

# Bemerkungen zur Methode *Variation der Konstanten* – Teil 1

W. Müller, Technische Hochschule Nürnberg, Georg Simon Ohm

## Abstract

Im vorliegenden Artikel wird eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 1-ter Ordnung mit Hilfe eines *integrierenden Faktors* gelöst und, aus der dabei gewonnenen allgemeinen Lösung, die Lösungsmethode *Variation der Konstanten* abgeleitet.

## Lineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

Wir gehen von der *Standard* - oder *Normalform* einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1-ter Ordnung aus

$$y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \quad (1)$$

mit stetigen Funktionen  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $x \in I$  und berechnen deren allgemeine Lösung mit Hilfe eines *integrierenden Faktors*.

Wie sich leicht zeigen lässt<sup>1,2</sup>, besitzt der integrierende Faktor in diesem Fall die Form

$$c \cdot e^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

wobei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist.

Es gibt demnach unendlich viele Exponentialfunktionen, die sich als integrierender Faktor eignen. Der Einfachheit halber wählen wir  $c = 1$  und erhalten als integrierenden Faktor die Funktion

$$e^{F(x)}$$

Multiplizieren wir die Differentialgleichung (1) mit der Funktion  $e^{F(x)}$ , so folgt daraus

$$e^{F(x)} y'(x) + e^{F(x)} f(x) \cdot y(x) = g(x) e^{F(x)}$$

bzw.

$$\left( y(x) e^{F(x)} \right)' = g(x) e^{F(x)}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$\int \left( y(x) e^{F(x)} \right)' dx = \int g(x) e^{F(x)} dx$$

bzw.

$$y(x) e^{F(x)} = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei  $G(x)$  eine Stammfunktion von  $g(x) e^{F(x)}$  ist ( $G'(x) = g(x) e^{F(x)}$ ).

Lösen wir die Gleichung nach  $y(x)$  auf, so erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{G(x) e^{-F(x)}}_{= y_p(x)} + \underbrace{c e^{-F(x)}}_{= y_h(x)}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= y_p(x) + y_h(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung (2) setzt sich demnach aus zwei Teilen zusammen:

Der allgemeinen Lösung  $y_h(x) = c e^{-F(x)}$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung  $y_p(x) = G(x) e^{-F(x)}$  der inhomogenen Differentialgleichung (1).

Des Weiteren erkennen wir, dass die Basislösung  $e^{-F(x)}$  der allgemeinen Lösung  $y_h(x)$  ebenfalls als Faktor in der partikulären Lösung  $y_p(x)$  enthalten ist.

Mit Hilfe dieser beiden Beobachtungen lässt sich die Methode *Variation der Konstanten* begründen.

### Variation der Konstanten für eine lineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

Aufgrund der additiven Struktur  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$  der gefundenen allgemeinen Lösung (2), lassen sich  $y_h(x)$  und  $y_p(x)$  getrennt voneinander berechnen:

Nachdem wir  $y_h(x) = c e^{-F(x)}$  ermittelt haben – z.B. durch *Trennung der Variablen* –, bestimmen wir mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung  $y_p(x)$ .

Zur Gewinnung des Ansatzes eignet sich  $y_h(x)$ , da ihre Basislösung  $e^{-F(x)}$  ebenfalls in der partikulären Lösung  $y_p(x)$  auftaucht – siehe Gleichung (2). Lediglich die Konstante  $c$  in  $y_h(x)$  müssen wir noch durch eine unbekannte Funktion  $h(x)$  ersetzen.

Der Ansatz für  $y_p(x)$  lautet demnach:

$$y_p(x) = h(x) e^{-F(x)}$$

Setzen wir den Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung (1) ein, so erhalten wir eine elementare Differentialgleichung 1-ter Ordnung für die unbekannte Funktion  $h(x)$ .

Die allgemeine Lösung dieser elementaren Differentialgleichung lautet:

$$h(x) = G(x) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

wobei  $G(x)$  wieder eine Stammfunktion von  $g(x) e^{F(x)}$  ist.

Für  $k = 0$  folgt daraus

$$h(x) = G(x)$$

und damit erhalten wir für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = h(x) e^{-F(x)} = G(x) e^{-F(x)}$$

Die Addition der gefundenen partikulären Lösung  $y_p(x) = G(x) e^{-F(x)}$  und der allgemeinen Lösung  $y_h(x) = c e^{-F(x)}$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ergibt schließlich die bereits aus Gleichung (2) bekannte allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung.

### Schlussbemerkung

Der integrierende Faktor ist eine effiziente Methode zur Bestimmung der allgemeinen Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1-ter Ordnung.

Zusätzlich bietet sie die Möglichkeit, die bekannte Lösungsmethode *Variation der Konstanten* anschaulich herzuleiten.

### Literatur

- (1) W.E. Boyce, R.C. DiPrima *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag **1995**
- (2) Martin Braun, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, 2. Auflage, Springer-Verlag **1991**