

Gabriele Loibl

**Grundlegende Fähigkeiten und ihre Bedeutung
für den Einsatz von Arbeitsmitteln
im mathematischen Anfangsunterricht**

Band 1

**Grundlegende Fähigkeiten und ihre Bedeutung
für den Einsatz von Arbeitsmitteln im mathematischen Anfangsunterricht
– Theoretische Bezüge, Konkretisierung und Evaluation
im Rahmen eines Unterrichtsprojekts in der 1. Jahrgangsstufe**

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
an der Philosophischen Fakultät
der
Universität Passau

vorgelegt von
Gabriele Loibl

**Passau
2000**

Inhalt

Band1

Vorwort.....	6
Einleitung	7

Teil I

Theoretischer Bezugsrahmen 9

1. Kapitel

Entfaltung der Ausgangslage: Überblick zu aktuellen Tendenzen in der pädagogisch-didaktischen Diskussion..... 9

1.1	Erstunterricht: Leitlinien und Aspekte	9
1.1.1	Die veränderte Lebenswelt des Kindes	9
1.1.2	Formen offenen Unterrichts – Differenzierung	10
1.1.3	Das Lernen lernen	11
1.2	Erstreckenunterricht: Leitlinien und Aspekte	13
1.2.1	Vorerfahrungen der Schüler	13
1.2.2	Entdeckendes Lernen.....	15
1.2.3	Rechenstrategien.....	16
1.2.4	Strukturiertes Lernen	18
1.2.5	Handlungsorientierung.....	19
1.2.6	Operative Übungen.....	20
1.2.7	Rechenschwäche/ Rechenstörungen.....	21
1.2.8	Geometrie	22
1.3	Mögliche Konzeptionen des Faches Mathematik	25
1.4	Fokussierung	26

2. Kapitel

Grundlegende Fähigkeiten und ihre Bedeutung für das Lernen im mathematischen Anfangsunterricht..... 28

2.1	Begriff.....	28
2.2	Raumvorstellung	32
2.2.1	Begriffliche Klärung.....	32
2.2.2	Die Entwicklung der Raumvorstellung.....	33
2.3	„Sehen und Vorstellen“	35
2.3.1	Die visuelle Wahrnehmung.....	35
2.3.1.1	Die visuomotorische Koordination	35

2.3.1.2	Die Figur-Grund-Wahrnehmung (Diskriminierung)	37
2.3.1.3	Die Wahrnehmungskonstanz.....	38
2.3.1.4	Wahrnehmung der Raumlage.....	38
2.3.1.5	Wahrnehmung räumlicher Beziehungen	39
2.3.2	Visuelles Speichern	39
2.3.3	Visuelles Operieren	40
2.4	Grundlegende Fähigkeiten als Voraussetzungen schulischen Lernens.....	41
2.4.1	Räumliches Vorstellungsvermögen als Grundlage des Arithmetikunterrichts.....	41
2.4.2	Grundlegende Fähigkeiten im mathematischen Abstraktionsprozess	42
2.4.3	Bedeutung der grundlegenden Fähigkeiten für andere Fächer	46

3. Kapitel

Arbeitsmittel, Anschauungsmittel	50	
3.1	Begriffliche Klärung.....	50
3.2	Die kindlichen Vorstellungsbilder.....	50
3.2.1	Innere Bilder sind vage und strukturiert.....	51
3.2.2	Vorstellungsbilder sind idiosynkratisch.....	52
3.2.3	Visualisierungen sind kontextgebunden	52
3.2.4	Vorstellungsbilder als Prototypen	53
3.2.5	Aufmerksamkeitsfokussierung.....	53
3.3	Kriterien für die Auswahl der Arbeitsmittel.....	54
3.3.1	Ablösung vom zählenden Rechnen durch Verkörperung der mathematischen Strukturen am Arbeitsmittel	54
3.3.2	Ermöglichung von Entdeckungen.....	55
3.3.3	Vielfältige Einsatzmöglichkeiten im Unterricht.....	56
3.3.4	Übertragung der konkreten Handlung in die graphische Darstellung	56
3.4	Arten von Arbeitsmitteln.....	57
3.5	Konsequenzen für den Unterricht	58

Teil II

Konkretisierung, Evaluation und Reflexion eines Unterrichtsprojektes in der 1. Jahrgangsstufe..... 61

4. Kapitel

Methodisches Vorgehen und Zielsetzung beim Projekt.....	61	
4.1	Methodisches Vorgehen	61
4.1.1	Fallstudie	61
4.1.2	Spezifische Kriterien und Gegebenheiten dieser Fallstudie.....	62
4.1.3	Die Experimentalgruppe	63
4.2	Zielsetzung.....	64
4.2.1	Ziele und Methoden des Unterrichts.....	64
4.2.2	Fokussierung	65

5. Kapitel

Realisierung des Projekts	67
5.1 Klassenlehrplan	68
5.2 Der mathematische Lernprozess der Experimentalgruppe	75
5.2.1 Entwicklung der grundlegenden Fähigkeiten	75
5.2.1.1 Grundsätze für die Durchführung	75
5.2.1.2 Unterrichtliche Verwirklichung	76
5.2.2 Die Entwicklung und der Einsatz des Arbeitsmittels	83
5.2.2.1 Beschreibung des entwickelten Arbeitsmittels	83
5.2.2.2 Prinzipien für die Konzeption des Arbeitsmittels	84
5.2.2.3 Unterrichtliche Verwirklichung	87
5.2.2.3.1 Entwicklung des Arbeitsmittels	87
5.2.2.3.1.1 Die Kraft der 5 /Strukturierung von Mengen (Zählübungen)	87
5.2.2.3.1.2 Die Entwicklung des Geobretts	90
5.2.2.3.1.3 Einführung in die Arbeit mit den Rechenstäben	101
5.2.2.3.1.4 Entwicklung des Hunderterfeldes	103
5.2.2.3.2 Übungen zur räumlichen Orientierung am Arbeitsmittel	115
5.2.2.3.2.1 Raumorientierungsübungen auf dem Geobrett	115
5.2.2.3.2.2 Raumorientierungsübungen auf dem 25er Quadrat	117
5.2.2.3.2.3 Raumorientierungsübungen am Hunderterfeld	118
5.2.2.3.3 Verwendung des Arbeitsmaterials bei Rechenoperationen	119
5.2.2.3.4 Weiterentwicklung / Weiterverwendung des Arbeitsmaterials (Ausblick in die 2. Jahrgangsstufe)	143
5.2.2.3.4.1 Die Zahlen bis 100 - Bündeln und Tauschen	143
5.2.2.3.4.2 Übungen zur Raumorientierung am Hunderterfeld	146
5.2.2.3.4.3 Rechnen im Zahlenraum bis 100	150
5.2.2.3.4.3.1 Addition	150
5.2.2.3.4.3.2 Subtraktion	158
5.2.2.3.4.3.3 Multiplikation	162
5.2.2.3.4.3.4 Division	167
5.2.2.3.4.4 Die Entwicklung des Zahlenstrahls aus dem Hunderterfeld	168
5.2.2.3.4.4.1 Vom Hunderterfeld zum Zahlenband	168
5.2.2.3.4.4.2 Vom Zahlenband zum leeren Zahlenstrahl	169
5.2.2.3.4.4.3 Der vollständige Zahlenstrahl	170
5.3 Das Mathematiklernen einzelner Schüler	171
5.3.1 Maximilian	172
5.3.1.1 Beobachtungen bei der Entwicklung des Arbeitsmaterials	172
5.3.1.1.1 Geobrett	172
5.3.1.1.2 Arbeit mit den Stäben	173
5.3.1.1.3 Verbindung Rechenstäbe – Hunderterfeld	173
5.3.1.2 Individuelle Lösungen /Akzeptanz des Materials	175
5.3.1.3 Beobachtungen zu den Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe	180
5.3.1.4 Gesamtbeurteilung	187
5.3.1.5 Weiterführende Fördermaßnahmen	187
5.3.2 Lena	188
5.3.2.1 Individuelle Lösungen bei der Verwendung des Materials	188
5.3.2.2 Leistungsstand/Beobachtungen zu den Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe	191
5.3.2.3 Gesamtbeurteilung	200

5.3.2.4	Weiterführende Fördermaßnahmen	201
5.3.3	Patrick.....	202
5.3.3.1	Akzeptanz des Materials.....	202
5.3.3.2	Individuelle Lösungen	202
5.4	Philipp	205
5.4.1.1	Anamnese / Familiäre Situation.....	205
5.4.1.2	Vorschulische Beurteilungen	205
5.4.1.3	Beobachtungen zu den pränumerischen Fähigkeiten	208
5.4.1.3.1	Sehen und vorstellen.....	208
5.4.1.3.1.1	Visuomotorische Koordination	208
5.4.1.3.1.2	Figur-Grund-Unterscheidung	208
5.4.1.3.1.3	Wahrnehmung der Raumlage	209
5.4.1.3.1.4	Wahrnehmung räumlich zeitlicher Beziehungen.....	210
5.4.1.3.1.5	Visuelles Speichern.....	211
5.4.1.3.1.6	Visuelles Operieren.....	212
5.4.1.3.1.7	Raumerfahrung und Raumvorstellung	213
5.4.1.3.2	Individuelle Lösungen/Akzeptanz des Materials	216
5.4.1.3.3	Beobachtungen zu den einzelnen Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe	218
5.4.1.3.4	Gesamtbeurteilung	223
5.4.1.3.5	Weiterführende Fördermaßnahmen	224
5.5	Leistungsstand der Klasse.....	225
6.	Kapitel	
	Zusammenfassung	235
	Literaturverzeichnis.....	238

Band 2

Klassenlehrplan1 - 7

Unterrichtseinheiten:

September 1 - 21
Oktober 1 - 33
November 1 - 43
Dezember 1 - 29
Januar 1 - 24
Februar 1 - 35
März 1 - 46
April 1 - 33
Mai 1 - 36
Juni 1 - 36
Juli 1 - 40

Vorwort

Für die intensive Beratung und konstruktive Kritik bei der Anlage und Ausführung der Arbeit bedanke ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr. Ludwig Bauer und Herrn Prof. Prof. h.c. Dr. Hubert Buchinger. Sie zeigten sich aufgeschlossen für die erarbeiteten inhaltlichen und methodischen Konzepte. Ihre Ratschläge führten weiter, ohne einzuengen oder festzulegen. Ihr Interesse bestärkte mich, motiviert und zielbestimmt zu arbeiten.

Mein weiterer Dank gilt den Mitgliedern der Lehrplankommission Mathematik. Die Diskussionen über die neuen Wege im Mathematikunterricht unterstützten mich bei der Durchführung des Projekts.

Passau, November 2000

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist entstanden aus dem Versuch der Autorin, eigene unterrichtliche Erfahrungen als Lehrerin wissenschaftlich zu reflektieren und aufzuarbeiten. Die Autorin unterrichtet seit einigen Jahren in den beiden Anfangsklassen der Grundschule. Dabei stellte sich ein Problem, das in der Literatur als allgemeines bzw. weitverbreitetes Problem des Erstunterrichts beschrieben und diskutiert wird: Im mathematischen Anfangsunterricht fallen unter anderem die Schüler auf, die die Mehrzahl aller Aufgaben durch Abzählen (meist an den Fingern) lösen. Der Einsatz von Arbeitsmitteln, die dem Kind helfen sollen, vom zählenden Rechnen wegzukommen, bringt nicht immer den gewünschten Erfolg. Gerade leistungsschwächere Schüler, für welche Arbeitsmittel hauptsächlich gedacht sind, verwenden diese häufig nicht. Auch Leistungsstärkere scheinen keine Arbeitsmittel zu gebrauchen, da sie die Aufgaben ohnehin im Kopf lösen können. Diese Tatsachen lenken das Interesse der Autorin auf Probleme und Fragen, die sich im Umgang mit den Arbeitsmitteln ergeben: Wozu und warum sollen welche Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht eingesetzt werden? Gelingt es, die Kinder an der Entwicklung eines Arbeitsmittels zu beteiligen? In welchen Unterrichtsphasen und bei welchen Lerninhalten kann das Arbeitsmittel eingesetzt werden? Gelingt es, sowohl leistungsschwache als auch leistungsstarke Schüler mit Hilfe des Arbeitsmittels zu fördern? Über welche Voraussetzungen muss der Schüler verfügen, um mit dem Arbeitsmittel umgehen zu können? Solche Fragen machen auch eine intensive Beschäftigung mit Lernstörungen nötig, deren Ursache häufig ungenügend entwickelte grundlegenden Fähigkeiten beim Kind sind. Daraus entsprang die Idee, die Arbeitsmittel mit dem Bereich der grundlegenden Fähigkeiten zu verknüpfen, um durch das Trainieren derselben den Boden für die effektive Nutzung des Arbeitsmittels zu bereiten.

Die theoretischen Ansätze werden in Teil I dargelegt. Zunächst werden allgemeine grundschuldidaktische Rahmenbedingungen entwickelt (1.1.). Diesen werden dann mathematikdidaktische Aspekte für den Anfangsunterricht an die Seite gestellt (1.2.). Beide Stränge werden dann zusammen- und fortgeführt, wenn im weiteren Verlauf „grundlegende Fähigkeiten“ (Kapitel 2) und „Arbeits- und Anschauungsmittel“ (Kapitel 3) thematisiert werden.

Im Zentrum von Teil II steht ein von der Autorin konzipiertes, realisiertes und reflektiertes Unterrichtsprojekt über Lehr- und Lernprozesse im mathematischen Anfangsunterricht.

Das Unterrichtsprojekt wurde in einer 1. Jahrgangsstufe durchgeführt. Die Experimentalgruppe bestand aus 17 Kindern, die nicht speziell für dieses Projekt ausgewählt, sondern aufgrund ihres gemeinsamen Wohnortes in der Klasse zusammengefasst wurden. Die Eltern wurden über das Forschungsvorhaben informiert und gebeten, die Kinder nur nach Rücksprache mit der Lehrerin bei mathematischen Hausaufgaben zu unterstützen.

Das Projekt spaltet sich in zwei Bereiche mit unterschiedlichen Intentionen.

- Zunächst wird eine Lernsequenz entwickelt, in der in allgemeiner Weise die Planungen des Lehrers und die Handlungen der Schüler der Experimentalgruppe beschrieben werden (5.2.).

Dabei werden die das Unterrichtsprojekt betreffenden Unterrichtseinheiten isoliert. Deren Einbettung in den gesamten mathematischen Unterrichts- und Lernprozess wird aber ersichtlich durch die Beschreibung aller Unterrichtseinheiten in Band 2. Ein mögliches Gesamtkonzept „mathematischer Anfangsunterricht“ wird so erstellt.

- Anschließend werden detailliert Handlungen, Fähigkeiten und Probleme einzelner Schüler beim Projekt dokumentiert und diskutiert (5.3.) Ihr Mathematiklernen, ihr individueller Lernprozess steht im Mittelpunkt.

Teil I

Theoretischer Bezugsrahmen

1. Kapitel

Entfaltung der Ausgangslage: Überblick zu aktuellen Tendenzen in der pädagogisch-didaktischen Diskussion

Unterrichtsplanung ist ein sehr komplexes Gefüge, das von vielen Faktoren beeinflusst wird. Ausgangspunkt und Ziel ist der Schüler, seine sozialen und kognitiven Fähigkeiten, aber auch seine Defizite. Beim Lehrer setzt Planung neben den Schülerbeobachtungen, die nötige Sachkompetenz sowie das Wissen über die Lernprozesse des Kindes und fachdidaktische Methoden voraus. Je detaillierter dieses ist, um so optimaler kann jedes Kind bei seinem Lernen unterstützt werden.

Im Folgenden werden neuere didaktische Tendenzen erörtert. Wie bereits erwähnt, ist das mathematische Forschungsprojekt eingebunden in ein Gesamtkonzept Erstunterricht. Deshalb werden sowohl allgemeine grundschuldidaktische Erkenntnisse (1.1.) als auch spezifisch mathematikdidaktische Aspekte (1.2.) berücksichtigt.

Das Kapitel 1 liefert im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur einen Überblick über neuere Forschungsansätze. Es dient lediglich dazu, das Fundament zu legen, auf dem das eigene Unterrichtsprojekt steht.

1.1 Erstunterricht: Leitlinien und Aspekte

1.1.1 Die veränderte Lebenswelt des Kindes

Die Lebenswelt der Kinder hat sich entscheidend verändert: (vgl. dazu Untersuchungen bei Fölling-Albers, M. , 1992, 1995, 1996)

- Viele Schüler sind Einzelkinder, kommen aus zerrütteten oder geschiedenen Ehen und/oder wachsen in Eineltern-Familien auf.
- Viele Kinder sind „Schlüsselkinder“, da die Mütter berufstätig sind.
- Ein großer Teil ihrer Freizeit ist verplant durch Vereine, Musikschulen,... aber auch durch Nachhilfeunterricht.
- Die Erziehungsziele und Werte in den Familien haben sich verändert. Häufig wird nicht konsequent auf die Einhaltung von Erziehungs- und Verhaltensregeln geachtet.
- Die Kinder wachsen in einer multikulturellen Gesellschaft auf.
- Die Medien überfluten die Kinder mit einer Vielzahl von Reizen.
- Die Eltern haben hohe Erwartungen und damit hohe Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Kinder.

Dies führt zu einer großen Heterogenität in den Lerngruppen:

- Einige Kinder sind kognitiv sehr gefördert und verfügen über umfangreiche Vorkenntnisse. Andere sind geistig und emotional „verwahrlost“.
- Während bei vielen Kindern die grundlegende Voraussetzung fehlt, soziale Bindungen und Beziehungen aufzubauen, zeigen sich einige sozial recht engagiert.
- Einige Schüler erledigen Aufgaben/Anforderungen konzentriert, kreativ und phantasievoll. Andere sind unausgeglichen, unkonzentriert, zappelig und aggressiv.
- Während einige sich ausdauernd und intensiv mit Problemen beschäftigen, verfügen viele nicht über die nötige Ausdauer und Konzentration, dies zu tun.
- Einige besitzen umfangreiche sprachliche Fähigkeiten, die anderen haben nur einen geringen aktiven Wortschatz.

Ziel der Grundschule und speziell des Anfangsunterrichts ist es nun, jedes Kind da abzuholen, wo es sich befindet und an seine individuellen Vorkenntnisse anzuknüpfen. Um dies erreichen zu können, ist eine Öffnung des Unterrichts unverzichtbar. Nur so kann die Grundschule den verschiedenen Kindern einer gemeinsamen Lerngruppe gerecht werden.

1.1.2 Formen offenen Unterrichts – Differenzierung

Die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen sowohl im kognitiven und sozialen Bereich als auch im Lernverhalten bewirken, dass sich die Öffnung des Unterrichts zu einem Schwerpunktthema der Grundschuldidaktik entwickelt hat. Dabei wird der Begriff „offen“ meist synonym verwendet mit differenzierend, individualisierend und schülerorientiert. „Die neue Herausforderung besteht darin, Voraussetzungen für das nach wie vor – vor allem im Hinblick auf soziale Ziele – notwendige gemeinsame und integrierende Lernen zu schaffen. Darüber hinaus müssen aber spezifische Angebote, Wahlmöglichkeiten, Mitentscheidungsanlässe, Handlungssituationen für kleinere Gruppen und für einzelne Kinder bereitgestellt werden.“ (Kasper, H., 1996, S. 191)

Der Unterricht ist also polarisiert. Phasen gemeinsamen Lernens wechseln sich ab mit Phasen freien Übens. Dabei unterscheidet man verschiedene Formen offenen Unterrichts:(vgl. Kasper, H., 1996, S. 193 ff)

1. Freie Arbeit bzw. freies Üben

„In einem abgesteckten zeitlichen Rahmen (zu Beginn 1-2 Stunden pro Woche, im fortgeschrittenen Stadium 1-2 Stunden täglich als fester Bestandteil des Stundenplans) entscheiden sich Schülerinnen und Schüler individuell , welchen Tätigkeiten sie allein oder mit anderen nachgehen wollen.“ (H.Kasper, 1996, S.194)

Über die Inhalte, Materialien und Arbeitsmethoden bestimmt zunächst der Lehrer, wobei er die klassenspezifische Situation berücksichtigt. Nachdem die Schüler an die Methode des freien Übens gewöhnt sind, können/sollen sie verstärkt in die Planung einbezogen werden.

Freies Arbeiten kann organisatorisch in Form einer offenen Lernumgebung, einer Lerntheke, eines Lernzirkels und einer Lernstraße durchgeführt werden.

2. Die Wochenplanarbeit

Der Wochenplan ist ein Plan für den Schüler, auf dem die Lernaktivitäten eines Tages oder einer Woche verzeichnet sind. Kombiniert sind dabei freie Elemente, die das Kind erledigen kann, ein

festgelegtes Pflichtprogramm, das das Kind bewältigen muss, sowie ein Angebot für das Kind, dem noch Zeit bleibt.

Die Schüler arbeiten möglichst selbstständig nach dem Plan. Die Rolle des Lehrers beschränkt sich auf die des Beobachters bzw. Helfers. Für die Zeiteinteilung ist der Schüler selbst verantwortlich. Ist eine Aufgabe erledigt, so verzeichnet das Kind dies eigenverantwortlich in seinem Plan. Im Idealfall sollte der Schüler anhand von Kontrollblättern seine Arbeit selbst auf Richtigkeit überprüfen. Nach einer Eingangsphase, in der der Lehrer die Wochenpläne erstellt, sollten die Schüler mehr und mehr an deren Gestaltung beteiligt werden, unter anderem durch die Erstellung von Arbeitsmaterialien, durch Themenvorschläge, Bereitstellung von Informationsmaterialien zu einem Thema,...

3. Projekte

Gemeinsam wird ein umfangreiches, problemhaltiges Thema aus der Lebenswelt des Kindes ausgewählt. Dieses wird unter verschiedenen Gesichtspunkten behandelt und Lösungen dabei entdeckt. „Es kennzeichnet Projekte besonders, dass Entscheidungen von allen Beteiligten getroffen werden, Lösungen kooperativ, handelnd – auf unterschiedlichen Handlungsebenen – angegangen werden und dass die dabei entstehenden Projektergebnisse auf den Lebenskontext zurückwirken und so als sinnvoll erfahren werden können.“ (Kasper, H., 1996, S.196)

Durch die Öffnung des Unterrichts werden grundlegende Lernziele angesteuert:

- Das Lernen lernen (vgl. dazu 1.1.3.)
- Übernahme von Verantwortung für das Lernen
- Kennenlernen des eigenen Lern- und Arbeitstempos; Fähigkeit zur Selbsteinschätzung
- Planungskompetenz
- Kennenlernen von Möglichkeiten der Informationsbeschaffung
- Auf- und Ausbau der Handlungsfähigkeit
- Soziales Lernen

Analog zur Rolle des Schülers ändert sich im offenen Unterricht auch der Part des Lehrers. Er wird vom Darbieter zum Beobachter von Lernprozessen und Helfer bei individuellen Problemen.

1.1.3 Das Lernen lernen

Unter „Lernen lernen“ versteht man , „...Schülerinnen und Schüler für das selbstständige Lernen und Arbeiten zu motivieren und zu qualifizieren. Das heißt, dass sie fähig werden sollen, sich im Verlauf ihrer Lernentwicklung immer mehr Wissen und Fertigkeiten selbst anzueignen.“ (Keller, G., 1997, S. 34)

„Das eigene Lernen der Schüler soll immer wieder zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden und zur Anwendung kommen. Dabei werden Primärstrategien (...) sowie Stützstrategien (...) angeboten. Dies ermöglicht den Grundschulern eigene Lernstrategien zu entwickeln und zu verbessern.“ (Bayerischer Lehrplan für Grundschulen, 2000, S. 15)

Die Aussagen des Lehrplans werden durch die Ausführungen von Ingrid Naegele (vgl. Naegele, I., 1996) und Konrad, K., Wagner, A. (Konrad K., Wagner, A., 1999) ergänzt.

Primärstrategien

- Techniken und Methoden der Organisation:
Diese sind beispielsweise das Nachschlagen in Wörterbüchern und Lexika oder die Arbeit mit dem Hausaufgabenheft (analog zur Wochenplanarbeit: Durchstreichen nach Erledigung der Aufgabe, farbliche Akzentuierungen, Erstellen eines Zeitplans: Wann muss ich was in welcher Zeit vorbereiten?)
- Beschaffung und Aufnahme von Informationen
Kinder/Menschen lernen unterschiedlich:
 - Einige nehmen die Informationen in erster Linie über den visuellen und/oder auditiven Kanal auf,
 - andere unterstützen den Lernprozess durch Bewegung,
 - einige schaffen sich sogenannte Eselsbrücken,
 - andere verknüpfen neuen Lernstoff mit bereits Bekanntem und stellen Zusammenhänge her.Es gibt nicht nur einen Lerntypen. „Statt überdauernden Lerntypen findet man innerhalb einer Person eine Vielfalt von Verarbeitungsweisen, deren Einsatz abhängig von der Aufgabe, den wahrgenommenen Informationen, der Erinnerungssituation und anderen Bedingungen ist.“ (Weidemann, zitiert bei Naegele, J.M., 1996, S. 244)
Je mehr Lernwege nun im Unterricht angeboten werden, umso wahrscheinlicher ist es, dass die Information von allen gespeichert wird. Zudem lernt der Schüler, die Lernwege effektiv zu variieren.
- Verarbeitung und Speicherung
Beispiele dazu sind:
Anlegen von Lernkarteien
Üben in sinnvollen Zusammenhängen, vernetztes Lernen
kurze, über einen längeren Zeitpunkt verteilte Übungen
Fehler aufspüren
Einprägetechniken (Gedächtnisstützen verwenden; alten Lernstoff regelmäßig wiederholen; nach dem Lernen durch Aufsagen oder Aufschreiben überprüfen, ob das Gelernte behalten wurde)
- Weitergabe und Anwendung von Informationen
Beispiele:
Fehler differenziert berichtigen
Selbstkontrollmöglichkeiten als Lernhilfe einsetzen
Zusammenfassungen erstellen
Fehler analysieren

Stützfunktionen

Beispiele:

- Pausen beim Lernen (geregelter Zeitplanung)
- Übersichtliche Heftführung

- Berücksichtigung des individuellen Tages- und Lernrhythmus
- Äußere Bedingungen am Arbeitsplatz (Ordnungssysteme)
- Gestalten von Karten und Notizen
- Techniken der Konzentration und Entspannung
- Motivationstechniken

Die unterrichtliche Verwirklichung dieser Lerninhalte im Unterricht kann sich auf zwei Ebenen vollziehen:

- Obengenannte Techniken und Methoden werden eng an konkrete Inhalte gebunden. Dies beinhaltet die Gefahr, dass die betreffenden Lernstrategien nicht oder nur schwer transferiert werden können.
- Die Lernstrategien werden zu einem eigenen Lerninhalt, der von konkreten Situationen losgelöst ist. Dies kann aber ebenfalls den Transfer erschweren.

Für die Grundschule ist eine Lösung anzustreben, die zwischen beiden Positionen liegt, d.h. Lernstrategien werden zunächst an der konkreten Situation erarbeitet. Mit zunehmendem Alter der Schüler werden sie aber immer mehr generalisiert.

1.2 Erstrechenunterricht: Leitlinien und Aspekte

Im Folgenden werden wichtige Aspekte bzw. Tendenzen skizziert, die in der aktuellen Diskussion zum mathematischen Anfangsunterricht eine Rolle spielen bzw. das Fundament für seine Gestaltung darstellen.

1.2.1 Vorerfahrungen der Schüler

Wissenschaftliche Untersuchungen zeigen, dass die Schüler bis zum Schuleintritt in der Regel weitreichende Erfahrungen zu vielen mathematischen Teilbereichen gemacht haben (z.B. Menge – Ziffer – Zahlzuordnung, 1:1 Zuordnungen, Zahlen lesen und schreiben, zählen) und viele Plus- und Minusaufgaben bereits lösen können (vgl. u.a. Grassmann, M., 1995; Senftleben, H.G., 1996c; Schmidt, S, Weiser, W., 1982; Grassmann, M., u.a., 1995). Diese vor bzw. ganz allgemein außerhalb der Schule erworbenen Fähigkeiten fasst man unter dem Ausdruck „Straßenmathematik“ zusammen. Demgegenüber bezeichnet „Schulmathematik“ das im schulischen Mathematikunterricht erworbene Wissen.

Das richtige Lösen von Aufgaben und die daraus von vielen Autoren abgeleitete hohe Kompetenz der Schulanfänger ist nun von folgenden Prämissen abhängig:

- Die Aufgabenstellung muss in einen solchen Kontext eingebunden sein, „... der den Schülern vertraut ist und der ihnen zugleich einen Hinweis gibt, mit welchen konkreten Handlungen die Aufgabe gelöst werden kann.“ (Schipper, W., 1998, S.133).
- Die Schüler ermitteln das Ergebnis der Aufgabe meist nur durch Abzählen an den Fingern oder am konkreten Material. Es wird bei den Untersuchungen mehr Wert auf das richtige Ergebnis als auf die Bewertung möglicher Lösungsstrategien gelegt (die Untersuchungen sind produkt- aber

nicht prozessorientiert). Ziel des mathematischen Anfangsunterrichts ist es aber gerade, die Schüler vom zählenden Rechnen wegzuführen.

Sind diese Voraussetzungen nicht gegeben, so sinkt die Anzahl der richtigen Ergebnisse drastisch. Wilhelm Schipper (Schipper, W., 1998, S. 134) bezeichnet deshalb die Schüler als gute Straßenmathematiker mit Kenntnissen, die der Schüler im täglichen Leben lernt, im Gegensatz zu guten Schulmathematikern. Ziel des Unterrichts ist, „... dass die Kinder – durchaus zunächst auf der Grundlage eigener Verfahren - nach und nach immer leistungsstärkere Strategien des Rechnens unter ausnutzen operativer Beziehungen entwickeln, über Halbieren oder Verdoppeln, über Zerlegen und Zusammensetzen, vielleicht sogar über gleich- und gegensinniges Verändern, kurz: mit Verfahren, die sich auf Einsicht in Zahlbeziehungen gründen.“ (Schipper, W., 1998, S. 134).

Dass die Schüler aber über mathematische Vorerfahrungen verfügen und ihr Wissen gerne in den Anfangsunterricht miteinbringen, ist zweifelsfrei. Deshalb ist die bisherige Vorgehensweise mit einem 4 – 6 wöchigem pränumerischem Grundkurs ohne Zahlenarbeit genauso wenig aufrechtzuerhalten wie die dann folgende sukzessive Erschließung der Zahlen von 1 bis 10. Analog dazu aber dürfen die Untersuchungsergebnisse nicht dazu verleiten, den Zahlenraum vorschnell zu öffnen, ohne die Grundlagen für zukünftiges mathematisches Lernen gelegt zu haben. Deshalb wäre es problematisch, den Zahlenraum von Anfang an bis 20 zu erschließen und zu bearbeiten. Sinnvoll scheint eine Zäsur bei 10. In diesem überschaubaren Zahlenraum werden all die Denkschemata grundgelegt, auf die im erweiterten Zahlenraum aufgebaut werden kann. Bei der Erarbeitung aller mathematischen Inhalte ist es aber grundlegend, die Vorkenntnisse der Schüler miteinfließen zu lassen, bzw. darauf aufzubauen: „Die in den Studien beobachtete, teilweise gut ausgeprägte Fähigkeit vieler Kinder zur Lösung solcher kontextgebundener Aufgaben mit informellen, zunächst wohl zählenden Verfahren kann ein guter Anknüpfungspunkt für unterrichtliche Maßnahmen sein, die Kinder im Sinne von fortschreitender Schematisierung zu befähigen, solche Aufgaben auch auf abstraktere „schulmathematische“ Weise zu lösen.“ (Schipper, W., 1998, S.138)

Auch wenn die schwerpunktmäßige Bearbeitung des Zahlenraums zunächst bis 10 festgelegt ist, so sollte doch diese Schranke immer wieder übersprungen werden, um Schülern einen Einblick in einen größeren Zahlenraum zu gewähren, ohne dass dieser systematisch erschlossen worden ist. Eine gute Möglichkeit dazu bieten die sogenannten „sinnvollen Päckchen“, z.B.

$$2 + 2$$

$$3 + 3$$

$$4 + 4$$

.....

Je nach Kenntnissen der Schüler können diese Aufgaben beliebig weitergeführt werden.

Die Untersuchungen belegen eindeutig die Leistungsheterogenität innerhalb einer Klasse. Durch ein Verweilen auf den überschaubaren Zahlenraum bis 10 wird es gerade den Kindern, die noch nicht genügend Erfahrungen zum zählenden Rechnen und in der konkret-handelnden Umsetzung von Sachaufgaben gemacht haben, ermöglicht, diese nachzuholen und ihre Defizite zu kompensieren.

1.2.2 Entdeckendes Lernen

Der Schüler wird dabei durch eine herausfordernde Aufgabenstellung aktiviert, selbstständig nach Lösungswegen zu suchen. Er kombiniert und verknüpft bereits vorhandenes Wissen und Fertigkeiten und gelangt so selber zu neuen Einsichten und tiefgreifendem Verständnis. Dieses Verstehen ist Voraussetzung für langfristig wirkendes mathematisches Lernen. Dabei ist es sekundär, ob der eingeschlagene Weg direkt, auf Umwegen oder unter Umständen auch gar nicht zur Lösung führt. Primäres Ziel ist die Anbahnung von problemorientiertem, beweglichem Denken. Der Fehler bekommt damit eine neue Wertigkeit, er wird im Unterricht produktiv genutzt: „Erstens wird versucht, die Ursache eines Fehlers in vertrauensvoller Atmosphäre offen darzulegen, um dahinterzukommen, wie dieser Fehler wohl entstanden ist. Zweitens wird immer wieder ausdrücklich thematisiert, wie man die Lösung einer Aufgabe selbstständig auf Richtigkeit kontrollieren kann.“ (Winter, H., 1987, S.25)

Darüber hinaus bieten Fehler die Chance zu erkennen, wie Kinder rechnen und an welcher Stelle sie sich innerhalb eines Lernprozesses befinden. Beide Aspekte sind die Voraussetzung für die am Kind ausgerichtete Unterrichtsplanung.

Im Idealfall findet entdeckendes Lernen in vier Phasen statt:

Ausgangspunkt ist eine Problemstellung aus der Umwelt oder dem Alltag des Kindes, die den Lernenden herausfordert. „Eine Situation ist herausfordernd, wenn sie im ganzen vertraut erscheint, aber doch auch unbekannte, fragwürdige Elemente enthält, wenn sie Handlungen verspricht und wenn sie wesentliche Bestandteile des zu lernenden Inhalts verkörpert (...).“ (Winter, H., 1987, S.17)

Die Auswahl der Problemstellung wird in der Regel vom Lehrer getroffen.

Anschließend suchen und erproben die Schüler allein, in Partner- oder Gruppenarbeit zielgerichtet eigene Lösungswege, indem sie ihnen bereits bekannte Verfahren, Strategien und Arbeitsmittel benutzen. Der Lehrer übernimmt während dieser Phase lediglich die Funktion des Beraters.

Nun stellen die Schüler ihre erarbeiteten Lösungswege vor und reflektieren darüber. Sie begründen und argumentieren und gehen dabei auch auf mögliche Irrwege und Probleme ein. Die anderen Schüler kommentieren und beurteilen, erkennen Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Dabei erfahren sie, dass verschiedene mathematische Wege zur Lösung führen können. Die Lehrkraft koordiniert die Schülerbeiträge.

Während der letzten Phase fasst der Lehrer (dieser Part kann auch von einem Schüler übernommen werden) die Ergebnisse zusammen, würdigt alle gefundenen Wege und ergänzt ggf. durch gezielte Erklärungen.

Bezüglich des entdeckenden Lernens findet man in der pädagogisch-didaktischen Literatur zahlreiche positive, stützende Argumente (vgl. u.a. Wittmann, E.Ch, 1995; Winter, H., 1978; Selter, Ch., 1995).

Im Kreise praktizierender Lehrer werden jedoch häufig folgende Gegenargumente angeführt:

- Entdeckendes Lernen ist sehr zeitintensiv. Diese ist aufgrund übervoller Lehrpläne nicht vorhanden.

- Die Phase der Reflexion dauert zu lange, da jedes Kind bzw. jede Gruppe ihren Lösungsweg vorstellen soll, was häufig zu Disziplinproblemen führt. Leistungsschwache Schüler können den Erklärungen der anderen nicht folgen.

Dennoch sollten auch von Praktikern folgende Argumente bedacht werden:

- Die durch entdeckendes Lernen erarbeiteten Rechenverfahren basieren auf Verständnis und Einsicht. Dies erleichtert eine Automatisierung derselben.
- Die vier Stufen müssen nicht Teil einer Unterrichtseinheit sein. Sie können auf mehrere verteilt werden.
- Phasen entdeckenden Lernens und Phasen systematisch-aufbauenden Lernens ergänzen sich (nicht alles kann entdeckt werden).
- Entdeckendes Lernen soll ein Unterrichtsprinzip sein, d.h. den Schülern sollen auch „kleine Entdeckungen“ ermöglicht werden, z.B. bei operativen Übungen.

1.2.3 Rechenstrategien

Radatz, Schipper, Dröge und Ebeling beschreiben im Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr (1996) ausführlich die wichtigsten Rechenstrategien, mit denen das Ergebnis einer elementaren Rechenaufgabe ermittelt werden kann. Diese drei Strategien sind:

1. Zählstrategien
2. Auswendigwissen
3. Heuristische, bzw. operative Strategien

- **Zählstrategien**

Das Zählen ist die ursprünglichste Strategie, die bis weit in die 1. Jahrgangsstufe verbreitet ist.

Man unterscheidet dabei Kinder, die Alles-zählen (z.B. $3 + 6 = 1,2,3 + 1,2,3,4,5,6 = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$) oder Weiter-zählen ($3 + 6 = 3 + 4,5,6,7,8,9$ – wobei der zweite Summand meist mit den Fingern dargestellt wird).

Die Strategie des Zählens hat im mathematischen Anfangsunterricht durchaus seine Berechtigung, da

- so an die Vorkenntnisse der Schüler angeknüpft werden kann,
- noch nicht alle Schüler ausreichende Erfahrungen zum zählenden Rechnen gemacht haben,
- es einen wichtigen Zwischenschritt auf dem Wege zu operativen Strategien darstellt.

Langfristiges Ziel ist allerdings eine Wegführung vom zählenden Rechnen, da dieses gravierende Nachteile haben kann (vgl. dazu u.a. Krauthausen, G., 1995):

- Zwischen den einzelnen Aufgaben wird kein Bezug, kein Zusammenhang hergestellt. Jede Aufgabe wird neu berechnet.
- Dieses Verfahren ist im größeren Zahlenraum zu fehleranfällig (unklare Rolle der ersten Zählzahl) und zeitintensiv.

- Es wird kein geeignetes visuelles Bild aufgebaut, da die Einzelaufgaben nicht in einem mathematischen Zusammenhang stehen.
 - Das Dezimalsystem kann durch zählendes Rechnen insbesondere in der 1. und 2. Jahrgangsstufe umgangen werden. Somit fehlt die Grundlage für späteres Rechnen im erweiterten Zahlenraum.
 - Zu starke Fokussierung auf die Zähltechnik beeinträchtigt das mathematische Verständnis der Aufgabe.
 - Zählen wird als alleinige Strategie verwendet. Die Schüler greifen nicht auf die auswendiggelernten Einspluseinssätze zurück und sehen nicht die Notwendigkeit, sich weitere einzuprägen.
- Auswendigwissen
 Jeder Schüler kennt bei Schuleintritt Aufgaben auswendig. Es bereitet ihm große Freude, seine Kenntnisse über auswendig gelernte Aufgaben (meist sind es Verdoppelungsaufgaben) mitzuteilen. Bei der Erschließung der verschiedenen Aufgabenarten im Zahlenraum bis 10 (20) erweitern sie die Anzahl der auswendig gelernten Aufgaben zunehmend.
 Zum Großteil lösen sie auch Gleichungen wie $7 + _ = 9$ mit Hilfe ihres Wissens über die Einspluseinssätze.
 - Heuristische bzw. operative Strategien
 „Mit dieser Bezeichnung sind Strategien des flexiblen Umgangs mit Zahlen gemeint.“ (Radatz, H, u.a., 1996, S. 83)
 Dies sind insbesondere:
 - Verdoppeln und Halbieren bei Addition und Multiplikation
 (z.B. $2 + 2 = 4$; $3 \times 2 + 3 \times 2 = 6 \times 2$)
 - Zerlegen und Zusammensetzen bei Addition und Multiplikation
 (z.B. $7+8=7+3+5=15$; $8 \times 7=7 \times 7+1 \times 7$)
 - Gleich- und gegensinniges Verändern
 Gleichsinniges Verändern bei der Subtraktion: z.B. $11-4= 12-5= 10-3$ (sowohl der Minuend als auch der Subtrahend werden um eins erhöht oder vermindert, das Ergebnis bleibt gleich).
 Gegensinniges Verändern bei der Addition: z.B. $7+8= 6+9$ (der erste Summand wird um eins vermindert, der zweite Summand wird um eins erhöht, das Ergebnis bleibt gleich).
 - Die Erschließung von Nachbaraufgaben bei der Addition und Multiplikation (dies wird von den Autoren als operative Übung bezeichnet, ist aber nach Meinung der Verfasserin auch eine wesentliche Rechenstrategie). Beispiel:

	4+5			6x5	
5+4	5+5	5+6	7x4	7x5	7x6
	6+5			8x5	

Bemerkungen zum Unterricht:

- Es ist wichtig, die einzelnen Strategien im Unterricht entdecken zu lassen und über Vor- und Nachteile zu reflektieren.
- Nicht alle Kinder der Klasse verwenden dieselbe Strategie.
- Das einzelne Kind kann die Strategie von Aufgabe zu Aufgabe wechseln.
- Der Lehrer muss möglichst differenziert beobachten, bei welchen Aufgaben das Kind welche Strategie benützt. Nur so kann der Schüler vom zählenden Rechnen oder von fehlerhaften Lösungswegen weggeführt werden.
- Laut Untersuchungen (Gray, E.M., 1991: An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic, zitiert in Radatz, H. u.a., 1996, S.84) verwendet nur ein geringer Teil der Schüler der 1.Jahrgangsstufe zur Ermittlung von Ergebnissen operative Strategien. Viele Kinder bevorzugen die Strategie des Auswendigwissens, da sie gerade im Zahlenraum bis 20 am effektivsten erscheint. Dennoch darf aber nicht auf eine Thematisierung heuristischer Strategien verzichtet werden, da sie einerseits das Fundament bilden, auf das der Unterricht der 2.Jahrgangsstufe aufbaut und andererseits nicht stures, sondern einsichtiges, auf Verständnis basierendes Auswendigwissen Ziel des mathematischen Anfangsunterrichts ist.

1.2.4 Strukturiertes Lernen

Strukturiertes Lernen ist eine notwendige Ergänzung zum entdeckenden Lernen und zu offenen Lernformen, denn nur wenn der Schüler die Fähigkeit besitzt, einem Inhalt eine Ordnung oder Struktur zu geben, kann er sich diesen auch einprägen. Im mathematischen Unterricht wird dies häufig vernachlässigt. Betrachtet man die Schulbücher, so sieht man eine sehr kleinschrittige Strukturierung eines Inhalts. Analog dazu sequenziert der Lehrer kleinschrittig im Rahmen seines Wochenplans. Die Schüler werden nicht in diesen Prozess miteingebunden, die Möglichkeiten, Strukturen zu entdecken und Ordnungen selbst zu entwickeln wird ihnen vorenthalten. Insbesondere leistungsschwächere Schüler gewinnen so keinen Einblick in mathematische Zusammenhänge. Jede Aufgabe ist für sie ein Einzelteil, das von den anderen isoliert steht.

Im Folgenden soll an dem Beispiel „Addition bis 100“ gezeigt werden, wie ein Strukturieren, das die Schüler miteinbezieht, erfolgen kann:

1.Phase:

Die Schüler erhalten Aufgabenkarten mit Additionsaufgaben bis 100.

$$56 + 6$$

$$67 + 4$$

$$61 + 7$$

$$52 + 5$$

$$28 + 23$$

$$57 + 40$$

$$49 + 27$$

$$36 + 23$$

$$45 + 34$$

$$26 + 30$$

Die Schüler strukturieren die Aufgaben selbstständig z.B.

- nach einstelligem oder zweistelligem zweiten Summanden
- nach der Höhe des Ergebnisses, das sie überschlagsmäßig bestimmen
- nach der Größe des ersten Summanden
- nach der Größe des zweiten Summanden

Die einzelnen Ordnungskriterien werden von den Schülern vorgestellt und darüber diskutiert.

Anschließend lösen sie in der Gruppe die Aufgaben mit Hilfe des Arbeitsmittels und erkennen, dass man Aufgaben auch nach deren mathematischen Schwierigkeitsgrad ordnen kann (mit/ohne Zehnerübergang, Addition mit Zehnerzahlen; Addition mit zweistelligen Zahlen)

2.Phase:

Die einzelnen Aufgabentypen werden nun schwerpunktmäßig geübt, um leistungsfähigere Strategien zu trainieren:z.B.

Erkennen und Anwenden der dekadischen Analogie: $7+2=$

$$17+2=$$

$$27+2= \dots\dots\dots$$

Verwenden der bekannten Einspluseinssätze, $56+6=$

$$6+6=12 \quad 50+12=62$$

Vorteilhaftes Zerlegen des zweiten Summanden, $28+23= 28+20+3= 51$

Vorteilhaftes Rechnen bei zehnernahen Zahlen: $28 +39 = 28+40-1$ oder $30+40-3$

Während der einzelnen Übungsphasen wird Rückschau gehalten, welche Aufgabentypen bereits geübt wurden und welche Zusammenhänge zwischen ihnen bestehen.

Vorteile des strukturierten Lernens:

- Der Unterricht knüpft konsequent an die Vorkenntnisse der Schüler an. Zu den einfachen treten allmählich leistungsstärkere Strategien.
- Die Schüler haben von Anfang an einen Überblick über die verschiedenen Aufgabentypen und erkennen Zusammenhänge.
- Auch leistungsstärkere Schüler werden sogleich mehr gefordert. Eine frühzeitige Differenzierung ist so möglich.

1.2.5 Handlungsorientierung

Nach Piaget befindet sich das Kind im Vorschulalter (3. – 6./7. Lebensjahr) in der Phase des präoperationalen Denkens. Das Kind kann in zunehmendem Maße die Handlungen durch Vorstellungsbilder ersetzen. Allerdings bleiben die Anschauungsbilder an die Handlungen gebunden, es ist eine „handelnde Anschauung“. (Lorenz, J.H., 1995, S.10).

In der Phase der konkreten Operationen (bis 11./12. Lebensjahr) ist die Fähigkeit, sich Handlungen vorzustellen, voll entwickelt. „Das Kind kann in seiner Vorstellung Operationen ausführen, allerdings

bleibt dies auf Probleme mit konkreten Objekten beschränkt. Rein verbal verarbeitete Aufgaben kann es nicht angehen....“ (Lorenz, J.H., 1995, S.10) Nun ist das Kind auch in der Lage, die Handlungen in der Anschauung umzukehren.

Handlungen mit konkreten Gegenständen und Arbeitsmitteln sind die Grundvoraussetzung für die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kind.

Die Handlungen sind ein Teilbereich im mathematischen Abstraktionsprozess. Daneben sind die ikonische und symbolische Darstellungsebene zu berücksichtigen. In der Praxis werden die Ebenen in der Regel bei der Einführung eines neuen Lerninhaltes meist linear vom Enaktiven über das Ikonische zum Symbolischen erschlossen. Dies erscheint wenig sinnvoll, da der Abstraktionsprozess individuell ist und nicht bei jedem Kind in dieser Reihenfolge abläuft.

Vielmehr sollten

- die Ebenen in ihrer Abfolge variativ in Abhängigkeit vom Lerninhalt eingesetzt werden.
- die verschiedenen Darstellungsebenen mehrfach in wechselnder Reihenfolge durchlaufen werden.
- Zusammenhänge zwischen den Darstellungsebenen am konkreten Beispiel einsichtig gemacht werden.
- die Kinder mit den Darstellungen flexibel umgehen können, um Probleme durch die Rückführung in eine andere Abstraktionsebene zu lösen.

1.2.6 Operative Übungen

Mit dem Begriff „operative Übungen“ werden alle diejenigen Übungsformen bezeichnet, „... die geeignet sind, vielfältige Zusammenhänge und Beziehungen herauszuarbeiten und für die weiteren Aktivitäten zu nutzen. Operative Übungen fordern und fördern ein bewegliches Umgehen mit Zahlen und Rechenoperationen.“ (Radatz, H. u.a., 1996, S. 84)

Eine Aufgabe sollte nicht isoliert, sondern immer in einer mathematischen Beziehung zu einer ganzen Aufgabenfamilie gesehen werden, z.B.

$$4 + 4 \quad (\text{Grundaufgabe})$$

$$4 + 5 \quad (\text{Nachbaraufgabe})$$

$$3 + 5$$

$$4 + 4 \quad 4 + 5 \quad 4 + 6 \quad (\text{Nachbaraufgaben})$$

$$5 + 5$$

$$9 - 5 \quad (\text{Umkehraufgabe})$$

$$5 + 4 \quad (\text{Tauschaufgabe})$$

$$9 - 4 \quad (\text{Umkehraufgabe der Tauschaufgabe})$$

$$3 + 6 \quad (\text{Gegensinniges Verändern; gleiches Ergebnis})$$

$$4 + _ = 9; 5; 5 + _ = 9; 9 - _ = 4; 9 - _ = 5; _ + 6 = 9 \quad (\text{Platzhalteraufgaben})$$

$$14 + 5 = \quad (\text{Dekadische Analogie})$$

Diese Übungen eignen sich besonders zur „natürlichen Differenzierung“. (vgl. Scherer, P., 1998, S.104) Alle Schüler bearbeiten dieselbe Aufgabe, aber jedes Kind wählt sein eigenes Bearbeitungsniveau (Anzahl und Schwierigkeitsgrad der gefundenen Aufgaben).

In der Praxis werden häufig operative Übungen als zu schwierig für leistungsschwache Schüler eingestuft und deshalb die Kinder auf der Stufe des Abarbeitens scheinbar einfacher (da ohne mathematischen Zusammenhang) Aufgaben belassen. Aber gerade diese Kinder brauchen das Lernen in Sinnzusammenhängen, da nur so die Anzahl der Aufgaben, die auswendig gelernt werden müssen, auf ein Minimum reduziert werden kann.

Ein einfaches Beziehungsgeflecht, das auch von leistungsschwächeren Schülern durchschaut wird, sind die Zahlentripel, z.B. 3,6,9. Die Schüler finden die Aufgaben $3 + 6 = 9$; $6 + 3 = 9$; $9 - 6 = 3$; $9 - 3 = 6$.

Leistungsstärkere Schüler erkennen komplexere Zusammenhänge wie:

- 3, 6 Wie kann die dritte Zahl heißen? Findest du beide Möglichkeiten?
- Bei welchen Zahlentripeln gibt es nur zwei Aufgaben?
- Wie müssen 4 Zahlen operativ zusammenhängen?

Operatives Üben darf aber nicht auf der Phase der Durchführung stehenbleiben, sondern die Zusammenhänge sollten von den Schülern auch mit Hilfe von Arbeitsmitteln erklärt und begründet werden.

1.2.7 Rechenschwäche/ Rechenstörungen

Der Begriff Rechenschwäche (auch Dyskalkulie u.a.) ist in der Literatur nicht eindeutig geklärt. Einen weitreichenden Rahmen geben Jens Holger Lorenz und Hendrik Radatz. „Wir wollen alle Schüler einbeziehen, die einer Förderung jenseits des Standardunterrichts bedürfen.“ (Lorenz, J.H., Radatz, H., 1993, S.16)

Obwohl ausführliche Erörterungen über Erscheinungsformen, Ursachen und Fördermaßnahmen existieren, stehen die Lehrer in der Praxis diesem Problem meist hilflos und unsicher gegenüber. Im Folgenden werden im Sinne eines Grobübersichts nur einige Aspekte des komplexen Wirkungsgefüges Rechenstörungen angeführt.

Es gibt nicht die eine Ursache für eine Rechenstörung. Vielmehr sind verschiedene möglich:

- Defizite bei den basalen Voraussetzungen zum Erlernen mathematischer Inhalte
- Defizite im pränumerischen Bereich
- Hohe Erwartungen im Elternhaus (Leistungsdruck, Versagensangst)
- Die Persönlichkeit des Kindes (geringes Selbstwertgefühl)
- Defizite im Unterricht (zu schnelles Vorwärtsschreiten von der konkreten auf die abstrakte Ebene, unzureichender Einsatz von Arbeitsmitteln,...)
- Gedächtnisstörungen

Meist greifen bei einer Rechenschwäche mehrere Ursachen ineinander und verstärken sich gegenseitig.

Gezielte Lehrerbeobachtungen (zu Arbeitsverhalten und Schülerfehlern bei einzelnen Lernstufen oder Inhaltsbereichen) sind die Grundlage, um Rechenschwäche möglichst frühzeitig zu erkennen und Fördermaßnahmen zu ergreifen. Bei Problemfällen sollen Schulpsychologen oder Schulberatungsstellen herangezogen werden.

Es gibt nicht die Methode des Förderns. Generell sollten jedoch nicht nur die kognitiven Fähigkeiten trainiert werden, sondern auch das Selbstbewusstsein. Die Freude an der Mathematik soll wieder zurückgewonnen werden.

Eine intensive Zusammenarbeit und Absprache über gemeinsame Zielsetzungen und Maßnahmen zwischen Schule, Elternhaus und externen Förderstellen ist unerlässlich.

Alle Beteiligten (Kind, Elternhaus, Lehrer) müssen lernen, mit der Rechenstörung umzugehen. Es muss einerseits auch der kleinste Fortschritt gewürdigt werden und andererseits auch akzeptiert werden, dass etwaige Schwächen auch trotz intensiver Übung nicht vollständig behoben werden können.

1.2.8 Geometrie

Geometrie wird in der Grundschule erst seit verhältnismäßig kurzer Zeit berücksichtigt. Die Raumerfahrung, Flächen- und Körperformen und die Symmetrie sind die üblichen Inhalte dieses mathematischen Bereichs. In der Praxis werden diese aus folgenden Gründen häufig vernachlässigt (nach Radatz, H. u.a., 1996):

- Die arithmetischen Inhalte werden überbetont, für die Geometrie bleibt meist nur wenig Zeit .
- Geometrieunterricht erfordert Material, das an den Schulen meist nicht in ausreichender Anzahl vorhanden ist.
- Geometrische Inhalte sind schwer in Lernzielkontrollen zu überprüfen.
- Geometrie ist sehr komplex. Lernerfolge sind meist nur langfristig feststellbar.

Diese Vernachlässigung scheint unangebracht, betrachtet man die Gründe, die für die Geometrie sprechen und im Folgenden in Anlehnung an Radatz, H.u.a., 1996 erläutert werden.

- In der Umwelt sind in vielfältiger Weise geometrische Formen enthalten. Der Geometrieunterricht hilft dem Kind, Kompetenzen im Hinblick auf die Raumvorstellung und die visuelle Informationsaufnahme und –verarbeitung, sowie geometrische Körper und Flächen zu erwerben. So kann es sich seine Lebens- und Erfahrungswelt erschließen. Die Geometrie knüpft an die unmittelbaren konkreten Erfahrungen der Schüler an, er arbeitet durch Handeln Ordnungen und Beziehungen heraus und hilft, die geometrischen Kenntnisse und Fertigkeiten auf andere Probleme und Aufgaben anzuwenden und zu übertragen. So kann die Geometrie dem Schüler Hilfen für die Orientierung in seiner Lebenswirklichkeit geben. Es werden Alltagsprobleme aufgezeigt und Sinnzusammenhänge verdeutlicht (Anwendungsorientierung und Strukturierung).
- Der Geometrieunterricht verfolgt Lernziele und Methoden, die sowohl fachbezogen als auch fächerübergreifend sind, wie
 - vergleichen, unterscheiden und verallgemeinern

- entdeckendes Lernen
 - Handlungsorientierung
 - produktives Üben
 - flexibles, problemlösendes Denken
 - Konzentrationsfähigkeit
 - verbalisieren
- Geometrische Fähigkeiten sind Grundlage für arithmetisches Denken. „Ohne geometrisches Denken lassen sich im Mathematikunterricht kaum Vorstellungen entwickeln, mathematische Begriffe und Beziehungen verinnerlichen und somit Einsicht in viele Bereiche des arithmetischen Denkens gewinnen.“ (Radatz, H., Rickmeyer, K., 1991, S.8).
So ist beispielsweise das simultane Erfassen und Gliedern von Anzahlen abhängig vom räumlichen Vorstellungsvermögen. Auch bei mathematischen Notationen ist die Lagebeziehung von Zahlen und Zeichen entscheidend.
 - Geometrische Erfahrungen sind unverzichtbar für die kognitive Entwicklung des Schülers. Nahezu jedes Denken basiert auf visuellen-geometrischen Stützen. „Die intellektuelle Entwicklung ist eng verbunden mit den Fähigkeiten, visuell dargebotene Informationen aufzunehmen, zu analysieren, zu speichern, mit ihnen in der Vorstellung zu operieren u.a.“ (Radatz H., Rickmeyer K., 1991, S.7)
 - Viele Aufgaben des Geometrieunterrichts lassen sich „spielerisch“ durch Handlungen lösen. So kann gerade durch die Geometrie eine positive Einstellung gegenüber der Mathematik im Schüler erhalten bzw. aufgebaut werden.

Im Zusammenhang mit grundlegenden Fähigkeiten wird in letzter Zeit besonders die „Kopfgeometrie“ betont.

Der Begriff „Kopfgeometrie“ wird in der Literatur unterschiedlich definiert. Zum einen werden damit Übungen bezeichnet, die rein in der Vorstellung /im Kopf durchgeführt werden müssen (vgl. Degner/Kühl, zitiert bei Senftleben, H.G., 1996b). Zum anderen werden unter diesem Begriff Übungen zusammengefasst, die an Materialien veranschaulicht und durch Probieren, Experimentieren gelöst werden dürfen (vgl. Radatz, H., Rickmeyer, K., 1991). Würde man die Kopfgeometrie auf ein Operieren in der Vorstellung beschränken, so könnten viele Aufgaben von leistungsschwächeren Schülern nicht gelöst werden, da sie ein hohes Maß an Sicherheit bei mathematischen Fachbegriffen voraussetzen. Es kann aber gerade bei diesen Schülern nicht darauf verzichtet werden, da damit in besonderer Weise die Raumvorstellung geschult wird. Schließt man sich der Definition von Radatz/Rickmeyer an, so wäre Kopfgeometrie meist nur mit konkretem Handeln und Anschauungsmitteln verbunden und würde den Schüler zu wenig berücksichtigen, der zu einem rein vorstellungsmäßigem Operieren fähig ist.

H.G.Senftleben unterscheidet vier Kategorien kopfgeometrischer Aufgaben, die anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden: (vgl. Senftleben, H.G., 1996b, S.49-72)

1. Reine Kopfgeometrie mit sprachlich dargebotener Aufgabenstellung, die ohne Veranschaulichung zu lösen ist: Zerschneide in der Vorstellung ein quadratisches Blatt Papier auf der Diagonalen.
Welche Figuren erhältst du?

2. Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln, die das Problem veranschaulichen: Der Lehrer zeigt das quadratische Blatt Papier, die Schüler zerschneiden es in der Vorstellung.
3. Kopfgeometrie mit Materialien für die Schüler, an denen sie die Lösung entwickeln können: Sie erhalten das quadratische Blatt Papier und ermitteln die Lösung zunächst durch Überlegen und anschließend durch konkretes Handeln. Die Informationen zur Aufgabenstellung werden verbal dargeboten.
4. Kopfgeometrie, die konkrete Veranschaulichung in der Problem- und Lösungsphase zulässt: Der Lehrer veranschaulicht seine Aufgabenstellung (er zeigt am quadratischen Blatt die Diagonale), die Schüler ermitteln die Lösung durch konkretes Handeln.

Wie die Beispiele zeigen, werden im Rahmen der Kopfgeometrie grundlegende Fähigkeiten wie visuelles Operieren besonders trainiert. Die verschiedenen Aufgabentypen symbolisieren keine Stufenfolge. Vielmehr sollte der Lehrer die verschiedenen Bereiche je nach Schwierigkeitsgrad der Aufgabe variieren und den Schüler im Rahmen der Differenzierung selbst entscheiden lassen, wie er das Problem löst (in der Vorstellung oder durch Handeln).

1.3 Mögliche Konzeptionen des Faches Mathematik

Nachdem grundlegende Tendenzen der Grundschuldidaktik allgemein und der Mathematikdidaktik im Besonderen erörtert wurden, stellt sich nun die Frage, in welcher Beziehung beide Bereiche zueinander stehen. Drei Konzeptionen sind vorstellbar:

1. Die Mathematik sieht sich als eigenständigen Bereich mit spezialisierten Zielen und Inhalten. Eine Verbindung zu den anderen Bereichen der Grundschule besteht nicht.
Problem dieser Konzeption: Das Fach läuft so Gefahr, auf der Ebene der Begriffe, der Rechenfertigkeiten, der Automatisierung stehenzubleiben. Sachaufgaben dienen lediglich der Anwendung der antrainierten Rechenverfahren.
2. Die Mathematik gibt ihre Fachstruktur zugunsten eines Gesamtkonzeptes Grundschule auf.
Problem dieser Konzeption: Fachspezifische Inhalte und Arbeitsweisen werden vernachlässigt zu Gunsten eines Gesamtkonzeptes Grundschule.
3. Die Mathematik ist ein Bereich, der einerseits ein eigenes kognitives Profil aufweist und eine eigenständige Weltsicht vermittelt, andererseits aber auf allgemeinen Grundlagen beruht und diese auch fördert.
Der Mathematikunterricht ist eingebettet in eine Gesamtkonzeption des Lernens in der Grundschule.

Aus folgenden Gründen scheint die letztgenannte Konzeption sinnvoll:

- Grundschul Kinder nehmen Fragen, Probleme und Phänomene der Umwelt nicht nach Fächern geordnet, sondern ganzheitlich wahr.
- Die einzelnen Bereiche des menschlichen Lebens sollen nicht einseitig interpretiert werden. Je mehr fachliche Aspekte bei deren Erschließung berücksichtigt werden, desto intensiver ist die Durchdringung der Umwelt.
- Die Mathematik fügt sich so integrativ in die Bildungsarbeit der Grundschule ein. Sie fördert Lernziele, die nur in Zusammenarbeit mit den anderen Fächern erreicht werden können, wie
 - die Entwicklung des Denkens
 - das Lernen lernen
 - die Bereitschaft, die Verantwortung für das Lernen selbst zu übernehmen
 - die Fähigkeit zum Denken in Zusammenhängen
 - die Erziehung zur wertenden Auseinandersetzung
 - die Fähigkeit zum entdeckend problemlösenden Denken.
- Daneben leistet die Mathematik aber auch einen spezifischen Beitrag für die Entwicklung des Kindes. Die Schüler erleben ihre Lebens- und Erfahrungswelt mathematisch und erarbeiten sich Instrumente und Arbeitsweisen, mit denen sie die Welt mathematisch durchdringen können. Dabei stoßen sie auch die Grenzen der mathematischen Wirklichkeitsbetrachtung.

1.4 Fokussierung

Auf der Grundlage der bisherigen Überlegungen wird nun der Blick auf zwei Aspekte gelegt, die im Folgenden im Zentrum stehen sollen.

Grundlegende Fähigkeiten:

Grundlegende Fähigkeiten sind fachübergreifende kognitive Leistungen, die in der BRD im Zuge der „Neuen Mathematik“ Eingang in die Lehrpläne der Grundschule fanden. Mit Hilfe dieser wollte man in bzw. mit fachspezifischen Lernprozessen allgemeine Ziele fördern.

Bei der Realisierung grundlegender Fähigkeiten in der Unterrichtspraxis ergaben sich aber Probleme. Vielfach entwickelte sich dieser Inhaltsbereich, nicht zuletzt durch die Schulbücher forciert, zu einem pränumerischen Grundkurs. Der Begriff „pränumerisch“ hatte dabei in der Tat seine Berechtigung, denn Zahlen und das Rechnen wurden währenddessen nicht berücksichtigt. Im Mathematikunterricht wurde lediglich ein Baukasten mit Plättchen unterschiedlicher Farbe, Größe und Form verwendet.

An die motivierende Phase des freien Legens schlossen sich Übungen an, die folgende grundlegenden Fähigkeiten trainieren sollten:

- Feststellen von Merkmalen, sortieren und zusammenfassen: rund, eckig, rechteckig, quadratisch, Farbe und Größe
- Vergleichen und unterscheiden z.B. Finden von Plättchen, die in mehreren Merkmalen übereinstimmen.
- Zuordnen, z.B. Zuordnen der Plättchen zu einem oder zwei Merkmalen
- Ordnen nach eigenen und vorgegebenen Merkmalen

Die konkreten Handlungen mit den Plättchen wurden mit Hilfe einer Schablone auf die zeichnerische Ebene übertragen, was Kindern mit feinmotorischen Problemen häufig misslang. Nach diesem einmaligen, kurzzeitigen „Kraftakt“ konnte nun endlich mit der „richtigen“ Mathematik begonnen werden. Die Förderung der grundlegenden Fähigkeiten war damit abgeschlossen, der Bereich stand isoliert neben den anderen mathematischen Inhaltsbereichen.

Fatalerweise galt mit der Plättchenarbeit bei vielen Lehrern auch der geometrische Inhaltsbereich „Kennen der Flächenformen: viereckig, dreieckig, rund“ als behandelt. Geometrische Handlungen wie Schneiden, Falten, freihändiges Zeichnen, Ertasten wurden nicht mehr durchgeführt.

Der Inhaltsbereich Erfassen räumlicher Beziehungen beschränkte sich meist auf wenige, sporadisch durchgeführte Übungen zur Rechts – links – Unterscheidung.

So praktiziert, wurde die Behandlung dieses Inhaltsbereichs häufig zur lästigen Pflichtaufgabe für Lehrer und Schüler, und Stimmen, die eine Abschaffung desselben forderten, wurden laut.

In der Literatur wird jedoch deutlich die allgemeinbildende Funktion der grundlegenden Fähigkeiten und der enge Bezug zwischen mangelnden grundlegenden Fähigkeiten und Rechenstörungen zum Ausdruck gebracht. (vgl. u.a. Lorenz, J.H., 1989; Dröge, R., 1987)

Aufgrund dessen muss es ein zentrales Anliegen des Erstunterrichts sein, diese Fähigkeiten in den „täglichen Mathematikunterricht“ zu integrieren und konstant während des gesamten Schuljahres zu fördern.

Arbeitsmittel

Arbeitsmittel sollen dem Kind, insbesondere dem Grundschüler helfen, Begriffe zu bilden und den mathematischen Abstraktionsprozess zu bewältigen (vgl. u.a. Radatz, H. u.a., 1996; Lorenz, J.H., 1991a, 1991c, 1992; Lorenz, J.H., Radatz, H., 1993).

Im Umgang mit Arbeitsmitteln im Mathematikunterricht ergeben sich aber häufig folgende Probleme:

- Das Arbeitsmittel wird in der Regel nur von leistungsschwächeren Kindern verwendet. Häufig werden Schüler von Lehrern aufgefordert, die Lösung der Aufgabe doch einmal ohne die Arbeitsmittel zu probieren. Die Schüler greifen dann häufig auf Zähltechniken zurück oder versuchen das Ergebnis zu erraten. So verwendet, assoziieren viele Schüler und Eltern den Gebrauch der Arbeitsmittel mit mangelnder Intelligenz und Rechenschwäche.
- Festzustellen ist eine große Unsicherheit bei den Lehrern, welches der zahlreichen auf dem Markt angebotenen Arbeitsmittel eingesetzt werden soll. Geklärt ist auch nicht die Frage, ob nur ein Arbeitsmittel verwendet werden soll, oder ob eine Methodenvielfalt den Abstraktionsprozess beschleunigt.
- Meist wird dem Schüler das Arbeitsmittel präsentiert. Es wird vorausgesetzt, dass er die mathematische Struktur von selbst erkennt.
Auf die Gestaltung des Arbeitsmittels nimmt er keinen Einfluss.
- Die Arbeitsmittel werden im Unterricht starr und unflexibel verwendet. Operationen werden stets nach einer normierten Abfolge durchgeführt, eigene Entdeckungen werden nicht gefordert und gefördert.
- Viele Lehrer befürchten bei der Verwendung der Arbeitsmittel Disziplinprobleme.

Aufgrund der großen Bedeutung der Arbeitsmittel sieht es die Verfasserin als Herausforderung und Chance, es anders zu machen und wesentliche Elemente des Umgangs mit Arbeitsmitteln, die in der Literatur vorgeschlagen werden, im Unterricht zu verwirklichen.

Da ein effektiver Umgang mit Arbeitsmitteln ohne grundlegende Fähigkeiten wie visuelle Wahrnehmung oder Raumvorstellung nicht möglich ist (2.2. und 2.3.), erweist sich die Kombination beider Bereiche als sinnvoll, bzw. sogar als notwendig.

2. Kapitel

Grundlegende Fähigkeiten und ihre Bedeutung für das Lernen im mathematischen Anfangsunterricht

„Zu den für das Mathematiklernen notwendigen kognitiven Fähigkeiten gehören alle Wahrnehmungsleistungen. Defizite in diesen Bereichen sind die häufigste Ursache für Leistungsversagen im arithmetischen Anfangsunterricht und auch in anderen Fächern.“ (Radatz, H. u.a., 1996, S. 28) Im Rahmen dieses Kapitels wird diese These verdeutlicht und vertieft.

Einführend wird der Begriff „grundlegende Fähigkeiten“ umrissen. Nach einer Darstellung der Bereiche „Raumerfahrung“ und „Sehen und vorstellen“ wird an Beispielen verdeutlicht, wie diese schulisches Lernen nachhaltig beeinflussen.

2.1 Begriff

In der Literatur finden sich mehrere einschlägige Begriffe. W. Laschkowski, spricht von „basalen/pränumerischen Fähigkeiten“ (Laschkowski, W., 1995), H. Maier von „Grunderfahrungen“ (Maier, H., 1974a) und J.H. Lorenz von „Teilleistungen bzw. Teilfähigkeiten“ (u.a. Lorenz, J.H., 1993b) und H. Radatz von kognitiven Fähigkeiten (Radatz, H. u.a., 1996).

Bei folgenden Erörterungen wird der Begriff „grundlegende Fähigkeiten“ verwendet, da diese Formulierung wesentliche Elemente dieses Bereichs impliziert.

„Grundlegend“ beinhaltet, dass diese Fähigkeiten

- grundlegend für alle Fächer sind. So wird der Beitrag des Faches Mathematik für die allgemeine kognitive Entwicklung des Kindes deutlich zum Ausdruck gebracht.
- grundlegend für gegenwärtige und zukünftige Inhalte sind.
- in der bisherigen Entwicklung des Kindes durch spontane kindliche Aktivitäten grundgelegt, d.h. aufgebaut wurden und nun im Unterricht weiterentwickelt werden.
- grundlegend für das Kind sind, damit es sein Leben bewältigen kann.

Mit „Fähigkeiten“ wird der Prozesscharakter des Lernens betont.

Der Begriff „pränumerisch“ drückt die Intentionen dieses Bereichs zu wenig aus. Übersetzt bedeutet er „vorzählig“ und könnte dadurch zu dem Irrtum verleiten, diese Fähigkeiten lediglich als dienende Funktion für das Rechnen zu sehen und ihre Behandlung mit Beginn der Arithmetik als abgeschlossen zu betrachten.

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die grundlegenden Fähigkeiten:

W. Laschkowski (Laschkowski, W., 1995)	H. Maier Maier, H., 1974a)	J. H. Lorenz Lorenz, J.H., 1993b)	Bayerischer Lehrplan für Grundschulen 1981	Bayerischer Lehrplan für Grundschulen 2000
<p>Basaler Bereich:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Taktile – kinästhetischer Bereich • Körperschema / Lateralität • Grobmotorik • Feinmotorik • Visuelle Wahrnehmung Figur – Grund – Unterscheidung Wahrnehmungskonstanz • Raumlage / Raumorientierung • Verbal – akustische Fähigkeiten • Serialität <p>Pränumerischer Bereich:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Klassifikation • Mengenauffassung / Mengenkonzanz • Menge – Ziffer – Zahlzuordnung • 1:1 Zuordnung 	<p>Grunderfahrungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vergleichen und unterscheiden • Feststellen von Eigenschaften, Klassifizieren, Unterteilen • Ordnen, Zuordnen • Transformieren, Verknüpfen • Verbalisieren, Symbolisieren 	<p>Teilleistungen (Welche kognitiven Fähigkeiten braucht das Kind für die Bewältigung des mathematischen Abstraktionsprozesses?)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grobmotorik (ordnen, zuordnen, sortieren) • Feinmotorik • Auditive Wahrnehmung • Speicherung und Sprachverständnis • Visuelle Unterscheidung, Gliederung und Gedächtnis • Visuelles Operieren • Intermodalität 	<p>Grundlegende mathematische Fähigkeiten (eigener Inhaltsbereich)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Feststellen von Merkmalen • Vergleichen und unterscheiden • Zuordnen • Nach Vorschrift austauschen und verändern • Sortieren und Zusammenfassen • Ordnen 	<p>Grundlegende Fähigkeiten (kein eigener Inhaltsbereich, verankert im Fachprofil; mit dem Begriff werden all jene allgemeinen mathematischen Fähigkeiten bezeichnet, die das Kind im Laufe der Grundschulzeit erwerben soll. Sie sind nicht spezifisch für den Anfangsunterricht.)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vergleichen, Unterscheiden, Klassifizieren, Ordnen, Strukturieren, Transformieren, Verknüpfen, Schlüsse ziehen, Gesetzmäßigkeiten entdecken, Regeln bilden, sowie Erkanntes auf andere Zusammenhänge übertragen • Sachverhalte handelnd,

<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Begriffe • Zeitbegriffe 				<p>bildhaft, verbal und in Symbolen darstellen sowie Handlungserfahrungen verallgemeinern und abstrahieren</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aussagen und Lösungswege plausibel und logisch begründen, Vermutungen und Behauptungen überprüfen und Widersprüche aufdecken. • Arbeitsmittel und Zeichengeräte sachgerecht benutzen, sowie konzentriert, sorgfältig, genau und übersichtlich arbeiten.
--	--	--	--	---

Wie die Aufstellung zeigt, ist die Anzahl der grundlegenden Fähigkeiten recht umfangreich. Können diese alle gleichwertig im Unterricht behandelt werden? Lassen sich Schwerpunkte herauskristallisieren?

Grundlegende Fähigkeiten können nach Meinung der Verfasserin in drei Bereiche unterteilt werden:

1. Grundlegende Fähigkeiten, die in der Regel bei der Einschulung gut ausgeprägt sind, zu denen das Kind während der Kindergartenzeit weitreichende Erfahrungen gemacht hat, z.B. 1:1 Zuordnung, Klassifizieren von Merkmalen, Grob- und Feinmotorik.
2. Grundlegende Fähigkeiten, die in arithmetische Inhaltsbereiche integriert sind und im Unterricht meist intensiv behandelt werden.

Beispiel:

Die Bereiche „Menge-Ziffer-Zahlzuordnung, Mengenauffassung, Mengenkonzanz“ sind in folgenden Lernzielen enthalten:

- 1.2.1. Mengen bilden und auszählen, Elemente von Mengen durch graphische Zeichen darstellen, diese zählen und die Anzahlen vergleichen.
- 1.2.2. Mengen strukturieren; Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln; Anzahlen konkret, bildlich und symbolisch zuordnen

Die Bereiche „vergleichen und unterscheiden“ sind beispielsweise in folgendem Lernziel angesprochen:

- 1.1.2. Flächenformen nach selbst gefundenen und vorgegebenen Kriterien vergleichen und klassifizieren
3. Grundlegende Fähigkeiten, die im Unterricht häufig nicht oder nur sehr oberflächlich behandelt werden:
 - Übungen zur Raumvorstellung werden kaum durchgeführt.
 - Verwechslungen bei der Rechts –links – Unterscheidung werden häufig ignoriert oder toleriert.
 - Übungen zur akustischen und visuellen Wahrnehmung werden meist vernachlässigt.

Aber gerade diese Bereiche sind für die allgemeine kognitive Entwicklung des Kindes entscheidend. Die Bedeutung der Raumvorstellung wurde unter 1.2.8. bereits kurz erläutert. Unter 2.4.1. werden diese Thesen vertieft.

Die Wichtigkeit der visuellen Fähigkeiten wird im folgenden Zitat von M.Frostig deutlich: „Es scheint so, dass bei Kindern mit nachhaltigen Lern- und Verhaltensstörungen allgemeiner Art in der Regel ein Rückstand in der Entwicklung der visuellen Wahrnehmung festzustellen ist – entweder als Hauptstörung oder als einer von vielen Entwicklungsrückständen. Die meisten Untersuchungen haben sich mit der Bedeutung der visuellen Wahrnehmung für das Lesenlernen beschäftigt. Dagegen hat man im Frostig Center klinisch den Eindruck gewonnen, dass die visuelle Wahrnehmungsfähigkeit, besonders die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen noch größeren Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten hat.“ (Frostig, M. u.a., 1972, S.7)

2.2 Raumvorstellung

Die Ausführungen stützen sich schwerpunktmäßig auf die Erläuterungen bei H.P. Maier (vgl. Maier, H.P., 1994, 1995, 1996) und bei M. Franke (vgl. Franke, M., 2000).

2.2.1 Begriffliche Klärung

Das räumliche Vorstellungsvermögen, kurz die Raumvorstellung, ist ein Faktor der menschlichen Intelligenz. Thurstone bezeichnet sie als Faktor S: Space, Gardner als räumliche Intelligenz (vgl. Maier, H.P., 1994). Er versteht darunter die Fähigkeit „... die visuelle Welt richtig wahrzunehmen, die ursprüngliche Wahrnehmung zu transformieren und zu modifizieren und Bilder der visuellen Erfahrung auch dann zu reproduzieren, wenn entsprechende physische Stimulierungen fehlen.“ (vgl. Gardner zitiert bei Maier, H. P., 1994, S.22)

Der Begriff Raumvorstellung wird in der Literatur nicht eindeutig definiert. Er umfasst sehr komplexe Fähigkeiten und wird deshalb durch mehrere Teilkomponenten, deren Bezeichnung wiederum nicht einheitlich ist, charakterisiert. Marianne Franke gibt in ihrem Buch „Didaktik der Geometrie“ (Franke, M., 2000) einen Überblick über die Teilbereiche der Raumvorstellung und deren Verwendung in der Primärliteratur (vgl. auch Maier, H.P., 1994).

Der Begriff Raumvorstellung setzt sich aus den basalen Begriffen „Raum“ und „Vorstellung“ zusammen.

Was kennzeichnet den Begriff „Raum“?

- Die Größe des Raumes ist individuell.
- Der Raum, den der Mensch überschauen bzw. in Besitz nehmen kann, ändert und vergrößert sich im Laufe seiner Entwicklung.
- Der menschliche Körper stellt einen Raum dar, der wiederum zu seinem räumlichen Umfeld in Beziehung gesetzt wird.
- Raum kann taktil, motorisch, visuell oder akustisch erfahren werden.
- Das Erschließen des Raumes ist ein aktiver Prozess, der durch das Sehen, die Wahrnehmung und bereits vorhandene Kenntnisse und Erfahrungen beeinflusst wird (vgl.2.3.)

Wodurch ist der Begriff „Vorstellung“ gekennzeichnet?

Die Wahrnehmung hat entscheidenden Einfluss auf die Vorstellung. Kossakowski definiert Vorstellungen wie folgt: „Vorstellungen sind an Gedächtnis gebundene reproduzierte sinnliche Abbilder, die infolge der Loslösung vom unmittelbar präsenten Objekt bereits eine gewisse Abstraktion von varianten (unwesentlichen) Seiten ermöglichen.“ (zitiert bei Maier, H.P., 1994, S.13).

Wahrnehmung darf nicht nur visuell, sondern muss auch taktil erfolgen.

Raumvorstellung kann so umschrieben werden als die Fähigkeit, „...in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken.“ (Maier, H.P., 1994, S.14). Aufgrund der Wahrnehmung entstehen Vorstellungsbilder, die im Gedächtnis nicht nur gespeichert, sondern mental umgeordnet werden können. So werden neue Bilder aus bereits vorhandenen vorstellungsmäßig entwickelt (vgl. 3.2).

Die Raumvorstellung umfasst folgende Bereiche: (nach Maier, H.P., 1994 und Franke, M., 2000)

Bei Thurstone	Bei Rost	Bei Linn und Petersen
Räumliche Beziehungen: Das richtige Erfassen räumlicher Gruppierungen und Objekten oder Teilen von ihnen und deren Beziehungen untereinander.	Raumwahrnehmung: beinhaltet nicht nur das Sehen, sondern auch die Verarbeitung von visuell Wahrgenommenen	Veranschaulichung /räumliche Visualisierung
Veranschaulichung: Die gedankliche Vorstellung von räumlichen Bewegungen von Objekten oder Teilen von ihnen ohne Verwendung anschaulicher Hilfen.	Raumvorstellung: Fähigkeit, mit zwei- und dreidimensionalen Objekten auf der Vorstellungsebene zu operieren	Vorstellungsfähigkeit von Rotationen: Fähigkeit, sich schnell und exakt Rotationen von 2 oder 3 dimensionalen Objekten vorzustellen.
Räumliche Orientierung: Die räumliche Einordnung der eigenen Person in eine räumliche Situation, Fähigkeit sich real und in der Vorstellung im Raum zurechtzufinden.	Raumverhalten: Bewegen und orientieren im Raum	Räumliche Wahrnehmung: Fähigkeit, die räumlichen Beziehungen in Bezug auf den eigenen Körper zu erfassen

2.2.2 Die Entwicklung der Raumvorstellung

Untersuchungen von Bloom und anderen über die Entwicklung von Intelligenzfaktoren (zitiert bei Maier, H.P., 1994) zeigen, dass sich das räumliche Vorstellungsvermögen zwischen dem 7. Und dem 14. Lebensjahr erheblich entfaltet. Deshalb ist eine schulische Förderung unerlässlich. Im Folgenden wird erläutert, wie das räumliche Vorstellungsvermögen während der ersten beiden Schuljahre geschult werden kann.

Der Aufbau der Raumvorstellung ist ein sehr komplexer Vorgang (vgl. Radatz, H., u.a., 1996, S.30 ff).

- Die Grundvoraussetzung ist, dass sich der Schüler seiner körpereigenen Räumlichkeit bewusst ist, d.h. dass er Lagebeziehungen am eigenen Körper erfasst. Wahrnehmungsspiele wie Wanderpunkt, Roboterspiel oder Partner-Streichelspiel (Erläuterung dazu unter 5.2.1.2.) helfen ihm, sein Körperbewusstsein zu sensibilisieren und seine linke und rechte Körperhälfte bewusst zu unterscheiden. Während die Zuordnung der Begriffe unten, oben, hinten und vorne den

Schülern meist keine Schwierigkeiten bereitet, treten bei der Rechts - links - Diskrimination auch bei leistungsstärkeren Schülern häufig Probleme auf. Durch das Markieren bzw. Beschweren eines Körperteils mit einem Sandsäckchen, nimmt er dieses bewusster wahr und es fällt ihm so leichter, sich räumlich wahrzunehmen (Frostig, M., 1992).

- Das Kind nimmt aber nicht nur sich selbst wahr, sondern durchdringt seine Umwelt durch das Erkennen räumlicher Beziehungen. „Zunächst erfolgt die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen aus der individuellen Betrachterposition. Der Gegenstand ist immer bezogen auf den eigenen Betrachterstandort.“ (Radatz, H. u.a., 1996, S.30) Dies bedeutet, dass das Kind jeden Gegenstand, den es wahrnimmt, in Relation zu sich selber sieht, z.B. die Tafel steht vor mir, die Tür ist links von mir,...
- Dieser Bezug unterstützt das Kind auch bei Übungen zum Körperbewusstsein. Es assoziiert beispielsweise seine linke Körperhälfte mit dem Standort des Fensters und seine rechte mit dem Standort der Tür. Deshalb sollten Raumorientierungsübungen zunächst ohne Richtungswechsel durchgeführt werden.
- Auch Übungen zum Überschreiten der Körpermitte (Überkreuzbewegungen) können nicht von allen Schülern zu Beginn der 1.Jahrgangsstufe bewältigt werden. Übungen, die das Erkennen von Beziehungen von Gegenständen zum eigenen Körper schulen, sind beispielsweise das Eckenkonzert, Standortspiele oder das Baggerspiel (vgl. 5.2.1.2.).
- Daneben muss das Kind aber auch räumliche Beziehungen von Gegenständen zueinander erkennen. Bei Legespielen (z.B. Tangram) oder Kimspielen kann es dies trainieren.
- Werden Raumorientierungsübungen durchgeführt, so sollte der Schüler die Lagebeziehungen nicht nur erkennen, sondern auch mit räumlichen Begriffen beschreiben/verbalisieren können.
- „Erst allmählich ist das Kind in der Lage, sich mögliche andere Betrachterstandpunkte vorzustellen, diese tatsächlich oder nur gedanklich zu erproben und miteinander zu koordinieren.“ (Radatz, H. u.a., 1996, S. 30) Es gelingt dem Kind zunächst real und später auch in der Vorstellung, sich in eine andere Person hineinzusetzen und Lagebeziehungen aus deren Sicht zu beschreiben.
- Neben dem Erkennen und Erfassen von statischen Lagebeziehungen zwischen Gegenständen muss das Kind aber auch lernen, sich im Raum zu bewegen und zu orientieren. Dies geschieht zunächst auch auf der konkreten Ebene, indem das Kind Wege im Klassenzimmer oder im Schulhaus real geht und diese beschreibt. Auch das Durchfahren von Labyrinthen hilft dem Kind, sich in einem Raum zurechtzufinden. Später ist es in der Lage, diese Wege in der Vorstellung zu gehen und sich auf einfachen Bildplänen zu orientieren.

2.3 „Sehen und Vorstellen“

Bei vorliegender Arbeit wird diese grundlegende Fähigkeit analog zu Radatz / Schipper / Dröge / Ebeling (1996) als „Sehen und Vorstellen“ bezeichnet. Der Begriff visuelle Wahrnehmung (verwendet bei M.Frostig) umfasst lediglich einen Bereich. Visuelles Speichern und Operieren gehen darüber hinaus und beziehen sich auf die „innere Verarbeitung“ des Gesehenen.

Die wechselseitige Beziehung der Bereiche visuelle Wahrnehmung und räumliches Vorstellungsvermögen kann so dargestellt werden: (vgl. dazu Franke, M., 2000, S. 38)

- Raum wird in erster Linie visuell wahrgenommen. Deshalb ist das „Sehen und Vorstellen“ Voraussetzung für eine differenzierte Raumerfahrung bzw. Raumvorstellung.
- Die visuelle Wahrnehmung wird beeinflusst von bisher gemachten Erfahrungen, Vorstellungen und bisherigem Denken. Merkmale eines Gegenstandes werden identifiziert, zueinander in Beziehung gesetzt und miteinander verglichen. Um dies bewältigen zu können, braucht das Kind das räumliche Vorstellungsvermögen.

2.3.1 Die visuelle Wahrnehmung

Das Kind nimmt seine Umwelt in erster Linie visuell wahr.

Marianne Frostig (Frostig, M., Müller, H., 1981) unterscheidet fünf Bereiche:

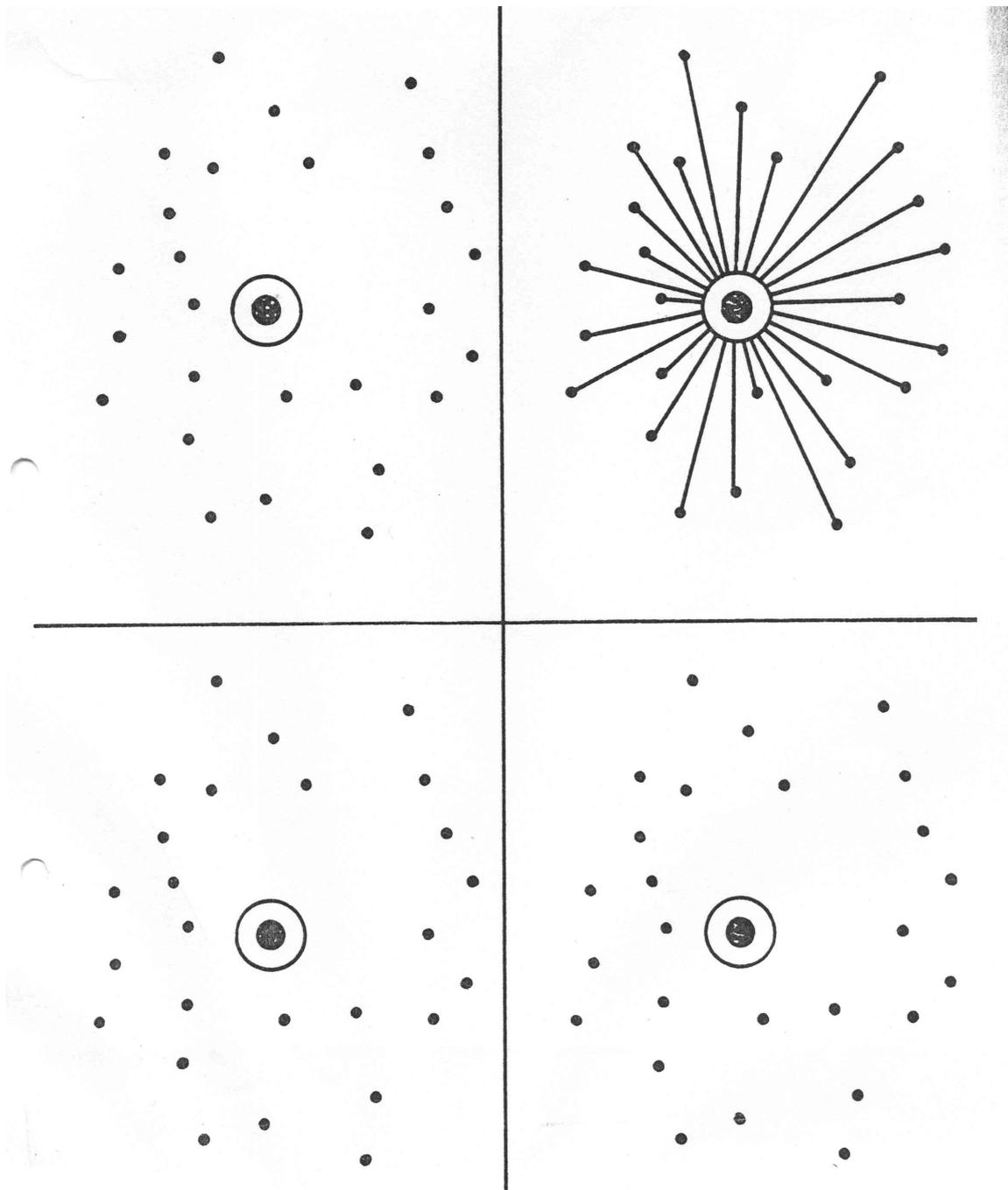
2.3.1.1 Die visuomotorische Koordination

„Die visuomotorische Koordination ist die Fähigkeit, das Sehen mit den Bewegungen des Körpers oder Teilen des Körpers zu koordinieren.“ (Reinartz, zitiert in: Frostig, M., Müller, H., 1981, S.77)

Aufgabenbeispiel:

Beispiel aus dem Frostig-Übungsprogramm (Frostig, M., 1972, Heft 3, S. 50)

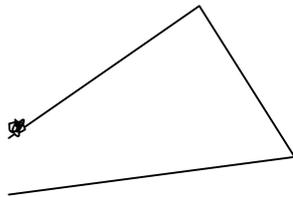
„Stecke die Nadeln in das Nadelkissen!“



Ein Kind, das Defizite in diesem Bereich hat, wirkt ungenau und ungeschickt.

Zur Verdeutlichung der Problematik wird kurz das Verhalten eines Kindes der Experimentalgruppe beschrieben:

- Der Schülerin gelang es nicht, den Ball zu fangen. Sie konnte das Sehen des Balles nicht mit der Armbewegung in Einklang bringen.
- Es gelang ihr anfangs nicht, freihändig ein Dreieck zu zeichnen. Alle von ihr gezeichneten Dreiecke sahen so aus:



Sie sah zwar den „Landepunkt“, es gelang ihr aber nicht, die Hand auf diesen Punkt hinzubewegen (weder mit noch ohne Stift, weder bei klein noch groß aufgezeichneten Dreiecken).

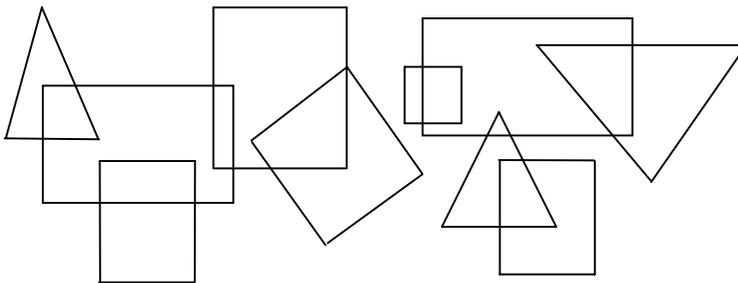
- Beim Schreiben konnte sie meist den Zeilenraum nicht einhalten.

2.3.1.2 Die Figur-Grund-Wahrnehmung (Diskriminierung)

Sie „...ist die Fähigkeit, aus einem komplexen Hintergrund bzw. einer Gesamtfigur eingebettete Teilfiguren zu erkennen und zu isolieren.“ (Franke, M., 2000, S. 39)

Aufgabenbeispiel:

Male alle Quadrate aus!



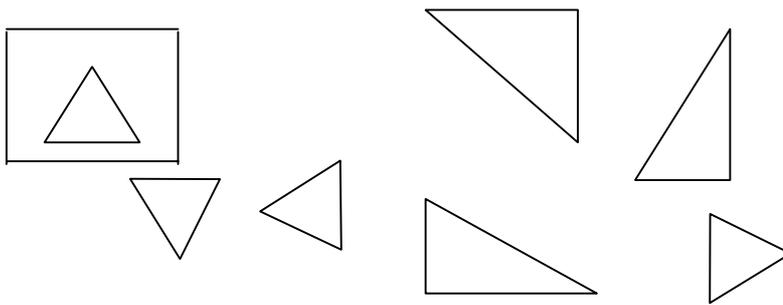
Das Kind muss die Fähigkeit besitzen, sich bei einer Vielzahl von Reizen auf den für die Aufgabe/Situation wesentlichen zu konzentrieren. Kinder, die sich von jedem Reiz ablenken oder gefangen nehmen lassen, gelten als reizgebunden. Sie wirken unkonzentriert und fallen durch ihr unorganisiertes Arbeitsverhalten auf.

2.3.1.3 Die Wahrnehmungskonstanz

Darunter versteht man die Fähigkeit, Figuren oder Formen in unterschiedlicher Größe, räumlicher Lage, Anordnung und Farbe wiederzuerkennen. (Franke, M., 2000, S.39)

Aufgabenbeispiel:

Male alle gleich großen Dreiecke an!



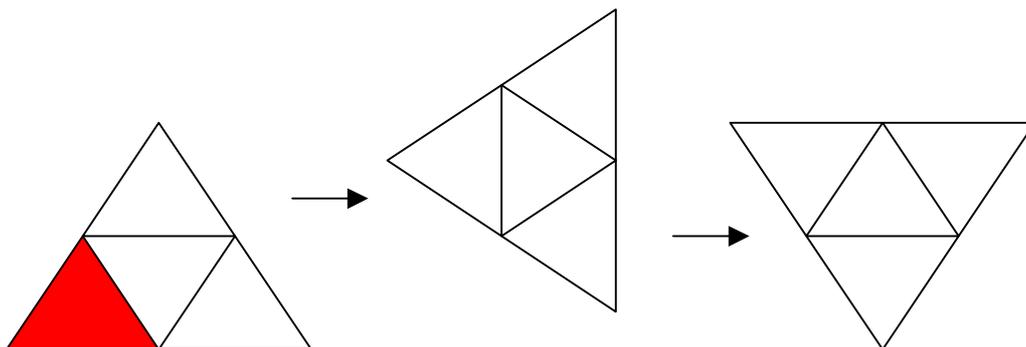
„Das Kind erwirbt damit die Fähigkeit, visuelles Material als Erfahrungswerte zu generalisieren...“ (Frostig, M., 1981, S. 80)

2.3.1.4 Wahrnehmung der Raumlage

Sie wird definiert als die Raum-Lage-Beziehung eines Gegenstandes zum Wahrnehmenden. Das Kind/der Mensch nimmt alle Gegenstände als vor, hinter, über, links, rechts von sich wahr. (Franke, M., 2000, S. 40,41)

Aufgabenbeispiel:

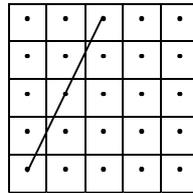
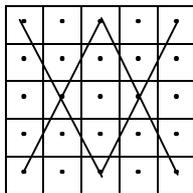
Wo befindet sich das eingefärbte Dreieck bei der gedrehten Figur?



2.3.1.5 Wahrnehmung räumlicher Beziehungen

Darunter versteht man die Fähigkeit, die Lage von mindestens zwei Gegenständen in Bezug zu sich selbst und in Bezug zueinander wahrzunehmen. (Franke, M., 2000, S.40) Trainiert werden kann diese Fähigkeit beispielsweise durch folgende Übungen:

- Labyrinth durchfahren
- Punktbilder ergänzen, z.B.
Ergänze die Figur!

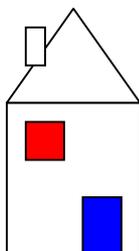


Im Gegensatz zur Figur-Grund-Wahrnehmung, bei der das Feld in einen dominanten und einen unaufdringlichen Reiz eingeteilt wird, werden in diesem Bereich mehrere Teile in Bezug zueinander gesetzt, wobei die einzelnen Teilbereiche gleichwertig sind.

Radatz, H. u.a (vgl. Radatz, H., u.a., 1996) ergänzen diesen Bereich durch einen wesentlichen Faktor, die Zeit. Sie sprechen von räumlich-zeitlichen Beziehungen. Eine Übung dazu beispielsweise ist, eine Handlungskette in einer zeitlich logischen Reihenfolge zu ordnen.

2.3.2 Visuelles Speichern

Die Schüler müssen die visuellen Wahrnehmungen verinnerlichen und in ihrem Gedächtnis verankern, d.h. zu bereits erworbenen Visualisierungen in Beziehung setzen. (vgl. Radatz, H., u.a., 1996, S. 141, 142). Übungen zum visuellen Speichern sind Memoryspiele oder das Einprägen von Figuren. Beispiel:



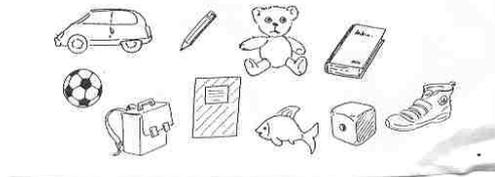
Eine visuelle Speicherung ist jedoch nur möglich, wenn das Kind geeignete Einprägestrategien besitzt (z.B. Einprägen der Anzahl der geometrischen Formen; Einprägen von Lagebeziehungen;

nachzeichnen; nachvollziehen der Entwicklung des Bildes;...). Es kann nicht erwartet werden, dass jedes Kind über diese selbstverständlich verfügt, vielmehr müssen sie im Unterricht gemeinsam entdeckt und erarbeitet werden.

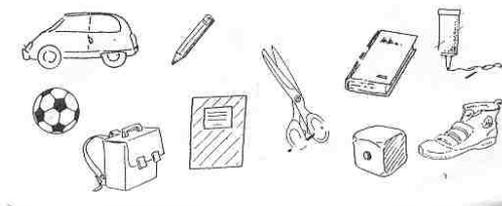
2.3.3 Visuelles Operieren

Das Kind muss die Inhalte nicht nur speichern, sondern es muss auch die Fähigkeit besitzen, in der Vorstellung damit zu operieren, d.h. diese in Gedanken ausführen, verallgemeinern und verändern zu können. (Radatz, H., u.a., 1996, s. 142, 143) Das visuelle Operieren kann z.B. bei Kim-Spielen trainiert werden.

Aufgabenbeispiel aus Radatz, H. u.a., 1996, S.143:



Was fehlt? Was kam hinzu?



2.4 Grundlegende Fähigkeiten als Voraussetzungen schulischen Lernens

2.4.1 Räumliches Vorstellungsvermögen als Grundlage des Arithmetikunterrichts

- Räumliches Vorstellungsvermögen ist grundlegend für den Aufbau des Zahlenraums. Zahlen bilden „...einen, allerdings für jeden Menschen individuellen Raum, wobei diese Vorstellung oder Visualisierung nicht Abbild irgendeines konkreten Objektes ist, sondern vom einzelnen konstruiert wird.“ (Lorenz, J.H., 1987a, S. 171; vgl dazu auch Lorenz, J.H., 1992, S.137ff). Der Schüler konstruiert sich einen Vorstellungsraum, in dem die Zahlen eine räumliche Anordnung haben. Wir hoffen oder gehen davon aus, dass dieser Raum eine dem Arbeitsmittel ähnliche Anordnung besitzt.

Der Schüler bewegt sich nun „mathematisch“ in diesem imaginären Raum:

Er zählt, indem er eine linear angeordnete Folge von Zahlen der Reihe nach in gleichmäßigen Schritten durchläuft. Jede Zahl erhält so vielfältige Beziehungsaspekte, z.B. 6 ist Vorgänger von 7, 8 ist Nachfolger von 7, 7 steht zwischen 6 und 8, und unter Berücksichtigung der 5er und 10er Strukturierung: 7 ist um 2 mehr als 5 und 3 weniger als 10.

Die Operationen können als Bewegungen in diesem Raum vorgestellt werden: Die Addition als Vorwärtsschreiten, die Subtraktion als Rückwärtsschreiten, die Multiplikation als permanente Wiederholung gleichartiger Sprünge und die Division als Aufteilen und Verteilen im Raum.

- Bei mathematischen Notationen kommt der Lagebeziehung von Zahlen und Zeichen eine große Bedeutung zu
 - Die Gleichung $9-4=5$ wird von links nach rechts „gelesen“. Die linke Zahl bezeichnet den Minuenden, das Minuszeichen steht zwischen Minuenden und Subtrahenden, das Ergebnis steht rechts neben dem Gleichheitszeichen,...
 - Der Zahlenwert ergibt sich aus der räumlichen Anordnung der Ziffern. Kinder mit Schwierigkeiten bei der Rechts -links - Diskrimination verwechseln die Stellenwerte und schreiben z.B. 35 statt 53 (die Probleme werden durch die unterschiedliche Sprech- und Schreibweise der Zahlen noch verstärkt).
- Das simultane Erfassen und Strukturieren von Anzahlen ist vom räumlichen Vorstellungsvermögen abhängig:
Simultanerfassung der Menge 4 bei unterschiedlicher räumlicher Anordnung



- Das räumliche Strukturieren von Mengen bzw. das Zerlegen der Menge in simultan erfassbare Teilmengen hilft, größere Anzahlen quasi-simultan zu erfassen.
Menge 9: unterschiedliche räumliche Darstellungen



- Räumliches Vorstellungsvermögen ist die Voraussetzung, um mit Veranschaulichungen, Arbeitsmitteln und bildlichen Darstellungen umgehen zu können. Rechenschwache Schüler verwenden die Arbeitsmittel häufig nicht, weil diese für sie nicht durch- oder überschaubar sind. So erweist sich beispielsweise die Verwendung des Zahlenstrahls bei Kindern mit Problemen bei der Rechts – links - Unterscheidung als schwierig. Aufgrund dessen empfiehlt es sich, den Zahlenstrahl vertikal zu verwenden, da die räumliche Anordnung von unten nach oben den Schülern weniger Schwierigkeiten bereitet.
- Größen- und Längenvergleiche erfordern räumliches Vorstellungsvermögen.

Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens dient nicht nur dem Arithmetikunterricht, sondern leistet einen wesentlichen Beitrag zum Denken und Lernen des Kindes, denn

- das „...räumliche Vorstellungsvermögen ist eine wichtige und zentrale Fähigkeit, die unsere Wahrnehmungen und Vorstellungen von unserer Umwelt und damit die Art und Weise der Interaktion mit ihr nachhaltig beeinflusst.“ (Maier, H.P., 1996, S. 9)
- im schulischen Bereich liefert eine gute Raumvorstellung die Basis für den Erfolg in vielen Schulfächern.“ (Maier, H.P., 1996, S. 9)

2.4.2 Grundlegende Fähigkeiten im mathematischen Abstraktionsprozess

Einer üblichen Einteilung zufolge gliedert sich die Bearbeitung eines mathematischen Inhaltes in die Phasen des konkreten Handelns, der bildhaften Darstellung, der zeichenmäßig-symbolische Darstellung, der Automatisierung und des Sachrechnens (vgl. dazu u.a. Lorenz, J.H., 1993). Erfolgreiches Lernen erfordert in jeder dieser Stufen typische Tätigkeiten bzw. Aktivitäten, die ihrerseits wieder den Einsatz grundlegender Fähigkeiten nötig machen. Die in folgender Tabelle angeführten Tätigkeiten orientieren sich an den Ausführungen von J.H. Lorenz. (Lorenz, J.H., 1993b; Lorenz, J.H., 1992). Die Spalte der grundlegenden Fähigkeiten basiert ebenfalls auf dessen Erläuterungen, wobei diese durch eigene Überlegungen im Hinblick auf die Schwerpunkte Raumerfahrung und Sehen / Vorstellen ergänzt wurde.

Konkretes Handeln

Tätigkeit im Zusammenhang mit dem Arbeitsmittel	Benötigte grundlegende Fähigkeiten
<p>I.Konkretes Handeln</p> <p>Die Schüler operieren mit Mengen, die durch Elemente, die räumlich angeordnet sind, repräsentiert werden.</p> <p>Durch die Handlung wird das räumliche Feld umgeordnet, umstrukturiert.</p> <p>Die für die Handlung notwendigen Objekte müssen isoliert werden und in jeder räumlichen Lage erkannt werden (Beachtung der quantitativen Struktur).</p> <p>Teilschritte der Handlung müssen geplant und in eine „logische“ zeitliche Abfolge/Reihenfolge gebracht werden (Strukturierung der Handlung).</p> <p>Das Kind muss einerseits Teilschritte voraussehen, andererseits aber auch bereits vollzogene erinnern können.</p> <p>Auch nach der Handlung muss das Kind diese Handlung in der visuellen Vorstellung zurückholen und auch verändern können.</p>	<p>Taktil – kinästhetische Wahrnehmung: „... Wahrnehmen mit dem Tastsinn und Registrieren von Bewegungen in Verbindung mit der Entwicklung des Körperschemas und der Orientierung im Raum.“ (Lorenz, 1992, S.87)</p> <p>Wahrnehmungskonstanz</p> <p>Figur-Grund-Diskrimination</p> <p>Erkennen der Raumlage</p> <p>Rechts - links - Unterscheidung</p> <p>Erkennen räumlicher Beziehungen; dazu sicherer Gebrauch räumlicher Begriffe</p> <p>Serialität</p> <p>Erkennen räumlich-zeitlicher Beziehungen</p> <p>Visuelle Antizipation</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p>
<p>II.Zeichnerische Darstellung der Handlung</p> <p>Visuelles Vorstellen des Operationsverlaufes bei einer statischen Darstellung (von der dreidimensionalen zur zweidimensionalen Darstellung).</p> <p>Die im Bild dargestellte Operation soll zu einem</p>	<p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p> <p>Figur-Grund-Diskrimination</p> <p>Erkennen räumlich-zeitlicher Beziehungen</p>

visuellen Schema werden, das für alle strukturgleichen Aufgaben verfügbar ist.	Intermodaler Transfer: „ Erst durch die Koordination verschiedener Eindrücke entstehen wirklichkeitsnahe Wahrnehmungen, die die Basis für adäquate Begriffe bilden.“ (Lorenz; J.H., 1992, S. 109)
--	---

Die bildliche Darstellung

Tätigkeiten	Grundlegende Fähigkeit
<p>Das Kind muss sich trotz der statischen Darstellung der Bilder den Operationsverlauf, der durch das Bild repräsentiert wird, visuell vorstellen.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Es muss die bildliche Darstellung analysieren, d.h. es muss sich auf einen Teil des Gesamtbildes konzentrieren. • Ähnliche Figuren müssen zusammengefasst, unterschiedliche abgetrennt und ausgesondert werden. • Zweidimensional dargestellte Figuren müssen als dreidimensionale Objekte interpretiert werden. <p>Der Schüler muss sich an den Bewegungsablauf erinnern, der mit der dargestellten Handlung verbunden ist.</p> <p>Das Kind muss die verschiedenen Zeichnungen zu einer Operation verallgemeinern, so dass es als ein visuelles Schema für alle strukturgleichen Aufgaben verfügbar ist.</p>	<p>Visuelles Speichern</p> <p>Figur-Grund-Diskrimination</p> <p>Wahrnehmungskonstanz Raumvorstellung</p> <p>Visuelles Operieren Raumvorstellung</p> <p>Visuelles Speichern/Erinnern Erfassen räumlich-zeitlicher Beziehungen</p> <p>Visuelles Operieren</p>

Die symbolische/ziffernmäßige Darstellung

Tätigkeit	Grundlegende Fähigkeit
<p>Darstellung der Zahlen als Ziffernfolgen: Reihenfolge der Zeichen legt den Wert fest.</p>	<p>Serialität Raumlage</p>

<p>Aufschreiben und Lesen der Gleichung</p> <p>Obwohl die bildliche Darstellung fehlt, soll der Schüler mental eine Verknüpfung zu der anschaulichen Darstellung herstellen.</p> <p>Die Zeichen werden zu Bedeutungsträgern „Übrig bleiben soll eine logisch – unanschauliche Struktur im Denken, die ihre Kraft dadurch erfährt, dass sie leichtläufig, beweglich und leicht übertragbar sei.“ (Lorenz, 1992, S.112)</p> <p>Das Kind soll sich eine innere visuelle Vorstellung von der Operation geschaffen haben, die die Gleichung begleitet.</p>	<p>Richtungskonstanz</p> <p>Raumvorstellung</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p> <p>Visuelles Operieren</p> <p>Raumvorstellung</p>
---	---

Automatisierung

Tätigkeit	Grundlegende Fähigkeit
<p><u>Kopfrechnen</u></p> <p>Nicht stures, sinnentleertes Auswendigwissen, sondern automatisiertes Wissen soll auf Verständnis basieren.</p> <p>Auch bei der Automatisierungsphase bleiben im Zeichen- bzw. Zahlbereich anschauliche Bilder mitverknüpft.“ (Lorenz, 1992, S.119)</p> <p>Kein isoliertes Auswendigwissen einzelner Aufgaben, sondern ein Automatisieren in Sinnzusammenhängen (vgl. Rechen- und Einprägestrategien). Das Kind soll räumliche Strukturen zu den Aufgaben bilden, die ihm als orientierendes Hilfsmittel dienen.</p> <p><u>Schriftliche Rechenverfahren</u></p> <p>Algorithmen sind als visuelle Vorstellungen gespeichert. Es sind Muster ohne Inhalt. Sie repräsentieren lediglich die wesentlichen Eigenschaften des Algorithmus.</p>	<p>Assoziationsgedächtnis</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p> <p>Raumvorstellung</p> <p>Räumlich-zeitliche Beziehungen</p> <p>Raumvorstellung</p>

Algorithmen sind nicht in Einzelschritten isoliert im Gedächtnis verankert, sondern als Schemata.	
---	--

Sachrechnen

Tätigkeiten	Grundlegende Fähigkeit
Das Kind muss Sprache in innere Bilder transformieren.	Visuelles Operieren
Das Kind muss eine statische Beschreibung in einen veranschaulichten Bewegungsablauf transformieren, wobei der vorgestellte Handlungsablauf nicht unbedingt der Form der Aufgabenstellung entsprechen muss.	Raumvorstellung Visuelles Operieren
Das Kind muss über die nötigen Alltagserfahrungen und das Grundwissen verfügen, das die Sinnentnahme ermöglicht.	

2.4.3 Bedeutung der grundlegenden Fähigkeiten für andere Fächer

Dass grundlegende Fähigkeiten auch in anderen Fächern relevant sind, wird exemplarisch an einigen Beispielen aufgezeigt.

Tätigkeiten	Grundlegende Fähigkeit
<u>Leselernprozess</u> Die Buchstaben müssen optisch identifiziert werden, sowohl innerhalb als auch außerhalb des geschriebenen Wortes.	Visuelles Speichern Figur-Grund-Wahrnehmung
Die Buchstaben müssen aus der Vorstellung reproduziert werden.	Visuelles Speichern
Der Schüler muss den Buchstaben, das Wort wiedererkennen, wenn es in einem unbekanntem Lesetext vorkommt oder in einer anderen Schriftart ist.	Wahrnehmungskonstanz
Die Leserichtung ist von links nach rechts.	Rechts - links - Diskrimination

<p>Einige Buchstaben weisen optische Ähnlichkeiten auf, z.B. d/b; n/h; p/g; g/d; p/q</p>	<p>Raumlage</p>
<p><u>Schreibenlernen</u> Das Kind muss die Buchstaben im richtigen Bewegungsablauf schreiben können.</p>	<p>Visuomotorische Koordination Raumvorstellung Raumlage Visuelles Speichern</p>
<p><u>Rechtschreiben</u> 50% der Wörter sind reine Mitsprechwörter. Die Komplexität der Lautstruktur und Wortbildstruktur erfordert die exakte sprachliche Aufgliederung, die Beachtung der Reihenfolge der Lautwerte und Grapheme im Lautwort und Wortbild. Dafür ist die Automatisierung des grobmotorischen Schreibvollzugs unerlässlich. Wenn das Kind zu große Aufmerksamkeit auf die schreibmotorische Ausführung aufwenden muss, gelingt die Phonem – Graphem – Zuordnung nicht. Die Folgen sind Buchstabenauslassungen und Verwechslungen wie o und a; l und b,...</p> <p>10% der Wörter enthalten nicht ableitbare Schreibungen und müssen einfach gelernt werden. Dazu benötigen die Schüler Techniken des Einprägens und Abrufen von Gespeichertem.</p> <p>40% der Wörter enthalten ableitbare Besonderheiten, die über das Erlernen und Einprägen von Rechtschreibstrategien erschlossen werden.</p>	<p>Visuomotorische Koordination Raumlage Figur-Grund-Wahrnehmung Raumvorstellung</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Speichern Visuelles Operieren</p>
<p><u>Schriftlicher Sprachgebrauch</u> Texte verfassen, z.B. Bildergeschichten, Phantasiegeschichten</p>	<p>Wahrnehmung räumlich-zeitlicher Beziehungen</p>

<p><u>Heimat- und Sachunterricht</u></p> <p>Wahrnehmungsübungen zur Sensibilisierung der Sinne.</p> <p>Das differenzierte Wahrnehmen muss geschult werden, da es Grundlage ist für differenziertes Begreifen, Urteilsfähigkeit und Handeln in der Umwelt.</p> <p>Handlungsorientierung: Erfahrungen aus eigener Tätigkeit</p> <p>Orientierung in Raum und Zeit (Themenbereiche): Erkundungen/Entdeckungen in der Umwelt Erstellen von Wegeskizzen Wirklichkeit vereinfacht in Modell und Grundriss darstellen Kartendarstellungen Orientierung nach Himmelsrichtungen Maßstab Topographische und thematische Karten gewähren Einblick in größere räumliche Zusammenhänge</p>	<p>Taktil-kinästhetische Wahrnehmung</p> <p>Figur-Grund-Diskrimination</p> <p>Wahrnehmungskonstanz</p> <p>Raumvorstellung</p> <p>Raumlage</p> <p>Räumlich-zeitliche Beziehungen</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p> <p>Raumvorstellung</p> <p>Raumvorstellung</p> <p>Visuelles Operieren</p>
--	--

Zusammenfassend kann festgestellt werden:

- Die oben genannten grundlegenden Fähigkeiten sind Voraussetzung dafür, dass das Kind die verschiedenen Unterrichtsphasen (enaktiv, zeichnerisch, symbolisch, Phase der Automatisierung, Sachrechnen) erfolgreich durchlaufen kann. Rechenstörungen sind meist auf mangelnde grundlegende Fähigkeiten zurückzuführen. (vgl. Lorenz, J.H., 1989, 1991a, 1991b)
- Das Kind muss über grundlegende Fähigkeiten verfügen, damit es visuelle Vorstellungsbilder von Zahlen und Rechenoperationen entwickeln kann. (vgl. Lorenz, J.H., 1991a, 1991b)
- Grundlegende Fähigkeiten sind sowohl die Grundlage für die Bildung mathematischer Begriffe als auch das Instrument beim Umgang mit mathematischen Begriffen.
- Grundlegende Fähigkeiten sind nicht nur entscheidend für den Mathematikunterricht, sondern für jede Art der Begriffsbildung schlechthin. So leistet die Mathematik einen wesentlichen Beitrag zur Förderung des Denkens.

- „... intellektuelle Entwicklung ist eng verbunden mit den Fähigkeiten, visuell dargebotene Informationen aufzunehmen, zu analysieren, zu speichern, mit ihnen in der Vorstellung zu operieren.“(Radatz, H., Rickmeyer, K., 1991, S. 7)

Mit der Schulung der grundlegenden Fähigkeiten werden auch allgemeine Lernziele wie Merkfähigkeit, Konzentrationsfähigkeit, sorgfältige Informationsaufnahme und –verarbeitung geschult. Damit leistet sie einen wesentlichen Beitrag zum Denken und Lernen des Kindes.

3. Kapitel

Arbeitsmittel, Anschauungsmittel

Nach einer einführenden Klärung des Begriffs Arbeitsmittel steht das Denken des Kindes im Mittelpunkt. Daraus ergeben sich spezifische didaktische Kriterien, die ein Arbeitsmittel erfüllen muss. Im Anschluss daran werden im Handel erhältliche Arbeitsmittel vorgestellt und beurteilt.

3.1 Begriffliche Klärung

Mit dem Begriff Arbeitsmittel kennzeichnet man all die Materialien, „... die als zentrale Hilfsmittel den Kindern bei der Entwicklung und Festigung des Zahlverständnisses und beim Rechnen helfen sollen.“ (Radatz, H., u.a., 1996, S. 35)

Der Begriff „zentral“ bedeutet, dass die Schüler mit diesen Mitteln über einen langen Zeitraum, bei der Behandlung möglichst vieler Lerninhalte und während verschiedener Unterrichtsphasen arbeiten.

H. Radatz grenzt die Arbeitsmittel damit eindeutig von all den Materialien ab, die meist während der Freiarbeit zum Üben oder zur Erarbeitung nur eines Inhaltes eingesetzt werden, wie z.B. Puzzles, Rechendominos, Stöpselkarten, Zahlzerlegungskästen, die aber in der Literatur ebenfalls meist als Arbeitsmittel bezeichnet werden.

Jens Holger Lorenz verwendet die Begriffe Anschauungs- bzw. Veranschaulichungsmittel. Er bezeichnet damit Materialien, „... in die wir die Hoffnung setzen, dass das Kind durch den konkreten Handlungsvollzug eine Vorstellung entwickelt, die einerseits nicht so konkret ist, dass sie zukünftigen Abstraktionen im Weg steht,... andererseits aber auch nicht so konturlos – abstrakt, dass damit kein visuelles Bild mehr verbunden ist.“ (Lorenz, J.H., 1987a, S. 171). Diese Mittel „... besitzen eine Funktion im Lernprozess, sie helfen den Schülerinnen und Schülern, Einsichten auszubilden, sie verdeutlichen Beziehungen zwischen Zahlen, die sonst eher unscharf blieben, kurz, sie beeinflussen das Denken der Kinder.“ (Lorenz, J.H., 1995, S.9)

Der Begriff Anschauungsmittel impliziert im Gegensatz zu Arbeitsmittel das Ziel ihrer Verwendung, nämlich den Aufbau einer inneren visuellen Anschauung (Vorstellung) von Zahlen oder Rechenoperationen im Kind.

In vorliegender Arbeit werden beide Begriffe synonym verwendet.

Wie entwickelt sich nun diese innere visuelle Vorstellung im Kind? Im Folgenden werden die Ergebnisse der Untersuchungen von J.H. Lorenz (vgl. Lorenz, J.H., 1992, 1991c, 1991b, 1993a, 1995) erläutert.

3.2 Die kindlichen Vorstellungsbilder

Nach Piaget befinden sich Grundschüler in der Phase der konkreten Operationen. Sie können in der Vorstellung denken und operieren, wobei diese Vorstellungen eine Beziehung zum Handeln mit konkreten Objekten haben. (vgl. auch 1.2.5.)

Diese inneren Vorstellungen ausbilden zu helfen ist die Aufgabe der Arbeitsmittel. Handlungen mit ihnen sind die Basis für ein inneres visuelles Vorstellen. Wenn der Lehrer sich nun für den Einsatz eines bestimmten Arbeitsmittels entscheidet, so geht er davon aus, dass sich der Schüler ein Bild vom Zahlenraum schafft, das dem verwendeten Arbeitsmittel ähnlich ist bzw. dass das visuelle Bild von Rechenoperationen den Handlungen am Arbeitsmittel entspricht.

Aber das im Kind entstandene Bild ist nicht ein direktes Abbild der Handlung. Durch welche Faktoren wird dieses Bild verändert?

Der Schüler nimmt die Handlung, die er ausführt, visuell wahr. Lernen ist aber ein individueller und aktiv – konstruierter Prozess, d.h. er nimmt die Handlung nicht objektiv und unverfälscht wahr, sondern sie ist bestimmt durch die aktive Teilnahme des Kindes. Das Bild trifft auf bereits vorhandene kognitive Strukturen und verfügbares Wissen im Kind und wird dadurch gesteuert. So werden während der Handlung bereits Schlüsse gezogen, die in den Aufbau des inneren visuellen Bildes miteinfließen. Das so gewonnene Abbild der Handlung bleibt im Gedächtnis nicht konstant. Vielmehr wird es durch Wissen, das sich der Schüler zukünftig aneignet, immer wieder verändert.

Grundsätzlich kann man sagen:

„Das Vorstellungsbild stellt eine Form geistiger Handlung dar, die in der Hauptsache eine (Re-) Konstruktion ist. Es ist in dem Sinne dynamisch, als es jeweils neu aufgebaut (und nicht abgerufen) wird.“ (Lorenz, H.J., 1993a, S. 127)

Im Folgenden wird erläutert, welche spezifischen Merkmale diese Vorstellungsbilder haben.

3.2.1 Innere Bilder sind vage und strukturiert

Visuelle imaginäre Bilder zeichnen sich einerseits durch eine geringe Detailgenauigkeit und andererseits durch ihre Strukturierung aus.

Die Schemenhaftigkeit ist Voraussetzung dafür, dass das innere visuelle Bild nicht nur auf eine spezielle Aufgabe bezogen, sondern auch auf andere strukturverwandte Aufgaben übertragen werden kann. „Das heißt, der in der Anschauung repräsentierte Sachverhalt sollte nicht, darf nicht ein zu stark an das konkrete Material gebundenes Bild besitzen, da es sonst nicht durch verwandte Situationen abrufbar wird.“ (Lorenz, J.H., 1992, S. 47)

Trotz ihrer Schemenhaftigkeit aber müssen die Bilder die „Struktur der Aufgabe in wesentlichen Teilen abbilden.“ (Lorenz, J.H., 1992, S. 48)

Grundsätzlich gilt: Visuelle Bilder „ ... scheinen in diesem Sinne konkret genug, um die Strukturmerkmale zu erhalten, die für die Aufgabenlösung notwendig sind, sie sind aber auch vage genug, um für eine andere Aufgabe auch dienen zu können.“ (Lorenz, J.H., 1992, S. 48)

Ein visuelles Bild, das zu konkret und unstrukturiert wäre, würde flexibles, problemlösendes Denken beeinträchtigen, denn hierbei werden die bisher getrennten anschaulichen Bilder miteinander verknüpft. Ist nun diese Beziehung, diese Verknüpfung auch bildhaft?

„Es ist theoretisch sinnvoll, nur die Repräsentation der Objekte als visuell anzunehmen. Für die Beziehung zwischen den Objekten muss ein sinnstiftender Zusammenhang hergestellt werden, der

letztlich den verallgemeinerten Begriff ausmacht. Die Beziehung kann eben nicht von der bildlichen Darstellung schon umfasst werden.“ (Lorenz, H.J., 1993a, S. 129) Lorenz erläutert dies an einem Beispiel: Es existieren die visuellen Bilder grüner Apfel und roter Apfel. Die Beziehung „reifer als“ ist aber nicht in dem Bild enthalten, sondern wird erst durch den Begriff hergestellt, die Begriffsbildung kann also nicht alleine in der Vorstellung vollzogen werden.

Bedeutung für die Arbeit am Arbeitsmittel:

Die Arbeitsmittel sind zunächst nur Gegenstände, die man zum Bauen, zum Spielen,...verwendet. Erst die Handlungen, die der Schüler unter Anleitung des Lehrers durchführt, lassen ihn die darin enthaltenen mathematischen Strukturen erkennen.

3.2.2 Vorstellungsbilder sind idiosynkratisch

Wie bereits erwähnt, sind Vorstellungsbilder persönlichkeitsbezogen. Sie sind aktive Konstruktionen,

- die auf der Grundlage bisher gemachter Erfahrungen entstehen
- mit denen in der Vorstellung operiert werden kann
- die durch neue Erfahrungen und Aktivitäten verändert und umgestellt werden können.

Bedeutung für die Arbeitsmittel:

Der Lehrende kann durch den Einsatz des Arbeitsmittels das Kind zur Bildung eines visuellen Bildes anregen und hoffen, dass es dessen Merkmale aufweist, hat aber keinen Einfluss auf die eigentliche Konstruktion. So kann das im Kind entstandene Vorstellungsbild die Strukturen des Arbeitsmittels aufweisen, es kann aber auch ein mangelhaftes oder völlig unbrauchbares Bild entstehen.

Die Tatsache, dass Vorstellungsbilder idiosynkratisch sind, wirft einige Fragen auf:

Kann auf eine Strukturierung verzichtet werden?

Denken Kinder mehr im Feld oder im Strahl?

3.2.3 Visualisierungen sind kontextgebunden

Das Kind besitzt für den Umgang mit Zahlen, Geld und Größen verschiedene Vorstellungsbilder, die in einen spezifischen sozialen Kontext eingebunden sind. Diese Einbindung erschwert es den Schülern zu erkennen, dass die verschiedenen Realisierungen dieselbe Struktur beinhalten. „Die Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler, mit Zahlen zu rechnen, sind also bereichsspezifisch und nicht wie beim Erwachsenen (wünschenswerterweise) schon verallgemeinert, abstrakt (...).“ (Lorenz, J.H., 1992, S. 54)

Bedeutung für die Arbeitsmittel:

Die Verwendung des Arbeitsmittels geschieht in einem sozialen Kontext, der mitgelernt wird. Es ist möglich, dass der Schüler die Handlung nur auf die eine Situation bezieht und nicht in der Lage ist, sie auf andere zu übertragen.

Die Arbeitsmittel sollen helfen, die Anschauungsbilder mehr vom Handeln mit konkreten Gegenständen und dem damit verbundenen sehr konkreten Bild zu lösen und Kenntnisse und Fähigkeiten in gewisser Weise zu generalisieren. Dazu bedarf es jedoch einer Aufmerksamkeitsfokussierung.

3.2.4 Vorstellungsbilder als Prototypen

Das Kind entwickelt Vorstellungsbilder zu Begriffen, so kann beispielsweise die Addition als Vorwärtsschreiten im Raum gesehen werden oder die Subtraktion als Rückwärtsschreiten im Raum. Diese Begriffe besitzen Eigenschaften, die ihnen das Kind als Ergebnis seiner Lerngeschichte zuordnet und die den Begriff repräsentieren. Man bezeichnet sie als Prototypen. „Die Prototypen sind die generalisierten Träger der Bedeutung, nur ... sie sind nicht identisch mit der Bedeutung. Sie stellen lediglich das Medium dar, den der Begriff für seine Repräsentation benötigt.“ (Lorenz, J.H., 1993a, S. 134)

Bedeutung für das Arbeitsmittel:

Die Arbeitsmittel sollen helfen diese Prototypen auszuprägen. Da dies aber ein individueller Prozess ist, sind diese trotz Verwendung desselben Arbeitsmittels nicht bei allen Schülern identisch, bzw. es ist nicht sicher, ob überhaupt ein Prototyp entsteht, der Merkmale des Arbeitsmittels aufweist.

3.2.5 Aufmerksamkeitsfokussierung

Eine Situation oder Handlung ist durch verschiedene Aspekte geprägt. Soziale, emotionale, psychologische etc. Aspekte treten parallel und in gleicher Wertigkeit auf. Ein Teilbereich ist der numerische, der mathematische Aspekt, der nun keinesfalls für das Kind im Vordergrund stehen muss. Vielmehr muss dessen Aufmerksamkeit erst auf die numerischen Veränderungen hingeführt werden. Erst durch diese Aufmerksamkeitsfokussierung treten andere Details in den Hintergrund. „Die mathematische Struktur muss erst durch einen geistigen Akt in die konkrete Situation hineingelesen werden.“ (Lorenz, J.H., 1995, S. 10). Dieser geistige Akt vollzieht sich im Kind. Der Lehrer kann dazu anleiten, ihn aber nicht erzwingen.

Bedeutung für das Arbeitsmittel:

Kinder „sehen“ oft lange Zeit die mathematische Struktur des Arbeitsmittels nicht und können sie demzufolge auch nicht annehmen. Sie verbleiben oft lange Zeit trotz Strukturierung beim zählenden Rechnen.

3.3 Kriterien für die Auswahl der Arbeitsmittel

Welche Kennzeichen ein inneres Vorstellungsbild aufweist, wurde erläutert. Im Folgenden wird geklärt, wie das Arbeitsmittel beschaffen sein soll, damit das Ziel – der Aufbau eines „geeigneten“ Vorstellungsbildes – erreicht werden kann. Es werden lediglich didaktische Kriterien erläutert. Auf die Darstellung organisatorischer Kriterien wie Preis, Stabilität, Materialbeschaffenheit, ... des Arbeitsmittels wird verzichtet.

3.3.1 Ablösung vom zählenden Rechnen durch Verkörperung der mathematischen Strukturen am Arbeitsmittel

Die Vor- und Nachteile der Zählstrategien wurden unter 1.2.3. erläutert.

Die Arbeitsmittel dienen nun dazu, den „... kindlichen Ablösungsprozess vom zählenden Rechnen zu unterstützen.“ (Radatz, H., u.a., 1996, S. 40)

Diese Formulierung beinhaltet zwei Aspekte, die für den Umgang mit Kindern, die zählen, wesentlich sind:

- Die Ablösung ist ein individueller Prozess, dessen Verlauf und zeitliche Begrenzung variabel sind. Es kann nicht erwartet werden, dass sich ein Kind beim Einsatz eines Arbeitsmittels sogleich von seiner Zählstrategie trennt.
- Die Ablösung kann nur vom Kind geleistet werden. Das Arbeitsmittel, das es unter Anleitung des Lehrers verwendet, kann es nur dabei unterstützen. Unterstützung bedeutet in diesem Fall, dass das Arbeitsmittel dem Kind eine Alternative bietet. Es soll die Einsicht gewinnen, dass man mit dessen Hilfe sicher und flink ohne Zählen rechnen kann.

Folgende Strukturmerkmale des Arbeitsmittels sind Ankerpunkte für die Schüler, um sich von Zählstrategien lösen zu können:

- Einzelne Einheiten müssen am Arbeitsmittel erkennbar sein, damit auch zählendes Rechnen ermöglicht wird. Dies erscheint zunächst als Widerspruch. Aber wie unter 1.2.3. beschrieben wurde, kann eine Ablösung vom Zählen nur erfolgen, wenn ausreichende Erfahrungen dazu gemacht worden sind. Die bisherigen Erfahrungen der Kinder beruhen in der Regel auf einem Abzählen an den Fingern. Lässt nun das Arbeitsmittel zählendes Rechnen zu, so ermöglicht es allen Schülern, ihr Vorwissen einzubringen und eigene Strategien zunächst beizubehalten. Nur so kann im Kind eine positive Grundeinstellung zum Arbeitsmittel aufgebaut werden, welche die Voraussetzung für die Übernahme der Strukturen ist.
- Anzahlen bis 5 müssen auf dem Arbeitsmittel simultan erfasst werden können.
- Eine Strukturierung nach 10 bietet sich an, da unser Zahlensystem ein dekadisches Stellenwertsystem ist. Das Arbeitsmittel sollte es ermöglichen, dass der Zehner ohne Zählen als Ganzheit wahrgenommen wird. So können auch die Anzahlen 9 (eins weniger 10) und 8 (zwei weniger 10) aber auch 29 (eins weniger 30) quasi-simultan erfasst werden. Bei den Anzahlen 6 und 7 muss jedoch gezählt werden, da ihr Bezug zur 10 nicht mehr offensichtlich und augenscheinlich ist.

- Deshalb bietet sich eine weitere Unterteilung nach 5 an.
G. Krauthausen spricht von der „Kraft der 5“ (Krauthausen, G., 1995, S. 87)
Welche Vorteile bietet die 5?
 - Größere Anzahlen können quasi-simultan erfasst werden, z.B. $6 = 5 + 1$ $7 = 5 + 2$ aber auch $73 = 50 + 20 + 3$. Deshalb sollte eine Unterteilung jeweils nach 5 Einzelnen, aber auch nach 50 getroffen werden.
 - Die Zahlzerlegungen können auf die 5 bezogen werden.
 - Die Fünferstruktur ist auch auf größere Zahlenräume übertragbar.
 - Anzahlen können räumlich unterschiedlich gelegt werden.
- Die Strukturierung ist eine wichtige Voraussetzung dafür, dass das Kind vom zählenden Rechnen weggeführt wird und in ihm geeignete visuelle Bilder entstehen. „Hilfe können nur die Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bieten, die die mathematische Struktur möglichst klar widerspiegeln, also der Vorstellung nützlich sind und zum Aufbau mentaler Bilder beitragen.“ (Scherer, P., 1995b, S. 409).

3.3.2 Ermöglichung von Entdeckungen

Ein Hauptziel des Mathematikunterrichts ist, die Flexibilität im Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen durch die Erarbeitung operativer Strategien zu steigern. Diese werden von den Schülern im Rahmen des entdeckenden Lernens selbstständig auf der anschaulichen Ebene, auf der Basis selbstausgeführter Handlungen, entwickelt. Das Arbeitsmittel sollte deshalb die Schüler förmlich dazu herausfordern, nach verschiedenen Wegen zu suchen, sich nicht mit einer Möglichkeit zufriedenzugeben. Dies gelingt jedoch nur, wenn der Lehrer von Anfang an Entdeckungen am Arbeitsmittel initiiert, fordert und fördert.

So können beispielsweise für die Gleichung $28 + _ = 54$ folgende Lösungswege entwickelt werden:

$$54 - 28$$

$$28 + _ = 54$$

$$+ 2 + 20 + 4$$

$$28 + _ = 54$$

$$+ 28 - 2$$

Das Material ist die Grundlage für die Diskussion mit dem Partner oder in der Gruppe während der Erarbeitung oder bei der anschließenden Auswertung der Ergebnisse im Klassenverband. Die verschiedenen Lösungswege werden so für alle Kinder auf der anschaulichen Ebene nachvollziehbar. Das Arbeitsmittel erleichtert zudem gerade leistungsschwächeren Kindern das Verbalisieren ihres Lösungsweges.

3.3.3 Vielfältige Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Das Arbeitsmittel repräsentiert die mathematische Struktur nicht automatisch, vielmehr muss sich der Schüler diese erst allmählich erschließen und verinnerlichen.

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen für den Unterricht:

- Die Erarbeitung der Struktur des Arbeitsmittels ist ein zentraler Lerninhalt, der in der Praxis meist vernachlässigt wird und dazu führt, dass insbesondere leistungsschwächere Schüler nicht in der Lage sind, das Arbeitsmittel zu verwenden.
- Im Unterricht sollte man sich möglichst auf den Einsatz eines zentralen Arbeitsmittels beschränken (vgl. Wittmann, E.Ch., 1993; Radatz, H., u.a., 1996). Es ist für die Schüler nicht evident, dass z.B. strukturelle Gleichheiten zwischen einem Rechenrahmen und Rechenschiffchen bestehen.
- Das Arbeitsmittel sollte bei möglichst vielen Inhaltsbereichen und Arbeitsformen eingesetzt werden können. „Anschauungsmittel müssen in einem interaktiven Prozess fortlaufend ausgearbeitet und verbessert werden. Indem der Lernende das Arbeitsmittel in neuen Zusammenhängen anwendet und erprobt, lernt er, sie fehlerfreier und wirkungsvoller zu gebrauchen und immer besser zu verstehen.“ (Wittmann, E. Ch., 1993, S. 394)
- Kognitive Schemata sollen zu bereits vorhandenen in Beziehung gesetzt werden. Deshalb sollten Strukturen des Arbeitsmittel am besten während der gesamten Grundschulzeit beibehalten werden.
„Neue Einsichten stützen sich auf bereits erworbenes Wissen. Deshalb müssen auch die Lernmaterialien (d.V. entspricht Arbeitsmittel) so konzipiert sein, dass sie aufeinander aufbauen und „mitwachsen.“ (Floer, J., 1993, S. 107)

3.3.4 Übertragung der konkreten Handlung in die graphische Darstellung

Für den mathematischen Abstraktionsprozess ist es entscheidend, dass die Handlungen, die am Arbeitsmittel durchgeführt werden, auch zeichnerisch nachvollzogen, bzw. auf die zeichnerische Ebene übertragen werden. Ein Arbeitsmittel sollte deshalb so konzipiert sein, dass eine zeichnerische Darstellung der Handlung auch bei geringer Zeichenfähigkeit des Kindes (vgl. motorische Probleme; visuomotorische Koordination) erstellt werden kann.

3.4 Arten von Arbeitsmitteln

Nun werden die verschiedenen Arten der Arbeitsmittel, die im Fachhandel erhältlich sind, kurz vorgestellt. Es wird dabei berücksichtigt, inwieweit sie die im vorhergehenden Punkt aufgezeigten didaktischen Kriterien erfüllen. Ausführliche Darstellungen zu den Arbeitsmitteln finden sich bei Radatz, H., u.a., 1996, S. 35ff; Lorenz, J. H., 1987a).

Unstrukturierte Materialien

Hierzu gehören Steckwürfel, Muggelsteine und Naturmaterialien.

Anzahlen werden dabei durch das Legen einer entsprechenden Anzahl einzelner Teile dargestellt. Bei der Addition werden einzelne Objekte dazugelegt, bei der Subtraktion Teile weggenommen.

Vorteile:

- Anzahlen bis 5 können simultan erfasst werden.
- Anzahlen können unterschiedlich räumlich strukturiert werden.
- Zahlzerlegungen sind leicht durchführbar.
- Die konkrete Handlung lässt sich leicht in die zeichnerische Darstellung übertragen.

Nachteile:

- Größere Anzahlen können nicht quasi - simultan erfasst werden.
- Dadurch verfestigt sich das zählende Rechnen. Ergebnisse müssen immer wieder durch Abzählen, beginnend bei 1, ermittelt werden.
- Eine Weiterführung in einen größeren Zahlenraum erweist sich als sehr zeitintensiv und fehleranfällig.

Strukturierte Materialien

Zu den strukturierten Materialien zählen unter anderem Zahlenstreifen, Rechenstäbe und auch das Rechengeld. Dabei werden Einzelobjekte zu einer größeren Einheit zusammengefasst.

Vorteile:

- Die Materialien weisen in der Regel (Ausnahme Cuisenaire Stäbe) eine Fünfergliederung auf. Dadurch wird eine Quasi – Simultanerfassung der Anzahlen von 5 bis 10 ermöglicht.
- Eine Zahl wird durch ein Objekt, das eine spezifische Länge aufweist, repräsentiert.
- Die einzelnen Einheiten sind noch erkennbar (Ausnahme Cuisenaire Stäbe), so dass den Schülern, die sich noch auf der Stufe des zählenden Rechnens befinden, dieses ermöglicht wird.
- Durch ihre Strukturierung führen sie langfristig vom zählenden Rechnen weg.

Nachteile:

- Eine flexible Zahlzerlegung ist nicht möglich.

- Bei der Addition oder im erweiterten Zahlenraum braucht man als zusätzliches Hilfsmittel ein Hunderterbrett oder eine Hunderterleiste, da die Ergebnisse ansonsten nur zählend ermittelt werden können bzw. Anzahlen nur so schnell und übersichtlich gelegt werden können.

Mischformen

Rechenrahmen und Rechenschiffchen repräsentieren diese Mischformen.

Vorteile:

- Sie weisen eine deutliche Fünfer- und Zehnergliederung auf und ermöglichen so eine Quasi – Simultanerfassung.
- Anzahlen können auf einen Griff erfasst werden, eine Rückführung auf Einzelelemente ist aber jederzeit möglich.
- Eine Erweiterung der Strukturen in den Zahlenraum bis 100 ist leicht möglich, die Strukturen können beibehalten werden.
- Alle Rechenoperationen sind ohne zusätzliche Hilfsmittel leicht durchführ- und darstellbar.

Nachteil:

Da ein Rückgriff auf die Einzelelemente leicht möglich ist, werden insbesondere leistungsschwächere Kinder zum Abzählen verleitet.

3.5 Konsequenzen für den Unterricht

Oberstes Ziel ist die Freude an der Verwendung des Arbeitsmittels. Nur die positive Einstellung des Schülers ermöglicht einen erfolgreichen Einsatz, dessen Ergebnis das Entstehen einer inneren visuellen Vorstellung von Zahlen und Rechenoperationen im Schüler ist. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen einige Grundsätze im Unterricht beachtet werden.

- „Veranschaulichungen sind allgemein nicht selbstsprechend oder eindeutig, sie müssen für den Mathematikunterricht gelernt werden, um dann als Zeichen bzw. Konventionen benutzt zu werden.“ (Radatz, H., 1995, S. 51)

Daraus folgt:

- Damit der Schüler die innere mathematische Struktur des Arbeitsmittels durchschauen kann, muss diese im Unterricht entdeckt bzw. erarbeitet werden. Die Strukturierung des Arbeitsmittels stellt einen eigenen mathematischen Lerninhalt dar. Nur wenn der Schüler diese Struktur erkennt, kann er abstrakte Begriffe an dem Material entwickeln.
- Im Idealfall beteiligt sich der Schüler aktiv an der Entwicklung des Arbeitsmaterials. Er gewinnt dadurch Verständnis und eine vertiefte Einsicht.

- Das Arbeitsmittel stellt einen Raum dar, in dem Zahlen und Operationen dargestellt werden und den sich der Schüler wie jeden anderen Raum auch erschließen muss. Übungen zur räumlichen Orientierung am Arbeitsmittel sind deshalb unerlässlich.
- Der Schüler muss die konkrete Arbeit am Arbeitsmittel in eine zeichnerische Darstellung übertragen können. Dies gelingt nicht automatisch. Deshalb sollte er selbstständig im Rahmen des entdeckenden Lernens zeichnerische Darstellungen entwickeln. In der Auseinandersetzung mit anderen Darstellungen kann er eigene Vorstellungen relativieren bzw. erweitern. Für den Lehrer bietet dies die Möglichkeit zu überprüfen, ob oder inwieweit der Schüler die mathematische Struktur des Arbeitsmittels verinnerlicht hat.
- Der Einsatz des Arbeitsmittels im Unterricht:
 - Die Schüler entdecken eigene Lösungswege am Arbeitsmittel. Sie erkennen, dass das Arbeitsmittel Möglichkeiten bietet, sich schwierige Aufgaben selbstständig zu erschließen. Dies steigert die Motivation, das Arbeitsmittel zu verwenden.
 - Der Umgang mit dem Arbeitsmittel fördert soziales Lernen. Die Schüler können gemeinsam Lösungswege am Arbeitsmittel entwickeln, denn die Gedankengänge des einzelnen werden für die Gruppe durch die anschauliche Darstellung am Arbeitsmittel nachvollziehbar.
 - Arbeitsmittel müssen in einem interaktiven Prozess fortlaufend ausgearbeitet und verbessert werden. Der Schüler lernt sie so fehlerfrei und wirkungsvoll zu gebrauchen und sie immer besser zu verstehen.
 - Eine Übersetzung zwischen Gleichung, Handlung am Arbeitsmittel und zeichnerischer Darstellung muss vom Schüler sicher beherrscht und deshalb im Unterricht trainiert werden.
 - Die Schüler müssen während des Unterrichts jederzeit auf das Arbeitsmittel zurückgreifen können.
 - Das Kind darf/soll die Arbeitsmittel so lange benutzen, bis es von selbst darauf verzichtet.
 - Das Arbeitsmittel ist ein wichtiges Instrument zur Analyse von Schülerfehlern. So können die Kinder mögliche Fehler selbst entdecken bzw. ihren Rechenweg darstellen, und erhalten so anschaulich Einsicht in mögliche Fehlerquellen.
 - Auch wenn die Schüler Aufgaben im Kopf lösen können, sollte von Zeit zu Zeit eine Darstellung des Rechenweges am Arbeitsmittel gefordert werden. So vertieft der Schüler sein Verständnis für Operationen. So erhält der Lehrer Einblick in die Gedankengänge des Kindes und kann auf mögliche ineffiziente Lösungswege eingehen.
- Langfristiges Ziel des Unterrichts ist es, dass der Schüler eine innere visuelle Vorstellung des Zahlenraums und der Rechenoperationen entwickelt und sich vom Gebrauch des Arbeitsmittels löst. Einzelne Teilschritte können ihm dabei helfen (vgl. Lorenz, J.H., Radatz, H., 1993, S. 172f). Die Schüler lösen sich langsam vom Gebrauch des Arbeitsmittels durch
 - eine Verkürzung der Handlung
 - ein Zerlegen der Handlung in Teilschritte oder Ausführen von Teilschritten
 - eine sprachliche Umschreibung der Handlung

- die Durchführung einer verdeckten Handlung
- die zeichnerische Darstellung der Handlung
- durch eine Verbindung der Darstellungsebenen (handelnd, zeichnerisch, sprachlich und symbolisch)
- eine Übertragung der Handlung auf strukturgleiche Materialien
- ein Vorstellen der Handlung (abdecken der Arbeitsmaterialien, Augen schließen). Dabei wird die Handlung in der Vorstellung vorweggenommen und anschließend durch das Ausführen kontrolliert.
- eine Rekonstruktion der Handlung aus Anfangs- und Endzustand.

Teil II

Konkretisierung, Evaluation und Reflexion eines Unterrichtsprojektes in der 1. Jahrgangsstufe

4. Kapitel

Methodisches Vorgehen und Zielsetzung beim Projekt

4.1 Methodisches Vorgehen

Das Unterrichtsprojekt, das im folgenden Teil im Zentrum steht, ist im engen und weiten Sinn eine „Fallstudie“. Deshalb soll dieser Begriff kurz thematisiert werden.

4.1.1 Fallstudie

Eine Fallstudie ist eine Methode wissenschaftlichen Arbeitens, bei der pädagogische Fälle erfahrungsnah beschrieben und als Ganzheit analysiert werden. (Brügelmann, H., 1982, S. 609) Sie dient dazu, Theorie und Praxis einander nahe zu bringen und miteinander zu verknüpfen. „Die Fallstudie zielt auf das Aufspüren, Hervorlocken und das Sammeln von Informationen und versucht, die so gewonnenen Informationen vor einem theoretischen Begründungszusammenhang systematisch aufzuarbeiten.“ (Guldemann, T., 1995, S. 150).

Der Versuchsleiter hat dabei die Möglichkeit, seine bisherigen Erfahrungen einzubringen, neue wissenschaftliche Erkenntnisse bzw. neue Erfahrungen zu machen und darüber zu reflektieren. „Erfahrung kommt zu Wort, das heißt hier: aus dem Handlungsspiel des Unterrichts geht das Sprachspiel seiner Beschreibung hervor, zunächst in Form einer szenischen Darstellung, einer Erzählung, einer Geschichte, in der situative und personale Elemente noch verknüpft sind. Erfahrung wird verarbeitet, indem sie zunächst einmal abgebildet und nicht gleich unter dem Zwang erlebt wird, verallgemeinert werden zu müssen. Persönliche Alltagserfahrung wird artikuliert, individuelle Wirkungsgeschichte rekonstruiert.“ (Binneberg, K., 1979, S. 399)

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem „Erfahrungsfeld des reflektierenden Praktikers“, (Binneberg, K., 1979, S. 399), der auf „...methodisch kontrollierte Weise, den Einzelfall mit vorhandenen allgemeinen Wissensbeständen in Beziehung setzt, um zu prüfen, was am Fall aus diesen Wissensbeständen heraus erklärbar ist und was an ihnen aus diesem Fall heraus zu differenzieren und ggf. zu korrigieren ist.“ (Fatke, R., 1995, S. 677)

In der Fallstudie werden bestehende Erkenntnisse geprüft und erweitert. Es geht nicht in erster Linie darum, allgemeingültige Regeln zu formulieren.

Der Begriff „Fall“ wird hier in zweifacher Weise verwendet:

- Der „Fall“ des Mathematiklernens in einer 1. Klasse, wobei sich die Ausführungen und Beobachtungen über das gesamte erste Schuljahr erstrecken. Zudem werden einzelne Inhaltsbereiche der 2. Jahrgangsstufe beschrieben. Der Unterricht wird mit besonderer Berücksichtigung der Intentionen des Lehrers und der Handlungen des Schülers dargestellt.
- Einzelne Schüler der Klasse werden ausgewählt und der „Fall“ ihres jeweiligen Mathematiklernens dokumentiert.

Die Informationen werden folgenden „Quellen“ entnommen:

- Lehrerbeobachtungen
- Schülerbefragungen
- Schriftliche Materialien der Schüler

Ein direkter Vergleich mit einer Experimental-Kontrollgruppe, die einen pränumerischen Grundkurs zu Beginn der 1. Jahrgangsstufe macht und Steckwürfeln/Kastanien als Arbeitsmittel verwendet, wird hier nicht vorgenommen, da direkte Vergleichsmessungen kaum durchgeführt werden könnten.

Eine andere Frage betrifft die Verwendung quantitativ – statistischer Erhebungs- und Auswertungsmethoden, wie etwa den Einsatz von standardisierten Tests. Dieser ist sicher in vielen Fällen sinnvoll. In der Experimentalgruppe wird am Ende der 1. Jahrgangsstufe der CFT 1 durchgeführt, um die Fähigkeiten der Schüler im Hinblick auf die visuelle Wahrnehmung zu überprüfen. Die Ergebnisse sind unter 5.4. dokumentiert. Aufgrund solcher Tests jedoch allgemeine Aussagen über das Erreichen der Zielsetzungen des Projekts zu treffen, erscheint wenig sinnvoll. Es gibt keinen standardisierten Test, der die grundlegende Fähigkeiten und Arbeitsmittel zueinander in Beziehung setzt.

4.1.2 Spezifische Kriterien und Gegebenheiten dieser Fallstudie

Aufgrund der Doppelfunktion der Autorin als Lehrerin und Wissenschaftlerin ergeben sich bei der Durchführung und Darstellung der Fallstudie spezifische Bedingungen:

Der Fall wird in seiner zeitlichen Entwicklung und in seiner Einbettung in die jeweilige Umwelt untersucht (vgl. Brügelmann, 1982, S.617). Der zeitliche Rahmen dieses Projekts erstreckt sich über die gesamte 1. und 2. Jahrgangsstufe, wobei im zweiten Schuljahr nur noch einige Inhaltsbereiche näher dokumentiert werden. Während dieser Zeit entsteht eine enge Bindung zwischen der Versuchsleiterin und den Probanden.

Dies bringt viele Vorteile mit sich:

- Die Schüler äußern sich ohne Scheu und wahrheitsgemäß bei Schülerbefragungen.
- Der Lehrer ist sensibler für Reaktionen und auftretende Schwierigkeiten.
- Der Schüler wird in seiner Gesamtpersönlichkeit gesehen und nicht nur in Bezug auf seine mathematischen Kenntnisse oder in Zusammenhang mit den Zielsetzungen der Fallstudie.

- Der Lehrer kennt auch den privaten Bereich des Schülers sehr gut, d.h. sein häusliches Umfeld, seine Stärken und Schwächen. So können viele Aspekte erfasst werden und Wechselwirkungen werden sichtbar.

Bei der Durchführung der Fallstudie kann die Projektleiterin auf einen großen Erfahrungsschatz in Bezug auf die Unterrichtsplanung zurückgreifen, der es ihr unter anderem ermöglicht, flexibel bei auftretenden Schwierigkeiten zu agieren, zielgerichtet zu arbeiten und schülergemäß zu sequenzieren.

Dadurch dass die Lehrerin den gesamten Unterricht in der Klasse gestaltet, ist es möglich, Informationen aus anderen Fächern denen der Mathematik hinzuzufügen. Die Ergebnisse dieser Fallstudie beruhen nicht nur auf mathematischen Beobachtungen, sondern sind eingebettet in ein Gesamtkonzept des Lernens in der Grundschule.

Durch die Auflistung aller Unterrichtsstunden in der 1. Jahrgangsstufe wird ein Gesamtbild erstellt, das es ermöglicht, das komplexe Wirkungsgefüge „mathematischer Anfangsunterricht“ aufzuzeigen.

Die emotionale Nähe kann aber auch die Gefahr einer mangelnden Objektivität mit sich bringen. Aufgrund der langen Zeitdauer des Projekts und der Einbindung in das Gesamtkonzept des Erstunterrichts wird dieses Problem jedoch minimiert. Die Versuchsleiterin wird durch soziale und unterrichtliche Ereignisse indirekt aufgefordert, immer wieder in die Distanz zu gehen und das Kind und dessen Erkenntnisse kritisch zu betrachten und zu hinterfragen. Zudem versucht die Autorin immer wieder, durch entsprechende Reflexionen und Objektivierungen die erforderliche Basis für wissenschaftliches Arbeiten zu schaffen.

4.1.3 Die Experimentalgruppe

Die Experimentalgruppe besteht aus 17 Schülern (11 Mädchen, 6 Jungen), die nicht speziell für dieses Projekt ausgewählt wurden. Ein behindertes Kind (Rollstuhlfahrer) ist gut in die Gemeinschaft integriert. Im Juni des ersten Schuljahres kommt ein Junge hinzu.

Die Projektleiterin und die Probanden lernten sich bei der Schuleinschreibung kennen. Der Kontakt wurde durch weitere Treffen bis zum ersten Schultag intensiviert. Zehn Kinder haben ältere Geschwister und hatten somit schon einen ersten Einblick in schulische Gegebenheiten und Anforderungen.

Alle zeigen sich von Beginn an sehr motiviert und aufgeschlossen für schulische Inhalte. Kein Kind ist extrem verhaltensauffällig. Die Schüler wachsen innerhalb kurzer Zeit zu einer Gemeinschaft zusammen, in der eine positive Arbeitsatmosphäre herrscht.

Auch die Eltern zeigen reges Interesse an der Schule. Sie erkundigen sich regelmäßig nach den Fortschritten ihrer Kinder bzw. unterstützen sie bei etwaigen Problemen.

4.2 Zielsetzung

Das Projekt weist zwei Zielebenen auf:

Zum einen werden Ziele gesteckt, die im Mathematikunterricht allgemein erreicht und verwirklicht werden sollen.

Zum anderen werden Forschungsziele genannt, die speziell bei diesem Projekt erreicht werden sollen.

4.2.1 Ziele und Methoden des Unterrichts

Unbestreitbar ist ein grundlegendes Ziel ein verständnisorientierter Mathematikunterricht. Im Kopf des Schülers „...müssen Einsicht und Verständnis aufgebaut und Beziehungen zwischen diesen Einsichten hergestellt werden.“ (Floer, J., 1997, S. 215) Lernen wird verstanden als „...Konstruktion eines Netzes von Einsichten, bei dem Strukturen, kognitive Schemata, mentale Modelle entstehen.“ (Floer, J., 1997, S. 215) Wie entstehen diese Modelle? Wie erreicht der Schüler Verständnis? Nach J.H. Lorenz liegen dem Verstehen diese Aspekte zugrunde: (Lorenz, J.H., 1997c, S. 27)

- Der Schüler muss aktiv lernen. Er muss Probleme lösen, indem er sich intensiv mit ihnen auseinandersetzt, eigene Lösungen entwickelt.
- Er gelangt zu Verständnis, indem er sich mit seinen Fehlern intensiv auseinandersetzt.
- Begriffe sind nicht vermittelbar, sondern sie müssen vom Lernenden selbst konstruiert werden.
- Das Lernen ist individuell. Verstehen kann nicht vom Lehrer vorprogrammiert werden.

Daraus ergeben sich Konsequenzen für die Unterrichtsplanung. Folgende Methoden sind die Basis des verständnisorientierten Unterrichts:(siehe dazu auch 1.2.)

- Aktiv-entdeckendes Lernen

Dabei stehen Lernprozesse im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens. Der Schüler übernimmt in zunehmendem Maße die Verantwortung dafür. Indem ihm der Lehrer die Gelegenheit bietet, in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit Lösungsideen zu entwickeln, zielgerichtet zu suchen und zu erproben, wird sein kreatives, schöpferisches Denken angeregt. Die Schüler begründen und diskutieren die verschiedenen Lösungswege und erweitern so ihre Argumentationsfähigkeit und Sozialkompetenz. Die Schüler werden aufmerksam für Lernprozesse.

Durch die Analyse der Lösungsstrategien und möglicher Fehler vertiefen sie ihre Einsicht in mathematische Prozesse.

- Handlungsorientierung

Nur aufgrund selbstausgeführter Handlungen mit Gegenständen oder didaktischen Modellen entwickeln sich im Schüler mentale Modelle bzw. innere Vorstellungsbilder.

- Verknüpfung der verschiedenen Darstellungsebenen

Handelnde, bildliche und symbolische Darstellung werden sowohl schriftlich als auch verbal miteinander verbunden. So wird der Individualität des mathematischen Lernprozesses Rechnung getragen.

- Entwickeln und Einprägen von operativen Rechenstrategien:
Mit Hilfe der operativen Strategien gewinnen die Schüler Einsicht in mathematische Zusammenhänge und lernen, ihr Wissen flexibel anzuwenden.
- Kopfrechnen / Kopfgeometrie
Grundlegende Inhalte sowohl der Arithmetik als auch der Geometrie werden permanent wiederholt. Sie stellen das Grundgerüst zur Erschließung neuer Inhalte dar.
- Einplanung offener Unterrichtsformen wie Lernzirkel, Lernspiele, selbstständiges Erstellen von Arbeitsmaterialien.
- Differenzierung
Das Lernen ist ein individueller Prozess, deshalb ist eine Differenzierung unerlässlich. Ziel ist nicht eine quantitative, sondern eine qualitative Differenzierung, bei der leistungsstärkere Schüler vertiefte Kenntnisse durch anspruchsvollere Aufgabenstellungen erwerben, aber auch leistungsschwächeren Schülern die Gelegenheit und die Zeit zum Problemlösen und Entdecken gegeben wird.
Im Rahmen der inneren Differenzierung werden leistungsstärkere Schüler als Tutoren eingesetzt. Sie trainieren dabei ihre sozialen Fähigkeiten und wenden durch Erklären und Darstellen erworbenes Wissen an.
- Strukturiertes Lernen
Nur wenn der Schüler die Möglichkeit erhält, selbstständig Strukturen zu entdecken, gewinnt er Einsichten in Zusammenhänge und damit Verständnis.
- Operative Übungen
Mathematische Zusammenhänge und Beziehungen werden so für den Schüler erkennbar.

Ein Unterricht, der von diesen Prinzipien getragen wird, führt zu einer Veränderung der Lehrerrolle.

„Die Hauptaufgaben des Lehrers sind, herausfordernde Situationen anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel bereitzustellen, kreative Übungsformen vorzuschlagen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist.“ (Winter, H., zitiert in Radatz, H., Rickmeyer, K., 1996, S. 7)

4.2.2 Fokussierung

Innerhalb des oben abgesteckten Rahmens werden folgende Ziele hervorgehoben:

Grundlegende Fähigkeiten

Die Bedeutung der visuellen Wahrnehmung, des visuellen Speicherns und Operierens, sowie der Raumvorstellung/Raumerfahrung wurde unter 2.4. dargelegt. Ziel ist es nun, aufbauend auf den Vorkenntnissen der Schüler, diese in regelmäßigen kurzen Übungsphasen während des gesamten Schuljahres zu trainieren und zu vertiefen.

Entwicklung und Einsatz eines Arbeitsmittels

Es soll ein Arbeitsmittel konzipiert werden, an dessen Entwicklung die Schüler maßgeblich beteiligt werden und eigene Ideen und Lösungsmöglichkeiten einbringen können. Dabei wird ein enger Bezug zwischen der Geometrie und der Arithmetik hergestellt. Erkenntnisse, die an der Konzeption des Geobretts gewonnen werden, werden auf die Entwicklung des arithmetischen Arbeitsmittels Rechenstäbe und Hunderterfeld übertragen.

Eine kontinuierliche, selbsttätige Arbeit am Arbeitsmittel soll es dem Schüler ermöglichen, ein inneres Vorstellungsbild von Zahlen und Rechenoperationen aufzubauen.

5. Kapitel

Realisierung des Projekts

Die Grundlage der unterrichtlichen Planung ist der Klassenlehrplan, der von der Versuchsleiterin auf der Basis des bayerischen Grundschullehrplans 2000 unter Berücksichtigung der spezifischen Klassensituation im Laufe eines Schuljahres entwickelt wird. Die zu Jahresbeginn erstellte Grobplanung (Verteilung der Lerninhalte auf die einzelnen Monate) wird im Laufe des Schuljahres ergänzt durch konkrete Unterrichtseinheiten. Unter 5.1. wird der Klassenlehrplan mit allen Unterrichtseinheiten dargestellt, die im Rahmen des Mathematikunterrichts durchgeführt werden.

Wie bereits erwähnt, werden die grundlegenden Fähigkeiten in der Regel täglich im Rahmen kopfgeometrischer Übungen trainiert. Diese Unterrichtseinheiten erscheinen nicht explizit im Klassenlehrplan, da sie lediglich einen Unterrichtsschritt darstellen. Die Entwicklung und der Einsatz des Arbeitsmittels geschieht in „Unterrichtsstunden“, die dazu parallel stattfinden.

Die Beschreibung der Realisierung des Projekts wird in zwei Teilbereiche getrennt. Zunächst wird der mathematische Lernprozess der Experimentalgruppe dargestellt (siehe 5.2.). Im Anschluss daran, steht das Mathematiklernen einzelner Schüler im Mittelpunkt (siehe 5.3.).

5.1 Klassenlehrplan

Der Klassenlehrplan wurde auf der Grundlage des Bayerischen Grundschullehrplans 2000 erstellt. Die angeführten Themen sind Unterrichtseinheiten, die zwischen 20 und 45 Minuten dauern.

September

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung (keine eigenen Unterrichtseinheiten, kurze Unterrichtsphasen in Mathematik, Deutsch, Musik- und Bewegungserziehung und Sport)
Lagebeziehungen am eigenen Körper erfahren und erfassen
- 1.1.2. Flächenformen
Flächenformen untersuchen, beschreiben, benennen und herstellen
Flächenformen nach selbst gefundenen und vorgegebenen Kriterien vergleichen und klassifizieren
Fachbegriffe: Viereck, Rechteck, Quadrat, Dreieck, Kreis
- 2.1. Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen (ohne Begrenzung des Zahlenraums) Verknüpfung mit HSU Lernziel 1.6.4.
Zahlen aus der Lebenswelt entdecken, deuten und aufschreiben
Mengen bilden und auszählen
Mengen durch 1:1 Zuordnung vergleichen
Elemente von Mengen durch grafische Zeichen darstellen, diese zählen und die Anzahlen vergleichen

Unterrichtseinheiten:

Wie viele Kinder gehen in meine Klasse?
Ich lerne die Plättchen aus dem Abenteuerland kennen
Wie viele Jungen und Mädchen gehen in meine Klasse?
Wir untersuchen die Plättchen: Kreise
Wie viele Plättchen habe ich?
Wie viele Kinder haben Haustiere?
Unsere Plättchen haben Ecken
Meine Lieblingszahl
Meine Telefonnummer
Wir unterscheiden Dreiecke
Einführung in das Geobrett
Das Geobrett: Zeichnerische Darstellung
Verknüpfung der konkreten Darstellung auf dem Geobrett und der zeichnerischen Darstellung
Wir spannen Dreiecke auf dem Geobrett
Das Quadrat
Das Rechteck

Oktober

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung
Vgl. Lerninhalte September
Dazu: Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben: Beziehungen von Gegenständen zueinander
- 1.1.1. Flächenformen
Vgl. Lerninhalte September

- 1.2.3. Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen
Anzahlen bestimmen
Mengen strukturieren; Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln
Anzahlen (auch die Zahl 0) konkret, bildlich und symbolisch darstellen
- 1.2.1. Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen
Die Ziffern von 0 bis 9 lesen und schreiben

Unterrichtseinheiten:

Übertragung der zeichnerischen Darstellung des Geobretts auf die Darstellung des 25er Quadrats
Benützen des 25er Quadrats als Zählfeld: Sind in jeder Tüte gleich viele Milky ways?

Wir zeichnen mit dem Lineal

Wir ergänzen Figuren

Gebrauch des 25er Quadrates als Zählfeld: Wir erkunden unser Schulhaus

Die Zahlen bis 10:

- Übungen zur Simultanerfassung;
- Mengen legen;
- Anzahlen zeichnerisch, durch Klatschen, Klopfen, Hüpfen usw. darstellen;
- Mengen Zahlzeichen und Zahlwörter zuordnen und umgekehrt;
- selbstständig Möglichkeiten entdecken, Elemente von Mengen strukturiert anzuordnen
- Gebrauch des 25er Quadrates: Entdecken von Möglichkeiten, Elemente von Mengen strukturiert anzuordnen

Einführung in die Rechenstäbe

Entwicklung eines Rechenfeldes (Hunderterfeldes)

Strukturierung des Hunderterfeldes

November

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung
Vgl. Oktober
- 1.2.4. Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen
Zahlen und Größen vergleichen:
Begriffe: größer – gleich groß – kleiner; mehr – gleich viel – weniger; länger – gleich lang – kürzer
Zeichen $>$ $<$ $=$
- 1.2.3. Zahlen bis 20 zerlegen
Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren
Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren
- 1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen: Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen entnehmen und versprachlichen

Unterrichtseinheiten:

Wir vergleichen Größen

Wir vergleichen Zahlen: Einführung der Zeichen $>$ $<$

Wir vergleichen Zahlen: Einführung des Gleichheitszeichens

Übung zum Vergleich von Zahlen

Wir zerlegen die Zahl 5 (handeln)

Wir zerlegen den 5er Stab

Einführung des Zeichens +

Wir zerlegen die Zahl 5: Strukturierung der Zerlegungen

Wir zerlegen die Zahl 10

Wir zerlegen die Zahl 7

Übung zu den bekannten Zahlzerlegungen

Dezember

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung
Lagebeziehungen am eigenen Körper erfahren und erfassen
Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben: Beziehungen von Gegenständen zum eigenen Körper
- 1.2.3. Zahlen bis 20 zerlegen
Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren
Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren
- 1.3.1. Addition verstehen
Addition verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch
(Darstellungsebenen miteinander verknüpfen)
- 1.3.2. Einspluseinssätze
Tauschaufgaben der Addition bilden
Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 automatisieren
- 1.2.1. Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen
Ordnungszahlen gebrauchen
- 1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Sachsituation und ihre Darstellung erschließen: Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen entnehmen und versprachlichen
Lösungswege finden: Zu Sachsituationen Gleichungen finden; einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen

Unterrichtseinheiten:

Die Schüler finden selbstständig Zerlegungen zu den Zahlen 6,8,9
Einführung in die Addition (Handlung mit konkreten Gegenständen und notieren der Gleichung; dabei Berücksichtigung des zeitlich sukzessiven und des räumlich simultanen Aspekts der Addition)
Wir zählen zusammen (zeichnerische Darstellung und Notation der Gleichung)
Wir zählen zusammen (Handlungen mit Arbeitsmitteln und notieren der Gleichung)
Wir zählen zusammen (zeichnerische Darstellung von Additionen am Arbeitsmittel und Notation der Gleichung)
Wir zählen zusammen: Erwürfeln von Plusaufgaben
Wir ordnen/strukturieren die ermittelten Aufgaben
Einprägestrategie: Tauschaufgaben
Einprägestrategie: Verdopplungen
Aufgaben mit +0
Aufgaben mit +1
Aufgaben mit +2
Übungen zum Automatisieren von Plusaufgaben
Parallel dazu: Geometrischer Adventskalender
Parallel dazu: Ordnungszahlen

Januar

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung
Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen
Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben: Beziehungen von Gegenständen zum eigenen Körper; Beziehungen von Gegenständen zueinander

- 1.3.1. Subtraktion verstehen
Subtraktion verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch
Darstellungsebenen miteinander verknüpfen
- 1.3.2. Einspluseinssätze
Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren
- 1.4.1. Größen
Zeitdauer erfahren
Volle Stunden einstellen und ablesen
Zeitdauer und Zeitpunkt anschaulich ermitteln
(Verbindung zu HSU 1.6.1.)
- 1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen: Informationen aus eigenen und
vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen entnehmen und versprachlichen
Lösungswege finden: Zu Sachsituationen Gleichungen finden; einer Gleichung verschiedene
Sachsituationen zuordnen

Unterrichtseinheiten:

Einführung in die Subtraktion (Handlungen mit konkreten Gegenständen und notieren einer Gleichung)
Wir subtrahieren (zeichnerische Darstellung und Notation der Gleichung)
Wir subtrahieren: Verwendung der Arbeitsmittel (und Gleichung)
Wir stellen die Subtraktion mit dem Arbeitsmittel zeichnerisch dar (und Gleichung)
Wir strukturieren Minusaufgaben
Einprägestrategie: Subtraktionsaufgaben mit -1
Subtraktionsaufgaben mit -0
Einprägestrategie: Subtrahend =Minuend
Subtraktionsaufgaben -5
Subtraktionsaufgaben mit -2
Wir ziehen ab: 3 Zahlen $- 2$ Minusaufgaben

Februar

Lerninhalte:

- 1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung
Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben
- 1.3.1. Begriffe Addition und Subtraktion
Umkehroperationen zur Addition und Subtraktion durchführen
- 1.3.2. Einspluseinssätze
Nachbaraufgaben anwenden
Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren
- 1.4.2. Arbeit an Sachsituationen (vgl. Januar)

Unterrichtseinheiten:

Einführung in die Umkehraufgaben: Hüpfspiel
Wir kehren um: Zeichnerische Darstellung
Wir kehren um: Operatordarstellung
Wir kehren um : Zusammenhang am Arbeitsmittel verdeutlichen
Wir üben Umkehraufgaben
Operative Übungsform: Kleeblätter: 3 Zahlen $- 4$ Aufgaben
Einfache Gleichungen lösen: $9-_=4$ (Anwenden der gewonnenen Erkenntnisse aus den Zahlentripeln)
Übung zu den Platzhalteraufgaben mit $-$
Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen finden

März

Lerninhalte:

- 1.3.2. Einspluseinssätze
Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren
- 1.2.2. Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen
Verständnis für den dekadischen Aufbau entwickeln:
Konkret bündeln und entbündeln;
Bündelergebnisse notieren und verbalisieren
Bündelungen zeichnerisch darstellen
Zahlen bis 20 lesen und schreiben
- 1.2.4. Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen
Zeichen $><=$
Zahlen ordnen, Zahlenfolgen bilden und darstellen
- 1.1.2. Flächenformen
- 1.2.1. Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen
Zahlen aus der Lebenswelt entdecken, deuten und aufschreiben
Mengen bilden und auszählen
Ordnungszahlen gebrauchen
- 1.4.2. Arbeit an Sachsituationen (vgl. Februar)

Unterrichtseinheiten:

Einführung in die Ergänzungsaufgaben: $2+_=5$ (Lösen aufgrund der Kenntnisse aus den Zahlentripeln)
Wir lösen Ergänzungsaufgaben mit Arbeitsmitteln
Übungen zum Automatisieren der Einspluseinssätze
Wir spielen Tangram
Wir entdecken Bündelungen in der Umwelt
Wir zeichnen Bündelungen auf
Wir schreiben Bündelungen in die Stellenwerttabelle
Wir bündeln immer 10 (konkrete Gegenstände)
Wir arbeiten mit der Stellenwerttabelle
Wir bündeln immer 10 (Verwendung der Arbeitsmittel)
Wir stellen Zahlen mit Arbeitsmitteln dar (am Hunderterfeld)
Die Zahlen bis 20
Die Zahlen bis 20 (Stationenlauf)
Erstellen einer Schülerwandzeitung: Die Zahlen bis 20
Wir orientieren uns auf dem 20er (100er) Feld
Die Zahlen bis 20: Nachbarzahlen
Wir vergleichen die Zahlen bis 20 $><=$
Ordnungszahlen bis 20
Wir bilden Zahlenfolgen

April

Lerninhalte:

- 1.2.3. Zahlen bis 20 zerlegen
Zerlegungen im zweiten Zehner durchführen
- 1.3.3. Im zweiten Zehner addieren und subtrahieren
Dekadische Analogien entdecken und anwenden

1.3.4. Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren
Das Doppelte und die Hälfte einprägen

1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden

Parallel dazu: Tagesaufgaben zu geometrischen Inhalten

Unterrichtseinheiten:

Wir zerlegen die Zahlen bis 20 mit Arbeitsmitteln
Kleine Aufgabe – große Aufgabe plus (Arbeitsmittel)
Kleine Aufgabe – große Aufgabe minus
Übungen zum Automatisieren der dekadischen Analogie
Umkehraufgaben im zweiten Zehner
Platzhalteraufgaben im zweiten Zehner $17 - _ = 11$ (Arbeitsmittel)
Wir ergänzen im zweiten Zehner $11 + _ = 19$ (Arbeitsmittel)
Übungen zum Automatisieren der Rechnungen im zweiten Zehner ohne Zehnerüberschreitung
Wir verdoppeln (Einführung)
Wir halbieren (Einführung)
Wir verdoppeln und halbieren anhand des Arbeitsmittels

Mai

Lerninhalte:

1.3.4. Mit Zehnerüberschreitung addieren
Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren
Verdoppeln automatisieren; Nachbargaufgaben erschließen
Zerlegen und in Schritten rechnen
Tauschaufgaben der Addition anwenden

1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden

Parallel dazu: Tagesaufgaben zu geometrischen Inhalten

Unterrichtseinheiten:

Nachbargaufgaben zu den Verdoppelungen finden (anhand der Arbeitsmittel)
Zu Aufgaben Verdoppelungen finden (anhand der Arbeitsmittel)
Übung zu den Nachbargaufgaben
Einführung: Aufgaben mit Zehnerübergang +
Die Schüler entdecken selbstständig Lösungsmöglichkeiten
Aufgaben mit Zehnerübergang durch Zerlegen in Schritten lösen (Arbeitsmittel und symbolische Darstellung des Rechenweges)
Zerlegung beim Zehnerübergang zeichnerisch darstellen
Eine Aufgabe – verschiedene Rechenwege
Übungen zum Automatisieren des Zehnerübergangs +
Tauschaufgaben der Addition anwenden

Juni

Lerninhalte:

1.3.4. Mit Zehnerüberschreitung subtrahieren
Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren
Halbieren automatisieren und Nachbargaufgaben erschließen
Zerlegen und in Schritten rechnen

Geometrische Tagesaufgaben

1.1.2. Flächenformen

Figuren, Muster, Parkette und Ornamente aus geometrischen Grundformen zusammensetzen und beschreiben

1.4.2. Arbeit an Sachsituationen

Lösungswege finden: Zu Sachsituationen Gleichungen finden; einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen; Lösungswege beschreiben und begründen

Unterrichtseinheiten:

Wir üben Halbierungsaufgaben

Nachbaraufgaben zu den Halbierungen finden

Übung zu den Nachbaraufgaben

Einführung: Aufgaben mit Zehnerübergang –

Schüler entdecken selbstständig Rechenwege

Aufgaben mit Zehnerübergang durch Zerlegen in Schritten lösen

Zerlegung beim Zehnerübergang zeichnerisch darstellen

Übungen zum Automatisieren des Zehnerübergangs

Wir lösen Platzhalteraufgaben mit – (mit Zehnerübergang)

Wir lösen Ergänzungsaufgaben mit Zehnerübergang

Übungen zum Automatisieren der verschiedenen Aufgabenarten

Juli

Lerninhalte:

1.3.4. Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren
Einfache Gleichungen lösen

1.4.1. Geldwerte: DM und Pf
Münzen und Geldscheine benennen und unterscheiden
Geldbeträge strukturieren, bestimmen und vergleichen

1.4.2. Arbeit an Sachsituationen
Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen:
Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen, einfachen Texten oder Schaubildern entnehmen und versprachlichen; Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden
Lösungshilfen entwickeln und individuell anwenden:
Sachsituationen handelnd nachvollziehen und verbalisieren; einfache Zeichnungen erstellen

1.1.1. Flächenformen wiederholen und vertiefen (geometrische Tagesaufgaben)

Unterrichtseinheiten:

Wir vergleichen Rechenausdrücke

Wir lösen einfache Gleichungen

Wir lernen die Pf Münzen kennen

Wir legen Pf Beträge auf verschiedene Weise

Wie lernen die DM Münzen kennen

Auf dem Kinder Flohmarkt (Wir rechnen mit Geld)

Stationentraining: Wir rechnen mit Geld

Anlage einer Sachrechenkartei

Übungsform: Magische Quadrate

Wir besuchen den Tierpark

Begriffe mehr- weniger

Begriffe mehr als, weniger als

Wir fahren mit dem Bus

Rechendreiecke

Rechentabellen

5.2 Der mathematische Lernprozess der Experimentalgruppe

Entsprechend den Zielsetzungen des Unterrichtsprojekts werden zwei Bereiche schwerpunktmäßig analysiert. Zunächst wird aufgezeigt, wie die grundlegenden Fähigkeiten während des Schuljahres trainiert werden. Im zweiten Teil wird die Entwicklung und der Einsatz des Arbeitsmittels durch den Schüler dokumentiert.

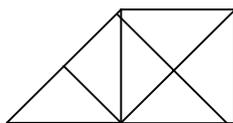
5.2.1 Entwicklung der grundlegenden Fähigkeiten

5.2.1.1 Grundsätze für die Durchführung

- Die Übungen zur Raumerfahrung/Raumvorstellung und zum Sehen/Vorstellen werden während des gesamten Schuljahres durchgeführt, wobei sich die Schwerpunkte verlagern.
In den ersten Monaten des Schuljahres stehen Übungen im Vordergrund, die dem Schüler helfen, Lagebeziehungen am eigenen Körper zu erfassen, um sein Körperbewusstsein zu sensibilisieren. Im Anschluss daran werden Übungen zur visuellen Wahrnehmung und zur Erfassung der Lage von Gegenständen im Raum durchgeführt, ehe im letzten Drittel des Schuljahres Übungen zum visuellen Speichern und Operieren dominieren.
Dies bedeutet aber nicht, dass die Grenzen starr eingehalten werden. Vielmehr werden gerade im Bereich der Raumerfahrung in den Fächern Sport und Musik- und Bewegungserziehung häufig kurze Übungen während des gesamten Schuljahres durchgeführt, die aber in der Aufstellung unter 5.2.1.2. nicht explizit erwähnt werden.
- Die Übungen werden in der Regel täglich in einer maximal 20 minütigen Unterrichtseinheit durchgeführt.
- Sie sind nicht nur in den Mathematikunterricht integriert. Aufgrund ihrer grundlegenden Bedeutung für alle Fächer und für die Gesamtentwicklung des Kindes werden sie auch in die Fächer Deutsch, Heimat- und Sachunterricht, Sport und Musik- und Bewegungserziehung eingebunden.
- Die Übungen sollen spielerisch sein und dem Kind in erster Linie Freude bereiten. Der Leistungsgedanke tritt in den Hintergrund. Dies ist auch ein Grund dafür, dass im Bereich Sehen und Vorstellen keine Lernzielkontrollen im herkömmlichen Sinn durchgeführt werden. Ein weiterer Grund darin liegt, dass keine für alle Schüler gültigen Lernziele aufgestellt werden, die abfragbar sind. Der Lehrer sieht sich vielmehr als Beobachter des individuellen Lernfortschritts des Kindes. Qualitative und quantitative Differenzierung ist deshalb unerlässlich. Alle Schüler erhalten dieselbe Grundübung, der Schwierigkeitsgrad jedoch differiert,

Beispiele:

1.



„Suche aus der Figur alle Dreiecke, die du finden kannst!“

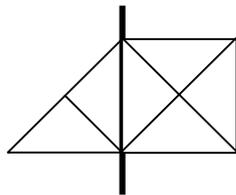
S erhalten einzelne Kärtchen, auf denen diese Figur aufgezeichnet ist. Sie malen jeweils ein

Dreieck an. Je nach Leistungsfähigkeit finden die Schüler eine unterschiedliche Anzahl.

2. Einige Schüler erstellen selbstständig komplexe Labyrinth, andere begnügen sich mit dem Finden einfacher Wege.

- Der Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Übungen nimmt im Laufe des Schuljahres konstant zu, so z.B. die Anzahl der Figuren, die sich die Schüler einprägen oder die Komplexität der geometrischen Figuren.
- Der Lehrer plant bei den Übungen viele Möglichkeiten der Selbstkontrolle mit ein.
- Speziell im Bereich des visuellen Operierens und Speicherns müssen gemeinsam Strategien entwickelt werden, die dem Kind helfen, seine Fähigkeiten zu erweitern.

Beispiel:



Die Schüler ordnen die Formen nach selbstgefundenen Kriterien: Form, Strich in der Mitte,...

Systematische Vorgehensweise bei der Erschließung der Dreiecke

Vorgehensweise: Visuelles Trennen in zwei Teilbereiche, markieren der Dreiecke des einen Teils, markieren der Dreiecke des zweiten Teils, zum Schluss die Schnittlinie „visuell überspringen“.

Diese Einprägestrategien sind ein wichtiger Beitrag zum allgemeinen Ziel der Grundschule „Das Lernen lernen“. Die Schüler müssen lernen, systematisch an die Erschließung eines Lerninhaltes heranzugehen.

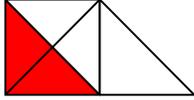
5.2.1.2 Unterrichtliche Verwirklichung

Aufgezeigt werden die Übungen, die während des Schuljahres im Rahmen der Kopfgeometrie durchgeführt werden.

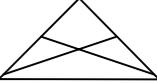
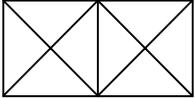
Die einzelnen grundlegenden Fähigkeiten sind eng miteinander verbunden. So wird beispielsweise bei Raumorientierungsübungen in der Schule nicht nur die Raumvorstellung, sondern auch die visuelle Wahrnehmung und das visuelle Operieren geschult. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden sie in der Tabelle nur unter einem Schwerpunkt angeführt. Einige der angeführten Beispielen finden sich bei H. Radatz. (Radatz, H. u.a., 1996) und A. Schulz (Schulz, A., 1994a).

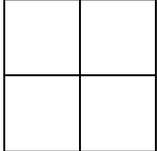
Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
Sept.	<p><u>Lagebeziehungen am eigenen Körper</u> Ziel: Sensibilisierung des Körperbewusstseins</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reissäckchen nach Anweisung auf verschiedene Körperteile legen • Roboterspiel: Wir bewegen uns wie ein Roboter und heben den linken Arm, den rechten Fuß,... • Wanderpunkt: Leuchtpunkt, der jeden Tag an ein anderes Körperteil geklebt wird. Der Leuchtpunkt erzählt am Ende des Unterrichtstages, was er den Vormittag über gemacht hat, bzw. was er am Nachmittag, am Abend getan hat. • Partner-Berührübung: 2 Schüler stehen hintereinander (kein Wechsel der Perspektive), der eine berührt den linken Arm, die rechte Schulter,.. des anderen mit der Hand, mit einer Feder, mit einem Ball,.... <p>Zusätzliches Ziel bei allen Übungen: Räumliche Begriffe sicher gebrauchen</p>	<p><u>Flächenformen untersuchen, beschreiben, benennen und herstellen:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Übungen zur Formkonstanz (Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke) • Serialität: Musterreihen mit den Flächenformen bilden, nachlegen oder fortsetzen <p>Übungen auf dem Geobrett Vgl. 5.2.2.3.2.1</p>	Formenmemory	<p>Flächenformen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lege aus 7 Zündhölzern 2 Quadrate! • Die verschiedenen Flächenformen im Zauberbeutel ertasten.
Okt.	<p><u>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen (vgl. Sept)</u></p> <p><u>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben: Beziehungen von Gegenständen</u></p>	<p><u>Übungen zur Figur-Grund-Wahrnehmung:</u></p> <p>Wege nachzeichnen</p> <p>Wahrnehmung räumlicher</p>	<p><u>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben:</u> Einprägen und speichern einer Zeichnung mit konkreten Gegenständen. Dabei: Einprägestrategien</p>	<p>Flächenformen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Schüler falten ein Quadrat zu 8 Dreiecken, färben sie verschieden ein, schneiden sie auseinander und legen sie erneut zu einem oder mehreren

Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
	<p><u>zum Körper</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Auditive Wahrnehmung (Augenbinde):. Geräusche von 2 Seiten unterscheiden, z.B. Trommel links, Triangel von rechts. Anschließend nehmen die Schüler Symbolkarten (Triangel, Trommel) in die rechte oder linke Hand, bzw. legen sie in die Richtung aus der sie das Geräusch gehört haben. • Analog dazu Geräusche von vorne und hinten. • Stolpersteine legen (Partnerarbeit): Der Partner legt Gegenstände vor, hinter, links oder rechts neben das Kind, das am Boden sitzt und die Augen verbunden hat. Er sagt z.B.: „Stolperstein links.“ Das Kind erfühlt den Gegenstand auf seiner linken Seite. • Baggerspiel: Der Bagger (Hand) holt 5 Kastanien aus dem Säckchen. Er legt sie links von dir auf den Tisch. Dann greift er sich 2 und legt sie rechts neben dich.... (vgl. Arithmetik) • Orientierungsübungen im Schulgebäude <p>Dabei: Räumliche Begriffe sicher gebrauchen</p> <p>Parallel dazu: Raumorientierungsübungen am Arbeitsmittel, vgl. 5.2.2.3.2</p>	<p>Beziehungen Fehlende Striche ergänzen</p> <p><u>Wege im Raum realisieren und beschreiben:</u> Labyrinth, die auf dem Boden aufgezeichnet sind, durchwandern. Aufgezeichnete Labyrinth durchfahren.</p>	<p>entwickeln, räumliche Begriffe sicher gebrauchen.</p>	<p>Quadraten</p> <ul style="list-style-type: none"> • S falten ein Quadrat. Es entstehen offensichtlich 4 Dreiecke. S versuchen 8 Dreiecke zu finden. Sie färben diese ein. • Verbinde 4 Punkte zu einem Quadrat!

Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
Nov.	<p><u>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Körperknoten z.B.: Berühre mit der linken Hand das rechte Knie und mit der rechten Hand das rechte Ohr. • Überkreuzbewegungen • Bodenturnen (Veränderung der Körperlage im Raum): S legen sich auf den Boden und bewegen sich nach Anweisung, z.B. hebe den rechten Fuß,... <p><u>Beziehungen von Gegenständen zum eigenen Körper:</u> Auditive Wahrnehmung: Geräusche von 4 Seiten unterscheiden, Symbolkarten zuordnen</p>	<p><u>Wahrnehmung räumlicher Beziehungen:</u> Labyrinth</p> <p><u>Übungen zur Figur-Grund-Wahrnehmung:</u> Wege nachzeichnen</p>	<p><u>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben:</u> Einprägen und wiedergeben geometrischer Figuren, z.B.</p>  <p>Einprägestrategien entwickeln (Wie wurde die Figur gezeichnet? Einzelne Zeichenschritte konkret nachvollziehen) 2 Kontrollmöglichkeiten, ob die Figur richtig gespeichert wurde:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Schüler zeichnen die eingeprägte Figur aus der Vorstellung nach. • Der Lehrer gibt verschiedene Varianten vor. S wählen aus und begründen, was an den anderen Figuren falsch gemacht wurde 	<p>Kim Spiele mit 5 konkreten Gegenständen (Wegnahme oder Veränderung der Lage eines Teiles)</p> <p>Ein Dreieck wird von den Schülern in 3 oder mehrere Teile zerschnitten und anschließend wieder zusammengesetzt (analog dazu Kreis, Rechteck, Quadrat).</p>
Dez.	<p><u>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen:</u> Roboterspiel, dabei nun im Klassenzimmer verschiedene Standorte einnehmen</p> <p>Akustische Wahrnehmung: Im Klassenzimmer verschiedene Standorte einnehmen</p>	<p><u>Geometrischer Adventskalender</u></p> <p>Räumliche Beziehungen: Labyrinth durchfahren</p> <p>Übungen zur Figur-Grund-Wahrnehmung:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erkennen von Dreiecken und Kreisen in einer geometrischen Figur • Sich kreuzende Wege finden • Gezeichnetes Bild einer Schablone zuordnen <p><u>Erfassen räumlich-zeitlicher Beziehungen:</u></p>	<p><u>Übung zur Wahrnehmung räumlicher Beziehungen von Gegenständen zueinander:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • In einem Gesamtbild Teile wiederfinden • Weihnachtspuzzle <p><u>Faltanleitungen:</u> Wir basteln eine Schneeflocke, eine Weihnachtstüte und einen Stern.</p> <p>Kimspiele: Dabei wird sowohl die Anzahl der Gegenstände als auch die Zahl der Veränderungen erhöht</p>	

Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
		Bildgeschichten nach der richtigen zeitlichen Abfolge ordnen		
Jan.	<u>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen:</u> Körperknoten mit Überkreuzbewegungen		<u>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben</u> Komplexere geometrische Figuren einprägen, die richtige Lösung aus vorgegebenen finden, begründen, warum die anderen Varianten nicht mit der vorgegebenen übereinstimmen.	
Feb.		<u>Wahrnehmung räumlicher Beziehungen</u> Fehlende Striche ergänzen	<u>Kombinationsfähigkeit:</u> Einer Zahl wird eine geometrische Figur zugeordnet. Überprüfe möglichst schnell, ob allen Bildern die richtigen Zeichen zugeordnet sind!	Komplexe geometrische Figuren untersuchen Wie viele Quadrate findest du? Wie viele Rechtecke?
März				Tangram (erste Erfahrungen zum Flächeninhalt): <ul style="list-style-type: none"> • Freies Bauen mit den Flächenformen • Nachlegen von Figuren, bei denen die einzelnen Flächenformen sichtbar sind. • Auslegen von Figuren, bei denen nur die Umrisse gegeben sind. • Selbstständiges Legen von Figuren und anfertigen einer Umrisszeichnung, die von den anderen S erneut ausgelegt wird.
April	<u>Tagesaufgaben</u>			

Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
	<u>Beziehungen von Gegenständen zueinander</u> Flächenformen nach Anweisung zeichnen, z.B. Zeichne in die Mitte des Blattes ein Quadrat, links davon ein kleines Dreieck,...	<u>Visuomotorische Koordination</u> Zeichne fertig, ohne den Stift abzusetzen <u>Figur-Grund-Wahrnehmung</u> Kreise, Dreiecke: Schätze, wie viele es sind und bestimme die genaue Anzahl durch Abzählen <u>Wahrnehmung räumlich zeitlicher Beziehungen</u> Bilder, die einen Vorgang zeigen, in der richtigen zeitlichen Abfolge ordnen		Erste Erfahrungen zum Flächeninhalt: Figuren mit Würfeln (vgl. Arbeitsmittel) auslegen, zunächst schätzen, wie viele Würfel gebraucht werden Komplexe geometrische Figuren untersuchen:  Wie viele Dreiecke findest du?
Mai	<u>Tagesaufgaben</u> <u>Beziehungen von Gegenständen zueinander</u> Flächenformen nach Anweisung zeichnen (vgl. April)	Labyrinth durchfahren Serialität: Eine Folge aus geometrischen Figuren betrachten und innerhalb der Folge eine Form ergänzen	Aus Zündhölzern geometrische Figuren nachlegen, sich die Lage einprägen und aus dem Gedächtnis nachlegen.	Verschiedene geometrische Formen nach selbstgefundenen Kriterien ordnen. Erste Erfahrungen zum Flächeninhalt: Eine geometrische Figur aus Dreiecken und Quadraten legen, durch Umlegen der Einzelteile andere Figuren bauen. Geometrische Figuren in Einzelteile zerschneiden und so schnell wie möglich wieder zusammensetzen.
Juni	<u>Tagesaufgaben</u>	<u>Serialität:</u> Muster erfinden, Muster ergänzen Labyrinth durchfahren Figur-Grund-Wahrnehmung: Bilder miteinander vergleichen und Unterschiede feststellen.	Einprägen von geometrischen Figuren, dabei auf Form, Lage und Muster achten	<ul style="list-style-type: none"> Wie viele Quadrate und Dreiecke entdeckst du? 

Monat	Raumerfahrung /Raumvorstellung	Visuelle Wahrnehmung	Visuelles Speichern	Visuelles Operieren
				<ul style="list-style-type: none"> • Lege aus 12 Stäbchen diese Figur.  <ul style="list-style-type: none"> • Nimm nun 2 Stäbchen weg, so dass es nur noch 2 Quadrate sind! • Verbinde immer 3 Punkte zu einem Dreieck! • Quadrate zu Dreiecken oder Quadraten falten und einfärben • Papierflieger falten und einfärben
Juli	<u>Tagesaufgaben</u>	<u>Figur-Grund-Wahrnehmung:</u> Wege finden	Einprägen von komplexen geometrischen Figuren: 9 verschiedene geometrische Figuren, die aufgrund gemeinsamer Merkmale gruppiert werden können. Selbstständig verschiedene Strukturierungsmerkmale finden, einprägen der Figuren, aufzeichnen der Figuren aus dem Gedächtnis	<ul style="list-style-type: none"> • Zeichne mit verbundenen Augen, z.B. in die Mitte des Quadrates ein Quadrat, rechts davon einen Kreis,... • Erste Erfahrungen zum Flächeninhalt: Komplexe Figuren mit Würfeln auslegen (vgl. April)

5.2.2 Die Entwicklung und der Einsatz des Arbeitsmittels

5.2.2.1 Beschreibung des entwickelten Arbeitsmittels

In den vergangenen Jahren verwendete die Versuchsleiterin einige gängige Materialien für den mathematischen Anfangsunterricht. Dazu gehörten die Steckwürfel, die Cuisenaire-Stäbe und der Rechenrahmen, bzw. die russische Zählmaschine. Im folgenden wird kurz über die damit gemachten Erfahrungen berichtet:

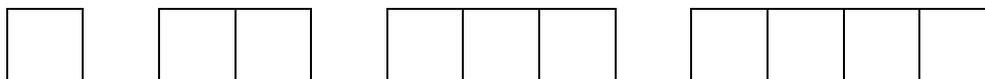
Die Steckwürfel sind nicht strukturiert. Die Schüler (auch leistungsstärkere) verblieben sehr lange auf der Stufe des zählenden Rechnens. Positiv war, dass mit den Einzelementen Mengen gut räumlich strukturiert werden konnten

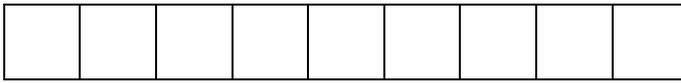
Bei den Cuisenaire-Stäbe wird eine Anzahl nicht durch einzelne Elemente, sondern durch die Länge des Stabes und die Farbe repräsentiert. Die Schüler verwechselten des öfteren die Farbe der Stäbe und gelangten so zu falschen Ergebnissen. Da die Einzelemente nicht mehr sichtbar waren, konnte insbesondere von leistungsschwächeren Schülern nicht auf das zählende Rechnen zurückgegriffen werden. Ergebnisse wurden oft durch Raten oder Hineinmessen von Stäben ermittelt.

Der Rechenrahmen weist eine deutliche 5er und 10er Strukturierung auf. Die Schüler konnten sowohl auf die Einzelemente zurückgreifen als auch größere Anzahlen mit einem Griff erfassen. Dennoch blieben aber vor allem leistungsschwächere Schüler sehr lange auf der Ebene des zählenden Rechnens. Sie nahmen die Strukturierung nicht an, da ihnen deren Notwendigkeit nicht einsichtig war. Die Schüler wurden von Beginn an zu sehr auf eine Felddarstellung festgelegt. Ein Wechsel in die lineare Darstellung war nur bedingt möglich.

Diese Erfahrungen flossen in die Konzeption des vorliegenden Arbeitsmittels, das nun beschrieben wird, mit ein. Nach der Einteilung von Hendrik Radatz (Radatz, H. u.a., 1996) zählt das Arbeitsmittel zu den strukturierten Materialien.

Die Schüler erhalten je zwei hölzerne Rechenstäbe unterschiedlicher Länge, die lediglich auf zwei Seiten in einzelne Einheiten unterteilt sind. Die Zahlen werden durch das Zusammenfassen einzelner Elemente zu einer größeren Gesamtheit repräsentiert, die mit einem Griff genommen werden können.





Eine Fünfergliederung ist nicht vorhanden. Diese wird gemeinsam mit den Schülern erarbeitet. Daneben wird gemeinsam mit den Schülern ein strukturiertes Hunderterfeld entwickelt. Beide Arbeitsmittel werden miteinander kombiniert.

Warum wurde das Arbeitsmittel so konzipiert? Welche Vorteile bietet es gegenüber anderen? Im Folgenden werden die didaktische Überlegungen, die grundlegend für die Konzeption dieses Arbeitsmittels waren, erörtert.

5.2.2.2 Prinzipien für die Konzeption des Arbeitsmittels

1. Im Gegensatz zu vorgefertigten Materialien, deren mathematische Struktur vorgegeben und von den Schülern im nachhinein erschlossen wird, werden die Schüler hier aktiv an der Entwicklung beteiligt. Sie wenden Erkenntnisse, die sie bei der Erstellung des Geobrettes und bei der freien Strukturierung von Mengen erwerben, an und übertragen diese auf die Gestaltung der Rechenstäbe:
 - Sie markieren die 5, damit die Anzahl der auf dem Stab dargestellten Menge quasi-simultan erfasst werden kann. Strukturen des geometrischen Anschauungsmittel Geobrett werden so auf ein arithmetisches Arbeitsmittel übertragen und dadurch eine kontinuierliche Entwicklung der Strukturen gewährleistet.
 - Das 25er Quadrat, das zum Strukturieren von Zahlen und Mengen verwendet wird, erweitern sie selbstständig zu einem 50er bzw. Hunderterfeld.
 - Sie erkennen, dass das Feld zur besseren räumlichen Orientierung strukturiert werden muss und entscheiden sich für das Kreuz als Unterteilung des Hunderterfeldes in vier 25er Quadrate.

Eine aktive Beteiligung der Schüler an der Konzeption des Materials gewährleistet aber nicht nur eine vertiefte Einsicht in dessen Struktur, sondern legt auch den Grundstein für die positive Einstellung der Schüler zum Arbeitsmittel, die für eine effektive Nutzung unerlässlich ist. Jedes Kind verwendet sein eigenes von ihm strukturiertes Material. Es wird als „Handwerkszeug“ vor jeder Mathematikstunde bereitgestellt.

2. Den Schülern wird mit dem Hunderterfeld von Beginn an eine Strukturierungshilfe angeboten, die ihre Vorstellung nicht auf den jeweils zu bearbeitenden Zahlenraum (zunächst 10, dann 20) beschränkt, sondern ihnen unbewusst einen Ausblick in einen größeren Zahlenraum gewährt, ohne dass dieser systematisch erschlossen worden wären. Zudem ermöglicht dies im Rahmen der Differenzierung ein individuelles Fortschreiten der Schüler

und ein spielerisches Rechnen in einem größeren Zahlenraum, was den Schülern große Freude bereitet.

Anhand des Anschauungsmittels berechneten beispielsweise alle Schüler

Verdoppelungsaufgaben bis $11+11$ zu einem Zeitpunkt, an dem nur der Zahlenraum bis 10 gesichert worden war. (Zwei Schüler führten die Verdoppelungen bis $23+23$ durch).

Viele Schüler schrieben bereits im November des ersten Schuljahres mit Begeisterung die Zahlen von 1 bis 100 in das Hunderterfeld.

3. Im Gegensatz zu den anderen Anschauungsmitteln werden bei dem vorliegenden zwei Darstellungsebenen miteinander verknüpft: Die konkrete Handlung mit den Rechenstäben und die zeichnerische Darstellung des Hunderterfeldes. Dies ermöglicht einerseits einen fließenden Übergang zwischen den Darstellungsebenen und bietet den Schülern andererseits ein breiteres Spektrum an Darstellungen, um den mathematischen Verinnerlichungsprozess vollziehen zu können. (vgl. 3.3.4.)

4. Das Material soll einerseits zählendes Rechnen ermöglichen, andererseits aber durch die Strukturierung davon wegführen. Im Gegensatz zu anderen Anschauungsmitteln (z.B. Rechenrahmen) sind die Einzelelemente nicht von der Gesamtmenge abzutrennen. Dies bietet folgende Vorteile:
Die Menge 7 wird als eigene Einheit mit spezifischen Kriterien wahrgenommen, z.B. 7 Einheiten sind länger als 6 aber kürzer als 8, 7 Würfel sind mehr als 6, aber weniger als 8, 7 sind $5+2$ Einzelne, von 7 fehlen noch 3 bis 10, der Stab 7 kann senkrecht und waagrecht in das Hunderterfeld gelegt werden.
Die Menge 7 wird repräsentiert durch einen Stab, der Einzelelemente aufweist, aber als Menge 7 statisch ist. Deshalb werden die Stäbe auch nur auf zwei Seiten in Einzelelemente unterteilt. Im Laufe der Zeit gelang es vielen Schülern, die Anzahl größerer Stäbe durch den visuellen Eindruck der Länge zu erkennen.
Die Schüler können auch größere Mengen auf einmal nehmen und lösen sich so eher vom zählenden Rechnen, da nicht eine Einheit an die andere angefügt werden kann. Die Notwendigkeit einer Strukturierung wird ihnen so einsichtiger. (vgl. 3.3.1.)
Das räumliche Strukturieren von Mengen wird mit Muggelsteinen durch freies Legen oder unter Verwendung des 25er Quadrates trainiert.

5. Ein Ziel eines verständnisorientierten Mathematikunterrichts ist es, dass die Schüler selbstständig operative Strategien entwickeln. Dies können sie aber nur auf der anschaulichen Ebene mit Hilfe des Anschauungsmittels, das förmlich zur Entwicklung derselben einlädt (vgl.3.3.2.).
Wie die Unterrichtsbeispiele zeigen, fordert dieses Material beim Schüler entdeckendes Lernen heraus. (vgl. 5.2.2.3.3.)

6. Das Anschauungsmittel muss vielseitig verwendbar sein:
Es sollte in möglichst vielen Phasen des Unterrichts einsetzbar sein (vgl. 3.3.3. sowie 5.2.2.3.3)

und 5.2.2.3.4), so bei der Erarbeitung, bei der Übung, bei der Sicherung der Rechenoperationen. Lässt sich der Lehrer vom Schüler den gewählten Rechenweg anhand des Anschauungsmittels erklären, so erhält er Einblick in mögliche Fehlerquellen und kann dem Schüler helfen, seine Fehler selbst zu erkennen.

Beispiel:

$$47+29=58$$

Der Schüler rechnete nicht $47+30-1$ sondern $29+30-1$.

Er legte die Aufgabe mit dem Arbeitsmittel und verbalisierte: „Ich lege 47, dann zähle ich 30 dazu, das sind 77. Ich muss die 30 zu den 47 legen und nicht zu den 29, denn die 29 zerlege ich ja.“

Das Material ist für alle Rechenoperationen verwendbar

7. Die Hundertertafel und der Zahlenstrahl sind die beiden Modelle, die unser Zahlensystem prägnant verdeutlichen. Damit der Schüler den Zahlenraum umfassend verinnerlicht, müssen beide Modelle verwendet und zueinander in Beziehung gesetzt werden. Das entwickelte Anschauungsmittel gibt zwar die Struktur des Hunderterfeldes vor, es schließt aber nicht aus, dass die Rechenstäbe in einer linearen Form angeordnet werden. In der 2. Jahrgangsstufe wird aus dem Hunderterfeld schrittweise der Zahlenstrahl entwickelt.
8. Das Anschauungsmittel repräsentiert verschiedene Aspekte des Zahlbegriffs:
 - Ordinalzahlaspekt: Zeige das Feld mit der Nummer 9
 - Kardinalzahlaspekt: Lege 9 Würfel in das Zahlenfeld
 - Maßzahlaspekt: Wie lang ist der 7erStab? Wie weit geht der 9er Stab auf dem Hunderterfeld?

5.2.2.3 Unterrichtliche Verwirklichung

Bei der Darstellung der Unterrichtseinheiten werden einige Abkürzungen verwendet :

S = der/die Schüler, Schülerinnen

L = Lehrer

PA = Partnerarbeit

GA = Gruppenarbeit

TA = Tafelanschrift

AB = Arbeitsblatt

5.2.2.3.1 Entwicklung des Arbeitsmittels

Das Arbeitsmittel wird mit den Schülern in vier Teilschritten entwickelt. Im Sinne eines spiraligen Aufbaus werden die auf den einzelnen Stufen erworbenen Kenntnisse angewendet, weitergeführt und vertieft.

5.2.2.3.1.1 Die Kraft der 5 /Strukturierung von Mengen (Zählübungen)

In dieser Phase erwerben die Schüler Grundkenntnisse über das Strukturieren von Mengen: Die Schüler erkennen, dass eine Strukturierung von Mengen sinnvoll ist, um das Zählen zu erleichtern und Zählfehler zu vermeiden.

Sie entdecken selbstständig Möglichkeiten, Elemente von Mengen strukturiert anzuordnen.

Sie erproben verschiedene Anordnungen und vertiefen ihre Einsicht in die Gleichmächtigkeit von Mengen (Invarianz der Anzahl).

Sie erkennen, dass die Fünferstruktur eine Möglichkeit ist, Mengen anzuordnen.

Unterrichtsbeispiele:

Wie viele Kinder gehen in meine Klasse?

Problemstellung: Schulleiter will wissen, wie viele Kinder in unserer Klasse sind S machen Zählversuche und erhalten unterschiedliche Zählergebnisse	Reale Situation: Natürliche Zählanelasse aufgreifen
Problemlösung: S überlegen sich Ordnungsmöglichkeiten: Der Reihe nach abzählen. Wer eine Zahl gesagt hat, setzt sich hin. Wir stellen uns der Reihe nach auf und zählen ab. Wir bilden Paare und zählen ab. S stellen sich zu 5er Gruppen auf und zählen ab.	Entdeckendes Lernen Handeln; Mengen bilden und auszählen Abzählen in Zweierschritten
Zeichnerische Darstellung: Wir müssen aufschreiben, wie viele es sind S überlegen sich Möglichkeiten: Striche in einer Reihe, Zahl 16	

<p>Erneut Zählversuche Erkenntnis: Wir müssen die Striche strukturieren S entscheiden sich spontan für die Strukturierung mit 5</p> <p>Zeichnerische Darstellung</p> <p>Abzählen anhand eines Schaubildes (rhythmisches Zählen) S gehen in das Büro des Schulleiters und übergeben ihm die zeichnerische Darstellung</p>	<p>Anordnung der Felder untereinander, nicht nebeneinander, da die spätere Form für Zählübungen das 25er Quadrat ist.</p> <p>Einfache Schaubilder erstellen und versprachlichen Anzahlen zeichnerisch darstellen</p> <p>Raumorientierung im Schulhaus: Wege realisieren und beschreiben</p>
Lehrererzählung: Wie wurden früher Anzahlen ermittelt und aufgeschrieben.	

Wie viele Jungen und Mädchen gehen in meine Klasse?

<p>Anknüpfung: S nennen die Anzahl der S in der Klasse Stummer Impuls: L zeigt Bildkarten Mädchen und Jungen S: Sind wir mehr Mädchen oder Jungen?</p>	Natürliche Zählanelasse aufgreifen
<p>S überlegen sich Abzählstrategien:</p> <ul style="list-style-type: none"> - S bilden Paare - Anfertigen einer Strichliste - Abzählen und Zahlzeichen zuordnen 	Handeln: Mengen bilden und auszählen
<p>Zeichnerische Darstellung als einfaches Säulendiagramm</p> <p>S: Es sind mehr Mädchen als Jungen, es sind weniger Jungen als Mädchen</p>	<p>Einfache Schaubilder erstellen und versprachlichen</p> <p>Vergleichen von Mengen</p>
Eintrag in das Zahlenbuch	

Wie viele Plättchen gibt es in unserem Abenteuerland?

<p>Anknüpfung: Geometrische Formen S beginnen spontan zu zählen</p>	<p>Natürliche Zählanelasse aufgreifen Verbindung Arithmetik – Geometrie</p>
<p>Eigenständige Zählversuche der S S überlegen sich Abzählstrategien: Ordnen der Plättchen nach Merkmalen und dann abzählen Strukturieren nach 5</p>	<p>Handeln: Mengen bilden und auszählen Klassifizieren</p>

Wie viele Kinder haben ein Haustier?

Hinführung: L zeigt Bilder von verschiedenen Haustieren S berichten über eigene Haustiere	
Erstellen eines Schaubildes (analog zu Schaubild mit Mädchen und Jungen der Klasse) S vergleichen die Anzahlen miteinander Eintrag der Darstellung in das Zahlenbuch	Umwelt mathematisieren Einfache Schaubilder erstellen und versprachlichen Strukturierung nach 5 Vergleichen

5.2.2.3.1.2 Die Entwicklung des Geobretts

Aufbauend auf den Grundkenntnissen zum Strukturieren von Mengen sollen die Schüler bei folgenden Unterrichtseinheiten die Struktur des Geobretts (5x5) selbstständig entdecken

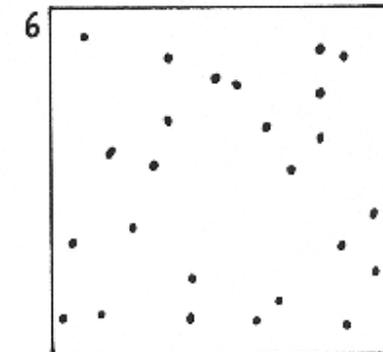
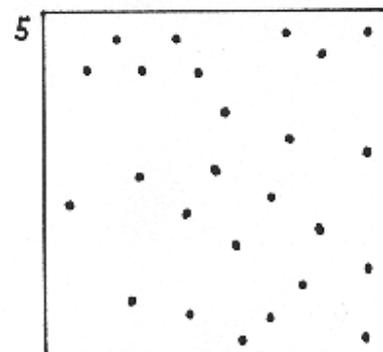
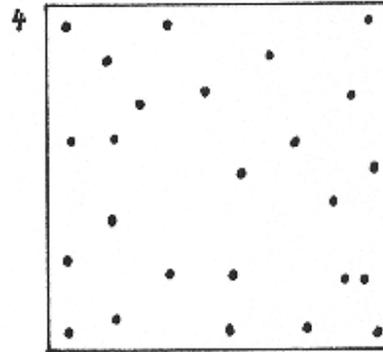
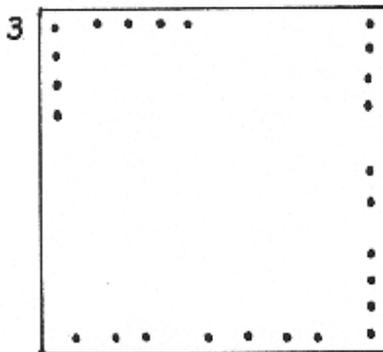
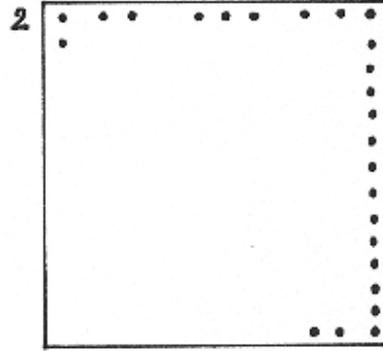
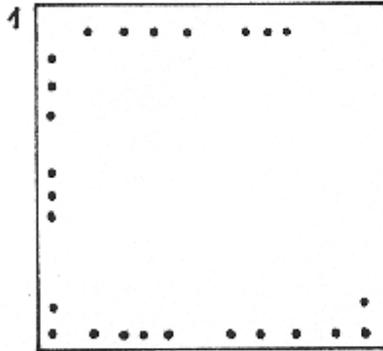
Dabei müssen die Schüler zwei Aspekte berücksichtigen:

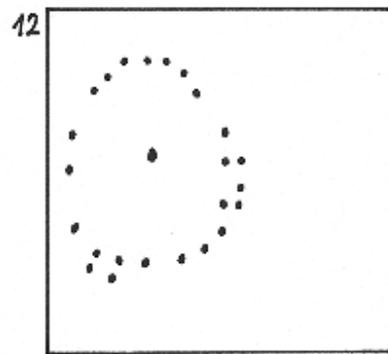
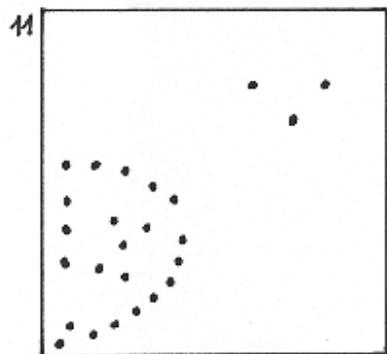
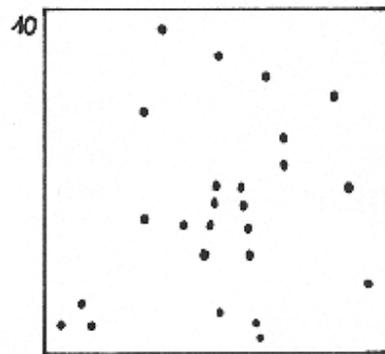
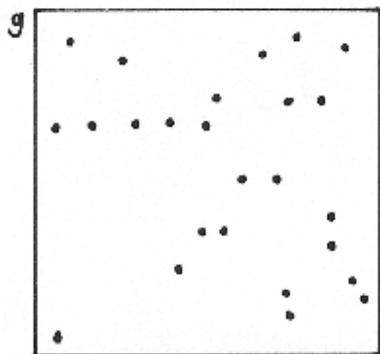
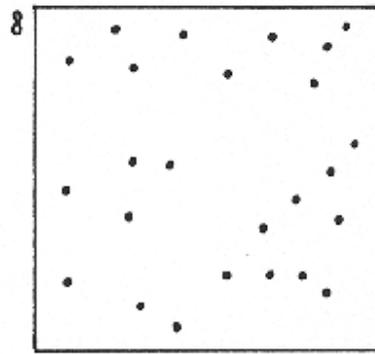
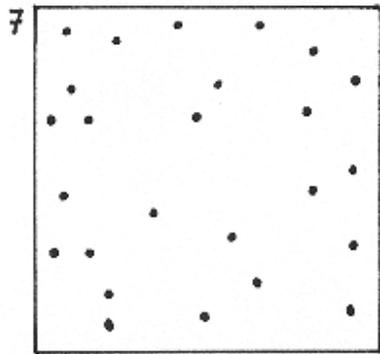
- Die Aufteilung der Gesamtmenge (25) in gleichmächtige Teilmengen (5x5).
- Eine übersichtliche räumliche Anordnung bzw. Aufteilung des Raumes.

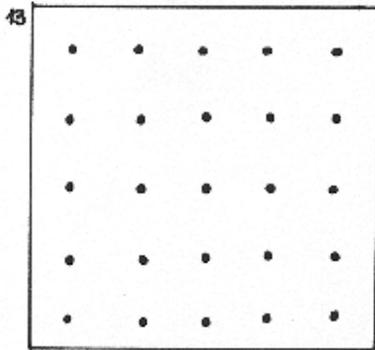
<p>Hinführung: Stummer Impuls: Nägel S schätzen, wie viele es sind S zählen – Zählfehler PA: Einteilung in 5er Bündel S erhalten das richtige Zählergebnis: 25</p>	
<p>Stummer Impuls: Pappkarton in der Größe des späteren Geobrettes S machen Vorschläge: Wir stecken die Nägel in den Karton, S wollen zunächst konkrete Gegenstände darstellen S stellen ihre Ergebnisse dar</p> <p>L: Ordne die Nägel so auf dem Karton an, dass man sie leicht zählen kann und dass der Platz ausgefüllt ist.</p> <p>Dokumente S. 91, 92, 93</p>	<p>Spielerischer Umgang mit den Gegenständen</p> <p>Mathematisieren</p> <p>Entdeckendes Lernen</p>
<p>Auswertung der Ergebnisse S begründen: Unübersichtlich, die Nägel sind nicht leicht zu zählen (S machen Zählversuche bei einigen Beispielen) Platz ist nicht ausgefüllt</p>	<p>Begründen und argumentieren</p>
<p>Stummer Impuls: S erhalten das fertige Geobrett Schüleräußerungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Es sieht so aus, wie es die Tanja gemacht hat. • Man kann die Nägel leicht zählen (S machen spontan Zählversuche) • Die Nägel sind gleichmäßig verteilt. <p>S legen zwei Bretter aufeinander und vergleichen</p> <p>S spielen mit dem Brett: S fahren Schlangenlinien durch die Felder; S „zeichnen“ mit dem Finger auf die Nägel, z.B. ein Haus; S erhalten einen Fingerhut und springen damit von einem Nagel zum anderen</p> <p>S springen mit dem Fingerhut nach Anweisung des L (zwei nach unten, zwei nach rechts,....) Dabei Festlegung eines Anfangspunktes (S: Wir machen es wie beim Lesen. Wir beginnen links oben)</p>	<p>Begünden und argumentieren Vergleichen und unterscheiden Gesetzmäßigkeiten entdecken</p> <p>Spielen mit dem Geobrett Freude am mathematischen Tun</p> <p>Spielerische Übung zur Raumorientierung auf dem Geobrett</p>

Stummer Impuls: S erhalten Gummis
S spannen spontan Gegenstände und
geometrische Flächenformen

Kreativität
Freude am mathematischen Tun







1,2,3: Reihung der Elemente am Rande des Raumes

4,5,6,7,8: Versuche der Kinder, den Raum aufzuteilen, aber dabei keine übersichtliche Aufteilung der Gesamtmenge

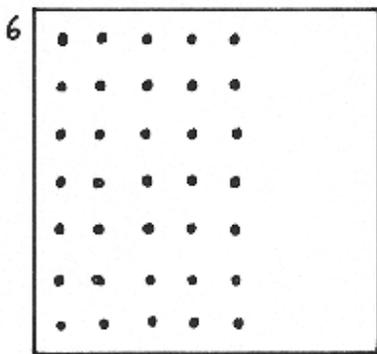
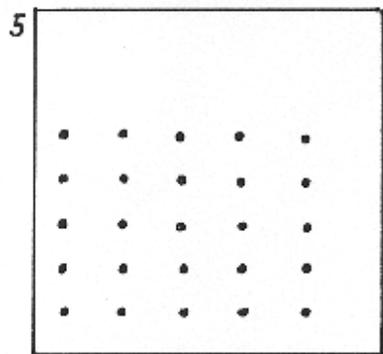
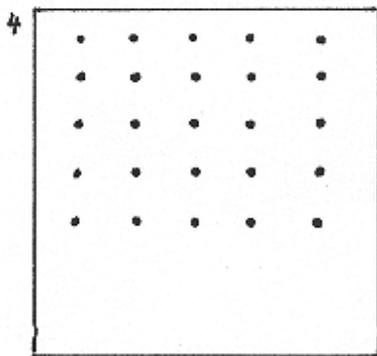
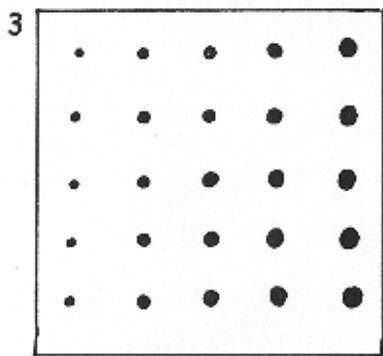
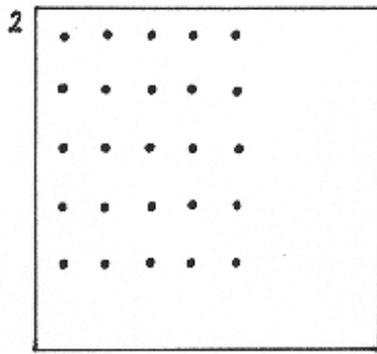
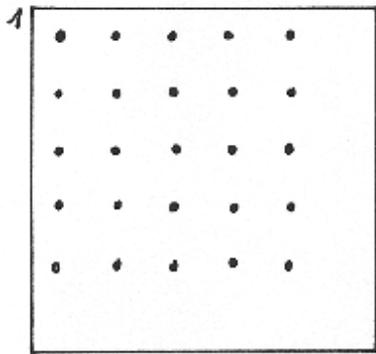
9,10,11,12: Dominanz des Benachbartseins einzelner Elemente

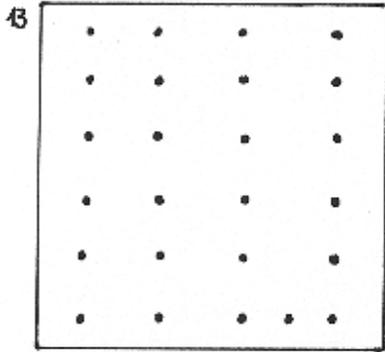
9,10: Versuch einer Einteilung in simultan erfassbare Teilmengen

11: Der Schüler begann die Elemente der Reihe nach anzuordnen. Er verfiel dann allerdings in eine gegenständliche Darstellung, wobei er einzelne Elemente besonders betont.

Das Geobrett: Zeichnerische Darstellung

<p>Problemstellung: L: Daniel spannte zu Beginn der Unterrichtsstunde einen Gegenstand, der dir besonders gut gefallen hat, spanne ihn nach! Versuche der S: Alle S spannen ein Haus, aber unterschiedliche Lage auf dem Geobrett S: Man hätte genau aufzeichnen müssen, wo sich das Haus auf dem Geobrett befindet.</p>	
<p>S entwickeln Möglichkeiten der zeichnerischen Darstellung des Geobrettes S erhalten dazu Papier in der Größe des Geobrettes Dokumente S. 95, 96, 97 Auswertung der zeichnerischen Darstellung: S: - Die Reihe der Nägel stimmt nicht, so kann man nicht nachspannen (S beginnt zur Demonstration spontan ein Haus in die Anordnung zu zeichnen) - Das Blatt ist nicht richtig eingeteilt. Es bleibt unten zu viel Platz übrig. - Es sind nicht 5 Nägel in einer Reihe.</p>	<p>Entdeckendes Lernen Erkanntes auf andere Zusammenhänge übertragen (5x5 Struktur, räumliche Aufteilung) Gesetzmäßigkeiten entdecken Begründen und argumentieren</p>
<p>Einige S sind mit ihrem Ergebnis nicht zufrieden. S finden aber keine Möglichkeit, die zeichnerische Darstellung identisch zu gestalten L demonstriert: Blatt Papier auf das Geobrett legen, Nagel spüren und einen Punkt an die entsprechende Stelle zeichnen S machen anschließend Versuche in PA</p>	





1,2,3,4,5,10: Schüler haben die 5x5er Struktur erfasst. Einigen gelingt auch eine räumliche Aufteilung, während die anderen lediglich in der Lage sind, den Raum vertikal oder horizontal aufzuteilen. Eine Verknüpfung der waagrechten und senkrechten Raumaufteilung gelingt ihnen nicht.

6: Die Strukturierung nach 5 in der Waagrechten ist gesichert, in der Senkrechten nicht. Der Schüler versucht den Raum zu füllen und hängt zwei Fünferreihen dazu, ohne die Gesamtzahl der Nägel zu berücksichtigen.

7: Die Schülerin ist noch sehr im Konkreten, Gegenständlichen verhaftet (Darstellung der Nägel in der Draufsicht gelingt ihr nicht). Sie berücksichtigt weder die Strukturierung nach 5, noch die Gesamtmenge. Sie nimmt lediglich eine Reihung von Elementen vor, um den Raum zu füllen.

8: Der Schüler zeichnet 25 Elemente auf, strukturiert aber weder räumlich, noch in Teilmengen.

9: Der Schüler strukturiert nach 5 in der Vertikalen, zeichnet aber in der Horizontalen 6 Elemente. Er zählt 4 Reihen zu je 6 Elementen. Ein Element bleibt übrig. Er ergänzt aber nicht ein einzelnes Element, sondern eine ganze 6er Reihe, so dass eine Gesamtsumme von 31 entsteht.

11: Er zeichnet 15 Elemente auf ohne die Menge zu strukturieren. Es ist anzunehmen, dass der Schüler die Mengen 15 und 25 verwechselt.

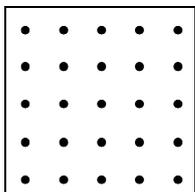
12: Reiht die 25 Elemente aneinander ohne Berücksichtigung der räumlichen Strukturierung.

13: Das Kind versucht eine räumliche Aufteilung. Es strukturiert jedoch nicht nach 5, sondern nach 4 (6x4). Das 25. Element hängt es in der letzten Reihe an, wobei es jedoch nicht mit seinem Versuch zufrieden ist: „Das (letztes Element) passt nicht dazu, denn so sind nicht mehr in jeder Reihe gleich viele.“

Verknüpfung der konkreten Darstellung auf dem Geobrett und der zeichnerischen Darstellung

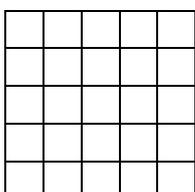
S spannen Dreiecke und übertragen diese auf die zeichnerische Darstellung

Zeichnerische Darstellung:



<p>Problemstellung: L: Spanne ein Dreieck auf dem Geobrett und zeichne es genau auf! S erhalten eine zeichnerische Darstellung in der Größe des Geobretts</p> <p>S beurteilen die Versuche. Sie erkennen, dass einige Schüler die konkrete Darstellung der zeichnerischen nicht richtig zugeordnet haben. (S: Das Dreieck ist größer aufgezeichnet als es in Wirklichkeit auf dem Geobrett ist. Das Dreieck auf dem Geobrett ist am Rand, das auf der Zeichnung in der Mitte.)</p> <p>Entwickeln von Einprägestrategien:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Festsetzen eines Orientierungspunktes (Ankerpunktes). Für die S ist die Nähe zum Rand das entscheidende Kriterium für ihre Wahl. - Ermitteln des Punktes evtl. durch Abzählen - Punkte aufgrund des visuellen Eindrucks ermitteln. <p>Allen S (außer Philipp) gelingt nun eine Übertragung, auch auf eine verkleinerte zeichnerische Darstellung.</p> <p>Zusatzübung mit Philipp: Durchsichtiges Pergamentpapier wird über das Geobrett gelegt. Der Gummi bleibt so sichtbar. Philipp fährt Punkt für Punkt nach. Nach einigen Versuchen gelingt ihm eine Übertragung von der konkreten auf die zeichnerische Ebene.</p>	<p>Entdeckendes Lernen</p> <p>Übertragung gewonnener Erkenntnisse auf eine andere Darstellungsebene Begründen und argumentieren</p> <p>Selbstständiges Entwickeln von Einprägestrategien</p>
---	---

Übertragung der zeichnerischen Darstellung des Geobretts auf die Darstellung des 25er Quadrates



<p>Problemstellung: S erhalten einen Pappkarton mit dem 25er Quadrat S: Es ist ein großes Quadrat und 25 kleine Quadrate, es sind 5 Reihen und in jeder Reihe sind 5 Quadrate S suchen spontan mögliche Quadrate</p> <p>S nehmen das Geobrett und legen spontan das Brett und den Pappkarton übereinander S erkennen: Die Felder sind gleich groß, es sind genauso viele Felder wie Nägel S legen die Bretter aufeinander und betrachten sie von der Seite. S: Ein Nagel passt genau in ein kleines Quadrat (Einige Schüler glauben dies nicht, da die Nägel und Quadrate in der Mitte nicht mehr sichtbar sind)</p> <p>Geplant: S, die die Übertragung zwischen den beiden Darstellungsmöglichkeiten problemlos schaffen, erhalten Übungen zum visuellen Operieren.</p> <p>Aber keinem Kind gelingt es sicher, einen Zusammenhang zwischen der Struktur des einen Feldes und der Struktur des anderen herzustellen (Zweifel bleiben). Deshalb Auftrag: Wir bauen einen quadratischen Zaun um unsere Nägel. Jeder Zaun soll gleich groß sein.</p> <p>Anschließend ausziehen der Nägel. Quadrateinteilung bleibt erhalten Struktureller Bezug zwischen beiden Veranschaulichungen wird so allen S deutlich</p> <p>Übung: Stecken eines Fingerhutes auf dem Geobrett, suchen des entsprechenden „Zaunes“ auf dem 25er Quadrat. Alle S lösen die Aufgaben problemlos.</p>	<p>Vergleichen Übertragung von Erkenntnissen</p> <p>Übung zur Raumorientierung auf dem 25er Quadrat</p>
---	--

Benützen des 25er Quadrates als Zählfeld

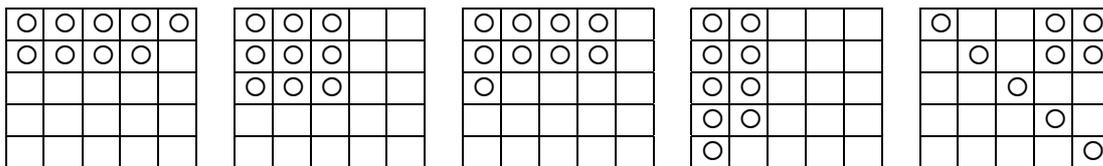
<p>Problemstellung: Tüte mit Milky-Ways S schätzen, wie viele in einer Tüte sind S zählen: S legen die einzelnen Stücke auf das 25er Quadrat S: Wir haben 3 Reihen mit 5 Stücken, das sind zusammen 15 Stücke S: Es fehlen noch 2, wir brauchen eine zweite Tüte S: In der zweiten Tüte sind genauso viele S legen die Stücke erneut in das 25er Quadrat, es sind aber nur 14 Stück S suchen nach möglichen Gründen:</p>	<p>Natürliche Zählanelasse schaffen</p>
---	---

<ul style="list-style-type: none"> • Es wurde eines herausgenommen, aber die Tüte war verschlossen • Leute, die es verpackt haben, haben sich verzählt. <p>S „rechnen“:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wir brauchen noch 2 aus der zweiten Tüte, dann bleiben 12 übrig. • Wieviel brauchen wir noch aus der dritten Tüte, wenn wir nächste Woche wieder eine Süßigkeit erhalten? <p>S beschließen, zu Hause weitere Verpackungen zu kontrollieren</p>	<p>Einbringen von Vorerfahrungen und Vorkenntnissen</p>
---	---

Benützen des 25er Quadrates zum selbstständigen Entdecken von Möglichkeiten, Elemente von Mengen strukturiert anzuordnen

Ziel: Vertiefung der bisherigen Strukturierungsübungen, Vorbereiten der Zahlzerlegungen

S erhalten 9 Muggelsteine
 S legen die Steine in das 25er Quadrat
 S finden verschiedene Möglichkeiten



Das 25er Quadrat ist für das Zerlegen von Anzahlen in simultan erfassbare Teilmengen besonders geeignet, da eine Simultanerfassung nur bis maximal 5 möglich ist.

<p>immer nach 3 einen Strich zu machen.) S ist damit nicht einverstanden: „Da brauche ich bei dem langen Stab 3 Striche. Das ist zu viel. Da kenne ich mich wieder nicht aus.“</p> <ul style="list-style-type: none"> • „Wir machen ein Muster hinein und unterscheiden so die Stäbe, z.B. für den Sechserstab ein Kreuz.“ • „Wir könnten immer nach 5 einen Strich machen, weil wir uns beim Zählen so immer leichter getan haben.“ <p>S legen die Stäbe in das 25er Quadrat und machen einen roten Strich nach 5 Feldern. S verbalisieren: Beim 7erStab stehen 2 Felder über den roten Strich hinaus, beim 8er Stab 3 und beim 9er Stab 4.“</p> <p>S zeigen nun die Stäbe nach Anweisung S: „Das ist praktisch, jetzt geht es viel schneller.“</p>	<p>Selbstständiges Strukturieren der Rechenstäbe</p>
---	--

5.2.2.3.1.4 Entwicklung des Hunderterfeldes

<p>Anknüpfung S zeigen die Stäbe und verbalisieren erneut, warum der Strich gemacht wurde: 3 S beginnen zur Ermittlung eines Stabes immer bei 1 zu zählen, die anderen verwenden den roten Strich als Ankerpunkt. Einige zählen von 5 aus weiter, andere „rechnen“: $5+2=7$; $5+3=8$; $5+4=9$ S: „Den 10er Stab erkenne ich am leichtesten, weil er der längste ist und weil $5+5=10$.“</p>	
<p>Hinführung: Stummer Impuls L zeigt den S das 25er Quadrat S probieren spontan aus, ob die Stäbe hineinpassen. Sie versuchen, die Stäbe schräg hineinzulegen. Sie sind aber damit nicht zufrieden, weil das Raster so nicht übereinstimmt. S: „Wir könnten das Feld vergrößern. Damit alle hineinpassen, müssen wir um 5 vergrößern.“ Eigenversuche der S Dokumente S. 104-112</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vorgehensweise: Einige vergrößern nach visuellem Eindruck. • Einige legen die Stäbe hinein und umfahren sie. • Andere versuchen das Feld mit dem Lineal zu vergrößern. 	<p>Entdeckendes Lernen</p>
<p>Auswertung der Ergebnisse Schüleräußerungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • „Meines stimmt nicht so genau, weil mir die Stäbe immer wieder verruscht sind.“ • „Wenn ich die Stäbe bei dir hineinlege, dann stimmen die Striche nicht überein.“ • „Manche Felder sind zu kurz. Da kann ich in dieses Feld wieder nur den 6er Stab hineinlegen und einen größeren Stab wieder nicht.“ • „Da sind zu viele Felder drangehängt, es dürfen nur 10 sein. (S versucht zu zählen und resigniert) Da kenne ich mich nicht aus.“ • „Ich habe so viele Felder dazu gezeichnet, dass ich alle Stäbe bis 10 von oben nach unten und von links nach rechts in das Feld legen kann.“ <p>S gefällt Maximilians Feld am besten, weil man die Stäbe vertikal und horizontal hineinlegen kann.</p>	<p>Begründen und argumentieren</p>

DANIELA

Tino

JANJA

Oanleu

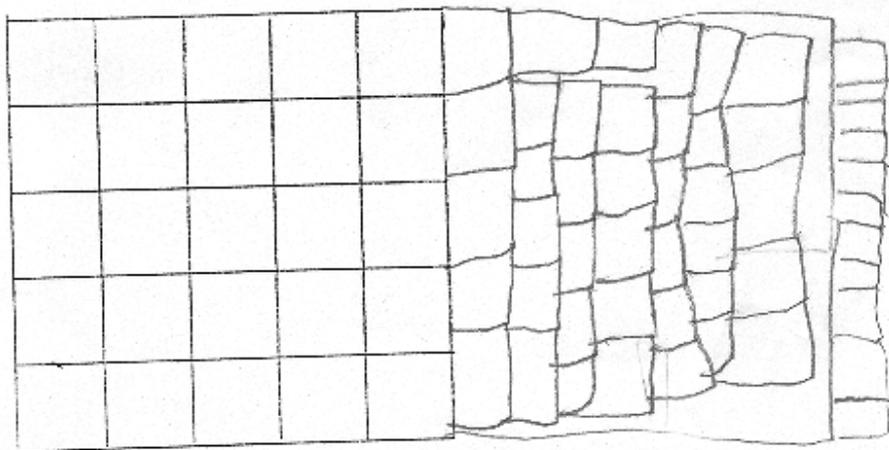
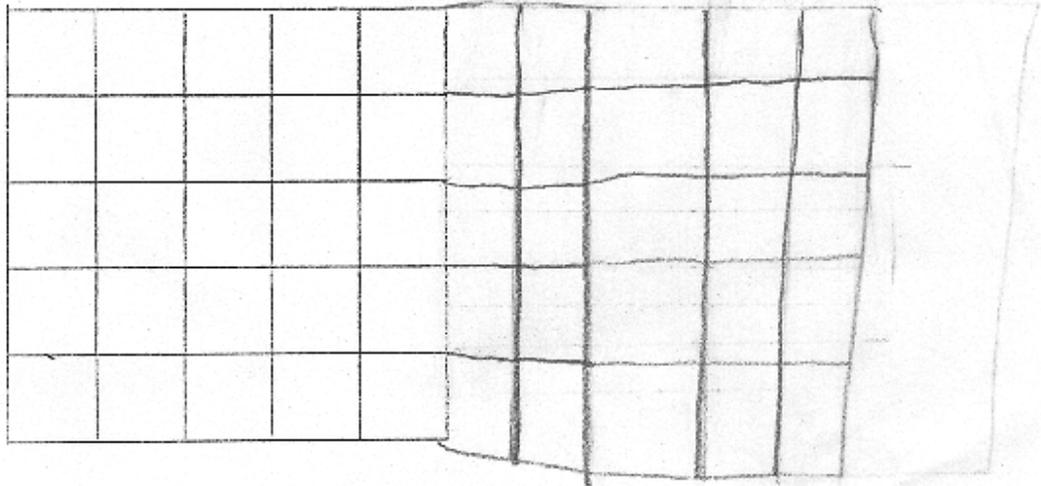
KATHARINA 70

Peter

MELANIE

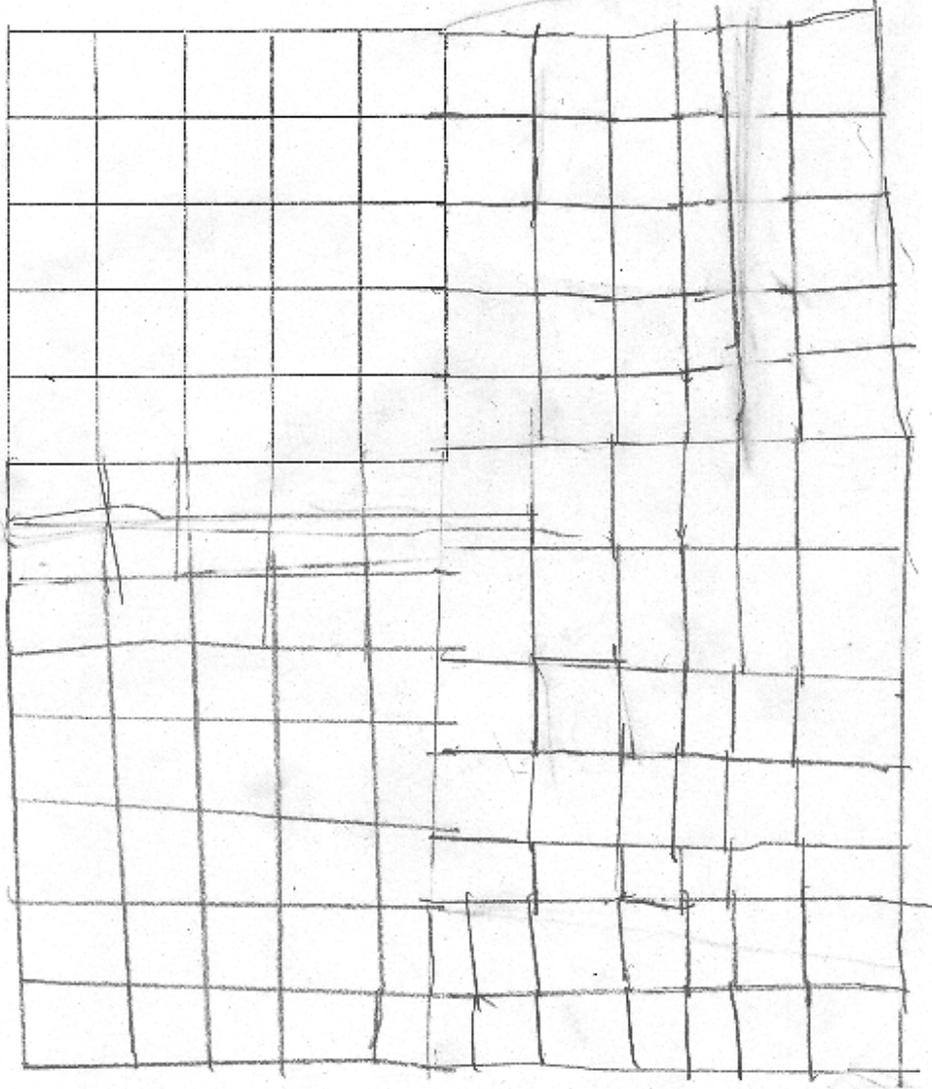
RAMONA

SANDRA

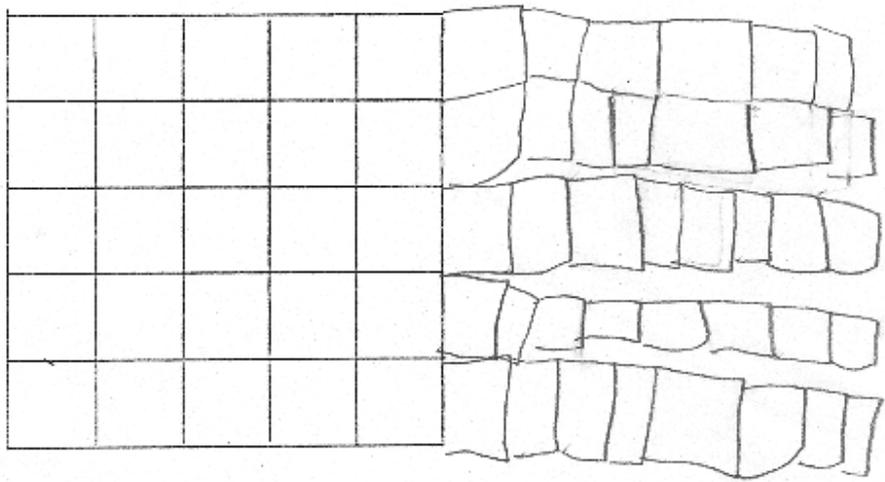


STORIA
STORIA
STORIA

Katharina V.

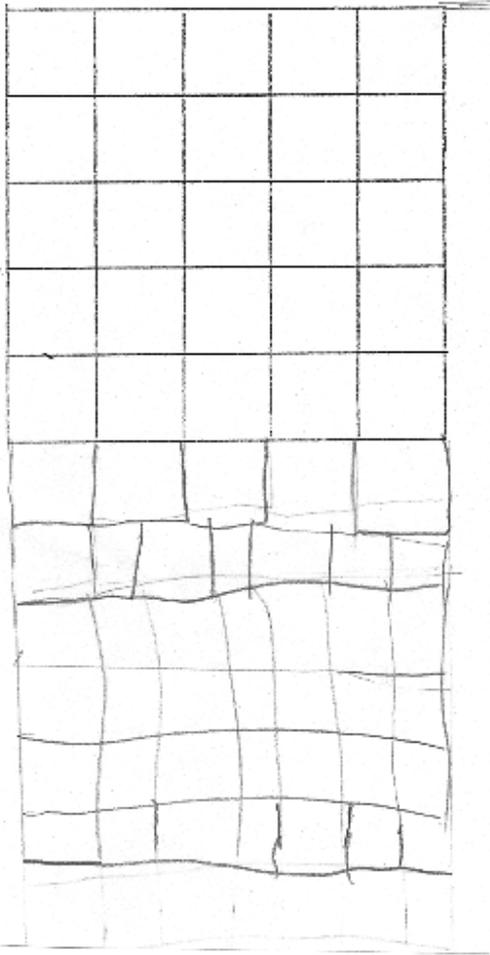


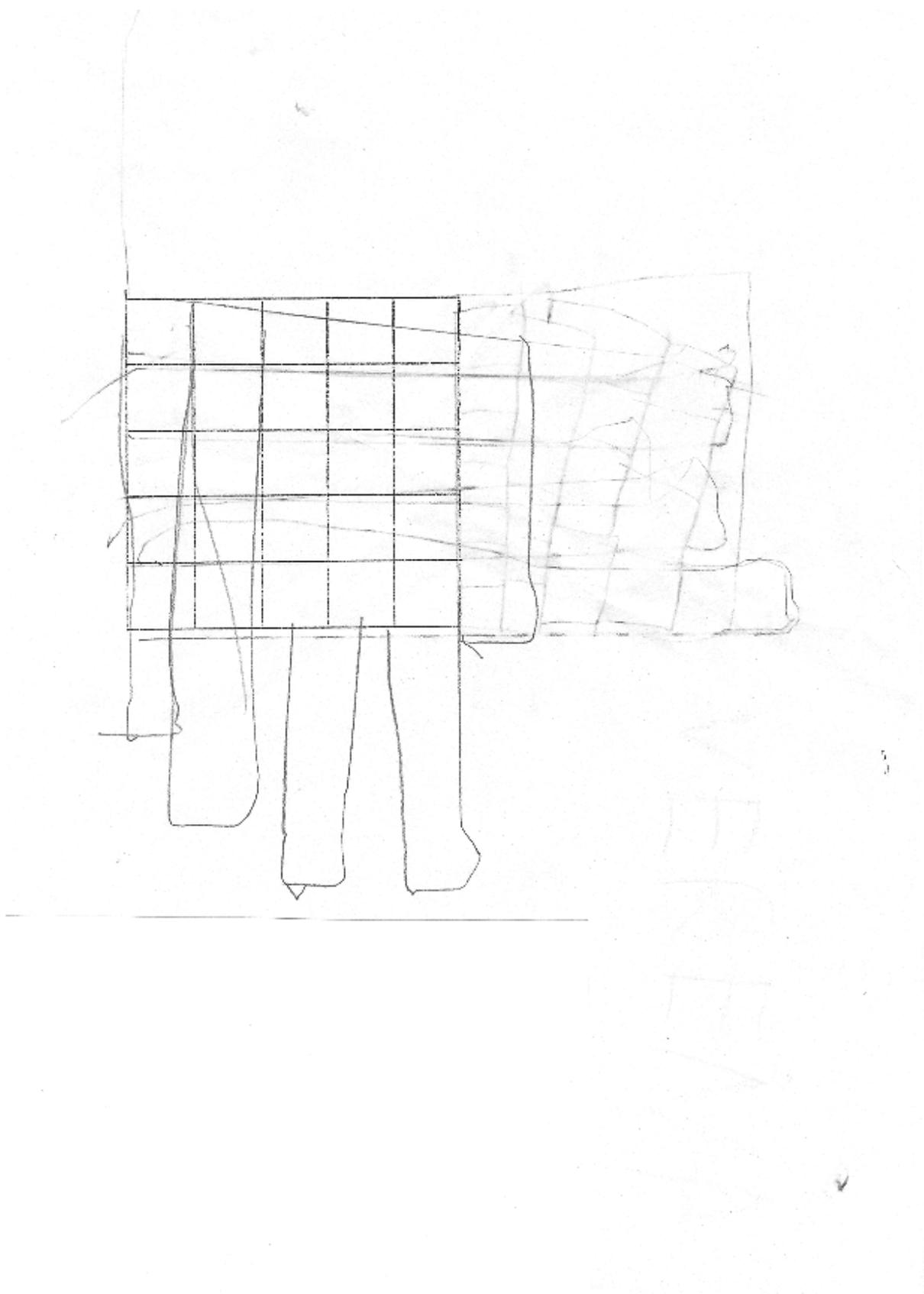
4



Barbara

LISASPERL





Wir stellen ein Hunderterfeld her

<p>Anknüpfung Stummer Impuls: Maximilians Zahlenfeld S verbalisieren Zielangabe. Wir machen uns ein Rechenfeld</p>	
<ul style="list-style-type: none"> • S betrachten genau die Strukturen des Feldes: S erkennen: Jede Reihe wurde um 5 verlängert • Wir brauchen noch so kleine Felder (S meint 25er Quadrat), dann ist es ganz genau. • Wir brauchen noch 3 so kleine Felder, insgesamt brauche ich also 4 Felder. <p>S kleben ihr Hunderterfeld S können zwischen einem 50er und einem Hunderterfeld wählen. Alle S entscheiden sich für das größere Feld</p>	<p>Eigenständiges Erstellen eines Hunderterfeldes aus vier 25er Quadraten</p>
<p>Übung: S legen die Stäbe hinein und beginnen spontan auf 10 zu ergänzen „Der 8er Stab liegt im Feld, bis die Reihe voll ist, bis 10 brauche ich noch 2 und wenn der 7er Stab darin liegt, dann brauche ich noch 3 bis 10.“</p>	<p>Äußerungen zeigen, dass die Schüler das Hunderterfeld und die Rechenstäbe als Arbeitsmittel annehmen</p>

Wir strukturieren das Hunderterfeld

<p>Hinführung L: Zeige mir 7 auf deinem Feld S erkennen: Unser Feld ist noch unübersichtlich, da muss man immer wieder zählen</p> <p>Zielangabe: Wir gestalten unser Hunderterfeld übersichtlicher.</p>	
<p>PA: S überlegen sich Möglichkeiten, wie man das Feld übersichtlicher gestalten könnte</p> <p>Eigenversuche der S. L vermutete, dass sich die S für die Möglichkeit, die einzelnen Teilfelder farblich zu trennen, entscheiden würden, aber alle entschieden sich für das rote Kreuz.</p> <p>Besprechen der Versuche S beurteilen auch die Darstellung des Feldes</p> <p>S strukturieren das Hunderterfeld selbstständig (siehe S. 114)</p>	<p>Entdeckendes Lernen</p> <p>Eigenversuche der Kinder zeigen, dass der Aufbau des Hunderterfeldes noch nicht bei allen Kindern gesichert ist. Deshalb sind Übungen zur Raumorientierung auf dem Hunderterfeld zwingend erforderlich.</p>
<p>PA: S machen auf dem Feld ein Würfelspiel</p>	

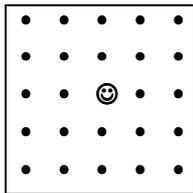
SWARA

5.2.2.3.2 Übungen zur räumlichen Orientierung am Arbeitsmittel

Parallel zu den einzelnen Entwicklungsstufen des Arbeitsmittels werden folgende Raumorientierungsübungen durchgeführt, die dem Schüler helfen, eine innere visuelle Vorstellung des Raumes Arbeitsmittel zu entwickeln.

5.2.2.3.2.1 Raumorientierungsübungen auf dem Geobrett

- Hüpfspiel mit dem Fingerhut

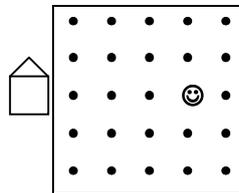


Der Startpunkt wird festgesetzt, anschließend springen die Schüler nach Anweisung mit dem Fingerhut.

L/S: „Springe 3 Felder nach rechts, 2 Felder nach unten, wo landest du?“

Die Schüler beschreiben im Anschluss daran die Lage des Landeplatzes, z.B. „Es ist der Nagel in der Mitte des Feldes. Es ist in der 3. Reihe der 3. Nagel.“

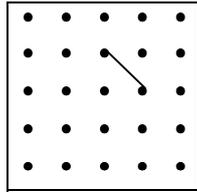
- Wo befindet sich das Playmobil-Männchen?



„Wie viele Nägel muss es überspringen, wenn sein Haus links steht? Wie viele Nägel überspringt es, wenn sein Haus rechts steht (analog dazu oben, unten)“

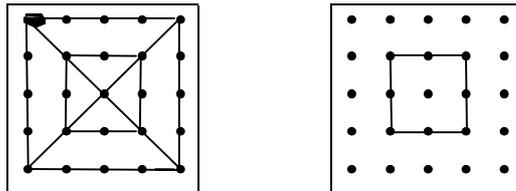
- PA: Vorspannen – nachspannen
Die Schüler entwickeln folgende Strategien:
Nachspannen aufgrund des visuellen Eindrucks.
Nachspannen durch Abzählen: Markieren eines markanten, d.h. leicht abzählenden Nagels als Ausgangspunkt.
- PA „Blindspannen“
Zwischen den beiden Schülern steht eine Schultasche als Trennwand. Ein Schüler diktiert: „Ich lege den Gummi um den 4. Nagel in der ersten Reihe, dann gehe ich 3 Felder nach links, dann 3 nach unten und 2 nach rechts.“ Beide Schüler spannen die Figur auf ihrem Brett. Anschließend wird die Trennwand beseitigt und beide Geobretter miteinander verglichen.

- Visuelles Speichern



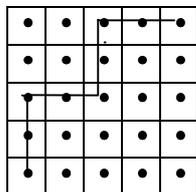
Die Schüler prägen sich die Lage des Striches ein. Dazu entwickeln sie Einprägestrategien. Das Bild wird entfernt. Nach einiger Zeit versuchen die Schüler, den im Gedächtnis gespeicherten Strich nachzuspannen.

- „Weggezauberte Striche“



Die Schüler ergänzen die fehlenden Striche.

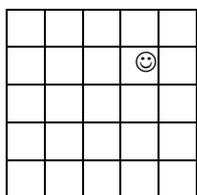
- PA „Schiffe versenken“
Die Schultasche wird als Trennwand verwendet. Jeder Schüler zeichnet ein beliebiges Rechteck auf das Raster. Der andere Schüler versucht die Lage des Schiffes zu orten, z.B. „Ist der Gummi in der 3.Reihe über dem 2.Nagel?“ Sieger ist, wer als erster die umspannten Nägel gefunden hat.
- „Malergeselle“



Der Malermeister diktiert: „Beginne beim ersten Nagel unten links, fahre mit dem Pinsel 2 Nägel nach oben, dann 2 Nägel nach rechts, 2 nach oben und wieder zwei nach rechts. Was hast du gezeichnet?“

5.2.2.3.2 Raumorientierungsübungen auf dem 25er Quadrat

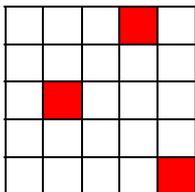
- Die unter 5.2.2.3.2.1. angeführten Übungen können größtenteils auch auf dem 25er Quadrat durchgeführt werden.
- Das 25er Quadrat wird mit Kreide auf dem Boden aufgezeichnet. Ein Schüler stellt sich in das Feld und beschreibt seine Lage, anschließend bewegt er sich in dem Feld nach Vorschrift oder kommentiert seine Bewegungen.



Variante: Alle Schüler stellen sich in das Feld. Die Schüler bestimmen ihren Standort im Feld und setzen diesen mit dem Standort der anderen in Beziehung.

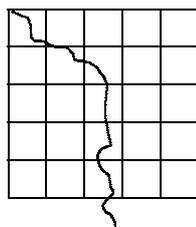
Variante: Nach Anweisung in das Feld stellen.

- Visuelles Speichern: Detektivspiel



Die Schüler prägen sich die Lage der angemalten Kästchen ein und versuchen sie aus dem Gedächtnis wiederzugeben.

- „Schlangenweg“

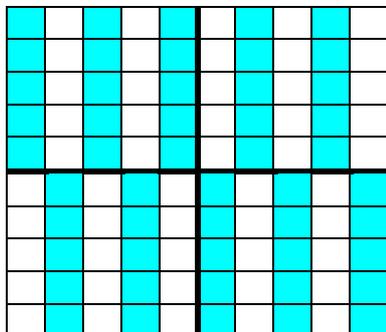


Über welche Felder kroch die Schlange. Die Schüler beschreiben die Lage der Kästchen.

5.2.2.3.2.3 Raumorientierungsübungen am Hunderterfeld

(Vorübungen dazu werden in der 1. Jahrgangsstufe durchgeführt. Eine Erweiterung und Vertiefung erfolgt in der 2. Jahrgangsstufe vgl. 5.2.2.3.4.2).

- Muster zeichnen

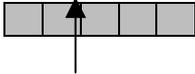


Die Schüler entwerfen selbstständig Muster und beschreiben sie.

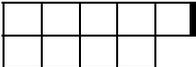
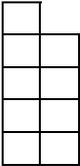
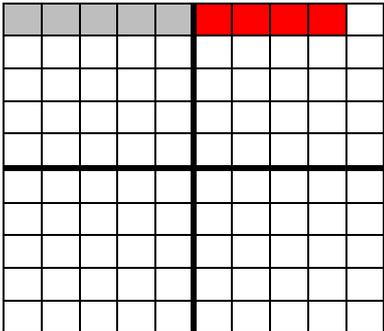
- Puzzle
Die Schüler zerschneiden ein Hunderterfeld in verschiedene Teile und setzen sie anschließend wieder zusammen.
- Analog zu 5.2.2.3.2.1. und 5.2.2.3.2.2.: Detektivspiel, Schiffe versenken, Schlangenwege beschreiben

5.2.2.3.3 Verwendung des Arbeitsmaterials bei Rechenoperationen

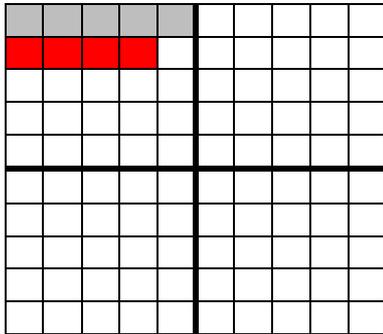
Wir zerlegen den 5er Stab Einführung des Pluszeichens

<p>Übungsphase: PA: S nimmt einen Stab, verdeckt einen Teil und verbalisiert: „Ich habe 3 abgedeckt. Welcher Stab ist es?“</p>	<p>Vorbereitung der Addition</p>																					
<p>Anknüpfung TA Zeichnerische Darstellung der konkreten Handlung: 5 Kinder gehen auf den Spielplatz. Sie wählen den Sandkasten oder die Rutsche. Wie können sie sich aufteilen? S verbalisieren erneut</p> <p>L: Wir haben die Kinder gestern auf 2 Gruppen verteilt. Nenne Gegenstände, die du auch auf 2 Gruppen verteilen kann. S: Äpfel auf 2 Teller verteilen, Karten auf 2 Kinder verteilen, Murmeln auf 2 Hände verteilen, Bonbons auf 2 Teller,.... S suchen Gegenstände aus der Mathematikbox</p> <p>Stummer Impuls: 5er Stab S: Den Stab kann man auch zerteilen, zersägen in 2 Teile</p> <p>S zerlegen den Stab symbolisch mit einem Stift</p>  <p>S finden verschiedene Zerlegungen und verbalisieren dabei: 5 sind 2 und 3 Notation</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <table style="text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>/</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>/</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>/</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>/</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>/</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>/</td><td>4</td></tr> </table> </div> <p>Einführung des Pluszeichens S verbalisieren 5 sind 2 plus 3</p> <p>PA: Spielerische Zerlegung anderer Stäbe</p>		5		3	/	2	4	/	1	5	/	0	2	/	3	0	/	5	1	/	4	<p>S ordnen der Gleichung verschiedene Sachsituationen zu</p> <p>S zerlegen mit Hilfe des Arbeitsmittels die Gesamtmenge in Teilmengen. Die Verwendung des Arbeitsmittels ist bei Zerlegungen und Subtraktion gleich. So wird den S unbewusst der Zusammenhang zwischen Zerlegung und Subtraktion deutlich.</p> <p>Zerlegungen handelnd durchführen und verbalisieren</p> <p>Zerlegungen mit dem Zeichen + notieren</p> <p>Anhand des Arbeitsmittels können sich die Schüler selbstständig die Zerlegungen anderer Zahlen erarbeiten.</p>
	5																					
3	/	2																				
4	/	1																				
5	/	0																				
2	/	3																				
0	/	5																				
1	/	4																				

Einführung in die Addition: Verwendung der Arbeitsmittel

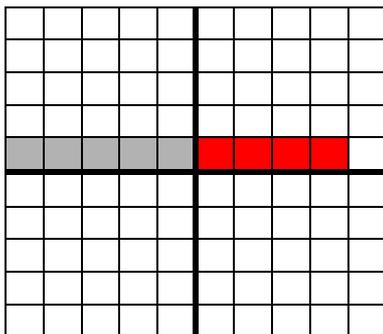
<p>Problemstellung Stummer Impuls 5+4 S verbalisieren</p> <p>Einige S können die Aufgabe im Kopf lösen. L: Überlege dir Möglichkeiten: Wie kann ich die Aufgabe lösen, wenn ich das Ergebnis nicht auswendig weiß? S machen Vorschläge:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mit den Fingern ausrechnen • Mit Kastanien, Murmeln oder anderen Gegenständen legen • Die Aufgabe aufzeichnen • Die Rechenstäbe verwenden <p>L: Probiere aus, wie du deine Aufgabe mit den Rechenstäben lösen könntest</p> <p>S stellen ihre Möglichkeiten vor:</p> <p>1. S legen die Stäbe untereinander und ermitteln das Ergebnis durch Abzählen, 5,6,7,8,9</p>  <p>2. S legen die Stäbe nebeneinander und ermitteln das Ergebnis durch Abzählen, 1,2,3,4,5,6,7,8,9</p>  <p>3. S legen die Stäbe vertikal nebeneinander und ermitteln das Ergebnis durch Abzählen 5,6,7,8,9</p>  <p>4. S legen die Stäbe nebeneinander in das Zahlenfeld. Das Ergebnis ist sogleich sichtbar. Die meisten S zählen nicht ab.</p> 	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p> <p>Entdeckendes Lernen</p> <p>Lösungswege beschreiben</p>
---	--

5. S. legen die Stäbe untereinander in das Zahlenfeld. Das Ergebnis ist sogleich ersichtlich, da viele Strukturierungsübungen am 25er Quadrat gemacht worden sind.



Beurteilen der verschiedenen Möglichkeiten:
 „Wenn die Stäbe ohne Zahlenfeld untereinander liegen, dann muss ich abzählen.
 Wenn die Stäbe nebeneinander im Zahlenfeld liegen, dann sehe ich sofort, dass es 9 sind, denn hinten fehlt eines, also sind es nicht 10 sondern 9.
 Wenn ich das Zahlenfeld benutze, sehe ich gleich dass es 9 sind. Wenn ich sie nicht hineinlege, muss ich wieder abzählen.“

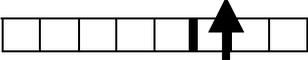
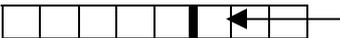
S legen die Stäbe nebeneinander in das Zahlenfeld.
 Einige legen sie aber in die 5. Reihe, andere in die erste Reihe.
 Erkenntnis der S: Es ist egal, in welche Reihe ich die Stäbe lege, denn ich sehe in jeder Reihe, dass es 9 sind.



Aufgabenkarten PA:
 S rechnen die Aufgaben mit den Stäben aus Übung AB

Aufgaben sind nicht strukturiert. Die S sollen die Einsicht gewinnen, dass man mit den Stäben alle Aufgaben lösen kann.
 Spaß am Lösen von Plusaufgaben

Wir ziehen ab (mit Arbeitsmitteln)

<p>Anknüpfung Bilder auf Folie: S legen die Gleichung mit Zahlenkarten</p>	
<p>TA 8-2 S verbalisieren Rechengeschichten Einige S kennen das Ergebnis</p> <p>L: Überlege dir, wie du das Ergebnis der Aufgabe ermitteln könntest</p> <p>S finden analog zur Addition verschiedene Möglichkeiten, das Ergebnis der Aufgabe mit Hilfsmitteln zu ermitteln</p> <p>L: Benutze deine Rechenstäbe S überlegen sich Möglichkeiten und stellen diese dar:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. „Ich mache es wie bei den anderen Aufgaben (S meint die Zerlegungen). Ich nehme den 8er Stab und denke mir, dass ich 2 abschneide. Ich lege den Bleistift auf den Strich und dann erkenne ich, dass es noch 6 sind.“  <ol style="list-style-type: none"> 2. „Ich streiche 2 durch. Aber bei einer anderen Aufgabe kenne ich mich nicht mehr aus, wenn ich einen Strich mache, weil ich ihn nicht mehr wegradieren kann. Also lege ich nur den Bleistift über die 2 und denke mir einfach 2 weg, dann weiß ich, dass es nur noch 6 sind.“  <ol style="list-style-type: none"> 3. „Ich decke die 2 mit einem Blatt ab, dann sehe ich sie nicht mehr und weiß, dass sie weg sind.“  <ol style="list-style-type: none"> 4. „Ich lege die Stäbe in das Zahlenfeld. Aber eigentlich brauche ich es gar nicht. Aber so gefällt es mir besser und es ist so wie bei den Plusaufgaben.“ <p>S besprechen die einzelnen Möglichkeiten S benutzen die Stäbe individuell: Ein Teil entscheidet sich für das Abdecken mit dem Stift, die anderen für ein „Abschneiden“ wie bei der Zerlegung.</p>	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p> <p>Entdeckendes Lernen</p> <p>Darstellen von Lösungswegen</p>

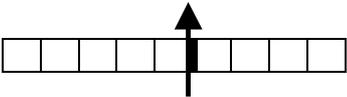
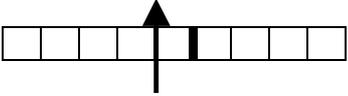
Übung AB	Anwenden der gewonnenen Erkenntnisse Einsicht, dass ich mit dem Arbeitsmittel alle Minusaufgaben lösen kann Spaß an der Mathematik
----------	--

Wir ziehen ab: Ein Bild – zwei Minusaufgaben

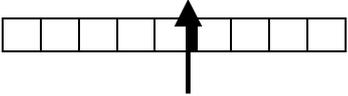
<p>Hinführung: Bild des Zauberers Zimboni</p> <p>Sprechblase: Hokus, pokus, fidibus, dreimal schwarzer Kater. Ich nehme einen Stab, schneide ihn einmal durch und eins, zwei, drei erhalte ich eine, nein ZWEI Minusaufgaben.“</p> <p>PA S versuchen, das Geheimnis zu lösen Dies gelingt einigen S. Sie stellen ihre Lösungen vor und versuchen anhand des Arbeitsmittels zu erklären</p>  <p>„Das erste Mal ziehe ich die Zahl ab, die links von dem Bleistift ist, dann ziehe ich die Zahl ab, die rechts von dem Bleistift ist. So erhalte ich zwei Minusaufgaben.“ Alle S zaubern mit dem Arbeitsmittel nach.</p> <p>TA Sprechblase: „Hokus pokus, ich habe 2 Minusaufgaben und beide sind gleich.“ S besprechen diese Feststellung in der Gruppe. S begründen: „Der Zauberer hat nicht recht, denn einmal schneide ich von dem Stab 4 ab und es bleiben 5 übrig und einmal schneide ich 5 ab und es bleiben nur noch 4 übrig.“ S ordnen beiden Gleichungen verschiedene Sachsituationen zu und vergegenwärtigen sich so den Unterschied.</p> <p>Differenzierung: Diejenigen, die den Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben erkannt haben, lösen die Aufgaben auf dem AB. Die anderen handeln mit Gummibärchen $9-2=7$ $9-7=2$</p>	<p>Entdeckendes Lernen</p> <p>Begründen und argumentieren</p> <p>Vergleichen und unterscheiden Vermutungen und Behauptungen überprüfen</p> <p>Aussagen plausibel und logisch begründen</p> <p>Handeln mit konkreten Gegenständen</p>
--	--

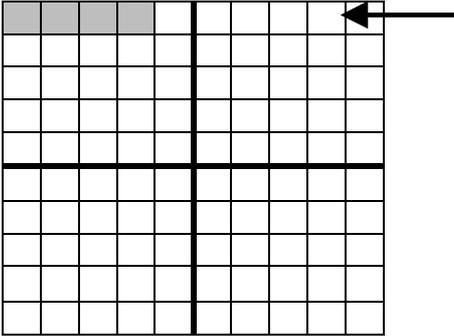
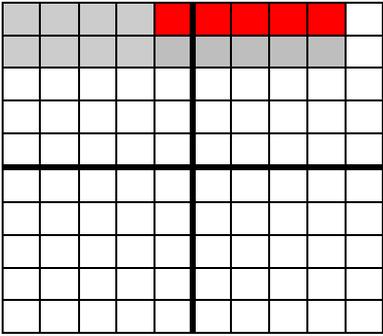
Minusaufgaben mit Platzhalter in der Mitte (Verwendung der Arbeitsmittel)

<p>Übungsphase: Bonbons – leeres Papier L notiert verschiedene Gleichungen an der Tafel S streichen die Gleichungen durch, die nicht zu dieser Sachsituation passen, bzw verbalisieren, z.B. „Ich habe 3 Bonbonpapiere und 4 Bonbons, zusammen waren es 7 Bonbons; Es waren 7</p>	<p>Offene Sachsituation Informationen entnehmen und versprachlichen</p> <p>Begründen und argumentieren</p>
---	--

<p>Bonbons, das Kind hat 3 gegessen, jetzt sind es nur noch 4;....“</p>	
<p>Anknüpfung Zauberbeutel: 9 Murmeln sind in dem Beutel, ich nehme einige weg, dann sind es nur noch 4. Wie viele nehme ich weg? S notieren die Gleichung $9 - _ = 4$</p> <p>Übertragung der Gleichung in andere Sachzusammenhänge</p> <p>L: Überlege dir, wie du die Stäbe verwendest, wenn du die Rechnung nicht auswendig weißt!</p> <p>S stellen ihre Möglichkeiten vor</p> <p>1. „Ich nehme den 9erStab, dann schneide ich 4 ab und dann weiß ich, dass die Zahl in der Mitte 5 sein muss.“</p>  <p>2. „Ich nehme den 9erStab, jetzt muss ich etwas weg tun und es bleiben nur noch 4 übrig. Ich sehe, dass ich 5 wegtun muss.“</p> 	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p> <p>Begründen und argumentieren</p>

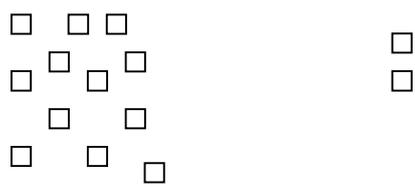
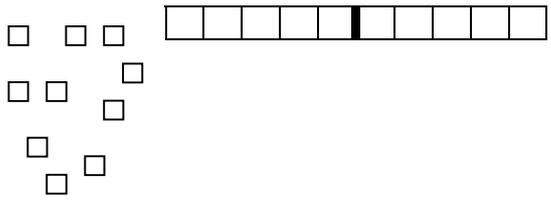
Wir lösen Ergänzungsaufgaben (Verwendung der Arbeitsmittel)

<p>Anknüpfung TA $4 + _ = 9$ S überlegen sich Rechengeschichten dazu</p> <p>S Wir verwenden die Arbeitsmittel</p> <p>S erproben Lösungsmöglichkeiten</p> <p>Auswertung der Ergebnisse: 1. „Ich nehme den 9er Stab, nehme dann 4 weg , dann sehe ich, dass die Zahl in der Mitte 5 ist.“</p>  <p>2.„Ich lege den 4er Stab in das Zahlenfeld. Wenn ich neun brauche, dann fehlt mir hinten am Ende der Reihe noch eins. Das denke ich mir weg und dann sehe ich, dass ich von 4 bis 9 noch 5 brauche.“</p>	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p> <p>Erproben und entdecken von Lösungsmöglichkeiten</p> <p>Begründen und argumentieren</p>
---	--

 <p>3. „Ich lege den 4er Stab in das Feld, dann probiere ich aus, welcher Stab noch bis 9 hineinpasst. Es ist der 5er Stab.“</p> <p>4. „Ich lege den 4er Stab in das Feld, dann lege ich den 9er Stab darunter. So sehe ich, dass ich noch 5 brauche.“</p>  <p>Übung AB</p>	<p>S lösen die Gleichungen aufgrund ihrer Kenntnisse zu den Zahlentripeln oder anhand der Arbeitsmittel</p>
--	---

Wir bündeln immer 10

<p>Anknüpfung L schreibt Zahlen in die Stellenwerttabelle PA: S legen mit Eiern und Eierschachteln nach S: „Eigentlich ist es nicht richtig, wenn ich Bündel sage. Ich weiß nicht, wie viele in einem Bündel sind. Ich müsste eigentlich Zehnerbündel sagen.“</p> <p>Begriffe: Zehner und Einer</p> <p>S ersetzen Begriffe Bündel und Einzelne durch Zehner und Einer</p> <p>L zeigt Bilder mit Zehnerbündelungen S notieren in ihrem Bündelhaus S: „Ich weiß schon, warum du das machst, du schreibst immer auf, wie viele es sind.“ $1Z+5E=15$</p> <p>Stummer Impuls: L zeigt Einzelne des</p>	<p>Konkretes Handeln</p>
---	--------------------------

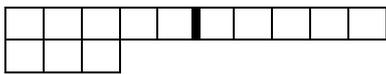
<p>Arbeitsmittels S beginnen zu bündeln Unterschiedliche räumliche Anordnungen:</p>  <p>S erkennen aufgrund der unterschiedlichen räumlichen Anordnung die Gemeinsamkeit zwischen</p>  <p>nicht. Deshalb Auftrag des L, die 10 unterschiedlich räumlich anzuordnen. S probieren in PA aus</p> <p>S erkennen: „Das sieht aus wie eine Zehnerstange.“ S schieben die einzelnen Würfel enger zusammen und legen eine Zehnerstange darüber. S erkennen: „Wir haben schon 10er Bündel.“ S zeigen den 10er Stab und verbalisieren: „Das ist ein Zehner.“</p> <p>S legen einige Beispiele mit Zehnerstangen und Einzelnen, tragen ihr Ergebnis in die Stellenwerttabelle ein und verbalisieren</p>	<p>Übertragung gewonnener Erkenntnisse auf neue Zusammenhänge</p>
---	---

Wir stellen Zahlen mit dem Arbeitsmittel dar (Kardinaler Zahlaspekt und zeichnerische Lösung)

<p>Anknüpfung TA 1Z3E S legen die Stäbe in ihr Zahlenfeld Ein S legt den 3er Stab nicht in die zweite Reihe des Feldes, sondern linear neben den 10er Stab</p> <p>Daraus entsteht folgende Diskussion: „Es stimmt nicht, wenn ich die Stäbe nebeneinanderlege, denn 13 ist hier.“ (S zeigt dabei auf Feld 13) „Es stimmt eigentlich schon, weil es sind 13, man legt sie nur nebeneinander.“ „Man sieht aber nicht so genau, wo der Zehner aufhört. Die beiden Stäbe sehen aus, als wenn sie zusammengewachsen wären.“ „Eigentlich sieht man den Zehner schon, weil man auf dem Feld sieht, wo der 10er aufhört.“ „Wenn ich aber mehr Zehner habe (S legt</p>	<p>Diskussion Zahlenfeld oder Zahlenstrahl Begründen und argumentieren Vergleichen und unterscheiden</p>
---	--

3Zehner und 4Einer). Jetzt sieht man nicht mehr so gut, wo ein Zehner aufhört.“
 „Wir brauchen eine Einteilung, die uns zeigt, wo der 10er aufhört. Vielleicht auch einen roten Strich.“

Zeichnerische Lösung



Einige S entscheiden sich für die lineare Darstellung

Wir orientieren uns auf dem Zahlenfeld (Ordinaler Zahlaspekt)

Übungsphase
 S erhalten Zahlenkarten und legen sie in das Zahlenfeld
 S vergleichen die Anordnungen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

S begründen:
 „Ich habe 1 und 11, 2 und 12,... untereinandergelegt, weil sie nämlich verwandt sind.“
 „Die (10 und 20) gehören untereinander, weil bei den Einern eine Null ist.“
 „Die Zahlen sind eigentlich gleich. Da (S zeigt auf die zweite Reihe) kommt immer nur ein Zehner dazu.“

S nennen verwandte Zahlen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

S: Ich habe die Zahlen so gelegt, weil die 10 und die 11 so näher beieinander sind. Wenn ich die 11 vorne hineinlege, dann muss ich so einen großen Schritt von 10 auf 11 machen und zwischen 10 und 11 ist kein so großer Schritt.“

S erörtern die Reihung der Zahlen: „Wenn ich die Zahlen so (S meint die lineare Darstellung) aufschreibe, dann sehe ich nicht mehr, dass sie miteinander verwandt sind.“

Anordnung der Zahlen auf dem großen

Begründen und argumentieren
 Vergleichen und unterscheiden

<p>Hunderterfeld. Problemstellung: Ausschnitt aus dem 20er Feld S: Teile wurden weggeschnitten, Zahlen wurden ausradiert S fügen das Teil in die Hundertertafel ein und ergänzen die fehlenden Zahlen</p> <p>S erhalten Kärtchen und tragen die fehlenden Zahlen mit Folienstift ein Übung auf AB</p> <p>S erstellen selbst Aufgaben</p>	<p>Übung zur räumlichen Anordnung der Zahlen auf dem Hunderterfeld</p>
--	--

Wir zerlegen die Zahlen bis 20

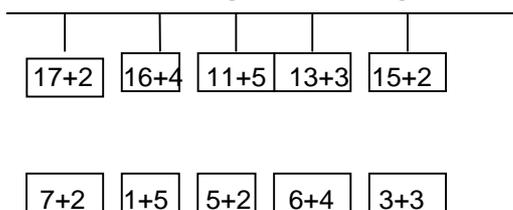
<p>Übungsphase: Bild: Kinder machen eine Kutschfahrt S stellen Fragen dazu S beantworten die Fragen Sie unterscheiden dabei zwischen Fragen, die mit Hilfe des Bildes oder einer Rechnung beantwortet werden können und Fragen, die man nicht beantworten kann, bzw deren Antwort nur vermutet werden kann</p>	<p>Sachbezogene Mathematik Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vielfältige Fragen zu Sachsituationen stellen • Mathematische Fragen isolieren
<p>Hinführung TA</p> $\begin{array}{c} 18 \\ / \quad \backslash \\ 10 \quad + \quad - \end{array}$ <p>S formulieren Rechengeschichten dazu (S formulieren auch eine Aufgabe zu dem vorgestellten Bild mit der Kutschfahrt)</p> <p>Eigenständige Lösungsversuche: S nehmen konkrete Gegenstände (Bohnen), um die Zahl zu zerlegen Andere füllen die Schüttelkästen, einige verwenden die Rechenstäbe</p> <p>S: „ Wenn ich bei 16 den 6er Stab an den 10er Stab dranlege (lineare Anordnung) fällt es mir leichter, die Zahl zu zerlegen.“</p> <p>Notieren der Zerlegungen</p> <p>Übung AB Differenzierung: Wir zerlegen Zahlen > 20 Ein S nimmt 3 Stäbe, legt sie in Form eines Zahlenbandes aneinander und bildet dazu die Zerlegungsaufgabe.</p>	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p>

Wir rechnen kleine und große Aufgaben +

<p>Übungsphase PA Zahlenwürfel: S rechnen die Plus- oder Minusaufgabe</p>	
--	--

Hinführung

TA Wäscheleine mit großen Aufgaben
Im Gras darunter liegen kleine Aufgaben



S hängen verwandte Aufgaben zusammen

z.B. $7+2=$

$17+2=$

S vergleichen die Aufgaben

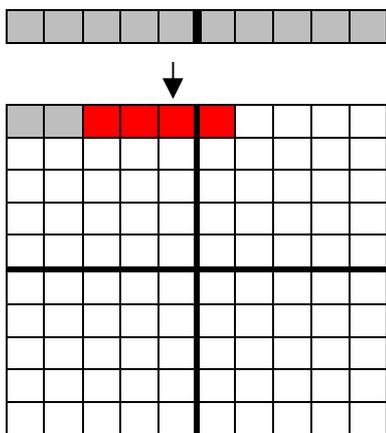
„2 und 12 sind verwandt, weil die 2 gleich ist. Bei 12 kommt nur eine 1 dazu.“

„Das stimmt nicht, es kommt nicht eine 1 dazu, sondern ein Zehner.“

Einige S zweifeln, sie verwenden ihre Arbeitsmittel und vergleichen. Sie erkennen: „Es stimmt, es kommt ein Zehner dazu.“

S erhalten zwei Aufgabenkärtchen mit großer und kleiner Aufgabe und versuchen die Aufgabe in PA zu lösen

S erklären ihren Lösungsweg anhand der Arbeitsmittel



„Ich rechne $2+4=6$. Dann lege ich einen Zehner dazu, dann habe ich $12+4=16$.“

S erklären am Hunderterfeld an der Tafel, die anderen legen die Aufgaben mit.

Übung Bauernhof Ralley

S würfeln und bilden zu der kleinen Aufgabe die große Aufgabe

Dekadische Analogie entdecken

Vergleichen und unterscheiden

Gesetzmäßigkeiten entdecken

Schlüsse ziehen

Erkanntes auf andere Zusammenhänge übertragen

Wir rechnen kleine und große Aufgaben mit minus

Übungsphase

Bauernhof Ralley

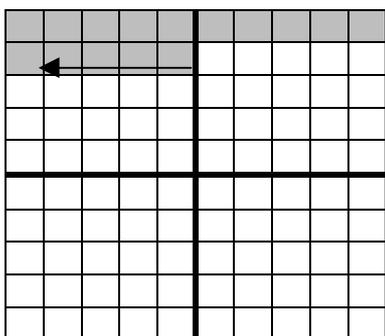
S bilden die große Aufgabe dazu

Hinführung:
Bild: Im Hallenbad
S stellen Fragen dazu

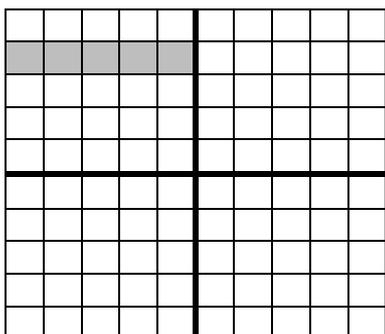
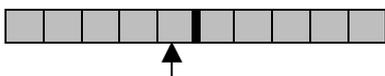
S: Es waren 15 Kinder, 4 sprangen ins Wasser.
Wie viele Kinder sitzen am Rande des Beckens?

S $15-4=$

PA S versuchen die Aufgabe mit Hilfe der
Arbeitsmittel zu lösen
S begründen ihre Lösungswege:
Zwei S erkennen keinen Zusammenhang
zwischen der kleinen und der großen Aufgabe.
Sie legen beide Stäbe in das Zahlenfeld und
streichen 4 weg.



„Ich denke mir den Zehner weg, dann rechne ich
 $5-4=1$, dann weiß ich $15-4=11$ “



PA: Aufgabenkarten mit großen und kleinen
Aufgaben
S ordnen einander zu und berechnen die
Ergebnisse anhand der Arbeitsmittel

Übung AB

PA: Rechenspiel mit kleinen Minusaufgaben
S schreiben mit Foliienstift die große Aufgabe
dazu und ermitteln das Ergebnis

Sachbezogene Mathematik: Fragen und
Antworten zu Sachsituationen finden

Erkanntes auf andere Zusammenhänge
übertragen
Schlüsse ziehen

Wir verdoppeln

<p>Hinführung Traumreise: Wir kommen an einen See. Der See ist ganz klar, die Bäume, Häuser,... spiegeln sich im Meer. Du spiegelst dich im See S berichten über eigene Erfahrungen und Erlebnisse</p> <p>Stummer Impuls: Spiegel S probieren selbstständig aus S erkennen: Ich muss den Spiegel senkrecht (S verbalisieren gerade) halten, der Gegenstand darf nicht größer als der Spiegel sein, ich muss den Gegenstand nahe an den Spiegel legen</p> <p>Großer Spiegel L legt 2 Stifte an den Spiegel S verbalisieren: „Ich habe 2 Stifte vor dem Spiegel und 2 sehe ich im Spiegel $2+2=4$“ S suchen verschiedene Gegenstände in der Matheecke und spiegeln sie S verbalisieren Der Begriff doppelt wird von den S nicht verwendet, L gibt die Erklärung hierzu zu einem späteren Zeitpunkt</p> <p>Stäbe spiegeln (beginnend bei 1) S notieren die Gleichung</p> <p>Zeichnerische Lösung</p>  <p>Übung vgl AB</p>	<p>Erste Erfahrungen zum Spiegeln Entdeckendes Lernen</p> <p>Konkretes Handeln</p>
--	--

Verwendung des Arbeitsmittels beim Verdoppeln

<p>Übungsphase Verdoppeln der Stäbe im Zahlenfeld z.B. $7+7=$</p> <p>L: „Erkläre, wie du schnell das Ergebnis der Aufgabe ermitteln kannst.“ S erklären: 1.</p>  <p>Die beiden 5er untereinander bis zum roten Strich sind 10 . Dann schaue ich mir die Felder nach dem roten Strich an, das sind 4, also sind es insgesamt 14.“</p>	
--	--

Ich denke mir in der ersten Reihe 3 dazu, dann ist die Reihe voll, dann sind es 10 und dann muss ich in der zweiten Reihe 3 weg tun, also sind es nur noch 14.“

2. $9+9=$



Wenn 2 Reihen voll sind, dann sind es 20, also nehme ich 2 weg, weil in jeder Reihe eines fehlt, dann sind es 18.“

3. $8+8=$



„Die beiden 5er untereinander, also bis zum roten Strich sind 10, dann tue ich noch 2×3 dazu, dann sind es 16.“

Wir halbieren

Hinführung

Stummer Impuls: Spiegel
S wiederholen

L: „Lege 8 Muggelsteine in eine Reihe. Stelle nun den Spiegel so hinein, dass die Plättchen vor dem Spiegel und das Spiegelbild zusammen wieder die 8 ergibt.“

S probieren aus

S legen einen Faden an die Stelle, wo sich der Spiegel befand

S: Man muss den Spiegel genau in die Mitte stellen.

Begriff: Die Hälfte

„Die Hälfte von 8 ist 4“

Notation der Gleichung

$$\begin{array}{c} 8 \\ / \quad \backslash \\ 4 \quad + \quad 4 \end{array}$$

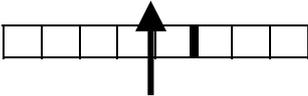
S bilden die Zerlegungsaufgabe, nicht die Subtraktionsaufgabe.

Übertragung auf andere Sachsituationen
Gerecht teilen mit dem Bruder oder der Schwester
Handeln mit konkreten Gegenständen

Übertragung der Erkenntnisse auf die Arbeitsmittel

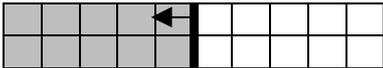
GA: S zerlegen die Stäbe so, dass auf beiden Seiten gleich viele sind.

Sachzusammenhang ist kompliziert (Sachhintergrund 2 Kinder teilen gerecht, wäre einfacher). Damit aber die Schüler den Zusammenhang zwischen Verdopplung und Halbierung erkennen, wird der Sachverhalt zu Beginn beibehalten.

 <p>S legen bei Mengen ab 10 die Stäbe in Form eines Zahlenbandes und ermitteln die Hälfte durch Probieren, bzw. aufgrund des visuellen Eindrucks Sie erkennen: Ich kann einige Stäbe nicht genau auf einem Strich durchschneiden, wenn ich sie halbiere, z.B. bei 5 muss ich ein Kästchen in der Mitte durchschneiden S: „Die Hälfte von 5 ist 2 und ein halbes Kästchen.“ S rätseln, wie man die Gleichung notieren könnte. L erklärt</p>	<p>Begründen und argumentieren Schlüsse ziehen</p>
--	---

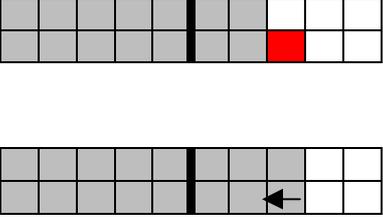
Wir bilden Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungsaufgaben

<p>Übungsphase S bilden Rechengeschichten zum Verdoppeln und Halbieren S bilden die Gleichung dazu</p> <p>Zahlenkarten mit Verdoppelungsaufgaben S ordnen Aufgaben- und Ergebniskarte einander zu</p> <p>PA: Aufgabenkarten mit Verdoppelungen S fragen sich gegenseitig ab</p> <p>AB: Verdoppelungsaufgaben und Ergebnisse einander zuordnen</p>	<p>Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen</p>
<p>Hinführung</p> <p>4 5 6 7 8</p> <p>5 6 7 8 9</p> <p>6 7 8 9 10</p> <p>Die Zahlen haben Nachbarn S nennen die Nachbarzahlen</p> <p>Stummer Impuls: Aufgabenkarte $5+5=$ S ordnen die Aufgabe in die Tabelle ein S: „Wir machen Aufgaben zu den anderen Zahlen. Die Aufgabe über $5+5$ könnte $4+4$ heißen. Sie könnte aber auch $4+5$ heißen. Ich denke mir die Nachbarzahl und die $+5$ lasse ich stehen.“</p> <p>S legen $5+5$ auf das Zahlenfeld L: Zaubere daraus $4+5$</p>	<p>Nachbaraufgaben anwenden</p>

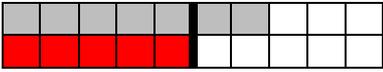
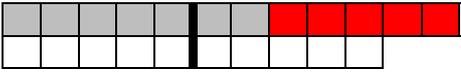
 <p>S „Ich nehme von dem ersten Stab eins weg. (S decken ab), dann weiß ich $4+5=9$. Ich rechne $10-1$."</p> <p>S finden die zweite Nachbaraufgabe: $6+5$ S ermitteln das Ergebnis anhand des Arbeitsmittels</p>  <p>S: „ Bei $6+5$ lege ich noch einen Einer an den oberen 5er Stab, dann weiß ich $6+5=11$. Ich kann auch rechnen $10+1$“</p> <p>Anschließend besprechen der Nachbaraufgaben zu $6+6$</p> <p>GA: S finden die Nachbaraufgaben zu den anderen Verdoppelungen und erklären anhand des Arbeitsmittels.</p> <p>Auswertung der Gruppenarbeit: Demonstration am Hunderterfeld an der Tafel</p>	<p>Änderung des ersten Summanden, da bei den Nachbaraufgaben zur Subtraktion auch die erste Zahl geändert wird.</p>
---	---

Wir üben Nachbaraufgaben: Wir suchen zu einer Nachbaraufgabe die Verdoppelungsaufgabe

<p>Übungsphase: PA Zahlenkarten: S ordnen Karte mit Verdoppelungsaufgabe und Ergebniskarte einander zu</p> <p>S schreiben Lieblingsverdoppelungsaufgabe auf und bilden die Nachbaraufgaben dazu</p>	
<p>Hinführung: Bild eines Detektivs L: Wir gehen heute als Detektive auf Spurensuche. Jemand hat uns einen Brief geschrieben</p> <p>Brief mit Aufgabenkarte $7+8$ S: Wir können die Aufgabe mit Stäben lösen, wir suchen die Verdoppelungsaufgabe dazu</p> <p>L: Suche unter den Zahlenkarten mit den Verdoppelungsaufgaben die heraus, die dir helfen, diese Aufgabe zu lösen. Verstecke die Karte in deiner Hand und schleiche dich dann zur Tafel</p> <p>S erklären anhand des Arbeitsmittels:</p>	

 <p>„Ich habe die Karte 8+8 gesucht. 7+8 ist um eins wenige.“ „Ich habe die Karte 7+7 gezogen. 7+8 ist um eins mehr.“ „Beide Aufgaben sind richtig. Einmal muss man eins dazutun und einmal muss man eins wegtun.“</p> <p>Weiteres Beispiel: 6+5 S suchen beide Verdoppelungsaufgaben und erklären anhand des Arbeitsmittels</p> <p>GA: Aufgabenkarten S finden die beiden Verdoppelungsaufgaben und erklären anhand des Arbeitsmittels.</p>	
---	--

Einführung: Zehnerübergang +

Übungsphase: Zerlegungsaufgaben	
<p>Hinführung</p> <p>TA Aufgabenkarten und Häuser S beginnen spontan zu strukturieren S ordnen nach: Plusaufgaben bis 10 Plusaufgaben mit dekadischer Analogie Plusaufgaben mit Zehnerübergang</p> <p>TA 7+5 L: Versuche mit deinem Partner oder alleine diese Aufgabe zu lösen. Erkläre die Lösung anhand der Rechenstäbe.</p> <p>S stellen ihre Lösungsmöglichkeiten dar:</p> <p>1.</p>  <p>S legt den 5er und den 7er Stab untereinander in das Hunderterfeld. „Ich rechne $5+5=10$ $10+2=12$“</p> <p>2.</p>  <p>S legt den 7er und den 5er Stab nebeneinander in das Zahlenfeld „Der Stab schaut um 2 über das Feld hinaus. So weiß ich, dass es 12 sind.“</p>	<p>Strukturieren von Aufgaben</p> <p>Verschiedene Lösungswege entdecken</p> <p>Begründen und argumentieren</p> <p>Erkanntes auf andere Zusammenhänge übertragen</p>

3.



S legt den 7er Stab in das Feld und zerlegt den 5er Stab in 3 und 2. „Ich lege den 7er Stab in das Feld. Dann zerlege ich den 5er Stab. 3 lege ich noch in die erste Reihe und 2 lege ich in die 2. Reihe.“ S demonstriert die Zahlzerlegung, indem sie den 3er und 2er Stab über den 5er Stab legt.

4.



S legt den 7er Stab in die erste Reihe und den 5er Stab in die zweite Reihe. „Ich lege in Gedanken noch 3 in die erste Reihe, dann muss ich mir aber unten (in der zweiten Reihe) 3 wegdenken. Also bleiben unten 2, dann sind es 12.“

5.



S legt zwei 7er Stäbe in das Zahlenfeld. „Wir haben doch jetzt die Verdoppelungsaufgabe gelernt und ich weiß, dass $7+7$ 14 ist. Jetzt habe ich aber um 2 zuviel dazugetan, denn ich darf nur 5 dazutun. Also streiche ich 2 weg und dann habe ich $7+5=12$.“

6. Eine Schülerin legt die Stäbe untereinander in das Zahlenfeld. Ermittelt das Ergebnis durch Abzählen von 1-12.

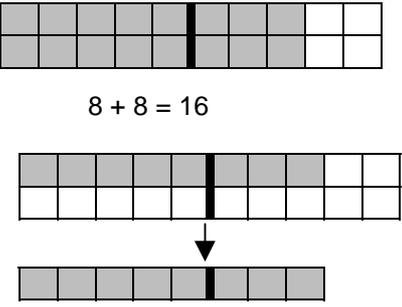
Beurteilen der verschiedenen Möglichkeiten durch die S: S lehnen den Weg des Abzählens ab „Das dauert so lange, da wird nicht gerechnet.“

L: „Du hast viele verschiedene Möglichkeiten gefunden, die richtig sind. Mit einem Weg werden wir uns in der nächsten Zeit besonders beschäftigen.“

S erklärt erneut den Weg der Zahlzerlegung
S legen nach

S verbalisieren: „Ich zerlege 5. Ich mache den Zehner voll $7+3=10$. Den Rest lege ich in den zweiten Zehner (oder in die zweite Reihe) $10+2=12$.“

Wir lösen Halbierungsaufgaben

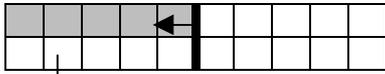
<p>Übungsphase Aufgaben mit Zehnerübergang Analyse von Schülerfehlern: $7+9= 7+3+9=19$</p>	
<p>Zahlenkarten mit Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben (Halbierung wird als Subtraktionsaufgabe dargestellt, bisher wurde sie als Zerlegungsaufgabe notiert)</p> <p>S ordnen die Karten S erklären anhand des Arbeitsmittels den Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben.</p>  <p>„ Ich lege bei $8+8$ zwei 8er Stäbe untereinander in das Rechenfeld. Jetzt habe ich 16. Von den 16 nehme ich einen 8er Stab wieder weg und dann habe ich wieder 8.“</p> <p>Übung vgl. AB</p> <p>PA: Aufgabenblatt: Ein S zeigt auf die Verdoppelungsaufgabe, der andere findet die entsprechende Halbierungsaufgabe dazu.</p>	

Wir finden Nachbargaufgaben zu den Halbierungen

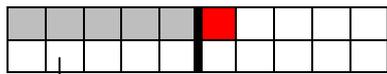
<p>Übungsphase Halbierungsaufgabe PA gegenseitiges Abfragen</p>	
<p>Hinführung: Zahlenreihe</p> <p>9 11 13 15 17</p> <p>10 12 14 16 18</p> <p>11 13 15 17 19</p> <p>S nennen die Halbierungsaufgabe</p>	

S nennen die Nachbarzahlen dazu
S bilden Nachbaraufgaben

$$10 - 5 = 5 \quad 9 - 5 = 4$$



$$10 - 5 = 5 \quad 11 - 5 = 6$$



S: „Ich lege 10, also zwei 5er Stäbe in das Feld.
Jetzt nehme ich eins vom ersten Stab weg, denn
ich darf nur 9 haben. Dann nehme ich den 5er
Stab weg und ich weiß, dass das Ergebnis 4 ist.“
„Ich lege zwei 5er Stäbe in das Feld. Jetzt lege ich
eines dazu, denn ich habe nicht 10 sondern 11.
Dann nehme ich den 5er Stab weg. Also ich
rechne $11 - 5 = 6$ “

Analog dazu besprechen eines weiteren
Beispiels

GA: S finden die Nachbaraufgaben zu den
anderen Halbierungsaufgaben und erklären diese
anhand der Stäbe.

Auswertung der GA: Demonstration am
Zahlenfeld an der Tafel

Wir finden die Halbierungsaufgabe zu der Nachbaraufgabe

Übungsphase

S schreiben ihre Lieblingshalbierungsaufgabe auf
und bilden die Nachbaraufgaben dazu

Hinführung

Bild des Detektivs: 11-6

L: Suche unter deinen Karten mit
Halbierungsaufgaben diejenige heraus, die dir hilft
die Lösung der Aufgabe zu finden.

S erklären: „Ich habe die Karte 12-6 gesucht. Ich
nehme die 6 weg und dann muss ich noch eins
wegnehmen(deckt mit der Hand ein Feld des
verbleibenden 6er Stabes ab), denn ich habe nicht
12 sondern 11.“

S begründen die Auswahl der Aufgabe. „Ich habe
bei der -6 geschaut und nicht bei der ersten Zahl
(S meint den Minuenden) und habe die

entsprechende Aufgabe dazu gesucht.“

Weiteres Beispiel an der Tafel

GA: S erhalten Aufgabenkarten: S finden die Halbierungsaufgabe und erklären anhand der Rechenstäbe.

Einführung Zehnerübergang –

Blumen mit Rechenaufgaben

S ordnen die Aufgaben und machen verschiedene Sträuße

Minusaufgaben bis 10

Minusaufgaben mit dekadischer Analogie

Minusaufgaben mit Zehnerübergang

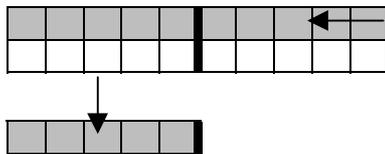
S: „Die Aufgaben im dritten Blumenstrauß können wir noch nicht lösen. Bei 11-6 kann ich nämlich nicht rechnen 1-6, wenn ich mir den Zehner wegdenke. Das geht nur bei den Aufgaben im zweiten Blumenstrauß.“

15-7

S wählen sich diese Rechenblume aus und versuchen die Aufgabe mit den Arbeitsmitteln zu lösen.

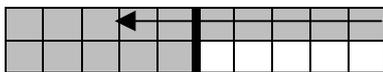
S stellen ihre Lösungsvorschläge dar:

1.



S legt den 10er und den 5er Stab in das Feld. Den 7er Stab hält er in der Hand. „Ich nehme 5 weg (nimmt den 5er Stab weg). Den 7er Stab brauche ich jetzt, damit ich genau weiß, wie viele ich noch wegtun muss. (Er nimmt 5 von dem 7er Stab weg). Also ich muss noch 2 von den 10 wegnehmen, dann ist das Ergebnis 8. $15-7=8$.“

2.



S legt den 10er und den 5er Stab in das Feld. „Ich nehme 7 weg. Ich kann die 7 nicht von der zweiten Reihe nehmen, denn da sind nicht so viele. Also nehme ich die 7 von der ersten Reihe weg. Dann bleiben mir in der ersten Reihe 3 und in der zweiten Reihe 5, dann sind es zusammen 8. $15-7=8$.“

Strukturieren der Aufgaben

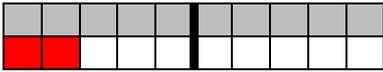
Eigene Lösungswege entdecken
Begründen und argumentieren

3.



S legt zwei 7er Stäbe in das Feld. „Wir haben gelernt, dass $14-7=7$. Das weiß ich auswendig. Wenn ich nun $15-7$ rechne, dann habe ich um eins mehr. Dann ist das Ergebnis nicht 7 sondern 8.“

4.



S legt einen 10er und einen 5er Stab in das Feld. „Ich nehme zuerst die 5 weg. Dann muss ich noch 2 dazutun, dann kommt $10+2=12$. Aber das kann eigentlich nicht stimmen, weil die anderen 8 herausgebracht haben.“
Andere S helfen ihm: „Du musst die 2 noch wegtun, nicht dazuzählen, denn du musst insgesamt 7 wegtun. Du hast aber erst 5 weggetan, also musst du noch 2 wegnehmen.“

5. S legt den 5er den 7er und den 10er Stab in das Feld.

S: „Ich muss 5 wegtun, aber was mache ich dann mit dem 7er Stab.“

Andere S helfen: „Du brauchst den 7er Stab nicht legen, weil der nicht dazukommt. Du darfst nur 15 legen, denn von denen musst du 7 wegtun. Du nimmst zuerst die 5 weg und dann noch 2.“

Fehleranalyse

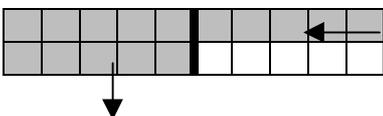
Zehnerübergang – (Zerlegungsaufgabe)

Anknüpfung
TA $15-7=$
S wiederholen

L: Mit einem Weg werden wir uns in der nächsten Zeit besonders beschäftigen“

Erneut Beschreibung des Lösungsweges mit Hilfe der Zerlegungsaufgabe

S: „Ich zerlege 7. Ich mache den Zehner leer. $15-5=10$. Den Rest nehme ich von der ersten Reihe. $10-2=8$.“



Aufgaben mit Zehnerübergang durch Zerlegen in Schritten lösen

2.



S: „Ich weiß die Aufgabe $8+8=16$ auswendig. Ich brauche aber nicht 16 sondern 17. Also brauche ich eins mehr.“

3. S legt die Stäbe nicht in das Feld. Sie legt den Finger auf Feld 8 und erklärt: „Von 8 bis 10 brauche ich 2 und dann noch 7 in der zweiten Reihe. Also brauche ich von 8 bis 17 9.“

Übung AB

5.2.2.3.4 Weiterentwicklung / Weiterverwendung des Arbeitsmaterials (Ausblick in die 2. Jahrgangsstufe)

5.2.2.3.4.1 Die Zahlen bis 100 - Bündeln und Tauschen

In der folgenden Unterrichtseinheit entdecken die Schüler selbstständig Möglichkeiten einer Mengenstrukturierung.

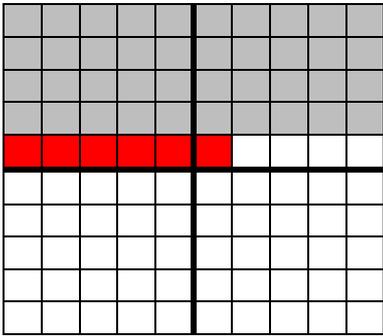
<p>Hinführung Lehrererzählung, Schatzkarte S finden den Schatz nach Plan Kieselsteine</p>	<p>Wege im Raum beschreiben: Wege auf einfachen Bildplänen beschreiben</p>
<p>Erarbeitung S suchen den Schatz im Klassenzimmer S erhalten in der Gruppe ein Päckchen mit Kieselsteinen S schätzen die Anzahl</p> <p>L: Zähle die Steine</p> <p>GA: S strukturieren die Menge: 3Gruppen ordnen nach der Fünferregel 2Gruppen strukturieren nach der Zehnerregel</p> <p>S stellen ihre Ergebnisse dar: Problem bei den Kindern, die nach der Fünferregel gebündelt haben: Sie verlieren den Überblick, welche Päckchen bereits gezählt worden sind; Zählfehler z.B. 55,60,65,75 Alle S verwenden nun die Bündelung mit 10</p> <p>Eintrag in die Stellenwerttabelle (Anknüpfung an die Kenntnisse aus der 1. Jahrgangsstufe)</p> <p>Vergleich des Schätz- und des Zählergebnisses (größer, kleiner, wie groß ist der Unterschied)</p> <p>PA: S erhalten weitere Edelsteinpäckchen: schätzen, bündeln und eintragen des Ergebnisses in die Stellenwerttabelle</p>	<p>Strukturieren von Mengen Entdecken von Strukturen</p>

An die Phase der Bündelung mit konkreten Gegenständen schließt sich **die Bündelung am Arbeitsmittel an**. (Kardinaler Zahlaspekt).

<p>Anknüpfung: Weg auf einem Bildplan gehen S finden eine Anzahl einzelner Holzwürfel</p>	<p>Wege auf einfachen Bildplänen gehen</p>
<p>Erarbeitung: S beginnen spontan nach der Zehnerregel zu bündeln, dabei entstehen unterschiedliche räumliche Anordnungen vgl. Bündelung in 1. Jgst.</p> <p>S tragen die Ergebnisse in die Stellenwerttabelle ein S erkennt: „10 einzelne Würfel sind so lang wie eine Zehnerstange“ (vgl. 1. Jahrgangsstufe) „Unsere Rechenstäbe sind schon gebündelt.“</p>	<p>Zusammenhang wurde bereits in der 1.</p>

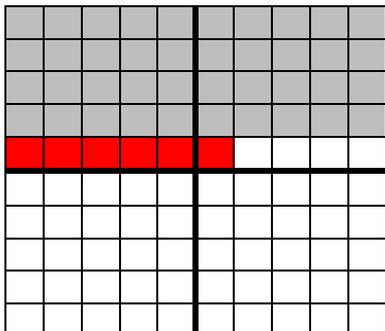
<p>S schieben die 10 einzelnen Würfel sehr eng zusammen und legen zur Kontrolle den Zehnerstab über die Einzelnen.</p> <p>PA: S legen Aufgaben mit Zehnern und Einern und tragen ihre Ergebnisse in die Stellenwerttabelle ein</p> <p>Übungen zur Zahl 100: 100 m gehen; 100 sec ruhig sein; 100 Seiten in einem Buch aufschlagen; 100 Zehen; 100 Finger; wie lange dauert es, bis man auf 100 gezählt hat;. 100 DM: Was kann ich mir dafür kaufen?; 100 Kinder an der Schule; 100 Fliesen auf dem Boden;....</p>	<p>Jahrgangsstufe thematisiert. Es erscheint jedoch so, als würde ihnen die Notwendigkeit einer Zehnerbündelung erst jetzt im größeren Zahlenraum einsichtig.</p>
--	---

Zeichnerische Darstellung der Bündelungen

<p>Anknüpfung Stellenwerttabelle S legen mit den Stäben</p> <p>PA: S überlegen sich, wie man die Aufgabe zeichnerisch darstellen könnte Alle S zeichnen das Hunderterfeld auf und gestalten die Zehner und Einer unterschiedlich farbig, z. B. 46.</p>  <p>Übertragung auf diese zeichnerische Darstellung</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>.....</p>	<p>Darstellung analog zum Hunderterfeld, um einen Richtungswechsel zu vermeiden.</p>
--	--

Zerlegen der Zahlen

Bsp 46



$$\begin{array}{c} 46 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 40 \quad + \quad 6 \end{array}$$

S legen die Zahl mit den Rechenstäben und notieren die Zehnerzerlegung.

Wir strukturieren die Zahlen (Ordinaler Zahlaspekt)

Hinführung

S erhalten Zahlenkarten mit den Zahlen 1-100

PA: S ordnen die Zahlenkarten

Alle S strukturieren in Form eines Zahlenstrahls.

Einige S ordnen die Zahlen vor

Ordnungsmerkmale:

Alle Zahlen, die an der Zehnerstelle eine 2 haben.

Alle Zahlen, die an der Einerstelle eine 4 haben.

Alle Zahlen, bei denen Zehner und Einer gleich sind.

Alle Zehnerzahlen,....

Platz auf der Bank reicht für die lineare

Anordnung vielfach nicht aus

Deshalb nimmt ein S das Hunderterfeld und legt die Zahlenkarten hinein

S vergleichen die beiden Anordnungen

Großes Hunderterfeld:

S erhalten Zahlenkarten und legen sie in das große Feld

S entdecken Strukturen:

„ Ganz rechts sind die Zehnerzahlen; von oben nach unten ändert sich der Zehner, die Einer bleiben gleich; von links nach rechts ändert sich der Einer, die Zehner bleiben gleich; dies stimmt bei der letzten Zahl nicht, denn da ändert sich bereits der Zehner; in der Schräge (Diagonale) von links oben nach rechts unten stehen die Zahlen, deren Zehner und Einer gleich sind; in der Schräge von rechts oben nach links unten werden die Einer immer um eins weniger;

5.2.2.3.4.2 Übungen zur Raumorientierung am Hunderterfeld

Radatz, Schipper, Dröge und Ebeling zeigen in ihrem Handbuch für den Mathematikunterricht viele Beispiele, die dem Kind helfen, die Struktur des Hunderterfeldes und damit strukturelle Eigenschaften der Zahlen bis 100 zu verinnerlichen (Radatz, H. u.a., 1998, S. 35ff).

Die Schüler benötigen für folgende Übungen:

- Ein strukturiertes Hunderterfeld ohne Zahlen. Es bietet sich an, dieses zu laminieren, so dass es von den Schülern mit einem Folienstift beschrieben werden kann.
- Eine Folie mit einem strukturierten Hunderterfeld mit Zahlen. Dies bietet Möglichkeiten der Selbstkontrolle.
- Muggelsteine zum Abdecken oder Markieren der Zahlenfelder
- Ein Hunderterfeld, bei dem nur das Kreuz als Einteilung vorgegeben ist. Die einzelnen Teile sind nicht strukturiert.

Übungen:

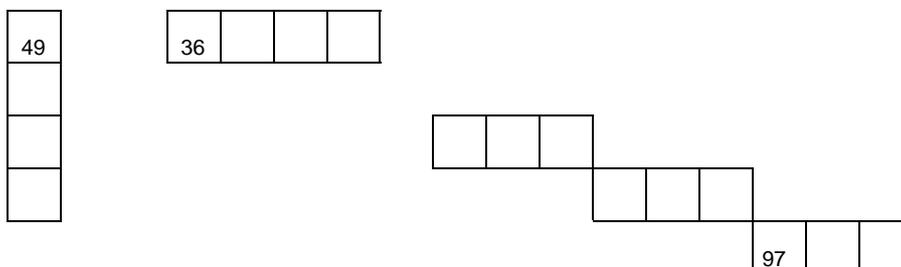
1. Spiel: Verdeckte Zahlen, verdeckte Felder

PA: Die Schüler decken gemeinsam mit Muggelsteinen ungefähr 20 Zahlen ab. Abwechselnd wählen sie einen Stein aus, nennen die verdeckte Zahl und begründen ihre Aussage. Sie überprüfen ihre Aussage durch Hochheben des Plättchens. Hat das Kind die richtige Zahl gefunden, so darf es den Muggelstein behalten. Ist die Aussage falsch, wird das Plättchen aus dem Spiel genommen. Sieger ist, wer die meisten Muggelsteine besitzt.

Schwieriger wird das Spiel, wenn es am leeren Hunderterfeld durchgeführt wird. Zur Kontrolle wird die Folie mit den Zahlen über das Feld gelegt.

Analog dazu werden einzelne Felder mit Muggelsteinen markiert. Ein Schüler bestimmt die Zahl, begründet die Wahl und schreibt mit einem Folienstift die Zahl in das Feld. Der Partner verwendet einen andersfarbigen Stift. Kontrolliert wird anhand der Folie. Sieger ist, wer die meisten Zahlen richtig zugeordnet hat.

2. Ausschnitte aus dem Hunderterfeld

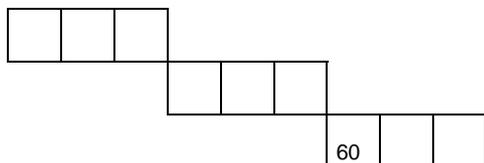


Zwei Möglichkeiten:

Ausschnitte werden vom Lehrer angefertigt.

Schüler erstellen selbst Ausschnitte. Dabei können sie ihre Einsichten in die Struktur des Hunderterfeldes vertiefen.

Die Schüler diskutieren über dieses Beispiel:



„Das kann nicht stimmen, weil die Zehnerzahlen ganz rechts stehen und keine Zahl mehr dahinter kommt.“

„Ich kann aber weiterzählen 61,62,63,... also kommen hinterdrein doch noch Zahlen.“

„Das stimmt schon. Als wir die Zahlen am Anfang in einer Reihe angeordnet haben, da kam rechts von 60 die Zahl 61. Aber wenn wir die Zahlen untereinander anordnen, dann stimmt es nicht mehr, weil die Zahlen mit einem Einer ganz links stehen.“

„Ich finde es aber nicht richtig, dass man die Zahl 61 da nicht hinschreiben darf, denn das schaut bei dem Teil so aus, als ob nach 60 keine Zahl mehr kommt und das stimmt nicht. Auf dem großen Feld sehe ich, dass nach 60 noch eine Zahl kommt, aber auf dem kleinen Teil nicht.“

„Wir haben die Zahlen auf dem Feld einfach so angeordnet, wir hätten es auch anders ordnen können, aber so ist es ausgemacht. Mir gefällt das schon, dass unter 61 gleich die Zahl 71 steht, denn wenn ich sie suche, finde ich sie leicht, weil ganz links immer die Zahlen sind, die bei den Einern eine eins haben.“

3. Nach Anweisung fahren

Schüler bewegen nach Anweisung einen Muggelstein auf dem strukturierten Hunderterfeld ohne Zahlen, z.B. „Beginne auf dem Feld der Zahl 9, fahre 3 Felder nach unten, 4 Felder nach links, 2 Felder nach unten und ein Feld nach rechts. Auf welchem Feld landest du?“

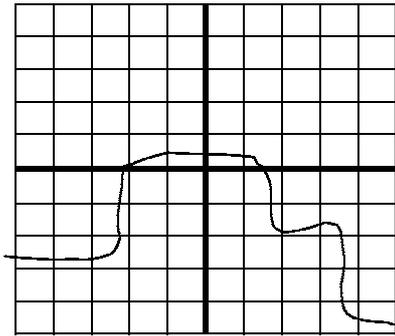
Die Schüler stellen sich gegenseitig Aufgaben. Dabei trainieren sie auch den richtigen Gebrauch der räumlichen Begriffe.

Leistungsstärkere Schüler können versuchen, die beschriebenen Wege in der Vorstellung zu gehen.

4. Zahlenkarten zuordnen

Die Schüler brauchen ein Hunderterfeld ohne Zahlen und einen Kartensatz mit den Zahlen 1-100. Sie ziehen eine Karte, ordnen sie in das Feld ein und begründen deren Platzierung. Selbstkontrolle erfolgt anhand der Folie.

5. Wege entschlüsseln: Über welche Zahlenfelder springt der Hase (Selbstkontrolle anhand der Folie).



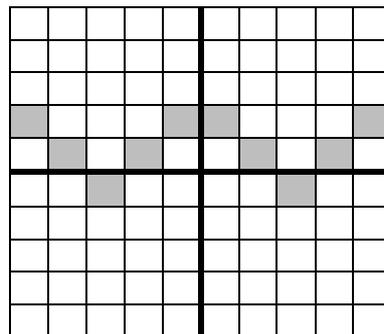
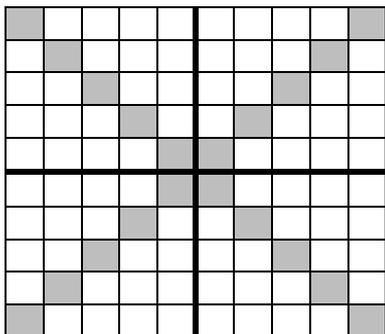
6. Hunderterfeldpuzzle.

Die Schüler zerschneiden ein Hunderterfeld mit Zahlen auf den Linien der Feldeinteilung in einzelne Puzzleteile. Die anderen Schüler setzen die Einzelteile wieder zusammen.

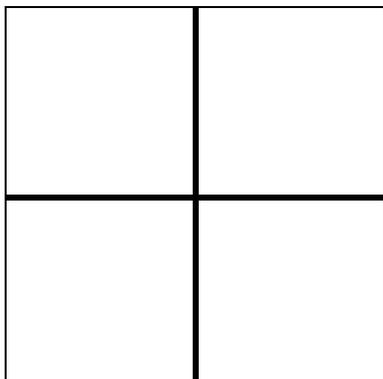
Differenzierung: Es stehen nicht alle Zahlen in den Teilen, sondern in jedem Feld steht nur eine Zahl.

7. Muster zeichnen

Die Schüler zeichnen in ein leeres strukturiertes Hunderterfeld Muster. Den angemalten Feldern werden anschließend Zahlen zugeordnet. Bsp:



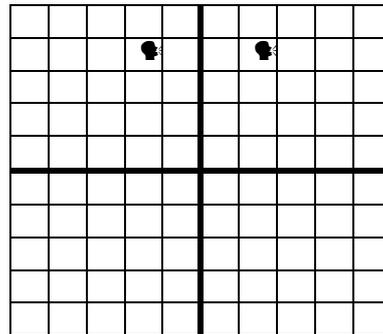
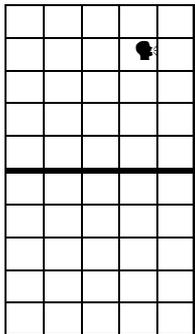
8. Bist du ein guter Späher? Wo ungefähr liegt die Zahl?



Wo liegt die Zahl 65? Triffst du in ihr Feld? Die Schüler begründen ihre Wahl und machen mit dem Folienstift ein Kreuz an die Stelle, an der sie die Zahl vermuten. Die Kontrolle erfolgt anhand der Folie.

8. Wie heißen die gegenüberliegenden Zahlen?

Die Mittellinie des Hunderterfeldes wird als Faltachse benutzt. Mit der Nadel wird ein Feld durchstochen. Die Schüler bestimmen beide Zahlen.



9. Auf welche Zahl fällt das Licht?

An der Tafel ist ein großes strukturiertes Hunderterfeld aufgezeichnet. Mit dem Laserpointer wird ein Feld markiert. Die Schüler ordnen dem Feld eine Zahl zu.

10. Pfeilbilder

$$36 \begin{matrix} \uparrow \\ \text{1} \end{matrix} \square \quad 45 \begin{matrix} \downarrow \\ \text{2} \end{matrix} \square \quad 58 \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{1} \end{matrix} \square \quad 64 \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{3} \end{matrix} \square$$

Die Zahl in den Kreisen bezeichnet die Anzahl der Schritte, der Pfeil die Richtung.

Leistungsschwächere Schüler führen die Handlung am strukturierten leeren Hunderterfeld aus.

Leistungstärkere Schüler gehen den Weg in der Vorstellung.

Sie erhalten auch Aufgaben folgender Art oder erstellen selbst Pfeilbilder.

$$\square \begin{matrix} \uparrow \\ \text{3} \end{matrix} 54 \quad 55 \begin{matrix} \circ \\ \text{75} \end{matrix} \quad 3 \begin{matrix} \nwarrow \\ \text{1} \end{matrix} \square \quad 45 \begin{matrix} \nearrow \\ \text{2} \end{matrix} \square$$

5.2.2.3.4.3 Rechnen im Zahlenraum bis 100

5.2.2.3.4.3.1 Addition

Ausgangspunkt sind die Vorkenntnisse der Schüler. Sie schreiben auf Kärtchen Aufgaben aus dem Zahlenraum bis 100, die sie bereits lösen können bzw. die sie gerne lösen wollen.

Anschließend strukturieren sie selbstständig nach Plus- und Minusaufgaben. Aus den von den Schülern erstellten Aufgaben wählt der Lehrer nun einige Plusaufgaben aus, die erneut strukturiert werden sollen:

39+29 58+31 62+7 52+9 64+30
28+23 25+32 75+3 67+4 57+40

Die Schüler finden unterschiedliche Strukturierungskriterien:

- Sie ordnen die Aufgaben nach der Größe des ersten Summanden.
- Analog dazu ordnen sie nach der Größe des zweiten Summanden.
- Sie unterscheiden nach ein- und zweistelligem zweiten Summanden.
- Einige berechnen die Ergebnisse (im Kopf oder anhand des Arbeitsmittels) und ordnen die Ergebnisse nach der Größe. Bei der Berechnung gehen sie bisweilen gezielt vor. Zunächst lösen sie die Aufgaben mit einstelligem zweiten Summanden, ehe sie sich an den ZE+ZE Aufgaben versuchen.

Die Schüler stellen nun ihre Ordnungen vor. Im Anschluss daran werden an der Tafel die Aufgaben nach ein- und zweistelligem zweiten Summanden strukturiert.

Alle Schüler werden nun aufgefordert, in Gruppenarbeit alle Aufgaben mit Hilfe der Arbeitsmittel zu lösen. Sie ermitteln so alle Ergebnisse, ohne dass die Aufgaben systematisch behandelt worden wären. Sie gewinnen so die Einsicht, dass es anhand der Arbeitsmittel möglich ist, alle Plusaufgaben bis 100 zu lösen.

Bei der anschließenden Besprechung äußern sie sich zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben: „Einige Aufgaben kann man leicht ausrechnen, weil man nicht über den Zehner rechnen muss. Bei den großen Aufgaben (ZE+ZE) muss man gut aufpassen, sonst verrechnet man sich.“

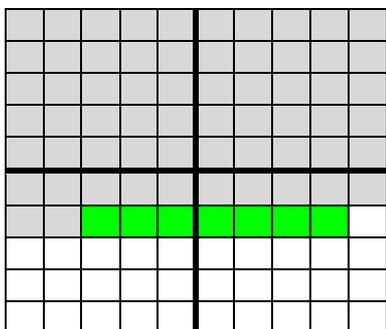
Die Schüler strukturieren dann die Aufgaben mit einstelligem zweiten Summanden nach Aufgaben ohne und mit Zehnerübergang.

In den folgenden Unterrichtseinheiten werden die Plusaufgaben systematisch behandelt.

ZE+E (ohne Zehnerübergang)

$$62+7$$

Die Schüler stellen anhand des Arbeitsmittels ihre Lösungsmöglichkeit vor:



S: „Ich rechne $2+7=9$ und dann denke ich mir, dass ich noch die 6 Zehner habe und dann weiß ich, dass das Ergebnis 69 ist.“

Die Schüler erstellen Aufgabenreihen mit dekadischer Analogie:

$$4+6=10$$

$$14+6=20$$

$$24+6=30$$

(S schieben jeweils eine Zehnerstange zusätzlich in das Feld.)

Einige Schüler erkennen Parallelen zu den Minusaufgaben mit dekadischer Analogie.

Einige leistungsstarke Schüler wollen den Zahlenraum bis 100 verlassen und die Aufgaben mit dekadischer Analogie weiterspinnen. Dabei entsteht das Problem, wie Aufgaben über 100 am Arbeitsmittel dargestellt werden können, bzw. wie das Zahlenfeld erweitert werden könnte.

Die Schüler diskutieren:

„Wir hängen die Stäbe einfach an das Feld unten daran.“

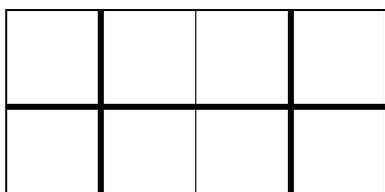
„Dann sehen wir aber nicht mehr, wie viele es sind, weil wir keine Striche mehr haben.“

„Aber wenn ich noch 3 oder 4 Zehner dazutue, sehe ich das Ergebnis auch ohne Striche. Wenn es mehr Zehner sind, dann muss ich abzählen.“

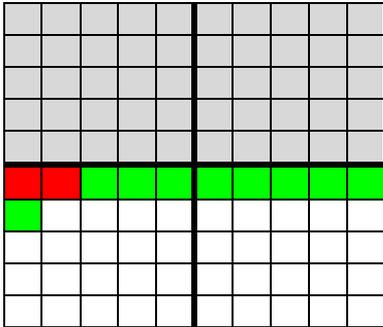
„Wir könnten ein zweites Zahlenfeld nehmen. Das erste ist voll, da fangen wir einfach ein neues an, dann haben wir wieder 100, und dann wieder eins und dann wieder eins.“

„Wir könnten den Rand um das Rechenfeld wegschneiden und die beiden Felder untereinanderlegen, dann könnten wir mit den Stäben weiterrechnen.“

„Mir würde auch gefallen, wenn wir die Felder nebeneinanderlegen, dann ist es so wie bei unserem Rechenband. Da waren die Zahlen auch nebeneinander und jetzt sind eben die Hunderter nebeneinander.“



2.S: „Ich weiß die kleine Aufgabe $2+9=11$ und dann denke ich mir die 5 Zehner dazu, dann weiß ich, dass das Ergebnis 61 ist.“



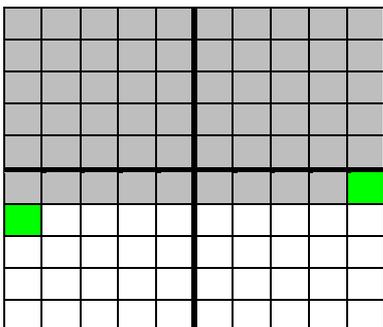
Notationen:

$$\begin{aligned} 2 + 9 &= 11 \\ 11 + 50 &= 61 \end{aligned}$$

$$2 + 9 + 50 = 61$$

3. S: „Ich vertausche die Einer und rechne $59+2$. Das geht schneller, denn ich brauche nur um 2 weiterzählen.“

S: „Ich vertausche auch die Einer. Ich zähle aber nicht weiter, sondern ich rechne $9+2=11$. Dann nehme ich die 5 Zehner dazu, dann ist das Ergebnis 61.“



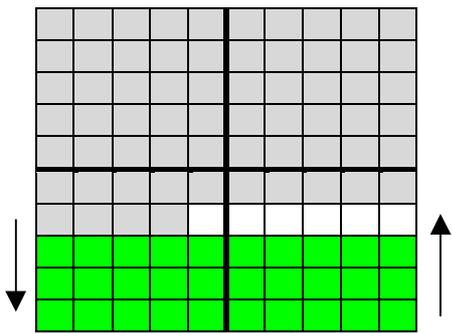
Notationen:

$$59 + 2 = 61$$

$$9 + 2 + 50 = 61$$

ZE+Z: 64+30

1.

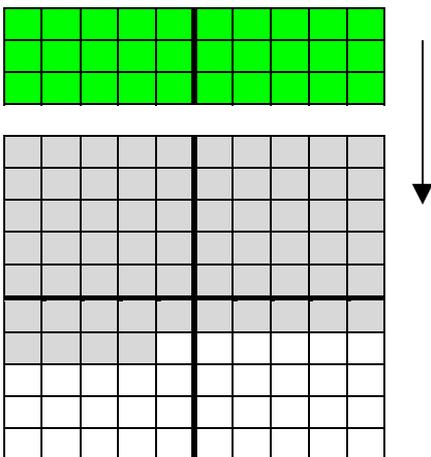


Die Schüler schieben die 3 Zehnerstangen zu den anderen Zehnerstangen und fügen die 4 Einzelnen unten an.

Notation:

$$60 + 30 + 4 = 94$$

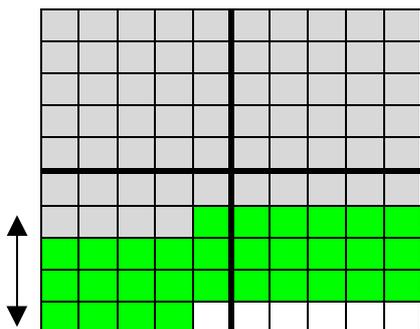
2. Einige Schüler schieben die 3 Zehnerstangen von oben in das Rechenfeld. S begründen: „Mir gefällt es nicht, wenn die 6 Zehner und 4 Einer auseinandergerissen werden. Wenn ich die 3 Zehner von oben hineinschiebe, dann können sie beieinanderbleiben.“



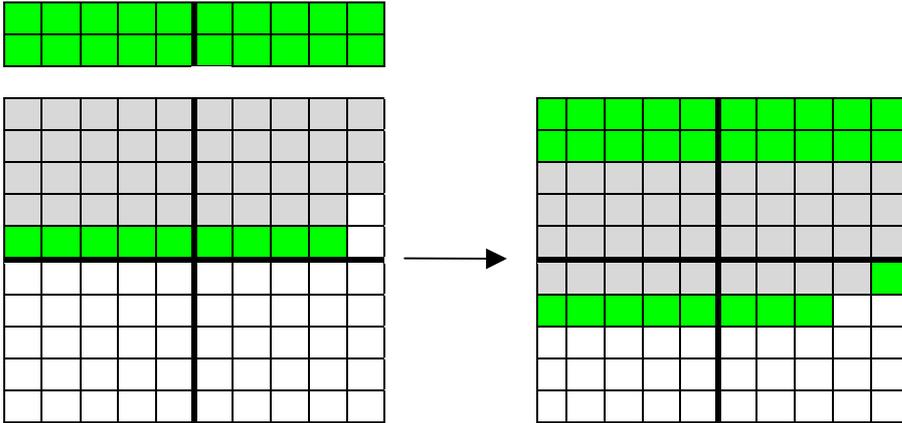
Notation:

$$30 + 60 + 4 = 94$$

3. Einige versuchen die Aufgabe mit Hilfe einer komplizierten Zahlzerlegung zu lösen

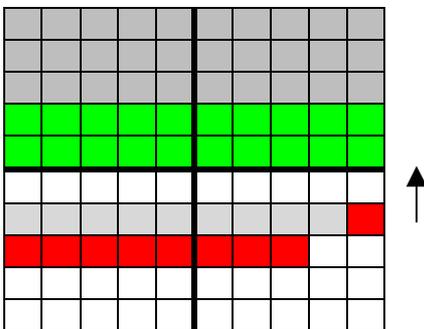


2.



Notation analog zu 1.

3.

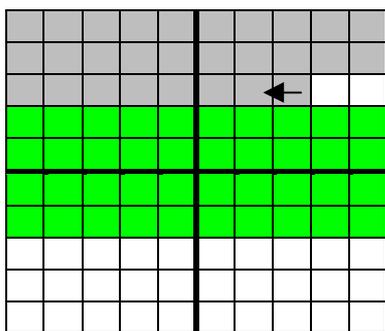


Notationen: $30 + 20 = 50$
 $9 + 9 = 18$
 $50 + 18 = 68$

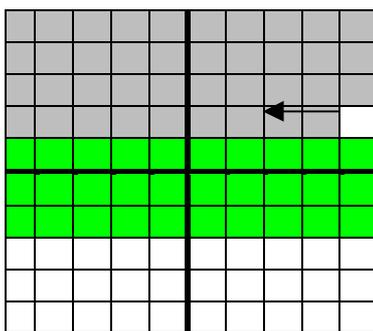
Nachdem die verschiedenen Plusaufgaben im Zahlenraum bis 100 behandelt sind, wird in der Klasse über die Aufgaben und die Lösungsmöglichkeiten diskutiert.

Erkenntnis der Schüler: „Die Aufgaben ZE+ZE sind am schwierigsten, denn ich muss all die anderen Aufgaben (dekadische Analogie, ZE+E, ZE+Z) gut rechnen können, damit ich diese Aufgaben lösen kann.“

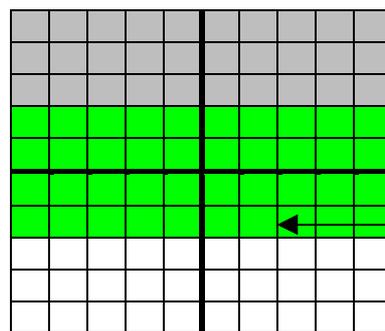
Zu einem späteren Zeitpunkt wurden im Unterricht Rechenvorteile erarbeitet. Die Schüler finden zu der Aufgabe $28+39$ folgende zusätzliche Rechenwege, die sie anhand der Arbeitsmittel verdeutlichte



$$\begin{array}{r} 28 + 39 \\ \quad \wedge \\ 40 - 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 28 + 39 \\ \quad \wedge \\ + 30 - 2 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 28 + 39 \\ \quad \wedge \quad | \\ 30 + 40 - 3 \end{array}$$

5.2.2.3.4.3.2 Subtraktion

Analog zur Addition werden auch Minusaufgaben strukturiert und nach ihrem Schwierigkeitsgrad eingeteilt

91-36 26-3 48-9 57-30

58-29 35-4 74-5 68-40

Die Schüler lösen die verschiedenen Aufgaben anhand der Arbeitsmittel.

Dann entscheiden sie, in welcher Reihenfolge es sinnvoll wäre, die Aufgaben zu bearbeiten. Die

Schüler meinen:

ZE-E

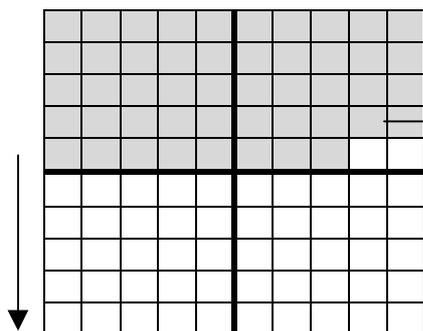
ZE-Z

ZE-ZE

Zwei leistungsstarke Schüler meinen: „Ich möchte gleich ZE-ZE rechnen, weil ich die anderen schon rechnen kann.“ Beide erhalten im Rahmen der Differenzierung komplexere Aufgaben.

ZE-E: 48-9

1.



Mögliche Notationen:

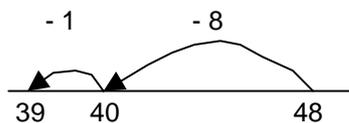
$$48 - 9 = 39$$

$$\begin{array}{r} / \quad \backslash \\ - 8 \quad - 1 \end{array}$$

oder

$$48 - 9 = 39$$

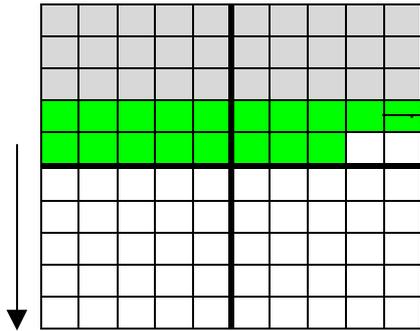
$$\begin{array}{r} / \quad \backslash \\ - 8 \quad - 1 \\ 40 \end{array}$$



S: „Ich zerlege 9. Ich mache den Zehner leer 48-8=40 40-1=39.“

Die Schüler nehmen den 8er Stab weg und streichen von der 4 Zehnerstange eines weg.

2.



Mögliche Notation:

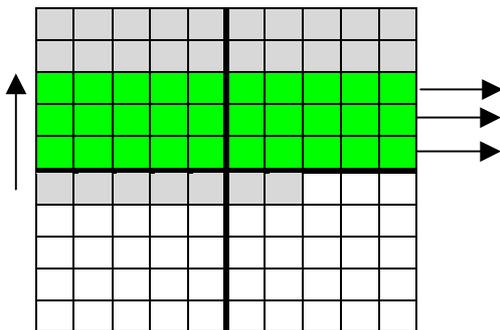
$$18 - 9 = 9$$

$$48 - 9 = 39$$

Nur wenige können ihre Kenntnisse über die Umkehrung der Einspluseinsätze bis 20 auf das Rechnen im Zahlenraum bis 100 transformieren, während es den meisten bei den Plusaufgaben gut gelingt.

ZE-Z. 57-30

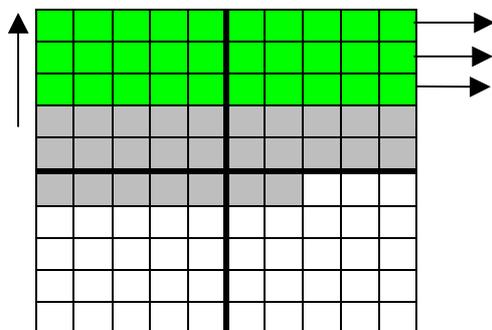
1.



Die Schüler schieben die 3 Zehnerstangen aus dem Feld und fügen die 7 Einzelnen zu den verbleibenden 2 Zehnerstangen hinzu.

Mögliche Notation: $57-30=27$

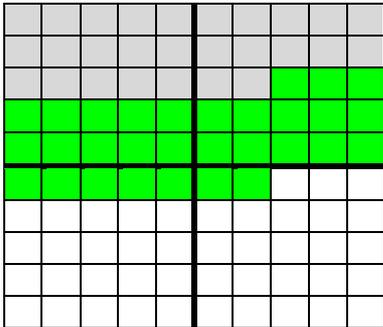
2.



Mögliche Notation: $57-30=27$

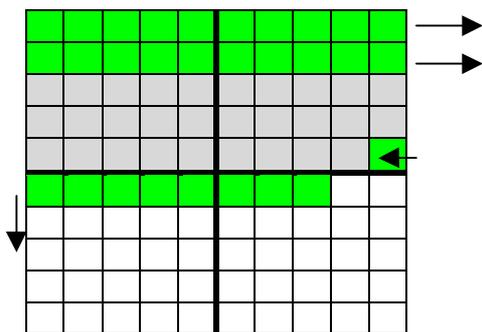
Die drei Zehner werden von den oberen Reihen genommen. Die restlichen Zehner und die Einer bleiben so als Einheit erhalten.

3. Analog zur Addition versuchen auch bei der Subtraktion einige Schüler die 30 zu zerlegen. Sie nehmen die 7 Einer und zwei Zehner weg. Sie erkennen, dass nun noch 3 weggenommen werden müssen, lösen die Aufgabe 30-3 jedoch falsch.



ZE-ZE: 58-29

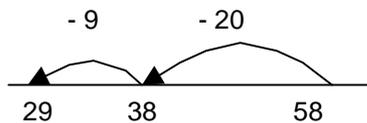
1.



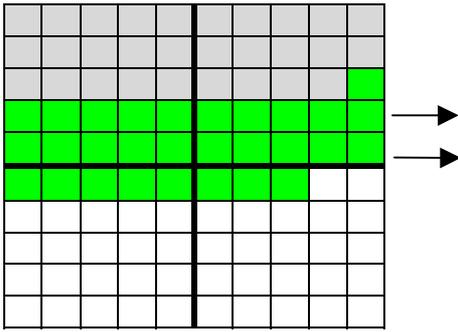
Mögliche Notationen:

$$58 - 29 = 29 \qquad 58 - 29 = 58 - 20 - 9 = 29$$

$$\begin{array}{r} / \quad \backslash \\ -20 \quad -9 \\ 38 \end{array}$$



2.



Die Schüler schieben 2 Zehnerstangen aus der Mitte heraus und lösen so die Einheit der 58 auf. Diesen Weg wählen nur sehr wenige.

An die Erarbeitung der verschiedenen Aufgabentypen schließt sich eine Phase der Reflexion (analog zur Addition).

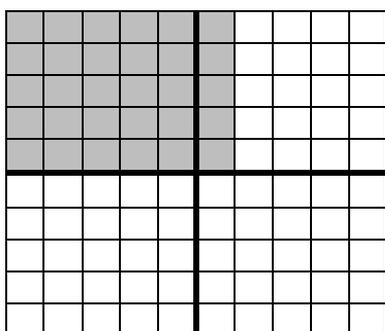
5.2.2.3.4.3.3 Multiplikation

Die Einmaleinssätze werden nicht wie bisher über die Einmaleinsreihen erschlossen. Um einen Gesamtzusammenhang zu vermitteln, wird die gesamte Sequenz zu den Malaufgaben dargestellt, in die die Arbeit mit dem Arbeitsmittel eingebunden ist.

1. Begriff Multiplikation: Multiplikation verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch

- Sachhintergrund: Wir bereiten eine Geburtstagsfeier vor. Die Schüler führen Handlungen mit konkreten Materialien durch. Dabei wird der zeitlich- sukzessive und der räumlich-simultane Aspekt der Multiplikation berücksichtigt. Es wird dabei das Operationszeichen mal eingeführt, die Schüler ermitteln das Ergebnis der Multiplikation mit Hilfe der Additionsaufgabe.
- In der nächsten Unterrichtseinheit stellen die Schüler die Handlungen zeichnerisch dar, dabei Notation der Additions- und Multiplikationsaufgabe.
Es werden mit den Schülern Strategien zum schnelleren Lösen der Additionsaufgabe entwickelt, z.B.
 $7 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 + 6 + 3 = 21$
 $6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 12 + 12 + 12 = 36$
- Ziel der nachfolgenden kurzen Unterrichtseinheiten ist es, die Malaufgaben mit allen Sinnen zu erfassen (z.B. 5×3 klatschen, klopfen, patschen,....hören)
- Die Schüler suchen Malaufgaben zu Gegenständen im Klassenzimmer.

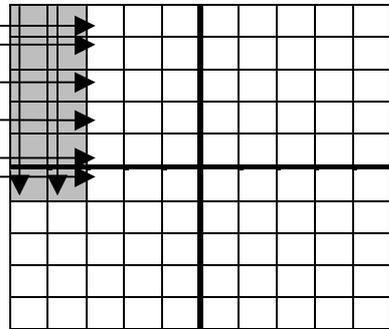
Die Schüler stellen dann Malaufgaben mit Arbeitsmitteln dar und berechnen die Ergebnisse mit Hilfe der Additionsaufgabe (vorteilhaftes Zusammenfassen).



$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 12 + 12 + 6 = 5 \times 6 = 30$$

- Wir bilden Malaufgaben zu Verpackungen, z.B. Ich habe 3 Packungen Puddingpulver mit je 3 Beutel $3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$
„Malausstellung“: Die Schüler bringen Gegenstände mit und bilden die Malaufgabe dazu.

- Verpackungen: Einführung der Tauschaufgabe der Multiplikation, z.B. Negerküsse
S verbalisieren: Ich habe 3 Reihen mit je 8 Mohrenköpfen oder ich habe 8 Reihen mit je 3 Mohrenköpfen.
- Im Anschluss daran bilden die Schüler Tauschaufgaben anhand des Arbeitsmittels.



$$6 \times 2 = 2 \times 6$$

- Die Schüler bilden Malaufgaben und strukturieren sie (Einmaleins-Tabelle).
- In den folgenden Stunden werden die Kernaufgaben des Einmaleins erschlossen

Wir nehmen 2mal

Die Schüler erschließen sich die Malaufgaben über die bereits bekannten Verdopplungsaufgaben. Diese werden ebenso wie die Tauschaufgabe dazu automatisiert
Eintrag der Ergebnisse in die Einmaleinstabelle.



$$2 \times 7 = 14$$

Wir nehmen 1mal

S bilden Malaufgaben zu den einzelnen Rechenstäben

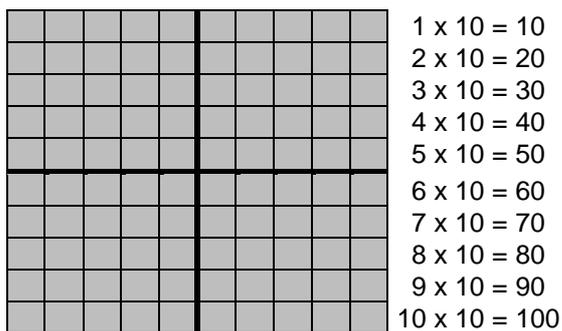


$$1 \times 5 = 5$$

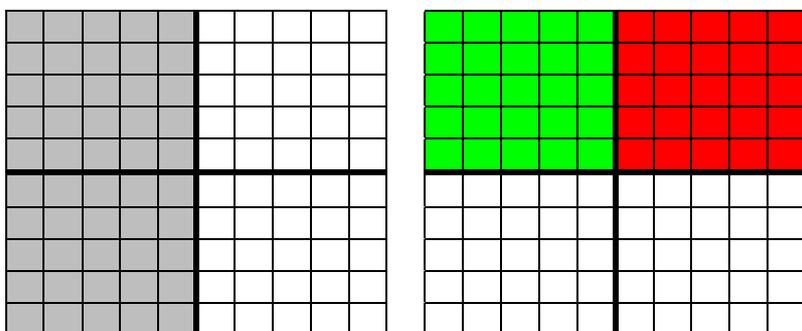
$$1 \times 3 = 3$$

Erarbeitung der Tauschaufgaben und Eintrag in die Einmaleinstabelle.

Das Einmaleins mit 10 wird anhand des Arbeitsmittels erarbeitet.

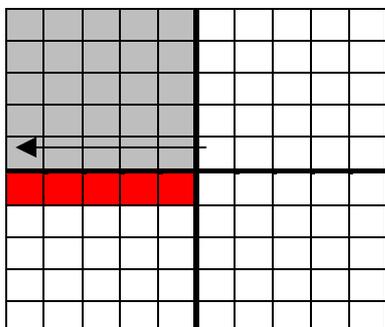


Auch das Einmaleins mit 5 wird mit Hilfe des Arbeitsmittels erarbeitet. (Bezugnahme auf die 10er und 5er Struktur des Arbeitsmittels)



Einprägestrategie der Ergebnisse: Die Stäbe werden während der Übungsphase wie in Darstellung 2 angeordnet, um den Schülern den Wechsel der Ergebnisse (Wechsel zwischen einer Zehnerzahl und Zahlen, die an der Einerstelle eine 5 haben) zu verdeutlichen.

Beim Erstellen der Einmaleinsreihen werden operative Strategien entwickelt. Die Aufgaben 4×5 und 6×5 werden über die Aufgabe 5×5 erschlossen, ebenso wird die Aufgabe 9×5 als $10 \times 5 - 5$ dargestellt.

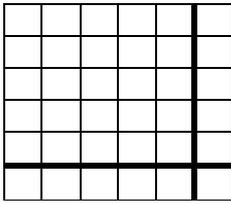


$$4 \times 5 = 5 \times 5 - 5$$

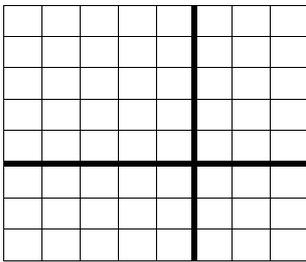
$$5 \times 5$$

$$6 \times 5 = 5 \times 5 + 5$$

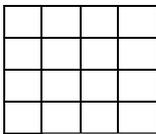
Die Quadratsätze werden durch Ausschneiden von Teilfeldern aus der Hundertertafel ermittelt. So wird den Schülern der Begriff Quadratsatz einsichtig.



$$3 \times 3 = 9$$



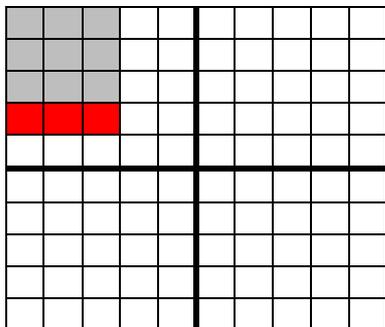
$$4 \times 4 = 16$$



$$4 \times 4 = 16$$

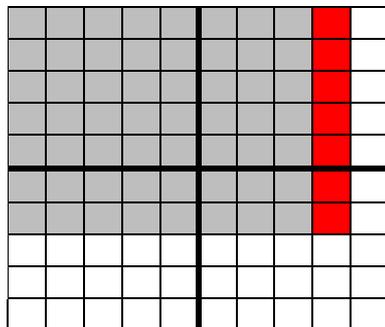
Alle bekannten Kernsätze werden in die Einmaleinstabelle eingetragen und in vielfältigen Übungen automatisiert.

- Zu einem späteren Zeitpunkt wurden folgende Strategien entwickelt, die es dem Schüler ermöglichen, alle Einmaleinsaufgaben des kleinen Einmaleinses zu lösen.
 - Nachbaraufgaben zu den Kernaufgaben lösen



$$3 \times 3 = 9$$

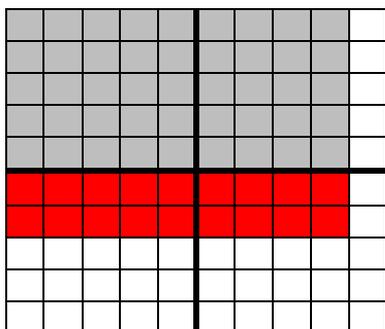
$$4 \times 3 = 9 + 3 = 12$$



$$7 \times 8 = 56$$

$$7 \times 9 = 56 + 7 = 63$$

- Kernaufgaben additiv zusammensetzen, bzw. Malaufgaben in Kernaufgaben zerlegen



$$7 \times 9 = 5 \times 9 + 2 \times 9 = 63$$

Die Schüler können so in der 2. Jahrgangsstufe alle Aufgaben des kleinen Einmaleinses lösen.

5.2.2.3.4.3.4 Division

Aufgaben der Division werden erst erschlossen, wenn die Schüler im Lösen von Multiplikationsaufgaben sicher sind. „Die Kinder müssen erst ein begriffliches Verständnis vom Multiplizieren und eine gewisse rechnerische Sicherheit im Umgang mit dieser Operation entwickelt haben, ehe die Umkehroperation Division im Unterricht thematisiert werden kann. Daher wird ... eine zeitlich getrennte Behandlung der beiden Operationen empfohlen und nicht ein gleichzeitiges Erarbeiten von Multiplikation und Division von Anfang an.“ (Radatz, H., u.a., 1996, S. 81)

Divisionssätze prägen sich Kinder meist über bekannte Multiplikationsaufgaben ein. Analog zur Addition / Subtraktion lernen sie Zahlentripel kennen und ordnen ihnen 4 Aufgaben zu.

Beispiel:

Mit den Zahlen 7,5,35 können folgende vier Aufgaben gebildet werden:

$$7 \times 5 = 35$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$35 : 5 = 7$$

$$35 : 7 = 5$$

Divisionsaufgaben, die die Schüler nicht auswendig wissen, erschließen sie sich am Arbeitsmittel wie folgt:

Sie verwenden den Zahlenstrahl, markieren die zu teilende Zahl mit einem Muggelstein und unterteilen die Gesamtmenge in gleichlange Teillängen.

Beispiel: $16 : 4 =$



So können auch Aufgaben mit Rest anschaulich gelöst werden.

Beispiel: $17 : 5 =$



5.2.2.3.4.4 Die Entwicklung des Zahlenstrahls aus dem Hunderterfeld

Der Zahlenstrahl ist ein Modell, das Kindern nur schwer zugänglich ist, der aber für ein Verständnis der Strukturierung der natürlichen Zahlen unverzichtbar ist. (Begründung bei Radatz, H. u.a., 1998, S. 38 ff)

Die Schüler hatten bereits in der 1.Jahrgangsstufe Erfahrungen zu einer linearen Anordnung der Zahlen gemacht. So ordneten sie beispielsweise bei Zerlegungen im zweiten Zehner oder bei Zahlenfolgen die Rechenstäbe linear an.

Die Einführung des Zahlenstrahls erfolgt nun in der 2. Jahrgangsstufe in 3 Schritten, die zeitlich getrennt sind.

5.2.2.3.4.4.1 Vom Hunderterfeld zum Zahlenband

Es wurden viele Übungen zur Anordnung der Zahlen auf dem Hunderterfeld gemacht. Es war das zentrale Arbeitsmittel, das in prägnanter Weise die Zahlbeziehungen verdeutlicht. Wie aber auch die Versuche der Kinder bei der Anordnung der Zahlen zeigen, streben diese danach, die Zahlen in einer Reihe anzuordnen, die beliebig fortgesetzt werden kann. Zudem erleichtert die lineare Anordnung das Finden von Nachbarzahlen, Nachbarzehnern und Zahlenfolgen. Deshalb entwickeln die Schüler aus dem Hunderterfeld ein Zahlenband.

<p>Problemstellung Nachbarzahlen</p> <p>60 S bestimmen den Nachfolger Erkenntnis: 60 und 61 sind auf dem Feld räumlich sehr weit getrennt. S überlegen sich Änderungsvorschläge. S legen die Stäbe in das Hunderterfeld S: „Man kann die Stäbe auch umlegen. Man kann sie hintereinander legen.“ S ordnen die Stäbe linear an.</p> <p>Anschließend zerschneiden sie ein Hunderterfeld in 10 Streifen und kleben diese zu einem Zahlenband zusammen.</p> <p>S: „Es ist aber schwierig eine Zahl auf dem Band zu finden.“ S kennzeichnen deshalb die Zehnerzahlen. S: „Jetzt brauche ich nicht mehr zu zählen, ich weiß, wo 30 ist, der rote Strich bedeutet immer 5, also springe ich bei 36 auf 30 und dann 5 und 1.“</p>	<p>Entdecken von Strukturen des Zahlenstrahls</p>
---	---

In der nächsten Unterrichtseinheit werden Orientierungsübungen am Zahlenband durchgeführt: (Übungen bei Radatz, H. u.a., 1998, S. 40)

1. Zeige auf dem Zahlenband das Feld 47!
2. Zeige am Zahlenband 47 Felder, knicke das Zahlenband an dieser Stelle!
3. Zeige mit dem Finger auf Feld 5, gehe in 5er Schritten vorwärts. Auf welche Felder triffst du?
4. Zeige am Zahlenband, wie weit dein Playmobilmännchen bis 40 gehen muss.
5. Würfelspiele am Zahlenband.

Mit Hilfe des Zahlenbandes werden Nachbarzahlen und Nachbarzehner gefunden, Zahlenfolgen gebildet und fortgesetzt, sowie Zahlen der Größe nach geordnet. (Einige Schüler führen diese Übungen auch mit dem Zahlenfeld durch.)

5.2.2.3.4.4.2 Vom Zahlenband zum leeren Zahlenstrahl

Die Entwicklung des Zahlenstrahls wird bei der Erarbeitung von ZE-+ZE Aufgaben weitergeführt. Die Notation am unskalierten Zahlenstrahl wird als eine mögliche Notationsform erarbeitet.

<p>Hinführung S erhalten ein Zahlenband ohne Einteilung L: Suche auf dem Band die Zahl 50 S schätzen und vergleichen ihre Ergebnisse S: „ 50 ist die Hälfte von 100, also muss die Zahl 50 genau in der Mitte sein. S falten das leere Zahlenband</p> <p>S: zeichne die Zahl 50 ein</p> <p>S machen Vorschläge --- = Faltlinie</p> <div style="margin-top: 10px;"> </div> <p style="margin-top: 10px;">S: „Wir zeichnen nur einen Strich für die Zahl 50, dann ist 50 genau da, wo die Mitte des Bandes ist. Ich habe bei meiner Schwester schon einmal so einen Streifen gesehen, da waren auch nur Striche darauf. „</p> <p>S suchen weitere Zahlen auf dem Zahlenstrahl Dabei sind die S auf die Zehnerzahlen fixiert. „ Wir müssen jetzt für einen Zehner einmal knicken, das ist bestimmt nicht einfach , weil man bei 10,20,30,40 knicken muss. Der Abstand muss</p>	
--	--

<p>gleich sein.“ „Wir könnten das Band noch einmal in der Mitte knicken“ Leistungsstärkere berechnen die Zahl: 25 S markieren die Zahlen 25 und 75</p> <p>S markieren einige Zahlen (nach Augenmaß) S vergleichen mit einem Zahlenband, in dem die Zahlen eingetragen sind.</p>	
---	--

5.2.2.3.4.4.3 Der vollständige Zahlenstrahl

Erst am Schuljahresende, nachdem die Zahlen bis 100 verinnerlicht sind, wird der eigentliche Zahlenstrahl eingeführt. Die Schüler erarbeiten sich die Struktur selbstständig, da sie bereits Erfahrungen zu den Teilungsaufgaben und zu den Längenmaßen gemacht haben.

Ausgangspunkt ist eine ein Meter lange Gerade

- Die Schüler markieren sich den Anfangs- und den Endpunkt: 0,100
- S markieren die Zahl 50 durch Falten oder Messen
- S kennzeichnen die Zehnerzahlen. S: „Wir brauchen 5 Teile (meint Zwischenräume) zwischen 0 und 50. $50 \text{ cm} : 5 = 10 \text{ cm}$.“ S messen ab und markieren die Zehnerzahlen rot.
- „In der Mitte zwischen zwei Zehnern liegt die 5“ Die Schüler bestimmen die 5er Zahlen erneut durch Abmessen.
- Zuletzt bestimmen sie die Einzelnen.

5.3 Das Mathematiklernen einzelner Schüler

Um einen Einblick in individuelle Lernprozesse zu geben, wird im Folgenden das Mathematiklernen einzelner Schüler detaillierter beschrieben. Ausgewählt werden vier Schüler, die in ihrer Art jeweils recht verschiedenartig sind und Spielarten von Individualität darstellen, die für das gestellte Thema und seine Fokussierung interessant scheinen.

- Maximilian ist ein Schüler mit sehr guten visuellen Fähigkeiten und einer ausgeprägten Denk- und Merkfähigkeit. Er setzt entscheidende Impulse bei der Gestaltung des Arbeitsmittels. Seine Arbeit mit dem Material zeigt, dass es auch von leistungsstarken Schülern gerne verwendet wird, um sich selbstständig neue Inhalte zu erschließen.
- Lena ist eine Schülerin mit einer sprachlichen Teilleistungsschwäche. Ihr Umgang mit dem Arbeitsmittel verdeutlicht, dass Schüler, die noch nicht genügend Erfahrungen zum zählenden Rechnen gemacht haben, lange auf dieser Ebene verweilen und erst allmählich die mathematische Struktur des Anschauungsmittels verinnerlichen.
- Patrick kam erst gegen Ende des 1. Schuljahres in die Klasse. Es wird gezeigt, wie er sich dem Arbeitsmittel nähert und wie er es beurteilt.
- Philipp ist körperbehindert. Er hat erhebliche Probleme bei der Raumorientierung und in der visuellen Wahrnehmung, insbesondere in der visuomotorischen Koordination. Dargestellt wird, wie sich diese im alltäglichen Unterricht auswirken und seinen Umgang mit dem Arbeitsmittel beeinflussen.

5.3.1 Maximilian

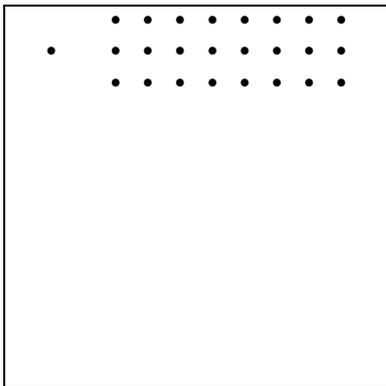
5.3.1.1 Beobachtungen bei der Entwicklung des Arbeitsmaterials

5.3.1.1.1 Geobrett

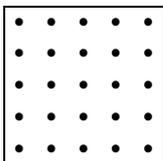
Bei Zählübungen zu Beginn der 1.Jahrgangsstufe „strukturiert“ Maximilian nach gezählten und ungezählten Elementen. Dadurch dass er sie räumlich trennt, unterlaufen ihm keine Zählfehler (auch nicht bei größeren Mengen).

Aufgrund der Zählfehler der anderen Schüler erkennt er jedoch die Notwendigkeit einer Strukturierung und ordnet die Mengen meist in 2er oder 5er Bündel an.

Für die 25 Nägel des Geobrettes wählt er folgende Ordnung:

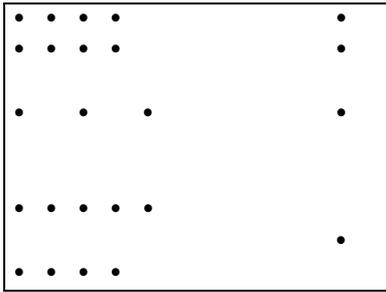


Er kommentiert: „Ich habe immer 8 Nägel in eine Reihe gesteckt, so kann ich sie gut zählen. Was mir nicht so gefällt ist der eine Nagel, der mir übrig bleibt. Der passt nicht zu den anderen. Den Platz habe ich auch nicht ausgenutzt. Das was die Tanja gemacht hat, gefällt mir besser.“



Da bleibt kein Nagel übrig und alle sind genau auf dem Feld verteilt.“

Bei der anschließenden zeichnerischen Darstellung übernimmt Maximilian die 5er Struktur. Vertikal gelingt ihm die Aufteilung des Raumes, horizontal noch nicht.



Müheless ordnet er Punkten auf dem Geobrett Punkte auf der zeichnerischen Darstellung zu. Geometrische Figuren überträgt er sicher.

5.3.1.1.2 Arbeit mit den Stäben

Maximilian gibt die entscheidenden Impulse zur Strukturierung der Stäbe.

Beim freien Spiel mit den Stäben baut er spontan ein Labyrinth. Anschließend ordnet er sie nach der Größe: „Damit kann man eine Treppe bauen. Die Stäbe werden immer um eins länger.“

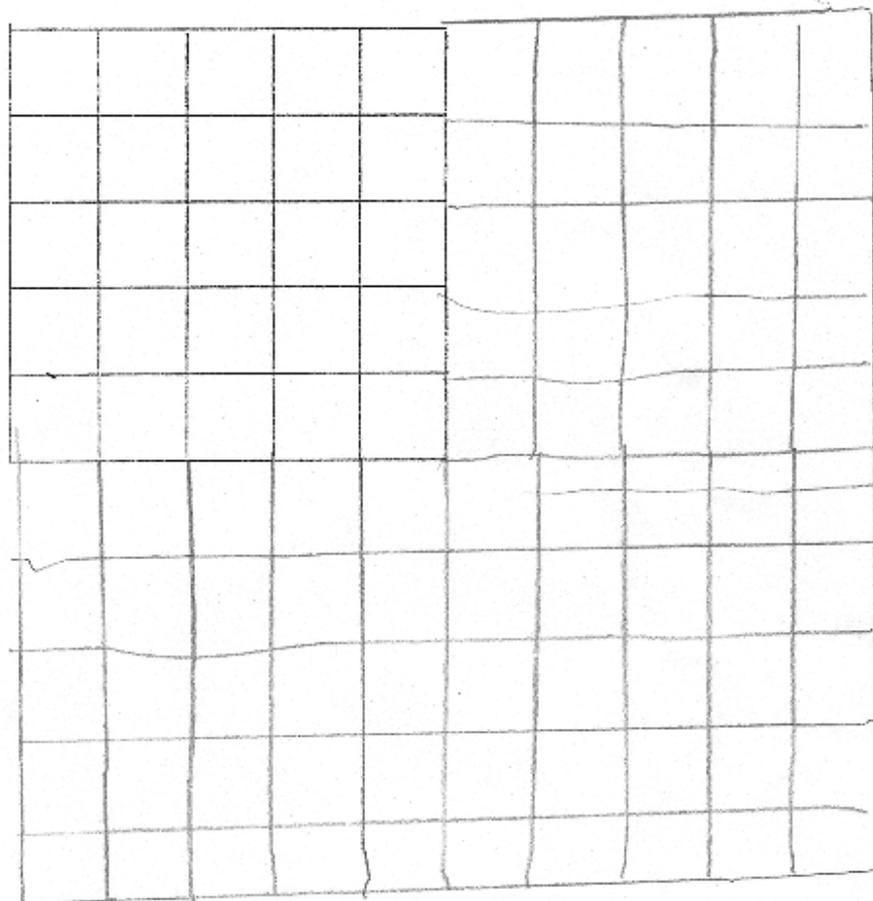
Im Gegensatz zu anderen interpretiert er die Stäbe sogleich mathematisch. Er ordnet ihnen Zahlen zu. Auf seine Anregung hin bauen alle anderen Schüler ebenfalls eine Treppe und beginnen zu zählen. Sie stellen Aufgaben wie „Zeige mir den 8er Stab,...“. Das Finden des Stabes gelingt ihnen gut, solange die Stäbe nach Längen geordnet sind. Anschließend mischen sie die Stäbe. Die Schüler beginnen bei jedem Stab zu zählen; Es dauert sehr lange, bis der richtige Stab gefunden wird. Maximilian erkennt: „Bis 5 findet man die Stäbe leicht heraus, da sieht man sofort, welcher Stab es ist. Aber ab 6 wird es schwierig, weil man da zu zählen anfangen muss.“ Bei der anschließenden Diskussion über eine geeignete Unterteilung der Stäbe, schlägt ein Kind vor, immer nach 3 einen Strich zu machen. Maximilian erwidert: „Wir könnten nicht nach 3, sondern nach 5 einen Strich machen, denn 5 sehe ich auf einen Blick.“

5.3.1.1.3 Verbindung Rechenstäbe – Hunderterfeld

Maximilian stellt sogleich einen Bezug zwischen den Stäben und dem 25er Quadrat her: „Die Stäbe passen nicht in das Feld. Es ist zu klein. Wir könnten das Feld vergrößern. Damit alle Stäbe hineinpassen, müssen wir um 5 vergrößern.“

Bei den anschließenden Versuchen der Schüler entwickelt Maximilian ein vollständiges, genau strukturiertes Hunderterfeld (S. 174).

MAXIMILIAN



Er kommentiert seine Arbeit: „ Zuerst habe ich nur geschaut, dass ich die Stäbe von links nach rechts hineinlegen kann und habe um 5 vergrößert. Ich habe alle Reihen um 5 vergrößert, damit der längste Stab, der 10er Stab, überall hineinpasst. Wenn ich jede Reihe immer nur um eins vergrößere, habe ich ein Treppe. Dann muss ich wieder schauen, welcher Stab in welches Feld hineinpasst.

Dann habe ich gedacht, dass es mir gefallen würde, wenn die Stäbe auch von oben nach unten hineinpassen würden. Dann habe ich wieder um 5 vergrößert.

Eigentlich habe ich jetzt noch 3 so kleine Felder (er meint das 25er Quadrat) gezeichnet. Jetzt sind es 4 und da passen alle Stäbe von oben nach unten und von links nach rechts hinein.“

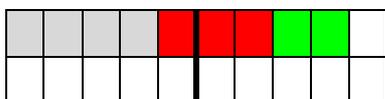
5.3.1.2 Individuelle Lösungen /Akzeptanz des Materials

Maximilian ist ein Schüler, der sehr frei und kreativ mit dem Arbeitsmaterial umgeht. Dies wird bei folgenden Beispielen deutlich:

Kombination der Stäbe

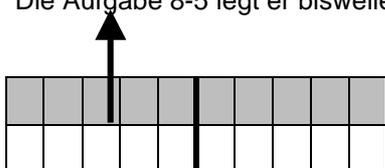
Er erhält nicht immer alle Stäbe. Es werden ihm gezielt einige weggenommen. Er setzt die fehlenden mühelos aus den verbleibenden zusammen.

Beispiel: Maximilian legt die Rechnung $7+2$ als $4 + 3 + 2$



Er kombiniert dabei mit Hilfe des Arbeitsmittels die Zerlegung und Addition. Es macht ihm Spaß einen Stab durch andere zu ersetzen. Manchmal zerlegt er ihn auch in 3 Faktoren.

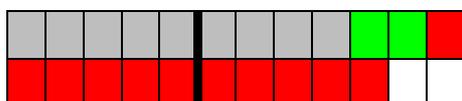
Die Aufgabe $8-5$ legt er bisweilen so:



(Er rechnet $10-5-2$)

$11+11$ (Max hat nur einen 10er Stab zur Verfügung)

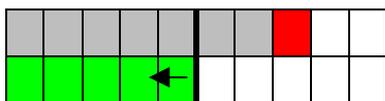
Er legt



„Ich habe nur einen 10er Stab, aber ich weiß, dass $9+2=11$ ist, also lege ich $9+2$ in das Feld. Dazu muss ich 11 tun. Dazu lege ich den 10er und den 1er Stab. Jetzt mache ich es so, dass ich den 1er Stab wegtue und in die erste Reihe zu den 11 lege. Ich sehe sofort, dass $11+11=22$, weil 2 über das Feld stehen.“

Gleich- und gegensinniges Verändern gelingt ihm anhand des Arbeitsmittels sehr gut.

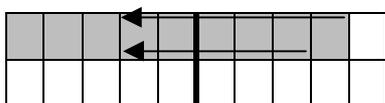
$$7+5=8+4$$



Maximilian erklärt: „Ich tue in der ersten Reihe eins dazu und in der zweiten Reihe, nehme ich eins weg (legt in ersten Reihe einen Würfel dazu und streicht in der zweiten eins weg). Wenn ich eins dazu tue und eins weg tue, dann bleibt das Ergebnis gleich, dann ändert sich nichts.“

Beispiel für gleichsinniges Verändern:

$$9-6=8-5=7-4=6-3$$



Maximilian beschreibt: „Ich nehme von der ersten Zahl eins weg und nehme auch von der zweiten eins weg, dann bleibt es gleich. Das verstehe ich nicht, eigentlich müsste es weniger werden.“

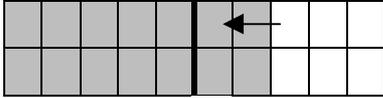
Er legt sich die Aufgaben ein paar Mal mit Stäben, versteht aber die Gleichheit des Ergebnisses dennoch nicht.

Deshalb führt er die Aufgabe auf eine konkrete Handlung zurück. Er holt sich die Muggelsteine und probiert: „Ich habe 9 Bonbons und esse 6, dann bleiben mir 3 übrig. Ich habe ein Bonbon weniger, also 8 und esse eines weniger, also 5. Dann sind es wieder 3. Jetzt glaube ich, verstehe ich es. Ich habe ein Bonbon weniger, ich esse aber auch um eines weniger, also bleibt es gleich. Das Ergebnis wäre nur kleiner, wenn ich weniger Bonbons haben würde, aber immer gleich viel essen würde.“

Maximilian verbindet die einzelnen Darstellungsebenen miteinander. Kann er sich Ergebnisse nicht anhand der Arbeitsmittel erklären, führt er sie erneut auf eine konkrete Handlung zurück.

Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen und Halbierungen erschließt er sich anhand der Arbeitsmittel.

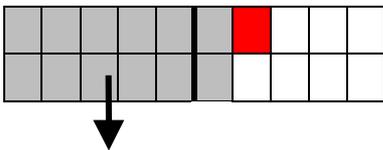
$$6+7$$



„ $7+7=14$. Ich habe aber bei $6+7$ nicht zwei 7er Stäbe sondern nur einen 6er und einen 7er Stab, also muss ich von den 14 eines abziehen: $14-1=13$ “

Bei $5+7$ muss ich 2 abziehen und bei $4+7$ muss ich 3 abziehen.“

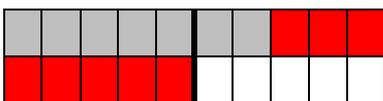
$$13-6$$



„Ich weiß $12-6=6$ auswendig. Bei 13 lege ich in der ersten Reihe eines dazu und dann nehme ich in der zweiten Reihe die 6 weg, dann bleiben mir 7 übrig.“

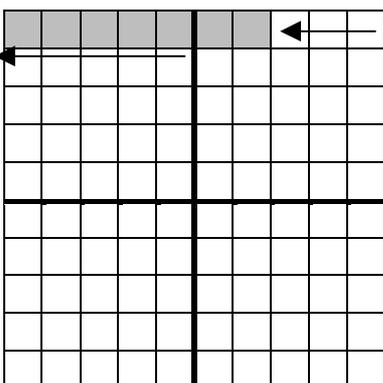
Platzhalteraufgaben wie $7+ _ =15$ legt er mit den Stäben auf verschiedene Weise:

1.



Er setzt anschließend den 3er und den 5er Stab zusammen und rechnet $3+5=8$.

2. Er legt nur den 7er Stab in das Feld und ergänzt nur am Hunderterfeld . Er rechnet $3+5=8$



3. Er legt den 10er und den 5er Stab in das Feld und zieht von 15 die 7 ab: „Am Schluss habe ich 15, von den 15 hatte ich aber zuvor schon 7, also muss ich die 7 abziehen.“

Bei der Einführung der Addition mit Arbeitsmitteln legen einige Schüler die beiden Stäbe untereinander. Maximilian kommentiert: „Ich finde es nicht gut, wenn man die Stäbe untereinander legt, denn ich muss dann abzählen, wie viele es sind. Wenn ich die beiden Stäbe nebeneinander lege, dann weiß ich sofort, wie viele es sind, nämlich 8, weil mir noch 2 bis zur 10 fehlen.“

Bei der Erarbeitung der dekadischen Analogie entdeckt Maximilian anhand des Arbeitsmittels weitere Aufgaben.

„17+2= Ich denke mir den Zehner weg und rechne 7+2=9. Wenn ich mir den Zehner dann wieder dazudenke, dann habe ich 19.“

Das geht auch wenn ich zwei Zehnerstangen dazulege, dann habe ich 27+2=29, das geht auch mit drei Zehnerstangen, mit vier auch,....“

Maximilian stellt selbst Aufgabenreihen im Zahlenraum bis 100 auf. Er stellt fest: „Ich kann zehn Zehnerstangen hineinlegen, dann heißt die Aufgabe 102+7=109. Jetzt brauche ich ein neues Hunderterfeld.“

Übung mit den Stellenwerten

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Maximilian legt den 1er und den 4er Stab hin und erklärt: „Die Einer bleiben gleich. Ich habe aber 3 Zehner und die kann ich zum 1er oder 4er Stab geben. Ich kann alle 3 Zehnerstangen zum 4er legen, dann heißt die Aufgabe 1+34=35. Ich kann sie aber auch zum 1er Stab legen, dann heißt die Aufgabe 31+4=35,....“

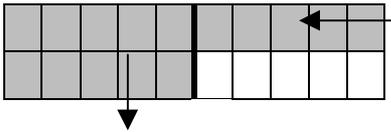
Der Schüler entdeckt alle Möglichkeiten.

Bei Zerlegungen im 2. Zehner benutzt er die Rechenstäbe nicht in der Anordnung eines Feldes, sondern legt diese in Form eines Zahlenstrahles und zerlegt anschließend.

Den Wechsel vom Feld zum Strahl vollzieht er mühelos. Auf die Frage, warum er das mache, antwortet er: „Wenn ich den 10er und den 6er Stab untereinander lege, weiß ich sofort, dass ich 16 in 10 und 6 zerlegen kann. Wenn ich aber bei 3 durchschneide, dann muss ich aufpassen, dass ich die untere Reihe nicht vergesse. Der 10er und der 6er sind mir zu weit auseinander. Sie gehören zusammen, damit ich sie auseinanderschneiden kann.“

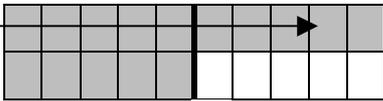
Platzhalteraufgaben wie $15 - \underline{\quad} = 8$ löst er auf verschiedene Arten:

1.



Er nimmt den 5er Stab weg, deckt den 2er Stab zu und rechnet $5 + 2 = 7$

2.



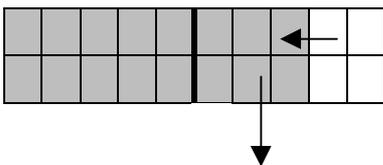
Er rechnet $15 - 8$, wobei er die 8 vom 10er Stab wegnimmt.

3.



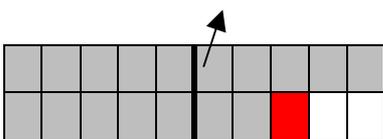
Er rechnet $5 + 2 = 7$

4.



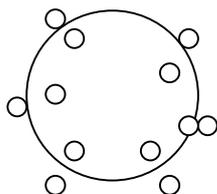
Er verwendet die Halbierungsaufgabe und rechnet $16 - 8 = 1$.

Er nutzt die Zehnergabe aus bei Aufgaben wie $17 - 9 =$



Er nimmt den 10er Stab weg und legt eins zum 7er Stab dazu.

Er erklärt die Lösung von Knobelaufgaben anhand der Stäbe:



Arbeitsauftrag: „Setze die Zahlen 1-12 so in die Kreise, dass die Summe jedes Kreispaars gleich ist.“

(vgl Radatz,H, Rickmeyer, K.(1996), S.19)

Maximilian erklärt: „ Ich habe die größte und die kleinste Zahl zusammengezählt $12+1=13$. Dann habe ich meine Stäbe genommen und mir überlegt wie ich 13 zerlegen kann. Dann wusste ich die Zahlen für die Kreise.“

5.3.1.3 Beobachtungen zu den Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe

Bezogen auf Lerninhalte des Lehrplans (siehe linke Spalte) sind zugehörige Beobachtungen über unterrichtliche Lernvorgänge notiert (siehe rechte Spalte).

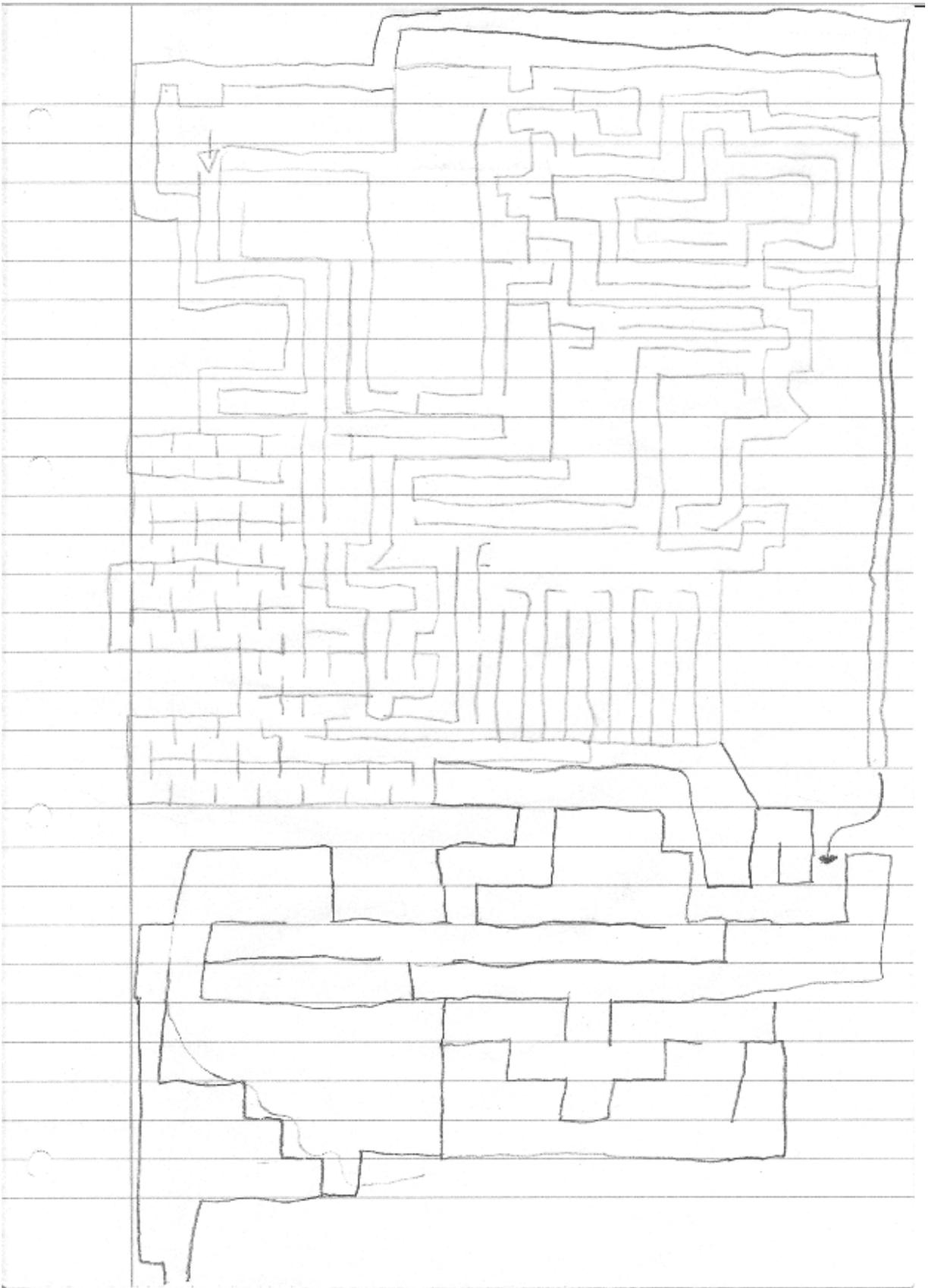
Lerninhalte	Beobachtungen
1.1.1.Raumerfahrung und Raumvorstellung	
Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen	Maximilian erfasst die Lagebeziehungen am eigenen Körper. Gelegentlich verwechselt er links und rechts. Er erkennt zu Beginn der ersten Jahrgangsstufe, dass die Verwendung der räumlichen Begriffe vom Betrachter abhängig ist. Der Lehrer schreibt den Kindern die Druckbuchstaben in Spiegelschrift vor. Maximilian erkennt: „Das stimmt nicht, du nimmst nicht deine rechte Hand her, sondern die linke.“ Dieser Umstand verwirrt ihn. Im Laufe des 1. Schuljahres gelingt es ihm mehr, die Position des Betrachters einzunehmen.
Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben	
Auditive Wahrnehmung	
Taktile Wahrnehmung	
Sehen und Vorstellen	
Visuelle Wahrnehmung	Maximilians visuelle Wahrnehmung ist sehr gut ausgeprägt. Er nimmt Neues in erster Linie visuell wahr. Dies zeigt sich besonders deutlich in der Kopfrechenphase. Werden die Aufgaben visuell dargeboten, so kann er das Ergebnis sofort nennen. Kann er die Aufgaben aber nur über den auditiven Kanal aufnehmen, so fragt er des öfteren nach und spricht die Aufgabe mehrmals leise nach. Es scheint so, als würde er sich ein inneres visuelles Bild von der Aufgabe machen. Erst dann findet er die Lösung.
Visuomotorische Koordination	Beim Durchfahren und Herstellen von Labyrinthen zeigt sich Maximilians gute visuomotorische Koordination. Bei der Zeichnung von Geraden verwendet er das Lineal sehr sicher. Begrenzungspunkte hält er exakt ein.
Figur-Grund-Wahrnehmung	Er isoliert Teilfiguren sehr gut aus einem komplexen optischen Hintergrund. Er arbeitet sehr konzentriert und besitzt eine große Ausdauer und Selbstständigkeit bei Knobelaufgaben.

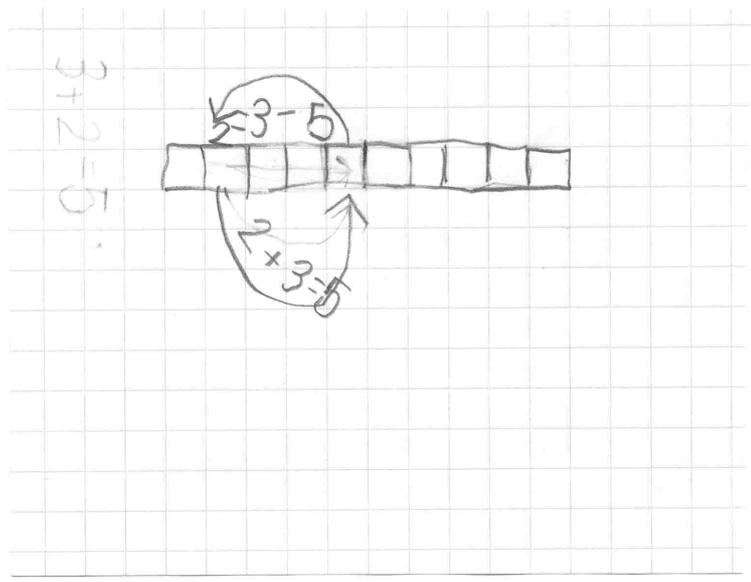
<p>Wahrnehmung der Raumlage Wahrnehmungskonstanz Wahrnehmung räumlich (zeitlicher) Beziehungen</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p>	<p>Maximilian durchfährt alle Labyrinth auch in der Vorstellung sehr sicher. Er entwickelt selbstständig äußerst komplexe Gebilde (vgl. S. 185)</p> <p>Maximilian ist maßgeblich beteiligt bei der Entwicklung von Einprägestrategien. Es gelingt ihm am Ende der 1. Jahrgangsstufe 15 geometrische Formen nach bestimmten Kriterien zu ordnen, sich diese einzuprägen und nach einer bestimmten Zeit wiederzugeben.</p> <p>Seine Fähigkeit, Regeln und Zusammenhänge bei figuralen Denkaufgaben erfassen zu können, ist gut ausgeprägt. Seine Kombinationsfähigkeit ist sehr gut ausgeprägt. Bei Kim-Spielen gelingt es ihm auch, mehrere Veränderungen (Hinzunahme, Wegnahme, Veränderung der Raumlage) zu erkennen.</p>
<p>1.2.Zahlen</p> <p>1.2.1.Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen</p> <p>Mengen bilden und auszählen</p> <p>Mengen durch 1:1 Zuordnungen vergleichen Elemente von Mengen durch grafische Zeichen darstellen, diese zählen und die Anzahlen vergleichen Die Ziffern von 0 bis 9 lesen und schreiben Ordnungszahlen gebrauchen</p> <p>1.2.2.Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen</p> <p>Anzahlen bestimmen</p> <p>Mengen strukturieren; Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln</p> <p>Anzahlen (auch die Zahl 0) konkret, bildlich und symbolisch darstellen</p>	<p>Maximilian hat großes Interesse an Zahlen. Für ihn steht aber nicht so sehr das Erkunden von Zahlen aus der Lebenswelt im Mittelpunkt. Er will rechnen und in erster Linie Knobel- oder Denkaufgaben lösen. Bei dem Thema „Wie viele Mädchen und Jungen gehen in meine Klasse?“ beteiligte er sich erst, als folgende Fragen gestellt wurden: Wie viele Kinder sind es, wenn 4 krank sind? In der 2. Klasse sind 23 Schüler, wie viele sind es mehr? Wie viele Kinder gehen zusammen in die 1. Klasse?</p> <p>Maximilian: „Bis 5 ist es leicht, da erkenne ich sofort, wie viele es sind. Aber dann muss ich zählen. Darum ist es besser, wenn ich immer so 5er Haufen mache. Die ersten beiden Haufen brauche ich nicht zu zählen, denn ich weiß auswendig, dass $5+5=10$, also fange ich erst bei 10 zu zählen an.“</p> <p>Er beginnt von sich aus Mengen zu strukturieren</p>

<p>Verständnis für den dekadischen Aufbau entwickeln Konkret bündeln und entbündeln Bündelerggebnisse notieren und verbalisieren</p> <p>Zahlen bis 20 lesen und schreiben</p> <p>1.2.3.Zahlen bis 20 zerlegen</p> <p>Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren</p> <p>Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren</p> <p>Zerlegungen im zweiten Zehner durchführen</p> <p>1.2.4.Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen</p> <p>Zahlen und Größen vergleichen</p> <p>Vergleich von Rechenausdrücken mit den Zeichen < > = darstellen</p> <p>Zahlen ordnen, Zahlenfolgen bilden und darstellen</p>	<p>Das Bündeln bereitet ihm keine Schwierigkeiten. Er erarbeitet selbstständig, dass mehrere Einheiten zu einer größeren Einheit zusammengefasst werden können.</p> <p>Er strukturiert die Zahlen 1 bis 20 in Form eines Zahlenbandes (S. 186) Eine Unterteilung am Zahlenband nimmt er nicht vor.</p> <p>Beim Zerlegen der Zahlen 10-20 verwendet er die Stäbe in Form eines Zahlenbandes.</p> <p>Er beherrscht die Zahlzerlegungen sehr sicher.</p> <p>Er führt spielerisch mit dem Arbeitsmittel auch Zahlzerlegungen im Zahlenraum über 20 durch.</p> <p>Maximilian löst auch unregelmäßige Zahlenfolgen. Er erstellt eigene Zahlenfolgen.</p>
<p>1.3.Rechnen</p> <p>1.3.1.Begriffe Addition und Subtraktion</p> <p>Addition und Subtraktion verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch</p> <p>Umkehroperationen zur Addition und Subtraktion durchführen</p> <p>1.3.2.Einspluseinssätze und deren Umkehrung</p> <p>Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren</p>	<p>Er verbindet die einzelnen Darstellungsebenen gut miteinander. Aufgaben die er nicht auf der Abstraktionsebene der Arbeitsmittel verstehen kann, führt er erneut auf konkrete Handlungen zurück.</p> <p>Wie bereits erwähnt, wird die Umkehroperation am Hüpfstrahl eingeführt. Nach der konkreten Handlung entwickeln die Kinder selbstständig die zeichnerische Lösung (siehe S. 186).</p> <p>Er notiert die Gleichung der inversen Operation auch von rechts nach links. Wie die Zeichnung zeigt, hat er den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion gut verstanden.</p> <p>Maximilian kennt die Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 auswendig. Er setzt Impulse bei der Erarbeitung von Einprägestrategien. Der Schüler erkennt den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben $14-5=9$ und $14-$</p>

<p>Tauschaufgaben der Addition bilden Nachbaraufgaben anwenden</p>	<p>9=5. Er begründet: „Das sind die gleichen Zahlen, aber es ist nicht dasselbe. Einmal gebe ich 5 DM aus und mir bleiben noch 9DM übrig. Bei der anderen Aufgabe gebe ich 9DM aus und mir bleiben nur noch 5DM übrig. Die 3 Zahlen sind aber gleich.“</p> <p>Maximilian ist maßgeblich an der Entwicklung dieser Rechenstrategien beteiligt. Er nimmt sie als Einprägestrategien an. Im täglichen Rechnen verwendet er sie jedoch kaum, da er innerhalb kurzer Zeit die Zahlentripel auswendig weiß.</p>
<p>1.3.3.Im zweiten Zehner addieren und subtrahieren „Dekadische Analogien“ entdecken und anwenden</p>	<p>Er führt die dekadische Analogie im Zahlenraum über 20 weiter.</p>
<p>1.3.4.Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren</p>	<p>Viele Aufgaben mit Zehnerüberschreitung erschließt er sich nicht durch Zerlegen, sondern über die Kenntnis der Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben</p>
<p>Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren</p>	<p>Maximilian kann selbstständig Rechenwege und Rechenstrategien entwickeln. Er findet zu einer Aufgabe oft mehrere Wege und begründet, welcher ihm als der effektivste erscheint: „Wenn ich 17-9 rechne, dann kann ich 17-7-2 rechnen oder 18-9-1 oder 17-10+1. Der letzte Weg gefällt mir am besten. Wenn ich 10 wegnehme, denke ich mir nur den Zehnerstab weg und dann habe ich eigentlich eine kleine Aufgabe 7+1=8.“ Maximilian erklärt sehr gut anhand des Arbeitsmittels und wird deshalb des öfteren als Tutor für die lernschwächeren Schüler eingesetzt.</p>
<p>Verdoppeln und Halbieren automatisieren, Nachbaraufgaben erschließen</p>	<p>Er hat keine Probleme, sich die Nachbaraufgaben sowohl zur Addition als auch zur Subtraktion einzuprägen. Er wendet diese Strategie häufig an.</p>
<p>Zerlegen und in Schritten rechnen</p>	<p>Er löst Additions- und Subtraktionsaufgaben durch Zerlegen in Schritten sicher, wendet diese Strategie jedoch selten an: „Das ist langweilig. Es gefällt mir besser, wenn ich die Verdoppelungen weiß und dann rechne ich +1,+2,+3 oder -1,-2,-3..“</p>
<p>Tauschaufgaben der Addition anwenden</p>	<p>Er wendet die Tauschaufgaben sicher an. Maximilian kann den Unterschied zwischen Aufgabe und Tauschaufgabe erklären: „Es ist egal, wenn beides vor mir liegt. Dann nehme ich zuerst das linke und zähle das rechte dazu, oder ich nehme zuerst das rechte und zähle das linke dazu. Wenn ich aber 7 DM habe und noch 4 DM geschenkt bekomme, dann rechne ich 7+4 und nicht 4+7, denn sonst hätte ich 4 DM gehabt und das stimmt nicht.“ Maximilian beweist, dass er beide Aspekte der Addition (räumlich-simultan und zeitlich-sukzessiv) sicher beherrscht.</p>

Einfache Gleichungen lösen	Er löst auch Ungleichungen.
<p>1.4.Sachbezogene Mathematik</p> <p>1.4.1.Größen</p> <p>Zeit: Woche, Tag, Stunde</p> <p>Geldwerte</p> <p>1.4.2.Arbeit an Sachsituationen</p> <p>Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen, einfachen Texten oder Schaubildern entnehmen und versprachlichen • Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden <p>Lösungshilfen entwickeln und individuell anwenden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sachsituationen handelnd nachvollziehen und verbalisieren • Einfache Zeichnungen erstellen <p>Lösungswege finden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zu Sachsituationen Gleichungen finden • Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen • Lösungswege beschreiben 	<p>Maximilian erstellt selbstständig Bilder und Texte, sowie einfache Schaubilder.</p> <p>Er stellt viele Fragen zu einer Sachsituation und kann mathematische Fragen isolieren.</p> <p>Seine Zeichnungen beschränken sich auf das mathematisch Wesentliche. Sie sind einfach und klar strukturiert.</p> <p>Er kann auch Platzhalteraufgaben Sachsituationen zuordnen.</p>





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
M	A	x	i	M	i	L	i	A	N										

5.3.1.4 Gesamtbeurteilung

Der Schüler verfügt über sehr gute visuelle Fähigkeiten. Am Ende des 1. Schuljahres führt die Versuchsleiterin im Klassenverband den CFT 1 durch. Maximilian erzielt hervorragende Ergebnisse im Labyrinthtest und bei figuralen Denkaufgaben (IO 127)

Er kann sich neue mathematische Lerninhalte selbstständig erschließen, indem er bereits Gelerntes zur Lösung heranzieht. Mathematische Beziehungen erfasst er rasch. Ziel des Mathematikunterrichts ist es deshalb, ihm einerseits Hilfsmittel zu geben, die ihn dabei unterstützen, die es dem Lehrer aber andererseits auch ermöglichen, die Gedankengänge des Schülers nachzuvollziehen, um mögliche Denkfehler oder ineffiziente Lösungsmethoden zu erkennen.

Die Rechenstäbe unterstützen ihn bei Aufgaben, die über den erarbeiteten Zahlenraum hinausgehen, er kann sich z.B. mit Hilfe der Stäbe Aufgaben zur dekadischen Analogie selbstständig erschließen. Gleichzeitig zeigen aber seine Erklärungen anhand des Arbeitsmittels, ob er diese nur mechanisch löst oder Zusammenhänge auch erkennt.

Maximilian akzeptiert die Rechenstäbe und das Hunderterfeld als ein Mittel zur Erschließung mathematischer Inhalte. Es macht ihm große Freude, dass bei der Konzeption des Materials seine Anregungen und Ideen miteinfließen. Er verwendet die Stäbe in allen Phasen des Unterrichts. Ist er sich bei der Lösung nicht ganz sicher, so benutzt er diese als Kontrollmöglichkeit. Wird er als Tutor eingesetzt, so erklärt er seinen Mitschülern den Lösungsweg anhand der Stäbe. Nie weicht er auf die Verwendung anderer Hilfsmittel aus.

Maximilian wird von seinen Mitschülern unter anderem wegen seiner mathematischen Begabung geschätzt. Dadurch dass er regelmäßig die Arbeitsmittel verwendet, werden auch die anderen Schüler motiviert, diese ebenfalls als Mittel zur Erschließung von Neuem und als Hilfsmittel bei Lernschwierigkeiten zu sehen.

5.3.1.5 Weiterführende Fördermaßnahmen

Wie mehrfach erwähnt, verfügt Maximilian über sehr gute visuelle Fähigkeiten. Hauptziel ist nun nicht mehr das „Sehen“ zu schulen. Übungen wie das Durchfahren von Labyrinth oder Kim-Spiele machen ihm zwar Spaß, erweitern seine Fähigkeiten aber nur mehr bedingt. Das Hauptaugenmerk richtet sich nun auf eine Vertiefung des visuellen Operierens, d.h. auf eine Erweiterung seiner Fähigkeiten, Gehörtes in innere visuelle Vorstellungsbilder zu übertragen. Maximilian bearbeitet im Rahmen der Wochenplanarbeit z.B. folgende Aufgaben: Zerschneide ein Quadrat in Gedanken so, dass vier gleiche Dreiecke entstehen! Zerschneide ein Rechteck ebenfalls in 4 Dreiecke. Erhältst du vier gleiche Dreiecke?

5.3.2 Lena

5.3.2.1 Individuelle Lösungen bei der Verwendung des Materials

Lena hatte bis zu ihrer Einschulung nur geringe Erfahrungen zum Zählen von Mengen und zum zählenden Rechnen gemacht.

Ihre Arbeit am Arbeitsmittel kann in zwei Phasen eingeteilt werden:

1. Phase: Zählen anhand des Arbeitsmittels
2. Phase: Ablösung vom zählenden Rechnen

Phase des Zählens anhand des Arbeitsmittels

Die Phase des Abzählens am Arbeitsmittel dauert bei Lena sehr lange (bis zur Mitte des 1. Schuljahres)

1. So ermittelt sie Ergebnisse der Addition

$$6+3$$

Zu Beginn legt sie die Stäbe nicht in das Zahlenfeld. Sie nimmt den 6er Stab (den sie durch Abzählen bestimmt) und fügt den 3er Stab hinzu. Dann ermittelt sie das Ergebnis durch Abzählen beginnend bei 1.



$$6+3= 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \text{ (Dabei zeigt sie mit einem Stift auf jedes Feld.)}$$

Durch das Vorbild der anderen Schüler, die konsequent das Hunderterfeld benutzen, wird Lena dazu angeregt, dieses ebenfalls zur Ergebnisfindung einzusetzen. Nun legt sie die Stäbe linksbündig in das Feld. Ihre Lösungsstrategie des Abzählens behält sie bei.

2. Subtraktion

$$9 - 3$$



Sie legt den 9er Stab und zählt 3 weg (durch mitzeigen mit dem Stift). Dabei nimmt sie die 3 Einzelnen abwechselnd von der rechten oder linken Seite des Stabes.

Sie zählt:

$$9-1,2,3= 1,2,3,4,5,6$$

oder

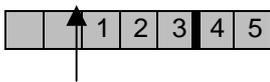


$$9-1,2,3=1,2,3,4,5,6$$

Die Fünferstruktur der Stäbe nimmt sie nicht an.

3. Zerlegungen löst sie ebenfalls durch Abzählen

$$\begin{array}{r} 7 \\ / \ \backslash \\ 2 + _ \end{array}$$



Sie zählt 1,2, legt dann ihren Stift auf den Strich (als Zeichen für das Zerlegen der Menge) und zählt die restlichen ab.

Wird die Zerlegung so notiert

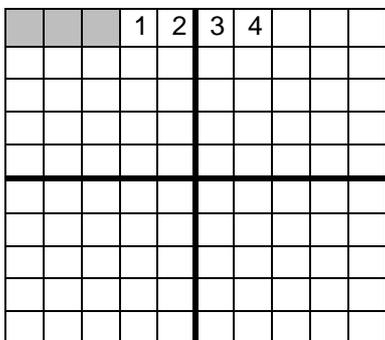
$$\begin{array}{r} \dots\dots\dots 7 \\ / \ \backslash \\ _ + 2 \end{array}$$

so nimmt sie die 2 von der rechten Seite des Stabes.

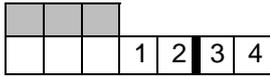
4. Platzhalteraufgaben löst sie ebenfalls durch Abzählen

$$3 + _ = 7$$

Sie legt den 3er Stab in das Hunderterfeld und zählt bis zum 7. Feld



Gelegentlich legt sie den 3er Stab über den 7er Stab und ermittelt anschließend den Unterschied durch Abzählen.



Beispiel: $7 - _ = 5$



Sie legt den 7er Stab (nicht in das Hunderterfeld) und überlegt: „5 müssen noch bleiben. Die ziehe ich ab. 1,2,3,4,5. Es bleiben noch 2 übrig.“

Daran schließt sich eine Phase, in der sie das Hunderterfeld als Zählfeld entdeckt, zunächst für die Subtraktion. Die Stäbe benutzt sie nun nicht mehr.

9-6

Sie zeigt mit dem Stift auf Feld 9 (dies gelingt ihr inzwischen ohne Abzählen) und zählt auf dem Hunderterfeld 6 zurück. Die restlichen 3 erfasst sie simultan.

Phase der Ablösung vom zählenden Rechnen

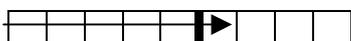
Nun beginnt Lena sich schrittweise von der Strategie des Zählens durch das Einprägen von Ankerpunkten zu lösen.

Der erste Ankerpunkt ist 10. Viele Additionsaufgaben löst sie nun nicht mehr durch Abzählen. Sie hat folgende Strategie verinnerlicht: Fehlt mir bis zur 10 ein Feld, so sind es 9, bei zwei fehlenden Feldern 8 und bei 3 sind es 7.

Erst als sie die Strukturierung mit 10 verinnerlicht und Fortschritte in der Simultanerfassung gemacht hat, nimmt sie die Strukturierung nach 5 bewusst wahr und verwendet sie als Rechenstrategie, d.h. sie verwendet den roten Strich als Ankerpunkt. Jetzt gelingt es ihr, sich auch bei der Subtraktion vom zählenden Rechnen zu lösen.

$8-2=6$ (Die 6 sieht sie als $5+1$)

Nun variiert sie auch vorteilhaft, von welcher Seite sie die Menge nimmt.



Analog dazu löst sie sich auch bei Platzhalteraufgaben vom zählenden Rechnen.

Der Prozess der Ablösung vom zählenden Rechnen kam bei Lena spontan als sogenanntes Aha-Erlebnis. Sie freute sich sehr über ihre neu gewonnenen Erkenntnisse.

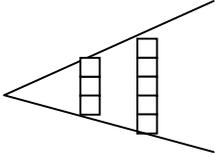
Das zeitlich bald darauffolgende Bündeln und die Darstellung der Zahlen von 11-20 bereitet ihr keine Schwierigkeiten.

5.3.2.2 Leistungsstand/Beobachtungen zu den Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe

Lerninhalte	Beobachtungen
<p>1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung</p> <p>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen</p> <p>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben</p> <p>Auditive Wahrnehmung</p> <p>Taktile Wahrnehmung</p> <p>Sehen und Vorstellen</p> <p>Visuelle Wahrnehmung</p> <p>Figur-Grund-Unterscheidung</p> <p>Visuomotorische Koordination</p> <p>Wahrnehmung der Raumlage</p> <p>Wahrnehmungskonstanz</p> <p>Wahrnehmung räumlich (zeitlicher) Beziehungen</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p>	<p>Lena erfasst die Lagebeziehungen am eigenen Körper. Bisweilen verwechselt sie links und rechts.</p> <p>Die Schülerin kann Geräuschen nur sehr schwer Richtungen zuordnen.</p> <p>Sie isoliert Teilfiguren gut aus einem komplexen optischen Hintergrund. Es gelingt ihr, vom Detail auf das Ganze zu schließen.</p> <p>Die Koordination des Sehens mit den Bewegungen des Körpers gelingt ihr gut.</p> <p>Keine Probleme bei Darstellung und Unterscheidung der Buchstaben und Zahlen.</p> <p>Lena durchfährt Labyrinth sicher. Übungen zu den räumlich zeitlichen Beziehungen erledigt sie durchschnittlich.</p> <p>Lena kann selbstständig keine Einprägestrategien entwickeln. Sie nimmt aber die der anderen sehr gut an und überträgt sie. So kann sie ihre visuelle Speicherfähigkeit im Laufe des 1. Schuljahres erheblich erweitern. (Beobachtungen im Rechtschreiben: Sie kann sich die Lernwörter aufgrund ihrer auditiven Schwächen nicht über das Gehör erarbeiten. Sie speichert diese ausschließlich visuell.)</p> <p>Sie erkennt logische Strukturen. Ihre Kombinationsfähigkeit ist durchschnittlich.</p>

<p>1.1.2.Flächenformen</p> <p>Flächenformen untersuchen, beschreiben, benennen und herstellen</p> <p>Flächenformen nach selbstgefundenen und vorgegebenen Kriterien vergleichen und klassifizieren</p> <p>Figuren, Muster, Parkette und Ornamente aus geometrischen Grundformen zusammensetzen und beschreiben</p>	<p>Sie unterscheidet Viereck, Rechteck, Quadrat, Dreieck und Kreis sicher. Sie ist recht geschickt im Schneiden, Falten und Zeichnen und stellt gerne Flächenformen her.</p> <p>Sie findet keine eigenen Kriterien, nach denen Flächenformen klassifiziert werden können.</p> <p>Sie ergänzt Figuren und Muster sowie Bandornamente sicher. Von ihr entworfene Muster sind sehr einfach und wenig phantasievoll. Beim Legespiel Tangram gelingt es ihr, in einer Gesamtfigur geometrische Teilformen wiederzufinden.</p>
<p>1.2.Zahlen</p> <p>1.2.1.Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen</p> <p>Mengen bilden und auszählen</p> <p>Mengen durch 1:1Zuordnungen vergleichen</p> <p>Elemente von Mengen durch grafische Zeichen darstellen, diese zählen und die Anzahlen vergleichen</p> <p>Die Ziffern von 0 bis 9 lesen und schreiben</p> <p>Ordnungszahlen gebrauchen</p> <p>1.2.2.Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen</p> <p>Anzahlen bestimmen</p>	<p>Lena erhielt von ihren Eltern wenig Anregungen, die ihre Neugier für mathematische Sachverhalte erweckten oder die ihr halfen, ihr Wissen zu erweitern und zu vertiefen. So verfügt sie nur über geringe Vorkenntnisse zu den Zahlen. Sie kann zwar bis 20 zählen, hat aber noch kaum spielerische Erfahrungen zur Addition oder Subtraktion gemacht. Beim Abzählen größerer Mengen unterlaufen ihr viele Zählfehler, z.B. 23,24,25,26,28,...Die Ziffern 6 bis 9 kann sie nicht sicher erkennen. Lena hat nur geringe Erfahrungen im Abzählen von Mengen. Sie zeigt zwar von Beginn an Interesse an mathematischen Inhalten, wird aber durch das Vorwissen der anderen beinahe „überrollt“.</p> <p>Ein Vergleich der Anzahlen gelingt ihr zu Beginn der 1. Jahrgangsstufe nicht. Probleme bereitet ihr das Verbalisieren.</p> <p>Probleme beim Verbalisieren der Ordnungszahlen. Lena kennt z.B. den Begriff „der dritte“ nicht.</p> <p>Sie kennt die Würfelbilder und ordnet ihnen Zahlzeichen zu. Mengen bis 4/5 kann sie je nach räumlicher Anordnung nicht immer simultan erfassen.</p>

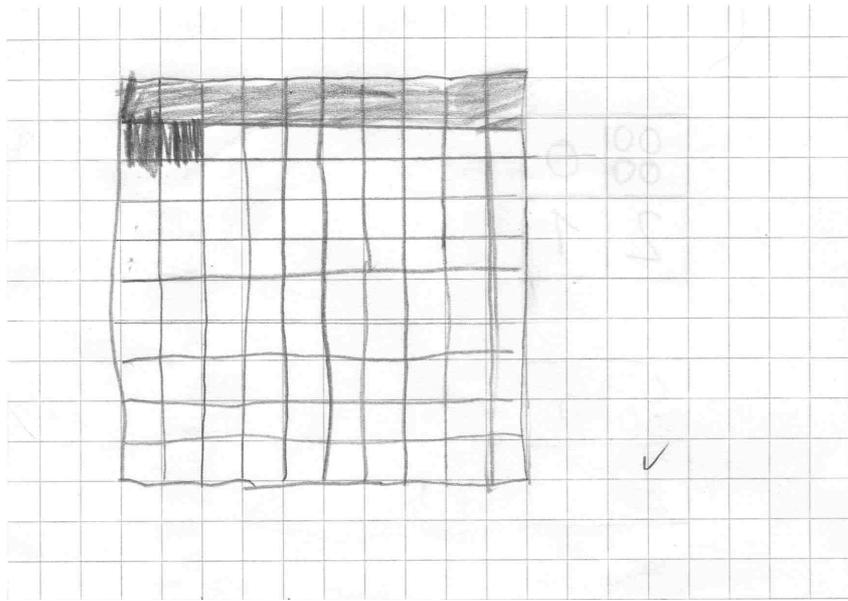
<p>Mengen strukturieren; Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln</p>	<p>Lena findet selbstständig keine Möglichkeiten, die Mengen zu strukturieren. Sie sieht die Menge lediglich als Gesamtmenge, bei der jedes einzelne Element beginnend bei 1 gezählt werden muss. Sie zerlegt zwar Mengen in simultan erfassbare Teilmengen, benutzt diese aber nicht als Strategie zur Anzahlbestimmung. Die Fünferstruktur der Rechenstäbe nimmt sie lange Zeit nicht an. Sie ermittelt die Ergebnisse zu Additionen und Subtraktionen lange Zeit durch Abzählen am Arbeitsmittel.</p>
<p>Anzahlen (auch die Zahl 0) konkret, bildlich und symbolisch darstellen</p>	<p>Sie kann Mengen einer bestimmten Anzahl mit Gegenständen und am Arbeitsmittel legen. Dabei nimmt sie aber bei Gegenständen immer nur ein Element und fügt es den anderen hinzu. Es gelingt ihr nicht, gleichzeitig zwei Elemente einer Menge hinzuzufügen und beispielsweise in Zweierschritten zu zählen. Wenn sie Menge 7 mit Muggelsteinen gelegt wird, so legt sie</p> <p>0-0-0-0-0-0, während viele andere Kinder z.B 00 – 00 – 00 – 0 legen. Sie hat keine Probleme, den Mengen Zahlzeichen und Zahlwörter zuzuordnen und umgekehrt.</p>
<p>Verständnis für den dekadischen Aufbau entwickeln Konkret bündeln und entbündeln Bündelerggebnisse notieren und verbalisieren</p>	<p>Lena versteht das Prinzip des Bündelns. Sie versteht, dass 10 Einzelne zu einer neuen Einheit zusammengefasst werden und mit 1 in der Stellenwerttabelle beziffert werden. Sie hat zum Zeitpunkt der Bearbeitung dieses Inhalts die Struktur der Hundertertafel verinnerlicht. Ihre zeichnerische Darstellung der Zahl 12 zeigt dies deutlich (vgl. S. 198)</p>
<p>Zahlen bis 20 lesen und schreiben</p>	<p>Sie kann die Zahlen bis 20 sicher lesen und schreiben. Bemerkenswert ist Lenas Darstellung der Zahlen 0-20. Für sie ist 20 die größte Zahl, die sie kennt. Dies drückt sie deutlich aus. Das Zusammenfassen der Zahlen bis 20 zeigt die Geschlossenheit dieses Zahlenraums für Lena. Es scheint so, als würde es darüber hinaus keine Zahlen mehr für sie geben. (vgl. S. 199)</p>
<p>1.2.3.Zahlen bis 20 zerlegen Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren</p>	<p>Lena kann sich mit Hilfe der Schüttelkästen oder der Rechenstäbe selbstständig Zahlzerlegungen erschließen. Fehler dieser Art</p> $\begin{array}{c} 7 \\ / \ \backslash \\ 3+ \ 10 \end{array}$ <p>macht sie nie. Sie hat sich für Zerlegungen eine „Eselsbrücke“ geschaffen: „Wenn ich die Striche sehe, dann weiß ich, dass ich den Stab auseinanderschneiden muss und nicht + rechnen darf. Ich stelle mir vor, der Strich ist wie eine Säge.“</p>

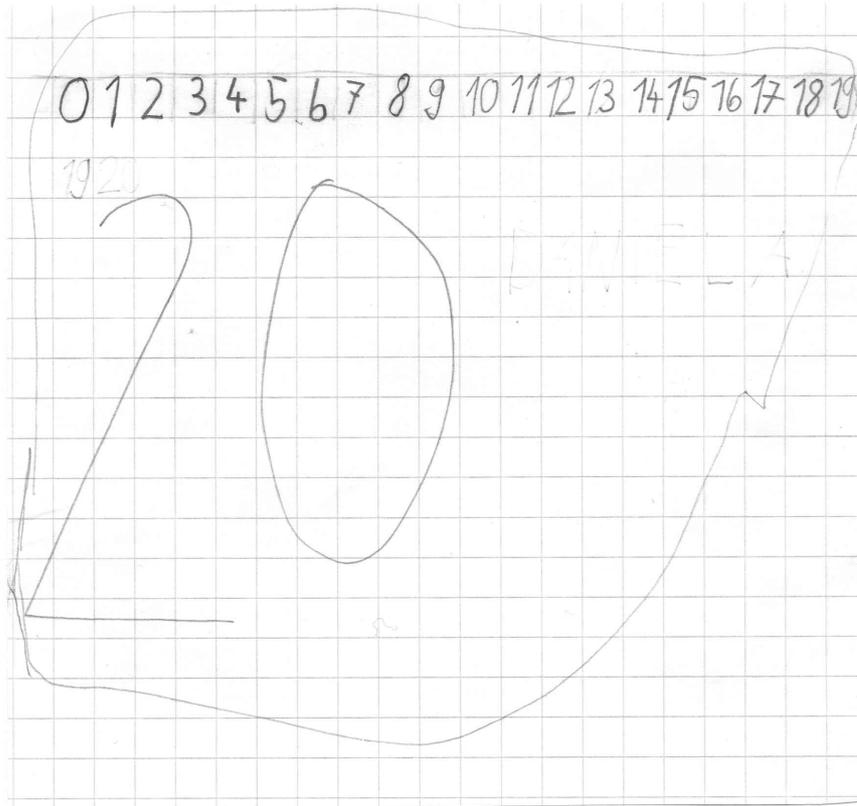
<p>Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren</p> <p>Zerlegungen im zweiten Zehner durchführen</p> <p>1.2.4.Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen</p> <p>Zahlen und Größen vergleichen</p> <p>Vergleich von Rechenausdrücken mit den Zeichen $> < =$ darstellen</p>	<p>Zerlegungen löst sie rein mechanisch. Sie kann den Aufgaben keine Sachsituationen zuordnen. Lena benutzt zum Lösen der Zerlegungsaufgaben und konsequent die Rechenstäbe. So beherrscht sie zum Zeitpunkt der Einführung des Zehnerübergangs alle Zerlegungen sehr sicher.</p> <p>Lena führt diese anhand der Rechenstäbe, die sie in Form eines Zahlenbandes benutzt, durch.</p> <p>Das Verbalisieren bei Zahlenvergleichen bereitet ihr zu Beginn große Schwierigkeiten.</p> <p>Eine Veranschaulichung der Zeichen $> <$ in dieser Art</p>  <p style="text-align: center;">$3 < 5$</p> <p>ist für Lena keine Hilfe. Sie verwechselt beide. Erst als sie die Zeichen mit einem Krokodilsmaul assoziiert, das immer die größere Portion frisst, kann sie die beiden Zeichen richtig verwenden. Das Verbalisieren der Zeichen bereitet ihr große Schwierigkeiten. Sie spricht lange Zeit 5 größer 3, 2 kleiner 4. Erst nach einer intensiven zusätzlichen Übungsphase gelingt ihr ein richtiges Verbalisieren.</p>
<p>1.3.Rechnen</p> <p>1.3.1. Addition und Subtraktion verstehen</p> <p>Addition und Subtraktion verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch</p>	<p>Aufgrund ihrer sprachlichen Probleme steht bei Lena das Verbalisieren am Ende des mathematischen Verinnerlichungsprozesses. Es gelingt ihr nicht, ihre Handlungen zu kommentieren: „Ich habe 5 Äpfel und 3 dazu, ich habe 8 Äpfel.“ Gravierend zeigen sich ihre sprachlichen Mängel bei der Subtraktion. Sie weiß nicht, wie sie den Minuenden, der einen vergangenen Zustand angibt, verbal ausdrücken soll: „Kerzen, 5 ausgeblasen, 3 Kerzen.“ Erst nach einer langen Phase des Handelns und der zeichnerischen Darstellung gelingt es ihr zu verbalisieren. Die Sprechmuster übernimmt sie Wort für Wort, eine selbstständige Abwandlung gelingt ihr nicht. „<u>Ich habe 4 Äpfel, es kommen 5 dazu, dann sind es 9 Äpfel.</u>“ Die unterstrichenen Wörter werden von ihr nicht verändert, sondern auf alle Additionsaufgaben angewendet. Sie kann verbal nicht zwischen dem räumlich-simultanen und dem zeitlich-sukzessiven Aspekt der Addition unterscheiden. Ihr Sprachmuster für die Subtraktion ist ähnlich</p>

<p>Umkehroperationen zur Addition und Subtraktion durchführen</p>	<p>einfach: „ <u>Es waren</u> 7 Hasen, <u>es kamen</u> 3 Hasen weg, <u>jetzt sind es nur noch</u> 4 Hasen.“</p> <p>Die Umkehroperationen werden durch Bewegungen im Raum verdeutlicht (Vorwärts-Rückwärtsbewegung). Lena versteht den Zusammenhang. Mit der Operatordarstellung, die schrittweise von den Schülern entwickelt wird, kommt sie gut zurecht. An der Entwicklung beteiligt sie sich nicht.</p>
<p>1.3.2. Einspluseinssätze und deren Umkehrung</p> <p>Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren</p>	<p>Lena braucht eine lange Übungsphase, ehe sie die Einspluseinssätze bis 10 automatisiert. Sie benutzt konsequent die Stäbe. Aufgaben mit dem Ergebnis 6,7,8 löst sie durch Abzählen der einzelnen Felder, beginnend bei 1. Die Strategie bei 5 mit dem Zählen zu beginnen, wendet sie lange Zeit nicht an. Lediglich Aufgaben mit dem Ergebnis 9 ermittelt sie nicht zählend, denn sie erkennt: „Wenn am Ende der Reihe noch eins fehlt, dann sind es 9.“</p>
<p>Tauschaufgaben der Addition bilden</p>	<p>Lena wendet die Strategie des Vertauschens der beiden Summanden sicher, aber rein mechanisch an. Da sie nur über eine geringe Speicherfähigkeit verfügt, erleichtert ihr gerade diese Strategie die Automatisierung der Einspluseinssätze. Den Unterschied zwischen Aufgabe und Tauschaufgabe kann sie nicht in einem Sachzusammenhang erklären.</p>
<p>Nachbaraufgaben anwenden</p>	<p>Sie löst Nachbaraufgaben rein mechanisch, wendet sie aber nicht als Rechenstrategie beim täglichen Rechnen an.</p>
<p>1.3.3.Im zweiten Zehner addieren und subtrahieren „Dekadische Analogien“ entdecken und anwenden</p>	<p>Lena erkennt den Zusammenhang zwischen „großen“ und „kleinen“ Aufgaben lange nicht. Es widerstrebt ihr, eine Zehnerzahl beim Rechnen in Zehner und Einer zu trennen.</p>
<p>1.3.4.Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren</p>	
<p>Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren</p>	<p>Lena gelingt es auch nicht mit Hilfe der Arbeitsmittel eigene Rechenwege zu entdecken. Sie kann Bekanntes nur bedingt auf andere Zusammenhänge übertragen oder selbstständig Schlüsse ziehen. Bei Partner- oder Gruppenarbeiten kann sie deshalb nur selten eigene Beiträge miteinbringen. Sie kopiert lediglich die Beiträge der anderen, was ihr anhand der Arbeitsmittel gut gelingt. Sie kann die Lösungswege der anderen handelnd nachvollziehen, aber nur bedingt versprachlichen.</p>
<p>Verdoppeln und Halbieren automatisieren; Nachbaraufgaben erschließen</p>	<p>Lena hat die Verdoppelungsaufgaben automatisiert. Sie kann sich Nachbaraufgaben erschließen und den Rechenweg handelnd</p>

<p>Zerlegen und in Schritten rechnen</p> <p>Tauschaufgaben der Addition anwenden</p> <p>Einfache Gleichungen lösen</p>	<p>nachvollziehen. Beim täglichen Rechnen wendet sie diese Strategie nicht an. Sie ist sehr unflexibel im Denken und kann deshalb die einzelnen Lösungswege nicht variativ anwenden.</p> <p>Lena hat zum Zeitpunkt der Erarbeitung des Zehnerübergangs die Zahlzerlegungen sicher im Gedächtnis gespeichert. Nun hat sie auch die Phase des Abzählens an den Stäben überwunden, sie erkennt z.B. auf einen Blick, dass von 7 noch 3 bis zur 10 fehlen. Anhand der Stäbe gelingt es ihr, die meisten Aufgaben mit Zehnerübergang (Addition und Subtraktion) zu automatisieren.</p> <p>Gleichungen im ersten Zehner: Viele Schüler lösen diese mit Hilfe ihrer Kenntnisse zu den Zahlentripeln. Aufgrund ihrer mangelnden Speicherfähigkeit braucht Lena sehr lange, ehe sie sich diese einprägen kann. Deshalb löst sie Gleichungen im ersten Zehner oft falsch Z.B. $3 + _ = 7$ Lena rechnet $3 + 7$. Das Bewusstsein, dass auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der gleiche Zahlenwert ist, fehlt ihr noch.</p> <p>Gleichungen im zweiten Zehner: Lena hat aufgrund vielfältiger konkreter Handlungen große Fortschritte gemacht. Sie kann auch Gleichungen wie $7 + 4 = _ - 3$ problemlos mit Hilfe der Arbeitsmittel lösen.</p>
<p>1.4. Sachbezogene Mathematik</p> <p>1.4.1.Größen</p> <p>Zeit: Woche, Tag, Stunde</p>	<p>Lena hat geringe Vorkenntnisse zu den Größen Zeit und Geld. Sie kann zwar ganze Stunden an der Uhr einstellen, kann aber den Uhrzeiten keine Tageszeiten zuordnen.</p>
<p>Geld</p> <p>1.4.2.Arbeit an Sachsituationen</p> <p>Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen, einfachen Texten oder Schaubildern entnehmen und versprachlichen 	<p>Die verschiedenen Münzen kennt sie nun sicher; Geldbeträge kann sie auf verschiedene Weise legen. Beim Bestimmen von Beträgen kann sie aber keine eigenen Zählstrategien entwickeln. Das Rechnen mit Geld bereitet ihr zu Beginn große Schwierigkeiten. Sie rechnet: $2\text{DM} + 5\text{DM} + 1\text{DM} = 3$ (Münzen). Die Vorstellung von Geldwerten entwickelt sie erst allmählich.</p> <p>Eine Informationsentnahme aus Erzählungen gelingt ihr zunächst überhaupt nicht. Sie kann zu dem Gehörten keine inneren visuellen Vorstellungen entwickeln. Am besten gelingt es ihr, Informationen aus</p>

	<p>Bildern zu entnehmen. Bei Texten ist Lena überfordert (siehe S. 199). Sie kann aufgrund ihres mangelnden Sprachverständnisses und ihres geringen aktiven Wortschatzes keine eigenen Texte erstellen und auch nur bedingt Informationen aus bereits erstellten entnehmen. Im Rahmen der Differenzierung erhält Lena Aufgaben, deren Struktur gleich ist. Es ändern sich nur einige Worte. Beispiel: Ich habe <u>3DM</u>. Meine Oma kommt zu Besuch und schenkt mir <u>7DM</u>. Wie viel <u>Geld</u> habe ich nun? Die unterstrichenen Wörter werden durch andere Sachverhalte ergänzt, z.B. Briefmarken, Puppenkleider. Analog dazu werden Aufgaben zur Subtaktion erarbeitet. So gelingt es ihr allmählich besser, Informationen aus Texten zu entnehmen.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden 	<p>Da sie die Sachsituationen nicht vollständig durchdringt, kann sie auch nur bedingt Fragen stellen und Antworten finden. Lena ist sich ihrer sprachlichen Unzulänglichkeiten bewusst. Sie fragt im Allgemeinen sehr wenig und beteiligt sich kaum am Unterrichtsgespräch.</p>
<p>Lösungshilfen entwickeln und individuell anwenden</p>	<p>Sie kann selbstständig keine Lösungshilfen entwickeln.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Sachsituationen handelnd nachvollziehen und verbalisieren 	<p>Für Lena ist es gerade bei Texten sehr wichtig, dass diese szenisch dargestellt werden, denn wie bereits erwähnt, kann sie zu Texten und zu Gehörtem nicht selbstständig innere visuelle Vorstellungen entwickeln.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Einfache Zeichnungen erstellen 	<p>Erst nach der szenischen Darstellung gelingt es ihr, zu einer Sachsituation eine einfache Zeichnung zu erstellen.</p>
<p>Lösungswege finden</p>	
<ul style="list-style-type: none"> • Zu Sachsituationen Gleichungen finden 	<p>Am Ende des 1. Schuljahres gelingt es ihr, zu einfachen Sachsituationen Gleichungen zu finden.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen 	<p>Sie kann einfachen Plus- oder Minusaufgaben verschiedene Sachsituationen zuordnen. Beim Verbalisieren oder Darstellen von Platzhalteraufgaben oder Zerlegungen ist sie überfordert.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Lösungswege beschreiben und begründen 	<p>Dies gelingt ihr auch am Ende der 1. Jahrgangsstufe nicht.</p>





Ich habe sechse Blume
Ich grige acht Blume
geriegt?

Ich habe Dreizen-
neun Apfel.

5.3.2.3 Gesamtbeurteilung

Lenas Wortschatz und Sprachverständnis sind ebenso wie ihr auditives Gedächtnis unterdurchschnittlich. Analog dazu hat sie große Schwierigkeiten, zu Gehörtem innere visuelle Vorstellungen zu entwickeln. Deshalb ist gerade für sie im Fach Mathematik ein langes Verweilen bei konkreten Handlungen mit Gegenständen oder didaktischem Material unerlässlich. Dabei muss aber berücksichtigt werden, dass die Schülerin lange Zeit nicht in der Lage ist, diese Handlungen sprachlich zu begleiten. Bei ihr läuft der mathematische Verinnerlichungsprozess wie folgt ab:

- Handeln an konkreten Gegenständen in Verbindung mit der Gleichung
- Zeichnerische Darstellung der Gegenstände in Zusammenhang mit der Gleichung
- Handeln am Arbeitsmittel (mit Gleichung)
- Handlungen am Arbeitsmittel zeichnerisch darstellen
- Übungen zum sicheren Gebrauch des Arbeitsmittels für diese Operation
- Verbalisieren: Zunächst versprachlicht sie ihre Tätigkeiten am Arbeitsmittel, erst dann kann sie zu Gleichungen Sachsituationen formulieren. Aber auch in dieser Phase gelingt ihr ein Verbalisieren nur, wenn sie sich an genaue Sprachmuster, die sie sich in einer langen Übungsphase antrainiert hat, halten kann.

Nur eine intensive und konsequente Arbeit am Arbeitsmittel ermöglicht es ihr, sich bis zum Ende des 1. Schuljahres Plus- und Minusaufgaben bis 20 zu erschließen und zu automatisieren. Dass ihr dies gut gelang, beweist sie nun in der 2. Jahrgangsstufe. Aufgaben mit ZE +-ZE bereiten ihr keine Schwierigkeiten.

Lenas sprachliche Schwächen waren bereits zum Zeitpunkt der Einschulung offensichtlich. Daneben zeigt die Schülerin aber von Beginn an großes Interesse und Freude an visuellen Übungen. Dabei fühlt sie sich den anderen ebenbürtig und ihre Motivation für die Mathematik kann gerade durch die Förderung und Erweiterung ihrer visuellen Fähigkeiten aufrechterhalten werden. Sie nimmt visuelle Einprägestrategien sehr gut an und kann kontinuierlich ihren visuellen Speicher erweitern. Gegen Ende des 1. Schuljahres wird vom mobilen sonderpädagogischen Dienst ein Intelligenztest durchgeführt. Lena erreicht folgende Werte:

K-ABC: Skala intellektueller Fähigkeiten IQ 88

Fertigkeitenskala IQ 80

Sprachfreie Skala IQ 92

CFT 1: Summen – IQ 115

Die Schülerin ist ein Beispiel dafür, dass es durch gezieltes Fördern der Stärken (visuelle Wahrnehmung) gelingt, ihre Schwächen (auditive Speicherung) teilweise zu kompensieren.

5.3.2.4 Weiterführende Fördermaßnahmen

Es ist nicht zu erwarten, dass Lena ihre gravierende sprachliche Teilleistungsschwäche auch trotz intensiver häuslicher und schulischer Betreuung ganz beheben können wird. Neben den vorhersehbaren Problemen, die sich daraus im Fach Deutsch ergeben, sind aber auch Schwierigkeiten, insbesondere in der sachbezogenen Mathematik vorprogrammiert. Es wird ihr beispielsweise nur bedingt gelingen, Informationen aus Texten zu entnehmen. Deshalb ist es gerade für sie auch in der 2. und den weiteren Jahrgangsstufen unerlässlich, dass Sachsituationen handelnd nachvollzogen werden und Begriffe wie Entfernung, Gesamtpreis,... durch konkretes Handeln mit Inhalt gefüllt werden. Ein langes Verweilen bei konkreten Handlungen mit Gegenständen oder dem Arbeitsmittel ist auch für den Aufbau des Zahlbegriffs und das Rechnen von Nöten. Ohne die intensive Arbeit am Arbeitsmittel würde es ihr nicht gelingen, sich ein inneres Vorstellungsbild von größeren Zahlen und Rechenoperationen zu machen.

Von großer Wichtigkeit ist aber auch, dass Lenas visuelle Speicherfähigkeit im Rahmen der Differenzierung weiter ausgebaut wird, damit ihre mangelnde auditive Speicherfähigkeit intermodal kompensiert werden kann.

5.3.3 Patrick

Patrick kam erst Mitte Juni in die Experimentalgruppe. Er hatte bisher mit den Cuisenaire Stäben gearbeitet. Er rechnete sicher im Zahlenraum bis 10 und konnte Aufgaben mit dekadischer Analogie lösen. Er erklärte die Aufgaben anhand der Cuisenaire Stäbe, die ihm die Projektleiterin zur Verfügung stellte.

Viele Aufgaben im Zahlenraum bis 10 erschloss er sich über Aufgaben, die er sich auswendig eingeprägt hatte. Aufgaben mit Zehnerübergang konnte er noch nicht lösen.

5.3.3.1 Akzeptanz des Materials

Patrick beobachtet die Arbeit der Schüler mit den Rechenstäben und dem Hunderterfeld interessiert. Er erhält das Arbeitsmaterial kommentarlos. Er beginnt spontan, die Stäbe in das Feld zu legen und erkennt Gemeinsamkeiten: „Bei den Stäben und auf dem Feld ist dieselbe Einteilung. Die Stäbe passen genau hinein. Es sind 10 Felder in einer Reihe. Wenn ich zwei Stäbe aneinanderlege, dann passen sie manchmal nicht mehr in eine Reihe. Ich sehe aber trotzdem, wie viele es sind. Wenn hinten zwei Felder überstehen, dann sind es zwölf.“ Er legt 2 Stäbe spielerisch aneinander und nennt die Plusaufgabe. Ebenso versucht er durch Wegstreichen Minusaufgaben zu lösen. Nach drei Tagen spielerischen Umgangs mit dem Material befragt ihn die Versuchsleiterin. Er erklärt: „Diese Stäbe sind besser als die in der alten Schule. Die hatten nämlich keine Striche und man konnte nicht abzählen. Ich habe bei den anderen Stäben manchmal die Farben verwechselt. Jetzt kann ich abzählen, wenn ich nicht weiß, wie viele es sind.“

Die Stäbe erkenne ich sofort. Bis hier hin (zeigt auf den roten Strich der Fünfeinteilung) sind es immer 5 und dann sehe ich gleich, ob ich 8 oder 9 habe. Bei 8 brauche ich noch 3 und bei 9 brauche ich noch 4 nach dem roten Strich.“

Auch zum Hunderterfeld äußert er sich: „Das ist gut. Bei uns konnte man die Stäbe nur auf weißes Papier legen. Da wusste man nicht, wie man sie hinlegen sollte, ob so oder so (zeigt senkrecht, waagrecht, in die Mitte, an den äußeren Rand). Jetzt weiß ich, wo der Stab seinen Platz hat. Ich sehe auf dem Feld auch gleich, wie viele ich habe und wie viele mir noch fehlen. Wenn ich den 8er Stab hineinlege, sehe ich sofort, dass mir bis 10 noch 2 fehlen.“

5.3.3.2 Individuelle Lösungen

Patrick erklärt die dekadische Analogie anhand der Rechenstäbe:

$$12+4=$$

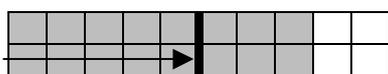
„Ich rechne in der zweiten Reihe einfach $2+4=6$. Weil ich aber in der zweiten Reihe bin und nicht in der ersten, sind es nicht 6 sondern 16. Denn in der zweiten Reihe sind alle die Zahlen, die einen Zehner haben. Wenn ich also in der zweiten Reihe rechne, dann muss es eine Zahl mit einem Zehner sein. Außer bei 20, da habe ich 2 Zehner.“

Bei Verdoppelungsaufgaben legt er die Rechenstäbe in Form eines Zahlenstrahles in das Feld. Er bemerkt: „6+6 erkenne ich leicht, das ist 12, weil 2 über das Feld hinausstehen, 7+7 ist 14, weil 4 darüber hinausstehen. Bei 8+8 wird es schwierig, weil ich nicht mehr genau sehe, wie viele überstehen. Bei 9+9 ist es genauso.“ Patrick legt spontan die Stäbe untereinander: „Jetzt ist 9+9 einfach. Es fehlen hinten noch 2 bis 20, also ist 9+9=18.“ Er legt die übrigen Verdoppelungsaufgaben ebenfalls untereinander in das Zahlenfeld.

Patrick hat keine Probleme, sich anhand der Arbeitsmittel die Nachbaraufgaben der Verdoppelungen zu erschließen.

12,14,16,18 werden für ihn zu „Signalzahlen“.

16-5 legt er so:



Er erstellt Aufgabenreihen zu diesen Zahlen und erklärt sie anhand der Rechenstäbe:

$$8+8=16$$

$$8+9=17 \text{ (eins dazu)}$$

$$8+10=18 \text{ (zwei dazu)}$$

$$8+11=19 \text{ (drei dazu)}$$

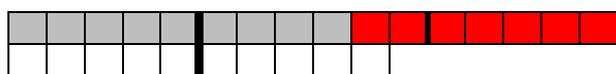
$$16-8=8$$

$$16-7=9 \text{ (eins dazu)}$$

$$16-9=7 \text{ (eins weg)}$$

Bei Aufgaben mit Zehnerübergang + zeigt Patrick, dass er gerne spielerisch mit den Stäben rechnet und an verschiedenen Möglichkeiten des Legens tüffelt.

Bei 9+7 legt er die beiden Stäbe nebeneinander in das Feld



„Das ist nicht gut, da muss ich zählen, wie viele es sind, weil der 7er Stab so weit über das Feld hinausschaut. Aber jetzt habe ich eine bessere Idee. Ich drehe den 7er Stab einfach um, so dass der rote Strich vorne ist. Nun sehe ich sofort, dass noch 6 überstehen. Also ist 9+7=16.“

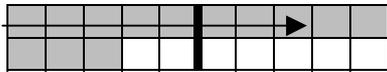
Analog dazu legt er 8+7

Patrick wendet die Strategie des Zerlegens bei Aufgaben mit Zehnerübergang an, lehnt sie allerdings bei Aufgaben wie 9+2 oder 9+3 ab. Er erklärt (ohne auf dem Zahlenfeld mitzuzeigen): „Bei 9+2 steht hinten eines über und bei 9+3 stehen zwei hinten hinaus, also sind es 12.“

Bei Aufgaben mit Zehnerübergang – zerlegt er den Subtrahenden und vermindert auf 10. Viele Aufgaben erschließt er sich auch über die Halbierungsaufgaben.

Bisweilen ermittelt er die Ergebnisse so.

13-8



Er rechnet $10-8=2$ $2+3=5$ und erklärt: „ So brauche ich die 8 nicht zu zerlegen, sondern kann sie auf einmal von 10 wegnehmen. Dann muss ich aber aufpassen, dass ich die 3 in der zweiten Reihe nicht vergesse, denn die muss ich zu den 2 dazuzählen.“

5.4 Philipp

5.4.1.1 Anamnese / Familiäre Situation

Philipp wurde im Dezember 1991 geboren.

Seine körperliche Entwicklung ist beeinträchtigt durch Spina bifida (offener Rücken) mit ventiliertem Hydrocephalus. Er ist nicht vollständig querschnittsgelähmt. Links verfügt er über eine gute Restfunktion.

Fördermaßnahmen:

Krankengymnastik ab 1. Lebensjahr

Frühförderung ab 1,6 Lebensjahr

Kindergarten ab 4,9 Lebensjahr

Seit 12,97 Hippotherapie

Philipp ist Rechtshänder. Seit dem 3. Lebensjahr trägt er wegen Kurzsichtigkeit und Schielens eine Brille (3,75 – 4,75 dptr).

Laut Aussagen der Mutter begann Philipp mit ca. 1 Jahr zu sprechen.

Philipp kann krabbeln (auch Treppen hinauf und hinunter) und mit dem Gehwagen kurze Strecken laufen. Er kann sich selbstständig auf eine Bank setzen. Seitliche Stützen braucht er nicht.

5.4.1.2 Vorschulische Beurteilungen

Arbeitsverhalten

Er musste häufig zu Konzentration angehalten werden, sonst schweifte sein Blick weg von der gestellten Aufgabe..... Überhaupt brauchte Philipp längere Eingewöhnungsphasen, arbeitete dann gezielt, konnte sich korrigieren, vergaß jedoch zwischendrin die Aufgabenstellung..... bei Situationsveränderung große Umstellungsprobleme, Verwirrung. Philipp begleitete sein Tun meist mit weitschweifig assoziierendem Reden....Durch hand- und mundmotorische Kontrolle (Zeigen, Mitsprechen) behalf er sich öfters intermodal bei visuellen Wahrnehmungsschwächen..... Nach ca. 60 Minuten vermehrt stereotype Pendelbewegungen, Wippen, schließlich Gähnen. Völlige Erschöpfung nach 90 Minuten....

Leistungsbeurteilung

Gut gefördert: Sprachverständnis, Allgemeinwissen im Normbereich..... Kann 1:1 bis mindestens 24 zählen, simultan 4 erfassen, Ziffern bis 10 erkennen, allerdings kein Verständnis für additive und subtraktive Operationen, Vergleichsbegriffe.

Im lebenspraktischen Bereich eingeschränkt selbstständig, kaum Eigeninitiative bei Abläufen, Arbeitshaltung und -techniken in etwa adäquat, doch stark verlangsamt.

Sein Begabungsprofil ist einerseits geprägt von einzelnen Spitzenleistungen bei der auditiven Speicherung (IQ 125); dem Erfassen von Analogien und im Förderbereich. Deshalb sind sein Sprachverständnis, sein Interesse an Förderangeboten so gut ausgebildet.

Dem gegenüber stehen jedoch unterdurchschnittliche Werte im visuellen Speichern, Kombinieren, Analysieren von visuellen Vorlagen, Reproduzieren von Reihenfolgen und bei Visuomotorik, der räumlichen Orientierung – diese Wahrnehmungsschwächen hängen natürlich zusammen mit Philipps visuell räumlicher Einschränkung durch seine körperliche Behinderung und sein eingeschränktes Blickfeld (Brille).

Für das schulische Lernen lassen sich größere Probleme beim Lese- und Schreiblernprozess (die Verfasserin: auch im Mathematikunterricht) erwarten. Philipp braucht eine auf sein signifikant einzelheitliches Denken zugeschnittene spezifische Lernmethode.

Darüber hinaus zeichnen sich bei Philipp Probleme ab, sich in der Gruppe orientieren zu können – er durchschaut sachliche Abläufe und soziale Handlungsfolgen zu wenig, kann wegen seiner körperlichen Einschränkung kaum planende Eigeninitiative entwickeln – was sich unter anderem in schwachen Labyrinth-Tests niederschlägt.

Folgende Teilleistungsschwächen bedürfen bei Philipp vorrangig der Förderung, bzw. der Entwicklung von Kompensationsstrategien:

- Visuelles Gedächtnis
- Visuelle Figur-Grund-Wahrnehmung
- Raumorientierung
- Visuomotorik

Gesamtzusammenfassung:

„Eine Beschulung in der Regelschule dürfte jedoch eine Überforderung für Philipp darstellen..... Seine körperliche Belastungsgrenze liegt derzeit bei maximal 90 Minuten konzentrierter Arbeit , wobei er ausschließliche Zuwendung braucht, um von der Anstrengungsbereitschaft her durchhalten zu können.

Zum Teil gravierende Wahrnehmungsschwächen (visuelle Speicherung, Gliederung, räumliche Orientierung) erschweren Philipp die Aufnahme und Verarbeitung, obwohl er gut logisch denken kann, ein altersgemäßes Sprachverständnis hat. Es ist jedoch zu befürchten, dass er im Lese- und Schreiblernprozess individuelle Förderung braucht, auch vom Arbeitstempo nicht mithalten kann.....

Philipp braucht die teilleistungsspezifische Förderung, die auch in einer kleinen Klasse der Regelschule nicht geleistet werden kann – der Unterricht müsste sicherlich auf lange Strecken lernzielfähig geführt werden.... Ein Versuch mit der Regelschule dürfte für Philipp eher belastend sein.

Es fand ein Gespräch zwischen den Eltern, der bisherigen Betreuerin der Frühförderstelle, der zukünftigen Lehrkraft und einem Vertreter der Körperbehindertenschule statt. Dabei wurde beratschlagt, welcher schulische Weg für Philipp der geeignete wäre. Man einigte sich darauf, dass Philipp an der Regelschule unterrichtet wird, da er so in seinem sozialen Umfeld, in dem er sich wohl fühlt und in dem er integriert ist, bleiben kann. Es wurde vereinbart, dass Philipp in regelmäßigen Abständen vom mobilen Dienst der Körperbehindertenschule zusätzlich betreut wird.

So sieht sich Philipp (Zeichnung am Tage der Einschulung):



5.4.1.3 Beobachtungen zu den pränumerischen Fähigkeiten

5.4.1.3.1 Sehen und vorstellen

Wie aus den Gutachten hervorgeht, hat Philipp gravierende Schwächen in der visuellen Informationsverarbeitung. Dies ließ vermuten, dass er sowohl im Lese- Rechtschreibprozess als auch im Fach Mathematik große Probleme haben würde. Seine Leistungen in den Fächern Deutsch und Mathematik divergieren jedoch sehr, wie in den einzelnen Unterpunkten aufgezeigt wird.

5.4.1.3.1.1 Visuomotorische Koordination

Philipp hat Schwierigkeiten, das Sehen mit Bewegungen des Körpers zu koordinieren. Deutlich zeigen sich diese beim Falten und Schneiden, sowie beim Abschreiben von der Tafel (vgl. auch Wahrnehmung der Raumlage).

Bei mehrfarbigen zeichnerischen Darstellungen ist er überfordert. Er kann sich nur auf die Wahl des Stiftes oder den Inhalt konzentrieren.

Je größer die räumliche Distanz zwischen dem visuell Wahrgenommenen und ihm ist, desto schwieriger ist für ihn die Koordination (vgl. eingeschränkter Blickwinkel). Sieht Philipp zur Tafel, so schweift sein Blick zunächst bis zur Decke, nähert sich dann langsam der Tafel und fixiert die Position des Wortes. Anschließend braucht er sehr lange, bis er sich erneut auf seinem Blatt orientieren und das gespeicherte Wort übertragen kann.

Um seine visuomotorische Koordination zu verbessern, werden folgende Übungen durchgeführt:

- Philipp rollt auf dem Boden. Am Ende der Matte liegen verschiedene Bilder. Er muss aus der Rollbewegung auf das richtige Bild zeigen.
- Augenfixierübungen während der Kopf in Bewegung ist
- Seine Augen folgen regelmäßigen und unregelmäßigen Bewegungen.
- Philipp schaukelt in einer Rolle. Verschiedene Bilder liegen vor ihm auf dem Boden. Er muss während der Schaukelbewegung auf das richtige Bild zeigen.

Das Problem liegt darin, diese Übungen in den Unterricht der Regelschule einzuplanen. Die Versuchsleiterin führt diese im Rahmen des Sportunterrichts durch, während sich die anderen Kinder umziehen.

5.4.1.3.1.2 Figur-Grund-Unterscheidung

Es fällt Philipp schwer, sich auf den wesentlichen visuellen Reiz zu konzentrieren. Er kann Teilfiguren nur bedingt aus einem komplexen optischen Hintergrund isolieren. Philipp ermüdet bereits nach einer sehr kurzen Übungsphase, sein Blick schweift ab. Starr fixiert er einen anderen Gegenstand, der seine Aufmerksamkeit erregt, wirkt teilnahmslos, fast apathisch. Wird er aber verbal oder nonverbal zur Weiterarbeit aufgefordert, so setzt er sich sogleich wieder mit dem visuellen Problem auseinander.

Bessere Ergebnisse erzielt er, wenn die Handlung intermodal verknüpft wird. So begleitet er das Nachfahren von Wegen mit einem Summgeräusch. Er verbalisiert, welche Schnittstelle der Wege für ihn am schwierigsten ist, begründet dies und kennzeichnet sie rot.

Philipp mangelnde Figur-Grund-Wahrnehmung führt zu einem unorganisierten Arbeitsverhalten: Er nimmt sein Heft aus der Mappe, blättert es auf und beginnt zu schreiben, egal auf welcher Stelle er sich gerade befindet. Der dominante visuelle Reiz ist die freie Seite, die er nicht in Bezug zu den bereits geschriebenen sieht. Alle anderen Reize treten erst nach einer Aufforderung oder einem Impuls hervor. Dann nimmt er das Namensschild auf dem Heft als Orientierungshilfe. Er blättert das Heft langsam auf. Auf der ersten Seite nimmt ihn aber abermals ein Reiz gefangen, sei es ein Korrekturzeichen oder ein Wort. Er blättert dann Seite für Seite durch, wobei seine Aufmerksamkeit visuell ständig von „Nebensächlichkeiten“ festgehalten wird.

Eine übersichtliche Gestaltung der Hefteinträge gelingt im Fach Deutsch im Gegensatz zu Mathematik gut. Er erkennt beim Schreiben die Dominanz der Mittelzeile und fügt problemlos Zeile für Zeile aneinander. In Mathematik nimmt er die quadratische Einteilung nicht als Orientierungshilfe. Er schreibt die Zahlen zwischen die Quadrate, quetscht Zahlen und Rechenzeichen eng aneinander, macht unterschiedlich große Absätze,... . Es scheint, als sei Philipp so sehr auf die Aufgabe oder deren Lösung fixiert, dass alle anderen Reize in den Hintergrund treten. Die verstärkte Reizgebundenheit im Fach Mathematik ist auch bedingt durch seine unterschiedliche emotionale Einstellung zu den beiden Fächern. Sprachlichen Inhalten begegnete er (bedingt durch seinen guten auditiven Fähigkeiten) von Beginn an aufgeschlossen und ohne Scheu. Er hat großes Interesse am Lesen und kannte zum Zeitpunkt der Einschulung die meisten Buchstaben. Wörter prägt er sich in erster Linie auditiv ein. Demgegenüber steht eine große Unsicherheit und mangelndes Selbstbewusstsein in Mathematik.

Lernzielkontrollen bewältigt er in Mathematik häufig nicht selbstständig. Kann er eine Aufgabe nicht lösen, so gelingt es ihm nicht, den Blick von dieser zu wenden und fortzufahren. Er ist unfähig, sich ohne fremde Hilfe von diesem Reiz zu lösen. Deshalb konzentriert die Versuchsleiterin durch Mitzeigen seinen Blick auf eine Aufgabe und ermuntert ihn häufig bei richtigen Lösungen.

In der Freiarbeit wählt er sich selbstständig Aufgaben aus. Seine Konzentration ist bei deren Bearbeitung jedoch geringer als bei Aufgaben, die im Klassenverband geklärt und gelöst werden. In der freien Form ist er stärker von den Reizen seiner unmittelbaren Umgebung abhängig.

5.4.1.3.1.3 Wahrnehmung der Raumlage

Philipps Leistungen in Bezug auf die Wahrnehmung der Raumlage sind abhängig vom Unterrichtsfach. Typische Fehler bei Problemen in diesem visuellen Bereich wie die Verwechslung von p und b, und b und d unterliefen ihm nie. Wörter wie an, um,... schrieb und las er stets richtig und nicht wie zu vermuten war na, mu....

Anders stellt sich die Situation im Fach Mathematik dar. Er schreibt einstellige Zahlen häufig spiegelverkehrt. Insbesondere die Ziffern 3 und 6 verkehrt er meist. Intermodale Hilfen wie die akustische Untermalung der Bewegungsabläufe werden von ihm nicht angenommen, bzw. verwirren ihn noch mehr. (Er begleitet das Schreiben der Zahlen sprachlich mit von ihm selbst gewählten Begleitversen, schreibt die Zahlen aber aufgrund seiner mangelnden Rechts-Links-Unterscheidung trotzdem seitenverkehrt.). Wird er auf die falsche Darstellung aufmerksam gemacht, so „sieht“ er seinen Fehler sofort und schreibt die Ziffer richtig. Gleichzeitig nimmt jedoch seine Unsicherheit und Befangenheit gegenüber Zahlen zu. Deshalb wird die falsche Notation scheinbar akzeptiert. Er macht aber jeden Tag eine kurze Übung zur Wahrnehmung der Raumlage (in der Schule oder zu Hause). Innerhalb eines Monats gelingt es ihm sicher, die Ziffer normgerecht darzustellen.

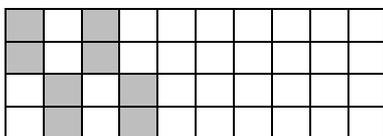
Die Ziffern 10 bis 20 schreibt er stets richtig.

5.4.1.3.1.4 Wahrnehmung räumlich zeitlicher Beziehungen

Die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen ist Philipp Hauptproblem. Er kann auch trotz intensiver Übung seine Leistungen nur bedingt verbessern.

Philipp gelingt es zu Beginn der 1. Jahrgangsstufe nicht, Bilder in einer (für uns) logischen Reihenfolge zu ordnen. Er erkennt zwar zumeist den Anfang und das Ende des Geschehens (z.B. Banane, leere Schale) hat aber Schwierigkeiten, die Zwischenstufen richtig zu ordnen. Aber gerade für das Verständnis und die Durchführung der Operationen ist eine richtige zeitliche Abfolge von großer Bedeutung. Deshalb wird zu Beginn der 1. Jahrgangsstufe im Rahmen der Differenzierung ein Übungsschwerpunkt auf das Ordnen und Verbalisieren von Bildfolgen gelegt. So kann der Schüler seine Leistungen im Durchschauen von Handlungsketten steigern. Ein weiterer Übungsschwerpunkt ist das Vervollständigen von Mustern. Philipp erkennt die Muster und kann sie fortführen. Nachteilig wirkt sich dabei seine eingeschränkte visuomotorische Koordination und seine starke Reizgebundenheit aus.

Bsp:



Soll er ein Muster dieser Art vervollständigen, so sieht er nicht die Beziehung und die räumliche Nähe der beiden Kästchen untereinander, sondern konzentriert sich auf eines, malt es penibel genau aus und fixiert seinen Blick dann erst auf das darunterliegende. Beim Herstellen der Folgen ermüdet er sehr schnell und ist häufig durch die Verbindung von visuellen und motorischen Ansprüchen überfordert. Aufgrund dessen erledigt er diesen Aufgabentyp mit einem Tutor. Er kommentiert die Musterfolge, der Tutor übernimmt für ihn die zeichnerische Darstellung.

Große Probleme bereitet Philipp nach wie vor das Durchfahren von Labyrinthen. Auch bei wenig komplexen Irrgärten verfährt er sich und muss korrigieren. Beim konkreten Handeln (durchwandern eines am Boden aufgezeichneten Labyrinths) findet er den Weg nicht. Er kann die einzelnen Teile nicht zueinander in Beziehung setzen. Trotz oftmaligem Handeln gelingt es Philipp nur bedingt, seine Leistungen zu verbessern.

Auf Punktbildern kann er sich nun nach Erarbeitung von Einprägestrategien gut orientieren und diese auf ein analoges Punktmuster übertragen. Er hält sich starr an folgende Strategie: Markieren eines Punktes, dessen Lage man sicher feststellen kann, als Ankerpunkt. Von diesem aus entwickelt er die Figur weiter.

Zusammenfassung:

Philipp hat Fortschritte in der Wahrnehmung räumlicher Beziehungen gemacht. Es existieren aber nach wie vor erhebliche Schwächen. Diese beeinflussen seine Leistungen im Fach Deutsch weniger als die in Mathematik. Er hat keine Probleme, die Anordnung und Sequenz von Buchstaben in einem Wort wahrzunehmen. Seine Rechtschreibleistung ist sehr gut. Große Schwierigkeiten ergeben sich aber bei der Strukturierung von Mengen und beim Schreiben von zweistelligen Zahlen in der 2. Jahrgangsstufe.

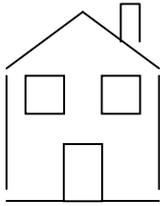
Seine mangelnde Wahrnehmung räumlicher Beziehungen beeinflusst vor allem alltägliche Arbeitstechniken, wie das Abschreiben von der Tafel. Er ist nur eingeschränkt fähig, die Wörter, die ihm an der Tafel vertikal dargeboten werden, auf die horizontale Ebene seines Blattes zu übertragen. In der 1. Jahrgangsstufe behilft er sich intermodal, indem er die Sätze, die ihm sowohl visuell an der Tafel als auch auditiv dargeboten werden, speichert und auf das Blatt überträgt. Aufgrund seiner guten auditiven Wahrnehmung bei Buchstabensequenzen unterlaufen ihm kaum Fehler. Dies gelingt ihm in der 2. Jahrgangsstufe bei längeren Texten nicht mehr. Überschreitet eine Sinneinheit an der Tafel eine Zeile, so kann er sich oft nicht orientieren.

Längere Texte werden deshalb an der Tafel durch farbige Zeichen strukturiert. Sie setzen Signale, nach denen er sich richten kann. Bisweilen erhält Philipp ein Textblatt, dessen Inhalt er in sein Heft überträgt.

Neben der Figur-Grund-Wahrnehmung sind auch seine Probleme bei der Wahrnehmung räumlich-zeitlicher Beziehungen ein Faktor dafür, dass es ihm nicht gelingt, eine logische, rationale Abfolge der Arbeitsschritte einzuhalten.

5.4.1.3.1.5 Visuelles Speichern

Philipp verfügt zu Beginn der 1. Jahrgangsstufe nur über eine geringe visuelle Speicherfähigkeit. Er hat keine Einprägestrategien entwickelt. Soll er sich z.B. dieses Haus einprägen



so erfasst er nur den Umriss des Hauses.

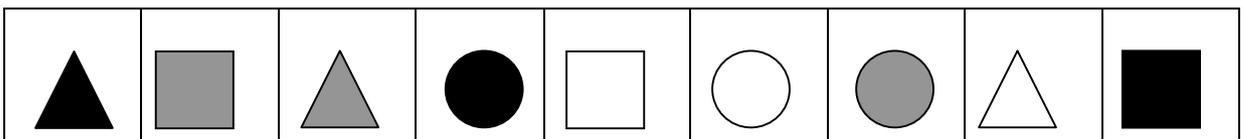
Türen und Fenster ordnet er in beliebiger Reihenfolge an. Deutlich treten bei Aufgaben zur visuellen Speicherung seine Probleme bei der Rechts-links-Diskrimination hervor.

Die Klasse entwickelt folgende Merkhilfen, die zum gezielten Sehen führen:

- Anzahl der Fenster
- Beschreiben der Lage der Fenster, der Türe, des Kamins,...
- Entwicklung des Hauses, Nachvollziehen der Zeichenschritte (Nachfahren mit dem Finger, verbalisieren, in der Vorstellung nachzeichnen)
- Beschreiben der Lage von eingefärbten Flächen

Zusatzangebot für Philipp: Der Gegenstand wird nicht an der Tafel aufgezeichnet, sondern auf ein Blatt. Es fällt ihm leichter, seinen Blick auf das Blatt zu konzentrieren, da so die räumliche Nähe gegeben ist, die räumliche Distanz zur Tafel erschwert ihm das Einprägen. Philipp fährt die Linien mehrmals mit dem Finger oder dem Stift nach und verbalisiert dazu.

Als Philipp diese Einprägungsstrategien sicher anwenden kann, trainiert er das Speichern mehrerer Figuren, die zunächst strukturiert und geordnet werden müssen, z.B.



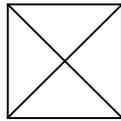
Die Schüler entwickeln erneut Einprägestrategien. Kann Philipp zu Beginn nur 3 verschiedene Formen visuell speichern, so gelingt es ihm am Ende der 1. Klasse sich 8 von 9 möglichen einzuprägen.

5.4.1.3.1.6 Visuelles Operieren

Visuelles Operieren setzt die Fähigkeit zum visuellen Speichern und eine sichere visuelle Wahrnehmung voraus. Da Philipp jedoch in diesen Bereichen nach wie vor große Schwierigkeiten hat, gelingt ihm dieses nur bedingt.

Besonders deutlich wird dies bei Kim-Spielen. Er kann auch bei drei Gegenständen, die er berührt und deren Lage er verbalisiert hat, nicht beurteilen, welche Veränderung vorgenommen wurde.

Fortschritte hat der Schüler bei folgenden Übungen gemacht:



Findest du alle Dreiecke?

Sah er zunächst nur vier Dreiecke, so gelingt es ihm nun, die „Begrenzungslinien“ visuell zu überspringen und wie in diesem Fall zwei kleinere zu einem größeren Dreieck zu kombinieren.

5.4.1.3.1.7 Raumerfahrung und Raumvorstellung

Aufgrund seiner Behinderung hat Philipp ein Defizit in der Raumerfahrung und Raumvorstellung. Er hat nach wie vor Probleme, Lagebeziehungen am eigenen Körper zu erfassen. Häufig verwechselt er rechts und links. Bei Übungen wird Philipps rechte Hand deshalb mit einem Sandsäckchen beschwert. Sicher unterscheidet er oben, unten, unter, über, auf und zwischen.

Analog dazu gelingt es Philipp nur bedingt, die Lage von Gegenständen im Raum zu erfassen und zu beschreiben.

Geobrett

Philipp hat von Beginn an Probleme, Mengen zu strukturieren. Er findet keine eigenen Strukturierungen, um diese zu zählen und quasi-simultan zu erfassen. Der Schüler hat eine große Scheu, mit Mengen zu handeln und sie zu verändern. Zählt er, so beginnt er stets bei der Zahl 1, tippt die einzelnen Elemente nur leicht an und verschiebt sie nicht. Auch eine räumliche Ordnung nach gezählten und ungezählten Elementen nimmt er nicht vor. Die Notwendigkeit einer Strukturierung wird ihm auch trotz mehrmaligem Verzählens nicht einsichtig.

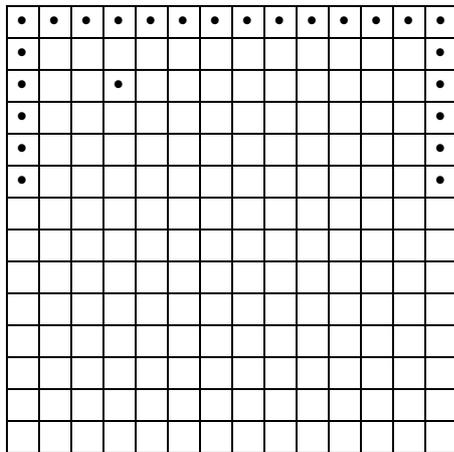
Zeichnerische Strukturierungshilfen wie



nimmt er nicht an: „Ich habe doch noch Platz auf der Karte, ich brauche keine neue anzufangen.“ Er sieht die Striche nur als zusammengehörig, wenn die unmittelbare räumliche Nähe gegeben ist.

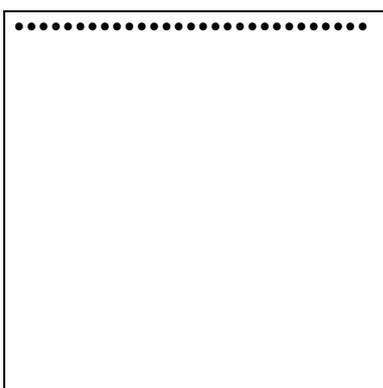
Piaget beschreibt dieses Phänomen: „Die elementarste räumliche Relation, die die Wahrnehmung erfassen kann, ist anscheinend das Benachbartsein, das selbst der einfachsten Bedingung jeglicher Wahrnehmungsstruktur entspricht, nämlich der „Nähe“ der in einem und demselben Feld wahrgenommenen Elemente. Der zweifellos erstrangige Faktor der Organisation von Strukturen ist die Nähe der strukturierten Elemente. Je jünger ein Kind ist, desto mehr dominiert die Nähe vor den anderen Organisationsfaktoren (Ähnlichkeit, Symmetrie, usw.), mit der Entwicklung hingegen verliert der Faktor Nähe seine Vorrangstellung, und die Elemente des Ganzen können auf größere Entfernungen zueinander in Beziehung gesetzt werden.“ (Piaget, J., Inhelder, B. u.a.: 1993,, S. 25,26)

Dass bei Philipp noch das räumliche Benachbartsein dominiert, zeigt sich besonders bei der Entwicklung des Geobrettes mit der Struktur 5x5. Es gelingt ihm nicht, die Nägel auf dem Raum zu verteilen.



Er reiht sie ganz eng aneinander. Als ihm die Anordnung der 25 Nägel aus Platzgründen in einer Reihe nicht gelingt, führt er diese um die Ecke weiter. Diese Einseitigkeit gefällt ihm nicht. Deshalb nimmt er Nägel von der rechten Seite weg und steckt sie nach links. Wichtig ist für ihn, dass die linke und die rechte Seite gleich lang sind. Ein Nagel bleibt ihm, der diese Symmetrie durchbrechen würde. Er steckt ihn deshalb ohne Bezug zu den anderen in die Mitte des Feldes. Philipp strukturiert also nicht nach Anzahl, sondern nach der räumlichen Nähe und subjektiven ästhetischen Gesichtspunkten.

Im Gegensatz zu den meisten anderen Kindern versucht Philipp auch bei der zeichnerischen Darstellung nicht die Anzahl zu strukturieren und den Raum zu unterteilen. Er sieht keinen Bezug zwischen der konkreten Handlung und der zeichnerischen Darstellung. Die Reihung und das Benachbartsein der einzelnen Elemente steht für ihn nach wie vor im Vordergrund.



Beschreibung:

Er zeichnet 29 Elemente auf. Beim Aufzeichnen orientiert er sich zunächst an der Anzahl. Er zählt bis 10. Dann lässt er sich durch die Aufzeichnungen seiner Nachbarin ablenken, die die Punkte gleichmäßig auf dem Blatt verteilt. Nun steht für ihn nicht mehr die Anzahl im Mittelpunkt, sondern die Einteilung. Er ergänzt so viele Punkte, bis er das Ende der Reihe erreicht hat. Nun tritt bei ihm ein

Denkwiderstand auf. Er erinnert sich wieder an die Anzahl und beginnt seine Punkte zu zählen. Aufgrund der sehr engen Anordnung gelingt ihm aber die 1:1 Zuordnung nicht. Er ist nicht in der Lage, die beiden Faktoren Anzahl und Raum in Beziehung zu setzen.

Bei der anschließenden Besprechung erhält Philipp die zeichnerische Darstellung eines anderen Schülers. Er erkennt: „Ich kann leichter zählen, weil die Punkte größer sind. Auch der ganze Platz ist ausgefüllt.“ Die Gleichheit der Mengen in den Reihen erkennt er nicht. Durch Mitzeigen und mit akustischer Untermauerung wird Philipp erneut die Fünferstruktur verdeutlicht. Beim abermaligen Versuch einer zeichnerischen Darstellung scheitert der Schüler jedoch wiederum an der Strukturierung nach 5.

Der zeichnerischen Lösung schließt sich eine intensive Übungsphase an, in der den Punkten auf dem Geobrett Punkte auf der zeichnerischen Darstellung zugeordnet werden. Es ist ihm anfangs nicht möglich, einen Bezug zwischen beiden herzustellen. Soll er eine geometrische Figur vom Geobrett auf die Zeichnung übertragen, so zeichnet er die Form zwar auf, achtet aber nicht auf die Größe und die Lage. Analoge Probleme treten beim Nachspannen von geometrischen Figuren auf. Erst nach einer gemeinsamen Erarbeitung von Übertragungsstrategien (markanten Punkt suchen, in der Zeichnung zuordnen, kennzeichnen, von diesem Punkt aus die anderen Linien übertragen) gelingt ihm eine richtige zeichnerische Übertragung.

Die Arbeit mit den Stäben

Philipp braucht sehr lange, ehe er die mathematische Struktur der Stäbe durchschaut. Für ihn stellen sie lediglich ein Spielzeug dar, das er gerne benutzt. Erst allmählich beginnt er sich für sie unter mathematischen Gesichtspunkten zu interessieren und als Mittel für das Rechnen zu akzeptieren.

Er erkennt die Stäbe 1 bis 4 sicher. Er kann sie simultan erfassen. Bei der Verwendung des 5er Stabes ist er unsicher. Er zählt häufig und vergleicht immer wieder mit dem 4er Stab. Deshalb wird am 5er Stab ein roter Punkt markiert.

Die Markierung der 5 als Mittel der Quasi-Simultanerfassung wird von ihm anfangs nicht angenommen. Bei der Ermittlung der Anzahl eines Stabes beginnt er immer wieder bei 1 zu zählen. Deshalb werden Übungen durchgeführt, bei denen Philipp den visuellen Eindruck (roter Strich) mit akustischen Signalen verbinden kann. Er fährt dabei mit dem Finger bis 5 und macht dazu das Brummgeräusch eines Autos. Den roten Strich assoziiert er mit einer Schranke, bei der der Autofahrer bremsen muss und schaut, wie viele Autos noch vor ihm stehen. Philipp prägt sich so gut die Struktur der Stäbe ein. Nur noch gelegentlich verwechselt er den 9er und den 10er Stab (Es passiert, dass er beim 9er Stab die 4 entlang fährt und sie als 5 zählt).

Bei Unsicherheit fällt er aber sogleich wieder in das zählende Rechnen zurück. Im Laufe der Zeit lernt der Schüler, die Stäbe nach ihrer Länge einzuschätzen (Fortschritte in der visuellen Wahrnehmung von Längen).

Verbindung Rechenstäbe – Hunderterfeld

Das 25 er Quadrat wird abgeleitet von der Struktur des Geobrettes. Während die meisten Schüler spontan probieren, die Stäbe in dieses Feld zu legen, stellt Philipp von sich aus keinen Bezug zwischen Feld und Stäben her, obwohl dieses des öfteren als Hilfsmittel für das Zählen benutzt worden war. Den Auftrag, das Feld so zu vergrößern, dass alle Stäbe hineinpassen, führt er wie folgt aus: Er legt den 10er Stab auf das Blatt und fährt ihn auf drei Seiten nach. Dann schätzt er ab, wie hoch das Feld für 5 Stäbe sein müsste. An der Stelle zieht er einen weiteren Strich, so dass ein Rechteck in der Größe von ungefähr 5 10er Stäben entsteht.



Eine Unterteilung bzw. Strukturierung der Fläche nimmt er nicht vor. Er erweitert auch nicht wie alle anderen Kinder das bestehende 25er Quadrat, sondern beschränkt sich auf eine Umrisszeichnung.

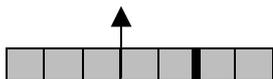
Philipp zeichnet das Feld zwar unstrukturiert auf, hat dann aber keine Schwierigkeiten, diese anzunehmen. Er freut sich über die Einteilung in die einzelnen Quadrate: „ Wenn ich den 8erStab hineinlege, dann sehe ich jetzt sofort, dass ich nur noch 2 brauche, damit ich 10 habe und beim 9er Stab nur noch 1.“

5.4.1.3.2 Individuelle Lösungen/Akzeptanz des Materials

Philipp verwendet die Arbeitsmittel für alle Rechenoperationen. Er braucht jedoch für die einzelnen Aufgabenarten genaue Handlungsmuster, an denen er sich orientieren kann. Eigene Möglichkeiten, Aufgaben mit den Rechenstäben zu lösen, kann er nicht entwickeln. Zudem braucht er eine lange Übungszeit, ehe er die Handlung am Arbeitsmittel selbst ausführen kann. Häufig ist er bei der Einführung einer neuen Verwendungsvariante verwirrt. Er wirkt sehr unsicher, zittert und seine Schwächen in der Raumorientierung (insbesondere Rechts –links- Diskrimination) und visuomotorischen Koordination verstärken sich. Der intermodale Transfer zwischen sehen, handeln und verbalisieren gelingt ihm nicht. Er braucht deshalb verstärkt Unterstützung und Bestätigung.

Am Anfang handelt der Lehrer am Arbeitsmittel. Philipps Tätigkeiten beschränken sich auf sehen und verbalisieren. Erst wenn er die Handlung sprachlich sicher begleiten kann, beginnt er, diese auch konkret am Arbeitsmittel auszuführen. Hat er diesen Prozess verinnerlicht, so verwendet er die Arbeitsmittel sicher, wie im Folgenden demonstriert wird.

Verwendung der Stäbe bei Zerlegungen



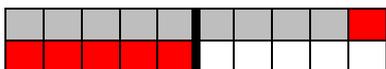
Bei der Subtraktion verwendet er die Stäbe analog.

Die Projektleiterin vermutete, dass Philipp bei der Subtraktion dazu neigen würde, den Subtrahenden mit den Fingern oder dem Stift abzudecken. Er wandte jedoch spontan die der Zerlegung analoge Art an.

Mit Hilfe der Rechenstäbe wird Philipp der Bezug zwischen Subtraktion und Zerlegung einsichtig. Der Fehler, die Zerlegung als Addition ($7+2$) zu sehen, unterläuft ihm nicht.

Subtraktionen im ersten Zehner und innerhalb des 2. Zehners führt er ohne Verwendung des Hunderterfeldes aus. Bei Subtraktionen mit Zehnerübergang verwendet er dieses.

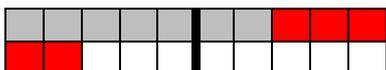
Die Addition führt er konsequent mit dem Hunderterfeld aus



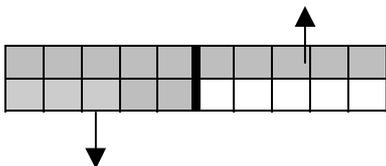
Platzhalteraufgaben wie $7+_=9$ oder $7+_=12$ löst er durch Ergänzen.

Im ersten Zehner rechnet er die Aufgaben meist im Kopf, aufgrund seiner guten Kenntnisse der Zahlentripel.

Im zweiten Zehner legt er die Aufgaben folgendermaßen



Platzhalteraufgaben wie $15-_=7$ löst er meist durch Vermindern. Die Rechnung $15-7=$ verwendet er nicht.



Er legt 15 in das Feld, nimmt den 5er Stab weg und nimmt anschließend vom 10er Stab 3 weg. Dann rechnet er $5 + 3 = 8$.

Bei Umkehraufgaben verwendet er die Rechenmittel analog zur Addition und Subtraktion. Vielfach verdeutlicht er sich diesen Aufgabentyp nicht nur anhand der Rechenstäbe, sondern zeichnet sich die Operatorarstellung dazu.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Philipp die Arbeitsmittel sicher verwendet. In Stresssituationen wie Lernzielkontrollen und bei einem oftmaligen Wechsel der Aufgabenart auf einem Arbeitsblatt verfällt er immer wieder in die Strategie des zählenden Rechnens entweder im Kopf oder auch am Arbeitsmittel.

5.4.1.3.3 Beobachtungen zu den einzelnen Inhaltsbereichen der 1. Jahrgangsstufe

Lerninhalte	Beobachtungen
<p>1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung</p> <p>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfassen</p> <p>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben</p> <p>Auditive Wahrnehmung</p> <p>Taktile Wahrnehmung</p> <p>Sehen und Vorstellen</p> <p>Visuelle Wahrnehmung</p> <p>Visuomotorische Koordination</p> <p>Figur-Grund-Wahrnehmung</p> <p>Wahrnehmung der Raumlage</p> <p>Wahrnehmungskonstanz</p> <p>Wahrnehmung räumlich (zeitlicher) Beziehungen</p> <p>Visuelles Speichern</p> <p>Visuelles Operieren</p>	<p>Siehe 5.3.4.3.</p>
<p>1.1.2. Flächenformen</p> <p>Flächenformen untersuchen, beschreiben, benennen und herstellen</p> <p>Flächenformen nach selbst gefundenen und vorgegebenen Kriterien vergleichen und klassifizieren</p> <p>Figuren, Muster, Parkette und Ornamente aus geometrischen Grundformen zusammensetzen und beschreiben</p>	<p>Visumotorische Probleme</p> <p>Er unterscheidet Viereck, Rechteck, Quadrat, Dreieck und Kreis</p> <p>Die Fachbegriffe verwendet er richtig.</p> <p>Probleme bei Serialität</p> <p>Die Koordination zwischen Erkennen des Musters und zeichnerischer Ausführung gelingt ihm meist nicht.</p> <p>Deshalb diktiert Philipp das Muster, ein Tutor zeichnet. Philipp verliert aber bei einer mehrmaligen Fortsetzung des Musters den Überblick (rasche Ermüdung bei visuellen Übungen). Deshalb begleitet er das Zeichnen akustisch.</p> <p>Beim Legen und Nachlegen von Mustern hat er keine Probleme.</p> <p>Eigene Bandornamente sind wenig phantasievoll und sehr einfach.</p>
<p>1.2. Zahlen</p>	

<p>1.2.1.Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen</p>	
<p>Mengen bilden und auszählen</p>	<p>Er zählt gerne. Braucht beim Zählen größerer Mengen aber sehr lange, da er den Überblick über das bereits Gezählte verliert. (Problem: Organisation des Zählens: Räumliche Unterscheidung zwischen dem Gezählten und dem noch zu Zählendem. Philipp tippt die Elemente nur an, trennt sie aber nicht räumlich.)</p>
<p>Mengen durch 1:1 Zuordnungen vergleichen</p>	<p>Gelingt ihm gut.</p>
<p>Elemente von Mengen durch grafische Zeichen darstellen, diese Zählen und die Anzahlen vergleichen</p>	<p>Probleme bei der Erstellung einfacher Diagramme und Schaubilder (vgl. Raumlage, Wahrnehmung räumlicher Beziehungen)</p>
<p>Die Ziffern von 0 bis 9 lesen und schreiben</p>	<p>Vgl. Wahrnehmung der Raumlage</p>
<p>Ordnungszahlen gebrauchen</p>	<p>Gebraucht die Ordnungszahlen sicher</p>
<p>1.2.2.Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen</p>	
<p>Anzahlen bestimmen</p>	<p>Er kann Mengen bis 4 simultan erfassen. Keine Probleme bei verschiedenen räumlichen Anordnungen. Anzahlen kann er nicht schätzen.</p>
<p>Mengen strukturieren; Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln</p>	<p>Er findet selbstständig keine Möglichkeiten, die Mengen zu strukturieren. Philipp sieht die Mengen nur als Gesamtmenge, bei der jedes einzelne Element beginnend bei 1 gezählt werden muss. Er ordnet nicht zu gleichmächtigen Teilmengen.</p>
<p>Anzahlen (auch die Zahl 0) konkret, bildlich und symbolisch darstellen</p>	<p>Er kann Mengen legen, Anzahlen zeichnerisch, durch Klatschen, darstellen. Er kann Mengen Zahlzeichen und Zahlwörter zuordnen und umgekehrt.</p>
<p>Verständnis für den dekadischen Aufbau entwickeln Konkret bündeln und entbündeln Bündelerggebnisse notieren und verbalisieren</p>	<p>Philipp versteht das Prinzip des Bündelns lange nicht. Er kann nicht glauben, dass 10 Einzelne nun zu einer neuen Einheit zusammengefasst werden und mit 1 in der Stellenwerttabelle bewertet werden Deshalb werden zusätzlich konkrete Übungen mit genauem Verbalisieren, und eine vertiefte Arbeit mit der Stellenwerttabelle (auch viele auditive Übungen zum Erfahren der Stellenwerte) durchgeführt.</p>
<p>Zahlen bis 20 lesen und schreiben</p>	<p>Das Lesen und Schreiben der Zahlen von 10-20 bereitet ihm keine Probleme (im Gegensatz zu den Zahlen 0-9) Grund: Fortschritte beim Wahrnehmen der Raumlage durch regelmäßige Übungen</p>
<p>1.2.3.Zahlen bis 20 zerlegen</p>	<p>Obwohl er große Schwierigkeiten beim</p>

<p>Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren</p> <p>Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren</p> <p>Zerlegungen im zweiten Zehner durchführen</p> <p>1.2.4.Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen</p> <p>Zahlen und Größen vergleichen</p> <p>Vergleich von Rechenausdrücken mit den Zeichen < > = darstellen</p> <p>Zahlen ordnen, Zahlenfolgen bilden und darstellen</p>	<p>Strukturieren der Mengen hat, erkennt er sofort, dass eine Zahl in verschiedene Terme zerlegt werden kann. Er sieht die Zerlegung als Subtraktion und verbalisiert Zerlegungsaufgaben so: „Es sind 7 Kinder, 2 sitzen schon im Sandkasten, also können nur noch 5 auf der Schaukel sein.“</p> <p>Philipp benutzt bei Zerlegungen konsequent die Rechenstäbe als Arbeitsmittel und kann so die meisten Aufgaben innerhalb kurzer Zeit verinnerlichen.</p> <p>Mit Hilfe der Arbeitsmittel gelingen ihm die Zerlegungen im zweiten Zehner gut.</p> <p>Er verwendet die Begriffe größer, gleich groß, kleiner; mehr, gleich viel, weniger; länger, gleich lang, kürzer sicher.</p> <p>Er hat keine Probleme, Zahlen miteinander zu vergleichen.</p> <p>Die Zeichen <> verwendet er sicher (kein Problem mit Raumlage)</p> <p>Philipp ordnet die Zahlen bis 20 für sich in Form eines Zahlenstrahles von links nach rechts an. Zählübungen vorwärts und rückwärts, das Finden von Zahlennachbarn, und das Fortsetzen einfacher Zahlenfolgen gelingt ihm mühelos. Zahlenfolgen mit Zwischenschritten bereiten ihm Mühe. Er versucht, die Zahlen durch Weiterzählen zu ermitteln, verliert aber innerhalb kurzer Zeit den Überblick.</p> <p>Es widerstrebt ihm, die Arbeitsmittel zum Lösen von Zahlenfolgen zu verwenden.</p>
<p>1.3.Rechnen</p> <p>1.3.1.Addition und Subtraktion verstehen</p> <p>Addition und Subtraktion verschieden darstellen: durch Handlungen, in Gleichungen, zeichnerisch</p>	<p>Philipp versteht nun die Addition und Subtraktion. Anfangsprobleme gibt es bei der Subtraktion, da er den Minuenden nicht ermitteln kann.</p> <p>Er ordnet Aufgaben wie : Es waren 9 Kerzen, 4 wurden gelöscht, jetzt sind es nur noch 5 die Gleichung $5-4=1$ zu.</p> <p>(vgl. Wahrnehmung räumlich (zeitlicher) Beziehungen und visuelles Operieren). Er versteht nicht, dass der Minuend einen Zustand</p>

<p>Umkehroperationen zur Addition und Subtraktion durchführen</p>	<p>darstellt, der nicht mehr konkret zu sehen ist, den er sich vorstellen muss. Zusätzliche Übungen: Spiel: Was tat Pumuckl, ehe du ins Zimmer kamst? (z.B. leere Bonbontüte, leere Gläser, Bananenschalen,....)</p> <p>Der Zusammenhang wird durch Bewegungen im Raum verdeutlicht.(Hüpfstrahl: Vorwärtsbewegung Addition, Rückwärtsbewegung Subtraktion) Philipp versteht den Zusammenhang. Die zeichnerische Darstellung (Operatordarstellung) verwirrt ihn zunächst, obwohl diese im Rahmen des entdeckenden Lernens von den Schülern selbst ermittelt wird. Er verinnerlicht aber nach einiger Zeit die Darstellung und wendet sie bei Umkehraufgaben wie $-4=5$ als Lösungshilfe an.</p>
<p>1.3.2.Einspluseinssätze</p> <p>Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren</p>	<p>Philipp nimmt Einprägestrategien sehr gut an. Bei der Subtraktion werden die Aufgaben folgendermaßen strukturiert: Aufgaben mit -0; -1; Minuend –Subtrahend; -2; -5. Obwohl er große Schwierigkeiten hat, die Subtraktion zu verstehen, gelingt es ihm mit Hilfe dieser Strukturierung, die Aufgaben bis 10 innerhalb kurzer Zeit im Gedächtnis zu speichern.</p>
<p>Tauschaufgaben der Addition bilden</p>	<p>Philipp wendet die Tauschaufgaben als Rechenstrategie rein mechanisch durch Vertauschen der beiden Summanden an. Er kann aber den Unterschied zwischen Aufgabe und Tauschaufgabe nicht in einem Sachzusammenhang erklären.</p>
<p>Nachbaraufgaben anwenden</p>	<p>Er kann Nachbaraufgaben bilden, wendet sie aber nicht als Rechenstrategie an.</p> <p>Philipp löst die Plus- und Minusaufgaben bis 10 meist ohne Arbeitsmittel sehr sicher. Löst viele Aufgaben, auch Platzhalteraufgaben aufgrund seiner guten Kenntnisse der Zahlentripel.</p>
<p>1.3.3.Im zweiten Zehner addieren und subtrahieren</p> <p>Dekadische Analogien entdecken und anwenden</p>	<p>Er kann die dekadische Analogie nicht anwenden. Aufgaben im zweiten Zehner versucht er immer wieder durch Zählen zu ermitteln. Erst nach oftmaligem Verdeutlichen der Analogie am Arbeitsmittel erkennt er diese und wendet sie an.</p>
<p>1.3.4.Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren</p> <p>Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren</p>	<p>Er findet selbstständig keinen Rechenweg für Aufgaben mit Zehnerüberschreitung. Er ermittelt das Ergebnis durch Abzählen. Dabei verwendet er aber nicht das Arbeitsmittel und nicht die Finger. Philipp schließt beim Abzählen die Augen und zählt durch leichtes Nicken mit dem Kopf.</p>

<p>Verdoppeln und Halbieren automatisieren; Nachbaraufgaben erschließen.</p> <p>Zerlegen und in Schritten rechnen</p> <p>Tauschaufgaben der Addition anwenden</p> <p>Einfache Gleichungen lösen</p>	<p>Das Verbalisieren von Rechenwegen gelingt ihm nur, wenn er sich an einem Sprachmuster orientieren kann.</p> <p>Philipp kennt die Ergebnisse der Verdoppelungsaufgaben bis 10 auswendig. Nachbaraufgaben kann er sich anhand der Arbeitsmittel erschließen. Er wendet diese Rechenstrategie aber nicht beim „täglichen Rechnen“ an.</p> <p>Addition: Das Zerlegen der Zahlen, sowie das Ergänzen zum Zehner beherrscht er sicher. Probleme bereitet ihm die Addition vom Zehner aus. Er rechnet die ersten beiden Teilschritte, da ihm der letzte aber nicht gelingt, beginnt er zu zählen, aber nicht von 10 aus, sondern ab dem ersten Summanden.</p> <p>Subtraktion: Die Subtraktion zum Zehner, das Zerlegen der Zahlen und die Subtraktion vom Zehner aus beherrscht er sicher. Beim „täglichen Rechnen“ fällt er aber auch immer wieder auf die Strategie des Zählens zurück.</p> <p>Er kann die Gleichungen aufgrund seiner Kenntnisse der Zahlentripel lösen. Er versteht, dass auf beiden Seiten des Zeichens „=“ der gleiche Zahlwert sein muss.</p>
<p>1.4. Sachbezogene Mathematik</p> <p>1.4.1. Größen</p> <p>Zeit</p> <p>Geld</p> <p>1.4.2. Arbeit an Sachsituationen</p> <p>Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen, einfachen Texten oder Schaubildern entnehmen und versprachlichen • Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden 	<p>Große Schwierigkeiten Er stellt die Zeit meist gegen den Uhrzeigersinn ein.</p> <p>Er kennt die verschiedenen Münzen und kann Geldbeträge auf verschiedene Arten legen.</p> <p>Er kann Informationen entnehmen. Das Versprachlichen fällt ihm schwer.</p> <p>Es fällt ihm schwer, Fragen zu formulieren.</p>

<p>Lösungshilfen entwickeln und individuell anwenden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sachsituationen handelnd nachvollziehen und verbalisieren • Einfache Zeichnungen erstellen 	<p>Konkretes Handeln stellt für ihn keine Lösungshilfe dar. Er ist zu sehr auf die Handlung konzentriert (vgl. Reizgebundenheit, mangelnde Raumorientierung). Er sieht keinen Zusammenhang zwischen Handlung und rechnerischer Lösung.</p> <p>Seine Zeichnungen sind sehr abstrakt und wenig differenziert. Es gelingt ihm aber wenig, übersichtlich zu zeichnen, so dass eine Zeichnung für ihn keine Hilfe darstellt.</p> <p>Philipp kann sich Aufgaben nicht über den visuellen Kanal oder über Handlungen erschließen. Das problemlösende Denken gelingt ihm aber gut, wenn ihm eine Aufgabe sinnbetont vorgelesen wird. Deshalb Schwerpunkt für Philipp in der sachbezogenen Mathematik: Finden von Sinnwörtern und strukturieren von Texten nach Sinneinheiten.</p>
<p>Lösungswege finden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zu Sachsituationen Gleichungen finden • Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen • Lösungswege beschreiben und begründen 	<p>Er findet zu Sachsituationen Gleichungen.</p> <p>Seine Sachsituationen sind sehr einfach und wenig phantasievoll. Beschäftigt er sich zur Zeit besonders mit Hasen, so ist er auf diesen Sachhintergrund so fixiert, dass er diese als Sachhintergrund für die verschiedenen Aufgabentypen verwendet. Er braucht sehr lange, bis er seine Gedanken strukturiert und in ganzen Sätzen ausdrücken kann.</p> <p>Dies gelingt ihm meist nicht.</p>

5.4.1.3.4 Gesamtbeurteilung

Philipp gelingt es im Laufe der 1. Jahrgangsstufe, seine visuellen Fähigkeiten auszubauen. Insbesondere beim visuellen Speichern und in der Wahrnehmung räumlicher Beziehungen macht er Fortschritte. Demgegenüber stehen aber nach wie vor beeinträchtigte Leistungen in der Figur-Grund-Wahrnehmung, im visuellen Operieren und in der Rechts-links-Unterscheidung. Diese beeinflussen nicht nur seine Aufnahmefähigkeit im Fach Mathematik, sondern behindern auch selbstständiges Lernen, sowie eine sinnvolle Arbeitsorganisation. Besonders deutlich treten diese Schwächen bei der Erarbeitung neuer Lerninhalte hervor. Philipp kann dann die Vielzahl neuer visueller Reize, die auf ihn einströmen, nicht filtern und miteinander verknüpfen. Dies führt bei ihm zu großer Unsicherheit und Stress, die seine visuellen Unzulänglichkeiten noch verstärken. Deshalb ist es gerade bei ihm sehr

wichtig, nicht nur visuelle Übungen durchzuführen, sondern sein Selbstvertrauen durch Bestätigung, Ermunterung und Zuwendung zu stärken.

Philipps Stärke ist seine auditive Speicherfähigkeit. Durch eine gezielte Verknüpfung des auditiven und visuellen Bereiches gelingt es ihm, seine Schwächen im Sehen und Vorstellen teilweise zu kompensieren.

Im Rechnen erreicht Philipp mit Hilfe der Arbeitsmittel zufriedenstellende bis gute Ergebnisse. Der Zahlenraum bis 20 ist für ihn strukturiert. Er ordnet die Zahlen 1 bis 20 in einem Zahlenfeld an, wobei er jedoch keinen direkten Bezug zwischen beiden Reihen herstellt. Deshalb hat er anfangs auch Probleme, die dekadische Analogie zu verstehen.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	13	14	15	16	17	18	19	20	

Dies zeigt sich nun auch in der zweiten Jahrgangsstufe. Es gelingt ihm nur bedingt, die einzelnen Reihen zueinander in Beziehung zu setzen. Innerhalb einer Reihe aber findet er sich gut zurecht.

Philipp kann alle Aufgabenarten im Kopf oder unter Verwendung der Rechenstäbe sicher lösen. Trotzdem weicht er aber immer wieder auf das zählende Rechnen aus. Anscheinend ist für ihn aufgrund seiner visuomotorischen Probleme das Zählen im Zahlenraum bis 20 effizienter. Es gelingt nicht, ihn während des 1. Schuljahres vollständig von der Strategie des zählenden Rechnens wegzuführen. Bei für ihn schwierigen Aufgaben legt er die Stäbe in das Hunderterfeld, ermittelt aber das Ergebnis durch Abzählen der Felder.

Aber dennoch hat Philipp die Struktur des Arbeitsmittels verinnerlicht und kann die Stäbe sicher und effektiv zur Lösung von Aufgaben einsetzen. Es ist die Basis geschaffen für die Arithmetik und Geometrie der 2. Jahrgangsstufe, wenn sich beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen die Strategie des Zählens als zu arbeitsintensiv und fehleranfällig erweisen wird.

5.4.1.3.5 Weiterführende Fördermaßnahmen

Es ist nicht zu erwarten, dass Philipp seine visuellen Schwächen und seine mangelnde Raumvorstellung auch trotz intensiver Übung vollständig beheben kann. Seine visuellen Probleme sind ein Teil seiner Persönlichkeit und müssen als solche akzeptiert werden. Dies bedeutet jedoch nicht, dass er nicht weiterhin gefordert und gefördert werden soll. Es ist das Ziel, seine Fähigkeiten durch ein zusätzliches Übungsangebot zu trainieren und auszubauen. Der Erfolg liegt auch in kleinen Fortschritten. Deshalb wird Philipp auch in Zukunft im Rahmen der Wochenplanarbeit Aufgaben erhalten, die es ihm ermöglichen, seine Fähigkeiten weiter auszubauen.

5.5 Leistungsstand der Klasse

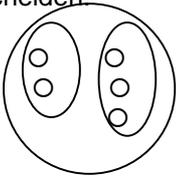
In gleicher Weise, wie das Lernen einzelner Schüler dokumentiert wurde, gibt es auch Beobachtungen und Aufzeichnungen über Kenntnisse und Fähigkeiten der gesamten Klasse. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, alle diese Dokumente aufzuzeigen. Um aber einen Einblick in den Leistungsstand der Experimentalgruppe zu gewähren, werden in einer verallgemeinernden Art und Weise auf der Grundlage des Lehrplans die Ergebnisse des Unterrichts zusammengefasst. Dabei werden alle Schüler der Klasse zusammengefasst und als ein pädagogischer „Fall“ betrachtet (vgl. mit 4.1.1.). Die Darstellung erhält sowohl prozedurale Kenntnisse (sie beziehen sich auf das Beherrschen von Rechenfertigkeiten und die Kenntnis von Verfahrensmustern zur Identifizierung mathematischer Sachverhalte, Algorithmen und Definitionen, vgl. Maier, H., 1995b) als auch begrifflich metakognitive Kenntnisse (sie beziehen sich auf ein Wissen um die der Mathematik zugrundeliegenden Strukturen, auf Beziehungen und wechselseitige Zusammenhänge zwischen Ideen, die mathematische Prozesse erklären und ihnen Bedeutung verleihen, vgl. Maier, H., 1995b) dargestellt.

In der linken Spalte sind wieder die im Lehrplan vorgeschriebenen verbindlichen Lerninhalte/Lernziele notiert, in der rechten Spalte die auf Beobachtungen und Materialanalysen beruhenden Urteile über Kenntnisse und Fähigkeiten der Klasse.

Lerninhalt	Kenntnisse und Fähigkeiten der Experimentalklasse
<p>1.1.1. Raumerfahrung und Raumvorstellung</p> <p>Lagebeziehungen am eigenen Körper erfahren und erfassen</p> <p>Die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben</p> <p>Wege im Raum realisieren und beschreiben</p>	<p>Die Schüler haben zunächst Probleme bei der Unterscheidung der linken und rechten Körperhälfte. Am Ende der 1. Jahrgangsstufe können fast alle Überkreuzbewegungen richtig durchführen.</p> <p>Am Ende der 1. Jahrgangsstufe führt die Versuchsleiterin den Test CFT 1 durch. „Der CFT 1 ermöglicht die Bestimmung der Grundintelligenz, d.h. die Fähigkeit des Kindes, in neuartigen Situationen und anhand von sprachfreien, figuralem Material, Denkprobleme zu erfassen, Beziehungen herzustellen, Regeln zu erkennen, Merkmale zu identifizieren und rasch wahrzunehmen.“ (Weiß, R., Osterland, J., 1997, S.4)</p> <p>Dabei werden folgende Teilbereiche getestet:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Substitutionen: Zuordnung von Symbolen zu gegenständlichen Darstellungen • Labyrinth: Wahrnehmungsgeschwindigkeit, visuelle Orientierung und Aufmerksamkeit • Klassifikationen: beziehungsstiftendes Denken • Ähnlichkeiten: Erkennen des Kontextes zwischen Figuren und ähnlichen merkmalsveränderten Figuren • Matrizen: Fähigkeit, Regeln und Zusammenhänge bei figuralen

<p>1.1.2. Flächenformen</p> <p>Flächenformen entdecken, untersuchen, beschreiben, benennen und herstellen</p> <p>Flächenformen nach selbst gefundenen und vorgegebenen Kriterien vergleichen und klassifizieren</p> <p>Muster und Ornamente aus geometrischen Grundformen zusammensetzen und beschreiben</p>	<p>Problemstellungen zu erkennen Die Schüler erreichten bei der Bewertung aller 5 Bereiche folgende Ergebnisse:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>IQ Wert</th> <th>Anzahl der Schüler</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>80 - 90</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>90 – 100</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>100 – 110</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>110 – 120</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>120 – 130</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>130 – 140</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Sie erkennen Flächenformen in verschiedenen Lagen, Größen und Formen. Fachliche Begriffe benutzen sie treffend.</p>	IQ Wert	Anzahl der Schüler	80 - 90	1	90 – 100	1	100 – 110	6	110 – 120	-	120 – 130	4	130 – 140	3
IQ Wert	Anzahl der Schüler														
80 - 90	1														
90 – 100	1														
100 – 110	6														
110 – 120	-														
120 – 130	4														
130 – 140	3														
<p>1.2.1. Zahlen</p> <p>1.2.1.Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden und untersuchen</p> <p>Mengen bilden und auszählen</p> <p>Mengen durch 1:1 Zuordnungen vergleichen</p> <p>1.2.2. Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen</p> <p>Anzahlen bestimmen</p> <p>Mengen strukturieren</p>	<p>Die Schüler zeigen von Beginn an großes Interesse an mathematischen Inhalten. Sie suchen Zahlen in ihrer Umwelt und versuchen die Lebenswelt mathematisch zu durchdringen.</p> <p>Keine Probleme bei der Mengeninvarianz</p> <p>Die Schüler vergleichen Mengen nicht nur durch 1:1 Zuordnungen, sondern auch durch Zuordnen beispielsweise von 2er oder 5er Päckchen.</p> <p>Die meisten Schüler verfügen über gute Vorkenntnisse beim Zählen. Sie erkennen bei größeren Anzahlen die Gefahr des Sich-Verzählens und gewinnen so selbstständig Einsicht in die Vorteile des strukturierten Zählens. Alle Schüler können Anzahlen bis 4 simultan erfassen (viele Schüler bis 5)</p> <p>Die Schüler entdecken eigenständig Möglichkeiten, eine Anzahl von Elementen verschieden räumlich anzuordnen und quasi-simultan zu erfassen. Die Strukturierung nach 5 stellt dabei zunächst nur eine Möglichkeit dar, die jedoch durch den Gebrauch des Arbeitsmittels zunehmend an Bedeutung gewinnt.</p>														

<p>Verständnis für den dekadischen Aufbau entwickeln</p>	<p>Die Schüler gewinnen durch das Auffinden von Bündelungen in der Umwelt die Einsicht, dass Einzelne zu einer größeren Einheit zusammengefasst werden können. Ein Verständnis für den dekadischen Aufbau wird angebahnt. Eine vertiefte Einsicht in die Stellenwerte wird jedoch erst in der 2. Jahrgangsstufe durch die Erweiterung des Zahlenraums bis 100 gewonnen. Jetzt verstehen die Schüler, dass die räumliche Stellung der Ziffer innerhalb der Zahlen ihren Wert bestimmt. Die Übertragung der in der 1. Jahrgangsstufe grundgelegten Kenntnisse gelingt ihnen in der 2. Jahrgangsstufe mühelos. Die Einsichten aus der Zehnerbündelung mit konkreten Gegenständen übertragen sie eigenständig auf die Strukturierung am Arbeitsmaterial.</p>
<p>Zahlen bis 20 lesen und schreiben</p>	<p>Die Schüler können die Zahlen bis 20 lesen und schreiben. Nur kurze Zeit verwechseln zwei Schüler die Zahlen 12 und 20. Sie notieren die zweistelligen Zahlen von links nach rechts. Alle Schüler haben ein inneres Vorstellungsbild zur Anordnung der Zahlen bis 20 entwickelt. Bei einem Großteil der Schüler weist die gewählte Struktur der Zahlen die Form eines Zahlenstrahles auf, lediglich zwei Schüler ordnen die Zahlen in Form eines Feldes an. Aber allen Schülern gelingt die Übertragung vom Feld auf den Strahl und umgekehrt. Alle Schüler setzen beide Möglichkeiten variativ ein und entscheiden je nach Aufgabenart: Bei den Zahlzerlegungen bis 20 gebrauchen sie die Stäbe in Form eines Strahles, bei der dekadischen Analogie präferieren sie die Felddarstellung. (vgl. S. 232, 233, 234)</p>
<p>1.2.3. Zahlen bis 20 zerlegen</p> <p>Verschiedene Zerlegungen von Zahlen entdecken und mit dem Zeichen + notieren</p>	<p>Die Schüler entdecken verschiedene Zahlzerlegungen zunächst mit Hilfe der Schüttelkästen und dann anhand des Arbeitsmittels. Sie beginnen von sich aus die verschiedenen Zerlegungen einer Anzahl zu strukturieren. Sie erkennen Zusammenhänge zwischen Aufgabe und Tauschaufgabe. Einige problematisieren: „Wenn die Aufgaben $1+4$ und $4+1$ dastehen, dann sind beide Aufgaben gleich, nur die Zahlen wurden vertauscht. Auch auf dem Arbeitsmittel sind die Aufgaben gleich. Einmal nehme ich zunächst die linke Seite, das andere Mal die rechte Seite. Es ist aber nicht egal, wenn ich zu der Aufgabe ein Bild zeichne oder eine Geschichte dazu spiele: Einmal sind 4 Kinder auf der Rutsche und eines sitzt im Sandkasten und bei der anderen Aufgabe ist ein Kind auf der Rutsche und 4 Kinder sind im Sandkasten. Das ist ein Unterschied. Aber wenn ich die Aufgabe lerne, dann brauche ich mir nur eine zu merken.“</p>

<p>Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 vielfältig üben und automatisieren</p> <p>Zerlegungen im zweiten Zehner durchführen</p> <p>1.2.4. Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen</p> <p>Zahlen, Größen und Rechenausdrücke vergleichen; die Zeichen $>=<$ richtig gebrauchen</p> <p>Zahlen ordnen, Zahlenfolgen bilden und darstellen</p>	<p>Die Schüler erkennen selbstständig den Bezug zwischen der Zerlegungs- und der Subtraktionsaufgabe, da sie bei beiden Aufgabentypen die Arbeitsmittel gleich verwenden. Der Fehler der Verbindung von Zerlegung und Addition unterläuft zu Beginn nur einer Schülerin. Aufgrund des intensiven Gebrauchs des Arbeitsmittels, bei dem sie die Zerlegung mit dem Zerschneiden eines Stabes assoziiert, wird ihr der Fehler einsichtig.</p> <p>Die Schüler haben die Möglichkeit, diese am Schüttelkasten oder am Arbeitsmittel durchzuführen. Alle ziehen das Arbeitsmittel vor. Sie erkennen: „Da muss ich nicht ständig zählen, denn die erste Zahl kann ich sofort bestimmen (S weisen auf die Strukturierung des Arbeitsmittels hin).“</p> <p>Sie verwenden die Zeichen $>=<$ sicher. Sie können die beiden Funktionen des Gleichheitszeichens unterscheiden:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{c} \bigcirc + \bigcirc \\ \bigcirc \quad \bigcirc = \\ \bigcirc \end{array}$ $2+3 = 1+4$ </div> <div style="text-align: center;">  $2+3=5$ </div> </div> <p>Das Ordnen von Zahlen und das Bilden von Zahlenfolgen gelingt allen Schülern. Lediglich zwei Kinder haben Probleme bei Zahlenfolgen, die ein Rückwärtsschreiten im Zahlenraum erfordern. Die leistungstärkeren Schüler bilden selbst alternierende Zahlenfolgen, wobei sie diese über den Zahlenraum bis 20 weiterführen.</p>
<p>1.3.Rechnen</p> <p>1.3.1. Addition und Subtraktion verstehen</p> <p>Addition und Subtraktion verschieden darstellen</p> <p>Umkehroperationen zur Addition und Subtraktion bilden</p>	<p>Alle Schüler stellen die Operationen handelnd, zeichnerisch und symbolisch richtig dar. Eine Verknüpfung der Darstellungsebenen und die Übertragung von einer Darstellungsebene auf die andere gelingt ihnen gut.</p> <p>Alle Schüler erkennen in der enaktiven Phase den Zusammenhang beider Operationen (die Addition wird als Vorwärtsspringen, die Subtraktion als Rückwärtsspringen im Raum dargestellt). Die Notation in Form der Operatordarstellung, die von ihnen selbstständig entwickelt wird, verstehen sie gut.</p>

<p>1.3.2. Einspluseinssätze und deren Umkehrung</p> <p>Tauschaufgaben der Addition bilden</p> <p>Nachbaraufgaben anwenden</p> <p>Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung automatisieren</p>	<p>Die Schüler erwürfeln Plusaufgaben (auch über 10) und beginnen spontan zu strukturieren. Sie entwickeln ein großes Interesse, Strukturen zu erkennen und Zusammenhänge sowohl zu erkennen als auch zur Lösung von Aufgaben anzuwenden.</p> <p>Sie bilden von sich aus Tauschaufgaben zu Additionen und ordnen spontan Aufgabe und Tauschaufgabe einander zu. Alle Schüler verwenden diese Rechenstrategie bewusst, so wird beispielsweise die Aufgabe $2+7$ stets als $7+2$ gerechnet (ihre Strategie bei $+2$ ist das Überspringen einer Zahl also $7 - 9$).</p> <p>Alle Schüler kennen die Ergebnisse der Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben auswendig und können Nachbaraufgaben mit Hilfe der Arbeitsmittel bilden oder in der Einspluseinstafel finden. Die Leistungsstärkeren können die Zusammenhänge begründen: „Es gibt 4 Nachbaraufgaben. Zuerst rechne ich bei der ersten Zahl (1.Summand) eins dazu, dann wird es um eins mehr. Dasselbe gilt, wenn ich die 2.Zahl (2.Summand) um eins vergrößere. Dann nehme ich zuerst bei der ersten und dann bei der zweiten Zahl eins weg.“</p> <p>Durch das Entwickeln von Rechenstrategien und operative Übungen gelingt es allen Schülern die Einspluseinssätze und deren Umkehrung zu automatisieren.</p> <p>Kein Schüler ermittelt am Ende des Schuljahres Ergebnisse durch Abzählen an den Fingern. Die Arbeitsmittel werden zur Lösung der Aufgabe und zu deren Überprüfung verwendet.</p> <p>Die Schüler werden bei den Übungen und bei der Anwendung der Strategien nicht starr im Zahlenraum bis 10 festgehalten. Sie übertragen diese auf einen größeren (individuell festgelegten) Zahlenraum, ohne dass dieser systematisch erschlossen worden ist.</p> <p>Die Schüler erkennen Zusammenhänge. Sie bilden zu einem Zahlentripel 4 Rechenaufgaben.</p> <p>3,6,9 $3+6=9$ $6+3=9$ $9-3=6$ $9-6=3$</p> <p>Sie erklären den Zusammenhang und den Unterschied zwischen beiden Minusaufgaben: „Es ist wie bei den beiden Plusaufgaben. Wenn ich nur die Zahlen sehe und wenn ich sie mit den Arbeitsmitteln lege, dann ist kein Unterschied. Wenn ich mir aber eine Rechengeschichte überlege, dann ist ein großer Unterschied. Ich habe 9 DM. Bei der ersten Aufgabe kaufe ich mir etwas um 3DM und in meiner Sparbüchse bleiben 6DM. Bei der zweiten Aufgabe bleiben mir nur noch 3DM.“</p>
---	---

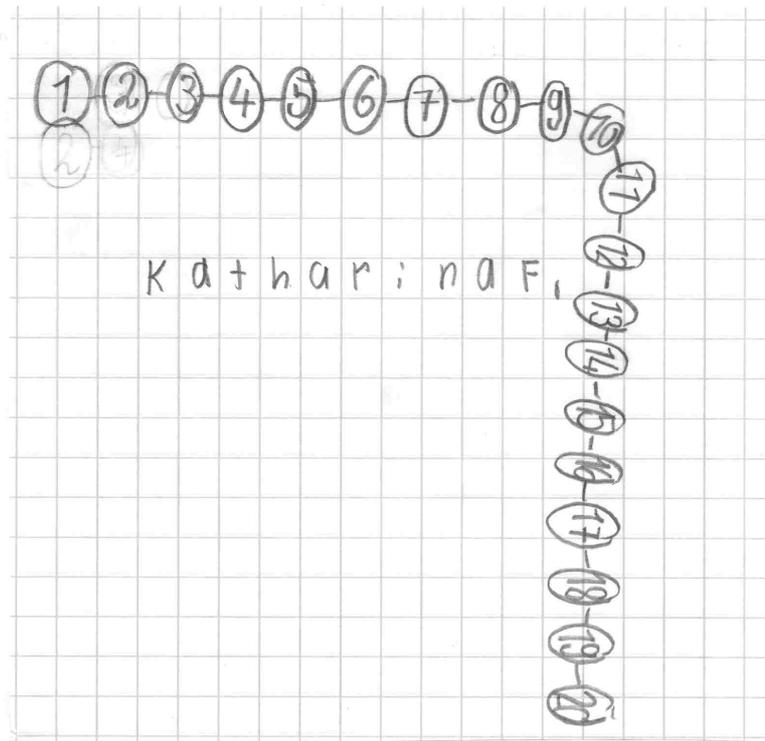
<p>1.3.3. Im zweiten Zehner addieren und subtrahieren</p> <p>Dekadische Analogie entdecken und anwenden</p>	<p>Die Schüler erkennen die Zusammenhänge zwischen „großer und kleiner“ Aufgabe. Alle können die Zusammenhänge anhand der Arbeitsmittel erklären.</p> <p>Kein Schüler versucht Aufgaben wie $17-4$ oder $13+3$ durch Abzählen zu lösen.</p>
<p>1.3.4. Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren</p> <p>Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren</p>	<p>Die Schüler finden anhand der Arbeitsmittel folgende Möglichkeiten der Lösung von Aufgaben mit Zehnerübergang:</p> <p>$8+9$</p> <p>$8+8+1$</p> <p>$9+9-1$</p> <p>$8+2+7$</p> <p>$8+10-1$</p> <p>Dabei werden verschiedene Notationen der Schüler zugelassen.</p> <p>Leistungsschwächere Schüler benutzen lediglich eine Notationsform, die sie frei wählen.</p>
<p>Verdoppeln und Halbieren automatisieren, Nachbaraufgaben erschließen</p>	<p>Alle Schüler haben die Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben automatisiert. Sie können sich die Nachbaraufgaben anhand des Arbeitsmittels erschließen. Auch Leistungsschwächere haben diese Rechenstrategie automatisiert und wenden sie beim täglichen Kopfrechnen an. Sie erklären die Zusammenhänge anhand der Arbeitsmittel.</p>
<p>Zerlegen und in Schritten rechnen</p>	<p>Alle S können Aufgaben mit Zehnerübergang durch Zerlegen in Schritten rechnen. Fehler wie</p> <p>.....$5 + 8 = 5 + 4 + 4 =$</p> <p>(Dominanz der Halbierungsaufgabe, kein Bezug zum Zehner) unterlaufen nur einem Kind, als es versucht, die Aufgabe ohne Arbeitsmittel zu lösen. Ein anderes Kind zerlegt diese Aufgabe ebenfalls so. Es erklärte: „ $5+4$ ist 9, das weiß ich auswendig, weil es die kleine Aufgabe ist und $9+4$ ist 13, das weiß ich auch auswendig, also kann ich diese Aufgabe auch in $4+4$ zerlegen. Auf dem Arbeitsmittel muss ich die Aufgabe zwar bis 10 rechnen und da kann ich nicht in $4+4$ zerlegen, aber im Kopf schon.“</p>
<p>Tauschaufgaben der Addition anwenden</p>	<p>Analog zu den Einspluseinssätzen verwenden diese Schüler die Tauschaufgaben auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang als Rechenstrategie.</p>
<p>Einfache Gleichungen lösen</p>	<p>Viele Schüler lösen die Gleichungen mit Hilfe ihrer Kenntnisse zu den Zahlentripeln. Unbekannte</p>

	Gleichungen können alle anhand der Arbeitsmittel lösen. Leistungsstärkere Schüler können auch Gleichungen und Ungleichungen im Kopf lösen.
<p>1.4. Sachbezogene Mathematik</p> <p>1.4.2. Arbeit an Sachsituationen</p> <p>Sachsituationen und ihre Darstellung erschließen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Informationen aus eigenen und vorgegebenen Bildern, Erzählungen, Handlungen, einfachen Texten und Schaubildern entnehmen und versprachlichen • Fragen und Antworten zu Sachsituationen finden <p>Lösungshilfen entwickeln und individuell anwenden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sachsituationen handelnd nachvollziehen • Einfache Zeichnungen erstellen <p>Lösungswege finden</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zu Sachsituationen Gleichungen finden • Einer Gleichung verschiedene Sachsituationen zuordnen • Lösungswege beschreiben 	<p>Alle Schüler können Informationen aus Bildern, Erzählungen,.. entnehmen. Sie können die Informationen, die ihnen auf Bildern dargeboten werden (offene Sachsituationen) unterschiedlich interpretieren und entsprechend versprachlichen. Sie erfinden selbst Rechengeschichten auch zu Gleichungen wie $11 - _ = 7$. Sehr selten stellen sie Sachsituationen zeichnerisch dar.</p> <p>Die Schüler formulieren Fragen und Antworten zu Sachsituation. Die meisten können bereits zwischen mathematischen und nicht-mathematischen Fragestellungen unterscheiden.</p> <p>Die Schüler stellen insbesondere Rechengeschichten, die ihnen als Text angeboten werden, szenisch dar. Sie können einfache Zeichnungen erstellen, wobei einige zunächst noch zu sehr an für die mathematische Durchdringung der Aufgabe unwesentlichen Details verweilen, z.B. Aussehen des Kindes. Erst allmählich trennen sie sich von einer zu konkreten Darstellung.</p> <p>Die meisten Schüler können auch Gleichungen wie $_ + 3 = 11$ oder $11 - _ = 4$ Sachsituationen zuordnen. Analog dazu können sie anhand des Lösungsweges die Sachsituationen mit eigenen Worten wiederholen.</p>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Katharina v.									

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Katharina v.									

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
 17 18 19 20



7 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Lisa

~~0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20~~
Peter

20 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 21
13 14 15 16 17 18 19
20
Stephan

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

BARBARA. B.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
20
20

Tino

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10~~
~~11 12 13 14 15 16 17 18~~

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

6. Kapitel

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Projekt, das in den mathematischen Anfangsunterricht eingebettet ist. Im Rahmen einer Fallstudie wurden Theorie und Praxis einander nahegebracht. Die Basis für die Unterrichtsgestaltung bildeten neuere mathematikdidaktische Tendenzen. Dabei wurden einige Aspekte näher analysiert, insbesondere die grundlegenden Fähigkeiten und die Arbeitsmittel. Über diesbezüglichen Überlegungen und Ergebnisse wird im folgenden noch einmal reflektiert.

Untersuchungsmethode

Das Forschungsdesign vieler Untersuchungen im sozialwissenschaftlich-pädagogischen Bereich ist dadurch gekennzeichnet, dass neben quantitativ-statistischen wesentlich auch qualitativ-interpretierende Methoden, insbesondere darauf aufbauende Fallstudien verwendet werden. Dies gilt auch für die vorliegende Untersuchung (siehe 4.1.) Es hat sich gezeigt, dass die Wahl dieser Methoden sinnvoll und gerechtfertigt war:

- Sie tragen der Individualität und Konstruktivität des mathematischen Lernprozesses Rechnung.
- Sie ermöglichen es, die Kinder während des gesamten Lernprozesses evaluativ zu begleiten und dabei Zusammenhänge und Entwicklungen einsichtig zu machen (konstruktive Entwicklungsforschung).
- Es werden Wechselwirkungen zwischen allgemeinen wissenschaftlichen Erkenntnissen und den spezifischen Fertigkeiten und Fähigkeiten einzelner Schüler deutlich. Ein intensives theoretisches Studium wirkt sich einerseits fruchtbar und förderlich auf die Unterrichtsgestaltung und damit auf das Lernen des Kindes aus. Es wurde andererseits aber auch deutlich, dass die Übertragung theoretischer Erkenntnisse nicht ohne Berücksichtigung der Individualität der Kinder möglich ist.

Unterrichtliche Arbeitsmittel

Ausgehend von Schwierigkeiten und Problemen, die mit der Verwendung von Arbeitsmitteln im mathematischen Anfangsunterricht zusammenhängen, wurde das Ziel fixiert, den Vorgang der Entwicklung und intensiven Nutzung eines geeigneten Arbeitsmittels zu gestalten und zu erforschen (siehe 5.2.2.). Insbesondere sollten die Schüler ein „inneres Bild“ des Zahlenraums und darauf aufbauend eine innere Vorstellung zu den Rechenoperationen entwickeln. Problemlösendes, flexibles Denken sollte angebahnt werden.

Folgende Indikatoren belegen, dass diese Ziele erreicht wurden:

- Jedes Kind erfasste die mathematische Struktur des Arbeitsmittels und konnte so vom zählenden Rechnen weggeführt werden. Am Ende des ersten Schuljahres ermittelten alle Kinder auch Aufgaben mit Zehnerübergang nicht durch Abzählen, sondern durch operative Strategien bzw. durch Auswenigwissen der Ergebnisse, die sie sich bei operativen Übungen angeeignet hatten.
- Die Schüler konnten die Anzahlen von 5 –20 quasi – simultan erfassen. Sie ermittelten die Ergebnisse nicht durch Abzählen am Arbeitsmittel.

- Kein Schüler verwendete die Finger zum Ermitteln von Ergebnissen. Auch bei Problemen griff jedes Kind auf die Arbeitsmittel zurück.
- Die Schüler lösten alle Rechenoperationen sehr sicher. Sie verwendeten das Arbeitsmittel variativ je nach Aufgabenart.
- Anhand des Arbeitsmittels entdeckten und entwickelten sie eigene Lösungsstrategien und erkannten Zusammenhänge.
- Auch leistungsstärkere Schüler benutzten das Arbeitsmittel regelmäßig, um sich Aufgaben in einem größeren Zahlenraum zu erschließen oder Ergebnisse nachzukontrollieren.
- Das Arbeitsmittel wurde von allen sowohl zur Analyse von Fehlern als auch zur Ergebniskontrolle herangezogen.
- Die Schüler verwendeten das Arbeitsmittel im Rahmen des entdeckenden Lernens, um ihre Gedankengänge anschaulich darzustellen und so für die anderen nachvollziehbar zu machen.

Grundlegende Fähigkeiten

Eine pädagogisch sinnvolle Konzeption des mathematischen Anfangsunterrichts kann nicht von einer isolierten Sicht des Faches ausgehen. Erforderlich ist eine ganzheitliche Perspektive, in der mögliche Beiträge der Mathematik zur Förderung grundlegender Fähigkeiten angemessen berücksichtigt werden (siehe 5.2.1.). Entwicklungen in diesem Bereich sind schwierig zu operationalisieren und wegen ihres individuellen Charakters nur in Ansätzen zu verallgemeinern. Trotzdem gibt es deutliche Hinweise für Fortschritte der Schüler im Verlauf des Unterrichtsprojektes, die insbesondere auf das intensive Training der Raumvorstellung und visuellen Wahrnehmung zurückzuführen sind. Kein Kind der Experimentalgruppe hat gravierende Probleme im Fach Mathematik. Auftretende Fehler sind eher auf mangelnde Konzentrationsfähigkeit als auf mangelnde Rechenfertigkeit zurückzuführen. Auch der sichere Gebrauch des Arbeitsmittels zeugt von gut ausgeprägten grundlegenden Fähigkeiten.

Zeitaufwand

Als Kritikpunkt wird häufig der große Zeitaufwand angeführt, den das Training der grundlegenden Fähigkeiten und die detaillierte Entwicklung eines Arbeitsmittels erfordern. Das Projekt erbrachte gegenteilige Erkenntnisse. Trotz des zeitlichen Mehraufwandes zu Beginn des ersten Schuljahres wurden alle Lerninhalte des grundlegenden Unterrichts und der anderen Fächer bearbeitet. Vielmehr wurde durch die intensive Arbeit mit dem Arbeitsmittel im Fach Mathematik langfristig Zeit gespart. Bei nahezu allen mathematischen Inhalten konnte sowohl in der 1. als auch in der 2. Jahrgangsstufe auf dieses Grundgerüst aufgebaut werden. Die Schüler erkannten und durchschauten so schneller Zusammenhänge.

Das Projekt wurde in einer sehr kleinen Klasse (17 Schüler) durchgeführt. Dies erleichterte zweifelsohne die Schülerbeobachtung und die individuelle Förderung der Schüler, beeinflusste aber die Ergebnisse des Projekts nicht. Das vorgestellte Konzept kann problemlos auch auf größere Lerngruppen übertragen werden.

Grenzen

Auch ein Unterricht, der Grundsätze wie entdeckendes Lernen, Handlungsorientierung,...über das übliche Maß hinausgehend berücksichtigt, vollbringt keine Wunder. Vor allem werden die Kinder nicht schneller rechnen. (Dies wird deutlich hervorgehoben, da der Zeitfaktor gerade bei Lernzielkontrollen häufig als ein Beurteilungskriterium angeführt wird.) Aber ist es unser Ziel, dass die Kinder möglichst viele Aufgaben in möglichst kurzer Zeit lösen oder wollen wir sie zu flexiblem, problemlösendem Denken führen? Was bei dem Projekt deutlich wurde, ist, dass auch der leistungsschwächere Schüler für mathematische Prozesse sensibler wurde, im Rahmen seiner Möglichkeiten selbstständig nach Sinnzusammenhängen suchte und so zu mehr Einsicht und Verständnis gelangte.

Das Training grundlegender Fähigkeiten und der intensive Gebrauch des Arbeitsmittels macht Kinder mit Rechenschwächen nicht automatisch zu guten Mathematikern. Es hilft aber, mögliche Defizite frühzeitig zu erkennen und rechtzeitig Fördermaßnahmen, sei es im Rahmen der inneren Differenzierung oder durch ein zusätzliches Förderprogramm, zu ergreifen, um dem Kind Frustration und Misserfolgserlebnisse zu ersparen.

Literaturverzeichnis

- Aebele, A., Kalmbach, H. u.a (1994): Handbuch zur Grundschulmathematik. 1. und 2.Schuljahr. Stuttgart
- Aebele, Ch., Alber, W., Ebeling, A., u.a. (1996): Lumatrix Geometrie 1 / 2. Hannover
- Backe – Neuwald, D. (1999): „Was wäre, wenn...?“ – Funktionalität und Zweckmäßigkeit von Figuren und Körpern. In: SWZ, 27, 19, S. 51-57
- Bartl, A. und M. (1996): Spiele im Mathematikunterricht der Grundschule. Donauwörth
- Barwitzki, B. u.a. (1995): Fördermaterial. In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen, S. 212-309
- Bauer, L. (1992): Fingerrechnen – Untersuchungen und Überlegungen zu einem Phänomen. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 4, S.1-14
- Bauer, L. (1993): Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen? Didaktisch – methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2, S. 76-83
- Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2000): Lehrplan für die bayerische Grundschule
- Becker, G. (1983): Fallstudien. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Heft 1, S. 5-8
- Besuden, H. (1996): Farbige Stäbe als Arbeitsmittel für den Geometrieunterricht. In: Grundschule, Heft 3, S. 20-24
- Binder, G., Fleischmann, R., u.a. (1995): Informelle Diagnostik des Leistungsstandes. In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 61-85
- Binneberg, K. (1979): Pädagogische Fallstudien. In: Zeitschrift für Pädagogik, Heft 3, S.395-402
- Blumenstock, L. (1991): Handbuch der Leseübungen. Vorschläge und Materialien zur Gestaltung des Erstleseunterrichts mit Schwerpunkt im sprachlich akustischen Bereich. Weinheim
- Boerner, G., Boerner, K. (1988): Dyskalkulie ist kein Schicksal. In: Schulpraxis, Heft 4, S. 34-39
- Bönsch, M. (1997): Handlungsorientierter Unterricht. Bestimmungsmerkmale und Dimensionen. In: Förderschulmagazin, 10, S. 5-6
- Brügelmann, H. (1982): Fallstudien in der Pädagogik. In: Zeitschrift für Pädagogik, Heft 4, S.609-623
- Brügelmann, H. (1994): Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In: Die Grundschulzeitschrift, 74, S. 36-37
- Carniel, D. (1999): Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In: Praxis Grundschule, 2, S.12-13
- Claussen, C. (1996): Wochenplanarbeit in der Grundschule – Möglichkeiten zu markanten Veränderungen der üblichen Unterrichtsplanung. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 1, S. 223-239
- Dröge, R. (1987): Ein Grundschüler mit Lernschwierigkeiten. In: mathematica didactica, Heft 10, S. 221-239

- Fatke, R. (1995): Fallstudien in der Pädagogik. In: Zeitschrift für Pädagogik, Heft 5, S.675-695
- Fausser, P., Mack, W. (1997): Praktisches Lernen – Erfahrungen aus eigenem Tun. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 2, S. 274-285
- Faust-Siehl, G., Schmitt, R., Valtin, R. (Hgg) (1990): Kinder heute – Herausforderung für die Schule
- Findeisen, U., Melenk, G., Schillo, H. (1989): Lesen lernen durch lauttreue Leseübungen. Bochum
- Floer, J. (1993): Lernmaterialien als Stützen der Anschauung. In: Lorenz, J.H. (Hg): Mathematik und Anschauung. IDM Reihe, Band 18, S. 106-121
- Floer, J. (1995a): Wie kommt das Rechnen in den Kopf? Veranschaulichen und Handeln im Mathematikunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, 82, S. 20-23
- Floer, J. (1995b): Rechnen in Feldern und Tafeln. Materialien zum einsichtigen Lernen und Üben. In: Die Grundschulzeitschrift, 82, S. 27-28
- Floer, J. (1997): „Vom Einmaleins zum Einmaleins?“ – Entwicklungen und Perspektiven im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 2, S. 212-235
- Fölling-Albers, M. (1992): Schulkinder heute. Auswirkungen veränderter Kindheit auf Unterricht und Schulleben. Weinheim und Basel
- Fölling-Albers, M., Hopf, A. (1995): Auf dem Weg vom Kleinkind zum Schulkind. Eine Langzeitstudie zum Aufwachsen in verschiedenen Lebensräumen. Opladen
- Fölling-Albers, M.(1996): Veränderte Kindheit – Neue Aufgaben für die Grundschule. In. Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 1, S. 52-64
- Franke, M. (2000): Didaktik der Geometrie. Heidelberg
- Frostig, M., u.a. (1972): Visuelle Wahrnehmungsförderung. Übungs- und Anweisungshefte 1-3.
- Frostig, M., Müller, H. (Hgg) (1981): Teilleistungsstörungen. Ihre Erkennung und Behandlung bei Kindern. München
- Frostig, M. (1992): Bewegungserziehung. Neue Wege der Heilpädagogik. München
- Ganser, B. (1995): Fehleranalyse – methodische Möglichkeiten. In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 59-60
- Gerster, H.D (1995): Vom zählenden Rechnen zur Abrufbarkeit der Basisfakten – ein zentrales Ziel der Prävention und der Förderung. In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 173-191
- Glöckel, H. (1997): Grundlegende Bildung – Ein „offener“ Begriff im pädagogischen Spannungsfeld. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 2, S. 336-350
- Grassmann, M. (1995): Arithmetische Grundkompetenz von Schulanfängern in Berlin und Brandenburg. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 186-189
- Grassmann, M. (1996): Geometrische Fähigkeiten der Schulanfänger. In: Grundschulunterricht, 43, Heft 5, S. 25-27
- Grassmann, M., Klunter, M., Mirwald, E., Veith, U. (1995): Was können Schulanfänger bereits vor ihrer ersten Mathematikstunde? In: Der Grundschulunterricht. Jahrgang 42, Heft 6, S. 23-25

- Graumann, G. (1993): Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. In: Pädagogische Welt, Heft 5, S.194-204
- Grisseemann, H., Weber, A. (1982): Spezielle Rechenstörungen Ursachen und Therapie. Psychologische und kinderpsychiatrische Grundlagen der pädagogisch-therapeutischen Interventionen bei Kindern mit Dyskalkulie. Bern
- Grisseemann, H., Weber, A. (1990): Grundlagen und Praxis der Dyskalkulietherapie. Diagnostik und Interventionen bei speziellen Rechenstörungen als Modell sonderpädagogisch-kinderpsychiatrischer Kooperation. Bern
- Guldimann, T. (1995): Ralph – Bericht über eine Fallstudie. In: Beck, E., Guldimann, T., Zutavern, M. (Hgg): Eigenständig lernen. St. Gallen
- Hell, P.W. (1991): Materialgeleitetes Lernen. Elemente der Montessori-Pädagogik in der Regelschule – Grundschulstufe. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen
- Hitzler, W., Keller, G. (1996): Rechenschwäche. Formen, Ursachen, Förderung. Donauwörth
- Höhtker, B., Selter, Ch.(1995): Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl. In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M., S. 122-137
- Johnson, D.J., Myklebust, H. (1980): Lernschwächen. Ihre Formen und ihre Behandlung. Stuttgart
- Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Grundschul Kinder: Besonderheiten, Probleme und Fördermöglichkeiten. In: Peter-Koop, A.: Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg, S. 25-41
- Kahabka, B. (1987): Geometrische Grunderfahrungen in der Grundschule. In: Pädagogische Welt, Heft 2, S. 62-70
- Kalthoff, U. (1995): Produktives Üben – Heißhunger auf lustvolle Denkarbeit. In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M., S. 179-190
- Kasper, H. (1996): Sich und den Unterricht öffnen – Differenzierung durch offene Lernsituationen. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 1, S. 186-198
- Keller, G. (1997): Die Förderung der Methodenkompetenz. Ein Kernthema der inneren Schulentwicklung. In: Lehren und Lernen, Heft 8, S. 34-39
- Keller, G. (1998): Die Schule lehrt das Lernen. Anregungen und Anleitungen zur schulischen Lernförderung. In: Lernchancen, 3, S. 67-69
- Kiphard, E.J. (1995): Motopädagogik. Dortmund
- Kohler, I., Reinelt, T. (1977): Entwicklung und Fehlentwicklung optischer Wahrnehmungsprozesse. In: Berger, E. (Hg): Teilleistungsschwächen bei Kindern. Bern
- Konrad, K., Wagner, A. (1999): Lernstrategien für Kinder. Baltmannsweiler
- Knapstein, K., Spiegel, H. (1995): Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse zu Beginn des 1. Schuljahres. In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M., S. 65-73
- Krauthausen, G. (1995): Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In: Müller, N.G., Wittmann, E.Ch.(Hgg): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M., S.87-108
- Laschkowski, W. (1995): Rechenstörungen Diagnostik. In: Rechenstörungen. Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 23-59
- Lorenz, J.H. (1984): Teilleistungsschwächen. In: IDM Reihe, Band 10, S. 75-93

- Lorenz, J.H. (1985): Über einige pathologische Fälle von Rechenstörungen. In: Der Mathematikunterricht. Jahrgang 31, Heft 6, S. 70-77
- Lorenz, J.H. (1987a): Zahlenraumprobleme bei Schülern. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 15, S. 171-177
- Lorenz J.H. (1987b): Bemerkungen zum Forschungsproblem „Rechenstörung“. In: mathematica didactica, Heft 10, S. 3-22
- Lorenz, J.H. (1989): Rechenstörungen: Früh erkannt und ausgeglichen. In: Die Grundschule. Heft 12, S. 33-35
- Lorenz, J.H. (1991a): Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In: Lorenz, J.H. (Hg): Störungen beim Mathematiklernen. Schüler, Stoff und Unterricht. Köln, S. 53-69
- Lorenz, J.H. (1991b): Störungen des internen visuellen Operierens als eine Ursache der Dyskalkulie. In: Mathematica didactica, Heft 4, S. 3-26
- Lorenz, J.H. (1991c): Rechenschwache Schüler in der Grundschule – Erklärungsversuche und Förderstrategien – Teil I. In: Journal für Mathematikdidaktik, 12, 1, S. 3-34
- Lorenz, J.H. (1991d): Rechenschwache Schüler in der Grundschule – Erklärungsversuche und Förderstrategien – Teil II. In: Journal für Mathematikdidaktik, 12, 2/3, S. 171-198
- Lorenz, J.H. (1992): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen
- Lorenz, J.H. (1993a): Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Lorenz, J.H. (Hg): Mathematik und Anschauung. IDM Reihe, Band 18, S. 122-146
- Lorenz, J.H. (1993b): Lernstörungen im Mathematikunterricht. Ursachen, Diagnose und Fördermöglichkeiten. In: Pädagogische Welt, Heft 5, S. 200-206
- Lorenz, J.H. (1995): Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. In: Die Grundschulzeitschrift, Band 82, S.9-12
- Lorenz, J.H. (1996): Geometrische Entdeckungen. In: Grundschule, 3, S. 26-29
- Lorenz, J.H. (1997a): Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig
- Lorenz, J.H. (1997b): Über Mathematik reden – Rechenstrategien von Kindern. In: SWZ, Band 25, Heft10, S. 22-28
- Lorenz, J.H. (1997c): Über das Verstehen von Mathematik. In: Die Grundschule, Heft 10, S 26-28
- Lorenz, J.H. (1998a): Das Bild – das bessere Bildungsmittel im Mathematikunterricht? In: SWZ, Band 26, Heft 13, S. 25-35
- Lorenz, J.H. (1998b): Das arithmetische Denken von Grundschulkindern. In: Peter – Koop, A.: Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg, S. 59-80
- Lorenz, J.H., Radatz, H.(1986): Rechenschwäche. In: Die Grundschule, Heft 4, S. 40-42
- Lorenz, J.H., Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover
- Malle, G. (1986): Zur Rolle der Aufmerksamkeitsfokussierung in der Entwicklung mathematischen Denkens. In: Steiner, H.G. (Hg): Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten. IDM Reihe, Band 13, Köln, S. 28-35
- Maier, H. (1974a): Grunderfahrungen. In: Kriegelstein, A. (Hg): Der Mathematikunterricht in der Grundschule. München

- Maier, H. (1974b): Kognitive Förderung im Mathematikunterricht der Grundschule. Gedanken zur Diskussion um die sogenannte Mengenlehre. In: Regensburger Universitäts- Zeitung, 7, S. 15-18
- Maier, H. (1995a): Didaktik des Rechnens. Ein Arbeitsbuch zur Unterrichtsplanung. Regensburg
- Maier, H. (1995b): Abschlussbericht zum Forschungsprojekt „Verstehen von Lehrerinstruktionen und – erklärungen durch Schüler im Mathematikunterricht (VIMU)“. Regensburg
- Maier, H.P. (1994): Räumliches Vorstellungsvermögen: Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Europäische Hochschulschriften: Reihe 6, Psychologie, Band 493
- Maier, H.P. (1995): Räumliches Vorstellungsvermögen – Zur Trainierbarkeit eines wichtigen Intelligenzfaktors mittels Darstellender Geometrie. In: IBDG, Heft 2, S. 16-21
- Maier, H.P. (1996): Ist das räumliche Vorstellungsvermögen trainierbar? In: Die Grundschule, Heft 3, S. 9-11
- Mann, Ch. (1997): Strategien des Rechtschreiblernens – Mitsprechen, Nachdenken, Merken, Nachschlagen. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 2, S. 140-150
- Müller, G.N. (1995): Kinder rechnen mit der Umwelt. In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen, Frankfurt a.M., S. 42-64
- Milz, I. (1994): Rechenschwächen erkennen und behandeln. Teilleistungsstörungen im mathematischen Denken. Dortmund
- Müller, H. (1982): Optisches Differenzierungs- und Konzentrationstraining. Die Erarbeitung skriptographischer Begriffe als propädeutischer Lese-, Schreib- und Mathematikunterricht. Hamburg
- Naegele, I.M. (1996): Das Lernen lernen – Arbeitsmethoden und –techniken. In: Haarmann, D. (Hg): Handbuch Grundschule. Band 1, S. 240-250
- Nickel, H. (1977): Der normale Entwicklungsverlauf von Wahrnehmungsprozessen im Kindesalter. In: Berger, E. (Hg): Teilleistungsschwächen bei Kindern. Bern
- Nolte, M. (1995): Mein Kind kann nicht rechnen. Hat es eine Rechenschwäche? In: Die Grundschule, Heft 5, S. 19-21
- Padberg, F. (1992): Didaktik der Arithmetik. 2. Vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. Mannheim
- Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1975): Die natürliche Geometrie des Kindes. Stuttgart
- Piaget, J., Inhelder, B. (1975): Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde. Stuttgart
- Piaget, J., Inhelder, B. (1993): Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart
- Piaget, J., Szeminska, A. (1994): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart
- Pippig, G. (1975): Rechenschwächen und ihre Überwindung in psychologischer Sicht. In: Mathematik in der Schule, Jg. 13, Heft 11, S.623-628
- Preiß, G. (1996): Der Beitrag der Gestaltpsychologie. Zur Verbindung von Arithmetik und Geometrie. In: Die Grundschule, Heft 3, S. 15-18
- Radatz, H., Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover
- Radatz, H., Rickmeyer, K. (1996): Aufgaben zur Differenzierung. Hannover

- Radatz, H. (1991): Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschulern. In: Lorenz, J.H. (Hg): Störungen beim Mathematiklernen. IDM Reihe, Band 16, S. 74-89
- Radatz, H. (1995): „Sag mir, was soll es bedeuten?“ Wie Schülerinnen und Schüler Veranschaulichungen verstehen. In: Die Grundschulzeitschrift, 82, S.50-51
- Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A. (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Hannover
- Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A. (1998): Handbuch für den Mathematikunterricht. 2.Schuljahr. Hannover
- Rickmeyer, K. (1998): Übungen zur Kopfgeometrie. In: Grundschule, Heft 9, S. 49-53
- Röhr, M. (1996): Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht – schon im ersten Schuljahr? In: Der Grundschulunterricht, Band 43, Heft 5, S. 17-20
- Scherer, P. (1995a): Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M., S. 151-164
- Scherer, P. (1995b): Arbeitsmittel und Veranschaulichungen im Unterricht mit lernschwachen Schülern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 408-411
- Scherer, P. (1998): Kinder mit Lernschwierigkeiten – „besondere“ Kinder, „besonderer“ Unterricht. In: Peter – Koop, A.: Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg, S. 99-118
- Schilling, S., Prochinig, T. (1988): Dyskalkulie Rechenschwäche. Winterthur
- Schipper, W. (1982): Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 2, S. 91-120
- Schipper, W. (1995): Veranschaulichungen in alten und neuen Rechenbüchern. In: Die Grundschulzeitschrift, 82, S. 13-17
- Schipper; W. (1998): „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen.“ Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In: Peter – Koop, A.: Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg, S. 119-140
- Schmassmann, M. (1995): Mathematikunterricht für alle. Mathematik – ganz einfach! In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 146-172
- Schmidt, S., Weiser, W. (1982): Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 3/4, S. 227-263
- Schulz, A. (1994a): Fördern im Mathematikunterricht. Was kann ich tun? Stuttgart
- Schulz, A. (1994b): Rechenschwäche – Möglichkeiten zum Verhindern und Überwinden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 338-341
- Schulz, A. (1998): Förderung „rechenschwacher“ Schüler im Rahmen einer integrativen Lerntherapie. In: Peter – Koop, A.: Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg, S. 81-98
- Seeger, F. (1993): Marc bearbeitet Aufgaben wie 72-59 Anmerkungen zu Anschauung und Verständnis im Arithmetikunterricht. In: Lorenz, J.H. (Hg): Mathematik und Anschauung. IDM Reihe 18, S.14-24
- Selter, Ch. (1993): Die Kluft zwischen den arithmetischen Kompetenzen von Erstkläßlern und dem Pessimismus der Experten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 350 ff

- Selter, Ch. (1995): Entdeckend üben – übend entdecken. In: Die Grundschule, Heft 5, S. 30-33
- Selter, Ch., Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig
- Senftleben, H.G. (1996a): Das kleine Geobrett – ein nützliches Arbeitsmittel auch für einen offenen Geometrieunterricht. In: Der Grundschulunterricht, 43, Heft 7-8, S. 34-36
- Senftleben, H.G. (1996b): Erkundungen zur Kopfgeometrie (unter besonderer Beachtung der Einbeziehung kopfgeometrischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der Grundschule) In: Journal für Mathematikdidaktik, 17, S. 49-72
- Senftleben, H.G. (1996c): Zahlenkenntnisse der Schulanfänger. In: Grundschulunterricht, 43, Heft 5, S. 21-23
- Senftleben, H.G. (1998): Mein Ideenheft für Geometrie – ein Unterrichtsprojekt mit geometrischen Eigenproduktionen. In: Grundschulunterricht, 9, S. 20-23
- Sindelar, B. (1993): Trainingsprogramme gegen Teilleistungsschwächen. Wien
- Susteck, H. (1989): Fallstudien – Forschungsbeitrag der Lehrer. In: Lehrer Journal, Heft 1, S. 3-6
- Voigt, J. (1993): Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In: Lorenz, J.H. (Hg): Mathematik und Anschauung. IDM Reihe, Band 18, S. 147-166
- Wagner, H.J. (1995): Rechnen erlebt. In: Rechenstörungen Diagnose – Förderung – Materialien. Ein Fortbildungsmodell der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen. S. 191-201
- Weiß, R., Osterland, J. (1997): Grundintelligenztest Skala 1, CFT 1. Handanweisung für die Durchführung, Auswertung und Interpretation. Göttingen
- Wellenreuther, M. (1997): Hypothesenprüfung, Theorieentwicklung und Erkenntnisfortschritt in der Mathematikdidaktik. Ein Plädoyer für Methodenpluralismus. In: Journal für Mathematikdidaktik, 18, 2/3, S. 186-216
- Winter, H. (1971): Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht, 17, 5, S. 40-66
- Winter, H. (1978): Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule. Frankfurt a.M.
- Winter, H. (1997): In Kontexten entdecken – lang und breit an Geldscheinen und Schreibpapierbögen. In: Der Grundschulunterricht, Heft 12, S. 20-23
- Wittmann, E.Ch. (1992): Mathematikdidaktik als „design science“. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jahrgang 13, Heft 1, S. 55-70
- Wittmann, E.Ch. (1993): „Weniger ist mehr“: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 394-397
- Wittmann, E.Ch. (1995): Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus. In: Müller, G.N., Wittmann, E.Ch. (Hgg): Mit Kindern rechnen, Frankfurt a.M., S. 10-41
- Wunderlich, G. (1993): 1,2,3 mit allen Sinnen. Lichtenau

Schulbücher und Arbeitshefte:

- Altmann, W., Gierlinger, W. u.a.: Rechne mit uns 1, Buch und Arbeitsheft. München. 1994
- Bauersfeld, H., Gnirk, H., Homann, G. u.a. (Hgg) (1975): alef 1. Wege zur Mathematik. Hannover

Berger, A., Fischer, M., Hoffmann, M. u.a. (Hgg) (1996): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Düsseldorf

Kolbinger, K.H., Baumann, H.G. u.a.(1988): Mathematik in der Grundschule. 1. Schuljahr. Buch und Arbeitsheft. Stuttgart

Leininger, P., Ernst, G. u.a. (1995): Nussknacker. Unser Rechenbuch. Bayern. 1.Schuljahr. Buch und Arbeitsheft. Stuttgart

W. Oehl, Patzkill, L. (Hgg) (1983): Die Welt der Zahl. 1. Jahrgangsstufe. Ausgabe Bayern. Buch und Arbeitsheft. München

Patzkill, L., Rinkens, H.D., Hönisch, K. (Hgg) (1997): Die Welt der Zahl 1 Buch und Arbeitsheft. Hannover

Schmidt, R. (Hg) (1992): Denken und rechnen 1. Buch und Arbeitsheft. Braunschweig

Vogel, G.H. (Hg) (1995):Formel 1, Buch und Arbeitsheft – Mathematik für Grundschulen. Würzburg