Optimale Quantisierung verallgemeinerter Cantor-Verteilungen

Wolfgang Kreitmeier

Dezember 2006

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Informatik und Mathematik
der Universität Passau

1. Gutachter: Prof. Dr. Siegfried Graf, Universität Passau
2. Gutachter: Prof. Dr. Harald Luschgy, Universität Trier

Danksagung

An vorderster Stelle darf ich mich bei meinem Doktorvater Siegfried Graf bedanken, der mit seiner umfangreichen wissenschaftlichen Erfahrung dieses Projekt hervorragend betreut und unterstützt hat. Viele Ideen konnten in einem Klima gegenseitigen Vertrauens und akademischer Freiheit reifen.
Sicherlich mindestens genauso großer Dank gebührt meiner Familie, die mich während dieser nicht immer einfachen Zeit uneingeschränkt unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Allgemeine mathematische Eigenschaften der optimalen Quantisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen **6**

3 Optimale Quantisierung eindimensionaler dyadischer homogener Cantorverteilungen **12**
3.1 Definition und Symmetrieeigenschaften eindimensionaler dyadischer homogener Cantorverteilungen 12
3.2 Lageeigenschaften der Elemente optimaler Codebücher 14
3.3 Bestimmung aller optimalen Codebücher und des optimalen Quantisierungsfehlers 25
3.4 Berechnung der Quantisierungsdimension und Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten 31
3.5 Optimale Quantisierung im selbstähnlichen Fall 33

4 Spezielle Eigenschaften der optimalen Quantisierung uniform separierter Wahrscheinlichkeitsverteilungen **35**
4.1 Separationseigenschaften der optimalen Codebücher 35
4.2 Schwerpunktformel für den optimalen Quantisierungsfehler 43
4.3 Approximationsresultate für den optimalen Quantisierungsfehler . . . 54

5 Monotonieeigenschaften der Differenzenfolge des optimalen Quantisierungsfehlers diskreter Gleichverteilungen **58**
5.1 Eindimensionale diskrete Gleichverteilungen 58
5.2 Zweidimensionale diskrete Gleichverteilungen mit dreipunktigem Träger 62
5.3 Spezielle diskrete Gleichverteilungen in höheren Dimensionen 65

6 Optimale Quantisierung der Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme beliebiger Dimension **70**
6.1 Definition von uniformen iterierten Funktionensystemen und ihrer Gleichverteilung 70
6.2 Optimale Quantisierung für kleine Codebücher 71
6.3 Optimale Quantisierung für große Codebücher 76
6.4 Bestimmung der Konvergenzordnung des optimalen Quantisierungsfehlers bei Approximation durch eine diskrete Verteilung 88
6.5 Anwendungen und Beispiele 92

7 Gültigkeitsgrenzen der Resultate, Vermutungen und offene Fragen **100**
7.1 Eindimensionale dyadische homogene Cantorverteilungen 100
7.1.1 Gegenbeispiele 100
7.1.2 Die optimalen Codebücher und numerische Experimente im selbstähnlichen Fall 101
7.1.3 Phasenübergangsproblem 113
7.2 Uniforme iterierte Funktionensysteme und deren Gleichverteilungen . 115
7.2.1 Gegenbeispiele 115
7.2.2 Offene Fragen 116

A Anhang **118**

Tabellenverzeichnis **120**

Abbildungsverzeichnis **121**

Literaturverzeichnis **122**

Stichwortverzeichnis **124**

Symbolverzeichnis **126**

1 Einleitung

Der Begriff Quantisierung, so wie er im Rahmen dieser Arbeit untersucht wird, stammt ursprünglich aus der Signalverarbeitung in der Elektrotechnik. Dort beschäftigt man sich seit den späten 1940er Jahren mit der Fragestellung, Signale mit einer vorgegebenen endlichen Anzahl von Punkten möglichst gut zu diskretisieren.

Erste Arbeiten zu der Problemstellung finden sich z.B. bei Bennett [2], Panter und Dite [24], Dalenius [6] und Cox [5]. Während sich diese Arbeiten mit der Quantisierung in einer Raumdimension beschäftigen, wurde erstmals durch Steinhaus [31] die Problemstellung auf den dreidimensionalen Raum verallgemeinert und untersucht.

Die exakte mathematische Modellbildung in beliebiger Raumdimension erfolgt über ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathbb{R}^d$, welches als zu quantisierende Signalquelle interpretiert werden kann. Dazu betrachtet man für eine vorgegebene maximale Anzahl $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$ von Quantisierungspunkten mit der euklidischen Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}^d$ und Normexponent $r \geq 1$, den $n-$optimalen Quantisierungsfehler

$$V_{n,r}(\nu) = \inf_{\beta \subset \mathbb{R}^d,\, \text{card}(\beta) \leq n} \Psi_{\beta,r}(\nu)$$

mit

$$\Psi_{\beta,r}(\nu) = \int \min_{b \in \beta} \| \, x - b \, \|^r \, d\nu(x).$$

Neben der Bestimmung von $V_{n,r}(\nu)$ interessiert auch noch die Gestalt der Menge

$$C_{n,r}(\nu) = \{\beta \subset \mathbb{R}^d : \text{card}(\beta) \leq n \text{ und } \Psi_{\beta,r}(\nu) = V_{n,r}(\nu)\}$$

aller $n-$optimalen Codebücher von ν der Ordnung r. Das $n-$optimale Quantisierungsproblem für ν besteht darin, $V_{n,r}(\nu)$ und $C_{n,r}(\nu)$ zu bestimmen. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen existiert immer mindestens ein $n-$Codebuch, d.h. $C_{n,r}(\nu) \neq \emptyset$. Ein Beweis wurde von Pollard [25] für $r = 2$ gegeben, der dann später auf $r \geq 1$ verallgemeinert wurde. Für eine Referenz sei der Leser auf Graf und Luschgy ([13], Theorem 4.12) verwiesen. Unter stärkeren Voraussetzungen gilt diese Existenzaussage sogar für den Fall $r > 0$ ([15], Theorem 2.5).

Im allgemeinen ist die zu minimierende Abbildung

$$(b_1, .., b_n) \to \int \min_{i \in \{1,..,n\}} \| \, x - b_i \, \|^r \, d\nu(x)$$

nichtkonvex, was die exakte Bestimmung der Lösungen des $n-$optimalen Quantisierungsproblems, insbesondere in höheren Raumdimensionen d und bei einer großen Anzahl n von Quantisierungspunkten, stark erschwert. Unter Einschränkungen an den Wertebereich von n und r ist eine explizite Lösung des Quantisierungsproblems bisher nur für spezielle eindimensionale Verteilungen (cf. [13], Kapitel 5.2; [12], Theorem 5.2; [19], Proposition 3.7) bzw. höherdimensionale rotationssymmetrische Verteilungen ([13], Kapitel 4.4) bekannt. Obwohl für eine spezielle Klasse von eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $r \geq 1$ immer nur ein $n-$optimales Codebuch existiert (siehe z.B. [20] bzw. [32]), ist wegen der bereits erwähnten Nichtkonvexität der zu minimierenden Abbildung im allgemeinen keine Eindeutigkeit der Lösung gegeben. (siehe z.B. [1]; [12], Theorem 5.2; [19], Proposition 3.7).

Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass $V_{n,r}(\nu)$ für n gegen unendlich, gegen 0 konvergiert ([13], Lemma 6.1). Zur Bestimmung der Ordnung dieser Konvergenz haben sich die Begriffe der Quantisierungsdimension und des Quantisierungskoeffizienten als hilfreich erwiesen. Zador [33] stellt als erster die Frage, wann die Folge $\left(\frac{r\log(n)}{-\log(V_{n,r}(\nu))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen positiven reellen Wert konvergiert und bezeichnet diesen Limespunkt, im Falle seiner Existenz, als Quantisierungsdimension $D_r(\nu)$. Existiert die Quantisierungsdimension, dann kann man fragen, ob die Folge $\left(n^{\frac{r}{D_r(\nu)}}V_{n,r}(\nu)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Im Falle der Konvergenz gegen einen positiven reellen Wert, wird dieser Limespunkt als Quantisierungskoeffizient $Q_r(\nu)$ bezeichnet.

Handelt es sich bei ν um eine Verteilung, die einen zum d-dimensionalen Lebesguemaß absolutstetigen nichtverschwindenden Maßanteil besitzt, und ist für ein $\delta > 0$ das $(r+\delta)-$te Moment von ν endlich, so existiert die Quantisierungsdimension $D_r(\nu)$ und stimmt mit der Raumdimension d überein. Ferner existiert unter den gleichen Voraussetzungen auch der Quantisierungskoeffizient $Q_r(\nu)$. Dieses sehr tiefliegende Resultat über die Asymptotik des optimalen Quantisierungsfehlers geht auf die Arbeiten von Zador [34] bzw. Buckley und Wise [4] zurück. Ein vollständiger Beweis findet sich auch bei Graf und Luschgy ([13], Theorem 6.2).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung des Quantisierungsproblems und der Frage nach der Existenz der Quantisierungsdimension und des Quantisierungskoeffizienten für zwei spezielle Klassen von singulären Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich unter dem Oberbegriff 'verallgemeinerte Cantor-Verteilung' einordnen lassen.

In Kapitel 2 stellen wir die wichtigsten bekannten Resultate aus der Theorie der optimalen Quantisierung zusammen, die wir für die Untersuchungen in den Folgekapiteln benötigen.

Kapitel 3 widmet sich dann der ersten Klasse verallgemeinerter Cantor-Verteilungen, den sog. dyadischen homogenen Cantor-Verteilungen. Zur Definition dieser Verteilungen gibt man sich eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in]0, \frac{1}{2}]^{\mathbb{N}}$ vor und benutzt eine Wischkonstruktion. Dazu startet man mit dem Einheitsintervall $[0,1]$ und entfernt in einem ersten Schritt das mittlere offene Intervall der Länge $1-2c_1$. Im zweiten Schritt entfernt man von den verbliebenen abgeschlossenen Intervallen wiederum das jeweils mittlere offene Intervall der Länge $(1-2c_2)c_1$. So fortfahrend erhält man für k gegen unendlich die zur Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zugehörige homogene dyadische Cantormenge. Die Gleichverteilung μ auf dieser Menge stellt dann die dyadische homogene Cantor-Verteilung dar und ist durch die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt.
Erste Untersuchungen für den Fall $c_k = \frac{1}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gehen zurück auf Zador [33]. Weitere Ergebnisse für diesen Spezialfall wurden durch Graf und Luschgy [12] erzielt. Lindsay [22] benutzte als erster diese Verteilungsklasse um ein Beispiel für die Nichtexistenz der Quantisierungsdimension zu konstruieren. Kesseböhmer und Zhu [19] bestimmten unter der Voraussetzung

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{4} \tag{1}$$

für $r \geq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Gestalt der Menge $C_{n,r}(\mu)$ aller n-optimalen Codebücher der Ordnung r. Neben anderen wichtigen Resultaten zeigten sie unter der Voraussetzung (1), dass die Quantisierungsdimension $D_r(\mu)$ genau dann existiert, wenn die Fol-

ge $(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$D_r(\mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)}. \tag{2}$$

Wir zeigen, dass die Resultate von Kesseböhmer und Zhu bezüglich $C_{n,r}(\mu)$ und der Darstellung (2) für die Quantisierungsdimension $D_r(\mu)$ auch unter der schwächeren Voraussetzung

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{3} \tag{3}$$

gelten (Theorem 3.17, Bemerkung 3.23). Bei einer weiteren Abschwächung von (3) wird das Resultat über die Gestalt der $n-$optimalen Codebücher falsch (Beispiel 7.1). Des weiteren leiten wir unter der Voraussetzung (3) die Formel

$$V_{n,r}(\mu) = \frac{\pi_k^r}{2^k}\left((2^{k+1}-n)V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) + (n-2^k)\cdot c_{k+1}^r V_{1,r}(\mu^{(k+2)})\right)$$

für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler her (Theorem 3.17), bei der $\mu^{(k)}$ die zu der Folge $(c_{l+k-1})_{l\in\mathbb{N}}$ zugehörige dyadische homogene Cantorverteilung bezeichnet, $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} c_i$ und $n \in [2^k, 2^{k+1}[$ gilt. Existiert die Quantisierungsdimension und gilt (3), so zeigen wir unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$0 < \liminf_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k \leq \limsup_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k < \infty,$$

dass der Quantisierungskoeffizient nicht existiert (Proposition 3.24). Aufgrund von Voraussetzung (3) sind in unseren Resultaten die früheren Ergebnisse von Zador [33] bzw. Graf und Luschgy [12] jeweils als Spezialfall enthalten (Bemerkung 3.27). Auch die betreffenden Teile der Arbeit von Kesseböhmer und Zhu (cf. [19], Theorem 1.6 (3) bzw. [19], Proposition 3.7) werden durch die Resultate dieser Arbeit in ihrem Gültigkeitsbereich erweitert (Bemerkung 3.18).

Das Ziel der beiden Kapitel 4 und 5 besteht darin, alle Hilfsmittel für die Untersuchung der zweiten Klasse verallgemeinerter Cantor-Verteilungen in Kapitel 6 bereitzustellen. Dennoch sind die Ergebnisse dieser beiden Zwischenkapitel so allgemein formuliert, dass sie auch von eigenständigem Interesse sind.

In Kapitel 4 untersuchen wir die Fragestellung, wie sich die Lösung und andere Eigenschaften des $n-$optimalen Quantisierungsproblems der Gleichverteilung Q_ω einer endlichen Punktmenge ω auf eine Verteilung übertragen lassen, deren Masse zu gleichen Teilen auf disjunkten Kugeln um die Menge ω verteilt ist. Entscheidend für die Ergebnisse ist dabei, dass der einheitliche Radius der Kugeln hinreichend klein ist.

Kapitel 5 beschäftigt sich ebenfalls mit der diskreten Gleichverteilung Q_ω. Es werden hinreichende Bedingungen bewiesen, die sicherstellen, dass

$$V_{n,r}(Q_\omega) - V_{n+1,r}(Q_\omega) > V_{n+1,r}(Q_\omega) - V_{n+2,r}(Q_\omega) \tag{4}$$

für alle $n \in \{1,..,\mathrm{card}(\omega)-2\}$ gilt. Obwohl unter sehr allgemeinen Voraussetzungen

$$V_{n,r}(Q_\omega) > V_{n+1,r}(Q_\omega)$$

für alle $n \in \{1,..,\mathrm{card}(\omega)-1\}$ gilt (Satz 2.4 (a)), ist die Beziehung (4) unter den gleichen allgemeinen Voraussetzungen nicht immer erfüllt (Bemerkung 5.6, Beispiel

5.9).

Kapitel 6 widmet sich den Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme beliebiger Raumdimension, die die bereits angesprochene zweite Klasse verallgemeinerter Cantor-Verteilungen darstellen. Ein uniformes iteriertes Funktionensystem ist ein $N-$Tupel $(S_1, .., S_N)$ von Abbildungen, für das

$$\| S_i(x) - S_i(y) \| = c \| x - y \|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, .., N\}$ mit einem $c \in]0, 1[$ gilt. Dazu existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, mit der Eigenschaft

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu \circ S_i^{-1}.$$

Graf und Luschgy [13] haben gezeigt, dass unter einer bestimmten Voraussetzung, die in Kapitel 6 dieser Arbeit immer erfüllt ist, die Quantisierungsdimension von μ immer existiert und

$$D_r(\mu) = D = \frac{-\log(N)}{\log(c)}$$

gilt (siehe [13], Theorem 14.17 (i)). Aufgrund der Kontraktionseigenschaft besitzt jede Abbildung S_i genau einen Fixpunkt. Bezeichnet ω die Menge dieser Fixpunkte, gelingt es bei hinreichend kleinem Kontraktionsfaktor c und weiteren Voraussetzungen an das Funktionensystem, den n-optimalen Quantisierungsfehler $V_{n,2}(\mu)$ für $n \leq N$ ausschließlich durch den n-optimalen Quantisierungsfehler $V_{n,2}(Q_\omega)$ der diskreten Gleichverteilung auf ω darzustellen (Theorem 6.4). Es gilt unter diesen Bedingungen die Formel

$$V_{n,2}(\mu) = \frac{1-c}{1+c} \cdot c^2 V_{1,2}(Q_\omega) + (1-c)^2 V_{n,2}(Q_\omega), \tag{5}$$

zu deren Beweis wir uns auf die Ergebnisse aus Kapitel 4 abstützen. Neben der Fehlerformel (5) leiten wir auch eine Darstellung der n-optimalen Codebücher ab.
Für $n \geq N$ wird das $n-$optimale Quantisierungsproblem für μ unter anderen einschränkenden Voraussetzungen an das Funktionensystem vollständig gelöst. (Theorem 6.13). Diese Voraussetzungen sind z.B. erfüllt, falls der Kontraktionsfaktor c kleiner als eine angebbare obere Schranke $c_0 \in]0, 1[$ ist und die Beziehung (4) gewährleistet ist (Proposition 6.22). Wir erhalten in diesem Fall mit $i(n) \in \{1, .., N-1\}$ und $k(n) \in \mathbb{N}$ für $n \in \left[i(n)N^{k(n)}, (i(n)+1)N^{k(n)} \right[$ die Formel

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \frac{c^{k(n)r}}{N^{k(n)}} \Big(V_{i(n),r}(\mu) \left((i(n)+1)N^{k(n)} - n \right) \\ &\quad + V_{i(n)+1,r}(\mu) \left(n - i(n)N^{k(n)} \right) \Big) \end{aligned}$$

für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler. Ferner geben wir eine Charakterisierung der n-optimalen Mengen von μ der Ordnung r an und bestimmen die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n \in \mathbb{N}}$, die ein nichteinpunktiges abgeschlossenes Intervall ist. Der Quantisierungskoeffizient existiert also nicht. Die Resultate werden dann auf modifizierte Versionen klassischer iterierter Funktionensysteme angewandt. Wir studieren dabei die Cantormenge, das Sierpinski-Dreieck und den Cantor-Staub. Neben diesen klassischen singulären Verteilungen lässt sich mit den vorliegenden Resultaten das Quantisierungsproblem vieler anderer singulärer Verteilungen, die

sich als Gleicherverteilung eines uniform iterierten Funktionensystems definieren lassen, ebenfalls lösen.

In einem letzten Kapitel 7 untersuchen wir die Gültigkeitsgrenzen unserer Resultate und beschließen die Arbeit mit einigen offenen Fragen. Als besonders interessante Fragestellung verbleibt das Problem, die n-optimale Quantisierung für dyadische homogene Cantor-Verteilungen unter der Bedingung

$$c_k = c \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

zu studieren. Für solche c ist insbesondere die Bestimmung der Häufungspunktmenge der Folge $\left(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ungelöst.

2 Allgemeine mathematische Eigenschaften der optimalen Quantisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung von wichtigen aus der Literatur bekannten Begriffen und Resultaten, mit denen die optimale Quantisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen in mathematischer Form untersucht werden kann.

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und ν eine Borelsche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}^d$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{supp}(\nu)$ den Träger von ν und mit $\| \ . \ \|$ die euklidische Norm. Ferner sei $r \geq 1$ und $\int \| \ x \ \|^r \ d\nu(x) < \infty$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\beta \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und enthalte höchstens n Punkte. Mit card(β) bezeichnen wir die Kardinalität von β. Es sei zusätzlich card(supp$(\nu)) \geq n$ vorausgesetzt. Wir nennen

$$\Psi_{\beta,r}(\nu) = \int \min_{b \in \beta} \| \ x - b \ \|^r \ d\nu(x)$$

den Quantisierungsfehler bezüglich β und

$$V_{n,r}(\nu) = \inf_{\alpha \subset \mathbb{R}^d, \ 1 \leq \mathrm{card}(\alpha) \leq n} \Psi_{\alpha,r}(\nu)$$

den $n-$optimalen Quantisierungsfehler der Ordnung r.

Die Menge β wird n-optimal der Ordnung r (bzw. kurz n-optimales Codebuch) genannt, falls $\Psi_{\beta,r}(\nu) = V_{n,r}(\nu)$. Die Menge aller n-optimalen Codebücher bezeichnen wir mit $C_{n,r}(\nu)$. Falls aus dem Kontext klar hervorgeht, mit wievielen Punkten n die optimale Quantisierung untersucht wird, sprechen wir für $V_{n,r}(\nu)$ vom optimalen Quantisierungsfehler bzw. für $C_{n,r}(\nu)$ von den optimalen Codebüchern.

Für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\overline{A}$ den topologischen Abschluss und mit conv(A) die konvexe Hülle von A.

Allgemeine Existenz, Eindeutigkeit für $n = 1$ und Lageeigenschaften der n-optimalen Codebücher zeigt der nachfolgende Satz.

2.1 Satz
(a) $C_{n,r}(\nu) \neq \emptyset$.

(b) Jedes n-optimale Codebuch besteht aus genau n Punkten.

(c) Falls $r > 1$, gibt es nur ein 1-optimales Codebuch.
Bei $r = 2$ besteht dieses 1-optimale Codebuch aus dem Punkt $\int x d\nu(x)$.

(d) $\bigcup \{\alpha : \alpha \in C_{n,r}(\nu)\}$ *ist eine Teilmenge von* $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\nu))}$.

Beweis.
Die Anwendung von Theorem 4.12 in [13] ergibt $C_{n,r}(\nu) \neq \emptyset$. Mittels Theorem 4.1. in [13] besteht jedes n-optimale Codebuch aus genau n Punkten. Falls $r > 1$, impliziert [13], Theorem 2.4 (i), dass es nur ein 1-optimales Codebuch gibt. Ist $r = 2$, so gilt $C_{1,r}(\nu) = \{\{\int x d\nu(x)\}\}$, gemäß [13], Example 2.3 (b). Aus [13], Remark 4.6 (a) erhalten wir $\bigcup \{\alpha : \alpha \in C_{n,r}(\nu)\} \subset \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\nu))}$. □

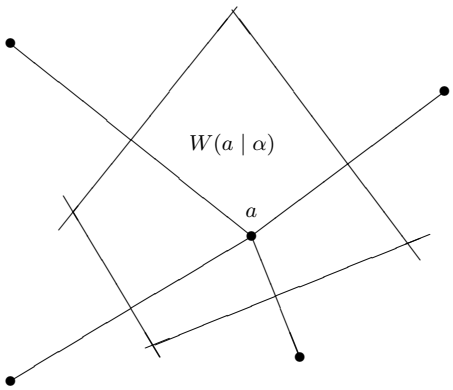

Abbildung 1: Voronoizelle

Für eine endliche nichtleere Menge $\alpha \subset \mathbb{R}^d$ bezeichne

$$W(a \mid \alpha) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \| x - a \| = \min_{b \in \alpha} \| x - b \| \right\} \tag{6}$$

die durch $a \in \alpha$ generierte Voronoizelle (siehe Abbildung 1).
Mit diesem Begriff wird nachfolgend eine Stationaritätseigenschaft von n-optimalen Codebüchern formuliert, die in den folgenden Kapiteln häufig benutzt wird.

2.2 Satz
Sei α ein n-optimales Codebuch und $m \in \{1, .., n\}$.

(i) Es ist $\nu\left(W(a \mid \alpha)\right) > 0$ für jedes $a \in \alpha$ und

$$\beta \in C_{m,r}\left(\nu(\cdot \mid \bigcup_{b \in \beta} W(b \mid \beta))\right)$$

für jedes $\beta \subset \alpha$ mit card$(\beta) = m$.

(ii) Es gilt

$$V_{n,r}(\nu) = \sum_{a \in \alpha} \nu(W(a \mid \alpha)) V_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha))).$$

Beweis.
Teil (i) der Behauptung folgt aus [13], Theorem 4.1. Die Formel für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler in (ii) wird auf Seite 32 in [13] bewiesen. □

Bemerkenswert ist auch, dass auf dem Rand der Voronoizellen eines $n-$optimalen Codebuchs unter bestimmten Voraussetzungen keine $\nu-$Masse liegt, wie der nachfolgende Satz zeigt.

2.3 Satz
Sei $n \geq 2$ und α ein n-optimales Codebuch. Sei $r > 1$. Dann ist

$$\nu(W(a \mid \alpha) \cap W(b \mid \alpha)) = 0,$$

für alle $a, b \in \alpha$ mit $a \neq b$.

Beweis.
Siehe [13], Theorem 4.2. □

Eine bijektive Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt Ähnlichkeitsabbildung,
falls eine Konstante $c \in]0, \infty[$ existiert, so dass

$$\| T(x) - T(y) \| = c \| x - y \|$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^d$. Falls $c < 1$, nennen wir c Kontraktionskonstante. Mit $\nu \circ T^{-1}$ bezeichnen wir das Bildmaß von ν bezüglich T.

Wir fahren fort mit der Nullfolgeneigenschaft des $n-$optimalen Quantisierungsfehlers und einer Aussage über das Verhalten des $n-$optimalen Quantisierungsfehlers und der n-optimalen Codebücher unter Ähnlichkeitsabbildungen.

2.4 Satz
(a) Für $n \geq 2$ ist $V_{n,r}(\nu) < V_{n-1,r}(\nu)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} V_{n,r}(\nu) = 0$.

(c) Sei T eine Ähnlichkeitsabbildung mit Konstante $c \in]0, \infty[$. Dann ist

$$C_{n,r}(\nu \circ T^{-1}) = TC_{n,r}(\nu)$$
$$V_{n,r}(\nu \circ T^{-1}) = c^r V_{n,r}(\nu).$$

Beweis.
Behauptung (a) folgt aus [13], Theorem 4.12. Nach [13], Lemma 6.1 ist $(V_{n,r}(\nu))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, womit (b) gezeigt ist. Aussage (c) wird in [13], Lemma 3.2 (a) bewiesen. □

Für zwei Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße ν_1, ν_2 auf $\mathbb{R}^d$ mit $\int \| x \|^r \, d\nu_i(x) < \infty$ sei

$$\rho_r(\nu_1, \nu_2) = \inf_{\lambda} \left(\int \| x - y \|^r \, d\lambda(x, y) \right)^{\frac{1}{r}}, \tag{7}$$

wobei das Infimum über alle Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße λ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ mit den Marginalmaßen ν_1 und ν_2 gebildet wird. Für den vorausgesetzten Bereich $r \geq 1$ stellt ρ_r eine Metrik dar. In der Literatur (siehe z.B. [29]) wird ρ_r als $\mathbf{L_r-}$**minimale Metrik** (bzw. $\mathbf{L_r-}$**Wasserstein Metrik** oder $\mathbf{L_r-}$**Kantorovich Metrik**) bezeichnet.

Für zwei nichtleere kompakte Mengen $B, C \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$d_H(B, C) = \max \left\{ \max_{b\in B} \min_{c\in C} \| b - c \|, \max_{c\in C} \min_{b\in B} \| b - c \| \right\} \tag{8}$$

der Hausdorffabstand .

Auf dem Raum $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(\mathbb{R}^d)$ aller Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße ν auf $\mathbb{R}^d$ mit $\int \| x \|^r \, d\nu(x) < \infty$, kann man nun mit der L_r-minimalen Metrik Stetigkeitsuntersuchungen bezüglich der optimalen Quantisierung durchführen. Es sei $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_r$ und $\nu \in \mathfrak{M}_r$. Ferner sei $n \leq \mathrm{card}(\mathrm{supp}(\nu))$ und $r \geq 1$. Es gelten die folgenden wichtigen Aussagen.

2.5 Satz
Es gelte $\lim_{k\to\infty} \rho_r(\nu_k, \nu) = 0$.

(a) Dann ist $\lim_{k\to\infty} V_{n,r}(\nu_k) = V_{n,r}(\nu)$.

(b) Sei $\alpha_k \in C_{n,r}(\nu_k)$ *für* $k \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Menge der* d_H-*Häufungspunkte der Folge* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine nichtleere Teilmenge von* $C_{n,r}(\nu)$ *und*

$$\lim_{k\to\infty} d_H(\alpha_k, C_{n,r}(\nu)) = 0.$$

Beweis.
Teil (a) der Behauptung ist eine direkte Folgerung aus Ungleichung (4.4) auf Seite 57 in [13]. Teil (b) folgt aus [13], Theorem 4.21 (b). □

Für die ρ_r-Konvergenz der Folge $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ν gilt folgende wichtige Charakterisierung.

2.6 Satz
Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \rho_r(\nu_k, \nu) = 0,$$

genau dann, wenn ν_k *schwach gegen* ν *konvergiert und*

$$\int \| x \|^r \, d\nu_k(x) \to \int \| x \|^r \, d\nu(x).$$

Beweis.
Siehe Theorem 2.6.4 in [29]. □

Das Problem der optimalen Quantisierung der Wahrscheinlichkeitsverteilung ν besteht nun darin, für jedes $n \in \mathbb{N}$ den n-optimalen Quantisierungsfehler $V_{n,r}(\nu)$ und die Menge $C_{n,r}(\nu)$ aller n-optimalen Codebücher zu bestimmen.

Die exakte Ermittlung ist jedoch im allgemeinen schwierig und bisher nur für ganz spezielle Verteilungen durchgeführt worden. (siehe [13], Appendix). Im Hinblick auf die Nullfolgeneigenschaft des n-optimalen Quantisierungsfehlers (siehe Satz 2.4 (b)) stellt sich jedoch die Frage, ob wenigstens die Bestimmung der Konvergenzordnung dieser Nullfolge möglich ist.

Im Folgenden werden die zwei Begriffe Quantisierungsdimension und Quantisierungskoeffizient eingeführt, die die Konvergenzordnung auf verschiedene Weise charakterisieren.

Die untere Quantisierungsdimension von ν der Ordnung r ist definiert durch

$$\underline{D}_r(\nu) := \liminf_{n\to\infty} \frac{r \log(n)}{-\log(V_{n,r}(\nu))}. \tag{9}$$

Die obere Quantisierungsdimension von ν der Ordnung r ist definiert durch

$$\overline{D}_r(\nu) := \limsup_{n\to\infty} \frac{r\log(n)}{-\log(V_{n,r}(\nu))}. \tag{10}$$

Stimmen die beiden Größen überein, so heißt der gemeinsame Wert Quantisierungsdimension $D_r(\nu)$. Existiert die Quantisierungsdimension, und konvergiert die Folge $(n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\nu))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen endlichen positiven Wert, so heißt

$$Q_r(\nu) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\nu) \tag{11}$$

der Quantisierungskoeffizient der Ordnung r der Verteilung ν.

2.7 Theorem
Besitzt ν einen nichtverschwindenden regulären Anteil bezüglich des $d-$dimensionalen Lebesguemaßes λ^d und ist $\int \| x \|^{r+\delta} \, d\nu(x) < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann stimmt $D_r(\nu)$ mit der Raumdimension d überein und der Quantisierungskoeffizient $Q_r(\nu)$ existiert.

Beweis.
Die Anwendung von [13], Theorem 6.2 ergibt die Konvergenz von $n^{\frac{r}{d}} V_{n,r}(\nu)$ gegen einen positiven Wert. Daraus folgt unmittelbar, dass $D_r(\nu) = d$. □

Erste Untersuchungen zur Asymptotik des optimalen Quantisierungsfehlers gehen auf Panter und Dite ([24], 1951) bzw. Fejes Tóth ([9], 1959) zurück. Zador ([33], 1982) beweist unter schärferen Voraussetzungen als in Theorem 2.7 die Konvergenz der Folge $(n^{\frac{r}{d}} V_{n,r}(\nu))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen positiven Wert. Buckley und Wise ([4], 1982) geben einen Beweis für $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{r}{d}} V_{n,r}(\nu) \in]0,\infty[$ unter den Bedingungen von Theorem 2.7, der allerdings eine kleine Lücke enthält. Ein vollständiger Beweis findet sich, wie oben zitiert, bei Graf und Luschgy [13].

2.8 Bemerkung
Für die Existenz des Quantisierungskoeffizienten kann auf die Voraussetzung des nichtverschwindenden regulären Maßanteils in Theorem 2.7 nicht verzichtet werden.
(Gegen-)Beispiele hierfür liefern eindimensionale dyadische homogene Cantorverteilungen, die im Kapitel 3 definiert und untersucht werden. Dort wird unter allgemeinen Voraussetzungen gezeigt, dass der Quantisierungskoeffizient nicht existiert (siehe Proposition 3.24 (iii)). Darüberhinaus wird im gleichen Kapitel für den Spezialfall einer sog. (eindimensionalen) selbstähnlichen Cantorverteilung μ eine funktionale Darstellung des nichteinpunktigen zusammenhängenden Intervalls aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ bewiesen (siehe Bemerkung 3.26). Auch bei Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme, die wir in Kapitel 6 definieren und bezüglich ihrer optimalen Quantisierung studieren, zeigen wir unter bestimmten Voraussetzungen die Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten und leiten für diesen Fall eine Intervalldarstellung der Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ ab (siehe Theorem 6.13 (ii)).

2.9 Bemerkung
Bezüglich der Existenz der Quantisierungsdimension $D_r(\nu)$ und des Quantisierungskoeffizienten $Q_r(\nu)$ treten alle drei möglichen Fälle auf:

(a) $D_r(\nu)$ existiert nicht
(b) $D_r(\nu)$ existiert, $Q_r(\nu)$ existiert nicht
(c) $D_r(\nu)$ existiert, $Q_r(\nu)$ existiert.

Ein Beispiel für Fall (a) wird im nachfolgenden Kapitel 3 geliefert (siehe Bemerkung 3.23). Der Fall (b) trifft für die in Kapitel 6 untersuchten Verteilungen zu (siehe Theorem 6.13 (iii)). Auch bei den Maßen in Kapitel 3, tritt unter bestimmten Voraussetzungen Fall (b) ein (siehe Proposition 3.24 (iii)). Theorem 2.7 stellt ein Beispiel für Fall (c) dar. Es sei angemerkt, dass der Fall (c) auch bei Maßen auftreten kann, die keinen regulären Maßanteil besitzen. Siehe hierfür [16], Theorem 4.1.

3 Optimale Quantisierung eindimensionaler dyadischer homogener Cantorverteilungen

Im Folgenden untersuchen wir das optimale Quantisierungsverhalten von dyadischen homogenen Cantorverteilungen. Zur Konstruktion dieser Maße gibt man sich eine Folge von Kontraktionsfaktoren $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in]0, \frac{1}{2}]^{\mathbb{N}}$ vor, die in eindeutiger Weise mit einer dyadischen homogenen Cantormenge $C((c_k))$ verknüpft ist. Die Gleichverteilung μ auf dieser Menge stellt dann die dyadische homogene Cantorverteilung dar.

Lindsay [22] stellte als erster die Nichtexistenz der Quantisierungsdimension für manche solcher dyadischen homogenen Cantorverteilungen heraus. Kesseböhmer und Zhu [19] setzten diese Arbeiten fort und ermittelten die Gestalt aller $n-$optimalen Codebücher unter der Voraussetzung $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{4}$. In diesem Kapitel wird dieses Codebuchresultat auch unter der schwächeren Voraussetzung $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{3}$ bewiesen. Weitere neue Resultate über den $n-$optimalen Quantisierungsfehler und die Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten (unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen) kommen hinzu. Diese Ergebnisse finden sich auch in einer zur Veröffentlichung eingereichten Arbeit (siehe [21]).
Im Spezialfall konstanter Kontraktionsfolgenglieder gehen die Resultate dieses Abschnittes in die bereits bekannten Ergebnisse von Graf und Luschgy (siehe [12]) über.

3.1 Definition und Symmetrieeigenschaften eindimensionaler dyadischer homogener Cantorverteilungen

Sei die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}}$ fest vorgegeben. Zunächst definieren wir induktiv die dyadische homogene Cantormenge $C((c_k))$. (siehe Abbildung 2).

Schritt 1. Wir setzen $E_0 = [0, 1]$ und $\mathcal{D}_0 = \{E_0\}$. Nun wird das offene Intervall der Länge $1 - 2c_1$ in der Mitte von E_0 entfernt. Es verbleibt $\mathcal{D}_1 = \{[0, c_1], [1 - c_1, 1]\}$ als die Menge aller Basisintervalle der Stufe 1. E_1 bezeichnet die Vereinigung aller Basisintervalle der Stufe 1.

Schritt 2. Für $k \in \mathbb{N}$ seien die Menge $\mathcal{D}_k$ aller Basisintervalle der Stufe k und die Vereinigung E_k aller Basisintervalle der Stufe k gegeben. Wir setzen $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} c_i$ und entfernen jeweils das mittlere offene Intervall der Länge $(1 - 2c_{k+1})\pi_k$ von jedem Basisintervall aus $\mathcal{D}_k$. Man erhält somit $\mathcal{D}_{k+1}$ bzw. E_{k+1}. Wir setzen

$$C((c_k)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

und bezeichnen mit $C((c_k))$ die durch die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte dyadische homogene Cantormenge. Man kann nun zeigen (siehe [8], Seite 9 ff.) dass es zur Menge $C((c_k))$ genau ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ gibt, charakterisiert durch die beiden Eigenschaften

$$\mu(F) = 2^{-k} \text{ für jedes } F \in \mathcal{D}_k$$

und

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) : A \cap C((c_k)) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, U_i \in \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{D}_k\right\}$$

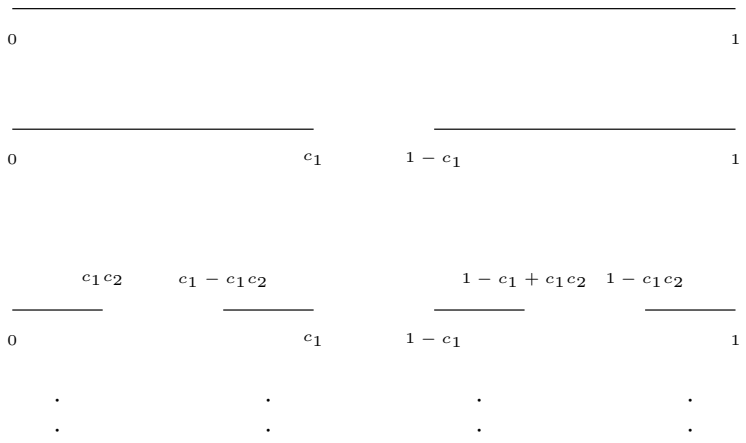

Abbildung 2: Wischkonstruktion

für jede Borelsche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$.

Die Cantormenge $C((c_k))$ ist der Träger von μ. Für den Rest des ganzen Kapitels nennen wir μ die durch die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte dyadische homogene Cantorverteilung.

Die sich aus der Wischkonstruktion ergebende Symmetrie der Cantormenge $C((c_k))$ überträgt sich auch auf μ. Die Symmetrieeigenschaften der Verteilung werden im Folgenden formuliert und sind grundlegend für alle weiteren Untersuchungen.

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ..\}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $F \in \mathcal{D}_k$ bezeichnen wir mit F_1 das linke und F_2 das rechte Basisintervall der Stufe $k+1$, welches jeweils in F enthalten ist. Die Mittelpunkte von F, F_1, F_2 bezeichnen wir mit a, a_1, a_2. Wir benutzen diese Notation in kanonischer Weise, z.B. bezeichnet a_{121} den Mittelpunkt des Basisintervalls $F_{121} \subset F$ der Stufe $k+3$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathbb{R} \ni x \overset{\Theta_t}{\to} \Theta_t(x) = x + t$$

die Translation mittels t. Ferner sei

$$\mathbb{R} \ni x \overset{\Phi_t}{\to} \Phi_t(x) = t + (t - x)$$

die Spiegelung bezüglich t.
Für ein beliebiges Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathbb{R}$ und Borel-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $\nu(A) > 0$, sei $\nu(\cdot \mid A) = \frac{\nu(A\cap\cdot)}{\nu(A)}$ die bedingte Verteilung von ν bezüglich A. Für $d \in \mathbb{N}$ und eine beliebige nichtleere und beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\| a - b \| : a, b \in A\}$$

den Durchmesser von A.
Es ergeben sich nun folgende Symmetrieeigenschaften von μ.

3.1 Lemma
Sei $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $G, H \in \mathcal{D}_{k+2}$ *mit* $\min(G) \leq \min(H)$.
Sei $t = \frac{1}{2}(\min(G) + \max(H))$ *und* $s = \min(H) - \min(G)$. *Dann ist*

$$\mu(\cdot \mid H) = \mu(\cdot \mid G) \circ \Phi_t^{-1}$$

und

$$\mu(\cdot \mid H) = \mu(\cdot \mid G) \circ \Theta_s^{-1}.$$

Beweis.
Da $\operatorname{diam}(H) = \operatorname{diam}(G)$, erhalten wir aus der Definition von t und s, dass
$\Phi_t(G) = H$ und $\Theta_s(G) = H$. Aus der Konstruktion von μ folgt die Behauptung. □

3.2 Lageeigenschaften der Elemente optimaler Codebücher

Alle in diesem Abschnitt auftretenden Verteilungen seien Borelsch auf $\mathbb{R}$. Eine Verteilung ν wird symmetrisch bezüglich $t \in \mathbb{R}$ genannt, falls $\nu = \nu \circ \Phi_t^{-1}$.
Wir beginnen mit Resultaten über 1-Codebücher symmetrischer Verteilungen. Anschließend verwenden wir diese Ergebnisse um grundlegende Eigenschaften der n-Codebücher von μ für $n \geq 2$ zu zeigen.

3.2 Proposition
Sei ν *eine bezüglich* $t \in \mathbb{R}$ *symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann gilt für* $r > 1$ *und* $b \in \mathbb{R}\backslash\{t\}$,

$$\int \mid x - b \mid^r d\nu(x) > \int \mid x - t \mid^r d\nu(x).$$

Beweis.
Sei $b \in \mathbb{R}\backslash\{t\}$. Aus dem Beweis von Theorem 2.4 in [13] wissen wir, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni z \to \Psi_r(z) = \int \mid x - z \mid^r d\nu(x)$$

strikt konvex ist. Damit gilt

$$\int \mid x - t \mid^r d\nu(x) = \Psi_r(t) < \frac{\Psi_r(t + (b - t)) + \Psi_r(t - (b - t))}{2}.$$

Aufgrund der Symmetrie von ν bezüglich t erhalten wir
$\Psi_r(t + (b - t)) = \Psi_r(t - (b - t))$. Daraus folgt

$$\frac{\Psi_r(t + (b - t)) + \Psi_r(t - (b - t))}{2} = \Psi_r(b) = \int \mid x - b \mid^r d\nu(x).$$

□

3.3 Bemerkung
Falls ν zusätzlich einen kompakten Träger aufweist, dann gilt für $r = 1$ und alle $b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\int \mid x - b \mid^r d\nu(x) \geq \int \mid x - t \mid^r d\nu(x).$$

Von nun an sei für den Rest des Abschnitts $k \in \mathbb{N}_0$ und $F \in \mathcal{D}_k$.

3.4 Korollar
Sei a der Mittelpunkt von F. Dann ist für $b \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$,

$$\int_F \mid x-b \mid^r d\mu(x) \geq \int_F \mid x-a \mid^r d\mu(x). \tag{12}$$

Falls $r > 1$, dann ist Ungleichung (12) strikt.

Beweis.
Wegen $\mu(F) > 0$ reicht es zu zeigen, dass Ungleichung (12) für $\mu(\cdot \mid F)$ anstatt μ gilt. Man beachte, dass $\mu(\cdot \mid F)$ symmetrisch bezüglich a ist und einen kompakten Träger aufweist. Deshalb folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition 3.2 und Bemerkung 3.3. □

3.5 Bemerkung
Die Aussage von Korollar 3.4 für den Fall $r > 1$ ist bereits in [19], Lemma 3.2 bewiesen worden.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $n \geq 2$ und $\beta \in C_{n,r}(\mu(\cdot \mid F))$. Wegen Satz 2.1 (b) ist card$(\beta) = n$. Wir bezeichnen $\beta = \{b_1, .., b_n\}$ mit $b_1 < .. < b_n$.
Es sei $b_0 = \Phi_{\min(F)}(b_1)$ und $b_{n+1} = \Phi_{\max(F)}(b_n)$. Aufgrund von Satz 2.1 (d) wissen wir, dass $\beta \subset F$. Als nächstes beweisen wir einige wichtige Eigenschaften von β, insbesondere zeigen wir, dass $\beta \subset F_1 \cup F_2$.

3.6 Lemma
Sei $i \in \{1, .., n\}$. Falls $\mu([\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}] \cap F_1) = 0$, dann ist $b_i \in F_2$.
Ist $\mu([\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}] \cap F_2) = 0$, dann ist $b_i \in F_1$.

Beweis.
Wegen $\mu(\mathbb{R}\backslash[0,1]) = 0$, erhalten wir mittels Satz 2.2 (i), dass $[\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}]$ strikt positives $\mu-$Maß besitzt und $\{b_i\} \in C_{1,r}(\mu(\cdot \mid [\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}]))$.
1. Sei $\mu([\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}] \cap F_1) = 0$. Folglich besitzt $\mu(\cdot \mid [\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}])$ nur Masse auf $F_2 \cap [\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}]$. Mit Satz 2.1 (d) folgt $b_i \in F_2$.
2. Analog zu 1. erhalten wir $b_i \in F_1$, falls $\mu([\frac{b_{i-1}+b_i}{2}, \frac{b_i+b_{i+1}}{2}] \cap F_2) = 0$. □

3.7 Lemma
(a) b_1 liegt in F_1 und b_n in F_2.
(b) Falls $n \geq 3$, dann ist

$$1 < j := \min\{i \in \{1, .., n\} : b_i > \max(F_1)\} \leq n \tag{13}$$

und

(i) $b_{j-1} \leq \max(F_1)$,

(ii) $b_{j+1} \geq \min(F_2)$,

(iii) falls $b_j \in F\backslash(F_1 \cup F_2)$, dann ist $j < n$ und
$\frac{b_{j-1}+b_j}{2} < \max(F_1)$ *bzw.* $\frac{b_j+b_{j+1}}{2} > \min(F_2)$.

Beweis.
Aufgrund der Konstruktion von μ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $k = 0$ ist. Damit ergibt sich $F = E_0 = [0, 1]$ und $\mu(\cdot \mid F) = \mu$. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Wir zeigen, dass $V_{2,r}(\mu) \leq 4 \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x)$.
Aufgrund der Symmetrie von μ (Lemma 3.1) erkennt man, dass

$$V_{2,r}(\mu) \leq \Psi_{\{a_1,a_2\},r}(\mu) = 4 \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x).$$

2. Wir zeigen, dass $b_1 < \frac{3}{2}c_1$.
Wir gehen indirekt vor und nehmen das Gegenteil an, d.h. $b_1 \geq \frac{3}{2}c_1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} V_{2,r}(\mu) \geq V_{n,r}(\mu) = \Psi_{\beta,r}(\mu) &\geq \int_{F_1} (b_1 - x)^r d\mu(x) \geq \int_{F_1} (\frac{3}{2}c_1 - x)^r d\mu(x) \\ &= \int_{F_{11}} (\frac{3}{2}c_1 - x)^r d\mu(x) + \int_{F_{12}} (\frac{3}{2}c_1 - x)^r d\mu(x). \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{3}{2}c_1 - x \geq \frac{c_1}{2}$ für jedes $x \in F_{12}$ und $\frac{c_1}{2} - x \leq \frac{c_1}{2}$ für jedes $x \in F_{11}$. Deshalb ist

$$\int_{F_{12}} (\frac{3}{2}c_1 - x)^r d\mu(x) \geq (\frac{c_1}{2})^r \mu(F_{12}) = (\frac{c_1}{2})^r \mu(F_{11}) \geq \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x).$$

Somit erhalten wir

$$V_{2,r}(\mu) \geq \int_{F_{11}} (\frac{3}{2}c_1 - x)^r d\mu(x) + \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x).$$

Aufgrund von $r \geq 1$ folgt für jedes $x \in F_{11}$, dass

$$(\frac{3}{2}c_1 - x)^r = 3^r (\frac{c_1}{2} - \frac{1}{3}x)^r \geq 3(\frac{c_1}{2} - x)^r.$$

Weil die vorherige Ungleichung für jedes $x \in F_{11} \backslash \{0\}$ strikt ist, erhalten wir

$$V_{2,r}(\mu) > 4 \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x),$$

im Widerspruch zu 1.

3. Nun zeigen wir, dass $b_1 \leq c_1$.
Wir gehen wiederum indirekt vor und nehmen das Gegenteil an. Aus Punkt 2. folgt

$$c_1 < b_1 < \frac{3}{2}c_1. \tag{14}$$

Wäre $\frac{b_1+b_2}{2} < 1 - c_1$, dann würde aus Lemma 3.6 folgen, dass $b_1 \leq c_1$. Deshalb gilt

$$1 - c_1 \leq \frac{b_1 + b_2}{2}. \tag{15}$$

Ungleichung (14) und (15) ergeben

$$\begin{aligned} b_2 &\geq 2 - 2c_1 - b_1 > 2 - \frac{7}{2}c_1 \\ &= 1 - \frac{c_1}{2} + 1 - 3c_1 \geq 1 - \frac{c_1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V_{2,r}(\mu) &\geq \Psi_{\beta,r}(\mu) \\ &\geq \int_{F_{11}} (b_1 - x)^r d\mu(x) + \int_{F_{12}} (b_1 - x)^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{21} \cap [0, \frac{b_1+b_2}{2}]} (x - b_1)^r d\mu(x) + \int_{F_{21} \cap]\frac{b_1+b_2}{2}, 1]} (b_2 - x)^r d\mu(x) \end{aligned} \tag{16}$$

Mittels Lemma 3.1 erhalten wir $\mu(\cdot \mid F_{21}) = \mu(\cdot \mid F_{11}) \circ \Theta_{1-c_1}^{-1}$ bzw.
$\mu(\cdot \mid F_{12}) = \mu(\cdot \mid F_{11}) \circ \Theta_{c_1(1-c_2)}^{-1}$. Damit geht Ungleichung (16) über in

$$\begin{aligned} V_{2,r}(\mu) &\geq \int_{F_{11}} (b_1 - x)^r d\mu(x) + \int_{F_{11}} (b_1 - c_1(1-c_2) - x)^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11} \cap [0, \frac{b_1+b_2}{2} - (1-c_1)]} (x - (b_1 - (1-c_1)))^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11} \cap]\frac{b_1+b_2}{2} - (1-c_1), c_1]} (b_2 - (1-c_1) - x)^r d\mu(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Sei $x \in F_{11}$. Wegen $r \geq 1$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((b_1 - c_1(1-c_2) - x)^r + (x - (b_1 - (1-c_1)))^r) \\ \geq\ & (\frac{1}{2}(b_1 - c_1 + c_1c_2 - x + x - b_1 + 1 - c_1))^r \\ >\ & (\frac{1}{2} - c_1)^r \geq (\frac{c_1}{2} - x)^r. \end{aligned} \tag{18}$$

Unter Verwendung von (15), erhalten wir in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((b_1 - c_1(1-c_2) - x)^r + (b_2 - (1-c_1) - x)^r) \\ \geq\ & \left(\frac{1}{2}(b_1 - c_1 + c_1c_2 - x + b_2 - 1 + c_1 - x)\right)^r \\ \geq\ & \left(\frac{b_1+b_2}{2} - \frac{1}{2} - x\right)^r \geq \left(1 - c_1 - \frac{1}{2} - x\right)^r. \end{aligned}$$

Da $c_1 \leq \frac{1}{3}$ folgern wir

$$\begin{aligned} & (1 - c_1 - \frac{1}{2} - x)^r \\ =\ & (\frac{1}{2} - c_1 - x)^r \geq (\frac{3}{2}c_1 - c_1 - x)^r = (\frac{c_1}{2} - x)^r. \end{aligned} \tag{19}$$

Unter Verwendung von (18) und (19), erhalten wir aus der Ungleichung (17)

$$V_{2,r}(\mu) \geq \int_{F_{11}} (b_1 - x)^r d\mu(x) + 2 \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x).$$

Aufgrund von $b_1 > c_1$ und $c_1 - x > c_1 - 2x$ für jedes $x \in F_{11}\backslash\{0\}$ schließen wir

$$\begin{aligned} V_{2,r}(\mu) &\geq \int_{F_{11}} (c_1 - x)^r d\mu(x) + 2\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x) \\ &> 2^r \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x) + 2\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x) \\ &\geq 4\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2} - x)^r d\mu(x), \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu 1. steht.

4. Als nächstes zeigen wir, dass $b_n \geq 1 - c_1$.
Dies folgt aus 3. mittels der Symmetrie von μ (siehe Lemma 3.1).

5. Rest des Beweises.
Aus 3. und 4. erhalten wir $b_1 \in F_1$, $b_n \in F_2$ und $1 < j \leq n$. Falls $n = 2$, dann ist $\beta \cap (F\backslash(F_1 \cup F_2)) = \emptyset$. Sei nun $n \geq 3$. Offensichtlich ist $j < n$. Aus der Definition von j erhält man $b_{j-1} \leq \max(F_1)$. Unter der Annahme dass $b_{j+1} < \min(F_2)$, erhalten wir $b_j \in F_1$ aus Lemma 3.6, was im Widerspruch zu $b_j > \max(F_1)$ steht. Deshalb ist $b_{j+1} \geq \min(F_2)$. Schließlich sei $b_j \in F\backslash(F_1 \cup F_2)$. Wegen $b_n \in F_2$ ist $j < n$.
Wiederum liefert Lemma 3.6, dass $\frac{b_{j-1}+b_j}{2} < \max(F_1)$ und $\frac{b_j+b_{j+1}}{2} > \min(F_2)$. □

Bevor wir mit der Untersuchung der Eigenschaften von β fortfahren können, benötigen wir ein Resultat über die Lage der 1-Codebücher symmetrischer Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

3.8 Lemma
Es sei $r > 1$, $t \in \mathbb{R}$ und ν ein nicht-atomares Wahrscheinlichkeitsmaß welches symmetrisch bezüglich $t \in \mathbb{R}$ ist. Sei $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ mit $a < b = \Phi_t(c) < t < c$. Falls $[a, c]$ positives $\nu-$Maß besitzt, dann ist jedes Element eines $1-$Codebuchs von $\nu(\cdot \mid [a, c])$ kleiner oder gleich t. Gleichheit gilt nur, falls $\nu([a, b]) = 0$.

Beweis.
O.B.d.A. nehmen wir $t = 0$ an. Sei $r > 1$ und $\{t'\} \in C_{1,r}(\nu(\cdot \mid [a, c]))$.

1. Wir zeigen, dass $t' = 0$, genau dann, wenn $\nu([a, b]) = 0$.
Sei $t' = 0$. Wegen $r > 1$, folgt mittels [13], Lemma 2.5, dass

$$0 = -\int_{[a,0[} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x) + \int_{]0,c]} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x).$$

Da $\nu(\{z\}) = 0$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ und ν bezüglich 0 symmetrisch ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[a,b]} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x) + \int_{[\Phi_0(c),0]} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x) - \int_{[0,c]} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x) \\ &= \int_{[a,b]} \mid x \mid^{r-1} d\nu(x) \geq \nu([a, b]) \cdot \mid b \mid^{r-1}, \end{aligned}$$

woraus $\nu([a, b]) = 0$ folgt. Ist andererseits $\nu([a, b]) = 0$, so folgt $\nu([a, c]) = \nu([b, c])$. Proposition 3.2 liefert $t' = 0$.

2. Nun beweisen wir, dass $t' \leq 0$.

Wir gehen indirekt vor und nehmen das Gegenteil an. Aufgrund der Symmetrie von ν und Proposition 3.2 folgt

$$\begin{aligned}\int_{[a,c]} \mid x - t' \mid^r d\nu(x) &= \int_{[a,b]} \mid x - t' \mid^r d\nu(x) + \int_{[b,c]} \mid x - t' \mid^r d\nu(x) \\ &> \int_{[a,b]} \mid x - t' \mid^r d\nu(x) + \int_{[b,c]} \mid x \mid^r d\nu(x).\end{aligned}$$

Da $t' > 0$ und $b < 0$ folgt für jedes $x \in [a, b]$, dass $\mid x - t' \mid > \mid x \mid$. Deshalb gilt

$$\int_{[a,c]} \mid x - t' \mid^r d\nu(x) > \int_{[a,c]} \mid x \mid^r d\nu(x),$$

was im Widerspruch zur Optimalität von t' steht. □

3.9 Bemerkung
Wie im Beweis von Lemma 3.8 kann man im Falle von $b = \Phi_t(c) < a < t < c$ zeigen, dass jedes Element eines 1-Codebuchs von $\nu(\cdot \mid [a, c])$ größer oder gleich t ist, vorausgesetzt $\nu([a, c]) > 0$. Darüberhinaus gilt die Gleichheit genau dann, wenn $\nu([b, a]) = 0$.

Wir fahren nun fort mit einem Resultat über die 3-Codebücher von $\mu(\cdot \mid F)$. Wir bezeichnen mit a den Mittelpunkt von F.

3.10 Lemma
Sei $r > 1$ und $n = 3$. Falls $b_2 \in [a, \max(F) - \pi_{k+1}[$, dann ist

$$\max(F_1) - \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \frac{b_2 + b_3}{2} - \min(F_2).$$

Beweis.
Aufgrund der Konstruktion von μ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $F = [0, 1]$. Deshalb ist $\max(F_1) = c_1$ und $\min(F_2) = 1 - c_1$. Im Folgenden nehmen wir an, dass

$$c_1 - \frac{b_1 + b_2}{2} > \frac{b_2 + b_3}{2} - (1 - c_1) \tag{20}$$

und schließen daraus, dass $b_2 < \frac{1}{2} = a$.
Aus der Ungleichung (20) erhalten wir $\frac{b_1+b_2}{2} < 1 - \frac{b_2+b_3}{2} = \Phi_{\frac{1}{2}}(\frac{b_2+b_3}{2})$. Aufgrund seiner Konstruktion ist μ atomlos. Wegen Lemma 3.7 (b) (iii) gilt $\frac{b_2+b_3}{2} > 1 - c_1 > \frac{1}{2}$, woraus $\Phi_{\frac{1}{2}}(\frac{b_2+b_3}{2}) < \frac{1}{2}$ folgt. Da

$$\mu = \mu(\cdot \mid F) = \frac{1}{4}(\mu(\cdot \mid F_{11}) + \mu(\cdot \mid F_{12}) + \mu(\cdot \mid F_{21}) + \mu(\cdot \mid F_{22})),$$

folgern wir aus Lemma 3.1, dass $\mu \circ \Phi_{\frac{1}{2}}^{-1} = \mu$ d.h. μ ist symmetrisch bezüglich $\frac{1}{2}$. Satz 2.2 (i) sichert $\mu([\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_2+b_3}{2}]) > 0$ und sagt aus, dass $\{b_2\}$ ein 1-Codebuch von $\mu(\cdot \mid [\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_2+b_3}{2}])$ ist. Mittels Lemma 3.8 folgt $b_2 \leq \frac{1}{2}$. Es verbleibt nun zu zeigen, dass die Annahme $b_2 = \frac{1}{2}$ zu einem Widerspruch führt.
Wir nehmen also an, dass $b_2 = \frac{1}{2}$. Wegen $r > 1$ folgt mittels Satz 2.1 (c) und Satz 2.2

(i), dass $\{b_1\}$ das einzige 1-Codebuch von $\mu(\cdot \mid [0, \frac{b_1+b_2}{2}])$ ist, bzw. $\{b_3\}$ das einzige 1-Codebuch von $\mu(\cdot \mid [\frac{b_2+b_3}{2}, 1])$. Unter Anwendung von Lemma 3.8 schließen wir $\mu(\cdot \mid [\frac{b_1+b_2}{2}, \Phi_{\frac{1}{2}}(\frac{b_2+b_3}{2})]) = 0$, woraus $\mu(\cdot \mid [0, \frac{b_1+b_2}{2}]) = \mu(\cdot \mid [0, \Phi_{\frac{1}{2}}(\frac{b_2+b_3}{2})])$ folgt. Unter Benutzung der Symmetrie von μ folgern wir aus Satz 2.4 (c), dass $\Phi_{\frac{1}{2}}(b_1) = b_3$. Somit ist $b_2 - b_1 = b_3 - b_2$, woraus sich $c_1 - \frac{b_1+b_2}{2} = \frac{b_2+b_3}{2} - (1 - c_1)$ ergibt, was im Widerspruch zu Ungleichung (20) steht. □

Bevor wir nun das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren, benötigen wir folgende Ungleichung.

3.11 Lemma
Es seien A, B, C und D nichtnegative reelle Zahlen.
Ist $A + B > C + D$ und $\max(A, B) > \max(C, D)$, dann gilt

$$A^r + B^r > C^r + D^r.$$

Beweis.
Unmittelbare Folgerung aus der Konvexität von $s \mapsto s^r$. □

3.12 Proposition
Im Falle $r > 1$ ist die Menge β ganz in der Menge $F_1 \cup F_2$ enthalten. Ferner ist $\beta \cap F_1 \neq \emptyset$ und $\beta \cap F_2 \neq \emptyset$.

Beweis.
Wir können wiederum o.B.d.A. annehmen, dass $k = 0$ und somit
$F = [0, 1]$. Es sei an die Notation $\beta = \{b_1, .., b_n\}$ mit $b_1 < .. < b_n$ erinnert. Aus Lemma 3.7 (b) folgt $\beta \cap F_1 \neq \emptyset$, $\beta \cap F_2 \neq \emptyset$ und card$(\beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2))) \leq 1$. Es verbleibt also zu zeigen, dass $\beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2)) = \emptyset$.

1. Fall $n = 2$
In diesem Fall folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 3.7 (a).

2. Fall $n = 3$
Wir gehen in diesem Fall indirekt vor und nehmen an, dass $\beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2)) \neq \emptyset$. Wegen Lemma 3.6 ist b_2 das einzige Element von $\beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2))$. Nachdem μ symmetrisch bezüglich $\frac{1}{2}$ ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $b_2 \geq \frac{1}{2}$. Zunächst zeigen wir für jedes $x \in F_{11}$, dass

$$\min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r \geq 2(\frac{c_1}{2} - x)^r \tag{21}$$

Unter Anwendung von Lemma 3.7 (b) (iii) und Lemma 3.10 erhalten wir

$$0 < c_1 - \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \frac{b_2 + b_3}{2} - (1 - c_1). \tag{22}$$

Sei nun $x \in F_{11}$ mit $0 \leq x \leq c_1 - \frac{b_1+b_2}{2}$. Aufgrund von $c_1 - x \geq \frac{b_1+b_2}{2}$ gilt

$$\min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid = b_2 - c_1 + x. \tag{23}$$

Unter Verwendung von (22) folgt $1 - c_1 + x \leq 1 - c_1 + \frac{b_2+b_3}{2} - (1 - c_1) = \frac{b_2+b_3}{2}$, was

$$\min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid = 1 - c_1 + x - b_2 \tag{24}$$

nach sich zieht. Da $r \geq 1$, implizieren die Gleichungen (23) und (24) zusammen mit $x \leq \frac{c_1}{2}$, dass

$$\begin{aligned}
& \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r \\
= \;& (b_2 - c_1 + x)^r + (1 - c_1 + x - b_2)^r \\
\geq \;& 2(\frac{1}{2}(b_2 - c_1 + x + 1 - c_1 + x - b_2))^r \\
= \;& 2(\frac{1}{2}(1 - 2c_1 + 2x))^r \\
\geq \;& 2(\frac{c_1}{2} + x)^r \geq 2(\frac{c_1}{2} - x)^r.
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in F_{11}$ mit $c_1 - \frac{b_1+b_2}{2} \leq x \leq \frac{b_2+b_3}{2} - (1 - c_1)$. Es gilt $c_1 - x \leq \frac{b_1+b_2}{2}$. Lemma 3.7 (b) (iii) sichert $\frac{b_1+b_2}{2} < c_1$, woraus

$$b_1 < 2c_1 - b_2 \leq 2c_1 - \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{2} \tag{25}$$

folgt. Somit gilt

$$b_1 < \frac{c_1}{2} < \frac{2}{3}c_1 \leq c_1(1 - c_2) \leq c_1 - x.$$

Daraus schließen wir, dass

$$\min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid = c_1 - x - b_1. \tag{26}$$

Andererseits ist $1 - c_1 + x \leq \frac{b_2+b_3}{2}$. Deshalb gilt Gleichung (24) auch in diesem Fall. Die Kombination von (24) und (26) liefert

$$\begin{aligned}
& \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r \\
& \quad \geq 2(\frac{1}{2}(1 - b_1 - b_2))^r = 2(\frac{1}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2}))^r.
\end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, dass $x \leq \max(F_{11}) < \frac{c_1}{2}$. Zusammen mit $\frac{b_1+b_2}{2} < c_1$ und $\frac{3}{2}c_1 \leq \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r \\
& \quad > 2(\frac{3}{2}c_1 - c_1))^r = 2(\frac{c_1}{2}))^r \geq 2(\frac{c_1}{2} - x))^r.
\end{aligned} \tag{27}$$

Schließlich sei $x \in F_{11}$ und $\frac{b_2+b_3}{2} - (1 - c_1) < x$. Offensichtlich gilt Gleichung (26) auch in diesem Fall. Aufgrund von $r > 1$, Satz 2.2 (i) und Satz 2.1 (c) wissen wir, dass $\mu([\frac{b_2+b_3}{2}, 1]) > 0$ und $\{b_3\}$ das einzige $1-$Codebuch von $\mu(\cdot \mid [\frac{b_2+b_3}{2}, 1])$ ist. Wegen $\mu(\cdot \mid [1 - c_1, 1]) = \frac{1}{2}(\mu(\cdot \mid F_{21}) + \mu(\cdot \mid F_{22}))$ erhalten wir aus Lemma 3.1, dass $\mu(\cdot \mid [1 - c_1, 1])$ symmetrisch bezüglich $1 - \frac{c_1}{2}$ ist. Man beachte, dass $\mu(\cdot \mid [1 - c_1, 1])$ atomlos ist. Ferner gilt $\mu([1 - c_1, \frac{b_2+b_3}{2}]) > 0$, weil anderenfalls Lemma 3.6 zum

Widerspruch $b_2 \in F_1$ führen würde. Mittels Bemerkung 3.9 folgt $b_3 > 1 - \frac{c_1}{2}$. Deshalb gilt

$$b_3 > 1 - \frac{c_1}{2} > 1 - \frac{2}{3}c_1 \geq 1 - c_1 + c_1c_2 = 1 - c_1 + \max(F_{11}) \geq 1 - c_1 + x. \quad (28)$$

Unter Anwendung von (26) folgt somit

$$\min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid = b_3 - (1 - c_1 + x). \quad (29)$$

Die Kombination von (26) und (29) führt zu

$$\begin{aligned} \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r \\ \geq 2(\frac{1}{2}(c_1 - b_1 - (1 - b_3) + c_1 - 2x))^r. \end{aligned}$$

Ungleichung (25) sichert $c_1 - b_1 > \frac{c_1}{2}$. Aus (28) folgt $1 - b_3 < \frac{c_1}{2}$. Somit gilt für jedes $x \in F_{11}$

$$\min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r > 2(\frac{c_1}{2} - x))^r, \quad (30)$$

womit (21) gezeigt ist. Wegen $\max(F_{11}) = c_1c_2 < \frac{1}{4} \leq \frac{b_1+b_2}{2} < \min(F_2)$ und $\min(F_2) < \frac{b_2+b_3}{2} < \frac{(1-c_1)+1}{2} < 1 - c_1c_2 = \min(F_{22})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V_{3,r}(\mu) = \int_{F_{11}} \mid x - b_1 \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{12}} \min_{i=1,2} \mid x - b_i \mid^r d\mu(x) \\ + \int_{F_{21}} \min_{i=2,3} \mid x - b_i \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x - b_3 \mid^r d\mu(x). \end{aligned}$$

Die Anwendung von Lemma 3.1 ergibt

$$\begin{aligned} V_{3,r}(\mu) &= \int_{F_{11}} \mid x - b_1 \mid^r d\mu(x) + \int_{\Phi^{-1}_{\frac{c_1}{2}}(F_{12})} \min_{i=1,2} \mid \Phi_{\frac{c_1}{2}}(x) - b_i \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{\Phi^{-1}_{\frac{c_1}{2}} \circ \Phi^{-1}_{\frac{1}{2}}(F_{21})} \min_{i=2,3} \mid \Phi_{\frac{1}{2}} \circ \Phi_{\frac{c_1}{2}}(x) - b_i \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x - b_3 \mid^r d\mu(x) \\ &= \int_{F_{11}} \mid x - b_1 \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x - b_3 \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11}} \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{11}} \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r d\mu(x). \end{aligned}$$

Mittels Korollar 3.4 folgt

$$\begin{aligned} V_{3,r}(\mu) &\geq \int_{F_{11}} \mid x - a_{11} \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x - a_{22} \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11}} \min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11}} \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid^r d\mu(x). \end{aligned}$$

Wir wissen, dass Ungleichung (21) auf einer Teilmenge von F_{11} mit positivem μ-Maß strikt ist. Deswegen gilt

$$V_{3,r}(\mu) > \int_{F_{11}} \mid x-a_{11} \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x-a_{22} \mid^r d\mu(x) + 2\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2}-x)^r d\mu(x).$$

Aus Lemma 3.1 erhalten wir $\int_{F_{11}} \mid x-a_{11} \mid^r d\mu(x) = \int_{F_{21}} \mid x-a_{21} \mid^r d\mu(x)$ bzw. $\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2}-x)^r d\mu(x) = \int_{F_{12}} (x-\frac{c_1}{2})^r d\mu(x)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} V_{3,r}(\mu) &> \int_{F_{21}} \mid x-a_{21} \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x-a_{22} \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2}-x)^r d\mu(x) + \int_{F_{12}} (x-\frac{c_1}{2})^r d\mu(x). \end{aligned}$$

Wegen $a_1 = \frac{c_1}{2}$ gilt $\int_{F_{11}} (\frac{c_1}{2}-x)^r d\mu(x) + \int_{F_{12}} (x-\frac{c_1}{2})^r d\mu(x) = \int_{F_1} \mid x-a_1 \mid^r d\mu(x)$. Daraus schließen wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} V_{3,r}(\mu) &> \int_{F_{21}} \mid x-a_{21} \mid^r d\mu(x) + \int_{F_{22}} \mid x-a_{22} \mid^r d\mu(x) \\ &+ \int_{F_1} \mid x-a_1 \mid^r d\mu(x) \\ &= \Psi_{\{a_1,a_{21},a_{22}\}}(\mu) \geq V_{3,r}(\mu). \end{aligned}$$

3. Fall $n \geq 4$

Auch in diesem Fall führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass $\beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2)) \neq \emptyset$. Aus Lemma 3.7 folgt $\{b_j\} = \beta \cap (F \backslash (F_1 \cup F_2))$, wobei j in (13) definiert wurde und $\frac{b_{j-1}+b_j}{2} < c_1$. Sei $\alpha = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}$ die Menge der Mittelpunkte der Mengen F_{11}, F_{12}, F_{21} bzw. F_{22}. Aufgrund der Symmetrie von μ (Lemma 3.1) gilt

$$\begin{aligned} &\int_F \min_{a\in\alpha} \mid x-a \mid^r d\mu(x) \\ = &\int_{F_{11}\cup F_{12}\cup F_{21}\cup F_{22}} \min_{a\in\alpha} \mid x-a \mid^r d\mu(x) \\ = &\ 4\int_{F_{11}} \mid x-a_{11} \mid^r d\mu(x) \\ = &\ 4\int_{F_{1111}\cup F_{1112}\cup F_{1121}\cup F_{1122}} \mid x-a_{11} \mid^r d\mu(x). \end{aligned} \tag{31}$$

Aus $a_{11} = \frac{\pi_2}{2}$ folgt

$$\max_{x\in F_{1111}} \mid x-a_{11} \mid = \frac{\pi_2}{2} = \max_{x\in F_{1122}} \mid x-a_{11} \mid \tag{32}$$

und

$$\max_{x\in F_{1112}} \mid x-a_{11} \mid = \frac{\pi_2}{2} - \pi_3 + \pi_4 = \max_{x\in F_{1121}} \mid x-a_{11} \mid . \tag{33}$$

Die Kombination von (31), (32) und (33) liefert

$$\begin{aligned}
& \int_F \min_{a\in\alpha} \mid x-a \mid^r \, d\mu(x) \\
\leq\ & 4\cdot 2\mu(F_{1111}) \left((\frac{\pi_2}{2})^r + (\frac{\pi_2}{2} - \pi_3 + \pi_4)^r \right) \\
=\ & \frac{c_1^r}{2} \left((\frac{c_2}{2})^r + (\frac{c_2}{2} - c_2c_3 + c_2c_3c_4)^r \right) \\
\leq\ & \frac{c_1^r}{4} \left(c_2^r + (c_2 - 2c_2c_3 + 2c_2c_3c_4)^r \right). \qquad (34)
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in F_{122}$. Falls $\frac{b_{j-1}+b_j}{2} \notin F_{122}$ gilt

$$\min_{b\in\beta} \mid x-b \mid = b_j - x \geq b_j - c_1 \geq \max(0, b_j - c_1 - \pi_3).$$

Ist $\frac{b_{j-1}+b_j}{2} \in F_{122}$ und $b_j - c_1 > \pi_3$, dann ist $b_{j-1} < \min F_{122}$ und

$$\min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq \min(b_j - x, x - b_{j-1}) \geq \min(b_j - c_1, c_1 - \pi_3 - b_{j-1}).$$

Wegen $c_1 \geq \frac{1}{2}(b_{j-1} + b_j)$ ist $c_1 - b_{j-1} \geq b_j - c_1$. Wir erhalten somit

$$\min(b_j - c_1, c_1 - \pi_3 - b_{j-1}) \geq \max(0, b_j - c_1 - \pi_3).$$

Falls $b_j - c_1 \leq \pi_3$, dann ist

$$\min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq 0 = \max(0, b_j - c_1 - \pi_3).$$

Die Kombination dieser Ungleichungen ergibt

$$\min_{x\in F_{122}} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq \max(0, b_j - c_1 - \pi_3). \qquad (35)$$

In gleicher Weise zeigt man

$$\min_{x\in F_{211}} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq \max(0, 1 - c_1 - b_j - \pi_3), \qquad (36)$$

$$\min_{x\in F_{121}} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq \max(0, b_j - c_1 - \pi_2) \qquad (37)$$

und

$$\min_{x\in F_{212}} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \geq \max(0, 1 - c_1 - b_j - \pi_2). \qquad (38)$$

Mit den Ungleichungen (35), (36), (37), und (38) ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_{n,r}(\mu) &= \int_F \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r \, d\mu(x) \\
&> \int_{F_{121}\cup F_{122}\cup F_{211}\cup F_{212}} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r \, d\mu(x) \\
&\geq \frac{1}{8} \left((\max(0, b_j - c_1 - \pi_3))^r + (\max(0, 1 - c_1 - b_j - \pi_3))^r \right) \\
&+ \frac{1}{8} \left((\max(0, b_j - c_1 - \pi_2))^r + (\max(0, 1 - c_1 - b_j - \pi_2))^r \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$ gilt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &> \frac{1}{8}\left(2(\frac{1-2c_1-2\pi_3}{2})^r + 2(\frac{1-2c_1-2\pi_2}{2})^r\right) \\ &\geq \frac{c_1^r}{4}\left((\frac{1}{2}-c_2c_3)^r + (\frac{1}{2}-c_2)^r\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Nun sei $A = \frac{1}{2} - c_2c_3$ und $B = \frac{1}{2} - c_2$, bzw. $C = c_2$ und $D = c_2 - 2c_2c_3 + 2c_2c_3c_4$. Man beachte, dass A, B, C und D nichtnegative reelle Zahlen sind. Ferner ist

$$\begin{aligned} & A + B - (C + D) \\ = \; & (\frac{1}{2} - c_2c_3) + (\frac{1}{2} - c_2) - (c_2 + (c_2 - 2c_2c_3 + 2c_2c_3c_4)) \\ = \; & 1 - c_2(3 + c_3(2c_4 - 1)) > 1 - 3c_2 \geq 0 \end{aligned}$$

und $\max(A, B) = A > C = \max(C, D)$. Die Anwendung von Lemma 3.11 ergibt

$$(\frac{1}{2} - c_2c_3)^r + (\frac{1}{2} - c_2)^r > {c_2}^r + (c_2 - 2c_2c_3 + 2c_2c_3c_4)^r.$$

Zusammen mit (39) und (34) folgt aus der obigen Ungleichung dass

$$\int_F \min_{a\in\alpha} \mid x - a \mid^r \, d\mu(x) < \int_F \min_{b\in\beta} \mid x - b \mid^r \, d\mu(x),$$

was im Widerspruch zur optimalen Codebucheigenschaft von β steht.
Wir erhalten schließlich in allen drei Fällen, dass $\beta \cap (F\backslash(F_1 \cup F_2)) = \emptyset$, womit der Beweis von Proposition 3.12 vollständig erbracht ist. □

3.13 Bemerkung
Mittels expliziter Überprüfung aller auftretenden Fälle sieht man leicht, dass

$$\min_{i=1,2} \mid c_1 - x - b_i \mid + \min_{i=2,3} \mid 1 - c_1 + x - b_i \mid \geq c_1 - 2x$$

für alle $x \in F_{11}$ gilt. Darüberhinaus behalten alle Argumente des Beweises von Proposition 3.12 (insbesondere die Anwendung von Korollar 3.4) im Falle $r = 1$ ihre Gültigkeit. Deshalb gilt Proposition 3.12 auch für $r = 1$.

3.3 Bestimmung aller optimalen Codebücher und des optimalen Quantisierungsfehlers

Mit den bisherigen Ergebnissen sind wir nun in der Lage, für alle $n \in \mathbb{N}$ die n-optimalen Codebücher für μ zu charakterisieren und eine Formel für den optimalen Quantisierungsfehler abzuleiten. Wir benutzen dazu die Beweistechnik der Lemmata 3.3 bis 3.6 und Proposition 3.7 in [19], die wir an den vorliegenden Fall $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$ anpassen. Für eine endliche nichtleere Menge $\alpha \subset \mathbb{R}$ und $a \in \alpha$ sei nochmals an die Voronoizelle

$$W(a \mid \alpha) = \{x \in \mathbb{R} :\mid x - a \mid = \min_{b\in\alpha} \mid x - b \mid\} \tag{40}$$

erinnert. In diesem Abschnitt bezeichnet β eine beliebige endliche nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

3.14 Lemma
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\beta \subset E_{k-1}$. Sei $F \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit $\beta \cap F \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\min_{b\in\beta\cap F} \mid x-b \mid = \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid \tag{41}$$

für alle $x \in F$. Falls zusätzlich $\beta \cap H \neq \emptyset$ für alle $H \in \mathcal{D}_{k-1}$, dann ist $\mu(\cdot \mid \bigcup_{b\in\beta\cap F} W(b \mid \beta)) = \mu(\cdot \mid F)$.

Beweis.
Aus $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$ folgt, dass $\min_{x\in F, y\in H} \mid x-y \mid \geq \text{diam}(F)$ für jedes $F, H \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit $F \neq H$. Somit gilt Gleichung (41).
Nun sei angenommen, dass $\beta \cap H \neq \emptyset$ für jedes $H \in \mathcal{D}_{k-1}$. Aus (40) und (41) erhalten wir, dass F eine Teilmenge von $\bigcup_{b\in\beta\cap F} W(b \mid \beta)$ ist. Weil $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$ und μ atomlos ist, gilt $\mu(H \cap \bigcup_{b\in\beta\cap F} W(b \mid \beta)) = 0$ für jedes $H \in \mathcal{D}_{k-1}\backslash\{F\}$. In Verbindung mit $\mu(E_{k-1}) = 1$ erhält man $\mu(\cdot \mid \bigcup_{b\in\beta\cap F} W(b \mid \beta)) = \mu(\cdot \mid F)$. □

3.15 Lemma
Für $k, n \in \mathbb{N}$ bestehe $\beta \subset E_{k-1}$ aus genau n Punkten. Dann gelten folgende Implikationen.

(i) Gibt es $G, H \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit $\text{card}(\beta \cap G) = 0$ und $\text{card}(\beta \cap H) > 2$, dann ist β kein $n-$Codebuch.

(ii) Ist $\beta \cap F \neq \emptyset$ für jedes $F \in \mathcal{D}_{k-1}$ und gibt es $G, H \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit $\text{card}(\beta \cap G) = 1$ und $\text{card}(\beta \cap H) > 2$, dann ist β kein $n-$Codebuch.

Beweis.
zu (i). Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $k > 1$ und seien $G, H \in \mathcal{D}_{k-1}$ wie in (i). Wir setzen $b_1 = \min(\beta \cap H)$, $b_3 = \max(\beta \cap H)$ und wählen $b_2 \in \beta \cap H$ mit $b_1 < b_2 < b_3$. Für den Mittelpunkt a von G setzen wir

$$\gamma = (\beta\backslash\{b_2\}) \cup \{a\}.$$

Wie im Beweis von [19], Lemma 3.4 erhalten wir

$$\int_{E_{k-1}\backslash(G\cup H)} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) \geq \int_{E_{k-1}\backslash(G\cup H)} \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \tag{42}$$

Wegen $\beta \cap G = \emptyset$, $\beta \subset E_{k-1}$ und $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$ gilt

$$\int_G \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) \geq \mu(G)(\text{diam}(G))^r = \mu(H)(\text{diam}(H))^r. \tag{43}$$

Aus der Definition von γ folgt

$$\int_G \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \leq \int_G \mid x-a \mid^r d\mu(x) < (\frac{1}{2}\text{diam}(G))^r \mu(G). \tag{44}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \int_H \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) - \int_H \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) \\ \leq & \int_{[b_1,b_3]} (\min(\mid x-b_1 \mid, \mid x-b_3 \mid))^r d\mu(x) \\ \leq & \mu(H)(\frac{1}{2}\text{diam}(H))^r. \end{aligned} \tag{45}$$

Aus den drei Ungleichungen (43), (44) und (45) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_G \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) \geq \mu(H)(\text{diam}(H))^r \\
\geq\ & \mu(G)(\frac{1}{2}\text{diam}(G))^r + \mu(H)(\frac{1}{2}\text{diam}(H))^r \\
>\ & \int_G \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) + \int_H \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \\
-\ & \int_H \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x). \qquad (46)
\end{aligned}$$

Aufgrund von (42) und (46) erkennt man, dass β kein $n-$Codebuch sein kann.

zu (ii). Wiederum ist für $k=1$ nichts zu zeigen. Wir gehen deshalb von $k>1$ aus und setzen $G, H \in \mathcal{D}_{k-1}$ wie in (ii) voraus. Wir setzen $\{b_0\} = G \cap \beta$. Sei $b_1, b_2, b_3 \in \beta \cap H$ mit $b_1 < b_2 < b_3$. Wir notieren a_1 und a_2 als die Mittelpunkte von G_1 und G_2. Ferner bezeichnen a_1' und a_2' die Mittelpunkte von H_1 und H_2. Wir definieren

$$\gamma = (\beta \backslash \{b_0, b_1, b_2, b_3\}) \cup \{a_1, a_2, a_1', a_2'\}.$$

Wie im Beweis von [19], Lemma 3.5 erhalten wir

$$\int_{E_{k-1}\backslash(G\cup H)} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) = \int_{E_{k-1}\backslash(G\cup H)} \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x). \qquad (47)$$

Aus Lemma 3.14 folgt

$$\int_G \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) = \int_G \mid x-b_0 \mid^r d\mu(x). \qquad (48)$$

Die Anwendung von Korollar 3.4 ergibt

$$\int_G \mid x-b_0 \mid^r d\mu(x) \geq \int_G \mid x-a \mid^r d\mu(x), \qquad (49)$$

wobei a den Mittelpunkt von G bezeichnet. Offensichtlich ist

$$\int_G \mid x-a \mid^r d\mu(x) \geq \frac{1}{2}\mu(G)(\text{diam}(G))^r((\frac{1}{2}-c_k)^r + (\frac{1}{2}-c_kc_{k+1})^r). \qquad (50)$$

Aus (48), (49) und (50) schließen wir

$$\int_G \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) \geq \frac{1}{2}\mu(G)(\text{diam}(G))^r((\frac{1}{2}-c_k)^r + (\frac{1}{2}-c_kc_{k+1})^r). \qquad (51)$$

Da $a_1, a_2 \in \gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_G \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \leq \int_{G_1} \mid x-a_1 \mid^r d\mu(x) + \int_{G_2} \mid x-a_2 \mid^r d\mu(x) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\mu(G)(\text{diam}(G))^r((\frac{c_k}{2} - c_kc_{k+1} + c_kc_{k+1}c_{k+2})^r + (\frac{c_k}{2})^r). \qquad (52)
\end{aligned}$$

In derselben Weise folgt

$$\begin{aligned}
&\int_H \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\mu(H)(\text{diam}(H))^r((\frac{c_k}{2} - c_kc_{k+1} + c_kc_{k+1}c_{k+2})^r + (\frac{c_k}{2})^r). \qquad (53)
\end{aligned}$$

Mittels (51), (52) und (53) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_{G\cup H} \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) - \int_{G\cup H} \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x) \\
\geq\ & \frac{1}{2}\mu(G)(\text{diam}(G))^r((\frac{1}{2}-c_k)^r + (\frac{1}{2}-c_kc_{k+1})^r \\
-\ & 2(\frac{c_k}{2} - c_kc_{k+1} + c_kc_{k+1}c_{k+2})^r - 2(\frac{c_k}{2})^r) \\
\geq\ & \frac{1}{2}\mu(G)(\text{diam}(G))^r((\frac{1}{2}-c_k)^r + (\frac{1}{2}-c_kc_{k+1})^r \\
-\ & (c_k - 2c_kc_{k+1} + 2c_kc_{k+1}c_{k+2})^r - c_k^r). \qquad (54)
\end{aligned}$$

Nun sei $A = \frac{1}{2} - c_k$ und $B = \frac{1}{2} - c_kc_{k+1}$ bzw. $C = c_k$ und $D = c_k - 2c_kc_{k+1} + 2c_kc_{k+1}c_{k+2}$. Offensichtlich sind A, B, C und D nichtnegative reelle Zahlen und es gilt

$$A > B > C > D.$$

Darüberhinaus ist

$$\begin{aligned}
& A + B - (C + D) \\
=\ & \frac{1}{2} - c_k + \frac{1}{2} - c_kc_{k+1} - (c_k - 2c_kc_{k+1} + 2c_kc_{k+1}c_{k+2}) - c_k \\
=\ & 1 - 3c_k + c_kc_{k+1}(1 - 2c_{k+2}) > 1 - 3c_k \geq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $r \geq 1$ folgt aus Lemma 3.11, dass

$$(\frac{1}{2} - c_k)^r + (\frac{1}{2} - c_kc_{k+1})^r - (c_k - 2c_kc_{k+1} + 2c_kc_{k+1}c_{k+2})^r - c_k^r > 0. \qquad (55)$$

Aus den Ungleichungen (55) und (54) erhalten wir zusammen mit (47)

$$\int \min_{b\in\beta} \mid x-b \mid^r d\mu(x) > \int \min_{c\in\gamma} \mid x-c \mid^r d\mu(x).$$

Somit ist β kein $n-$optimales Codebuch. □

3.16 Lemma
Sei $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ und $2^k \leq n$. Sei β ein $n-$optimales Codebuch. Dann ist $\beta \subset E_k$ und $F \cap \beta \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{D}_k$.

Beweis.
1. Sei $k = 0$. Mittels Satz 2.1 (d) wissen wir, dass $\beta \subset E_0$. Weil $\mathcal{D}_0 = \{E_0\}$ gilt $F \cap \beta \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{D}_0$.
2. Sei $k = 1$. Proposition 3.12 sichert $\beta \subset E_1$ und $(\beta \cap F) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{D}_1$.
3. Sei $k \geq 2$. Wir nehmen an, dass es ein $j < k$ gibt, mit $\beta \subset E_j$.
Wir zeigen, dass $\beta \subset E_{j+1}$ und $\text{card}(\beta \cap F) \geq 1$ für alle $F \in \mathcal{D}_{j+1}$. Nehmen wir an, es gibt ein $G \in \mathcal{D}_j$ mit $G \cap \beta = \emptyset$. Dann existiert ein $H \in \mathcal{D}_j$ mit $\text{card}(H \cap \beta) > 2$, weil sonst der Widerspruch

$$n = \sum_{F\in\mathcal{D}_j} \text{card}(\beta \cap F) \leq 2(2^j - 1) < 2^{j+1} \leq n \qquad (56)$$

folgen würde. Aufgrund von Lemma 3.15 (i) ergibt sich nun die widersprüchliche Aussage, dass β kein n-Codebuch sein kann. Deshalb ist $\text{card}(\beta \cap F) \geq 1$ für alle $F \in \mathcal{D}_j$. Nun nehmen wir an, dass es ein $G \in \mathcal{D}_j$ gibt, welches nur einen Punkt enthält. Analog zu (56) existiert dann ein $H \in \mathcal{D}_j$ mit $\text{card}(H \cap \beta) \geq 3$. Aufgrund von Lemma 3.15 (ii) widerspricht dies aber der optimalen Codebucheigenschaft von β. Somit ist $\text{card}(\beta \cap F) \geq 2$ für alle $F \in \mathcal{D}_j$. Wegen Satz 2.2 (i) ist für jedes $F \in \mathcal{D}_j$ die Menge $\beta \cap F$ ein $\text{card}(\beta \cap F)-$Codebuch für $\mu(\cdot \mid \bigcup_{b \in \beta \cap F} W(b \mid \beta))$. Mittels Lemma 3.14 gilt dann $\mu(\cdot \mid \bigcup_{b \in \beta \cap F} W(b \mid \beta)) = \mu(\cdot \mid F)$. Aufgrund von Proposition 3.12 und Bemerkung 3.13 ist $\beta \subset E_{j+1}$ und für alle $F \in \mathcal{D}_{j+1}$ gilt $\text{card}(\beta \cap F) \geq 1$.
4. Durch die Wiederholung von 3. bis zu $j = k - 1$ ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Die Verteilung μ is definiert durch die Folge $(c_l)_{l=1}^{\infty}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei nun $\mu^{(k)}$ diejenige dyadische homogene Cantorverteilung, die durch die Folge $(c_{l+k-1})_{l=1}^{\infty}$ definiert wird. Es ist $\mu^{(1)} = \mu$. Es sei an die Notation $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} c_i$ erinnert. Nun können wir das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

3.17 Theorem
Sei $r > 1$ und $n \geq 2$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2^k + j$ und $0 \leq j < 2^k$. Sei β ein $n-$optimales Codebuch. Dann besteht β aus den Mittelpunkten von $2^k - j$ Basisintervallen der Stufe k und den Mittelpunkten von $2j$ Basisintervallen der Stufe $(k+1)$, die in den anderen j Basisintervallen der Stufe k enthalten sind. Ferner ist

$$V_{n,r}(\mu) = \frac{\pi_k^r}{2^k}((2^k - j)V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) + j \cdot c_{k+1}^r V_{1,r}(\mu^{(k+2)})). \tag{57}$$

Beweis.
Lemma 3.16 lehrt $\beta \subset E_k$ und $\text{card}(F \cap \beta) \geq 1$ für alle $F \in \mathcal{D}_k$. Wir nehmen an, dass ein $G \in \mathcal{D}_k$ existiert, mit $\text{card}(\beta \cap G) > 2$. Wegen $n < 2^{k+1}$ gibt es ein $H \in \mathcal{D}_k$, mit $\text{card}(H \cap \beta) = 1$. Mittels Lemma 3.15 (ii) ergibt sich ein Widerspruch zur Codebucheigenschaft von β. Somit gilt für alle $F \in \mathcal{D}_k$, dass $1 \leq \text{card}(\beta \cap F) \leq 2$. Sei nun $F \in \mathcal{D}_k$ beliebig gewählt. Satz 2.2 (i) in Verbindung mit Lemma 3.14 zeigt, dass $\beta \cap F$ ein $\text{card}(\beta \cap F)-$Codebuch für $\mu(\cdot \mid F)$ ist. Falls $\text{card}(\beta \cap F) = 1$, liefert Korollar 3.4, dass $\beta \cap F$ aus dem Mittelpunkt von F besteht. Falls $\text{card}(\beta \cap F) = 2$, folgt aus Lemma 3.7, dass $\text{card}(\beta \cap F_1) = 1$ und $\text{card}(\beta \cap F_2) = 1$. Wie im Beweis von Lemma 3.14 erhalten wir in diesem Fall $\mu(\cdot \mid F_i) = \mu(\cdot \mid \bigcup_{b \in \beta \cap F_i} W(b \mid \beta))$ für $i \in \{1, 2\}$. Wiederum aus Satz 2.2 (i) folgt für $i \in \{1, 2\}$, dass die Menge $\beta \cap F_i$ ein $\text{card}(\beta \cap F_i)-$Codebuch von $\mu(\cdot \mid F_i)$ ist. Mittels Korollar 3.4 besteht $\beta \cap F_1$ aus dem Mittelpunkt von F_1 und $\beta \cap F_2$ aus dem Mittelpunkt von F_2. Somit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Unter Benutzung des bisher Bewiesenen gilt nun

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \sum_{F \in \mathcal{D}_k;\, \text{card}(\beta \cap F) = 1} \mu(F) V_{1,r}(\mu(\cdot \mid F)) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{D}_k;\, \text{card}(\beta \cap F) = 2} \mu(F) V_{2,r}(\mu(\cdot \mid F)). \end{aligned} \tag{58}$$

Für $l \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R} \ni x \xrightarrow{H_l} x \cdot \pi_l \in \mathbb{R}. \tag{59}$$

Die Konstruktion von μ ergibt $\mu(\cdot \mid H_k([0,1])) = \mu^{(k+1)} \circ H_k^{-1}$. Aus Lemma 3.1 folgt

$$\mu(\cdot \mid F) = \mu(\cdot \mid H_k([0,1])) \circ \Theta_{\min(F)}^{-1}$$

für alle $F \in \mathcal{D}_k$. Die Anwendung von Satz 2.4 ergibt

$$V_{1,r}(\mu(\cdot \mid F)) = V_{1,r}(\mu^{(k+1)} \circ H_k^{-1}) = \pi_k^r V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) \tag{60}$$

für alle $F \in \mathcal{D}_k$. Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned} V_{2,r}(\mu(\cdot \mid F)) &= \frac{1}{2} V_{1,r}(\mu(\cdot \mid F_1)) + \frac{1}{2} V_{1,r}(\mu(\cdot \mid F_2)) \\ &= V_{1,r}(\mu(\cdot \mid F_1)) = V_{1,r}(\mu^{(k+2)} \circ H_{k+1}^{-1}) \\ &= \pi_{k+1}^r V_{1,r}(\mu^{(k+2)}) \end{aligned} \tag{61}$$

für alle $F \in \mathcal{D}_k$. Mittels (60) und (61) erhalten wir aus Gleichung (58), dass

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \frac{1}{2^k}((2^k - j)\pi_k^r V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) + j\pi_{k+1}^r V_{1,r}(\mu^{(k+2)})) \\ &= \frac{\pi_k^r}{2^k}((2^k - j) V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) + j \cdot c_{k+1}^r V_{1,r}(\mu^{(k+2)})), \end{aligned}$$

womit Theorem 3.17 vollständig bewiesen ist. □

3.18 Bemerkung
Für $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{4}$ wurde die Charakterisierung der optimalen Codebücher in Theorem 3.17 bereits durch Kesseböhmer und Zhu ([19], Proposition 3.6) bewiesen.

3.19 Bemerkung
Im Falle $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{4}$ und $r > 1$ haben Kesseböhmer und Zhu ([19], Remark 3.8 (1)) bereits erwähnt, dass $C_{n,r}(\mu) \subset C_{n,1}(\mu)$ und $C_{n,1}(\mu) \backslash C_{n,r}(\mu) \neq \emptyset$. Mittels einer Analyse des Beweises von Theorem 3.17 ist leicht zu sehen, dass diese Tatsache auch unter der schwächeren Voraussetzung $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{3}$ gilt.

3.20 Korollar
Sei $k, n \in \mathbb{N}$ mit $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Dann ist

$$2^{-k}(2^{k+1} - n + (n - 2^k)c_{k+1}^r)(\frac{1}{6})^r \pi_k^r < V_{n,r}(\mu) < (\frac{1}{2})^r \pi_k^r. \tag{62}$$

Beweis.
Da $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$, gilt für alle $l \in \mathbb{N}$, dass $(\frac{1}{6})^r < V_{1,r}(\mu^{(l)}) < (\frac{1}{2})^r$. Ungleichung (62) ist damit eine direkte Folgerung aus Gleichung (57). □

3.21 Bemerkung
Kesseböhmer und Zhu haben bereits früher (siehe Beweis von Theorem 1.6 (3) in [19]) für $n \in [2^k, 2^{k+1}[$ die Abschätzung

$$V_{n,r}(\mu) \geq 4^{-(1+r)} \pi_{k+1}^r$$

für den n-optimalen Quantisierungsfehler hergeleitet.

3.4 Berechnung der Quantisierungsdimension und Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten

In diesem Abschnitt leiten wir eine Charakterisierung für die Existenz der Quantisierungsdimension her. Im Falle der Existenz beweisen wir unter bestimmten Voraussetzungen, dass der Quantisierungskoeffizient nicht existiert.
Es sei noch einmal an die Definition der unteren (9) und oberen (10) Quantisierungsdimension erinnert, bzw. daran, dass wir bei Übereinstimmung der beiden Größen von der Quantisierungsdimension D_r sprechen.
Aus Theorem 12.18 in [13] folgt, dass die Quantisierungsdimension immer existiert für sogenannte reguläre Wahrscheinlichkeitsmaße der Dimension D, mit $D = D_r$. Die klassische Cantorverteilung, d.h. die zur Folge $c_k = \frac{1}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gehörige dyadische homogene Cantorverteilung, ist regulär mit der Dimension $D_r = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ (cf. [13], Example 12.10). Im allgemeinen jedoch, muss die Quantisierungsdimension für dyadische homogene Cantorverteilungen nicht existieren. Lindsay (cf. [22], Example 5.5) wies als erster auf diesen Sachverhalt hin. Unter der Voraussetzung $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{4}$ haben Kesseböhmer und Zhu (cf. [19], Theorem 1.6 (3)) eine Charakterisierung für die Existenz der Quantisierungsdimension bewiesen. Zusätzlich haben sie gezeigt, dass für $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{2}$ die Gleichung

$$\overline{D}_r(\mu) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)} \tag{63}$$

für die obere Quantisierungsdimension gilt (cf. [19], Theorem 1.6 (1)), bzw.

$$\underline{D}_r(\mu) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)} \tag{64}$$

für die untere Quantisierungsdimension (cf. [19], Proposition 3.1).
In der nachfolgenden Proposition verschärfen Ungleichung (64) zu einer Gleichung unter der Bedingung $\sup_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{1}{3}$.

3.22 Proposition

$$\underline{D}_r(\mu) = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)} = \overline{D}_r(\mu).$$

Beweis.
Wegen (63) und (64) reicht es zu zeigen, dass

$$\underline{D}_r(\mu) \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)}. \tag{65}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $k(n) \in \mathbb{N}_0$, $j(n) \in [0, 2^{k(n)}[$ mit $n = 2^{k(n)} + j(n)$. Nach Satz 2.4 (a) ist $(V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\underline{D}_r(\mu) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(2^{k(n)} + j(n))}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^{k(n)}+j(n),r}(\mu))} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2^k)}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^{k+1},r}(\mu))} \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\log(2^{k+1})}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^{k+1},r}(\mu))} + \frac{\log(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^{k+1},r}(\mu))} \right).
\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 2.4 (b) ist $\lim_{n\to\infty} V_{n,r}(\mu) = 0$. Daraus folgt

$$\underline{D}_r(\mu) \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2^k)}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^k,r}(\mu))}. \tag{66}$$

Unter Verwendung von Korollar 3.20 sieht man leicht, dass

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2^k)}{-\frac{1}{r}\log(V_{2^k,r}(\mu))} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)}. \tag{67}$$

Die Kombination von (66) und (67) beweist Ungleichung (65). □

3.23 Bemerkung
Unmittelbar aus Proposition 3.22 folgt die Existenz der Quantisierungsdimension $D_r(\mu)$ genau dann, wenn die Folge $(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist

$$D_r(\mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(2)}{-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i)}.$$

Wenn die Quantisierungsdimension existiert, kann nach der Existenz des Quantisierungskoeffizienten (siehe (11)) gefragt werden. Wir zeigen im Folgenden unter geeigneten Bedingungen, dass der Quantisierungskoeffizient bei existenter Quantisierungsdimension nicht existiert.

3.24 Proposition
Es sei $(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i))_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent in* $\mathbb{R}$. *Dann existiert* D_r *und*

(i) $\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) < \infty$ *genau dann, wenn* $\limsup_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k < \infty$,
(ii) $\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) > 0$ *genau dann, wenn* $\liminf_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k > 0$,
(iii) falls $0 < \liminf_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k$ *und* $\limsup_{k\to\infty} 2^{\frac{k}{D_r}}\pi_k < \infty$, *dann gilt*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) < \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) < \infty. \tag{68}$$

Beweis.
Mittels Bemerkung 3.23 existiert die Quantisierungsdimension D_r. Die Behauptungen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus Korollar 3.20.
Um Behauptung (iii) zu zeigen, sei $k \geq 2$ und $n_k = 2^k$ bzw. $m_k = (\frac{5}{4})2^k$. Die Anwendung von (57) ergibt

$$n_k^{\frac{r}{D_r}} V_{n_k,r}(\mu) = (2^k)^{\frac{r}{D_r}} \pi_k^r V_{1,r}(\mu^{(k+1)}) \tag{69}$$

bzw.

$$\begin{aligned} m_k^{\frac{r}{D_r}} V_{m_k,r}(\mu) &\geq ((\frac{5}{4})2^k)^{\frac{r}{D_r}} \frac{1}{2^k}((2^{k+1} - (\frac{5}{4})2^k)\pi_k^r V_{1,r}(\mu^{(k+1)})) \\ &= \frac{3}{4}(\frac{5}{4})^{\frac{r}{D_r}}(2^k)^{\frac{r}{D_r}}\pi_k^r V_{1,r}(\mu^{(k+1)}). \end{aligned} \tag{70}$$

Man beachte, dass

$$\frac{r}{D_r} = \frac{r \lim_{k\to\infty}(-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log(c_i))}{\log(2)} \geq \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

Dieser Sachverhalt ergibt zusammen mit (69) und (70), dass

$$\frac{m_k^{\frac{r}{D_r}} V_{m_k,r}(\mu)}{n_k^{\frac{r}{D_r}} V_{n_k,r}(\mu)} \geq \frac{3}{4}(\frac{5}{4})^{\frac{r}{D_r}} \geq \frac{3}{4}(\frac{5}{4})^{\frac{\log(3)}{\log(2)}} > 1. \tag{71}$$

Aufgrund der Voraussetzungen in (iii) liefert (71) zusammen mit (i) und (ii) die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &< \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) \leq \liminf_{k\to\infty} n_k^{\frac{r}{D_r}} V_{n_k,r}(\mu) \\ &< \limsup_{k\to\infty} m_k^{\frac{r}{D_r}} V_{m_k,r}(\mu) \leq \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) < \infty, \end{aligned}$$

womit (iii) bewiesen ist. □

3.25 Bemerkung
Offensichtlich gilt (68), falls $c_i = c \in]0, \frac{1}{3}]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es verbleibt die offene Frage, ob $\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu) < \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu)$ immer noch gilt, wenn wir eine oder alle der Voraussetzungen in Proposition 3.24 (iii) weglassen.

3.5 Optimale Quantisierung im selbstähnlichen Fall

Falls $c_k = c \in]0, \frac{1}{2}]$ für alle $k \in \mathbb{N}$, nennen wir die dyadische homogene Cantorverteilung μ selbstähnlich mit Kontraktionsparameter c. Die klassische Cantorverteilung ist somit selbstähnlich mit Kontraktionsparameter $\frac{1}{3}$. Graf und Luschgy haben für selbstähnliche Verteilungen gezeigt, dass die Quantisierungsdimension $D_r(\mu)$ immer existiert und $D_r(\mu) = D(c) = \frac{\log(2)}{-\log(c)}$ für alle $r > 0$ (cf. [15], Remark 5.13(a)).
Unter Verwendung der Ergebnisse von Abschnitt 3.3 leiten wir unter der Voraussetzung $c \in]0, \frac{1}{3}]$ eine explizite Formel für den Quantisierungsfehler her. Ferner charakterisieren wir die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$.

3.26 Bemerkung
Falls μ selbstähnlich mit Kontraktionsparameter $c \in]0, \frac{1}{3}]$ ist, dann ist $\mu^{(k)} = \mu$ für alle k und es gilt

$$V_{n,r}(\mu) = (\frac{c^r}{2})^k V_{1,r}(\mu)(c^r(n - 2^k) + 2^{k+1} - n) \tag{72}$$

als unmittelbare Konsequenz von Theorem 3.17. Mit der Abbildung $f_c : [1, 2] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_c(x) = V_{1,r}(\mu) x^{\frac{r}{D}} ((2 - c^r) - x(1 - c^r)) \tag{73}$$

erhält man wie im Beweis von [12], Theorem 6.3, dass $f_c([1, 2])$ der Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ entspricht. Man sieht leicht, dass

$$f_c(1) = V_{1,r}(\mu) = f_c(2)$$

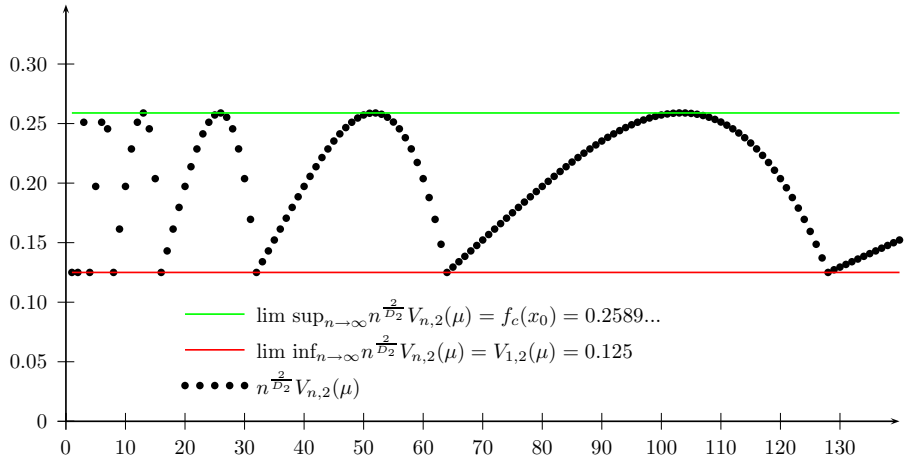

Abbildung 3: Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten für die klassische Cantorverteilung, $c = \frac{1}{3}, r = 2$

und f_c' genau einen kritischen Punkt

$$x_0 := x_0(c) := \frac{2 - c^r}{(1 - c^r)(1 + \frac{D}{r})} \in]1, 2[\tag{74}$$

besitzt. Darüberhinaus ist $f_c'(1) > 0$ und $f_c'(2) < 0$. Somit nimmt f_c sein Maximum in x_0 an und es gilt $f_c([1, 2]) = [f_c(1), f_c(x_0)] = [V_{1,r}(\mu), f_c(x_0)]$. Der Quantisierungskoeffizient $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu)$ existiert somit nicht.

3.27 Bemerkung
Bemerkung 3.26 liefert als Spezialfall den optimalen Quantisierungsfehler für die klassische Cantorverteilung ($c_k = \frac{1}{3}$ für alle k). Für diese Verteilung und $r = 2$ wurden die in Bemerkung 3.26 aufgelisteten Resultate bereits früher durch Graf und Luschgy bewiesen ([12], Theorem 5.2. und Theorem 6.3). Theorem 5.2. in [12] charakterisiert zusätzlich die n-optimalen Codebücher für $r = 2$ und ist in diesem Zusammenhang ein Spezialfall von Theorem 3.17.

In Abbildung 3 veranschaulicht die grafische Darstellung der Folge $(n^{\frac{2}{D}} V_{n,2}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ für die klassische Cantorverteilung noch einmal die Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten.

4 Spezielle Eigenschaften der optimalen Quantisierung uniform separierter Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ausgehend von der klassischen Cantorverteilung kann man dieses Wahrscheinlichkeitsmaß in zwei Richtungen verallgemeinern. Einerseits stellen dyadische homogene Cantorverteilungen eine Verallgemeinerung dar, deren optimale Quantisierung wir im vorigen Kapitel untersucht haben. Die klassische Cantorverteilung kann jedoch auch als die Gleichverteilung eines speziellen uniformen iterierten Funktionensystems definiert werden, wie wir in Kapitel 6 zeigen werden (siehe Beispiel 6.26).

Für das Studium der optimalen Quantisierung dieser zweiten Klasse von Maßen, benötigen wir etliche Hilfsresultate, die wir in diesem Kapitel in allgemeiner Form als Aussagen über Maße, die bezüglich ihrer Massenverteilung uniform separiert sind, bereitstellen. Durch diese allgemeine Formulierung sind diese Hilfsresultate auch von eigenständigem Interesse.

Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $l > 0$ sei

$$B(x,l) := \{z \in \mathbb{R}^d : \| x - z \| \leq l\}$$

die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius l. Es sei ν ein beliebiges Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$. Sei $\omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $1 < \text{card}(\omega) < \infty$ und $l > 0$. Um die nachfolgenden Aussagen und Formeln übersichtlich zu halten, bezeichnen wir card(ω) mit N. Für zwei beliebige nichtleere Mengen $B, C \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$d(B,C) := \inf\{\| x - y \|: x \in B, y \in C\}$$

der Abstand zwischen diesen beiden Mengen . Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir statt $d(\{x\}, B)$ einfach $d(x, B)$.

4.1 Definition
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ν heißt **uniform $(l, \omega)-$ separiert** bzw. kurz $(l,\omega)-$separiert, falls die Kugeln $(B(x,l))_{x\in\omega}$ paarweise disjunkt sind und $\nu(B(x,l)) = \frac{1}{N}$ für alle $x \in \omega$.

4.1 Separationseigenschaften der optimalen Codebücher

In diesem Abschnitt sei ν ein $(l,\omega)-$separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß, $n \geq N-1$ und $\alpha \in C_{n,r}(\nu)$. Es sei $r \in [1, \infty[$. Für ein $x \in \omega$ sei

$$\underline{\alpha}(x) = \alpha \cap B(x,l)$$

und

$$\overline{\alpha}(x) = \{a \in \alpha : W(a \mid \alpha) \cap B(x,l) \neq \emptyset\}.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\alpha}(x) \subseteq \overline{\alpha}(x)$. Wir definieren mit

$$d_{\min}(\omega) := \min\{\| x - y \|: x, y \in \omega; x \neq y\}$$

den Minimalabstand in ω.

Die Berechnung des $n-$ und insbesondere $N-$optimalen Quantisierungsfehlers von ν vereinfacht sich deutlich, falls $\{\overline{\alpha}(x) : x \in \omega\}$ eine Zerlegung von α bildet, d.h. falls

$$\overline{\alpha}(x) \cap \overline{\alpha}(y) = \emptyset \tag{75}$$

für alle $x, y \in \omega$ mit $x \neq y$. Die nachfolgende Proposition gibt eine hinreichende Bedingung für diese Separationseigenschaft und Formeln für den optimalen Quantisierungsfehler an.

4.2 Proposition

(a) Es sei $\overline{\alpha}(x) \cap \overline{\alpha}(y) = \emptyset$ für alle $x, y \in \omega$ mit $x \neq y$. Dann ist $\overline{\alpha}(x) = \underline{\alpha}(x)$ für jedes $x \in \omega$. Der $n-$optimale Quantisierungsfehler lässt sich schreiben als

$$V_{n,r}(\nu) = \sum_{x \in \omega} \sum_{a \in \underline{\alpha}(x)} \nu(W(a \mid \alpha) \cap B(x,l)) V_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha) \cap B(x,l))).$$

Speziell gilt

$$V_{N,r}(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))). \tag{76}$$

(b) Wenn $n \geq N$ und $d_{\min}(\omega) > 10l$, dann ist $\overline{\alpha}(x) \cap \overline{\alpha}(y) = \emptyset$ für alle $x, y \in \omega$ mit $x \neq y$. Ist darüberhinaus $r > 1$, dann gilt zusätzlich zu Aussage (a), dass

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right) V_{N,r}(\nu) < V_{N-1,r}(\nu). \tag{77}$$

Beweis.
(a) Sei $x \in \omega$. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\alpha}(x) \subset \underline{\alpha}(x)$. Sei dazu $a \in \overline{\alpha}(x)$. Nach Definition ist

$$W(a \mid \alpha) \cap B(x,l) \neq \emptyset.$$

Aus der Voraussetzung folgt

$$W(a \mid \alpha) \cap \bigcup_{z \in \omega \setminus \{x\}} B(z,l) = \emptyset.$$

Wegen $\nu(\bigcup_{z \in \omega} B(z,l)) = 1$ gilt somit

$$\nu(W(a \mid \alpha)) = \nu(W(a \mid \alpha) \cap B(x,l)),$$

woraus

$$\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha)))} \subset B(x,l) \tag{78}$$

folgt. Nach Satz 2.2 (i) ist $\{a\} \in C_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha)))$. Die Anwendung von Satz 2.1 (d) ergibt $a \in \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha)))}$. Aus der Beziehung (78) folgt $a \in B(x,l)$, also $a \in \underline{\alpha}(x)$.
Die umgekehrte Inklusion $\underline{\alpha}(x) \subset \overline{\alpha}(x)$ erschließt sich unmittelbar aus der Definiiton von $\underline{\alpha}(x)$ und $\overline{\alpha}(x)$. Somit folgt $\overline{\alpha}(x) = \underline{\alpha}(x)$.

Nun beweisen wir die beiden Gleichungen für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler.

Aus Satz 2.2 (ii) und Eigenschaft (75) folgt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\nu) &= \sum_{a\in\alpha} \nu(W(a \mid \alpha)) V_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha))) \\ &= \sum_{x\in\omega} \sum_{a\in\overline{\alpha}(x)} \nu(W(a \mid \alpha)) V_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha))) \\ &= \sum_{x\in\omega} \sum_{a\in\overline{\alpha}(x)} \nu(W(a \mid \alpha) \cap B(x,l)) V_{1,r}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha) \cap B(x,l))). \end{aligned}$$

Mittels $\overline{\alpha}(x) = \underline{\alpha}(x)$ für jedes $x \in \omega$ folgt die erste Gleichung. Im Spezialfall $n = N$ ist $\mathrm{card}(\underline{\alpha}(x)) = \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) = 1$ für jedes $x \in \omega$. Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar, dass

$$V_{N,r}(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{x\in\omega} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))).$$

(b) Es sei $n \geq N$ und $d_{\min}(\omega) > 10l$.

(b1) Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\alpha}(x) \cap \overline{\alpha}(y) = \emptyset$ für alle $x, y \in \omega$ mit $x \neq y$.
Dazu sei

$$\omega_1 = \{x \in \omega : d(B(x,l), \alpha) > 2l\} \tag{79}$$

und $\omega_2 = \omega \backslash \omega_1$. Zunächst beweisen wir, dass

$$\overline{\alpha}(x) \subset B(x, 5l) \text{ für jedes } x \in \omega_2. \tag{80}$$

Sei $x \in \omega_2$ beliebig. Dann gibt es ein $y \in B(x,l)$ und $a \in \alpha$ mit

$$\| y - a \| = d(B(x,l), \alpha) \leq 2l.$$

Sei $b \in \overline{\alpha}(x)$. Es existiert ein $y' \in B(x,l)$ mit

$$\| y' - b \| = d(y', \alpha) \leq \| y' - a \| .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \| x - b \| &\leq \| x - y' \| + \| y' - b \| \\ &\leq l + \| y' - a \| \\ &\leq l + \| y' - y \| + \| y - a \| \\ &\leq l + 2l + 2l = 5l, \end{aligned}$$

also $b \in B(x, 5l)$, womit (80) gezeigt ist.
Wegen $d_{\min}(\omega) > 10l$ ergibt sich

$$\overline{\alpha}(x) \cap \overline{\alpha}(y) = \emptyset \text{ für jedes } x, y \in \omega_2, x \neq y. \tag{81}$$

Die Menge ω_2 ist nichtleer, denn sonst wäre

$$\Psi_{\omega,r}(\nu) \leq l^r < (2l)^r < \Psi_{\alpha,r}(\nu) = V_{n,r}(\nu),$$

im Widerspruch zu $\mathrm{card}(\omega) \leq n$. Behauptung (b1) ist gezeigt, falls $\omega_1 = \emptyset$. Wir schließen indirekt und gehen vom Gegenteil aus. Sei also $\omega_1 \neq \emptyset$. Aus der Definition (79) von ω_1 folgt

$$V_{n,r}(\nu) = \Psi_{\alpha,r}(\nu) > \sum_{x\in\omega_1} \frac{(2l)^r}{N} + \sum_{x\in\omega_2} \int_{B(x,l)} d(z, \overline{\alpha}(x))^r d\nu(z). \tag{82}$$

Es treten zwei Fälle auf.
1. $\mathrm{card}(\omega_1) \leq \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \bigcup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)\right)$.
Sei $\beta = \omega_1 \cup \bigcup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)$. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\beta) &\leq \mathrm{card}(\omega_1) + \mathrm{card}(\cup_{x\in\omega_2}\overline{\alpha}(x)) \\ &\leq \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \cup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)\right) + \mathrm{card}(\cup_{x\in\omega_2}\overline{\alpha}(x)) \\ &= \mathrm{card}(\alpha). \end{aligned} \tag{83}$$

Mittels (82) und $\omega_1 \neq \emptyset$ erhalten wir

$$\Psi_{\beta,r}(\nu) \leq \sum_{x\in\omega_1} \frac{l^r}{N} + \sum_{x\in\omega_2} \int_{B(x,l)} d(z,\overline{\alpha}(x))^r d\nu(z) < \Psi_{\alpha,r}(\nu),$$

was wegen (83) im Widerspruch zur optimalen Codebucheigenschaft von α steht.

2. $\mathrm{card}(\omega_1) > \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \bigcup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)\right)$.
Sei

$$\omega_{2,s} = \{x \in \omega_2 : \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) = 1\}$$

und

$$\omega_{2,p} = \{x \in \omega_2 : \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) > 1\} = \omega_2 \backslash \omega_{2,s}.$$

Wir leiten nun in diesem zweiten Fall ebenfalls einen Widerspruch her, indem wir für $x \in \omega_{2,p}$ durch geschickte Entnahme von Quantisierungspunkten aus $\overline{\alpha}(x)$ und Platzierung derselben in den Punkten ω_1 ein alternatives Codebuch β konstruieren, das nicht mehr Punkte enthält als α, jedoch einen echt kleineren Quantisierungsfehler aufweist als α.
Aus (81) folgt

$$\mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \bigcup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)\right) + \sum_{x\in\omega_2} \mathrm{card}\left(\overline{\alpha}(x)\right).$$

Andererseits ist $\mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}(\omega_1) + \mathrm{card}(\omega_2) + (n - N)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \bigcup_{x\in\omega_2} \overline{\alpha}(x)\right) \\ &= \sum_{x\in\omega_2} \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - \mathrm{card}(\omega_2) - (n - N) \leq \sum_{x\in\omega_{2,p}} (\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - 1). \end{aligned}$$

Sei nun $N_{2,p} = \mathrm{card}(\omega_{2,p})$ und $\{x_1, .., x_{N_{2,p}}\} = \omega_{2,p}$ eine beliebige Aufzählung von $\omega_{2,p}$. Basierend auf dieser Aufzählung definieren wir rekursiv die Abbildung

$$\varphi : \omega_2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

durch

(i) $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \omega_{2,s}$,

(ii) für $i \in \{1, .., N_{2,p}\}$ und mit $\sum_{j=1}^{0} \varphi(x_j) := 0$ ist

$$\varphi(x_i) = \min \left(\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x_i)) - 1, \mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}(\alpha \backslash \bigcup_{x \in \omega_2} \overline{\alpha}(x)) - \sum_{j=1}^{i-1} \varphi(x_j) \right)$$

Offensichtlich hat φ die Eigenschaften

(iii) $\varphi(x) \in \{0, .., \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - 1\}$ für alle $x \in \omega_{2,p}$,

(iv) $\sum_{x \in \omega_2} \varphi(x) = \mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}\left(\alpha \backslash \bigcup_{x \in \omega_2} \overline{\alpha}(x)\right)$.

Mit Hilfe dieser Abbildung φ wählen wir nun für jedes $x \in \omega_2$ ein

$$\beta(x) \in C_{\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - \varphi(x), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l)))$$

und definieren das bereits erwähnte Codebuch

$$\beta = \omega_1 \cup \bigcup_{x \in \omega_2} \beta(x).$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\Psi_{\beta,r}(\nu) < V_{n,r}(\nu)$. Zunächst erhalten wir für $\Psi_{\beta,r}(\nu)$ die obere Schranke

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta,r}(\nu) &\leq \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r}{N} + \sum_{x \in \omega_2} \int_{B(x,l)} d(z, \beta(x))^r d\nu(z) \\ &= \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r}{N} + \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_2} V_{\mathrm{card}(\beta(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))). \end{aligned} \tag{84}$$

Aus (82) und (84) folgern wir

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\nu) - \Psi_{\beta,r}(\nu) &> \sum_{x \in \omega_2} \int_{B(x,l)} d(z, \overline{\alpha}(x))^r d\nu(z) \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_2} V_{\mathrm{card}(\beta(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) + \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r (2^r - 1)}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_2} \Psi_{\overline{\alpha}(x), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_2} V_{\mathrm{card}(\beta(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) + \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r (2^r - 1)}{N}. \end{aligned}$$

Mit der Defintion des optimalen Quantisierungsfehlers folgt

$$\begin{aligned} & V_{n,r}(\nu) - \Psi_{\beta,r}(\nu) \\ > \; & \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_2} \left(V_{\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) - V_{\mathrm{card}(\beta(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) \right) \\ & + \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r (2^r - 1)}{N} \\ = \; & \frac{1}{N} \sum_{x \in \{z \in \omega_2 : \varphi(z) \neq 0\}} \left(V_{\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) - V_{\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - \varphi(x), r}(\nu(\cdot \mid B(x, l))) \right) \\ & + \sum_{x \in \omega_1} \frac{l^r (2^r - 1)}{N}. \end{aligned} \tag{85}$$

Aus Eigenschaft (iii) und (iv) der Abbildung φ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\{z \in \omega_2 : \varphi(z) \neq 0\}) &\leq \sum_{x \in \omega_2} \varphi(x) \\ &= \mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}\left(\alpha \setminus \bigcup_{x \in \omega_2} \overline{\alpha}(x)\right) \leq \mathrm{card}(\omega_1).\end{aligned}$$

Ungleichung (85) geht damit über in

$$\begin{aligned}& V_{n,r}(\nu) - \Psi_{\beta,r}(\nu) \\ > \;& \frac{1}{N}\left(\mathrm{card}(\omega_1) l^r (2^r - 1) + \sum_{x \in \{z \in \omega_2 : \varphi(z) \neq 0\}} (0 - V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))))\right) \\ \geq \;& \frac{1}{N}\left(\mathrm{card}(\omega_1) l^r (2^r - 1) - \sum_{x \in \{z \in \omega_2 : \varphi(z) \neq 0\}} \Psi_{\{x\},r}(\nu(\cdot \mid B(x,l)))\right) \\ \geq \;& \frac{\mathrm{card}(\omega_1)}{N}\left(l^r (2^r - 1) - l^r\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{86}$$

Aus Eigenschaft (iv) der Abbildung φ und (81) folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\beta) &\leq \mathrm{card}(\omega_1) + \sum_{x \in \omega_2} \mathrm{card}(\beta(x)) \\ &= \mathrm{card}(\omega_1) + \sum_{x \in \omega_2} (\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - \varphi(x)) \\ &= \mathrm{card}(\omega_1) + \mathrm{card}\left(\bigcup_{x \in \omega_2} \overline{\alpha}(x)\right) - \left(\mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}(\alpha \setminus \bigcup_{x \in \omega_2} \overline{\alpha}(x))\right) \\ &= \mathrm{card}(\alpha).\end{aligned}$$

Somit widerspricht (86) der optimalen Codebucheigenschaft von α. Da sich in jedem der beiden möglichen Fälle ein Widerspruch ergeben hat, gilt $\omega_1 = \emptyset$ und (b1) ist somit bewiesen.

(b2) Wir zeigen Ungleichung (77).
Wir gehen dabei so vor, dass wir für ein $\alpha \in C_{N-1,r}(\nu)$ zwei ausgezeichnete Punkte aus ω bestimmen. Unter Zuhilfenahme der Zerlegung von ω in die Mengen $\omega_1, \omega_{2,s}$ und $\omega_{2,p}$ gelingt es dann eine obere Schranke für $V_{N,r}(\nu)$ bzw. eine untere für $V_{N-1,r}(\nu)$ abzuleiten, mit denen wir Ungleichung (77) beweisen können.
Sei $\alpha \in C_{N-1,r}(\nu)$. Wegen $\mathrm{card}(\alpha) = N - 1$ gibt es zwei unterschiedliche Punkte $x_1, x_2 \in \omega$ und ein $a \in \alpha$ mit $d(x_1, a) = d(x_1, \alpha)$ bzw. $d(x_2, a) = d(x_2, \alpha)$. Für jedes $z \in B(x_1, l)$ gilt

$$d(z, \alpha) \geq d(x_1, \alpha) - d(x_1, z) \geq d(x_1, \alpha) - l,$$

bzw. $d(z, \alpha) \geq d(x_2, \alpha) - l$ für $z \in B(x_2, l)$. Deswegen ist

$$\begin{aligned}& \int_{B(x_1,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) + \int_{B(x_2,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \\ \geq \;& \frac{1}{N}\left((\max(0, d(x_1,\alpha) - l))^r + (\max(0, d(x_2,\alpha) - l))^r\right). \end{aligned} \tag{87}$$

Offensichtlich gilt

$$x^r + y^r \geq 2\left(\frac{1}{2}\right)^r (x+y)^r. \tag{88}$$

für beliebige $x, y \geq 0$ mit $x + y > 0$ und $r \geq 1$. Aus $l < \frac{1}{2} d_{\min}(\omega)$ und (88), folgern wir für Ungleichung (87), dass

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_1,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) + \int_{B(x_2,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \\ \geq \quad & \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2} d_{\min}(\omega) - l\right)^r. \end{aligned} \tag{89}$$

Mit Aussage (81), die auch für $\mathrm{card}(\alpha) = N - 1$ Gültigkeit besitzt, folgt

$$\mathrm{card}(\alpha) \geq \sum_{x \in \omega_2} \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)).$$

Aufgrund der Definition von $\omega_{2,p}$ und $\omega_{2,s}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \omega_2} \mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) &= \mathrm{card}(\omega_{2,s}) + \mathrm{card}(\omega_{2,p}) + \sum_{x \in \omega_{2,p}} (\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)) - 1) \\ &\geq \mathrm{card}(\omega_2) + \mathrm{card}(\omega_{2,p}). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\omega_2) + \mathrm{card}(\omega_{2,p}) &\leq \mathrm{card}(\alpha) \\ &= N - 1 = \mathrm{card}(\omega_2) + \mathrm{card}(\omega_1) - 1, \end{aligned}$$

was zu

$$\mathrm{card}(\omega_{2,p}) \leq \mathrm{card}(\omega_1) - 1 \tag{90}$$

führt. Unter Verwendung von (89) schließen wir

$$\begin{aligned} V_{N-1,r}(\nu) = & \sum_{x \in \omega_{2,s} \setminus \{x_1,x_2\}} \int_{B(x,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \\ & + \sum_{x \in \omega_{2,p} \setminus \{x_1,x_2\}} \int_{B(x,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \\ & + \sum_{x \in \omega_1 \setminus \{x_1,x_2\}} \int_{B(x,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \\ & + \sum_{x \in \{x_1,x_2\}} \int_{B(x,l)} d(z,\alpha)^r d\nu(z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{x\in\omega_{2,s}\setminus\{x_1,x_2\}} \frac{1}{N} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \\
&\quad + \sum_{x\in\omega_{2,p}\setminus\{x_1,x_2\}} \frac{1}{N} V_{\mathrm{card}(\overline{\alpha}(x)),r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \\
&\quad + \sum_{x\in\omega_1\setminus\{x_1,x_2\}} \frac{1}{N}(2l)^r + \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}d_{\min}(\omega) - l\right)^r \\
&\geq \frac{1}{N}\left(\sum_{x\in\omega_{2,s}\setminus\{x_1,x_2\}} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \right. \\
&\quad \left. + (\mathrm{card}(\omega_1)-2)(2l)^r + 2(\frac{1}{2}d_{\min}(\omega) - l)^r\right). \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Aus (a) entnehmen wir

$$V_{N,r}(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{x\in\omega} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))),$$

woraus

$$V_{N,r}(\nu) \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{x\in\omega_{2,s}} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) + (\mathrm{card}(\omega_{2,p}) + \mathrm{card}(\omega_1))l^r\right) \qquad (92)$$

folgt. Mittels (91) und (92) schließen wir

$$N\left(V_{N-1,r}(\nu) - (1+\frac{1}{N})V_{N,r}(\nu)\right) \geq$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in\omega_{2,s}\setminus\{x_1,x_2\}} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) + (\mathrm{card}(\omega_1)-2)(2l)^r + 2\left(\frac{1}{2}d_{\min}(\omega) - l\right)^r \\
&- \left(1+\frac{1}{N}\right)\left(\sum_{x\in\omega_{2,s}} V_{1,r}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) + (\mathrm{card}(\omega_{2,p}) + \mathrm{card}(\omega_1))l^r\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (\mathrm{card}(\omega_1)-2)(2l)^r + 2\left(\frac{1}{2}d_{\min}(\omega) - l\right)^r \\
&- \left(\frac{\mathrm{card}(\omega_{2,s})l^r}{N} + (1+\frac{1}{N})(\mathrm{card}(\omega_{2,p}) + \mathrm{card}(\omega_1))l^r\right) - 2\cdot(2l)^r.
\end{aligned}
$$

Wegen $d_{\min}(\omega) > 10l$ ist die rechte Seite echt größer als

$$
\begin{aligned}
&\left((\mathrm{card}(\omega_1)-2)2^r + 2\cdot 4^r - \frac{\mathrm{card}(\omega_{2,s})}{N}\right. \\
&- \left.(1+\frac{1}{N})(\mathrm{card}(\omega_{2,p}) + \mathrm{card}(\omega_1)) - 2\cdot 2^r\right) l^r \\
&= ((\mathrm{card}(\omega_1)-2)2^r + 2\cdot 4^r - 1 - \mathrm{card}(\omega_1) - \mathrm{card}(\omega_{2,p}) - 2\cdot 2^r)\, l^r.
\end{aligned}
$$

Aus (90) und $r > 1$ erhalten wir die untere Schranke

$$\begin{aligned} & ((\mathrm{card}(\omega_1) - 2)2^r + 2 \cdot 4^r - 2\,\mathrm{card}(\omega_1) - 2 \cdot 2^r)\, l^r \\ = \quad & ((\mathrm{card}(\omega_1))2^r - 4 \cdot 2^r + 2 \cdot 4^r - 2 \cdot \mathrm{card}(\omega_1))\, l^r > 0, \end{aligned}$$

womit auch Ungleichung (77) gezeigt ist. □

4.3 Bemerkung
Die hinreichende Bedingung für die Separationseigenschaft (75) der optimalen Codebücher in Proposition 4.2 (b) kommt mit der Konstante 10 aus, die weder von ω oder r noch von der Dimension des Raumes $\mathbb{R}^d$ abhängt.

4.4 Bemerkung
Vermutlich kann die Bedingung $d_{\min}(\omega) > 10l$ in Proposition 4.2 (b) abgeschwächt werden, d.h. die Konstante 10 kann wahrscheinlich durch eine kleinere Konstante bei voller Gültigkeit der Aussage von Proposition 4.2 (b) ersetzt werden. Ein vollständiger Verzicht auf die Voraussetzung ist jedoch nicht möglich. Man betrachte z.B. die eindimensionale Gleichverteilung $\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ auf den beiden Punkten 0 und 1. Mit $\omega = \{0, \frac{7}{10}\}$ und $l = \frac{3}{10}$ ist ν ein $(l, \omega)-$separiertes Maß. Offensichtlich ist $C_{2,r}(\nu) = \{\{0,1\}\}$ und $W(0 \mid \{0,1\}) =]-\infty, \frac{1}{2}]$.
Somit ist

$$W(0 \mid \{0,1\}) \cap B(0,l) = B(0,l) \neq \emptyset$$

und

$$W(0 \mid \{0,1\}) \cap B\left(\frac{7}{10}, l\right) = \left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right] \neq \emptyset.$$

4.2 Schwerpunktformel für den optimalen Quantisierungsfehler

Für ein beliebiges Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν und eine Borel-messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\nu(B) > 0$ sei

$$s_\nu(B) = (\nu(B))^{-1} \int_B x d\nu(x) \tag{93}$$

der Schwerpunkt von B bezüglich ν. Für eine beliebige nichtleere Menge $\gamma \subset \omega$ sei

$$Q_\gamma = \frac{1}{\mathrm{card}(\gamma)} \sum_{x \in \gamma} \delta_x$$

die Gleichverteilung auf γ. Sei $n \in \{1, .., N\}$ und $\beta \in C_{n,2}(Q_\omega)$.
Mit $\omega(b \mid \beta) = \omega \cap W(b \mid \beta)$ folgt aus Satz 2.2 (ii) und Satz 2.1 (c) mittels (93) die Darstellung

$$V_{n,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \sum_{b \in \beta} \sum_{x \in \omega(b|\beta)} \| x - s_{Q_\omega}(\omega(b \mid \beta)) \|^2 \tag{94}$$

für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler von Q_ω.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{Z}_n$ die Menge aller $n-$elementigen Zerlegungen von ω.

4.5 Bemerkung
Nach Satz 2.3 ist $\{\omega(b \mid \beta) : b \in \beta\}$ eine $n-$elementige Zerlegung von ω. Aus (94) folgt einerseits

$$V_{n,2}(Q_\omega) \geq \frac{1}{N} \min_{Z \in \mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 . \tag{95}$$

Sei nun andererseits $Z_0 \in \mathcal{Z}_n$ so gewählt, dass

$$\min_{Z \in \mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 = \sum_{\gamma \in Z_o} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 .$$

Mit der Menge $\alpha = \{s_{Q_\omega}(\gamma) : \gamma \in Z_0\}$ schließen wir

$$\begin{aligned} & V_{n,2}(Q_\omega) \leq \Psi_{\alpha,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega} \min_{a \in \alpha} \| x - a \|^2 \\ = \quad & \frac{1}{N} \sum_{\gamma \in Z_0} \sum_{x \in \gamma} \min_{a \in \alpha} \| x - a \|^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{\gamma \in Z_0} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 \\ = \quad & \frac{1}{N} \min_{Z \in \mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 . \end{aligned} \tag{96}$$

Aus (95) und (96) folgt

$$V_{n,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \min_{Z \in \mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 . \tag{97}$$

Die Berechnung von $V_{n,2}(Q_\omega)$ reduziert sich somit vollständig auf die Analyse der möglichen Zerlegungen von ω.

4.6 Bemerkung
Die Darstellung (97) für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler von Q_ω ist wohlbekannt und findet sich z.B. auch in [13], Example 3.5. Die Identität (97) kann auch als Varianzkriterium in der Clusteranalyse der Punktekonfiguration ω gesehen werden. Eine weiterführende Behandlung dieser clusteranalytischen Fragestellungen mit Optimalitätskriterien obigen Typs bzw. Verallgemeinerungen davon, findet sich z.B. in den Arbeiten von Bock [3] und Späth [30]. Für ebenfalls aus der mathematischen Statistik motivierte Verallgemeinerungen des Quantisierungs- und Codebuchbegriffs sei der Leser auf die Arbeiten von Pötzelberger und Strasser verwiesen (cf. [27], [28]).

Für $n \in \{1, .., N\}$ sei

$$\mathcal{Z}_n^* = \left\{ Z \in \mathcal{Z}_n : V_{n,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\gamma \in Z} \sum_{x \in \gamma} \| x - s_{Q_\omega}(\gamma) \|^2 \right\}$$

die Menge aller n-optimalen Zerlegungen von ω .

4.7 Bemerkung
Aus Bemerkung 4.5 erschließt sich unmittelbar, dass

$$C_{n,2}(Q_\omega) = \{\{s_{Q_\omega}(\gamma) : \gamma \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\}.$$

Begründet durch Stetigkeitsargumente (siehe Satz 2.6), kann man für $(l, \omega)-$separierte Maße mit ausreichend kleinem Radius l, eine zu (97) ähnlich aufgebaute Schwerpunktzerlegung ableiten, was Ziel dieses Abschnitts ist (siehe Proposition 4.14).

Für eine beliebige Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ sei $\overset{\circ}{B}$ der offene Kern von B .
Sei $\beta \subset \mathbb{R}^d$ endlich und nichtleer. Sei $\alpha \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}(\beta)$. Wir setzen $\rho = \frac{1}{2}\min(d_{\min}(\alpha), d_{\min}(\beta))$. Falls

$$\alpha \cap \overset{\circ}{B}\,(b, \rho) \neq \emptyset \text{ für alle } b \in \beta \tag{98}$$

und

$$\beta \cap \overset{\circ}{B}\,(a, \rho) \neq \emptyset \text{ für alle } a \in \alpha, \tag{99}$$

gibt es für jedes $b \in \beta$ wegen (98) ein eindeutig bestimmtes Element $G_{\alpha,\beta}(b)$ von $\alpha \cap \overset{\circ}{B}\,(b, \rho)$. Ferner ist wegen (99) die Abbildung $G_{\alpha,\beta} : \beta \longrightarrow \alpha$ bijektiv mit $G_{\beta,\alpha}$ als Umkehrabbildung.

Es sei an die Definition (8) des Hausdorffabstandes d_H erinnert.

4.8 Bemerkung
Die Beziehungen (98) und (99) sind erfüllt, falls

$$d_H(\alpha, \beta) < \rho = \frac{1}{2}\min(d_{\min}(\alpha), d_{\min}(\beta)) \tag{100}$$

gilt. Ist $d_H(\alpha, \beta) < \frac{1}{2}d_{\min}(\beta)$, erkennt man leicht, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\min(d_{\min}(\alpha), d_{\min}(\beta)) &\geq \frac{1}{2}\min(d_{\min}(\beta) - 2d_H(\alpha, \beta), d_{\min}(\beta)) \\ &= \frac{1}{2}d_{\min}(\beta) - d_H(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Gilt also sogar $d_H(\alpha, \beta) < \frac{1}{4}d_{\min}(\beta)$, so ist auch (100) und somit (98) und (99) erfüllt.

Für eine beliebige Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit ∂B ihren topologischen Rand .

4.9 Lemma
Für jedes $n \in \{1, .., N\}$ gibt es ein $\delta \in \left]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right]$, so dass für jedes $\beta \in C_{n,2}(Q_\omega)$ und jedes $\alpha \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\alpha) = n$ und $d_H(\alpha, \beta) < \delta$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \forall\, b \in \beta : \omega(b \mid \beta) &= \{x \in \omega : B(x, \delta) \subset W(b \mid \beta)\} \\ &= \{x \in \omega : B(x, \delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} = \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha) \end{aligned}$$

gilt.

Beweis.
1. Wir bestimmen zunächst $\delta \in \left]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right]$.
Sei $n \in \{1, .., N\}$ und $\beta \in C_{n,2}(Q_\omega)$. Aus Satz 2.3 folgt $Q_\omega(\bigcup_{b\in\beta} \partial W(b \mid \beta)) = 0$, weshalb

$$\omega \cap \bigcup_{b\in\beta} \partial W(b \mid \beta) = \emptyset \tag{101}$$

gilt. Mit der Definition (6) der Voronoizelle und Identität (101) folgt

$$\| x - t' \| - \| x - t \| > 0$$

für jedes $t, t' \in \beta$ mit $t \neq t'$ und $x \in \omega(t \mid \beta)$. Da β endlich ist, gilt

$$H(\omega, \beta) := \min_{t\in\beta} \min_{t'\in\beta\setminus\{t\}} \min_{x\in\omega(t|\beta)} (\| x - t' \| - \| x - t \|) > 0. \tag{102}$$

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\gamma) = n$ und $d_H(\gamma, \beta) < \min(\frac{1}{2}H(\omega, \beta), \frac{1}{4}d_{\min}(\beta))$. Wir zeigen nun, dass für jedes $t \in \beta$ die Identität

$$\omega(t \mid \beta) = \omega(G_{\gamma,\beta}(t) \mid \gamma) \tag{103}$$

gilt.
Sei $t \in \beta$ und $x \in \omega(t \mid \beta)$. Sei $t' \in \beta\setminus\{t\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \| x - G_{\gamma,\beta}(t') \| - \| x - G_{\gamma,\beta}(t) \| \\
\geq\ & \| x - t' \| - \| t' - G_{\gamma,\beta}(t') \| - (\| x - t \| + \| t - G_{\gamma,\beta}(t) \|) \\
\geq\ & \| x - t' \| - \| x - t \| - 2d_H(\gamma, \beta) \\
\geq\ & H(\omega, \beta) - 2d_H(\gamma, \beta) > 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Bijektivität von $G_{\gamma,\beta}$ ist $G_{\gamma,\beta}(\beta\setminus\{t\}) = \gamma\setminus\{G_{\gamma,\beta}(t)\}$. Somit gilt für alle $a' \in \gamma\setminus\{G_{\gamma,\beta}(t)\}$, dass

$$\| x - a' \| - \| x - G_{\gamma,\beta}(t) \| > 0.$$

Mithin ist $x \in \omega(G_{\gamma,\beta}(t) \mid \gamma)$.
Sei nun andererseits $x \in \omega(G_{\gamma,\beta}(t) \mid \gamma)$ vorausgesetzt. Mittels gleichartiger Abschätzungen erhält man $x \in \omega(t \mid \beta)$. Insgesamt ist damit die Identität (103) gezeigt.

Als nächstes zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\gamma) = n$ unter der Bedingung

$$d_H(\gamma, \beta) < \min\left(\frac{1}{2}H(\omega, \beta), \frac{1}{4}d_{\min}(\beta), \varepsilon\right)$$

die Beziehung

$$| H(\omega, \beta) - H(\omega, \gamma) | \leq \varepsilon \tag{104}$$

gilt.
Aus der Definition (102) und Identität (103) folgt

$$\begin{aligned}
H(\omega, \beta) - H(\omega, \gamma) &= \min_{t\in\beta} \min_{t'\in\beta\setminus\{t\}} \min_{x\in\omega(t|\beta)} (\| x - t' \| - \| x - t \|) \\
&- \min_{a\in\gamma} \min_{a'\in\gamma\setminus\{a\}} \min_{x\in\omega(a|\gamma)} (\| x - a' \| - \| x - a \|) \\
&= \min_{t\in\beta} \min_{t'\in\beta\setminus\{t\}} \min_{x\in\omega(G_{\gamma,\beta}(t)|\gamma)} (\| x - t' \| - \| x - t \|) \\
&- \min_{a\in\gamma} \min_{a'\in\gamma\setminus\{a\}} \min_{x\in\omega(a|\gamma)} (\| x - a' \| - \| x - a \|).
\end{aligned}$$

Da $G_{\gamma,\beta}$ bijektiv ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} H(\omega,\beta) - H(\omega,\gamma) &= \min_{b\in\gamma}\min_{b'\in\gamma\setminus\{b\}}\min_{x\in\omega(b|\gamma)}(\parallel x - G_{\beta,\gamma}(b')\parallel - \parallel x - G_{\beta,\gamma}(b)\parallel) \\ &- \min_{a\in\gamma}\min_{a'\in\gamma\setminus\{a\}}\min_{x\in\omega(a|\gamma)}(\parallel x - a'\parallel - \parallel x - a\parallel) \\ &\geq \min_{b\in\gamma}\min_{b'\in\gamma\setminus\{b\}}\min_{x\in\omega(b|\gamma)}(\parallel x - b'\parallel - \parallel x - b\parallel - 2d_H(\gamma,\beta)) \\ &- \min_{a\in\gamma}\min_{a'\in\gamma\setminus\{a\}}\min_{x\in\omega(a|\gamma)}(\parallel x - a'\parallel - \parallel x - a\parallel) \\ &= -2d_H(\gamma,\beta). \end{aligned}$$

In derselben Weise zeigt man $H(\omega,\beta) - H(\omega,\gamma) \leq 2d_H(\gamma,\beta)$, woraus

$$\mid H(\omega,\beta) - H(\omega,\gamma)\mid \leq 2d_H(\gamma,\beta) \leq \varepsilon$$

folgt.

Aus (104) folgt unmittelbar die d_H-Stetigkeit der Abbildung $H(\omega,\cdot)$ in β.
Deshalb gibt es ein $\delta_1(\beta) > 0$, so dass für alle $\delta \leq \delta_1(\beta)$ und für alle $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\gamma) = n$ und $d_H(\beta,\gamma) < \delta$ die Beziehung

$$H(\omega,\gamma) > 4\delta_1(\beta) \geq 4\delta > 0 \tag{105}$$

gilt. Da $\beta \in C_{n,2}(Q_\omega)$ beliebig gewählt wurde und $C_{n,2}(Q_\omega)$ wegen Bemerkung 4.7 endlich ist, gilt die Ungleichung (105) auch, wenn wir $\delta_1(\beta)$ durch die ebenfalls positive Größe

$$\delta_1' = \min\{\delta_1(\beta') : \beta' \in C_{n,2}(Q_\omega)\}$$

ersetzen. Mit $\delta_2 = \min\{\frac{d_{\min}(\beta')}{4} : \beta' \in C_{n,2}(Q_\omega)\}$ sei nun

$$\delta \in \left]0, \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}, \delta_2, \delta_1'\right)\right]$$

unabhängig von β fest gewählt. Sei $\alpha \subset \mathbb{R}^d$, $\mathrm{card}(\alpha) = n$, $d_H(\alpha,\beta) < \delta$ und sei $b \in \beta$. Um nun die Behauptung von Lemma 4.9 zu zeigen, zerlegen wir den restlichen Beweis in weitere Schritte.

2. $\omega(b \mid \beta) \subset \{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\}$.
Sei $x \in \omega(b \mid \beta)$ und sei $z \in B(x,\delta)$. Es ist

$$\min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel z - a\parallel - \parallel z - G_{\alpha,\beta}(b)\parallel)$$

$$= \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel z{-}x{+}x{-}G_{\beta,\alpha}(a){+}G_{\beta,\alpha}(a){-}a\parallel - \parallel z{-}x{+}x{-}b{+}b{-}G_{\alpha,\beta}(b)\parallel)$$

$$\begin{aligned} &\geq \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - G_{\beta,\alpha}(a)\parallel - \parallel z - x\parallel - \parallel G_{\beta,\alpha}(a) - a\parallel \\ &\quad - \parallel x - b\parallel - \parallel z - x\parallel - \parallel b - G_{\alpha,\beta}(b)\parallel) \\ &\geq \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - G_{\beta,\alpha}(a)\parallel - \parallel x - b\parallel) - 2\delta - 2d_H(\alpha,\beta) \\ &> \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - G_{\beta,\alpha}(a)\parallel - \parallel x - b\parallel) - 4\delta \end{aligned}$$

Aufgrund von $G_{\beta,\alpha} = G_{\alpha,\beta}^{-1}$ und (105) gilt

$$\begin{aligned} & \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - G_{\beta,\alpha}(a) \parallel - \parallel x - b \parallel) - 4\delta \\ = & \min_{b'\in\beta\setminus\{b\}}(\parallel x - b' \parallel - \parallel x - b \parallel) - 4\delta \\ \geq & H(\omega,\beta) - 4\delta \geq 0, \end{aligned}$$

woraus $z \in W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$ folgt, bzw. $B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$.

3. $\omega(b \mid \beta) \supset \{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\}$.
Es sei $x \in \omega$ und wir nehmen an, dass $B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$.
Somit ist $x \in W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$ und wir erhalten

$$\min_{b'\in\beta\setminus\{b\}}(\parallel x - b' \parallel - \parallel x - b \parallel)$$

$$= \min_{b'\in\beta\setminus\{b\}}(\parallel x - G_{\alpha,\beta}(b') + G_{\alpha,\beta}(b') - b' \parallel - \parallel x - G_{\alpha,\beta}(b) + G_{\alpha,\beta}(b) - b \parallel)$$

$$\begin{aligned} > & \min_{b'\in\beta\setminus\{b\}}(\parallel x - G_{\alpha,\beta}(b') \parallel - \parallel x - G_{\alpha,\beta}(b) \parallel) - 2\delta \\ = & \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - a \parallel - \parallel x - G_{\alpha,\beta}(b) \parallel) - 2\delta \\ \geq & H(\omega,\alpha) - 2\delta > 4\delta - 2\delta > 0, \end{aligned}$$

woraus $x \in W(b \mid \beta)$ folgt.

4. $\omega(b \mid \beta) = \{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(b \mid \beta)\}$.
Man beachte, dass $d_H(\beta,\beta) = 0 < \delta$. Damit ist diese Identität eine unmittelbare Folgerung aus Schritt 1. und 2.

5. $\{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} = \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$.
Offensichtlich gilt

$$\{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} \subset \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha). \tag{106}$$

Sei $x \in \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)$ und $z \in B(x,\delta)$. Wir schließen

$$\begin{aligned} & \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel z - a \parallel - \parallel z - G_{\alpha,\beta}(b) \parallel) \\ = & \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel z - x + x - a \parallel - \parallel z - x + x - G_{\alpha,\beta}(b) \parallel) \\ \geq & \min_{a\in\alpha\setminus\{G_{\alpha,\beta}(b)\}}(\parallel x - a \parallel - \parallel x - G_{\alpha,\beta}(b) \parallel) - 2\delta \\ \geq & H(\omega,\alpha) - 2\delta \geq 4\delta - 2\delta > 0, \end{aligned}$$

woraus

$$\omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha) \subset \{x \in \omega \mid B(x,\delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} \tag{107}$$

folgt. Die Verbindung aus (106) und (107) zeigt die Behauptung von Schritt 4.
Aus Schritt 1. bis 4. folgt dann die Behauptung von Lemma 4.9. □

Für ein $Z \in \mathcal{Z}_n$ sei $s(Z) = \{s_{Q_\omega}(\gamma) : \gamma \in Z\}$ die Menge der von der Zerlegung Z induzierten Schwerpunkte bezüglich Q_ω.

4.10 Lemma
Für jedes $n \in \{1, .., N\}$ gibt es ein $l_0 \in]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}]$, so dass für jedes $l < l_0$ und jedes (l, ω)-separierte Wahrscheinlichkeitsmaß ν folgendes gilt:

(a) Für alle $Z \in \mathcal{Z}_n^*$ und $\gamma \in Z$ ist

$$\gamma = \{x \in \omega : B(x, l) \subset W(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z))\} = \omega(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z))$$

(b) Für jede $n-$optimale Menge $\alpha \in C_{n,2}(\nu)$ gibt es eine $n-$optimale Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}_n^*$ von ω, so dass die von α auf ω gemäß Bemerkung 4.5 induzierte Zerlegung mit Z übereinstimmt, d.h.

$$Z = \{\omega(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z)) : \gamma \in Z\} = \{\omega(a \mid \alpha) : a \in \alpha\}.$$

Darüberhinaus gilt sogar

$$\begin{aligned} Z &= \{\{x \in \omega : B(x, l) \subset W(a \mid \alpha)\} : a \in \alpha\} \\ &= \{\{x \in \omega : B(x, l) \subset W(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z))\} : \gamma \in Z\}. \end{aligned}$$

Beweis.
Unter Beachtung von Satz 2.6 erkennt man, dass

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, l_1 > 0\ \forall\, l \le l_1\ \forall\, (l, \omega)\text{-separiertes Maß } \nu :\ \rho_2(\nu, Q_\omega) < \varepsilon. \tag{108}$$

Aus (108) und Satz 2.5 (b) folgt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, l_1 > 0\ \forall\, l \le l_1\ \forall\, \alpha \in C_{n,2}(\nu)\ \exists\, \beta \in C_{n,2}(Q_\omega) :\ d_H(\alpha, \beta) < \varepsilon. \tag{109}$$

Sei $n \in \{1, .., N\}$ und $\delta \in \left]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right]$ gemäß Lemma 4.9 fest gewählt.
Sei $\varepsilon = \delta$ und l_1 gemäß (109). Wir setzen $l_0 := \min(l_1, \delta)$ und wählen $l < l_0$. Sei ν ein $(l, \omega)-$separiertes Maß.

(a) Sei $Z \in \mathcal{Z}_n^*$ und $\gamma \in Z$. Aus Bemerkung 4.7 folgt $s(Z) \in C_{n,2}(Q_\omega)$. Die Anwendung von Lemma 4.9 ergibt

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z)) \\ &= \{x \in \omega : B(x, \delta) \subset W(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z))\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich können wir in der obigen Gleichungskette δ durch l ersetzen, woraus Teil (a) der Behauptung folgt.

(b) Sei $\alpha \in C_{n,2}(\nu)$. Mit β aus (109) erhalten wir $d_H(\alpha, \beta) < \delta$. Lemma 4.9 sichert für alle $b \in \beta$, dass

$$\begin{aligned} \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha) &= \{x \in \omega : B(x, \delta) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} \\ &\subset \{x \in \omega : B(x, l) \subset W(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha)\} \\ &\subset \omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha). \end{aligned} \tag{110}$$

Ferner folgt aus Lemma 4.9, dass

$$\begin{aligned}\omega(b \mid \beta) &= \{x \in \omega : B(x,\delta) \subset W(b \mid \beta)\} \\ &\subset \{x \in \omega : B(x,l) \subset W(b \mid \beta)\} \subset \omega(b \mid \beta) \end{aligned} \tag{111}$$

und

$$\omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha) = \omega(b \mid \beta). \tag{112}$$

Wir definieren nun die Zerlegung $Z = \{\omega(b \mid \beta) : b \in \beta\}$. Aus Bemerkung 4.5 erschließt sich $Z \in \mathcal{Z}_n^*$. Mittels Bemerkung 4.7 und Satz 2.1 (c) folgt somit die Gleichheit

$$\beta = s(Z). \tag{113}$$

Aus der Definition von Z und (113) folgt

$$Z = \{\omega(b \mid \beta) : b \in \beta\} = \{\omega(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z)) : \gamma \in Z\}.$$

Identität (112) ergibt

$$Z = \{\omega(b \mid \beta) : b \in \beta\} = \{\omega(G_{\alpha,\beta}(b) \mid \alpha) : b \in \beta\} = \{\omega(a \mid \alpha) : a \in \alpha\}.$$

Somit folgt aus (110) und (111) die Gleichheit

$$\begin{aligned} Z &= \{\{x \in \omega : B(x,l) \subset W(a \mid \alpha)\} : a \in \alpha\} \\ &= \{\{x \in \omega : B(x,l) \subset W(s_{Q_\omega}(\gamma) \mid s(Z))\} : \gamma \in Z\}, \end{aligned}$$

womit Teil (b) der Behauptung gezeigt ist. □

4.11 Bemerkung
Im Hinblick auf die Erkenntnisse in Abschnitt 4.1, speziell Proposition 4.2 (b), könnte man vermuten, dass unabhängig von ω eine feste Zahl $\xi > 0$ existiert, so dass für l_0 die untere Schranke $\xi \cdot d_{\min}(\omega)$ angegeben werden kann. Dies ist jedoch leider nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

4.12 Beispiel
Es sei $q \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ und

$$\omega = \{(0,0); (1,0); (1-q,1); (q,1)\}.$$

Mittels Bemerkung 4.5 und Bemerkung 4.7 erkennt man, dass

$$C_{3,2}(Q_\omega) = \{\{(0,0); (1,0); (\frac{1}{2},1)\}\}.$$

Sei nun $l \in [0, 2q]$ und

$$\kappa = \{(0,0); (1,0); (1-q+l,1); (q-l,1)\}.$$

Die Gleichverteilung Q_κ ist ein $(l,\omega)-$separiertes Maß. Einen graphischen Überblick vermittelt Abbildung 4.
Für $l < q$ ist $C_{3,2}(Q_\kappa) = C_{3,2}(Q_\omega)$, für $l > q$ ist

$$C_{3,2}(Q_\kappa) = \{\{(q-l,1); (1-q+l,1); (\frac{1}{2},0)\}\}.$$

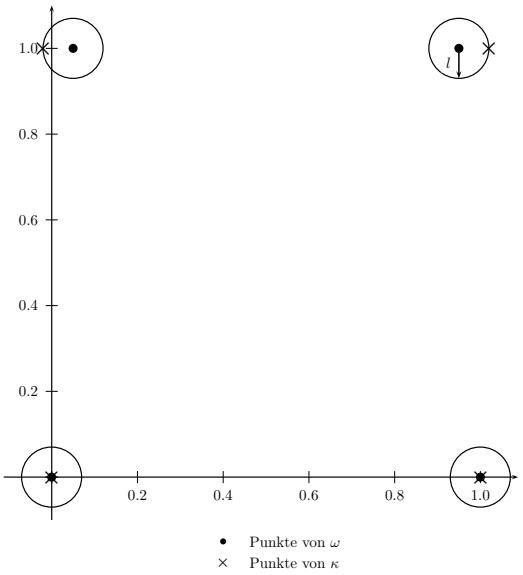

Abbildung 4: Skizze von ω und κ zu Beispiel 4.12

Im Falle $l = q$ ist

$$C_{3,2}(Q_\kappa) = \left\{ \left\{ \frac{x+y}{2} \cup \kappa \backslash \{x, y\} : x, y \in \kappa; x \neq y \right\} \right\}.$$

Offensichtlich sind beide Aussagen (a) und (b) von Lemma 4.10 falsch, falls $l \geq q$ und richtig für $l < q$. Da $d_{\min}(\omega) = 1 - 2q > \frac{1}{4} > q$, und q beliebig klein gewählt werden kann, ist es nicht möglich ein festes von ω unabhängiges $\xi > 0$ anzugeben, so dass für l_0 in Lemma 4.10 die Beziehung $l_0 > \xi \cdot d_{\min}(\omega)$ gilt.

Mit den megentheoretischen Stetigkeitsaussagen von Lemma 4.10 kann man nun die Schwerpunktzerlegung des n-optimalen Quantisierungsfehlers von ν herleiten. Als weiteres Hilfsmittel beweisen wir noch eine Zerlegungsformel für $n = 1$.

4.13 Lemma
Sei $l \in]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}[$ *und* $\emptyset \neq \kappa \subset \omega$. *Sei* ν *ein* (l, ω)*-separiertes Maß und* $n = \operatorname{card}(\kappa)$. *Dann gilt*

$$V_{1,2}\left(\nu\left(\cdot \mid \bigcup_{x\in\kappa} B(x,l)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{x\in\kappa}\left(\parallel s_\nu(B(x,l)) - \frac{1}{n}\sum_{y\in\kappa} s_\nu(B(y,l)) \parallel^2 + V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l)))\right).$$

Beweis.
Mittels Satz 2.1 (c) folgt

$$\{s_\nu(\bigcup_{x\in\kappa} B(x,l))\} \in C_{1,2}(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x\in\kappa} B(x,l))),$$

woraus sich

$$V_{1,2}(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x\in\kappa} B(x,l))) = \frac{N}{n}\sum_{x\in\kappa}\int_{B(x,l)} \parallel z - s_\nu(\bigcup_{x\in\kappa} B(x,l)) \parallel^2 d\nu(z)$$

ergibt. Die Anwendung von Bemerkung A.2 liefert

$$\begin{aligned} & V_{1,2}(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x\in\kappa} B(x,l))) \\ = \quad & \frac{N}{n}\sum_{x\in\kappa}\left(\frac{1}{N} \parallel s_\nu(\bigcup_{x\in\kappa} B(x,l)) - s_\nu(B(x,l)) \parallel^2 \right. \\ & \left. + \int_{B(x,l)} \parallel z - s_\nu(B(x,l)) \parallel^2 d\nu(z)\right) \\ = \quad & \frac{1}{n}\sum_{x\in\kappa}\left(\parallel s_\nu(\bigcup_{x\in\kappa} B(x,l)) - s_\nu(B(x,l)) \parallel^2 + V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l)))\right). \end{aligned}$$

Aus der Definition von s_ν erhalten wir

$$\begin{aligned} s_\nu(\bigcup_{y\in\kappa} B(y,l)) &= \left(\nu(\bigcup_{y\in\kappa} B(y,l))\right)^{-1} \int_{\bigcup_{y\in\kappa} B(y,l)} z d\nu(z) \\ &= \frac{N}{n}\sum_{y\in\kappa}\int_{B(y,l)} z d\nu(z) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{y\in\kappa} s_\nu(B(y,l)). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$V_{1,2}(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x\in\kappa} B(x,l)))$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{x\in\kappa}\left(\parallel \frac{1}{n}\sum_{y\in\kappa} s_\nu(B(y,l)) - s_\nu(B(x,l)) \parallel^2 + V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l)))\right).$$

□

Nun stehen alle Hilfsmittel zur Verfügung, um das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen.

4.14 Proposition
Es gibt ein $l_0 \in]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}]$, so dass für jedes $l < l_0$ und jedes $(l,\omega)-$separierte Maß ν für alle $n \in \{1,..,N\}$ die Beziehung

$$V_{n,2}(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{x\in\omega} V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) +$$

$$\min_{Z\in\mathcal{Z}_n^*} \frac{1}{N}\sum_{\gamma\in Z}\sum_{x\in\gamma} \parallel s_\nu(B(x,l)) - \left(\frac{1}{\mathrm{card}(\gamma)}\sum_{y\in\gamma} s_\nu(B(y,l))\right) \parallel^2 \qquad (114)$$

gilt. Ferner gibt es für jede $n-$optimale Menge $\alpha \in C_{n,2}(\nu)$ eine $n-$optimale Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}_n^*$ von ω, die α induziert, d.h.

$$C_{n,2}(\nu) \subset \{\{s_\nu(\cup_{x\in\gamma} B(x,l)) : \gamma \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\}. \tag{115}$$

Beweis.
Durch anschließende Minimumsbildung über alle $n \in \{1,..,N\}$ können wir o.B.d.A. l_0 in Abhängigkeit von n wählen. Sei also $n \in \{1,..,N\}$. Wir wählen l_0 gemäß Lemma 4.10. Sei $l < l_0$ und ν ein (l,ω)-separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei $\alpha \in C_{n,2}(\nu)$. Wir untergliedern den restlichen Beweis in mehrere Schritte.

1. Wir zeigen Beziehung (115).

Nach Lemma 4.10 (b) induziert α eine $n-$optimale Zerlegung Z von ω, d.h.

$$Z = \{\omega(a \mid \alpha) : a \in \alpha\} \in \mathcal{Z}_n^*. \tag{116}$$

Darüberhinaus gilt nach Lemma 4.10 (b) für jedes $a \in \alpha$, dass

$$\{x \in \omega : B(x,l) \subset W(a \mid \alpha)\} = \omega(a \mid \alpha). \tag{117}$$

Nach Satz 2.2 (i) und Satz 2.1 (c) besteht α aus den ν-Schwerpunkten seiner Voronoizellen, d.h.

$$\alpha = \{s_\nu(W(a \mid \alpha)) : a \in \alpha\}. \tag{118}$$

Da $\mathrm{supp}(\nu) \subset \cup_{x\in\omega} B(x,l)$ folgt aus (117) und (118), dass

$$\begin{aligned} \alpha &= \{s_\nu(\cup_{x\in\omega(a|\alpha)} B(x,l)) : a \in \alpha\} \\ &= \{s_\nu(\cup_{x\in\gamma} B(x,l)) : \gamma \in Z\}. \end{aligned}$$

Da α beliebig gewählt ist, folgt die Richtigkeit von (115).

2. Als nächstes geben wir eine untere Schranke für $V_{n,2}(\nu)$ an.
Aus Satz 2.2 (ii) folgt

$$V_{n,2}(\nu) = \sum_{a\in\alpha} \nu(W(a \mid \alpha)) \cdot V_{1,2}(\nu(\cdot \mid W(a \mid \alpha))).$$

Nach Definition ist $\nu(B(x,l)) = \frac{1}{N}$. Die Anwendung von (116) und (117) ergibt

$$V_{n,2}(\nu) = \sum_{\gamma\in Z} \frac{\mathrm{card}(\gamma)}{N} \cdot V_{1,2}(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x\in\gamma} B(x,l))).$$

Somit folgt durch Anwendung von Lemma 4.13 die Identität

$$\begin{aligned} V_{n,2}(\nu) &= \frac{1}{N} \sum_{\gamma\in Z} \sum_{x\in\gamma} \Big(V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \\ &\quad + \| \, s_\nu(B(x,l)) - \frac{1}{\mathrm{card}(\gamma)} \sum_{y\in\gamma} s_\nu(B(y,l)) \, \|^2 \Big), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} V_{n,2}(\nu) &\geq \min_{Z\in\mathcal{Z}_n^*} \frac{1}{N} \sum_{\gamma\in Z} \sum_{x\in\gamma} \Big(V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \\ &\quad + \| \, s_\nu(B(x,l)) - \frac{1}{\mathrm{card}(\gamma)} \sum_{y\in\gamma} s_\nu(B(y,l)) \, \|^2 \Big). \end{aligned} \tag{119}$$

3. Um die Ungleichung in der anderen Richtung zu zeigen, schließen wir indirekt. Es existiere ein $Y \in \mathcal{Z}_n^* \backslash \{Z\}$, mit

$$V_{n,2}(\nu) \quad > \quad \frac{1}{N} \sum_{\eta \in Y} \sum_{x \in \eta} \Bigg(V_{1,2}(\nu(\cdot \mid B(x,l))) \\ + \parallel s_\nu(B(x,l)) - \frac{1}{\mathrm{card}(\eta)} \sum_{y \in \eta} s_\nu(B(y,l)) \parallel^2 \Bigg).$$

Nach Lemma 4.13 ist die rechte Seite der obigen Ungleichung identisch mit

$$\sum_{\eta \in Y} \frac{\mathrm{card}(\eta)}{N} \cdot V_{1,2}\Bigg(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x \in \eta} B(x,l)) \Bigg).$$

Wir setzen $\beta = \{s_{Q_\omega}(\eta) : \eta \in Y\}$. Aus Lemma 4.10 (a) folgt

$$\sum_{\eta \in Y} \frac{\mathrm{card}(\eta)}{N} \cdot V_{1,2}\Bigg(\nu(\cdot \mid \bigcup_{x \in \eta} B(x,l)) \Bigg) = \sum_{b \in \beta} \nu(W(b \mid \beta)) V_{1,2}(\nu(\cdot \mid W(b \mid \beta))).$$

Nach [13], Lemma 3.3 ist die rechte Seite der obigen Ungleichung größer oder gleich $V_{n,2}(\nu)$. Mithin ergibt sich der Widerspruch $V_{n,2}(\nu) > V_{n,2}(\nu)$. Somit gilt Gleichheit in (119), womit auch Gleichung (114) bewiesen ist. □

4.15 Bemerkung
Im Spezialfall $n = N$ ist Gleichung (114) identisch mit Gleichung (76) aus Proposition 4.2 (a). Beispiel 4.12 und das Beispiel aus Bemerkung 4.4 zeigen, dass der Fall $l_0 < \frac{d_{\min}(\omega)}{2}$ in Proposition 4.14 sehr wohl auftritt bzw. den Regelfall darstellt.

4.3 Approximationsresultate für den optimalen Quantisierungsfehler

Für zwei Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathfrak{M}_r$ wissen wir, dass kleine Abstände zwischen den Maßen, im Sinne der L_r-minimalen Metrik, zu kleinen Abständen zwischen den zugehörigen optimalen Quantisierungsfehlern führen (siehe Satz 2.5 (a)). Im vorliegenden Spezialfall des $(l,\omega)-$separierten Wahrscheinlichkeitsmaßes ν und der Gleichverteilung auf ω, können wir diese Stetigkeitsaussage quantitativ in Abhängigkeit von l, r und ω formulieren.
Für eine beliebige Menge $C \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne

$$1_C(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in C \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{120}$$

die charakteristische Funktion auf C.

4.16 Proposition
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r > 1$. Sei ν ein (l,ω)-separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann ist

$$\mid V_{n,r}(\nu) - V_{n,r}(Q_\omega) \mid \leq \begin{cases} lr(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1}, & \textit{falls } n < N \\ l^r, & \textit{falls } n \geq N \end{cases}.$$

Beweis.
Sei $n \geq N$. Dann ist $V_{n,r}(Q_\omega) = 0$ und

$$| V_{n,r}(\nu) - V_{n,r}(Q_\omega) | = V_{n,r}(\nu) \leq \Psi_{\omega,r}(\nu) \leq l^r.$$

Falls $n < N$ haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

1. $V_{n,r}(\nu) \geq V_{n,r}(Q_\omega)$.
Mit einem $\alpha \in C_{n,r}(Q_\omega)$ folgt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\nu) - V_{n,r}(Q_\omega) &\leq \int d(y,\alpha)^r d\nu(y) - \int d(y,\alpha)^r dQ_\omega(y) \\ &= \sum_{x\in\omega} \left(\int_{B(x,l)} d(y,\alpha)^r d\nu(y) - \frac{1}{N} d(x,\alpha)^r \right). \quad (121) \end{aligned}$$

Aufgrund von $\nu(B(x,l)) = \frac{1}{N}$ für alle $x \in \omega$, entspricht die rechte Seite von (121) dem Ausdruck

$$\begin{aligned} &\sum_{x\in\omega} \int_{B(x,l)} \left(d(y,\alpha)^r - d(x,\alpha)^r\right) d\nu(y) \\ \leq &\sum_{x\in\omega} \int_{B(x,l)} \left(d(y,\alpha)^r - d(x,\alpha)^r\right) 1_{\{z\in B(x,l): d(z,\alpha)\geq d(x,\alpha)\}}(y) d\nu(y). \quad (122) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun alle Punkte $x \in \omega$ und $y \in B(x,l)$, für die $d(y,\alpha) \geq d(x,\alpha)$ gilt. Wir wählen ein $\xi(y)$ aus dem Intervall $[d(x,\alpha), d(y,\alpha)]$, so dass

$$d(y,\alpha)^r - d(x,\alpha)^r = r\xi(y)^{r-1}(d(y,\alpha) - d(x,\alpha)) \quad (123)$$

gilt. Satz 2.1 (d) sichert

$$\alpha \subset \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(Q_\omega))}.$$

Andererseits gilt

$$\mathrm{diam}\left(\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(Q_\omega))}\right) = \mathrm{diam}(\omega),$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \max(d(y,\alpha), d(x,\alpha)) &\leq d(x,\alpha) + d(x,y) \\ &\leq \mathrm{diam}(\omega) + l \end{aligned}$$

ergibt. Aus Gleichung (123) folgt

$$d(y,\alpha)^r - d(x,\alpha)^r \leq r(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1} d(x,y) \leq rl(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1}.$$

Somit erhalten wir für (122) die obere Schranke

$$\sum_{x\in\omega} \int_{B(x,l)} rl(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1} d\nu(y) = rl(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1}.$$

Im Hinblick auf (121) folgt

$$V_{n,r}(\nu) - V_{n,r}(Q_\omega) \leq rl(l + \mathrm{diam}(\omega))^{r-1}.$$

2. $V_{n,r}(\nu) < V_{n,r}(Q_\omega)$.
Wir wählen ein $\alpha \in C_{n,r}(\nu)$ und erhalten analog zum ersten Fall die Ungleichung

$$\begin{aligned} & V_{n,r}(Q_\omega) - V_{n,r}(\nu) \\ \leq & \sum_{x\in\omega} \int_{B(x,l)} (d(x,\alpha)^r - d(y,\alpha)^r) d\nu(y) \\ \leq & \sum_{x\in\omega} \int_{B(x,l)} (d(x,\alpha)^r - d(y,\alpha)^r) 1_{\{z\in B(x,l): d(x,\alpha)\geq d(z,\alpha)\}}(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun alle Punkte $x \in \omega$ und $y \in B(x,l)$, für die $d(y,\alpha) \leq d(x,\alpha)$ gilt. In Analogie zum ersten Fall schließen wir

$$0 < V_{n,r}(Q_\omega) - V_{n,r}(\nu) \leq rl(l + \operatorname{diam}(\omega))^{r-1}.$$

Aus den beiden behandelten Fällen folgt die Behauptung. □

Für ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß ν, Normexponent $r \in [1, \infty[$ und $N > 2$ sei

$$\begin{aligned} & D_{\min}(r, N, \nu) \\ = & \min\{V_{n,r}(\nu) - V_{n+1,r}(\nu) - (V_{n+1,r}(\nu) - V_{n+2,r}(\nu)) : n \in \{1, .., N-2\}\} \\ = & \min\{V_{n,r}(\nu) + V_{n+2,r}(\nu) - 2V_{n+1,r}(\nu) : n \in \{1, .., N-2\}\}. \end{aligned} \tag{124}$$

$D_{\min}(r, N, \nu)$ stellt die minimal auftretende Differenz der optimalen Quantisierungsfehler im Bereich $n = 1, .., N$ dar.

Analog zur in Proposition 4.16 formulierten Stetigkeitsaussage für den optimalen Quantisierungsfehler wird im Folgenden eine solche Aussage für die Differenzen der optimalen Quantisierungsfehler bewiesen.

4.17 Lemma
Sei $N > 2$ und $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$. Sei $C > 0$ und ν ein (l, ω)-separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Ist

$$0 < l < \min\left(\frac{D_{\min}(r, N, Q_\omega)}{4r((1+C)\operatorname{diam}(\omega))^{r-1}}, C \cdot \operatorname{diam}(\omega) \right),$$

dann ist $D_{\min}(r, N, \nu) > 0$.

Beweis.
Sei $n \in \{1, .., N-2\}$ und $C > 0$. Gemäß Proposition 4.16 gilt

$$V_{n,r}(\nu) - V_{n+1,r}(\nu) \geq V_{n,r}(Q_\omega) - V_{n+1,r}(Q_\omega) - 2(lr(l + \operatorname{diam}(\omega))^{r-1}).$$

Aus der Definition (124) folgt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\nu) - V_{n+1,r}(\nu) \quad \geq \quad & V_{n+1,r}(Q_\omega) - V_{n+2,r}(Q_\omega) + D_{\min}(r, N, Q_\omega) \\ & -2(lr(l + \operatorname{diam}(\omega))^{r-1}). \end{aligned}$$

Mittels Proposition 4.16 erhalten wir

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\nu) - V_{n+1,r}(\nu) \quad &\geq \quad V_{n+1,r}(\nu) - V_{n+2,r}(\nu) + D_{\min}(r, N, Q_\omega) \\ &\quad -4(lr(l + \operatorname{diam}(\omega))^{r-1}). \end{aligned} \tag{125}$$

Aus der Voraussetzung schließen wir

$$lr(l + \operatorname{diam}(\omega))^{r-1} \leq lr((1 + C)\operatorname{diam}(\omega))^{r-1} < \frac{D_{\min}(r, N, Q_\omega)}{4}. \tag{126}$$

Mittels (126) und (125) gilt

$$V_{n+1,r}(\nu) - V_{n+2,r}(\nu) > V_{n+1,r}(\nu) - V_{n+2,r}(\nu),$$

woraus $D_{\min}(r, N, \nu) > 0$ folgt. □

4.18 Bemerkung
Aus dem Beweis von Lemma 4.17 erkennt man sofort, dass eine analoge Aussage im negativen Fall gilt, d.h. ist $D_{\min}(r, N, Q_\omega) < 0$ und gilt die Beziehung

$$0 < l < \min\left(\frac{\mid D_{\min}(r, N, Q_\omega) \mid}{4r((1 + C)\operatorname{diam}(\omega))^{r-1}}, C \cdot \operatorname{diam}(\omega)\right)$$

für ein $C > 0$, so ist $D_{\min}(r, N, \nu) < 0$.

5 Monotonieeigenschaften der Differenzenfolge des optimalen Quantisierungsfehlers diskreter Gleichverteilungen

In diesem Kapitel sei $d \geq 1$ und $\omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $2 \leq \operatorname{card}(\omega) < \infty$. Wiederum bezeichnen wir zur Abkürzung $\operatorname{card}(\omega)$ mit N. Nach Satz 2.4 (a) ist $V_{n,r}(Q_\omega) > V_{n+1,r}(Q_\omega)$ für alle $n \in \{1, .., N-1\}$, d.h. der n-optimale Quantisierungsfehler für Q_ω ist strikt monoton fallend in n. Man kann nun die Frage stellen, ob auch die Quantisierungsfehlerdifferenzen strikt monoton fallend in n sind, d.h. ob für $N \geq 3$ und jedes $n \in \{1, .., N-2\}$ generell die Beziehung

$$V_{n,r}(Q_\omega) - V_{n+1,r}(Q_\omega) > V_{n+1,r}(Q_\omega) - V_{n+2,r}(Q_\omega)$$

vorliegt, was nach Definition (124) genau dann der Fall ist, wenn $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ gilt. Dies ist jedoch im allgemeinen zu verneinen, d.h. der Fall $D_{\min}(r, N, Q_\omega) \leq 0$ kann auftreten (siehe Bemerkung 5.6).

Für die Untersuchungen der optimalen Quantisierung von Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme in Kapitel 6, ist es von entscheidender Bedeutung zu wissen, unter welchen Bedingungen der Fall $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ vorliegt. In diesem Kapitel werden hierfür verschiedene Kritierien bewiesen.

Anschaulich interpretiert bedeutet $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$, dass der Genauigkeitsgewinn bei fortschreitendem $n \in \{1, .., N-2\}$ strikt abnimmt.

5.1 Eindimensionale diskrete Gleichverteilungen

Wir definieren

$$K_\omega = \{\psi \subset \omega : \operatorname{card}(\psi) = 2\} \neq \emptyset$$

und die Abbildung

$$K_\omega \ni \psi \xrightarrow{L} \operatorname{diam}(\psi) \in]0, \infty[.$$

Interpretiert man ω als die Knoten eines Graphen, so stellt K_ω die Menge aller möglichen ungerichteten Kanten zwischen verschiedenen Knoten dar. Für eine ungerichtete Kante $\psi \in K_\omega$ ist $\operatorname{diam}(\psi)$ deren Länge.

Falls $\operatorname{card}(K_\omega) \geq 2$, sei

$$M_\omega = \max\left\{\frac{\operatorname{diam}(\psi)}{\operatorname{diam}(\chi)} : \psi, \chi \in K_\omega; \psi \neq \chi; \operatorname{diam}(\psi) \leq \operatorname{diam}(\chi)\right\} \in]0, 1].$$

5.1 Bemerkung
Unter der Voraussetzung $\operatorname{card}(K_\omega) \geq 2$ ist die Abbildung L genau dann injektiv, wenn $M_\omega < 1$. In diesem Fall haben alle Kanten unterschiedliche Länge.

Im Folgenden beweisen wir nun ein hinreichendes Kritierum für die Monotoniebedingung $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ in einer Dimension.

5.2 Proposition
Sei $\omega \subset \mathbb{R}$ mit $3 \leq N < \infty$. Es sei $M_\omega < 1$ und

$$r_0 = \max\left(2, \frac{\log\left(\frac{3}{4}N^4\right)}{-\log(M_\omega)}\right).$$

Für alle $r > r_0$ gilt dann

$$D_{\min}(r, N, Q_\omega) \geq \left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r \left(\frac{4}{N^4} - 3M_\omega^r\right) > 0.$$

Beweis.
Wir gliedern den Beweis in mehrere Schritte.
1. Zuerst geben wir eine untere Schranke für $V_{1,r}(Q_\omega)$ an.
Dazu sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\{a\} \in C_{1,r}(Q_\omega)$. Offensichtlich ist

$$V_{1,r}(Q_\omega) = \frac{1}{N}\sum_{x\in\omega} \mid x - a \mid^r . \tag{127}$$

Mit $\mathrm{card}(\omega) = N$ notieren wir $\omega = \{x_1, .., x_N\}$, wobei $x_1 < x_2 < ... < x_N$. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq \frac{x_1+x_N}{2}$. Anderenfalls können wir das gesamte Quantisierungsproblem am Punkt $\frac{x_1+x_N}{2}$ wegen Satz 2.4 (c) spiegeln. Wir definieren $y_1 = x_1; y_2 = ... = y_N = x_N$. Es sei $b \in \mathbb{R}^d$ mit $\{b\} \in C_{1,r}(\frac{1}{N}\delta_{\{y_1\}} + \frac{N-1}{N}\delta_{\{y_N\}})$. Wegen $y_i \geq x_i$ für alle $i \in \{1, .., N\}$ gilt $b \geq a$, bzw.

$$a - \frac{x_1 + x_N}{2} \leq b - \frac{x_1 + x_N}{2}. \tag{128}$$

Aus Satz 2.1 (c)/(d) wissen wir, dass b das eindeutige Minimum der strikt konvexen Funktion

$$[x_1, x_N] \ni z \to F_r(z) \in]0, \infty[$$

ist, mit

$$F_r(z) = \frac{1}{N}(z - x_1)^r + \frac{N-1}{N}(x_N - z)^r,$$

bzw.

$$F_r(b) = V_{1,r}\left(\frac{1}{N}\delta_{\{y_1\}} + \frac{N-1}{N}\delta_{\{y_N\}}\right).$$

Somit ist $F_r'(b) = 0$, woraus

$$(b - x_1)^{r-1} = (N-1)(x_N - b)^{r-1},$$

bzw.

$$b = \frac{x_N + x_1(\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}}}{1 + (\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}}}$$

folgt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} b - \frac{x_1 + x_N}{2} &= \frac{x_1\left((\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}} - 1\right) - x_N\left((\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}} - 1\right)}{2\left(1 + (\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}}\right)} \\ &= \frac{x_N - x_1}{2} \cdot \varepsilon(N, r), \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon(N,r) = \frac{1-(\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}}}{1+(\frac{1}{N-1})^{\frac{1}{r-1}}}.$$

Zusammen mit (128) folgt

$$a - \frac{x_1+x_N}{2} \leq \frac{x_N-x_1}{2}\cdot\varepsilon(N,r). \tag{129}$$

Man beachte, dass $\varepsilon(N,r) \in]0,1[$ und $\varepsilon(N,r) \to 0$ für $r \to \infty$. Aus (127) schließen wir

$$V_{1,r}(Q_\omega) \geq \frac{1}{N}\left(\mid x_1 - a \mid^r + \mid x_N - a \mid^r\right).$$

Wegen $x_N \geq a \geq \frac{x_1+x_N}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} V_{1,r}(Q_\omega) &\geq \frac{1}{N}\left(\frac{x_N-x_1}{2} + a - \frac{x_1+x_N}{2}\right)^r \\ &+ \frac{1}{N}\left(\frac{x_N-x_1}{2} - \left(a - \frac{x_1+x_N}{2}\right)\right)^r, \end{aligned}$$

woraus mit (129) folgt, dass

$$\begin{aligned} V_{1,r}(Q_\omega) &\geq \frac{1}{N}\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega)}{2}\right)^r \left((1-\varepsilon(N,r))^r + 1\right) \\ &> \frac{2}{N}\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega)}{2}\right)^r \left(1-\varepsilon(N,r)\right)^r. \end{aligned} \tag{130}$$

2. Nun geben wir eine untere Schranke für $V_{n,r}(Q_\omega)$ an.
Es sei $n \in \{1,..,N-1\}$ und $\alpha \in C_{n,r}(Q_\omega)$.
Für $a \in \alpha$ sei an die Definition $\omega(a \mid \alpha) = \omega \cap W(a \mid \alpha)$ erinnert. Wir schreiben hier kurz $\omega_a = \omega(a \mid \alpha)$. Aus Satz 2.3 folgt bei $n \geq 2$, dass $\omega_a \cap \omega_b = \emptyset$ für alle $a, b \in \alpha$ mit $a \neq b$. Nach Voraussetzung ist $M_\omega < 1$. Aus Bemerkung 5.1 folgt die Injektivität von L. Somit gibt es genau ein $a_0 \in \alpha$, mit

$$\operatorname{diam}(\omega_{a_0}) = \max_{a\in\alpha} \operatorname{diam}(\omega_a) > 0.$$

Mittels Satz 2.2 (ii) folgern wir

$$\begin{aligned} V_{n,r}(Q_\omega) &= \sum_{a\in\alpha} V_{1,r}(Q_{\omega_a}) \cdot \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} \\ &= \sum_{a\in\alpha\setminus\{a_0\}} V_{1,r}(Q_{\omega_a}) \cdot \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} + V_{1,r}(Q_{\omega_{a_0}}) \cdot \frac{\operatorname{card}(\omega_{a_0})}{N}. \end{aligned}$$

Ungleichung (130) gilt auch, falls $\operatorname{card}(\omega_{a_0}) = 2$ und $\varepsilon(2,r) = 0$. Somit gilt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(Q_\omega) &\geq \frac{2}{N}\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0})}{2}\right)^r (1-\varepsilon(\operatorname{card}(\omega_{a_0}),r))^r \cdot \frac{\operatorname{card}(\omega_{a_0})}{N} \\ &+ \sum_{a\in\alpha\setminus\{a_0\}} \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} V_{1,r}(Q_{\omega_a}). \end{aligned} \tag{131}$$

3. Nun ermitteln wir eine obere Schranke für $V_{n+1,r}(Q_\omega)$.
Es sei $x_0 = \min(\omega_{a_0})$. Wegen $\operatorname{diam}(\omega_{a_0}) > 0$ ist $\omega_{a_0}\backslash\{x_0\} \neq \emptyset$. Es bezeichne $\{y\}$ die nach Satz 2.1 (c) eindeutige 1-optimale Menge von $Q_{\omega_{a_0}\backslash\{x_0\}}$. Wir definieren die Menge $\beta = \{y\} \cup \{x_0\} \cup (\alpha\backslash\{a_0\})$. Mit Satz 2.2 (ii) folgt

$$\begin{aligned}
& V_{n+1,r}(Q_\omega) \leq \Psi_{\beta,r}(Q_\omega) \\
\leq\ & \frac{\operatorname{card}(\omega_{a_0})}{N}\left(0 + \frac{\operatorname{card}(\omega_{a_0})-1}{\operatorname{card}(\omega_{a_0})} \cdot V_{1,r}(Q_{\omega_{a_0}\backslash\{x_0\}})\right) \\
& + \sum_{a\in\alpha\backslash\{a_0\}} \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} \cdot V_{1,r}(Q_{\omega_a}) \\
<\ & \left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0}\backslash\{x_0\})}{2}\right)^r + \sum_{a\in\alpha\backslash\{a_0\}} \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} \cdot V_{1,r}(Q_{\omega_a}). \qquad (132)
\end{aligned}$$

Aus (132) und (131) schließen wir für alle $n \in \{1, .., N-2\}$, dass

$$\begin{aligned}
& V_{n,r}(Q_\omega) - 2V_{n+1,r}(Q_\omega) \\
\geq\ & \frac{2}{N}\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0})}{2}\right)^r (1-\varepsilon(\operatorname{card}(\omega_{a_0}), r))^r \cdot \frac{\operatorname{card}(\omega_{a_0})}{N} \\
& -2\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0}\backslash\{x_0\})}{2}\right)^r - \sum_{a\in\alpha\backslash\{a_0\}} \frac{\operatorname{card}(\omega_a)}{N} \cdot V_{1,r}(Q_{\omega_a}) \\
\geq\ & \frac{4}{N^2}\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0})}{2}\right)^r (1-\varepsilon(\operatorname{card}(\omega_{a_0}), r))^r - 2\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0}\backslash\{x_0\})}{2}\right)^r \\
& - \left(\frac{\max_{a\in\alpha\backslash\{a_0\}} \operatorname{diam}(\omega_a)}{2}\right)^r.
\end{aligned}$$

Aus der Definition von M_ω und $\varepsilon(\cdot, r)$ folgern wir

$$\begin{aligned}
& (V_{n,r}(Q_\omega) - 2V_{n+1,r}(Q_\omega))\left(\frac{\operatorname{diam}(\omega_{a_0})}{2}\right)^{-r} \\
\geq\ & \frac{4}{N^2}(1-\varepsilon(\operatorname{card}(\omega_{a_0}), r))^r - 3M_\omega^r \\
\geq\ & \frac{4}{N^2}(1-\varepsilon(N, r))^r - 3M_\omega^r \\
>\ & \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{N-1}\right)^{\frac{r}{r-1}} - 3M_\omega^r \\
>\ & \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{r}{r-1}} - 3M_\omega^r.
\end{aligned}$$

Falls $r > 2$, ist die rechte Seite der obigen Ungleichung größer als $\frac{4}{N^4} - 3M_\omega^r$, was wiederum strikt größer als Null ist, falls $r > \frac{\log(\frac{3}{4}N^4)}{-\log(M_\omega)}$. Mit der Definition von r_0 folgt $V_{n,r}(Q_\omega) - 2V_{n+1,r}(Q_\omega) > 0$ für alle $r > r_0$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

5.3 Bemerkung
Ohne die Voraussetzung der Injektivität von L in Proposition 5.2 ist die Frage nach der Monotonieeigenschaft der optimalen Quantisierungsfehlerdifferenzen wesentlich schwieriger zu beantworten.
Bei nichtinjektivem L kann die Monotonieeigenschaft vorliegen, oder auch nicht. Sei z.B. $\omega = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Hier ist L nicht injektiv. Eine direkte Berechnung zeigt
$D_{\min}(r, 3, Q_\omega) > 0$ für alle $r > 1$. Bei $\omega = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ ergibt sich
$D_{\min}(r, 4, Q_\omega) = 0$ für alle $r > 1$, wobei L in diesem Fall aber auch nicht injektiv ist.

5.2 Zweidimensionale diskrete Gleichverteilungen mit dreipunktigem Träger

Im zweidimensionalen Raum ist die Frage, wann $D_{\min}(r, \operatorname{card}(\omega), Q_\omega) > 0$ vorliegt, wesentlich schwieriger zu beantworten. In diesem Abschnitt sei $\operatorname{card}(\omega) = 3$. Unter dieser Voraussetzung können wir diese Frage beantworten.

5.4 Proposition
Sei $d \geq 2$, $\operatorname{card}(\omega) = 3$ und $r \in]1, \infty[$. Dann ist

$$D_{\min}(r, 3, Q_\omega) \geq \left(\frac{d_{\min}(\omega)}{\sqrt{3}}\right)^r - \frac{4}{3}\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r. \tag{133}$$

Allgemein gilt $D_{\min}(r, 3, Q_\omega) > 0$ für $r > 2$. Genau dann, wenn $d_{\min}(\omega) = \operatorname{diam}(\omega)$, gilt Gleichheit in (133).

Beweis.
Aufgrund von Satz 2.4 (c) ist die Behauptung invariant unter isometrischen Abbildungen. Damit können wir o.B.d.A. annehmen, dass $d = 2$. Sei $\omega = \{A, B, C\}$. Sei

$$u = \inf\{\| A - P \| + \| B - P \| + \| C - P \| \colon P \in \mathbb{R}^2\}$$

und $F \in \mathbb{R}^2$. Genau dann ist $\{F\} \in C_{1,1}(Q_\omega)$, wenn

$$u = \| A - F \| + \| B - F \| + \| C - F \| \tag{134}$$

gilt. Das durch (134) definierte Minimierungsproblem hat folgende eindeutige Lösung (siehe [7], Seite 360ff): für genau einen Punkt $F \in \operatorname{conv}(\omega)$ gilt Gleichung (134).

(a) Falls das durch ω aufgespannte Dreieck einen Winkel größer oder gleich $\frac{2}{3}\pi$ besitzt, dann ist F der Scheitelpunkt dieses Winkels.

(b) Anderenfalls ist F genau der Punkt, für den jeder der drei Winkel BFC, CFA und AFB, bei denen F jeweils den Scheitelpunkt bildet, den Wert $\frac{2}{3}\pi$ aufweist.

Der Punkt F wird Fermatpunkt genannt. Aufgrund von Satz 2.1 (d) kann es keine weiteren Lösungen des Minimierungproblems im Bereich $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{conv}(\omega)$ geben. Somit ist der Fermatpunkt eindeutig in $\mathbb{R}^2$ und es gilt $C_{1,1}(Q_\omega) = \{\{F\}\}$. Falls wir über jeder Seite des Dreiecks ω ein gleichseitiges Dreieck konstruieren (siehe Abbildung 5), so erhalten wir die Dreiecke $BA'C$, ACB' und BAC'. Die Seiten AA', BB', und CC' haben alle die gleiche Länge u und ihr gemeinsamer Schnittpunkt entspricht dem

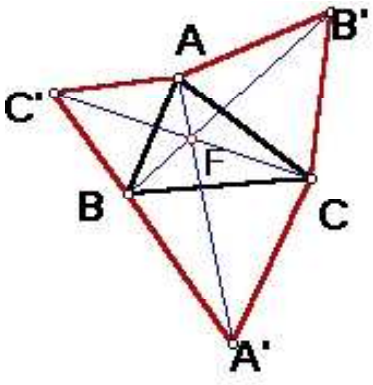

Abbildung 5: Der Fermatsche Punkt

Fermatpunkt. Der Beweis dieser Tatsache findet sich ebenfalls in [7]. Wir unterscheiden nun im Folgenden die beiden Fälle.

1. Es liege Fall (a) vor.

Hier gilt $u \geq 2d_{\min}(\omega)$, so dass

$$V_{1,r}(Q_\omega) \geq \frac{2}{3}(d_{\min}(\omega))^r > \left(\frac{d_{\min}(\omega))}{\sqrt{3}}\right)^r. \tag{135}$$

2. Es liege Fall (b) vor.

Wir berechnen zunächst u. Dazu verwenden wir die Standardnotation a, b und c für die Seiten des Dreiecks $\{A, B, C\}$. Die Winkel α, β und γ gehören zu den Ecken A, B und C. Mit Δ bezeichnen wir die Fläche des Dreiecks $\{A, B, C\}$. Man beachte, dass $A'B = BC = a$. Deshalb folgt aus dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} u^2 = (AA')^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\beta + \frac{\pi}{3}) \\ &= c^2 + a^2 - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos(\beta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\beta)\right) \\ &= c^2 + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} + 2ac\sqrt{3}\frac{\Delta}{ac} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta. \end{aligned} \tag{136}$$

Offensichtlich ist $V_{3,r}(Q_\omega) = 0$, bzw. $V_{2,r}(Q_\omega) = \frac{2}{3}(\frac{d_{\min}(\omega)}{2})^r$. Sei $\{P\} \in C_{1,r}(Q_\omega)$. Wir schließen aus (134), dass

$$u \leq \| A - P \| + \| B - P \| + \| C - P \|.$$

Somit gibt es ein $u_1 \in \{\| A - P \|, \| B - P \|, \| C - P \|\}$, mit $\frac{u}{3} \leq u_1$. Wir bezeichnen

$$\{\| A - P \|, \| B - P \|, \| C - P \|\} \backslash \{u_1\} = \{u_2, u_3\}.$$

Da $u_1 + u_2 + u_3 \geq u$, folgt mit der Konvexität von $t \to t^r$, dass

$$\begin{aligned} V_{1,r}(Q_\omega) &= \frac{1}{3}(u_1^r + u_2^r + u_3^r) \\ &\geq \frac{3}{3}\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}\right)^r \geq (\frac{u}{3})^r. \end{aligned} \tag{137}$$

Für die Fläche Δ des Dreiecks ω gilt

$$\Delta \geq \frac{1}{2}(d_{\min}(\omega))^2 \cdot \max\left(\sin(\alpha), \sin(\beta), \sin(\gamma)\right).$$

Mindestens ein Winkel liegt im Bereich $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$. Deshalb folgt

$$\Delta \geq \frac{1}{2}(d_{\min}(\omega))^2 \frac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{138}$$

Die Kombination von (136), (137) und (138) liefert

$$\begin{aligned} V_{1,r}(Q_\omega) &\geq \left(\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta}}{3}\right)^r \\ &\geq \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3(d_{\min}(\omega))^2}{2} + 2\sqrt{3}\frac{1}{2}(d_{\min}(\omega))^2\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^r \\ &= \left(\frac{d_{\min}(\omega))}{\sqrt{3}}\right)^r. \end{aligned} \tag{139}$$

Somit folgt aus (135) und (139) im Falle (a) und (b), dass

$$\begin{aligned} D_{\min}(r, 3, Q_\omega) &= V_{1,r}(Q_\omega) - 2V_{2,r}(Q_\omega) \\ &\geq \left(\frac{d_{\min}(\omega)}{\sqrt{3}}\right)^r - \frac{4}{3}\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r, \end{aligned}$$

was strikt positiv ist, falls $\frac{3}{4} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^r$. Das ist exakt der Fall, falls $r > 2$.

Nun sei $\operatorname{diam}(\omega) = d_{\min}(\omega)$. Aus Lemma A.3 folgt $V_{1,r}(Q_\omega) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^r \operatorname{diam}^r(\omega)$, was zur Gleichheit in (133) führt. Liegt umgekehrt die Gleichheit in (133) vor, so kann wegen (135) nur Fall (b) auftreten und es muss demzufolge Gleichheit in (139) herrschen. Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich $a = b = c$, woraus
$\operatorname{diam}(\omega) = d_{\min}(\omega)$ folgt. □

5.5 Bemerkung
Falls das durch ω definierte Dreieck einen Winkel aufweist, der größer oder gleich $\frac{2}{3}\pi$ ist, dann zeigt der Beweis von Proposition 5.4, dass sogar

$$D_{\min}(r, 3, Q_\omega) \geq \frac{2}{3}\left(d_{\min}(\omega)\right)^r - \frac{4}{3}\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r > 0$$

für alle $r \in]1, \infty[$ gilt.

5.6 Bemerkung
Genau dann stellen die Eckpunkte von ω ein gleichschenkliges Dreieck dar, wenn $\mathrm{diam}(\omega) = d_{\min}(\omega)$. In diesem Fall folgt aus Proposition 5.4, dass $D_{\min}(2,3,Q_\omega) = 0$ und $D_{\min}(r,3,Q_\omega) < 0$ für $1 < r < 2$.

5.3 Spezielle diskrete Gleichverteilungen in höheren Dimensionen

Die Herleitung einer hinreichenden Bedingung für $D_{\min}(r,N,Q_\omega) > 0$ in Raumdimension $d \geq 2$ erscheint schwierig, insbesondere wenn $N > 3$.

Jedoch unter einschränkenden Voraussetzungen an die Gestalt von ω, gelingt es für $r = 2$, $N > 3$ und $d \in \mathbb{N}$ ein Kriterium für die Monotoniebedingung $D_{\min}(2,N,Q_\omega) > 0$ zu beweisen, wie die folgende Proposition 5.7 zeigt.

5.7 Proposition
Sei $d \in \mathbb{N}$, $N > 3$ und $\omega = \{x_1,..,x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\omega) = N$. Falls

$$\mathrm{diam}(\{x_1,..,x_i\}) < \frac{1}{\sqrt{i}+2} d(x_{i+1},\{x_1,..,x_i\}), \tag{140}$$

für alle $i \in \{2,..,N-1\}$, dann ist $D_{\min}(2,N,Q_\omega) > 0$.

Beweis.
Für $i \in \{1,..,N\}$ sei $\omega_i = \{x_1,..,x_i\}$ und für eine beliebige nichtleere Teilmenge $\kappa \subset \omega$ sei an die Bezeichnung $s_{Q_\omega}(\kappa) = \frac{1}{\mathrm{card}(\kappa)} \sum_{x\in\kappa} x$ für den Schwerpunkt erinnert.

1. Zunächst geben wir eine untere Schranke für $V_{1,2}(Q_\omega)$ an.
Mit $\omega = \omega_N$ und gemäß Lemma A.3 gilt

$$V_{1,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \| x_i - s_{Q_\omega}(\omega) \|^2 .$$

Durch eine Punktverschiebung um den Schwerpunkt $s_{Q_\omega}(\omega_{N-1})$ folgern wir

$$\begin{aligned} \| x_N - s_{Q_\omega}(\omega) \| &= \| x_N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x_i - \frac{1}{N} x_N \| \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \| x_N - \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x_i \| \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \| x_N - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \| . \end{aligned} \tag{141}$$

Aus Satz 2.1 (c) und (d) folgt $s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \in \overline{\mathrm{conv}(\omega_{N-1})}$. Für ein beliebiges $b \in \omega_{N-1}$ gilt somit

$$\begin{aligned} \| x_N - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \| &= \| x_N - b + b - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \| \\ &\geq \| x_N - b \| - \| b - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \| \\ &\geq d(x_N,\omega_{N-1}) - \mathrm{diam}(\omega_{N-1}). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung (140) erhalten wir

$$\| x_N - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \| > d(x_N, \omega_{N-1}) \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2}).$$

Damit ergibt sich mittels (141), dass

$$\| x_N - s_{Q_\omega}(\omega) \| > d(x_N, \omega_{N-1}) \cdot (1 - \frac{1}{N}) \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2}).$$

Infolgedessen gilt

$$\begin{aligned} V_{1,2}(Q_\omega) &= \frac{1}{N}\left(\| x_N - s_{Q_\omega}(\omega) \|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \| x_i - s_{Q_\omega}(\omega) \|^2 \right) \\ &> \frac{1}{N}(1-\frac{1}{N})^2(1-\frac{1}{\sqrt{N-1}+2})^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}) \\ &\quad + \frac{N-1}{N} V_{1,2}(Q_{\omega_{N-1}}). \end{aligned} \tag{142}$$

2. Als nächstes zeigen wir, dass $V_{2,2}(Q_\omega) = \frac{N-1}{N} V_{1,2}(Q_{\omega_{N-1}})$.
Nach Satz 2.3 und Satz 2.2 (ii) gibt es nichtleere Teilmengen κ, ι von ω mit $\kappa \cup \iota = \omega$, $\kappa \cap \iota = \emptyset$ und

$$V_{2,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N}\left(\sum_{x \in \kappa} \| x - s_{Q_\omega}(\kappa) \|^2 + \sum_{x \in \iota} \| x - s_{Q_\omega}(\iota) \|^2 \right). \tag{143}$$

Ferner ist

$$\| x - s_{Q_\omega}(\kappa) \| \leq \| x - s_{Q_\omega}(\iota) \| \tag{144}$$

für alle $x \in \kappa$ bzw.

$$\| x - s_{Q_\omega}(\iota) \| \leq \| x - s_{Q_\omega}(\kappa) \| \tag{145}$$

für alle $x \in \iota$.
Wählen wir $\iota = \{x_N\}$ und $\kappa = \omega_{N-1}$, liefert Gleichung (143) die obere Schranke

$$V_{2,2}(Q_\omega) \leq \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_{N-1}} \| x - s_{Q_\omega}(\omega_{N-1}) \|^2 \leq \frac{N-1}{N} \left(\operatorname{diam}(\omega_{N-1}) \right)^2. \tag{146}$$

Nun seien κ, ι Mengen, die Gleichung (143) erfüllen. O.B.d.A. sei $x_N \in \iota$. Wir machen die Annahme, dass $\operatorname{card}(\iota) \geq 2$ und führen sie zu einem Widerspruch.
Nach der Annahme gibt es ein $z \in \iota \cap \omega_{N-1} \neq \emptyset$. Aus Satz 2.1 (c) und (d) folgt

$$s_{Q_\omega}(\kappa) \in \overline{\operatorname{conv}(\kappa)} \subset \overline{\operatorname{conv}(\omega_{N-1})}.$$

Mittels (144) und (145) folgt somit

$$\| z - s_{Q_\omega}(\iota) \| \leq \| z - s_{Q_\omega}(\kappa) \| \leq \operatorname{diam}(\omega_{N-1}).$$

Darüberhinaus ist $\| z - x_N \| \geq d(x_N, \omega_{N-1})$. Daraus ergibt sich

$$\| x_N - s_{Q_\omega}(\iota) \| \geq \| x_N - z \| - \| z - s_{Q_\omega}(\iota) \| \geq d(x_N, \omega_{N-1}) - \operatorname{diam}(\omega_{N-1}).$$

Unter Berücksichtigung von (143) und der Voraussetzung (140) folgern wir

$$\begin{aligned} V_{2,2}(Q_\omega) &\geq \frac{1}{N} \parallel x_N - s_{Q_\omega}(\iota) \parallel^2 \\ &\geq \frac{1}{N} \left(d(x_N, \omega_{N-1}) - \operatorname{diam}(\omega_{N-1})\right)^2 \\ &> d^2(x_N, \omega_{N-1}) \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2}\right)^2. \end{aligned} \tag{147}$$

Unter Verwendung von (140) erhalten wir aus (146), dass

$$\begin{aligned} V_{2,2}(Q_\omega) &< \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}+2}\right)^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}) \\ &= \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{N-1}}{2}+1}\right)^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}) \\ &< \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2}\right)^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}), \end{aligned}$$

was (147) widerspricht. Folglich ist $\operatorname{card}(\iota) = 1$ und

$$V_{2,2}(Q_\omega) = \frac{N-1}{N} \cdot V_{1,2}(Q_{\omega_{N-1}}). \tag{148}$$

3. Nun beenden wir den Beweis.
Aus (142) und (148) folgt

$$V_{1,2}(Q_\omega) - V_{2,2}(Q_\omega) > \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2}\right)^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}).$$

Des weiteren folgt aus (146), dass

$$V_{2,2}(Q_\omega) - V_{3,2}(Q_\omega) < V_{2,2}(Q_\omega) \leq \frac{N-1}{N} \left(\operatorname{diam}(\omega_{N-1})\right)^2,$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} & V_{1,2}(Q_\omega) - V_{2,2}(Q_\omega) - (V_{2,2}(Q_\omega) - V_{3,2}(Q_\omega)) \\ > \; & \frac{1}{N}(\frac{N-1}{N})^2(1 - \frac{1}{\sqrt{N-1}+2})^2 d^2(x_N, \omega_{N-1}) \\ & -\frac{N-1}{N}(\operatorname{diam}(\omega_{N-1}))^2 \end{aligned} \tag{149}$$

folgt. Die Argumentation aus Schritt 2 ist leicht auf den Fall $m > 2$ übertragbar. Man erhält somit für alle $m \in \{2, .., N\}$ und alle m-optimalen Mengen $\beta \in C_{m,2}(Q_\omega)$, dass x_N in β liegt. Somit ergibt sich

$$V_{m,2}(Q_\omega) = \frac{N-1}{N} V_{m-1,2}(Q_{\omega_{N-1}}),$$

womit durch Induktion allgemein für jedes $l \in \{2, .., N\}$ und $k \in \{0, .., N-l\}$ folgt, dass

$$V_{l+k,2}(Q_\omega) = \frac{N-l+1}{N} V_{1+k,2}(Q_{\omega_{N-l+1}}). \tag{150}$$

Aus (150) folgt für alle $l \in \{3, .., N\}$, dass

$$\begin{aligned} & V_{N-l+1,2}(Q_\omega) - V_{N-l+2,2}(Q_\omega) - (V_{N-l+2,2}(Q_\omega) - V_{N-l+3,2}(Q_\omega)) \\ = \quad & \frac{l}{N}(V_{1,2}(Q_{\omega_l}) - 2V_{2,2}(Q_{\omega_l}) + V_{3,2}(Q_{\omega_l})). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Abschätzung (149) auch für Q_{ω_l} gilt, wenn N durch l ersetzt wird. Zusammen mit (140) folgt, dass wir für die obige rechte Seite die untere Schranke

$$\begin{aligned} & \frac{l}{N}\left(\frac{1}{l}\left(1-\frac{1}{l}\right)^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{l-1}+2}\right)^2 d^2(x_l,\omega_{l-1}) - \frac{l-1}{l}\left(\operatorname{diam}(\omega_{l-1})\right)^2\right) \\ \geq \quad & \frac{1}{N}\left(\left(\frac{l-1}{l}\right)^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{l-1}+2}\right)^2 d^2(x_l,\omega_{l-1}) \right. \\ & \qquad \left. -(l-1)\left(\frac{1}{\sqrt{l-1}+2}d(x_l,\omega_{l-1})\right)^2\right) \\ = \quad & \frac{d^2(x_l,\omega_{l-1})}{N}\left(\sqrt{l-1}+2\right)^{-2}\left(\left(\frac{l-1}{l}\left(\sqrt{l-1}+1\right)\right)^2 - \left(\sqrt{l-1}\right)^2\right) \end{aligned}$$

erhalten. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} & \frac{l-1}{l}\left(\sqrt{l-1}+1\right) - \sqrt{l-1} \\ = \quad & \sqrt{l-1}+1-\frac{1}{l}\sqrt{l-1}-\frac{1}{l}-\sqrt{l-1} \\ = \quad & 1-\frac{1}{l}\left(\sqrt{l-1}+1\right) \geq 1-\frac{\sqrt{2}+1}{3} > 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch die o.a. untere Schranke strikt positiv und somit $D_{\min}(2, N, Q_\omega) > 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

5.8 Bemerkung
Im Hinblick auf die Voraussetzungen in Proposition 5.2 könnte man vermuten, dass die Bedingung (140) in Proposition 5.7 durch die weniger einschränkende Bedingung $M_\omega < 1$ ersetzt werden kann. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

5.9 Beispiel
Es $\omega_1 = \{(0,0); (1,0); (0,2)\}$. Mit $q = \sqrt{\frac{17}{3}}$ und einem beliebigem $c > 1 + 10q\sqrt{5}$ sei $\omega_2 = \{(c,0); (c+q,0); (c+q,2q)\}$. Für die Schwerpunkte von ω_1 bzw. ω_2 gilt

$$s_{Q_\omega}(\omega_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ bzw. } s_{Q_\omega}(\omega_2) = (c + \frac{2}{3}q, \frac{2}{3}q).$$

Da jeder der beiden Schwerpunkte im Abschluss der konvexen Hülle von ω_1 bzw. ω_2 liegt, erhalten wir

$$\| s_{Q_\omega}(\omega_1) - s_{Q_\omega}(\omega_2) \| \geq d(\omega_1, \omega_2) = c - 1 > 10q\sqrt{5} = 10 \operatorname{diam}(\omega_2). \qquad (151)$$

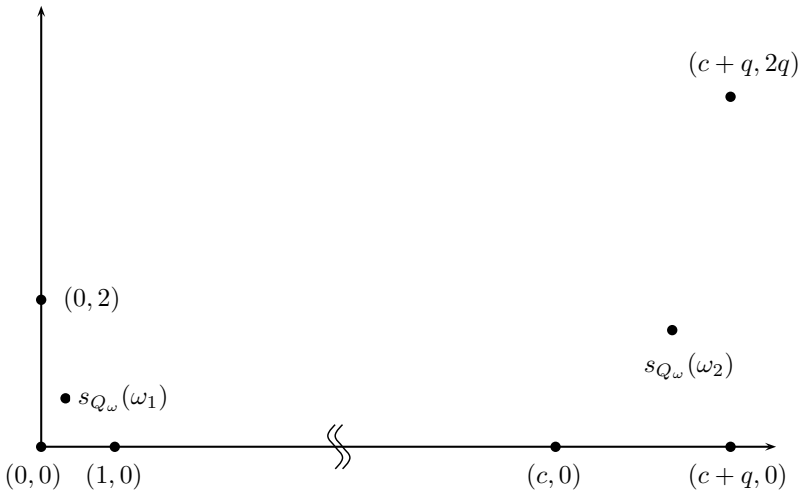

Abbildung 6: Skizze von ω zu Beispiel 5.9

Sei nun $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$. Eine Skizze von ω findet sich in Abbildung 6. Durch Nachrechnen erkennt man, dass alle $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ auftretenden Kanten in ω unterschiedliche Länge besitzen. Es gilt also $M_\omega < 1$. Mittels (151) ist Q_ω ein $(\mathrm{diam}(\omega_2), \{s_{Q_\omega}(\omega_1), s_{Q_\omega}(\omega_2)\})$-separiertes Maß, dass die Voraussetzungen von Proposition 4.2 (b) erfüllt.
Sei $\alpha \in C_{3,2}(Q_\omega)$. Aus Proposition 4.2 (b) erhält man $\overline{\alpha}(s_{Q_\omega}(\omega_1)) \cap \overline{\alpha}(s_{Q_\omega}(\omega_2)) = \emptyset$. Aus elementaren Überlegungen folgt somit $\alpha = \{s_{Q_\omega}(\omega_1); (c+q, 2q); (c+\frac{q}{2}, 0)\}$ bzw.

$$V_{3,2}(Q_\omega) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3}(\frac{q}{2})^2.$$

In derselben Weise und wegen $q = \sqrt{\frac{17}{3}}$ erhält man

$$V_{4,2}(Q_\omega) = \frac{5}{9} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{q}{2})^2$$

bzw.

$$V_{5,2}(Q_\omega) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2.$$

Daraus folgt $V_{3,2}(Q_\omega) - 2V_{4,2}(Q_\omega) + V_{5,2}(Q_\omega) = 0$. Somit ist
$D_{\min}(2, N, Q_\omega) \leq 0$. Eine Berechnung von $V_{1,2}(Q_\omega)$, $V_{2,2}(Q_\omega)$ und $V_{6,2}(Q_\omega) = 0$ ergibt dass genauere Ergebnis $D_{\min}(2, N, Q_\omega) = 0$.

6 Optimale Quantisierung der Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme beliebiger Dimension

Mit den in den beiden vorigen Kapiteln gewonnenen Resultaten sind wir nun in der Lage, die optimale Quantisierung einer weiteren Klasse von singulären Wahrscheinlichkeitsmaßen zu studieren. Es handelt sich dabei um die Gleichverteilungen uniformer iterierter Funktionensysteme in beliebiger endlicher Raumdimension.
Unter bestimmten Voraussetzungen bestimmen wir für diese Maße die optimalen Codebücher, Formeln für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler in zwei verschiedenen Wertebereichen von n und zeigen die Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten. Modifizierte Versionen klassischer uniformer iterierter Funktionensysteme (Cantormenge, Sierpinski-Dreieck, Cantor-Staub) werden als Beispiele diskutiert und zeigen die Anwendbarkeit der Resultate bzw. ihre Gültigkeitsgrenzen auf.

6.1 Definition von uniformen iterierten Funktionensystemen und ihrer Gleichverteilung

Für $d, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ betrachte man das $N-$Tupel $(S_1, .., S_N)$ von Abbildungen mit Kontraktionsfaktor $c \in]0, 1[$, d.h. für jedes $i \in \{1, .., N\}$ und
$x, y \in \mathbb{R}^d$ ist

$$\parallel S_i(x) - S_i(y) \parallel = c \parallel x - y \parallel . \tag{152}$$

Wir nennen dieses $N-$Tupel ein uniformes iteriertes Funktionensystem $(UIFS)$. Für jedes $UIFS$ existiert in eindeutiger Weise eine nichtleere kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, mit der Eigenschaft

$$A = S_1(A) \cup ... \cup S_N(A). \tag{153}$$

Ein Beweis hierfür wurde von Hutchinson ([18], Theorem 3.1. (3) (i)) geliefert. In der Literatur wird A auch häufig als invariantes Kompaktum bzw. Attraktor bezeichnet.

Es existiert nun ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}^d$, dass durch die Eigenschaft

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu \circ S_i^{-1} \tag{154}$$

charakterisiert ist. Wir nennen μ die zu dem $UIFS$ zugehörige uniforme Gleichverteilung. Es ist supp$(\mu) = A$. Ein Beweis all dieser Tatsachen findet sich ebenfalls in [18].

Jede selbstähnliche Abbildung $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit Kontraktionsfaktor $c \in]0, 1[$ besitzt genau einen Fixpunkt x. Des weiteren existiert eine Orthonormalabbildung
$O : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so dass

$$S(z) = c \cdot O(z - x) + x \tag{155}$$

für jedes $z \in \mathbb{R}^d$. (für einen Beweis siehe z.B. [18], Proposition 2.3 (1)).

Sei nun ein $UIFS$ $(S_1, .., S_N)$ gegeben. Wir setzen voraus, dass alle Fixpunkte der Abbildungen des $UIFS$ paarweise voneinander verschieden sind und bezeichnen im Folgenden mit $\omega = \{x_1, .., x_N\}$ die Menge dieser Fixpunkte. Es ist $\omega \subset A$.

6.1 Bemerkung
Für eine beliebige nichtleere und beschränkte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ ist

$$A = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{(i_1,..,i_l) \in \{1,..,N\}^l} S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_l}(K).$$

Ein Beweis findet sich in [18], Theorem 3.1. (3) (viii).

6.2 Optimale Quantisierung für kleine Codebücher

Wir richten unser Augenmerk zunächst auf den Bereich $n \in \{1, .., N\}$. Hier gelingt es unter bestimmten Voraussetzungen, für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler $V_{n,2}(\mu)$ eine explizite Formel zu beweisen und eine Darstellung der optimalen Codebücher anzugeben (siehe Theorem 6.4).

Wegen $A = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$ gibt es $i, j \in \{1, .., N\}$ und Punkte $x \in S_i(A)$, $y \in S_j(A)$, so dass $\operatorname{diam}(A) = \| x - y \|$. Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(A) &\leq \| x - x_i \| + \| x_i - x_j \| + \| x_j - y \| \\ &\leq 2c \cdot \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(\omega), \end{aligned}$$

woraus sich

$$\operatorname{diam}(A) \leq \frac{1}{1-2c} \cdot \operatorname{diam}(\omega) \tag{156}$$

ergibt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$c < \frac{1}{2} \cdot \frac{d_{\min}(\omega)}{\frac{1}{1-2c} \cdot \operatorname{diam}(\omega)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{d_{\min}(\omega)}{\operatorname{diam}(A)} \tag{157}$$

erfüllt ist, falls

$$c < \frac{1}{2} \cdot \frac{d_{\min}(\omega)}{d_{\min}(\omega) + \operatorname{diam}(\omega)}$$

gilt, was wir in diesem Abschnitt voraussetzen wollen. Ferner sei für $x \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, .., N\}$

$$S_i(x) = c \cdot (x - x_i) + x_i. \tag{158}$$

Wir gehen also im Hinblick auf Darstellung (155) davon aus, dass die Abbildungen des $UIFS$ keinen Drehanteil besitzen.

6.2 Bemerkung
Wegen (157) sind die Kugeln $(B(x_i, c \cdot \operatorname{diam}(A)))_{i \in \{1,..,N\}}$ paarweise disjunkt. Mittels (153) und (154) erkennt man, dass

$$\mu(B(x_i, c \cdot \operatorname{diam}(A))) = \mu(S_i(A)) = \frac{1}{N}.$$

Somit ist die Gleichverteilung μ des $UIFS$ ein $(c \cdot \operatorname{diam}(A), \omega)-$separiertes Maß.

Wie bereits an früherer Stelle eingeführt, bezeichnen wir mit $s_\mu(A)$ den Schwerpunkt des Attraktors A bezüglich μ.

6.3 Lemma
Sei $\emptyset \neq I \subset \{1,..,N\}$ *und*

$$\widetilde{\omega} = \{S_i(s_\mu(A)) : i \in \{1,..,N\}\}.$$

Dann gilt

(a) $s_\mu(A) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i$,

(b) $s_\mu\left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, c\cdot \mathrm{diam}(A))\right) = \frac{1}{\mathrm{card}(I)}\sum_{i\in I} S_i(s_\mu(A))$,

(c) $V_{1,2}(Q_{\widetilde{\omega}}) = (1-c)^2 V_{1,2}(Q_\omega)$,

(d) $V_{1,2}(\mu) = \frac{1-c}{1+c}\cdot V_{1,2}(Q_\omega)$.

Darüberhinaus gilt für jedes $i \in \{1,..,N\}$*, dass*

(e) $V_{1,2}(\mu(\cdot \mid B(x_i, c\cdot \mathrm{diam}(A)))) = c^2 \cdot \frac{1-c}{1+c}\cdot V_{1,2}(Q_\omega)$.

Beweis.
(a) Offensichtlich ist

$$S_i(A) \subset B(x_i, c\cdot \mathrm{diam}(A)) \tag{159}$$

für jedes $i \in \{1,..,N\}$. Wegen Eigenschaft (157) ist somit

$$S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset, \tag{160}$$

für alle $i, j \in 1,..,N$ mit $i \neq j$. Aus der Definition (93) des Schwerpunktes und mittels Eigenschaft (160) bzw. (153) folgt

$$s_\mu(A) = \int_A x d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i(A)} x d\mu(x).$$

Unter Verwendung von Identität (154) und wiederum mittels (160) erhalten wir

$$s_\mu(A) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i(A)} x d(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \mu\circ S_j^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}\int_{S_i(A)} x d\mu\circ S_i^{-1}(x).$$

Wegen (158) gilt

$$\begin{aligned} s_\mu(A) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}\int_A (c(x-x_i)+x_i)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{c}{N}\int_A x d\mu(x) + \frac{1-c}{N}x_i\right) \\ &= c\cdot s_\mu(A) + (1-c)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt $s_\mu(A) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i$.

(b) Weil μ ein $(c\cdot \mathrm{diam}(A), \omega)-$separiertes Maß ist, folgt aus einfacher Rechnung, dass

$$s_\mu\left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, c\cdot \mathrm{diam}(A))\right) = \frac{1}{\mathrm{card}(I)}\sum_{i\in I} s_\mu(B(x_i, c\cdot \mathrm{diam}(A))). \tag{161}$$

Wegen $\mathrm{supp}(\mu) = A$ und Darstellung (153) gilt für jedes $k \in \{1, .., N\}$

$$\mu(\cdot \mid B(x_k, c \cdot \mathrm{diam}(A))) = \mu\left(\cdot \mid \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A) \cap B(x_k, c \cdot \mathrm{diam}(A))\right).$$

Aufgrund von (160), (159) und (157) folgt

$$\mu(\cdot \mid B(x_k, c \cdot \mathrm{diam}(A))) = \mu\left(\cdot \mid S_k(A)\right). \tag{162}$$

Aus (161) und (162) folgern wir

$$\begin{aligned} s_\mu\left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, c \cdot \mathrm{diam}(A))\right) &= \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} s_\mu(S_i(A)) \\ &= \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} (\mu(S_i(A)))^{-1} \int_{S_i(A)} x d\mu(x). \end{aligned}$$

Aus (154) und (160) schließen wir unter Zuhilfenahme von (158), dass

$$\begin{aligned} & s_\mu\left(\bigcup_{i\in I} B(x_i, c \cdot \mathrm{diam}(A))\right) \\ = \; & \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} N\left(\frac{1}{N}\int_A S_i(x) d\mu(x)\right) = \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} \int_A \left(c(x - x_i) + x_i\right) d\mu(x) \\ = \; & \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} (c \int_A x d\mu(x) + (1-c)x_i) = \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} S_i(s_\mu(A)). \end{aligned}$$

(c) Wir definieren $\omega \xrightarrow{T} \mathbb{R}^d$ mit

$$T(x) = c \cdot \left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) - x\right) + x$$

für ein $x \in \omega$. Mittels (a) und Beziehung (158) folgt $T(\omega) = \widetilde{\omega}$. Sei nun $x, y \in \omega$. Offensichtlich ist

$$\| T(x) - T(y) \| = (1-c) \| x - y \|.$$

Behauptung (c) ergibt sich dann als eine direkte Folgerung aus Lemma A.5.

(d) Mittels Identität (154) und Darstellung (158) ergibt sich

$$\int \|x\|^2 d\mu(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int \|c(x - x_i) + x_i\|^2 d\mu(x).$$

Unter Benutzung von $s_\mu(A) = \int x d\mu(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ und mittels elementarer Umformungen folgern wir

$$\int \|x\|^2 d\mu(x) = \frac{1-c}{1+c} \cdot \left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2\right) - \|s_\mu(A)\|^2\right) + \|s_\mu(A)\|^2.$$

Offensichtlich ist

$$V_{1,2}(Q_\omega) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \parallel x_i - s_\mu(A) \parallel^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|x_i\|^2\right) - \|s_\mu(A)\|^2.$$

Damit ergibt sich

$$\int \|x\|^2 d\mu(x) - \|s_\mu(A)\|^2 = \frac{1-c}{1+c}\cdot V_{1,2}(Q_\omega).$$

Aus Lemma A.1 schließen wir $V_{1,2}(\mu) = \int \|x\|^2 d\mu(x) - \|s_\mu(A)\|^2$, woraus unmittelbar die Behauptung (d) folgt.

(e) Identität (162) und (154) liefern für alle $i \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu(\cdot \mid B(x_i, c\cdot \operatorname{diam}(A))) = \mu\left(\cdot \mid S_i(A)\right) = \mu \circ S_i^{-1}.$$

Unter Verwendung von (152) und Satz 2.4 (c) folgt

$$V_{1,2}(\mu(\cdot \mid B(x_i, c\cdot \operatorname{diam}(A)))) = V_{1,2}(\mu \circ S_i^{-1}) = c^2 V_{1,2}(\mu). \tag{163}$$

Die Behauptung (e) ergibt sich dann sofort aus Aussage (d). □

Für den Rest dieses Abschnittes bezeichnen wir aufgrund von $\omega = \{x_1, .., x_N\}$ die Menge $\mathcal{Z}_n^*$ der $n-$optimalen Zerlegungen von ω als die Menge der $n-$optimalen Zerlegungen von $\{1, .., N\}$. Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit des Maßes μ vom Kontraktionsparameter c des zugrundeliegenden $UIFS$ schreiben wir für den Rest des Abschnittes μ_c statt μ.

6.4 Theorem
Für jedes $i \in \{1, .., N\}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und Abbildung S_i des $UIFS$ sei

$$S_i(x) = c\cdot(x - x_i) + x_i.$$

Sei μ_c die Gleichverteilung des $UIFS$. Dann gibt es ein $c_0 \in \left]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right]$, so dass für jedes $n \in \{1, .., N\}$ und jedes $c < c_0$ die Identität

$$V_{n,2}(\mu_c) = \frac{1-c}{1+c}\cdot c^2 V_{1,2}(Q_\omega) + (1-c)^2 V_{n,2}(Q_\omega)$$

gilt. Zusätzlich gibt es für jedes $n-$optimale Codebuch α für μ_c eine $n-$optimale Zerlegung Z von $\{1, .., N\}$, so dass

$$\alpha = \{\frac{1}{\operatorname{card}(I)}\sum_{i\in I}\left(x_i + \frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_i)\right) : I \in Z\}. \tag{164}$$

Beweis.
Es sei $l_0 > 0$ gemäß Proposition 4.14 fest gewählt. Wir definieren $c_0 := \frac{l_0}{2l_0 + \operatorname{diam}(\omega)}$ und wählen $c < c_0$. Analog zu (157) erkennt man, dass dann $c < \frac{l_0}{\operatorname{diam}(A)}$ gilt.
Nach Bemerkung 6.2 ist μ_c ein $(c\cdot\operatorname{diam}(A), \omega)-$separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei nun $n \in \{1, .., N\}$ fest gewählt.

1. Aus Proposition 4.14 folgt

$$V_{n,2}(\mu_c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{1,2}(\mu_c(\cdot \mid B(x_i, c \cdot \operatorname{diam}(A))))+$$

$$\min_{Z \in \mathcal{Z}_n^*} \frac{1}{N} \sum_{I \in Z} \sum_{i \in I} \parallel s_{\mu_c}(B(x_i, l)) - \left(\frac{1}{\operatorname{card}(I)} \sum_{j \in I} s_{\mu_c}(B(x_j, l)) \right) \parallel^2 .$$

Die Anwendung von Lemma 6.3 (e)/(b) ergibt

$$V_{n,2}(\mu_c) = c^2 \cdot \frac{1-c}{1+c} \cdot V_{1,2}(Q_\omega)+$$

$$\min_{Z \in \mathcal{Z}_n^*} \frac{1}{N} \sum_{I \in Z} \sum_{i \in I} \parallel S_i(s_{\mu_c}(A)) - \left(\frac{1}{\operatorname{card}(I)} \sum_{j \in I} S_j(s_{\mu_c}(A)) \right) \parallel^2 .$$

Mittels Bemerkung A.7 und Bemerkung 4.5 gilt

$$V_{n,2}(\mu_c) = c^2 \cdot \frac{1-c}{1+c} \cdot V_{1,2}(Q_\omega) + V_{n,2}(Q_{\widetilde{\omega}}).$$

Mittels Lemma 6.3 (c) folgt $V_{n,2}(\mu_c) = c^2 \cdot \frac{1-c}{1+c} \cdot V_{1,2}(Q_\omega) + (1-c)^2 V_{n,2}(Q_\omega)$.

2. Aus Proposition 4.14 folgt

$$C_{n,2}(\mu_c) \subset \{\{s_{\mu_c}(\cup_{i \in I} B(x_i, c \cdot \operatorname{diam}(A))) : I \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\}. \tag{165}$$

Lemma 6.3 (b) ergibt

$$\begin{aligned} & \{\{s_{\mu_c}(\cup_{i \in I} B(x_i, c \cdot \operatorname{diam}(A))) : I \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\} \\ = \quad & \{\{\frac{1}{\operatorname{card}(I)} \sum_{i \in I} S_i(s_{\mu_c}(A)) : I \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\}. \end{aligned} \tag{166}$$

Aus Lemma 6.3 (a) und (158) folgt

$$\begin{aligned} & \{\{\frac{1}{\operatorname{card}(I)} \sum_{i \in I} S_i(s_{\mu_c}(A)) : I \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\} \\ = \quad & \{\{\frac{1}{\operatorname{card}(I)} \sum_{i \in I} \left(x_i + \frac{c}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_i) \right) : I \in Z\} : Z \in \mathcal{Z}_n^*\}. \end{aligned}$$

Aus (165) und (166) folgt somit (164), womit der Beweis geführt ist. □

6.5 Korollar

Es gibt ein $c_0 \in]0, \frac{d_{\min}(\omega)}{2}]$*, so dass für jedes* $c < c_0$:

(a) $V_{N,2}(\mu_c) = c^2 V_{1,2}(\mu_c)$,

(b) $D_{\min}(2, N, \mu_c) = (1-c)^2 D_{\min}(2, N, Q_\omega)$,

(c) $\forall\, n \in \{1, .., N\}\ \forall\, \alpha \in C_{n,2}(\mu_c)\ \exists\, \beta \in C_{n,2}(Q_\omega) : d_H(\alpha, \beta) \leq c \cdot \mathrm{diam}(A)$.

Beweis.
Behauptung (a) und (b) folgen unmittelbar aus Theorem 6.4.
Bezüglich (c) sei $n \in \{1, .., N\}$ und $\alpha \in C_{n,2}(\mu_c)$. Gemäß Theorem 6.4 sei $Z \in \mathcal{Z}_n^*$ fixiert, mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i \in I} \left(x_i + \frac{c}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_i) \right) : I \in Z\} \\ &= \{\frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i \in I} S_i(s_{\mu_c}(A)) : I \in Z\}. \end{aligned}$$

Sei $\beta = \{s_{Q_\omega}(I) : I \in Z\}$. Nach Bemerkung 4.7 ist $\beta \in C_{n,2}(Q_\omega)$. Es gilt für jedes $I \in Z$, dass

$$\begin{aligned} & \parallel s_{Q_\omega}(I) - \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i \in I} S_i(s_{\mu_c}(A)) \parallel \\ \leq\ & \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i \in I} \parallel x_i - S_i(s_{\mu_c}(A)) \parallel \leq c \cdot \mathrm{diam}(A), \end{aligned}$$

woraus $d_H(\alpha, \beta) \leq c \cdot \mathrm{diam}(A)$ folgt. □

6.6 Bemerkung
Korollar 6.5 (c) stellt eine quantitative Formulierung der bereits aus Satz 2.5 (b) bekannten Tatsache dar.

6.3 Optimale Quantisierung für große Codebücher

In diesem Abschnitt sei $r \in [1, \infty[$ und $(S_1, .., S_N)$ ein $UIFS$ auf $\mathbb{R}^d$.

Unser Hauptresultat (Theorem 6.13) beinhaltet eine Formel für den $n-$optimalen Quantisierungsfehler von μ im Bereich $n \geq N$, eine Darstellung der $n-$optimalen Codebücher für $n \geq N$ und die Bestimmung der Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D_r}} V_{n,r}(\mu))_{n \in \mathbb{N}}$ bei stets existenter Quantisierungsdimension D_r.

Für den Beweis dieser Aussagen benötigen wir zwei entscheidende Voraussetzungen. Einerseits müssen die $n-$optimalen Codebücher der Gleichverteilung Q_ω der Fixpunkte des $UIFS$ eine Separationsbedingung ähnlich zu (75) erfüllen. Andererseits stützen wir uns auf die Voraussetzung

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$$

für alle $n \in \{1, .., N-1\}$ im Falle $N > 2$ ab.

Für die spätere Ableitung von Kriterien in Kapitel 6.5, wann diese beiden Voraussetzungen erfüllt sind, benutzen wir in entscheidender Weise die Resultate der Kapitel 4 und 5. Es sei darauf hingewiesen, dass die Eigenschaft (158) des $UIFS$, die in Theorem 6.4 vorausgesetzt wurde, in diesem Abschnitt nicht benötigt wird.

Die grundsätzliche Beweisidee für Theorem 6.13 besteht darin,
für jedes $n \in \{N, N+1...\}$ ein $n-$optimales Codebuch für μ aus den ersten m-optimalen Codebüchern mit $m \leq N-1$ durch iterative Anwendung der Abbildungen des $UIFS$ zu konstruieren, was unter den beiden oben genannten Voraussetzungen gelingt.

6.7 Definition
Die Gleichverteilung μ eines $UIFS$ heißt **separat quantisierend** bzgl. des $UIFS$ $(S_1, .., S_N)$, falls für alle $n \geq N$, $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$ und $a \in \alpha$ genau ein $i \in \{1, .., N\}$ existiert, mit $W(a \mid \alpha) \cap S_i(A) \neq \emptyset$.

Sei $(S_1, .., S_N)$ ein $UIFS$ mit Kontraktionsparameter $c \in]0, \frac{1}{N}[$.
Es sei erinnert an die Bezeichnung $\omega = \{x_1, .., x_N\}$ für die Menge der Fixpunkte des $UIFS$ mit $\mathrm{card}(\omega) = N$.

Sei $n \geq N$ und $\alpha \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\alpha) = n$. Für $i \in \{1, .., N\}$ sei

$$\alpha_i = \{a \in \alpha : W(a \mid \alpha) \cap S_i(A) \neq \emptyset\}. \tag{167}$$

Offensichtlich ist

$$S_i(A) \subset \bigcup_{a \in \alpha_i} W(a \mid \alpha) \tag{168}$$

für alle $i \in \{1, .., N\}$.

6.8 Bemerkung
Genau dann ist μ separat quantisierend, falls für alle $n \geq N$ und $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$ durch $\{\alpha_i : i \in N\}$ eine disjunkte Zerlegung von α gegeben ist.

In der Literatur über iterierte Funktionensysteme findet man weitere Separationsbedingungen (siehe z.B. [8], Seite 35), die wir im Folgenden kurz notieren und ihre Beziehung zur separaten Quantisierungsbedingung aufzeigen. Wir erinnern an die Notation A für den Attraktor des $UIFS$.

6.9 Definition
Ein $UIFS$ erfüllt

(i) die offene Mengenbedingung, falls es eine nichtleere offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ gibt, mit $S_i(U) \subset U$ und $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ für $i \neq j$,

(ii) die starke Separationsbedingung, falls $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ für $i \neq j$.

6.10 Lemma
Es gelten folgende Implikationen.

(i) Ist μ separat quantisierend, dann erfüllt das $UIFS$ die starke Separationsbedingung.

(ii) Erfüllt das $UIFS$ die starke Separationsbedingung, so erfüllt es auch die offene Mengenbedingung.

Beweis.
(i) Wir nehmen an, dass das $UIFS$ die starke Separationsbedingung nicht erfüllt. Dann gibt es $i, j \in \{1, .., N\}$ mit $S_i(A) \cap S_j(A) \neq \emptyset$ und $i \neq j$. Sei $x \in S_i(A) \cap S_j(A)$. Mittels (168) gibt es ein $a \in \alpha_i$ und $b \in \alpha_j$ mit $x \in W(a \mid \alpha) \cap W(b \mid \alpha)$. Somit gilt $W(b \mid \alpha) \cap S_i(A) \neq \emptyset$ und $W(b \mid \alpha) \cap S_j(A) \neq \emptyset$. Damit ist μ nicht separat quantisierend.
(ii) Ein Beweis findet sich in [18], Example 5.2. (2). □

6.11 Bemerkung
Weder für Aussage (i), noch für Aussage (ii) in Lemma 6.10 gilt die Umkehrung. Bei der über ein $UIFS$ definierten Cantormenge mit Kontraktionsparameter $c \in]\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}[$ (siehe Beispiel 7.2), ist die starke Separationsbedingung erfüllt, aber die Gleichverteilung nicht separat quantisierend. Wählt man als Kontraktionsfaktor $c = \frac{1}{2}$ erhält man die Gleichverteilung auf $[0, 1]$, die die offene Mengenbedingung erfüllt, jedoch nicht die starke Separationsbedingung.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $i(n) \in \{1, .., N-1\}$ und $k(n) \in \{0, 1, 2, ..\}$ die eindeutig definierten Werte, für die $i(n)N^{k(n)} \leq n < (i(n)+1)N^{k(n)}$ gilt.

6.12 Proposition
Sei μ separat quantisierend, $n \geq N$ und $\alpha \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{card}(\alpha) = n$. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent.

(i) $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$.

(ii) Für jedes $i \in \{1, .., N\}$ ist $\alpha_i \neq \emptyset$, $S_i^{-1}(\alpha_i) \in C_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu)$ und

$$V_{n,r}(\mu) = \frac{c^r}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu). \tag{169}$$

(iii) Es gibt $n_1, .., n_N \geq 1$ mit $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$ und

$$V_{n,r}(\mu) = \frac{c^r}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{n_i,r}(\mu), \tag{170}$$

sowie $\beta_i \in C_{n_i,r}(\mu)$ mit $\alpha = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(\beta_i)$.

Falls zusätzlich

$$V_{m,r}(\mu) - V_{m+1,r}(\mu) > V_{m+1,r}(\mu) - V_{m+2,r}(\mu) \tag{171}$$

für alle $m \in \{1, .., N-1\}$, erhalten wir für $n_1, .., n_N$ in (iii), dass

$$n_i \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}] \tag{172}$$

für alle $i \in \{1, .., N\}$ gilt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \frac{c^{k(n)r}}{N^{k(n)}} \left(V_{i(n),r}(\mu) \left((i(n)+1)N^{k(n)} - n \right) \right. \\ &+ \left. V_{i(n)+1,r}(\mu) \left(n - i(n)N^{k(n)} \right) \right). \end{aligned} \tag{173}$$

Beweis.
1. $(i) \Rightarrow (ii)$
Sei $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$. Aus Satz 2.2 (i) folgt

$$\alpha_i \in C_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}\left(\mu\left(\cdot \mid \bigcup_{a\in\alpha_i} W(a \mid \alpha)\right)\right) \tag{174}$$

für alle $i \in \{1, .., N\}$. Weil μ separat quantisierend ist, gilt

$$S_i(A) \cap \bigcup_{a\in\alpha_j} W(a \mid \alpha) = \emptyset$$

für $i \neq j$. Aus $\mathrm{supp}(\mu) = S_1(A) \cup \cdots S_N(A)$ folgt zusammen mit (168) und (154), dass

$$\mu\left(\cdot \mid \bigcup_{a\in\alpha_i} W(a \mid \alpha)\right) = \mu(\cdot \mid S_i(A)) = \mu \circ S_i^{-1}.$$

Unter Berücksichtigung von (174) gilt damit $\alpha_i \in C_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu \circ S_i^{-1})$.
Aus Satz 2.4 (c) folgt $S_i^{-1}(\alpha_i) \in C_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu)$. Nach Lemma 14.1 in [13] ist

$$V_{n,r}(\mu) \leq \frac{c^r}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu). \tag{175}$$

Andererseits gilt wegen (154)

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \int d(x,\alpha)^r d\mu(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \int d(S_i(x),\alpha)^r d\mu(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \int d(S_i(x),\alpha_i)^r d\mu(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c^r \int d(x, S_i^{-1}(\alpha_i))^r d\mu(x) \\ &\geq \frac{c^r}{N}\sum_{i=1}^{N} V_{\mathrm{card}(\alpha_i),r}(\mu). \end{aligned} \tag{176}$$

Aus den Ungleichungen (175) und (176) folgt die Gleichung (169).

2. $(ii) \Rightarrow (iii)$
Wir definieren $\beta_i = S_i^{-1}(\alpha_i)$ und $n_i = \mathrm{card}(\alpha_i)$ für alle $i \in \{1, .., N\}$. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus (ii).

3. $(iii) \Rightarrow (i)$

Aus der Definiton von α und (154) folgt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &\leq \Psi_{\alpha,r}(\mu) = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i(A)} d(x,\alpha)^r d\mu(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i(A)} d(x, S_i(\beta_i))^r d\mu(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int d(S_i(x), S_i(\beta_i))^r d\mu(x) \\ &= \frac{c^r}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{n_i,r}(\mu). \end{aligned}$$

Mittels Gleichung (170) folgern wir $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$.

4. Nun zeigen wir den Rest der Behauptung.
Wir schließen mittels Induktion über n.
Im Falle $n = N$ geht wegen $i(N) = 1$ und $k(N) = 1$ die Gleichung (173) in die Gleichung (170) der bereits bewiesenen Aussage (iii) über. Somit ist (173) richtig für $n = N$. Auch Aussage (172) ist wegen (iii) richtig für $n = N$.
Nun sei (172) und (173) als richtig angenommen für alle $N \leq m < n$. Man stellt zunächst fest, dass im Falle der Gültigkeit von (172), die Gleichung (173) eine direkte Konsequenz von Gleichung (170) und der Induktionsannahme ist. Es reicht also im Induktionsschritt aus, die Beziehung (172) als richtig nachzuweisen. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass (172) falsch ist. Es gibt daher mindestens ein $i_0 \in \{1, .., N\}$ mit $n_{i_0} \notin [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}]$.

Fall 1. $n_{i_0} < i(n)N^{k(n)-1}$

Wegen $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$ gibt es ein $i_1 \in \{1, .., N\}$ mit

$$n - (N-1) \geq n_{i_1} > i(n)N^{k(n)-1}. \tag{177}$$

Mittels Gleichung (170) folgt $V_{n,r}(\mu) = \frac{c^r}{N} \sum_{i=1}^{N} V_{n_i,r}(\mu)$. Aus Lemma 14.1 in [13] folgern wir

$$V_{n,r}(\mu) \leq \frac{c^r}{N} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0, i_1}}^{N} V_{n_i,r}(\mu) + V_{n_{i_0}+1,r}(\mu) + V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) \right)$$

und somit

$$0 \geq V_{n_{i_0},r}(\mu) - V_{n_{i_0}+1,r}(\mu) - (V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) - V_{n_{i_1},r}(\mu)). \tag{178}$$

Sei $k_0 = k(n_{i_0})$ und $i'_0 = i(n_{i_0})$ bzw. $k_1 = k(n_{i_1})$ und $i'_1 = i(n_{i_1})$. Mit (177) folgt

$$i'_0 N^{k_0} \leq n_{i_0} < (i'_0 + 1)N^{k_0} \leq i'_1 N^{k_1} \leq n_{i_1} < (i'_1 + 1)N^{k_1}.$$

Drei Unterfälle sind möglich.

Fall 1.1. $i'_0 < i'_1, k_0 = k_1$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
&\left(V_{n_{i_0},r}(\mu) - V_{n_{i_0}+1,r}(\mu)\right) - \left(V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) - V_{n_{i_1},r}(\mu)\right)\\
= \;& \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\left(V_{i'_0,r}(\mu)\left((i'_0+1)N^{k_0} - n_{i_0}\right) + V_{i'_0+1,r}(\mu)\left(n_{i_0} - i'_0 N^{k_0}\right)\right)\\
& - \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\Big(V_{i(n_{i_0}+1),r}(\mu)((i(n_{i_0}+1)+1)N^{k_0} - (n_{i_0}+1))\\
& \qquad + V_{i(n_{i_0}+1)+1,r}(\mu)(n_{i_0}+1 - i(n_{i_0}+1)N^{k_0})\Big)\\
& - \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\Big(V_{i(n_{i_1}-1),r}(\mu)((i(n_{i_1}-1)+1)N^{k_0} - (n_{i_1}-1))\\
& \qquad + V_{i(n_{i_1}-1)+1,r}(\mu)(n_{i_1}-1 - i(n_{i_1}-1)N^{k_0})\Big)\\
& + \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\left(V_{i'_1,r}(\mu)((i'_1+1)N^{k_0} - n_{i_1}) + V_{i'_1+1,r}(\mu)(n_{i_1} - i'_1 N^{k_0})\right) \quad (179)
\end{aligned}$$

Falls $n_{i_0}+1 < (i'_0+1)N^{k_0}$, gilt $i'_0 = i(n_{i_0}+1)$. Man beachte, dass im Falle von $n_{i_0}+1 = (i'_0+1)N^{k_0}$, aus Gleichung (183) $V_{n_{i_0}+1,r}(\mu) = c^{k_0 r} V_{i'_0+1,r}(\mu)$ folgt. Somit folgern wir aus (179), dass

$$\begin{aligned}
&\left(V_{n_{i_0},r}(\mu) - V_{n_{i_0}+1,r}(\mu)\right) - \left(V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) - V_{n_{i_1},r}(\mu)\right)\\
= \;& \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\left((V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - (V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu))\right). \quad (180)
\end{aligned}$$

Wegen Bedingung (171), ist die rechte Seite der Gleichung (180) größer als Null, was im Widerspruch zu (178) steht.

Fall 1.2. $i'_0 < i'_1, k_0 < k_1$

Wegen $r \in [1, \infty[$ und $c < 1 < N$ folgt

$$\frac{c^{k_1 r}}{N^{k_1}} < \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}.$$

Ähnlich zu Fall 1.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&V_{n_{i_0},r}(\mu) - V_{n_{i_0}+1,r}(\mu) - (V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) - V_{n_{i_1},r}(\mu))\\
> \;& \frac{c^{k_1 r}}{N^{k_1}}\left((V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - (V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu))\right) > 0,
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zu (178) steht.

Fall 1.3. $i'_0 \geq i'_1, k_0 < k_1$.

Mittels Gleichung (183) folgt

$$\begin{aligned}
&V_{n_{i_0},r}(\mu) - V_{n_{i_0}+1,r}(\mu) - (V_{n_{i_1}-1,r}(\mu) - V_{n_{i_1},r}(\mu))\\
= \;& \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}(V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - \frac{c^{k_1 r}}{N^{k_1}}(V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu))\\
\geq \;& \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}(V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - \frac{c^{(k_0+1) r}}{N^{(k_0+1)}}(V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu))\\
= \;& \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}}\left((V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - \frac{c^r}{N}(V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu))\right).
\end{aligned}$$

Die Anwendung von Bedingung (171) und Proposition 6.12 ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}} \left((V_{i'_0,r}(\mu) - V_{i'_0+1,r}(\mu)) - \frac{c^r}{N} (V_{i'_1,r}(\mu) - V_{i'_1+1,r}(\mu)) \right) \\ \geq & \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}} \left((V_{N-1,r}(\mu) - V_{N,r}(\mu)) - \frac{c^r}{N} (V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu)) \right) \\ = & \frac{c^{k_0 r}}{N^{k_0}} \left((V_{N-1,r}(\mu) - V_{N,r}(\mu)) - (V_{N,r}(\mu) - V_{N+1,r}(\mu)) \right) > 0, \end{aligned}$$

was ebenfalls einen Widerspruch darstellt.

Fall 2. $n_{i_0} > (i(n)+1)N^{k(n)-1}$

Analog zu Fall 1, führt auch dieser Fall zu einem Widerspruch. Somit gilt

$$n_i \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}]$$

für jedes $i \in \{1, .., N\}$. Gleichung (170) und die Induktionsannahme liefern dann die Behauptung. □

Bevor wir Untersuchungen bezüglich der Existenz des Quantisierungskoeffizienten anstellen können, müssen wir die Existenz der Quantisierungsdimension klären. Graf und Luschgy (siehe [13], Theorem 12.18 in Verbindung mit [13], Example 12.10) haben gezeigt, dass unter der Voraussetzung der offenen Mengenbedingung, die Quantisierungsdimension der Gleichverteilung μ eines $UIFS$ immer existiert und

$$D_r(\mu) = D = \frac{-\log(N)}{\log(c)} \tag{181}$$

gilt. Da wir die Hauptresultate unter der Voraussetzung formulieren, dass μ separat quantisierend ist, folgt mittels Lemma 6.10, dass die offene Mengenbedingung erfüllt ist. Wir können also im Folgenden die Gleichung (181) benutzen.

Wir verallgemeinern nun die Definition (73) der Funktion f_c, mit der später die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ beschrieben wird.
Sei $f_c : [1, N] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_c(x) = x^{\frac{r}{D}} \left((i+1)V_{i,r}(\mu) - iV_{i+1,r}(\mu) - x(V_{i,r}(\mu) - V_{i+1,r}(\mu)) \right),$$

falls $x \in [i, i+1[$, $i \in \{1, .., N-1\}$ und $f_c(x) = V_{1,r}(\mu)$, falls $x = N$. Die Funktion f_c ist stetig wegen $\lim_{x\to i-0} f_c(x) = f_c(i)$ für $i \in \{2, .., N\}$.
Ferner gilt für $i \in \{1, .., N-1\}$, dass f_c auf $]i, i+1[$ differenzierbar ist. Mittels (181) und $c < \frac{1}{N}$ folgt $\frac{r}{D} = \frac{r\log(c)}{-\log(N)} > 1$. Somit gilt für alle $x \in]i, i+1[$

$$f'_c(x) = \frac{r}{D} x^{\frac{r}{D}-1} \left((i+1)V_i - iV_{i+1} \right) + x^{\frac{r}{D}} \left(1 + \frac{r}{D}\right) (V_{i+1} - V_i). \tag{182}$$

Damit ist f'_c stetig auf $]i, i+1[$ und besitzt höchstens eine Nullstelle auf $]i, i+1[$. Somit ist f_c nicht konstant, weswegen $f_c([1, N])$ ein nichttriviales Intervall darstellt.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_k) \in \{1, .., N\}^k$ sei $S_\sigma = S_{\sigma_1} \circ \cdots \circ S_{\sigma_k}$. Nun können wir das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

6.13 Theorem
Sei μ die Gleichverteilung eines $UIFS$. Es sei

(a) μ separat quantisierend, und

(b) $V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$ für alle $n \in \{1, .., N-1\}$.

Dann gilt

(i)

$$\begin{aligned} V_{n,r}(\mu) &= \frac{c^{k(n)r}}{N^{k(n)}} \Big(V_{i(n),r}(\mu) \Big((i(n)+1)N^{k(n)} - n \Big) \\ &\quad + V_{i(n)+1,r}(\mu) \Big(n - i(n)N^{k(n)} \Big) \Big) \end{aligned} \tag{183}$$

für alle $n \geq N$.

(ii) Die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ ist identisch mit dem nichteinpunktigen Intervall $f_c([1, N])$.

(iii) Falls $n \geq N$, dann ist $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$ genau dann, wenn eine Familie $(\alpha(\sigma))_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ existiert, mit

$$\alpha = \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}} S_\sigma(\alpha(\sigma)),$$

so dass $n - i(n)N^{k(n)}$ der Mengen $\alpha(\sigma)$ in $C_{i(n)+1,r}(\mu)$ liegen und der Rest in $C_{i(n),r}(\mu)$.

Bevor wir Theorem 6.13 beweisen, notieren wir einige leichte Folgerungen.

6.14 Bemerkung
Falls $N = 2$ erhalten wir $V_{3,r}(\mu) = \frac{c^r}{2}(V_{1,r}(\mu) + V_{2,r}(\mu))$ aus Proposition 6.12. Wiederum aus Proposition 6.12 folgt $V_{2,r}(\mu) = c^r V_{1,r}(\mu)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} & V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu) - (V_{2,r}(\mu) - V_{3,r}(\mu)) \\ = \; & V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu) - (c^r V_{1,r}(\mu) - \frac{c^r}{2}(V_{1,r}(\mu) + V_{2,r}(\mu))) \\ = \; & V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu) - \frac{c^r}{2}(V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu)). \end{aligned}$$

Wegen $V_{1,r}(\mu) > V_{2,r}(\mu)$ nach Satz 2.4 (a) und $c^r \in]0, 1[$ ist die rechte Seite der obigen Gleichung echt größer als 0. Somit folgt in diesem Fall die Voraussetzung (b) in Theorem 6.13 direkt aus Voraussetzung (a).

6.15 Bemerkung
Eine Analyse von Gleichung (183) ergibt, dass

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) \geq V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu) \tag{184}$$

für $n \geq N$. Ferner wird aus (184) eine Gleichung, falls

$$i(n)N^{k(n)} \leq n < (i(n)+1)N^{k(n)} - 1.$$

Somit überträgt sich die strikte Monotonie in Voraussetzung (b) für $n = 1, .., N-1$ nicht auf alle $n \in \mathbb{N}$.

6.16 Korollar
Sei μ separat quantisierend mit

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$$

für alle $n \in \{1, .., N-1\}$. Dann gilt

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu) < \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu) < \infty.$$

Beweis.
Aus Lemma 6.10 wissen wir, dass μ die offene Mengenbedingung erfüllt. Theorem 12.18 in [13] liefert dann

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu) \leq \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu) < \infty. \tag{185}$$

Theorem 6.13 (ii) sichert, dass Ungleichung (185) strikt ist, woraus die Behauptung folgt. □

6.17 Bemerkung
Aus Korollar 6.16 folgt unmittelbar die Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten $Q_r(\mu)$.

6.18 Bemerkung
Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein $n-$Tupel $s = (s_1, .., s_n)$ mit $s_i > 0$ ist arithmetisch, falls ein $t > 0$ existiert, so dass $s_i/t \in \mathbb{N}$. Für solch ein arithmetisches s nennen wir

$$\vartheta := \max\{t > 0 : s_i/t \in \mathbb{N} \text{ für jedes } i = 1, ., n\}$$

die Periode von s. Somit ist das $N-$Tupel $(-\log(c), .., -\log(c))$ arithmetisch mit Periode $-\log(c)$, wenn c den Kontraktionsparameter des $UIFS$ angibt. Für diesen arithmetischen Fall hat Pötzelberger ([26], Theorem 1) gezeigt, dass eine periodische Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit Periode $-\log(c)$ existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu) - f(\log(n))) = 0.$$

Beweis von Theorem 6.13.
(i) Dies folgt unmittelbar aus Proposition 6.12.
(ii) Sei $y \in f_c([1, N])$. Dann gibt es ein $i_0 \in \{1, .., N-1\}$ und ein $x \in [1, N]$, mit $x \in [i_0, i_0 + 1]$ und $y = f_c(x)$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n_k := [xN^k]$ die größte ganze Zahl, kleiner oder gleich xN^k. Offensichtlich gibt es ein $x_k \in [1, N]$, mit $n_k = x_k N^k$. Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x. Wegen $k(n_k) = k$ und $i(n_k) = i_0$ erhalten wir aus (i), dass

$$\begin{aligned} & n_k^{\frac{r}{D}} V_{n_k,r}(\mu) \\ = \; & (x_k N^k)^{\frac{r}{D}} \frac{c^{kr}}{N^k} \left(V_{i_0,r}(\mu)((i_0+1)N^k - x_k N^k) + V_{i_0+1,r}(\mu)(x_k N^k - i_0 N^k) \right). \end{aligned}$$

Wegen $c^D = \frac{1}{N}$ folgt

$$\begin{aligned} & n_k^{\frac{r}{D}} V_{n_k,r}(\mu) \\ = \; & x_k{}^{\frac{r}{D}} \left((i_0+1)V_{i_0,r}(\mu) - i_0 V_{i_0+1,r}(\mu) - x_k(V_{i_0,r}(\mu) - V_{i_0+1,r}(\mu)) \right) \\ = \; & f_c(x_k). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f_c folgt

$$y = f_c(x) = \lim_{k\to\infty} f_c(x_k)$$

und y ist ein Häufungspunkt der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$.
Nun sei y ein Häufungspunkt der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(n_l^{\frac{r}{D}} V_{n_l,r}(\mu))_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$y = \lim_{l\to\infty} n_l^{\frac{r}{D}} V_{n_l,r}(\mu).$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $k(n_l) < k(n_l+1)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Anderenfalls dünnen wir die Folge entsprechend aus.
Sei $x_l := \frac{n_l}{N^{k(n_l)}}$. Dann ist $x_l \in [i(n_l), i(n_l)+1]$ und es folgt aus (i), dass

$$f_c(x_l) = n_l^{\frac{r}{D}} V_{n_l,r}(\mu).$$

Wegen der Beschränktheit von $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gibt es eine Teilfolge $(x_{l_q})_{q\in\mathbb{N}}$ von (x_l), die gegen ein $x \in [1,N]$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f_c folgt daraus

$$f_c(x) = \lim_{q\to\infty} f_c(x_{l_q}) = \lim_{q\to\infty} n_{l_q}^{\frac{r}{D}} V_{n_{l_q},r}(\mu) = y,$$

womit $y \in f_c([1,N])$.

(iii) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n.
Für $n = N$ gilt $k(n) = 1$ und $i(n) = 1$. Für $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$ und $i \in \{1,..,N\}$ setzen wir $\alpha(i) = S_i^{-1}(\alpha_i)$. Proposition 6.12 impliziert $\operatorname{card}(\alpha_i) = 1$, $\alpha(i) \in C_{1,r}(\mu)$ und $\alpha = \bigcup_{i=1}^N S_i(\alpha(i))$. Andererseits, falls $\alpha(i) \in C_{1,r}(\mu)$ für $i = 1,..,N$, folgt aus Proposition 6.12, dass $\bigcup_{i=1}^N S_i(\alpha(i)) \in C_{N,r}(\mu)$.
Nun sei $n > N$, und die Charakterisierung der n-optimalen Codebücher aus (iii) sei für alle $N \le m < n$ richtig.

„⇒“:
Sei $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$. Dann besitzt α genau n Elemente (Satz 2.1 (b)). Nach Proposition 6.12 gilt $S_j^{-1}(\alpha_j) \in C_{\operatorname{card}(\alpha_j),r}(\mu)$ und $\alpha_j \neq \emptyset$. Wegen $\sum_{j=1}^N \operatorname{card}(\alpha_j) \le n$ folgt $n_j := \operatorname{card}(\alpha_j) < n$. Proposition 6.12 impliziert

$$n_j \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}].$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden.
Fall 1. $n_j \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}[$

Es gilt $k(n_j) = k(n) - 1$ und $i(n_j) = i(n)$. Aus der Induktionsannahme folgt die Existenz einer Familie $(\alpha^{(j)}(\tau))_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}}$ von Mengen mit

$$S_j^{-1}(\alpha_j) = \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau(\alpha^{(j)}(\tau)), \tag{186}$$

wobei $\alpha^{(j)}(\tau) \in C_{i(n)+1,r}(\mu)$ für $n_j - i(n)N^{k(n)-1}$ der Mengen
und $\alpha^{(j)}(\tau) \in C_{i(n),r}(\mu)$ für die anderen Mengen der Familie.

Fall 2. $n_j = (i(n)+1)N^{k(n)-1}$

Fall 2.1. $i(n) < N-1$

Hier ist $i(n_j) = i(n) + 1$ und $k(n_j) = k(n) - 1$. Mit der Induktionsannahme folgt die Existenz einer Familie $(\alpha^{(j)}(\tau))_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}}$ von Mengen, die Gleichung (186) erfüllen, wobei $\alpha^{(j)}(\tau) \in C_{i(n)+1,r}(\mu)$ für alle τ, wegen

$$(i(n_j) + 1)N^{k(n)-1} - n_j = N^{k(n)-1}.$$

Fall 2.2. $i(n) = N - 1$.

In diesem Fall ist $n_j = N^{k(n)}$. Somit gilt $i(n_j) = 1$ und $k(n_j) = k(n)$. Mittels der Induktionsannahme gibt es eine Familie $(\alpha^{(j)}(\sigma))_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}}$ von Mengen mit $\alpha^{(j)}(\sigma) \in C_{1,r}(\mu)$ für alle σ und

$$\begin{aligned} S_j^{-1}(\alpha_j) &= \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}} S_\sigma(\alpha^{(j)}(\sigma)) \\ &= \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau \bigcup_{l=1}^{N} S_l(\alpha^{(j)}(\tau l)). \end{aligned}$$

Aus Proposition 6.12 wissen wir, dass $\bigcup_{l=1}^{N} S_l(\alpha^{(j)}(\tau l) \in C_{N,r}(\mu)$ für alle τ.

Wir schließen in jedem Fall, dass eine Familie $(\alpha^{(j)}(\tau))_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}}$ von Mengen existiert, die Gleichung (186) erfüllt, wobei $\alpha^{(j)}(\tau) \in C_{i(n)+1,r}(\mu)$ für $n_j - i(n)N^{k(n)-1}$ der Mengen und $\alpha^{(j)}(\tau) \in C_{i(n),r}(\mu)$ für die anderen Mengen. Für $\sigma \in \{1, .., N\}^{k(n)}$ sei

$$\alpha(\sigma) = \alpha^{(\sigma_1)}(\sigma_2, .., \sigma_{k(n)}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}} S_\sigma(\alpha(\sigma)) &= \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_j(S_\tau(\alpha^{(j)}(\tau))) \\ &= \bigcup_{j=1}^{N} S_j \left(\bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau(\alpha^{(j)}(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Gleichung (186) liefert

$$\bigcup_{j=1}^{N} S_j(S_j^{-1}(\alpha_j)) = \bigcup_{j=1}^{N} \alpha_j = \alpha.$$

Man beachte ferner, dass für $j \in \{1, .., N\}$ genau

$$n_j - i(n)N^{k(n)-1}$$

der Mengen $\alpha(\sigma)$ mit $\sigma_1 = j$ in $C_{i(n)+1,r}(\mu)$ liegen. Somit sind

$$\sum_{j=1}^{N}(n_j - i(n)N^{k(n)-1}) = n - i(n)N^{k(n)}$$

dieser Mengen $\alpha(\sigma)$ in $C_{i(n)+1,r}(\mu)$ während der Rest in $C_{i(n),r}(\mu)$ liegt.

„⇐“:
Nun sei angenommen, dass

$$\alpha = \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}} S_\sigma(\alpha(\sigma))$$

und $n-i(n)N^{k(n)}$ dieser Mengen $\alpha(\sigma)$ in $C_{i(n)+1,r}(\mu)$ liegen und der Rest in $C_{i(n),r}(\mu)$. Dann ist $\mathrm{card}(\alpha) = n$. Sei

$$\begin{aligned}\alpha^{(j)} &= \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)},\sigma_1=j} S_j^{-1}S_\sigma(\alpha(\sigma)) \\ &= \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau(\alpha(j\tau))\end{aligned}$$

und $n_j = \mathrm{card}(\alpha^{(j)})$ für $j \in \{1,..,N\}$. Es ist

$$n_j \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}],$$

und $n_j - i(n)N^{k(n)-1}$ der Mengen $\alpha(j\tau)$, $\tau \in \{1,..,N\}^{k(n)-1}$ liegen in $C_{i(n)+1,r}(\mu)$ während der Rest in $C_{i(n),r}(\mu)$ liegt.

Mehrere Fälle treten auf.

Fall 1. $n_j \in [i(n)N^{k(n)-1}, (i(n)+1)N^{k(n)-1}[$.

Hier ist $k(n_j) = k(n) - 1$ und $i(n_j) = i(n)$.
Die Induktionsannahme impliziert $\alpha^{(j)} \in C_{n_j,r}(\mu)$.

Fall 2. $n_j = (i(n)+1)N^{k(n)-1}$.

Fall 2.1. $i(n) < N - 1$.

In diesem Fall gilt $i(n_j) = i(n) + 1$ und $k(n_j) = k(n) - 1$. Somit sind alle

$$\begin{aligned}n_j - i(n)N^{k(n)-1} &= N^{k(n)-1} \\ &= N^{k(n_j)} - (n_j - i(n_j)N^{k(n_j)})\end{aligned}$$

Mengen $\alpha(j\tau)$ ein Element aus $C_{i(n)+1,r}(\mu) = C_{i(n_j),r}(\mu)$. Die Induktionsannahme impliziert $\alpha^{(j)} \in C_{n_j,r}(\mu)$.

Fall 2.2. $i(n) = N - 1$.

Hier erhalten wir $n_j = N^{k(n)}$ bzw. $k(n_j) = k(n)$ und $i(n_j) = 1$. Somit sind alle $N^{k(n)-1}$ Mengen $\alpha(j\tau)$ in $C_{N,r}(\mu)$. Aus Proposition 6.12 folgt für jedes $\alpha(j\tau)$ die Existenz einer Familie $(\alpha_l(j\tau))_{l=1,..,N}$ mit $\alpha_l(j\tau) \in C_{1,r}(\mu)$ und
$\alpha_l(j\tau) = \bigcup_{l=1}^N S_l(\alpha_l(j\tau))$. Für $\sigma \in \{1,..,N\}^{k(n)}$ definieren wir

$$\beta_j(\sigma) = \alpha_{\sigma_{k(n)}}(j\sigma_1..\sigma_{k(n)-1}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\alpha^{(j)} &= \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau(\alpha(j\tau)) \\ &= \bigcup_{\tau\in\{1,..,N\}^{k(n)-1}} S_\tau\left(\bigcup_{l=1}^N S_l(\alpha_l(j\tau))\right) \\ &= \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k(n)}} S_\sigma(\beta_j(\sigma)),\end{aligned}$$

mit $\beta_j(\sigma) \in C_{1,r}(\mu)$. Die Induktionsannahme impliziert $\alpha^{(j)} \in C_{n_j,r}(\mu)$.
In jedem Fall gilt also $\alpha^{(j)} \in C_{n_j,r}(\mu)$. Da $\alpha = \bigcup_{j=1}^{N} S_j(\alpha^{(j)})$, folgt aus Proposition 6.12, dass $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$, vorausgesetzt dass

$$V_{n,r}(\mu) = \frac{c^r}{N} \sum_{j=1}^{N} V_{n_j,r}(\mu).$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei festgestellt, dass aus (i) die Identität

$$\begin{aligned} V_{n_j,r}(\mu) &= \frac{c^{k(n_j)r}}{N^{k(n_j)}} \Big(V_{i(n_j),r}(\mu)((i(n_j)+1)N^{k(n_j)} - n_j) \\ &\quad + V_{i(n_j)+1,r}(\mu)(n_j - i(n_j)N^{k(n_j)}) \Big) \end{aligned}$$

folgt. Somit ist, unabhängig davon welcher der obigen Fälle vorliegt,

$$\begin{aligned} \frac{c^r}{N} \sum_{j=1}^{N} V_{n_j,r}(\mu) &= \frac{c^{k(n)r}}{N^{k(n)}} \Big(V_{i(n),r}(\mu)((i(n)+1)N^{k(n)} - n) \\ &\quad + V_{i(n)+1,r}(\mu)(n - i(n)N^{k(n)}) \Big). \end{aligned}$$

Wiederum nach (i) ist der letzte Ausdruck identisch mit $V_{n,r}(\mu)$. □

6.4 Bestimmung der Konvergenzordnung des optimalen Quantisierungsfehlers bei Approximation durch eine diskrete Verteilung

Wie wir später sehen werden, ist die explizite Berechnung der optimalen Quantisierungsfehler der Gleichverteilung μ eines $UIFS$ mittels Theorem 6.4 und 6.13 in vielen Fällen möglich.

Allerdings erscheint es wünschenswert und hilfreich, auch eine numerische Approximation für die optimalen Quantisierungsfehler zu besitzen, insbesondere in Fällen bei denen eine Anwendbarkeit der obigen Theoreme nicht gegeben ist.

Für die numerische Bestimmung des optimalen Quantisierungsfehlers bzw. der damit verbundenen optimalen Codebücher einer beliebigen Borelschen Wahrscheinlichkeitsverteilung ν auf dem $\mathbb{R}^d$ kann ganz allgemein der sogenannte Lloyd-Algorithmus verwendet werden (siehe [23]). Obwohl dieser Algorithmus eine gewisse Historie besitzt und weiterentwickelt worden ist (zur Übersicht siehe [17]), ist die praktische Anwendbarkeit für die meisten Wahrscheinlichkeitsverteilungen, insbesondere in höheren Raumdimensionen, nicht gegeben. Der Grund liegt in der (numerischen) Berechnung von ν-Integralen über nichttriviale Bereiche des $\mathbb{R}^d$ (siehe [11], Seite 362 ff.).

Ein geeigneterer Ansatz, den optimalen Quantisierungsfehler von ν zu berechnen, liegt in der Ausnutzung von Satz 2.5 (a).
Ist $\int \| x \|^r \, d\nu(x) < \infty$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten $\mathbb{R}^d-$wertigen Zufallsvariablen mit Verteilung ν, so betrachte man die empirische Verteilung

$$\nu_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \delta_{X_i}. \tag{187}$$

Nach dem Glivenko-Cantelli Theorem (siehe [10], Seite 387) konvergiert ν_k schwach gegen ν und es ist $\nu_k, \nu \in \mathfrak{M}_r$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Falls ν einen beschränkten Träger besitzt und $\cup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(\nu_k)$ ebenfalls beschränkt ist, folgt mittels Satz 2.6, dass

$$\lim_{k\to\infty} \rho_r(\nu_k, \nu) = 0,$$

was wiederum die Gültigkeit von Satz 2.5 (a) impliziert. Der empirische optimale Quantisierungsfehler $V_{n,r}(\nu_k)$ konvergiert also gegen den optimalen Quantisierungsfehler $V_{n,r}(\nu)$.

Neben dieser allgemein verfügbaren empirischen Approximation, bietet sich bei der Gleichverteilung μ eines $UIFS$ noch eine weitere deterministische Konstruktion einer approximierenden Verteilungsfolge an.

Sei nun für den Rest des Abschnittes $r > 1$. Mit ω als der Fixpunktmenge des $UIFS$ und $l = c \cdot \operatorname{diam}(A)$ sei zusätzlich vorausgesetzt, dass μ ein $(l, \omega)-$separiertes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, mit $\operatorname{card}(\omega) = N$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mu_k := \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{x\in\omega} \delta_x & \text{, falls } k = 1 \\ \frac{1}{N^k} \sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} \delta_{S_\sigma(x)} & \text{, falls } k > 1. \end{cases} \tag{188}$$

Aufgrund der Konstruktion von μ wissen wir, dass μ_k schwach gegen μ konvergiert und $\operatorname{supp}(\mu_k) \subset \overline{\operatorname{conv}(A)}$, woraus $\mu_k \in \mathfrak{M}_r$ folgt. Nach Satz 2.6 konvergiert μ_k gegen μ auch im Sinne der L_r-minimalen Metrik, d.h. $\rho_r(\mu_k, \mu) \to 0$. Somit gilt auch hier nach Satz 2.5 (a) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} V_{n,r}(\mu_k) = V_{n,r}(\mu).$$

Im Folgenden bestimmen wir die Konvergenzordnung dieser Approximation.

6.19 Lemma
Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n < N^k$. Dann gilt

$$\mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq r \left(\operatorname{diam}(A)\right)^r c^k \left(1 + c^k\right)^{r-1}.$$

Beweis.
Es treten zwei Fälle auf.
1. $V_{n,r}(\mu) > V_{n,r}(\mu_k)$.
Sei $\alpha \in C_{n,r}(\mu_k)$. Mittels (154) folgt

$$\begin{aligned} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid &= V_{n,r}(\mu) - V_{n,r}(\mu_k) \\ &\leq \int d(z,\alpha)^r d\mu(z) - \int d(z,\alpha)^r d\mu_k(z) \\ &= \int d(z,\alpha)^r d\mu(z) - \frac{1}{N^k} \sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} d(S_\sigma(x),\alpha)^r. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\operatorname{supp}(\mu) = A \subset \bigcup_{x\in\omega} B(x, c\operatorname{diam}(A))$. Wegen $\bigcup_{i=1}^N S_i(A) = A$ folgt mittels Induktion, dass

$$A = \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} S_\sigma(A). \tag{189}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\mu) &= \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} S_\sigma(A)\\ &\subset \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} S_\sigma(\bigcup_{x\in\omega} B(x, c\operatorname{diam}(A)))\\ &= \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \bigcup_{x\in\omega} B(S_\sigma(x), c^k\operatorname{diam}(A)).\end{aligned} \tag{190}$$

Zusammen mit

$$\mu(B(S_\sigma(x), c^k\operatorname{diam}(A))) = \frac{1}{N^k} \tag{191}$$

folgt

$$\begin{aligned}&\mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid\\ \leq\ &\sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} \int_{B(S_\sigma(x),c^k\operatorname{diam}(A))} (d(z,\alpha)^r - d(S_\sigma(x),\alpha)^r)\, d\mu(z).\end{aligned}$$

Sei $\sigma \in \{1,..,N\}^{k-1}$, $x \in \omega$ und $z \in B(S_\sigma(x), c^k\operatorname{diam}(A))$ beliebig gewählt. Es ist

$$\max\left(d(z,\alpha); d(S_\sigma(x),\alpha)\right) \leq d(z, S_\sigma(x)) + d(S_\sigma(x),\alpha). \tag{192}$$

Offensichtlich gilt

$$S_\sigma(x) \in S_\sigma(\omega) \subset S_\sigma\left(\overline{\operatorname{conv}(A)}\right)$$

Wegen (152) ist

$$S_\sigma\left(\overline{\operatorname{conv}(A)}\right) = \overline{\operatorname{conv}(S_\sigma(A))}.$$

Mittels (189) folgt

$$\overline{\operatorname{conv}(S_\sigma(A))} \subset \overline{\operatorname{conv}(A)}.$$

Insgesamt gilt also

$$S_\sigma(x) \in \overline{\operatorname{conv}(A)}. \tag{193}$$

Aus Satz 2.1 (d) folgt

$$\alpha \subset \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\mu_k))} = \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \bigcup_{x\in\omega} S_\sigma(x)\right)} \subset \overline{\operatorname{conv}(A)}. \tag{194}$$

Aus (192), (193) und (194) schließen wir

$$\max\left(d(z,\alpha); d(S_\sigma(x),\alpha)\right) \leq c^k\operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(A).$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes und der Definition (120) der charakteristischen Funktion

erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \\
\leq & \sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} \int_{B(S_\sigma(x),c^k \operatorname{diam}(A))} r\left(c^k \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(A)\right)^{r-1} \cdot \\
& \cdot 1_{\{z:d(z,\alpha)-d(S_\sigma(x),\alpha)>0\}}(d(z,\alpha) - d(S_\sigma(x),\alpha))d\mu(z) \\
\leq & \sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} r(c^k \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(A))^{r-1} \cdot \\
& \cdot \int_{B(S_\sigma(x),c^k \operatorname{diam}(A))} d(z, S_\sigma(x))d\mu(z) \\
\leq & N^{k-1} N r (1+c^k)^{r-1} \frac{1}{N^k} c^k (\operatorname{diam}(A))^r \\
\leq & r\left(\operatorname{diam}(A)\right)^r c^k \left(1+c^k\right)^{r-1}.
\end{aligned}$$

2. $V_{n,r}(\mu) \leq V_{n,r}(\mu_k)$.
Mit $\alpha \in C_{n,r}(\mu)$ folgt analog zu Fall 1 die Behauptung. □

6.20 Proposition
Für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq r\left(\operatorname{diam}(A)\right)^r c^k \left(1+c^k\right)^{r-1}. \tag{195}$$

Beweis.
Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \\
= & \max\left(\sup_{n\geq N^k} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid ; \max_{n<N^k} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \right).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass card(supp$(\mu_k)) = N^k$. Somit ist $V_{n,r}(\mu_k) = 0$ für alle $n \geq N^k$. Sei $\beta_k = \bigcup_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} S_\sigma(\omega)$. Falls $n \geq N^k$, folgt mittels Satz 2.4 (a) , dass

$$V_{n,r}(\mu) \leq V_{N^k,r}(\mu) \leq \Psi_{\beta_k,r}(\mu) = \int d(z,\beta_k)^r d\mu(z).$$

Man beachte, dass die Identitäten (190) und (191) auch hier gültig sind. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_{n,r}(\mu) & \leq \sum_{\sigma\in\{1,..,N\}^{k-1}} \sum_{x\in\omega} \int_{B(S_\sigma(x),c^k \operatorname{diam}(A))} d(z, S_\sigma(x))^r d\mu(z) \\
& = N^{k-1} \cdot N \cdot \frac{1}{N^k} \cdot (c^k \operatorname{diam}(A))^r = (c^k \operatorname{diam}(A))^r.
\end{aligned}$$

Wir folgern also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq \max\left((c^k \operatorname{diam}(A))^r ; \max_{n<N^k} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \right).$$

Die Anwendung von Lemma 6.19 ergibt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq (\mathrm{diam}(A))^r \max\left(c^{kr}; rc^k \left(1+c^k\right)^{r-1}\right).$$

Da $c \in]0,1[$, $r > 1$ und $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gilt offensichtlich

$$c^{kr} < rc^k < rc^k \left(1+c^k\right)^{r-1},$$

woraus sich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq r\,(\mathrm{diam}(A))^r\, c^k \left(1+c^k\right)^{r-1}$$

ergibt. □

6.21 Bemerkung
Die Abschätzung (195) hängt weder von der Quantisierungsdimension $D_r = D$, noch von der Raumdimension d oder der Anzahl der Fixpunkte N ab. Ganz allgemein haben Graf und Luschgy (siehe [14], Theorem 4.2 (b)) gezeigt, dass für die empirische Approximation (187) von μ in Raumdimension $d = 2$, $r \geq 1$ und $k \geq 1$ eine Konstante $M_1 > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq M_1 \cdot \frac{\log(N^k)}{\sqrt{N^k}} = M_1 \log(N) \cdot \frac{k}{\left(\sqrt{N}\right)^k}$$

gilt. Andererseits erhält man aus Proposition 6.20 für die deterministische Approximation (188) von μ im Falle $r > 1$ und $k > 1$ unabhängig von der Raumdimension d die Existenz einer Konstante $M_2 > 0$ mit der die allgemeine Abschätzung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mid V_{n,r}(\mu_k) - V_{n,r}(\mu) \mid \leq M_2 c^k$$

gilt. Ein Vergleich dieser beiden Abschätzungen zeigt, dass die deterministische Approximation für $c < \frac{1}{\sqrt{N}}$ eine bessere Fehlerabschätzung liefert.

6.5 Anwendungen und Beispiele

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate aus den Kapiteln 6.2 und 6.3 auf konkrete Beispiele, d.h. Gleichverteilungen von speziellen $UIFS$, anwenden.

Dabei hängt die Anwendbarkeit von Theorem 6.13 in entscheidender Weise davon ab, ob man die beiden Voraussetzungen dieses Theorems mittels einfach nachzuprüfender hinreichender Kriterien verifizieren kann.

Wir beginnen zu diesem Zweck mit einem Kriterium, dass mit Informationen über die Fixpunktmenge $\omega = \{x_1, .., x_N\}$ des $UIFS$ die beiden Voraussetzungen sicherstellt.

6.22 Proposition
Sei $N \geq 2$ und $r > 1$. Es sei

$$c_0 = c_0(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , \textit{falls } N = 2 \\ \frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)} & , \textit{falls } N > 2. \end{cases}$$

Liegt der Kontraktionsparameter c des $UIFS$ in $]0, c_0[$, so ist die Gleichverteilung μ des $UIFS$ separat quantisierend.
Ist darüberhinaus bei $N > 2$ der Wert $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ und gilt $c \in]0, c_1[$ mit

$$c_1 = c_1(r, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , \textit{falls } N = 2 \\ \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12 \operatorname{diam}(\omega)}, \frac{D_{\min}(r,N,Q_\omega)}{(6 \operatorname{diam}(\omega))^r} \right) & , \textit{falls } N > 2. \end{cases}$$

so gilt zusätzlich

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$$

für alle $n \in \{1, .., N-1\}$.

Beweis.
(a) Sei $(S_1, .., S_N)$ ein $UIFS$ mit Kontraktionsparameter c und der Fixpunktmenge $\omega = \{x_1, .., x_N\}$. Man beachte, dass $c < c_0(\omega) < \frac{1}{2}$. Es sei $l = \frac{c}{1-2c} \cdot \operatorname{diam}(\omega)$. Mit derselben Argumentation wie in Kapitel 6.2 erhalten wir auch hier die Gültigkeit von Ungleichung (156), woraus sich

$$\operatorname{diam}(A) \leq \frac{1}{1-2c} \cdot \operatorname{diam}(\omega) = \frac{l}{c}$$

ergibt. Somit ist $\operatorname{diam}(S_i(A)) = c \cdot \operatorname{diam}(A) \leq l$. Weil $\omega \subset A$, folgt daraus

$$S_i(A) \subset B(x_i, l) \tag{196}$$

für alle $i \in \{1, .., N\}$. Ferner gilt

$$l < \frac{c_0(\omega)}{1 - 2c_0(\omega)} \cdot \operatorname{diam}(\omega). \tag{197}$$

Aus der Definition von $c_0(\omega)$ folgt für die rechte Seite von (197) die obere Schranke $\frac{\frac{1}{12} d_{\min}(\omega)}{1 - 2 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{d_{\min}(\omega)}{10}$. Man beachte dabei, dass $d_{\min}(\omega) = \operatorname{diam}(\omega)$, falls $N = 2$. Wir folgern, dass

$$c \cdot \operatorname{diam}(A) \leq l < \frac{d_{\min}(\omega)}{10} < \frac{d_{\min}(\omega)}{2}. \tag{198}$$

Somit sind die Kugeln $(B(x_i, l))_{i=1,..,N}$ paarweise disjunkt. Weil $\mu(S_i(A)) = \frac{1}{N}$, ist μ ein $(l, \omega)-$separiertes Maß. Da $l < \frac{d_{\min}(\omega)}{10}$, folgt aus Proposition 4.2 für beliebige $i, j \in \{1, .., N\}$ mit $i \neq j$, dass

$$\overline{\alpha}(x_i) \cap \overline{\alpha}(x_j) = \emptyset.$$

Wegen (196) und Definition (167) ist $\overline{\alpha}(x_i) \supset \alpha_i$ für jedes $i \in \{1, .., N\}$.
Damit gilt für beliebige $i, j \in \{1, .., N\}$ mit $i \neq j$, dass

$$\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset.$$

Mittels Bemerkung 6.8 folgt, dass die Gleichverteilung μ des $UIFS$ separat quantisierend ist.

(b) Nach Bemerkung 6.14, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $N > 2$.
Sei $n \in \{1, .., N-2\}$. Aus (197) und der Definition von $c_0(\omega)$ folgt

$$l \leq \frac{D_{\min}(r, N, Q_\omega) \operatorname{diam}(\omega)}{(6 \operatorname{diam}(\omega))^r (1 - 2 \cdot \frac{1}{12})} = \frac{D_{\min}(r, N, Q_\omega)}{5(6 \operatorname{diam}(\omega))^{r-1}}.$$

Man beachte, dass aufgrund von $r > 1$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & 5\left(6\,\mathrm{diam}\,(\omega)\right)^{r-1} - 4r\left(\frac{11}{10}\,\mathrm{diam}\,(\omega)\right)^{r-1} \\ = \;& 5\left(\frac{11}{10}\right)^{r-1}\mathrm{diam}\,(\omega)^{r-1}\left(\left(\frac{60}{11}\right)^{r-1} - \frac{4}{5}r\right) \\ > \;& 5\,\mathrm{diam}\,(\omega)^{r-1}\,y(r) \end{aligned}$$

mit $y(r) = \left(\frac{60}{11}\right)^{r-1} - \frac{4}{5}r$ gilt. Da $\frac{d}{dr}y(r) > 0$ für alle $r > 1$ ist, erhalten wir $y(r) \geq y(1) > 0$ für alle $r > 1$. Mithin gilt

$$5\left(6\,\mathrm{diam}\,(\omega)\right)^{r-1} - 4r\left(\frac{11}{10}\,\mathrm{diam}\,(\omega)\right)^{r-1} > 0,$$

woraus sich

$$l < \frac{D_{\min}(r, N, Q_\omega)}{4r(\frac{11}{10}\,\mathrm{diam}(\omega))^{r-1}}$$

erschließt. Daraus und mit Lemma 4.17 folgt

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu) \tag{199}$$

für alle $n \in \{1, .., N-2\}$.
Nun sei $n = N - 1$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$V_{N,r}(\mu) - V_{N+1,r}(\mu) < V_{N-1,r}(\mu) - V_{N,r}(\mu). \tag{200}$$

Proposition 6.12 impliziert

$$V_{N,r}(\mu) = c^r V_{1,r}(\mu) \tag{201}$$

bzw.

$$V_{N+1,r}(\mu) = \frac{c^r}{N}((N-1)V_{1,r}(\mu) + V_{2,r}(\mu)). \tag{202}$$

Aus Gleichung (201) und (202) folgt

$$\begin{aligned} & V_{N,r}(\mu) - V_{N+1,r}(\mu) + V_{N,r}(\mu) \\ = \;& \frac{c^r}{N}(V_{1,r}(\mu) - V_{2,r}(\mu)) + V_{N,r}(\mu) \\ = \;& (1 + \frac{1}{N})V_{N,r}(\mu) - \frac{c^r}{N}V_{2,r}(\mu) \\ < \;& (1 + \frac{1}{N})V_{N,r}(\mu). \end{aligned}$$

Aus Proposition 4.2 folgt für die rechte Seite die obere Schranke $V_{N-1,r}(\mu)$, womit Ungleichung (200) bewiesen ist. □

6.23 Bemerkung
Aus dem Beweis von Proposition 6.22 und mittels Bemerkung 4.18 erkennt man leicht, dass bei $N > 2$, $D_{\min}(r, N, Q_\omega) < 0$ und $c < \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)}, \frac{|D_{\min}(r,N,Q_\omega)|}{(6\,\mathrm{diam}(\omega))^r}\right)$ die Gleichverteilung μ des $UIFS$ separat quantisierend ist und

$$V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) < V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$$

für alle $n \in \{1, .., N-2\}$.

Aus Proposition 6.22 folgt, dass die Voraussetzung (b) von Theorem 6.13 immer dann erfüllt ist, falls $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ gilt. In Kapitel 5 wurde diese Frage für spezielle Gleichverteilungen beantwortet. Im folgenden Resultat werden diese Ergebnisse für die Formulierung eines weiteren Kriteriums benutzt, dass die beiden Voraussetzungen von Theorem 6.13 sicherstellt.

6.24 Proposition
Es sei mindestens eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt.

(i) Es sei $N = 2$ *und* $c \in]0, \frac{1}{12}[$.

(ii) Es sei $d = 1$ *und* $3 \leq N < \infty$. *Es sei* $M_\omega < 1$ *und*

$$r > r_0 = \max\left(2, \frac{\log\left(\frac{3}{4}N^4\right)}{-\log(M_\omega)}\right).$$

Für den Kontraktionsfaktor c *gelte*

$$0 < c < \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)}, \frac{\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r \left(\frac{4}{N^4} - 3M_\omega^r\right)}{(6\,\mathrm{diam}(\omega))^r}\right).$$

(iii) Es sei $d \geq 2$ *und* $N = 3$. *Es sei* $r > 2$ *und für den Kontraktionsfaktor* c *gelte*

$$0 < c < \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)}, \frac{\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{\sqrt{3}}\right)^r - \frac{4}{3}\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{2}\right)^r}{(6\,\mathrm{diam}(\omega))^r}\right).$$

(iv) Es sei $d \in \mathbb{N}$ *und* $N > 3$. *Es sei*

$$\mathrm{diam}(\{x_1, .., x_i\}) < \frac{1}{\sqrt{i}+2} d(x_{i+1}, \{x_1, .., x_i\}),$$

für alle $i \in \{2, .., N-1\}$. *Es sei* $r = 2$ *und für den Kontraktionsfaktor* c *gelte*

$$0 < c < \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)}, \frac{D_{\min}(2, N, Q_\omega)}{(6\,\mathrm{diam}(\omega))^r}\right).$$

Dann ist die Gleichverteilung μ *des* $UIFS$

(a) separat quantisierend und

(b) $V_{n,r}(\mu) - V_{n+1,r}(\mu) > V_{n+1,r}(\mu) - V_{n+2,r}(\mu)$ *für alle* $n \in \{1, .., N-1\}$.

Beweis.
(i)/(ii) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Kombination von Proposition 5.2 mit Proposition 6.22.
(iii) Die Verbindung von Proposition 5.4 mit Proposition 6.22 liefert hier die Behauptung.
(iv) Proposition 5.7 und Proposition 6.22 zeigt hier die Behauptung. □

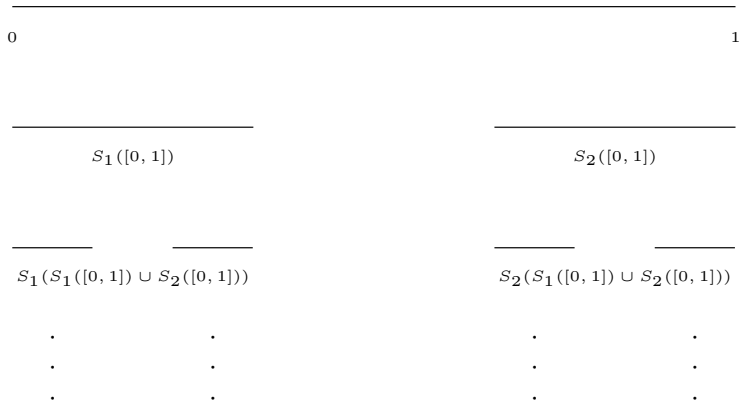

Abbildung 7: Cantormengenkonstruktion über ein $UIFS$

6.25 Bemerkung
Die in Proposition 6.22 und Proposition 6.24 angegebenen Schranken für den Kontraktionsparameter c sind invariant unter einer beliebigen Ähnlichkeitsabbildung. Ferner werden in den beiden Propositionen keine einschränkenden Voraussetzungen an die Drehanteile der Kontraktionsabbildungen des $UIFS$ gemacht.

Sind für ein $UIFS$ die Voraussetzungen der Proposition 6.22 oder Proposition 6.24 erfüllt, dann kann für alle $n \geq N$ das n-optimale Quantisierungsproblem für die Gleichverteilung μ des $UIFS$ durch die Anwendung von Theorem 6.13 als vollständig gelöst betrachtet werden.

Im Folgenden diskutieren wir die optimale Quantisierung von Gleichverteilungen modifizierter Versionen klassischer $UIFS$ als konkrete Beispiele. Im einzelnen analysieren wir die Cantormenge, das Sierpinski-Dreieck und den Cantor-Staub. Wir konzentieren uns dabei auf die Anwendbarkeit unserer Resultate. Eine tiefergehende Erörterung dieser Beispiele für Bereiche von r und c in denen unsere Resultate nicht greifen, verlagern wir bewusst in das nachfolgende Kapitel.

6.26 Beispiel (Cantormenge)
Sei $d = 1$ und $\omega = \{x_1, x_2\}$ mit $x_1 = 0, x_2 = 1$.
Mit dem Kontraktionsfaktor $c \in]0, \frac{1}{2}[$ betrachte man das $UIFS$ aus (158).
Die Konstruktion des Attraktors A gemäß Bemerkung 6.1 mit dem Intervall $[0, 1]$ an Stelle von K ist in Abbildung 7 veranschaulicht und identisch mit der in Kapitel 3.1 vorgestellten Wischkonstruktion für konstante Konstruktionsfolgen.
Der Attraktor A dieses $UIFS$ ist somit identisch mit der bereits in Kapitel 3.1 eingeführten Cantormenge $C((c_k))$, mit konstanter Konstruktionsfolge $c_k = c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner ist die Gleichverteilung μ auf dem $UIFS$ identisch mit der in Kapitel 3.1 definierten dyadischen homogenen Cantorverteilung dieser speziellen Cantormenge $C((c_k))$. Für $c \in]0, \frac{1}{12}[$ erhält man durch Anwendung von Proposition 6.24 und

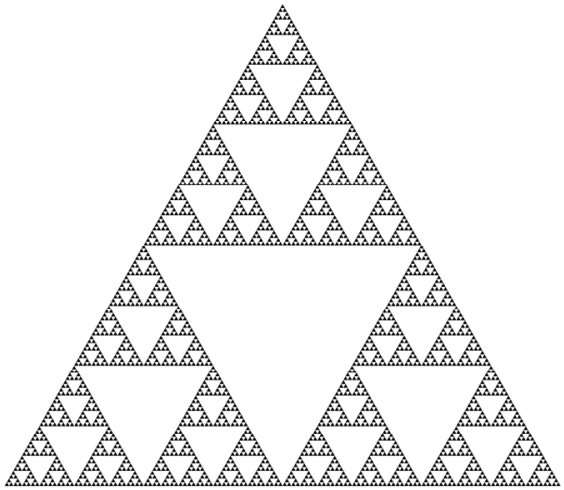

Abbildung 8: Sierpinski-Dreieck für Kontraktionsfaktor $c = \frac{1}{2}$

Theorem 6.13 (i)/(ii) die bereits aus Kapitel 3.5 bekannten Resultate. Die Charakterisierung der optimalen Codebücher aus Theorem 6.13 (iii) findet sich in Theorem 3.17 wieder. Aus Lemma 6.3 (d) folgt

$$V_{1,2}(\mu) = \frac{1-c}{1+c} \cdot V_{1,2}(Q_\omega) = \frac{1-c}{4(1+c)}. \tag{203}$$

Mit dieser Identität (203) ergeben sich für $r = 2$ nochmal speziellere Versionen der in Bemerkung 3.26 gemachten Aussagen, da dort der $1-$optimale Quantisierungsfehler nicht weiter vereinfacht wurde.
Eine weiterführende Diskussion im Bereich $c \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ und $r = 2$ erfolgt in Beispiel 7.2 bzw. Abschnitt 7.1.2 und Abschnitt 7.1.3.

6.27 Beispiel (Sierpinski-Dreieck)
Sei $d = 2$. Sei $\omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ mit $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$ und $x_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Mit dem Kontraktionsfaktor $c \in]0, \frac{1}{2}]$ betrachte man das $UIFS$ aus (158). Für $c = \frac{1}{2}$ wird der Attraktor A des $UIFS$ in der Literatur als (klassisches) Sierpinski-Dreieck bezeichnet. Eine graphische Veranschaulichung von A zeigt Abbildung 8.

1. Wir diskutieren zunächst die optimale Quantisierung im Bereich $n \in \{1, 2, 3\}$ und $r = 2$. Mit dem Schwerpunkt

$$s_{Q_\omega}(\omega) = \int x dQ_\omega(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

gilt nach Satz 2.1 (c), dass

$$V_{1,2}(Q_\omega) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \| x_i - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \|^2 = \frac{1}{3}.$$

Mittels Lemma 6.3 (d) folgt für $c \in]0, \frac{1}{2}[$, dass

$$V_{1,2}(\mu) = \frac{1-c}{1+c} \cdot V_{1,2}(Q_\omega) = \frac{1-c}{3(1+c)}.$$

Sei nun $c_0 \in]0, \frac{1}{2}]$ gemäß Theorem 6.4. Dann gilt für alle $c \in]0, c_0[$

$$V_{2,2}(\mu) = \frac{c^2(1-c)}{3(1+c)} + \frac{1}{6}(1-c)^2.$$

Ebenfalls für $c \in]0, c_0[$ gilt nach Korollar 6.5 (a), dass

$$V_{3,2}(\mu) = c^2 V_{1,2}(\mu) = \frac{c^2(1-c)}{3(1+c)}. \tag{204}$$

Man beachte, dass Identität (204) auch aus der Anwendung von Proposition 6.22 und Proposition 6.12 (iii) folgt, mit dem Gültigkeitsbereich $c \in]0, \frac{1}{12}[$. Durch direktes Nachrechnen erhält man für $c \in]0, c_0[$, dass

$$D_{\min}(2,3,\mu) = (1-c)^2 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0. \tag{205}$$

Nach Satz 2.1 (c) und Lemma 6.3 (a) gilt für $c \in]0, \frac{1}{2}[$, dass

$$C_{1,2}(\mu) = \{\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \}\}.$$

Mit $s_\mu(A) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ und für $i \in \{1,2,3\}$ sei

$$x_{1,i} = S_i(s_\mu(A))$$

bzw.

$$x_{2,i} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} S_j(s_\mu(A)).$$

Aus Theorem 6.4 erhält man für $c \in]0, c_0[$ die Beziehung

$$C_{2,2}(\mu) \subset \{\{(x_{1,i}, x_{2,i})\} : i = 1,2,3\}.$$

Nach Satz 2.1 (a) ist $C_{2,2}(\mu)$ nichtleer. Also gibt es ein $i_0 \in \{1,2,3\}$ mit $\{(x_{1,i_0}, x_{2,i_0})\} \in C_{2,2}(\mu)$. Man sieht unmittelbar, dass die Menge $\{(x_{1,i_0}, x_{2,i_0})\}$ durch eine geeignete Drehung um den Schwerpunkt $s_\mu(A)$ in jede der Mengen $\{(x_{1,i}, x_{2,i})\}$ mit $i \neq i_0$ überführt werden kann. Mittels Satz 2.4 (c) folgt dann

$$\{\{(x_{1,i}, x_{2,i})\} : i = 1,2,3\} \subset C_{2,2}(\mu).$$

Mithin gilt die Charakterisierung

$$C_{2,2}(\mu) = \{\{(x_{1,i}, x_{2,i})\} : i = 1,2,3\}. \tag{206}$$

Wiederum aus Theorem 6.4 ergibt sich für $c \in]0, c_0[$ die Darstellung

$$C_{3,2}(\mu) = \{\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}\}. \tag{207}$$

Alternativ erhält man die Charakterisierung (207) auch aus der Anwendung von Proposition 6.22 und Proposition 6.12 (iii), mit dem Gültigkeitsbereich $c \in]0, \frac{1}{12}[$. Eine weiterführende Diskussion im Bereich $c \in]c_0, \frac{1}{2}[$ erfolgt in Abschnitt 7.2.1. Bemerkung 7.13 wird dort zeigen, dass die Charakterisierung (206) von $C_{2,2}(\mu)$ für $c > \frac{3}{7}$ falsch ist.

2. Nun untersuchen wir die optimale Quantisierung für $n > 3$ und $r \geq 1$. Da für $r = 1$ im allgemeinen kein eindeutiges 1-Codebuch vorliegt (Satz 2.1 (c) ist nicht anwendbar) und auch Proposition 5.4 nicht angewendet werden kann, wir dieser Fall nicht weiterverfolgt. Sei nun $r > 1$. Nach Proposition 5.4 ist

$$D_{\min}(r, 3, Q_\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^r - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

Die weitere Diskussion erfolgt in verschiedenen Wertebereichen von r.

1. Fall $1 < r < 2$.
In diesem Bereich werden die Aussagen von Theorem 6.13 im allgemeinen falsch. Eine detaillierte Besprechung erfolgt separat in Abschnitt 7.2.1.

2. Fall $r = 2$.
Mittels Proposition 5.4 ist $D_{\min}(2, 3, Q_\omega) = 0$. Weder Proposition 6.22 noch Proposition 6.24 ist anwendbar um die Voraussetzungen von Theorem 6.13 zu garantieren. Wir können in diesem Bereich mit den vorhandenen Resultaten keine Aussage über das Verhalten der optimalen Quantisierung von μ machen.

3. Fall $r > 2$.
3.1. Fall $c \in]0, (\frac{1}{6\sqrt{3}})^r - \frac{4}{3}(\frac{1}{12})^r[$.
Mittels Proposition 6.24 sind alle Voraussetzungen von Theorem 6.13 erfüllt.
Die $n-$optimale Quantisierung kann damit in diesem Fall für alle $n \geq N$ als gelöst betrachtet werden.

3.2. Fall $c > (\frac{1}{6\sqrt{3}})^r - \frac{4}{3}(\frac{1}{12})^r$.
Keine der Voraussetzungen aus Proposition 6.24 ist hier erfüllt. Wir können deshalb nicht garantieren, dass die Voraussetzungen von Theorem 6.13 erfüllt sind und darum auch keine Aussage über die $n-$optimale Quantisierung in diesem Bereich machen.

6.28 Beispiel (Cantor-Staub)
Sei $d = 2$. Sei $\omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (1, 1)$ und $x_4 = (0, 1)$. Mit dem Kontraktionsfaktor $c \in]0, \frac{1}{2}]$ betrachte man das $UIFS$ aus (158). Analog zu den vorherigen Beispielen gibt es ein $c_0 \in]0, \frac{1}{2}]$, so dass man für alle $c \in]0, c_0[$ folgende Identitäten erhält:

$$\begin{aligned} V_{1,2}(\mu) &= \frac{1-c}{2(1+c)} \\ V_{2,2}(\mu) &= \frac{1-c}{2(1+c)}(1+c^2) \\ V_{3,2}(\mu) &= \frac{1-c}{2(1+c)}(\frac{1+3c^2}{2}) \\ V_{4,2}(\mu) &= \frac{1-c}{2(1+c)} \cdot c^2. \end{aligned}$$

Auch hier ist $V_{2,2}(\mu) - 2V_{3,2}(\mu) + V_{4,2}(\mu) = 0$ für alle $c \in]0, c_0[$. Weitere Aussagen sind mit unseren Resultaten nicht möglich. Auch dieses Beispiel wird in Abschnitt 7.2.1 noch einmal aufgegriffen werden.

7 Gültigkeitsgrenzen der Resultate, Vermutungen und offene Fragen

7.1 Eindimensionale dyadische homogene Cantorverteilungen

7.1.1 Gegenbeispiele

Im Hinblick auf die in Theorem 3.17 gemachte Voraussetzung $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k \leq \frac{1}{3}$ stellt sich zunächst die Frage, ob diese Bedingung bei voller Gültigkeit des Theorems weiter abgeschwächt werden kann. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Sowohl die Aussage über die Gestalt der optimalen Codebücher, als auch die Formel (57) für den optimalen Quantisierungsfehler ist für $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k > \frac{1}{3}$ im allgemeinen falsch. Dies gilt selbst im Spezialfall der klassischen Cantorverteilung, wenn $r = 2$ und $c > \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 0,4384...$ ist.

7.1 Beispiel
Es sei $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $\sup_{l\in\mathbb{N}} a_l \leq \frac{1}{3}$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ und $c \in]0, \frac{1}{2}[$ sei

$$c_{k,l} := \begin{cases} c, & \text{falls } k \neq 2 \\ a_l, & \text{falls } k = 2 \end{cases}$$

Die durch die Folge $(c_{k,l})_{k\in\mathbb{N}}$ definierte dyadische homogene Cantorverteilung sei mit μ_l bezeichnet. Da $c_{1,l} = c$ und $(c_{2,l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge $(\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $\nu_c = \frac{1}{4}(\delta_0 + \delta_c + \delta_{1-c} + \delta_1)$. Man kann sogar zeigen, dass

$$\int \| x \|^r \, d\mu_l(x) \to \int \| x \|^r \, d\nu_c(x).$$

Aus Satz 2.6 und Satz 2.5 (a) folgt

$$V_{n,r}(\mu_l) \to V_{n,r}(\nu_c). \tag{208}$$

Satz 2.5 (b) sichert die Existenz einer Folge von Codebüchern $(\alpha_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_l \in C_{n,r}(\mu_l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$, für die

$$d_H(\alpha_l, C_{n,r}(\nu_c)) \to 0, \text{ für } l \to \infty \tag{209}$$

gilt. Ist nun $c \leq \frac{1}{3}$, so folgt aus Theorem 3.17

$$C_{3,r}(\mu_l) = \{\{\frac{c}{2}, 1 - c + \frac{ca_l}{2}, 1 - \frac{ca_l}{2}\}, \{\frac{ca_l}{2}, c - \frac{ca_l}{2}, 1 - \frac{c}{2}\}\}. \tag{210}$$

Ebenfalls für $c \leq \frac{1}{3}$ ermittelt man durch elementare Überlegungen, dass

$$C_{3,r}(\nu_c) = \{\{\frac{c}{2}, 1 - c, 1\}, \{0, c, 1 - \frac{c}{2}\}\}.$$

Jedoch ist

$$C_{3,r}(\nu_c) = \{\{0, \frac{1}{2}, 1\}\},$$

sobald $c > \frac{1}{3}$. In diesem Fall kann aber (210) nicht mehr richtig sein, weil sich sonst mit

$$\inf_{l\in\mathbb{N}} d_H(C_{3,r}(\mu_l), C_{3,r}(\nu_c)) \geq \frac{1}{2} - c > 0,$$

ein Widerspruch zu (209) ergeben würde. Analog würde im Falle der Gültigkeit von Gleichung (57) für $c > \frac{1}{3}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} V_{3,r}(\mu_l) &= \lim_{l\to\infty} \frac{c_1^r}{2}\left((2^1-1)V_{1,r}\left(\mu_l^{(2)}\right)\right)\\ &= \frac{c^r}{2}V_{1,r}\left(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^r > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-c\right)^r = V_{3,r}(\nu_c)\end{aligned}$$

folgen, was einen Widerspruch zu (208) darstellt. Alle Aussagen von Theorem 3.17 sind also im allgemeinen falsch, falls die dort geforderte Schranke von $\frac{1}{3}$ für die Konstruktionsfolge überschritten wird.

Mit E bezeichnen wir den Erwartungswert bezüglich der in Abschnitt 3.1 definierten Verteilung μ.

7.2 Beispiel
Sei μ selbstähnlich mit Kontraktionsparameter $c \in \,]\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}[$ und $r = 2$.
Es sei $F = [0,1]$ und

$$a_1 = \frac{c}{2},\ a_{21} = 1 - c + \frac{c^2}{2},\ a_{22} = 1 - \frac{c^2}{2}$$

seien die Mittelpunkte von F_1, F_{21} und F_{22}, so wie in Abschnitt 3.1 definiert. Nehmen wir an, dass $\alpha = \{a_1, a_{21}, a_{22}\}$ ein 3-Codebuch ist. Wegen $c > \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ sieht man leicht, dass

$$\mu(W(a_{21} \mid \alpha) \cap F_1) > 0. \tag{211}$$

Aus Satz 2.2 (i) folgt $\{a_{21}\} \in C_{1,2}(\mu(\cdot \mid W(a_{21} \mid \alpha)))$. Mittels Satz 2.1 (c) schließen wir

$$a_{21} = E(\mu(\cdot \mid W(a_{21} \mid \alpha))). \tag{212}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Erwartungswert von $\mu(\cdot \mid F_2 \cap W(a_{21} \mid \alpha))$ identisch mit a_{21} ist, welcher sich jedoch von $E(\mu(\cdot \mid W(a_{21} \mid \alpha)))$ aufgrund von Gleichung (211) unterscheidet. Dies widerspricht Gleichung (212). Somit ist $\alpha \notin C_{3,2}(\mu)$ und auch die Formel (57) für den Fehler ist hier falsch. Theorem 3.17 ist auch in diesem speziellen Fall nicht gültig.

7.1.2 Die optimalen Codebücher und numerische Experimente im selbstähnlichen Fall

Nach der vollständigen Lösung des Quantisierungsproblems bei $c \le \frac{1}{3}$ im Abschnitt 3.5, gestaltet sich die Situation im Bereich $c \in \,]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ deutlich schwieriger. Es gelingt uns jedoch, das bereits im Bereich $c \in \,]0, \frac{1}{3}]$ bekannte spezielle Resultat

$$C_{2,2}(\mu) = \{\{\frac{c}{2}, 1 - \frac{c}{2}\}\}$$

auf den Bereich $c \in \,]0, \frac{1}{2}]$ auszudehnen. Wir verallgemeinern dazu die Idee und Vorgehensweise des Beweises von Lemma 4.2 in [12].

Aufgrund der Konstruktion von μ gilt für alle $t \in]0,1[$, dass $\mu([0,t]) \neq 0$ und $\mu([t,1]) \neq 0$. Es sei

$$b_1(t) = \frac{1}{\mu([0,t])} \int_{[0,t]} x d\mu(x) \tag{213}$$

und

$$b_2(t) = \frac{1}{\mu([t,1])} \int_{[t,1]} x d\mu(x). \tag{214}$$

Die Werte $b_1(t)$ und $b_2(t)$ stellen die Schwerpunkte der Mengen $[0,t]$ bzw. $[t,1]$ bezüglich der Verteilung μ dar. An gewissen Stellen können diese explizit angegeben werden, wie das nachfolgende Lemma zeigt.

7.3 Lemma
Sei $n \in \{2,3,..\}$. Dann ist

$$b_1(1-c+c^n) = \frac{(1-c)(\frac{1}{2^n}) + \frac{c}{4}\left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}}$$

und

$$b_2(1-c+c^n) = (1-c) + \frac{\frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}.$$

Beweis.
Offensichtlich ist $[1-c, 1-c+c^n] \in \mathcal{D}_n$. Aus der Definition von μ folgt somit unmittelbar

$$\mu([0,1-c+c^n]) = \mu([0,c]) + \mu([1-c,1-c+c^n]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}. \tag{215}$$

Analog erhält man

$$\mu([1-c+c^n,1]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}. \tag{216}$$

Des weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) &= \int_{[0,1]\setminus[1-c+c^n,1]} x d\mu(x) \\
&= \int_{[0,1]} x d\mu(x) - \int_{[1-c+c^n,1]} x d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2} - \mu([1-c+c^n,1]) \frac{\int_{[1-c+c^n,1]} x d\mu(x)}{\mu([1-c+c^n,1])}.
\end{aligned} \tag{217}$$

Aus Lemma 3.1 schließen wir

$$\mu(\cdot \mid [1-c+c^n,1]) = \mu(\cdot \mid [1-c,1-c^n]) \circ \Phi^{-1}_{1-\frac{c}{2}}. \tag{218}$$

Eine direkte Konsequenz von (218) ist

$$\mu([1-c+c^n,1]) = \mu([1-c,1-c^n]). \tag{219}$$

Ebenfalls mit (218) und der Definition des Erwartungswertes folgt

$$\begin{aligned} E(\mu(\cdot \mid [1-c+c^n,1])) &= \Phi_{1-\frac{c}{2}}(E(\mu(\cdot \mid [1-c,1-c^n]))) \\ &= \Phi_{1-\frac{c}{2}}(\frac{\int_{[1-c,1-c^n]} x d\mu(x)}{\mu([1-c,1-c^n])}). \end{aligned} \tag{220}$$

Mittels (220) und (217) erhalten wir

$$\int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) = \frac{1}{2} - \mu([1-c,1-c^n])\Phi_{1-\frac{c}{2}}(\frac{\int_{[1-c,1-c^n]} x d\mu(x)}{\mu([1-c,1-c^n])}). \tag{221}$$

Für $k \in \{1,..,n\}$ sei $s_k = \int_{[1-c^{k-1},1-c^{k-1}+c^k]} x d\mu(x)$. Aus der Definition von μ folgt sofort

$$\int_{[1-c,1-c^n]} x d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n-1} s_{k+1}.$$

Es sei daran erinnert, dass die Gleichverteilung des $UIFS$ mit den Abbildungen $x \to cx$ und $x \to cx+1-c$ dem Maß μ entspricht. Die Anwendung von (154) führt deshalb zu

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{2}\int cx 1_{[1-c^{k-1},1-c^{k-1}+c^k]}(cx) d\mu(x) \\ &+ \frac{1}{2}\int (cx+1-c) 1_{[1-c^{k-1},1-c^{k-1}+c^k]}(cx+1-c) d\mu(x). \end{aligned}$$

Falls $k=1$ folgt $s_1 = \frac{c}{2}\int x d\mu(x) = \frac{c}{4}$. Falls $k \geq 2$ und $x \in [0,1]$, dann gilt

$$1-c^{k-1} \leq cx+1-c \leq 1-c^{k-1}+c^k,$$

woraus

$$1-c^{k-2} \leq x \leq 1-c^{k-2}+c^{k-1}$$

folgt. Wir schließen daraus

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{2}\int_{[1-c^{k-2},1-c^{k-2}+c^{k-1}]} (cx+1-c) d\mu(x) \\ &= \frac{c}{2}\cdot s_{k-1} + \frac{1-c}{2}\mu([1-c^{k-2},1-c^{k-2}+c^{k-1}]) \\ &= \frac{c}{2}\cdot s_{k-1} + \frac{1-c}{2}\cdot 2^{-(k-1)}. \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt

$$s_k = \begin{cases} \frac{c}{4}, & \text{falls } k=1 \\ \left(\frac{c}{2}\right)^{k-1}\frac{c}{4} + \frac{1}{2^k}\left(1-c^{k-1}\right), & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} s_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{c}{2}\right)^k \frac{c}{4} + \frac{1}{2^{k+1}} \left(1 - c^k\right) \right) \\
&= \frac{c}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{c}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{c}{2}\right)^k \\
&= \frac{c}{4} \cdot \frac{c}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{c}{2}\right)^k + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{c}{4} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{c}{2}\right)^k \\
&= \frac{c^2}{8} \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{c}{2}} + \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{c}{4} \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{c}{2}} \\
&= \frac{c}{4} \left(\frac{c}{2} - 1\right) \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{c}{2}} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) - \frac{c}{4} \left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right). \qquad (222)
\end{aligned}$$

Die Anwendung von (216) und (219) auf Gleichung (221) ergibt

$$\int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \Phi_{1-\frac{c}{2}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} s_{k+1}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}} \right).$$

Mit Gleichung (222) folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) \\
= \; & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \Phi_{1-\frac{c}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) - \frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}} \right) \\
= \; & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - c + \frac{c}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right) \\
= \; & \frac{1}{2} - (1-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right). \qquad (223)
\end{aligned}$$

Aus der Definition von b_1 in (213) und der Verwendung von (223) und (215) folgt

$$\begin{aligned}
b_1(1 - c + c^n) &= \frac{1}{\mu([0, 1 - c + c^n])} \int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) \\
&= \frac{\frac{1}{2} - (1-c)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) - \frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} \\
&= \frac{(1-c)(\frac{1}{2^n}) + \frac{c}{4}\left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}}. \qquad (224)
\end{aligned}$$

Wiederum mittels (223) folgt

$$\begin{aligned}\int_{[1-c+c^n,1]} x d\mu(x) &= \int_{[0,1]} x d\mu(x) - \int_{[0,1-c+c^n]} x d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - (1-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)\right) \\ &= (1-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right). \qquad (225)\end{aligned}$$

Die Kombination von (214), (216) und (225) ergibt

$$b_2(1-c+c^n) = (1-c) + \frac{\frac{c}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}. \qquad (226)$$

□

Als nächstes formulieren wir eine entscheidende Aussage über die Lage der Schwerpunkte, mit der wir anschließend das Hauptresultat des Abschnittes zeigen können.

7.4 Lemma
Für alle $t \in]1-c, 1[$ *gilt*

$$\frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} < t. \qquad (227)$$

Beweis.
Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{1}{2}\left(b_1(1-c+c^n) + b_2(1-c+c^n)\right) < 1 - c + c^{n+1} \qquad (228)$$

für alle $n \geq 2$.
Wegen Lemma 7.3 gilt

$$\begin{aligned}&\left(2 - 2c + 2c^{n+1} - b_1(1-c+c^n) - b_2(1-c+c^n)\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^n}\right) \\ = \;& \frac{1}{2} - \frac{c}{2} + \frac{c^{n+1}}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2c\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n 2c^{n+1} \\ - \;& \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2c\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{c}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + c\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ = \;& \frac{1}{4} - \frac{c}{2} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{c}{4}\right)^n - \frac{1}{2}c^{n+1} + 2c\left(\frac{c}{4}\right)^n\right) \\ \geq \;& \frac{1}{4} - \frac{c}{2} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{c}{4}\right)^n - \frac{1}{2}c^{n+1} + \left(\frac{c}{4}\right)^n\right) \\ = \;& \frac{1}{4} - \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - c\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + c^n\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{c}{2} - \frac{g(c)}{2},\end{aligned}$$

wobei

$$g(c) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - c\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + c^n\right).$$

Man beachte, dass $g(\frac{1}{2}) = 0$ und

$$g'(c) = -c \cdot nc^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - c^n = -(n+1)\,c^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n > -1$$

für alle $c \in]0, \frac{1}{2}[$. Daraus folgt

$$\frac{1}{4} - \frac{c}{2} - \frac{g(c)}{2} > 0$$

für alle $c \in]0, \frac{1}{2}[$, womit Gleichung (228) gezeigt ist. Wie im Beweis von Lemma 4.2 in [12] zeigt man, dass die Abbildungen $t \to b_1(t)$ und $t \to b_2(t)$ monoton nichtfallend auf $]0, 1[$ sind. Also ist auch $t \to \frac{b_1(t)+b_2(t)}{2}$ monoton nichtfallend auf $]0, 1[$. Zusätzlich gilt

$$\lim_{t \to 1} \frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Somit gilt für alle $c \in]0, \frac{1}{2}[$ und $t \in]1 - c^2, 1[$ die Ungleichung

$$\frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} \leq \frac{3}{4} < 1 - c^2 < t. \tag{229}$$

Falls $t \in]1 - c + c^2, 1 - c^2]$, folgt mit Gleichung (228), dass

$$\frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} = \frac{b_1(1 - c + c^2) + b_2(1 - c + c^2)}{2} < 1 - c + c^3 < t. \tag{230}$$

Aufgrund der Monotonie von $t \to \frac{b_1(t)+b_2(t)}{2}$ und aus (228) erhalten wir für alle $m \geq 2$ und $t \in]1 - c + c^{m+1}, 1 - c + c^m]$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{b_1(t) + b_2(t)}{2} &\leq \frac{b_1(1 - c + c^m) + b_2(1 - c + c^m)}{2} \\ &< 1 - c + c^{m+1} < t. \end{aligned} \tag{231}$$

Aus (229), (230) und (231) folgt dann die Behauptung. □

7.5 Theorem
Es sei $c \in]0, \frac{1}{2}]$. Dann ist

$$C_{2,2}(\mu) = \left\{ \left\{ \frac{c}{2}, 1 - \frac{c}{2} \right\} \right\}$$

und

$$V_{2,2}(\mu) = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{1 - c}{1 + c}.$$

Beweis.
1. Wir untersuchen zunächst den Fall $c \in]0, \frac{1}{2}[$.
Sei $\{a_1, a_2\} \in C_{2,2}(\mu)$ mit $a_1 < a_2$. Wegen Satz 2.1 (c) gilt $a_1 = b_1(\frac{a_1+a_2}{2})$ und $a_2 = b_2(\frac{a_1+a_2}{2})$. Folgende Unterfälle treten auf.
1.1 $\frac{a_1+a_2}{2} \in [c, 1-c]$.
Weil $\mu([c, 1-c]) = 0$ ist $a_1 = b_1(c) = \frac{c}{2}$ und $a_2 = b_2(1-c) = 1 - \frac{c}{2}$, woraus die Behauptung folgt.
1.2 $1 > \frac{a_1+a_2}{2} > 1 - c$.
Wegen $\frac{a_1+a_2}{2} \in]1-c, 1[$ schließen wir mit Lemma 7.4, dass

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{b_1(\frac{a_1+a_2}{2}) + b_2(\frac{a_1+a_2}{2})}{2} < \frac{a_1 + a_2}{2},$$

was einen Widerspruch darstellt. Somit kommt Fall 1.2 nicht vor.
1.3 $0 < \frac{a_1+a_2}{2} < c$.
Aufgrund der Symmetrie von μ ergibt sich auch in diesem Fall wie unter 1.2 ein Widerspruch.
2. Sei nun $c = \frac{1}{2}$. Hier ist μ identisch mit der Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Aus Example 5.5 in [13] folgt $C_{2,2}(\mu) = \{\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}\}$.
3. Die Formel für den 2-optimalen Quantisierungsfehler folgt aus der Codebuchdarstellung und Eigenschaft (154). □

Betrachtet man die Erkenntnisse aus Beispiel 6.26 und Beispiel 7.2 bzw. Theorem 7.5, so stellt sich natürlich die Frage, wie die Gestalt der n-Codebücher im selbstähnlichen Fall für $n > 2$ und Kontraktionsfaktor $c \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ aussieht. Bevor wir hier detaillierte Vermutungen aufstellen, verschaffen wir uns zunächst in diesem Abschnitt durch einige numerische Berechnungen für $n = 2, 3, 4$ und $r = 2$ einen Einblick in die tatsächlichen Verhältnisse.

Wir gehen dabei wie in Abschnitt 6.4 vor und approximieren μ durch die Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Zur Definition von μ_k siehe (188). Der optimale Quantisierungsfehler $V_{n,2}(\mu_k)$ kann dabei für $n \leq 2^k$ aufgrund des endlichen Trägers von μ_k gemäß Bemerkung 4.5 elementar nach Formel (97) berechnet werden. Für die Abschätzung des Approximationsfehlers benutzen wir Proposition 6.20. Wir beginnen unsere numerischen Untersuchungen für $n = 2$. In diesem Fall haben wir das optimale Quantisierungsproblem im Bereich $c \in]0, \frac{1}{2}]$ bereits vollständig gelöst. Die Gestalt von $C_{2,2}(\mu)$ und eine Formel für den zugehörigen 2-optimalen Quantisierungsfehler folgt aus Theorem 7.5. Zur Verdeutlichung der Konvergenzordnung zeigt Tabelle 1 einen Vergleich numerischer Berechnungen von $V_{2,2}(\mu_k)$ und dem zugehörigen Approximationsfehler $\mid V_{2,2}(\mu_k) - V_{2,2}(\mu) \mid$ mit der Abschätzung

$$\mid V_{2,2}(\mu_k) - V_{2,2}(\mu) \mid \leq 2c^k(1 + c^k) \tag{232}$$

aus Proposition 6.20. Dabei ist der Kontraktionsfaktor $c = 0,2$ fest gewählt und somit $V_{2,2}(\mu) = \frac{2}{300}$. Um die Konvergenz auch in Abhängigkeit von c zu demonstrieren, zeigt Tabelle 2 dasselbe Berechnungsschema wie in Tabelle 1, allerdings für fest gewähltes $k = 10$ und verschiedene $c \in]0, \frac{1}{2}[$. Man erkennt dabei deutlich, dass der tatsächliche Approximationsfehler um einige Größenordnungen kleiner ist, als die Abschätzung (232) angibt.

k	$V_{2,2}(\mu_k)$	$\mid V_{2,2}(\mu_k) - V_{2,2}(\mu) \mid$	$2\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^k\right)$
2	0,0099999999999999	0,0033333333333333	0,0832000000000000
3	0,0068000000000000	0,0001333333333333	0,0161280000000000
4	0,0066720000000000	0,0000533333333333	0,0032051200000000
10	0,0066666666666885	0,0000000000000218	0,0000002048000210

Tabelle 1: Berechnung von $V_{2,2}(\mu_k)$ und dem Approximationsfehler für verschiedene k mit Kontraktionsfaktor $c = 0,2$

c	$V_{2,2}(\mu_{10})$	$\mid V_{2,2}(\mu_{10}) - V_{2,2}(\mu) \mid$	$2c^{10}(1 + c^{10})$
0,2	0,0066666666666885	0,0000000000000218	0,0000002048000210
0,3	0,0121153846600870	0,0000000003399130	0,0000118098697357
0,4	0,0171428669599253	0,0000000099599253	0,0002097371902326
0,49	0,0205459058215149	0,0000004358215149	0,0015971186871044

Tabelle 2: Berechnung von $V_{2,2}(\mu_k)$ und dem Approximationsfehler für verschiedene Kontraktionsfaktoren c und festem $k = 10$

Als nächstes untersuchen wir die Situation für $n = 3$. Im Bereich $c \in]0, \frac{1}{3}]$ kennen wir den $3-$optimalen Quantisierungsfehler aus (72) und (203). Es ist

$$V_{3,2}(\mu) = \frac{c^2}{8} \cdot \frac{1-c}{1+c}\left(1 + c^2\right).$$

Die zugehörigen 3-optimalen Codebücher für $c \in]0, \frac{1}{3}]$ sind aus Theorem 3.17 bekannt. Hier gilt $C_{3,2}(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \{\frac{c}{2}, 1 - c + \frac{c^2}{2}, 1 - \frac{c^2}{2}\}, \\ \alpha_2 &= \{\frac{c^2}{2}, c - \frac{c^2}{2}, 1 - \frac{c}{2}\}. \end{aligned}$$

Tabelle 3 zeigt eine Auswertung von α_1 und α_2 für verschiedene Werte von c.

c	α_1			α_2		
0,2	0,100	0,820	0,980	0,020	0,180	0,900
0,3	0,150	0,745	0,955	0,045	0,255	0,850
0,4	0,200	0,680	0,920	0,080	0,320	0,800
0,49	0,245	0,630	0,880	0,120	0,370	0,755

Tabelle 3: Berechnung von α_1 und α_2 für verschiedene Kontraktionsfaktoren c

Wir wissen bereits aus Beispiel 7.2, dass für $c \in]\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2}]$ die 3-optimalen Codebücher eine anderes Aussehen besitzen müssen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass dieser Übergang in der Gestalt der 3-optimalen Codebücher in Abhängigkeit vom Kontraktionsparameter, d_H-stetig im Sinne von Satz 2.5 (b) zu erfolgen hat.
Zumindest für $c = 0,49$ müssen die 3-optimalen Codebücher anders aussehen, als α_1 bzw. α_2. In Tabelle 4 werden die Ergebnisse einer numerischen Berechnung von $V_{3,2}(\mu_k)$ für $k = 6$, dem zugehörigen maximalen Approximationsfehler $2c^6(1 + c^6)$ und der zugehörigen Zerlegungsschwerpunkte x_1, x_2, x_3 aufgelistet.

c	x_1	x_2	x_3	$V_{3,2}(\mu_6)$	$2c^6(1+c^6)$	$\frac{c^2}{8} \cdot \frac{1-c}{1+c}\left(1+c^2\right)$
0,2	0,100	0,820	0,980	0,003466675	0,000128008	0,003466667
0,2	0,020	0,180	0,900	0,003466675	0,000128008	0,003466667
0,3	0,150	0,745	0,955	0,006603566	0,001459063	0,006602885
0,3	0,045	0,255	0,850	0,006603566	0,001459063	0,006602885
0,4	0,200	0,680	0,920	0,009957837	0,008225554	0,009942857
0,4	0,080	0,320	0,800	0,009957837	0,008225554	0,009942857
0,49	1,593	0,500	0,841	0,009532800	0,028065737	0,012739219

Tabelle 4: Berechnung von (optimalen) 3-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{3,2}(\mu_6)$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c.

Aus Platzgründen werden die Werte von x_1, x_2 und x_3 nur auf drei Nachkommastellen angegeben, die numerischen Berechnungen wurden jedoch mit höherer Genauigkeit ausgeführt. Aufgrund der Symmetrie von μ ist $C_{3,2}(\mu) = C_{3,2}(\mu_6)$ für $c = 0,2$ bzw. $c = 0,3$. Doch auch für $c = 0,4$ sind die Mengen α_1 und α_2 noch 3-optimale Codebücher für μ_6. Darüberhinaus erkennt man, dass für $c = 0,49$ nur noch ein, bezüglich $\frac{1}{2}$ symmetrisches optimales 3-Codebuch für μ_6 numerisch ermittelt werden konnte. Man beachte auch, dass für $c = 0,49$ der mit der Fehlerformel berechnete Wert deutlich größer ist, als der tatsächlich numerisch berechnete optimale Quantisierungsfehler.

Im Hinblick auf den bereits erwähnten kritischen Wert $c_0 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} = 0,4384..$ lohnt sich eine detaillierte numerische Betrachtung in diesem Bereich. Die Ergebnisse hierzu sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

c	x_1	x_2	x_3	$V_{3,2}(\mu_6)$	$2c^6(1+c^6)$	$\frac{c^2}{8} \cdot \frac{1-c}{1+c}\left(1+c^2\right)$
0,434	0,094	0,340	0,783	0,011079289	0,013454293	0,011043413
0,434	0,217	0,660	0,906	0,011079289	0,013454293	0,011043413
0,436	0,152	0,500	0,848	0,011069191	0,013833181	0,011106818
0,438	0,152	0,500	0,848	0,011003870	0,014221005	0,011170049

Tabelle 5: Berechnung von (optimalen) 3-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{3,2}(\mu_6)$ für Kontraktionsfaktoren im Bereich $c = 0,434$ bis $c = 0,438$.

Für die Kontraktionsfaktoren $c = 0,436$ und $c = 0,438$ kann nur noch ein optimales 3-Codebuch numerisch ermittelt werden. Obwohl die Fehlerabschätzung keine eindeutigen Schlüsse zulässt, weist die Anzahl der Codebücher und die Abweichung zwischen Fehlerformel und numerisch berechnetem Fehlerwert deutlich darauf hin, dass der Übergang auf das bezüglich $\frac{1}{2}$ symmetrische 3-Codebuch bereits vor Erreichen des kritischen Wertes $c_0 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ erfolgt. In Anbetracht all dieser numerischen Resultate scheint folgende Vermutung naheliegend.

7.6 Vermutung

Es gibt ein $c_3 \in]\frac{1}{3}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}[$ *und für jedes* $c \in [c_3, \frac{1}{2}]$ *ein* $a(c) > 0$*, so dass*

$$C_{3,2}(\mu) = \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2\} & \text{, falls } 0 < c < c_3 \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \{a(c), \frac{1}{2}, 1 - a(c)\}\} & \text{, falls } c = c_3 \\ \{\{a(c), \frac{1}{2}, 1 - a(c)\}\} & \text{, falls } c \in]c_3, \frac{1}{2}] \end{cases} .$$

7.7 Bemerkung
Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Glieder in $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ liegen. Sei $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen c. Wir bezeichnen für $k \in \mathbb{N}$ mit μ_{c_k} bzw. μ_c die zu c_k bzw. c zugehörige selbstähnliche Cantorverteilung. Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein optimales Codebuch $\alpha_k \in C_{3,2}(\mu_{c_k})$ gewählt. Man erkennt, dass für die Codebücher aus Vermutung 7.6

$$\lim_{k\to\infty} d_H(\alpha_k, C_{3,2}(\mu_c)) = 0$$

gilt und die d_H-Häufungspunkte der Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nichtleere Teilmenge von $C_{3,2}(\mu_c)$ bilden. Insofern erfüllt die Codebuchdarstellung aus Vermutung 7.6 die in Satz 2.5 (b) beschriebene Stetigkeitseigenschaft der Codebücher einer Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die im Sinne der L_r-minimalen Metrik gegen eine Grenzverteilung konvergieren.

Wir beschließen unsere numerischen Untersuchungen mit dem Fall $n = 4$. Man beachte, dass für $c \in]0, \frac{1}{3}]$ die Identität

$$V_{4,2}(\mu) = \frac{c^4}{4} \cdot \frac{1-c}{1+c}$$

wiederum aus (72) und (203) folgt. Ferner ist in diesem Bereich

$$C_{4,2}(\mu) = \left\{\left\{\frac{c^2}{2}, c - \frac{c^2}{2}, 1 - c + \frac{c^2}{2}, 1 - \frac{c^2}{2}\right\}\right\} = \left\{\left\{S_\sigma\left(\frac{1}{2}\right) : \sigma \in \{1,2\}^2\right\}\right\},$$

was sich aus Theorem 3.17 erschließt. Eine Berechnung dieser Punkte für verschiedene Kontraktionsfaktoren zeigt Tabelle 6. In Tabelle 7 finden sich die numerischen Ergebnisse zur Berechnung der (optimalen) 4-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{4,2}(\mu_6)$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c.

c	$\frac{c^2}{2}$	$c - \frac{c^2}{2}$	$1 - c + \frac{c^2}{2}$	$1 - \frac{c^2}{2}$
0,2	0,02000	0,18000	0,82000	0,98000
0,3	0,04500	0,25500	0,74500	0,95500
0,4	0,08000	0,32000	0,68000	0,92000
0,49	0,12005	0,36995	0,63005	0,87995

Tabelle 6: Berechnung von $\left\{\left\{S_\sigma\left(\frac{1}{2}\right) : \sigma \in \{1,2\}^2\right\}\right\}$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c

Man erkennt an den Berechnungen im Rahmen der Rechengenauigkeit die Gültigkeit der Formel für den 4-optimalen Quantisierungsfehler auch für $c > \frac{1}{3}$. Ferner behält auch die Darstellung der 4-optimalen Codebücher ihre Gültigkeit. Aufgrund der Symmetrie von μ liegt sogar folgende Vermutung nahe.

c	x_1	x_2	x_3	x_4	$V_{4,2}(\mu_6)$	$2c^6(1+c^6)$	$\frac{c^4}{4}\cdot\frac{1-c}{1+c}$
0,2	0,020	0,180	0,820	0,980	0,00025	0,00013	0,00027
0,3	0,045	0,255	0,745	0,955	0,00103	0,00146	0,00109
0,4	0,080	0,320	0,680	0,920	0,00266	0,00823	0,00274
0,49	0,120	0,370	0,630	0,880	0,00461	0,02807	0,00493

Tabelle 7: Berechnung von (optimalen) 4-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{4,2}(\mu_6)$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c.

7.8 Vermutung
Für $c \in]0, \frac{1}{2}]$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$C_{2^k,2}(\mu) = \left\{ \left\{ S_\sigma \left(\frac{1}{2} \right) : \sigma \in \{1,2\}^k \right\} \right\}$$

und

$$V_{2^k,2}(\mu) = \frac{c^{2k}}{4} \cdot \frac{1-c}{1+c}.$$

7.9 Bemerkung
Für $k = 1$ ist Vermutung 7.8 durch Theorem 7.5 bereits bewiesen worden.

7.10 Bemerkung
Für gewisse $n > 4$ scheint es ebenfalls kritische Kontraktionsparameterwerte in $]0, \frac{1}{2}[$ zu geben, jenseits derer die Gestalt der $n-$optimalen Codebücher von der Darstellung aus Theorem 3.17 abweicht und gleichzeitig der $n-$optimale Quantisierungsfehler echt kleiner, als der in Formel (72) beschriebene ist. Bezeichnet

$$\begin{aligned} c_n &= \sup \left\{ t \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] : \text{für alle } c \le t \text{ ist} \right. \\ &\qquad \left. V_{n,2}(\mu) = \left(\frac{c^2}{2} \right)^k \frac{1-c}{4(1+c)} \left(c^2(n-2^k) + 2^{k+1} - n \right) \right\}, \end{aligned}$$

und

$$c'_n = \sup \left\{ c \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] : V_{n,2}(\mu) = \left(\frac{c^2}{2} \right)^k \frac{1-c}{4(1+c)} \left(c^2(n-2^k) + 2^{k+1} - n \right) \right\},$$

so ist gemäß Beispiel 7.2 die Menge $\left\{ n \in \mathbb{N} : c_n < \frac{1}{2} \right\}$ nichtleer. Es verbleiben jedoch folgende offenen Fragen.

(i) Ist $c'_n = c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

(ii) Ist die Menge

$$\{c_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \left[0, \frac{1}{2} \right[$$

ein- oder mehrpunktig ?

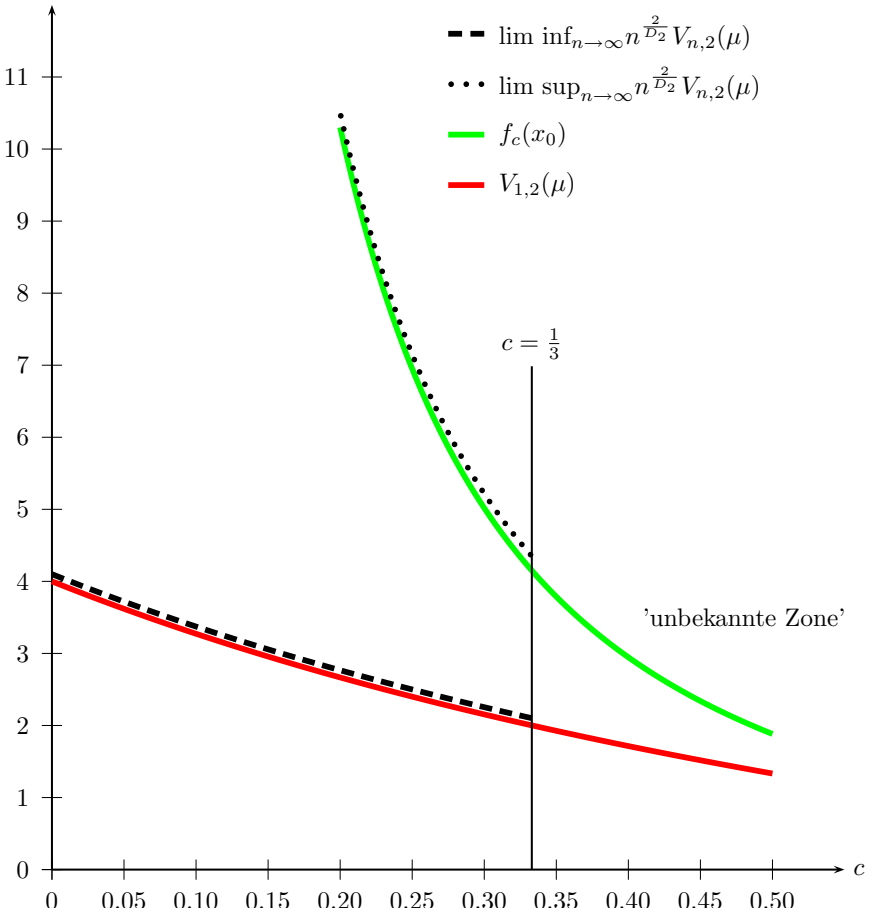

Abbildung 9: Phasenübergang

7.1.3 Phasenübergangsproblem

Zur Hervorhebung der Abhängigkeit vom Kontraktionsparameter c, sei im Folgenden das Maß μ mit μ_c bezeichnet. Für $c \in]0, \frac{1}{3}]$ und mit $x_0(c)$ aus (74) erschließt sich aus Bemerkung 3.26 eine funktionale Darstellung für das Intervall aller Häufungspunkte der Folge $n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$. Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c) = V_{1,r}(\mu_c) \tag{233}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c) = f_c(x_0(c)). \tag{234}$$

Aus diesen Identitäten ergibt sich die Stetigkeit der Abbildungen

$$c \to \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$$

und

$$c \to \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$$

auf $]0, \frac{1}{3}]$. Durch Nachrechnen erkennt man sofort, dass

$$\lim_{c\to 0} f_c(x_0(c)) = \lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c) = \infty.$$

Die Abbildungen $c \to f_c(x_0(c))$ und $c \to V_{1,r}(\mu_c)$ sind offensichtlich auch im Bereich $c \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ definiert. Darüberhinaus kann man zeigen, dass

$$\lim_{c\to \frac{1}{2}-0} (f_c(x_0(c)) - V_{1,r}(\mu_c)) > 0.$$

Einen graphischen Überblick im Fall $r = 2$ verschafft Abbildung 9.
Im Falle $c = \frac{1}{2}$ ist $D = 1$ und $\mu_{\frac{1}{2}}$ ist identisch mit der Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Die Folge $(n^r V_{n,r}(\mu_{\frac{1}{2}}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in diesem Fall (siehe [13], Theorem 6.2 bzw. [13], Example 5.5). Somit wissen wir, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{c\to \frac{1}{2}-0} (f_c(x_0(c)) - V_{1,r}(\mu_c)) \\ > \quad & \limsup_{n\to\infty} n^r V_{n,r}(\mu_{\frac{1}{2}}) - \liminf_{n\to\infty} n^r V_{n,r}(\mu_{\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned}$$

was wiederum zeigt, dass die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ bei $c = \frac{1}{2}$ nichtidentisch mit dem nichteinpunktigen Intervall $[V_{1,r}(\mu), f_c(x_0)]$ ist. Insgesamt betrachtet vollzieht der Verlauf des Häufungspunktintervalls in Abhängigkeit vom Kontraktionsparameter einen 'Phasenübergang', d.h. das Intervall ist einpunktig in $c = \frac{1}{2}$ bei Nichteinpunktigkeit im Bereich $c \in]0, \frac{1}{3}]$. In der 'unbekannten Zone' $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ bleiben folgende Fragen offen:

(i) Für welche Werte von $c \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ bleiben die Gleichungen (233) und (234) gültig, falls überhaupt ?

(ii) Sind die Abbildungen

$$c \to \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$$

bzw.

$$c \to \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$$

stetig auf $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$?

(iii) Falls

$$c \to \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c) - \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)$$

unstetig in $c = \frac{1}{2}$ ist, welchen Wert besitzt dann

$$\lim_{c\to\frac{1}{2}-0} [\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c) - \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{r}{D}} V_{n,r}(\mu_c)],$$

vorausgesetzt der Limes existiert ?

Eine mögliche Beantwortung dieser Fragen zum Phasenübergangsproblem steht auch in engem Zusammenhang mit einer Lösung der in Bemerkung 7.10 erwähnten Probleme.

7.2 Uniforme iterierte Funktionensysteme und deren Gleichverteilungen

7.2.1 Gegenbeispiele

Für die Lösung des optimalen Quantisierungsproblems der Gleichverteilung μ eines $UIFS$ im Rahmen von Theorem 6.13 sind zwei Voraussetzungen nötig. Einerseits muss μ separat quantisierend sein, andererseits müssen die ersten $N-1$ optimalen Quantisierungsfehlerdifferenzen strikt monoton fallend sein. Im Folgenden werden wir zeigen, dass auf keine der beiden Voraussetzungen vollständig verzichtet werden kann.

7.11 Bemerkung
Im Falle $N = 2$ ist die Monotoniebedingung gemäß Bemerkung 6.14 immer erfüllt. Lassen wir die Forderung nach separater Quantisierung fallen, so lehrt Beispiel 7.2, dass die Darstellung von $C_{3,2}(\mu)$ aus Theorem 6.13 falsch wird und auch die Formel (183) für den 3-optimalen Quantisierungsfehler nicht mehr zutrifft.

7.12 Bemerkung
Am Sierpinski-Dreieck können wir die Unverzichtbarkeit der Monotoniebedingung bei gleichzeitig vorliegender separater Quantisierung nachvollziehen.
Sei dazu $r \in]1,2[$ und ω wie in Beispiel 6.27. Durch Nachrechnen erkennt man sofort, dass $D_{\min}(r,3,Q_\omega) < 0$. Sei $c \in]0, \min\left(\frac{d_{\min}(\omega)}{12\,\mathrm{diam}(\omega)}, \frac{|D_{\min}(r,3,Q_\omega)|}{(6\,\mathrm{diam}(\omega))^r}\right)[$. Gemäß Bemerkung 6.23 ist die Gleichverteilung μ separat quantisierend und $D_{\min}(r,3,\mu) < 0$.
Sei nun $\{a\} \in C_{1,r}(\mu)$ und $\{b_1, b_2\} \in C_{2,r}(\mu)$. Sei

$$\alpha' = \{S_1(a), S_2(a), S_{(3,1)}(a), S_{(3,2)}(a), S_{(3,3)}(a)\}$$

und

$$\alpha = \{S_1(a), S_2(\{b_1,b_2\}), S_3(\{b_1,b_2\})\}.$$

Da μ separat quantisierend ist, erhalten wir durch Anwendung von (154) und Proposition 6.12 die Beziehung

$$\Psi_{\alpha',r}(\mu) - \Psi_{\alpha,r}(\mu) = c^r(V_{1,r}(\mu) + V_{3,r}(\mu) - 2V_{2,r}(\mu)) < 0.$$

Somit ist $\alpha \notin C_{5,r}(\mu)$ und auch Formel (183) ist nicht richtig, was beides im Widerspruch zu Theorem 6.13 steht. Auf die Voraussetzung $D_{\min}(r,3,\mu) > 0$ kann also nicht vollständig verzichtet werden.

Bei kleinen Codebüchern, d.h. im Bereich $n \in \{1,..,N\}$ gibt Theorem 6.4 eine Antwort auf das $n-$optimale Quantisierungsproblem für hinreichend kleine Kontraktionsparameter. Die nachfolgende Bemerkung zeigt, dass die Gültigkeit dieser Aussage nicht auf beliebig große Kontraktionsparameter erweiterbar ist.

7.13 Bemerkung
Wir betrachten wiederum das Sierpinski-Dreieck aus Beispiel 6.27 für $r = 2$ und $n = 2$. Aus der dortigen Charakterisierung von $C_{2,2}(\mu)$ gilt

$$\begin{aligned} C_{2,2}(\mu) &\ni \left\{ S_3(s_\mu(A)), \frac{1}{2}\left(S_1(s_\mu(A)) + S_2(s_\mu(A))\right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{3}\right)\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right) \right\} \end{aligned}$$

für hinreichend kleine Kontraktionsparameter c.
Bezeichnen wir $\beta = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{3}\right)\right)$ und $b_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right)$, erkennt man durch Nachrechnen sofort, dass

$$\mu(W(b_1 \mid \beta) \cap S_3(A)) > 0,$$

falls $c > \frac{3}{7}$ ist. In diesem Fall ist

$$b_1 \neq E(\mu(\cdot \mid W(b_1 \mid \beta))). \tag{235}$$

Nach Satz 2.2 (i) und Satz 2.1 (c) ist $C_{1,2}(\mu(\cdot \mid W(b_1 \mid \beta))) = \{\{b_1\}\}$. Darüberhinaus folgt aus Satz 2.1 (c), dass

$$b_1 = E(\mu(\cdot \mid W(b_1 \mid \beta))),$$

was im Widerspruch zu (235) steht. Die Aussagen von Theorem 6.4 sind also in diesem Beispiel für $c > \frac{3}{7}$ ungültig.

7.2.2 Offene Fragen

Bei der Herleitung der Ergebnisse zur optimalen Quantisierung der Gleichverteilung eines $UIFS$ mussten an einigen Stellen einschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Abschnitt 7.2.1 hat gezeigt, dass auf diese Voraussetzungen nicht vollständig verzichtet werden kann, dennoch erscheint eine Abschwächung wünschenswert. Wir beginnen mit einem möglichen alternativen hinreichenden Kriterium zur separaten Quantisierung.

(1) Ein $UIFS$ sei halbraumsepariert, falls für jedes $x \in S_i(A)$ und $y \in S_j(A)$ mit $i \neq j$ die Beziehung

$$\{z \in \mathbb{R}^d : \| x - z \| \leq \| y - z \| \} \supset S_i(A)$$

und

$$\{z \in \mathbb{R}^d : \| y - z \| \leq \| x - z \| \} \supset S_j(A)$$

gilt. Zieht die Halbraumseparation die separate Quantisierung nach sich ?

Eine positive Antwort auf diese Frage (1) dürfte für viele $UIFS$ zu wesentlich größeren oberen Schranken c_0 für den Kontraktionsparameter in Proposition 6.22 führen. Beispielsweise würde sich bei der Cantormenge $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{12}$ ergeben.

Nach den Ausführungen in Abschnitt 6.5 hängt die Anwendbarkeit von Theorem 6.13 im wesentlichen von der Voraussetzung $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ ab. Das für diese Voraussetzung entwickelte hinreichende Kriterium (Proposition 6.24) deckt jedoch nur Spezialfälle ab.

(2) Kann für eine (möglichst große) Klasse von diskreten Gleichverteilungen Q_ω die Eigenschaft $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ gezeigt werden ?

Wir wissen bereits (siehe Beispiel 5.9), dass die Voraussetzung nach paarweise unterschiedlichen Punktabständen in ω zur positiven Beantwortung von Frage (2) nicht ausreicht. Andererseits legt Proposition 6.24 die Vermutung nahe, dass doch 'viele' Gleichverteilungen Q_ω die Eigenschaft $D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0$ erfüllen. Allgemein könnte man die Frage nach der 'Reichhaltigkeit' von

$$\{\omega \subset \mathbb{R}^d : \operatorname{card}(\omega) = N, D_{\min}(r, N, Q_\omega) > 0\}$$

in der folgenden Weise punktprozesstheoretisch formulieren.

(3) Man definiere für festes $N \geq 3$ und $r > 1$ einen (geeigneten) Punktprozess Π auf dem Raum $\{Q_\omega : \mathrm{card}(\omega) = N\}$. Wie groß ist dann

$$\Pi(\{Q_\omega : D_{\min}(r, \mathrm{card}(\omega), Q_\omega) > 0\}),$$

d.h. welches Π-Maß hat die Menge $\{Q_\omega : D_{\min}(r, \mathrm{card}(\omega), Q_\omega) > 0\}$, falls sie $\Pi-$messbar ist ?

Wir schließen mit der nachfolgenden offenen Frage.

(4) Gilt $V_{N-1,r}(\mu) - V_{N,r}(\mu) > V_{N,r}(\mu) - V_{N+1,r}(\mu)$ für jede separat quantisierende Gleichverteilung μ eines $UIFS$?

A Anhang

Sei $n \in \mathbb{N}$ und ν ein beliebiges Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger. Sei $\mathrm{card}(\mathrm{supp}(\nu)) \geq n$. Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit ∇f den Gradienten von f.

A.1 Lemma
Sei $a \in \mathbb{R}^d$ mit $\{a\} \in C_{1,2}(\nu)$. Sei $z \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\int \| x - z \|^2 \, d\nu(x) = \int \| x - a \|^2 \, d\nu(x) + \| a - z \|^2 . \tag{236}$$

Beweis.
Aus [13], p. 24 Remark (b) wissen wir, dass die Abbildung $z \to \int \| x - z \|^2 \, d\nu(x)$ differenzierbar ist. Mit der Euklidischen Norm $\| \cdot \|$ erhalten wir

$$\nabla \int \| x - z \|^2 \, d\nu(x) = 2(\int x d\nu(x) - z).$$

Aus Satz 2.1 (c) folgt $\int x d\nu(x) = a$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \nabla \int \| x - z \|^2 \, d\nu(x) &= 2(a - z) \\ &= \nabla \left(\int \| x - a \|^2 \, d\nu(x) + \| a - z \|^2 \right). \end{aligned} \tag{237}$$

Offensichtlich gilt Gleichung (236) im Falle $z = a$. Aus Gleichung (237) folgt dann die Richtigkeit von (236) für alle $z \in \mathbb{R}^d$. □

A.2 Bemerkung
Als eine unmittelbare Konsequenz von Lemma A.1 gilt für jede $\nu-$messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^d$, dass

$$\int_B \| x - z \|^2 \, d\nu(x) = \int_B \| x - a \|^2 \, d\nu(x) + \nu(B) \| a - z \|^2 .$$

A.3 Lemma
Sei $\omega \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche nichtleere Menge, $r = 2$ und $s_{Q_\omega}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega} x$. Dann ist

$$V_{1,r}(Q_\omega) = \int \| x - s_{Q_\omega}(\omega) \|^r \, dQ_\omega(x) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega} \| x - s_{Q_\omega}(\omega) \|^r . \tag{238}$$

Gleichung (238) gilt auch bei $r > 1$, falls $\| x - s_{Q_\omega}(\omega) \|$ nicht von $x \in \omega$ abhängt.

Beweis.
Im Beweis von Theorem 2.4 in [13] wir die strikte Konvexität der Abbildung

$$\mathbb{R}^d \ni z \xrightarrow{F_r} \int \| x - z \|^r \, dQ_\omega(x) \in \mathbb{R}_0^+.$$

bewiesen. Hat F_r genau einen kritischen Wert, dann handelt es sich um das globale Minimum von F_r. Wir berechnen

$$\nabla F_r(z) = \frac{r}{N} \sum_{x \in \omega} \| x - z \|^{r-2} (z - x).$$

Falls $r = 2$, oder falls $\| x - s_{Q_\omega}(\omega) \|$ nicht von $x \in \omega$ abhängt,
ist $\nabla F_r(s_{Q_\omega}(\omega)) = 0$. □

A.4 Bemerkung
Gleichung (238) folgt im Fall $r = 2$ auch aus Satz 2.1 (c).

A.5 Lemma
Es sei $\omega \subset \mathbb{R}^d$ endlich und nichtleer. Es sei $c > 0$ und $f : \omega \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\| f(x) - f(y) \| = c \| x - y \| \tag{239}$$

für jedes $x, y \in \omega$. Für $n \in \{1, .., \mathrm{card}(\omega)\}$ und $r \in]1, \infty[$ gilt dann

$$V_{n,r}(Q_{f(\omega)}) = c^r V_{n,r}(Q_\omega).$$

Beweis.
Wie in Abschnitt 4.2 eingeführt, bezeichne $\mathcal{Z}_n$ die Menge aller $n-$elementigen Zerlegungen von ω. Ferner sei $\mathcal{Z}_n^f$ die Menge aller $n-$elementigen Zerlegungen von $f(\omega)$. Aus [13], Example 3.5 entnehmen wir die Darstellung

$$V_{n,r}(Q_\omega) = \frac{1}{N} \min_{\mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \min_{a \in \mathbb{R}^d} \sum_{x \in \gamma} \| x - a \|^r .$$

Mittels Voraussetzung (239) folgt

$$\begin{aligned} V_{n,r}(Q_\omega) &= \frac{1}{N} \min_{\mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in Z} \min_{a \in \mathbb{R}^d} \sum_{x \in \gamma} c^{-r} \| f(x) - f(a) \|^r \\ &= \frac{1}{N} \min_{\mathcal{Z}_n} \sum_{\gamma \in f(Z)} \min_{a \in \mathbb{R}^d} \sum_{x \in \gamma} c^{-r} \| x - a \|^r \end{aligned}$$

Wegen $f(\mathcal{Z}_n) = \mathcal{Z}_n^f$ ist

$$\begin{aligned} V_{n,r}(Q_\omega) &= c^{-r} \frac{1}{N} \min_{\mathcal{Z}_n^f} \sum_{\gamma \in Z} \min_{a \in \mathbb{R}^d} \sum_{x \in \gamma} \| x - a \|^r \\ &= c^{-r} V_{n,r}(Q_{f(\omega)}). \end{aligned}$$

□

A.6 Bemerkung
Wäre die Abbildung f in Lemma A.5 auf $\mathbb{R}^d$ definiert, dann würde die Aussage von Lemma A.5 direkt aus Satz 2.4 (c) folgen.

A.7 Bemerkung
Es sei an die Menge $\mathcal{Z}_n^*$ aller $n-$elementigen optimalen Zerlegungen von ω erinnert. Mit der Abbildung f aus Lemma A.5 ist offensichtlich $f(\mathcal{Z}_n^*)$ identisch mit der Menge aller $n-$elementigen optimalen Zerlegungen von $f(\omega)$.

Tabellenverzeichnis

1 Berechnung von $V_{2,2}(\mu_k)$ und dem Approximationsfehler für verschiedene k mit Kontraktionsfaktor $c = 0,2$ 108
2 Berechnung von $V_{2,2}(\mu_k)$ und dem Approximationsfehler für verschiedene Kontraktionsfaktoren c und festem $k = 10$ 108
3 Berechnung von α_1 und α_2 für verschiedene Kontraktionsfaktoren c . 108
4 Berechnung von (optimalen) 3-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{3,2}(\mu_6)$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c. 109
5 Berechnung von (optimalen) 3-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{3,2}(\mu_6)$ für Kontraktionsfaktoren im Bereich $c = 0,434$ bis $c = 0,438$. 109
6 Berechnung von $\left\{\left\{S_\sigma\left(\frac{1}{2}\right) : \sigma \in \{1,2\}^2\right\}\right\}$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c 110
7 Berechnung von (optimalen) 4-Zerlegungen, ihrer Schwerpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 und der zugehörigen Quantisierungsfehler $V_{4,2}(\mu_6)$ für verschiedene Kontraktionsfaktoren c. 111

Abbildungsverzeichnis

1 Voronoizelle 7
2 Wischkonstruktion 13
3 Nichtexistenz des Quantisierungskoeffizienten für die klassische Cantorverteilung, $c = \frac{1}{3}, r = 2$ 34
4 Skizze von ω und κ zu Beispiel 4.12 51
5 Der Fermatsche Punkt 63
6 Skizze von ω zu Beispiel 5.9 69
7 Cantormengenkonstruktion über ein $UIFS$ 96
8 Sierpinski-Dreieck für Kontraktionsfaktor $c = \frac{1}{2}$ 97
9 Phasenübergang 112

Literaturverzeichnis

[1] E.F. Abaya und G.L. Wise. *Some notes on optimal quantization,* International Conference on Communications, Denver, CO, June 14-18, (1981), 30.7.1-30.7.5. IEEE Press, New York.

[2] W.R. Bennett. *Spectra of quantized signals,* Bell Systems Tech. J., **27** (1948), 446-472.

[3] H.H. Bock. *Automatische Klassifikation,* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1974.

[4] J.A. Buckley und G.L. Wise. *Multidimensional asymptotic quantization theory with r-th power distortion measures,* IEEE Trans. Inform. Theory, **28** (1982), 239-247.

[5] D.R. Cox *Note on grouping,* J. Amer. Statist. Assoc., **52** (1957), 543-547.

[6] T. Dalenius. *The problem of optimum stratification,* Scandinavisk Aktuarietidskrift, **33** (1950), 203-213.

[7] H. Dörrie. *Triumph der Mathematik,* Physica-Verlag 1958.

[8] K. J. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry,* Wiley, Chichester 1997.

[9] L. Fejes Tóth. *Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d' éléments,* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **10** (1959), 299-304.

[10] P. Gänssler und W. Stute. *Wahrscheinlichkeitstheorie,* Springer, Berlin 1977.

[11] A. Gersho und R.M. Gray. *Vector Quantization and Signal Compression,* Kluwer, Boston 1992.

[12] S. Graf und H. Luschgy. *The quantization of the Cantor Distribution*, Math. Nachr., **183** (1997), 113-133.

[13] S. Graf und H. Luschgy. *Foundations of Quantization for probability distributions,* Lecture Notes in Mathematics, 1730, Springer-Verlag, Berlin 2000.

[14] S. Graf und H. Luschgy. *Rates of convergence for the empirical quantization error*, The Annals of Probability, **30(2)** (2002), 874-897.

[15] S. Graf und H. Luschgy. *Quantization for probability measures with respect to the geometric mean error*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc, **136** (2004), 687-717.

[16] S. Graf und H. Luschgy. *The point density measure in the quantization of self-similar probabilites*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc, **138** (2005), 513-531.

[17] R.M. Gray und D.L. Neuhoff. *Quantization*, IEEE Trans. Inform. Theory, **44** (1998), 2325-2383.

[18] J.E. Hutchinson. *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713-747.

[19] M. Kesseböhmer und S. Zhu. *Stability of quantization dimension and quantization for homogeneous Cantor measure*, Math. Nachr. **280**, 8 (2007), 866-881.

[20] J. Kieffer. *Uniqueness of locally optimal quantizer for log-concave density and convex error weighting function*, IEEE Trans. Inform. Theory, **29** (1983), 42-47.

[21] W. Kreitmeier. *Optimal Quantization for Dyadic Homogeneous Cantor Distributions*, erscheint in Math. Nachr.

[22] L.J. Lindsay. *Quantization dimension for Probability Distributions,* Doctoral thesis, Univ. of North Texas, Denton 2001.

[23] S. P. Lloyd. *Least squares quantization in PCM,* IEEE Trans. Inform. Theory, **28** (1982), 129-137.

[24] P.F. Panter und W. Dite. *Quantization distortion in pulse-count modulation with nonuniform spacing of levels,* Proc. Inst. Radio Eng., **39** (1951), 44-48.

[25] D. Pollard. *Quantization and the method of k-means,* IEEE Trans. Inform. Theory, **28** (1982), 199-205.

[26] K. Pötzelberger. *The quantization error of self-similar distributions,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc, **137** (2004), 725-740.

[27] K. Pötzelberger. *MSP-Partitions and Unbiased Quantizations: A Review of Results,* Austrian Journal of Statistics, **31** (2002), Number 2&3, 201-209.

[28] K. Pötzelberger und H. Strasser. *Clustering and quantization by msp-partitions,* Statistics and Decisions, **19** (2001), 331-371.

[29] S.T. Rachev und L. Rüschendorf. *Mass Transportation Problems,* Vol. 1 und Vol. 2, Springer, New York 1998.

[30] H. Späth. *Cluster Dissection and Analysis,* Ellis Horwood Limited, Chicester 1985.

[31] H. Steinhaus. *Sur la division des corps matériels en parties,* Bull. Acad. Polon. Sci., **4** (1956), 801-804.

[32] A. Trushkin. *Sufficient conditions for uniqueness of a locally optimal quantizer for a class of convex error weighting functions,* IEEE Trans. Inform. Theory, **28** (1982), 187-198.

[33] P.L. Zador. *Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension,* IEEE Trans. Inform. Theory, **28** (1982), 139-149.

[34] P.L. Zador. *Development and evaluation of procedures for quantizing multivariate distributions.* Ph. D. dissertation, Stanford Univ., 1963.

Stichwortverzeichnis

Ähnlichkeitsabbildung, 8

arithmetisch, 84
atomlos, 19
Attraktor, 70

bedingte Verteilung, 13
Bildmaß, 8
Borelsche Teilmenge, 13
Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß, 12

Cantor-Staub, 99
Cantormenge, 96
charakteristische Funktion, 54

deterministische Approximation, 92
Differenz der optimalen Quantisierungsfehler, 56
Durchmesser, 13
dyadische homogene Cantormenge, 12
dyadische homogene Cantorverteilung, 12, 13

empirische Verteilung, 88
Erwartungswert, 101
euklidische Norm, 6

Fermatpunkt, 62

Gleichverteilung, 12

Hausdorffabstand, 8

invariantes Kompaktum, 70

Kardinalität, 6
klassische Cantorverteilung, 31
Kontraktionsfaktor, 12
Kontraktionskonstante, 8
Kontraktionsparameter, 33
Konvergenzordnung, 9
konvexe Hülle, 6
Konvexität, 20
Kugel, 35

Lebesguemaß, 10
Lloyd-Algorithmus, 88
L_r-minimale Metrik, 9
$(l, \omega)-$separiert, 35

Menge aller Basisintervalle der Stufe 1, 12
Menge aller Basisintervalle der Stufe k, 12
Mengenabstand, 35
Minimalabstand, 35
Monotoniebedingung, 58

nicht-atomar, 18
n-optimaler Quantisierungsfehler, 6
n-optimales Codebuch, 6
Nullfolgeneigenschaft, 9

obere Quantisierungsdimension, 10
offene Mengenbedingung, 77
offener Kern, 45
optimale Codebucheigenschaft, 25
Optimalität, 19

Periode, 84

Quantisierungsdimension, 10
Quantisierungsfehler, 6
Quantisierungskoeffizient, 10

reguläre Wahrscheinlichkeitsmaße der Dimension D, 31
regulärer Maßanteil, 10

Schwerpunkt, 43, 102
Schwerpunktzerlegung, 45
selbstähnliche Cantorverteilung, 33
separat quantisierend, 77
Separationsbedingung, 76
Sierpinski-Dreieck, 97
Spiegelung, 13
starke Separationsbedingung, 77
strikt konvex, 14
Symmetrieeigenschaften, 13
symmetrische Verteilung, 14

topologischer Abschluss, 6
topologischer Rand, 45
Träger, 6
Translation, 13

$UIFS$, 70
uniform iteriertes Funktionensystem, 70

uniform separiert, 35
untere Quantisierungsdimension, 9

Vereinigung aller Basisintervalle der Stufe 1, 12
Vereinigung aller Basisintervalle der Stufe k, 12
Voronoizelle, 7

Zerlegung, 36

Symbolverzeichnis

$\overline{A}$ .....topologischer Abschluss von A, 6
A .....Attraktor, 70
α_i ....., 77
$\alpha(i)$ ....., 85
$\overline{\alpha}(x)$ ....., 35
$\underline{\alpha}(x)$ ....., 35

$\mathring{B}$ .....offener Kern von B, 45
$B(x,l)$ .....abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius l, 35
$b_1(t)$ ....$\mu-$Schwerpunkt von $[0,t]$, 102
$b_2(t)$ ....$\mu-$Schwerpunkt von $[t,1]$, 102

$\mathrm{card}(\beta)$ .....Kardinalität von (β), 6
$\mathrm{conv}(A)$ ..... konvexe Hülle von A, 6
$C((c_k))$ ..... dyadische homogene Cantormenge, 12
$(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ....., 12
$(c_{l+k-1})_{l=1}^{\infty}$ ....., 29
$C_{n,r}(\nu)$ .....n-optimale Codebücher, 6

$\mathcal{D}_0$ .....Basisintervalle der Stufe 0, 12
$\mathcal{D}_1$ .....Basisintervalle der Stufe 1, 12
$\mathcal{D}_k$ .....Basisintervalle der Stufe k, 12
$d(B,C)$ .Abstand zwischen den Mengen B und C, 35
$d(x,B)$ .Abstand zwischen dem Punkt x und der Menge B, 35
$d_H(B,C)$ ..... Hausdorffabstand, 8
$\mathrm{diam}(A)$ .....Durchmesser von A, 13
D .....Dimension, 31
$D(c)$ .Dimension in Abhängigkeit von c, 33
$\overline{D}_r(\nu)$ ..obere Quantisierungsdimension, 10
$\underline{D}_r(\nu)$ .untere Quantisierungsdimension, 10
$D_r(\nu)$ .... Quantisierungsdimension, 10
∂B ..... topologischer Rand von B, 45
$d_{\min}(\omega)$ minimaler Punktabstand in ω, 35
$D_{\min}(r,N,\nu)$ ....., 56

E_0 ....., 12
E_1 ....., 12
E_k ....., 12
E ..... Erwartungswert von μ, 101

F_1 ....., 13
F_2 ....., 13
f_c ....., 33

$i(n)$ ....., 78

$k(n)$ ....., 78
K_ω ....., 58

L ....., 58
λ^d ..$d-$dimensionales Lebesguemaß, 10

μ ....., 12, 70
$\mu^{(k)}$ ....., 29
μ_k ....., 89
M_ω ....., 58
$\mathfrak{M}_r$ ....., 9

$\mathbb{N}$ ..... natürliche Zahlen, 6
$\mathbb{N}_0$ ..... natürliche Zahlen mit der 0, 13
$\nu(\cdot \mid A)$ ..... bedingte Verteilung von ν bezüglich A, 13
$\nu\circ\Phi_t^{-1}$ ....., 14
$\nu\circ T^{-1}$ ..Bildmaß von ν bezüglich T, 8

$\Psi_{\beta,r}$ ..... Quantisierungsfehler, 6
Φ_t .....Spiegelung, 13
π_k ....., 12

Q_γ .....Gleichverteilung auf γ, 43
$Q_r(\nu)$ .... Quantisierungskoeffizient, 10

$\mathbb{R}^d$ $d-$dimensionaler euklidischer Raum, 6
$\rho_r(\nu_1,\nu_2)$ .....L_r-minimale Metrik, 8

s ....., 84
$s_\nu(B)$ ..... $\nu-$Schwerpunkt von B, 43
$s(Z)$ ....., 49
$S_i(x)$ ..... Kontraktionsabbildung, 70
S_σ ....., 82
$\mathrm{supp}(\nu)$ ..... Träger von ν, 6

Θ_t .....Translation, 13
ϑ ....., 84

$V_{n,r}(\nu)$ .....$n-$optimaler Quantisierungsfehler, 6

$W(a \mid \alpha)$ . . Voronoizelle von a bezüglich α, 7
ω . . . . . endliche Punktmenge, 35
$\omega(b \mid \beta)$ . . . . . , 43

x_0 . . . . . , 34

$\mathcal{Z}_n$ . . . . . $n-$Zerlegungen von ω, 43
$\mathcal{Z}_n^*$ . . . n-optimale Zerlegungen von ω, 44
$1_C(x)$ . . . . charakteristische Funktion, 54
$\| \, . \, \|$ . . . . . euklidische Norm, 6
∇f . . . . . Gradient von f, 118