hat{A} \subseteq A$, die unentbehrlich sind, weil sie in einem Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, eine Brücke darstellen.

Für alle Senken $t \in T$ bilden wir den Durchschnitt $\bigcup_{P \in H'_t} P$ der Anschluß-Dipfade des Pools $H'_t \subseteq H_t$. Anschließend suchen wir für jeden Bogen $a \in \bigcup_{P \in H'_t} P$ einen (S,t)-Dipfad beliebiger Länge in dem Digraphen $\bar{D}_t - a$. Wenn kein solcher Dipfad existiert, ist a unentbehrlich, da es eine Brücke zwischen den Quellen und der Senke t ist. Die unentbehrlichen Bögen weisen wir der Menge $\hat{A}$ zu.

5.3.5 YΔ-Transformationen

Gegeben seien eine Instanz

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A)$$

des Kabelproblems sowie ein Netzknoten $j \in V$, $j \notin S, T$. Wenn eine Wurzelwald-Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π existiert, so daß der Wurzelwald B^* in dem Netzknoten j nicht verzweigt, dann sagen wir:
In der Instanz Π ist die YΔ-Transformation mit Zentrum j zulässig.
Die YΔ-Transformation mit Zentrum j führt auf eine neue Instanz

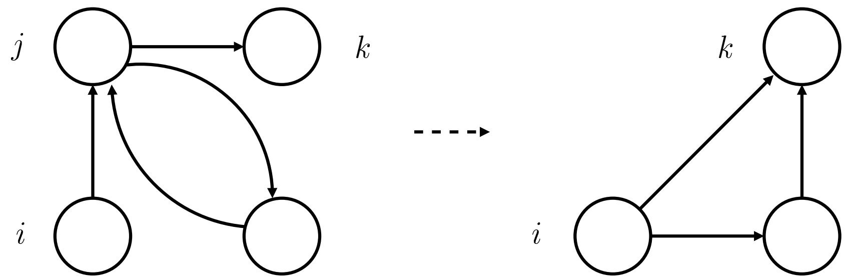

Abbildung 5.2: YΔ-Transformation

$$\Pi' = \text{KABEL}(D', S, T, c', \hat{d}, l', L), \quad D' = (V', A').$$

Dem Kabelproblem Π ist das Netzproblem Ψ zugeordnet. Dem Kabelproblem Π' ist das Netzproblem Ψ' zugeordnet. Die aktuelle zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) wird auf eine zulässige Lösung $\binom{u'}{v'}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ') mittransformiert.

Das Verfahren, das die Reduktion durchführt, bezeichnen wir mit

$$\text{Y}\Delta\text{-TRANSFORMATION}(j).$$

Wir zeigen im folgenden, wie die Parameter der Instanzen Π' festgelegt werden und wie aus einer (optimalen) Lösung (B', Q') der Instanz Π' eine (optimale) Lösung (B, Q) der Instanz Π erhalten wird und wie aus der optimalen Lösung (B^*, Q^*) der Instanz Π eine optimale Lösung (B^+, Q^+) der Instanz Π' erhalten wird.

Der Knoten j wird entfernt, das heißt $V' = V \backslash \{j\}$. Für je zwei, zu j inzidente Bögen (i,j), (j,k) mit $i \neq k$ führen wir einen neuen Bogen (i,k) mit Länge $l'_{(i,k)} = l_{(i,j)} + l_{(j,k)}$, Kosten $c'_{(i,k)} = c_{((i,j)} + c_{(j,k)}$ und Nutzpreisen $v'_{t,(i,k)} = v_{t,(i,j)} + v_{t,(j,k)}$, $t \in T$, ein. Die so eingeführten Bögen fassen wir in der Menge C zusammen. Die Bögen der neuen Instanz legen wir zu $A' = (A \backslash \delta(j)) \cup C$ fest. Die Längen, Kosten und Nutzpreise der Bögen $a \in A \backslash \delta(j)$ bleiben unverändert, das heißt $l'_a = l_a$, $c'_a = c_a$ und $v'_{t,a} = v_{t,a}$, $t \in T$. Ebenso bleiben die Zielpreise unverändert, das heißt $u'_t = u_t$, $t \in T$.

Die Anzahl der neuen Bögen $|C|$ ist höchstens gleich $|\delta^+(j)||\delta^-(j)|$. Die Y$\Delta$-Transformation mit Zentrum j ist also nur dann eine echte Reduktion, wenn die Anzahl der neuen Bögen $|C|$ kleiner oder gleich der Anzahl der alten Bögen $|\delta(j)|$ ist. Mitunter ist aber auch eine (kurzfristige) Vergrößerung der Anzahl der Bögen sinnvoll, zum Beispiel weil neue Bögen aus C durch andere Reduktionen wieder eliminiert werden können.

Wenn die Bogenmenge B^* zwei Bögen $(i,j), (j,k) \in \delta(j)$ enthält, dann legen wir B^+ auf $B^* \backslash \{(i,j),(j,k)\} \cup \{(i,k)\}$, fest. Der Bogen $(i,k) \in C$ sei dabei der aus den Bögen (i,j) und (j,k) erzeugte Bogen. Ansonsten enthält B^* keinen, zu dem Zentrumsknoten j inzidenten Bogen. Wir definieren in diesem Fall $B^+ = B^*$. Die Bogenkosten von B^* und B^+ sind gleich.

Für alle Senken $t \in T$ werden die Dipfade Q_t^+ so festgelegt:
Wenn der Dipfad Q_t^* zwei Bögen $(i,j), (j,k) \in \delta(j)$ enthält, dann ist $Q_t^+ = Q_t^* \backslash \{(i,j),(j,k)\} \cup \{(i,k)\}$, sonst ist $Q_t^+ = Q_t^*$. Die Längen und Kosten der Dipfade Q_t^* und Q_t^+ sind daher gleich.

Die Bogenmenge B legen wir auf

$$B = (B' \cap A) \cup \bigcup_{(i,k) \in B' \cap C} \{(i,j),(j,k)\}$$

fest. Es gilt daher $c(B) \leq c'(B')$.

Für alle Senken $t \in T$ werden die Dipfade Q_t so festgelegt:
Wenn der Dipfad Q'_t keinen Bogen aus C enthält, definieren wir $Q_t = Q'_t$. Wenn der Dipfad Q'_t genau einen Bogen $(i,k) \in C$ enthält, definieren wir $Q_t = Q'_t \backslash \{(i,k)\} \cup \{(i,j),(j,k)\}$. Wenn der Dipfad Q'_t mehr als einen Bogen aus C enthält, dann bilden wir die Menge

$$P = (Q'_t \backslash C) \cup \bigcup_{(i,k) \in Q'_t \cap C} \{(i,j),(j,k)\}.$$

Die Bogenmenge P ist nicht notwendigerweise ein Dipfad, enthält aber immer einen (S,t)-Dipfad Q_t. Die Länge und die Kosten des Dipfades Q_t sind gleich oder kleiner als die Länge und die Kosten des Dipfades Q'_t.

Seien K, K', K^*, K^+ die Kosten der Lösungen (B,Q), (B',Q'), (B^*,Q^*) bzw. (B^+,Q^+). Sei die Lösung (B',Q') eine optimale Lösung der Instanz Π'. Dann gilt

$$K \leq K' \leq K^+ = K^* \leq K.$$

Also gilt:
Die Lösung (B,Q) ist eine optimale Lösung der Instanz Π. Die Lösung (B^+,Q^+) ist eine optimale Lösung der Instanz Π'.

5.3.6 Testverfahren für YΔ-Transformationen

Das Verfahren GRADTEST2

Die Eingabe des Verfahrens GRADTEST2 sind Knoten $V' \subseteq V$. Das Verfahren GRADTEST2 findet Netzknoten $V'' \subseteq V'$, in denen genau ein Bogen beginnt oder die mit genau zwei Knoten adjazent sind. In diesen Knoten ist eine YΔ-Transformation zulässig. Wir notieren

$$\textsc{Gradtest2}(V')$$

Das Verfahren VERZWEIGUNGSTEST

Das Verfahren VERZWEIGUNGSTEST findet eine Knotenmenge $V' \subseteq V$, so daß der Wurzelwald B^* jeder optimalen Lösung (B^*,Q^*) des Kabelproblems Π in keinem Knoten aus V' verzweigt.

Dem Kabelproblem Π zugeordnet ist ein Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A,T,H,c,d)\,.$$

Dieses Netzproblem transformieren wir implizit durch Bündelung von je drei Zielpunkten. Wir ziehen Reduzierte-Kosten-Kriterien heran, um eine Verzweigung des Wurzelwaldes einer optimalen Lösung in einem Netzknoten auszuschließen.

Die Eingabe des Verfahrens sind die Kosten K einer zulässigen Lösung des Kabelproblems Π und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ). Wir notieren

$$\textsc{Verzweigungstest}(K, \tbinom{u}{v})$$

Für alle Senken $t_0 \in T$ und alle Netzknoten $j \in V$ testen wir:

1. Existiert eine Senke $t_1 \neq t_0$ und eine optimale Lösung (B^*,Q^*), so daß der Wurzelwald $Q^*_{t_0} \cup Q^*_{t_1}$ in dem Netzknoten j verzweigt.

2. Existieren zwei Senken $t_1, t_2 \neq t_0$ und eine optimale Lösung (B^*, Q^*), so daß der Wurzelwald $Q^*_{t_1} \cup Q^*_{t_2}$ in dem Netzknoten j verzeigt und der Dipfad $Q^*_{t_0}$ nicht über den Netzknoten j führt.

Wenn beide Fälle nicht möglich sind, dann kann eine optimale Wurzelwald-Lösung nicht in dem Netzknoten j verzweigen.

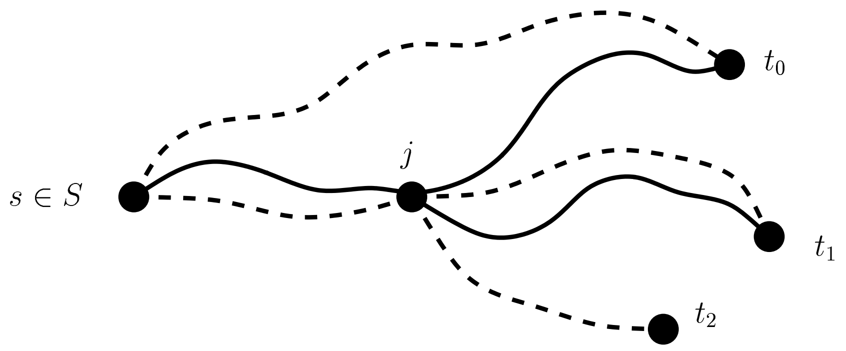

Abbildung 5.3: Mögliche Verzweigungen in dem Netzknoten j. Ein Beispiel für den 1. Fall ist mit durchgezogenen Linien, ein Beispiel für den 2. Fall ist mit gestrichelten Linien dargestellt.

Für diese Tests wollen wir reduzierte Kosten der Wurzelbäume $Q^*_{t_0} \cup Q^*_{t_1}$ und und $Q^*_{t_1} \cup Q^*_{t_2}$ abschätzen. Um solche reduzierten Kosten formulieren zu können, bündeln wir die Senken t_0, t_1 und t_2. Wir gehen entsprechend der in Theorem 4.2.3.1 beschriebenen Transformation implizit über zu einem Netzproblem

$$\Psi' = \text{NETZ}(A, T', H', c, d')$$

und einer neuen dualen Lösung $\binom{u'}{v'}$ des linearen Programms LDEKO(Ψ'). Die Zielpunkte des Netzproblems Ψ' sind die Senken $t \in T$, $t \neq t_0, t_1, t_2$, und die gebündelte Senkenmenge $\hat{T} = \{t_0, t_1, t_2\}$. Die Anschlüsse, die Anschlußkosten, die Zielpreise und die Nutzpreise der Zielpunkte $t \in T'$, $t \neq \hat{T}$, bleiben unverändert. Die Anschlüsse des Zielpunktes $\{t_0, t_1, t_2\}$ sind formal Bogenmengen der Vereinigung beliebiger Dipfade $P_0 \in H_{t_0}$, $P_1 \in H_{t_1}$ und $P_2 \in H_{t_2}$. Da jedoch optimale Wurzelwaldlösungen existieren, ist es zulässig, in der Anschlußmenge $H_{\hat{T}}$ nur solche Anschlüsse B zu berücksichtigen, die ein Wurzelwald sind. Durch den Wurzelwald B sind die erzeugenden Dipfade P_0, P_1 und P_2 eindeutig festgelegt. Die Anschlußkosten des Wurzelwaldes B sind festgelegt durch

$$d'_{\hat{T},B} = d_{t_0,P_0} + d_{t_1,P_1} + d_{t_2,P_2}$$

Mit $r_a = c_a - \sum_{t \in T} v_{t,a}$ bezeichnen wir die reduzierten Kosten der Bogenvariablen x_a für alle Bögen $a \in A$. Der Zielpreis $u'_{\hat{T}}$ und die Nutzpreise $v_{\hat{T},\cdot}$ werden festgelegt durch

$$u'_{\hat{T}} = u(\hat{T})$$
$$v'_{\hat{T},a} = \sum_{t\in\hat{T}} v_{t,a} + r_a \quad (a \in A).$$

Entsprechend dem Theorem 4.2.3.2 ist $\binom{u'}{v'}$ eine zulässige duale Lösung des linearen Programms LDEKO(Ψ'). Die reduzierten Kosten $q'_{\hat{T},B}$ des Anschlusses B sind

$$\begin{aligned}
q'_{\hat{T},B} &= d'_{\hat{T},B} + \sum_{a\in B} v'_{\hat{T},\cdot} - u_{\hat{T}} = \\
&= r(B) + d_{t_0,P_0} + \sum_{a\in B} v_{t_0,a} - u_{t_0} + d_{t_1,P_1} + \sum_{a\in B} v_{t_1,a} - u_{t_1} + \\
&+ d_{t_2,P_2} + \sum_{a\in B} v_{t_2,a} - u_{t_2} \geq \\
&\geq r(B) + d_{t_0,P_0} + \sum_{a\in B} v_{t_0,a} - u_{t_0} = \\
&= \sum_{a\in B\setminus P_0} (v_{t_0,a} + r_a) + d_{t_0,P_0} + \sum_{a\in P_0} (v_{t_0,a} + r_a) - u_{t_0}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wollen wir noch weiter abschätzen. Dazu berechnen wir:

1. Für alle Knoten $i \in V$ die Kosten ϕ_i des bezüglich der Bogenkosten $r + v_{t_0,\cdot}$ billigsten Weges mit Startknoten i und irgendeiner Senke $t \in T$, $t \neq t_0$, als Endknoten.

2. Wie in dem Verfahren SENKENREICHWEITE mit Dipfadtreppen für alle Knoten $i \in V$ eine untere Schranke π_i für die reduzierten Kosten eines Anschlusses $P \in H_{t_0}$, der über den Knoten $i \in V$ führt.

(Tatsächlich lassen wir die Verfahren SENKENREICHWEITE und VERZWEIGUNGSTEST gleichzeitig ablaufen, so daß wir die Berechnung der Dipfadtreppen nicht doppelt durchführen müssen.)

Zuerst expandieren wir von der Senke t_0 aus. Implizit schlagen wir die reduzierten Kosten $r = c - \sum_{t\in T} v_{t,\cdot}$ den Nutzpreisen $v_{t_0,\cdot}$ zu. Als Bogenkosten $\hat{\omega}$ setzen wir für alle Bögen $a \in \bar{A}_{t_0}$ des Anschlußdigraphen $\bar{D}_{t_0}$:

$$\omega_a = \hat{d}_t l_a + v_{t_0,a} + r_a.$$

Sei ρ_i, $i \in V$, der Längenabstand des Knotens i von den Quellen S in dem Digraphen D. Als untere Schranke für den ω-Kostenabstand des Knotens i von den Quellen S in dem Digraph D setzen wir $\hat{d}_{t_0}\rho_i$ ein. Als obere Schranke für die ω-Kosten der Anschlüsse aus H_t setzen wir $\hat{\Omega} = u_t + (K - u(T))$ ein. Wir berechnen für die Knoten $i \in V$ Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$,

$$R := \text{RÜCKTREPPEN}(\bar{D}_{t_0}, t_0, S, \omega, l|_{\bar{A}_{t_0}}, \hat{d}_{t_0}\rho, \rho, \hat{\Omega}, L_t).$$

Danach expandieren wir von den Quellen S aus. Für alle Knoten $i \in V$ legen wir Längenabstände ρ'_i und die Kostenabstände $\hat{\omega}_i$ der Anschlüsse H_t zwischen den Knoten i und der Senke t durch

$$i \in V: \quad \rho'_i = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ l(R_{i,1}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$i \in V: \quad \hat{\omega}_i = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ \omega(R_{i,n_i}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

fest. Wir berechnen Dipfadtreppen $R'_{i,1}, \ldots, R'_{i,n'_i}$ von den Quellen S aus:

$$R' := \text{TREPPEN}(\bar{D}_t, S, t, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{\omega}, \rho', \hat{\Omega}, L_t)$$

Für alle Knoten $i \in V$ kombinieren wir alle Dipfade P der Dipfadtreppe $R_{i,\cdot}$ und alle Dipfade P' der Dipfadtreppe $R'_{i,\cdot}$ zu einer (S, t_0)-Kette mit Länge $l(P) + l(P')$ und Kosten $\omega(P) + \omega(P')$. Die Kosten ω^*_i sind die Kosten der billigsten der (S, t_0)-Ketten, deren Länge kleiner oder gleich L_t ist, oder es ist $\omega^*_i = \infty$, falls keine solche Kette existiert. Die untere Schranke π_i für die reduzierten Kosten eines Anschlusses $P \in H_{t_0}$, der über den Knoten $i \in V$ führt, legen wir auf $\omega^*_i - u_{t_0}$ fest.

Nehmen wir an, daß die Dipfade P_1 und P_2 in dem Knoten i verzweigen, aber daß der Dipfad P_0 nicht über den Knoten i führt. Dann gilt für die Terme aus Ungleichung (5.8)

$$\begin{aligned} r(B \backslash P_0) + v_{t_0,\cdot}(B \backslash P_0) &\geq 2\phi_i \quad \text{und} \\ d_{t_0,P_0} + \sum_{a \in P_0} (v_{t_0,a} + r_a) - u_{t_0} &\geq 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß die Dipfade P_0 und o. B. d. A. P_1 in dem Knoten i verzweigen, dann gilt für die Terme aus Ungleichung (5.8)

$$\begin{aligned} r(B \backslash P_0) + v_{t_0,\cdot}(B \backslash P_0) &\geq \phi_i \quad \text{und} \\ d_{t_0,P_0} + v_{t_0,\cdot}(P_0) - u_{t_0} &\geq \pi_i. \end{aligned}$$

Also können die reduzierten Kosten $q_{\hat{T},B}$ eines Wurzelbaumes $B \in H_{\hat{T}}$, der in dem Knoten $i \in V$ verzweigt, nach Ungleichung (5.8) abgeschätzt werden durch

$$q_{\hat{T},B} \geq \min\{2\phi_i, \phi_i + \pi_i\}$$

Ist die rechte Seite dieser Abschätzung größer als die Lücke zwischen der oberen Schranke K und der unteren Schranke $u(T)$ für die optimale Lösung des Netzproblems Ψ, dann ist eine Verzweigung der Bogenmenge einer optimalen Wurzelwaldlösung des Problems Ψ in dem Knoten i nicht möglich. Wir weisen in diesem Fall den Knoten i der Menge V' zu.

5.3.7 Zusammensetzung der Reduktionsverfahren

In diesem Unterabschnitt beschreiben wir das Zusammenspiel der Reduktionsverfahren, die in den vorigen Unterabschnitten vorgestellt wurden. Die Anordnung dieser Reduktionsverfahren findet in den Verfahren KABELREDUKTION und NETZREDUKTION statt. In diesen wird das Unterverfahren LOKALTEST aufgerufen. Die Strategie bei dem Entwurf dieser Verfahren ist es, die einfachen und schnellen Testverfahren iterativ solange durchzuführen, bis sich keine weiteren Reduktionen aus diesen ergeben. Die komplizierteren Testverfahren werden weniger häufig aufgerufen.

Das Verfahren LOKALTEST

In dem Verfahren LOKALTEST werden die Unterverfahren GRADTEST1, GRADTEST2 und UMWEGTEST iterativ aufgerufen und die daraus folgenden Reduktionen durchgeführt. Das Verfahren LOKALTEST bricht ab, wenn sich keine weiteren Reduktionen mehr ergeben.

Die Eingabe des Verfahrens LOKALTEST ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten-Kandidaten, auf die die Verfahren GRADTEST1 und GRADTEST2 angewandt werden. Wir notieren

$$\text{LOKALTEST}(V').$$

Das Verfahren LOKALTEST(V') verläuft wie folgt.

1. Das Verfahren GRADTEST1(V') findet überflüssige Bögen B.
2. Das Verfahren GRADTEST2(V') findet Knoten W, für die eine YΔ-Transformation zulässig ist.
3. Die Knoten-Kandidaten sind bis auf die Senken abgearbeitet.
4. Mit ENTFERNE(B) werden die Bögen B eliminiert. Die Endknoten von B werden V' zugewiesen, d. h. $V' = V(B)$.
5. Für alle Knoten $j \in W$ werden die folgenden Schritte durchgeführt:
   (a) Das Verfahren YΔ-TRANSFORMATION(j) wird durchgeführt. In diesem werden neue Bögen B' erzeugt.
   (Die YΔ-Transformation ist so implementiert, daß die frühzeitige Entfernung von Bögen keine Schwierigkeiten in Schritt 4 verursacht.)
   (b) Das Verfahren UMWEGTEST(B') findet überflüssige Bögen $B'' \subseteq B'$, auf die das Verfahren ENTFERNE(B'') angewandt wird.
   (c) Die Nachbarn $\Gamma(j)$ des Knotens j werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen, das heißt $V' := V' \cup \Gamma(j)$.

6. Das Verfahren Lokaltest bricht ab, wenn die Knoten-Kandidaten V' leer sind, sonst setzt es mit dem ersten Schritt fort.

Das Verfahren Kabelreduktion

In dem Verfahren Kabelreduktion werden Unterverfahren Lokaltest, Senkentest, Umgehungstest aufgerufen. Diese Unterverfahren basieren auf dem Kabelproblem Π und nicht auf Reduzierte-Kosten-Kriterien, die sich aus der Betrachtung des Netzproblems ergeben. Die Unterverfahren werden iterativ solange durchgeführt, bis sich keine Reduktionen mehr ergeben.

Die Eingabe des Verfahrens Kabelreduktion ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten-Kandidaten, die mit dem Verfahren Lokaltest abgearbeitet werden sollen. Man beachte, daß nach Beendigung des Verfahrens Lokaltest die Knotenmenge V' leer ist. Wir notieren

KABELREDUKTION(V).

Die folgenden Schritte werden iterativ durchgeführt, solange die Knotenmenge V' nicht leer ist.

1. Das Verfahren Lokaltest(V') wird durchgeführt.

2. Das Verfahren Senkentest findet Bögen $\hat{A}$, auf die nacheinander das Verfahren Kontrahiere angewandt wird. Dabei werden Bögen $B \subseteq A$ verändert und Bögen $B' \subseteq A$ entfernt. Das Verfahren Umwegtest(B) findet überflüssige Bögen $B'' \subseteq B$, auf die das Verfahren Entferne(B'') angewandt wird. Die Knoten $V(B' \cup B'')$ der entfernten Bögen werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen.

3. Das Verfahren Lokaltest(V') wird durchgeführt.

4. Das Verfahren Erreichbarkeit findet Bögen B, die überflüssig sind. Das Verfahren Entferne(B) wird angewandt. Die Knoten $V(B)$ werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen.

5. Das Verfahren Lokaltest(V') wird durchgeführt.

6. Beim ersten Aufruf des Verfahrens Kabelreduktion wird das Verfahren Umgehungstest durchgeführt, bei späteren Aufrufen das Verfahren Brückentest. Das jeweilige Verfahren findet Bögen $\hat{A}$, auf die nacheinander das Verfahren Kontrahiere angewandt wird. Dabei werden Bögen aus der Menge $B \subseteq A$ verändert und die Bögen $B' \subseteq A$ entfernt.

   Das Verfahren Umwegtest(B) findet überflüssige Bögen $B'' \subseteq B$, auf die das Verfahren Entferne(B'') angewandt wird. Die Knoten $V(B' \cup B'')$ der entfernten Bögen werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen.

Das Verfahren NETZREDUKTION

In dem Verfahren NETZREDUKTION werden die Unterverfahren BOGENTEST, SENKENREICHWEITE und VERZWEIGUNGSTEST aufgerufen. In diesen Verfahren werden Reduzierte-Kosten-Kriterien überprüft. Anschließend wird das Verfahren KABELREDUKTION aufgerufen, um weitere Reduktionen zu erreichen.

Die Eingabe des Verfahrens NETZREDUKTION sind die Kosten K einer zulässigen Lösung des Kabelproblems Π und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ). Wir notieren

$$\text{NETZREDUKTION}(K, \tbinom{u}{v})$$

Man beachte, daß bei den Reduktionsverfahren die obere Schranke K und die Lösung $\binom{u}{v}$ mittransformiert werden.

Der erste Teil des Verfahrens NETZREDUKTION verläuft wie folgt:

1. Das Verfahren BOGENTEST($K, \binom{u}{v}$) findet überflüssige Bögen B.

2. Das Verfahren ENTFERNE(B) wird durchgeführt.

3. Das Verfahren KABELREDUKTION($V(B)$) wird durchgeführt.

4. Durch das Verfahren SENKENREICHWEITE($K, \binom{u}{v}$) werden überflüssige Bögen $B' \subseteq A$ gefunden.

5. Mit dem Verfahren VERZWEIGUNGSTEST($K, \binom{u}{v}$) werden Knoten W gefunden, in denen eine optimale Wurzelwald-Lösung des Kabelproblems Π nicht verzweigt.

6. Die überflüssigen Bögen B' werden mit dem Verfahren ENTFERNE(B') eliminiert. Die Endknoten $V(B')$ werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen.

7. Für alle Knoten $j \in W$ werden die folgenden Schritte durchgeführt:

   (a) Mit dem Verfahren YΔ-TRANSFORMATION(j) werden Bögen B neu erzeugt. Die Nachbarn $\Gamma(j)$ des Knotens j werden den Knoten-Kandidaten V' zugewiesen, das heißt $V' := V' \cup \Gamma(j)$.

   (b) Das Verfahren UMWEGTEST(B) findet überflüssige Bögen $B' \subseteq B$.

   (c) Die Bögen $B' \subseteq B$ werden mit dem Verfahren ENTFERNE(B') eliminiert.

8. Das Verfahren KABELREDUKTION(V') wird durchgeführt.

5.4 Heuristische Verfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir heuristische Verfahren zur Lösung eines Kabelproblems Π.

Die primalen Heuristiken WURZELWALD und RIPUP-REROUTE sind einfache Heuristiken, die in Verfahren zur Lösung des Steinerbaum-Problems in Graphen eingesetzt wurden und von uns sowie von Lauther und Malisch auf die zusätzlichen Bedingungen des Kabelproblems angepaßt wurden.

Dem Kabelproblem Π ordnen wir das Netzproblem Ψ zu. Eine erste zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ) berechnet die duale Heuristik DUAL-START. Die duale Heuristik DUAL-IMPROVE verbessert gegebene zulässige Lösungen des dualen Programms DDEKO(Ψ).

Wenn die Verbesserungsheuristiken RIPUP-REROUTE und DUAL-IMPROVE abbrechen, wird die duale Lösung entsprechend einer Lagrange-Heuristik mit dem Verfahren DUAL-IMPROVE verändert.

Die primale Heuristik NEUANSCHLUSS und die duale Heuristik NUTZPREIS-REFORM sind Verbesserungsheuristiken, in denen Schnittebenenverfahren aufgerufen werden.

Wir beschreiben die primalen Heuristiken in Unterabschnitt 5.4.1 die dualen Heuristiken in Unterabschnitt 5.4.2 und die Lagrange-Heuristik in Unterabschnitt 5.4.2.

5.4.1 Primale Heuristiken

Gegeben sei die aktuelle Instanz

$$\Pi = \text{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A),$$

des Kabelproblems.

Die Heuristik WURZELWALD

Die Eingabe für die Heuristik WURZELWALD ist eine Bogenmenge $A' \subseteq A$. Die Heuristik WURZELWALD berechnet l-kürzeste (S, t)-Wege Q_t eines aufspannenden Wurzelwaldes für alle Senken $t \in T$ in dem Subdigraphen (V, A'). Wir notieren

$$\text{WURZELWALD}(A')$$

Wenn für alle Senken $t \in T$ die Längenbeschränkung $\sum_{a \in Q_t} l_a \leq L_t$ gilt, dann definieren die Wege Q_t eine Wurzelwald-Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π. In dem Verfahren KABEL-OPT wird die Bogenmenge A' stets so vorgegeben, daß dieser Fall eintrifft.

Die Heuristik Ripup-Reroute

Die Eingabe für die Heuristik Ripup-Reroute ist eine zulässige Wurzelwald-Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π. Die Heuristik Ripup-Reroute löst iterativ Verbindungsdipfade zwischen Teilbäumen des Wurzelwaldes B auf und sucht nach einer kostengünstigeren Wiederanbindung der von den Wurzeln bzw. den Quellen abgetrennten Senken. Auf diese Weise wird eine bessere zulässige Lösung des Kabelproblems Π berechnet. Wir notieren

$$\text{Ripup-Reroute}(B, Q)$$

Die Grundidee des Verfahrens versteht man am besten in ihrer ursprünglichen Form, in der sie für das Steinerbaum-Problem in Graphen eingesetzt worden ist [Len90]. Gegeben ist ein Steinerbaum in einem Graphen, der die Terminals aufspannt. Wenn man einen Pfad dieses Baumes auflöst, dessen innere Knoten keine Verzweigungsknoten sind, dann erhält man zwei Teilbäume, die jeweils eine Teilmenge der Terminals aufspannen. Die Teilbäume verbindet man mit einem bezüglich der Bogenkosten kürzesten Pfad. Wenn dieser Pfad kürzer ist als der aufgelöste, dann ist ein neuer besserer Steinerbaum gefunden worden. Bei der Anpassung dieses Verfahrens für das Steinerbaum-Problem in Graphen müssen wir zu gerichteten Graphen übergehen und die Längenbeschränkungen für zulässige Lösungen des Kabelproblems beachten. Das Vorgehen wird in Abbildung 5.4 veranschaulicht.

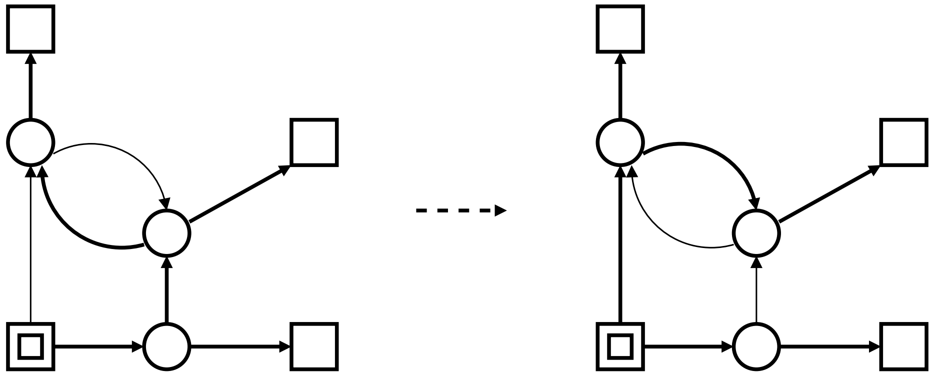

Abbildung 5.4: Veränderung einer Lösung in dem Verfahren Ripup-Reroute. Die Bogenmenge der Lösung ist fett gedruckt. Die Quelle und die Senken sind quadratisch, die Netzknoten als Kreise dargestellt.

Gegeben sei die zulässige Lösung (B, Q) des Kabelproblems. Den Wurzelwald B partitionieren wir in Dipfade $C_0, \ldots, C_n$, so daß die inneren Knoten dieser Dipfade genau diejenigen Netzknoten sind, in denen der Wurzelwald B nicht verzweigt. Die Endknoten der Dipfade aus C sind daher Netzknoten, in denen der Wurzelwald B verzweigt, oder es sind Quellen bzw. Senken.

Iterativ lösen wir Dipfade C_m, $1 \leq m \leq n$, auf. Dadurch trennen wir den Wurzelwald B in zwei Teile. Den Wurzelbaum $B' \subseteq B$, dessen Wurzel k' der Endknoten des Dipfads C_m ist, und den Wurzelwald $\tilde{B} = B \backslash (C_m \cup B')$, dessen Wurzeln die Quellen S sind. Die Knoten des Wurzelwaldes $\tilde{B}$ und die Knoten aller Quellen bezeichnen wir mit $\tilde{V} = V(\tilde{B}) \cup S$. Wir suchen nach einer besseren Wiederanbindung der Senken T' des Wurzelbaums B'.

Zuerst erzeugen wir neue Wurzelbäume B''_k mit Wurzel $k \in V(B')$ indem wir, ausgehend von dem Wurzelbaum B', wiederholt Bögen $(i,j) \in B'$ jeweils durch einen antiparallelen Bögen (j,i) ersetzen, wenn dieser gleiche Bogenkosten $c_{(j,i)} = c_{(i,j)}$ hat.

Die Knoten $k \in V(B')$, für die ein Wurzelbaum B''_k konstruiert werden kann, bezeichnen wir mit W. Für alle $k \in W$ sind die Bogenkosten des Wurzelbaumes B' und des Wurzelbaumes B''_k gleich. Seien Q''_t, $t \in T'$, die (k,t)-Dipfade des Wurzelbaumes B''_k, dann bezeichnen wir mit

$$\pi_k = \sum_{t \in T'} \hat{d}_t l(Q''_t),$$

die Dipfadkosten des Wurzelbaums B''_k und mit

$$\lambda_k = \min_{t \in T} \{L_t - l(Q''_t)\}$$

die Längenbeschränkung für einen (S,k)-Dipfad, der die Wurzel k an die Quellen anbindet.

Wir suchen für alle $k \in W$ einen billigsten (S,k)-Dipfad P, der die Längenbeschränkung $\sum_{a \in P} l_a \leq \lambda_k$ erfüllt. Dazu berechnen wir Dipfadtreppen mit den folgenden Parametern:

Aus dem Digraphen D entfernen wir alle Bögen $(i,j) \in A \backslash \tilde{B}$, für die $i \in V(B')$ oder $j \in \tilde{V}$ gilt. Den so präparierten Digraphen bezeichnen wir mit $D' = (V, A')$. Jedem Bogen $(i,j) \in A'$ ordnen wir Kosten

$$\omega_{(i,j)} = \begin{cases} \hat{d}(T') l_{(i,j)} & \text{falls } (i,j) \in \tilde{B}, \\ c_{(i,j)} + \hat{d}(T') l_{(i,j)} & \text{falls } j \notin V(B'), \\ c_{(i,j)} + \hat{d}(T') l_{(i,j)} + \pi_j & \text{falls } j \in W, \end{cases}$$

zu, die sich aus ursprünglichen Bogenkosten $c_{(i,j)}$, Dipfadkosten $\hat{d}(T') l_{(i,j)}$ und den Wurzelbaumkosten π_j zusammensetzen. Jedem Bogen $(i,j) \in A'$ ordnen wir Längen

$$l'_{(i,j)} = \begin{cases} l_{(i,j)} & \text{falls } j \notin V(B'), \\ l_{(i,j)} - \lambda_j + \Lambda & \text{falls } j \in W, \end{cases}$$

für ein großes $\Lambda = \sum_{a \in A} l_a$, zu, die sich aus ursprünglichen Bogenlängen $l_{(i,j)}$ und der Längenbeschränkung λ_j zusammensetzen. Den l-Längenabstand von den

Quellen in dem Digraphen D bezeichnen wir mit ρ_i für jeden Knoten $i \in V$. Aus dem l-Längenabstand ergibt sich ein Dipfadkosten-Abstand von den Quellen in dem Digraphen D von $\hat{d}(T')\rho_i$ für jeden Knoten $i \in V$. Als Längenbeschränkung setzen wir Λ ein. Als Kostenbeschränkung $\hat{\Omega}$ für einen $(\tilde{V}, V(B'))$-Dipfad setzen wir die Teilkosten der ursprünglichen Verbindung ein. Dieses sind die Dipfadkosten der Senken des Wurzelbaumes $\sum_{t\in T} \hat{d}_t l(Q_t)$ und die Bogenkosten des Verbindungsdipfades $c(C_m)$. Wir expandieren von den möglichen Wurzeln W aus und berechnen Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$, $i \in V$, mit dem Verfahren

$$R := \textsc{Rücktreppen}(D', W, S, \omega, l', \hat{d}(T')\rho, \rho, \hat{\Omega}, \Lambda).$$

Aus den (S,k)-Dipfaden $R_{k,m}$, $k \in W$, $1 \leq m \leq n_k$, wählen wir den Dipfad P^* mit minimalen Kosten $\omega(P^*)$ aus. Sind die Kosten $\omega(P^*) \leq \hat{\Omega}$, dann gehen wir zu der billigeren Wurzelwald-Lösung $(\hat{B}, \hat{Q})$, mit $\hat{B} = \tilde{B} \cup P^* \cup B''_{k^*}$, der Instanz Π über. Die Dipfade $\hat{Q}_t$, $t \in T \backslash T'$, sind durch den Wurzelwald $\hat{B}$ eindeutig definiert.

Wir passen die Dipfadfamilie C der neuen Lösung an. Danach lösen wir jeweils wieder Dipfade aus der aktuellen Familie C auf und versuchen eine Verbesserung der aktuellen primalen Lösung zu erreichen. Das Verfahren bricht ab, wenn für alle Dipfade der Familie C keine Verbesserung erreicht werden konnte.

Das Verfahren Senkenpartition

In den Verfahren Neuanschluss wird eine Partition der Senken für die folgende Verbesserungsstrategie benötigt. Für eine gegebene Lösung (B, Q) des Kabelproblems und die Teilmengen $T' \subseteq T$ der Partition der Senken wird die Auswahl der Dipfade Q_t, $t \in T \backslash T'$, beibehalten und unter dieser Voraussetzung eine optimale Auswahl der Anschlußdipfade für die Senken $t \in T'$ gesucht. In ähnlicher Weise werden Partitionen der Senken auch in der dualen Heuristik Nutzpreisreform benötigt.

Die Zielvorstellung für die Wahl dieser Teilmenge T' ist, daß alle Senken in einem Wurzelbaum $B' \subseteq B$ enthalten sind, der mit den Anschlußdipfaden Q_t, $t \in T \backslash T'$, keinen Bogen gemeinsam hat.

Dieser Zielvorstellung versuchen wir mit dem Verfahren Senkenpartition nahezukommen. Das Verfahren Senkenpartition berechnet eine Partition der Senken T. Die Eingabe des Verfahrens Senkenpartition ist eine zulässige Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π und eine Zahl k, die die Richtgröße für die Anzahl der Senken in den Partitionsmengen darstellt. Wir notieren

$$\textsc{Senkenpartition}((B, Q), k).$$

Die Senkenmenge U enthält die Senken, die noch nicht auf eine Partitionsmenge verteilt wurden. Zu Beginn ist $U := T$. Für Indizes $m = 1, 2, \ldots$ weisen wir Teilmengen der Senken U den Partitionsmengen $T'_m := \emptyset$ wie folgt zu:

1. Sei n_a für alle Bögen $a \in A$ die Anzahl der Dipfade Q_t, $t \in U$, mit $a \in Q_t$. Wir wählen einen Bogen b aus, der $|n_b - k|$ minimiert. Alle Senken $t \in U$, mit $b \in Q_t$ werden der Partitionsmenge T'_m zugewiesen, das heißt

$$T'_m := T'_m \cup \{t \in T \mid b \in Q_t\} \text{ und } U := U \backslash \{t\}.$$

2. Falls $n_b \geq \frac{2k}{3}$ ist, setzen wir $m := m + 1$. Wenn nicht, dann lassen wir den Index m unverändert und füllen in der nächsten Runde die Senkenmenge T'_m weiter auf.

Die Heuristik Neuanschluss

Die Eingabe der Heuristik Neuanschluss ist eine zulässige Lösung (B, Q) des Netzproblems Π und eine Senkenmenge $T' \subseteq T$. Die Heuristik Neuanschluss sucht nach einer besseren Lösung (B', Q') des Netzproblems Π mit gleichbleibenden Dipfaden $Q'_t = Q_t$ für alle Senken $t \in T \backslash T'$. Wir notieren

$$\textsc{Neuanschluss}((B, Q), T').$$

Die neuen Anschlüsse Q'_t, $t \in T'$, berechnen wir durch Lösung des Netzproblems

$$\Psi' = \text{NETZ}(A, T', H|_{T'}, c', d|_{\mathcal{E}(H|_{T'_m})}) \tag{5.9}$$

mit Bauteilkosten

$$c'_a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in \bigcup_{t \in T \backslash T'} Q_t, \\ c_a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Netzproblem lösen wir mit einem exakten Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren, das wir in Abschnitt 5.6 beschreiben. Das Netzproblem Ψ' ist in der Regel leichter zu lösen als das Netzproblem Ψ, da die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen in dem linearen Programm LDEKO(Ψ') verringert wurde durch die Beschränkung auf die Teilmenge T' und die Festlegung mehrerer Bogenkosten auf null.

Wenn die Kosten einer optimalen Lösung (B^*, Q^*) des Netzproblems Ψ' kleiner sind als die Kosten

$$\sum_{a \in \bigcup_{t \in T'} Q_t} c'_a + \sum_{t \in T'} d_{t, Q_t}$$

dann wählen wir $Q'_t = Q^*_t$, $t \in T'$, für die neuen Anschlüsse. Ansonsten wählen wir $Q'_t = Q_t$, $t \in T'$, und halten an der alten Auswahl fest.

5.4.2 Duale Heuristiken

In diesem Unterabschnitt beschreiben wir die Verfahren DUAL-START, DUAL-IMPROVE und DUAL-GRADIENT mit denen zulässige Lösungen des dualen Programms DDEKO(Ψ) erzeugt, verbessert bzw. verändert werden.

Das lineare Programms LDEKO(A, T, H, c, d) hat die Formulierung:

$$\begin{array}{llcccll}
 & \min & c^T x & + & \sum_{t \in T, P \in H_t} & y_{t,P} d_{t,P} & \\
(5.10) & \forall\, t \in T: & & & \sum_{P \in H_t} & y_{t,P} & = 1 \\
(5.11) & \forall\, t \in T,\, a \in A: & x_a & - & \sum_{P \in H_t} & y_{t,P} \chi_a^P & \geq 0 \\
(5.12) & & x, & & & y & \geq 0.
\end{array}$$

Das duale Programm DDEKO(A, T, H, c, d) hat die Formulierung:

$$\begin{array}{llcccll}
 & \max \sum_{t \in T} u_t & & & & & \\
(5.13) & \forall\, a \in A: & & & \sum_{t \in T} & v_{t,a} & \leq c_a \\
(5.14) & \forall\, t \in T,\, P \in H_t: & u_t & - & \sum_{a \in P} & v_{t,a} & \leq d_{t,P} \\
(5.15) & & & & & v & \geq 0.
\end{array}$$

Die Heuristik DUAL-IMPROVE

Das Verfahren DUAL-IMPROVE verbessert eine dual zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ). In einigen Fällen sollen nur die Zielpreise u_t und die Nutzpreise $v_{t,\cdot}$ der Senken $t \in T'$ einer Teilmenge $T' \subseteq T$ verändert werden. Wir notieren

$$\text{DUAL-IMPROVE}(\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right), T').$$

Die Senken $t'_1, \ldots, t'_n$ aus T' seien nach aufsteigendem l-Abstand von den Quellen S in dem Digraphen D angeordnet.

Iterativ führen wir für die Senke $t = t'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, das folgende Verbesserungsverfahren solange durch, bis keine Verbesserung mehr gefunden wird:

1. Seien $(r_a)_{a\in A}$ die reduzierten Kosten $r_a = c_a - \sum_{t'\in T} v_{t',a}$ der Bauteilvariablen x_a. Die reduzierten Kosten r schlagen wir implizit den Nutzpreisen $v_{t,\cdot}$ zu. Wir legen Bogenkosten $(\omega_a)_{a\in\bar{A}_t}$ durch
$$\omega_a = v_{t,a} + r_a + \hat{d}_t l_a$$
für alle Bögen a des Senkendigraphen $\bar{D}_t$ fest.

2. Für einen Pool von Anschlüssen $H'_t \subseteq H_t$ berechnen wir die minimalen Kosten
$$\hat{\Omega} = \min_{P\in H'_t} \omega(P).$$
Wenn die Senke t das erste Mal behandelt wird, berechnen wir u_t und $v_{t,\cdot}$ wie in Schritt 3. Sind ansonsten die minimalen Kosten $\hat{\Omega}$ und der Zielpreis u_t gleich, dann lassen wir den dualen Vektor $\binom{u}{v}$ unverändert und setzen das Verfahren mit der nächsten Senke fort.

3. Wir berechnen bezüglich der Bogenkosten ω kürzeste (S,t)-Dipfade P in dem Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, mit durch L_t beschränkter Länge $\sum_{a\in P} l_a$. Die l-Abstände ρ_i der Knoten $i \in V$ von den Senken können bei einer Expansion von der Senke t aus als untere Schranken für Vervollständigungslängen und Vervollständigungskosten von (i,t)-Teildipfaden genutzt werden.

   Wir berechnen zuerst Dipfadtreppen $R_{i,1},\ldots,R_{i,n_i}$, $i\in V$,
$$R := \text{Rücktreppen}(\bar{D}_t, t, S, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{d}_t\rho, \rho, \hat{\Omega}, L_t). \tag{5.17}$$
   Auf diese Weise ermitteln wir auch einen kostenminimalen Anschluß $P^* \in H_t$,
$$\omega(P^*) = \min_{P\in H_t}\{\omega(P)\}.$$
   Sind die Kosten $\omega(P^*)$ gleich dem Zielpreis u_t, dann lassen wir den dualen Vektor unverändert und setzen das Verfahren mit der nächsten Senke fort.

   Ansonsten erhöhen wir den Zielpreis u_t auf $\omega(P^*)$ und die Nutzpreise $v_{t,\cdot}$ so, daß der veränderte duale Vektor die Bauteilbedingungen und die Anschlußbedingungen der Senke t erfüllt.

   Dazu berechnen wir kleinstmögliche Bogenkosten $(\omega'_a)_{a\in\bar{A}_t}$, mit $\hat{d}_t l \le \omega' \le \omega$ und der Eigenschaft:
   Für alle Bögen $(i,j)\in\bar{A}_t$, alle (j,t)-Dipfade P aus $R_{j,\cdot}$ gilt $l(P) + l_{(i,j)} > L_t - \rho_i$ oder $\omega(P) + \omega'_{(i,j)} \ge \hat{\Omega} - \hat{d}_t\rho_i$, oder es existiert ein (i,t)-Dipfad P' aus $R_{i,\cdot}$ mit $l(P) + l_{(i,j)} \ge l(P')$ und $\omega(P) + \omega'_{(i,j)} \ge \omega(P')$.

4. Mit diesen Bogenkosten setzen wir die Nutzpreise $v_{t,\cdot}$ und den Zielpreis u_t auf

$$v_{t,a} := \begin{cases} \omega_a - \hat{d}_t l_a & \text{falls } a \in \bar{A}_t, \\ 0 & \text{falls } a \in A \backslash \bar{A}_t, \end{cases},$$
$$u_t := \omega(P^*) = \omega'(P^*).$$

Anschließend setzen wir das Verfahren mit der nächsten Senke fort.

Das Heuristik Dual-Start

Das Verfahren Dual-Start wird im Rahmen des Preprocessing aufgerufen. Die Eingabe des Verfahrens Dual-Start ist eine zulässige Lösung (B, Q) des Netzproblems Ψ. Es wird eine Startlösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) berechnet. Wir notieren

$$\text{Dual-Start}(B, Q).$$

Die Senken $t_1, \ldots, t_n$ aus T seien nach aufsteigendem l-Abstand von den Quellen S in dem Digraphen D angeordnet. Für alle Senken t_i, $i = 1, \ldots, n$, setzen wir $u_{t_i} = 0$ und

$$v_{t_i,a} = \begin{cases} c_a & \text{falls } a \in Q_{t_i} \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} Q_{t_j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschließend starten wir das Verfahren Dual-Improve($\binom{u}{v}$, T).

Die Heuristik Nutzpreisreform

Die Eingabe des Verfahrens Nutzpreisreform ist eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) und eine Teilmenge T' der Senken T. Das Verfahren Nutzpreisreform berechnet optimale Zielpreise u_t^* und neue Nutzpreise $v_{t,\cdot}^*$ für alle Senken $t \in T'$ bei Beibehaltung der restlichen dualen Variablen. Wir notieren

$$\text{Nutzpreisreform}(\binom{u}{v}, T').$$

Wir formulieren das Netzproblem

$$\Psi' = \text{NETZ}(A, T', H|_{T'}, c', d|_{\mathcal{E}(H|_{T'})})$$

mit den Bauteilkosten

$$c'_a = c_a - \sum_{t' \in T \backslash T'} v_{t,a}, \quad a \in A.$$

Eine optimale Lösung $\binom{u^*}{v^*}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ') wird mit einem Schnittebenenverfahren berechnet, das in Abschnitt 5.6 beschrieben wird. Das duale Programm DDEKO(Ψ') ist in der Regel leichter zu lösen als das duale Programm DDEKO(Ψ), da es weniger Variablen und weniger Nebenbedingungen enthält.

Falls $\sum_{t\in T'} u_t^* \geq \sum_{t\in T'} u_t$, dann wird die Lösung $\binom{u}{v}$ verbessert, daß heißt die Variablen aus $\binom{u^*}{v^*}$ werden den entsprechenden Variablen aus $\binom{u}{v}$ zugewiesen. In diesem Fall starten wir das Verfahren DUAL-IMPROVE($\binom{u}{v}, T'$).

Lagrange-Relaxierung

Die Methode der Lagrange-Relaxierung mit Subgradienten-Optimierung wurde von Held und Karp auf ganzzahlige Programme und diskrete Optimierung angewendet [HK70, HK71]. Übersichtsartikel über die Anwendung der Methode der Lagrange-Relaxierung wurden u. a. von Fisher, Geoffrion und Shapiro verfaßt [Fis85b, Fis85a, Geo74, Sha79].

Wir formulieren eine Lagrange-Relaxierung für das Programm LDEKO. In dem Programm LDEKO relaxieren wir die Nutzpreisbedingungen (5.11). Mit den Nutzpreisen v als Lagrange-Multiplikatoren erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(v) = \min\left\{ \sum_{t\in T}\sum_{a\in A} v_{t,a}\left(\sum_{P\in H_t} y_{t,P}\chi_a^P - x_a\right) + c^T x + d^T y \;\middle|\; x \text{ und } y \text{ sind binär und } \sum_{P\in H_t} y_{t,P} = 1,\, t\in T. \right\} \tag{5.18}$$

Gegeben seien nichtnegative Nutzpreise v und für alle Senken $t\in T$ kostenminimale Anschlüsse $Q_t^*(v)\in H_t$, so daß

$$d_{t,Q_t^*(v)} + \sum_{a\in Q_t^*(v)} v_{t,a} = \min_{P\in H_t}\left\{ d_{t,P} + \sum_{a\in P} v_{t,a}\right\}.$$

Sei $B^* := \bigcup_{t\in T} Q_t^*$, dann wird das Minimum in (5.18) durch den primalen Vektor $\begin{pmatrix} x^*(v)\\ y^*(v)\end{pmatrix}$ mit der Belegung

$$x_a^*(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{t\in T} v_{t,a} > c_a \\ 1 & \text{falls } \sum_{t\in T} v_{t,a} = c_a \text{ und } a\in B^* \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \quad \text{für alle } a\in A \text{ und} \tag{5.19}$$

$$y_{t,P}^*(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } P = Q_t^*(v), \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \quad \text{für alle } t\in T \text{ und alle } P\in H_t$$

angenommen.

Die partiellen Ableitungen

$$\partial_{t,a}\mathcal{L}(v) := \frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_{t,a}},\ t \in T,\ a \in A,$$

sind mindestens dann definiert, wenn der Wert der Bogenvariablen x_a^* und der Wert der Nutzungsvariablen $z_{t,a}^* := \sum_{P\in H_t} y_{t,P}^* \chi_a^P$ einer Minimum-Lösung in der Definition der Lagrange-Funktion eindeutig sind. In diesem Fall gilt die Gleichung

$$\partial_{t,a}\mathcal{L}(v) = \sum_{P\in H_t} y_{t,P}^* \chi_a^P - x_a^* .$$

Die Lagrange-Funktion ist dann stetig. Ist die Bauteilbedingung $\sum_{t\in T} v_{t,a} \leq c_a$ für ein Bauteil a verletzt, dann ist die Bauteilvariable x_a^* gleich eins und die partielle Ableitung $\partial_{t,a}\mathcal{L}(v) \leq 0$. Also nimmt die Lagrange-Funktion ein Maximum für nichtnegative Nutzpreise v an, die die Bedingungen $\sum_{t\in T} v_{t,a} \leq c_a$ für alle Bauteile $a \in A$ erfüllen.

Für nichtnegative Nutzpreise v, die die Bedingungen $\sum_{t\in T} v_{t,a} \leq c_a$, $a \in A$, erfüllen, sind die Kosten $c_a x_a^*(v)$ und $\sum_{t\in T} v_{t,a} x_a^*(v)$ für alle Bögen $a \in A$ gleich. Es gilt

$$\mathcal{L}(v) = \sum_{t\in T}\left(\sum_{a\in Q_t^*(v)} v_{t,a} + d_{t,Q_t^*(v)}\right).$$

Sei $\binom{u}{v}$ eine zulässige Lösung des dualen Programms DDEKO mit maximalen Zielpreisen

$$t \in T: \quad u_t = \min_{P\in H_t}\{d_{t,P} + v_{t,P}\},$$

dann sind die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(v)$ und die duale Zielpreissumme $u(T)$ gleich. Ein nichtnegativer Nutzpreisvektor v, der die Bauteilbedingungen erfüllt und für den die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(v)$ ein Maximum annimmt, führt daher gleichzeitig auch zu einer optimalen Lösung des dualen Programms DDEKO.

Wir führen in Abhängigkeit von der Dipfadfamilie Q einer primalen Lösung (B, Q) mit $B = \bigcup_{t\in T} Q_t$ den Vektor

$$(\Lambda_{t,a}(v, B, Q))_{t\in T, a\in A} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in Q_t \text{ und } \ c_a > \sum_{t\in T} v_{t,a}, \\ -1 & \text{falls } a \in B\backslash Q_t \text{ und } \ c_a = \sum_{t\in T} v_{t,a}, \\ -1 & \text{falls } c_a < \sum_{t\in T} v_{t,a} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein. Der Vektor $\Lambda(v, B^*, Q^*(v))$ ist eine Fortsetzung des Gradienten $\nabla\mathcal{L}(v)$, denn es gilt:

$$(\Lambda_{t,a}(v, B^*, Q^*(v))_{t\in T, a\in A} = \left(\sum_{t\in T}\sum_{P\in H_t} y_{t,P}^*(v)\chi_a^P - x_a^*(v)\right)_{t\in T, a\in A}.$$

Wir benutzen den einfach zu bestimmenden Vektor Λ für den im folgenden Verfahren DUAL-GRADIENT beschriebenen Kern einer Lagrange-Iteration.

Das Verfahren DUAL-GRADIENT

Das Verfahren DUAL-GRADIENT verändert die Nutzpreise v einer zulässigen Lösung $\binom{u}{v}$ in Abhängigkeit von einer primalen Lösung (B,Q) und von zwei Vorfaktoren, θ_1 für die Bogenkosten und θ_2 für die reduzierten Kosten der Bögen.

Wir notieren

$$\text{DUAL-GRADIENT}\,((B,Q),\binom{u}{v},\theta_1,\theta_2)$$

Die Eingabedaten sind so konstruiert, daß für alle Bögen $a \in B$ die Beziehung $c_a = \sum_{t\in T} v_{t,a}$ vorausgesetzt werden darf. Das bedeutet $\Lambda_{t,a}(v,B,Q) = -1$ für alle $a \in B$ und alle $t \in T$ mit $a \notin Q_t$.

1. Wir setzen für alle $a \in B$ und alle $t \in T$ mit $a \notin Q_t$:

$$v_{t,a} := \{0, v_{t,a} - \theta_1 c_a\}$$

2. Wir bilden für die so veränderten Nutzpreise die reduzierten Kosten $r_a = c_a - \sum_{t\in T} v_{t,a}$. Für alle Bögen $a \in B$ sei n_a die Anzahl der Senken $t \in T$ mit $\Lambda_{t,a}(v,B,Q) = 1$, bzw. $r_a > 0$ und $a \in Q_t^*$. setzen

$$v_{t,a} := \begin{cases} v_{t,a} + \theta_1 c_a + \theta_2 r_a & \text{falls } n_a(\theta_1 c_a + \theta_2 r_a) \le r_a, \\ v_{t,a} + \frac{r_a}{n_a} & \text{falls } n_a(\theta_1 c_a + \theta_2 r_a) > r_a, \end{cases}$$

3. Die so erhaltenen Nutzpreise v erfüllen die Bauteilbedingungen $\sum_{t\in T} v_{t,a} \le c_a$. Wir starten das Verfahren DUAL-IMPROVE$(\binom{u}{v}, T)$, um den dualen Vektor $\binom{u}{v}$ zu einer zulässigen Lösung zu verändern und anschließend zu verbessern.

5.5 Das Hauptverfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir das Zusammenspiel der Heuristiken mit den Reduktionsverfahren KABELREDUKTION und NETZREDUKTION in dem Hauptverfahren KABEL-OPT. Das Hauptverfahren gliedert sich in drei Phasen, die Eröffnungsphase, die Lagrange-Phase und die BCP-Phase.

Die Eröffnungsphase

Als Eingabedaten für die Eröffnungsphase START-UP ist eine Instanz des Kabelproblems erzeugt worden. Diese wird zuerst mit dem Verfahren KABELREDUKTION reduziert. Anschließend berechnet das Verfahren WURZELWALD(A) eine Wurzelwald-Lösung (B, Q). Dabei ist B ein l-kürzeste-Wege-Wurzelwald in dem Digraphen D. Mit dem Verfahren SENKENREICHWEITE werden die Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$ für alle Senken $t \in T$ berechnet. Der Aufruf des Verfahrens SENKENREICHWEITE dient hier in erster Linie der Initialisierung der Datenstrukturen für die aktuelle duale Lösung und der Datenstrukturen für die Anschlußdigraphen. Mit dem Verfahren DUAL-START(B, Q) wird dann eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) berechnet. Für alle Senken $t \in T$ werden die kürzesten Wege Q'_t des Pricing-Problems

$$\min_{P \in H_t} \left(d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a} \right)$$

berechnet und B' gleich $\bigcup_{t \in T} Q'_t$ gesetzt. Das Verfahren WURZELWALD$(\bigcup_{t \in T} Q'_t)$ berechnet eine Wurzelwald-Lösung (B'', Q''), die mit RIPUP-REROUTE(B'', Q'') verbessert wird.

Die Lagrange-Phase

In der Lagrange-Phase werden iterativ die primale Heuristik RIPUP-REROUTE, die duale Heuristik DUAL-GRADIENT und das Reduktionsverfahren NETZREDUKTION aufgerufen. Das Ziel ist, die Lücke zwischen der oberen und der unteren Schranke für den Optimalwert des Kabelproblems so zu verringern, daß signifikante Reduktionen des Kabelproblems bzw. des zugeordneten Netzproblems möglich sind.

Eingabe für die Lagrange-Phase sind:

- Eine obere Schranke K.
- Eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des Programms DDEKO(Ψ).
- Eine zulässige Lösung (B^+, Q^+) des Kabelproblems Π, so daß Q_t^+, $t \in T$, eine Lösung des Pricingproblems $\min_{P \in H_t}(d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a})$ ist und $B^+ = \bigcup_{t \in T} Q_t^+$ gilt.

Die Lagrange-Phase verläuft wie folgt:

1. (a) Mit der Heuristik WURZELWALD(B^+) wird eine primale Lösung berechnet, die mit dem Verfahren RIPUP-REROUTE verbessert wird. Die so erhaltene Lösung verbessert gegebenfalls die obere Schranke K.

   (b) Sei $k := 1, \ldots$ die Anzahl der Aufrufe von DUAL-GRADIENT innerhalb der Heuristik LAGRANGE-VERBESSERN. Die Heuristik

   $$\text{DUAL-GRADIENT}\left((B^+, Q^+), \binom{u}{v}, \frac{1}{100\sqrt{k}}, \frac{1}{10\sqrt{k}}\right)$$

   verändert die duale Lösung $\binom{u}{v}$, an die die Lösung (B^+, Q^+) so angepaßt wird, daß weiterhin gilt: $B^+ = \bigcup_{t \in T} Q_t^+$ und

   $$d_{t,Q_t^+} + \sum_{a \in Q_t^+} v_{t,a} = \min_{P \in H_t} d_{t,P} + \sum_{a \in P} v_{t,a}.$$

   Die Faktoren $\frac{1}{100\sqrt{k}}$ und $\frac{1}{10\sqrt{k}}$ bestimmen die Schrittweite der Lagrange-Iteration. Sie wurden aufgrund experimenteller Beobachtungen für die behandelten Datensätze gewählt.

   (c) Falls die primale oder die duale Schranke verbessert worden ist, fahre fort mit Schritt 1a, sonst fahre fort mit Schritt 2.

2. Das Verfahren NETZREDUKTION($K, \binom{u}{v}$) wird durchgeführt. Wenn die aktuelle Instanz des Kabelproblems oder des Netzproblems reduziert wird, wird die obere Schranke K und die duale Lösung $\binom{u}{v}$ an die neue Instanz angepaßt.

3. Falls in Schritt 2 Reduktionen bewirkt wurden, wird das Verfahren DUAL-IMPROVE($\binom{u}{v}, T$) durchgeführt um die duale Lösung zu verbessern. Anschließend wird mit den Verfahren WURZELWALD und RIPUP-REROUTE die primale Lösung (B^+, Q^+) an die Reduktionen angepast.

4. Falls zehnmal bei dem Aufruf des Verfahrens NETZREDUKTION keine Reduktion des Digraphen D erreicht wurde, bricht die Lagrange-Phase ab, ansonsten fährt sie mit Schritt 1a fort.

   Bei unseren experimentellen Beobachtungen stellte sich heraus, daß in der Regel nach fünf erfolglosen Aufrufen des Verfahrens NETZREDUKTION mit keinen weiteren Verbesserungen mehr zu rechnen ist.

Der Wahl der Faktoren $\frac{1}{100\sqrt{k}}$ und $\frac{1}{10\sqrt{k}}$ als Parameter des Verfahrens DUAL-GRADIENT bzw. für die Schrittweite der Lagrange-Iterationen liegt die folgende Beobachtung zugrunde. Die Lagrange-Iteration des Verfahrens DUAL-GRADIENT wird mit dem Verbesserungsverfahren DUAL-IMPROVE kombiniert. Bei sehr kleinen Schrittweiten erfolgt unter Umständen keine Veränderung der dualen Lösung. Wir haben daher insbesondere die Parameterbelegung $\frac{1}{100k}$ und $\frac{1}{10k}$ verworfen.

Die BCP-Phase

In der BCP-Phase werden die Verfahren Neuanschluss, Nutzpreisreform und Netzreduktion aufgerufen. Die Verbesserungen der primalen und dualen Schranken werden durch die Formulierung von Netzproblemen auf einer Teilmenge der Senken und durch dessen Lösung mit einem exakten Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren erreicht.

Eingabe für die BCP-Phase sind:

- Eine obere Schranke K.
- Eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des Programms DDEKO(Ψ).
- Eine zulässige Lösung (B^+, Q^+) des Kabelproblems Π, so daß für alle $t \in T$ der Dipfad Q_t^+ eine Lösung des Pricingproblems $\min_{P \in H_t}(d_{t,P} - \sum_{a \in P} v_{t,a})$ ist und $B^+ = \bigcup_{t \in T} Q_t^+$ gilt.

Die Zahl k bestimmt die Richtgröße für die Kardinalität der Partitionsmengen der Senken T. Bei der Wahl dieser Richtgröße müssen wir einen Kompromiß eingehen zwischen der Zielvorstellung möglichst wenige aber möglichst schnell lösbare (ganzzahlige) lineare Programme in den Verfahren Neuanschluss und Nutzpreisreform zu berechnen.

1. Initialisiere $k := \left\lceil \sqrt{T} \right\rceil$.
2. (a) Finde mit dem Verfahren Wurzelwald(B^+) eine Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π und verbessere diese mit dem Verfahren Ripup-Reroute(B, Q).
   (b) Das Verfahren Senkenpartition($(B, Q), k$) erzeugt eine Partitionierung der Senken T, so daß in den Partitionsmengen ca. k Senken möglichst eines Teilwurzelbaums von B enthalten sind.
   Für alle Partitionsmengen $T' \subseteq T$:
      i. Verbessere mit dem Verfahren Neuanschluss($(B, Q), T'$) gegebenfalls die Lösung (B, Q).
      ii. Verbessere mit dem Verfahren Nutzpreisreform($\binom{u}{v}, T'$) gegebenfalls die Lösung $\binom{u}{v}$.
   (c) Reduziere mit dem Verfahren Netzreduktion($\binom{u}{v}, K$) das Kabelproblem Π.
   (d) Falls in Schritt 2c Reduktionen bewirkt wurden, verbessere die duale Lösung mit Dual-Improve($\binom{u}{v}, T$) und passe die Lösung (B^+, Q^+) an die Reduktionen an.
   (e) Setze $k := 2k$.
   (f) Falls $\frac{3k}{2} > |T|$, dann wird das vollständige Netzproblem Ψ mit einem BCP-Verfahren gelöst. Ansonsten setzt die BCP-Phase mit Schritt 2a fort.

5.6 Schnittebenenverfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir Schnittebenenverfahren (Branch and Cut and Price) zur Lösung des Kabelproblems

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A).$$

Dem Kabelproblem Π sind Anschlußdigraphen $\bar{D}_t = (V, \bar{A}_t)$, $t \in T$, und das Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

zugeordnet. Die Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, sind (S, t)-Dipfade in dem Anschlußdigraph $\bar{D}_t = (V, \bar{A}_t)$ mit $l(P) \leq L_t$.

Für das Netzproblem Ψ wurde das ganzzahlige Programm DEKO(Ψ) und dessen Relaxierung LDEKO(Ψ) in Abschnitt 4.1 formuliert. Das lineare Programm LDEKO(Ψ) wird mit einem Simplexverfahren und verzögerter Erzeugung von Variablen und Nebenbedingungen gelöst. Als weitere Eingaben für die Schnittebenenverfahren liegen eine zulässige Lösung des Kabelproblems Ψ, eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) und ein Pool H' von Anschlüssen $H'_t \subseteq H_t$, $t \in T$, vor.

Eine Kennzahl für die Größe und Schwierigkeit einer Instanz des Kabelproblems ist die Anzahl $|T||A|$ der Nutzpreisbedingungen bzw. der Nutzungsvariablen z. Für viele Instanzen des Kabelproblems Π konnten wir das lineare Programm LDEKO(Ψ) nicht lösen, da das Produkt $|T||A|$ trotz Reduktionen in den vorgeschalteten Heuristiken und Reduktionen zu groß ist.

Wir haben daher das primale Verbesserungverfahren NEUANSCHLUSS und das duale Verbesserungsverfahen NUTZPREISREFORM entworfen. Mit diesen Verbesserungsverfahren verringern wir die Lücke zwischen der primalen und dualen Schranke für das Netzproblem Ψ und bereiten so weitere Problemreduktionen vor. Ein weiterer Zweck dieser Vorgehensweise ist, den Pool von Anschlüssen sinnvoll auszubauen.

Die Verfahren NEUANSCHLUSS und NUTZPREISREFORM sind in den Unterabschnitten 5.4.1 bzw. 5.4.2 beschrieben. In diesen Verfahren werden für Zielpunkte $T' \subseteq T$ Netzprobleme

$$\Psi' = \mathrm{NETZ}(A, T', H|_{T'}, c', d|_{\mathcal{E}(H_{T'})})$$

mit modifizierten Bauteilkosten c' formuliert. Für das Verfahren NEUANSCHLUSS lauten die Bauteilkosten c' bei einer vorgegeben Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π

$$c'_a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in \bigcup_{t \in T \setminus T'} Q_t, \\ c_a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das Verfahren NUTZPREISREFORM lauten die Bauteilkosten c' bei einer vorgegeben Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ)

$$c'_a = c_a - \sum_{t \in T \setminus T'} v_{t,a}, \; a \in A.$$

Man beachte, daß in den Netzproblemen des Typs Ψ' nicht nur die Anzahl der Zielpunkte verringert wurde, sondern auch Bauteile a mit Bauteilkosten $c'_a = 0$ belegt wurden. Die Bauteilvariablen x_a können dann implizit auf eins gesetzt werden, die zugehörigen Nutzpreisbedingungen

$$x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P \geq 0, \; t \in T,$$

sind dann automatisch erfüllt.

Ein Nachteil der Verfahren NEUANSCHLUSS und NUTZPREISREFORM ist, daß Verbesserungen nicht garantiert sind. Unter Umständen werden die Netzprobleme Ψ' umsonst gelöst.

Eine Alternative zu dem obigen Vorgehen ist, das Netzproblem Ψ durch Bündelung der Zielpunkte T in n nichtleere Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ zu einem neuen Netzproblem

$$\Psi'' = \mathrm{NETZ}(A, \mathbb{N}_n, H'', c, d'')$$

zu transformieren. Die Anschlüsse des Zielpunktes $i \in \mathbb{N}_n$ sind Wurzelwälder R, deren Wurzeln Quellen aus S sind und deren Blätter die Senken aus U_i sind. Zu jeder Senke $t \in U_i$ existiert ein eindeutig bestimmter (S, t)-Dipfad $Q_t \in R$, dessen Länge kleiner oder gleich L_t ist. Die Kosten $d''_{i,R}$ des Anschlusses R sind gleich $\sum_{t \in U_i} d_{t,Q_t}$. Gegeben sei der Zielpunkt i und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ''). Das Anschlußproblem des linearen Programms LDEKO(Ψ'') ist das Netzproblem

$$\Psi'''_i = \mathrm{NETZ}(A, U_i, H|_{U_i}, v_{i,\cdot}, d|_{\mathcal{E}(H|_{U_i})}).$$

Man beachte, daß das lineare Programm LDEKO(Ψ'') $n|A|$ Nutzpreisbedingungen und die linearen Programme LDEKO(Ψ'''_i), $i \in \mathbb{N}_n$, jeweils $|U_i|\,|A|$ Nutzpreisbedingungen enthalten. Zusätzlich sind für viele Bauteile a und Zielpunkte i die Bauteilkosten $v_{i,a}$ gleich null, so daß sich die Anzahl der Nutzpreisbedingungen weiter reduziert. Desweiteren ist das Optimum des linearen Programms LDEKO(Ψ'') nach Theorem 4.2.3.2 gleich oder größer als das Optimum des linearen Programms LDEKO(Ψ). Auf der anderen Seite sind im Laufe des Verfahrens zur Lösung des Netzproblems Ψ'' mehrfach Netzprobleme des Typs Ψ'''_i zu lösen.

Wir werden ausgehend von der Beschreibung des Schnittebenenverfahrens für das Netzproblem Ψ, die Anpassungen an die Verfahren für die Netzprobleme Ψ' und Ψ'' beschreiben.

Für die Implementierung des Schnittebenenverfahrens wurde das Softwarepaket ABACUS in der Version 2.2 von Stefan Thienel [Thi95] verwendet. Das Softwarepaket ABACUS nimmt dem Benutzer Routinearbeiten ab, die bei der Implementierung eines Schnittebenenverfahrens zu leisten sind. Der Benutzer muß lediglich problemspezifische Unterverfahren implementieren, die von ABACUS im Laufe des Optimierungsverfahrens aufgerufen werden. Für den Aufbau eines Schnittebenenverfahrens verweisen wir auf die Ausführungen in Abschnitt 4.3 und in [Thi95].

Im einzelnen ist vom Benutzer das erste aktive lineare Programm festzulegen, eine Verzweigungsvorschrift anzugeben und die Zulässigkeit der Lösung eines aktiven linearen Programms zu entscheiden. Die entsprechenden von uns entworfenen Unterverfahren beschreiben wir in Unterabschnitt 5.6.1.

Desweiteren sind Unterverfahren für die Separation von primalen Nebenbedingungen und Unterverfahren für die Erzeugung von primalen Variablen zu implementieren. Zusätzlich haben wir eine einfache LP-Heuristik entworfen, die die primale Lösung des aktiven linearen Programms zu einer Lösung des Netzproblems Ψ ergänzt. Die entsprechenden Unterverfahren beschreiben wir in Unterabschnitt 5.6.2.

5.6.1 Initialisierung, Verzweigung

Bevor das Schnittebenenverfahren einsetzt, wurde mit heuristischen Verfahren eine primale Lösung (B, Q) des Netzproblems

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, d)$$

und eine zulässige Lösung $\binom{u}{v}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) berechnet. Im Verlauf des Verfahrens wurde ein Pool H' von Anschlüssen $H'_t \subseteq H_t$ gebildet.

In vielen Fällen wurde die Optimallösung des Netzproblems Ψ bis auf wenige Prozent eingegrenzt. Wir nehmen daher an, daß eine optimale duale Lösung des Programms LDEKO(Ψ) sich von der zulässigen dualen Lösung $\binom{u}{v}$ nur geringfügig unterscheidet.

Die Funktion INITIALISIERE

Die Funktion INITIALISIERE bestimmt die aktiven Nebenbedingungen und die aktiven Variablen des ersten aktiven linearen Programms von LDEKO(Ψ) in der Wurzel des Verzweigungsbaums. Als aktive Nebenbedingungen wählen wir alle Zielpreisbedingungen

$$\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 1, \ t \in T,$$

und diejenigen Nutzpreisbedingungen,

$$x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P, \ t \in T, \ a \in A,$$

deren zugehöriger Nutzpreis $v_{t,a}$ in der dualen Lösung $\binom{u}{v}$ positiv ist. Wir aktivieren alle Anschlußvariablen $y_{t,P}$, deren Anschluß P in dem Pool H'_t, $t \in T$, enthalten ist, und alle Bauteilvariablen x_a mit $a \in P$. Primale und duale Variablen, die weder auf einen Wert festgelegt sind noch aktiv sind, werden implizit null gesetzt.

Ist für ein Bauteil a die Bauteilvariable x_a auf den Wert null festgelegt, so sind gleichzeitig alle Anschlußvariablen $y_{t,P}$, $t \in T$, $P \in H_t$, mit $a \in P$ auf null festgelegt. Ist für ein Bauteil a die Bauteilvariable x_a auf eins festgelegt, dann sind alle Nutzpreisbedingungen

$$x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P, \ t \in T,$$

trivial erfüllt und werden weder bei der Initialisierung noch bei der Separation von primalen Nebenbedingungen aktiviert.

Insbesondere werden diejenigen Bauteilvariablen implizit auf eins festgelegt, deren Bauteilkosten gleich null sind. Dies trifft für viele Bauteile der Netzprobleme Ψ' und Ψ'''_i zu. Das Vorgehen bei der Initialisierung des ersten aktiven linearen Programms der Wurzel ist für die Netzprobleme Ψ', Ψ'' und die Netzprobleme Ψ'''_i, $i \in \mathbb{N}_n$ analog. Die ersten aktiven Anschlüsse des Netzproblems Ψ'' werden aus den Anschlüssen der bisher besten Lösung (B, Q) des Netzproblems Ψ konstruiert. Für jeden Zielpunkt $i \in \mathbb{N}_n$ wird die Anschlußvariable $y_{i,R}$ mit $R = \bigcup_{t \in U_i} Q_t$ aktiviert.

Die Funktionen Verzweige und Zulässig

Jede Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ des aktiven linearen Programms wird auf ihre Zulässigkeit bezüglich des linearen Programms LDEKO(Ψ) und auf ihre Zulässigkeit bezüglich des ganzzahligen Programms DEKO(Ψ) getestet. Die Funktion Zulässig berechnet zuerst den Wert der Nutzungsvariablen

$$z^*_{t,a} = \sum_{P \in H_t} y^*_{t,P} \chi_a^P, \ t \in T, \ a \in A$$

und überprüft dann die Nutzpreisbedingung $x^*_a \geq z^*_{t,a}$. Wenn die Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ für das lineare Programm LDEKO(Ψ) gültig ist und ganzzahlig ist, dann ist sie auch für das Programm DEKO(Ψ) gültig.

Wenn die Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ für das lineare Programm LDEKO(Ψ) gültig ist und nicht ganzzahlig ist, dann wird das entsprechende Unterproblem verzweigt. Die Funktion Verzweige sucht als Verzweigungsvariable, diejenige Bauteilvariable x_a aus, für die das Produkt $c_a|1 - x^*_a|$ maximal ist.

5.6.2 Separation und LP-Heuristiken

In dem Schnittebenenverfahren wird iterativ das aktive lineare Programm gelöst, die Zulässigkeit der Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ überprüft und verletzte primale Nebenbedingungen bzw. verletzte duale Nebenbedingungen dem aktiven Programm hinzugefügt. Zusätzlich wird mit einer LP-Heuristik eine gebrochene Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ des aktiven Programms zu einer Lösung des ganzzahligen Progamms DEKO ergänzt. Zur Lösung des linearen Programms wird das Simplexverfahren CPLEX in der Version 4.0 genutzt.

Wir beschreiben die entsprechenden Verfahren beispielhaft für das Netzproblem Ψ und besprechen die Anpassungen für die anderen Netzprobleme.

Das Verfahren Verbessere

Das Verfahren Verbessere ergänzt eine gebrochene Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ des aktiven linearen Programms LDEKO(Ψ) zu einer ganzzahligen Lösung des Kabelproblems Π.

Wir bilden die Menge aller Bauteile bzw. Bögen $A' \subseteq A$, die in einem Anschluß $P \in H_t$, $t \in T$, enthalten sind, dessen zugehörige Anschlußvariable positiv ist. Wir berechnen für den Unterdigraphen $D' = (V, A')$ mit der Heuristik

$$\textsc{Wurzelwald}(D', S, T, l)$$

eine Lösung (B, Q) des Kabelproblems Π. Man beachte, daß nach Konstruktion in dem Unterdigraphen D' mindestens ein Anschlußdipfad für alle Senken $t \in T$ enthalten ist. Das Vorgehen für anderen Netzprobleme ist analog.

Das Verfahren Separiere

In dem Verfahren Zulässig wurden aus einer Lösung $\binom{x^*}{y^*}$ des aktiven Programms die Nutzungsvariablen z^* berechnet und die Nutzpreisbedingungen $x_a^* \geq z_{t,a}^*$ für alle $t \in T$ und alle $a \in A$ überprüft. Alle verletzten Nutzpreisbedingungen werden aktiviert.

Zusätzlich testet das Verfahren Separiere, ob primale Anschlußvariablen überflüssig sind und deaktiviert werden können. Die duale Lösung des aktiven Programms LDEKO(Ψ) sei $\binom{u^*}{v^*}$. Wir vergleichen die reduzierten Kosten

$$q_{t,P} = d_{t,P} + v_{t,\cdot}^*(P) - u_t^*$$

für alle aktiven Anschlüsse $P \in H_t$, $t \in T$, mit elf Zehnteln des Zielpreises u_t. Wenn die reduzierten Kosten $q_{t,P}$ in fünf aufeinanderfolgenden Iterationen größer sind als $\frac{11}{10}u_t$, dann wird die Anschlußvariable $y_{t,P}$ deaktiviert. Das Vorgehen für die anderen Netzprobleme ist analog.

Das Verfahren Generiere

Das Verfahren Generiere aktiviert Bauteilvariablen und Anschlußvariablen. Das Verfahren dient gleichzeitig als Heuristik zur Berechnung einer zulässigen Lösung des dualen Programms DDEKO. Wir beschreiben das Verfahren Generiere für das Netzproblem Ψ und gehen insbesondere auf die Modifikationen für das Netzproblem Ψ'' ein.

Sei $\binom{u^*}{v^*}$ die duale Lösung des aktiven linearen Programms. Die Bauteilbedingungen $c_a \geq \sum_{t \in T} v^*_{t,a}$ für alle Bauteile $a \in A$ erfüllt. Das Verfahren sucht für jede Senke $t \in T$ und jeden Knoten $i \in V$ nach einem Anschlußdipfad aus H_t, der über den Knoten i führt und optimal für das Minimierungsproblem

$$\min_{P \in H_t : i \in V(P)} \{d_{t,P} + v^*_{t,\cdot}(P)\}$$

ist. Gleichzeitig wird so das Optimum

$$u'_t := \min_{P \in H_t} \{d_{t,P} + v^*_{t,\cdot}(P)\}$$

und eine zulässige Lösung $\binom{u'}{v^*}$ des dualen Programms DDEKO(Ψ) bestimmt.

Zu diesem Zweck berechnen wir Dipfadtreppen von den Quellen S und von der Senke t aus. Die Bogenkosten ω legen wir auf

$$\omega_a = \hat{d}_t l_a + v^*_{t,a}, \text{ für alle } a \in \bar{A}_t$$

fest. Die obere Schranke $\hat{\Omega}$ für die Kosten eines gesuchten Dipfades ist u^*_t. Sei ρ_i für alle Knoten $i \in V$ der Längenabstand des Knotens i von den Quellen S in dem Digraphen D. Als untere Schranke für den ω-Kostenabstand der Knoten V von den Quellen S in dem Digraphen D setzen wir $\hat{d}_t \rho$ ein. Sei $A' \subseteq A$ die Menge der Bögen, deren Bauteilvariable auf null festgelegt wurde. Wir bilden den Unterdigraphen $D' = (V, \bar{A}_t \backslash A')$ des Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$.

Wir berechnen Dipfadtreppen $R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}$ von der Senke t aus.

$$R := \text{Rücktreppen}(D', t, S, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{d}_t \rho, \rho, \hat{\Omega}, L_t), \tag{5.20}$$

Danach expandieren wir von den Quellen S aus. Für alle Knoten $i \in V$ legen wir Längenabstände ρ'_i und die Kostenabstände $\hat{\omega}_i$ der Anschlüsse H_t zwischen den Knoten i und der Senke t durch

$$i \in V: \quad \rho'_i = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ l(R_{i,1}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$i \in V: \quad \hat{\omega} = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_{i,\cdot} \text{ leer ist,} \\ \omega(R_{i,n_i}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

fest. Wir berechnen Dipfadtreppen $R'_{i,1}, \ldots, R'_{i,n'_i}$ von den Quellen S aus:

$$R' := \textsc{Treppen}(D', S, t, \omega, l|_{\bar{A}_t}, \hat{\omega}, \rho', \hat{\Omega}, L_t) \tag{5.21}$$

Für jeden Knoten $i \in V$ kombinieren wir eine ω-kostenminimale (S,t)-Kette aus den (S,i)-Dipfaden der Dipfadtreppe $R'_{i,\cdot}$ und den (i,t)-Dipfaden der Dipfadtreppe $R_{i,\cdot}$, deren Länge kleiner oder gleich L_t ist. Ist diese (S,t)-Kette ein Dipfad P mit Kosten $\omega(P) < u^*_t$, dann ist die Anschlußbedingung $u^*_t \le d_{t,P} + v^*_{t,\cdot}(P)$ verletzt. Wir aktivieren daher die Anschlußvariable $y_{t,P}$.

Das Vorgehen für die Netzprobleme Ψ' und Ψ'''_i, $i \in \mathbb{N}_n$, ist analog.

Generierung von Teilwäldern

Für das Netzproblem

$$\Psi'' = \text{NETZ}(A, \mathbb{N}_n, H'', c, d''),$$

suchen wir nach optimalen Anschlüssen, die Wurzelwälder sind. Seien $A' \subseteq A$ die Bauteile, deren Bauteilvariablen auf null festgelegt sind.

Sei $\binom{u^*}{v^*}$ die Lösung des dualen Programms DDEKO(Ψ''). Die Nutzpreise $v^*_{m,a}$ sind für alle $m \in \mathbb{N}_n$ und für alle Bauteile $a \in A$ mit $x_a \equiv 1$ gleich null bzw. wurden auf null festgelegt. Für alle Zielpunkte $m \in \mathbb{N}_n$ sind die Anschlußprobleme des linearen Programms LDEKO(Ψ'') die Minimierungsprobleme

$$\min_{P \in H''_m : A' \cap P = \emptyset} \{d''_{m,P} + v^*_{t,\cdot}(P)\}$$

bzw. die Netzprobleme

$$\Psi'''_m = \text{NETZ}(A \backslash A', U_m, H|_{U_m}, v^*_{m,\cdot}, d|_{\mathcal{E}(H|_{U_m})}).$$

Der Wurzelwald $B^0 \in H''_m$ irgendeiner aktiven Anschlußvariablen y_{m,B^0} des Netzproblems Ψ'' führt zu einer Lösung (B^0, Q^0) des Netzproblems Ψ'''_m. Diese dient als Eingabe für die Verbesserungsheuristik Ripup-Reroute, die die primale Lösung (B, Q) in dem Digraphen D' mit Bauteilkosten $v^*_{m,\cdot}$ findet. Wenn die Kosten

$$v^*_{m,\cdot}(B) + \sum_{t \in U_m} d_{t,Q_t}$$

dieser Lösung kleiner sind als der Zielpreis u^*_m, dann ist die Anschlußbedingung $u^*_m \le v^*_{m,\cdot}(B) + d''_{t,B}$ verletzt. Entsprechend wird die Anschlußvariable $y_{m,B}$ aktiviert.

Wenn für keinen Zielpunkt $m \in \mathbb{N}_n$ mit den heuristischen Verfahren eine verletzte Anschlußbedingung gefunden wurde, dann wird für alle Zielpunkte $m \in \mathbb{N}_n$ das exakte Schnittebenenverfahren zur Lösung des Netzproblems Ψ'''_m gestartet. Sind u'_m jeweils die Kosten der optimalen Lösung des Netzproblems Ψ'''_m, dann ist die Lösung $\binom{u'}{v^*}$ für das duale Programm DDEKO(Ψ'') zulässig. Sei (B, Q) die optimale Lösung des Netzproblems Ψ'''_m, die von dem Schnittebenenverfahren ausgegeben wird. Wenn $u'_m \leq u^*_m$, dann findet die Heuristik

$$\textsc{Wurzelwald}((V, B), S, U_i, l|_B)$$

eine gleichteure Wurzelwaldlösung (B', Q') des Netzproblems Ψ'''_m. Die Anschlußbedingung

$$u^*_m \leq v^*_{m,\cdot}(B') + d''_{t,B'} = u'_m$$

ist verletzt. Die Anschlußvariable $y_{m,B'}$ wird aktiviert.

Kapitel 6

Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir experimentelle Ergebnisse für Instanzen des Kabelproblems vor.

Die Instanzen haben den folgenden Ursprung. Für die erste Gruppe werden Datensätzen von Stadtteilen zu Grunde gelegt, in denen Telefonnetze geplant werden sollen. Aus fünf vorliegenden Datensätzen werden mehrere Instanzen durch Variation der Längenbeschränkungen und der Dipfadkostenfaktoren sowie durch unterschiedliche Plazierung der Bereichsverteiler in dem Planungsgebiet erzeugt.

Die zweite Gruppe besteht aus Steinerbaum-Problemen in Graphen, die der Sammlung „SteinLib" des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik entnommen wurden. Das Verfahren KABEL-OPT wurde auf mit Zufallsfunktionen erzeugte Instanzen des Steinerbaum-Problems in Graphen und des rechtwinkligen Steinerbaum-Problems sowie auf VLSI-Probleme, die bei der Planung von elektronischen Schaltungen entstehen. Für die Datensätze der VLSI-Probleme erzeugen wir zusätzliche Instanzen, indem wir Längenbeschränkungen und Dipfadkostenfaktoren einführen.

Das Verfahren KABEL-OPT und dessen Modifikationen wurden in der Programmiersprache C++ implementiert. Effiziente Datenstrukturen wurden aus der Sammlung TURBO von Lauther [Lau] entnommen und eingesetzt. Das Software-Paket ABACUS stellt die Datenstrukturen für die Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren [Thi95] des Verfahrens KABEL-OPT zur Verfügung. Für die Test-Instanzen der Telefonnetz-Planung wurde die CPLEX-Version 6.5 eingesetzt. Die Instanzen der „SteinLib" wurden hingegen mit der älteren CPLEX-Version 4.0 optimiert. Dadurch soll eine bessere Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen von Koch und Martin [KM98] erreicht werden. Alle Berechnungen wurden auf einer „Sun ULTRA-SPARC II" mit 336 MHz Taktfrequenz und 1.8 GB Hauptspeicher durchgeführt.

In Abschnitt 6.1 werden die Ergebnisse für die Instanzen der Telefonnetz-Planungen beschrieben. In diesem Abschnitt diskutieren wir neben den Testläufen des Verfahrens KABEL-OPT auch vergleichend Testläufe der Verfahren BÜNDEL-OPT und DIREKT-OPT.

In Abschnitt 6.2 werden die Ergebnisse des Verfahrens KABEL-OPT für die Steinerbaum-Probleme der Sammlung „SteinLib“ beschrieben. In einer weiteren Testreihe werden die VLSI-Instanzen dieser Sammlung zusätzlich mit Längenbeschränkungen und positiven Dipfadkostenfaktoren versehen.

6.1 Telefonnetz-Planungen

Für den Test von Verfahren zur automatischen Planung von Telefonnetzen wurden von den Ingenieuren fünf Datensätze beispielhaft zur Verfügung gestellt. Diese Datensätze entstammen Projekten in Poona, Südafrika (SAB, SAE und SAL) sowie Madrid und enthalten die topologischen Daten der Grundstücke von Stadtbereichen, die Standorte von Bereichsverteilern und Endverteilern und die Anzahl der an einen Endverteiler anzuschließenden Netzteilnehmer.

Mit diesen Daten führen wir drei Testreihen durch. In Unterabschnitt 6.1.1 werden aus dem größten Datensatz insgesamt 36 Instanzen des Kabelproblems. Auf diese wird das Verfahren KABEL-OPT und eine Heuristik der Siemens AG angewandt. Wir nennen diese Heuristik im folgenden kurz **externe Heuristik**. Die Ergebnisse der externen Heuristik werden mit den von KABEL-OPT berechneten unteren Schranken evaluiert. In Unterabschnitt 6.1.2 werden die Parameter des Kabelproblems variiert um unterschiedlich schwere Instanzen aus den Datensätzen von Poona, Südafrika und Madrid zu erzeugen. Ein Vergleich der Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren in DIREKT-OPT und BÜNDEL-OPT wird in Unterabschnitt 6.1.3 durchgeführt.

Der Datensatz von Poona enthält zwei Bereichsverteiler, die anderen Datensätze enthalten jeweils einen Bereichsverteiler. Die Bereichsverteiler liegen etwa in der Mitte des jeweiligen Stadtbereichs. Auf den Grundstücken des Stadtbereichs liegen meist jeweils ein bis vier Endverteiler. Die Bereichsverteiler und die Endverteiler wurden von den Planern nach Begehung des Stadtbereichs plaziert. Die möglichen Tiefbauabschnitte für die Anbindung der Endverteiler und Bereichsverteiler an das Straßennetz werden automatisch entsprechend den topologischen Daten der Grundstücke erzeugt. Die Straßenüberquerungen werden an den Kreuzungen und an den Anschlußpunkten der Endverteiler und der Bereichsverteiler generiert. Die Details der Erzeugung der Instanzen des Kabelproblems aus den Datensätzen sind in Abschnitt 3.2 beschrieben.

Der Datensatz von Poona wurde von den Mitarbeitern des „Zentralbereich Forschung und Entwicklung“ in München verändert, um die Überprüfung der Leistungsfähigkeit der Optimierungsverfahren auf eine breitere Basis zu stellen. Die Datensätze PoonaS1 bis PoonaS6 und die Datensätze PoonaT1 bis PoonaT6 enthalten einen Bereichsverteiler. Bei den Datensätzen PoonaS1, PoonaS2, PoonaT1 und PoonaT2 stimmt der Standpunkt dieses Bereichsverteilers mit dem Standpunkt in dem originalen Datensatz überein. In den anderen Datensätzen wurde der Standpunkt des Bereichsverteilers von Hand gewählt.

In den Datensätzen PoonaT1 bis PoonaT6 wurden zusätzlich die Daten von ausgehobenen Tiefbaugräben von Hand eingefügt. Die Planungsingenieure hatten darum gebeten, zu simulieren, daß in früheren Planungsschritten Tiefbaugräben festgelegt wurden. Diese Tiefbaugräben stehen dementsprechend für das aktuelle Planungsproblem kostenlos zur Verfügung.

Aus den Datensätzen werden die Daten des Kabelproblems

$$\mathrm{KABEL}(D, S, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A),$$

wie folgt erzeugt:

Entsprechend den topologischen Daten der möglichen Tiefbauabschnitte, der Bereichsverteiler und der Endverteiler erzeugen wir einen Digraphen $D = (V, A)$ mit Quellen S und Senken T. Jedem möglichen Tiefbauabschnitt werden zwei antiparallele Bögen zugeordnet. Die Bogenlängen l sind gleich den Längen der entsprechenden möglichen Tiefbauabschnitte gemessen in Dezimetern. Die Bogenkosten c werden gleich den Bogenlängen gewählt bzw. für Überquerungen von Hauptstraßen zusätzlich mit dem Straffaktor 5 multipliziert. Die Kosten für Bögen, die den in den Datensätzen PoonaT1 bis PoonaT6 ausgehobenen Tiefbaugräben entsprechen, werden null gesetzt. Die Längenbeschränkungen L und die Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}$ sollen von den Planungsingenieuren entsprechend der eingesetzten Technologie interaktiv gewählt werden können. Wir beschreiben die Festlegung dieser Parameter in den folgenden Unterabschnitten genauer.

Die Datensätze sind so konstruiert worden, daß alle Quellen und Senken genau zu einem Netzknoten benachbart sind. Die Netzknoten haben fast alle drei oder vier Nachbarknoten.

6.1.1 Vollständige Datensätze aus Poona

Die Instanzen PoonaS1 bis PoonaS6 enthalten jeweils 1 709 Knoten, 5 326 Bögen, 302 Senken und einen Bereichsverteiler. Die Instanzen PoonaT1 bis PoonaT6 enthalten jeweils 2 409 Knoten, 7 086 Bögen, 302 Senken und einen Bereichsverteiler. Das liegt daran, daß für die ausgehobenen Tiefbaugräben zusätzliche Segmente, parallel zu den Grundstücksbegrenzungen in die Datensätze manuell eingefügt worden sind.

Die Längenbeschränkung für den Nahbereich wählen wir zu 5 000 und die Längenbeschränkung für den Fernbereich wählen wir zu 36 500, das entspricht 500 Metern bzw. 3 650 Metern. Ist für eine Senke $t \in T$ der Längenabstand von den Quellen S in dem Digraphen D kleiner oder gleich 5 000, dann gilt $L_t = 5\,000$, sonst gilt $L_t = 36\,500$.

Die Anzahl der Netzteilnehmer, die an den Endverteiler angeschlossen werden sollen, der der Senke $t \in T$ entspricht, bezeichnen wir mit n_t. Für alle Senken $t \in T$ legen wir die Dipfadkostenfaktoren durch $\hat{d}_t = d^+ n_t$ fest, für Proportionalitätskonstanten $d^+ = 0$, $\frac{1}{100}$ bzw. $\frac{2}{100}$. Im Fall $d^+ = 0$ werden die Kabelkosten vernachlässigt. Die beiden anderen Werte für die Proportionalitätskonstante orientieren sich an dem Verhältnis der Kosten für den Tiefbau bzw. für die Kabel. Für den Datensatz PoonaS5 wählen wir $d^+ = \frac{15}{1000}$, da die externe Heuristik für $d^+ = \frac{2}{100}$ kein Ergebnis berechnen konnte.

Durch die Variationen der Dipfadkostenfaktoren, die Positionierung des Bereichsverteilers an verschiedenen Punkten des Stadtbereichs und das Einfügen von ausgehobenen Tiefbaugräben in den Datensätzen PoonaT1 bis PoonaT6 sind insgesamt 36 Instanzen des Kabelproblems erzeugt worden. Von diesen Instanzen werden 12 nach der BCP-Phase optimal gelöst. Für weitere 13 Instanzen wird eine Gütegarantie erreicht, die besser als 2 Prozent ist. Für die restlichen elf Instanzen, in denen zum überwiegenden Teil der Dipfadkostenfaktor gleich null gewählt wurde, liegt die Gütegarantie zwischen 2 Prozent und 7 Prozent.

Die Laufzeit in der Eröffnungsphase beträgt bis zu vier Minuten. Der größte Teil dieser Laufzeit wird für die Initialisierung der Datenstrukturen der dualen Heuristik und der Anschlußdigraphen verbraucht. Die Laufzeit für das Reduktionsverfahren KABEL-REDUKTION und für die primale Heuristik RIPUP-REROUTE beträgt hingegen jeweils nicht mehr als zwei Sekunden. Für die primale Lösung in der heuristischen Phase sind letztere Unterverfahren maßgeblich, so daß die Laufzeit der Eröffnungsphase nicht mit der Laufzeit der primalen Eröffnungsheuristiken gleichzusetzen ist.

Für 30 Instanzen ist die Qualität der in der Eröffnungsphase berechneten primalen Lösung besser als 5 Prozent. Man beachte dabei, daß für die übrigen sechs Instanzen die nach der BCP-Phase berechneten Gütegarantien teilweise schlechter als fünf Prozent sind. Die Bogenanzahl wird für alle Instanzen in der Eröffnungsphase um mehr als 10 Prozent und für fünf Instanzen um mehr als 20 Prozent reduziert.

In der Lagrange-Phase werden die primalen Lösungen der Instanzen nicht wesentlich verbessert, auch die Reduktionsverfahren in der Lagrange-Phase führen kaum zu einer Verringerung der Bogenanzahl der jeweiligen Instanzen.

In der BCP-Phase werden für die Instanzen mit positivem Dipfadkostenfaktor deutliche Verbesserungen der Gütegarantie erreicht. Dementsprechend setzen in dieser Phase auch Reduktionen nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium ein. Ist hingegen der Dipfadkostenfaktor gleich null, dann beträgt die Laufzeit für die Lagrange-Phase teilweise bis zu einer Stunde. Die Laufzeiten für die BCP-Verfahren zur Lösung einzelner Verbesserungsprobleme sind ebenfalls deutlich größer als für Instanzen mit positivem Dipfadkostenfaktor.

Wir dokumentieren den Verlauf des Verfahrens KABEL-OPT auf die folgende Weise: Für jede Phase des Verfahrens geben wir die Laufzeit und die erreichte **Gütegarantie** an. Ist O die obere und U die untere Schranke für die optimale Lösung, dann ist die Gütegarantie $\frac{O-U}{U}$. Die **Qualität der oberen Schranke** O, die in der Eröffnungsphase bzw. in der Lagrange-Phase erhalten wird, berechnen wir bezüglich der am Ende des Verfahrens erreichten unteren Schranke U' mit $\frac{O-U'}{U'}$. Die Qualität der unteren Schranke U, die in der Eröffnungsphase bzw. in der Lagrange-Phase erreicht wird, berechnen wir bezüglich der am Ende des Verfahrens erreichten oberen Schranke O' mit $\frac{O'-U}{U}$.

Eine Darstellung des Datensatzes von Poona mit den generierten möglichen Tiefbauabschnitten und zwei Bereichsverteilern ist die Abbildung 6.1. Die experimentellen Ergebnisse sind in den Tabellen 6.3 und 6.4 festgehalten.

Tabelle 6.1: Das Format der Tabelle 6.3.

Instanz	Name	Der Name des Datensatzes.
	d^+	Der Proportionalitätsfaktor d^+.
Garantie (%)		Die nach Ende der jeweiligen Phase erreichte Gütegarantie, angegeben in Prozent.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Laufzeit		Die Laufzeit der jeweiligen Phase(n) in CPU-Sekunden.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
	Tot.	Gesamtlaufzeit.
Ergebnis		Die Kosten der besten berechneten primalen Lösung.

Tabelle 6.2: Das Format der Tabelle 6.4.

Instanz	Name d^+	Der Name des Datensatzes. Der Proportionalitätsfaktor d^+.
Qualität (%)	Ext. E-P E-D	Die Qualität der primalen Lösung der externen Heuristik. Die Qualität der primalen Lösung nach der Eröffnungsphase. Die Qualität der dualen Lösung nach der Eröffnungsphase.
Gar.		Die am Ende des Verfahrens KABEL-OPT erhaltene Gütegarantie.
Bogenred. (%)	 Erp. Lag. BCP	Bogenreduktion nach der jeweiligen Phase in Prozent der ursprünglichen Bogenanzahl. Eröffnungsphase. Lagrange-Phase. BCP-Phase.
Anzahl	L-G L-R LP	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens LAGRANGE-GRADIENT. Anzahl der Aufrufe des Verfahrens NETZREDUKTION in der Lagrange-Phase. Anzahl der Aufrufe der Schnittebenenverfahren zur Lösung der Programme LDEKO oder DEKO.

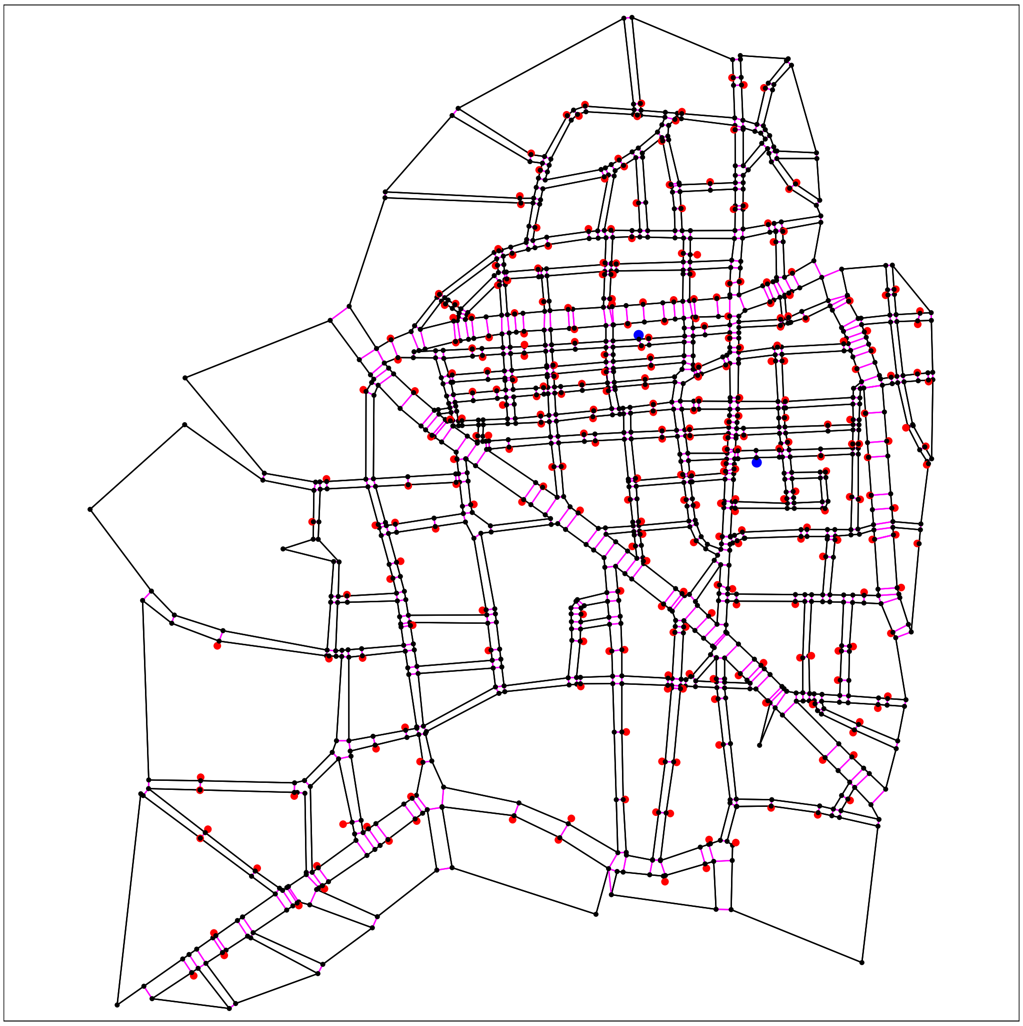

Abbildung 6.1: Der Datensatz von Poona

Tabelle 6.3: Ergebnisse von KABEL-OPT für vollständige Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Poona

Instanz		Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
Name	d^+	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
PoonaS1	0.000	3.29	3.15	2.63	71.0	2766.9	7448.4	10286.3	314082.0
PoonaS1	0.010	1.98	1.79	0.03	69.6	563.2	11037.0	11669.8	898130.7
PoonaS1	0.020	1.37	1.21	**0**	68.5	372.5	1269.2	1710.2	**1463835.9**
PoonaS2	0.000	3.65	3.49	2.47	66.5	2170.9	7817.5	10054.9	320856.0
PoonaS2	0.010	1.46	1.16	0.01	61.1	533.0	12678.1	13272.2	906378.3
PoonaS2	0.020	1.27	1.12	**0**	61.6	370.3	1101.5	1533.4	**1476401.0**
PoonaS3	0.000	3.86	3.85	3.67	85.4	2166.9	7886.1	10138.4	320199.0
PoonaS3	0.010	1.56	1.17	**0**	67.2	576.4	13792.4	14436.0	**1111644.7**
PoonaS3	0.020	1.09	0.97	**0**	67.7	371.3	6966.2	7405.2	**1883454.4**
PoonaS4	0.000	4.68	4.57	4.36	75.4	1474.5	8511.4	10061.3	316671.0
PoonaS4	0.010	2.78	2.16	0.84	54.2	678.6	9654.0	10386.8	1397645.4
PoonaS4	0.020	1.57	0.92	**0**	53.8	446.3	11425.9	11926.0	**2443121.5**
PoonaS5	0.000	2.53	2.23	1.97	70.4	2298.4	7661.5	10030.3	323615.0
PoonaS5	0.010	1.74	1.36	**0**	67.8	535.2	3320.8	3923.8	**922829.1**
PoonaS5	0.015	1.69	1.45	**0**	65.5	467.0	1345.8	1878.3	**1214149.7**
PoonaS6	0.000	2.95	2.91	2.72	66.2	3622.5	6338.4	10027.1	315194.0
PoonaS6	0.010	1.63	1.55	0.37	60.2	495.3	10048.7	10604.2	1135941.9
PoonaS6	0.020	1.01	0.91	**0**	60.1	415.5	5753.8	6229.4	**1927524.5**
PoonaT1	0.000	8.24	8.07	6.39	207.3	3171.2	6853.2	10231.7	232860.0
PoonaT1	0.010	3.16	1.88	0.55	198.0	1332.9	8975.2	10506.1	826358.1
PoonaT1	0.020	2.43	2.02	0.45	195.7	765.6	9103.0	10064.3	1398750.3
PoonaT2	0.000	6.29	6.27	4.35	205.5	2785.6	7109.1	10100.2	235048.0
PoonaT2	0.010	3.47	2.21	0.68	189.7	1076.3	9937.5	11203.5	835704.2
PoonaT2	0.020	2.08	1.77	**0**	194.1	861.0	4962.8	6017.9	**1407054.2**
PoonaT3	0.000	8.24	8.07	6.24	197.8	3199.8	7072.6	10470.2	232860.0
PoonaT3	0.010	1.89	1.53	0.19	187.9	1140.6	8945.0	10273.5	1085161.8
PoonaT3	0.020	1.40	0.93	**0**	189.1	911.8	4716.7	5817.6	**1913314.1**
PoonaT4	0.000	6.29	6.27	5.08	203.6	2864.0	7144.6	10212.2	236670.0
PoonaT4	0.010	3.60	3.27	**0**	195.3	1111.4	8714.6	10021.3	**866609.7**
PoonaT4	0.020	2.37	2.20	**0**	199.0	910.8	2370.8	3480.6	**1479192.5**
PoonaT5	0.000	7.65	7.65	6.83	212.7	2975.9	7020.9	10209.5	236136.0
PoonaT5	0.010	3.54	2.13	1.19	143.0	1028.2	9068.9	10240.1	1291553.7
PoonaT5	0.020	2.04	1.15	0.36	141.7	957.9	9938.6	11038.2	2305164.2
PoonaT6	0.000	5.52	5.18	4.71	195.3	2952.8	7283.8	10431.9	237365.0
PoonaT6	0.010	3.37	3.01	0.91	181.2	1233.3	8647.2	10061.7	908489.0
PoonaT6	0.020	2.05	1.91	0.50	181.5	881.1	9061.9	10124.5	1555730.7

Tabelle 6.4: Ergebnisse von KABEL-OPT für vollständige Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Poona

Instanz		Qualität (%)			Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
Name	d^+	Ext.	E-P	E-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
PoonaS1	0.000	3.0	3.1	2.9	2.7	17.3	17.8	17.8	19	11	10
PoonaS1	0.010	3.5	0.9	1.1	0.1	17.3	17.4	49.6	31	11	57
PoonaS1	0.020	4.4	0.7	0.7	**0**	17.3	17.4	99.1	22	11	56
PoonaS2	0.000	2.8	2.9	3.3	2.5	18.4	18.4	18.4	13	11	17
PoonaS2	0.010	1.9	0.5	1.1	0.1	18.4	19.4	68.7	68	12	57
PoonaS2	0.020	2.6	0.6	0.7	**0**	18.4	18.4	67.2	35	11	59
PoonaS3	0.000	5.4	3.9	3.7	3.7	18.4	18.4	18.4	13	11	12
PoonaS3	0.010	4.2	0.6	1.0	**0**	18.4	18.7	65.8	77	11	53
PoonaS3	0.020	5.0	0.5	0.7	**0**	18.4	18.4	62.0	28	10	57
PoonaS4	0.000	6.0	4.6	4.5	4.4	16.6	16.6	16.6	12	10	11
PoonaS4	0.010	3.1	1.5	2.2	0.9	16.6	16.6	16.6	50	10	32
PoonaS4	0.020	2.7	0.5	1.1	**0**	16.6	16.6	20.0	25	10	48
PoonaS5	0.000	1.8	2.1	2.5	2.0	20.0	21.4	21.4	39	11	14
PoonaS5	0.010	1.5	0.6	1.2	**0**	20.0	20.0	67.3	75	11	55
PoonaS5	0.015	1.9	0.7	1.0	**0**	20.0	20.0	71.1	77	11	57
PoonaS6	0.000	2.8	2.8	2.9	2.8	17.4	18.2	18.2	14	11	8
PoonaS6	0.010	2.8	0.8	1.3	0.4	17.4	17.4	20.1	44	10	49
PoonaS6	0.020	3.2	0.4	0.7	**0**	17.4	17.4	28.7	30	11	59
PoonaT1	0.000	4.2	8.0	6.7	6.4	19.7	19.7	19.7	22	10	8
PoonaT1	0.010	3.2	1.9	1.8	0.6	19.1	19.1	22.1	28	11	47
PoonaT1	0.020	3.7	1.5	1.4	0.5	19.0	19.0	21.8	20	10	53
PoonaT2	0.000	2.2	6.0	4.7	4.4	19.9	19.9	19.9	20	10	12
PoonaT2	0.010	2.4	2.6	1.6	0.7	20.6	20.6	22.8	22	10	41
PoonaT2	0.020	2.9	1.4	0.7	**0**	20.6	20.6	22.8	29	10	57
PoonaT3	0.000	4.1	7.8	6.7	6.3	19.7	19.7	19.7	22	10	8
PoonaT3	0.010	5.5	0.9	1.3	0.2	19.7	19.7	26.8	24	11	52
PoonaT3	0.020	6.4	0.9	0.6	**0**	19.7	19.7	34.2	25	11	59
PoonaT4	0.000	2.2	6.0	5.4	5.1	19.9	19.9	19.9	20	10	12
PoonaT4	0.010	3.4	2.5	1.2	**0**	19.9	19.9	22.4	30	10	59
PoonaT4	0.020	4.4	1.6	0.8	**0**	19.9	19.9	23.2	19	10	59
PoonaT5	0.000	3.0	7.5	7.0	6.9	19.0	19.0	19.0	10	10	12
PoonaT5	0.010	5.5	2.2	2.6	1.2	19.0	19.0	19.0	19	10	31
PoonaT5	0.020	12.6	0.9	1.6	0.4	19.0	19.0	21.3	38	10	53
PoonaT6	0.000	4.7	5.2	5.1	4.8	20.6	20.6	20.6	38	11	12
PoonaT6	0.010	4.9	2.3	2.1	1.0	20.4	20.4	22.2	21	11	51
PoonaT6	0.020	5.6	1.3	1.3	0.5	20.4	20.4	22.8	23	11	49

6.1.2 Variation der Parameter der Kabelprobleme

Für die Datensätze Poona, SAB, SAE, SAL und Madrid führen wir die folgenden Variationen der Längenbeschränkungen und der Dipfadkostenfaktoren durch:

Die Längenbeschränkung für den Nahbereich wählen wir zu 5 000 und die Längenbeschränkung $\bar{L}$ für den Fernbereich variieren wir zwischen 5 000 und 36 500. Alle Knoten des Digraphen, deren Längenabstand von den Quellen größer oder gleich $\bar{L}$ ist, werden mit den inzidenten Kanten eliminiert. Auf diese Weise werden die Instanzen auf unterschiedliche Größen zurechtgeschnitten. Ist für eine Senke $t \in T$ der Längenabstand von den Quellen S in dem dann aktuellen Digraphen D kleiner oder gleich 5 000, dann gilt $L_t = 5\,000$, sonst gilt $L_t = \bar{L}$.

Die Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}_t$ setzen wir für alle Senken $t \in T$ auf 0, $\frac{1}{10}$ bzw. 1. Auf diese Weise ist leichter zu übersehen, in welcher Weise das Verhältnis von Bogenkosten und Dipfadkosten in der Lösung die Eigenschaften des Verfahrens beeinflußt.

Insgesamt wurden 69 Instanzen erzeugt. Für alle Instanzen wird in der Eröffnungsphase eine Gütegarantie berechnet, die besser ist als 10 Prozent. Die Laufzeit der Eröffnungsphase beträgt für die drei größten Poona-Instanzen ca. 45 Sekunden. Für kleine und mittlere Instanzen von Poona, Südafrika und Madrid beträgt die Laufzeit nur wenige Sekunden. Die Qualität der primalen Lösung der Eröffnungsphase ist für 22 Instanzen besser als ein Prozent und für 62 Instanzen besser als 5 Prozent. In der Eröffnungsphase wird die Bogenanzahl von allen Instanzen um mehr als 10 Prozent reduziert und für 30 Instanzen sogar um mehr als 30 Prozent reduziert.

Die nach der Eröffnungsphase erreichte Gütegarantie wird in der Lagrange-Phase deutlich verbessert. Von den 69 berechneten Instanzen werden in der Lagrange-Phase elf optimal gelöst. Für weitere 21 Instanzen wird eine Gütegarantie besser als ein Prozent erreicht. Für alle Instanzen ist die Gütegarantie nach der Lagrange-Phase besser als sechs Prozent. Die Laufzeiten der Lagrange-Phase hängen stark von der Größe der Instanz und von dem Wert für die Dipfadkostenfaktoren ab. Der Spitzenwert liegt bei 23 Minuten für die Instanz von Poona mit Längenbeschränkung $\bar{L} = 34\,000$ und Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}_t = 0$ für alle $t \in T$. Je größer die Dipfadkostenfaktoren sind, umso schneller ist die Lagrange-Phase beendet. Für die meisten Instanzen beträgt die Laufzeit der Lagrange-Phase weniger als fünf Minuten.

Nach der Lagrange-Phase sind 55 Instanzen ungelöst. Die Qualitat der primalen Lösung, die in der Lagrange-Phase berechnet wird, ist für 34 dieser Instanzen besser als 1 Prozent und für alle weiteren besser als 5 Prozent. Von den 55 Instanzen wird für 21 Instanzen die nach der Eröffnungsphase bestehende Bogenanzahl um mehr als 20 Prozent reduziert, für 9 Instanzen sogar mehr als halbiert.

Für alle Instanzen mit Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}_t = 1$, $t \in T$, wird innerhalb des Zeitlimits von 10 000 CPU-Sekunden eine Gütegarantie von weniger als einem Promille erreicht. Die meisten dieser Instanzen werden optimal gelöst. Die Lösung der Instanzen mit Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}_t = 0$, $t \in T$, ist hingegen deutlich schwieriger. Für diese Instanzen sind die Laufzeiten der Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren deutlich größer als für die vergleichbaren Instanzen mit positiven Dipfadkostenfaktoren.

Die experimentellen Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen dokumentiert.

Tabelle 6.5: Das Format der Tabellen 6.6 bis 6.10.

Instanz	$\frac{L}{1000}$	Die Längenbeschränkung des Fernbereichs in Einheiten zu 1 000.
	$\hat{d}$	Der Dipfadkostenfaktor.
	$\|A\|$	Die Anzahl der Bögen der ursprünglichen Instanz.
	$\|T\|$	Die Anzahl der Senken der ursprünglichen Instanz.
Garantie (%)		Die Gütegarantie in Prozent, die nach der jeweiligen Phase erreicht ist.
	Erp.	Eröffnungsphase
	Lag.	Lagrange-Phase
	BCP	BCP-Phase
Laufzeit		Die Laufzeit der jeweiligen Phase(n) in CPU-Sekunden.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
	Tot.	Gesamtlaufzeit.
Ergebnis		Die Kosten der besten primalen Lösung.

Tabelle 6.6: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz Poona

Instanz				Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
5	0.0	1586	112	5.07	1.47	**0**	0.2	13.6	44.4	58.2	**147844.0**
5	0.1	1586	112	4.67	0.60	**0**	0.1	5.4	2.8	8.3	**185983.3**
5	1.0	1586	112	2.33	**0**		0.1	1.3		1.4	**515691.0**
10	0.0	3770	240	4.11	2.04	**0**	0.8	76.8	726.2	803.8	**358888.0**
10	0.1	3770	240	3.52	1.49	**0**	0.8	55.9	370.7	427.4	**495459.0**
10	1.0	3770	240	1.57	0.65	**0**	0.8	56.3	20.2	77.3	**1684873.0**
15	0.0	4442	279	6.14	3.96	3.08	3.4	212.0	9792.1	10007.5	427782.0
15	0.1	4442	279	3.74	3.74	**0**	3.1	18.9	3936.5	3958.5	**612799.7**
15	1.0	4442	279	1.79	0.86	**0**	2.9	83.8	319.1	405.8	**2236216.0**
20	0.0	4714	292	4.79	3.09	2.50	8.2	344.2	9725.1	10077.5	453335.0
20	0.1	4714	292	3.65	2.50	0.81	7.9	228.1	9958.6	10194.6	667298.1
20	1.0	4714	292	1.68	0.83	**0**	7.4	107.1	467.0	581.5	**2499093.0**
25	0.0	4892	302	4.67	3.29	2.28	18.3	711.0	9472.9	10202.2	478912.0
25	0.1	4892	302	3.61	2.62	1.02	17.8	378.8	9690.9	10087.5	719047.5
25	1.0	4892	302	1.57	0.88	**0**	17.1	150.2	393.1	560.4	**2750598.0**
34	0.0	4984	307	4.64	3.47	3.34	45.5	1421.9	8676.0	10143.4	486327.0
34	0.1	4984	307	3.61	2.52	1.34	44.4	710.3	9266.8	10021.5	742100.6
34	1.0	4984	307	1.49	0.83	**0**	43.7	215.8	582.7	842.2	**2894087.0**

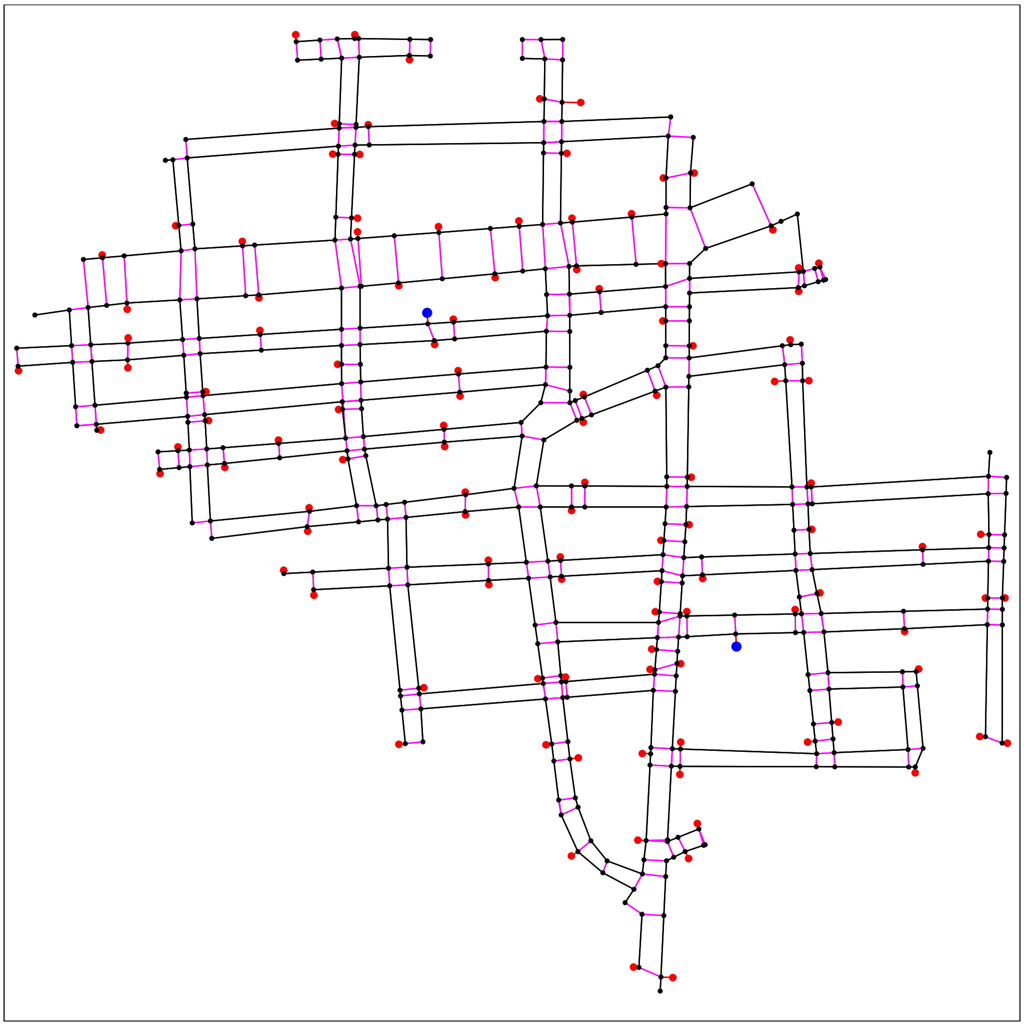

Abbildung 6.2: Poona-Instanz für eine auf 5000 (Dezimeter) festgelegte Längenbeschränkung

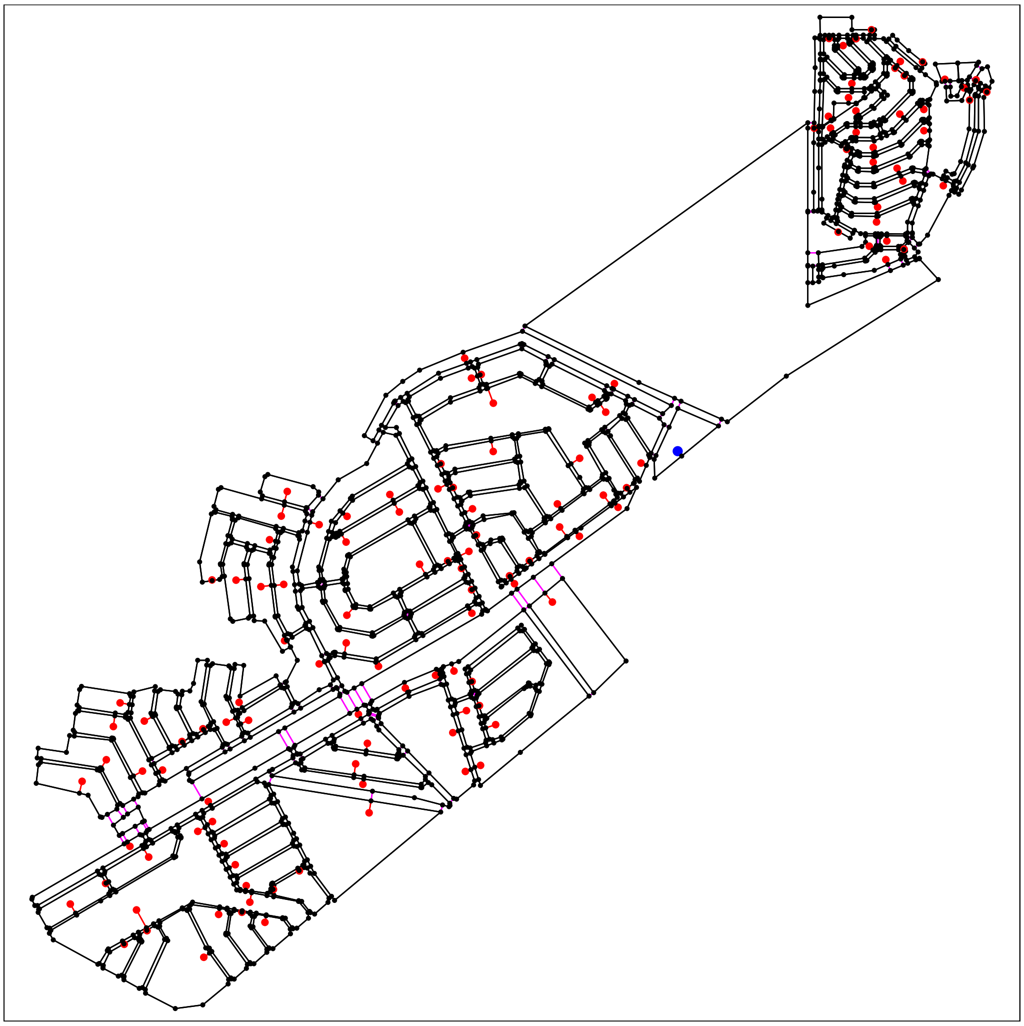

Abbildung 6.3: Der Datensatz SAB von Südafrika

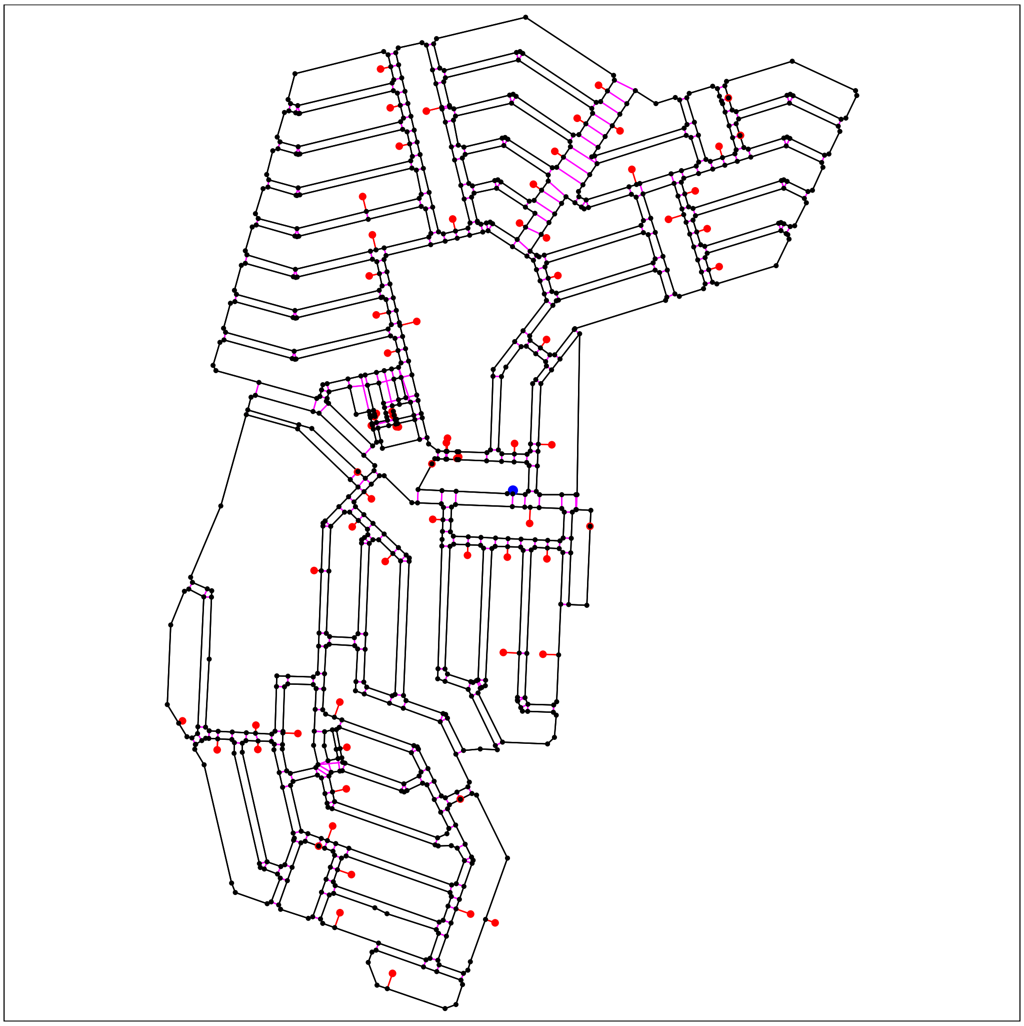

Abbildung 6.4: Der Datensatz SAE von Südafrika

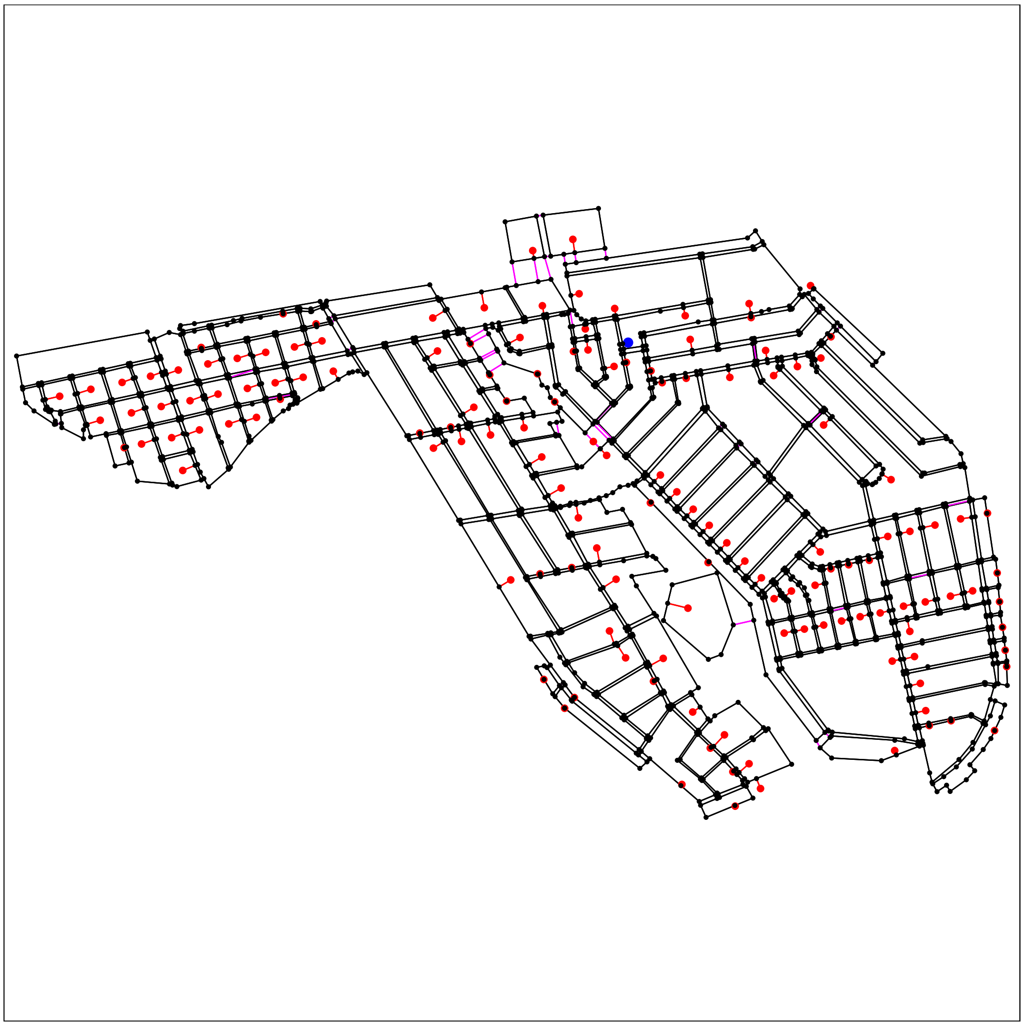

Abbildung 6.5: Der Datensatz SAL von Südafrika

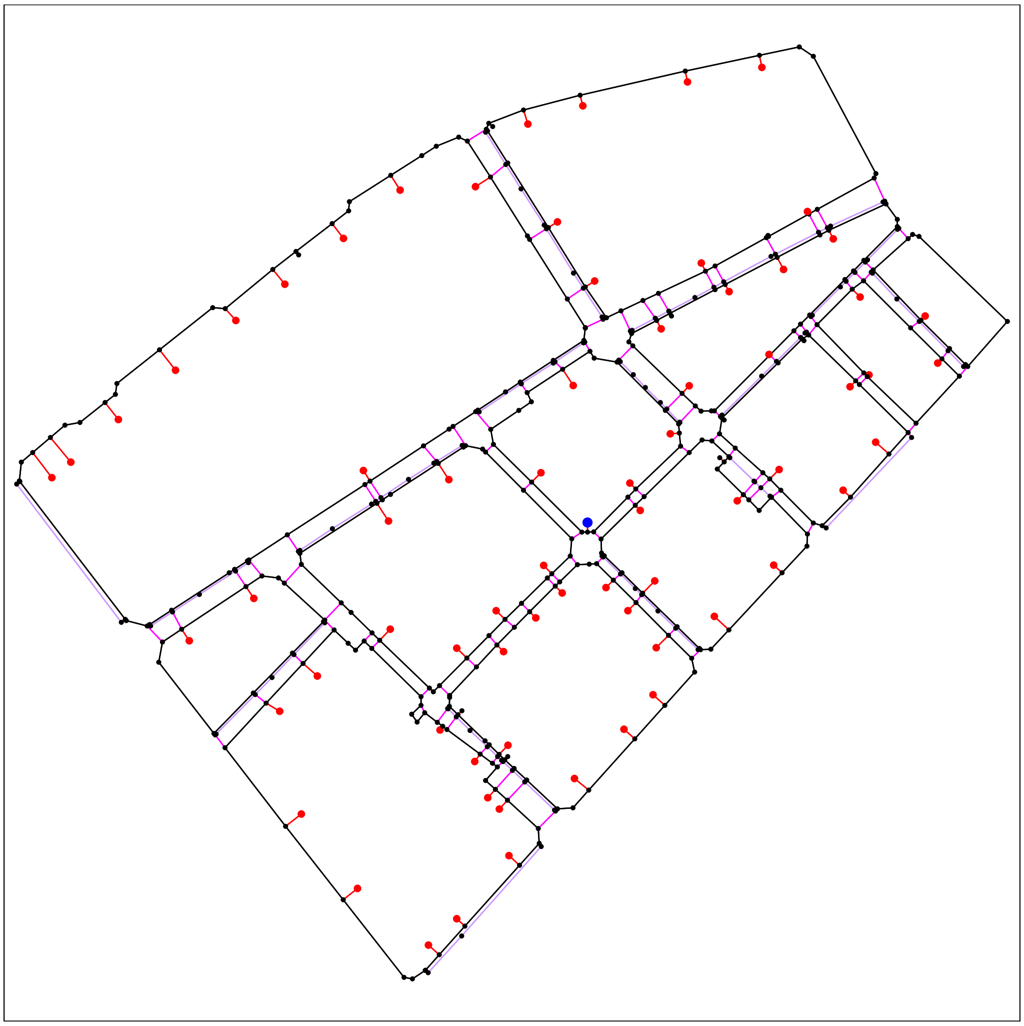

Abbildung 6.6: Der Datensatz von Madrid

Tabelle 6.7: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAB

Instanz				Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
15	0.0	812	21	8.35	**0**		0.1	1.1		1.2	**70414.0**
15	0.1	812	21	5.00	**0**		0.1	0.7		0.8	**92230.8**
15	1.0	812	21	1.79	0.81	**0**	0.1	0.7	0.9	1.7	**288002.0**
20	0.0	1538	39	4.54	1.00	**0**	0.2	14.0	4.0	18.2	**126481.0**
20	0.1	1538	39	3.04	1.02	**0**	0.2	7.3	3.0	10.5	**181592.5**
20	1.0	1538	39	1.37	**0**		0.2	3.8		4.0	**663851.0**
25	0.0	2890	63	4.20	1.01	**0**	0.6	43.2	493.4	537.2	**193796.0**
25	0.1	2890	63	2.37	0.80	**0**	0.5	22.3	109.7	132.5	**303479.2**
25	1.0	2890	63	1.17	0.69	**0**	0.5	8.2	3.7	12.4	**1272229.0**
34	0.0	4858	111	7.26	4.97	3.45	2.2	156.5	10154.9	10313.6	336985.0
34	0.1	4858	111	4.95	2.66	**0**	2.1	83.2	1137.5	1222.8	**590624.5**
34	1.0	4858	111	1.38	0.76	**0**	1.8	62.5	62.7	127.0	**2830563.0**

Tabelle 6.8: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAE

Instanz				Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
5	0.0	692	26	5.49	**0**		0.1	1.4		1.5	**33922.0**
5	0.1	692	26	3.32	**0**		0.1	0.7		0.8	**42603.7**
5	1.0	692	26	2.68	0.98	**0**	0.0	0.7	0.2	0.9	**119116.0**
10	0.0	2112	57	6.53	2.24	**0**	0.3	10.0	12.0	22.3	**100030.0**
10	0.1	2112	57	4.73	**0**		0.2	1.8		2.0	**133518.0**
10	1.0	2112	57	1.71	0.80	**0**	0.2	7.7	3.5	11.4	**432832.0**
15	0.0	2744	71	9.50	5.36	0.87	0.9	44.9	9992.8	10038.6	124712.0
15	0.1	2744	71	4.44	1.56	**0**	0.8	49.0	291.2	341.0	**176885.5**
15	1.0	2744	71	1.75	0.98	**0**	0.7	28.0	24.5	53.2	**623586.0**
20	0.0	2744	71	4.37	1.35	**0**	1.8	134.8	4471.8	4608.4	**119158.0**
20	0.1	2744	71	3.84	2.11	**0**	1.5	53.8	667.5	722.8	**174067.7**
20	1.0	2744	71	1.82	0.84	**0**	1.4	23.1	22.7	47.2	**623586.0**
25	0.0	2744	71	4.37	2.50	2.50	2.8	76.9	10206.1	10285.8	120149.0
25	0.1	2744	71	3.84	2.03	**0**	2.6	44.6	814.7	861.9	**174067.7**
25	1.0	2744	71	1.82	0.84	**0**	2.4	25.1	24.4	51.9	**623586.0**
34	0.0	2744	71	4.37	2.50	2.50	5.6	118.2	9997.8	10121.6	120149.0
34	0.1	2744	71	3.84	2.03	**0**	5.3	44.9	656.8	707.0	**174067.7**
34	1.0	2744	71	1.82	0.84	**0**	5.2	26.1	25.3	56.6	**623586.0**

Tabelle 6.9: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAL

Instanz				Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
5	0.0	550	16	2.32	**0**		0.0	0.4		0.4	**31238.0**
5	0.1	550	16	1.62	**0**		0.0	0.1		0.1	**36420.0**
5	1.0	550	16	0.75	**0**		0.0	0.1		0.1	**82383.0**
10	0.0	1638	48	6.53	0.83	**0**	0.2	8.5	1.3	10.0	**96559.0**
10	0.1	1638	48	4.66	0.54	**0**	0.2	2.2	0.2	2.6	**126234.9**
10	1.0	1638	48	1.81	0.59	**0**	0.1	1.6	0.2	1.9	**389502.0**
15	0.0	2946	89	7.04	2.11	**0**	0.8	102.9	485.3	589.0	**175943.0**
15	0.1	2946	89	4.67	1.96	**0**	0.8	75.1	212.5	288.4	**259144.5**
15	1.0	2946	89	2.06	0.92	**0**	0.7	31.5	37.1	69.3	**1000563.0**
20	0.0	4320	135	8.00	3.35	2.75	3.0	225.7	9821.6	10050.3	272331.0
20	0.1	4320	135	4.64	2.69	**0**	2.8	131.8	5525.1	5659.7	**436496.6**
20	1.0	4320	135	1.73	0.95	**0**	2.4	74.1	432.8	509.3	**1914125.0**
25	0.0	4582	143	8.25	4.16	4.16	7.7	436.5	9638.7	10082.9	275235.0
25	0.1	4582	143	4.16	2.43	1.33	6.9	228.9	9933.8	10169.6	461201.1
25	1.0	4582	143	1.83	1.01	**0**	5.9	119.6	2764.5	2890.0	**2090936.0**
34	0.0	4582	143	5.65	3.40	3.35	19.7	865.4	9136.8	10021.9	272552.0
34	0.1	4582	143	4.17	2.95	2.03	17.8	248.8	9828.0	10094.6	461859.3
34	1.0	4582	143	1.83	0.98	**0**	16.7	141.4	3159.6	3317.7	**2090936.0**

Tabelle 6.10: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Madrid

Instanz				Garantie (%)			Laufzeit				Ergebnis
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
34	0.0	1232	70	3.66	1.51	**0**	1.1	89.1	932.4	1022.6	**24766.0**
34	0.1	1232	70	4.11	1.52	**0**	1.0	37.5	130.3	168.8	**33771.1**
34	1.0	1232	70	1.24	**0**		0.9	5.3		6.2	**102183.0**

Tabelle 6.11: Das Format der Tabellen 6.12 bis 6.15.

Instanz	$\frac{L}{1000}$	Die Längenbeschränkung des Fernbereichs in Einheiten zu 1 000.
	$\hat{d}$	Der Dipfadkostenfaktor.
Qualität (%)	E-P	Qualität der primalen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	E-D	Qualität der dualen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	L-P	Qualität der primalen Lösung nach der Lagrange-Phase.
	L-D	Qualität der dualen Lösung nach der Lagrange-Phase.
Gar.		Die am Ende des Verfahrens KABEL-OPT erhaltene Gütegarantie.
Bogenred. (%)		Bogenreduktion nach der jeweiligen Phase in Prozent der ursprünglichen Bogenanzahl.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Anzahl	L-G	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens LAGRANGE-GRADIENT.
	L-R	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens NETZREDUKTION in der Lagrange-Phase.
	LP	Anzahl der Aufrufe der Schnittebenenverfahren zur Lösung der Programme LDEKO oder DEKO.

Tabelle 6.12: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Poona

Instanz		Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
5	0.0	2.2	2.4	0.6	0.5	**0**	38.8	42.5	44.6	49	15	35
5	0.1	2.4	1.8	0.1	0.1	**0**	38.8	84.3	90.6	49	16	29
10	0.0	1.5	2.2	0.4	1.2	**0**	29.1	30.4	30.7	38	14	49
10	0.1	1.5	1.6	0.3	0.7	**0**	29.1	30.8	45.9	32	13	51
10	1.0	0.8	0.4	0.1	0.1	**0**	29.1	40.7	98.3	48	23	24
15	0.0	4.2	4.1	2.6	3.5	2.6	20.4	20.9	20.9	24	11	41
15	0.1	1.3	2.1	1.3	2.1	**0**	20.4	20.9	50.9	2	2	53
15	1.0	0.8	0.6	0.2	0.3	**0**	20.4	20.9	45.0	37	11	57
20	0.0	3.1	3.3	2.1	2.6	2.1	20.1	20.1	20.1	21	10	23
20	0.1	1.5	2.1	1.1	1.3	0.4	20.1	20.1	20.4	26	10	42
20	1.0	0.7	0.5	0.2	0.3	**0**	20.1	20.4	44.8	35	12	61
25	0.0	2.8	3.2	2.1	2.5	1.8	18.8	18.8	18.8	28	10	28
25	0.1	1.3	2.4	1.2	1.6	0.6	18.8	18.8	20.2	22	10	47
25	1.0	0.7	0.5	0.2	0.3	**0**	18.8	19.7	94.9	40	12	59
34	0.0	3.5	3.6	2.9	3.0	2.9	16.9	16.9	16.9	19	10	14
34	0.1	1.6	2.5	1.3	1.6	0.9	16.9	16.9	17.6	24	10	40
34	1.0	0.6	0.5	0.2	0.2	**0**	16.9	19.2	68.1	47	16	61

Tabelle 6.13: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAB

Instanz		Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
10	0.1	2.3	0.1	2.3	**0**	**0**	66.1	80.9	80.9	13	12	5
15	1.0	0.9	0.5	0.2	0.2	**0**	48.3	84.2	88.0	28	15	13
20	0.0	3.3	0.8	0.5	0.1	**0**	44.6	82.3	86.3	108	33	19
20	0.1	1.8	0.8	0.4	0.2	**0**	44.6	73.4	98.9	63	25	18
25	0.0	2.2	1.5	0.2	0.4	**0**	43.5	69.9	89.3	59	23	24
25	0.1	1.2	0.8	0.1	0.3	**0**	43.5	73.5	98.9	62	24	27
25	1.0	0.5	0.2	0.2	0.1	**0**	43.5	67.9	67.9	35	13	16
34	0.0	5.9	3.9	4.2	3.3	3.0	27.2	28.9	29.2	31	12	26
34	0.1	3.1	1.4	1.3	1.0	**0**	27.2	29.0	96.8	28	13	34
34	1.0	0.6	0.3	0.2	0.1	**0**	27.2	35.5	83.2	52	18	34

Tabelle 6.14: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAE

Instanz		Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
5	1.0	1.8	0.5	0.5	**0**	**0**	48.2	91.4	91.4	39	17	9
10	0.0	5.5	0.6	1.5	0.3	**0**	46.8	57.9	91.5	29	13	19
10	1.0	1.0	0.3	0.3	0.1	**0**	46.8	72.4	98.2	40	17	17
15	0.0	7.1	2.2	3.1	2.2	0.4	20.0	20.0	51.2	19	10	29
15	0.1	2.5	1.5	0.5	0.6	**0**	20.0	40.9	74.0	46	17	27
15	1.0	1.0	0.3	0.5	0.1	**0**	20.0	46.4	84.0	61	24	27
20	0.0	2.7	1.2	0.2	0.7	**0**	18.1	45.6	92.4	38	23	29
20	0.1	2.1	1.3	0.8	0.9	**0**	18.1	36.3	81.1	41	14	31
20	1.0	1.0	0.4	0.4	0.1	**0**	18.1	56.3	84.9	61	20	25
25	0.1	2.1	1.3	0.7	1.0	**0**	18.1	37.8	79.3	30	13	29
25	1.0	1.0	0.4	0.4	0.1	**0**	18.1	56.3	84.6	61	20	25
34	0.1	2.1	1.3	0.7	1.0	**0**	18.1	37.8	81.7	30	13	29
34	1.0	1.0	0.4	0.4	0.1	**0**	18.1	56.3	84.6	61	20	25

Tabelle 6.15: Ergebnisse von KABEL-OPT für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAL

Instanz		Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
10	0.0	4.8	1.3	0.4	0.1	**0**	39.5	92.2	97.4	118	31	16
15	0.0	4.1	2.4	1.3	0.4	**0**	31.3	37.9	90.2	70	23	33
15	0.1	3.0	1.3	1.4	0.1	**0**	31.3	37.6	99.3	75	22	32
15	1.0	1.1	0.6	0.4	0.1	**0**	31.3	43.7	91.1	49	18	31
20	0.0	5.9	3.8	2.3	2.9	2.3	24.1	25.7	26.4	42	14	22
20	0.1	2.9	1.3	1.4	0.8	**0**	24.1	24.8	42.2	33	14	37
20	1.0	0.8	0.5	0.3	0.3	**0**	24.1	27.1	78.5	33	13	33
25	0.1	3.1	1.4	1.5	1.4	0.9	18.6	18.6	20.4	27	12	23
25	1.0	0.8	0.6	0.3	0.3	**0**	18.6	20.0	87.0	34	13	41
34	0.1	3.7	1.6	2.5	1.6	1.6	18.3	18.3	18.3	13	10	22
34	1.0	0.8	0.6	0.2	0.3	**0**	18.3	20.3	80.8	37	15	41

6.1.3 Untersuchung der Schnittebenenverfahren

In diesem Unterabschnitt diskutieren und dokumentieren wir die Ergebnisse der Schnittebenenverfahren in den Verfahren DIREKT-OPT und BÜNDEL-OPT. In dem Verfahren DIREKT-OPT wird nach der Lagrange-Phase das Netzproblem Ψ mit einem Schnittebenenverfahren direkt gelöst. In dem Verfahren BÜNDEL-OPT gehen wir nach der Lagrange-Phase zu einem Netzproblem Ψ' durch Bündeln der Zielpunkte über. Die Anschlüsse des Netzproblems Ψ' sind Wurzelwälder, die jeweils eine Teilmenge der Senken mit den Quellen verbinden. Das Netzproblem Ψ' lösen wir mit einem Schnittebenenverfahren wie in Abschnitt 5.6 beschrieben.

Wie im vorigen Abschnitt variieren wir die Längenbeschränkungen und die Dipfadkostenfaktoren der erzeugten Kabelprobleme. Auf diese Weise erzeugen wir Instanzen unterschiedlicher Größe und Schwierigkeit, wie sie auch in dem Verfahren KABEL-OPT als Unterprobleme auftauchen.

Das Verfahren BÜNDEL-OPT hat eine schlechtere Performance als das Verfahren DIREKT-OPT. Eine Ursache dafür ist unserer Ansicht nach, daß das BCP-Verfahren in BÜNDEL-OPT nicht so weit ausgereift ist wie das BCP-Verfahren in DIREKT-OPT. Daher halten wir das Konzept des Verfahrens BÜNDEL-OPT weiterhin für erfolgversprechend.

Die Lösung der linearen Programme verbraucht den größten Anteil der Laufzeit. Im Vergleich dazu sind die Laufzeiten der heuristischen Verfahren zur Erzeugung von Anschlußvariablen, das sind Dipfadvariablen bzw. Wurzelwaldvariablen, sehr gering. In dem Verfahren DIREKT-OPT werden bei jeder Variablengenerierung mehrere Dipfadvariablen pro Senke erzeugt wie in Unterabschnitt 5.6.2 beschrieben. Hingegen wird bei dem Verfahren BÜNDEL-OPT pro Zielpunkt bzw. pro Senkenteilmenge höchstens ein Wurzelwald erzeugt. Entsprechend werden bei dem Verfahren BÜNDEL-OPT mehr Iterationen zur Lösung des linearen Programms in der Wurzel benötigt als in dem Verfahren DIREKT-OPT. Die ursprüngliche Absicht, die Erzeugung der Wurzelwaldvariablen im Wesentlichen mit heuristischen Verfahren zu bewerkstelligen und nur gegen Ende des BCP-Verfahrens exakte Verfahren zur Lösung des Pricingproblems einzusetzen, wurde bei dem Verfahren BÜNDEL-OPT nicht erreicht.

Die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen im linearen Programm in der Wurzel des BCP-Verfahrens in DIREKT-OPT übersteigt die entsprechende Anzahl in BÜNDEL-OPT um etwa eine Größenordnung. Da jedoch die Anschlußvariablen in den Verfahren DIREKT-OPT und BÜNDEL-OPT unterschiedlich erzeugt werden, haben wir zusätzlich die Anzahl der fraktionalen Variablen und der von uns so genannten fraktionalen Nebenbedingungen aufgeführt. Als **fraktionale Nebenbedingungen** bezeichnen wir die Bauteilbedingungen $x_a - \sum_{P \in H_t} y_{t,P} \chi_a^P \geq 0$, $a \in A$, $t \in T$, mit der Eigenschaft, daß die zugeordnete Nutzpreisvariable $v_{t,a}$ nicht gleich null ist und nicht zulässig auf die obere Schranke c_a gesetzt werden kann. Die Nutzpreisvariable $v_{t,a}$ kann nur dann zulässig auf die obere Schranke c_a gesetzt werden, wenn alle Nutzpreisvariablen $v_{t',a}$ mit $t' \neq t$

gleich null sind. Das lineare Programm LDEKO kann optimal gelöst werden, wenn das aktive lineare Programm alle fraktionalen Nebenbedingungen und die Zielpreisbedingungen $\sum_{P \in H_t} y_{t,P} = 1$ enthält und die nicht aktiven Nutzpreisvariablen in korrekter Weise auf null oder auf die obere Schranke gesetzt werden. Die Anzahl der fraktionalen Nebenbedingungen des Wurzel-LPs ist für das Verfahren BÜNDEL-OPT ebenfalls etwa um den Faktor fünf kleiner als für das Verfahren DIREKT-OPT. Entsprechend sind in dem Verfahren BÜNDEL-OPT die aktiven linearen Programme leichter zu lösen als in dem Verfahren DIREKT-OPT.

Leider ist es uns jedoch nicht gelungen, eine effektive Methode zur gleichzeitigen zahlreichen Generierung von verletzten Wurzelwaldvariablen zu finden, um so die Anzahl der Iterationen des BCP-Verfahrens zu verringern. In dem Verfahren BÜNDEL-OPT traten immer wieder möglicherweise numerische Instabilitäten auf, die teilweise zu einem Abbruch des Verfahrens geführt haben. Wir haben daher für einige Instanzen die Steuerparameter der Lagrange-Phase so verändert, daß Ergebnisse berechnet werden konnten. Für zwei andere Instanzen wurden die Verfahren kurz vor dem Auftritt des Fehlers und vor Überschreiten des Zeitlimits abgebrochen. Die Performance der BCP-Phase der Verfahren DIREKT-OPT und BÜNDEL-OPT für eine Instanz ist daher nur dann vergleichbar, wenn die angegebenen Knoten- und Kantenzahlen der Instanzen nach der Lagrange-Phase übereinstimmen. Die experimentellen Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen dokumentiert.

Tabelle 6.16: Das Format der Tabellen 6.18, 6.20, 6.22 und 6.24.

Instanz	$\frac{L}{1000}$	Die Längenbeschränkung des Fernbereichs in Einheiten zu 1 000.
	$\hat{d}$	Der Dipfadkostenfaktor.
	$\|V\|$	Die Anzahl der Knoten der Instanz nach der Lagrange-Phase.
	$\|A\|$	Die Anzahl der Bögen der Instanz nach der Lagrange-Phase.
	$\|T\|$	Die Anzahl der Senken der Instanz nach der Lagrange-Phase.
BCP	Nod.	Die Anzahl der Knoten des Verzweigungsbaumes des BCP-Verfahrens.
	Price	Die Anzahl der Aufrufe des Pricingverfahrens.
Root-LP		Anzahl der Variablen, der Nebenbedingungen und der Nicht-Null-Einträge der Matrix des aktiven LPs in der Wurzel des Verzeigungsbaumes.
	Var.	Variablen.
	Neb.	Nebenbedingungen.
	NZ	Nicht-Null-Einträge.
Frak.	Var.	Fraktionale Variablen und
	Neb.	fraktionale Nebenbedingungen in den Lösungen des aktiven LPs in der Wurzel des Verzweigungsbaumes.

Tabelle 6.17: Das Format der Tabellen 6.18, 6.20, 6.22 und 6.24.

Instanz	$\frac{L}{1000}$	Die Längenbeschränkung des Fernbereichs in Einheiten zu 1 000.
	$\hat{d}$	Der Dipfadkostenfaktor.
Laufzeiten		Die Laufzeiten für die jeweiligen Unterverfahren in CPU-Sekunden.
	G-H	Generierung von Anschlußvariablen mit einem heuristischen Verfahren oder einem dynamischen Programm.
	G-S	Generierung von Anschlußvariablen mit einem BCP-Verfahren in BÜNDEL-OPT.
	LP	Verwaltung der LP-Daten und für das Lösen aktiver LPs.
	CPL.	Lösen der aktiven LPs mit CPLEX.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Garantie	Lag.	Gütegarantie in Prozent nach der Lagrange-Phase.
	BCP	Gütegarantie in Prozent bezogen auf die berechneten primalen und dualen Lösungen in der BCP-Phase.

Tabelle 6.18: Ergebnisse von DIREKT-OPT (oben) und von BÜNDEL-OPT (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Poona

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\lvert V\rvert$	$\lvert A\rvert$	$\lvert T\rvert$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
5	0.0	302	912	106	3	31	4273	2393	41836	130	490
5	0.1	111	250	68	1	8	741	659	4217	0	206
5	1.0	39	81	25							
6	0.0	119	284	72	1	5	873	748	5684	0	146
6	0.1	110	245	73	1	5	680	594	3558	0	189
6	1.0	41	80	29							
7	0.0	406	1158	157	1	19	5377	2579	52629	0	466
7	0.1	359	979	151	1	10	3661	1915	31677	0	553
7	1.0	7	10	4	1	2	19	20	38	0	2
8	0.0	603	1855	189	3	45	12938	5198	169895	32	1044
8	0.1	577	1749	187	3	26	8078	3524	92492	30	1210
8	1.0	524	1478	186	1	13	5635	2309	57469	0	641
10	0.0	813	2625	229	1	27	32955	7515	585904	0	1395
10	0.1	809	2610	229	3	45	18591	5944	291424	39	2303
10	1.0	750	2239	226	1	11	10690	3299	144908	0	953
15	0.0	1075	3516	274	1	15	152940	21727	4374699	1981	3832
15	0.1	1071	3499	274	1	45	63156	11630	1447874	2	5132
15	1.0	1075	3516	274	1	25	21973	5701	417675	0	1823

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\lvert V\rvert$	$\lvert A\rvert$	$\lvert T\rvert$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
5	0.0	307	959	106	1	355	2046	1193	10112	0	202
5	0.1	111	250	68	1	32	349	306	821	0	21
5	1.0	39	81	25							
6	0.0	119	284	72	1	40	394	362	1007	0	27
6	0.1	110	245	73	1	39	354	287	900	0	23
6	1.0	41	80	29							
7	0.0	406	1158	157	1	314	2181	1340	10030	0	148
7	0.1	359	979	151	1	198	1539	1101	6924	0	85
7	1.0	7	10	4	1	6	17	14	29	0	4
8	0.0	622	1964	190	1	405	3871	2151	27677	0	260
8	0.1	622	1964	190	1	489	4007	2088	28714	0	283
8	1.0	524	1478	186	1	208	2017	1302	11130	0	91
9	0.0	729	2349	212	1	454	4356	2546	35294	0	310
9	0.1	733	2366	212	1	612	4999	2637	43575	42	350
9	1.0	696	2106	210	1	418	3087	1743	21370	0	123
10	0.0	813	2625	229	1	263	4485	2945	27831	0	343
10	0.1	809	2610	229	1	285	4350	2766	25520	12	276
10	1.0	750	2239	226	1	334	3188	1876	18500	0	160

Tabelle 6.19: Ergebnisse von Direkt-Opt (oben) und von Bündel-Opt (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz von Poona

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
5	0.0	2.0		21.8	6.2	13.8	26.3	1.0	**0**
5	0.1	0.1		0.4	0.2	5.5	0.6	0.2	**0**
5	1.0					1.4		**0**	
6	0.0	0.1		0.4	0.2	5.9	0.7	0.2	**0**
6	0.1	0.1		0.3	0.1	5.1	0.4	0.1	**0**
6	1.0					1.7		**0**	
7	0.0	1.5		9.1	4.0	22.6	12.3	0.5	**0**
7	0.1	0.7		3.5	1.1	21.4	4.8	0.3	**0**
7	1.0	0.0		0.0	0.0	2.9	0.0	0.1	**0**
8	0.0	6.4		207.7	87.5	43.3	225.2	0.8	**0**
8	0.1	3.2		76.5	21.2	29.4	84.1	0.5	**0**
8	1.0	1.3		6.9	2.4	20.9	9.7	0.2	**0**
10	0.0	13.0		380.5	243.8	76.5	409.4	1.6	**0**
10	0.1	14.3		674.8	349.3	56.6	709.2	1.0	**0**
10	1.0	2.8		21.6	8.9	56.8	26.9	0.2	**0**
15	0.0	69.4		24716.4	22182.3	226.2	24805.7	3.5	16.5
15	0.1	56.1		4996.7	4336.5	146.6	5140.5	1.8	0.1
15	1.0	10.1		134.2	79.1	94.3	156.4	0.4	**0**

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
5	0.0	38.7	720.5	163.2	161.2	4.3	909.8	2.0	**0**
5	0.1	0.4	3.4	0.4	0.3	5.2	4.2	0.2	**0**
5	1.0					1.4		**0**	
6	0.0	0.5	2.7	0.5	0.4	5.5	3.9	0.2	**0**
6	0.1	0.4	2.1	0.3	0.3	4.9	3.0	0.1	**0**
6	1.0					1.6		**0**	
7	0.0	28.8	503.8	168.8	166.3	21.5	701.9	0.5	**0**
7	0.1	12.2	89.2	28.0	26.7	20.9	131.7	0.3	**0**
7	1.0	0.0	0.1	0.0	0.0	2.8	0.1	0.1	**0**
8	0.0	72.9	942.4	2577.9	2570.1	24.0	3596.6	1.6	0.8
8	0.1	99.1	2719.7	2132.2	2124.9	12.4	4948.8	1.6	**0**
8	1.0	23.8	314.8	38.8	36.8	20.1	376.5	0.2	**0**
9	0.0	63.7	125.5	9808.1	9797.5	15.9	10034.9	3.9	6.9
9	0.1	139.8	3078.9	6774.1	6764.1	21.3	10010.2	3.1	0.4
9	1.0	84.4	2957.7	383.7	378.2	26.6	3412.1	0.2	**0**
10	0.0	35.9		9890.1	9879.2	78.9	9951.6	1.6	
10	0.1	38.0		9916.8	9906.9	53.9	9981.9	1.0	
10	1.0	64.0	1480.3	437.7	431.9	56.5	1978.7	0.2	**0**

Tabelle 6.20: Ergebnisse von DIREKT-OPT (oben) und von BÜNDEL-OPT (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAB

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	10	18	7							
10	0.1	25	62	10	1	4	119	80	563	0	16
10	1.0	9	18	5							
11	0.0	3	4	2							
11	0.1	3	4	2							
11	1.0	6	12	3							
12	0.0	12	23	8							
12	0.1	26	63	11	1	3	139	84	695	0	16
12	1.0	11	23	6							
13	0.0	12	20	7	1	3	47	44	186	0	14
13	0.1	9	14	5							
13	1.0	24	53	10							
15	0.0	47	102	16							
15	0.1	3	3	2							
15	1.0	58	129	18	1	8	318	202	2099	0	42
20	0.0	107	273	30	1	8	1044	605	11516	0	111
20	0.1	155	410	34	1	14	1656	811	23544	0	228
20	1.0	6	7	5							

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	10	18	7							
10	0.1	25	62	10	1	21	77	61	179	0	4
10	1.0	9	18	5							
11	0.0	3	4	2							
11	0.1	3	4	2							
11	1.0	6	12	3							
12	0.0	12	23	8							
12	0.1	26	63	11	1	22	78	63	205	0	4
12	1.0	11	23	6							
13	0.0	12	20	7	1	12	37	35	106	0	8
13	0.1	9	14	5							
13	1.0	24	53	10							
14	0.0	19	37	8							
14	0.1	8	12	4	1	7	19	19	42	0	4
14	1.0	21	47	9							
15	0.0	47	102	16							
15	0.1	3	3	2							
15	1.0	58	129	18	1	39	157	134	627	0	10

Tabelle 6.21: Ergebnisse von Direkt-Opt (oben) und von Bündel-Opt (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAB

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0					0.0		**0**	
10	0.1	0.0		0.0	0.0	0.1	0.1	2.3	**0**
10	1.0					0.1		**0**	
11	0.0					0.1		**0**	
11	0.1					0.1		**0**	
11	1.0					0.0		**0**	
12	0.0					0.1		**0**	
12	0.1	0.0		0.0	0.0	0.2	0.1	2.1	**0**
12	1.0					0.1		**0**	
13	0.0	0.0		0.0	0.0	0.2	0.0	0.3	**0**
13	0.1					0.1		**0**	
13	1.0					0.1		**0**	
15	0.0					1.1		**0**	
15	0.1					0.8		**0**	
15	1.0	0.0		0.1	0.1	0.9	0.2	0.4	**0**
20	0.0	0.2		0.7	0.5	14.3	1.1	0.5	**0**
20	0.1	0.5		1.5	1.0	7.6	2.3	0.6	**0**
20	1.0					4.0		**0**	

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0					0.0		**0**	
10	0.1	0.0	0.2	0.1	0.1	0.1	0.4	2.3	**0**
10	1.0					0.1		**0**	
11	0.0					0.0		**0**	
11	0.1					0.0		**0**	
11	1.0					0.0		**0**	
12	0.0					0.1		**0**	
12	0.1	0.0	0.3	0.0	0.0	0.2	0.4	2.1	**0**
12	1.0					0.1		**0**	
13	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.2	0.2	0.3	**0**
13	0.1					0.2		**0**	
13	1.0					0.1		**0**	
14	0.0					0.1		**0**	
14	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	**0**
14	1.0					0.1		**0**	
15	0.0					1.3		**0**	
15	0.1					0.8		**0**	
15	1.0	0.2	1.4	0.1	0.1	0.8	1.8	0.4	**0**

Tabelle 6.22: Ergebnisse von DIREKT-OPT (oben) und von BÜNDEL-OPT (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAE

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	307	890	55	1	22	6228	1827	135434	0	270
10	0.1	3	4	2							
10	1.0	224	585	51	1	7	1879	846	27869	0	191
11	0.0	407	1209	61	1	25	12489	3478	353647	2	517
11	0.1	406	1195	61	1	18	9998	2344	270519	0	752
11	1.0	315	899	60	1	8	3192	1211	61116	0	281
12	0.0	466	1384	68	1	56	25198	5146	856502	0	787
12	0.1	396	1143	68	1	28	12786	2898	413401	0	1000
12	1.0	436	1270	68	1	7	4874	1569	111265	0	341
13	0.0	509	1539	69	1	18	28429	7434	1019759	805	1476
13	0.1	478	1421	69	1	40	16512	3293	558801	0	1224
13	1.0	446	1307	69	1	12	5351	1655	127142	0	395
15	0.0	586	1764	71	1	17	40024	9008	1610379	1234	1924
15	0.1	544	1624	71	1	39	24122	4364	884387	0	1584
15	1.0	505	1472	71	1	9	6279	1832	157284	0	403
20	0.0	504	1494	71	1	21	37231	8704	1691314	159	1172
20	0.1	579	1750	71	1	49	34020	4501	1406803	0	1737
20	1.0	419	1200	70	1	8	5109	1651	125420	0	403

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	357	1060	57	1	279	1525	1016	11378	0	116
10	0.1	3	4	2							
10	1.0	224	585	51	1	56	490	427	2047	0	6
11	0.0	407	1209	61	1	213	1560	1174	12811	0	91
11	0.1	434	1305	61	1	263	1777	1124	15000	0	128
11	1.0	315	899	60	1	139	877	671	6054	0	44
12	0.0	466	1384	68	1	227	1808	1307	15671	0	102
12	0.1	396	1143	68	1	297	1839	1173	20455	48	165
12	1.0	436	1270	68	1	157	1221	787	10628	0	69
13	0.0	509	1539	69	1	236	2401	1769	27246	4	277
13	0.1	608	1844	69	1	273	2119	1439	19252	0	116
13	1.0	446	1307	69	1	198	1301	844	12025	0	86
14	0.0	629	1911	70	1	409	3090	2154	40091	147	239
14	0.1	547	1645	70	1	252	2025	1436	18458	0	138
14	1.0	421	1219	69	1	225	1244	814	12959	0	74
15	0.0	586	1764	71	1	383	3335	2310	52122	136	345
15	0.1	544	1624	71	1	265	2271	1667	25088	0	198
15	1.0	505	1472	71	1	183	1370	931	13450	0	75

Tabelle 6.23: Ergebnisse von DIREKT-OPT (oben) und von BÜNDEL-OPT (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAE

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0	2.8		10.7	6.5	10.1	15.7	1.8	**0**
10	0.1					2.1		**0**	
10	1.0	0.5		1.1	0.5	7.7	1.9	0.3	**0**
11	0.0	6.7		264.4	248.1	31.1	275.7	2.0	**0**
11	0.1	4.8		34.6	26.5	13.7	43.1	1.4	**0**
11	1.0	1.0		2.3	1.0	14.4	3.9	0.5	**0**
12	0.0	21.0		6172.7	6110.9	77.0	6223.9	1.7	**0**
12	0.1	7.7		203.6	188.9	29.0	218.3	0.7	**0**
12	1.0	1.8		4.0	1.5	18.7	6.5	0.6	**0**
13	0.0	17.3		10209.2	10086.4	60.3	10233.6	1.9	16.3
13	0.1	13.4		373.6	349.6	38.6	402.7	1.0	**0**
13	1.0	2.2		5.8	2.8	20.6	9.2	0.5	**0**
15	0.0	25.7		15821.3	15617.2	89.7	15854.2	2.3	16.4
15	0.1	20.8		1088.5	1036.2	51.5	1129.4	1.1	**0**
15	1.0	2.7		7.9	4.0	27.5	11.7	0.5	**0**
20	0.0	33.2		9882.1	9728.3	137.5	9927.2	0.9	14.5
20	0.1	36.8		2156.6	2066.7	59.7	2232.4	1.7	**0**
20	1.0	2.3		6.0	3.1	26.2	9.2	0.4	**0**

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0	75.7	9957.2	45.9	44.7	5.8	10019.0	4.0	**0**
10	0.1					2.1		**0**	
10	1.0	1.8	16.4	0.7	0.6	7.5	18.5	0.3	**0**
11	0.0	62.3	9911.0	44.6	43.3	32.5	9970.1	2.0	15.2
11	0.1	117.9	8807.3	53.8	52.5	7.6	8879.4	3.0	**0**
11	1.0	9.2	116.2	4.5	4.0	13.7	126.4	0.5	**0**
12	0.0	69.9	9925.8	91.2	89.6	79.7	10035.0	1.7	8.7
12	0.1	89.4	9896.8	88.4	86.5	31.5	10007.6	0.7	0.6
12	1.0	20.3	334.7	11.0	10.2	18.7	354.6	0.6	**0**
13	0.0	40.0	9537.0	558.3	555.6	57.2	10120.5	1.9	14.1
13	0.1	83.3	9761.0	206.3	204.2	9.8	9993.4	1.8	7.3
13	1.0	30.2	721.0	15.4	14.5	21.8	747.9	0.5	**0**
14	0.0	40.9	3697.4	6452.8	6447.9	66.4	10211.5	3.2	15.5
14	0.1	67.3	9915.0	190.3	188.1	44.1	10128.2	1.3	7.3
14	1.0	26.2	556.5	17.2	16.2	21.5	586.9	0.5	**0**
15	0.0	39.7	988.1	8995.5	8989.3	85.6	10049.9	2.3	11.5
15	0.1	62.4	9372.6	659.7	657.2	52.0	10060.7	1.1	7.2
15	1.0	28.7	634.9	11.3	10.5	27.7	658.5	0.5	**0**

Tabelle 6.24: Ergebnisse von Direkt-Opt (oben) und von Bündel-Opt (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAL

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	62	129	23	1	3	369	395	3126	0	60
10	0.1	13	19	7	1	2	41	62	182	0	18
10	1.0	33	56	16	1	3	145	129	731	0	27
11	0.0	192	533	47	1	29	3660	1309	75297	0	207
11	0.1	126	319	40	5	21	1150	672	14188	26	162
11	1.0	3	4	2							
12	0.0	240	693	57	1	10	4062	1272	75558	0	231
12	0.1	130	305	43	1	8	998	647	10899	0	181
12	1.0	216	587	54	1	9	2513	889	44152	0	231
13	0.0	323	948	64	1	27	10425	2745	253064	0	455
13	0.1	434	1342	65	1	15	14638	2413	381290	0	821
13	1.0	300	836	62	1	9	4050	1264	84435	0	335
15	0.0	585	1832	86	1	79	39644	4803	1298609	0	744
15	0.1	588	1839	86	1	21	17944	3862	521589	0	1289
15	1.0	545	1661	86	1	16	10105	2441	257683	0	722
20	0.0	985	3213	132	1	15	97040	15721	4086210	1966	2975
20	0.1	996	3250	132	1	15	88635	10482	3642804	782	3566
20	1.0	968	3153	132	1	26	24823	4910	928170	0	1741

Instanz					BCP		Root-LP			Frak.	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	$\|V\|$	$\|A\|$	$\|T\|$	Nod.	Price	Var.	Neb.	NZ	Var.	Neb.
10	0.0	62	129	23	1	44	197	152	888	0	23
10	0.1	13	19	7	1	9	37	41	148	0	14
10	1.0	33	56	16	1	16	82	70	212	0	12
11	0.0	285	859	50	1	215	1310	873	7730	0	109
11	0.1	126	319	40	1	72	414	330	1890	0	24
11	1.0	3	4	2							
12	0.0	167	438	49	1	86	588	448	2287	0	33
12	0.1	130	305	43	1	64	406	335	1500	0	44
12	1.0	216	587	54	1	112	600	465	4560	0	45
13	0.0	461	1431	66	1	269	2095	1347	20986	0	189
13	1.0	300	836	62	1	131	863	625	7470	0	60
14	0.0	277	781	70	1	261	1306	820	6867	0	115
14	0.1	15	27	12							
14	1.0	271	744	69	1	88	728	552	3654	0	32
15	0.0	585	1832	86	1	304	2630	1713	26969	42	137
15	0.1	588	1839	86	1	312	2623	1616	23835	0	187
15	1.0	545	1661	86	1	267	1706	1072	16611	0	111

Tabelle 6.25: Ergebnisse von DIREKT-OPT (oben) und von BÜNDEL-OPT (unten) für Instanzen erzeugt aus dem Datensatz SAL

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0	0.0		0.2	0.1	8.7	0.3	0.4	**0**
10	0.1	0.0		0.0	0.0	2.4	0.0	0.1	**0**
10	1.0	0.0		0.0	0.0	1.7	0.0	0.1	**0**
11	0.0	1.5		16.9	15.0	14.1	20.0	1.0	**0**
11	0.1	0.3		2.1	0.6	6.4	2.9	0.5	**0**
11	1.0					2.0		**0**	
12	0.0	1.1		3.4	1.6	15.1	5.2	1.0	**0**
12	0.1	0.2		0.6	0.4	5.3	0.9	0.4	**0**
12	1.0	0.7		1.7	0.8	5.9	2.8	0.4	**0**
13	0.0	4.6		70.3	59.5	51.2	79.8	0.9	**0**
13	0.1	5.7		40.5	28.1	25.8	50.4	1.8	**0**
13	1.0	1.3		3.2	1.4	10.7	5.2	0.4	**0**
15	0.0	35.9		1048.5	957.8	102.9	1156.2	1.7	**0**
15	0.1	11.1		109.9	78.5	73.4	130.2	1.5	**0**
15	1.0	4.0		30.7	22.1	33.8	37.9	0.5	**0**
20	0.0	56.4		35116.6	34122.0	226.6	35186.3	2.9	27.0
20	0.1	48.3		14636.6	14107.9	141.0	14704.0	2.2	6.8
20	1.0	16.3		455.8	404.2	77.5	489.4	0.5	**0**

Instanz		Laufzeiten						Garantie	
$\frac{\bar{L}}{1000}$	$\hat{d}$	G-H	G-S	LP	CPL.	Lag.	BCP	Lag.	BCP
10	0.0	0.5	6.2	0.3	0.2	8.7	6.8	0.4	**0**
10	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	2.5	0.2	0.1	**0**
10	1.0	0.1	0.4	0.0	0.0	1.7	0.5	0.1	**0**
11	0.0	48.3	10018.1	31.0	30.2	4.7	10059.4	2.3	1.5
11	0.1	1.9	31.1	0.7	0.6	6.4	33.1	0.5	**0**
11	1.0					2.0		**0**	
12	0.0	2.9	41.7	1.4	1.2	18.2	45.0	0.6	**0**
12	0.1	1.1	9.1	0.7	0.6	5.3	10.8	0.4	**0**
12	1.0	7.8	131.7	2.1	1.8	5.5	137.1	0.4	**0**
13	0.0	90.3	9795.0	216.0	213.9	19.3	10035.9	2.5	7.9
13	1.0	13.2	228.5	3.9	3.5	11.3	238.4	0.4	**0**
14	0.0	36.2	7532.8	23.8	23.0	28.5	7570.7	0.7	**0**
14	0.1					6.6		**0**	
14	1.0	6.7	95.1	1.9	1.7	11.5	100.5	0.3	**0**
15	0.0	104.6	9632.6	416.2	413.2	104.0	10090.1	1.7	13.1
15	0.1	87.1	9547.8	449.5	446.4	77.0	10036.8	1.5	4.2
15	1.0	84.0	5686.3	36.0	34.5	32.3	5747.5	0.5	**0**

6.2 Steinerbaum- und VLSI-Instanzen

Die Instanzen des Steinerbaum-Problems in Graphen wurden der Sammlung „SteinLib“ des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik in Berlin entnommen. Das Verfahren KABEL-OPT wenden wir zum einen auf Steinerbaum-Probleme von Beasley an und auf rechtwinklige Steinerbaum-Probleme. Diese Instanzen wurden mit Zufallsfunktionen erzeugt. Zum anderen betrachten wir Steinerbaum-Probleme, die im Zusammenhang mit dem Design von elektronischen Schaltungen (VLSI) entstanden sind. Diese Instanzen bezeichnen wir als VLSI-Instanzen.

Entsprechend einer Empfehlung von Martin [Mar98] haben wir für die VLSI-Instanzen zusätzlich positive Dipfadkostenfaktoren $\hat{d}$ und Längenbeschränkungen L eingeführt. Auf diese Weise wird die Zielvorstellung kurzer Signallaufzeiten in der elektronischen Schaltung berücksichtigt. In Unterabschnitt 6.2.4 wird nachfolgend beschrieben, wie diese Instanzen genau festgelegt werden.

Man betrachte eine Instanz $\mathrm{STG}(G, \tilde{T}, \tilde{c})$, $G = (V, E)$, des Steinerbaum-Problems in Graphen. Den Graphen G wandeln wir in einen Digraphen um, indem wir jede Kante ij durch zwei antiparallele Bögen (i, j) und (j, i) mit Kosten $c_{(i,j)} = c_{(j,i)} = \tilde{c}_{ij}$ ersetzen. Die Knoten der rechtwinkligen und der VLSI-Instanzen haben xy-Koordinaten. Für die Knoten der Instanzen der Gruppen B bis E verteilen wir xy-Koordinaten mit Zufallsfunktionen. Wir wählen das Terminal $s \in \tilde{T}$ als Quelle aus, das dem Koordinaten-Schwerpunkt der Terminals aus $\tilde{T}$ am nächsten liegt. Die restlichen Terminals bilden die Senken T. Auf diese Weise ist ein Kabelproblem

$$\Pi = \mathrm{KABEL}(D, \{s\}, T, c, 0, 0, 0)$$

definiert, in dem die Dipfadkostenfaktoren, die Bogenlängen und die Längenbeschränkungen identisch null sind. Dem Kabelproblem Π ordnen wir das Netzproblem

$$\Psi = \mathrm{NETZ}(A, T, H, c, 0)$$

zu. Die Anschlüsse der Menge H_t, $t \in T$, sind die (s, t)-Dipfade in dem Digraphen D.

Wir vergleichen die Ergebnisse des Verfahrens KABEL-OPT mit den Ergebnissen eines Branch-and-Cut-Verfahrens von Koch und Martin [KM98]. Die Testläufe von Koch und Martin wurden auf einer „Sun Sparc Model 71“ durchgeführt. Für einen Vergleich der Laufzeiten berücksichtigen wir das Fünffache der Laufzeiten des Verfahrens KABEL-OPT, die auf einer „Sun Ultra-Sparc II“ wegen des deutlich höheren Speicherbedarfs durchgeführt wurden. Der Faktor fünf wurde aufgrund von Testläufen beider Verfahren auf dem jeweils anderen Rechner gewählt. Die Testläufe des Verfahrens KABEL-OPT wurden für Steinerbaum-Probleme mit der CPLEX-Version 4.0 durchgeführt, genau wie die bei Koch und Martin [KM98] dokumentierten Testläufe des Branch-and-Cut-Verfahrens.

In der Preprocessing-Phase des Verfahrens von Koch und Martin werden zur Reduktion der Instanz der Degree-Test von Beasley [Bea84] sowie der Special-Distance-Test [DV89a] und der Terminal-Distance-Test [DV89b] von Duin und Volgenant eingesetzt.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteten (s,t)-Schnitte in dem Digraphen D, dann ist das lineare Programm

$$\min\{c^T x \mid \sum_{a \in C} x_a \geq 1 \text{ für alle } C \in \mathcal{C}\} \tag{6.1}$$

eine lineare Relaxierung des Programms

$$\min\{c^T x \mid x \in \mathrm{PB}(A,T,H)\}.$$

Das Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin basiert auf dem linearen Programm (6.1). Die Optimalwerte des linearen Programms (6.1) und des linearen Programms LDEKO(Ψ) sind gleich. Das folgt aus Korollar 4.6.2.2 und den darauf folgenden Anmerkungen zum Steinerbaum-Problem in Digraphen.

Wir dokumentieren den Verlauf des Verfahrens KABEL-OPT auf die folgende Weise: Für jede Phase des Verfahrens geben wir die Laufzeit und die erreichte **Gütegarantie** an. Ist O die obere und U die untere Schranke für die optimale Lösung, dann ist die Gütegarantie $\frac{O-U}{U}$. Die **Qualität der oberen Schranke** O die in der Eröffnungsphase bzw. in der Lagrange-Phase erhalten wird, berechnen wir bezüglich der am Ende des Verfahrens erreichten unteren Schranke U' mit $\frac{O-U'}{U'}$. Die Qualität der unteren Schranke U, die in der Eröffnungsphase bzw. in der Lagrange-Phase erreicht wird, berechnen wir bezüglich der am Ende des Verfahrens erreichten oberen Schranke O' mit $\frac{O'-U}{U}$.

6.2.1 Mit Zufallsfunktionen erzeugte Instanzen

Instanzen von Beasley

Die Instanzen der Gruppen B, C, D und E von Beasley [Bea89] wurden entsprechend dem Vorgehen von Aneja in [Ane80] mit Zufallsfunktionen erzeugt. Zuerst werden alle Knoten mit einem aufspannenden Baum verbunden. Dann werden weitere Kanten hinzugefügt, bis eine vorgegebene Kantenanzahl erreicht ist. Aus den Knoten wird eine vorgegebene Anzahl von Terminals ausgewählt. Die Bögen werden mit ganzzahligen Kosten zwischen 1 und 10 belegt. Die Anzahl der Knoten V variiert in diesen Instanzen zwischen 50, 75, 100, 500, 1 000 und 2 000. Die Anzahl der Terminals beträgt 5, 10, $\lfloor\frac{|V|}{6}\rceil$, $\lfloor\frac{|V|}{4}\rceil$, $\lfloor\frac{|V|}{2}\rceil$. Der durchschnittliche Grad der Knoten beträgt 2.5, 4, 10 und 50.

Auf die Instanzen der Gruppen C, D und E haben wir das Preprocessing von Koch und Martin [KM98] angewandt. Die Instanzen werden dadurch zum Teil erheblich reduziert. Man beachte auch, daß die Optimalwerte der reduzierten Instanzen mit den Optimalwerten der ursprünglichen Instanzen nicht mehr übereinstimmen. Die Zeiten für das Preprocessing, die Koch und Martin für Testläufe auf

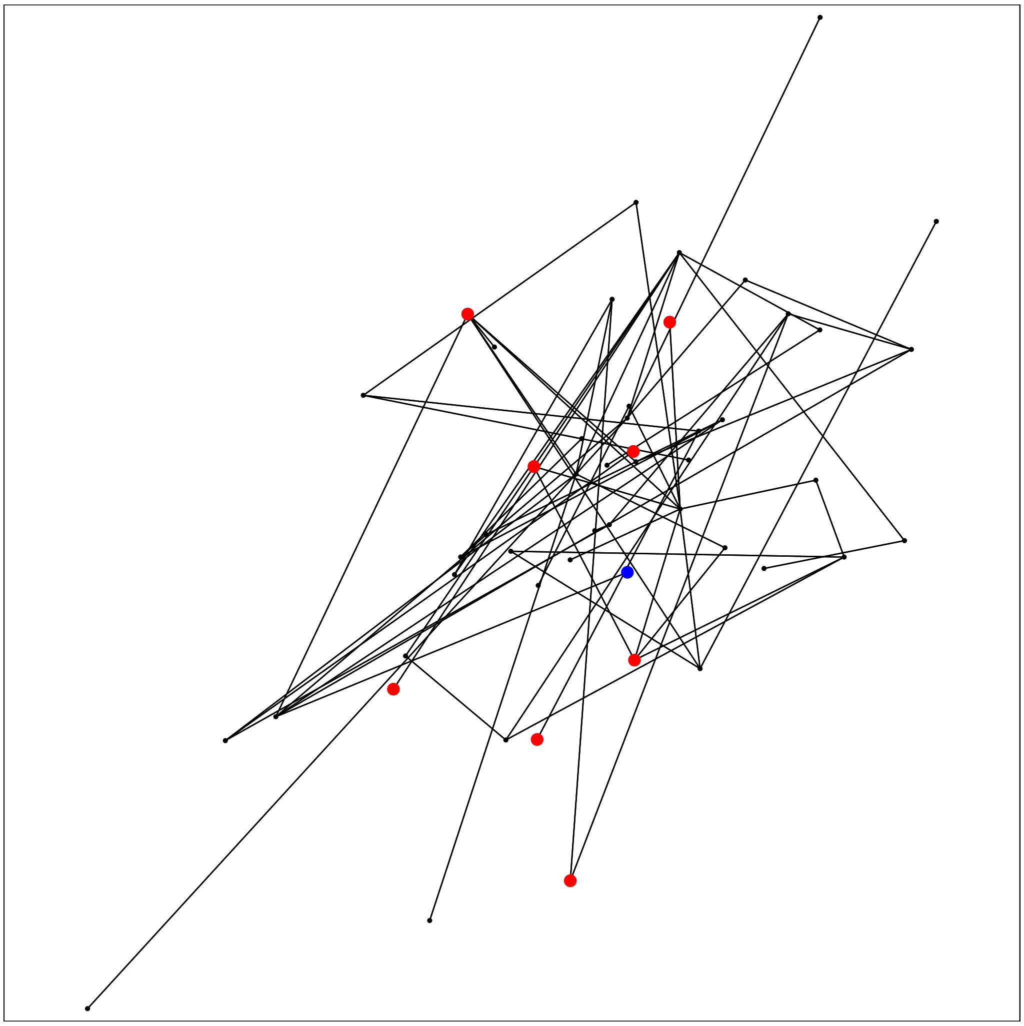

Abbildung 6.7: Das Steinerbaum-Problem b01

einer „Sun Sparc Model 71“ angeben, liegen für die Gruppe C zwischen 0.1 und 14.8 Sekunden, für die Gruppe D zwischen 0.1 und 101.5 Sekunden und für die Gruppe E zwischen 0.9 und 1 034.5 Sekunden. Die im folgenden angegebenen Laufzeiten beziehen sich auf die Laufzeiten des Verfahrens Kabel-Opt.

Die einzelnen Ergebnisse der Instanzen der Gruppen B bis E sind in den Tabellen 6.27, 6.28 und 6.32 auf den Seiten 223 bis 228 festgehalten.

Die Gruppe B enthält 18 Instanzen, die Gruppen C, D und E enthalten jeweils 20 Instanzen des Steinerbaum-Problems in Graphen. Insgesamt sind dies 78 Instanzen. Fünf dieser Instanzen wurden in der Eröffnungsphase optimal gelöst, 39 Instanzen wurden nach der Lagrange-Phase optimal gelöst, zehn Instanzen wurden in der BCP-Phase optimal gelöst und 23 Instanzen wurden innerhalb des Zeitlimits nicht gelöst.

Die Instanzen der Gruppe B und alle Instanzen der Gruppen C, D und E mit fünf bzw. zehn Terminals wurden in weniger als einer Minute gelöst. Mit der Ausnahme von vier Instanzen dauerte es weniger als zehn Sekungen bis zur optimalen Lösung. Nur drei dieser Instanzen werden erst in der BCP-Phase gelöst, die übrigen bereits in der Lagrange-Phase optimal gelöst. Auch wenn das Verfahren Kabel-Opt auf die nicht reduzierten Instanzen mit $|T| \leq 10$ angewandt wird, bleiben die Laufzeiten im Bereich weniger Minuten. Der größte Teil der Bögen der Instanz wird in dem Verfahren Netzreduktion in der Lagrange-Phase sehr frühzeitig eliminiert. Hingegen bleiben 24 von 36 Instanzen, die mehr als 40 Terminals enthalten, ungelöst. Für 22 dieser ungelösten Instanzen wird immerhin eine Gütegarantie berechnet, die besser als 5 Prozent ist.

Die Eröffnungsphase ist für 36 Instanzen in weniger als 5 Sekunden und für weitere 17 Instanzen in weniger als einer Minute abgeschlossen. Die Qualität der primalen Lösung in der Eröffnungsphase ist für 56 Instanzen besser als 5 Prozent. Die Gütegarantie nimmt Werte bis zu 31 Prozent an. Insbesondere für die Instanzen mit mehr als hundert Terminals ist die Gütegarantie schlechter als 10 Prozent.

In der Lagrange-Phase werden die primalen und die dualen Lösungen der Instanzen deutlich verbessert. Nach der Eröffnungsphase sind 73 Instanzen ungelöst. Von diesen werden 39 Instanzen in der Lagrange-Phase gelöst. Für weitere 23 Instanzen wird in der Lagrange-Phase eine Gütegarantie errechnet, die besser als 2 Prozent ist. Für die restlichen Instanzen wird eine Gütegarantie errechnet, die besser als 6 Prozent ist.

In der BCP-Phase werden 10 Instanzen gelöst, die zu Beginn der BCP-Phase nur noch wenige Bögen und Terminals aufweisen. Die größeren Instanzen werden nur geringfügig reduziert. Innerhalb des Zeitlimits werden für diese Instanzen kaum Verbesserungen erreicht.

Vergleiche

Beasley löst mit Branch-and-Bound-Verfahren mit zwei verschiedenen Lagrange-Relaxierungen [Bea84] 17 bzw. 16 Instanzen der Grupppe B auf einer CDC 7 600 bei einem Zeitlimit von 250 Sekunden. Die Lagrange-Heuristiken basieren auf einem ganzzahligen Programm für das Mehrgüter-Fluß-Problem (multi commodity flow problem). Die Lagrange-Relaxierung von Beasley ist daher der in Unterabschnitt 5.4.2 formulierten Lagrange-Relaxierung, die Kabel-Opt in der Lagrange-Phase zugrunde liegt, sehr ähnlich. Die unteren Schranken, die Beasley in dem Startknoten des Branch-and-Bound-Baumes berechnet, liegen zwischen 4.4 und 37 Prozent unter dem Optimalwert der jeweiligen Instanz.

Hingegen löst das Verfahren Kabel-Opt siebzehn Instanzen der Gruppe B in der Lagrange-Phase und berechnet eine optimale untere Schranke für die achtzehnte Instanz. Die unterschiedlichen Ergebnisse erklären wir damit, daß in dem Verfahren Dual-Gradient nach jeder Subgradienten-Iteration Verbesserungsheuristiken aufgerufen werden.

Mit einem weiteren Branch-and-Bound-Verfahren mit Lagrange-Heuristik löst Beasley [Bea89] alle Instanzen der Gruppen B, C und D sowie 14 Instanzen der Gruppe E. Die Lagrange-Heuristik basiert auf einem ganzzahligen Programm für das Problem einen kürzesten aufspannenden Baum (shortest spanning tree) zu finden. Dieses Verfahren von Beasley löst die Instanzen mit vielen Terminals und vielen Kanten, das heißt $|T| = \frac{|V|}{6}, \frac{|V|}{4}, \frac{|V|}{2}$ und $|E| = \frac{5}{4}|V|, 2|V|, 5|V|, 25|V|$, auf einer Cray X-MP/48 in der Regel deutlich schneller als das Verfahren Kabel-Opt.

Für Instanzen mit fünf oder zehn Terminals aus den Gruppen C, D und E ist das Verfahren von Beasley deutlich langsamer als das Verfahren Kabel-Opt. Insbesondere liegen die unteren Schranken, die Beasleys Verfahren in dem Startknoten des Branch-and-Bound-Baumes berechnet, zwischen 2 und 18 Prozent unter dem Optimalwert bzw. dem besten berechneten primalen Wert der Instanz. Das Verfahren Kabel-Opt löst zweiundzwanzig dieser Instanzen in der Lagrange-Phase optimal, für die restlichen zwei Instanzen wird eine Garantie von 2.4 und 5.8 Prozent angegeben, und die Instanz in weniger als zwei Sekunden in der BCP-Phase gelöst.

Mit dem Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin [KM98] werden alle 78 Instanzen optimal gelöst. Die Instanzen der Gruppe B werden von dem Branch-and-Cut-Verfahren in Bruchteilen von Sekunden gelöst. Für diese kleinen Instanzen ist das Verfahren von Koch und Martin schneller als das Verfahren Kabel-Opt.

Wir vergleichen die Laufzeiten des Verfahrens Kabel-Opt für die Instanzen der Gruppen C bis E mit den Laufzeiten des Verfahrens von Koch und Martin nach der Preprocessing-Phase.

Wenn das Verfahren Kabel-Opt die jeweilige Instanz in der Lagrange-Phase löst, bzw. so starke Reduktionen bewirkt, daß die BCP-Phase in wenigen Sekunden abgeschlossen ist, dann sind die Laufzeiten etwas geringer als die Laufzeiten des Branch-and-Cut-Verfahrens von Koch und Martin. Hingegen können die Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren des Verfahrens Kabel-Opt wenig bis gar nichts zur Lösung der Instanzen beitragen, wenn nicht bereits in der vorhergehenden Lagrange-Phase das Problem wesentlich reduziert wurde. Das Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin ist daher für solche Instanzen, das sind insbesondere Instanzen mit $|T| = \frac{|V|}{6}, \frac{|V|}{4}, \frac{|V|}{2}$, deutlich besser.

Rechtwinklige Steinerbaum-Probleme

Die Instanzen der Gruppen ES10 bis ES40 sind rechtwinklige Steinerbaum-Probleme mit 10, 20, 30 bzw. 40 Terminals. Die Standorte der Terminals wurden mit einer Zufallsfunktion in der Ebene plaziert. Der dadurch definierten Instanz des rechtwinkligen Steinerbaum-Problems wird eine Instanz des Steinerbaum-Problems in Graphen zugeordnet. Jedes Terminal definiert eine waagerechte und eine senkrechte Linie. Die Schnittpunkte dieser Linien bilden die Knoten des Graphen, die Streckenabschnitte zwischen zwei Knoten bilden die Kanten des Graphen. Die Kantenkosten sind gleich den euklidischen Längen der Streckenabschnitte.

Es liegen in den Gruppen ES10 bis ES40 jeweils fünfzehn Instanzen vor. Alle Instanzen der Gruppe ES10 werden von dem Verfahren Kabel-Opt optimal gelöst, zwei von diesen in der Eröffnungsphase, sechs in der Lagrange-Phase und sieben in der BCP-Phase. Die Laufzeit für die Instanz es10h beträgt 28.2 Sekunden, für die anderen Instanzen zwischen 0.1 und 1.4 Sekunden. Vierzehn Instanzen der Gruppe ES20 werden in der BCP-Phase optimal gelöst. Die Laufzeiten dafür betragen zwischen 6.1 Sekunden und 30 Minuten. Für die Instanz es20g wird nach der BCP-Phase eine Garantie von 0.74 Prozent angegeben.

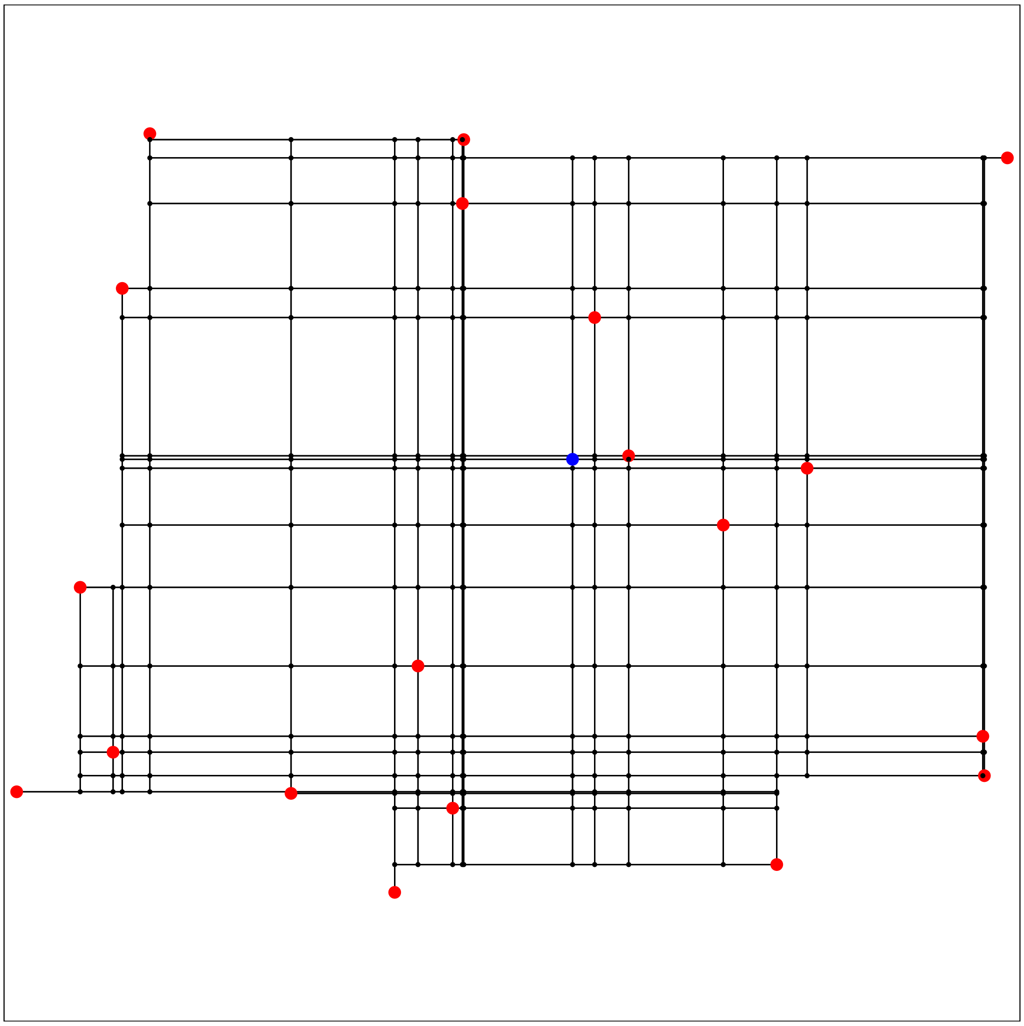

Abbildung 6.8: Das rechtwinklige Steinerbaum-Problem es20g

Keine Instanz der Gruppen ES30 und ES40 wird innerhalb des Zeitlimits von 10 000 Sekunden optimal gelöst. Die nach der Lagrange-Phase erreichte Gütegarantie beträgt zwischen 0.5 und 6.7 Prozent. Die Laufzeiten für die Lagrange-

Phase betragen zwischen 45 Sekunden und 182 Sekunden für die Instanzen der Gruppe ES30 und zwischen 149 Sekunden und 701 Sekunden für die Instanzen der Gruppe ES40. Für sieben von dreißig Instanzen wird diese Garantie in der BCP-Phase verbessert.

Mit dem Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin werden 54 Instanzen optimal gelöst und für 6 Instanzen der Gruppe ES40 obere und untere Schranken mit einer Garantie von weniger als zwei Prozent angegeben. Die Laufzeiten des Verfahrens von Koch und Martin sind kürzer als die des Verfahrens Kabel-Opt.

Mit einem Verfahren von Warme, das spezielle Eigenschaften des rechtwinkligen Steinerbaum-Problems ausnutzt, werden Instanzen mit bis zu 1 000 Terminals optimal gelöst [War97]. Instanzen mit bis zu 40 Terminals werden von dem Verfahren von Warme in wenigen Sekunden optimal gelöst.

Tabelle 6.26: Das Format der Tabellen 6.27 bis 6.30.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
	$\|A\|$	Die Anzahl der Bögen der von Kabel-Opt eingelesenen Instanz.
	$\|T\|$	Die Anzahl der Senken der von Kabel-Opt eingelesenen Instanz.
Garantie (%)		Die Gütegarantie in Prozent, die nach der jeweiligen Phase erreicht ist.
	Erp.	Eröffnungsphase
	Lag.	Lagrange-Phase
	BCP	BCP-Phase
Laufzeit		Die Laufzeit der jeweiligen Phase(n) in CPU-Sekunden.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
	Tot.	Gesamtlaufzeit.
Ergebnis		Die Kosten der besten primalen Lösung.

Tabelle 6.27: Ergebnisse von KABEL-OPT für Beasleys Steinerbaum-Probleme der Gruppen B und C

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
b01	126	8	10.82	**0**		0.0	0.0		0.0	**82**
b02	126	12	3.75	**0**		0.0	0.1		0.1	**83**
b03	126	24	**0**			0.0			0.0	**138**
b04	200	8	**0**			0.0			0.0	**59**
b05	200	12	5.00	**0**		0.0	0.1		0.1	**61**
b06	200	24	7.02	**0**		0.0	1.5		1.5	**122**
b07	188	12	12.13	**0**		0.0	0.0		0.0	**111**
b08	188	18	9.48	**0**		0.0	0.0		0.0	**104**
b09	188	37	**0**			0.0			0.0	**220**
b10	300	12	5.82	5.82	**0**	0.0	0.2	0.2	0.4	**86**
b11	300	18	6.98	**0**		0.1	0.0		0.1	**88**
b12	300	37	6.10	**0**		0.1	1.3		1.4	**174**
b13	250	16	1.86	**0**		0.0	0.1		0.1	**165**
b14	250	24	8.30	**0**		0.0	0.4		0.4	**235**
b15	250	49	8.11	**0**		0.1	1.6		1.7	**318**
b16	400	16	2.39	**0**		0.1	0.1		0.2	**127**
b17	400	24	2.31	**0**		0.1	0.1		0.2	**131**
b18	400	49	11.68	**0**		0.1	8.4		8.5	**218**
c01	494	4	3.45	**0**		0.0	0.1		0.1	**60**
c02	436	7	17.10	**0**		0.0	0.1		0.1	**123**
c03	280	42	20.28	0.58	**0**	0.1	19.9	18.0	38.0	**352**
c04	264	44	15.65	1.40	**0**	0.1	12.4	76.0	88.5	**364**
c05	94	26	8.34	**0**		0.0	0.5		0.5	**167**
c06	1678	4	**0**			0.1			0.1	**55**
c07	1712	8	3.30	**0**		0.1	0.2		0.3	**94**
c08	1256	62	11.49	**0**		0.5	16.4		16.9	**392**
c09	988	88	12.67	1.59	0.79	0.6	97.7	13269.6	13367.9	512
c10	276	61	23.37	**0**		0.1	3.0		3.1	**263**
c11	4090	4	16.13	**0**		0.2	1.3		1.5	**32**
c12	3572	9	2.18	**0**		0.4	1.0		1.4	**46**
c13	1894	78	11.32	1.28	1.28	1.1	218.3	15072.6	15292.0	238
c14	1270	96	17.28	1.62	1.62	0.9	257.6	11524.2	11782.7	251
c15	568	101	15.28	0.44	**0**	0.5	92.3	177.1	269.9	**230**
c16	7008	4	18.19	**0**		0.4	1.2		1.6	**11**
c17	6004	9	11.12	**0**		0.6	2.0		2.6	**18**
c18	2768	79	17.31	2.81	2.81	2.1	391.3	10716.6	11110.0	110
c19	2188	116	18.47	4.48	4.48	2.2	380.4	10744.4	11127.0	140
c20	702	113	28.87	3.45	2.57	0.7	84.9	10001.0	10086.6	120

Tabelle 6.28: Ergebnisse von KABEL-OPT für Beasleys Steinerbaum-Probleme der Gruppen D und E

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
d01	1014	4	12.25	**0**		0.1	0.1		0.2	**106**
d02	1042	9	12.36	**0**		0.1	0.3		0.4	**187**
d03	464	69	14.62	**0**		0.3	20.6		20.9	**575**
d04	336	65	18.59	0.45	**0**	0.1	20.9	37.2	58.2	**447**
d05	160	40	9.88	1.20	**0**	0.1	7.8	55.9	63.8	**254**
d06	3476	4	7.70	**0**		0.2	1.9		2.1	**67**
d07	3416	9	**0**			0.4			0.4	**96**
d08	2418	137	16.48	0.23	0.12	2.5	495.2	10018.6	10516.3	900
d09	1806	183	14.03	1.40	1.40	2.4	985.8	9587.0	10575.2	1021
d10	576	127	19.83	2.76	2.76	0.7	184.1	9895.8	10080.6	560
d11	8780	4	15.39	**0**		0.5	2.6		3.1	**29**
d12	7648	9	2.44	2.44	**0**	0.5	0.8	0.2	1.5	**42**
d13	3760	154	8.17	0.87	0.87	4.0	356.2	11523.9	11884.1	465
d14	2848	210	10.76	0.55	0.55	4.2	787.2	9342.5	10133.9	549
d15	1028	191	19.13	1.67	1.67	1.4	406.0	10789.9	11197.3	428
d16	17242	4	30.77	**0**		1.6	8.3		9.9	**13**
d17	16070	9	4.55	**0**		2.2	3.9		6.1	**23**
d18	5844	159	26.18	3.31	3.31	10.0	2951.0	7299.6	10260.6	219
d19	5028	234	22.06	3.51	3.51	12.0	4205.6	12880.0	17097.6	295
d20	1950	294	29.44	5.79	5.79	6.4	2693.6	7904.3	10604.3	329
e01	2564	4	4.00	**0**		0.1	0.5		0.6	**102**
e02	2626	8	9.94	**0**		0.2	0.8		1.1	**164**
e03	1304	210	16.30	**0**		1.8	266.0		267.8	**1642**
e04	734	151	11.06	0.18	**0**	1.0	156.2	1928.0	2085.2	**1117**
e05	218	62	16.82	0.26	**0**	0.1	12.4	5.1	17.6	**392**
e06	8630	4	21.92	**0**		0.5	2.3		2.8	**73**
e07	8728	9	7.47	**0**		1.1	8.0		9.2	**137**
e08	6178	347	8.81	1.17	1.17	16.5	6280.7	5450.3	11747.5	2082
e09	4460	431	14.50	0.76	0.76	17.9	10100.3		10118.3	2401
e10	1634	338	19.85	0.67	0.67	5.4	1690.4	16009.4	17705.2	1518
e11	23736	4	15.63	5.89	**0**	2.7	43.6	1.4	47.7	**34**
e12	22786	9	7.70	**0**		3.1	13.7		16.8	**67**
e13	9634	393	12.00	0.67	0.67	29.9	8396.9	6904.1	15330.9	1206
e14	7276	504	16.25	1.02	1.02	44.2	10024.6		10068.9	1393
e15	17730	433	5.13	1.23	1.23	93.3	10543.7		10637.2	1236
e16	50368	4	13.34	**0**		5.4	15.4		20.8	**15**
e17	43016	9	12.00	**0**		7.7	23.6		31.4	**25**
e18	14894	407	26.98	5.91	5.91	80.9	10880.6		10961.6	574
e19	11168	579	22.80	2.60	2.60	81.1	10126.2		10207.4	712
e20	4660	670	26.56	1.52	1.52	40.2	10133.1		10173.4	737

Tabelle 6.29: Ergebnisse von KABEL-OPT für rechtwinklige Steinerbaum-Probleme der Gruppen ES10 und ES20

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
es10a	188	9	1.25	**0**		0.0	0.1		0.1	**22920745**
es10b	184	9	13.35	12.52	**0**	0.0	0.3	1.1	1.4	**19134104**
es10c	192	9	0.48	**0**		0.0	0.0		0.0	**26003678**
es10d	160	9	0.97	0.32	**0**	0.0	0.2	0.9	1.1	**20461116**
es10e	212	9	0.07	**0**		0.0	0.1		0.1	**18818916**
es10f	164	9	1.66	**0**		0.0	0.1		0.1	**26540768**
es10g	152	9	**0**			0.0			0.0	**26025072**
es10h	180	9	5.74	5.74	**0**	0.0	0.4	27.8	28.2	**25056214**
es10i	172	9	**0**			0.0			0.0	**22062355**
es10j	160	9	0.71	0.51	**0**	0.0	0.1	0.3	0.4	**23936095**
es10k	164	9	5.17	**0**		0.0	0.1		0.1	**22239535**
es10l	172	9	2.52	0.27	**0**	0.0	0.1	0.2	0.3	**19626318**
es10m	140	9	5.78	5.78	**0**	0.0	0.2	1.0	1.2	**19483914**
es10n	108	9	0.43	0.43	**0**	0.0	0.1	0.4	0.5	**21856128**
es10o	140	9	2.55	**0**		0.0	0.1		0.1	**18641924**
es20a	1012	19	9.11	0.50	**0**	0.2	4.9	57.7	62.8	**33703886**
es20b	1044	19	6.52	0.49	**0**	0.2	35.4	61.2	96.8	**32639486**
es20c	820	19	6.99	0.04	**0**	0.1	4.7	1.3	6.1	**27847417**
es20d	996	19	8.43	1.74	**0**	0.1	20.8	1738.1	1759.0	**27624394**
es20e	1004	19	11.52	0.70	**0**	0.1	27.2	572.3	599.6	**34033163**
es20f	1008	19	4.01	0.51	**0**	0.2	7.5	4.7	12.4	**36014241**
es20g	1012	19	4.27	1.20	0.74	0.1	12.2	10446.9	10459.2	34934874
es20h	880	19	10.28	1.18	**0**	0.1	10.0	809.5	819.6	**38016346**
es20i	1064	19	11.39	0.38	**0**	0.2	39.5	14.3	54.0	**36739939**
es20j	928	19	4.20	0.21	**0**	0.1	31.9	67.6	99.6	**34024740**
es20k	1000	19	4.95	0.79	**0**	0.1	19.7	1473.7	1493.5	**27123908**
es20l	940	19	23.87	0.44	**0**	0.1	30.7	17.9	48.7	**30451397**
es20m	904	19	8.49	1.10	**0**	0.1	14.7	235.1	249.9	**34438673**
es20n	928	19	4.12	0.34	**0**	0.1	32.6	681.5	714.2	**34062374**
es20o	908	19	5.78	0.98	**0**	0.1	15.1	106.7	121.9	**32303746**

Tabelle 6.30: Ergebnisse von KABEL-OPT für rechtwinklige Steinerbaum-Probleme der Gruppen ES30 und ES40

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
es30a	2536	29	10.28	1.63	1.01	0.5	100.7	10056.6	10157.8	40764134
es30b	2464	29	10.81	2.84	2.46	0.5	60.9	10362.9	10424.3	40988568
es30c	2516	29	18.95	4.32	4.32	0.5	60.2	10641.1	10701.8	43320597
es30d	2588	29	8.39	2.33	2.23	0.6	90.8	9978.6	10070.0	42219344
es30e	2520	29	18.43	6.68	6.68	0.5	44.1	10741.5	10786.1	42095323
es30f	2304	29	9.49	2.28	2.28	0.5	86.7	10477.2	10564.4	40005510
es30g	2564	29	13.90	0.87	0.87	0.5	182.0	9950.9	10133.4	43855171
es30h	2228	29	13.74	2.03	2.03	0.5	68.6	9961.1	10030.2	41831013
es30i	2504	29	9.20	3.10	3.10	0.7	168.4	10116.2	10285.3	37133658
es30j	2412	29	9.03	3.62	3.62	0.6	121.7	10229.1	10351.4	42686610
es30k	2572	29	12.00	1.41	1.41	0.4	109.3	10372.6	10482.3	41647993
es30l	2100	29	7.90	1.12	1.10	0.4	91.0	10117.1	10208.5	38553047
es30m	2272	29	8.50	2.71	2.64	0.4	148.1	9939.1	10087.6	37417826
es30n	2656	29	5.04	0.86	0.63	0.5	53.6	10457.5	10511.6	42919684
es30o	2408	29	18.04	5.24	5.24	0.5	53.6	10002.1	10056.2	43297644
es40a	4564	39	13.31	4.06	4.06	1.1	157.0	10355.5	10513.6	45121211
es40b	4372	39	11.90	3.75	3.75	1.2	149.0	9861.4	10011.6	47155421
es40c	4488	39	18.31	3.39	3.39	1.2	258.0	11243.5	11502.7	50032046
es40d	4356	39	12.91	1.90	1.86	1.1	502.3	10290.9	10794.3	45292180
es40e	5024	39	24.99	3.26	3.26	1.3	260.1	10336.5	10597.9	51985055
es40f	4296	39	25.10	2.66	2.66	1.0	298.1	10150.1	10449.2	49773389
es40g	4528	39	15.08	1.81	1.81	1.3	228.4	10423.1	10652.8	45750753
es40h	4888	39	21.53	4.60	4.60	1.2	151.4	9893.3	10045.9	48849376
es40i	4768	39	17.91	3.64	3.64	1.5	294.9	9746.2	10042.6	51775913
es40j	4860	39	28.02	4.16	4.16	1.2	213.8	10222.6	10437.6	57411033
es40k	4608	39	17.68	3.67	3.67	1.1	259.3	10338.8	10599.2	46921057
es40l	4884	39	15.27	0.58	0.47	1.2	198.3	9923.1	10122.6	43849362
es40m	5364	39	16.91	1.47	1.47	1.3	700.4	10461.8	11163.5	51915046
es40n	5092	39	17.69	1.33	1.33	1.3	494.1	9715.6	10211.0	49395541
es40o	5068	39	22.63	3.32	3.32	1.3	341.6	9765.0	10107.9	50888550

Tabelle 6.31: Das Format der Tabelle 6.32.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
Qualität (%)	E-P	Qualität der primalen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	E-D	Qualität der dualen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	L-P	Qualität der primalen Lösung nach der Lagrange-Phase.
	L-D	Qualität der dualen Lösung nach der Lagrange-Phase.
Gar.		Die am Ende des Verfahrens KABEL-OPT erhaltene Gütegarantie.
Bogenred. (%)		Bogenreduktion nach der jeweiligen Phase in Prozent der ursprünglichen Bogenanzahl.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Anzahl	L-G	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens LAGRANGE-GRADIENT.
	L-R	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens NETZREDUKTION in der Lagrange-Phase.
	LP	Anzahl der Aufrufe der Schnittebenenverfahren zur Lösung der Programme LDEKO oder DEKO.

Tabelle 6.32: Ergebnisse von KABEL-OPT für ausgesuchte Instanzen der Gruppen B bis E und ES10 bis ES40

Name	Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
b10	5.9	**0**	5.9	**0**	**0**	15.7	79.0	79.0	12	12	5
c03	1.2	19.0	**0**	0.6	**0**	1.5	53.3	57.9	113	27	14
c04	3.6	11.7	**0**	1.4	**0**	0.8	7.6	36.4	43	15	22
c09	1.6	11.8	0.8	1.6	0.8	0.4	14.8	14.8	52	17	12
c15	1.8	13.3	**0**	0.5	**0**	0.6	33.0	33.0	70	21	20
c20	6.9	23.8	2.6	3.5	2.6	0.3	0.3	0.3	37	10	20
d04	1.4	17.1	0.5	**0**	**0**	0.6	37.3	37.3	48	15	11
d05	0.8	9.1	**0**	1.2	**0**	2.5	7.5	39.4	54	15	21
d08	2.3	14.1	0.2	0.3	0.2	0.1	63.8	63.8	77	26	16
d12	**0**	2.5	**0**	2.5	**0**	0.2	99.6	99.6	12	12	6
e04	0.8	10.3	**0**	0.2	**0**	0.5	38.9	44.7	51	17	20
e05	1.1	15.7	**0**	0.3	**0**	1.0	33.1	41.8	71	18	16
e11	8.9	6.3	5.9	**0**	**0**	0.1	99.6	99.7	49	17	5
es10b	5.7	7.4	4.9	7.4	**0**	6.6	33.7	56.0	14	13	7
es10d	0.3	0.7	0.3	0.1	**0**	6.3	58.8	82.5	15	13	12
es10h	4.2	1.6	4.2	1.6	**0**	5.6	11.2	11.2	12	12	7
es20a	0.4	8.8	**0**	0.5	**0**	1.2	78.2	83.9	39	16	12
es20b	3.3	3.2	**0**	0.5	**0**	1.2	70.9	91.5	157	37	15
es20d	5.3	3.0	**0**	1.8	**0**	1.3	21.0	59.7	94	28	15
es20e	5.0	6.3	0.1	0.7	**0**	1.2	50.5	76.7	109	25	15
es20f	1.7	2.4	**0**	0.6	**0**	1.2	80.8	94.3	93	22	8
es20g	2.4	2.6	0.8	1.2	0.8	1.2	43.0	47.5	47	15	15
es20h	4.4	5.7	**0**	1.2	**0**	1.4	33.7	78.0	43	17	15
es30a	1.7	9.6	1.1	1.7	1.1	0.5	9.5	17.8	47	19	15
es30b	4.3	9.0	2.5	2.9	2.5	0.5	3.5	5.1	35	14	15
es30d	3.9	6.8	2.3	2.4	2.3	0.5	5.3	6.0	41	18	15

6.2.2 VLSI-Instanzen als Steinerbaum-Probleme

Sieben Gruppen von VLSI-Instanzen wurden von Koch und Martin aus einer größeren Sammlung von Datensätzen ausgewählt. Die Instanzen jeder Gruppe sind jeweils im Zusammenhang mit dem Entwurf einer elektronischen Schaltung erzeugt worden. Die Graphen dieser Instanzen sind Gittergraphen mit Löchern. Die Anzahl der Terminals variiert zwischen 10 und 136, in vier sehr großen Instanzen liegt die Anzahl der Terminals noch darüber.

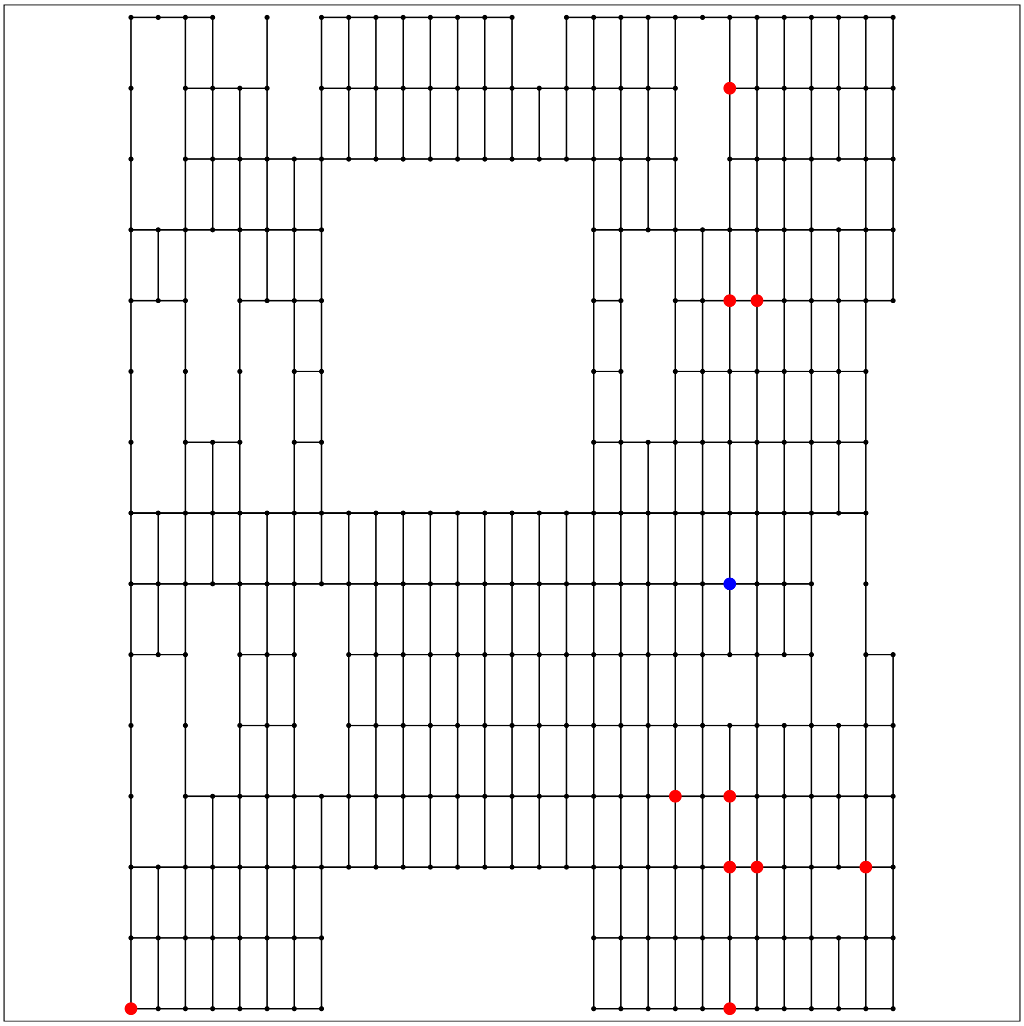

Abbildung 6.9: Das VLSI-Problem diw0250

Insgesamt enthalten die sieben Gruppen 116 VLSI-Instanzen. Die zwei größten Instanzen alue7080 und alut2625 wurden wegen Speicherplatzproblemen nicht berechnet. Von den übrigen 114 Instanzen wurden 6 Instanzen in der Eröffnungsphase, 56 Instanzen in der Lagrange-Phase und 21 Instanzen in der BCP-Phase optimal gelöst. Von diesen 83 Instanzen wurden 55 Instanzen in weniger als 5 Sekunden und weitere 22 Instanzen in weniger als einer Minute gelöst. Unter den gelösten Instanzen befinden sich 6 Instanzen, die Instanzen diw0795, diw0819, taq0365, dmxa1010, msm2492 und msm3829, die alle in weniger als 1 000 Sekunden von dem Verfahren Kabel-Opt gelöst werden und die in [KM98] ungelöst bleiben.

Die Laufzeit für die Eröffnungsphase beträgt für 83 Instanzen weniger als eine Sekunde. Für weitere 19 Instanzen weniger als 5 Sekunden. Die längste Laufzeit beträgt 400 Sekunden für die Instanz alue7065. In der Eröffnungsphase werden 25 Instanzen optimal gelöst, und für weitere 65 Instanzen eine Gütegarantie von weniger als 5 Prozent erreicht. Für alle bis auf zwei Instanzen beträgt die Gütegarantie nach der Eröffnungsphase weniger als zehn Prozent. Eine wesentliche Rolle bei der Lösung der VLSI-Instanzen spielen die Reduktionsverfahren. In der Eröffnungsphase wird die Bogenanzahl von 69 Instanzen um mehr als 60 Prozent reduziert. Bei weiteren 33 Instanzen wird die Bogenanzahl um mehr als 40 Prozent reduziert.

Nach der Eröffnungsphase sind 108 Instanzen ungelöst. Die Lagrange-Phase ist für 51 dieser Instanzen in weniger als 5 Sekunden beendet, für weitere 34 Instanzen in weniger als 5 Minuten beendet. 56 Instanzen werden in der Lagrange-Phase optimal gelöst. Für 21 der restlichen 52 Instanzen wird in der Lagrange-Phase eine primale Lösung mit einer Qualität von weniger als einem Prozent erhalten. In der Lagrange-Phase werden die 52 ungelösten Instanzen weiter reduziert und so deren Lösung in der BCP-Phase vorbereitet. Bei 20 Instanzen wird die Bogenanzahl nach der Eröffnungsphase nochmals halbiert, bei weiteren 13 Instanzen um mehr als 20 Prozent reduziert.

In der BCP-Phase werden 21 von 52 Instanzen gelöst, 31 Instanzen bleiben ungelöst. Von diesen Instanzen wird für 24 innerhalb des Zeitlimits eine Gütegarantie besser als 5 Prozent erhalten. Für 10 dieser Instanzen wird eine Gütegarantie berechnet, die besser als zwei Prozent ist.

Für VLSI-Instanzen vergleichen wir die Ergebnisse des Verfahrens Kabel-Opt mit den Ergebnissen des Branch-and-Cut-Verfahrens von Koch und Martin.

Mit dem Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin werden entsprechend der Daten in [KM98] wie durch das Verfahren Kabel-Opt 83 VLSI-Instanzen optimal gelöst. Diejenigen VLSI-Instanzen, die von dem Verfahren Kabel-Opt bereits in der Lagrange-Phase optimal gelöst werden, werden von dem Verfahren Kabel-Opt schneller gelöst als von dem Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin.

Ist hingegen die Instanz in der Lagrange-Phase weder gelöst noch deutlich reduziert worden, dann sind die Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren des Verfahrens Kabel-Opt wenig wirkungsvoll. Das Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin ist den Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren der BCP-Phase deutlich überlegen. Während das Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin die nach dem Preprocessing reduzierten vollständigen Instanzen häufig in wenigen Sekunden optimal löst, werden selbst einige kleinere Verbesserungsprobleme von dem Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren nicht innerhalb des Zeitlimits gelöst.

Das in der Eröffnungsphase eingesetzte Verfahren Kabel-Reduktion führt zu deutlich größeren Reduktionen als die im Preprocessing von Koch und Martin eingesetzten Verfahren. Diese wurden ursprünglich für Instanzen wie die der Gruppen B bis E von Beasley entworfen, die mit Zufallsfunktionen erzeugt werden. Die Reduktionen des Verfahrens Kabel-Reduktion wirken sich jedoch vornehmlich am Rand des Gittergraphen aus und entfernen dort überflüssige Bögen, die sich nach Aussagen von Koch [Koc99] nicht sehr störend auf den Verlauf des Branch-and-Cut-Verfahrens auswirken. In der Lagrange-Phase des Verfahrens Kabel-Opt wird für die „einfacheren" Instanzen schnell eine gute duale und eine gute primale Lösung gefunden. Das Verfahren Netz-Reduktion führt Reduktionen des Digraphen D und der Anschlußdigraphen $\bar{D}_t$, $t \in T$, nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium durch. Auf diese Weise wird die Suche nach optimalen primalen und nach optimalen dualen Lösungen erleichtert. Zusätzlich werden die Branch-and-Cut-and-Price-Verfahren in der BCP-Phase beschleunigt, falls in der Lagrange-Phase die optimalen Lösungen nicht erhalten werden.

Winter beschreibt Reduktionstests, die speziell für Instanzen mit Gittergraphen entwickelt worden sind [Win95]. Diese speziellen Tests sind auch auf VLSI-Instanzen übertragbar und erweitern die Reduktionsverfahren von Koch und Martin genauso wie die Reduktionsverfahren des Verfahrens Kabel-Opt.

Sehr große Instanzen können von beiden Verfahren nicht gelöst werden. Die unteren Schranken, die mit dem Verfahren Kabel-Opt erreicht werden, sind in vielen Fällen besser als die unteren Schranken, die mit dem Branch-and-Cut-Verfahren von Koch und Martin erhalten werden. Dies liegt jedoch hauptsächlich daran, daß in dem Branch-and-Cut-Verfahren keine duale Heuristik, wie die Dual-Ascent-Heuristik von Wong [Won84] oder die Primal-Duale-Heuristik von Goemans und Williamsson [GW95, WGMV95] zum Einsatz kommt. Die Ergebnisse dieser dualen Heuristiken können auch für die Initialisierung des ersten aktiven linearen Programms des Branch-and-Cut-Verfahrens genutzt werden.

Tabelle 6.33: Das Format der Tabellen 6.34 bis 6.37.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
	$\|A\|$	Die Anzahl der Bögen der von KABEL-OPT eingelesenen Instanz.
	$\|T\|$	Die Anzahl der Senken der von KABEL-OPT eingelesenen Instanz.
Garantie (%)		Die Gütegarantie in Prozent, die nach der jeweiligen Phase erreicht ist.
	Erp.	Eröffnungsphase
	Lag.	Lagrange-Phase
	BCP	BCP-Phase
Laufzeit		Die Laufzeit der jeweiligen Phase(n) in CPU-Sekunden.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
	Tot.	Gesamtlaufzeit.
Ergebnis		Die Kosten der besten primalen Lösung.

Tabelle 6.34: Ergebnisse von KABEL-OPT für VLSI-Instanzen der Gruppen DIW und TAQ

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
diw0234	20172	24	2.77	0.56	**0**	2.7	51.3	598.9	652.9	**1996**
diw0250	1216	10	**0**			0.0			0.0	**350**
diw0260	1970	11	**0**			0.1			0.1	**468**
diw0313	1644	13	4.60	**0**		0.0	0.1		0.1	**397**
diw0393	762	10	1.69	**0**		0.0	0.1		0.1	**302**
diw0445	6622	32	31.13	3.18	3.18	0.5	143.1	10726.7	10870.3	1364
diw0459	13578	24	7.67	0.97	0.97	0.6	101.2	11254.1	11355.9	1362
diw0460	1158	12	8.16	**0**		0.1	1.0		1.1	**345**
diw0473	8270	24	15.19	1.48	**0**	0.4	35.2	602.1	637.7	**1098**
diw0487	8772	24	12.50	0.50	**0**	0.6	31.0	271.4	303.0	**1424**
diw0495	3310	9	4.13	**0**		0.1	0.6		0.7	**616**
diw0513	3368	9	13.41	**0**		0.1	0.6		0.7	**604**
diw0523	4030	9	**0**			0.1			0.1	**561**
diw0540	930	9	5.95	**0**		0.0	0.4		0.4	**374**
diw0559	14026	17	7.19	0.90	0.90	1.0	77.9	10911.5	10990.4	1570
diw0778	27454	23	8.11	1.31	1.31	2.0	750.8	9676.5	10429.3	2173
diw0779	45032	49	19.61	2.88	2.88	17.9	3942.2	9442.0	13402.1	4476
diw0795	11876	9	24.91	**0**		0.9	88.0		88.9	**1550**
diw0801	11150	9	21.96	**0**		0.8	38.7		39.5	**1587**
diw0819	40132	31	32.18	1.08	1.08	5.7	3647.1	10174.5	13827.3	3399
diw0820	44768	36	26.09	3.58	3.58	13.2	2559.2	10042.1	12614.5	4206
taq0014	22092	127	21.33	4.04	4.04	17.6	5479.6	7297.0	12794.2	5383
taq0023	1926	10	2.97	0.33	**0**	0.1	1.5	0.2	1.8	**621**
taq0365	14148	21	10.63	1.00	**0**	1.4	159.6	371.5	532.5	**1914**
taq0377	23430	135	31.20	5.81	5.81	16.9	6493.8	3694.9	10205.6	6485
taq0431	3810	12	8.34	**0**		0.2	22.7		22.9	**897**
taq0631	1864	9	5.45	0.52	**0**	0.1	2.4	0.5	3.0	**581**
taq0739	2876	15	13.11	1.08	**0**	0.3	15.7	113.8	129.8	**848**
taq0741	2434	15	12.66	**0**		0.2	10.5		10.7	**847**
taq0751	3582	15	9.18	0.76	**0**	0.3	14.3	2.8	17.4	**939**
taq0891	1120	9	1.57	1.57	**0**	0.0	0.1	0.4	0.5	**319**
taq0903	20980	129	20.87	6.32	6.32	16.2	6780.8	5815.8	12612.8	5169
taq0910	1028	16	2.78	**0**		0.1	0.1		0.2	**370**
taq0920	388	16	**0**			0.0			0.0	**210**
taq0978	2478	9	1.77	**0**		0.1	0.1		0.2	**566**

Tabelle 6.35: Ergebnisse von Kabel-Opt für VLSI-Instanzen der Gruppen GAP und DMXA

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
gap1307	1104	16	15.14	**0**		0.1	0.7		0.8	**549**
gap1413	1812	9	6.57	**0**		0.1	0.1		0.2	**457**
gap1500	748	16	**0**			0.0			0.0	**254**
gap1810	1404	16	11.62	**0**		0.1	1.3		1.4	**482**
gap1904	2512	20	5.18	0.14	**0**	0.2	5.0	0.3	5.5	**763**
gap2007	7096	16	27.20	1.01	**0**	0.3	72.9	3858.3	3931.5	**1104**
gap2119	5950	28	12.62	**0**		0.6	43.2		43.8	**1244**
gap2740	4168	13	14.44	**0**		0.2	4.2		4.4	**745**
gap2800	1306	11	7.24	**0**		0.1	0.8		0.9	**386**
gap2975	586	9	4.26	**0**		0.0	0.1		0.1	**245**
gap3036	1166	12	23.02	**0**		0.1	3.6		3.7	**457**
gap3100	3116	10	9.55	**0**		0.1	1.4		1.5	**640**
gap3128	36086	103	22.59	2.72	2.72	14.0	3528.9	7722.0	11264.9	4318
dmxa0296	772	11	3.49	**0**		0.1	0.0		0.1	**344**
dmxa0347	2308	10	4.67	**0**		0.1	0.8		0.9	**506**
dmxa0368	7352	17	8.16	**0**		0.4	6.1		6.6	**1017**
dmxa0454	6572	15	3.22	**0**		0.4	2.4		2.8	**914**
dmxa0628	560	9	1.11	**0**		0.0	0.2		0.2	**275**
dmxa0848	1722	15	9.52	0.85	**0**	0.1	3.7	1.3	5.1	**594**
dmxa0903	2174	9	11.71	0.18	**0**	0.1	2.5	0.5	3.1	**580**
dmxa1010	14216	22	13.23	1.16	**0**	0.5	21.6	891.1	913.2	**1488**
dmxa1109	1118	16	17.23	**0**		0.1	0.5		0.6	**454**
dmxa1200	2766	20	12.28	**0**		0.2	10.0		10.2	**750**
dmxa1304	1006	9	6.13	**0**		0.0	0.2		0.2	**311**
dmxa1516	2538	10	2.00	**0**		0.1	0.2		0.3	**508**
dmxa1721	3462	17	5.62	**0**		0.1	1.2		1.3	**780**
dmxa1801	8274	16	17.42	**0**		0.7	47.6		48.3	**1365**

Tabelle 6.36: Ergebnisse von KABEL-OPT für VLSI-Instanzen der Gruppen MSM

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
msm0580	1082	10	5.90	**0**		0.1	1.0		1.1	**467**
msm0654	4540	9	4.10	**0**		0.1	0.4		0.5	**823**
msm0709	4806	15	11.75	**0**		0.2	2.7		2.9	**884**
msm0920	2528	25	19.86	1.52	**0**	0.2	33.5	3058.3	3092.0	**806**
msm1008	1390	10	11.04	**0**		0.1	0.5		0.6	**494**
msm1234	3264	12	2.37	2.37	**0**	0.1	0.2	0.4	0.7	**550**
msm1477	4156	30	24.72	**0**		0.3	15.8		16.1	**1068**
msm1707	956	10	0.89	**0**		0.1	0.0		0.1	**564**
msm1844	270	9	3.87	**0**		0.0	0.2		0.2	**188**
msm1931	3044	9	3.61	**0**		0.1	0.1		0.2	**604**
msm2000	3124	9	**0**			0.1			0.1	**594**
msm2152	7404	36	17.57	1.09	1.09	0.8	171.5	10082.1	10254.4	1590
msm2326	1446	13	3.81	**0**		0.1	0.1		0.2	**399**
msm2492	14188	11	4.55	0.42	**0**	1.0	11.0	40.2	52.2	**1459**
msm2525	10478	11	1.42	0.16	**0**	0.5	4.4	0.4	5.3	**1290**
msm2601	10200	15	25.13	2.06	2.06	0.6	120.5	10496.3	10617.4	1443
msm2705	4916	12	1.00	**0**		0.1	0.7		0.8	**714**
msm2802	5926	17	6.60	**0**		0.3	3.6		3.9	**926**
msm2846	11566	88	39.53	2.75	2.75	4.0	1059.1	10878.5	11941.6	3147
msm3277	5982	11	2.69	**0**		0.1	0.1		0.2	**869**
msm3676	3108	9	2.00	**0**		0.1	0.2		0.3	**607**
msm3727	16510	20	2.15	**0**		0.9	14.1		15.1	**1376**
msm3829	14510	11	7.35	**0**		1.0	20.7		21.7	**1571**
msm4038	780	10	0.57	**0**		0.0	0.1		0.1	**353**
msm4114	1380	15	9.52	**0**		0.0	0.2		0.2	**393**
msm4190	1332	15	5.55	**0**		0.1	0.2		0.3	**381**
msm4224	604	10	12.46	**0**		0.1	0.4		0.5	**311**
msm4312	17786	9	7.33	1.40	1.40	2.0	157.8	10982.1	11141.9	2029
msm4414	952	10	7.37	**0**		0.0	0.0		0.0	**408**
msm4515	2716	12	15.11	**0**		0.1	2.7		2.8	**630**

Tabelle 6.37: Ergebnisse von KABEL-OPT für VLSI-Instanzen der Gruppen ALUE und ALUT

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten				Ergebnis
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	BCP	Tot.	
alue2087	3942	33	14.74	0.48	**0**	0.3	24.3	2.9	27.5	**1049**
alue2105	3716	33	5.96	**0**		0.2	11.2		11.4	**1032**
alue3146	11738	63	30.30	2.23	2.23	1.6	292.8	9983.9	10278.3	2252
alue5067	11120	67	17.33	1.33	1.33	2.3	434.6	9618.5	10055.4	2596
alue5345	16330	67	42.54	4.68	4.68	4.6	880.4	9540.1	10425.1	3536
alue5623	13876	67	22.15	2.58	2.58	3.7	1071.5	9249.1	10324.3	3431
alue5901	36858	67	26.36	7.41	7.41	6.6	1895.1	9197.6	11099.3	3972
alue6179	10426	66	26.55	1.41	1.41	2.0	441.1	12481.8	12924.9	2462
alue6457	12274	67	21.00	5.03	5.03	3.3	1270.2	10553.9	11827.4	3073
alue6735	13392	67	32.73	1.28	1.28	2.3	700.5	9526.5	10229.3	2696
alue6951	8838	66	21.11	4.22	4.22	1.8	286.1	10185.0	10472.9	2397
alue7065	109682	543	45.63	29.59	29.59	400.0	4818.2		5219.1	24595
alue7066	20908	15	11.55	2.13	2.13	2.5	1040.5	10140.2	11183.2	2256
alue7229	2948	33	8.06	**0**		0.2	4.4		4.6	**824**
alut0787	4178	33	3.54	0.11	**0**	0.3	6.5	0.5	7.3	**982**
alut0805	3332	33	16.83	0.85	**0**	0.3	57.2	1230.5	1288.0	**958**
alut1181	11386	63	20.02	1.86	1.86	2.4	601.5	10993.5	11597.4	2355
alut2010	22022	67	13.24	3.75	3.75	6.3	1339.7	10134.7	11480.7	3348
alut2288	33190	67	24.61	4.39	4.39	8.3	1822.2	9374.7	11205.2	3883
alut2566	18110	67	35.46	7.53	7.53	3.6	679.0	9407.5	10090.1	3100
alut2610	125632	203	27.77	10.94	10.94	136.2	10272.2		10409.1	12468
alut2764	1252	33	15.83	**0**		0.1	4.4		4.5	**640**

Tabelle 6.38: Das Format der Tabelle 6.39.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
Qualität (%)	E-P	Qualität der primalen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	E-D	Qualität der dualen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	L-P	Qualität der primalen Lösung nach der Lagrange-Phase.
	L-D	Qualität der dualen Lösung nach der Lagrange-Phase.
Gar.		Die am Ende des Verfahrens KABEL-OPT erhaltene Gütegarantie.
Bogenred. (%)		Bogenreduktion nach der jeweiligen Phase in Prozent der ursprünglichen Bogenanzahl.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Anzahl	L-G	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens LAGRANGE-GRADIENT.
	L-R	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens NETZREDUKTION in der Lagrange-Phase.
	LP	Anzahl der Aufrufe der Schnittebenenverfahren zur Lösung der Programme LDEKO oder DEKO.

Tabelle 6.39: Ergebnisse von Kabel-Opt für ausgesuchte VLSI-Instanzen

Name	Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
diw0234	0.8	2.1	**0**	0.6	**0**	35.9	98.0	99.4	53	19	15
diw0473	1.6	13.5	**0**	1.5	**0**	87.0	91.3	99.3	85	17	16
diw0487	1.2	11.3	**0**	0.5	**0**	62.3	95.8	99.1	98	27	14
taq0023	0.9	2.2	0.4	**0**	**0**	50.3	98.9	98.9	21	13	7
taq0365	0.7	10.0	0.7	0.4	**0**	48.3	95.1	99.6	58	21	17
taq0631	**0**	5.5	**0**	0.6	**0**	83.2	98.2	98.2	128	20	12
taq0739	1.8	11.2	**0**	1.1	**0**	44.9	91.5	97.4	69	26	17
taq0751	4.0	5.1	**0**	0.8	**0**	44.4	95.2	99.9	169	28	8
taq0891	1.6	**0**	1.6	**0**	**0**	91.3	96.7	98.3	12	12	11
msm0920	2.7	16.9	**0**	1.6	**0**	51.0	73.9	94.4	76	26	15
msm1234	2.4	**0**	2.4	**0**	**0**	82.3	98.8	98.8	12	12	9
msm2492	2.5	2.1	**0**	0.5	**0**	41.8	99.1	99.7	72	25	9
msm2525	**0**	1.5	**0**	0.2	**0**	70.9	99.7	99.8	133	21	7
dmxa0848	2.7	6.7	0.2	0.7	**0**	57.4	95.2	99.3	34	16	13
dmxa0903	5.4	6.1	0.2	**0**	**0**	63.3	98.4	98.4	63	19	13
dmxa1010	0.2	13.1	0.2	1.1	**0**	93.3	94.6	99.3	53	18	17
gap1904	1.2	4.0	**0**	0.2	**0**	51.0	98.9	98.9	120	19	7
gap2007	3.9	22.6	**0**	1.1	**0**	79.7	90.6	97.7	137	32	13
alue2087	1.8	12.8	**0**	0.5	**0**	66.1	95.4	97.4	75	21	14
alut0787	1.6	2.0	**0**	0.2	**0**	75.4	98.6	98.6	52	19	4
alut0805	**0**	16.9	**0**	0.9	**0**	65.2	76.9	93.3	88	27	18

6.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse für Steinerbaum-Probleme

Das Verfahren Kabel-Opt wurde angewandt auf 78 mit Zufallsfunktionen erzeugte Instanzen, auf 60 Instanzen des rechtwinkligen Steinerbaum-Problems und auf 114 praktische VLSI-Instanzen, insgesamt also auf 252 Instanzen des Steinerbaum-Problems in Graphen. Von diesen Instanzen werden 166 Instanzen optimal gelöst, 13 Instanzen in der Eröffnungsphase des Verfahrens Kabel-Opt, 101 Instanzen in der Lagrange-Phase und 11 in der BCP-Phase.

Das Verfahren Kabel-Opt ist insbesondere für Instanzen mit wenigen Terminals effektiv. Es löst 132 von 137 Instanzen mit bis zu 20 Terminals, 22 von 58 Instanzen mit bis zu 40 Terminals und 12 von 57 Instanzen mit mehr als 40 Terminals.

Die Qualität der primalen Lösung in der Eröffnungsphase ist für 136 Instanzen kleiner als 3 Prozent und für 235 Instanzen kleiner als 10 Prozent.

In der Lagrange-Phase werden die wesentlichen Fortschritte zur Lösung der Instanzen erreicht. Insgesamt werden 114 Instanzen vor dem Ende der Lagrange-Phase gelöst, für 100 der restlichen 138 Instanzen wird eine primale Lösung mit einer Qualität kleiner oder gleich drei Prozent erreicht. Eine wesentliche Rolle bei der Lösung der Instanzen spielt das Verfahren Netzreduktion. Dieses führt in der Lagrange-Phase Reduktionen nach dem Reduzierte-Kosten-Kriterium durch.

6.2.4 VLSI-Instanzen des Kabelproblems

Aus den Datensätzen der VLSI-Instanzen der Sammlung „SteinLib“ haben wir in Unterabschnitt 6.2.2 Steinerbaum-Probleme in Graphen erzeugt. Entsprechend einer Empfehlung von Martin [Mar98] führen wir für diese Datensätze positive Dipfadkostenfaktoren und Längenbeschränkungen ein und erzeugen das Kabelproblem

$$\Pi = (D, \{s\}, T, c, \hat{d}, l, L), \quad D = (V, A).$$

Der Digraph D, die Quelle s, die Senken T und die Bogenkosten c, werden wie für das entsprechende Steinerbaum-Problem bestimmt. Die Quelle s wird dabei möglichst nahe zum Schwerpunkt der Terminals $\{s\} \cup T$ des Steinerbaum-Problems gewählt. Für alle Bögen $a \in A$ setzen wir $l_a = c_a$. Für jede Senke $t \in T$ sei ρ_t die Länge des kürzesten (s,t)-Weges in D. Für alle Senken $t \in T$ legen wir die Längenbeschränkung L_t auf $\max_{t \in T} \rho_t$ fest und den Dipfadkostenfaktor $\hat{d}_t$ auf $\frac{1}{10}$ fest.

Insgesamt wurden 112 Instanzen berechnet, von denen 85 Instanzen optimal gelöst wurden. Vier Instanzen der Gruppen ALUE und ALUT erwiesen sich als zu groß für Kabel-Opt.

Das Verfahren Kabel-Opt löst von diesen 112 Instanzen 87 optimal. In der Eröffnungsphase werden 13 Instanzen optimal gelöst, in der Lagrange-Phase 59 Instanzen und in der BCP-Phase werden 13 Instanzen optimal gelöst. Die Laufzeit beträgt für 68 optimal gelöste Instanzen weniger als 5 Sekunden. Die Laufzeiten der optimal gelösten Instanzen werden im Vergleich zu den entsprechenden Laufzeiten für Steinerbaum-Probleme in der Regel verkürzt. Für einige Datensätze, die als Steinerbaum-Problem optimal gelöst wurden, gelingt jedoch für eine Formulierung als Kabelproblem mit positiven Dipfadkostenfaktoren und Längenbeschränkungen keine optimale Lösung. Entscheidend ist in der Regel, ob in der Lagrange-Phase die Instanzen nachhaltig reduziert werden konnten. Eine Voraussetzung dafür ist, daß gute primale und duale Lösungen in der Lagrange-Phase gefunden werden konnten.

Die Eröffnungsphase ist für 73 Instanzen in weniger als einer Sekunde und für weitere 15 Instanzen in weniger als 10 Sekunden abgeschlossen. Die Qualität der primalen Lösungen ist für 60 Instanzen kleiner oder gleich 3 Prozent und für weitere 28 Instanzen kleiner oder gleich 5 Prozent. Durch das Verfahren Kabel-Reduktion wird die Bogenanzahl von 48 Instanzen um mehr als 70 Prozent und von weiteren 53 Instanzen um mehr als 40 Prozent reduziert.

Zu Beginn der Lagrange-Phase sind 99 Instanzen ungelöst. Für 55 dieser Instanzen ist die Lagrange-Phase in weniger als 5 Sekunden beendet. In der Lagrange-Phase werden 59 Instanzen gelöst, während 40 Instanzen ungelöst bleiben. Für alle in der Lagrange-Phase ungelösten Instanzen wird eine primale Lösung mit einer Qualität besser als 5 Prozent erreicht, für 24 dieser Instanzen ist die Qualität besser als 2 Prozent.

Von den 40 Instanzen, die in der Lagrange-Phase ungelöst bleiben, wird die Bogenanzahl von 10 Instanzen um mehr als 80 Prozent reduziert und von weiteren 9 Instanzen um mehr als 30 Prozent reduziert.

Tabelle 6.40: Das Format der Tabellen 6.41 bis 6.44.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
	$\|A\|$	Die Anzahl der Bögen der von KABEL-OPT eingelesenen Instanz.
	$\|T\|$	Die Anzahl der Senken der von KABEL-OPT eingelesenen Instanz.
Garantie (%)		Die Gütegarantie in Prozent, die nach der jeweiligen Phase erreicht ist.
	Erp.	Eröffnungsphase
	Lag.	Lagrange-Phase
	BCP	BCP-Phase
Laufzeit		Die Laufzeit der jeweiligen Phase(n) in CPU-Sekunden.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	Tot.	Gesamtlaufzeit.
Ergebnis	$c^T\bar{x}$	Die Kosten der Bogenmenge der besten primalen Lösung.
	$\bar{K}$	Die Gesamtkosten der besten primalen Lösung.

Tabelle 6.41: Ergebnisse von Kabel-Opt für VLSI-Instanzen der Gruppen DIW und TAQ

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten			Ergebnis	
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	Tot.	$c^T\bar{x}$	$\bar{K}$
diw0234	20172	24	12.95	1.21	0.71	9.2	73.7	13275.5	2027	2817.1
diw0250	1216	10	**0**			0.0		0.0	350	**429.0**
diw0260	1970	11	**0**			0.1		0.1	468	**547.9**
diw0313	1644	13	1.49	**0**		0.1	0.0	0.1	397	**513.5**
diw0393	762	10	**0**			0.0		0.0	302	**366.9**
diw0445	6622	32	2.60	1.10	**0**	1.1	30.1	6530.4	1383	**1959.8**
diw0459	13578	24	0.83	**0**		1.0	4.2	5.2	1382	**1750.6**
diw0460	1158	12	4.77	**0**		0.1	0.1	0.2	345	**461.8**
diw0473	8270	24	1.53	0.44	**0**	0.6	1.1	2.2	1098	**1377.6**
diw0487	8772	24	1.78	**0**		1.5	5.7	7.2	1442	**1770.5**
diw0495	3310	9	1.09	**0**		0.2	0.1	0.3	616	**735.6**
diw0513	3368	9	1.63	**0**		0.1	0.2	0.3	609	**706.1**
diw0523	4030	9	**0**			0.1		0.1	561	**645.9**
diw0540	930	9	**0**			0.1		0.1	374	**451.9**
diw0559	14026	17	10.48	0.36	**0**	2.4	17.4	27.1	1570	**1938.1**
diw0778	27454	23	4.19	1.27	1.27	11.2	214.6	12924.4	2190	3050.2
diw0779	45032	49	5.31	3.07	3.07	116.9	2418.2	11127.0	4711	7208.1
diw0795	11876	9	7.49	1.28	1.28	2.1	76.9	10582.7	1599	1925.4
diw0801	11150	9	12.55	**0**		2.1	22.8	24.9	1593	**1957.9**
diw0819	40132	31	3.58	1.68	1.68	35.1	1935.4	11954.7	3526	5075.5
diw0820	44768	36	3.90	1.27	1.27	42.6	2577.8	10534.8	4244	6071.4
taq0014	22092	127	5.96	3.12	3.12	45.4	1346.5	10693.3	5743	11385.1
taq0023	1926	10	2.48	**0**		0.1	0.7	0.8	626	**766.2**
taq0365	14148	21	8.79	3.02	2.96	3.1	230.3	10279.5	2084	2742.4
taq0377	23430	135	7.42	4.35	4.35	55.8	1405.7	23883.6	7078	12194.0
taq0431	3810	12	4.84	**0**		0.3	2.6	2.9	897	**1162.3**
taq0631	1864	9	1.83	**0**		0.1	0.0	0.1	585	**712.2**
taq0739	2876	15	3.51	**0**		0.3	1.7	2.0	851	**1156.5**
taq0741	2434	15	5.60	**0**		0.3	24.2	24.5	878	**1107.9**
taq0751	3582	15	7.86	**0**		0.4	4.0	4.4	940	**1234.7**
taq0891	1120	9	**0**			0.0		0.0	324	**368.6**
taq0903	20980	129	5.89	4.28	4.28	38.7	1161.6	10952.6	5680	11338.2
taq0910	1028	16	0.22	**0**		0.1	0.0	0.1	370	**473.1**
taq0920	388	16	**0**			0.0		0.0	210	**264.4**
taq0978	2478	9	2.14	**0**		0.1	0.4	0.5	576	**708.9**

Tabelle 6.42: Ergebnisse von KABEL-OPT für VLSI-Instanzen der Gruppen GAP und DMXA

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten			Ergebnis	
Name	$\lvert A\rvert$	$\lvert T\rvert$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	Tot.	$c^T\bar{x}$	$\bar{K}$
gap1307	1104	16	0.27	**0**		0.1	0.1	0.2	549	**685.7**
gap1413	1812	9	7.98	**0**		0.1	0.0	0.1	457	**538.9**
gap1500	748	16	4.85	**0**		0.0	0.1	0.1	256	**309.6**
gap1810	1404	16	1.86	0.17	**0**	0.1	0.1	0.3	486	**614.3**
gap1904	2512	20	1.48	**0**		0.2	0.8	1.0	769	**1025.0**
gap2007	7096	16	2.30	1.27	**0**	0.5	16.1	2394.5	1107	**1380.0**
gap2119	5950	28	6.52	**0**		1.0	6.2	7.2	1270	**1697.1**
gap2740	4168	13	5.36	0.98	**0**	0.2	5.2	8.9	759	**917.9**
gap2800	1306	11	**0**			0.0		0.0	386	**454.3**
gap2975	586	9	**0**			0.0		0.0	245	**290.3**
gap3036	1166	12	5.95	**0**		0.1	0.7	0.9	470	**576.3**
gap3100	3116	10	1.81	**0**		0.2	0.5	0.7	653	**787.1**
gap3128	36086	103	5.17	1.41	1.41	135.6	1485.5	12998.7	4418	7645.3
dmxa0296	772	11	1.65	**0**		0.1	0.0	0.1	344	**426.3**
dmxa0347	2308	10	3.34	**0**		0.1	0.3	0.4	507	**612.9**
dmxa0368	7352	17	6.40	**0**		0.5	3.4	3.9	1017	**1370.9**
dmxa0454	6572	15	2.36	**0**		0.6	2.1	2.7	919	**1227.5**
dmxa0628	560	9	**0**			0.0		0.0	277	**324.0**
dmxa0848	1722	15	2.55	**0**		0.1	0.7	0.8	599	**749.3**
dmxa0903	2174	9	2.45	**0**		0.1	0.9	1.0	581	**708.3**
dmxa1010	14216	22	3.68	**0**		0.8	4.2	5.0	1488	**1838.6**
dmxa1109	1118	16	3.39	**0**		0.1	0.4	0.5	454	**565.8**
dmxa1200	2766	20	1.93	**0**		0.2	2.0	2.2	765	**980.5**
dmxa1304	1006	9	7.07	**0**		0.0	0.1	0.1	312	**379.5**
dmxa1516	2538	10	0.72	0.72	**0**	0.1	0.1	0.4	508	**639.2**
dmxa1721	3462	17	1.91	1.10	**0**	0.2	0.6	1.8	781	**965.1**
dmxa1801	8274	16	4.70	1.13	1.06	1.4	110.0	11388.6	1424	1826.2

Tabelle 6.43: Ergebnisse von Kabel-Opt für VLSI-Instanzen der Gruppe MSM

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten			Ergebnis	
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	Tot.	$c^T\bar{x}$	$\bar{K}$
msm0580	1082	10	2.19	1.45	**0**	0.1	0.3	0.6	467	**552.5**
msm0654	4540	9	1.93	0.17	**0**	0.2	0.3	0.7	823	**941.8**
msm0709	4806	15	4.28	**0**		0.3	1.4	1.7	884	**1171.4**
msm0920	2528	25	3.93	**0**		0.4	2.3	2.7	821	**1112.7**
msm1008	1390	10	5.10	**0**		0.1	0.5	0.6	494	**597.0**
msm1234	3264	12	4.79	**0**		0.1	0.3	0.4	550	**665.7**
msm1477	4156	30	4.70	**0**		0.5	1.1	1.6	1068	**1433.2**
msm1707	956	10	1.02	**0**		0.0	0.1	0.1	564	**688.4**
msm1844	270	9	0.45	**0**		0.0	0.0	0.0	188	**227.7**
msm1931	3044	9	2.30	**0**		0.1	0.1	0.2	604	**702.9**
msm2000	3124	9	1.08	**0**		0.1	0.1	0.2	594	**705.0**
msm2152	7404	36	3.52	1.01	**0**	1.9	32.1	1944.3	1636	**2319.7**
msm2326	1446	13	**0**			0.1		0.1	407	**509.0**
msm2492	14188	11	2.47	**0**		3.1	4.0	7.1	1462	**1679.0**
msm2525	10478	11	0.32	**0**		0.7	0.5	1.2	1290	**1520.4**
msm2601	10200	15	7.87	**0**		1.4	7.5	8.9	1443	**1834.5**
msm2705	4916	12	1.26	**0**		0.2	0.3	0.5	727	**912.9**
msm2802	5926	17	8.02	0.22	**0**	0.3	3.3	5.5	956	**1225.7**
msm2846	11566	88	5.13	3.09	2.80	10.0	231.0	10404.6	3348	5337.2
msm3277	5982	11	0.52	**0**		0.1	0.2	0.3	869	**984.4**
msm3676	3108	9	5.83	**0**		0.1	0.2	0.3	607	**709.3**
msm3727	16510	20	11.53	**0**		1.5	3.8	5.3	1379	**1938.0**
msm3829	14510	11	7.37	**0**		1.7	11.9	13.6	1576	**1886.0**
msm4038	780	10	4.85	0.72	**0**	0.0	0.3	0.6	356	**417.1**
msm4114	1380	15	1.08	**0**		0.1	0.1	0.2	393	**526.5**
msm4190	1332	15	**0**			0.1		0.1	381	**470.3**
msm4224	604	10	3.93	**0**		0.0	0.1	0.1	311	**371.7**
msm4312	17786	9	10.38	**0**		3.0	25.9	28.9	2024	**2412.7**
msm4414	952	10	**0**			0.0		0.0	408	**476.3**
msm4515	2716	12	1.45	**0**		0.2	0.7	0.9	643	**811.9**

Tabelle 6.44: Ergebnisse von KABEL-OPT für VLSI-Instanzen der Gruppen ALUE und ALUT

Instanz			Garantie (%)			Laufzeiten			Ergebnis	
Name	$\|A\|$	$\|T\|$	Erp.	Lag.	BCP	Erp.	Lag.	Tot.	$c^T\bar{x}$	$\bar{K}$
alue2087	3942	33	6.68	**0**		0.6	8.9	9.5	1067	**1421.0**
alue2105	3716	33	3.09	**0**		0.3	3.0	3.3	1045	**1409.9**
alue3146	11738	63	3.10	2.32	1.99	4.1	85.4	10254.3	2366	3496.3
alue5067	11120	67	5.07	2.41	2.28	6.9	171.4	10320.5	2737	4088.6
alue5345	16330	67	4.88	2.67	2.51	10.3	333.1	10389.2	3626	5714.1
alue5623	13876	67	5.64	3.22	3.17	9.4	230.4	10290.5	3607	5426.5
alue6179	10426	66	4.64	2.34	2.34	7.4	103.6	10023.0	2604	4321.6
alue6457	12274	67	8.12	3.48	3.48	13.4	263.1	13098.7	3296	5236.7
alue6735	13392	67	5.17	1.55	1.41	7.1	143.2	10037.1	2847	4469.6
alue6951	8838	66	6.44	2.20	2.05	5.6	65.4	10146.8	2482	3868.3
alue7066	20908	15	6.94	2.16	2.16	5.1	858.6	10368.7	2274	3005.8
alue7229	2948	33	2.59	**0**		0.3	1.0	1.4	827	**1139.3**
alut0787	4178	33	2.18	**0**		0.4	1.4	1.8	986	**1325.2**
alut0805	3332	33	5.24	**0**		0.5	4.1	4.6	989	**1323.4**
alut1181	11386	63	5.42	1.91	1.88	6.0	135.8	10563.6	2398	3724.0
alut2010	22022	67	7.02	2.57	2.57	14.7	374.6	10174.1	3380	6081.5
alut2288	33190	67	5.60	1.76	1.76	42.1	564.0	12590.4	3939	6078.2
alut2566	18110	67	4.24	2.13	2.13	9.4	140.8	10346.7	3144	4858.9
alut2610	125632	203	5.25	4.30	4.30	1982.7	8437.2	10420.6	13477	28317.8
alut2764	1252	33	3.32	**0**		0.1	0.4	0.5	640	**962.6**

Tabelle 6.45: Das Format der Tabelle 6.46.

Instanz	Name	Der Name der Instanz.
Qualität (%)	E-P	Qualität der primalen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	E-D	Qualität der dualen Lösung nach der Eröffnungsphase.
	L-P	Qualität der primalen Lösung nach der Lagrange-Phase.
	L-D	Qualität der dualen Lösung nach der Lagrange-Phase.
Gar.		Die am Ende des Verfahrens KABEL-OPT erhaltene Gütegarantie.
Bogenred. (%)		Bogenreduktion nach der jeweiligen Phase in Prozent der ursprünglichen Bogenanzahl.
	Erp.	Eröffnungsphase.
	Lag.	Lagrange-Phase.
	BCP	BCP-Phase.
Anzahl	L-G	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens LAGRANGE-GRADIENT.
	L-R	Anzahl der Aufrufe des Verfahrens NETZREDUKTION in der Lagrange-Phase.
	LP	Anzahl der Aufrufe der Schnittebenenverfahren zur Lösung der Programme LDEKO oder DEKO.

Tabelle 6.46: Ergebnisse von KABEL-OPT für ausgesuchte VLSI-Instanzen

Name	Qualität (%)				Gar.	Bogenred. (%)			Anzahl		
	E-P	E-D	L-P	L-D		Erp.	Lag.	BCP	L-G	L-R	LP
diw0234	11.8	1.8	1.2	0.8	0.7	35.9	93.1	93.1	71	26	17
diw0445	1.2	1.5	0.5	0.7	**0**	67.2	82.3	91.1	49	21	20
diw0473	1.3	0.3	0.5	**0**	**0**	87.0	99.7	99.7	31	13	13
diw0559	9.7	0.8	**0**	0.4	**0**	60.4	97.8	99.5	40	22	8
taq0365	6.1	5.7	3.0	3.1	3.0	48.3	49.9	50.0	48	15	12
msm0580	1.5	0.8	1.5	**0**	**0**	47.8	96.3	99.3	18	13	7
msm0654	1.0	1.0	0.2	**0**	**0**	83.3	99.6	99.9	17	14	9
msm2152	1.7	1.9	0.5	0.6	**0**	57.9	75.3	83.1	48	18	20
msm2802	6.0	2.0	0.1	0.2	**0**	83.2	98.7	99.1	73	19	17
msm2846	4.6	3.4	3.1	2.9	2.8	40.7	40.7	40.7	19	10	12
msm4038	3.9	1.0	0.8	**0**	**0**	79.8	96.5	96.5	31	15	11
dmxa1516	0.8	**0**	0.8	**0**	**0**	87.8	98.9	98.9	13	12	11
dmxa1721	1.9	0.1	1.1	**0**	**0**	81.6	97.6	97.6	18	16	13
dmxa1801	3.0	2.8	1.1	1.2	1.1	55.7	78.2	81.1	119	33	13
gap1810	1.8	0.2	0.2	**0**	**0**	76.3	99.3	99.3	16	14	5
gap2007	0.7	1.7	0.7	0.7	**0**	79.7	89.9	94.0	77	23	13
gap2740	3.8	1.6	0.3	0.8	**0**	78.7	94.7	97.8	97	26	9
alue3146	2.4	2.8	2.0	2.4	2.0	71.7	74.0	75.2	30	14	18
alue5067	3.5	3.9	2.4	2.4	2.3	51.6	55.0	55.0	41	15	13
alue5345	3.8	3.7	2.7	2.6	2.6	43.5	43.5	43.5	35	10	12
alue5623	5.2	3.7	3.2	3.3	3.2	46.3	46.3	46.3	20	10	7
alue6735	4.5	2.2	1.5	1.6	1.5	60.5	65.3	65.3	42	16	16
alue6951	5.9	2.6	2.2	2.1	2.1	53.4	68.0	68.0	26	13	18
alut1181	4.7	2.6	2.0	1.9	1.9	50.5	50.5	50.5	25	10	10

Index

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AGJ$^+$96] D. Alevras, M. Grötschel, P. Jonas, U. Paul, and R. Wessäly, *Survivable mobile phone network architectures: Models and solution methods*, Preprint SC 96-48, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1996.

[AGW98] D. Alevras, M. Grötschel, and R. Wessäly, *Cost–efficient network synthesis from leased lines*, Annals of Operations Research **76** (1998), 1–20.

[Ake72] S. B. Akers, *Design automation of digital systems*, vol. 1, ch. Routing, pp. 283–333, M. A. Breuer, 1972.

[AMO93] R. K. Ahuja, Th. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network flows: Theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[Ane80] Y. P. Aneja, *An integer programming approach to the Steiner problem in graphs*, Networks **10** (1980), 167–178.

[BC89] J. E. Beasley and N. Christofides, *An algorithm for the resource constrained shortest path problem*, Networks **19** (1989), 379–394.

[Bea84] J. E. Beasley, *An algorithm for the Steiner problem in graphs*, Networks **14** (1984), 147–159.

[Bea89] J. E. Beasley, *An SST-based algorithm for the Steiner problem in graphs*, Networks **19** (1989), 1–16.

[BEGM98a] R. Borndörfer, A. Eisenblätter, M. Grötschel, and A. Martin, *Frequency assignment in cellular phone networks*, Annals of Oper. Res. **76** (1998), 73–93.

[BEGM98b] R. Borndörfer, A. Eisenblätter, M. Grötschel, and A. Martin, *The orientation model for frequency assignment problems*, Tech. rep., Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1998, Erhältlich von URL http://www.zib.de/ZIBbib/Publications.

[Bel58] R. E. Bellman, *On a routing problem*, Quart. Appl. Math. **16** (1958), 87–90.

[Ber90] M. Bern, *Faster exact algorithms for Steiner trees in planar networks*, Networks **20** (1990), 109–120.

[Bor97] R. Borndörfer, *Aspects of set packing, partitioning and covering*, Ph.D. thesis, TU Berlin, 1997.

[BP76] E. Balas and M. W. Padberg, *Set partitioning: A survey*, SIAM Rev. **18** (1976), 710–760.

[BP83] E. Balas and W. R. Pulleyblank, *The perfect matchable subgraph polytope of a bipartite graph*, Networks **13** (1983), 495–516.

[BP87] A. Balakrishnan and N. R. Patel, *Problem reduction methods and a tree generation algorithm for the Steiner network problem*, Networks **17** (1987), 65–85.

[BW97] R. Borndörfer and R. Weismantel, *Relations among some combinatorial programs*, Preprint SC 97-54, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1997.

[CF96] A. Caprara and M. Fischetti, $\{0, \frac{1}{2}\}$*-Chvátal-Gomory cuts*, Mathematical Programming **74** (1996), no. 3, 221–235.

[CGR92] S. Chopra, E. Gorres, and M. R. Rao, *Solving a Steiner tree problem on a graph using branch and cut*, ORSA Journal on Computing **4** (1992), 320–335.

[Chv75] V. Chvátal, *On certain polytopes associated with graphs*, J. Comb. Theory **18** (1975), 138–154.

[CJPR83a] D. C. Cho, E. L. Johnson, M. Padberg, and M. R. Rao, *On the uncapacitated plant location problem. I: valid inequalities and facets*, Mathematics of Operations Research **8** (1983), no. 4, 579–589.

[CJPR83b] D. C. Cho, E. L. Johnson, M. Padberg, and M. R. Rao, *On the uncapacitated plant location problem. II: facets and lifting theorems*, Mathematics of Operations Research **8** (1983), no. 4, 590–612.

[CR94a] S. Chopra and M. R. Rao, *The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of facets*, Mathematical Programming **64** (1994), 209–229.

[CR94b] S. Chopra and M. R. Rao, *The Steiner tree problem II: Properties and classes of facets*, Mathematical Programming **64** (1994), 231–246.

[CSG96] A. Caprara and J. J. Salazar Gonzales, *A branch and cut algorithm for a generalization of the uncapacitated facility location problem*, Top **4** (1996), no. 1, 135–163.

[CT82] G. Cornuejols and J. M. Thizy, *Some facets of the simple plant polytope*, Mathematical Programming **23** (1982), 50–74.

[Dan63] G. B. Dantzig, *Linear programs and extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[Dij59] E. W. Dijkstra, *A note on two problems in connection with graphs*, Numerische Mathematik **1** (1959), 269–271.

[Dui93] C. W. Duin, *Steiner's problem in graphs*, Ph.D. thesis, University of Amsterdam, 1993.

[DV89a] C. W. Duin and A. Volgenant, *An edge elimination test for the Steiner problem in graphs*, Operation Research Letters **8** (1989), 79–83.

[DV89b] C. W. Duin and A. Volgenant, *Reduction tests for the Steiner problem in graphs*, Networks **19** (1989), 549–567.

[DV97] C. W. Duin and S. Voß, *Efficient path and vertex exchange in Steiner tree algorithms*, Networks **29** (1997), 89–105.

[DW60] G. B. Dantzig and P. Wolfe, *Decomposition principle for linear programs*, Operations Research **8** (1960), 101–111.

[DW71] S. E. Dreyfus and R. A. Wagner, *The Steiner problem in graphs*, Networks **1** (1971), 195–207.

[DZ92] Ding-Zhu Du and Yanjun Zhang, *On better heuristics for Steiner minimum trees*, Mathematical Programming **57** (1992), 193–202.

[Eis97] A. Eisenblätter, *A frequency assignment problem in cellular phone networks*, Preprint SC 97-27, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1997.

[Fis85a] M. L. Fisher, *An applications oriented guide to Lagrangian relaxation*, Interfaces **15** (1985), 10–21.

[Fis85b] M. L. Fisher, *The Lagrangian relaxation methods for solving integer programming problems*, Management Science **27** (1985), 1–18.

[Fis91] M. Fischetti, *Facets of two Steiner arborescence polyhedra*, Mathematical Programming **51** (1991), 401–419.

[Flo62] R. W. Floyd, *Algorithm 97, shortest path*, Comm. ACM **5** (1962), 345.

[Ful71] D. R. Fulkerson, *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*, Mathematical Programming **1** (1971), 168–194.

[Ful72] D. R. Fulkerson, *Anti-blocking polyhedra*, J. Comb. Theory **12** (1972), 50–71.

[Geo74] A. Geoffrion, *Lagrangian relaxations for integer programming*, Mathematical Programming Study **2** (1974), 82–114.

[GJ77] M. R. Garey and D. S. Johnson, *The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete*, SIAM Journal on Applied Mathematics **32** (1977), 826–834.

[GJ79a] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability, a guide of the theory of np completeness*, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[GJ79b] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness*, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[GJR85a] M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt, *Acyclic subdigraphs and linear orderings: Polytopes, facets and a cutting plane algorithm*, Graphs and Order. The Role of Graphs in the Theory of Ordered Sets and Its Applications (I. Rival, ed.), D. Reidel Publisher Company, Dordrecht, Netherlands, 1985, pp. 218–264.

[GJR85b] M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt, *Facets of the linear ordering polytope*, Mathematical Programming **33** (1985), 43–60.

[GJR85c] M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt, *On the acyclic subgraph polytope*, Mathematical Programming **33** (1985), 28–42.

[GLS88] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Springer Verlag, Berlin, 1988.

[GM90] M. Grötschel and C. L. Monma, *Integer polyhedra associated with certain network design problems with connectivity constraints*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **3** (1990), 502–523.

[GM93] M. X. Goemans and Y. Myung, *A catalog of Steiner tree formulations*, Networks **23** (1993), 19–28.

[GMS92] M. Grötschel, C. L. Monma, and M. Stoer, *Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints*, Operations Research **40** (1992), 309–330.

[Goe94] M. X. Goemans, *The Steiner tree polytope and related polyhedra*, Mathematical Programming **63** (1994), 157–182.

[Grö85] M. Grötschel, *Optimierungsmethoden I*, Skriptum zur Vorlesung im WS 84/85, Februar 1985.

[Grö94] M. Grötschel, *Kombinatorische Optimierung*, Manuskript einer im WS 94/95 an der TU Berlin gehaltenen Vorlesung, Dezember 1994.

[GW95] M. X. Goemans and D. P. Williamson, *A general approximation technique for constrained forest problems*, SIAM Journal of Computation **24** (1995), no. 2, 296–317.

[Hak71] S. L. Hakimi, *Steiner problem in graphs and its implications*, Networks **1** (1971), 113–133.

[Has92] R. Hassin, *Approximation schemes for the restricted shortest path problem*, Mathematics of Operations Research **17** (1992), no. 1, 36–42.

[HK70] M. Held and R. M. Karp, *The traveling-salesman problem and minimum spanning trees*, Operations Research **18** (1970), 1138–1162.

[HK71] M. Held and R. M. Karp, *The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II*, Mathematical Programming **1** (1971), 6–25.

[HP93] K. L. Hoffman and M. W. Padberg, *Solving airline crew-scheduling problems by branch-and-cut*, Manage. Sci. **39** (1993), 657–682.

[HR92] F. K. Hwang and D. S. Richards, *Steiner tree problems*, Networks **22** (1992), 55–89.

[HRW92] F. K. Hwang, D. S. Richards, and P. Winter, *The Steiner tree problem*, Annals of Discrete Mathematics 53, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[HZ80] G. Y. Handler and I. Zang, *A dual algorithm for the constrained shortest path problem*, Networks **10** (1980), 293–310.

[Jok66] H. C. Joksch, *The shortest route problem with constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **14** (1966), 191–197.

[Jün85] M. Jünger, *Polyhedral combinatorics and the acyclic subdigraph problem*, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.

[KM98] Th. Koch and A. Martin, *Solving Steiner tree problems in graphs to optimality*, Networks **32** (1998), 207–232.

[Koc99] Th. Koch, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Private Kommunikation, 1999.

[Lau] U. Lauther, Siemens AG München, TURBO: Eine Sammlung effizienter Datenstrukturen für die kombinatorische Optimierung.

[Lau95] U. Lauther, Siemens AG München, Private Kommunikation, 1995.

[Leh79] A. Lehman, *On the width-length inequality*, Mathematical Programming **17** (1979), 403–417.

[Len90] Th. Lengauer, *Combinatorial algorithms for integrated circuit layout*, B.G. Teubner, Stuttgart, and John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[Luc93] A. Lucena, *Tight bounds for the Steiner problem in graphs*, Preprint, IRC for Process Systems Engineering, Imperial College, London, 1993.

[Mac87] N. Maculan, *The Steiner problem in graphs*, Annals of Discrete Mathematics **31** (1987), 185–212.

[Mar98] A. Martin, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Private Kommunikation, 1998.

[Moo59] E. F. Moore, *The shortest path through a maze*, Proc. Int. Symp. on Theory of Switching Part II, 1959, pp. 285–292.

[NS89] P. Nobili and A. Sassano, *Facets and lifting procedures for the set covering polytope*, Mathematical Programming **45** (1989), 111–137.

[Pad73] M. W. Padberg, *On the facial structure of set packing polyhedra*, Mathematical Programming **5** (1973), 199–215.

[Pad75] M. W. Padberg, *A note on zero-one programming*, Operations Research **23** (1975), 833–837.

[Pad80] M. W. Padberg, $(1, k)$*-configurations and facets for packing problems*, Mathematical Programming **18** (1980), 94–99.

[Ray83] V. J. Rayward-Smith, *The computation of nearly minimal Steiner trees in graphs*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **14** (1983), 15–23.

[Sas89] A. Sassano, *On the facial structure of the set covering polytope*, Mathematical Programming **44** (1989), 181–202.

[SD94] M. Stoer and G. Dahl, *A polyhedral approach to multicommodity survivable network design*, Numerische Mathematik **68** (1994), 149–167.

[Sha79] J. F. Shapiro, *Mathematical programming: Structures and algorithms*, Wiley, New York, 1979.

[Sto91] M. Stoer, *Design of survivable networks*, Ph.D. thesis, Augsburg, 1991.

[Thi95] St. Thienel, *Abacus a branch-and-cut system*, Ph.D. thesis, Univ. zu Köln, 1995.

[TM80] H. Takahashi and A. Matsuyama, *An approximate solution for the Steiner problem in graphs*, Math. Japonica **24** (1980), 573–577.

[War87] A. Warburton, *Approximation of pareto optima in multiple-objective shortest path problems*, Operations Research **35** (1987), no. 1, 70–79.

[War97] D. M. Warme, *A new exact algorithm for rectilinear Steiner trees*, Tech. report, Telenex Corporation, Springfield, VA 22153, August 1997.

[WGMV95] D. P. Williamson, M. X. Goemans, M. Mihail, and V. V. Vazirani, *A primal–dual approximation algorithm for generalized Steiner network problems*, Combinatorica **15** (1995), 435–454.

[WI88] B. M. Waxman and M. Imase, *Worst-case performance of the Rayward-Smith's Steiner tree heuristics*, Inform. Process. Lett. **29** (1988), 283–287.

[Wid87] P. Widmayer, *Fast approximation algorithms for Steiner's problem in graphs*, Ph.D. thesis, Universität Karlsruhe, 1987.

[Win87] P. Winter, *Steiner problems in networks: a survey*, Networks **17** (1987), 129–167.

[Win95] P. Winter, *Reductions for the rectilinear Steiner tree problem*, Research Report 11-95, Rutcors University, March 1995.

[Won84] R. T. Wong, *A dual ascent approach for Steiner tree problems on a directed graph*, Mathematical Programming **28** (1984), 271–287.

[WS92] P. Winter and J. Mac Gregor Smith, *Path-distance heuristics for the Steiner problem in undirected networks*, Algorithmica **7** (1992), 309–327.

[Zem78] E. Zemel, *Lifting the facets of zero-one polytopes*, Mathematical Programming **15** (1978), 268–277.