

Optimierung von Mehrkörpersystemen

Dipl.-Ing. (FH) Klaus Rübiger

Prof. Dr.-Ing. Winfried Theis

Institut für Fahrzeugtechnik der
Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg

Keßlerplatz 12
90489 Nürnberg

Abstract

Auf Grund der ständig steigenden Anforderungen während der Entwicklung neuartiger Produkte ist es oftmals schwierig einen optimalen Entwurf zu finden. Die vorliegende Arbeit soll deshalb einen Einblick in die Welt der mathematischen Optimierung geben und anhand von ausgewählten Beispielen aus der Mehrkörperdynamik die nötigen Schritte einer Optimierungsrechnung genauer erklären. Spezielle Aufmerksamkeit wird hierbei der Ermittlung der Bewegungsgleichungen, der Formulierung der Optimierungsaufgabe und der zur Lösung des Optimierungsproblems nötigen Algorithmen geschenkt, wobei die dargestellte Theorie schließlich durch ein Anwendungsbeispiel aus der Praxis abgerundet werden soll.

1. Einleitung

Im Bereich der Forschung und Entwicklung neuartiger Fahrzeuge jeglicher Art stößt man aufgrund immer komplexer werdender Systemzusammenhänge sowie einzuhaltender Sicherheits- und Qualitätsbestimmungen immer mehr an die Grenzen der bisherigen Entwicklungsmethodik. Immer häufiger werden deshalb neuartige Optimierungsprogramme eingesetzt, um das oft schwer herauszufindende Optimum einer Struktur bzw. eines Systems innerhalb meist enger Entwicklungsspielräume aufzuzeigen. Auf diese Weise können z.B. das Gewicht, Beschleunigungen oder Relativbewegungen einzelner Komponenten reduziert werden, während gleichzeitig Anforderungen an die Strukturfestigkeit, Eigenfrequenzen und an die Geometrie Berücksichtigung finden. Aufgrund der dennoch geringen Verbreitung dieser Methoden soll der vorliegende Bericht einen Einblick in die Welt der Optimierung von mechanischen Mehrkörpersystemen geben, wobei der Ablauf von der Ermittlung der Bewegungsgleichungen bis hin zur Ergebnisdarstellung der Optimierung detailliert dargestellt wird.

2. Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme

Soll ein Mehrkörpersystem in bestimmten Eigenschaften gezielt verändert bzw. verbessert werden, bildet die Kenntnis der Systemeigenschaften in Form von Bewegungsgleichungen die Grundlage für jegliche weiterführenden Schritte. Im Falle der Mehrkörperdynamik ergeben sich hier i.a. nichtlineare Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung.

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{q}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$$

Bei der Topologie der zu untersuchenden Mehrkörpersysteme können sowohl Systeme mit Baum- bzw. Kettenstruktur als auch Systeme mit kinematischen Schleifen vorkommen.

Im Zusammenhang mit der Optimierung ist es vorteilhaft, wenn die Bereitstellung der Systemgleichungen in symbolischer Form erfolgt. Die symbolische Form bzw. die Darstellung der Gleichungen mittels mathematischer Funktionen und vorher definierten Variablen und Parametern in „Textform“ ermöglicht hierbei ein analytisches Weiterverarbeiten der Gleichungen. Im Rahmen der vorgestellten Arbeit kam für die Generierung der Bewegungsgleichungen das Programm „DynaFlex“ zum Einsatz.

2.1 Das Programmsystem „DynaFlex“

Das Programm „DynaFlex“ wurde von John McPhee und Pengfei Shi am Institut „Systems Design Engineering“ der Universität Waterloo in Kanada entwickelt und ist im Stande, die symbolischen Bewegungsgleichungen für starre oder flexible Mehrkörpersysteme in Maple-kompatibler Form zu erzeugen. In einem Eingabe-File lassen sich die Eigenschaften aller Komponenten sowie die geometrischen und kinematischen Bindungen systematisch festlegen. Nach der Erstellung des Eingabe-Files kann dieses in der Maple-Umgebung aufgerufen werden und die Bewegungsgleichungen mittels „DynaFlex“ in symbolischer Form bestimmt werden. Die Ausgabe des Differentialgleichungssystems erfolgt in Matrizenform. Die so generierten Gleichungen können in einer sich anschließenden Optimierungsrechnung weiter verwendet werden.

2.2 Horizontaler 3-Massen-Schwinger als Beispiel

Die allgemeine Vorgehensweise wird im folgenden an einem 3-Massen-Schwinger näher dargestellt (Abbildung 1). Die drei Massen (m_1, m_2, m_3) besitzen jeweils einen Freiheitsgrad (s_1, s_2, s_3). Verbunden sind sie durch insgesamt zwei Federn (c_1, c_2) und zwei Dämpferelemente (k_1, k_2).

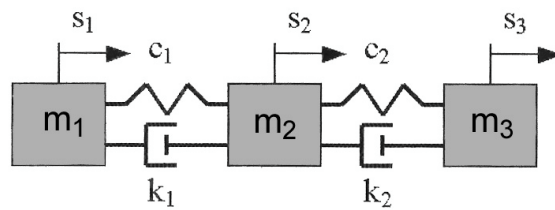


Abbildung 1 : 3-Massen-Schwinger

Um das Mehrkörpersystem in eine dem Programm „DynaFlex“ gemäÙe Form zu überführen, ist eine grafische Systemdarstellung in Form eines „topologischen Schaubildes“ zweckmäßig.

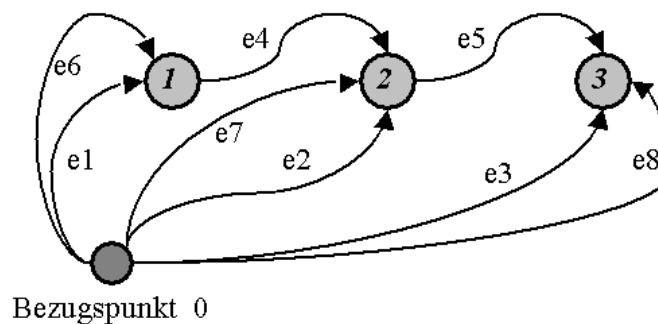


Abbildung 2 : topologisches Schaubild für einen 3-Massen-Schwinger

Die hierin enthaltenen Knoten entsprechen zum einen den drei Massen (nodes 1, 2 und 3) und zum anderen dem Bezugspunkt (node 0) im Inertialsystem.

Die acht Kanten (edges e1 bis e8) markieren Systeminformationen. Im vorliegenden Beispiel sind dies:

- e1** starrer Körper „1“ mit Masse m_1
- e2** starrer Körper „2“ mit Masse m_2
- e3** starrer Körper „3“ mit Masse m_3
- e4** Feder-Dämpfer-Element mit c_1 und k_1
- e5** Feder-Dämpfer-Element mit c_2 und k_2
- e6** Längs-Führung in x-Richtung
- e7** Längs-Führung in x-Richtung
- e8** Längs-Führung in x-Richtung

Mit Hilfe des obigen Schaubildes kann das Eingabefile für dieses Mehrkörpersystem erstellt werden. Die Syntax sieht hierbei - am Beispiel des starren Körpers „1“ - wie folgt aus :

```
edge[1]:=table ([ (1)=N,
                  (2)=[0,1],
                  (3)=BE_R,
                  (4)=table ([ inert=[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]], mass=m1 ] ) );
```

3. Formulierung der Optimierungsaufgabe

Der allgemeine Optimierungsablauf, der hier speziell für mechanische Systeme Anwendung findet, wird im folgenden an einem $\frac{1}{4}$ -Fahrzeugmodell dargestellt.

Erstellung des physikalischen Ersatzmodells

Das Ersatzmodell besteht aus Fahrzeugaufbau (m_1) und Radkörper (m_2). Die zwischen Aufbau und Radkörper befindlichen Feder- und Dämpferelemente (c_1, k) entsprechen der Radaufhängung. Die Feder zwischen Radkörper und Fahrbahn (c_2) steht für die Gummifederung des Reifens. Die Anregung erfolgt durch eine Kraftanregung $F_1(t)$ an der Aufbaumasse (z.B. unausgeglichene resultierende Massenkraft des Motors), sowie durch eine Fußpunkterregung $x(t)$ über den Fahrweg. Die Auslenkungen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ beziehen sich auf die statische Gleichgewichtslage.

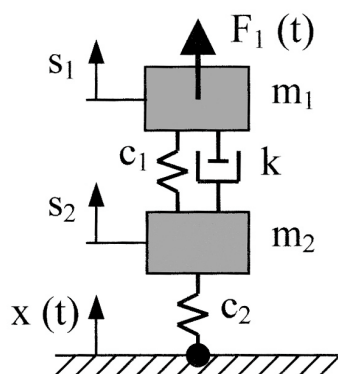


Abbildung 3 : Zweimassenmodell für ein $\frac{1}{4}$ -Fahrzeugmodell

Formulierung des mathematischen Modells

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen stellen sich wie folgt als Differentialgleichungssystem dar :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ c_2 \cdot x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F}$$

Wahl der Optimierungsparameter

Hier gilt es festzulegen, welche Größen als Parameter für die Optimierung zur Verfügung stehen sollen, wobei zwischen den sogenannten Zustandsvariablen und den Entwurfsvariablen bzw. Optimierungsparameter zu unterscheiden ist.

Zustandsvariablen:	Auslenkung	\mathbf{s} bzw. s_i
	Geschwindigkeit	$\dot{\mathbf{s}}$ bzw. \dot{s}_i
Entwurfsvariablen:	Masse „1“	m_1
	Masse „2“	m_2
	Federsteifigkeit „1“	c_1
	Federsteifigkeit „2“	c_2
	Dämpfungskonstante	k

Zur Vereinfachung werden die auserwählten Entwurfsvariablen meist nach einer geeigneten Normierung (Loswerden von jeglichen Einheiten) zu einem Spaltenvektor \mathbf{p} zusammengefasst.

Aus der Masse m_1 wird z.B. durch die mögliche Normierung m_1/m_{ges} ein dimensionsloser Optimierungsparameter p_1 , den man als erste Komponente im Vektor \mathbf{p} wiederfindet.

$$\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5)^T$$

Die hier genannten Optimierungsparameter stellen die maximal mögliche Auswahl an Variablen dar. Für die spätere Optimierung müssen nicht zwangsläufig alle Variablen herangezogen werden.

Festlegung eines zulässigen Anfangsentwurfes

Als nächstes legt man für die Entwurfsvariablen Anfangswerte fest, die für eine zeitlich rasche Optimierung aufgrund von Erfahrungswerten sinnvoll gewählt sein und darüber hinaus auch (wenn vorhanden) noch alle Nebenbedingungen erfüllen sollten.

Anfangswerte der Entwurfsvariablen :	$m_{1,0}$	bzw.	$p_{1,0}$
	$m_{2,0}$	bzw.	$p_{2,0}$
	$c_{1,0}$	bzw.	$p_{3,0}$
	$c_{2,0}$	bzw.	$p_{4,0}$
	k_0	bzw.	$p_{5,0}$

Aufstellung der zu minimierenden Gütefunktion/en sowie einzuhaltender Nebenbedingungen

Ein wichtiger Punkt ist die Festlegung auf Kriterien, nach denen die Optimierung durchgeführt werden soll. Im Falle eines Fahrzeuges sind dies z.B. Anforderungen an den Fahrkomfort und die Fahrsicherheit. Diese lassen sich durch die Beschleunigung des Fahrzeugaufbaus und die Kontaktkraft $F_K = m_{\text{ges}} \cdot g - F_{\text{dyn}}$ zwischen Rad und Fahrbahn beschreiben.

Zu minimieren sind demnach die **Beschleunigung** \ddot{s}_1
sowie die **dynamische Kraft** $F_{\text{dyn}} = c_2 \cdot (s_2 - x)$

Beide Größen sind abhängig von den vorgegebenen Entwurfsvariablen.

Die zu minimierenden Gütefunktionen ergeben sich damit zu:

$$f_1(\mathbf{p}) = \int_0^T (\ddot{s}_1)^2 dt \quad \text{und} \quad f_2(\mathbf{p}) = \int_0^T (F_{\text{dyn}})^2 dt$$

Der zulässige Parameterbereich kann über Nebenbedingungen wie folgt eingeschränkt werden:

$$\begin{aligned} m_{1,\min} &\leq m_1 \leq m_{1,\max} \\ m_{2,\min} &\leq m_2 \leq m_{2,\max} \\ c_{1,\min} &\leq c_1 \leq c_{1,\max} \\ c_{2,\min} &\leq c_2 \leq c_{2,\max} \\ k_{\min} &\leq k \leq k_{\max} \\ \text{bzw. } p_{k,\min} &\leq p_k \leq p_{k,\max} \end{aligned}$$

Gemäß der obigen Definition des Optimierungsproblems liegt in diesem Fall eine Vektor- bzw. Mehrkriterienoptimierung mit Nebenbedingungen vor.

In mathematischer Schreibweise hat dieses Problem folgendes Aussehen:

$$\underset{\mathbf{p} \in P}{\text{opt}} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } P := \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^h \mid \mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max} \}$$

Ermittlung der optimalen Entwurfsvariablen

Die Ermittlung der optimalen Entwurfsvariablen geschieht durch einen für den Anwendungsfall geeigneten Optimierungsalgorithmus. In Kapitel 4 wird auf die wichtigsten Algorithmen näher eingegangen.

Realisierung des optimalen Entwurfs

Zu guter letzt erfolgt die konstruktive Umsetzung des gefundenen optimalen Entwurfs. Zu betonen ist, dass es nicht nur einen einzigen optimalen Entwurf geben muss. Unter Umständen ist ein zusätzlicher iterativer Entscheidungsprozess zu durchlaufen, um das tatsächlich beste Konzept zu finden.

4. Algorithmen zur Lösung von Optimierungsaufgaben

Im Bereich der Optimierung stehen dem Anwender eine Auswahl unterschiedlichster mathematischer Algorithmen zur Verfügung, die sich hauptsächlich in der Schnelligkeit der Lösungsfindung und deren grundsätzliche Eignung für die vielfältigsten Problemstellungen unterscheiden. Im Bereich der restringierten Mehrkriterienoptimierung werden häufig die Sequentielle Quadratische Optimierung, die Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen und das Quasi-Newton-Verfahren verwendet.

4.1 Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP)

nach POWELL und SCHITTKOWSKI

Einsatz / Eignung : komplexere restringierte Optimierungsaufgaben
Stärken (+) : hohes Maß an Effektivität und Allgemeingültigkeit

Beschreibung des Verfahrens

Die Sequentielle Quadratische Programmierung ist ein direktes Verfahren zur Lösung restringierter Optimierungsprobleme. Dieses Verfahren ähnelt, abgesehen von den hier zu berücksichtigenden Ungleichungsnebenbedingungen und der speziellen Suchrichtungsbestimmung, in gewisser Weise dem Vorgehen beim Quasi-Newton-Verfahren. Zunächst werden für einen zu wählenden zulässigen Startpunkt die Funktionswerte und die jeweiligen Gradienten des Gütekriteriums und der vorhandenen Nebenbedingungen an diesem Anfangspunkt berechnet. Die Bestimmung der Suchrichtung \mathbf{s} erfolgt durch eine zusätzlich auszuführende Minimierungsaufgabe. Die hier zu minimierende Funktion entspricht einer Approximation der Lagrange-Funktion durch eine Taylor-Reihe mit Termen inklusive der 2. Ordnung.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in S} \varphi(\mathbf{s}) \quad & \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{s}) = L^{(v)} + \nabla L^{(v)} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{H}^{(v)} \cdot \mathbf{s} \\ & \text{und} \quad S := \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^h \mid h_j^{(v)} + \nabla h_j^{(v)T} \cdot \mathbf{s} \geq 0 \} \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{H} entspricht einer Näherung der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion, die - wie auch beim Quasi-Newton-Verfahren zu sehen ist - anfänglich als Einheitsmatrix \mathbf{E} definiert wird und mit steigender Zahl von Iterationsschritten gegen die eigentliche Hesse-Matrix konvergiert. Ist die Suchrichtung \mathbf{s} bekannt, er-

folgt die Ermittlung des Liniensuch-Parameters α in Abhängigkeit der geltenden Restriktionen, so dass sich dadurch der nächst-bessere Parameterpunkt gemäß

$$\mathbf{p}^{(v+1)} = \mathbf{p}^{(v)} + \alpha^{(v)} \cdot \mathbf{s}^{(v)}$$

ergibt. Die hier vorgestellte Vorgehensweise wird dabei so lange wiederholt, bis das Abbruchkriterium erfüllt ist bzw. die restringierte Gütefunktion ausreichend minimiert ist. Der zuletzt berechnete Parameterpunkt kann dann somit als Minimierer angesehen werden. In den Fällen der ersten Iterationsschritte, nach denen das Abbruchkriterium noch nicht positiv erfüllt werden kann, muss - wie auch beim Quasi-Newton-Verfahren - die Ersatzmatrix z.B. durch den Algorithmus nach „Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno“ (BFGS) für die geforderte zunehmende Konvergenz zwischen Ersatz- und Hesse-Matrix entsprechend verändert werden, bevor innerhalb der nächsten Iteration die neue Suchrichtung bestimmt wird.

4.2 Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen (MMFD)

nach VANDERPLAATS

Einsatz / Eignung : einfache restringierte Optimierungsaufgaben
 Stärken (+) : effiziente Suchrichtungsbestimmung ;
 Anstatt des Zick-Zack-Verlaufes ergibt sich hier ein Pfad entlang der Grenze der Ungleichungsnebenbedingung

Beschreibung des Verfahrens

Die modifizierte Methode der zulässigen Richtungen, auch „Modified Method of Feasible Directions“ kurz MMFD genannt, entspricht einer Weiterentwicklung der Methode der zulässigen Richtungen (MFD). Bei dieser Optimierungsmethode wird der störende Zick-Zack-Verlauf der aufeinander folgenden Liniensuchen innerhalb einer bestimmten Umgebung entlang der Grenzlinie einer aktiven Ungleichungsnebenbedingung bewusst vermieden. Die Bestimmung der Suchrichtung \mathbf{s} in einem Punkt der Grenzkurve der Restriktion erfolgt äquivalent zur MFD, nur mit dem kleinen Unterschied, dass der „Push-Off“-Faktor von vornherein gleich Null gesetzt wird.

Die Suchrichtung \mathbf{s} folgt nun aus

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in S} \beta \quad \text{mit} \quad S := \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \\ \beta - (\nabla f^{(v)})^T \cdot \mathbf{s} \geq 0, \\ \nabla h_j^{(v)T} \cdot \mathbf{s} \geq 0, \\ | \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{s} | \leq 1 \} \quad \text{mit } h_j \geq 0 \end{aligned}$$

Demzufolge bewegt man sich vor allem bei konvexen Optimierungsproblemen auf der Suche nach dem Minimierer zunächst tangential zur Grenzkurve der aktiven Restriktion in den unzulässigen Parameterraum. Um jedoch bei der Annäherung an das Minimum - und gerade dies ist die Verbesserung des Verfahrens gegenüber der Methode der zulässigen Richtungen - stets auf dem Rand der Restriktion zu verbleiben und somit den oben genannten Zick-Zack-Verlauf zu vermeiden, muss dem mit dem Liniensuch-Parameter α multiplizierten Suchrichtungsvektor \mathbf{s} ein zusätzlicher Vektor $\delta\mathbf{p}$ hinzugefügt werden, um aus dem unzulässigen Bereich zurück auf die Grenzlinie zu gelangen.

Daher ergibt sich für den nächst-besseren Parameterpunkt

$$\mathbf{p}^{(v+1)} = \mathbf{p}^{(v)} + \alpha^{(v)} \cdot \mathbf{s}^{(v)} + \delta\mathbf{p}^{(v)}$$

Um jedoch den Vektor $\delta\mathbf{p}$ zu bestimmen, muss zusätzlich die folgende Optimierungsaufgabe innerhalb jeder Iterationsschleife gelöst werden

$$\min_{\delta \mathbf{p} \in P} \delta \mathbf{p}^T \cdot \delta \mathbf{p} \quad \text{mit} \quad P := \{ \delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^h \mid$$

$$h_j(\mathbf{p}(\alpha)) + \nabla h_j(\mathbf{p}^{(v)})^T \cdot \delta \mathbf{p} = 0 \}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{p}(\alpha) = \mathbf{p}^{(v)} + \alpha \cdot \mathbf{s}^{(v)}$$

4.3 Quasi-Newton-Verfahren

nach FLETCHER und POWELL

Einsatz / Eignung : nicht restringierte Optimierungsaufgaben
 Besondere Merkmale : globales Optimierungsverfahren
 Stärken (+) : Hesse-Matrix muss nicht exakt berechnet werden

Beschreibung des Verfahrens

Das Quasi-Newton-Verfahren bedient sich wie das reine Newton-Verfahren eines Modells 2. Ordnung, allerdings entspricht es im Gegensatz dazu lediglich einem Verfahren 1. Ordnung. Das heißt, dass dieser Algorithmus die direkte und somit für die Suchrichtung benötigte Berechnung der Hesse-Matrix vermeidet. Der wesentliche Unterschied zwischen diesem Verfahren und dem reinen Newton-Verfahren liegt in der Bestimmung der Suchrichtung am Beginn jedes Iterationsschrittes. Um den Auswirkungen von schlecht gewählten Startwerten entgegenzuwirken, ersetzt man die inverse Hesse-Matrix $(\nabla^2 f)^{-1}$, welche in solchen Fällen nicht zwangsläufig positiv definit ist, durch eine zuerst beliebige positiv definite Ersatzmatrix \mathbf{H} , welche während eines Optimierungsvorganges - mit jedem Iterationsschritt mehr - gegen die eigentliche inverse Hesse-Matrix konvergiert.

Nachdem Startwerte $\mathbf{p}^{(0)}$ für die zu minimierende Gütefunktion $f(\mathbf{p})$ festgelegt sind, kann mit der eigentlichen Optimierung begonnen werden.

Iterationsschritt „0“

Für die erstmalige Festlegung der Suchrichtung $\mathbf{s}^{(0)}$ wird gemäß dem folgenden Zusammenhang

$$\mathbf{s}^{(0)} = -\mathbf{H}^{(0)} \cdot \nabla f^{(0)}$$

für die erste Ersatzmatrix $\mathbf{H}^{(0)}$ die Einheitsmatrix \mathbf{E} (hier 2 x 2) gewählt

$$\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

so dass sich die Formel der Suchrichtung entsprechend vereinfacht

$$\mathbf{s}^{(0)} = -\mathbf{H}^{(0)} \cdot \nabla f^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{p}^{(0)})$$

Nachdem die Suchrichtung bekannt ist, wird in einem nächsten Schritt die Linienfunktion $\mathbf{p}(\alpha)$ in Suchrichtung $\mathbf{s}^{(0)}$ aufgestellt.

$$\mathbf{p}(\alpha) = \mathbf{p}^{(0)} + \alpha \cdot \mathbf{s}^{(0)}$$

Anschließend wird die gerade ermittelte Linienfunktion $\mathbf{p}(\alpha)$ in die das Optimierungsproblem kennzeichnende Gütefunktion eingesetzt. Das Gütekriterium, welches vorher eine Funktion der Entwurfsvariablen war, ist nun eine der Liniensuch-Variablen α .

$$f(\alpha) = f(\mathbf{p}(\alpha))$$

Als nächstes wird ausgehend von der Funktion $f(\alpha)$ die Lage des Minimums der selben in Form einer Liniensuch-Variablen $\alpha^{(0)}$ bestimmt. Im Falle einer stetig differenzierbaren Funktion $f(\alpha)$ folgt aus $f'(\alpha^{(0)}) = 0$ ein $\alpha^{(0)}$, welches durch Einsetzen in die bereits bekannte Linienfunktion $\mathbf{p}(\alpha)$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)} + \alpha^{(0)} \cdot \mathbf{s}^{(0)}$$

einen ersten approximierten Minimierer in Suchrichtung im Parameterraum liefert.

Iterationsschritt „1“

Für die Berechnung der zweiten Suchrichtung $\mathbf{s}^{(1)}$, gemäß

$$\mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{H}^{(1)} \cdot \nabla f^{(1)} \quad \text{muss die erste Ersatzmatrix } \mathbf{H}^{(0)} \text{ entsprechend}$$

ersetzt werden

$$\mathbf{H}^{(v+1)} = \mathbf{H}^{(v)} + \frac{\delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{p}^T}{\delta \mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\gamma}} - \frac{\mathbf{H}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{H}^{(v)}}{\boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{H}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\gamma}} \quad (\text{nach Davidon-Fletcher-Powell}),$$

wobei für die Einzelkomponenten folgende Beziehungen gelten

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{p}^{(0)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla f^{(1)} - \nabla f^{(0)}$$

Nach dem Einsetzen der zweiten Ersatzmatrix $\mathbf{H}^{(1)}$ als Approximation der Hesse-Matrix, folgt daraus die nächste Suchrichtung $\mathbf{s}^{(1)}$ usw.. Da das Quasi-Newton-Verfahren gegenüber dem reinen Newton-Verfahren zur Bestimmung des Minimierers einen Iterationsschritt mehr benötigt, bedingt dies zwar zunächst einen größeren Rechenaufwand bzw. eine längere Rechenzeit, allerdings ist diese Methode wesentlich unempfindlicher gegenüber weit vom Optimum entfernten Startwerten für die Entwurfsvariablen, sodass dieser Algorithmus gerade bei globalen Optimierungsproblemen bevorzugt wird.

5. Anwendungsbeispiel aus der Praxis

5.1 Vorstellung des Mehrkörpersystems

Das hier zu untersuchende Mehrkörpersystem entspricht einem vereinfachten zweidimensionalen Modell eines Triebzuges.

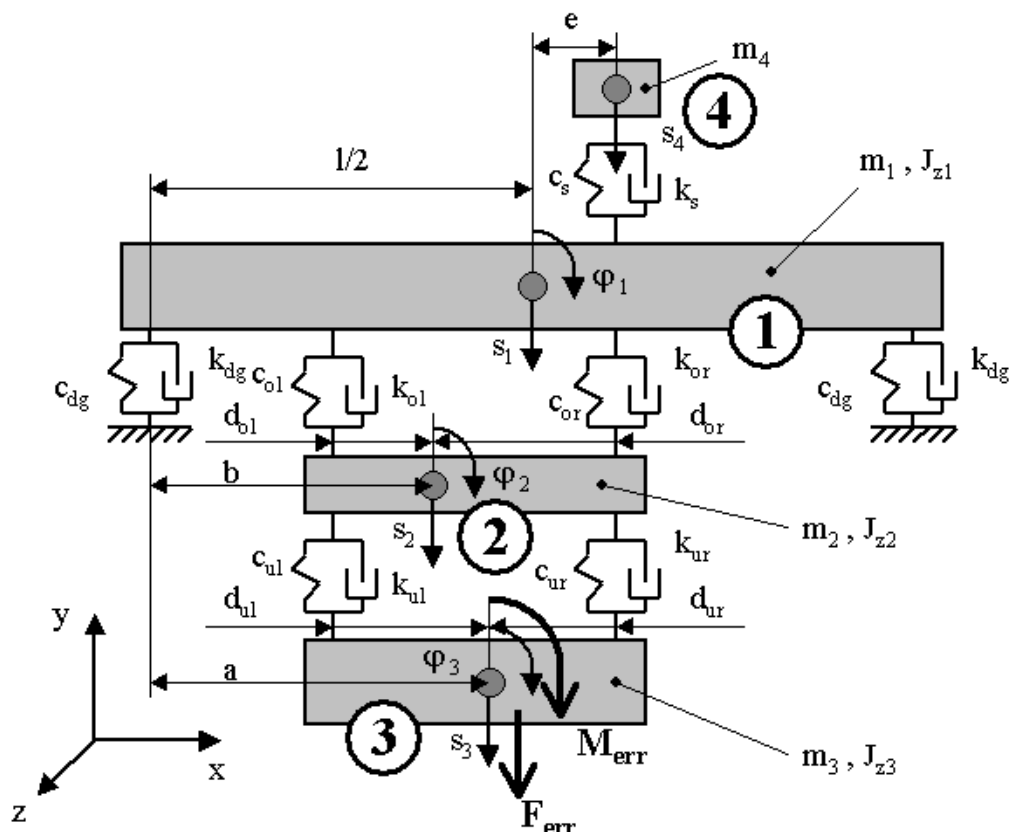


Abbildung 4 : Modell des zu untersuchenden Mehrkörpersystems

Körper 1 steht für den Wagenkasten, der aus vereinfachenden Gründen, ebenso wie die anderen Körper, als starr zu betrachtet wird. An den beiden Enden des Wagenkastens liegen die Anbindungspunkte für die Sekundärfederung bzw. Dämpfung beider Drehgestelle.

Unter dem Wagenkasten befindet sich ein Zwischenrahmen (Körper 2), an welchem wiederum ein Aggregat (Körper 3) angebracht ist. Bei dem Aggregat kann es sich z.B. um das Hauptantriebsaggregat oder ein Aggregat zur Brems-Druckluft-Versorgung handeln. Das Aggregat ist — besonders bei einer Ausführung als Kolbenmaschine — in der Lage, durch die periodischen Anregungen aus dem Arbeitsprozess sowie den freien Massenkräften und Massenmomenten, das System zu Schwingungen anzuregen. Körper 4 entspricht schließlich einer Sitzbank im Fahrgastraum bzw. einem empfindlichen Zusatzsystem.

Für spätere Untersuchungen können der Körper 4, sowie der Zwischenrahmen und das Aggregat in ihrer Position relativ zum Wagenkasten in gewissen Grenzen verschoben werden. Bezüglich des Rahmens und des Aggregates ist allerdings zu sagen, dass die Positionierung über die Lage der Körperschwerpunkte erfolgt, da die Länge der beiden Körper als gleich angenommen wurde und die Feder-Dämpfer-Pakete jeweils übereinander zu liegen kommen, die Schwerpunkte an sich jedoch beliebig verändert werden können.

Die Bewegungsgleichungen des obigen Mehrkörpersystems wurden linearisiert. Das Problem der statischen Anfangseinfederung durch das Eigengewicht der Einzelkörper wurde über die Wahl der oberen und unteren Schranken für die Federsteifigkeiten des Systems berücksichtigt.

5.2 Definition der zu minimierenden Gütefunktionen

Kriterien Nr. 1 bis 4 — Zweck : Minimierung der relativen Einfederwege und -winkel zwischen Wagenkasten, Zwischenrahmen und Aggregat.

Für die Minimierung der Einfederwege und -winkel, jeweils bezogen auf einen Sollwert, gilt folgender mathematischer Ausdruck als Kriterium :

$$\psi_1 \text{ bis } \psi_4 = \int_0^T (\Gamma)^6 dt$$

$$\text{mit } \Gamma = \left(\frac{s_2 - s_1}{s_o} \right) \quad \text{beim Gütekriterium } \psi_1$$

$$\Gamma = \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_o} \right) \quad \text{beim Gütekriterium } \psi_2$$

$$\Gamma = \left(\frac{s_3 - s_2}{s_o} \right) \quad \text{beim Gütekriterium } \psi_3$$

$$\Gamma = \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_o} \right) \quad \text{beim Gütekriterium } \psi_4$$

Diese Kriterien sorgen in erster Linie für die Vermeidung eines großen Einbauraumes und für die Nichtbeschädigung der Lager durch eine eventuelle starke Annäherung beider Körper.

Kriterium Nr. 5 — Zweck : Minimierung der Beschleunigung an der Sitzbank oder an einem anderen sensiblen Zusatzsystem

Für die Erhöhung des Fahrkomforts bzw. die Minimierung der auftretenden Beschleunigung auf den Körper 4 gilt folgender mathematischer Ausdruck als Kriterium

$$\psi_5 = \int_0^T \left(\begin{matrix} \dots \\ s_4 \end{matrix} \right)^2 dt$$

Da aufgrund der Vielzahl der definierten Kriterien eine Mehrkriterienoptimierung vorliegt und programmtechnisch ein skalarer Kriterienwert wünschenswert ist, wurde in der späteren Optimierungsrechnung die Methode der gewichteten Kriterien angewandt, um aus dem Vektorkriterium ein skalares Ersatzkriterium zu machen.

5.3 Definition der einzuhaltenden Restriktionen

Die geltenden Nebenbedingungen sind in dieser Problemstellung rein geometrischer Natur und haben ausschließlich die Form einer Gleichungsnebenbedingung.

$$\text{Nebenbedingung Nr. 1 : } \quad \text{dol} + \text{dor} = j$$

$$\text{Nebenbedingung Nr. 2 : } \quad \text{dul} + \text{dur} = j$$

$$\text{Nebenbedingung Nr. 3 : } \quad b - \text{dol} = a - \text{dul}$$

Mit diesen Nebenbedingungen wird das Ziel verfolgt, dass der Zwischenrahmen und das Aggregat bezüglich ihrer äußeren Geometrie, sowie die Feder-Dämpfer-Pakete jeweils übereinander liegen. Als weitere, hier jedoch nicht niedergeschriebene Nebenbedingungen könnten die oberen und unteren Schranken für die Entwurfsvariablen genannt werden.

5.4 Angaben für das Optimierungsprogramm in „MATLAB“

Veränderliche Parameter

a	=	p(1)	m	Position des Aggregat-Schwerpunktes
b	=	p(2)	m	Position des Zwischenrahmen-Schwerpunktes
dol	=	p(3)	m	Abstand von SP-Körper 2 zu Feder-col
dor	=	p(4)	m	Abstand von SP-Körper 2 zu Feder-cor
dul	=	p(5)	m	Abstand von SP-Körper 3 zu Feder-cul
dur	=	p(6)	m	Abstand von SP-Körper 3 zu Feder-cur
col	=	p(7)	N/m	Federsteifigkeit (oben / links)
cor	=	p(8)	N/m	Federsteifigkeit (oben / rechts)
cul	=	p(9)	N/m	Federsteifigkeit (unten / links)
cur	=	p(10)	N/m	Federsteifigkeit (unten / rechts)
kol	=	p(11)	N*s/m	Dämpfungskonstante (oben / links)
kor	=	p(12)	N*s/m	Dämpfungskonstante (oben / rechts)
kul	=	p(13)	N*s/m	Dämpfungskonstante (unten / links)
kur	=	p(14)	N*s/m	Dämpfungskonstante (unten / rechts)

Initialisierung der Entwurfsvariablen als Vektoren

Vektor der Entwurfsvariablen

$$\mathbf{p} = [a \ b \ \text{dol} \ \text{dor} \ \text{dul} \ \text{dur} \ \text{col} \ \text{cor} \ \text{cul} \ \text{cur} \ \text{kol} \ \text{kor} \ \text{kul} \ \text{kur}]^T$$

$$\text{Vektor der Startwerte} \quad \mathbf{p_0} = [\dots]^T$$

$$\text{Vektor der unteren Schranken} \quad \mathbf{p_u} = [\dots]^T$$

$$\text{Vektor der oberen Schranken} \quad \mathbf{p_o} = [\dots]^T$$

Nicht veränderliche Parameter

m1	=	10000	kg	Masse des Wagenkastens
m2	=	100	kg	Masse des Zwischenrahmens
m3	=	1000	kg	Masse des Aggregates
m4	=	10	kg	Masse einer Sitzbank
Jz1	=	2.5e5	kg*m ²	Massenträgheitsmoment des Wagenkastens
Jz2	=	50	kg*m ²	Massenträgheitsmoment des Zwischenrahmens
Jz3	=	500	kg*m ²	Massenträgheitsmoment des Aggregates

cs	=	1.0e4	N/m	Federsteifigkeit der Sitzbank
cdg	=	1.0e5	N/m	Federsteifigkeit des Drehgestells
ks	=	1000	N*s/m	Dämpfungskonstante der Sitzbank
kdg	=	1000	N*s/m	Dämpfungskonstante des Drehgestells
l	=	14.0	m	Länge des Wagenkastens
e	=	2.0	m	Abstand von SP-Masse1 zu Feder-cs
j	=	3.0	m	Länge des Zwischenrahmens
Ferr	=	1000	N	Krafterregung am Aggregat
Merr	=	0	N*m	Momentenerregung am Aggregat

Komponenten der Bewegungsdifferentialgleichung des MKS

Die Generierung der Bewegungsgleichungen erfolgte mittels „Dynaflex“ bzw. „Maple“. Die Linearisierung der Gleichungen führt auf die folgenden Systemmatrizen **M**, **K** und **C** sowie den Erregervektor **F** :

Massenmatrix **M** [7x7]

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Jz1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & m2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & Jz2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Jz3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m4 & \dots \end{bmatrix}$$

Dämpfungsmatrix **K** [7x7]

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k11 & k12 & k13 & k14 & 0 & 0 & k17 & \dots \\ k21 & k22 & k23 & k24 & 0 & 0 & k27 & \dots \\ k31 & k32 & k33 & k34 & k35 & k36 & 0 & \dots \\ k41 & k42 & k43 & k44 & k45 & k46 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k53 & k54 & k55 & k56 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k63 & k64 & k65 & k66 & 0 & \dots \\ k71 & k72 & 0 & 0 & 0 & 0 & k77 & \dots \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix **C** [7x7]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 & c14 & 0 & 0 & c17 & \dots \\ c21 & c22 & c23 & c24 & 0 & 0 & c27 & \dots \\ c31 & c32 & c33 & c34 & c35 & c36 & 0 & \dots \\ c41 & c42 & c43 & c44 & c45 & c46 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c53 & c54 & c55 & c56 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c63 & c64 & c65 & c66 & 0 & \dots \\ c71 & c72 & 0 & 0 & 0 & 0 & c77 & \dots \end{bmatrix}$$

mit z.B.

$$c22 = cs * e^2 + cdg * l^2 / 2 + col * dol * (dol - b + l / 2) + cor * dor * (b - l / 2 + dor)$$

Vektor der Anregung **F** [7x1]

$$\mathbf{F} = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; Ferr ; Merr ; 0]^T$$

Die Anfangsbedingungen bezüglich der Auslenkungen und Geschwindigkeiten wurden wie folgt festgelegt :

$$\mathbf{s}_0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]^T$$

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]^T$$

5.5 Durchführung der Systemoptimierung

Die Systemanregung erfolgte hierbei über eine sprungförmige Kraftanregung am Körper 3 mit $F_{err} = 1000 \text{ N}$ zum Zeitpunkt $t = 1.0 \text{ s}$. Die folgenden Ergebnisse gelten für den Fall der alleinigen Optimierung bzgl. der Beschleunigung des Körpers 4.

Informationen über die Optimierungsrechnung :

Gütefunktionswert am Ende der Optimierung	=	0.1015
Anzahl der durchgeführten Iterationen	=	20
Anzahl der Funktionswertberechnungen	=	326
Zuletzt durchgeführte Schrittweite	=	1.0
Verwendete Optimierungsalgorithmen	=	SQP, Quasi-Newton-Verfahren, Liniensuchverfahren

Lösung der Optimierung bzw. Entwurfsvariablen nach der letzten Iteration :

p(1)	=	4.00	(7.0)	m
p(2)	=	4.71	(7.0)	m
p(3)	=	1.21	(1.5)	m
p(4)	=	1.79	(1.5)	m
p(5)	=	0.50	(1.5)	m
p(6)	=	2.50	(1.5)	m
p(7)	=	15000	(15000)	N/m
p(8)	=	15000	(15000)	N/m
p(9)	=	15000	(15000)	N/m
p(10)	=	15000	(15000)	N/m
p(11)	=	500.23	(500)	N*s/m
p(12)	=	500.24	(500)	N*s/m
p(13)	=	500.24	(500)	N*s/m
p(14)	=	500.11	(500)	N*s/m

(Die Zahlenwerte in Klammern entsprechen den gewählten Anfangswerten)

Verlauf des Kriterienwertes in Abhängigkeit der Iterationen :

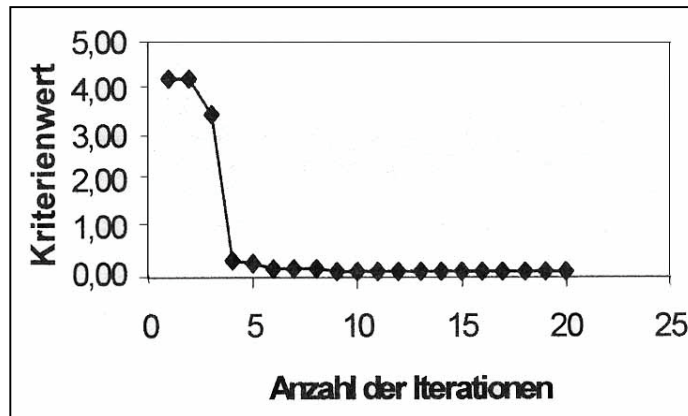


Abbildung 5 : Kriterienwert als Funktion der Iterationen

5.6 Ergebnisdiskussion

Aus der beispielhaften Optimierungsrechnung und den daraus resultierenden Ergebnissen im Vergleich zum Ausgangszustand lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

In dem dargestellten Optimierungsvorgang, in dem lediglich die Beschleunigung auf den Körper 4 berücksichtigt wurde, ist eine deutliche Reduzierung der Beschleunigungsspitzen erkennbar. Im Falle der Krafterregung wurde eine Verringerung der maximalen Beschleunigung von 83 % und im Falle der Momentenerregung (wurde hier nicht dargestellt) von 56 % erreicht. Allerdings muss dabei beachtet werden, dass bei einer ausschließlichen Betrachtung der Beschleunigung, die Weg- und Winkeldifferenzen völlig außer Acht gelassen werden, was anhand der idealen Beharrungswerte für die Wege und Winkel bei der durchgeführten Optimierung auch besonders gut zu sehen war.

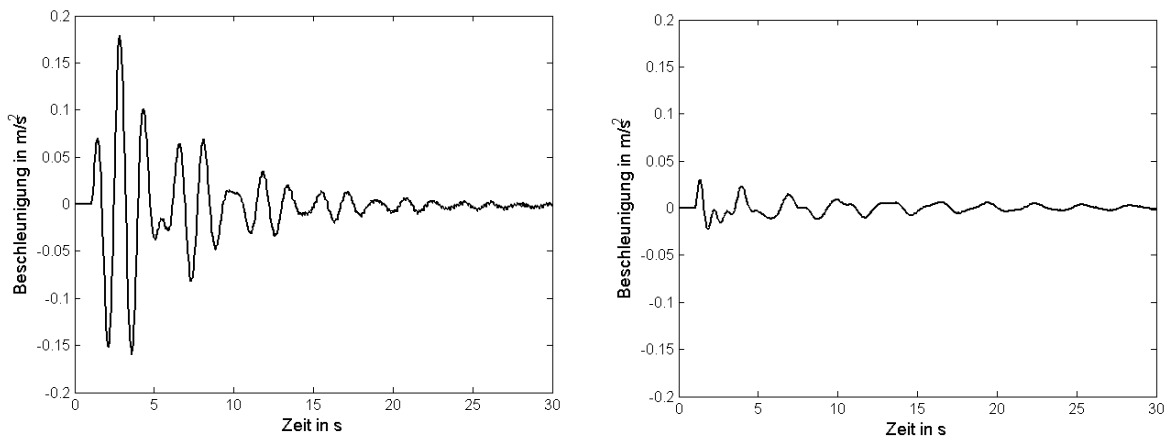


Abbildung 6 : Beschleunigung des Körpers 4 bei Krafterregung
links : vor der Optimierung, rechts : nach der Optimierung

In weiteren, hier nicht explizit ausgeführten Optimierungsrechnungen — in denen, unabhängig davon ob Kraft- oder Momentenanregung, zum einen nur die Weg- und Winkeldifferenzen und zum anderen alle Kriterien gleich bewertet wurden — ist kaum eine Veränderung der Entwurfsvariablen und damit auch der zeitlichen Verläufe der Untersuchungsergebnisse erkennbar. Dies bedeutet, dass bei einem stärker gewichteten Kriterium des Einfederweges und -winkels, bei diesem Mehrkörpersystem die symmetrische An-

ordnung des Zwischenrahmens und des Aggregates im Bezug auf den Wagenkasten die besten Ergebnisse liefert.

Da das hier verwendete Optimierungsprogramm lediglich für die Suche nach dem lokalen Minimum geeignet ist und ebenso schwer ersichtlich ist, ob ein konvexer, nicht konvexer oder gar ein disjunkter Parameterraum vorliegt, macht es Sinn, nicht immer im selben Punkt des hier 14-dimensionalen Parameterraums mit der Suche zu beginnen. Daraufhin wurden in nachfolgenden Optimierungen unterschiedliche Startpunkte gewählt. Es wurden für die Federsteifigkeiten und Dämpfungskonstanten zum einen die oberen Schranken und zum anderen die unteren Schranken für die Startwerte herangezogen, während die anderen Entwurfsvariablen nicht verändert wurden.

Anhand der später ermittelten zeitlichen Verläufe ist der Konflikt zwischen der Reduktion der Beschleunigung und der Reduktion der Weg- und Winkeldifferenz eindeutig zu erkennen:

- Kleinste Wegdifferenz bei **c maximal** und **k maximal**
- Höchste Beschleunigung bei **c maximal** und **k minimal**
- Kleinste Beschleunigung bei **c minimal** und **k maximal**

Der Fall der kleinsten Winkeldifferenz ist hier nicht eindeutig zuweisbar. Hier muss man abwägen, welche Einflüsse die wohl störendsten sind.

6. Literaturverzeichnis

BAIER, H. / SEEBELBERG, C. / SPECHT, B.:

Optimierung in der Strukturmechanik, Vieweg-Verlag,
Braunschweig Wiesbaden, 1994

BESTLE, D.:

Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen, Springer-Verlag,
Berlin Heidelberg, 1994

BESTLE, D.:

Optimization of a Contact Surface - Optimierung mit Matlab/Simulink,
Lehrstuhl für Maschinendynamik, Technische Universität Cottbus, 2002

McPHEE, J. / SHI, P.:

DynaFlex User's Guide - Versions 5 and 6,
Systems Design Engineering, University of Waterloo, Canada, 2002

MEISINGER, R.:

Fahrzeugsimulation - Vorlesungsskript,
Fachbereich Maschinenbau und Versorgungstechnik,
Fachhochschule Nürnberg, 2002

THEIS, W.:

Maschinendynamik - Vorlesungsskript,
Fachbereich Maschinenbau und Versorgungstechnik,
Fachhochschule Nürnberg, 2000

TRETOW, H. J.:

Schienenfahrzeuge - Vorlesungsskript,
Fachbereich Maschinenbau und Versorgungstechnik,
Fachhochschule Nürnberg, 2001