

Numerisch robuste Berechnung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors der Naturwissenschaften an
der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau

M. Sc. Stephan Brummer

Im Oktober 2022

Betreuer: Prof. Dr. Tomas Sauer

Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau

Kurzfassung

Sichtbarkeitsprobleme, wie das Folgende, gehören zu den grundlegenden Problemen der algorithmischen Geometrie: Berechne zu einem einfachen Polygon, dem sogenannten Kanal, und zu einem darin enthaltenen Punkt die von diesem Punkt aus sichtbare Punktmenge. Dabei ist ein Punkt von einem anderen Punkt aus sichtbar, wenn deren Verbindungsstrecke den Kanal nicht verlässt. Wir wollen uns in dieser Arbeit mit zirkulärer Sichtbarkeit beschäftigen. Zur Verbindung zweier Punkte sind dann nicht nur Strecken, sondern auch Kreisbögen zulässig. Außerdem betrachten wir als Ausgangspunkt dieser sogenannten Sichtbarkeitskreisbögen und -strecken eine Kante des Kanals anstatt eines einzelnen Punkts. Konkret liefert diese Arbeit einen Beitrag zur numerisch robusten Bestimmung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge ausgehend von einer Kante des Kanals.

Hierfür wird in dieser Arbeit ein Algorithmus vorgestellt, mit dem für einen gegebenen Punkt festgestellt werden kann, ob dieser von der Startkante aus sichtbar ist. Im Fall eines sichtbaren Punkts wird ein Sichtbarkeitskreisbogen berechnet, der zwei Kanalberührungen besitzt. Damit kann der Algorithmus bei geeigneter Wahl des zu untersuchenden Punkts – der als dritte Kanalberührung fungiert – direkt zur Berechnung von sogenannten Grenzkreisbögen der Sichtbarkeitsmenge benutzt werden. Diese definieren den Rand der zirkulären Sichtbarkeitsmenge und zeichnen sich dadurch aus, dass sie vom Kanal dreimal abwechselnd von links und von rechts berührt werden.

Der beschriebene Algorithmus basiert auf der Untersuchung derjenigen Kreisbögen, die zwar nicht notwendigerweise vollständig im Kanal liegen, aber die Startkante mit dem Punkt verbinden, dessen Sichtbarkeit bestimmt werden soll. Insbesondere werden dabei die Bereiche untersucht, in denen der jeweilige Kreisbogen den Kanal verlässt, die sogenannten Verletzungen. Da die „Schwere“ einer solchen Verletzung quantifizierbar ist, wird ein iteratives Vorgehen ermöglicht. Dabei wird der Kreisbogen iterativ so verändert, dass dieser bei gleichem Endpunkt den Kanal immer „weniger verlässt“. Ist der Endpunkt und damit der zu untersuchende Punkt nicht sichtbar, wird im Laufe des Algorithmus festgestellt, dass keine derartige Verbesserung möglich ist. Der vorgestellte Algorithmus ist numerisch robust, einfach umzusetzen und besitzt eine in der Anzahl der Kanalecken lineare Laufzeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Beitrag der Arbeit	4
1.3	Verwandte Literatur	5
2	Grundlagen und gerichtete Schnitte	7
2.1	Grundlagen	7
2.2	Gerichtete Schnitte bei Strecken	14
2.3	Links- und Rechtsumgebungen eines Kreisbogensplines	15
2.4	Schnitte zweier Kreisbogensplines	21
2.5	Zählen gerichteter Schnitte	29
3	Problemstellung und Ziele	35
3.1	Problemstellung Zirkuläre Sichtbarkeit	36
3.2	Restriktionen und Verletzungen	45
3.3	Hauptresultate zu Restriktionen, Verletzungen und zirkulärer Sichtbarkeit	52
4	Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen	55
4.1	Verletzungen und Aussagen über den zugehörigen Kreisbogen	55
4.2	Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen	60
4.3	Nicht-generische Kreisbögen	73
5	Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit	79
5.1	Darstellung der Algorithmusidee an Beispielen	79
5.2	Updates von Kreisbögen	90
5.3	Definition des Algorithmus und seiner Schleifeninvarianten	118
5.4	Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten	121
5.5	Beweis der Schleifeninvarianten	141
5.6	Korrektheitsbeweis und Laufzeitabschätzung	151
6	Evaluation und Ausblick	163
6.1	Numerische Stabilität und Robustheit des Algorithmus	163
6.2	Ausblick	165

Notation

Allgemeine Notation:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	Menge der natürlichen, ganzen, bzw. reellen Zahlen
$[a, b], (a, b)$	Abgeschlossenes bzw. offenes Intervall
I	Das Intervall $[0, 1]$
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm
$\text{dist}(p, M)$	Abstand von $p \in \mathbb{R}^2$ und $M \subset \mathbb{R}^2$: $\inf\{\ p - q\ _2 : q \in M\}$
$B_\varepsilon(x)$	Offene Kugel um $x \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $\varepsilon > 0$: $\{y \in \mathbb{R}^2 : \ y - x\ _2 < \varepsilon\}$
$\partial B_\varepsilon(x)$	Sphäre um $x \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $\varepsilon > 0$: $\{y \in \mathbb{R}^2 : \ y - x\ _2 = \varepsilon\}$

Wege und Kreisbogensplines:

$\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0^*$	Menge beliebiger, einfacher, geschlossener bzw. einfach geschlossener Kreisbogensplines, vgl. Definition 2.15, Seite 10
$\text{Im}(\gamma)$	Das Bild $\gamma([0, 1])$ des Kreisbogensplines γ ; oft wird dafür auch γ selbst benutzt, vgl. Definition 2.1, Seite 7
$\bar{\gamma}$	Rückwärts durchlaufener Kreisbogenspline: $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$, vgl. Definition 2.4, Seite 8
$\gamma'(t)$	Einheitstangente von γ im Parameter t , vgl. Definition 2.12, Seite 9
$\gamma^\perp(t)$	Nach links gerichteter Einheitsnormalenvektor von γ in t , vgl. Definition 2.14, Seite 10
$\gamma^{-1}(M), \gamma^{-1}(x)$	Urbild von $M \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $x \in \mathbb{R}^2$ unter $\gamma \in \mathcal{S}$, vgl. Definition 2.1, Seite 7
$t_\gamma(x), t(x)$	Eindeutiger zu $x \in \gamma$, $\gamma \in \mathcal{S}$, gehörender Parameter, vgl. Definition 2.1, Seite 7
$\gamma _{[t_1, t_2]}$	Einschränkung von γ auf $[t_1, t_2]$ mit anschließender Reparametrisierung auf $[0, 1]$, vgl. Definition 2.16, Seite 11
$\gamma_1 \sqcup \gamma_2$	Konkatenation zweier Kreisbogensplines, vgl. Definition 2.17, Seite 11
$I(\gamma), E(\gamma)$	Inneres bzw. Äußeres eines einfach geschlossenen Kreisbogensplines γ , vgl. Definition 2.27, Seite 13
$L(\gamma), R(\gamma)$	Menge links bzw. rechts eines Kreisbogensplines $\gamma \in \mathcal{S}_0^*$, vgl. Definition 2.39, Seite 19
$M(\gamma)$	Menge lokal einfacher Punkte von $\gamma \in \mathcal{S}$, vgl. Definition 2.35, Seite 16
$L_{\varepsilon, x}(\gamma), R_{\varepsilon, x}(\gamma)$	Links- bzw. Rechtsumgebung von γ in $B_\varepsilon(x)$, vgl. Definition 2.38, Seite 19

Zirkuläre Sichtbarkeit:

\mathcal{K}	Menge der Sichtbarkeitskanäle K , die selbst aus einem Startkreisbogen σ und einem Kanalrand κ bestehen, vgl. Definition 3.1, Seite 37
I_K	Das Innere des Kanals K , vgl. Definition 3.1, Seite 37
P_K	Teilmenge der Punkte in I_K , die möglicherweise sichtbar sind, vgl. Definition 3.6, Seite 40
$\mathcal{A}_K, \mathcal{A}_{K,p}$	Menge der potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen mit beliebigem bzw. festem Endpunkt $p \in P_K$, vgl. Definition 3.6, Seite 40

1 Einleitung

1.1 Motivation

In Geoinformationssystemen (GIS) werden zur Speicherung linienhafter Objekte, wie Straßen, neben Polygonzügen oft auch Kreisbogensplines, also Kurven bestehend aus Kreisbögen und Strecken, verwendet. Diese erlauben ähnlich einfache Berechnungen wie Polygonzüge und führen aufgrund ihrer größeren Flexibilität zu einer kompakteren Repräsentation, als es mit Polygonzügen möglich ist. Außerdem ermöglichen Kreisbogensplines einen glatten Verlauf, das heißt, dass an jedem Anschlusspunkt die Richtung der Tangenten der beiden angrenzenden Kreisbögen übereinstimmt. Zur Erzeugung der Kreisbogensplines werden üblicherweise Punktsequenzen approximiert. Wir wollen einen speziellen Algorithmus zur Kreisbogenspline-Approximation näher betrachten, den sogenannten „Smooth Minimum Arc Path“-Algorithmus (SMAP) aus [16]. Dieser erwartet als Eingabe einen sogenannten Kanal, der die zu approximierenden Punkte mit einer vorgegebenen Toleranz umhüllt. Der Kanalrand ist dabei ein einfach geschlossener Polygonzug, wobei zwei Strecken ausgezeichnet sind, eine Startstrecke und eine Zielstrecke. Der SMAP-Algorithmus liefert dann einen glatten Kreisbogenspline, der innerhalb dieses Kanals verläuft, die Startstrecke mit der Zielstrecke verbindet und unter diesen Einschränkungen die minimale Anzahl an Kreisbögen und Strecken besitzt. Wir nehmen den Kanal im Folgenden als gegeben an, da es zu dessen Berechnung aus einer Punktsequenz effiziente Algorithmen gibt, vgl. [13]. Außerdem kann der SMAP-Algorithmus auch auf Kanäle angewendet werden, denen keine Punktsequenz zugrunde liegt.

Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel, das wir im Folgenden detailliert betrachten werden. Zu sehen ist der Kanalrand κ sowie die Startstrecke σ und die Zielstrecke δ . Das Ziel ist die Berechnung eines Kreisbogensplines wie in Abbildung 1.1 rechts. Wir konzentrieren uns auf die zentrale Operation des Algorithmus, die Berechnung der Punktmengen, die ausgehend von der Startstrecke mit einem glatten Kreisbogenspline mit ein, zwei, drei, ... Kreisbögen oder Strecken erreicht werden können.

Zuerst wird die Menge der Punkte bestimmt, die ausgehend von der Startstrecke mit nur einem Kreisbogen oder einer Strecke innerhalb des Kanals erreicht werden können. Diese Menge, die sogenannte zirkuläre Sichtbarkeitsmenge, ist links in Abbildung 1.2 schattiert. Wie man sieht, besteht der Rand dieser Sichtbarkeitsmenge selbst wieder aus Kreisbögen und Strecken. Interessant sind dabei die Kreisbögen und Strecken, die nicht Teil des Kanalrandes sind, die sogenannten Grenzkreisbögen bzw. -strecken. Diese zeichnen sich durch drei Kanalberührungen aus, wobei entschei-

1 Einleitung

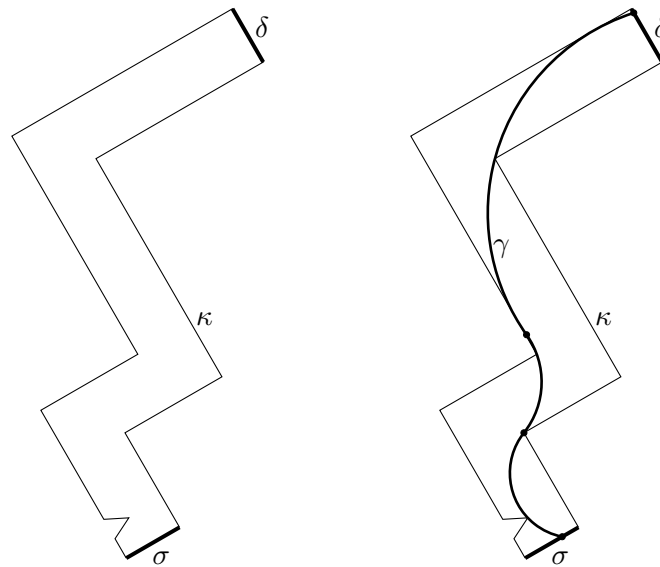


Abbildung 1.1: Links: Beispiel eines Kanals mit Kanalrand κ , Startstrecke σ und Zielstrecke δ . Rechts ist ein zugehöriger Smooth Minimum Arc Path γ bestehend aus drei Kreisbögen eingezeichnet.

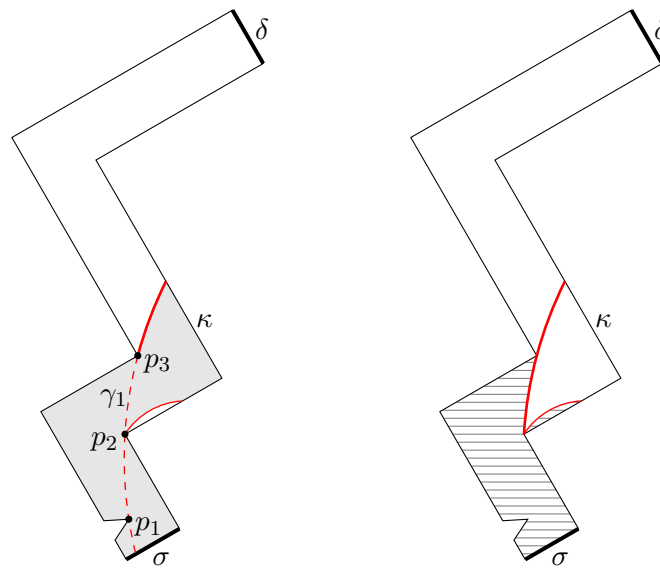


Abbildung 1.2: Links: Visualisierung der ersten Sichtbarkeitsmenge und eines Grenzkreisbogens mit den drei Kanalberührungen p_1 , p_2 und p_3 . Rechts: Für den folgenden Schritt irrelevante Kanalbereiche.

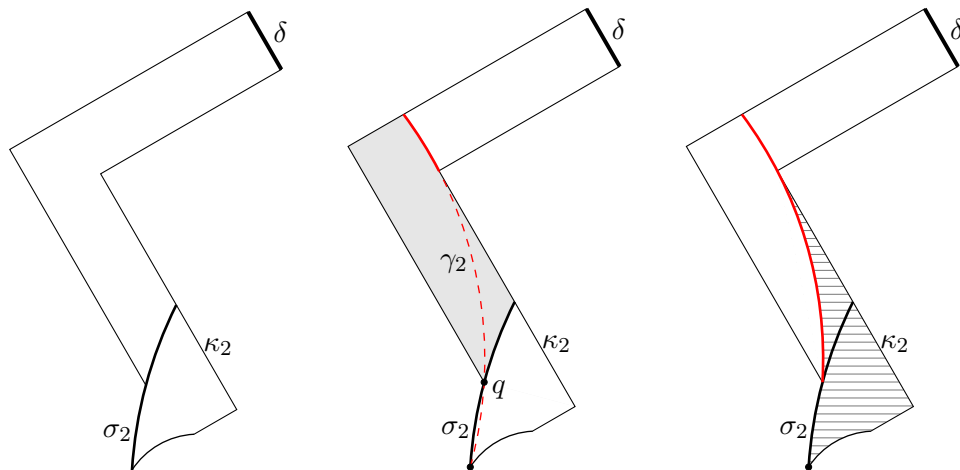


Abbildung 1.3: Berechnung der zweiten Sichtbarkeitsmenge: Zugeschnittener Kanal (links), zugehörige Sichtbarkeitsmenge (mitte) und für den folgenden Schritt irrelevante Kanalbereiche (rechts).

dend ist, dass der Kanalrand den (orientierten) Kreisbogen abwechselnd von links und von rechts berührt, wenn die Punkte gemäß Durchlaufrichtung des Kreisbogens angeordnet sind. Ein Beispiel eines Grenzkreisbogens ist γ_1 in Abbildung 1.2 links. Die drei Kanalberührungen sind durch die Punkte p_1 , p_2 und p_3 gekennzeichnet. Dabei wird der Kreisbogen vom Kanal in den Punkten p_1 und p_3 von links und im Punkt p_2 von rechts berührt.

Die Berechnung der Punktmenge, die mit einem glatten Kreisbogenspline, bestehend aus zwei Kreisbögen oder Strecken, erreichbar ist, führen wir auf die Berechnung einer zirkulären Sichtbarkeitsmenge zurück. Dazu wird der Kanal um die nicht mehr relevanten Teile, in Abbildung 1.2 rechts schraffiert, verkleinert. Eine besondere Rolle spielt dabei der Grenzkreisbogen γ_1 , da er die erste Sichtbarkeitsmenge in Richtung Zielsegment δ abgrenzt. Die Startstrecke σ wird durch den Startkreisbogen σ_2 , einem Teilstück des Grenzkreisbogens γ_1 , ersetzt. Den Rand des neuen Kanals nennen wir κ_2 . Der dabei entstandene Kanal ist in Abbildung 1.3 links zu sehen. Im Gegensatz zum ersten Fall gilt ein Punkt nun nicht mehr als sichtbar, wenn er mit einem Kreisbogen, der in σ_2 startet und den Kanal nicht verlässt, erreicht werden kann. Der Kreisbogen muss zusätzlich eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllen: Entweder schließt der Kreisbogen im Anfangspunkt tangential an den Startkreisbogen σ_2 an, oder er besitzt einen zweiten Schnittpunkt mit dem Startkreisbogen und dieser liegt bezüglich Durchlaufrichtung des Startkreisbogens „hinter“ dem ersten Schnittpunkt. Diese spezielle Forderung an die sogenannten Sichtbarkeitskreisbögen und -strecken garantiert, dass jeder gemäß dieser Definition sichtbare Punkt durch

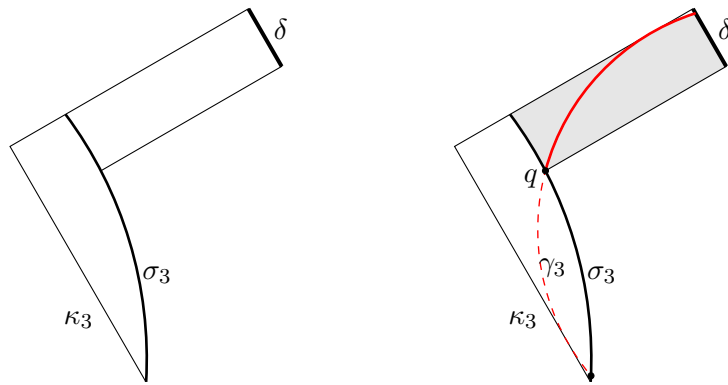


Abbildung 1.4: Berechnung der dritten Sichtbarkeitsmenge: Zugeschnittener Kanal (links) und zugehörige Sichtbarkeitsmenge (rechts).

einen tangenzenstetigen Kreisbogenspline mit zwei Kreisbögen oder Strecken erreicht werden kann, vgl. [16]. Die entsprechende Sichtbarkeitsmenge und ein Sichtbarkeitskreisbogen γ_2 , der den Startkreisbogen σ_2 zweimal schneidet, ist in Abbildung 1.3 in der Mitte zu sehen. Zur Berechnung der weiteren Sichtbarkeitsmengen wird analog vorgegangen bis die Zielstrecke δ erreicht wird, siehe Abbildung 1.4.

Als Problem stellt sich dabei die robuste Berechnung der Grenzkreisbögen heraus. Gerade bei langen, schmalen Kanälen mit geringer Krümmung besitzen auch die Grenzkreisbögen oft eine sehr kleine Krümmung. Das führt bei einfachen Kreisbogendarstellungen zu großen numerischen Ungenauigkeiten. Wichtig für eine zielgerichtete Suche und damit einer schnellen und robusten Berechnung von Grenzkreisbögen ist die Möglichkeit festzustellen, ob ein einzelner Punkt sichtbar ist. Selbst diese einfache Fragestellung kann in numerisch problematischen Situationen nicht ohne Weiteres beantwortet werden.

1.2 Beitrag der Arbeit

Wir stellen einen Algorithmus vor, mit dem zu einem gegebenen Punkt festgestellt werden kann, ob dieser von einem Startkreisbogen aus sichtbar ist. Der Algorithmus ist einfach umzusetzen und besitzt eine in der Anzahl der Kanälecken lineare Laufzeit. Außerdem wurde besonderes Augenmerk auf numerische Robustheit gelegt. Für sichtbare Punkte liefert der Algorithmus einen Kreisbogen mit zwei Kanalberührungen. Bei geeigneter Wahl des Endpunkts – der als dritte Kanalberührung fungiert – wird somit direkt ein Grenzkreisbogen der Sichtbarkeitsmenge berechnet.

Die Grundlage für den Algorithmus bildet die Untersuchung von Kreisbögen, die den Startkreisbogen mit dem zu untersuchenden Punkt verbinden, jedoch nicht vollständig im Kanal liegen. Insbesondere wurden die Bereiche, in denen ein Kreisbogen

den Kanal verlässt, die sogenannten Verletzungen, genauer untersucht. Diese stellen eine Erweiterung der oben angesprochenen Kanalberührungen dar. Da die „Schwere“ der Verletzungen quantifizierbar ist, ermöglichen sie ein Update hin zu einem Kreisbogen, der den Kanal „weniger verlässt“. Dieses Update wird im oben angesprochenen Algorithmus genutzt, um einen Kreisbogen iterativ solange zu verbessern bis er innerhalb des Kanals liegt, sofern das möglich ist. Ist der Punkt nicht sichtbar, dann wird im Laufe des Algorithmus festgestellt, dass keine Verbesserung des Kreisbogens möglich ist.

1.3 Verwandte Literatur

Sichtbarkeitsprobleme, wie das oben beschriebene, gibt es in vielen Ausprägungen. Intensiv erforscht wurden in den letzten Jahrzehnten lineare Sichtbarkeitsprobleme, die eine wichtige Rolle in der Robotik, im maschinellen Sehen und in der Computergraphik spielen, vgl. [12]. Darunter fällt zum Beispiel die Berechnung des Sichtbarkeitspolygons zu einem Punkt: Sind ein einfaches Polygon und ein Punkt p in diesem Polygon gegeben, dann versteht man darunter den Rand der Punkte, die durch eine vollständig im Polygon liegende Strecke mit p verbunden werden können. Für uns ist außerdem das sogenannte Kanten-Sichtbarkeitsproblem interessant: Anstelle von p ist eine Kante e der Ursprung der Sichtstrahlen. Gesucht wird die Menge der Punkte, die mit einem beliebigen Punkt in e über eine Strecke verbunden werden können. Für beide Fragestellungen gibt es Algorithmen, die eine in der Anzahl der Polygonecken lineare Laufzeit besitzen, vgl. [12]. Die Unterschiede zwischen linearer und zirkulärer Sichtbarkeit sind jedoch zu groß, als dass diese direkt auf den zirkulären Fall erweitert werden könnten.

Zirkuläre Sichtbarkeitsprobleme wurden deutlich weniger untersucht. Agarwal und Sharir [2] stellten 1993 erstmals einen Algorithmus zur Berechnung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge von einem Punkt in einem einfachen Polygon vor. Der Algorithmus besitzt eine Laufzeit von $O(n \log n)$, wobei n hier wie im Folgenden die Anzahl der Polygonecken ist. Chou und Woo [8] beschäftigten sich mit derselben Fragestellung und erreichten sogar einen Algorithmus mit einer in der Anzahl der Polygonecken linearen Laufzeit.

In [1] wurde eine verwandte Fragestellung, das sogenannte „circle shooting“ betrachtet. Mit geeigneter Vorverarbeitung des Polygons soll möglichst schnell der erste Schnittpunkt eines an einem Punkt beginnenden Kreisbogens mit dem Polygon gefunden werden. In [10] und [11] wurde die zirkuläre Sichtbarkeit verallgemeinert und die Sichtbarkeit mit Kegelschnitten betrachtet. In [17], [4], [3] wurde ein mit den Sichtbarkeitsproblemen eng verwandtes Problem betrachtet: Die Trennbarkeit von Punkten, Strecken oder Streckenzügen durch einen Kreis.

Die einzige Arbeit zur zirkulären Sichtbarkeit ausgehend von einer Kante ist ein technischer Bericht von Chou und Woo [7]. Darin wird ein $O(n^2)$ -Algorithmus zur

1 Einleitung

Berechnung der zirkulären Kanten-Sichtbarkeitsmenge vorgestellt. Wir werden diesen Ansatz nicht weiter verfolgen, da keine Aussagen zur numerischen Robustheit gemacht werden.

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

Wie schon im Einleitungskapitel erwähnt, wollen wir für gewisse Kreisbögen die Bereiche, in denen der Kanal verlassen wird, genauer untersuchen. Dabei ist vor allem die Richtung aus der der Kanal den Kreisbogen schneidet von besonderem Interesse. Nach einem Abschnitt zu Grundlagen werden wir in diesem Kapitel mithilfe der Windungszahl Schnittpunkten zweier Kreisbogensplines eine Richtung zuweisen. Die darauf aufbauenden Aussagen bilden die Grundlage für die Untersuchung der zirkulären Sichtbarkeit.

2.1 Grundlagen

Wir beginnen mit allgemein bekannten, grundlegenden Definitionen und Aussagen.

Wege und Kurven

Definition 2.1. *Eine stetige Abbildung*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

nennen wir einen Weg. Das Bild $\gamma([a, b])$, das wir auch mit $\text{Im}(\gamma)$ bezeichnen, nennen wir die zugehörige Kurve und mit γ° bezeichnen wir die Menge $\gamma^\circ((a, b))$. Ist $M \subset \mathbb{R}^2$, dann bezeichnen wir das Urbild von M unter γ mit

$$\gamma^{-1}(M) := \{t \in [a, b] : \gamma(t) \in M\}$$

und wir schreiben auch

$$\gamma^{-1}(x) := \gamma^{-1}(\{x\}), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Ist $x \in \gamma$ und gibt es genau einen Parameter $t \in [a, b]$ mit $\gamma(t) = x$, dann bezeichnen wir diesen Parameter mit $t_\gamma(x)$.

Zur Vereinfachung der Notation trennen wir nicht strikt zwischen der Abbildung γ und deren Bild $\text{Im}(\gamma)$, falls keine Verwechslungsgefahr besteht. Wir schreiben also etwa $p \in \gamma$ statt $p \in \text{Im}(\gamma)$ oder $\gamma_1 \cap \gamma_2$ statt $\text{Im}(\gamma_1) \cap \text{Im}(\gamma_2)$.

Ist $x \in \gamma$ und $\gamma^{-1}(x)$ einelementig, dann gilt also $\gamma^{-1}(x) = \{t_\gamma(x)\}$. Insbesondere für einfache Wege γ ist $t_\gamma(x)$ für jedes $x \in \gamma$ definiert. Geht der zugehörige Weg γ aus dem Kontext hervor, schreiben wir $t(p)$ statt $t_\gamma(p)$. Für $p, q \in \text{Im}(\gamma)$ schreiben wir $p \prec_\gamma q$, falls $t_\gamma(p) < t_\gamma(q)$ ist.

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

Definition 2.2. Wir nennen einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ einfach, wenn die Abbildung injektiv ist, geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist und einfach geschlossen, wenn der Weg geschlossen und eingeschränkt auf $[a, b]$ injektiv ist.

Definition 2.3. Sind $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei Wege und gibt es eine stetige und streng monotone Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow [a', b']$, so dass $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ für alle $t \in [a, b]$ ist, dann nennen wir φ eine Parametertransformation und γ_2 eine Reparametrisierung von γ_1 . Wir nennen die Parametertransformation orientierungserhaltend, falls sie streng monoton steigend ist und ansonsten orientierungsumkehrend.

Eine besondere Reparametrisierung stellt der rückwärts durchlaufene Weg dar, für den wir eine eigene Notation einführen:

Definition 2.4. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Weg. Dann sei $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der durch $\bar{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$ definierte Weg. Wir nennen ihn den rückwärts durchlaufenen Weg zu γ .

Man beachte, dass $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma$ ist. Für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vereinfacht sich die Definition des rückwärts durchlaufenen Weges zu $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$.

Definition 2.5. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt rektifizierbar, wenn

$$\text{len}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 : a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

endlich ist. In diesem Fall nennen wir $\text{len}(\gamma)$ die Länge von γ .

Definition 2.6. Wir sagen ein rektifizierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{len}(\gamma) > 0$ wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\text{len}(\gamma|_{[a,t]})}{\text{len}(\gamma)} = \frac{t - a}{b - a} \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Kreisbögen

Meistens arbeiten wir mit Strecken, Kreisbögen und den daraus aufgebauten Kreisbogensplines, die wir im Folgenden definieren werden. Als Parameterintervall benutzen wir der Einfachheit halber $I := [0, 1]$.

Definition 2.7. Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$, dann nennen wir den Weg $\ell : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\ell(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

die (orientierte) Strecke von p nach q .

Definition 2.8. Einen Weg $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Form

$$\gamma(t) = c + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(ut + t^*) \\ \sin(ut + t^*) \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad r > 0, \quad u \in (0, 2\pi), \quad t^* \in [0, 2\pi),$$

nennen wir ein positiv orientiertes Kreissegment. Wir bezeichnen γ als negativ orientiertes Kreissegment, falls $\bar{\gamma}$ ein positiv orientiertes Kreissegment ist.

Kreissegmente und Strecken sind rektifizierbare Wege mit Länge $r \cdot u$ bzw. $\|p - q\|_2$ und sie werden mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Für unsere Betrachtungen ist es intuitiv sinnvoll eine Strecke als Grenzfall eines Kreissegments mit „unendlich großem Radius“ anzusehen:

Definition 2.9. Wir nennen einen Weg einen Kreisbogen, falls er ein positiv orientiertes Kreissegment, ein negativ orientiertes Kreissegment oder eine Strecke ist. Die Menge aller Kreisbögen bezeichnen wir mit \mathcal{A} .

Wir können die Parametrisierung einer Strecke ℓ auf \mathbb{R} erweitern und erhalten eine Gerade. Und auch zu jedem Kreissegment können wir einen zugehörigen Kreis definieren:

Definition 2.10. Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$ und $\ell : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Strecke von p nach q . Dann nennen wir die Abbildung $[\ell] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$[\ell](t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q, \quad t \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Gerade.

Definition 2.11. Ist $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = c + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(ut + t^*) \\ \sin(ut + t^*) \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad r > 0, \quad u \in (0, 2\pi), \quad t^* \in [0, 2\pi),$$

ein positiv orientiertes Kreissegment, dann nennen wir $[\gamma] : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$[\gamma](t) = c + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

den zugehörigen (positiv orientierten) Kreis. Entsprechend ist der zugehörige negativ orientierte Kreis definiert.

Ohne genauer auf differenzierbare Wege einzugehen, definieren wir die Einheitstangente und den Einheitsnormalenvektor:

Definition 2.12. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = c + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(ut + t^*) \\ \sin(ut + t^*) \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad r > 0, \quad u \in (0, 2\pi), \quad t^* \in [0, 2\pi),$$

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

ein positiv orientiertes Kreissegment. Dann ist

$$\gamma'(t) := (-\sin(ut + t^*), \cos(ut + t^*))^T, \quad t \in I,$$

die Einheitstangente von γ in t . Für negativ orientierte Kreissegmente γ definieren wir $\gamma'(t) := -(\bar{\gamma})'(1-t)$.

Definition 2.13. Sei ℓ eine Strecke von p nach q mit $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$. Dann ist

$$\ell' := \frac{(q-p)}{\|q-p\|_2}$$

die Einheitstangente von ℓ .

Um eine für Strecken und Kreissegmente einheitliche Notation zu erhalten, definieren wir $\ell'(t) := \ell'$, $t \in I$, auch für eine Strecke ℓ .

Definition 2.14. Seien $\gamma \in \mathcal{A}$, $t \in I$ und $\gamma'(t) = (u, v)^T$. Dann nennen wir

$$\gamma^\perp(t) := (-v, u)^T$$

den nach links gerichteten Einheitsnormalenvektor von γ in t .

Kreisbogensplines

Definition 2.15. Einen Weg $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, der mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, nennen wir einen Kreisbogenspline, falls es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ der Weg $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_i(t) = \gamma((1-t) \cdot t_{i-1} + t \cdot t_i),$$

also die Einschränkung auf $[t_{i-1}, t_i]$ reparametrisiert auf I , ein Kreisbogen ist. Wir bezeichnen die Menge der Kreisbogensplines mit \mathcal{S} und die Menge der einfachen, geschlossenen, oder einfach geschlossenen Kreisbogensplines mit \mathcal{S}^* , \mathcal{S}_0 bzw. \mathcal{S}_0^* .

Das Parameterintervall eines Kreisbogens oder eines Kreisbogensplines ist also immer I . Das dient der Vereinfachung der Notation. Wir können etwa mit $\gamma(0)$ auf den *Anfangspunkt* und mit $\gamma(1)$ auf den *Endpunkt* eines Kreisbogensplines γ zugreifen. Eine Unterteilung eines Kreisbogensplines in einzelne Kreisbögen werden wir im Folgenden so wählen, dass die Anzahl der Kreisbögen minimal ist. Man beachte, dass dann neben der minimalen Anzahl an Kreisbögen auch die Unterteilung in Kreisbögen eindeutig ist. Die Anfangs- und Endpunkte der einzelnen Kreisbögen nennen wir *Anschlusspunkte* des Kreisbogensplines.

Für Kreisbogensplines sind die Einheitstangente und der Einheitsnormalenvektor über die Kreisbögen definiert. An den inneren Anschlusspunkten muss explizit bestimmt werden, ob man sich auf den Vorgänger- oder Nachfolgerkreisbogen bezieht.

Wir bezeichnen die linksseitige Einheitstangente in t mit $\gamma'_-(t)$ und die rechtsseitige mit $\gamma'_+(t)$. Ist der Kreisbogenspline γ einfach und ist $p \in \gamma$, dann schreiben wir auch $\gamma'(p)$ statt $\gamma'(t_\gamma(p))$ und $\gamma^\perp(p)$ statt $\gamma^\perp(t_\gamma(p))$.

Damit ein Teilstück eines Kreisbogensplines selbst wieder ein Kreisbogenspline ist und damit insbesondere I als Parameterintervall besitzt, definieren wir dieses Teilstück als Einschränkung des Parameterintervalls mit anschließender Reparametrisierung auf das Intervall I :

Definition 2.16. Sei $\gamma \in \mathcal{S}$ und seien $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$. Dann bezeichnen wir mit $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ den Kreisbogenspline definiert durch

$$\gamma|_{[t_1, t_2]}(t) := \gamma((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2).$$

Um spätere Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir auch die Einschränkung auf das einpunktige Intervall als den auf einen Punkt degenerierten Kreisbogen

$$\gamma|_{[t^*, t^*]} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t^*), \quad t^* \in I.$$

Ist γ einfach und sind $p, q \in \gamma$ mit $p \prec_\gamma q$, dann schreiben wir auch $\gamma|_{[p, q]}$ oder $\gamma|_{[t(p), t(q)]}$ statt $\gamma|_{[t_\gamma(p), t_\gamma(q)]}$. Auch für die „Vereinigung“ von Kreisbogensplines führen wir eine Notation ein:

Definition 2.17. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ und sei $c := \frac{\text{len}(\gamma_1)}{\text{len}(\gamma_1) + \text{len}(\gamma_2)}$. Dann ist $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ definiert als der Kreisbogenspline mit

$$\gamma_1 \sqcup \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{t}{c}\right), & t \in [0, c], \\ \gamma_2\left(\frac{t-c}{1-c}\right), & t \in [c, 1]. \end{cases}$$

Wir nennen $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ die Konkatination von γ_1 und γ_2 .

Es ist leicht nachzurechnen, dass die Konkatination zweier Kreisbogensplines wieder ein Kreisbogenspline ist, der Weg also insbesondere mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Für die Einschränkung und die Konkatination von Kreisbogensplines gilt folgender Zusammenhang

$$\gamma|_{[0, t]} \sqcup \gamma|_{[t, 1]} = \gamma, \quad \gamma \in \mathcal{S}, \quad t \in (0, 1).$$

Das Einbeziehen der Längenverhältnisse der beiden Kurven führt außerdem dazu, dass die Konkatination assoziativ ist. Wir wollen auch die Konkatination eines Kreisbogensplines γ_1 mit einem einpunktigen Kreisbogen γ_2 zulassen und definieren in diesem Fall $\gamma_1 \sqcup \gamma_2 := \gamma_1$.

Bemerkung 2.18. Die Menge der Kreisbogensplines wird mit der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik

$$\|\gamma - \eta\|_\infty = \sup\{\|\gamma(t) - \eta(t)\|_2 : t \in I\}, \quad \gamma, \eta \in \mathcal{S},$$

zu einem metrischen Raum. Um einer Verwechslung mit dem Abstand zweier Mengen vorzubeugen, benutzen wir in diesem Fall immer die Norm-Schreibweise.

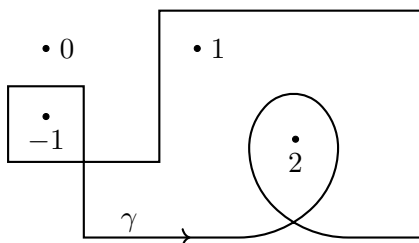


Abbildung 2.1: An den eingezeichneten Punkten ist die Windungszahl von γ um den entsprechenden Punkt angetragen.

Windungszahl

Die Windungszahl beschreibt wie oft ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ umrundet, siehe Abbildung 2.1. Dabei werden Umläufe gegen den Uhrzeigersinn positiv und solche im Uhrzeigersinn negativ gezählt. Üblicherweise wird die Windungszahl in der komplexen Zahlenebene definiert. Mit der kanonischen Einbettung der euklidischen Ebene in die komplexe Zahlenebene, $(x, y) \mapsto x + iy$, können auch wir diese Definition anwenden, vgl. [6]: Ist $z \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z\}$ stückweise stetig differenzierbar, dann ist die Windungszahl von γ um z

$$\omega(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dx}{x - z}.$$

Im Folgenden stellen wir einige Aussagen zur Windungszahl zusammen. Details sowie eine alternative Definition basierend auf Winkelberechnungen können in [9], Kapitel 3, nachgelesen werden.

Proposition 2.19 (Additivität). *Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt*

$$\omega(\gamma, p) = \omega(\gamma|_{[a,t]}, p) + \omega(\gamma|_{[t,b]}, p), \quad t \in (a, b).$$

Proposition 2.20. *Sei $p \in \mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und η eine Reparametrisierung von γ . Dann gilt*

$$\omega(\gamma, p) = \omega(\eta, p),$$

falls η durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation aus γ hervorgeht und

$$\omega(\gamma, p) = -\omega(\eta, p)$$

im Fall einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation.

Laut Korollar 3.8 auf Seite 39 in [9] gilt folgende Aussage:

Proposition 2.21 (Homotopieinvarianz). Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und sei $(\gamma_s)_{s \in I}$ eine Familie von stückweise stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, $a < b$, die (bezüglich Supremumsnorm) stetig vom Parameter $s \in I$ abhängen. Handelt es sich um eine Familie geschlossener Wege oder eine Familie mit denselben Anfangs- und Endpunkten, dann gilt

$$\omega(\gamma_s, p) = \omega(\gamma_0, p), \quad s \in I.$$

Korollar 2.22. Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und seien $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, $a < b$, zwei geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege, so dass die Strecke zwischen $\gamma(t)$ und $\eta(t)$ für kein $t \in [a, b]$ den Punkt p enthält. Dann gilt

$$\omega(\gamma, p) = \omega(\eta, p).$$

Bemerkung 2.23. Die Voraussetzungen von Korollar 2.22 sind insbesondere erfüllt, falls

$$\|\gamma - \eta\|_\infty < \text{dist}(p, \gamma)$$

ist.

Proposition 2.24 (Lokale Konstanz). Sei γ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist $\omega(\gamma, p)$, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, eine ganze Zahl und $\omega(\gamma, p) = 0$, falls p in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von γ liegt. Als Funktion von p ist $\omega(\gamma, p)$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.

Jordanscher Kurvensatz und Orientierung

Details zu folgenden Propositionen können in [9], Kapitel 5, nachgelesen werden:

Proposition 2.25 (Jordanscher Kurvensatz). Ist γ ein einfach geschlossener Weg, dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, einer beschränkten und einer unbeschränkten und γ ist der gemeinsame Rand der beiden Zusammenhangskomponenten.

Proposition 2.26. Ist M eine endliche, disjunkte Vereinigung von isolierten Punkten und einfachen Wegen, dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus M$ zusammenhängend.

Definition 2.27. Sei γ ein einfach geschlossener Weg, dann bezeichnen wir die beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ mit $I(\gamma)$ und die unbeschränkte mit $E(\gamma)$. Wir nennen $I(\gamma)$ das Innere von γ und $E(\gamma)$ das Äußere von γ .

Proposition 2.28. Ist γ ein einfach geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, dann gilt entweder $\omega(\gamma, p) = 1$ für alle $p \in I(\gamma)$ oder für alle $p \in I(\gamma)$ gilt $\omega(\gamma, p) = -1$.

Definition 2.29. Sei γ ein einfach geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Gilt $\omega(\gamma, p) = 1$ für alle $p \in I(\gamma)$, dann nennen wir den Weg γ positiv orientiert, andernfalls nennen wir γ negativ orientiert.

Man beachte, dass diese Definition konsistent ist mit der Orientierung von Kreissegmenten: Ein positiv orientiertes Kreissegment ist Teil eines positiv orientierten Kreises.

2.2 Gerichtete Schnitte bei Strecken

Zur Motivation der Definition gerichteter Schnitte betrachten wir zuerst gerichtete Schnitte zweier Strecken.

Definition 2.30. Sei

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = p + t \cdot v, \quad p \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

eine (orientierte) Gerade und $q \in \mathbb{R}^2 \setminus g$. Wir sagen, dass q rechts von g liegt, falls $\det[q - p, v] > 0$ ist. Andernfalls sagen wir p liegt links von g .

Definition 2.31. Seien ℓ_1, ℓ_2 zwei Strecken mit $|\ell_1^\circ \cap \ell_2^\circ| = 1$. Wir sagen ℓ_2 schneidet ℓ_1 von rechts (nach links), falls $\ell_2(0)$ rechts von $[\ell_1]$ – und damit $\ell_2(1)$ links von $[\ell_1]$ – liegt und wir sagen ℓ_2 schneidet ℓ_1 von links (nach rechts), falls $\ell_2(0)$ links von $[\ell_1]$ liegt.

Bemerkung 2.32. Sind ℓ_1, ℓ_2 zwei Strecken mit $|\ell_1^\circ \cap \ell_2^\circ| = 1$, dann gilt

1. ℓ_2 schneidet ℓ_1 von rechts, falls $\det[\ell'_1, \ell'_2] > 0$,
2. ℓ_2 schneidet ℓ_1 von links, falls $\det[\ell'_1, \ell'_2] < 0$.

Da sich das Vorzeichen der Determinante umkehrt, wenn die beiden Spalten vertauscht werden, ist leicht zu sehen, dass ℓ_2 die Strecke ℓ_1 genau dann von rechts schneidet, wenn ℓ_1 die Strecke ℓ_2 von links schneidet.

Nach [19], Proposition 3.3.5 gilt folgender Zusammenhang zur Windungszahl:

Lemma 2.33. Sei $\ell = \ell_1 \sqcup \ell_2 \sqcup \dots \sqcup \ell_n$, $n \in \mathbb{N}$, ein geschlossener Polygonzug mit Strecken ℓ_1, \dots, ℓ_n , sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \ell$, sei $r : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$r(t) := p + t \cdot v, \quad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

ein Strahl auf dem kein Eckpunkt von ℓ liegt und sei

$$\chi(\ell_i, r) = \begin{cases} 0, & \ell_i \cap r = \emptyset, \\ 1, & \ell_i \cap r \neq \emptyset \text{ und } p \text{ liegt links von } [\ell_i], \\ -1, & \ell_i \cap r \neq \emptyset \text{ und } p \text{ liegt rechts von } [\ell_i]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\omega(\ell, p) = \sum_{i=1}^n \chi(\ell_i, r).$$

2.3 Links- und Rechtsumgebungen eines Kreisbogensplines

Dieser Zusammenhang erlaubt es uns die Richtung des Schnitts zweier Strecken über die Windungszahl zu charakterisieren:

Proposition 2.34. *Seien ℓ_1, ℓ_2 zwei Strecken mit $|\ell_1^\circ \cap \ell_2^\circ| = 1$. Sei γ ein Polygonzug von $\ell_1(1)$ nach $\ell_1(0)$ mit $\gamma \cap \ell_2 = \emptyset$. Dann gilt*

$$\omega(\ell_1 \sqcup \gamma, \ell_2(1)) - \omega(\ell_1 \sqcup \gamma, \ell_2(0)) = \begin{cases} 1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von rechts,} \\ -1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von links.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \dots \sqcup \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit Strecken $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ und seien

$$\begin{aligned} r_0 : [0, \infty] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & r_0(t) &= \ell_2(0) + t \cdot \ell_2', \\ r_1 : [0, \infty] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & r_1(t) &= \ell_2(1) + t \cdot \ell_2'. \end{aligned}$$

Wegen der Homotopieinvarianz der Windungszahl, vgl. Proposition 2.21, können wir annehmen, dass kein Eckpunkt von γ auf r_0 liegt. Aus $\gamma \cap (r_0 \setminus r_1) = \gamma \cap \ell_2 = \emptyset$ folgt mit χ aus Lemma 2.33

$$\chi(\gamma_i, r_0) = \chi(\gamma_i, r_1), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Aus $|\ell_1^\circ \cap \ell_2^\circ| = 1$ folgt insbesondere $\ell_1 \cap r_1 = \ell_1 \cap (r_0 \setminus \ell_2) = \emptyset$ und damit folgt

$$\chi(\ell_1, r_1) = 0$$

und

$$\chi(\ell_1, r_0) = \begin{cases} -1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von rechts,} \\ 1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von links.} \end{cases}$$

Damit gilt nach Lemma 2.33

$$\begin{aligned} &\omega(\ell_1 \sqcup \gamma, \ell_2(1)) - \omega(\ell_1 \sqcup \gamma, \ell_2(0)) \\ &= \left(\chi(\ell_1, r_1) + \sum_{i=1}^n \chi(\gamma_i, r_1) \right) - \left(\chi(\ell_1, r_0) + \sum_{i=1}^n \chi(\gamma_i, r_0) \right) \\ &= -\chi(\ell_1, r_0) = \begin{cases} 1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von rechts,} \\ -1, & \ell_2 \text{ schneidet } \ell_1 \text{ von links.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.3 Links- und Rechtsumgebungen eines Kreisbogensplines

Den Zusammenhang von Windungszahlen und gerichteten Schnitten in Proposition 2.34 nutzen wir, um gerichtete Schnitte allgemein für Kreisbogensplines zu definieren. Dazu muss der Kreisbogenspline jedoch gewissen Anforderungen genügen, die wir zu Beginn definieren:

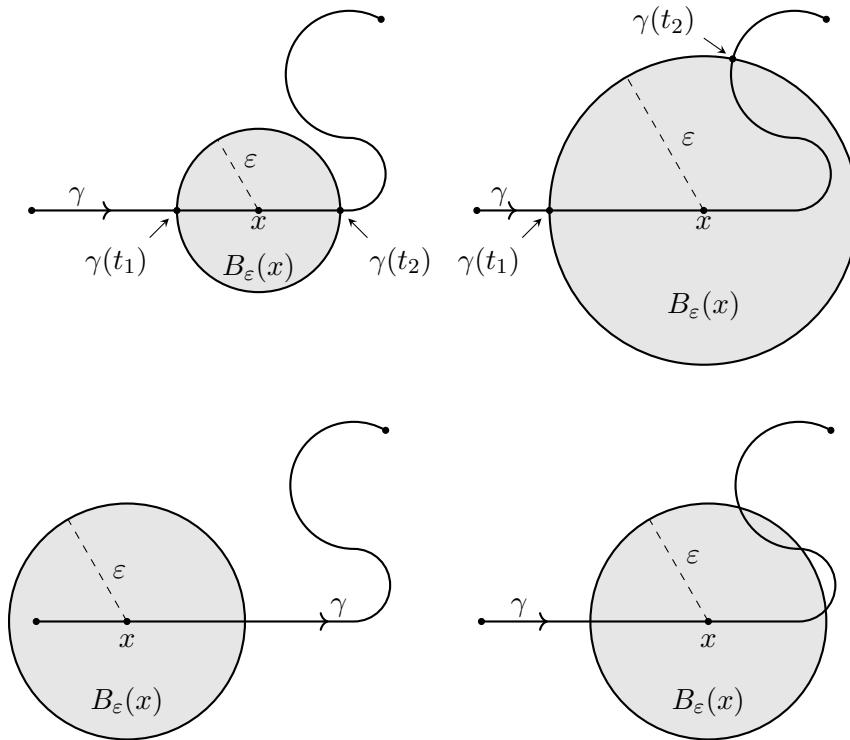


Abbildung 2.2: Oben: Beispiele lokaler Einfachheitsumgebungen $B_\varepsilon(x)$ von x bezüglich γ mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$; Unten: Beispiele von Umgebungen, die keine lokalen Einfachheitsumgebungen von x bezüglich γ sind.

Definition 2.35. Sei $\gamma \in \mathcal{S}$ und $x \in \gamma^\circ$. Wir nennen eine offene Kugel $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich γ mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma \cap B_\varepsilon(x) = \gamma|_{(t_1, t_2)}$,
2. $\gamma|_{[t_1, t_2]} \in \mathcal{S}^*$.

Wir nennen γ lokal einfach in x , falls es eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich γ gibt. Außerdem nennen wir ein geschlossenes $\gamma \in \mathcal{S}_0$ zusätzlich lokal einfach im Punkt $\gamma(0)$, falls

$$\gamma|_{[t, 1]} \sqcup \gamma|_{[0, t]} \quad \text{für ein } t \in (0, 1)$$

lokal einfach in $\gamma(0)$ ist. Die Menge der lokal einfachen Punkte von γ bezeichnen wir mit $M(\gamma)$.

2.3 Links- und Rechtsumgebungen eines Kreisbogensplines

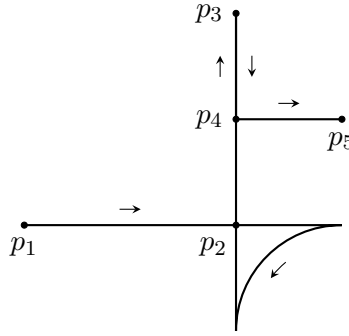


Abbildung 2.3: Der Kreisbogenspline ist nicht lokal einfach in p_1 , p_2 , p_5 und jedem Punkt der Verbindungsstrecke von p_3 und p_4 .

Bemerkung 2.36. *Besitzt $\gamma \in \mathcal{S}$ in $x \in \gamma$ eine lokale Einfachheitsumgebung mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$, dann ist $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial B_\varepsilon(x)$. Anfangs- und Endpunkt eines nicht geschlossenen Kreisbogensplines sind per Definition nicht lokal einfach. Im Fall geschlossener Kreisbogensplines bewirkt der Übergang zu*

$$\gamma|_{[t,1]} \sqcup \gamma|_{[0,t]} \quad \text{für ein } t \in (0, 1)$$

eine Verschiebung des Anfangs- und Endpunkts. Für jeden einfachen Kreisbogenspline $\gamma \in \mathcal{S}^$ ist $M(\gamma) = \gamma^\circ$, es ist also jeder Punkt bis auf Anfangs- und Endpunkt lokal einfach: Sei $x_1 \in \gamma$, $x_1 \neq x$ der bezüglich \preceq_γ letzte Anschlusspunkt, der vor x liegt und $x_2 \in \gamma$, $x_2 \neq x$ der erste Anschlusspunkt nach x , dann ist*

$$0 < d := \min\{\text{dist}(x, \gamma|_{[0,t(x_1)]}), \text{dist}(x, \gamma|_{[t(x_2),1]})\}.$$

Und damit gilt für alle $\varepsilon \in (0, d)$

$$\gamma \cap B_\varepsilon(x) = \gamma|_{(t_1,t_2)}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{I},$$

da $\gamma \cap B_\varepsilon(x)$ aus einem oder zwei Kreisbögen besteht, je nachdem, ob x ein Anschlusspunkt von γ ist. Genauso ist $M(\gamma) = \gamma$, falls $\gamma \in \mathcal{S}_0^$.*

Abbildung 2.2 verdeutlicht lokale Einfachheitsumgebungen an einem Kreisbogenspline γ . Da γ einfach ist, ist jeder Punkt des Kreisbogensplines außer dem Anfangs- und Endpunkt lokal einfach, vgl. Bemerkung 2.36. Die beiden oberen Beispiele zeigen zwei lokale Einfachheitsumgebungen mit verschiedenen Radien ε . Wie die beiden unteren Beispiele zeigen, ist nicht jede Kreisscheibe um einen lokal einfachen Punkt auch eine lokale Einfachheitsumgebung. Links gilt $\gamma(0) \in B_\varepsilon(x)$ und damit gibt es keine Parameter $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, so dass $\gamma \cap B_\varepsilon(x) = \gamma|_{(t_1,t_2)}$ ist. Im rechten Beispiel besteht der Schnitt von γ mit $B_\varepsilon(x)$ aus zwei Abschnitten von γ , es gilt also

$$\gamma \cap B_\varepsilon(x) = \gamma|_{(t_1,t_2)} \cup \gamma|_{(t_3,t_4)}, \quad t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{I}, \quad t_1 < t_2 < t_3 < t_4.$$

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

Abbildung 2.3 verdeutlicht für einen weiteren Kreisbogenspline die Menge aller lokal einfachen Punkte. Nicht lokal einfach sind, neben Anfangs- und Endpunkt, der Doppelpunkt p_2 , sowie jeder Punkt der Strecke von p_3 nach p_4 . Man beachte, dass der innere Punkt p_3 weder lokal einfach noch ein Doppelpunkt des Kreisbogensplines ist.

Folgende Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen Windungszahlen in einer Umgebung lokal einfacher Punkte eines geschlossenen Kreisbogensplines her, der Ähnlichkeiten mit Proposition 2.34 aufweist. Dies rechtfertigt die darauffolgende Definition von Links- und Rechtsumgebungen.

Proposition 2.37. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0$ lokal einfach in $x \in \gamma^\circ$ und sei $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich γ mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$. Sei η der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma(t_2)$ und Endpunkt $\gamma(t_1)$. Dann ist $\zeta := \gamma|_{[t_1, t_2]} \sqcup \eta$ einfach geschlossen, $B_\varepsilon(x) \setminus \gamma$ zerfällt in die beiden Zusammenhangskomponenten $Z_1 := I(\zeta)$ und $Z_2 := E(\zeta) \cap B_\varepsilon(x)$ und es gilt*

$$\omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) = 1 \quad \text{für alle } p_1 \in Z_1, p_2 \in Z_2.$$

Beweis. Sei η_2 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma(t_1)$ und Endpunkt $\gamma(t_2)$. Wegen $\gamma|_{(t_1, t_2)} \subset B_\varepsilon(x)$, $\eta \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset$ und $\eta_2 \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset$ sind ζ und

$$\zeta_2 := \overline{\gamma|_{[t_1, t_2]}} \sqcup \eta_2$$

einfach geschlossen. Außerdem sind die beiden Kreisbogensplines positiv orientiert und $\eta \sqcup \eta_2$ ist der positiv orientierte Kreis mit Bild $\partial B_\varepsilon(x)$. Aufgrund der Additivität der Windungszahl und da sich ihr Vorzeichen unter orientierungsumkehrenden Parametertransformationen umkehrt, vgl. Proposition 2.19 bzw. 2.20, gilt für alle $p \in B_\varepsilon(x) \setminus \gamma$

$$\omega(\zeta, p) + \omega(\zeta_2, p) = \omega(\gamma|_{[t_1, t_2]}, p) + \omega(\eta, p) + \omega(\overline{\gamma|_{[t_1, t_2]}}, p) + \omega(\eta_2, p) = \omega(\eta \sqcup \eta_2, p) = 1.$$

Wegen $\omega(\zeta, p), \omega(\zeta_2, p) \in \{0, 1\}$ gilt damit $Z_2 = E(\zeta) \cap B_\varepsilon(x) = I(\zeta_2)$ und da nach dem Jordanschen Kurvensatz, vgl. Proposition 2.25, sowohl $Z_1 = I(\zeta)$ als auch $I(\zeta_2)$ zusammenhängend sind, folgt, dass γ die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ in die beiden Zusammenhangskomponenten Z_1 und Z_2 zerteilt. Seien $p_1 \in Z_1$ und $p_2 \in Z_2$. Wegen

$$\zeta_3 := \gamma|_{[0, t_1]} \sqcup \bar{\eta} \sqcup \gamma|_{[t_2, 1]} \subset \mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(x)$$

sind p_1 und p_2 in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \zeta_3$ und damit folgt aus den Eigenschaften der Windungszahl, vgl. Propositionen 2.19, 2.20 und 2.24,

$$\begin{aligned} & \omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) \\ &= \omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) + 1 - \omega(\zeta, p_1) + \omega(\zeta, p_2) \\ &= \omega(\gamma|_{[0, t_1]}, p_1) + \omega(\gamma|_{[t_1, t_2]}, p_1) + \omega(\gamma|_{[t_2, 1]}, p_1) - \omega(\gamma|_{[t_1, t_2]}, p_1) - \omega(\eta, p_1) \\ &\quad - (\omega(\gamma|_{[0, t_1]}, p_2) + \omega(\gamma|_{[t_1, t_2]}, p_2) + \omega(\gamma|_{[t_2, 1]}, p_2) - \omega(\gamma|_{[t_1, t_2]}, p_2) - \omega(\eta, p_2)) + 1 \\ &= \omega(\zeta_3, p_1) - \omega(\zeta_3, p_2) + 1 = 1. \end{aligned}$$

2.3 Links- und Rechtsumgebungen eines Kreisbogensplines

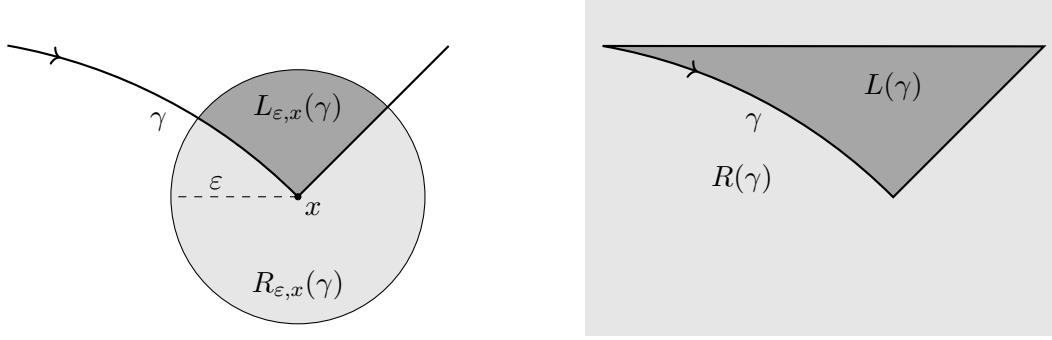


Abbildung 2.4: Links- und Rechtsumgebung eines Kreisbogensplines (links) und globale Einteilung der Punkte im Fall eines einfach geschlossenen Kreisbogensplines (rechts).

□

Definition 2.38. Sei $\gamma \in \mathcal{S}$ lokal einfach in $x \in \gamma^\circ$, sei $B_\epsilon(x)$, $\epsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich γ mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$. Sei $\eta_{\epsilon, x}$ der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\epsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma(t_2)$ und Endpunkt $\gamma(t_1)$. Dann nennen wir

$$L_{\epsilon, x}(\gamma) := I(\gamma|_{[t_1, t_2]} \sqcup \eta_{\epsilon, x})$$

die Linksumgebung von γ in $B_\epsilon(x)$ und

$$R_{\epsilon, x}(\gamma) := E(\gamma|_{[t_1, t_2]} \sqcup \eta_{\epsilon, x}) \cap B_\epsilon(x)$$

die Rechtsumgebung von γ in $B_\epsilon(x)$. Für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in \mathcal{S}_0$ definieren wir zusätzlich Links- und Rechtsumgebungen im Anfangs- bzw. Endpunkt indem wir wie gewohnt den Anfangspunkt verschieben.

Ein Beispiel einer Links- und einer Rechtsumgebung ist in Abbildung 2.4 links zu sehen. Für einfach geschlossene Kreisbogensplines wollen wir global von links und rechts sprechen können, vgl. Abbildung 2.4 rechts:

Definition 2.39. Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0^*$. Ist γ positiv orientiert, dann definieren wir $L(\gamma) := I(\gamma)$ und $R(\gamma) := E(\gamma)$, ist γ negativ orientiert, dann sei $L(\gamma) := E(\gamma)$ und $R(\gamma) := I(\gamma)$. Wir sagen die Punkte in $L(\gamma)$ liegen links von γ und die Punkte in $R(\gamma)$ liegen rechts von γ .

Aus Definition 2.29 und den Propositionen 2.24, 2.25, 2.28 und 2.37 folgt:

Proposition 2.40. Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0^*$ und sei $B_\epsilon(x)$, $\epsilon > 0$, $x \in \gamma$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich γ . Dann ist

$$L_{\epsilon, x}(\gamma) = L(\gamma) \cap B_\epsilon(x) \quad \text{und} \quad R_{\epsilon, x}(\gamma) = R(\gamma) \cap B_\epsilon(x).$$

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

Nach Definition 2.39 sind insbesondere für ein Kreissegment γ die Mengen $L([\gamma])$ und $R([\gamma])$, also die Punkte links und rechts bezüglich des zugehörigen Kreises definiert. Um diese Notation allgemein für Kreisbögen benutzen zu können, definieren wir für Strecken entsprechend:

Definition 2.41. *Sei*

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = p + t \cdot v, \quad p \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

eine orientierte Gerade. Wir definieren die beiden offenen Halbebene

$$\begin{aligned} L(g) &:= \{q \in \mathbb{R}^2 : \det[q - p, v] < 0\} \text{ und} \\ R(g) &:= \{q \in \mathbb{R}^2 : \det[q - p, v] > 0\}. \end{aligned}$$

Eigenschaften von Links- und Rechtsumgebungen

Im Folgenden stellen wir für den weiteren Verlauf hilfreiche Eigenschaften von Links- und Rechtsumgebungen zusammen. Da sich das Vorzeichen der Windungszahl unter orientierungsumkehrenden Parametertransformationen umkehrt, vgl. Proposition 2.20, folgt aus Proposition 2.37, dass sich Links- und Rechtsumgebungen vertauschen, falls der Kreisbogenspline rückwärts durchlaufen wird:

Proposition 2.42. *Ist $\gamma \in \mathcal{S}$ und $x \in M(\gamma)$, dann ist jede Linksumgebung von γ in x eine Rechtsumgebung von $\bar{\gamma}$ in x und umgekehrt.*

Folgende Proposition zeigt, dass Links- und Rechtsumgebungen konsistent sind, sofern die zugehörigen ε -Kugeln in einer Teilmengenbeziehung stehen:

Proposition 2.43 (Konsistenz auf Teilmengen). *Sei $\gamma \in \mathcal{S}$ und seien*

$$B_{\varepsilon_1}(x_1), B_{\varepsilon_2}(x_2), \quad x_1, x_2 \in \gamma, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

lokale Einfachheitsumgebungen von x_1 bzw. x_2 bezüglich γ , so dass $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1)$ ist. Dann gilt

$$L_{\varepsilon_2, x_2}(\gamma) \subset L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$$

und

$$R_{\varepsilon_2, x_2}(\gamma) \subset R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma).$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\gamma \in \mathcal{S}_0$ ist, da wir andernfalls auf $\gamma \sqcup \gamma_2$ mit einem Kreisbogenspline γ_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon_1}(x_1)$ mit Anfangspunkt $\gamma(1)$ und Endpunkt $\gamma(0)$ übergehen könnten. Seien $p_1 \in L_{\varepsilon_2, x_2}(\gamma)$ und $p_2 \in R_{\varepsilon_2, x_2}(\gamma)$. Nach Proposition 2.37 ist

$$\omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) = 1. \tag{2.1}$$

Wegen $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1)$ und

$$B_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus \gamma = L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma) \cup R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$$

gilt

$$p_1, p_2 \in L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma) \cup R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma).$$

Angenommen es seien $p_1, p_2 \in L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$ oder $p_1, p_2 \in R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$. Dann wäre

$$\omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) = 0,$$

da die beiden Punkte in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ wären und die Windungszahl lokal konstant ist, vgl. Proposition 2.24. Wir erhielten also einen Widerspruch zu (2.1). Damit gilt entweder

$$p_1 \in L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma) \quad \text{und} \quad p_2 \in R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$$

oder

$$p_1 \in R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma) \quad \text{und} \quad p_2 \in L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma).$$

Im zweiten Fall würde aus Proposition 2.37 folgen, dass $\omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) = -1$ ist, im Widerspruch zu (2.1). Damit gilt $p_1 \in L_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$ und $p_2 \in R_{\varepsilon_1, x_1}(\gamma)$. \square

2.4 Schnitte zweier Kreisbogensplines

Wir werden im Folgenden mithilfe der Links- und Rechtsumgebungen Schnittpunkte zweier Kreisbogensplines genauer untersuchen.

Definition 2.44. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$ und sei $t \in I$. Wir sagen η verlässt γ in t nach links (rechts), falls $\eta(t) \in M(\gamma)$ ist und es ein $\varepsilon \in (0, 1 - t]$ gibt, so dass $\eta|_{(t, t+\varepsilon]}$ in einer Linksumgebung (Rechtsumgebung) von γ um $\eta(t)$ liegt. Wir sagen η nähert sich γ in t von links (rechts) an, falls $\bar{\eta}$ den Kreisbogenspline γ im Parameter $1 - t$ nach links (rechts) verlässt. Außerdem definieren wir folgende kompakte Schreibweise:*

$$\chi^+(\gamma, \eta, t) := \begin{cases} 1, & \eta \text{ verlässt } \gamma \text{ in } t \text{ nach links,} \\ -1, & \eta \text{ verlässt } \gamma \text{ in } t \text{ nach rechts,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\chi^-(\gamma, \eta, t) := \begin{cases} 1, & \eta \text{ nähert sich } \gamma \text{ in } t \text{ von links an,} \\ -1, & \eta \text{ nähert sich } \gamma \text{ in } t \text{ von rechts an,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

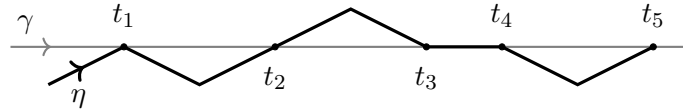


Abbildung 2.5: Illustration von Definition 2.45 und 2.46: In t_1 und t_5 berührt η den Kreisbogenspline γ von rechts, in t_2 wird γ von η von rechts geschnitten und in $[t_3, t_4]$ wird γ von η von links geschnitten.

Man beachte, dass sich der Parameter t auf den Kreisbogenspline η bezieht und dass sich links und rechts auf den „Referenzkreisbogenspline“ γ bezieht. Zur Illustration von Definition 2.44 betrachten wir Abbildung 2.5: In t_1 , t_2 und t_5 nähert sich η von rechts an γ an, in t_3 nähert sich η von links an γ an, in t_1 und t_4 verlässt η den Kreisbogenspline γ nach rechts und in t_2 wird γ von η nach links verlassen. Es gibt keine weiteren Parameter, an denen η den Kreisbogenspline γ verlässt oder sich an ihn annähert. Alternativ lässt sich das eben gesagte auch folgendermaßen formulieren:

$$\chi^+(\gamma, \eta, t) = \begin{cases} 1, & t = t_2, \\ -1, & t \in \{t_1, t_4\}, \\ 0, & t \in I \setminus \{t_1, t_2, t_4\}, \end{cases}$$

und

$$\chi^-(\gamma, \eta, t) = \begin{cases} 1, & t = t_3, \\ -1, & t \in \{t_1, t_2, t_5\}, \\ 0, & t \in I \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_5\}. \end{cases}$$

Definition 2.45. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$, $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 \leq t_2$. Wir sagen η schneidet γ in $[t_1, t_2]$ von links (rechts), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\eta|_{[t_1, t_2]} \subset M(\gamma)$,
2. η nähert sich in t_1 von links (rechts) an γ an,
3. η verlässt γ in t_2 nach rechts (links).

Im Fall $t_1 = t_2$ sagen wir auch η schneidet γ in t_1 von links bzw. rechts. Außerdem sagen wir, dass η den Kreisbogenspline γ im Punkt x von links (rechts) schneidet, falls $\eta^{-1}(x)$ einelementig ist und γ von η in $t_\eta(x)$ von links (rechts) geschnitten wird.

Man beachte, dass η den Kreisbogenspline γ gemäß Definition 2.45 entweder in einem Intervall oder einem Punkt schneidet, je nachdem, ob $t_1 < t_2$ ist.

Zur Veranschaulichung betrachten wir wieder Abbildung 2.5: In t_2 wird γ von η von rechts geschnitten und in $[t_3, t_4]$ schneidet η den Kreisbogenspline γ von links. Man beachte, dass diese Definition von gerichteten Schnitten im Fall von Strecken konsistent ist mit Definition 2.31.



Abbildung 2.6: Beispiele von Kreisbogensplines (schwarz), die γ von rechts berühren, vgl. Definition 2.46. Die Durchlaufrichtung der schwarzen Kreisbogensplines spielt keine Rolle.

Definition 2.46. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$, $t_1, t_2 \in \mathbf{I}$, $t_1 \leq t_2$. Wir sagen η berührt γ in $[t_1, t_2]$ von links (rechts), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\eta|_{[t_1, t_2]} \subset M(\gamma)$,
2. $t_1 = 0$ oder η nähert sich in t_1 von links (rechts) an γ an,
3. $t_2 = 1$ oder η verlässt γ in t_2 nach links (rechts).

Im Fall $t_1 = t_2$ sagen wir auch η berührt γ in t_1 von links bzw. rechts. Außerdem sagen wir, dass η den Kreisbogenspline γ im Punkt x von links (rechts) berührt, falls $\eta^{-1}(x)$ einelementig ist und γ von η in $t_\eta(x)$ von links (rechts) berührt wird.

Wir sagen η berührt γ von links (rechts), falls $\gamma \cap \eta \neq \emptyset$ ist und es für alle $t \in \eta^{-1}(\gamma)$ zwei Parameter $t_1, t_2 \in \mathbf{I}$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$ gibt, so dass η den Kreisbogenspline γ in $[t_1, t_2]$ von links (rechts) berührt.

Eine Veranschaulichung dieser Definition ist in Abbildung 2.6 zu sehen. Man beachte, dass η den Kreisbogenspline γ im Fall $\eta \subset \gamma$ von links und von rechts berührt. Eine gleichzeitige Berührung von links und von rechts ist jedoch nur in diesem speziellen Fall möglich.

Grundlegende Eigenschaften

Aus der Definition von χ^\pm und aus Proposition 2.42, die besagt, dass sich Links- und Rechtsumgebungen vertauschen, wenn der Kreisbogenspline rückwärts durchlaufen wird, folgen direkt folgende Eigenschaften:

Proposition 2.47. Für alle $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$ gilt

1. $\chi^+(\gamma, \bar{\eta}, t) = \chi^-(\gamma, \eta, 1 - t)$,
2. $\chi^\pm(\bar{\gamma}, \eta, t) = -\chi^\pm(\gamma, \eta, t)$.

Folgende Proposition zeigt, dass sich unter gewissen Voraussetzungen die Parameter, an denen sich ein Kreisbogenspline an einen zweiten annähert bzw. diesen verlässt, abwechseln müssen:

Proposition 2.48. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$, so dass $\gamma \cap \eta \subset M(\gamma)$. Gibt es $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, $t_1 < t_2$, so dass

$$\chi^-(\gamma, \eta, t_1) \neq 0, \quad \chi^-(\gamma, \eta, t_2) \neq 0,$$

dann existiert ein $t_3 \in [t_1, t_2)$, so dass

$$\chi^+(\gamma, \eta, t_3) \neq 0.$$

Gibt es $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, $t_1 < t_2$, so dass

$$\chi^+(\gamma, \eta, t_1) \neq 0, \quad \chi^+(\gamma, \eta, t_2) \neq 0,$$

dann existiert ein $t_3 \in (t_1, t_2]$, so dass

$$\chi^-(\gamma, \eta, t_3) \neq 0.$$

Beweis. Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, $t_1 < t_2$, so dass $\chi^-(\gamma, \eta, t_1) \neq 0$ und $\chi^-(\gamma, \eta, t_2) \neq 0$ ist. Dann ist $\eta(t_i) \in \gamma$ und $\eta|_{(t_i-\varepsilon, t_i)} \cap \gamma = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$, $i = 1, 2$. Damit gibt es ein $t_3 \in [t_1, t_2)$, so dass $\eta(t_3) \in \gamma$ und $\eta|_{(t_3, t_3+\varepsilon)} \cap \gamma = \emptyset$ ist für ein $\varepsilon > 0$. Da γ in jedem Schnittpunkt mit η lokal einfach ist, gilt $\chi^+(\gamma, \eta, t_3) \neq 0$. Analog folgt der zweite Teil der Behauptung. \square

Vertauschen der Rollen der beiden Kreisbogensplines

Die folgende Proposition zeigt, dass sich an der Differenz

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) - \chi^-(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x))$$

nur das Vorzeichen ändert, wenn die Rollen von γ_1 und γ_2 vertauscht werden.

Proposition 2.49. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}$ und sei $x \in M(\gamma_1) \cap M(\gamma_2)$. Dann gilt

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) - \chi^-(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) = \chi^-(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)) - \chi^+(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)). \quad (2.2)$$

Beweis. Sei $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich der beiden Kreisbogensplines γ_1 und γ_2 mit lokalem Parameterbereich $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$, bezüglich γ_1 bzw. $[u_1, u_2]$, $u_1, u_2 \in \mathbb{I}$, bezüglich γ_2 . Da $\gamma_2^{-1}(\gamma_1)$ eine Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist, können wir ε so wählen, dass $\gamma_2^{-1}(\gamma_1) \cap [u_1, u_2]$ entweder $[u_1, u_2]$, $[u_1, t_{\gamma_2}(x)]$, $[t_{\gamma_2}(x), u_2]$ oder $\{t_{\gamma_2}(x)\}$ ist. Sei η_1 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma_1(t_2)$ und Endpunkt $\gamma_1(t_1)$ und sei η_2 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma_2(u_2)$ und Endpunkt $\gamma_2(u_1)$. Unter diesen Voraussetzungen verlässt γ_2 den Kreisbogenspline γ_1 in x genau dann nach links, wenn $\gamma_2(u_2) \in \eta_1^\circ$ ist. Genauer gilt

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) = \begin{cases} 1, & \gamma_2(u_2) \in \eta_1^\circ, \\ 0, & \gamma_2(u_2) \in \{\eta_1(0), \eta_1(1)\}, \\ -1, & \gamma_2(u_2) \notin \eta_1, \end{cases}$$

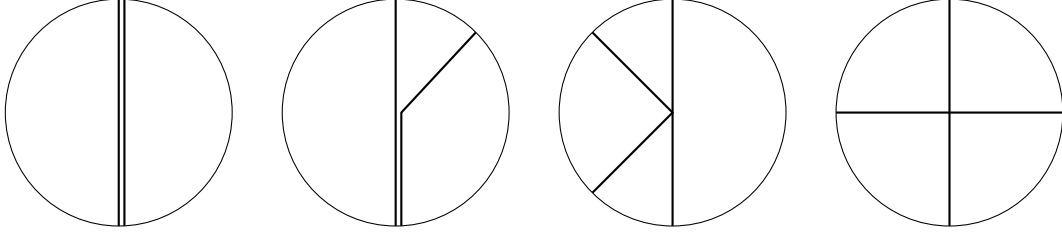


Abbildung 2.7: Fälle im Beweis von Proposition 2.49. Zur besseren Visualisierung sind die beiden Kreisbogensplines leicht versetzt gezeichnet.

und es gelten die entsprechenden Aussagen für $\chi^-(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x))$, $\chi^+(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x))$ und $\chi^-(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x))$. Aufgrund der beiden Formeln in Proposition 2.47 können wir γ_1 und γ_2 gegebenenfalls durch $\overline{\gamma_1}$ bzw. $\overline{\gamma_2}$ ersetzen. Damit ist es ausreichend die folgenden vier Fälle zu unterscheiden, siehe Abbildung 2.7:

1. $\gamma_2(u_1), \gamma_2(u_2) \in \{\eta_1(0), \eta_1(1)\}$,
2. $\gamma_2(u_1) = \eta_1(1)$ und $\gamma_2(u_2) \notin \{\eta_1(0), \eta_1(1)\}$,
3. $\gamma_2(u_1), \gamma_2(u_2) \in \eta_1^\circ$,
4. $\gamma_2(u_1) \notin \eta_1$ und $\gamma_2(u_2) \in \eta_1^\circ$.

Zu 1): Aus der Definition von η_1 und η_2 folgt in diesem Fall

$$\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2) \in \{\eta_2(0), \eta_2(1)\}$$

und damit ist jeder Wert in (2.2) null.

Zu 2): In diesem Fall ist entweder $\gamma_2(u_2) \in \eta_1^\circ$ oder $\gamma_2(u_2) \notin \eta_1$. Da die beiden Kreisbögen η_1 und η_2 zwei positiv orientierte Kreisbögen mit demselben Trägerkreis und demselben Endpunkt sind, gilt im ersten Fall $\gamma_1(t_2) \notin \eta_2$ und im zweiten $\gamma_1(t_2) \in \eta_2^\circ$. Es gilt also in jedem Fall

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) = -\chi^+(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)).$$

Damit folgt die Behauptung aus

$$\chi^-(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) = 0 = \chi^-(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)).$$

Zu 3): Es gilt entweder $\gamma_2(u_2) \prec_{\eta_1} \gamma_2(u_1)$ oder $\gamma_2(u_1) \prec_{\eta_1} \gamma_2(u_2)$. Im ersten Fall folgt $\eta_2 \subsetneq \eta_1$ und damit gilt $\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2) \notin \eta_2$. Im zweiten Fall gilt $\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2) \in \eta_2^\circ$. In jedem Fall sind beide Summanden in (2.2) null.

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

Zu 4): In diesem Fall ist $\gamma_1(t_1) \in \eta_2^\circ$ und $\gamma_1(t_2) \notin \eta_2$. Daraus folgt

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) - \chi^-(\gamma_1, \gamma_2, t_{\gamma_2}(x)) = 2 = \chi^-(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)) - \chi^+(\gamma_2, \gamma_1, t_{\gamma_1}(x)).$$

□

Im Fall 2) im Beweis von Proposition 2.49 bilden die beiden Kreisbögen eine sogenannte *Verzweigung* und im Fall 4) eine *Kreuzung*. In diesen Fällen lässt sich die Aussage von Proposition 2.49 folgendermaßen vereinfachen:

Korollar 2.50. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}^*$ und seien $t_1, t_2, u_1, u_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$, $u_1 < u_2$ und $\gamma_1|_{[t_1, t_2]} = \gamma_2|_{[u_1, u_2]}$. Im Fall $t_2, u_2 < 1$ gilt*

$$\chi^+(\gamma_1, \gamma_2, u_2) = -\chi^+(\gamma_2, \gamma_1, t_2)$$

und im Fall $t_1, u_1 > 0$ gilt

$$\chi^-(\gamma_1, \gamma_2, u_1) = -\chi^-(\gamma_2, \gamma_1, t_1).$$

Korollar 2.51. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}^*$ und seien $t_1, t_2, u_1, u_2 \in (0, 1)$, $t_1 \leq t_2$, $u_1 \leq u_2$, so dass*

$$\text{Im}(\gamma_1([t_1, t_2])) = \text{Im}(\gamma_2([u_1, u_2])).$$

Dann schneidet γ_1 den Kreisbogenspline γ_2 in $[t_1, t_2]$ genau dann von links, wenn γ_2 den Kreisbogenspline γ_1 in $[u_1, u_2]$ von rechts schneidet.

Links- und Rechtsumgebungen bei Verzweigungen und Kreuzungen

Wir wollen in bestimmten Situationen Beziehungen zwischen Links- und Rechtsumgebungen zweier Kreisbogensplines herstellen. In der folgenden Proposition betrachten wir eine Verzweigungssituation, wie sie etwa in Abbildung 2.8 zu sehen ist.

Proposition 2.52. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}^*$ und sei $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$, so dass $\gamma_1|_{[0, t(x)]} = \gamma_2|_{[0, t(x)]}$ und $\gamma_1|_{(t(x), 1]} \cap \gamma_2|_{(t(x), 1]} = \emptyset$ ist. Sei $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich der beiden Kreisbogensplines γ_1 und γ_2 . Verlässt γ_2 den Kreisbogenspline γ_1 in x nach links, dann gilt*

1. $L_{\varepsilon, x}(\gamma_2) \subset L_{\varepsilon, x}(\gamma_1)$,

2. $R_{\varepsilon, x}(\gamma_1) \subset R_{\varepsilon, x}(\gamma_2)$

und mit $\gamma_3 := \overline{\gamma_2|_{(t(x), 1]}} \sqcup \gamma_1|_{(t(x), 1]}$ gilt

3. $L_{\varepsilon, x}(\gamma_3) = L_{\varepsilon, x}(\gamma_1) \cap R_{\varepsilon, x}(\gamma_2)$.

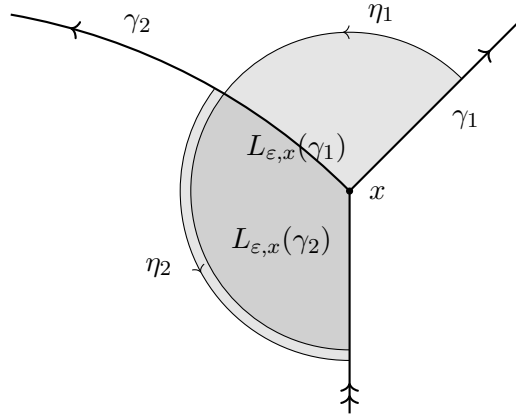


Abbildung 2.8: Illustration der Verzweigung aus Proposition 2.52.

Beweis. Da der Verlauf von γ_1 und γ_2 außerhalb von $B_\varepsilon(x)$ nicht relevant ist, können wir annehmen, dass $\gamma_1 \cap B_\varepsilon(x) = \gamma_1|_{(0,1)}$ und $\gamma_2 \cap B_\varepsilon(x) = \gamma_2|_{(0,1)}$ ist. Analog zum Beweis von Proposition 2.49 sei η_1 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma_1(1)$ und Endpunkt $\gamma_1(0)$ und η_2 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma_2(1)$ und Endpunkt $\gamma_2(0)$. Da γ_2 den Kreisbogenspline γ_1 in x nach links verlässt, gilt $\gamma_2(1) \in \eta_1$. Da η_1 und η_2 zwei Kreisbögen mit demselben Trägerkreis und demselben Endpunkt sind, folgt daraus $\eta_2 \subset \eta_1$. Aus Definition 2.38 folgt, dass dies äquivalent zu $L_{\varepsilon,x}(\gamma_2) \subset L_{\varepsilon,x}(\gamma_1)$ und $R_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \subset R_{\varepsilon,x}(\gamma_2)$ ist und damit ist 1) und 2) gezeigt.

Um 3) zu zeigen sei nun η_3 der positiv orientierte Kreisbogen auf $\partial B_\varepsilon(x)$ mit Anfangspunkt $\gamma_3(1) = \gamma_1(1)$ und Endpunkt $\gamma_3(0) = \gamma_2(1)$. Dann ist $\eta_1 = \eta_3 \sqcup \eta_2$ und damit ist $L_{\varepsilon,x}(\gamma_1)$ die disjunkte Vereinigung von $L_{\varepsilon,x}(\gamma_3)$, $L_{\varepsilon,x}(\gamma_2)$ und $\gamma_2|_{(t(x),1)}$. Daraus folgt

$$L_{\varepsilon,x}(\gamma_3) = L_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \setminus (L_{\varepsilon,x}(\gamma_2) \cup \gamma_2|_{(t(x),1)}) = L_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \cap R_{\varepsilon,x}(\gamma_2).$$

□

Analog lassen sich folgende Aussagen im Fall zweier sich schneidender Kreisbogensplines beweisen:

Proposition 2.53. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}^*$, so dass

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ =: \{x\}$$

und sei $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von x bezüglich der beiden Kreisbogensplines γ_1 und γ_2 . Schneidet γ_2 den Kreisbogenspline γ_1 von rechts, dann gilt:

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

1. $L_{\varepsilon,x}(\gamma_1|_{[0,t(x)]} \sqcup \gamma_2|_{[t(x),1]}) = L_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \cap L_{\varepsilon,x}(\gamma_2),$
2. $R_{\varepsilon,x}(\gamma_2|_{[0,t(x)]} \sqcup \gamma_1|_{[t(x),1]}) = R_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \cap R_{\varepsilon,x}(\gamma_2),$
3. $L_{\varepsilon,x}(\overline{\gamma_2|_{[t(x),1]}} \sqcup \gamma_1|_{[t(x),1]}) = L_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \cap R_{\varepsilon,x}(\gamma_2),$
4. $R_{\varepsilon,x}(\gamma_1|_{[0,t(x)]} \sqcup \overline{\gamma_2|_{[0,t(x)]}}) = R_{\varepsilon,x}(\gamma_1) \cap L_{\varepsilon,x}(\gamma_2).$

Charakterisierung über Tangenten

In Bemerkung 2.32 wurde für Strecken ein Zusammenhang zwischen der Richtung eines Schnittes und den Tangenten der Strecken hergestellt. Dieser Zusammenhang lässt sich auch für Kreisbögen formulieren:

Proposition 2.54. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}$ und sei $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$. Dann gilt*

1. γ_2 schneidet γ_1 in x von rechts, falls $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'(x)] > 0,$
2. γ_2 schneidet γ_1 in x von links, falls $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'(x)] < 0,$
3. γ_2 schneidet γ_1 in x weder von rechts noch von links, falls $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'(x)] = 0.$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch einen speziellen Fall und nehmen an, dass γ_1 ein positiv orientiertes Kreissegment und γ_2 eine Strecke ist. Die anderen Fälle können analog bewiesen werden. Da die Einheitstangenten an γ_1 und γ_2 im Schnittpunkt von einer Translation des Koordinatensystems nicht beeinflusst werden können wir annehmen, dass das Zentrum von $[\gamma_1]$ im Ursprung liegt. Aufgrund der Eigenschaften der Determinante können wir außerdem annehmen, dass x auf der positiven x -Achse liegt, also dass $x = (r, 0)^T$ mit Radius $r > 0$ ist. Wegen $x \in \gamma_2^\circ$ können wir γ_2 folgendermaßen parametrisieren:

$$\gamma_2(t) = x + vt, \quad t \in [a, b], \quad a < 0, \quad b > 0, \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad \|v\|_2 = 1.$$

Damit gilt

$$\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'] = \det \begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 1 & v_2 \end{bmatrix} = -v_1$$

und für den quadrierten Abstand eines Punkts auf γ_2 zum Ursprung und damit zum Kreiszentrum gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma_2(t)\|_2^2 &= (r + v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 = r^2 + 2rv_1 t + (v_1^2 + v_2^2)t^2 \\ &= r^2 + 2rv_1 t + t^2 = r^2 + t(2rv_1 + t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Ist $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'] = 0$, also $v_1 = 0$, dann gilt

$$\|\gamma_2(t)\|_2 \geq r.$$

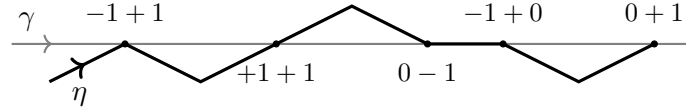


Abbildung 2.9: Illustration der Summanden $\chi^+(\gamma, \eta, t) - \chi^-(\gamma, \eta, t)$ zur Berechnung von $\Delta(\gamma, \eta)$.

Damit ist $\gamma_2 \subset \overline{E([\gamma_1])} = \overline{R([\gamma_1])}$ und somit schneidet γ_2 den Kreisbogen γ_1 in x weder von links noch von rechts. Ist $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'] < 0$, also $v_1 > 0$, dann gilt

$$\begin{cases} \|\gamma_2(t)\|_2 < r, & t \in (-2rv_1, 0), \\ \|\gamma_2(t)\|_2 > r, & t > 0, \end{cases}$$

und damit schneidet γ_2 den Kreisbogen γ_1 in x von links. Ist $\det[\gamma_1'(x), \gamma_2'] > 0$, also $v_1 < 0$, dann gilt

$$\begin{cases} \|\gamma_2(t)\|_2 > r, & t < 0, \\ \|\gamma_2(t)\|_2 < r, & t \in (0, -2rv_1), \end{cases}$$

und damit schneidet γ_2 den Kreisbogen γ_1 in x von rechts. □

2.5 Zählen gerichteter Schnitte

Wir wollen im Folgenden die Werte von $\chi^\pm(\gamma, \eta, t)$, $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$, $t \in I$, entlang des Weges η aufsummieren und diese Summe genauer untersuchen. Da die Menge

$$\{t \in I : \chi^+(\gamma, \eta, t) - \chi^-(\gamma, \eta, t) \neq 0\}$$

endlich ist, ist folgende Summe wohldefiniert:

Definition 2.55. Für $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$\Delta(\gamma, \eta) := \sum_{t \in I} \chi^+(\gamma, \eta, t) - \chi^-(\gamma, \eta, t).$$

Vage formuliert zählt $\Delta(\gamma, \eta)$ Schnitte mit Vorzeichen in ähnlicher Weise wie wir es aus der Berechnung der Windungszahl für geschlossene Polygonzüge aus Lemma 2.33 kennen. Jedoch wird jeder Schnitt doppelt gezählt, um detailliertere Aussagen machen zu können. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.9 zu sehen: In allen Punkten in denen $\chi^+(\gamma, \eta, t)$ oder $\chi^-(\gamma, \eta, t)$ ungleich null ist, sind die entsprechenden Werte eingezeichnet.

Grundlegende Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von χ^\pm nach Proposition 2.47 und dessen Lokalität.

Proposition 2.56. *Für alle $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$ gilt*

1. $\Delta(\gamma, \bar{\eta}) = -\Delta(\gamma, \eta)$,
2. $\Delta(\bar{\gamma}, \eta) = -\Delta(\gamma, \eta)$,
3. $\Delta(\gamma, \eta) = \Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) + \Delta(\gamma, \eta|_{[t,1]})$, $t \in (0, 1)$.

Außerdem gilt für alle $\eta \in \mathcal{S}$

4. $\Delta(\gamma, \eta) = \Delta(\gamma|_{[0,t]}, \eta) + \Delta(\gamma|_{[t,1]}, \eta)$, $\gamma \in \mathcal{S}^*$, $t \in (0, 1)$, $\gamma(t) \notin \eta$,
5. $\Delta(\gamma, \eta) = \Delta(\gamma|_{[0,t]}, \eta) + \Delta(\gamma|_{[t,1]}, \eta)$, $\gamma \in \mathcal{S}_0^*$, $t \in (0, 1)$, $\gamma(0), \gamma(t) \notin \eta$.

Direkt aus Proposition 2.49 folgt, dass sich das Vorzeichen von $\Delta(\gamma, \eta)$ umkehrt, wenn die beiden Argumente vertauscht werden. Man beachte, dass dabei insbesondere vorausgesetzt werden muss, dass kein Anfangs- oder Endpunkt auf dem jeweils anderen Kreisbogenspline liegt.

Proposition 2.57. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$ lokal einfach in jedem $x \in \gamma \cap \eta$. Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \eta) = -\Delta(\eta, \gamma).$$

Da die nicht-null-Werte von $\chi^\pm(\gamma, \eta, t)$ entweder 1 oder -1 und damit insbesondere ungerade sind, folgt aus Proposition 2.48 folgender Zusammenhang zwischen dem Wert von $\Delta(\gamma, \eta)$ und der Lage des Anfangs- und Endpunkts von η relativ zu γ :

Proposition 2.58. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}$, so dass $\gamma \cap \eta \subset M(\gamma)$. Dann ist $\Delta(\gamma, \eta)$ genau dann gerade, wenn $\{\eta(0), \eta(1)\} \subset \gamma$ oder $\{\eta(0), \eta(1)\} \cap \gamma = \emptyset$ ist.*

Berechnung über die Windungszahl

Wir zeigen im Folgenden, dass sich $\Delta(\gamma, \eta)$ unter gewissen Umständen über Windungszahlen des Anfangs- und Endpunkts von η bezüglich γ berechnen lässt. Wir definieren dazu eine auf den Windungszahlen $\omega(\gamma, \cdot)$ basierende Funktion λ_γ , die den Definitionsbereich der Windungszahl um die lokal einfachen Punkte von γ erweitert. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.10 zu sehen.

Definition 2.59. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0$. Für jedes $x \in M(\gamma)$ wählen wir p_1 und p_2 aus einer Links- bzw. Rechtsumgebung von γ in x . Dann definieren wir $\lambda_\gamma : (\mathbb{R}^2 \setminus \gamma) \cup M(\gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch*

$$\lambda_\gamma(x) := \begin{cases} 2\omega(\gamma, x), & x \notin \gamma, \\ \omega(\gamma, p_1) + \omega(\gamma, p_2), & x \in M(\gamma). \end{cases}$$

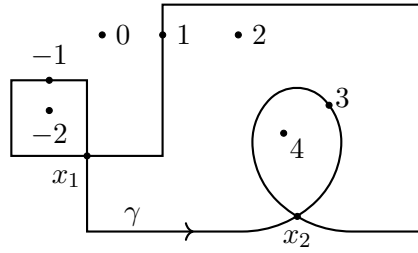


Abbildung 2.10: Beispiel zu Definition 2.59: Zu jedem Punkt ist der Wert von $\lambda_\gamma(\cdot)$ angetragen. Für die Punkte x_1 und x_2 ist $\lambda_\gamma(\cdot)$ nicht definiert.

Da die Windungszahl auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist und Links- und Rechtsumgebungen in $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ zusammenhängend und auf Teilmengen konsistent sind, vgl. Proposition 2.24 bzw. 2.43, ist λ_γ wohldefiniert und außerdem folgt direkt:

Proposition 2.60. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0$. Dann ist λ_γ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ und auf jeder zusammenhängenden Menge lokal einfacher Punkte.*

Ist γ ein einfach geschlossener Kreisbogenspline, dann folgt aus der Definition 2.39 von Punkten links und rechts von γ und den Eigenschaften der Windungszahl, vgl. Propositionen 2.24 und 2.28, folgende Aussage:

Proposition 2.61. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0^*$ und seien $q_1 \in R(\gamma)$, $q_2 \in \gamma$ und $q_3 \in L(\gamma)$. Dann gilt*

$$\lambda_\gamma(q_3) - \lambda_\gamma(q_2) = \lambda_\gamma(q_2) - \lambda_\gamma(q_1) = 1.$$

Folgende Proposition stellt den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen $\Delta(\gamma, \eta)$ und der Funktion λ_γ her:

Proposition 2.62. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}_0$ und $\eta \in \mathcal{S}$, so dass $\gamma \cap \eta \subset M(\gamma)$. Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \eta) = \lambda_\gamma(\eta(1)) - \lambda_\gamma(\eta(0)). \quad (2.3)$$

Beweis. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ eine Unterteilung, so dass für jeden Abschnitt $\eta_i := \eta|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, die Menge $\eta_i^{-1}(\gamma)$ entweder $\{0\}$, $\{1\}$, $[0, 1]$ oder \emptyset ist. Man beachte, dass das Parameterintervall jedes Abschnitts wieder I ist, vgl. Definition 2.16. Wir zeigen, dass (2.3) für jedes Teilstück erfüllt ist. Damit folgt die Behauptung für den gesamten Kreisbogenspline mittels Teleskopsumme aus Proposition 2.56, 3). Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir untersuchen zuerst den Fall $\eta_i^{-1}(\gamma) = \{0\}$ und bezeichnen $\eta_i(0)$ mit x . Sei p_1 aus einer Linksumgebung $L_{\varepsilon, x}(\gamma)$, $\varepsilon > 0$, von γ und p_2 aus einer Rechtsumgebung von γ in x . Wir nehmen an, dass η_i den Kreisbogenspline γ in 0 nach links verlässt, da der Beweis analog geführt werden kann, falls γ von η_i in 0 nach rechts verlässt. Dann gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, so dass $\eta_i|_{(0, \varepsilon_2]} \subset L_{\varepsilon, x}(\gamma)$.

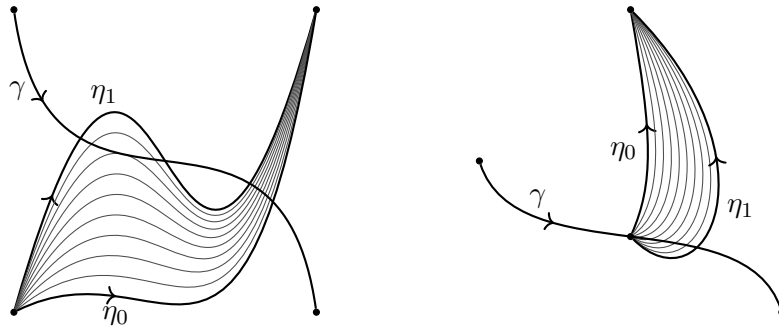


Abbildung 2.11: Beispiele zu Proposition 2.63.

Wegen $\eta_i|_{[\varepsilon_2, 1]} \cap \gamma = \emptyset$ und $L_{\varepsilon, x}(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$ liegen p_1 , $\eta_i(\varepsilon_2)$ und $\eta_i(1)$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Da λ_γ innerhalb einer Zusammenhangskomponente konstant ist, vgl. Proposition 2.60, folgt

$$\begin{aligned} \lambda_\gamma(\eta_i(1)) - \lambda_\gamma(\eta_i(0)) &= \lambda_\gamma(p_1) - \lambda_\gamma(\eta_i(0)) = 2\omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) \\ &= \omega(\gamma, p_1) - \omega(\gamma, p_2) \end{aligned}$$

und zusammen mit Proposition 2.37 und Definition 2.38 folgt

$$\lambda_\gamma(\eta_i(1)) - \lambda_\gamma(\eta_i(0)) = 1 = \Delta(\gamma, \eta_i).$$

Der Fall $\eta_i^{-1}(\gamma) = \{1\}$ folgt durch Ersetzen von η durch $\bar{\eta}$ aus dem eben gezeigten und Proposition 2.56. In den Fällen $\eta_i^{-1}(\gamma) = [0, 1]$ und $\eta_i^{-1}(\gamma) = \emptyset$ ist λ_γ nach Proposition 2.60 konstant auf η_i und damit gilt

$$\lambda_\gamma(\eta_i(1)) - \lambda_\gamma(\eta_i(0)) = 0 = \Delta(\gamma, \eta_i).$$

□

Stetige Veränderung der Kreisbogensplines

Proposition 2.62 erlaubt für geschlossene Kreisbogensplines γ eine Berechnung von $\Delta(\gamma, \eta)$ alleine über die Position des Anfangs- und Endpunkts von η . Eine analoge Aussage für nicht geschlossene Kreisbogensplines ist nicht möglich. Jedoch zeigt folgende Proposition, dass $\Delta(\gamma, \eta)$ unabhängig von gewissen stetigen Veränderungen von η ist:

Proposition 2.63 (Homotopieinvarianz im zweiten Argument). *Sei $\gamma \in \mathcal{S}$ und $(\eta_s)_{s \in I}$ eine stetige Familie von Kreisbogensplines, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\gamma \cap \eta_s \subset M(\gamma)$, $s \in I$,
2. $\eta_s(0) \in \gamma$ genau dann, wenn $\eta_0(0) \in \gamma$, $s \in I$,
3. $\eta_s(1) \in \gamma$ genau dann, wenn $\eta_0(1) \in \gamma$, $s \in I$.

Dann gilt

$$\Delta(\gamma, \eta_s) = \Delta(\gamma, \eta_0), \quad s \in I.$$

Beweis. Ist γ geschlossen, dann folgt die Behauptung aus den Propositionen 2.62 und 2.60. Wir nehmen also im Folgenden an, dass γ nicht geschlossen ist. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir

$$I_\varepsilon(s) := [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \cap I, \quad s \in I, \quad \varepsilon > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass $\Delta(\gamma, \eta_s)$ als Funktion von s in jedem $s \in I$ lokal konstant ist. Sei $s \in I$ und sei $M_s = \gamma \cap \eta_s$. Da γ in jedem Punkt in M_s lokal einfach ist, ist M_s eine endliche, disjunkte Vereinigung von isolierten Punkten und einfachen Kreisbogensplines und es gilt insbesondere $\gamma(0), \gamma(1) \notin M_s$. Damit ist $\mathbb{R}^2 \setminus M_s$ offen und zusammenhängend, vgl. Proposition 2.26, und wir können einen Kreisbogenspline γ_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus M_s$ von $\gamma(1)$ nach $\gamma(0)$ wählen. Wegen

$$(\gamma \cap \gamma_2) \cap \eta_s = \gamma_2 \cap (\gamma \cap \eta_s) = \gamma_2 \cap M_s = \emptyset$$

gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, so dass mit $\eta_{s',i} := \eta_{s'}|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $s' \in I$, die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

4. $\eta_s(t_i) \notin \gamma$, $i = 1, \dots, n-1$,
5. $\gamma \cap \eta_{s,i} = \emptyset$ oder $\gamma_2 \cap \eta_{s,i} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

Da $(\eta_s)_{s \in I}$ stetig ist, können wir $\varepsilon > 0$ so wählen, dass für alle $s' \in I_\varepsilon(s)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

6. $\eta_{s'}(t_i) \notin \gamma$, $i = 1, \dots, n-1$,
7. $\gamma \cap \eta_{s',i} = \emptyset$, falls $\gamma \cap \eta_{s,i} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$,
8. $\gamma_2 \cap \eta_{s',i} = \emptyset$, falls $\gamma_2 \cap \eta_{s,i} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

Nach den Eigenschaften von Δ , vgl. Proposition 2.56, gilt

$$\Delta(\gamma, \eta_{s'}) = \sum_{i=1}^n \Delta(\gamma, \eta_{s',i}), \quad s' \in I_\varepsilon(s),$$

und damit ist es ausreichend für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ zu zeigen, dass $\Delta(\gamma, \eta_{s',i})$ als Funktion von $s' \in I_\varepsilon(s)$ lokal konstant ist. Sei also $i \in \{1, \dots, n\}$. Falls $\gamma \cap \eta_{s,i} = \emptyset$, dann ist

$$\gamma \cap \eta_{s',i} = \emptyset, \quad s' \in I_\varepsilon(s),$$

2 Grundlagen und gerichtete Schnitte

und damit ist

$$\Delta(\gamma, \eta_{s',i}) = 0 = \Delta(\gamma, \eta_{s,i}), \quad s' \in I_\varepsilon(s).$$

Sei also $\gamma \cap \eta_{s,i} \neq \emptyset$ und damit

$$\gamma_2 \cap \eta_{s',i} = \emptyset, \quad s' \in I_\varepsilon(s). \quad (2.4)$$

Falls $i = 0$, dann folgt aus 1), 2) und (2.4) mit Proposition 2.60

$$\lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s',i}(0)) = \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s,i}(0)) \quad \text{für alle } s' \in I_\varepsilon(s). \quad (2.5)$$

Analog folgt (2.5) im Fall $i \neq 0$ aus 6) und (2.4). Außerdem folgt analog

$$\lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s',i}(1)) = \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s,i}(1)) \quad \text{für alle } s' \in I_\varepsilon(s). \quad (2.6)$$

Aus (2.4), (2.5) und (2.6) und dem Zusammenhang von Δ und $\lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}$, vgl. Proposition 2.62, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma, \eta_{s',i}) &= \Delta(\gamma \sqcup \gamma_2, \eta_{s',i}) = \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s',i}(1)) - \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s',i}(0)) \\ &= \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s,i}(1)) - \lambda_{\gamma \sqcup \gamma_2}(\eta_{s,i}(0)) = \Delta(\gamma \sqcup \gamma_2, \eta_{s,i}) = \Delta(\gamma, \eta_{s,i}). \end{aligned}$$

□

3 Problemstellung und Ziele

Die Problemstellung ist durch den sogenannten „Smooth Minimum Arc Path“-Algorithmus motiviert, vgl. Abschnitt 1.1 bzw. [16]. Wie wir in Abschnitt 1.1 gesehen haben, tauchen zirkuläre Sichtbarkeitsprobleme im Algorithmus in zwei Varianten auf: Einmal für die Berechnung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge am Anfang des Kanals und einmal für alle weiteren zirkulären Sichtbarkeitsmengen ausgehend vom Rand der letzten Sichtbarkeitsmenge. Letztere wird durch Zurechtschneiden des ursprünglichen Kanals erreicht. Wie aus Abschnitt 1.1 hervorgeht, unterscheiden sich die beiden Probleme sowohl in den Anforderungen an den Kanal als auch in der Definition von Sichtbarkeit. Die Grundkonzepte zur Lösung sind in beiden Fällen ähnlich. Ergebnisse zum ersten Fall können in [5] gefunden werden. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den zweiten Fall, also den der „zurechtgeschnittenen Kanäle“. Ein Beispielkanal mit Startkreisbogen σ und Kanalrand κ ist in Abbildung 3.1 (a) zu sehen.

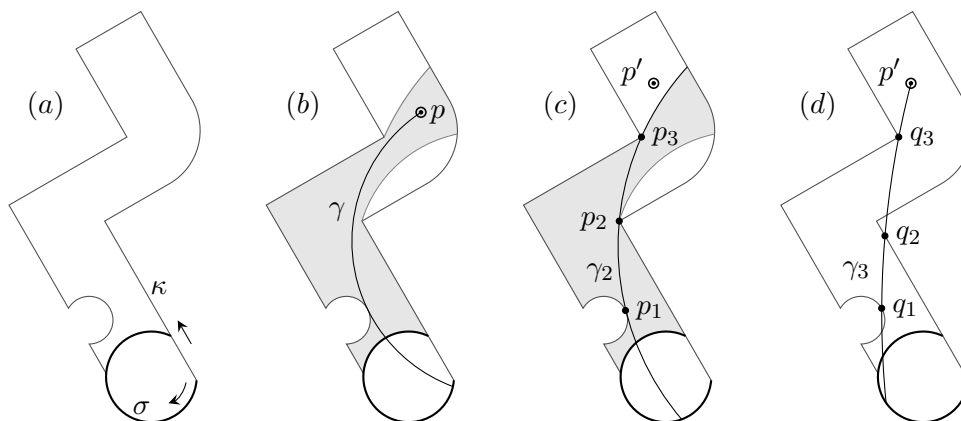


Abbildung 3.1: Illustration eines Kanals mit Startkreisbogen σ und Kanalrand κ , der Sichtbarkeitsmenge und eines Sichtbarkeitskreisbogens γ in (b) und eines Grenzkreisbogens γ_2 in (c). In (d) ist ein Kreisbogen abgebildet, aus dem direkt folgt, dass p' nicht sichtbar ist, vgl. Satz 3.23.

Wir wollen im Folgenden die Frage beantworten, ob ein gegebener Punkt p im Kanal sichtbar ist. Das ist der Fall, wenn ein sogenannter Sichtbarkeitskreisbogen

3 Problemstellung und Ziele

gefunden werden kann, also ein Kreisbogen γ mit Endpunkt p und $\gamma(0) \in \sigma$, der den Kanal nicht verlässt und außerdem genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\gamma'(0) = \sigma'(\gamma(0))$,
2. es gibt ein $q \in \gamma^\circ \cap \sigma$ mit $\gamma(0) \prec_\sigma q$.

Abbildung 3.1 (b) zeigt einen sichtbaren Punkt p und einen zugehörigen Sichtbarkeitskreisbogen γ . Der schattierte Bereich kennzeichnet die sogenannte zirkuläre Sichtbarkeitsmenge, also die Menge aller sichtbaren Punkte. Deren Rand wird durch sogenannte Grenzkreisbögen definiert, vgl. γ_2 in Abbildung 3.1 (c). Diese zeichnen sich durch drei Kanalberührungen aus, wobei der Kanal den Kreisbogen abwechselnd von links und von rechts berührt, sofern man die Berührungen gemäß \prec_{γ_2} anordnet, vgl. [16]. In der Abbildung berührt der Kanal den Grenzkreisbogen γ_2 im Punkt p_1 von links, in p_2 von rechts und in p_3 von links. Damit ist es leicht zu sehen, dass der Punkt p' nicht sichtbar ist, da ein entsprechender Sichtbarkeitskreisbogen den Grenzkreisbogen γ_2 dreimal schneiden müsste, da er „rechts von p_1 und p_3 “ und „links von p_2 “ verlaufen müsste.

Wir wollen die Frage, ob ein Punkt sichtbar ist, beantworten, ohne Grenzkreisbögen zu berechnen. Dazu betrachten wir den Kreisbogen γ_3 mit Endpunkt p' in Abbildung 3.1 (d): Auch wenn der Kreisbogen den Kanal verlässt, ist leicht zu sehen, dass jeder Sichtbarkeitskreisbogen mit Endpunkt p' „rechts von q_1 und q_3 “ und „links von q_2 “ verlaufen muss. Im Gegensatz zu den Kanalberührungen des Grenzkreisbogens kann diese Feststellung nicht alleine aufgrund der lokalen Situation gemacht werden. Die Schnittpunkte q_i , $i = 1, 2, 3$, sogenannte Restriktionen, lassen sich jedoch mithilfe von

$$\Delta(\gamma, \kappa|_{[0, t(q_i)]})$$

klassifizieren. Sie stellen damit in gewisser Weise eine Erweiterung der obigen Kanalberührungen dar. Wir werden sehen, dass der Endpunkt eines Kreisbogens mit drei abwechselnd linken und rechten Restriktionen genau dann sichtbar ist, wenn der Kreisbogen selbst ein Sichtbarkeitskreisbogen ist. In diesem Fall impliziert also der Kreisbogen γ_3 , dass p' nicht sichtbar ist. Die für den Beweis notwendigen Zwischenergebnisse werden in Kapitel 5 auch für eine zielgerichtete Suche nach einem Sichtbarkeitskreisbogen genutzt.

In diesem Kapitel werden wir zuerst die Problemstellung präzisieren, anschließend die wichtigsten Hilfsmittel einführen und damit schließlich die Hauptresultate formulieren.

3.1 Problemstellung Zirkuläre Sichtbarkeit

Ziel dieses Abschnitts ist die genaue Formulierung der Problemstellung. Dazu beginnen wir mit der Definition von Kanälen. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

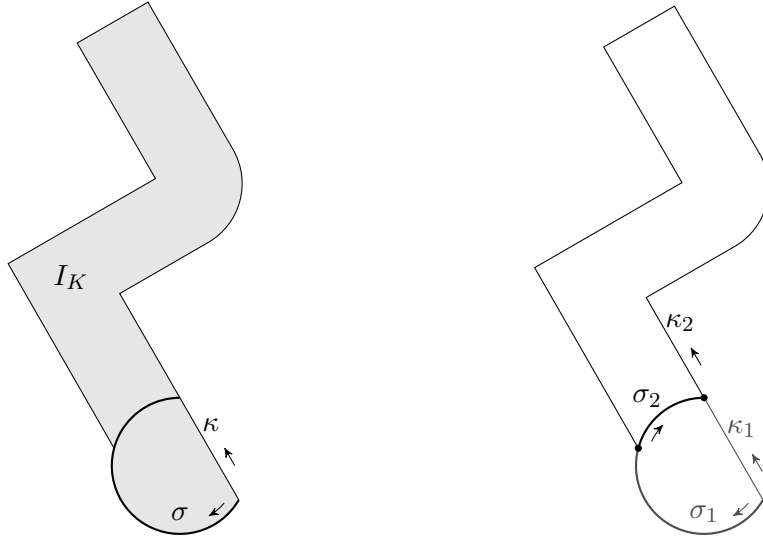


Abbildung 3.2: Beispiel eines Kanals gemäß Definition 3.1.

Definition 3.1. Ein Kanal K besteht aus einem Startkreisbogen $\sigma \in \mathcal{A}$ und einer einfachen Kreisbogenspline $\kappa \in \mathcal{S}^*$, so dass $\kappa(0) = \sigma(0)$, $\kappa(1) \in \sigma^\circ$ und $\sigma(1) \in \kappa^\circ$ ist. Wir zerteilen σ im Punkt $\kappa(1)$ und κ im Punkt $\sigma(1)$ und definieren

$$\sigma_1 := \sigma|_{[0, t(\kappa(1))]}, \quad \sigma_2 := \sigma|_{[t(\kappa(1)), 1]}, \quad \kappa_1 := \kappa|_{[0, t(\sigma(1))]} \quad \text{und} \quad \kappa_2 := \kappa|_{[t(\sigma(1)), 1]}$$

und fordern, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\kappa \sqcup \overline{\sigma_1}$ und $\kappa_2 \sqcup \sigma_2$ sind einfach geschlossen und positiv orientiert,
2. $\sigma_2 \subset \overline{I(\kappa \sqcup \overline{\sigma_1})}$,
3. $\det[\sigma'(0), \kappa'(0)] < 0$,
4. $\det[\sigma'(1), \kappa_2'(0)] > 0$.

Wir nennen die Menge $I_K := I(\kappa \sqcup \overline{\sigma_1})$ das Innere des Kanals und bezeichnen die Menge aller Kanäle mit \mathcal{K} .

Bemerkung 3.2 (Weitere Eigenschaften eines Kanals). Aus Definition 3.1, 1) und 2) folgen zusätzlich die folgenden Kanaleigenschaften:

1. $I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2) \subset I_K$,
2. $\sigma_1|_{[0, 1]} \subset E(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)$,

3 Problemstellung und Ziele

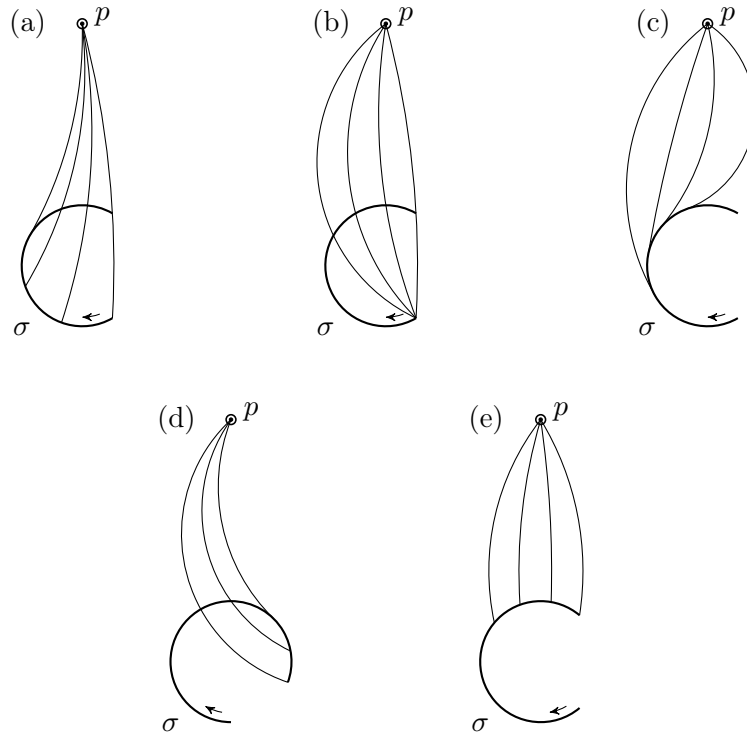


Abbildung 3.3: Beispiele von Kreisbögen mit Endpunkt p , die die Startbedingung gegenüber σ erfüllen (a-c) bzw. nicht erfüllen, da 2) aus Definition 3.3 verletzt ist (d,e).

$$3. \kappa_1|_{[0,1)} \subset \overline{E(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)}.$$

Man beachte, dass in 3) der Abschluss der Menge $E(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)$ notwendig ist, da $\kappa_1^\circ \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ möglich ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.7 (c) auf Seite 46 zu sehen.

Wir wollen nur die Punkte in $\overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)}$ bezüglich Sichtbarkeit untersuchen, also die, die „hinter dem Startkreisbogen liegen“. Ist $p \in \overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)}$ gegeben, dann suchen wir nach einem Kreisbogen, dessen Endpunkt p ist, der den Abschluss des Kanalinneren $\overline{I_K}$ nicht verlässt und der die sogenannte Startbedingung bezüglich des Startkreisbogens erfüllt, vgl. [16]:

Definition 3.3. Seien $\sigma, \gamma \in \mathcal{A}$. Wir sagen γ erfüllt die Startbedingung bezüglich σ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma(0) \in \sigma$,
2. $\gamma'(0) = \sigma'(\gamma(0))$ oder es gibt ein $q \in \gamma \cap \sigma$ mit $\gamma(0) \prec_\sigma q$.

Abbildung 3.3 (a-c) zeigt Beispiele von Kreisbögen, die die Startbedingung erfüllen. In den Beispielen (d) und (e) wird die Startbedingung nicht erfüllt, da Bedingung

2) nicht erfüllt wird. Damit können wir nun definieren, was wir unter zirkulärer Sichtbarkeit verstehen:

Definition 3.4. Sei $K \in \mathcal{K}$. Wir nennen einen Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}$ mit

$$\gamma(1) \in \overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \setminus \sigma_2$$

einen Sichtbarkeitskreisbogen von K , falls γ die Startbedingung bezüglich σ erfüllt und $\gamma \subset \overline{I_K}$ ist. In diesem Fall sagen wir der Punkt $\gamma(1)$ ist (zirkulär) sichtbar in K .

Potenzielle Sichtbarkeitskreisbögen

Aus den Eigenschaften des Kanals und der Sichtbarkeitskreisbögen können wir weitere Eigenschaften von Sichtbarkeitskreisbögen ableiten. Dadurch verkleinert sich die Menge der möglichen Sichtbarkeitskreisbögen und auch die Menge der möglicherweise sichtbaren Punkte kann weiter eingeschränkt werden.

Proposition 3.5. Sei $K \in \mathcal{K}$ und γ ein Sichtbarkeitskreisbogen mit Endpunkt in $\overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \setminus \sigma_2$. Dann gilt

1. $\gamma \cap \sigma_2 \neq \emptyset$,
2. $\gamma(1) \in L([\sigma])$,
3. $\gamma(0) \neq \sigma(1)$.

Beweis. Zu 1): Da die Behauptung im Fall $\gamma(0) \in \sigma_2$ trivialerweise erfüllt ist, nehmen wir $\gamma(0) \in \sigma_1|_{[0,1)}$ an. Dann gilt $\gamma(0) \in R(\sigma_2 \sqcup \kappa_2)$ nach Bemerkung 3.2. Da $\sigma_2 \sqcup \kappa_2$ positiv orientiert ist, vgl. Definition 3.1, ist

$$\gamma(1) \in \overline{L(\sigma_2 \sqcup \kappa_2)} \setminus \sigma_2$$

und damit muss sich γ von rechts an $\sigma_2 \sqcup \kappa_2$ annähern. Wegen

$$\gamma \subset \overline{I_K} = \overline{L(\kappa \sqcup \sigma_1)}$$

kann sich γ nicht von rechts an κ bzw. κ_2 annähern. Damit muss sich γ von rechts an σ_2 annähern und damit gilt $\gamma \cap \sigma_2 \neq \emptyset$.

Zu 2): Nach 1) ist $\gamma \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ und wir wählen $q \in \gamma \cap \sigma_2$ maximal bezüglich \prec_γ . Aus $\gamma(1) \in \overline{L(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \setminus \sigma_2$ und $\gamma \subset \overline{I_K}$ folgt

$$\gamma|_{[t(q),1]} \subset \overline{L(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)}. \quad (3.1)$$

Da $\kappa_2 \sqcup \sigma_2$ einfach geschlossen ist und q bezüglich \prec_γ maximal gewählt ist, folgt im Fall $q \in \sigma_2^\circ$ aus (3.1), dass γ den Kreisbogen σ_2 in q nach links verlässt. Da es

3 Problemstellung und Ziele

keinen dritten Schnittpunkt zwischen γ und $[\sigma]$ geben kann, gilt damit in diesem Fall $\gamma(1) \in L([\sigma])$.

Bleiben die Fälle $q = \sigma_2(0)$ und $q = \sigma_2(1)$ zu betrachten. Aus Definition 3.1, Proposition 2.47 und Korollar 2.50 folgt, dass $\bar{\kappa}$ den Kreisbogen σ in $\sigma_2(0) = \kappa(1)$ nach links verlässt und laut Definition 3.1 wird $[\sigma]$ von κ_2 in 0 nach links verlassen. Damit folgt aus den Aussagen zur Verzweigungssituation in Proposition 2.52 und aus Proposition 2.40

1. $(\overline{L(\sigma_2 \sqcup \kappa_2)} \setminus \sigma_2) \cap B_\varepsilon(\sigma_2(0)) \subset L([\sigma])$ für ein $\varepsilon > 0$,
2. $(\overline{L(\sigma_2 \sqcup \kappa_2)} \setminus \sigma_2) \cap B_\varepsilon(\sigma_2(1)) \subset L([\sigma])$ für ein $\varepsilon > 0$.

Damit folgt aus (3.1), dass $[\sigma]$ von γ in q nach links verlassen wird und somit gilt $\gamma(1) \in L([\sigma])$.

Zu 3): Angenommen es gelte $\gamma(0) = \sigma(1)$. Wir zeigen, dass dann bereits $\gamma \subset \overline{I_K}$ verletzt ist. Aufgrund der Startbedingung in Definition 3.3 ist $\gamma'(0) = \sigma'(1)$. Nach Definition 3.1 gilt $\det[\sigma'(1), \kappa_2'(0)] > 0$. Ist κ^* der erste Kreisbogen in κ_2 , dann folgt aus Propositionen 2.54, dass $[\kappa^*]$ von γ in 0 nach rechts verlassen wird und dass sich σ in 1 von links an $[\kappa^*]$ annähert. Damit folgt aus Proposition 2.52, dass γ den Kreisbogenspline $\sigma_2 \sqcup \kappa_2$ in 0 nach rechts verlässt. Analog zu 1) folgt daraus, dass sich γ von rechts an κ annähert. Damit gilt $\gamma \not\subset \overline{I_K}$ und wir erhalten einen Widerspruch. \square

Dies führt zu folgender Definition von potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen.

Definition 3.6. Sei $K \in \mathcal{K}$. Wir definieren

$$P_K := \overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \cap L([\sigma])$$

und nennen es die Menge der potenziell sichtbaren Punkte. Für jedes $p \in P_K$ definieren wir $\mathcal{A}_{K,p}$ als die Menge der Kreisbögen γ , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. die Startbedingung bezüglich σ , vgl. Definition 3.3,
2. $\gamma(1) = p$,
3. $\gamma \cap \sigma_2 \neq \emptyset$,
4. $\gamma(0) \neq \sigma(1)$.

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_K := \bigcup_{p \in P_K} \mathcal{A}_{K,p},$$

und nennen es die Menge der potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen.

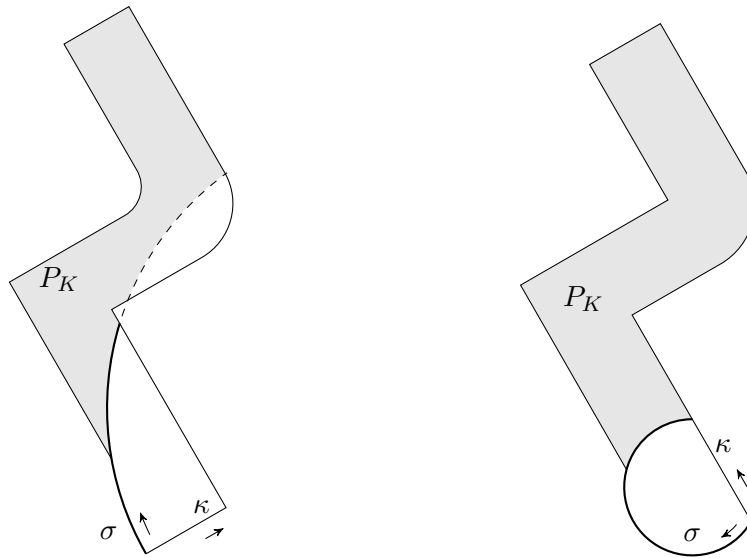


Abbildung 3.4: Illustration der Punktmenge P_K gemäß Definition 3.6.

Bemerkung 3.7. *Man beachte, dass P_K insbesondere Punkte des Kanalrandes κ_2 enthält. Diese sind von besonderem Interesse, da dadurch die Berechnung von Kreisbögen mit einer dritten Kanalberührung im Endpunkt ermöglicht wird und diese zur Berechnung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge verwendet werden können, vgl. Abschnitt 1.1.*

Man beachte, dass die Menge $\mathcal{A}_{K,p}$ bei gegebenem p nur von σ und dem Punkt $\kappa(1)$ abhängt. Sie enthält alle Kreisbögen, die als Sichtbarkeitskreisbogen nicht ausgeschlossen werden können, falls nur der Startkreisbogen σ und der Punkt $\kappa(1)$ bekannt sind. Der genaue Verlauf von κ ist dabei nicht entscheidend, solange $p \in P_K$ erfüllt ist.

Abbildung 3.4 zeigt links einen Kanal, bei dem $\overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \setminus \sigma_2 \not\subset L([\sigma])$ ist. Da nach Proposition 3.5 nur Punkte in $L([\sigma])$ sichtbar sein können, kann hier die Menge P_K der potenziell sichtbaren Punkte eingeschränkt werden. Oft gilt $P_K = \overline{I(\kappa_2 \sqcup \sigma_2)} \setminus \sigma_2$, wie etwa im rechten Beispiel zu sehen ist. Beispiele von potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen sind in Abbildung 3.5 zu sehen, Abbildung 3.6 zeigt Beispiele von Kreisbögen, die Dank Proposition 3.5 nicht betrachtet werden müssen.

Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Wir schließen den Abschnitt mit grundlegenden Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen ab.

3 Problemstellung und Ziele

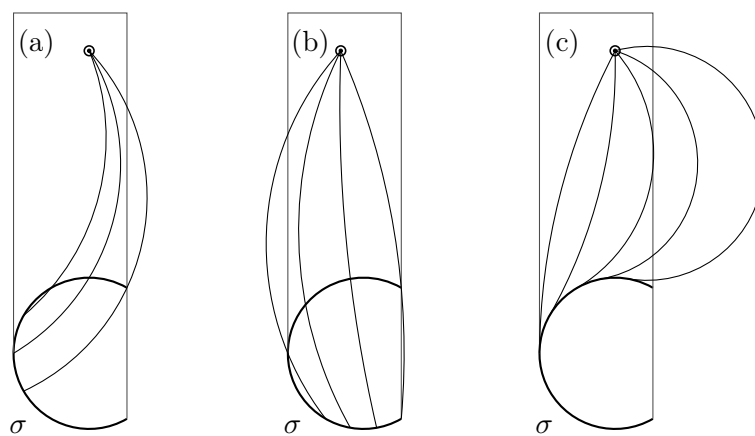


Abbildung 3.5: Kreisbögen in \mathcal{A}_K .

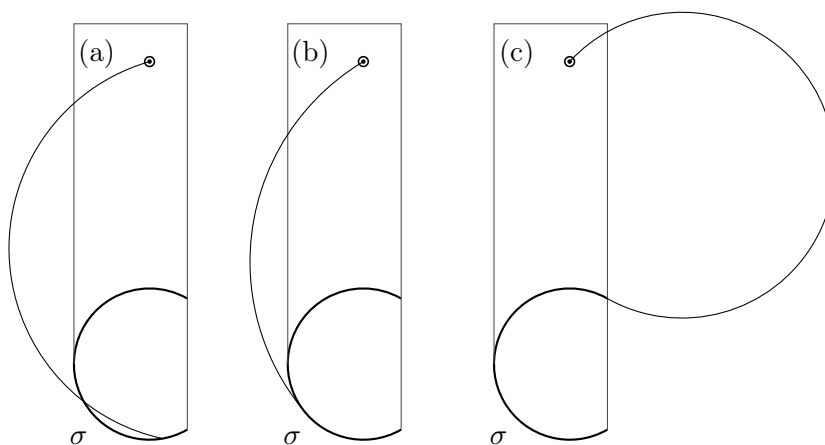


Abbildung 3.6: Kreisbögen NICHT in \mathcal{A}_K , da $\gamma \cap \sigma_2 = \emptyset$ ist (a,b) bzw. da $\gamma(0) = \sigma(1)$ ist (c).

Proposition 3.8. *Sei $K \in \mathcal{K}$, sei $p \in P_K$ und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\text{Im}([\gamma_1]) = \text{Im}([\gamma_2])$. Dann ist $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Beweis. Nach den Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen, vgl. Definition 3.6 bzw. 3.3, gelten für jeden Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ die folgenden Bedingungen:

1. $\gamma(0) \in \sigma$,
2. $\gamma'(0) = \sigma'(\gamma(0))$ oder es gibt ein $q \in \gamma \cap \sigma$ mit $\gamma(0) \prec_\sigma q$.

Ist $\gamma_1'(0) = \sigma'(\gamma_1(0))$, dann gilt $[\gamma_2] \cap \sigma = [\gamma_1] \cap \sigma = \{\gamma_1(0)\}$. Aus 1) folgt damit $\gamma_2(0) = \gamma_1(0)$ und aus 2) folgt $\gamma_2'(0) = \sigma'(\gamma_2(0)) = \gamma_1'(0)$. Damit ist $\gamma_1 = \gamma_2$. Im Fall $\gamma_1'(0) \neq \sigma'(\gamma_1(0))$ können wir nach 2) ein $q_1 \in \gamma_1 \cap \sigma$ mit $\gamma_1(0) \prec_\sigma q_1$ wählen. Außerdem gilt dann $\gamma_2'(0) \neq \sigma'(\gamma_2(0))$ und wir können ein $q_2 \in \gamma_2 \cap \sigma$ mit $\gamma_2(0) \prec_\sigma q_2$ wählen. Da es zwischen $[\gamma_1]$ und σ und zwischen $[\gamma_2]$ und σ genau zwei Schnittpunkte gibt, folgt aus $\text{Im}([\gamma_1]) = \text{Im}([\gamma_2])$

$$\{\gamma_1(0), q_1\} = \{\gamma_2(0), q_2\}.$$

Wegen $\gamma_1(0) \prec_\sigma q_1$ und $\gamma_2(0) \prec_\sigma q_2$ folgt daraus $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q_1 = q_2$. Damit gilt auch in diesem Fall $\gamma_1 = \gamma_2$. \square

Proposition 3.9. *Sei $K \in \mathcal{K}$, $\gamma \in \mathcal{A}_K$ und $q \in \gamma \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ . Dann gilt*

1. $\gamma|_{(0,t(q))} \subset R([\sigma])$,
2. $\gamma|_{(t(q),1]} \subset L([\sigma])$,
3. $\sigma|_{(\gamma(0),q)} \subset L([\gamma])$ und
4. $[\sigma] \setminus \sigma|_{[\gamma(0),q]} \subset R([\gamma])$.

Vor dem eigentlichen Beweis betrachten wir gesondert den Fall sich berührender Kreise:

Lemma 3.10. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}$ mit $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] = \gamma_1 \cap \gamma_2 = \{x\}$ und $\gamma_1'(x) = \gamma_2'(x)$. Dann gilt entweder*

$$[\gamma_1] \subset \overline{L([\gamma_2])} \text{ und } [\gamma_2] \subset \overline{R([\gamma_1])}$$

oder

$$[\gamma_1] \subset \overline{R([\gamma_2])} \text{ und } [\gamma_2] \subset \overline{L([\gamma_1])}.$$

Beweis. Sowohl $\mathbb{R}^2 \setminus [\gamma_1]$ als auch $\mathbb{R}^2 \setminus [\gamma_2]$ bestehen aus zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $L([\gamma_1])$ und $R([\gamma_1])$ bzw. $L([\gamma_2])$ und $R([\gamma_2])$, vgl. Proposition 2.25 und Definition 2.39 bzw. 2.41. Falls γ_1 eine Strecke ist, dann folgt aus den Voraussetzungen des Lemmas, dass γ_2 keine Strecke ist und damit ist $[\gamma_1] \setminus \{x\} \subset E([\gamma_2])$. Andernfalls ist $[\gamma_1] \setminus \{x\}$ zusammenhängend und damit ist $[\gamma_1] \setminus \{x\}$ auch Teilmenge

3 Problemstellung und Ziele

einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus [\gamma_2]$. Analog ist $[\gamma_2] \setminus \{x\}$ Teilmenge einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus [\gamma_1]$ und damit gilt insgesamt

$$\text{entweder } [\gamma_2] \subset \overline{L([\gamma_1])} \text{ oder } [\gamma_2] \subset \overline{R([\gamma_1])} \quad (3.2)$$

und

$$\text{entweder } [\gamma_1] \subset \overline{L([\gamma_2])} \text{ oder } [\gamma_1] \subset \overline{R([\gamma_2])}. \quad (3.3)$$

Wir nehmen zuerst an, dass

$$[\gamma_2] \subset \overline{L([\gamma_1])} \text{ und } [\gamma_1] \subset \overline{L([\gamma_2])} \quad (3.4)$$

gilt und zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Aus $[\gamma_2] \subset \overline{L([\gamma_1])}$ folgt

$$L([\gamma_1]) \cap R([\gamma_2]) \neq \emptyset, \quad (3.5)$$

da $[\gamma_2]$ der Rand von $R([\gamma_2])$ ist, vgl. Proposition 2.25, und $[\gamma_2] \setminus \{x\} \subset L([\gamma_1])$ ist. Aus $[\gamma_1] \subset \overline{L([\gamma_2])}$ folgt

$$[\gamma_1] \cap R([\gamma_2]) = \emptyset$$

und damit liegt $R([\gamma_2])$ in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus [\gamma_1]$. Damit ist entweder $L([\gamma_1]) \cap R([\gamma_2]) = \emptyset$ oder $R([\gamma_1]) \cap R([\gamma_2]) = \emptyset$ und wegen (3.5) erhalten wir

$$R([\gamma_1]) \cap R([\gamma_2]) = \emptyset. \quad (3.6)$$

Um zu zeigen, dass (3.6) nicht möglich ist, wählen wir eine Strecke ℓ , die γ_1 in x von rechts schneidet. Nach Proposition 2.54 ist $\det[\gamma_1'(x), \ell'] > 0$ und da $\gamma_1'(x) = \gamma_2'(x)$ ist, schneidet ℓ auch γ_2 in x von rechts. Damit gilt insbesondere

$$R([\gamma_1]) \cap R([\gamma_2]) \neq \emptyset,$$

im Widerspruch zu (3.6). Damit folgt, dass (3.4) nicht möglich ist. Analog kann gezeigt werden, dass

$$[\gamma_2] \subset \overline{R([\gamma_1])} \text{ und } [\gamma_1] \subset \overline{R([\gamma_2])}$$

zu einem Widerspruch führt und damit folgt die Behauptung aus (3.2) und (3.3). \square

Beweis (von Proposition 3.9). Im Fall $q = \gamma(0)$, in dem insbesondere $\gamma'(0) = \sigma'(\gamma(0))$ ist, sind die Punkte 1) und 3) wegen

$$\gamma|_{(0,t(q))} = \sigma|_{(\gamma(0),q)} = \emptyset$$

trivialerweise erfüllt und die beiden anderen Punkte folgen aus Lemma 3.10. Sei also $q \neq \gamma(0)$. Nachdem nach Definition $\gamma(1) \in L([\sigma])$ ist, gilt $[\gamma] \cap [\sigma] = \{\gamma(0), q\}$ und $[\sigma]$ wird von γ in q von rechts geschnitten. Daraus folgen direkt die Punkte 1) und 2). Da damit $[\gamma]$ von $[\sigma]$ in q von links geschnitten wird, vgl. Proposition 2.57, folgen auch die Punkte 3) und 4). \square

Die Menge \mathcal{A}_K wurde so gewählt, dass Kreisbögen, die den Kanal über den Startkreisbogen σ verlassen, nicht enthalten sind. Folgende Proposition zeigt, dass alle Kreisbögen in \mathcal{A}_K , deren Anfangspunkt nicht auf dem Kanalrand κ liegt, „in den Kanal starten“:

Proposition 3.11. *Sei $K \in \mathcal{K}$ und sei $\gamma \in \mathcal{A}_K$ mit $\gamma(0) \notin \kappa$. Dann gilt*

$$\gamma|_{(0,\varepsilon]} \subset I_K \quad \text{für ein } \varepsilon > 0.$$

Beweis. Aus $\gamma \in \mathcal{A}_K$ und $\gamma(0) \notin \kappa$ folgt $\gamma(0) \in \sigma_1^\circ \cup \sigma_2^\circ$. Im Fall $\gamma(0) \in \sigma_2^\circ$ gilt $\gamma(0) \in I_K$ und da I_K offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\gamma|_{(0,\varepsilon]} \subset I_K$ ist. Gilt $\gamma(0) \in \sigma_1^\circ$, dann verlässt γ den Kreisbogen σ_1 in 0 nach rechts, vgl. Proposition 3.9, 1), und damit gilt

$$\gamma|_{(0,\varepsilon]} \subset L(\kappa \sqcup \overline{\sigma_1}) = I_K \quad \text{für ein } \varepsilon > 0.$$

□

3.2 Restriktionen und Verletzungen

Wir wollen nun die gerichteten Schnitte aus Kapitel 2 nutzen, um über die Funktion

$$f_{\kappa,\gamma} : (0,1) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad t \mapsto \Delta(\gamma, \kappa|_{[0,t]}) = \sum_{s \in [0,t]} \chi^+(\gamma, \kappa, s) - \chi^-(\gamma, \kappa, s) \quad (3.7)$$

zu einem $\gamma \in \mathcal{A}_K$ alle Punkte des Kanalrandes κ in verschiedene Klassen einzuteilen. K bezeichnet dabei hier wie im Folgenden einen Kanal gemäß Definition 3.1. Man beachte, dass f stückweise konstant ist und nur in den endlich vielen Punkten springt, an denen sich der Kanal an den Kreisbogen γ annähert oder an denen er den Kreisbogen verlässt. Der Wert von f lässt sich also mit „wenig Aufwand“ bestimmen.

Damit sich die Funktion $f_{\kappa,\gamma}$ ohne weitere Anpassungen zur Klassifikation der Kanalrandpunkte verwenden lässt, werden wir vorerst einen generischen Fall betrachten:

Definition 3.12 (Generischer Kreisbogen). *Wir nennen $\gamma \in \mathcal{A}_K$ einen generischen Kreisbogen, wenn*

$$\gamma(0) \notin \kappa \quad \text{und} \quad \kappa(0), \kappa(1) \notin \gamma \quad (3.8)$$

erfüllt ist.

Beispiele von vorerst ausgeschlossenen Randfällen sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Leider können wir diese Randfälle nicht generell als irrelevant deklarieren und ausschließen, da wir zur Untersuchung der Sichtbarkeit immer versuchen werden, den Kanal vollständig auszunutzen. Dabei treten insbesondere auch diese Randfälle häufig auf. Wir werden sie jedoch gesondert am Ende von Kapitel 4 behandeln, um die Beweise nicht unnötig mit Spezialfällen in die Länge zu ziehen.

Im Fall $\gamma(1) \in \kappa$ verliert $f_{\kappa,\gamma}(t)$ für $t \in (t_\kappa(\gamma(1)), 1)$ seine Aussagekraft, da γ im Endpunkt nicht lokal einfach ist. Dieses Problem umgehen wir, indem wir in diesem

3 Problemstellung und Ziele

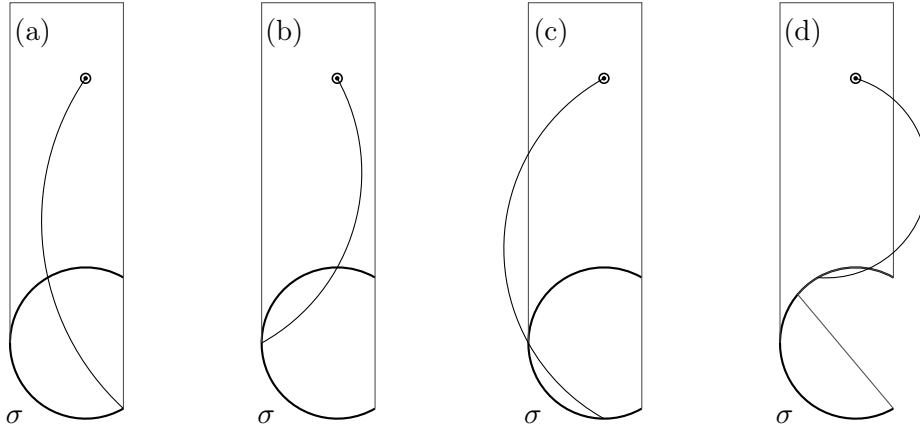


Abbildung 3.7: Beispiele nicht generischer Kreisbögen: In (a) und (b) liegt $\gamma(0)$ auf dem Kanalrand, in (c) gilt $\kappa(1) \in \gamma$. In (d) liegt $\gamma(0)$ auch auf dem Kanalrand, da κ so verändert wurde, dass es auf einem Teilstück mit σ übereinstimmt.

Fall den Kanal ausgehend vom Startkreisbogen von beiden Seiten durchlaufen. Dazu definieren wir zur Vereinfachung der Notation die entsprechenden Kanalabschnitte. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.8 zu sehen.

Definition 3.13. Sei $K \in \mathcal{K}$, $p \in P_K$. Dann definieren wir

$$\kappa_p^+ := \begin{cases} \kappa, & p \notin \kappa, \\ \kappa|_{[0,t(p)]}, & p \in \kappa, \end{cases}$$

und

$$\kappa_p^- := \begin{cases} \bar{\kappa}, & p \notin \kappa, \\ \bar{\kappa}|_{[0,t(p)]}, & p \in \kappa. \end{cases}$$

Außerdem definieren wir zur Vereinfachung speziell für Kanäle folgende Notation:

Definition 3.14. Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa^+(\gamma, q) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}), & q \in (\kappa_p^+)^{\circ}, \\ \Delta_\kappa^-(\gamma, q) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}), & q \in (\kappa_p^-)^{\circ}, \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta_\kappa(\gamma, q) := \begin{cases} \Delta_\kappa^+(\gamma, q), & q \in (\kappa_p^+)^{\circ}, \\ \Delta_\kappa^-(\gamma, q), & q \in (\kappa_p^-)^{\circ}. \end{cases}$$

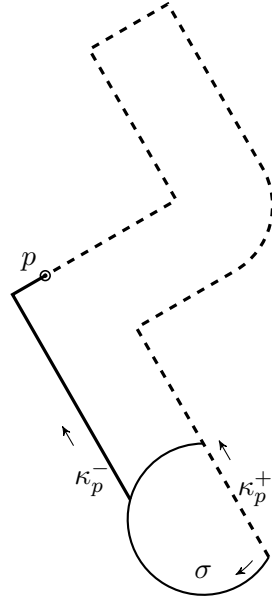


Abbildung 3.8: Illustration von κ_p^+ und κ_p^- im Fall $p \in \kappa$ gemäß Definition 3.13.

Ist $p \in \kappa$, dann definieren wir zusätzlich

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa}^+(\gamma, p) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^+), \\ \Delta_{\kappa}^-(\gamma, p) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^-).\end{aligned}$$

Wir schreiben $\Delta(\gamma, q)$ statt $\Delta_{\kappa}(\gamma, q)$, falls κ aus dem Kontext hervorgeht. Man beachte, dass es im Fall $p \in \kappa$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]} \subset \gamma \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]} \cap \gamma = \emptyset$$

ist und damit gilt

$$\Delta_{\kappa}^+(\gamma, p) = \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0, 1-\varepsilon]}).$$

Die Analoge Aussage gilt auch für $\Delta_{\kappa}^-(\gamma, p)$. Da nicht notwendigerweise $\Delta_{\kappa}^+(\gamma, p) = \Delta_{\kappa}^-(\gamma, p)$ ist, ist $\Delta_{\kappa}(\gamma, p)$ für $p \in \kappa$ bewusst nicht definiert. Folgende Proposition zeigt, dass die Definition von $\Delta_{\kappa}(\gamma, q)$, $q \in \kappa^{\circ}$, im Fall $p \notin \kappa$ vernünftig ist:

Proposition 3.15. *Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen. Ist $p \notin \kappa$, dann gilt*

$$\Delta^+(\gamma, q) = \Delta^-(\gamma, q) \quad \text{für alle } q \in \kappa^{\circ}.$$

3 Problemstellung und Ziele

Beweis. Sei $q \in \kappa^\circ$. Laut den Eigenschaften von Δ , vgl. Propositionen 2.56 und 2.57, gilt

$$\begin{aligned} \Delta^+(\gamma, q) - \Delta^-(\gamma, q) &= \Delta(\gamma, \kappa|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma, \bar{\kappa}|_{[0, t(q)]}) \\ &= \Delta(\gamma, \kappa|_{[0, t(q)]}) + \Delta(\gamma, \kappa|_{[t(q), 1]}) = \Delta(\gamma, \kappa) = -\Delta(\kappa, \gamma). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Laut Proposition 3.11 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\gamma|_{(0, \varepsilon]} \subset I_K$ ist. Sei $\gamma_\varepsilon := \gamma|_{[\varepsilon, 1]}$ und $\zeta := \kappa \sqcup \bar{\sigma}_1$. Aus den Eigenschaften generischer Kreisbögen folgt, dass $\gamma|_{[0, \varepsilon]} \cap \kappa = \emptyset$ ist, $\gamma_\varepsilon \cap \sigma_1 = \emptyset$ ist und $\gamma(\varepsilon), \gamma(1) \in I_K = I(\zeta)$ ist. Damit folgt aus den Eigenschaften von Δ und dem Zusammenhang zu λ_ζ , vgl. Proposition 2.56 bzw. 2.62,

$$\begin{aligned} \Delta(\kappa, \gamma) &= \Delta(\kappa, \gamma|_{[0, \varepsilon]}) + \Delta(\kappa, \gamma_\varepsilon) = \Delta(\kappa, \gamma_\varepsilon) = \Delta(\zeta, \gamma_\varepsilon) = \lambda_\zeta(\gamma(1)) - \lambda_\zeta(\gamma(\varepsilon)) \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung aus (3.9). \square

Aufbauend auf Definition 3.14 definieren wir nun Restriktionen. Wir werden in den folgenden Abschnitten zeigen, dass damit genau die Punkte charakterisiert werden, an denen ein potenzieller Sichtbarkeitskreisbogen auf den Kanalrand trifft. Beispiele zu den verschiedenen Arten von Restriktionen sind in Abbildung 3.9 und 3.10 zu sehen.

Definition 3.16 (Restriktion). *Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen. Wir nennen einen Punkt $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ eine rechte Restriktion von γ , falls*

$$\Delta^+(\gamma, q) = 1$$

ist und wir nennen einen Punkt $q \in (\kappa_p^-)^{\circ}$ eine linke Restriktion von γ , falls

$$\Delta^-(\gamma, q) = -1$$

ist.

Für den Anfangs- und Endpunkt eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens ergeben sich folgende Spezialfälle.

Definition 3.17. *Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$. Wir nennen $\kappa_p^-(0)$ eine linke Restriktion von γ , falls $\kappa_p^-(0) \in \gamma^\circ$ ist und wir nennen $\gamma(0)$ eine linke (Start-) Restriktion, falls $\gamma'(0) = \sigma'(\gamma(0))$ ist. Außerdem nennen wir $\gamma(0)$ eine rechte (Start-) Restriktion, falls $\gamma(0) = \sigma(0)$ ist.*

Definition 3.18 (Endrestriktion). *Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen. Wir nennen den Punkt p eine rechte (End-) Restriktion von γ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. $\Delta^+(\gamma, p) = 0$, $\gamma'(1) = \kappa'_-(p)$ und $\chi^-([\gamma], \kappa, t_\kappa(p)) = -1$,

$$2. \Delta^+(\gamma, p) \in \{1, 2\}.$$

Der Punkt p heißt linke (End-) Restriktion von γ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\Delta^-(\gamma, p) = 0$, $\gamma'(1) = \bar{\kappa}'_-(p)$ und $\chi^-([\gamma], \bar{\kappa}, t_{\bar{\kappa}}(p)) = 1$,
2. $\Delta^-(\gamma, p) \in \{-1, -2\}$.

Eng verwandt mit Restriktionen sind Verletzungen. Beispiele sind in Abbildung 3.11 zu sehen.

Definition 3.19 (Verletzung). Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen. Wir nennen einen Punkt $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ eine rechte Verletzung von γ , falls

$$\Delta^+(\gamma, q) \in \{2, 3, \dots\}$$

ist und wir nennen einen Punkt $q \in (\kappa_p^-)^{\circ}$ eine linke Verletzung von γ , falls

$$\Delta^-(\gamma, q) \in \{-2, -3, \dots\}$$

ist.

Bemerkung 3.20. Da im Fall generischer Kreisbögen $\gamma(0) \notin \kappa$ ist, können wir Proposition 2.58 anwenden. Damit ist leicht zu sehen, dass die Teilmenge der Parameter in I , die zu Verletzungen gehören, eine Vereinigung offener Intervalle ist und dass sich am Rand der Intervalle Restriktionen befinden. Außerdem folgt, dass jede Restriktion, wie erwartet, auf dem zugehörigen Kreisbogen liegt.

Wir geben speziellen Folgen von Restriktionen einen Namen, da diese für die Sichtbarkeit eine besondere Rolle spielen:

Definition 3.21 (Alternantenfolge). Sei $\gamma \in \mathcal{A}_K$ ein generischer Kreisbogen. Eine Folge (r_1, r_2, \dots, r_n) , $n \in \mathbb{N}$, nennen wir eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge n von γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $r_1 \prec_{\gamma} r_2 \prec_{\gamma} \dots \prec_{\gamma} r_n$,
2. r_1, r_3, \dots sind linke Restriktionen von γ ,
3. r_2, r_4, \dots sind rechte Restriktionen von γ .

Sind r_1, r_3, \dots rechte und r_2, r_4, \dots linke Restriktionen von γ , dann nennen wir (r_1, \dots, r_n) eine rechts-blockierende Alternantenfolge von γ .

3 Problemstellung und Ziele

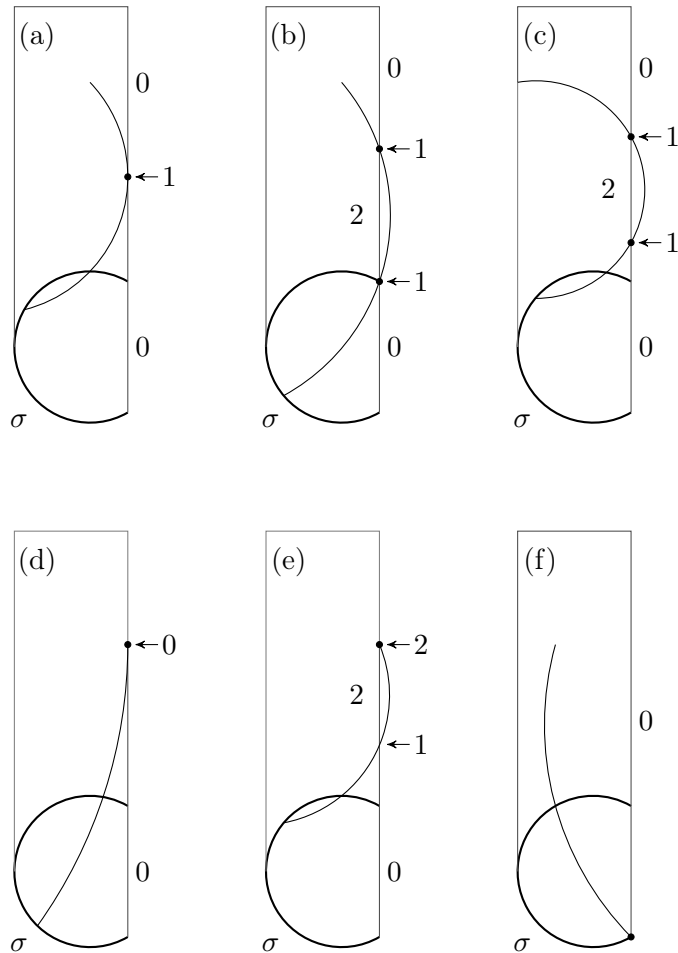


Abbildung 3.9: Punktmarkierungen zeigen rechte Restriktionen gemäß Definition 3.16 (a,b,c), rechte Endrestriktionen gemäß Definition 3.18, Bedingung 1 (d) und 2 (e) und eine rechte Startrestriktion (f). Außerdem sind die Werte von $\Delta^+(\gamma, \cdot)$ angetragen.

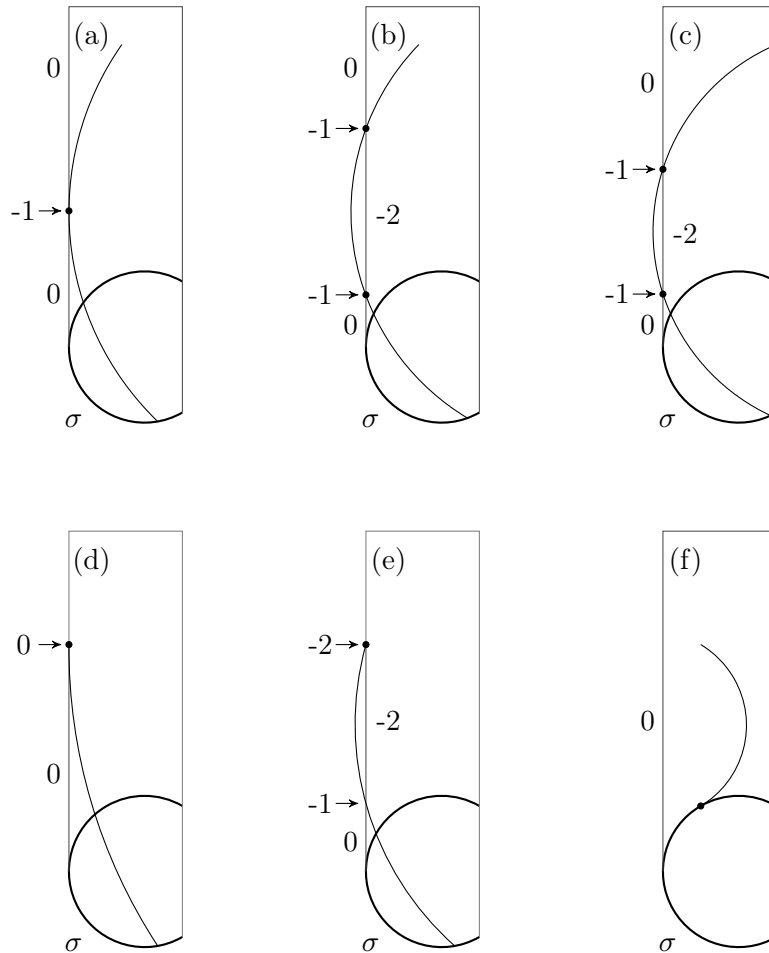


Abbildung 3.10: Punktmarkierungen zeigen linke Restriktionen gemäß Definition 3.16 (a,b,c), linke Endrestriktionen gemäß Definition 3.18, Bedingung 1 (d) und 2 (e) und eine linke Startrestriktion (f). Außerdem sind die Werte von $\Delta^-(\gamma, \cdot)$ angetragen.

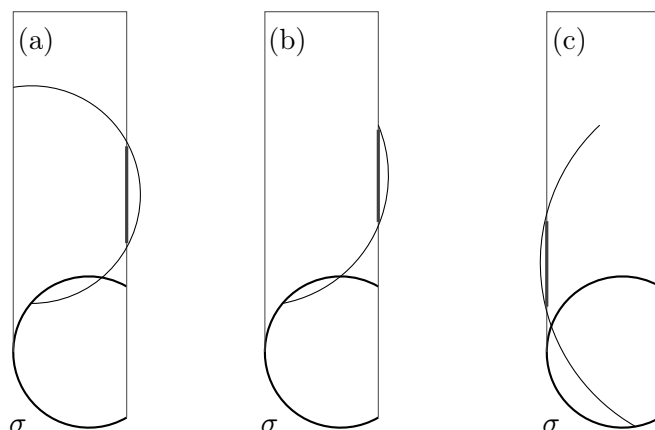


Abbildung 3.11: Beispiele von rechten Verletzungen (a,b) und linken Verletzungen (c) gemäß Definition 3.19.

Man beachte, dass weitere Restriktionen, die nicht Teil der Alternantenfolge sind, durch die Definition nicht ausgeschlossen werden. Betrachte etwa Abbildung 3.12: Die Folge (r_1, r_2, r_3) ist eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge drei von γ . Der Kreisbogen besitzt neben diesen drei Punkten drei weitere Schnittpunkte mit κ – drei rechte Restriktionen. Da jeder dieser Punkte gemäß \prec_γ zwischen r_1 und r_3 liegt, könnte jeder mit r_1 und r_3 eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge drei bilden. Es ist jedoch nicht möglich aus den insgesamt sechs Restriktionen eine Alternantenfolge mit einer Länge größer als drei zu erzeugen.

3.3 Hauptresultate zu Restriktionen, Verletzungen und zirkulärer Sichtbarkeit

Wir sind nun in der Lage die Hauptresultate zur zirkulären Sichtbarkeit zu formulieren. Diese werden wir im folgenden Kapitel beweisen. Man beachte, dass wir uns bei den Aussagen nicht nur auf den generischen Fall beschränken, auch wenn manche Definitionen aktuell nur den generischen Fall berücksichtigen. Wie mit den vorerst ignorierten Spezialfällen umzugehen ist, wird gesondert am Ende von Kapitel 4 behandelt.

Der erste Satz liefert ein einfaches Kriterium, um mithilfe von Δ aus Definition 3.14 zu prüfen, ob γ ein Sichtbarkeitskreisbogen ist. Entscheidend ist dabei, die Charakterisierung eines Sichtbarkeitskreisbogens über 3), wonach es im Fall $p \in \kappa$ ausreichend ist den Kanalabschnitt κ_p^+ auf rechte und den Kanalabschnitt κ_p^- auf linke Verletzungen zu untersuchen. Auch wenn der Unterschied zur einfacheren Charakterisierung 2) gering erscheinen mag, ergibt sich für den späteren Algorithmus ein

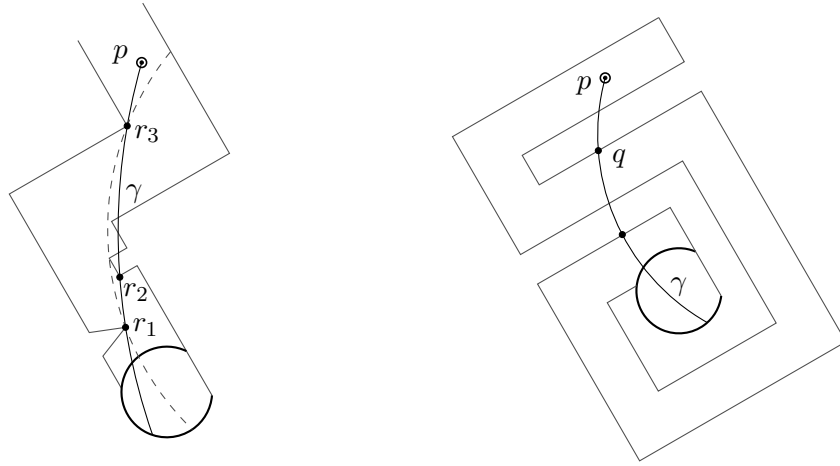


Abbildung 3.12: Links: Kreisbogen γ mit einer Alternantenfolge der Länge drei (r_1, r_2, r_3) und damit nicht sichtbarem Endpunkt p , vgl. Satz 3.23. Der Kreisbogen, der den Rand der Sichtbarkeitsmenge markiert, ist gestrichelt eingezeichnet. Rechts: Beispiel eines nicht sichtbaren Punkts gemäß Satz 3.24: Es gilt $\Delta(\gamma, q) = 3$.

signifikanter Unterschied: Wie wir sehen werden kann damit eine in der Anzahl der Kanalkreisbögen lineare Laufzeit erreicht werden.

Satz 3.22. Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. γ ist ein Sichtbarkeitskreisbogen, d.h. es gilt $\gamma \subset \overline{I_K}$,
2. $|\Delta(\gamma, q)| \leq 1$ für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$,
3. $\Delta^+(\gamma, q) \leq 1$ für alle $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ und $\Delta^-(\gamma, q) \geq -1$ für alle $q \in (\kappa_p^-)^{\circ}$.

Die Hilfsmittel für den Beweis dieses Satzes werden wir in Abschnitt 4.1 entwickeln. Der eigentliche Beweis ist auf Seite 59 zu finden.

Der folgende Satz zeigt, dass mit jedem einzelnen Kreisbogen, der eine Alternantenfolge der Länge drei besitzt, entschieden werden kann, ob der Endpunkt sichtbar ist: Ist ein solcher Kreisbogen kein Sichtbarkeitskreisbogen, dann ist der Endpunkt des Kreisbogens nicht sichtbar. Kein anderer potenzieller Sichtbarkeitskreisbogen mit entsprechendem Endpunkt liegt also vollständig im Kanal. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.12 links zu sehen.

Satz 3.23. Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein Kreisbogen, der eine Alternantenfolge der Länge drei besitzt. Ist γ kein Sichtbarkeitskreisbogen, dann ist p nicht sichtbar.

3 Problemstellung und Ziele

Um diesen Satz zu beweisen, untersuchen wir in Abschnitt 4.2 wie sich Erkenntnisse über einen potenziellen Sichtbarkeitskreisbogen auf andere übertragen lassen. Den eigentlichen Beweis führen wir schließlich auf Seite 71.

Die Aussagen aus Abschnitt 4.2 ermöglichen ein weiteres Kriterium, das impliziert, dass ein Punkt nicht sichtbar ist: Der Endpunkt eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens γ ist demnach nicht sichtbar, wenn γ eine „schwere Verletzung“, also eine Verletzung q mit $|\Delta(\gamma, q)| \geq 3$ besitzt. Ein Beispiel, in dem der folgende Satz anwendbar ist, ist in Abbildung 3.12 rechts zu sehen.

Satz 3.24. *Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$. Gilt*

$$|\Delta(\gamma, q)| \geq 3 \quad \text{für ein } q \in \kappa^\circ \setminus \{p\},$$

dann ist p nicht sichtbar.

Der Beweis dieses Satzes findet sich auf Seite 72.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Wir werden in diesem Kapitel näher auf potenzielle Sichtbarkeitskreisbögen eingehen. Das Ziel ist dabei der Beweis der Hauptresultate aus Abschnitt 3.3. Die Aussagen des Abschnitts 4.2 spielen außerdem für die zielgerichtete Suche nach einem Sichtbarkeitskreisbogen in Kapitel 5 eine wichtige Rolle.

4.1 Verletzungen und Aussagen über den zugehörigen Kreisbogen

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von Satz 3.22. Das folgende Lemma bildet dabei die Grundlage für die Äquivalenz von 1) und 2). Man beachte, dass die Einschränkung $\eta(0) \notin \gamma$ zwar notwendig ist, jedoch sehr einfach über eine Verschiebung des Anfangspunkts des einfach geschlossenen Kreisbogensplines η erreicht werden kann, falls es einen Punkt in η gibt, der nicht auf γ liegt.

Lemma 4.1. *Sei $\gamma \in \mathcal{S}^*$ ein einfacher Kreisbogenspline und $\eta \in \mathcal{S}_0^*$ ein einfach geschlossener Kreisbogenspline, so dass $\eta(0) \notin \gamma$ ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\gamma \cap L(\eta) \neq \emptyset$ und $\gamma \cap R(\eta) \neq \emptyset$,
2. γ schneidet η in $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in (0, 1)$, von links oder rechts,
3. η schneidet γ in $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in (0, 1)$, von links oder rechts.

Gilt außerdem $\gamma(0), \gamma(1) \notin \eta$, dann sind die drei Aussagen zusätzlich äquivalent zu

4. $|\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]})| > 1$ für ein $t \in (0, 1)$

und falls $\gamma(0) \notin \eta$ und $x := \gamma(1) \in \eta^\circ$ ist, dann sind sie auch äquivalent zu

5. $|\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]})| > 1$ für ein $t \in (0, t_\eta(x))$ oder $|\Delta(\gamma, \bar{\eta}|_{[0,t]})| > 1$ für ein $t \in (0, t_{\bar{\eta}}(x))$.

Beweis. „1) \Rightarrow 2)“: Da $\mathbb{R}^2 \setminus \eta$ aus den beiden Zusammenhangskomponenten $L(\eta)$ und $R(\eta)$ besteht und η deren gemeinsamer Rand ist, vgl. Proposition 2.25, gibt es

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

zwei Parameter $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 \leq t_2$, und ein $\varepsilon > 0$, so dass $t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon \in I$ sind, $\gamma|_{[t_1, t_2]} \subset \eta$ ist und entweder

$$\gamma|_{[t_1 - \varepsilon, t_1]} \subset L(\eta) \quad \text{und} \quad \gamma|_{(t_2, t_2 + \varepsilon]} \subset R(\eta) \quad (4.1)$$

oder

$$\gamma|_{[t_1 - \varepsilon, t_1]} \subset R(\eta) \quad \text{und} \quad \gamma|_{(t_2, t_2 + \varepsilon]} \subset L(\eta) \quad (4.2)$$

erfüllt ist. Nachdem der lokale und der globale Links- / Rechtsbegriff übereinstimmt, vgl. Proposition 2.40, und da jeder Punkt in η lokal einfach ist, vgl. Bemerkung 2.36, schneidet γ den Kreisbogenspline η in $[t_1, t_2]$ im Fall (4.1) von links und im Fall (4.2) von rechts.

„2) \Rightarrow 1)“: Wir nehmen an, dass γ den Kreisbogenspline η in $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in (0, 1)$, von links schneidet, da der andere Fall analog bewiesen werden kann. Seien $x_1 := \gamma(t_1)$, $x_2 := \gamma(t_2)$, $L_{\varepsilon, x_1}(\eta)$ eine Linksumgebung von η in x_1 und $R_{\varepsilon, x_2}(\eta)$ eine Rechtsumgebung von η in x_2 . Dann gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, so dass

$$\gamma|_{[t_1 - \varepsilon_2, t_1]} \subset L_{\varepsilon, x_1}(\eta) \subset L(\eta)$$

und

$$\gamma|_{(t_2, t_2 + \varepsilon_2]} \subset R_{\varepsilon, x_2}(\eta) \subset R(\eta).$$

Damit ist $\gamma \cap L(\eta) \neq \emptyset$ und $\gamma \cap R(\eta) \neq \emptyset$.

„2) \Leftrightarrow 3)“: Aus der Voraussetzung $\eta(0) \notin \gamma$ folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$\eta|_{[0, \varepsilon]} \cap \gamma = \eta|_{[1 - \varepsilon, 1]} \cap \gamma = \emptyset.$$

Damit kann sowohl in 2) als auch in 3) η durch $\eta|_{[\varepsilon, 1 - \varepsilon]}$ ersetzt werden. Da $\eta|_{[\varepsilon, 1 - \varepsilon]}$ einfach ist, folgt die Äquivalenz von 2) und 3) direkt aus Korollar 2.51.

„3) \Leftrightarrow 4)“: Falls $\gamma \cap \eta = \emptyset$ ist, dann sind beide Aussagen trivialerweise nicht erfüllt. Andernfalls sei

$$0 = t_0 < a_1 \leq b_1 < t_1 < \dots < t_{n-1} < a_n \leq b_n < t_n = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Unterteilung, so dass

$$\eta^{-1}(\gamma) = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Man beachte, dass für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ insbesondere $\eta(t_i) \notin \gamma$ ist. Sei $t \in (0, 1]$ und $j \in \{1, \dots, n\}$, so dass $t \in (t_{j-1}, t_j]$ ist. Mit $\eta_i := \eta|_{[t_{i-1}, t_i]}$ gilt dann nach den Rechenregeln für Δ , vgl. Proposition 2.56,

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0, t]}) = \Delta(\gamma, \eta|_{[t_{j-1}, t]}) + \sum_{i=1}^{j-1} \Delta(\gamma, \eta_i).$$

4.1 Verletzungen und Aussagen über den zugehörigen Kreisbogen

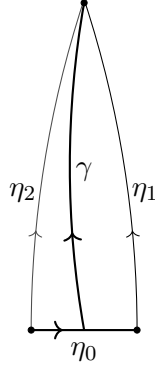


Abbildung 4.1: Illustration zu Lemma 4.2.

Da γ in jedem Schnittpunkt mit η lokal einfach ist, gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[t_{i-1}, t]}) = \begin{cases} 0, & t \in (t_{i-1}, a_i), \\ \chi^-(\gamma, \eta, a_i) \in \{-1, 1\}, & t \in [a_i, b_i], \\ \Delta(\gamma, \eta_i) \in \{0, -2, 2\}, & t \in (b_i, t_i), \end{cases}$$

und daraus folgt, dass 4) genau dann erfüllt ist, wenn

$$\Delta(\gamma, \eta_i) \neq 0 \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.3)$$

gilt. (4.3) ist genau dann erfüllt, wenn γ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ von η in $[a_i, b_i]$ von links oder rechts geschnitten wird.

„3) \Leftrightarrow 5)“: Folgt analog zur Äquivalenz von 3) und 4). \square

Das folgende Lemma bereitet den Beweis der Äquivalenz von 2) und 3) in Satz 3.22 vor. Die darin betrachtete Situation ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Lemma 4.2. *Seien $\gamma, \eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{S}^*$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_0 \sqcup \eta_1 \sqcup \overline{\eta_2}$ ist einfach geschlossen,
2. $\gamma(0) \in \eta_0^\circ$,
3. $(\gamma \cap \eta_0) \setminus \{\gamma(0)\} = \emptyset$,
4. γ verlässt η_0 in 0 nach links,
5. $\gamma(1) = \eta_1(1) = \eta_2(1)$.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Gilt

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \leq 1 \quad \text{und} \quad \Delta(\gamma, \eta_2|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1), \quad (4.4)$$

dann folgt

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \in \{0, 1\} \quad \text{und} \quad \Delta(\gamma, \eta_2|_{[0,t]}) \in \{-1, 0\} \quad \text{für alle } t \in (0, 1). \quad (4.5)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es ein $t \in (0, 1)$ gibt, für das

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) = -1$$

gilt und leiten daraus einen Widerspruch zur zweiten Ungleichung in (4.4) her. Analog könnte aus der Annahme $\Delta(\gamma, \eta_2|_{[0,t]}) = 1$ ein Widerspruch zur ersten Ungleichung in (4.4) gefolgert werden. Sei also $t^* \in (0, 1)$ minimal, so dass

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t^*]}) = -1$$

ist und sei $q^* := \eta_1(t^*)$. Wir nehmen zunächst an, dass $\gamma \cap \eta_1|_{[0,t^*]} = \emptyset$ ist. Damit ist

$$\zeta := \eta_1|_{[0,t^*]} \sqcup \overline{\gamma|_{[0,t(q^*)]}} \sqcup \eta_0|_{[t(\gamma(0)),1]}$$

einfach geschlossen. Da sich η_1 in q^* von links an γ annähert, folgt aus Korollar 2.50, dass γ den Kreisbogenspline ζ in q^* nach links verlässt. Aus der Annahme $\gamma \cap \eta_1|_{[0,t^*]} = \emptyset$ und Voraussetzung 3) folgt $\gamma|_{(t(q^*),1]} \cap \zeta = \emptyset$. Daraus folgt

$$\gamma|_{(t(q^*),1]} \subset L(\zeta). \quad (4.6)$$

und damit ist insbesondere $\eta_2(1) = \gamma(1) \in L(\zeta)$. Analog folgt $\eta_2(0) = \eta_0(0) \in R(\zeta)$, da γ den Kreisbogen η_0 in 0 nach links verlässt. Somit können wir ein maximales $t_2 \in (0, 1)$ wählen, so dass $\eta_2|_{[0,t_2]} \subset \overline{R(\zeta)}$ gilt. Wegen (4.6) und Voraussetzung 1) ist

$$\eta_2|_{[0,t_2]} \cap (\gamma|_{[t(q^*),1]} \cup \eta_1|_{[0,t^*]} \cup \eta_0|_{[t(\gamma(0)),1]}) = \emptyset$$

und damit folgt aus den Eigenschaften von Δ , vgl. Proposition 2.56, und der Charakterisierung von Δ über λ_ζ , vgl. Proposition 2.62,

$$\Delta(\gamma, \eta_2|_{[0,t_2]}) = -\Delta(\overline{\gamma}, \eta_2|_{[0,t_2]}) = -\Delta(\zeta, \eta_2|_{[0,t_2]}) = \lambda_\zeta(\eta_2(0)) - \lambda_\zeta(\eta_2(t_2)) = -1.$$

Da wir t_2 maximal gewählt haben, verlässt η_2 den Kreisbogenspline γ in t_2 nach rechts und somit gilt

$$\Delta(\gamma, \eta_2|_{[0,t_2+\varepsilon]}) = -2 \quad \text{für ein } \varepsilon > 0.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch und somit ist die Behauptung für den Fall $\gamma \cap \eta_1|_{[0,t^*]} = \emptyset$ gezeigt. Wir nehmen nun an, dass $\gamma \cap \eta_1|_{[0,t^*]} \neq \emptyset$ ist. Da der Parameter t^* unter der Bedingung $\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t^*]}) = -1$ minimal gewählt wurde, ist

4.1 Verletzungen und Aussagen über den zugehörigen Kreisbogen

$\gamma \cap \eta_1|_{[t^*-\varepsilon, t^*]} = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$ und damit können wir ein maximales $t_1 \in (0, t^*)$ wählen, so dass $\eta_1(t_1) \in \gamma$ ist. Sei $q_1 := \eta_1(t_1)$. Dann ist

$$\zeta := \begin{cases} \eta_1|_{[t_1, t^*]} \sqcup \gamma|_{[q^*, q_1]}, & q^* \prec_\gamma q_1, \\ \eta_1|_{[t_1, t^*]} \sqcup \gamma|_{[q_1, q^*]}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

einfach geschlossen. Analog zum ersten Fall kann $\eta_2(0) \in R(\zeta)$ und $\eta_2(1) \in L(\zeta)$ gezeigt werden, da η_1 den Kreisbogenspline γ in t_1 nach rechts verlässt und damit kann auch die restliche Argumentation analog geführt werden. \square

Wir sind nun in der Lage Satz 3.22 auf Seite 53 für generische Kreisbögen zu beweisen:

Beweis (von Satz 3.22 für generische Kreisbögen). Wir nehmen an, dass $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen ist. Seien wie üblich $\sigma_1 := \sigma|_{[0, t(\kappa(1))]}$ und $\sigma_2 := \sigma|_{[t(\kappa(1)), 1]}$, vgl. Definition 3.1.

„1) \Leftrightarrow 2)“: Nach Proposition 3.11 können wir ein $\varepsilon > 0$ wählen, so dass

$$\gamma|_{(0, \varepsilon]} \subset I_K.$$

Damit gilt $\gamma \subset \overline{I_K}$ genau dann, wenn $\gamma_\varepsilon := \gamma|_{[\varepsilon, 1]} \subset \overline{I_K}$ ist und es gilt

$$\gamma_\varepsilon \cap I_K \neq \emptyset. \quad (4.7)$$

Nachdem γ ein generischer Kreisbogen ist, vgl. Definitionen 3.6 und 3.12, folgt

$$\gamma|_{[0, \varepsilon]} \cap \kappa = \emptyset \quad \text{und} \quad \gamma_\varepsilon \cap \sigma_1 = \emptyset \quad (4.8)$$

und damit gilt

$$\Delta(\gamma, q) = \begin{cases} \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_\varepsilon, \kappa_p^+|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_\varepsilon, \overline{\sigma_1} \sqcup \kappa_p^+|_{[0, t(q)]}), & q \in (\kappa_p^+)^{\circ}, \\ \Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_\varepsilon, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_\varepsilon, \sigma_1 \sqcup \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}), & q \in (\kappa_p^-)^{\circ}. \end{cases}$$

Aus (4.8) folgt insbesondere $\gamma_\varepsilon(0) \notin \kappa \sqcup \overline{\sigma_1}$ und es gilt $\kappa \sqcup \overline{\sigma_1} \in \mathcal{S}_0^*$. Damit können wir im Fall $p \notin \kappa$ die Äquivalenz von 1) und 4) und andernfalls die Äquivalenz von 1) und 5) aus Lemma 4.1 anwenden und wegen (4.7) folgt damit die Behauptung.

„2) \Rightarrow 3)“: Folgt trivialerweise.

„3) \Rightarrow 2)“: Im Fall $p \notin \kappa$ ist die Implikation trivialerweise erfüllt, da dann

$$\text{Im}(\kappa^{\circ} \setminus \{p\}) = \text{Im}(\kappa^{\circ}) = \text{Im}((\kappa_p^+)^{\circ}) = \text{Im}((\kappa_p^-)^{\circ})$$

ist und

$$\Delta(\gamma, q) = \Delta^+(\gamma, q) = \Delta^-(\gamma, q) \quad \text{für alle } q \in \kappa^{\circ}$$

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

ist. Wir nehmen also $p \in \kappa$ an. Ist $\gamma(0) \in \sigma_1^\circ$, dann gilt die Behauptung nach Lemma 4.2 mit

$$\eta_0 := \overline{\sigma_1}, \quad \eta_1 := \kappa_p^+ \quad \text{und} \quad \eta_2 := \kappa_p^-.$$

Ist $\gamma(0) \notin \sigma_1^\circ$ und damit $\gamma(0) \in \sigma_2^\circ$, dann gilt $\sigma_1 \cap \gamma = \emptyset$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]} \cap (\sigma_2|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma) = \emptyset$$

ist. Wir setzen

$$\eta_0 := \overline{\kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]} \sqcup \overline{\sigma_1}}, \quad \eta_1 := \kappa_p^+ \quad \text{und} \quad \eta_2 := \kappa_p^-|_{[\varepsilon,1]}.$$

Mit $\sigma_{2,\gamma} := \sigma_2|_{[0,t(\gamma(0))]}$ verlässt

$$\gamma^* := \sigma_{2,\gamma} \sqcup \gamma$$

den Kreisbogenspline η_0 in 0 nach links. Es gilt $\kappa_p^- \cap \sigma_{2,\gamma} = \{\kappa_p^-(0)\}$ und falls $\kappa_p^+ \cap \sigma_{2,\gamma} \neq \emptyset$ ist, dann berührt κ_p^+ den Kreisbogen $\sigma_{2,\gamma}$ von rechts. Damit folgt die Behauptung wieder aus Lemma 4.2. \square

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

Ausgehend von einem potenziellen Sichtbarkeitskreisbogen und dessen Restriktionen und Verletzungen wollen wir nun Aussagen über andere Kreisbögen treffen. Diese bilden die Grundlage für Satz 3.23 und ermöglichen im folgenden Kapitel eine zielgerichtete Suche nach einem Sichtbarkeitskreisbogen. Wir teilen die Anordnung zweier Kreisbögen in verschiedene Konfigurationen ein, die wir einzeln untersuchen. Beispiele zu den verschiedenen Konfigurationen sind in Abbildung 4.2 zu sehen.

Definition 4.3. Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, seien $q_1 \in \gamma_1 \cap \sigma$ und $q_2 \in \gamma_2 \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ und gelte entweder $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q_2 \prec_\sigma q_1$ oder $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$. Wir sagen γ_1 und γ_2 sind in

Konfiguration eins, falls $q_2 \prec_\sigma q_1$ und $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$,

Konfiguration zwei, falls $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset$,

Konfiguration drei, falls $\gamma_1(0) \prec_\sigma q_1 \preceq_\sigma \gamma_2(0)$,

Konfiguration vier, falls $\gamma_1(0) = q_1 \prec_\sigma \gamma_2(0)$.

Bemerkung 4.4. Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, dann gilt im Fall $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ entweder $q_1 \prec_\sigma q_2$ oder $q_2 \prec_\sigma q_1$ und andernfalls gilt entweder $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$ oder $\gamma_2(0) \prec_\sigma \gamma_1(0)$. Sind also die Voraussetzungen von Definition 4.3 nicht erfüllt, dann sind sie nach einer Umbenennung der Kreisbögen erfüllt.

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

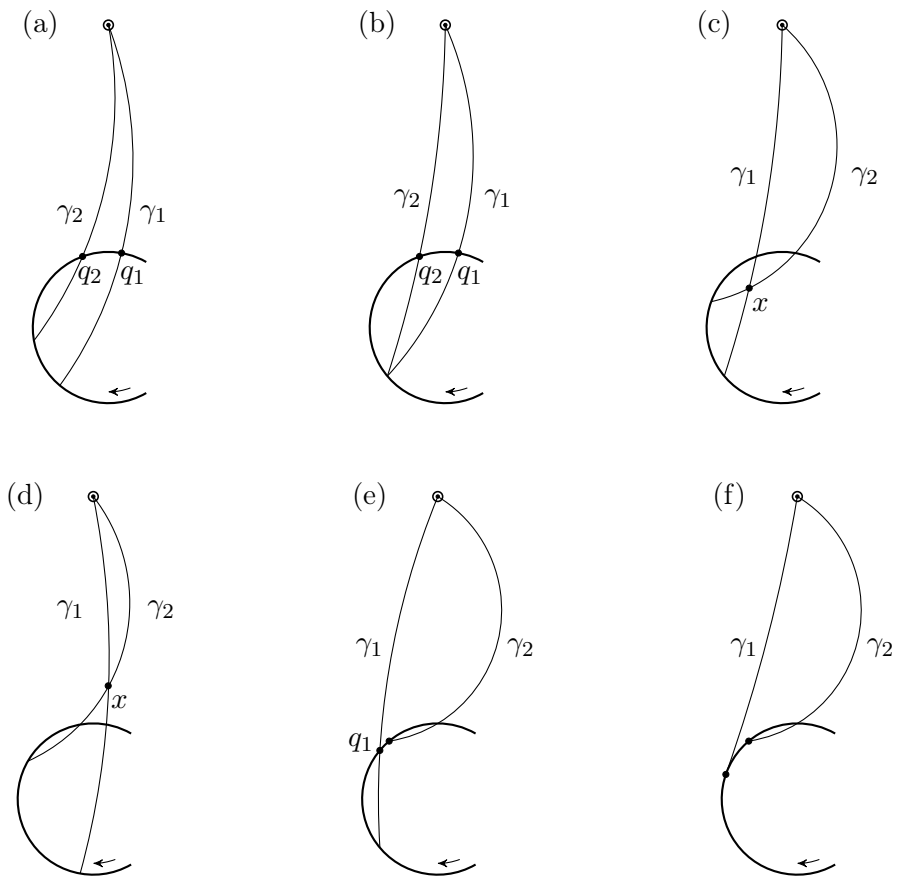


Abbildung 4.2: Beispiele zu Konfiguration eins (a,b), zwei (c,d), drei (e) und vier (f) in Definition 4.3.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Damit sind zwei Kreisbögen – bis auf Umbenennung – in genau einer der vier Konfigurationen:

Proposition 4.5. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$, so dass diese die Voraussetzungen von Definition 4.3 erfüllen. Dann sind γ_1 und γ_2 entweder in Konfiguration eins, zwei, drei oder vier.*

Wir ziehen ein paar technische Details vor:

Lemma 4.6. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$ und seien $q_1 \in \gamma_1 \cap \sigma$, $q_2 \in \gamma_2 \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ . Dann gilt:*

1. *Ist $q_1 \preceq_\sigma \gamma_2(0)$, dann ist $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$,*
2. *Ist $\gamma_2(0) \prec_\sigma q_1 \prec_\sigma q_2$, dann gibt es ein $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$ und es gilt $x \prec_{\gamma_1} q_1$ und $x \prec_{\gamma_2} q_2$,*
3. *Gibt es ein $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$ mit $q_1 \prec_{\gamma_1} x$ und $q_2 \prec_{\gamma_2} x$, dann ist $\gamma_2(0) \preceq_\sigma q_2 \prec_\sigma q_1$.*

Beweis. Zu 1): Im Fall $q_1 = \gamma_2(0)$ gilt $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\gamma_2(0), p\}$ und damit ist $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$. Im Fall $q_1 \prec_\sigma \gamma_2(0)$ gilt nach Proposition 3.9 $\gamma_1(0) \in R([\gamma_2])$ und $\gamma_2(0) \in R([\gamma_1])$. Angenommen es gäbe ein $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$. Nach Korollar 2.51 würde entweder γ_1 von γ_2 oder γ_2 von γ_1 in x von links geschnitten. Im ersten Fall gäbe es wegen $\gamma_2(0) \in R([\gamma_1])$ ein $t \in (0, t_{\gamma_2}(x))$ in dem γ_2 den Kreis $[\gamma_1]$ von rechts schneidet. Damit besäßen $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$ drei Schnittpunkte, im Widerspruch zu $\gamma_1 \neq \gamma_2$, vgl. Proposition 3.8. Analog erhielten wir im zweiten Fall einen Widerspruch.

Zu 2): Sei

$$\zeta := \gamma_1|_{[0, t(q_1)]} \sqcup \overline{\sigma|_{[\gamma_1(0), q_1]}}.$$

Nach Proposition 3.9, 1) verlässt γ_2 den Kreisbogen σ in 0 nach rechts und damit verlässt γ_2 den einfach geschlossenen Kreisbogenspline ζ in 0 nach links. Außerdem folgt aus Proposition 3.9, 3) und Korollar 2.50, dass $\gamma_2(1) = \gamma_1(1) = p \in R(\zeta)$. Daraus folgt $\gamma_2^\circ \cap \zeta \neq \emptyset$. Wegen $q_1 \prec_\sigma q_2$ gilt $\gamma_2^\circ \cap \sigma|_{[\gamma_1(0), q_1]} = \emptyset$ und damit erhalten wir $\gamma_2^\circ \cap \gamma_1|_{(0, t(q_1))} \neq \emptyset$. Sei $x \in \gamma_2^\circ \cap \gamma_1|_{(0, t(q_1))}$. Aus Proposition 3.9, 1) und 2) folgt $x \in R([\sigma])$ und damit $x \in \gamma_2|_{(0, t(q_2))}$.

Zu 3): Nach 1) ist $\gamma_2(0) \prec_\sigma q_1$ und damit folgt aus 2), dass $q_2 \prec_\sigma q_1$ ist, da es zwischen γ_1° und γ_2° maximal einen Schnittpunkt geben kann. \square

Beweis (von Proposition 4.5). Wir zeigen zuerst, dass jede Anordnung in mindestens eine Konfiguration fällt. Gilt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, dann gilt nach Voraussetzung $q_2 \prec_\sigma q_1$ und somit $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$. Damit sind die Kreisbögen in Konfiguration eins. Im Fall $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$ unterscheiden wir nach der Lage von q_1 relativ zu $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0)$ und q_2 . Gilt $\gamma_1(0) = q_1$, dann sind die Kreisbögen in Konfiguration vier. Gilt $\gamma_1(0) \prec_\sigma q_1 \preceq_\sigma \gamma_2(0)$, dann sind die Kreisbögen in Konfiguration drei. Gilt $\gamma_2(0) \prec_\sigma q_1 \preceq_\sigma q_2$, dann

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

gilt $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset$ nach Lemma 4.6 2) und damit sind die Kreisbögen in Konfiguration zwei. Und im Fall $q_2 \prec_\sigma q_1$ sind die Kreisbögen entweder in Konfiguration eins oder zwei. Damit sind alle Fälle abgedeckt.

Bleibt zu zeigen, dass ein Kreisbogenpaar nicht in zwei Konfigurationen sein kann. In Konfiguration drei und vier gilt insbesondere $q_1 \preceq_\sigma q_2$ und damit kann man ausschließen, dass ein Kreisbogen in Konfiguration eins in einer weiteren Konfiguration ist. Nach Lemma 4.6, 1) gilt in Konfiguration drei und vier $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$ und damit kann man ausschließen, dass ein Kreisbogen in Konfiguration zwei auch in Konfiguration drei oder vier ist. Konfigurationen drei und vier schließen sich gegenseitig direkt über die Lage von q_1 relativ zu $\gamma_1(0)$ aus. Damit ist gezeigt, dass die Kreisbögen in genau einer der vier Konfigurationen sind. \square

Folgende Proposition bildet die Grundlage für die darauffolgenden Aussagen zu den einzelnen Konfigurationen:

Proposition 4.7. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, generische Kreisbögen und gelte $\gamma_1(0) \preceq_\sigma \gamma_2(0)$. Seien außerdem $\sigma_{12} := \sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]}$ und*

$$\zeta := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}.$$

Dann gilt für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$, die entweder nicht auf ζ liegen, oder in denen ζ lokal einfach ist, dass

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa(0)), & q \notin \sigma_{12}, \\ \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa(0)) - 1, & q \in \sigma_{12}. \end{cases}$$

Beweis. Sei zuerst $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ ein Punkt, der entweder nicht auf ζ liegt, oder in dem ζ lokal einfach ist und sei $\kappa_q := \kappa|_{[0, t(q)]}$. Aus Lemma 4.6, 1) und Proposition 3.8 folgt, dass es höchstens einen nicht lokal einfachen Punkt in ζ gibt, entweder einen Schnittpunkt von γ_1° mit σ_{12} oder einen Schnittpunkt von γ_1° mit γ_2° . Aufgrund der Homotopieinvarianz von Δ , vgl. Proposition 2.63, können wir annehmen, dass κ_q diesen Punkt nicht durchläuft, dass also ζ in jedem Schnittpunkt mit κ_q lokal einfach ist. Damit erhalten wir aus den Eigenschaften von Δ , vgl. Propositionen 2.56 und 2.62,

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) &= \Delta(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}, \kappa_q) = \Delta(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1} \sqcup \sigma_{12}, \kappa_q) - \Delta(\sigma_{12}, \kappa_q) \\ &= \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa(0)) - \Delta(\sigma_{12}, \kappa_q). \end{aligned}$$

Da entweder $\kappa_q \cap \sigma_{12} = \emptyset$ ist, oder κ_q den Startkreisbogen σ_{12} nach Bemerkung 3.2, 3) von rechts berührt, gilt

$$\Delta(\sigma_{12}, \kappa_q) = \begin{cases} 1, & q \in \sigma_{12}, \\ 0, & q \notin \sigma_{12} \end{cases}$$

und damit folgt die Behauptung für den Fall $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Ist $q \notin (\kappa_p^+)^{\circ}$, dann können wir analog zum ersten Fall annehmen, dass ζ in jedem Schnittpunkt mit $\kappa_p^-|_{[0,t(q)]}$ lokal einfach ist. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]} \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$ ist. Da in diesem Fall $\kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q)]} \cap \sigma = \emptyset$ ist, folgt analog zum ersten Fall

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) &= \Delta(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q)]}) = \Delta(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1} \sqcup \sigma_{12}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q)]}) \\ &= \lambda_{\zeta}(q) - \lambda_{\zeta}(\kappa_p^-(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\lambda_{\zeta}(\kappa_p^-(\varepsilon)) = \lambda_{\zeta}(\kappa(0))$ ist. Mit $\eta := \sigma|_{[0,t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]}$ gilt nach Proposition 2.62 und wegen $\sigma(0) = \kappa(0)$

$$\lambda_{\zeta}(\kappa_p^-(\varepsilon)) - \lambda_{\zeta}(\kappa(0)) = \Delta(\zeta, \eta).$$

Ist $\kappa_p^-(0) \prec_{\sigma} \gamma_1(0)$, dann gilt $\zeta \cap \eta = \emptyset$ und damit $\Delta(\zeta, \eta) = 0$. Im Fall $\kappa_p^-(0) \in \sigma_{12}^{\circ}$ verlässt γ_1 den Kreisbogen σ in 0 nach rechts, vgl. Definition 3.6 und Proposition 3.9, und damit nähert sich η nach Proposition 2.50 in $\gamma_1(0)$ von links an ζ an. Da κ_p^- den Kreisbogen σ in 0 nach links verlässt, vgl. Definition 3.1, und da $\chi^{\pm}(\zeta, \eta, \cdot)$ in allen anderen Punkten null ist, folgt wieder $\Delta(\zeta, \eta) = 0$. Im Fall $\gamma_2(0) \prec_{\sigma} \kappa_p^-(0)$, verlassen γ_1 und γ_2 den Startkreisbogen σ in 0 nach rechts und es folgt analog $\Delta(\zeta, \eta) = 0$. Damit gilt in jedem Fall $\lambda_{\zeta}(\kappa_p^-(\varepsilon)) = \lambda_{\zeta}(\kappa(0))$ und damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Konfiguration eins

Proposition 4.8. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration eins. Dann ist*

$$\zeta := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}$$

mit $\sigma_{12} := \sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]}$ einfach geschlossen und für alle $q \in \kappa^{\circ} \setminus \{p\}$ gilt

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} 0, & q \in L(\zeta), \\ -1, & q \in \gamma_1^{\circ} \cup \gamma_2^{\circ}, \\ -2, & q \in R(\zeta) \cup \sigma_{12}. \end{cases}$$

Beweis. Seien $q_1 \in \gamma_1 \cap \sigma$, $q_2 \in \gamma_2 \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_{σ} . Da in Konfiguration eins $\gamma_1^{\circ} \cap \gamma_2^{\circ} = \emptyset$ und $\gamma_2(0) \preceq_{\sigma} q_2 \prec_{\sigma} q_1$ ist, ist ζ einfach geschlossen und damit lokal einfach in jedem Punkt. Es gilt insbesondere auch $\gamma_1(0) \prec_{\sigma} q_1$ und damit verlässt γ_1 den Kreisbogen σ in 0 nach rechts, vgl. Proposition 3.9. Nach der Verzweigungssituation in Korollar 2.50 nähert sich σ in $\gamma_1(0)$ von links an ζ an. Wegen $\sigma|_{[0,t(\gamma_1(0))]} \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$ gilt damit $\kappa(0) \in L(\zeta)$ und die Aussage folgt aus den Propositionen 4.7 und 2.61. \square

Konfiguration zwei

Proposition 4.9. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration zwei, sei $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$ und $\sigma_{12} := \sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]}$. Dann sind*

$$\zeta_1 := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2|_{[0, t(x)]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[0, t(x)]}},$$

$$\zeta_2 := \gamma_2|_{[t(x), 1]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[t(x), 1]}}$$

einfach geschlossen und für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ gilt

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} -1, & q \in \gamma_1|_{(0, t(x))} \cup \gamma_2|_{(0, t(x))}, \\ 1, & q \in \gamma_1|_{(t(x), 1)} \cup \gamma_2|_{(t(x), 1)}, \\ -2, & q \in R(\zeta_1) \cup \sigma_{12}, \\ 2, & q \in L(\zeta_2), \\ 0, & q \in (L(\zeta_1) \cap R(\zeta_2)) \cup \{x\}. \end{cases}$$

Wir beweisen dazu zuerst folgendes Lemma:

Lemma 4.10. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration zwei, sei $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$ und $\sigma_{12} := \sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]}$. Dann sind*

$$\zeta_1 := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2|_{[0, t(x)]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[0, t(x)]}},$$

$$\zeta_2 := \gamma_2|_{[t(x), 1]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[t(x), 1]}}$$

einfach geschlossen und es gilt

1. $\zeta_2 \subset \overline{L(\zeta_1)}$,
2. $\zeta_1 \subset \overline{R(\zeta_2)}$,
3. $\kappa(0) \in L(\zeta_1) \cap R(\zeta_2)$.
4. $\kappa(1) \in R(\zeta_2)$.

Beweis. Da in Konfiguration zwei $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset$ ist, folgt aus Definition 3.6 eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens und dessen Eigenschaften, vgl. Proposition 4.6, 1), dass

$$\sigma_{12}^\circ \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$$

und damit sind ζ_1 und ζ_2 einfach geschlossen und es gilt $\zeta_1 \cap \zeta_2 = \{x\}$. Nach Proposition 3.9 ist $\gamma_1(0) \in R([\gamma_2])$, damit wird γ_2 von γ_1 in x von rechts geschnitten. Aus den Aussagen zur Verzweigungssituation in Proposition 2.52 folgt damit 1) und 2). Wegen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ und da in Konfiguration zwei insbesondere $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$ ist, ist

$$\sigma|_{[0, t(\gamma_1(0))]} \cap (\zeta_1 \cup \zeta_2) = \emptyset \tag{4.9}$$

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

und damit folgt aus 2) und $\gamma_1(0) \in \zeta_1$, dass

$$\kappa(0) = \sigma(0) \in R(\zeta_2). \quad (4.10)$$

Nach Lemma 4.6, 1) und Proposition 3.9, 1) verlässt γ_1 den Kreisbogen σ in 0 nach rechts. Damit folgt aus Proposition 2.52, dass sich σ in $\gamma_1(0)$ von links an ζ_1 annähert und wegen (4.9) folgt daraus

$$\kappa(0) = \sigma(0) \in L(\zeta_1). \quad (4.11)$$

Aus (4.10) und (4.11) folgt 3).

Aus Definition 3.6 folgt $\sigma|_{[0,t(\kappa(1))]} \cap (\gamma_1^\circ \cup \gamma_2^\circ) = \emptyset$ und damit folgt aus 3), dass 4) gilt. \square

Beweis (von Proposition 4.9). Sei

$$\zeta := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}.$$

Dann folgt aus der Additivität der Windungszahl, vgl. Proposition 2.19, für alle $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \zeta$

$$\begin{aligned} \omega(\zeta, q) &= \omega(\sigma_{12} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}, q) \\ &= \omega(\sigma_{12} \sqcup \gamma_2|_{[0,t(x)]}, q) + \omega(\gamma_2|_{[t(x),1]}, q) + \omega(\overline{\gamma_1|_{[t(x),1]}}, q) + \omega(\overline{\gamma_1|_{[0,t(x)]}}, q) \\ &= \omega(\sigma_{12} \sqcup \gamma_2|_{[0,t(x)]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[0,t(x)]}}, q) + \omega(\gamma_2|_{[t(x),1]} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[t(x),1]}}), q) \\ &= \omega(\zeta_1, q) + \omega(\zeta_2, q). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lambda_\zeta(q) = \lambda_{\zeta_1}(q) + \lambda_{\zeta_2}(q), \quad q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\},$$

und zusammen mit Proposition 4.7 folgt für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p, x\}$

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} \lambda_{\zeta_1}(q) - \lambda_{\zeta_1}(\kappa(0)) + \lambda_{\zeta_2}(q) - \lambda_{\zeta_2}(\kappa(0)), & q \notin \sigma_{12}, \\ \lambda_{\zeta_1}(q) - \lambda_{\zeta_1}(\kappa(0)) + \lambda_{\zeta_2}(q) - \lambda_{\zeta_2}(\kappa(0)) - 1, & q \in \sigma_{12}. \end{cases}$$

Mit Proposition 2.61 und Lemma 4.10 ist leicht zu prüfen, dass für $q \neq x$ die Behauptung folgt. Sei im Folgenden $q = x$. Wegen der Homotopieinvarianz von Δ , vgl. Proposition 2.63, können wir annehmen, dass es ein $q^* \in \kappa_p^+|_{(0,t(q))}$ bzw. ein $q^* \in \kappa_p^-|_{(0,t(q))}$ gibt, so dass

$$\kappa_p^+|_{[t(q^*),t(q)]} \subset \gamma_1|_{[0,t(x)]}$$

bzw.

$$\kappa_p^-|_{[t(q^*),t(q)]} \subset \gamma_1|_{[0,t(x)]}$$

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

ist, und damit ist

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) &= \left(\Delta(\gamma_2, q^*) - \Delta(\gamma_1, q^*) \right) \\ &\quad + \left(\Delta(\gamma_2, \kappa^\pm|_{[t(q^*), t(q)]}) - \Delta(\gamma_1, \kappa^\pm|_{[t(q^*), t(q)]}) \right) \\ &= -1 + (1 + 0) = 0.\end{aligned}$$

□

Konfiguration drei

Analog zum Beweis von Proposition 4.9 kann für Konfiguration drei folgender Zusammenhang bewiesen werden:

Proposition 4.11. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration drei, sei $x \in \sigma \cap \gamma_1$ maximal bezüglich \prec_σ und sei $\sigma_{1x} := \sigma|_{[\gamma_1(0), x]}$ und $\sigma_{x2} := \sigma|_{[x, \gamma_2(0)]}$. Dann sind*

$$\begin{aligned}\zeta_1 &:= \sigma_{1x} \sqcup \overline{\gamma_1|_{[0, t(x)]}}, \\ \zeta_2 &:= \sigma_{x2} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1|_{[t(x), 1]}}\end{aligned}$$

einfach geschlossen und für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ gilt

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} -1, & q \in \gamma_1|_{(0, t(x))} \cup \{x\}, \\ 1, & q \in \gamma_1|_{(t(x), 1)} \cup \gamma_2^\circ, \\ -2, & q \in R(\zeta_1) \cup \sigma_{1x}^\circ, \\ 2, & q \in L(\zeta_2), \\ 0, & q \in L(\zeta_1) \cap R(\zeta_2). \end{cases}$$

Konfiguration vier

Proposition 4.12. *Sei $p \in P_K$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration vier und sei $\sigma_{12} := \sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]}$. Dann ist*

$$\zeta := \sigma_{12} \sqcup \gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}$$

einfach geschlossen und für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ gilt

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} 2, & q \in L(\zeta), \\ 1, & q \in \gamma_1^\circ \cup \gamma_2^\circ, \\ 0, & q \in R(\zeta) \cup \sigma_{12}^\circ. \end{cases}$$

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Beweis. Da $\gamma_1^\circ \cap \sigma = \emptyset$ ist, gilt nach Proposition 4.6, 1), dass $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{p\}$ ist. Damit ist ζ einfach geschlossen. Außerdem folgt aus $\gamma_1^\circ \cap \sigma = \emptyset$, dass γ_1 den Kreisbogen σ in 0 nach links verlässt und damit nähert sich σ in $\gamma_1(0)$ von rechts an ζ an, vgl. Korollar 2.50. Somit gilt $\kappa(0) = \sigma(0) \in R(\zeta)$ und damit folgt die Aussage aus den Propositionen 4.7 und 2.61. \square

Restriktionen am Endpunkt

Unabhängig von der konkreten Konfiguration stellen wir auch für Endrestriktionen einen Zusammenhang zwischen zwei generischen Kreisbögen her:

Proposition 4.13. *Sei $p \in P_K \cap \kappa$, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\gamma_1 \cap \gamma_2 \setminus \{p\} \neq \emptyset$,
2. $[\gamma_2]$ schneidet $[\gamma_1]$ in p von rechts.

Sei außerdem $\varepsilon > 0$, so dass entweder

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \subset \gamma_1 \setminus \gamma_2 \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \subset \gamma_2 \setminus \gamma_1 \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$$

ist und die entsprechende Bedingung für κ_p^- erfüllt ist. Dann gilt:

3. Ist der Endpunkt p eine rechte Restriktion von γ_1 , dann ist p eine rechte Restriktion von γ_2 und jedes $q \in \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)}$ ist eine rechte Verletzungen von γ_2 .
4. Ist der Endpunkt p eine linke Restriktion von γ_2 , dann ist p eine linke Restriktion von γ_1 und jedes $q \in \kappa_p^-|_{[1-\varepsilon,1)}$ ist eine linke Verletzungen von γ_1 .

Wir ziehen ein Lemma vor den eigentlichen Beweis:

Lemma 4.14. *Sei $p \in P_K$ und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\gamma_1 \cap \gamma_2 \setminus \{p\} \neq \emptyset$,
2. $[\gamma_2]$ schneidet $[\gamma_1]$ in p von rechts.

Sei außerdem $B_\varepsilon(p)$, $\varepsilon > 0$, eine lokale Einfachheitsumgebung von p bezüglich $\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}$, so dass $B_\varepsilon(p) \cap \sigma = \emptyset$ ist. Dann gilt für alle $q \in B_\varepsilon(p) \cap (\kappa^\circ \setminus \{p\})$, dass

$$\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma_1, q) = \begin{cases} 2, & q \in L_{\varepsilon,p}(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}), \\ 1, & q \in \gamma_1^\circ \cup \gamma_2^\circ, \\ 0, & q \in R_{\varepsilon,p}(\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}). \end{cases}$$

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

Beweis. Sei $x \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \setminus \{p\}$ und seien $q_1 \in \gamma_1 \cap \sigma$ und $q_2 \in \gamma_2 \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ . Aus Voraussetzung 1) folgt, dass genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

3. $x \in \gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ$,
4. $x = \gamma_1(0)$ und $x = \gamma_2(0)$,
5. $x = \gamma_1(0)$ und $x \neq \gamma_2(0)$,
6. $x \neq \gamma_1(0)$ und $x = \gamma_2(0)$.

Ist Bedingung 3) erfüllt, dann folgt aus 2), dass γ_1 von γ_2 in x von links geschnitten wird. Damit folgt $\gamma_1(0) \prec_\sigma \gamma_2(0)$ aus Proposition 3.9, 3) und 4) und damit sind γ_1 und γ_2 in Konfiguration zwei. Somit folgt die Behauptung in diesem Fall aus Proposition 4.9. Ist Bedingung 4) erfüllt, dann folgt aus Proposition 3.9, 3) und 4), dass $q_1 \prec_\sigma q_2$ ist. Damit sind γ_2 und γ_1 – man beachte die Reihenfolge der Kreisbögen – in Konfiguration eins. Damit folgt die Behauptung in diesem Fall aus Proposition 4.8. Bedingung 5) kann nicht erfüllt sein, da aus Proposition 3.9, 3) und 4) folgen würde, dass $[\gamma_1]$ von $[\gamma_2]$ in x von rechts und damit in p von links geschnitten wird. Das wäre ein Widerspruch zu 2). Ist Bedingung 6) erfüllt, dann sind γ_1 und γ_2 in Konfiguration drei und damit folgt die Behauptung aus Proposition 4.11. \square

Beweis (von Proposition 4.13). Wir beweisen nur den ersten Teil der Aussage, da der zweite analog folgt. Aus den Voraussetzungen an γ_1 und γ_2 folgt, dass $\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}$ in p lokal einfach ist. Nach Definition 3.18 ist für die Endrestriktion p eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

3. $\Delta^+(\gamma_1, p) = 0$, $\gamma_1'(1) = \kappa'_-(p)$ und $\chi^-([\gamma_1], \kappa, t_\kappa(p)) = -1$,
4. $\Delta^+(\gamma_1, p) \in \{1, 2\}$.

Ist p eine Restriktion gemäß Bedingung 3), dann nähert sich κ_p^+ in p von rechts an $[\gamma_1]$ an und wegen 2) und $\gamma_1'(1) = \kappa'_-(p)$ nähert es sich von links an $[\gamma_2]$ an, vgl. Proposition 2.54. Damit folgt aus Proposition 2.53, dass sich κ_p^+ in p von links an $\gamma_2 \sqcup \overline{\gamma_1}$ annähert und somit folgt aus Lemma 4.14, dass

$$\Delta^+(\gamma_2, q) = 2 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]}.$$

Ist p eine Restriktion gemäß Bedingung 4), dann ist $\Delta^+(\gamma_1, p)$ nach Proposition 2.58 genau dann ungerade, wenn $\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]} \subset \gamma_1$ ist. Damit folgt aus Lemma 4.14 wieder

$$\Delta^+(\gamma_2, q) = 2 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]}.$$

Somit ist $p = \kappa_p^+(1)$ eine rechte Restriktion von γ_2 und jedes $q \in \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon, 1]}$ ist eine Verletzung von γ_2 . \square

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Korollar 4.15. *Sei $p \in P_K \cap \kappa$ und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ generische Kreisbögen in Konfiguration zwei, drei oder vier. Sei außerdem $\varepsilon > 0$, so dass entweder*

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \subset \gamma_1 \setminus \gamma_2 \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \subset \gamma_2 \setminus \gamma_1 \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)} \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$$

ist und die entsprechende Bedingung für κ_p^- erfüllt ist. Dann gilt:

1. *Ist der Endpunkt p eine rechte Restriktion von γ_1 , dann ist p eine rechte Restriktion von γ_2 und jedes $q \in \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1)}$ ist eine rechte Verletzung von γ_2 .*
2. *Ist der Endpunkt p eine linke Restriktion von γ_2 , dann ist p eine linke Restriktion von γ_1 und jedes $q \in \kappa_p^-|_{[1-\varepsilon,1)}$ ist eine linke Verletzung von γ_1 .*

Beweis. Wir beweisen nur den Fall einer rechten Endrestriktion, da der andere Fall analog gezeigt werden kann. Sind die Kreisbögen in Konfiguration zwei, dann wird $[\gamma_1]$ von $[\gamma_2]$ in p von rechts geschnitten, vgl. Proposition 3.9 und Lemma 4.6, und damit folgt die Behauptung direkt aus Proposition 4.13. Analog folgt die Behauptung, falls die Kreisbögen in Konfiguration drei sind und $\gamma_2(0) \in \gamma_1^\circ$ ist.

Seien die Kreisbögen im Folgenden in Konfiguration drei oder vier und gelte $\gamma_2(0) \notin \gamma_1^\circ$. Falls weder p auf der Verbindungsstrecke von $\gamma_1(0)$ und $\gamma_2(0)$ liegt noch $\gamma_1(0)$ auf der Verbindungsstrecke von $\gamma_2(0)$ und p liegt, dann existiert der Kreisbogen γ_3 mit Anfangspunkt $\gamma_1(0)$, Endpunkt p und $\gamma_2(0) \in \gamma_3$. Es ist leicht zu prüfen, dass $\gamma_3 \in \mathcal{A}_{K,p}$ ist und dass $[\gamma_1]$ von $[\gamma_3]$ und $[\gamma_3]$ von $[\gamma_2]$ in p von rechts geschnitten werden, vgl. Proposition 3.9 und Lemma 4.6. Aus Proposition 4.13 folgt damit zuerst, dass p eine rechte Endrestriktion von γ_3 ist und damit zweitens, dass p eine rechte Endrestriktion von γ_2 ist. Falls p auf der Verbindungsstrecke von $\gamma_1(0)$ und $\gamma_2(0)$ oder $\gamma_1(0)$ auf der Verbindungsstrecke von $\gamma_2(0)$ und p liegt, dann fügen wir zwei Kreisbögen ein. Sei $x \in \sigma|_{(\gamma_1(0), \gamma_2(0))}$. Da $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0)$ und p kollinear sind und $p \notin [\sigma]$ ist, sind weder $\gamma_1(0)$, x und p noch $\gamma_2(0)$, x und p kollinear. Damit existiert der Kreisbogen γ_3 mit Anfangspunkt $\gamma_1(0)$, Endpunkt p und $x \in \gamma_3$ und es existiert der Kreisbogen γ_4 mit Anfangspunkt x , Endpunkt p und $\gamma_2(0) \in \gamma_4$. Analog zu oben folgt, dass sowohl das Paar γ_1, γ_3 als auch γ_3, γ_4 und γ_4, γ_2 die Voraussetzungen von Proposition 4.13 erfüllen. Somit folgt die Behauptung in diesem Fall analog. \square

Beweis der Sätze 3.23 und 3.24 für generische Kreisbögen

Wir haben nun alle Hilfsmittel, um die Sätze 3.23 und 3.24 auf Seite 53 zu beweisen, sofern nur generische Kreisbögen als Sichtbarkeitskreisbögen zugelassen sind. Satz 3.23 besagt, dass der Endpunkt eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens nicht sichtbar ist, falls dieser Kreisbogen eine Alternantenfolge der Länge drei besitzt und selbst kein Sichtbarkeitskreisbogen ist. Satz 3.24 besagt, dass der Endpunkt eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens γ nicht sichtbar ist, falls

$$|\Delta(\gamma, q)| \geq 3 \quad \text{für ein } q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$$

ist.

4.2 Restriktionen, Verletzungen und Aussagen über andere Kreisbögen

Beweis (von Satz 3.23 für generische Kreisbögen). Sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei und sei $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein weiterer generischer Kreisbogen mit $\gamma \neq \gamma_2$. Wir zeigen, dass es ein $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ gibt für das $|\Delta(\gamma_2, q)| > 1$ ist, da damit die Behauptung aus Satz 3.22 folgt. Nach Proposition 4.5 sind die beiden Kreisbögen in einer der vier Konfigurationen aus Definition 4.3. Wir untersuchen die einzelnen Fälle nacheinander. Seien $q_1 \in \sigma \cap \gamma$ und $q_2 \in \sigma \cap \gamma_2$ maximal bezüglich \prec_σ .

Konfiguration eins: Wir nehmen zuerst an, dass

$$\gamma(0) \preceq_\sigma \gamma_2(0) \preceq_\sigma q_2 \prec_\sigma q_1 \quad \text{und} \quad \gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset.$$

Da damit insbesondere $\gamma(0) \prec_\sigma q_1$ ist, besitzt γ keine linke Startrestriktion. Enthält die Alternantenfolge eine linke Endrestriktion, dann handelt es sich um eine linksblockierende Alternantenfolge und damit gibt es eine weitere linke Restriktion. Somit besitzt γ eine linke Restriktion $q \in \gamma^\circ$ und aus Proposition 4.8 folgt, dass

$$\Delta(\gamma_2, q) = \Delta(\gamma, q) - 1 = -2.$$

Im Fall

$$\gamma_2(0) \preceq_\sigma \gamma(0) \preceq_\sigma q_1 \prec_\sigma q_2 \quad \text{und} \quad \gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ = \emptyset$$

besitzt γ keine rechte Startrestriktion, da der Kreisbogen generisch ist und damit folgt analog, dass γ eine rechte Restriktion besitzt, die eine rechte Verletzung von γ_2 ist.

Konfiguration zwei: Wir nehmen zuerst an, dass

$$\gamma(0) \prec_\sigma \gamma_2(0) \quad \text{und} \quad \gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset.$$

Sei $x \in \gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ$. Ist der Endpunkt p eine rechte Restriktion von γ , dann folgt die Behauptung aus Korollar 4.15. Gibt es eine rechte Restriktion $q \in \gamma|_{(t(x),1)}$ von γ , dann ist q nach Proposition 4.9 eine Verletzung von γ_2 . Ist keiner der beiden Fälle erfüllt, dann gibt es eine linke Restriktion $q \in \gamma|_{(0,t(x))}$ von γ , da aus Lemma 4.6, 1) und $\gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset$ folgt, dass γ keine linke Startrestriktion besitzt. Damit ist q wieder nach Proposition 4.9 eine Verletzung von γ_2 . Im Fall

$$\gamma_2(0) \prec_\sigma \gamma(0) \quad \text{und} \quad \gamma^\circ \cap \gamma_2^\circ \neq \emptyset$$

folgt die Behauptung analog.

Konfiguration drei: Wir nehmen zuerst an, dass

$$\gamma(0) \prec_\sigma q_1 \preceq_\sigma \gamma_2(0).$$

Analog zu Konfiguration zwei folgt: Der Kreisbogen γ besitzt eine linke Restriktion in $\gamma|_{(0,t(q_1))}$, eine rechte Restriktion in $\gamma|_{(t(q_1),1)}$ oder p ist eine rechte Endrestriktion

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

von γ und damit folgt die Behauptung aus Proposition 4.11 bzw. Korollar 4.15. Im Fall

$$\gamma_2(0) \prec_{\sigma} q_2 \preceq_{\sigma} \gamma(0)$$

besitzt γ eine linke Restriktion in γ° oder p ist eine linke Endrestriktion und damit folgt die Behauptung analog.

Konfiguration vier: Wir nehmen zuerst an, dass

$$\gamma(0) = q_1 \prec_{\sigma} \gamma_2(0).$$

Analog zu Konfiguration eins folgt, dass es eine rechte Restriktion $q \in \gamma^{\circ}$ von γ gibt und damit folgt die Behauptung aus Proposition 4.12. Im Fall

$$\gamma_2(0) = q_2 \prec_{\sigma} \gamma(0)$$

besitzt γ eine linke Restriktion $q \in \gamma^{\circ}$ oder p ist eine linke Endrestriktion von γ und damit folgt die Behauptung aus Proposition 4.12 bzw. Korollar 4.15. \square

Beweis (von Satz 3.24 für generische Kreisbögen). Sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein generischer Kreisbogen und $q \in \kappa^{\circ} \setminus \{p\}$, so dass

$$|\Delta(\gamma, q)| \geq 3$$

ist und sei $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein weiterer generischer Kreisbogen mit $\gamma \neq \gamma_2$. Da γ und γ_2 in einer der vier Konfigurationen sind, können sie über Proposition 4.8, 4.9, 4.11 oder 4.12 miteinander in Beziehung gesetzt werden. Damit ist leicht zu prüfen, dass

$$|\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma, q)| \leq 2 \tag{4.12}$$

ist und falls $q \in \gamma$ ist, gilt sogar

$$|\Delta(\gamma_2, q) - \Delta(\gamma, q)| \leq 1. \tag{4.13}$$

Ist $|\Delta(\gamma, q)| = 3$ und damit insbesondere ungerade, dann folgt aus Proposition 2.58, dass $q \in \gamma$ ist. Damit können wir (4.13) anwenden und es folgt

$$|\Delta(\gamma_2, q)| \geq 2. \tag{4.14}$$

Ist $|\Delta(\gamma, q)| \geq 4$, dann folgt (4.14) schon aus Ungleichung (4.12). Damit ist γ_2 kein Sichtbarkeitskreisbogen. Da γ_2 beliebig gewählt wurde, ist gezeigt, dass es keinen generischen Sichtbarkeitskreisbogen mit Endpunkt p gibt. \square

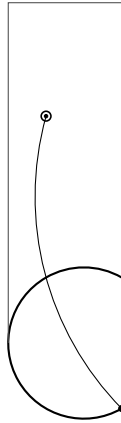


Abbildung 4.3: Beispiel eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens, der (4.15) erfüllt.

4.3 Nicht-generische Kreisbögen

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie sich die Aussagen, die bisher nur für den generischen Fall formuliert oder bewiesen wurden, ohne diese Einschränkung beweisen lassen. Dazu betrachten wir Kreisbögen $\gamma \in \mathcal{A}_K$, für die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\gamma(0) \in \kappa \quad \text{oder} \quad \kappa(0), \kappa(1) \in \gamma.$$

Damit ist mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\gamma(0) = \sigma(0)$,
2. $\gamma(0) = \kappa(1)$,
3. $\gamma(0) \in \sigma_2^\circ \cap \kappa^\circ$ oder
4. $\kappa(1) \in \gamma^\circ$.

Da alle Fälle auf ähnliche Weise behandelt werden können, betrachten wir ausschließlich den ersten Fall und nehmen an, dass

$$\gamma(0) = \sigma(0) \quad \text{und} \quad \kappa(1) \notin \gamma \tag{4.15}$$

ist, siehe Abbildung 4.3. Wir definieren dafür zuerst Δ_κ^\pm als Erweiterung von Definition 3.14. Restriktionen und Verletzungen sind darauf aufbauend entsprechend zum generischen Fall definiert.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

Definition 4.16. Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein Kreisbogen, der (4.15) erfüllt und sei wie gewohnt $\sigma_1 := \sigma|_{[0,t(\kappa(1))]}$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) &:= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) + 1, & q \in (\kappa_p^+)^{\circ}, \\ \Delta_{\kappa}^-(\gamma, q) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}), & q \in (\kappa_p^-)^{\circ},\end{aligned}$$

und im Fall $p \in \kappa$ definieren wir zusätzlich

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa}^+(\gamma, p) &:= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa_p^+) + 1, \\ \Delta_{\kappa}^-(\gamma, p) &:= \Delta(\gamma, \kappa_p^-).\end{aligned}$$

Bemerkung 4.17. Man beachte, dass sich die Definition von Δ_{κ}^- nicht von der für generische Kreisbögen unterscheidet. Das ist nicht nötig, da sich $\gamma(0) = \sigma(0) = \kappa(0)$ nicht auf die Berechnung von

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}), \quad q \in (\kappa_p^-)^{\circ},$$

auswirkt. Um zu erreichen, dass die Definition von Δ_{κ}^+ bezüglich Restriktionen und Verletzungen konsistent zur generischen Definition verwendet werden kann, wurde sie an zwei Stellen angepasst: Einmal um die Addition der eins und als zweite Anpassung wurde γ über den Anfangspunkt hinaus um $\overline{\sigma_1}$ „verlängert“, wodurch $\gamma(0)$ zu einem lokal einfachen Punkt von $\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma$ wird. Da $\sigma_1 \cap \kappa = \{\kappa(0), \kappa(1)\}$ ist, ist garantiert, dass sich die „Verlängerung von γ “ nur im Punkt $\kappa(0)$ auswirkt: Für Kreisbögen gemäß (4.15) gilt also genau wie im generischen Fall

$$\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) = \Delta_{\kappa}^+(\gamma, q') + \Delta(\gamma, \kappa|_{[t(q'),t(q)]}) \quad \text{für alle } q, q' \in (\kappa_p^+)^{\circ}, \quad q' \prec_{\kappa_p^+} q.$$

Um die Beweise zum nicht-generischen Fall besser auf den generischen Fall zurückführen zu können, führen wir eine Kanalerweiterung ein. Dazu wird der ursprüngliche Kanal in einer Umgebung von $\sigma(0)$ vergrößert:

Definition 4.18. Sei $K \in \mathcal{K}$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir nennen einen Kanal $K^* \in \mathcal{K}$ bestehend aus σ^* und κ^* eine ε -Erweiterung von K , falls es $t_1, t_2, t_3 \in (0, 1)$ gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $I_K \subset I_{K^*}$,
2. $\kappa|_{[0,t_1]}, \kappa^*|_{[0,t_2]}, \sigma^*|_{[0,t_3]} \subset B_{\varepsilon}(\sigma(0))$,
3. $\kappa|_{[t_1,1]} = \kappa^*|_{[t_2,1]}$,
4. $\sigma^*|_{[t_3,1]} = \sigma$.

Bemerkung 4.19. Es ist leicht zu prüfen, dass es zu jedem Kanal K und jedem $\varepsilon > 0$ eine ε -Erweiterung K^* von K gibt und dass $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}_{K^*}$ ist. Man beachte, dass ein Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_K$, der (4.15) erfüllt, bezüglich jeder ε -Erweiterung generisch ist.

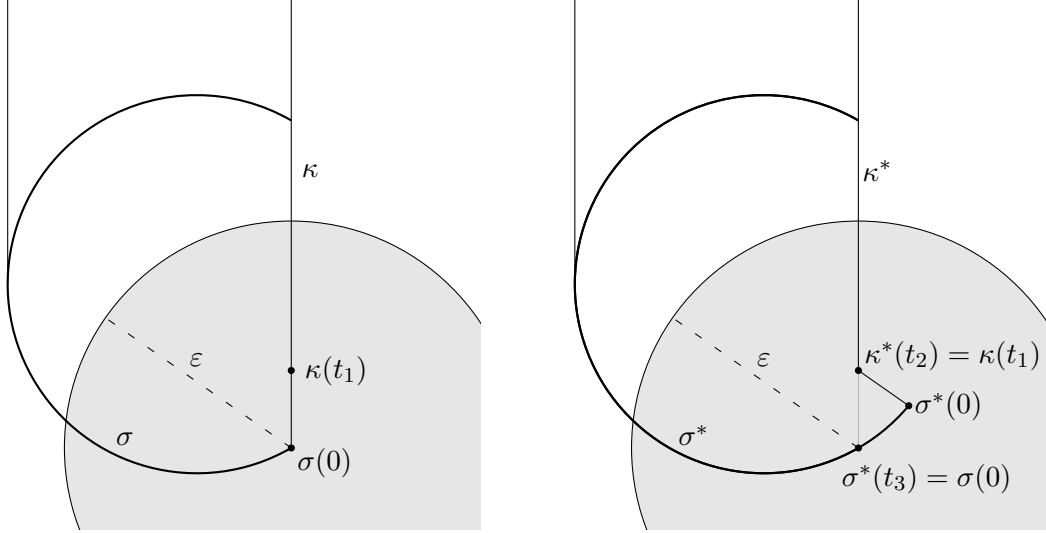


Abbildung 4.4: Rechts ist eine ε -Erweiterung des linken Kanals gemäß Definition 4.18 dargestellt.

Ein Beispiel einer Kanalerweiterung gemäß Definition 4.18 ist in Abbildung 4.4 zu sehen. Folgende Proposition liefert den entscheidenden Zusammenhang zwischen $\Delta_{\kappa}(\gamma, q)$ und $\Delta_{\kappa^*}(\gamma, q)$:

Proposition 4.20. *Sei $K \in \mathcal{K}$, sei $p \in P_K$, sei $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ und sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein Kreisbogen, der (4.15) erfüllt. Sei außerdem $q_1 \in \gamma \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ , sei wie üblich $\sigma_2 := \sigma|_{[t(\kappa(1)),1]}$ und sei $\varepsilon > 0$, so dass*

$$B_\varepsilon(\sigma(0)) \cap (\{q\} \cup \gamma|_{[t(q_1),1]} \cup \sigma_2) = \emptyset. \quad (4.16)$$

Dann gilt für jede ε -Erweiterung K^* von K

$$\Delta_{\kappa}^-(\gamma, q) = \Delta_{\kappa^*}^-(\gamma, q), \quad q \in (\kappa_p^-)^\circ, \quad (4.17)$$

und

$$\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) = \Delta_{\kappa^*}^+(\gamma, q), \quad q \in (\kappa_p^+)^\circ. \quad (4.18)$$

Beweis. Da $q \notin B_\varepsilon(\sigma(0))$ ist und da sich κ und κ^* nur in einem Anfangsstück und nur innerhalb von $B_\varepsilon(\sigma(0))$ unterscheiden, ist $\kappa^*|_{[t(q),1]} = \kappa|_{[t(q),1]}$. Daraus folgt, dass (4.17) erfüllt ist und wir zeigen im Folgenden, dass (4.18) erfüllt ist. Sei

$$\zeta := \gamma|_{[0,t(q_1)]} \sqcup \overline{\sigma|_{[0,t(q_1)]}}$$

und seien $t_1, t_2 \in (0,1)$ gemäß Definition 4.18. Es gelten also die folgenden Bedingungen:

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

1. $\kappa|_{[0,t_1]}, \kappa^*|_{[0,t_2]} \subset B_\varepsilon(\sigma(0))$,
2. $\kappa|_{[t_1,1]} = \kappa^*|_{[t_2,1]}$.

Da γ ein generischer Kreisbogen bezüglich K^* ist folgt aus Bemerkung 4.17, der Additivität von Δ , vgl. Proposition 2.56, und 2), dass

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(\gamma, q) - \Delta_{\kappa^*}(\gamma, q) &= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa|_{[0,t(q)]}) + 1 - \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[0,t(q)]}) \\ &= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa|_{[0,t_1]}) + \Delta(\gamma, \kappa|_{[t_1,t(q)]}) + 1 - \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[0,t_2]}) - \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[t_2,t(q)]}) \quad (4.19) \\ &= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa|_{[0,t_1]}) - \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[0,t_2]}) + 1. \end{aligned}$$

Aus (4.16) und 1) folgt

$$\kappa|_{[0,t_1]} \cap (\gamma|_{[t(q_1),1]} \cup \sigma_2) = \emptyset \quad \text{und} \quad \kappa^*|_{[0,t_2]} \cap (\gamma|_{[t(q_1),1]} \cup \sigma_2) = \emptyset$$

und aus der Definition 3.1 eines Kanals folgt

$$\kappa^*|_{[0,t_2]} \cap \sigma_1^\circ = \emptyset$$

und damit ist

$$\Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa|_{[0,t_1]}) = \Delta(\zeta, \kappa|_{[0,t_1]}) \quad \text{und} \quad \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[0,t_2]}) = \Delta(\zeta, \kappa^*|_{[0,t_2]}). \quad (4.20)$$

Aus 2) folgt insbesondere $\kappa(t_1) = \kappa^*(t_2)$ und damit folgt aus der Charakterisierung von $\Delta(\zeta, \cdot)$ mit λ_ζ , vgl. Proposition 2.62, dass

$$\begin{aligned} &\Delta(\zeta, \kappa|_{[0,t_1]}) - \Delta(\zeta, \kappa^*|_{[0,t_2]}) \\ &= \lambda_\zeta(\kappa(t_1)) - \lambda_\zeta(\kappa(0)) - \lambda_\zeta(\kappa^*(t_2)) + \lambda_\zeta(\kappa^*(0)) \quad (4.21) \\ &= \lambda_\zeta(\kappa^*(0)) - \lambda_\zeta(\kappa(0)). \end{aligned}$$

Es gilt $\kappa(0) = \sigma(0) \in \zeta$ und da $[\sigma]$ von γ in 0 nach rechts verlassen wird, vgl. Proposition 3.9, folgt aus Korollar 2.50, dass $\kappa^*(0) = \sigma^*(0) \in R(\zeta)$. Damit folgt aus Proposition 2.61

$$\lambda_\zeta(\kappa^*(0)) - \lambda_\zeta(\kappa(0)) = -1. \quad (4.22)$$

Aus (4.19), (4.20), (4.21) und (4.22) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(\gamma, q) - \Delta_{\kappa^*}(\gamma, q) &= \Delta(\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma, \kappa|_{[0,t_1]}) - \Delta(\gamma, \kappa^*|_{[0,t_2]}) + 1 \\ &= \Delta(\zeta, \kappa|_{[0,t_1]}) - \Delta(\zeta, \kappa^*|_{[0,t_2]}) + 1 = \lambda_\zeta(\kappa^*(0)) - \lambda_\zeta(\kappa(0)) + 1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Man beachte, dass für generische Kreisbögen γ stets $\varepsilon > 0$ so gewählt werden kann, dass $B_\varepsilon(\sigma(0)) \cap \gamma = \emptyset$ ist. Damit hat der Wechsel zu einer Kanalerweiterung auch im Fall generischer Kreisbögen keinen Einfluss auf den Wert von $\Delta(\gamma, \cdot)$.

Mithilfe von Proposition 4.20 lässt sich für viele der Aussagen, die bisher nur für generische Kreisbögen formuliert und bewiesen wurden, direkt zeigen, dass diese auch für nicht-generische Kreisbögen gemäß (4.15) gelten. So ergibt sich etwa im Fall von Proposition 3.15 auf Seite 47:

Proposition 4.21 (Proposition 3.15 für nicht-generische Kreisbögen gemäß (4.15)).
 Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein nicht-generischer Kreisbogen, der (4.15) erfüllt. Ist $p \notin \kappa$, dann gilt

$$\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) = \Delta_{\kappa}^-(\gamma, q) \quad \text{für alle } q \in \kappa^\circ.$$

Beweis. Sei $q \in \kappa^\circ$, sei $\varepsilon > 0$, so dass (4.16) erfüllt ist und sei K^* bestehend aus σ^* und κ^* eine ε -Erweiterung von K . Dann ist γ nach Bemerkung 4.19 ein generischer Kreisbogen bezüglich K^* und aus den Propositionen 3.15 und 4.20 folgt, dass

$$\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) = \Delta_{\kappa^*}^+(\gamma, q) = \Delta_{\kappa^*}^-(\gamma, q) = \Delta_{\kappa}^-(\gamma, q).$$

□

Auf diese Weise lassen sich auch die entsprechend erweiterten Propositionen in Abschnitt 4.2 beweisen. Darauf aufbauend können wir die Sätze 3.23 und 3.24 auf Seite 53 analog zu deren Beweisen für generische Kreisbögen für nicht-generische Kreisbögen beweisen.

Der Beweis von Satz 3.22 auf Seite 53 lässt sich nicht ohne Weiteres mit der bisherigen Herangehensweise auf den generischen Fall zurückführen, da hier Bedingungen gestellt werden, die für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$ erfüllt sein müssen. Wir können die Situation in einer Umgebung $B_\varepsilon(\sigma(0))$ von $\sigma(0)$ jedoch sehr einfach gesondert untersuchen. Außerhalb von $B_\varepsilon(\sigma(0))$ führen wir den Beweis dann wieder auf den generischen Fall zurück:

Proposition 4.22 (Satz 3.22 für Kreisbögen gemäß (4.15)). Sei $p \in P_K$ und $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein Kreisbogen, der (4.15) erfüllt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. γ ist ein Sichtbarkeitskreisbogen, d.h. es gilt $\gamma \subset \overline{I_K}$,
2. $|\Delta_{\kappa}(\gamma, q)| \leq 1$ für alle $q \in \kappa^\circ \setminus \{p\}$,
3. $\Delta_{\kappa}^+(\gamma, q) \leq 1$ für alle $q \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ und $\Delta_{\kappa}^-(\gamma, q) \geq -1$ für alle $q \in (\kappa_p^-)^{\circ}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, so dass mit $\kappa_\varepsilon := \kappa|_{[0, \varepsilon]}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\kappa_\varepsilon \subset \gamma \quad \text{oder} \quad \kappa_\varepsilon \cap \gamma = \{\kappa(0)\}. \quad (4.23)$$

Dann ist mit $\sigma_1 := \sigma|_{[0, t(\kappa(1))]}$ genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt, vgl. Abbildung 4.5:

4. κ verlässt $\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma$ in 0 nach links,
5. κ verlässt $\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma$ in 0 nach rechts,
6. $\kappa_\varepsilon \subset \gamma$.

4 Untersuchung potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen

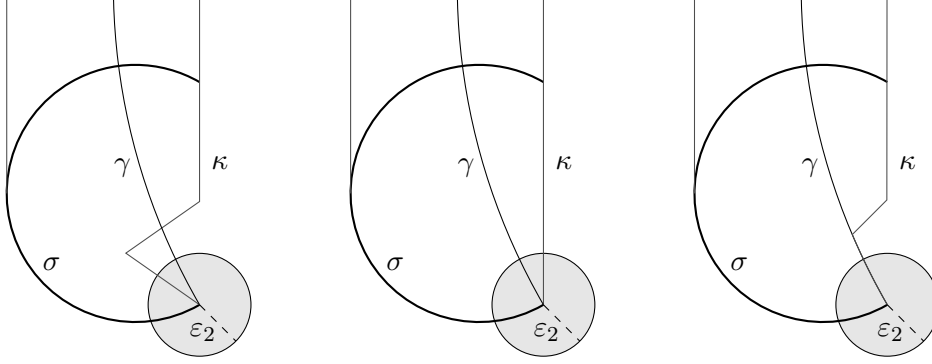


Abbildung 4.5: Fälle, die in Proposition 4.22 unterschieden werden: Links verlässt κ den Kreisbogenspline $\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma$ nach links, in der mittleren Abbildung verlässt κ den Kreisbogenspline $\overline{\sigma_1} \sqcup \gamma$ nach rechts und in der rechten Abbildung ist $\kappa|_{[0,\varepsilon]} \subset \gamma$ für ein $\varepsilon > 0$.

Wir nehmen zuerst an, dass 4) erfüllt ist. Laut Definition ist dann $\Delta_\kappa(\gamma, \kappa(\varepsilon)) = 2$ und aus Korollar 2.50 folgt, dass $\overline{\sigma_1} \sqcup \kappa$ von γ in 0 nach rechts verlassen wird und damit insbesondere $\gamma \not\subset \overline{I_K}$ ist. Somit ist die Äquivalenz von 1), 2) und 3) in diesem Fall erfüllt.

Wir nehmen im Folgenden an, dass 5) oder 6) erfüllt ist. Laut Definition ist dann

$$\Delta_\kappa(\gamma, q) = \Delta_\kappa(\gamma, \kappa(\varepsilon)) \in \{0, 1\}, \quad q \in \kappa|_{(0,\varepsilon]}. \quad (4.24)$$

Sei $q_1 \in \gamma \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ , sei $\varepsilon_2 > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_2}(\sigma(0)) \cap (\kappa|_{[\varepsilon,1]} \cup \gamma|_{[t(q_1),1]} \cup \sigma_2) = \emptyset \quad (4.25)$$

ist und sei K^* eine ε_2 -Erweiterung von K . Analog zu oben folgt

$$\gamma \cap B_{\varepsilon_2}(\sigma(0)) \subset \overline{I_K} \quad (4.26)$$

und da laut Definition $I_K \subset I_{K^*}$ ist, folgt

$$\gamma \cap B_{\varepsilon_2}(\sigma(0)) \subset \overline{I_{K^*}} \quad (4.27)$$

und

$$\Delta_{\kappa^*}(\gamma, q) \in \{0, 1\}, \quad q \in (\kappa^*)^\circ \cap B_{\varepsilon_2}(\sigma(0)). \quad (4.28)$$

Da sich die Bilder von κ und κ^* außerhalb von $B_{\varepsilon_2}(\sigma(0))$ nicht unterscheiden, folgt aus (4.26) und (4.27), dass 1) genau dann erfüllt ist, wenn die entsprechende Bedingung für K^* erfüllt ist, also wenn $\gamma \subset \overline{I_{K^*}}$ ist. Außerdem folgt aus (4.24) und (4.28) zusammen mit Proposition 4.20, dass 2) und 3) genau dann erfüllt sind, wenn die entsprechenden Bedingungen für K^* erfüllt sind. Daraus folgt die Behauptung, da γ bezüglich K^* generisch ist und Satz 3.22 für generische Kreisbögen bereits bewiesen wurde. \square

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Sei K im Folgenden ein Kanal gemäß Definition 3.1 mit Startkreisbogen σ und Kanalrand κ . Wir wollen in diesem Kapitel einen Algorithmus entwickeln, der die Sichtbarkeit eines vorgegebenen Punkts $p \in P_K$ entscheidet, indem iterativ ein Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ bestimmt wird, der eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. γ liegt innerhalb des Kanals und ist damit ein Sichtbarkeitskreisbogen,
2. γ besitzt eine Alternantenfolge der Länge drei,
3. γ besitzt eine „schwere Verletzung“, also einen Punkt $q \in \kappa$ mit $|\Delta(\gamma, q)| \geq 3$.

Ist γ kein Sichtbarkeitskreisbogen, dann ist der Punkt p nach Satz 3.23 bzw. 3.24 nicht sichtbar.

Die Grundidee des Algorithmus ist folgende: Beginne mit einem beliebigen Kreisbogen, der eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge zwei besitzt. Überprüfe anschließend den Kanal auf Verletzungen bezüglich dieses Kreisbogens. Sobald eine Verletzung gefunden wird, wird der Kreisbogen durch einen neuen Kreisbogen ersetzt, der in diesem Bereich verletzungsfrei ist und wieder eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge zwei besitzt. Eine der beiden Restriktionen wird dabei immer beibehalten. Dieser Updateschritt wird wiederholt bis der aktuelle Kreisbogen eine der drei obigen Bedingungen erfüllt.

Das Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Zuerst werden wir mit ausführlichen Beispielen ein intuitives Verständnis des Algorithmus fördern. Anschließend wird detailliert auf den Updateschritt eingegangen. Dieser stellt die zentrale Operation des Algorithmus dar. Zuletzt wird der Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit definiert, dessen Korrektheit bewiesen und es wird gezeigt, dass die Laufzeit linear in der Anzahl der Kanalkreisbögen ist.

5.1 Darstellung der Algorithmusidee an Beispielen

Bevor wir den Algorithmus im Detail definieren, werden wir den Algorithmus anhand dreier Beispiele durchspielen, um ein intuitives Verständnis zu erlangen. Die exakte Definition ist in Abschnitt 5.3 ab Seite 118 zu finden.

Wir betrachten zuerst das in Abbildung 5.1 (a) dargestellte Beispiel: Zu sehen ist neben dem Kanal K , bestehend aus dem Startkreisbogen σ und dem Kanalrand κ , der

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

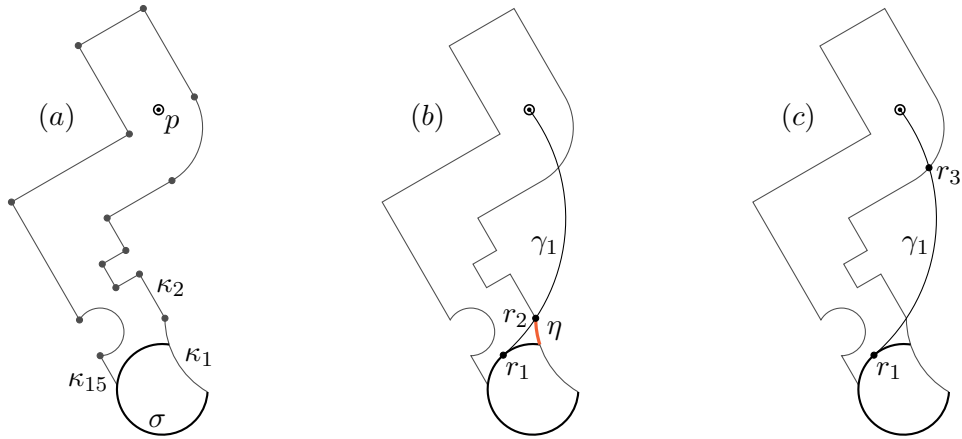


Abbildung 5.1: Beispiel 1 – Problemstellung und Initialisierung.

zu untersuchende Punkt $p \in P_K$. Der Kanalrand ist aufgebaut aus den Kreisbögen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{15}$, es gilt also

$$\kappa = \kappa_1 \sqcup \kappa_2 \sqcup \dots \sqcup \kappa_{15}.$$

Wir beginnen mit der Berechnung eines initialen Kreisbogens: Entscheidend ist, dass dieser eine links-blockierende Alternantenfolge der Länge zwei besitzt. Wir berechnen dazu den Kreisbogen $\gamma_1 \in \mathcal{A}_{K,p}$, der eine linke Startrestriktion besitzt und von η , dem ersten Kreisbogen in $\kappa|_{[t(\sigma(1)),1]}$, von rechts berührt wird, siehe Abbildung 5.1 (b). Berühren ist dabei nicht als tangential zu verstehen, sondern gemäß Definition 2.46 auf Seite 23.

Zur Berechnung der eben genannten Kreisbögen verwenden wir das sogenannte Apollonische Berührproblem, siehe etwa [20]. Hierbei wird nach Kreisen gesucht, die drei vorgegebene Kreise berühren, wobei auch die Fälle zugelassen sind, bei denen Kreise zu Punkten oder Geraden degenerieren. Die Berechnung des Kreisbogens mit linker Startrestriktion, der von η von rechts berührt wird, kann auf zwei Apollonische Berührprobleme zurückgeführt werden: Eines, in dem der Kreis $[\sigma]$ und die beiden Punkte p und $\eta(1)$ berührt werden sollen, siehe Abbildung 5.2 oben, und eines, in dem die beiden Kreise $[\sigma]$ und $[\eta]$ und der Punkt p berührt werden sollen, siehe Abbildung 5.2 unten. Jeder Lösungskreis führt zu zwei Kreisbögen mit Anfangspunkt in $[\sigma]$ und Endpunkt p , einen positiv und einen negativ orientierten. Wir werden sehen, dass maximal einer der Kandidatenkreisbögen alle geforderten Bedingungen erfüllt, also einen Anfangspunkt in $\sigma_2 = \sigma|_{[t(\kappa(1)),1]}$ mit entsprechender Tangentenrichtung besitzt und von η von rechts berührt wird. Diese Bedingungen können leicht überprüft werden. Entscheidend ist, dass die Berechnung in konstanter Zeit, also unabhängig von der Anzahl n der Kanalkreisbögen, durchgeführt wird.

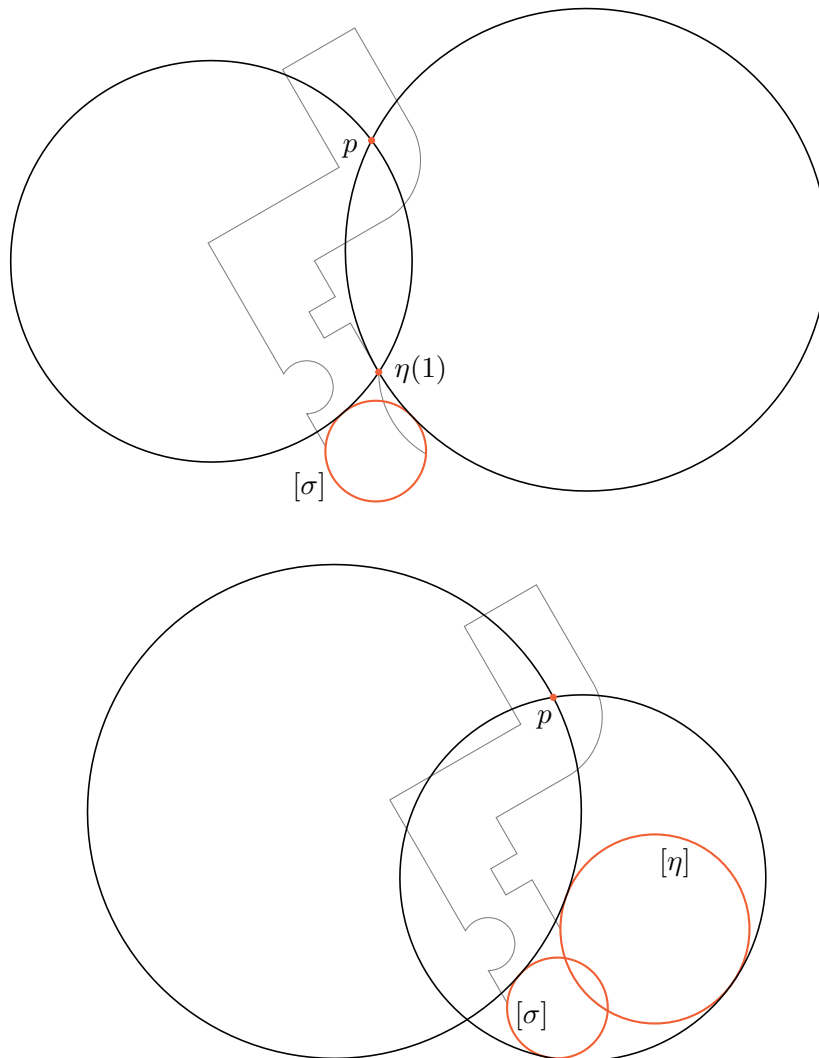


Abbildung 5.2: Apollonische Berührungskreise zum Kreis $[\sigma]$ und den beiden Punkten p und $\eta(1)$ (oben) und zu den beiden Kreisen $[\sigma]$ und $[\eta]$ und dem Punkt p (unten).

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

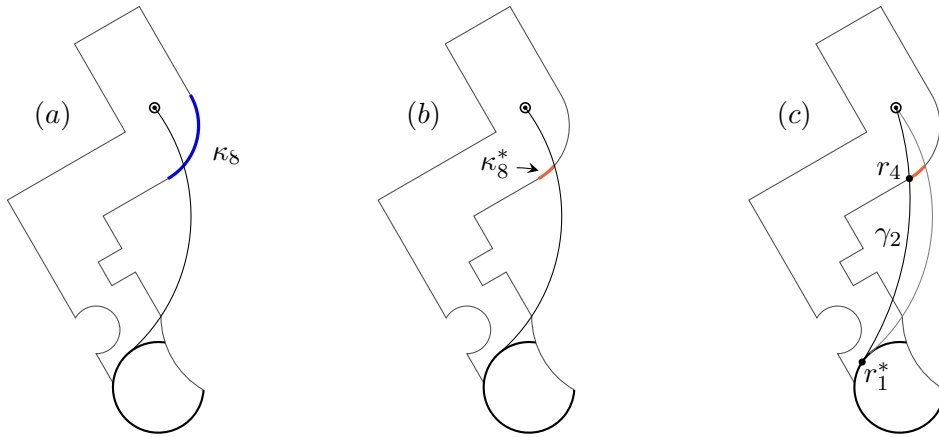


Abbildung 5.3: Beispiel 1 – Update des aktuellen Kreisbogens aufgrund von Verletzungen in κ_8 .

Als zweiten Initialisierungsschritt suchen wir die bezüglich \prec_κ größte rechte Restriktion. Dazu durchlaufen wir κ ausgehend vom Anfangspunkt und berechnen Kreisbogen für Kreisbogen, ob sich darauf eine rechte Restriktion befindet. Da wir die Kanalkreisbögen vom Anfangspunkt aus durchlaufen, ist der Wert von $\Delta(\gamma_1, \cdot)$ am Anfangspunkt eines jeden Kanalkreisbogens aus der Betrachtung des vorherigen Kanalkreisbogens bekannt. Damit kann ein einzelner Kanalkreisbogen in konstanter Zeit auf Restriktionen geprüft werden und somit ist die Laufzeit dieses Initialisierungsschrittes insgesamt linear in n . Im Beispiel ist die gesuchte rechte Restriktion der Punkt r_3 in Abbildung 5.1 (c). Den Ausgangspunkt bildet also der Kreisbogen γ_1 mit der links-blockierenden Alternantenfolge (r_1, r_3) . Wichtig für die Laufzeitbetrachtung ist dabei, dass zu jeder Restriktion auch der zugehörige Kanalkreisbogen gespeichert wird. Die Suche nach der maximalen linken Restriktion ist nicht notwendig, da diese Rolle die linke Startrestriktion einnimmt.

Damit ist die Initialisierung abgeschlossen und wir kommen zum eigentlichen Algorithmus: Der Suche nach Verletzungen und dem Update des Kreisbogens. Wir prüfen zuerst κ_8 auf rechte Verletzungen, siehe Abbildung 5.3 (a). Da $\Delta^+(\gamma_1, r_3) = 1$ ist, kann κ_8 alleine mithilfe von lokalen Informationen auf Verletzungen überprüft werden und damit ist diese Operation wieder in konstanter Zeit möglich. Wie wir sehen, kann die Suche direkt beendet werden, da κ_8 rechte Verletzungen enthält. Wir bezeichnen den Kreisbogenabschnitt, der die Verletzungen enthält, mit κ_8^* , siehe Abbildung 5.3 (b).

Bevor wir nach weiteren Verletzungen suchen, versuchen wir γ_1 durch einen Kreisbogen zu ersetzen, der keine Verletzung in κ_8^* besitzt. Dazu berechnen wir den Kreisbogen $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$, der eine linke Startrestriktion besitzt und von κ_8^* von rechts berührt

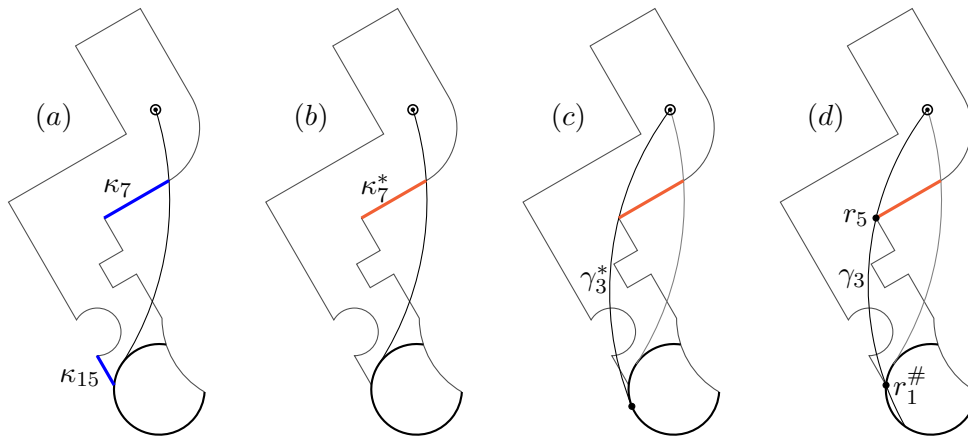


Abbildung 5.4: Beispiel 1 – Update des aktuellen Kreisbogens aufgrund von Verletzungen in κ_7 .

wird, siehe Abbildung 5.3 (c). Wie schon den initialen Kreisbogen, können wir auch γ_2 mithilfe der Apollonischen Berührungskreise unter Berücksichtigung lokaler Informationen und damit in konstanter Zeit berechnen. Da wir mithilfe von Abschnitt 4.2 einen Zusammenhang zwischen $\Delta(\gamma_1, \cdot)$ und $\Delta(\gamma_2, \cdot)$ herstellen können, wissen wir, dass der Punkt r_4 eine rechte Restriktion von γ_2 ist. Man beachte, dass sich die Anfangspunkte von γ_1 und γ_2 unterscheiden. Der Kreisbogen γ_2 besitzt die links-blockierende Alternantenfolge (r_1^*, r_4) .

Nach dem erfolgreichen Update setzen wir die Suche nach Verletzungen fort, wobei wir nun Verletzungen bezüglich γ_2 betrachten. Die Suche nach linken Verletzungen beginnen wir am Kreisbogen κ_{15} , die Suche nach rechten Verletzungen setzen wir bei r_4 fort. Die beiden zu prüfenden Kreisbögen sind also κ_{15} und κ_7 , siehe Abbildung 5.4 (a). Dass gleichzeitig nach linken und rechten Verletzungen gesucht wird, wird sich als entscheidend für die Laufzeit des Algorithmus erweisen. Dabei ist es unerheblich, ob zuerst κ_{15} auf linke oder κ_7 auf rechte Verletzungen geprüft wird. In den Beispielen werden wir zuerst auf linke Verletzungen prüfen. Wie gerade eben können wir die Suche direkt beenden, da κ_7 rechte Verletzungen besitzt, siehe Abbildung 5.4 (b).

Wir versuchen also den Kreisbogen zu berechnen, der eine linke Startrestriktion besitzt und von κ_7^* von rechts berührt wird. Wie in Abbildung 5.4 (c) zu sehen ist, liegt der Anfangspunkt des Kreisbogens γ_3^* , der in σ mit entsprechender Tangente startet und von κ_7^* von rechts berührt wird, nicht in σ_2 . Damit ist γ_3^* kein potenzieller Sichtbarkeitskreisbogen. Nachdem nicht entscheidend ist, dass der Kreisbogen eine linke Startrestriktion besitzt, sondern nur, dass er eine linke Restriktion besitzt, ersetzen wir die linke Startrestriktion durch eine nicht-tangentiale linke Restriktion im Punkt $r_1^\# = \kappa(1)$ und fordern vom neuen Kreisbogen γ_3 , dass er durch $r_1^\#$ läuft

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

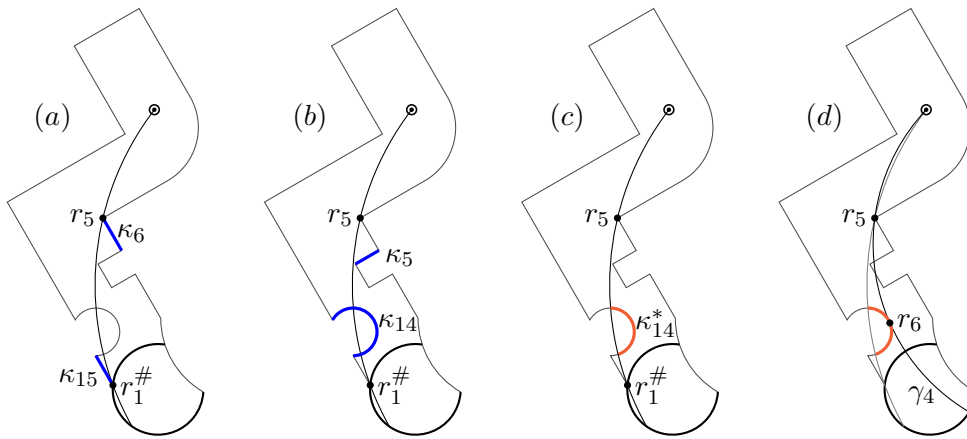


Abbildung 5.5: Beispiel 1 – Update des aktuellen Kreisbogens aufgrund von Verletzungen in κ_{14} .

und von κ_7^* von rechts berührt wird, siehe Abbildung 5.4 (d). Damit besitzt γ_3 die links-blockierende Alternantenfolge $(r_1^\#, r_5)$.

Wir setzen die Suche nach Verletzungen fort, diesmal bezüglich γ_3 , und prüfen den Kreisbogen κ_{15} auf linke und κ_6 auf rechte Verletzungen, siehe Abbildung 5.5 (a). Die Suche nach linken Verletzungen beginnen wir wieder am Kreisbogen κ_{15} , da durch das Update neue Verletzungen in diesem Kreisbogen entstanden sein könnten. Da die beiden Kanalkreisbögen verletzungsfrei sind, werden im Anschluss κ_{14} und κ_5 geprüft, vgl. Abbildung 5.5 (b). Der Kanalkreisbogen κ_{14} enthält linke Verletzungen und damit führen wir wieder ein Update durch. Da es sich diesmal um linke Verletzungen handelt, ersetzen wir die linke Restriktion $r_1^\#$ und wir fixieren die rechte Restriktion r_5 : Der Kreisbogen γ_4 ist der Kreisbogen in $\mathcal{A}_{K,p}$, der durch r_5 geht und der von κ_{14}^* von links berührt wird, siehe Abbildung 5.5 (c) und (d). Er besitzt die links-blockierende Alternantenfolge (r_6, r_5) .

Wir setzen die Suche nach Verletzungen fort. Diesmal beginnen wir mit der Suche nach linken Verletzungen an der linken Restriktion r_6 und prüfen zuerst die Kreisbögen κ_{13} und κ_6 und im Anschluss die Kreisbögen κ_{12} und κ_5 siehe Abbildung 5.6 (a) bzw. (b). Der Kreisbogen κ_5 enthält rechte Verletzungen, wie in Abbildung 5.6 (c) zu sehen ist. Man beachte, dass dieser Kanalabschnitt vor dem Update, also bezüglich γ_3 , schon einmal geprüft wurde und in diesem Fall verletzungsfrei war. Da wir rechte Verletzungen gefunden haben, halten wir die linke Restriktion fest. Da r_6 kein Anschlusspunkt des Kanalrandes ist, wird die Restriktion jedoch nicht als Punkt festgehalten. Stattdessen wird der bei r_6 endende Kreisbogen $\kappa_{14}^\#$ als „linke Begrenzung“ zur Berechnung des neuen Kreisbogens γ_5 genutzt, siehe Abbildung 5.6 (d) und (e). Der Grund dafür ist, dass ein Festhalten der Restriktion als Punkt un-

5.1 Darstellung der Algorithmusidee an Beispielen

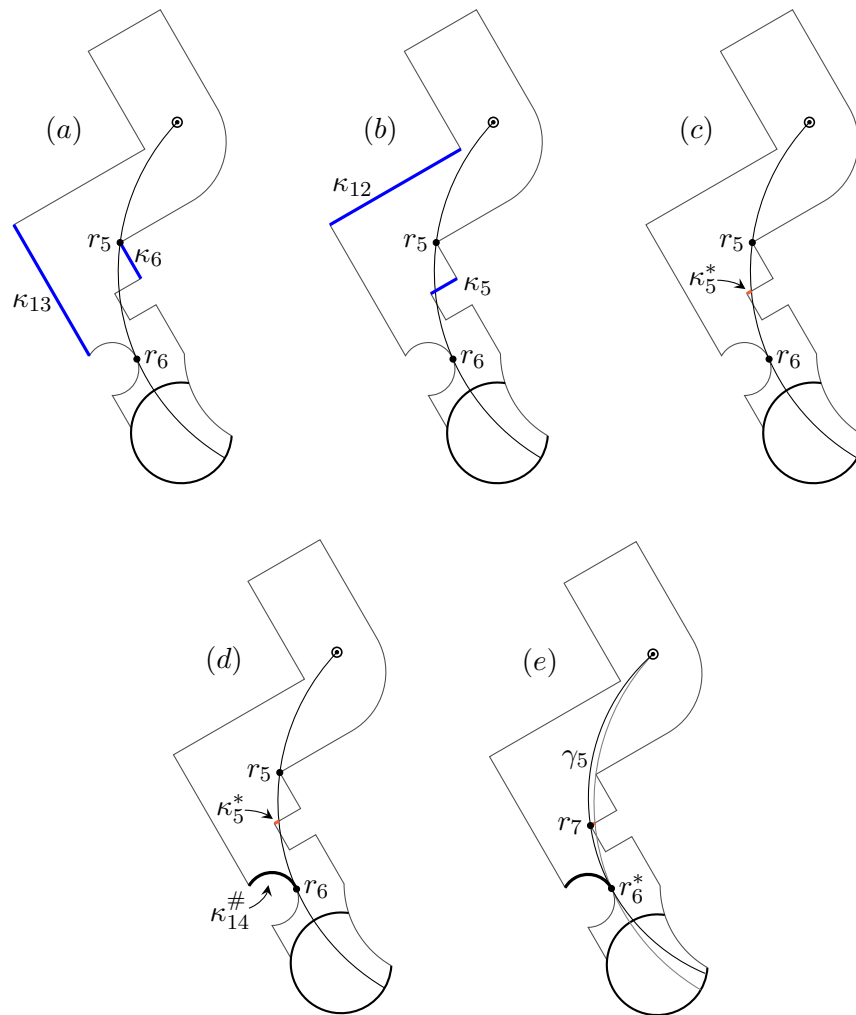


Abbildung 5.6: Beispiel 1 – Update des aktuellen Kreisbogens aufgrund von Verletzungen in κ_5 .

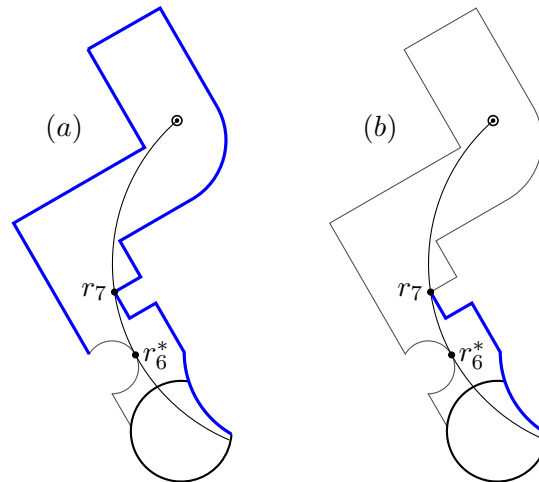


Abbildung 5.7: Beispiel 1 – Illustration der Kanalabschnitte, die nach dem letzten Update auf linke (a) bzw. rechte (b) Verletzungen untersucht werden.

weigerlich zu neuen Verletzungen in κ_{14} führen würde. So besitzt γ_5 keine Verletzung in κ_{14} und eine gegenüber γ_4 leicht veränderte linke Restriktion r_6^* . Der Kreisbogen γ_5 besitzt also die links-blockierende Alternantenfolge (r_6^*, r_7) .

Wieder wird die Suche nach Verletzungen, beginnend bei den entsprechenden Restriktionen, fortgesetzt. So wird insgesamt der in Abbildung 5.7 (a) hervorgehobene Kanalabschnitt auf linke Verletzungen und der in Abbildung 5.7 (b) hervorgehobene Kanalabschnitt auf rechte Verletzungen untersucht. Da die Abschnitte keine Verletzungen enthalten, kann γ_5 als Ergebnis zurückgegeben werden. Wie wir sehen ist γ_5 ein Sichtbarkeitskreisbogen. Die nach dem letzten Update nicht mehr geprüften Kanalabschnitte $\kappa|_{[t(r_6^*),1]}$ bzw. $\kappa|_{[t(r_7),1]}$ sind also verletzungsfrei. Dass diese immer frei von Verletzungen sind, wird in Abschnitt 5.6 gezeigt.

Die beiden folgenden Beispiele sollen den Algorithmus im Fall eines nicht sichtbaren Punkts p verdeutlichen. Zuerst betrachten wir die in Abbildung 5.8 (a) dargestellte Situation. Diese unterscheidet sich vom ersten Beispiel nur in der Position von p . In den ersten Schritten verhält sich der Algorithmus wie im ersten Beispiel. Die entscheidenden Kreisbögen sind in Abbildung 5.8 (b) - (e) dargestellt.

Der Unterschied zum ersten Beispiel ergibt sich in der Suche nach Verletzungen nach dem Update auf γ_4 : Zuerst werden die beiden Kreisbögen κ_{13} und κ_6 betrachtet, siehe Abbildung 5.9 (a). Diese sind frei von linken bzw. rechten Verletzungen, also wird die Suche mit den beiden Kreisbögen κ_{12} und κ_5 fortgesetzt, siehe Abbildung 5.9 (b). Der Kreisbogen κ_{12} enthält linke Verletzungen. Im Gegensatz zu den bisher auftretenden Situationen bildet die Restriktion r_7 , die an die gefundenen Verletzungen angrenzt, siehe Abbildung 5.9 (c), zusammen mit den Restriktionen r_6 und

5.1 Darstellung der Algorithmusidee an Beispielen

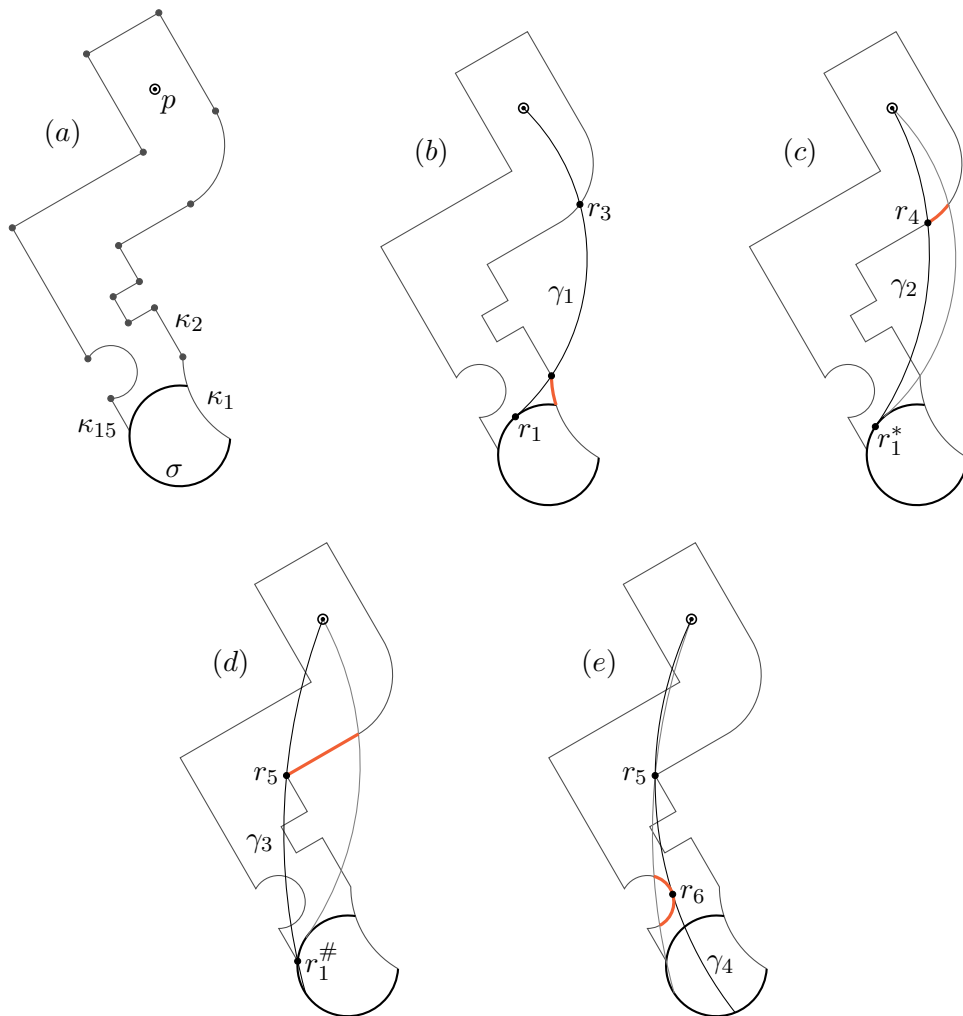


Abbildung 5.8: Beispiel 2 – Darstellung der ersten Schritte analog zu Beispiel 1.

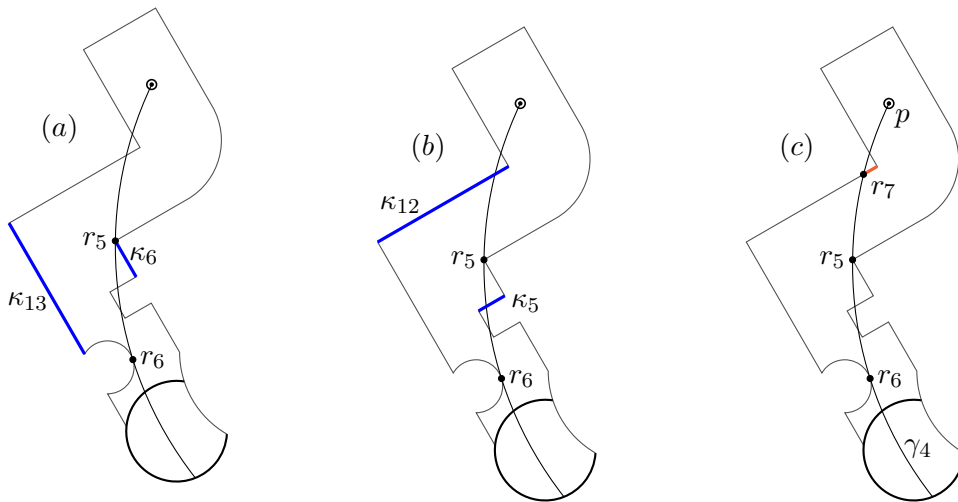


Abbildung 5.9: Beispiel 2 – Finden einer Alternantenfolge der Länge drei.

r_5 eine Alternantenfolge der Länge drei. Damit kann der Algorithmus an dieser Stelle beendet werden und der Kreisbogen γ_4 liefert zusammen mit der Alternantenfolge (r_6, r_5, r_7) , dass p nicht sichtbar ist.

Zuletzt betrachten wir ein Beispiel, bei dem der Punkt p nicht sichtbar ist und auf dem Kanalrand liegt, siehe Abbildung 5.10 (a). Dabei ist zu beachten, dass es laut Satz 3.22 ausreichend ist, linke Verletzungen nur auf dem Kanalabschnitt κ_p^- und rechte Verletzungen nur auf κ_p^+ zu betrachten, siehe Abbildung 5.10 (b) und (c).

Die Initialisierung und die ersten Updates verlaufen analog zu den ersten beiden Beispielen, siehe Abbildung 5.11. Zu beachten ist, dass die bezüglich \prec_κ größte rechte Restriktion r_3 hier mit dem Endpunkt p zusammenfällt.

Interessant wird es ab dem dritten Updateschritt, siehe Abbildung 5.12: Da κ_{14} linke Verletzungen enthält, versuchen wir einen Kreisbogen zu berechnen, der durch den Punkt r_5 läuft und von κ_{14}^* von links berührt wird. Wie der Kreisbogen γ_4^* in Abbildung 5.12 (b) zeigt, besitzt der entsprechende Kreisbogen nur einen Schnittpunkt mit σ und einen mit $[\sigma] \setminus \sigma$. Es ist also nicht möglich alle Bedingungen mit einem potenziellen Sichtbarkeitskreisbogen zu erfüllen. In diesem Fall können wir jedoch den Kreisbogen γ_4 durch r_5 mit Anfangspunkt $\sigma(0)$ und Endpunkt p betrachten, vgl. γ_4 in Abbildung 5.12 (c). Dieser ist ein potenzieller Sichtbarkeitskreisbogen und besitzt neben einer rechten Restriktion in $r_6 := \sigma(0)$ eine linke Restriktion in κ_{14} . Damit besitzt γ_4 mit (r_6, r_7, r_5) eine Alternantenfolge der Länge drei und beweist damit, dass der Punkt p nicht sichtbar ist.

5.1 Darstellung der Algorithmusidee an Beispielen

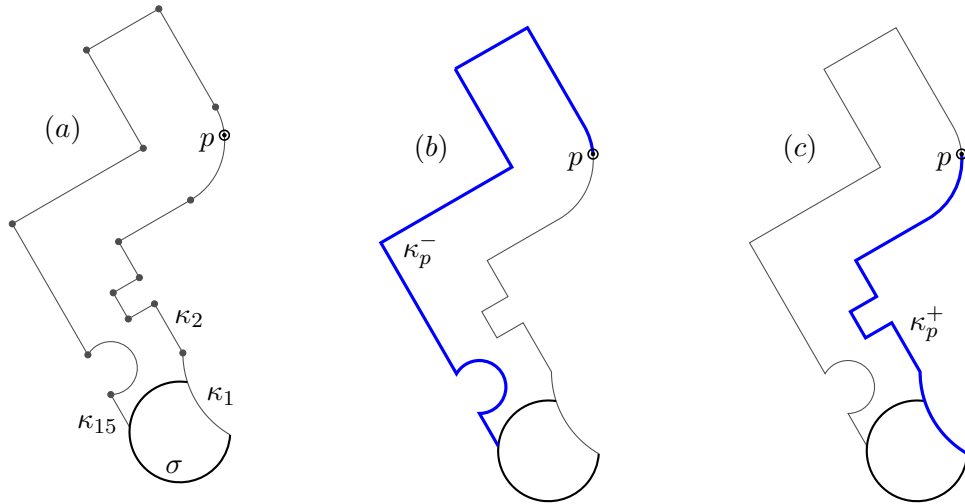


Abbildung 5.10: Beispiel 3 – Kanalabschnitte κ_p^- und κ_p^+ mit $p \in \kappa$.

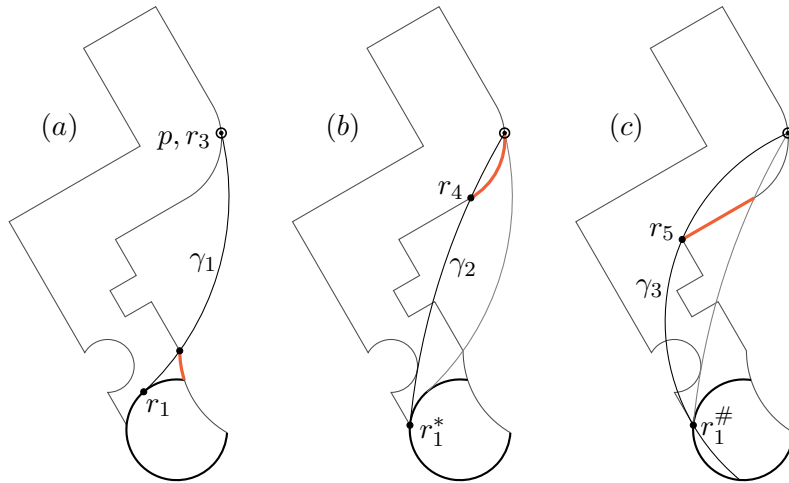


Abbildung 5.11: Beispiel 3 – Darstellung der ersten Schritte analog zu Beispiel 1.

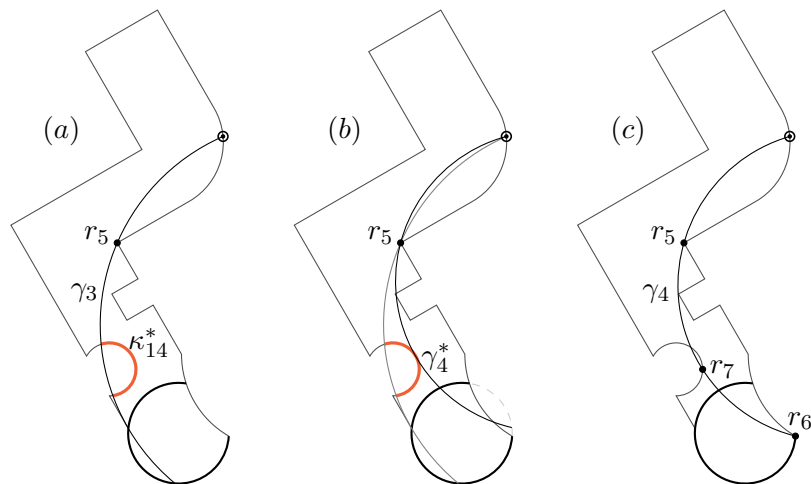


Abbildung 5.12: Beispiel 3 – Updateschritt, der zu einer Alternantenfolge der Länge drei führt.

5.2 Updates von Kreisbögen

Generelles Vorgehen

Wir wollen in diesem Abschnitt auf die zentrale Operation des Algorithmus eingehen, die Aktualisierung des Kreisbogens nach dem Finden einer Verletzung. Wir gehen dabei von folgender Ausgangssituation aus: Gegeben ist ein Punkt $p \in P_K$, ein Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$, eine links-blockierende Alternantenfolge (r_1, r_2) von γ und ein Kanalkreisbogen η , der eine Restriktion und Verletzungen von γ enthält. Das Ziel des Updateschritts ist die Berechnung eines Kreisbogens γ^* , der eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. γ^* besitzt eine Alternantenfolge der Länge zwei und ist in η verletzungsfrei,
2. γ^* besitzt eine Alternantenfolge der Länge drei.

Entscheidend ist, dass dabei nur die lokale Situation verwendet wird, also der Startkreisbogen σ , der Kreisbogen η und die beiden Restriktionen r_1 und r_2 inklusive der zugehörigen Kanalkreisbögen. Nur hier dürfen sich die angesprochenen Restriktionen von γ^* befinden. Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass einer der beiden Kreisbögen existiert. Dazu werden wir stetige Familien von Kreisbögen betrachten. Zur konkreten Berechnung der Kreisbögen im Algorithmus kann, wie im Beispiel am Kapitelanfang gezeigt wurde, das Apollonische Berührproblem verwendet werden.

Gibt es in η eine Restriktion von γ , die zusammen mit (r_1, r_2) eine Alternantenfolge der Länge drei bildet, dann erfüllt γ selbst Bedingung 2) und es ist keine weitere

Berechnung notwendig. Ein Beispiel dazu ist der Updateschritt in Abbildung 5.9 (c). Von Interesse für die folgenden Updates ist also nur ein Kanalkreisbogen η , für den $r_1 \prec_\gamma r$ für jede rechte Restriktion $r \in \eta$ und $r \prec_\gamma r_2$ für jede linke Restriktion $r \in \eta$ gilt. Je nachdem, ob linke oder rechte Verletzungen gefunden wurden, oder um welche Art von Restriktion es sich bei r_1 bzw. r_2 handelt, unterscheiden sich die Updateschritte im Detail voneinander. Wir unterscheiden die folgenden Fälle, falls eine rechte Verletzung gefunden wurde:

1. r_1 ist eine Startrestriktion,
2. $r_1 \in (\kappa_p^-)^\circ$ ist ein Anschlusspunkt von κ ,
3. $r_1 \in (\kappa_p^-)^\circ$ ist kein Anschlusspunkt von κ .

Wurde eine linke Verletzung gefunden, dann unterscheiden wir die Fälle:

1. $r_2 \in (\kappa_p^+)^\circ$ ist ein Anschlusspunkt von κ ,
2. $r_2 \in (\kappa_p^+)^\circ$ ist kein Anschlusspunkt von κ ,
3. r_2 ist eine Endrestriktion von γ .

Verletzende und blockierende Kreisbögen

Wir führen zuerst für Updateschritte relevante Begriffe ein. Ein wichtiges Objekt in einem Updateschritt ist ein Kanalkreisbogen, der Verletzungen enthält. Es vereinfacht spätere Aussagen, wenn wir nur den relevanten Teilkreisbogen im Update verwenden. Wichtig ist dabei, dass der Kreisbogen neben Verletzungen auch eine Restriktion enthält. Nur so kann ohne weitere Informationen festgestellt werden, ob die Verletzungen behoben werden können, oder ob es sich um einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei und damit um einen nicht sichtbaren Punkt p handelt. Im einführenden Beispiel entspricht der Übergang zum relevanten Teilkreisbogen etwa dem Übergang von κ_8 auf κ_8^* in Abbildung 5.3 auf Seite 82. Gemäß folgender Definition nennen wir κ_8^* im Folgenden einen von rechts verletzenden Kreisbogen:

Definition 5.1 (Verletzender Kreisbogen). *Sei $p \in P_K$, $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ und sei $\eta \in \mathcal{A}$ mit $\eta \subset \kappa_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, Teil eines Kanalkreisbogens. Wir nennen η einen von links verletzenden Kreisbogen von γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *jeder Punkt in η ist entweder eine linke Verletzung oder eine linke Restriktion,*
2. *es gibt in η eine linke Verletzung und eine linke Restriktion.*

Genauso nennen wir η einen von rechts verletzenden Kreisbogen von γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

1. jeder Punkt in η ist entweder eine rechte Verletzung oder eine rechte Restriktion,
2. es gibt in η eine rechte Verletzung und eine rechte Restriktion.

Ziel des Updateschritts ist die Berechnung eines neuen potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens, so dass der ehemals verletzende Kreisbogen bezüglich des neuen Kreisbogens frei von Verletzungen ist und eine Restriktion enthält:

Definition 5.2 (Blockierender Kreisbogen). Sei $p \in P_K$, $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ und sei $\eta \in \mathcal{A}$ mit $\eta \subset \kappa_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, Teil eines Kanalkreisbogens. Wir nennen η einen links-blockierenden Kreisbogen von γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. es gibt in η eine linke Restriktion von γ ,
2. es gibt in η keine linke Verletzung von γ .

Genauso nennen wir η einen rechts-blockierenden Kreisbogen von γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. es gibt in η eine rechte Restriktion von γ ,
2. es gibt in η keine rechte Verletzung von γ .

Man beachte, dass ein links-blockierender Kreisbogen zusätzlich weder rechte Restriktionen noch rechte Verletzungen enthält, da ansonsten die zu den beiden Kreisbögen gehörenden Kreise drei Schnittpunkte besitzen müssten.

Bemerkung 5.3. Ist $\gamma \in \mathcal{A}_K$ und η ein rechts-blockierender Kreisbogen mit $\gamma(0), \gamma(1) \notin \eta$, dann berührt η den Kreisbogen γ von rechts. Ist η ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ mit $\gamma(0), \gamma(1) \notin \eta$, dann berührt η den Kreisbogen γ von links.

Da verletzende Kreisbögen eine Restriktion und damit insbesondere einen Punkt auf dem zugehörigen Kreisbogen γ enthalten, können wir verletzende Kreisbögen mit Restriktionen oder anderen verletzenden oder blockierenden Kreisbögen bezüglich \prec_γ in Beziehung setzen:

Definition 5.4. Sei $\gamma \in \mathcal{A}_K$ und seien η_1, η_2 jeweils blockierende oder verletzende Kreisbögen von γ . Wir sagen η_1 liegt bezüglich γ vor η_2 und schreiben $\eta_1 \prec_\gamma \eta_2$, falls es $q_1 \in \eta_1 \cap \gamma$, $q_2 \in \eta_2 \cap \gamma$ gibt, so dass

$$q_1 \prec_\gamma q_2.$$

Analog ist der Vergleich von Restriktionen mit blockierenden oder verletzenden Kreisbögen definiert.

Beachte, dass η_1 oder η_2 möglicherweise mehrere Restriktionen besitzt und dass sich damit $\eta_1 \prec_\gamma \eta_2$ und $\eta_2 \prec_\gamma \eta_1$ nicht unbedingt widersprechen.

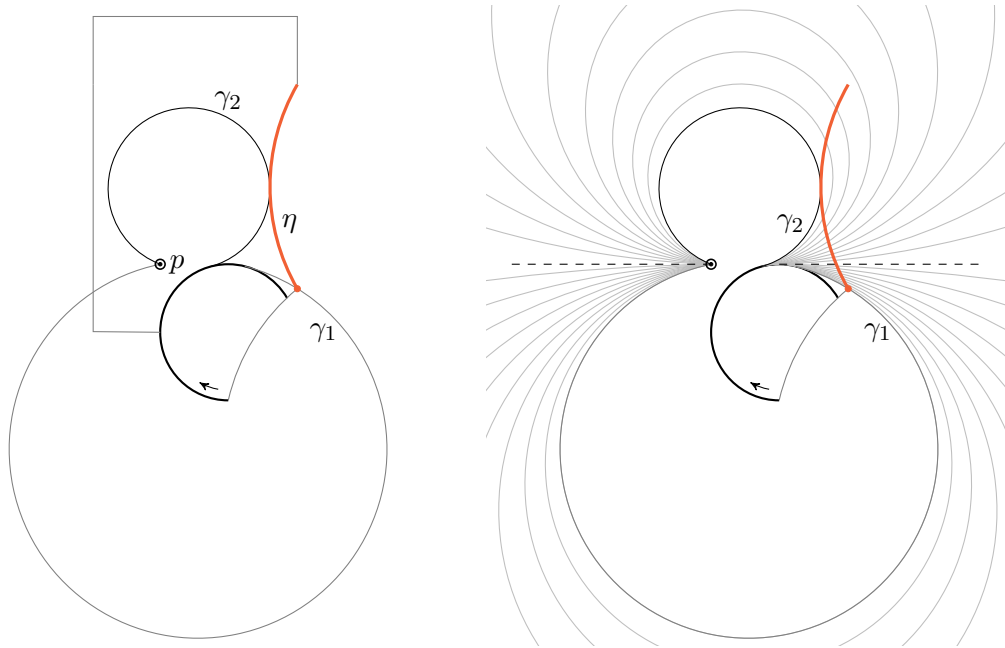


Abbildung 5.13: Illustration eines Updateschritts mit festgehaltener linker Startrestriktion und des von rechts verletzenden Kreisbogens η : Links ist der ursprüngliche Kreisbogen γ_1 und der neue Kreisbogen γ_2 zu sehen, rechts ist zusätzlich die stetige Familie von Kreisbögen mit linker Startrestriktion, die in späteren Beweisen verwendet wird, dargestellt.

Entartete Fälle

Zu drei paarweise verschiedenen, nicht kollinearen Punkten $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ gibt es nach unserer Definition genau einen Kreisbogen γ mit Anfangspunkt p_1 , Endpunkt p_3 und $p_2 \in \gamma$. Im Fall paarweise verschiedener, kollinearere Punkte existiert der entsprechende Kreisbogen, der in diesem Fall eine Strecke ist, genau dann, wenn p_2 auf der Verbindungsstrecke von p_1 und p_3 liegt. Genauso gibt es zu zwei Punkten $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$, und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ genau dann einen Kreisbogen γ mit Anfangspunkt p_1 , Endpunkt p_2 und $\gamma'(0) = v$, wenn v und $p_2 - p_1$ nicht antiparallel sind. Auf die Fälle, in denen kein Kreisbogen existiert, die sogenannten entarteten Fälle, wollen wir im Folgenden eingehen. Tauchen entartete Fälle in den Berechnungen eines Updateschritts auf, ist gegebenenfalls eine Sonderbehandlung notwendig. Wir wollen an zwei Beispielen zeigen, wie sich entartete Fälle auf die Updateschritte auswirken.

Im ersten Beispiel taucht der entartete Fall nur indirekt auf. Der Updateschritt ist in Abbildung 5.13 dargestellt: Der ursprüngliche Kreisbogen γ_1 besitzt eine linke

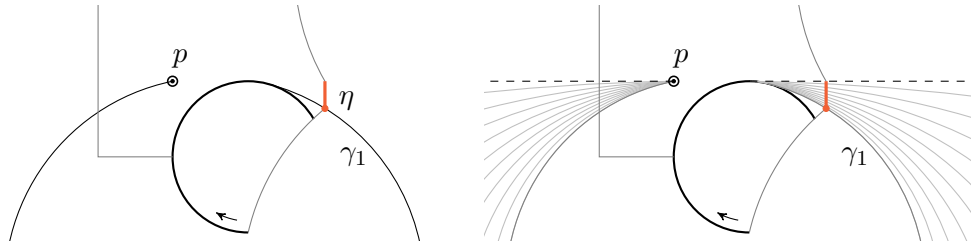


Abbildung 5.14: Illustration eines Updateschritts mit festgehaltener linker Startrestriktion: Aufgrund eines entarteten Falls kann kein aktualisierter Kreisbogen berechnet werden.

Startrestriktion und den von rechts verletzenden Kreisbogen η . Berechnet wird der Kreisbogen γ_2 , der wieder eine linke Startrestriktion besitzt, für den jedoch η ein rechts-blockierender Kreisbogen ist. Der entartete Fall ist dabei nur für den Beweis der Existenz eines aktualisierten Kreisbogens relevant, da wir dazu gewisse stetige Familien von Kreisbögen betrachten werden, siehe Abbildung 5.13 rechts. Intuitiv „schieben“ wir in Beweisen den Kreisbogen γ_1 solange bis dieser in η keine Verletzungen mehr enthält. Dabei wird beim Wechsel von positiv zu negativ orientierten Kreisbögen ein entarteter Fall, der gestrichelt angedeutet ist, „übersprungen“. Diese Definitionslücke muss in späteren Beweisen berücksichtigt werden. Für den eigentlichen Algorithmus spielt sie keine Rolle, da γ_2 direkt mithilfe der Apollonischen Berührungskreise berechnet wird.

Eine direkte Auswirkung eines entarteten Falls auf einen Updateschritt zeigt das Beispiel in Abbildung 5.14. Wir sehen wieder einen Kreisbogen $\gamma_1 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit einer linken Startrestriktion und einem von rechts verletzenden Kreisbogen η . Gesucht ist der Kreisbogen, der eine linke Startrestriktion besitzt und von η von rechts berührt wird. Wie rechts zu sehen ist, ist dieser Kreisbogen nicht definiert, da $\eta(1)$ genau auf der Tangente an $[\sigma]$ durch p liegt. In der Praxis spielt dieses Problem keine große Rolle, da alle Kreisbögen ohnehin nur mit einer gewissen Genauigkeit berechnet werden können. Deshalb werden wir diese Sonderfälle in den folgenden Updateschritten vorerst ausklammern. Wie damit umzugehen ist, wird am Ende des Abschnitts ab Seite 116 dargestellt.

Update mit festgehaltener linker Startrestriktion

Wir betrachten nun einen ersten Updateschritt und gehen von folgender Ausgangssituation aus: Der Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$, $p \in P_K$, besitzt eine linke Startrestriktion r_1 und η ist ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ . Mögliche Beispiele sind in Abbildung 5.15 zu sehen. Das rechte Beispiel zeigt den Sonderfall eines von rechts verletzenden Kreisbogens, der den Punkt p enthält.

Wir betrachten zuerst den Kreisbogen $\gamma_0 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion im

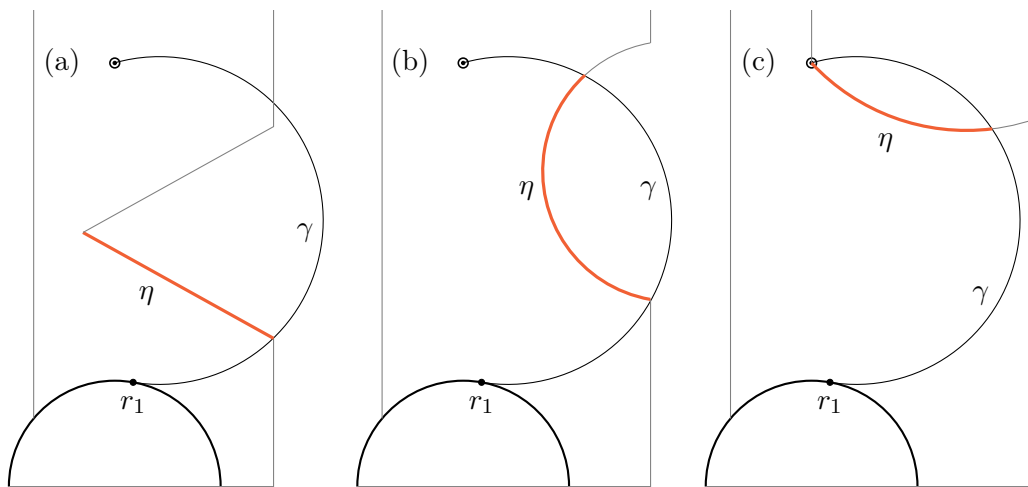


Abbildung 5.15: Ausgangssituationen zum Updateschritt mit festgehaltener linker Startrestriktion.

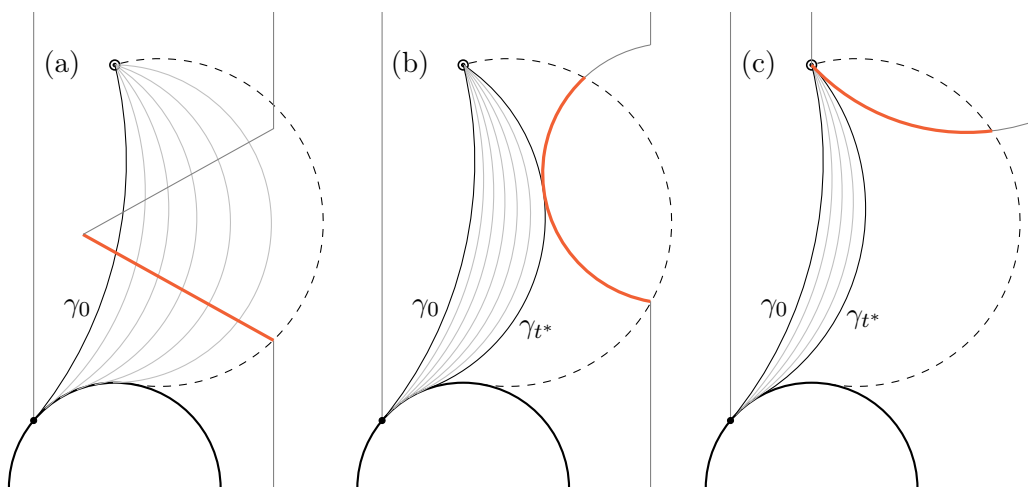


Abbildung 5.16: Updateschritte mit festgehaltener linker Startrestriktion.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Punkt $\kappa(1)$. Besitzt dieser, wie in Abbildung 5.16 (a), eine rechte Verletzung in η , dann besitzt nach Proposition 4.12 jeder Kreisbogen in $\mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion eine Verletzung in η . Außerdem besitzt der Kreisbogen γ^* mit Startpunkt $\sigma(t(\kappa(1)) - \varepsilon)$, Endpunkt p und $\kappa(1) \in \gamma^*$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ rechte Verletzungen in η . Damit dient dieser Kreisbogen, der eine linke Restriktion in $\kappa(1)$ besitzt, als Ausgangspunkt für weitere Updateschritte.

Ist γ_0 hingegen, wie in Abbildung 5.16 (b) und (c), frei von Verletzungen in η , dann sei wie gewohnt $\sigma_2 := \sigma|_{[t(\kappa(1)),1]}$ und wir definieren die Familie $(\gamma_t)_{t \in I}$ von Kreisbögen in $\mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion im Punkt $\sigma_2(t)$, das heißt für $t \in I$ ist $\gamma_t(0) = \sigma_2(t)$ und $\gamma'_t(0) = \sigma'_2(t)$. In den Beispielen (b) und (c) sind die Mengen der Kreisbögen ohne rechte Verletzung in η skizziert. Aus der Stetigkeit der Kreisbogenfamilie folgt, dass es, bis auf entartete Fälle, ein $t^* \in I$ gibt, so dass η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ_{t^*} ist, siehe Abbildung 5.16 (b) und (c). Folgende Proposition formalisiert diese Überlegungen:

Proposition 5.5 (Updateschritt mit festgehaltener linker Startrestriktion). *Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ ein Kreisbogen mit linker Startrestriktion und sei η ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ . Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – entweder einen Kreisbogen in $\mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion in $\sigma|_{[\kappa(1),\gamma(0)]}$ und η als rechts-blockierenden Kreisbogen oder der Kreisbogen in $\mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion im Anfangspunkt $\kappa(1)$ besitzt eine rechte Verletzung in η .*

Wir ziehen die technischen Details zu den oben erwähnten stetigen Familien von Kreisbögen vor:

Lemma 5.6. *Sei $p \in P_K$, seien $a, b \in I$, $a < b < 1$, und sei γ_t , $t \in [a, b]$, der Kreisbogen mit Endpunkt p und linker Startrestriktion im Anfangspunkt $\sigma_2(t)$, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert. Sei T die Menge der Parameter $t \in [a, b]$, für die γ_t existiert. Ist $a, b \in T$, dann gilt mit*

$$\zeta_t := \sigma_2|_{[t,b]} \sqcup \gamma_b \sqcup \overline{\gamma_t}, \quad t \in T \setminus \{b\},$$

1. $(\gamma_t)_{t \in T}$ ist eine stetige Familie von Kreisbögen,
2. $(\zeta_t)_{t \in T \setminus \{b\}}$ ist eine stetige Familie von einfach geschlossenen Kreisbogensplines,
3. $L(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1})$, $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$,
4. für alle $x \in L(\zeta_a)$ gibt es ein $t \in T \setminus \{b\}$, so dass $x \notin L(\zeta_t)$.

Beweis. Zu 1): Da sich der Anfangspunkt von γ_t und dessen Tangente am Anfangspunkt stetig bezüglich parameter $t \in T$ ändern, ist $(\gamma_t)_{t \in T}$ eine stetige Familie von Kreisbögen.

Zu 2): Aus Lemma 4.6, 1) folgt

$$\gamma_{t_1} \cap \gamma_{t_2} = \{p\}, \quad t_1, t_2 \in T, \quad t_1 < t_2, \quad (5.1)$$

und damit folgt $\zeta_t \in \mathcal{S}_0^*$, $t \in T \setminus \{b\}$. Die Stetigkeit folgt aus 1).

Zu 3): Seien $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$. Dann verlässt γ_{t_2} den Kreisbogen σ_2 und damit ζ_{t_1} in 0 nach links. Zusammen mit (5.1), $\gamma_{t_2}^\circ \cap \sigma_2 = \emptyset$ und $\sigma_2|_{[t_2, b]} \subset \sigma_2|_{[t_1, b]}$ folgt $\zeta_{t_2} \subset \overline{L(\zeta_{t_1})}$ und damit gilt

$$\text{entweder } L(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1}) \quad \text{oder} \quad R(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1}).$$

Da die Links- und Rechtsumgebungen von ζ_{t_1} und ζ_{t_2} in einer lokalen Einfachheitsumgebung bezüglich beider Kreisbogensplines in Punkten in γ_b° übereinstimmen, folgt aus Proposition 2.40, dass $L(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1})$.

Zu 4): Sei $x \in L(\zeta_a)$, sei $y \in \gamma_a^\circ$ und sei $\eta : [0, 1] \rightarrow L(\zeta_a) \cup \{y\}$ ein Weg von y nach x . Dann ist

$$0 < d := \min\{\|r_1 - r_2\|_2 : r_1 \in \eta, r_2 \in \gamma_b\}$$

und da $(\gamma_t)_{t \in T}$ nach 1) eine stetige Familie ist, gibt es ein $t^* \in T \setminus \{b\}$, so dass $\|\gamma_b - \gamma_{t^*}\|_\infty < d$ und damit $\gamma_{t^*} \cap \eta = \emptyset$ erfüllt ist. Wegen

$$\zeta_{t^*} \cap (\overline{\sigma_2|_{[a, t^*]} \sqcup \gamma_a|_{[0, t(y)]} \sqcup \eta} = \{\sigma_2(t^*)\}$$

und da sich σ_2 in t^* von rechts an ζ_{t^*} annähert, vgl. Proposition 3.9 und Korollar 2.50, gilt $x \in R(\zeta_{t^*})$ und damit $x \notin L(\zeta_{t^*})$. \square

Bemerkung 5.7. *Man beachte, dass es in Lemma 5.6 im Intervall $[a, b]$ höchstens einen Parameter gibt, für den der entsprechende Kreisbogen nicht existiert. Es gilt also entweder $T = [a, b]$ oder $T = [a, c) \cup (c, b]$ für ein $c \in (a, b)$. Dasselbe gilt auch für die entsprechenden Mengen in den späteren Lemmata 5.10 und 5.13.*

Beweis (von Proposition 5.5). Ist $\gamma(0) = \kappa(1)$, dann ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Sei $b := t_{\sigma_2}(\gamma(0))$ und sei γ_t , $t \in [0, b]$, der Kreisbogen mit Endpunkt p und linker Startrestriktion im Anfangspunkt $\sigma_2(t)$, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert. Sei T die Menge der Parameter $t \in [0, b]$, für die γ_t existiert. Sei

$$\zeta_t := \sigma_2|_{[t, b]} \sqcup \gamma_b \sqcup \overline{\gamma_t}, \quad t \in T,$$

$$T_\eta := \{t \in T \setminus \{b\} : \eta \subset \overline{L(\zeta_t)}\}$$

und

$$t^* := \begin{cases} \sup T_\eta, & T_\eta \neq \emptyset, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass $t^* \in T$ ist, dass also t^* nicht zu einem entarteten Fall gehört und zeigen, dass $\gamma^* := \gamma_{t^*}$ der gesuchte Kreisbogen ist.

Ist $t^* \neq 0$, dann ist $\eta \subset \overline{L(\zeta_{t^*})}$. Wegen Lemma 5.6, 3) und 4) ist $t^* \neq b$. Ist $(\gamma^*)^\circ \cap \eta \neq \emptyset$, dann ist η nach Proposition 4.12 ein rechts-blockierender Kreisbogen

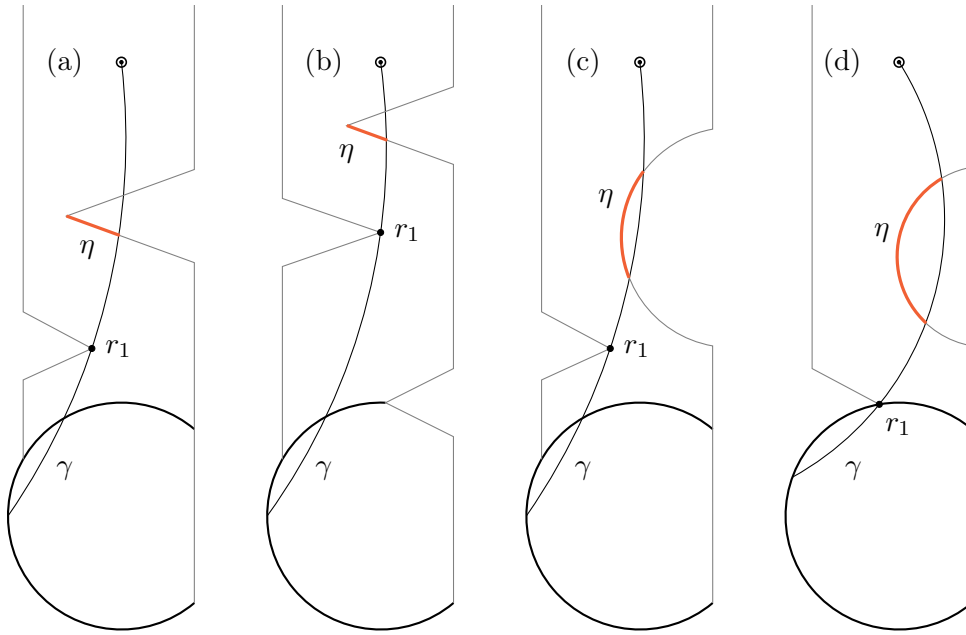


Abbildung 5.17: Ausgangssituationen zum Updateschritt mit festgehaltener linker Punktrestriktion.

von γ^* . Andernfalls folgt $\eta(1) = p$, $\eta'(1) = \gamma'_*(1)$ und $\eta \in \overline{R([\gamma^*])}$ aus der Stetigkeit von $(\zeta_t)_{t \in T \setminus \{b\}}$, vgl. Lemma 5.6, 2). Damit ist η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit rechter Restriktion am Endpunkt p .

Ist $t^* = 0$, dann ist $\gamma_0 \cap \eta \neq \emptyset$ und damit gibt es analog eine rechte Restriktion von γ_0 in η . Gibt es keine rechte Verletzung von γ_0 in η , dann ist η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ_0 und damit ist γ_0 in jedem Fall der gesuchte Kreisbogen. \square

Update mit festgehaltener linker Punktrestriktion

Wir betrachten nun einen neuen Updateschritt mit folgender Ausgangssituation: Der Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$, $p \in P_K$, besitzt eine linke Restriktion r_1 in einem Anschlusspunkt des Kanalrandes und η ist ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ mit $r_1 \prec_\gamma \eta$. Abbildung 5.17 zeigt Beispiele.

Wir betrachten zuerst den Kreisbogen $\gamma_0 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit einer rechten Restriktion r_0 am Startkreisbogen σ und einer linken Restriktion im Punkt r_1 , siehe Abbildung 5.18. Die rechte Restriktion r_0 ist dabei entweder der Punkt $\sigma(0)$ oder $\sigma(1)$. Besitzt dieser Kreisbogen, wie in Abbildung 5.18 (a) und (b), eine rechte Restriktion r_2 in η mit $r_1 \prec_{\gamma_0} r_2$, dann besitzt er eine Alternantenfolge der Länge drei. Damit ist γ_0 in diesem Fall der gesuchte Kreisbogen.

Ist γ_0 hingegen, wie in Abbildung 5.18 (c) und (d), frei von Verletzungen in η ,

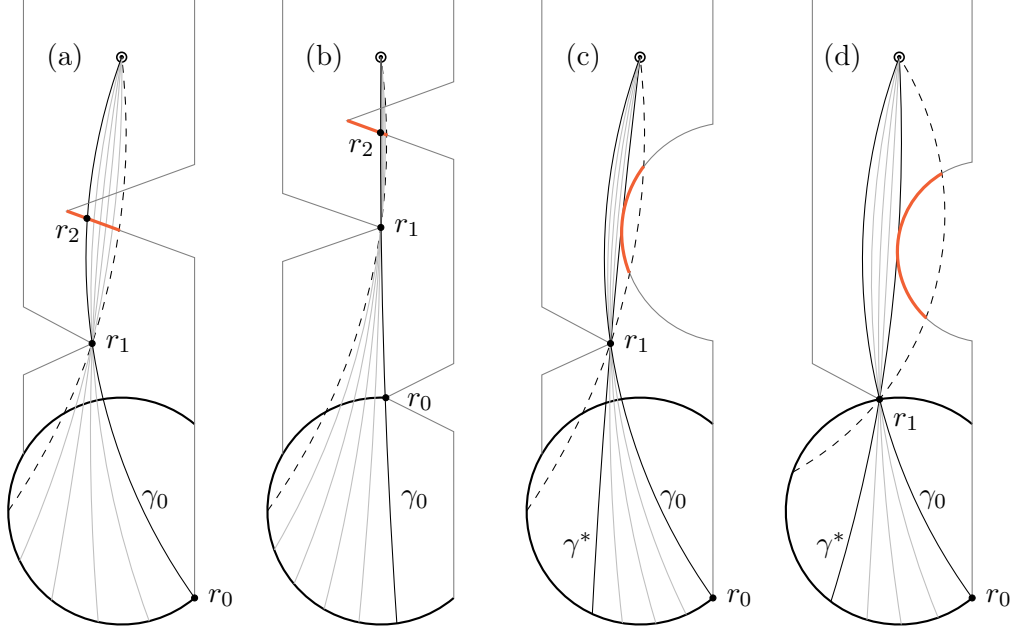


Abbildung 5.18: Updateschritte mit festgehaltener linker Punktrestriktion.

dann gibt es, bis auf entartete Fälle, einen Kreisbogen γ^* mit r_1 als linke Restriktion und η als rechts-blockierenden Kreisbogen. Dass dies gilt, wird im Folgenden wieder mithilfe stetiger Kreisbogenfamilien gezeigt.

Bemerkung 5.8. Wir gehen in den Updateschritten davon aus, dass linke Restriktionen in $\overline{L([\sigma])}$ liegen. Gleiches gilt auch für linke Verletzungen. Das ist Dank folgender Überlegung möglich: Sei $\gamma \in \mathcal{A}_K$ generisch, $q \in \gamma \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ und sei $\varepsilon > 0$, so dass $\kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]} \cap \gamma = \emptyset$ ist. Dann ist der Kreisbogenspline

$$\zeta := \gamma|_{[0,t(q_1)]} \sqcup \overline{\sigma|_{[t(\gamma(0)),t(q_1)]}}$$

einfach geschlossen und es gilt

$$\kappa_p^-(\varepsilon) \in R(\zeta) \quad \text{und} \quad \gamma|_{[t(q_1),1]} \subset R(\zeta). \quad (5.2)$$

Sei r die bezüglich $\prec_{\kappa_p^-}$ minimale linke Restriktion von γ in $\gamma|_{(0,t(q))} = \gamma \cap R([\sigma])$. Da ζ einfach geschlossen ist folgt aus (5.2), dass sich κ_p^- in r von rechts an γ annähert. Damit gibt es eine linke Restriktion r^* , die bezüglich $\prec_{\kappa_p^-}$ vor r liegt. Da r minimal gewählt wurde, ist $r^* \in \gamma|_{[t(q),1]} \subset L([\sigma])$. Damit können wir zu jeder linken Restriktion in $R([\sigma])$ eine weitere finden, die in $\overline{L([\sigma])}$ liegt. Man beachte, dass der auf Seite 119 definierte Algorithmus 1 so konstruiert ist, dass in Updateschritten nur linke Restriktionen und Verletzungen in $\overline{L([\sigma])}$ vorkommen.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Proposition 5.9 (Updateschritt mit festgehaltener linker Punktrestriktion). *Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Restriktion $r_1 \in \gamma^\circ \cap \overline{L([\sigma])}$ und sei η ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ mit $r_1 \prec_\gamma \eta$. Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma^* \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma^*(0) \prec_\sigma \gamma(0)$, so dass r_1 eine linke Restriktion von γ^* und η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit $r_1 \prec_{\gamma^*} \eta$ ist oder es gibt einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , r_1 und η .*

In Anlehnung an Lemma 5.6 ziehen wir die technischen Details wieder vor:

Lemma 5.10. *Sei $p \in P_K$, $\gamma_b \in \mathcal{A}_{K,p}$, $b := t_\sigma(\gamma_b(0))$ und sei $x \in \gamma_b^\circ \cap \overline{L([\sigma])}$. Für $t \in [0, b]$ sei γ_t der Kreisbogen mit Anfangspunkt $\sigma(t)$ und Endpunkt p , der durch x läuft, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert. Seien*

$$T := \{t \in [0, b] : \gamma_t \text{ existiert und } \gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}\},$$

$$\zeta_t := \gamma_b|_{[t(x),1]} \sqcup \overline{\gamma_t|_{[t(x),1]}}, \quad t \in T \setminus \{b\},$$

$$a := \inf T.$$

Dann gilt

1. $T = [a, b]$ oder $T = [a, b] \setminus \{t^*\}$ mit einem $t^* \in [a, b)$, das zu einem entarteten Fall gehört,
2. falls $a \in T$, dann ist $a = 0$ oder $\sigma(1) \in \gamma_a$,
3. $(\gamma_t|_{[t(x),1]})_{t \in T}$ ist eine stetige Familie von Kreisbögen,
4. $(\zeta_t)_{t \in T \setminus \{b\}}$ ist eine stetige Familie von einfach geschlossenen Kreisbogensplines,
5. $L(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1})$, $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$,
6. für alle $t_1 \in T \setminus \{b\}$ und alle $y \in L(\zeta_{t_1})$ gibt es ein $t_2 \in T \setminus \{b\}$, so dass $t_1 < t_2$ und $y \notin L(\zeta_{t_2})$.

Beweis. Zu 1): Sei $c \in T \setminus \{b\}$. Wir zeigen zuerst, dass für alle $t \in (c, b)$, für die der Kreisbogen γ_t existiert, bereits $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ gilt. Sei also $t \in (c, b)$, so dass γ_t existiert. Seien $q_b \in \sigma \cap \gamma_b$, $q_c \in \sigma \cap \gamma_c$ und $q_t \in \sigma \cap \gamma_t$ maximal bezüglich σ . Wir zeigen, dass

$$\gamma_t(0) \prec_\sigma q_t \quad \text{und} \quad \kappa(1) \preceq_\sigma q_t,$$

da daraus direkt $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ folgt, vgl. Definition 3.6. Im Fall $x \in \sigma$ ist

$$x = q_b = q_c = q_t$$

und damit folgt

$$\gamma_t(0) \prec_\sigma \gamma_b(0) \preceq_\sigma q_b = q_t$$

und

$$\kappa(1) \preceq_{\sigma} q_b = q_t.$$

Sei also $x \notin \sigma$. Nach Lemma 4.6, 3) gilt $q_b \prec_{\sigma} q_c$. Damit können wir den einfach geschlossenen Kreisbogenspline

$$\zeta := \sigma|_{[t(q_b), t(q_c)]} \sqcup \gamma_c|_{[t(q_c), t(x)]} \sqcup \overline{\gamma_b|_{[t(q_b), t(x)]}}$$

definieren und nach Proposition 3.9 gilt

$$\gamma_t(0) \in L([\gamma_c]) \cap R([\gamma_b]). \quad (5.3)$$

Wegen

$$\gamma_t \cap [\gamma_c] = \gamma_t \cap [\gamma_b] = \{x, p\} \quad (5.4)$$

folgt aus (5.3), dass sich γ_t in x von links an γ_c und von rechts an γ_b annähert. Daraus folgt mit Proposition 2.53, dass sich γ_t in x von links an ζ annähert. Da γ_b den Kreisbogen σ in q_b nach links verlässt, nähert sich σ in q_b von rechts an ζ an, vgl. Korollar 2.50, und daraus folgt insbesondere $\gamma_t(0) \in R(\zeta)$. Wegen (5.4) folgt daraus $\gamma_t \cap \sigma|_{(q_b, q_c)} \neq \emptyset$ und damit ist $q_t \in \sigma|_{(q_b, q_c)}$. Somit ist

$$\gamma_t(0) \prec_{\sigma} \gamma_b(0) \preceq_{\sigma} q_b \prec_{\sigma} q_t$$

und

$$\kappa(1) \preceq_{\sigma} q_b \prec_{\sigma} q_t$$

und damit ist $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$.

Da die Gerade durch p und x den Kreisbogen σ höchstens in zwei Punkten schneidet, gibt es höchstens zwei Parameter $t \in I$, für die γ_t nicht existiert. Da für einen potenziellen Sichtbarkeitskreisbogen γ entweder $\gamma'(0) = \sigma'(t(\gamma(0)))$ ist oder es ein $q \in \gamma \cap \sigma$ mit $\gamma(0) \prec_{\sigma} q$ gibt, kann es höchstens um einen der beiden Parameter eine Umgebung mit potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen geben.

Zu 2): Wir zeigen die Behauptung per Widerspruchsbeweis. Angenommen es wäre $a = \inf T \in T$, $0 < a$ und $\sigma(1) \notin \gamma_a$. Dann existieren für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Kreisbögen $\gamma_{a-\varepsilon}$. Sei $t \in [0, a)$, so dass γ_t existiert. Nach Proposition 3.9 ist dann $\gamma_t(0) \in R([\gamma_a])$ und damit ist $\gamma_t|_{[0, t(x)]} \subset R([\gamma_a])$. Sei $q_a \in \sigma \cap \gamma_a$ maximal bezüglich \prec_{σ} . Nach Proposition 3.9 verlässt σ den Kreisbogen γ_a in q_a nach rechts. Da γ_t stetig bezüglich t ist, gilt für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$, dass

$$\gamma_{a-\varepsilon} \cap \sigma|_{[t(q_a), 1]} \neq \emptyset$$

und damit $\gamma_{a-\varepsilon} \in \mathcal{A}_{K,p}$ ist. Damit gibt es $t \in T$ mit $t < a$ im Widerspruch zu $a = \inf T$.

Zu 3): Folgt aus der Stetigkeit des Anfangspunkts $\sigma(t)$ bezüglich des Parameters $t \in T$.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Zu 4): Sei $t \in T \setminus \{b\}$. Da sich γ_b und γ_t in den beiden Punkten x und p schneiden und es damit insbesondere keinen weiteren Schnittpunkt zwischen den beiden Kreisbögen gibt, gilt $\zeta_t \in \mathcal{S}_0^*$. Die Stetigkeit folgt aus 3).

Zu 5): Seien $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$. Dann gilt nach Proposition 3.9

$$\gamma_{t_1}(0), \gamma_{t_2}(0) \in R([\gamma_b]) \quad \text{und} \quad \gamma_{t_1}(0) \in R([\gamma_{t_2}]).$$

Somit schneiden γ_{t_1} und γ_{t_2} den Kreisbogen γ_b in x von rechts und γ_{t_1} schneidet γ_{t_2} in x von rechts. Damit folgt aus Proposition 2.53, 3), dass γ_{t_2} den Kreisbogenspline ζ_{t_1} in x nach links verlässt und damit folgt die Aussage analog zum Beweis von Lemma 5.6, 3).

Zu 6): Die Behauptung folgt analog zum Beweis von Lemma 5.6, 4). \square

Der Aufbau des Beweises von Proposition 5.9 ähnelt dem Aufbau des Beweises von Proposition 5.5:

Beweis (von Proposition 5.9). Sei wieder $b = t_\sigma(\gamma(0))$, sei γ_t , $t \in [0, b]$, der Kreisbogen mit Anfangspunkt $\sigma(t)$ und Endpunkt p , der durch r_1 läuft, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert, und sei T die Menge der Parameter $t \in [0, b]$, für die γ_t existiert und $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ ist. Sei

$$\zeta_t := \gamma_b|_{[t(r_1), 1]} \sqcup \overline{\gamma_t|_{[t(r_1), 1]}}, \quad t \in T,$$

$$T_\eta := \{t \in T \setminus \{b\} : \eta \subset \overline{L(\zeta_t)}\}$$

und

$$t^* := \begin{cases} \sup T_\eta, & T_\eta \neq \emptyset, \\ \inf T, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass $t^* \in T$ ist, dass also t^* nicht zu einem entarteten Fall gehört und zeigen, dass $\gamma^* := \gamma_{t^*}$ der gesuchte Kreisbogen ist.

Ist $T_\eta = \emptyset$ und damit $t^* = \inf T$, dann ist $\eta \cap \gamma^*|_{(t(r_1), 1)} \neq \emptyset$, vgl. Bemerkung 5.3. Die beiden Kreisbögen γ^* und γ_b sind in Konfiguration zwei und damit folgt aus Proposition 4.9, dass r_1 eine linke und jedes $q \in \eta \cap \gamma^*|_{(r_1, 1)}$ eine rechte Restriktion von γ^* ist. Nach Lemma 5.10, 2) ist $\sigma(0) \in \gamma^*$ oder $\sigma(1) \in \gamma^*$ und damit ist $\sigma(0)$ oder $\sigma(1)$ eine rechte Restriktion von γ^* . Da $r_1 \in \overline{L(\sigma)}$ ist, also insbesondere $\sigma(0), \sigma(1) \prec_{\gamma^*} r_1$ ist, bilden die Restriktionen eine Alternantenfolge der Länge drei und damit ist γ^* der gesuchte Kreisbogen.

Ist $T_\eta \neq \emptyset$, dann folgt aus Lemma 5.10, 5) und 6), dass $t^* \neq b$ ist. Analog zum Fall $T_\eta = \emptyset$ folgt, dass r_1 eine linke Restriktion von γ^* ist. Ist $\gamma^*|_{(t(r_1), 1)} \cap \eta \neq \emptyset$, dann folgt aus $\eta \subset \overline{L(\zeta_{t^*})}$ und Proposition 4.9, dass η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit $r_1 \prec_{\gamma^*} \eta$ ist. Andernfalls gibt es nach Lemma 5.10, 1) ein $\varepsilon > 0$, so dass $[t^*, t^* + \varepsilon] \subset T$ ist und damit folgt aus der Stetigkeit von $(\zeta_t)_{t \in T \setminus \{b\}}$, vgl. Lemma 5.10, 4), analog zum Beweis von Proposition 5.5, dass η ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit rechter Endrestriktion p ist. \square

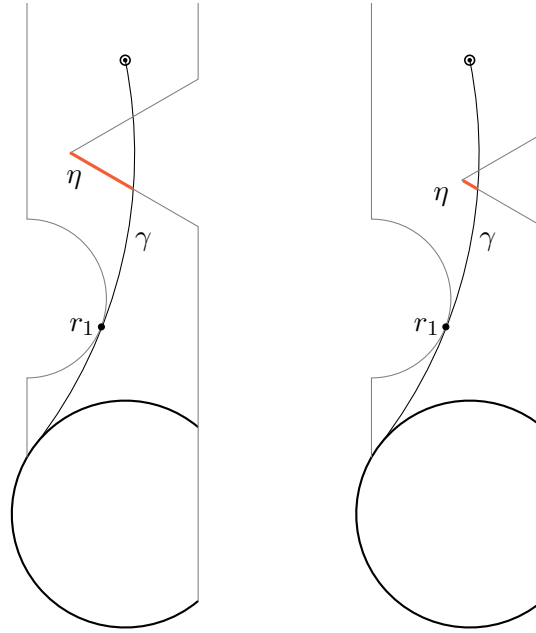


Abbildung 5.19: Ausgangssituation zum Updateschritt mit festgehaltenem links-blockierenden Kreisbogen η_1 .

Update mit festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen

Wir nehmen nun an, dass der Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$, $p \in P_K$, eine linke Restriktion $r_1 \in \kappa$ besitzt, die nicht in einem Anschlusspunkt des Kanalrandes liegt und dass η ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ mit $r_1 \prec_\gamma \eta$ ist, siehe Abbildung 5.19. Im Gegensatz zum letzten Updateschritt fordern wir in diesem Fall nicht, dass der neue Kreisbogen γ^* durch r_1 läuft. Stattdessen fordern wir, dass ein bei r_1 beginnender Kreisbogen η_1 , der Teil eines Kanalkreisbogens ist, ein links-blockierender Kreisbogen von γ^* ist, siehe Abbildung 5.20. Der Kreisbogen η_1 ist dabei so zu wählen, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. $\eta_1(0) = r_1$,
2. $\eta_1'(0) = \gamma'(t(r_1))$,
3. $\eta_1(1)$ ist ein Anschlusspunkt des Kanals.

Bedingung 1) kann gefordert werden, da der Kanalabschnitt $\kappa|_{[t(r_1),1]}$ für das Update nicht relevant ist und Bedingung 2) garantiert, dass der richtige Teil des Kanalkreisbogens verwendet wird. Bedingung 3) garantiert, dass der größtmögliche Kreisbogen verwendet wird, eine Eigenschaft, die für die Laufzeit des Algorithmus relevant ist. Wie im Updateschritt mit festgehaltener linker Punktrestriktion, wird zuerst geprüft,

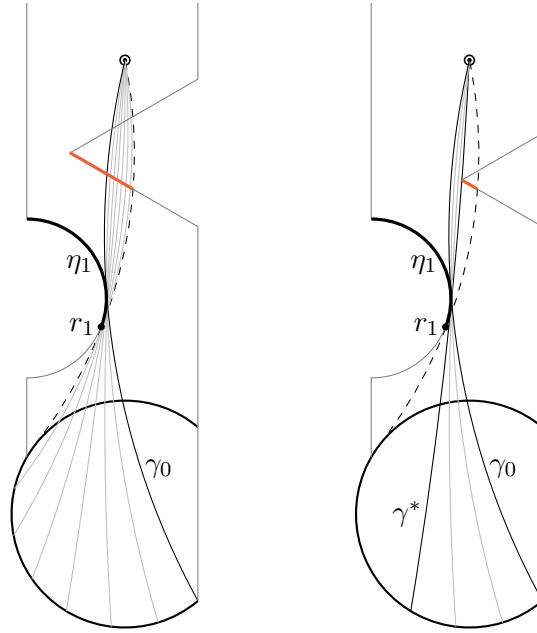


Abbildung 5.20: Updateschritt mit festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen η_1 .

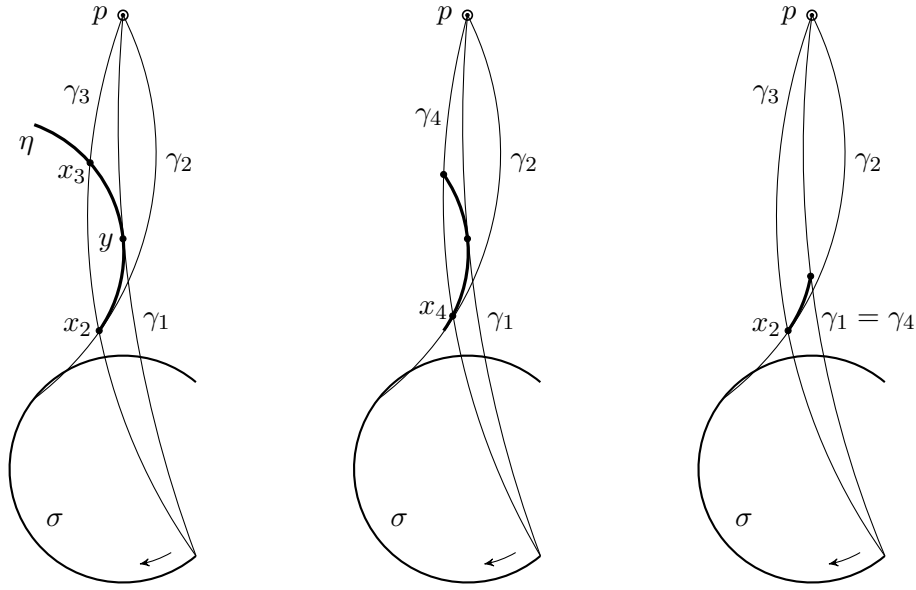
ob ein Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei berechnet werden kann. Ist das nicht der Fall, wie in Abbildung 5.20 rechts, dann kann ein Kreisbogen mit links-blockierendem Kreisbogen η_1 und rechts-blockierendem Kreisbogen η berechnet werden.

Trotz der großen Ähnlichkeit zum vorherigen Updateschritt, ist der Beweisaufwand deutlich größer, weshalb wir mehrere Lemmata vor den eigentlichen Beweis ziehen werden. Wie in den Updateschritten mit festgehaltener linker Start- oder Punktrestriktion können auch im aktuellen Updateschritt entartete Fälle auftreten. Aufgrund der geringen Relevanz und da die entarteten Fälle hier wieder analog behandelt werden können, gehen wir nicht mehr im Detail darauf ein.

Proposition 5.11 (Updateschritt mit festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen). Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ und sei η_1 ein links-blockierender Kreisbogen von γ mit

$$\eta_1 \cap \gamma = \eta_1(0) \quad \text{und} \quad \eta_1'(0) = \gamma'(\eta_1(0)).$$

Sei η_2 ein von rechts verletzender Kreisbogen von γ mit $\eta_1 \prec_\gamma \eta_2$. Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma^* \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma^*(0) \prec_\sigma \gamma(0)$, so dass η_1 ein links-blockierender und η_2 ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit $\eta_1 \prec_{\gamma^*} \eta_2$ ist oder es gibt einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , η_1 und η_2 .


 Abbildung 5.21: Beispiele zur Existenz des Kreisbogens γ_1 in Lemma 5.12.

Mit folgendem Lemma wollen wir die Lage zweier Kreisbögen, die einen gemeinsamen links-blockierenden Kreisbogen besitzen, untersuchen. Es zeigt insbesondere, dass der neu berechnete und der ursprüngliche Kreisbogen in Konfiguration zwei sind. Abbildung 5.22 zeigt ein Beispiel mit den entsprechenden Bezeichnungen.

Lemma 5.12. Seien $p \in P_K$ und $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$. Sei außerdem $\eta \in \mathcal{A}$, $\eta \subset L([\sigma])$, $p \notin \eta$, so dass γ_2 von η von links berührt wird und so dass

$$\eta \cap \gamma_2 = \{\eta(0)\} =: \{x_2\} \quad \text{und} \quad \eta'(0) = \gamma_2'(\eta(0)). \quad (5.5)$$

Sei $x \in \sigma|_{[0,t(\gamma_2(0))]}$. Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – den Kreisbogen $\gamma_1 \in \mathcal{A}$ mit Anfangspunkt x , Endpunkt p , so dass dieser von η von links berührt wird und es gilt

1. $\eta(0) \notin \gamma_1$,
2. es gibt ein x_1 , so dass $\eta \cap \gamma_1 = \{x_1\}$ ist,
3. aus $x_1 \in \eta^\circ$ folgt $\eta'(x_1) = \gamma_1'(x_1)$,
4. es gibt ein x_{12} , so dass $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \{x_{12}\}$ mit $x_{12} \preceq_{\gamma_1} x_1$ und $x_2 \preceq_{\gamma_2} x_{12}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz von γ_1 . Dabei nehmen wir an, dass in den Zwischenschritten keine entarteten Fälle auftreten, da andernfalls beliebig kleine

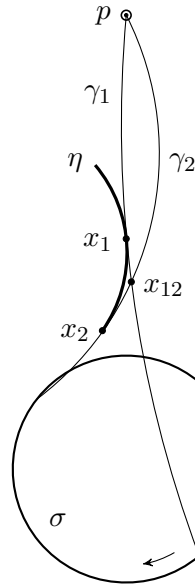


Abbildung 5.22: Beispiel zu Lemma 5.12.

Veränderungen der Punkte zu nicht-entarteten Fällen führen. Sei γ_3 der Kreisbogen mit Anfangspunkt x , Endpunkt p , so dass $x_2 \in \gamma_3$. Da nach Proposition 3.9 $\gamma_3(0) \in R([\gamma_2])$ ist, schneidet γ_3 den Kreisbogen γ_2 in x_2 von rechts. Wegen $\eta'(x_2) = \gamma_2'(x_2)$ verlässt η den Kreisbogen γ_3 in x_2 nach rechts. Gibt es, wie in Abbildung 5.21 links, ein $x_3 \neq x_2$, so dass $\gamma_3 \cap \eta = \{x_2, x_3\}$, dann nähert sich η in x_3 von rechts an γ_3 an. Gemäß Proposition 2.54 gilt also

$$\det[\gamma_3'(x_2), \eta'(x_2)] < 0 \quad \text{und} \quad \det[\gamma_3'(x_3), \eta'(x_3)] > 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt, dass es ein $y \in \eta|_{(0,t(x_3))}$ gibt, so dass für den Kreisbogen γ_1 mit Anfangspunkt x , Endpunkt p und $y \in \gamma_1$ gilt, dass

$$\gamma_1 \cap \eta|_{[0,t(x_3)]} = \{y\} \quad \text{und} \quad \det[\gamma_1'(y), \eta'(y)] = 0.$$

Da $\zeta := \gamma_3 \sqcup \overline{\gamma_1}$ einfach geschlossen ist und $\eta|_{[0,t(x_3)]}$ den Kreisbogen γ_3 in 0 nach rechts verlässt und weder γ_1 noch γ_3 von links oder rechts schneidet, folgt $\eta|_{[0,t(x_3)]} \subset \overline{R(\zeta)}$. Damit berührt η den Kreisbogen γ_1 von links und somit ist γ_1 der gesuchte Kreisbogen.

Ist hingegen $\gamma_3 \cap \eta = \{\eta(0)\}$, dann betrachten wir den Kreisbogen γ_4 mit Anfangspunkt x , Endpunkt p und $\eta(1) \in \gamma_4$. Gibt es neben $\eta(1)$, wie im mittleren Beispiel in Abbildung 5.21, einen weiteren Schnittpunkt von γ_4 und η , dann folgt die Existenz von γ_1 wie im ersten Fall. Sei also $\gamma_4 \cap \eta = \{\eta(1)\}$, siehe Abbildung 5.21, rechts. Mit

dem einfach geschlossenen Kreisbogenspline $\zeta := \gamma_3 \sqcup \overline{\gamma_4}$ gilt dann $\eta \subset \overline{R(\zeta)}$, da η den Kreisbogen γ_3 in 0 nach rechts verlässt. Damit berührt η den Kreisbogen γ_4 von links und somit ist γ_4 der gesuchte Kreisbogen.

Um die Eindeutigkeit des Kreisbogens γ_1 zu zeigen, nehmen wir an, dass es einen Kreisbogen γ_1^* mit Anfangspunkt x , Endpunkt p gibt, so dass dieser von η von links berührt wird und $\gamma_1 \neq \gamma_1^*$ ist. Da η den Kreisbogen γ_1^* von links berührt und den Kreisbogen γ_1 nicht von links oder rechts schneidet, folgt

$$\eta \in \overline{L(\gamma_1^* \sqcup \overline{\gamma_1})}. \quad (5.6)$$

Umgekehrt berührt η den Kreisbogen γ_1 von links und er schneidet den Kreisbogen γ_1^* nicht von links oder rechts und damit folgt

$$\eta \in \overline{R(\gamma_1^* \sqcup \overline{\gamma_1})}$$

und wir erhalten einen Widerspruch zu (5.6).

Zu 1): Nach Proposition 3.9 ist

$$\gamma_1(0) \in R([\gamma_2]). \quad (5.7)$$

Angenommen es gelte $\eta(0) \in \gamma_1$. Dann würde η wegen $\eta'(0) = \gamma_2'(\eta(0))$ den Kreisbogen γ_1 in 0 nach rechts verlassen, vgl. Proposition 2.54. Damit würde η den Kreisbogen γ_1 im Widerspruch zur Voraussetzung nicht von links berühren.

Zu 2): Da η den Kreisbogen γ_1 von links berührt, ist nur zu zeigen, dass es maximal einen Schnittpunkt gibt. Nach 1) liegt $\eta(0)$ nicht auf γ_1 . Da η den Kreisbogen γ_1 von links berührt, gilt außerdem

$$\gamma_1'(x) = \pm \eta'(x) \quad \text{für alle } x \in \gamma_1 \cap \eta^\circ. \quad (5.8)$$

Damit kann es keine zwei Schnittpunkte zwischen γ_1 und η geben, da mindestens einer in η° liegen würde, damit $\text{Im}([\gamma_1]) = \text{Im}([\eta])$ wäre und daraus $\eta(0) \in \gamma_1$, also ein Widerspruch zu 1) folgen würde.

Zu 3): Wegen (5.8) müssen wir nur $\gamma_1'(x_1) = -\eta'(x_1)$ ausschließen. Aus Lemma 3.10 folgt $\gamma_2 \subset \overline{R([\eta])}$ und damit insbesondere $p \in R([\eta])$. Damit führt die Annahme $\gamma_1'(x_1) = -\eta'(x_1)$ zu einem Widerspruch, da dann aus Lemma 3.10 $\gamma_1 \subset \overline{L([\eta])}$, also insbesondere $p \notin R([\eta])$ folgen würde.

Zu 4): Aus Lemma 3.10 folgt $\eta \subset \overline{L([\gamma_2])}$ und damit folgt aus 1), dass $x_1 \in L([\gamma_2])$. Wegen (5.7) ist $\gamma_1|_{[0,t(x_1))] \cap [\gamma_2] \neq \emptyset$ und damit ist $\gamma_1|_{[t(x_1),1]} \cap [\gamma_2] = \emptyset$. Daraus folgt $\gamma_1|_{[t(x_1),1]} \subset L([\gamma_2])$ und damit ist

$$\zeta := \eta|_{[x_2,x_1]} \sqcup \gamma_1|_{[t(x_1),1]} \sqcup \overline{\gamma_2|_{[t(x_2),1]}}$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

einfach geschlossen. Da sich η in x_1 von links an γ_1 annähert, nähert sich γ_1 in x_1 nach Korollar 2.50 von rechts an ζ an und es gilt

$$\gamma_1|_{[t(x_1)-\varepsilon, t(x_1)]} \subset R(\zeta) \quad \text{für ein } \varepsilon > 0. \quad (5.9)$$

Analog nähert sich γ_2 in x_2 von links an ζ an und wegen

$$\zeta \cap (\sigma|_{[\gamma_1(0), \gamma_2(0)]} \sqcup \gamma_2|_{[0, t(x_2)]}) = \emptyset$$

folgt damit

$$\gamma_1(0) \in L(\zeta). \quad (5.10)$$

Wegen (5.9) und (5.10) gibt es einen Schnittpunkt zwischen $\gamma_1|_{(0, t(x_1))}$ und ζ . Trivialerweise gilt

$$\gamma_1|_{(0, t(x_1))} \cap \gamma_1|_{[t(x_1), 1]} = \emptyset,$$

aus 2) folgt

$$\gamma_1|_{(0, t(x_1))} \cap \eta|_{[x_2, x_1]} = \emptyset$$

und somit folgt

$$\gamma_1|_{(0, t(x_1))} \cap \gamma_2|_{(t(x_2), 1)} \neq \emptyset.$$

Damit existiert $x_{12} \in \gamma_1|_{(0, t(x_1))} \cap \gamma_2|_{(t(x_2), 1)}$ und dieses erfüllt insbesondere $x_{12} \preceq_{\gamma_1} x_1$ und $x_2 \preceq_{\gamma_2} x_{12}$. \square

Damit lässt sich folgendes Lemma, dessen Aufbau an Lemma 5.10 angelehnt ist, beweisen.

Lemma 5.13. *Sei $p \in P_K$, $\gamma_b \in \mathcal{A}_{K,p}$, $b := t_\sigma(\gamma_b(0))$ und sei $\eta \subset L([\sigma])$ ein links-blockierender Kreisbogen von γ_b mit*

$$\eta \cap \gamma_b = \{\eta(0)\} \quad \text{und} \quad \eta'(0) = \gamma_b'(\eta(0)). \quad (5.11)$$

Für $t \in [0, b]$ sei γ_t der Kreisbogen mit Anfangspunkt $\sigma(t)$ und Endpunkt p , der von η von links berührt wird, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert. Für $t \in [0, b]$, für die γ_t existiert, sei x_t der Schnittpunkt von η und γ_t . Seien

$$T := \{t \in [0, b] : \gamma_t \text{ existiert und } \gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}\},$$

$$\zeta_t := \gamma_b|_{[t(\eta(0)), 1]} \sqcup \overline{\gamma_t|_{[t(x_t), 1]}} \sqcup \overline{\eta|_{[0, t(x_t)]}}, \quad t \in T \setminus \{b\},$$

$$a := \inf T.$$

Dann gilt

1. $T = [a, b]$, $T = [a, b] \setminus \{t^*\}$ oder $T = [a, b] \setminus \{t_1^*, t_2^*\}$ mit Parametern $t^*, t_1^*, t_2^* \in [a, b]$, die zu einem entarteten Fall gehören,

2. falls $a \in T$, dann ist $a = 0$ oder $\sigma(1) \in \gamma_a$,
3. $x_{t_2} \preceq_\eta x_{t_1}$ für alle $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$,
4. $(\gamma_t|_{[t(x_t), 1]})_{t \in T}$ ist eine stetige Familie von Kreisbögen,
5. $(\zeta_t)_{t \in T \setminus \{b\}}$, ist eine stetige Familie von einfach geschlossenen Kreisbogensplines,
6. $L(\zeta_{t_2}) \subset L(\zeta_{t_1})$ für alle $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$,
7. für alle $t_1 \in T \setminus \{b\}$ und alle $y \in L(\zeta_{t_1})$ gibt es ein $t_2 \in T \setminus \{b\}$, so dass $t_1 < t_2$ und $y \notin L(\zeta_{t_2})$.

Beweis. Nach Lemma 5.12, 2) ist x_t , $t \in T$, wohldefiniert. Für $t \in T$ sei $q_t \in \gamma_t \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ . Für $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, sei $x_{t_1 t_2}$ der Schnittpunkt von $\gamma_{t_1}^\circ$ und $\gamma_{t_2}^\circ$. Dieser ist nach Lemma 5.12, 4) wohldefiniert und es gilt $x_{t_1 t_2} \in L([\sigma])$, $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$. Damit folgt aus den Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen, vgl. Lemma 4.6, 3),

$$\gamma_{t_1}(0) \prec_\sigma \gamma_{t_2}(0) \preceq_\sigma q_{t_2} \prec_\sigma q_{t_1}, \quad t_1, t_2 \in T, \quad t_1 < t_2. \quad (5.12)$$

Mit Proposition 3.9 folgt daraus

$$\gamma_{t_1}(0) \in R([\gamma_{t_2}]) \quad \text{und} \quad \gamma_{t_2}(0) \in L([\gamma_{t_1}]), \quad t_1, t_2 \in T, \quad t_1 < t_2. \quad (5.13)$$

Zu 1): Sei $c \in T \setminus \{b\}$. Wie im Beweis von Lemma 5.10, 1) zeigen wir zuerst, dass für alle $t \in (c, b)$, für die der Kreisbogen γ_t existiert, bereits $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ gilt. Sei also $t \in (c, b)$, so dass γ_t existiert und sei $q_t \in \gamma_t \cap \sigma$ maximal bezüglich \prec_σ . Wir zeigen, dass

$$\gamma_t(0) \prec_\sigma q_t \quad \text{und} \quad \kappa(1) \preceq_\sigma q_t,$$

da daraus direkt $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ folgt, vgl. Definition 3.6. Nach (5.12) ist $q_b \prec_\sigma q_c$ und damit können wir den einfach geschlossenen Kreisbogenspline

$$\zeta := \sigma|_{[q_b, q_c]} \sqcup \gamma_c|_{[q_c, x_{cb}]} \sqcup \overline{\gamma_b|_{[q_b, x_{cb}]}}$$

definieren. Analog zum Beweis von Lemma 5.10, 1) folgt

$$\gamma_t(0) \in R(\zeta). \quad (5.14)$$

Wir zeigen im Folgenden, dass sich γ_t in x_{tb} von links an ζ annähert. Aus (5.13) folgt $\gamma_b|_{[0, t(x_{cb})]} \subset L([\gamma_c])$ und da nach Lemma 5.12, 4) gilt, dass $x_b \prec_{\gamma_b} x_{cb}$ ist, folgt insbesondere

$$\eta(0) = x_b \in L([\gamma_c]).$$

Da η den Kreisbogen γ_c von links berührt und es zwischen η und $[\gamma_c]$ höchstens zwei Schnittpunkte gibt, folgt aus daraus

$$\eta \subset \overline{L([\gamma_c])}. \quad (5.15)$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Aus (5.13), (5.15) und $\gamma_t(1) = \gamma_c(1) = p$ folgt

$$\gamma_t|_{[0,t(x_t)]} \subset L([\gamma_c]). \quad (5.16)$$

Nach Lemma 5.12, 4) ist

$$x_{tb} \prec_{\gamma_t} x_t \quad (5.17)$$

und damit folgt aus (5.16), dass $x_{tb} \in L([\gamma_c])$. Aus (5.13) folgt $\gamma_b \cap L([\gamma_c]) = \gamma_b|_{[0,t(x_{cb})]}$ und damit folgt $x_{tb} \in \gamma_b|_{[0,t(x_{cb})]}$. Nach Lemma 5.12, 4) gilt außerdem $x_b \prec_{\gamma_b} x_{tb}$ und damit folgt

$$x_{tb} \in \gamma_b|_{(t(x_b),t(x_{cb}))}.$$

Nach (5.13) ist $\gamma_t(0) \in R([\gamma_b])$ und damit nähert sich γ_t in x_{tb} von rechts an γ_b an. Damit nähert sich γ_t von links an ζ an. Aus (5.14) folgt damit $\gamma_t|_{[0,t(x_{tb})]} \cap \zeta \neq \emptyset$. Aus (5.16) und (5.17) folgt $\gamma_t|_{[0,t(x_{tb})]} \cap \gamma_c = \emptyset$ und damit folgt aus $\gamma_t \cap \gamma_b = \{x_{tb}, p\}$, dass $\sigma|_{(t(q_b),t(q_c))} \cap \gamma_t|_{[0,t(x_{tb})]} \neq \emptyset$ ist, also dass $q_t \in \sigma|_{(t(q_b),t(q_c))}$ ist. Somit ist

$$\gamma_t(0) \prec_{\sigma} \gamma_b(0) \preceq_{\sigma} q_b \prec_{\sigma} q_t$$

und

$$\kappa(1) \preceq_{\sigma} q_b \prec_{\sigma} q_t$$

und damit ist $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$.

Um zu zeigen, dass es maximal zwei Parameter gibt, die zu einem entarteten Fall gehören, kann analog zu Lemma 5.10 vorgegangen werden.

Zu 2): Analog zum Beweis von Lemma 5.10, 2) zeigen wir die Behauptung per Widerspruchsbeweis. Angenommen es wäre $a = \inf T \in T$, $0 < a$ und $\sigma(1) \notin \gamma_a$. Dann existieren für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Kreisbögen $\gamma_{a-\varepsilon}$. Sei $t \in [0, a)$, so dass γ_t existiert. Nach Proposition 3.9 ist dann $\gamma_t(0) \in R([\gamma_a])$. Analog zum Beweis von Lemma 5.12 kann gezeigt werden, dass es ein $x \in \gamma_t^\circ \cap \gamma_a^\circ$ mit $x \in L([\sigma])$ gibt. Damit ist $\gamma_t|_{[0,t(x)]} \subset R([\gamma_a])$ und somit folgt analog zum Beweis von Lemma 5.10, 2), dass $a - \varepsilon \in T$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt, im Widerspruch zu $a - \varepsilon < a = \inf T$.

Zu 3): Nach Lemma 5.12, 1) können wir $x_{t_1} = \eta(0)$ ausschließen und falls $x_{t_1} = \eta(1)$ oder $t = b$, dann folgt die Aussage trivialerweise. Sei also $x_{t_1} \in \eta^\circ$ und sei $t \neq b$. Wir betrachten den Kreisbogen γ^* , mit Anfangspunkt $\gamma_{t_2}(0)$, Endpunkt p , der von $\eta|_{[0,t(x_{t_1})]}$ von links berührt wird und zeigen, dass γ^* auch von η von links berührt wird, also dass $\gamma^* = \gamma_{t_2}$ ist. Sei $x^* \in \gamma^* \cap \eta|_{[0,t(x_{t_1})]}$. Nach Lemma 5.12, 1) gilt

$$x^* \neq \eta(0). \quad (5.18)$$

Aus (5.13) folgt

$$x^* \neq x_{t_1}, \quad (5.19)$$

da sich ansonsten γ_1 und damit $\eta|_{[0,t(x_{t_1})]}$ in x_{t_1} von rechts an γ^* annähern würden, vgl. Proposition 2.54. Aus (5.18) und (5.19) folgt $x^* \in \eta|_{(0,t(x_{t_1}))}$. Damit stimmen

die Tangenten von γ^* und η im Punkt x^* nach Lemma 5.12, 3) überein. Somit wird γ^* vom gesamten Kreisbogen η von links berührt. Aus der Eindeutigkeit des Kreisbogens, vgl. Lemma 5.12, folgt $\gamma^* = \gamma_{t_2}$ und damit folgt $x_{t_2} = x^* \prec_{\eta} x_{t_1}$ aus der Eindeutigkeit des Berührungspunkts, vgl. Lemma 5.12, 2).

Zu 4): Wir zeigen, dass $(x_t)_{t \in T}$ stetig ist, da damit aufgrund der Stetigkeit von $\sigma(t)$ bezüglich $t \in T$ folgt, dass γ_t und damit $\gamma_t|_{[t(x_t), 1]}$ stetig bezüglich $t \in T$ sind. Sei dazu $t_0 \in T$ und $\varepsilon > 0$ und sei γ_t^* für $t \in T$ der Kreisbogen mit Anfangspunkt $\sigma(t)$, Endpunkt p und $x_{t_0} \in \gamma_t^*$.

Wir betrachten zuerst den Fall $x_{t_0} \in \eta^\circ$. Dann ist $\eta'(x_{t_0}) = \gamma'_{t_0}(x_{t_0})$ und nach Proposition 3.9 gilt

$$\sigma(t) \in \begin{cases} R([\gamma_{t_0}]), & t \in T, t < t_0, \\ L([\gamma_{t_0}]), & t \in T, t > t_0. \end{cases}$$

Damit schneidet γ_t^* den Kreisbogen η in x_{t_0} von rechts, falls $t < t_0$ und andernfalls von links. Somit folgt aus der Stetigkeit von γ_t^* bezüglich $t \in T$, dass es für $t \in T \setminus \{t_0\}$ mit $|t - t_0|$ hinreichend klein ein $x_t^* \neq x_{t_0}$ gibt, so dass

1. $\gamma_t^* \cap \eta = \{x_{t_0}, x_t^*\}$,
2. $\|x_t^* - x_{t_0}\|_2 < \varepsilon$

und es gilt $x_{t_0} \prec_{\eta} x_t^*$ genau dann, wenn $t < t_0$. Für solche t kann wie im Beweis der Existenz von γ_1 in Lemma 5.12 gezeigt werden, dass für den Berührungspunkt $x_t \in \gamma_t \cap \eta$ folgt, dass

$$x_t \in \eta|_{[t(x_{t_0}), t(x_t^*)]} \quad \text{bzw.} \quad x_t \in \eta|_{[t(x_t^*), t(x_{t_0})]}.$$

Für $t \in T \setminus \{t_0\}$ mit $|t - t_0|$ hinreichend klein ist x_t^* der am weitesten von x_{t_0} entfernte Punkt in $\eta|_{[t(x_{t_0}), t(x_t^*)]}$ bzw. $\eta|_{[t(x_t^*), t(x_{t_0})]}$ und damit können wir ein $\delta > 0$ wählen, so dass

$$\|x_t - x_{t_0}\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap (T \setminus \{t_0\}).$$

Damit ist gezeigt, dass $(x_t)_{t \in T}$ in jedem Parameter $t_0 \in T$ mit $x_{t_0} \in \eta^\circ$ stetig ist.

Sei nun $t_0 \in T$, so dass $x_{t_0} = \eta(0)$. Nach Lemma 5.12, 1) ist in diesem Fall $t_0 = b$ und damit gilt insbesondere $\eta'(x_b) = \gamma'_b(x_b)$ und

$$\sigma(t) \in R([\gamma_b]), \quad t \in T \setminus \{b\}.$$

Analog zum ersten Fall folgt, dass $(x_t)_{t \in T}$ in diesem Fall in t_0 stetig ist.

Sei nun $t_0 \in T$, so dass $x_{t_0} = \eta(1)$ und $\eta'(1) \neq \gamma'_{t_0}(\eta(1))$. Nach Lemma 5.12, 2) ist $\gamma_{t_0} \cap \eta = \{\eta(1)\}$ und da η den Kreisbogen γ_{t_0} von links berührt, gilt

$$\det[\eta'(1), \gamma'_{t_0}(\eta(1))] > 0.$$

Damit folgt aus der Stetigkeit von γ_t^* bezüglich $t \in T$, dass für $t \in T \setminus \{t_0\}$ mit $|t - t_0|$ hinreichend klein auch $\det[\eta'(1), (\gamma_t^*)'(\eta(1))] > 0$ und $\gamma_t^* \cap \eta = \{\eta(1)\}$ erfüllt

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

sind. Für solche t ist damit $\gamma_t = \gamma_t^*$ und $x_t = x_{t_0}$. Damit ist die Behauptung auch in diesem Fall gezeigt.

Sei zuletzt $t_0 \in T$, so dass $x_{t_0} = \eta(1)$ und $\eta'(1) = \gamma'_{t_0}(x_{t_0})$. Dann gilt

$$\sigma(t) \in \begin{cases} R([\gamma_{t_0}]), & t \in T, t < t_0, \\ L([\gamma_{t_0}]), & t \in T, t > t_0, \end{cases}$$

und damit schneidet γ_t^* den Kreis $[\eta]$ in $\eta(1)$ von rechts, falls $t < t_0$ und andernfalls von links. Für $t \in T \setminus \{t_0\}$, $t > t_0$, mit $|t - t_0|$ hinreichend klein folgt damit analog zum ersten Fall, dass $\|x_t - \eta(1)\|_2 < \varepsilon$ ist und für $t \in T \setminus \{t_0\}$, $t < t_0$, mit $|t - t_0|$ hinreichend klein folgt analog zum letzten Fall, dass $x_t = \eta(1)$ ist. Damit ist die Stetigkeit von $(x_t)_{t \in T}$ auch in diesem Fall gezeigt.

Zu 5): Aus Lemma 5.12 folgt $\zeta_t \in \mathcal{S}_0^*$, $t \in T \setminus \{b\}$, und die Stetigkeit folgt aus 4).

Zu 6): Seien $t_1, t_2 \in T \setminus \{b\}$, $t_1 < t_2$, und seien $x_1 := x_{t_1}$ und $x_2 := x_{t_2}$. Nach (5.13) ist $\gamma_{t_2}(0) \in R([\gamma_b]) \cap L([\gamma_{t_1}])$. Nach Lemma 5.12, 4) ist $\gamma_{t_2}^\circ \cap \gamma_{t_1}^\circ \neq \emptyset$ und $\gamma_{t_2}^\circ \cap \gamma_b^\circ \neq \emptyset$ und damit nähert sich γ_{t_2} in 1 von links an $[\gamma_b]$ und von rechts an $[\gamma_{t_1}]$ an. Aus Proposition 2.53 folgt damit, dass sich γ_{t_2} in 1 von links an ζ_{t_1} annähert. Aus Lemma 5.12, 2) und 4) folgt $\gamma_{t_2}|_{(t(x_2),1)} \cap \zeta_{t_1} = \emptyset$. Man beachte dabei, dass wir wegen 3) im Fall $x_2 \in \eta^\circ$ Lemma 5.12 auch auf das Paar $\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}$ anwenden können. Damit gilt

$$\gamma_{t_2}|_{[t(x_2),1]} \subset \overline{L(\zeta_{t_1})}.$$

Nach 3) gilt $\eta|_{[0,t(x_2)]} \subset \eta|_{[0,t(x_1)]}$ und damit gilt

$$\zeta_{t_2} \subset \overline{L(\zeta_{t_1})}.$$

Der restliche Beweis kann analog zum Beweis von Lemma 5.6, 3) geführt werden.

Zu 7): Folgt analog zum Beweis von Lemma 5.6, 4). □

Beweis (von Proposition 5.11). Sei $b = t_\sigma(\gamma(0))$. Für $t \in [0, b]$ sei γ_t der Kreisbogen mit Anfangspunkt $\sigma(t)$ und Endpunkt p , der von η_1 von links berührt wird, vorausgesetzt der Kreisbogen existiert. Sei T die Menge der Parameter $t \in [0, b]$, für die γ_t existiert und $\gamma_t \in \mathcal{A}_{K,p}$ ist und für $t \in T$ sei $\{x_t\} := \gamma_t \cap \eta_1$, vgl. Lemma 5.12, 4). Seien außerdem

$$\zeta_t := \gamma|_{[t(\eta_1(0)),1]} \sqcup \overline{\gamma_t|_{[t(x_t),1]}} \sqcup \overline{\eta_1|_{[0,t(x_t)]}}, \quad t \in T \setminus \{b\},$$

$$T_{\eta_2} := \{t \in T \setminus \{b\} : \eta_2 \subset \overline{L(\zeta_t)}\}$$

und

$$t^* := \begin{cases} \sup T_{\eta_2}, & T_{\eta_2} \neq \emptyset, \\ \inf T, & \text{sonst.} \end{cases}$$

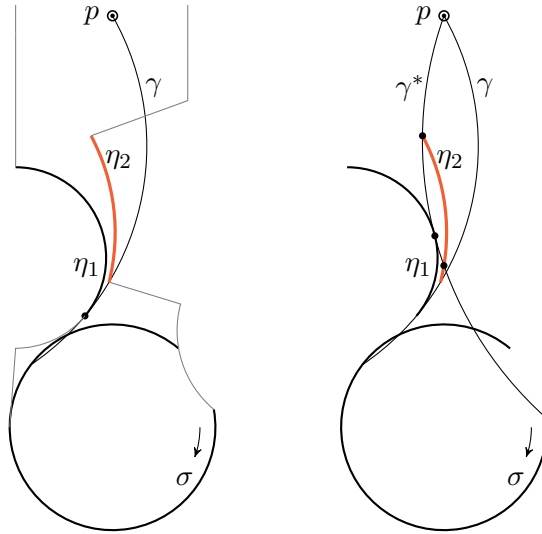


Abbildung 5.23: Fall im Beweis von Proposition 5.11. Links: Ausgangssituation inklusive Kanal. Rechts: Beim Update auf den Kreisbogen γ^* entsteht eine Alternantenfolge der Länge drei mit zwei rechten Restriktionen in η_2 , dem von rechts verletzenden Kreisbogen von γ . Die Restriktionen sind durch Punkte markiert.

Wir nehmen an, dass $t^* \in T$ ist, dass also t^* nicht zu einem entarteten Fall gehört und zeigen, dass $\gamma^* := \gamma_{t^*}$ der gesuchte Kreisbogen ist. Aus Lemma 5.12 folgt, dass γ_t und γ für alle $t \in T \setminus \{b\}$ in Konfiguration zwei sind.

Ist $T_{\eta_2} = \emptyset$, dann folgt analog zum Beweis von Proposition 5.9, dass γ^* eine Alternantenfolge der Länge drei mit Restriktionen in σ , η_1 und η_2 besitzt.

Ist $T_{\eta_2} \neq \emptyset$, dann folgt analog zum Beweis von Proposition 5.5, dass es in η_2 eine rechte Restriktion von γ^* gibt. Wird γ^* von η_2 von rechts berührt, dann ist γ^* der gesuchte Kreisbogen mit links-blockierendem Kreisbogen η_1 , rechts-blockierendem Kreisbogen η_2 und $\eta_1 \prec_{\gamma^*} \eta_2$. Berührt η_2 hingegen, wie in Abbildung 5.23 dargestellt, den Kreisbogen γ^* nicht von rechts, dann gibt es einen Schnittpunkt von η_2 mit $\gamma^*|_{[0,t(x_{t^*})]}$, da der Kreisbogen $\gamma^*|_{[t(x_{t^*}),1]}$ laut Konstruktion von rechts berührt wird. Damit gibt es in η_2 eine rechte Restriktion vor der linken Restriktion x_{t^*} und eine nach x_{t^*} und somit besitzt γ^* eine Alternantenfolge der Länge drei mit Restriktionen in η_1 und η_2 . In jedem Fall ist γ^* der gesuchte Kreisbogen. \square

Festhalten der rechten Restriktion

In diesem Fall nehmen wir an, dass der Kreisbogen $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ einen von links verletzenden Kreisbogen η und eine rechte Restriktion r_2 mit $\eta \prec_{\gamma} r_2$ besitzt. Beispiele sind in den Abbildungen 5.24 und 5.25 zu sehen. Ähnlich wie im Fall mit festgehaltener

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

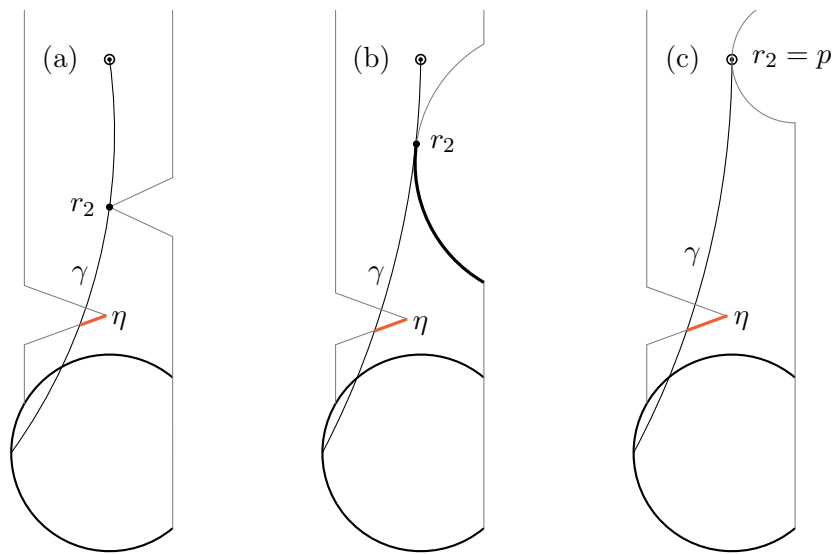


Abbildung 5.24: Ausgangssituation zum Updateschritte mit festgehaltener rechter Punktrestriktion (a), rechts-blockierendem Kreisbogen (b) und rechter Endrestriktion (c).

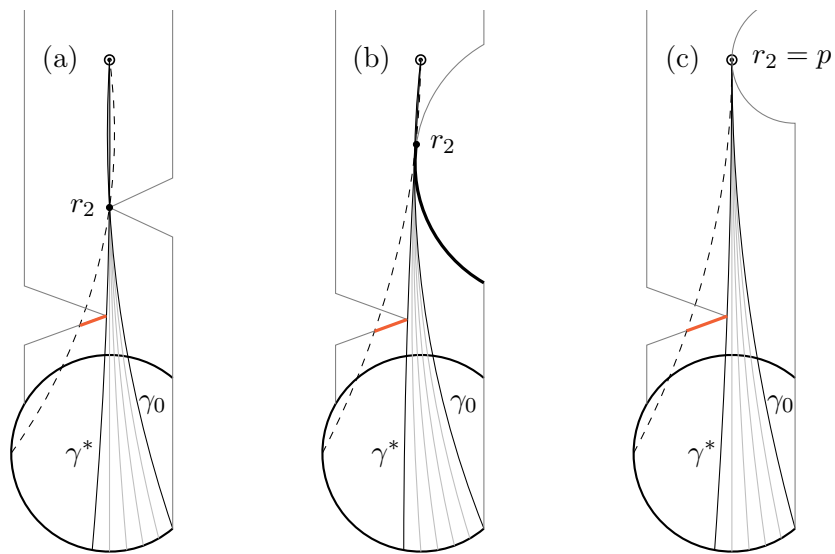


Abbildung 5.25: Updateschritte mit festgehaltener rechter Punktrestriktion (a), rechts-blockierendem Kreisbogen (b) und rechter Endrestriktion (c).

linker Restriktion, unterscheiden wir drei Fälle:

1. $r_2 \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ ist ein Anschlusspunkt von κ ,
2. $r_2 \in (\kappa_p^+)^{\circ}$ ist kein Anschlusspunkt von κ ,
3. r_2 ist eine Endrestriktion.

Da die Beweise der folgenden Aussagen analog zu denen mit festgehaltener linker Restriktion geführt werden können, werden diese nicht ausgeführt. Angelehnt an Proposition 5.9 mit festgehaltener linker Punktrestriktion erhalten wir:

Proposition 5.14 (Updateschritt mit festgehaltener rechter Punktrestriktion). *Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit rechter Restriktion $r_2 \in \gamma^{\circ}$ und sei $\eta \subset \overline{L([\sigma])}$ ein von links verletzender Kreisbogen von γ mit $\eta \prec_{\gamma} r_2$. Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma^* \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma^*(0) \prec_{\sigma} \gamma(0)$, so dass r_2 eine rechte Restriktion von γ^* und η ein links-blockierender Kreisbogen von γ^* mit $\eta \prec_{\gamma^*} r_2$ ist oder es gibt einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , r_2 und η .*

Analog zu Proposition 5.11 mit festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen gilt:

Proposition 5.15 (Updateschritt mit festgehaltenem rechts-blockierendem Kreisbogen). *Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ und sei η_2 ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ mit*

$$\eta_2 \cap \gamma = \eta_2(1) \quad \text{und} \quad \eta_2'(1) = \gamma'(\eta_2(1)).$$

Sei η_1 ein von links verletzender Kreisbogen von γ mit $\eta_1 \prec_{\gamma} \eta_2$. Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma^ \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma^*(0) \prec_{\sigma} \gamma(0)$, so dass η_1 ein links-blockierender und η_2 ein rechts-blockierender Kreisbogen von γ^* mit $\eta_1 \prec_{\gamma^*} \eta_2$ ist oder es gibt einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , η_1 und η_2 .*

Dazu kann folgendes Lemma analog zu Lemma 5.12 gezeigt werden:

Lemma 5.16. *Sei $p \in P_K$, sei $\gamma_1 \in \mathcal{A}$ mit $\gamma_1(0) \in \sigma$, $\gamma_1(1) = p$ und sei $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma_1(0) \prec_{\sigma} \gamma_2(0)$. Sei außerdem $\eta \in \mathcal{A}$, so dass γ_1 und γ_2 von η von rechts berührt werden und gelte*

$$\eta \cap \gamma_2 = \{\eta(1)\} =: \{x_2\} \quad \text{und} \quad \eta'(1) = \gamma_2'(\eta(1)).$$

Dann gilt

1. $\eta(1) \notin \gamma_1$,
2. es gibt ein x_1 , so dass $\eta \cap \gamma_1 = \{x_1\}$,
3. aus $x_1 \in \eta^{\circ}$ folgt $\eta'(x_1) = \gamma_1'(x_1)$,

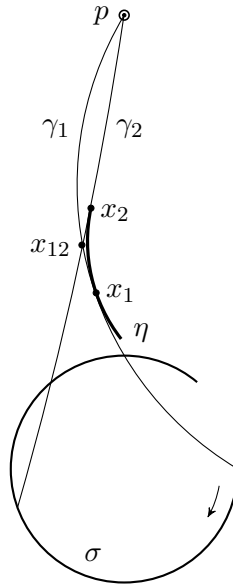


Abbildung 5.26: Beispiel zu Lemma 5.16.

4. es gibt ein x_{12} , so dass $\gamma_1^\circ \cap \gamma_2^\circ = \{x_{12}\}$ mit $x_1 \preceq_{\gamma_1} x_{12}$ und $x_{12} \preceq_{\gamma_2} x_2$.

Handelt es sich bei r_2 um eine Endrestriktion, dann wird die Tangente am Endpunkt festgehalten, siehe Abbildung 5.25 (c). Die Kreisbögen sind dann alle in Konfiguration eins und damit lässt sich dieser Fall analog beweisen:

Proposition 5.17 (Updateschritt mit festgehaltener rechter Endrestriktion). Sei $p \in P_K$, sei $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit rechter Endrestriktion und sei $\eta \subset \overline{L([\sigma])}$ ein von links verletzender Kreisbogen von γ . Dann gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma^* \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit $\gamma^*(0) \prec_\sigma \gamma(0)$, so dass dieser eine rechte Endrestriktion besitzt und η ein links-blockierender Kreisbogen von γ^* ist oder es gibt einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , η und p .

Sonderbehandlung entarteter Fälle

Wir wollen nun zeigen, wie wir die zuvor ausgeklammerten, entarteten Fälle auf Seite 93 auf Standardfälle zurückführen können: Wir beginnen mit dem Updateschritt mit festgehaltener linker Startrestriktion, vgl. Proposition 5.5. Gegeben ist ein Kreisbogen $\gamma_1 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit einer linken Startrestriktion und einem von rechts verletzenden Kreisbogen η . Die Aussage der Proposition ist, dass es – bis auf entartete Fälle – entweder einen Kreisbogen $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit linker Startrestriktion in $\sigma|_{[\kappa(1), \gamma_1(0)]}$ und η als rechts-blockierenden Kreisbogen gibt, oder dass der Kreisbogen $\gamma_3 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit

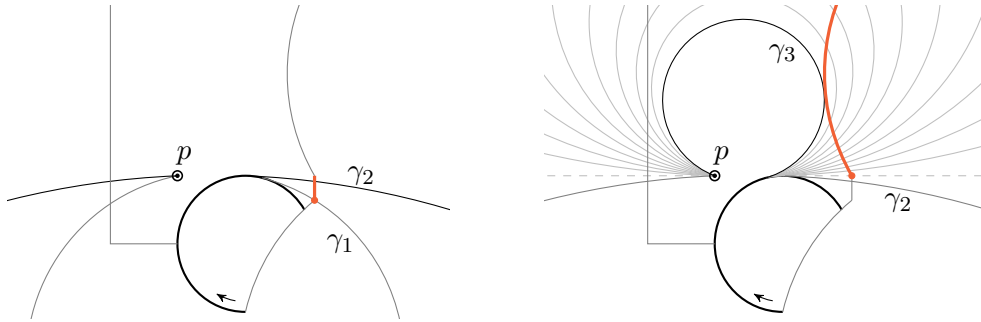


Abbildung 5.27: Näherungsweise Berechnung des neuen Kreisbogens und „überspringen“ des entarteten Falls mithilfe späterer Verletzungen.

linker Startrestriktion im Anfangspunkt $\kappa(1)$ eine rechte Verletzung in η besitzt. Existiert der Kreisbogen γ_2 aufgrund eines entarteten Falls nicht, dann befinden wir uns im Beispiel aus Abbildung 5.14 auf Seite 94. Wir nutzen, dass der Updateschritt berechnet werden könnte, wenn η ein wenig kürzer oder länger wäre. Dann wäre der neue Kreisbogen „sehr groß“ und positiv bzw. negativ orientiert. Der entartete Fall entspricht also genau dem Übergang von den positiv zu den negativ orientierten Kreisbögen. Deshalb wählen wir γ_2 als einen „sehr großen“, positiv orientierten Kreisbogen mit linker Startrestriktion und Endpunkt p , siehe Abbildung 5.27 links. Das entspricht einem Updateschritt, bei dem η am Ende leicht verkürzt wurde und damit enthält γ_2 eine rechte Restriktion in η . Sehr groß bedeutet in diesem Fall, dass die Länge des Kreisbogens deutlich größer als die Ausdehnung des Kanals ist. Damit liegen große Teile des Kreisbogens außerhalb des Kanals und somit ist garantiert, dass es weitere Verletzungen gibt und diese entweder zu einer Alternantenfolge der Länge drei oder zu weiteren Updateschritten und schließlich zu einem „Umschlagen“ des Kreisbogens zu einem negativ orientierten Kreisbogen führen. In diesem Beispiel enthält bereits der nächste Kanalkreisbogen weitere rechte Verletzungen von γ_2 . Damit kann ein weiterer Updateschritt, der zum Umschlagen des Kreisbogens hin zu negativ orientierten Kreisbögen führt, durchgeführt werden, siehe Abbildung 5.27 rechts.

Führt ein entarteter Fall dazu, dass der oben angesprochene Kreisbogen γ_3 mit linker Startrestriktion in $\kappa(1)$ nicht existiert, dann kann wie folgt vorgegangen werden: Falls kein Updateschritt mit festgehaltener Punktrestriktion mit linker Restriktion $\kappa(1)$ und von rechts verletzendem Kreisbogen η durchgeführt werden kann, berechnen wir wie oben einen „sehr großen“ positiv orientierten Kreisbogen. Der zweite Fall entspricht einem Updateschritt mit leicht verkürztem η und wie oben ist garantiert, dass weitere Updateschritte folgen, die den hier gemachten Fehler beheben.

Im Updateschritt mit festgehaltener linker Punktrestriktion können ähnliche Methoden angewendet werden. Gegeben ist in diesem Fall ein Kreisbogen γ_1 mit linker

Restriktion $r_1 \in \gamma_1^\circ$ und ein von rechts verletzender Kreisbogen η von γ_1 mit $r_1 \prec_\gamma \eta$. Gemäß Proposition 5.9 gibt es – bis auf entartete Fälle – einen Kreisbogen $\gamma_2 \in \mathcal{A}_{K,p}$ mit r_1 als linke Restriktion und η als rechts-blockierenden Kreisbogen mit $r_1 \prec_{\gamma_2} \eta$ oder es gibt einen Kreisbogen γ_3 mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , r_1 und η . Existiert γ_2 aufgrund eines entarteten Falls nicht, dann kann η analog zu oben verkürzt werden. Falls γ_3 aufgrund eines entarteten Falls nicht existiert, dann können wir den Updateschritt auf einer ε -Erweiterung K^* von K durchführen. Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gibt es einen Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei in σ , r_1 und η und damit folgt aus $I_K \subset I_{K^*}$, dass p in K nicht sichtbar ist. Für alle weiteren Updateschritte können dieselben Anpassungen vorgenommen werden.

5.3 Definition des Algorithmus und seiner Schleifeninvarianten

Mithilfe der Updateschritte aus Abschnitt 5.2 können wir jetzt einen Algorithmus definieren, mit dem sich entscheiden lässt, ob ein vorgegebener Punkt $p \in P_K$ sichtbar ist. Den Korrektheitsbeweis und eine Abschätzung der Laufzeit werden wir in den folgenden Abschnitten entwickeln. Erklärungen zum sehr kurz gehaltenen Pseudocode finden sich in den Bemerkungen 5.18 bis 5.20.

Bemerkung 5.18 (Bemerkung zum initialen Kreisbogen in Algorithmus 1). *Ein initialer Kreisbogen in Zeile 3 kann mithilfe des Updateschritts mit festgehaltener linker Startrestriktion berechnet werden, vgl. Proposition 5.5. Die Rolle des von rechts verletzenden Kreisbogens η übernimmt dabei der erste Kreisbogen in $\kappa|_{[t(\sigma(1)),1]}$.*

Bemerkung 5.19 (Bemerkung zu Kanalindizes in Algorithmus 1). *Initial besitzt γ eine linke Startrestriktion anstatt einer linken Restriktion in einem Kanalkreisbogen. Um den Pseudocode kurz und übersichtlich zu halten, wird dieser Zustand nicht über ein eigenes Flag repräsentiert, sondern über den Wert von L . Solange $L = n + 1$ und damit außerhalb des Bereichs der Kanalkreisbogenindizes ist, ist die linke Restriktion in σ zu wählen. Außerdem kann $L - i$ oder $R - i$ null oder negative Werte annehmen. In diesem Fall ist der entsprechende Kanalabschnitt vollständig geprüft und die Bedingung in Zeile 17 bzw. 20 kann direkt als „nicht erfüllt“ ausgewertet werden.*

Man beachte außerdem, dass linke Verletzungen per Definition nur in κ_p^- auftreten. Ist $p \in \kappa$ und liegt κ_{L-i} nicht in κ_p^- , dann ist die Bedingung in Zeile 17 trivialerweise nicht erfüllt.

Bemerkung 5.20 (Bemerkung zum Update von γ in Algorithmus 1). *Seien L , R und γ die jeweiligen Objekte vor dem Update, sei r_2 die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ in κ_R und falls $L \neq n + 1$, dann sei r_1 die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von γ in κ_L . Unter einem Update in Zeile 18 verstehen wir ein Update gemäß Proposition 5.14, 5.15 bzw. 5.17 und wir verwenden darin die Kreisbögen*

Algorithmus 1

```

1: Eingabe: Ein Kanal  $K$  mit Kanalrand  $\kappa = \kappa_1 \sqcup \kappa_2 \sqcup \dots \sqcup \kappa_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und ein
   Punkt  $p \in P_K$ 
2: Ausgabe: Ein Kreisbogen  $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$ , der die Sichtbarkeit von  $p$  entscheidet
3: Sei  $\gamma \in \mathcal{A}_{K,p}$  ein Kreisbogen mit linker Startrestriktion und einer rechten Re-
   striktion
4: if  $p \in \kappa$  und  $\Delta^+(\gamma, p) \geq 3$  then
5:   return  $\gamma$  //  $p$  ist nicht sichtbar
6: end if
7: Sei  $L = n + 1$ 
8: Sei  $R$  der zur bezüglich  $\prec_\kappa$  größten rechten Restriktion gehörende Index in  $\kappa$ 
9: if  $\kappa_R$  enthält eine rechte Verletzung von  $\gamma$  then
10:   Update  $\gamma$  gemäß Abschnitt 5.2
11: end if
12: if  $\gamma$  besitzt in  $\sigma$  und  $\kappa_R$  eine Alternantenfolge der Länge drei then
13:   return  $\gamma$  //  $p$  ist genau dann sichtbar, wenn  $\gamma \subset \overline{I_K}$ 
14: end if
15: Sei  $i = 1$ 
16: while  $L - i \geq 1$  oder  $R - i \geq 1$  do
17:   if  $\kappa_{L-i}$  enthält eine linke Verletzung von  $\gamma$  then
18:     Update  $\gamma$  gemäß Abschnitt 5.2
19:     Setze  $L = L - i$  und  $i = 0$ 
20:   else if  $\kappa_{R-i}$  enthält eine rechte Verletzung von  $\gamma$  then
21:     Update  $\gamma$  gemäß Abschnitt 5.2
22:     Setze  $R = R - i$  und  $i = 0$ 
23:   end if
24:   if  $\gamma$  besitzt in den im Update verwendeten Kanalkreisbögen eine Alternan-
     tenfolge der Länge drei then
25:     return  $\gamma$  //  $p$  ist genau dann sichtbar, wenn  $\gamma \subset \overline{I_K}$ 
26:   end if
27:   Setze  $i = i + 1$ 
28: end while
29: return  $\gamma$  //  $p$  ist sichtbar

```

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

$\kappa_R|_{[0,t(r_2)]}$ und κ_{L-i} . Unter einem Update in Zeile 21 verstehen wir ein Update gemäß Proposition 5.5, 5.9 bzw. 5.11 und wir verwenden darin die Kreisbögen κ_{R-i} und falls $L \neq n+1$ auch $\kappa_L|_{[0,t(r_1)]}$. In den meisten Fällen gibt es genau einen Updateschritt, den man in der aktuellen Situation verwenden kann. Nur falls ein Updateschritt mit festgehaltenem links- oder rechts-blockierendem Kreisbogen möglich ist, könnte auch ein Updateschritt mit festgehaltener linker bzw. rechter Punktrestriktion durchgeführt werden. Wie schon in den Anfangsbeispielen in Abschnitt 5.1 erwähnt wurde, ist dabei stets der Updateschritt mit festgehaltenem links- oder rechts-blockierendem Kreisbogen zu bevorzugen. Dadurch ist garantiert, dass der aktualisierte Kreisbogen nach einem Update in Zeile 18 keine rechte Verletzung in $\kappa_R|_{[0,t(r_2)]}$ und keine linke Verletzung in κ_{L-i} besitzt und dass er nach einem Update in Zeile 21 keine rechte Verletzung in κ_{R-i} und keine linke Verletzung in $\kappa_L|_{[0,t(r_1)]}$ besitzt.

Zur Überprüfung auf eine Alternantenfolge der Länge drei in Zeile 24 werden neben κ_{L-i} bzw. κ_{R-i} immer auch die beiden Kreisbögen κ_L und κ_R betrachtet.

Wir werden im restlichen Teil dieses Abschnitts zeigen, dass Algorithmus 1 korrekt ist. Die Schwierigkeit liegt dabei an der effizienten Suche nach Verletzungen, wonach Kanalabschnitte, die einmal auf Freiheit von Verletzungen geprüft wurden, auch nach einem Update nicht erneut geprüft werden. Wie schon im einführenden Beispiel zu sehen ist, können im Laufe des Algorithmus neue Verletzungen entstehen. Dabei können neue Verletzungen insbesondere in Kanalabschnitten entstehen, die schon auf Verletzungsfreiheit geprüft wurden. Wir werden jedoch zeigen, dass diese Kanalabschnitte am Ende des Algorithmus wieder verletzungsfrei sind, falls der Algorithmus mit der Rückgabe eines Kreisbogens in Zeile 29 endet. Dazu beweisen wir folgende Schleifeninvarianten:

Schleifeninvarianten des Algorithmus

In den Beweisen zu den einzelnen Updateschritten wurden stetige Familien von potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen benutzt. Intuitiv lässt sich damit ein Updateschritt als stetige Veränderung eines potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens γ mit einer Alternantenfolge (r_1, r_2) beschreiben. Folgende informelle Beobachtung liefert eine Motivation für die im Folgenden formulierten Schleifeninvarianten von Algorithmus 1: Ein Update der linken Restriktion führt dazu, dass sich $\gamma|_{[0,t(r_2)]}$ nach rechts und $\gamma|_{[t(r_2),1]}$ nach links bewegt. Ein Update der rechten Restriktion führt dazu, dass sich $\gamma|_{[0,t(r_1)]}$ nach rechts und $\gamma|_{[t(r_1),1]}$ nach links bewegt. In beiden Fällen bewegt sich $\gamma|_{[0,t(r_1)]}$ nach rechts und $\gamma|_{[t(r_2),1]}$ nach links und damit wird mit jedem Update $\Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]})$, $q \in \kappa_p^-$, eher größer und $\Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]})$, $q \in \kappa_p^+$, eher kleiner. Diese Idee findet sich in den folgenden drei Propositionen wieder:

Proposition 5.21 (Schleifeninvariante eins). *Sei γ_j der j -te potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen einer konkreten Ausführung von Algorithmus 1. Sei $L_j \neq n+1$ der entsprechende Wert von L und sei r_j die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von*

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

γ_j in κ_{L_j} . Ist γ_j generisch und besitzt γ_j in den im Update verwendeten Kanalkreisbögen keine Alternantenfolge der Länge drei, dann ist

$$\Delta(\gamma_j|_{[0,t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_j))}.$$

In der entsprechenden Aussage für $\Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]})$, $q \in \kappa_p^+$, unterscheiden wir, ob $p \in \kappa$ oder $p \notin \kappa$ ist. Man beachte, dass im Fall $p \notin \kappa$ gemäß Definition $\kappa_p^+ = \kappa$ und $\kappa_p^- = \bar{\kappa}$ ist.

Proposition 5.22 (Schleifeninvariante zwei – $p \notin \kappa$). *Sei $p \notin \kappa$ und sei γ_j der j -te potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen einer konkreten Ausführung von Algorithmus 1. Sei γ_j außerdem generisch und so dass er keine Alternantenfolge der Länge drei in den im Update verwendeten Kanalkreisbögen besitzt. Sei R_j der entsprechende Wert von R und r_j die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ_j in κ_{R_j} . Dann ist*

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{(t(r_j),1)}.$$

Proposition 5.23 (Schleifeninvariante zwei – $p \in \kappa$). *Sei $p \in \kappa$ und sei γ_j der j -te potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen einer konkreten Ausführung von Algorithmus 1. Sei γ_j außerdem generisch und so dass er keine Alternantenfolge der Länge drei in den im Update verwendeten Kanalkreisbögen besitzt. Sei R_j der entsprechende Wert von R und $r_j \neq p$ die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ_j in κ_{R_j} . Für jedes $\varepsilon_j > 0$ mit*

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon_j,1]} \cap \gamma_j = \emptyset$$

und

$$\Delta(\gamma_j, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon_j]}) = 0$$

gilt

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon_j]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+|_{(t(r_j),1-\varepsilon_j)}. \quad (5.20)$$

Bemerkung 5.24. *Die Propositionen 5.21, 5.22 und 5.23 gelten genauso für nicht-generische Kreisbögen, falls anstelle des Kanals K eine ε -Erweiterung K^* von K mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ verwendet wird.*

Bemerkung 5.25. *Ungleichung (5.20) ließe sich auch folgendermaßen formulieren*

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r_i),1]}, \kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}) \geq -1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+|_{(t(r_i),1-\varepsilon)}.$$

Der Übergang zu $\overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}$ besitzt jedoch den Vorteil, dass die Propositionen 5.21, 5.22 und 5.23 eine größere Ähnlichkeit aufweisen und damit der intuitive Zugang erleichtert wird.

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

In diesem Abschnitt legen wir die Grundlagen für den Beweis der Propositionen 5.21 bis 5.23 aus Abschnitt 5.3. Der eigentliche Beweis folgt im folgenden Abschnitt ab Seite 141.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

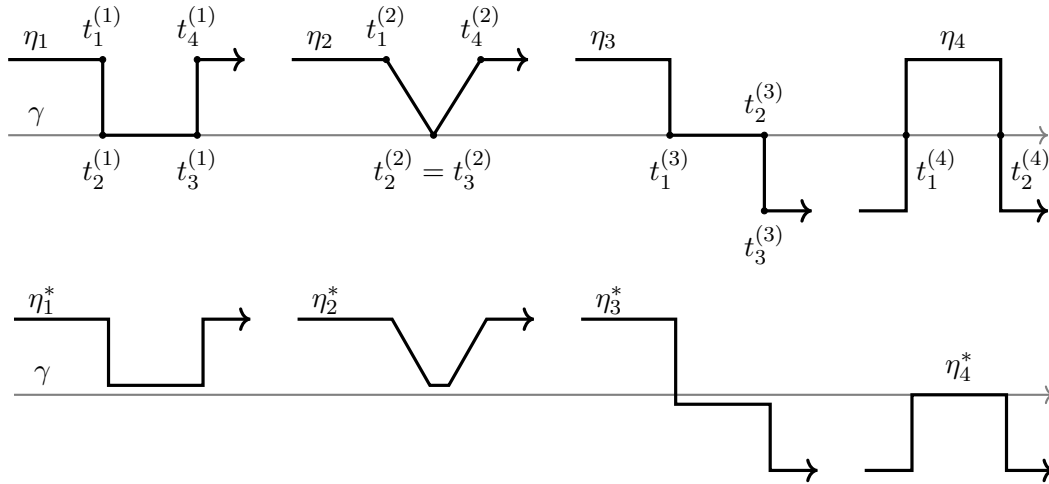


Abbildung 5.28: Beispiele zu den Vereinfachungen gemäß den Definitionen 5.26 bis 5.28. Oben sind die ursprünglichen Kreisbogensplines und relevante Parameter dargestellt, unten die Vereinfachungen: η_1^* und η_2^* sind Vereinfachungen erster Art von η_1 bzw. η_2 , η_3^* ist eine Vereinfachung zweiter Art von η_3 und η_4^* ist eine Vereinfachung dritter Art von η_4 .

Vereinfachungen

Zuerst führen wir sogenannte Vereinfachungen von Kreisbogensplines ein. Diese erlauben es auf eine weniger komplexe Situation zu wechseln ohne wesentliche Eigenschaften zu beeinflussen. Beispiele zu den drei im Folgenden definierten Vereinfachungen sind in Abbildung 5.28 zu sehen.

Definition 5.26. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$ und seien $t_1, t_2, t_3, t_4 \in (0, 1)$, $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_4]} = \eta|_{[t_2, t_3]}$,
2. $\Delta(\gamma, \eta|_{[t_1, t_4]}) = 0$.

Ist $\tilde{\eta} \in \mathcal{S}^*$, so dass

1. $\tilde{\eta}(0) = \eta(t_1)$, $\tilde{\eta}(1) = \eta(t_4)$,
2. $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_4, 1]} \in \mathcal{S}^*$,
3. $\tilde{\eta} \cap \gamma = \emptyset$,

dann nennen wir den Kreisbogenspline $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_4, 1]}$ eine Vereinfachung erster Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_4]$.

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

Definition 5.27. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$ und seien $t_1, t_2, t_3 \in (0, 1)$, $t_1 < t_2 < t_3$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_3]} = \eta|_{[t_1, t_2]}$,
2. $\chi^-(\gamma, \eta, t_1) = -\chi^+(\gamma, \eta, t_2)$.

Ist $\tilde{\eta} \in \mathcal{S}^*$, so dass

1. $\tilde{\eta}(0) = \eta(t_1)$, $\tilde{\eta}(1) = \eta(t_3)$,
2. $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_3, 1]} \in \mathcal{S}^*$,
3. $\tilde{\eta} \cap \gamma = \{\tilde{\eta}(0)\}$,
4. $\chi^+(\gamma, \tilde{\eta}, 0) = \chi^+(\gamma, \eta, t_2)$,

dann nennen wir den Kreisbogenspline $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_3, 1]}$ eine Vereinfachung zweiter Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_3]$.

Definition 5.28. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$ und gelte $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$. Seien außerdem $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 < t_2$, so dass mit $x_1 := \eta(t_1)$, $x_2 := \eta(t_2)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_2]} = \{x_1, x_2\}$,
2. $\chi^+(\gamma, \eta, t_1) = \chi^-(\gamma, \eta, t_2) = 1$,
3. $\eta \cap \gamma|_{(t(x_1), t(x_2))} = \emptyset$ bzw. $\eta \cap \gamma|_{(t(x_2), t(x_1))} = \emptyset$, je nachdem ob $x_1 \prec_\gamma x_2$ ist oder umgekehrt.

Dann nennen wir den Kreisbogenspline $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_2, 1]}$ mit

$$\tilde{\eta} := \begin{cases} \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}, & x_1 \prec_\gamma x_2, \\ \bar{\gamma}|_{[t(x_1), t(x_2)]}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Vereinfachung dritter Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_2]$.

Bemerkung 5.29. Aus den Definitionen folgt direkt, dass die Vereinfachungen erster, zweiter und dritter Art wieder einfache Kreisbogensplines sind.

Man beachte, dass Definition 5.28 im Gegensatz zu den Definitionen 5.26 und 5.27 nicht symmetrisch ist: Der Kreisbogenspline γ wird von η in t_1 nach links verlassen und η nähert sich in t_2 von links an γ an. An dieser Stelle wird bewusst auf die entsprechende Aussage, in der links durch rechts ersetzt wird, verzichtet. Der Grund dafür ist eine entsprechende Asymmetrie in Lemma 5.33 auf Seite 127.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

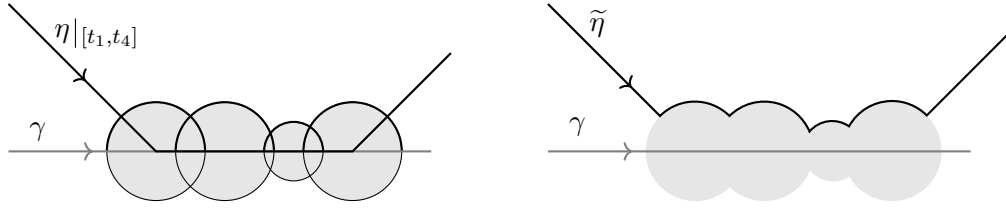


Abbildung 5.29: Illustration der Beweisidee von Proposition 5.31

Bemerkung 5.30. Die soeben definierten Vereinfachungen führen folgendermaßen zu einer „Verkleinerung“ der Schnittmenge: Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$. Dann gibt es paarweise disjunkte, abgeschlossene Intervalle $J_1, J_2, \dots, J_n \subset I$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\eta^{-1}(\gamma) = \bigcup_{i=1}^n J_i.$$

Man beachte, dass sowohl echte als auch einpunktige Intervalle auftreten. Mit $m \in \{0, \dots, n\}$ bezeichnen wir die Anzahl der echten Intervalle. Sei $\eta^* \in \mathcal{S}^*$ eine Vereinfachung von η bezüglich γ und seien $J_1^*, J_2^*, \dots, J_{n^*}^*$, $n^* \in \mathbb{N}$ und $m^* \in \{0, \dots, n^*\}$ entsprechend für η^* definiert. Dann ist genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $n^* = n - 1$,
2. $n^* = n$ und $m^* = m - 1$.

Wir werden η iterativ vereinfachen. Da entweder die Anzahl der Intervalle oder die der echten Intervalle abnimmt, folgt, dass dabei nur endlich viele Iterationen möglich sind.

Die folgende Proposition besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen eine Vereinfachung erster Art existiert. Die zugehörige Beweisidee wird in Abbildung 5.29 veranschaulicht: Da $\eta|_{[t_2, t_3]}$ mit den Bezeichnungen der Proposition kompakt ist und $\eta|_{[t_2, t_3]} \subset \gamma^\circ$ ist, können wir eine endliche Menge von lokalen Einfachheitsumgebungen bezüglich γ wählen, die $\eta|_{[t_2, t_3]}$ überdecken. Mit den Kreisbögen, die den linken Rand der Einfachheitsumgebungen beschreiben, lässt sich eine Vereinfachung erster Art von η bezüglich γ konstruieren.

Proposition 5.31. Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$ und gelte $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$. Seien $0 < t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < 1$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_4]} = \eta|_{[t_2, t_3]}$,
2. $\Delta(\gamma, \eta|_{[t_1, t_4]}) = 0$.

Dann gibt es eine Vereinfachung erster Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_4]$.

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

Beweis. Wir nehmen an, dass η den Kreisbogenspline γ in $[t_2, t_3]$ von links berührt, da der andere Fall analog bewiesen werden kann und wir nehmen an, dass $\eta(t_2) \preceq_\gamma \eta(t_3)$ ist, da wir andernfalls von γ zu $\bar{\gamma}$ übergehen können. Für jeden Punkt $x \in \eta|_{[t_2, t_3]}$ wählen wir eine lokale Einfachheitsumgebung $B_{\varepsilon_x}(x)$, $\varepsilon_x > 0$, von x bezüglich γ mit lokalem Parameterbereich $[t_1^x, t_2^x]$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

3. $\partial B_{\varepsilon_x}(x) \cap \gamma = \{\gamma(t_1^x), \gamma(t_2^x)\}$,
4. $\overline{B_{\varepsilon_x}(x)} \cap (\eta|_{[0, t_1]} \cup \eta|_{[t_3, 1]}) = \emptyset$, falls $x = \eta(t_2)$,
5. $\overline{B_{\varepsilon_x}(x)} \cap (\eta|_{[0, t_2]} \cup \eta|_{[t_4, 1]}) = \emptyset$, falls $x = \eta(t_3)$,
6. $\overline{B_{\varepsilon_x}(x)} \cap (\eta|_{[0, t_2]} \cup \eta|_{[t_3, 1]}) = \emptyset$, falls $x \in \eta|_{(t_2, t_3)}$.

Diese Wahl ist möglich, da γ einfach ist, $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$ ist und da die Bedingungen 3) bis 6) für hinreichend kleine ε_x stets erfüllt sind. Damit ist

$$\bigcup_{x \in \eta|_{[t_2, t_3]}} B_{\varepsilon_x}(x)$$

trivialerweise eine Überdeckung von $\eta|_{[t_2, t_3]}$. Da $\eta|_{[t_2, t_3]}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $J \subset \eta|_{[t_2, t_3]}$, so dass

$$\eta|_{[t_2, t_3]} \subset \bigcup_{x \in J} B_{\varepsilon_x}(x). \quad (5.21)$$

Wir können annehmen, dass J frei von Redundanzen ist, also dass für alle echten Teilmengen $J' \subsetneq J$ gilt, dass

$$\eta|_{[t_2, t_3]} \not\subset \bigcup_{x \in J'} B_{\varepsilon_x}(x).$$

Wir betrachten die lokalen Parameterbereiche genauer. Die Teilmengenbeziehung (5.21) ist äquivalent zu

$$\gamma^{-1}(\eta|_{[t_2, t_3]}) \subset \bigcup_{x \in J} (t_1^x, t_2^x). \quad (5.22)$$

Da J frei von Redundanzen ist, ist

$$t_1^x \neq t_1^y, \quad x, y \in J, \quad x \neq y,$$

und damit können wir die Punkte anhand des Parameterwertes t_1^x eindeutig aufsteigend sortieren. Sei also $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \eta|_{[t_2, t_3]}$, so dass

$$J = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

und

$$t_1^{x_1} < t_1^{x_2} < \dots < t_1^{x_n}. \quad (5.23)$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir ε_{x_j} mit ε_j sowie $t_1^{x_j}$ und $t_2^{x_j}$ mit t_1^j bzw. t_2^j , $j = 1, \dots, n$. Aus der Redundanzfreiheit folgt, dass

$$t_2^j < t_2^{j+1}, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (5.24)$$

und damit folgt aus (5.22), dass

$$t_1^{j+1} < t_2^j, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.25)$$

Aus (5.23), (5.24) und (5.25) folgt schließlich

$$t_1^j < t_1^{j+1} < t_2^j < t_2^{j+1}, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.26)$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir ζ_j als den negativ orientierten Kreisbogen auf $\partial B_{\varepsilon_j}(x_j)$ mit Anfangspunkt $\gamma(t_1^j)$ und Endpunkt $\gamma(t_2^j)$. Dann folgt aus (5.26) und Bedingung 3), dass

$$\zeta_j(0) \notin \overline{B_{\varepsilon_{j+1}}(x_{j+1})} \quad \text{und} \quad \zeta_j(1) \in B_{\varepsilon_{j+1}}(x_{j+1}), \quad j \in \{1, \dots, n-1\}$$

und damit ist

$$\zeta_j^\circ \cap \partial B_{\varepsilon_{j+1}}(x_{j+1}) \neq \emptyset, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Aus der Konsistenz der Links- und Rechtsumgebungen, vgl. Proposition 2.43, folgt

$$\zeta_j^\circ \cap \zeta_{j+1}^\circ \neq \emptyset, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Damit können wir für $j \in \{1, \dots, n-1\}$ einen Schnittpunkt $y_j \in \zeta_j^\circ \cap \zeta_{j+1}^\circ$ wählen. Für ζ_1 und ζ_n wollen wir zusätzliche Schnittpunkte mit $\eta|_{[t_1, t_2]}$ bzw. $\eta|_{[t_3, t_4]}$ wählen. Aus den Bedingungen 4) bis 6) folgt, dass

$$x_1 = \eta(t_2) \quad \text{und} \quad x_n = \eta(t_3)$$

und dass

$$\eta|_{(t_1, t_2)} \cap \partial B_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \eta|_{(t_3, t_4)} \cap \partial B_{\varepsilon_n}(x_n) \neq \emptyset.$$

Da sich der Kreisbogenspline η in t_2 von links an γ annähert und er γ in t_3 nach links verlässt, folgt daraus

$$\eta|_{(t_1, t_2)} \cap \zeta_1^\circ \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \eta|_{(t_3, t_4)} \cap \zeta_n^\circ \neq \emptyset$$

und wir wählen

$$y_0 \in \eta|_{(t_1, t_2)} \cap \zeta_1^\circ \quad \text{und} \quad y_n \in \eta|_{(t_3, t_4)} \cap \zeta_n^\circ.$$

Für $j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$\tilde{\zeta}_j := \begin{cases} \zeta_j|_{[t(y_{j-1}), t(y_j)]}, & y_{j-1} \prec_{\zeta_j} y_j, \\ \zeta_j|_{[t(y_j), t(y_{j-1})]}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

und

$$\tilde{\eta} := \eta|_{[t_1, t(y_0)]} \sqcup \tilde{\zeta}_1 \sqcup \dots \sqcup \tilde{\zeta}_n \sqcup \eta|_{[t(y_n), t_4]}.$$

Aus 3), $y_0 \in \zeta_1^\circ$ und $y_j \in \zeta_j^\circ$, $j = 1, \dots, n$, folgt

$$\tilde{\eta} \cap \gamma = \emptyset.$$

Falls $\tilde{\eta}$ einfach ist, ist $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \tilde{\eta} \sqcup \eta|_{[t_4, 1]}$ eine Vereinfachung erster Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_4]$. Andernfalls kann $\tilde{\eta}$ solange um „Schleifen“ verkürzt werden bis er einfach ist und wir erhalten damit die gesuchte Vereinfachung. \square

Analog zum Beweis von Proposition 5.31 lässt sich folgende Aussage beweisen:

Proposition 5.32. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$ und gelte $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap \eta = \emptyset$. Seien $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_3]} = \eta|_{[t_1, t_2]}$,
2. $\chi^-(\gamma, \eta, t_1) = -\chi^+(\gamma, \eta, t_2)$.

Dann gibt es eine Vereinfachung zweiter Art von η bezüglich γ in $[t_1, t_3]$.

Vorbereitende Lemmata

Als Vorbereitung auf die Beweise der Propositionen 5.21, 5.22 und 5.23 folgen einige sehr technische Lemmata, die sich in ihrer Struktur sowie in den Beweisen ähneln. Zentrales Hilfsmittel in den Beweisen sind die soeben definierten Vereinfachungen.

Die Aussage des folgenden Lemmas lässt sich leicht vereinfacht folgendermaßen formulieren: Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass $x := \eta(1) \in \gamma^\circ$ ist, $\Delta(\gamma, \eta) = -1$ ist und sie die folgende Eigenschaft besitzen: Jedes Teilstück $\eta|_{[0, t]}$, $t \in (0, 1]$ von η schneidet γ höchstens so oft von links wie von rechts. Dann überträgt sich diese Eigenschaft auf die Abschnitte $\gamma|_{[0, t(x)]}$ und $\gamma|_{[t(x), 1]}$, das heißt jedes Teilstück $\eta|_{[0, t]}$, $t \in (0, 1]$ von η schneidet $\gamma|_{[0, t(x)]}$ bzw. $\gamma|_{[t(x), 1]}$ höchstens so oft von links wie von rechts. Im Beweis wird der Kreisbogenspline η zuerst solange iterativ mit den soeben definierten Vereinfachungen verändert, bis die Aussage trivialerweise folgt. Ein Beispiel dieser Vereinfachungen ist in Abbildung 5.30 zu sehen.

Lemma 5.33. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta(0) \notin \gamma$, $\eta(1) \in \gamma^\circ$,
2. $\eta \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta) = -1$.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

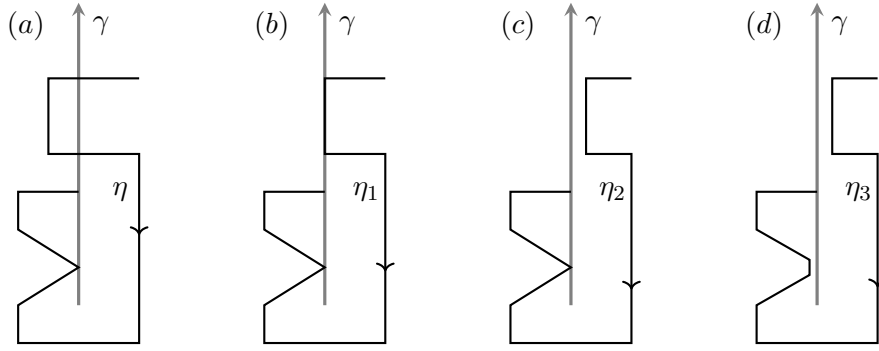


Abbildung 5.30: Illustration der iterativen Vereinfachungen von η bezüglich γ in Lemma 5.33: η_1 ist eine Vereinfachung dritter Art von η ; η_2 und η_3 sind Vereinfachungen erster Art von η_1 bzw. η_2

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1), \quad (5.27)$$

dann ist mit $x := \eta(1)$ sowohl

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1) \quad (5.28)$$

als auch

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1). \quad (5.29)$$

Beweis. Um den Beweis der eigentlichen Aussage zu vereinfachen werden wir η gegebenenfalls durch mehrfache Anwendung der Definitionen 5.26, 5.27 und 5.28 soweit wie möglich vereinfachen. Dazu zeigen wir zuerst, dass die Voraussetzungen des Lemmas auch dann noch erfüllt sind, wenn η durch eine Vereinfachung η^* bezüglich γ ersetzt wird: Die Bedingungen 1) bis 3) und dass $\eta^* \in \mathcal{S}^*$ ist, folgen direkt aus den Definitionen der Vereinfachungen. Außerdem folgt aus den Definitionen

$$\{\Delta(\gamma, \eta^*|_{[0,t]}) : t \in (0, 1)\} \subset \{\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) : t \in (0, 1)\}.$$

Damit gilt auch

$$\Delta(\gamma, \eta^*|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1)$$

und somit erfüllt η^* alle Voraussetzungen des Lemmas.

Als nächstes zeigen wir, dass für alle Vereinfachungen die folgende Aussage gilt: Sei η^* eine Vereinfachung von η bezüglich γ in $[t_1, t_4]$, $t_1, t_4 \in I$, die

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta^*|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1) \quad (5.30)$$

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

erfüllt. Dann erfüllt η die Ungleichung (5.28). Da aufgrund der unterschiedlichen Parametrisierung nicht notwendigerweise $\eta^*(t_1) = \eta(t_1)$ ist, verwenden wir die Punkte $x_1 := \eta(t_1)$ und $x_4 := \eta(t_4)$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass η^* eine Vereinfachung erster Art ist, das heißt, es gibt $t_2, t_3 \in [t_1, t_4]$, so dass $\eta|_{[t_1, t_4]} \cap \gamma = \eta|_{[t_2, t_3]}$ ist. Man beachte, dass in diesem Fall $\gamma \cap \eta^*|_{[t(x_1), t(x_4)]} = \emptyset$ ist. Falls $\eta|_{[t_1, t_4]} \cap \gamma|_{[0, t(x)]} = \emptyset$ ist, dann ist also

$$\{\Delta(\gamma, \eta^*|_{[0, t]}) : t \in (0, 1]\} = \{\Delta(\gamma, \eta|_{[0, t]}) : t \in (0, 1]\}$$

und damit ist in diesem Fall (5.30) genau dann erfüllt, wenn (5.28) erfüllt ist. Im Fall $\eta|_{[t_1, t_4]} \cap \gamma|_{[0, t(x)]} \neq \emptyset$ gilt wegen $\Delta(\gamma, \eta|_{[t_1, t_4]}) = 0$ und $\gamma \cap \eta^*|_{[t(x_1), t(x_4)]} = \emptyset$, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta|_{[0, t]}) = \begin{cases} \Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(\eta(t))]}), & t \in [0, t_1] \cup (t_4, 1], \\ \Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(x_1)]}), & t \in [t_1, t_2] \cup (t_3, t_4], \\ \Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(x_1)]}) \pm 1, & t \in [t_2, t_3]. \end{cases} \quad (5.31)$$

Für $t \in I \setminus [t_2, t_3]$ ist (5.28) damit also erfüllt. Wegen $\eta^*(0) = \eta(0) \notin \gamma$ folgt aus Proposition 2.58, dass $\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(x_1)]})$ gerade ist. Zusammen mit (5.30) folgt, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(x_1)]}) \geq 0$$

und somit folgt aus (5.31), dass (5.28) auch für $t \in [t_2, t_3]$ erfüllt ist. Ist η^* eine Vereinfachung zweiter Art, dann folgt aus der Definition

$$\{\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta|_{[0, t]}) : t \in (0, 1]\} = \{\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t]}) : t \in (0, 1]\}$$

und im Fall einer Vereinfachung dritter Art folgt

$$\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta|_{[0, t]}) = \begin{cases} \Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(\eta(t))]}), & t \in [0, t_1] \cup [t_4, 1], \\ \Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta^*|_{[0, t(x_1)]}) + 1, & t \in (t_1, t_4). \end{cases}$$

Damit ist (5.28) auch in diesen beiden Fällen erfüllt, da η^* die Ungleichung (5.30) erfüllt. Analog kann gezeigt werden, dass (5.29) aus

$$\Delta(\gamma|_{[t(x), 1]}, \eta^*|_{[0, t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1)$$

folgt. Aus dem bisher gezeigten folgt, dass es ausreichend ist die Behauptung für eine Vereinfachung von η bezüglich γ zu beweisen.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine Vereinfachung von η bezüglich γ gibt, falls

$$\chi^+(\gamma, \eta, t) = -1 \quad \text{für ein } t \in [0, 1]. \quad (5.32)$$

Wir nehmen an, dass (5.32) erfüllt ist und dass es keine Vereinfachung erster und zweiter Art gibt und zeigen, dass es dann eine Vereinfachung dritter Art gibt. Da

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

keine Vereinfachung erster und zweiter Art existiert, gilt für jedes $t \in I$ mit $\eta(t) \in \gamma$ entweder $\eta|_{[t,1]} \subset \gamma$ oder η schneidet γ in t von links oder rechts, vgl. Propositionen 5.31 und 5.32. Da (5.32) erfüllt ist, können wir ein minimales $t_2 \in [0, 1)$ wählen, so dass $\chi^+(\gamma, \eta, t_2) = -1$ ist. Damit wird γ von η in t_2 von links geschnitten. Aus (5.27) folgt, dass es ein $t_1 \in (0, t_2)$ gibt, in dem γ von η von rechts geschnitten wird und wir wählen t_1 maximal in $(0, t_2)$. Seien $x_1 := \eta(t_1)$ und $x_2 := \eta(t_2)$. Da die Fälle $x_1 \prec_\gamma x_2$ und $x_2 \prec_\gamma x_1$ analog gezeigt werden können, nehmen wir $x_1 \prec_\gamma x_2$ an. Da t_1 maximal und t_2 minimal gewählt wurden, gilt

$$\gamma \cap \eta|_{[t_1, t_2]} = \{x_1, x_2\}. \quad (5.33)$$

Falls

$$\eta \cap \gamma|_{(t(x_1), t(x_2))} = \emptyset \quad (5.34)$$

ist, dann ist $\eta|_{[0, t_1]} \sqcup \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]} \sqcup \eta|_{[t_2, 1]}$ eine Vereinfachung dritter Art und die Behauptung ist gezeigt. Andernfalls betrachten wir den einfach geschlossenen Kreisbogenspline

$$\zeta := \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]} \sqcup \overline{\eta|_{[t_1, t_2]}}.$$

Da η den Kreisbogenspline γ in t_1 von rechts und in t_2 von links schneidet, folgt aus Korollar 2.50 und (5.33)

4. η nähert sich in t_1 von rechts an ζ an,
5. η verlässt ζ in t_2 nach rechts,
6. $\gamma|_{[0, t(x_1))}, \gamma|_{(t(x_2), 1]} \subset R(\zeta)$.

Da t_2 der kleinste Parameter ist, in dem η den Kreisbogenspline γ von links schneidet, folgt aus 1), 4) und der Einfachheit von η , dass

$$\eta(0) \in R(\zeta). \quad (5.35)$$

Wir zeigen zunächst, dass $\eta(1) \notin \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}$ ist. Ist $\eta(t) \in \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}$, $t \in (t_2, 1]$, dann gibt es wegen 5) ein $t' \in (t_2, t]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind

7. $\eta|_{[t', t]} \subset \overline{L(\zeta)}$,
8. $\eta|_{[t' - \varepsilon, t']} \cap \overline{L(\zeta)} = \emptyset$,
9. $\eta|_{[t' - \varepsilon, t']} \cap \gamma = \emptyset$.

Da sich η in t' von rechts an γ annähert, folgt aus (5.27) und 6) zusammen mit den Propositionen 2.61 und 2.62

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t]}) &= \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t' - \varepsilon]}) + \Delta(\gamma, \eta|_{[t' - \varepsilon, t]}) = \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t' - \varepsilon]}) + \Delta(\zeta, \eta|_{[t' - \varepsilon, t]}) \\ &\geq -1 + \lambda_\zeta(t) - \lambda_\zeta(t' - \varepsilon) \geq -1 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

Aus (5.36) und 3) folgt

$$\eta(1) \notin \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}. \quad (5.37)$$

Sei nun $t'_1 \in I$ minimal, so dass $\eta(t'_1) \in \gamma|_{(t(x_1), t(x_2))}$. Aus (5.37) folgt $t'_1 \neq 1$ und aus (5.35) und 5) folgt, dass η den Kreisbogenspline γ in t'_1 von rechts schneidet. Aus 4) bzw. (5.37), 1) und 6) folgt, dass es ein $t'_2 \in (t'_1, 1)$ gibt, so dass η den Kreisbogenspline $\gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}$ in t'_2 von links schneidet und $\eta|_{(t'_1, t'_2)} \subset L(\zeta)$ ist. Wegen 6) gilt mit $x'_1 := \eta(t'_1)$ und $x'_2 := \eta(t'_2)$

$$\eta|_{[t'_1, t'_2]} \cap \gamma = \{x'_1, x'_2\}.$$

Da die Fälle $x'_1 \prec_\gamma x'_2$ und $x'_2 \prec_\gamma x'_1$ analog gezeigt werden können, nehmen wir $x'_1 \prec_\gamma x'_2$ an. Falls

$$\eta \cap \gamma|_{(t(x'_1), t(x'_2))} = \emptyset$$

ist, dann ist $\eta|_{[0, t'_1]} \sqcup \gamma|_{[t(x'_1), t(x'_2)]} \sqcup \eta|_{[t'_2, 1]}$ eine Vereinfachung dritter Art. Andernfalls können wir analog zur Konstruktion von x'_1, x'_2 ein Paar $x''_1, x''_2 \in \gamma|_{(t(x'_1), t(x'_2))}$ bestimmen. Da für die so konstruierte Folge von Punktpaaren

$$[t_\gamma(x_1), t_\gamma(x_2)] \supseteq [t_\gamma(x'_1), t_\gamma(x'_2)] \supseteq [t_\gamma(x''_1), t_\gamma(x''_2)] \supseteq \dots$$

gilt und da es nur endlich viele Parameter gibt, in denen η den Kreisbogenspline γ von links oder rechts schneidet, ist es schließlich möglich eine Vereinfachung dritter Art zu konstruieren.

Sei $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \mathcal{S}^*$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge sukzessiver Vereinfachungen, sei also η_1 eine Vereinfachung von η bezüglich γ , dann η_2 eine Vereinfachung von η_1 bezüglich γ , etc. Nach Bemerkung 5.30 gibt es keine unendliche Folge sukzessiver Vereinfachungen und damit folgt aus dem zuletzt gezeigten, dass $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \mathcal{S}^*$, $n \in \mathbb{N}$, so gewählt werden kann, dass

$$\chi^+(\gamma, \eta_n, t) \neq -1 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Daraus folgt

$$\chi^+(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta_n, t) \neq -1 \quad \text{für alle } t \in I$$

und

$$\chi^+(\gamma|_{[t(x), 1]}, \eta_n, t) \neq -1 \quad \text{für alle } t \in I$$

und damit folgt aus der Definition von Δ und Proposition 2.48, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0, t(x)]}, \eta_n|_{[0, t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1)$$

und

$$\Delta(\gamma|_{[t(x), 1]}, \eta_n|_{[0, t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1).$$

Da oben gezeigt wurde, dass damit die entsprechenden Ungleichungen für $\eta_{n-1}, \dots, \eta_1$ und schließlich η gelten, ist die Behauptung gezeigt. \square

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Das folgende Korollar unterscheidet sich von Lemma 5.33 im Wesentlichen darin, dass vorausgesetzt wird, dass der Punkt $\eta(0)$ auf dem Kreisbogenspline γ liegt. Der Kreisbogenspline η kann um ein Anfangsstück verkürzt werden, so dass darauf Lemma 5.33 anwendbar ist.

Korollar 5.34. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta(0), \eta(1) \in \gamma^\circ$,
2. $\eta \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta) = 0$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1), \quad (5.38)$$

dann gilt mit $x := \eta(1)$ für alle $t \in (0, 1)$, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) \geq \begin{cases} 0, & \eta(0) \prec_\gamma \eta(1), \\ -1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.39)$$

und dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta|_{[0,t]}) \geq \begin{cases} -1, & \eta(0) \prec_\gamma \eta(1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.40)$$

Beweis. Wir beweisen nur, dass (5.39) gilt, da die Ungleichung (5.40) analog gezeigt werden kann. Ist $\eta \subset \gamma$, dann ist

$$\eta \cap \gamma|_{[0,t(x)]} = \begin{cases} \eta, & \eta(0) \prec_\gamma \eta(1), \\ \{x\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Fall ist

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) = 0, \quad t \in (0, 1),$$

und damit folgt die Aussage in diesem Fall trivialerweise. Sei also $\eta \not\subset \gamma$. Dann gibt es einen minimalen Parameter $t_1 \in [0, 1)$, in dem η den Kreisbogenspline γ verlässt und es gibt einen Parameter $t_2 \in (t_1, 1)$ mit $\eta|_{(t_1, t_2]} \cap \gamma = \emptyset$. Nach Voraussetzung verlässt η den Kreisbogenspline γ in t_1 nach links und daraus folgt, dass

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0, t_2]}) = 1.$$

Daraus folgt sowohl

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[t_2, 1]}) = \Delta(\gamma, \eta|_{[0, 1]}) - \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t_2]}) = 0 - 1 = -1$$

als auch

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[t_2, t]}) = \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t]}) - \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t_2]}) = \Delta(\gamma, \eta|_{[0, t]}) - 1 \geq 0 - 1 = -1, \quad t \in (t_2, 1).$$

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

Da t_2 so gewählt wurde, dass insbesondere $\eta(t_2) \notin \gamma$ ist, können wir Lemma 5.33 auf γ und $\eta|_{[t_2,1]}$ anwenden und daraus folgt

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[t_2,t]}) \geq -1, \quad t \in (t_2, 1). \quad (5.41)$$

Ist $\eta(0) \prec_\gamma \eta(1)$, dann verlässt η den Kreisbogenspline $\gamma|_{[0,t(x)]}$ in t_1 nach links und andernfalls gilt $\eta|_{[0,t_2]} \cap \gamma|_{[0,t(x)]} = \emptyset$. Daraus folgt, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) \geq 0, \quad t \in (0, t_2], \quad (5.42)$$

sowie

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t_2]}) = \begin{cases} 1, & \eta(0) \prec_\gamma \eta(1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.43)$$

Aus (5.41) und (5.43) folgt für alle $t \in (t_2, 1)$, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t_2]}) + \Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[t_2,t]}) \geq \begin{cases} 0, & \eta(0) \prec_\gamma \eta(1), \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusammen mit (5.42) folgt die Behauptung. □

Analog lassen sich die „gespiegelten Versionen“ von Lemma 5.33 und Korollar 5.34 beweisen:

Lemma 5.35. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta(0) \notin \gamma$, $\eta(1) \in \gamma^\circ$,
2. $\eta \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta) = 1$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) \leq 1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1),$$

dann ist mit $x := \eta(1)$ sowohl

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) \leq 1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1)$$

als auch

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta|_{[0,t]}) \leq 1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1).$$

Korollar 5.36. *Seien $\gamma, \eta \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta(0), \eta(1) \in \gamma^\circ$,
2. $\eta \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta) = 0$.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta|_{[0,t]}) \leq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1),$$

dann gilt mit $x := \eta(1)$ für alle $t \in (0, 1)$, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x)]}, \eta|_{[0,t]}) \leq \begin{cases} 0, & \eta(0) \prec_{\gamma} \eta(1), \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta|_{[0,t]}) \leq \begin{cases} 1, & \eta(0) \prec_{\gamma} \eta(1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Aussage des folgenden Lemmas lässt sich leicht vereinfacht folgendermaßen formulieren: Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass $x := \eta_1(0) \in \gamma^\circ$ und $\eta_1(1) = \gamma(1)$ ist und sie die folgende Eigenschaft besitzen: η_1 verlässt γ in 0 nach links und jedes Teilstück $\eta_1|_{[0,t]}$, $t \in (0, 1]$, von η_1 schneidet γ höchstens so oft von links wie von rechts. Dann schneidet jeder einfache Kreisbogenspline η_2 mit $\eta_2(0) = \gamma(0)$ und $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$ den Kreisbogenspline $\gamma|_{[t(x),1]}$ höchstens so oft von links wie von rechts. Im Detail gilt:

Lemma 5.37. *Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_1(0) \in \gamma^\circ$, $\eta_1(1) = \gamma(1)$,
2. $\eta_1 \cap \{\gamma(0)\} = \emptyset$.

Sei außerdem $\eta_2 \in \mathcal{S}^$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

3. $\eta_2(0) = \gamma(0)$,
4. $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1), \tag{5.44}$$

dann gilt mit $x := \eta_1(0)$

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2) \geq 0. \tag{5.45}$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 5.33 wollen wir die Vereinfachungen aus den Definitionen 5.26, 5.27 und 5.28 anwenden. Dazu zeigen wir zuerst, dass wieder alle Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind, falls η_1 durch eine Vereinfachung η_1^* von η_1 bezüglich γ , die $\eta_1^* \cap \eta_2 = \emptyset$ erfüllt, ersetzt wird: Die Bedingungen 1) bis 4) und dass $\eta_1^* \in \mathcal{S}^*$ ist, folgen direkt aus den Definitionen der Vereinfachungen. Außerdem folgt aus den Definitionen

$$\{\Delta(\gamma, \eta_1^*|_{[0,t]}) : t \in (0, 1]\} \subset \{\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) : t \in (0, 1]\}$$

und damit ist auch (5.44) erfüllt.

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

Genauso folgt, dass wieder alle Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind, falls η_2 durch eine Vereinfachung η_2^* von η_2 bezüglich γ , die $\eta_1 \cap \eta_2^* = \emptyset$ erfüllt, ersetzt wird.

Als nächstes zeigen wir, dass für jede Vereinfachung η_2^* von η_2 bezüglich γ die folgende Aussage gilt: Ist $\eta_1 \cap \eta_2^* = \emptyset$ und

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2^*) \geq 0, \quad (5.46)$$

dann erfüllt η_2 die Ungleichung (5.45). Sei η_2^* eine entsprechende Vereinfachung. Aus $\eta_1 \cap \eta_2^* = \emptyset$ folgt insbesondere $\{x\} \cap \eta_2^* = \emptyset$ und aus Bedingung 4 folgt insbesondere $\{x\} \cap \eta_2 = \emptyset$. Damit folgt aus den Definitionen der Vereinfachungen, dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2) = \Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2^*)$$

und damit folgt aus (5.46), dass η_2 die Ungleichung (5.45) erfüllt.

Als weitere Vereinfachung führen wir das Verkürzen von η_2 am Ende ein: Ist $t^* \in (0, 1)$, so dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2|_{[t^*,1]}) \geq 1, \quad (5.47)$$

dann nennen wir $\eta_2|_{[0,t^*]}$ eine Vereinfachung von η_2 bezüglich γ . Offensichtlich sind auch für $\eta_2|_{[0,t^*]}$ die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und aus

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2|_{[0,t^*]}) \geq 0$$

folgt

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2) = \Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2|_{[0,t^*]}) + \Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2|_{[t^*,1]}) \geq 0 + 1 = 1.$$

Aus dem bisher gezeigten folgt, dass es ausreichend ist die Behauptung für entsprechende Vereinfachungen von η_1 und η_2 zu beweisen.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine Vereinfachung η_1^* von η_1 oder η_2^* von η_2 bezüglich γ gibt, die

$$\eta_1^* \cap \eta_2 = \emptyset \quad \text{bzw.} \quad \eta_1 \cap \eta_2^* = \emptyset \quad (5.48)$$

erfüllt, falls

$$\chi^+(\gamma, \eta_1, t) = -1 \quad \text{für ein } t \in [0, 1). \quad (5.49)$$

Wie im Beweis von Lemma 5.33 nehmen wir an, dass (5.49) erfüllt ist und dass es keine Vereinfachung erster und zweiter Art von η_1 und η_2 bezüglich γ und kein $t \in (0, 1)$, das (5.47) erfüllt, gibt und zeigen, dass es dann eine Vereinfachung dritter Art von η_1 oder η_2 bezüglich γ gibt, die (5.48) erfüllt. Es ist leicht zu sehen, dass die Umgebungen, in denen sich der ursprüngliche Kreisbogenspline und seine Vereinfachung im Beweis von Proposition 5.31 bzw. 5.32 unterscheiden beliebig klein gewählt werden können. Damit ändert die zusätzliche Bedingung (5.48) nichts an der Existenz einer Vereinfachung erster oder zweiter Art. Da keine Vereinfachung erster und zweiter Art existiert, folgt aus den Propositionen 5.31 und 5.32, dass für jedes $t \in I$ mit $\eta_1(t) \in \gamma$ genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

5. $\eta_1|_{[0,t]} \subset \gamma$,
6. $\eta_1|_{[t,1]} \subset \gamma$,
7. η_1 schneidet γ in t von links oder rechts.

Genauso gilt für jedes $t \in I$ mit $\eta_2(t) \in \gamma$ entweder $\eta_2|_{[0,t]} \subset \gamma$, $\eta_2|_{[t,1]} \subset \gamma$ oder dass η_2 den Kreisbogenspline γ in t von links oder rechts schneidet. Da (5.49) erfüllt ist, können wir $t_2 \in I$ minimal wählen, so dass $\chi^+(\gamma, \eta_1, t_2) = -1$ ist. Aus (5.44) folgt, dass γ von η_1 in t_2 von links geschnitten wird und dass es ein $t_1 \in (0, t_2)$ gibt, in dem γ von η_1 von rechts geschnitten wird und wir wählen dieses t_1 maximal in $(0, t_2)$. Seien $x_1 := \eta_1(t_1)$ und $x_2 := \eta_1(t_2)$. Da die Fälle $x_1 \prec_\gamma x_2$ und $x_2 \prec_\gamma x_1$ analog gezeigt werden können, nehmen wir $x_1 \prec_\gamma x_2$ an. Da t_1 maximal und t_2 minimal gewählt wurden, gilt

$$\gamma \cap \eta_1|_{[t_1, t_2]} = \{x_1, x_2\}. \quad (5.50)$$

Falls auch

$$(\eta_1 \cup \eta_2) \cap \gamma|_{(t(x_1), t(x_2))} = \emptyset$$

ist, dann ist $\eta_1|_{[0, t_1]} \sqcup \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]} \sqcup \eta_1|_{[t_2, 1]}$ eine Vereinfachung dritter Art. Andernfalls betrachten wir den einfach geschlossenen Kreisbogenspline

$$\zeta := \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]} \sqcup \overline{\eta_1|_{[t_1, t_2]}}.$$

Da η_1 den Kreisbogenspline γ in t_1 von rechts und in t_2 von links schneidet und da (5.50) gilt, folgt aus Korollar 2.50

8. η_1 nähert sich in t_1 von rechts an ζ an,
9. η_1 verlässt ζ in t_2 nach rechts,
10. $\gamma|_{[0, t(x_1))}, \gamma|_{(t(x_2), 1]} \subset R(\zeta)$.

Wegen $\eta_2(0) = \gamma(0)$ ist also $\eta_2(0) \in R(\zeta)$ und da wir angenommen haben, dass es keine Verkürzung von η_2 am Ende gibt, folgt außerdem $\eta_2(1) \in R(\zeta)$. Da sich η_1 in t_1 von rechts an ζ annähert und η_1 den Kreisbogenspline γ in $[0, t_1] \subset [0, t_2]$ aufgrund der minimalen Wahl von t_2 nicht nach rechts verlässt, folgt, dass $\eta_1|_{[0, t_1]} \subset R(\zeta)$ ist und somit gilt insbesondere, dass $\eta_1(0) \notin \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}$. Damit folgt analog zum Beweis von Lemma 5.33, dass für η_1 oder η_2 eine Vereinfachungen dritter Art existiert.

Analog zum Beweis von Lemma 5.33 können wir also im Folgenden annehmen, dass η_1 so lange durch Vereinfachungen ersetzt wurde, dass es keine Vereinfachung von η_1 bezüglich γ gibt und dass $\chi^+(\gamma, \eta_1, t) \neq -1$ für alle $t \in I$ gilt. Außerdem können wir annehmen, dass $\eta_1 \not\subset \gamma$ ist, da andernfalls

$$\eta_2 \cap \gamma|_{[t(x), 1]} = \eta_2 \cap \eta_1 = \emptyset$$

ist und damit (5.45) trivialerweise folgt. Aus den Propositionen 5.31 und 5.32 folgt damit, dass es Parameter $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

5.4 Vorbereitung des Beweises der Schleifeninvarianten

11. $\eta_1^{-1}(\gamma) = [0, t_1] \cup \{t_2, \dots, t_{n-1}\} \cup [t_n, 1]$,
12. η_1 schneidet γ in t_i von rechts, $i \in \{2, \dots, n-1\}$,
13. η_1 verlässt γ in t_1 nach links.

Seien $x_1 := \eta_1(t_1), \dots, x_n := \eta_1(t_n)$.

Wir zeigen zunächst, dass

$$x_i \prec_\gamma x_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.51)$$

Angenommen es gäbe ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $x_{i+1} \prec_\gamma x_i$. Dann ist

$$\zeta := \gamma|_{[t(x_{i+1}), t(x_i)]} \sqcup \eta_1|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

einfach geschlossen. Wegen $\eta_1|_{[t_n, 1]} = \gamma|_{[t(x_n), 1]}$ und der Einfachheit von η_1 gilt für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dass $x_i \prec_\gamma x_n$. Damit ist $i+1 < n$ und somit schneidet η_1 den Kreisbogenspline γ in t_{i+1} von rechts. Außerdem folgt aus 12) bzw. 13), dass η_1 den Kreisbogenspline γ in t_i nach links verlässt. Damit folgt aus Korollar 2.50, dass η_1 den Kreisbogenspline ζ in t_{i+1} nach links und γ den Kreisbogenspline ζ in x_i nach rechts verlässt. Wegen $\gamma|_{(t(x_i), 1]} \cap \zeta = \emptyset$ folgt damit $\eta_1(1) = \gamma(1) \in R(\zeta)$. Damit schneidet $\eta_1|_{[t_{i+1}, 1]}$ den Kreisbogen $\gamma|_{[t(x_{i+1}), t(x_i)]}$ von links. Dies führt zu einem Widerspruch mit 12) und damit ist gezeigt, dass (5.51) erfüllt ist.

Wir zeigen nun, dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_i), t(x_{i+1})]}, \eta_2) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Sei dazu $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und

$$\zeta_i := \gamma|_{[t(x_i), t(x_{i+1})]} \sqcup \overline{\eta_1|_{[t_i, t_{i+1}]}}.$$

Da η_1 den Kreisbogenspline γ in t_i nach links verlässt, folgt aus Korollar 2.50, dass sich γ in x_i von rechts an ζ_i annähert. Aus $\gamma|_{[0, t(x_i)]} \cap \zeta_i = \{x_i\}$ folgt damit $\eta_2(0) = \gamma(0) \in R(\zeta_i)$ und damit folgt aus $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$ und den Propositionen 2.61 und 2.62

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_i), t(x_{i+1})]}, \eta_2) = \Delta(\zeta_i, \eta_2) = \lambda_{\zeta_i}(\eta_2(1)) - \lambda_{\zeta_i}(\eta_2(0)) \geq 0. \quad (5.52)$$

Da $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$ ist, ist

$$\Delta(\gamma|_{[t(x), 1]}, \eta_2) = \Delta(\gamma|_{[t(x_1), t(x_n)]}, \eta_2). \quad (5.53)$$

Aus (5.51), (5.52) und (5.53) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma|_{[t(x), 1]}, \eta_2) &= \Delta(\gamma|_{[t(x_1), t(x_n)]}, \eta_2) \\ &= \Delta(\gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}, \eta_2) + \Delta(\gamma|_{[t(x_2), t(x_3)]}, \eta_2) + \dots + \Delta(\gamma|_{[t(x_{n-1}), t(x_n)]}, \eta_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für Vereinfachungen von η_1 und η_2 gezeigt. Analog zum Beweis von Lemma 5.33 lässt sich daraus auf die ursprüngliche Aussage schließen. \square

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Analog lässt sich die „gespiegelte Version“ von Lemma 5.37 beweisen:

Lemma 5.38. *Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_1(0) \in \gamma^\circ, \eta_1(1) = \gamma(1)$,
2. $\eta_1 \cap \{\gamma(0)\} = \emptyset$.

Sei außerdem $\eta_2 \in \mathcal{S}^$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

3. $\eta_2(0) = \gamma(0)$,
4. $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \leq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1),$$

dann gilt mit $x := \eta_1(0)$

$$\Delta(\gamma|_{[t(x),1]}, \eta_2) \leq 0.$$

Mithilfe von Lemma 5.33 lässt sich Lemma 5.37 abwandeln und die Forderung nach $\eta_1(1) = \gamma(1)$ durch $\Delta(\gamma, \eta_1) = 0$ ersetzen:

Lemma 5.39. *Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_1(0), \eta_1(1) \in \gamma^\circ$ und $\eta_1(0) \prec_\gamma \eta_1(1)$,
2. $\eta_1 \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta_1) = 0$.

Sei außerdem $\eta_2 \in \mathcal{S}^$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

4. $\eta_2(0) = \gamma(0)$,
5. $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1), \tag{5.54}$$

dann gilt mit $x_1 := \eta_1(0), x_2 := \eta_1(1)$

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_1),t(x_2)]}, \eta_2) \geq 0. \tag{5.55}$$

Beweis. Ist $\eta_1 \subset \gamma$, dann folgt aus 5), dass $\gamma|_{[t(x_1),t(x_2)]} \cap \eta_2 = \emptyset$ ist und damit folgt die Aussage trivialerweise. Sei also $\eta_1 \not\subset \gamma$. Dann können wir $t_1, t_2 \in [0, 1)$, $t_1 < t_2$, wählen, so dass

$$\eta_1|_{[0,t_1]} \subset \gamma \quad \text{und} \quad \eta_1|_{(t_1,t_2]} \cap \gamma = \emptyset. \tag{5.56}$$

Wegen (5.54) und 2) gilt für alle $t \in [0, t_2]$

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_1|_{[0,t]}) = \Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ 1, & t \in (t_1, t_2]. \end{cases} \quad (5.57)$$

Damit folgt aus 3), dass

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[t_2,1]}) = \Delta(\gamma, \eta_1) - \Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t_2]}) = -1$$

und aus (5.54), dass

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[t_2,t]}) = \Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) - \Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t_2]}) \geq -1, \quad t \in (t_2, 1]$$

Somit folgt aus Lemma 5.33, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_1|_{[t_2,t]}) \geq -1, \quad t \in (t_2, 1). \quad (5.58)$$

Aus (5.57) und (5.58) folgt

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_1|_{[0,t]}) \geq 0, \quad t \in (0, 1).$$

Somit können wir Lemma 5.37 auf die Kreisbogensplines $\gamma^* := \gamma|_{[0,t(x_2)]}$, η_1 und η_2 anwenden und erhalten

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_1),t(x_2)]}, \eta_2) = \Delta(\gamma^*|_{[t(x_1),1]}, \eta_2) \geq 0.$$

□

Die „gespiegelte Version“ kann wieder analog bewiesen werden:

Lemma 5.40. *Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_1(0), \eta_1(1) \in \gamma^\circ$ und $\eta_1(0) \prec_\gamma \eta_1(1)$,
2. $\eta_1 \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta_1) = 0$.

Sei außerdem $\eta_2 \in \mathcal{S}^$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

4. $\eta_2(0) = \gamma(0)$,
5. $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$.

Ist

$$\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \leq 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1),$$

dann gilt mit $x_1 := \eta_1(0)$, $x_2 := \eta_1(1)$

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_1),t(x_2)]}, \eta_2) \leq 0.$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Die im folgenden Lemma betrachtete Situation ist ähnlich zu Lemma 5.39. Jedoch wird diesmal zusätzlich für η_2 vorausgesetzt, dass es den Kreisbogenspline $\gamma|_{[0,t(\eta_1(1))]}$ höchstens so oft von links wie von rechts schneidet. Daraus lässt sich schließlich folgern, dass η_2 auch den Kreisbogenspline $\gamma|_{[0,t(\eta_1(0))]}$ höchstens so oft von links wie von rechts schneidet.

Lemma 5.41. *Seien $\gamma, \eta_1 \in \mathcal{S}^*$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\eta_1(0), \eta_1(1) \in \gamma^\circ$ und $\eta_1(0) \prec_\gamma \eta_1(1)$,
2. $\eta_1 \cap \{\gamma(0), \gamma(1)\} = \emptyset$,
3. $\Delta(\gamma, \eta_1) = 0$,
4. $\Delta(\gamma, \eta_1|_{[0,t]}) \geq 0$, für alle $t \in (0, 1)$.

Sei außerdem $\eta_2 \in \mathcal{S}^$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

5. $\eta_2(0) = \gamma(0)$,
6. $\eta_2 \cap \{\gamma(1)\} = \emptyset$,
7. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\eta_2|_{(0,\varepsilon]} \cap \gamma = \emptyset$,
8. $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$.

Sei $x_1 := \eta_1(0)$ und $x_2 := \eta_1(1)$. Ist

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_2|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1], \quad (5.59)$$

dann gilt

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_1)]}, \eta_2|_{[0,t]}) \geq -1 \quad \text{für alle } t \in (0, 1]. \quad (5.60)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 5.37 können wir η_1 und η_2 so lange durch Vereinfachungen bezüglich γ ersetzen, bis $\eta_1^\circ \cap \gamma = \emptyset$ ist. Wir nehmen also an, dass $\eta_1^\circ \cap \gamma = \emptyset$. Dann ist

$$\zeta := \gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]} \sqcup \overline{\eta_1}$$

einfach geschlossen. Aus 4) folgt, dass η_1 den Kreisbogenspline γ in 0 nach links verlässt und damit folgt aus Korollar 2.50, dass sich γ in x_1 von rechts an ζ annähert. Damit ist

$$\gamma|_{[0,t(x_1)]} \subset R(\zeta). \quad (5.61)$$

Insbesondere ist $\eta_2(0) = \gamma(0) \in R(\zeta)$ und somit folgt aus den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $t \in (0, 1]$, dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(x_1), t(x_2)]}, \eta_2|_{[0,t]}) = \Delta(\zeta, \eta_2|_{[0,t]}) = \lambda_\zeta(\eta_2(t)) - \lambda_\zeta(\eta_2(0)) = \begin{cases} 0, & \eta_2(t) \in R(\zeta), \\ 1, & \eta_2(t) \in \zeta, \\ 2, & \eta_2(t) \in L(\zeta). \end{cases}$$

Für $t \in (0, 1]$ mit $\eta_2(t) \in R(\zeta)$ folgt daraus zusammen mit (5.59), dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma|_{[0,t(x_1)]}, \eta_2|_{[0,t]}) &= \Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_2|_{[0,t]}) - \Delta(\gamma|_{[t(x_1),t(x_2)]}, \eta_2|_{[0,t]}) \\ &= \Delta(\gamma|_{[0,t(x_2)]}, \eta_2|_{[0,t]}) \geq -1. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Damit ist gezeigt, dass (5.60) für $t \in (0, 1]$ mit $\eta_2(t) \in R(\zeta)$ gilt.

Sei im Folgenden $t \in (0, 1]$ mit $\eta_2(t) \notin R(\zeta)$. Wegen $\eta_2(0) = \gamma(0) \in R(\zeta)$ und (5.61) folgt, dass es ein $t^* \in (0, t)$ gibt, so dass

$$\eta_2(t^*) \in R(\zeta) \quad \text{und} \quad \eta_2|_{[t^*,t]} \cap \gamma|_{[0,t(x_1)]} = \emptyset.$$

Daraus folgt mit (5.62), dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(x_1)]}, \eta_2|_{[0,t]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(x_1)]}, \eta_2|_{[0,t^*]}) \geq -1$$

und somit ist gezeigt, dass (5.60) für beliebige $t \in (0, 1]$ gilt. \square

5.5 Beweis der Schleifeninvarianten

Wir sind nun in der Lage die Propositionen 5.21 bis 5.23 auf Seite 120 zu beweisen:

Beweis (von Proposition 5.21). Da vorausgesetzt wurde, dass $L_j \neq n + 1$ ist und da der initiale Wert von L im Algorithmus $n + 1$ ist, ist $j \neq 1$. Es wurde im Algorithmus also bereits mindestens ein Update durchgeführt und damit können wir mit γ_i , L_i und gegebenenfalls r_i die entsprechenden Objekte vor dem letzten Update, also zum Zeitpunkt $i := j - 1$, bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Behauptung vor dem Update erfüllt war, also dass $L_i = n + 1$, oder andernfalls

$$\Delta(\gamma_i|_{[0,t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_i))}, \quad (5.63)$$

und leiten daraus ab, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[0,t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_j))}. \quad (5.64)$$

Da $L_1 = n + 1$ ist, ist diese Annahme initial trivialerweise erfüllt und damit ist es ausreichend einen einzelnen Updateschritt zu betrachten. Man beachte, dass wir dabei annehmen, dass beide Kreisbögen γ_i und γ_j generisch sind, da wir andernfalls zu einer Kanalerweiterung von K übergehen könnten, vgl. Bemerkung 5.24.

Wir betrachten zuerst einen Updateschritt mit rechter Verletzung, also gemäß Zeile 21 in Algorithmus 1. Dann ist $L_i = L_j \neq n + 1$. Damit sind r_i und r_j definiert und es handelt sich um ein Update mit festgehaltener linker Punktrestriktion oder festgehaltenem links-blockierenden Kreisbogen gemäß Proposition 5.9 bzw. 5.11, vgl. Bemerkung 5.20. Demnach ist $\gamma_j(0) \prec_\sigma \gamma_i(0)$ und da wir r_i und r_j minimal bezüglich

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

\prec_{κ} gewählt haben folgt daraus außerdem, dass $r_i \preceq_{\kappa_p^-} r_j$. Somit können wir $\sigma_{ji} := \sigma|_{[t(\gamma_j(0)), t(\gamma_i(0))]}$ und

$$\zeta := \sigma_{ji} \sqcup \gamma_i|_{[0, t(r_i)]} \sqcup \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r_j)]} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}}$$

definieren. Folgende Überlegung zeigt, dass ζ einfach geschlossen ist: Ist $r_i = r_j$, dann ist $\gamma_i^\circ \cap \gamma_j^\circ = \{r_i\}$ und $\kappa_p^-|_{(t(r_i), t(r_j))} = \emptyset$. Aufgrund der Definition potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen ist $\sigma_{ji}^\circ \cap \gamma_i = \emptyset$ und aus Lemma 4.6, 1) folgt, dass $\sigma_{ji}^\circ \cap \gamma_j = \emptyset$. Somit ist ζ in Fall $r_i = r_j$ einfach geschlossen. Andernfalls folgt aus Lemma 5.12, dass $\gamma_i^\circ \cap \gamma_j^\circ \neq \emptyset$ und

$$\gamma_i|_{[0, t(r_i)]} \sqcup \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r_j)]} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}}$$

einfach ist. Damit folgt analog, dass ζ einfach geschlossen ist.

Ist $\kappa_p^-(0) \in \sigma_{ji}$, dann folgt aus den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r_i))}$, dass

$$\begin{aligned} & \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \\ &= \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) + \Delta(\sigma_{ji}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - 1 \\ &= \Delta(\zeta, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - 1 = \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa_p^-(0)) - 1 = \lambda_\zeta(q) - 0 - 1 \leq 1 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Andernfalls folgt aus den Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen, dass $\kappa_p^-(0) \in L(\zeta)$ ist und damit folgt analog für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r_i))}$, dass

$$\begin{aligned} & \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \\ &= \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) + \Delta(\sigma_{ji}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \\ &= \Delta(\zeta, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa_p^-(0)) = \lambda_\zeta(q) - 1 \leq 1 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Falls $r_i \neq r_j$ ist, dann folgt aus Lemma 5.12, dass sich der Wert von $\Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \cdot)$ auf dem Teilstück $\kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r_j)]}$ nicht ändert und damit folgt aus (5.65) und (5.66), dass (5.64) im Fall eines Updateschritts mit rechter Verletzung aus (5.63) folgt.

Wir betrachten im Folgenden einen Updateschritt mit linker Verletzung, also gemäß Zeile 18 in Algorithmus 1, bzw. gemäß den Propositionen 5.14, 5.15 und 5.17, vgl. Bemerkung 5.20. Damit ist κ_{L_j} ein von links verletzender Kreisbogen von γ_i und κ_{L_j} enthält insbesondere eine linke Restriktion von γ_i , die bezüglich $\prec_{\kappa_p^-}$ vor r_j liegt. Diese bezeichnen wir mit r'_i . Aufgrund der Definition des Algorithmus gilt

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \begin{cases} \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r'_i)]}, & L_i \neq n+1, \\ \kappa_p^-|_{[0, t(r'_i)]}, & L_i = n+1. \end{cases} \quad (5.67)$$

Ist $L_i = n+1$ oder $r_i \neq r'_i$, dann fügen wir einen Zwischenschritt ein und zeigen zuerst, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^-|_{[0, t(r'_i)]}. \quad (5.68)$$

Wir betrachten also den Kreisbogen vor dem Updateschritt, ersetzen in (5.63) jedoch r_i durch eine bezüglich $\prec_{\kappa_p^-}$ spätere linke Restriktion r'_i . Wir beschränken uns auf den Fall $\gamma_i(0) \prec_{\sigma} \kappa_p^-(0)$, da andernfalls im Folgenden lediglich $\sigma|_{[t(\gamma_i(0)), t(\kappa_p^-(0))]}$ durch $\sigma|_{[t(\kappa_p^-(0)), t(\gamma_i(0))]}$ zu ersetzen ist. Im Fall $L_i = n + 1$ folgt mit $\gamma = \gamma_i$ und $\eta = \kappa_p^-|_{[0, t(r'_i)]}$ direkt aus Lemma 5.33, dass (5.68) erfüllt ist. Sei also $L_i \neq n + 1$ und $r_i \neq r'_i$. Außerdem nehmen wir zuerst an, dass $r_i \prec_{\gamma_i} r'_i$. Da r_i und r'_i linke Restriktionen von γ_i sind, ist

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r'_i)]}) = \Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(r'_i)]}) - \Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(r_i)]}) = -1 - (-1) = 0 \quad (5.69)$$

und wegen (5.67) gilt für alle $q \in \kappa_p^-|_{(t(r_i), t(r'_i))}$, dass

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[t(r_i), q]}) = \Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(r_i)]}) = \Delta(\gamma_i, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) + 1 \geq 0. \quad (5.70)$$

Damit folgt aus Lemma 5.39 für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r_i))}$ mit

$$\gamma = \gamma_i, \quad \eta_1 = \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r'_i)]} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \sigma|_{[t(\gamma_i(0)), t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa_p^-|_{[0, t(q)]},$$

dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r_i), t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_i|_{[t(r_i), t(r'_i)]}, \sigma|_{[t(\gamma_i(0)), t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq 0. \quad (5.71)$$

Somit folgt aus (5.63) für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r_i))}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) + \Delta(\gamma_i|_{[t(r_i), t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1. \quad (5.72)$$

Da

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}), \quad q \in \kappa_p^-|_{[0, t(r'_i)]},$$

nach Proposition 2.58 genau dann gerade ist, wenn $q \notin \gamma|_{[0, t(r'_i)]}$ ist, ist

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(r_i)]}) \geq -1 \quad (5.73)$$

Als nächstes zeigen wir, dass Ungleichung (5.68) für alle $q \in \kappa_p^-|_{(t(r_i), t(r'_i))}$ erfüllt ist. Mit (5.69) und (5.70) ist leicht zu prüfen, dass für $\gamma := \gamma_i$ und $\eta := \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(r'_i)]}$ die Voraussetzungen von Korollar 5.34 erfüllt sind. Daraus folgt für alle $q \in \kappa_p^-|_{(t(r_i), t(r'_i))}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(q)]}) \geq 0. \quad (5.74)$$

Aus (5.73) und (5.74) folgt für alle $q \in \kappa_p^-|_{(t(r_i), t(r'_i))}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) = \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(r_i)]}) + \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[t(r_i), t(q)]}) \geq -1. \quad (5.75)$$

Aus (5.72), (5.73) und (5.75) folgt schließlich, dass (5.68) im Fall $r_i \prec_{\gamma_i} r'_i$ gilt.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Wir zeigen als nächstes, dass (5.68) auch gilt, falls $r'_i \prec_{\gamma_i} r_i$. Sei also $r'_i \prec_{\gamma_i} r_i$. Analog zum Fall $r_i \prec_{\gamma_i} r'_i$ folgt, dass

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^- |_{[t(r_i), t(r'_i)]}) = 0$$

und

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^- |_{[t(r_i), q]}) \geq 0, \quad q \in \kappa_p^- |_{(t(r_i), t(r'_i))}.$$

Sei $q^* \in \kappa_p^- |_{[0, t(r_i)]}$ und seien

$$\begin{aligned} \gamma &:= \gamma_i, \\ \eta_1 &:= \kappa |_{[t(r'_i), t(r_i)]}, \\ \eta_2 &:= \sigma |_{[t(\gamma_i(0)), t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa_p^- |_{[0, t(q^*)]}. \end{aligned}$$

Wegen $\sigma |_{[t(\gamma_i(0)), t(\kappa_p^-(0))]} \cap \gamma_i = \{\gamma_i(0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_i, \eta_2) &= \Delta(\gamma_i, \kappa_p^- |_{[0, t(q^*)]}), \\ \Delta(\gamma_i |_{[0, t(r_i)]}, \eta_2) &= \Delta(\gamma_i |_{[0, t(r_i)]}, \kappa_p^- |_{[0, t(q^*)]}), \\ \Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \eta_2) &= \Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^- |_{[0, t(q^*)]}). \end{aligned} \tag{5.76}$$

Mit (5.63) ist somit leicht zu prüfen, dass für die Kreisbogensplines γ , η_1 und η_2 alle Voraussetzungen von Lemma 5.41 erfüllt sind und daraus folgt, dass

$$\Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \eta_2) \geq -1. \tag{5.77}$$

Wegen (5.76) und da $q^* \in \kappa_p^- |_{[0, t(r_i)]}$ beliebig gewählt war, folgt somit, dass

$$\Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^- |_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^- |_{[0, t(r_i)]}. \tag{5.78}$$

Analog zum Fall $r_i \prec_{\gamma_i} r'_i$ folgt, dass

$$\Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^- |_{[0, t(r_i)]}) \geq 0 \tag{5.79}$$

und

$$\Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^- |_{[t(r_i), t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^- |_{(t(r_i), t(r'_i))}, \tag{5.80}$$

und daraus, dass

$$\Delta(\gamma_i |_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^- |_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^- |_{(t(r_i), t(r'_i))}. \tag{5.81}$$

Aus (5.78), (5.79) und (5.81) folgt schließlich, dass (5.68) auch im Fall $r'_i \prec_{\gamma_i} r_i$ gilt.

Damit wollen wir nun zeigen, dass (5.64) auch nach einem Updateschritt mit linker Verletzung aus (5.63) folgt. Sei wieder $\sigma_{ji} := \sigma |_{[t(\gamma_j(0)), t(\gamma_i(0))]}$ und sei

$$\zeta := \sigma_{ji} \sqcup \gamma_i |_{[0, t(r'_i)]} \sqcup \kappa_p^- |_{[t(r'_i), t(r_j)]} \sqcup \overline{\gamma_j |_{[0, t(r_j)]}}.$$

Aufgrund der Definition von r'_i gilt $\kappa_p^-|_{[t(r'_i), t(r_j)]} \cap \gamma_i = \{r'_i\}$ und $\kappa_p^-|_{[t(r'_i), t(r_j)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$. Damit folgt analog zum Updateschritt mit rechter Verletzung, dass ζ einfach geschlossen ist. Außerdem folgt analog zu (5.65) bzw. (5.66) für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r'_i))}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) - \Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \leq 0.$$

Zusammen mit (5.68) folgt, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[0, t(r_j)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq \Delta(\gamma_i|_{[0, t(r'_i)]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r'_i))}.$$

Wegen $\kappa_p^-|_{[t(r'_i), t(r_j)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$ gilt die Ungleichung auch für alle $q \in \kappa_p^-|_{[t(r'_i), t(r_j))}$ und damit ist gezeigt, dass (5.64) auch im Fall eines Updateschritts mit linker Verletzung aus (5.63) folgt. \square

Mit ähnlichen Argumenten lässt sich auch Proposition 5.22 beweisen:

Beweis (von Proposition 5.22). Wir betrachten zuerst den Fall $j = 1$. Dazu nehmen wir an, dass kein Update in Zeile 10 notwendig ist, da wir uns andernfalls auf ein verletzungsfreies Endstück von κ_{R_1} beschränken könnten und den Updateschritt gesondert, analog zum später betrachteten Updateschritt mit rechter Verletzung gemäß Zeile 21, beweisen könnten. Damit ist κ_{R_1} frei von rechten Verletzungen. Gemäß Initialisierung, vgl. Zeile 8 in Algorithmus 1, ist R_1 der zur bezüglich \prec_κ größten rechten Restriktion von γ_1 gehörende Index. Da γ_1 außerdem generisch ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\kappa|_{[1-\varepsilon, 1]} \cap \gamma_1 = \emptyset$, damit folgt aus Proposition 3.15, dass

$$\Delta(\gamma_1, \kappa) = \Delta(\gamma_1, \kappa|_{[0, 1-\varepsilon]}) = \Delta(\gamma_1, \overline{\kappa|_{[1-\varepsilon, 1]}}) = 0$$

und somit folgt, dass

$$\Delta^+(\gamma_1, q) = \Delta(\gamma_1, \kappa|_{[0, t(q)]}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{(t(r_1), 1]}.$$

Daraus folgt wieder mit Proposition 3.15, dass

$$\Delta(\gamma_1, \overline{\kappa|_{[t(q), 1]}}) = \Delta(\gamma_1, \kappa|_{[0, t(q)]}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{(t(r_1), 1]}.$$

Da r_1 eine rechte Restriktion von γ_1 ist, also $\Delta(\gamma_1, \kappa|_{[0, t(r_1)]}) = 1$ ist, folgt, dass

$$\Delta(\gamma_1, \overline{\kappa|_{[t(r_1), 1]}}) = -\Delta(\gamma_1, \kappa|_{[t(r_1), 1]}) = \Delta(\gamma_1, \kappa|_{[0, t(r_1)]}) - \Delta(\gamma_1, \kappa) = 1 - 0 = 1.$$

Damit ist es leicht zu prüfen, dass für $\gamma = \gamma_1$ und $\eta = \overline{\kappa|_{[t(r_1), 1]}}$ alle Voraussetzungen von Lemma 5.35 erfüllt sind und damit folgt, dass

$$\Delta(\gamma_1|_{[t(r_1), 1]}, \overline{\kappa|_{[t(q), 1]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{(t(r_1), 1]}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung für $j = 1$ erfüllt ist.

Sei nun $j > 1$ und sei $i := j - 1$. Dann sind r_i und r_j die bezüglich \prec_κ minimalen rechten Restriktionen von γ_i in κ_{R_i} bzw. von γ_j in κ_{R_j} und aufgrund der Definition

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

des Algorithmus gilt $r_j \prec_{\kappa} r_i$. Wie im Beweis von Proposition 5.21 nehmen wir an, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa|_{(t(r_i),1)}, \quad (5.82)$$

und leiten daraus ab, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa|_{(t(r_j),1)}. \quad (5.83)$$

Man beachte, dass wir dabei annehmen, dass beide Kreisbögen γ_i und γ_j generisch sind, da wir andernfalls zu einer Kanalerweiterung von K übergehen könnten, vgl. Bemerkung 5.24.

Wir betrachten zuerst einen Updateschritt mit linker Verletzung, also gemäß Zeile 18 in Algorithmus 1. Damit ist $R_i = R_j$ und es handelt sich um ein Update mit festgehaltener rechter Punktrestriktion oder festgehaltenem rechts-blockierendem Kreisbogen gemäß Proposition 5.14 bzw. 5.15. Aus den Propositionen 5.14 und 5.15 und Lemma 5.16 folgt, dass die Kreisbögen γ_j und γ_i in Konfiguration zwei sind und dass der Kreisbogenspline

$$\zeta := \kappa|_{[t(r_j),t(r_i)]} \sqcup \gamma_i|_{[t(r_i),1]} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[t(r_j),1]}}$$

einfach geschlossen ist. Falls $r_i = r_j$ ist, dann folgt direkt aus Lemma 4.10, 4), dass

$$\kappa(1) \in R(\zeta). \quad (5.84)$$

Ist $r_i \neq r_j$, dann verlässt κ den Kreisbogen γ_j in r_j nach rechts. Damit folgt aus Korollar 2.50, dass sich γ_j in r_j von rechts an ζ annähert. Aus Lemma 5.16 folgt, dass $\gamma_j|_{[0,t(r_j))} \cap \zeta = \emptyset$ ist und aus den Eigenschaften potenzieller Sichtbarkeitskreisbögen, vgl. Definition 3.6, folgt, dass

$$\zeta \cap \sigma|_{[t(\gamma_j(0)),t(\kappa(1))]} = \emptyset \quad \text{bzw.} \quad \zeta \cap \sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma_j(0))]} = \emptyset$$

je nachdem, ob $\gamma_j(0) \prec_{\sigma} \kappa(1)$ ist oder umgekehrt. Damit folgt, dass (5.84) auch im Fall $r_i \neq r_j$ erfüllt ist. Da κ einfach ist, folgt aus (5.84) und den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $q \in \kappa|_{(t(r_i),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) - \Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) = \Delta(\zeta, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) = \lambda_{\zeta}(q) - \lambda_{\zeta}(\kappa(1)) \geq 0.$$

Mit (5.82) folgt daraus für alle $q \in \kappa|_{(t(r_i),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq \Delta(\gamma_i|_{[t(r_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1. \quad (5.85)$$

Ist $r_i = r_j$, dann ist damit gezeigt, dass (5.83) gilt. Im Fall $r_i \neq r_j$ ist $\kappa|_{[t(r_j),t(r_i)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$, vgl. Lemma 5.16, und damit ist (5.83) auch in diesem Fall erfüllt. Damit ist gezeigt, dass (5.83) im Fall eines Updateschritts mit linker Verletzung gemäß Zeile 18 aus (5.82) folgt.

Wir betrachten nun einen Updateschritt mit rechter Verletzung, also gemäß Zeile 21 in Algorithmus 1. Sei r'_i analog zum Beweis von Proposition 5.21 die rechte Restriktion von γ_i in κ_{R_j} , die bezüglich $\prec_{\overline{\kappa}}$ vor r_j liegt. Analog zum Updateschritt mit linker Verletzung im Beweis von Proposition 5.21 folgt, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{[t(r'_i),1]}. \quad (5.86)$$

Sei nun

$$\zeta := \gamma_i|_{[t(r'_i),1]} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[t(r_j),1]}} \sqcup \kappa|_{[t(r_j),t(r'_i)]}.$$

Da wir einen Updateschritt mit rechter Verletzung betrachten, handelt es sich entweder um ein Update mit linker Startrestriktion, festgehaltener linker Punktrestriktion oder festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen gemäß Proposition 5.5, 5.9 bzw. 5.11. Aus diesen Propositionen, Lemma 5.12 und aufgrund der Definition von r'_i folgt, dass ζ einfach geschlossen ist. Außerdem verlässt κ den Kreisbogen γ_j in r_j nach rechts und damit folgt analog zum Updateschritt mit linker Verletzung, dass $\kappa(1) \in R(\zeta)$. Somit folgt aus den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $q \in \kappa|_{(t(r'_i),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) - \Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) = \Delta(\zeta, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) = \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa(1)) \geq 0.$$

Zusammen mit (5.86) folgt, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq \Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa|_{(t(r'_i),1)}.$$

Wegen $\kappa|_{[t(r_j),t(r'_i)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$ gilt die Ungleichung auch für alle $q \in \kappa|_{[t(r_j),t(r'_i)]}$ und damit ist gezeigt, dass (5.83) auch im Fall eines Updateschritts mit rechter Verletzung aus (5.82) folgt. \square

Vor den Beweis von Proposition 5.23 fügen wir ein Lemma ein:

Lemma 5.42. *Sei $p \in \kappa$ und seien γ_j und γ_{j-1} der j -te bzw. $(j-1)$ -te potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen einer konkreten Ausführung von Algorithmus 1. Seien γ_{j-1} und γ_j generisch und sei γ_j so dass er keine Alternantenfolge der Länge drei in den im Update verwendeten Kanalkreisbögen besitzt. Sei R_j der entsprechende Wert von R und sei $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma_j \quad \text{oder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma_j = \emptyset$$

und

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma_{j-1} \quad \text{oder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma_{j-1} = \emptyset.$$

Handelt es sich nicht um ein Update mit festgehaltener rechter Endrestriktion, dann ist

$$\Delta(\gamma_j, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) \leq \Delta(\gamma_{j-1}, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}).$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Beweis. Laut Voraussetzung handelt es sich nicht um ein Update mit festgehaltener rechter Endrestriktion. Damit handelt es sich aufgrund der Definition des Algorithmus um ein Update gemäß Proposition 5.5, 5.9, 5.11, 5.14 bzw. 5.15. Aus diesen Propositionen und Lemma 5.12 bzw. 5.16 folgt, dass γ_j und γ_{j-1} in Konfiguration zwei, drei oder vier sind. Damit folgt aus Proposition 4.9, 4.11 bzw. 4.12, dass

$$\Delta(\gamma_{j-1}, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]}) - \Delta(\gamma_j, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]}) \geq 0.$$

□

Beweis (von Proposition 5.23). Wir betrachten zuerst den Fall $j = 1$. Dazu nehmen wir an, dass kein Update in Zeile 10 notwendig ist, da wir uns andernfalls auf ein verletzungsfreies Endstück von κ_{R_1} beschränken könnten und den Updateschritt gesondert, analog zum später betrachteten Updateschritt mit rechter Verletzung gemäß Zeile 21, beweisen könnten. Damit ist κ_{R_1} frei von rechten Verletzungen von γ_1 . Gemäß Initialisierung, vgl. Zeile 8 in Algorithmus 1, ist R_1 der zur bezüglich \prec_κ größten rechten Restriktion von γ_1 gehörende Index. Außerdem gibt es laut Voraussetzung ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass

$$\kappa_p^+ |_{[1-\varepsilon_1,1)} \cap \gamma_1 = \emptyset$$

und

$$\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon_1]}) = 0.$$

Damit folgt, dass

$$\Delta(\gamma_1, \kappa |_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+ |_{(t(r_1),1)},$$

und für alle $q \in \kappa_p^+ |_{(t(r_1),1-\varepsilon_1)}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_1, \overline{\kappa_p^+ |_{[t(q),1-\varepsilon_1]}}) &= -\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[t(q),1-\varepsilon_1]}) \\ &= \Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,t(q)]}) - \Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon_1]}) \leq 1. \end{aligned}$$

Da r_1 eine rechte Restriktion von γ_1 ist, also $\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,t(r_1)]}) = 1$ ist, folgt außerdem, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_1, \overline{\kappa_p^+ |_{[t(r_1),1-\varepsilon_1]}}) &= -\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[t(r_1),1-\varepsilon_1]}) \\ &= \Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,t(r_1)]}) - \Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon_1]}) = 1. \end{aligned}$$

Damit ist es leicht zu prüfen, dass für $\gamma = \gamma_1$ und $\eta = \overline{\kappa_p^+ |_{[t(r_1),1-\varepsilon_1]}}$ alle Voraussetzungen von Lemma 5.35 erfüllt sind und damit folgt aus diesem Lemma, dass

$$\Delta(\gamma_1 |_{[t(r_1),1]}, \overline{\kappa_p^+ |_{[t(q),1-\varepsilon_1]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+ |_{(t(r_1),1-\varepsilon_1)}.$$

Damit ist gezeigt, dass initial

$$\Delta(\gamma_1 |_{[t(r_1),1]}, \overline{\kappa_p^+ |_{[t(q),1-\varepsilon_1]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+ |_{(t(r_1),1-\varepsilon_1)}.$$

Sei nun $j > 1$ und sei $i := j - 1$. Dann sind r_i und r_j die bezüglich \prec_κ minimalen rechten Restriktionen von γ_i in κ_{R_i} bzw. von γ_j in κ_{R_j} und aufgrund der Definition des Algorithmus gilt $r_j \prec_\kappa r_i$. Man beachte, dass wir in diesem Fall annehmen, dass beide Kreisbögen γ_i und γ_j generisch sind, da wir andernfalls zu einer Kanalerweiterung von K übergehen könnten, vgl. Bemerkung 5.24. Sei $\varepsilon > 0$, so dass

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma_i \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma_i = \emptyset$$

und

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma_j \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma_j = \emptyset.$$

Wir nehmen zuerst an, dass

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) \neq 0. \quad (5.87)$$

Laut Voraussetzung ist

$$\Delta(\gamma_j, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) = 0 \quad (5.88)$$

und damit folgt aus Lemma 5.42, dass

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) > 0.$$

Damit ist p eine rechte Endrestriktion von γ_i und somit handelt es sich um einen Updateschritt mit $\kappa_p^+|_{[t(r_j),1]}$ als rechts-blockierenden Kreisbogen von γ_j . Zusammen mit (5.88) folgt, dass

$$\gamma_j \cap \kappa_p^+|_{[t(r_j),1]} = \{r_j, p\}.$$

Damit folgt insbesondere, dass

$$\gamma_j \cap \kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]} = \emptyset, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_j),1-\varepsilon)},$$

und damit folgt schließlich, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j),1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_j),1-\varepsilon)}. \quad (5.89)$$

Damit ist die Behauptung auch gezeigt, falls $j > 1$ und (5.87) gilt.

Im restlichen Beweis nehmen wir an, dass

$$\Delta(\gamma_i, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) = 0. \quad (5.90)$$

Wie im Beweis von Proposition 5.21 nehmen wir außerdem an, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r_i),1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_i),1-\varepsilon)}, \quad (5.91)$$

und leiten daraus ab, dass (5.89) gilt.

Wir betrachten zuerst einen Updateschritt mit linker Verletzung, also gemäß Zeile 18 in Algorithmus 1. Damit ist $R_i = R_j$ und es handelt sich um ein Update mit festgehaltener rechter Punktrestriktion oder festgehaltenem rechts-blockierendem Kreisbogen gemäß Proposition 5.14 bzw. 5.15. Aus den Propositionen 5.14 und 5.15 und

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Lemma 5.16 folgt, dass die Kreisbögen γ_j und γ_i in Konfiguration zwei sind und dass der Kreisbogenspline

$$\zeta := \kappa|_{[t(r_j), t(r_i)]} \sqcup \overline{\gamma_i|_{[t(r_i), 1]}} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}}$$

einfach geschlossen ist. Da die beiden Kreisbögen γ_j und γ_i in Konfiguration zwei sind, folgt aus (5.88), (5.90) und Proposition 4.9, dass

$$\kappa_p^+(1 - \varepsilon) \in R(\zeta). \quad (5.92)$$

Da κ einfach ist, folgt aus (5.92) und den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r_i), 1-\varepsilon)}$, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_i|_{[t(r_i), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) - \Delta(\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) &= \Delta(\zeta, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \\ &= \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa_p^+(1 - \varepsilon)) \geq 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.91) folgt daraus für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r_i), 1-\varepsilon)}$, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \leq \Delta(\gamma_i|_{[t(r_i), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \leq 1.$$

Ist $r_i = r_j$, dann ist damit gezeigt, dass (5.89) gilt. Im Fall $r_i \neq r_j$ ist $\kappa|_{[t(r_j), t(r_i)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$, vgl. Lemma 5.16, und damit ist gezeigt, dass (5.89) auch in diesem Fall gilt.

Wir betrachten nun einen Updateschritt mit rechter Verletzung, also gemäß Zeile 21 in Algorithmus 1. Sei r'_i analog zum Beweis von Proposition 5.21 die rechte Restriktion von γ_i in κ_{R_j} , die bezüglich \prec_κ nach r_j liegt. Analog zum Updateschritt mit linker Verletzung im Beweis von Proposition 5.21 folgt, dass

$$\Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \leq 1 \quad \text{für alle } q \in \kappa_p^+|_{[t(r'_i), 1-\varepsilon)}. \quad (5.93)$$

Sei nun

$$\zeta := \gamma_i|_{[t(r'_i), 1]} \sqcup \overline{\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}} \sqcup \kappa|_{[t(r_j), t(r'_i)]}.$$

Da wir einen Updateschritt mit rechter Verletzung betrachten, handelt es sich entweder um ein Update mit linker Startrestriktion, festgehaltener linker Punktrestriktion oder festgehaltenem links-blockierendem Kreisbogen gemäß Proposition 5.5, 5.9 bzw. 5.11. Aus diesen Propositionen, Lemma 5.12 und aufgrund der Definition von r'_i folgt, dass ζ einfach geschlossen ist. Außerdem folgt daraus, dass die beiden Kreisbögen γ_j und γ_i entweder in Konfiguration zwei, drei oder vier sind. Damit folgt aus (5.88), (5.90) und Proposition 4.9, 4.11 bzw. 4.12, dass $\kappa_p^+(1 - \varepsilon) \in R(\zeta)$. Somit folgt aus den Propositionen 2.61 und 2.62 für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r'_i), 1-\varepsilon)}$, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) - \Delta(\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) &= \Delta(\zeta, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \\ &= \lambda_\zeta(q) - \lambda_\zeta(\kappa_p^+(1 - \varepsilon)) \geq 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.93) folgt für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r'_i), 1-\varepsilon)}$, dass

$$\Delta(\gamma_j|_{[t(r_j), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \leq \Delta(\gamma_i|_{[t(r'_i), 1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q), 1-\varepsilon]}}) \leq 1.$$

Wegen $\kappa|_{[t(r_j), t(r'_i)]} \cap \gamma_j = \{r_j\}$ gilt die Ungleichung auch für alle $q \in \kappa|_{[t(r_j), t(r'_i)]}$ und damit ist gezeigt, dass (5.89) auch im Fall eines Updateschritts mit rechter Verletzung für γ_j und r_j erfüllt ist. \square

5.6 Korrektheitsbeweis und Laufzeitabschätzung

Es ist leicht zu sehen, dass Algorithmus 1 terminiert und dass in jedem Fall ein potenzieller Sichtbarkeitskreisbogen zurückgegeben wird. Endet der Algorithmus in Zeile 5 oder 25, dann besitzt der zurückgegebene Kreisbogen eine Alternantenfolge der Länge drei und damit entscheidet dieser nach Satz 3.24 bzw. 3.23 die Sichtbarkeit des Punkts p . Nicht so offensichtlich ist, dass das Ergebnis ein Sichtbarkeitskreisbogen ist, falls der Algorithmus in Zeile 29 endet. Die Schwierigkeit dabei ist zu zeigen, dass die Abschnitte, die zuletzt nicht mehr auf Verletzungen geprüft wurden, frei von Verletzungen sind. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Schleifeninvarianten aus den Propositionen 5.21, 5.22 und 5.23. Eine Laufzeituntersuchung folgt im Anschluss ab Seite 160.

Satz 5.43. *Terminiert eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1 in Zeile 29, dann ist das Ergebnis ein Sichtbarkeitskreisbogen.*

Um die Struktur des Beweises besser herauszustellen, ziehen wir ein paar Lemmata vor den eigentlichen Beweis.

Lemma 5.44. *Sei $p \in \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Seien γ und L die entsprechenden Objekte am Ende der Ausführung und sei γ generisch. Ist $L \neq n + 1$ dann sei r_1 die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von γ in κ_L . Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa_p^-|_{[t(r_1), 1]}, \quad L \neq n + 1, \quad (5.94)$$

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq -1, \quad q \in (\kappa_p^-)^\circ, \quad L = n + 1. \quad (5.95)$$

Ist $L \neq n + 1$, dann ist außerdem

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_1), 1]}, \kappa_p^-|_{[0, t(q)]}) \geq 0, \quad q \in \kappa_p^-|_{(0, t(r_1))}. \quad (5.96)$$

Beweis. Laut Definition von Algorithmus 1 sind die Kanalkreisbögen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{L-1}$ frei von linken Verletzungen von γ , da andernfalls ein weiteres Update von L stattgefunden hätte und L verkleinert worden wäre. Da im Fall $L \neq n + 1$ auch $\kappa_L|_{[0, t(r_1)]}$ für die Berechnung von γ benutzt wurde, vgl. Bemerkung 5.20, enthält auch der

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Kreisbogen $\kappa_L|_{[0,t(r_1)]}$ keine Verletzung von links von γ und damit folgt, dass (5.94) und (5.95) gelten.

Als nächstes zeigen wir, dass (5.96) erfüllt ist, falls $L \neq n+1$ ist. Sei also $L \neq n+1$ und sei $q^* \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_1))}$. Da r_1 eine linke Restriktion ist, also $\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(r_1)]}) = -1$ ist, folgt zusammen mit (5.94) für alle $q \in \kappa_p^-|_{(t(r_1),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[t(r_1),t(q)]}) = \Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) - \Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(r_1)]}) \geq -1 + 1 = 0. \quad (5.97)$$

Damit ist leicht zu prüfen, dass für

$$\begin{aligned} & \gamma, \\ & \eta_1 := \kappa_p^-|_{[t(r_1),1]}, \\ & \eta_2 := \begin{cases} \sigma|_{[t(\gamma(0)),t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}, & \gamma(0) \prec_\sigma \kappa_p^-(0), \\ \overline{\sigma|_{[t(\kappa_p^-(0)),t(\gamma(0))]} \sqcup \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}}, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Lemma 5.37 erfüllt sind und daraus folgt, dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \eta_2) \geq 0. \quad (5.98)$$

Da r_1 eine linke Restriktion von γ ist, gilt $\gamma|_{[t(r_1),1]} \cap \sigma = \emptyset$, vgl. Proposition 3.9 und Bemerkung 5.8. Somit folgt aus (5.98), dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}) = \Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \eta_2) \geq 0. \quad (5.99)$$

Da $q^* \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_1))}$ beliebig gewählt wurde, ist gezeigt, dass (5.96) gilt. \square

Korollar 5.45. *Sei $p \in \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Sei γ der potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen am Ende der Ausführung und sei γ generisch. Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in (\kappa_p^-)^\circ. \quad (5.100)$$

Beweis. Sei L der entsprechende Wert am Ende der Ausführung. Falls $L = n+1$ dann folgt die Behauptung direkt aus Lemma 5.44. Sei also $L \neq n+1$ und sei r_1 die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von γ in κ_L . Laut Proposition 5.21 gilt für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_1))}$

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1$$

und damit folgt zusammen mit (5.96) in Lemma 5.44 für alle $q \in \kappa_p^-|_{(0,t(r_1))}$, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) + \Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1 + 0 = -1.$$

Zusammen mit (5.94) in Lemma 5.44 folgt schließlich, dass (5.100) gilt. \square

Lemma 5.46. *Sei $p \in \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Seien γ und R die entsprechenden Objekte am Ende der Ausführung und sei γ generisch. Sei r_2 die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ in κ_R und sei $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma. \quad (5.101)$$

Dann ist

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}. \quad (5.102)$$

Ist $\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]} \not\subset \gamma$ und damit insbesondere $r_2 \neq p$, dann ist

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) = 0 \quad (5.103)$$

und

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 0, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}. \quad (5.104)$$

Beweis. Analog zum Beweis von (5.94) in Lemma 5.44 folgt, dass die Kanalkreisbögen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{R-1}$ und $\kappa_R|_{[0,t(r_2)]}$ frei von rechten Verletzungen von γ sind und daraus folgt, dass (5.102) gilt.

Im Folgenden gelte

$$\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]} \not\subset \gamma. \quad (5.105)$$

Außerdem nehmen wir an, dass

$$\kappa_p^+ \cap \sigma|_{[t(\kappa(1)),1]} = \emptyset, \quad (5.106)$$

da wir andernfalls zu einer Vereinfachung erster Art von κ_p^+ bezüglich σ übergehen könnten, vgl. Bemerkung 3.2. Wir zeigen zuerst, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) \leq 0. \quad (5.107)$$

Initial, also in Zeile 8 in Algorithmus 1, ist p entweder eine rechte Endrestriktion des initialen potenziellen Sichtbarkeitskreisbogens γ_1 oder es gilt

$$\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) \leq 0. \quad (5.108)$$

Gilt (5.108), dann tritt in dieser Ausführung aufgrund der Definition des Algorithmus kein Updateschritt mit festgehaltener rechter Endrestriktion auf. Somit folgt in diesem Fall aus Lemma 5.42, dass (5.107) erfüllt ist. Ist p eine rechte Endrestriktion von γ_1 , dann betrachten wir den ersten Updateschritt ohne festgehaltene rechte Endrestriktion und wir bezeichnen den potenziellen Sichtbarkeitskreisbogen vor dem Update mit γ_1 und den nach dem Update mit γ_2 . Wird in diesem Updateschritt der letzte Kreisbogen in κ_p^+ , den wir mit η bezeichnen, als rechts-blockierender Kreisbogen verwendet, dann folgt aus deren Definition, dass

$$\Delta(\gamma_2, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) = 0, \quad q \in \eta^\circ.$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Wird η nicht als rechts-blockierender Kreisbogen verwendet, dann ist dieser frei von rechten Verletzungen und damit folgt aus Proposition 2.58 für alle $q \in \eta^\circ$, dass

$$\Delta(\gamma_1, \kappa_p^+ |_{[0,t(q)]}) \leq \begin{cases} 1, & \eta \subset \gamma_1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt aus Lemma 5.42 und gegebenenfalls Proposition 2.58, dass

$$\Delta(\gamma_2, \kappa_p^+ |_{[0,t(q)]}) \leq 0, \quad q \in \eta^\circ.$$

Da in der weiteren Ausführung des Algorithmus kein Updateschritt mit festgehaltener rechter Endrestriktion auftritt, folgt wieder aus Lemma 5.42, dass (5.107) gilt.

Als nächstes zeigen wir, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]}) \geq 0. \quad (5.109)$$

Wir nehmen dazu zuerst an, dass $\gamma(0) \prec_\sigma \kappa(1)$ und definieren

$$\begin{aligned} \gamma^* &:= \sigma |_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \\ \eta_1 &:= \sigma |_{[t(\gamma(0)),t(\kappa(1))]} \sqcup \kappa_p^-. \end{aligned}$$

Da γ den Kreisbogen σ in 0 nach rechts verlässt, vgl. Definition 3.6 und Proposition 3.9, verlässt η_1 nach Korollar 2.50 den Kreisbogenspline γ^* in 0 nach links. Damit gilt

$$\Delta(\gamma^*, \sigma |_{[t(\gamma(0)),t(q)]}) = 1, \quad q \in \sigma |_{[t(\gamma(0)),t(\kappa(1))]},$$

und wegen $\sigma |_{[0,t(\gamma(0))]} \cap \kappa_p^- = \emptyset$ folgt aus Korollar 5.45 für alle $q \in (\kappa_p^-)^\circ$, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma^*, \eta_1 |_{[0,t(q)]}) &= \Delta(\gamma^*, \sigma |_{[t(\gamma(0)),t(\kappa(1))]} \sqcup \kappa_p^- |_{[0,t(q)]}) \\ &= \Delta(\gamma^*, \sigma |_{[t(\gamma(0)),t(\kappa(1))]}) + \Delta(\gamma^*, \kappa_p^- |_{[0,t(q)]}) \\ &= 1 + \Delta(\gamma, \kappa_p^- |_{[0,t(q)]}) \geq 0. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu prüfen, dass die restlichen Voraussetzungen von Lemma 5.37 für γ^* , η_1 und $\eta_2 := \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]}$ erfüllt sind und somit folgt daraus, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]}) \geq 0.$$

Somit ist gezeigt, dass (5.109) im Fall $\gamma(0) \prec_\sigma \kappa(1)$ gilt. Ist $\kappa(1) \prec_\sigma \gamma(0)$, dann folgt mit

$$\begin{aligned} \gamma^* &:= \sigma |_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \\ \eta_1 &:= \kappa_p^-, \\ \eta_2 &:= \kappa_p^+ |_{[0,1-\varepsilon]} \end{aligned}$$

analog aus Lemma 5.37 und (5.106), dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) = \Delta(\sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) \geq 0.$$

Damit folgt auch im Fall $\kappa(1) \prec_\sigma \gamma(0)$, dass (5.109) gilt.

Aus (5.107) und (5.109) folgt schließlich, dass (5.103) gilt.

Zuletzt zeigen wir, dass (5.104) gilt. Sei $q^* \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}$ und seien

$$\begin{aligned} \gamma^* &:= \overline{\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma}, \\ \eta_1 &:= \overline{\kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}}, \\ \eta_2 &:= \overline{\kappa_p^+|_{[t(q^*),1]}}. \end{aligned}$$

Aus (5.102) und (5.106) folgt für alle $q \in \kappa_p^+|_{(0,t(r_2))}$, dass

$$\Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) = \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{(0,t(r_2))},$$

und

$$\Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}) = \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}) = 1.$$

Daraus folgt für alle $q \in \kappa_p^+|_{(0,t(r_2))}$, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma^*, \eta_1|_{[0,t(q)]}) &= \Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[t(q),t(r_2)]}) \\ &= \Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}) - \Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) \geq 0. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Kreisbogensplines γ^* , η_1 und η_2 auch die restlichen Voraussetzungen von Lemma 5.37 erfüllen und damit erhalten wir

$$\Delta(\gamma^*|_{[t(r_2),1]}, \eta_2) \geq 0. \quad (5.110)$$

Aus der Definition der Kanäle, vgl. Definition 3.1, folgt insbesondere

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \eta_2) = \Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_2)]}, \eta_2)$$

und damit folgt aus (5.110), dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \eta_2) = \Delta(\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_2)]}, \eta_2) = -\Delta(\gamma^*|_{[t(r_2),1]}, \eta_2) \leq 0. \quad (5.111)$$

Da γ generisch ist, also $\kappa(0) \notin \gamma$ ist, folgt aus Proposition 2.58 und (5.103), dass $\kappa_p^+(1-\varepsilon) \notin \gamma$ ist. Somit folgt aus der Definition von ε gemäß (5.101), dass

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset.$$

Daraus folgt insbesondere, dass

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma|_{[0,t(r_2)]} = \emptyset$$

und damit folgt aus (5.111), dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q^*),1-\varepsilon]}}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \eta_2) \leq 0.$$

Da $q^* \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}$ beliebig gewählt wurde, ist gezeigt, dass (5.104) gilt. \square

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Lemma 5.47. *Sei $p \notin \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Seien γ und R die entsprechenden Objekte am Ende der Ausführung, sei γ generisch und sei r_2 die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ in κ_R . Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \kappa|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa|_{(0,t(r_2))}, \quad (5.112)$$

und

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \leq 0, \quad q \in \kappa|_{(t(r_2),1)}. \quad (5.113)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 5.44 folgt, dass die Kanalkreisbögen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{R-1}$ und $\kappa_R|_{[0,t(r_2)]}$ frei von rechten Verletzungen von γ sind und daraus folgt, dass (5.112) gilt.

Im Folgenden zeigen wir, dass (5.113) gilt. Wir nehmen zuerst an, dass $\gamma(0) \prec_\sigma \kappa(1)$ und wir wählen $q^* \in \kappa|_{(t(r_2),1)}$. Seien

$$\begin{aligned} \gamma^* &:= \overline{\sigma|_{[t(\gamma(0)),t(\kappa(1))]} \sqcup \gamma}, \\ \eta_1 &:= \overline{\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \kappa|_{[0,t(r_2)]}}, \\ \eta_2 &:= \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Kanäle und der potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen und aus Korollar 2.50 folgt, dass η_1 den Kreisbogenspline γ^* in 0 nach rechts verlässt. Da es in $\kappa|_{[0,t(r_2)]}$ keine rechte Verletzung von γ gibt und r_2 eine rechte Restriktion von γ ist, folgt daraus, dass

$$\Delta(\gamma^*, \eta_1|_{[0,t]}) \leq 0, \quad t \in (0,1),$$

und

$$\Delta(\gamma^*, \eta_1) = 0.$$

Es ist leicht zu prüfen, dass auch die restlichen Voraussetzungen von Lemma 5.40 erfüllt sind und damit folgt direkt, dass

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}) \leq 0.$$

Da $q^* \in \kappa|_{(t(r_2),1)}$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus, dass (5.113) im Fall $\gamma(0) \prec_\sigma \kappa(1)$ gilt.

Gelte im Folgenden $\kappa(1) \prec_\sigma \gamma(0)$. Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\kappa_p^-|_{[0,\varepsilon]} \cap \gamma = \emptyset$ und sei $q^* \in \kappa_p^-|_{(\varepsilon,t(r_2))}$. Mit

$$\begin{aligned} \gamma^* &:= \overline{\kappa|_{[1-\varepsilon,1]} \sqcup \sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma}, \\ \eta_1 &:= \overline{\sigma|_{[0,t(\kappa_p^-(0))]} \sqcup \kappa|_{[0,t(r_2)]}}, \\ \eta_2 &:= \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q^*)]} \end{aligned}$$

folgt analog zum ersten Fall aus Lemma 5.40, dass

$$\Delta(\sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q^*)]}) \leq 0.$$

Wegen $\kappa|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset$ und $\kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q^*)]} \cap \sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma(0))]} = \emptyset$ folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q^*)]}) &= \Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q^*)]}) \\ &= \Delta(\sigma|_{[t(\kappa(1)),t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_2)]}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q^*)]}) \leq 0. \end{aligned}$$

Da $q^* \in \kappa_p^-|_{(\varepsilon,t(r_2))}$ beliebig gewählt wurde und $\kappa|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset$ ist, ist auch im Fall $\kappa(1) \prec_\sigma \gamma(0)$ gezeigt, dass (5.113) gilt. \square

Korollar 5.48. *Sei $p \notin \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Sei γ der potenzielle Sichtbarkeitskreisbogen am Ende der Ausführung und sei γ generisch. Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \kappa|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa^\circ. \quad (5.114)$$

Beweis. Sei R der entsprechende Wert am Ende der Ausführung und sei r_2 die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ in κ_R . Laut Proposition 5.22 gilt für alle $q \in \kappa|_{(t(r_2),1)}$

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 1$$

und damit folgt zusammen mit (5.113) in Lemma 5.47 für alle $q \in \kappa|_{(t(r_2),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) + \Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}) \leq 0 + 1 = 1.$$

Nach Proposition 3.15 gilt

$$\Delta(\gamma, \kappa|_{[0,t(q)]}) = \Delta(\gamma, \overline{\kappa|_{[t(q),1]}}), \quad q \in \kappa^\circ,$$

und damit folgt zusammen mit (5.112) in Lemma 5.47 schließlich, dass (5.114) gilt. \square

Lemma 5.49. *Sei $p \notin \kappa$. Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert. Seien γ und L die entsprechenden Objekte am Ende der Ausführung und sei γ generisch. Ist $L \neq n + 1$ dann sei r_1 die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von γ in κ_L . Dann gilt*

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa|_{[0,t(r_1)]}, \quad L \neq n + 1, \quad (5.115)$$

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa^\circ, \quad L = n + 1. \quad (5.116)$$

Ist $L \neq n + 1$, dann gilt außerdem

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) = 0, \quad q \in \kappa|_{(t(r_1),1)}. \quad (5.117)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 5.44 folgt, dass die Kanalkreisbögen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{L-1}$ und im Fall $L \neq n + 1$ auch $\kappa_L|_{[0,t(r_1)]}$ frei von linken Verletzungen von γ sind. Daraus folgt, dass (5.115) und (5.116) gelten.

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

Im Folgenden nehmen wir an, dass $L \neq n + 1$ ist und wir zeigen, dass (5.117) gilt. Sei

$$\zeta := \sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_1)]} \sqcup \overline{\kappa|_{[0,t(r_1)]}}.$$

Wir nehmen an, dass $\gamma \cap \kappa|_{[t(r_1)-\varepsilon,t(r_1)]} = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$. Andernfalls könnten wir r_1 durch den bezüglich \prec_κ minimalen Punkt $r'_1 \in \kappa|_{[0,t(r_1)]}$, für den $\kappa|_{[t(r'_1),t(r_1)]} \subset \gamma$ gilt, ersetzen. Aus Korollar 5.48 und (5.115) folgt, dass $\kappa|_{[0,t(r_1)]}$ den Kreisbogen γ weder von links noch von rechts schneidet. Da r_1 eine linke Restriktion von γ ist, folgt daraus, dass sich κ in r_1 von links an γ annähert. Außerdem folgt daraus, dass wir $\kappa|_{[0,t(r_1)]}$ iterativ so lange durch eine Vereinfachung erster Art bezüglich $\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \sqcup \gamma|_{[0,t(r_1)]}$, die $\kappa|_{[t(r_1),1]}$ nicht schneidet, ersetzen können, bis ζ einfach geschlossen ist. Wir nehmen im Folgenden also an, dass ζ einfach geschlossen ist. Da sich κ in r_1 von links an γ annähert, folgt aus Korollar 2.50, dass γ den Kreisbogenspline ζ in r_1 nach rechts verlässt und da ζ den Kreisbogen $\gamma|_{[t(r_1),1]}$ weder von links noch von rechts schneidet, folgt daraus, dass

$$\gamma|_{(t(r_1),1]} \subset \overline{R(\zeta)}. \quad (5.118)$$

Aufgrund der Definition der Kanäle und der potenziellen Sichtbarkeitskreisbögen ist leicht zu prüfen, dass

$$\kappa_p^-|_{(0,t(r_1))} \cap (\sigma|_{[0,t(\gamma(0))]} \cup \kappa|_{[0,t(r_1)]}) = \emptyset \quad (5.119)$$

und dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\kappa_p^-|_{(0,\varepsilon]} \cap (\gamma \cup \zeta) = \emptyset \quad (5.120)$$

und dass für dieses ε außerdem gilt, dass

$$\kappa_p^-|_{(0,\varepsilon]} \subset L(\zeta). \quad (5.121)$$

Aus (5.119), (5.120) und Proposition 5.21 folgt für alle $q \in \kappa_p^-|_{(\varepsilon,t(r_1))}$, dass

$$\Delta(\zeta, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q)]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[\varepsilon,t(q)]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1.$$

Damit folgt aus (5.121) und den Propositionen 2.62 und 2.61, dass

$$\kappa_p^-|_{(0,t(r_1))} \subset \overline{L(\zeta)}$$

und wegen (5.119) gilt sogar

$$\kappa_p^-|_{(0,t(r_1))} \subset L(\zeta) \cup \gamma|_{[0,t(r_1)]}. \quad (5.122)$$

Aus (5.118) und (5.122) folgt, dass

$$\gamma|_{[t(r_1),1]} \cap \kappa_p^-|_{(0,t(r_1))} = \emptyset$$

und daraus folgt, dass (5.117) gilt. \square

Beweis (von Satz 5.43). Wir betrachten eine konkrete Ausführung von Algorithmus 1, die in Zeile 29 terminiert und bezeichnen mit L , R und γ die entsprechenden Objekte am Ende der Ausführung. Außerdem sei r_2 die bezüglich \prec_κ minimale rechte Restriktion von γ in κ_R und falls $L \neq n + 1$, dann sei r_1 die bezüglich \prec_κ minimale linke Restriktion von γ in κ_L .

Wir nehmen an, dass γ generisch ist, da wir andernfalls für jede ε -Erweiterung K^* des Kanals K mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ zeigen könnten, dass γ ein Sichtbarkeitskreisbogen bezüglich K^* ist. Da ε beliebig klein gewählt werden kann und sich damit der Kanal und die ε -Erweiterung beliebig wenig voneinander unterscheiden wäre damit auch gezeigt, dass γ ein Sichtbarkeitskreisbogen bezüglich K ist.

Wir betrachten zuerst den Fall $p \in \kappa$ und $\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]} \not\subset \gamma$ und wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\text{entweder } \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset \quad \text{oder} \quad \kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \subset \gamma. \quad (5.123)$$

Laut Lemma 5.46 gilt

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) = 0, \quad (5.124)$$

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{[0,t(r_2)]}, \quad (5.125)$$

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 0, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}. \quad (5.126)$$

Nach (5.124) ist $\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]})$ insbesondere gerade und damit folgt aus Proposition 2.58 und (5.123), dass

$$\kappa_p^+|_{[1-\varepsilon,1]} \cap \gamma = \emptyset. \quad (5.127)$$

Somit folgt aus Proposition 5.23, dass

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 1, \quad q \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}. \quad (5.128)$$

Aus (5.126) und (5.128) folgt für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}$, dass

$$\Delta(\gamma, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_2)]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) + \Delta(\gamma|_{[t(r_2),1]}, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 0 + 1 = 1$$

und damit folgt zusammen mit (5.124) für alle $q \in \kappa_p^+|_{(t(r_2),1-\varepsilon)}$, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) = \Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,1-\varepsilon]}) + \Delta(\gamma, \overline{\kappa_p^+|_{[t(q),1-\varepsilon]}}) \leq 0 + 1 = 1. \quad (5.129)$$

Aus (5.125), (5.129) und (5.127) folgt schließlich, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^+|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in (\kappa_p^+)^{\circ}. \quad (5.130)$$

Laut Korollar 5.45 gilt

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in (\kappa_p^-)^{\circ}, \quad (5.131)$$

5 Algorithmus zur Entscheidung der Punktsichtbarkeit

und damit folgt aus Satz 3.22, dass γ im Fall $p \in \kappa$ und $\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]} \not\subset \gamma$ ein Sichtbarkeitskreisbogen ist.

Ist $p \in \kappa$ und $\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]} \subset \gamma$, dann ist jeder Punkt in $\kappa_p^+|_{[t(r_2),1]}$ eine rechte Restriktion von γ und damit folgt mit Lemma 5.46 direkt, dass (5.130) gilt. Laut Korollar 5.45 gilt auch in diesem Fall (5.131) und damit folgt analog zum ersten Fall, dass γ ein Sichtbarkeitskreisbogen ist.

Als nächstes betrachten wir den Fall $p \notin \kappa$ und $L \neq n + 1$. Dann gilt gemäß Lemma 5.49

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa|_{[0,t(r_1)]}, \quad (5.132)$$

$$\Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) = 0, \quad q \in \kappa|_{(t(r_1),1)}, \quad (5.133)$$

und gemäß Proposition 5.21

$$\Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa|_{(t(r_1),1)}. \quad (5.134)$$

Aus (5.133) und (5.134) folgt für alle $q \in \kappa|_{(t(r_1),1)}$, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) = \Delta(\gamma|_{[0,t(r_1)]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) + \Delta(\gamma|_{[t(r_1),1]}, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1 + 0 = -1.$$

Da r_1 eine linke Restriktion von γ ist und bereits (5.132) gezeigt wurde, folgt daraus, dass

$$\Delta(\gamma, \kappa_p^-|_{[0,t(q)]}) \geq -1, \quad q \in \kappa^\circ. \quad (5.135)$$

Laut Korollar 5.48 gilt

$$\Delta(\gamma, \kappa|_{[0,t(q)]}) \leq 1, \quad q \in \kappa^\circ, \quad (5.136)$$

und damit folgt wieder aus Satz 3.22, dass γ ein Sichtbarkeitskreisbogen ist.

Ist $p \notin \kappa$ und $L = n + 1$, dann gilt (5.135) gemäß Lemma 5.49 und (5.136) gemäß Korollar 5.48 und damit folgt analog, dass γ ein Sichtbarkeitskreisbogen ist. \square

Laufzeituntersuchung

Bevor wir die Gesamtlaufzeit abschätzen, gehen wir auf die Laufzeiten der Grundoperationen ein:

Bemerkung 5.50. *Die folgenden Überlegungen zeigen, dass das Prüfen eines Kanalkreisbogens auf Verletzungen in Zeile 17 und 20 in Algorithmus 1 in konstanter Zeit möglich ist: Soll ein Kanalkreisbogen auf Verletzungen geprüft werden, dann ist immer der Wert von $\Delta(\gamma, \cdot)$ an seinem Endpunkt bekannt, da der Kanalrand κ Kreisbogen für Kreisbogen rückwärts durchlaufen wird und dabei insgesamt immer an einer Restriktion, also an einem Punkt mit bekanntem Wert von $\Delta(\gamma, \cdot)$, begonnen wird. Damit muss nur die Differenz auf dem jeweiligen Kanalkreisbogen berechnet werden, vgl. Proposition 2.56. Da sich der Wert von $\Delta(\gamma, \cdot)$ innerhalb eines Kanalkreisbogens*

höchstens an zwei Schnittpunkten mit γ ändert, kann die Differenz in konstanter Zeit berechnet werden.

Eine weitere Grundoperation ist das Update in den Zeilen 18 und 21. Wie am Anfang von Abschnitt 5.1 angemerkt wurde, kann der gesuchte Kreisbogen mithilfe des Apollonischen Berührproblems nur unter Berücksichtigung der lokalen Situation berechnet werden. Damit kann auch diese Operation in konstanter Zeit durchgeführt werden.

Satz 5.51. *Die Laufzeit von Algorithmus 1 ist linear in der Anzahl der Kanalkreisbögen.*

Beweis. Sei $\kappa = \kappa_1 \sqcup \kappa_2 \sqcup \dots \sqcup \kappa_n$ mit $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Initialisierungsschritte vor Beginn der Schleife sind offensichtlich linear in n . Dank Bemerkung 5.50 ist es ausreichend zu zeigen, dass die Schleife in Zeile 16 maximal $2n + 1$ mal durchlaufen wird. Wir unterteilen die Schleifendurchläufe in logische Abschnitte: Sei m die Anzahl der Schleifendurchläufe, in denen ein Update in Zeile 18 oder 21 durchgeführt wird. Sei n_1 die Anzahl der Schleifendurchläufe bis zum ersten Update, sei n_i , $i = 2, \dots, m$ die Anzahl der Schleifendurchläufe zwischen Update $i - 1$ und Update i und sei n_{m+1} die Anzahl der Schleifendurchläufe nach dem letzten Update. Die Gesamtanzahl an Schleifendurchläufen ist damit

$$\sum_{i=1}^{m+1} n_i.$$

Seien L_1 und R_1 die initialen Werte von L und R und seien L_m und R_m die entsprechenden Werte am Ende des Algorithmus. Dann gilt also

$$L_1 = n + 1 \quad \text{und} \quad 1 \leq R_1 \leq n$$

und da im Update $i \in \{1, \dots, m\}$ entweder L oder R um n_i verringert wird, gilt

$$L_m + R_m = L_1 + R_1 - \sum_{i=1}^m n_i.$$

Für die Anzahl der Schleifendurchläufe nach dem letzten Update gilt

$$n_{m+1} = \max\{L_m, R_m\}$$

und damit erhalten wir für die Gesamtanzahl an Schleifendurchläufen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} n_i &= L_1 + R_1 - L_m - R_m + \max\{L_m, R_m\} \\ &\leq 2n + 1 - L_m - R_m + \max\{L_m, R_m\} \leq 2n + 1. \end{aligned}$$

□

6 Evaluation und Ausblick

Wir haben im letzten Kapitel gezeigt, dass der in Abschnitt 5.3 vorgestellte Algorithmus liefert, ob ein Punkt $p \in P_K$ sichtbar ist. Wir wollen in diesem Abschnitt numerische Aspekte betrachten und mögliche Erweiterungen vorstellen.

6.1 Numerische Stabilität und Robustheit des Algorithmus

Stabilität

Konkrete Aussagen zur numerischen Stabilität können auf dem Abstraktionslevel, auf dem Algorithmus 1 formuliert ist, nicht gemacht werden. Diese hängen von der konkreten Umsetzung der Basisoperationen ab. Ein Vorteil des Algorithmus ist dabei die Einfachheit der benötigten Operationen, die eine flexible Kreisbogendarstellung zulassen. Wir wollen dieses anhand eines Beispiel erläutern. Angenommen γ ist ein positiv orientiertes Kreissegment und ℓ ist eine Strecke, deren Anfangspunkt links von $[\gamma]$ liegt und für die $\gamma(0), \gamma(1) \notin \ell$ gilt. Dann gibt es zwischen γ und ℓ maximal einen Schnittpunkt und es gilt $\Delta(\gamma, \ell) = 0$, falls $\ell(1) \in L([\gamma])$, $\Delta(\gamma, \ell) = -1$, falls $\ell(1) \in \gamma$ und nur im Fall $\ell(1) \in R([\gamma])$ entscheiden wir anhand des Schnittpunkts: Es gilt $\Delta(\gamma, \ell) = -2$, falls $\gamma \cap \ell \neq \emptyset$ ist und andernfalls gilt $\Delta(\gamma, \ell) = 0$.

Eine Möglichkeit zur Beantwortung der Frage, ob der Punkt $p = \ell(1)$ links von $[\gamma]$, rechts von $[\gamma]$ oder auf $[\gamma]$ liegt, ist Folgende: Ist c das Zentrum und r der Radius von γ , dann gilt

$$\begin{cases} p \in L([\gamma]), & \text{dist}(p, [\gamma]) = \|c - p\|_2 - r < 0, \\ p \in [\gamma], & \text{dist}(p, [\gamma]) = \|c - p\|_2 - r = 0, \\ p \in R([\gamma]), & \text{dist}(p, [\gamma]) = \|c - p\|_2 - r > 0. \end{cases}$$

Dieses Vorgehen ist jedoch nur für vergleichsweise kleine Radien numerisch stabil. Ist der Radius r sehr groß im Vergleich zu $\text{dist}(p, [\gamma])$, dann kommt es zu erheblichen Genauigkeitsverlusten aufgrund von Stellenauslöschung. Dabei ist die gewählte Art der Berechnung instabil und nicht das gestellte Problem selbst. In [14] wird eine stabile Berechnungsmöglichkeit für Kreisbögen mit geringer Krümmung vorgestellt. Alternativ lassen sich hohe Genauigkeiten erreichen, indem NURBS zur Repräsentation von Kreisbögen verwendet werden, vgl. [18].



Abbildung 6.1: Beispiel eines Sichtbarkeitskreisbogens γ mit einer linken Startrestriktion und mehreren rechten Restriktionen.

Robustheit

Wir wollen zuerst auf die Berechnung von $\Delta(\gamma, \cdot)$ eingehen. Der Wert von $\Delta(\gamma, \cdot)$ ändert sich, wenn κ eine der Mengen $L([\gamma])$, $R([\gamma])$ oder $[\gamma]$ verlässt und es einen entsprechenden Schnittpunkt mit γ° gibt. Der Wechsel zwischen $L([\gamma])$, $R([\gamma])$ und $[\gamma]$ lässt sich robust feststellen. Außerdem kann hier mit Toleranzen gearbeitet werden, was für praktische Anwendungen vorteilhaft sein kann. Für Kanalabschnitte, die bis auf numerische Ungenauigkeiten auf $\gamma(0)$ oder $\gamma(1)$ liegen, kann die Berechnung von $\Delta(\gamma, \cdot)$ auf numerisch robuste Spezialfälle zurückgeführt werden, vgl. Abschnitt 4.3. Damit lässt sich auch die Frage, ob der Schnittpunkt von κ mit $[\gamma]$ in γ° liegt, robust beantworten. Nachdem am Ende des Algorithmus jeder Kanalabschnitt auf Verletzungen geprüft wurde, ist damit sichergestellt, dass jede Verletzung entdeckt und behoben wurde, oder dass ein Kreisbogen mit einer Alternantenfolge der Länge drei als Ergebnis geliefert wird.

Das Beispiel in Abbildung 6.1 zeigt, dass das einmalige Durchlaufen des Kanals nicht nur für die lineare Laufzeit des Algorithmus entscheidend ist, sondern auch für eine zusätzliche Verbesserung der Robustheit sorgt: Offensichtlich ist der Punkt p sichtbar. Dennoch ist die Bestimmung des Sichtbarkeitskreisbogens mit links-blockierender Alternantenfolge der Länge zwei prinzipiell problembehaftet, da der gesuchte Sichtbarkeitskreisbogen mehrere rechte Restriktionen besitzt. Sei γ der

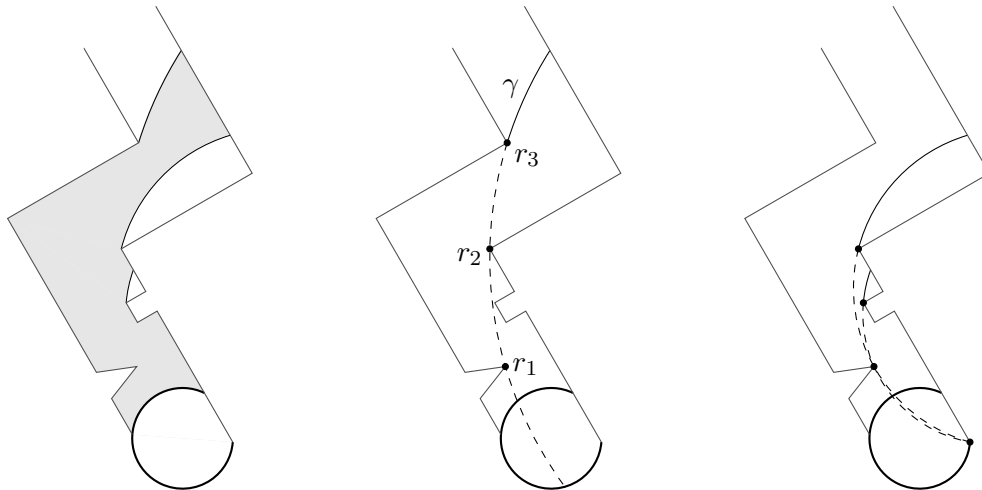


Abbildung 6.2: Sichtbarkeitsmenge (links) und Grenzreisbögen mit links-blockierender (mitte) und rechts-blockierender Alternantenfolge (rechts).

Kreisbogen mit linker Startrestriktion und rechter Restriktion r_2 und γ' der Kreisbogen mit linker Startrestriktion und rechter Restriktion r'_2 . Nach Proposition 4.12 ist es nicht möglich, dass r'_2 eine rechte Verletzung von γ und zugleich r_2 eine rechte Verletzung von γ' ist. Werden numerische Ungenauigkeiten in Betracht gezogen, kann jedoch trotzdem r'_2 als rechte Verletzung von γ und r_2 als rechte Verletzung von γ' klassifiziert werden. Da in Algorithmus 1 nach einem Update der Restriktion von r_2 auf r'_2 der Punkt r_2 nicht erneut auf eine Verletzung geprüft wird, ist der Algorithmus robust gegenüber dieser Art von Fehler. Der Punkt p wird also zuverlässig als sichtbar mit zugehörigem Sichtbarkeitskreisbogen γ' klassifiziert.

6.2 Ausblick

Wie im Einleitungskapitel in Abschnitt 1.1 angesprochen, soll mit Algorithmus 1 die Berechnung der zirkulären Sichtbarkeitsmenge, also der Menge aller sichtbaren Punkte, beschleunigt und robuster gestaltet werden. Abbildung 6.2 zeigt links für einen Beispielkanal die zirkuläre Sichtbarkeitsmenge. Außerdem sind die Grenzreisbögen, die den Rand der zirkulären Sichtbarkeitsmenge beschreiben, abgebildet. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie den Kanal nicht verlassen und eine Alternantenfolge der Länge drei besitzen. Die Grenzreisbögen mit links-blockierender Alternantenfolge der Länge drei sind in der Mitte abgebildet, die mit rechts-blockierender Alternantenfolge rechts.

Mit Algorithmus 1 steht eine schnelle und robuste Methode zur Verfügung, mit der geprüft werden kann, ob ein Punkt sichtbar ist. Damit lässt sich eingrenzen, wo

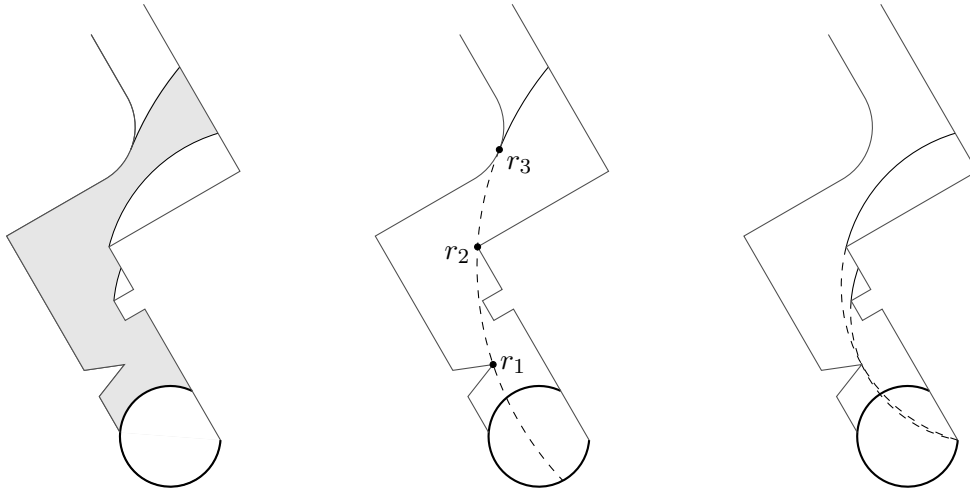


Abbildung 6.3: Sichtbarkeitsmenge (links) und Grenzreisbögen mit links-blockierender (mitte) und rechts-blockierender Alternantenfolge (rechts).

nach Grenzreisbögen gesucht werden muss. Außerdem kann der Algorithmus direkt zur Berechnung gewisser Grenzreisbögen benutzt werden: Wird Algorithmus 1 mit Endpunkt r_3 verwendet, dann wird der Sichtbarkeitskreisbogen $\gamma|_{[0,t(r_3)]}$ berechnet. Der Grenzreisbogen γ ist also nur dessen Verlängerung. Der Algorithmus kann ohne Weiteres so abgeändert werden, dass nach einem Sichtbarkeitskreisbogen mit rechts-blockierender Alternantenfolge gesucht wird. Damit ist es möglich auch die Grenzreisbögen mit rechts-blockierender Alternantenfolge der Länge drei zu berechnen. Indem die Anschlusspunkte des Kanals durchlaufen werden, kann so also der Rand der zirkulären Sichtbarkeitsmenge bestimmt werden.

In Abbildung 6.3 ist der Kanal leicht abgeändert. Wieder werden die Sichtbarkeitsmenge und die Grenzreisbögen gezeigt. Diesmal kann zur Berechnung des in der Mitte abgebildeten Grenzreisbogens mit links blockierender Alternantenfolge (r_1, r_2, r_3) jedoch nicht ohne Weiteres Algorithmus 1 verwendet werden: Da der Punkt r_3 nicht auf einen Anschlusspunkt des Kanals fällt, kann dieser nicht wie oben „erraten“ werden.

Abbildung 6.4 zeigt, wie ein Algorithmus zur Berechnung des Grenzreisbogens mit einer Kanalberührung in r_3 bzw. im Kanalkreisbogen η aussehen könnte. Wir beginnen in der linken Abbildung mit dem Kreisbogen γ_1 mit links-blockierender Alternantenfolge (r_1, r_2) und Endpunkt $\eta(1)$. Analog zu Algorithmus 1 wird ein von rechts verletzender Kreisbogen η_1 gefunden und angelehnt an die Updateschritte in Abschnitt 5.2 wird γ_1 durch γ_2 mit links-blockierender Alternantenfolge (r_1^*, r_3) ersetzt, vgl. mittlere Abbildung. Im Gegensatz zu den Updateschritten in Abschnitt 5.2 besitzen die Kreisbögen nicht notwendigerweise den gleichen Endpunkt. Der End-

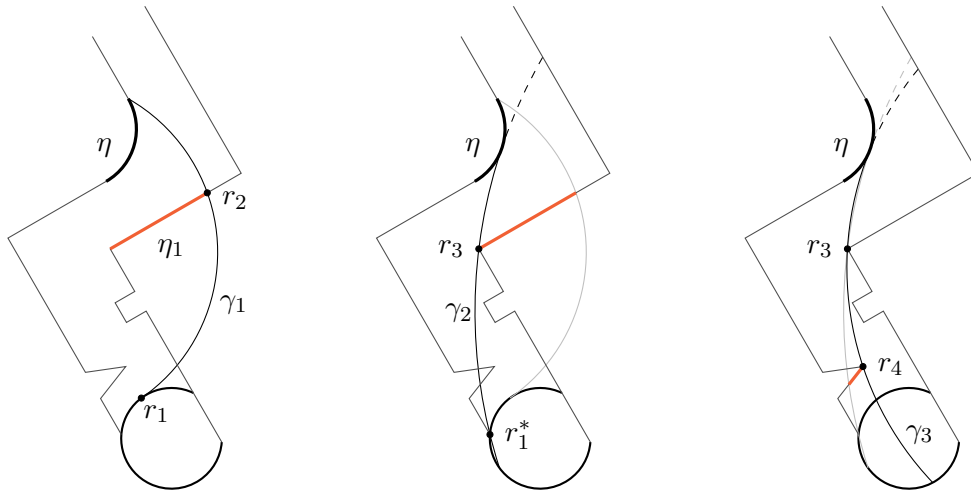


Abbildung 6.4: Berechnung eines Grenzkreisbogens durch eine erweiterte Variante von Algorithmus 1.

punkt des jeweiligen Kreisbogens ist in η so zu wählen, dass η den jeweiligen Trägerkreis von links berührt. Analog wird in der Abbildung rechts mit einem von links verletzenden Kreisbogen verfahren und wir erhalten den gesuchten Grenzkreisbogen mit links-blockierender Alternantenfolge (r_4, r_3) . Praktische Tests zeigen, dass damit die zirkuläre Sichtbarkeitsmenge zuverlässig berechnet werden kann. Dieses zu beweisen würde jedoch über diese Arbeit hinausgehen, da der gemeinsame Endpunkt in einigen Aussagen eine zentrale Rolle spielt.

Eine weitere interessante Fragestellung ist die direkte Berechnung gewisser Grenzkreisbögen. Es kann gezeigt werden, dass jedem nicht sichtbaren Punkt p ein eindeutiger Grenzkreisbogen zugeordnet werden kann, vgl. [15]. Es wäre zu untersuchen, ob mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden ein Algorithmus entwickelt werden kann, der diesen Grenzkreisbogen direkt berechnet.

Literaturverzeichnis

- [1] P. K. Agarwal and M. Sharir. Circle shooting in a simple polygon. *Journal of Algorithms*, 14(1):69–87, 1993.
- [2] P. K. Agarwal and M. Sharir. Circular visibility from a point in a simple polygon. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 3(01):1–25, 1993.
- [3] J. D. Boissonnat, J. Czyzowicz, O. Devillers, J. Urrutia, and M. Yvinec. Computing largest circles separating two sets of segments. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 10(01):41–53, 2000.
- [4] J. D. Boissonnat, J. Czyzowicz, O. Devillers, and M. Yvinec. Circular separability of polygons. *Algorithmica*, 30(1):67–82, 2001.
- [5] S. Brummer, G. Maier, and T. Sauer. Numerically robust computation of circular visibility. *Computer Aided Geometric Design*, 59:17–31, 2018.
- [6] R. Busam and E. Freitag. *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [7] S. Y. Chou, L. L. Chen, and T. C. Woo. Circular visibility of a simple polygon. Technical report, Department of Industrial and Manufacturing Systems Engineering, Iowa State University, 1992.
- [8] S. Y. Chou and T. C. Woo. A linear-time algorithm for constructing a circular visibility diagram. *Algorithmica*, 14(3):203–228, 1995.
- [9] W. Fulton. *Algebraic topology, volume 153 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] J. García-López and P. A. Ramos. Circular visibility and separability. In *Proc. 5th Canad. Conf. Comp. Geom.*, pages 18–23, 1993.
- [11] J. García-López and P. A. Ramos. A unified approach to conic visibility. *Algorithmica*, 28(3):307–322, 2000.
- [12] S. K. Ghosh. *Visibility algorithms in the plane*. Cambridge university press, 2007.

- [13] M. Heimlich and M. Held. Biarc approximation, simplification and smoothing of polygonal curves by means of Voronoi-based tolerance bands. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 18(03):221–250, 2008.
- [14] P. Irle, L. Gröll, M. Werling, et al. Zwei Zugänge zur Projektion auf 2d-Kurven für die Bahnregelung autonomer Fahrzeuge. *at-Automatisierungstechnik*, 2009.
- [15] G. Maier. *Smooth minimum arc paths: contour approximation with smooth arc splines*. Shaker-Verlag, 2010.
- [16] G. Maier. Optimal arc spline approximation. *Computer Aided Geometric Design*, 31(5):211–226, 2014.
- [17] J. O’Rourke, S. R. Kosaraju, and N. Megiddo. Computing circular separability. *Discrete & Computational Geometry*, 1(2):105–113, 1986.
- [18] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] J. Roe. *Winding Around: The Winding Number in Topology, Geometry, and Analysis*, volume 76. American Mathematical Soc., 2015.
- [20] J. Röttgen-Burtscheidt. Das Apollonische Berührproblem. *Köln, Deutschland*, 2007.