



Roulets

Eine Integraltransformation zur Bestimmung gerichteter Singularitäten

M.Sc. Silja Ilse Johanna Gütschow

Eingereicht an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

Betreuer: Prof. Dr. Tomas Sauer

Passau, Februar 2018

Danksagung

Allerherzlichsten Dank, Herr Prof. Dr. Tomas Sauer, für Ihre Unterstützung und Ihr Vertrauen auf dem Weg über die einzelnen Stationen meiner universitären Laufbahn bis hin zu der Betreuung dieser Arbeit. Sie haben mir zugleich die Freiheit gegeben, mich in einem klar strukturierten Rahmen selbstständig und eigenverantwortlich zu beweisen, und waren trotzdem immer ansprechbar. Gerade der fokussierte, konstruktive Austausch morgens um Sieben hat mich stets weitergetragen.

Vielen Dank an Herrn Prof. Dr. Hartmut Führ für die Hinweise und Anmerkungen im Rahmen der Begutachtung und an Frau Prof. Dr. Lydia Außenhofer für die hilfreichen Korrekturen und Anmerkungen.

Ein besonderer Dank geht an Nada S., Stephan B. und Matthias B. für die seelische, moralische und mathematische Unterstützung, die Kaffeepausen zu jeder Zeit, die schnelle (Linux-)Hilfe, die kulinarische Versorgung und die tierische Unterstützung in den ganzen letzten fünf Jahren. Ein Dank geht an alle Mitarbeiter des FORWISS und des Lehrstuhls für die Unterstützung, vor allem morgens rund um zehn Uhr.

Ich danke meinem Mann für seine (emotionale) Stärke in Situationen, in denen ich sie nicht hatte. Und auch meiner Tochter will ich hier danken, da ich so auch nachts Zeit zum Nachdenken hatte ...

Ein großer Dank geht ferner an meine ganze Familie fürs Mitfiebern und Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Darstellungen und Integraltransformationen	3
2.1	Topologie und Maßtheorie	3
2.2	Darstellungstheorie	7
2.2.1	Grundlagen zur Darstellungstheorie	7
2.2.2	Darstellung von semidirekten Produkten	9
2.2.3	Quadratintegrierbare Darstellungen	11
2.3	Orbittheorie	16
2.4	Waveletartige Integraltransformationen in \mathbb{R}^2	23
2.4.1	Die Similitude-Gruppe $\text{SIM}(2) = (\text{SO}(2) \cdot \mathbb{R}^+) \ltimes \mathbb{R}^2$	24
2.4.2	Die Shearlet-Gruppe	25
2.4.3	Die Diagonale-Gruppe	25
3	Die Wahl der passenden Struktur	27
3.1	Die Wahl der geeigneten Struktur	27
3.1.1	Das G_1 -System	29
3.1.2	Das G_2 -System	30
3.2	Integraltransformationen und Singularitäten	31
3.2.1	Schwartzraum und Distributionen	31
3.2.2	Zur Charakterisierung regulär gerichteter Punkte	37
3.2.3	Regulär gerichtete Punkte und das Abklingverhalten der Transformation	39
3.3	AB -Systeme und die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft	41
3.3.1	Beispiele zur Wirkung des G_1 -Systems	42
3.3.2	Das G_1 -System erfüllt gemischte Kegel-Approximationseigenschaft	44
3.3.3	Das G_1 -System ist V -mikrolokal zulässig	48
3.3.4	Beispiele zur Wirkung von G_2	49
3.3.5	G_2 erfüllt die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft nicht	49
4	Roulettransformation	56
4.1	Roulets (rotational anisotropic wavelet transform)	56
4.2	Abklingverhalten an Punkt- und Liniensingularitäten	63
4.2.1	Die Roulettransformation und Punktsingularitäten	63
4.2.2	Die Roulettransformation und Liniensingularitäten	64
4.3	Roulets im Vergleich zu Wavelets und Shearlets	67
5	Roulettransformation und ihre Implementierung	68
5.1	Implementierung der Roulettransformation	68
5.2	Zulässige Roulets	69
5.2.1	Zulässige Funktionen der eindimensionalen affinen Gruppe	70
5.2.2	Tensorproduktroulets	75
5.2.3	Rouletrücktransformation	75
5.3	Vorstellung der in matlab implementierten Software	78

5.4	Beispiele zur Kantendetektion	79
5.4.1	Geometrische Bilder	81
5.4.2	Komplexere Bilder	82
6	Roulets in der Praxis - Rattermarken	89
6.1	Darstellungsvarianten der Roulettransformation	89
6.2	Lokale Artefakte	90
6.2.1	Rattermarken	94
6.2.2	Kratzer und Schleifspuren	97
7	Zusammenfassung	100
	Literaturverzeichnis	101

Abbildungsverzeichnis

1	Rattermarken auf einem Blech	1
2	Raum und Dualraum: Überblick über die Raumzugehörigkeiten.	17
3	Raum und Dualraum	20
4	Darstellung der unterschiedlichen Kegel $C(W)$ und $C(W, R)$	33
5	Zur Definition eines regulär gerichteten Punktes	34
6	Wellenfront-Menge einer Punktsingularität	35
7	Wellenfront-Menge einer Liniensingularität	35
8	Die Mengen K_i und K_o	37
9	Anisotrope Skalierung in x -Richtung	42
10	Anisotrope Skalierung in y -Richtung	43
11	Anisotrope Skalierung	44
12	Wirkung von G_1	45
13	Skizze zur Kegelwahl	46
14	Skizze der Träger V_n und W_n	46
15	Wirkung der Träger	50
16	Wirkung der Drehung und isotroper Skalierung in x -Achsen Richtung	50
17	Wirkung der Drehung und isotroper Skalierung in y -Achsen Richtung	51
18	Wirkung der Drehung und anisotroper Skalierung	52
20	Skizze zur Trägerwahl	55
21	Wirkung der Skalierung auf einen Träger	58
22	Träger des analytischen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für große s	69
23	Träger des analytischen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für kleine s	69
24	Träger des reellen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für große s	69
25	Träger des reellen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für kleine s	70
26	Träger eines Tensorproduktroulets in $\hat{\mathbb{R}}^2$	71
27	Morlet-Wavelet mit unterschiedlichem σ	72
28	Morlet-Wavelet mit unterschiedlichem σ	73
29	Mexican-Hat-Wavelet mit unterschiedlichem σ	74
30	Mexican-Hat-Wavelet mit unterschiedlichem σ	74
31	Haar-Wavelet	75
32	Roulettransformation mit unterschiedlichen p 's.	76
33	Tensorproduktmorlet-Roulet	76
34	Tensorproduktmorlet-Roulet	77
35	Beispiel Roulettransformation	77
36	2D Rücktransformation	78
37	GUI - erste Einstellung	79
38	GUI - zweite Einstellung	80
39	GUI - dritte Einstellung	80
40	GUI - vierte Einstellung	81
41	Roulettransformation Kreis - farbcodierte Richtungen	82
42	Roulettransformation Kreis	83
43	Roulettransformation Viereck	84
44	Roulettransformation Viereck	85
45	Roulettransformation Fünfeck	85
46	Roulettransformation erstes Einhorn	86

47	Roulettransformation zweites Einhorn	87
48	Roulettransformation Seepferdchen	88
49	CWT eines Werkstückbildes mit lokalem Artefakt	90
50	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer	91
51	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer	92
52	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer am Rand	93
53	CWT eines Werkstückbildes mit geringen Rattermarken	94
54	CWT eines Werkstückbildes mit starken Rattermarken	95
55	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer	96
56	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer	97
57	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer und zwei unterschiedlichen Wavelets	98
58	CWT eines Werkstückbildes mit einem Kratzer	99

Abstract

In dieser Arbeit wird eine neue Integraltransformation, die Roulettransformation, eingeführt. Diese arbeitet mit anisotropen Skalierungen und Rotationen. Es wird gezeigt, dass die Roulettransformation allgemeine gerichtete Singularitäten im Sinne von temperierten Distributionen auflöst. Die Abklingraten an Punkt- sowie Liniensingularitäten werden explizit angegeben.

1 Einleitung

Zu Beginn dieser Arbeit steht eine konkrete Fragestellung aus der Messtechnik. Es sollen in zweidimensionalen Bildern von lackierten Autoteilen Rattermarken automatisch detektiert werden. Sie entstehen, wenn eine der Kaltwalzen in der Blechfertigung nicht richtig eingestellt oder defekt ist. Da in der Blechfertigung mit Kaltwalzen unterschiedlichster Durchmesser gearbeitet wird, können Rattermarken von unterschiedlicher Frequenz auftreten. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 zu sehen. Die langwelligen Artefakte sind deutlich mit bloßem Auge zu erkennen.

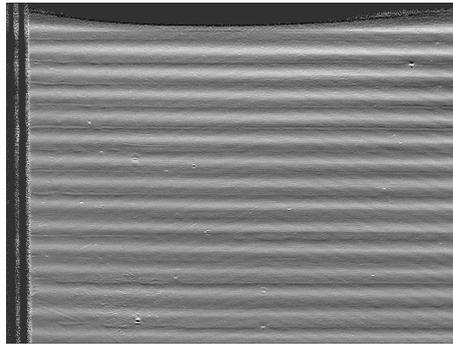


Abbildung 1: Rattermarken auf einem Blech

Die Rattermarken sollen von einer Integraltransformation erkannt werden. Als Modell für diese Art von Bildern werden üblicherweise temperierte Distributionen herangezogen. Die Rattermarken lassen sich in diesem Konzept als Singularitäten der temperierten Distribution beschreiben. Von Interesse ist, ausgehend von diesem Modell, alle Punkte zu charakterisieren, in denen die zu untersuchende Distribution nicht glatt ist. Da es sich bei den hier betrachteten Bildern um zweidimensionale Funktionen handelt, ist zu einer vollständigen Beschreibung der kritischen Stellen eine Richtung notwendig. Diese Punkte werden in der sogenannten Wellenfrontmenge zusammengefasst. Sie wird in [41] eingeführt. Alle Punkte mit zugehöriger Richtung beschreiben in der Anwendung die Rattermarken.

Diese Arbeit stellt eine Integraltransformation vor, die die Wellenfrontmenge einer beliebigen temperierten Distribution durch ihr Verhalten in kleinen Skalen beschreiben kann. Dabei wird die Integraltransformation durch die quasireguläre Darstellung induziert. Dieses Konzept aus der Darstellungstheorie steht hinter den meisten bekannten Integraltransformationen, wie zum Beispiel der Shearlettransformation [36, 46] oder der Wavelettransformation [2]. Diese hier eingeführte Integraltransformation wird, im Unterschied zu der Shearlettransformation [36, 46], mit echten Rotationen statt Scherungen und mit anisotroper Skalierung arbeiten. Der Vorteil von echten Rotationen gegenüber Scherungen liegt darin, dass die Rotationen es ermöglichen, beide Achsenrichtungen ohne Fallunterscheidung zu betrachten. Zwei unterschiedliche Strukturen werden untersucht. Einmal wird das Argument der analysierenden Funktion erst gedreht und dann anisotrop skaliert. Bei der anderen Struktur wirkt erst die anisotrope Skalierung und dann die Drehung. In den Teilkapiteln 3.3.3 und 3.3.5 werden die entsprechenden Sätze dargestellt.

In [20] wird ein allgemeines Konzept vorgestellt, unter welchen Bedingungen Integraltransformationen, induziert durch die quasireguläre Darstellung, die Wellenfrontmenge von temperierten Distributionen beschreiben können. Hier wird auch begründet, warum Integraltrans-

formationen durch die Diagonale-Gruppe oder die Similitude-Gruppe induziert werden, die Wellenfrontmenge nicht mit nur einer zulässigen Funktion beschreiben können. Es ist in diesen beiden Fällen notwendig, abhängig von der Richtung, in der die Singularität liegt, die zulässigen Funktionen passend zu wählen. Es wird mit der neuen Integraltransformation durch eine Verknüpfung der Diagonalen-Gruppe und der Similitude-Gruppe möglich sein, diese Singularitäten mit nur einer zulässigen Funktion zu charakterisieren. Dazu wird eine um Anisotropie erweiterte Struktur der Similitude-Gruppe betrachtet. Die daraus induzierte Transformation, im Folgenden Roulettransformation genannt, kann die Wellenfrontmenge einer temperierten Distribution mit nur einer zulässigen Funktion beschreiben und löst somit das Ausgangsproblem.

Die Roulettransformation zu einer Diagonalmatrix D_s und einer Rotationsmatrix R_α ist wie folgt definiert:

$$R_\psi f(\alpha, s, b) = \langle f, \pi_q(\alpha, s, b) \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Dabei ist $\pi_q(\alpha, s, b) \psi(x) = \psi_{\alpha, s, b}(x) = |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \psi(A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b))$ und $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ eine zulässige Funktion der Similitude-Gruppe und $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ die zu analysierende Funktion.

Diese Konstruktion der Transformation kommt, wie schon angesprochen, aus der Darstellungstheorie. Die Integraltransformation wird von der quasiregulären Darstellung π_q induziert. Das selbe Konzept steht auch hinter der Wavelet- oder Shearlettransformation.

Die Implementierung der Roulettransformation bestätigt das theoretische Konzept. Es werden in unterschiedlichen Bildern Kanten in jede Richtung detektiert.

Das Kapitel 2 führt in die allgemeinen Konzepte der Darstellungstheorie ein. Dabei wird die eindimensionale Wavelettransformation als Beispiel mitgeführt. Am Ende des Kapitels werden die bekannten zweidimensionalen Gruppen, die sinnvolle Integraltransformationen induzieren, kurz vorgestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Wahl der erweiterten Struktur und führt in das Paper [20] ein. Die dort vorgestellte Theorie wird auf die hier betrachtete erweiterte Struktur angepasst. Weiter wird gezeigt, dass sich die Similitude-Gruppe, erweitert um anisotrope Skalierung, zur Beschreibung der Wellenfrontmenge eignet. Im Gegensatz dazu erfüllt die Diagonale-Gruppe, erweitert durch Rotationen, die Voraussetzungen nicht und wird hier nicht weiter untersucht.

Daran schließt sich Kapitel 4 an. Hier wird die Roulettransformation definiert. Weiter werden Eigenschaften von zulässigen Funktionen beschrieben und genauer auf zulässige Funktionen als Tensorproduktkonstruktion eingegangen. Zum Schluss dieses Kapitels werden konkrete Abklingverhalten der Transformation an Punkt- und Liniensingularitäten angegeben.

Die Implementierung der Roulettransformation und konkrete zulässige Funktionen werden zu Beginn des Kapitels 5 angegeben. Im weiteren Verlauf werden zunächst einfache geometrische Bilder untersucht und in einem nächsten Schritt werden anschließend komplexere Bilder betrachtet. Die entsprechenden Kanten mit zugehörigen Richtungen werden zuverlässig erkannt. In Kapitel 6 wird die Roulettransformation auf das Ausgangsproblem von Bildern mit Rattermarken angewendet. Auch wenn hier nicht genug Bilder vorhanden sind, um statistisch signifikante Aussagen zu treffen, sieht es in den hier betrachteten Fällen aus, als wenn die Roulettransformation Rattermarken und andere Artefakte zuverlässig detektiert.

2 Darstellungen und Integraltransformationen

In diesem Kapitel werden die benötigten theoretischen Konzepte eingeführt. Es wird mit lokal-kompakten topologischen Gruppen begonnen. Dies ist die benötigte Struktur, auf der Darstellungen und ihre Integraltransformationen betrachtet werden. Als Beispiel wird die eindimensionale affine Gruppe durch dieses Kapitel geführt, um die dargestellten Konzepte mit dem bekannten eindimensionalen Konzept der eindimensionalen Wavelettransformation zu beleuchten. Das Unterkapitel 2.3 stellt bekannte Aussagen zum Auffinden von Gruppen, die Integraltransformationen induzieren, vor. Den Schluss des Kapitels bildet ein Überblick der bekannten Gruppen und ihren Integraltransformationen in 2.4.

2.1 Topologie und Maßtheorie

Dieses Kapitel richtet sich nach [23, 24, 57]. Eine Einführung in das Thema Maßtheorie bietet zum Beispiel [6, 12, 51].

Definition 2.1 (Topologische Gruppe)

Eine Gruppe G mit einer Topologie T heißt *topologische Gruppe*, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned} \quad (1)$$

und

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

bezüglich der Topologie T stetig sind. Wenn G zusätzlich ein lokalkompakter Raum ist, dann heißt G *lokalkompakte topologische Gruppe*.

Besitzt eine topologische Gruppe G eine kompakte Umgebung der 1_G , dann ist G lokalkompakt, da die Gruppenmultiplikation bezüglich der Topologie stetig ist. Damit kann die Umgebung der Eins auf jedes andere Element der Gruppe verschoben werden. Die Gruppe G ist damit lokalkompakt.

Beispiel 2.2 (Die eindimensionale affine Gruppe oder $ax + b$ -Gruppe)

Die Menge $G_{aff} := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \times (\mathbb{R}, +)$ ist mit der Verknüpfung

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$$

bezüglich der Produkttopologie $T = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \subset \mathbb{R} \text{ offen bzgl. } \mathbb{R}, \text{ für } i = 1, 2\}$ eine lokalkompakte topologische Gruppe.

Das inverse Element zu (a, b) ist durch $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ gegeben. Das neutrale Element ist $(1, 0)$. Die beiden Abbildungen (1) und (2) sind stetig, da es sich um eine Komposition stetiger Funktionen in \mathbb{R} mit der Standardtopologie handelt. Weiter überträgt sich auch die Eigenschaft der lokalen Kompaktheit auf die affine Gruppe.

Beispiel 2.3

Es folgen zwei Beispiele zu lokalkompakten topologischen Gruppen.

1) Die *allgemeine lineare Gruppe*

$$Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$$

ist eine lokalkompakte topologische Gruppe mit der von \mathbb{R}^{n^2} induzierten Topologie. Die Stetigkeit der Invertierung folgt mit der Anwendung der Leibniz-Formel. Bei dem Algorithmus werden nur stetige Abbildungen, wie Multiplikation und Summation, zur Bildung der Inversen benötigt.

2) Die Gruppe

$$SO(n) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T \text{ und } \det(A) = 1\}$$

ist eine kompakte topologische Gruppe mit der von \mathbb{R}^{n^2} induzierten Topologie. Eine ausführliche Betrachtung findet sich zum Beispiel in [58].

Sei G im Folgenden immer eine lokalkompakte topologische Gruppe. Über diese Gruppe kann integriert werden. Ein entsprechendes Maß ist das linke (oder rechte) Haarmaß auf G . Dieses ist ein nicht triviales Radon-Maß, welches linksinvariant (oder rechtsinvariant) bezüglich der Gruppenoperation der Gruppe G ist. Dabei bedeutet linksinvariant, dass für alle messbaren Mengen $B \subset G$ und $g \in G$ die Gleichung $\mu(gB) = \mu(B)$ gilt. Die Rechtsinvarianz ergibt sich entsprechend.

Satz 2.4 (lokalkompakte topologische Gruppe und linksinvariante Haarmaße, [23, 51])

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe. Dann existiert ein linkes Haarmaß μ_l auf G , welches bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 2.5 (Die eindimensionale affine Gruppe)

Das linke Haarmaß der eindimensionalen affinen Gruppe G_{aff} ist durch $\mu_l(a, b) = \frac{1}{a^2} da db$ gegeben. Das rechte Haarmaß ist gegeben durch $\mu_r(a, b) = \frac{1}{a} da db$. Dies zeigen die folgenden Rechnungen:

$$\begin{aligned} \int_G f((c, d)(a, b)) d\mu_l(a, b) &= \int_G f(ca, cb + d) \frac{1}{a^2} da db \\ &= \int_G f(a, cb + d) \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{c} da db \\ &= \int_G f(a, b) \frac{1}{a^2} da db \\ \int_G f((a, b)(c, d)) d\mu_r(a, b) &= \int_G f(ac, ad + b) \frac{1}{a} da db \\ &= \int_G f\left(t, \frac{t}{c}d + b\right) \frac{c}{t} \frac{1}{c} dt db \\ &= \int_G f(t, s) \frac{1}{t} dt ds. \end{aligned}$$

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und μ ein linksinvariantes Haarmaß auf G . Dieses existiert nach Satz 2.4 immer und ist, bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstante, eindeutig. Es wird nun die modulare Funktion definiert. Diese zeigt an, inwieweit ein linksinvariantes Haarmaß auch rechtsinvariant ist.

Dazu sei A eine messbare Menge und das Maß μ_b definiert als

$$\mu_b : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty] \quad \mu_b(A) = \mu(Ab).$$

Dieses Maß ist linksinvariant, da

$$\mu_b(aA) = \mu(aAb) = \mu(Ab) = \mu_b(A).$$

Da sich zwei linksinvariante Haarmaße auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe bis auf einen positiven konstanten Faktor gleichen, gilt:

$$\mu_b(\cdot) = \Delta(b) \mu(\cdot). \quad (3)$$

Sei nun ν ein weiteres linkes Haarmaß auf G . Dann gibt es nach Satz 2.4 ein c , sodass $\nu(\cdot) = c\mu(\cdot)$ gilt. Damit gilt weiter

$$\nu_a(\cdot) = c\mu_a(\cdot) = c\Delta(a)\mu(\cdot) = \Delta(a)\nu(\cdot).$$

Diese Funktion Δ ist also unabhängig von der Wahl des Haarmaßes der Gruppe, also wohldefiniert.

Die Funktion $\Delta(b)$ hängt nur von der Wahl von b ab, da das Maß Δ für jedes $b \in G$ linksinvariant ist und somit (3) gilt. Also kann eine Abbildung Δ definiert werden, die jedem Maß diese Konstante zuweist.

Definition 2.6 (Modulare Funktion)

Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann heißt die in (3) definierte Funktion $\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$ die *modulare Funktion* der Gruppe G .

Da für alle $g, h \in G$ und alle messbaren Mengen $B \subset G$ die folgende Rechnung gilt,

$$\Delta(gh) \mu(B) = \mu(Bgh) = \Delta(h) \mu(Bg) = \Delta(h) \Delta(g) \mu(B),$$

folgt der nächste Satz direkt.

Satz 2.7

Die modulare Funktion einer lokalkompakten topologischen Gruppe ist ein Homomorphismus.

Sei nun $A \subset G$ eine messbare Menge bezüglich μ . Dann wird durch

$$\mu(Ab^{-1}) = \Delta(b^{-1}) \mu(A) \Leftrightarrow \Delta(b^{-1}) = \frac{\mu(Ab^{-1})}{\mu(A)}$$

deutlich, dass die modulare Funktion beschreibt, inwieweit ein linksinvariantes Maß auch rechtsinvariant ist. Wenn das linksinvariante Maß μ ebenso rechtsinvariant ist, dann nimmt die modulare Funktion den Wert 1 an.

Definition 2.8 (Unimodulare Gruppe)

Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Die Gruppe G heißt *unimodulare Gruppe*, wenn $\Delta \equiv 1$ gilt.

Beispiel 2.9 (Die Modulare Funktion der affinen Gruppe)

Wie bereits gezeigt, gilt:

$$\mu_l = \frac{1}{a^2} da db \quad \text{und} \quad \mu_r = \frac{1}{a} da db.$$

Sei $X \subset G_{aff}$ eine messbare Menge bezüglich des linksinvarianten Haarmaßes μ . Dann gilt

$$\mu_{l(a,b)}(X) = \mu_l(X(a,b)) = \frac{1}{a} \mu_l(X).$$

Daraus folgt direkt

$$\Delta(a,b) = \frac{1}{a}.$$

Damit ist die affine Gruppe nicht unimodular.

Satz 2.10 (Hinreichende Bedingungen für eine unimodulare Gruppe, [23])

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und Δ die zugehörige modulare Funktion. Dann ist G unimodular, sobald eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- 1) G ist abelsch oder
- 2) G ist kompakt.

Beispiel 2.11

Die Gruppe $SO(2)$ ist nach Satz 2.10 unimodular, da sie abelsch ist.

2.2 Darstellungstheorie

Im Folgenden wird der Übergang von lokalkompakten topologischen Gruppen zu ihren Darstellungen und weiter zu den Integraltransformationen dargestellt. Dazu werden erst die Darstellungen eingeführt und in einem nächsten Schritt gezeigt, unter welchen Voraussetzungen Darstellungen sinnvolle Integraltransformationen induzieren. Dieses Kapitel richtet sich nach [6, 22, 23, 31, 51].

Sei im Folgenden stets H ein nicht trivialer Hilbertraum.

2.2.1 Grundlagen zur Darstellungstheorie

Definition 2.12 (Darstellung)

Sei G eine lokalkompakte Gruppe und H ein Hilbertraum. Ein Homomorphismus π der Gruppe G in die Menge der linear beschränkten Operatoren von H nach H , bezeichnet mit $L(H)$, heißt *Darstellung* von G . Wenn

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow L(H), \\ g &\mapsto \pi(g) f\end{aligned}$$

für alle $f \in H$ zusätzlich stetig ist, wird die Darstellung π in diesem Fall auch stark stetig genannt.

Beispiel 2.13 1) Sei $G < GL_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe und V ein Vektorraum passender Dimension über \mathbb{R} . Dann ist die natürliche Darstellung π_0 für $A \in G$ und $f : V \rightarrow V$ gegeben durch $\pi_0(A) f(x) = f(Ax)$.

2) Sei G eine Gruppe, dann ist die triviale Darstellung in einem Hilbertraum V definiert durch $\pi_t(g) = id_V$ für $g \in G$.

Definition 2.14 (Invarianter Unterraum)

Sei $U \subseteq H$ ein Unterraum eines Hilbertraumes H und π eine Darstellung von G . Dann ist U ein *G -invarianter Unterraum*, wenn $(\pi(g))(U) \subseteq U$ für alle $g \in G$ gilt.

Definition 2.15 (Irreduzible Darstellung)

Eine Darstellung π der Gruppe G in den Hilbertraum H heißt *irreduzibel*, wenn die einzigen abgeschlossenen invarianten Unterräume von H die Räume $\{0\}$ und H sind. Sonst heißt die Darstellung *reduzibel*.

Beispiel 2.16 (entnommen aus [6])

Sei nun \mathbb{R}^2 der Hilbertraum. Die Darstellung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die $GL_2(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ist reduzibel. Ein invarianter Unterraum ist $U = \langle e_1 \rangle$. Ein weiterer, nicht trivialer, invarianter Unterraum kann nicht gefunden werden.

Definition 2.17 (Unitärer Operator)

Sei H ein Hilbertraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das zugehörige Skalarprodukt und U ein linearer, bijektiver Operator $U : H \rightarrow H$, der für alle $f, g \in H$ die Gleichung

$$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$$

erfüllt. Dann heißt U ein *unitärer Operator*.

Die Menge $U(H) = \{U : H \rightarrow H \mid U \text{ unitärer Operator}\}$ bildet mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung die *unitäre Gruppe* von H .

Im Allgemeinen wird als Standard-Hilbertraum der Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen mit reellen Argumenten, die bezüglich des Lebesgue-Maßes quadratintegrierbar sind, gewählt. Dieser wird mit $L_2(G)$ bezeichnet.

Definition 2.18 (Unitäre Darstellung)

Sei G eine Gruppe und $\pi : G \rightarrow U(H)$ eine Darstellung von G in die unitäre Gruppe von H , dann heißt π eine *unitäre Darstellung*.

Im Folgenden steht der Begriff 'Darstellung' für eine unitäre, stark stetige Darstellung. Es wird weiterhin H_π für den Hilbertraum mit entsprechender Darstellung π geschrieben. Manchmal wird der Raum H_π auch der Darstellungsraum von π und seine Dimension die Dimension oder der Grad von π genannt.

Beispiel 2.19 (Linke reguläre Darstellung)

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit linksinvariantem Haarmaß μ und $f \in L_2(G)$, dann heißt die Darstellung $\pi_l : G \rightarrow U(L_2(G))$

$$(\pi_l(a)f)(x) = f(a^{-1}x)$$

mit $a, x \in G$ und $f \in L_2(G)$, die linke reguläre Darstellung von G .

Es handelt sich um einen Homomorphismus, da für alle $g, h, x \in G$ und $f \in L_2(G)$

$$\pi_l(gh)f(x) = f((gh)^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = \pi_l(g)\pi_l(h)f(x)$$

gilt. Die Abbildung ist unitär, da mit der Standardnorm auf $L_2(G)$, die durch das zugehörige Skalarprodukt induziert wird, und der Linksinvarianz des Haarmaßes

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_G f(x) \overline{f(x)} d\mu(x) = \int_G \left\| f(a^{-1}x) \right\|_2^2 d\mu(x) \\ &= \int_G \left\| \pi_l(a)f(x) \right\|_2^2 d\mu(x) = \langle \pi_l(a)f, \pi_l(a)f \rangle \end{aligned}$$

folgt. Damit ist die linke reguläre Darstellung eine unitäre Darstellung.

Definition 2.20 (zyklische Vektoren, [7])

Ein Vektor $g \in H_\pi$ heißt *zyklisch* für die Darstellung π , wenn der von der Menge $\{\pi(a)g \mid a \in G\}$ erzeugte Untervektorraum dicht in H_π liegt.

Dies gilt genau dann, wenn für alle $f \in H$ und für alle $a \in G$ mit $f \perp \pi(a)g$ die Bedingung $f = 0$ folgt.

Satz 2.21 (Zur Irreduzibilität und zyklischen Vektoren, [7])

Eine Darstellung π ist genau dann irreduzibel, wenn jedes $0 \neq g \in H_\pi$ zyklisch ist.

2.2.2 Darstellung von semidirekten Produkten

Bis jetzt wurde G als beliebige lokalkompakte topologische Gruppe zu Grunde gelegt. In diesem Abschnitt wird eine spezielle Art von Gruppen betrachtet. Es handelt sich um eine Gruppe, die von einem semidirekten Produkt erzeugt wird. Dies ist später, im Hinblick auf waveletartige Integraltransformationen, der Ausgangspunkt weiterer Überlegungen.

Definition 2.22 (Semidirektes Produkt)

Das *semidirekte Produkt* $M \rtimes_\sigma N$ zwischen zwei Gruppen $(N, +)$ und (M, \cdot) mit einer Abbildung $\sigma : M \mapsto \text{Aut}(N)$ ist definiert über die Verknüpfung

$$(m_1, n_1) * (m_2, n_2) = (m_1 m_2, n_1 + \sigma_{m_1}(n_2)).$$

Mit dieser Multiplikation ist das semidirekte Produkt der beiden Gruppen wieder eine Gruppe. Das inverse Element ist durch

$$(m, n)^{-1} = (m^{-1}, -\sigma_{m^{-1}}(n))$$

gegeben. Wenn die beiden Gruppen N und M lokalkompakt sind und die Abbildung $M \times N \rightarrow N, (n, m) \mapsto \sigma_m(n)$ stetig bezüglich der Topologie in N ist, dann ist das semidirekte Produkt eine lokalkompakte Gruppe. Da im Folgenden der Homomorphismus aus dem Kontext eindeutig definiert ist, wird bei semidirekten Produkten $M \rtimes N$ auf Angabe des Homomorphismus verzichtet.

Satz 2.23 (Maße und semidirekte Produkte, [5, 4])

Sei $G = M \rtimes_\sigma N$ eine Gruppe, die bezüglich der Produkttopologie lokalkompakt ist und μ_N das linke Haarmaß auf N . Dann gibt es einen stetigen, strikt positiven Homomorphismus $\delta : M \rightarrow (0, \infty)$, sodass für alle messbaren Mengen $X \subset N$

$$\mu_N(X) = \delta(a) \mu_N(\sigma_a(X))$$

gilt.

Beispiel 2.24 (Zur affinen Gruppe)

Bei der affinen Gruppe kann der Homomorphismus δ für eine messbare Menge $X \subset G_{aff}$ berechnet werden durch

$$\mu_{\mathbb{R}}(\sigma_a(X)) = \mu_{\mathbb{R}}(aX) = |a| \mu_{\mathbb{R}}(X).$$

Daraus ergibt sich $\delta(a) = \frac{1}{|a|}$.

Dieser Homomorphismus ist für die Verträglichkeit des semidirekten Produktes mit den linksinvarianten Haarmaßen der Gruppen N und M wichtig. Er gibt eine Verbindung der Maße der einzelnen Gruppen des semidirekten Produktes und dem Maß der semidirekten Gruppe an. Mit Hilfe des Homomorphismus δ kann ein linksinvariantes Haarmaß auf $M \rtimes_\sigma N$ angegeben werden.

Satz 2.25 (linke reguläre Darstellung von $G = M \rtimes_\sigma N$, [4])

Sei G eine lokal kompakte topologische Gruppe, gegeben durch ein semidirektes Produkt der Gruppen (M, \cdot) und $(N, +)$ mit Homomorphismus σ und $f \in L_2(\mathbb{R})$. Dann ist für $A \in M$ und $b \in N$ durch

$$\pi_l(A, b) f(x, y) = f(A^{-1}x, \sigma_{A^{-1}}(y - b))$$

eine Darstellung von G im den Hilbertraum $L_2(G, d\mu_G)$ gegeben. Diese heißt in Anlehnung an Beispiel 2.19 die *linke reguläre Darstellung*.

Satz 2.26 (Quasireguläre Darstellung, [4])

Sei $G = M \rtimes_\sigma N$ eine lokalkompakte Gruppe und $f \in L_2(N)$. Weiter sei N zusätzlich abelsch. Dann wird für $A \in M$ und $b \in N$ durch

$$(\pi(A, b) f)(x) = \delta(A)^{\frac{1}{2}} f(\sigma_{A^{-1}}(x - b))$$

eine unitäre Darstellung, die *quasireguläre Darstellung* von G in $L_2(N, d\mu_N)$, definiert. Dabei ist δ der Homomorphismus aus Satz 2.23.

Beweis: Zeige die Homomorphiseigenschaft:

$$\begin{aligned} \pi(A_1, b_1) \pi(A_2, b_2) f(x) &= \pi(A_1, b_1) \delta(A_2)^{\frac{1}{2}} f(\sigma_{A_2^{-1}}(x - b_2)) \\ &= \delta(A_1 A_2)^{\frac{1}{2}} f(\sigma_{A_2^{-1}}(\sigma_{A_1^{-1}}(x - b_1) - b_2)) \\ &= \delta(A_1 A_2)^{\frac{1}{2}} f(\sigma_{A_2^{-1}} \sigma_{A_1^{-1}}(x - b_1 - \sigma_{A_1} b_2)) \\ &= \delta(A_1 A_2)^{\frac{1}{2}} f(\sigma_{A_1 A_2^{-1}}(x - b_1 - \sigma_{A_1} b_2)) \\ &= \pi((A_1 A_2, b_1 + \sigma_{A_1} b_2)) f(x) \\ &= \pi((A_1, b_1) (A_2, b_2)) f(x). \end{aligned}$$

Zeige die Normeigenschaft bezüglich dem linken Haarmaß $d\mu_N$:

$$\begin{aligned} \|\pi(A, b) f(x)\|_2^2 &= \int_N |\pi(A, b) f(x)|^2 d\mu_N(x) \\ &= \int_N \delta(A) |f(\sigma_{A^{-1}}(x - b))|^2 d\mu_N(x) \\ &= \int_N \delta(A) |(x - b)|^2 d\mu_N(\sigma_A(x)) \\ &= \int_N \delta(A) \delta(A)^{-1} |f(x - b)|^2 d\mu_N(x) \\ &= \int_N |f(-b + x)|^2 d\mu_N(x) \\ &= \int_N |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.27 (Die Darstellungen der affinen Gruppe)

Die linke reguläre Darstellung der affinen Gruppe für ein $f \in L_2(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist durch

$$\pi_l(a, b) f(x, y) = f\left(\frac{x}{a}, \frac{1}{a}(y - b)\right)$$

gegeben. Für die linke quasireguläre Darstellung folgt für $f \in L_2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$

$$\pi_q(a, b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{1}{a}(x - b)\right).$$

Somit wird für semidirekte Produkte eine Darstellung gefunden. Diese ist vor allem in Bezug auf die affine Gruppe wichtig, genauso wie für alle weiteren Gruppen, die in späteren Kapiteln angesprochen werden. Mit dieser Darstellung werden die Integraltransformationen induziert.

2.2.3 Quadratintegrierbare Darstellungen

Nun gilt es herauszufinden, unter welchen Voraussetzungen Darstellungen auch sinnvolle Integraltransformationen induzieren. Damit befasst sich der folgende Abschnitt. Eine Einführung in die Thematik ist auch in [38] zu finden.

Definition 2.28 (Quadratintegrierbare Gruppendarstellung, [1, 34])

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und π eine irreduzible, unitäre Darstellung der Gruppe G in einen Hilbertraum H_π . Wenn es einen Vektor $0 \neq \psi \in H_\pi$ gibt, so dass

$$0 \neq \int_G \left| \langle \psi, \pi(g)\psi \rangle \right|^2 d\mu(g) < \infty$$

gilt, dann heißt ψ *zulässig*. Die zugehörige Darstellung heißt dann *quadratintegrierbar* bezüglich des Haarmaßes μ .

Für die Berechnung der Zulässigkeit von Funktionen ist es oft hilfreich, die Fouriertransformation zu betrachten.

Definition 2.29 (Fouriertransformation)

Zu einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist die *Fouriertransformation* \hat{f} von f für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i \xi^T t} dt.$$

Der inverse Operator ist für $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$g(t) = \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi^T t} dt$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}^n$.

Die Fouriertransformation ist in diesem Sinne nur für $L_1(\mathbb{R}^n)$ Funktionen definiert. Es ist aber hilfreich, die Definition auf Funktion in $L_2(\mathbb{R}^n)$ zu erweitern. In diesem Raum steht dann ein Skalarprodukt zur Verfügung. Im Folgenden wird unter der Fouriertransformation immer die Fortsetzung auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ verstanden.

Satz 2.30 (Parseval Plancherel)

Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Die Fouriertransformation ist ein normerhaltender Operator auf $L_2(\mathbb{R}^n)$. Es folgen weitere wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation.

Definition 2.31 (Faltung)

Zu zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist die *Faltung* der Funktionen f und g durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t) dt$$

definiert. Es gilt $f * g = g * f$. Das Integral auf der linken Seite ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ absolut integrierbar.

Satz 2.32 (Fourier und Faltung)

Für zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Beispiel 2.33 (Zulässigkeit des Mexican-Hat-Wavelet)

Diese Funktion ist auch in [2], [16] oder [44] als zulässige Funktion der eindimensionalen affinen Gruppe zu finden. Die zulässigen Funktionen für diese Gruppe werden Wavelets genannt. Die Mexican-Hat-Wavelet ist durch die zweite Ableitung der Gaußfunktion definiert, also

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(x) &= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ im Zeitbereich und} \\ \hat{\psi}_\sigma(\xi) &= \frac{\sqrt{8}\sigma^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}} \text{ im Frequenzbereich.} \end{aligned}$$

Die folgende Rechnung zeigt die Zulässigkeit des Wavelet.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_\sigma(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi &= \frac{8\sigma^5\pi^{\frac{1}{2}}}{3} e^{-\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^4 e^{-\xi^2}}{|\xi|} d\xi = \frac{16\sigma^5\pi^{\frac{1}{2}}}{3} e^{-\sigma^2} \int_0^\infty \xi^3 e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{16\sigma^5\pi^{\frac{1}{2}}}{3} e^{-\sigma^2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\xi^2}\right] = \frac{8\sigma^5\pi^{\frac{1}{2}}}{3} e^{-\sigma^2}. \end{aligned}$$

Es gibt Darstellungen, die keine zulässigen Vektoren besitzen, also auch nicht quadratintegrierbar sind ([34]). Diese erzeugen damit keine sinnvollen Integraltransformationen, da sie keine quadratintegrierbaren Bilder produzieren.

Satz 2.34 (Dichtheit der zulässigen Vektoren, [34], Theorem (4.1))

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit einer irreduziblen unitären quadratintegrierbaren Darstellung π in einen Hilbertraum H und ψ ein zulässiger Vektor. Dann liegt die Menge der zulässigen Vektoren dicht in H_π und der durch

$$V_\psi f(a) := \langle f, \pi(a)\psi \rangle$$

definierte Operator $V_\psi : H \rightarrow L_2(G, d\mu)$ für $f, \psi \in H_\pi$ ist ein Vielfaches einer Isometrie.

Oft wird die Wavelettransformation mit einer etwas anderen Zulässigkeitsbedingung eingeführt. Das nächste Beispiel rechnet nach, dass aus Satz 2.28 die bekannte Zulässigkeitsbedingung (4) folgt.

Beispiel 2.35 (Die Zulässigkeitsbedingung für die mehrdimensionale affine Gruppe, [30])

Im besonderen Fall mit $N = (\mathbb{R}^n, +)$ und einer Untergruppe $M < Gl_n(\mathbb{R})$ folgt aus der Zulässigkeitsbedingung eine andere Forderung. Da es sich bei $G = M \ltimes N$ um ein semidirektes Produkt handelt, ergibt sich das zugehörige Haarmaß für messbares $A \in M$ und $b \in N$ als

$$\mu_G(A, b) = |\det(A)|^{-1} d\mu_M(A) db.$$

Sei $f \in L_2(N)$ und ψ zulässig, dann folgt mit Definition 2.28:

$$\begin{aligned} & \int_G \left| \langle f, \pi(A, b)\psi \rangle \right|^2 d\mu_G(A, b) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_M \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) |\det(A)|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(A^{-1}(x-b))} dx \right|^2 |\det(A)|^{-1} d\mu_M(A) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_M \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\det(A)|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi((-A^{-1})(b-x))} f(x) dx \right|^2 |\det(A)|^{-1} d\mu_M(A) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_M \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\det(A)|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi_{-A}(b-x)} f(x) dx \right|^2 |\det(A)|^{-1} d\mu_M(A) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_M \left| \overline{(\psi_{-A} * f)}(b) \right|^2 |\det(A)|^{-2} d\mu_M(A) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_M \left| \widehat{\overline{\psi_{-A}}}(b) \hat{f}(b) \right|^2 |\det(A)|^{-2} d\mu_M(A) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(b) \right|^2 \left(\int_M \left| \hat{\psi}(-A^T b) \right|^2 d\mu_M(A) \right) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(-x) \right|^2 \left(\int_M \left| \hat{\psi}(A^T x) \right|^2 d\mu_M(A) \right) db. \end{aligned}$$

Damit es sich um eine Isometrie handelt, muss das Integral $\int_M \left| \hat{\psi}(A^T x) \right|^2 d\mu_M(A)$ eine Kon-

stante sein. Es muss

$$\int_M \left| \hat{\psi}(A^T x) \right|^2 d\mu_M(A) = 1 \quad (4)$$

gelten. Mehr zur Zulässigkeitsbedingung findet sich zum Beispiel in [30].

Da es sich bei diesen Darstellungen um Isometrieen zwischen den Räumen handelt, kann eine Integraltransformationsinvertierungsformel angegeben werden.

Satz 2.36 (Umkehrbarkeit von Integraltransformationen, [34] Anhang C)

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit einer irreduziblen unitären quadratintegrierbaren Darstellung π in einen Hilbertraum H . Sei zusätzlich μ ein linksinvariantes Haarmaß auf dem Hilbertraum H_π , dann gilt für alle zulässigen Vektoren $\psi \in H_\pi$, $a \in G$ und beliebiges $f \in H_\pi$

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_G \langle f, \pi(a)\psi \rangle \pi(a)\psi d\mu(a),$$

wobei

$$c_\psi = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_G \left| \langle \psi, \pi(a)\psi \rangle \right|^2 d\mu(a)$$

ist. Dabei ist die Konvergenz der jeweils rechten Seiten im schwachen Operatorsinne zu lesen.

Beispiel 2.37 (Eindimensionale Wavelettransformation)

Die eindimensionale Wavelettransformation wird von der eindimensionalen affinen Gruppe durch die linke reguläre Darstellung induziert. Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine zulässige Funktion im Sinne der Definition 2.28. Diese wird im Folgenden Wavelet genannt. Weiter sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Die eindimensionale Wavelettransformation, induziert durch π_q aus Definition 2.26, ist durch

$$W_\psi f(a, b) = \langle f, \pi_q(a, b)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

definiert.

Die Rücktransformation folgt mit dem Satz 2.36. Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ein normalisiertes, zulässiges Wavelet und $f \in L_2(\mathbb{R})$ integrierbar. Dann gilt:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}.$$

Es wird im Folgenden nachgerechnet, dass es sich um die Inverse handelt. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine punktweise Fourierinversion möglich ist.

Sei $\psi_s(x - \cdot) = \psi\left(\frac{x-\cdot}{s}\right)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) du &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|s|} \hat{f}(\alpha) \hat{\psi}(s\alpha) \frac{1}{\sqrt{|s|}} e^{2\pi i \alpha x} \overline{(\psi_s)^\wedge(\alpha)} d\alpha \\ &= |s| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) |\hat{\psi}(s\alpha)|^2 e^{2\pi i \alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\omega = s\alpha$ und $ds = \frac{d\omega}{\alpha}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |s| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) |\hat{\psi}(s\alpha)|^2 e^{2\pi i \alpha x} d\alpha \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{2\pi i \alpha x} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega d\alpha \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung kann die Zulässigkeitsbedingung abgelesen werden. Diese stimmt mit dem Satz 2.28 überein. Ein Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ist zulässig, wenn

$$c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

Diese Bedingung garantiert die Invertierbarkeit der Integraltransformation. Dies wird auf einem anderen Weg zum Beispiel in [10] bewiesen.

Zusammenfassend ist es mit den Ergebnissen nun möglich, von einer Gruppe mit einer irreduziblen, unitären Darstellung ausgehend, Aussagen über die induzierte Integraltransformation zu treffen. Der beschriebene Zusammenhang ist in der Physik auch unter den Begriffen ‘‘Coherent State Expansion’’ und ‘‘Resolution of the Identity’’ zu finden.

Im konkreten Fall der mehrdimensionalen affinen Gruppe zeigt folgender Satz, dass die Gruppe $M \subset Gl_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen sein muss:

Satz 2.38 (Eigenschaften der Gruppe M , [27])

Sei $M < Gl_n(\mathbb{R})$ und T eine zugehörige lokalkompakte Topologie auf M . Wenn das semidirekte Produkt ein topologisches semidirektes Produkt ist und die quasireguläre Darstellung der Gruppe $M \ltimes \mathbb{R}^n$ quadratintegrierbar ist, dann ist M eine abgeschlossene Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$ und die Topologie T ist die Relativtopologie.

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist jedoch nicht jede abgeschlossene Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$ zulässig. Gemäß [59] ist die Gruppe $SO(2)$ nicht zulässig. Die Begründung folgt über einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, die Gruppe ist zulässig, dann gäbe es ein $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$, so dass sich folgender Widerspruch ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} \left| \hat{\psi}(e^{i\theta} \rho e^{i\psi}) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \hat{\psi}(\rho e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \text{ und damit} \\ \|\hat{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_0^\infty \rho \int_0^{2\pi} \left| \hat{\psi}(\rho e^{i\theta}) \right|^2 d\theta d\rho = \int_0^\infty \rho d\rho = \infty. \end{aligned}$$

2.3 Orbittheorie

Es wird nicht, wie schon erwähnt, durch jede Gruppe eine sinnvolle Integraltransformation induziert. Die Orbittheorie gibt einen Hinweis, welche Gruppen in Frage kommen. Da eine irreduzible Darstellung notwendig ist, soll die Frage nach irreduziblen (Teil-) Darstellungen von Gruppen der Art $G = M \times \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Orbittheorie in einem ersten Schritt geklärt werden.

In dem weiteren Unterkapitel wird ein Resultat vorgestellt, welches zu überprüfen ermöglicht, ob eine Gruppe zulässig ist, also einen zulässigen Vektor besitzt und damit eine Integraltransformation induziert. Das gesamte Kapitel richtet sich nach [7, 27, 29, 50].

Sei M eine Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$. Es wird in [27] gezeigt, dass diese Untergruppe abgeschlossen sein muss. Dieses Resultat wurde hier in Satz 2.38 aufgeführt. Auch ist die ganze $Gl_n(\mathbb{R})$, wie beispielsweise in [50] dargelegt, nicht zulässig. Nun seien die Elemente $b \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren gegeben und die Elemente aus dem Dualraum $\widehat{\mathbb{R}}^n$ als Zeilenvektoren. Die nachfolgenden Resultate sind entnommen aus beziehungsweise richten sich nach [7, 27, 50].

Satz 2.39 (Linksinvariantes Haarmaß konkreter semidirekter Produkte, [27])

Sei $G = M \times \mathbb{R}^n$ und $f(A, b) \in C_c(G, \mathbb{R})$, dann ist das linksinvariante Haarmaß auf G gegeben durch

$$\int_G f(A, b) d\mu_G(A, b) = \int_M \int_{\mathbb{R}^n} f(A, b) \delta(A)^{-1} db d\mu_M(A).$$

Wie in Satz 2.26 gezeigt, ist die quasireguläre Darstellung im Konkreten für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M$ gegeben durch

$$(\pi(A, b)f)(x) := (\pi_q(A, b)f)(x) = \delta(A)^{\frac{1}{2}} f(A^{-1}(x - b)).$$

Dies ist eine stark stetige, unitäre Darstellung von $M \times \mathbb{R}^n$ auf $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe ist es nun, eine Darstellung $\hat{\pi}$ zu konstruieren, die zu π dual ist. Dabei soll $\hat{\pi}$ auf $\widehat{\mathbb{R}}^n$ wirken. Durch den Übergang in den Dualraum ist es später möglich, Aussagen über quadratintegrierbare (Teil-)Darstellungen zu geben. Dazu heißen zwei Darstellungen π und σ der Gruppe G äquivalent, wenn es einen Operator $T : H_\sigma \rightarrow H_\pi$ gibt, der $T\sigma(a) = \pi(a)T$ für alle $a \in G$ erfüllt. Für die Äquivalenz der Darstellungen wird $\pi \sim \sigma$ geschrieben.

Satz 2.40 (Äquivalente Darstellung auf dem Dualraum, [7])

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann eine äquivalente Darstellung $\hat{\pi} : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ für $A \in M$ und $b \in \mathbb{R}^n$ auf den Dualraum definiert werden durch

$$\pi(\widehat{A, b})(g^\vee) := \hat{\pi}(A, b)g(\gamma) = \delta(A)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \gamma b} \hat{g}(\gamma A).$$

Entsprechend der Konstruktion gilt $\hat{\pi} \sim \pi$.

Beweis:

$$\hat{\pi}(A, b)\hat{g}(\gamma) = (\pi(A, b)(\hat{g}(\cdot))^\vee(\cdot))^\wedge(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} \pi(A, b)g(y) e^{-2\pi i \gamma y} dy$$

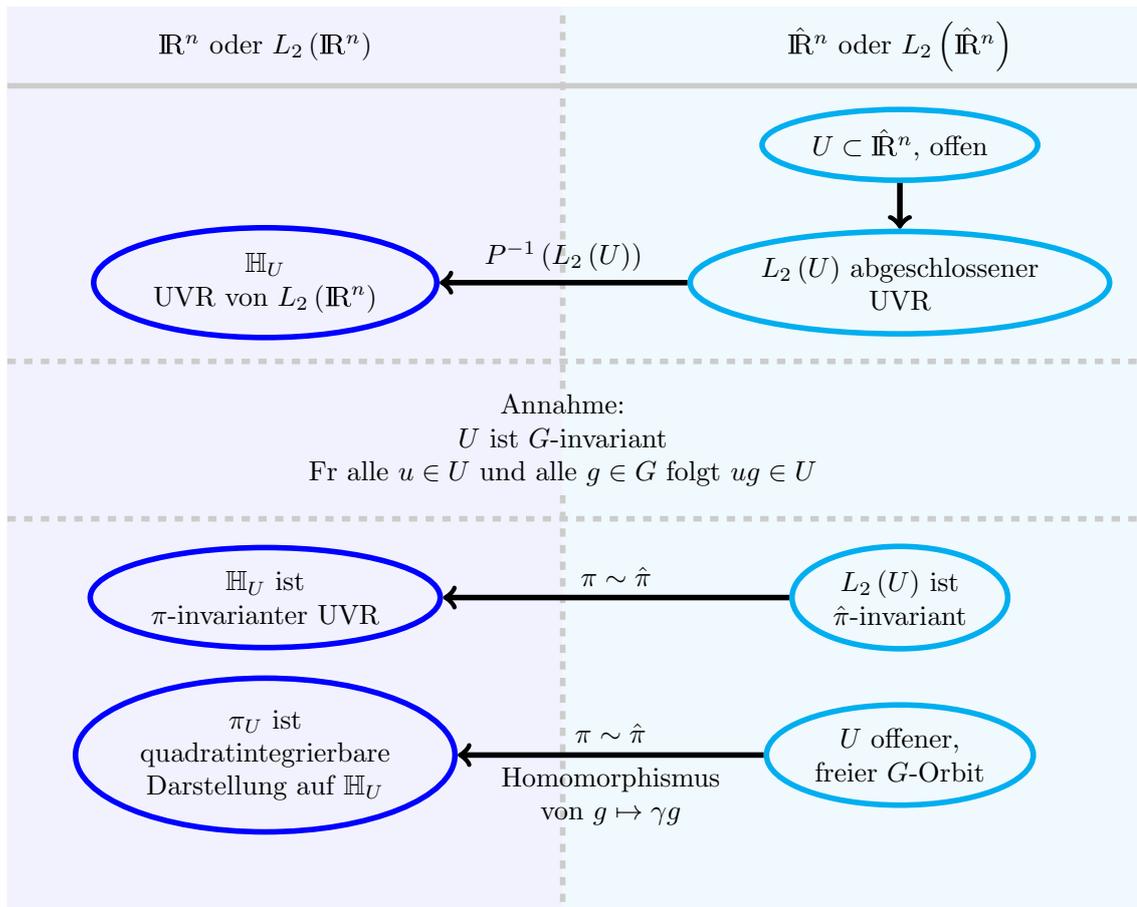


Abbildung 2: Raum und Dualraum: Überblick über die Raumzugehörigkeiten.

$$\begin{aligned}
 &= \delta(A)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(A^{-1}(y-b)) e^{-2\pi i \gamma y} dy \\
 &= \delta(A)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(A^{-1}y) e^{-2\pi i \gamma(y+b)} dy \\
 &= \delta(A)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \gamma b} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \gamma A y} dy = \delta(A)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \gamma b} \hat{g}(\gamma A)
 \end{aligned}$$

□

Die Darstellungen wirken auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $L_2(\widehat{\mathbb{R}^n})$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \pi(A, b) f(x) &= \delta(A)^{-\frac{1}{2}} f(A^{-1}(x-b)), \quad (A, b) \in G, f \in L_2(\mathbb{R}^n) \\
 \hat{\pi}(A, b) \hat{g}(\gamma) &= \delta(A)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \gamma b} \hat{g}(\gamma A), \quad (A, b) \in G, \hat{g} \in L_2(\widehat{\mathbb{R}^n}).
 \end{aligned}$$

Nachdem zwei äquivalente Darstellungen konstruiert wurden, wird im Folgenden der Zusammenhang zwischen diesen beiden Darstellungen gezeigt und erläutert, inwieweit die Darstellungen die Frage nach irreduziblen Teildarstellungen beantworten können.

Definition 2.41 (verallgemeinerter Hardyraum, nach [27])

Sei $U \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$ messbar. Der Raum

$$\mathbb{H}_U := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f}(\gamma) = 0 \text{ für fast alle } \gamma \in \widehat{\mathbb{R}^n} \setminus U \right\}$$

heißt der *verallgemeinerte Hardyraum* zu U .

Definition 2.42 (G -Orbits, [7])

Für eine Gruppe $G \leq Gl_n(\mathbb{R})$ und einen Vektor $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ heißt die Menge $\gamma G = \{\gamma g : g \in G\}$ der G -Orbit.

Ein G -Orbit heißt *frei*, wenn aus $\gamma g = \gamma$ folgt, dass $g = 1_G$ gelten muss.

Es folgen zwei Beobachtungen für $g \in G$ und $U \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$, zu den vorherigen Definitionen und Sätzen.

- 1) Der Raum $L_2(U)$ ist wegen Satz 2.40 $\hat{\pi}$ -invarianter Unterraum. Daraus folgt, dass M π -invariant ist.
- 2) Wenn ein G -Orbit nicht nur frei, sondern auch offen ist, dann ist die Abbildung $g \mapsto \gamma g$ ein Homomorphismus von G auf γG . Dies ist in [7] ausführlich dargestellt.

Satz 2.43 (Zentrale Aussage über freie, offene G -Orbits, [7])

Sei M eine abgeschlossene Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$ und $G = M \times \mathbb{R}^n$. Sei weiter U ein freier, offener G -Orbit in $\widehat{\mathbb{R}^n}$. Dann ist die Darstellung $\pi|_U$ eine irreduzible und quadratintegrierbare Darstellung der Gruppe G auf H_π .

Der Beweis richtet sich nach [7]. Dafür wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 2.44 ([7])

Sei M eine abgeschlossene Untergruppe des $Gl_n(\mathbb{R})$. Sei weiter U ein offener, freier M -Orbit in $\widehat{\mathbb{R}^n}$. Dann existiert eine borelmeasurable Funktion Γ auf U , die folgende Eigenschaften hat:

- 1) $0 < \Gamma(\gamma) < \infty$ für alle $\gamma \in U$.
- 2) Wenn ν entweder eine stetige Funktion oder eine messbare Funktion, die nur positive Werte annimmt, auf U ist, dann gilt für jedes $\gamma_0 \in U$:

$$\int_M \nu(\gamma_0 t) dt = \int_U \nu(\gamma) \Gamma(\gamma) d\gamma.$$

- 3) Für jedes $\tilde{m} \in M$ und jedes $\gamma \in U$ gilt:

$$\Gamma(\gamma \tilde{m}) = \frac{\Delta_M(\tilde{m})}{\delta(\tilde{m})} \Gamma(\gamma).$$

Beweis: Es wird gezeigt, dass jeder Vektor $g \in H_\pi$ zyklisch ist. Damit ist die Darstellung $\pi|_U$ nach Satz 2.21 quadratintegrierbar.

Sei dazu $f, g \in H_\pi$ und $\hat{\Psi}_d(\gamma) = \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{g}(\gamma d)}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_G \left| \langle f, \pi|_U(a, b) g \rangle \right|^2 d(a, b) &= \int_G \left| \langle \hat{f}, \hat{\pi}|_U(a, b) \hat{g} \rangle \right|^2 d(a, b) \\
 &= \int_G \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\gamma) \delta(a)^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\gamma b} \overline{\hat{g}(\gamma a)} d\gamma \right|^2 d(a, b) \\
 &= \int_G \delta(a) \left| \hat{\Psi}_a^\vee(b) \right|^2 d(a, b) = \int_M \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{\Psi}_a(\gamma) \right|^2 d\gamma da \\
 &= \int_M \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{g}(\gamma a)} \right|^2 d\gamma da \\
 &= \int_U \left| \hat{f}(\gamma) \right|^2 \int_M \left| \overline{\hat{g}(\nu)} \Phi(\nu) \right|^2 d\nu d\gamma \\
 &= \|\hat{f}\|_{L_2(U)}^2 \|\hat{g}\Phi^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \|f\|_{\mathbb{H}_U}^2 \|\hat{g}\Phi^{\frac{1}{2}}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Die $\|\hat{g}\Phi^{\frac{1}{2}}\|_2^2$ kann nur Null werden, wenn $g = 0$ ist, da Φ eine positive Funktion ist. Sei $g \neq 0$, dann ist der obige Ausdruck nur Null, wenn $f = 0$. Hierdurch wird gezeigt, dass die Darstellung irreduzibel ist, da jeder Vektor $g \neq 0$ zyklisch ist.

Weiter zeigt dieser Ausdruck, dass die Darstellung quadratintegrierbar ist. Dafür genügt es, dass es einen Vektor $\xi \in L_2(U)$ gibt, so dass ξ auch einen kompakten Träger hat. Dann ist das obige Integral endlich und nicht Null. Damit ist die Darstellung quadratintegrierbar. \square

Das übrige Kapitel richtet sich nach [50]. Das Hauptresultat aus diesem Paper beschreibt einen Weg zu prüfen, ob eine Gruppe zulässig ist oder nicht. Dafür werden zunächst die entsprechenden Definitionen und im Anschluss der Hauptsatz vorgestellt.

Definition 2.45 (ε -Stabilisator)

Zu einem $x \in \mathbb{R}^n$ ist der ε -Stabilisator definiert durch

$$G_x^\varepsilon := \left\{ A \in G \mid |Ax - x| \leq \varepsilon \right\}$$

Die Menge

$$G_x^0 := \{ A \in G \mid Ax = x \}$$

heißt *Stabilisator* von x .

Satz 2.46 (Zulässigkeit von Gruppen, [50])

Sei $G = M \ltimes \mathbb{R}^n$ eine Gruppe, wobei $M \subset Gl_n(\mathbb{R})$. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1) Wenn M eine zulässige Gruppe ist, also die Integraltransformation einen zulässigen Vektor besitzt, dann ist $\Delta(m) \neq |\det(m)|$ und für alle $m \in M$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist der Stabilisator kompakt.

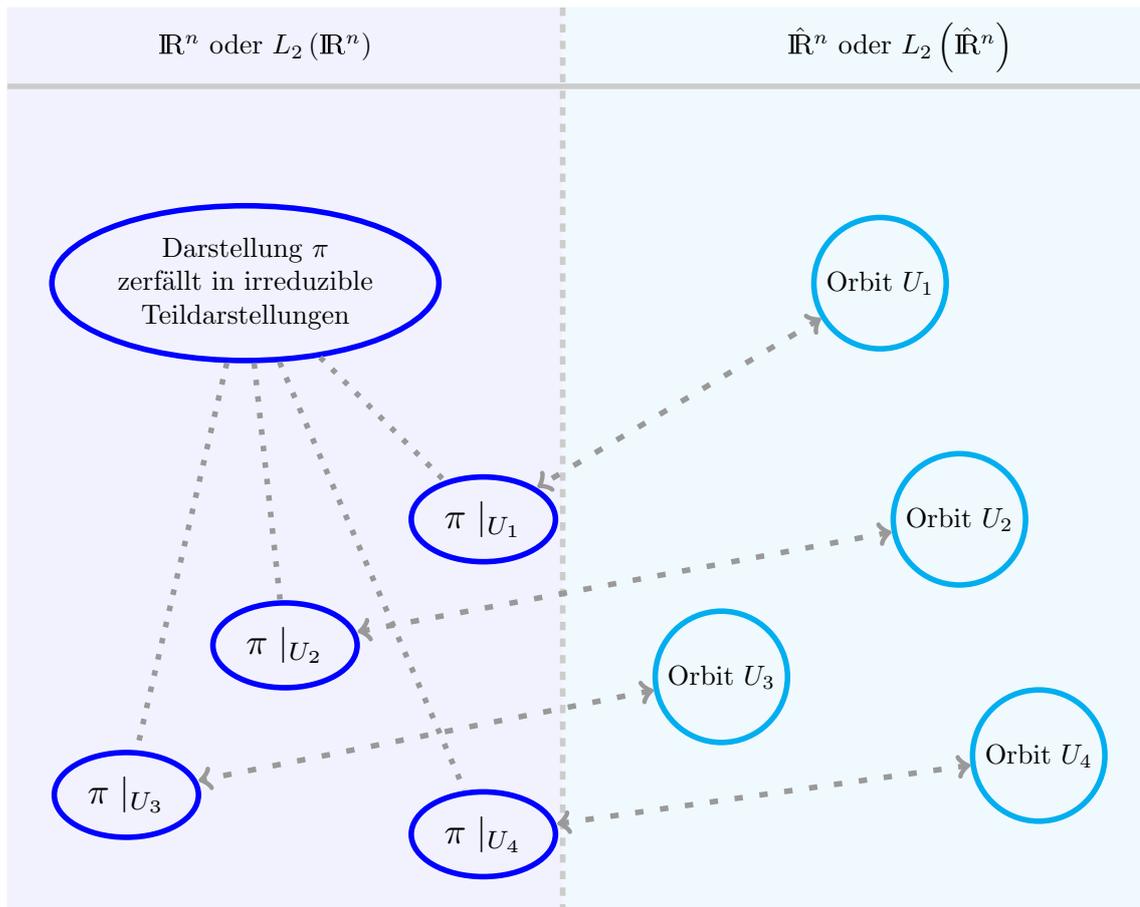


Abbildung 3: Raum und Dualraum: Orbit und quadratintegrierbare Teildarstellungen

- 2) Wenn $\Delta(m) \neq |\det(m)|$ für alle $m \in M$ gilt und es für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass der ε -Stabilisator kompakt ist, dann ist M zulässig.

Aus diesem Satz folgt, dass unimodulare Gruppen nicht zulässig sind, da das linke Haarmaß entsprechend normiert werden kann. Somit sind diese Gruppen Spezialfälle von Satz 2.46, 1). Daher kann nachgewiesen werden, dass die Gruppen

- 1) $Gl_n(\mathbb{R})$ und
- 2) $SL_n(\mathbb{R})$

keine sinnvollen Integraltransformationen induzieren.

Beispiel 2.47 (Die zweidimensionale Galilei-Gruppe, [50])

Diese Gruppe wird unter anderem in [59] und [50] angesprochen. Sie beschreibt die eindimensionale affine Gruppe mit umgekehrter Verknüpfung. Die Gruppe ist gegeben durch

$$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid x \neq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Begründung der Zulässigkeit folgt der Begründung in [50]. Jetzt wird mit Satz (2.46) gezeigt, dass die Gruppe $M \times \mathbb{R}^2$ zulässig ist. Dazu wird in einem ersten Schritt das linke Haarmaß berechnet. Es ergibt sich

$$d\mu(x, y) = x^{-1} dx dy$$

und daraus folgt für die modulare Funktion

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{|x|}.$$

Die Orbits ergeben sich für $y = (x_1, x_2)$ als

$$O_x = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \text{wenn } x_1 \neq 0 \\ \{(0, x_2)\} & \text{wenn } x_1 = 0 \end{cases}.$$

Für die zugehörigen ε -Stabilisierer ergeben sich unterschiedliche Fälle. Sei zuerst $x_1 = 0$. Dann folgt $M_x^\varepsilon = M_x^0 = M$. Die ganze Gruppe stabilisiert das Element.

Nun sei $x_1 \neq 0$. Dann gilt

$$M_x^\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in H \mid (x-1)^2 + y^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{x_1}\right)^2 \right\}$$

und $M_x^0 = I$. Die Menge M_x^ε ist kompakt, wenn $\varepsilon < |x_1|$, da sie in diesem Fall beschränkt und abgeschlossen ist. Das Gegenteil tritt auf, wenn $\varepsilon \geq |x_1| > 0$. Beschränkt ist der ε -Stabilisierer immer noch, jedoch kann die Abgeschlossenheit nicht gezeigt werden. Dies zeigt die Folge

$$a_n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Sie liegt zwar in M und ist in M_x^ε enthalten, aber der Grenzwert dieser Folge ist nicht in der Gruppe enthalten. Aus diesem Grund ist für diesen Fall die Menge nicht kompakt.

Dies stellt aber kein Problem dar, da Satz 2.46 2) besagt, dass es genügt, wenn es für jeden Fall mindestens ein ε gibt, für das die Menge M_x^ε kompakt ist. Das ist im oberen ersten Fall immer gegeben. Das linke Haarmaß berechnet sich als $d\mu_D(A) = |x|^{-2} dx dy$. Die Zulässigkeit eines Vektors ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi.$$

2.4 Waveletartige Integraltransformationen in \mathbb{R}^2

Im Folgenden werden Gruppen und Integraltransformationen in zwei Dimensionen betrachtet. In einer Dimension gibt es zwei Parameter, an denen skaliert und verschoben wird. In zwei Dimensionen gibt es die Verschiebung, die Skalierung und die Drehung im Raum. Sei dazu im Folgenden $n \in \mathbb{N}$.

Die erste naheliegende Idee ist, die affine Gruppe in zwei Dimensionen zu verallgemeinern und damit die Wavelettransformation zu definieren. Diese ist aber nicht quadratintegrierbar, wie zum Beispiel Satz 2.3 oder ([27], S. 29) zeigen.

Sei im Folgenden $G < G_{Aff}$, und zwar so, dass $G = M \times \mathbb{R}^n$ gilt, wobei $M \subset Gl_n(\mathbb{R})$ eine, wie in Satz 2.38 gefordert, abgeschlossene Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$ ist. Es wird zu Beginn eine beliebige Gruppe M betrachtet, bevor bekannte Untergruppen und ihre Integraltransformationen kurz vorgestellt werden.

Als Erstes wird, wie im eindimensionalen Fall, das Haarmaß der Gruppe G berechnet. Der Homomorphismus δ ergibt sich für eine messbare Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit Satz 2.23:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{R}^n} &= \delta(A) \mu_{\mathbb{R}^n}(\sigma_A(N)) = \delta(A) \mu_{\mathbb{R}^n}(AN) \\ &\Rightarrow \delta(A) = |\det(A)|^{-1}.\end{aligned}$$

Die quasireguläre Darstellung kann jetzt konkret angegeben werden.

Im Folgenden sei $\pi : G \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ immer die quasireguläre Darstellung der Gruppe G . Diese wirkt für $f \in H$ und $(A, b) \in G$ durch

$$(\pi(A, b)f)(x) := |\det(A)|^{-\frac{1}{2}} f(A^{-1}(x - b)).$$

Definition 2.48 (mehrdimensionale Wavelettransformation)

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, genannt Wavelet, eine zulässige Funktion im Sinne der Definition 2.28. Die *Wavelettransformation* zu ψ und einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, induziert durch π , ist für $A \in M$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$W_\psi f(A, b) = \langle f, (\pi(A, b)\psi)(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi(A^{-1}(x - b))} \frac{dx}{\sqrt{|\det(A)|}}.$$

Die Wavelettransformation ist eine Isometrie zwischen $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $L_2(G, d\mu_G(A, b))$ mit den entsprechenden Haarmaßen. Betrachte dazu:

$$\begin{aligned}\|W_\psi f\|_{L_2(G)}^2 &= \int_H \int_{\mathbb{R}^n} |\langle f, \psi_{A,b} \rangle|^2 db d\mu(A) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \overline{\hat{\psi}(A^T \xi)} e^{2\pi i \xi^t A b} d\xi \right|^2 |\det(A)| db d\mu(A) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\hat{f} \overline{\hat{\psi}(A^T \cdot)} \right)^\vee(Ab) \right|^2 |\det(A)| db d\mu(A) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(A^T \xi)|^2 d\xi d\mu(A) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \Delta_\psi(\xi) d\xi = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Satz 2.49 (Zulässigkeitsbedingung, [50, 59])

Die Transformation aus Satz 2.36) ist genau eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, wenn für $A \in M$ und für alle $\xi \neq 0$

$$c_\psi = \int_M |\hat{\psi}(A^T \xi)|^2 d\mu_M(A) = 1$$

gilt.

Hieraus folgt, dass der inverse Operator der Wavelettransformation ein linksinverser Operator ist. Dies und die Auswirkungen im eindimensionalen Fall sind in [56] zu finden.

Es folgt ein kurzer Überblick über bekannte zulässige Gruppen und ihre Integraltransformationen. Nach [9] sind diese Gruppen, bis auf Konjugation, die einzigen, die Integraltransformationen induzieren.

2.4.1 Die Similitude-Gruppe $SIM(2) = (SO(2) \cdot \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^2$

Diese Gruppe wird beispielsweise in [2] und [29] besprochen und ist eine Einschränkung der mehrdimensionalen affinen Gruppe, so dass diese Gruppe zulässig wird. In den meisten Fällen wird diese Gruppe verwendet, wenn die Literatur, zum Beispiel [3, 54], die zweidimensionalen Wavelettransformationen behandelt.

Die natürliche zulässige Erweiterung der eindimensionalen affinen Gruppe auf den \mathbb{R}^2 mit Berücksichtigung von Rotationen und isotroper Skalierung ist gegeben durch die Gruppe $\mathbb{R}^2 \times (SO(2) \cdot \mathbb{R}_+)$ mit der Verknüpfung

$$(r_\alpha, s, b) (r_{\alpha'}, s', b') = (r_\alpha r_{\alpha'}, s s', b + s r_\alpha b')$$

Das linke Haarmaß ist als $\frac{1}{s^3} d\alpha ds db$ und das rechte Haarmaß ist als $\frac{1}{s} d\alpha ds db$ gegeben. Dazu ergibt sich die quasireguläre Darstellung π_q auf $L_2(\mathbb{R}^2)$ durch

$$(\pi_q(b, r_\alpha, s) f)(x) = |s|^{-1} f(s^{-1} r_\alpha^{-1}(x - b)).$$

Der Orbit ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ein Vektor ist zulässig, wenn er

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} d\xi < \infty$$

erfüllt. Hervorzuheben ist die folgende Untergruppe:

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Hier bildet jeder Orbit einen Kreis mit Radius $\|\gamma\|_2$ um den Ursprung. Dies ist eine Nullmenge und damit ist die Darstellung nicht quadratintegrierbar. Dieses Resultat ergibt Satz 2.3. Das selbe Resultat kann auch damit erreicht werden, dass die $SO(2)$ unimodular ist und damit keine sinnvolle Integraltransformation induziert.

2.4.2 Die Shearlet-Gruppe

Die vermutlich bekannteste unter den zulässigen Gruppen ist die Shearlet-Gruppe. Sie ist beispielsweise in [33, 42, 48, 49] zu finden. Hier wird die ganze Shearlet-Gruppe betrachtet. Eine ausführliche Beschreibung mit Zulässigkeitsbedingung, Haarmaßen und Gruppeneigenschaft der Shearlet-Gruppe ist in [42] zu finden.

Die Gruppe $M < Gl_n(\mathbb{R})$ für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist gegeben durch:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^c \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

Ein Vektor ist zulässig, wenn er

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi_1^2} d\xi$$

erfüllt.

Der Orbit der Gruppe für ein $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch:

$$\gamma M = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_1 a + \gamma_2 b \\ a^c \gamma_2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

Jetzt ergeben sich zwei Orbits.

Sei $\gamma_2 > 0$, dann gilt

$$\gamma M = \{(d_1, d_2) \mid d_2 > 0\}.$$

Sei $\gamma_2 < 0$, dann gilt

$$\gamma M = \{(d_1, d_2) \mid d_2 < 0\}.$$

Diese Darstellung zerfällt in zwei Teildarstellungen. Für beide Darstellungen kann die gleiche Zulässigkeitsbedingung angegeben werden.

Das linke Haarmaß berechnet sich als $d\mu_M(A) = |a|^3 dx dy$. Die Berechnung der Zulässigkeit findet sich zum Beispiel in [42] Proposition (2.10). Die Gruppe zum Fall $c = 0$ wird speziell in 2.47 betrachtet.

2.4.3 Die Diagonale-Gruppe

Sei die Gruppe $M < Gl_n(\mathbb{R})$ gegeben durch:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Der Orbit der Gruppe für ein $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ mit $\gamma_1 \neq 0 \neq \gamma_2$ ist gegeben durch:

$$\gamma M = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \gamma_1 \\ s_2 \gamma_2 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2.$$

Damit induziert die Darstellung eine quadratintegrierbare Integraltransformation nach Satz 2.43.

Das linke Haarmaß ist $d\mu_M(A) = |s_1 s_2|^{-1} ds_1 ds_2$. Die Zulässigkeit ist gegeben als

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}\left(\begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix}\right)|^2}{|\omega_1 \omega_2|} d\omega_1 d\omega_2 < \infty.$$

3 Die Wahl der passenden Struktur

Um in zwei Dimensionen Singularitäten von Distributionen zu lokalisieren, ist eine anisotrope Skalierung notwendig. Da die Wavelettransformation nur mit einer isotropen Skalierung und einer Drehung arbeitet, ist eine Beschreibung der Singularitäten von Distributionen mit ihr nicht möglich. Dies wird beispielsweise in [33] gezeigt. Eine Integraltransformation, die Singularitäten von Distributionen findet, ist die Shearlettransformation. Sie ist induziert durch die Shearlet-Gruppe, siehe Abschnitt 2.4.2. Dabei wird in der Praxis meistens $c = \frac{1}{2}$ gewählt. Sie arbeitet mit Scherungen und einer Skalierung mit dem Faktor a und \sqrt{a} . Die Scherung ist die Herausforderung in den Anwendungen. Bei einer Scherung des Bildes in Richtung der x -Achse wird das Bild immer breiter und niedriger. Da es nur aus endlich vielen Datenpunkten besteht, sind starke Scherungen ohne Artefakte nicht möglich. In zwei Dimensionen gibt es mehr 'Freiheitsgrade', also Möglichkeiten, das Wavelet zu verändern, als in einer Dimension. Es ist in zwei Dimensionen möglich, das Wavelet in beide Richtungen unterschiedlich zu skalieren, zu drehen und in beide Richtungen zu verschieben. Es sind alle möglichen Untergruppen der $Gl_n(\mathbb{R})$, die invertierbare Integraltransformationen induzieren, bekannt [7, 27]. Keine dieser Gruppen verknüpft anisotrope Skalierungen mit Drehungen in alle Richtungen. Ziel ist es nun, eine Struktur der $Gl_n(\mathbb{R})$ zu finden, die alle diese Möglichkeiten erlaubt und zusätzlich, trotz Verlust der Gruppenstruktur, eine invertierbare Integraltransformation induziert. Weiter soll diese Transformation Singularitäten über das Abklingverhalten der Koeffizienten lokalisieren können.

In dem Abschnitt 3.3.3 wird gezeigt, dass es eine Struktur gibt, die Singularitäten von Distributionen über das Abklingverhalten der Distributionen detektiert und trotzdem invertierbar ist. Die andere betrachtete Struktur wird in 3.3.5 betrachtet. Hier konnte gezeigt werden, dass sie entsprechende Voraussetzungen der dargestellten Theorie nicht erfüllt. Es wird vermutet, dass es dadurch auch nicht möglich ist, Singularitäten von beliebigen Distributionen zu finden.

3.1 Die Wahl der geeigneten Struktur

Die Skalierung einer Funktion in beide Richtungen wird durch die Multiplikation des Funktionsargumentes mit der Matrix $D_{s_1 s_2}$ erzielt und die Drehung der Funktion durch die Multiplikation mit R_α erreicht. Dabei sind $D_{s_1 s_2}$ und R_α Gruppenelemente der Gruppen

$$G_s := \left\{ D_{s_1 s_2} = \begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix} \mid s_1 s_2 \neq 0 \right\}$$

und

$$G_\alpha := \left\{ R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in (0, 2\pi] \right\}.$$

Die Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ führt zu den Verschiebungen im gesamten \mathbb{R}^2 . Leider ist das Produkt der Gruppen $G_s G_\alpha$ keine Gruppe. Dazu wird zum einen das Gruppenelement

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \cos \theta & -s_2 \sin \theta \\ s_1 \sin \theta & s_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

und zum anderen das folgende Gruppenelement

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \cos \alpha & -t_2 \sin \alpha \\ t_1 \sin \alpha & t_2 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

gewählt. Die Verknüpfung ergibt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} s_1 \cos \theta & s_2 \sin \theta \\ -s_1 \sin \theta & s_2 \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \cos \alpha & t_2 \sin \alpha \\ -t_1 \sin \alpha & t_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 t_1 \cos \theta \cos \alpha - s_2 t_1 \sin \theta \sin \alpha & s_1 t_2 \cos \theta \sin \alpha + s_2 t_2 \sin \theta \cos \alpha \\ -s_1 t_1 \sin \theta \cos \alpha - t_1 s_2 \cos \theta \sin \alpha & -s_1 t_2 \sin \theta \sin \alpha + s_2 t_2 \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um dieses Ergebnis wieder als Produkt von $G_\alpha G_s$ angeben zu können, müssen die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus anwendbar sein. Dies ist aber nur in Spezialfällen möglich. Damit ist das direkte Produkt von G_s und G_α keine Gruppe. Auch das direkte Produkt $G_s G_\alpha$ besitzt keine Gruppenstruktur. Auch ist $G_\alpha G_s \not\subseteq G_s G_\alpha$ und umgekehrt. Es handelt sich damit um zwei unterschiedliche Strukturen und die Theorie über quadratintegrierbare Gruppendarstellungen und ihren Integraltransformationen kann auf keine dieser Strukturen direkt angewendet werden.

Im folgenden Kapitel wird eine Möglichkeit dargestellt, trotz Verlust der Gruppenstruktur, eine Integraltransformation zu definieren. Der Ausweg ist ein Rückzug auf die maximal mögliche Gruppenstruktur und eine entsprechende Zusammensetzung mit einer Waveletfamilie. Die unterschiedlichen Möglichkeiten werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

Sei $M < Gl_n(\mathbb{R}^2)$ eine Matrixgruppe. Es wird auch in diesem Abschnitt das semidirekte Produkt der Gruppe $G = M \times \mathbb{R}^2$ mit der Verknüpfung

$$(A, b)(C, d) = (AC, Ad + b)$$

für $A, C \in M$ und $b, d \in \mathbb{R}^2$ betrachtet. Das Einselement ist $(I, 0)$ und das inverse Element $(A^{-1}, -A^{-1}b)$. Mit dieser Gruppe und der quasireguläre Darstellung wird, unter den in 2.2.3 vorgestellten Annahmen, eine invertierbare Integraltransformation induziert. Es ergibt sich das linksinvariante Haarmaß der Gruppe als $\mu_{G_l}(A, b) = |\det(A)|^{-2} dAdb$.

Bemerkung 3.1

Es folgt eine kurze Übersicht über die quasireguläre Darstellung und ihre Integraltransformation, die im Folgenden herangezogen wird.

- 1) Darstellung nach Satz 2.26:

$$(\pi_q(A, b)f)(x) = |\det(A)|^{-\frac{1}{2}} f(A^{-1}(x - b)). \quad (5)$$

- 2) induzierte Integraltransformation nach Satz 2.34:

$$W_\psi f(A, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi(A^{-1}(x - b))} \frac{1}{\sqrt{|\det(A)|}} dx.$$

- 3) Zulässigkeitsbedingung nach Satz 2.36:

$$c_\psi = \int_M |\hat{\psi}(A^{-T}\xi)|^2 d\mu_M(A).$$

- 4) Rücktransformation nach Satz 2.36:

$$f(\cdot) = \int_G W_\psi f(A, b) (\pi_q(A, b)\psi)(\cdot) d\mu_G. \quad (6)$$

Die Idee dieser Arbeit ist, trotz der nicht vorhandenen Gruppenstruktur eine Integraltransformation zu definieren. Diese soll zusätzlich auch invertierbar sein. Ein ähnlichen Ansatz wählen [37] gewählt. Es wird hier auf die in diesem Paper gewählten Begriffe zurückgegriffen.

Definition 3.2 (Affines System mit zusammengesetzte Dilatationen, [37])

Seien $A, B \subset Gl_n(\mathbb{R})$ zwei Gruppen, die verträglich hinsichtlich einer Operation \cdot sind. Weiter sei $M = A \cdot B$, aufgefasst als Teilmenge des $Gl_n(\mathbb{R})$. Damit beschreibt $G = M \times \mathbb{R}^n$ ein affines System mit zusammengesetzten Dilatationen. Im Folgenden wird auch von der AB -System bzw. AB -Wavelets gesprochen.

Hier werden die Gruppen A und B die Gruppen G_s und G_α sein. Die Reihenfolge wird dabei entscheidend sein.

Definition 3.3 (Die Systeme G_1 und G_2)

Sei G_1 ein $G_\alpha G_s$ -System und G_2 ein $G_s G_\alpha$ -System. Für $m \in G_1$ und geeignetes $s_3 \in \mathbb{R}$ werden die Matrizen der Menge folgendermaßen zerlegt:

$$\begin{aligned}
 m &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \in G_\alpha \qquad \qquad \in D_{s_1 s_1} \qquad \in D_{1 s_3} \\
 &\qquad \qquad \text{SIM (2)} \qquad \qquad \text{Zusatz: Anisotropie.}
 \end{aligned}$$

Für das System G_2 gilt für die Zerlegung für ein $m \in G_2$

$$\begin{aligned}
 m &= \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
 &\quad \in D_{s_1 s_2} \qquad \qquad \text{Zusatz Rotation.}
 \end{aligned}$$

3.1.1 Das G_1 -System

Für das G_1 -System können die quasireguläre Darstellung und die Integraltransformation konkret angegeben werden. Entsprechendes Einsetzen in Gleichung (5) - (6) führt folgender Bemerkung.

Bemerkung 3.4

Für das G_1 -System kann folgende Integraltransformation, in Anlehnung an 3.1, definiert werden.

- 1) Darstellung:

$$\pi_q(R_\alpha D_s, b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{|s_1 s_2|}} f(D_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b)).$$

2) Integraltransformation:

$$W_{\psi} f (R_{\alpha} D_s, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi(D_s^{-1} R_{\alpha}^{-1}(x-b))} \frac{1}{|\sqrt{|s_2 s_1|}|} dx.$$

3) Zulässigkeitsbedingung bzgl. der maximal möglichen Gruppenstruktur:

$$c_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi_1^2 + \xi_2^2|} d\xi.$$

4) Rücktransformation für ein festes s_2 :

$$f(\cdot) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} W_{\psi} f (R_{\alpha} D_{s_1, s_1} D_{1, s_2}, b) (\pi_q (R_{\alpha} D_{s_1, s_1} D_{1, s_2}, b) \psi) (\cdot) \frac{1}{s_1^4} db ds_1 d\alpha. \quad (7)$$

3.1.2 Das G_2 -System

Gleiches kann auch für das G_2 -System betrachtet werden.

Bemerkung 3.5

Die Diagonale Gruppe wird um Drehungen mit der entsprechenden Matrixmultiplikation mit R_{α} erweitert. Dies führt zum G_2 -System und damit zur folgenden Integraltransformation:

1) Darstellung:

$$\pi_q (D_s, b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{s_1 s_2}} f(D_{s_1 s_2}^{-1}(x-b)).$$

2) Integraltransformation:

$$W_{\psi} f (D_{s_1 s_2} R_{\alpha}, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi(R_{\alpha}^{-1} D_{s_1 s_2}^{-1}(x-b))} \frac{1}{|s_1|} dx \quad (8)$$

3) Zulässigkeitsbedingung:

$$c_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi_1 \xi_2|} d\xi.$$

4) Rücktransformation für ein festes α

$$f(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} W_{\psi_{\alpha}} f (D_{s_1 s_2}, b) (\pi_q (D_{s_1 s_2}, b) \psi_{\alpha}) (\cdot) \frac{1}{s_1^4} db ds_1 ds_2.$$

In dem folgenden Kapitel wird gezeigt, dass die Transformation, induziert durch das G_2 -System, definiert in (8), die Eigenschaften für zur Charakterisierung von Singularitäten nicht erfüllt. Die Bemerkung 3.28 geht darauf genauer ein. Im Gegensatz dazu erfüllt die Integraltransformation, induziert durch das G_1 -System, die entscheidenden Voraussetzungen und kann somit Singularitäten von Distributionen an Hand des Abklingverhaltens der Koeffizienten lokalisieren.

3.2 Integraltransformationen und Singularitäten

Es werden in der Definition 3.3 zwei mögliche Gruppen zur Definition einer Integraltransformation vorgestellt. Es bleibt zu klären, ob es eine Gruppe gibt, die 'besser' ist als die andere. 'Besser' meint in dieser Hinsicht, dass die induzierte Integraltransformation Singularität von Distribution durch ihr Abklingverhalten charakterisiert. Das theoretische Konzept wird in [21] vorgestellt. Hier wird die Frage der Singularitätendetektion für allgemeine Gruppen beantwortet. Dieses Paper wird im Folgenden vorgestellt und in einem weiteren Schritt wird die Situation der erweiterten Struktur im Zusammenhang mit den Ergebnissen betrachtet.

3.2.1 Schwartzraum und Distributionen

Zu Beginn werden der Schwartzraum und Distributionen kurz eingeführt. Dies richtet sich nach [25, 61]. Die weiteren Ausführungen zur Definition und Charakterisierung der Wellenfunktionsmenge richten sich nach [21, 33, 46].

Der Schwartzraum über \mathbb{R}^n wird wie in [25] eingeführt. Er ist definiert durch

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^\beta f \right)(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Beispiel 3.6 (Schwartzfunktion)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{(1-x^2)}}, & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

liegt in $S(\mathbb{R})$. Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar, da sie aus stetig differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt ist und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d^k f}{(dx)^k} = 0$$

für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Des Weiteren besitzt sie einen kompakten Träger.

Da die Fouriertransformation ein Automorphismus auf $S(\mathbb{R}^n)$ ist, werden im Folgenden immer Funktionen, die im Schwartzraum liegen, betrachtet. Dies ist keine echte Einschränkung, da $S(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Dieser Zusammenhang ist zum Beispiel in [61] zu finden.

Definition 3.7 (Raum der temperierten Distributionen)

Der Dualraum $S'(\mathbb{R}^n)$ zu $S(\mathbb{R}^n)$ wird der *Raum der temperierten Distributionen* genannt. In diesem liegen alle stetigen linearen Abbildungen $T : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \mapsto T[\phi]$. Diese Abbildung T ist stetig, wenn für $j \in \mathbb{N}$,

$$\phi_j \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \phi \text{ folgt } T[\phi_j] \rightarrow T[\phi].$$

Dabei konvergiert eine Funktionenfolge $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, bzgl. der Schwartz-Norm, aus $S(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Funktion $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, wenn es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\text{supp}(\phi_j) \subset$

K für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt und $\text{supp}(\phi) \subset K$ gilt. Weiter muss die Folge der Ableitungen

$$\frac{d^\alpha \phi_j}{d^\alpha x}(x) \text{ für } j \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig gegen } \frac{d^\alpha \phi}{d^\alpha x}(x)$$

konvergieren.

Es folgt eine Einführung in die Definitionen aus [21] und eine Sammlung der für dieses Problem wichtigen Sätze.

Definition 3.8 (Definitionen aus [21])

Es werden im Folgenden einige benötigte Begriffe definiert.

- 1) Sei nun $M \subset Gl_n(\mathbb{R})$ immer eine abgeschlossene Untergruppe der $Gl_n(\mathbb{R})$.
- 2) Mit $C(W) = \{r\xi' | \xi' \in W, r > 0\}$ ist ein Kegel, der durch $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ erzeugt wird, bezeichnet.
- 3) Mit $C(W, R) = C(W) \setminus \overline{B_R}(0)$ ist ein abgeschnittener Kegel, der durch W erzeugt wird, bezeichnet. Dabei ist $\overline{B_R}(0)$ eine abgeschlossene Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt 0.
- 4) Seien $V, O \subset \mathbb{R}^d$ offene Mengen und sei $\overline{V} \subset O$ eine kompakte Teilmenge von O , dann wird $V \Subset O$ geschrieben.

Die in 3.8 definierten Begriffe sind in Abbildung 4 schematisch dargestellt.

Definition 3.9 (Regulärer Punkt)

Sei u eine temperierte Distribution auf \mathbb{R}^2 . Ein Punkt $t_0 \in \mathbb{R}^2$ ist ein *regulärer Punkt*, wenn es eine Umgebung U_{t_0} von t_0 gibt, so dass $\varphi u \in C^\infty$, wobei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf U_{t_0} ist.

Definition 3.10 (Singulärer Träger)

Das Komplement der offenen Menge aller regulären Punkte einer temperierten Distribution u wird *singulärer Träger* genannt und mit $\text{sing supp}(u)$ bezeichnet.

Ein regulärer Punkt einer Funktion, interpretiert als Distribution, beschreibt damit eine Stelle, an der die Funktion in alle Richtungen glatt sein muss. Dieses Konzept ist nicht ausreichend. Es kann Punkte geben, in denen die Funktion nur in eine Richtung nicht glatt ist. Der Begriff des regulären Punktes und der singuläre Träger muss um eine Richtungsvariable erweitert werden, um unterschiedliches Verhalten von Funktionen beschreiben zu können. Dazu werden Punkte mit normierten Richtungen auf der Sphäre \mathbb{S}^{n-1} verknüpft und die Glattheit über das Abklingverhalten der Fouriertransformation beschrieben.

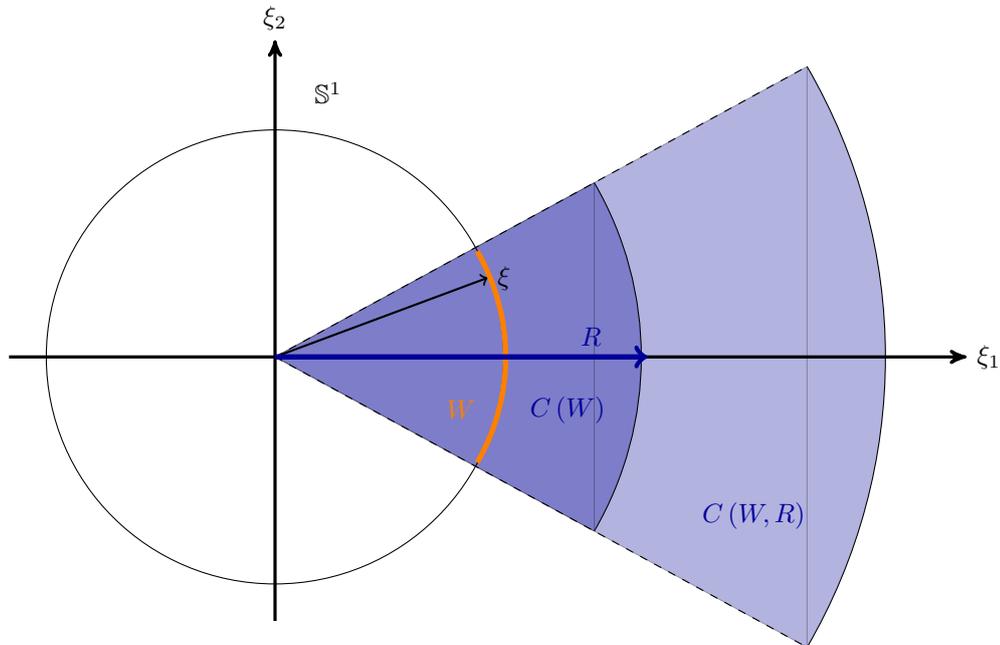


Abbildung 4: Darstellung der unterschiedlichen Kegel $C(W)$ und $C(W, R)$ aus Definition 3.8 für $n = 2$.

Definition 3.11 (Regulär gerichteter Punkt, [21])

Sei $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ eine temperierte Distribution. Ein Punkt $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ heißt *regulär gerichteter Punkt von u* , wenn es eine Funktion $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung um x gibt und eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ , so dass

$$|\widehat{\psi u}(\omega)| \leq C_N (1 + |\omega|)^{-N}$$

für alle $\omega \in C(W)$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Ein regulär gerichteter Punkt (x, ξ) ist damit, im Gegensatz zu einem regulären Punkt t_0 , ein Punkt einer Funktion, die an dieser Stelle x nur in eine Richtung glatt sein muss. Diese Richtung wird durch ξ beschrieben. An einem regulären Punkt muss die Funktion in alle Richtungen glatt sein. Dies ist in Abbildung 5 dargestellt.

Definition 3.12 (Wellenfront-Menge, [21])

Die Menge $WF(u) := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \mid (x, \xi) \text{ ist kein regulär gerichteter Punkt}\}$ heißt *Wellenfront Menge von u* .

Definition 3.13 (Delta-Distribution)

Die Funktion $\delta_t(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$\delta_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x = t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\hat{\delta}_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta_t(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-it\xi}$$

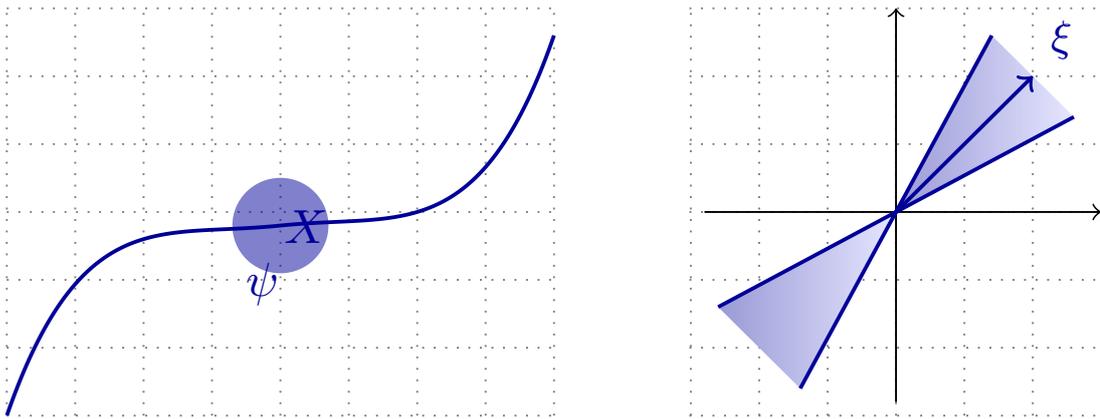


Abbildung 5: Anschauliche Darstellung der Definition eines regulär gerichteten Punktes. Dabei stellt die blaue Linie im linken Bild die Singularität der Distribution dar.

heißt *Delta-Distribution* an der Stelle t . Entstanden ist sie in der Physik als Ableitung der Sprungfunktion oder Heavyside function, siehe zum Beispiel [61]. Es gilt $\langle \delta_t, f \rangle = f(t)$.

Beispiel 3.14 (zu Wellenfront-Mengen, [33])

Es folgen zwei Beispiele zu Wellenfront-Mengen.

- 1) Die Wellenfront-Menge der Distribution δ_t ergibt sich als $WF(\delta_t) = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. Dies ist in Abbildung 6 skizziert.
- 2) Die Wellenfront-Menge der Distribution $\delta_{x_2=p+qx_1}(x)$ ergibt sich als

$$WF(\delta_{x_2=p+qx_1}) = \{(x_1, x_2) : x_2 = p + qx_1\} \times \left\{ \frac{-1}{q} \right\}.$$

Dies ist in Abbildung 7 zu erkennen.

Nun sind die wichtigsten Definitionen eingeführt, um Glattheit von Distributionen in mehreren Veränderlichen zu beschreiben. Im Weiteren werden die für diese Arbeit wichtigen Sätze aus [21] vorgestellt.

Dazu werden folgende Voraussetzungen an die Matrixgruppe gestellt.

Annahme 3.15 (Voraussetzungen an M , [21] Annahme 2.1)

Es existiert eine offene, M^T -invariante Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) Die duale Wirkung von M auf O ist eigentlich. Für alle kompakten Mengen $K \subset O$ ist auch die Menge

$$M_k := \{(A, \xi) \in M \times O \mid (A^T \xi, \xi) \in K \times K\}$$

kompakt.

- 2) Für jedes $\xi \in O$ gilt: $\mathbb{R}_+ \xi \subset O$, wobei $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$.

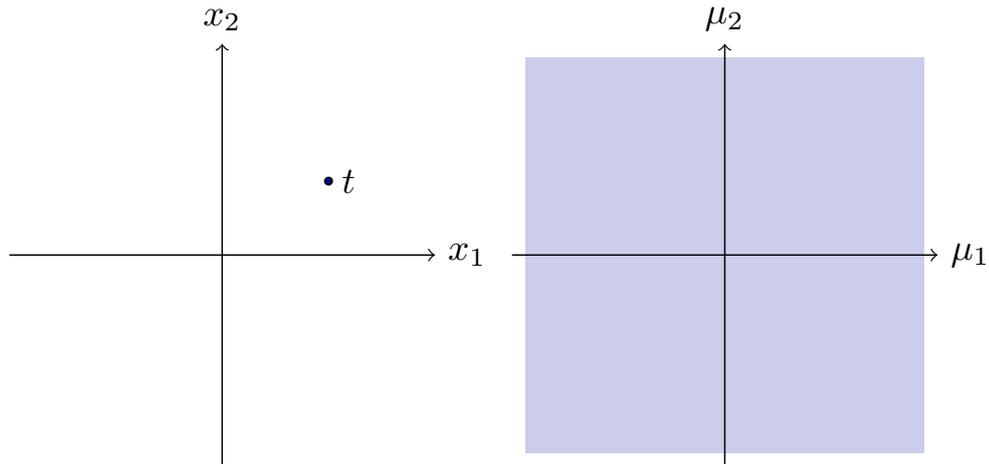


Abbildung 6: Skizze zum Beispiel 3.14 1) Links: Die Deltadistribution δ_t , aufgetragen im Zeitbereich. Sie hat einen singulären Punkt an der Stelle t . Dort ist die Funktion in keine Richtung glatt. Dieser Punkt liegt in der Wellenfront-Menge. Rechts: Die Fouriertransformation der Deltadistribution. Die Richtung der Singularität im Punkt t ist in der Wellenfront-Menge dadurch zu erkennen, dass die Fouriertransformation in keine Richtung schnell abklingt. Die Funktion ist an diesem Punkt in alle Richtungen nicht glatt.

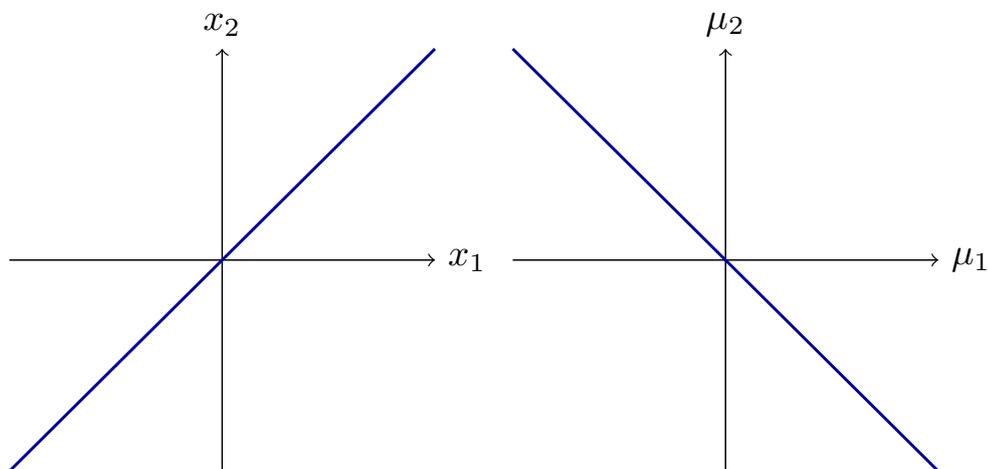


Abbildung 7: Skizze zum Beispiel 3.14 2) Links: Die Distribution $\delta_{x_2=p+qx_1}$. Deutlich ist ihre Singularität zu erkennen. Die Distribution ist in diesen Punkten in die Richtung senkrecht zu Geraden nicht glatt. Diese Punkte werden in der Wellenfront-Menge liegen. Rechts: Die Richtungen, in der die Fouriertransformation nicht schnell abklingt, sind genau die, die senkrecht auf der Geraden stehen. Daher sind diese Punkte in der Wellenfront-Menge enthalten.

- 3) Es existiert eine Schwartzfunktion ψ , so dass $\hat{\psi}$ kompakten Träger in O hat. Zusätzlich erfüllt ψ die Zulässigkeitsbedingung

$$\forall \xi \in O : \int_M \left| \hat{\psi}(A^T \xi) \right|^2 dA = 1.$$

- 4) Sei $\emptyset \neq V \subseteq O$ und $\xi \in O$. Die Menge

$$M_{\xi, V} := \{A \in M \mid A^T \xi \in V\}$$

ist eine relativ kompakte, offene Menge. Weiter gibt es für jedes $\emptyset \neq V \subseteq O$ Konstanten $C, \alpha \geq 0$, so dass

$$\forall \xi \in O : \mu_M(M_{\xi, V}) \leq C(1 + |\xi|)^\alpha$$

gilt.

Wenn π eine quadratintegrierbare Darstellung ist, dann sind die oben genannten Voraussetzungen erfüllt (Siehe [21] Satz 2.2). Bei den Strukturen G_1 und G_2 wird die maximal mögliche Gruppe mit der quasiregulären Darstellung für die Integraltransformation gewählt. Diese ist eine quadratintegrierbare Darstellung und erfüllt damit die Voraussetzungen.

Definition 3.16 (Die Mengen K_i und K_o , [21], Definition 2.3)

Sei $\emptyset \neq W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ offen und $W \subset O$. Weiter sei $\emptyset \neq V \subseteq O$ und $R > 0$. Damit ist die *innere Menge* K_i definiert durch

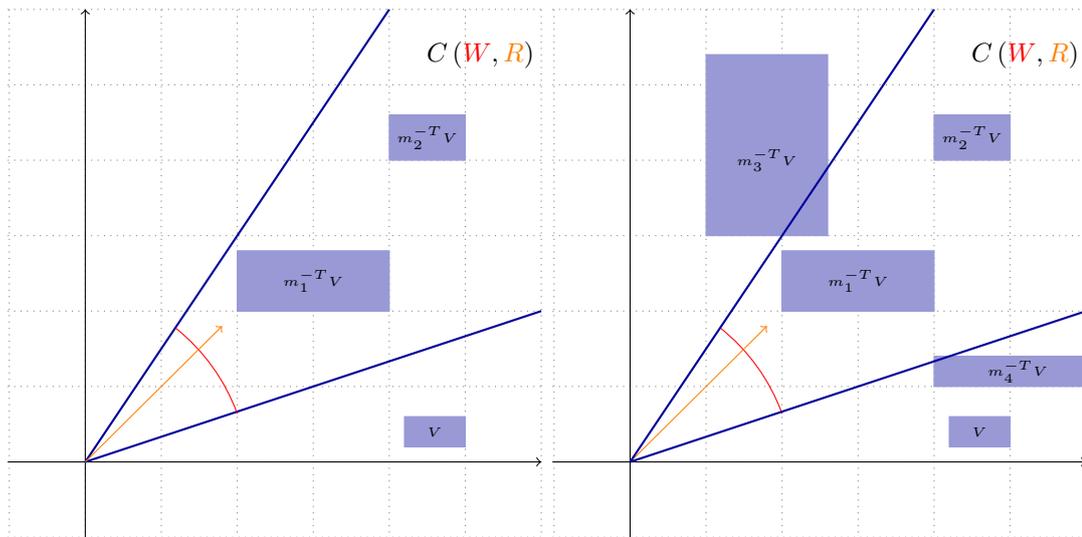
$$K_i(W, V, R) := \{A \in M \mid A^{-T}V \subset C(W, R)\}$$

und die *äußere Menge* K_o definiert durch

$$K_o(W, V, R) := \{A \in M \mid A^{-T}V \cap C(W, R) \neq \emptyset\}.$$

Eine Vorstellung für K_i und K_o gibt Abbildung 8.

Die Menge K_i stellt für kleine W fest, ob die Multiplikation mit $A \in M$ den Träger V so verändert, dass er im Kegel $C(W, R)$ liegt. Da dieser Kegel beliebig klein werden kann, müssen die Träger immer schmaler werden. Da es damit meistens zu schmalen und langen Trägern kommt, erklärt sich der Begriff 'needlelike structure' aus der Shearletliteratur. Diese Art von Trägern werden benötigt, um auf der Fourierseite das Abklingverhalten in unterschiedliche Richtungen zu untersuchen. Damit sind dann Aussagen über die Glattheit der Distribution in diese Richtungen möglich. Die Menge K_o hingegen enthält all jene Träger, deren Schnitt mit dem Kegel nicht leer ist. Diese Träger haben einen Einfluss auf die Rücktransformation. Der Zusammenhang zwischen diesen Trägern ist entscheidend zur Detektion von Singularitäten.


 Abbildung 8: Beispielelemente der Mengen K_i (links) und K_o (rechts).

3.2.2 Zur Charakterisierung regulär gerichteter Punkte

Es werden die mikrolokale Zulässigkeit und die Kegel-Approximationseigenschaft definiert.

Definition 3.17 (V -mikrolokale Zulässigkeit, [21] Definition 2.5)

Sei $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ und $\emptyset \neq V \in O$. Die duale Wirkung ist V -mikrolokal zulässig in Richtung ξ , wenn es eine Umgebung $W_0 \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap O$ um ξ und ein $R_0 > 0$ gibt, so dass die folgenden Punkte erfüllt sind:

- 1) Es gibt Konstanten $\alpha_1 > 0$ und $C > 0$, so dass für alle $A \in K_o(W_0, V, R_0)$

$$\|A^{-1}\| \leq C\|A\|^{-\alpha_1}$$

gilt.

- 2) Es existiert ein α_2 , so dass

$$\int_{K_o(W_0, V, R_0)} \|A\|^{\alpha_2} dA < \infty.$$

Die duale Wirkung heißt *mikrolokal zulässig in Richtung ξ* , wenn sie V -mikrolokal zulässig in Richtung ξ für ein $\emptyset \neq V \in O$ ist. Sie heißt *global V -mikrolokal zulässig*, wenn es ein $\emptyset \neq V \in O$ gibt, so dass die duale Wirkung V -mikrolokal zulässig in Richtung ξ für alle $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Wenn die Matrixgruppe M nur einen offenen Orbit $O = M^T \xi_0$ hat, genügt es, die V -mikrolokale Zulässigkeit in eine Richtung zu untersuchen (s. [21] Lemma (2.7)), da die anderen Richtungen damit V -mikrolokal zulässig sind.

Wenn eine Gruppe die mikrolokale Zulässigkeit erfüllt, kann damit noch keine vollständige Charakterisierung getroffen werden. Dies ist im folgenden Satz zu sehen.

Satz 3.18 ([21] Satz 3.5)

Die duale Wirkung sei V -mikrolokal zulässig in Richtung $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Es sei weiter $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (O \cap \mathbb{S}^{n-1})$.

- 1) Sei (x, ξ) ein regulär gerichteter Punkt von u . Dann gibt es eine Umgebung U von x , ein $R > 0$ und eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ , so dass für alle zulässigen $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset V$ gilt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C_k > 0$, so dass für alle Punkte $y \in U$ und $A \in K_i(W, V, R)$

$$|W_\psi u(y, A)| \leq C_k \|A\|^k$$

gilt.

- 2) Sei $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ zulässig und $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset V$. Sei U eine Umgebung von x , $R > 0$ und weiter gibt es eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ , so dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_k > 0$ gibt, so dass für alle Punkte $y \in U$ und $A \in K_o(W, V, R)$

$$|W_\psi u(y, A)| < C_k \|A\|^k$$

gilt, so ist (x, ξ) ein regulär gerichteter Punkt.

Um eine genaue Charakterisierung von regulär gerichteten Punkten von Distributionen anzugeben, muss die Gruppe eine weitere Bedingung erfüllen. Es geht dabei um die Möglichkeit, dass $K_o(W', V, R') \subset K_i(W, V, R)$ ist. Damit kann eine scharfe Aussage erzielt werden.

Definition 3.19 (Die V -Kegel-Approximationseigenschaft, [21] Definition 4.1)

Sei $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

- Sei $V = (V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Teilmengen mit $\emptyset \neq V_k \Subset O$ und $V_{j+1} \subset V_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Die duale Wirkung hat die *schwache V -Kegel-Approximationseigenschaft an ξ* , wenn für alle Umgebungen $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ und alle $R > 0$ ein $j \in \mathbb{N}$, $R' > 0$ und eine Umgebung $W' \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ existiert, so dass $K_o(W', V_j, R') \subset K_i(W, V_j, R)$. Die duale Wirkung hat die *globale schwache V -Kegel-Approximationseigenschaft*, wenn es die schwache V -Kegel-Approximationseigenschaft für alle $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ erfüllt.
- Sei $\emptyset \neq V_0 \Subset O$. Die duale Wirkung hat die *V_0 -Kegel-Approximationseigenschaft an ξ* , wenn es für alle Umgebungen $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ von ξ und alle $R > 0$ ein $R' > 0$ und eine Umgebung $W' \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ gibt, so dass $K_o(W', V_0, R') \subset K_i(W, V_0, R)$ gilt. Die duale Wirkung hat die *globale V_0 -Kegel-Approximationseigenschaft*, wenn es die V_0 -Kegel-Approximationseigenschaft an ξ für alle $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ besitzt.

Das Ziel ist die Charakterisierung von regulär gerichteten Punkten durch das Abklingverhalten der Waveletkoeffizienten, die in den Mengen K_o bzw. K_i enthalten sind. Das folgende Lemma zeigt, dass die V_0 -Kegel-Approximationseigenschaft nur von Gruppen mit anisotroper Struktur erfüllt werden kann.

Lemma 3.20 ([21] Lemma (4.4))

Sei M eine Matrixgruppe und $O = M^T \xi_0$ ihr einziger offener Orbit. Sei weiter $\emptyset \neq V_0 \in O$. Wenn $M \cap (0, \infty) I$ nicht trivial ist und $n \geq 2$ gilt, dann besitzt die duale Wirkung die V_0 -Kegel-Approximationseigenschaft an ξ für kein $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

Für die Gruppen $SIM(2)$ und D_s folgt: Die Voraussetzungen, dass es nur einen einzigen offenen Orbit gibt, ist für beide Fälle erfüllt. Nun wird die Gruppe $SIM(2)$ betrachtet:

$$SIM(2) \cap (0, \infty) Id = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} s_1 \neq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi) \end{matrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k \in (0, \infty) \right\} \neq I.$$

Für die zweite Gruppe D_s gilt:

$$D_s \cap (0, \infty) Id = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \mid \prod_{j=1}^2 s_j \neq 0 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k \in (0, \infty) \right\} \neq I.$$

Also kann für beide Gruppen nur die schwache Kegel-Approximationseigenschaft gezeigt werden. Die Erweiterung ist in beiden Fällen notwendig, um Singularitäten mit nur einer zulässigen Funktion zu finden.

3.2.3 Regulär gerichtete Punkte und das Abklingverhalten der Transformation

Wenn eine Matrixgruppe M mikrolokal zulässig ist und die Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt, dann zeigt der folgende Satz den Zusammenhang zwischen Abklingverhalten in kleinen Skalen der Integraltransformation und regulär gerichteten Punkten einer Distribution.

Satz 3.21 ([21] Satz 4.6)

Sei $M < Gl_n(\mathbb{R})$ eine Matrix Gruppe, die die Annahmen aus 3.15 erfüllt und $u \in S'(\mathbb{R})$.

- 1) Die duale Wirkung von M erfülle die schwache V -Kegel-Approximationseigenschaft an $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ für die Familie $V = (V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\emptyset \neq V_k \in O$ und $V_{k+1} \subset V_k$. Weiter sei die duale Wirkung V_{k_0} -mikrolokal zulässig in Richtung ξ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Gibt es zusätzlich eine Familie $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von zulässigen Schwartzfunktionen, für die $\text{supp}(\hat{\psi}_k) \subset V_k$ gilt, dann sind die folgenden Aussagen für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:

1. Der Punkt (x, ξ) ist ein regulär gerichteter Punkt von u .
2. Es gibt eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ um ξ , ein $R > 0$, eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und ein $k_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_1$ die folgende Ungleichung gilt: Es existiert für k eine Konstante $C_k > 0$, so dass für alle $y \in U$ und für alle $A \in K_o(W, V_k, R)$

$$|W_{\psi_k} u(y, A)| \leq C_k \|A\|^k$$

gilt.

3. Es gibt ein $k \geq k_0$, eine Umgebung U von x , ein $R > 0$ und eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ von ξ , so dass für k eine Konstante $C_k > 0$ existiert, so dass für alle $y \in U$ und für alle $A \in K_o(W, V_k, R)$

$$|W_{\psi_k} u(y, A)| \leq C_k \|A\|^k$$

gilt.

- 2) Sei die duale Wirkung V -mikrolokal zulässig in Richtung $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$ und habe die V -Kegel-Approximationseigenschaft an ξ für ein $\emptyset \neq V \Subset O$. Dann gilt für ein zulässiges $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset V$ und allen $x \in \mathbb{R}^n$ die folgende Äquivalenz: Für alle $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist (x, ξ) ein regulär gerichteter Punkt von u , genau dann, wenn eine Umgebung U von x , ein $R > 0$ und eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ existiert, so dass es für alle $K \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_K > 0$ gibt, so dass für alle $y \in U$ und für alle $A \in K_o(W, V, R)$

$$|W_{\psi} u(y, A)| \leq C_K \|A\|^K$$

gilt.

Folgerung 3.22

Wenn die duale Wirkung global V mikrolokal zulässig ist und die globale V -Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt, dann ist es möglich, mit nur einem Wavelet alle regulär gerichteten Punkte der Distribution u charakterisieren zu können.

3.3 AB -Systeme und die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft

Es ist bekannt, dass für die Gruppen $SIM(2)$ und D_s nur die schwachen Aussagen gezeigt werden können. Damit ist es ihnen nur möglich, mit Hilfe von einer Familie von zulässigen Funktionen Singularitäten zu beschreiben. Im Folgenden wird ein Konzept vorgestellt, wie entsprechende AB -Systeme in die vorgestellte Theorie passen. Im Anschluss werden für die konkreten Systeme G_1 und G_2 diese Eigenschaften nachgewiesen oder widerlegt.

Definition 3.23 (Die gemischte V -Kegel-Approximationseigenschaft für MT -Systeme)

Sei $\xi \in O \cup \mathbb{S}^{n-1}$. Weiter seien $M < Gl_n(\mathbb{R})$ und $T < Gl_n(\mathbb{R})$ zwei Matrixgruppen. Sei $V \in O$, $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset T$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset M$ zwei Folgen, so dass

$$(A_{j+1}^{-T} B_{j+1}^{-T} V) \subset (A_j^{-T} B_j^{-T} V).$$

Wenn $(A_j^{-T} B_j^{-T} V)_{j \in \mathbb{N}}$ die schwache Kegel-Approximationseigenschaft bezüglich der dualen Wirkung von M an ξ erfüllt, erfüllt die Gruppe M , erweitert mit der Gruppe T , die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft.

Satz 3.24

Seien $M, T < Gl_n(\mathbb{R})$ zwei Matrixgruppen, wobei M zusätzlich die Voraussetzungen 3.15 erfüllt. Habe die Gruppe M , erweitert mit der Gruppe T , die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft an einem $\xi \in O \cup \mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich $V \in O$ und den Folgen $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset T$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset M$. Weiter sei die duale Wirkung von M V -mikrolokal zulässig in Richtung ξ für zulässiges $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset V$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die folgende Äquivalenz:

Für alle $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist (x, ξ) ein regulär gerichteter Punkt von u , genau dann, wenn eine Umgebung U von x , ein $R > 0$ und eine Umgebung $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ existieren, so dass für alle $K \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_K > 0$ und ein $j \in \mathbb{N}$ existiert, für alle $y \in U$ und für alle $A_1 \in K_o(W, V, R)$

$$|W_{\pi(0, B_j) \psi} u(y, A_1 A_j)| \leq C_K \|A_1\|^K$$

gilt.

Lemma 3.25

Sei $M < Gl_n(\mathbb{R})$ ein Matrixgruppe, die die Voraussetzungen 3.15 erfüllt. Seien $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Umgebungen, so dass $U_j \subset V_j$ und $U_{j+1} \subset U_j$ sowie $V_{j+1} \subset V_j$ gilt. Gilt die schwache Kegel-Approximationseigenschaft der dualen Wirkung von M für $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ an einem $\xi \in O \cap \mathbb{S}^{n-1}$, dann gilt die schwache Kegel-Approximationseigenschaft der dualen Wirkung von M auch für $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ an ξ .

Beweis. Sei $W \subset \mathbb{S}^{n-1}$ eine Umgebung von ξ und sei $R > 0$. Dann gilt

$$K_o(W, V_j, R) \supset K_o(W, U_j, R). \quad (9)$$

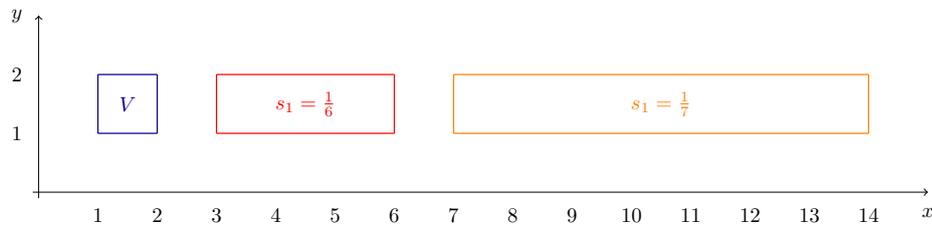


Abbildung 9: Wirkung der Skalierung in x -Achsen Richtung auf den Träger V . Der Träger wird, je kleiner der Skalierungsparameter ist, immer länger und immer weiter hinausgeschoben.

Wenn $U_j \neq \emptyset$ gilt, folgt $m^{-T}V_j \cup C(W, R) \supset m^{-T}U_j \cup C(W, R)$ und daraus folgt obige Gleichung.

Des Weiteren gilt

$$K_i(W, U_j, R) \supset K_i(W, V_j, R) \tag{10}$$

da $m^{-T}U_j \subset m^{-T}V_j \in C(W, R)$ wegen $U_j \subset V_j$ gilt.

Erfüllt nun die duale Wirkung der Gruppe M mit der Familie $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die schwache Kegel-Approximationseigenschaft an ξ , dann gilt für geeignetes $W' \subset \mathbb{S}^{n-1}$ und $R' > 0$, mit (9) und (10)

$$K_o(W', U_n, R') \subset K_o(W', V_n, R') \subset K_i(W, V_n, R) \subset K_i(W, U_n, R).$$

□

3.3.1 Beispiele zur Wirkung des G_1 -Systems

Um eine Vorstellung für die Wirkung des G_1 -Systems zu entwickeln, werden in den folgenden Bildern beispielhaft unterschiedliche Fälle der Wirkung des Systems im $\hat{\mathbb{R}}^2$ betrachtet.

In Abbildung (9) wird als erstes die Skalierung mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Es ist deutlich zu sehen, dass der Träger in die x -Achsen Richtung länger wird. Analoges Verhalten ist bei der Skalierung mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix}$$

zu beobachten. Dies ist in Abbildung 10 dargestellt. Werden diese beiden Skalierungen gemeinsam betrachtet, ergibt sich ein Verhalten, wie in Abbildung 11 skizziert. Dabei wird hier s_1 klein, wohingegen s_2 groß wird. Der Träger wird lang und schmal. Dieses Verhalten, gekoppelt mit der Rotation, ist in Abbildung 12 dargestellt. Es fallen die schmalen und langen Träger auf. Diese zeigen in jede Richtung. Dies kann ein Hinweis auf eine Charakterisierung von beliebigen Singularitäten sein.

3.3 AB-Systeme und die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft

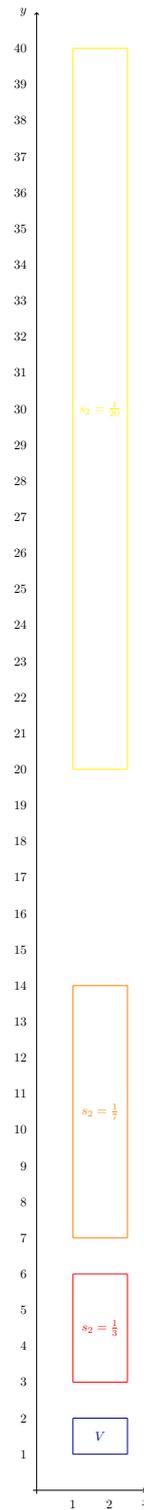


Abbildung 10: Wirkung der Skalierung mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix}$. Der Träger wird auch hier immer schmaler und immer weiter hinausgeschoben.

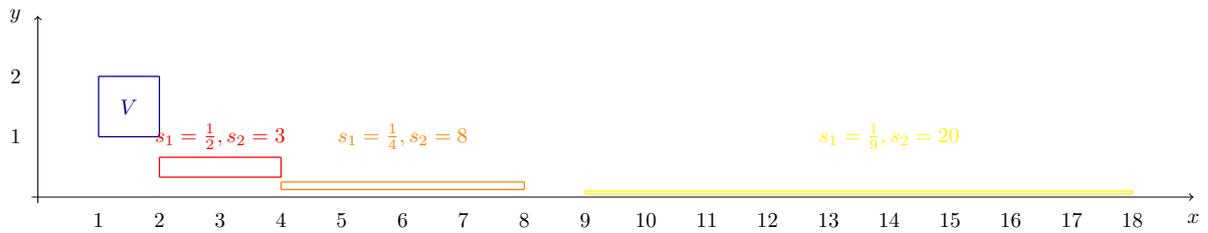


Abbildung 11: Wirkung der Skalierung in x und y -Achsenrichtung. Der Träger wird immer weiter vom Ursprung herausgeschoben und zusätzlich schmiegt er sich an die x -Achse an.

3.3.2 Das G_1 -System erfüllt die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft

In [21] wird gezeigt, dass die SIM (2) nur die schwache Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt. An dieser Stelle wird die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft des G_1 -Systems mit entsprechender Erweiterung nachgewiesen. Diese Erweiterung simuliert die Waveletfamilie. Im Folgenden meint also $A \in M$, dass $A \in SO_2 \times D_s$ liegt. Zeige: Das G_1 -System erfüllt die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft.

Die Winkel werden immer modulo 2π angegeben. Die isotrope Skalierung wirkt bei einem Punkt in Polarkoordinaten auf den Radius durch Multiplikation.

Dazu bezeichne

$$Z_\alpha = \{(r, \beta) \mid r > 0, 2\pi - \alpha < \beta < \alpha\}$$

Zur Trägerwahl: Wähle für die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft die Folgen $A_j = I_2$ und $B_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j} \end{pmatrix}$ und den Träger

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (1, 2) \times \mathbb{R} \mid \frac{y}{x} \in (-1, 1) \right\}.$$

Damit gilt $B_{j+1}U \subset B_jU$ für $j \in \mathbb{N}$. In Polarkoordinaten kann die anisotrope Skalierung nicht durch eine Matrixmultiplikation realisiert werden. Daher wird im Folgenden der an die Folge $(W_j = B_jU)_{j \in \mathbb{N}}$ angelehnte Träger

$$V_j = \left\{ (r, \alpha) \in Z_{\frac{\pi}{j}} \mid 1 < r < 3 \right\}$$

gewählt. Beide Mengen sind in Abbildung 14 dargestellt.

Zeige: $W_j \subset V_j$.

Beweis. Dazu sei $(x, y)^T \in W_j$. Nun folgt die Umrechnung in Polarkoordinaten. Es ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es gilt $x \in (1, 2)$ und $-\frac{x}{j} < y < \frac{x}{j}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + y^2} < r < \sqrt{4 + y^2}, \\ \text{und } -\frac{2}{j} < y < \frac{2}{j} \end{aligned} \quad (11)$$

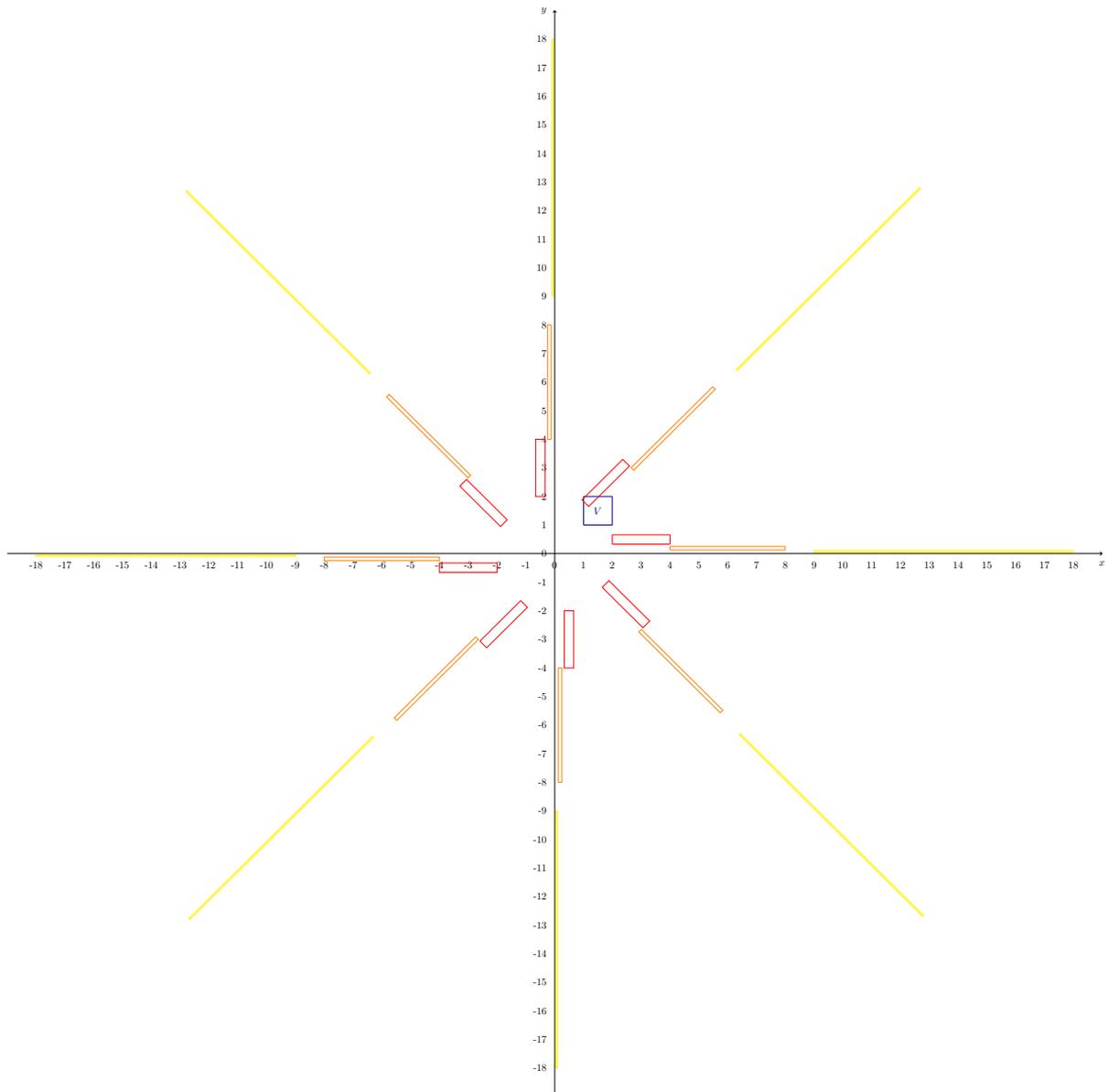


Abbildung 12: Wirkung der Drehung mit einer Drehmatrix und der Skalierung mit einer Matrix, die anisotrop skaliert. Es ist zu sehen, dass der skalierte Träger nun um den Ursprung gedreht wird. Dabei wird jeweils um $\frac{\pi}{4}$ weiter rotiert. Die Skalierungen entsprechen denen aus Abbildung 11.

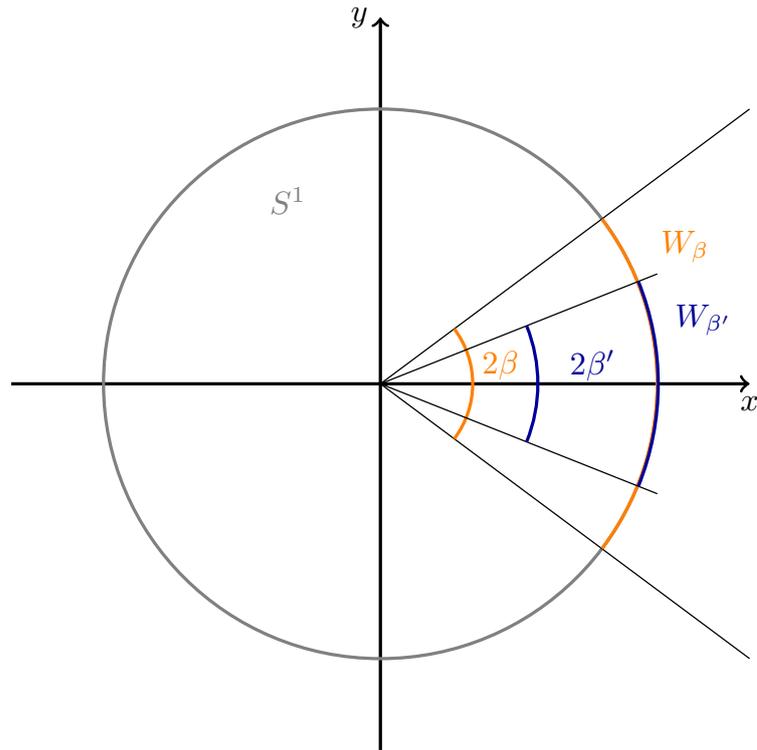


Abbildung 13: Skizze zur Wahl der Kegel aus dem Beweis zur gemischten Kegel-Approximationseigenschaft.

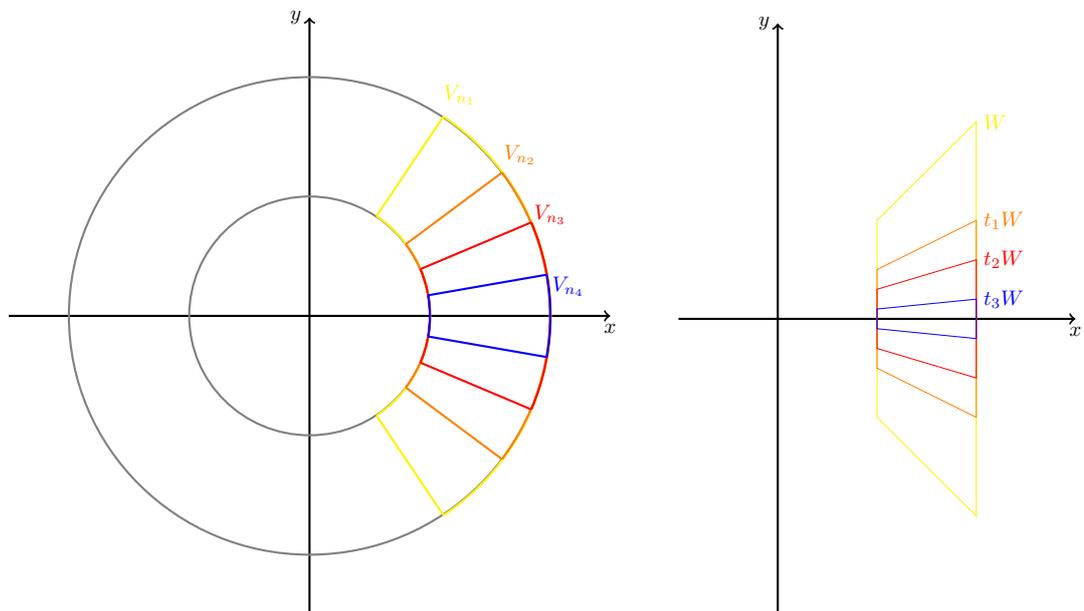


Abbildung 14: Skizze der Träger V_n und W_n .

$$\Rightarrow 1 < r < 2 \frac{\sqrt{j^2 + 1}}{j}. \quad (12)$$

Für $j \in \mathbb{N}_{>1}$ ist $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{j^2 + 1}}{j} = 1$ und $0 < \frac{\sqrt{j^2 + 1}}{j} < \frac{3}{2}$. Somit folgt mit (12) die Abschätzung $1 < r < 3$.

Es bleibt der Winkel zu betrachten. Dafür gilt $y = r \sin(\alpha)$. Eingesetzt in (11) folgt mit $1 < r < 3$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{j} < r \sin(\alpha) < \frac{2}{j} \\ \rightarrow -\frac{2}{j} < \sin(\alpha) < \frac{6}{j} \\ \Rightarrow \arcsin\left(-\frac{2}{j}\right) < \alpha < \arcsin\left(\frac{6}{j}\right). \end{aligned}$$

Da die Arcussinusfunktion punktsymmetrisch und streng monoton steigend ist, genügt es,

$$\alpha < \arcsin\left(\frac{6}{j}\right) < \frac{7}{j}$$

zu zeigen. Dies ist für genügend große $j \in \mathbb{N}$ erfüllt, da $\lim_{j \rightarrow \infty} j \arcsin\left(\frac{6}{j}\right) = 6$. \square

Es kann auf Grund von Lemma (1.6) die schwache Kegel-Approximationseigenschaft für V_j gezeigt werden.

Sei $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, $\beta' + \frac{7}{j} < \frac{1}{2}\beta$, $R > 0$ und $j \in \mathbb{N}$. Weiter seien

$$\begin{aligned} V_j &= \left\{ (r, \alpha) \in Z_{\frac{7}{j}} \mid 1 < r < 3 \right\}, \\ W_\beta &= \mathbb{S}^1 \cap Z_\beta. \\ W_{\beta'} &= \mathbb{S}^1 \cap Z_{\beta'} \text{ und} \\ 2R' &> R. \end{aligned} \quad (13)$$

Im Folgenden bezeichnet A_{α, s_1} die Matrix, die den Träger isotrop mit $s_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ skaliert und um den Winkel α rotiert.

Sei $A_{\alpha, s_1} \in K_o(W_{\beta'}, V_j, R')$. Dann gibt es ein $\xi_d = (r, \omega) \in V_j$, so dass

$$(s_1^{-1}r, \alpha + \omega) = A_{\alpha, s_1}^{-T} \xi_d \in C(W_{\beta'}, R').$$

Es gilt für ξ_d , da es in V_j liegt $1 < r < 3$ und $-\frac{7}{j} < \omega < \frac{7}{j}$. Damit folgt

$$-2\beta' < \alpha + \omega < 2\beta' \Rightarrow -2\beta' - \frac{7}{j} < \alpha < 2\beta' + \frac{7}{j} \quad (14)$$

$$\text{und } s_1^{-1}r > R' \Rightarrow s_1^{-1} > \frac{1}{3}R'. \quad (15)$$

Sei nun $\tilde{\xi} = (\tilde{r}, \gamma) \in V_j$ beliebig mit $-\frac{7}{j} < \gamma < \frac{7}{j}$ und $1 < \tilde{r} < 3$. Es ist $A_{\alpha, s_1}^{-T} \tilde{\xi} = (s_1^{-1}\tilde{r}, \gamma + \alpha)$. Für $A_{\alpha, s_1}^{-T} \tilde{\xi}$ folgt mit (14), (13) und (15)

$$\begin{aligned} s_1^{-1}\tilde{r} > \frac{1}{2}R'\tilde{r} \geq \frac{1}{2}R' > R \text{ und} \\ -\beta < -2\left(\beta' + \frac{7}{j}\right) < -\frac{7}{j} + \alpha < \gamma + \alpha < \frac{7}{j} + \alpha < 2\left(\beta' + \frac{7}{j}\right) < \beta. \end{aligned}$$

Also liegt $\tilde{\xi} \in C(W_\beta, R)$ und damit ist $K_o(W_{\beta'}, V_n, R') \subset K_i(W_\beta, V_n, R)$.

3.3.3 Das G_1 -System ist V -mikrolokal zulässig

Hier wird der Argumentation von [21] für die Gruppe $D_s \times \mathbb{R}^2$ gefolgt. Betrachte

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &= \left\| \begin{pmatrix} s_1^{-1} & \\ & s_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{\min_{i=1,2}(s_i)}. \end{aligned}$$

Wenn das System die V_0 Kegel-Approximationseigenschaft hat, dann genügt es, die mikrolokale Zulässigkeit für $A \in K_i(W, V, R)$ zu zeigen. Außerdem genügt es, die Eigenschaft für ein beliebiges ξ zu zeigen, da die Gruppe, wie zum Beispiel in [21], Lemma 6.1 gezeigt wird, nur einen offenen Orbit hat.

Wähle nun:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \xi \in S^1 \mid i = 1, 2 : \frac{1}{2} < \sqrt{2}\xi_i < 2 \right\} \subset (0, \infty)^2 \\ V &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1, 2 : \frac{1}{2} < |\xi| < 2 \text{ und } \frac{\xi}{|\xi|} \in W \right\} \subset (0, \infty)^2 \\ v_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \left(\text{da } |v_0| = 1 \text{ und } \frac{1}{2} < 1 < 2, \text{ also } v_0 \in W \right) \text{ und} \\ R &> 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$A^{-T}v_0 \subset A^{-T}V \subset C(W, R) \subset (0, \infty)^2.$$

So sind die Diagonaleinträge von A für dieses $K_i(V, W, R)$ positiv. Weiter ist $\frac{A^{-T}v_0}{|A^{-T}v_0|} \in W$, da $A \in K_i(W, V, R)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{A^{-T}v_0}{|A^{-T}v_0|} &\in W \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &< \sqrt{2} \frac{1}{|A^{-T}v_0|} s_i^{-1} < 2 \quad \text{für } i = 1, 2 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2|A^{-T}v_0|} &< s_i < \frac{2\sqrt{2}}{|A^{-T}v_0|} \quad \text{für } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Dementsprechend gilt für die Einträge in A :

$$\begin{aligned} \max_{i=1,2} s_i &< \frac{2\sqrt{2}}{|A^{-T}v_0|} \\ \min_{i=1,2} s_i &> \frac{\sqrt{2}}{2|A^{-T}v_0|}. \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$\frac{\max_{i=1,2} s_i}{\min_{i=1,2} s_i} < 4.$$

Nun gilt für alle $A \in K_i(W, V, R)$:

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{i=1,2} s_i} < \frac{4}{\max_{i=1,2} s_i} = 4\|A\|^{-1}.$$

Damit ist das G_1 -System mikrolokal zulässig. Gemeinsam mit der gemischten Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt das G_1 -System mit entsprechender Erweiterung die Voraussetzungen von Satz 3.24 und somit können Singularitäten im Sinne von temperierten Distributionen durch die induzierte Integraltransformation beschrieben werden.

3.3.4 Beispiele zur Wirkung von G_2

In den Beispielen in [20] wird gezeigt, dass die diagonale Gruppe nur die schwache Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt. Im Folgenden wird gezeigt, dass dagegen die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft nicht erfüllt wird. Dazu geben die Abbildungen 15 - 19 einen Überblick über die Wirkung der Struktur. In Abbildung 15 wird ein Träger V um den Ursprung durch eine Drehmatrix gedreht. Wird nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vorgeschaltet, werden die gedrehten Träger in Richtung der x -Achse skaliert. Analoge Wirkung hat die Skalierung in Richtung der y -Achse. Dies zeigt Abbildung 17. Die Abbildung 18 zeigt Drehungen kombiniert mit unterschiedlichen Skalierungspärchen. Es scheint nicht möglich zu sein, den Träger in eine beliebige Nicht-Achsen-Richtung lang und schmal werden zu lassen. Dies legt den Verdacht nahe, dass die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft nicht gezeigt werden kann.

3.3.5 G_2 erfüllt die gemischte Kegel-Approximationseigenschaft nicht

Satz 3.26

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$, $W_\varepsilon = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^1 \mid 1 - \varepsilon < \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| < 1 + \varepsilon \right\}$ und $A_{s_1 s_2} \in D_{s_1 s_2}$. Es liegen $A_{s_1 s_2}^{-1} a$ und $A_{s_1 s_2}^{-1} b$ in $C(W_\varepsilon)$, genau dann wenn

$$\left| \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \right| < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} < \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^2 \left| \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \right| \quad (16)$$

gilt.

Beweis: Es gilt $A_{s_1 s_2}^{-1} a \in C(W_\varepsilon)$, genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \left| \frac{a_2 s_2^{-1}}{a_1 s_1^{-1}} \right| < 1 + \varepsilon \\ \Leftrightarrow (1 - \varepsilon) \left| \frac{a_1}{a_2} \right| &< \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < (1 + \varepsilon) \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \\ \Leftrightarrow \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right| &< \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \quad (18)$$

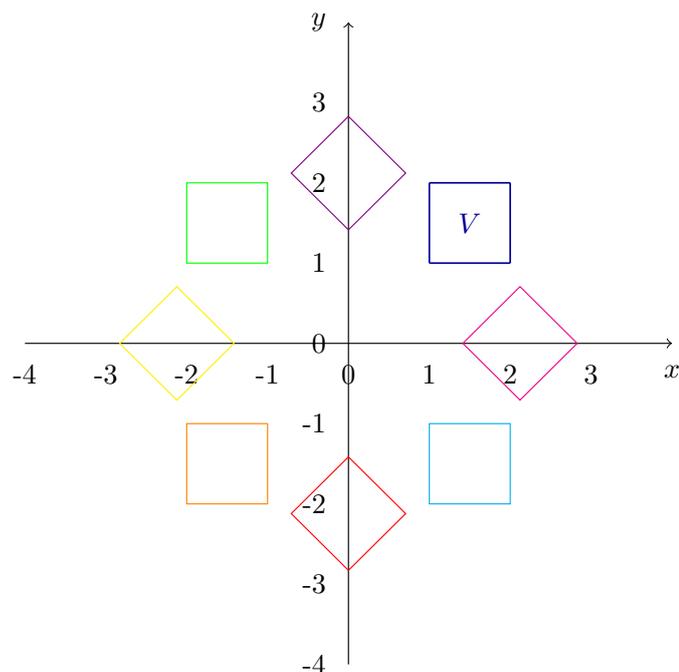


Abbildung 15: Wirkung der Drehung durch eine Drehmatrix auf einen Träger. Die Drehung um den Ursprung ist deutlich zu sehen. Es wird jeweils um $\frac{\pi}{4}$ weitergedreht.

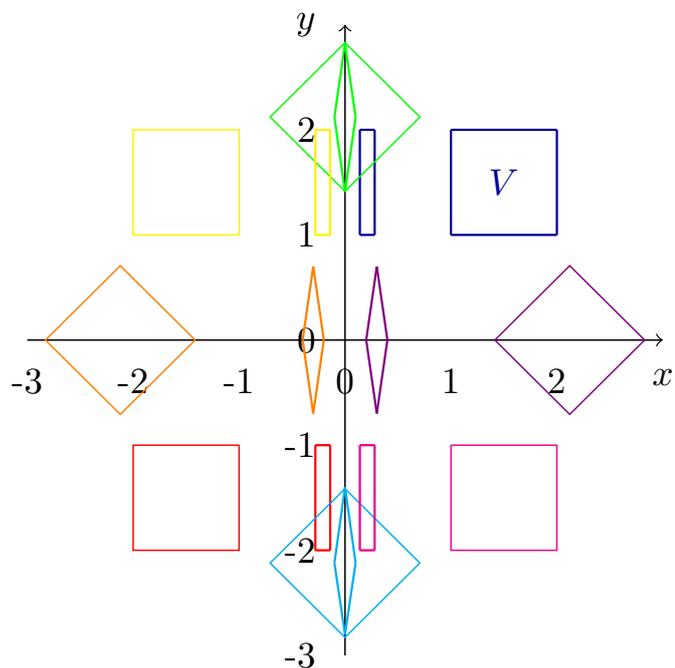


Abbildung 16: Wirkung einer Drehmatrix und der Skalierung in Richtung der x -Achse. Es ist zu sehen, dass der Träger immer weiter nach außen geschoben und entsprechend skaliert wird. Dabei wird jeweils um $\frac{\pi}{4}$ weiter rotiert und $s_1 = 7$ betrachtet.

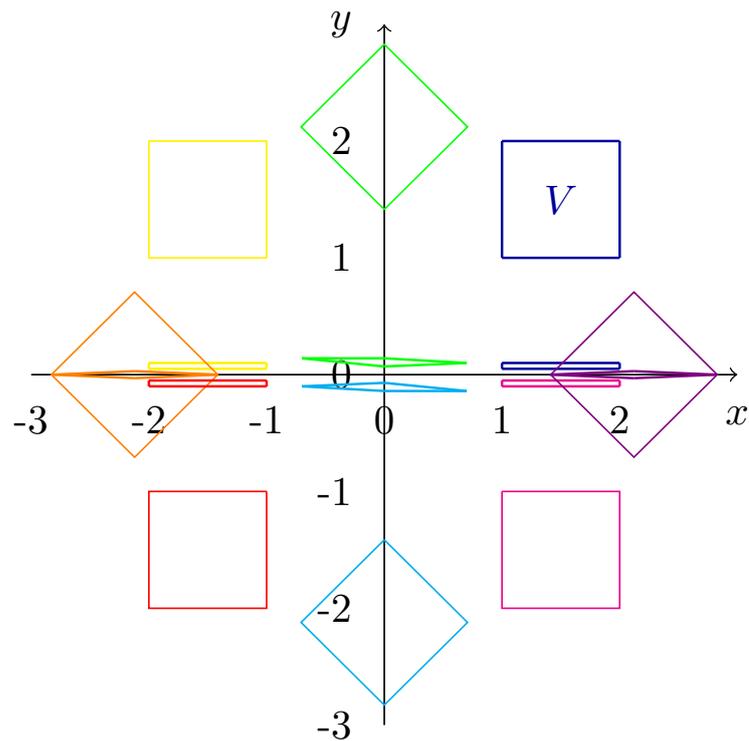


Abbildung 17: Wirkung der Drehmatrix und der Skalierung in y -Achsenrichtung. Es ist zu sehen, dass der Träger durch die Skalierung immer weiter in Richtung der x -Achse geschoben wird. Dabei wird jeweils um $\frac{\pi}{4}$ weiter rotiert und $s_2 = 20$ betrachtet.

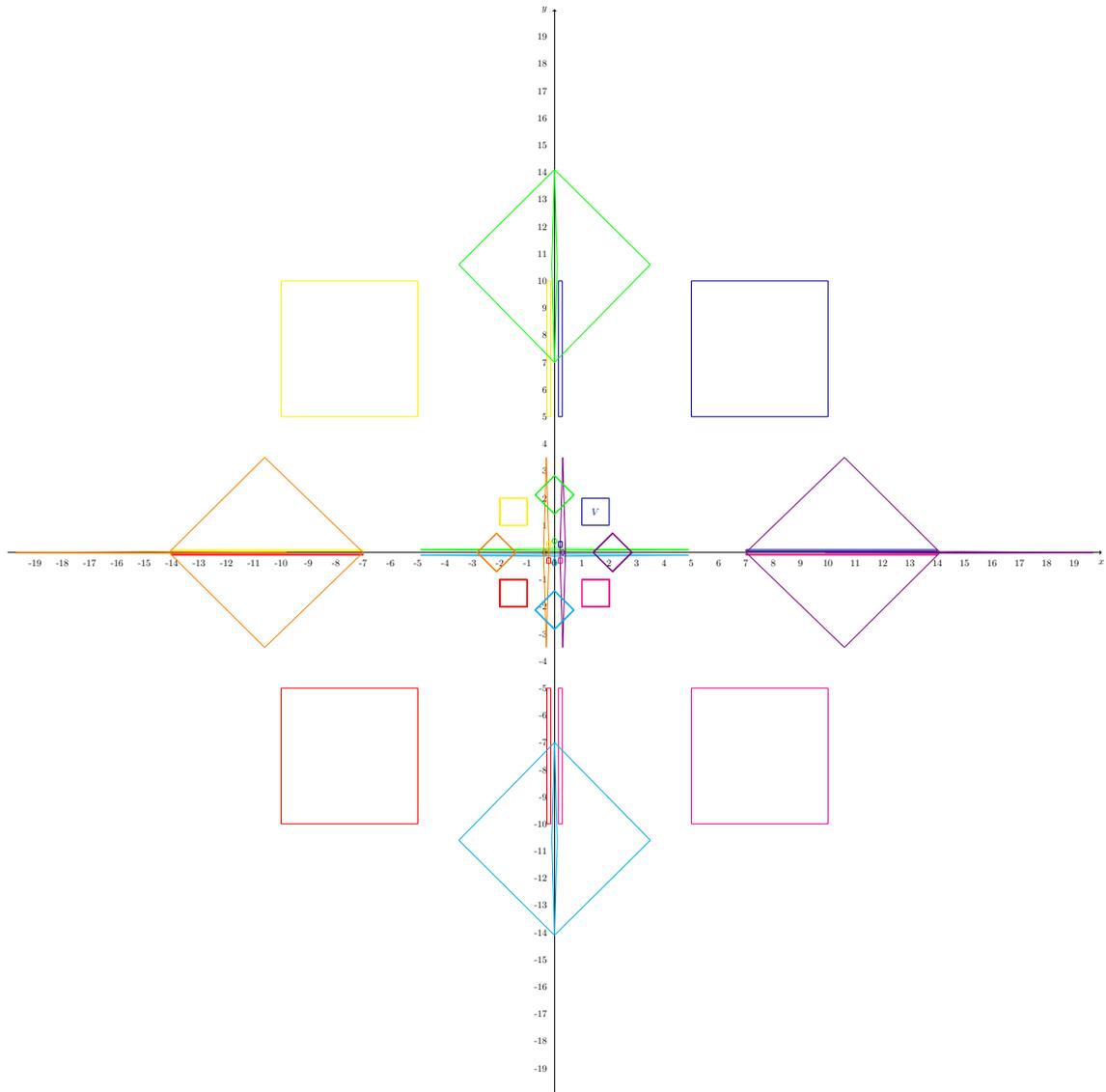


Abbildung 18: Wirkung der Drehungsmatrix und der Skalierung durch die Diagonalmatrix mit den Einträgen s_1 und s_2 . Dabei wird jeweils um $\frac{\pi}{4}$ weitergedreht und die Skalierungspärchen $(\frac{1}{7}, 20)$, $(7, \frac{1}{7})$, $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(5, 5)$ betrachtet.

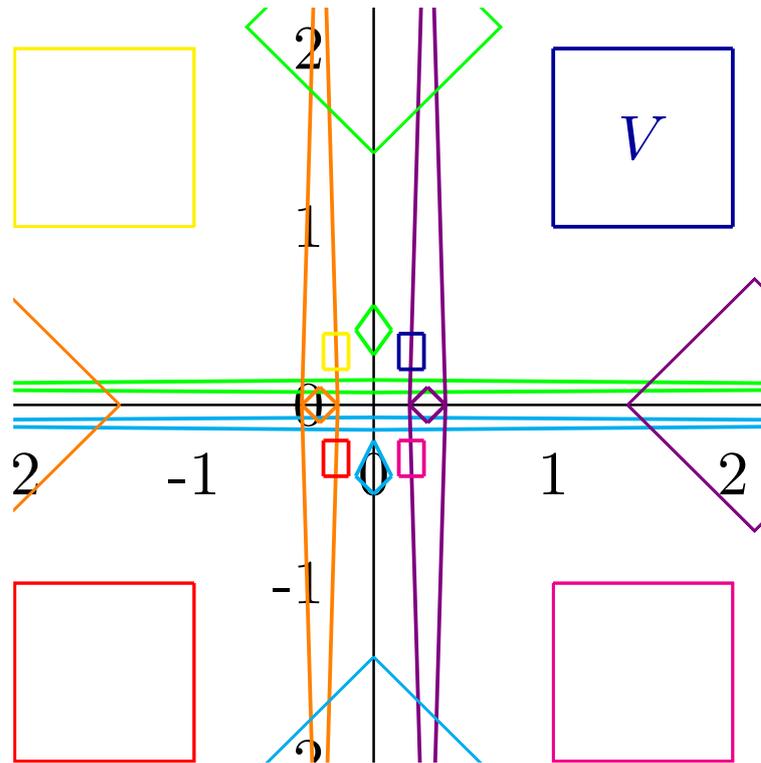


Abbildung 19: Zoom in den Ursprung von Abbildung 18.

gilt. Ebenso gilt $A_{s_1 s_2}^{-1} b \in C(W_\varepsilon)$, genau dann, wenn

$$\frac{(1-\varepsilon)|b_1|}{(1+\varepsilon)|b_2|} < \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \left| \frac{b_1}{b_2} \right| \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{b_1}{b_2} \right| < \frac{1}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \frac{(1+\varepsilon)|b_1|}{(1-\varepsilon)|b_2|} \quad (20)$$

gilt. Wird nun die erste Ungleichung von (17) mit der letzten Ungleichung von (19) verknüpft, folgt

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \left| \frac{b_1}{b_2} \right|.$$

Die linke Ungleichung von (20) zusammen mit der rechten Ungleichung von (18) ergibt

$$\left| \frac{b_1}{b_2} \right| < \frac{1}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|.$$

Werden diese beiden Ungleichungsketten zusammengesetzt, folgt

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \left| \frac{b_1}{b_2} \right| < \frac{1}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|. \quad (21)$$

Daraus folgt

$$\left| \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \right| < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \left| \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \right|.$$

Dies ist gleichbedeutend mit (16), also dem ersten Teil der Aussage.

Für die Rückrichtung wird die Ungleichungskette (21) betrachtet. Es gibt ein Pärchen s_1, s_2 , so dass die Punkte a und b in W_ε liegen. Damit folgt aus den mittleren Ungleichungen

$$\left| \frac{b_1}{b_2} \right| < \frac{1}{(1-\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \left| \frac{b_1}{b_2} \right|.$$

Weiter ergeben die erste und letzte Ungleichung aus (21)

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left| \frac{s_1}{s_2} \right| < \left| \frac{a_1}{a_2} \right|.$$

Die Wahl von s_1 und s_2 hängt von den Punkten a und b ab. Für $\frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2}$ wähle

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-\varepsilon)a_1}{a_2} + \frac{(1+\varepsilon)b_1}{b_2} \right).$$

Für den anderen Fall $\frac{b_1}{b_2} > \frac{a_1}{a_2}$ wähle zum Beispiel

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-\varepsilon)b_1}{b_2} + \frac{(1+\varepsilon)a_1}{a_2} \right).$$

□

Satz 3.27

Sei

$$V_{\delta,\kappa} = \text{conv} \left\{ (1-\kappa) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix} \right), (1+\kappa) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix} \right) \right\},$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ und $\varepsilon < \frac{2\delta}{1+\delta^2}$ für $0 < \kappa < 1$ und $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\left\{ A_{s_1 s_2} \left| A_{s_1 s_2}^{-T} (R_\alpha V_{\delta,\kappa}) \subset C(W_\varepsilon) \right. \right\} = \emptyset.$$

Damit ist $K_i(W_\varepsilon, R_\alpha V_{\delta,\kappa}, R) = \emptyset$ für alle $R > 0$ und es liegt keine Kegel-Approximationseigenschaft vor.

Beweis: Betrachte die Punkte

$$\begin{aligned} A_{\delta,\kappa} &= (1-\kappa) \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \text{ und } B_{\delta,\kappa} = (1+\kappa) \begin{pmatrix} 1-\delta \\ 1+\delta \end{pmatrix} \\ \text{mit } R_\alpha A_{\delta,\kappa} &= (1-\kappa) \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(1+\delta) - \sin(\alpha)(1-\delta) \\ \sin(\alpha)(1+\delta) + \cos(\alpha)(1-\delta) \end{pmatrix} \\ \text{und } R_\alpha B_{\delta,\kappa} &= (1+\kappa) \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(1-\delta) - \sin(\alpha)(1+\delta) \\ \sin(\alpha)(1-\delta) + \cos(\alpha)(1+\delta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Punkte sollten nun beide zugleich in $C(W_\varepsilon)$ liegen. Dann muss nach Satz 3.26 gelten:

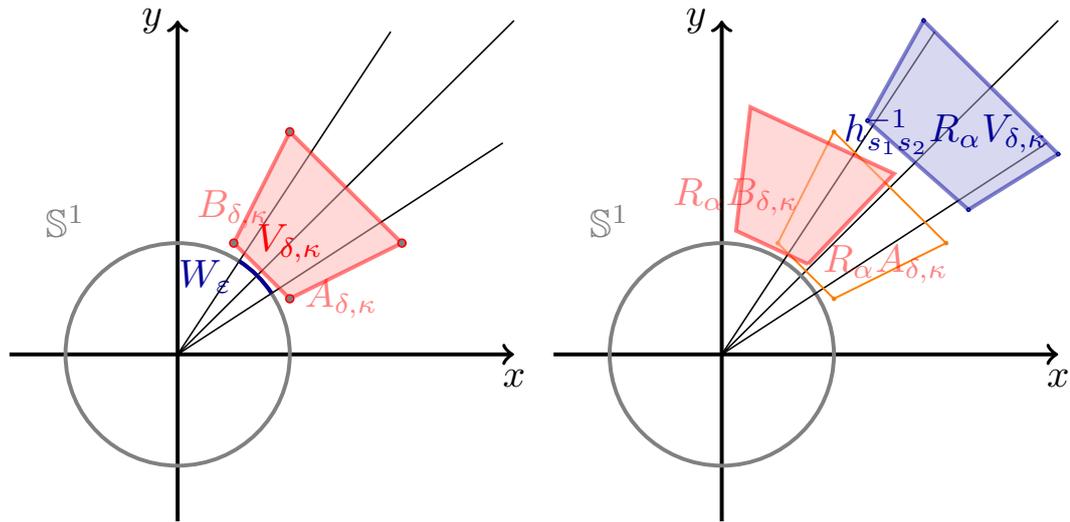


Abbildung 20: Skizze des Trägers V_δ aus Satz 3.27 und seinen rotierten und skalierten Versionen.

$$\frac{(1 - \kappa)(1 + \kappa)(\cos(\alpha)(1 + \delta) - \sin(\alpha)(1 - \delta))}{(1 - \kappa)(1 + \kappa)(\sin(\alpha)(1 + \delta) + \cos(\alpha)(1 - \delta))} \times \frac{(\sin(\alpha)(1 - \delta) + \cos(\alpha)(1 + \delta))}{(\cos(\alpha)(1 - \delta) - \sin(\alpha)(1 + \delta))} < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (22)$$

Die Punkte $R_\alpha A_\delta$ und $R_\alpha B_\delta$ können nur im ersten Quadranten liegen. Ansonsten ist es mit positiver Skalierung nicht möglich, den Kegel zu erreichen. Daher können die Beträge vernachlässigt werden.

Das Ausmultiplizieren der Gleichung (22) führt zu dem Widerspruch

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2(\alpha)(1 + \delta)^2 - \sin^2(\alpha)(1 - \delta)^2}{\cos^2(\alpha)(1 - \delta)^2 - \sin^2(\alpha)(1 + \delta)^2} < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \\ \Leftrightarrow & (1 + \delta)^1 - (1 - \delta)^1 < \varepsilon (\cos^2(\alpha)((1 + \delta)^2 + (1 - \delta)^2) \\ & \quad - \sin^2(\alpha)((1 - \delta)^2 + (1 + \delta)^2)) \\ \Leftrightarrow & \frac{2\delta}{1 + \delta^2} \frac{1}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.28

Es wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass das G_2 -System keine Kegel-Approximationseigenschaft erfüllt. Dabei ist nicht klar ob diese Eigenschaft notwendig für die Beschreibung von Singularitäten von temperierten Distributionen ist. Jedoch legen die praktischen Ergebnisse und die Intuition nahe, dass es sich um eine notwendige Bedingung handelt.

4 Roulettransformation

In diesem Kapitel wird eine neue Transformation vorgestellt. Diese ist an die zweidimensionale Wavelettransformation und Shearlettransformation angelehnt. Damit sind die Transformationen Vorbilder, die aus semidirekten Produkten einer abgeschlossenen Untergruppe $M < Gl_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit der additiven Gruppe \mathbb{R}^n hervorgehen. Wenn eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ die Zulässigkeitsbedingung, siehe Satz 2.49, erfüllt, dann ist die durch die Gruppe induzierte Integraltransformation, definiert durch

$$(T_\psi f)(A, b) = \frac{1}{\sqrt{|\det(A)|}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi(A^{-1}(x-b))} dx,$$

ein Isomorphismus zwischen $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $L_2(M \times \mathbb{R}^n)$ mit den entsprechenden Haarmaßen, siehe 2.1.

Es stehen bei der Konstruktion der neuen Transformation zwei unterschiedliche affine Systeme zur Auswahl. Diese sind in Kapitel 3.1.2 vorgestellt. Es wird in Kapitel 3.3.3 gezeigt, dass dieses System zu einer Integraltransformation führt, die Singularitäten von Distributionen detektieren kann. Dagegen kann über die Transformation, gebildet wie in 3.3.5, keine Aussage über die Lokalisierung Singularitäten allgemeiner Distributionen getroffen werden.

Die hier vorgestellte Transformation arbeitet, wie in Kapitel 3 beschrieben, mit einem System aus Rotationen und anisotroper Skalierung. Der Vorteil der Rotationen gegenüber den Scherungen ist die gleichbleibende Größe des Bildes. Die Erweiterung der SIM (2) durch Hinzufügen einer anisotropen Skalierung ermöglicht die Beschreibung von Singularitäten. Dies wird in Satz 3.3.1 gezeigt. Daraus geht aber die konkrete Abklingrate an den Singularitäten unterschiedlichen Typs nicht hervor. Die konkreten Abklingraten der Transformation für Punkt- sowie Liniensingularitäten werden in Satz 4.16 und 4.17 angegeben. Das Kapitel startet mit Eigenschaften der neuen Transformation.

4.1 Roulets (rotational anisotropic wavelet transform)

Wie in Kapitel 3.1.2 begründet, werden bei der hier eingeführten Transformation die beiden abgeschlossenen Untergruppen

$$G_\alpha = \left\{ R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \text{ und}$$

$$G_s = \left\{ A_s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

der $Gl_2(\mathbb{R})$ betrachtet. Es wird die Struktur G_1 zu Grunde gelegt. Also arbeitet die Transformation mit der Wirkung der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist die betrachtete Gruppe die SIM (2) mit anisotroper Erweiterung.

Bemerkung 4.1

Das linke Haarmaß auf SIM (2) ist durch $d\mu_{\text{SIM}(2)}(s_1 R_\alpha) = |s_1|^{-2} ds_1 d\alpha db_1 db_2$ gegeben.

Die Berechnung der Zulässigkeit findet sich in Abschnitt 2.4.1. Da die multiplikative Verknüpfung der beiden Gruppen G_s und G_α keine Gruppe bildet, wird mit der maximalen Gruppenstruktur, der SIM (2), gearbeitet. Damit erklärt sich die Zulässigkeitsbedingung.

Definition 4.2 (Roulet)

Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ heißt *Roulet*, wenn

$$\int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2)|^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2 < \infty.$$

Es sind die Funktionen, die für die SIM (2) zulässig sind.

Definition 4.3 (Roulettransformation)

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ein Roulet, $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ und $s \in \mathbb{R}_{>0}^2$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Die *Roulettransformation* ist definiert durch

$$R_\psi f(\alpha, s, b) = \langle f, \pi_q(\alpha, s, b) \psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

mit

$$\pi_q(\alpha, s, b) \psi(x) = \psi_{\alpha, s, b}(x) = |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \psi(A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b)).$$

Der Vektor s beschreibt die (an)isotrope Skalierung, der Winkel α die Drehung und der Vektor b die Verschiebung des Roulets ψ der Roulettransformation. Die Wirkung von unterschiedlichen Skalierungen ist schematisch in Abbildung 21 dargestellt.

Satz 4.4 (Fouriertransformation eines Roulets)

Die Fouriertransformation eines Roulet $\psi_{\alpha, s, b} \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$\hat{\psi}_{\alpha, s, b}(x) = |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\alpha, s, b}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\alpha, s, b}(x) e^{-2\pi i \xi^T x} dx = |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b)) e^{-2\pi i \xi^T x} dx \\ &= |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \frac{1}{|\det(A_s^{-1})|} \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi) \\ &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi). \end{aligned}$$

□

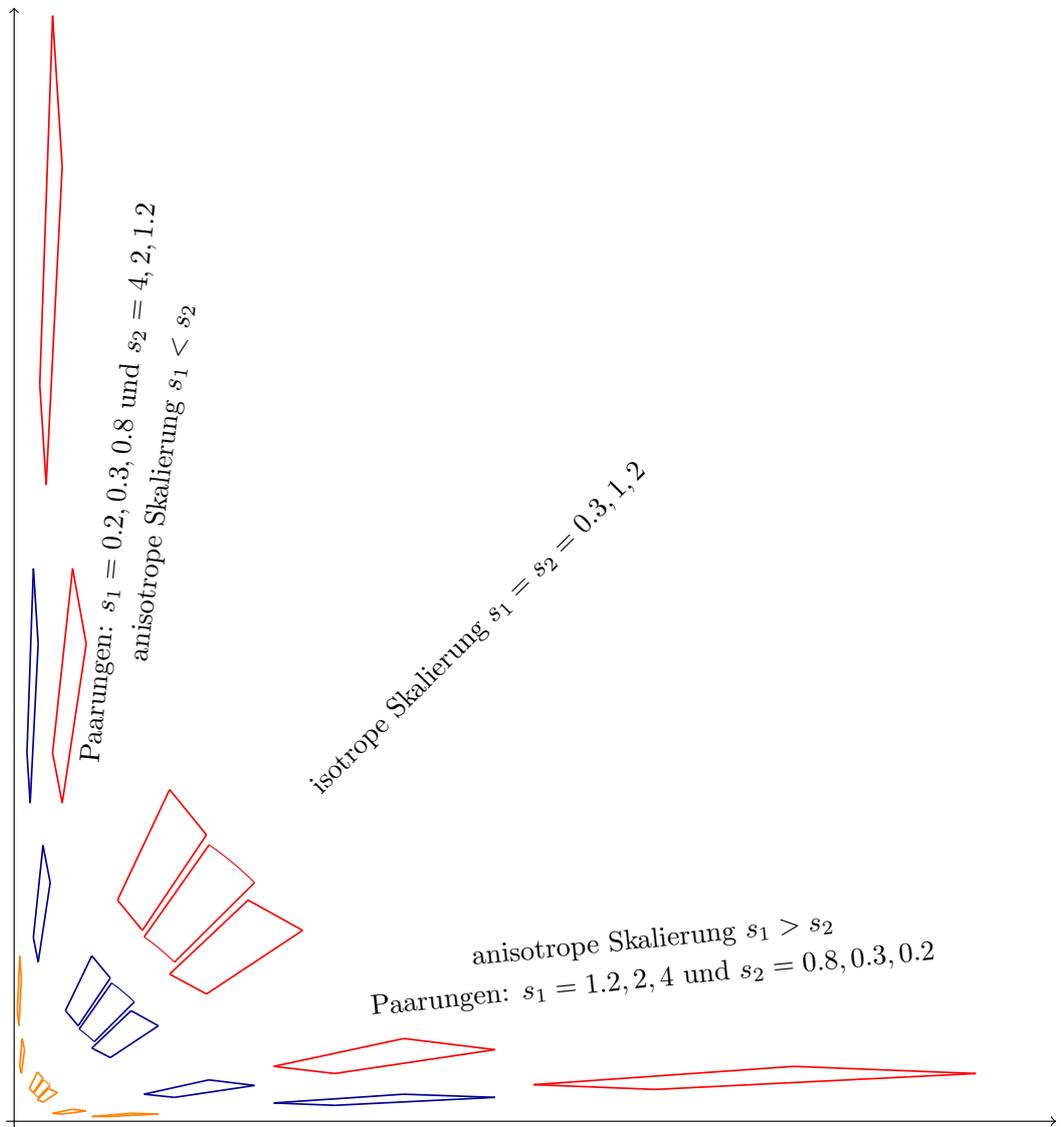


Abbildung 21: Wirkung der Skalierungsmatrix der Roulettransformation auf einen Träger in $\hat{\mathbb{R}}^2$. Der Ausgangsträger ist der blaue Träger, der auf der Diagonalen liegt.

Bemerkung 4.5 (Invertierbarkeit der Roulettransformation)

Für ein festes s_2 ist die Roulettransformation eine Isometrie zwischen $L_2(\mathbb{R}^2)$ und dem Raum $L_2(\text{SIM}(2) \times \mathbb{R}^2)$ mit entsprechenden Haarmaßen. So erklärt sich auch die Zulässigkeitsbedingung an das Roulet. Dieses muss in diesem Fall nur bezüglich der Gruppe $\text{SIM}(2)$ zulässig sein. Damit bleibt die Transformation invertierbar.

Für unterschiedliche s_2 's handelt es sich folglich um unterschiedliche Transformationen. Diese werden separat rücktransformiert.

Definition 4.6 (Tensorprodukt)

Seien V und W zwei Vektorräume und $\psi_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Das *Tensorprodukt* ist eine Abbildung $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2)$$

gilt.

Satz 4.7 (Zulässige Roulets)

Seien $\psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R})$ eindimensionale, zulässige Wavelets der eindimensionalen affinen Gruppe. Dann ist das Tensorprodukt

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2)$$

ein zulässiges Roulet.

Beweis: Da ψ_1, ψ_2 zulässige eindimensionale Wavelets sind, erfüllen sie

$$0 < \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi_i(\xi_1)|^2}{|\xi_1|} d\xi_1 < \infty.$$

Zeige $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} \|\psi(x_1, x_2)\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2} \\ &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\psi_1(x_1)|^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\psi_2(x_2)|^2 dx_2} < \infty. \end{aligned}$$

Zeige ψ ist zulässig:

$$\begin{aligned} C_\psi &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2)|^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi_1)|^2 |\hat{\psi}_2(\xi_2)|^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi_1)|^2}{|\xi_1|} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_2(\xi_2)|^2}{|\xi_2|} d\xi_2 < \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Dabei wird in (23) die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel verwendet:

$$|a||b| = \sqrt{a^2 b^2} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \leq a^2 + b^2.$$

Zeige ψ ist mittelwertfrei:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) dt_1 dt_2 = 0.$$

□

Damit steht der Roulettransformation das gesamte Repertoire an Tensorprodukten von eindimensionalen zulässigen Wavelets zur Verfügung.

Es wird im Weiteren auch ein spezielles Tensorprodukt, bekannt von der Shearlettransformation (siehe zum Beispiel [33, 46]), betrachtet. Dazu wird die Frequenzebene in zwei Kegel unterteilt. Für $|\frac{\xi_1}{\xi_2}| \leq 1$ wird

$$\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_2) \psi_2\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \quad (24)$$

betrachtet. Für $|\frac{\xi_2}{\xi_1}| \leq 1$ wird

$$\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1) \psi_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \quad (25)$$

betrachtet. Aussagen über die Zulässigkeit trifft der nächste Satz.

Satz 4.8 (Zulässigkeit der in (24) definierten Roulets)

Seien $\psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R})$ zulässige eindimensionale Wavelets, dann ist

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_2) \psi_2\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)$$

ein zulässiges Roulet.

Beweis: Einsetzen und entsprechende Substitution der Zulässigkeitsbedingung führt zu

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2)|^2}{|\xi_1^2 + \xi_2^2|} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi_2) \hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)|^2}{|\xi_1^2 + \xi_2^2|} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi_2)|^2 |\hat{\psi}_2(t)|^2}{|\xi_2| (t^2 + 1)} d\xi_2 dt \\ &\leq \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi_2)|^2}{|\xi_2|} d\xi_2 \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \frac{|\hat{\psi}_2(t)|^2}{|t|} dt. \end{aligned}$$

Da Funktionen ψ_1 und ψ_2 zulässige Wavelets sind, ist $\int_{\hat{\mathbb{R}}} \frac{|\hat{\psi}_i(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$ für $i = 1, 2$. Damit ist ψ ein zulässiges Roulet.

□

Allgemeiner zeigt folgender Satz, dass es zu jedem Träger Roulets gibt.

Satz 4.9 (Zulässige bandbeschränkte Funktionen, [20] Lemma II.1)

Sei für eine Matrixgruppe M der Orbit O der einzige, offene Orbit der dualen Wirkung von M , sei $\xi \subset O$ und seien die Stabilisierer der Gruppe kompakt. Dann gibt es für jede offene Menge $\emptyset \neq V \subset O$ eine Schwartzfunktion ψ mit $\text{ess sup} \left(\hat{\psi} \right) \in V$, die zulässig ist.

Satz 4.10 (Träger der Roulets im Frequenzbereich in Abhängigkeit von α, s und b)

Sei $\psi_{1\alpha,s,0} \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ein Roulet mit $T \supset \text{ess sup}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}^2} \hat{\psi}(\xi)$ und $\psi_{2\alpha,s,0} \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ein Roulet mit $Z \supset \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^2} \psi(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}^2} \hat{\psi}_{1\alpha,s,0}(\xi) &\subset R_\alpha A_s^{-1} T \text{ und} \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^2} \psi_{2\alpha,s,0}(x) &\subset R_\alpha A_s Z. \end{aligned} \quad (26)$$

Es folgt die Anwendung von zwei Sätzen aus [36] und [46] auf Roulets. Diese werden zur Bestimmung der Abklingrate der Singularitäten im nächsten Kapitel benötigt. Es handelt sich um Aussagen zum Abklingverhalten und zur Lokalisierung der Roulets. Diese sollen in Zeit- und Frequenzbereich gut lokalisiert sein. Es ist $\psi(x) \in C_c^\infty$, wenn ψ unendlich oft stetig differenzierbar ist und kompakten Träger besitzt.

Satz 4.11 (Funktionen und Abklingverhalten, [46] (Lemma 2.3))

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so dass $\hat{\psi} \in C_c^\infty(T)$ gilt. Dabei ist $T = \text{ess sup} \hat{\psi} \subset \hat{\mathbb{R}}^n$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_k > 0$, so dass

$$|\psi(x)| \leq C_k (1 + \|x\|_2^2)^{-k}$$

gilt.

Satz 4.12 (Über Funktionen mit kompaktem essentiellem Träger, [36])

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so dass $\hat{\psi} \in C_c^\infty(T)$. Dabei ist $T = \text{ess sup} \hat{\psi} \subset \hat{\mathbb{R}}^n$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_k > 0$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\pi_q(m, b) \psi(x)| \leq C_k |\det m|^{-\frac{1}{2}} (1 + \|m^{-1}(x - t)\|_2^2)^{-k}$$

gilt. Dabei ist $m \in Gl_n(\mathbb{R})$ und damit invertierbar und $t \in \mathbb{R}^n$.

Satz 4.13 (Abklingverhalten von Roulets)

Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 4.11 gilt für zulässige Roulets, dass diese für $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ im Zeitbereich schnell abklingen. Es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\psi_{a,\alpha,b}(x) = O(\|x\|_2^{-k}) \text{ für } \|x\|_2 \rightarrow \infty.$$

Satz 4.14 (Übertragung von Satz 4.12 auf Roulets)

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ein zulässiges Roulet mit $\hat{\psi} \in C_c^\infty(T)$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_k , so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |\psi_{s,\alpha,b}(x)| &\leq C_k |\det R_\alpha A_s|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \|A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x-b)\|_2^2\right)^{-k} \\ &= C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (x_1 - b_1)^2 (s_1^{-1} \cos^2(\alpha) + s_2^{-2} \sin^2(\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + (x_2 - b_2)^2 (s_1^{-2} \sin^2(\alpha) + s_2^{-2} \cos^2(\alpha))\right)^{-k} \end{aligned}$$

gilt.

Beweis. Die Voraussetzungen, um den Satz (4.12) anzuwenden, sind gegeben. Daher gilt:

$$\begin{aligned} |\psi_{s,\alpha,b}(x)| &\leq C_k |\det R_\alpha A_s|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left\| (A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x-b)) \right\|_2^2\right)^{-k} \\ &= C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + s_1^{-2} (\cos^2(\alpha) (x_1 - b_1)^2 + \sin(\alpha) (x_2 - b_2)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) (x_1 - b_1) (x_2 - b_2)) \right. \\ &\quad \left. + s_2^{-2} (\sin^2(\alpha) (x_1 - b_1)^2 + \cos^2(\alpha) (x_2 - b_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) (x_1 - b_1) (x_2 - b_2))\right)^{-k} \\ &= C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + s_1^{-2} (\cos^2(\alpha) (x_1 - b_1)^2 + \sin(\alpha) (x_2 - b_2)^2)\right) \\ &\quad \left.+ s_2^{-2} (\sin^2(\alpha) (x_1 - b_1)^2 + \cos^2(\alpha) (x_2 - b_2)^2)\right)^{-k} \\ &= C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (x_1 - b_1)^2 (s_1^{-1} \cos^2(\alpha) + s_2^{-2} \sin^2(\alpha)) \right. \\ &\quad \left.+ (x_2 - b_2)^2 (s_1^{-2} \sin^2(\alpha) + s_2^{-2} \cos^2(\alpha))\right)^{-k}. \end{aligned}$$

□

Nun können mit diesen Sätzen Aussagen über das Abklingverhalten der Koeffizienten der Transformation an Punkt- und Liniensingularitäten getroffen werden.

4.2 Abklingverhalten an Punkt- und Liniensingularitäten

In diesem Abschnitt werden die genauen Abklingraten der Roulettransformation angegeben. Die Definitionen zu regulären Punkten und der Wellenfront-Menge mit Beispielen finden sich in 3.2.1. Im Folgenden wird das Roulet ψ immer im Schwartzraum liegen. Somit ist die Roulettransformation für temperierte Distribution wohldefiniert.

Definition 4.15 (Schnell abklingende Funktionen, [46])

Sei d eine Distribution auf \mathbb{R}^2 , $R_\psi d(\alpha, s, b)$ die Roulettransformation zu dieser Distribution d mit dem Roulet $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$. Die Roulettransformation $R_\psi d(\alpha, s, b)$ heißt *schnell abklingend* an einem Punkt $b \in \mathbb{R}^2$ für $s_1 s_2 \rightarrow 0$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, wenn

$$R_\psi d(\alpha, s, b) = O\left((s_1 s_2)^k\right), \text{ für } s_1 s_2 \rightarrow 0$$

für jedes $k \geq 0$ gilt. Wenn es Konstanten $0 < \beta \leq \gamma \leq \infty$ und $k, j \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\beta s_1^k s_2^j \leq R_\psi d(\alpha, s, b) \leq \gamma s_1^k s_2^j$$

gilt, dann wird $R_\psi d(\alpha, s, b) \sim s_1^k s_2^j$ geschrieben.

4.2.1 Die Roulettransformation und Punktsingularitäten

Als Erstes wird das Abklingverhalten der Roulettransformation an Punktsingularitäten charakterisiert. Gemäß Beispiel 3.14,1) ist bekannt, welche Punkte der Delta-Distribution in der Wellenfront-Menge liegen. Es ist zu zeigen, dass die Roulettransformation der Punktsingularität genau an der Singularität nicht schnell abklingt.

Satz 4.16 (Verhalten der Roulettransformation an Punktsingularitäten)

Sei $\delta_0(x)$ die Punktsingularität an der Stelle $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ ein zulässiges Roulet mit $\psi(p) \neq 0$. Dann gilt für $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$R_\psi \delta(\alpha, s, p) \sim (|s_1 s_2|)^{-\frac{1}{2}}, \text{ für } s_1 s_2 \rightarrow 0.$$

Überall sonst gilt $\langle \delta_0, \psi_{\alpha, s, t} \rangle = \psi_{\alpha, s, t}(p) = O\left((|s_1 s_2|)^{2k - \frac{1}{2}}\right)$ für $s_1 s_2 \rightarrow 0$. Dabei hängt die Konstante von b und α ab.

Beweis. Es gilt

$$\langle \delta_0, \psi_{\alpha, s, b} \rangle = \psi_{\alpha, s, b}(p) = (|s_1 s_2|)^{-\frac{1}{2}} \psi(p) \sim (|s_1 s_2|)^{-\frac{1}{2}} \text{ für } s_1 s_2 \rightarrow 0.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Nun zum zweiten Fall.

Es ist $b \neq p$. Nun wird das Verhalten von $\langle \delta_0, \psi_{\alpha, s, b} \rangle = \psi_{\alpha, s, b}(p)$ betrachtet. Mit $C_k \in \mathbb{R}$ und Satz 4.14 gilt

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,s,b}(x) &\leq C_k (|s_1 s_2|)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (x_1 - b_1)^2 (s_1^{-2} \cos^2(\alpha) + s_2^{-2} \sin^2(\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + (x_2 - b_2)^2 (s_1^{-2} \sin^2(\alpha) + s_2^{-2} \cos^2(\alpha)) \right)^{-k}. \end{aligned}$$

Sei nun $b_1 \neq 0$ und $b_2 = 0$. Dies führt zu

$$\psi_{\alpha,s,b}(p) \leq C_k (|s_1 s_2|)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + b_1^2 (s_1^{-2} \cos^2(\alpha) + s_2^{-2} \sin^2(\alpha)) \right)^{-k}.$$

Es gilt $|\psi_{\alpha,s,b}(0)| = O\left((|s_1 s_2|)^{2k-\frac{1}{2}}\right)$.

Sei nun $b_1 = 0$ und $b_2 \neq 0$. Dies führt dann zu

$$\psi_{\alpha,s,b}(0) \leq C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + b_2^2 (s_1^{-2} \sin^2(\alpha) + s_2^{-2} \cos^2(\alpha)) \right)^{-k}.$$

Damit gilt $|\psi_{\alpha,s,b}(0)| = O\left((|s_1 s_2|)^{2k-\frac{1}{2}}\right)$.

Für $b_1 \neq 0 \neq b_2$ folgt

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,s,b}(p) &\leq C_k |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + b_1^2 (s_1^{-2} \cos^2(\alpha) + s_2^{-2} \sin^2(\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + b_2^2 (s_1^{-2} \sin^2(\alpha) + s_2^{-2} \cos^2(\alpha)) \right)^{-k}. \end{aligned}$$

Für diesen Fall gilt $|\psi_{\alpha,s,b}(0)| = O\left((|s_1 s_2|)^{2k-\frac{1}{2}}\right)$.

□

4.2.2 Die Roulettransformation und Liniensingularitäten

Als nächstes wird eine lineare Deltadistribution $\delta_{x_2=p+qx_1}(x_1, x_2)$ betrachtet. Sie nimmt, anschaulich gesprochen, überall den Wert Null an, außer auf der Menge

$$\{(x_1, x_2) \mid x_2 = p + qx_1\}.$$

Es gilt

$$\langle \delta_{x_2=p+qx_1}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, p + qx_1) dx_1$$

und

$$\hat{\delta}_{x_2=p+qx_1}(\xi) = e^{-2\pi i p \xi_1} \delta_{\xi_1 + q\xi_2=0}(\xi).$$

Im Folgenden wird der affine Anteil der Deltadistribution vernachlässigt. Es folgen Aussagen über die Abklingrate der Roulettransformation dieser Funktion. Dafür wird in einem ersten Schritt die Distribution $v(x) = \delta_{x_2=qx_1}(x)$ betrachtet. Es gilt damit $\hat{v}(\xi) = \delta_{\xi_1 + q\xi_2=0}(\xi)$.

Für die Fouriertransformation eines Roulets gilt

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\alpha,s,b}(\xi) &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi) \\ &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \hat{\psi} \left(\begin{array}{c} s_1 \cos(\alpha) \xi_1 - s_1 \sin(\alpha) \xi_2 \\ s_2 \sin(\alpha) \xi_1 + s_2 \cos(\alpha) \xi_2 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Satz 4.17 (Verhalten der Rouletttransformation an $v(x) = \delta_{x_2=qx_1}(x)$)

Sei $v(x) = \delta_{x_2=qx_1}(x)$ und $s_2 = s_1^\nu$ für ein $0 < \nu < 1$. Dann gilt für $b_2 = qb_1$ und $\alpha = \operatorname{arccot}(-q)$

$$R_\psi \delta(s, \alpha, b) \sim |s_1|^{-\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}}, \quad \text{für } s_1 \rightarrow 0.$$

Überall sonst klingt $R_\psi \delta(s, \alpha, b)$ schnell ab für $s_1 \rightarrow 0$. Dabei hängt die Konstante von b und α ab.

Beweis: Mit der Fouriertransformation, Gleichung (27) und der Voraussetzung, dass es sich bei dem Roulet um ein Tensorprodukt von zwei Wavelets handelt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\alpha, s, b}, v \rangle &= \langle \hat{\psi}_{s, \alpha, b}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{\psi}_{s, \alpha, b}, \delta_{\xi_1 = -q\xi_2} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_{s, \alpha, b}(-q\xi_2, \xi_2) d\xi_2 \\ &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(-qb_1\xi_2 + b_2\xi_2)} \hat{\psi} \left(\begin{array}{c} s_1 \xi_2 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \\ s_2 \xi_2 (q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \end{array} \right) d\xi_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Es werden nun Roulets, wie in (25) gebildet, betrachtet. Der Fall zu (24) läuft analog. Das Einsetzen dieses Zusammenhangs in Formel (28) ergibt

$$\begin{aligned} &|s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi_2 (b_2 - qb_1)} \hat{\psi}_1(s_1 \xi_2 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))) \\ &\quad \hat{\psi}_2 \left(\frac{s_2 \xi_2 q \sin(\alpha) + \xi_2 \cos(\alpha)}{s_1 - q \xi_2 \cos(\alpha) + \xi_2 \sin(\alpha)} \right) d\xi_2 \\ &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi_2 (b_2 - qb_1)} \hat{\psi}_1(s_1 \xi_2 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))) \\ &\quad \hat{\psi}_2 \left(\frac{s_2 (q \sin(\alpha) + \cos(\alpha))}{s_1 (\sin(\alpha) - q \cos(\alpha))} \right) d\xi_2. \end{aligned}$$

Mit der Substitution von $t = s_1 \xi_2 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$, also $\frac{dt}{s_1(-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} = d\xi_2$ folgt

$$\begin{aligned} &|s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s_1 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \hat{\psi}_2 \left(\frac{s_2 q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{s_1 - q \cos(\alpha) + \sin(\alpha)} \right) \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \frac{t}{s_1(-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} (b_2 - qb_1)} \hat{\psi}_1(t) dt \\ &= |s_2|^{\frac{1}{2}} |s_1|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha)} \hat{\psi}_2 \left(\frac{s_2 q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{s_1 - q \cos(\alpha) + \sin(\alpha)} \right) \\ &\quad \psi_1 \left(\frac{b_2 - qb_1}{s_1 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Dabei ist, da der Fall (25) betrachtet wird, $s_1 (-q \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \neq 0$.

Sei $b_2 = qb_1$ und $q = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$. Dann ergibt sich mit $s_1 \rightarrow 0$ und $s_2 = s_1'$ für das Verhalten von (29)

$$|s_1|^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} \frac{1}{\sin(\alpha) - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \hat{\psi}_2(0) \psi_1(0).$$

Dieser Ausdruck liegt in $O(|s_1|^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}})$, da die Funktionen ψ_1 und ψ_2 im Nullpunkt stetig sind. Dies folgt mit Satz 4.13.

Sei nun $b_2 = qb_1$ und $q \neq -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$. Dann ergibt sich mit $s_1 \rightarrow 0$ und $s_2 = s_1'$ für das Verhalten von (29)

$$|s_1|^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} \frac{1}{\sin(\alpha) - q \cos(\alpha)} \hat{\psi}_2 \left(s_1^{-1+\nu} \frac{q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - q \cos(\alpha)} \right) \psi_1(0). \quad (30)$$

Da $\hat{\psi}_2 \in S(\mathbb{R})$ liegt, gilt

$$\left| \hat{\psi}_2 \left(s_1^{-1+\nu} \frac{q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - q \cos(\alpha)} \right) \right| \leq C_k (1 + s_1^{-1+\nu})^{-k}.$$

Daraus folgt, dass (30) in $O(|s_1|^{k(1-\nu)})$ liegt.

In allen anderen Fällen folgt für (29)

$$|s_1|^{-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} \frac{1}{\sin(\alpha) - q \cos(\alpha)} \hat{\psi}_2 \left(s_1^{-1+\nu} \frac{q \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - q \cos(\alpha)} \right) \psi_1 \left(\frac{b_2 - b_1 q}{s_1 (\sin(\alpha) - q \cos(\alpha))} \right). \quad (31)$$

Da die beiden Funktionen ψ_1 und ψ_2 im Schwartzraum liegen, liegt der Ausdruck (31) in $O(|s_1|^{k(2-\nu)})$. □

Bemerkung 4.18

Der Satz 4.17 fordert für das Abklingverhalten lediglich, dass s_1 schneller abklingt als s_2 . In Teil 5.4.2 werden verschiedene Winkel α betrachtet. In Teil 6 wird mit $\nu = \frac{1}{2}$ gerechnet.

4.3 Roulets im Vergleich zu Wavelets und Shearlets

In [2] wird die Similitude Gruppe $\mathbb{R}^2 \rtimes (SO(2) \times \mathbb{R}^+)$ als die natürliche Erweiterung der eindimensionalen Wavelettransformation in zwei Dimensionen eingeführt. Dies ist naheliegend, da es sich um zwei durch Drehungen erweiterte Kopien der eindimensionalen affinen Gruppe handelt. Die Similitude Gruppe wird in Abschnitt 2.4.1 mit entsprechender Zulässigkeitsbedingung vorgestellt. Sie bildet die Grundlage für die betrachtete Struktur der Roulets. In [33] wird in Beispiel 8 für eine konkrete Liniendistribution gezeigt, dass es nicht möglich ist, anhand des Abklingverhaltens dieser Integraltransformation die Wellenfront-Menge zu charakterisieren. Für allgemeine temperierte Distributionen wird dies in [21], Beispiel 6.1, nachgewiesen.

Ein wesentlicher Unterschied zu der Roulettransformation liegt folglich in der Fähigkeit, unterschiedliche Singularitäten durch das Abklingverhalten der jeweiligen Transformation zu detektieren. Die Roulettransformation ist dazu mit nur einem Roulet in der Lage, wie in 3.3.1 gezeigt wird. Dagegen kann die Wavelettransformation diese Charakterisierung nur mit entsprechend gewählten zulässigen Funktionen durchführen.

Es wird nun die Shearlet-Gruppe, eingeführt in Abschnitt 2.4.2, mit $c = \frac{1}{2}$, mit der Roulettransformation verglichen.

Dabei liegt der erste Unterschied darin, dass die Shearlet-Gruppe die Shearlettransformation durch die quasireguläre Darstellung induziert. Im Unterscheid zu den Roulets muss hier keine Struktur betrachtet werden.

Die Shearlettransformation löst die Wellenfront-Menge nach [21] oder [46] mit einer zulässigen Funktion auf. Dies gelingt ebenso der Roulettransformation. In den Aussagen sind diese Transformationen vergleichbar.

Unterschiede sind jedoch bei der Betrachtung der Implementierung der beiden Transformationen festzustellen. Bei der Shearlettransformation wird durch die zunehmende Scherung der Träger der zulässigen Funktion immer schmaler und länger. Dies kann in der Implementierung zu Problemen führen. Im Gegensatz dazu wird bei der Roulettransformation der Träger des Roulets passend gedreht. Damit ist die Implementierung robuster als die der Shearlettransformation.

5 Roulettransformation und ihre Implementierung

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die Roulettransformation, wie alle anderen waveletartigen Integraltransformationen auch, als Faltung zweier Funktionen dargestellt werden kann. Damit kann die Roulettransformation mit Hilfe der FFT (Fast Fourier Transform) schnell berechnet werden. Es werden zweidimensionale zulässige Roulets vorgestellt und Möglichkeiten der Rücktransformation beschrieben. In diesem Zusammenhang wird auch das Problem der sinnvollen Skalen- und Rotationswahl betrachtet.

5.1 Implementierung der Roulettransformation

Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Signal im $L_2(\mathbb{R}^2)$. Die Roulettransformation kann als Faltung zwischen Signal und Roulet dargestellt werden. Dazu sei, wie in 4.3 definiert,

$$\psi_{s,\alpha,b}(x) = |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \psi(A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b))$$

mit der Fouriertransformation aus 4.4

$$\hat{\psi}_{s,\alpha,b}(\xi) = |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b^T \xi} \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi).$$

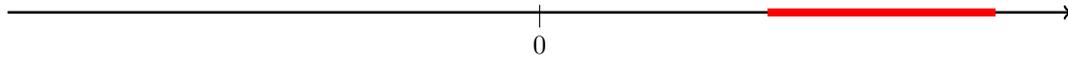
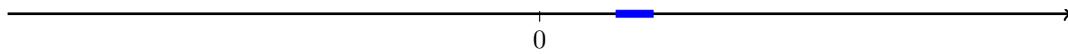
Nun kann die Roulettransformation umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} R_\psi f(s, \alpha, b) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{s,\alpha,b}(x)} dx \\ &= |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi(A_s^{-1} R_\alpha^{-1}(x - b))} dx \\ &= |s_1 s_2|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{s,\alpha,0}(x - b)} dx \\ &= (f * \overline{\psi_{s,\alpha,0}})(b). \end{aligned}$$

Es handelt sich damit um eine Faltung der beiden Funktionen. Mit Hilfe der Fouriertransformation und ihrer Eigenschaft 2.31 folgt

$$\begin{aligned} (R_\psi f(s, \alpha, \cdot))^\wedge(\xi) &= ((f * \overline{\psi_{s,\alpha,0}})(\cdot))^\wedge(\xi) \\ &= \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}_{s,\alpha,0}(\xi)} \\ &= |s_1 s_2|^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{\psi}(A_s R_\alpha^T \xi). \end{aligned}$$

Damit kann die Roulettransformation schnell und effektiv implementiert werden.

Abbildung 22: Träger des analytischen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für große s Abbildung 23: Träger des analytischen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für kleine s

5.2 Zulässige Roulets

Nun werden einige bekannte, zulässige Funktionen vorgestellt. In 4.7 wird bewiesen, dass Tensorprodukte von zwei zulässigen eindimensionalen Wavelets zulässige Roulets beschreiben. Im Folgenden werden die bekanntesten eindimensionalen zulässigen Wavelets und die daraus gebildeten Roulets vorgestellt.

Bei der Betrachtung von Tensorproduktroulets, gebildet aus dem Tensorprodukt von zwei eindimensionalen zulässigen Wavelets, fällt auf, dass der Träger der Roulets im Frequenzbereich aus mehreren Rechtecken, die die Null nicht enthalten, besteht. Die Anzahl der Rechtecke hängt von der Wahl der Wavelets für das Tensorprodukt ab. Je nach dem, ob es sich um analytische, reelle oder andere Wavelets handelt, unterscheidet sich die Anzahl der Träger. Es folgt ein anschauliches Beispiel zu den Trägern eines Tensorproduktroulets. Dabei ist ψ_1 ein analytisches Wavelet, zum Beispiel das Morlet-Wavelet, mit Träger T_1 im Frequenzbereich. Das Wavelet ψ_2 ist ein reelles Wavelet, wie zum Beispiel das Mexican-Hat-Wavelet mit Träger T_2 im Frequenzbereich. Für den Träger T_1 des analytischen Wavelets gilt $T_1 \subset \mathbb{R}_{>0}$. Für den Träger T_2 des reellen Wavelets gilt $T_2 = T_{2,1} \cup -T_{2,1}$, wobei $T_{2,1} \subset \mathbb{R}_{>0}$ ist. Dies ist in Abbildung 22 - 25 zu erkennen. Die Träger im Frequenzbereich von Tensorproduktroulets sind schematisch in Abbildung 26 dargestellt. Allgemeiner gibt der folgende Satz den Zusammenhang allgemeiner wieder.

Satz 5.1 (Abdeckung der Frequenzebene durch die Roulets)

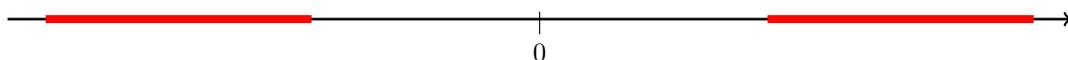
Seien $\psi_2, \psi_1 \in L_2(\mathbb{R})$ zulässige eindimensionale Wavelets mit

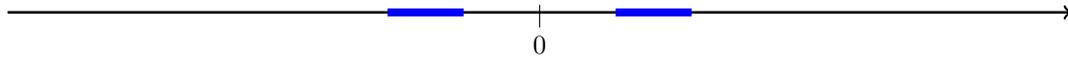
$$\text{ess sup}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}} \hat{\psi}_1(\xi) \subset [a, b] \cup [-a, -b]$$

und

$$\text{ess sup}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}} \hat{\psi}_2(\xi) \subset [c, d] \cup [-c, -d]$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $\psi(x) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2)$ ein zulässiges Roulet. Die Träger für D_s mit $s \in \mathbb{R}^2$ der Funktionen $\hat{\psi}(A_s \xi) = \psi(s_1 \xi_1) \psi_2(s_2 \xi_2)$ überdecken den $\hat{\mathbb{R}}^2$.

Abbildung 24: Träger des reellen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für große s

Abbildung 25: Träger des reellen Wavelets in $\hat{\mathbb{R}}$ für kleine s

Die Drehungen des skalierten ξ 's durch die Matrix R_α sorgen für eine Mehrfachüberdeckung der Ebene.

Beweis: Für den skalierten Träger der Funktion ψ_1 gilt mit (26)

$$\operatorname{ess\,supp}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}} \hat{\psi}_1(s_1 \xi) \subset \left[\frac{a}{s_1}, \frac{b}{s_1} \right] \cup \left[-\frac{a}{s_1}, -\frac{b}{s_1} \right].$$

Für den skalierten Träger von ψ_2 gilt entsprechend

$$\operatorname{ess\,supp}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}} \hat{\psi}_2(s_2 \xi) \subset \left[\frac{c}{s_2}, \frac{d}{s_2} \right] \cup \left[-\frac{c}{s_2}, -\frac{d}{s_2} \right].$$

Somit gilt für das Roulet ψ :

$$\operatorname{ess\,supp}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}^2} \hat{\psi}(\xi) \subset ([a, b] \cup [-a, -b]) \times ([c, d] \cup [-c, -d]) \text{ und}$$

$$\operatorname{ess\,supp}_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}^2} \hat{\Psi}(A_s \xi) \subset \left(\left[\frac{a}{s_1}, \frac{b}{s_1} \right] \cup \left[-\frac{a}{s_1}, -\frac{b}{s_1} \right] \right) \times \left(\left[\frac{c}{s_2}, \frac{d}{s_2} \right] \cup \left[-\frac{c}{s_2}, -\frac{d}{s_2} \right] \right).$$

Für jeden Punkt der Ebene kann eine Skalierung gefunden werden, so dass der essentielle Träger des skalierten Wavelets diesen Punkt enthält. \square

Bemerkung 5.2

Durch die Rotationen führt dies in der Roulettransformation zu einer erheblichen Mehrfachüberdeckung der Ebene. Diese Transformation bildet damit eine sehr redundante Darstellung. Dies hat keinen Einfluss auf die Roulettransformation. Bei der Implementierung ist die angesprochene Mehrfachüberdeckung hilfreich, da dies die Möglichkeit gibt, numerische Fehler zu minimieren.

Für Tensorproduktroulets, gebildet nach Formel (24), gilt Satz 5.1 genauso. Die Skalierungsmatrix wirkt ohne Unterschied. Die Einschränkung an den Träger von ψ_2 hat keinen Einfluss auf die Ebenenüberdeckung.

5.2.1 Zulässige Funktionen der eindimensionalen affinen Gruppe

In Anwendungen der eindimensionalen Wavelettransformation werden hauptsächlich drei Wavelets verwendet. Dazu zählen das Morlet-Wavelet, das Mexican-Hat-Wavelet und das Haar-Wavelet. Das Morlet- und auch das Mexican-Hat-Wavelet haben einen zusätzlichen Waveletparameter. Die Wirkung dieses Parameters sowie die Wirkung der Skalierung der Wavelets wird in den folgenden Abbildungen vorgestellt. Der Parameter des Wavelets ist entscheidend für die

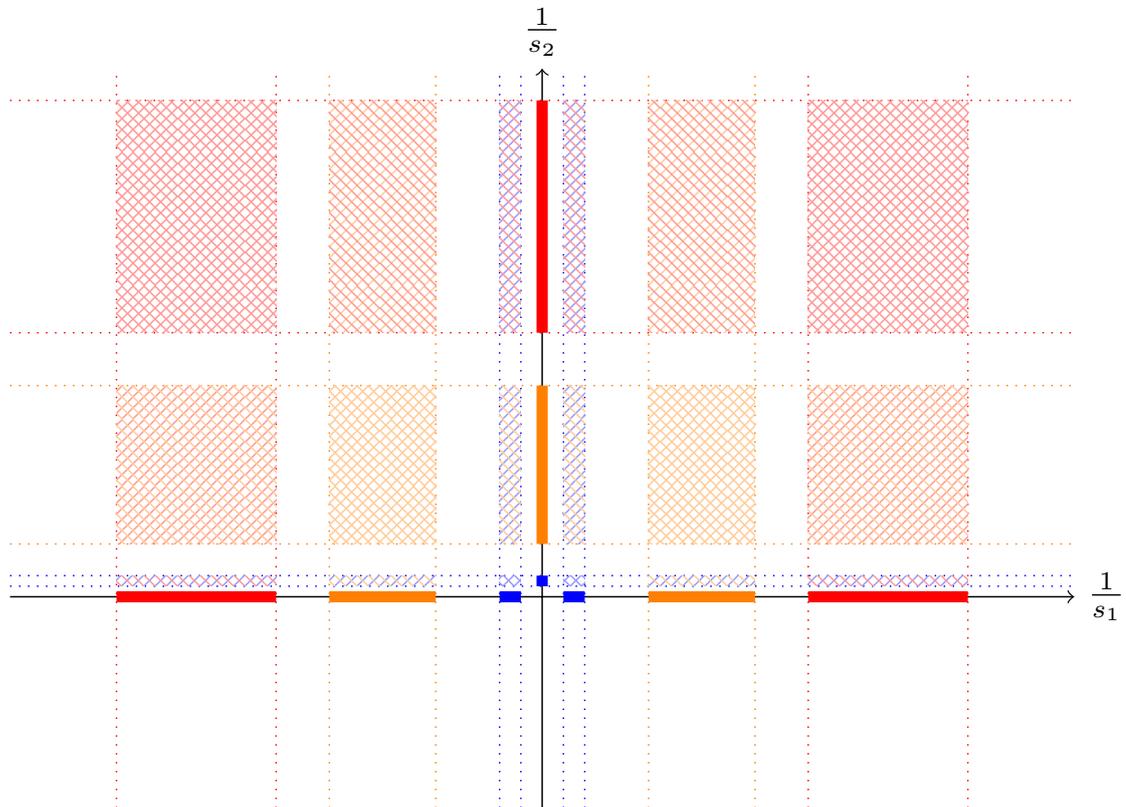


Abbildung 26: Träger eines Tensorproduktroulets, gebildet aus zwei zulässigen eindimensionalen Wavelets der affinen Gruppe, im Frequenzbereich aufgetragen. Dieses wird aus einem reellen und einem analytischen eindimensionalen Wavelet gebildet. Die Träger der beiden eindimensionalen Wavelets sind auf den entsprechenden Achsen aufgetragen. Die unterschiedlichen Farben entsprechen unterschiedlichen Skalierungen der Wavelets. Die Träger des Roulets sind für die unterschiedlichen Skalierungen in den unterschiedlichen Farben schraffiert. Aus den Trägern kann abgelesen werden, dass sich die Träger der Roulets für kleine $\frac{1}{s_i}, i = 1, 2$ an den entsprechenden Achsen entlang weit vom Ursprung entfernen und immer länger und schmaler werden. Für große $\frac{1}{s_i}, i = 1, 2$ wandern sie immer näher an den Ursprung und werden immer schmaler und enger.

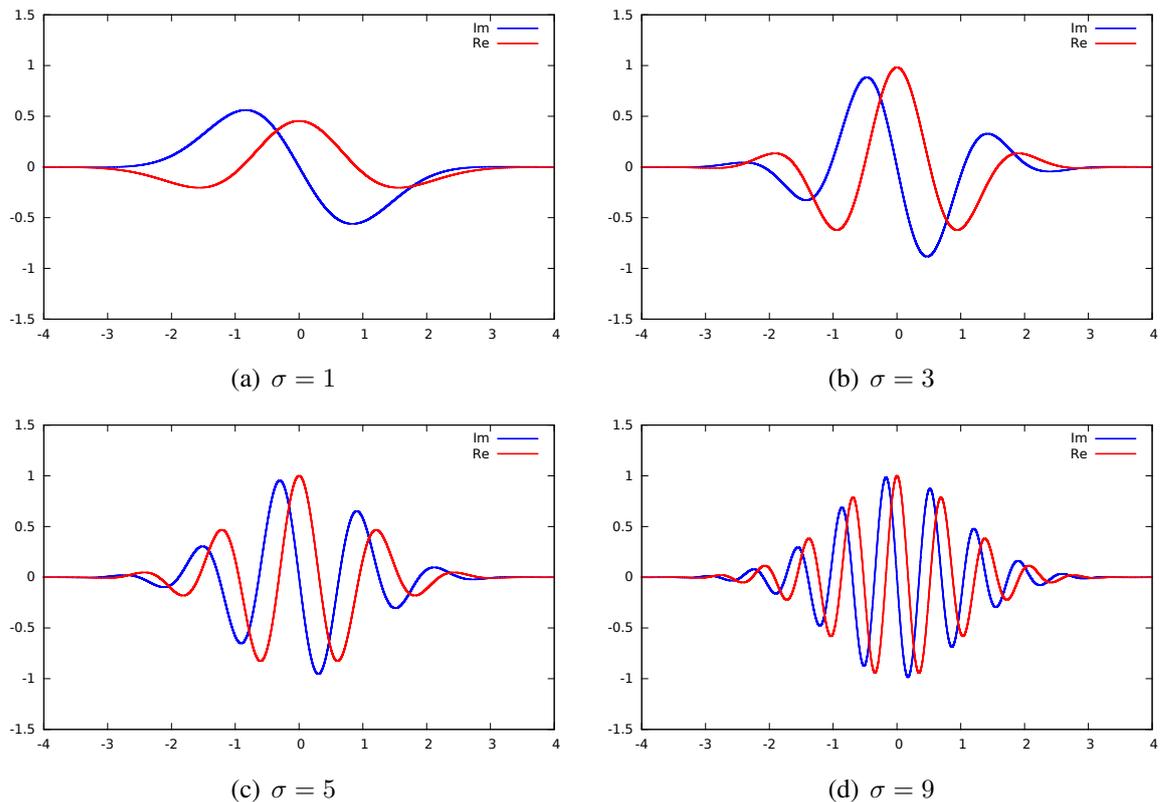


Abbildung 27: Das Morlet-Wavelet mit unterschiedlichem σ -Werten, wobei $s = 1$ in allen Fällen gewählt wurde. Dabei ist die stärkere Oszillation deutlich zu erkennen.

Eigenschaften des Wavelets. Dazu gehört zum Beispiel die Abklinggeschwindigkeit, die Oszillationshäufigkeit und die Lokalisierung im Frequenzbereich. Die Skalierung der Wavelet- oder Roulettransformation staucht und streckt das entsprechende Wavelet mit festem Wavelet-Parameter. Die Skalierung ändert nicht die zu Grunde liegende Gestalt des zulässigen Roulets.

Morlet-Wavelet Dieses Wavelet ist zum Beispiel in [2, 8, 16, 44] zu finden. Das Morlet-Wavelet ist im Zeitbereich durch

$$\psi_{\sigma}(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{-i\sigma x} - e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

definiert. Im Frequenzbereich gilt damit:

$$\hat{\psi}_{\sigma}(\xi) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{-\frac{(\xi-\sigma)^2}{2}} - e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \right).$$

Bei diesem Wavelet handelt sich um ein komplexwertiges Wavelet, gebildet aus einer komplexen Exponentialfunktion, multipliziert mit einer schnell abklingenden Funktion. Daher hat es eine gute Zeit- und Frequenzlokalisierung.

Der Parameter σ des Wavelets verändert die Anzahl an Schwingungen. Es gilt: Je größer σ ist, desto stärker oszilliert das Wavelet. Der Zusammenhang ist in der Abbildung 27 zu sehen.

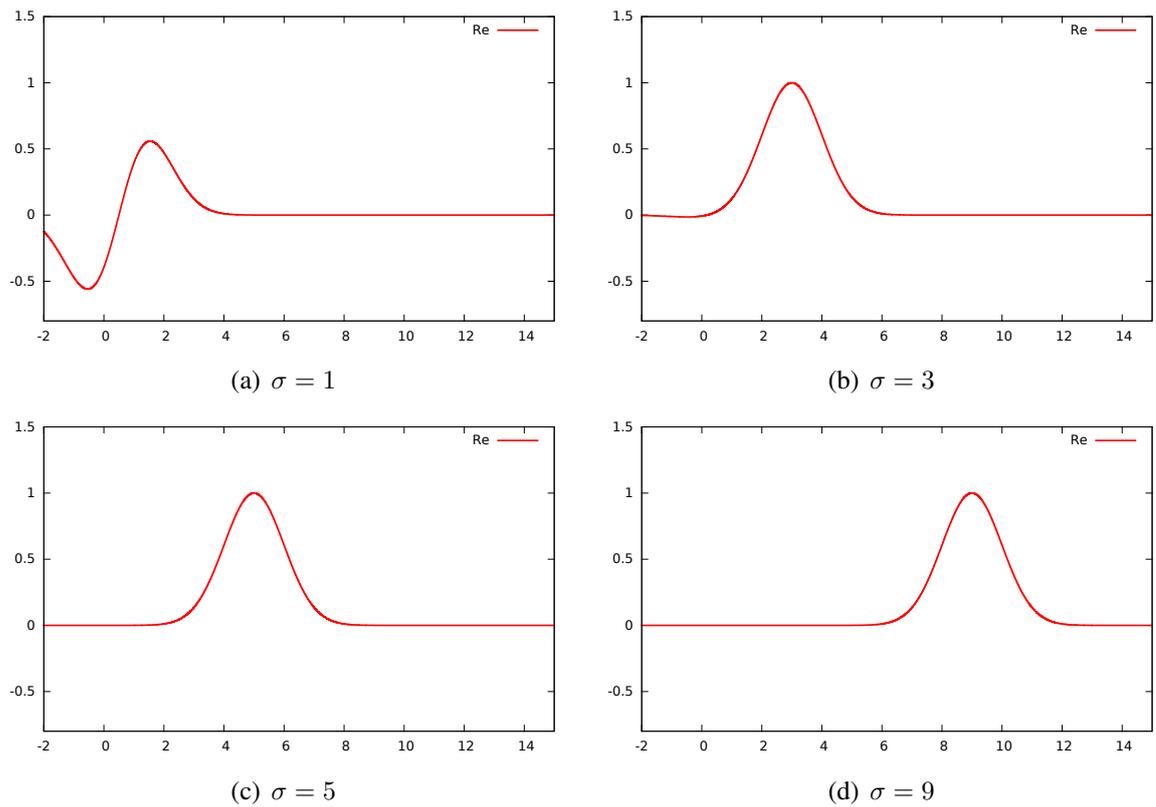


Abbildung 28: Das Morlet-Wavelet mit unterschiedlichem σ -Werten im Frequenzbereich, wobei $s = 1$ in allen Fällen gewählt wurde. Es ist zu sehen, dass sich das Maximum der Funktionen immer weiter verschiebt.

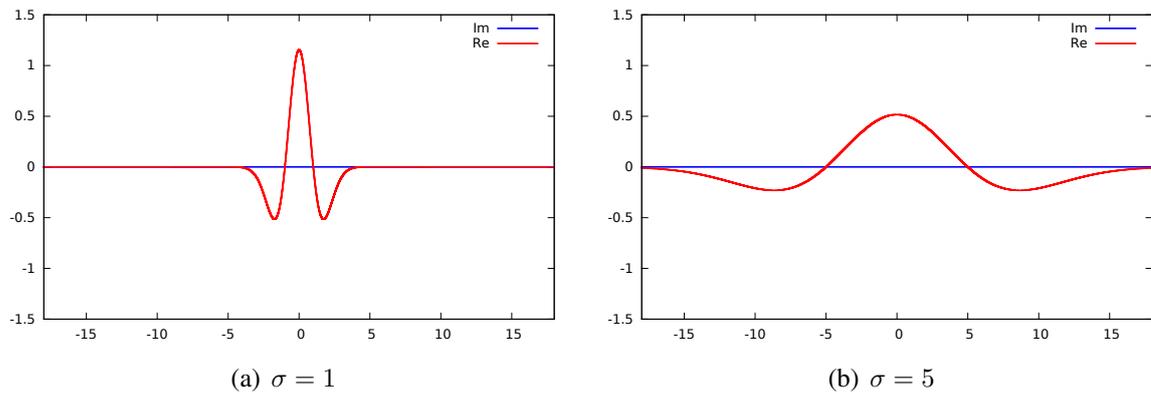


Abbildung 29: Das Mexican-Hat-Wavelet mit unterschiedlichem σ -Werten, wobei $s = 1$ in allen Fällen gewählt wurde.

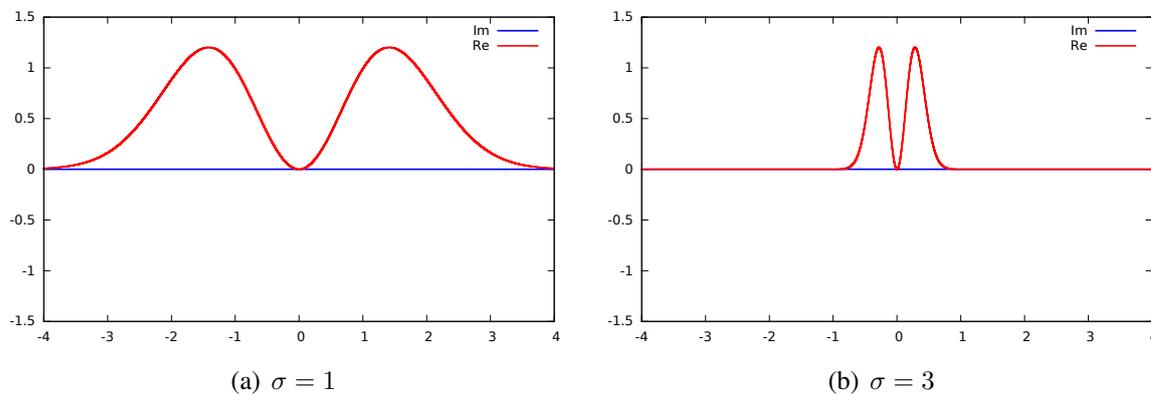


Abbildung 30: Das Mexican-Hat-Wavelet mit unterschiedlichem σ -Werten im Frequenzbereich, wobei $s = 1$ in allen Fällen gewählt wurde.

Mexican-Hat-Wavelet Diese Klasse von Wavelets ergibt sich aus den Ableitungen von Gauß-Funktionen. Die Gauß-Funktion klingt sehr schnell zu Null ab. Diese Eigenschaft ist im Hinblick auf gute Zeit- und Frequenzlokalisierung erstrebenswert und wird an die Ableitungen, also die verschiedenen Mexical Hat Wavelets, weitergegeben. Die Definition findet sich in Beispiel 2.33. Das Wavelet ist in Abbildung 29 dargestellt. Dabei verändert der Parameter σ bei diesem Wavelet die Abklinggeschwindigkeit. Je größer σ ist, desto langsamer klingt das Wavelet ab.

Haar-Wavelet Das Haar-Wavelet ist, unter den hier vorgestellten, das einzige Wavelet mit kompaktem Träger im Zeitbereich, gezeichnet in Abbildung 31. Damit hat es einen unbeschränkten Träger im Frequenzbereich. Dies ist für die kontinuierliche Wavelettransformation nicht sinnvoll, da damit die Lokalisierung im Frequenzbereich so schlecht wie bei keinem anderen Wavelet ist. Es findet Anwendungen in der diskreten Wavelettransformation.

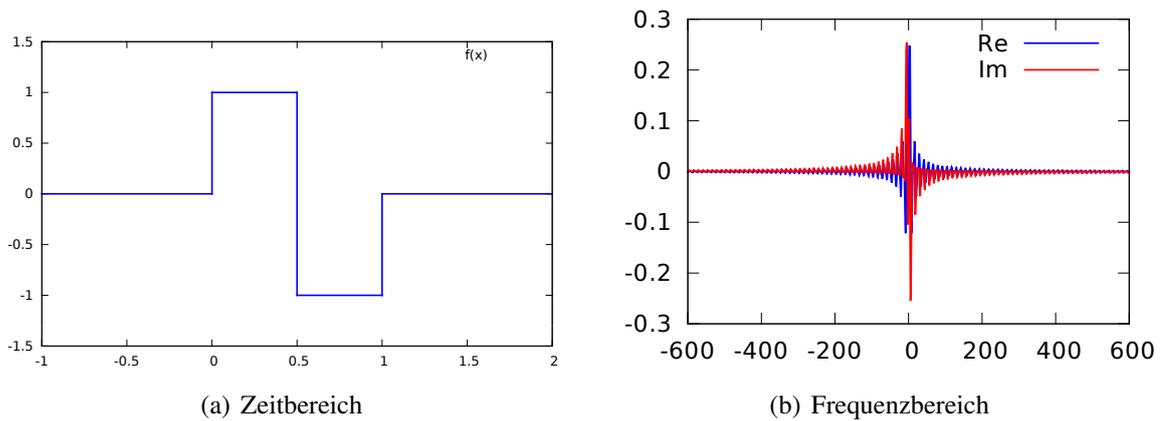


Abbildung 31: Das Haar-Wavelet im Zeit- und Frequenzbereich.

5.2.2 Tensorproduktroulets

In den folgenden Abbildungen sind unterschiedliche Tensorproduktwavelets und ein Ausschnitt von einer Roulettransformation dargestellt.

- Abbildung 33: Zwei Tensorproduktwavelets aus eindimensionalen Morlet-Wavelets. Dabei handelt es sich um ein isotrop skaliertes Tensorproduktwavelet.
- Abbildung 34: Das Tensorproduktwavelet zweier Mexican-Hat-Wavelets. Auch hier ist ein Tensorproduktwavelet isotrop skaliert.
- Abbildung 35: Es ist die Roulettransformation von einem Bild mit einem Rechteck berechnet worden. Hier wird das Ergebnis für ein festes Skalenpaar und einen festen Rotationswinkel gezeigt. Dabei ist der Absolutbetrag der Werte farblich codiert.
- Abbildung 32: Hier ist die Roulettransformation mit zwei unterschiedlichen p 's, also $s_2 = s_1^p$, berechnet worden. Es wurde $p_1 = \frac{1}{1000}$ und $p_2 = \frac{999}{1000}$ gewählt. Dabei ist zu erkennen, dass in beiden Fällen die Kanten des Vierecks deutlich gefunden werden.

Es liegt nahe, bei der Roulettransformation auch an radiale Funktionen als zulässige Roulets zu denken. Leider ist es hier nicht möglich, Aussagen über die gesamte Klasse von Funktionen zu treffen. Dies liegt an dem, im Allgemeinen, nicht zu bestimmenden Integral der Fouriertransformation von radialen Basisfunktionen. Dies wird zum Beispiel in [55] gezeigt.

5.2.3 Rouletrücktransformation

Nachdem zulässige Funktionen bekannt sind, wird in dem folgenden Abschnitt die Rücktransformation aus 7 noch einmal aufgeführt und im Hinblick der Implementierung betrachtet. Die inverse Roulettransformation ist für ein festes s_2 gegeben durch

$$f(\cdot) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(R_\alpha D_{s_1, s_1} D_{1, s_2}, b) (\pi_q (R_\alpha D_{s_1, s_1} D_{1, s_2}, b) \psi)(\cdot) \frac{1}{s_1^4} db ds_1 d\alpha.$$

Dabei ist c_ψ die Konstante der Zulässigkeitsbedingung aus 2.36.

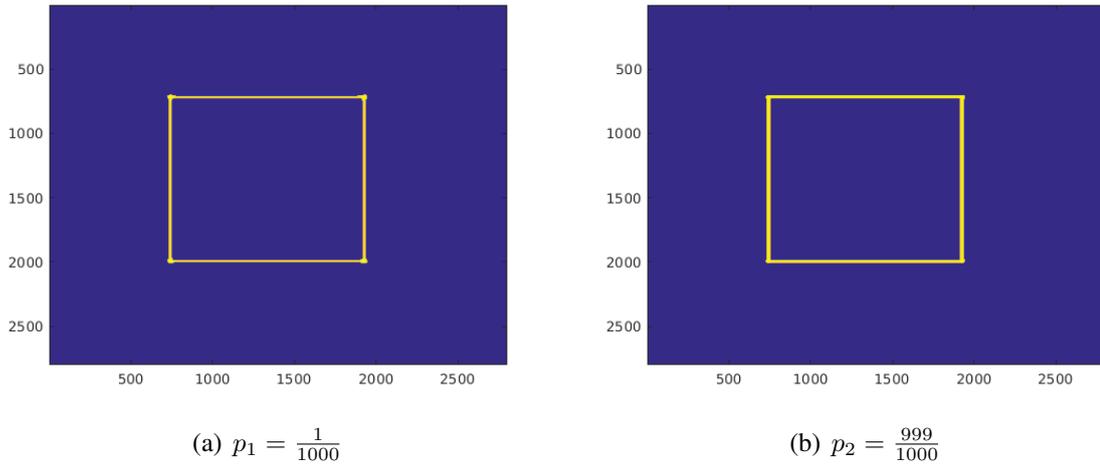


Abbildung 32: Roulettransformation mit unterschiedlichen p 's.

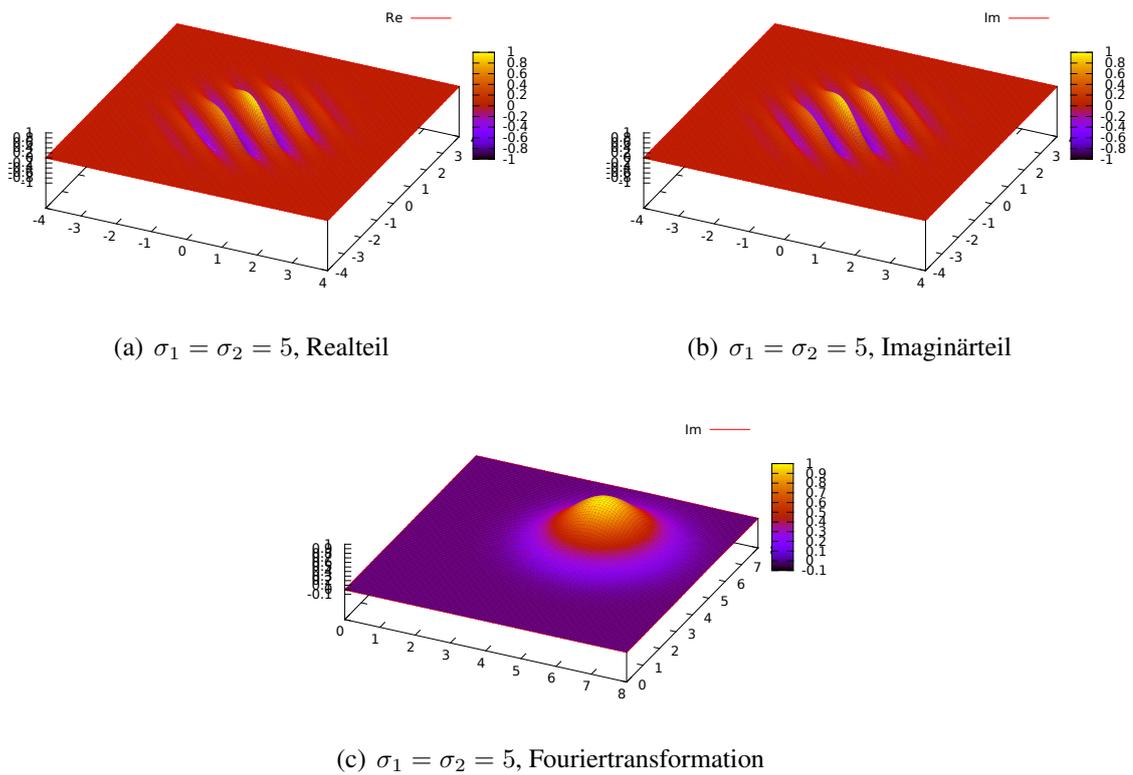


Abbildung 33: Morlet-Tensorprodukt-Roulet mit $\sigma = 5$ in beide Richtungen.

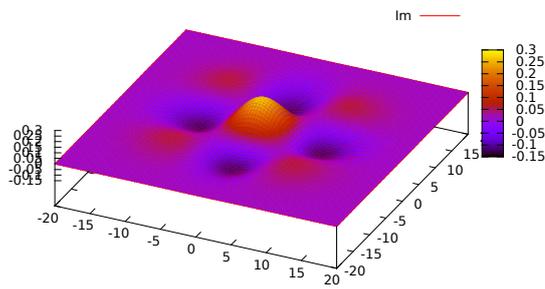
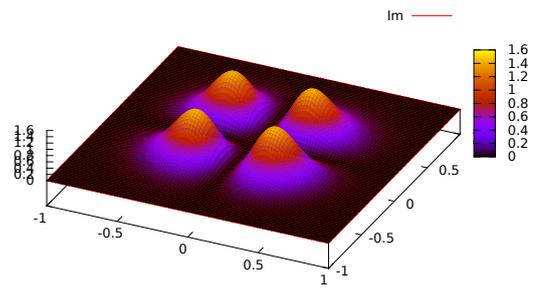
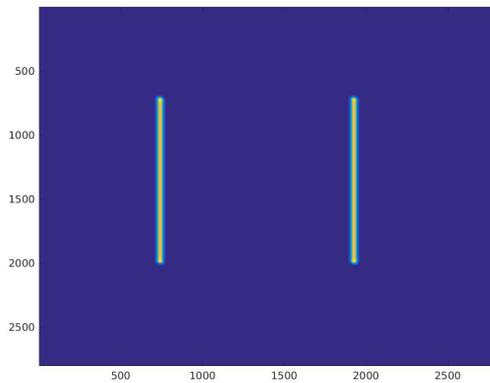
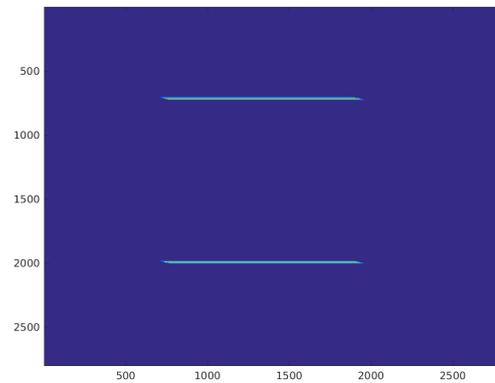
(a) $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ (b) $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$, Fouriertransformation

Abbildung 34: Beispiel zum Tensorprodukt aus zwei eindimensionalen Mexican-Hat-Wavelets. Da es sich bei dem Mexican-Hat-Wavelet um ein reelles Wavelet handelt, ist nur der Realteil dargestellt.



(a) Roulettransformation mit Morlet-Wavelet



(b) Roulettransformation mit Mexican-Hat-Wavelet

Abbildung 35: Ausschnitt aus einer Roulettransformation mit festem Skalierungspaar und festem Rotationswinkel. Dabei wird links das Morlet-Wavelet gewählt, rechts hingegen das Mexican Hat-Wavelet. Da der Träger des Mexican-Hat-Wavelets sehr groß ist, muss mit sehr kleinen Skalen gearbeitet werden. Dies macht dieses Wavelet für die Implementierung der Roulettransformation sehr instabil.

Für unterschiedliche Werte von s_2 können die zurückgewonnenen Signale f über alle s_2 gemittelt werden. So werden numerische Fehler minimiert. Insgesamt ist die Rücktransformation sehr anfällig für die Skalenzahl in s_1 und α . Wenn die Skalen oder die Drehwinkel 'ungeeignet' gewählt werden, gehen viele Informationen verloren. Manche Roulets haben eine Eigenschaft, die es unmöglich macht, polynomiale Anteile des Signals zu rekonstruieren. Dies ist verständlich, da es sich bei der Isomorphie um eine Isomorphie auf dem Raum L_2 handelt. Dieser enthält keine Polynome.

Definition 5.3 (verschwindende Momente)

Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ hat l *verschwindende Momente*, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^k f(t) = 0, \quad \text{für: } k = 0, \dots, l - 1$$

gilt.

Im Tensorproduktfall $\psi = \psi_1 \psi_2$ wird die Anzahl der verschwindenden Momente der Wavelets ψ_1 und ψ_2 betrachtet. Angenommen diese Wavelets haben l_1 und l_2 verschwindende Momente, dann hat $\psi = \max\{l_1, l_2\}$ verschwindende Momente. Diese Polynome liegen im Kern der Transformation und gehen bei Hin- und nachfolgender Rücktransformation verloren.

In Abbildung 36 ist ersichtlich, dass der lineare Anteil verloren geht und nur die Kanten erhalten bleiben.

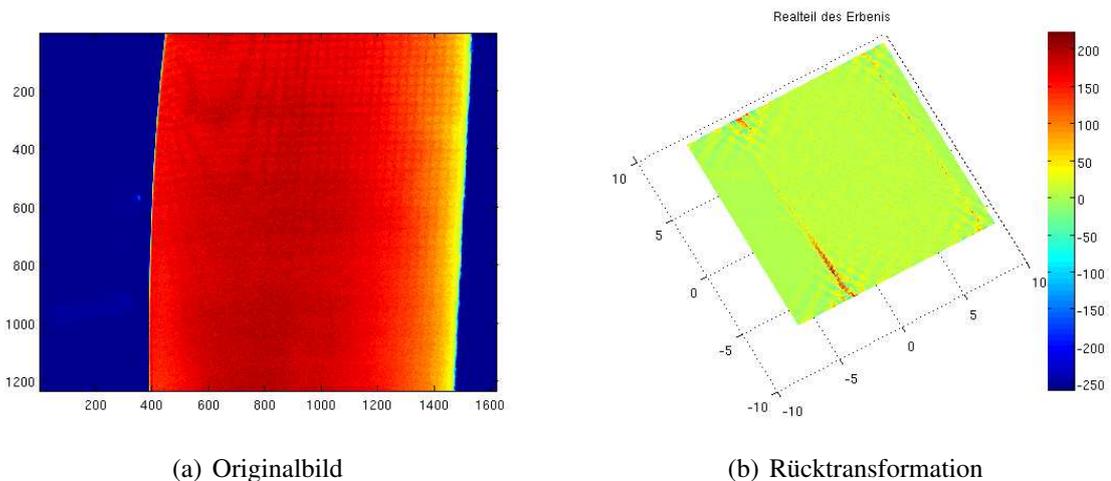


Abbildung 36: Das Originalbild und die Rücktransformation einer Roulettransformation mit dem Morlet-Wavelet ($\sigma = 5$ und $s_1 = [-163.4171 \quad -60.6476 \quad -22.5076 \quad -8.3531 \quad -3.1000 \quad 3.1000 \quad 8.3531 \quad 22.5076 \quad 60.6476 \quad 163.4171]$ und $s_2 = [6.2000 \quad 15.1874 \quad 37.2027 \quad 91.1308 \quad 223.2321]$).

5.3 Vorstellung der in matlab implementierten Software

Software mit GUI Die oben eingeführte Roulettransformation wird in Matlab implementiert. Die Abbildungen 37 - 40 zeigen die erstellte matlab GUI (GUI = general user interface).

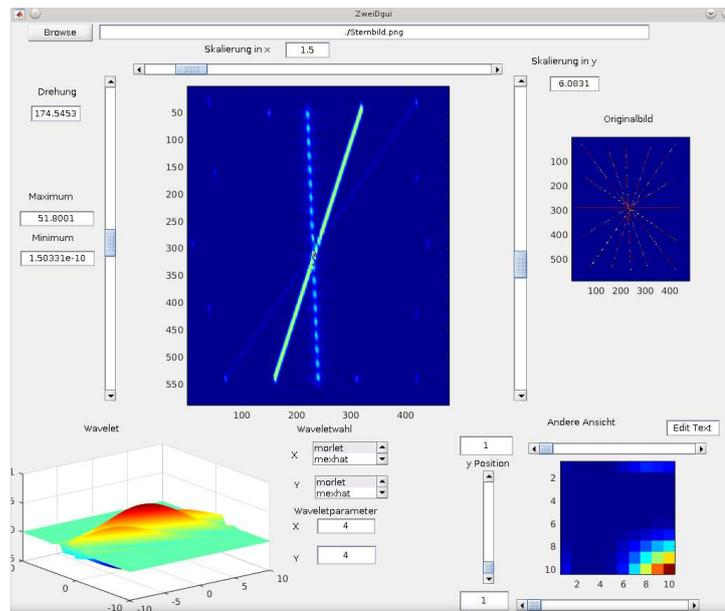


Abbildung 37: Die GUI der Roulettransformation. Die Transformation ist mit einem Tensorprodukt-Morlet-Wavelet berechnet worden. Die Transformation lokalisiert die Singularitäten des Bildes in eine Richtung.

Es kann mit dem Browse Button das zu transformierende Bild ausgewählt werden. Dieses wird in dem Fenster mit der Überschrift “Originalbild” auf der rechten Seite angezeigt. Links, in dem großen Fenster, ist die Roulettransformation für die aktuelle Konfiguration aller Parameter angezeigt. Dabei wird der Absolutbetrag der einzelnen Koeffizienten aufgetragen. Die entsprechenden Variablen können mit den unterschiedlichen Schiebern variabel eingestellt werden. In dem unteren linken Bild wird das zu den ausgewählten Parametern passende Roulet dargestellt. Rechts davon lassen sich die Waveletparameter einstellen.

Bei der Interpretation der Bilder ist darauf zu achten, dass es sich nur um einen Teil der Transformation handelt. Um alle Singularitäten finden zu können, müssen alle Drehungen und Skalierungen betrachtet werden. Dies ist in der GUI nicht betrachtet worden, da die Rechenzeit zu lang wird, um eine ruckelfreie Bewegung der Schieber zu garantieren.

5.4 Beispiele zur Kantendetektion

In diesem Abschnitt werden Beispiele zur Kantenerkennung vorgestellt. Anhand dieser wird die Wirkung der Transformation deutlich und die theoretischen Aussagen können in der Praxis trotz Diskretisierung des kontinuierlichen Modells genutzt werden.

Als erstes werden alle Bilder mit Zeropadding fortgesetzt, bevor die eigentliche Transformation berechnet wird. Dies lässt mehr Freiheiten in der Wahl der Skalierungen und der Drehwinkel zu, da der Träger des Roulets ohne Zeropadding sehr schnell, gerade durch Rotationen, außerhalb des Bildes liegen kann. Das führt zu linienförmigen Artefakten, die in jeder Skalierung zu sehen sind und über die ganze Transformation verlaufen.

Die eigentliche Transformation wird mit einem Tensorprodukt-Morlet-Wavelet mit Waveletparameter $\sigma = 5$ berechnet. Für die Skalierungswahl wird $s_2 = \sqrt{s_1}$ gewählt. Bei der Darstellung der transformierten Bilder werden unterschiedliche Anzahlen an Skalierungen und Rotations-

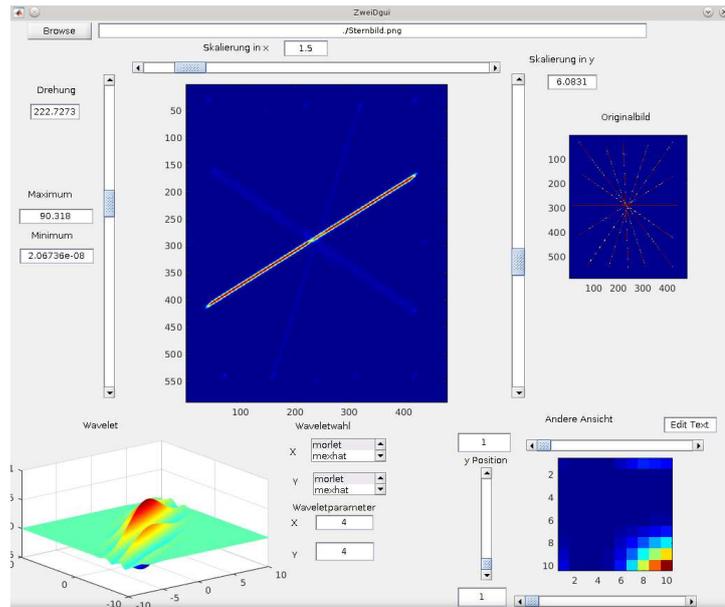


Abbildung 38: Die GUI der Roulettransformation. Hier wird im Gegensatz zu Abbildung (37) das Roulet um 50° gedreht. Die Transformation sieht andere Singularitäten des Bildes.

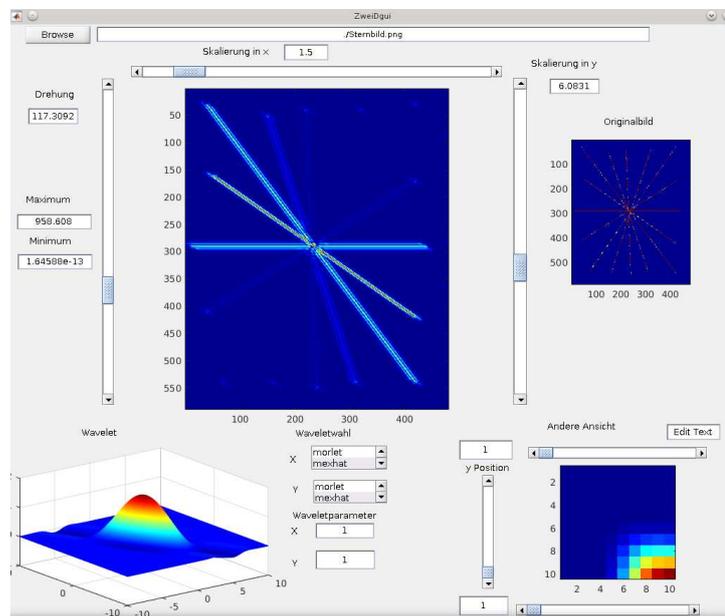


Abbildung 39: Die GUI der Roulettransformation. Hier wird als Tensorproduktroulet das Mexican Hat Wavelet gewählt. Auch dieses Wavelet lokalisiert die Singularitäten in eine Richtung.

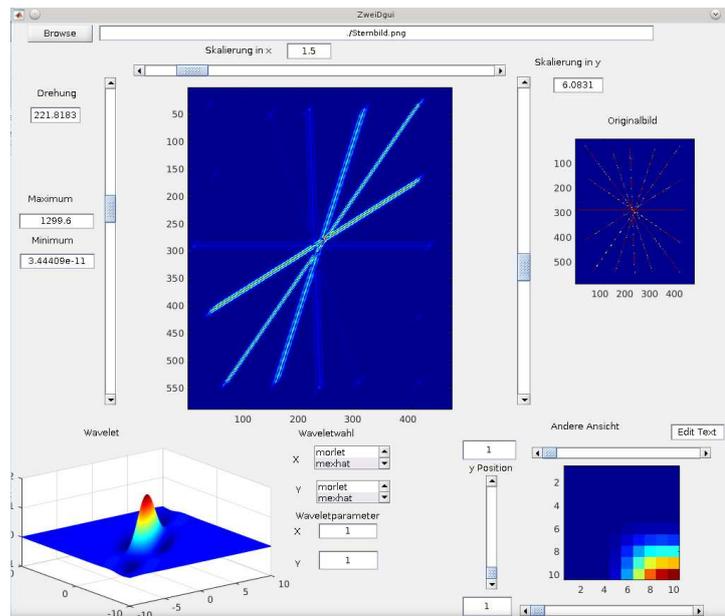


Abbildung 40: Die GUI der Roulettransformation. Hier ist das Roulet um gute 100° weiter gedreht worden. Somit werden andere Singularitäten gefunden.

winkeln verglichen. Dabei wird immer der Absolutbetrag der Koeffizienten aufgetragen und ein für jede Transformation angepasstes Thresholding berechnet.

Werden unterschiedlich viele Rotationen betrachtet, dann kann es vorkommen, dass die Liniensingularitäten durch die Mittelung über alle Transformationen weniger deutlich zu erkennen sind als die Punktsingularitäten. Dies ist auch durch die Sätze 4.16 und 4.17 zu erklären. Die Punktsingularitäten werden von allen Parametervarianten erkannt, wohingegen die Liniensingularitäten nur von einer Transformation erkannt werden. Dieser Effekt wird durch die Mittelungen abgeschwächt. In den hier dargestellten Transformationen wurde die Farbcodierung entsprechend angepasst.

Zu jedem Bild wird weiterhin ein Bild gezeigt, in dem die Koeffizienten, die für unterschiedliche Richtungen gefunden werden, abhängig von der Richtung farbcodiert sind. Damit wird die Abhängigkeit der gefundenen Kanten von dem Rotationswinkel sichtbar.

Zu Beginn werden einfache geometrische Bilder, wie ein Kreis oder ein Viereck, betrachtet. Später werden auch komplexere Bilder herangezogen.

5.4.1 Geometrische Bilder

In Abbildung 42 und 41 werden unterschiedliche Transformationen des Kreises 42(a) gezeigt. Dabei ist in Abbildung 42 (b) - (e) deutlich zu erkennen, dass mit unterschiedlichem Rotationswinkel unterschiedliche Richtungen der Singularität gefunden werden. In Abbildung 41 sind diese unterschiedlichen Richtungen farbcodiert. Damit ist genau zu sehen, wo die Kante in ähnliche Richtungen verläuft. Werden genug dieser Rotationswinkel betrachtet, kann die ganze Singularität beschrieben werden. Dies ist in 42 (f) dargestellt.

In der Abbildung 43 wird ein Viereck betrachtet. In den Abbildungen 43(b), (c) und (d) werden drei verschiedene Rotationen berechnet. Es wird hier erneut deutlich, dass die Roulettransformation abhängig von ihrem Rotationsparameter unterschiedliche Richtungen erkennt. Dieses

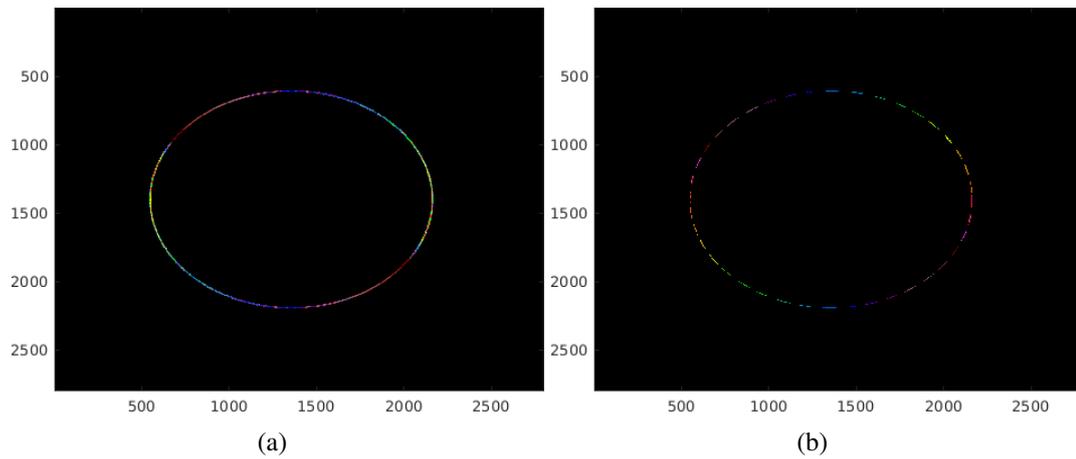


Abbildung 41: In diesen beiden Bildern sind die unterschiedlichen Richtungen farbcodiert. Deutlich ist zu erkennen, dass jede Richtung von einer anderen Transformation erkannt wird. Dabei wurden im rechten Bild weniger Rotationen betrachtet als im linken Bild.

Verhalten passt zu den Ergebnissen in Kapitel 3.3.3. In 43(e) sind 10 Rotationen zusammen dargestellt. Es werden natürlich auch die Kanten in horizontale und vertikale Richtung gefunden. Dies ist in Abbildung 44(a) mit farbcodierten Richtungen dargestellt. In Abbildung 43(f) wird ein nicht ausgefülltes Viereck transformiert. Die Transformationen unterscheiden sich erst deutlich, wenn ein Ausschnitt betrachtet wird. Dort ist zu sehen, dass beide Kanten der Singularität gefunden werden. Dabei ist es wichtig, dass die Skalen klein genug sind, damit der Träger des Wavelets nicht zu breit wird und die unterschiedlichen Kanten nicht mehr zu erkennen sind.

In Abbildung 45 ist ein Fünfeck transformiert worden. Auch hier ist deutlich die Abhängigkeit von der jeweilig gewählten Richtung zu sehen. Auch werden alle Richtungen erkannt. In Abbildung 44 (b) sind wieder die Richtungen farbcodiert. Dabei weisen Kanten in ähnliche Richtungen ähnliche Farben auf. Die rote und gelbe Kante zeigen in ähnliche Richtungen. Selbes gilt auch für die blaue und violette Kante. Die grün-gelbe Kante ist deutlich andersfarbig. Die Punkte entstehen, da die Kante nicht genau parallel zu dem Pixelverlauf liegt. Dadurch findet die Transformation an den Stellen mit Pixelsprung Punktsingularitäten. Diese treten deutlich hervor.

5.4.2 Komplexere Bilder

Nun wird die Roulettransformation für unterschiedliche Bilder mit Kanten in viele verschiedene Richtungen berechnet. In der Abbildung 46 sind unterschiedliche Roulettransformationen des Bildes 46(a) zu sehen. In 47(b) ist die Roulettransformation für einen Rotationswinkel aufgetragen. Hier werden Kanten in horizontale Richtung gefunden. Im Bild 46 (c) ist dies durch die selbe Farbe in diese Richtung zu erkennen. Die Kanten in unterschiedliche Richtungen sind anders gefärbt und zeigen daher in unterschiedliche Richtungen. Das Bild 46 (d) zeigt die Summe von 15 Rotationen.

Die Linienstärke des Bildes 46(a) ist, im Vergleich zu den bisher betrachteten Bildern, sehr viel dicker. In der Roulettransformation des Bildes in 46(b) und (d) ist zu erkennen, dass nun

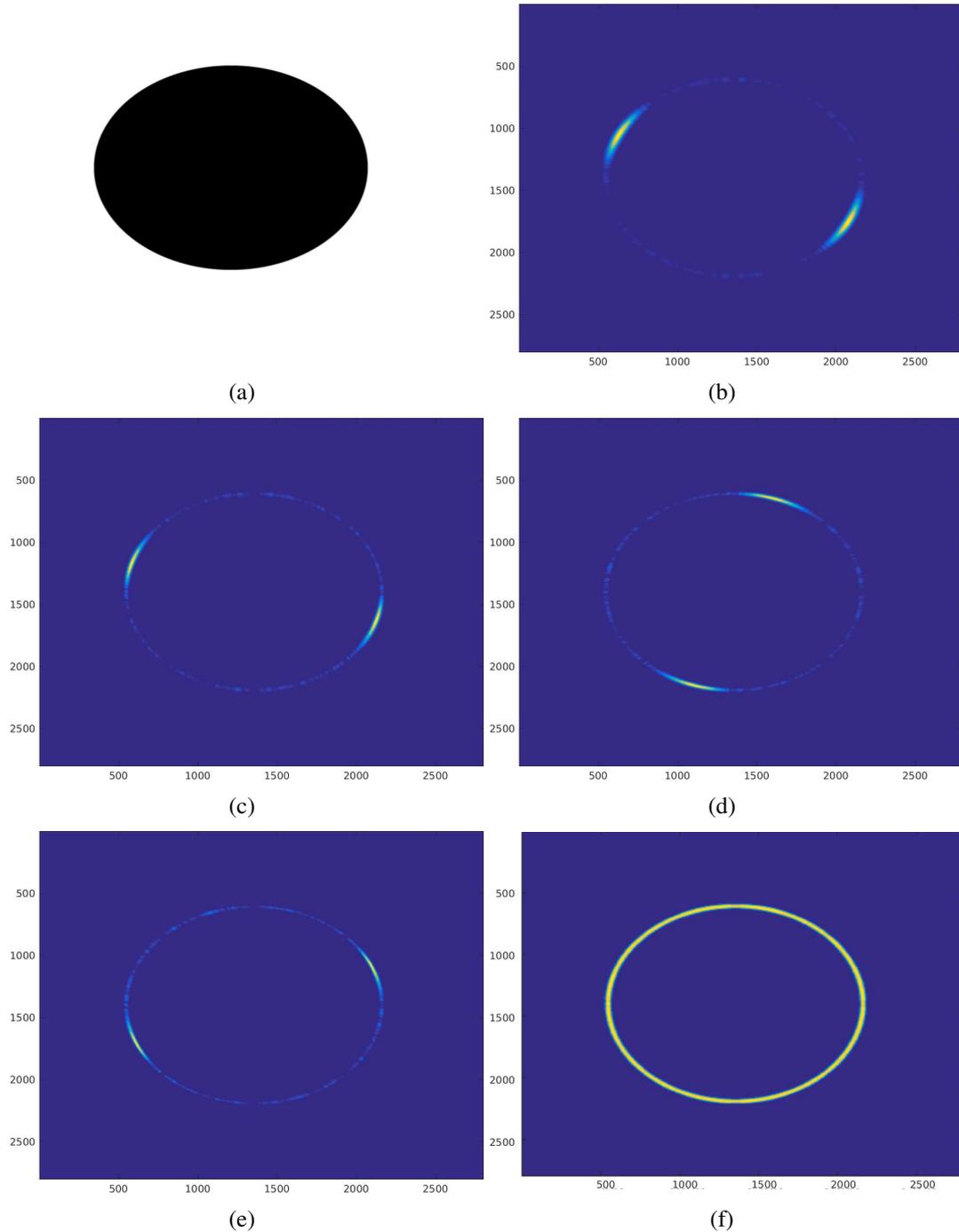


Abbildung 42: Das Bild (a) zeigt das Originalbild. In den Bildern (b) - (f) wird jeweils mit $s_2 = \sqrt{s_1}$ gearbeitet. Es ist der Absolutbetrag der Rouletttransformation für festes α aufgetragen. In Bild (b) ist die Transformation mit $s_1 = [1.0000 \ 0.8400 \ 0.6800 \ 0.5200 \ 0.3600]$ berechnet. In den anderen Bildern ist nur der Skalierungsvektor $s_1 = [0.5 \ 0.35]$ berechnet. In allen Bildern wird mit Zeropadding gearbeitet.

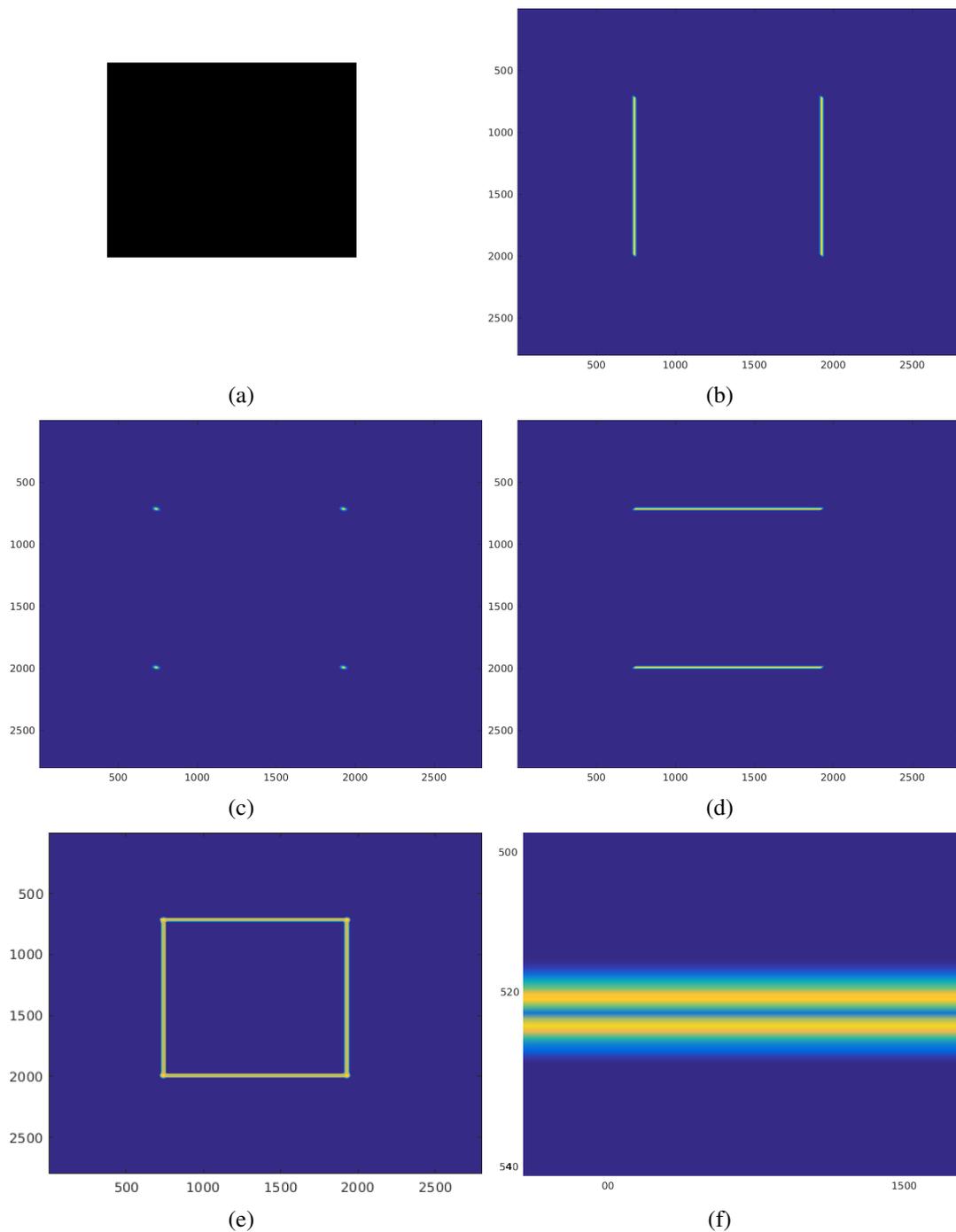


Abbildung 43: In diesen Bildern wird die Rouletttransformation des Vierecks (a) betrachtet. Es ist deutlich zu erkennen, dass je nach betrachtetem Rotationswinkel entweder die vertikalen Kanten (d), die horizontalen Kanten (c) oder nur die Ecken (c) gefunden werden. In (e) sind die selben Skalierungen und 10 Rotationen summiert dargestellt. Die Kanten sind deutlich zu erkennen. Ein weiteres Phänomen ist in (f) zu sehen. Sobald die zu detektierende Kante sehr dick wird, werden beide Kanten gefunden. Es ist in allen Bildern der Absolutbetrag der Rouletttransformation mit $s_2 = \sqrt{s_1}$ und den Skalierungen $s_1 = [0.5 \ 0.4 \ 0.3]$ dargestellt.

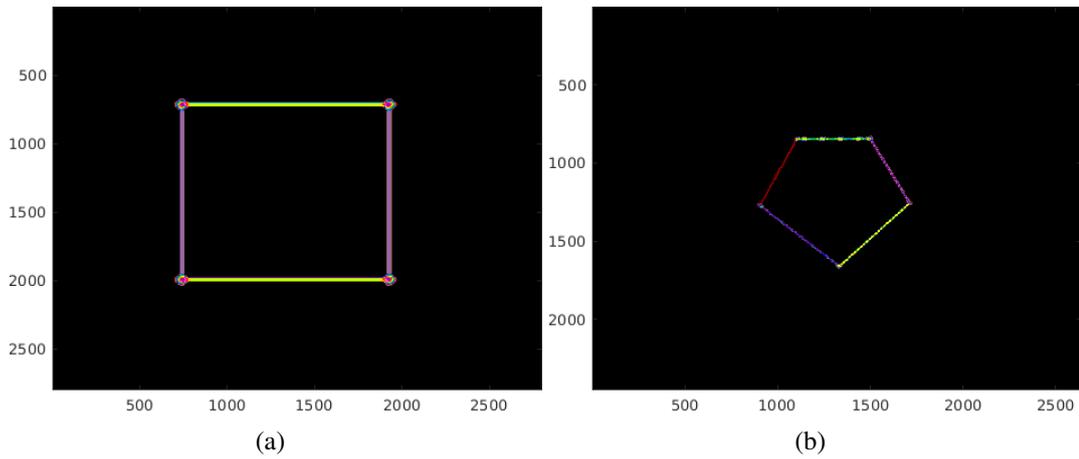


Abbildung 44: In diesen beiden Bildern sind die unterschiedlichen Richtungen farbcodiert.

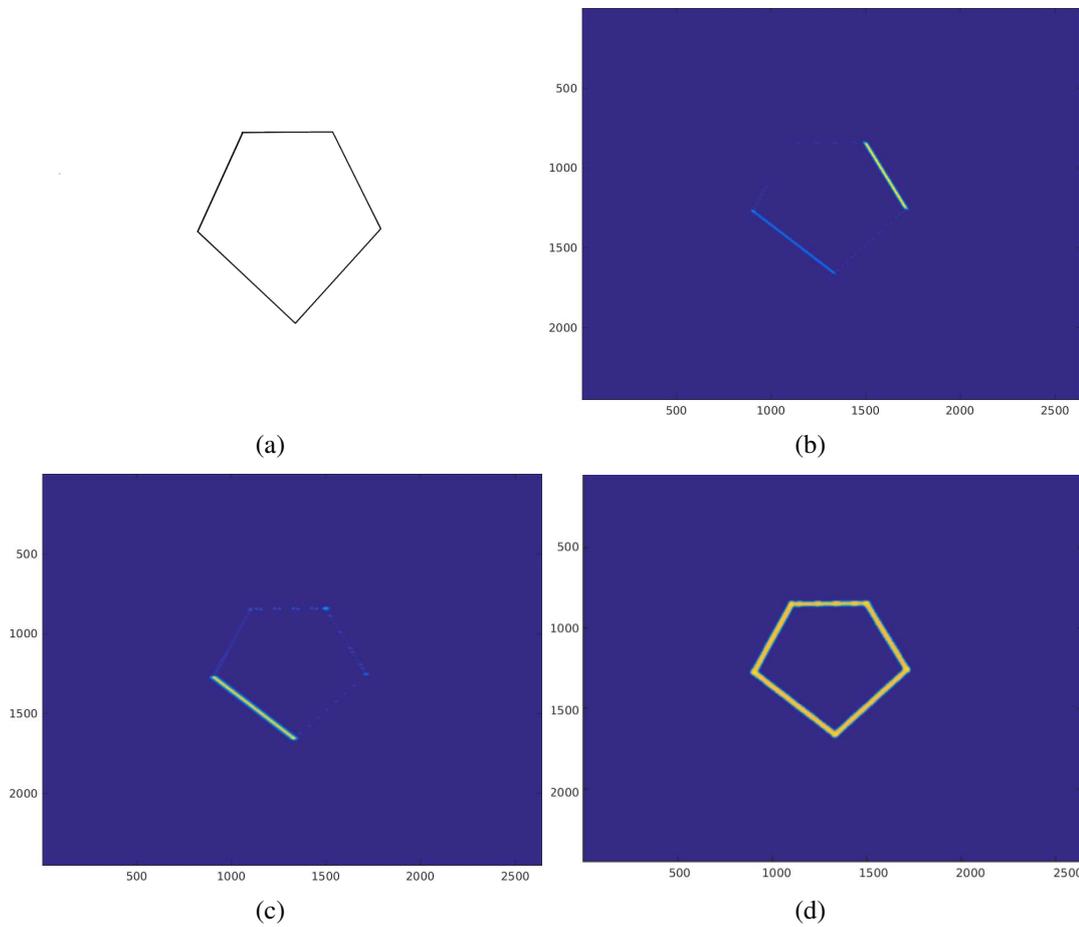


Abbildung 45: Das Bild (a) zeigt das zu transformierende Bild. In den Bildern (b) und (c) ist jeweils der Absolutbetrag der Rouselettransformation für eine feste Rotation dargestellt. Dabei wurde $s_2 = \sqrt{s_1}$ gewählt und $s_1 = [0.5 \ 0.4 \ 0.3]$ betrachtet. Die Kanten in unterschiedliche Richtungen sind deutlich zu erkennen. Werden mehrere Rotationen berechnet, können alle Kanten gefunden werden. Hier werden 15 Rotationen berechnet. Dies ist in (d) zu sehen.

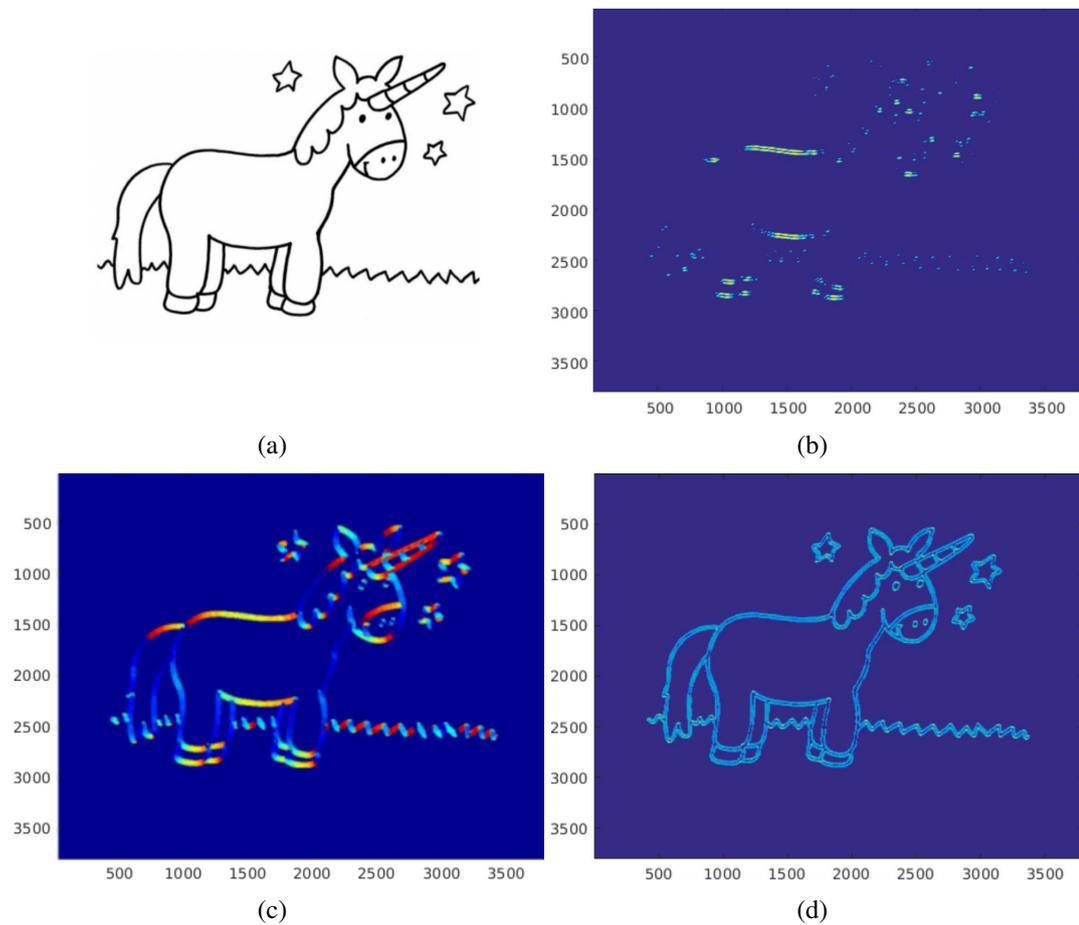


Abbildung 46: Die Rouletttransformationen des Bildes (a). In (b) sind die Absolutbeträge der Koeffizienten für einen Rotationswinkel berechnet. Die Summe über 15 Rotationen ist in (d) dargestellt. In (c) sind unterschiedliche Richtungen unterschiedlich farbcodiert.

beide Kanten der Linie gefunden werden. Dasselbe Verhalten tritt außerdem in Bild 48(b) auf. Das Bild 47 hat sehr dünne Linien. Daher wird hier nur eine Kante erkannt.

Zusammenfassend bestätigen die Ergebnisse der Implementierung der Rouletttransformation die theoretischen Ergebnisse. Die jeweiligen Singularitäten werden in beliebige Richtungen in allen Bildern zuverlässig erkannt. Dazu sind eine entsprechend große Anzahl an Rotationen und passend gewählte Skalierungen notwendig.

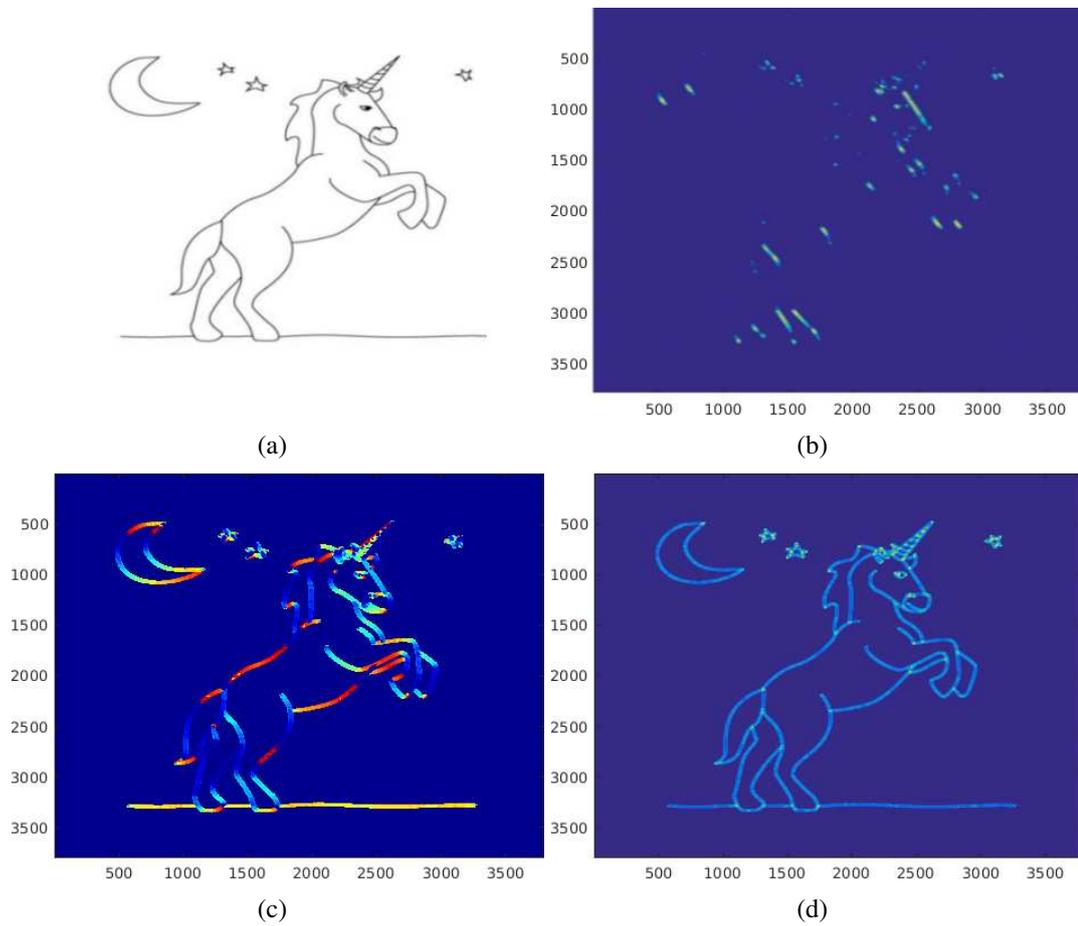


Abbildung 47: Die Rouletttransformationen des Bildes (a). In (b) sind die Absolutbeträge der Koeffizienten für einen Rotationswinkel berechnet. Die Summe über 25 Rotationen ist in (d) dargestellt. In (c) sind unterschiedliche Richtungen unterschiedlich farbcodiert.

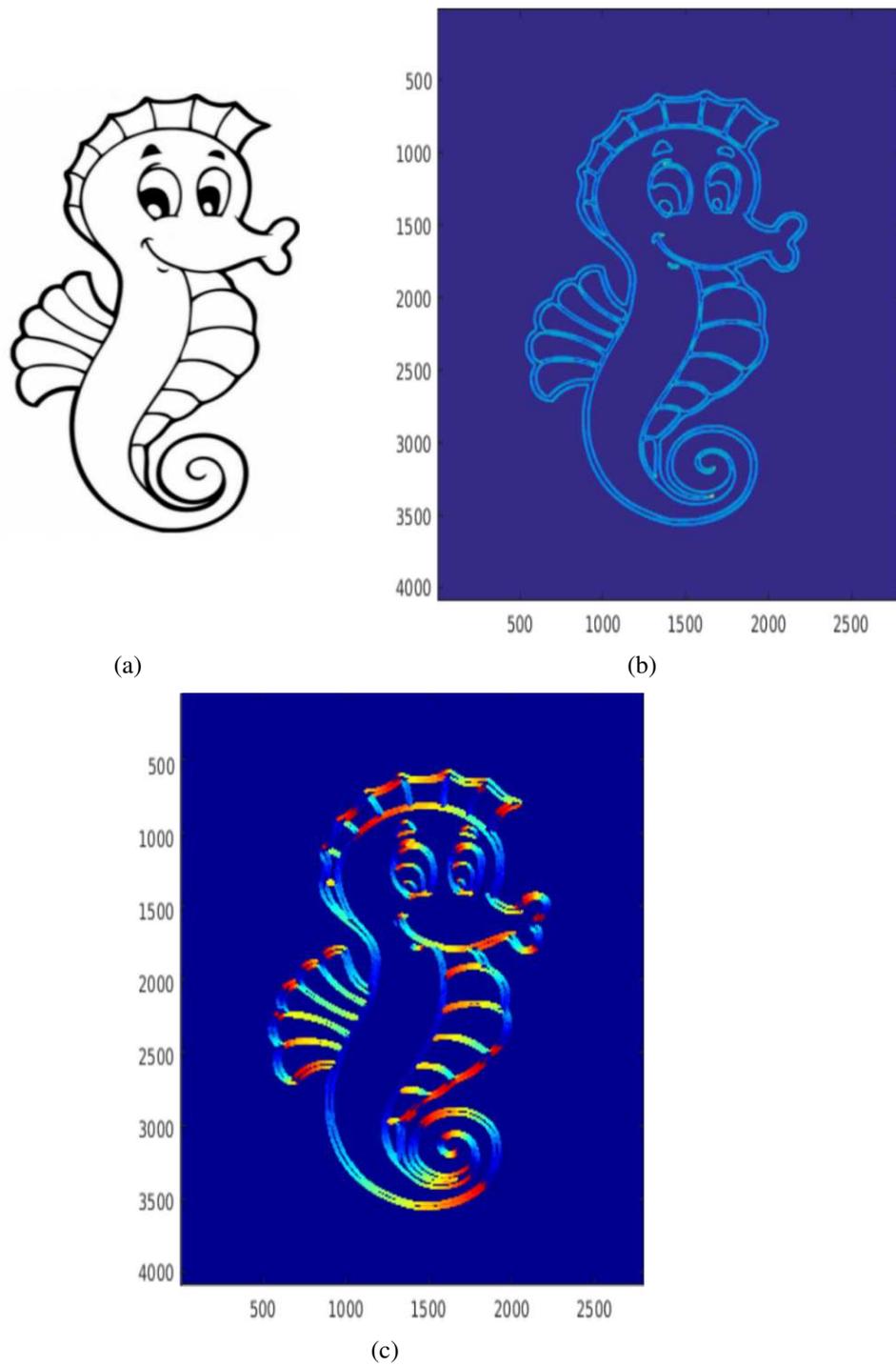


Abbildung 48: Die Rouletttransformationen des Bildes (a). In (b) sind die Absolutbeträge der Koeffizientensummen für 20 Rotationswinkel aufgetragen. In (c) sind unterschiedliche Richtungen unterschiedlich farbcodiert.

6 Roulets in der Praxis - Rattermarken

Im folgenden Kapitel wird die Roulettransformation auf Deflektometriebilder angewendet und erste Ergebnisse und Erkenntnisse zusammengestellt. Ziel dabei ist es, herauszufinden, ob auf dem aufgenommenen Teil der Karosserie eines Autos bei der Lackierung ein Fehler auftritt. Es geht um die Lokalisierung von Einschlüssen im Lack, sowie um das Auffinden von langwelligigen Rattermarken, Kratzern und das Bewerten von Orangenhaut. Abschließend wird ein kurzer Überblick über Möglichkeiten und Lösungen gegeben.

6.1 Darstellungsvarianten der Roulettransformation

Die Roulettransformation eines zweidimensionalen Bildes erzeugt ein vierdimensionales Ergebnisbild. Das erfordert eine besondere Darstellung. Dabei werden folgende Möglichkeiten in Anlehnung an [3] geprüft:

- 1) Einzelbild für jedes Skalenpaar: Es ist genau zu erkennen, bei welcher Skalierung der Fehler gefunden wird und welche Skalen überflüssig sind. Dabei werden jedoch sehr viele Bilder erzeugt.
- 2) Mittelwertbild: Es werden für alle gewünschten Skalen Roulettransformationen berechnet. Ausgegeben werden nur die Mittelwerte über alle berechneten Skalen, in der Hoffnung, dass sich dadurch der sehr große Ergebnisraum auf ein Bild reduzieren lässt. Wenn ein Fehler in nur wenigen Skalen vorkommt, dann ist es möglich, dass er in diesem Bild nicht mehr erkannt wird. Auch die Randartefakte überlagern gerade die Fehler am Bildrand.

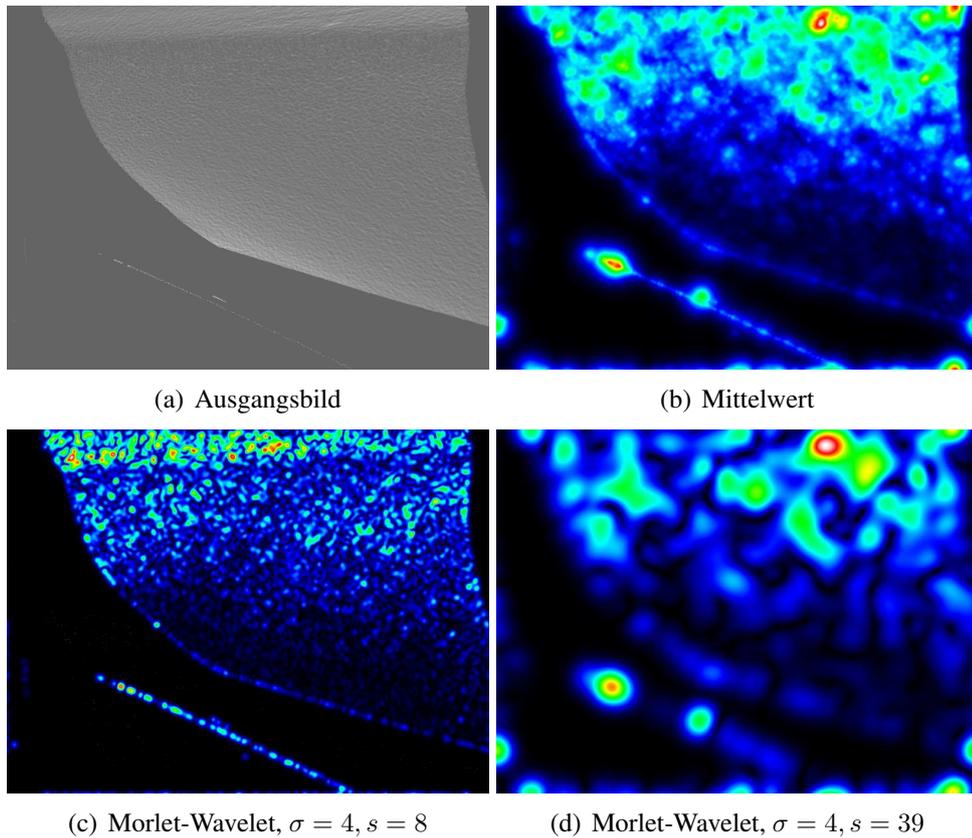


Abbildung 49: Roulettransformation des linken Ausgangsbildes mit 100 Skalen, wobei der Mittelwert über alle Skalen in Bild (b) aufgetragen ist. Die Delle am oberen rechten Rand des Werkstückes ist deutlich als großer Koeffizient im rechten Bild erkennbar. Bei der Betrachtung der einzelnen Skalen fällt auf, dass in den kleinen Skalen die relativ große Delle nicht sichtbar ist. Das liegt an der Größe des Trägers der Roulets bei den verschiedenen Skalen.

6.2 Lokale Artefakte

Im Folgenden wurde immer mit dem Morlet-Wavelet mit einem Waveletparameter $\sigma = 4$, $\sigma = 2$ oder dem Mexican-Hat-Wavelet gearbeitet. Diese liefern, aus Erfahrungswerten die besten Ergebnisse. Die betrachteten Skalen sind linear zwischen 0.2 und 40 gewählt. Die Bilder hatten eine Größe von 1624×1234 und waren damit $634KB$ groß.

Die lokalen Fehler lassen sich mit Hilfe der Roulettransformation meistens gut bestimmen, wie in Abbildung 49, 50, 51, 52. Vor allem das in beide Richtungen gleich skalierte Morlet-Wavelet hat sich bei den Testbildern bewährt. Gerade in den kleinen Skalen, also den hohen Frequenzen, werden die lokalen Einschlüsse in großen Koeffizienten sichtbar. Eindellungen werden eher in großen Skalen sichtbar. Die Maximumbilder sind nicht immer zielführend. Gerade durch starke Randartefakte kann es zur Überlagerung kommen und der eigentliche Fehler ist nicht mehr zu erkennen.

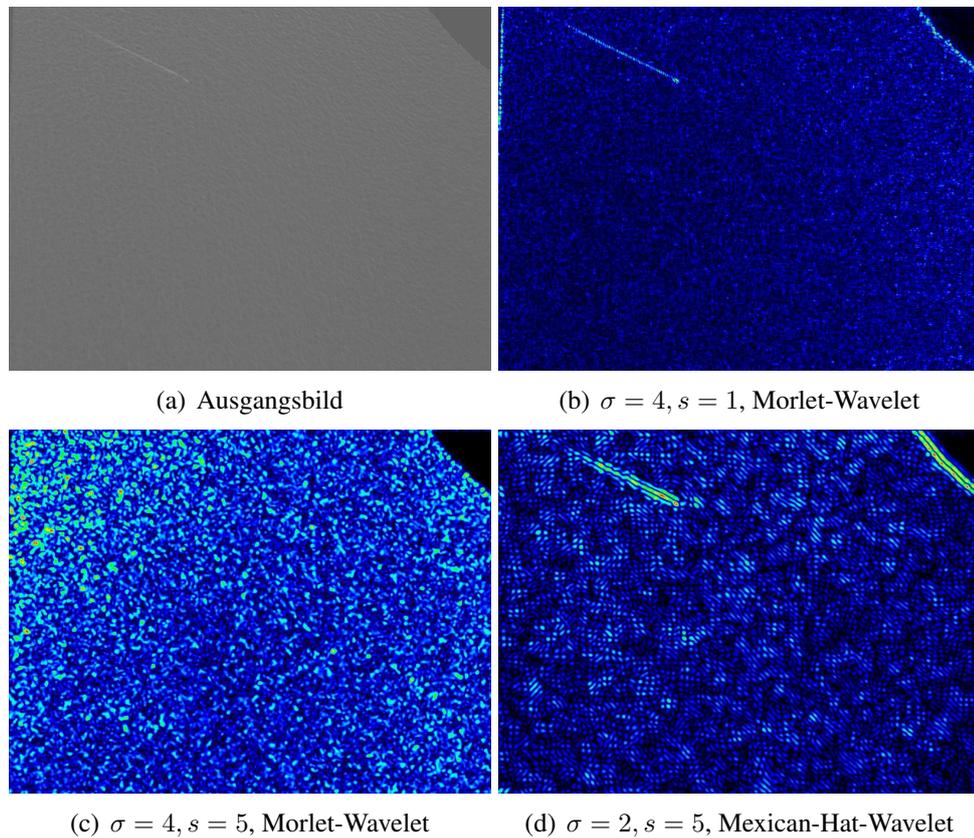


Abbildung 50: Roulettransformation des Ausgangsbildes (a). Der Fehler ist der Kratzer in der oberen linken Bildecke. In den kleinen Skalierungen des Roulets, also in den hohen Frequenzen, fällt der Kratzer deutlich auf. Bei größeren Skalierungen geht dieser Fehler jedoch verloren. Noch deutlicher ist der Kratzer bei der Transformation mit einem isotrop skalierten Mexican-Hat-Wavelet zu sehen. Dies liegt an den wenigen Schwingungen des Roulets.

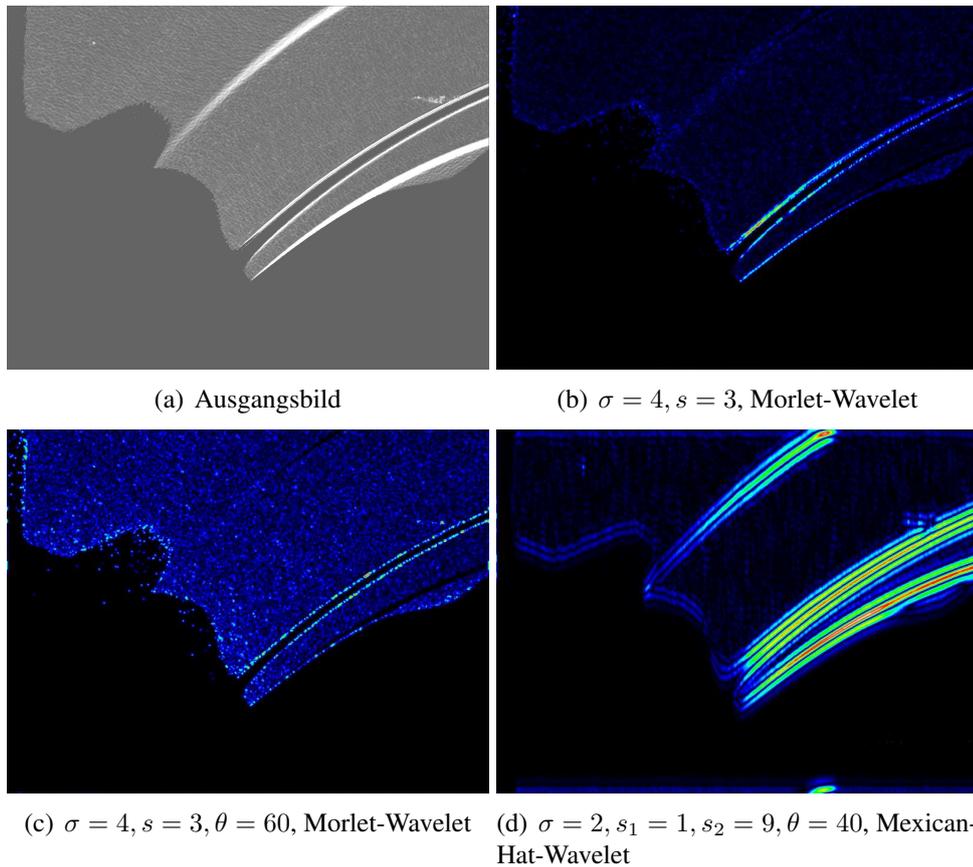


Abbildung 51: Rouletttransformation des Ausgangsbildes (a). Dabei ist klar zu erkennen, dass die Rotation einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis hat. Gerade die Kanten in die Richtung des Roulets treten stark hervor. Nach der Drehung liegen die Kanten nicht mehr in derselben Richtung, in der das Roulet ausgerichtet ist. Der Kratzer ist nun besser zu erkennen. Trotzdem wird er immer noch von den Randartefakten überlagert.

Hierbei treten jedoch vor allem zwei Probleme auf:

1. Randartefakte: Sobald die Fehler nahe am Rand liegen, sieht die Rouletttransformation diese Fehler nicht und diese werden zusätzlich von den großen Koeffizienten des Randes überdeckt. Eine Lösung wäre, die Kanten des Werkstückes zu erkennen und stetig (und differenzierbar) mit Hilfe von z. B. Polynomen fortzusetzen. Damit verkleinern sich die Koeffizienten am Rand, da die un stetigen Stellen nicht mehr auftreten, und die eigentlichen Fehler können gefunden werden.
2. Werden viele Skalierungen berechnet, kann es sein, dass der Fehler nur in wenigen Skalierungen gefunden wird. Werden nun die Maxima über alle gerechneten Rouletttransformationen gebildet, kann es sein, dass der Fehler nun verloren geht. Hier müssen noch mehr Tests für eine Bestimmung der Wahl der entsprechenden Skalen durchgeführt werden.

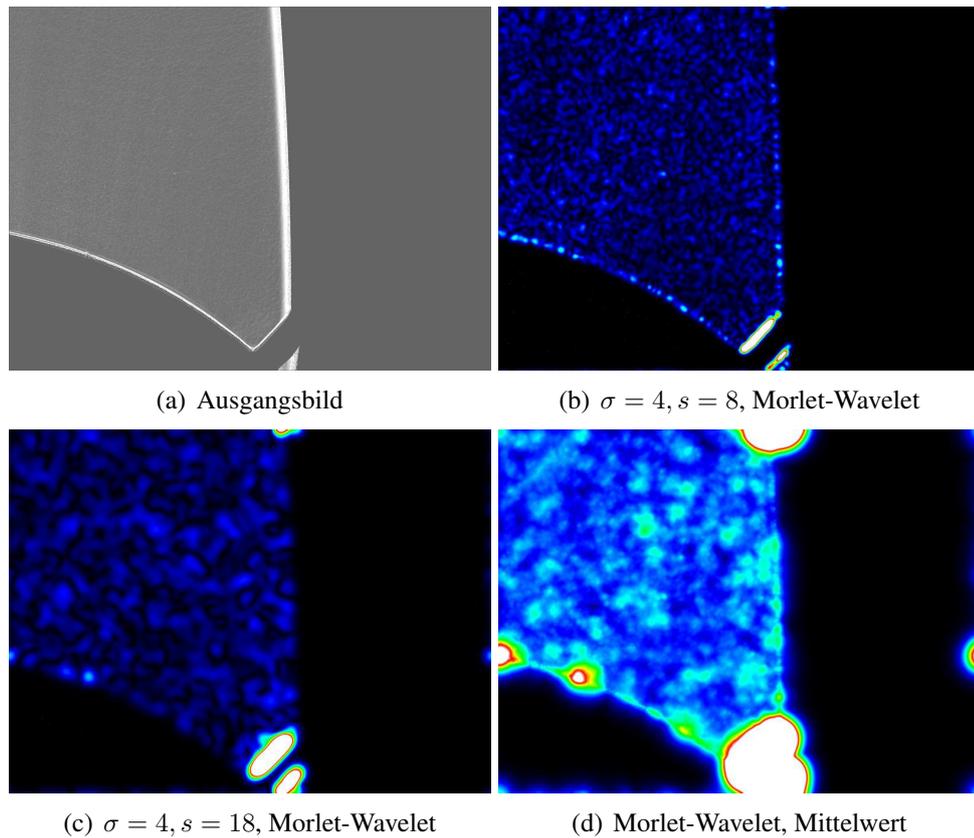


Abbildung 52: CWT des Ausgangsbildes (a) mit unterschiedlichen Roulets. Hier fällt die Überbewertung der Koeffizienten der in der Roulet-Richtung liegenden Kanten auf. Gerade beim Mittelwertbild ist dies deutlich zu erkennen.

6.2.1 Rattermarken

Bei Rattermarken handelt es sich um längliche Vertiefungen bzw. Rillen in eine Richtung auf dem Blech. Diese werden vor allem von dem Mexican-Hat-Wavelet mit zwei unterschiedlichen Skalierungen in beide Richtungen gefunden. Dies ist in Abbildung 53, 55 und 56 dargestellt. Dieses Wavelet ist, wie anfangs definiert, ein reelles Wavelet. Daher findet es die auftretenden Änderungen sehr gut. Hierbei ist jedoch wichtig, dass es in eine Richtung langgestreckt wird, also einen großen Träger hat, und in die andere Richtung einen sehr kleinen Träger, also gestaucht ist. Damit entspricht es genau der Form der Rattermarken und sobald Rattermarken auf dem Blech auftreten, werden sie durch große Koeffizienten in der Transformation sichtbar. Je stärker die Rattermarken ausgeprägt sind, desto größer sind die Koeffizienten der Transformation.

Es ist zu berücksichtigen, dass bisher bei allen Testbildern die Rattermarken parallel zur unteren Bildkante auftraten. Wenn dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, dann müssen mehrere Transformationen mit unterschiedlichen Rotationswinkeln gerechnet werden.

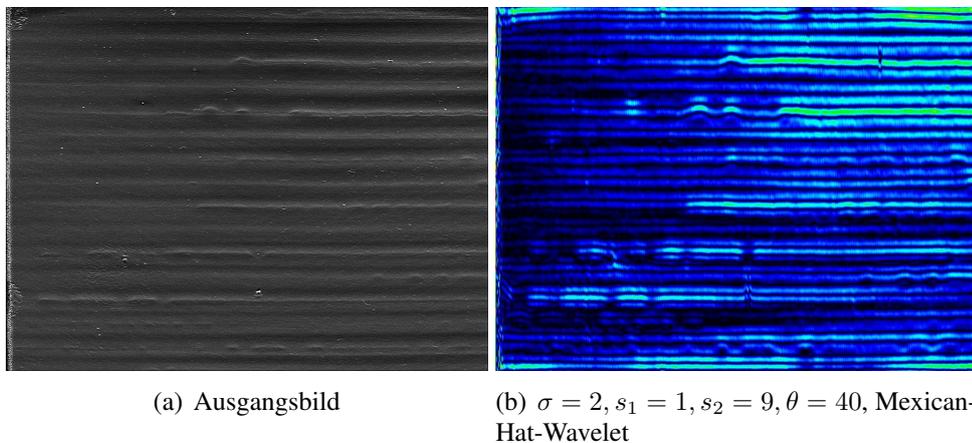


Abbildung 53: Rouletttransformation mit dem Mexican-Hat-Wavelet des linken Ausgangsbildes mit einer kleinen Skala in die y -Achsen-Richtung und einer großen Skala in x -Achsen-Richtung. Die Rattermarken treten deutlich hervor, da das Roulet von der Gestalt zu den Rattermarken passt.

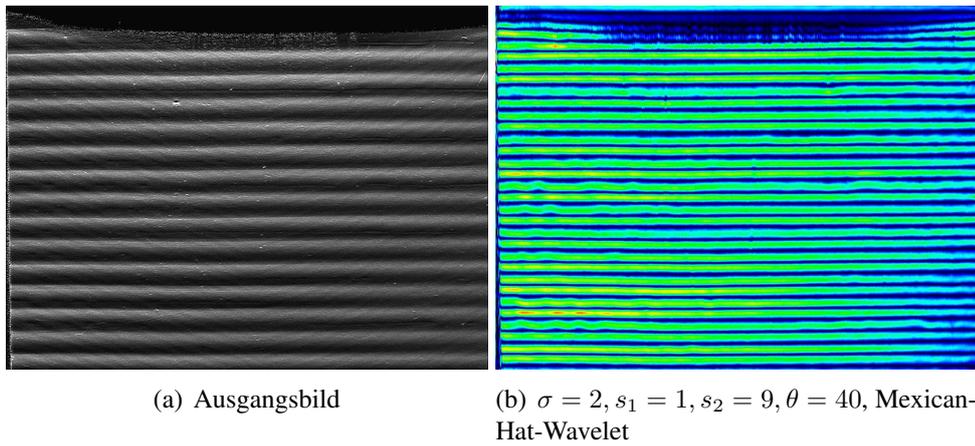
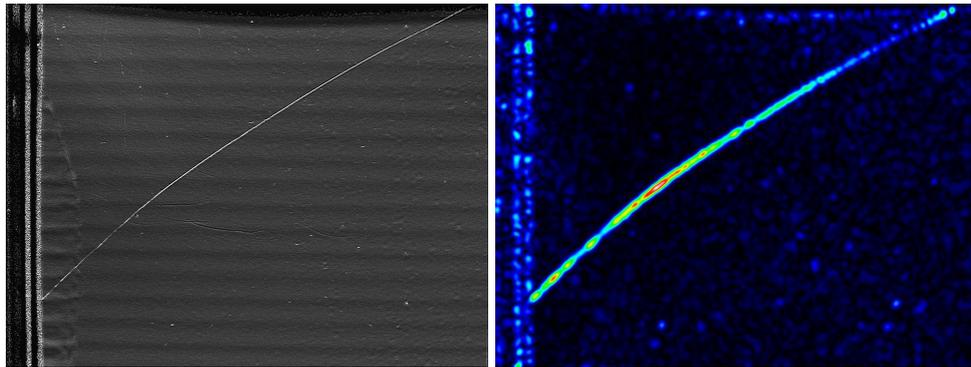


Abbildung 54: Roulettransformation mit dem Mexican-Hat-Wavelet des linken Ausgangsbildes mit einer kleinen Skala in die y-Achsen-Richtung und einer großen Skala in x-Achsen-Richtung. Die Rattermarken treten noch deutlicher hervor. Der Zusammenhang zwischen Stärke der Marken und Größe der Koeffizienten ist gewährleistet.



(a) Ausgangsbild

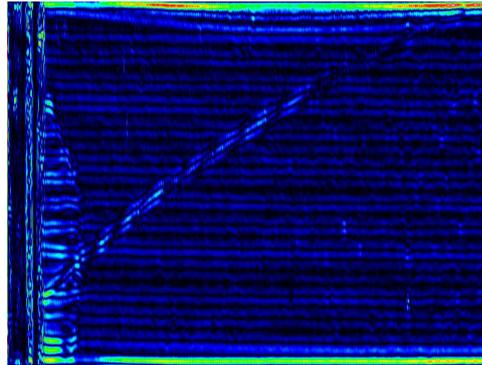
(b) $\sigma = 4, s = 10$, Morlet-Wavelet(c) $\sigma = 2, s_1 = 1, s_2 = 9, \theta = 40$, Mexican-Hat-Wavelet

Abbildung 55: Roulette transformation des Ausgangsbildes (a) mit unterschiedlichen Roulets. Hier ist zu erkennen, dass die Ausrichtung des Roulets einen großen Einfluss auf das Ergebnis hat. Wenn das Roulet nicht in die Richtung des Kratzers ausgerichtet ist, dann ist dieser weniger gut zu erkennen. Gerade bei dem Mexican-Hat-Wavelet fällt auf, dass es die Rattermarken findet und den Kratzer nicht so deutlich wie das Morlet-Wavelet.

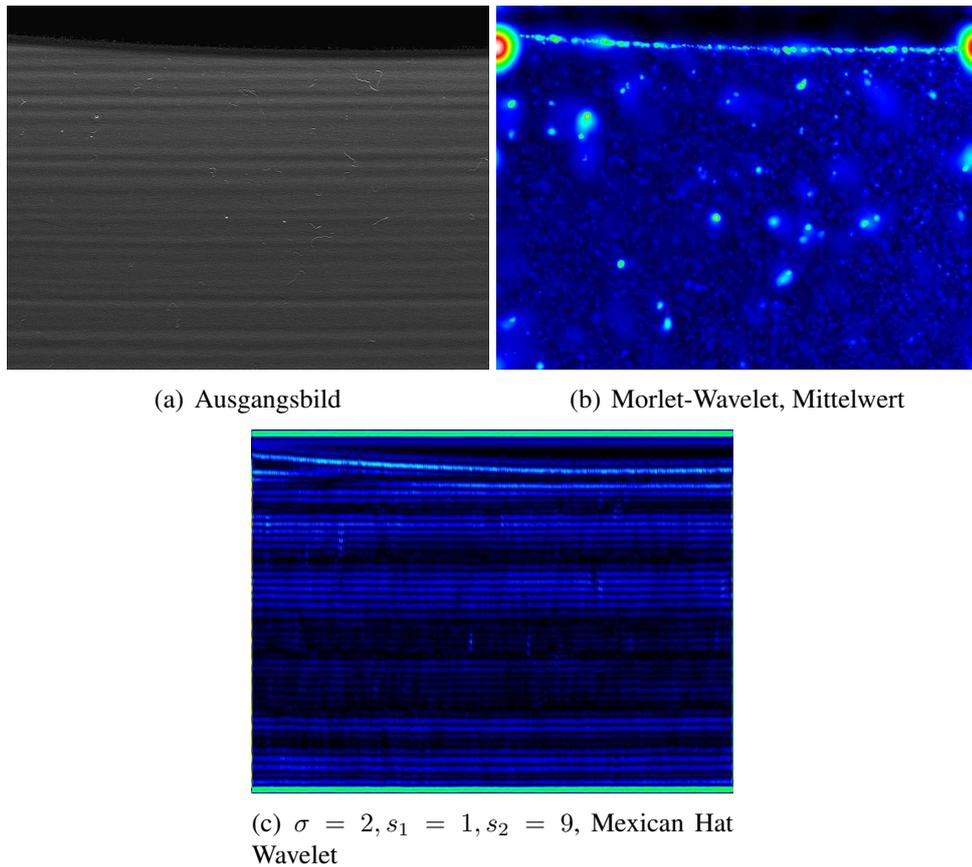
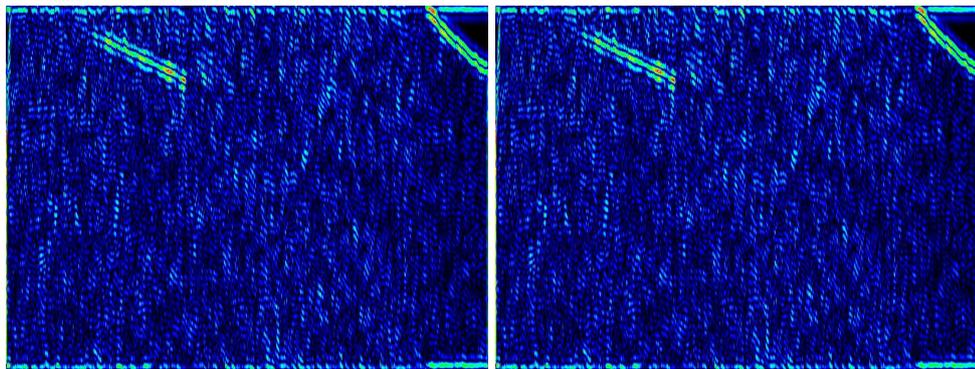


Abbildung 56: CWT des Ausgangsbildes mit unterschiedlichen Skalen. Es wird deutlich, dass das Morlet-Wavelet gerade die lokalen Fehler findet, wohingegen das Mexican Hat Wavelet die langwelligen Veränderungen findet.

6.2.2 Kratzer und Schleifspuren

Um Kratzer auf einem Werkstück zu identifizieren, ist es erforderlich, dass sich der Kratzer nicht am Rand des Werkstückes befindet. Hier ist es zwingend notwendig, ebenso rotierte Roulets zu betrachten, um auch die Kratzer zu finden, die nicht in der Richtung des Roulets liegen, wie Abbildung 57 und 58 zeigen.



(a) Ausgangsbild

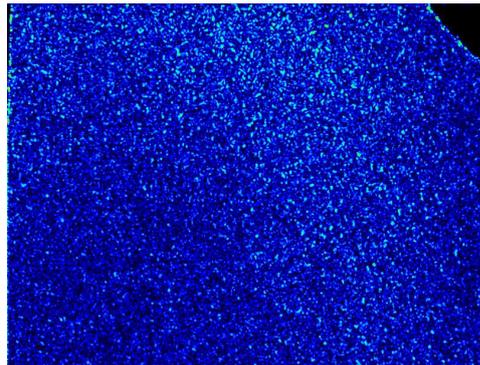
(b) $\sigma = 2, s_1 = 1, s_2 = 9, \theta = 40$, Mexican Hat Wavelet(c) $\sigma = 4, s = 2$, Morlet-Wavelet

Abbildung 57: Roulette transformation mit gedrehtem Mexican-Hat-Roulet(b) und nicht gedrehtem Morlet-Wavelet (c). Die Auswirkung der Drehung und die Wahl des Roulets sind deutlich zu erkennen.

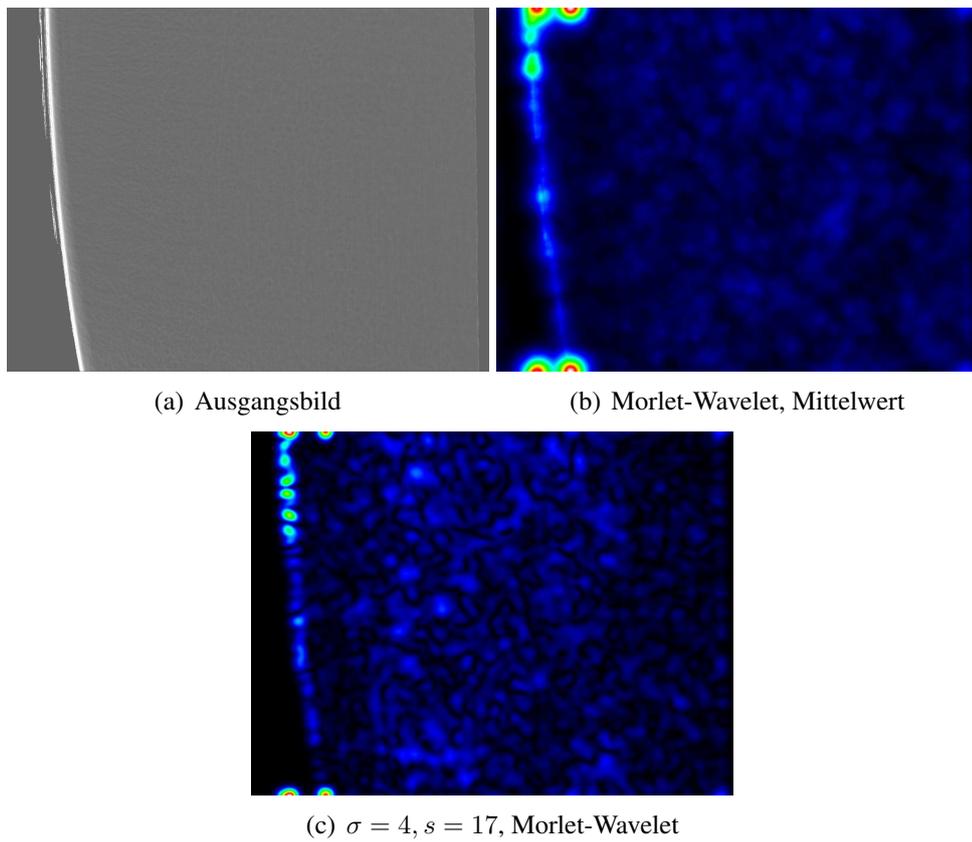


Abbildung 58: Roulettransformation des Ausgangsbildes (a) mit unterschiedlichen Roulets. Die Überlagerung an den Rändern ist deutlich zu erkennen. Die leichten Schleifkratzer sind nicht zu erkennen.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine neue Integraltransformation, die Roulettransformation, eingeführt. Diese wird, wie auch die Wavelettransformation oder Shearlettransformation, durch die quasi-reguläre Darstellung einer Gruppe induziert. Dies ist in Kapitel 2 beschrieben. In diesem konkreten Fall ist die zu Grunde liegende Gruppe die $SIM(2)$. Ein wesentlicher Unterschied zu den bekannten Integraltransformationen ist, dass die Gruppe der Roulettransformation durch anisotrope Skalierungen erweitert wurde. Diese Erweiterung ist notwendig, damit die Roulettransformation Singularitäten im Sinne temperierter Distributionen auflösen kann. In Kapitel 3 wird in einem allgemeinen Konzept gezeigt, dass diese Transformation alle Singularitäten der temperierten Distributionen durch ihre Abklingrate in kleinen Skalen beschreiben kann. In Kapitel 4 werden die genauen Abklingraten an Punkt- und Liniensingularitäten angegeben und zuvor weitere Eigenschaften der Transformation gezeigt.

In Kapitel 5 werden zulässige Funktionen eingeführt und es wird die Implementierung der Roulettransformation vorgestellt. Diese ist schnell umsetzbar, da sie mit Hilfe der FFT berechnet werden kann. Es handelt sich hier im Fourierbereich, wie bei anderen Transformationen dieser Art, um eine Faltung zwischen beiden Funktionen, die gut mit der FFT berechnet werden kann. Die Implementierung findet die Singularitäten von zweidimensionalen Bildern in allen betrachteten Fällen. Weiter wurde auch eine farbliche Zuordnung der einzelnen gefundenen Singularitäten zu den entsprechenden Richtungen umgesetzt. Diese zeigt die Stärke der Roulettransformation deutlich. Alle Kanten in eine Richtung sind in der gleichen Farbe gefärbt. Dies zeigt, dass die Roulettransformation nicht nur theoretisch Singularitäten detektieren kann, sondern diese Ergebnisse auch durch eine entsprechende Implementierung praktisch genutzt werden können.

Literatur

- [1] P. Aniello, G. Cassinelli, E. de Vito, and A. Levrero. Square-integrability of induced representations of semidirect products. *Reviews in Mathematical Physics*, 10(3):301–313, 1998.
- [2] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S. T. Ali. *Two-dimensional wavelets and their relatives*. Cambridge University Press, 2008.
- [3] J.-P. Antoine, P. Vandergheynst, and R. Murenzi. Two-dimensional directional wavelets in image processing. *International journal of imaging systems and technology*, 7(3):152–165, 1996.
- [4] A. Arefijamaal and R. Kamyabi-Gol. On the square integrability of quasi regular representation on semidirect product groups. *Journal of Geometric Analysis*, 19:541–552, 2009.
- [5] A. A. Arefijamaal and R. A. Kamyabi-Gol. A characterization of square integrable representation associated with cwt. *Journal of Science*, 18(2):159–166, 2007.
- [6] R. Berndt. *Representations of linear groups: an introduction based on examples from physics and number theory*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [7] D. Bernier and K. F. Taylor. Wavelets from square-integrable representations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(2):594–608, 1996.
- [8] C. Blatter. *Wavelet - Eine Einführung*. vieweg, 2013.
- [9] J. Bruna, J. Cufí, H. Führ, and M. Miró. Characterizing abelian admissible groups. *Journal of Geometric Analysis*, 25(2):1045–1074, 2015.
- [10] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Stud. Math.*, 24(2):113–190, 1964.
- [11] E. Candes, L. Demanet, D. Donoho, and L. Ying. Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(3):861–899, 2006.
- [12] D. L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser, 2013.
- [13] S. Dahlke, F. De Mari, E. De Vito, D. Labate, G. Steidl, G. Teschke, and S. Vigogna. Coorbit spaces with voice in a fréchet space. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 23(1):141–206, 2017.
- [14] S. Dahlke, G. Steidl, and G. Teschke. Shearlet coorbit spaces: compactly supported analyzing shearlets, traces and embeddings. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 17(6):1232–1255, 2011.
- [15] S. Dahlke, G. Steidl, and G. Teschke. *Shearlet: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, chapter Multivariate shearlet transform, shearlet coorbit spaces and their structural properties, pages 105–144. Springer, 2012.

- [16] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE transactions on information theory*, 36(5):961–1005, 1990.
- [17] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [18] J. G. Daugman and E. de Vito. A mock metaplectic representation. arXiv preprint arXiv:1109.5533, 2011.
- [19] M. Duflo and C. C. Moore. On the regular representation of a nonunimodular locally compact group. *Journal of functional analysis*, 21(2):209–243, 1976.
- [20] J. Fell, H. Führ, and F. Voigtlaender. Resolution of the wave front set using general wavelet transforms. In *Sampling Theory and Applications (SampTA), 2015 International Conference on*, pages 332–336. IEEE, 2015.
- [21] J. Fell, H. Führ, and F. Voigtlaender. Resolution of the wavefront set using general continuous wavelet transforms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, pages 1–62, 2014.
- [22] G. Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Vieweg & Sohn Verlag, 2008.
- [23] G. B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. CRC press, 1995.
- [24] O. Forster. *Analysis 2*. Vieweg & Sohn Verlag, 2006.
- [25] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg & Sohn Verlag, 2007.
- [26] H. Führ. Wavelet frames and admissibility in higher dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 37:6352–6366, 1996.
- [27] H. Führ. *Zur Konstruktion von Wavelettransformationen in höheren Dimensionen*. PhD thesis, Technische Universität München, 1997.
- [28] H. Führ. Continuous wavelets transforms from semidirect products. *Ciencias Matemáticas*, 18(2):179–191, 2000.
- [29] H. Führ. *Abstract harmonic analysis of continuous wavelet transforms*. Springer, 2005.
- [30] H. Führ. Generalized calderón conditions and regular orbit spaces. *Colloquium Mathematicum*, 120(1):103–126, 2010.
- [31] H. Führ and M. Mayer. Continuous wavelet transforms from semidirect products: cyclic representations and plancherel measure. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 8(4):375 – 398, 2002.
- [32] H. Führ and F. Voigtlaender. Wavelet coorbit spaces viewed as decomposition spaces. *Journal of Functional Analysis*, 269(1):80 – 154, 2015.
- [33] P. Grohs. Shearlets and microlocal analysis. *Shearlets*, pages 39–67, 2012.
- [34] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representations. i. general results. *Journal of Mathematical Physics*, 26(10):2473 – 2479, 1985.

- [35] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representations. ii: examples. In *Annales de l'IHP Physique théorique*, volume 45, pages 293–309. Elsevier, 1986.
- [36] K. Guo and D. Labate. *Shearlets: multiscale analysis for multivariate data*, chapter Analysis and identification of multidimensional singularities using the continuous shearlet transform, pages 69–103. Springer, 2012.
- [37] K. Guo, D. Labate, W.-Q. Lim, G. Weiss, and E. Wilson. Wavelets with composite dilations and their mra properties. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 20(2):202–236, 2006.
- [38] B. C. Hall. An elementary introduction to groups and representations. on arXiv:math-ph/0005032v1, 05 2000.
- [39] C. E. Heil and D. F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31(4):628–666, 1989.
- [40] M. Holschneider and P. Tchamitchian. Pointwise analysis of riemann’s “nondifferentiable” function. *Inventiones Mathematicae*, 105(1):157–175, 1991.
- [41] L. Hörmander. Pseudo-differential operators. In *The analysis of linear partial differential operators III*, pages 63–179. Springer, 2007.
- [42] S. Häuser. *Shearlet coorbit spaces, shearlet transforms and applications in imaging*. PhD thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2014.
- [43] C. E. J. and D. L. Donoho. *Curvelet - a suprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges*, pages 105–120. Vanderbilt University Press, 2000.
- [44] A. Klein. *Zur Numerik kontinuierlicher Wavelet- und Matrixwavelet-Transformationen*. PhD thesis, Justus Liebig Universität Gießen, 2011.
- [45] G. Kutyniok. *Konstruktion von stetigen und diskreten Wavelet-Transformationen auf der n-dimensionalen Sphäre mittels quadrat-integrierbarer Darstellungen*. PhD thesis, Universität Gesamthochschule Paderborn, 1996.
- [46] G. Kutyniok and D. Labate. Resolution of the wavefront set using continuous shearlets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(5):2719–2754, 2009.
- [47] G. Kutyniok and W.-Q. Lim. Image separation using wavelets and shearlets. In *Curves and Surfaces: 7th International Conference, Avignon, France, June 24-30, 2010, Revised Selected Papers*, pages 416–430. Springer, 2010.
- [48] G. Kutyniok and T. Sauer. From wavelets to shearlets and back again. *Approximation Theory XII (San Antonio, TX, 2007)*, CK Chui, M. Neamtu, and L. Schumaker, eds., Nashboro Press, Nashville, TN, 2007.
- [49] G. Kutyniok and T. Sauer. Adaptive directional subdivision schemes and shearlet multi-resolution analysis. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41:1436–1471, 2009.

- [50] R. S. Laugesen, N. Weaver, G. L. Weiss, and E. N. Wilson. A characterization of the higher dimensional groups associated with continuous wavelets. *Journal of Geometric Analysis*, 12(1):89–102, 2002.
- [51] L. H. Loomis. *An introduction to abstract harmonic analysis*. Courier Corporation, 1953.
- [52] S. Mallat and W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE transactions on information theory*, 38(2):617–643, 1992.
- [53] Y. Meyer. *Wavelets and operators*. Cambridge university press, 1995.
- [54] R. Murenzi, L. Kaplan, J.-P. Antoine, and F. Mujica. Computational complexity of the continuous wavelet transform in two dimensions. Technical report, Clark Atlanta Univ ga Dept of Engeneering, 1998.
- [55] B. Osgood. *The fourier transform and its applications*.
- [56] T. Sauer. Time-frequency analysis, wavelets and why things (can) go wrong. In *Kognitive Neuropsychologie des Menschen*, 2011.
- [57] T. Sauer. Wavelets. Skript zur Vorlesung, 2012.
- [58] T. tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter Lehrbuch, 2000. Tammo.
- [59] G. Weiss and E. Wilson. The mathematical theory of wavelets. In *Proceedings of the NATO-ASI Meeting. Harmonic Analysis 2000–A Celebration*, pages 329–366, 2001.
- [60] H. Weyl. Kontinuierliche gruppen und ihre darstellungen durch lineare transformationen. *Mathematische Zeitschriften*, 23:233–246, 1968.
- [61] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 1995.