



aFuE-Bericht

# Auslegung von endlich langen, unrunder Zylinderschalen unter äußerem Überdruck

Eberhard Franz

Februar 2023

Fakultät Verfahrenstechnik

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm

Gleichungen aus aktuellen Regelwerken und Literatur für die Auslegung endlich langer, unrunder Zylinderschalen werden diskutiert und mit Finite-Elemente-Analysen überprüft. Während die Gleichung für elastisches Beulen gut reproduzierbar ist, gibt es bei den Gleichungen für plastische Verformung größere Abweichungen. Es wird eine verbesserte Gleichung für plastische Verformung angegeben.

Stichworte: Finite-Elemente-Analysen, Zylinderschalen, äußerer Überdruck, elastisches Beulen, plastische Verformung, Druckbehälter, Dampfkessel, Großwasserraumkessel, Flammrohre

## 1 Einleitung

Aktuelle europäische Regelwerke für die Auslegung von Druckbehältern oder Dampfkesseln sind von der Vorgehensweise „Design by Formula“ geprägt. Hierbei werden die Druckgeräte komponentenweise unter Verwendung vorgegebener Gleichungen berechnet. Als Beispiel kann die Auslegung von Abzweigen in zylindrischen Druckbehältern unter innerem Überdruck mit dem sog. Flächenvergleichsverfahren, von druckbeaufschlagten, rechteckigen oder elliptischen Platten und von unrunder Zylinderschalen endlicher Länge unter äußerem Überdruck genannt werden.

Die verwendeten Gleichungen sind z. T. vor geraumer Zeit entstanden. Das Flächenvergleichsverfahren geht auf eine Arbeit aus dem Jahr 1955 zurück [26]. Die Auslegung von rechteckigen und elliptischen Platten wird im Buch [17] von S. B. Kantorowitsch aus dem Jahr 1955 behandelt, ohne dabei auf die zugrunde liegende Theorie näher einzugehen. Hierzu wird dort auf eine russischsprachige Arbeit von B. G. Galerkin aus dem Jahr 1934 verwiesen.

Heute sind z. B. mit der Finite-Elemente-Methode viel mächtigere Werkzeuge als in der damaligen Zeit vorhanden. Es liegt daher nahe, die Ergebnisse aus der Vergangenheit einem Test mit den jetzt verfügbaren Möglichkeiten zu unterwerfen.

Gegenstand des vorliegenden Berichts, der auf die Ergebnisse der Abschlussarbeiten [2, 10, 12, 13, 14, 19, 30] aus den Jahren 2018 bis 2022 aufbaut, sind endlich lange, unrunder Zylinderschalen<sup>1</sup> unter äußerem Überdruck. Sie kommen z. B. als Flammrohre von Großwasserraumkesseln vor und werden sowohl gegen elastisches Beulen als auch gegen plastische Verformung ausgelegt.

---

<sup>1</sup>Die Begriffe „Zylinderschale“ und „Rohr“ werden im vorliegenden Bericht synonym verwendet.

Die Veröffentlichung [20] von R. v. Mises aus dem Jahr 1914 ist die Grundlage für die Berechnungsgleichung für elastisches Beulen in den TRD 306 [31] und im AD 2000-Merkblatt B6 [1], während in der europäischen Norm DIN EN 12953-3 [6] eine dagegen stark vereinfachte Gleichung angegeben wird.

Die in der europäischen Norm [6] und ihrer deutschen Vorgängernorm [31] enthaltene Berechnungsgleichung für plastische Verformung geht auf die Veröffentlichung [22] von S. Schwaigerer und A. Konejunczok aus dem Jahr 1950 zurück.

Seit dieser Zeit ist eine Vielzahl von Veröffentlichungen über Zylinderschalen unter äußerem Überdruck entstanden. Als Beispiele seien, ohne den Anspruch auf Vollständigkeit erheben zu können, die Artikel [4, 8, 9, 11, 15, 16, 18, 25, 28, 29, 33, 34] genannt. Bei diesen Arbeiten steht ausnahmslos die Untersuchung des Beulens im Vordergrund. Mitunter werden nur unendlich lange Rohre behandelt. Der Fokus wird nicht auf die Abhängigkeit der Spannung vom Druck vor dem Beulen gelegt. Genau dieser Zusammenhang ist aber für Regelwerksgleichungen plastische Verformung betreffend essentiell.

Im Folgenden werden zunächst verwendete Bezeichnungen und Definitionen wiedergegeben. Danach werden die in den Regelwerken [1, 6, 31] enthaltenen Gleichungen diskutiert. Diese Gleichungen werden im Weiteren mittels Ergebnissen von Finite-Elemente-Analysen bewertet.

Die in den Regelwerken aufgeführten Gleichungen für plastische Verformung zeigen große Abweichungen zu den Ergebnissen der Finite-Elemente-Analysen. Es wird daher eine verbesserte Gleichung angegeben. Eine Zusammenfassung schließt den vorliegenden Bericht ab.

## 2 Bezeichnungen und Definitionen

In der Veröffentlichung [22] und in den Normen [1, 6, 31] werden zur Beschreibung der Unrundheit elliptische Querschnitte zugrunde gelegt. Die in [1, 31] ebenfalls aufgeführte Unrundheit durch Abflachung wird hier nicht weiter betrachtet.

Abbildung 1 zeigt ein Viertel eines elliptischen Querschnitts.  $\hat{d}_a$  steht für die größere, an der Rohraußenseite gemessenen Hauptachse,  $\hat{d}_i$  und  $\hat{d}_m$  sind die Werte an der Innenseite bzw. an der Profilmittellinie.  $\check{d}_a$ ,  $\check{d}_i$  und  $\check{d}_m$  sind die entsprechenden Werte der kleineren Hauptachse. Im Weiteren wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen  $x$ -Achse in Richtung der kleineren Hauptachse und dessen  $y$ -Achse in Richtung der größeren Hauptachse zeigt. Die Länge  $l$  erstreckt sich in  $z$ -Richtung.

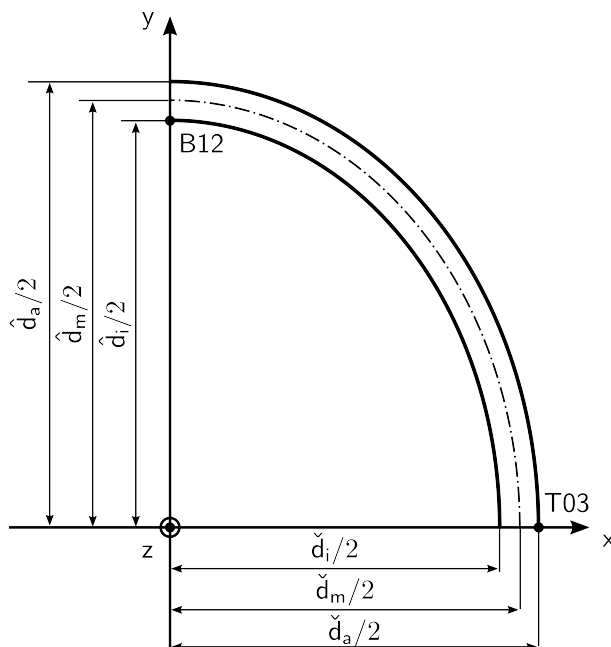


Abbildung 1: Zur Definition der Querschnittsabsmessungen unrunder Zylinderschalen.

Ein Koordinatensystem verwendet, dessen  $x$ -Achse in Richtung der kleineren Hauptachse und dessen  $y$ -Achse in Richtung der größeren Hauptachse zeigt. Die Länge  $l$  erstreckt sich in  $z$ -Richtung.

### 3 Regelwerksgleichungen

Die Wanddicke  $s$  ergibt sich in einfacher Weise.

$$s = \frac{\hat{d}_a - \hat{d}_i}{2} = \frac{\check{d}_a - \check{d}_i}{2} = \hat{d}_a - \hat{d}_m = \check{d}_a - \check{d}_m = \hat{d}_m - \hat{d}_i = \check{d}_m - \check{d}_i. \quad (1)$$

Die arithmetischen Mittel von großen und kleinen Hauptachsen werden mit  $\bar{d}_a$ ,  $\bar{d}_i$  und  $\bar{d}_m$  bezeichnet.

Im Folgenden wird die Position an der Rohrinne mit den Koordinaten  $(0, \hat{d}_i/2, 0)$  mit B12, diejenige an der Rohraußenseite mit den Koordinaten  $(\check{d}_a/2, 0, 0)$  mit T03 bezeichnet, siehe hierzu Abbildung 1.

Die Unrundheit  $u$  wird in den erwähnten Normen [1, 6, 31] und der Veröffentlichung [22] unterschiedlich definiert. In [6, 22] werden die Abmessungen der Profilmittellinie verwendet.

$$u = \frac{2 \cdot (\hat{d}_m - \check{d}_m)}{\hat{d}_m + \check{d}_m} = \frac{\hat{d}_m - \check{d}_m}{\bar{d}_m}. \quad (2)$$

Dagegen werden in [1, 31] die Abmessungen der Rohrinne verwendet. Im vorliegenden Bericht wird die Definition aus [6, 22] bevorzugt, weil in allen erwähnten Normen und Veröffentlichungen in den Gleichungen für plastische Verformung sonst mit den Abmessungen der Profilmittellinie gearbeitet wird.

## 3 Regelwerksgleichungen

In diesem Abschnitt wird zunächst auf die Gleichungen für elastisches Beulen und danach auf die Gleichungen für plastische Verformung eingegangen. Dabei werden jeweils Korrosions- und Untermaßzuschläge nicht mitgeführt. Ferner werden Sicherheitsbeiwerte nicht verwendet, weil es im vorliegenden Bericht um tatsächliche und nicht um zulässige Beanspruchungen gehen soll.

### 3.1 Elastisches Beulen

In [22] wird die von R. v. Mises in [20] veröffentlichte Gleichung für den elastischen Beuldruck  $p_b$  endlich langer, perfekt runder Zylinderschalen wiedergegeben.

$$p_b = \frac{E}{(n^2 - 1) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{n \cdot l}{\pi \cdot r_m} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{s}{r_m} + \frac{E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{s}{r_m} \right)^3 \cdot \left[ n^2 - 1 + \frac{2 \cdot n^2 - 1 - \nu}{1 + \left( \frac{n \cdot l}{\pi \cdot r_m} \right)^2} \right]. \quad (3)$$

Hierin steht  $E$  für den Elastizitätsmodul,  $\nu$  für die Querkontraktionszahl,  $r_m$  für den mittleren Radius,  $l$  für die Länge und  $n$  für die Anzahl der über den Umfang verteilten Beulwellen. Der relevante Druck ist der kleinste Druck, der sich ergibt, wenn man in Gleichung (3) beginnend mit  $n = 2$  nacheinander die natürlichen Zahlen einsetzt. In [20] wird zunächst eine ausführlichere Gleichung abgeleitet, aus der unter Vernachlässigung bestimmter Terme Gleichung (3) hervorgeht.

In den Normen [1, 31] findet sich, mit dem Unterschied, dass anstelle des mittleren Radius  $r_m$  der Außenradius  $d_a/2$  verwendet wird, eine identische Gleichung. In der Originalveröffentlichung [20] wird dagegen mit dem Innenradius gearbeitet.

In der europäischen Norm [6] ist folgende Gleichung für elastisches Beulen angegeben.

$$p_b = \frac{2,6 \cdot E}{l} \cdot \left( \frac{s}{d_m} \right)^2 \cdot \sqrt{d_m \cdot s}. \quad (4)$$

Hierin steht  $d_m$  für den mittleren Durchmesser.

Es ist zu betonen, dass in den Gleichungen für elastisches Beulen die Unrundheit  $u$  nicht vorkommt, die Gleichungen somit streng genommen nur für perfekt runde Rohre gelten. In [1] wird eine Sicherheit  $S_K=3$  gegen elastisches Beulen genannt, vorausgesetzt die Unrundheit überschreitet den Wert von  $u = 0,015$  nicht. In den Erläuterungen von [1] ist nachzulesen, dass der Einfluss der Unrundheit nach der Literatur [22] ermittelt wurde. In [22] wird der Einfluss der Unrundheit bei elastischem Beulen aber nicht

untersucht. Es gibt daher dort auch keine Empfehlung, bis zu welcher Unrundheit ein Sicherheitsbeiwert  $S_K = 3$  anwendbar ist.

Auf die Zulässigkeit der Anwendung bei unrunderen Rohren sowie den in Gleichung (3) einzusetzenden Radius wird im Abschnitt 4.3 des vorliegenden Berichts eingegangen.

### 3.2 Plastische Verformung

Mitunter wird nicht präzise zwischen den Begriffen *Plastische Verformung* und *Plastisches Beulen* unterschieden. Plastische Verformung tritt ab demjenigen Druck auf, bei dem an einer bestimmten Stelle des Rohrs die Fließgrenze des Werkstoffs gerade erreicht wird. Die Struktur ist bis dahin noch rein linear-elastisch beansprucht. Im Allgemeinen ist die Stabilität der Struktur noch gegeben. Zur plastischen Verformung kann es nur kommen, wenn die Struktur nicht vor Erreichen der Fließgrenze durch die Instabilität elastischen Beulens versagt. Deswegen muss die Auslegung sowohl gegen elastisches Beulen als auch gegen plastische Verformung erfolgen.

Wird nach Erreichen der Fließgrenze der Druck weiter gesteigert, kann es zum plastischen Beulen kommen. Es handelt sich hierbei ebenfalls um das Versagen aufgrund von Instabilität, wobei – im Gegensatz zum elastischen Beulen – Bereiche der Struktur unmittelbar vor dem Kollabieren bereits plastisch verformt sind.

Eine Auslegung gegen plastisches Beulen ist nicht erforderlich, wenn eine Auslegung gegen plastische Verformung erfolgt, da der Druck des Beginns der plastischen Verformung kleiner als der Druck des plastischen Beulens ist.

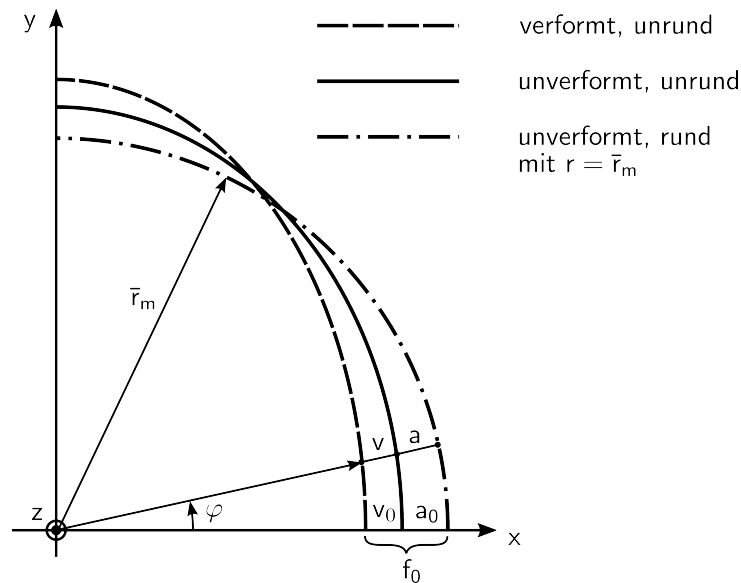


Abbildung 2: Formänderungen des unrunderen Rohres, in Anlehnung an Abb. 2 von [22].

Die Berechnungsgleichungen für plastische Verformung aus den TRD 306 [31] und dem Teil 3 der DIN EN 12953 [6] sind nahezu identisch. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Definition der verwendeten Unrundheit  $u$ , siehe hierzu Abschnitt 2. Beide Gleichungen haben ihren Ursprung in der Veröffentlichung [22], die sich explizit mit der Auslegung von Flammrohren beschäftigt.

Die Autoren von [22] leiten anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung an der verformten Struktur eine Differentialgleichung für die Auslenkung  $v$  eines unrunderen, zunächst unendlich langen Rohrs mit elliptischem Ringquerschnitt unter dem äußerem Überdruck  $p$  ab. Dabei wird linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung liefert für einen bestimmten Druck  $p_{b,\infty}$  unendlich große Verformungen. Es handelt sich bei  $p_{b,\infty}$  um den elastischen Beuldruck eines unrunderen,

### 3 Regelwerksgleichungen

unendlich langen Rohres.

$$p_{b,\infty} = \frac{2 \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot \left( \frac{s}{\bar{d}_m} \right)^3. \quad (5)$$

Bemerkenswert ist, dass die Unrundheit  $u$  in Gleichung (5) nicht auftaucht, obwohl sie in [22] anhand eines unrunder Rohres abgeleitet wurde. Gleichung (5) ist in der Grundlagenliteratur (z.B. [27]) auch für perfekt runde Rohre zu finden. Gleichung (3) geht für  $n = 2$  und  $l/r_m = \infty$  in Gleichung (5) über.

Für Drücke  $p < p_{b,\infty}$  kann mit der erwähnten Lösung die vom Umfangswinkel  $\varphi$  abhängige Verformung  $v(\varphi)$  berechnet werden, solange die bei der Herleitung der Differentialgleichung stillschweigende Annahme kleiner Dehnungen erfüllt ist<sup>2</sup>.

Im Weiteren wird in [22] durch Umformungen eine Beziehung für das Verhältnis  $p/p_{b,\infty}$  abgeleitet. Dieses Verhältnis hängt vom Quotienten  $a_0/f_0$  ab, wobei  $a_0$  die maximale Abweichung des unverformten, unrunder Rohrs vom mittleren Radius  $\bar{r}_m$  des unverformten, runden Rohrs bedeutet.  $f_0 = a_0 + v_0$  steht für diese Abweichung beim verformten, unrunder Rohr, siehe hierzu Abbildung 2.

$$\frac{p}{p_{b,\infty}} = 1 - \frac{a_0}{f_0} = 1 - \frac{a_0/\bar{r}_m}{f_0/\bar{r}_m}. \quad (6)$$

Gleichung (6) ist in Abbildung 3 für verschiedene Verhältnisse  $a_0/\bar{r}_m$  mit durchgezogenen Linien dargestellt.

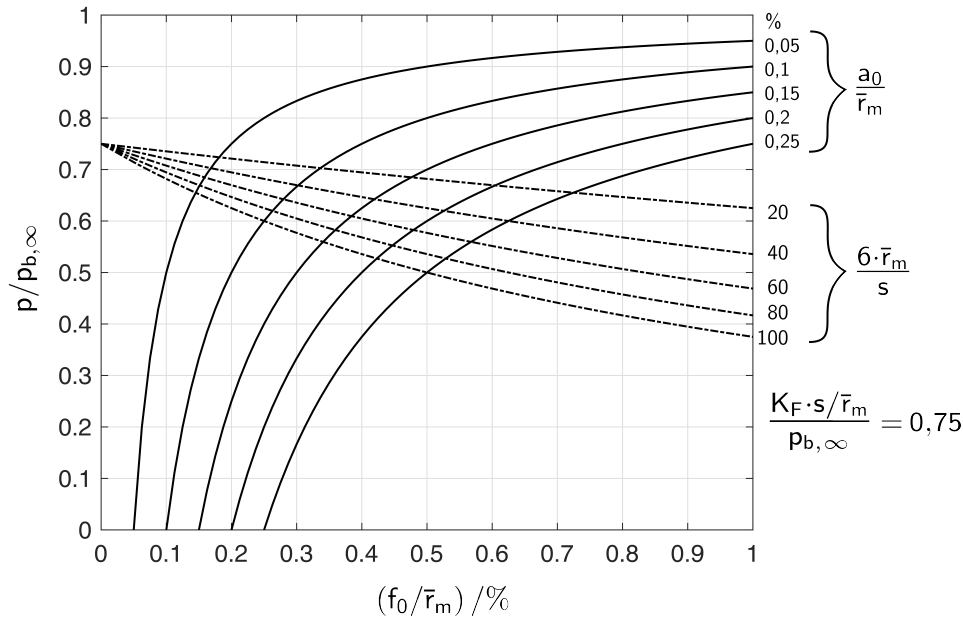


Abbildung 3:  $p/p_{b,\infty}$  gemäß Gleichung (6) (durchgezogene Linien), gemäß Gleichung (7) (strichpunktierte Linien); in Anlehnung an Abbildung 3 von [22].

In [22] wird nach der Herleitung von Gleichung (6) eine Beziehung für den größten Betrag  $\sigma$  der Umfangsdruckspannungen angegeben, wobei Biegespannungen aufgrund der Unrundheit  $u$  und Membranspannungen aufgrund des äußeren Überdrucks  $p$  berücksichtigt werden. Diese Beziehung kann wiederum nach  $p/p_{b,\infty}$  umgestellt werden.

$$\frac{p}{p_{b,\infty}} = \frac{\frac{\sigma}{p_{b,\infty}} \cdot s/\bar{r}_m}{1 + 6 \cdot \bar{r}_m/s \cdot f_0/\bar{r}_m}. \quad (7)$$

Die Autoren führen aus, dass  $\sigma$  der Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese entspricht. In Gleichung (7) wird in [22] für  $\sigma$  die Fließgrenze  $K_F$  eingesetzt, sie ist für  $\frac{K_F \cdot s/\bar{r}_m}{p_{b,\infty}} = 0,75$  in Abbildung 3 mit strichpunktierten Linien dargestellt.

<sup>2</sup>Siehe z. B. Abschnitt 19.3 von [5].

### 3 Regelwerksgleichungen

Die Autoren von [22] gehen davon aus, dass der Schnittpunkt einer durchgezogenen mit einer strichpunktierten Linie in Abbildung 3 das Druckverhältnis  $p/p_{b,\infty}$  definiert, bei dem das Rohr plastisch einbeult. Dies ist nicht nachvollziehbar. Die Ergebnisse von [12] bestätigen, dass das Erreichen der Fließgrenze an einer Stelle im Querschnitt nicht gleichbedeutend mit dem Eintritt plastischen Beulens ist.

Der Schnittpunkt definiert dagegen das Druckverhältnis  $p/p_{b,\infty}$ , bei dem an der Rohrinneiseite der größeren Hauptachse (Position B12)<sup>3</sup> eine Umfangsspannung auftritt, die betragsmäßig der Fließgrenze  $K_F$  entspricht. Alle anderen Stellen im Querschnitt erfahren Spannungen, die betragsmäßig kleiner als  $K_F$  sind. Abbildung 3 ist somit z. B. zu entnehmen, dass bei einem unendlich langen Rohr für  $a_0/\bar{r}_m = 0,25\%$ ,  $6 \cdot \bar{r}_m/s = 100$  und  $(K_F \cdot s/\bar{r}_m)/p_{b,\infty} = 0,75$  bei einem Druck von  $p \approx 0,5 \cdot p_{b,\infty}$  die Fließgrenze an der erwähnten Position erreicht ist und die Verformung  $f_0$  etwa 0,5% von  $\bar{r}_m$  beträgt.

Die Herleitung in [22] geschieht anhand eines linear-elastischen Werkstoffs, weswegen die Ermittlung eines Drucks  $p$ , bei dem plastisches Beulen zu erwarten ist, ausgeschlossen ist. Für die Rechnung gegen plastische Verformung ist dies auch nicht erforderlich, siehe hierzu die einleitenden Bemerkungen dieses Abschnitts.

In [22] wird im Weiteren Gleichung (6) in Gleichung (7) eingesetzt, was

$$p = \frac{\sigma \cdot s/\bar{r}_m}{1 + 6 \cdot \bar{r}_m/s \cdot \frac{a_0/\bar{r}_m}{1-p/p_{b,\infty}}} \quad (8)$$

ergibt.

Den Einfluss der endlichen Länge  $l$  eines realen Flammrohres berücksichtigen die Autoren von [22] empirisch anhand von Versuchen, die in den Jahren 1887 bis 1892 auf der kaiserlichen Werft im damaligen Danzig durchgeführt wurden [3]. Dabei wurde für verschiedene Rohre bekannter Abmessungen, Unrundheiten und Fließgrenzen der Druck, bei dem die untersuchten Rohre plötzlich einbeulten, gemessen.

Da Gleichung (8) den Vorgang des plastischen Beulens nicht erfassen kann, ist dieses Vorgehen in Frage zu stellen.

Weiter ist anzumerken, dass die seinerzeit untersuchten Rohre Längen-Durchmesser-Verhältnisse zwischen 0,33 und 1,98 aufwiesen, was nicht den typischen Abmessungen von Flammrohren entspricht, siehe hierzu Tabelle 1 in [22].

Die Autoren von [22] geben für endlich lange Rohre die nachstehende Gleichung an<sup>4</sup>.

$$p = \frac{\sigma \cdot s/\bar{r}_m \cdot (1 + 0,2 \cdot \bar{r}_m/l)}{1 + 6 \cdot \bar{r}_m/s \cdot \frac{a_0/\bar{r}_m}{(1-p/p_b) \cdot (1+10 \cdot \bar{r}_m/l)}} \quad (9)$$

In Gleichung (9) muss der elastische Beuldruck  $p_b$  mit Berücksichtigung der endlichen Länge  $l$  eingesetzt werden, da der elastische Beuldruck bei endlich langen Rohren signifikant größer als bei unendlich langen Rohren ist und Gleichung (9) bei Verwendung von  $p_{b,\infty}$  gemäß Gleichung (5) physikalisch unsinnige, z. B. negative Werte für  $p$  liefern könnte. In [22] wird deswegen die von R. v. Mises gefundene Gleichung (3) für endlich lange Zylinderschalen angegeben. Hierzu ist anzumerken, dass das Auftauchen von  $p_{b,\infty}$  in den Gleichungen (7) und (8) arithmetischen Umformungen geschuldet ist. Es ist deswegen nicht notwendigerweise gerechtfertigt, in die Gleichung für endlich lange Rohre mit dem elastischen Beuldruck  $p_b$  aus Gleichung (3) zu arbeiten.

Für das Weitere wird Gleichung (9) umgeformt. Zum einen wird  $\bar{d}_m = 2 \cdot \bar{r}_m$  eingesetzt, zum anderen wird die elliptische Unrundheit  $u$  gemäß

$$u = \frac{\hat{d}_m - \check{d}_m}{\bar{d}_m} = \frac{\bar{d}_m + 2 \cdot a_0 - (\bar{d}_m - 2 \cdot a_0)}{2 \cdot \bar{r}_m} = \frac{2 \cdot a_0}{\bar{r}_m} \Leftrightarrow \frac{a_0}{\bar{r}_m} = \frac{u}{2} \quad (10)$$

eingeführt:

$$p = \frac{2 \cdot \sigma \cdot s/\bar{d}_m \cdot (1 + 0,1 \cdot \bar{d}_m/l)}{1 + 3 \cdot \bar{d}_m/s \cdot \frac{u/2}{(1-p/p_b) \cdot (1+5 \cdot \bar{d}_m/l)}} \quad (11)$$

<sup>3</sup>Siehe hierzu Abschnitt 4.4.1.

<sup>4</sup>In [22] als Gleichung (16) geführt.

In dieser Gleichung erscheint der Druck  $p$  auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Die Auflösung nach  $p$  ergibt eine quadratische Gleichung. Um deren Lösung zu vermeiden, wird in [22] für den Grenzfall  $\sigma = K_F$  näherungsweise  $p/p_{b,\infty} \approx 0,5$  gesetzt. Die Regelwerksgleichungen in [6, 31] verwenden diese Näherung.<sup>5</sup>

$$p = \frac{2 \cdot \sigma \cdot s / \bar{d}_m \cdot (1 + 0,1 \cdot \bar{d}_m / l)}{1 + 3 \cdot \bar{d}_m / s \cdot \frac{u}{1 + 5 \cdot \bar{d}_m / l}}. \quad (12)$$

In [6, 31] wird außerdem festgelegt, dass Gleichung (12) für eine Unrundheit von  $u = 0,015$  auszuwerten ist.

Im AD 2000-Merkblatt B6 [1] ist nachstehend aufgeführte Gleichung für plastische Verformung zu finden

$$p = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{s}{\bar{d}_a} \cdot \frac{1}{1 + 1,5 \cdot u \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \frac{\bar{d}_a}{l}\right) \cdot \frac{\bar{d}_a}{s}}. \quad (13)$$

Die Herkunft der Gleichung in [1] kann nicht nachvollzogen werden. In [1] wird zwar auf [22] verwiesen, Gleichung (13) unterscheidet sich aber offensichtlich von den in [22] angegebenen Gleichungen. In [1] wird der Gültigkeitsbereich von Gleichung (13) mit  $\bar{d}_a / l \leq 5$  eingeschränkt. Damit könnte Gleichung (13) für den hier untersuchten Parameterbereich herangezogen werden, siehe hierzu auch die Einleitung des Abschnitts 4.

## 4 Finite-Elemente-Analysen

In Fortführung der Abschlussarbeit [19] wurde systematisch ein weiter Parameterbereich untersucht. Die betrachteten Parameter waren die elliptische Unrundheit  $u$ , das Verhältnis  $s/\bar{d}_m$  und das Verhältnis  $l/\bar{d}_m$  bzw.  $\bar{d}_m/l$ . Im Einzelnen wurden die nachstehend aufgeführten Werte verwendet.

- 9 Werte für  $u$ : 0,005; 0,0075; 0,01; 0,0125; 0,015; 0,0175; 0,02; 0,0225 und 0,025,
- 10 Werte für  $s/\bar{d}_m$ : 0,01; 0,013; 0,016; 0,019; 0,022; 0,025; 0,028; 0,031; 0,034 und 0,037,
- 9 Werte für  $l/\bar{d}_m$ : 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6 und  $\infty$  bzw.  $\bar{d}_m/l$ :  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{2}{7}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{2}{9}$ ;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{2}{11}$ ;  $\frac{1}{6}$  und 0.

Die Bereiche  $0,01 \leq s/\bar{d}_m \leq 0,037$  sowie  $2,5 \leq l/\bar{d}_m \leq 6$  bzw.  $\frac{1}{6} \leq \bar{d}_m/l \leq \frac{2}{5}$  decken die Werte branchenüblicher Flammrohre ab. Insgesamt wurden für den vorliegenden Bericht  $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$  Kombinationen untersucht. Der Mittelwert  $\bar{d}_m$  der beiden an der Profilmittellinie gemessenen Hauptachsen  $\hat{d}_m$  und  $\check{d}_m$  betrug dabei immer  $\bar{d}_m = 1000$  mm. Dieses Vorgehen ist zulässig, da Ähnlichkeit bezüglich  $u$ ,  $s/\bar{d}_m$  und  $l/\bar{d}_m$  bzw.  $\bar{d}_m/l$  gegeben ist [14].

Zunächst wurde zur Bewertung der Gleichungen für elastisches Beulen der elastische Beuldruck  $p_b$  jeder Konfiguration mit einer linearen Beulanalyse ermittelt. Danach wurden geometrisch-nichtlineare Finite-Elemente-Analysen unter Verwendung linear-elastischen Werkstoffverhaltens durchgeführt. Der äußere Überdruck  $p$  wurde dabei bis zu 50 % des elastischen Beuldrucks  $p_b$  nach Gleichung (3) in 5-%-Schritten gesteigert.

Die Finite-Elemente-Analysen wurden mit der Software NX Nastran 12.0 durchgeführt. Es wurden Vier-Knoten-Schalenelemente verwendet. Als Elementabmessung wurde 20x20 mm gewählt. Diese Elementabmessungen führen zu ausreichend feinen Netzen [2, 30].

Im Folgenden werden die bei den Finite-Elemente-Analysen gemachten Annahmen bezüglich Werkstoffeigenschaften und Randbedingungen erläutert. Danach werden die Ergebnisse der o. g. Bewertungen gezeigt.

### 4.1 Werkstoffeigenschaften

Als Werkstoffparameter wurden für den Elastizitätsmodul  $E = 1,88 \cdot 10^5$  MPa und für die Querkontraktionszahl  $\nu = 0,295$  verwendet. Beide Werte gelten für den typischen Flammrohrstahl P295GH bei einer Temperatur von 350 °C [24, 32]. 350 °C ist als obere Schranke für die Berechnungstemperatur von Flammrohren gemäß [6] anzusehen.

<sup>5</sup>In der Abschlussarbeit [12] wurde nachgewiesen, dass bei Erreichen der Fließgrenze  $p/p_{b,\infty} \approx 0,5$  i. d. R. nicht erfüllt ist.

Bezüglich der Berücksichtigung von Werkstoffen anderer Parameter wird auf die einleitenden Bemerkungen des Abschnitts 4.4 verwiesen.

## 4.2 Randbedingungen

Von wesentlicher Bedeutung ist die Wahl der kinematischen Randbedingungen. V. Mises hat in [20] für die drei Verschiebungskomponenten Ansätze gewählt, bei denen die radiale Verschiebung und die Verschiebung in Umfangsrichtung an den Rohrenden gesperrt sind, während dort die Verschiebung in Längsrichtung frei ist. Die Lagerung der Rohrenden erfolgt momentenfrei.

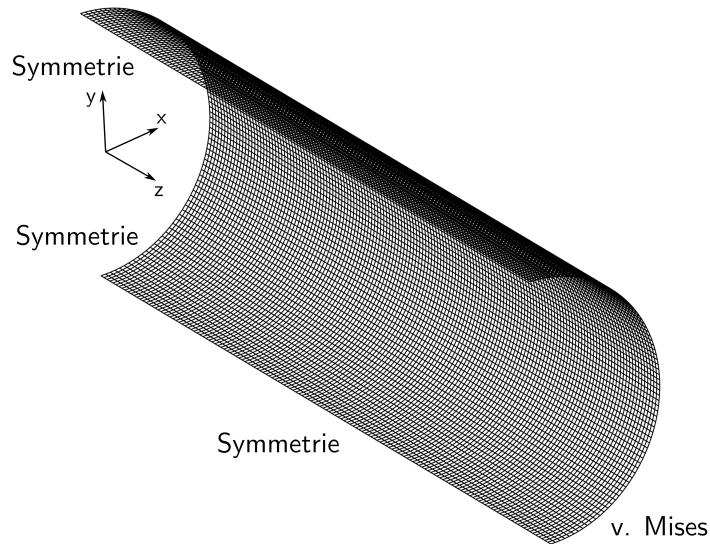


Abbildung 4: Finites-Elemente-Netz, Randbedingungen und verwendetes Koordinatensystem.

Die Ergebnisse von [12] zeigen, dass diese Randbedingungen die Verhältnisse auch in ausgeführten Großwasserraumkesseln gut beschreiben. Das liegt darin begründet, dass die Längssteifigkeit  $c_F$  von glatten Flammrohren erheblich größer als die Steifigkeit  $c_B$  der an die Flammrohre angeschweißten Böden ist. Für ausgeführte Kesselkonstruktionen wurden typische Werte von  $c_B/c_F \approx 0,06$  gefunden. Die Resultate mit den Randbedingungen aus [20] und mit den tatsächlichen Bodensteifigkeiten unterscheiden sich nur geringfügig, weswegen die Untersuchungen aus dem vorliegenden Bericht mit Randbedingungen nach [20] durchgeführt worden sind.

Feste Einspannungen als kinematische Randbedingungen für die beiden Rohrenden kommen dagegen bei Flammrohren nicht in Betracht [12].

Aus Symmetriegründen wurde bei den Finite-Elemente-Analysen jeweils ein Viertel der unrunder Zylinderschale betrachtet. Dies wird in Abbildung 4 veranschaulicht. Das verwendete Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Schwerpunkt des Rohrs. Die  $z$ -Achse zeigt in dessen Längsrichtung. Die Orientierung der  $y$ -Achse wird durch die größere Hauptachse bestimmt, die der  $x$ -Achse dementsprechend durch die kleinere Hauptachse.

Für die Knoten mit  $z = 0$  war eine Symmetrierandbedingung anzusetzen, ebenfalls für die Knoten mit  $y = \pm \hat{d}_m/2$ . Die Knoten am Rohrende mit  $z = l/2$  wurden mit der Randbedingung nach [20] beaufschlagt. Es wurden somit die Symmetrien bezüglich der  $xy$ - und der  $yz$ -Ebene ausgenutzt. Die vermeintlich naheliegende, weitere Ausnutzung der Symmetrie zur  $xz$ -Ebene war auszuschließen, weil für bestimmte Parameterkombinationen Beuleigenformen auftreten, die nicht symmetrisch zur  $xz$ -Ebene sind, siehe hierzu auch Abschnitt 4.3 des vorliegenden Berichts.

Bei der Berechnung von unendlich langen Rohren wurde jeweils nur ein kurzes Rohrstück der Länge 200 mm betrachtet. Die Lagerungsrandbedingung nach v. Mises entfiel. Zusätzlich wurden für das gesamte Netz die Verdrehfreiheitsgrade um die  $x$ - und  $y$ -Achse gesperrt.



### 4.3 Elastisches Beulen

Für jede der 810 Kombinationen wurde zunächst eine lineare Beulanalyse zur Ermittlung des jeweiligen elastischen Beuldrucks durchgeführt. Dabei war es essentiell, den sog. Force-Follower-Effekt zu berücksichtigen, um korrekte Ergebnisse zu erhalten [23].

Die Drücke  $p_b$ , die mit Gleichung (3) mit unterschiedlichen Werten für den Radius sowie mit Gleichung (4) berechnet wurden, wurden mit den Drücken  $p_{b,FE}$  aus den Finite-Elemente-Analysen ins Verhältnis gesetzt. Für den Radius in Gleichung (3) wurde jeweils die Hälfte der arithmetischen Mittelwerte  $\bar{d}_m$ ,  $\bar{d}_i$  und  $\bar{d}_a$  der Hauptachsenabmessungen an der Mittellinie, Innenseite bzw. Außenseite des Querschnitts eingesetzt. Die Extremwerte dieser Quotienten sind in Tabelle 1 gezeigt.

Tabelle 1: Extrema der Verhältnisse der mit den Gleichungen (3) bei unterschiedlichen Radiusdefinitionen und Gleichung (4) berechneten Beuldrücke  $p_b$  zu den Beuldrücken  $p_{b,FE}$  aus den Finite-Elemente-Analysen.

	(3), $\bar{d}_m/2$	(3), $\bar{d}_i/2$	(3), $\bar{d}_a/2$	(4) <sup>6</sup>
Minimum	0,9760	0,9666	0,9019	0,8152
Maximum	1,0060	1,1264	1,0003	1,1338

Es wird deutlich, dass die Auswertung von Gleichung (3) mit  $\bar{d}_m/2$  die beste Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Analysen liefert. Der entsprechende Quotient ist in Tabelle 2 für die verschiedenen Werte der Unrundheit  $u$  aufgeführt.

Tabelle 2: Extrema der Verhältnisse der mit Gleichung (3) und  $\bar{d}_m/2$  berechneten Beuldrücke  $p_{b,vM}$  zu den Beuldrücken  $p_{b,FE}$  aus den Finite-Elemente-Analysen bei den Werten von  $u$ .

$u$	$p_{b,vM}/p_{b,FE}$	
	Minimum	Maximum
0,005	0,9760	1,0060
0,0075	0,9761	1,0060
0,01	0,9762	1,0060
0,0125	0,9763	1,0059
0,015	0,9765	1,0059
0,0175	0,9768	1,0059
0,02	0,9771	1,0059
0,0225	0,9774	1,0058
0,025	0,9777	1,0058

Es ist festzustellen, dass im betrachteten Parameterbereich die Unrundheit  $u$  einen nur vernachlässigbaren Einfluss auf den elastischen Beuldruck hat. Das Vorgehen in den Normen [6, 31], für unrunde Rohre die für perfekt runde Rohre abgeleitete Gleichung (3) zu verwenden, ist somit bestätigt.

Im untersuchten Parameterraum wurden Beuleigenformen entweder mit zwei oder drei Beulwellen festgestellt. Kürzere Rohre haben drei Beulwellen, siehe hierzu Abbildung 5. Aus dieser Abbildung wird ersichtlich, weswegen die Symmetrie zur  $xz$ -Ebene nicht ausgenutzt werden konnte. Beuleigenformen mit drei Beulwellen sind nicht zur  $xz$ -Ebene symmetrisch. Längere Rohre weisen zwei Beulwellen auf, siehe hierzu Abbildung 6.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Gleichung (4) wurde nicht für  $d_m/l = 0$  ausgewertet.

<sup>7</sup>Die Abbildungen 5, 6 wurden aus Anschaulichkeitsgründen ohne Ausnutzung der Symmetrien erzeugt.

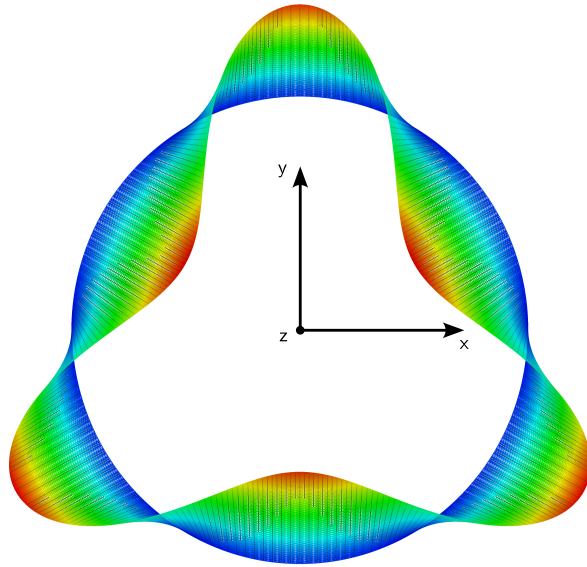


Abbildung 5: Rohr mit 3 Beulwellen,  $s/\bar{d}_m = 0,01$ ,  $\bar{d}_m/l = \frac{2}{5}$ ,  $p_b = 2,0245$  MPa.

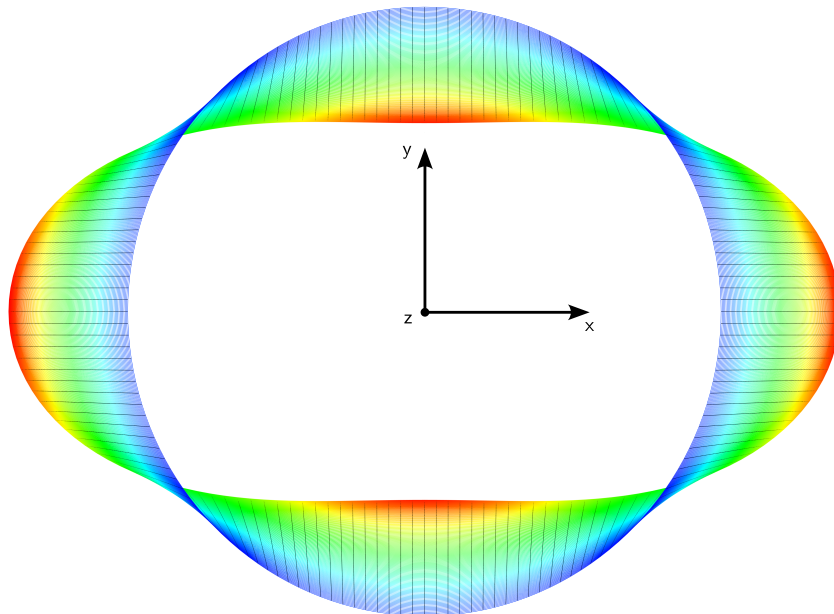


Abbildung 6: Rohr mit 2 Beulwellen,  $s/\bar{d}_m = 0,037$ ,  $\bar{d}_m/l = \frac{1}{6}$ ,  $p_b = 22,9624$  MPa.

#### 4.4 Plastische Verformung

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für plastische Verformung nicht in der Form  $p = f(\sigma, \bar{d}_m, l, u)$  sondern in der Form  $\sigma = f(p, \bar{d}_m, l, u)$  betrachtet.

Weiterhin werden nachstehend aufgelistete dimensionslose Größen eingeführt

$$\sigma^* = \frac{\sigma \cdot 2 \cdot s}{p \cdot \bar{d}_m}, \quad (14)$$

$$s^* = \frac{s}{\bar{d}_m}, \quad (15)$$

$$d^* = \frac{\bar{d}_m}{l}, \text{ bzw. } l^* = \frac{1}{d^*} = \frac{l}{\bar{d}_m}, \quad (16)$$

$$p^* = \frac{p}{p_b}. \quad (17)$$

Diese Entdimensionalisierung hat bezüglich der Anwendbarkeit der Ergebnisse der geometrisch nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen auf Werkstoffe mit gegenüber Abschnitt 4.1 geändertem Elastizitätsmodul entscheidende Bedeutung.

- Die beschreibenden Differentialgleichungen für das Verschiebungsfeld einer Schale unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität sind bezüglich des Verhältnisses des Drucks  $p$  zum Elastizitätsmodul  $E$  ähnlich.<sup>8</sup>
- Der dimensionslose Druck  $p^*$  entspricht bis auf einen in diesem Zusammenhang als konstant anzusehenden Faktor dem Verhältnis  $p/E$ .
- Das bedeutet, dass sich für identische dimensionslose Drücke  $p^*$  und identische geometrische Parameter der betrachteten Schalen identische Verschiebungsfelder und damit identische Verzerrungen ergeben.
- Da bei den geometrisch nichtlinearen Analysen das Hookesche Gesetz seine Gültigkeit behält, sind die dimensionsbehafteten Spannungen  $\sigma$  proportional zum Elastizitätsmodul  $E$ .
- Die Proportionalität zum Elastizitätsmodul  $E$  gilt auch für den dimensionsbehafteten Druck ( $p \sim p_b$ ), weswegen die dimensionslose Spannung  $\sigma^*$  unabhängig vom Elastizitätsmodul  $E$  sein muss.
- Das hat zur Folge, dass bei Anwendung der Entdimensionalisierung gemäß Gleichungen (14) bis (17) die Ergebnisse der geometrisch nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen auch für Werkstoffe anderen Elastizitätsmoduls ihre Gültigkeit behalten.<sup>9</sup>

Das geschilderte Verhalten ist in den Abbildungen 7 und 8 exemplarisch für die Beträge  $\varepsilon_y$  der Umfangsdehnung und  $\sigma$  der Umfangsspannung jeweils an der Position T03 für  $s^* = 0,037$ ,  $d^* = 1/6$  und  $u = 0,025$  für die Elastizitätsmoduln 210000 MPa und 70000 MPa gezeigt.

Unter Verwendung der dimensionslosen Größen liefert Gleichung (11)

$$\sigma_{16}^* = \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{u}{s^* \cdot (1-p^*) \cdot (1+5 \cdot d^*)}}{1 + 0,1 \cdot d^*}, \quad (18)$$

Gleichung (12)

$$\sigma_{12953}^* = \frac{1 + 3 \cdot \frac{u}{s^* \cdot (1+5 \cdot d^*)}}{1 + 0,1 \cdot d^*}, \quad (19)$$

und Gleichung (13)

$$\sigma_{AD}^* = 1 + \frac{1,5 \cdot u \cdot (1 - 0,2 \cdot d^*)}{s^*}. \quad (20)$$

In Gleichung (20) wurde vor der Umstellung von Gleichung (13) der Mittelwert  $\bar{d}_m$  anstelle von  $\bar{d}_a$  verwendet.<sup>10</sup>

<sup>8</sup>Siehe hierzu z. B. die Gleichungen (8.66), (8.67) und (8.68) auf Seite 775 von [21].

<sup>9</sup>Bezüglich der Querkontraktionszahl  $\nu$  gibt es streng genommen keine Ähnlichkeit. Für die in der Branche üblichen Werkstoffe kann der entsprechende Einfluss vernachlässigt werden.

<sup>10</sup>Die Bezeichnungen der dimensionslosen Spannungen in den Gleichungen (18), (19) und (20) orientieren sich an der Gleichungsnummer in [22] bzw. an der enthaltenden Norm.

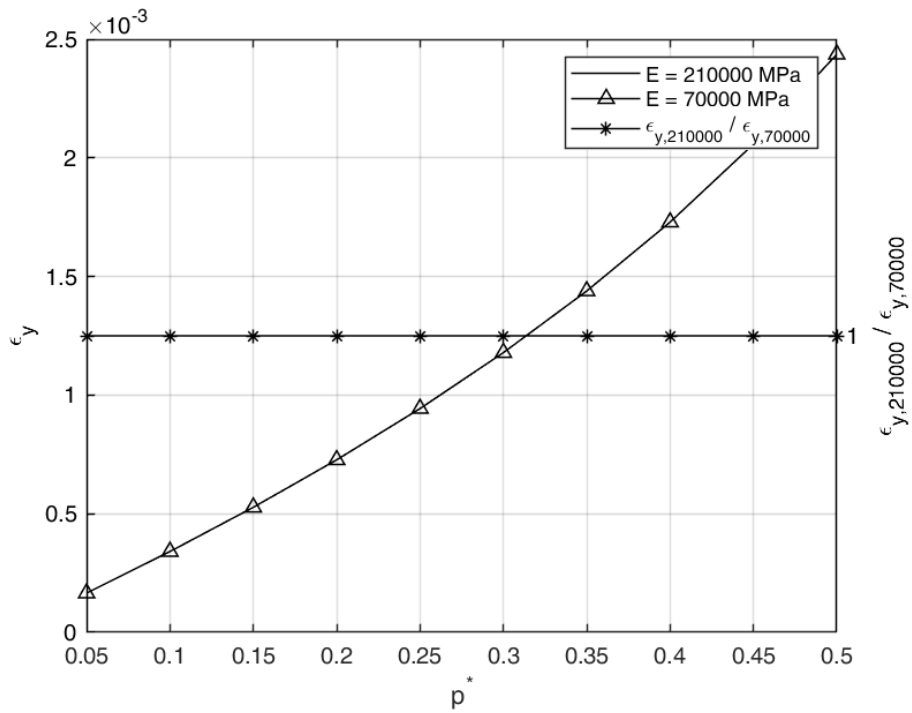


Abbildung 7: Betrag  $\epsilon_y(p^*)$  der Umfangsdehnung an der Position T03 mit  $s^* = 0,037$ ,  $d^* = 1/6$  und  $u = 0,025$  für die Elastizitätsmoduln 210000 MPa und 70000 MPa, sowie das Verhältnis der beiden Dehnungen; es ist konstant 1.

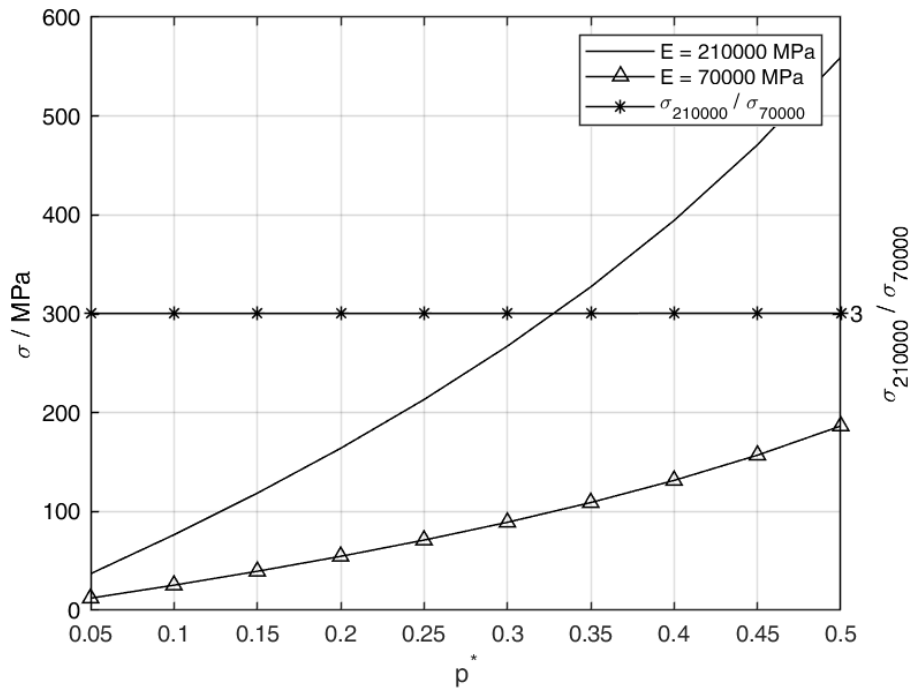


Abbildung 8: Betrag  $\sigma(p^*)$  der Umfangsspannung an der Position T03 mit  $s^* = 0,037$ ,  $d^* = 1/6$  und  $u = 0,025$  für die Elastizitätsmoduln 210000 MPa und 70000 MPa, sowie das Verhältnis der beiden Spannungen; es entspricht exakt dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln.

Für jede der 810 Parameterkombinationen wurde eine geometrisch nichtlineare Finite-Elemente-Analyse durchgeführt, wobei der Druck bis zum Wert  $0,5 \cdot p_b$  in Schritten von  $0,05 \cdot p_b$  gesteigert wurde.  $p_b$  wurde dabei mit Gleichung (3) unter Verwendung der Abmessung  $\bar{d}_m/2$  ermittelt. Mit dem dimensionslosen Druck  $p^* = p/p_b$  galt somit  $0,05 \leq p^* \leq 0,5$ . Insgesamt standen  $10 \cdot 810 = 8100$  Datenpunkte für die Analyse der Gleichungen (18), (19) und (20) zur Verfügung.

Im Folgenden wird zunächst auf die Ergebnisse für unendlich lange Rohre eingegangen. Danach werden endlich lange Rohre im Bereich  $\frac{1}{6} \leq d^* \leq \frac{2}{5}$  betrachtet, der die typischen Abmessungen von Flammrohren abdeckt.

#### 4.4.1 Unendliche lange Rohre

Für unendlich lange Rohre ist in den Gleichungen (18), (19) und (20)  $d^* = 0$  zu setzen.

Für die Untersuchung der Verhältnisse bei unendlich langen Rohren standen  $9 \cdot 10 = 90$  Parameterkombinationen von  $s^*$  und  $u$  zur Verfügung. Mit zehn Abstufungen des dimensionslosen Drucks  $p^*$  ergaben sich 900 Datenpunkte. Die betragsmäßig größte Umfangsspannung trat immer an der Position B12 auf. Die Umfangsspannung an der Position T03 war zwischen 0,4% und 2,5% kleiner.

Zur Beurteilung der Gleichungen aus den Regelwerken [1, 6, 31] bzw. aus der Literatur [22] werden die Verhältnisse der damit berechneten Spannungen zur Spannung  $\sigma_{FE,\infty}$  aus den Finite-Elemente-Analysen betrachtet. Da die dimensionslosen Spannungen  $\sigma^*$  durch Division der dimensionsbehafteten Spannungen  $\sigma$  mit der stets identischen Größe  $p \cdot \bar{d}_m / (2 \cdot s)$  entstanden sind, gilt, dass das Verhältnis der dimensionslosen Spannungen gleich dem Verhältnis der dimensionsbehafteten Spannungen ist.

Die Extrema der Spannungsverhältnisse  $\sigma_{16,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$ ,  $\sigma_{12953,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$  und  $\sigma_{AD,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$  sind in Tabelle 3 gezeigt.  $\sigma_{FE,\infty}$  wurde dabei an der Position B12 ermittelt.

Tabelle 3: Unendlich lange Rohre: Extrema der Spannungsverhältnisse  $\sigma_{16,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$ ,  $\sigma_{12953,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$  und  $\sigma_{AD,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$ .

	$\sigma_{16,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$	$\sigma_{12953,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$	$\sigma_{AD,\infty}/\sigma_{FE,\infty}$
Minimum	0,9861	0,9861	0,5556
Maximum	0,9993	1,7082	0,9892

Offensichtlich stimmen die mit Gleichung (18) berechneten Spannungen sehr gut mit den Resultaten der geometrisch nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen überein.

#### 4.4.2 Endliche lange Rohre

Bei unendlich langen Rohren war die betragsmäßig größte Umfangsspannung immer an der Position B12 anzutreffen. Dies stellt sich bei endlich langen Rohren anders dar. Zum einen gab es bisweilen Spannungsmaxima an den Lagerstellen  $z = l/2$ , zum anderen traten diese sowohl an der Position B12 als auch an der Position T03 auf. Effekte an den Lagerstellen  $z = l/2$  wurden nicht weiter berücksichtigt. Es wurden ausschließlich Spannungen an der Stelle  $z = 0$  betrachtet. Das Verhältnis der Spannungen an der Position T03 und B12 lag zwischen den Grenzen 0,9720 und 1,0845. Es erschien deswegen sinnvoll, sich ausschließlich auf die Position T03 zu konzentrieren.

Die Extremwerte der Spannungsverhältnisse  $\sigma_{16}/\sigma_{FE}$ ,  $\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$  und  $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$  sind in Tabelle 4 gezeigt.

Tabelle 4: Endlich lange Rohre: Extremwerte der Spannungsverhältnisse  $\sigma_{16}/\sigma_{FE}$ ,  $\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$ ,  $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$  und  $\sigma_{vGI}/\sigma_{FE}$ .

	$\sigma_{16}/\sigma_{FE}$	$\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$	$\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$	$\sigma_{vGI}/\sigma_{FE}$ <sup>11</sup>
Minimum	0,6241	0,6241	0,5896	0,9323
Maximum	2,6709	2,7445	3,6290	1,1536

<sup>11</sup>Die Extrema des Spannungsverhältnisses  $\sigma_{vGI}/\sigma_{FE}$  wurden mit der verbesserten Gleichung aus Abschnitt 5 berechnet.

Man erkennt, dass Gleichung (18) die geringsten Abweichungen, gefolgt von den Gleichungen (19) und (20), aufweist.

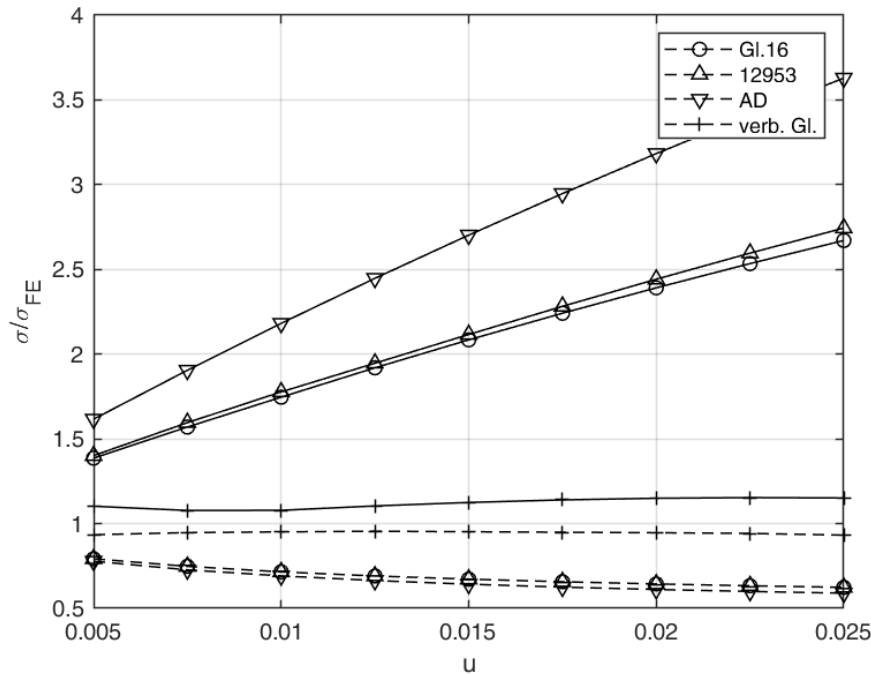
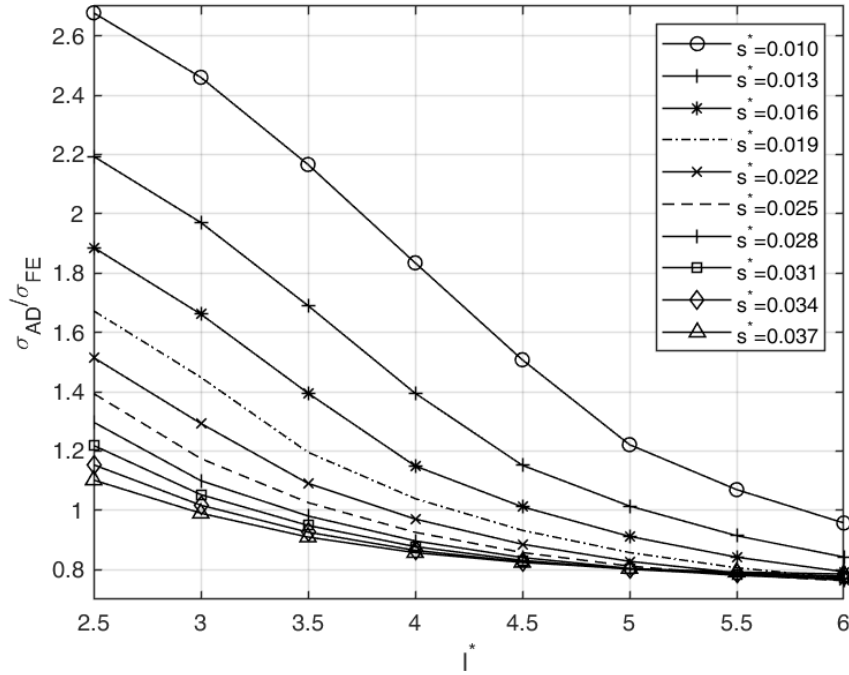


Abbildung 9: Extremwerte der Spannungsverhältnisse  $\sigma_{16}/\sigma_{FE}$ ,  $\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$ ,  $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$  und  $\sigma_{vGl}/\sigma_{FE}$  als Funktion der Unrundheit  $u$ ; die durchgezogenen Linien zeigen die Maxima, die gestrichelten Linien die Minima. Die Extrema des Spannungsverhältnisses  $\sigma_{vGl}/\sigma_{FE}$  wurden mit der verbesserten Gleichung aus Abschnitt 5 berechnet.

Die Abhängigkeit der Extremwerte von der Unrundheit  $u$  ist in Abbildung 9 gezeigt. Offensichtlich unterscheiden sich die Spannungen, die mit den Gleichungen aus den Regelwerken bzw. der Literatur berechnet werden, umso stärker von den mit den Finite-Elemente-Analyse ermittelten Spannungen, desto größer die Unrundheit  $u$  ist. Die Kurven für die Minima von  $\sigma_{16}/\sigma_{FE}$  und  $\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$  fallen zusammen, weil die Minima bei einem dimensionslosen Druck  $p^* = 0,5$  auftraten. Für  $p^* = 0,5$  liefern die Gleichungen (18) und (19) identische Ergebnisse.

Die Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses von  $l^* = 1/d^*$  und  $s^*$  ist exemplarisch für  $p^* = 0,35$  und  $u = 0,015$  in Abbildung 10 für  $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$  gezeigt.  $\sigma_{16}/\sigma_{FE}$  und  $\sigma_{12953}/\sigma_{FE}$  haben qualitativ ähnliche Verläufe.

Grundsätzlich gilt, dass mit steigender Wanddicke und steigender Länge die Abweichungen kleiner werden. Es ist aber festzustellen, dass die Gleichungen aus [1, 6, 22, 31] Ergebnisse liefern, die von den Ergebnissen der geometrisch nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen erheblich abweichen. Die Abweichungen liegen im Bereich von  $-41\%$  bis  $+263\%$ . Es ist daher wünschenswert, eine verbesserte Gleichung für plastische Verformung zu finden.


 Abbildung 10: Spannungsverhältnis  $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$  als Funktion von  $l^*$  und  $s^*$  mit  $u = 0,015$  und  $p^* = 0,35$ .

## 5 Verbesserte Gleichung für plastische Verformung

Durch Umformen erkennt man leicht, dass die rechten Seiten der Gleichungen (18), (19) und (20) gebrochen rationale Funktionen in  $u$ ,  $p^*$ ,  $d^*$  und  $s^*$  sind. Es lag daher einerseits nahe, nach einer gebrochen rationalen Funktion zu suchen. Andererseits ließ sich bei sämtlichen untersuchten Konfigurationen der Zusammenhang  $\sigma^*(p^*)$  bei sonst konstant gehaltenen Parametern nahezu perfekt durch eine quadratische Funktion beschreiben.<sup>12</sup> Der Verlauf ist exemplarisch für  $u = 0,025$ ,  $s^* = 0,037$  und  $d^* = \frac{1}{6}$  in Abbildung 11 gezeigt. Es lag daher auch nahe, diese quadratische Abhängigkeit in der gesuchten Funktion abzubilden.

Zu Beginn der Gleichungssuche wurden die relevanten Größen  $p^*$ ,  $d^*$ ,  $s^*$ ,  $u$  und  $\sigma^*$  normiert. Die Normierung wurde so durchgeführt, dass für das Minimum einer Größe die normierte Größe den Wert 0 erhielt und für das Maximum den Wert 1. Die Extrema von  $p^*$ ,  $d^*$ ,  $s^*$  und  $u$  sind Abschnitt 4 aufgeführt. Diejenigen von  $\sigma^*$  ergaben sich aus den Ergebnissen der Finite-Elemente-Analysen.

$$\sigma_{min}^* = 1,0454, \quad (21)$$

$$\sigma_{max}^* = 6,0705. \quad (22)$$

Die normierten Größen werden im Folgenden als  $\sigma'$ ,  $p'$ ,  $l'$ ,  $s'$  und  $u'$  bezeichnet.

$$u' = 50 \cdot u - 0,25, \quad (23)$$

$$p' = \frac{20}{9} \cdot p^* - \frac{1}{9}, \quad (24)$$

$$d' = \frac{30}{7} \cdot d^* - \frac{5}{7}, \quad (25)$$

$$s' = \frac{1000}{27} \cdot s^* - \frac{10}{27}, \quad (26)$$

$$\sigma' = 0,1990 \cdot \sigma^* - 0,2080. \quad (27)$$

<sup>12</sup>Für jede der 810 Parameterkonfigurationen wurden die Koeffizienten einer quadratischen Funktion mit einem linearen Ausgleichsverfahren ermittelt. Das kleinste dabei aufgetretene Bestimmtheitsmaß betrug  $R^2 = 0,9944$ .

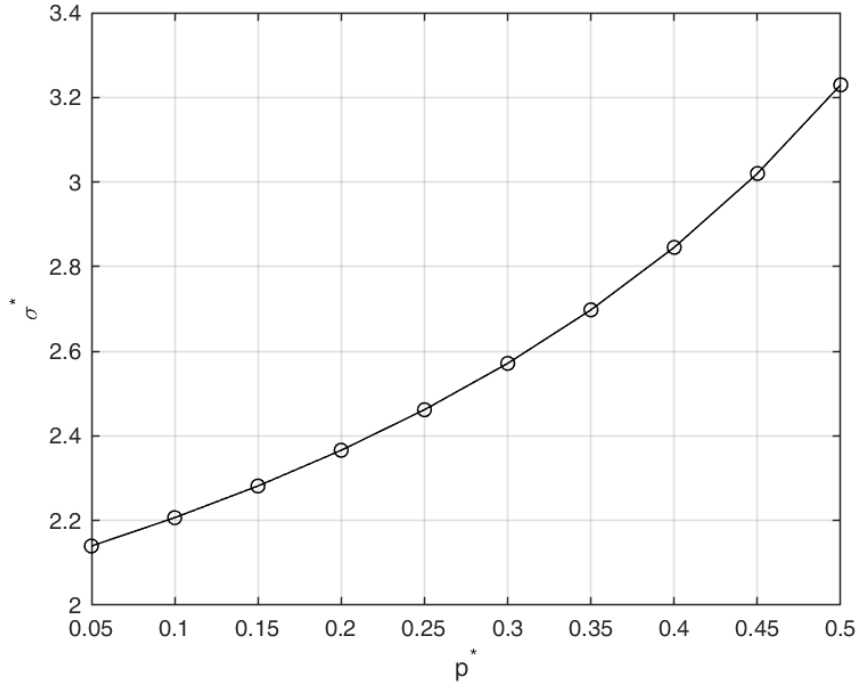


Abbildung 11:  $\sigma^*(p^*)$  für  $u = 0,015$ ,  $s^* = 0,037$  und  $d^* = \frac{1}{6}$

Formal hat die gefundene Näherungsgleichung den nachstehenden Aufbau.

$$\sigma' = \frac{Z}{N}. \quad (28)$$

Zufriedenstellende Ergebnisse wurden mit einem Zähler  $Z$  gefunden, bei dem ein konstanter Term, sämtliche lineare, bilineare und quadratische Terme von  $u'$ ,  $p'$ ,  $d'$  und  $s'$  enthalten sind, sowie mit einem Nenner  $N$ , bei dem neben der Konstanten 1 sämtliche lineare, bilineare und quadratische Terme von  $u'$ ,  $d'$  und  $s'$  enthalten sind. Im Nenner taucht  $p'$  nicht auf, um die erwähnte quadratische Abhängigkeit aufrecht erhalten zu können. Zähler und Nenner lauten somit

$$\begin{aligned} Z = & a_{0000} + a_{1000} \cdot p' + a_{0100} \cdot d' + a_{0010} \cdot s' + a_{0001} \cdot u' + \\ & + a_{2000} \cdot p'^2 + a_{1100} \cdot p' \cdot d' + a_{1010} \cdot p' \cdot s' + a_{1001} \cdot p' \cdot u' + \\ & + a_{0200} \cdot d'^2 + a_{0110} \cdot d' \cdot s' + a_{0101} \cdot d' \cdot u' + \\ & + a_{0020} \cdot s'^2 + a_{0011} \cdot s' \cdot u' + a_{0002} \cdot u'^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} N = & 1 + b_{0100} \cdot d' + b_{0010} \cdot s' + b_{0001} \cdot u' + \\ & + b_{0200} \cdot d'^2 + b_{0110} \cdot d' \cdot s' + b_{0101} \cdot d' \cdot u' + \\ & + b_{0020} \cdot s'^2 + b_{0011} \cdot s' \cdot u' + b_{0002} \cdot u'^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Koeffizienten sind in den Tabellen 5 und 6 aufgeführt. Sie wurden mit der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme ermittelt.

Tabelle 5: Koeffizienten des Zählers  $Z$ .

$a_{0000}$	$a_{1000}$	$a_{0100}$	$a_{0010}$	$a_{0001}$	$a_{2000}$	$a_{1100}$	$a_{1010}$	$a_{1001}$
0,1162	-0,0870	-0,0804	0,0831	0,3422	0,1689	-0,2411	0,2899	0,2604
$a_{0200}$	$a_{0110}$	$a_{0101}$	$a_{0020}$	$a_{0011}$	$a_{0002}$			
0,0494	-0,0084	-0,1800	-0,0977	0,4053	-0,1343			



Tabelle 6: Koeffizienten des Nenners  $N$ .

$b_{0100}$	$b_{0010}$	$b_{0001}$	$b_{0200}$	$b_{0110}$	$b_{0101}$	$b_{0020}$	$b_{0011}$	$b_{0002}$
1,3635	1,8301	-0,5207	3,4526	-2,3020	-0,3188	1,5819	-0,6765	0,1926

Gleichung (28) sollte nur innerhalb des mit  $0 \leq p' \leq 1$ ,  $0 \leq d' \leq 1$ ,  $0 \leq s' \leq 1$  und  $0 \leq u' \leq 1$  bzw.  $0,05 \leq p^* \leq 0,5$ ,  $\frac{1}{6} \leq d^* \leq \frac{2}{5}$ ,  $0,01 \leq s^* \leq 0,037$  und  $0,005 \leq u \leq 0,025$  definierten Bereichs angewendet werden. Eine Extrapolation ist nicht zu empfehlen.

Die Abweichungen der mit gefundenen Näherungsgleichung berechneten Spannungen  $\sigma_{vGI}$  von den Spannungen  $\sigma_{FE}$  aus Finite-Elemente-Analysen sind deutlich geringer als bei den Regelwerksgleichungen [1, 6, 31]. So liegt das Verhältnis  $\sigma_{vGI}/\sigma_{FE}$  im betrachteten Parameterbereich zwischen 0,9323 und 1,1536, vgl. hierzu Tabelle 4. Die Abweichungen von Gleichung (28) liegen somit im Bereich von  $-6,8\%$  und  $+15,4\%$ .

Die Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses von  $s^*$  und  $l^* = 1/d^*$  ist für  $p^* = 0,35$  und  $u = 0,015$  exemplarisch in Abbildung 12 gezeigt. Auch hier zeigt sich deutlich die Verbesserung der Spannungsermittlung bei Anwendung von Gleichung (28).

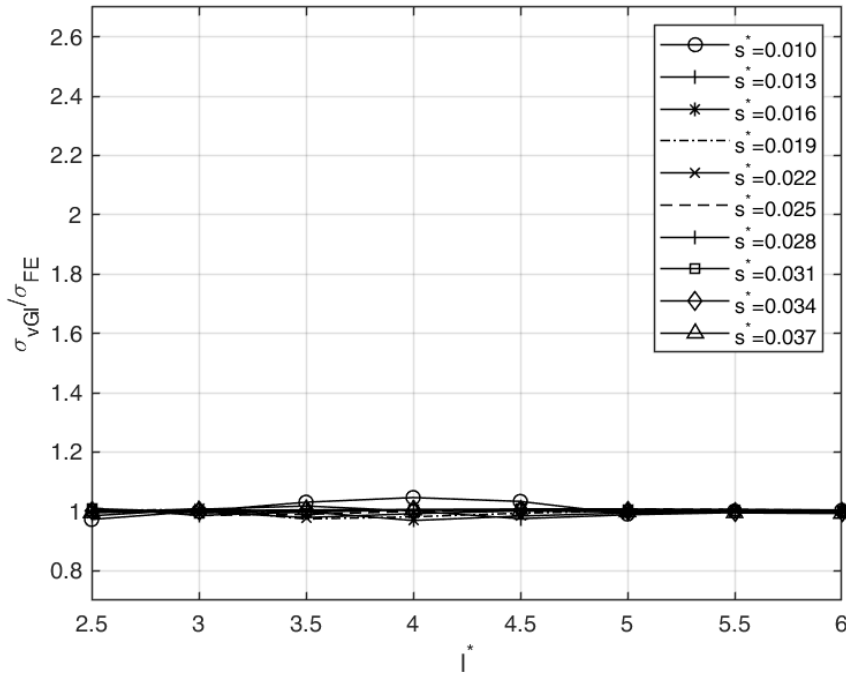


Abbildung 12: Spannungsverhältnis  $\sigma_{vGI}/\sigma_{FE}$  als Funktion von  $l^*$  und  $s^*$  mit  $u = 0,015$  und  $p^* = 0,35$ ; die Skalierung der Ordinate wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit identisch mit Abbildung 10 gewählt.

Die Vorgehensweise bei der Auslegung von Flammrohren oder Zylinderschalen mit vergleichbaren kinematischen Randbedingungen ist naheliegend.

1. Festlegung des maximal zulässigen Betriebsüberdrucks  $p$ .
2. Vorgabe der Werte von  $\bar{d}_m$ ,  $s$ ,  $l$  und  $u$ .
3. Berechnung des elastischen Beuldrucks  $p_b$  mit Gleichung (3). Der zulässige Druck gegen elastisches Beulen ergibt sich mit dem in den Regelwerken [1, 6, 31] zu findenden Sicherheitsbeiwert  $S = 3$  zu  $p_b/3$ . Falls  $p > p_b/3$  ist, ist die Wanddicke  $s$  zu erhöhen und  $p_b$  erneut zu berechnen.

4. Berechnung von  $d^*$ ,  $s^*$ ,  $p^*$ ,  $d'$ ,  $s'$ ,  $u'$  und  $p'$  unter Verwendung der Gleichungen (16), (15), (17), (25), (26), (23) und (24).
5. Berechnung von  $\sigma'$  mit Gleichung (28).
6. Berechnung von  $\sigma^*$  gemäß

$$\sigma^* = \frac{\sigma' + 0,2080}{0,1990}, \quad (31)$$

7. Berechnung von  $\sigma$  gemäß

$$\sigma = \frac{\sigma^* \cdot p \cdot \bar{d}_m}{2 \cdot s}. \quad (32)$$

Sollte die Spannung  $\sigma$  größer als eine gemäß Regelwerk festzulegende, zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  sein, ist die Wanddicke  $s$  zu erhöhen und ab Schritt 3 dieser Aufzählung erneut zu beginnen.

## 6 Zusammenfassung

Im Wesentlichen hat der vorliegende Bericht nachstehende Aussagen.

- Die in den TRD 306 [31] und im AD 2000-Merkblatt B6 [1] aufgeführte Gleichung (3) nach v. Mises für elastisches Beulen liefert Ergebnisse, die sehr gut mit den Resultaten der Finite-Elemente-Beulanalysen übereinstimmen. Voraussetzung hierfür ist, dass der mittlere Radius  $r_m$  verwendet wird. Die Abhängigkeit von der Unrundheit  $u$  ist im untersuchten Bereich  $0,005 \leq u \leq 0,025$  vernachlässigbar.
- Gleichung (8) aus der Veröffentlichung [22] von S. Schwaigerer und A. Konejung für plastische Verformung unendlich langer Rohre liefert Ergebnisse, die sehr gut mit den Resultaten geometrisch nichtlinearer Finite-Elemente-Analysen übereinstimmen.
- Die Gleichungen (9) aus der Veröffentlichung [22], (12) aus der europäischen Norm DIN EN 12953-3 [6] bzw. aus den TRD 306 [31] sowie (13) aus dem AD 2000-Merkblatt B6 [1] bringen für endlich lange Rohre weniger zufriedenstellende Ergebnisse. Dies gilt insbesondere für geringere Wanddicken, größere Unrundheiten und kleinere Längen. Die Abweichungen liegen im Bereich von  $-41\%$  bis  $+263\%$ .
- Die verbesserte Gleichung (28) liefert demgegenüber erheblich bessere Resultate. Sie hat Abweichungen im Bereich von  $-6,8\%$  und  $+15,4\%$ . Sie ist unabhängig vom Elastizitätsmodul des Werkstoffs anwendbar.

## 7 Danksagung

Der Autor des vorliegenden Berichts bedankt sich herzlich bei den Bachelorandinnen Lisa Herrmann und Nurul Amirah Aspawi sowie den Bacheloranden Nam Tran Quang, Alexander Haußner, Jonas Reinholz, Robin Hofmann und Thomas Grötzner, ohne deren tatkräftige Vorarbeit der vorliegende Bericht nicht entstanden wäre.

Thomas Grötzner und Robin Hofmann sei insbesondere gedankt für ihre Einführung in die Automatisierung von NX Nastran, ohne die die Untersuchungen ein Vielfaches länger gedauert hätten.

Herzlich gedankt sei Prof. Dr.-Ing. habil. Chakkrit Na Ranong<sup>13</sup> für sein Interesse an der Thematik, die Übernahme von Zweitprüfungen von Bachelorarbeiten und den entscheidenden Hinweis in Sachen Unabhängigkeit vom Elastizitätsmodul.

Prof. Dr. Tim Kröger<sup>14</sup> sei gedankt für die Übernahme einer Zweitprüfung.

Herzlicher Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Thomas Sandner<sup>15</sup> für seine kollegiale Bereitschaft zu vielen und langen Fachgesprächen, Betreuungen von Abschlussarbeiten und umfangreichen Berechnungen mit der Software Ansys.

<sup>13</sup>Fakultät Verfahrenstechnik der TH Nürnberg.

<sup>14</sup>Fakultät Angewandte Mathematik, Physik und Allgemeinwissenschaften der TH Nürnberg.

<sup>15</sup>Fakultät Maschinenbau und Versorgungstechnik der TH Nürnberg.

## Literatur

- [1] N. N., *AD 2000-Merkblatt B6 Berechnung von Druckbehältern, Zylinderschalen unter äußerem Überdruck*, Ausgabe Oktober 2006
- [2] N. A. ASPAWI, *Review of a Design Formula for Thin Walled, Non-Circular Cylinders Subject to External Pressure Using the Finite Element Method*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik: Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2020
- [3] C. BACH, *Die auf der kaiserlichen Werft in Danzig von 1887 bis 1892 ausgeführten Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Flammrohren*. In: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 38 (1894), Nr. 23, S. 689 - 686
- [4] L. CORRADI, *A numerical assessment of the load bearing capacity of externally pressurized moderately thick tubes*, In: International Journal of Pressure Vessels and Piping, Volume 86, Issue 8, 2009, Pages 525-532
- [5] J. DANKERT, H. DANKERT, *Technische Mechanik Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. 7. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013
- [6] N. N., *DIN EN 12953-3, Großwasserraumkessel - Teil 3, Konstruktion und Berechnung für drucktragende Teile*. (12/2016), Berlin: Beuth-Verlag
- [7] V.-D. DO, P. LE GROGENEC, P. ROHART, *Plastic Buckling. Closed-form solutions for the elastic-plastic buckling design of shell structures under external pressure*, In: European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 98 (2023)
- [8] J.Y. DYAU, S. KYRIAKIDES, *On the localization of collapse in cylindrical shells under external pressure*, In: International Journal of Solids and Structures, Volume 30, Issue 4, 1993, Pages 463-482
- [9] S. M. FATEMI, H. SHOWKATI, M. MAALI, *Experiments on imperfect cylindrical shells under uniform external pressure*, In: Thin-Walled Structures, Volume 65, 2013, Pages 14-25
- [10] TH. GRÖTZNER, *Einfluss der Randbedingungen auf die Beuldrücke unrunder Glattrohre unter äußerem Überdruck*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2022
- [11] W. GUGGENBERGER, *Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells under external pressure*, In: Thin-Walled Structures, Volume 23, Issues 1-4, 1995, Pages 351-366
- [12] A. HAUSSNER, *Einfluss der Randbedingungen auf die Beuldrücke unrunder Wellrohre unter äußerem Überdruck*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2021
- [13] L. HERRMANN, *FEM-basierte Untersuchung des Festigkeitsverhaltens von Flammrohren in Großwasserraumkesseln im Hinblick auf größere Abmessungen*. Bachelorarbeit an der Fakultät Maschinenbau und Versorgungstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2019
- [14] R. HOFMANN, *Ähnlichkeit im Verformungs-, Beul- und Nachbeulverhalten dünnwandiger, unrunder Glattrohre unter äußerem Überdruck*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2022
- [15] J. W. HUTCHINSON, *Plastic Buckling*. In: Advances in Applied Mechanics, Vol. 14 (1974), S. 67-114
- [16] JIANGHONG X., *Local buckling in infinitely, long cylindrical shells subjected uniform external pressure*. In: Thin-Walled Structures, Volume 53 (2012), Pages 211-216
- [17] S. B. KANTOROWITSCH, *Die Festigkeit der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie*. Berlin. VEB Verlag Technik, 1955
- [18] LEI C. ET AL., *Buckling of cylindrical shells with stepwise variable wall thickness under uniform external pressure*. In: Engineering Structures, Volume 33, Issue 12, 2011, Pages 3570-3578,
- [19] J. REINHOLZ, *Eine verbesserte Berechnungsgleichung für die plastische Verformung dünnwandiger, unrunder Glattrohre unter äußerem Überdruck*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2022

## Literatur

- [20] R. v. MISES, *Der kritische Außendruck zylindrischer Rohre*. In: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 58 (1914), Nr. 19, S. 750 - 755
- [21] C. PETERSEN, *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*. 2. Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1982
- [22] S. SCHWAIGERER, A. KONEJUNG, *Die Festigkeitsberechnung von Flammrohren*. In: Konstruktion, 2 (1950), Nr. 1, S. 17-23
- [23] K. SCHWEIZERHOF, E. RAMM, *Follower Force Effects on Stability of Shells under Hydrostatic Pressure*. In: Journal of Engineering Mechanics, 113(1) (1987), S. 72-88
- [24] N. N., *STAHL-EISEN-Werkstoffblätter des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute, SEW 310, Physikalische Eigenschaften von Stählen*. Düsseldorf: Verlag Stahl Eisen, 1992
- [25] SHUNFENG GONG, GEN LI, *Buckle propagation of pipe-in-pipe systems under external pressure*. In: Engineering Structures, Volume 84, 2015, Pages 207-222
- [26] E. SIEBEL, H. HAUSER, *Festigkeitsversuche an Behältern mit eingeschweißten Stützen*. Prüfungsbericht der Staatlichen Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Stuttgart, herausgegeben anlässlich des 50-jährigen Bestehens des GWK-Verbandes, Mai 1955
- [27] I. SZABO, *Höhere Technische Mechanik*. 5. Auflage. Berlin etc.: Springer, 1985
- [28] TAO L. ET AL., *Collapse of medium-thick-walled pipes with multi-oval defects under external pressure*. In: Ocean Engineering, Volume 258, 2022,
- [29] TONG HE ET AL., *Prediction of the collapse pressure for thick-walled pipes under external pressure*. In: Applied Ocean Research, Volume 47, 2014, Pages 199-203
- [30] N. TRAN QUANG, *Überprüfung einer Berechnungsgleichung für dünnwandige, unrunde Wellrohre unter äußerem Überdruck mit der Finiten Element Methode*. Bachelorarbeit an der Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 2020
- [31] N. N., *Technische Regeln für Dampfkessel TRD 306, Berechnung - Zylinderförmige Schalen unter äußerem Überdruck*. (06/1977), Berlin: Beuth-Verlag
- [32] CH. ULLRICH, T. BODMER, *VDI-Wärmeatlas, Abschnitt D6.1 Metalle und Metalllegierungen*. 11. Auflage. Berlin etc.: Springer Verlag, 2013
- [33] YONGMEI ZHU ET AL., *Buckling of externally pressurized cylindrical shell: A comparison of theoretical and experimental data*. In: Thin-Walled Structures, Volume 129, 2018, Pages 309-316
- [34] ZHIYUAN F. ET AL., *Effect of axial length parameters of ovality on the collapse pressure of offshore pipelines*. In: Thin-Walled Structures, Volume 116, 2017, Pages 19-25

## Nomenklatur

### Symbole

$E$	Elastizitätsmodul
$K$	Werkstofffestigkeit
$N$	Nenner
$Z$	Zähler
$a$	Radiusabweichung des unverformten, unrunder Rohrs
$a_{ijkl}$	Koeffizienten
$b_{ijkl}$	Koeffizienten
$d$	Hauptachsenabmessung, Durchmesser
$f$	Radiusabweichung $a + v$
$l$	Länge
$n$	Anzahl der Beulwellen
$p$	Druck
$r$	Halbachsenabmesung, Radius
$s$	Wanddicke

## Tabellenverzeichnis

$u$	elliptische Unrundheit
$v$	Radiusabweichung des verformten, unrunder Rohrs
$x, y, z$	Koordinaten
$\sigma$	Spannungsbetrag
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\varphi$	Umfangswinkel

### Indizes, Abkürzungen

0	$\varphi = 0$
16	Gleichung 16 aus [22]
$\infty$	unendlich lang
$a$	Rohraußenseite
$b$	Beul
$i$	Rohrinnenseite
$m$	Profilmittellinie
min	Minimum
max	Maximum
AD	AD 2000-Merkblatt B6
aFuE	angewandte Forschung und Entwicklung
B12	Position $x = 0, y = \hat{d}_i/2, z = 0$
F	Fließ
FE	Finite Elemente
T03	Position $x = \hat{d}_a/2, y = 0, z = 0$
TRD	Technische Regeln für Dampfkessel TRD 306
vGl	verbesserte Gleichung
vM	von Mises

### Sonstiges

.	Dimensionslose Größe
!	Normierte Größe
-	Mittelwert
^	Maximalwert
~	Minimalwert

### Tabellenverzeichnis

1	Extrema der Verhältnisse der berechneten Beuldrücke zu den Beuldrücken aus den Finite-Elemente-Analysen . . . . .	9
2	Extrema der Verhältnisse der berechneten Beuldrücke zu den Beuldrücken aus den Finite-Elemente-Analysen bei den Werten von $u$ . . . . .	9
3	Unendlich lange Rohre: Extrema der Spannungsverhältnisse . . . . .	13
4	Endlich lange Rohre: Extremwerte der Spannungsverhältnisse . . . . .	13
5	Koeffizienten des Zählers $Z$ . . . . .	16
6	Koeffizienten des Nenners $N$ . . . . .	17

### Abbildungsverzeichnis

1	Zur Definition der Querschnittsabsmessungen unrunder Zylinderschalen. . . . .	2
2	Formänderungen des unrunder Rohres . . . . .	4
3	$p/p_{b,\infty}$ gemäß Gleichung (6), gemäß Gleichung (7) . . . . .	5
4	Finite-Elemente-Netz, Randbedingungen und verwendetes Koordinatensystem. . . . .	8
5	Rohr mit 3 Beulwellen . . . . .	10
6	Rohr mit 2 Beulwellen . . . . .	10

Abbildungsverzeichnis

7	Dehnung $\varepsilon_y(p^*)$ an der Position T03 mit $s^* = 0,037$ , $d^* = 1/6$ und $u = 0,025$ für die Elastizitätsmoduln 210000 MPa und 70000 MPa, sowie das Verhältnis der beiden Dehnungen	12
8	Spannung $\sigma(p^*)$ an der Position T03 mit $s^* = 0,037$ , $d^* = 1/6$ und $u = 0,025$ für die Elastizitätsmoduln 210000 MPa und 70000 MPa, sowie das Verhältnis der beiden Spannungen	12
9	Extremwerte der Spannungsverhältnisse . . . . .	14
10	Spannungsverhältnis $\sigma_{AD}/\sigma_{FE}$ als Funktion von $l^*$ und $s^*$ mit $u = 0,015$ und $p^* = 0,35$ .	15
11	$\sigma^*(p^*)$ für $u = 0,015$ , $s^* = 0,037$ und $d^* = \frac{1}{6}$ . . . . .	16
12	Spannungsverhältnis $\sigma_{vGl}/\sigma_{FE}$ als Funktion von $l^*$ und $s^*$ mit $u = 0,015$ und $p^* = 0,35$ .	17