

## Bemerkungen zur Methode Variation der Konstanten – Teil 2

W. Müller, Technische Hochschule Nürnberg, Georg Simon Ohm

### Abstract

Im vorliegenden Artikel wird eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 3-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) mit Hilfe *integrierender Faktoren* gelöst und, aus der dabei gewonnenen allgemeinen Lösung, die Methode *Variation der Konstanten* abgeleitet.

### Lineare, inhomogene Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die folgende lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung

$$y'''(x) + a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = g(x) \quad (1)$$

(mit konstanten Koeffizienten  $a, b$  und  $c$ )

lässt sich mit Hilfe von drei integrierenden Faktoren<sup>1,2</sup> lösen.

Wir beginnen mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und nehmen an, dass die drei Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  der charakteristischen Gleichung voneinander verschieden sind ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ).

Als Nächstes drücken wir die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  durch die drei Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  aus

$$\begin{aligned} a &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ b &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ c &= -\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \end{aligned}$$

Die inhomogene Differentialgleichung (1) nimmt damit die folgende Form an

$$\begin{aligned} y'''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) y''(x) + (\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3) y'(x) \\ - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 y(x) = g(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Wir überführen nun die Differentialgleichung (2) in ein System von drei Differentialgleichungen 1-ter Ordnung:

Durch Zusammenfassen einzelner Terme erhalten wir zunächst

$$(y'(x) - \lambda_3 y(x))'' - (\lambda_1 + \lambda_2)(y'(x) - \lambda_3 y(x))' + \lambda_1 \lambda_2 (y'(x) - \lambda_3 y(x)) = g(x).$$

Mit der Substitution

$$u(x) = y'(x) - \lambda_3 y(x)$$

folgt daraus eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2) u'(x) + \lambda_1 \lambda_2 u(x) = g(x)$$

bzw.

$$(u'(x) - \lambda_2 u(x))' - \lambda_1 (u'(x) - \lambda_2 u(x)) = g(x),$$

die durch eine zweite Substitution

$$v(x) = u'(x) - \lambda_2 u(x)$$

in eine Differentialgleichung 1-ter Ordnung übergeht

$$v'(x) - \lambda_1 v(x) = g(x).$$

Die ursprüngliche Differentialgleichung (1) lässt sich demnach durch das folgende Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung ersetzen

$$\begin{aligned} v'(x) - \lambda_1 v(x) &= g(x) \\ u'(x) - \lambda_2 u(x) &= v(x) \\ y'(x) - \lambda_3 y(x) &= u(x), \end{aligned}$$

welches mit Hilfe von drei integrierenden Faktoren sukzessive von oben nach unten gelöst wird.

Wir beginnen mit der ersten Differentialgleichung

$$v'(x) - \lambda_1 v(x) = g(x)$$

und multiplizieren diese mit dem integrierenden Faktor  $e^{-\lambda_1 x}$

$$v'(x) e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 v(x) e^{-\lambda_1 x} = g(x) e^{-\lambda_1 x}$$

bzw.

$$(v(x) e^{-\lambda_1 x})' = g(x) e^{-\lambda_1 x}. \quad (3)$$

Durch Integration und Auflösen nach  $v(x)$  erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3)

$$v(x) = G_1(x) e^{\lambda_1 x} + k_1 e^{-\lambda_1 x},$$

wobei  $k_1$  eine Integrationskonstante ist und  $G_1(x)$  eine Stammfunktion von  $g(x) e^{-\lambda_1 x}$

$$(G_1'(x) = g(x) e^{-\lambda_1 x}).$$

Damit gilt für die zweite Gleichung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u'(x) - \lambda_2 u(x) &= v(x) \\ &= G_1(x) e^{\lambda_1 x} + k_1 e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor  $e^{-\lambda_2 x}$  und erhalten

$$u'(x) e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 u(x) e^{-\lambda_2 x} = G_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + k_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

bzw.

$$(u(x) e^{-\lambda_2 x})' = G_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + k_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}. \quad (4)$$

Durch Integration und Auflösen nach  $u(x)$  finden wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4)

$$u(x) = \frac{G_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 x} + \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (5)$$

wobei  $k_2$  eine Integrationskonstante ist und  $G_2(x)$  eine Stammfunktion von  $g(x) e^{-\lambda_2 x}$

$$(G_2'(x) = g(x) e^{-\lambda_2 x}).$$

Damit folgt für die dritte Gleichung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y'(x) - \lambda_3 y(x) &= u(x) \\ &= \frac{G_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 x} + \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung nun mit dem integrierenden Faktor  $e^{-\lambda_3 x}$

$$\begin{aligned} y'(x) e^{-\lambda_3 x} - \lambda_3 y(x) e^{-\lambda_3 x} &= \frac{G_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_3)x} - \frac{G_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x} \\ &+ \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_3)x} + k_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (y(x) e^{-\lambda_3 x})' &= \frac{G_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_3)x} - \frac{G_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x} \\ &+ \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_3)x} + k_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Durch Integration und Auflösen nach  $y(x)$  erhalten wir schließlich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6) und damit der ursprünglichen Differentialgleichung (1)

$$y(x) = \underbrace{\frac{G_1(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 x} + \frac{G_3(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 x}}_{= y_p(x)} + \underbrace{\frac{k_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 x} + \frac{k_2}{(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 x} + k_3 e^{\lambda_3 x}}_{= y_h(x)}, \quad (7)$$

wobei  $k_3$  eine Integrationskonstante ist und  $G_3(x)$  eine Stammfunktion von  $g(x) e^{-\lambda_3 x}$  ( $G_3'(x) = g(x) e^{-\lambda_3 x}$ ).

Mit den Substitutionen:

$$H_1(x) = \frac{G_1(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

$$H_2(x) = -\frac{G_2(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

$$H_3(x) = \frac{G_3(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$y_3(x) = e^{\lambda_3 x}$$

$$c_1 = \frac{k_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

$$c_2 = \frac{k_2}{(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

$$c_3 = k_3$$

nimmt die allgemeine Lösung (7) die folgende Form an

$$y(x) = \underbrace{H_1(x) y_1(x) + H_2(x) y_2(x) + H_3(x) y_3(x)}_{= y_p(x)} + \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)}_{= y_h(x)} \quad (8)$$

Betrachten wir die allgemeine Lösung (7) bzw. (8) etwas genauer, so können wir Folgendes feststellen:

- 1) Sie besitzt die Struktur  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ , bestehend aus der allgemeinen Lösung  $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung  $y_p(x) = H_1(x)y_1(x) + H_2(x)y_2(x) + H_3(x)y_3(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung.
- 2) Die **Basislösungen**  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  und  $y_3(x)$  der **allgemeinen Lösung**  $y_h(x)$  treten **ebenfalls** als **Faktoren** in der **partikulären Lösung**  $y_p(x)$  auf.
- 3) Für die Ableitungen  $y_p'(x)$ ,  $y_p''(x)$  und  $y_p'''(x)$  der partikulären Lösung  $y_p(x)$  findet man:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= H_1'(x)y_1(x) + H_2'(x)y_2(x) + H_3'(x)y_3(x) \\ &\quad + H_1(x)y_1'(x) + H_2(x)y_2'(x) + H_3(x)y_3'(x) \\ &= H_1(x)y_1'(x) + H_2(x)y_2'(x) + H_3(x)y_3'(x), \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} &H_1'(x)y_1(x) + H_2'(x)y_2(x) + H_3'(x)y_3(x) \\ &= \frac{G_1'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 x} + \frac{G_3'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_3 x} \\ &= g(x) \cdot \left( \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= H_1'(x)y_1'(x) + H_2'(x)y_2'(x) + H_3'(x)y_3'(x) \\ &\quad + H_1(x)y_1''(x) + H_2(x)y_2''(x) + H_3(x)y_3''(x) \\ &= H_1(x)y_1''(x) + H_2(x)y_2''(x) + H_3(x)y_3''(x), \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
& H_1'(x)y_1'(x) + H_2'(x)y_2'(x) + H_3'(x)y_3'(x) \\
&= \frac{G_1'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{G_3'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\
&= g(x) \cdot \left( \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
y_p'''(x) &= H_1'(x)y_1''(x) + H_2'(x)y_2''(x) + H_3'(x)y_3''(x) \\
&\quad + H_1(x)y_1'''(x) + H_2(x)y_2'''(x) + H_3(x)y_3'''(x) \\
&= g(x) + H_1(x)y_1'''(x) + H_2(x)y_2'''(x) + H_3(x)y_3'''(x),
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
& H_1'(x)y_1''(x) + H_2'(x)y_2''(x) + H_3'(x)y_3''(x) \\
&= \frac{G_1'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} - \frac{G_2'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + \frac{G_3'(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \\
&= g(x) \cdot \left( \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \\
&= g(x).
\end{aligned} \tag{11}$$

Mit Hilfe der Beobachtungen 1), 2) und 3) begründen wir im Folgenden die Methode *Variation der Konstanten* für eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

### Variation der Konstanten für eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgrund der additiven Struktur  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$  der allgemeinen Lösung (8), lassen sich  $y_h(x)$  und  $y_p(x)$  getrennt voneinander berechnen.

Nachdem wir  $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$  ermittelt haben, bestimmen wir mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung  $y_p(x)$ .

Zur Gewinnung des Ansatzes eignet sich  $y_h(x)$ , **da ihre Basislösungen  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  und  $y_3(x)$  in der partikulären Lösung  $y_p(x)$  enthalten sind** – siehe Gleichung (8). Nur die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  in  $y_h(x)$  müssen wir noch durch drei unbekannte Funktionen  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  und  $h_3(x)$  ersetzen.

Der Ansatz für  $y_p(x)$  lautet demnach:

$$y_p(x) = h_1(x)y_1(x) + h_2(x)y_2(x) + h_3(x)y_3(x)$$

Da wir drei unbekannte Funktionen  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  und  $h_3(x)$  bestimmen müssen, benötigen wir noch drei Bestimmungsgleichungen. **Aufgrund der Identitäten (9), (10) und (11), die aus den Ableitungen  $y_p'(x)$ ,  $y_p''(x)$  und  $y_p'''(x)$  der partikulären Lösung  $y_p(x)$  resultieren**, fordern wir, dass die drei gesuchten Funktionen die folgenden drei Gleichungen erfüllen müssen

$$h_1'(x)y_1(x) + h_2'(x)y_2(x) + h_3'(x)y_3(x) = 0$$

$$h_1'(x)y_1'(x) + h_2'(x)y_2'(x) + h_3'(x)y_3'(x) = 0$$

$$h_1'(x)y_1''(x) + h_2'(x)y_2''(x) + h_3'(x)y_3''(x) = g(x).$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems finden wir mit der Cramerschen Regel:

$$h_1'(x) = \frac{g(x) e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

$$h_2'(x) = \frac{-g(x) e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

$$h_3'(x) = \frac{g(x) e^{-\lambda_3 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

bzw. nach Integration

$$h_1(x) = \int \frac{g(x) e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} dx = \frac{G_1(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + k_1$$

$$h_2(x) = \int \frac{-g(x) e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} dx = \frac{-G_2(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + k_2$$

$$h_3(x) = \int \frac{g(x) e^{-\lambda_3 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} dx = \frac{G_3(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} + k_3 ,$$

wobei  $k_1, k_2$  und  $k_3$  Integrationskonstanten sind.

Setzen wir  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , so folgt daraus:

$$h_1(x) = \frac{G_1(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} = H_1(x)$$

$$h_2(x) = \frac{-G_2(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} = H_2(x)$$

$$h_3(x) = \frac{G_3(x)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} = H_3(x) .$$

Als partikuläre Lösung  $y_p(x)$  erhalten wir schließlich

$$y_p(x) = h_1(x)y_1(x) + h_2(x)y_2(x) + h_3(x)y_3(x)$$

$$= H_1(x)y_1(x) + H_2(x)y_2(x) + H_3(x)y_3(x)$$

und damit, die bereits aus Gleichung (8) bekannte allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

$$= \underbrace{H_1(x)y_1(x) + H_2(x)y_2(x) + H_3(x)y_3(x)}_{= y_p(x)} + \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)}_{= y_h(x)} .$$

### Ergänzung:

a) Sind die Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  der charakteristischen Gleichung  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung identisch ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha$ ), so lässt sich die lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung

$$y'''(x) + a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = g(x)$$

bzw.

$$y'''(x) - 3\alpha y''(x) + 3\alpha^2 y'(x) - \alpha^3 y(x) = g(x), \quad (12)$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -3\alpha \\ b &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3\alpha^2 \\ c &= -\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\alpha^3, \end{aligned}$$

durch das folgende lineare Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung ersetzen:

$$\begin{aligned} v'(x) - \alpha v(x) &= g(x) \\ u'(x) - \alpha u(x) &= v(x) \\ y'(x) - \alpha y(x) &= u(x), \end{aligned}$$

welches sukzessive von oben nach unten mit Hilfe des integrierenden Faktors  $e^{-\alpha x}$  gelöst wird.

Als allgemeine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung (12) findet man

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} G_1(x) \cdot x^2 e^{\alpha x} - G_2(x) \cdot x e^{\alpha x} + \frac{1}{2} G_3(x) \cdot e^{\alpha x}}_{= y_p(x)} \\ &\quad + \underbrace{c_1 x^2 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + c_3 e^{\alpha x}}_{= y_h(x)}, \end{aligned} \quad (13)$$

mit

$$G_1'(x) = g(x) e^{-\alpha x}, \quad G_2'(x) = g(x) x e^{-\alpha x} \quad \text{und} \quad G_3'(x) = g(x) x^2 e^{-\alpha x}.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{1}{2} G_1(x) \\ H_2(x) &= -G_2(x) \\ H_3(x) &= \frac{1}{2} G_3(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^2 e^{\alpha x} \\ y_2(x) &= x e^{\alpha x} \\ y_3(x) &= e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

so erhält die allgemeine Lösung (13) wieder die Form

$$y(x) = \underbrace{H_1(x)y_1(x) + H_2(x)y_2(x) + H_3(x)y_3(x)}_{= y_p(x)} + \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)}_{= y_h(x)},$$

wobei  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  und  $y_3(x)$  die Basislösungen von  $y_h(x)$  sind.

Weiterhin resultieren aus den Ableitungen  $y_p'(x)$ ,  $y_p''(x)$  und  $y_p'''(x)$  der partikulären Lösung  $y_p(x)$  – analog zu (9), (10) und (11) – wieder die folgenden drei Identitäten:

$$\begin{aligned} & H_1'(x)y_1(x) + H_2'(x)y_2(x) + H_3'(x)y_3(x) \\ &= \frac{1}{2}G_1'(x) \cdot x^2 e^{\alpha x} - G_2'(x) \cdot x e^{\alpha x} + \frac{1}{2}G_3'(x) \cdot e^{\alpha x} \\ &= g(x) \cdot \left( \frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_1'(x)y_1'(x) + H_2'(x)y_2'(x) + H_3'(x)y_3'(x) \\ &= \frac{1}{2}G_1'(x) \cdot (2x + \alpha x^2) e^{\alpha x} - G_2'(x) \cdot (1 + \alpha x) e^{\alpha x} + \frac{1}{2}G_3'(x) \cdot \alpha e^{\alpha x} \\ &= \frac{1}{2}g(x) \cdot \left( x + \frac{1}{2}\alpha x^2 - x - \alpha x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & H_1'(x)y_1''(x) + H_2'(x)y_2''(x) + H_3'(x)y_3''(x) \\ &= \frac{1}{2}G_1'(x) \cdot (2 + 4\alpha x + \alpha^2 x^2) e^{\alpha x} - G_2'(x) \cdot (2\alpha + \alpha^2 x) e^{\alpha x} + \frac{1}{2}G_3'(x) \cdot \alpha^2 e^{\alpha x} \\ &= g(x) \cdot \left( 1 + 2\alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 x^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

b) Sind zwei Lösungen der charakteristischen Gleichung  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung identisch, z.B.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$  und  $\lambda_3 \neq \alpha$ , so lässt sich die lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung

$$y'''(x) + a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = g(x)$$

bzw.

$$y'''(x) - (2\alpha + \lambda_3)y''(x) + (\alpha^2 + 2\alpha\lambda_3)y'(x) - \alpha^2\lambda_3 y(x) = g(x), \quad (14)$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -(2\alpha + \lambda_3) \\ b &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \alpha^2 + 2\alpha\lambda_3 \\ c &= -\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\alpha^2\lambda_3, \end{aligned}$$

durch das folgende Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung ersetzen

$$\begin{aligned} v'(x) - \alpha v(x) &= g(x) \\ u'(x) - \alpha u(x) &= v(x) \\ y'(x) - \lambda_3 y(x) &= u(x), \end{aligned}$$

welches sukzessive von oben nach unten mit Hilfe der beiden integrierenden Faktoren  $e^{-\alpha x}$  und  $e^{-\lambda_3 x}$  gelöst wird.

Als allgemeine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung (14) findet man

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\ &= \underbrace{\frac{G_1(x)}{\alpha - \lambda_3} \cdot x e^{\alpha x} + \left( -\frac{G_1(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{G_2(x)}{\alpha - \lambda_3} \right) \cdot e^{\alpha x} + \frac{G_3(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} \cdot e^{\lambda_3 x}}_{= y_p(x)} \\ &\quad + \underbrace{c_1 x e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} + c_3 e^{\lambda_3 x}}_{= y_h(x)}, \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$G_1'(x) = g(x) e^{-\alpha x}, \quad G_2'(x) = g(x) x e^{-\alpha x} \quad \text{und} \quad G_3'(x) = g(x) e^{-\lambda_3 x}.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{G_1(x)}{\alpha - \lambda_3} \\ H_2(x) &= -\frac{G_1(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{G_2(x)}{\alpha - \lambda_3} \\ H_3(x) &= \frac{G_3(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y_1(x) &= x e^{\alpha x} \\y_2(x) &= e^{\alpha x} \\y_3(x) &= e^{\lambda_3 x},\end{aligned}$$

so erhält die allgemeine Lösung (15) wieder die Form

$$y(x) = \underbrace{H_1(x)y_1(x) + H_2(x)y_2(x) + H_3(x)y_3(x)}_{= y_p(x)} + \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)}_{= y_h(x)},$$

wobei  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  und  $y_3(x)$  die Basislösungen von  $y_h(x)$  sind.

Weiterhin resultieren aus den Ableitungen  $y_p'(x)$ ,  $y_p''(x)$  und  $y_p'''(x)$  der partikulären Lösung  $y_p(x)$  wieder die drei Identitäten:

$$\begin{aligned}&H_1'(x)y_1(x) + H_2'(x)y_2(x) + H_3'(x)y_3(x) \\&= \frac{G_1'(x)}{\alpha - \lambda_3} \cdot x e^{\alpha x} + \left( -\frac{G_1'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{G_2'(x)}{\alpha - \lambda_3} \right) \cdot e^{\alpha x} + \frac{G_3'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} \cdot e^{\lambda_3 x} \\&= g(x) \cdot \left( \frac{x}{\alpha - \lambda_3} - \frac{1}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{x}{\alpha - \lambda_3} + \frac{1}{(\alpha - \lambda_3)^2} \right) \\&= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&H_1'(x)y_1'(x) + H_2'(x)y_2'(x) + H_3'(x)y_3'(x) \\&= \frac{G_1'(x)}{\alpha - \lambda_3} \cdot (1 + \alpha x) e^{\alpha x} + \left( -\frac{G_1'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{G_2'(x)}{\alpha - \lambda_3} \right) \cdot \alpha e^{\alpha x} + \frac{G_3'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} \cdot \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\&= g(x) \cdot \left( \frac{1}{\alpha - \lambda_3} + \frac{\alpha x}{\alpha - \lambda_3} - \frac{\alpha}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{\alpha x}{\alpha - \lambda_3} + \frac{\lambda_3}{(\alpha - \lambda_3)^2} \right) \\&= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & H_1'(x) y_1''(x) + H_2'(x) y_2''(x) + H_3'(x) y_3''(x) \\ &= \frac{G_1'(x)}{\alpha - \lambda_3} \cdot (2\alpha + \alpha^2 x) e^{\alpha x} + \left( -\frac{G_1'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{G_2'(x)}{\alpha - \lambda_3} \right) \cdot \alpha^2 e^{\alpha x} + \frac{G_3'(x)}{(\alpha - \lambda_3)^2} \cdot \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \\ &= g(x) \cdot \left( \frac{2\alpha + \alpha^2 x}{\alpha - \lambda_3} - \frac{\alpha^2}{(\alpha - \lambda_3)^2} - \frac{\alpha^2 x}{(\alpha - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3^2}{(\alpha - \lambda_3)^2} \right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Lösungen (13) und (15) der beiden Fälle a) und b) ließe sich nun wieder die Methode *Variation der Konstanten* ableiten.

### Schlussbemerkung

Die anhand einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorgestellte Methode zur Begründung des Verfahrens *Variation der Konstanten* lässt sich auch auf eine lineare, inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung übertragen.

### Literatur

- (1) W.E. Boyce, R.C. DiPrima *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag **1995**
- (2) Martin Braun, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, 2. Auflage, Springer-Verlag **1991**