

Bemerkungen zur Methode *Variation der Konstanten* – Teil 1

W. Müller, Technische Hochschule Nürnberg, Georg Simon Ohm

Abstract

Im vorliegenden Artikel wird eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 1-ter Ordnung mit Hilfe eines *integrierenden Faktors* gelöst und, aus der dabei gewonnenen allgemeinen Lösung, die Lösungsmethode *Variation der Konstanten* abgeleitet.

Lineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

Wir gehen von der *Standard* - oder *Normalform* einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1-ter Ordnung aus

$$y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \quad (1)$$

mit stetigen Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ und berechnen deren allgemeine Lösung mit Hilfe eines *integrierenden Faktors*.

Wie sich leicht zeigen lässt^{1,2}, besitzt der integrierende Faktor in diesem Fall die Form

$$c \cdot e^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Es gibt demnach unendlich viele Exponentialfunktionen, die sich als integrierender Faktor eignen. Der Einfachheit halber wählen wir $c = 1$ und erhalten als integrierenden Faktor die Funktion

$$e^{F(x)}$$

Multiplizieren wir die Differentialgleichung (1) mit der Funktion $e^{F(x)}$, so folgt daraus

$$e^{F(x)} y'(x) + e^{F(x)} f(x) \cdot y(x) = g(x) e^{F(x)}$$

bzw.

$$\left(y(x) e^{F(x)} \right)' = g(x) e^{F(x)}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$\int \left(y(x) e^{F(x)} \right)' dx = \int g(x) e^{F(x)} dx$$

bzw.

$$y(x) e^{F(x)} = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x) e^{F(x)}$ ist ($G'(x) = g(x) e^{F(x)}$).

Lösen wir die Gleichung nach $y(x)$ auf, so erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{G(x) e^{-F(x)}}_{= y_p(x)} + \underbrace{c e^{-F(x)}}_{= y_h(x)}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= y_p(x) + y_h(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung (2) setzt sich demnach aus zwei Teilen zusammen:

Der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c e^{-F(x)}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung $y_p(x) = G(x) e^{-F(x)}$ der inhomogenen Differentialgleichung (1).

Des Weiteren erkennen wir, dass die Basislösung $e^{-F(x)}$ der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ ebenfalls als Faktor in der partikulären Lösung $y_p(x)$ enthalten ist.

Mit Hilfe dieser beiden Beobachtungen lässt sich die Methode *Variation der Konstanten* begründen.

Variation der Konstanten für eine lineare Differentialgleichung 1-ter Ordnung

Aufgrund der additiven Struktur $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ der gefundenen allgemeinen Lösung (2), lassen sich $y_h(x)$ und $y_p(x)$ getrennt voneinander berechnen:

Nachdem wir $y_h(x) = c e^{-F(x)}$ ermittelt haben – z.B. durch *Trennung der Variablen* –, bestimmen wir mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung $y_p(x)$.

Zur Gewinnung des Ansatzes eignet sich $y_h(x)$, da ihre Basislösung $e^{-F(x)}$ ebenfalls in der partikulären Lösung $y_p(x)$ auftaucht – siehe Gleichung (2). Lediglich die Konstante c in $y_h(x)$ müssen wir noch durch eine unbekannte Funktion $h(x)$ ersetzen.

Der Ansatz für $y_p(x)$ lautet demnach:

$$y_p(x) = h(x) e^{-F(x)}$$

Setzen wir den Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung (1) ein, so erhalten wir eine elementare Differentialgleichung 1-ter Ordnung für die unbekannte Funktion $h(x)$.

Die allgemeine Lösung dieser elementaren Differentialgleichung lautet:

$$h(x) = G(x) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

wobei $G(x)$ wieder eine Stammfunktion von $g(x) e^{F(x)}$ ist.

Für $k = 0$ folgt daraus

$$h(x) = G(x)$$

und damit erhalten wir für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = h(x) e^{-F(x)} = G(x) e^{-F(x)}$$

Die Addition der gefundenen partikulären Lösung $y_p(x) = G(x) e^{-F(x)}$ und der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c e^{-F(x)}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ergibt schließlich die bereits aus Gleichung (2) bekannte allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung.

Schlussbemerkung

Der integrierende Faktor ist eine effiziente Methode zur Bestimmung der allgemeinen Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1-ter Ordnung.

Zusätzlich bietet sie die Möglichkeit, die bekannte Lösungsmethode *Variation der Konstanten* anschaulich herzuleiten.

Literatur

- (1) W.E. Boyce, R.C. DiPrima *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag **1995**
- (2) Martin Braun, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, 2. Auflage, Springer-Verlag **1991**