
**Konvergenz reeller Tschebyscheff-, klassischer
Padé- und L_p -Approximationen, $p > 1$:
Inverse Probleme**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Geographischen Fakultät
der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt

vorgelegt von
Elitsa Nguyen
aus Razlog, Bulgarien

Eichstätt 2017

Referent: Prof. Dr. H.-P. Blatt
Korreferentin: Prof. Dr. R. Kovacheva

Eingereicht am: 05. Mai 2017
Tag der mündlichen Prüfung: 20. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Grundlagen	9
2.1	Notationen	9
2.2	Möbius-Transformation	9
2.3	Hilfsmittel aus der Funktionentheorie	12
2.4	Hilfsmittel aus der Potentialtheorie	13
3	Reelle Tschebyscheff-Approximationen	16
3.1	Charakterisierung	16
3.2	Walsh-Tafel	18
3.3	Ergebnisse von Lungu	23
4	Einfluss der Verteilung der Pole und der Nullstellen der Tschebyscheff-Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion	25
4.1	Einfluss der Verteilung der Pole	26
4.2	Einfluss der Verteilung der Nullstellen	48
5	Padé-Approximationen	64
5.1	Charakterisierung	64
5.2	Padé-Tafel	64
5.3	Gebiet der Beschränktheit und der Konvergenz von Padé-Approximation	65
5.4	Ergebnisse von Lungu und Gonchar	67

6 Einfluss der Verteilung der Pole und der Nullstellen der Padé-Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion	69
6.1 Einfluss der Verteilung der Pole	69
6.2 Einfluss der Verteilung der Nullstellen	90
7 Einfluss der Verteilung der Nullstellen polynomialer L_p-Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion	107
7.1 L_p -Approximationen	107
7.2 Einige Hilfssätze	108
7.3 Einfluss der Nullstellen	110

Danksagung

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Blatt, der mit sehr viel Geduld und wertvollen Ratschlägen zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Im Laufe unserer gemeinsamen Zeit an der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt hat er maßgeblich auch zu meiner persönlichen Entwicklung beigetragen.

Frau Prof. Dr. Ralitza Kovacheva möchte ich für die bereitwillige Übernahme des Korreferates ganz herzlich Dank sagen.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. René Grothmann für zahlreiche motivierende Diskussionen sowie für die Gesprächsbereitschaft bei Fragen und Unklarheiten.

Meinen Eltern und meinem Bruder gilt mein Dank für ihre große Rücksichtnahme und Unterstützung in den letzten Jahren. Für Korrekturlesen bedanke ich mich bei Frau Prof. Dr. Susanne Danz und Herrn Dr. Bernhard Dierolf ganz herzlich.

1 Einleitung

In der Konvergenztheorie der rationalen Approximationen gibt es zwei Typen von Problemen: direkte und inverse. Bei inversen Problemen zieht man Rückschlüsse auf Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion aus der Verteilung der Pole oder Nullstellen der zugehörigen Approximationen. Umgekehrt, bei direkten Problemen, gewinnt man Aussagen über die Konvergenz der Approximationen, die Verteilung der Polstellen und der Nullstellen, den Konvergenzgrad u.s.w., wenn Information über die holomorphe Fortsetzung der approximierten Funktion vorhanden ist.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir inverse Probleme bezüglich reeller Tschebyscheff-, klassischer Padé- und polynomialer L_p -Approximationen, $p > 1$.

Inverse Ergebnisse, im Fall von Tschebyscheff-Approximationen, gibt es seit Mitte des 20. Jahrhunderts. Im Jahr 1952 stellt Bernstein ([3]) einen Zusammenhang zwischen dem Holomorphiegebiet der approximierten Funktion und der Verteilung der Nullstellen der polynomialen Tschebyscheff-Approximationen her. Seine Resultate sind z.B. von Grothmann und Saff ([9]) erweitert worden. Im Jahr 1983 zieht Lungu ([12]) Rückschlüsse auf Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion aus dem Verhalten der Pole der hauptdiagonalen Tschebyscheff-Approximationen $R_{n,n}$. Auch im Fall von hauptdiagonalen Approximationen untersucht Kovacheva ([10]) hinreichende Bedingungen sowohl für holomorphe als auch für meromorphe Fortsetzung der approximierten Funktion. Es gibt ähnliche Zusammenhänge im Fall von Padé-Approximationen, siehe z.B. [13], [7].

Alle bisherigen Untersuchungen beziehen sich auf diagonale Approximationen oder auf Approximationen mit beschränktem Nennergrad. Wir stellen uns daher die Frage, ob ähnliche Zusammenhänge für einen allgemeinen Raum von Approximationen, nämlich die Treppenapproximationen R_{m_k, n_k} , existieren. Diese Frage ist sowohl für Tschebyscheff- (Kapitel 4) als auch für Padé-Approximationen (Kapitel 6) positiv beantwortet. In Kapitel 7 stellen wir einen Zusammenhang zwischen dem Holomorphiegebiet der approximierten Funktion und der Verteilung der Nullstellen der polynomialen L_p -Approximationen, $p > 1$, her. Die entsprechenden Ergebnisse sind die Hauptergebnisse dieser Arbeit.

In Kapitel 2 stellen wir einige Definitionen und Sätze aus der Analysis, der Funktionentheorie und der Potentialtheorie zusammen, die wir in unseren Untersuchungen verwenden.

In Kapitel 3 werden Tschebyscheff-Approximationen eingeführt. Diese sind durch den *Alternantensatz* charakterisiert. Außerdem definieren wir die Walsh-Tafel, mit deren Hilfe die Bedeutung der normalen Indizes erklärt wird. Wir korrigieren dabei den Satz von Meinardus und Strauer.

In Kapitel 4 betrachten wir reellwertige und auf $[-1, 1]$ stetige Funktionen und untersuchen, wie ihre Holomorphieeigenschaften aus dem Verhalten der zugehörigen Tschebyscheff-Approximationen von Typ R_{m_k, n_k} beeinflusst werden. *Hauptsatz 4.3* ist eine Verallgemeinerung des Resultats von Lungu in [12], denn seine Untersuchungen beziehen sich auf den Spezialfall $m_k = n_k = k$, $k \rightarrow \infty$.

Im Beweis des *Hauptsatzes 4.3* unterscheiden wir zwei Fälle, abhängig davon, ob die Grenzpunktmenge der Pole von R_{m_k, n_k} beschränkt oder unbeschränkt ist. In dem Fall einer beschränkten Grenzpunktmenge verwenden wir die Beweisidee aus [12]. Grundlegend in der Beweismethode ist, dass die Nullstellen der Differenz von zwei aufeinanderfolgenden besten Approximationen in $[-1, 1]$ liegen. Dies gilt nach dem Alternantensatz. In dem Fall einer unbeschränkten Grenzpunktmenge wenden wir eine geeignete Transformation an, so dass die Grenzpunktmenge in eine beschränkte Menge abgebildet wird. Damit gelangen wir zu der Situation des ersten Falls, und der Beweis erfolgt ähnlich.

Es liegt nahe, dass die Rolle der Polstellen und der Nullstellen von R_{m_k, n_k} im Beweis des *Hauptsatzes 4.3* austauschbar sind. Wir untersuchen daher, ob ähnliche Zusammenhänge zwischen der Verteilung der Nullstellen und dem Holomorphiegebiet existieren. Der *Hauptsatzes 4.6* gibt eine positive Antwort auf diese Frage. Für den Beweis des *Hauptsatzes 4.6* benötigen wir eine Abschätzung des höchsten Koeffizienten von R_{m_k, n_k} , die in Kapitel 3 enthalten ist.

In Kapitel 5 führen wir die Padé-Approximationen ein, und in Kapitel 6 bekommen wir ähnliche Zusammenhänge wie in Kapitel 4 im Fall von Padé-Approximationen von Typ π_{m_k, n_k} . Wir betrachten eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ mit positivem Konvergenzradius und untersuchen hinreichende Bedingungen für die Existenz einer holomorphen Fortsetzung von f bezüglich des Verhaltens der Pole und der Nullstellen von π_{m_k, n_k} . Die entsprechenden Ergebnisse werden in *Hauptsatz 6.1* und *Hauptsatz 6.4* gegeben. Für deren Beweise verwenden wir wieder die Beweisidee in [12]. Grundlegend im Beweis ist, dass die Nullstellen der Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Padé-Approximationen im Punkt 0 liegen. Dies wird mithilfe der Padé-Tafel gezeigt, die in Analogie zur Walsh-Tafel definiert ist.

In Kapitel 7 führen wir die L_p -Approximationen ein. Wir betrachten stetige und reellwertige Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$, $f \in C[-1, 1]$, und untersuchen hinreichende Bedingungen für die Existenz einer holomorphen Fortsetzung von f bezüglich des Verhaltens der Nullstellen der besten polynomialen L_p -Approximationen, $p > 1$. Die entsprechenden Ergebnisse sind in *Hauptsatz 7.6* gegeben. Für deren Beweise verwenden wir wieder die Beweisidee in [12]. Grundlegend im Beweis ist, dass die Nullstellen der Differenz von zwei aufeinanderfolgenden L_p -Approximationen, $p > 1$, in $[-1, 1]$ liegen (siehe [11]).

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden Definitionen und Sätze aus der Analysis, der Funktionen- und der Potentialtheorie aufgeführt.

2.1 Notationen

Wir bezeichnen mit \mathbb{C} die komplexe Ebene, mit \mathbb{R} die reellen Zahlen und die beiden Erweiterungen mit $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Des Weiteren sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, und \mathbb{Z} sei die Menge der ganzen Zahlen. Für $M \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sei ∂M der Rand von M . Wir definieren für $\varepsilon > 0$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$

$$K(a, \varepsilon) := \begin{cases} \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - a| \leq \varepsilon\} & \text{für } a \neq \infty, \\ \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq \frac{1}{\varepsilon}\} & \text{für } a = \infty. \end{cases}$$

Weiter sei $K_\varepsilon := K(0, \varepsilon)$.

2.2 Möbius-Transformation

Für komplexe Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 mit $s_1 s_4 - s_2 s_3 \neq 0$ heißt die Abbildung

$$w = h(z) = \frac{s_1 z + s_2}{s_3 z + s_4}$$

Möbius-Transformation oder gebrochen lineare Abbildung.

Bekanntermaßen ist h eine von $\overline{\mathbb{C}}$ nach $\overline{\mathbb{C}}$ bijektive Abbildung. Die Umkehrfunktion von h ist H mit

$$z = H(w) = \frac{s_4 w - s_2}{-s_3 w + s_1}.$$

Die Möbius-Abbildungen bilden Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ auf Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$ ab, und zwar Kreisränder auf Kreisränder und Kreisscheiben auf Kreisscheiben. Dabei sind Geraden und Halbebenen in \mathbb{C} Kreise und Kreisscheiben in $\overline{\mathbb{C}}$. Dagegen wird der Kreismittelpunkt i.a. nicht auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet (siehe [18]).

2.1 Definition. Für $z \in \overline{\mathbb{C}}$ sei $\tilde{z} := h(z)$.

Sei $p_m(z) := \sum_{k=0}^m a_k z^k$, wobei $a_k \in \mathbb{R}$. Den Grad von p_m bezeichnen wir mit $\text{Grad}(p_m)$. Wir definieren

$$\tilde{p}_m(w) := (p_m \circ H)(w) =$$

$$\begin{aligned}
&= a_m \left(\frac{s_4 w - s_2}{-s_3 w + s_1} \right)^m + a_{m-1} \left(\frac{s_4 w - s_2}{-s_3 w + s_1} \right)^{m-1} + \dots + a_0 = \\
&= \frac{p_m^0(w)}{(-s_3 w + s_1)^m}, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

wobei

$$p_m^0(w) := \sum_{k=0}^m a_k (s_4 w - s_2)^k (-s_3 w + s_1)^{m-k}.$$

Offenbar ist p_m^0 wieder ein Polynom mit $\text{Grad}(p_m^0) \leq m$.

2.2 Bemerkung. Es gilt $p_m(z) = \tilde{p}_m(\tilde{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, wobei *Definition 2.1* zu beachten ist.

2.3 Hilfssatz. *Äquivalent sind:*

- (a) $w = s_1/s_3$ ist Nullstelle von p_m^0 mit Ordnung μ , $\mu \in \{0, 1, \dots, m\}$;
- (b) $a_{m-\mu} \neq 0$ und $a_k = 0$, $k > m - \mu$.

Beweis: (a) \Rightarrow (b) : Wir zeigen zunächst, dass unter der Voraussetzung in (a) gilt $a_k = 0$, $k > m - \mu$. Wir nehmen das Gegenteil an. Es sei $a_k \neq 0$ für ein k mit $k > m - \mu$. Dann ergibt sich

$$p_m^0(w) = a_0 (-s_3 w + s_1)^m + \dots + a_k (s_4 w - s_2)^k (-s_3 w + s_1)^{m-k}.$$

Hiermit folgt, dass $w = s_1/s_3$ Nullstelle von p_m^0 der Ordnung $m - k < m - (m - \mu) = \mu$ ist, was im Widerspruch zu (a) steht. Damit ist gezeigt, dass $a_k = 0$, $k > m - \mu$.

Wir zeigen nun, dass $a_{m-\mu} \neq 0$. Wir nehmen das Gegenteil an. Damit ergibt sich

$$p_m^0(w) = a_0 (-s_3 w + s_1)^m + \dots + a_{m-\mu-1} (s_4 w - s_2)^{m-\mu-1} (-s_3 w + s_1)^{\mu+1},$$

und folglich ist $w = s_1/s_3$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq \mu + 1$. Dies steht im Widerspruch zu (a).

(b) \Rightarrow (a) : Mit (b) folgt

$$p_m^0(w) = a_0 (-s_3 w + s_1)^m + \dots + a_{m-\mu} (s_4 w - s_2)^{m-\mu} (-s_3 w + s_1)^\mu,$$

wobei $a_{m-\mu} \neq 0$. Folglich ist $w = s_1/s_3$ eine Nullstelle der Ordnung μ . \square

Seien p_m und q_n Polynome mit $\text{Grad}(p_m) \leq m$ und $\text{Grad}(q_n) \leq n$. Weiter sei $r_{m,n} := p_m/q_n$. Mit (2.1) bekommt man

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{m,n}(w) &:= (r_{m,n} \circ H)(w) = \frac{(p_m \circ H)(w)}{(q_n \circ H)(w)} = \\
&= \frac{1}{(-s_3 w + s_1)^{\lambda_{m,n}}} \frac{p_m^0(w)}{q_n^0(w)}, \tag{2.2}
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_{m,n} := m - n$. p_m^0 und q_n^0 sind Polynome mit $\text{Grad}(p_m^0) \leq m$ und $\text{Grad}(q_n^0) \leq n$. Der Grad von $r_{m,n}$ wird mit $\text{Grad}(r_{m,n})$ bezeichnet, und nach Definition gilt:

$$\text{Grad}(r_{m,n}) := \max\{\text{Grad}(p_m), \text{Grad}(q_n)\}.$$

2.4 Hilfssatz. Die Funktion $\tilde{r}_{m,n}$ ist wie in (2.2) definiert.

(a) Sei $\tilde{r}_{m,n}(\infty) \neq 0$. Dann gilt

$$\text{Grad}(p_m^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) + \min\{0, \lambda_{m,n}\}.$$

(b) Sei $\tilde{r}_{m,n}(\infty) \neq \infty$. Dann gilt

$$\text{Grad}(q_n^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) - \max\{0, \lambda_{m,n}\}.$$

Beweis:

(a) : Sei $\lambda_{m,n} \geq 0$. Man bestätigt wegen (2.2)

$$\text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) \leq \max\{\text{Grad}(p_m^0), \lambda_{m,n} + \text{Grad}(q_n^0)\} = \text{Grad}(p_m^0),$$

wobei (a) zu beachten ist. Somit ergibt sich

$$\text{Grad}(p_m^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) = \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) + \min\{0, \lambda_{m,n}\}.$$

Sei nun $\lambda_{m,n} < 0$. Mit (2.2) bekommt man

$$\text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) \leq \max\{|\lambda_{m,n}| + \text{Grad}(p_m^0), \text{Grad}(q_n^0)\} = |\lambda_{m,n}| + \text{Grad}(p_m^0).$$

Hiermit ergibt sich

$$\text{Grad}(p_m^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) - |\lambda_{m,n}| = \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) + \min\{0, \lambda_{m,n}\},$$

was zu zeigen war.

(b) : Sei $\lambda_{m,n} < 0$. Man bestätigt wegen (2.2)

$$\text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) \leq \max\{|\lambda_{m,n}| + \text{Grad}(p_m^0), \text{Grad}(q_n^0)\} = \text{Grad}(q_n^0),$$

wobei (b) zu beachten ist. Hiermit ergibt sich

$$\text{Grad}(q_n^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) = \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) - \max\{0, \lambda_{m,n}\}.$$

Sei nun $\lambda_{m,n} \geq 0$. Mit (2.2) bekommt man

$$\text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) \leq \max\{\text{Grad}(p_m^0), \lambda_{m,n} + \text{Grad}(q_n^0)\} = \lambda_{m,n} + \text{Grad}(q_n^0).$$

Hiermit ergibt sich

$$\text{Grad}(q_n^0) \geq \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) - \lambda_{m,n} = \text{Grad}(\tilde{r}_{m,n}) - \max\{0, \lambda_{m,n}\},$$

was zu zeigen war. \square

Nun betrachten wir zwei Spezialfälle der Möbius-Transformation, die später angewendet werden. Die erste Transformation wird in Kapitel 4 verwendet und die zweite in Kapitel 6.

1.

$$h(z) = \frac{s_1 z + s_2}{s_2 z + s_1} \quad (2.3)$$

mit Umkehrfunktion

$$H(w) = \frac{s_1 w - s_2}{-s_2 w + s_1}, \quad (2.4)$$

wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $s_1 > |s_2|$.

2.

$$h(z) = \frac{s_1 z}{s_2 z + s_3} \quad (2.5)$$

mit Umkehrfunktion

$$H(w) = \frac{s_3 w}{-s_2 w + s_1}, \quad (2.6)$$

wobei $s_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

2.5 Hilfssatz. Für die Funktion $h(z)$ aus (2.3) gilt $h([-1, 1]) = [-1, 1]$.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $z \in [-1, 1]$, so dass $h(z) > 1$ gilt. Damit ergibt sich

$$(s_1 - s_2)z > s_1 - s_2. \quad (i)$$

Man beachtet, dass $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $s_1 > |s_2|$. Damit gilt $s_1 - s_2 > 0$, und somit folgt aus (i): $z > 1$, was seinerseits im Widerspruch zu unserer Voraussetzung steht. Ähnlich zeigt man, dass für $z \in [-1, 1]$ die Ungleichung $h(z) \geq -1$ gilt. Damit folgt die Behauptung. \square

2.3 Hilfsmittel aus der Funktionentheorie

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (zusammenhängende nichtleere offene Menge in \mathbb{C}).

2.6 Definition (Gleichmäßige Konvergenz [16]). Eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $M \subset D$ *gleichmäßig konvergent* gegen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } z \in M.$$

Dann ist die Grenzfunktion eindeutig bestimmt.

2.7 Definition (Kompakte Konvergenz [16]). Man nennt eine Folge bzw. eine Reihe *kompakt konvergent* in D , wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig konvergiert.

2.8 Satz (Konvergenzsatz von Weierstraß [16]). *Es sei f_n eine Folge von in D holomorphen Funktionen, die in D kompakt gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph in D .*

2.9 Definition (analytische Fortsetzung [5]). Sei $M \subset D$ eine Menge mit mindestens einem Häufungspunkt in D und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktion $f^0 : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *analytische Fortsetzung* von f auf D , falls $f(z) = f^0(z)$ für alle $z \in M$ und f^0 in D holomorph ist.

2.10 Satz (Identitätssatz für analytische Funktionen [5]). *Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen auf D , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
 (a) $f = g$;
 (b) *Die Koinzidenzmenge $\{z \in D; f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in dem Gebiet D .*

2.11 Satz (Cauchysche Integralformel [16]). *Es sei die Funktion f holomorph in D . Weiter sei K eine offene Kreisscheibe, die nebst Rand ∂K in D liegt. Dann gilt für alle $z \in K$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei die Kreislinie ∂K entgegen den Uhrzeigersinn zu durchlaufen ist (so dass z zur Linken liegt).

2.12 Definition (nullhomologer Weg [16]). Ein geschlossener Weg γ in D heißt *nullhomolog* in D , falls das Innere von γ , das wir mit $\text{Int}\gamma$ bezeichnen, ganz in D liegt.

2.13 Satz (Residuenformel [16]). *Es sei γ ein einfach geschlossener und nullhomologer Weg in D . Weiter sei A eine endliche Menge in D , so dass kein Punkt von A auf γ liegt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h d\zeta = \sum_{c \in \text{Int}\gamma} \text{res}_c h$$

für jede in $D \setminus A$ holomorphe Funktion h .

2.4 Hilfsmittel aus der Potentialtheorie

Die folgenden Definitionen kann man zum Beispiel in [17] finden.

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Weiter sei ν ein positives Borel-Maß auf $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\text{supp}(\nu) \subseteq K$, wobei $\text{supp}(\nu) := \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ und U die größte offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\nu(U) = 0$ sei. Dann heißt die Funktion $U^\nu : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$U^\nu(z) := \int \log \frac{1}{|z - \xi|} d\nu(\xi),$$

logarithmisches Potential von ν . Über das logarithmische Potential wollen wir nun die logarithmische Kapazität von K definieren. Da dies der einzige Kapazitätsbegriff ist, den wir verwenden, werden wir diesen kurz Kapazität nennen. Sei $\mathcal{M}(K)$ die Menge aller positiven Borel-Maße ν auf $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\text{supp}(\nu) \subseteq K$ und $\nu(K) = 1$. Dann bezeichnen wir für $\nu \in \mathcal{M}(K)$ die *logarithmische* Energie von ν mit

$$I(\nu) := \int U^\nu(z) d\nu(z),$$

und die Robinsche Konstante von K mit

$$V_K := \inf_{\nu \in \mathcal{M}(K)} I(\nu).$$

Ist $V_K < \infty$, so existiert ein eindeutiges Maß $\mu_K \in \mathcal{M}(K)$, so dass $I(\mu_K) = V_K$. In diesem Fall nennen wir μ_K die *Gleichgewichtsverteilung*, U^{μ_K} das *Gleichgewichtspotential* und $\text{cap}(K) := e^{-V_K}$ die (*logarithmische*) *Kapazität* von K . Es gilt stets $\text{supp}(\mu_K) \subseteq \partial K$ und $\text{cap}(K) = \text{cap}(\partial K)$.

Wir sagen eine Eigenschaft gilt für *quasi-jedes* z , wenn die Ausnahmemenge Kapazität null hat.

Im Folgenden sei $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ zusammenhängend und offen mit $\infty \in D$.

2.14 Definition (Greensche Funktion). Es gelte $\text{cap}(\partial D) > 0$. Dann heißt eine Funktion $G : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *Greensche Funktion* zu D mit Pol bei ∞ , wenn gilt:

- (a) G ist nicht-negativ und harmonisch in $D \setminus \{\infty\}$ und für jedes $r > 0$ beschränkt in $D \setminus K(\infty, r)$.
- (b) Für quasi-jedes $\xi \in \partial D$ gilt

$$\lim_{z \rightarrow \xi} G(z) = 0, \quad z \in D.$$

- (c) Die Funktion $G(z) - \log |z|$ ist harmonisch in einer Umgebung von ∞ .

Für jedes Gebiet D mit $\text{cap}(\partial D) > 0$ existiert eine Greensche Funktion mit Pol bei ∞ , und diese ist eindeutig ([6], Kap. VII, Abschnitt 3, Satz 1).

2.15 Definition. Sei D ein Gebiet in $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\text{cap}(\partial D) > 0$. Dann nennen wir einen Punkt $\xi \in \partial D$ *regulär*, falls gilt

$$\lim_{z \rightarrow \xi} G(z) = 0, \quad z \in D.$$

Ist jeder Punkt $\xi \in \partial D$ regulär, so heißt ∂D *regulär*.

Wir nennen ein Gebiet $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ regulär, falls ∂D regulär ist.

2.16 Beispiel. (a) Sei $K = [-1, 1]$. Dann ist $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ zusammenhängend. Außerdem gilt $\text{cap}(\partial D) = \text{cap}(K) = 1/2$. Damit existiert die Greensche Funktion zu D mit Pol bei ∞ , nämlich

$$G(z) := \log |z + (z^2 - 1)^{1/2}|.$$

(b) Sei $K := K(0, \rho)$, mit $\rho > 0$. Dann ist D zusammenhängend. Außerdem gilt $\text{cap}(\partial D) = \text{cap}(\partial K(0, \rho)) = \rho$. Damit existiert die Greensche Funktion zu D mit Pol bei ∞ , nämlich

$$G(z) := \log |z| - \log \rho.$$

2.17 Lemma (Bernstein–Walsh [20]). *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, wobei $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ zusammenhängend und regulär sei. Für jedes Polynom p_n mit $\text{Grad}(p_n) = n$ und für $z \in D$ gilt*

$$|p_n(z)| \leq \|p_n\|_K e^{nG(z)}.$$

3 Reelle Tschebyscheff-Approximationen

3.1 Charakterisierung

Sei $C[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, der Raum der stetigen und reellwertigen auf $[a, b]$ definierten Funktionen. Für $f \in C[a, b]$ sei $\|f\|_{[a, b]} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Mit \mathcal{P}_n bezeichnet man der Raum der algebraischen Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Grad kleiner oder gleich n ist. Wir definieren den Raum

$$\mathcal{R}_{m, n} := \left\{ r_{m, n} = \frac{p_m}{q_n}, p_m \in \mathcal{P}_m, q_n \in \mathcal{P}_n, q_n \neq 0 \right\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{R}_{m, n}$ nennt man rationale Funktionen. Die minimale Abweichung der Funktion f bezüglich des Raumes $\mathcal{R}_{m, n}$ bezeichnen wir mit $\rho_{m, n}$, wobei

$$\rho_{m, n} := \inf_{r_{m, n} \in \mathcal{R}_{m, n}} \|f - r_{m, n}\|_{[a, b]}.$$

Man nennt $R_{m, n}$ *beste Tschebyscheff-Approximation* an f auf $[a, b]$, wenn

$$\|f - R_{m, n}\|_{[a, b]} = \rho_{m, n}.$$

Es folgt nach dem Approximationssatz von Weierstraß ([14]), dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{m, n} = 0, \quad (3.1)$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ fest ist.

Außerdem existiert für jedes $f \in C[a, b]$ genau eine beste Tschebyscheff-Approximation $R_{m, n}$, und sie ist durch den *Alternantensatz* charakterisiert ([1]).

3.1 Satz (Alternantensatz [1]). *Die Funktion*

$$R_{m, n}(x) = \frac{a_{m-\mu}x^{m-\mu} + a_{m-\mu-1}x^{m-\mu-1} + \dots + a_0}{b_{n-\nu}x^{n-\nu} + b_{n-\nu-1}x^{n-\nu-1} + \dots + b_0} = \frac{P_{m-\mu}^*(x)}{Q_{n-\nu}^*(x)},$$

$$P_{m-\mu}^*(x) \text{ und } Q_{n-\nu}^*(x) \text{ teilerfremd,}$$

$$0 \leq \mu \leq m; 0 \leq \nu \leq n; a_{m-\mu} \neq 0; b_{n-\nu} \neq 0$$

ist genau dann die beste rationale Approximation an die Funktion f ($f \in C[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$) im Intervall $[a, b]$ bei gegebenen m und n , wenn die Anzahl der aufeinanderfolgenden Punkte des Intervalles, in denen die Differenz $f(x) - R_{m, n}(x)$ mit wechselndem Vorzeichen den Wert

$$\rho_{m, n} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{m, n}(x)|$$

annimmt, nicht kleiner ist als $m + n + 2 - \min\{\mu, \nu\} =: k_{m, n}$. Ist $R_{m, n}(x) \equiv 0$, so ist diese Anzahl stets $\geq m + 2$.

Sei $R_{m,n} := P_m/Q_n \in \mathcal{R}_{m,n}$ beste Approximation an $f, f \in C[-1, 1]$. Weiter sei $\tilde{R}_{m,n} := (R_{m,n} \circ H)(w) = P_m^0(w)/(-s_2w + s_1)^{\lambda_{m,n}} Q_n^0(w)$, wobei $H(w)$ in (2.4) definiert ist.

3.2 Hilfssatz. Sei a_m der höchste Koeffizient von P_m . Dann gilt:

$$|a_m| \leq 2^m \|f\|_{[-1,1]} \|Q_n\|_{[-1,1]}. \quad (a)$$

Sei a_m^0 der höchste Koeffizient von P_m^0 . Dann gilt:

$$|a_m^0| \leq 2^m \|(-s_2w + s_1)^{\lambda_{m,n}}\|_{[-1,1]} \|f\|_{[-1,1]} \|Q_n^0\|_{[-1,1]}. \quad (b)$$

Beweis: Sei T_m das Tschebyscheff-Polynom mit $\text{Grad}(T_m) = m, m \in \mathbb{N}$. Bekanntlich gilt $\|T_m\|_{[-1,1]} \geq 2^{1-m}$.

(a): Sei $P_m := a_m P_m^1$ mit $P_m^1 \in \mathcal{P}_m$. Damit gilt $a_m P_m^1 = R_{m,n} Q_n$. Somit

$$|a_m| \|P_m^1\|_{[-1,1]} \leq \|R_{m,n}\|_{[-1,1]} \|Q_n\|_{[-1,1]}. \quad (i)$$

Andererseits gilt

$$\|P_m^1\|_{[-1,1]} \geq \|T_m\|_{[-1,1]} \geq 2^{1-m}. \quad (ii)$$

Da $R_{m,n}$ beste Approximation an $f, f \in C[-1, 1]$ ist, gilt

$$\|R_{m,n}\|_{[-1,1]} \leq \|f - R_{m,n}\|_{[-1,1]} + \|f\|_{[-1,1]} \leq 2\|f\|_{[-1,1]}. \quad (iii)$$

Mit (ii) und (iii) bekommt man aus (i)

$$2^{1-m} |a_m| \leq 2\|f\|_{[-1,1]} \|Q_n\|_{[-1,1]}.$$

Damit folgt (a).

(b): Sei $P_m^0 := a_m^0 P_m^2$, wobei $P_m^2 \in \mathcal{P}_m$. Damit gilt

$$a_m^0 P_m^2(w) = \tilde{R}_{m,n}(w) Q_n^0(w) (-s_2w + s_1)^{\lambda_{m,n}}.$$

Somit

$$|a_m^0| \|P_m^2\|_{[-1,1]} \leq \|\tilde{R}_{m,n}\|_{[-1,1]} \|Q_n^0\|_{[-1,1]} \|(-s_2w + s_1)^{\lambda_{m,n}}\|_{[-1,1]}. \quad (iv)$$

Andererseits gilt

$$\|P_m^2\|_{[-1,1]} \geq \|T_m\|_{[-1,1]} \geq 2^{1-m}. \quad (v)$$

Mit *Bemerkung 2.2* folgt $R_{m,n}(z) = \tilde{R}_{m,n}(\tilde{z}), z \in \overline{\mathbb{C}}$. Damit ergibt sich

$$\|\tilde{R}_{m,n}\|_{[-1,1]} = \|R_{m,n}\|_{[-1,1]},$$

wobei $h([-1, 1]) = [-1, 1]$ nach *Hilfssatz 2.5*. Somit ergibt sich mit Hilfe von (iii)

$$\|\tilde{R}_{m,n}\|_{[-1,1]} \leq 2\|f\|_{[-1,1]}. \quad (vi)$$

Mit (v) und (vi) bekommt man aus (iv)

$$2^{1-m} |a_m^0| \leq 2\|f\|_{[-1,1]} \|Q_n^0\|_{[-1,1]} \|(-s_2w + s_1)^{\lambda_{m,n}}\|_{[-1,1]}.$$

Damit folgt (b). \square

3.2 Walsh-Tafel

Man ordnet die besten rationalen Approximationen zu gegebenem f , $f \in C[a, b]$, zweckmäßig in einem Schema an, der so genannten *Walsh-Tafel* (Abb.1). Bekanntlich ist die Walsh-Tafel eine Tafel mit doppeltem Eingang, deren Zeilen und Spalten wir der Reihe nach mit $0, 1, 2, \dots$ numerieren. Das Feld, welches der Spalte mit der Nummer m und der Zeile mit der Nummer n angehört, bezeichnen wir mit (m, n) . Wir schreiben dann in jedes Feld (m, n) die rationale Funktion $R_{m,n}$. In der ersten Zeile dieser Tafel stehen die besten Polynom- Approximationen. Funktionen mit der gleichen Anzahl freier Koeffizienten stehen im Schema auf einer Linie $m + n = N = \text{const}$ (siehe [14]).

n \ m	0	1	2	...
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)	...
1	(0,1)	(1,1)	(2,1)	...
2	(0,2)	(1,2)	(2,2)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Abb. 1

Wir definieren das Quadrat $K_{m,n}^r$ (Abb.2) in der Walsh-Tafel als

$$K_{m,n}^r := \{(i, j) | m \leq i \leq m + r; n \leq j \leq n + r\}$$

mit $R_{i,j} = R_{m,n}$, $(i, j) \in K_{m,n}^r$.

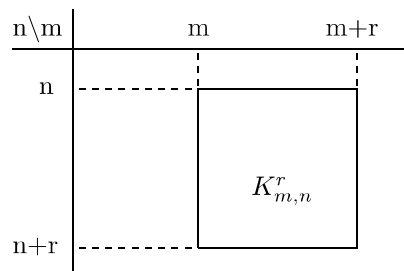


Abb. 2

Bekanntlich (Theorem 24.2 in [19]) ist die Walsh-Tafel in Quadrate aufgeteilt.

Im Folgenden sei $R_{m,n} \in \mathcal{R}_{m,n}$ beste Tschebyscheff-Approximation an f , $f \in C[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3.3 Satz (G. Meinardus und H.-D. Strauer, Satz 94 in [14]). (a) Ist $R_{m,n}(x) = \dots = R_{m+i,n}(x)$, $i = 1, 2, \dots, r$, so gilt auch

$$R_{m,n}(x) = R_{m+i,n+j}(x)$$

für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$.

(b) Ist $0 \neq R_{m,n} = \dots = R_{m,n+j}$, $j = 1, 2, \dots, r$, so gilt auch

$$R_{m,n}(x) = R_{m+i,n+j}(x)$$

für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$.

Wir definieren

$$\mu := m - \text{Grad}(P_m), \quad \nu := n - \text{Grad}(Q_n).$$

3.4 Bemerkung. Satz 3.3 ist in der formulierten Fassung von Meinardus-Strauer nicht gültig für $R_{m,n} \neq 0$. In (a) braucht man noch die Voraussetzung $\nu \leq \mu$ und in (b) $\mu \leq \nu$.

Für den Beweis der Bemerkung 3.4 benötigt man der folgenden

3.5 Hilfssatz. Sei $R_{m,n} \equiv 0$. Dann gilt $R_{i,j} \equiv 0$ für $0 \leq i \leq m$, $j \geq 0$ (Abb.3).

Beweis: Nach der Bedingung des Satzes existiert eine Alternante der Länge $k_{m,n} = m + 2$. Da $k_{m,n} \geq k_{i,n}$ für $i \leq m$ ist, gilt $R_{i,n} \equiv 0$, $i \leq m$. Außerdem ist $k_{m,n}$ unabhängig von n . Somit gilt $k_{m,j} = m + 2$, für $j \geq 0$. Dies heißt $R_{m,j} \equiv 0$ für $j \geq 0$. \square

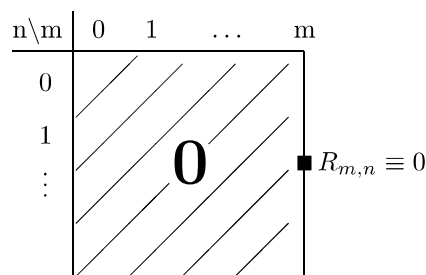


Abb. 3

3.6 Folgerung. Ist $R_{m,n} \neq 0$, dann gilt $R_{i,j} \neq 0$ für $i \geq m$, $j \geq 0$.

Beweis (Bemerkung 3.4): Seien die Bedingungen im Fall (a) erfüllt. Falls $R_{m,n} \equiv 0$, folgt die Behauptung des Satzes nach dem *Hilfssatz 3.5*. Sei nun $R_{m,n} \not\equiv 0$. Dann existiert nach *Satz 3.1* eine Alternante der Länge

$$\begin{aligned} k_{m+r,n} &= m + r + n + 2 - \min(r + \mu, \nu) = \\ &= \begin{cases} m + n + 2 - \mu, & \text{falls } r + \mu < \nu, \\ m + r + n + 2 - \nu, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wenn $R_{m,n}$ beste Approximation bezüglich $\mathcal{R}_{m+r,n+r}$ wäre, dann müsste eine Alternante der Länge

$$\begin{aligned} k_{m+r,n+r} &= m + r + n + r + 2 - \min(r + \mu, r + \nu) = \\ &= \begin{cases} m + n + r + 2 - \mu, & \text{falls } r + \mu < r + \nu, \\ m + r + n + 2 - \nu, & \text{andernfalls} \end{cases} \end{aligned}$$

existieren.

Andererseits bestätigt man, dass $k_{m+r,n} < k_{m+r,n+r}$, falls $\mu < \nu$. Folglich sind die Bedingungen des Satzes nicht hinreichend um daraus zu schließen, dass eine Alternante der Länge $k_{m+r,n+r}$ existiert. Ähnlich ist die Argumentation in Fall (b), wenn $\nu < \mu$. \square

3.7 Satz (korrigierter Satz 3.3). (a) Ist $R_{m,n} = \dots = R_{m+i,n}$, $i = 1, 2, \dots, r$, und $\nu \leq \mu$, so gilt auch

$$R_{m,n} = R_{m+i,n+j}$$

für $0 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq r$;

(b) Ist $0 \not\equiv R_{m,n} = \dots = R_{m,n+j}$, $j = 1, 2, \dots, r$, und $\mu \leq \nu$, so gilt auch

$$R_{m,n} = R_{m+i,n+j}$$

für $0 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq r$.

Beweis: Seien die Bedingungen im Fall (a) erfüllt. Sei zunächst $R_{m,n} \not\equiv 0$. Nach *Satz 3.1* gibt es mindestens $k_{m+r,n} = m + r + n - \nu + 2$ Alternantenpunkte. Wenn gilt $R_{m,n} = R_{m+r,n+r}$, dann müsste eine Alternante der Länge $k_{m+r,n+r} = m + r + n - \nu + 2$ existieren. Es ist aber so. Verschwindet die Funktion $R_{m,n}$ identisch, so folgt die Behauptung nach *Hilfssatz 3.5*. In Fall (b) kann man genau so schließen. \square

3.8 Satz. (a) Ist $R_{m,n} = R_{m+1,n} = \dots = R_{m+r,n}$, so gilt auch

$$R_{m,n} = R_{i,j}$$

für $m - \mu \leq i \leq m - \mu + r_1$ und $n - \nu \leq j \leq n - \nu + r_1$, $r_1 := \mu + r$;

(b) Ist $0 \not\equiv R_{m,n} = R_{m,n+1} = \dots = R_{m,n+r}$, so gilt auch

$$R_{m,n} = R_{i,j}$$

für $n - \nu \leq j \leq n - \nu + r_2$ und $m - \mu \leq i \leq m - \mu + r_2$, $r_2 := \nu + r$.

Beweis: Seien die Bedingungen im Fall (a) erfüllt. Mit *Satz 3.1* bestätigt man leicht, dass $R_{m+r,n} = R_{i,j}$ für $m - \mu \leq i \leq m + r$ und $n - \nu \leq j \leq n$. Somit gilt $R_{m-\mu,n-\nu} = R_{m-\mu+1,n-\nu} = \dots = R_{m+r,n-\nu}$. Die Behauptung folgt nach *Satz 3.7*. In Fall (b) argumentiert man ähnlich. \square

3.9 Hilfssatz. Sei $R_{\mu_1,\nu_1} = R_{\mu_2,\nu_2}$, wobei $(\mu_i, \nu_i) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2$ und $(\mu_1, \nu_1) \neq (\mu_2, \nu_2)$. Dann gibt es einen Quadrat $K_{m,n}^r$ mit $m \leq \min\{\mu_1, \mu_2\}$; $n \leq \min\{\nu_1, \nu_2\}$ und $r \geq \max\{|\mu_1 - \mu_2|, |\nu_1 - \nu_2|\}$, so dass $R_{i,j} = R_{m,n}$ für $(i, j) \in K_{m,n}^r$. Offenbar gilt $(\mu_i, \nu_i) \in K_{m,n}^r$, $i = 1, 2$.

Beweis: Folgt aus dem Alternantensatz.

3.10 Definition (maximales Quadrat). Man nennt das Quadrat $K_{m,n}^r$ *maximal*, wenn $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ für $(i, j) \notin K_{m,n}^r$.

3.11 Satz. Für $R_{m,n}$ seien die Bedingungen von *Satz 3.8* erfüllt.

- (a) Ist $R_{m,n} \neq R_{m+r+1,n}$ im Fall (a), dann ist $K_{m-\mu,n-\nu}^{r_1}$ maximal;
- (b) Ist $R_{m,n} \neq R_{m,n+r+1}$ im Fall (b), dann ist $K_{m-\mu,n-\nu}^{r_2}$ maximal.

Für den Beweis des *Satzes 3.11* benötigt man einige Hilfssätze.

3.12 Hilfssatz. Sei $\gamma := |\mu - \nu|$.

- (a) Ist $\mu \leq \nu$, dann gilt $R_{m,n} = R_{m+1,n} = \dots = R_{m+\gamma,n}$;
- (b) Ist $\mu \geq \nu$, dann gilt $R_{m,n} = R_{m,n+1} = \dots = R_{m,n+\gamma}$.

Beweis (a): Da $\mu \leq \nu$ folgt $k_{m,n} = m - \mu + n + 2 = k_{m+\gamma,n}$. Damit ist $R_{m,n}$ beste Approximation bezüglich $\mathcal{R}_{m+\gamma,n}$, woraus sich die Behauptung ergibt. Im Fall (b) folgt der Beweis ähnlich. \square

3.13 Hilfssatz. Ist $R_{m,n} \neq R_{m+1,n}$, dann gilt auch

$$R_{m,n} \neq R_{i,j}$$

für $j \geq 0$, $i \geq m + 1$ (*Abb.4*).

Beweis: Sei $R_{m,n} \neq 0$. Da $R_{m,n} \neq R_{m+1,n}$ existieren genau $k_{m,n}$ Alternantpunkte. Außerdem folgt nach *Hilfssatz 3.12* mit Kontraposition, dass $\mu > \nu$. Damit gilt $k_{m,n} = n - \nu + m + 2$.

Andererseits gilt für $j \geq n - \nu$, $i \geq m + 1$

$$\begin{aligned} k_{i,j} &= i + j + 2 - \min(i - m + \mu, j - n + \nu) = \\ &= \begin{cases} n - \nu + i + 2, & \text{falls } j - n + \nu \leq i - m + \mu, \\ m - \mu + j + 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit bestätigt man, dass $k_{m,n} < k_{i,j}$, $j \geq n - \nu$, $i \geq m + 1$ und damit $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ für $j \geq n - \nu$, $i \geq m + 1$. Für $j < n - \nu$, $i \geq 0$ gilt offenbar $R_{m,n} \neq R_{i,j}$, da $R_{m,n} = R_{m-\mu,n-\nu} \notin \mathcal{R}_{i,j}$. Für $R_{m,n} \equiv 0$ folgt die Behauptung aus *Folgerung 3.6*. \square

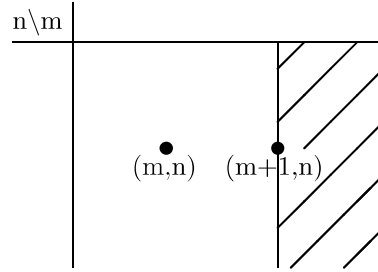


Abb. 4

3.14 Hilfsatz. Ist $R_{m,n} \neq R_{m,n+1}$, dann gilt auch

$$R_{m,n} \neq R_{i,j}$$

für $i \geq 0, j \geq n + 1$ (Abb.5).

Beweis: Da $R_{m,n} \neq R_{m,n+1}$ existieren genau $k_{m,n}$ Alternantenpunkte und $R_{m,n} \neq 0$, wobei *Hilfssatz 3.11* zu beachten ist. Außerdem folgt nach *Hilfssatz 3.12* mit Kontraposition, dass $\mu < \nu$. Damit $k_{m,n} = m - \mu + n + 2$.

Andererseits gilt für $i \geq m - \mu, j \geq n + 1$

$$k_{i,j} := i + j + 2 - \min\{i - m + \mu, j - n + \nu\} = \begin{cases} m - \mu + j + 2, & \text{falls } i - m + \mu \leq j - n + \nu, \\ n - \nu + i + 2, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Somit bestätigt man, dass $k_{m,n} < k_{i,j}$, $i \geq m - \mu, j \geq n + 1$ und damit $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ für $i \geq m - \mu, j \geq n + 1$. Für $i < m - \mu, j \geq 0$ gilt offenbar $R_{m,n} \neq R_{i,j}$, da $R_{m,n} = R_{m-\mu, n-\nu} \notin \mathcal{R}_{i,j}$. \square

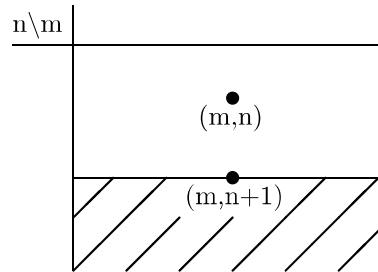


Abb. 5

Beweis (Satz 3.11) (a) : In diesem Fall gilt $R_{m-\mu, n-\nu} = R_{i,j}$ für $(i, j) \in K_{m-\mu, n-\nu}^{r_1}$. Es ist noch zu zeigen, dass $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ für $(i, j) \notin K_{m-\mu, n-\nu}^{r_1}$. Mit *Hilfssatz 3.12* und wegen $R_{m+r, n} \neq R_{m+r+1, n}$ folgt $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ für $j \geq 0$, $i \geq m+r+1$. Nun zeigen wir, dass $R_{m,n} \neq R_{i,j}$ ist für $m-\mu \leq i \leq m+r$, $j \geq n-\nu+r_1+1$. Wir nehmen an, dass solche i und j existieren mit $R_{m,n} = R_{i,j}$. Nach *Satz 3.1* ergibt sich

$$R_{m-\mu, n-\nu} = \dots = R_{m-\mu, j}.$$

Hieraus und mit *Satz 3.8* (b) folgt

$R_{m-\mu, n-\nu} = R_{i,j}$, wobei

$$i \in \{m-\mu, \dots, m-\mu+r_1+1\}, j \in \{n-\nu, \dots, n-\nu+r_1+1\}.$$

Hieraus erhält man einen Widerspruch zu $R_{m,n} \neq R_{m+r+1, n}$. Damit ist unsere Annahme falsch. Also ist gezeigt, dass $K_{m-\mu, n-\nu}^{r_1}$ maximal ist.

Im Fall (b) wendet man *Hilfssatz 3.14* statt *Hilfssatz 3.13* an und die Begründung folgt ähnlich. \square

3.15 Definition (normaler Index). Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Man nennt das Indexpaar (m, n) *normal*, falls $R_{m,n} \notin \mathcal{R}_{m-1, n-1}$. Das heißt, dass entweder $\text{Grad}(P_m) = m$ oder $\text{Grad}(Q_n) = n$ gilt.

3.3 Ergebnisse von Lungu

Sei $R_{n,n} := P_n/Q_n$ beste Tschebyscheff-Approximation an f auf $[-1, 1]$, $f \in C[-1, 1]$, wobei $P_n \in \mathcal{P}_m$ und $Q_n \in \mathcal{P}_n$ teilerfremde Polynome sind. Mit $L_n := \{\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n, l(n)}\}$, $l(n) \leq n$ bezeichnen wir die Menge der Pole in $\overline{\mathbb{C}}$ von $R_{n,n}$.

3.16 Definition (Häufungspunkt von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$). Den Punkt ξ nennt man Häufungspunkt von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$, falls $\xi_n \in L_n$ existiert, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$, $\xi_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.17 Definition (Grenzpunkt von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$). Der Punkt ξ heißt Grenzpunkt von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$, falls $\xi_n \in L_n$ existiert, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$.

3.18 Bemerkung. Jeder Häufungspunkt ist Grenzpunkt. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Sei L die Grenzpunktmenge von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$ und sei l die Häufungspunktmenge von $\{L_n\}_{n=0}^\infty$.

3.19 Satz (Lungu, Theorem 1 in [12]). *Sei $f \in C[-1, 1]$. Es gelte:*

- (a) $L \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (b) $L = l$ endlich.

Dann ist f holomorph fortsetzbar nach $\mathbb{C} \setminus L$.

Für $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und $\varepsilon > 0$ sei $\tau_n(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Pole von $R_{n,n}$ in $K(a, \varepsilon)$. Wir definieren

$$\tau(a, \varepsilon) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n(a, \varepsilon)/n$$

und

$$\tau(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(a, \varepsilon).$$

Der folgenden Satz ist eine Modifizierung von *Satz 3.19*.

3.20 Satz (Lungu, Theorem 2 in [12]). *Sei $f \in C[-1, 1]$. Es gelte:*

- (a) $L \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (b) *Es existiert einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.*

Dann ist f holomorph fortsetzbar auf das Gebiet in $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$, das $[-1, 1]$ enthält.

3.21 Bemerkung. Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$. Dann gilt $a \in L$.

4 Einfluss der Verteilung der Pole und der Nullstellen der Tschebyscheff-Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion

Die Hauptergebnisse dieses Kapitels sind *Hauptsatz 4.3* (Verteilung der Pole) und *Hauptsatz 4.6* (Verteilung der Nullstellen). In *Hauptsatz 4.3* ziehen wir Rückschlüsse auf Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion aus dem Verhalten der Pole der *Treppenapproximationen* R_{m_k, n_k} , wobei das Indexpaar $(m_k, n_k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq m_{k+1} - m_k \leq 1 \\ 0 \leq n_{k+1} - n_k \leq 1 \\ m_k + n_k < m_{k+1} + n_{k+1} \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k/n_k = 1. \quad (4.2)$$

Im speziellen Fall $m_k = n_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ (hauptdiagonale Approximationen) sind die Ergebnisse schon bekannt (siehe *Satz 3.19*, *Satz 3.20*).

Wenn wir die Bedingungen der Pole in *Hauptsatz 4.3* durch ähnliche Bedingungen der Nullstellen ersetzen, bekommen wir *Hauptsatz 4.6*.

4.1 Bemerkung. Seien $m_k, n_k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\max\{m_k, n_k\} \geq k/2, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Einerseits haben wir

$$\max\{m_k, n_k\} \geq \frac{m_k + n_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (i)$$

Andererseits gilt

$$k \leq m_k + n_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (ii)$$

Die Relation (ii) zeigt man leicht per Induktion.

1. Für $k = 0$ gilt offenbar $0 \leq m_0 + n_0$, da $m_0, n_0 \in \mathbb{N}_0$.

2. Wir nehmen an, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $k \leq m_k + n_k$.

Hiermit und wegen (4.1) ergibt sich

$$k + 1 \leq m_k + n_k + 1 < m_{k+1} + n_{k+1} + 1.$$

3. Damit folgt

$$k + 1 \leq m_{k+1} + n_{k+1}.$$

Somit folgt (ii).

Mit (i) und (ii) folgt die Bemerkung. \square

4.2 Bemerkung. Sei $k_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ mit $k_j < k_{j+1}$. Dann gilt

$$j \leq k_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Per Induktion.

4.1 Einfluss der Verteilung der Pole

Für $f \in C[-1, 1]$ sei $R_{m_k, n_k} \in \mathcal{R}_{m_k, n_k}$ beste Approximation an f , wobei das Indexpaar (m_k, n_k) die Bedingungen (4.1) und (4.2) erfülle. Weiter sei $R_{m_k, n_k} := P_{m_k}/Q_{n_k}$, wobei die Polynome P_{m_k} und Q_{n_k} teilerfremd seien und der höchste Koeffizient in Q_{n_k} gleich 1 ist.

Sei $L_k := \{\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von R_{m_k, n_k} , wobei $l(k) := \text{Grad}(R_{m_k, n_k}) \leq \max\{m_k, n_k\} =: M_k$. Als L bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{L_k\}_{k=0}^\infty$. Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir mit $\tau_{M_k}(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Pole von R_{m_k, n_k} in $K(a, \varepsilon)$ (einschließlich Vielfachheiten).

Wir definieren

$$\tau(a, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_{M_k}(a, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tau(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(a, \varepsilon).$$

Es folgt mit den letzten zwei Definitionen, dass für k genügend groß gilt

$$\tau_{M_k}(a, \varepsilon) \geq M_k \tau(a) / 2. \quad (4.3)$$

Die Menge $\mathbb{C} \setminus L$ ist im allgemeinen nicht zusammenhängend. Sei \mathcal{G} die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus L$ mit $[-1, 1] \subset \mathcal{G}$.

4.3 Hauptsatz. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:

- (a) $L \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (b) Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Wir beweisen zunächst den *Hauptsatz 4.3* in dem speziellen Fall $\infty \notin L$ (*Satz 4.4*). Dann führen wir den Beweis für den Fall $\infty \in L$ durch (*Satz 4.5*).

4.4 Satz. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:

- (a) $\infty \notin L$;
- (b) $L \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion. (In der anderen Fall ist der Beweis trivial. Wäre f eine rationale Funktion, nämlich $f := P_m^0/Q_n^0 \in \mathcal{R}_{m,n}$, dann müsste ein Index $K \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $R_{m_k, n_k} = f$, $k \geq K$.)

Wir führen die Beweisidee aus [12] ein. Sei E eine kompakte Menge in \mathcal{G} mit $[-1, 1] \subset E$. Sei $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass (4.3) erfüllt ist für $k \geq \nu_0$. Nach Definition von \mathcal{G} , gibt es einen Index $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $L_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Nun folgt mit (a), dass es ein $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$ gibt, so dass $\infty \notin L_k$, $k \geq \nu_2$.

Sei $d_k := d(E, L_k)$ der Abstand zwischen E und L_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$R_{m_0, n_0}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (R_{m_{k+1}, n_{k+1}} - R_{m_k, n_k})(z). \quad (4.4)$$

Eine zu (4.4) äquivalente Darstellung ergibt sich, wenn wir alle Summanden, die identisch 0 sind ($R_{m_{k+1}, n_{k+1}} = R_{m_k, n_k}$), weglassen. Dazu definieren wir die Menge J als

$$J := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : R_{m_k, n_k} \neq R_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Bemerkung A: J ist unendlich genau dann, wenn f keine rationale Funktion ist.

Beweis (\Rightarrow): Sei J unendlich. Wir zeigen, dass f keine rationale Funktion ist. Annahme: Sei f eine rationale Funktion, $f = R_{m,n}^0 \in \mathcal{R}_{m,n}$. Hiermit und wegen (4.1) existiert einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $R_{m_k, n_k} = R_{m,n}^0$, $k \geq k_0$. Damit ist J endlich, was im Widerspruch zu unserer Voraussetzung steht.

(\Leftarrow): Sei nun f keine rationale Funktion. Wir zeigen, dass J unendlich ist. Annahme: Sei J endlich. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $R_{m_k, n_k} = R_{m_{k+1}, n_{k+1}}$, $k \geq k_0$. Somit gilt

$$\|f - R_{m_k, n_k}\|_{[-1, 1]} = C > 0, \quad k \geq k_0, \quad (i)$$

wobei C eine positive Konstante bezeichne, da $f \neq R_{m_k, n_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Andererseits gilt nach (3.1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - R_{m_k, n_k}\|_{[-1, 1]} = 0,$$

was im Widerspruch zu (i) steht. Damit ist die Annahme falsch. \square

Bemerkung B: Sei $k \in J$. Dann gilt $R_{m_k, n_k} \neq R_{m_{k-1}, n_{k-1}}$ oder äquivalent: (m_k, n_k) ist normal (siehe *Definition 3.15*).

Beweis: Da $k \in J$ gilt $R_{m_k, n_k} \neq R_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Wegen (4.1) unterscheidet man drei Fälle:

$$R_{m_{k-1}, n_{k-1}} = \begin{cases} R_{m_k-1, n_k} & (1), \\ R_{m_k, n_k-1} & (2), \\ R_{m_k-1, n_k-1} & (3). \end{cases}$$

Im Fall (3) ist nichts zu beweisen.

Annahme: Sei $R_{m_k, n_k} = R_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Mit *Hilfssatz 3.9* folgt, dass $R_{m_k, n_k} = R_{m_{k-1}, n_k} = R_{m_k, n_{k-1}}$, was im Widerspruch zu Fall (1) und Fall (2) steht. Damit ist die Annahme falsch. \square

Mit *Bemerkung A* bekommt man die folgende Darstellung, die zu (4.4) äquivalent ist:

$$R_{m_{k_0}, n_{k_0}}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} (R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z), \quad (4.5)$$

wobei $k_j \in J$, $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$ ($k_0 = 0$). Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N}_0 : k_j \geq \nu_2\}$.

Bekanntlich konvergiert die Reihe (4.5) genau dann, wenn die Folgen $\{R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ konvergieren. Wir zeigen, dass die Reihe (4.5) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} D_j(z) &:= R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}(z) - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \\ &= W_j(z) / (Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z), \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei

$$W_j(z) := (P_{m_{k_{j+1}}} Q_{n_{k_j}} - Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(z). \quad (4.7)$$

Bemerkung C: Alle Nullstellen von W_j liegen in $[-1, 1]$ und

$$\text{Grad}(W_j) = \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} =: K_j.$$

Beweis: Da $k_j, k_{j+1} \in J$, folgt

$$R_{m_{k_j}, n_{k_j}} = R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = R_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Hiermit und nach dem *Alternantensatz* (Satz 3.1) bekommt man, dass die Differenz $(f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z)$ mindestens

$$\begin{aligned} & m_{k_{j+1}-1} + n_{k_{j+1}-1} + 2 - \min\{m_{k_{j+1}-1} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}})\} = \\ & = \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} + 1 \end{aligned}$$

Alternantepunkte auf $[-1, 1]$ hat. Da $R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}$ wegen (3.1) eine bessere Approximation als $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ ist, folgt

$$\|f - R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]} < \|f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1, 1]}.$$

Damit hat die Differenz

$$\begin{aligned} & R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}(z) - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \\ & = (f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z) - (f - R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}})(z) \end{aligned}$$

mindestens

$$\max\{m_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\}$$

Nullstellen auf $[-1, 1]$ (sogar auf $(-1, 1)$). Hiermit bestätigt man mit (4.6), dass

$$\begin{aligned} & \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} \leq \\ & \leq \text{Grad}(W_j). \end{aligned} \quad (i)$$

Mit (4.7) folgt

$$\begin{aligned} & \text{Grad}(W_j) \leq \\ & \leq \max\{\text{Grad}(P_{m_{k_{j+1}}}) + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), \text{Grad}(Q_{n_{k_{j+1}}}) + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} \leq K_j. \end{aligned} \quad (ii)$$

Andererseits gilt

$$K_j \leq \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\}. \quad (iii)$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung bestätigt man durch folgende Fallunterscheidung:

$$(m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}) = \begin{cases} (m_{k_{j+1}-1} + 1, n_{k_{j+1}-1}), \\ (m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1} + 1), \\ (m_{k_{j+1}-1} + 1, n_{k_{j+1}-1} + 1), \end{cases}$$

wobei die Bedingung (4.1) zu beachten ist.

Mit (i), (ii) und (iii) folgt die Behauptung. \square

Sei

$$W_j(z) := \mathcal{A}_j W_j^1(z), \quad (4.8)$$

wobei \mathcal{A}_j der höchste Koeffizient von W_j ist und $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(z) = z^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j) = K_j$ nach *Bemerkung C*). Mit (4.8) gilt für z mit $W_j^1(z) \neq 0$:

$$\mathcal{A}_j = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}} Q_{n_{k_j}} - Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(z)}{W_j^1(z)}. \quad (4.9)$$

Bemerkung D: Nach der Wahl von j_0 hat $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ keinen Pol in ∞ für $j \geq j_0$. Damit sind alle Pole von $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ auch Nullstellen von $Q_{n_{k_j}}$ für $j \geq j_0$. Hiermit und wegen (4.3) gibt es in $K(a, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j} \tau(a)/2$ Nullstellen von $Q_{n_{k_j}}$, $j \geq j_0$.

Sei α_{k_j, i_0} eine Nullstelle von $Q_{n_{k_j}}$, $j \geq j_0$ mit $\alpha_{k_j, i_0} \in K(a, \varepsilon)$. Wir setzen $z = \alpha_{k_j, i_0}$ in (4.9) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j = \frac{-(Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(\alpha_{k_j, i_0})}{W_j^1(\alpha_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0,$$

wobei $W_j^1(\alpha_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\alpha_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(z) \neq 0$, $z \notin [-1, 1]$ (siehe *Bemerkung C*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j und unter Berücksichtigung von (4.8) bekommt man aus (4.6)

$$D_j(z) = \frac{-(Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(\alpha_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z)} \frac{W_j^1(z)}{W_j^1(\alpha_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|D_j\|_E \leq \frac{\|W_j^1\|_E}{|W_j^1(\alpha_{k_j, i_0})|} \frac{|(Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(\alpha_{k_j, i_0})|}{\min_{z \in E} |(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z)|}, \quad j \geq j_0. \quad (4.10)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.10) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Weiter bezeichnen wir durch $\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,K_j}$ die Nullstellen von W_j^1 . Da E kompakt ist und wegen $|\zeta_{j,i}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, K_j$ (siehe *Bemerkung C*), bekommen wir die Abschätzung

$$|W_j^1(z)| = \prod_{i=1}^{K_j} |z - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{K_j} (|z| + |\zeta_{j,i}|) \leq c_1^{K_j}, \quad z \in E.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\alpha_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{K_j} |\alpha_{k_j, i_0} - \zeta_{j,i}| \geq d^{K_j}, \quad j \geq j_0,$$

bekommt man

$$\|W_j^1\|_E / |W_j^1(\alpha_{k_j, i_0})| \leq c_2^{K_j}, \quad j \geq j_0, \quad (4.11)$$

wobei $c_2 \geq c_1/d$.

Man erhält für $z \in E$

$$|Q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{k_j,i}| \geq d^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_0,$$

und damit gilt auch für $z \in E$

$$|Q_{n_{k_{j+1}}}(z)| \geq d^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0.$$

Somit

$$1/\min_{z \in E} |(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z)| \leq (1/d)^{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}} \leq c_3^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0, \quad (4.12)$$

wobei $c_3 \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Mit *Bemerkung D* und wegen $\infty \notin L$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & |Q_{n_{k_{j+1}}}(\alpha_{k_j, i_0})| = \\ &= \prod_{|\alpha_{k_{j+1}, i} - \alpha_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\alpha_{k_j, i_0} - \alpha_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\alpha_{k_{j+1}, i} - \alpha_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\alpha_{k_{j+1}, i} - \alpha_{k_j, i_0}| \leq \\ &\leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/2} c_4^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mit Hilfe des *Bernstein-Walsh Lemma* (Lemma 2.17) bekommt man

$$\begin{aligned} |P_{m_{k_j}}(\alpha_{k_j, i_0})| &\leq \|P_{m_{k_j}}\|_{[-1,1]} e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})} \leq \\ &\leq \|R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} \|Q_{n_{k_j}}\|_{[-1,1]} e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei $G(z) := \log |z + (z^2 - 1)^{1/2}|$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, die Greensche Funktion bezüglich des Komplements von $[-1, 1]$ mit Pol bei ∞ ist (siehe *Beispiel 2.16 (a)*).

Nach *Definition 2.14* ist $G(\alpha_{k_j, i_0})$ beschränkt, da $\infty \notin L$. Somit gilt

$$e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})} \leq c_5^{m_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.15)$$

Da $f \in C[-1, 1]$, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \|R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} \leq \\ &\leq \|f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} + \|f\|_{[-1,1]} \leq 2\|f\|_{[-1,1]} =: c_6. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da $\infty \notin L$, bekommt man

$$|Q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|z| + |\alpha_{k_j, i}|) \leq c_7^{n_{k_j}}, \quad z \in [-1, 1]. \quad (4.17)$$

Mit (4.15), (4.16) und (4.17) ergibt sich aus (4.14)

$$|P_{m_{k_j}}(\alpha_{k_j, i_0})| \leq c_8^{M_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.18)$$

Mit (4.11), (4.12), (4.13) und (4.18) bekommt man aus (4.10)

$$\|D_j\|_E \leq (c_9 \varepsilon^{\tau(a)/2})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.19)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\tau(a)/2} < 1/c_9$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\tau(a)/2} c_9 < 1$.

Es folgt mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2*

$$q^{M_{k_{j+1}}} \leq q^{k_{j+1}/2} = \delta^{k_{j+1}} \leq \delta^{j+1},$$

wobei $\delta := q^{1/2}$.

Hiermit bekommt man aus (4.19)

$$\left| \sum_{j=j_0}^{\infty} D_j(z) \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad z \in E.$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_0+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)|$, $z \in E$. Daher konvergiert die Reihe (4.5) und somit auch die Folge $\{R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und somit auch auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} , da E eine beliebige kompakte Teilmenge von \mathcal{G} war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathcal{G} . Andererseits gilt $f(z) = f^0(z)$, $z \in [-1, 1]$ wegen (3.1). Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Der nächste *Satz 4.5* unterscheidet sich vom *Satz 4.4* nur durch die Bedingung (a). Man wendet eine geeignete Möbius-Transformation an, so dass der Punkt ∞ in einen endlichen Punkt abgebildet wird. Damit bekommt man eine ähnliche Situation wie in *Satz 4.4*.

4.5 Satz. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:

- (a) $\infty \in L$;
- (b) $L \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion. Wir wenden die Transformation (siehe (2.3))

$$h(z) := \frac{s_1 z + s_2}{s_2 z + s_1}$$

an, wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $s_1 > |s_2|$.

Man bestätigt, dass $h(\infty) = s_1/s_2 \in \mathbb{R}$ und $h(-s_1/s_2) = \infty$. Wegen (b) kann man die Koeffizienten s_1 und s_2 so wählen, dass $-s_1/s_2 \notin L$ und damit $\infty = h(-s_1/s_2) \notin h(L) =: \tilde{L}$. Damit ist die Menge \tilde{L} beschränkt.

Weiter sei $\tilde{L}_k := h(L_k) = \{\tilde{\alpha}_{k,1}, \tilde{\alpha}_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{k,l(k)}\}$. Nach *Definition 3.17* ist \tilde{L} die Menge der Grenzpunkte von $\{\tilde{L}_k\}_{k=0}^\infty$.

Sei $H(w)$ die Umkehrfunktion von $h(z)$ (siehe (2.4)). Dann bekommt man mit (2.2)

$$\tilde{R}_{m_k, n_k}(w) := (R_{m_k, n_k} \circ H)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_k}} \frac{P_{m_k}^0(w)}{Q_{n_k}^0(w)}, \quad (4.20)$$

wobei $\lambda_k := m_k - n_k$, $P_{m_k}^0 \in \mathcal{P}_{m_k}$, $Q_{n_k}^0 \in \mathcal{P}_{n_k}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient von $Q_{n_k}^0$ gleich 1. Mit *Bemerkung 2.2* gilt $R_{m_k, n_k}(\alpha_{k,j}) = \tilde{R}_{m_k, n_k}(\tilde{\alpha}_{k,j})$, $j = 1, 2, \dots, l(k)$. Damit ist \tilde{L}_k die Menge der Pole von \tilde{R}_{m_k, n_k} .

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ so, dass (c) erfüllt ist. Mit *Bemerkung 3.21* gilt $a \in L$ und damit $\tilde{a} \in \tilde{L}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)$ die Anzahl der Pole von \tilde{R}_{m_k, n_k} in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Weiter sei

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\tau}(\tilde{a}, \varepsilon).$$

Mit den letzten zwei Relationen bestätigt man, dass es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tilde{\tau}(\tilde{a})/2, \quad k \geq \nu_0. \quad (4.21)$$

Bemerkung E: Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann gilt $\tau(a) = \tilde{\tau}(\tilde{a})$.

Beweis: Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir zeigen, dass die Ungleichungen $\tilde{\tau}(\tilde{a}) \leq \tau(a)$ und $\tilde{\tau}(\tilde{a}) \geq \tau(a)$ gleichzeitig erfüllt sind. Es existiert ein $\rho > 0$ und $b(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ mit $K(b(\varepsilon), \rho) := h(K(a, \varepsilon))$. Es gibt ein minimales $R > 0$ und ein maximales $r > 0$, so dass $K(\tilde{a}, r) \subseteq K(b(\varepsilon), \rho) \subseteq K(\tilde{a}, R)$. Dann ergibt sich

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}, r) \leq \tau(a, \varepsilon) = \tilde{\tau}(b(\varepsilon), \rho) \leq \tilde{\tau}(\tilde{a}, R).$$

Da aus $\varepsilon \rightarrow 0$ auch $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow 0$ folgt, gilt die Relation

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}) \leq \tau(a) \leq \tilde{\tau}(\tilde{a}).$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Mit *Bemerkung E* und (4.21) folgt

$$\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tau(a)/2, \quad k \geq \nu_0. \quad (4.22)$$

Sei E eine kompakte Menge mit $[-1, 1] \subset E \subset \tilde{\mathcal{G}}$, wobei $\tilde{\mathcal{G}} := h(\mathcal{G})$. Sei $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, derart, dass $\tilde{L}_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Da $\infty \notin \tilde{L}$, gibt es einen Index $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$, so dass $\infty \notin \tilde{L}_k$, $k \geq \nu_2$. Sei $d_k := d(E, \tilde{L}_k)$ der Abstand zwischen E und \tilde{L}_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar gilt $d > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\tilde{R}_{m_0, n_0}(w) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{R}_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \tilde{R}_{m_k, n_k})(w). \quad (4.23)$$

Sei

$$J^0 := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \tilde{R}_{m_k, n_k} \neq \tilde{R}_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Mit (4.20) gilt $R_{m_k, n_k} = R_{m_{k-1}, n_{k-1}}$ genau dann, wenn $\tilde{R}_{m_k, n_k} = \tilde{R}_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Somit gilt $J^0 \equiv J$ und es ist unendlich nach *Bemerkung A*, da f keine rationale Funktion ist. Hiermit bekommt man eine zu (4.23) äquivalente Darstellung

$$\tilde{R}_{m_{k_0}, n_{k_0}}(w) + \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{R}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}})(w), \quad (4.24)$$

wobei $J^0 = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_2\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (4.24) gleichmäßig auf E konvergiert. Dazu betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &:= (D_j \circ H)(w) = \\ &= ((R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \left(\frac{W_j}{Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w), \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei D_j in (4.6) definiert ist.

Aus (4.25) bekommt man zwei Darstellungen für \tilde{D}_j . Mit (2.2) ergibt sich

$$\tilde{D}_j(w) = \left(\frac{W_j}{Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{W_j^0(w)}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad (4.26)$$

wobei $W_j^0 \in \mathcal{P}_{K_j}$, $(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0) \in \mathcal{P}_{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}}$ und $B_j := K_j - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$ (K_j ist in *Bemerkung C* definiert).

Bemerkung F: Alle Nullstellen von W_j^0 liegen in $[-1, 1]$ und

$$\text{Grad}(W_j^0) = K_j.$$

Beweis: Nach (3.1) gilt

$$(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z) \neq 0, \quad z \in [-1, 1].$$

Hiervon und mit *Bemerkung C* bestätigt man wegen (4.6), dass D_j auch K_j Nullstellen in $[-1, 1]$ hat (Alle Nullstellen von W_j sind auch Nullstellen von D_j).

Nun folgt mit *Bemerkung 2.2*, dass $D_j(z) = \tilde{D}_j(\tilde{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Für $z \in [-1, 1]$ gilt $h(z) \in [-1, 1]$ nach *Hilfssatz 2.5*. Damit hat \tilde{D}_j auch K_j Nullstellen in $[-1, 1]$.

Ähnlich bekommt man $0 \neq Q_{n_{k_j}}(z) = \tilde{Q}_{n_{k_j}}(\tilde{z})$, $z \in [-1, 1]$ und damit

$$0 \neq \tilde{Q}_{n_{k_j}}(w) = \frac{Q_{n_{k_j}}^0(w)}{(-s_2 w + s_1)^{n_{k_j}}}, \quad w \in [-1, 1].$$

Hiermit und wegen

$$-s_2 w + s_1 \neq 0, \quad w \in [-1, 1],$$

folgt

$$Q_{n_{k_j}}^0(w) \neq 0, \quad w \in [-1, 1].$$

Somit bestätigt man wegen (4.26), dass die Anzahl der Nullstellen von W_j^0 auf $[-1, 1]$ gleich die Anzahl der Nullstellen von \tilde{D}_j auf $[-1, 1]$ ist, nämlich K_j . Aber $W_j^0 \in \mathcal{P}_{K_j}$ nach Definition. Somit folgt die Behauptung. \square

Nun bekommen wir aus (4.25) die zweite Darstellung von \tilde{D}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &= ((R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}} \frac{P_{m_{k_{j+1}}}^0(w)}{Q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} - \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}}} \frac{P_{m_{k_j}}^0(w)}{Q_{n_{k_j}}^0(w)} = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\gamma_j}} \frac{W_j^*(w)}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

wobei

$$\gamma_j := \max\{\lambda_{k_j}, \lambda_{k_{j+1}}\} \quad (4.28)$$

mit $\lambda_{k_j} := m_{k_j} - n_{k_j}$ (siehe (4.20)) und

$$W_j^*(w) = \begin{cases} (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_{j+1}} \\ (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_j} \end{cases} \quad (4.29)$$

mit $S(w) := (-s_2w + s_1)^{|\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}|}$.

Wegen (4.28) machen wir zwei Fallunterscheidungen.

1 Fall: $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

Wir vergleichen (4.26) und (4.27). Unter Berücksichtigung von (4.28) und (4.29) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wir zeigen, dass $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Zu diesem Zweck zeigen wir, dass die Relation

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \min\{n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}\} \quad (4.31)$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \geq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$,
- (2) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \leq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$.

Zunächst zeigen wir, dass

$$\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) = m_{k_j} \text{ im Fall (2)}. \quad (4.32)$$

Annahme: $\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) < m_{k_j}$. Da $k_j \in J$ folgt mit *Bemerkung B*, dass $\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$. Hiermit bekommt man im Fall (2)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) - n_{k_j} < m_{k_j} - n_{k_j}$$

oder äquivalent $\lambda_{k_{j+1}} < \lambda_{k_j}$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$. Damit ist die Annahme falsch und somit ist (4.32) gezeigt.

Mit (4.32) bekommt man im Fall (2)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq m_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}),$$

woraus sich nach Subtraktion von λ_{k_j} ergibt

$$\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \leq n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \text{ im Fall (2)}. \quad (4.33)$$

Ähnlich zeigt man die Relation

$$n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \text{ im Fall (1)}. \quad (4.34)$$

Falls $\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$ ist (4.34) offenbar erfüllt, da $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

Sei $\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) < n_{k_j}$. Dann folgt $\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$. Hieraus erhält man im Fall (1)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq m_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}).$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} ergibt sich (4.34).

Mit (4.32) ergibt sich

$$B_j = \begin{cases} \lambda_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) - n_{k_j} & \text{im Fall (1),} \\ \lambda_{k_j} & \text{im Fall (2),} \end{cases} \quad (4.35)$$

wobei $B_j := \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$.
Hiermit gilt

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \begin{cases} n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) & \text{im Fall (1),} \\ \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} & \text{im Fall (2).} \end{cases} \quad (4.36)$$

Mit (4.33), (4.34) und (4.36) bekommt man (4.31).

Mit (4.31) folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Hiermit und wegen (4.30) ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_{j+1}} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $Q_{n_{k_j}}^0$ der Ordnung $n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}})$. Hiermit und mit (4.31) gilt die Darstellung

$$Q_{n_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} Q_{n_{k_j}}^*(w), \quad (4.37)$$

wobei $Q_{n_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{n_{k_j}}$.

Andererseits gilt $C_j := \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \geq 0$ auch wegen (4.31). Hiermit und wegen (4.37) ergibt sich aus (4.30)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} ((P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Weiter sei

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 W_j^1(w), \quad (4.38)$$

wobei $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(w) = w^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j^0) = K_j$ nach *Bemerkung F*). Mit (4.38) gilt für w mit $W_j^1(w) \neq 0$:

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w)}{W_j^1(w)}. \quad (4.39)$$

Nun wollen wir einen Punkt $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $Q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) = 0$ auswählen und $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (4.39) einsetzen. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein solcher Punkt existiert.

Bemerkung G: (a) $Q_{n_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, hat mindestens $M_{k_j}\tau(a)/4$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$;
(b) $Q_{n_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, hat mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$.

Für den Beweis der *Bemerkung G* benötigt man die Bedingung (4.2), denn mit (4.2) folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_{k_j}/n_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} (m_{k_j}/n_{k_j} - 1) = 0. \quad (4.40)$$

Damit gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \tau(a)/4, \quad j \geq j_1. \quad (4.41)$$

Beweis (Bemerkung G)

(a) : Da $\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\infty) \neq \infty$, $j \geq j_0$, gilt nach *Hilfssatz 2.4 (b)*

$$\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}^0) \geq \text{Grad}(\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) - \max\{0, \lambda_{k_j}\}, \quad j \geq j_0.$$

Hiervon und mit (4.22) ergibt sich, dass $Q_{n_{k_j}}^0$, $j \geq j_0$ mindestens

$$M_{k_j}\tau(a)/2 - \max\{0, \lambda_{k_j}\}$$

Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ hat. Mit (4.41) bekommt man

$$\begin{aligned} M_{k_j}\tau(a)/2 - \max\{0, \lambda_{k_j}\} &\geq M_{k_j}\tau(a)/2 - |\lambda_{k_j}| \geq \\ &\geq M_{k_j}\tau(a)/2 - n_{k_j}\tau(a)/4 \geq M_{k_j}\tau(a)/2 - M_{k_j}\tau(a)/4 = \\ &= M_{k_j}\tau(a)/4, \quad j \geq j_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) : Mit (a) und wegen (4.37) ist die Anzahl der Nullstellen von $Q_{n_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mindestens

$$M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j).$$

Mit (4.31) bekommt man

$$\begin{aligned} M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) &\geq M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}) \geq \\ &\geq M_{k_j}\tau(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass

$$M_{k_j}\tau(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\} < 1$$

und zeigen, dass diese Annahme falsch ist. Nach Division durch $M_{k_{j+1}}$ ergibt sich

$$\frac{M_{k_j} \tau(a)/4}{M_{k_{j+1}}} < \frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}}. \quad (4.42)$$

Nun berechnen wir die Grenzwerte der beiden Seiten von (4.42). Wir zeigen, dass der Grenzwert der linken Seite > 0 ist und der Grenzwert der rechten Seite 0 ist, woraus man den gewünschten Widerspruch erhält.

Da $k_j, k_{j+1} \in J^0$ ergibt sich

$$\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}} = \tilde{R}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = \tilde{R}_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Hiermit und wegen $M_{k_j} \geq \text{Grad}(\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \geq \tilde{\tau}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon)$, bekommt man mit (4.22)

$$\begin{aligned} M_{k_j} &\geq \tilde{\tau}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \tilde{\tau}_{M_{k_{j+1}}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \dots = \tilde{\tau}_{M_{k_{j+1}-1}}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq \\ &\geq M_{k_{j+1}-1} \tau(a)/2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die Richtigkeit der Ungleichung

$$M_{k_{j+1}-1} + 1 \geq M_{k_{j+1}} \quad (4.44)$$

bestätigt man wegen

$$\begin{aligned} &M_{k_{j+1}-1} + 1 = \\ &= \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1, n_{k_{j+1}-1} + 1\} = \begin{cases} \max\{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}} + 1\}, \\ \max\{m_{k_{j+1}} + 1, n_{k_{j+1}}\}, \\ \max\{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}\}, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die drei verschiedenen Situationen in der Bedingung (4.1) zu beachten sind.

Mit (4.43) und (4.44) ergibt sich

$$M_{k_j} \geq (M_{k_{j+1}} - 1) \tau(a)/2 = M_{k_{j+1}} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) \tau(a)/2.$$

Damit ergibt sich

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (M_{k_j}/M_{k_{j+1}}) \geq \tau(a)/2 \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) = \tau(a)/2. \quad (4.45)$$

Nun berechnen wir den Grenzwert der rechten Seite von (4.42).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\lambda_{k_j}| \geq |\lambda_{k_{j+1}}|$ (In dem anderen Fall argumentiert man ähnlich). Mit (4.40) bekommt man

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{M_{k_{j+1}}} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{n_{k_j}} = 0.$$

Hiermit und wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} 1/M_{k_{j+1}} = 0$ bekommt man

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}}{M_{k_{j+1}}} \right) = 0. \quad (4.46)$$

Mit (4.45) und (4.46) bekommt man aus (4.42), dass gilt $\tau(a)/8 < 0$. Dies steht im Widerspruch zu $\tau(a) > 0$. Somit ist die Annahme falsch und damit folgt Teil (b). \square

Mit *Bemerkung G (b)* existiert ein Punkt $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $Q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) = 0$, $j \geq j_1$.

Wir setzen $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (4.39) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{-(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(w) \neq 0$, $w \notin [-1, 1]$ (siehe *Bemerkung F*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (4.38) bekommt man aus (4.26)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2 w + s_1)^{-B_j} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \frac{S(\alpha)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $S(\alpha) := (-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}$.

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|W_j^1\|_{\tilde{E}}}{|W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|} \frac{|S(\alpha)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.47) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Definitionsgemäß ist $B_j \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe der bekannten Relation $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ bekommt man:

1. Falls $B_j \leq 0$: Für $w \in \tilde{E}$ gilt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} = |(-s_2 w + s_1)|^{-B_j} \leq c_1^{-B_j},$$

wobei $c_1 := \| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}$.

2. Falls $B_j \geq 0$: Für $w \in \tilde{E}$ gilt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} = \| [(-s_2 w + s_1)^{-1}]^{B_j} \|_{\tilde{E}} = \|(-s_2 w + s_1)^{-1}\|_{\tilde{E}}^{B_j} =$$

$$= 1/|-s_2w + s_1|^{B_j} \leq c_2^{B_j},$$

wobei $c_2 := \|1/(-s_2w + s_1)\|_{\tilde{E}}$.

Insgesamt gilt für $B_j \in \mathbb{Z}$

$$|(-s_2w + s_1)^{-B_j}| \leq c_3^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (4.48)$$

wobei $c_3 := \max\{c_1, c_2\} \geq 1$.

Mit (4.35) folgt $B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}$. Andererseits ergibt sich mit (4.31)

$$0 \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j).$$

Damit bekommt man

$$\lambda_{k_j} \leq B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}.$$

Hieraus und mit (4.41) folgt

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich mit (4.48) ergibt

$$\|(-s_2w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_3^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (4.49)$$

Da $C_j \geq 0$ bekommt man

$$|(-s_2\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| = |-s_2\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|^{C_j}. \quad (4.50)$$

Mit (4.36) folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Hieraus und mit (4.41) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_j &:= \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \leq \\ &\leq |\lambda_{k_j}| + |\lambda_{k_{j+1}}| \leq 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned}$$

Hiermit bekommt man aus (4.50)

$$|(-s_2\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| \leq c_4^{n_{k_{j+1}}}, \quad (4.51)$$

wobei $c_4 := \max\{1, \sup_{k_j \in J} |-s_2\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|\}$.

Mit Hilfe des *Bernstein-Walsh Lemma* (Lemma 2.17) und mit (4.20) bekommt man

$$\begin{aligned} |P_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| &\leq e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \|P_{m_{k_j}}^0\|_{[-1,1]} \leq \\ &\leq e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \|\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} \|(-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j}}\|_{[-1,1]} \|Q_{n_{k_j}}^0\|_{[-1,1]}, \quad (4.52) \end{aligned}$$

wobei $G(z) := \log|z + (z^2 - 1)^{1/2}|$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, die Greensche Funktion bezüglich des Komplements von $[-1, 1]$ mit Pol bei ∞ ist (siehe *Beispiel 2.16 (a)*). Nach *Definition 2.14* ist $G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})$ beschränkt, da $\infty \notin \tilde{L}$. Somit gilt

$$e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \leq c_5^{m_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.53)$$

Mit *Bemerkung 2.2* gilt $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\tilde{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Hiermit und nach *Hilfssatz 2.5* bekommt man

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} &= \|R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} \leq \\ &\leq \|f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} + \|f\|_{[-1,1]} \leq 2\|f\|_{[-1,1]} =: c_6, \end{aligned} \quad (4.54)$$

wobei $f \in C[-1, 1]$ zu beachten ist.

Mit (4.41) ergibt sich

$$\|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}}\|_{[-1,1]} \leq c_7^{|\lambda_{k_j}|} \leq c_7^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_1, \quad (4.55)$$

wobei $c_7 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{[-1,1]}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{[-1,1]}\} \geq 1$.

Da $\infty \notin \tilde{L}$ bekommt man

$$|Q_{n_{k_j}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |w - \tilde{\alpha}_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|w| + |\tilde{\alpha}_{k_j, i}|) \leq c_8^{n_{k_j}}, \quad w \in [-1, 1]. \quad (4.56)$$

Mit (4.53), (4.54), (4.55) und (4.56) bekommt man aus (4.52)

$$|P_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq c_9^{M_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.57)$$

Seien $\zeta_{j,1}, \dots, \zeta_{j,K_j}$ die Nullstellen von W_j^1 . Nach *Bemerkung F* gilt $|\zeta_{j,i}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, K_j$. Hiermit und da \tilde{E} kompakt ist, ergibt sich für $w \in \tilde{E}$

$$|W_j^1(w)| = \prod_{i=1}^{K_j} |w - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{K_j} (|w| + |\zeta_{j,i}|) \leq (|w| + 1)^{K_j} \leq c_{10}^{K_j}.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{K_j} |\zeta_{j,i} - \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}| \geq d^{K_j},$$

ergibt sich

$$\|W_j^1\|_{\tilde{E}} / |W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq c_{11}^{K_j}. \quad (4.58)$$

Man bekommt auch für $w \in \tilde{E}$

$$|Q_{n_{k_j}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |w - \tilde{\alpha}_{k_j, i}| \geq d^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gilt auch für $w \in \tilde{E}$

$$|Q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} |w - \tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i}| \geq d^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0.$$

Somit

$$1/\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)| \leq (1/d)^{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}} \leq c_{12}^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0, \quad (4.59)$$

wobei $c_{12} \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Mit *Bemerkung G (a)* erhalten wir

$$\begin{aligned} & |Q_{n_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| = \\ &= \prod_{|\tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}| \prod_{|\tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}| \leq \\ &\leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/4} c_{13}^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Mit (4.49), (4.51), (4.57), (4.58), (4.59) und (4.60) ergibt sich aus (4.47)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (c_{14} \varepsilon^{\tau(a)/4})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (4.61)$$

2 Fall: $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$.

In diesem Fall bekommen wir eine ähnliche Abschätzung wie in (4.61). Wir vergleichen (4.26) und (4.27). Unter Berücksichtigung von (4.28) und (4.29) erhalten wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Wir zeigen, dass $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Zu diesem Zweck zeigen wir, dass die folgende Gleichung

$$\lambda_{k_j} - B_j = \min\{\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}, m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} \quad (4.63)$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \geq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$,
- (2) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \leq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$.

Zunächst zeigen wir, dass

$$\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) = n_{k_j} \quad \text{im Fall (1)}. \quad (4.64)$$

Annahme: $\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) < n_{k_j}$. Dann folgt $\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$, weil (m_{k_j}, n_{k_j}) normal ist. Hiermit bekommt man im Fall (1)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq m_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) \geq m_{k_j} - n_{k_j}$$

oder äquivalent $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$. Damit ist die Annahme falsch und somit ist (4.64) gezeigt.

Im Fall (1) bekommt man mit (4.64)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) - n_{k_j}.$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} und nach Multiplikation mit -1 bekommen wir

$$\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \leq m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) \text{ im Fall (1)}. \quad (4.65)$$

Ähnlich zeigt man

$$m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \text{ im Fall (2)}. \quad (4.66)$$

Falls $\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$, ist die Relation (4.66) offenbar richtig, da $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$.

Sei $\text{Grad}(P_{m_{k_j}}) < m_{k_j}$. Dann folgt $\text{Grad}(Q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$. Im Fall (2) bekommt man

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq -n_{k_j} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}}).$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} und nach Multiplikation mit -1 ergibt sich (4.66).

Mit (4.64) ergibt sich

$$B_j = \begin{cases} \lambda_{k_{j+1}} & \text{im Fall (1),} \\ \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) - n_{k_j} & \text{im Fall (2),} \end{cases} \quad (4.67)$$

wobei $B_j := \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$.
Hiermit ergibt sich

$$\lambda_{k_j} - B_j = \begin{cases} \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} & \text{im Fall (1),} \\ m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}}) & \text{im Fall (2).} \end{cases} \quad (4.68)$$

Mit (4.65), (4.66) und (4.68) bekommt man (4.63).

Mit (4.63) folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit und wegen (4.62) ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_j} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $P_{m_{k_j}}^0$ der Ordnung $m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$. Hiermit und wegen (4.63) gilt die Darstellung

$$P_{m_{k_j}}^0(w) = (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} P_{m_{k_j}}^*(w), \quad (4.69)$$

wobei $P_{m_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{m_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \geq 0$ auch wegen (4.63). Hiermit und wegen (4.69) ergibt sich aus (4.62)

$$W_j^*(w) =$$

$$= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} ((P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w))$$

und damit

$$W_j^0(w) = (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Weiter sei

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 W_j^1(w), \quad (4.70)$$

wobei $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(w) := w^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j^0) = K_j$ nach *Bemerkung F*). Mit (4.70) ergibt sich für w mit $W_j^1(w) \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w)}{W_j^1(w)}. \quad (4.71)$$

Nach *Bemerkung G* hat $Q_{n_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Sei $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $Q_{n_{k_j}}^0$ mit $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (4.71) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{-(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(w) \neq 0$, $w \notin [-1, 1]$ (siehe *Bemerkung F*). Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (4.70) bekommt man aus (4.26)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2w + s_1)^{-B_j} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \frac{(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1.$$

Somit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \|(-s_2w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|W_j^1\|_{\tilde{E}}}{|W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|} \frac{|(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \quad (4.72)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.72) nach oben ab. Dabei seien C_1, C_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Auf bekannte Art und Weise (siehe Fall 1) bekommen wir

$$\|W_j^1\|_{\tilde{E}} / |W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq C_1^{M_{k_{j+1}}}, \quad (4.73)$$

$$1 / \min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)| \leq C_2^{n_{k_{j+1}}}, \quad (4.74)$$

$$|Q_{n_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/4} C_3^{n_{k_{j+1}}}, \quad (4.75)$$

$$|P_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq C_4^{M_{k_j}} \quad (4.76)$$

und

$$|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}| \leq C_5^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (4.77)$$

wobei $C_5 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}\} \geq 1$.

Mit (4.2) gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \tau(a)/4, \quad j \geq j_1 \geq j_0. \quad (4.78)$$

Mit (4.67) folgt $B_j \leq \lambda_{k_j}$. Andererseits gilt nach (4.63)

$$0 \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j).$$

Damit ergibt sich

$$\lambda_{k_{j+1}} \leq B_j \leq \lambda_{k_j}.$$

Hiervon und mit (4.78) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (4.77) ergibt, dass gilt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (4.79)$$

Mit (4.69) gilt

$$P_{m_{k_j}}^*(w) = P_{m_{k_j}}^0(w)(-s_2 w + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}.$$

Hiermit und mit (4.76) ergibt sich

$$\begin{aligned} |P_{m_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| &= |P_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| \leq \\ &\leq C_4^{M_{k_j}} |(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}|. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Mit (4.67) folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit bekommt man

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| = 1/| -s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1 |^{\lambda_{k_j} - B_j}. \quad (4.81)$$

Mit (4.63) und (4.78) bekommt man

$$\lambda_{k_j} - B_j \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \leq 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} \leq n_{k_{j+1}}.$$

Hiermit ergibt sich aus (4.81)

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| \leq C_6^{n_{k_{j+1}}},$$

wobei $C_6 := \max\{1, \sup_{k_j \in J} \{1/| -s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1 |\}\}$.

Damit bekommt man aus (4.80)

$$|P_{m_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq C_7^{M_{k_j+1}}. \quad (4.82)$$

Mit (4.73), (4.74), (4.75), (4.79) und (4.82) bekommt man aus (4.72)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (\varepsilon^{\tau(a)/4} C_8)^{M_{k_j+1}}, \quad j \geq j_1.$$

Damit haben wir auch im Fall 2 eine Abschätzung ähnlich wie in (4.61) bekommen. Sei $c := \max\{c_{14}, C_8\}$. Da man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\tau(a)/4} < 1/c$ und damit $q := \varepsilon^{\tau(a)/4} c < 1$. Damit bekommt man eine gemeinsame Abschätzung in beiden Fällen:

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq q^{M_{k_j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2* ergibt

$$\left| \sum_{j=j_1}^{\infty} \tilde{D}_j(w) \right| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{M_{k_j+1}} \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad w \in \tilde{E}.$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_1}^{\infty} |D_j(w)|$, $w \in \tilde{E}$. Hiermit konvergiert die Reihe (4.24) und somit auch die Folge $\{\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=j_1}^{\infty}$ gleichmäßig auf \tilde{E} und damit auch auf kompakten Teilmengen von $\tilde{\mathcal{G}}$, da \tilde{E} eine beliebige kompakte Teilmenge von $\tilde{\mathcal{G}}$ war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf $\tilde{\mathcal{G}}$. Andererseits gilt

$$\tilde{f}(w) = f^0(w), \quad w \in [-1, 1].$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt man mit

$$\|\tilde{f} - \tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1, 1]} = \|f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1, 1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

wobei (3.1) zu berücksichtigen ist.

Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von \tilde{f} nach $\tilde{\mathcal{G}}$. Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. Somit ist f holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . ■

Beispiele für *Hauptsatz 4.3* sind die diagonalen Approximationen $\{R_{n+\lambda, n}\}_{n=0}^{\infty}$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$ (beliebig, aber fest).

4.2 Einfluss der Verteilung der Nullstellen

Für $f \in C[-1, 1]$ sei $R_{m_k, n_k} \in \mathcal{R}_{m_k, n_k}$ beste Approximation an f , wobei das Indexpaar (m_k, n_k) die Bedingungen (4.1) und (4.2) erfülle. Weiter sei $R_{m_k, n_k} := P_{m_k}/Q_{n_k}$, wobei die Polynome P_{m_k} und Q_{n_k} teilerfremd seien und der höchste Koeffizient in Q_{n_k} gleich 1 ist.

Sei $L_k := \{\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von R_{m_k, n_k} , wobei $l(k) := \text{Grad}(R_{m_k, n_k}) \leq \max\{m_k, n_k\} =: M_k$. Mit L bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{L_k\}_{k=0}^\infty$. Sei $\mathcal{N}_k := \{\eta_{k,1}, \dots, \eta_{k,l(k)}\}$ die Menge der Nullstellen von R_{m_k, n_k} . Mit \mathcal{N} bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{\mathcal{N}_k\}_{k=0}^\infty$. Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir mit $\psi_{M_k}(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von R_{m_k, n_k} in $K(a, \varepsilon)$ (einschließlich Vielfachheiten).

Wir definieren

$$\psi(a, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_{M_k}(a, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\psi(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(a, \varepsilon).$$

Es folgt mit den letzten zwei Definitionen, dass für k genügend groß gilt

$$\psi_{M_k}(a, \varepsilon) \geq M_k \tau(a)/2. \quad (4.83)$$

Sei \mathcal{G} die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus L$ mit $[-1, 1] \subset \mathcal{G}$.

4.6 Hauptsatz. *Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $(L \cup \mathcal{N}) \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (b) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Wir beweisen zunächst den *Hauptsatz 4.6* in dem speziellen Fall $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$ (*Satz 4.7*). Dann führen wir den Beweis im Fall $\infty \in (L \cup \mathcal{N})$ durch (*Satz 4.8*).

4.7 Satz. *Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$;
- (b) $(L \cup \mathcal{N}) \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion.

Sei E eine kompakte Teilmenge von \mathcal{G} mit $[-1, 1] \subset E$. Sei $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass (4.83) erfüllt ist für $k \geq \nu_0$. Es gibt einen Index $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$ so, dass $L_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Nun folgt mit (a), dass es ein $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$ gibt, so dass $\infty \notin (L_k \cup \mathcal{N}_k)$, $k \geq \nu_2$. Wegen (b) gibt es ein $\nu_3 \in \mathbb{N}$, $\nu_3 \geq \nu_2$, so dass $\mathcal{N}_k \cap [-1, 1] = \emptyset$, $k \geq \nu_3$. Sei $d_k := d(E, L_k)$ der Abstand zwischen E und L_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$.

Nun sei $\bar{d}_k := d([-1, 1], \mathcal{N}_k)$ der Abstand zwischen $[-1, 1]$ und \mathcal{N}_k , $k \geq \nu_3$. Weiter sei $\bar{d} := \min\{\bar{d}_k\}$, $k \geq \nu_3$. Offenbar ist $\bar{d} > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$R_{m_0, n_0}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (R_{m_{k+1}, n_{k+1}} - R_{m_k, n_k})(z). \quad (4.84)$$

Wir definieren die Menge J als

$$J := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : R_{m_k, n_k} \neq R_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Da f keine rationale Funktion ist, folgt mit *Bemerkung A*, dass J unendlich ist. Damit bekommt man eine zu (4.84) äquivalente Darstellung

$$R_{m_{k_0}, n_{k_0}}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} (R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z), \quad (4.85)$$

wobei $J = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N}_0 : k_j \geq \nu_3\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (4.85) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} D_j(z) &:= R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}(z) - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \\ &= W_j(z) / (Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z), \end{aligned} \quad (4.86)$$

wobei

$$W_j(z) := (P_{m_{k_{j+1}}} Q_{n_{k_j}} - Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(z).$$

Sei

$$W_j(z) := \mathcal{A}_j W_j^1(z), \quad (4.87)$$

wobei \mathcal{A}_j der höchste Koeffizient von W_j ist und $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(z) = z^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j) = K_j$ nach *Bemerkung C*). Mit (4.87) gilt für z mit $W_j^1(z) \neq 0$

$$\mathcal{A}_j = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}} Q_{n_{k_j}} - Q_{n_{k_{j+1}}} P_{m_{k_j}})(z)}{W_j^1(z)}. \quad (4.88)$$

Bemerkung H: Nach der Wahl von j_0 hat $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ keine Nullstelle in ∞ für $j \geq j_0$. Damit sind alle Nullstellen von $R_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ auch Nullstellen von $P_{m_{k_j}}$ für $j \geq j_0$. Hiermit und wegen (4.83) gibt es in $K(a, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j} \psi(a)/2$ Nullstellen von $P_{m_{k_j}}$, $j \geq j_0$.

Sei η_{k_j, i_0} eine Nullstelle von $P_{m_{k_j}}$, $j \geq j_0$ mit $\eta_{k_j, i_0} \in K(a, \varepsilon)$. Wir setzen $z = \eta_{k_j, i_0}$ in (4.88) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j = \frac{(P_{m_{k_j+1}} Q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})}{W_j^1(\eta_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0,$$

wobei $W_j^1(\eta_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\eta_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(z) \neq 0$, $z \notin [-1, 1]$ (siehe *Bemerkung C*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j und unter Berücksichtigung von (4.87) bekommt man aus (4.86)

$$D_j(z) = \frac{(P_{m_{k_j+1}} Q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_j+1}})(z)} \frac{W_j^1(z)}{W_j^1(\eta_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|D_j\|_E \leq \frac{\|W_j^1\|_E}{|W_j^1(\eta_{k_j, i_0})|} \frac{|(P_{m_{k_j+1}} Q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})|}{\min_{z \in E} |(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_j+1}})(z)|}, \quad j \geq j_0. \quad (4.89)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.89) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Weiter bezeichnen wir durch $\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,K_j}$ die Nullstellen von W_j^1 . Da E kompakt ist und wegen $|\zeta_{j,i}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, K_j$ nach *Bemerkung C*, bekommt man

$$|W_j^1(z)| = \prod_{i=1}^{K_j} |z - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{K_j} (|z| + |\zeta_{j,i}|) \leq c_1^{K_j}, \quad z \in E.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\eta_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{K_j} |\eta_{k_j, i_0} - \zeta_{j,i}| \geq \bar{d}^{K_j}, \quad j \geq j_0,$$

ergibt sich

$$\|W_j^1\|_E / |W_j^1(\eta_{k_j, i_0})| \leq c_2^{K_j}, \quad j \geq j_0, \quad (4.90)$$

wobei $c_2 > c_1/\bar{d}$.

Man bekommt für $z \in E$

$$|Q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{k_j, i}| \geq d^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gilt auch für $z \in E$

$$|Q_{n_{k_{j+1}}}(z)| \geq d^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0.$$

Somit haben wir

$$1/\min_{z \in E} |(Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}})(z)| \leq (1/d)^{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}} \leq c_3^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0, \quad (4.91)$$

wobei $c_3 \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Sei a_m der höchste Koeffizient von $P_{m_{k_{j+1}}}$. Weiter sei $P_{m_{k_{j+1}}}^1 := a_m P_{m_{k_{j+1}}}^1$, wobei $P_{m_{k_{j+1}}}^1 \in \mathcal{P}_{m_{k_{j+1}}}$.

Mit *Bemerkung H* und wegen $\infty \notin \mathcal{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |P_{m_{k_{j+1}}}(\eta_{k_j, i_0})| &= |a_m| |P_{m_{k_{j+1}}}^1(\eta_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_m| \prod_{|\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \leq \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| > \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq |a_m| \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \psi(a)/2} c_4^{m_{k_{j+1}}}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Mit *Hilfssatz 3.2 (a)* und wegen $f \in C[-1, 1]$ ergibt sich

$$|a_m| \leq 2^{m_{k_{j+1}}} \|f\|_{[-1, 1]} \|Q_{n_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]} \leq c_5^{m_{k_{j+1}}} \|Q_{n_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]}. \quad (4.93)$$

Wegen $\infty \notin L$ ergibt sich

$$|Q_{n_{k_{j+1}}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} |z - \alpha_{k_{j+1}, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} (|z| + |\alpha_{k_{j+1}, i}|) \leq c_6^{n_{k_{j+1}}}, \quad z \in [-1, 1].$$

Hiermit bekommt man aus (4.93)

$$|a_m| \leq c_7^{M_{k_{j+1}}},$$

woraus sich mit (4.92) ergibt, dass gilt

$$|P_{m_{k_{j+1}}}(\eta_{k_j, i_0})| \leq (\varepsilon^{\psi(a)/2} c_8)^{M_{k_{j+1}}}. \quad (4.94)$$

Da $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$, bekommt man

$$|Q_{n_{k_j}}(\eta_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |\eta_{k_j, i_0} - \alpha_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|\eta_{k_j, i_0}| + |\alpha_{k_j, i}|) \leq c_9^{n_{k_j}}. \quad (4.95)$$

Mit (4.90), (4.91), (4.94) und (4.95) bekommt man aus (4.89)

$$\|D_j\|_E \leq (\varepsilon^{\psi(a)/2} c_{10})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.96)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\psi(a)/2} < 1/c_{10}$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\psi(a)/2} c_{10} < 1$.

Mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2* bekommt man aus (4.96)

$$\left| \sum_{j=j_0}^{\infty} D_j(z) \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad z \in E,$$

wobei $\delta := q^{1/2}$.

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_0+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)|$, $z \in E$. Hiermit konvergiert die Reihe (4.84) und damit auch die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=j_0}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und damit auch auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} , da E eine beliebige Teilmenge von \mathcal{G} war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathcal{G} . Andererseits gilt $f(z) = f^0(z)$, $z \in [-1, 1]$ wegen (3.1). Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Der nächste *Satz 4.8* unterscheidet sich vom *Satz 4.7* nur durch die Bedingung (a). Man wendet eine geeignete Transformation an, so dass der Punkt ∞ in einen endlichen Punkt abgebildet wird. Damit bekommt man eine ähnliche Situation wie in *Satz 4.7*.

4.8 Satz. *Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \in (L \cup \mathcal{N})$;
- (b) $(L \cup \mathcal{N}) \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{R_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion.

Wir wenden die Transformation (siehe (2.3))

$$h(z) := \frac{s_1 z + s_2}{s_2 z + s_1}$$

an, wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $s_1 > |s_2|$.

Man bestätigt, dass $h(\infty) = s_1/s_2 \in \mathbb{R}$ und $h(-s_1/s_2) = \infty$. Wegen (b) kann man die Koeffizienten s_1 und s_2 so wählen, dass $-s_1/s_2 \notin (L \cup \mathcal{N})$ und damit $\infty = h(-s_1/s_2) \notin (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$, wobei $\tilde{L} := h(L)$ und $\tilde{\mathcal{N}} := h(\mathcal{N})$. Damit ist die Menge $\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}}$ beschränkt.

Sei $\tilde{L}_k := h(L_k) = \{\tilde{\alpha}_{k,1}, \tilde{\alpha}_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von \tilde{R}_{m_k, n_k} . Weiter sei $\tilde{\mathcal{N}}_k := h(\mathcal{N}_k) = \{\tilde{\eta}_{k,1}, \tilde{\eta}_{k,2}, \dots, \tilde{\eta}_{k,l(k)}\}$ die Menge der Nullstellen von \tilde{R}_{m_k, n_k} , wobei *Bemerkung 2.2* zu beachten ist. Nach *Definition 3.17* ist \tilde{L} bzw. $\tilde{\mathcal{N}}$ die Menge der Grenzpunkte von $\{\tilde{L}_k\}_{k=0}^\infty$ bzw. von $\{\tilde{\mathcal{N}}_k\}_{k=0}^\infty$.

Sei $H(w)$ die Umkehrfunktion von $h(z)$ (siehe (2.4)). Mit (2.2) bekommt man

$$\tilde{R}_{m_k, n_k}(w) := (R_{m_k, n_k} \circ H)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_k}} \frac{P_{m_k}^0(w)}{Q_{n_k}^0(w)}, \quad (4.97)$$

wobei $\lambda_k := m_k - n_k$, $P_{m_k}^0 \in \mathcal{P}_{m_k}$, $Q_{n_k}^0 \in \mathcal{P}_{n_k}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient von $Q_{n_k}^0$ gleich 1.

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ so, dass (c) erfüllt ist. Für $\varepsilon > 0$ sei $\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von \tilde{R}_{m_k, n_k} in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Weiter sei

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\tau}(\tilde{a}, \varepsilon).$$

Mit den letzten zwei Relationen bestätigt man, dass es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)/M_k \geq \tilde{\psi}(\tilde{a})/2, \quad k \geq \nu_0.$$

Hiermit und mit *Bemerkung E* folgt

$$\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \psi(a)/2, \quad k \geq \nu_0. \quad (4.98)$$

Sei \tilde{E} eine kompakte Menge mit $[-1, 1] \subset \tilde{E} \subset \tilde{\mathcal{G}}$, wobei $\tilde{\mathcal{G}} := h(\mathcal{G})$. Sei $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, derart, dass $\tilde{L}_k \cap \tilde{E} = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Weiter sei $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$, so dass $[-1, 1] \cap \tilde{\mathcal{N}}_k = \emptyset$, $k \geq \nu_2$. Da $\infty \notin (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$ gibt es einen Index $\nu_3 \in \mathbb{N}$, $\nu_3 \geq \nu_2$, so dass $\infty \notin (\tilde{L}_k \cup \tilde{\mathcal{N}}_k)$, $k \geq \nu_3$. Sei $d_k := d(\tilde{E}, \tilde{L}_k)$ der Abstand zwischen \tilde{E} und \tilde{L}_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$.

Nun sei $\bar{d}_k := d([-1, 1], \tilde{\mathcal{N}}_k)$ der Abstand zwischen $[-1, 1]$ und $\tilde{\mathcal{N}}_k$, $k \geq \nu_3$. Weiter sei $\bar{d} := \min\{\bar{d}_k\}$, $k \geq \nu_3$. Offenbar ist $\bar{d} > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\tilde{R}_{m_0, n_0}(w) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{R}_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \tilde{R}_{m_k, n_k})(w). \quad (4.99)$$

Sei

$$J^0 := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \tilde{R}_{m_k, n_k} \neq \tilde{R}_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Mit (4.97) gilt $R_{m_k, n_k} = R_{m_{k-1}, n_{k-1}}$ genau dann, wenn $\tilde{R}_{m_k, n_k} = \tilde{R}_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Somit gilt $J^0 \equiv J$ und es ist unendlich nach *Bemerkung A*. Hiermit bekommt man eine zu (4.99) äquivalente Darstellung

$$\tilde{R}_{m_{k_0}, n_{k_0}}(w) + \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{R}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}})(w), \quad (4.100)$$

wobei $J^0 = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_3\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (4.100) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &:= (D_j \circ H)(w) = \\ &= ((R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \left(\frac{W_j}{Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w), \end{aligned} \quad (4.101)$$

wobei D_j in (4.6) definiert ist.

Aus (4.101) erhält man zwei Darstellungen für \tilde{D}_j . Einerseits ergibt sich mit (2.2)

$$\tilde{D}_j(w) = \left(\frac{W_j}{Q_{n_{k_j}} Q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{W_j^0(w)}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad (4.102)$$

wobei $W_j^0 \in \mathcal{P}_{K_j}$, $(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0) \in \mathcal{P}_{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}}$ und $B_j := K_j - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$ (K_j ist in *Bemerkung C* definiert).

Nun bekommen wir die zweite Darstellung für \tilde{D}_j aus (4.101):

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &= ((R_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}} Q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} \frac{P_{m_{k_{j+1}}}^0(w)}{Q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} - \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}} Q_{n_{k_j}}^0(w)} \frac{P_{m_{k_j}}^0(w)}{Q_{n_{k_j}}^0(w)} = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\gamma_j}} \frac{W_j^*(w)}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \end{aligned} \quad (4.103)$$

wobei

$$\gamma_j = \max\{\lambda_{k_j}, \lambda_{k_{j+1}}\} \quad (4.104)$$

mit $\lambda_{k_j} := m_{k_j} - n_{k_j}$ (siehe (4.97)) und

$$W_j^*(w) = \begin{cases} (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) : \gamma_j = \lambda_{k_{j+1}} \\ (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) : \gamma_j = \lambda_{k_j} \end{cases} \quad (4.105)$$

mit $S(w) := (-s_2w + s_1)^{|\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}|}$.

Wegen (4.104) machen wir zwei Fallunterscheidungen.

1 Fall: $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$.

Wir vergleichen (4.102) und (4.103). Unter Berücksichtigung von (4.104) und (4.105) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Mit Hilfe der bekannten Relation (siehe (4.63))

$$\lambda_{k_j} - B_j = \min\{\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}, m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}})\} \quad (4.107)$$

folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_j} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $P_{m_{k_j}}^0$ der Ordnung $m_{k_j} - \text{Grad}(P_{m_{k_j}})$. Hiermit und wegen (4.107) gilt die Darstellung

$$P_{m_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} P_{m_{k_j}}^*(w), \quad (4.108)$$

wobei $P_{m_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{m_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \geq 0$ auch wegen (4.107). Somit und wegen (4.108) ergibt sich aus (4.106)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} ((P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Weiter sei

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 W_j^1(w), \quad (4.109)$$

wobei $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(w) := w^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j^0) = K_j$ nach *Bemerkung F*). Mit (4.109) gilt für w mit $W_j^1(w) \neq 0$:

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w)(-s_2w + s_1)^{C_j} - (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^*)(w)}{W_j^1(w)}. \quad (4.110)$$

Nun wollen wir einen Punkt $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $P_{m_{k_j}}^*(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) = 0$ auswählen und $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (4.110) einsetzen. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein solcher Punkt existiert.

Bemerkung I: (a) $P_{m_{k_j}}^0, j \geq j_1$, hat mindestens $M_{k_j} \psi(a)/4$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$;
(b) $P_{m_{k_j}}^*, j \geq j_1$, hat mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$.

Für den Beweis der *Bemerkung I* benötigt man die Bedingung (4.2), denn mit (4.2) ergibt sich

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_{k_j}/n_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} (m_{k_j}/n_{k_j} - 1) = 0. \quad (4.111)$$

Damit gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \psi(a)/4, \quad j \geq j_1. \quad (4.112)$$

Beweis (Bemerkung I)

(a) : Unter Berücksichtigung, dass $\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\infty) \neq 0$, $j \geq j_0$, gilt nach *Hilfssatz 2.4 (a)*

$$\text{Grad}(P_{m_{k_j}}^0) \geq \text{Grad}(\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) + \min\{0, \lambda_{k_j}\}, \quad j \geq j_0.$$

Hieraus und mit (4.98) folgt, dass $P_{m_{k_j}}^0, j \geq j_0$ mindestens $M_{k_j} \psi(a)/2 + \min\{0, \lambda_{k_j}\}$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ hat. Wir bekommen mit (4.112)

$$\begin{aligned} M_{k_j} \psi(a)/2 + \min\{0, \lambda_{k_j}\} &\geq M_{k_j} \psi(a)/2 - |\lambda_{k_j}| \geq \\ M_{k_j} \psi(a)/2 - n_{k_j} \psi(a)/4 &\geq M_{k_j} \psi(a)/2 - M_{k_j} \psi(a)/4 = \\ &= M_{k_j} \psi(a)/4, \quad j \geq j_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) : Mit Teil (a) und wegen (4.108) ist die Anzahl der Nullstellen von $P_{m_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j} \psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - B_j)$. Wir erhalten mit (4.107)

$$\begin{aligned} M_{k_j} \psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - B_j) &\geq M_{k_j} \psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}) \geq \\ &\geq M_{k_j} \psi(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass

$$M_{k_j} \psi(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} < 1$$

und zeigen, dass diese Annahme falsch ist. Nach Division durch $M_{k_{j+1}}$ ergibt sich

$$\frac{M_{k_j} \psi(a)/4}{M_{k_{j+1}}} < \frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}}. \quad (4.113)$$

Nun berechnen wir die Grenzwerte der beiden Seiten von (4.113). Wir zeigen, dass der Grenzwert der linken Seite > 0 ist und der Grenzwert der rechten Seite 0 ist, woraus sich der gewünschte Widerspruch ergibt.

Da $k_j, k_{j+1} \in J^0$ ergibt sich

$$\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}} = \tilde{R}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = \tilde{R}_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Hiermit und wegen $M_{k_j} \geq \text{Grad}(\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \geq \tilde{\psi}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon)$, bekommt man mit (4.98)

$$\begin{aligned} M_{k_j} &\geq \tilde{\psi}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \tilde{\psi}_{M_{k_{j+1}}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \dots = \tilde{\psi}_{M_{k_{j+1}-1}}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq \\ &\geq M_{k_{j+1}-1} \psi(a)/2. \end{aligned}$$

Hieraus und mit Hilfe der bekannten Relation (siehe (4.44))

$$M_{k_{j+1}-1} + 1 \geq M_{k_{j+1}}$$

ergibt sich

$$M_{k_j} \geq M_{k_{j+1}-1} \psi(a)/2 = M_{k_{j+1}} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) \psi(a)/2.$$

Damit gilt

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (M_{k_j}/M_{k_{j+1}}) \geq \psi(a)/2 \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) = \psi(a)/2. \quad (4.114)$$

Nun berechnen wir den Grenzwert der rechten Seite von (4.113).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\lambda_{k_j}| \geq |\lambda_{k_{j+1}}|$ (In dem anderen Fall argumentiert man ähnlich). Man bekommt mit (4.111)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{M_{k_{j+1}}} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{n_{k_j}} = 0.$$

Hiermit und wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} 1/M_{k_{j+1}} = 0$ erhalten wir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}}{M_{k_{j+1}}} \right) = 0. \quad (4.115)$$

Mit (4.114) und (4.115) bekommt man aus (4.113), dass gilt $\psi(a)/8 < 0$. Dies steht im Widerspruch zu $\psi(a) > 0$. Somit ist die Annahme falsch und damit ist Teil (b) gezeigt. \square

Unter Berücksichtigung *Bemerkung I (b)* sei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $P_{m_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, mit $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (4.110) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})(-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}}{W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(w) \neq 0$, $w \notin [-1, 1]$ (siehe *Bemerkung F*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (4.109) bekommt man aus (4.102)

$$\tilde{D}_j(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})} \frac{S(\eta)(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $S(\eta) := (-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}$.

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|W_j^1\|_{\tilde{E}}}{|W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|} \frac{|S(\eta)(P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.116) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Definitionsgemäß gilt $B_j \in \mathbb{Z}$. Man bekommt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_1^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (4.117)$$

wobei $c_1 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}\} \geq 1$.

Auf bekannte Art und Weise ergibt sich

$$\lambda_{k_{j+1}} \leq B_j \leq \lambda_{k_j}.$$

Hiermit und aus (4.112) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

womit sich aus (4.117) ergibt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_1^{n_{k_{j+1}}}. \quad (4.118)$$

Seien $\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,K_j}$ die Nullstellen von W_j^0 . Da \tilde{E} kompakt ist, bekommt man mit *Bemerkung F*

$$|W_j^1(w)| = \prod_{i=1}^{K_j} |w - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{K_j} (|w| + |\zeta_{j,i}|) \leq c_2^{K_j}.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{K_j} |\zeta_{j,i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| \geq d^{K_j}, \quad j \geq j_0,$$

ergibt sich

$$\|W_j^1\|_{\tilde{E}}/|W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq c_3^{K_j}, \quad j \geq j_0. \quad (4.119)$$

Auf bekannte Art und Weise (siehe (4.74)) gelangen wir zu der Abschätzung

$$1/\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0, Q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)| \leq c_4^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0. \quad (4.120)$$

Sei a_m^0 der höchste Koeffizient von $P_{m_{k_{j+1}}}^0$. Weiter sei $P_{m_{k_{j+1}}}^0 := a_m^0 P_{m_{k_{j+1}}}^1$, wobei $P_{m_{k_{j+1}}}^1 \in \mathcal{P}_{m_{k_{j+1}}}$.

Mit *Bemerkung I (a)* bekommt man

$$\begin{aligned} |P_{m_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| &= |a_m^0| |P_{m_{k_{j+1}}}^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_m^0| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| \leq \\ &\leq |a_m^0| \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \psi(a)/4} c_5^{m_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Mit *Hilfssatz 3.2 (b)* und da $f \in C[-1, 1]$, ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_m^0| &\leq 2^{m_{k_{j+1}}} \|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]} \|f\|_{[-1, 1]} \|Q_{n_{k_{j+1}}}^0\|_{[-1, 1]} \leq \\ &\leq c_6^{m_{k_{j+1}}} \|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]} \|Q_{n_{k_{j+1}}}^0\|_{[-1, 1]}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Wir erhalten

$$\|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}\|_{[-1, 1]} \leq c_7^{|\lambda_{k_{j+1}}|} \leq c_7^{n_{k_{j+1}}}, \quad (4.123)$$

wobei $c_7 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{[-1, 1]}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{[-1, 1]}\} \geq 1$.

Da $\infty \notin \tilde{L}$, ergibt sich

$$\|Q_{n_{k_j}}^0\|_{[-1, 1]} \leq c_8^{n_{k_{j+1}}}. \quad (4.124)$$

Mit (4.123) und (4.124) ergibt sich aus (4.122)

$$|a_m^0| \leq c_9^{M_{k_{j+1}}}.$$

Hiermit bekommt man aus (4.121)

$$|P_{m_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} c_{10})^{M_{k_{j+1}}}. \quad (4.125)$$

Da $\infty \notin (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$, ergibt sich

$$|Q_{n_{k_j}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\alpha}_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|\tilde{\eta}_{k_j, i_0}| + |\tilde{\alpha}_{k_j, i}|) \leq c_{11}^{n_{k_j}}. \quad (4.126)$$

Da $C_j \geq 0$, bekommt man

$$|(-s_2\tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| = |-s_2\tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1|^{C_j}. \quad (4.127)$$

bekommt Mit (4.107) folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Hieraus und mit (4.112) ergibt sich

$$C_j := \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1.$$

Hiermit bekommt man aus (4.127)

$$|(-s_2\tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| \leq c_{12}^{n_{k_{j+1}}}, \quad (4.128)$$

wobei $c_{12} := \max\{1, \sup_{k_j \in J} |-s_2\tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1|\}$.

Mit (4.118), (4.119), (4.120), (4.125), (4.126) und (4.128) ergibt sich aus (4.116)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} c_{13})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (4.129)$$

2 Fall: $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

In diesem Fall bekommen wir eine zu (4.129) ähnliche Abschätzung. Wir vergleichen (4.102) und (4.103). Unter Berücksichtigung von (4.104) und (4.105) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (4.130)$$

Mit Hilfe der bekannten Relation (siehe (4.31))

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \min\{n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}}), \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}\}, \quad (4.131)$$

folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_{j+1}} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $Q_{n_{k_j}}^0$ der Ordnung $n_{k_j} - \text{Grad}(Q_{n_{k_j}})$. Hiervon und mit (4.131) gilt die Darstellung

$$Q_{n_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} Q_{n_{k_j}}^*(w), \quad (4.132)$$

wobei $Q_{n_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{n_{k_j}}$.

Andererseits ist $C_j := \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \geq 0$ ebenfalls mit (4.131). Somit und wegen (4.132) ergibt sich aus (4.130)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} ((P_{m_{k_{j+1}}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_{j+1}}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (P_{m_{k_j+1}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2 w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_j+1}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Weiter sei

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 W_j^1(w), \quad (4.133)$$

wobei $W_j^1 \in \mathcal{P}_{K_j}$ mit $W_j^1(w) = w^{K_j} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j^0) = K_j$ nach *Bemerkung F*). Mit (4.133) gilt für w mit $W_j^1(w) \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_j+1}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2 w + s_1)^{C_j} (Q_{n_{k_j+1}}^0 P_{m_{k_j}}^0)(w)}{W_j^1(w)}. \quad (4.134)$$

Nach *Bemerkung I* existiert ein $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $P_{m_{k_j}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) = 0$, $j \geq j_1$. Wir setzen $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (4.134) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(P_{m_{k_j+1}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ (siehe *Bemerkung F*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (4.133) bekommt man aus (4.102)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2 w + s_1)^{-B_j} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})} \frac{(P_{m_{k_j+1}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_j+1}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1.$$

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|W_j^1\|_{\tilde{E}}}{|W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|} \frac{|(P_{m_{k_j+1}}^0 Q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_j+1}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.135) nach oben ab. Dabei seien C_1, C_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Auf bekannte Art und Weise (siehe Fall 1) bekommen wir

$$\|W_j^1\|_{\tilde{E}} / |W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq C_1^{K_j}, \quad (4.136)$$

$$1 / \min_{w \in \tilde{E}} |(Q_{n_{k_j}}^0 Q_{n_{k_j+1}}^0)(w)| \leq C_2^{n_{k_j+1}}, \quad (4.137)$$

$$|P_{m_{k_j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq (\varepsilon^{b(a)/4} C_3)^{M_{k_j+1}}, \quad (4.138)$$

$$|Q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq C_4^{n_{k_j}} \quad (4.139)$$

und

$$|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}| \leq C_5^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (4.140)$$

wobei $C_5 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}\} \geq 1$.

Man bestätigt, dass

$$\lambda_{k_j} \leq B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}.$$

Hieraus und mit (4.112) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (4.140) ergibt, dass gilt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (4.141)$$

Mit (4.136)-(4.139) und (4.141) bekommt man aus (4.135)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (C_6 \varepsilon^{\psi(a)/4})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1.$$

Damit haben wir auch im Fall 2 eine zu (4.129) ähnliche Abschätzung bekommen. Sei $c := \max\{c_{13}, C_6\}$. Da man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\psi(a)/2} < 1/c$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\psi(a)/2} c < 1$. Somit bekommen wir eine gemeinsame Abschätzung für den beiden Fällen:

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq q^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2* ergibt

$$\left| \sum_{j=j_1}^{\infty} \tilde{D}_j(w) \right| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad w \in \tilde{E},$$

wobei $\delta := q^{1/2}$.

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_1}^{\infty} |D_j(w)|$, $w \in \tilde{E}$. Hiermit konvergiert die Reihe (4.85) und somit auch die Folge $\{\tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=j_1}^{\infty}$ gleichmäßig auf \tilde{E} und damit auch auf kompakten Teilmengen von $\tilde{\mathcal{G}}$, da \tilde{E} eine beliebige kompakte Teilmenge von $\tilde{\mathcal{G}}$ war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 auf $\tilde{\mathcal{G}}$ holomorph. Andererseits gilt

$$\tilde{f}(w) = f^0(w), \quad w \in [-1, 1].$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt man wegen

$$\|\tilde{f} - \tilde{R}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} = \|f - R_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{[-1,1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

wobei (3.1) zu beachten ist.

Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von \tilde{f} nach $\tilde{\mathcal{G}}$ und f^0 ist eindeutig bestimmt nach dem *Identitätssatz 2.10*. Damit ist $f = \tilde{f} \circ H$ holomorph auf \mathcal{G} . ■

Beispiele für *Hauptsatz 4.6* sind die diagonalen Approximationen $\{R_{n+\lambda, n}\}_{n=0}^{\infty}$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$ (beliebig, aber fest).

5 Padé-Approximationen

5.1 Charakterisierung

Sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu}$ eine formale Potenzreihe mit $f_0 \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei \mathcal{P}_n der Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Zu jedem Indexpaar $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ existieren Polynome $p_m \in \mathcal{P}_m$ und $q_n \in \mathcal{P}_n$, $q_n \neq 0$, so dass gilt

$$q_n(z)f(z) - p_m(z) = O(z^{m+n+1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

wobei die Bezeichnung $O(z^{m+n+1})$ bedeutet, dass die Potenzen von z bis zur $(m+n)$ -ten einschließlich herausfallen.

Man nennt $\pi_{m,n} := p_m/q_n$ *Padé-Approximation* an f . Bekanntlich ist $\pi_{m,n}$ in ihrer irreduziblen Form (das Zählerpolynom und das Nennerpolynom von $\pi_{m,n}$ haben keine gemeinsame Faktoren) eindeutig ([15]).

Sei $\tilde{\pi}_{m,n} := (\pi_{m,n} \circ H)(w) = p_m^0(w)/(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{m,n}} q_n^0(w)$, wobei $p_m^0 \in \mathcal{P}_m$, $q_n^0 \in \mathcal{P}_n$ und $H(w)$ in (2.6) gegeben ist.

5.2 Padé-Tafel

Bekanntermaßen ist die Padé-Tafel eine Tafel mit doppeltem Eingang, deren Zeilen und Spalten wir der Reihe nach mit $0, 1, 2, \dots$ numerieren (Abb.6). Das Feld, welches der Zeile mit der Nummer n und der Spalte mit der Nummer m angehört, bezeichnen wir mit $[m/n]$. Wir schreiben dann in jedes Feld $[m/n]$ den Bruch p_m/q_n . Die so konstruierte Tafel von rationalen Funktionen nennen wir die zur Funktion f gehörige "Padé-Tafel" ([15]).

$n \backslash m$	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Abb. 6

5.1 Satz (siehe [15], S.237, Satz 5.1). *Zu jeder Potenzreihe $f(z) := f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots$ ($f_0 \neq 0$) und zu jedem Wertepaar (m, n) der Folge $0, 1, 2, \dots$ gibt es ein und nur ein Paar von teilerfremden Polynomen p_m, q_n derart, dass $p_m(0) = f_0$, $q_n(0) = 1$ ist, und dass eine Potenz z^{λ} existiert ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$), für welche*

$z^\lambda p_m(z)$ höchstens vom m -ten, $z^\lambda q_n(z)$ höchstens vom n -ten Grad ist, während gleichzeitig aus der formal gebildeten Potenzreihe

$$z^\lambda [f(z)q_n(z) - p_m(z)]$$

die Potenzen von z bis zur einschließlich $(m+n)$ -ten herausfallen.

5.2 Satz (siehe [15], S.241, Satz 5.2). *In der zu einer Potenzreihe $f(z)$ gehörigen Padé-Tafel bilden die Felder, in denen ein und derselbe (irreduzible) Tafelbruch p/q auftritt, ein Quadrat. Ist p vom m -ten, q vom n -ten Grad, und beginnt die Potenzreihe $f q - p$ mit der Potenz $z^{m+n+r+1}$, so muss $r \geq 0$ sein, und das Quadrat umfaßt die $(r+1)^2$ Felder:*

$$[m + r_1/n + r_2](r_1, r_2 = 0, 1, \dots, r).$$

5.3 Gebiet der Beschränktheit und der Konvergenz von Padé-Approximation

5.3 Hilfssatz. *Sei $\rho' > \rho > 0$ und f eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ' . Gibt es einen Index $N := N(\rho) \in \mathbb{N}$, so dass für $m+n \geq N$ gilt $q_n(z) \neq 0, z \in K_\rho$, dann gilt für jedes Indexpaar $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $m+n \geq N$*

$$\max_{z \in K_{\alpha\rho}} |\pi_{m,n}(z)| \leq (1 + \alpha^{m+n+1} 2^n / (1 - \alpha)^{n+1}) \|f\|_{K_\rho}, \quad (a)$$

wobei $0 < \alpha < 1$.

Ist $\lim_{m+n \rightarrow \infty} m/n = 1$, dann gilt für $0 < \alpha < 1/2$

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} \|f - \pi_{m,n}\|_{K_{\alpha\rho}} = 0. \quad (b)$$

Bemerkung J: Im Fall $m = n$ hat Kovacheva ([8]) bewiesen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \pi_{n,n}\|_{K_{\alpha\rho}} = 0,$$

wobei $\alpha = 1/\sqrt{3}$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$\phi_{m,n}(z) := (f - \pi_{m,n})(z)q_n(z)z^{-(m+n+1)}.$$

Mit (5.1) bestätigt man, dass $\phi_{m,n}$ in K_ρ holomorph ist. Dank der *Cauchyschen Integralformel* (Satz 2.11) gilt

$$\phi_{m,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{\phi_{m,n}(t)}{t-z} dt, \quad z \in K_\rho, \quad (i)$$

wobei die Kreislinie $|t| = \rho$ entgegen den Uhrzeigersinn zu durchlaufen ist (so dass $z = 0$ zur Linken liegt). Unter Berücksichtigung, dass $q_n(z) \neq 0$, $z \in K_\rho$ für $m + n \geq N$ multipliziert man beide Seiten von (i) mit $q_n^{-1}(z)z^{m+n+1}$ und bekommt für $|z| < \rho$

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_{m,n}(z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \left(\frac{z}{t}\right)^{m+n+1} \frac{q_n(t)(f - \pi_{m,n})(t)}{q_n(z)(t-z)} dt, \quad m+n \geq N. \end{aligned} \quad (ii)$$

Nun zeigen wir, dass für $|z| < \rho$ gilt

$$\int_{|t|=\rho} \frac{p_m(t)}{t^{m+n+1}(t-z)} dt = 0. \quad (iii)$$

Nach der *Residuenformel* (Satz 2.13) für

$$F(t) := p_m(t)t^{-(m+n+1)}(t-z)^{-1}, \quad |z| < \rho$$

bekommt man

$$\int_{|t|=\rho} F(t) dt = -2\pi i \operatorname{Res}_\infty F(t), \quad (iv)$$

wenn man beachtet, dass $F(t)$ in $|t| \geq \rho$ holomorph ist. Da $F(t)$ holomorph in ∞ ist, besitzt sie die Gestalt

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{-i}. \quad (v)$$

Bekanntermaßen ist $\operatorname{Res}_\infty F(t) = c_1$. Sei $p_m(z) := \sum_{j=0}^m a_j z^j$. Da $|z/t| < 1$ ist, bekommt man die Darstellung

$$\begin{aligned} F(t) &:= \frac{a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_0}{t^{m+n+2}(1-z/t)} = \\ &= \frac{(a_m + a_{m-1} t^{-1} + \dots + a_0 t^{-m})}{t^{n+2}} \sum_{j=0}^{\infty} (z/t)^j. \end{aligned} \quad (vi)$$

Hiervon und mit (v) bestätigt man, dass $c_1 = 0$. Somit und mit (iv) folgt (iii). Mit (ii) bekommt man für $|z| < \rho$

$$\begin{aligned} |f(z) - \pi_{m,n}(z)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=\rho} \left|\frac{z}{t}\right|^{m+n+1} \frac{|q_n(t)|}{|q_n(z)|} \frac{|f(t)|}{|t-z|} dt, \quad m+n \geq N. \end{aligned} \quad (vii)$$

Sei $l(n) := \operatorname{Grad}(q_n)$, $l(n) \leq n$. Weiter sei $P_n := \{\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots, \alpha_{n,l(n)}\}$ die Menge der Nullstellen von q_n . Nach Voraussetzung gilt $P_n \cap K_\rho = \emptyset$, $m+n \geq N$. Somit bekommt man für $z \in K_{\alpha\rho}$, $0 < \alpha < 1$ und $m+n \geq N$ die Abschätzung

$$\frac{|t - \alpha_{n,j}|}{|z - \alpha_{n,j}|} \leq \frac{|t| + |\alpha_{n,j}| - |z| + |z|}{|\alpha_{n,j}| - |z|} =$$

$$= 1 + \frac{|t| + |z|}{|\alpha_{n,j}| - |z|} \leq 1 + \frac{\rho + \alpha\rho}{\rho - \alpha\rho} = \frac{2}{1 - \alpha}, \quad j \in \{1, 2, \dots, l(n)\}. \quad (viii)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchsten Koeffizient in q_n gleich 1. Mit (viii) bekommt man

$$\left| \frac{q_n(t)}{q_n(z)} \right| = \prod_{j=1}^{l(n)} \frac{|t - \alpha_{n,j}|}{|z - \alpha_{n,j}|} \leq \left(\frac{2}{1 - \alpha} \right)^n, \quad m + n \geq N. \quad (ix)$$

Außerdem gelten für $z \in K_{\alpha\rho}$ die Ungleichungen $|z/t|^{m+n+1} \leq \alpha^{m+n+1}$, $1/|t - z| \leq 1/(|t| - |z|) \leq 1/(\rho - \alpha\rho)$. Hiermit und mit (ix) bekommt man von (vii)

$$\begin{aligned} |f(z) - \pi_{m,n}(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \alpha^{m+n+1} \left(\frac{2}{1 - \alpha} \right)^n \frac{1}{\rho - \alpha\rho} 2\pi\rho \|f\|_{K_\rho} = \\ &= \alpha^{m+n+1} \left(\frac{2}{1 - \alpha} \right)^n M, \quad m + n \geq N, \end{aligned} \quad (x)$$

wobei $z \in K_{\alpha\rho}$ und $M := \|f\|_{K_\rho}/(1 - \alpha)$. Hiermit und wegen $|\pi_{m,n}(z)| \leq |f(z)| + |f(z) - \pi_{m,n}(z)|$ bekommt man (a).

Nun zeigen wir die Gleichung (b). Dazu berechnen wir den Grenzwert der rechten Seite von (x). Da $\lim_{m+n \rightarrow \infty} m/n = 1$, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, so dass $m \geq 0.99n$, $m + n \geq N_1$. Da $0 < \alpha < 1$ gilt $\alpha^m \leq \alpha^{0.99n}$, $m + n \geq N_1$. Damit

$$\alpha^{m+n+1} \left(\frac{2}{1 - \alpha} \right)^n \leq \left(\frac{2\alpha^{1.99}}{1 - \alpha} \right)^n \alpha.$$

Hiermit und wegen $2\alpha^{1.99} < 1 - \alpha$ für $0 < \alpha < 0.5$ ergibt sich

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} \alpha^{m+n+1} \left(\frac{2}{1 - \alpha} \right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\alpha^{1.99}}{1 - \alpha} \right)^n \alpha = 0, \quad \alpha < 0.5.$$

Somit und wegen (x) folgt (b). \square

5.4 Ergebnisse von Lungu und Gonchar

Sei $\pi_n := \pi_{n,n}$ die Padé-Approximation an $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$. Weiter sei L die Grenzpunktmenge der Pole von π_n . Durch $\tau_n(a_j, \varepsilon)$ bezeichnet man die Anzahl der Pole von π_n in $K(a_j, \varepsilon)$.

5.4 Satz (Lungu [13]). *Sei f in $z = 0$ holomorph. Es gelte:*

- (a) π_n hat genau n Polstellen für n genügend groß;
- (b) $L = \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $a_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, \mu$;
- (c) für jedes $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$ gibt es eine Zahl p_j mit $p_j \geq 0$ und $p_1 + p_2 + \dots + p_\mu = 1$, so dass $\tau_n(a_j, \varepsilon) = p_j n + o(n)$.

Dann besitzt f eine holomorphe Fortsetzung in $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$.

Ein allgemeineres Resultat stammt von Gonchar, ebenfalls nur für diagonale Padé-Approximationen. Durch $\text{conv}(\cdot)$ bezeichnen wir die konvexe Hülle von (\cdot) . Wir definieren den Raum $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}$ wie folgt

$$\mathcal{G} = \{\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}} : \infty \in \Omega = D \setminus E\},$$

wobei $E \subseteq D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\partial(D) \subseteq \partial(G), \text{cap}(E) = 0.$$

und G bezeichne das Komplement von $\text{conv}(\partial(D))$.

Weiter schreiben wir $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, falls F auf kompakten Mengen in Ω holomorph ist. Die Bezeichnung $F \in \mathcal{C}(\Omega)$ bedeutet, dass F auf kompakten Mengen in Ω gleichmäßig konvergiert.

Sei $\mathcal{G}_0 := \{\Omega^{-1} := h(\Omega), \Omega \in \mathcal{G}\}$, wobei $h(z) := 1/z$.

5.5 Satz (Gonchar [7]). *Sei ω ein Gebiet mit $\omega \in \mathcal{G}_0$. Dann gilt*

$$\pi_{n,n} \in \mathcal{H}(\omega) \Rightarrow \pi_{n,n} \in \mathcal{C}(\omega) \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\omega).$$

Eine Verallgemeinerung für die *admissible sequences* $\{m_k, n_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, ähnlich zu (6.1), (6.2), findet sich in [7] ohne Beweis.

6 Einfluss der Verteilung der Pole und der Nullstellen der Padé-Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion

Die Hauptergebnisse dieses Kapitels sind *Hauptsatz 6.1* und *Hauptsatz 6.4*. In *Hauptsatz 6.1* ziehen wir Rückschlüsse auf Holomorphieeigenschaften approximierter Funktion aus dem Verhalten der Pole der *Treppennäherungen* π_{m_k, n_k} , wobei das Indexpaar $(m_k, n_k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq m_{k+1} - m_k \leq 1 \\ 0 \leq n_{k+1} - n_k \leq 1 \\ m_k + n_k < m_{k+1} + n_{k+1} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k/n_k = 1. \quad (6.2)$$

Im speziellen Fall $m_k = n_k, k \in \mathbb{N}_0$ (hauptdiagonale Approximationen) sind die Ergebnisse schon bekannt (siehe *Satz 5.4, Satz 5.5*). Wenn wir die Bedingungen der Pole in *Hauptsatz 6.1* durch ähnliche Bedingungen der Nullstellen ersetzen, bekommen wir *Hauptsatz 6.4*.

6.1 Einfluss der Verteilung der Pole

Sei π_{m_k, n_k} die Padé-Approximation an f bezüglich dem Feld $[m_k/n_k]$, wobei das Indexpaar (m_k, n_k) die Bedingungen (6.1) und (6.2) erfüllt. Weiter sei $\pi_{m_k, n_k} := p_{m_k}/q_{n_k}$, wobei die Polynome p_{m_k} und q_{n_k} teilerfremd seien und der höchste Koeffizient von q_{n_k} gleich 1 ist.

Sei $L_k := \{\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von π_{m_k, n_k} , wobei $l(k) := \text{Grad}(\pi_{m_k, n_k}) \leq \max\{m_k, n_k\} =: M_k$. Als L bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$. Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir mit $\tau_{M_k}(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Pole von π_{m_k, n_k} in $K(a, \varepsilon)$.

Wir definieren

$$\tau(a, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_{M_k}(a, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tau(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(a, \varepsilon).$$

Es folgt mit der letzten zwei Definitionen, dass für k genügend groß gilt

$$\tau_{M_k}(a, \varepsilon) \geq M_k \tau(a)/2. \quad (6.3)$$

Die Menge $\mathbb{C} \setminus L$ ist im allgemeinen nicht zusammenhängend. Sei \mathcal{G} die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus L$ mit $0 \in \mathcal{G}$.

6.1 Hauptsatz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $0 \notin L$;
- (b) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Wir beweisen zunächst den *Hauptsatz 6.1* im speziellen Fall $\infty \notin L$ (*Satz 6.2*). Dann führen wir den Beweis im Fall $\infty \in L$ durch (*Satz 6.3*).

6.2 Satz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \notin L$;
- (b) $0 \notin L$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\tau(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion.

Wir führen die Beweisidee in [12] ein. Sei E eine kompakte Menge in \mathcal{G} mit $0 \in E$. Sei $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass (6.3) erfüllt ist für $k \geq \nu_0$. Nach Definition von \mathcal{G} , gibt es einen Index $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $L_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Nun folgt mit (a), dass es ein $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$ gibt, so dass $\infty \notin L_k$, $k \geq \nu_2$. Sei $d_k := d(E, L_k)$ der Abstand zwischen E und L_k . Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$ für $k \geq \nu_1$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\pi_{m_0, n_0}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \pi_{m_k, n_k})(z). \quad (6.4)$$

Eine zu (6.4) äquivalente Darstellung ergibt sich, wenn wir alle Summanden, die identisch 0 sind ($\pi_{m_{k+1}, n_{k+1}} = \pi_{m_k, n_k}$) weglassen. Dazu definieren wir die Menge J als

$$J := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \pi_{m_k, n_k} \neq \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Bemerkung K: J ist unendlich genau dann wenn f nicht rational ist.

Beweis: (\Rightarrow): Sei J unendlich. Wir zeigen, dass f nicht rational ist.

Annahme: Sei f rational, $f := p_m/q_n$. Dann $\pi_{\mu,\nu} = f$, $\mu \geq m$, $\nu \geq n$. Damit ist J endlich, was die Voraussetzung widerspricht.

(\Leftarrow): Sei f nicht rational. Wir zeigen, dass J unendlich ist.

Annahme: Sei J endlich. Damit für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt $\pi_{m_k, n_k} = \pi_{m_N, n_N}$, $k \geq N$ und damit

$$(q_{n_k} f - p_{m_k})(z) = O(z^{m_k+n_k+1})$$

woraus sich ergibt, dass gilt

$$(q_{n_k} f - p_{m_k})(z) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Oder äquivalent $(q_{n_k} f)(z) = p_{m_k}(z)$, $k \rightarrow \infty$. Damit gilt $f(z) = p_{m_k}(z)/q_{n_k}(z)$ für z mit $q_{n_k}(z) \neq 0$. Somit ist f rational, was die Voraussetzung widerspricht. \square

Bemerkung L: Sei $k \in J$. Dann gilt $\pi_{m_k, n_k} \neq \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}$.

Beweis: Da $k \in J$ ist und wegen (6.1), ist einer der folgenden drei Fälle erfüllt:

$$\pi_{m_k, n_k} \neq \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}} = \begin{cases} \pi_{m_{k-1}, n_k} : & (1), \\ \pi_{m_k, n_{k-1}} : & (2), \\ \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}} : & (3). \end{cases}$$

Im Fall (3) ist nichts zu beweisen. Wir führen den Beweis für Fall (1) und (2).

Annahme: $\pi_{m_k, n_k} = \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Damit gilt nach (5.1)

$$z(q_{n_{k-1}} f - p_{m_{k-1}})(z) = (q_{n_k} f - p_{m_k})(z) = O(z^{m_k+n_k+1}),$$

woraus sich ergibt, dass gilt

$$(q_{n_{k-1}} f - p_{m_{k-1}})(z) = O(z^{m_k+n_k}).$$

Hiermit und wegen (5.1) gilt

$$\pi_{m_{k-1}, n_{k-1}} = \pi_{m_{k-1}, n_k} = \pi_{m_k, n_{k-1}}.$$

Damit und wegen der Annahme folgt $k \notin J$, was die Voraussetzung widerspricht. \square

Mit *Bemerkung K* bekommt man die folgende zu (6.4) äquivalente Darstellung

$$\pi_{m_{k_0}, n_{k_0}}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} (\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z), \quad (6.5)$$

wobei $J = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N}_0 : k_j \geq \nu_2\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (6.5) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$D_j(z) := \pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}}(z) - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \frac{W_j(z)}{(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)}, \quad (6.6)$$

wobei

$$W_j(z) := (p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}} - p_{m_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z). \quad (6.7)$$

Bemerkung M: Alle Nullstellen von W_j liegen in $z = 0$ und $\text{Grad}(W_j) = \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\} =: K_j$.

Beweis: Da $k_j, k_{j+1} \in J$ gilt

$$\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}} = \pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = \pi_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Damit bekommt man wegen *Satz 5.1*

$$(q_{n_{k_j}} f - p_{m_{k_j}})(z) = O(z^{K_j^0})$$

und somit

$$(q_{n_{k_j}} f - p_{m_{k_j}})(z) q_{n_{k_{j+1}}}(z) = O(z^{K_j^0}), \quad (i)$$

wobei

$$\begin{aligned} K_j^0 &:= m_{k_{j+1}-1} + n_{k_{j+1}-1} + 1 - \min\{m_{k_{j+1}-1} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}})\} = \\ &= \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}-1} + 1 + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\}. \end{aligned}$$

Es gilt nach (5.1)

$$(q_{n_{k_{j+1}}} f - p_{m_{k_{j+1}}})(z) = O(z^{m_{k_{j+1}} + n_{k_{j+1}} + 1})$$

und somit

$$(q_{n_{k_{j+1}}} f - p_{m_{k_{j+1}}})(z) q_{n_{k_j}}(z) = O(z^{m_{k_{j+1}} + n_{k_{j+1}} + 1}). \quad (ii)$$

Mit (i) und (ii) bekommt man

$$\begin{aligned} (q_{n_{k_j}} f - p_{m_{k_j}})(z) q_{n_{k_{j+1}}}(z) - (q_{n_{k_{j+1}}} f - p_{m_{k_{j+1}}})(z) q_{n_{k_j}}(z) = \\ = (p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}} - p_{m_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z) = O(z^{K_j^0}). \end{aligned}$$

Damit ist $z = 0$ eine Nullstelle von W_j der Ordnung K_j^0 . Hiermit bestätigt man wegen (6.6), dass

$$K_j^0 \leq \text{Grad}(W_j). \quad (iii)$$

Mit (6.7) folgt

$$\text{Grad}(W_j) \leq$$

$$\leq \max\{\text{Grad}(p_{m_{k_{j+1}}}) + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), \text{Grad}(q_{n_{k_{j+1}}}) + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\} \leq K_j. \quad (iv)$$

Andererseits gilt

$$K_j \leq K_j^0. \quad (v)$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung bestätigt man mit (6.1).

Mit (iii), (iv) und (v) folgt $K_j^0 = K_j = \text{Grad}(W_j)$. \square

Sei \mathcal{A}_j der höchste Koeffizient von W_j ist. Mit *Bemerkung M* gilt

$$W_j(z) := \mathcal{A}_j z^{K_j}. \quad (6.8)$$

Hiervon gilt für $z \neq 0$

$$\mathcal{A}_j = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}} - p_{m_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)}{z^{K_j}}. \quad (6.9)$$

Bemerkung N: Nach der Wahl von j_0 hat $\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ keinen Pol in ∞ für $j \geq j_0$. Damit sind alle Pole von $\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ auch Nullstellen von $q_{n_{k_j}}$ für $j \geq j_0$. Hiermit und wegen (6.3) gibt es in $K(a, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j} \tau(a)/2$ Nullstellen von $q_{n_{k_j}}$, $j \geq j_0$.

Sei α_{k_j, i_0} eine Nullstelle von $q_{n_{k_j}}$, $j \geq j_0$, mit $\alpha_{k_j, i_0} \in K(a, \varepsilon)$. Wir setzen $z = \alpha_{k_j, i_0}$ in (6.9) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j = \frac{-(p_{m_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(\alpha_{k_j, i_0})}{(\alpha_{k_j, i_0})^{K_j}}, \quad j \geq j_0,$$

wobei $\alpha_{k_j, i_0} \neq 0$, $j \geq j_0$.

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j und unter Berücksichtigung von (6.8) bekommt man aus (6.7)

$$D_j(z) = -\frac{z^{K_j}}{(\alpha_{k_j, i_0})^{K_j}} \frac{(p_{m_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(\alpha_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|D_j\|_E \leq \frac{\|z\|_E^{K_j} |p_{m_{k_j}}(\alpha_{k_j, i_0})| |q_{n_{k_{j+1}}}(\alpha_{k_j, i_0})|}{|\alpha_{k_j, i_0}|^{K_j} \min_{z \in E} |(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)|}, \quad j \geq j_0. \quad (6.10)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.10) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Da E kompakt ist und $0 \notin E$ ergibt sich

$$\|z\|_E^{K_j} / |\alpha_{k_j, i_0}|^{K_j} \leq c_1^{K_j}, \quad j \geq j_0. \quad (6.11)$$

Sei $\rho > 0$ so dass (5.1) erfüllt ist, für $z \in K_\rho$, $z \rightarrow 0$ und f ist in K_ρ holomorph.

Mit Hilfe des *Bernstein–Walsh Lemma* (Lemma 2.17) erhalten wir

$$\begin{aligned} |p_{m_{k_j}}(\alpha_{k_j, i_0})| &\leq \|p_{m_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}} e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})} \leq \\ &\leq e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})} \|\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}} \|q_{n_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei $G(z) := \log |z/\rho/2|$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K_{\rho/2}$, die Greensche Funktion bezüglich des Komplements von $K_{\rho/2}$ mit Pol bei ∞ ist (siehe *Beispiel 2.16 (b)*).

Nach *Definition 2.14* ist $G(\alpha_{k_j, i_0})$ beschränkt, da $\infty \notin L$. Somit gilt

$$e^{m_{k_j} G(\alpha_{k_j, i_0})} \leq c_2^{m_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (6.13)$$

Wegen $\infty \notin L$ bekommt man die Abschätzung

$$|q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|z| + |\alpha_{k_j, i}|) \leq c_3^{n_{k_j}}, \quad z \in K_{\rho/2}. \quad (6.14)$$

Mit *Hilfssatz 5.3 (a)* gilt für $\alpha = 1/2$

$$\|\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}} \leq (1 + 2^{n_{k_j} - m_{k_j}}) \|f\|_{K_\rho} \leq c_4^{n_{k_j}}, \quad (6.15)$$

da f in K_ρ holomorph ist.

Mit (6.13), (6.14) und (6.15) bekommt man aus (6.12)

$$|p_{m_{k_j}}(\alpha_{k_j, i_0})| \leq c_5^{M_{k_j}}, \quad j \geq j_0, \quad (6.16)$$

mit einer Konstante $c_5 \geq 1$.

Mit *Bemerkung N* und wegen $\infty \notin L$ bekommt man

$$\begin{aligned} &|q_{n_{k_{j+1}}}(\alpha_{k_j, i_0})| = \\ &= \prod_{|\alpha_{k_{j+1}, i} - \alpha_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\alpha_{k_j, i_0} - \alpha_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\alpha_{k_{j+1}, i} - \alpha_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\alpha_{k_j, i_0} - \alpha_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/2} c_6^{n_{k_{j+1}}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Man bekommt für $z \in E$

$$|q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{j=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{n_{k_j}, i}| \geq d^{n_{k_j}} > 0, \quad j \geq j_0.$$

Damit gilt auch für $z \in E$

$$|q_{n_{k_{j+1}}}(z)| \geq d^{n_{k_{j+1}}} > 0, \quad j \geq j_0.$$

Somit

$$1/\min_{z \in E} |(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)| \leq (1/d)^{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}} \leq c_7^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0, \quad (6.18)$$

wobei $c_7 \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Mit (6.11), (6.16), (6.17) und (6.18) bekommt man aus (6.10)

$$\|D_j\|_E \leq (c_8 \varepsilon^{\tau(a)/2})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0. \quad (6.19)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\tau(a)/2} < 1/c_8$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\tau(a)/2} c_8 < 1$.

Es folgt mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2*

$$q^{M_{k_{j+1}}} \leq q^{k_{j+1}/2} = \delta^{k_{j+1}} \leq \delta^{j+1},$$

wobei $\delta := q^{1/2}$.

Hiermit bekommt man aus (6.19)

$$\left| \sum_{j=j_0}^{\infty} D_j(z) \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad z \in E.$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_0+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)|$, $z \in E$. Hiermit konvergiert die Reihe (6.5) und somit auch die Folge $\{\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und somit auch auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} , da E beliebig in \mathcal{G} war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathcal{G} . Wählt man $\alpha = 1/4$ in *Hilfssatz 5.3 (b)*, dann bekommen wir $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \pi_{m_k, n_k}\|_{K_{\rho/4}} = 0$. Damit ergibt sich $f(z) = f^0(z)$, $z \in K_{\rho/4}$. Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Der nächste *Satz 6.3* unterscheidet sich vom *Satz 6.2* nur durch die Bedingung (a). Man wendet eine geeignete Transformation an, so dass der Punkt ∞ in einen endlichen Punkt abgebildet wird. Damit bekommt man eine ähnliche Situation wie in *Satz 6.2*.

6.3 Satz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

(a) $\infty \in L$;

- (b) $0 \notin L$;
(c) Es gibt einen Punkt $a \in L$ mit $\tau(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f keine rationale Funktion.

Wir wenden die Transformation (siehe (2.5))

$$h(z) := \frac{s_1 z}{s_2 z + s_3}$$

an, wobei $s_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Man bestätigt, dass $h(\infty) = s_1/s_2 \in \mathbb{R}$ und $h(-s_3/s_2) = \infty$. Wegen (b) kann man die Koeffizienten s_2, s_3 so wählen, dass $-s_3/s_2 \notin L$ und damit $\infty = h(-s_3/s_2) \notin h(L) =: \tilde{L}$. Damit ist die Menge \tilde{L} beschränkt.

Weiter sei $\tilde{L}_k := h(L_k) = \{\tilde{\alpha}_{k,1}, \tilde{\alpha}_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{k,l(k)}\}$. Nach *Definition 3.17* ist \tilde{L} die Menge der Grenzpunkte von $\{\tilde{L}_k\}_{k=0}^\infty$.

Sei $H(w)$ die Umkehrfunktion von $h(z)$ (siehe (2.6)). Dann bekommt man mit (2.2)

$$\tilde{\pi}_{m_k, n_k}(w) := (\pi_{m_k, n_k} \circ H)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_k}} \frac{p_{m_k}^0(w)}{q_{n_k}^0(w)}, \quad (6.20)$$

wobei $\lambda_k := m_k - n_k$, $p_{m_k}^0 \in \mathcal{P}_{m_k}$, $q_{n_k}^0 \in \mathcal{P}_{n_k}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient von $q_{n_k}^0$ gleich 1. Mit *Bemerkung 2.2* gilt $\pi_{m_k, n_k}(\alpha_{k,j}) = \tilde{\pi}_{m_k, n_k}(\tilde{\alpha}_{k,j})$, $j = 1, 2, \dots, l(k)$. Damit ist \tilde{L}_k die Menge der Pole von $\tilde{\pi}_{m_k, n_k}$.

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ so, dass (c) erfüllt ist. Mit *Bemerkung 3.21* gilt $a \in L$ und damit $\tilde{a} \in \tilde{L} \subset \mathbb{C}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)$ die Anzahl der Pole von $\tilde{\pi}_{m_k, n_k}$ in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Weiter sei

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tilde{\tau}(\tilde{a}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\tau}(\tilde{a}, \varepsilon).$$

Mit den letzten zwei Relationen bestätigt man, dass es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tilde{\tau}(\tilde{a})/2, \quad k \geq \nu_0.$$

Mit *Bemerkung E* folgt

$$\tilde{\tau}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tau(a)/2, \quad k \geq \nu_0. \quad (6.21)$$

Sei \tilde{E} kompakte Menge mit $0 \in \tilde{E} \subset \tilde{\mathcal{G}}$, wobei $\tilde{\mathcal{G}} := h(\mathcal{G})$. Sei $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $\tilde{L}_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Da $\infty \notin \tilde{L}$, gibt es einen Index $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$, so dass $\infty \notin \tilde{L}_k$, $k \geq \nu_2$. Sei $d_k := d(\tilde{E}, \tilde{L}_k)$ der Abstand zwischen \tilde{E} und \tilde{L}_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar $d > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\tilde{\pi}_{m_0, n_0}(w) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\pi}_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \tilde{\pi}_{m_k, n_k})(w). \quad (6.22)$$

Sei

$$J^0 := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \tilde{\pi}_{m_{k+1}, n_{k+1}} \neq \tilde{\pi}_{m_k, n_k}\}.$$

Mit (6.20) gilt $\pi_{m_k, n_k} = \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}$ genau dann, wenn $\tilde{\pi}_{m_k, n_k} = \tilde{\pi}_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Somit gilt $J^0 \equiv J = \{k_0, k_1, \dots\}$ und es ist unendlich nach *Bemerkung K*. Hiermit bekommt man eine zu (6.22) äquivalente Darstellung

$$\tilde{\pi}_{m_{k_0}, n_{k_0}}(w) + \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{\pi}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}})(w), \quad (6.23)$$

wobei $J^0 = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_2\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (6.23) gleichmäßig auf \tilde{E} konvergiert. Dazu betrachten wir die Differenz für $w \in \tilde{E}$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &:= (D_j \circ H)(w) = \\ &= ((\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \left(\frac{W_j}{q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w), \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei D_j in (6.6) definiert ist.

Aus (6.24) bekommt man zwei Darstellungen für \tilde{D}_j . Einerseits ergibt sich mit (2.2)

$$\tilde{D}_j(w) = \left(\frac{W_j}{q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{W_j^0(w)}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad (6.25)$$

wobei $(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0) \in \mathcal{P}_{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}}$ und $B_j := K_j - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$ (K_j ist in *Bemerkung M* definiert).

Bemerkung O: Alle Nullstellen von W_j^0 liegen in $w = 0$ und $\text{Grad}(W_j^0) = K_j$.

Beweis: Für $j \geq j_0$ gilt

$$(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(0) \neq 0.$$

Hiervon und mit *Bemerkung M* bestätigt man von (6.6), dass D_j auch K_j Nullstellen in $z = 0$ hat.

Nun folgt mit *Bemerkung 2.2*, dass $D_j(z) = \tilde{D}_j(\tilde{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Für $z = 0$ gilt $h(0) = 0$. Damit hat \tilde{D}_j auch K_j Nullstellen in $w = 0$.

Ähnlich bekommt man $0 \neq q_{n_{k_j}}(0) = \tilde{q}_{n_{k_j}}(0)$ und damit $q_{n_{k_j}}^0(0) \neq 0$. Somit bestätigt man wegen (6.25), dass die Anzahl der Nullstellen von W_j^0 in $w = 0$ gleich die Anzahl der Nullstellen von \tilde{D}_j in $w = 0$ ist, nämlich K_j . Aber $W_j^0 \in \mathcal{P}_{K_j}$ nach Definition. Somit folgt die Behauptung. \square

Nun bekommen wir aus (6.24) die zweite Darstellung von \tilde{D}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &= ((\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}} \frac{p_{m_{k_{j+1}}}^0(w)}{q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} - \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}}} \frac{p_{m_{k_j}}^0(w)}{q_{n_{k_j}}^0(w)} = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\gamma_j}} \frac{W_j^*(w)}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

wobei

$$\gamma_j := \max\{\lambda_{k_j}, \lambda_{k_{j+1}}\} \quad (6.27)$$

mit $\lambda_{k_j} := m_{k_j} - n_{k_j}$ (siehe (6.20)) und

$$W_j^*(w) = \begin{cases} (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_{j+1}} \\ (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_j} \end{cases} \quad (6.28)$$

mit $S(w) := (-s_2 w + s_1)^{|\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}|}$.

Wegen (6.27) machen wir zwei Fallunterscheidungen.

1 Fall: $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

Wir vergleichen (6.25) und (6.26). Unter Berücksichtigung von (6.27) und (6.28) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Wir zeigen, dass $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Zu diesem Zweck, zeigen wir, dass die Gleichung

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \min\{n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}\} \quad (6.30)$$

gilt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \geq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$,
- (2) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \leq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$.

Zunächst zeigen wir, dass

$$\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) = m_{k_j} \text{ im Fall (2)}. \quad (6.31)$$

Annahme: $\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) < m_{k_j}$. Da $k_j \in J$ folgt mit *Bemerkung L*, dass $\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$. Hiermit bekommt man im Fall (2)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) - n_{k_j} < m_{k_j} - n_{k_j}$$

oder äquivalent $\lambda_{k_{j+1}} < \lambda_{k_j}$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$. Damit ist die Annahme falsch und somit ist (6.31) gezeigt.

Mit (6.31) bekommt man im Fall (2)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq m_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}),$$

woraus sich nach Subtraktion von λ_{k_j} ergibt

$$\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \leq n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \text{ im Fall (2)}. \quad (6.32)$$

Ähnlich zeigt man die Relation

$$n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \text{ im Fall (1)}. \quad (6.33)$$

Falls $\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$ ist (6.33) offenbar erfüllt, da $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

Sei $\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) < n_{k_j}$. Dann folgt $\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$. Hieraus bekommt man im Fall (1)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq m_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}).$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} ergibt sich (6.33).

Mit (6.31) ergibt sich

$$B_j = \begin{cases} \lambda_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) - n_{k_j} & \text{im Fall (1),} \\ \lambda_{k_j} & \text{im Fall (2),} \end{cases} \quad (6.34)$$

wobei $B_j := \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\} - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$. Hiermit gilt

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \begin{cases} n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) & \text{im Fall (1),} \\ \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} & \text{im Fall (2).} \end{cases} \quad (6.35)$$

Mit (6.32), (6.33) und (6.35) bekommt man (6.30).

Mit (6.30) folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_{j+1}} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $q_{n_{k_j}}^0$ der Ordnung $n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}})$. Hiermit und mit (6.30) gilt die Darstellung

$$q_{n_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} q_{n_{k_j}}^*(w), \quad (6.36)$$

wobei $q_{n_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{n_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \geq 0$ auch wegen (6.30). Somit und wegen (6.36) ergibt sich aus (6.29)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} ((p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Mit *Bemerkung O* ergibt sich

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 w^{K_j} \quad (6.37)$$

und somit gilt für $w \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w)}{w^{K_j}}. \quad (6.38)$$

Nun wollen wir einen Punkt $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) = 0$ auswählen und $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (6.38) einsetzen. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein solcher Punkt existiert.

Bemerkung P: (a) $q_{n_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, hat mindestens $M_{k_j} \tau(a)/4$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$;

(b) $q_{n_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, hat mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$.

Für den Beweis der *Bemerkung P* benötigt man die Bedingung (6.2), denn mit (6.2) folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_{k_j}/n_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} (m_{k_j}/n_{k_j} - 1) = 0. \quad (6.39)$$

Damit gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \tau(a)/4, \quad j \geq j_1. \quad (6.40)$$

Beweis (Bemerkung P)

(a) : Da $\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\infty) \neq \infty$, $j \geq j_0$, gilt nach *Hilfssatz 2.4 (b)*

$$\text{Grad}(q_{n_{k_j}}^0) \geq \text{Grad}(\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) - \max\{0, \lambda_{k_j}\}, \quad j \geq j_0.$$

Hiervon und mit (6.24) folgt, dass $q_{n_{k_j}}^0$, $j \geq j_0$, mindestens $M_{k_j}\tau(a)/2 - \max\{0, \lambda_{k_j}\}$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ hat. Mit (6.40) bekommt man

$$\begin{aligned} M_{k_j}\tau(a)/2 - \max\{0, \lambda_{k_j}\} &\geq M_{k_j}\tau(a)/2 - |\lambda_{k_j}| \geq \\ M_{k_j}\tau(a)/2 - n_{k_j}\tau(a)/4 &\geq M_{k_j}\tau(a)/2 - M_{k_j}\tau(a)/4 = \\ &= M_{k_j}\tau(a)/4, \quad j \geq j_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) : Mit (a) und wegen (6.36) ist die Anzahl der Nullstellen von $q_{n_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mindestens

$$M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j).$$

Mit (6.30) bekommt man

$$\begin{aligned} M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) &\geq M_{k_j}\tau(a)/4 - (\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}) \geq \\ &\geq M_{k_j}\tau(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass

$$M_{k_j}\tau(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\} < 1$$

und zeigen, dass diese Annahme falsch ist. Nach Division durch $M_{k_{j+1}}$ ergibt sich

$$\frac{M_{k_j}\tau(a)/4}{M_{k_{j+1}}} < \frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}}. \quad (6.41)$$

Nun berechnen wir die Grenzwerte der beiden Seiten von (6.41). Wir zeigen, dass der Grenzwert der linken Seite > 0 ist und der Grenzwert der rechten Seite 0 ist, woraus sich der gewünschte Widerspruch ergibt.

Da $k_j, k_{j+1} \in J^0$ ergibt sich

$$\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}} = \tilde{\pi}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = \tilde{\pi}_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Hiermit und wegen $M_{k_j} \geq \text{Grad}(\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \geq \tilde{\tau}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon)$, bekommt man mit (6.22)

$$M_{k_j} \geq \tilde{\tau}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \tilde{\tau}_{M_{k_{j+1}}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \dots = \tilde{\tau}_{M_{k_{j+1}-1}}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq$$

$$\geq M_{k_{j+1}-1}\tau(a)/2. \quad (6.42)$$

Die Richtigkeit der Ungleichung

$$M_{k_{j+1}-1} + 1 \geq M_{k_{j+1}}. \quad (6.43)$$

bestätigt man wegen

$$\begin{aligned} & M_{k_{j+1}-1} + 1 = \\ & = \max\{m_{k_{j+1}-1} + 1, n_{k_{j+1}-1} + 1\} = \begin{cases} \max\{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}} + 1\}, \\ \max\{m_{k_{j+1}} + 1, n_{k_{j+1}}\}, \\ \max\{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}\}, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die drei verschiedenen Situationen in der Bedingung (6.1) zu beachten sind.

Mit (6.42) und (6.43) ergibt sich

$$M_{k_j} \geq (M_{k_{j+1}} - 1)\tau(a)/2 = M_{k_{j+1}}(1 - 1/M_{k_{j+1}})\tau(a)/2.$$

Damit ergibt sich

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (M_{k_j}/M_{k_{j+1}}) \geq \tau(a)/2 \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) = \tau(a)/2. \quad (6.44)$$

Nun berechnen wir den Grenzwert der rechten Seite von (6.41).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\lambda_{k_j}| \geq |\lambda_{k_{j+1}}|$ (In dem anderen Fall argumentiert man ähnlich). Mit (6.39) bekommt man

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{M_{k_{j+1}}} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{n_{k_j}} = 0.$$

Hiermit und wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} 1/M_{k_{j+1}} = 0$ bekommt man

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}}{M_{k_{j+1}}} \right) = 0. \quad (6.45)$$

Mit (6.44) und (6.45) bekommt man aus (6.41), dass gilt $\tau(a)/8 < 0$. Dies steht im Widerspruch zu $\tau(a) > 0$. Somit ist die Annahme falsch und damit folgt Teil (b). \square

Mit *Bemerkung P (b)* existiert ein $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) = 0$, $j \geq j_1$.

Wir setzen $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (6.38) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{-(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})^{K_j}}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \neq 0$, $j \geq j_1$.

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (6.37) bekommt man aus (6.25)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2 w + s_1)^{-B_j} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \frac{S(\alpha)(q_{n_{k_j+1}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $S(\alpha) := (-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}$.

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|W_j^1\|_{\tilde{E}}}{\|W_j^1(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})\|} \frac{|S(\alpha)(q_{n_{k_j+1}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.46) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Definitionsgemäß ist $B_j \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe der bekannten Relation $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ bekommt man

1. Falls $B_j < 0$:

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} = \|(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}^{-B_j} \leq c_1^{-B_j},$$

wobei $w \in \tilde{E}$ und $c_1 := \|-s_2 w + s_1\|_{\tilde{E}}$.

2. Falls $B_j \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} &= \| [(-s_2 w + s_1)^{-1}]^{B_j} \|_{\tilde{E}} = \|(-s_2 w + s_1)^{-1}\|_{\tilde{E}}^{B_j} = \\ &= 1 / \|-s_2 w + s_1\|_{\tilde{E}}^{B_j} \leq c_2^{B_j}, \end{aligned}$$

wobei $c_2 := \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}$.

Insgesamt für $B_j \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_3^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (6.47)$$

wobei

$$c_3 := \max\{c_1, c_2\} \geq 1.$$

Mit (6.33) folgt $B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}$. Andererseits ergibt sich mit (6.30)

$$0 \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j).$$

Damit bekommt man

$$\lambda_{k_j} \leq B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}.$$

Hiervon und mit (6.40) folgt

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (6.47) ergibt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_3^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.48)$$

Da $C_j \geq 0$, bekommt man

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| = |-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|^{C_j}. \quad (6.49)$$

Mit (6.35) folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Hiervon und mit (6.40) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_j &:= \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \leq \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \leq \\ &\leq |\lambda_{k_j}| + |\lambda_{k_{j+1}}| \leq 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} \leq n_{k_{j+1}} \tau(a)/2, \quad j \geq j_1. \end{aligned}$$

Hiermit bekommt man aus (6.49)

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| \leq c_4^{n_{k_{j+1}}}, \quad (6.50)$$

wobei $c_4 := \max\{1, \sup_{k_j \in J} |-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|\}$.

Sei $\rho > 0$, so dass (5.1) erfüllt ist und f ist in K_ρ holomorph. Weiter sei $\tilde{\rho} > 0$ mit $K_{\tilde{\rho}} \subset h(K_{\rho/4})$.

Mit Hilfe des *Bernstein-Walsh Lemma* (Lemma 2.17) und mit (6.20) bekommt man

$$\begin{aligned} |p_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| &\leq \|p_{m_{k_j}}^0\|_{K_{\tilde{\rho}}} \|e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}\| \leq \\ &\leq e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \|\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \|q_{n_{k_j}}^0\|_{K_{\tilde{\rho}}}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

wobei $G(z) := \log |z/\tilde{\rho}|$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K_{\tilde{\rho}}$, die Greensche Funktion bezüglich des Komplements von $K_{\tilde{\rho}}$ mit Pol bei ∞ ist (siehe *Beispiel 2.16 (b)*). Nach *Definition 2.14* ist $G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})$ beschränkt, da $\infty \notin \tilde{L}$. Somit gilt

$$e^{m_{k_j} G(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})} \leq c_5^{m_{k_j}}, \quad j \geq j_0. \quad (6.52)$$

Mit *Bemerkung 2.2* gilt $\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}(z) = \tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\tilde{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Hiermit bekommt man

$$\|\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \leq \|\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}} =: c_6^{n_{k_j}}, \quad (6.53)$$

wobei *Hilfssatz 5.3 (a)* zu beachten ist.

Mit (6.40) ergibt sich

$$\|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \leq c_7^{|\lambda_{k_j}|} \leq c_7^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_1, \quad (6.54)$$

wobei

$$c_7 := \max\{\| -s_2w + s_1 \|_{K_{\tilde{\rho}}}, \| 1/(-s_2w + s_1) \|_{K_{\tilde{\rho}}}\} \geq 1.$$

Da $\infty \notin \tilde{L}$, bekommt man

$$|q_{n_{k_j}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |w - \tilde{\alpha}_{k_j,i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|w| + |\tilde{\alpha}_{k_j,i}|) \leq c_8^{n_{k_j}}, \quad w \in K_{\tilde{\rho}}. \quad (6.55)$$

Mit (6.52), (6.53), (6.54) und (6.55) bekommt man aus (6.51)

$$|p_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j,i_0})| \leq c_9^{M_{k_j}}. \quad (6.56)$$

Da \tilde{E} kompakt ist und wegen $0 \notin \tilde{L}$ ($0 \notin L \Rightarrow 0 = h(0) \notin h(L) =: \tilde{L}$) ergibt sich

$$\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j} / |\tilde{\alpha}_{k_j,i_0}|^{K_j} \leq c_{10}^{K_j}, \quad j \geq j_0. \quad (6.57)$$

Es gilt für $w \in \tilde{E}$

$$|q_{n_{k_j}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |w - \tilde{\alpha}_{k_j,i}| \geq d^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gilt auch für $w \in \tilde{E}$

$$|q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} |w - \tilde{\alpha}_{k_{j+1},i}| \geq d^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_0.$$

Somit

$$1/\min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)| \leq (1/d)^{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}} \leq c_{11}^{n_{k_{j+1}}}, \quad (6.58)$$

wobei $c_{11} \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Mit *Bemerkung P (a)* erhalten wir

$$\begin{aligned} & |q_{n_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j,i_0})| = \\ &= \prod_{|\tilde{\alpha}_{k_{j+1},i} - \tilde{\alpha}_{k_j,i_0}| \leq \varepsilon} |\tilde{\alpha}_{k_{j+1},i} - \tilde{\alpha}_{k_j,i_0}| \prod_{|\tilde{\alpha}_{k_{j+1},i} - \tilde{\alpha}_{k_j,i_0}| > \varepsilon} |\tilde{\alpha}_{k_{j+1},i} - \tilde{\alpha}_{k_j,i_0}| \leq \\ & \leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/4} c_{12}^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Mit (6.48), (6.50), (6.56), (6.57), (6.58) und (6.59) ergibt sich aus (6.46)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (c_{13} \varepsilon^{\tau(a)/4})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.60)$$

2 Fall: $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$.

In diesem Fall bekommen wir eine ähnliche Abschätzung wie in (6.60). Wir

vergleichen (6.25) und (6.26). Unter Berücksichtigung von (6.27) und (6.28) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w)S(w) - (q_{n_{k_j+1}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Wir zeigen, dass $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Zu diesem Zweck, zeigen wir, dass die Gleichung

$$\lambda_{k_j} - B_j = \min\{\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}, m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\} \quad (6.62)$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \geq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$,
- (2) $m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \leq n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$.

Zunächst zeigen wir, dass

$$\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) = n_{k_j} \text{ im Fall (1)}. \quad (6.63)$$

Annahme: $\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) < n_{k_j}$. Mit *Bemerkung L* folgt $\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$. Hiermit bekommt man im Fall (1)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq m_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}) \geq m_{k_j} - n_{k_j}$$

oder äquivalent $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$, was im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$ steht. Damit ist die Annahme falsch und somit ist (6.63) gezeigt.

Im Fall (1) bekommt man mit (6.63)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \geq \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) - n_{k_j}.$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} und nach Multiplikation mit -1 ergibt sich

$$\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \leq m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) \text{ im Fall (1)}. \quad (6.64)$$

Ähnlich zeigt man

$$m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \text{ im Fall (2)}. \quad (6.65)$$

Falls $\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) = m_{k_j}$, ist die Relation (6.65) offenbar richtig, da $\lambda_{k_j} > \lambda_{k_{j+1}}$.

Sei $\text{Grad}(p_{m_{k_j}}) < m_{k_j}$. Mit *Bemerkung L* folgt $\text{Grad}(q_{n_{k_j}}) = n_{k_j}$. Hiermit bekommt man im Fall (2)

$$m_{k_{j+1}} - n_{k_{j+1}} \leq -n_{k_j} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}}).$$

Nach Subtraktion von λ_{k_j} und nach Multiplikation mit -1 ergibt sich (6.65).

Mit (6.63) ergibt sich

$$B_j = \begin{cases} \lambda_{k_{j+1}} & \text{im Fall (1),} \\ \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) - n_{k_j} & \text{im Fall (2),} \end{cases} \quad (6.66)$$

wobei $B_j := \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\} - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$. Hiermit ergibt sich

$$\lambda_{k_j} - B_j = \begin{cases} \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} & \text{im Fall (1),} \\ m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) & \text{im Fall (2).} \end{cases} \quad (6.67)$$

Mit (6.64), (6.65) und (6.67) bekommt man (6.62).

Mit (6.62) folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_j} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $p_{m_{k_j}}^0$ der Ordnung $m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$. Hiermit und wegen (6.62) gilt die Darstellung

$$p_{m_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} p_{m_{k_j}}^*(w), \quad (6.68)$$

wobei $p_{m_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{m_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \geq 0$ auch wegen (6.62). Somit und wegen (6.68) ergibt sich aus (6.61)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} ((p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Damit gilt

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 w^{K_j}, \quad (6.69)$$

wobei *Bemerkung O* zu beachten ist.

Es gilt für $w \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w)}{w^{K_j}}. \quad (6.70)$$

Nach *Bemerkung P* hat $q_{n_{k_j}}^0, j \geq j_1$, mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Sei $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $q_{n_{k_j}}^0$ mit $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\alpha}_{k_j, i_0}$ in (6.70) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{-(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})^{K_j}}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $\tilde{\alpha}_{k_j, i_0} \neq 0, j \geq j_1 \geq j_0$.

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (6.69) bekommt man aus (6.25)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2 w + s_1)^{-B_j} \frac{w^{K_j}}{(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})^{K_j}} \frac{(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1.$$

Somit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j}}{|\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}|^{K_j}} \frac{|(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.71) nach oben ab. Dabei seien C_1, C_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Auf bekannte Art und Weise (siehe Fall 1) bekommen wir

$$\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j} / |\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}|^{K_j} \leq C_1^{K_j}, \quad (6.72)$$

$$1 / \min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)| \leq C_2^{n_{k_j+1}}, \quad (6.73)$$

$$|q_{n_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \tau(a)/4} C_3^{n_{k_j+1}}, \quad (6.74)$$

$$|p_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq C_4^{M_{k_j}} \quad (6.75)$$

und

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (6.76)$$

wobei

$$C_5 = \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}\} \geq 1.$$

Mit (6.2) gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \tau(a)/4, \quad j \geq j_1 \geq j_0. \quad (6.77)$$

Mit (6.66) folgt $B_j \leq \lambda_{k_j}$. Andererseits gilt nach (6.62)

$$0 \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j).$$

Damit ergibt sich

$$\lambda_{k_{j+1}} \leq B_j \leq \lambda_{k_j}.$$

Hiervon und mit (6.77) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (6.76) ergibt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.78)$$

Mit (6.68) ergibt sich

$$p_{m_{k_j}}^*(w) = p_{m_{k_j}}^0(w) (-s_2 w + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}.$$

Hiermit und mit (6.75) ergibt sich

$$\begin{aligned} |p_{m_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| &= |p_{m_{k_j}}^0(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0}) (-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| \leq \\ &\leq C_4^{M_{k_j}} |(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}|. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Mit (6.67) folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit bekommt man

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| = 1/| -s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|^{\lambda_{k_j} - B_j} \leq C_6^{\lambda_{k_j} - B_j}, \quad (6.80)$$

wobei $C_6 := \max\{1, \sup_{k_j \in J} \{1/| -s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1|\}\}$.

Mit (6.62) und (6.77) bekommt man

$$\lambda_{k_j} - B_j \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \leq 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} \leq n_{k_{j+1}}.$$

Hiermit ergibt sich aus (6.80)

$$|(-s_2 \tilde{\alpha}_{k_j, i_0} + s_1)^{-(\lambda_{k_j} - B_j)}| \leq C_6^{n_{k_{j+1}}}.$$

Damit bekommt man aus (6.75)

$$|p_{m_{k_j}}^*(\tilde{\alpha}_{k_j, i_0})| \leq C_7^{M_{k_{j+1}}}. \quad (6.81)$$

Mit (6.72), (6.73), (6.74), (6.78) und (6.81) bekommt man aus (6.71)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (\varepsilon^{\tau(a)/4} C_8)^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1.$$

Damit haben wir auch im Fall 2 eine ähnliche Abschätzung wie in (6.60) bekommen. Sei $c := \max\{c_{13}, C_8\}$. Da man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\tau(a)/4} < 1/c$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\tau(a)/4} c < 1$. Damit bekommt man eine gemeinsame Abschätzung in beiden Fällen:

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq q^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2* ergibt

$$\left| \sum_{j=j_0}^{\infty} \tilde{D}_j(w) \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1}, \quad w \in \tilde{E}.$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_0+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(w)|$, $w \in \tilde{E}$. Hiermit konvergiert die Reihe (6.23) und somit auch die Folge $\{\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=j_0}^{\infty}$ gleichmäßig auf \tilde{E} und damit auch gleichmäßig auf kompakten Teilmengen in \mathcal{G} , da \tilde{E} beliebig in \mathcal{G} war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathcal{G} . Andererseits gilt

$$\tilde{f}(w) = f^0(w), \quad w \in K_{\tilde{\rho}}.$$

Die Richtigkeit dieser Relation bestätigt man wegen

$$\|\tilde{f} - \tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \leq \|f - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/4}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

wobei *Hilfssatz 5.3 (b)* zu beachten ist.

Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von \tilde{f} nach $\tilde{\mathcal{G}}$. Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. Somit ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . ■

Beispiele für *Hauptsatz 6.1* sind die diagonalen Approximationen $\{\pi_{n+\lambda, n}\}_{n=0}^{\infty}$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

6.2 Einfluss der Verteilung der Nullstellen

Sei π_{m_k, n_k} die Padé-Approximation an f bezüglich dem Feld $[m_k/n_k]$, wobei das Indexpaar (m_k, n_k) die Bedingungen (6.1) und (6.2) erfülle. Weiter sei $\pi_{m_k, n_k} := p_{m_k}/q_{n_k}$, wobei die Polynome p_{m_k} und q_{n_k} teilerfremd seien und der höchste Koeffizient von q_{n_k} gleich 1 ist.

Sei $L_k := \{\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von π_{m_k, n_k} , wobei $l(k) := \text{Grad}(\pi_{m_k, n_k}) \leq \max\{m_k, n_k\} =: M_k$. Mit L bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$. Weiter sei $\mathcal{N}_k := \{\eta_{k,1}, \eta_{k,2}, \dots, \eta_{k,l(k)}\}$ die Menge der Nullstellen von π_{m_k, n_k} . Mit \mathcal{N} bezeichnet man die Menge der Grenzpunkte von $\{\mathcal{N}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Für $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnet man mit $\psi_{M_k}(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von π_{m_k, n_k} in $K(a, \varepsilon)$ (einschließlich Vielfachheiten).

Wir definieren

$$\psi(a, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_{M_k}(a, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\psi(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(a, \varepsilon).$$

Es folgt mit den letzten zwei Definitionen, dass für k genügend groß gilt

$$\psi_{M_k}(a, \varepsilon) \geq M_k \psi(a) / 2. \quad (6.82)$$

Sei \mathcal{G} die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus L$ mit $0 \in \mathcal{G}$.

6.4 Hauptsatz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $0 \notin (L \cup \mathcal{N})$;
- (b) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Wir beweisen zunächst den *Hauptsatz 6.4* in dem speziellen Fall $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$ (*Satz 6.5*). Dann führen wir den Beweis im Fall $\infty \in (L \cup \mathcal{N})$ durch (*Satz 6.6*).

6.5 Satz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$;
- (b) $0 \notin (L \cup \mathcal{N})$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Sei E eine kompakte Menge mit $0 \in E \subset \mathcal{G}$. Sei $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass (6.82) erfüllt ist für $k \geq \nu_0$. Es gibt einen Index $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $L_k \cap E = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Nun folgt mit (a), dass es ein $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$ gibt, so dass $\infty \notin (L_k \cup \mathcal{N}_k)$, $k \geq \nu_2$. Wegen (b) gibt es ein $\nu_3 \in \mathbb{N}$, $\nu_3 \geq \nu_2$, so dass $0 \notin \mathcal{N}_k$, $k \geq \nu_3$.

Sei $d_k := d(E, L_k)$ der Abstand zwischen E und L_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$.

Nun sei $\bar{d}_k := d(0, \mathcal{N}_k)$ der Abstand zwischen 0 und \mathcal{N}_k , $k \geq \nu_3$. Weiter sei $\bar{d} := \min\{\bar{d}_k\}$, $k \geq \nu_3$. Offenbar ist $\bar{d} > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\pi_{m_0, n_0}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \pi_{m_k, n_k})(z). \quad (6.83)$$

Sei

$$J := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \pi_{m_k, n_k} \neq \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Nach *Bemerkung K* ist J unendlich. Hiermit bekommt man eine zu (6.83) äquivalente Darstellung

$$\pi_{m_{k_0}, n_{k_0}}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} (\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z), \quad (6.84)$$

wobei $J = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_3\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (6.84) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$D_j(z) := (\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}})(z) = \frac{W_j(z)}{(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}})(z)}, \quad z \in E, \quad (6.85)$$

wobei

$$W_j(z) := (p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}} - q_{n_{k_{j+1}}} p_{m_{k_j}})(z). \quad (6.86)$$

Nach *Bemerkung M* liegen alle Nullstellen von W_j in $z = 0$ und $\text{Grad}(W_j) = K_j$. Sei \mathcal{A}_j der höchste Koeffizient von W_j . Damit gilt

$$W_j(z) := \mathcal{A}_j z^{K_j}, \quad (6.87)$$

und somit für $z \neq 0$ gilt

$$\mathcal{A}_j = (p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}} - q_{n_{k_{j+1}}} p_{m_{k_j}})(z) / z^{K_j}. \quad (6.88)$$

Bemerkung Q: Nach der Wahl von j_0 hat $\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ keine Nullstelle in ∞ für $j \geq j_0$. Damit sind alle Nullstellen von $\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}$ auch Nullstellen von $p_{m_{k_j}}$ für $j \geq j_0$. Hiermit und wegen (6.82) gibt es in $K(a, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j} \psi(a)/2$ Nullstellen von $p_{m_{k_j}}$, $j \geq j_0$.

Sei η_{k_j, i_0} eine Nullstelle von $p_{m_{k_j}}$, $j \geq j_0$ mit $\eta_{k_j, i_0} \in K(a, \varepsilon)$. Wir setzen $z = \eta_{k_j, i_0}$ in (6.88) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}} q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})}{(\eta_{k_j, i_0})^{K_j}}, \quad j \geq j_0,$$

wobei $\eta_{k_j, i_0} \neq 0$ nach der Wahl von j_0 .

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j und unter Berücksichtigung von (6.87), bekommt man von (6.85)

$$D_j(z) = \frac{z^{K_j}}{(\eta_{k_j, i_0})^{K_j}} \frac{(p_{m_{k_j+1}} q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_j+1}})(z)}, \quad j \geq j_0.$$

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|D_j\|_E \leq \frac{\|z\|_E^{K_j}}{|\eta_{k_j, i_0}|^{K_j}} \frac{|(p_{m_{k_j+1}} q_{n_{k_j}})(\eta_{k_j, i_0})|}{\min_{z \in E} |(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_j+1}})(z)|}, \quad j \geq j_0. \quad (6.89)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.89) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Wegen E eine kompakte Menge ist und $\eta_{k_j, i_0} \neq 0$ bekommt man

$$\|z\|_E^{K_j} / |\eta_{k_j, i_0}|^{K_j} \leq c_1^{K_j}. \quad (6.90)$$

Es gilt für $z \in E$

$$|q_{n_{k_j}}(z)| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |z - \alpha_{k_j, i}| \geq d^{n_{k_j}}, \quad j \geq j_0,$$

und damit gilt auch für $z \in E$

$$|q_{n_{k_j+1}}(z)| \geq d^{n_{k_j+1}}, \quad j \geq j_0.$$

Somit

$$1 / \min_{z \in E} |(q_{n_{k_j}} q_{n_{k_j+1}})(z)| \leq c_2^{n_{k_j+1}}, \quad (6.91)$$

wobei $c_2 \geq \max\{1, (1/d)^2\}$.

Sei a_m der höchste Koeffizient von $p_{m_{k_j+1}}$. Weiter sei $p_{m_{k_j+1}}^1 := a_m p_{m_{k_j+1}}$, wobei $p_{m_{k_j+1}}^1 \in \mathcal{P}_{m_{k_j+1}}$. Mit *Bemerkung Q* und wegen $\infty \notin \mathcal{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |p_{m_{k_j+1}}(\eta_{k_j, i_0})| &= |a_m| |p_{m_{k_j+1}}^1(\eta_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_m| \prod_{|\eta_{k_{j+1}, i} - \eta_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\eta_{k_{j+1}, i} - \eta_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq |a_m| e^{M_{k_j+1} \psi(a)/4} c_3^{n_{k_j+1}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Da $a_m p_{m_{k_j+1}}^1 = \pi_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}} q_{n_{k_j+1}}$ und wegen $p_{m_{k_j+1}}(z) \neq 0, z \in K_{\rho/2}$ ergibt sich

$$|a_m| \leq \frac{\|\pi_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}}\|_{K_{\rho/2}} \|q_{n_{k_j+1}}\|_{K_{\rho/2}}}{\|p_{m_{k_j+1}}^1\|_{K_{\rho/2}}}. \quad (6.93)$$

Mit *Hilfssatz 5.3 (a)* bekommt man

$$\|\pi_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}}\|_{K_{\rho/2}} \leq (1 + 2^{n_{k_j+1} - m_{k_j+1}}) \|f\|_{K_{\rho}} \leq c_4^{n_{k_j+1}}. \quad (6.94)$$

Wegen $\infty \notin L$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |q_{n_{k_j+1}}(z)| &= \\ &= \prod_{i=1}^{n_{k_j+1}} |z - \alpha_{k_j+1, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j+1}} (|z| + |\alpha_{k_j+1, i}|) \leq c_5^{n_{k_j+1}}, z \in K_{\rho/2}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Es gilt für $z \in K_{\rho/2}$

$$|p_{m_{k_j+1}}^1(z)| = \prod_{i=1}^{m_{k_j+1}} |z - \eta_{k_j+1, i}| \geq \bar{d}^{m_{k_j+1}}, j \geq j_0,$$

und somit

$$1/\|p_{m_{k_j+1}}^1\|_{K_{\rho/2}} \leq c_6^{m_{k_j+1}}. \quad (6.96)$$

Mit (6.94), (6.95) und (6.96) bekommt man aus (6.93)

$$|a_m| \leq c_7^{M_{k_j+1}}.$$

Hiermit ergibt sich aus (6.92)

$$|p_{m_{k_j+1}}(\eta_{k_j, i_0})| \leq (c_8 \varepsilon^{\psi(a)/2})^{M_{k_j+1}}, j \geq j_1. \quad (6.97)$$

Wegen $\infty \notin (L \cup \mathcal{N})$ bekommt man

$$|q_{n_{k_j}}(\eta_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |\eta_{k_j, i_0} - \alpha_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|\eta_{k_j, i_0}| + |\alpha_{k_j, i}|) \leq c_9^{n_{k_j}}. \quad (6.98)$$

Mit (6.90), (6.91), (6.97) und (6.98) bekommt man aus (6.89)

$$\|D_j\|_E \leq (c_{10} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{M_{k_j+1}}, j \geq j_1. \quad (6.99)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\psi(a)/2} < 1/c_{10}$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\psi(a)/2} c_{10} < 1$.

Es folgt mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2*

$$q^{M_{k_j+1}} \leq q^{k_j+1/2} = \delta^{k_j+1} \leq \delta^{j+1},$$

wobei $\delta := q^{1/2}$.

Hiermit bekommt man aus (6.99)

$$\left| \sum_{j=j_0}^{\infty} D_j(z) \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} q^{M_{k_j+1}} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1}, z \in E.$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_0+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_0}^{\infty} |D_j(z)|$, $z \in E$. Damit konvergiert die Reihe (6.84) und somit auch die Folge $\{\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und somit auch auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} , da E eine beliebige kompakte Teilmenge von \mathcal{G} war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathcal{G} . Mit *Hilfssatz 5.3 (b)* folgt $f(z) = f^0(z)$, $z \in K_{\rho/4}$. Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Der nächste *Satz 6.6* unterscheidet sich vom *Satz 6.5* nur durch die Bedingung (a). Man wendet eine geeignete Transformation an, so dass der Punkt ∞ in einen endlichen Punkt abgebildet wird. Damit bekommt man eine ähnliche Situation wie in *Satz 6.5*.

6.6 Satz. *Sei f in $z = 0$ holomorph. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \in (L \cup \mathcal{N})$;
- (b) $0 \notin (L \cup \mathcal{N})$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{\pi_{m_k, n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{G} gegen eine auf \mathcal{G} holomorphe Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathcal{G} .

Beweis: Wir wenden die Transformation (siehe (2.5))

$$h(z) := \frac{s_1 z}{s_2 z + s_3}$$

an, wobei $s_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Man bestätigt, dass $h(\infty) = s_1/s_2 \neq \infty$ und $h(-s_3/s_2) = \infty$. Wegen (b) kann man die Koeffizienten s_2 und s_3 so wählen, dass $-s_3/s_2 \notin (L \cup \mathcal{N})$ und somit $\infty = h(-s_3/s_2) \notin (h(L) \cup h(\mathcal{N})) =: (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$. Damit ist die Menge $\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}}$ beschränkt.

Sei $\tilde{L}_k := h(L_k) = \{\tilde{\alpha}_{k,1}, \tilde{\alpha}_{k,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{k,l(k)}\}$ die Menge der Pole von $\tilde{\pi}_{m_k, n_k}$. Weiter sei $\tilde{\mathcal{N}}_k := h(\mathcal{N}_k) = \{\tilde{\eta}_{k,1}, \tilde{\eta}_{k,2}, \dots, \tilde{\eta}_{k,l(k)}\}$ die Menge der Nullstellen von $\tilde{\pi}_{m_k, n_k}$, wobei *Bemerkung 2.2* zu beachten ist. Nach *Definition 3.17* ist \tilde{L} bzw. $\tilde{\mathcal{N}}$ die Menge der Grenzpunkte von $\{\tilde{L}_k\}_{k=0}^{\infty}$ bzw. von $\{\tilde{\mathcal{N}}_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Sei $H(w)$ die Umkehrfunktion von $h(z)$ (siehe (2.6)). Dann bekommt man mit (2.2)

$$\tilde{\pi}_{m_k, n_k}(w) := (\pi_{m_k, n_k} \circ H)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_k}} \frac{p_{m_k}^0(w)}{q_{n_k}^0(w)}, \quad (6.100)$$

wobei $\lambda_k := m_k - n_k$, $p_{m_k}^0 \in \mathcal{P}_{m_k}$, $q_{n_k}^0 \in \mathcal{P}_{n_k}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient von $q_{n_k}^0$ gleich 1.

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ so, dass (c) erfüllt ist. Mit *Bemerkung 3.21* gilt $a \in \mathcal{N}$ und damit $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{N}}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von $\tilde{\pi}_{m_k, n_k}$ in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$.

Weiter sei

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}, \varepsilon) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon)}{M_k}$$

und

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\psi}(\tilde{a}, \varepsilon).$$

Mit den letzten zwei Relationen bestätigt man, dass es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tilde{\psi}(\tilde{a})/2, \quad k \geq \nu_0.$$

Hiermit und wegen *Bemerkung E* folgt

$$\tilde{\psi}_{M_k}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq M_k \tilde{\psi}(a)/2, \quad k \geq \nu_0. \quad (6.101)$$

Sei \tilde{E} eine kompakte Menge mit $0 \in \tilde{E} \subset \tilde{\mathcal{G}}$, wobei $\tilde{\mathcal{G}} := h(\mathcal{G})$. Sei $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, derart, dass $\tilde{L}_k \cap \tilde{E} = \emptyset$, $k \geq \nu_1$. Da $\infty \notin (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$, gibt es einen Index $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$, so dass $\infty \notin (\tilde{L}_k \cup \tilde{\mathcal{N}}_k)$, $k \geq \nu_2$. Wegen (b) gibt es einen Index $\nu_3 \in \mathbb{N}$, $\nu_3 \geq \nu_2$, so dass $0 \notin (\tilde{L}_k \cup \tilde{\mathcal{N}}_k)$, $k \geq \nu_3$.

Sei $d_k := d(\tilde{E}, \tilde{L}_k)$ der Abstand zwischen \tilde{E} und \tilde{L}_k , $k \geq \nu_1$. Weiter sei $d := \min\{d_k\}$, $k \geq \nu_1$. Offenbar ist $d > 0$.

Nun sei $\bar{d}_k := d(0, \tilde{\mathcal{N}}_k)$ der Abstand zwischen 0 und $\tilde{\mathcal{N}}_k$, $k \geq \nu_3$. Weiter sei $\bar{d} := \min\{\bar{d}_k\}$, $k \geq \nu_3$. Offenbar ist $\bar{d} > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\tilde{\pi}_{m_0, m_0}(w) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\pi}_{m_{k+1}, n_{k+1}} - \tilde{\pi}_{m_k, n_k})(w). \quad (6.102)$$

Sei

$$J^0 := \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \tilde{\pi}_{m_k, n_k} \neq \tilde{\pi}_{m_{k-1}, n_{k-1}}\}.$$

Wegen (6.100) gilt $\pi_{m_k, n_k} = \pi_{m_{k-1}, n_{k-1}}$ genau dann wenn $\tilde{\pi}_{m_k, n_k} = \tilde{\pi}_{m_{k-1}, n_{k-1}}$. Somit gilt $J^0 \equiv J$ und es ist unendlich nach *Bemerkung K*. Hiermit bekommt man eine zu (6.102) äquivalente Darstellung

$$\tilde{\pi}_{m_{k_0}, n_{k_0}}(w) + \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{\pi}_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}} - \tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}})(w), \quad (6.103)$$

wobei $J^0 := \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_3\}$.

Wir zeigen, dass die Reihe (6.103) gleichmäßig auf \tilde{E} konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in J$ betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &:= (D_j \circ H)(w) = \\ &= ((\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \left(\frac{W_j}{q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w), \end{aligned} \quad (6.104)$$

wobei D_j in (6.85) definiert ist.

Aus (6.104) bekommt man zwei Darstellungen für \tilde{D}_j . Mit (2.2) ergibt sich

$$\tilde{D}_j(w) = \left(\frac{W_j}{q_{n_{k_j}} q_{n_{k_{j+1}}}} \circ H \right)(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{W_j^0(w)}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad (6.105)$$

wobei $W_j^0 \in \mathcal{P}_{K_j}$, $(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0) \in \mathcal{P}_{n_{k_j} + n_{k_{j+1}}}$ und $B_j := K_j - n_{k_j} - n_{k_{j+1}}$ mit $K_j := \max\{m_{k_{j+1}} + \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), n_{k_{j+1}} + \text{Grad}(p_{m_{k_j}})\}$.

Nun bekommen wir aus (6.104) die zweite Darstellung von \tilde{D}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &= ((\pi_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \circ H)(w) = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}} q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} \frac{p_{m_{k_{j+1}}}^0(w)}{q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)} - \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_j}} q_{n_{k_j}}^0(w)} \frac{p_{m_{k_j}}^0(w)}{q_{n_{k_j}}^0(w)} = \\ &= \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{\gamma_j}} \frac{W_j^*(w)}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \end{aligned} \quad (6.106)$$

wobei

$$\gamma_j := \max\{\lambda_{k_j}, \lambda_{k_{j+1}}\} \quad (6.107)$$

mit $\lambda_{k_j} := m_{k_j} - n_{k_j}$ und

$$W_j^*(w) = \begin{cases} (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_{j+1}} \\ (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) S(w) - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) : & \gamma_j = \lambda_{k_j} \end{cases} \quad (6.108)$$

mit $S(w) := (-s_2 w + s_1)^{|\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}|}$.

Wegen (6.107) machen wir zwei Fallunterscheidungen.

1 Fall: $\lambda_{k_{j+1}} < \lambda_{k_j}$.

Wir vergleichen (6.105) und (6.106). Unter Berücksichtigung von (6.107) und (6.108) bekommen wir

$$W_j^*(w) = (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) S(w) - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) =$$

$$= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} W_j^0(w). \quad (6.109)$$

Mit Hilfe der bekannten Gleichung

$$\lambda_{k_j} - B_j = \min\{m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}), \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}\}, \quad (6.110)$$

folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_j} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $p_{m_{k_j}}^0$ der Ordnung $m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}})$. Hiermit und wegen (6.110) gilt die Darstellung

$$p_{m_{k_j}}^0(w) = (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} p_{m_{k_j}}^*(w), \quad (6.111)$$

wobei $p_{m_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{m_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \geq 0$ auch wegen (6.110). Somit und wegen (6.111) ergibt sich aus (6.109)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j} - B_j} ((p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w)) \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w).$$

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Damit gilt

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 w^{K_j}. \quad (6.112)$$

Hiermit ergibt sich für $w \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) (-s_2w + s_1)^{C_j} - (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^*)(w)}{w^{K_j}}. \quad (6.113)$$

Nun wollen wir einen Punkt $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mit $p_{m_{k_j}}^*(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) = 0$ auswählen und $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (6.113) einsetzen. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein solcher Punkt existiert.

Bemerkung R: (a) $p_{m_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, hat mindestens $M_{k_j} \psi(a)/4$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$;

(b) $p_{m_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, hat mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$.

Für den Beweis der *Bemerkung R* benötigt man die Bedingung (6.2), denn mit (6.2) ergibt sich

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_{k_j}/n_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} (m_{k_j}/n_{k_j} - 1) = 0. \quad (6.114)$$

Damit gibt es einen Index $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, so dass

$$|\lambda_{k_j}|/n_{k_j} \leq \psi(a)/4, \quad j \geq j_1. \quad (6.115)$$

Beweis (Bemerkung R)

(a) : Unter Berücksichtigung, dass $\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}(\infty) \neq 0$, $j \geq j_0$, gilt nach *Hilfssatz 2.4 (a)*

$$\text{Grad}(p_{m_{k_j}}^0) \geq \text{Grad}(\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) + \min\{0, \lambda_{k_j}\}, \quad j \geq j_0.$$

Hiervon und mit (6.101) folgt, dass $p_{m_{k_j}}^0$, $j \geq j_0$ mindestens $M_{k_j}\psi(a)/2 + \min\{0, \lambda_{k_j}\}$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ hat. Wir bekommen mit (6.115)

$$\begin{aligned} M_{k_j}\psi(a)/2 + \min\{0, \lambda_{k_j}\} &\geq M_{k_j}\psi(a)/2 - |\lambda_{k_j}| \geq \\ M_{k_j}\psi(a)/2 - n_{k_j}\psi(a)/4 &\geq M_{k_j}\psi(a)/2 - M_{k_j}\psi(a)/4 = \\ M_{k_j}\psi(a)/4, \quad j &\geq j_1 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) : Mit Teil (a) und wegen (6.111) ist die Anzahl der Nullstellen von $p_{m_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$ in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ mindestens $M_{k_j}\psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - B_j)$. Wir erhalten mit (6.110)

$$\begin{aligned} M_{k_j}\psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - B_j) &\geq M_{k_j}\psi(a)/4 - (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}}) \geq \\ &\geq M_{k_j}\psi(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass

$$M_{k_j}\psi(a)/4 - 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} < 1$$

und zeigen, dass diese Annahme falsch ist. Nach Division durch $M_{k_{j+1}}$ ergibt sich

$$\frac{M_{k_j}\psi(a)/4}{M_{k_{j+1}}} < \frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_{j+1}}|, |\lambda_{k_j}|\}}{M_{k_{j+1}}}. \quad (6.116)$$

Nun berechnen wir die Grenzwerte der beiden Seiten von (6.116). Wir zeigen, dass der Grenzwert der linken Seite > 0 ist und der Grenzwert der rechten Seite 0 ist, woraus sich der gewünschte Widerspruch ergibt.

Da $k_j, k_{j+1} \in J^0$ ergibt sich

$$\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}} = \tilde{\pi}_{m_{k_{j+1}}, n_{k_{j+1}}} = \dots = \tilde{\pi}_{m_{k_{j+1}-1}, n_{k_{j+1}-1}}.$$

Hiermit und wegen $M_{k_j} \geq \text{Grad}(\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}) \geq \tilde{\psi}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon)$, bekommt man mit (6.101)

$$\begin{aligned} M_{k_j} &\geq \tilde{\psi}_{M_{k_j}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \tilde{\psi}_{M_{k_{j+1}}}(\tilde{a}, \varepsilon) = \dots = \tilde{\psi}_{M_{k_{j+1}-1}}(\tilde{a}, \varepsilon) \geq \\ &\geq M_{k_{j+1}-1}\psi(a)/2. \end{aligned}$$

Hiervon und mit Hilfe der bekannten Gleichung (siehe (6.43))

$$M_{k_{j+1}-1} + 1 \geq M_{k_{j+1}},$$

ergibt sich

$$M_{k_j} \geq M_{k_{j+1}-1} \psi(a)/2 = M_{k_{j+1}} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) \psi(a)/2.$$

Damit gilt

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (M_{k_j}/M_{k_{j+1}}) \geq \psi(a)/2 \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - 1/M_{k_{j+1}}) = \psi(a)/2. \quad (6.117)$$

Nun berechnen wir der Grenzwert der rechte Seite von (6.116).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\lambda_{k_j}| \geq |\lambda_{k_{j+1}}|$ (In dem anderen Fall argumentiert man ähnlich). Man bekommt mit (6.114)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}}{M_{k_{j+1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{M_{k_{j+1}}} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{n_{k_j}} = 0.$$

Hiermit und wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} 1/M_{k_{j+1}} = 0$ erhalten wir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M_{k_{j+1}}} + \frac{2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\}}{M_{k_{j+1}}} \right) = 0. \quad (6.118)$$

Mit (6.117) und (6.118) bekommt man aus (6.116), dass gilt $\psi(a)/8 < 0$. Dies steht im Widerspruch zu $\psi(a) > 0$. Somit ist die Annahme falsch und damit ist Teil (b) gezeigt. \square

Unter Berücksichtigung *Bemerkung R (b)* sei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $p_{m_{k_j}}^*$, $j \geq j_1$, mit $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (6.113) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})(-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}}{(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})^{K_j}},$$

wobei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \neq 0$.

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (6.112) bekommt man aus (6.105)

$$\tilde{D}_j(w) = \frac{1}{(-s_2 w + s_1)^{B_j}} \frac{w^{K_j}}{(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})^{K_j}} \frac{S(\eta)(p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_{j+1}}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $S(\eta) := (-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}$.

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq$$

$$\leq \|(-s_2w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j} |S(\eta)(p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|}{|\tilde{\eta}_{k_j, i_0}|^{K_j} \min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \quad (6.119)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.119) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Definitionsgemäß ist $B_j \in \mathbb{Z}$. Man bekommt

$$|(-s_2w + s_1)^{-B_j}| \leq c_1^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (6.120)$$

wobei $c_1 := \max\{\| -s_2w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2w + s_1)\|_{\tilde{E}}\}$.

Auf bekannte Art und Weise ergibt sich

$$\lambda_{k_{j+1}} \leq B_j \leq \lambda_{k_j}.$$

Hiermit und wegen (6.115) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (6.120) ergibt

$$\|(-s_2w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq c_1^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.121)$$

Da \tilde{E} kompakt ist und $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \neq 0$ bekommt man

$$\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j} / |\tilde{\eta}_{k_j, i_0}|^{K_j} \leq c_2^{K_j}. \quad (6.122)$$

Auf bekannte Art und Weise gelangen wir zu der Abschätzung

$$1 / \min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)| \leq c_3^{n_{k_j+1}}, \quad j \geq j_0. \quad (6.123)$$

Sei a_m^0 der höchste Koeffizient von $p_{m_{k_j+1}}^0$. Weiter sei $p_{m_{k_j+1}}^0 := a_m^0 p_{m_{k_j+1}}^2$, wobei $p_{m_{k_j+1}}^2 \in \mathcal{P}_{m_{k_j+1}}$. Mit *Bemerkung R (a)* bekommt man

$$\begin{aligned} |p_{m_{k_j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| &= |a_m^0| |p_{m_{k_j+1}}^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_m^0| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \leq \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| > \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq |a_m^0| \varepsilon^{M_{k_{j+1}} \psi(a)/4} c_4^{n_{k_j+1}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Es gilt $a_m^0 p_{m_{k_j+1}}^2(w) = \tilde{\pi}_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}}(w) q_{n_{k_j+1}}^0(w) (-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j+1}}$. Hiermit und wegen $p_{m_{k_j+1}}^2(w) \neq 0, w \in K_{\tilde{\rho}}$ ergibt sich

$$|a_m^0| \leq \frac{\|\tilde{\pi}_{m_{k_j+1}, n_{k_j+1}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \|q_{n_{k_j+1}}^0\|_{K_{\tilde{\rho}}} \|(-s_2w + s_1)^{\lambda_{k_j+1}}\|_{K_{\tilde{\rho}}}}{\|p_{m_{k_j+1}}^2\|_{K_{\tilde{\rho}}}}. \quad (6.125)$$

Da $K_{\bar{\rho}} \subset h(K_{\rho/4})$ bekommen wir

$$\|\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\bar{\rho}}} \leq \|\pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/2}} \leq (1 + 2^{n_{k_j} - m_{k_j}}) \|f\|_{K_{\rho}}, \quad j \geq j_0 \quad (6.126)$$

nach *Hilfssatz 5.3 (a)*.

Da $\infty \notin \tilde{L}$, ergibt sich für $w \in K_{\bar{\rho}}$

$$|q_{n_{k_{j+1}}}^0(w)| = \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} |w - \tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_{j+1}}} (|w| + |\tilde{\alpha}_{k_{j+1}, i}|) \leq c_5^{n_{k_{j+1}}}. \quad (6.127)$$

Auf bekannte Art und Weise bekommt man

$$\|(-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}}}\|_{K_{\bar{\rho}}} \leq c_6^{|\lambda_{k_{j+1}}|} \leq c_6^{n_{k_{j+1}}}, \quad (6.128)$$

wobei (6.115) zu beachten ist und $c_6 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{K_{\bar{\rho}}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{K_{\bar{\rho}}}\}$.

Für $w \in K_{\bar{\rho}}$ und $j \geq j_1$ gilt

$$|p_{m_{k_{j+1}}}^2(w)| = \prod_{i=1}^{m_{k_{j+1}}} |w - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \geq \bar{d}^{m_{k_{j+1}}}$$

und damit

$$1/|p_{m_{k_{j+1}}}^2|_{K_{\bar{\rho}}} \leq (1/\bar{d})^{m_{k_{j+1}}} \leq c_7^{m_{k_{j+1}}}, \quad (6.129)$$

Mit (6.126)-(6.129) ergibt sich aus (6.125)

$$|a_m^0| \leq c_8^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1.$$

Hiermit bekommt man aus (6.124)

$$|p_{m_{k_{j+1}}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} c_9)^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.130)$$

Da $\infty \notin (\tilde{L} \cup \tilde{\mathcal{N}})$ ergibt sich

$$|q_{n_{k_j}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{n_{k_j}} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\alpha}_{k_j, i}| \leq \prod_{i=1}^{n_{k_j}} (|\tilde{\eta}_{k_j, i_0}| + |\tilde{\alpha}_{k_j, i}|) \leq c_{10}^{n_{k_j}}. \quad (6.131)$$

Da $C_j \geq 0$ bekommt man

$$|(-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| \leq |-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1|^{C_j}. \quad (6.132)$$

Mit Hilfe der bekannten Relation (siehe (6.67))

$$\lambda_{k_j} - B_j = \begin{cases} \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} & \text{im Fall (1),} \\ m_{k_j} - \text{Grad}(p_{m_{k_j}}) & \text{im Fall (2),} \end{cases}$$

folgt $\lambda_{k_j} - B_j \geq 0$. Hiervon und mit (6.115) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_j &:= \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} - (\lambda_{k_j} - B_j) \leq \lambda_{k_j} - \lambda_{k_{j+1}} \leq \\ &\leq 2 \max\{|\lambda_{k_j}|, |\lambda_{k_{j+1}}|\} \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1. \end{aligned}$$

Hiermit bekommt man aus (6.132)

$$|(-s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1)^{C_j}| \leq c_{11}^{n_{k_{j+1}}}, \quad (6.133)$$

wobei $c_{11} := \max\{1, \sup_{k_j \in J} | -s_2 \tilde{\eta}_{k_j, i_0} + s_1 |\}$.

Mit (6.121), (6.122), (6.123), (6.130), (6.131) und (6.133) ergibt sich aus (6.120)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} c_{12})^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.134)$$

2 Fall: $\lambda_{k_{j+1}} \geq \lambda_{k_j}$.

In diesem Fall bekommen wir eine ähnliche wie (6.134) Abschätzung. Wir vergleichen (6.105) und (6.106). Unter Berücksichtigung von (6.107) und (6.108) bekommen wir

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= (p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^0)(w) - S(w)(q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w) = \\ &= (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} W_j^0(w). \end{aligned} \quad (6.135)$$

Mit Hilfe der bekannten Gleichung

$$\lambda_{k_{j+1}} - B_j = \min\{n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}}), \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j}\}, \quad (6.136)$$

folgt $\lambda_{k_{j+1}} - B_j \geq 0$. Damit ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von W_j^* der Ordnung $\lambda_{k_{j+1}} - B_j$.

Wir finden nun eine explizite Darstellung für das Polynom W_j^0 .

Mit *Hilfssatz 2.3* ist $w = s_1/s_2$ eine Nullstelle von $q_{n_{k_j}}^0$ der Ordnung $n_{k_j} - \text{Grad}(q_{n_{k_j}})$. Hiervon und mit (6.136) gilt die Darstellung

$$q_{n_{k_j}}^0(w) = (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} q_{n_{k_j}}^*(w), \quad (6.137)$$

wobei $q_{n_{k_j}}^* \in \mathcal{P}_{n_{k_j}}$.

Andererseits $C_j := \lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} - (\lambda_{k_{j+1}} - B_j) \geq 0$ auch wegen (6.136). Somit und wegen (6.137) ergibt sich aus (6.135)

$$\begin{aligned} W_j^*(w) &= \\ &= (-s_2 w + s_1)^{\lambda_{k_{j+1}} - B_j} ((p_{m_{k_{j+1}}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2 w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_{j+1}}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w)), \end{aligned}$$

und damit

$$W_j^0(w) = (p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2 w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_j+1}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w).$$

Nach *Bemerkung O* liegen alle Nullstellen von W_j^0 in $w = 0$ und $\text{Grad}(W_j^0) = K_j$. Damit gilt

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 w^{K_j}, \quad (6.138)$$

wobei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 bezeichne.

Es gilt für $w \neq 0$

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(w) - (-s_2 w + s_1)^{C_j} (q_{n_{k_j+1}}^0 p_{m_{k_j}}^0)(w)}{w^{K_j}}. \quad (6.139)$$

Nach *Bemerkung R* hat $p_{m_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, mindestens eine Nullstelle in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Sei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $p_{m_{k_j}}^0$, $j \geq j_1$, mit $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (6.139) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{(p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})^{K_j}}, \quad j \geq j_1,$$

wobei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \neq 0$.

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j^0 und unter Berücksichtigung von (6.138) bekommt man aus (6.105)

$$\tilde{D}_j(w) = (-s_2 w + s_1)^{-B_j} \frac{w^{K_j}}{(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})^{K_j}} \frac{(p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)}, \quad j \geq j_1.$$

Hiermit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \frac{\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j}}{|\tilde{\eta}_{k_j, i_0}|^{K_j}} \frac{|(p_{m_{k_j+1}}^0 q_{n_{k_j}}^*)(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|}{\min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)|}, \quad j \geq j_1. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (6.140) nach oben ab. Seien C_1, C_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Auf bekannte Art und Weise (siehe Fall 1) bekommen wir

$$\|w\|_{\tilde{E}}^{K_j} / |\tilde{\eta}_{k_j, i_0}|^{K_j} \leq C_1^{K_j}, \quad (6.141)$$

$$1 / \min_{w \in \tilde{E}} |(q_{n_{k_j}}^0 q_{n_{k_j+1}}^0)(w)| \leq C_2^{n_{k_j+1}}, \quad (6.142)$$

$$|p_{m_{k_j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} C_3)^{M_{k_j+1}}, \quad (6.143)$$

$$|q_{n_{k_j}}^*(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq C_4^{n_{k_j}} \quad (6.144)$$

und

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{|B_j|}, \quad w \in \tilde{E}, \quad (6.145)$$

wobei $C_5 := \max\{\| -s_2 w + s_1 \|_{\tilde{E}}, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_{\tilde{E}}\} \geq 1$.

Man bestätigt, dass

$$\lambda_{k_j} \leq B_j \leq \lambda_{k_{j+1}}.$$

Hiervon und mit (6.115) bekommt man

$$|B_j| \leq n_{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich aus (6.145) ergibt

$$\|(-s_2 w + s_1)^{-B_j}\|_{\tilde{E}} \leq C_5^{n_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1. \quad (6.146)$$

Mit (6.141)-(6.144) und (6.146) bekommt man aus (6.140)

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq (\varepsilon^{\psi(a)/4} C_6)^{M_{k_{j+1}}}.$$

Damit haben wir auch im Fall 2 eine ähnliche Abschätzung wie in (6.134) bekommen. Sei $c := \max\{c_{12}, C_6\}$. Da man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\psi(a)/2} < 1/c$. Damit gilt $q := \varepsilon^{\psi(a)/4} < 1$. Somit bekommen wir eine gemeinsame Abschätzung für den beiden Fällen:

$$\|\tilde{D}_j\|_{\tilde{E}} \leq q^{M_{k_{j+1}}}, \quad j \geq j_1,$$

woraus sich mit *Bemerkung 4.1* und *Bemerkung 4.2* ergibt

$$\left| \sum_{j=j_1}^{\infty} \tilde{D}_j(w) \right| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{M_{k_{j+1}}} \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1},$$

wobei $w \in \tilde{E}$ und $\delta := q^{1/2}$.

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty}$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_1}^{\infty} \delta^{j+1} = \delta^{j_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_1}^{\infty} |D_j(w)|$, $w \in \tilde{E}$. Hiermit konvergiert die Reihe (6.103) und somit auch die Folge $\{\tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\}_{j=j_1}^{\infty}$ gleichmäßig auf \tilde{E} und damit auch auf kompakten Teilmengen von $\tilde{\mathcal{G}}$, da E eine beliebige kompakte Teilmenge von $\tilde{\mathcal{G}}$ war. Sei f^0 die Grenzfunktion der Folge. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 auf $\tilde{\mathcal{G}}$ holomorph. Andererseits gilt

$$\tilde{f}(w) = f^0(w), \quad w \in K_{\tilde{\rho}}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt man wegen

$$\|\tilde{f} - \tilde{\pi}_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\tilde{\rho}}} \leq \|f - \pi_{m_{k_j}, n_{k_j}}\|_{K_{\rho/4}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

wobei *Hilfssatz 5.3 (b)* zu beachten ist.

Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von \tilde{f} nach $\tilde{\mathcal{G}}$ und f^0 ist eindeutig bestimmt nach dem *Identitätssatz 2.10*. Damit ist $f = \tilde{f} \circ H$ holomorph auf \mathcal{G} . ■

Beispiele für *Hauptsatz 6.4* sind die diagonalen Approximationen $\{\pi_{n+\lambda, n}\}_{n=0}^{\infty}$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

7 Einfluss der Verteilung der Nullstellen polynomialer L_p -Approximationen auf die Holomorphieeigenschaften der approximierten Funktion

7.1 L_p -Approximationen

Sei ω ein auf $[-1, 1]$ fast überall positives Gewicht, so dass $\int_{-1}^1 \omega(x) dx = 1$. Für $p \geq 1$ definieren wir den Raum $L_p[-1, 1]$ wie folgt

$$L_p[-1, 1] := \left\{ f : \int_{-1}^1 |f(x)|^p \omega(x) dx < \infty \right\}.$$

Sei $\|\cdot\|_{L_p[-1,1]}$ die L_p -Norm über $[-1, 1]$, wobei

$$\|f\|_{L_p[-1,1]} := \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

und

$$\|f\|_{L_\infty[-1,1]} := \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|.$$

Sei $f \in L_p[-1, 1]$. Mit \mathcal{P}_m bezeichnet man den Raum der algebraischen Polynome vom Grad kleiner oder gleich m .

Sei

$$e_m := \inf_{p_m \in \mathcal{P}_m} \|f - p_m\|_{L_p[-1,1]}$$

die minimale Abweichung der Funktion f bezüglich des Raumes \mathcal{P}_m . Man nennt P_m beste L_p -Approximation an f auf $[-1, 1]$ bezüglich \mathcal{P}_m , falls die Gleichung

$$e_m = \|f - P_m\|_{L_p[-1,1]}$$

erfüllt ist. Bekanntlich ist P_m eindeutig und $e_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Mit Hilfe der Funktion $H(w)$ aus (2.4) definieren wir die Norm $L_p^*[-1, 1]$ wie folgt:

$$\|f\|_{L_p^*[-1,1]} := \left(\int_{-1}^1 |f(w)|^p \tilde{\omega}(w) H'(w) dw \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

wobei $H'(w) := \frac{d}{dw} H(w)$ die erste Ableitung der Funktion $H(w)$ aus (2.4) bezeichnet, $\tilde{\omega}(w) := (\omega \circ H)(w)$, und

$$\|f\|_{L_\infty^*[-1,1]} := \sup_{w \in [-1,1]} |f(w)|.$$

7.1 Bemerkung. Sei $f \in L_p[-1, 1]$. Dann gilt $\|f\|_{L_p[-1, 1]} = \|\tilde{f}\|_{L_p^*[-1, 1]}$, $1 \leq p \leq \infty$, mit $\tilde{f} := f \circ H$.

Sei $p_m \in \mathcal{P}_m$. Wir definieren für $w \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\tilde{p}_m(w) := (p_m \circ H)(w) = p_m^0(w)/(-s_2 w + s_1)^m, \quad (7.1)$$

wobei $p_m^0 \in \mathcal{P}_m$.

7.2 Einige Hilfssätze

7.2 Hilfssatz. Sei $F \in C[-1, 1]$. Dann gilt

$$\|F\|_{L_p[-1, 1]} = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]; \quad (a)$$

und

$$\|F\|_{L_p^*[-1, 1]} = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (b)$$

Beweis: (a) : (\Leftarrow) ist bekannt.

(\Rightarrow): Sei $\|F\|_{L_p[-1, 1]} = 0$. Wir nehmen an, dass ein $x_0 \in [-1, 1]$ gibt mit $F(x_0) \neq 0$. Da $F \in C[-1, 1]$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $F(x) \neq 0$, $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Damit ergibt sich

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |F(x)|^p \omega(x) dx =: C > 0,$$

und damit

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_p[-1, 1]}^p &:= \int_{-1}^1 |F(x)|^p \omega(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{x_0 - \varepsilon} |F(x)|^p \omega(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |F(x)|^p \omega(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^1 |F(x)|^p \omega(x) dx \geq \\ &\geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |F(x)|^p \omega(x) dx = C > 0. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung und damit ist die Annahme falsch, was zu zeigen war. Der Beweis von (b) folgt aus (a), wenn man die Ungleichung $H'(w) > 0$, $w \in [-1, 1]$, beachtet. \square

In Abschnitt 7.3 benötigen wir eine Abschätzung von *Nikolski-Typ*. Dazu stellen wir einige Definitionen aus [4] (vgl. [11]) dar. Wir bezeichnen mit μ , $\mu := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (dx/\sqrt{1-x^2})$ das Gleichgewichtsmass auf $[-1, 1]$. Wir definieren

$$\phi(\omega, \varepsilon) := \inf \left\{ \int_A \omega(x) dx : A \subset [-1, 1], \mu(A) \geq \varepsilon \right\}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Weiter sei $\varepsilon_n(\omega)$ die Lösung der Gleichung $\phi(\omega, \varepsilon) = \exp(-n\varepsilon)$. Bekanntlich ([11]) ist $\varepsilon_n(\omega)$ eindeutig und $\varepsilon_n(\omega) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

7.3 Satz ([11]). Sei $p_m \in \mathcal{P}_m$ und sei ω wie oben definiert. Dann gilt für $p > 0$

$$\|p_m\|_{L_\infty[-1,1]} \leq e^{Cm\varepsilon_m(\omega)} \|p_m\|_{L_p[-1,1]},$$

wobei C eine positive Konstante bezeichne, die nur von p und ω abhängig ist.

7.4 Satz ([11]). Sei $p > 1$ und $m \in \mathbb{N}$. Alle Nullstellen von $P_{m+1} - P_m$ liegen in $[-1, 1]$, falls $P_m \neq P_{m+1}$.

7.5 Hilfssatz. Seien $p_m, p_m^0 \in \mathcal{P}_m$, so dass (7.1) erfüllt ist. Sei a_m der höchste Koeffizient von p_m . Dann gilt

$$|a_m| \leq 2^{m-1} e^{Cm\varepsilon_m(\omega)} \|p_m\|_{L_p[-1,1]}. \quad (a)$$

Sei a_m^0 der höchste Koeffizient von p_m^0 . Dann gilt

$$|a_m^0| \leq 2^{m-1} \|(-s_2w + s_1)^m\|_{L_\infty[-1,1]} e^{Cm\varepsilon_m(\omega)} \|p_m\|_{L_p[-1,1]}. \quad (b)$$

Beweis: Sei T_m das Tschebyscheff-Polynom mit $\text{Grad}(T_m) = m$. Bekanntlich ist $\|T_m\|_{L_\infty[-1,1]} \geq 1/2^{m-1}$, $m \geq 1$.

(a) : Sei $p_m(z) := a_m p_m^1(z)$ mit $p_m^1 \in \mathcal{P}_m$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|p_m\|_{L_\infty[-1,1]} &= \\ &= |a_m| \|p_m^1\|_{L_\infty[-1,1]} \geq |a_m| \|T_m\|_{L_\infty[-1,1]} \geq |a_m| 2^{1-m}. \end{aligned}$$

Hiermit und mit Satz 7.3 folgt (a).

(b) : Sei $p_m^0(w) := a_m^0 p_m^2(w)$ mit $p_m^2 \in \mathcal{P}_m$.

Nach (7.1) gilt $\tilde{p}_m(w) = a_m^0 p_m^2(w) / (-s_2w + s_1)^m$. Somit ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}_m\|_{L_\infty[-1,1]} &\geq \\ &\geq |a_m^0| \|p_m^2\|_{L_\infty[-1,1]} / \|(-s_2w + s_1)^m\|_{L_\infty[-1,1]}. \end{aligned} \quad (i)$$

Andererseits ist

$$\|p_m^2\|_{L_\infty[-1,1]} \geq \|T_m\|_{L_\infty[-1,1]} \geq 2^{1-m}.$$

Hiermit und wegen $\|\tilde{p}_m\|_{L_\infty^*[-1,1]} = \|p_m\|_{L_\infty[-1,1]}$ (nach Bemerkung 7.1) bekommt man aus (i)

$$\|p_m\|_{L_\infty[-1,1]} \geq 2^{1-m} |a_m^0| / \|(-s_2w + s_1)^m\|_{L_\infty[-1,1]}. \quad (ii)$$

Mit (ii) und Satz 7.3 ergibt sich (b). \square

7.3 Einfluss der Nullstellen

In diesem Abschnitt gewinnen wir Aussagen über die Konvergenz der besten polynomialen L_p -Approximationen, $p > 1$, mit fast überall auf $[-1, 1]$ positives Gewicht ω , wenn die Nullstellen der Approximationen gewisse Bedingungen erfüllen.

Für $f \in L_p[-1, 1]$, $p > 1$ sei $P_m \in \mathcal{P}_m$ beste L_p -Approximation an f auf $[-1, 1]$. Weiter sei $l(m) := \text{Grad}(P_m)$ und $\mathcal{N}_m := \{\eta_{m,1}, \dots, \eta_{m,l(m)}\}$ die Menge der Nullstellen von P_m . Sei \mathcal{N} die Menge der Grenzpunkte von $\{\mathcal{N}_m\}_{m=0}^\infty$. Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \overline{\mathbb{C}}$ bezeichnet man mit $\psi_m(a, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von P_m in $K(a, \varepsilon)$ (einschließlich Vielfachheiten).

Weiter sei

$$\psi(a, \varepsilon) := \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\psi_m(a, \varepsilon)}{m}$$

und

$$\psi(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(a, \varepsilon).$$

Es folgt mit den letzten zwei Definitionen, dass für m genügend groß gilt

$$\psi_m(a, \varepsilon) \geq m\psi(a)/2. \quad (7.2)$$

7.6 Hauptsatz. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:

- (a) $\mathcal{N} \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (b) Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{P_m\}_{m=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} gegen eine ganze Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathbb{C} .

Wir beweisen zunächst den *Hauptsatz 7.6* in dem speziellen Fall $\infty \notin \mathcal{N}$ (*Satz 7.7*). Dann führen wir den Beweis im Fall $\infty \in \mathcal{N}$ durch (*Satz 7.8*).

7.7 Satz. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:

- (a) $\infty \notin \mathcal{N}$;
- (b) $\mathcal{N} \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.

Dann konvergiert die Folge $\{P_m\}_{m=0}^\infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} gegen eine ganze Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathbb{C} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Menge mit $[-1, 1] \subset E$. Sei $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass (7.2) erfüllt ist für $m \geq \nu_0$. Da $\mathcal{N} \cap [-1, 1] = \emptyset$, gibt es einen Index $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $\mathcal{N}_m \cap [-1, 1] = \emptyset$, $m \geq \nu_1$. Nun folgt mit (a), dass es ein $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$ gibt, so dass $\infty \notin \mathcal{N}_m$, $m \geq \nu_2$. Wegen (b) gibt es ein $\nu_3 \in \mathbb{N}$, $\nu_3 \geq \nu_2$, so dass $\mathcal{N}_m \cap [-1, 1] = \emptyset$, $m \geq \nu_3$. Sei $d_m := d(\mathcal{N}_m, [-1, 1])$ der Abstand zwischen \mathcal{N}_m , $m \geq \nu_3$ und $[-1, 1]$. Weiter sei $d := \min\{d_m\}$, $m \geq \nu_3$. Offenbar ist $d > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$P_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} (P_{m+1} - P_m)(z). \quad (7.3)$$

Eine zu (7.3) äquivalente Darstellung ergibt sich, wenn wir alle Summanden, die identisch 0 sind ($P_{m+1} = P_m$), weglassen. Dazu definieren wir die Menge K als

$$K := \{0\} \cup \{m \in \mathbb{N} : P_m \neq P_{m-1}\}.$$

Bemerkung S: K ist unendlich genau dann, wenn $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: (\Rightarrow): Sei K unendlich. Wir zeigen, dass $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Annahme: Sei $f \in \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Damit existiert ein Index $k \in \mathbb{N}$ mit $P_m = f$, $m \geq k$. Somit ist K endlich, was im Widerspruch zu unsere Voraussetzung steht. Damit ist die Annahme falsch.

(\Leftarrow): Sei nun $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, dass K unendlich ist.

Annahme: Sei K endlich. Dann gibt es einen Index $k \in \mathbb{N}$ mit $P_m = P_k$, $m \geq k$. Somit gilt

$$\|f - P_m\|_{L_p[-1,1]} = \|f - P_k\|_{L_p[-1,1]}, \quad m \geq k$$

daraus ergibt sich

$$\|f - P_m\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow \|f - P_k\|_{L_p[-1,1]}, \quad m \rightarrow \infty,$$

im Widerspruch an $\lim_{m \rightarrow \infty} e_m = 0$. Damit ist die Annahme falsch. \square

Da $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt mit *Bemerkung S*, dass K unendlich ist. Damit bekommt man eine zu (7.3) äquivalente Darstellung

$$P_{k_0}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(z), \quad (7.4)$$

wobei $k_j \in K$, $k_j < k_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$ ($k_0 = 0$). Weiter sei $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : k_j \geq \nu_3\}$. Bekanntlich, konvergiert die Reihe (7.4) genau dann wenn die

Folgen $\{P_{k_j}\}_{j=0}^\infty$ konvergieren. Wir zeigen, dass die Reihe (7.4) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in K$ betrachten wir die Differenz

$$D_j(z) := (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(z) = \mathcal{A}_j W_j^1(z), \quad z \in E, \quad (7.5)$$

wobei \mathcal{A}_j der höchste Koeffizient von D_j ist und $W_j^1 \in \mathcal{P}_{k_{j+1}}$ mit $W_j^1(z) := z^{k_{j+1}} + \dots$ ($\text{Grad}(W_j^1) = k_{j+1}$ nach *Satz 7.4*). Mit (7.5) gilt für z mit $W_j^1(z) \neq 0$

$$\mathcal{A}_j = (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(z)/W_j^1(z). \quad (7.6)$$

Mit (7.2) gibt es in $K(a, \varepsilon)$ mindestens $k_j \psi(a)/2$ Nullstellen von P_{k_j} , $j \geq j_0$. Sei η_{k_j, i_0} eine Nullstelle von P_{k_j} , $j \geq j_0$ mit $\eta_{k_j, i_0} \in K(a, \varepsilon)$. Wir setzen $z = \eta_{k_j, i_0}$ in (7.6) ein und bekommen

$$\mathcal{A}_j = P_{k_{j+1}}(\eta_{k_j, i_0})/W_j^1(\eta_{k_j, i_0}),$$

wobei $W_j^1(\eta_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\eta_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$ und $W_j^1(z) \neq 0$, $z \notin [-1, 1]$ (siehe *Satz 7.4*).

Mit Hilfe der letzten Darstellung von \mathcal{A}_j bekommt man aus (7.5)

$$D_j(z) = \frac{P_{k_{j+1}}(\eta_{k_j, i_0})W_j^1(z)}{W_j^1(\eta_{k_j, i_0})}, \quad j \geq j_0.$$

Damit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\|D_j\|_E \leq \frac{|P_{k_{j+1}}(\eta_{k_j, i_0})| \|W_j^1\|_E}{|W_j^1(\eta_{k_j, i_0})|}, \quad j \geq j_0, \quad (7.7)$$

wobei $\|\cdot\|_E := \max_E |\cdot|$.

Nun schätzen wir die rechte Seite von (7.7) nach oben ab.

Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten. Weiter bezeichnen wir durch $\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,k_{j+1}}$ die Nullstellen von W_j^1 . Da E kompakt ist und wegen $|\zeta_{j,i}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k_{j+1}$ (*Satz 7.4*), bekommt man

$$|W_j^1(z)| = \prod_{i=1}^{k_{j+1}} |z - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{k_{j+1}} (|z| + |\zeta_{j,i}|) \leq c_1^{k_{j+1}}, \quad z \in E.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\eta_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{k_{j+1}} |\eta_{k_j, i_0} - \zeta_{j,i}| \geq d^{k_{j+1}}, \quad j \geq j_0,$$

ergibt sich

$$\|W_j^1\|_E / |W_j^1(\eta_{k_j, i_0})| \leq c_2^{k_{j+1}}, \quad j \geq j_0. \quad (7.8)$$

Nun wollen wir den Ausdruck $|P_{k_{j+1}}(\eta_{k_j, i_0})|$ abschätzen. Dazu benötigen wir *Hilfssatz 7.5*.

Sei a_{j+1} der höchste Koeffizient von $P_{k_{j+1}}$. Weiter sei $P_{k_{j+1}}(z) := a_{j+1}P_{k_{j+1}}^1(z)$ mit $P_{k_{j+1}}^1 \in \mathcal{P}_{k_{j+1}}$. Mit *Hilfssatz 7.5 (a)* ergibt sich

$$|a_{j+1}| \leq 2^{k_{j+1}} e^{Ck_{j+1}\varepsilon_{k_{j+1}}(\omega)} \|P_{k_{j+1}}\|_{L_p[-1,1]}. \quad (7.9)$$

Andererseits gilt $P_{k_{j+1}} \in L_p[-1,1]$ und damit $\|P_{k_{j+1}}\|_{L_p[-1,1]} \leq c_3$.

Hiermit bekommt man aus (7.9)

$$|a_{j+1}| \leq c_4^{k_{j+1}} e^{Ck_{j+1}\varepsilon_{k_{j+1}}(\omega)}. \quad (7.10)$$

Hiermit und mit (7.2) ergibt sich wegen $\infty \notin \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} |P_{k_{j+1}}(\eta_{k_j, i_0})| &= |a_{j+1}| |P_{k_{j+1}}^1(\eta_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_{j+1}| \prod_{|\eta_{k_{j+1}, i} - \eta_{k_j, i_0}| \leq \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\eta_{k_{j+1}, i} - \eta_{k_j, i_0}| > \varepsilon} |\eta_{k_j, i_0} - \eta_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq |a_{j+1}| \varepsilon^{k_{j+1}\psi(a)/2} c_5^{k_{j+1}} \leq (c_6 e^{C\varepsilon_{k_{j+1}}(\omega)} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

wobei (7.10) zu beachten ist.

Mit (7.8) und (7.11) bekommt man aus (7.7)

$$\|D_j\|_E \leq (c_7 e^{C\varepsilon_{k_{j+1}}(\omega)} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}, \quad j \geq j_0.$$

Da $\varepsilon_k(\omega) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, bekommt man

$$\|D_j\|_E \leq (c_8 \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1 \geq j_0. \quad (7.12)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $\varepsilon^{\psi(a)/2} < 1/c_8$. Damit gilt $q := c_8 \varepsilon^{\psi(a)/2} < 1$. Mit (7.12) bekommt man

$$\left| \sum_{j=j_1}^{\infty} D_j(z) \right| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} |D_j(z)| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{k_{j+1}} \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{j+1},$$

wobei *Bemerkung 4.2* zu beachten ist.

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_1}^{\infty} q^{j+1} = q^{j_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_1}^{\infty} |D_j(z)|$, $z \in E$. Daher konvergiert die Reihe (7.4) und somit auch die Folge $\{P_{k_j}\}_{j=j_0}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und somit

auch auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} , da E eine beliebige kompakte Teilmenge von \mathbb{C} war.

Damit gilt

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |(f^0 - P_{k_j})(z)| = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (7.13)$$

wobei f^0 die Grenzfunktion der Folge ist. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathbb{C} .

Wir zeigen nun, dass

$$\|f^0 - f\|_{L_p[-1,1]} = 0. \quad (7.14)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \|f^0 - f\|_{L_p[-1,1]} = \\ & = \|f^0 - P_{k_j} + P_{k_j} - f\|_{L_p[-1,1]} \leq \|f - P_{k_j}\|_{L_p[-1,1]} + \|f^0 - P_{k_j}\|_{L_p[-1,1]}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Bekanntlich gilt

$$\|f - P_{k_j}\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (7.16)$$

Andererseits ergibt sich wegen (7.13)

$$\|f^0 - P_{k_j}\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (7.17)$$

Mit (7.16) und (7.17) ergibt sich aus (7.15) die Gleichung (7.14). Mit *Hilfssatz 7.2 (a)* ergibt sich $f^0(z) = f(z)$, $z \in [-1, 1]$. Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von f nach \mathbb{C} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Der nächste *Satz 7.8* unterscheidet sich vom *Satz 7.7* nur durch die Bedingung (a). Man wendet eine geeignete Transformation an, so dass der Punkt ∞ in einen endlichen Punkt abgebildet wird. Damit bekommt man eine ähnliche Situation wie in *Satz 7.7*.

7.8 Satz. *Sei $f \in C[-1, 1]$. Wir nehmen an, dass die folgende Bedingungen gelten:*

- (a) $\infty \in \mathcal{N}$;
- (b) $\mathcal{N} \cap [-1, 1] = \emptyset$;
- (c) *Es gibt einen Punkt $a \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $\psi(a) > 0$.*

Dann konvergiert die Folge $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} gegen eine ganze Funktion f^0 , und f^0 ist holomorphe Fortsetzung von f nach \mathbb{C} .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \notin \mathbb{N}_0$.

Wir wenden die Transformation (siehe (2.3))

$$h(z) := \frac{s_1 z + s_2}{s_2 z + s_1}$$

an, wobei $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $s_1 > |s_2|$.

Man bestätigt, dass $h(\infty) = s_1/s_2 \neq \infty$ und $h(-s_1/s_2) = \infty$. Wegen (b) kann man die Koeffizienten s_1 und s_2 so wählen, dass $-s_1/s_2 \notin \mathcal{N}$ und damit $\infty = h(-s_1/s_2) \notin h(\mathcal{N}) =: \tilde{\mathcal{N}}$. Damit ist die Menge $\tilde{\mathcal{N}}$ beschränkt.

Weiter sei $\tilde{\mathcal{N}}_m := h(\mathcal{N}_m) = \{\tilde{\eta}_{m,1}, \tilde{\eta}_{m,2}, \dots, \tilde{\eta}_{m,l(m)}\}$ die Menge der Nullstellen von \tilde{P}_m , wobei *Bemerkung 2.2* zu beachten ist. Nach *Definition 3.17* ist $\tilde{\mathcal{N}}$ die Menge der Grenzpunkte von $\{\tilde{\mathcal{N}}_m\}_{m=0}^\infty$.

Sei $H(w)$ die inverse Funktion von $h(z)$ (siehe (2.4)). Mit (2.2) ergibt sich

$$\tilde{P}_m(w) := (P_m \circ H)(w) = \frac{P_m^0(w)}{(-s_2 w + s_1)^m}, \quad (7.18)$$

wobei $P_m^0 \in \mathcal{P}_m$.

Sei $a \in \overline{\mathbb{C}}$ so, dass (c) erfüllt ist. Mit *Bemerkung 3.21* gilt $a \in \mathcal{N}$ und damit $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{N}}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\tilde{\psi}_m(\tilde{a}, \varepsilon)$ die Anzahl der Nullstellen von \tilde{P}_m in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ (einschließlich Vielfachheiten).

Weiter sei

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}, \varepsilon) := \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\psi}_m(\tilde{a}, \varepsilon)}{m}$$

und

$$\tilde{\psi}(\tilde{a}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\psi}(\tilde{a}, \varepsilon).$$

Mit den letzten zwei Definitionen folgt, dass es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\tilde{\psi}_m(\tilde{a}, \varepsilon) \geq m\tilde{\psi}(\tilde{a})/2 = m\psi(a)/2, \quad m \geq \nu_0, \quad (7.19)$$

wobei *Bemerkung E* zu berücksichtigen ist.

Sei E eine kompakte Menge mit $[-1, 1] \subset E \subseteq \mathbb{C}$. Wegen $\tilde{\mathcal{N}} \cap [-1, 1] = \emptyset$, existiert ein $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, so dass $\tilde{\mathcal{N}}_m \cap [-1, 1] = \emptyset$, $m \geq \nu_1$. Da $\infty \notin \tilde{\mathcal{N}}$, gibt es einen Index $\nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \geq \nu_1$, so dass $\infty \notin \tilde{\mathcal{N}}_m$, $m \geq \nu_2$. Sei $d_m := d(\tilde{\mathcal{N}}_m, [-1, 1])$ der Abstand zwischen $\tilde{\mathcal{N}}_m$, $m \geq \nu_2$ und $[-1, 1]$. Weiter sei $d := \min\{d_m\}$, $m \geq \nu_2$. Offenbar ist $d > 0$.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\tilde{P}_0(w) + \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{P}_{m+1} - \tilde{P}_m)(w). \quad (7.20)$$

Sei

$$K^0 := \{0\} \cup \{m \in \mathbb{N} : \tilde{P}_m \neq \tilde{P}_{m-1}\}.$$

Offensichtlich $K^0 \equiv K$ und es ist unendlich nach *Bemerkung S*, da $f \notin \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Hiermit bekommt man eine zu (7.20) äquivalente Darstellung

$$\tilde{P}_{k_0}(w) + \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{P}_{k_{j+1}} - \tilde{P}_{k_j})(w), \quad (7.21)$$

wobei $K^0 = \{k_0, k_1, \dots\}$ mit $k_j < k_{j+1}, j = 0, 1, \dots$. Wir zeigen, dass die Reihe (7.21) gleichmäßig auf E konvergiert. Für $k_j, k_{j+1} \in K$ betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(w) &:= (D_j \circ H)(w) = (\tilde{P}_{k_{j+1}} - \tilde{P}_{k_j})(w) = \\ &= \frac{P_{k_{j+1}}^0(w)}{(-s_2w + s_1)^{k_{j+1}}} - \frac{P_{k_j}^0(w)}{(-s_2w + s_1)^{k_j}} = \\ &= \frac{W_j^0(w)}{(-s_2w + s_1)^{k_{j+1}}}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

wobei

$$W_j^0(w) := P_{k_{j+1}}^0(w) - (-s_2w + s_1)^{k_{j+1}-k_j} P_{k_j}^0(w). \quad (7.23)$$

Bemerkung T: Alle Nullstellen von W_j^0 liegen in $[-1, 1]$ und

$$\text{Grad}(W_j^0) = k_{j+1}.$$

Beweis: Mit *Bemerkung 2.2* folgt $D_j(z) = \tilde{D}_j(h(z))$, $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Für $z \in [-1, 1]$ gilt $h(z) \in [-1, 1]$ nach *Hilfssatz 2.5*. Damit hat \tilde{D}_j auch k_{j+1} Nullstellen in $[-1, 1]$. Andererseits gilt

$$-s_2w + s_1 \neq 0, \quad w \in [-1, 1].$$

Damit folgt, dass W_j^0 genau k_{j+1} Nullstellen in $[-1, 1]$ hat. Somit

$$k_{j+1} \leq \text{Grad}(W_j^0). \quad (i)$$

Andererseits bestätigt man mit (7.23), dass $\text{Grad}(W_j^0) \leq k_{j+1}$. Hieraus und mit (i) folgt, dass $\text{Grad}(W_j^0) = k_{j+1}$ und alle Nullstellen von W_j^0 sind in $[-1, 1]$, was zu zeigen war. \square

Sei \mathcal{A}_j^0 der höchste Koeffizient von W_j^0 . Weiter sei

$$W_j^0(w) := \mathcal{A}_j^0 W_j^1(w), \quad (7.24)$$

wobei $W_j^1 \in \mathcal{P}_{k_{j+1}}$. Für w mit $W_j^1(w) \neq 0$ ergibt sich

$$\mathcal{A}_j^0 = \frac{P_{k_{j+1}}^0(w) - (-s_2w + s_1)^{k_{j+1}-k_j} P_{k_j}^0(w)}{W_j^1(w)}. \quad (7.25)$$

Bemerkung U: Nach der Wahl von j_0 gilt $\tilde{P}_{k_j}(\infty) \neq 0$, $j \geq j_0$. Damit sind alle Nullstellen von \tilde{P}_{k_j} auch Nullstellen von $P_{k_j}^0$, $j \geq j_0$. Mit (7.18) bestätigt

man, dass für $j \geq j_0$ die Anzahl der Nullstellen von $P_{k_j}^0$ gleich die Anzahl der Nullstellen von \tilde{P}_{k_j} ist. Hiervon und mit (7.19) bestätigt man, dass für $j \geq j_0$, $P_{k_j}^0$ mindestens $m_{k_j}\psi(a)/2$ Nullstellen in $K(\tilde{a}, \varepsilon)$ hat.

Sei $\tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ eine Nullstelle von $P_{k_j}^0$ mit $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \in K(\tilde{a}, \varepsilon)$. Wir setzen $w = \tilde{\eta}_{k_j, i_0}$ in (7.25) ein und bekommen

$$A_j^0 = P_{k_{j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})/W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}),$$

wobei $W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0}) \neq 0$, da $\tilde{\eta}_{k_j, i_0} \notin [-1, 1]$, $j \geq j_0$, und $W_j^1(w) \neq 0$, $w \notin [-1, 1]$ (nach *Bemerkung T*). Mit Hilfe der letzten Darstellung von A_j^0 und unter Berücksichtigung von (7.24) bekommt man aus (7.22)

$$\tilde{D}_j(w) = \frac{A_j^0 W_j^1(w)}{(-s_2 w + s_1)^{k_{j+1}}} = \frac{P_{k_{j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}{(-s_2 w + s_1)^{k_{j+1}}} \frac{W_j^1(w)}{W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})}.$$

Hiermit gelangen wir zu der Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_j\|_E \leq \\ & \leq \|(-s_2 w + s_1)^{-k_{j+1}}\|_E \|W_j^1\|_E |P_{k_{j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| / |W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|, \quad j \geq j_0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Nun schätzen wir die rechte Seite von (7.26) nach oben ab. Dabei seien c_1, c_2, \dots positive, von j und ε unabhängige Konstanten.

Es gilt für $w \in E$

$$\begin{aligned} & |(-s_2 w + s_1)^{-k_{j+1}}| = \\ & = |((-s_2 w + s_1)^{-1})^{k_{j+1}}| = |1/(-s_2 w + s_1)|^{k_{j+1}} \leq c_1^{k_{j+1}}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

wobei $c_1 := \max\{1, \|1/(-s_2 w + s_1)\|_E\}$.

Seien $\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,k_{j+1}}$ die Nullstellen von W_j^1 . Nach *Bemerkung T* gilt $|\zeta_{j,i}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k_{j+1}$. Hiermit und wegen E kompakt ist, ergibt sich

$$|W_j^1(w)| = \prod_{i=1}^{k_{j+1}} |w - \zeta_{j,i}| \leq \prod_{i=1}^{k_{j+1}} (|z| + |\zeta_{j,i}|) \leq c_2^{k_{j+1}}, \quad w \in E.$$

Hiermit und wegen

$$|W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \prod_{i=1}^{k_{j+1}} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \zeta_{j,i}| \geq d^{k_{j+1}}$$

bekommen wir die Abschätzung

$$\|W_j^1\|_E / |W_j^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| \leq c_3^{k_{j+1}}. \quad (7.28)$$

Nun wollen wir den Ausdruck $|P_{k_{j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})|$ nach oben abschätzen. Dazu benötigen wir *Hilfssatz 7.5*. Sei a_{j+1}^0 der höchste Koeffizient von $P_{k_{j+1}}^0$. Weiter sei $P_{k_{j+1}}^0(w) := a_{j+1}^0 P_{k_{j+1}}^1(w)$, wobei $P_{k_{j+1}}^1 \in \mathcal{P}_{k_{j+1}}$.

Mit *Hilfssatz 7.5 (b)* ergibt sich

$$|a_{j+1}^0| \leq 2^{k_{j+1}} \|(-s_2 w + s_1)^{k_{j+1}}\|_{L_\infty[-1,1]} e^{C k_{j+1} \varepsilon^{k_{j+1}}(\omega)} \|P_{k_{j+1}}\|_{L_p[-1,1]}. \quad (7.29)$$

Auf bekannte Art und Weise ergibt sich

$$\|(-s_2 w + s_1)^{k_{j+1}}\|_{L_\infty[-1,1]} \leq c_4^{k_{j+1}}, \quad (7.30)$$

wobei $c_4 := \max\{1, \| -s_2 w + s_1 \|_{L_\infty[-1,1]}\}$.

Unter Berücksichtigung, dass $P_{k_{j+1}} \in L_p([-1, 1])$, ergibt sich

$$\|P_{k_{j+1}}\|_{L_p[-1,1]} \leq c_5.$$

Hieraus und mit (7.30) bekommt man aus (7.29)

$$|a_{j+1}^0| \leq (c_6 e^{C \varepsilon^{k_{j+1}}(\omega)})^{k_{j+1}}.$$

Mit (7.19) und wegen $\infty \notin \tilde{\mathcal{N}}$ bekommt man

$$\begin{aligned} |P_{k_{j+1}}^0(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| &= |a_{j+1}^0| |P_{k_{j+1}}^1(\tilde{\eta}_{k_j, i_0})| = \\ &= |a_{j+1}^0| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| < \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \prod_{|\tilde{\eta}_{k_{j+1}, i} - \tilde{\eta}_{k_j, i_0}| \geq \varepsilon} |\tilde{\eta}_{k_j, i_0} - \tilde{\eta}_{k_{j+1}, i}| \leq \\ &\leq |a_{j+1}^0| (c_7 \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}} \leq (c_8 e^{C \varepsilon^{k_{j+1}}(\omega)} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Mit (7.27), (7.28) und (7.31) bekommt man aus (7.26)

$$\|\tilde{D}_j\|_E \leq (c_9 e^{C \varepsilon^{k_{j+1}}(\omega)} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}.$$

Da $\varepsilon_k(\omega) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, gibt es ein $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_0$, so dass

$$\|\tilde{D}_j\|_E \leq (c_{10} \varepsilon^{\psi(a)/2})^{k_{j+1}}, \quad j \geq j_1. \quad (7.32)$$

Weil man ε beliebig klein wählen kann, sei $q := c_{10} \varepsilon^{\psi(a)/2} < 1$. Hiermit und wegen (7.32) bekommt man

$$\left| \sum_{j=j_1}^{\infty} \tilde{D}_j(w) \right| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)| \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{k_{j+1}} \leq \sum_{j=j_1}^{\infty} q^{j+1},$$

wobei *Bemerkung 4.2* zu beachten ist. Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Damit ist die Reihe

$$\sum_{j=j_1}^{\infty} q^{j+1} = q^{j_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{j=j_1}^{\infty} |\tilde{D}_j(w)|$, $w \in E$. Daher konvergiert die Reihe (7.21) und somit auch die Folge $\{\tilde{P}_{k_j}\}_{j=j_1}^{\infty}$ gleichmäßig auf E und somit auch auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} , da E eine beliebige kompakte Teilmenge von \mathbb{C} war.

Damit gilt

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |(f^0 - \tilde{P}_{k_j})(w)| = 0, \quad w \in \mathbb{C}, \quad (7.33)$$

wobei f^0 die Grenzfunktion der Folge ist. Nach dem *Konvergenzsatz von Weierstraß* (Satz 2.8) ist f^0 holomorph auf \mathbb{C} .

Wir zeigen nun, dass

$$\|\tilde{f} - f^0\|_{L_p^*[-1,1]} = 0. \quad (7.34)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \|f^0 - \tilde{f}\|_{L_p^*[-1,1]} = \\ & \|f^0 - \tilde{P}_{k_j} + \tilde{P}_{k_j} - \tilde{f}\|_{L_p^*[-1,1]} \leq \|\tilde{f} - \tilde{P}_{k_j}\|_{L_p^*[-1,1]} + \|f^0 - \tilde{P}_{k_j}\|_{L_p^*[-1,1]}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Einerseits ergibt sich mit *Bemerkung 7.1* und wegen $e_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$:

$$\|\tilde{f} - \tilde{P}_{k_j}\|_{L_p^*[-1,1]} = \|f - P_{k_j}\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (7.36)$$

Andererseits ergibt sich wegen (7.33)

$$\|f^0 - \tilde{P}_{k_j}\|_{L_p^*[-1,1]} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (7.37)$$

Mit (7.36) und (7.37) ergibt sich aus (7.35) die Gleichung (7.34). Mit *Hilfssatz 7.2 (b)* folgt $\tilde{f}(w) = f^0(w)$, $w \in [-1, 1]$. Nach *Definition 2.9* ist f^0 holomorphe Fortsetzung von \tilde{f} nach \mathbb{C} . Nach dem *Identitätssatz* (Satz 2.10) ist f^0 eindeutig bestimmt. ■

Literatur

- [1] N. I. Achieser, *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Mathematische Lehrbücher, Band II Akademie-Verlag, Berlin, 1967.
- [2] G. A. Baker, JR., *Essentials of Padé approximants*. Academic Press, New York-London, 1975.
- [3] S. N. Bernstein, *On the distribution of zeros of the polynomials tending to a continuous function positive on a given interval*. (in Russian), Collected Works, Vol. I, Akad. Nauk USSR (1952), 443-451.
- [4] H.-P. Blatt, R. Grothmann, R. K. Kovacheva, *On sign changes in weighted polynomial L^1 -approximation*. Acta Math. Hungar. **95** (2002), no. 4, 309-322.
- [5] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2006.
- [6] G. M. Golusin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Translations of Mathematical Monographs*, **26**. American Mathematical Society, Providence, 1969.
- [7] A. A. Gonchar, *Uniform convergence of diagonal Padé approximants*. (Russian) Mat.Sb. (N.S.) **118(160)** (1982), no. 4, 535-556.
- [8] *In memoriam: Andrei Aleksandrovich Gonchar, November 21, 1931 - October 10, 2012*. Journal of Approximation Theory **172** (2013) A1-A13.
- [9] R. Grothmann, E. B. Saff, *On the behaviour of zeros and poles of best uniform polynomial and rational approximants*. Nonlinear numerical methods and rational approximation, (Wilrijk, 1987), 57-75, Math. Appl., **43**, Reidel, Dordrecht, 1988.
- [10] R. Kovacheva, *On the rational Chebyshev approximants to a real-valued function with an unbounded number of the poles*. Topics in polynomials of one and several variables and their applications, 335-346, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [11] A. Kroó, J. J. Swetits, *On density of interpolation points, a Kadec-type Theorem, and Saff's principle of contamination in L_p -approximation*. Constr. Approx. **8** (1992), no. 1, 87-103.
- [12] K. N. Lungu, *Properties of functions arising from the asymptotic behavior of poles of rational functions of best approximation*. (Russian) Constructive function theory '81 (Varna, 1981), 106-110, Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983.
- [13] K. N. Lungu, *On the properties of functions connected with the behavior of poles of a Padé approximations*. Moscow Institute of Electronic Mechanical Engineering. Translated from Mat. Zametki **29** (1981), no. 6, 843-848.

- [14] G. Meinardus, *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1964.
- [15] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Band II, 3rd rev. ed., Teubner, Stuttgart, 1957.
- [16] R. Remmert, G. Schumacher, *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 2002.
- [17] E. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [18] S. Timmann, *Repetitorium der Funktionentheorie*. Binomi-Verlag, Hannover, 2007.
- [19] L. Trefethen, *Approximation theory and approximation practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2013.
- [20] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*. Fourth edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XX American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Nguyen
Vorname: Elitsa
Geburtsdatum: 17.10.1987
Geburtsort: Razlog, Bulgarien
Nationalität: bulgarisch

Schulabschluss

06/2006

Allgemeine Hochschulreife (Allgemeinbildende Oberschule Bratya Petar i Ivan Kanazirevi, Razlog)

Studium

09/2006-09/2010

Bachelor in Angewandter Mathematik an der Technischen Universität Sofia, Bulgarien

10/2010-07/2012

Master in Angewandter Mathematik an der Technischen Universität Sofia, Bulgarien

10/2011-03/2012

Auslandssemester an der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt

Promotionsphase

Seit 04/2013 bis 11/2017