Untersuchung der Strömungsdynamik von Gummimischungen in Rohren mit spaltförmigen und dreieckigen Ausgangsquerschnitten

Alexandr A. Lomow, Michail J. Salunajew, Grigori M. Gontscharow

Der Extrusionsprozess für die Herstellung diverser Erzeugnisse wie Rohre, Schläuche, Platten u. a. hat sich zu einem der wichtigsten Verfahren in der Verarbeitung von Polymeren entwickelt. Das Ziel der Extrusion ist die Umwandlung des Ausgangsstoffs in ein Erzeugnis mit dem erforderlichen Querschnitt mittels Durchpressen des aufgeheizten plastischen Materials durch die Ausflussöffnung. Aufgrund einer immer häufigeren Anwendung neuer Rezepturen für füllstoffhaltige hochviskose Mischungen in der Industrie wachsen in der letzten Zeit auch die Anforderungen an die Extruderköpfe. Ihre Konstruktion wird immer komplexer. Untersuchungen der Strömungsdynamik anormaler hochviskoser Flüssigkeiten (was die Polymerstoffe bzw. Gummimischungen auch sind) in Rohren mit komplexer Geometrie sind notwendig für die Projektierung von profilgebundenen Extruderteilen. Eine genaue Beschreibung der Strömungsdynamik der Werkstoffe in diesem Bereich ist nur durch Lösung einer dreidimensionalen Aufgabe möglich.

Für die mathematische Modellierung dieser Aufgabe greifen wir auf den hydrodynamischen Ansatz zurück, der auf der Lösung des folgenden Differenzialgleichungssystems basiert [1]: der Bewegungsgleichung (1), der Kontinuitätsgleichung (2) und der rheologischen Gleichung (3).

Folgende Annahmen sind zu berücksichtigen:

- Der Prozess ist isotherm.
- Der Stoff ist nicht kompressibel.
- Die Strömung ist laminar und stationär, was einem sich bereits eingestellten kontinuierlichen Verarbeitungsprozess entspricht.
- Die Trägheitsterme der Gleichung sind vernachlässigbar klein.
- Es erfolgt kein Gleiten des Materials an der Rohrwand.

Halten wir die Gleichungen im üblichen kartesischen Koordinatensystem fest:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \mu_e \psi_{ij}; \mu_e = \mu_l \cdot \left| \frac{I_2}{2} \right|^{\frac{n-1}{2}}; I_2 = \sum_i \sum_j (\psi_{ij})^2 \quad (3)$$

v_x, v_y, v_z	– Komponenten der Geschwindigkeit
p	– hydrostatischer Druck
τ_{ij}	– Spannungstensoren im Material
μ_e	– effektive Viskosität
ψ_{ij}	– Deformationsgeschwindigkeit des Materials
I_2	– die zweite Invariante des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit
μ_l	– Materialkonsistenzfaktor
n	– Strömungsindex

Als Randbedingung wird die Haftung an den Rohrwänden, also $v_x = v_y = v_z = 0$, in der Grenzschicht angenommen.

Durch Differenzieren der Gleichungen (3) und nachfolgendes Einsetzen in die Gleichung (1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

Die Gleichungen (2) – (4) stellen somit ein geschlossenes System partieller Differentialgleichungen dar. Die bevorzugte numerische Lösungsmethode solcher Systeme ist die Methode der finiten Elemente.

Eine Umbildung nach [2] führt zu einem linearen Gleichungssystem mit unbekannten Werten in den Knoten für die Geschwindigkeits- und Druckkomponenten. Als Matrix hat dieses Gleichungssystem die folgende Form:

$$\begin{aligned} [V_x] \cdot [K_x] &= [F_x] \\ [V_y] \cdot [K_y] &= [F_y] \\ [V_z] \cdot [K_z] &= [F_z] \\ [P] \cdot [K_p] &= [F_p] \end{aligned} \quad (5)$$

$[K_p]$, $[K_x]$, $[K_y]$, $[K_z]$ – Koeffizienten-Matrizen

$[V_x]$, $[V_y]$, $[V_z]$, und $[P]$ – Spaltenvektoren der Knotenwerte der Geschwindigkeits- und Druckkomponenten

$[F_p]$, $[F_x]$, $[F_y]$, $[F_z]$, – Spaltenvektoren der Kräfte

Für die Berechnung ist eine Diskretisierung des untersuchten Bereichs erforderlich. Die Diskretisierung stellt eine Zerlegung des Körpers in einzelne Elemente sowie eine Elementen- und Knotennummerierung dar. Als Elemente werden dreidimensionale Simplex-Elemente in Form von Tetraedern eingesetzt. Ihre Größe im Bereich ist unterschiedlich: Am Anfang sind es große Elemente und am Ende die kleinsten. Damit soll eine genauere Beschreibung des schmalen, spaltenförmigen Bereichs am Rohrausgang erreicht werden. Das System wird anschließend nach dem Gauß'schen Algorithmus gelöst. Als Ausgangsdaten dienen dabei die Angaben über die Zerlegung des Bereichs in Elemente (Datenfeld der Knoten und Datenfeld für Knoten- und Elementennummern), der Druckgradient und die rheologischen Parameter des Materials (5). Um die Randbedingungen im zu betrachtenden Bereich zu berücksichtigen, werden die entsprechenden Knotenwerte der Geschwindigkeitskomponenten gleich Null gesetzt.

Als Lösung erhalten wir für jeden Punkt des untersuchten Rohrs für die vorgegebene Leistung und die rheologischen Charakteristiken die entsprechenden Werte für die Fließ- und Druckgeschwindigkeit.

Die numerische Untersuchung des Fließverhaltens der Gummimischung wurde für den Eingangsdruck von $9,5 \cdot 10^6$ Pa durchgeführt; die Materialeigenschaften erfüllten die Forderungen des rheologischen Exponentialgesetzes mit dem Strömungsindex $n=0,28$ und dem Konsistenzfaktor $\mu_1 = 0,09 \text{ MPa} \cdot \text{s}^n$.

Die Geometrie des ersten Bereichs entsprach einem Rohr, das eine Strömung mit rundem Querschnitt und einem Durchmesser von 90 mm in eine flache Form mit Abmessungen 135×3 mm transformierte. Die Rohrlänge betrug 140 mm. Die Rohrform ist in der Abb. 1 dargestellt.

Abb. 1: Rohr mit einem spaltförmigen Ausgangsquerschnitt.

Für den vorgegebenen Bereich wurden Verteilungen der Geschwindigkeits- und Druckkomponenten V_x , V_y und V_z bestimmt. In der Abb. 2 sind die Verteilungskurven für die Geschwindigkeitskomponenten V_z und V_x für Querschnitte, die jeweils 20, 60, 100 und 140 mm vom Eingangsbereich entfernt sind, dargestellt.

Abb. 2: Verteilungen der Geschwindigkeiten im Rohr mit spaltförmigem Ausgangsquerschnitt.

Die Analyse der Berechnungen der Fließgeschwindigkeit zeigt, dass die Art der Verteilung auf der Querschnittsfläche des Rohrs hauptsächlich durch die Geometrie des Grenzbereichs bestimmt wird. Durch das Hemmen der Strömung in der Rohrmitte erreicht die Geschwindigkeit ihren Maximalwert an den Wänden, und je näher zum Rohrausgang, um so höher ist die Differenz zwischen der maximalen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit an der Achse. Die Ursache liegt darin, dass die Bremswirkung der Rohrwände auf das fließende Material sich mit der Verengung des Bereichs verstärkt. Das führt zur Verstärkung der Ungleichmäßigkeit der Strömung.

Aus der Grafik folgt, dass die Geschwindigkeitskomponente V_x an der Achse gleich Null ist, weil an dieser Stelle die Strömung in der Querrichtung fehlt. An den Rohrwänden sind die Geschwindigkeiten ebenfalls gleich Null aufgrund der Haftung. Der Durchschnittswert der Komponente V_x ist um einigemale geringer als V_z , aber an den Querschnitten in der Mitte des Rohrs erreichen die V_x -Werte ihr Maximum – die Hälfte von V_z . Diese Zunahme der Geschwindigkeitskomponente wird durch die Beschleunigung der Materialbewegung von der Achse weg infolge der Erweiterung des Bereichs verursacht.

Die Geometrie des zweiten Strömungsbereichs entsprach einem 150 mm langen Rohr, das eine rechteckige Strömung mit den Maßen 60×62 mm in zwei Dreiecke mit den Maßen $40,3 \times 40 \times 5$ mm transformierte. Die Rohrform ist in der Abb. 3 dargestellt.

Für diesen Bereich wurden ebenfalls die Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten V_x , V_y und V_z sowie der Druck bestimmt. In der Abb. 4 sind die Verteilungskurven für die Geschwindigkeitskomponenten V_z und V_x im Abstand von 45, 80, 115 und 150 mm vom Eingangsbereich dargestellt.

Abb. 3: Rohr mit einem dreieckigen Ausgangsquerschnitt.

Abb. 4: Geschwindigkeitsverteilung im Rohr mit einem dreieckigen Ausgangsquerschnitt.

Die Analyse der Grafik zeigt, dass in der Mitte des Ausgangsquerschnitts die Geschwindigkeitskomponente V_x gleich Null ist, weil der Ausgangsquerschnitt in zwei Dreiecke aufgeteilt ist. Dieses Einengen des Rohrs ist stärker als bei dem spaltenförmigen Rohr. Im Ausgangsquerschnitt beobachten wir dazu eine drastische Veränderung der Vertikalgeschwindigkeitsebene V_z , die zu einem Abreißen des Materials führen kann.

Die Geschwindigkeitskomponente V_x erreicht ihr Maximum im Ausgangsquerschnitt und hat einen kleineren Wert im Vergleich zum vorherigen Fließbereich, weil das Rohr eine schwache Verbreiterung entlang der Achse x hat.

Die Geschwindigkeitskomponente V_y ist an den Achsen und an den Wänden beider Kanäle gleich Null. Auf der gesamten Länge der Kanäle hat die Komponente V_y eine Parabelform und ist im Durchschnitt um eine Größenordnung geringer als die Komponente V_z . Die Komponente V_y erreicht ihr Maximum näher zum Rohreingang.

Beim Vergleich der Geschwindigkeitskomponenten kann festgestellt werden, dass bei den beiden Kanälen die Komponente V_z den größten Anteil an der resultierenden Geschwindigkeit hat.

Um die Berechnungsmethode zu prüfen, wurden die experimentellen Ergebnisse der Arbeit [3] herangezogen. Der Vergleich der theoretischen und experimentell ermittelten Fließgeschwindigkeiten bei einer Extrusion von Gummimischungen zeigte eine gute Übereinstimmung.

Die vorgestellten Berechnungen stimmen mit den Messergebnissen genauer überein als die Daten der Arbeit [3]. Das erlaubt den Schluss, dass das oben beschriebene mathematische Modell und die Berechnungsmethode im Vergleich zu den Ergebnissen früherer Publikationen eine bessere Übereinstimmung mit den realen Prozessen hat.

Somit erlauben das vorgeschlagene mathematische Modell und die Berechnungsmethode eine Untersuchung des Fließverhaltens in Rohren beliebiger Konfiguration. Die Beschreibung der Strömung des zu verarbeitenden Stoffs im realen komplexen Bereich des Rohrs lassen eine quantitative Schätzung der Wirkung der Extrusionsleistung und der rheologischen Stoffparameter auf die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im Rohr zu. Sie ermöglichen es außerdem, eine Energie- und Kräfteberechnung durchzuführen und die Konstruktion der Extrusionsanlagen zu rationalisieren.

Literatur

- [1] Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. - М.: Химия, 1977. 464 с. (Theoretische Grundlagen der Verarbeitung von Polymeren, Moskau, Chemie, 1977, 464 Seiten).
- [2] Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. - Л.: Судостроение, 1979. 263 с. (Methode der finiten Elemente in der Hydromechanik. Leningrad, Sudostrojenije, 1979, 263 Seiten).
- [3] Лаврентьев Ю.Б. Интенсификация экструзии резиновых смесей с применением валковых головок и метод расчёта оборудования. Дис. ... канд. тех. наук. - Ярославль Интенсификация экструзии резиновых смесей с применением, 1996. - 149 с. (Lawrentjew, Ju. B.: Intensivierung der Extrusion von Gummimischungen unter Anwendung von walzenförmigen Köpfen und Berechnungsmethoden für die Ausrüstung. Dissertation, Jaroslawl, 1996, 149 Seiten).

Autoren

Alexandr A. Lomow

1. Prorektor der Jaroslawler staatlichen technischen Universität, Kandidat der technischen Wissenschaften

Michail J. Salunajew

Diplomingenieur, Aspirant am Lehrstuhl „Technologische Maschinen und Ausrüstung“

Grigori M. Gontscharow

Inhaber des Lehrstuhls „Technologische Maschinen und Ausrüstung“, Professor, Doktor der technischen Wissenschaften

Übersetzung:

Dr. Olga Rösch

Technische Fachhochschule Wildau

Sprachenzentrum

Tel. (0 33 75) 508-367

E-Mail: roesch@sprz.tfh-wildau.de