

Der Strahlungsdruck im Wellen- und Teilchenbild

Prof. Dr. Georg Loos

Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg
Fachbereich Allgemeinwissenschaften
Keßlerplatz 12, 90489 Nürnberg
E-mail: georg.loos@fh-nuernberg.de

Abstract

Die experimentelle Realisierung des Strahlungsdrucks hat zur Entwicklung von Manipulatoren für Mikropartikel geführt. Zum tieferen Verständnis der Entstehung des Drucks wird als einfaches Beispiel der Strahlungsdruck auf eine ebene Platte und die mechanische Spannung in der Platte bei senkrechtem Strahleinfall berechnet. Dabei wird sowohl das Wellenmodell als auch das Teilchenmodell der Optik verwendet. Es zeigt sich, daß letzteres einfacher zu handhaben und anschaulicher ist.

Der Strahlungsdruck im Wellen- und Teilchenbild

1. Einleitung

Der Strahlungsdruck wurde schon von Johannes Kepler im Jahr 1619 postuliert. Er erklärte damit die Erscheinung, daß durch den Druck des Lichts ein Kometenschweif immer von der Sonne wegzeigt. 1873 wies Maxwell theoretisch nach, daß Licht einen Druck auf Materie ausübt. Der experimentelle Nachweis des Strahlungsdrucks gelang allerdings erst, als es möglich war, mit Lasern genügend intensitätsreiche Strahlung zu erzeugen.

Heute ist es möglich, mit Lasern die optische Levitation zu demonstrieren und Mikropartikel mit Laserstrahlen zu führen. Die Erscheinung ist aus der Strömungslehre bekannt: Ein Tennisball schwebt auf einer Fontäne und wird durch seitliche Kräfte im Strahl gehalten. Analog wird ein Mikropartikel wegen des radialen Gaußschen Intensitätsprofils eines Laserstrahls im Strahl gehalten. Dies führte zur Entwicklung der optischen Pinzette und der Gradientenfalle für kleine Teilchen. Damit stehen für die Forschung neue nützliche Werkzeuge zur Verfügung, /1/, /2/.

Um die Kräfte auf ein Objekt zu beschreiben, erweist es sich als zweckmäßig, zu unterscheiden, ob dessen Ausdehnung größer oder kleiner als die Wellenlänge der auftreffenden Strahlung ist /3/. Bei Objekten, die kleiner als die Wellenlänge sind, spricht man vom Rayleigh-Modell. Das einfallende Wellenfeld wird als Kugelwelle gestreut. Diese interferiert mit dem einfallenden Feld und bewirkt einen Impulsübertrag auf das Objekt. Diese Problematik wird in /3/ ausführlich behandelt. Ist das Objekt größer als die Wellenlänge, so verwendet man das Mie-Modell. Hier wird der Strahlungsdruck z. B. eines Laserstrahls auf eine Grenzfläche mit dem Impulserhaltungssatz durch den Impulsübertrag beschrieben und berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird mit diesem Modell die Entstehung des Strahlungsdrucks an einem einfachen Beispiel quantitativ betrachtet. Es soll der Strahlungsdruck auf eine Platte mit zwei Methoden im Rahmen des Mie-Modells berechnet werden. Die erste Methode verwendet das Wellenbild der elektromagnetischen Strahlung, arbeitet also mit den Maxwell'schen Gleichungen. Bei der zweiten Methode wird der Laserstrahl als Photonenbündel betrachtet unter Verwendung des Begriffs des Photonenimpulses. Dabei wird sich herausstellen, daß die zweite Methode einfacher zu handhaben und anschaulicher ist. Die Rechnung zeigt zudem, daß im Material auch eine mechanische Spannung entsteht. Die Rechenverfahren sollen dem Leser außerdem eine Vorstellung geben, wie beim wesentlich komplizierteren Fall des Strahlungsdrucks z. B. auf ein Glaskügelchen im Prinzip zu verfahren ist.

Um die Verfahren einfach zu halten, wird mit folgenden Voraussetzungen gearbeitet: Ein Laserstrahl fällt senkrecht auf eine ebene Platte, die auf beiden Seiten vom gleichen Medium umgeben ist. Man stelle sich z. B. eine Glasplatte in Luft oder Wasser vor. Die Medien sollen absorptionsfrei sein. Die Intensität des Strahls soll über den ganzen Querschnitt konstant sein. Mehrfachreflexionen werden nicht betrachtet; ebenso werden Interferenzeffekte teilreflektierter Wellen nicht in die Überlegungen einbezogen. Experimentell können diese Interferenzen vermieden werden durch genügend kleine Kohärenzlängen der Strahlung bzw. dicke Platten und ein nicht genau senkrechter Strahleinfall.

2. Der Strahlungsdruck im Wellenbild

2.1 Aussagen der Maxwell-Theorie

Bevor eine Berechnung des Strahlungsdrucks im Wellenbild erfolgt, sollen zunächst die dazu nötigen Aussagen aus der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus zusammengestellt werden, vgl. auch /4/, /5/, /6/.

An der Grenzfläche zweier Dielektrika geht die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke \vec{E} stetig über. Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke \vec{H} geht stetig über, wenn keine Oberflächenströme vorhanden sind; dies ist hier der Fall. Da wir in dieser Arbeit nur den Spezialfall des senkrechten Einfalls eines Parallelstrahls auf eine ebene Grenzfläche zweier Dielektrika betrachten, können wir direkt mit den *Amplituden* der Feldstärken arbeiten, die wir mit E und H bezeichnen. Der Index e steht für einfallende Strahlung, r für reflektierte und t für transmittierte Strahlung.

Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt:

$$E_t = E_e - E_r \quad (1)$$

$$H_t = H_e + H_r \quad (2)$$

Zur Wahl der Vorzeichen der Amplituden wird auf /4/, /5/, /6/ verwiesen. In /5/ und /6/ findet man die Herleitung der Fresnelschen Formeln für nicht senkrechten Einfall und die ausführliche Diskussion der Vorzeichenproblematik, wenn die elektrische Feldstärke senkrecht oder parallel zur Einfallsebene steht.

Zusammenhang zwischen E und H :

$$H = E/(\mu_r \mu_0 c) \quad (3)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit in Materie $c = c_0/n$ und $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s. Wir setzen $\mu_r = 1$. Die Platte hat die Brechzahl n_2 , das umgebende Medium die Brechzahl n_1 .

Setzt man die Gln. (1) und (3) in (2), so erhält man

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_e \quad (4)$$

$$E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_e \quad (5)$$

Jede elektromagnetische Welle führt nach der Maxwell-Theorie einen Impuls mit sich, der beim Auftreffen auf eine Grenzfläche sich als Strahlungsdruck äußert. Um Verwechslungen mit dem Betrag des Impulses zu vermeiden, wird beim Druck der Index s angefügt. Der Strahlungsdruck ist gleich dem Impulsfluß/Fläche, also

$$p_s = \frac{|\Delta \vec{p}|}{A \Delta t} = \frac{S}{c} = \frac{nS}{c_0} \quad (6)$$

mit der Intensität S als zeitlich gemitteltem Betrag des Poynting-Vektors. Diese gibt die pro Zeit und Fläche übertragene Strahlungsenergie an:

$$S = \frac{\Delta W}{A \Delta t} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 c E^2 = \frac{n}{2} c_0 \varepsilon_0 E^2 \quad (7)$$

wobei für die Brechzahl die Beziehung $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ verwendet wird.

2.2 Berechnung des Strahlungsdrucks auf die erste Grenzfläche

Die Anwendung des Impulserhaltungssatzes führt zur Berechnung des Strahlungsdrucks. Der Einheitsvektor in Einfallrichtung der Welle sei \vec{e}_z ; vgl. die Abbildung in Abschnitt 3.

Zunächst wird der Druck Δp_s auf die erste Grenzfläche Medium – Glas berechnet:

$$\Delta p_s \vec{e}_z = (p_{s,e} - (p_{s,t} - p_{s,r})) \vec{e}_z = \left(\frac{S_e}{c_1} - \left(\frac{S_t}{c_2} - \frac{S_r}{c_1} \right) \right) \vec{e}_z \quad (8)$$

Mit Gl. (7) und anschließender Anwendung der Gln. (4) und (5) erhält man

$$\Delta p_s \vec{e}_z = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} n_1^2 \varepsilon_0 E_e^2 \vec{e}_z \quad (9)$$

Daraus folgt, daß der Strahlungsdruck für $n_1 < n_2$ in entgegengesetzter Richtung zur einfallenden Welle zeigt.

Spezialfälle:

Schwarzer Strahler: $S_r = S_t = 0$

$$\Delta p_s = p_{s,e} = \frac{S_e}{c_1} = \frac{n_1 S_e}{c_0} \quad (10)$$

Idealer Spiegel:

$S_t = 0$; $S_e = S_r$

$$\Delta p_s = p_{s,e} + p_{s,r} = 2 \frac{n_1 S_e}{c_0} \quad (11)$$

2.3 Berechnung des Strahlungsdrucks auf die zweite Grenzfläche

Die Amplitude der einfallenden elektrischen Feldstärke ist jetzt $E_e' = E_t'$, wobei sich E_t' mit Gl. (5) ergibt.

$$\text{Reflektierte Amplitude} \quad E_r' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_e' \quad (12)$$

$$\text{Transmittierte Amplitude} \quad E_t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} E_e' \quad (13)$$

Analog zu Gl.(8) erhält man für den Strahlungsdruck auf die 2. Grenzfläche

$$\Delta p_s' \vec{e}_z = \left(\frac{S_e'}{c_2} - \left(\frac{S_t'}{c_1} - \frac{S_r'}{c_2} \right) \right) \vec{e}_z \quad (14)$$

Mit Gln. (5), (7), (12), (13) ergibt sich die Gl.

$$\Delta p_s' \vec{e}_z = - \frac{4n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} n_1^2 \epsilon_0 E_e'^2 \vec{e}_z = - \frac{4n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \Delta p_s \vec{e}_z \quad (15)$$

Folge:

Die Strahlungsdrücke auf gegenüberliegende Flächen zeigen immer in entgegengesetzte Richtungen. Neben dem resultierenden Strahlungsdruck auf die Platte ergibt sich in der Platte für $n_1 < n_2$ eine Zugspannung, für $n_1 > n_2$ erhält man eine Druckspannung.

2.4 Beispiel

Mit Gl. (7) für die einfallende Intensität S_e formen wir Gl. (9) um und erhalten

$$\Delta p_s \vec{e}_z = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \frac{2n_1}{c_0} S_e \vec{e}_z \quad (16)$$

Der gesamte Strahlungsdruck auf die Platte wird mit Gl. (15)

$$\Delta p_{s, \text{ges}} \vec{e}_z = (\Delta p_s + \Delta p_s') \vec{e}_z = \left(1 - \frac{4n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \right) \Delta p_s \vec{e}_z \quad (17)$$

Für eine Glasplatte mit der Brechzahl $n_2 = 1,5$ in Luft, auf die ein Laserstrahl mit der Intensität $S_e = 1 \text{ W/mm}^2$ fällt, berechnet man $\Delta p_s = -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$, $\Delta p_s' = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$. Der resultierende Druck auf die Platte ist also $0,59 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$ und die Zugspannung im Glas beträgt $1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$.

Wie man leicht nachrechnet, erhält man auch dann einen Druck in Lichtrichtung, wenn die Platte in ein Medium mit $n_1 > n_2$ eingebettet ist. Allerdings herrscht in der Platte dann eine Druckspannung, wie weiter oben schon bemerkt wurde.

3. Der Strahlungsdruck im Teilchenbild

Der Laserstrahl wird jetzt als Photonenstrahl betrachtet. In der Abbildung fallen N Photonen senkrecht auf die Platte. Die einzelnen Photonenimpulse sind mit einem Vektorpfeil gekennzeichnet, die Impulsaufnahmen der Grenzflächen sind $\Delta \vec{p}_w$ und $\Delta \vec{p}_w'$. Die Grenzflächen haben beide gleiche Reflexionsgrade ρ .

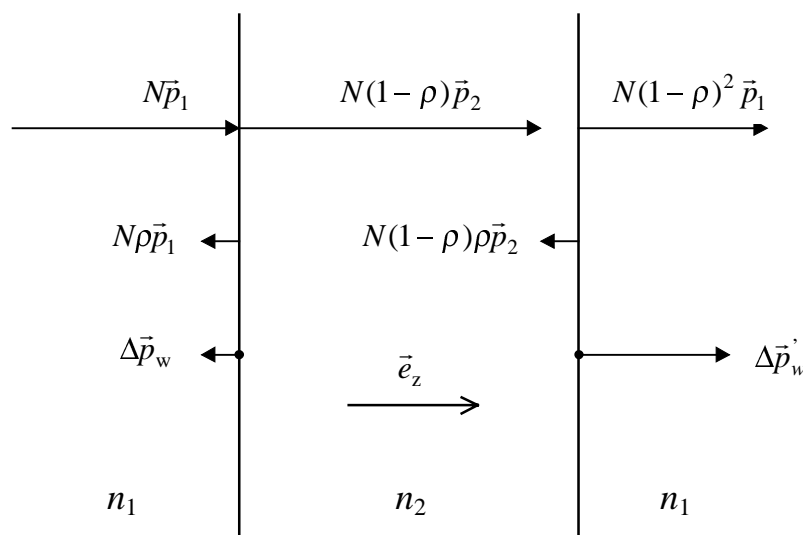


Abb.: Zum Impulserhaltungssatz beim Einfall eines Photonenstrahls auf eine Platte. Angenommen wird $n_1 < n_2$.

Der Betrag des Photonenimpulses ist

$$p = h/\lambda \quad \text{mit } \lambda = \lambda_0/n \quad (18)$$

wobei mit λ die Wellenlänge in Materie zu verstehen ist und λ_0 die Wellenlänge im Vakuum. Diese wichtige Tatsache wird in vielen Lehrbüchern vernachlässigt und führt dann oft zu Verständnisschwierigkeiten. Ein schönes Anwendungsbeispiel von Gl. (18) ist in /7/ am Beispiel der Brillouin-Streuung zu finden.

Wir wenden den Impulserhaltungssatz auf die erste Grenzfläche an und erhalten

$$N\vec{p}_1 = N(1-\rho)\vec{p}_2 - N\rho\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_w \quad (19)$$

Unter Verwendung von Gl. (18) wird

$$\Delta\vec{p}_w = \left(N \frac{h}{\lambda_0} n_1 - N(1-\rho) \frac{h}{\lambda_0} n_2 + N\rho \frac{h}{\lambda_0} n_1 \right) \vec{e}_z$$

Der Reflexionsgrad $\rho = S_r/S_e = N_r/N$ wird mit Gl. (4) und (7) berechnet zu

$$\rho = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (20)$$

Man erhält ihn auch aus den Fresnelschen Gleichungen als Spezialfall des senkrechten Einfalls. Zum Vorzeichen des Zählers in der Klammer vgl. man wieder /5/ bzw. /6/. Die Umformung des Ausdrucks für Δp_w ergibt für die Impulsaufnahme

$$\Delta\vec{p}_w = N \frac{h}{\lambda_0} \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \vec{e}_z \quad (21)$$

$$N \frac{h}{\lambda_0} = N \frac{hf}{c_0} = \frac{\Delta W}{c_0} \quad \text{mit der einfallenden Strahlungsenergie } \Delta W. \quad (22)$$

Nach Gl. (6) für den Strahlungsdruck wird

$$\Delta p_s \vec{e}_z = \frac{\Delta p_w}{A\Delta t} \vec{e}_z = \frac{\Delta W}{c_0 A\Delta t} \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \vec{e}_z = \frac{(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \frac{2n_1}{c_0} S_e \vec{e}_z \quad (23)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (16) bei der Herleitung im Wellenbild.

Der Strahlungsdruck auf die zweite Grenzfläche wird mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes (vgl. Abb.) analog berechnet. Er liefert für die Impulsaufnahme

$$\Delta \vec{p}'_w = -N \frac{h}{\lambda_0} 8n_1 n_2^2 \frac{n_1 - n_2}{(n_1 + n_2)^3} \vec{e}_z \quad (24)$$

Die analoge Umformung wie für Gl. (23) ergibt für den Strahlungsdruck

$$\Delta p'_s \vec{e}_z = -\frac{S_e}{c_0} 8n_1 n_2^2 \frac{n_1 - n_2}{(n_1 + n_2)^3} \vec{e}_z = -\frac{4n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \Delta p_s \vec{e}_z \quad (25)$$

Sie gibt dasselbe Ergebnis wie Gl. (15).

4. Ausblick

Die Resultate zeigen, daß der Strahlungsdruck und die mechanische Spannung doch recht klein sind, so daß man damit nur sehr kleine Partikel handhaben kann, es sei denn, man verwendet sehr leistungsstarke Laser. Dann besteht aber die Gefahr, die Substanz zu schädigen, vor allem, wenn es sich um organisches Material handelt.

Will man die Rechnung auf kompliziertere Fälle übertragen, z. B. auf die Bestrahlung eines Glaskügelchens, so erhöht sich der Aufwand stark. Doch auch hier steht der Impulserhaltungssatz im Mittelpunkt. Es müssen bei der Anwendung des Reflexions- und Brechungsgesetzes die Fresnelschen Gleichungen verwendet werden, wobei evtl. zusätzlich noch die Absorption der Stoffe berücksichtigt werden muß. Der Einfallswinkel ist von der Position des Strahls auf der Kugeloberfläche abhängig; Mehrfachreflexionen sind möglich. Der Laserstrahl hat eine radiale Intensitätsabhängigkeit.

Mit zirkular polarisierter Laserstrahlung kann auf Partikel auch ein Drehimpuls übertragen werden, so daß diese in Rotation versetzt werden. Im Teilchenbild wird also der Eigendrehimpuls des Photons, d. h. der Photonenspin verwendet und bei der Berechnung der Drehimpulssatz angewendet. Die Rotation kann man noch verstärken, wenn man Lasermoden mit schraubenförmigen Wellenfronten verwendet [2]. Die Intensitätsverteilung ist hier ringförmig; auf der Strahlachse ist die Intensität null. Man kann dann von der Übertragung eines Bahndrehimpulses vom Laserstrahl auf das Teilchen sprechen, analog zum Drehimpulsformalismus z. B. in der Physik der Atomhülle. Die weitere Entwicklung läßt also noch interessante Werkzeuge zur Teilchenmanipulation erwarten.

5. Danksagung

Bei Herrn Prof. Weber von der Technischen Universität Berlin möchte ich mich für die wertvollen Hinweise zur Behandlung des Themas bedanken. Meinem Kollegen Herrn Prof. Lauterbach von der Fachhochschule Nürnberg danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Literatur:

/1/ G. Schweiger: Untersuchung von Transport- und Reaktionsprozessen an kleinsten Stoffmengen in der Laserlichtfalle, Laser und Optoelektronik 29(3) /1997

/2/ M. Padgett, L. Allen: Optical tweezers and spanners, Physics world 10(9) /1997

/3/ M. Weidemüller, R. Grimm: Optische Dipolfallen, Physikalische Blätter 55 /1999, Nr. 12

/4/ Becker/Sauter: Theorie der Elektrizität, 1. Band; B. G. Teubner 1962

/5/ E. Hecht: Optik, Addison-Wesley 1989

/6/ Klein/Furtak: Optik, Springer 1988

/7/ H. Weber in: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik, de Gruyter 1993