

Wavelets im Rahmen der Econophysik

Eine naturwissenschaftlich geprägte Analyse von Finanzmärkten

Jakub Hodek

Dissertation zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. pol.)
an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät Ingolstadt (WFI) der
Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt

Erstgutachter:
Prof. Dr. Johannes Schneider

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Ulrich Küsters

Datum der mündlichen Prüfung:
29.04.2015

Meinen Großeltern

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand als externe Dissertation und wurde von der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt angenommen.

In erster Linie möchte ich meinem Doktorvater Professor Dr. Johannes Schneider großen Dank aussprechen. Sein hohes Engagement während der gesamten Zeit und das mir von Ihm entgegengebrachte Vertrauen ehren mich in ganz besonderer Weise. Mit seiner intensiven Betreuung und konstruktiven Kritik ist er mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite gestanden – sowohl bei inhaltlichen wie auch organisatorischen Fragen. Dafür danke ich ihm herzlich. Herrn Professor Dr. Ulrich Küsters bin ich für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens ebenfalls zu großem Dank verpflichtet.

Das Gelingen meiner Arbeit im Sinne einer berufsbegleitenden Promotion hing in besonderem Maße von den Rahmenbedingungen ab, die sich mir während meiner Profession als Portfoliomanager bei Reimann Investors boten. Hierzu gehören neben den infrastrukturellen Gegebenheiten auch die mir während dieser Zeit eingeräumte Flexibilität in Bezug auf die Wahrnehmung sowohl meiner beruflichen als auch akademischen Pflichten. Ein großer Dank gilt deshalb dem gesamten Team bei Reimann Investors, wobei ich zwei Personen besonders hervorheben möchte: Zum einen schulde ich Alexander Pirpamer außerordentlichen Dank, da er mich bei meiner Arbeit nicht nur fachlich und themenspezifisch immer wieder gefördert und gefordert hat, sondern mich als erfahrener Mentor und guter Freund auf meinem beruflichen Weg stets begleitet hat. Ihm verdanke ich nicht nur meine Ausbildung zum Portfoliomanager in ganz besonderem Maße, sondern auch den Kontakt zu meinem Doktorvater. Zum anderen danke ich auch meinem guten Freund Dr. Quirin Fritz, der zeitgleich ebenfalls bei Reimann Investors extern erfolgreich promovierte. Mit ihm konnte ich zahllose erhellende und lebhaft Diskussionen rund um das Promovieren und darüber hinaus führen.

Für die sorgfältige und mühsame Übernahme der Korrekturlesung danke ich Dr. Richard Sizmann und Nils Tobias Krämer.

Ganz ausdrücklich möchte ich mich allerdings bei meiner Familie bedanken, die mir nicht nur während meiner Promotion, sondern mein gesamtes Leben hindurch uneingeschränkt Rückhalt gegeben hat. Besonders meiner Mutter danke ich von ganzem Herzen, da sie immer für mich da war und mein Studium und damit auch diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht hat. Zudem danke ich meiner Freundin Claudia im Besonderen. Mit ihrer Geduld und ihrem großen Verständnis half sie mir in unschätzbbarer Weise, diese Arbeit erfolgreich zu vollenden. Sie ermutigte mich fortwährend, nicht nachzulassen und unterstützte mich vorbehaltlos. Ich bin daher umso glücklicher, die Freude über das Gelingen meiner Arbeit nun mit ihr teilen zu dürfen.

Jakub Hodek
München, Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XV
Tabellenverzeichnis	XIX
Abkürzungsverzeichnis	XXIII
1 Einführung	1
1.1 Einleitung und Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit	4
1.3 Aufbau der Dissertation	6
2 Econophysik - Eine naturwissenschaftlich geprägte Betrachtungsweise der Finanzmärkte	9
2.1 Begriffsbestimmung – Econophysik	10
2.1.1 Zusammenfassung	12
2.2 Ausgangspunkt – Kritik an klassischer Finanzierungstheorie	13
2.2.1 Zusammenfassung	15
2.3 Fraktale Geometrie	16
2.3.1 Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz	17
2.3.2 Fraktale Dimension	21
2.3.3 Hurst-Exponent	23
2.3.4 Zusammenfassung	25
2.4 Finanzmärkte als komplexe Systeme	25
2.4.1 Komplexe Systeme - Zentrale Eigenschaften	26
2.4.2 Econophysik und Wavelets	28
2.4.3 Zusammenfassung	31

3 Wavelets - Ein spektralanalytischer Ansatz zur Untersuchung von Finanz-	
märkten	33
3.1 Historische Entwicklung der Zeit-Skalen-Analyse	33
3.1.1 Zusammenfassung	38
3.2 Wavelet-Transformation - Theoretische Grundlagen	38
3.2.1 Wavelets	42
3.2.2 Kontinuierliche Wavelet-Transformation	45
3.2.3 Diskrete Wavelet-Transformation	48
3.2.4 Multi Resolution Analysis	49
3.2.5 Schnelle Wavelet-Transformation	54
3.2.6 Maximal Overlap Discrete Transform	61
3.2.7 Zusammenfassung	66
4 Wavelets - Empirische Analyse und Anwendungsgebiete für die Praxis . .	69
4.1 Empirische Spezifikationen	69
4.1.1 Auswahlkriterien	71
4.1.2 Wavelet-Familien	74
4.1.3 Literaturübersicht	77
4.1.4 Zusammenfassung	84
4.2 Deskriptive Datenanalyse	89
4.2.1 Selbstähnlichkeit – CWT	91
4.2.2 Selbstähnlichkeit – MODWT	95
4.2.3 Varianzanalyse – CWT	105
4.2.4 Varianzanalyse – MODWT	111
4.2.5 Zusammenfassung	120
4.3 Technische Analyse – Trendbestimmung	121
4.3.1 Randprobleme revisited	122
4.3.2 Wavelet-Denoising	128
4.3.3 Das Long/Short-Trading-System	133
4.3.4 Empirische Bestimmung des Augmentationsverfahrens	135
4.3.5 Statistische Kennzahlen – MSCI Universum	151
4.3.6 Ergebnisse: Level 1	153
4.3.7 Ergebnisse: Level 2 bis 8	159

4.3.8 Vergleich mit alternativem Trendbestimmungsverfahren	161
4.3.9 Zusammenfassung	163
4.4 Robuste Portfoliooptimierung auf Basis der Wavelet-Transformation . . .	171
4.4.1 Modern Portfolio Theory und robuste Optimierung	173
4.4.2 Robuste Parameterschätzung auf Basis der WT	177
4.4.3 Auswirkungen der WT auf die Effizienzlinie	180
4.4.4 WT-basierte Markowitz-Optimierung – MSR Optimierung	187
4.4.5 WT-basierte Markowitz-Optimierung – Weitere Analysen	198
4.4.6 Zusammenfassung	218
5 Schlussbetrachtung und Ausblick	219
5.1 Zusammenfassung und kritische Reflexion	219
5.2 Leistung der Arbeit	225
5.3 Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen	226
Anhang	231
Literaturverzeichnis	319

Abbildungsverzeichnis

2.3.1	Sierpinski-Dreieck	19
2.3.2	Darstellung (a) exakter und (b) affiner Selbstähnlichkeit	19
2.3.3	MSCI World Index: Preisdaten für verschiedene Zeitskalen	22
2.3.4	Box-Counting-Methode	23
3.2.1	Vergleich zwischen einer Sinusfunktion und einem Wavelet	42
3.2.2	Schematische Darstellung der Wavelet-Analyse	43
3.2.3	Quantifizierung einer Funktion mit einem skalierbaren Wavelet (schematisch)	43
3.2.4	Illustration des Skalierungsparameters s	44
3.2.5	Schematische Darstellung der kontinuierlichen Fourier-Analyse	45
3.2.6	Schematische Darstellung der kontinuierlichen Wavelet-Analyse	46
3.2.7	Illustration einer MRA im Rahmen einer DWT	53
3.2.8	Darstellung der FWT-Filterbank	59
3.2.9	Darstellung der DWT-Filterbank für das Haar-Wavelet	62
3.2.10	Darstellung der MODWT-Filterbank für das Haar-Wavelet	67
4.1.1	Übersicht: Wavelet-Familien	76
4.1.2	Haar: Skalierungs- und Wavelet-Funktion	87
4.1.3	D4: Skalierungs- und Wavelet-Funktion	88
4.1.4	LA8: Skalierungs- und Wavelet-Funktion	88
4.1.5	Morl: Wavelet-Funktion	90
4.2.1	CWT-Diagramm einer Kochkurve bis zu einer Skala von 1024	92
4.2.2	CWT-Diagramm des iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Tagesdaten	94
4.2.3	CWT-Diagramm des DJ UBS Commodity TR Index in USD basierend auf Tagesdaten	94

4.2.4	CWT-Diagramm des FTSE 100 TR Index in GBP basierend auf Wochen-	
	daten	95
4.2.5	log-log-Plot für den FSE DAX TR EUR Index basierend auf Tagesdaten	
	(Haar)	98
4.2.6	Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Tagesdaten . . .	106
4.2.7	Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Monatsdaten . .	110
4.2.8	Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Jahresdaten . . .	110
4.2.9	Energieverteilung – S&P 500 TR USD (Monatsrenditen)	113
4.2.10	Energieverteilung – MSCI Aktienindizes in USD (Tagesrenditen)	114
4.2.11	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen)	
	- d1 & d2	115
4.2.12	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen)	
	- d3 & d4	115
4.2.13	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen)	
	- d5 & d6	116
4.2.14	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen)	
	- d7 & d8	116
4.2.15	MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochen-	
	renditen) - d1 – d3	118
4.2.16	MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochen-	
	renditen) - d4 – d6	119
4.2.17	MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochen-	
	renditen) - d7 – d9	120
4.3.1	Darstellung der Randeffekte (MODWT): FSE DAX TR EUR (Tagesda-	
	ten) Level 1 bis 6	125
4.3.2	Randeffekte: Verlauf der absoluten Abweichung in %	126
4.3.3	Hard vs. Soft Threshold	131
4.3.4	Schematische Darstellung der Generierung einer transformierten Zeitrei-	
	he für den Backtest	136
4.3.5	Schematische Darstellung des Augmentationsverfahrens für den Backtest	138
4.3.6	Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 1	149
4.3.7	Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 5	149
4.3.8	Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 8	150

4.3.9	Equity-Kurven für <i>Refl 2</i> – Haar, Level 1 bis 8	150
4.3.10	Equity-Kurven für <i>Refl 2</i> – Haar, gleich gewichtet	151
4.3.11	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 1)	157
4.3.12	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 1)	157
4.3.13	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 1)	166
4.3.14	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 2)	167
4.3.15	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 3)	167
4.3.16	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 4)	168
4.3.17	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 5)	168
4.3.18	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 6)	169
4.3.19	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 7)	169
4.3.20	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA (Level 8)	170
4.4.1	Effizienzlinie – MSCI Universum (MSCI World)	175
4.4.2	Illustration von zwei vermeintlich perfekt negativ korrelierten Datenreihen	179
4.4.3	Diskrete Renditen des MSCI Germany vs. MRA vs. VisuShrink (Haar, Level 7)	182
4.4.4	Verlauf: Mittelwert μ und Standardabweichung σ für die MRA und Vi- suShrink	183
4.4.5	Effizienzlinie (Long only) – Rohdaten (links) & Haar-MRA Level 1 (rechts)	184
4.4.6	Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 2 (links) & 3 (rechts) . . .	184
4.4.7	Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 4 (links) & 5 (rechts) . . .	185
4.4.8	Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 6 (links) & 7 (rechts) . . .	185
4.4.9	Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 8 (links) & 9 (rechts) . . .	186
4.4.10	Schematische Darstellung der WT-basierten Markowitz-Optimierung . . .	191

4.4.11	Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: Rohdaten (links) und MRA Level 1 (rechts)	194
4.4.12	Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 2 (links) und 3 (rechts)	194
4.4.13	Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 4 (links) und 5 (rechts)	194
4.4.14	Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 6 (links) und 7 (rechts)	194
4.4.15	Wertentwicklung: Benchmark-Portfolio auf Basis der MRA (MSR)	195
4.4.16	Gewichtungsvektoren: MRA-Durchschnittsportfolio Benchmark (MSR) .	197
4.4.17	Wertentwicklung: MRA-Durchschnittsportfolio Benchmark (MSR)	197
4.4.18	Wertentwicklung Benchmark-Portfolio mit Wochendaten (GMV): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	201
4.4.19	Wertentwicklung Benchmark-Portfolio mit Monatsdaten (MSR): MRA Level 1-5 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	204
4.4.20	Wertentwicklung: MSCI World Portfolio mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	207
4.4.21	Wertentwicklung: S&P 500 Sektorportfolios mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	210
4.4.22	Wertentwicklung: S&P 500 Sektorportfolio mit Monatsdaten (MSR): MRA Level 1-5 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	213
4.4.23	Wertentwicklung: DAX-Portfolio mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)	217

Tabellenverzeichnis

4.2.1	Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension des FSE DAX TR EUR Index	99
4.2.2	Deskriptive Kennzahlen verschiedener MSCI Indizes	100
4.2.3	Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension verschie- dener MSCI Indizes	101
4.2.4	Deskriptive Kennzahlen verschiedener Indizes	103
4.2.5	Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension verschie- dener Indizes	104
4.3.1	Deskriptive Kennzahlen des MSCI World GR USD Index basierend auf Tagesdaten	135
4.3.2	Augmentationsverfahren – Mittelwerte der absoluten Abweichungen in %	140
4.3.3	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfah- ren – Haar, j=1 bis 4	142
4.3.4	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfah- ren – Haar, j=5 bis 8	143
4.3.5	Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Annualisierte Rendite . . .	145
4.3.6	Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Maximum Drawdown . . .	146
4.3.7	Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Positive Trades	147
4.3.8	Deskriptive Kennzahlen des MSCI Universums	153
4.3.9	Performance-Kennzahlen des MSCI Universums	154
4.3.10	Ergebnisse MSCI Universum – Haar S1	155
4.3.11	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1	156
4.3.12	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1 (Vor der Finanzkrise)	158
4.3.13	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1 (Nach der Finanzkrise)	158
4.3.14	MRA vs. MA & VisuShrink – Performance Level 1 bis 4 in %	164
4.3.15	MRA vs. MA & VisuShrink – Performance Level 5 bis 8 in %	165

4.3.16	MRA vs. MA & VisuShrink – Durchschnittliche Outperformance (p. a.) in %	166
4.3.17	MRA vs. MA & VisuShrink – Vergleich beste Performance in %	166
4.4.1	Deskriptive Kennzahlen des MSCI World PR USD Index Universums ba- sierend auf Tagesdaten	180
4.4.2	MSCI Germany PR Index (Wochendaten) – Auswirkungen der WT auf die statistischen Kennzahlen	182
4.4.3	WT-basierte Markowitz-Optimierung für das MSCI World Universum	187
4.4.4	Deskriptive Kennzahlen des Benchmark-Portfolios	189
4.4.5	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios	193
4.4.6	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (MSR)	196
4.4.7	Performance-Kennzahlen einer GMV-Optimierung des Benchmark-Portfolios (Wochendaten)	200
4.4.8	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (GMV)	200
4.4.9	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios (Monatsdaten)	203
4.4.10	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (MSR) mit Monatsdaten	203
4.4.11	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des MSCI World Port- folios (Wochendaten)	206
4.4.12	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das MSCI World Portfolio (MSR)	206
4.4.13	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des S&P 500 Sektor- portfolios (Wochendaten)	209
4.4.14	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für die S&P-Sektoren (MSR)	209
4.4.15	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des S&P 500 Sektor- portfolios (Monatsdaten)	212
4.4.16	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für die S&P-Sektoren (MSR) mit Monatsdaten	212

4.4.17	Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des DAX-Portfolios (Wochendaten)	216
4.4.18	Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios (ohne Level 6 und 7) für die Einzelaktien des Dax (MSR)	216

Abkürzungsverzeichnis

AIC	Akaike Informationskriterium
AR(p)	Autoregressives Modell des Grades p
Bior	Biorthogonales Wavelet
BSM	Black-Scholes Modell
CAPM	Capital Asset Pricing Model
Cgaus	Komplexes Gauß-Wavelet
Ciof	Coiflets
Cmorl	Komplexes Morlet-Wavelet
COI	Cone of Influence
CWT	Continuous Wavelet Transform
D	Daubechies-Wavelet
EMH	Effizienzmarkthypothese
EWP	Equal Weighted Portfolio
FT	Fourier-Transformation
FWT	Fast Wavelet Transform
Gaus	Gauß-Wavelet
gBB	Geometrische Brownsche Bewegung
GMV	Global Minimum Variance Portfolio
GT	Gabor-Transformation
gZGS	Generalisierter Zentraler Grenzwertsatz
Haar	Haar-Wavelet
i.i.d	independent, identically distributed
ICWT	Inverse Continuous Wavelet Transform
Konst	Konstante Verlängerung
LA	Least-Asymmetric-Wavelet
M	Transformationsmethode
MA	Moving Average

MACD	Moving Average Convergence Divergence
MAD	Median Absolute Deviation
max DD	Maximum Drawdown
max Ret	Maximalrendite
Mexh	Mexican Hat
Meyr	Meyer-Wavelet
min Ret	Minimalrendite
MODWT	Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform
Morl	Morlet-Wavelet
MPT	Modern Portfolio Theory
MRA	Multi Resolution Analysis
MSR	Maximum Sharpe-Ratio Portfolio
Null	Zero Padding
Oh	Oh-Algorithmus
OLS	Ordinary Least Square
OTC	Over-the-Counter
Perf	Perfekte Verlängerung
Perio	Periodische Verlängerung
Poly	Polynomial Fit
PWR	Polynomial Wavelet Regression
Refl	Reflektionsmethode/Mirroring
Refl 2	Reflektionsmethode mit Renditen
Ret ann	Annualisierte Rendite
Ret ges	Gesamtrendite
RSI	Relative Strength Index
Shan	Shannon-Wavelet
Sharpe	Sharpe-Ratio
STFT	Short-Time Fourier-Transformation
SURE	Steins Unbiased Risk Estimator
Sym	Symlet
VaR	Value-at-Risk
VS	VisuShrink
WT	Wavelet-Transformation

WVar Wavelet-Varianz
ZGS Zentraler Grenzwertsatz

1 Einführung

1.1 Einleitung und Problemstellung

„I can calculate the motions of heavenly bodies, but not the madness of people“.

(*Sir Isaac Newton*)

Mit diesen Worten reagierte der englische Mathematiker und Physiker Sir Isaac Newton auf einen großen Spekulationsverlust, den er infolge des Platzens einer Aktienmarktblase um die sogenannte *South Sea Company* erlitt (vgl. Voit 2005, S. 6). Anfang des 18. Jahrhunderts hatte dieses 1711 gegründete Unternehmen ein Monopol für den Handel zwischen Großbritannien und den spanischen Südamerikakolonien inne, was zu einer großen Spekulationsblase – d. i. der sogenannten *South Sea Bubble* – mit der Unternehmensaktie führte. Als die Blase 1720 platzte, verlor Newton etwa 20.000 Pfund, was nach heutigen Maßstäben einem beachtlichen Vermögen von mehreren Millionen Pfund entsprechen würde und Newtons Enttäuschung hinsichtlich der Unkalkulierbarkeit des Aktienmarktes manifestierte (O’Farrell 2007, S. 279ff). Selbst für ein in der Wissenschaftsgeschichte solch herausragendes Genie wie Newton war die Entwicklung des Aktienmarktes im Gegensatz zur physikalischen Berechnung der Planetenbewegungen nicht prognostizierbar, da auf dem Börsenparkett keine reinen Naturgesetze wie in der klassischen Physik herrschen, sondern die Evolution der Wertpapierpreise von den unterschiedlichsten Faktoren wie beispielsweise politökonomischen Determinanten oder psychologischen Aspekten abhängt.

Physikalische Modelle versuchen in der Regel, Naturgesetze zu quantifizieren, d. h. die wesentlichen Charakteristika bestimmter Phänomene oder Systeme zu erfassen, um erstens eine qualitativ adäquate Beschreibung derselben bereit zu stellen und damit zweitens sowohl quantitative Vorhersagen über das zukünftige Verhalten zu generie-

ren als auch weiterführende Eigenschaften und Erkenntnisse abzuleiten. Wie bei allen Modellen müssen freilich immer bestimmte, meist vereinfachende Annahmen vorausgesetzt werden, so dass eine perfekte Modellierung apriori niemals im Bereich des Möglichen liegt. Die klassische Physik unterscheidet sich im Gegensatz zu den Wirtschaftswissenschaften jedoch in einem wesentlichen Punkt, d. i. dass sie als „harte“ Naturwissenschaft ihr genuines Aufgabenfeld relativ leicht definieren kann: die Welt der unbelebten Natur.

Bei der Finanzierungstheorie ist diese Abgrenzung weitaus schwieriger, allein schon deswegen, weil Finanzmärkte letztlich immer durch die Interaktion von Menschen konstituiert werden. Darüber hinaus ist der Kapitalmarkt im Gegensatz zu zahlreichen Problemstellungen in der Physik kein abgeschlossenes System, bei dem ein Experiment bis zur Findung bzw. Validierung mathematischer Gesetzmäßigkeiten beliebig oft wiederholt werden kann, sondern ein offenes System mit einer Vielzahl an unterschiedlichen Einflussfaktoren, die nicht deterministisch sind. Trotz der ebenfalls hohen Abstrahierung in Form mathematisch-statistischer Ansätze, die sich insbesondere in der theoretischen Finanzierungstheorie manifestierten, entwickelten sich im Rahmen der Finanzwirtschaft zahlreiche Strömungen, die andere Faktoren in den Mittelpunkt rückten und die klassischen Theorien mitunter herausforderten. So stellte beispielsweise die Annahme rational handelnder Agenten einen wesentlichen Ausgangspunkt für die Entwicklung der sogenannten *Verhaltensökonomik* dar, die das Verhalten der Marktteilnehmer unter Gesichtspunkten der Psychologie analysiert und maßgeblich durch die Arbeiten von Daniel Kahneman und Amos Tversky in den 1970ern und 1980ern voran gebracht wurde: „The agent of economic theory is rational, selfish, and his tastes do not change.’ [...] To a psychologist, it is self-evident that people are neither fully rational nor completely selfish, and that their tastes are anything but stable. Our two disciplines seemed to be studying different species, which the behavioral economist Richard Thaler later dubbed Econs [d.i. der sogenannte *Homo Oeconomicus*] and Humans.“ (Kahneman 2011, S. 269) ¹.

Im Bereich eher quantitativ orientierter Ansätze entwickelte sich seit Mitte der 1990er Jahre eine eigenständige, naturwissenschaftlich geprägte Disziplin – d. i. die sogenannte *Econophysik* –, die versucht, physikalische Ansätze auf die Finanzierungstheorie zu projizieren, um damit einen anderen Blickwinkel auf das Geschehen der Finanz-

¹Vgl. hierzu auch Kahneman und Tversky (1974) und Kahneman und Tversky (1979).

märkte zu generieren. Dabei steht jedoch nicht die unmittelbare Übertragung spezifischer physikalischer Modelle im Vordergrund, sondern vielmehr die Anwendung der physikalisch-naturwissenschaftlichen Methode auf ökonomische Fragestellungen. So stellt die Econophysik dem Vorbild der experimentellen Physik folgend die Empirie in den Mittelpunkt und versucht darauf aufbauend Modelle zu formulieren, welche die relevanten Zusammenhänge und Strukturen möglichst adäquat und einfach darstellen (vgl. McCauley 2009, S. 8ff). Freilich dienen vereinzelt auch konkrete Modelle physikalischer Phänomene als Blaupause, um in modifizierter Weise auf wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen angewandt zu werden. Gerade Ansätze aus der statistischen Mechanik, der Thermodynamik, aber auch aus der Festkörper- und Geophysik bieten interessante Möglichkeiten, um neue Perspektiven auf Finanzmärkte zu eröffnen und damit ein möglicherweise facettenreicheres Verständnis über die zugrunde liegenden Zusammenhänge zu gewinnen.

Ein weiteres Gebiet, das im Kontext der Econophysik bisher weniger im Fokus stand, aber ebenfalls maßgeblich durch die Physik geprägt wurde, ist der Ansatz der Spektralanalyse. Mit Hilfe des Standardverfahrens in diesem Bereich, d. i. der sogenannten *Fourier-Transformation* (FT), fanden schon in den frühen 1960er Jahren Untersuchungen von ökonomischen Daten statt. Aufgrund einiger Schwächen der FT in Bezug auf instationäre Zeitreihen rückte zuletzt jedoch ein anderes Verfahren immer mehr in den Vordergrund, d. i. die sogenannte *Wavelet-Transformation* (WT). Als relativ junge Methode besitzt die WT aufgrund ihrer Flexibilität großes Potential, um im Bereich der Finanzmarktanalyse verstärkt eingesetzt zu werden und neue Erkenntnisse bezüglich klassischer Problemstellungen liefern zu können. Da die WT gleichzeitig sowohl in der Zeit- als auch der Frequenzebene lokalisiert, lässt sich beispielsweise ein großer Nachteil der FT, d. i. die reine Beschränkung auf die Frequenzebene, überwinden, so dass auch instationäre Zeitreihen adäquater analysiert werden können. Die Verwendung von Wavelets in der Econophysik motiviert sich dabei im Wesentlichen aus den beiden Annahmen, dass einerseits die Preisbildung von spekulativen Vermögensgegenständen auf heterogene Entscheidungen der Marktteilnehmer in Bezug auf verschiedene Zeithorizonte zurückzuführen ist; und dass andererseits die sich daraus ergebenden Strukturen, die sich implizit im resultierenden Preis manifestieren, mit Hilfe der sogenannten *Zeit-Skalen-Dekomposition* untersucht und zumindest approximativ aufgedeckt werden können.

Grundsätzlich stellt sich daher die Frage, welches Potential Wavelets in Bezug auf die Analyse von Finanzmärkten besitzen, und wie sie darüber hinaus in der Praxis, d. i. im praktischen Asset Management, effizient eingesetzt werden können. Eine spektralanalytische Methode, die das Datenmaterial aus einer gänzlich anderen als der herkömmlichen Perspektive beleuchtet, kann womöglich frische Erkenntnisse liefern, um die Zusammenhänge und die Dynamik auf den globalen Finanzmärkten besser verstehen zu können. Schließlich ermutigen die immer wiederkehrenden Finanzmarktblasen und darauffolgenden Börsencrashes, die nicht zuletzt seit Newtons South Sea Bubble die Finanzwelt in immer kürzeren Abständen erschüttern, dazu, auch weniger konventionelle Analysemethoden für die Finanzwirtschaft zu erschließen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Die folgende Arbeit soll daher eine theoretisch fundierte, wenngleich auf die wesentlichen Aspekte fokussierte Auseinandersetzung mit der WT liefern und insbesondere aufzeigen, wie Wavelets im Bereich der Kapitalmarktanalyse eingesetzt werden können. Einerseits steht daher die Diskussion der Wavelet-Theorie sowie das bisherige Anwendungsspektrum der WT auf dem Gebiet der Finanzwirtschaft im Mittelpunkt, um insbesondere evaluieren zu können, bei welchen Fragestellungen Wavelets in Abgrenzung zu etablierten Methoden Erkenntnisgewinne liefern können. Darüber hinaus liegt der Fokus auch auf einer empirischen Untersuchung der WT in Bezug auf Finanzmarktdaten, um beurteilen zu können, inwieweit dieser Ansatz in die Praxis eingebettet und dort tatsächlich eingesetzt werden kann.

Den bildgebenden Rahmen hierfür zeichnet die Econophysik, da sie als interdisziplinäres Forschungsfeld zahlreiche Kriterien in sich vereint, die im Kontext der Wavelet-Theorie ebenfalls eine wichtige Rolle spielen: Zum einen repräsentiert die WT eine unkonventionelle, naturwissenschaftlich geprägte Herangehensweise im Hinblick auf finanzwirtschaftliche Fragestellungen und kann als relativ junge Anwendung womöglich neue Einblicke in die Strukturen ökonomischer Zusammenhänge liefern, die das Spektrum bereits bestehender Ansätze erweitern. Darüber hinaus stehen zahlreiche Begrifflichkeiten und grundlegende Annahmen im Zentrum der Econophysik, die auch bei der WT von Bedeutung sind. So spielen wesentliche Aspekte der Mandelbrotschen Fraktaltheorie wie *Selbstähnlichkeit* oder *Skaleninvarianz* in beiden Sphären eine wich-

tige Rolle. Nicht zuletzt die Akzentuierung der Empirie – eines der zentralen Prinzipien der Econophysik – spiegelt sich ebenfalls in der WT unmittelbar wider, da sie als reines Analyseinstrument keine modellspezifischen Annahmen trifft, sondern die Daten „lediglich“ transformiert und damit schlicht für sich selbst sprechen lässt.

Die Brücke zwischen den beiden Ufern der Econophysik und der Wavelet-Theorie bildet dabei die Annahme, dass Finanzmärkte komplexe Systeme darstellen, auf denen die Preiskonstitution von Wertpapieren durch das Zusammenwirken heterogener Marktteilnehmer begründet wird. Diese treffen ihre Entscheidungen im Hinblick auf verschiedene Zeithorizonte, die im Rahmen der Zeit-Skalen-Dekomposition der WT untersucht werden können. Somit ermöglicht die WT, das Verhalten der Marktteilnehmer auf Finanzmärkten hinsichtlich verschiedener Zeitskalen zu analysieren und damit Einblicke in Zusammenhänge zu erschließen, die mit konventionellen Methoden der Zeitdomäne in dieser Form nicht möglich sind.

Im Einzelnen sollen in der hier vorliegenden Arbeit demnach folgende Fragestellungen erörtert werden:

- Was genau ist die Econophysik? Welche Elemente der klassischen Finanzierungstheorie kritisiert sie und legitimiert ihrem Verständnis nach damit ihre eigene Emanzipation als eigenständige Wissenschaftsdisziplin? Welche Sichtweise hat die Econophysik auf Finanzmärkte und welche Ansätze bzw. Lösungsvorschläge verfolgt sie, um die von ihr kritisierten Unzulänglichkeiten aufzulösen?
- Welches Potential besitzt die Spektralanalyse im Bereich der Finanzwirtschaft? Welchen Mehrwert kann ein spektralanalytisch geprägter Ansatz in diesem Bereich gerade in Abgrenzung zu etablierten Verfahren in der Zeitdomäne schaffen?
- Was genau ist die WT? Inwieweit differenziert sie sich von der klassischen Spektralanalyse im Sinne der FT? Und wie kann sie in die Econophysik eingebettet werden?
- Wie lassen sich Wavelets praktisch anwenden? Welchen Mehrwert können sie im Hinblick auf klassische Modelle oder Methoden schaffen? Wie kann die WT mit konventionellen Modellen der Zeitdomäne kombiniert werden, um beispielsweise deren Robustheit oder Aussagekraft zu verbessern? Und inwieweit lassen sich Wavelets im praktischen Asset Management implementieren?

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, Antworten auf diese und weiterführende Fragen, die sich bei Wavelets speziell im Hinblick auf Finanzdaten ergeben, zu finden und einen im Rahmen einer solchen Arbeit möglichst umfassenden und fundierten Überblick der WT zu verschaffen.

1.3 Aufbau der Dissertation

Für die hier vorliegende Arbeit ergibt sich daher folgender Aufbau: Der erste Teil, der die Kapitel 2 und 3 umfasst, ist theoretischer Natur und dient dazu, die wichtigsten Begriffe und Konzepte für die eingangs erläuterten Themen vorzustellen, um damit den zweiten Teil (Kapitel 4), welcher empirisch geprägt ist, auf eine solide Verständnisbasis zu stellen.

Kapitel 2 behandelt dabei die wesentlichen Elemente der Econophysik, die als interdisziplinäre und naturwissenschaftlich geprägte Wissenschaft den Rahmen bildet, in dem die WT in dieser Arbeit eingebettet ist. Dabei wird in Abschnitt 2.1 zunächst eine grobe Begriffsbestimmung durchgeführt und die wesentlichen Forschungsfelder sowie zentralen Themengebiete dieser jungen Wissenschaftsdisziplin skizziert. Um zu verstehen, warum sich die Econophysik als eigenständiges Forschungsfeld überhaupt erst entwickeln konnte, wird im darauffolgenden Abschnitt 2.2 kurz erläutert, welche Elemente der klassischen Lehre von der Econophysik kritisiert werden. Auf dieser Basis aufbauend werden in den nachfolgenden Abschnitten einige zentrale Aspekte der Econophysik aufgezeigt. Dies ist zum einen die *fraktale Geometrie* von Benoît Mandelbrot, deren Grundzüge und Hauptbegriffe in Abschnitt 2.3 behandelt werden. Zum anderen wird in Abschnitt 2.4 die wesentliche Sichtweise dargestellt, welche die Econophysik auf Finanzmärkte einnimmt, d. i. die These, dass Finanzmärkte komplexe Systeme darstellen. Diese besondere Klasse von Systemen besitzt spezifische, nicht-triviale Eigenschaften, die insbesondere auch im Hinblick auf die WT von Bedeutung sind.

Das darauffolgende Kapitel 3 bildet den wesentlichen Kern des theoretischen Teils. Dazu werden zunächst die Grundzüge der Spektralanalyse erläutert, d. i. die historischen Eckpfeiler (Abschnitt 3.1) skizziert und die Standardverfahren in diesem Bereich, namentlich die FT und die sogenannte *Short-Time Fourier Transformation* (STFT) eingeführt. Dieser Teil der Arbeit dient vor allem als Einführung in die Spektralanalyse, um die zentralen Methoden aber auch Grenzen dieser Disziplin zu verstehen. Abschnitt 3.2

stellt dann die Wavelet-Theorie detailliert vor und erläutert die WT in ihren wichtigsten Ausprägungen, um eine solide Verständnisbasis für der empirischen Teil der Arbeit aufzubauen.

Kapitel 4 ist dann das eigentliche Herzstück der Arbeit, das sich größtenteils auf die wesentlichen Fragen hinsichtlich der Empirie fokussiert. Dazu werden in Abschnitt 4.1 zunächst die empirischen Spezifikationen der WT erläutert, die bei der praktischen Implementierung zu beachten sind. In Abschnitt 4.2 folgt daraufhin eine erste empirische Annäherung an die WT, indem aufgezeigt wird, wie sich mit ihrer Hilfe sowohl Selbstähnlichkeit untersuchen lässt als auch eine skalenabhängige Varianzanalyse anhand von Skalogrammen durchgeführt werden kann. Die beiden letzten Abschnitte dieses Kapitels setzen sich daraufhin mit zwei unterschiedlichen, in der Praxis jedoch äußerst relevanten Themengebieten auseinander:

- Abschnitt 4.3 untersucht die Eignung der WT im Hinblick auf ihre Verwendung in der technischen Analyse, d. i. namentlich in der Trendbestimmung innerhalb von Zeitreihen spekulativer Vermögensgegenstände. Die Analyse dieses Komplexes ist insofern von Bedeutung, da es hierbei in der Regel um die Analyse der letzten verfügbaren Datenpunkte geht. Da die WT aufgrund der Randproblematik (Abschnitt 4.3.1) hierbei wesentliche Schwächen hat, werden unterschiedliche Verfahren der Datenaugmentation analysiert (Abschnitt 4.3.4) und im Rahmen einer simplen Trading-Systematik (Abschnitte 4.3.3 und 4.3.5 bis 4.3.7) auf ihre Eignung hin getestet. Die Abschnitte 4.3.8 und 4.3.9 schließen das Kapitel mit einem Vergleich der Trendfolge-Systematik mit einer alternativen Form der Trendbestimmung und einer Zusammenfassung ab.
- Abschnitt 4.4 verwendet die WT in einer etwas anderen Form, bei der die Randeffekte nicht so sehr ins Gewicht fallen wie bei der technischen Analyse. In diesem Abschnitt wird nämlich untersucht, inwiefern die WT im Kontext einer klassischen Portfoliooptimierung, deren Grundzüge in Abschnitt 4.4.1 erläutert werden, eingesetzt werden kann. Insbesondere wird untersucht, ob die WT zu einer Robustifizierung der Optimierung führt, d. h. ob sich auf Basis von transformierten Zeitreihen derartige Schätzer für die Markowitz-Optimierung finden lassen, die zu robusteren Ergebnissen vor allem im Hinblick auf die Gewichtungsvektoren führen. Die Relevanz der Randeffekte fällt hierbei dahingehend weniger ins Gewicht,

als dass im Gegensatz zur technischen Analyse nicht nur die letzten Datenpunkte entscheidend sind, sondern die Schätzer auf Basis einer längeren Datenreihe bestimmt werden und damit mehrheitlich solche Punkte der transformierten Reihe verwendet werden, die nicht bzw. nur gering durch die Randeffekte kontaminiert sind.

Das letzte Kapitel 5 fasst schließlich die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit nochmals kritisch zusammen und versucht einen Ausblick auf weitere Forschungsgebiete und -vorhaben der WT im Bereich der Finanzierungstheorie und -praxis zu skizzieren.

2 Econophysik - Eine naturwissenschaftlich geprägte Betrachtungsweise der Finanzmärkte

Das vorliegende Kapitel dient als kurze Einführung in das interdisziplinär geprägte Forschungsfeld der Econophysik. Der Fokus liegt hierbei jedoch nicht auf der Darstellung spezifischer Modelle, die innerhalb dieser Wissenschaftsdisziplin verwendet werden, sondern vielmehr auf der Vorstellung der wichtigsten Merkmale, d. i. insbesondere welche grundlegende Sichtweise die Econophysik in Bezug auf Finanzmärkte impliziert und welche Vorgehensweise sie hinsichtlich wesentlicher Fragestellungen in diesem Bereich propagiert (Abschnitt 2.1). Als Basis hierfür dient die Diskussion einiger Elemente der klassischen Finanzierungstheorie, die für die Vertreter der Econophysik im Rahmen einer kritischen Auseinandersetzung als Ausgangspunkt ihres Ansatzes dienen, d. h. von denen sich die Econophysik abgrenzen und letztlich emanzipieren möchte (Abschnitt 2.2).

Eine in diesem Kontext zentrale Begrifflichkeit sind *komplexe Systeme*, die in zahlreichen anderen Wissenschaftsdisziplinen wie auch der Finanzwirtschaft immer mehr in den Fokus rückt und vielerlei Aspekte in sich vereint, die die Perspektive der Econophysik auf Finanzmärkte widerspiegelt. Darüber hinaus dient dieser Begriff auch als Brücke, die Econophysik und Wavelet-Theorie miteinander verbindet. Schließlich werden noch wichtige Konzepte wie *Selbstähnlichkeit* oder *Skaleninvarianz* eingeführt, die im Wesentlichen auf die *Mandelbrotsche Fraktaltheorie* zurückgehen und im Kontext sowohl der Econophysik als auch der WT wichtige Leitplanken darstellen. Sehr gute Einführungen in die Econophysik geben Mantegna und Stanley (2000), Voit (2005), Bouchaud und Potters (2003) und Johnson, Jeffries und Hui (2003). Einen eher philosophischen, d. i. insbesondere wissenschaftstheoretischen Ansatz zu der Thematik bietet McCauley (2009).

2.1 Begriffsbestimmung – Econophysik

„Econophysics does not mean lifting tools and models from statistical physics and then applying them directly to economics. [...] Econophysics, simply stated, means following the example of physics in observing and modeling markets.“

(Joseph M. McCauley)

Der Neologismus *Econophysics* wurde erstmals in Stanley et al. (1996) verwendet und stellt einen Versuch dar, das Forschen von Physikern auf dem Gebiet der Wirtschaftswissenschaften zu legitimieren (Stanley et al. 1999, S. 156f). Bei diesem „multidisciplinary approach“ (Mantegna und Stanley 2000, S. viii) stand zunächst nicht so sehr die direkte Übertragung physikalischer Modelle im Vordergrund, sondern gemäß der obigen Definition (McCauley 2009, S. 9) die Anwendung der physikalisch-naturwissenschaftlichen Methode im Hinblick auf ökonomische Fragestellungen. Anlehnend an die experimentelle Physik nimmt die Empirie daher eine zentrale Rolle ein und dient als wesentlicher Ausgangspunkt für die Emanzipation dieser Wissenschaftsdisziplin. Mantegna und Stanley (2000, S. 6) beispielsweise nennen „the emphasis [...] put on the empirical analysis of economic data“ eine wesentliche Stärke der Econophysik.

Eine maßgebliche Motivationsgrundlage dieser Wissenschaftsdisziplin sind dabei einige Annahmen der klassischen Finanzierungstheorie, die mit den empirischen Beobachtungen nicht übereinzustimmen scheinen. So ist eine wesentliche Annahme der neoklassischen Schule beispielsweise diejenige des Homo Oeconomicus, d. i. eines rational agierenden Marktteilnehmers, der auf zum Teil effizienten und vollständigen Märkten agiert (vgl. Mallaby 2011, S. 133). Diese aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht eher extremen Standpunkte, die in einer solchen Radikalität heute meist nur von einer Minorität der Ökonomen bestimmter Schulen vertreten werden, erfreuen sich vor allem außerhalb der akademischen Forschung beachtlicher Popularität, weil sie in der Praxis relativ simpel implementiert werden können¹.

¹Eine eingehendere Diskussion dieser und anderer Elemente der klassischen Lehre, die aus Sicht der Econophysik als problematisch angesehen werden, erfolgt zum Teil in Abschnitt 2.2 und vor allem in Abschnitt A.1.

Ein weiteres Grundelement der Econophysik sind komplexe Systeme, d. i. eine spezifische Klasse von Systemen, die bestimmte Eigenschaften besitzen (vgl. Mantegna und Stanley 2000, S. 5). Im Gegensatz zur klassischen Ökonomie, die Finanzmärkte ebenfalls als komplex ansieht, indem die Preisanpassung von Gütern auf einzelnen Märkten der Relation von Angebot und Nachfrage folgt und beispielsweise durch Systeme von Differentialgleichungen mit Interaktionen und Spillover-Effekten beschrieben wird, bezieht sich das Verständnis dieser Begrifflichkeit aus Sicht der Econophysik mehr auf die Theorie komplexer Systeme, die aus der Systemtheorie entstammt und mit der Chaostheorie verwandt ist (vgl. Mantegna und Stanley 2000, S. 4f)². Ein zentraler Unterschied zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen ist ferner die Einschätzung in Bezug auf die Stabilitäts- bzw. Gleichgewichtseigenschaften solcher Systeme. So macht McCauley (2009, S.1) beispielsweise den Vorwurf: „Economists teach market equilibrium as the benchmark in the classroom, even while the real world of economics outside the classroom experiences no stability“.

Aus diesen Prämissen heraus haben sich letztlich verschiedene Ansätze entwickelt, die mehr oder minder stark an physikalische Modelle aus der statistischen Mechanik, der Thermodynamik, aber auch der Geo- oder Astrophysik angelehnt sind. McCauley (2009, S. 8f) unterscheidet drei wesentliche Richtungen, welche die Econophysik maßgeblich prägen:

1. Ein wichtiger Ausgangspunkt war die mathematische Formulierung des sogenannten *Minority Games*, die insbesondere auf die Arbeiten von Challet, Marsili und Zhang (2009) an der Universität Fribourg zurückgeht. Dieses Modell basiert auf der klassischen Spieltheorie und beschreibt das Verhalten von Agenten, die um endliche Ressourcen miteinander konkurrieren (Moro 2004, S. 4ff). Ein wesentliches Merkmal ist dabei die Heterogenität der Individuen und die Tatsache, dass die jeweiligen Strategien auf Basis ihrer vergangenen Performance im Spiel eingestuft und ausgewählt werden. Zu jedem Zeitpunkt t hat ein Agent dann die Wahl zwischen zwei Optionen. Zentral ist, dass ein Agent gewinnt, wenn er die Minderheitsstrategie wählt, d. i. diejenige Option, die von der Mehrheit der anderen Agenten abgelehnt wurde (vgl. Bouchaud und Potters 2003, S. 367)³.

²Eine genauere Erläuterung dieses Verständnisses komplexer Systeme erfolgt in Abschnitt 2.4.1.

³Für eine detaillierte Beschreibung samt mathematischer Formulierung des Minority Games siehe z.B. Moro (2004), Bouchaud und Potters (2003, S. 366ff) oder Voit (2005, S. 246ff).

2. Eine weitere Richtung beschäftigt sich mit der Erforschung und Prognose von Börsen-Crashes, vornehmlich mittels Erdbeben-Prognosemodellen aus der Geophysik. Didier Sornette von der ETH Zürich gilt als eine der Koryphäen auf diesem Gebiet. Sehr gute Einführungen zu diesem Themenkomplex sind z.B. Sornette (2003), Johansen und Sornette (2010), Sornette und Johansen (2001) oder Lin, Ren und Sornette (2009).
3. Der dritte Bereich setzt sich mit der allgemeinen Erforschung und Erklärung ökonomischer Daten auseinander. Der Fokus liegt hierbei auf der statistischen Beschreibung der empirischen Ergebnisse beispielsweise mittels leptokurtischer Verteilungen und Skalengesetzen: „Among the important areas of physics research dealing with financial and economic systems, one concerns the complete statistical characterization of the stochastic process of price changes of a financial asset“ (Mantegna und Stanley 2000, S. 6f). Diese Kategorie ist das wohl populärste und am weitesten erforschte Gebiet, da es unmittelbar aus einer der zentralen Prinzipien der Econophysik, d. i. der Fokussierung auf die Empirie, heraus motiviert wird. Ausgangspunkt sind dabei die sogenannten *stilisierten Fakten*, d. i. empirische Eigenschaften von Finanzdaten, die universell über verschiedene Zeitskalen und Assetklassen auftreten und zum Teil im Widerspruch zu einigen Annahmen der klassischen Lehre in der Finanzierungstheorie stehen. Stabile Verteilungen mit sogenannten *schweren Enden* oder der *Hurst-Exponent* sind Beispiele für zwei zentrale Konzepte innerhalb dieser Richtung.

Im Zusammenhang mit der WT ist vorwiegend die dritte Richtung von Bedeutung. Bevor aber in den folgenden Abschnitten genauer auf einige Merkmale dieses Bereichs eingegangen wird, soll im folgenden Abschnitt 2.2 zunächst einmal skizziert werden, welche Elemente der klassischen Finanzierungstheorie von Econophysikern als besonders problematisch angesehen werden und dahingehend auch die Basis bilden, auf der sich die Econophysik überhaupt erst entwickeln und emanzipieren konnte.

2.1.1 Zusammenfassung

Dieser Abschnitt diene einer ersten Begriffsbestimmung der Econophysik. Erläutert wurde dabei, wie der Begriff geprägt wurde und welche grundlegenden Annahmen bzw.

Ziele diese Wissenschaftsdisziplin verfolgt. Die Akzentuierung der Empirie als Basis für die Formulierung von Modellen und Theorien ist eines ihrer zentralen Prinzipien, was als natürliche Folge des Einflusses der physikalisch-naturwissenschaftlichen Herangehensweise betrachtet werden kann. Ferner wurden die drei wesentlichen Bereiche der Econophysik vorgestellt, von denen im Zusammenhang mit der WT vorwiegend derjenige von Bedeutung ist, der sich mit der allgemeinen Beschreibung ökonomischer Daten auseinandersetzt.

2.2 Ausgangspunkt – Kritik an klassischer Finanzierungstheorie

„In short, the belief in efficient financial markets blinded many if not most economists to the emergence of the biggest bubble in history.“

(Paul R. Krugman)

Die Entstehung der Econophysik wurde durch eine Reihe von Faktoren beeinflusst, die einerseits mit Entwicklungen auf praktischer Ebene zusammenhängen, andererseits aber auch von einigen theoretischen Elementen bzw. Annahmen in manchen Bereichen der Finanzierungstheorie geprägt wurden. Zunächst kann es ja erst einmal als verwunderlich angesehen werden, dass sich Physiker auf wissenschaftlicher Ebene überhaupt vermehrt mit Fragen der Finanzwirtschaft beschäftigen. Ein wesentlicher Grund von praktischer Seite her war sicherlich die immer weiter voranschreitende Mathematisierung insbesondere im Derivatebereich wie beispielsweise der Optionspreisbewertung, aber auch die immer bessere Technologisierung und Datenverarbeitung, die eine Flut von Information zur statistischen Analyse zur Verfügung stellen konnte (vgl. Mantegna und Stanley 2000, S.1). Dies steigerte den Bedarf an mathematisch ausgebildeten Analytikern an der Wall Street und „[...] led to a demand on modeling and data analysis in finance that many physicists have found to be either interesting or lucrative“ (McCauley 2009, S. 8).

Die vermehrte Beschäftigung von Physikern in der Kapitalmarktpraxis führte auf der anderen Seite auch dazu, dass diese sogenannten *Quants* sich zunächst einmal auf theoretischer Ebene mit Modellen der Finanzwirtschaft beschäftigten. Die kritische Aus-

einandersetzung mit einigen Elementen der klassischen bzw. neoklassischen Finanzierungstheorie insbesondere auf empirischer Ebene, die wie weiter oben bereits erwähnt aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht eher radikale Standpunkte darstellen bzw. lediglich aus didaktischen Gründen gelehrt werden, war eine wichtige Antriebskraft bei der Entstehung der Econophysik als Wissenschaftsdisziplin. Die wesentlichen Modelle und Annahmen, die dabei im Zentrum der Kritik stehen, sind der sogenannte *Random Walk* bzw. die *geometrische Brownsche Bewegung (gBB)*, die *Normalverteilungshypothese* bzw. der *zentrale Grenzwertsatz (ZGS)*, sowie der *Homo Oeconomicus* und die *Effizienzmarkthypothese (EMH)*. Ein wesentlicher Aspekt betrifft wie oben bereits erwähnt auch die empirische Verteilung von Renditen und die sogenannten stilisierten Fakten, die gegen einige dieser Annahmen sprechen⁴.

Die Kritik ist dabei nicht immer gerechtfertigt und spiegelt manchmal auch einen Mangel an Kenntnis über die aktuelle Forschung in der Finanzierungstheorie wider. So lautet ein Vorwurf von Mantegna und Stanley (2000, S. 9) beispielsweise: „The most accepted paradigm among scholars in finance is that the market is highly efficient in the determination of the most rational price of the traded asset“. Dabei gibt es von Seiten der Ökonomie ebenfalls zahlreiche Kritikpunkte wie beispielsweise das sogenannte *Verbindenheitsproblem* oder das *Grossman/Stiglitz-Paradoxon*, das die genannten Modelle vehement in Frage stellt⁵. Darüber hinaus gibt es im Rahmen der Finanzierungstheorie eine große Anzahl von Ansätzen, die die klassischen Modelle erweitern oder gar ablösen, wie beispielsweise der *generalisierte zentrale Grenzwertsatz (gZGS)* oder *stabile Verteilungen*⁶. Ferner ist auch das Ziel, das zumindest McCauley (2009, S. 7) für die Econophysik postuliert, nicht weniger radikal, als einige jener Ideen aus der Finanzierungstheorie, die kritisiert werden: "Clearly, econophysics should not try to imitate academic economic theory, nor should econophysics rely on standard econometric models. We are not trying to make incremental improvements in theory [...], we're trying instead to replace the standard models and methods with entirely new results“.

Ein solcher Standpunkt ist aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht sicherlich nicht gerechtfertigt und spiegelt auch nicht unbedingt die prädominante Meinung in der Econophysik wider. Voit (2005, S.6) beispielsweise stellt zahlreiche Ähnlichkeiten zwi-

⁴Eine genauere Beschreibung dieser Modelle und die wesentlichen Kritikpunkte, die von Seiten der Econophysik angebracht werden, werden in Abschnitt A.1 detailliert erläutert.

⁵Vgl. Abschnitt A.1.4.

⁶Für eine detaillierte Diskussion siehe Abschnitt A.2.

schen zentralen Ansätzen und Modellen in der Finanzierungstheorie und Physik heraus und erinnert daran, dass manche, von Econophysikern als vermeintlich neu deklarierten Erkenntnisse vielen Ökonomen bereits seit langem bekannt waren: „There are examples where physicists have simply rediscovered what has been known in finance for a long time“. Er ruft daher zu Demut unter seinen Mitstreitern auf und glaubt dennoch an einen fruchtbaren Beitrag, den der physikalisch-naturwissenschaftliche Impetus aus seiner Sicht für die Finanzierungstheorie leisten kann: „I therefore call for modesty (the author included) when physicists enter into new domains of research outside the traditional realm of their discipline. This being said, there is a long line of interaction and cross-fertilization between physics and economy and finance“ (Voit 2005, S. 6).

Neben diesen eher theoretisch motivierten Einwänden kann eine Kritik an einigen Elementen der klassischen Finanzierungstheorie gerade im Hinblick auf die Praxis durchaus als berechtigt angesehen werden. Viele dieser Annahmen sind gerade auf praktischer Ebene nach wie vor äußerst populär, weil sie trotz ihrer inhärenten Mängel zum Teil gute und vor allem simple und damit auch leicht implementierbare Näherungsverfahren ermöglichen. Andererseits bergen sie auch zum Teil große Risiken und spiegeln empirische Ergebnisse oftmals nicht adäquat wider.

2.2.1 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde aufgezeigt, inwieweit das Interesse von Physikern für Fragen der Finanzierungstheorie sowohl in der Praxis als auch der Forschung motiviert wurde und dementsprechend zur Entwicklung der Econophysik führte. Dazu wurden die wesentlichen Elemente der klassischen Finanzierungstheorie angesprochen, die dabei in der Kritik stehen. Die Relevanz dieser Annahmen bzw. Ansätze begründet sich durch die Tatsache, dass sie aus wissenschaftlicher Sicht zwar in weiten Teilen als obsolet angesehen werden, auf praktischer Ebene aber nach wie vor eine hohe Visibilität genießen und zum Teil weitreichende Verwendung erfahren. Im Hinblick auf die empirische Realität des Kapitalmarkts erscheinen viele der Annahmen dabei mehr als fragwürdig, was insbesondere dem naturwissenschaftlichen Anspruch der Econophysik im Sinne einer besonderen Akzentuierung der empirischen Beobachtung widerspricht. Dementsprechend dienen die mit ihnen verbundenen Probleme auch als Basis für die Entwicklung alternativer Ansätze wie eben der Econophysik als Wissenschaftsdisziplin.

2.3 Fraktale Geometrie

„Mandelbrot, like Prime Minister Churchill before him, promises us not utopia but blood, sweat, toil, and tears. If he is right, almost all of our statistical tools are obsolete [...]. Almost without exception, past econometric work is meaningless“ (MacKenzie 2006, S. 114).

(Paul H. Cootner)

Wie in Abschnitt 2.1 erläutert wurde, beschäftigt sich ein wesentlicher Bereich der Econophysik mit der Beschreibung statistischer Merkmale von Renditen spekulativer Vermögensgegenstände. Einige der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Annahmen der klassischen Finanzierungstheorie sind hierfür nicht geeignet und werden von Econophysikern wie auch Ökonomen zu Recht kritisiert. Aus empirischer Sicht treten bei Wertpapieren beispielsweise bestimmte Eigenschaften auf, die unter dem Begriff der *stilisierten Fakten* subsumiert werden⁷. Diese empirischen Fakten geben eindeutige Hinweise darauf, dass einige klassische Annahmen der Finanzierungstheorie nicht realistisch sind. Die Verteilung von Aktienrenditen ist beispielsweise im Gegensatz zur Normalverteilung viel spitzer und besitzt breitere Ausläufe an den Rändern, so dass bei zahlreichen Modellen aus Risikogesichtspunkten eine Alternative zur Gaußschen Glockenkurve in Betracht gezogen werden sollte (Rau-Bredow 2002, S. 4ff).

Der französisch-amerikanische Mathematiker Benôit Mandelbrot entwickelte bereits in den 1960er Jahren einen theoretischen Rahmen, d. i. die sogenannte *fraktale Geometrie*, in dem diese Charakteristika für die Modellierung von Renditeverteilungen und Preisfluktuationen zum Teil implementiert werden können. Aus seiner Sicht hat die Preisrevolution von Wertpapieren einen fraktalen Charakter und kann mit Hilfe von alternativen Verteilungsannahmen deutlich realistischer modelliert werden als mit dem konventionellen Ansatz. Viele Aspekte der Mandelbrotschen Theorie spiegeln sich auch in der Econophysik wider, weshalb die fraktale Theorie wesentlichen Einfluss auf die Entwicklung dieser Wissenschaftsdisziplin hatte (vgl. Mantegna und Stanley 2000, S. 3f).

Das 1982 erschienene Werk „The Fractal Geometry of Nature“ wird häufig als ei-

⁷Eine sehr gelungene Übersicht dazu bietet Cont (2001).

gentliche Geburtsstunde der fraktalen Geometrie bezeichnet, da Mandelbrot darin den Fraktalsbegriff erstmals prägte und aufbauend auf seinen bis dahin erfolgten Arbeiten die Theorie der fraktalen Geometrie in einem geschlossenen Werk darstellte (vgl. Eichhorn und Thiele 1994, S. 194). Der eigentliche Begriff *Fraktal* leitet sich vom lateinischen Verb *frangere* ab, was so viel wie „brechen“ bedeutet (Raab und Kessler 1986, S. 124). Ein Fraktal ist demgemäß ein Objekt, das in gewisser Weise gebrochen bzw. zerklüftet ist. Da es jedoch keine exakte Definition eines Fraktals gibt (vgl. Eichhorn und Thiele 1994, S. 195), greift man in der Regel auf zwei Prinzipien zurück, um den fraktalen Charakter eines Objekts zu kennzeichnen: (1) auf das Prinzip der *Selbstähnlichkeit*, und (2) auf einen verallgemeinerten Dimensionsbegriff, d. i. die sogenannte *fraktale Dimension*. Einen sehr gelungenen Überblick zur fraktalen Geometrie bietet die von Mandelbrot mitgestaltete Webseite der Yale University (Frame, Mandelbrot und Neger 2011). Mehr Bezug zur Finanzmarkttheorie wird in Mandelbrot und Hudson (2004) gegeben, indem der fraktale Charakter der Kapitalmärkte im Fokus steht und die Mandelbrotsche Theorie kritisch von klassischen Annahmen der Finanzierungstheorie abgegrenzt wird.

2.3.1 *Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz*

Der einfachste Weg, um ein Fraktal zu charakterisieren, erfolgt mit Hilfe des Begriffs der sogenannten *Selbstähnlichkeit*. Dieses Prinzip, das es in verschiedenen Ausprägungen gibt, bildet auch die eigentliche Grundlage der Fraktaltheorie. Dabei handelt es sich um eine spezielle Form von Symmetrie, die sich von klassischen Symmetrien wie der Translations- oder Rotationsinvarianz in der Physik unterscheidet. Ganz allgemein bedeutet Selbstähnlichkeit die maßstäbliche Wiederholung einer gewissen Struktur in sich selbst. Ein Fraktal ist somit eine geometrische Figur, bei der sich die einzelnen Teile aus ein und demselben Grundobjekt konstituieren, d. h. dass das Gesamtobjekt aus kleineren Kopien seiner selbst besteht. Die Kopien sind demgemäß dem Ganzen ähnlich: sie haben dieselbe Form, jedoch eine andere Größe. Es ist somit irrelevant, auf welcher Skala man Teile des Objekts betrachtet – das Grundschema ist immer identisch, weshalb man in diesem Zusammenhang auch von der sogenannten *Skaleninvarianz* spricht (Frame et al. 2011). Eine intuitive Möglichkeit, ein Fraktal zu konstruieren, ist demgemäß die Wiederholung derselben Form bzw. desselben Prozesses auf immer kleiner werdenden

Skalen⁸.

Evertsz, Hendrych, Singer und Peitgen (1999, S. 400ff) unterscheiden ferner drei Arten von Selbstähnlichkeit:

1. *Exakte Selbstähnlichkeit:*

Die bisher beschriebene Variante ist die strengste Form und wird deshalb auch als *exakte Selbstähnlichkeit* bezeichnet; sie ist nur in der Mathematik zu finden. Die einzelnen skalierten Teile sind exakte Kopien, so wie bei dem in Abbildung 2.3.1 aus Evertsz et al. (1999, S. 401) dargestellte Sierpinski-Dreieck. Die iterative Ähnlichkeitstransformation besteht hierbei aus 3^n Kopien (mit $n \in \mathbb{N}$) des zugrunde liegenden Grunddreiecks in jeweils 2^n -facher Verkleinerung.

2. *Statistische Selbstähnlichkeit:*

Eine weitere Form ist die *statistische Selbstähnlichkeit*. Die Skala wird dabei nicht für jeden Iterationsschritt kleiner, sondern wird für jedes Teilstück zufällig ausgewählt; d. h. der Skalierungsfaktor wird auf jeder Iterationsstufe per Zufall bestimmt. Die Teilbereiche besitzen dann zwar keine exakte Selbstähnlichkeit im strengen Sinn, haben jedoch dieselben statistischen Verteilungseigenschaften. Diese approximative Selbstähnlichkeit kommt sehr häufig in der Natur vor, wobei die Teilbereiche meist nur über eine begrenzte Anzahl von Skalierungsstufen selbstähnlich sind. Beispiele hierfür findet man bei Küstenlinien, Wolken oder bei Pflanzen wie Farnen und Baumverzweigungen.

3. *Affine Selbstähnlichkeit:*

Die dritte Variante schließlich nennt man *affine Selbstähnlichkeit*, die sich von den beiden anderen Formen dahingehend unterscheidet, als dass die Skalierung nicht in alle Raumrichtungen gleich ist. Abbildung 2.3.2 verdeutlicht den Unterschied: (a) Verringert man die Skalierungsfaktoren s in x-Richtung und r in y-Richtung um denselben Faktor, besteht exakte Selbstähnlichkeit. (b) Bleibt hingegen ein Faktor – in diesem Fall s – konstant, so dass das Objekt nur in y-Richtung gestaucht wird, spricht man von einer affinen Selbstähnlichkeit (Frame et al. 2011).

⁸In Abschnitt A.3 wird erläutert, wie eine solch iterativer Konstruktionsprozess aussieht.

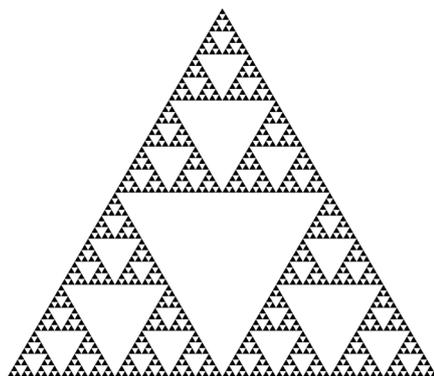


Abbildung 2.3.1: Sierpinski-Dreieck

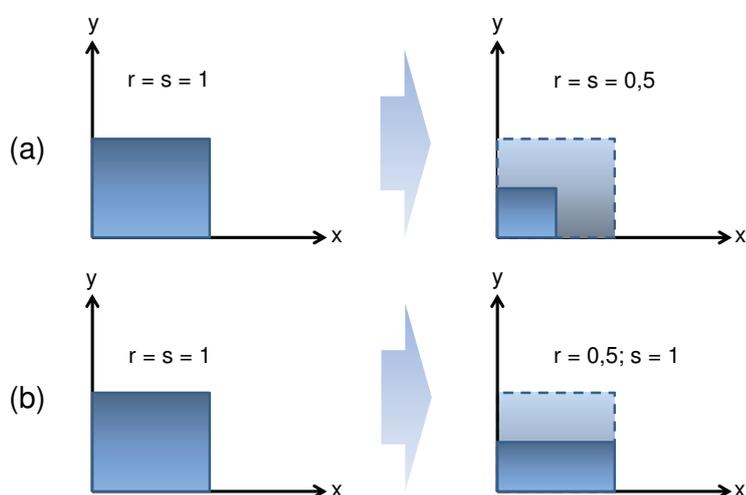


Abbildung 2.3.2: Darstellung (a) exakter und (b) affiner Selbstähnlichkeit

Zu Mandelbrots großen Verdiensten gehört neben der theoretischen Fundierung dieses Prinzips auch, dass er Selbstähnlichkeit als ein übergreifendes Ordnungsprinzip verstanden hat, das sich auf zahlreiche Wissenschafts- und Gesellschaftsbereiche anwenden lässt. So findet man selbstähnliche Strukturen nicht nur in der Natur, sondern auch in der Physik bei Struktureigenschaften bestimmter Materialien. In der Physiologie sind das zentrale Nervensystem oder die Lunge von Säugetieren nach selbstähnlichen Schemata aufgebaut, und in der Architektur gibt es selbstähnliche Konstruktionen beispielsweise bei gotischen Kathedralen. Nicht zuletzt bei Wavelets ist Selbstähnlichkeit ebenfalls

zu finden, wie in Kapitel 3 noch genauer beschrieben wird. Der Grund für das weitreichende Vorkommen dieses Prinzips ist, dass eine sich auf verschiedenen Skalen immer wiederholende Struktur ein äußerst effizientes Konstruktionsprinzip darstellt, das mit einem Minimum an Information und Maximum an Effizienz überaus komplexe Strukturen hervorbringen kann⁹.

Selbstähnlichkeit impliziert wie oben erläutert die Invarianz unter einer Skalentransformation. Skaleninvarianz ist dabei die Erhaltung der wesentlichen Charakteristika eines Zustands, Prozesses oder Verhältnisses, wenn die Betrachtungsgröße verändert wird. Sie kann mit Hilfe eines Potenz- bzw. Skalengesetzes der Form $f(x) = bx^a$ quantifiziert werden. Skaleninvarianz lässt sich daher folgendermaßen formalisieren:

Definition 2.3.1.1 (Skaleninvarianz)

Eine Funktion $f(x) = bx^a$ mit $b, x, a \in \mathbb{R}$ heißt skaleninvariant $\iff f(cx) = b(cx)^a = c^a bx^a = c^a f(x) \propto f(x)$.

Skaleninvarianz einer Funktion bedeutet also, dass sich $f(x)$ bei einer Veränderung der Skala $x \rightarrow x' = \lambda x$ bis auf einen Vorfaktor selbst wieder reproduziert (vgl. Voit 2005, S. 267). Darauf aufbauend kann man nun auch eine mathematisch exakte Definition der Selbstähnlichkeit stochastischer Prozesse aufstellen:

Definition 2.3.1.2 (Selbstähnlichkeit)

Ein stochastischer Prozess $Y = Y(t), t \geq 0$ mit einem Exponenten H ¹⁰ heißt selbstähnlich, falls folgende Gleichung gegeben ist:

$$Y(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^H Y(t), \tag{2.3.1}$$

wobei „ $\stackrel{d}{=}$ “ bedeutet, dass beide Seiten der gleichen Verteilung genügen.

Betrachtet man nun Zeitreihen von spekulativen Vermögensgegenständen, beschreiben Evertsz et al. (1999, S. 402ff) zwei wesentliche Ausprägungen, bei denen Skaleninvarianz zum Tragen kommt:

⁹Weitere Beispiele und weitergehende Erklärungen zur fraktalen Geometrie sind auf der Webseite der Yale University (Frame et al. 2011) zu finden.

¹⁰In Abschnitt 2.3.3 wird deutlich, dass H dem bekannten *Hurst-Exponenten* entspricht.

1. *Preisskaleninvarianz:*

Zum einen spricht man bei Aktien von der sogenannten *Preisskaleninvarianz*, die intuitiv recht schwer zu erfassen ist, da Preise von Aktien in der Regel hohen Schwankungen unterworfen sind und feste Preisskalen in der Regel nicht wirklich existieren. Betrachtet man jedoch beispielsweise den durchschnittlichen Preis über einen bestimmten Zeitraum, so lässt sich dennoch eine relativ stabile Preisskala definieren. Eine Preisskaleninvarianz würde demnach bedeuten, dass relative Preisänderungen unabhängig von der jeweiligen Preisskala sind. D. h. dass Aktien mit relativ hohen Preisen auch hohen absoluten Schwankungen unterliegen et vice versa. Es ist anhand der Volatilität also nicht ersichtlich, welches Preisniveau eine Aktie eigentlich hat.

2. *Zeitskaleninvarianz:*

Der Begriff der *Zeitskaleninvarianz* hingegen ist einfacher zu verstehen und beschreibt den Umstand, dass es nicht möglich ist, allein anhand der Zeitreihe zu erkennen, welche zeitliche Skala den Daten zugrunde liegt. Aufgrund der Zeitskaleninvarianz ist es somit nicht möglich, eine Unterscheidung beispielsweise zwischen Tages-, Wochen- oder Monatscharts ohne adäquate Beschriftung der Achsen zu treffen. Dies impliziert noch keine Selbstähnlichkeit im oben beschriebenen Sinn, zeigt aber, dass Aktienkurse ähnliche Muster auf verschiedenen Zeitskalen verfolgen. Abbildung 2.3.3 illustriert diese Eigenschaft anhand von Preisdaten des MSCI World Index in einem arbiträren, aber repräsentativen Zeitraum.

2.3.2 *Fraktale Dimension*

Ausgehend von dem fundamentalen Prinzip der Selbstähnlichkeit kann man nun den fraktalen Charakter eines Objekts näher spezifizieren. Im Gegensatz zu den Objekten der euklidischen Geometrie haben Fraktale nämlich keine „natürliche“ Größenspezifikation. Objekte wie Quadrate oder Kreise können mit Hilfe von Seitenlänge bzw. Diameter exakt beschrieben werden. Bei Fraktalen lässt sich eine solche natürliche Größenspezifikation hingegen nicht definieren, da aufgrund der Skaleninvarianz kein Fixpunkt für eine bestimmte Skala gegeben ist. Will man etwa die Länge einer Kurve messen, kann man sie durch Teilgeraden approximieren. Je kürzer diese Geraden sind, desto

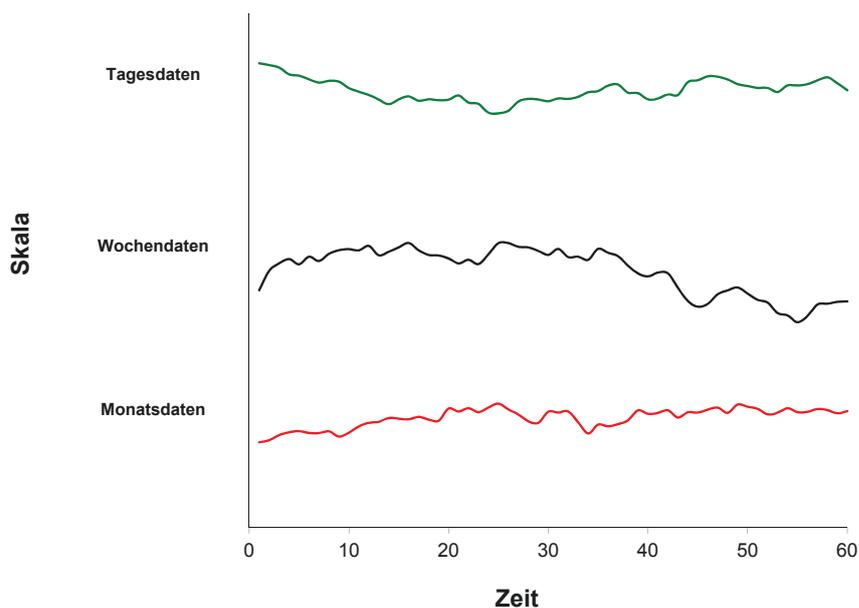


Abbildung 2.3.3: MSCI World Index: Preisdaten für verschiedene Zeitskalen

präziser wird dabei die Approximation, die sich auf der anderen Seite mit immer kürzeren Teilgeraden weiter fortsetzen lässt. Fraktale Objekte besitzen somit eine unendliche Länge und müssen deshalb mit Hilfe anderer Größen wie der sogenannten *fraktalen Dimensionen* charakterisiert werden (Evertsz et al. 1999, S. 400).

Gewöhnliche Objekte der euklidischen Geometrie besitzen nur ganzzahlige Dimensionskoeffizienten: Eine Linie ist eindimensional, Flächen und Quader sind zwei- bzw. dreidimensional. Fraktale Objekte hingegen können auch nicht-ganzzahlige Dimensionen aufweisen. Die fraktale Dimension beschreibt dabei, wie stark das Objekt zerklüftet ist. Misst man beispielsweise die Länge einer Küstenlinie, so ergeben sich je nach Skala verschiedene Werte: Der Wert einer Messung aus einer großen Höhe ist mit Sicherheit geringer als derjenige, der sich aus einer Messung mit einem Zirkel direkt am Grund ergibt. Je genauer die Messung, desto mehr Details können erfasst werden. Die fraktale Dimension gibt dementsprechend in gewisser Weise an, wie stark die Länge des Objekts mit dem Detaillierungsgrad der Messung ansteigt.

Für die Bestimmung des fraktalen Dimensionskoeffizienten D gibt es zahlreiche Berechnungsmöglichkeiten (vgl. Eichhorn und Thiele 1994, S. 195). Eine sehr anschauliche Methode bietet dabei das sogenannte *Box-Counting-Verfahren* (siehe Abbildung

2.3.4). Hierfür wird zunächst ein Gitter der Breite ϵ über ein Objekt aufgespannt. Die einzelnen Gitterboxen sind zunächst relativ groß, so dass die Anzahl $N(\epsilon)$ an Boxen, die von dem Objekt überdeckt werden, in der Regel noch gering ist. Verfeinert man das Gitternetz jedoch immer weiter, steigt die Anzahl derjenigen Boxen an, in denen sich ein Teilausschnitt des Objekts befindet. Die fraktale Box-Counting-Dimension ist schließlich durch folgende Grenzbildung definiert:

$$D_{Box} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}. \quad (2.3.2)$$

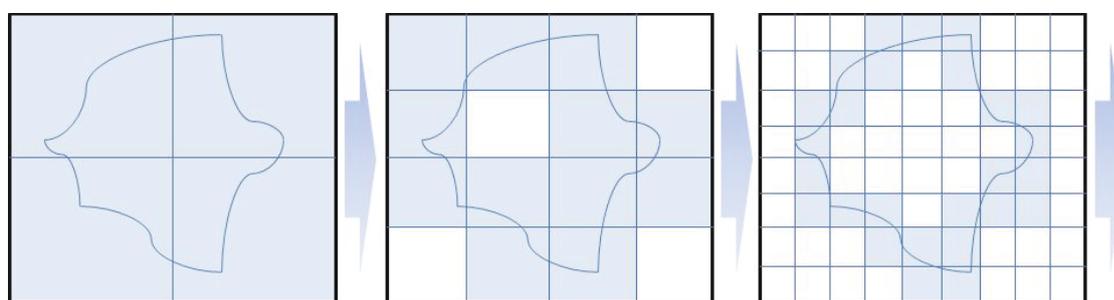


Abbildung 2.3.4: Box-Counting-Methode

Bei exakt selbstähnlichen Objekten kann D_{Box} durch die sogenannte *Selbstähnlichkeitsdimension* D_S vereinfacht bestimmt und ersetzt werden. Beschreibt N die Anzahl der Teilkopien des Grundobjekts und r den Skalierungsfaktor, mit dem die Teilkopien kontrahiert werden, so ist D_S wie folgt definiert:

$$D_S = \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}. \quad (2.3.3)$$

2.3.3 Hurst-Exponent

Ein weiterer Begriff, der im Rahmen der fraktalen Geometrie von Bedeutung ist, ist der sogenannte *Hurst-Exponent*. In den 1950er Jahren untersuchte der Britische Hydrologe Harold Edwin Hurst den Bau eines neuen Nilstaudamms in Assuan und studierte dazu die schwankenden Regen- und Trockenperioden, um deren Auswirkungen auf das Hochwasserverhalten des Flusses zu bestimmen (Preis, Virnau, Paul und Schneider 2009, S. 6). Er entdeckte dabei, dass auf Perioden mit hohen Überschwem-

mungen tendenziell wiederum Perioden mit demselben Verhalten folgten. Hurst selbst nannte dieses Verhalten „long-range statistical dependencies“. Allgemein nennt man die Tendenz, dass eine Zufallsgröße ihren aktuellen Wert beibehält, *Persistenz* oder *Erhaltungstendenz* (vgl. Rybski 2006, S. 1). Diese Tendenz beruht auf Abhängigkeiten zwischen den Datenpunkten einer Zeitreihe, die im Gegensatz zum deterministischen Trend statistischer Natur sind. Streng deterministische Trends stellen eine systematische, zum Teil exogen bewirkte Abweichung vom Mittelwert dar; statistische Trends hingegen beziehen sich auf Korrelationen.

Hurst fand heraus, dass die Schwankungen des Nilpegels ein persistentes Verhalten aufweisen und durch einen Prozess beschrieben werden können, der ein bestimmtes Muster aufweist und mit Hilfe einer Konstante definiert werden kann. Mandelbrot gab dieser These mittels seiner fraktalen Geometrie eine theoretische Fundierung und bezeichnete die Konstante zu Ehren von Hurst mit H . Sie wird über Definition 2.3.1.2 bestimmt und entspricht dem Exponenten in Gleichung (2.3.1). Anhand von H lassen sich Zeitreihen in drei Kategorien einordnen (Evertsz et al. 1999, S. 405), wobei der Hurst-Exponent die Werte $H \in (0; 1)$ annehmen kann:

1. Der Fall $H \in (0; 1/2)$ signalisiert anti-persistentes Verhalten, was eine Art Mean-Reversion-Prozess impliziert. Die Wahrscheinlichkeit für einen ansteigenden Wert der Zeitreihe nach einem unmittelbar absteigenden Wert ist demnach größer als diejenige für einen wiederholt absteigenden Wert (et vice versa). Die Wahrscheinlichkeit ist dabei umso höher, je mehr sich H Null annähert.
2. Für $H \in (1/2; 1)$ gilt, dass die Zeitreihe persistentes bzw. trendverstärkendes Verhalten aufweist, d. h. steigende Werte folgen eher steigenden Werten und umgekehrt. Wiederum steigt mit $H \rightarrow 1$ hierfür die Wahrscheinlichkeit. Laut Qian und Rasheed (2004) haben die meisten ökonomischen Zeitreihen tendenziell einen Wert $H > 1/2$, d. h. dass sie persistentes Verhalten zeigen.
3. Modelliert man den Preisprozesse von Aktien mit Hilfe des klassischen Paradigmas in Form der gBB, dann folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz $H = 1/2$ (vgl. Voit 2005, S. 65).

Der Zusammenhang des Hurst-Exponenten mit der Selbstähnlichkeitsdimension aus Gleichung 2.3.3 ergibt sich dabei durch $D_S = 2 - H$ (Frame et al. 2011).

2.3.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel diente dazu, einen ersten Einblick in die Mandelbrotsche Fraktalgeometrie zu gewinnen. Da sie aus Sicht der Econophysik eine Beschreibung der Finanzmärkte impliziert, die den empirischen Fakten eher entspricht als die klassische Lehre (vgl. Voit 2005, S. 113ff), sind zahlreiche Aspekte davon integraler Bestandteil dieser Wissenschaftsdisziplin. Die wesentlichen Grundzüge der Mandelbrotschen Theorie wurden erläutert, wobei insbesondere der Begriff der Selbstähnlichkeit und damit verbunden derjenige der Skaleninvarianz hervorgehoben wurden. Beide Begriffe spielen auch innerhalb der Wavelet-Theorie eine wichtige Rolle, da die WT an sich ein selbstähnliches Verfahren darstellt und eine Zeitreihe auf verschiedenen Skalen analysiert, indem sie die Ähnlichkeit der Zeitreihe mit skalierten Versionen eines Wavelets quantifiziert. Schließlich wurde auch der Begriff der fraktalen Dimension eingeführt und der Hurst-Exponent erläutert.

2.4 Finanzmärkte als komplexe Systeme

„[...] by a complex system I mean one made up of a large number of parts that interact in a nonsimple way. In such systems, the whole is more than the sum of its parts, not in an ultimate, metaphysical sense, but in the important pragmatic sense that, given the properties of the parts and the laws of their interaction, it is not a trivial matter to infer the properties of the whole“.

(Herbert A. Simon)

Mit diesem Zitat unternimmt der renommierte Sozialwissenschaftler Herbert A. Simon den Versuch, die wesentlichen Charakteristika von sogenannten *komplexen Systemen*, die aus dem Gebiet der Systemtheorie stammen, zu beschreiben (Simon 1981, S. 4). Komplexe Systeme treten in einer Vielzahl von Wissenschaftsgebieten auf und bilden eine spezielle Klasse von Systemen, die durch nicht-triviale Strukturen, Zusammenhänge und Prozesse gekennzeichnet sind. Es geht dabei um Phänomene, die äußerst schwierig zu erfassen sind und aufgrund ihrer Vielschichtigkeit meist nur ungenau bzw. in ihrer Gesamtheit nicht vollständig beschrieben werden können. In der Regel ist hier-

für eine sehr große Anzahl von Freiheitsgraden bzw. Parametern innerhalb des Systems verantwortlich, welche aus theoretischer Sicht – falls überhaupt¹¹ – nur mit Hilfe komplizierter mathematischer Verfahren berechnet bzw. empirisch nur unzureichend gemessen werden kann.

Paradoxerweise stellt sich unter Wissenschaftlern, die sich mit komplexen Systemen konfrontiert sehen, jedoch die Erkenntnis ein, dass ihre Problemstellungen, obgleich in den unterschiedlichsten Wissenschaftszweigen beheimatet, dennoch grundlegende Schlüsselemente gemeinsam haben. Aus der dem System inhärenten Dynamik emergieren nämlich Phänomene, die allgemein gültig sind; d. h. dass sich aus den Mechanismen und Prozessen auf Mikroebene Strukturen und Charakteristika auf der Makroebene herausbilden, die unabhängig von der spezifischen mikroskopischen Konfiguration des Systems sind. Im Falle von Finanzmärkten entsprechen diese universalen Eigenschaften den bereits erwähnten stilisierten Fakten.

2.4.1 Komplexe Systeme - Zentrale Eigenschaften

Eine allgemein gültige und anerkannte Definition von komplexen Systemen hat sich innerhalb der Scientific Community bisher noch nicht durchgesetzt. Es lassen sich jedoch zahlreiche charakteristische Eigenschaften identifizieren, die solche Systeme unabhängig von der spezifischen Disziplin, Problemstellung oder Konfiguration aufweisen (vgl. Johnson et al. 2003, S. 3ff).

Feedback: Komplexe Systeme sind durch *Feedback* gekennzeichnet. d. h. sie besitzen eine Art Rückkopplungs- oder Rückmeldungseigenschaft, die sich in Form eines tief in der Dynamik des Systems verankerten, nicht-trivialen Erinnerungserwiderungs-Mechanismus manifestiert. Dieses Feedback kann dabei positiv oder negativ sein, mit der Zeit fluktuieren und sich auf der mikroskopischen oder makroskopischen Ebene abspielen.

Große Anzahl interagierender Komponenten: In der Regel besteht ein komplexes System aus einer sehr großen Anzahl von Komponenten, die zum einen miteinander, zum anderen aber auch mit dem System als Ganzes interagieren. Ihre

¹¹Eine grundlegende mathematische Formulierung von komplexen Systemen ist bisher noch nicht gelungen.

Aktionen und Reaktionen sind meist zeitabhängig und werden durch die Feedbackmechanismen des Systems geprägt. Im Kontext von Finanzmärkten werden diese Komponenten als *Agenten* bezeichnet, deren Handlungsentscheidungen von endogenen und exogenen Systeminformationen bestimmt werden.

Instationarität: Die Komplexität eines Systems impliziert im Grunde genommen schon, dass die wesentlichen Eigenschaften in ihrer zeitlichen Evolution nicht konstant bleiben. Insbesondere sind die Interaktionen der Agenten zu gewissen Zeiten nicht-linear. Unter der Annahme von Stationarität kann dementsprechend keine akkurate Schätzung für das zukünftige Verhalten des Systems erfolgen.

Einmalige Realisation: Das System an sich entspricht in seiner spezifischen Konfiguration meist einer einmaligen Realisation, so dass ein maßgeblicher Grundsatz empirisch-naturwissenschaftlicher Forschung, d. i. derjenige der experimentellen Replizierbarkeit, oftmals nicht gegeben ist. Ferner ist das System vorwiegend nicht ergodisch.

Offenheit: Komplexe Systeme sind größtenteils offen, d. h. dass sie mit der Umwelt interagieren. Im Gegensatz zu den meisten physikalischen Systemen, die sich relativ leicht geschlossen darstellen lassen können, ist die Offenheit insbesondere bei Finanzmärkten ein wesentliches Merkmal. Insofern ist es mitunter äußerst schwierig, zwischen endogenen und exogenen Einflüssen auf das System zu unterscheiden oder die Grenzen des Systems zu definieren.

Von einem *adaptiven komplexen System* spricht man, wenn darüber hinaus noch folgende Eigenschaften gelten:

Adaption: Die Systemkomponenten stellen sich auf Veränderungen ihrer Umwelt ein und passen sich den aktuellen Gegebenheiten an. Auf Finanzmärkten wollen die einzelnen Agenten eine bestmögliche Performance erzielen und passen ihr Verhalten deswegen den jeweiligen Informations- und Marktgegebenheiten an.

Evolution: Aufgrund der Adaption und der Interaktion entwickelt sich das Multiagentensystem, reagiert auf die durch die Dynamik des Systems vorgegebenen Feedbackmechanismen und verändert diese durch ihren Einfluss damit auch unter Umständen. Die Evolution verläuft dabei typischerweise nicht stetig, so dass sich das

System meist nicht im Gleichgewicht befindet und mitunter extremes Verhalten aufweist.

Komplexe System sind also solche Systeme, die aufgrund ihrer Vielschichtigkeit nicht durch die Beschreibung und Erfassung der einzelnen Systemkomponenten vereinfacht werden können, da insbesondere die Strukturbeziehungen innerhalb des Systems eine wesentliche Rolle spielen und die einzelnen Teile nicht-trivial miteinander bzw. mit dem System zusammenhängen. Insbesondere weisen sie im Gegensatz zu rein komplizierten Systemen ein Charakteristikum auf, das man *Emergenz* nennt, d. i. die Eigenschaft, dass sich durch die Mechanismen und Prozesse auf mikroskopischer Ebene Strukturen und Eigenschaften auf der Makroebene herausbilden, die universal gültig sind. Das makroskopische Verhalten lässt sich damit nicht allein aus der Analyse der Einzelkomponenten erklären.

Eine weitere Ausprägung ist das Auftreten von großen und unvorhergesehenen Veränderungen, die nicht mit exogenen Faktoren in Zusammenhang gebracht werden können (Rickle 2010, S. 6). Auf Aktienmärkten kann man beispielsweise oft starke Bewegungen beobachten, die mitunter zwar initial auf fundamentalen Informationen basieren, in ihrer weiteren Entwicklung und Tragweite aber nicht mehr durch ebendiese erklärt werden können, sondern durch die systemimmanente Dynamik getrieben werden. Obwohl exogene Impulse wie beispielsweise die Veröffentlichung von Quartalszahlen einer Aktiengesellschaft für die Dynamik eines Marktes zu großen Teilen verantwortlich sind, impliziert der Ansatz der komplexen Systeme daher, dass zumindest ein Teil der Dynamik systemimmanent begründet ist. Dabei sind Extremfälle, die in ihrer radikalsten Form einen Börsencrash darstellen, aus Sicht der Econophysik integrale Bestandteile von Finanzmärkten und basieren auf der Dynamik, die sich durch die Handlungen der Agenten ergibt (vgl. Johnson et al. 2003, S. V). Adaptive komplexe System zeichnen sich ferner dadurch aus, dass die Systemkomponenten sich permanent an eine sich fortwährend wechselnde Umgebung anpassen.

2.4.2 *Econophysik und Wavelets*

Ein Kritikpunkt, der oft gegen die Econophysik vorgebracht wird, ist, dass Gesetzmäßigkeiten in der Physik meist durch die empirische Wiederholung von Experimenten gefunden werden können, die sich als abgeschlossene Systeme darstellen. In der Fi-

nanzwirtschaft ist ein solches Vorgehen dagegen nicht möglich, allein schon aufgrund der schieren Größe und Offenheit des Systems „Finanzmarkt“. Mantegna und Stanley (2000, S. 6) bemerken aber, dass es auch in der Physik Bereiche gibt, wo große, offene Systeme im Zentrum der experimentellen Untersuchung stehen wie beispielsweise in der Astro- oder Geophysik. Anders als bei Naturgesetzen der Physik sind die „Gesetzmäßigkeiten“ auf Finanzmärkten jedoch nicht streng kausal, sondern statistischer Natur. Die Feststellung, dass das Handeln der Marktteilnehmer und damit auch wesentliche Eigenschaften von Finanzmärkten im Grunde nicht vollständig erklärt werden können, wird in der Finanzierungstheorie durch die stochastische Komponente der Modelle repräsentiert. Die wesentliche Kritik an der klassischen Lehre seitens der Econophysik ist dabei, „that standard finance theory has an Achilles heel, which is the limited applicability of the stochastic models typically employed to describe the underlying market movements“ (Johnson et al. 2003, S. 81). Welche Antwort liefert die Econophysik daher auf die Frage, wie die Komplexität der Finanzmärkte im Rahmen ihrer Theorie repräsentiert wird?

Betrachtet man die wesentlichen Charakteristika von Finanzmärkten, lassen sich wie im vorigen Abschnitt 2.4.1 beschrieben zahlreiche Parallelen mit komplexen Systemen feststellen (vgl. Ramsey 2002, S. 33ff). Insofern zweifeln Johnson et al. (2003, S. 82) in diesem Zusammenhang daran, dass sich ein allgemeingültiges, stochastisches Modell überhaupt finden lässt: „[...] no matter how sophisticated any stochastic supermodel that we develop, would we be really any closer to understanding how the markets are going to behave?“. Die Econophysik schlägt deshalb einen Weg vor, den die Physik in der Thermodynamik bereits beschritten hat. Ohne die genauen Quanteneigenschaften der einzelnen Atome zu kennen, lassen sich in der statistischen Thermodynamik nämlich Schlüsse auf makroskopische Eigenschaften des Systems wie Druck oder Temperatur ziehen, indem man vereinfachende Annahmen für die Bewegung der Teilchen trifft. D. h. dass man aus vereinfachten Modellen auf der mikroskopischen Ebene Ergebnisse auf makroskopischer Ebene gewinnt, die mit den empirischen Resultaten im Einklang stehen. Ein Beispiel hierfür wäre das in Abschnitt 2.1 bereits erwähnte Minority Game, das als „simplistic analogy to the action of traders in a marketplace“ (Johnson et al. 2003, S. 88) betrachtet wird und versucht, das Verhalten von heterogenen Investoren auf dem Finanzmarkt zu modellieren (vgl. Johnson et al. 2003, S. 82f). Diese Agenten konstituieren durch ihr Verhalten die interne Dynamik des Kapitalmarktes. Diese

Marktdynamik wiederum generiert aufgrund der emergenten Eigenschaft von komplexen Systemen stilisierte Fakten, die auf makroskopischer Ebene beobachtet werden können. Im Gegensatz zur klassischen Finanzierungstheorie, die ebenfalls Rückschlüsse von der Mikro- auf die Makroebene zieht, betrachtet die Econophysik stilisierte Fakten primär also nicht als Resultat exogener Faktoren, sondern vielmehr als emergente Eigenschaften der internen Systemdynamik.

Ein Ziel der Econophysik ist somit, das mikroskopische Verhalten der Marktteilnehmer zu modellieren, um damit Schlüsse auf die Makroebene ziehen zu können. Das Problem dabei ist, dass die Marktteilnehmer im Sinne von komplexen Systemen heterogene Agenten sind, die sich hinsichtlich ihrer Eigenschaften, Absichten und Investmenthorizonte immens unterscheiden (vgl. Johnson et al. 2003, S. 82f). Kurzfristige Spekulanten beispielsweise agieren auf anderen Zeitskalen als langfristige Investoren, wobei sich die verschiedenen Anlageentscheidungen im Preis einer Anlage aggregieren. Aufgrund der Vielzahl der am Kapitalmarkt agierenden Individuen ist es somit äußerst schwierig, allein aus den Preisdaten Informationen über die verschiedenen Anlegertypen zu extrahieren. Gerade hier bieten sich jedoch Wavelets an. Die Preisevolution lässt sich im Rahmen der WT anhand der Zeit-Skalen-Dekomposition auf verschiedenen Skalen betrachten und mit den Verhaltensmustern bestimmter Marktteilnehmer zumindest approximativ in Verbindung bringen. Mit Hilfe der WT kann man analysieren, welche Frequenzen zu welcher Zeit aktiv waren und damit einen detaillierteren Einblick in das dynamische Verhalten von Finanzmärkten gewinnen. Als mathematisches Werkzeug versucht die WT dabei nicht, eine bestimmte Formel oder ein spezifisches Modell herzuleiten; dies liegt gar nicht im Rahmen ihres Potenzials. Mit Wavelets kann man Finanzmärkte jedoch auf innovative Weise untersuchen, indem man die Betrachtungsperspektive ändert. Durch die Transformation in die Zeit-Skalen-Ebene treten mitunter Charakteristika zu Tage, die mit herkömmlichen Standardverfahren in der Zeitdomäne nicht aufgedeckt werden können.

Eine weitere Verbindungsbrücke zwischen Econophysik und Wavelet-Theorie findet sich zudem im Konzept der Selbstähnlichkeit wieder. Innerhalb der Econophysik ist die fraktale Geometrie ein wichtiger Baustein; Selbstähnlichkeit ist wiederum ein zentrales Konzept, mit dem man den fraktalen Charakter eines Objekts spezifizieren kann. Wie man in Kapitel 3 sieht, ist das Konzept der Selbstähnlichkeit aber auch bei Wavelets von zentraler Bedeutung: Bei der Transformation werden ausgehend von einem

sogenannten *Mother-Wavelet* skalierte Versionen verwendet, um eine Zeitreihe in die Zeit-Skalen-Ebene zu überführen. Dieser Vorgang entspricht der in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen affinen Selbstähnlichkeitstransformation. Darüber hinaus ist die praktische Implementierung der diskreten Version der WT ebenfalls eine genuin selbstähnliche Prozedur. Schließlich haben einige Wavelets wie beispielsweise die Klasse der sogenannten Daubechies-Wavelets an sich eine fraktale Natur (Graps 1995, S. 7).

2.4.3 Zusammenfassung

Dieses Kapitel behandelte die wesentlichen Eigenschaften komplexer Systeme. Die Hauptmerkmale solcher Systeme sind nicht-triviale, komplexe Strukturen auf der mikroskopischen Ebene, die sich auf der Makroebene als emergente, universal gültige Eigenschaften manifestieren. Finanzmärkte bieten sich aufgrund ihrer Charakteristik besonders gut als Musterbeispiel für komplexe Systeme an, da sie eine Vielzahl der wesentlichen Merkmale in sich vereinen. Darüber hinaus wurde dargestellt, inwiefern komplexe Systeme als Verbindungsbrücke zwischen der Econophysik und der Wavelet-Theorie dienen können und wie sich die Einbindung der WT in den Rahmen der Econophysik motivieren lässt: Aus methodologischer Sicht reiht sich dieser Ansatz in eines der Hauptprinzipien der Econophysik ein, indem die WT die empirische Beobachtung in den Fokus rückt. Wie bei einem Mikroskop untersucht die WT das Datenmaterial und versucht, die wesentliche Informationen und Merkmale einer Zeitreihe in Bezug auf verschiedene Skalen zu extrahieren. Darüber hinaus implementiert die Wavelet-Theorie die Annahme, dass Finanzmärkte durch die Handlungen heterogener Marktteilnehmer beeinflusst werden. Verschiedene Agenten determinieren durch ihre Entscheidungen, die sie in Bezug auf unterschiedliche Anlagehorizonte treffen, die Preisevolution eines Wertpapiers auf aggregierter Ebene. Die WT versucht nun, die sich daraus ergebene Dynamik zu entzerren oder – um sich terminologisch in Richtung der Wavelet-Theorie zu bewegen – im Rahmen der Zeit-Skalen-Dekomposition zu zerlegen. Nicht zuletzt implementiert die WT auch das Prinzip der Selbstähnlichkeit, das im Rahmen der Econophysik ebenfalls eine wichtige Rolle spielt.

3 Wavelets - Ein spektralanalytischer Ansatz zur Untersuchung von Finanzmärkten

Das vorliegende Kapitel bildet den eigentlichen Kern des theoretischen Teils dieser Arbeit, welcher in zwei Bereiche aufgeteilt ist: Der erste Abschnitt 3.1 soll als Einführung einen Überblick in die wichtigsten Methoden und Ansätze der Spektralanalyse bieten und beinhaltet dementsprechend eine allgemeine Beschreibung des Themenkomplexes. Das Fachgebiet ist dabei in einen entwicklungsgeschichtlichen Kontext eingebettet, d. i. die wichtigsten Protagonisten, deren Namen sich in vielen Aspekten der Spektralanalyse manifestiert haben, werden kurz vorgestellt und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Theorie erläutert. Sehr gute Publikationen in Bezug auf den historischen Kontext sind Daubechies (1996), Mackenzie, Daubechies, Kleppner, Mallat, Meyer, Ruskai und Weiss (2001), Polikar (1999) oder Gao und Yan (2011). Auf dieser Verständnisbasis aufbauend diskutiert der zweite Abschnitt 3.2 die theoretischen Grundlagen der WT detailliert und in einer mehr quantitativen Weise. Dabei werden verschiedene Ausprägungen der WT kurz erläutert und auf ein mathematisch solides Fundament gesetzt. Das Ziel dieses Kapitels ist eine fundierte, obgleich auf die wesentlichen Bereiche beschränkte Einführung in die Spektral- bzw. Wavelet-Theorie zu vermitteln.

3.1 Historische Entwicklung der Zeit-Skalen-Analyse

„It’s unkind to point out the obvious to those who don’t want to see it. But it’s worse to point out the invisible to those convinced it doesn’t exist.“

(Ingo Swann)

Die eigentliche Geburtsstunde der WT ist die 1807 vom französischen Mathemati-

ker Joseph Fourier aufgestellte These, dass jede periodische Funktion als eine gewichtete Summe trigonometrischer Funktionen approximiert werden kann. Aufgrund von erheblichem Widerstand einflussreicher Zeitgenossen wie Joseph-Louis Lagrange oder Pierre-Simon Laplace setzte sich Fouriers Entdeckung jedoch erst etwa 15 Jahre später endgültig in der Scientific Community durch (Polikar 1999, S. 192). Durch sein Werk *Théorie analytique de la chaleur* wurde Fouriers These auf aperiodische Signale erweitert und zudem in der breiten Öffentlichkeit bekannt (vgl. Gao und Yan 2011, S. 18). Mathematisch gesehen zerlegt die Fourier-Analyse ein Signal in eine Anzahl unkorrelierter Koeffizienten, die mit bestimmten Frequenzen assoziiert werden können. Die FT ist demgemäß eine alternative Darstellung einer Funktion im sogenannten *Frequenzraum* und stellt sie in Abhängigkeit der Frequenz dar, weshalb man von einer reinen *Frequenzanalyse* spricht (vgl. Gençay, Selçuk und Whitcher 2001b, S. 98f). Mittels der FT lässt sich darstellen, welche Frequenzkomponenten ein Signal konstituieren und deren Relevanz anhand des Spektrums evaluieren. Ein allgemeines Merkmal der Spektralanalyse ist somit, dass es sich um eine alternative Darstellungsform eines in der Zeitebene definierten Signals handelt. Spektralanalytische Transformationen sind damit keine Modelle, sondern mathematische Werkzeuge, mit deren Hilfe man eine neue Perspektive auf das Datenmaterial gewinnen kann¹.

Im Laufe der nächsten 150 Jahre nach Fouriers Entdeckung wurde die FT fortwährend weiterentwickelt und fand in außerordentlich vielen Bereichen beispielsweise der Physik oder den Ingenieurwissenschaften vielfältige Verwendungsmöglichkeiten. Erste Untersuchungen von ökonomischen Daten fanden dagegen erst in den frühen 1960er Jahren statt. Granger, Hatanaka et al. (1964) und Granger (1966) zum Beispiel verwendeten die FT unter anderem, um makroökonomische Konjunkturzyklen zu analysieren. In der praktischen Anwendung stellte man im Laufe der Zeit jedoch fest, dass man instationäre Zeitreihen oder Signale mit komplexen Mustern wie abrupten Sprüngen mit Hilfe der FT nicht korrekt analysieren kann (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 98). Eine reine Frequenzanalyse in der klassischen Form der FT ist für Signale, deren statistische Merkmale sich zeitlich verändern, nicht geeignet, da die Verwendung trigonometrischer Funktionen keine zeitliche Lokalisierung des Frequenzspektrums impliziert. Anhand der FT kann man zwar feststellen, welche Frequenzen ein Signal konstituieren, aber

¹Für eine tiefer gehende Darstellung der FT mitsamt mathematischem Apparat sei auf Abschnitt A.4.1 verwiesen.

nicht zu welchem Zeitpunkt diese aktiv waren.

Im Jahr 1946 präsentierte der britisch-ungarische Physiker Dennis Gabor einen ersten Lösungsansatz für dieses Problem, indem er die FT um die Dimension der Zeit erweiterte. Die sogenannte *Gabor-Transformation* (GT) partitioniert das zu analysierende Signal in zeitlich lokalisierte Abschnitte und führt im Rahmen der so entstandenen Fenster eine FT durch. Ganz allgemein wird das Verfahren einer solchen gefensterten FT als *Short-Time Fourier-Transformation* (STFT) bezeichnet, wobei die Qualität der Analyse stark von der Wahl der Fensterfunktion abhängt². Das Resultat ist ein Kompromiss zwischen Zeit- und Frequenzebene in Form einer gefensterten Frequenzanalyse, weshalb man auch von einer *Zeit-Frequenz-Analyse* spricht, bei der der Transformationskern moduliert wird (vgl. Mertins 2010, S. 243)³. Sowohl bei der STFT wie auch bei allen anderen spektralanalytischen Ansätzen, die Zeit- und Frequenzebene miteinander verbinden, gibt es jedoch eine generelle Restriktion, die festlegt, mit welcher Genauigkeit eine gleichzeitige Analyse von Zeit- und Frequenzbereich überhaupt möglich ist. Diese Grenze wird durch die sogenannte *Heisenbergsche Unschärferelation* definiert, die als fundamentales physikalisches Prinzip die Grenzen einer jeglichen simultanen Zeit-Frequenz-Analyse festsetzt⁴.

Trotz ihrer Vorteile gegenüber der FT war auch die STFT bei vielen Anwendungen jedoch zu unflexibel und ineffizient. Der wesentliche Nachteil bei dieser Transformation ist nämlich, dass die Partitionierung für die gesamte Zeitdauer der Analyse eine konstante Größe besitzt. Man kann also entweder hohe Frequenzen mit sehr kleinen Fenstergrößen oder umgekehrt niedrige Frequenzen mit großen Fenstern analysieren. Als der Geologe Jean Morlet 1970 mit genau dieser Problematik konfrontiert wurde, setzte er den nächsten Meilenstein in der Entwicklung der Zeit-Frequenz-Analyse und begründete damit nach Mackenzie et al. (2001, S. 4) gar eine „scientific revolution“. Als Ingenieur des französischen Öl- und Energieunternehmens Elf-Aquitaine befand sich Morlet auf der Suche nach Rohölvorkommen. In der Regel senden Geologen dazu akustische Wellen in den Boden aus und können anhand des Resonanzspektrums

²Gabor benutzte die Gauß-Funktion als Fensterfunktion, so dass die GT in Abgrenzung zur STFT in der Regel explizit über die Wahl eines Gauß-Fensters definiert wird.

³Für eine tiefer gehende Darstellung der STFT mitsamt mathematischem Apparat sei auf Abschnitt A.4.2 verwiesen.

⁴Abschnitt A.4.3 erläutert die Heisenbergsche Unschärferelation detaillierter und beschreibt, wie sie sich im Kontext der Spektralanalyse darstellt.

Rückschlüsse auf die verschiedenen Bodenschichten ziehen. Die akustischen Wellen propagieren unterschiedlich schnell durch das Gestein, wobei es an Grenzschichten zu abrupten Wechsels kommt. Die konventionelle Methode im Sinne der FT konnte die genaue Lage dieser Sprünge nicht lokalisieren, da sie keinerlei Rückschlüsse bezüglich der zeitlichen Information zulässt. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems bestand darin, die Fenstergrößen der STFT in nacheinander folgenden Transformationen zu modifizieren, um die Sprungschichten zu lokalisieren. Ein solches Verfahren ist jedoch äußerst langwierig und nicht effizient. Um die seismischen Signale deshalb innerhalb einer einzigen Transformation analysieren zu können, konstruierte Morlet eigene Basisfunktionen, die neben der Frequenzebene gleichzeitig auch eine zeitliche Lokalisierung des Spektrums erlaubten und nannte sie *wavelets of constant shape*⁵. Dazu verwendete er eine gefensterter Kosinusfunktion, die er streckte bzw. stauchte, um die verschiedenen Frequenzkomponenten zu erfassen, und zusätzlich entlang der Zeitachse verschob, um sie simultan auch zeitlich zu lokalisieren (vgl. Daubechies 1996, S. 510f).

Wie knapp 200 Jahre zuvor musste auch diese neue Art der Zeit-Frequenz-Analyse um die Akzeptanz der Wissenschaftsgemeinde kämpfen, da die empirischen Ergebnisse zwar vielversprechend waren, es aber an einer theoretisch soliden Herleitung mangelte. Morlet selbst formulierte die Skepsis seiner akademischen Kollegen wie folgt: „If it were true, then it would be in the math books. Since it isn't there, it is probably worthless“ (Daubechies 1996, S. 511). Da er jedoch von der empirischen Überlegenheit seiner Analysemethoden gegenüber dem konventionellen Ansatz der FT überzeugt war, bat er den theoretischen Physiker Alex Grossmann vom Centre de Physique Théorique in Marseille, seiner Entdeckung eine theoretisch-mathematische Fundierung zu verleihen. Grossmann beschäftigte sich seinerzeit mit einer ähnlichen Problemstellung innerhalb der Quantenmechanik und arbeitete zusammen mit Morlet an der Formalisierung seines Ansatzes. 1984 veröffentlichten die beiden einen Aufsatz⁶, der die Wavelet-Theorie auf ein solides Fundament setzte und endgültig als adäquate Alternative zur FT etablierte. Die beiden Wissenschaftler zeigten darin unter anderem auf, wie ein Signal mit Hilfe der WT analysiert und ohne Informationsverlust wieder in das ursprüngliche Signal zurück transformiert werden kann. Darüber hinaus prägten sie darin zum ersten Mal den

⁵Später wurden diese Basisfunktionen in die sogenannten *Morlet-Wavelets* umbenannt.

⁶Grossmann und Morlet (1984).

Begriff *Wavelet* und stellten dar, wie die WT diese räumlich begrenzten *Wellchen*⁷ als Basisfunktionen verwendet, um eine Zeitreihe in der sogenannten *Zeit-Skalen-Ebene* gleichzeitig sowohl bezüglich der Zeit als auch der Frequenz analysieren zu können. Im Gegensatz zur STFT wird der Transformationskern bei der Wavelet-Analyse jedoch nicht moduliert, sondern skaliert, weshalb man von einer *Zeit-Skalen-Analyse* spricht.

Als der französische Mathematiker Yves Meyer, der ebenfalls als einer der Mitbegründer der Wavelet-Theorie gilt, von Grossmann und Morlets Arbeit hörte, fing er an, sich eingehender mit der Theorie zu beschäftigen. Er erkannte, dass das Wavelet-Konzept bereits früher in sich ähnelnder Weise von zahlreichen Mathematikern erarbeitet wurde⁸. Meyer konstruierte daraufhin eine eigene Klasse von Wavelets, die als wichtigste Eigenschaft Orthogonalität besaßen und wurde damit zu einem Grundpfeiler der Wavelet-Geschichte (Mackenzie et al. 2001, S. 5). Meyer war historisch gesehen jedoch nicht der erste, der orthogonale Wavelets konstruierte. Im Jahr 1909 promovierte der ungarische Mathematiker Alfréd Haar mit seiner Dissertation „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme“ unter David Hilbert an der Universität Göttingen und entwickelte im Rahmen seiner Forschung das nach ihm benannte, orthogonale Haar-Wavelet, d. i. das bis dato erste und simpelste Wavelet, das aus einem positiven und einem negativen Rechteckimpuls besteht (vgl. Percival und Walden 2008, S. 2f u. S. 57)⁹.

Trotz ihrer bis dahin relativ langen Historie fristete die Wavelet-Theorie wegen ihrer aufwendigen und nicht-trivialen Umsetzung in der Praxis bis in die frühen 1990er Jahre dennoch eher ein Nischendasein. Der eigentliche Durchbruch auf breiter wissenschaftlicher Ebene gelang Stéphan Mallat – einem ehemaligen Studenten von Meyer – im Jahr 1986 mit der Entwicklung der sogenannten Multi Resolution Analysis (MRA). Mallats großes Verdienst war dabei, dass er die Wavelet-Theorie mit bereits bestehenden Ansätzen der digitalen Signalverarbeitung verbinden konnte und damit eine wesentliche Vereinfachung hinsichtlich der praktischen Implementierung der Transformation erreichte. Mit Hilfe der MRA kann die WT mittels einfacher rekursiver Filteralgorith-

⁷Daher stammt der Name *Wavelet*, vom Französischen *ondelette* übernommen.

⁸Mackenzie et al. (2001) spricht von 16 separaten Wiederentdeckungen des Wavelet-Konzepts. Siehe hierzu auch Daubechies (1996) und Polikar (1999).

⁹Bezeichnenderweise untersuchte in den 1930er Jahren Paul Lévy die Brownsche Bewegung mit Hilfe des Haar-Wavelets. Aufgrund seiner Ergebnisse kam er zu dem Schluss, dass die Basisfunktionen von Haar weitaus geeigneter für die Analyse solcher Daten sind als die trigonometrische Basis der FT (vgl. Gao und Yan 2011, S. 26).

men berechnet und mit dem Konzept von Filterbänken ohne Spezifikation des Mother-Wavelets durchgeführt werden (Daubechies 1996, S. 512f). Auf dieser Basis bestand für andere Wissenschaftler nun auch die Möglichkeit, eigene Wavelet-Basisfunktion mathematisch fundiert und auf einfache Weise zu konstruieren. Die belgische Physikerin Ingrid Daubechies zum Beispiel – eine ehemalige Studentin von Grossmann – kreierte im Jahr 1988 (Daubechies 1988) eine eigene, nach ihr benannte Wavelet-Familie, die orthonormal und selbstähnlich ist (vgl. Gao und Yan 2011, S. 30). Diese sogenannten Daubechies-Wavelets können mit einfachen Ansätzen der digitalen Filtertechnik implementiert werden und spielen in der Praxis eine wichtige Rolle (Mackenzie et al. 2001, S. 6f). Zusammen mit Mallat ermöglichte die Arbeit von Daubechies den Übergang von der kontinuierlichen hin zur diskreten Signalanalyse und begründete damit die moderne Wavelet-Theorie (Polikar 1999, S. 194).

3.1.1 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde die historische Evolution der Spektralanalyse beschrieben. Ausgehend von der FT hat sich dabei über die STFT eine stetige Weiterentwicklung der Zeit-Frequenz-Analyse gezeigt, die letztlich in die WT und die dazugehörige Zeit-Skalen-Dekomposition mündete. Darüber hinaus wurde auch skizziert, welche Vor- und Nachteile die einzelnen Verfahren mit sich bringen und die wesentlichen Protagonisten vorgestellt, die in den jeweiligen Bereichen herausragende Leistungen zur Entwicklung des Themenkomplexes beigetragen haben.

3.2 Wavelet-Transformation - Theoretische Grundlagen

„The time series of the prices in a financial market carries a large amount of nonredundant information. Because of the quantity of this information is so large, it is difficult to extract a subset of economic information associated with some specific aspect“.

(Rosario N. Mantegna & H. Eugene Stanley)

Die Entwicklung der WT wurde durch eine Vielzahl an verschiedenen Strömungen

aus diversen Wissenschaftsdisziplinen geprägt, was eine Auseinandersetzung mit diesem Themengebiet vergleichsweise schwierig macht (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 5). Als spektralanalytisches Instrument wurde die Entwicklung von Wavelets auf theoretischer wie auch empirischer Ebene insbesondere im Bereich der Physik, Signaltheorie und Ingenieurwissenschaften vorangetrieben. Im Rahmen der ökonomischen Analyse spielte die WT lange Zeit eine eher untergeordnete Rolle und führte ein Nischendasein, das insbesondere durch Untersuchungen von Wissenschaftlern aus dem Bereich der Econophysik genährt wurde (Masset 2008, S. 13f).

Die relativ große Zurückhaltung seitens der Ökonomen, Wavelets zu verwenden, begründet sich zum einen durch den Umstand, dass die WT primär bei der Untersuchung deterministischer Funktionen – bedingt durch ihre vermehrte Anwendung im Bereich der Naturwissenschaften –, und nicht bei der Analyse stochastischer Signale verwendet wurde (vgl. Ranta 2010, S. 10). Darüber hinaus konnte die FT als spektralanalytisches Standardverfahren bei ökonomischen Problemstellungen keine herausragenden Resultate hervorbringen (vgl. Ranta 2010, S. 1). Die fehlende Lokalisierungseigenschaft im Zeitbereich zusammen mit dem Umstand, dass die FT für die Untersuchung instationärer Zeitreihen ungeeignet ist, zementierten das negative Bild der Spektralanalyse in der Financial Community. Dabei haben Wavelets gerade hier ihren größten Vorteil: Durch ihre Flexibilität können sie sowohl instationäre Zeitreihen problemlos analysieren, als auch lokalisieren, zu welcher Zeit bestimmte Ereignisse auftreten. Dadurch lassen sich Aspekte wie Trends oder Strukturbrüche, die bei Finanzdaten typischerweise zu beobachten sind, nicht nur detektieren, sondern auch zeitlich kategorisieren.

Neben den technischen Vorteilen bieten sich Wavelets für die Analyse von Finanzdaten jedoch auch aus einem anderen Grund an: Die Vorstellung, dass Finanzmärkte eine Multiskalenstruktur besitzen, ist intuitiv naheliegend, wenn man die Preiskonstitution von Wertpapieren genauer betrachtet: Der Preis einer Aktie wird durch eine Vielzahl von Kauf- und Verkaufsentscheidungen heterogener Marktteilnehmer konstituiert, die über verschiedene Informationen, Interessen und unterschiedlich lange Anlagehorizonte verfügen. Spekulanten beispielsweise verfolgen Strategien auf ganz anderen Zeitskalen wie langfristige Investoren. So halten Intraday-Trader ihre Positionen oftmals nur für Stunden oder gar einige Augenblicke, während institutionelle Anleger wie Versicherungen ihr Vermögen sehr langfristig, d. h. über mehrere Jahre hinweg investieren. Die großen Bewegungen beruhen dabei fast ausschließlich auf Unternehmens-, ökonomi-

schen Fundamental- oder politischen Rahmendaten. Aber auch kurzfristiger orientierte Anleger oder gar High-Frequency Trader haben mittlerweile einen wesentlichen Einfluss auf die Preisbildung an den Börsen. Darüber hinaus prägen noch andere Determinanten wie beispielsweise institutionell-rechtliche Rahmenbedingungen, der Informationsgrad spezifischer Marktteilnehmer oder gar kulturelle Unterschiede die Wahrnehmung der Märkte und damit die Heterogenität der Marktakteure (vgl. Vuoremaa 2004, S. 3). Die Entscheidungen der Marktteilnehmer beruhen somit auf unterschiedlichen Informationen und Interessen, die sich aggregiert im resultierenden Preis manifestieren – eine Sichtweise, die wie in Kapitel 2 beschrieben auch die Econophysik teilt. Mit Hilfe der Zeit-Skalen-Dekomposition können einige dieser resultierenden Strukturen, die in der aggregierten Ebene verborgen sind, nun mathematisch extrahiert und das dynamische Verhalten der Preisevolution im Hinblick auf ihre Multiskalenstruktur untersucht werden (Schleicher 2002, S. 1ff).

Wavelets besitzen somit die Fähigkeit, eine Zeitreihe in ihre Bestandteile zu zerlegen, die jeweils mit bestimmten Skalen assoziiert werden können (vgl. Ranta 2010, S. 1). Mit Hilfe der Zeit-Skalen-Dekomposition kann die Multiskalenstruktur von Finanzmärkten somit im Rahmen einer mathematischen Transformation approximativ offen gelegt werden, wobei freilich keine direkte Zuordnung einer Zeitskala zu einem bestimmten Typus von Marktteilnehmer getroffen oder gar eine ökonomische Interpretation des Börsengeschehens geliefert werden kann. Die WT kann jedoch eine Analyse dahingehend ermöglichen, welche Skalen innerhalb einer Zeitreihe zu welchem Zeitpunkt besonders aktiv sind und damit mehr Einblick in die Dynamik der Finanzmärkte gewähren (vgl. Ranta 2010, S. 2 u. S. 19). Durch die Multiskalenerlegung kann gleichzeitig sowohl ihre lokale wie auch globale Dynamik untersucht werden, Korrelationen und Varianzen in Bezug auf verschiedene Zeitskalen berechnet oder Phänomene wie Trends, Zyklen oder Strukturbrüche detektiert werden. Schleicher (2002, S. 2) argumentiert, dass „decomposing a time series into different scales may reveal details that can be interpreted on theoretical grounds as well as be used to improve forecast accuracy“. Und Gençay et al. (2001b, S. 1) behaupten, dass die Anwendung von Wavelets Erkenntnisse über die Dynamik und Charakteristik von Finanzmärkten liefern kann, die weit über diejenigen hinausgehen, die mittels konventioneller Methoden gewonnen werden können.

Ein weiterer Vorteil von Wavelets ist, dass sie als bloßes Analysewerkzeug keine apriorischen Annahmen über die Zeitreihe treffen, sondern als nicht-parametrischer An-

satz die Daten sozusagen für sich selbst sprechen lassen (vgl. Capobianco 2001, S. 514). Zwar müssen bei einer empirischen Untersuchung bestimmte Kriterien wie beispielsweise die Wahl des Wavelets und dessen Länge spezifiziert werden, Annahmen über die Verteilung oder sonstige statistische Eigenschaften des Datenmaterials sind jedoch nicht notwendig, da die WT die zugrunde liegenden Daten lediglich in eine andere Ebene transformiert¹⁰. Folglich stellt die WT Informationen über das Datenmaterial in einer Art und Weise dar, die sich von derjenigen in der Zeitdomäne fundamental unterscheidet (vgl. Percival und Walden 2008, S. 11). Demnach ist eine Fähigkeit von Wavelets laut Ramsey (1999, S. 2594) „to represent highly complex structures without knowing the underlying functional form [...] of great benefit in economic and financial research“.

In den nun folgenden Abschnitten werden verschiedene Formen der WT aus theoretischer Sicht eingehend erläutert und der mathematische Formalismus der Theorie näher diskutiert. Der Fokus liegt hierbei auf den theoretischen Grundlagen für die im empirischen Teil verwendeten Methoden. Da aus praktischen Gründen auf einige Aspekte nicht näher eingegangen werden kann, sei für eine umfassende Darlegung der Wavelet-Theorie auf folgende Werke verwiesen: Das wohl umfangreichste Kompendium stellt Percival und Walden (2008) dar, das insbesondere sehr detailliert auf den mathematischen Formalismus der WT eingeht und die Verwendung der Wavelet-Theorie in der Statistik und Zeitreihenanalyse ausführlich beschreibt. Ebenfalls sehr zu empfehlen ist Gençay et al. (2001b), worin die Autoren die WT im Rahmen von Filtermethoden innerhalb der Finanzierungstheorie beschreiben. Das Vorlesungsmanuskript Clausen und Müller (2001) stellt die Zeit-Frequenz-Analyse systematisch dar und beschreibt ihre wesentlichen Grundpfeiler bis hin zur WT didaktisch ansprechend. Im Rahmen der Signaltheorie sei auf das Werk Mertins (2010) verwiesen, das die WT aus dem Blickwinkel der Signalverarbeitung beleuchtet und zahlreiche interessante Einblicke eröffnet. Praktisch gesehen ist das Buch von Nason (2008) zu empfehlen, das den Fokus auf Probleme der WT bei der empirischen Analyse und speziell ihrer Implementierung in R richtet.

¹⁰Es lässt sich darüber diskutieren, inwieweit beispielsweise die Wahl des Wavelets oder seine genaue Spezifizierung ebenfalls eine Modellierung darstellt. Der springende Punkt an dieser Stelle ist aber, dass keine Verteilungsannahme oder kein zugrunde liegender Prozess für die Zeitreihe unterstellt wird.

3.2.1 Wavelets

Wie weiter oben bereits diskutiert wurde, stellen weder die FT noch die STFT hinsichtlich der Analyse von Finanzmärkten ein adäquates Instrumentarium dar, da die Basisfunktionen im Falle der FT über keinen kompakten Träger verfügen und die Zeitinformation durch die Transformation nicht übertragen wird. Die STFT überwindet diese Schwäche durch die Partitionierung des Signals in äquidistante Fenster. Aufgrund der apriori festzusetzenden Fenstergröße und des damit verbundenen starren Auflösungsverhältnisses bietet sie bei der Analyse von Finanzmarktdaten jedoch zu wenig Flexibilität. Plötzliche Diskontinuitäten erfordern kurze, langlebige Trends dagegen große Fensterbreiten. Insofern bedarf es eines Ansatzes, der noch einen Schritt weiter geht und adaptiv auf das Datenmaterial reagieren kann: Wavelets.

Wavelets haben einen kompakten Träger (Crowley und Pankki 2005, S. 9), d. h. sie sind räumlich begrenzt und verfügen im Gegensatz zu trigonometrischen Funktionen daher über die Fähigkeit einer zeitlichen Lokalisierung, indem das Wavelet entlang der Zeitachse verschoben wird. Eine gleichzeitige, flexible Frequenzauflösung wird durch die Skalierung der Basisfunktion erreicht. Abbildung 3.2.1 zeigt den Unterschied zwischen einer Sinusfunktion und einem typischen Wavelet: während die trigonometrische Funktion räumlich unbegrenzt und glatt ist, besitzt ein Wavelet einen kompakten Träger. Generell können Wavelets dabei verschiedenste Formen annehmen, da für sie alle schnell abklingende Funktionen in Frage kommen, die bestimmte Eigenschaften besitzen müssen¹¹.

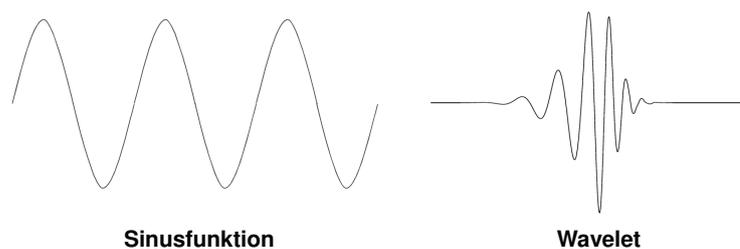


Abbildung 3.2.1: Vergleich zwischen einer Sinusfunktion und einem Wavelet

Wie bei der FT wird auch bei der WT in Form eines Koeffizienten quantifiziert, mit

¹¹Die genauen Eigenschaften von Wavelets werden in Abschnitt 3.2 noch genauer erläutert.

welcher Güte der Funktionsabschnitt durch das skalierte Wavelet approximiert wird. Durch die Transformation wird die komplizierte Struktur der Funktion aus der Zeitebene in einfachere Bestandteile der Zeit-Skalen-Ebene transformiert. Abbildungen 3.2.2 und 3.2.3 illustrieren das Prinzip der WT schematisch: Die Funktion wird dabei mit einem spezifisch skalierten Wavelet verglichen und der dazugehörige Koeffizient berechnet. Der Koeffizient ist umso größer, je größer die Ähnlichkeit zwischen dem Wavelet und dem jeweiligen Abschnitt ist (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 103).

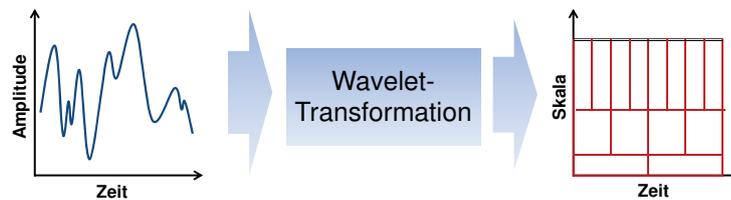


Abbildung 3.2.2: Schematische Darstellung der Wavelet-Analyse

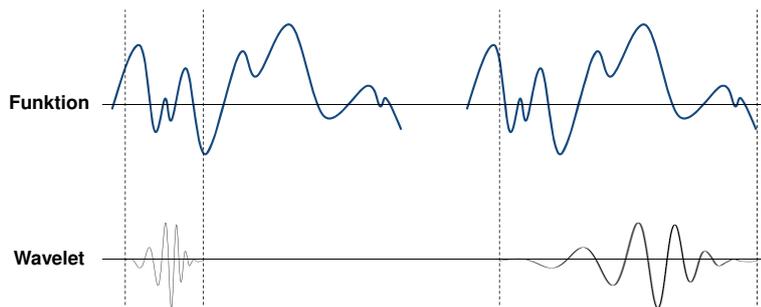


Abbildung 3.2.3: Quantifizierung einer Funktion mit einem skalierbaren Wavelet (schematisch)

Die Form eines spezifischen Wavelets hängt dabei vom jeweiligen Skalierungsparameter ab, durch den es entweder gestreckt oder gestaucht wird (siehe Abbildung 3.2.4) (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 100):

- Je kleiner der Skalierungsparameter $s \rightarrow$ desto gestauchter ist das Wavelet auf der Zeitachse (bessere Zeitauflösung) \rightarrow desto höher sind die Frequenzen, die durch das Wavelet repräsentiert werden (schlechtere Frequenzauflösung) \rightarrow desto schneller oszillieren diejenigen Abschnitte der Funktion, die durch einen Abgleich mit dem Wavelet einen hohen Koeffizientenwert ergeben.

- Je größer der Skalierungsparameter $s \rightarrow$ desto gestreckter ist das Wavelet auf der Zeitachse (schlechtere Zeitauflösung) \rightarrow desto niedriger sind die Frequenzen, die durch das Wavelet repräsentiert werden (bessere Frequenzauflösung) \rightarrow desto langsamer oszillieren diejenigen Abschnitte der Funktion, die durch einen Abgleich mit dem Wavelet einen hohen Koeffizientenwert ergeben.

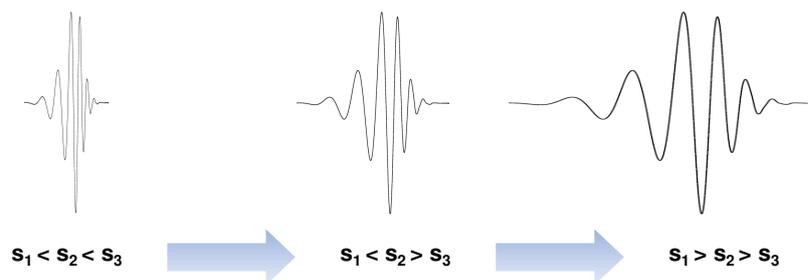


Abbildung 3.2.4: Illustration des Skalierungsparameters s

An dieser Stelle wird nochmals der grundlegende Unterschied zwischen der STFT und der WT deutlich: Bei der STFT ist die Fensterbreite konstant, und die Frequenz ω spiegelt die Anzahl der Oszillationen innerhalb dieses Intervalls wider. Bei der WT hingegen ist die Anzahl der Oszillationen – definiert durch die Wahl des spezifischen Wavelets – fixiert, und die „Fensterbreite“ wird mit Hilfe des Skalierungsparameters variiert (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 43).

Die WT ist ein adaptives Werkzeug, das sich besonders gut für Signale eignet, die transiente Eigenschaften wie beispielsweise abrupte Sprünge, Trendumkehrungen oder Diskontinuitäten aufweisen. Im Gegensatz zur FT, bei der sich solche Phänomene global, d. i. auf alle Koeffizienten auswirken, werden bei der WT nur diejenigen Koeffizienten beeinflusst, die sich in unmittelbarer Nähe des analysierten Abschnittes befinden (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 18). Die flexible Adaptivität an das zugrunde liegende Datenmaterial ist damit die wesentliche Stärke von Wavelets: die komplexe Struktur des Signals wird durch die Zerlegung in einfachere Komponenten analysiert. Mit Hilfe der dynamischen Skalengröße lassen sich hochfrequente Komponenten auf kleinen Skalen sowie niederfrequente Bestandteile auf großen Skalen approximieren. Aufgrund dieser Eigenschaft werden Wavelets auch als *mathematisches Mikroskop* bezeichnet. Darüber

hinaus ist durch die Zeitindexierung gewährleistet, dass die Projektion der Funktion in der Zeit-Skalen-Ebene zeitlich lokalisiert ist (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 19).

Wavelets sind dementsprechend Funktionen, die die zeitliche Evolution der Frequenzkomponenten eines Signals auf verschiedenen Skalen darstellen können (Masset 2008). Dadurch lassen sich gleichzeitig sowohl globale als auch lokale Regularitäten des Signals untersuchen. Als Mittelweg zwischen Zeit- und Frequenzanalyse kann die WT nicht nur zahlreiche Problemstellungen umgehen, die sich durch die FT bzw. durch herkömmlichen Analysemethoden in der Zeitdomäne ergeben, sondern bietet auch eine innovative Perspektive auf die Dynamik von Finanzmärkten. Für Nason (2008, S. VII) stellen Wavelets gar eine „true scientific revolution“ dar.

3.2.2 Kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die Transformation bei der kontinuierlichen Fourier-Analyse zwischen Zeit- und Frequenzraum erfolgt mittels einer Integration über das Produkt aus der Ausgangsfunktion und einer komplexen Exponentialfunktion¹². Bei der *kontinuierlichen Wavelet-Transformation* (CWT) erfolgt die Transformation in ganz ähnlicher Weise. Die Wavelet-Koeffizienten ergeben sich aus einer Integration über das Produkt der Ausgangsfunktion und einer Reihe skaliertes bzw. verschobener Versionen des sogenannten *Mother-Wavelets* $\psi(t)$, welche zusammen eine Funktionenfamilie bilden:

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, u \in \mathbb{R}. \quad (3.2.1)$$



Abbildung 3.2.5: Schematische Darstellung der kontinuierlichen Fourier-Analyse

Die Elemente dieser Funktionenfamilie ergeben sich aus dem Mother-Wavelet, variiert mit Hilfe des Skalierungsparameters s und des Translationsparameters u . Der Vorfak-

¹²Vgl. Abschnitt A.4.1.



Abbildung 3.2.6: Schematische Darstellung der kontinuierlichen Wavelet-Analyse

tor $\frac{1}{\sqrt{s}}$ garantiert, dass die Norm von $\psi_{s,u}(t)$ gleich Eins ist, und die Lokalisierungseigenschaft auf der Zeitachse wird durch den kompakten Träger des Mother-Wavelets ermöglicht (Crowley und Pankki 2005, S. 9f).

Die CWT $W(s, u)$ einer Funktion $f(t)$ ist als Projektion der Funktion mit der Wavelet-Familie $\psi_{s,u}(t)$ definiert:

$$W(s, u) := \langle f(t), \psi_{s,u}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{s,u}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt, \quad (3.2.2)$$

wobei ψ^* die konjugiert Komplexe von ψ bezeichnet. Die einzelnen Wavelet-Koeffizienten $W(s, u)$ ergeben sich demnach aus dem Skalarprodukt der Funktion und dem jeweils skalierten und verschobenen Wavelet der Wavelet-Familie. Sie repräsentieren den vollen Informationsgehalt der ursprünglichen Funktion in der Zeit-Skalen-Ebene und quantifizieren die Ähnlichkeit zwischen der Funktion und der Wavelet-Familie, d. i. wie stark die Funktion zu einem bestimmten Zeitpunkt mit dem spezifischen Wavelet korreliert (vgl. Masset 2008, S. 14ff). Da die Skalierung des Mother-Wavelets der in Kapitel 2.3.1 beschriebenen affinen Selbstähnlichkeitstransformation entspricht, stellt die CWT ein affines Transformationssystem dar (vgl. Schleicher 2002, S. 10ff).

Nicht alle Funktionen $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ eignen sich dabei als Wavelet. Vielmehr müssen folgende Gleichungen erfüllt sein, die zentrale Bedingungen der Wavelet-Theorie darstellen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.2.3)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (3.2.4)$$

Nach Gleichung (3.2.3) haben Wavelets einen Mittelwert gleich Null; Gleichung (3.2.4) besagt wiederum, dass sie eine Energie¹³ gleich Eins besitzen. Dies bedeutet, dass sie zwar Werte besitzen, die von Null abweichen, umgekehrt aber auch Werte annehmen müssen, die diesen entgegengesetzt sind. Die Summe aller Werte nivelliert sich letztlich, so dass ein Wavelet eine Wellenform annimmt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 2).

Speziell sagt man, dass $\psi(t)$ *n verschwindende Momente* besitzt, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \text{ mit } n = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.5)$$

In der Praxis ist diese Eigenschaft von Bedeutung, da sie ein Maß für die Glattheit des Wavelets darstellt und bestimmt, wie gewisse Aspekte einer Zeitreihe in der Zeit-Skalen-Ebene repräsentiert werden können¹⁴. Außerdem ist eine Wavelet-Funktion in der Regel umso glatter, je mehr verschwindende Momente sie besitzt, wie in Abschnitt 4.1 noch genauer erläutert wird.

Um die Möglichkeit einer Synthese, d. i. einer Rücktransformation einer Funktion zu gewährleisten, muss die sogenannte *Zulässigkeitsbedingung* erfüllt sein:

$$0 < C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (3.2.6)$$

wobei $\hat{\psi}(\omega)$ die Fourier-Transformierte¹⁵ von $\psi(t)$ darstellt. Die eigentliche Rücktransformation einer Funktion $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ aus seinen Wavelet-Koeffizienten erfolgt schließlich durch die sogenannte *Inverse kontinuierliche Wavelet-Transformation* (ICWT):

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(s,u) \psi_{s,u}(t) \frac{1}{s^2} ds du. \quad (3.2.7)$$

¹³ Als Energie einer Funktion wird das Integral über das Quadrat der Funktion in ihrer jeweiligen Domäne bezeichnet (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 102).

¹⁴ Für eine detaillierte Diskussion der Bedeutung verschwindender Momente sei auf Abschnitt 4.1.1 bzw. Percival und Walden (2008, S. 483ff) verwiesen.

¹⁵ Vgl. Abschnitt A.4.1.

3.2.3 Diskrete Wavelet-Transformation

Wie bei den meisten realen Zeitreihen ist auch bei Finanzdaten das vorhandene Datenmaterial diskret. Die Klassifizierung hinsichtlich der kontinuierlichen bzw. diskreten Variante der WT wird jedoch nicht durch die Beschaffenheit der zugrunde liegenden Daten konstituiert. Die CWT ist nämlich insofern als kontinuierlich zu verstehen, als dass die Skalierung und Verschiebung des Mother-Wavelets kontinuierlich vollzogen wird. Der Nachteil ist eine damit verbundene hohe Redundanz, da die Koeffizienten $W(s, u)$ auf sämtlichen Punkten der Zeit-Skalen-Ebene berechnet werden (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 105). Durch diesen Umstand ist zwar eine äußerst genaue Analyse des Datenmaterials möglich, weshalb die CWT in erster Linie als exploratives Analysewerkzeug eingesetzt wird (vgl. Percival und Walden 2008, S. 12). Gleichzeitig enthält die CWT jedoch redundante Informationen, die für eine vollständige Rekonstruktion der Zeitreihe nicht notwendig sind (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 21).

Ein Weg, diese Problematik zu umgehen, wurde mit Hilfe der *diskreten Wavelet-Transformation* (DWT) geschaffen. Es stellte sich nämlich heraus, dass der Rechenaufwand bei einer geschickten Wahl diskreter Skalierungs- und Translationsparameter unter der Vermeidung von Präzisionsverlusten enorm verringert werden kann. Die DWT ist nur noch an bestimmten Punkten der Zeit-Skalen-Ebene definiert und kann dennoch die Bewahrung des vollen Informationsgehalts im Hinblick auf eine vollständige Rekonstruktion des Signals garantieren. Die Unterscheidung zwischen der kontinuierlichen und der diskreten Variante der WT besteht somit in der Diskretisierung der beiden Parameter s und u . Als besonders effiziente Darstellung stellte sich eine dyadische Abtastanordnung heraus, d. i. eine Diskretisierung der Form 2^j :

$$s = 2^j \tag{3.2.8}$$

$$u = k2^j. \tag{3.2.9}$$

Die Indizes $j, k \in \mathbb{Z}$ repräsentieren die Menge der diskreten Skalierungen bzw. Verschiebungen. j wird in Abgrenzung zum Skalierungsparameter s als *Level* bezeichnet¹⁶. Eine Diskretisierung nach Gleichung (3.2.8) wird *kritische Abtastung* genannt, wenn durch

¹⁶In der Literatur wird diese Unterscheidung leider oft nicht eingehalten und die Begriffe Skala und Level allzu oft „interchangeably“ (Nason 2008, S. 17) verwendet, was zu großer Verwirrung führen kann.

eine minimale Anzahl an Koeffizienten die Bewahrung des vollen Informationsgehalts sichergestellt wird (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 105). Aus der kritischen Abtastung ergeben sich folgende Wavelet-Funktionen, die nun von j und k abhängen:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-k2^j}{2^j}\right) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t-k). \quad (3.2.10)$$

Diese Funktionen bilden für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ ein orthonormales System des $L^2(\mathbb{R})$, d. i. eine sogenannte *Wavelet-Basis* (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 21). Ferner lassen sich die Wavelet-Koeffizienten der DWT wie folgt darstellen:

$$d_{j,k} = W(2^j, k2^j) = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{-\frac{j}{2}} \psi^*(2^{-j}t-k) dt, \quad (3.2.11)$$

und die Rücktransformation der Funktion $f(t)$ erfolgt analog zur kontinuierlichen Wavelet-Synthese in Form von:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (3.2.12)$$

Ähnlich wie bei der diskreten FT kann die DWT somit als unendliche Reihenentwicklung nach den orthonormalen Basisfunktionen $\psi_{j,k}(t)$ aufgefasst werden (vgl. Niemann 2003, S. 185).

3.2.4 Multi Resolution Analysis

Die WT fand trotz ihrer außergewöhnlichen Eigenschaften aufgrund der relativ komplizierten Konstruktion geeigneter Wavelet-Basen in der Praxis lange Zeit nur wenig Beachtung. In den 1980er Jahren entwickelten die beiden Mathematiker Stéphane Mallat und Yves Meyer im Rahmen der sogenannten *Multiskalenanalyse* (engl. Multi Resolution Analysis (MRA)) ein Verfahren, das die WT enorm beschleunigte: die sogenannte *Schnelle Wavelet-Transformation* (engl. Fast Wavelet Transform (FWT)) (Mallat 1989). Der wesentliche Fortschritt verdankt sich der Entdeckung eines engen Zusammenhangs zwischen der Wavelet- und der Filtertheorie aus der Signalverarbeitung, wodurch die Möglichkeit entsprang, relativ simpel orthonormale Basen des $L^2(\mathbb{R})$ in Form der Wa-

velets aus Gleichung (3.2.10) zu konstruieren (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 26)¹⁷. Bevor dieser Zusammenhang jedoch näher erläutert wird, erfolgt eine kurze Skizzierung der Grundidee der MRA, die als Propädeutik die wesentliche Funktionsweise der Wavelet-Zerlegung hinsichtlich verschiedener Skalen illustriert.

Die grundlegende Idee der MRA ist, „to write L^2 -functions f as a limit of successive approximations, each of which is a smoothed version of f , with more and more concentrated smoothing functions. The successive approximations thus use a different resolution, whence the name multiresolution analysis“ (Daubechies 1988, S. 915). Mathematisch wird eine MRA als eine aufsteigende, geschachtelte Folge abgeschlossener Unterräume $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ mit $j \in \mathbb{Z}$ definiert (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 67):

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{j+2} \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset V_{j-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}). \quad (3.2.13)$$

Für diese Unterräume gelten folgende Eigenschaften (Heijmans 1993):

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.2.14)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (3.2.15)$$

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1} \quad (3.2.16)$$

$$\exists \Phi \in L^2(\mathbb{R}), \text{ mit } V_0 = \text{span}\{\Phi(t-k) | k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.2.17)$$

Gleichungen (3.2.14) und (3.2.15) sind relativ allgemeine Eigenschaften, die von zahlreichen Raumklassen erfüllt werden. Erst Gleichung (3.2.16) ist für die MRA entscheidend: Sie besagt, dass eine um den Faktor zwei skalierte Version $f(2t)$ der Funktion $f(t)$ ein Element des jeweils übergeordneten Unterraumes ist (vgl. Mertins 2010, S. 255) Die Räume V_j sind somit skalierte Versionen des Grundraums V_0 . Dies bedeutet wiederum, dass die MRA ein affines System darstellt. Gleichung (3.2.17) besagt schließlich, dass eine Funktion $\Phi(t)$ existiert, deren ganzzahlige Translationen eine Orthonormalbasis von V_0 bilden und diesen Grundraum aufspannen. Die Funktion $\Phi(t)$ wird dabei als

¹⁷Der folgende Abschnitt kann aus praktischen Gründen nicht auf alle Aspekte dieser relativ umfangreichen Theorie eingehen. Für den interessierten Leser sei daher auf Clausen und Müller (2001, Kap. 4), Percival und Walden (2008, Kap. 4) und Mertins (2010, Kap. 9) verwiesen.

Skalierungsfunktion bezeichnet

Zu den Unterräumen V_j lassen sich nun komplementäre Räume W_j definieren, die orthogonal zu V_j sind und von den Funktionen $\psi(t)$ aufgespannt werden (vgl. Percival und Walden 2008, S. 496):

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}, \quad V_j \perp W_j. \quad (3.2.18)$$

W_{j+1} entspricht demnach der Differenz aus V_j und V_{j+1} und es gilt:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \quad (3.2.19)$$

wobei die Räume W_j die Skalierungseigenschaft der Räume V_j aus Gleichung (3.2.16) erben (vgl. Vuorenmaa 2004, S. 28f). Ausgehend von Gleichung (3.2.18) lässt sich der Begriff MRA nochmals verdeutlichen, indem man ausgehend vom Grundraum V_0 eine Dekomposition durchführt:

$$V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus W_2 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus V_3 = \dots \quad (3.2.20)$$

Das Hauptergebnis der MRA im Hinblick auf die Wavelet-Theorie ist nun, dass sie die Möglichkeit bietet, die explizite Berechnung der Wavelet-Koeffizienten aus Gleichung (3.2.11) zu umgehen. Gleichung (3.2.12) entspricht wie im vorherigen Abschnitt erläutert einer unendlichen Reihe in Bezug auf die Darstellung der Funktion $f(t)$ mit Hilfe des orthonormalen Basissystems $\psi_{j,k}$. Bei einer numerischen Berechnung muss jedoch naturgemäß ein Abbruch auf einer bestimmten Resolutionsstufe stattfinden. Das Gerüst der MRA bietet nun genau diese Möglichkeit, indem die Skalierungsfunktion $\Phi(t)$ der MRA gemäß der Hierarchiebedingungen (3.2.13) bzw. (3.2.20) eine Reihenentwicklung zulässt, die bis zu einem beliebigen Level j durchgeführt werden kann (vgl. Niemann 2003, S. 186ff).

Für eine Skalierungsfunktion der Form

$$\Phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}t - k), \quad (3.2.21)$$

die auch als *Father-Wavelet* bezeichnet wird, gilt im Vergleich zu Gleichung (3.2.3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = 1. \quad (3.2.22)$$

Die sogenannten *Skalierungskoeffizienten* $s_{j,k}$ berechnen sich analog zu den Wavelet-Koeffizienten $d_{j,k}$ mit:

$$s_{j,k} = \langle f(t), \Phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \Phi^*(2^j t - k) dt. \quad (3.2.23)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass aus der Skalierungsfunktion $\Phi_{j,k}(t)$ einer jeden MRA eine Wavelet-Familie $\psi_{j,k}(t)$ konstruiert werden kann, die eine Orthonormalbasis des Unterraums W_j bildet (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 71). Auf dieser Grundlage kann nun die DWT eines Signals durchgeführt werden. Die Implementierung der Transformation erfolgt in Form des sogenannten *Pyramidenalgorithmus*, der im Grunde die praktische Umsetzung der DWT auf Basis der MRA darstellt und im nächsten Abschnitt 3.2.5 noch genauer erläutert wird. Die Interpretation dieser Umsetzung entspricht dabei einer Filterbank: Eine Funktion $f(t)$ wird durch $\Phi_{j,k}(t)$ und $\psi_{j,k}(t)$ in ihre nieder- bzw. hochfrequenten Anteile zerlegt. Die Wavelet-Koeffizienten $d_{j,k}$ aus Gleichung (3.2.11) werden mit den Unterräumen W_j assoziiert und jedes W_j enthält die Signalkomponenten (vgl. Mertins 2010, S. 255)

$$D_{j,t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (3.2.24)$$

Mit Hilfe der Skalierungskoeffizienten $s_{j,k}$ aus Gleichung (3.2.23), die mit den Unterräumen V_j assoziiert werden, lassen sich analog zu Gleichung (3.2.24) die Signalkomponenten

$$S_{j,t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{j,k} \Phi_{j,k}(t) \quad (3.2.25)$$

definieren.

Im Gegensatz zu den Wavelet- und Skalierungskoeffizienten $d_{j,k}$ bzw. $s_{j,k}$ ¹⁸ bezeichnet man die $D_{j,t}$ und $S_{j,t}$ als *Detail-* bzw. *Smooth-Koeffizienten* (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 125). Der Unterschied zwischen den beiden Begriffspaaren ist, dass jene den Analy-

¹⁸In der Literatur werden die einzelnen Koeffizienten auch als *Atome* bezeichnet. Alle Atome eines Levels nennt man wiederum *Kristalle* (Crowley und Pankki 2005).

seanteil von $f(t)$ in Bezug auf das Level j repräsentieren, während diese den Syntheseanteil widerspiegeln (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 124). Die $D_{j,t}$ werden mit Variationen auf dem Level j assoziiert, während die $S_{j,t}$ die kumulierte Summe dieser Variationen abbilden (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 124f). Die Bezeichnung Detail und Smooth spiegelt dabei die Funktionsweise der MRA im Sinne einer Filterbankinterpretation wider, d. i. einer sukzessiven Tief- und Hochpassfilterung, bei der die hochfrequenten Anteile der jeweiligen Tiefpasssignale auf jeder Ebene abgespaltet werden¹⁹.

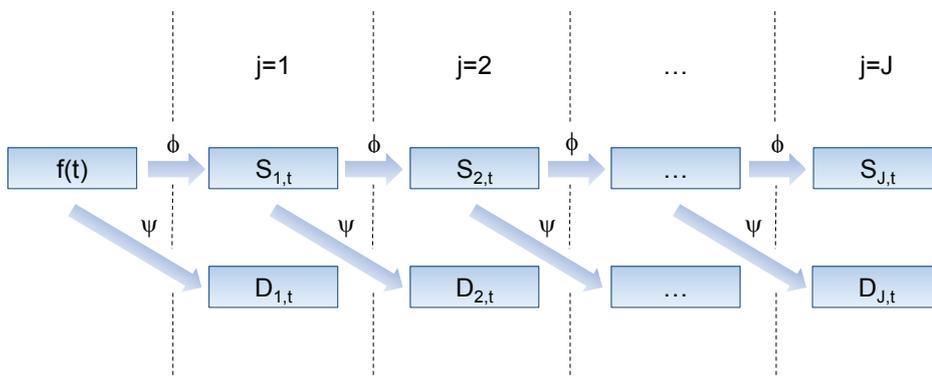


Abbildung 3.2.7: Illustration einer MRA im Rahmen einer DWT

Abbildung 3.2.7 illustriert diesen Prozess schematisch: Die Funktion $f(t)$ auf dem ersten Level bzw. die $S_{j,t}$ auf den nachfolgenden Resolutionsstufen verlieren durch die Hochpassfilterung zunehmend an Details, die durch die $D_{j,t}$ repräsentiert werden. Aufgrund der dyadischen Abtastung 2^j ist bei der DWT für eine endliche Zeitreihe $f(t)$ mit $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$ das maximale Level J durch $J = \log_2(T)$ mit $j = 1, 2, 3, \dots, J$ gegeben. Ferner muss die Zeitreihe $f(t)$ eine dyadische Länge $T = 2^J$ besitzen, und die Anzahl der Koeffizienten auf jedem Level reduziert sich zu $T_j = T/2^j$. Auf dem letzten Level J bleiben nach der sukzessiven Abspaltung aller Details in Form der Detail-Koeffizienten $D_{j,t}$ somit nur noch die Smooth-Koeffizienten $S_{J,t}$ übrig, die das globale Verhalten der Zeitreihe widerspiegeln (vgl. Percival und Walden 2008, S. 64f). Zusammenfassend lässt sich die MRA von $f(t)$ somit wie folgt definieren:

¹⁹Auf diesen Aspekt geht der nachfolgende Abschnitt 3.2.5 noch eingehend ein.

$$f(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{J,k} \Phi_{J,k}(t) \quad (3.2.26)$$

bzw.

$$f(t) = \sum_{j=1}^J D_{j,t} + S_{J,t}. \quad (3.2.27)$$

3.2.5 Schnelle Wavelet-Transformation

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben wurde, stellt die MRA einen Durchbruch in Bezug auf die praktische Implementierung der DWT dar. Dieser gründet sich auf den Umstand, dass die Berechnung der Koeffizienten $s_{j,k}$ (Gleichung (3.2.23)) bzw. $d_{j,k}$ (Gleichung (3.2.11)) über ein Skalarprodukt nicht trivial ist, da in der Regel keine explizite Funktionsvorschrift für die Wavelet- bzw. Skalierungsfunktion vorliegt. Mit Hilfe der MRA konnte jedoch eine Verknüpfung zwischen der Wavelet- und der Filtertheorie hergestellt werden, die eine relativ einfache Konstruktion von Wavelet-Basisfunktionen in Form von Filtern und eine Umsetzung der DWT mittels des schnellen FWT-Algorithmus ermöglicht. Der folgende Abschnitt soll die wesentlichen Kernpunkte diesbezüglich herausstellen, wobei aus praktischen Gründen nicht alle Aspekte aufgegriffen werden können²⁰.

Die Grundlage des Zusammenhangs zwischen der Wavelet-Theorie und ihrer Filterbankinterpretation bildet der Umstand der MRA, dass jeder Unterraum V_j in V_{j-1} enthalten ist und damit eine Beziehung zwischen diesen beiden Unterräumen hergestellt werden kann. Übertragen auf die Wavelet-Theorie lässt sich dieser Zusammenhang zwischen den Basisfunktionen $\Phi_{j,k}(t)$ und $\Phi_{j-1,l}(t)$ wie folgt darstellen (vgl. Niemann 2003, S. 188):

$$\Phi_{j,k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{l-2k} \Phi_{j-1,l}(t), \quad (3.2.28)$$

²⁰Für eine tiefer gehende Auseinandersetzung mit dieser Thematik sei wiederum auf Gençay et al. (2001b, Kap. 4.4), Clausen und Müller (2001, Kap. 4), Percival und Walden (2008, Kap. 4) und Mertins (2010, Kap. 9) verwiesen.

mit $l \in \mathbb{Z}$. Setzt man $j = k = 0^{21}$ erhält man aus Gleichung (3.2.28) mit Gleichung (3.2.21) die sogenannte *Skalierungsgleichung* bzw. *Zwei-Skalen-Relation* (vgl. Percival und Walden 2008, S. 464f):

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \Phi(2t - l). \quad (3.2.29)$$

Die Entwicklungskoeffizienten g_l stellen dabei einen Tiefpassfilter dar, der allgemein wie folgt definiert ist:

$$g_{l-2k} = \langle \Phi_{j,k}(t), \Phi_{j-1,l}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{j,k}(t) \Phi_{j-1,l}(t) dt. \quad (3.2.30)$$

Analog dazu lässt sich für einen Hochpassfilter h_l durch die Beziehung der Unterräume W_j für die Wavelet-Funktion $\psi_{j,k}(t)$ folgende Relation herleiten (vgl. Percival und Walden 2008, S. 472f):

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \Phi(2t - l), \quad (3.2.31)$$

mit

$$h_{l-2k} = \langle \psi_{j,k}(t), \Phi_{j-1,l}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \Phi_{j-1,l}(t) dt. \quad (3.2.32)$$

Aufgrund der Skalierungsgleichung ist eine explizite Angabe der Skalierungsfunktion nun nicht mehr notwendig, um eine Wavelet-Basis zu konstruieren, da sich diese implizit durch ihre Lösung ergibt bzw. im Rahmen einer Filterbankstruktur nicht mehr vonnöten ist. Dabei werden spezifische Bedingungen an die Filterkoeffizienten g_l gestellt, so dass durch die Lösung der Skalierungsgleichung gewünschte Eigenschaften wie beispielsweise Stetigkeit oder Orthogonalität implizit für die Skalierungsfunktion folgen²². Die Koeffizienten $d_{j,k}$ und $s_{j,k}$ müssen nicht mehr über die inneren Produkte $\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ bzw. $\langle f(t), \Phi_{j,k}(t) \rangle$ berechnet werden, sondern werden im Rahmen des Pyramidalalgorithmus ausschließlich über die Anwendung des Hochpassfilters h_l (auch *Wavelet-Filter* genannt) und des Tiefpassfilters g_l (auch *Skalierungsfiler* genannt) be-

²¹Wobei gilt: $\Phi_{0,0}(t) = \Phi(t)$.

²²Für eine detaillierte Beschreibung zur Lösung der Skalierungsgleichung siehe Mertins (2010, S. 263ff), Mallat (1989), Stoffel (2011, S. 42ff) oder Strang (1989).

stimmt (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 77). Setzt man die Skalierungsgleichung (3.2.28) in die Skalierungsfunktion (3.2.21) ein, folgt nach einigen Umformungen für die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten daraus unmittelbar (vgl. Percival und Walden 2008, S. 464 & 480):

$$d_{j,k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l s_{j-1,2k-l}, \quad (3.2.33)$$

$$s_{j,k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l s_{j-1,2k-l}. \quad (3.2.34)$$

Die Koeffizienten eines Levels j können mit Hilfe der Filter h_l und g_l somit relativ simpel aus den Koeffizienten der nächst höheren Ebene $j-1$ berechnet werden, wobei die Skalierungskoeffizienten $s_{0,k}$ des Levels $j=0$ der eigentlichen Funktion $f(t)$ entsprechen.

Die praktische Umsetzung des DWT-Pyramidenalgorithmus erfordert einige weitere Spezifizierungen. In der Praxis muss für einen endlichen, reellwertigen Filter die Länge L , d. h. $l=0, 1, \dots, L-1$, aus technischen Gründen²³ gerade sein und es muss gelten: $g_0 \neq 0$ bzw. $g_{L-1} \neq 0$ (vgl. Percival und Walden 2008, S. 68). Aufgrund der Orthogonalität der Unterräume V_j und W_j lässt sich außerdem ein Zusammenhang zwischen h_l und g_l aufstellen, der als *Quadratur-Spiegel-Beziehung* bezeichnet wird (vgl. Percival und Walden 2008, S. 75):

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \quad (3.2.35)$$

$$h_l = (-1)^l g_{L-1-l} \quad (3.2.36)$$

Für die Wavelet-Filter gilt entsprechend der Gleichungen (3.2.3) und (3.2.4) (vgl. Gençay et al. 2001b, S.106ff):

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0, \quad (3.2.37)$$

²³Genauer gesagt ist der Grund die Orthogonalitätsbeziehung, die in Gleichung (3.2.41) beschrieben wird.

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1, \quad (3.2.38)$$

bzw. für den Skalierungsfiler g_l demgemäß:

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}, \quad (3.2.39)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1. \quad (3.2.40)$$

Ferner gilt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 69 & 78):

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2m} = \delta_{0,m}, \quad (3.2.41)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2m} = \delta_{0,m}, \quad (3.2.42)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l h_{l+2m} = 0, \quad (3.2.43)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Die Implementierung der DWT in Form der FWT erfolgt anhand des Pyramidenalgorithmus nun im Rahmen der oben beschriebenen Routine, die für eine Zeitreihe f_t ²⁴ der Länge $T = 2^J$ mittels einer rekursiven Filterbankstruktur umgesetzt wird (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 121ff). Die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten $w_{j,t}$ bzw. $v_{j,t}$ ²⁵ des ersten Levels $j = 1$ werden über die beiden Filter h_l und g_l berechnet:

²⁴Aus Konventionsgründen wird in diesem Fall der Zeitindex t im Subskript dargestellt.

²⁵Auch hier ergibt sich aus Konventionsgründen eine andere Nomenklatur der DWT-Koeffizienten, der sich die vorliegende Arbeit anpasst. Im Rahmen der Filterbankinterpretation werden für die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten in der Regel die Buchstaben w bzw. v verwendet, um den Bezug zur MRA bzw. deren Unterraumhierarchie (V_j bzw. W_j) hervorzuheben.

$$w_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l f_{2t+1-l \bmod T}, \quad (3.2.44)$$

$$v_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l f_{2t+1-l \bmod T}, \quad (3.2.45)$$

wobei $t = 0, 1, \dots, T/2 - 1$, d. h. dass die resultierenden Koeffizientenreihen $w_{1,t}$ und $v_{1,t}$ jeweils die Länge $T/2$ besitzen. Der Pyramidenalgorithmus gemäß den Gleichungen (3.2.44) und (3.2.45) verfährt mit dem Signal als periodisch fortgesetzte Reihe (Cornish, Bretherton und Percival 2006, S. 343). Dies entspricht einer zirkulären Filterung mit einer Verschiebung um 2^j , bei dem im Gegensatz zu Gleichung (3.2.33) bzw. (3.2.34) nur jeder ungerade Wert der Reihe beibehalten wird (vgl. Percival und Walden 2008, S. 75). Dieser Vorgang wird auch als *Sub-* bzw. *Downsampling* bezeichnet, wobei der Subskript in den Gleichungen (3.2.44) und (3.2.45) die dyadische Skalierungsvorschrift der DWT implementiert (vgl. Percival und Walden 2008, S. 70). Einige Koeffizienten werden aufgrund der zirkulären Behandlung der Daten durch Randbedingungen beeinflusst, was bei einer Analyse berücksichtigt werden sollte²⁶.

Die folgenden Koeffizientenreihen werden dementsprechend iterativ bis zum Level $J = \log_2(T)$ ²⁷ berechnet, wobei ab dem zweiten Level die Koeffizienten $v_{j,t}$ als neuer Input für die Filterbank der weiteren Iterationsstufen dienen. Die Länge der Reihe halbiert sich somit bei jedem Durchgang, d. h. dass die Koeffizientenreihen auf jedem Level j die Länge $T/2^j$ besitzen:

$$w_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l v_{j-1,2t+1-l \bmod T}, \quad (3.2.46)$$

$$v_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l v_{j-1,2t+1-l \bmod T}. \quad (3.2.47)$$

²⁶Es gibt über eine periodische Fortsetzung hinaus noch andere Methoden, die Zeitreihe zu augmentieren, um die zirkuläre Filterung zu implementieren. Für die Darstellung dieser Methoden und die Auswirkungen der Randbedingungen auf die Transformation sei auf Abschnitt 4.1.1 verwiesen.

²⁷Falls man ein Level $J_0 < J = \log_2(T)$ wählt, d. h. ein J_0 kleiner als das maximale Level J , nennt man die DWT eine *partielle DWT* (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 124).

Die Umsetzung der FWT im Rahmen einer Filterbank ermöglicht somit eine schnelle und effiziente Umsetzung der DWT. Der Algorithmus hat dabei eine Komplexität von $O(N)$ und ist dementsprechend schneller als die Berechnung der STFT mit $O(N \log_2 N)$. Abbildung 3.2.8 illustriert die Filterbank der FWT schematisch, wobei das Zeichen $\downarrow 2$ das Downsampling symbolisiert.

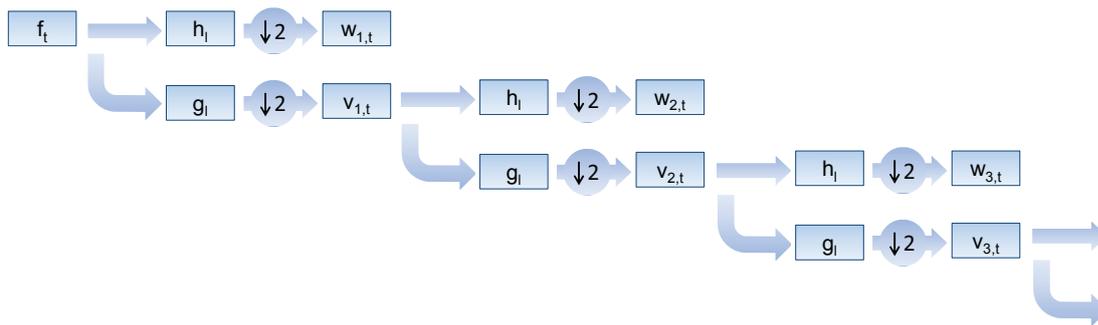


Abbildung 3.2.8: Darstellung der FWT-Filterbank

Die Rücktransformation wird über das sogenannte *Upsampling* um den Faktor zwei erreicht, bei dem jeder ungerade Wert der Koeffizientenreihen mit einer Null aufgefüllt wird:

$$w_J^0 = (0, w_{J,0}) \quad (3.2.48)$$

$$v_J^0 = (0, v_{J,0}) \quad (3.2.49)$$

Ausgehend von den Level J -Koeffizienten faltet man jede Reihe mit ihren entsprechenden Filtern und addiert die beiden gefilterten Reihen wieder, um die Skalierungskoeffizienten des darüber liegenden Levels $J - 1$ zu erhalten (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 122f):

$$v_{J-1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{J,t+l \bmod 2}^0 + \sum_{l=0}^{L-1} g_l v_{J,t+l \bmod 2}^0, \quad (3.2.50)$$

wobei $t = 0, 1$ ist. Diese Routine wird wiederum iterativ durchgeführt, wobei auf jedem

Level j gemäß Gleichungen (3.2.48) und (3.2.49) upgesampled wird. Für $J-2$ bedeutet dies:

$$w_{J-1}^0 = (0, w_{J-1,0}, 0, w_{J-1,1}) \quad (3.2.51)$$

$$v_{J-1}^0 = (0, v_{J-1,0}, 0, v_{J-1,1}), \quad (3.2.52)$$

und

$$v_{J-2,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{J-1,t+l \bmod 4}^0 + \sum_{l=0}^{L-1} g_l v_{J-1,t+l \bmod 4}^0, \quad (3.2.53)$$

und die Länge von $t = 0, 1, 2, 3$ hat sich gegenüber dem darüber liegenden Level $J-1$ verdoppelt. Die ursprüngliche Zeitreihe ist durch die iterative Routine dann schließlich definiert als:

$$f_t = \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{1,t+l \bmod T}^0 + \sum_{l=0}^{L-1} g_l v_{1,t+l \bmod T}^0, \quad (3.2.54)$$

mit $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Beispiel: DWT-Pyramidenalgorithmus mit dem Haar-Wavelet

Um die Routine der FWT zu verdeutlichen, bietet sich ein kurzes Beispiel anhand des Haar-Wavelets an. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, ist diese Basisfunktion das älteste und seiner Komplexität nach simpelste Wavelet, das jedoch lange Zeit „in relative obscurity“ (Gençay et al. 2001b, S. 110) blieb und erst mit dem Aufkommen der WT in seiner vollen Bedeutung erfasst werden konnte. Trotz bzw. gerade wegen seiner Einfachheit eignet sich das Haar-Wavelet aber hervorragend dazu, die grundlegenden Eigenschaften der gängigen Wavelet-Basisfunktionen zu illustrieren (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 110). Das Haar-Wavelet hat dabei die Länge $L = 2$ und kann durch folgende Wavelet- bzw. Skalierungsfiler definiert werden:

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.2.55)$$

$$h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.2.56)$$

$$g_0 = g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.2.57)$$

Aus den Gleichungen (3.2.55) bis (3.2.57) sieht man, dass die Quadratur-Spiegel-Beziehung (3.2.35) gilt. Außerdem lässt sich leicht zeigen, dass Gleichungen (3.2.37) bis (3.2.43) ebenfalls gültig sind.

Definiert man nun eine arbiträre Zeitreihe $f_t = (f_0, \dots, f_{T-1}) = (1, 4, 3, 6, 2, 8, 6, 7)$ dyadischer Länge $T = 8$, so ergibt sich das maximale Level $J = \log_2(T) = 3$. Wendet man nun den DWT-Pyramidenalgorithmus der Gleichungen (3.2.44) bis (3.2.47) an, ergeben sich die in Abbildung 3.2.9 dargestellten Werte auf den einzelnen Level j . Wie man sehen kann, repräsentieren die $w_{1,t}$ eine gewichteten Differenzoperation zweier benachbarter Werte der Zeitreihe, während die $v_{1,t}$ sich als gewichtete Durchschnittswerte ergeben (vgl. Gençay et al. 2001b, s. 110). Diese Interpretation lässt sich für alle Wavelets und Level verallgemeinern (vgl. Percival und Walden 2008, S. 59): Die Wavelet-Koeffizienten $w_{j,t}$ lassen sich mit generalisierten Differenzen zwischen Werten auf der Skala $\tau_j = 2^{j-1}$ assoziieren, während die Skalierungskoeffizienten $v_{j,t}$ gewichtete Durchschnittswerte auf der Skala $\lambda_j = 2\tau_j = 2^j$ darstellen²⁸ (vgl. Percival und Walden 2008, S. 85). Der Wert von $v_{J,0}$ auf dem letzten Level $J = 3$ entspricht dabei dem gewichteten Mittelwert der gesamten Zeitreihe auf der Skala $\lambda_J = 2^J$, d. i. $v_{J,0} = \sqrt{T}\mu(f_t)$ mit $\mu(f_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f_t$ (vgl. Percival und Walden 2008, S. 67).

3.2.6 Maximal Overlap Discrete Transform

In zahlreichen Anwendungen wie beispielsweise der Datenkompression bildet die DWT das Standardverfahren in der Praxis. Allerdings gehen einige Eigenschaften mit

²⁸Am Beispiel aus Abbildung 3.2.9 lässt sich dieser Sachverhalt nochmals genauer erläutern: Der Wert des Level 1 = Skala $2^1 = 2$ Wavelet-Koeffizienten $w_{1,0} = 2,12$ entspricht der gewichteten Differenz der beiden Werte $f_1 = 4$ und $f_0 = 1$ auf der Skala $\tau_1 = 2^{1-1} = 1$ (in diesem Fall also der eigentlichen Zeitreihe), während der Wert des Skalierungskoeffizienten $v_{1,0} = 3,54$ dem gewichteten Mittelwert der beiden Werte von f_1 und f_0 auf der Skala $\lambda_1 = 2^1 = 2$ entspricht.

KAPITEL 3. WAVELETS - EIN SPEKTRALANALYTISCHER ANSATZ ZUR
UNTERSUCHUNG VON FINANZMÄRKTEN

f_t	1	4	3	6	2	8	6	7
$w_{1,t}$	2,12		2,12		4,24		0,71	
$v_{1,t}$	3,54		6,36		7,07		9,19	
$w_{2,t}$		2,00				1,50		
$v_{2,t}$		7,00				11,50		
$w_{3,t}$				3,18				
$v_{3,t}$				13,08				

Abbildung 3.2.9: Darstellung der DWT-Filterbank für das Haar-Wavelet

diesem Verfahren einher, die sich insbesondere im Hinblick auf die Analyse von Finanzdaten als nachteilig erweisen. Im Grunde sind dabei zwei wesentliche Punkte entscheidend (Masset 2008, S. 18):

1. Zum einen muss die Zeitreihe bei der DWT eine dyadische Länge $T = 2^J$ besitzen, um den DWT-Pyramidenalgorithmus durchführen zu können. In Abschnitt 4.1 wird beschrieben, welche Verfahren existieren, um diese Voraussetzung im Falle nicht-dyadischer Längen zu erfüllen. Generell ist bei all diesen Methoden aber eine Manipulation des Datenmaterials notwendig, was bei zahlreichen Applikationen nachteilig ist.
2. Zweitens ist die DWT nicht translationsinvariant. Das bedeutet, dass die Koeffizientenwerte der DWT vom Startzeitpunkt der Transformation abhängen. Dies hängt mit dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Subsampling zusammen (vgl. Percival und Walden 2008, S. 160ff): Durch die dyadische Abtastung der Zeitreihe mit anschließendem Subsampling sind die Positionen der Wavelet- und Skalierungsfiler auf dem Gitter des Pyramidenalgorithmus apriori festgesetzt (vgl.

Bradley 2003, S. 30f). Die Anwendung der Filter im Sinne einer generalisierten Differenz- und Durchschnittsbildung kann somit zu vollständig anderen Resultaten führen, sobald die Zeitreihe verschoben bzw. ein neuer Startzeitpunkt festgelegt wird, da andere Werte in die Filteroperation eingehen. Dies betrifft folglich auch die Energieverteilung der Koeffizienten sowie die MRA, d. h. die Detail- und Smooth-Koeffizienten der DWT (vgl. Percival und Walden 2008, S. 161).

Eine Verallgemeinerung der DWT – d. i. die sogenannte *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT)*²⁹ – kann diese Problempunkte jedoch beheben (vgl. Percival und Walden 2008, S. 159f):

- ad 1. Zum einen kann die MODWT Zeitreihen beliebiger Länge handhaben, was bei der praktischen Anwendung insbesondere in Bezug auf Finanzdaten vorteilhaft ist. Der „Preis“ für diesen Vorteil ist, dass die MODWT redundant ist und die orthogonale Struktur der Transformation nicht mehr gewährleistet ist. Mit einer Komplexität von $O(N \log_2 N)$ ist die MODWT aber immer noch von geringer Komplexität bzw. genauso schnell wie die STFT.
- ad 2. Des Weiteren ist die MODWT translationsinvariant, d. h. dass die Werte der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten unabhängig vom jeweiligen Startzeitpunkt sind. Bei einer Verschiebung der Zeitreihe werden die Koeffizienten lediglich verschoben, ohne dass die Höhe der Koeffizienten sich ändert. Dies wird erreicht, indem die MODWT keine dyadische Abtastung vornimmt und somit alle möglichen zirkulären Verschiebungen berücksichtigt³⁰ (vgl. Percival und Walden 2008, S. 174). Insofern ist auch die Energieverteilung der MODWT-Koeffizienten unabhängig vom Startzeitpunkt der Zeitreihe (vgl. Percival und Walden 2008, S. 160). Schließlich sind die Detail- und Smooth-Koeffizienten der MODWT mit sogenannten *Nullphasenfiltern* assoziiert, wodurch Ereignisse der ursprünglichen Zeitreihe auf der Zeitachse sinnvoll mit dem Verlauf der Koeffizienten verglichen werden können (vgl. Percival und Walden 2008, S. 203).

²⁹Äquivalente Namen in der Literatur sind *stationary DWT*, *translationsinvariante DWT*, *zeitinvariante DWT*, *non-decimated DWT*, *undecimated DWT* und *wavelet frames* (vgl. Percival und Walden 2008, S. 159)

³⁰Die Namensgebung *maximal overlap* bezieht sich auf diesen Umstand (Gençay, Selçuk und Whitcher 2001a, S. 253).

Die MODWT ist der DWT im Grunde genommen sehr ähnlich, d. h. auch sie wird im Rahmen der FWT mittels einer Filterbankstruktur und dem Pyramidenalgorithmus implementiert. Darüber hinaus wird auch die MODWT-Variante als zirkuläre Filterung umgesetzt, wobei der wesentliche Unterschied wie gerade beschrieben darin besteht, dass bei der MODWT im Gegensatz zur dyadischen Abtastung der DWT alle ganzzahligen Verschiebungen berücksichtigt werden. Als Folge ist die Länge der Wavelet- und Skalierungskoeffizienten auf jeder Resolutionsstufe³¹ gleich der Länge der ursprünglichen Zeitreihe (vgl. Masset 2008, S. 18ff).

Die MODWT-Wavelet- und Skalierungsfiler \tilde{h}_l und \tilde{g}_l sind reskalierte Versionen der korrespondierenden DWT-Filter. Diese Adjustierung ist aus Energieerhaltungsgründen erforderlich (Walden 2001, S. 629f). Genauer gesagt werden die Filter mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ multipliziert, so dass $\tilde{h}_l = \frac{h_l}{\sqrt{2}}$ bzw. $\tilde{g}_l = \frac{g_l}{\sqrt{2}}$ gilt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 163). Aus den Gleichungen (3.2.37) bis (3.2.42) folgt für die MODWT-Filter dementsprechend:

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0, \quad (3.2.58)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2}, \quad (3.2.59)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1, \quad (3.2.60)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2}, \quad (3.2.61)$$

und für alle $m \in \mathbb{N}$:

³¹In der Literatur wird der Begriff *Resolutionsstufe* synonym zum Begriff *Level* verwendet (vgl. Nason 2008, S. 17).

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2m} = \delta_{0,m}, \quad (3.2.62)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l+2m} = \delta_{0,m}. \quad (3.2.63)$$

Außerdem gilt die Quadratur-Spiegel-Beziehung aus Gleichung (3.2.35) für die \tilde{h}_l und \tilde{g}_l gleichermaßen.

Für die Koeffizienten der MODWT des ersten Levels $j = 1$ gilt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 163):

$$\tilde{w}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l f_{t-l \bmod T}, \quad (3.2.64)$$

$$\tilde{v}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l f_{t-l \bmod T}, \quad (3.2.65)$$

mit $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Die Anzahl der Koeffizienten auf der ersten Resolutionsstufe ist somit wie oben erläutert gleich der Länge der Zeitreihe, was an der ganzzahligen Verschiebung liegt, die durch den Subskript in den Gleichungen (3.2.64) und (3.2.65) gewährleistet wird. Auch bei der MODWT ist das maximale Level durch $J = \log_2(T)$ gegeben, und für die weiteren Level berechnen sich die Koeffizienten wie folgt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 177):

$$\tilde{w}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{v}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod T}, \quad (3.2.66)$$

$$\tilde{v}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{v}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod T}. \quad (3.2.67)$$

Wie bei der DWT dienen somit auch bei der MODWT die Skalierungskoeffizienten $\tilde{v}_{j,t}$ ab der zweiten Resolutionsstufe als Input für den iterativen Algorithmus bis zum gewünschten Level J bzw. J_0 für eine partielle MODWT.

Die Synthese gestaltet sich ebenfalls analog zur DWT, außer dass im Gegensatz dazu kein Upsampling durchgeführt werden muss. Die Level j Skalierungskoeffizienten berechnen sich somit wie (vgl. Percival und Walden 2008, S. 177):

$$\tilde{v}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{w}_{j,t+2^{j-1}l \bmod T} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{v}_{1,t+2^{j-1}l \bmod T}. \quad (3.2.68)$$

Beispiel: MODWT-Pyramidenalgorithmus mit dem Haar-Wavelet

Um die Routine des MODWT-Pyramidenalgorithmus zu verdeutlichen, bietet sich wiederum ein kurzes Beispiel anhand des Haar-Wavelets an. Für die reskalierten Wavelet- bzw. Skalierungsfiler der MODWT gilt:

$$\tilde{h}_0 = \frac{1}{2} \quad (3.2.69)$$

$$\tilde{h}_1 = -\frac{1}{2} \quad (3.2.70)$$

$$\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1 = \frac{1}{2} \quad (3.2.71)$$

Aus den Gleichungen (3.2.69) bis (3.2.71) sieht man, dass die Gleichungen (3.2.58) bis (3.2.63) erfüllt werden.

Verwendet man dieselbe diskrete Zeitreihe f_t wie in Abbildung 3.2.9, erhält man unter Anwendung des MODWT-Pyramidenalgorithmus der Gleichungen (3.2.64) bis (3.2.67) die in Abbildung 3.2.10 dargestellten Werte auf den einzelnen Level j . Die Interpretation der Wavelet-Koeffizienten und Skalierungskoeffizienten aus dem vorherigen Abschnitt im Sinne generalisierter Differenzen auf der Skala $\tau_j = 2^{j-1}$ und gewichteten Durchschnitten auf der Skala $\lambda_j = 2\tau_j = 2^j$ sind auch bei der MODWT gültig. Die Werte $v_{J,t}$ auf dem letzten Level $J = 3$ entsprechen zudem dem Mittelwert der Zeitreihe auf der Skala $\lambda_J = 2^J$.

3.2.7 Zusammenfassung

Dieses Kapitel diente einer quantitativen Beschreibung der WT. Dabei wurde der mathematische Formalismus der CWT und DWT detailliert beschrieben und aufgezeigt,

KAPITEL 3. WAVELETS - EIN SPEKTRALANALYTISCHER ANSATZ ZUR
UNTERSUCHUNG VON FINANZMÄRKTEN

f_t	1	4	3	6	2	8	6	7
$w_{1,t}$	-3,00	1,50	-0,50	1,50	-2,00	3,00	-1,00	0,50
$v_{1,t}$	4,00	2,50	3,50	4,50	4,00	5,00	7,00	6,50
$w_{2,t}$	-1,50	-2,00	-0,25	1,00	0,25	0,25	1,50	0,75
$v_{2,t}$	5,50	4,50	3,75	3,50	3,75	4,75	5,50	5,75
$w_{3,t}$	0,87	-0,13	-0,87	-1,13	-0,87	0,13	0,87	1,13
$v_{3,t}$	4,63	4,63	4,63	4,63	4,63	4,63	4,63	4,63

Abbildung 3.2.10: Darstellung der MODWT-Filterbank für das Haar-Wavelet

inwieweit die DWT mittels der MRA in Form des Pyramidenalgorithmus als FWT implementiert werden kann. Die Umsetzung der FWT mit Hilfe einer Filterbankstruktur wurde ebenfalls diskutiert und die Vorteile dieses Verfahrens thematisiert. Schließlich wurde der mathematische Apparat der MODWT erläutert, da dieses Verfahren gerade im Hinblick auf Finanzdaten wesentliche Vorteile – wie beispielsweise die Analyse beliebig langer Zeitreihen – aufweist.

4 Wavelets - Empirische Analyse und Anwendungsgebiete für die Praxis

4.1 Empirische Spezifikationen

„Essentially, all models are wrong, but some are useful.“

(George E. P. Box)

Nachdem die theoretischen Grundlagen der Spektralanalyse und insbesondere der WT eingehend erläutert wurden, stellt sich aus empirischer Sicht nun die Frage, welche Spezifikationen bei der praktischen Implementierung der WT beachtet werden müssen. Dabei sind insbesondere zwei Fragestellungen von zentralem Interesse, die sich auf unterschiedliche Ebenen der Umsetzung beziehen:

- Auf der ersten Ebene ist zunächst zu klären, welche Wavelet-Familie bei einer WT auszuwählen ist, insbesondere da ein wesentlicher Kritikpunkt an der WT die oftmals intransparente bzw. arbiträre Auswahl der Basisfunktion ist (Torrence und Compo 1998, S. 66). Diese Wahl ist beispielsweise davon abhängig, welche Art von Untersuchungen man vornehmen und welches Ziel man innerhalb der empirischen Analyse verfolgen möchte. Einige Basisfunktionen eignen sich aufgrund ihrer Eigenschaften beispielsweise besser für die Detektion von Singularitäten, manche können zyklische Muster besser analysieren, und wiederum andere haben besondere Qualitäten bei spezifischen Anwendungsgebieten wie der Datenkompression. Darüber hinaus gibt es Mother-Wavelets, die nicht im Zusammenhang mit der DWT einsetzbar sind, andere besitzen Eigenschaften, die insbesondere bei der Analyse von Finanzdaten attraktiv sind. Angesichts der großen Anzahl an Wavelet-Familien mit zum Teil sehr unterschiedlichen Charakteristika stellt sich

daher die Frage, welche Kriterien bei der Auswahl eines Mother-Wavelets beachtet werden müssen und wie sich diese auf die Transformation auswirken, um eine möglichst effiziente und zielführende Analyse durchführen zu können.

- Auf der zweiten Ebene steht ferner die Frage im Mittelpunkt, welche Transformationsart für eine jeweilige Problemstellung verwendet werden sollte. So hat die CWT gegenüber der DWT beispielsweise den Nachteil, hoch redundant zu sein und ist dadurch mit einem relativ großen Rechenaufwand verbunden. Andererseits bietet diese Redundanz wesentliche Vorteile im Bereich der explorativen Datenanalyse, da hierdurch Information leichter sichtbar und daher auch besser interpretierbar gemacht werden können (vgl. Misiti, Misiti, Oppenheim und Poggi 2009, S. 4-62). Die MODWT besitzt gegenüber der DWT wiederum den Vorteil, unproblematisch beliebig lange Zeitreihen transformieren zu können. Vor dem Hintergrund der vorliegenden Arbeit ist vor allem auch die Frage entscheidend, welche Transformationsart in Bezug auf Finanzdaten und deren spezifische Eigenschaften am geeignetsten ist.

Einige Aspekte dieser Fragestellungen sind Teil des Forschungsvorhabens und werden dementsprechend erst im Rahmen der empirischen Analyse untersucht und beantwortet. Gerade die Auswahl der Filter und die damit verbundene Güte der Transformation bzw. Eignung für die jeweilige Anwendung stellt ein zentrales Moment des empirischen Abschnittes dar. Andererseits lässt sich auf bereits erfolgte Untersuchungen zurückgreifen, um eine Vorauswahl hinsichtlich der eingangs erwähnten Fragestellungen treffen zu können.

Dazu wird in Abschnitt 4.1.1 zunächst einmal zusammengefasst, welche Kriterien bei der Wahl des Mother-Wavelets überhaupt eine Rolle spielen und wie sich diese Spezifikationen auf die Transformation auswirken. Abschnitt 4.1.2 illustriert daraufhin kurz einige der wichtigsten Wavelet-Familien, um einen Überblick der gängigsten Wavelet-Basisfunktionen zu erhalten. Auf diesen Grundlagen aufbauend wird anschließend in Abschnitt 4.1.3 eine Literaturübersicht vorgenommen, um darzulegen, inwieweit die Forschungsgemeinde auf die oben genannten Fragen antwortete. Der Fokus liegt hierbei immer auf Untersuchungen im Bereich der Finanzmarktanalyse, obgleich die Literaturübersicht auch dazu genutzt wird, um das äußerst weitläufige Anwendungspotential der WT in anderen Bereichen zu skizzieren. Das Ziel dieses Kapitels 4.1 ist, ein Gefühl für

die praktischen Eigenschaften von Wavelets zu entwickeln, um die bestmögliche Wahl sowohl in Bezug auf die Transformationsart generell als auch die jeweilige Wavelet-Basisfunktion im Speziellen für den empirische Abschnitt treffen zu können.

4.1.1 Auswahlkriterien

Grundsätzlich dient die WT wie in Kapitel 3 beschrieben dazu, Informationen der zugrunde liegenden Zeitreihe bzw. deren Multiskalenstruktur in der Zeit-Skalen-Ebene zu repräsentieren und in Form der Wavelet-Koeffizienten auf verschiedenen Skalen zu quantifizieren. Dementsprechend gilt als *Rule-of-thumb*, dass das Mother-Wavelet möglichst viele Charakteristika der Zeitreihe widerspiegeln sollte (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 143f). Andererseits hängt die Auswahl der jeweiligen Wavelet-Basisfunktion auch davon ab, welche Art von Analyse man durchführen bzw. welche Aspekte der Zeitreihen man untersuchen oder hervorheben möchte. Darüber hinaus gibt es spezifische Kriterien, die im Vorfeld der Analyse zu beachten sind. Eine gelungene Übersicht zu diesem Thema bieten beispielsweise Percival und Walden (2008, S. 135ff), Gençay et al. (2001b, S. 143ff), Masset (2008), Ramsey (2002) und Setz (2011), wobei die wichtigsten Kriterien im Folgenden kurz erläutert werden.

- **Orthogonalität**

Für bestimmte Anwendungen wie der Datenkompression, die eine geringe Berechnungskomplexität erfordern, ist es vorteilhaft, wenn die Wavelet- und Skalierungsfunktion orthogonal zueinander sind und damit unterschiedliche Informationen repräsentieren. Orthogonale Basisfunktionen führen daher zu einer kompakten und effizienten Repräsentation des Datenmaterials in der Zeit-Skalen-Ebene und können im Rahmen einer MRA anhand des Pyramidenalgorithmus umgesetzt werden (vgl. Setz 2011, S. 8f). Für die Analyse von Finanzdaten ist dieses Kriterium jedoch von eher untergeordneter Bedeutung. Beispiele für orthogonale Wavelets finden sich in den Daubechies- und Least-Asymmetric-Wavelet-Familien.

- **Symmetrie**

Weitaus wichtiger im Hinblick auf die Anwendung der WT auf Zeitreihendaten im Bereich der Finanzierungstheorie ist, ob das Mother-Wavelet symmetrisch ist. Asymmetrische Filter induzieren nämlich Phasenverschiebungen auf die WT-Koeffizienten, die zu einer Disharmonisierung mit der Zeitreihe auf der Zeitachse

führen und aus den Phaseneigenschaften der Filter resultieren (vgl. Percival und Walden 2008, S. 198). Bei einigen asymmetrischen Wavelet-Familien kann im Rahmen der MODWT jedoch eine Adjustierung durchgeführt werden, um die Koeffizienten wieder korrekt mit der Zeitreihe auszurichten (vgl. Percival und Walden 2008, S. 160ff & S. 179ff). Darüber hinaus sind symmetrische Wavelets besonders dazu geeignet, lokale Symmetrien innerhalb der Zeitreihe zu repräsentieren. Im Bereich der gängigen Wavelets ist das Haar-Wavelet die einzige Basisfunktion, die vollkommen symmetrisch ist.

- **Glattheit**

Wavelets unterscheiden sich nicht nur im Hinblick auf ihre Symmetrie, sondern vor allem auch in Bezug auf ihre Glattheit voneinander. Manche Wavelets sind von ihrer Form her beispielsweise sehr kantig, andere dagegen eher glatt. Hierbei gilt wiederum die oben beschriebene *Rule-of-thumb*, dass die zugrunde liegende Datenreihe entscheidend ist, da die Eigenschaften der Basisfunktion möglichst genau die Charakteristika der Zeitreihe widerspiegeln sollten (Ramsey 2002, S. 8ff). Insofern sollte sich der Glattheitsgrad der Wavelet-Basisfunktion auch an demjenigen der zu untersuchenden Zeitreihe bzw. am Ziel der jeweiligen Analyse orientieren, da die Visualisierung bestimmter Aspekte stark von der Beschaffenheit der Basisfunktion abhängt.

- **Anzahl der verschwindenden Momente**

Die Glattheit einer Wavelet-Familie hängt dabei unmittelbar mit der Anzahl ihrer verschwindenden Momente¹ zusammen, welche ein Maß für das oszillierende Verhalten des Wavelets ist (vgl. Misiti, Misiti, Oppenheim und Poggi 2007, S. 3). Die Relevanz dieses Kriteriums hängt wiederum damit zusammen, inwieweit Informationen der Daten in der Zeit-Skalen-Ebene repräsentiert werden können. Hat ein Wavelet m verschwindende Momente, sind die resultierenden Wavelet-Koeffizienten für alle Anteile des Signals gleich Null, die mit einem Polynom $m - 1$ -ten Grades approximiert werden können. D. h. dass diese Signalanteile nur in die Koeffizienten des Father-Wavelets eingehen (Ramsey 2002, S. 11). Im Falle von beispielsweise drei verschwindenden Momenten sind die Wavelet-Koeffizienten für konstante, lineare und quadratische Komponenten des Signals

¹Vgl. Gleichung (3.2.37) in Abschnitt 3.2.2.

gleich Null. Diese Eigenschaft ist insbesondere bei der Datenkompression von Bedeutung, da solche Koeffizienten speicherplatzeffizient sind (vgl. Nason 2008, S. 40f). Auf der anderen Seite kann man damit auch gezielt diejenigen Signalanteile hervorheben, auf die man in der Analyse besonderen Wert legt: Mit zunehmender Anzahl verschwindender Momente nimmt nämlich die Zeitlokalisierung ab bzw. die Frequenzlokalisierung zu (Stolojescu 2012, S. 19). Je höher die Anzahl der verschwindenden Momente also ist, desto sensibler reagiert die Transformation auf Hochfrequenzkomponenten der Reihe. Darüber hinaus ist eine Wavelet-Basisfunktion tendenziell umso symmetrischer, je höher die Anzahl der verschwindenden Momente ist (Hannonen 2006, S. 10).

- **Länge**

Masset (2008, S. 22) ist der Ansicht, dass nicht so sehr die Wahl des Wavelets entscheidend ist, sondern vielmehr die Länge des Filters. Kritisch ist dabei, zwei gegenläufige Charakteristika auszubalancieren (vgl. Percival und Walden 2008, S. 135f): Bei Wavelets mit sehr kurzer Länge ist der Rechenaufwand bedeutend geringer als bei langen Filtern. Andererseits können hierbei unerwünschte Artefakte induziert werden, da kurze Basisfunktionen charakteristische Eigenschaften der Zeitreihe unter Umständen nicht erfassen und die Ergebnisse der Analyse damit verzerren können. Lange Filter dagegen können diese Eigenschaften mitunter zwar besser widerspiegeln, unterliegen allerdings auch gewissen Nachteilen: Zum einen werden bei langen Wavelet-Filtern mehr Koeffizienten durch die Randbedingungen beeinflusst, zum anderen nimmt auch die Ungenauigkeit hinsichtlich der Lage der Koeffizienten zu. Insofern ist eine geeignete Strategie, denjenigen Filter bei der Analyse zu verwenden, der bei möglichst geringer Länge ausreichend gute Ergebnisse liefert. Zudem stellt ein Filter eine umso bessere Approximation an einen idealen Bandpassfilter dar, je länger er ist (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 115).

- **Randbedingungen**

Wie in Abschnitt 3.2.3 erläutert, muss das Signal bei der DWT eine dyadische Länge besitzen. Ist diese Prämisse nicht gegeben, gibt es grundsätzlich die Möglichkeit, Datenpunkte zu entfernen. Ein evidenter Nachteil ist hierbei natürlich der damit verbundene Informationsverlust. Eine andere Alternative besteht dar-

in, zusätzliche Datenpunkte anzuhängen, um die Zeitreihe auf die gewünschte Länge zu augmentieren. Das Problem der Randbedingungen betrifft aber auch die MODWT, da beide Transformationsvarianten im Rahmen des Pyramidenalgorithmus als zirkuläre Filterung implementiert werden und die Daten als periodisch fortgesetzt voraussetzen. Bei den äußersten Datenpunkten kommt es daher immer zu Überschneidungen mit augmentierten Datenpunkten. Je länger der Filter ist, desto mehr solcher sogenannten *Boundary-Koeffizienten* gibt es (vgl. Percival und Walden 2008, S. 197f). Andererseits kann man diesen Effekt aber auch durch geeignete Augmentationsverfahren reduzieren. Eine Möglichkeit der Datenverlängerung besteht dabei im sogenannten *Zero-Padding*, bei dem jedes Ende der Zeitreihe mit Nullwerten aufgefüllt wird. Diese Variante ist für Finanzdaten aber eher ungeeignet, da hierbei eine mitunter nicht unwesentliche Sprungstelle entstehen kann. Eine andere besteht darin, die fehlenden Daten durch den Fit eines polynomischen Modells zu approximieren (*Polynomial Approximation*). Das sogenannte *Mirroring*, bei dem die Datenpunkte der Reihe gespiegelt bzw. reflektiert an die betreffenden Stellen angehängt werden, ist ebenfalls ein in der Literatur weit verbreitetes Verfahren, insbesondere da hierbei an den Enden kein Bruch im Preisniveau auftritt (Renaud, Starck und Murtagh 2005, S. 1243). Die so augmentierte Zeitreihe hat darüber hinaus denselben Mittelwert und besitzt die gleiche Varianz wie die ursprüngliche Reihe.

4.1.2 Wavelet-Familien

Seit der Formulierung der Haar-Basisfunktion durch Alfred Haar im Jahre 1909 (vgl. Abschnitt 3.1)² entstand eine Vielzahl von Wavelet-Familien, die einerseits zielorientiert für spezifische Zwecke und andererseits im Zuge des wissenschaftlichen Fortschritts – namentlich vor allem auf Basis von Mallats MRA – entwickelt wurden. Die verschiedenen Wavelet-Familien unterscheiden sich in Bezug auf ihre Eigenschaften zum Teil deutlich, wobei die in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Auswahlkriterien bereits eine Kategorisierung implizieren. Im Sinne sowohl einer besseren Übersichtlichkeit als auch der Vorstellung einiger Wavelet-Typen, die in dem vorliegenden Themenbereich

²Die Bezeichnung der von Alfred Haar entwickelten Basis als „Wavelet“ wurde ex post vorgenommen (vgl. Misiti et al. 2007, S. 89).

nicht relevant sind, wird im Folgenden daher versucht, eine hierarchisch klarere kategoriale Struktur zu skizzieren. Diese lässt sich erzielen, indem man auf der obersten Ebene einer Unterscheidung dahingehend trifft, ob zu einem Wavelet ein assoziierter Filter³ existiert, da hierdurch der schnelle Pyramidenalgorithmus im Sinne einer orthogonalen MRA implementierbar ist⁴ (vgl. Misiti et al. 2007, S. 91ff). Bei diesen Wavelet-Familien kann man wiederum zwei Untergruppen definieren, d. i. solche mit und jene ohne kompakten Träger. Der wesentliche Vorteil der Verwendung von Wavelets mit kompaktem Träger liegt dabei in der geringeren Komplexität hinsichtlich der Durchführung bzw. Berechnung der WT.

Ein weiterer Typus sind sogenannte *Biorthogonale Wavelets*, die eine Erweiterung von orthogonalen Basisfunktionen im Rahmen der MRA darstellen. Die Problematik im Hinblick auf Orthogonalität ist nämlich, dass diese Eigenschaft einige beschränkende Nachteile mit sich bringt. So gibt es in der Regel keine geschlossene analytische Darstellungsform orthogonaler Wavelets⁵; darüber hinaus sind sie meist nicht symmetrisch. Genauer formuliert ist das Haar-Wavelet das einzige orthogonale Wavelet mit kompaktem Träger, das auch symmetrisch ist. Aus diesen Gründen wurden biorthogonale Wavelets entwickelt, die bei der Bildverarbeitung von großem Interesse sind. Sie stellen eigentlich ein System aus zwei Wavelet-Basisfunktionen dar und implizieren damit folglich auch zwei MRAs. Aufgrund der dadurch gewonnenen Flexibilität entstehen mehr Freiheitsgrade beim Wavelet-Design, was unter anderem symmetrische Wavelet-Funktionen mit kompaktem Träger ermöglicht, die komplexere Formen annehmen können als das Haar-Wavelet (Stoicescu 2012, S. 25). Da die wesentlichen Vorteile biorthogonaler Wavelets vor allem jedoch Anwendungsbereiche wie die Bildverarbeitung betreffen (Schleicher 2002, S. 9), werden sie im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter thematisiert⁶.

Auf der anderen Seite sind Wavelet-Familien ohne existierenden Filter vor allem für die CWT geeignet. Dabei wird wiederum zwischen reell- und komplexwertigen Wavelets unterschieden. Der Vorteil von komplexwertigen Wavelets ist, dass sie in der Lage sind, Informationen über Amplitude und Phase zu verarbeiten, wohingegen reellwertige

³Vgl. Abschnitt 3.2.5.

⁴Eine Ausnahme bildet das komplexe Gauß-Wavelet.

⁵In der Regel werden sie implizit über die assoziierten Filter definiert.

⁶Für den interessierten Leser sei hierfür auf Misiti et al. (2007, S. 55ff) verwiesen.

Wavelets mit Filter	Mit kompaktem Träger		Ohne kompakten Träger
	Orthogonal	Biorthogonal	Orthogonal
	Haar-Wavelet (Haar) Daubechies-Wavelet (D) Symlets/Least-Asymmetric (Sym/LA) Coiflets (Coif)	Biorthogonale Wavelets (Bior)	Meyer-Wavelet (Meyr)
Wavelets ohne Filter	Reelwertig		Komplexwertig
	Morlet-Wavelet (Morl) Gauß-Wavelet (Gaus) Mexican Hat (Mexh)		Kompl. Gauß-Wavelet (Cgaus) Kompl. Morlet- Wavelet (Cmorl) Kompl. Shannon-Wavelet (Shan)

Abbildung 4.1.1: Übersicht: Wavelet-Familien

Basisfunktionen lediglich die Amplitudeninformation wiedergeben. Dadurch sind komplexe Wavelets besser geeignet, das oszillatorische Verhalten der zugrunde liegenden Datenreihe widerzuspiegeln; reelle Wavelets hingegen können lokale Phänomene wie abrupte Sprünge oder Diskontinuitäten besser lokalisieren (Setz 2011, S. 8).

Darstellung 4.1.1 zeigt einige der bekanntesten Wavelet-Familien und illustriert die gerade beschriebene kategoriale Struktur. Unter den Namen der jeweiligen Familien sind die gängigen Abkürzungen vermerkt, die in der Literatur in der Regel verwendet werden. Für eine tiefer gehende Übersicht zu diesen und anderen Wavelet-Familien sei an dieser Stelle auf Misiti et al. (2007, S. 89ff) oder Merry und Steinbuch (2005) verwiesen.

4.1.3 Literaturübersicht

Wie in Kapitel 3 beschrieben, wurde die WT in ihrer Evolution von zahlreichen Fachrichtungen geprägt und immer wieder vorangetrieben. Dementsprechend vielfältig ist auch die Verwendung dieses Ansatzes in Bezug auf die verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen, wobei die Naturwissenschaften von Anfang an den Kernantrieb der theoretischen wie auch praktischen Forschung bildeten. Die Implementierung der WT war dabei vor allem durch ihre Fähigkeit motiviert, instationäre Zeitreihen im Rahmen einer Zeit-Frequenz-Analyse adäquat untersuchen zu können (vgl. Polikar 1999, S. 194). Als mathematisches Instrument ist die genuine Heimat der WT die Mathematik, obgleich ihre erste praktische Verwendung aus der Geophysik heraus initiiert worden ist⁷. Seitdem versuchen Forscher aus den verschiedensten Bereichen, die Zeit-Skalen-Dekomposition auf spezifische Problemstellungen ihrer jeweiligen Fachgebiete anzuwenden, um aufgrund der dadurch gewonnenen neuartigen Perspektive Antworten auf ihre Fragen zu finden.

Im Folgenden soll daher ein kurzer Überblick über die möglichen Anwendungsgebiete und der dazu vorhandenen Literatur vorgestellt werden. Eingeleitet wird diese Übersicht mit einer kurzen Beschreibung, inwieweit die WT in Gebieten außerhalb der Finanzierungstheorie eingesetzt wurde, um daraufhin den wesentlichen Fokus auf Arbeiten zu richten, die im Bereich der Finanzmarktanalyse zu interessanten Ergebnissen geführt haben. Aufgrund der großen Anzahl an Publikationen im Zusammenhang mit Wavelets kann naturgemäß jedoch nur ein kleiner Ausschnitt der vorhandenen Literatur beleuchtet werden. Darüber hinaus werden im Laufe der empirischen Analysen der folgenden Kapitel weitere Anwendungsgebiete aus dem Bereich der Finanzierungstheorie beschrieben und mit Literaturangaben untermauert, die in der nachfolgenden Übersicht nicht berücksichtigt werden.

Applikationsmöglichkeiten außerhalb der Finanzierungstheorie

Den in der Praxis am weitesten verbreiteten Applikationsbereich der Wavelet-Analyse stellt wohl die Informationstheorie und in praktischer Hinsicht die Elektro- bzw. Informationstechnik dar. Durch ihre Fähigkeit, Daten in komprimierter Form zu repräsentieren, wies sich die Verwendung von Wavelets insbesondere bei der Datenkompression

⁷Vgl. Abschnitt 3.1.

als äußerst effizient heraus. So entschied sich das U.S. amerikanische FBI in der 1990er Jahren beispielsweise dazu, die Bilder ihrer Datenbank für Fingerabdrücke mit Hilfe der WT zu komprimieren (Graps 1995, S. 11f). Eine genaue Beschreibung, wie Wavelets im Bereich der Fingerabdruckerennung eingesetzt werden können, liefern dabei Verma und Goel (2011). Ein anderes Beispiel ist der JPEG2000 Grafikformatstandard, der ebenfalls auf der DWT basiert (Schleicher 2002, S. 1). Darüber hinaus wird dieser Ansatz mit Hilfe effizienter Algorithmen auch bei der Audiokompression im Bereich der mobilen Kommunikation eingesetzt (Merry und Steinbuch 2005).

Aber auch in der Mathematik wird die WT als effizientes Hilfsmittel verwendet. So beschreiben Abramovich, Bailey und Sapatinas (2000), wie die WT im Rahmen der Statistik, genauer bei nicht-parametrischen Regressionen oder Dichteschätzungen eingesetzt werden kann. Antoniadis et al. (2007) erläutern einige jüngste Entwicklungen dazu und geben eine Übersicht weiterer Anwendungen auf diesem Gebiet. Auch im Bereich der Numerik (vgl. Merry und Steinbuch 2005, Sweldens 1995), speziell bei der Lösung partieller Differentialgleichungen (Beylkin und Keiser 1997) wie der Schrödingergleichung (Goedecker 2009) werden Wavelets erfolgreich eingesetzt. Interessante Einblicke für die Verwendung von Wavelets bei statistischen Problemstellungen erläutert ferner Silverman (1999).

Darüber hinaus konnte die WT auch in anderen Fachgebieten große Erfolge für sich verbuchen. So führte die Zeit-Skalen-Dekomposition in der Medizin – insbesondere bei der Elektrokardio- und Elektroenzephalografie (Unser und Aldroubi 1996) –, in der Geophysik (Kumar und Foufoula-Georgiou 1997) oder der Meteorologie (Torrence und Compo 1998) zu nennenswerten Ergebnissen. Für den interessierten Leser sei im Hinblick auf weitere, außerhalb der Finanzmarktanalyse liegende Anwendungsgebiete auf die detaillierte Übersicht von Misiti et al. (2007) verwiesen, die ein breites Spektrum an Referenzen in Bezug auf die Verknüpfung von Wavelets mit verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen beinhaltet.

Applikationen im Bereich der Finanzierungstheorie

Im Gegensatz zu ihrer annähernd zwanzig jährigen Verwendung in den Naturwissenschaften gewann die WT bei der Analyse von ökonomischen Daten trotz ihrer für diesen Bereich passenden Eigenschaften erst weitaus später an Bedeutung (vgl. Ranta 2010,

S. 11). Wie in Kapitel 3 erläutert, eignen sich Wavelets beispielsweise dazu, globale und lokale Phänomene voneinander zu separieren. Ein wesentliches Element zahlreicher Ansätze innerhalb der Finanzierungstheorie ist deshalb die inhärente Fähigkeit der WT, Zeitreihen in Bezug auf verschiedene Zeitskalen zu analysieren, um im Sinne einer explorativen Datenanalyse nach bestimmten Mustern zu suchen oder die Zeitskalen-Dekomposition beispielsweise mit Prognose- oder Risikomodellen zu kombinieren. So lassen sich bei niedrigen Skalen kurzlebige Veränderungen wie plötzliche Strukturbrüche, Regime-Shifts oder Diskontinuitäten, bei hohen Skalen hingegen langfristige Trends und zyklische Muster detektieren. Darüber hinaus können Wavelets auch zur Schätzung von Korrelationen bzw. Varianzen auf verschiedene Zeitskalen oder zum Denoising bzw. als Filter verwendet werden.

Einen sehr gelungenen Überblick für Anwendungsmöglichkeiten von Wavelets innerhalb dieser Themengebiete geben die Arbeiten von Ramsey (1999), Ramsey (2002), Schleicher (2002) und Crowley und Pankki (2005). Praktische Anleitungen für empirische Analysen mit Wavelets bieten Torrence und Compo (1998) und Misiti et al. (2009). Eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten in der Finanzierungstheorie werden auch in Gençay et al. (2001b) und Percival und Walden (2008) beschrieben. Die folgende Übersicht listet einige weitere Publikationen auf, wobei die jeweils verwendete Transformationsmethode (M) und Wavelet-Familie (Ψ) in Klammern hinter der Referenz dokumentiert sind⁸. Die Literaturübersicht wird dabei gemäß ihren Themenschwerpunkten nach geordnet.

- **Analyse ökonomischer Fundamentaldaten:**

- Raihan, Wen und Zeng (2005) (M : CWT; Ψ : Morl)
versuchen mit Hilfe der CWT durch die Implementierung eines Skalogramms festzustellen, welche Ausprägungen Konjunkturzyklen beim GDP-Wachstum in den USA annehmen. Dabei wird sowohl das Ausmaß, d. i. Länge dieser Zyklen, als auch deren zeitliche Evolution betrachtet. Mit dieser Methode identifizieren die Autoren nicht nur externe Schocks, die solche Konjunkturzyklen initiiert haben, sondern zeigen auch auf, dass sich die Charakteristik der jeweiligen Zyklen in Bezug auf Länge, Skala und Periodizität sehr unterschiedlich darstellt.

⁸Die Zahl hinter der Abkürzung der Wavelet-Familie gibt die Länge des Filters an.

- Yamada und Honda (2005) (*M*: DWT; Ψ : LA36)
untersuchen den Zusammenhang zwischen dem japanischen Aktienmarkt (Nikkei 225 Index) und dem japanischen Konjunkturzyklus im Sinne einer Lead-Lag-Beziehung. Dazu wird der Index wiederum in der Zeit-Skalen-Ebene zerlegt und die kleinsten bzw. größten Skalen herausgefiltert. Die übrig gebliebenen Komponenten (in diesem Fall diejenigen, die einer Zeitskala von 32 bis 128 Monaten entsprechen) werden wieder zu einer Zeitreihe synthetisiert und mit den japanischen Konjunkturdaten verglichen. Das Ergebnis dieser Analyse ist, dass die Wendepunkte des Aktienmarkts seit den 1980er Jahren den Konjunkturzyklus um etwa 13 Monate vorwegnehmen.
- Crowley und Lee (2005) (*M*: MODWT; Ψ : LA8)
verwenden die MODWT, um die Konjunkturzyklen europäischer GDP-Daten zu untersuchen. Dazu vergleichen sie die Varianzen und Kreuzkorrelationen des Datenmaterials auf unterschiedlichen Skalen und implementieren darüber hinaus ein GARCH-Modell, um die Synchronizität der jeweiligen Zyklen zu analysieren. Die Resultate zeigen unter anderem auf, dass die Konjunkturzyklen der EU-Mitglieder auf zum Teil unterschiedlichen Skalen synchron verlaufen und die ausschlaggebende Determinante dabei meist auf den langfristigen Zeitskalen zu finden ist.
- Masset (2008) (*M*: MODWT; Ψ : LA8)
untersucht die Auswirkungen der Finanzkrise von 2008 auf den Immobilienmarkt in den USA. Durch die Analyse der Autokorrelationen auf der höchsten Skala, die den langfristigen Trend widerspiegeln, wird aufgedeckt, welche Städte besonders stark von der Finanzkrise erschüttert worden sind. Darüber hinaus wird die Varianz und die Kreuzkorrelationen der verschiedenen Häuserpreisindizes auf unterschiedlichen Skalen verglichen, um die Dynamik der Preisentwicklung im Hinblick auf den Betrachtungshorizont und die Saisonalität zu evaluieren.
- Hannonen (2006) (*M*: DWT; Ψ : LA8)
nutzt die WT, um die Dynamik von Häuserpreisen in Finnland zu analysieren. Auch hier ist die WT aufgrund ihrer Dekompositionsfähigkeit auf der Zeit-Skalen-Ebene in der Lage, Komponenten wie Trends oder zykli-

sche Muster auf verschiedenen Skalen herauszufiltern, die in der aggregierten Zeitreihe in dieser Form nicht sichtbar sind.

• **Prognosemodelle:**

- Wadi und Ismail (2011) (M : DWT; Ψ : Haar, D2)
überführen den jordanischen Amman Aktienindex mittels der DWT in die Zeit-Skalen-Domäne und setzen eine Prognose der separaten Koeffizientenreihen mit Hilfe eines ARIMA-Modells um. Aus Sicht der Autoren generiert das Haar-Wavelet im direkten Vergleich die robustesten Resultate und resultiert in besseren Prognosen als das Daubechies-Wavelet, obgleich darauf hingewiesen wird, dass in der Literatur das Daubechies-Wavelet in der Regel zu besseren Ergebnissen führt.
- Schlüter und Deuschle (2010) (M : MODWT; Ψ : Haar, Morlet, D4)
kombinieren die WT mit Prognosemodellen in Bezug auf Zeitreihen von Aktien (Deutsche Bank), Devisen (EUR/USD), Rohstoffen (WTI Rohöl) und Elektrizitätspreisen in UK. Dabei werden die Prognoseresultate, die mit einem ARIMA-Modell implementiert werden, auf zwei verschiedene Weisen bestimmt. Zum einen verwenden sie die WT zum Denoising, d. h. sie entfernen Koeffizientenreihen bestimmter Skalen aus der Zeitreihe, synthetisieren die übrig gebliebenen Komponenten und prognostizieren den zukünftigen Wert. Zum anderen wenden sie das ARIMA-Modell direkt auf alle Koeffizientenreihen der jeweiligen Skalen an und rekombinieren die Prognosewerte wieder zu einem resultierenden Preis. Beide Methoden, die zum Vergleich mit verschiedenen Mother-Wavelets umgesetzt werden, verbessern die Prognosegüte im Vergleich zum klassischen Ansatz, d. i. der Anwendung des ARIMA-Modells auf die herkömmlichen Preisdaten der Zeit-Ebene, zum Teil erheblich.
- Gherman, Terebes und Borda (2012) (M : MODWT; Ψ : Haar, D)
implementieren ebenfalls ein Prognosemodell (GJR-GARCH) auf Aktienindizes (FTSE 100 (UK) und BET (Rumänien)) für verschiedene Skalen und kommen zu dem Schluss, dass das Haar- (Begründung: Form ist den Mustern von Finanzdaten ähnlich) und Daubechies-Wavelet (Begründung: Extrahiert Spikes und Schocks bei Finanzdaten besonders gut) die besten

Resultate bei ökonomischen Daten liefern. Innerhalb der Analyse führt das Haar-Wavelet wiederum zu besseren Ergebnissen als das Daubechies-Wavelet. Außerdem wird in diesem Zusammenhang auch die Überlegenheit der MODWT gegenüber der DWT betont. Als Conclusio wird auch hier festgehalten, dass eine auf verschiedene Skalen basierende Prognosemethodik die Prognosegüte erheblich steigern kann.

- Zhang, Coggins, Jabri, Dersch und Flower (2001) (M : MODWT; Ψ : D4) wählen ebenfalls einen sehr interessanten Ansatz in Form eines hybriden Prognosemodells, indem sie die WT mit neuronalen Netzwerken verknüpfen und wiederum die Koeffizientenreihen der jeweiligen Skalen separat prognostizieren. Dabei wenden die Autoren ihre Methode auf verschiedene Futures-Kontrakte (Treasury Bonds, AUS/USD und CHF/USD) an. Die Resultate ihres Ansatzes sind angesichts einer Verdoppelung des Gewinns pro Trade und einer signifikanten Verbesserung der Sharpe-Ratio bemerkenswert.
- Yousefi, Weinreich und Reinarz (2005) (M : DWT; Ψ : D7) wählen zur Extrapolation der Koeffizientenreihen auf verschiedenen Skalen verschiedene Fitting-Ansätze. In ihrer Arbeit werden Spot- und Future-Preise mit unterschiedlicher Maturität von WTI Rohöl zerlegt, um darüber hinaus auch die Dynamik der Zeitreihen zu analysieren.

- **Risikomanagement:**

- Samia, Dalenda und Saoussen (2009) (M : DWT; Ψ : Haar, D4, LA6) verwenden die WT für das Risikomanagement. Genauer formuliert werden Zeitreihen vom Devisenmarkt in der Zeit-Skalen-Ebene zerlegt, um daraufhin einen ARMA-GARCH-Ansatz für die Schätzung des VaR auf den unterschiedlichen Skalen zu implementieren. Dabei findet auch ein Vergleich in Bezug auf verschiedene Wavelet-Familien statt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Verlässlichkeit der VaR-Schätzer mit Hilfe des hybriden Modells im Vergleich zur direkten Anwendung des Prognose-Modells auf die Preisdaten deutlich verbessert werden kann.
- Norsworthy, Li und Gorener (2000) (M : DWT; Ψ : Haar)

thematizieren unter anderem das Multiskalenverhalten von β s auf dem U.S.-Aktienmarkt. Dazu werden über hundert Aktien aus diversen S&P Indizes und dem Dow Jones Index verglichen. Die Zeitreihen werden hierbei in der Zeit-Skalen-Ebene zerlegt und die jeweiligen β s mittels Regression bestimmt. In der Analyse zeigt sich, dass die β -Werte im Schnitt mit niedrigen Frequenzen abnehmen, was darauf hindeutet, dass der wesentliche Einfluss auf die Preisdynamik im höherfrequenten Bereich determiniert wird.

- Fernandez (2006) (*M*: DWT; Ψ : LA8)
wiederum untersucht das Marktrisiko am chilenischen Aktienmarkt. Dazu wird ebenfalls das Multiskalenverhalten von Aktien- β s im Rahmen des CAPM bestimmt. Auch hier deuten die Resultate wie bei Norsworthy et al. (2000) darauf hin, dass das Risiko in den hohen Frequenzen konzentriert ist.
- Gençay et al. (2001a) (*M*: MODWT; Ψ : LA8, D4)
untersuchen das Skalierungsverhalten der Volatilität von verschiedenen Währungspaaren (DEM/USD und JPY/USD), um herauszufinden, inwieweit Persistenz auf dem Devisenmarkt von der jeweiligen Skala abhängt. Dazu zerlegen sie die Zeitreihen mit Hilfe der MODWT und berechnen den jeweils zugehörigen Hurst-Exponenten und die Korrelationskoeffizienten. Ihre Resultate deuten darauf hin, dass die Volatilität ein Multiskalenverhalten aufweist und die Persistenz auf kleinen Skalen wesentlich geringer ist als auf höheren Skalen.
- Vuorenmaa (2005) (*M*: MODWT; Ψ : LA8)
untersucht das Skalierungsverhalten der Volatilität am finnischen Aktienmarkt, d. h. wie sich die Elastizität der Volatilität in Bezug auf verschiedene Zeitskalen im Intraday-Bereich darstellt. In der Analyse wird deutlich, dass das Skalierungsverhalten und die Parameter für das Langzeitkorrelationsverhalten der zugrunde liegenden Zeitreihen auf verschiedenen Skalen nicht konstant ist und sich deutlich von einem Random Walk unterscheidet.

- **Multiskalenstruktur von Korrelationen:**

- Conlon, Crane und Ruskin (2008) (*M*: MODWT; Ψ : LA8)
versuchen mit Hilfe der WT herauszufinden, inwieweit Hedge Fonds (Cre-

ditSuisse/Tremont Index) mit verschiedenen Strategien auf unterschiedlichen Skalen mit dem Aktienmarkt (S&P500) korrelieren. Das Ergebnis der Analyse ist, dass die Korrelationen für bestimmte Strategien (Convertible Arbitrage, Fixed Income Arbitrage und Multi-Strategy) mit zunehmender Skala größer werden, während andere Strategien wie Dedicated Short Bias, Equity Market Neutral, Global Macro und Managed Futures das gegenteilige Verhalten aufweisen.

- In und Kim (2006) (M : MODWT; Ψ : LA8) analysieren das strukturelle Verhalten von U.S. Aktien- und Future-Preisen anhand des S&P500 im Sinne einer Lead-Lag-Beziehung. Darüber hinaus werden auch die Kovarianzen auf verschiedenen Zeitskalen bestimmt, um das optimale Hedge-Verhältnis in Abhängigkeit der Zeitskala und damit des Anlagehorizonts zu bestimmen. Die Resultate deuten auf Langzeitkorrelationen in der Zeitreihe und spezifische Hedge-Verhältnisse für verschiedene Skalen hin.

4.1.4 Zusammenfassung

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes war einerseits, einen Überblick und damit ein Gefühl für die wesentlichen Eigenschaften von Wavelets zu vermitteln. Andererseits stand auch die Frage im Mittelpunkt, wie sich diese Eigenschaften auf die Transformation auswirken, um bestimmen zu können, welche Art der WT und speziell welche Wavelet-Familie im Bereich der Finanzmarktanalyse geeignet ist. Dazu wurden in einem ersten Schritt einige Charakteristika erläutert, die bei der Wahl eines spezifischen Wavelets von Bedeutung sind. Darauf aufbauend diente die Literaturübersicht im zweiten Schritt als Übersicht, welche Antworten von Seiten der Scientific Community hierzu formuliert worden sind. Als vorläufiges Fazit des durchgeführten Programms können für Analysen im Bereich der Finanzierungstheorie folgende Punkte festgehalten werden:

Die Wahl der Transformationsart hängt von der Art der Anwendung ab und ist für bestimmte Zwecke relativ eindeutig. So dient die CWT in erster Linie der deskriptiven bzw. explorativen Analyse, da aufgrund der hohen Redundanz dieser Transformationsmethode Informationen wie Regimewechsel oder abrupte Sprünge weitaus besser visualisiert und detektiert werden können als bei der DWT bzw. MODWT. In Bezug auf die

Analyse der Daten für bestimmte Skalen und die Verwendung der Koeffizientenreihen beispielsweise in Kombination mit Prognose- oder Risikomodellen hat die MODWT wiederum zwei wesentliche Vorteile gegenüber der DWT: Zum einen ist die MODWT translationsinvariant in dem Sinne, als dass die Koeffizientenwerte nicht vom Startzeitpunkt abhängen. Eine Verschiebung der Zeitreihe führt bei der MODWT gleichzeitig zu einer Verschiebung der Koeffizienten und im Gegensatz zur DWT resultiert eine solche Verschiebung nicht in anderen Koeffizientenwerten. Die Detail- und Smooth-Koeffizienten sind darüber hinaus mit Nullphasenfiltern assoziiert, so dass hierbei eine Übereinstimmung mit der Zeitreihe auf der Zeitachse vorliegt (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 135). Zum anderen ist ein großer Vorteil, dass die MODWT beliebig lange Zeitreihen verarbeiten kann und dadurch insbesondere im Hinblick auf die Analyse stochastischer Zeitreihen wie Finanzdaten besser geeignet ist als die DWT. Darüber hinaus ist die Wahl eines spezifischen Wavelets bei der MODWT aufgrund der im Vergleich zur DWT relativ hohen Redundanz nicht so entscheidend (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 144). Auch Gherman et al. (2012, S. 2139) und Renaud et al. (2005, S. 1243) halten die MODWT bei Finanzdaten für die geeignetere Methode.

In Bezug auf die Wahl der Wavelet-Familie ist das Ziel und die Art der Analyse ebenfalls entscheidend, obgleich sich vier Basisfunktionen in der Literatur nicht zuletzt aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften als besonders geeignet herauskristallisiert haben, d. i. das Haar-, das D4-, LA8- und Morlet-Wavelet. Im Folgenden werden diese Wavelets daher etwas näher erläutert:

- **Haar (D2) und D4:**

Die *Daubechies-Wavelet-Familie* DL wurde von Ingrid Daubechies entwickelt und bildet eine Familie orthogonaler Wavelets mit kompakten Träger, die im Rahmen der FWT mit einem Hoch- und Tiefpassfilter charakterisiert werden können und in einer orthogonalen MRA resultieren (Merry und Steinbuch 2005, S. 37f). Die Idee hinter der Konstruktion dieser Familie war, Wavelets mit einer bestimmten Anzahl an verschwindenden Momenten bei gleichzeitig minimaler Filterlänge zu definieren (Chun-Lin 2010, S. 39f). Die Motivation für die Entwicklung dieser Wavelet-Familie bezog sich auf ihre Verwendung bei der Datenkompression und liegt angesichts der in Abschnitt 4.1.1 definierten Auswahlkriterien auf der Hand, da eine hohe Anzahl an verschwindenden Momenten eine effizien-

te Komprimierung impliziert und eine gleichzeitig geringe Filterlänge die Anzahl der Boundary-Koeffizienten minimiert. L bezeichnet die Länge des Filters (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 113), wobei die Länge gerade und die Anzahl der verschwindenden Momente $L/2$ ist (Stoicescu 2012, S. 22). Wie bereits in Abschnitt 4.1.1 beschrieben, nimmt die Glattheit dabei mit steigendem L zu. Die Daubechies-Wavelet-Familie ist die in der Praxis wohl am meisten verwendete Familie (Stoicescu 2012, S. 21).

Das simpelste D2-Wavelet bzw. *Haar-Wavelet* ähnelt dabei einer Stufenfunktion und ist deswegen insbesondere für die Detektion von Regimewechseln bzw. abrupten Sprüngen geeignet. Generell sind für die Analyse von Diskontinuitäten solche Wavelets sinnvoll, die nicht sonderlich glatt sind und wenige verschwindende Momente besitzen (Ramsey 2002, S. 31). Gherman et al. (2012, S. 2139) befinden, dass das Haar-Wavelet bzw. die Daubechies-Familie für Finanzdaten am passendsten ist. Für Prognosemodelle ist laut Renaud et al. (2005, S. 1241) das Haar-Wavelet ebenfalls die beste Wahl, weil es einerseits durch Randbedingungen am wenigsten beeinflusst wird und andererseits Sprünge, die typisch für Finanzdaten sind, aufgrund seiner Form am besten repräsentieren kann. Zhang (2012, S. 37) wiederum findet, dass das Haar-Wavelet auch im Hinblick auf die Bestimmung von Selbstähnlichkeit die besten Resultate liefert. Das Haar-Wavelet ist dabei wie folgt definiert:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0; 0,5) \\ -1 & x \in [0,5; 1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Es ist das einzige orthogonale Wavelet mit kompaktem Träger, das auch symmetrisch ist. Alle anderen Daubechies-Wavelets DL mit $L > 2$ sind nicht mehr symmetrisch und es existiert meist keine explizite analytische Darstellungsform. Nichtsdestotrotz kann man sie relativ simpel über ihre Filterkoeffizienten definieren (vgl. Stoicescu 2012, S. 20ff). Abbildungen 4.1.2 und 4.1.3 zeigen die Wavelet-Funktionen D2 und D4 mit ihren jeweiligen Skalierungsfunktionen⁹. Im

⁹Die Bilder der vier Wavelet-Funktionen Haar, D4, LA8 und Morlet sind mit der Wavelet-Toolbox von MATLAB erstellt.

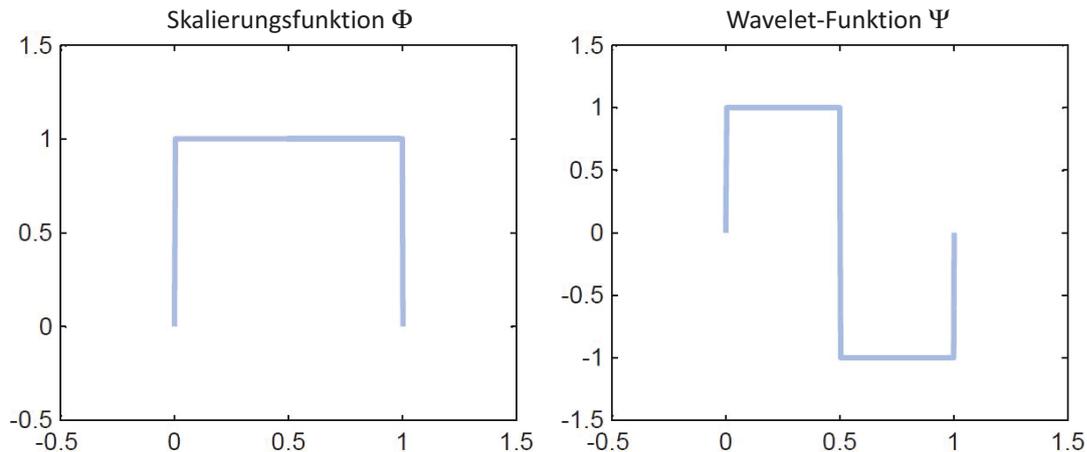


Abbildung 4.1.2: Haar: Skalierungs- und Wavelet-Funktion

Gegensatz zum Haar-Wavelet ist das D4-Wavelet weitaus glatter und bildet einen guten Kompromiss im Hinblick auf die Analyse sowohl lokaler als auch globaler Phänomene.

- **LA8:**

Da die Daubechies-Familie bis auf das D2-Wavelet asymmetrisch ist, entwickelte Ingrid Daubechies die *Symlet-* bzw. *Least-Asymmetric-Wavelet-Familie*. Obwohl auch Symlets nicht vollkommen symmetrisch sind – was sich im Namen Least-Asymmetric widerspiegelt –, bieten sie im Hinblick auf diese Eigenschaft dennoch eine Verbesserung. Insbesondere bietet sich bei LA-Wavelets aufgrund ihrer Eigenschaft als approximativ lineare Phasenfilter relativ simpel die Möglichkeit, sie mit einer geeigneten Adjustierung approximativ zu Nullphasenfiltern umzuformen und damit eine nahezu perfekte Harmonisierung mit der Zeitreihe herzustellen (vgl. Percival und Walden 2008, S. 107ff). Die übrigen Eigenschaften sind relativ ähnlich zu denen der DL-Wavelets: Symlets sind orthogonale, kontinuierliche Wavelets mit kompakten Träger und $L/2$ verschwindenden Momenten. Abbildung 4.1.4 zeigt das LA8-Wavelet mitsamt seiner Skalierungsfunktion.

Für Percival und Walden (2008, S. 136) stellt das LA8-Wavelet den besten Kompromiss für Anwendungen im Hinblick auf Kapitalmarktanalysen dar. Ganz ähnlich sehen es Gallegati, Ramsey und Semmler (2013, S. 197), die das D4- und

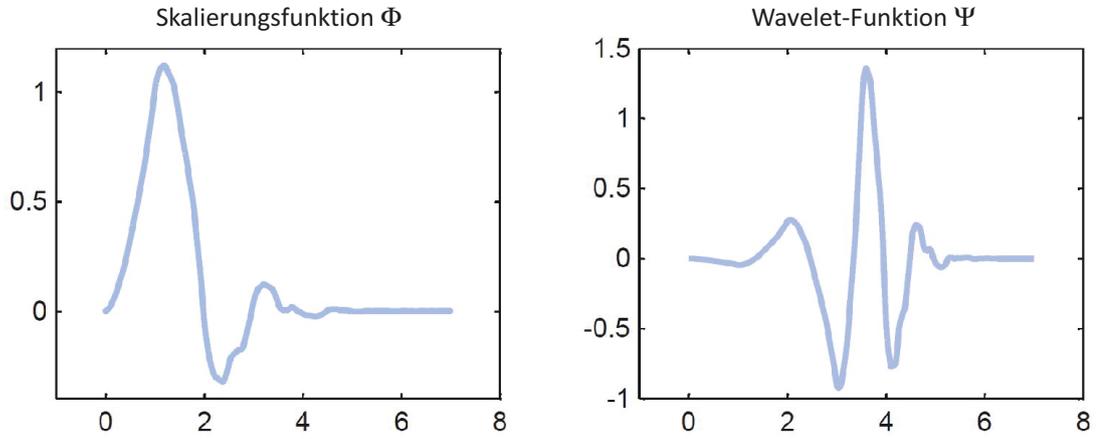


Abbildung 4.1.3: D4: Skalierungs- und Wavelet-Funktion

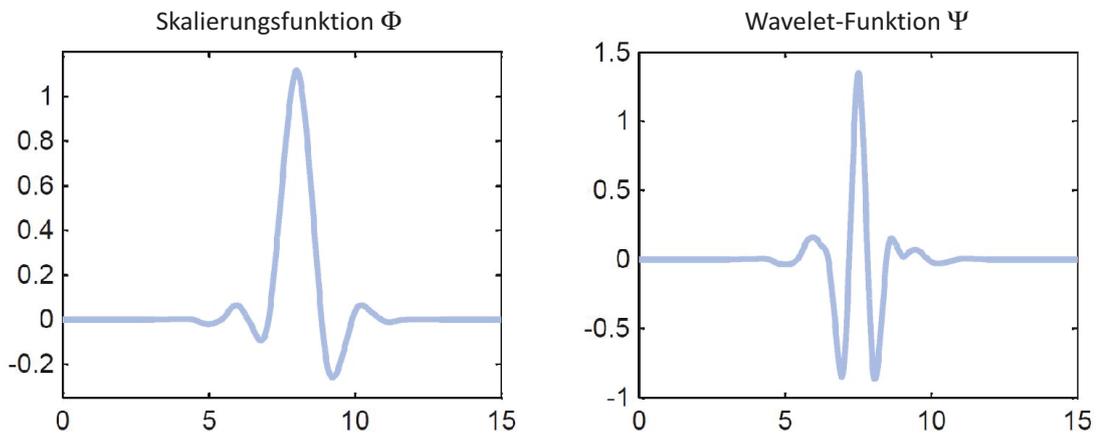


Abbildung 4.1.4: LA8: Skalierungs- und Wavelet-Funktion

LA8-Wavelet als beste Lösung für diesen Bereich sehen. Gençay et al. (2001b, S. 144) heben nochmals hervor, dass die Wahl des Wavelets primär von den zugrunde liegenden Daten abhängt. Für stückweise konstante Funktionen schlagen sie deshalb die Verwendung des Haar-Wavelets vor; bei eher glatten Signalen das LA8-Wavelet. Auch Masset (2008, S. 21) kommt in seiner Conclusio zu dem Schluss, dass im Rahmen ökonomischer Analysen meist mit Daubechies- oder Least-Asymmetric-Wavelets der Länge 4 bis 8 gearbeitet wird.

- **Morl:**

Die oben genannten Wavelets besitzen eine Skalierungsfunktion und können daher im Rahmen einer FWT implementiert werden. Für gewisse Anwendungen ist jedoch wie bereits erläutert die Redundanz der CWT von Vorteil, beispielsweise wenn es um die Analyse lokaler Phänomene im deskriptiven Sinne geht. Hierzu ist es meist einfacher, Wavelets ohne assoziierte Filter zu verwenden, da sie in der Regel nur schwach die Zulässigkeitsbedingung 3.2.6 erfüllen, daher mehr Freiheitsgrade in Bezug auf ihre Form besitzen und explizit beschrieben werden können (vgl. Misiti et al. 2007, S. 104). Wie man in Abbildung 4.1.5 sehen kann, zeigt die Funktion ein im Vergleich zu den drei anderen Wavelets relativ starkes oszillierendes Verhalten. Dadurch lassen sich insbesondere zyklische Muster und lokale oszillierende Phänomene detektieren. Gallegati et al. (2013, S. 188ff) beispielsweise verwenden das Morlet-Wavelet in Kombination mit der CWT, um im Sinne einer explorativen Analyse die charakteristischen Skalen und Merkmale von Zeitreihen zu untersuchen.

4.2 Deskriptive Datenanalyse

„It is impossible to produce a superior performance unless you do something different from the majority.“

(Sir John Templeton)

Im vorangegangenen Abschnitt 4.1.3 wurden bereits einige Ansätze vorgestellt, die die WT im Rahmen der Finanzmarktanalyse verwenden. Dabei stellte sich heraus, dass

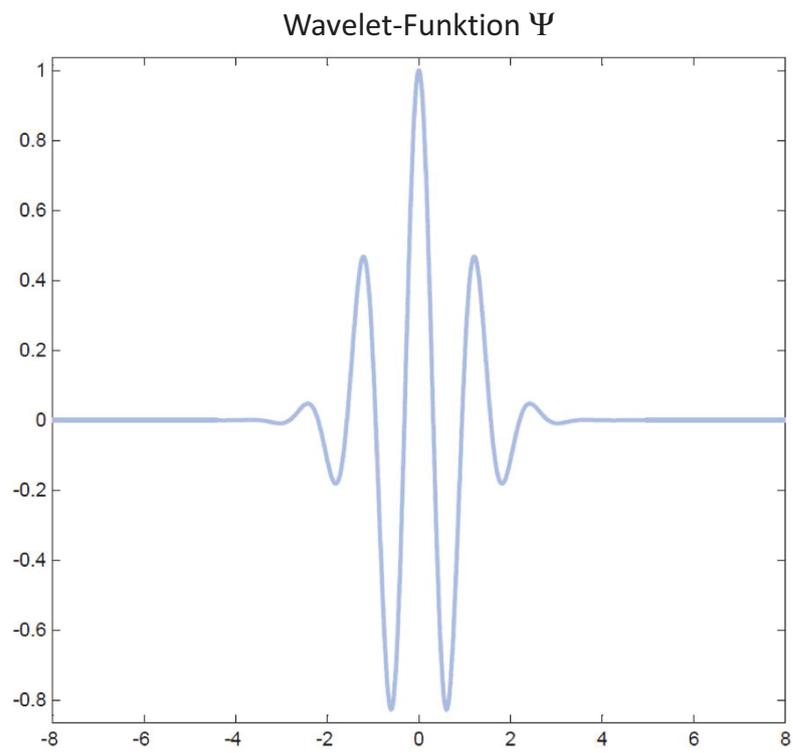


Abbildung 4.1.5: Morlet-Wavelet-Funktion

die CWT aufgrund der ihr immanenten, hohen Redundanz vor allem dazu geeignet ist, Daten deskriptiv bzw. explorativ zu untersuchen, da mit diesem Verfahren spezifische Eigenschaften einer Zeitreihe in der Zeit-Skalen-Ebene hervorragend visualisiert werden können (Gallegati et al. 2013, S. 188). Auf der anderen Seite können quantitative Untersuchungen in der Regel effizienter in Form der MODWT durchgeführt werden. Um diese beiden Formen der WT im Hinblick auf ihr Einsatzpotential bei der Analyse von Finanzdaten besser evaluieren zu können, soll in den folgenden Abschnitten anhand einiger Beispiele erläutert werden, inwiefern man die kontinuierliche bzw. diskrete Variante der WT auf empirischer Ebene verwenden kann.

Hierzu wird in Abschnitt 4.2.1 dargelegt, wie man Selbstähnlichkeit einer Zeitreihe auf qualitative Weise in Form eines CWT-Diagramms feststellen kann, um eine Brücke zu dem im theoretischen Abschnitt 2.3 diskutierten Themenbereich herzustellen. In Abschnitt 4.2.2 wird daraufhin erläutert, inwiefern sich die qualitativen Ergebnisse mit Hilfe der MODWT quantifizieren lassen können. Abschnitt 4.2.3 versucht dann wiederum qualitativ in Form des sogenannten *Skalogramms* aufzuzeigen, wie sich bestimmte Merkmale von Finanzdaten wie Strukturbrüche oder Volatilitätscluster in der Zeit-Skalen-Ebene visualisieren lassen können, um in Abschnitt 4.2.4 anhand einiger Beispiele zu diskutieren, wie man diese Erkenntnisse quantitativ bestimmen und im Portfoliomanagement einbinden kann.

4.2.1 Selbstähnlichkeit – CWT

In Abschnitt 2.3 wurde unter anderem skizziert, was Selbstähnlichkeit im Mandelbrotschen Sinne bedeutet und wie sich diese Eigenschaft bei Finanzdaten äußert. Außerdem wurden einige damit zusammenhängende Begriffe wie die fraktale Dimension oder der Hurst-Exponent erläutert. Bei Finanzdaten liegt demnach keine exakte Selbstähnlichkeit vor, bei der alle skalierten Teile exakte Kopien eines Generators sind. Vielmehr findet sich bei Zeitreihen spekulativer Vermögensgegenstände eine affine Selbstähnlichkeit, bei der die Skalierung nicht in alle Raumrichtungen exakt gleich ist. In dem vorliegenden Abschnitt wird nun dargelegt, wie sich Selbstähnlichkeit im Rahmen der WT – genauer gesagt qualitativ in Form der CWT – äußert (vgl. Misiti et al. 2009, 3-10)¹⁰.

¹⁰Bei den folgenden CWT-Diagrammen wurde das Morlet-Wavelet verwendet und die Analysen mit Hilfe der Wavelet-Toolbox in MATLAB umgesetzt. Der Endzeitpunkt der Datenreihen ist immer der

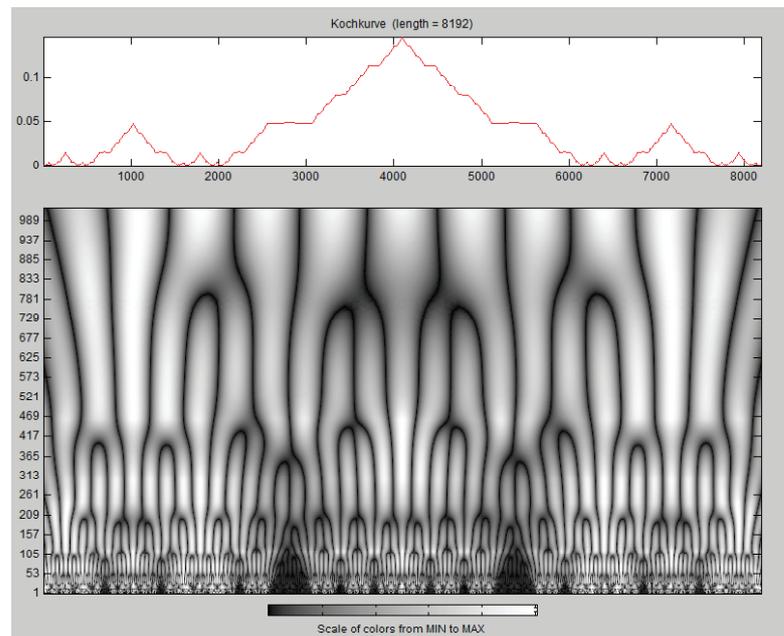


Abbildung 4.2.1: CWT-Diagramm einer Kochkurve bis zu einer Skala von 1024

Um evaluieren zu können, wie sich Selbstähnlichkeit in einem CWT-Diagramm darstellt, ist es hilfreich, ein solches Diagramm für eine exakt selbstähnliche Struktur zu betrachten. Abbildung 4.2.1 zeigt hierzu eine Kochkurve mit einer Länge von 8192 Datenpunkten und darunter das dazugehörige CWT-Diagramm bis zu einer Skala von 1024. Die Quantifizierung der Koeffizienten erfolgt dabei anhand eines Konturdiagramms: Die CWT-Koeffizienten $W(s, u)$ aus Gleichung 3.2.2 werden als Absolutwerte durch eine Farbskalierung visualisiert, bei der die Farbgebung umso heller ist, je höher die $|W(s, u)|$ sind. Auf der Ordinate sind die Skalen s aufgetragen. Wie man anhand des CWT-Plots sehen kann, gibt es eine charakteristische Struktur, die sich über verschiedene Skalen hinweg wiederholt. Die Ränder des Diagramms sind aufgrund der Randbedingungen, die in Abschnitt 4.1.1 diskutiert wurden, etwas verzerrt und sollten daher vernachlässigt werden. Gerade in der Mitte des Plots sieht man aber deutlich, dass sich eine gabelförmige Baumstruktur über verschiedene Skalen hinweg manifestiert. Diese sich wiederholende Struktur resultiert aus der Tatsache, dass die selbstähnliche Charakteristik der Zeitreihe durch die Koeffizienten quantifiziert und im Sinne einer Ähnlichkeitsab-

28.02.2013, und die Anzahl der Datenpunkte definiert den jeweiligen Anfangszeitpunkt.

bildung repräsentiert wird.

Die Frage ist nun, ob sich bei Finanzdaten ebenfalls solche wiederkehrenden Muster finden lassen. Abbildung 4.2.2 zeigt hierzu den Rentenindex iBoxx EUR Sovereigns TR und dessen CWT-Diagramm. Man erkennt, dass die Randbedingungen hier zu größeren Verzerrungen führen, da die Zeitreihe wesentlich kürzer ist als diejenige der Kochkurve¹¹. Auch hier lassen sich jedoch eindeutig gabelförmige Muster über verschiedene Skalen hinweg erkennen. Etwas besser ist die selbstähnliche Struktur in Abbildung 4.2.3 zu sehen, die den CWT-Plot des DJ UBS Commodity TR Index in USD darstellt. Die Verzweigungen der Baumstruktur sind sogar noch etwas ausgeprägter als in Abbildung 4.2.2. In Abschnitt 2.3.1 wurde diskutiert, dass Selbstähnlichkeit sich bei Finanzdaten unter anderem in Form von Zeitskaleninvarianz manifestiert. D. h. dass es nicht möglich ist, Zeitreihen verschiedener Granularität zu unterscheiden, wenn die Zeitskala nicht angegeben ist. Dies bedeutet wiederum, dass die selbstähnliche Struktur im CWT-Plot ebenfalls unabhängig von der Granularität der Daten sein müsste. Abbildung 4.2.4 bestätigt diese These: Auch beim CWT-Konturdiagramm des FTSE 100 TR Index in GBP basierend auf Wochendaten lässt sich dieselbe Baumstruktur erkennen.

Die Analysen zeigen, dass Finanzdaten eine selbstähnliche bzw. -affine Charakteristik aufweisen und die CWT in der Lage ist, diese auf qualitativer Ebene zu identifizieren. Ausschlaggebend ist dabei, dass das Wesen der Selbstähnlichkeit, d. i. eine sich wiederholende Struktur über verschiedene Skalen hinweg, durch die Koeffizienten der WT in der Zeit-Skalen-Ebene repräsentiert werden kann. Ähnliche Analysen in Bezug auf die Detektion von selbstähnlichen Strukturen für Zeitreihen aus dem Bereich der Mathematik oder Biologie nehmen beispielsweise Hwang und Mallat (1994), Wei und Billings (2005) oder Arneodo, Audit, of Brodie, Nicolay, Touchon, D'Aubenton-Carafa, Huvet und Thermes (2009) vor. Da bei Finanzdaten im Gegensatz zur Mathematik aber keine exakte Selbstähnlichkeit vorliegt, ist die gabelförmige Struktur, die sich bei der Kochkurve manifestierte, zum Teil nicht so eindeutig gegeben. Gerade auf höheren Skalen ist die Wiederholung des Musters nicht mehr derart ausgeprägt, wie unter anderem weitere Analysen im Anhang A.5 zeigen¹². Im nächsten Abschnitt 4.2.2 wird mit Hilfe der

¹¹Die Länge der Zeitreihe findet sich in der Überschrift in Klammern hinter ihrem Namen in Form der Anzahl der bei der Analyse verwendeten Datenpunkte.

¹²Dargestellt sind weitere CWT-Diagramme verschiedener Indizes mit unterschiedlicher Granularität. Der Endzeitpunkt der Datenreihen ist wie bei den oberen Diagrammen immer der 28.02.2013, und die Anzahl der Datenpunkte definiert den jeweiligen Anfangszeitpunkt.

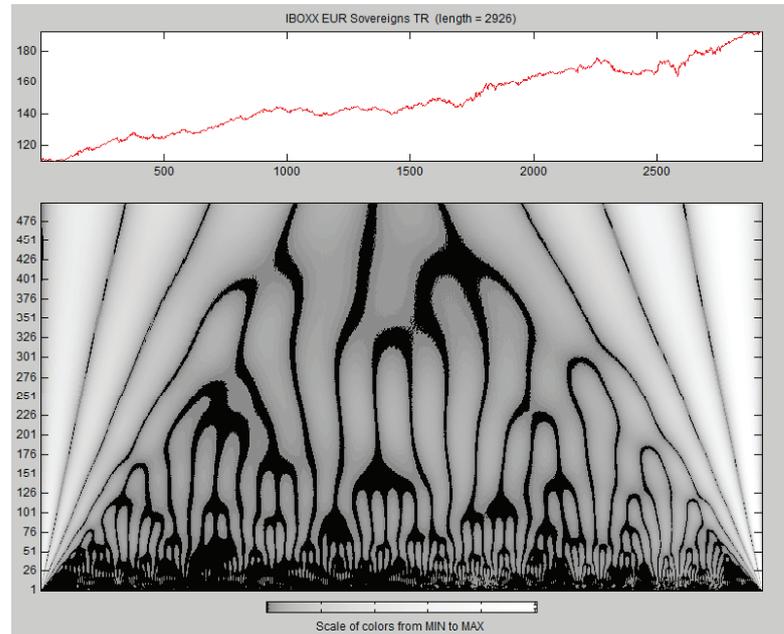


Abbildung 4.2.2: CWT-Diagramm des iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Tagesdaten

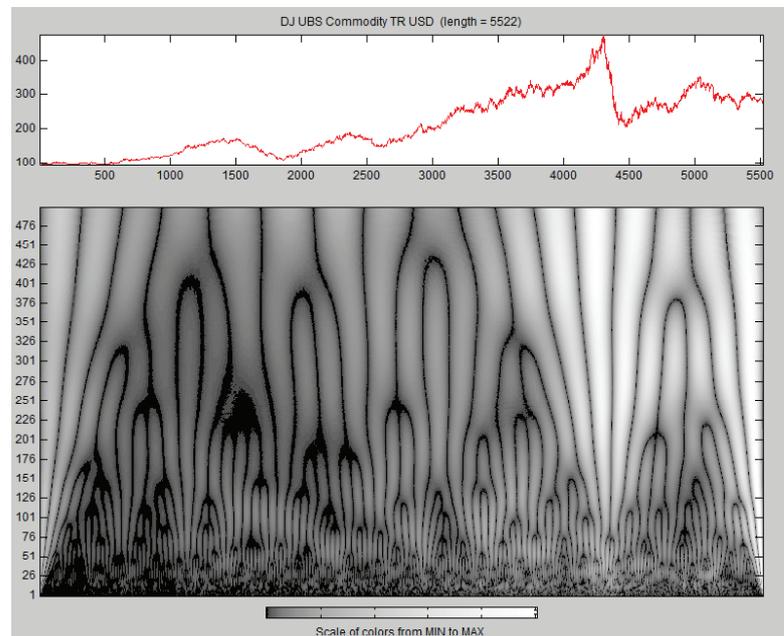


Abbildung 4.2.3: CWT-Diagramm des DJ UBS Commodity TR Index in USD basierend auf Tagesdaten

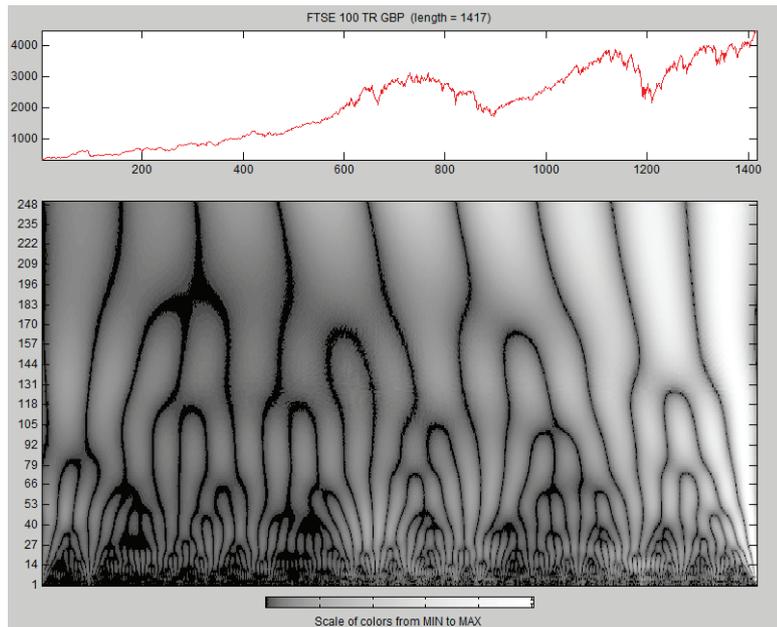


Abbildung 4.2.4: CWT-Diagramm des FTSE 100 TR Index in GBP basierend auf Wochendaten

MODWT daher in einem zweiten Schritt die selbstähnliche Charakteristik von Finanzdaten auch auf quantitativer Ebene bestimmt.

4.2.2 Selbstähnlichkeit – MODWT

Eine solche quantitative Analyse der selbstähnlichen Charakteristik basiert auf der sogenannten *Wavelet-Varianz* ($WVar$), d. i. der Zerlegung der Varianz in Bezug auf verschiedene Skalen (vgl. Masset 2008, S. 19ff). Ermöglicht wird diese Zerlegung durch das sogenannte *Parsevalschen Theorem*, welches besagt, dass die Energie einer Zeitreihe $f(t)$ mit $t = 0, 1, \dots, T - 1$, die als

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{t=0}^{T-1} |f(t)|^2 \quad (4.2.1)$$

definiert ist (Percival und Walden 2008, S. 42), durch ihre Fourier-Transformierte erhalten bleibt. D. h. dass die Energie der Zeitreihe in der Zeit- und Frequenzebene äquivalent ist (vgl. Percival und Walden 2008, S. 23):

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.2.2)$$

$\hat{f}(\omega)$ ist dabei die Fourier-Transformierte von $f(t)$, und die Größe $|\hat{f}(\omega)|^2$ wird als *Power-Spektrum* bzw. *Energiedichtespektrum* S_f bezeichnet (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 30). Das Theorem 4.2.2 ermöglicht dabei die Aufspaltung der Energie von $f(t)$ in Bezug auf sein Frequenzspektrum.

Diese Eigenschaft lässt sich nun auch in die Zeit-Skalen-Ebene übertragen. Für die Level $j = 1, 2, \dots, J$ gilt demnach:

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{j=1}^J \|\tilde{w}_{j,t}\|^2 + \|\tilde{v}_{J,t}\|^2. \quad (4.2.3)$$

$\|\tilde{w}_{j,t}\|^2$ bzw. $\|\tilde{v}_{J,t}\|^2$ entsprechen dabei den Energieanteilen von $f(t)$ der Skalen λ_j bzw. λ_J (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 125). Da die Energie einer Zeitreihe proportional zu ihrer Varianz ist, d. h. $\|f(t)\|^2 \propto \sigma_{f(t)}^2$, beschreibt Gleichung 4.2.3 gleichzeitig auch eine skalenabhängige Aufspaltung der Varianz in der Zeit-Skalen-Ebene (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 235). Die Grundlage dafür bildet die Eigenschaft der MODWT, die Energie während des Transformationsprozesses zu erhalten, so dass die Varianz der Zeitreihe vollständig durch die Varianz der MODWT-Koeffizienten¹³ repräsentiert werden kann (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 138):

$$\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j) = \sigma^2(\tilde{w}_{j,t}) \quad (4.2.4)$$

Die WVar $\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j)$ stellt damit einer Zerlegung der Varianz in Bezug auf die Skala λ_j dar (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 238). Die gesamte Varianz $\sigma_{f(t)}^2$ eines stochastischen Prozesses $f(t)$ ist damit als Summe der VVar über alle Level j definiert:

$$\sigma_{f(t)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j), \quad (4.2.5)$$

Für eine endliche Zeitreihe der Länge T ist die Transformationstiefe aufgrund des MODWT-Pyramidenalgorithmus durch $J = \log_2(T)$ begrenzt, so dass sich in diesem Fall

¹³Während bei der DWT diese Eigenschaft auch durch die Detail- und Smooth-Koeffizienten gewährleistet ist, gilt dies bei der MODWT nicht im Allgemeinen (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 138).

folgende Beziehung für die Varianz der Zeitreihe ergibt:

$$\sigma_{f(t)}^2 = \sum_{j=1}^J \sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j) + \sigma_{\tilde{v}}^2(\lambda_J), \quad (4.2.6)$$

wobei $\sigma_{\tilde{v}}^2(\lambda_j)$ analog zu Gleichung 4.2.4 für die Skalierungskoeffizienten $\tilde{v}_{J,t}$ definiert ist.

Die Quantifizierung der fraktalen Dimension einer Zeitreihe wird nun über das Energiedichtespektrum S_f von $f(t)$ bzw. über den Zusammenhang zwischen $\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j)$ und λ_j hergestellt. Da λ_j mit dem Frequenzintervall $[1/2^{j+1}, 1/2^j]$ assoziiert wird, gilt nämlich (vgl. Percival und Walden 2008, S. 297):

$$\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j) \approx 2 \int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} S_f(\nu) d\nu, \quad (4.2.7)$$

wobei ν die Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ bezeichnet. Für einen selbstähnlichen Prozess, der sich über ein Potenzgesetz nach Gleichung 2.3.1 definiert, gilt ferner $S_f(\nu) \propto |\nu|^\gamma$ und damit:

$$\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j) \propto \lambda_j^{-\gamma-1}. \quad (4.2.8)$$

Plottet man daher $\log(\sigma_{\tilde{w}}^2(\lambda_j))$ gegen $\log(\lambda_j)$, lässt sich aus der Steigung der Regressionsgeraden β die fraktale Dimension D und damit der Hurst-Exponent H ableiten. Für selbstähnliche Prozesse lässt sich nämlich zeigen (Percival und Walden 2008, S. 279f):

$$\beta = 4 - 2D, \quad (4.2.9)$$

$$\beta = -\gamma - 1, \quad (4.2.10)$$

$$\gamma = -2H - 1, \quad (4.2.11)$$

so dass der in Abschnitt 2.3.3 beschriebene Zusammenhang $D = 2 - H$ gilt (Gneiting, Ševčíková, Percival et al. 2012, S. 260).

Gneiting et al. (2012) haben diesen Wavelet-basierten Ansatz im R-Package *fractal-dim* umgesetzt, wobei die Grundlage des Verfahrens zur Schätzung der fraktalen Dimension mittels eines log-log-Plots aus Percival und Walden (2008, Kap. 9.5) stammt. Dabei ersetzen die Autoren den gängigen Ansatz einer *Ordinary Least Square (OLS)*-

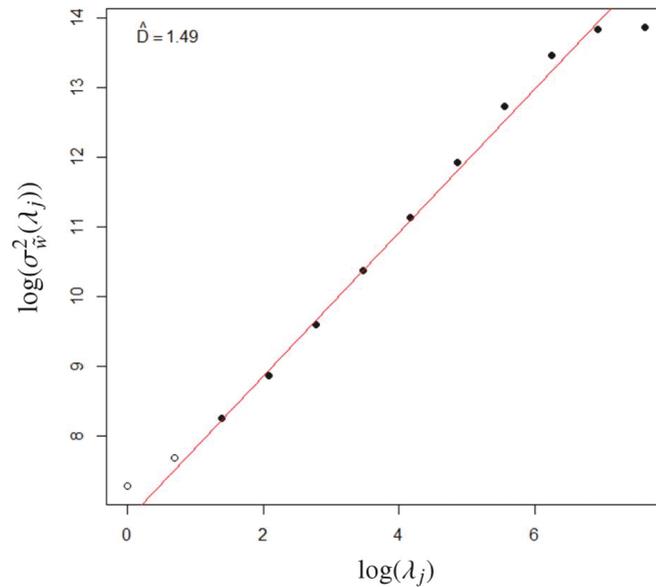


Abbildung 4.2.5: log-log-Plot für den FSE DAX TR EUR Index basierend auf Tagesdaten (Haar)

Regression (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 170f) durch einen gewichteten Least-Square-Schätzer. Der Grund hierfür ist, dass der lineare Zusammenhang zwischen den Log-Werten der WVar und λ_j auf höheren Skalen eindeutiger approximiert wird (vgl. Percival und Walden 2008, S. 374)¹⁴.

Abbildung 4.2.5 zeigt einen log-log-Plot des *fractaldim*-Pakets für den FSE DAX TR EUR Index basierend auf Tagesdaten von Januar 1995 bis Ende Februar 2013. Auf der Abszisse sind die log-Werte für λ_j aufgetragen, die Ordinate zeigt die log-Werte der WVar $\sigma_w^2(\lambda_j)$. Wie man sehen kann, werden wie oben beschrieben nur bestimmte, d. i. ausgefüllte Kreise für die Regression berücksichtigt. Bis auf den letzten Punkt liegen dabei alle Punkte sehr nahe an der Regressionsgerade und das Bestimmtheitsmaß R^2 beträgt 0,983¹⁵. Tabelle 4.2.1 fasst die Ergebnisse für verschiedene Wavelet-Familien zusammen: $D_{Waveletfamilie}$ bezeichnet dabei den Wert der jeweiligen fraktalen Dimension, der sich aus der Regression ergibt. $H_{Waveletfamilie}$ steht für den Hurst-Exponenten,

¹⁴Für weitere Details der Schätzmethode des *fractaldim*-Pakets sei auf Gneiting et al. (2012) und Percival und Walden (2008, S. 374ff) verwiesen.

¹⁵Die R^2 -Werte sind für diese und die folgenden Analysen auffällig hoch. Dies hängt u. a. damit zusammen, dass die Regression auf der oben beschriebenen Methode nach Gneiting et al. (2012) basiert und nur die relevanten, d. i. ausgefüllten Kreise in die Schätzung eingehen.

der anhand von $D = 2 - H$ berechnet wurde, und $R^2_{Waveletfamilie}$ das Bestimmtheitsmaß der jeweiligen Regression. Wie man sehen kann, ist R^2 für das Haar-Wavelet am höchsten.

Tabelle 4.2.1: Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension des FSE DAX TR EUR Index

Index	D_{Haar}	D_{D4}	D_{LA8}	H_{Haar}	H_{D4}	H_{LA8}	R^2_{Haar}	R^2_{D4}	R^2_{LA8}
FSE DAX TR EUR	1,485	1,497	1,508	0,515	0,503	0,492	0,983	0,982	0,974

Dieses Ergebnis wird auch in Tabelle 4.2.3 bestätigt, die die Werte für verschiedene MSCI Indizes zusammenfasst. Auch hier zeigt sich, dass die Regression für die fraktale Dimension mit dem Haar-Wavelet das höchste Bestimmtheitsmaß mit einem Mittelwert von 0,995 aufweist. Die Zeitreihen der Analyse basieren auf täglichen Closing-Preisen zwischen dem 01.01.2001 und dem 28.02.2013 mit je 3174 Datenpunkten. Tabelle 4.2.2 gibt eine Übersicht der deskriptiven Kennzahlen der Indizes: μ und σ geben Mittelwert bzw. Standardabweichung der täglichen diskreten Renditen innerhalb dieses Zeitraums an. Wie man sehen kann, weichen Schiefe und Kurtosis bei allen Zeitreihen relativ deutlich von Null bzw. Drei ab und unterscheiden sich somit von den Parametern einer Normalverteilung. Auffällig ist, dass insbesondere Indizes von Schwellenländern wie Russland oder Indien eine zweistellige Wölbung aufweisen.

Die Hurst-Exponenten für das Haar-Wavelet in Tabelle 4.2.3 sind für 29 der 43 Indizes kleiner als $1/2$ und implizieren damit gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 2.3.3 ein anti-persistentes Verhalten. Bei den beiden anderen Wavelet-Familien besitzen jeweils 35 Indizes einen Wert kleiner als $1/2$. Der kleinste Wert von H_{Haar} beträgt 0,430 für den MSCI South Africa GR USD Index, das Maximum liegt bei 0,551 beim MSCI Austria GR USD Index. Für die beiden anderen Wavelet-Familien liegen die Werte jeweils etwas darunter. Nur bei wenigen Indizes liegt H_{Haar} nahe dem Wert $1/2$, wie beispielsweise beim MSCI Czech Republic GR USD ($H_{Haar} = 0,502$), MSCI Norway GR USD ($H_{Haar} = 0,498$) und dem Weltindex MSCI ACWI GR USD ($H_{Haar} = 0,498$). Der durchschnittliche Wert über alle Indizes liegt bei 0,491.

Andere Schätzverfahren für den Hurst-Exponenten wie beispielsweise die sogenannte *Detrended Fluctuation Analysis* oder *Rescaled Range Analysis* kommen in anderen Studien¹⁶ zu ähnlichen Ergebnissen, d. i. dass Aktienindizes oftmals einen Hurst-Wert

¹⁶Siehe dazu beispielsweise Mitra (2012), Matos, Gama, Ruskin, Sharkasi und Crane (2008), Grech und

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.2.2: Deskriptive Kennzahlen verschiedener MSCI Indizes

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min	Max
MSCI Australia GR USD	0,06	0,09	1,61	-0,60	8,07	941,55	5766,64
MSCI Austria GR USD	0,04	0,08	1,89	0,08	7,47	1336,45	9020,62
MSCI Belgium GR USD	0,03	0,08	1,60	-0,28	7,05	3849,83	17947,38
MSCI Brazil GR USD	0,08	0,12	2,29	0,02	7,40	487,20	10477,48
MSCI Canada GR USD	0,04	0,10	1,49	-0,52	9,08	1375,55	7065,29
MSCI China GR USD	0,06	0,02	1,88	0,12	6,00	15,20	145,25
MSCI Colombia GR USD	0,14	0,12	1,67	0,05	11,84	55,75	2881,12
MSCI Czech Republic GR USD	0,08	0,11	1,84	0,19	12,88	60,77	1352,77
MSCI Denmark GR USD	0,05	0,07	1,52	-0,12	6,81	3945,27	23301,39
MSCI Finland GR USD	0,01	0,00	2,22	-0,07	4,30	382,81	1663,14
MSCI France GR USD	0,02	0,05	1,72	0,20	5,87	2317,59	8370,52
MSCI Germany GR USD	0,03	0,07	1,76	0,10	4,57	1489,06	7339,29
MSCI Greece GR USD	-0,01	0,02	2,18	0,33	5,27	113,90	1995,93
MSCI Hong Kong GR USD	0,04	0,01	1,38	-0,02	6,90	11241,99	47281,48
MSCI India GR USD	0,06	0,05	1,77	0,23	10,23	81,54	889,20
MSCI Indonesia GR USD	0,11	0,07	2,02	-0,20	7,24	73,52	2005,63
MSCI Ireland GR USD	0,00	0,04	1,95	-0,39	7,78	142,21	947,66
MSCI Italy GR USD	0,01	0,04	1,74	0,18	6,47	574,90	1967,79
MSCI Japan GR USD	0,01	0,02	1,45	-0,03	4,53	2302,12	6017,70
MSCI Korea GR USD	0,08	0,07	2,08	0,30	15,75	87,56	696,66
MSCI Malaysia GR USD	0,05	0,02	1,01	-0,52	7,61	165,99	902,73
MSCI Mexico GR USD	0,07	0,11	1,69	0,14	7,45	1704,73	12222,23
MSCI Netherlands GR USD	0,02	0,04	1,65	0,05	5,61	4699,71	17652,63
MSCI New Zealand GR USD	0,06	0,11	1,40	-0,39	4,88	99,29	512,88
MSCI Norway GR USD	0,06	0,11	2,03	-0,19	6,85	2000,95	16175,17
MSCI Peru GR USD	0,11	0,08	1,90	-0,22	7,37	147,33	3255,85
MSCI Philippines GR USD	0,07	0,02	1,57	0,29	9,77	91,15	936,94
MSCI Poland GR USD	0,05	0,06	2,08	0,01	4,17	301,34	2180,27
MSCI Portugal GR USD	0,01	0,04	1,45	0,17	8,77	98,63	433,63
MSCI Russia GR USD	0,09	0,13	2,46	0,10	13,36	144,65	1968,22
MSCI Singapore GR USD	0,04	0,07	1,40	-0,08	4,71	2399,35	12184,18
MSCI South Africa GR USD	0,07	0,12	1,84	-0,12	4,43	148,70	1080,73
MSCI Spain GR USD	0,04	0,02	1,83	0,35	6,85	1274,63	6630,98
MSCI Sweden GR USD	0,05	0,05	2,04	0,23	4,43	4569,89	29336,63
MSCI Switzerland GR USD	0,03	0,04	1,31	0,11	5,20	3300,94	12450,87
MSCI Taiwan GR USD	0,04	0,00	1,61	0,02	2,10	147,84	495,31
MSCI Thailand GR USD	0,09	0,01	1,71	-0,29	7,07	73,68	988,16
MSCI Turkey GR USD	0,08	0,09	2,92	0,10	8,33	162,50	1859,59
MSCI UK GR USD	0,03	0,05	1,48	0,11	8,50	2674,94	8243,39
MSCI USA GR USD	0,02	0,04	1,32	0,02	8,47	2268,00	5621,74
MSCI World GR USD	0,02	0,06	1,11	-0,16	7,30	1931,96	5164,82
MSCI ACWI GR USD	0,02	0,07	1,10	-0,18	7,35	229,09	647,46
MSCI EM GR USD	0,05	0,12	1,30	-0,32	8,00	345,01	2213,76

ungleich $1/2$ besitzen und damit persistentes bzw. anti-persistentes Verhalten aufweisen. Insbesondere widersprechen die Ergebnisse auch der in Abschnitt 2.2 erwähnten EMH und implizieren damit zumindest zu einem gewissen Grad die Prognostizierbarkeit der Kapitalmärkte. Da es sich bei der Bestimmung des Hurst-Exponenten jedoch immer um eine Schätzmethode handelt, ist die Frage nach *dem* besten Verfahren nicht mit Be-

Mazur (2004), Ausloos (2000), Nawrocki (1995), Chakraborti, Patriarca und Santhanam (2007) oder Qian und Rasheed (2004).

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.2.3: Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension verschiedener MSCI Indizes

Index	D_{Haar}	D_{D4}	D_{LA8}	H_{Haar}	H_{D4}	H_{LA8}	R^2_{Haar}	R^2_{D4}	R^2_{LA8}
MSCI Australia GR USD	1,531	1,542	1,544	0,469	0,458	0,456	0,996	0,989	0,983
MSCI Austria GR USD	1,449	1,482	1,492	0,551	0,518	0,508	0,998	0,990	0,983
MSCI Belgium GR USD	1,465	1,498	1,507	0,535	0,502	0,493	0,996	0,990	0,985
MSCI Brazil GR USD	1,518	1,535	1,539	0,482	0,465	0,461	0,993	0,977	0,965
MSCI Canada GR USD	1,524	1,528	1,525	0,476	0,472	0,475	0,996	0,989	0,985
MSCI China GR USD	1,505	1,508	1,509	0,495	0,492	0,491	0,996	0,986	0,977
MSCI Colombia GR USD	1,487	1,506	1,507	0,513	0,494	0,493	0,987	0,977	0,983
MSCI Czech Republic GR USD	1,498	1,518	1,528	0,502	0,482	0,472	0,995	0,985	0,978
MSCI Denmark GR USD	1,506	1,526	1,529	0,494	0,474	0,471	0,997	0,992	0,986
MSCI Finland GR USD	1,522	1,537	1,546	0,478	0,463	0,454	0,994	0,994	0,989
MSCI France GR USD	1,541	1,555	1,561	0,459	0,445	0,439	0,998	0,994	0,990
MSCI Germany GR USD	1,515	1,527	1,532	0,485	0,473	0,468	0,997	0,993	0,987
MSCI Greece GR USD	1,462	1,486	1,492	0,538	0,514	0,508	0,997	0,985	0,975
MSCI Hong Kong GR USD	1,492	1,500	1,500	0,508	0,500	0,500	0,996	0,988	0,973
MSCI India GR USD	1,486	1,491	1,493	0,514	0,509	0,507	0,996	0,987	0,977
MSCI Indonesia GR USD	1,521	1,540	1,542	0,479	0,460	0,458	0,990	0,982	0,985
MSCI Ireland GR USD	1,509	1,558	1,560	0,491	0,442	0,440	0,989	0,964	0,953
MSCI Italy GR USD	1,506	1,521	1,526	0,494	0,479	0,474	0,998	0,990	0,981
MSCI Japan GR USD	1,563	1,573	1,575	0,437	0,427	0,425	0,996	0,990	0,986
MSCI Korea GR USD	1,531	1,537	1,538	0,469	0,463	0,462	0,997	0,993	0,989
MSCI Malaysia GR USD	1,467	1,482	1,483	0,533	0,518	0,517	0,995	0,988	0,988
MSCI Mexico GR USD	1,529	1,543	1,547	0,471	0,457	0,453	0,995	0,991	0,985
MSCI Netherlands GR USD	1,514	1,529	1,537	0,486	0,471	0,463	0,994	0,990	0,984
MSCI New Zealand GR USD	1,508	1,527	1,529	0,492	0,473	0,471	0,996	0,986	0,980
MSCI Norway GR USD	1,502	1,513	1,517	0,498	0,487	0,483	0,998	0,995	0,993
MSCI Peru GR USD	1,509	1,517	1,520	0,491	0,483	0,480	0,993	0,978	0,968
MSCI Philippines GR USD	1,494	1,511	1,512	0,506	0,489	0,488	0,996	0,990	0,987
MSCI Poland GR USD	1,504	1,504	1,503	0,496	0,496	0,497	0,999	0,996	0,993
MSCI Portugal GR USD	1,479	1,504	1,511	0,521	0,496	0,489	0,996	0,989	0,981
MSCI Russia GR USD	1,493	1,506	1,509	0,507	0,494	0,491	0,996	0,993	0,990
MSCI Singapore GR USD	1,478	1,492	1,499	0,522	0,508	0,501	0,997	0,992	0,981
MSCI South Africa GR USD	1,570	1,574	1,572	0,430	0,426	0,428	0,988	0,987	0,996
MSCI Spain GR USD	1,528	1,545	1,553	0,472	0,455	0,447	0,996	0,988	0,978
MSCI Sweden GR USD	1,550	1,571	1,576	0,450	0,429	0,424	0,997	0,991	0,980
MSCI Switzerland GR USD	1,537	1,557	1,562	0,463	0,443	0,438	0,997	0,992	0,987
MSCI Taiwan GR USD	1,516	1,514	1,511	0,484	0,486	0,489	0,988	0,977	0,948
MSCI Thailand GR USD	1,495	1,502	1,498	0,505	0,498	0,502	0,994	0,991	0,994
MSCI Turkey GR USD	1,512	1,506	1,503	0,488	0,494	0,497	0,993	0,983	0,971
MSCI UK GR USD	1,548	1,575	1,582	0,452	0,425	0,418	0,993	0,984	0,977
MSCI USA GR USD	1,542	1,557	1,560	0,458	0,443	0,440	0,991	0,981	0,963
MSCI World GR USD	1,509	1,519	1,521	0,491	0,481	0,479	0,996	0,990	0,982
MSCI ACWI GR USD	1,502	1,511	1,512	0,498	0,489	0,488	0,996	0,992	0,983
MSCI EM GR USD	1,474	1,477	1,475	0,526	0,523	0,525	0,997	0,990	0,983
Mittelwert	1,509	1,523	1,526	0,491	0,477	0,474	0,995	0,988	0,981

stimmtheit zu beantworten. Im Falle des Schätzverfahrens auf Basis der WT scheint das Haar-Wavelet aufgrund des hohen Bestimmtheitsmaßes der log-log-Regression die geeignetste Wavelet-Basis zu sein. Doch welche Schlüsse lassen sich aus den Ergebnissen der Analyse für die Praxis ziehen? Und wie lässt sich der Hurst-Exponent im Portfoliomanagement implementieren?

Ein wesentlicher Themenbereich, mit dem sich die Econophysik wie im theoretischen

Kapitel beschrieben wurde beschäftigt, bildet die Frage, wie Renditen von spekulativen Vermögensgegenständen verteilt sind. Zentral ist dabei insbesondere die Frage, inwiefern die Verteilungen von der Normalverteilungshypothese abweichen und beispielsweise schwere Enden besitzen. Abschnitt A.2 im Anhang stellt dazu das Themengebiet α -stabiler Verteilungen vor. Solche Verteilungen werden primär durch den sogenannten *Stabilitätsparameter* α gekennzeichnet. Dieser Parameter bestimmt, wie weit die Enden einer Verteilung auslaufen. Je kleiner der Wert für α ist, desto schwerer sind dabei die Enden. In Abschnitt A.2.2 wird darüber hinaus die Beziehung $H = 1/\alpha$ erläutert, die das Verhältnis zwischen dem Hurst-Exponenten und dem Stabilitätsparameter angibt. Anhand der log-log-Regression für die Fraktale Dimension mittels der WT lässt sich α somit implizit bestimmen.

Eine zweite wichtige Frage in der Praxis ist, wie sich das Preisrisiko einer Aktie quantifizieren lässt. Meist wird dabei die Standardabweichung der Renditen berechnet und als Risikomaß verwendet. Um das Risiko von kleinen auf große Zeitskalen zu transponieren, wird oft die sogenannte *Wurzel-T-Regel* verwendet. Diese Regel schreibt vor, die Standardabweichung mit der H-ten Wurzel der in einem Jahr vorkommenden Anzahl an Zeitpunkten, die sich je nach Granularität der Daten ergibt, zu multiplizieren, um die annualisierte Volatilität zu erhalten¹⁷:

$$\sigma_{ann} = \sqrt[H]{T} \sigma_t, \quad (4.2.12)$$

wobei H wiederum der Hurst-Exponent ist. In der Praxis wird für die Regel meist $H = 1/2$ festgesetzt, was mit der Annahme eines Random Walks korrespondiert. Im Falle von $H \neq 1/2$ kann diese Praxis jedoch zu großen Fehleinschätzungen in Bezug auf das annualisierte Risiko führen.

Um einordnen zu können, inwiefern die Abweichung von der Standardmethode mit der Quadratwurzel von Relevanz ist, wird daher eine vergleichende Analyse erstellt. Tabelle 4.2.4 fasst dazu einige deskriptive Merkmale verschiedener Aktien- und Rohstoffindizes zusammen. Als Grundlage dienen tägliche Closing-Preise in den jeweiligen Landeswährungen für die Zeiträume 01.01.1997 bis 28.02.2013 bei den Länderaktien-

¹⁷Verwendet man beispielsweise $t =$ tägliche Renditen, multipliziert man die Volatilität unter der Annahme von $H = 1/2$ mit der Quadratwurzel der Anzahl der Tage in einem Jahr, d. h. mit $\sqrt{250}$. Die Annahme von 250 Handelstagen pro Jahr ist dabei gängig. Im Falle von Monatsrenditen erfolgt die Multiplikation demgemäß mit $\sqrt{12}$.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.2.4: Deskriptive Kennzahlen verschiedener Indizes

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min	Max
Euronext Paris CAC 40 GR EUR	0,03	0,02	1,52	0,14	4,59	2992,92	10707,80
FSE DAX TR EUR	0,04	0,05	1,59	0,09	4,10	2202,96	8105,69
DJ Industrial Average TR USD	0,03	0,03	1,22	0,05	7,63	8556,09	26970,00
FTSE 100 TR GBP	0,03	0,01	1,25	0,00	5,59	1624,17	4518,55
Hang Seng HSI PR HKD	0,03	0,00	1,74	0,43	10,72	6660,42	31638,22
Nikkei 225 Average PR JPY	0,00	0,00	1,52	-0,11	6,14	7054,98	20833,21
S&P TR	0,03	0,03	1,29	-0,02	7,50	2096,74	5833,94
S&P Sec Cons Disc TR	0,04	0,02	1,31	0,08	7,37	48,15	513,56
S&P Sec Cons Staples TR	0,04	0,03	0,97	0,00	8,08	48,36	602,14
S&P Sec Energy TR	0,05	0,00	1,49	0,03	12,14	64,61	919,18
S&P Sec Financials TR	0,04	0,00	1,81	0,40	16,35	40,63	670,05
S&P Sec Health Care TR	0,05	0,03	1,19	0,01	6,00	56,65	686,93
S&P Sec Industrials TR	0,04	0,01	1,25	-0,19	6,17	53,36	512,20
S&P Sec Information Technology TR	0,05	0,04	1,75	0,32	5,48	50,61	1005,48
S&P Sec Materials TR	0,04	0,00	1,42	-0,04	7,43	50,92	384,55
S&P Sec Telecom Services TR	0,03	0,00	1,35	0,25	7,67	61,58	387,31
S&P Sec Utilities TR	0,03	0,03	1,09	0,21	12,79	65,33	403,48
DJ UBS Commodity TR USD	0,00	0,00	1,22	-0,27	2,25	204,41	474,21
DJ UBS Sub Agriculture TR USD	0,03	0,00	1,41	-0,14	2,07	95,55	201,85
DJ UBS Sub Aluminium TR USD	-0,01	0,00	1,63	-0,13	1,20	67,11	183,41
DJ UBS Sub Coffee TR USD	0,00	0,00	1,80	-0,10	1,69	41,77	106,64
DJ UBS Sub Copper TR USD	0,05	0,00	2,17	0,06	2,76	291,90	1001,75
DJ UBS Sub Corn TR USD	0,05	0,00	2,06	0,08	1,35	21,30	65,68
DJ UBS Sub Cotton TR USD	0,02	0,00	1,84	-0,08	0,93	22,00	104,72
DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD	-0,01	0,00	2,23	-0,04	3,52	325,16	1656,42
DJ UBS Sub Gold TR USD	0,06	0,05	1,32	-0,12	3,89	141,13	485,95
DJ UBS Sub Heating Oil TR USD	0,02	0,00	1,97	-0,04	2,22	238,44	956,77
DJ UBS Sub Lean Hogs TR USD	-0,06	0,00	1,40	0,07	1,12	15,56	63,17
DJ UBS Sub Live Cattle TR USD	-0,02	0,00	0,88	-0,03	1,25	122,37	214,28
DJ UBS Sub Natural Gas TR USD	-0,18	-0,08	2,83	0,33	1,62	1,86	147,22
DJ UBS Sub Nickel TR USD	0,05	0,00	2,66	0,16	2,17	211,33	1210,66
DJ UBS Sub Silver TR USD	0,09	0,18	2,41	-0,69	4,98	201,40	1086,31
DJ UBS Sub Soybean Oil TR USD	0,03	0,00	1,58	0,08	2,23	92,50	273,78
DJ UBS Sub Soybean TR USD	0,06	0,01	1,63	-0,20	2,04	163,94	562,61
DJ UBS Sub Sugar TR USD	0,02	0,00	2,26	-0,24	1,72	205,33	598,50
DJ UBS Sub Unleaded Gas TR USD	0,04	0,03	2,24	-0,17	2,93	289,43	1288,52
DJ UBS Sub Wheat TR USD	0,01	0,00	2,28	0,07	1,33	29,55	129,71
DJ UBS Sub Zinc TR USD	0,03	0,00	2,41	-0,01	1,19	87,85	359,57

indizes mit 4217 Datenpunkten, 11.09.1989 bis 28.02.2013 für die S&P Sektorindizes in USD mit 6124 Datenpunkten und 02.01.2006 bis 28.02.2013 für die Rohstoffindizes in USD mit 1869 Datenpunkten. Tabelle 4.2.5 fasst die Ergebnisse der oben beschriebenen log-log-Regression für das Haar-Wavelet zusammen. Darüber hinaus werden in der fünften Spalte die Werte für den Stabilitätsparameter α dargestellt. Wie man sehen kann, ist α für die meisten Länderindizes mit Ausnahme des britischen FTSE 100 TR GBP Index nahe am Wert 2. Die Unterstellung einer Normalverteilung wäre in diesen Fällen somit zumindest aus dieser Sicht vertretbar. Bei den S&P Sektoren ist die Spannweite

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.2.5: Ergebnisse der WT-Schätzmethode für die fraktale Dimension verschiedener Indizes

Index	D_{Haar}	H_{Haar}	R^2_{Haar}	α	$\sigma_{ann}^{H=1/2}$ [%]	$\sigma_{ann}^{H_{Haar}}$ [%]	Δ_{abs} [%]	Δ_{rel} [%]
Euronext Paris CAC 40 GR EUR	1,503	0,497	0,948	2,01	24,03	23,64	-0,39	1,64
FSE DAX TR EUR	1,49	0,51	0,963	1,96	25,14	26,57	1,43	5,68
DJ Industrial Average TR USD	1,519	0,481	0,994	2,08	19,29	17,37	-1,92	9,96
FTSE 100 TR GBP	1,537	0,463	0,995	2,16	19,76	16,11	-3,65	18,48
Hang Seng HSI PR HKD	1,5	0,5	0,984	2,00	27,51	27,51	0,00	0,00
Nikkei 225 Average PR JPY	1,501	0,499	0,989	2,00	24,03	23,90	-0,13	0,55
S&P 500 TR	1,513	0,487	0,978	2,05	20,40	18,98	-1,41	6,93
S&P 500 Sec Cons Disc TR	1,512	0,488	0,997	2,05	20,71	19,39	-1,33	6,41
S&P 500 Sec Cons Staples TR	1,492	0,508	0,988	1,97	15,34	16,03	0,69	4,52
S&P 500 Sec Energy TR	1,53	0,47	0,989	2,13	23,56	19,96	-3,60	15,27
S&P 500 Sec Financials TR	1,525	0,475	0,995	2,11	28,62	24,93	-3,69	12,89
S&P 500 Sec Health Care TR	1,534	0,466	0,987	2,15	18,82	15,60	-3,22	17,12
S&P 500 Sec Industrials TR	1,502	0,498	0,995	2,01	19,76	19,55	-0,22	1,10
S&P 500 Sec Information Technology TR	1,489	0,511	0,992	1,96	27,67	29,40	1,73	6,26
S&P 500 Sec Materials TR	1,523	0,477	0,99	2,10	22,45	19,77	-2,68	11,93
S&P 500 Sec Telecom Services TR	1,492	0,508	0,987	1,97	21,35	22,31	0,96	4,52
S&P 500 Sec Utilities TR	1,502	0,498	0,995	2,01	17,23	17,05	-0,19	1,10
DJ UBS Commodity TR USD	1,465	0,535	0,969	1,87	19,29	23,40	4,11	21,32
DJ UBS Sub Agriculture TR USD	1,486	0,514	0,987	1,95	22,29	24,09	1,79	8,04
DJ UBS Sub Aluminium TR USD	1,499	0,501	0,993	2,00	25,77	25,92	0,14	0,55
DJ UBS Sub Coffee TR USD	1,522	0,478	0,988	2,09	28,46	25,21	-3,26	11,44
DJ UBS Sub Copper TR USD	1,486	0,514	0,959	1,95	34,31	37,07	2,76	8,04
DJ UBS Sub Corn TR USD	1,485	0,515	0,99	1,94	32,57	35,38	2,81	8,63
DJ UBS Sub Cotton TR USD	1,478	0,522	0,99	1,92	29,09	32,85	3,76	12,92
DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD	1,443	0,557	0,969	1,80	35,26	48,30	13,04	36,99
DJ UBS Sub Gold TR USD	1,551	0,449	0,97	2,23	20,87	15,75	-5,12	24,54
DJ UBS Sub Heating Oil TR USD	1,445	0,555	0,952	1,80	31,15	42,20	11,05	35,48
DJ UBS Sub Lean Hogs TR USD	1,5	0,5	0,981	2,00	22,14	22,14	0,00	0,00
DJ UBS Sub Live Cattle TR USD	1,533	0,467	0,992	2,14	13,91	11,60	-2,32	16,66
DJ UBS Sub Natural Gas TR USD	1,516	0,484	0,995	2,07	44,75	40,96	-3,78	8,46
DJ UBS Sub Nickel TR USD	1,486	0,514	0,98	1,95	42,06	45,44	3,38	8,04
DJ UBS Sub Silver TR USD	1,538	0,462	0,996	2,16	38,11	30,89	-7,21	18,93
DJ UBS Sub Soybean Oil TR USD	1,472	0,528	0,986	1,89	24,98	29,16	4,18	16,72
DJ UBS Sub Soybean TR USD	1,497	0,503	0,998	1,99	25,77	26,20	0,43	1,67
DJ UBS Sub Sugar TR USD	1,508	0,492	0,995	2,03	35,73	34,19	-1,54	4,32
DJ UBS Sub Unleaded Gas TR USD	1,466	0,534	0,973	1,87	35,42	42,73	7,31	20,65
DJ UBS Sub Wheat TR USD	1,531	0,469	0,996	2,13	36,05	30,38	-5,67	15,73
DJ UBS Sub Zinc TR USD	1,537	0,463	0,997	2,16	38,11	31,06	-7,04	18,48

der Werte etwas größer, wobei α tendenziell größer als 2 ist. Weit größere Unterschiede ergeben sich jedoch bei den Rohstoffen. Rohöl (DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD) und Gold (DJ UBS Sub Gold TR USD) zeigen mit einem Hurst-Wert von 0,557 ($\alpha = 1,80$) respektive 0,449 ($\alpha = 2,23$) eine deutlich unterschiedliche Charakteristik im Vergleich zum Random Walk¹⁸.

Die letzten vier Spalten verdeutlichen darüber hinaus, welche Auswirkungen diese

¹⁸Gemäß den Erläuterungen in Abschnitt A.2.2 widersprechen α -Werte größer 2 auch der Annahme einer stabilen Verteilung mit nicht-endlicher Varianz.

Ergebnisse auf das Risiko haben. Die erste dieser Spalten beinhaltet das annualisierte Risiko basierend auf der täglichen Volatilität multipliziert mit der Quadratwurzel (d. h. mit $H = 1/2$) aus 250. Die nächste Spalte zeigt hingegen die Werte, die sich für die annualisierte Standardabweichung mit den Hurst-Exponenten aus der WT-basierten Schätzmethode ergeben. Die jeweiligen Differenzen werden in der vorletzten (absolut) und letzten Spalte (relativ) angegeben. Auffallend ist, dass die Differenz nur für die zwei Indizes Hang Seng HSI PR HKD und DJ UBS Sub Lean Hogs TR USD gleich Null sind, da für beide Werte $H_{Haar} = 0,5$. Bei allen anderen Indizes gibt es zum Teil sehr große Unterschiede. Im Falle von Rohöl würde man das annualisierte Risiko beispielsweise um ca. 13% (absolut) bzw. um knapp 37% (relativ) gegenüber der Standardmethode unterschätzen. Andererseits würde man das Risiko bei Gold um ca. 5% (absolut) bzw. um knapp 25% (relativ) überschätzen. Diese Unterschiede können auf die Konstruktion eines Portfolios bzw. dessen risikoadjustierte Optimierung enorme Auswirkungen haben und zu vollkommen unterschiedlichen Portfoliogewichten der einzelnen Assets führen.

4.2.3 Varianzanalyse – CWT

Wie eingangs dieses Kapitels erläutert, ist die CWT aufgrund ihrer hohen Redundanz vor allem dazu geeignet, Daten auf deskriptiver Ebene zu untersuchen. Insofern dient die CWT in den meisten Fällen als eine vorausgehende Analyse, um erste Eindrücke von den Strukturen und charakteristischen Eigenschaften einer Zeitreihe zu erhalten (Setz 2011, S. 7). Die inhärente Eigenschaft der WT, Daten im Gegensatz zur FT nicht nur im Frequenzraum zu repräsentieren, sondern auch den zeitlichen Verlauf der Transformationskoeffizienten in der Zeit-Skalen-Ebene zu erfassen, ermöglicht dabei, Aufschlüsse über das dynamische Verhalten des Datenmaterials zu erhalten. Spezifische Muster lassen sich beispielsweise fokussiert, d. h. lokalisiert auf bestimmten Skalen im Zeitverlauf untersuchen. Andererseits können aber auch globale Strukturen analysiert oder solche Skalen einer Zeitreihe spezifiziert werden, die einen großen Anteil an der Dynamik aufweisen. Solche dominanten Skalen können daraufhin beispielsweise dazu verwendet werden, Risikokennzahlen wie Aktien-Betas zu kalkulieren, die effizienter an den jeweiligen Investitionshorizont angepasst sind als die auf klassische Weise berechneten Werte (vgl. Gallegati et al. 2013, S. 188). Darüber hinaus bietet eine solche Betrachtung die Möglichkeit, einen systematischen Ansatz zu entwickeln, welche Fre-

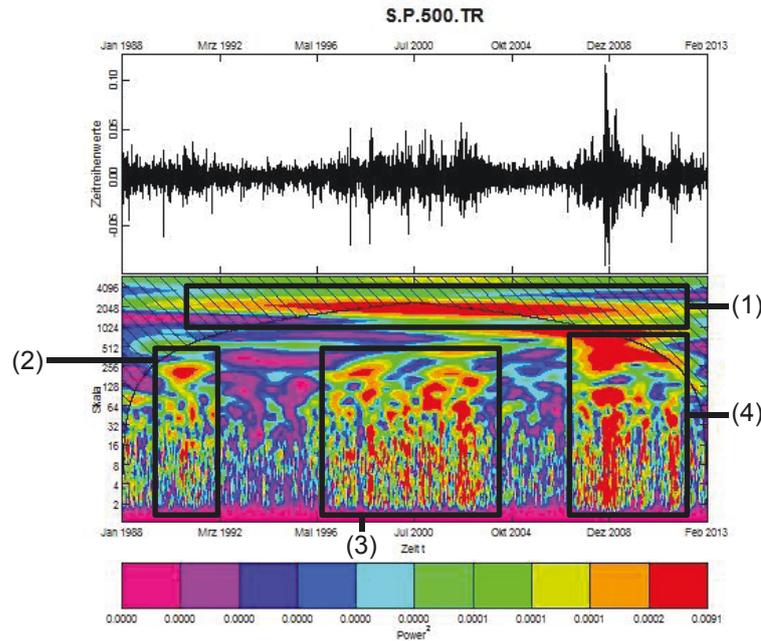


Abbildung 4.2.6: Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Tagesdaten

quenzbänder für Trendfolgeindikatoren wie gleitende Durchschnitte relevant sind.

Auf qualitativer Ebene werden solche Auswertungen häufig über sogenannte *Skalogramme* realisiert (Schleicher 2002, S. 20ff). Ein Skalogramm visualisiert dabei „the frequency content of signals as a function of time and thus the way the dynamics of the sequence evolve“ (Gallegati et al. 2013, S. 12f). Es ist somit das Wavelet-Pendant eines Spektrogramms, das die Koeffizienten auf verschiedenen Skalen im zeitlichen Verlauf quantifiziert und somit die Lokalisierungseigenschaft der diskreten WT in der Zeit-Skalen-Ebene visualisiert (Wei und Billings 2005, S.1ff). Genauer gesagt wird für das Skalogramm das Power-Spektrum $|W(s,u)|^2$ der CWT-Koeffizienten im zeitlichen Verlauf dargestellt (Setz 2011, S. 11ff). Die Höhe der Koeffizienten bzw. deren Betragsquadraten wird wiederum über das Farbspektrum eines Konturdiagramms visualisiert.

Abbildung 4.2.6 zeigt einen solchen Konturplot, der mit dem *dplr*-Paket in R erstellt wurde¹⁹. Zunächst wurde die Zeitreihe – in diesem Fall die täglichen stetigen Renditen der Form $r_t = \log(\frac{x_t}{x_{t-1}})$ des S&P 500 TR Index in USD – im Rahmen einer CWT mit

¹⁹Die Berechnung der WT und die Erstellung des Konturdiagramms im *dplr*-Paket basiert im Wesentlichen auf den Ausführungen von Torrence und Compo (1998).

Hilfe des Morlet-Wavelets in die Zeit-Skalen-Ebene überführt und das Power-Spektrum anschließend in Form eines Konturdiagramms dargestellt²⁰. Im oberen Teil von Abbildung 4.2.6 ist die zugrunde liegende Zeitreihe aufgeführt, unterhalb des Konturdiagramms befindet sich die Legende des Power-Spektrums: Rote Bereiche markieren dabei Regionen, die mit sehr hohen Koeffizienten assoziiert werden können; blaue bzw. violette Gebiete hingegen repräsentieren diejenigen mit relativ niedrigen Werten. Eher neutrale Werte werden durch die Farben hellblau und grün gekennzeichnet. Insgesamt wird die Farbgebung durch das Power-Spektrum zum Quadrat quantifiziert, um sehr kleine Werte besser unterscheiden und voneinander abgrenzen zu können. Der schraffierte Bereich im oberen Teil des Konturdiagramms wird als *cone of influence* (COI) bezeichnet und hängt mit den in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Randbedingungen zusammen: Da es sich bei einer empirischen Analyse von Finanzdaten naturgemäß um eine endliche Reihe von Datenpunkten handelt, werden einige Wavelet-Koeffizienten durch Randeffekte beeinflusst. Genauer gesagt werden im vorliegenden Fall fehlende Werte in Form des Zero-Paddings augmentiert, so dass die Koeffizienten im COI demgemäß zu niedrige Werte besitzen. Insofern sollte der COI-Bereich des Skalogramms nur unter Vorbehalt interpretiert werden²¹.

Die wesentliche Frage im Hinblick auf Skalogramme generell und auf Abbildung 4.2.6 im Speziellen ist nun, wie sich die Ergebnisse interpretieren lassen können. Eine äußerst gelungene Einführung hierzu bietet Setz (2011), der ebenfalls mit dem dplR-Paket²² aus R arbeitet und eine Reihe von Voruntersuchungen im Hinblick auf künstliche Zeitreihen vornimmt. Dadurch lässt sich evaluieren, wie sich bestimmte Eigenschaften, die bei Finanzdaten vorkommen, im Power-Spektrum einer CWT äußern und wie man diese Muster dementsprechend im Konturplot einer realen Zeitreihe identifizieren kann. Beispielsweise simuliert Setz (2011, S. 19ff) einen White-Noise-Prozess (als Approximation von Renditen spekulativer Vermögensgegenstände) und inkludiert drei spezifische Phänomene in die simulierten Zeitreihen:

²⁰Die Berechnung der Koeffizienten erfolgte mir der Funktion `morlet()`. Der Konturplot wurde mit der Funktion `wavelet.plot()` erstellt, wobei einige Eigenschaften der Funktion modifiziert wurden (z. B. wurde eine deutsche Beschriftung oder das Datum auf der x-Achse eingefügt).

²¹Für eine genauere Beschreibung des COI sei auf Torrence und Compo (1998, S. 67) und Setz (2011, S. 13) verwiesen.

²²Anmerkung: Setz (2011) nimmt dabei andere Modifikationen des Konturplots vor.

- **Oszillationen (Harmonische Zyklen):**

Ökonomische Daten enthalten meist zyklische Komponenten, die sich unter anderem auf saisonale Zyklen beispielsweise in Bezug auf das Wirtschaftswachstum oder den Kreditzyklus zurückführen lassen. Diese können auch zyklischen Trends entsprechen und werden im Skalogramm durch rote Bereiche auf horizontaler Ebene visualisiert, da die WT-Koeffizienten im Sinne eines Skalarprodukts die Ähnlichkeit zwischen der Zeitreihe und der Wavelet-Funktion widerspiegeln. Solche Bereiche lassen sich demgemäß dergestalt interpretieren, als dass die oszillierende Komponente der Wavelet-Funktion eine Frequenzkomponente der zugrunde liegenden Zeitreihe auf einer bestimmten Skala repräsentiert.

- **Sprünge (Strukturbrüche):**

Strukturbrüche hingegen werden durch rote Bereiche auf vertikaler Ebene gekennzeichnet. Regimewechsel äußern sich in der Regel in Form von abrupten Sprüngen, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt auf mehreren Skalen manifestieren. Dementsprechend werden die Koeffizienten verschiedener Skalen davon erfasst, so dass die Werte auf allen Skalen zu diesem Zeitpunkt relativ hoch sind.

- **Bereiche mit erhöhter Volatilität (Volatilitätscluster):**

Volatilitätscluster äußern sich im Skalogramm in ähnlicher Weise, da sich eine erhöhte Korrelation in der Varianz ebenfalls über verschiedene Skalen hinweg in einem eher kompakten Zeitraum manifestiert. Um eine Unterscheidung zwischen diesem Phänomen und Strukturbrüchen zu treffen, sollte daher immer auch die Zeitreihe selbst untersucht werden, um zu evaluieren, ob es sich um ein eher singuläres Phänomen oder um einen ausgedehnten Bereich erhöhter Volatilität handelt.

Bezugnehmend auf Abbildung 4.2.6 können diese Phänomene zu verschiedenen Zeitpunkten identifiziert werden. Die Abbildung zeigt den Konturplot der Renditen²³ des S&P 500 TR USD Index zwischen dem 01.01.1988 und dem 28.02.2013 auf Basis von Tagesdaten. Dies entspricht 6565 Datenpunkten, d. i. 302 Monaten mit durchschnittlich etwa 21,7 Handelstagen pro Monat. Auffällig ist ein sehr breiter horizontaler Bereich

²³Setz (2011) zeigen, dass die Verwendung stetiger Renditen für Skalogrammanalysen bei Finanzdaten sinnvoll ist.

mit hohem Power-Spektrum auf einer Skala von etwa 2048 (siehe Graphik: (1)), der sich vom Anfang der 1990er Jahre bis Ende des Jahres 2008 erstreckt. Obwohl dieser Bereich größtenteils im COI liegt, spiegelt das hohe Spektrum auf dieser Skala wie oben beschrieben einen starken zyklischen Trend in diesem Zeitraum wider, insbesondere da im COI aufgrund des Zero-Paddings für die WT-Koeffizienten tendenziell niedrigere Werte resultieren. Die Skala von 2048 entspricht dabei einer Periodenlänge von etwa $2048/21,7 = 94,4$ Monaten bzw. $94,4/12 = 7,8$ Jahren²⁴. Auf der anderen Seite gibt es auch zahlreiche Gebiete im Skalogramm, die ein erhöhtes Power-Spektrum vertikal über mehrere Skalen hinweg in einem kompakteren Zeitintervall aufweisen. Der erste Bereich findet sich Anfang der 1990er Jahre (siehe Graphik: (2)) und erstreckt sich in etwa bis zur Skala 256. Die rote Farbgebung ist zwar deutlich erkennbar, aber nicht sehr stark ausgeprägt und geht mit einer erhöhten Volatilität einher. Anschließend folgt eine Periode, in der das Power-Spektrum auf den niedrigeren Skalen eher unauffällig ist. Zwischen 1997 und 2003 (siehe Graphik: (3)) folgt daraufhin eine relativ lange Periode, in der das Power-Spektrum auf niedrigen Skalen wiederum deutlich höher ist. Dieser Bereich ist ebenfalls von einer hohen Volatilität geprägt. Der markanteste rote Bereich ist derjenige zur Finanzkrise von 2008 (siehe Graphik: (4)), der sich bis auf eine Skala von etwa 1024 erstreckt und Ausläufer bis in das Jahr 2011 besitzt. Durch das Skalogramm wird deutlich, wie dramatisch der Einbruch während der Finanzkrise auf nahezu allen Skalen war. In den Jahren zwischen (2), (3) und (4) sind die Koeffizienten auf den niedrigen Skalen relativ niedrig. Lediglich der übergeordnete zyklische Trend (1) ist über die gesamte Zeit deutlich erkennbar.

Abbildungen 4.2.7 bzw. 4.2.8 zeigen das Power-Spektrum der Renditen des S&P 500 TR Index basierend auf Monats- bzw. Jahresdaten über einen etwas längeren Zeitraum (01.01.1972 bis 28.02.2013 mit 494 bzw. 42 Datenpunkten). Da die Anzahl der Datenpunkte geringer ist als bei Abbildung 4.2.6 und damit relativ gesehen mehr Koeffizienten von den Randeffekten betroffen sind, ist der COI bei beiden Konturdiagrammen deutlich ausgeprägter. Wie man in Abbildung 4.2.7 sehen kann, gibt es seit Anfang 1971 eine stark zyklische Komponente um die Skalen 32 und 64 (siehe Graphik: (1)), die mit einem relativ ausgeprägten vertikalen roten Bereich ihren Anfang nimmt (siehe Gra-

²⁴Da der Skalierungsparameter s dimensionslos ist, muss man s mit Δt , d. i. der Granularität der Daten im Sinne des Intervalls zwischen zwei Beobachtungszeitpunkten multiplizieren, um ihm eine physikalische Bedeutung zu verleihen (Percival und Walden 2008, S. 297). D. h. dass bei $\Delta t =$ tägliche Daten eine Skaleneinheit einem Tag entspricht.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE FÜR DIE PRAXIS

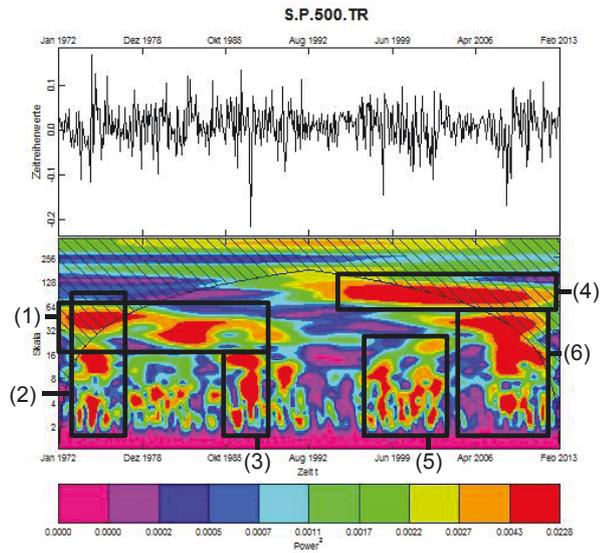


Abbildung 4.2.7: Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Monatsdaten

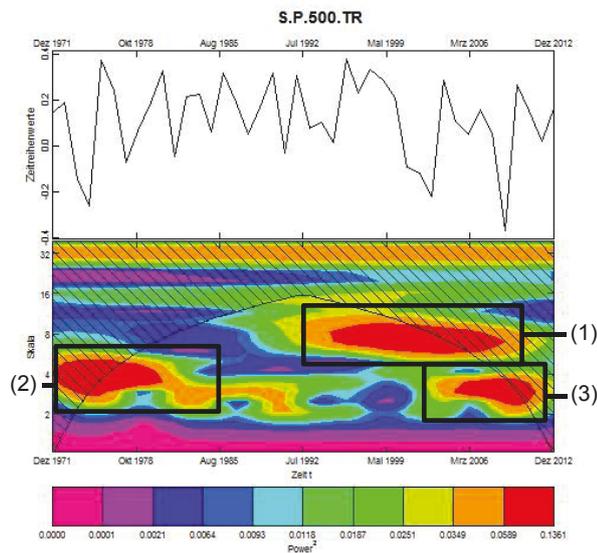


Abbildung 4.2.8: Skalogramm des S&P 500 TR USD Index basierend auf Jahresdaten

phik: (2)). Diese zyklische Komponente wird dann abrupt durch einen vertikalen roten Bereich um 1987 beendet (siehe Graphik: (3)) und kann womöglich dem sogenannten *schwarzen Montag* von 1987 zugeordnet werden²⁵. Außerdem ist ab Mitte der 1990er Jahre um die Skala von etwa 100, was einer Periodenlänge von etwa acht Jahren²⁶ entspricht, ein sehr ausgedehnter horizontaler Bereich mit hohem Power-Spektrum sichtbar, der sich jedoch zum Teil im COI befindet (siehe Graphik: (4)). Dieser markante Bereich konnte auch bereits in Abbildung 4.2.6 identifiziert werden. Deutlich erkennbar sind auch immer wieder vertikale Bereiche mit hohem Spektrum auf den kleineren Skalen zwei bis acht (siehe Graphik: (5)). Sehr markant ist ebenfalls die Finanzkrise von 2008 (siehe Graphik: (6)). In Abbildung 4.2.8 ist wiederum derjenige Bereich, der mit einer Periodenlänge von etwa acht Jahren assoziiert werden kann und Anfang der 1990er Jahre einsetzt, sehr deutlich erkennbar (siehe Graphik: (1)). Außerdem lassen sich Anfang der 1970er Jahre (siehe Graphik: (2)) und zur Mitte des letzten Jahrzehnts (siehe Graphik: (3)) zwei Bereiche mit hohem Spektrum bei einer Skala von etwa vier feststellen.

Generell lässt sich festhalten, dass die CWT in Form von Skalogrammen hervorragend dazu geeignet ist, Finanzdaten im Hinblick auf ihre Dynamik für verschiedene Skalen qualitativ zu analysieren. Sowohl der zeitliche Verlauf der unterschiedlichen Skalen als auch einzelne Phänomene wie abrupte Sprünge oder Volatilitätscluster können durch sie visualisiert werden. Zum Teil lassen sich diese Phänomene auch mit bestimmten Ereignissen wie Finanzkrisen oder Börsencrashes assoziieren. Weitere Skalogramme verschiedener Indizes aus diversen Assetklassen mit unterschiedlicher Granularität sind im Anhang A.6 dargestellt. Auch hier erschließen die Analysen eine interessante Perspektive auf die Daten und zeigen vielversprechende Einblicke in die Dynamik der einzelnen Zeitreihen.

4.2.4 Varianzanalyse – MODWT

Nachdem in Abschnitt 4.2.3 eine qualitative Analyse der Energie im Sinne des Power-Spektrums anhand von Skalogrammen vorgestellt wurde, stellt sich nun wiederum die Frage nach einer Quantifizierung der Ergebnisse. Die Grundlage dazu bildet

²⁵ Vgl. hierzu auch A.1.4.

²⁶ $100/12 = 8,3$.

die MODWT, die mit dem *wmtsa-Package*²⁷ in R implementiert wurde. Als Augmentationsmethode wurde das in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Mirroring ausgewählt. Um die Wavelet-Koeffizienten optimal mit der Zeitachse der ursprünglichen Reihe zu harmonisieren, wurde ferner das LA8-Wavelet für die Transformation verwendet²⁸. Darüber hinaus eignet sich der LA8-Filter aufgrund seiner Länge am besten, die Variabilität und damit die Varianz einer Zeitreihe zu repräsentieren, da lange Filter bessere Approximationen eines idealen Bandpassfilters bilden (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 126).

Abbildung 4.2.9 zeigt die Energie²⁹ $\sum_{t=0}^{T-1} |d_{j,t}|^2$ für die Level $j = 1, \dots, 8$ bzw. $\sum_{t=0}^{T-1} |s_{8,t}|^2$ der MODWT-Koeffizienten³⁰, basierend auf den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Monatsrenditen des S&P 500 TR USD Index³¹. Wie man sehen kann, ist der Großteil der Energie auf die untersten Level verteilt. Genauer formuliert fällt mit über 47% beinahe die Hälfte der Gesamtenergie auf die Wavelet-Koeffizienten d_1 des ersten Levels. Der exponentielle Abfall über die einzelnen Level, der in Abschnitt 4.2.2 bereits thematisiert und durch Logarithmieren zur Schätzung der fraktalen Dimension verwendet wurde, lässt sich ebenfalls deutlich erkennen.

Abbildung 4.2.10, die die Energieverteilung der MSCI Aktienindizes in USD aus Abschnitt 4.2.3³² zusammenfasst, bestätigt dieses Ergebnis auf breiter Ebene: Auch hier ist der Hauptteil der Energie auf die untersten Level verteilt. Konkret formuliert vereinen die ersten drei Koeffizienten d_1 bis d_3 zwischen 80% und 90% der Gesamtenergie auf sich. Auffallend ist auch, dass bei zahlreichen Indizes der sogenannten *Developed Markets* wie Frankreich (MSCI France GR USD: 50,5%), Japan (MSCI Japan GR USD: 53,9%), oder den USA (MSCI USA GR USD: 55,9%) ca. 50% bzw. mehr als die Hälfte der Energie auf das erste Level verteilt ist, während diese für d_1 bei den meisten Ländern

²⁷Die folgenden Analysen basieren auf der `wavMODWT()`-Funktion des *wmtsa-Package*, wobei einige Modifizierungen im Quellcode vorgenommen wurden, um beispielsweise das Datum auf der x-Achse anzuzeigen.

²⁸Die Ergebnisse der `wavMODWT()`-Funktion wurden mit Hilfe der `wavShift()`-Funktion im Sinne einer Nullphasenfilteranpassung mit der Zeitachse in Einklang gebracht.

²⁹Wie in Abschnitt 4.2.3 erläutert wurde, besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen Energie und Varianz einer Zeitreihe. Insofern entspricht eine Energieaufspaltung in der Zeit-Skalen-Ebene qualitativ einer skalenabhängigen Varianzanalyse.

³⁰Da in den folgenden Analysen ausschließlich die MODWT verwendet wird, werden die MODWT-Wavelet-Koeffizienten \tilde{w} bzw. Skalierungskoeffizienten \tilde{v} aus Praktikabilitätsgründen wie in Abschnitt 3.2.5 mit d bzw. s bezeichnet.

³¹Vgl. Abbildung 4.2.7.

³²Siehe Tabelle 4.2.2.

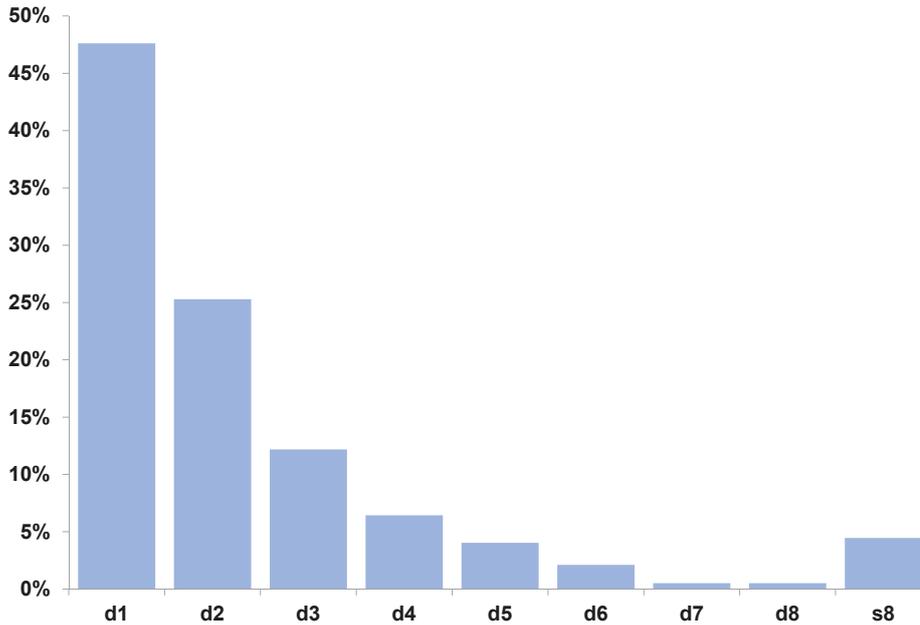


Abbildung 4.2.9: Energieverteilung – S&P 500 TR USD (Monatsrenditen)

der sogenannten *Emerging Markets* wie Russland (MSCI Russia GR USD: 45,6%), Malaysia (MSCI Malaysia GR USD: 42,7%) oder dem Gesamtindex der Emerging Markets (MSCI EM GR USD: 37,2%) deutlich unter 50% liegt.

Die Frage im Hinblick auf das dynamische Verhalten der Zeitreihe ist nun, inwiefern sich die Energie im Zeitverlauf darstellt. Hierzu wurde das Power-Spektrum der Wavelet-Koeffizienten des S&P 500 TR USD Index basierend auf Monatsdaten in den Abbildungen 4.2.11 bis 4.2.14 über die Zeit aufgetragen. Dies entspricht einer diskretisierten Darstellung des Skalogramms 4.2.7, wobei die Relation zwischen Skala und Level mit $\lambda_j = 2^j$ gegeben ist. Da aus den Abbildungen 4.2.9 und 4.2.10 folgt, dass die Energie ungleich über die einzelnen Level verteilt ist, wurde eine Standardisierung der Form

$$\frac{d_{j,t}^2 - \mu(d_j^2)}{\sigma_d(\lambda_j)} \quad (4.2.13)$$

durchgeführt, um das Power-Spektrum für die verschiedenen Level besser miteinander vergleichen zu können. Abbildungen 4.2.11 bis 4.2.14 zeigen somit den zeitlichen

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE FÜR DIE PRAXIS

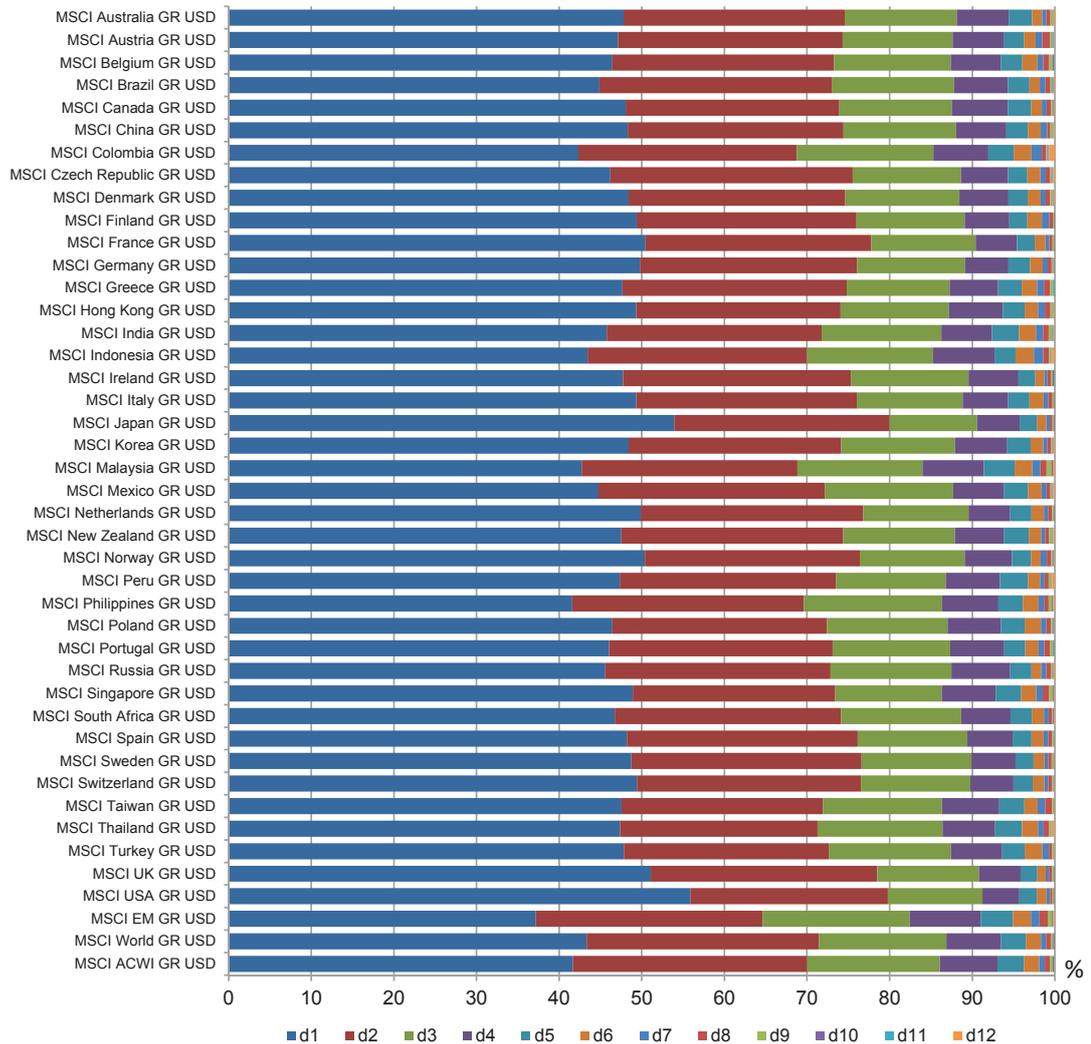


Abbildung 4.2.10: Energieverteilung – MSCI Aktienindizes in USD (Tagesrenditen)

Verlauf der standardisierten Wavelet-Koeffizienten d_j . Zu beachten ist dabei, dass die Randeffekte, die sich aufgrund der WT ergeben und in den Konturdiagrammen aus Abschnitt 4.2.3 anhand des COI berücksichtigt waren, nicht gekennzeichnet sind.

Der Fokus der Analyse soll auf vier Ereignissen liegen, die mit hohen Verlusten am Aktienmarkt verbunden waren und farblich gekennzeichnet sind: Die erste Periode, die grün markiert ist, spiegelt das Verhalten des untersuchten Index Anfang der 1970er Jahre wider und ist mit dem Bärenmarkt von 1973-74 verbunden, der sich nach dem Kol-

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE FÜR DIE PRAXIS

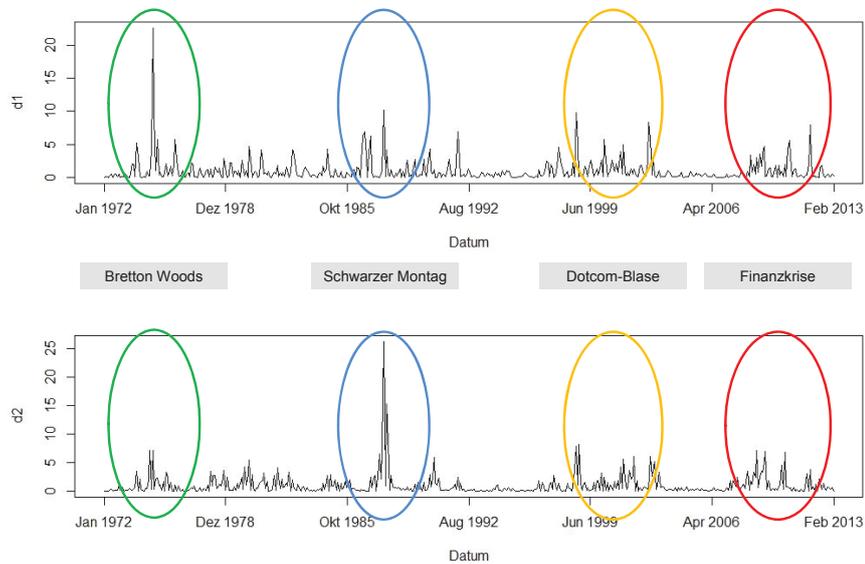


Abbildung 4.2.11: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen) - d1 & d2

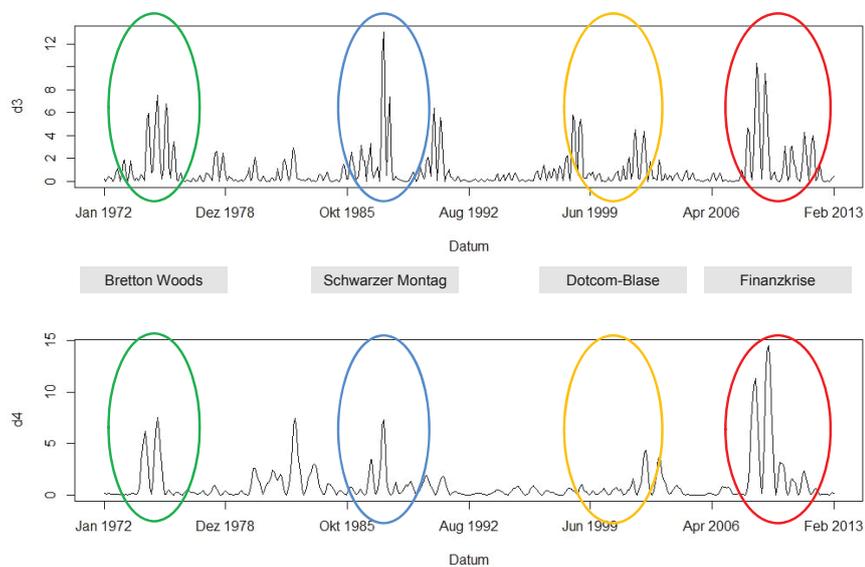


Abbildung 4.2.12: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen) - d3 & d4

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE FÜR DIE PRAXIS

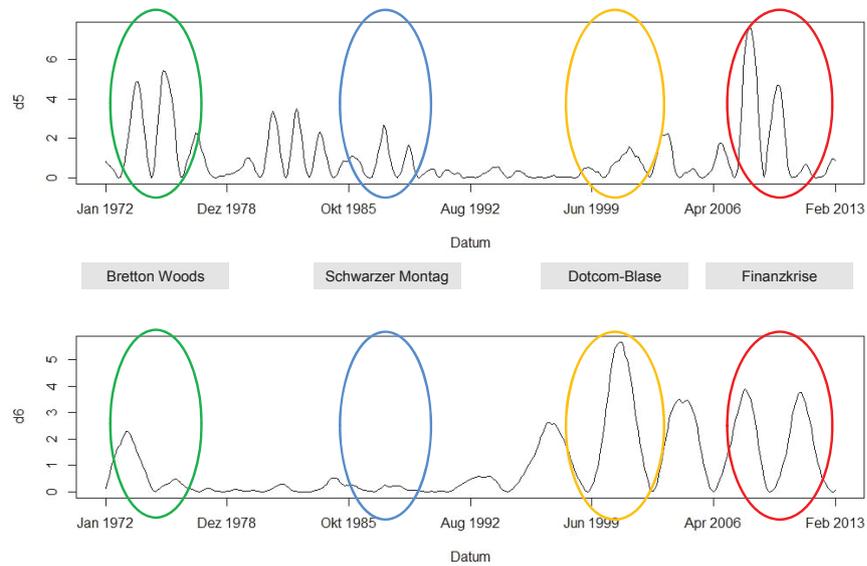


Abbildung 4.2.13: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen) - d5 & d6

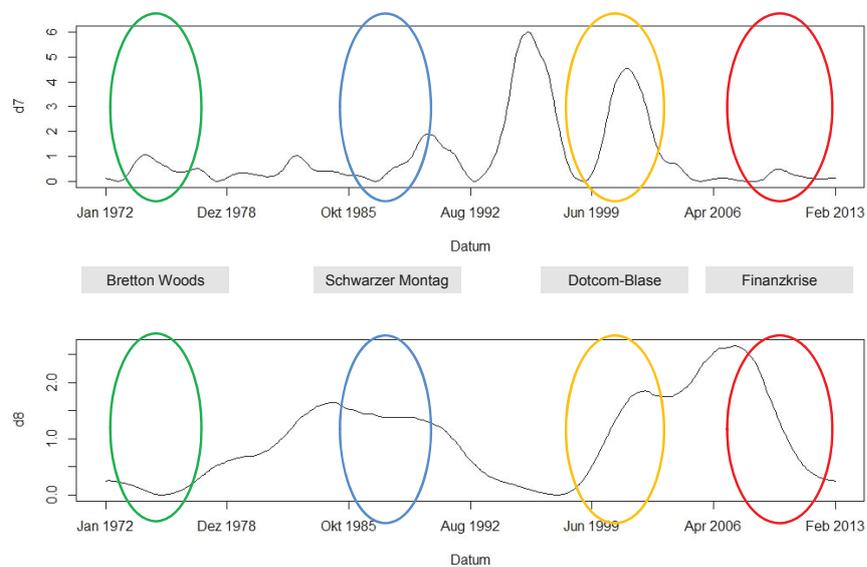


Abbildung 4.2.14: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 TR USD Index (Monatsrenditen) - d7 & d8

laps des Bretton Woods-Abkommens manifestierte. Blau gekennzeichnet in ferner der Aktienmarkt-Crash von 1987, d. i. der bereits erwähnte schwarze Montag. Die Turbulenzen, die im Zuge der Dotcom-Blase Ende der 1990er Jahre aufkamen sind gelb markiert. Als letztes liegt der Fokus auf der Finanzkrise, die in 2008 mit der Lehman-Pleite ihren Höhepunkt fand. Dieser Bereich ist blau markiert.

Wie man sehen kann, ist das Energiespektrum bei den ersten zwei Ereignissen (Bretton Woods und schwarzer Montag) vor allem auf den niedrigen Level 1 bis 5 außerordentlich hoch. Für Bretton Woods sticht der Peak von d_1 besonders ins Auge, während die Energie für den Oktober-Crash von 1987 vor allem bei d_2 und d_3 hoch ist. Auf den höheren Level ist der Verlauf der Energie dagegen weniger stark ausgeprägt, was dahingehend interpretiert werden kann, als dass die Turbulenzen im Zusammenhang mit diesen zwei Ereignissen eher oberflächlicher Natur im Sinne einer eher peripheren Marktfluktuation waren. Bei den beiden anderen Krisen ist dagegen genau das Gegenteil der Fall: Die Energie ist für die unteren Level zwar ebenfalls ein wenig erhöht, gerade für d_1 und d_2 sieht man aber nur eher geringfügige Ausschläge. Bei der Dotcom-Blase sind die größten Ausschläge gar auf Level 6 und 7 zu beobachten, während für die Finanzkrise schon ab Level 3 hohe Energiewerte zu sehen sind. Insgesamt fällt aber auf, dass die Signifikanz erst auf den höheren Skalen deutlich zunimmt. Eine mögliche Interpretation dieser Resultate ist, dass die Finanzkrise von 2008 einen echten Strukturbruch einleitete, der vom Ausmaß her weitaus tiefgründiger bzw. langwieriger war als Bretton Woods bzw. der Schwarze Montag und sich demgemäß weitaus stärker auf die höheren Skalen auswirkte. Interessant ist auch der Verlauf auf dem höchsten Level $j = 8$, der in Abbildung 4.2.14 dargestellt ist. Man sieht, dass die Energiedichte auf dieser Skala $\lambda_8 = 2^8 = 256$ Monate seit Mitte der 1980er Jahre eher abnehmend war, um 1999 umso stärker anzusteigen. Bezeichnenderweise ergeben sich ein lokales Maximum um das Jahr 2000 – d. h. dem Zeitpunkt, als die Dotcom-Blase platzte – und die insgesamt höchsten Werte um das Jahr 2008 herum.

Die gerade beschriebenen Ereignisse hatten naturgemäß nicht nur große Einflüsse auf die Dynamik der Aktienmärkte, sondern auf alle Assetklassen. Gerade im Hinblick auf die Finanzkrise von 2008, in deren Folge beinahe alle globalen Zentralbanken massiv Liquidität in die Kapitalmärkte pumpen und die Zinsniveaus auf Rekordstände heruntersetzten, ist eine skalenabhängige Varianzanalyse von Rentenmärkten interessant, da diese unmittelbar von den Maßnahmen der Zentralbanken beeinflusst worden

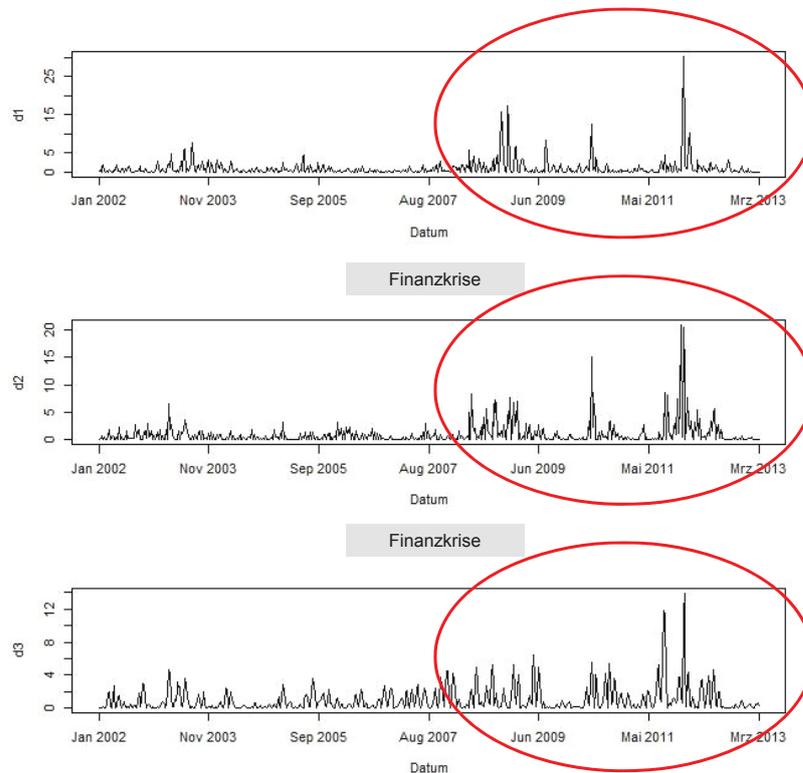


Abbildung 4.2.15: MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochenrenditen) - d_1 – d_3

sind. Abbildungen 4.2.15 bis 4.2.17 zeigen hierzu das Power-Spektrum der MODWT-Koeffizienten basierend auf Wochenrenditen des europäischen Rentenindex iBoxx EUR Sovereigns TR der Level 1 bis 9 zwischen dem 04.01.2001 und 15.03.2013. Rot eingerahmt ist wiederum diejenige Zeitspanne, die ungefähr mit der Finanzkrise von 2008 und deren Folgen assoziiert werden kann. Wie man sieht, sind die Energiewerte in der markierten Phase auf nahezu allen Level relativ hoch. Zu beobachten ist aber auch, dass gerade auf den Level 1 bis 3 immer wieder Peaks auftreten, die von relativ ruhigen Phasen abgetrennt sind. Die höchsten Werte finden sich aber nicht um das Jahr 2008, sondern erst etwa drei Jahre später. Besonders markant gerade auf den höheren Skalen sind die Werte gegen Mitte/Ende 2011. Vor allem bei d_4 ist die hohe Energie in diesem Zeitintervall deutlich zu sehen und kann mit der Eurokrise, die die Eurozone als Konsequenz der Finanzkrise befiehl, assoziiert werden. Die MODWT-Analyse zeigt hierbei deutlich, dass der iBoxx EUR Sovereigns TR als europäischer Rentenindex vielmehr

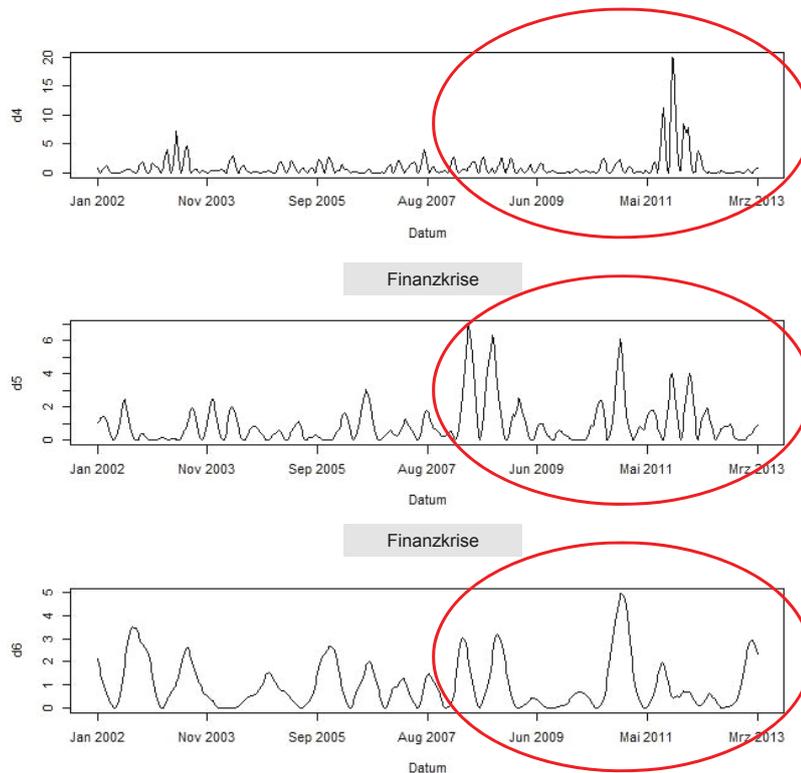


Abbildung 4.2.16: MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochenrenditen) - d4 – d6

von diesem Ereignis beeinflusst worden ist als durch den Zusammenbruch von Lehman Brothers.

Die Untersuchungen dieses Abschnittes zeigen, wie sich mit Hilfe der MODWT eine skalenabhängige Varianzanalyse durchführen lässt. Die Dynamik einer Zeitreihe lässt sich dadurch auf verschiedenen Skalen in der Zeit-Skalen-Ebene untersuchen, so dass damit neue Einblicke in die dynamische Struktur eines spekulativen Vermögensgegenstandes eröffnet werden. In Anhang A.7 sind weitere Diagramme dieser Art von verschiedenen Indizes dargestellt.

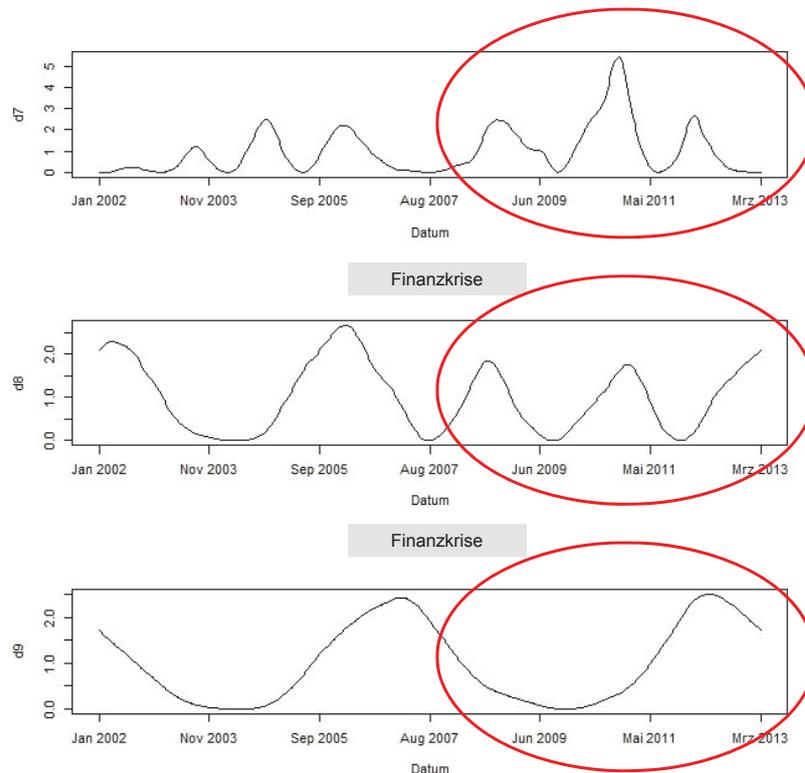


Abbildung 4.2.17: MODWT Varianzanalyse des iBoxx EUR Sovereigns TR Index (Wochenrenditen) - d7 – d9

4.2.5 Zusammenfassung

Dieses Kapitel diente dazu, mögliche Einsatzgebiete der CWT und MODWT im Rahmen einer deskriptiven Analyse von Finanzdaten aufzuzeigen. Dazu wurde zunächst dargelegt, wie man Selbstähnlichkeit mit Hilfe der CWT visualisieren kann, um daraufhin diese Eigenschaft anhand der fraktalen Dimension unter Anwendung der MODWT zu quantifizieren und in einem praktischen Kontext einzubetten. In einem zweiten Themengebiet wurde mit Hilfe von CWT-Skalogrammen das dynamische Verhalten einiger Finanzzeitreihen in der Zeit-Skalen-Ebene untersucht und gezeigt, wie anhand des Power-Spektrums spezifische Eigenschaften und Phänomene wie zyklische Trends von Zeitreihen detektiert werden können. Schließlich wurde wiederum anhand eines quantitativen Ansatzes demonstriert, wie sich die Varianz einer Zeitreihe in Form einer Energieaufspaltung zerlegen und über verschiedene Skalen darstellen lässt.

4.3 Technische Analyse – Trendbestimmung

„A trend is a trend is a trend,
But the question is, will it bend?
Will it alter its course
Through some unforeseen force
And come to a premature end?“

(Alexander Cairncross)

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, besitzt die WT große Stärken, Finanzdaten im Hinblick auf ihre Multiskalenstruktur und -dynamik im Rahmen einer deskriptiven bzw. explorativen Datenanalyse zu untersuchen. Dementsprechend bezieht sich eine solche Analyse immer auf die Vergangenheit im Sinne einer ex post Betrachtung des Datenmaterials. In Bezug ihres Einsatzes auf aktuelle Preisdaten besteht hingegen eine wesentliche Schwäche, d. i. die in Abschnitt 4.1.1 bereits skizzierte Randproblematik: Bei der WT handelt es sich um eine Transformation, bei der das Wavelet entlang der Zeitachse verschoben wird. Naturgemäß kommt es bei endlichen Zeitreihen an den Rändern daher immer zu Problemen, da die WT sowohl vergangene als auch zukünftige Daten benötigt, um eine korrekte Repräsentation in der Zeit-Skalen-Ebene zu gewährleisten. Die Verwendung der WT in der technisch-quantitativen Analyse von Finanzdaten ist daher zunächst mit Skepsis zu betrachten, da hierbei meist die letzten, d. h. äußersten Datenpunkte im Zentrum des Interesses stehen.

In den folgenden Abschnitten erfolgt deswegen eine eingehende Betrachtung der WT im Rahmen der technischen Finanzanalyse. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage, die eingangs dieses Kapitels mit dem Zitat des britischen Ökonomen Alexander Cairncross angeschnitten wurde: Lässt sich mit der WT ein Preistrend bestimmen? Und lässt sich ferner darauf aufbauend eine profitable Trendfolgesystematik entwickeln, die insbesondere eine bessere Performance generiert als konventionelle Ansätze wie beispielsweise gleitende Durchschnitte? Um diese Fragen beantworten zu können, wird in Abschnitt 4.3.1 die Randproblematik nochmals genauer diskutiert und einige gängige Verfahren näher vorgestellt, die bei diesem Thema in der Praxis zum Einsatz kommen.

Abschnitt 4.3.2 beschreibt daraufhin eine Variation der WT, d. i. der sogenannten *Shrinkage*-Ansatz, der auf Donoho und Johnstone (1994) zurückgeht und eine Methode darstellt, die deterministische Komponente einer verrauschten Zeitreihe basierend auf der WT zu schätzen. Daraufhin wird in Abschnitt 4.3.3 ein simples Trading-System vorgestellt, das die Profitabilität eines WT-basierten Trendbestimmungsverfahrens testen soll. Schließlich erfolgt in Abschnitt 4.3.4 eine empirische Evaluation verschiedener Augmentationsverfahren für die Ränder, um festzustellen, mit welcher Methode sich die Randeffekte am effizientesten minimieren lassen können. In den Abschnitten 4.3.5 bis 4.3.7 werden die daraus gewonnenen Erkenntnisse letztlich in Zusammenhang mit dem Trendfolgesystem auf ein Universum von Aktienindizes angewandt und die Ergebnisse präsentiert. Schließlich erfolgt in Abschnitt 4.3.8 noch eine Vergleichsstudie mit gleitenden Durchschnitten und eine Zusammenfassung in Abschnitt 4.3.9.

4.3.1 *Randprobleme revisited*

Bei technischen Indikatoren, die auf Finanzdaten basieren wie beispielsweise Oszillatoren oder Trendindikatoren, sind meistens nur die letzten wenn nicht sogar der letzte Datenpunkt relevant oder zumindest entscheidend für die Generierung eines Signals. Bei Filtern, die zur Extraktion von Trends dienen sollen, kommen dementsprechend in der Regel nur solche Filter zum Einsatz, die ausschließlich zurückliegende Preisdaten verwenden³³. Die WT benötigt zur korrekten Darstellung eines Punktes in der Zeit-Skalen-Ebene jedoch sowohl rechts als auch links davon liegende Datenpunkte, da die Transformation sonst eine Verzerrung der Wavelet-Koeffizienten an den Rändern zur Folge hat. Bei einigen Anwendungsgebieten wie beispielsweise der Datenkompression sind die Artefakte, die durch diese Randproblematik entstehen, nicht entscheidend und können oftmals vernachlässigt werden. Bei der technischen Analyse von Preisdaten – und hier insbesondere bei der Bestimmung eines Preistrends – sind die Randeffekte jedoch von wesentlicher Bedeutung. Pereyra und Mohlenkamp (2004, S. 45) gehen sogar soweit zu behaupten, „[the] Treatment of the boundary is the greatest weakness of wavelet approaches“.

³³In der Finanzbranche sind gleitende Durchschnitte äußerst beliebte Trendindikatoren. Oft eingesetzte Zeitintervalle sind dabei 200-Tages- oder 50-Tages-Durchschnitte, die lang- bzw. mittelfristige Trends anzeigen sollen. Darüber hinaus werden gleitende Durchschnitte auch bei Oszillatoren wie beispielsweise dem sogenannten *Moving Average Convergence Divergence*-Indikator (MACD) verwendet. Für eine detaillierte Übersicht verschiedener technischer Indikatoren sei auf Murphy (2011) verwiesen.

Die Randprobleme resultieren aus der Tatsache, dass eine korrekte Berechnung der Wavelet-Koeffizienten nur dann gewährleistet ist, wenn das jeweilige Wavelet im Sinne einer Faltung vollständig durch einen bestimmten Abschnitt der zugrunde liegenden Zeitreihe translatiert bzw. im Rahmen des Pyramidenalgorithmus durch die zirkuläre Filteroperation durchlaufen wird. Bei endlichen Signalen liegen naturgemäß auf der linken Seite des Startzeitpunkts bzw. auf der rechten Seite des Endzeitpunkts jedoch keine Datenpunkte vor. Aus diesem Grund muss die Datenreihe zur Lösung dieses Problems durch bestimmte Verfahren, die in Abschnitt 4.1.1 zum Teil bereits skizziert worden sind, auf die notwendige Länge augmentiert werden. Die Anzahl der hierzu benötigten Datenpunkte ist dabei von der Art der Transformation, dem jeweiligen Level j und der Länge L des verwendeten Filters abhängig (vgl. Percival und Walden 2008, S. 136ff).

Bei der DWT wird die Anzahl L'_j derjenigen Wavelet- bzw. Skalierungskoeffizienten, die durch die Randbedingungen kontaminiert sind, anhand von

$$L'_j = \lceil (L-2)(1-2^{-j}) \rceil \quad (4.3.1)$$

berechnet (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 145)³⁴. Diese Datenpunkte werden auch *Boundary-Koeffizienten* (engl. *boundary coefficients*) genannt (vgl. Percival und Walden 2008, S. 146). Bei der MODWT ist die Anzahl der Boundary-Koeffizienten wie folgt gegeben (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 145):

$$L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1. \quad (4.3.2)$$

Wie man unmittelbar aus Gleichung 4.3.1 bzw. 4.3.2 sehen kann, gibt es lediglich bei der DWT in Kombination mit dem Haar-Wavelet der Länge $L = 2$ keine Boundary-Koeffizienten. Bei allen anderen Filtern und bei der MODWT generell sind immer gewisse Koeffizienten von den Randeffekten betroffen. Anzumerken ist zudem, dass die Anzahl der Boundary-Koeffizienten unabhängig von der Anzahl der Datenpunkte T der zugrunde liegenden Zeitreihe ist.

Für die Detail- und Smooth-Koeffizienten der MRA ergeben sich die kontaminierten Elemente aus den in Abschnitt 3.2.4 beschriebenen Zusammenhängen und können mit

³⁴ $\lceil(x)\rceil$ bezeichnet die sogenannte Gaußklammer bzw. Aufrundungsfunktion, die durch $\lceil(x)\rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} | k \geq x\}$ definiert ist. Sie beschreibt die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich dem jeweiligen Ausdruck (x) ist.

dem Zeitindex t in Verbindung gebracht werden (vgl. Percival und Walden 2008, S. 138f & 198f). Diejenigen MRA-Koeffizienten, die bei der DWT von den Randbedingungen betroffen sind, können anhand von

$$t = 0, \dots, 2^j L_j' - 1 \quad (4.3.3)$$

am Anfang und

$$t = N - (L_j - 2^j), \dots, N - 1 \quad (4.3.4)$$

am Ende der Reihe spezifiziert werden. D. h. dass die ersten $2^j L_j'$ und letzten $L_j - 2^j$ Detail- bzw. Smooth-Koeffizienten von den Randeffekten betroffen sind (vgl. Percival und Walden 2008, S. 139). Bei der MODWT sind die kontaminierten Koeffizienten analog mit

$$t = 0, \dots, L_j - 2 \quad (4.3.5)$$

und

$$t = N - L_j + 1, \dots, N - 1 \quad (4.3.6)$$

gegeben.

Zur Illustration der Randproblematik zeigt Abbildung 4.3.1 die Multiskalenzerlegung des FSE DAX TR EUR Index im Zeitraum vom 02.01.1995 bis 30.08.2002 basierend auf Tagesdaten, d. i. 2000 Datenpunkten, die mittels der MODWT durchgeführt wurde. Die Wavelet-Koeffizienten der Level 1 bis 6 werden mit d bezeichnet, die glatte Reihe entspricht den Skalierungskoeffizienten s auf dem Level 6^{35} . Als Filter wurde das LA8-Wavelet verwendet. Die vertikalen roten Linien auf jedem Level zeigen die jeweilige Grenze an, ab welcher die Wavelet-Koeffizienten von den Randbedingungen beeinträchtigt werden. Man kann deutlich sehen, dass sich die Randeffekte umso gravierender auf die Koeffizienten auswirken, je höher das Level ist. Abbildung 4.3.2 stellt

³⁵Die vorliegende MODWT-Multiskalenzerlegung wurde in R mit dem *wmtsa*-Package erstellt, bei dem die Koeffizienten mit d (anstatt mit \tilde{w}) respektive s (anstatt mit \tilde{v}) bezeichnet werden. Die *wavMODWT*-Funktion führt die WT durch, und mit der *wavShift*-Funktion werden die Koeffizienten verschoben, um sie mit der ursprünglichen Zeitreihe auszurichten. Die *wavBoundary*-Funktion markiert schließlich die Boundary-Koeffizienten anhand der vertikalen roten Linien.

darüber hinaus den zeitlichen Verlauf der Randeffekte dar. Hierzu wurde die absolute Abweichung der Boundary-Skalierungskoeffizienten für die 100 letzten Datenpunkte von einer perfekten, d. i. einer von Randeffekten unbeeinflussten Transformation in Prozent berechnet. Als Verlängerungsmethode wurde das sogenannte Mirroring verwendet. Man sieht deutlich, dass die Abweichung vor allem für die letzten Datenpunkte sehr groß ist, da hierbei die meisten Datenpunkte augmentiert werden müssen. Gleichzeitig nimmt die Höhe der Abweichung mit steigendem Level tendenziell zu.

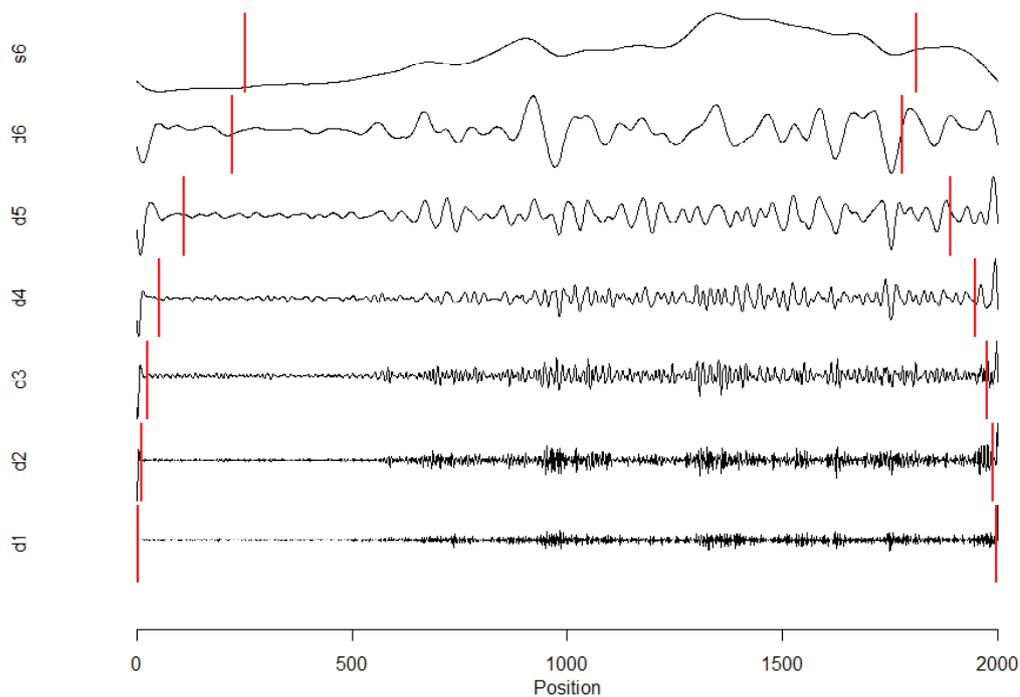


Abbildung 4.3.1: Darstellung der Randeffekte (MODWT): FSE DAX TR EUR (Tagesdaten) Level 1 bis 6

Wie in Abschnitt 4.1.1 bereits skizziert worden ist, gibt es zahlreiche Verfahren, um eine endliche Zeitreihe auf die für eine WT notwendige Länge zu augmentieren. Im Folgenden werden die in der Praxis gängigsten sowie einige spezielle Verlängerungsmethoden etwas näher erläutert:

- **Zero Padding:**

Die simpelste Möglichkeit eine Zeitreihe zu verlängern, ist das sogenannte Zero Padding, bei der die Reihe an den Außenrändern mit Nullen aufgefüllt wird. Die

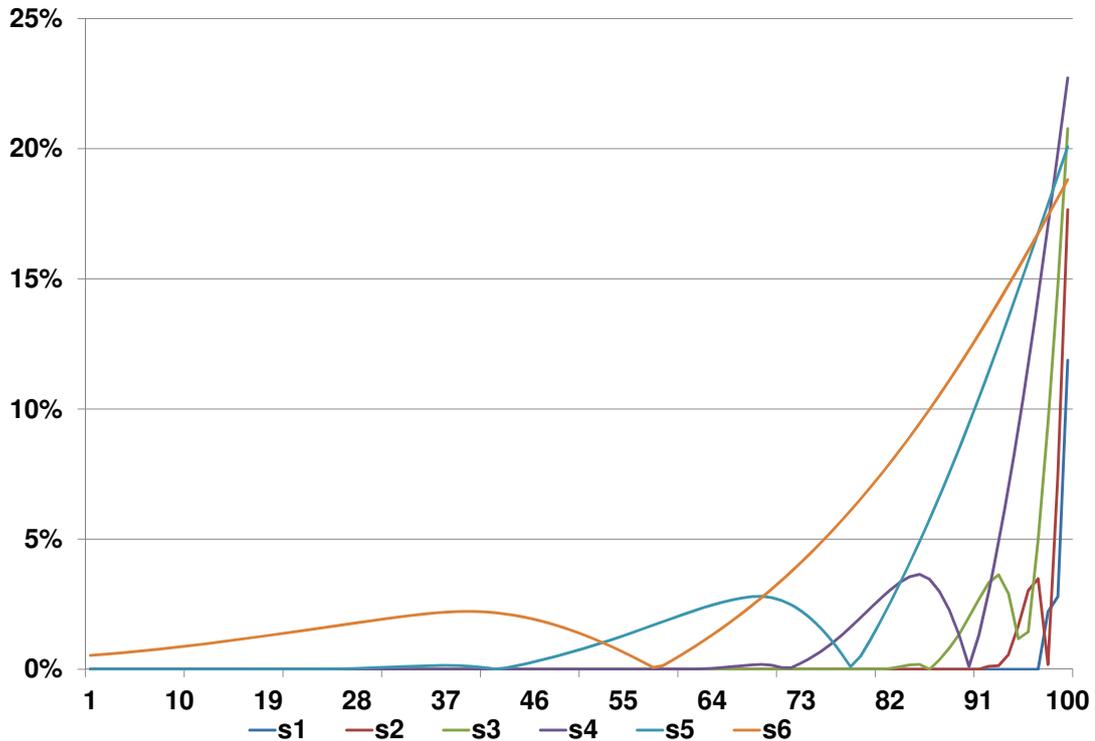


Abbildung 4.3.2: Randeffekte: Verlauf der absoluten Abweichung in %

Verwendung dieser Methode bei Finanzdaten ist allerdings eher fraglich, da bei dieser Augmentationstechnik immer ein Sprung an den Rändern entsteht, der zu relativ großen Verzerrungen führen kann (vgl. Papst 2011, S. 42).

- **Periodische Fortsetzung:**

Bei dieser Methode wird vorausgesetzt, dass die Zeitreihe periodisch fortsetzbar ist und demgemäß Datenpunkte vom Anfang an das Ende der Reihe gehängt. Diese Variante hat insbesondere bei Wertpapierpreisen den Nachteil, dass die Preisniveaus zwischen dem Start- und Endzeitpunkt sehr weit auseinander liegen können und es damit wie beim Zero-Padding zu großen Sprüngen an den Rändern kommen kann.

- **Mirroring/Reflektionsmethode:**

Bei der Reflektionsmethode wird die Zeitreihe an der y-Achse gespiegelt und da-

mit auf die doppelte Länge erweitert. Dies hat den Vorteil, dass es zu keinem Bruch in der eigentlichen Reihe bzw. Funktion kommt, sondern lediglich in deren erster Ableitung (vgl. Papst 2011, S. 42). Für Masset (2008, S. 22) ist diese Methode bei der Zeitreihenanalyse von Wertpapierpreisen die sinnvollste Alternative, da hierbei die statistischen Eigenschaften der Reihe wie Mittelwert oder Varianz nicht verändert werden und sie zudem typische Charakteristika wie das Volatility Clustering adäquat erfasst.

- **Konstante Verlängerung:**

Eine weitere Methode ist die konstante Verlängerung. Sie ist eine Variation des Zero-Padding, bei dem die Zeitreihe nicht mit Nullen, sondern mit dem jeweils äußersten Datenpunkt konstant verlängert wird. Der Vorteil liegt wie beim Mirroring darin, dass es zu keinem wesentlichen Sprung in der Zeitreihe kommt.

- **Polynom-Fit:**

Eine andere, in der Praxis relativ gängige Möglichkeit ist ferner die sogenannte Polynomapproximation, bei der die Daten anhand eines Polynomialmodells zuerst gefittet und zur Datenverlängerung anhand dieses Fits extrapoliert werden. Denkbar sind dabei auch andere Modellvarianten wie beispielsweise Splines. Diese Form der Datenaugmentation ist komplexer als die bisher beschriebenen Varianten, da im Gegensatz dazu ein bestimmtes Modell für die Zeitreihe spezifiziert werden muss. Eine geeignete Auswahl der Kriterien einer solchen Modellspezifikation ist oftmals nicht trivial und bedarf der Einbeziehung geeigneter Auswahlkriterien³⁶.

- **Spezielle Verfahren:**

Die bisher genannten Varianten zur Behandlung der Randproblematik sind mehr oder minder Standardverfahren, die in der Praxis am häufigsten zum Einsatz kommen und in zahlreichen Softwareimplementierungen der WT integriert sind. Darüber hinaus gibt es jedoch noch weitere Ansätze, die zum Teil auf spezifische Aufgabengebiete angepasst sind. Beispiele hierfür sind Boltežar und Slavič (2004) oder Su, Liu und Li (2012). Eine Methode, die insbesondere bei der Bildkompression zum Einsatz kommt, wird als *Wavelets on the interval* bezeichnet und geht

³⁶Eine Möglichkeit bietet beispielsweise das sogenannte *Akaike Informationskriterium* (AIC).

auf Cohen, Daubechies und Vial (1993) zurück. Dabei werden spezielle Wavelet-Filter konstruiert, die an den Randbereich angepasst sind und dort zum Einsatz kommen³⁷. Einen anderen Ansatz verfolgen Oh, Naveau und Lee (2001) und Oh und Lee (2005), die eine Mischung aus Polynomapproximation und Wavelet-Regression verwenden, um die Randeffekte zu reduzieren. Die grundlegende Idee hinter diesem Ansatz ist, die Zeitreihe an ein Polynom zu fitten und die WT in Form der Shrinkage-Methode³⁸ zu glätten.

Die Randproblematik ist wie oben beschrieben ein wesentlicher Nachteil der WT im Hinblick auf ihren Einsatz bei der technisch-quantitativen Analyse von Finanzdaten. Im Gegensatz zu vielen anderen Anwendungsbereichen sind hier die Ränder, d. i. insbesondere der Bereich am Ende der Zeitreihe, von essentieller Wichtigkeit. Trotz der verschiedenen Verfahren, die zum Teil eine Reduktion der Artefakte ermöglichen, bleibt das wesentliche Problem, dass man für eine perfekte Transformation auch immer Werte rechts vom jeweiligen Datenpunkt benötigt, bestehen und kann grundsätzlich nicht vollständig gelöst werden. Insofern ist der Einsatz der WT im Hinblick auf dieses Aufgabenfeld mit Skepsis zu betrachten (vgl. Papst 2011, S. 118). Dennoch lohnt sich eine eingehende Analyse, inwiefern die WT gerade im Vergleich zu konventionellen Filtern mitunter doch einen Vorteil mit sich bringen kann. Im Gegensatz zu solchen Filtern wie beispielsweise gleitenden Durchschnitten kann man mit Hilfe der WT nämlich nicht nur eine Filterung in der Zeitebene, sondern auch auf der Skalenebene durchführen. Dieses Verfahren, das auch als *Wavelet-Shrinkage* bezeichnet wird, soll im folgenden Abschnitt daher näher beschrieben werden.

4.3.2 *Wavelet-Denoising*

In der Signalverarbeitung wie zum Beispiel bei der Übertragung von Audiosignalen über weite Strecken ist man oft mit Signalen konfrontiert, die mit unerwünschten Rauscheffekten überlagert sind, die beispielsweise aufgrund von Übertragungsfehlern auftreten und das eigentliche Signal massiv verändern. Insofern ist es in der Praxis wünschenswert, das Rauschen herauszufiltern, um das Signal möglichst originalgetreu

³⁷Zu Wavelets on the interval siehe auch Melkemi und Mokhtari (2007), Černá und Finěk (2012) und Černá und Finěk (2010).

³⁸Die Shrinkage-Methode wird in Abschnitt 4.3.2 noch genauer erläutert.

verarbeiten zu können. Auch bei der Untersuchung von Wertpapierkursen stellt sich oftmals die Frage, inwiefern eine Verrauschung des informativen Gehalts einer Zeitreihe vorliegt und wie man ein solches Rauschen unterdrücken kann³⁹. Papst (2011, S. 49) definiert Rauschen dabei als „eine objektiv nicht nachprüfbare Kurskomponente [...], die zufällige Schwankungen der erwarteten Wertpapierkurse im Zeitablauf hervorruft“. Der Versuch, diese zufälligen Schwankungen aus einer Zeitreihe herauszufiltern, um die relevanten Informationen im Sinne des fundamentalen Wertes eines Wertpapierkurses zu spezifizieren, ist somit von hohem Interesse und wird allgemein als *Denoising* bezeichnet (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 207). Neben konventionellen Methoden in der Zeitebene bietet die WT dabei eine interessante Möglichkeit, die Rauschkomponente in der Zeit-Skalen-Ebene zu extrahieren.

Denoising via der WT stellt ein Verfahren dar, dass im Wesentlichen auf Donoho und Johnstone (1994), Donoho und Johnstone (1995) und Donoho und Johnstone (1998) zurückgeht. Im Unterschied zu konventionellen Denoising-Methoden, die sich meist entweder auf die Zeit- oder die Frequenzebene beziehen, lässt sich mit Hilfe der WT eine Entrauschung durchführen, die beide Ebenen miteinander kombiniert: Hierzu wird eine Zeitreihe im ersten Schritt mittels der WT wie bisher beschrieben in die Zeit-Skalen-Ebene transformiert. In einem zweiten Schritt werden die Koeffizienten der einzelnen Skalen einer Modifikation unterworfen – d. i. dem eigentlichen Denoising-Schritt –, um sie im dritten Schritt mittels der inversen WT wieder in die Zeitebene zu synthetisieren. Im Gegensatz zur MRA, die eine Signalkomponente einer bestimmten Skala isoliert, wird durch die skalenabhängige Modifikation der Wavelet-Koeffizienten somit versucht, das „wahre“ Signal durch die Entfernung der Rauschkomponente aus der zugrunde liegenden Zeitreihe zu schätzen (vgl. Percival und Walden 2008, S. 393).

Eine relativ simple Möglichkeit, Denoising mit Hilfe der WT zu realisieren, bildet dabei die sogenannte *Thresholding*-Methode. Bei diesem Verfahren findet eine Modifikation der Wavelet-Koeffizienten dergestalt statt, als dass alle Koeffizienten verändert werden, deren absoluter Betrag einen bestimmten Schwellenwert (engl. *threshold*) unterschreitet (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 208). Zwei Varianten haben sich in der Praxis dabei besonders bewährt, d. i. das sogenannte *Hard* und *Soft Thresholding*:

³⁹Grundsätzlich stellt sich hierbei die Frage, ob die Annahme, dass in Wertpapierkursen ein informativer Gehalt existiert, der sich auf realweltliche Vorgänge zurückführen lassen kann, überhaupt gerechtfertigt ist. Für die vorliegende Diskussion soll diese Annahme jedoch als gegeben hingenommen werden.

- **Hard Thresholding:**

Wie der Name impliziert, stellt das Hard Thresholding ein relativ „hartes“ Denoising-Verfahren dar, das Gençay et al. (2001b, S. 209) gar als „keep or kill“-Methode bezeichnen. Dabei werden alle Koeffizienten auf Null gesetzt, die einen Schwellenwert λ unterschreiten bzw. gleich diesem sind. Eine Formalisierung dieser Regel im Sinne einer Hard Threshold-Funktion lässt sich wie folgt darstellen (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 209f):

$$\tilde{w}_{j,t} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |\tilde{w}_{j,t}| \leq \lambda \\ \tilde{w}_{j,t}, & \text{wenn } |\tilde{w}_{j,t}| > \lambda. \end{cases} \quad (4.3.7)$$

$\tilde{w}_{j,t}$ bezeichnet dabei den MODWT Wavelet-Koeffizienten zur Zeit t auf der Skala j^{40} .

- **Soft Thresholding:**

Beim Soft Thresholding werden im Gegensatz dazu nicht nur diejenigen Koeffizienten modifiziert, die größer oder gleich λ sind, sondern alle anderen ebenfalls: Diejenigen Koeffizienten, die betragsmäßig unterhalb des Schwellenwertes liegen, werden wie beim Hard Thresholding auf Null gesetzt; die übrigen werden darüber hinaus gegen Null gedrückt bzw. „geschrumpft“, indem sie betragsmäßig um λ verringert werden:

$$\tilde{w}_{j,t} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |\tilde{w}_{j,t}| \leq \lambda \\ \text{sign}(\tilde{w}_{j,t})(|\tilde{w}_{j,t}| - \lambda), & \text{wenn } |\tilde{w}_{j,t}| > \lambda. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Aus diesem Grund wird die Soft Threshold-Methode auch als *Wavelet-Shrinkage* bezeichnet.

Abbildung 4.3.3 illustriert, wie sich die beiden Methoden mit $\lambda = 1$ unterscheiden und auf die Koeffizienten der WT auswirken (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 209).

⁴⁰Diese und die folgenden Ausführungen beschränken sich aus Platzgründen auf die MODWT. Es sei an dieser Stelle jedoch darauf hingewiesen, dass sich dieselbe Herangehensweise auch für die DWT-Koeffizienten anwenden lässt. Des Weiteren werden die Koeffizienten der MODWT der allgemeinen Konvention folgend an dieser Stelle wieder mit $\tilde{w}_{j,t}$ bezeichnet.

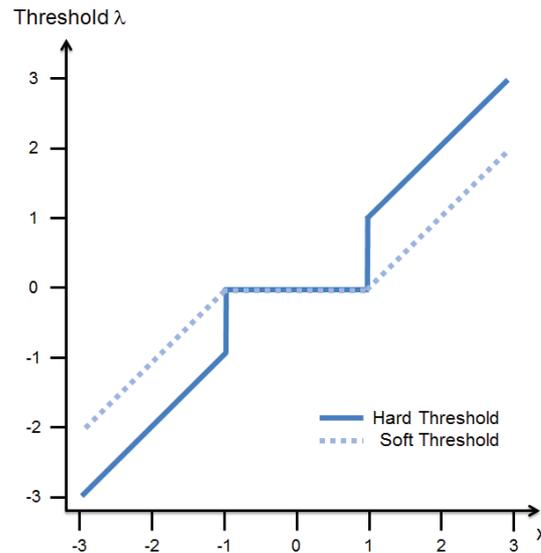


Abbildung 4.3.3: Hard vs. Soft Threshold

Die Wahl des Thresholding-Verfahrens hängt dabei von der jeweiligen Analyse bzw. der Zielsetzung der Schätzung ab: Da beim Soft Thresholding alle Koeffizienten zu einem gewissen Maße beeinflusst werden, ist das Resultat meist eine glattere Darstellung der synthetisierten Zeitreihe als beim Hard Thresholding. Will man dagegen die volle Höhe von Spikes oder abrupten Sprüngen bewahren, bietet sich eher das Hard Thresholding an⁴¹.

Neben der geeigneten Wahl der Thresholding-Variante spielt die Spezifizierung des Schwellenwertes λ eine wichtige Rolle. Ausgangspunkt ist dabei ein Prozess der Form $y_t = x_t + \epsilon_t$ mit $t = 1, 2, \dots, T$, wobei x_t die deterministische Komponente darstellt, die es zu schätzen gilt und ϵ_t die Rauschkomponente ist. Im optimalen Fall wird der Threshold-Parameter λ gleich σ_{ϵ_t} gesetzt, um das gesamte Rauschen zu beseitigen und die vollständige deterministische Signalkomponente aus y_t zu schätzen. Ist λ dagegen größer oder kleiner σ_{ϵ_t} , wird ein Teil des eigentlichen Informationsgehalts eliminiert bzw. ein Teil des Rauschens nicht herausgefiltert. In der Praxis ist σ_{ϵ_t} naturgemäß nicht bekannt, so dass der Schwellenwert λ in geeigneter Weise geschätzt werden muss. Dabei haben sich

⁴¹Neben diesen beiden Varianten gibt es noch weitere Verfahren wie das sogenannte *Mid Thresholding*, das einen Kompromiss zwischen Soft und Hard Thresholding darstellt. Für den interessierten Leser sei dazu beispielsweise auf Gençay et al. (2001b, S. 210ff) oder Percival und Walden (2008, S. 400) verwiesen.

drei Verfahren etabliert, die wie oben bereits erwähnt auf Donoho und Johnstone (1994), Donoho und Johnstone (1995) und Donoho und Johnstone (1998) zurückgehen. Die in der Praxis wohl gängigste Variante stellt das sogenannte *Universal Threshold*-Verfahren dar, das für weißes Rauschen entwickelt wurde. Der Schwellenwert wird dabei mit

$$\lambda_{universal} = \sigma_{\epsilon_t} \sqrt{2 \log(T)} \quad (4.3.9)$$

definiert, so dass λ von der Zeitreihenlänge T abhängig ist. Hierbei lässt sich zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass unter Verwendung der Hard Thresholding-Funktion alle verrauschten Wavelet-Koeffizienten unterhalb des Schwellenwertes liegen und damit auf Null gesetzt werden, für $T \rightarrow \infty$ gegen Eins konvergiert (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 213). Ferner ist die Standardabweichung σ_{ϵ_t} in Gleichung 4.3.9 im Allgemeinen nicht bekannt und muss daher spezifiziert werden. Nach Donoho und Johnstone (1994, S. 446) wird der Großteil des Rauschens durch die Wavelet-Koeffizienten des ersten Levels repräsentiert, weshalb nur diese Koeffizienten in die Schätzung eingehen. Darüber hinaus kann es bei der konventionellen Standardabweichung zu Verzerrungen aufgrund von Ausreißern kommen, weshalb σ_{ϵ_t} anhand der sogenannten Median Absolute Deviation (MAD) berechnet wird, die sich für die MODWT wie folgt darstellt (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 227):

$$\sigma_{MAD} = \sqrt{2} \frac{\text{median}(|\tilde{w}_{1,0}|, |\tilde{w}_{1,1}|, \dots, |\tilde{w}_{1,T-1}|)}{0,6745}. \quad (4.3.10)$$

Die Kombination des Universal Threshold-Ansatzes mit der Soft Threshold-Funktion wird auch als *VisuShrink* bezeichnet. Gençay et al. (2001b, S. 213ff) zeigen, dass dieses Verfahren in einer vergleichsweise glatten Schätzung der deterministischen Signalkomponente resultiert. In der Praxis sind neben dem Universal Threshold noch die sogenannte *Minimax-Schätzung* und die *SURE (Steins Unbiased Risk Estimator)-Schätzung* von Bedeutung, die eine levelabhängige Selektionssystematik des Schwellenwertes impliziert. Im Gegensatz zum VisuShrink-Verfahren führen diese beiden Varianten jedoch zu vergleichsweise groben Signalschätzungen (vgl. Constantine und Percival 2011, S. 62). Da das primäre Ziel dieses Abschnittes eine möglichst genaue Extraktion des Trends von Wertpapierkursen ist, wird gemäß der Kendallschen Auffassung, dass „[t]he essential idea of trend is that it represents smooth, relatively slowly changing, features of the time series“ (Kendall und Ord 1983, S. 27), aus Platzgründen auf eine detaillierte

Darstellung dieser Varianten verzichtet und der Fokus auf die VisuShrink-Methode gesetzt, die wie oben beschrieben diese Charakteristik akzentuiert⁴². Grundsätzlich gibt es laut Gençay et al. (2001b, S. 210) nämlich keine theoretische Begründung für die Wahl des Denoising-Verfahrens und es ist „[...] up to the practitioner [...] to apply the most appropriate thresholding rule“.

4.3.3 Das Long/Short-Trading-System

Zur Evaluierung der Effektivität einer Trendbestimmung mittels der WT aus Preisdaten von spekulativen Vermögensgegenständen wird in diesem Abschnitt eine simple Trading-Systematik vorgestellt, die auf Basis der transformierten Datenreihe Kauf- bzw. Verkaufssignale generiert. Die Logik des Systems resultiert dabei in einer ständigen Positionierung im Markt, d. h. dass man durchgehend entweder eine Long- oder eine Short-Position hält. Genauer stellt sich das Trading-Modell wie folgt dar:

- Die zugrunde liegende Zeitreihe, die auf den Schlusskursen einer bestimmten Sampling-Periode der Preisdaten basiert, wird mit Hilfe der WT in Form der MRA transformiert.
- Ein Long- bzw. Short-Signal wird generiert, wenn die transformierte Zeitreihe eine positive bzw. negative Rendite zwischen zwei Sampling-Perioden aufweist. Anders formuliert wird eine Long-Position aufgebaut, nachdem die transformierte Reihe aus einer negativen in eine positive Steigung übergegangen ist und damit eine Trendwende signalisiert. Eine Short-Position wird entsprechend dann eingegangen, nachdem die Reihe aus einem steigenden in ein fallendes Regime übergegangen ist.
- Sobald ein Kauf- bzw. Verkaufssignal zum Closing eines bestimmten Tages erzeugt wird, baut das System die entsprechende Position auf und die log-Renditen der zugrundeliegenden Zeitreihe in den nachfolgenden Perioden gehen in die Performance ein, bis ein entgegengesetztes Signal erzeugt wird. Die Equity-Kurve des Systems startet dabei mit dem Wert 1000 und zeigt den zeitlichen Verlauf der Wertentwicklung des Systems an.

⁴²Für eine eingehende theoretische Behandlung sowie praktische Analyse dieser beiden Methoden und anderer Möglichkeiten sei auf Percival und Walden (2008, Kap. 10) und Gençay et al. (2001b, S. 213ff) verwiesen.

Eine solche Systematik entspricht demnach einem Trendfolgemodell, bei dem die transformierte Reihe eine Indikation über den Trend angibt und dadurch die jeweiligen Signale generiert. Wie alle Trendfolgemodelle werden selbstredend nur dann profitable Signale erzeugt, wenn auch wirklich ein Trend vorhanden ist. In Seitwärtsphasen eines Marktes, bei denen keine signifikante Auf- bzw. Abwärtsrichtung dominiert, kann daher typischerweise nicht mit einer positiven Performance gerechnet werden.

Darüber hinaus wird im Rahmen des Modells eine bestimmte Annahme getroffen, die bei der Evaluierung der Ergebnisse beachtet werden muss: Ein Kauf- bzw. Verkaufssignal basiert auf einem bestimmten Closing-Preis eines Tages t . Die Renditen der nachfolgenden Sampling-Perioden werden vollständig zur Performance des Modells hinzu gezählt. Diese Annahme ist dahingehend als problematisch anzusehen, als dass angenommen wird, dass eine Order nach dem Closing am Tag t , d. h. nach dem regulären Börsenhandel im Markt platziert werden kann. In der Regel ist dies für herkömmliche Aktien oder Anleihen nur zum Teil möglich. Auf der anderen Seite bezieht sich die folgende Analyse auf Länder- und Regionenindizes des MSCI-Universums, d. i. auf Indizes, die als Wert nicht an sich, sondern nur über Derivate gehandelt werden können. Die Handelszeiten für solche Instrumente wie beispielsweise Futures, Optionen oder Zertifikate unterscheiden sich in der Regel von denjenigen des regulären Parketthandels für die jeweiligen Underlyings. Die Schlussauktion des klassischen Xetra-Handels an der Frankfurter Börse findet beispielsweise um 17.30 Uhr statt (vgl. www.xetra.com); derjenige an der Derivatebörse Eurex endet für diverse Futures-Kontrakte wie dem DAX-Future dagegen erst um 22.00 Uhr (vgl. www.eurexchange.com), so dass die Trading-Strategie noch am selben Tag der Analyse umgesetzt werden kann. Alternativ müsste bei der Umsetzung der Strategie für die jeweiligen Underlyings zum Opening des nachfolgenden Tages eine Order platziert werden. Aufgrund von sogenannten *Overnight-Gaps* kann dieser Preis jedoch vom Closing-Preis des Vortages abweichen und die Performance des Systems damit wesentlich beeinflussen.

Als Kostenpunkt werden 5 Basispunkte pro Transaktion veranschlagt und in die Wertentwicklung des Systems integriert. Die Kosten für einen gesamten Zyklus bestehend aus beispielsweise 'Long-Neutral-Short-Neutral' betragen somit insgesamt 20 Basispunkte des eingesetzten Vermögens. Die Ansetzung von 5 Basispunkten pro Trade ist angesichts der Tatsache, dass das System primär im Hinblick auf den Einsatz mit Derivaten zum Trading vorgesehen ist und kein Verfahren zur Asset Allocation bzw.

Portfolio-Optimierung darstellt, als realistisch einzustufen⁴³

4.3.4 Empirische Bestimmung des Augmentationsverfahrens

Bevor die eigentliche Analyse des WT-basierten Trading-Systems im nächsten Abschnitt 4.3.5 durchgeführt werden kann, sollte zuvor untersucht werden, inwiefern sich die in Abschnitt 4.1.1 bzw. 4.3.1 beschriebenen Augmentationsverfahren zur Datenverlängerung an den Rändern unterscheiden und für die Trendextraktion von Preisdaten spekulativer Vermögensgegenstände eignen. Gekoppelt an diese Fragestellung ist ferner, welche Wavelet-Basis in diesem Zusammenhang die besten Resultate liefert. Die folgende Analyse bezieht sich auf tägliche Preisdaten des MSCI World GR USD Index vom 04.03.2002 bis 30.08.2013. Dieser Index wurde für die Evaluierung ausgewählt, weil er einerseits eine in der Praxis häufig verwendete Benchmark, andererseits einen sehr breiten Index darstellt, der 24 Aktienmärkte entwickelter Industrieländer subsumiert (vgl. www.msci.com). Die statistischen Eigenschaften der Zeitreihe, die 3000 Datenpunkte umfasst, sind in Tabelle 4.3.1 zusammengefasst.

Tabelle 4.3.1: Deskriptive Kennzahlen des MSCI World GR USD Index basierend auf Tagesdaten

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min	Max
MSCI World GR USD	0,02	0,07	1,10	-0,36	7,89	1931,96	5533,33

Um die Güte der verschiedenen Augmentationsverfahren miteinander vergleichen zu können, wird eine MRA im Rahmen eines Backtests für die Level $j = 1, 2, \dots, 8$ jeweils vom ersten verfügbaren Datenpunkt am 01.01.2001 bis zum 04.03.2002 und danach iterativ für alle nachfolgenden Zeitpunkte $t < T$ mit $T = 30.08.2013$ mit demselben Startzeitpunkt durchgeführt. Der jeweils letzte Wert jeder Iteration wird gespeichert und der

⁴³Grundsätzlich ist eine genaue Festsetzung der Transaktionskosten äußerst schwierig, da mehrere Faktoren berücksichtigt werden müssen wie beispielsweise die Unterscheidung zwischen expliziten Kosten wie Gebühren und impliziten Kosten wie Bid-Ask-Spreads. Stone und Lyman (2011) berechnen deswegen keine Kosten in ihrer Studie, in der sie automatisierte Trading-Strategien auf Basis von technischen Indikatoren testen. Papst (2011) setzt für einen Teil seiner Analysen 10 Basispunkte pro Transaktion an, für den anderen Teil jedoch ebenfalls keine, um sich auf die Prognosegüte der Systematik zu fokussieren. Baltas und Kosowski (2013) untersuchen Momentum-Strategien auf Futures-Märkten und vernachlässigen Transaktionskosten aufgrund ihrer geringen Höhe gänzlich. Clare, Seaton, Smith und Thomas (2014) bemessen die Höhe der Transaktionskosten für Rohstoff-Futures zwischen 0,5 und 6 Basispunkten. Fuertes, Miffre und Rallis (2010) kalkulieren mit 3-4 Basispunkten im Rahmen einer Futures-basierten Momentumstrategie.

Vektor der transformierten MRA-Reihe, d. i. die Smooth-Koeffizienten $\tilde{S}_{j,t}$ damit aufgebaut. Abbildung 4.3.4 illustriert die Vorgehensweise schematisch für ein beliebiges Level j : Iterativ wird nacheinander bis zu jedem Zeitpunkt t eine MODWT durchgeführt und der jeweilige Wert in einem Vektor gespeichert, bis alle Datenpunkte x_t transformiert sind. Für die Analyse wird die MODWT verwendet, da dieses Verfahren beliebig lange Zeitreihen, d. i. insbesondere solche nicht-dyadischer Länge verwerten kann. Die Datenaugmentation wird dabei nur dazu verwendet, um den jeweilig letzten Datenpunkt der Zeitreihe zu transformieren. Bezogen auf Abbildung 4.3.4 bedeutet dies, dass bei der Generierung der einzelnen \tilde{S}_t zwar Daten über x_t hinaus augmentiert werden; diese werden aber nur dazu verwendet, um die MODWT durchführen zu können und \tilde{S}_t zu gewinnen. D. h. dass man die vorhandene Datenreihe bis inklusive x_t nimmt, im zweiten Schritt nach einem der oben beschriebenen Verfahren Daten augmentiert, die Transformation durchführt, und schließlich \tilde{S}_t erhält. Abbildung 4.3.5 illustriert diese Vorgehensweise nochmals schematisch für ein beliebiges Level j .

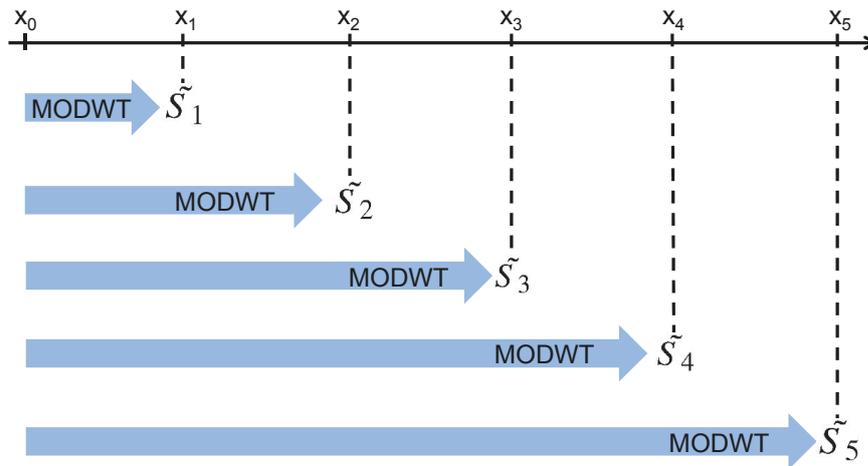


Abbildung 4.3.4: Schematische Darstellung der Generierung einer transformierten Zeitreihe für den Backtest

In der Analyse werden unterschiedliche Augmentationsverfahren untersucht, die zum Teil schon vorgestellt wurden und wie folgt bezeichnet werden⁴⁴:

- **Perio:** Periodische Verlängerung

⁴⁴Alle folgenden Analysen wurden mit R erstellt und basieren auf den R-Packages *wavelets* und *wmts*.

- **Konst:** Konstante Verlängerung
- **Null:** Zero-Padding
- **Refl:** Reflektionsmethode/Mirroring
- **Refl 2:** Im Gegensatz zu *Refl* werden bei diesem Verfahren nicht die Preisdaten x_t , sondern die log-Renditen r_t der Zeitreihe transformiert. Der Hintergrund dieses Ansatzes ist, dass die Zeitreihe durch die Verwendung der log-Renditen vom Trend befreit wird, somit nur der oszillierende Charakter der Zeitreihe übrig bleibt und die Randeffekte im Rahmen der Reflektionsmethode dadurch womöglich vermindert werden können. Anschließend werden die transformierten log-Renditen $r_{\bar{s}_{j,t}}$ mittels $x_{\bar{s}_{j,t}} = \exp(r_{\bar{s}_{j,t}}) * x_{\bar{s}_{j,t-1}}$ wieder in implizit transformierte Preisdaten überführt⁴⁵.
- **Poly:** Polynomial-Fit; Spezifizierung des Polynomgrades mit AIC.
- **AR(p):** Bei diesem Ansatz werden die fehlenden Datenpunkte auf Basis eines autoregressiven AR(p)-Fits prognostiziert und zur Datenverlängerung verwendet. Zur Spezifikation des Parameter p wurde das AIC benutzt und das AR(p)-Modell auf die log-Renditen der Zeitreihe angewandt. Die WT wurde daraufhin analog zu *Refl 2* mit den log-Renditen der Zeitreihen mitsamt der augmentierten Datenpunkte durchgeführt und wieder in implizit transformierte Preisdaten umgewandelt.
- **Oh-Algorithmus:** In der letzten Spalte sind die Ergebnisse einer eher unkonventionellen Verlängerungsmethode dargestellt, die von Oh et al. (2001) bzw. Oh und Lee (2005) entwickelt wurde und als *polynomial wavelet regression* (PWR) bezeichnet wird. Die Idee dieses Ansatzes ist, die Randeffekte bei einer Funktion $f(t)$ durch eine Kombination aus Polynomapproximation und WT zu minimieren: Die Funktion wird zunächst mit Hilfe eines Polynomial-Fits approximiert ($\hat{f}_P(t)$). Anschließend wird die Shrinkage-Methode auf die Residuen $f(t) - \hat{f}_P(t)$ angewandt ($\hat{f}_W(t)$), um die finale Schätzung $\hat{f}(t) = \hat{f}_P(t) + \hat{f}_W(t)$ von $f(t)$ zu erhalten. Die Motivation dieses Ansatzes ist derjenigen von *Refl 2* ähnlich, d. i. dass man

⁴⁵Für die Berechnung des ersten WT-Koeffizienten zum Zeitpunkt $t = 0$ (d. h. am 04.03.2002) wird x_{t-1} anstatt $x_{\bar{s}_{j,t-1}}$ verwendet (d. i. dem Preis zum Zeitpunkt $t = -1$), da für $t = 0$ $x_{\bar{s}_{j,t-1}}$ noch nicht vorliegt.

die eigentliche WT nicht auf die Preisdaten an sich, sondern auf die Residuen anwendet, um durch die Verwendung der Reflektionsmethode bessere Resultate im Sinne einer Minimierung der Randeffekte zu erhalten⁴⁶.

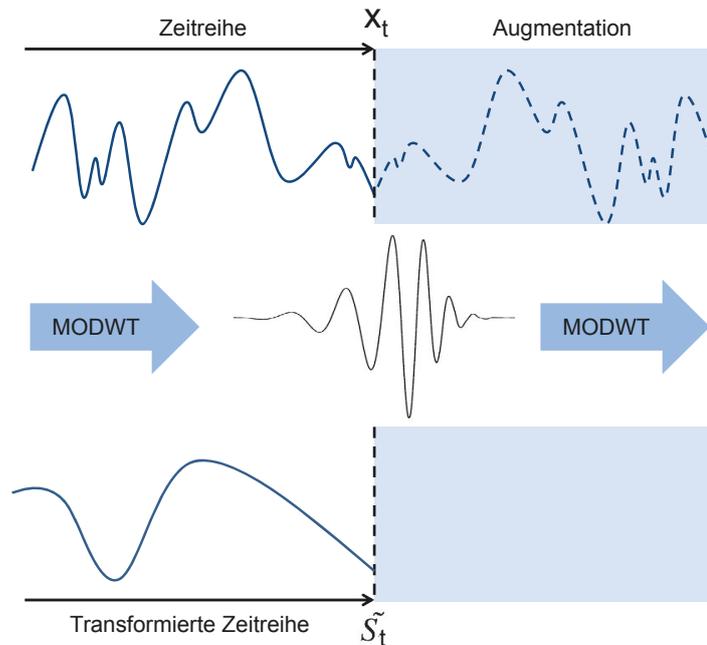


Abbildung 4.3.5: Schematische Darstellung des Augmentationsverfahrens für den Backtest

Eine erste Indikation über das Ausmaß der Randeffekte der unterschiedlichen Augmentationsverfahren lässt sich quantifizieren, indem man untersucht, in welcher Größenordnung die Werte von einer perfekten, d. i. von Randeffekten unbeeinflussten Transformation abweichen. Tabelle 4.3.2 zeigt hierfür jeweils den Mittelwert der absoluten Abweichungen in Prozent für jedes Level j . Wie man sehen kann, nehmen die Werte der prozentualen Abweichungen für alle Basisfunktionen mit steigendem Level bis auf wenige Ausnahmen zu. Dieses Resultat ist angesichts der Tatsache, dass die Anzahl der zu

⁴⁶Die hier vorgenommene Umsetzung dieses Ansatzes wurde folgendermaßen realisiert: Zunächst wurde die Zeitreihe mit Hilfe des sogenannten Friedmanschen Super-Smoother approximiert. Die Funktion in R dafür lautet `supsmu()`, wobei für den Glättungsparameter `base` mit 8 ein relativ hoher Wert gewählt wurde. Daraufhin wurde die VisuShrink-Methode (R-Funktion `wavShrink()` aus dem `wmts`-Package) auf die Residuen, d. i. die Differenzen aus den jeweiligen Datenpunkten und der `supsmu`-Reihe angewandt. Die Parameter `threshold` und `thresh.scale`, die den Grad der Glättung bei `wavShrink()` beeinflussen, wurden auf ihr Maximum gesetzt.

augmentierenden Datenpunkte und damit auch die Anzahl der Boundary-Koeffizienten (vgl. Gleichungen 4.3.2 und 4.3.6) mit j zunimmt, konsistent. Der Mittelwert über alle Level ist für die Augmentationsmethoden *Konst*, *Refl* und *Oh* bei allen Basisfunktionen am geringsten, wobei mit Ausnahme von *Poly* das LA8-Wavelet die niedrigsten Werte aufweist. Obgleich eine geringe Abweichung von einem perfekten Transformationsergebnis grundsätzlich positiv ist, muss dies nicht unbedingt als alleiniges Qualitätsmerkmal im Sinne einer glatten Trendextraktion angesehen werden. Bei *Null* beispielsweise werden die Koeffizienten betragsmäßig grundsätzlich verringert, da die Datenverlängerung mit Nullwerten automatisch niedrigere Koeffizientenwerte mit sich bringt. Somit sind die Abweichungen bei dieser Methode am höchsten. Dennoch könnte ein solches Verfahren mit einer effizienteren, d. i. insbesondere im Zeitverlauf konstant glatteren Trendextraktion einhergehen.

In der Regel ist daher die Performance für ein wie in Abschnitt 4.3.3 vorgestelltes Trading-System entscheidend. Letztlich bestimmt dieses Kriterium, inwieweit eine Verlängerungsmethode mit einer solchen Systematik harmoniert. Die Tabellen 4.3.3 und 4.3.4 zeigen die Ergebnisse für das Haar-Wavelet⁴⁷, die sich aus dem Trading-System in Verbindung mit den unterschiedlichen Augmentationsverfahren ergeben haben: *Ret ges* bzw. *Ret ann* sind die Gesamt- bzw. annualisierte Rendite⁴⁸ für den betreffenden Zeitraum, σ bzw. σann die entsprechenden Standardabweichungen und *Sharpe* der Quotient aus annualisierter Rendite und σann ⁴⁹. Ferner werden die größte (*max Ret*) und geringste (*min Ret*) Rendite eines Trades sowie der maximale Drawdown (*max DD*) dokumentiert. In den übrigen Zeilen stehen zur Einordnung noch die Statistiken über die generierten Signale, d. i. die absolute Anzahl (*# Trades*) bzw. durchschnittliche Anzahl pro Jahr (*Trades p.a.*), sowie die Anzahl der positiven und negativen (absolut und relativ)

⁴⁷Die Auswertungen für die beiden anderen Filter sind in Anhang A.8 (Tabellen A.8.1 bis A.8.4) zu finden.

⁴⁸Für Zeitreihen auf Tagesbasis wurde die Annualisierung der jeweiligen Größen auf Basis von 250 Handelstagen durchgeführt.

⁴⁹Die sogenannte *Sharpe-Ratio* ist eine in der Praxis sehr beliebte Kennzahl, die die erzielte Rendite pro Risikoeinheit widerspiegelt. Eigentlich wird bei der Berechnung dieser Größe für jeden Datenpunkt im Zähler der sogenannte risikofreie Zins abgezogen, um die Überschussrendite ins Verhältnis zum eingegangenen Risiko zu ermitteln. Da es bei der vorliegenden Analyse hauptsächlich um die relative Performance der jeweiligen Systemkonfigurationen geht, wird in den folgenden Analysen auf diese Subtraktion verzichtet und schlichtweg der Quotient aus annualisierter Rendite und Volatilität ins Verhältnis gesetzt. Da es sich hierbei ebenfalls um eine risikoadjustierte Rendite handelt, wird die Bezeichnung Sharpe Ratio beibehalten.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.2: Augmentationsverfahren – Mittelwerte der absoluten Abweichungen in %

	Perio	Konst	Null	Refl	Refl 2	Poly	AR(p)	Oh
Haar								
j=1	5,63	0,19	25,01	0,19	0,47	2,87	9,83	0,28
j=2	8,47	0,34	37,51	0,39	1,06	4,31	15,37	0,50
j=3	9,88	0,51	43,78	0,63	1,78	5,05	17,97	0,73
j=4	10,61	0,72	46,94	0,97	2,21	5,47	19,49	1,04
j=5	10,94	1,03	48,56	1,49	2,26	5,77	20,43	1,48
j=6	11,27	1,52	49,47	2,29	2,09	6,12	21,53	2,20
j=7	11,75	2,30	50,11	3,57	3,35	6,72	22,38	3,23
j=8	12,39	3,51	50,81	5,65	6,32	7,99	23,84	4,76
Mittelwert	10,12	1,26	44,03	1,90	2,44	5,54	18,85	1,78
D4								
j=1	5,63	0,19	25,00	0,19	0,42	2,87	9,63	0,29
j=2	8,47	0,33	37,51	0,37	0,90	4,30	15,34	0,49
j=3	9,88	0,49	43,77	0,61	1,80	5,04	17,85	0,71
j=4	10,63	0,69	46,92	0,90	2,33	5,44	19,38	0,99
j=5	10,89	0,98	48,53	1,39	2,71	5,71	20,20	1,41
j=6	11,23	1,40	49,40	2,05	1,95	6,00	21,43	2,02
j=7	11,69	2,14	49,97	3,28	3,08	6,44	21,94	3,00
j=8	12,19	3,27	50,57	5,33	5,36	7,30	22,85	4,41
Mittelwert	10,07	1,19	43,96	1,77	2,32	5,39	18,58	1,66
LA8								
j=1	5,63	0,19	23,93	0,19	0,40	2,87	9,48	0,29
j=2	8,46	0,33	36,12	0,37	0,80	4,30	15,39	0,49
j=3	9,88	0,50	42,30	0,62	1,86	5,04	17,79	0,71
j=4	10,64	0,69	45,43	0,89	2,29	5,43	19,39	0,98
j=5	10,87	0,98	47,03	1,39	2,93	5,71	20,11	1,41
j=6	11,21	1,38	47,90	2,00	1,90	5,99	21,50	1,97
j=7	11,65	2,12	48,45	3,22	3,05	12,64	21,83	2,96
j=8	12,14	3,25	49,04	5,16	4,82	12,59	22,55	4,27
Mittelwert	10,06	1,18	42,53	1,73	2,26	6,82	18,50	1,64

Transaktionen. In der zweiten Spalte (*Perf*) stehen zum Vergleich noch die Ergebnisse, die sich im Hinblick auf eine perfekte MRA, d. i. die Smooth-Koeffizienten $\tilde{S}_{j,t}$ ohne Einfluss der Randeffekte ergeben würden. In den übrigen Spalten stehen die Kennzahlen für die jeweiligen Augmentationsverfahren. Mehrere Auffälligkeiten stechen bei der Betrachtung der Ergebnisse ins Auge:

- **Anzahl der Trades**

Zum einen nimmt die Zahl der Trades mit steigendem Level j ab. Dies deckt sich mit der Wavelet-Theorie, nach der eine höhere Skala eine glattere Repräsentation der zugrunde liegenden Daten und damit auch weniger kurzfristige Trendwenden bzw. Systemsignale impliziert. Einzig *Konst* führt auf allen Skalen zu einer relativ gleich hohen Anzahl an Trades.

- **Schwankungsbreite**

Die Standardabweichung σ ist bei allen Methoden und für alle Level ähnlich, was zu erwarten war, da das System wie in Abschnitt 4.3.3 bereits angesprochen durchgehend im Markt positioniert ist. Dementsprechend partizipiert das System größtenteils auch an den Schwankungen des zugrunde liegenden Marktes. Die Sharpe-Ratio wird somit hauptsächlich durch die erzielte Rendite des Systems determiniert.

- **Rendite**

Die Rendite ist bei allen Verlängerungsverfahren auf bestimmten Level tendenziell besser bzw. schlechter⁵⁰: So ist auf Level 1 im Grunde für alle Verfahren die höchste Rendite zu verzeichnen. Auch auf den Level 5 und 8 sind die Renditen des Systems vielversprechend. Level 3 hingegen scheint mit zum Teil negativen Renditen die schlechteste Performance zu generieren.

- **Maximum Drawdown**

In Bezug auf *max DD* ist auffällig, dass die Drawdowns mit zunehmenden j meist deutlich größer werden. Auch dieses Resultat war zu erwarten, da mit steigendem Level die Anzahl der Trades abnimmt und damit die Trägheit der Signallinie aus-

⁵⁰ Ausgenommen ist dabei *Konst*, das aufgrund der konstant hohen Anzahl an Trades auch auf allen Level eine vergleichbare Rendite generiert.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

geprägter wird. Bei plötzlichen Trendumkehrungen nimmt auch die Wahrscheinlichkeit von hohen Verlust-Trades zu.

Tabelle 4.3.3: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – Haar, j=1 bis 4

	Perf	Perio	Refl	Refl 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=1									
Ret ges [%]	4089813,53	293,73	699,37	721,77	699,37	293,73	381,62	485,88	54,46
Ret ann [%]	142,28	12,10	18,91	19,19	18,91	12,10	14,00	15,87	3,69
σ [%]	1,04	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,45	17,56	17,52	17,52	17,52	17,56	17,55	17,54	17,58
Sharpe	8,65	0,69	1,08	1,10	1,08	0,69	0,80	0,91	0,21
max Ret [%]	7,21	7,14	7,14	7,14	7,14	7,14	7,14	7,14	6,27
min Ret [%]	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14
max DD [%]	-13,89	-22,19	-18,21	-18,21	-18,21	-22,19	-22,19	-20,72	-42,55
# Trades	737	1007	1081	1077	1081	1007	985	1011	899
Trades p.a	61,4	83,9	90,1	89,8	90,1	83,9	82,1	84,3	74,9
# pos Trades	536	386	425	423	425	386	390	398	345
# neg Trades	201	621	656	654	656	621	595	613	554
pos Trades [%]	72,73	38,33	39,32	39,28	39,32	38,33	39,59	39,37	38,38
j=2									
Ret ges [%]	9691118,43	226,24	191,22	187,19	606,30	226,24	223,28	200,99	-21,78
Ret ann [%]	160,33	10,36	9,32	9,19	17,69	10,36	10,27	9,62	-2,03
σ [%]	1,03	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,31	17,56	17,56	17,56	17,53	17,56	17,56	17,56	17,56
Sharpe	9,83	0,59	0,53	0,52	1,01	0,59	0,59	0,55	-0,12
max Ret [%]	7,32	7,14	7,14	7,14	7,14	7,14	7,19	7,19	6,27
min Ret [%]	-9,10	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,10
max DD [%]	-11,40	-24,36	-24,36	-24,36	-22,72	-24,36	-27,56	-24,36	-45,31
# Trades	389	703	743	745	991	703	667	733	629
Trades p.a	32,4	58,6	61,9	62,1	82,6	58,6	55,6	61,1	52,4
# pos Trades	350	279	287	287	378	279	271	289	248
# neg Trades	39	424	456	458	613	424	396	444	381
pos Trades [%]	89,97	39,69	38,63	38,52	38,14	39,69	40,63	39,43	39,43
j=3									
Ret ges [%]	1446248,33	87,22	38,16	19,14	856,43	87,22	76,00	83,65	-17,83
Ret ann [%]	122,17	5,37	2,73	1,47	20,70	5,37	4,82	5,20	-1,62
σ [%]	1,05	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,67	17,54	17,55	17,55	17,51	17,54	17,53	17,54	17,51
Sharpe	7,33	0,31	0,16	0,08	1,18	0,31	0,28	0,30	-0,09
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	6,27	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-11,78	-29,56	-29,56	-36,41	-18,60	-29,56	-31,17	-32,44	-32,42
# Trades	183	481	503	505	1081	481	447	501	415
Trades p.a	15,2	40,1	41,9	42,1	90,1	40,1	37,2	41,7	34,6
# pos Trades	173	172	176	176	425	172	168	185	155
# neg Trades	10	309	327	329	656	309	279	316	260
pos Trades [%]	94,54	35,76	34,99	34,85	39,32	35,76	37,58	36,93	37,35
j=4									
Ret ges [%]	105877,22	160,50	149,75	160,70	820,33	160,50	196,57	210,73	63,16
Ret ann [%]	78,69	8,31	7,93	8,31	20,32	8,31	9,48	9,91	4,16
σ [%]	1,08	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	17,04	17,51	17,51	17,51	17,51	17,51	17,50	17,50	17,49
Sharpe	4,62	0,47	0,45	0,47	1,16	0,47	0,54	0,57	0,24
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-18,77	-33,35	-33,57	-33,57	-18,85	-33,35	-28,98	-28,65	-29,43
# Trades	83	305	315	315	1081	305	295	319	247
Trades p.a	6,9	25,4	26,2	26,2	90,1	25,4	24,6	26,6	20,6
# pos Trades	82	103	104	104	425	103	99	108	85
# neg Trades	1	202	211	211	656	202	196	211	162
pos Trades [%]	98,80	33,77	33,02	33,02	39,32	33,77	33,56	33,86	34,41

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.4: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – Haar, j=5 bis 8

	Perf	Perio	Refl	Refl 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=5									
Ret ges [%]	20011,61	432,27	439,87	480,63	956,83	432,27	353,61	265,29	255,82
Ret ann [%]	55,58	14,95	15,09	15,79	21,71	14,95	13,43	11,40	11,16
σ [%]	1,09	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,11	1,10
σ ann [%]	17,21	17,46	17,46	17,46	17,50	17,46	17,46	17,47	17,46
Sharpe	3,23	0,86	0,86	0,90	1,24	0,86	0,77	0,65	0,64
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-17,64	-17,64	-17,64	-17,64	-18,85	-17,64	-22,55	-27,24	-21,30
# Trades	41	185	181	177	1191	185	161	211	185
Trades p.a	3,4	15,4	15,1	14,7	99,3	15,4	13,4	17,6	15,4
# pos Trades	41	66	64	64	488	66	48	67	63
# neg Trades	0	119	117	113	703	119	113	144	122
pos Trades [%]	100,00	35,68	35,36	36,16	40,97	35,68	29,81	31,75	34,05
j=6									
Ret ges [%]	6833,34	169,76	191,15	173,98	884,83	169,76	177,29	164,49	122,18
Ret ann [%]	42,37	8,62	9,31	8,76	21,00	8,62	8,87	8,44	6,88
σ [%]	1,09	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,10	1,11
σ ann [%]	17,29	17,47	17,47	17,47	17,50	17,47	17,47	17,47	17,47
Sharpe	2,45	0,49	0,53	0,50	1,20	0,49	0,51	0,48	0,39
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-19,74	-28,76	-28,10	-27,07	-17,33	-28,76	-28,08	-26,95	-36,30
# Trades	22	140	142	138	1254	140	120	150	189
Trades p.a	1,8	11,7	11,8	11,5	104,5	11,7	10,0	12,5	15,7
# pos Trades	22	31	32	31	500	31	25	31	61
# neg Trades	0	109	110	107	754	109	95	119	128
pos Trades [%]	100,00	22,14	22,54	22,46	39,87	22,14	20,83	20,67	32,28
j=7									
Ret ges [%]	1422,32	164,73	160,36	168,88	886,61	164,73	115,48	146,33	135,92
Ret ann [%]	25,47	8,45	8,30	8,59	21,02	8,45	6,61	7,80	7,41
σ [%]	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,10	1,11
σ ann [%]	17,39	17,46	17,46	17,46	17,50	17,46	17,47	17,46	17,47
Sharpe	1,46	0,48	0,48	0,49	1,20	0,48	0,38	0,45	0,42
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-21,89	-30,62	-29,36	-30,62	-17,33	-30,62	-34,97	-31,14	-29,50
# Trades	7	106	110	106	1286	106	92	112	221
Trades p.a	0,6	8,8	9,2	8,8	107,2	8,8	7,7	9,3	18,4
# pos Trades	7	19	19	19	510	19	18	21	79
# neg Trades	0	87	91	87	776	87	74	91	142
pos Trades [%]	100,00	17,92	17,27	17,92	39,66	17,92	19,57	18,75	35,75
j=8									
Ret ges [%]	964,76	200,74	200,74	217,07	1173,16	200,74	109,69	155,30	124,57
Ret ann [%]	21,79	9,61	9,61	10,09	23,62	9,61	6,36	8,12	6,97
σ [%]	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,10	1,11
σ ann [%]	17,40	17,45	17,45	17,45	17,48	17,45	17,46	17,45	17,48
Sharpe	1,25	0,55	0,55	0,58	1,35	0,55	0,36	0,47	0,40
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-23,04	-41,42	-41,42	-37,91	-15,67	-41,42	-49,03	-48,18	-35,26
# Trades	5	43	43	45	1298	43	52	39	246
Trades p.a	0,4	3,6	3,6	3,7	108,2	3,6	4,3	3,2	20,5
# pos Trades	5	7	7	10	513	7	9	8	87
# neg Trades	0	36	36	35	785	36	43	31	159
pos Trades [%]	100,00	16,28	16,28	22,22	39,52	16,28	17,31	20,51	35,37

Um die Ergebnisse der verschiedenen Augmentationsverfahren besser miteinander vergleichen zu können, bietet sich hinsichtlich der Übersichtlichkeit eine kompaktere Darstellung der Resultate an. Die Tabellen 4.3.5 bis 4.3.7 fassen die Ergebnisse⁵¹ für die annualisierte Rendite, den Maximum Drawdown und den prozentualen Anteil der positiven Trades für die unterschiedlichen Verlängerungsmethoden nochmals zusammen⁵². Für die einzelnen Level $j = 1, \dots, 8$ sind die jeweils zwei besten (blau) und schlechtesten (rot) Resultate farblich markiert. In der letzten Zeile, die den durchschnittlichen Wert über alle Level angibt, ist das jeweils beste bzw. schlechteste Ergebnis farblich gekennzeichnet.

Wie man sofort sehen kann, ist die durchschnittliche annualisierte Rendite für alle Wavelet-Filter bei *Refl 2* am höchsten. Am schlechtesten schneidet dagegen *Oh* ab. Die höchsten Renditen werden im Schnitt mit dem Haar-Filter erzielt, die niedrigsten mit LA8. Den höchsten Wert insgesamt erzeugt das Trading-System dagegen für das D4-Wavelet auf dem ersten Level mit 20,0% p. a. Tabelle 4.3.6 fasst die Maximum Drawdowns der Analyse zusammen: Auch hier ergeben sich die besten, d. i. in diesem Fall niedrigsten Resultate für die Verlängerungsmethoden *Refl* und *Refl 2* in Kombination mit dem Haar-Wavelet. Hohe Einzelwerte treten wie weiter oben erwähnt eher auf den höheren Level mit Drawdowns von bis zu 56% (*Null* bei LA8 für $j = 8$) auf. Die letzte Tabelle 4.3.7 gibt schließlich eine Übersicht der positiven, d. i. profitablen Trades des Systems. Die Werte bewegen sich größtenteils im Bereich von 30-40%, was auf den ersten Blick eher enttäuschend ist. Zu beachten ist dabei jedoch, dass bei einem Trendfolgesystem weniger entscheidend ist, dass überwiegend positive Trades zustande kommen⁵³, sondern vielmehr dass die wesentlichen Trends vom System erfasst werden und in einer profitablen Positionierung im Markt resultieren. Solche Trends ziehen sich in der Regel über längere Zeiträume hinweg und generieren hohe Renditen, die etwaige Verlust-Trades, die sich beispielsweise in Seitwärtsphasen ergeben, im besten Fall wettmachen. Ein gutes Gegenbeispiel hierfür ist *Oh*, das für alle Filter im Schnitt zwar prozentual die höchste Anzahl an profitablen Signalen generiert, gleichzeitig jedoch auch die geringste Rendite erzielt.

Abbildungen 4.3.6 bis 4.3.8 zeigen schließlich die Equity-Kurven der unterschiedli-

⁵¹Die Ergebnisse wurden zur besseren Übersicht gerundet.

⁵²Auf die Darstellung der Ergebnisse für *Perf* und *Konst* wurde dabei verzichtet.

⁵³Obgleich es freilich immer wünschenswert ist, möglichst viele positive Trades zu generieren.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.5: Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Annualisierte Rendite

Haar							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	12,1%	18,9%	19,2%	12,1%	14,0%	15,9%	3,7%
2	10,4%	9,3%	9,2%	10,4%	10,3%	9,6%	-2,0%
3	5,4%	2,7%	1,5%	5,4%	4,8%	5,2%	-1,6%
4	8,3%	7,9%	8,3%	8,3%	9,5%	9,9%	4,2%
5	15,0%	15,1%	15,8%	15,0%	13,4%	11,4%	11,2%
6	8,6%	9,3%	8,8%	8,6%	8,9%	8,4%	6,9%
7	8,5%	8,3%	8,6%	8,5%	6,6%	7,8%	7,4%
8	9,6%	9,6%	10,1%	9,6%	6,4%	8,1%	7,0%
Mittelwert	9,7%	10,1%	10,2%	9,7%	9,2%	9,5%	4,6%
D4							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	10,0%	19,8%	20,0%	10,0%	10,1%	10,6%	3,2%
2	6,6%	7,7%	7,7%	6,6%	6,1%	7,6%	-1,6%
3	0,2%	-0,6%	0,1%	0,2%	2,2%	3,6%	-2,5%
4	7,3%	9,1%	8,8%	7,3%	9,7%	9,0%	2,1%
5	10,0%	10,4%	10,3%	10,0%	13,6%	8,7%	10,8%
6	5,5%	5,6%	6,1%	5,5%	5,4%	5,5%	4,6%
7	4,9%	5,3%	5,5%	4,9%	7,6%	8,2%	7,6%
8	8,6%	8,3%	8,8%	8,4%	7,7%	7,4%	7,1%
Mittelwert	6,6%	8,2%	8,4%	6,6%	7,8%	7,6%	3,9%
LA8							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	9,7%	15,9%	16,1%	9,6%	10,8%	9,9%	4,1%
2	4,5%	5,2%	5,2%	4,9%	6,2%	6,3%	-4,0%
3	2,1%	0,6%	0,5%	2,0%	0,7%	1,9%	-3,2%
4	7,5%	6,0%	7,9%	7,3%	10,2%	6,6%	-1,0%
5	8,6%	9,3%	9,5%	8,6%	12,5%	9,0%	8,5%
6	5,7%	6,5%	7,6%	5,5%	5,5%	7,8%	2,8%
7	7,3%	7,4%	6,6%	7,0%	6,7%	7,4%	7,7%
8	7,1%	7,0%	10,8%	6,2%	7,1%	6,7%	7,4%
Mittelwert	6,6%	7,2%	8,0%	6,4%	7,5%	7,0%	2,8%

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.6: Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Maximum Drawdown

Haar							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	-22%	-18%	-18%	-22%	-22%	-21%	-21%
2	-24%	-24%	-24%	-24%	-28%	-24%	-45%
3	-30%	-30%	-36%	-30%	-31%	-32%	-32%
4	-33%	-34%	-34%	-33%	-29%	-29%	-29%
5	-18%	-18%	-18%	-18%	-23%	-27%	-21%
6	-29%	-28%	-27%	-29%	-28%	-27%	-36%
7	-31%	-29%	-31%	-31%	-35%	-31%	-30%
8	-41%	-41%	-38%	-41%	-49%	-48%	-35%
Mittelwert	-28%	-28%	-28%	-28%	-31%	-30%	-31%
D4							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	-32%	-18%	-18%	-32%	-32%	-32%	-32%
2	-24%	-24%	-24%	-24%	-33%	-27%	-42%
3	-36%	-38%	-35%	-36%	-45%	-33%	-38%
4	-32%	-26%	-28%	-32%	-33%	-27%	-36%
5	-27%	-27%	-27%	-27%	-21%	-21%	-22%
6	-39%	-39%	-35%	-39%	-32%	-36%	-46%
7	-39%	-37%	-36%	-39%	-27%	-30%	-29%
8	-50%	-50%	-38%	-50%	-48%	-50%	-35%
Mittelwert	-35%	-32%	-30%	-35%	-34%	-32%	-35%
LA8							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	-32%	-21%	-19%	-32%	-30%	-25%	-25%
2	-29%	-27%	-27%	-29%	-33%	-30%	-48%
3	-38%	-36%	-36%	-39%	-50%	-35%	-43%
4	-35%	-34%	-30%	-35%	-25%	-32%	-43%
5	-27%	-27%	-27%	-27%	-21%	-20%	-31%
6	-43%	-39%	-32%	-43%	-31%	-27%	-46%
7	-35%	-35%	-34%	-36%	-30%	-31%	-27%
8	-55%	-55%	-34%	-56%	-49%	-50%	-34%
Mittelwert	-37%	-34%	-30%	-37%	-34%	-31%	-37%

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.7: Zusammenfassung Augmentationsverfahren – Positive Trades

Haar							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	38%	39%	39%	38%	40%	39%	38%
2	40%	39%	39%	40%	41%	39%	39%
3	36%	35%	35%	36%	38%	37%	37%
4	34%	33%	33%	34%	34%	34%	34%
5	36%	35%	36%	36%	30%	32%	34%
6	22%	23%	22%	22%	21%	21%	32%
7	18%	17%	18%	18%	20%	19%	36%
8	16%	16%	22%	16%	17%	21%	35%
Mittelwert	30%	30%	31%	30%	30%	30%	36%
D4							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	39%	40%	40%	39%	39%	39%	38%
2	40%	39%	39%	40%	39%	39%	39%
3	35%	35%	36%	35%	36%	36%	37%
4	34%	34%	34%	34%	34%	34%	34%
5	30%	30%	30%	30%	33%	28%	37%
6	22%	22%	23%	22%	19%	21%	30%
7	13%	13%	14%	13%	22%	16%	34%
8	23%	23%	20%	22%	17%	19%	36%
Mittelwert	29%	30%	29%	29%	30%	29%	36%
LA8							
j	Perio	Refl	Refl 2	Null	Poly	AR(p)	Oh
1	39%	40%	40%	39%	39%	39%	38%
2	39%	39%	39%	39%	40%	39%	39%
3	36%	36%	36%	36%	37%	35%	36%
4	35%	34%	34%	34%	33%	32%	32%
5	30%	31%	32%	31%	33%	29%	38%
6	23%	22%	23%	22%	19%	24%	27%
7	17%	15%	16%	16%	20%	18%	34%
8	27%	26%	23%	21%	20%	18%	36%
Mittelwert	31%	30%	31%	30%	30%	29%	35%

chen Augmentationsverfahren für die Level 1, 5, und 8. Wie man sehen kann, ist die Wertentwicklung auf dem ersten Level lediglich bei *Oh* schlechter als der Index, alle anderen Verlängerungsmethoden resultieren in einer weit besseren Performance. Die Equity-Kurven für *Null* und *Perio* fallen bei den dargestellten Charts zusammen: Obwohl die transformierten Zeitreihen unterschiedlich sind, generieren Sie dieselben Signale für das Trading-System. Dies zeigte sich schon in den Tabellen 4.3.3 und 4.3.4⁵⁴, in denen die Kennzahlen dieser beiden Augmentationsverfahren sehr eng zusammen liegen. Markant ist in den Abbildungen 4.3.6 bis 4.3.8 vor allem das Jahr 2008, als nach der Lehman-Pleite und der anschließenden globalen Finanzkrise der Index deutliche Verluste verzeichnen musste, während das Trendfolgesystem aufgrund seiner Long/Short-Systematik profitabel gewesen ist und anschließend weiter von hohen Wertzuwächsen geprägt war. Auf allen dargestellten Level schneidet *Refl 2* vergleichsweise am besten ab, wobei im Durchschnitt die Kombination mit dem Haar-Wavelet die besten Resultate liefert (vgl. Tabelle 4.3.5). Graph (4.3.9) zeigt deswegen den Verlauf der Equity-Kurven von *Refl 2* für diese Basisfunktion über alle Level. Die schlechteste Performance liefert das System für $j = 3$. Für die Level 5 und insbesondere Level 1 ist das System am profitabelsten.

Abbildung 4.3.10 vergleicht abschließend die Wertentwicklung des Systems von *Refl 2* in Kombination mit Haar für das erste Level, dem Index und einem Portfolio bestehend aus den gleich gewichteten Equity-Kurven über alle Level. Man sieht, dass die Performance für das gleich gewichtete Portfolio weitaus stabiler ist als der zugrunde liegende Index. Auch die Equity-Kurve für $j = 1$ weist eine höhere Schwankungsbreite als das Portfolio auf, resultiert jedoch auch in einer deutlich besseren Performance.

⁵⁴Siehe auch Tabellen A.8.1 bis A.8.4 in Anhang A.8.

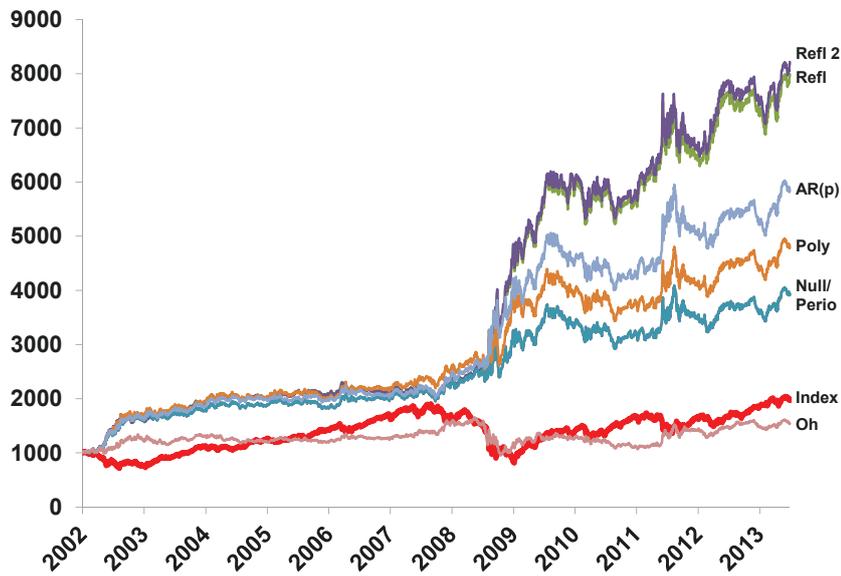


Abbildung 4.3.6: Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 1

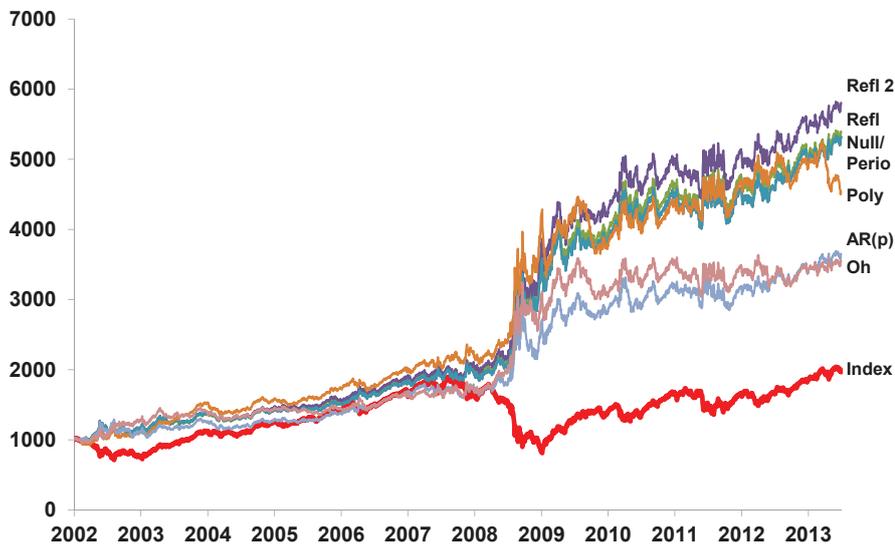


Abbildung 4.3.7: Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 5

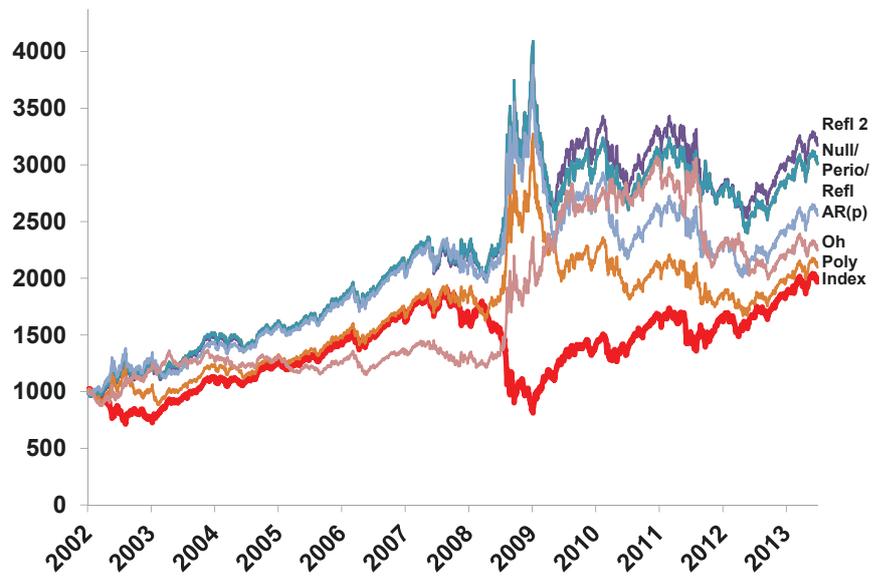


Abbildung 4.3.8: Equity-Kurven der Augmentationsverfahren – Level 8

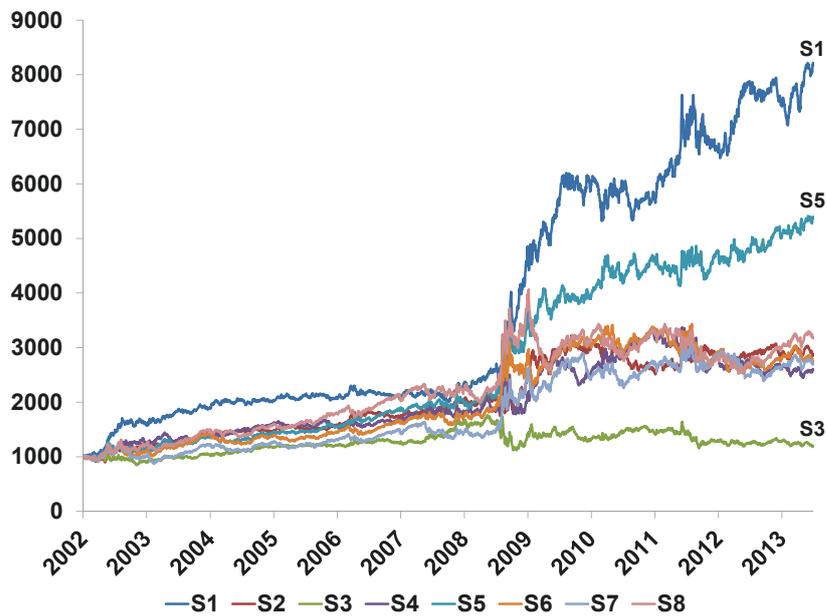


Abbildung 4.3.9: Equity-Kurven für Refl 2 – Haar, Level 1 bis 8

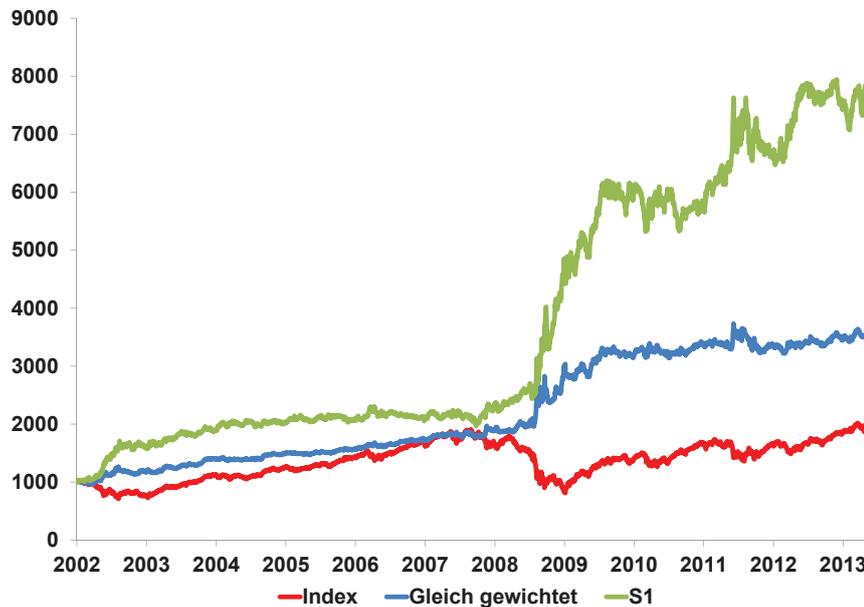


Abbildung 4.3.10: Equity-Kurven für Refl 2 – Haar, gleich gewichtet

4.3.5 Statistische Kennzahlen – MSCI Universum

In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse des Trading-Systems für eine Auswahl von MSCI Indizes auf Basis von Tagesdaten zusammengefasst. Der Zeitraum der Analyse umfasst wie beim MSCI World GR USD Index im vorhergehenden Abschnitt 3000 Datenpunkte und erstreckt sich vom 04.03.2002 bis 30.08.2013. Alle Indizes lauten auf USD und gehören zur Indexfamilie Gross Return (GR)⁵⁵. Analysiert werden dabei sechs regionale Indizes und 42 Länderindizes. Tabelle 4.3.8 fasst die statistischen Merkmale des ausgewählten Universums zusammen. Auffällig ist, dass die Kurtosis bei allen Indizes ungleich drei ist und damit gegen eine Normalverteilung spricht. Die höchsten Werte weisen dabei Korea (18,73) und Russia (15,45) auf, die niedrigsten besitzen Taiwan (2,51) und Finland (3,88). Der Durchschnitt für die Länderindizes beträgt 7,63 und entspricht damit in etwa derjenigen der Weltindizes ACWI (7,96) bzw. World (7,94), die das Länderuniversum in einer spezifischen Gewichtung repräsentieren⁵⁶. 23

⁵⁵In den folgenden Analysen werden die Indizes zur besseren Übersicht nicht mehr voll ausgeschrieben, sondern mit ihrem Länder- bzw. Regionennamen abgekürzt.

⁵⁶Der World Index beinhaltet lediglich Aktienindizes der Industrieländer, wohingegen der ACWI auch Schwellenländer (engl. *Emerging Markets* (EM)) berücksichtigt. Für detaillierte Informationen zur

der 48 Indizes besitzen darüber hinaus eine negative Schiefe, wobei Australia (-0,60) und Canada (-0,52) die kleinsten Werte aufweisen. In Bezug auf das Risiko zeigen Indizes der Schwellenländer tendenziell eine höhere Schwankungsbreite σ als die Industrieländer, was angesichts der geringeren Entwicklungsstufe dieser Märkte und der damit verbundenen geringeren Liquidität typisch ist.

Tabelle 4.3.9 fasst darüber hinaus die Performance-Kennzahlen des Universums zusammen. Für die Regionenindizes ergeben sich aus den annualisierten Renditen zwischen ca. 5,3% (North America) und 11,5% (EM) Sharpe Ratios zwischen 0,26 und 0,55. Die beiden Weltindizes haben eine Sharpe-Ratio von 0,35 (ACWI) bzw. 0,33 (World). Die maximalen Drawdowns liegen bei etwa 60-70%, was deutlich geringer ist als für die meisten Länderindizes, die aufgrund der geringeren Diversifikation typischerweise mit einem höheren Risiko behaftet sind. Die Sharpe-Ratios sind für Schwellenländer tendenziell etwas höher als für Industrieländer, wobei lediglich Colombia eine Sharpe Ratio größer Eins aufweist. Nur zwei Länderindizes, d. i. Greece und Ireland, besitzen im betreffenden Zeitraum eine negative Rendite und haben dementsprechend auch die niedrigsten Sharpe-Ratios (-0,17 bzw. -0,04). Die maximalen Drawdowns sind bei allen Länderindizes hoch, was durch den enormen Wertverlust infolge der Lehman-Pleite 2008 und der darauffolgenden Finanz- und Eurokrise bedingt ist. Auch hier haben Greece mit -96,69% und Ireland mit -89,24% die höchsten Drawdowns zu verzeichnen, während die gemeinhin als eher konservativ und sicher angesehen Märkte wie Switzerland (-55,30%) oder die USA (-59,33%) geringere Wertverluste aufweisen.

In den nächsten Unterabschnitten wird nun die Performance des Trading-Systems für das MSCI Universum evaluiert und verglichen, inwiefern sich durch die Trendfolgesystematik mittels der MODWT in Form der MRA-Koeffizientenreihen eine bessere Wertentwicklung ergibt als durch eine simple Buy&Hold-Strategie. Basierend auf den Ergebnissen in Abschnitt 4.3.4 wurde als zugrunde liegende Basisfunktion das Haar-Wavelet gewählt, zur Behandlung der Randeffekte wurde die *Refl* 2-Methode verwendet.

Indexzusammenstellung und -methodologie des MSCI Universums sei auf die Webseite des Anbieters (vgl. www.msci.com) verwiesen.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.8: Deskriptive Kennzahlen des MSCI Universums

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min	Max
ACWI	0,03	0,08	1,09	-0,21	7,96	229,09	673,10
Asia	0,05	0,09	1,35	-0,12	6,41	232,58	1.132,54
Europe	0,04	0,06	1,49	0,10	6,83	2.445,41	8.715,51
EM	0,05	0,12	1,31	-0,32	8,15	366,14	2.213,76
North America	0,03	0,05	1,29	-0,08	9,16	2.408,09	6.858,72
World	0,03	0,07	1,10	-0,19	7,94	1.931,96	5.533,33
Australia	0,06	0,10	1,63	-0,60	8,03	1.061,51	5.982,28
Austria	0,05	0,09	1,93	0,07	7,21	1.376,98	9.020,62
Belgium	0,04	0,08	1,63	-0,29	6,99	3.849,83	17.947,38
Brazil	0,08	0,11	2,28	0,06	7,87	487,20	10.477,48
Canada	0,05	0,12	1,49	-0,52	9,45	1.375,55	7.065,29
Chile	0,06	0,08	1,40	0,01	14,46	776,11	7.499,26
China	0,07	0,02	1,81	0,20	7,05	15,96	145,25
Colombia	0,13	0,13	1,68	0,01	12,07	79,10	2.881,12
Czech Republic	0,09	0,11	1,84	0,21	13,62	88,66	1.352,77
Denmark	0,06	0,09	1,53	-0,13	7,06	3.945,27	23.301,39
Finland	0,03	0,00	2,01	0,00	3,88	382,81	1.663,14
France	0,04	0,05	1,72	0,20	6,15	2.317,59	8.370,52
Germany	0,05	0,08	1,74	0,12	4,86	1.489,06	7.339,29
Greece	0,00	0,06	2,22	0,32	5,01	113,90	1.995,93
Hong Kong	0,05	0,02	1,35	0,05	7,32	11.285,78	48.906,45
Hungary	0,06	0,08	2,37	0,29	8,44	227,97	1.615,05
India	0,06	0,06	1,78	0,27	10,63	92,69	889,20
Indonesia	0,10	0,08	1,96	-0,30	7,92	95,41	2.105,81
Ireland	0,01	0,04	1,97	-0,36	7,75	142,21	947,66
Italy	0,03	0,05	1,76	0,18	6,47	574,90	1.967,79
Japan	0,03	0,03	1,44	-0,04	4,74	2.302,12	6.017,70
Korea	0,06	0,06	2,00	0,34	18,73	123,26	696,66
Malaysia	0,05	0,03	0,98	-0,37	7,82	202,17	989,63
Mexico	0,06	0,11	1,69	0,12	7,74	1.704,73	12.455,71
Netherlands	0,04	0,06	1,64	0,07	5,94	4.699,71	17.652,63
New Zealand	0,05	0,09	1,39	-0,34	5,02	120,55	550,13
Norway	0,07	0,12	2,06	-0,19	6,72	2.000,95	16.175,17
Peru	0,09	0,07	1,96	-0,20	6,80	179,25	3.255,85
Philippines	0,06	0,03	1,55	-0,30	5,16	91,15	1.027,25
Poland	0,06	0,08	2,07	-0,04	4,56	318,70	2.180,27
Portugal	0,03	0,06	1,47	0,15	8,73	98,63	433,63
Russia	0,07	0,12	2,40	0,12	15,45	258,38	1.968,22
Singapore	0,05	0,07	1,37	-0,06	5,18	2.414,30	12.855,41
South Africa	0,07	0,13	1,86	-0,14	4,48	154,58	1.080,73
Spain	0,05	0,02	1,83	0,36	7,22	1.274,63	6.630,98
Sweden	0,06	0,07	1,97	0,27	5,17	4.569,89	31.025,54
Switzerland	0,05	0,05	1,30	0,15	5,29	3.300,94	13.512,91
Taiwan	0,03	0,00	1,54	-0,05	2,51	153,49	495,31
Thailand	0,08	0,00	1,69	-0,39	7,66	94,10	1.047,77
Turkey	0,08	0,10	2,58	-0,01	4,96	162,50	1.919,11
UK	0,03	0,05	1,48	0,12	9,02	2.674,94	8.243,39
USA	0,03	0,05	1,30	0,01	9,39	2.268,00	6.337,91

4.3.6 Ergebnisse: Level 1

Tabelle 4.3.10 zeigt die Ergebnisse des Trading-Systems für das erste Level $j = 1$. Wie man daraus entnehmen kann, ist die Performance des Systems zweigeteilt: Für Aktienmärkte von Schwellenländern ist die Wertentwicklung überwiegend äußerst positiv. So beträgt die annualisierte Rendite für den breiten Gesamtindex dieser Region (EM) beispielsweise 53,24% mit einer Sharpe-Ratio von 2,58. Auch für einzelne Schwellenländer ist die Performance größtenteils vielversprechend und bewegt sich zwischen 20% und 50% p. a., die Sharpe-Ratios erreichen für die betreffenden Länderindizes ebenfalls

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.9: Performance-Kennzahlen des MSCI Universums

Index Name	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD
ACWI	102,55	6,06	17,28	0,35	-60,76
Asia	219,25	10,17	21,34	0,48	-67,56
EM	268,35	11,49	20,72	0,55	-67,33
Europe	115,69	6,62	23,61	0,28	-66,64
North America	85,52	5,29	20,35	0,26	-59,40
World	96,60	5,80	17,45	0,33	-60,23
Australia	327,57	12,89	25,92	0,50	-70,61
Austria	128,92	7,15	30,58	0,23	-83,96
Belgium	101,92	6,04	25,78	0,23	-79,71
Brazil	420,59	14,75	36,01	0,41	-77,11
Canada	220,93	10,22	23,66	0,43	-65,66
Chile	350,90	13,39	22,21	0,60	-53,35
China	410,60	14,57	28,55	0,51	-76,85
Colombia	2949,35	32,99	26,53	1,24	-55,54
Czech Republic	691,01	18,83	29,10	0,65	-72,08
Denmark	328,30	12,90	24,18	0,53	-65,86
Finland	17,21	1,33	31,72	0,04	-78,28
France	98,10	5,87	27,12	0,22	-64,98
Germany	139,18	7,55	27,53	0,27	-66,79
Greece	-51,80	-5,91	35,06	-0,17	-96,69
Hong Kong	200,72	9,62	21,29	0,45	-65,53
Hungary	165,66	8,49	37,42	0,23	-85,91
India	307,10	12,42	28,08	0,44	-76,51
Indonesia	1104,35	23,07	31,15	0,74	-74,09
Ireland	-14,96	-1,34	31,31	-0,04	-89,24
Italy	31,37	2,30	27,76	0,08	-76,03
Japan	63,28	4,17	22,69	0,18	-58,43
Korea	245,00	10,88	31,61	0,34	-76,11
Malaysia	275,72	11,67	15,43	0,76	-52,27
Mexico	320,62	12,73	26,78	0,48	-69,71
Netherlands	101,36	6,01	25,86	0,23	-68,20
New Zealand	282,20	11,83	21,97	0,54	-70,98
Norway	333,47	13,01	32,74	0,40	-79,50
Peru	884,75	21,02	31,08	0,68	-72,45
Philippines	372,37	13,83	24,57	0,56	-62,32
Poland	225,76	10,35	32,73	0,32	-81,00
Portugal	61,57	4,08	23,20	0,18	-72,80
Russia	255,91	11,17	38,08	0,29	-85,17
Singapore	219,67	10,18	21,59	0,47	-66,95
South Africa	392,09	14,22	29,43	0,48	-67,03
Spain	136,06	7,43	28,89	0,26	-71,76
Sweden	254,73	11,14	31,13	0,36	-72,68
Switzerland	198,31	9,55	20,60	0,46	-55,30
Taiwan	82,57	5,15	24,26	0,21	-62,23
Thailand	569,00	17,18	26,74	0,64	-64,28
Turkey	337,83	13,11	40,79	0,32	-79,18
UK	100,42	5,97	23,42	0,25	-67,80
USA	81,12	5,08	20,55	0,25	-59,33

Werte weit über Eins. Die Wertentwicklung des Systems für Industrieländer ist dagegen enttäuschend und resultiert zum Teil im nahezu gesamten Verlust des eingesetzten Kapitals. Die Rendite für den Regionenindex North America beispielsweise liegt für den betreffenden Zeitraum bei -90,51%. Auch France (-88,26%), Germany (-71,89%) oder Switzerland (-83,53%) führen nahezu zum Verlust des gesamten Startkapitals, für Japan (-99,06%) de facto sogar zum totalen Ruin. Eine weitergehende Diskussion der Ergebnisse auch für die übrigen Level erfolgt im nächsten Abschnitt 4.3.7. Da die MRA auf dem ersten Level nur sehr wenige Details aus einer Zeitreihe herausfiltert, ist die die Anzahl der Trades, die pro Jahr vom System generiert werden, mit durchschnittlich

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

etwa 90 bis 100 Signalen relativ hoch. Ein Signal für eine Long- oder Short-Position kommt auf diesem Level daher etwa alle zwei bis drei Handelstage zustande und resultiert in einer eher kurzfristigen Handelsstrategie. Die relative Anzahl der profitablen Trades liegt überwiegend bei ca. 30% bis 40%.

Tabelle 4.3.10: Ergebnisse MSCI Universum – Haar S1

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	1678,50	27,11	1,09	17,31	1,57	-17,30	1048	87	41
Asia	854,96	20,69	1,36	21,43	0,97	-25,68	1090	91	39
EM	16664,09	53,24	1,30	20,62	2,58	-22,64	982	82	44
Europe	-54,51	-6,35	1,50	23,75	-0,27	-74,61	1181	98	36
North America	-90,51	-17,82	1,30	20,49	-0,87	-92,14	1176	98	32
World	721,77	19,19	1,11	17,52	1,10	-18,21	1077	90	39
Australia	98,74	5,89	1,65	26,05	0,23	-55,81	1179	98	36
Austria	-31,35	-3,09	1,94	30,73	-0,10	-65,75	1176	98	36
Belgium	-23,03	-2,16	1,64	25,92	-0,08	-68,20	1204	100	35
Brazil	5761,61	40,39	2,28	36,04	1,12	-35,48	1083	90	41
Canada	239,50	10,72	1,50	23,78	0,45	-37,23	1132	94	38
Chile	3475,23	34,72	1,41	22,22	1,56	-27,67	1050	88	42
China	56,49	3,80	1,82	28,70	0,13	-62,12	1142	95	36
Colombia	5876,60	40,62	1,68	26,59	1,53	-38,50	1065	89	38
Czech Republic	110,19	6,39	1,85	29,24	0,22	-73,17	1151	96	39
Denmark	-72,35	-10,16	1,54	24,34	-0,42	-77,17	1186	99	33
Finland	-74,68	-10,82	2,01	31,86	-0,34	-85,91	1229	102	34
France	-88,26	-16,35	1,72	27,26	-0,60	-92,04	1195	100	34
Germany	-71,89	-10,04	1,75	27,68	-0,36	-78,76	1177	98	34
Greece	716,90	19,13	2,22	35,16	0,54	-64,64	1118	93	38
Hong Kong	27,77	2,06	1,36	21,44	0,10	-45,71	1104	92	36
Hungary	130,66	7,21	2,37	37,55	0,19	-60,26	1195	100	36
India	1278,27	24,44	1,78	28,17	0,87	-35,22	1049	87	39
Indonesia	18722,66	54,72	1,97	31,12	1,76	-31,42	1054	88	41
Ireland	-62,82	-7,91	1,99	31,45	-0,25	-82,08	1187	99	35
Italy	-83,88	-14,11	1,77	27,91	-0,51	-84,97	1198	100	33
Japan	-99,06	-32,21	1,44	22,78	-1,41	-99,13	1283	107	30
Korea	68,27	4,43	2,01	31,74	0,14	-63,84	1146	96	37
Malaysia	567,60	17,14	0,98	15,53	1,10	-28,27	1064	89	38
Mexico	120,41	6,81	1,70	26,93	0,25	-44,17	1095	91	38
Netherlands	-71,82	-10,02	1,64	26,00	-0,39	-82,60	1201	100	35
New Zealand	-34,86	-3,51	1,40	22,14	-0,16	-56,89	1182	99	34
Norway	-46,66	-5,10	2,08	32,89	-0,16	-75,17	1155	96	38
Peru	187,52	9,20	1,97	31,22	0,29	-55,44	1126	94	36
Philippines	1958,28	28,66	1,56	24,62	1,16	-25,03	1077	90	40
Poland	-52,31	-5,98	2,08	32,88	-0,18	-85,33	1198	100	35
Portugal	100,54	5,97	1,48	23,33	0,26	-50,20	1141	95	36
Russia	844,82	20,58	2,41	38,16	0,54	-48,77	1157	96	37
Singapore	-49,19	-5,49	1,38	21,76	-0,25	-72,53	1173	98	35
South Africa	-62,11	-7,77	1,87	29,59	-0,26	-72,04	1173	98	37
Spain	-78,91	-12,16	1,84	29,04	-0,42	-83,77	1157	96	35
Sweden	-74,00	-10,62	1,98	31,27	-0,34	-86,61	1204	100	35
Switzerland	-83,53	-13,95	1,31	20,75	-0,67	-87,11	1221	102	33
Taiwan	31,87	2,33	1,54	24,41	0,10	-44,36	1118	93	35
Thailand	1861,13	28,15	1,70	26,82	1,05	-37,92	1070	89	40
Turkey	793,60	20,02	2,59	40,90	0,49	-58,04	1131	94	39
UK	-89,09	-16,86	1,49	23,56	-0,72	-89,50	1244	104	33
USA	-94,78	-21,82	1,31	20,68	-1,06	-95,60	1200	100	32

Tabelle 4.3.11 fasst darüber hinaus die wesentlichen Performance-Kennzahlen für zwei gleich gewichtete Portfolios⁵⁷ zusammen, die aus den Einzelmärkten sowie aus

⁵⁷Genauer formuliert bestehen diese Portfolios aus dem Mittelwert der jeweiligen Equity Lines, was in guter Näherung einer Gleichgewichtung der Renditen entspricht, da die Equity Lines auf den Initialwert 1000 indiziert wurden. Dies gilt gleichermaßen für die übrigen Analysen in den nachfolgenden

den Regionenindizes Asia, EM, Europe und North America bestehen. Die Motivation für eine solche Darstellung liegt im Wesen der Portfoliotheorie begründet: Durch die Diversifikation, die sich auf Basis der einzelnen Bestandteile ergibt, kann die Trading-Systematik im Portfoliokontext womöglich einen attraktiven Ansatz bieten, obwohl sie für weite Teile des Industrieländeruniversums keine positiven Ergebnisse erzielen konnte. Daneben zeigt die Tabelle die Kennzahlen der jeweils zugehörigen Buy&Hold-Portfolios. Demnach führen die auf der Trading-Systematik beruhenden Portfolios zu einer annualisierten Rendite von 22,07% bzw. 37,23% und können die Buy&Hold-Strategien, die 12,87% bzw. 8,71% Rendite p. a. erzielen, deutlich outperformen. Aufgrund der niedrigeren Volatilität, die sich aus der kombinierten Trading-Systematik ergibt, sind die Sharpe-Ratios mit 1,55 (Buy&Hold: 0,67) bzw. 2,00 (Buy&Hold: 0,48) ebenfalls deutlich höher. Im Hinblick auf das Risiko zeigt das Trading-System zudem einen weitaus niedrigeren maximalen Drawdown (-17,79% vs. -65,36% bzw. -20,00% vs. -64,56%). Die Graphen 4.3.11 bzw. 4.3.12 zeigen die beiden Equity-Kurven im Vergleich zur jeweiligen Buy&Hold-Strategie. Man sieht deutlich, dass die Performance für das Einzelländerportfolio bis zur Finanzkrise von 2008 ähnlich verläuft, die kombinierte Trading-Systematik jedoch in einer weit niedrigeren Schwankungsbreite bzw. einem geringeren Drawdown resultiert. Im Gegensatz zum Buy&Hold-Ansatz, der infolge der Finanzkrise mehr als die Hälfte der bis dahin erzielten Rendite verliert, profitiert das Trendfolgesystem von diesem Abschwung und kann in den darauffolgenden Perioden eine deutliche Outperformance erzielen. Das aus den Regionenindizes bestehende Portfolio erzielt vor allem aufgrund der beiden Indizes EM und Asia (vgl. Tabelle 4.3.10) eine herausragende Wertentwicklung.

Tabelle 4.3.11: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1

		Länderindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	
Gleich gewichtet	992,48	22,07	0,90	14,27	1,55	-17,79	
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36	
		Regionenindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	
Gleich gewichtet	4343,51	37,23	1,18	18,60	2,00	-20,00	
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56	

An den Abbildungen 4.3.11 und 4.3.12 fällt wie oben bereits angedeutet auf, dass

Abschnitten bzw. im Anhang A.9 sowie die zugehörigen Buy&Hold-Strategien.

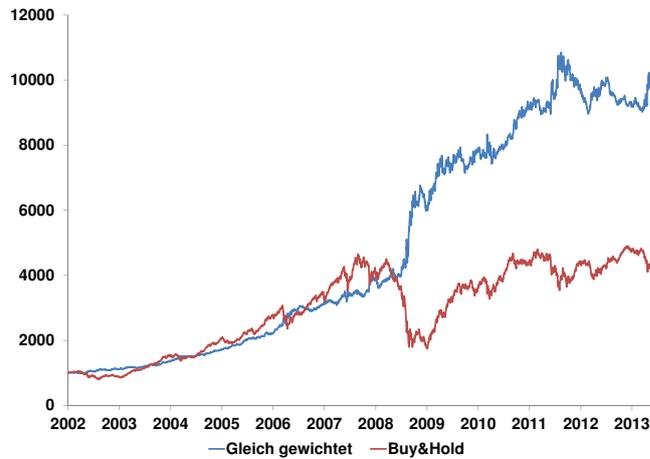


Abbildung 4.3.11: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 1)

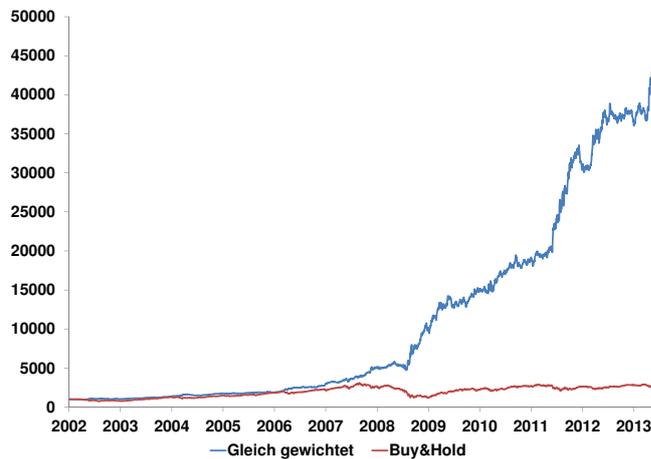


Abbildung 4.3.12: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 1)

die Long/Short-Logik des Trading-Systems insbesondere während der Finanzkrise von 2008 zu einer deutlichen Outperformance gegenüber dem Buy&Hold-Ansatz geführt hat. Einen Vergleich dazu könnte man somit als ungeeignet ansehen. Aus diesem Grund zeigen Tabellen 4.3.12 und 4.3.13 die Kennzahlen für die Zeiträume vor der Finanzkrise – d. i. namentlich bis zur Lehman-Pleite am 15. September 2008⁵⁸ –, und nach der Krise, wobei als Startzeitpunkt der 02.03.2009 gewählt wurde, da Anfang März 2009 der nach-

⁵⁸D. h. die Zeitreihe endet am vorangegangenen Freitag, den 12.09.2008.

folgende Bullenmarkt seinen Beginn nahm. Wie man anhand der Tabellen sehen kann, sind die Kennzahlen der Trendfolgesystematik für den Zeitraum vor der Finanzkrise deutlich besser als diejenigen des Buy&Hold-Ansatzes. Insbesondere für das Regionenportfolio konnte mit einer annualisierten Rendite von 10,64% (vs. 4,62%) eine deutliche Outperformance erzielt werden. Ebenfalls besser ist der Maximum Drawdown, der bei beiden Portfolios wesentlich niedriger ist als bei den jeweiligen Buy&Hold-Strategien. Für die Zeit nach der Lehman- bzw. Finanzkrise ist das Bild etwas differenzierter. Auch hier zeigt sich, dass der Maximum Drawdown durch den Trading-Ansatz für beide Portfolios geringer ist. In Bezug auf die Performance beträgt die Gesamtrendite in diesem Zeitraum für das Einzelländerportfolio jedoch nur in etwa die Hälfte von Buy&Hold. Immer noch wesentlich besser schneidet hingegen das Regionenportfolio ab (36,82% p. a. vs. 19,53% p. a.), wobei die Sharpe Ratios für alle Portfolios, d. h. auch die jeweiligen Buy&Hold-Ansätze, ansprechend sind.

Tabelle 4.3.12: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1 (Vor der Finanzkrise)

	Länderindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	328,36	9,39	0,68	10,79	0,87	-9,11
Buy&Hold	232,62	7,70	0,93	14,78	0,52	-31,32
	Regionenindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	414,90	10,64	0,89	14,02	0,76	-13,68
Buy&Hold	108,08	4,62	0,90	14,20	0,33	-34,56

Tabelle 4.3.13: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 1 (Nach der Finanzkrise)

	Länderindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	77,71	13,04	0,92	14,62	0,89	-17,79
Buy&Hold	141,74	20,70	1,16	18,40	1,12	-27,14
	Regionenindizes					
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	335,32	36,82	1,15	18,21	2,02	-11,03
Buy&Hold	130,94	19,53	1,10	17,47	1,12	-28,92

4.3.7 Ergebnisse: Level 2 bis 8

Im vorliegenden Abschnitt sind die Ergebnisse der übrigen Level 2 bis 8 zusammengefasst. Im Anhang A.9 sind hierzu die jeweiligen detaillierten Tabellen mit den wichtigsten Kennzahlen für die Einzelmärkte sowie die Kennzahlen und Equity-Kurven der gleich gewichteten Länder- bzw. Regionenportfolios, die sich aus der Trading-Systematik ergeben haben, angegeben. Zusammenfassend stechen bei der Betrachtung der Ergebnisse folgende Punkte besonders hervor:

- **Industrie- vs. Schwellenländer**

Die sich bereits für das erste Level abzeichnende Tendenz, dass die Performance der WT-basierten Trendfolgesystematik für Aktienmärkte der Schwellenländer deutlich besser ist als für diejenigen der Industrieländer, bestätigt sich auch auf den anderen Level. Allerdings nehmen die Unterschiede mit steigendem j etwas ab, so dass ab dem fünften Level auch für die meisten Aktienmärkte der Industrieländer positive Renditen erzielt werden. Eine Ausnahme bildet Japan, das auf allen Level eine negative Performance aufweist. Die Tatsache, dass eine solche Trendfolgesystematik besser für Schwellenländerindizes als für Aktienmärkte der Industrieländer funktioniert, deckt sich zum Teil mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2.2, nach denen Aktienmärkte von Schwellenländern zu einem Hurst-Exponenten $H > 0,5$ neigen und damit ein persistentes Verhalten implizieren; Aktienmärkte von Industrieländern tendieren dagegen eher zu einem Hurst-Exponent $H < 0,5$ und damit zu anti-persistentem Verhalten. Für ein Trendfolgesystem ist persistentes Verhalten grundsätzlich von Vorteil, da eine solche Charakteristik Trendverhalten impliziert und einen solchen Ansatz unterstützt.

- **Performance**

Wie gerade angedeutet nehmen die Renditen der Schwellenländer mit steigendem j etwas ab, wohingegen diejenigen der Industrieländer zum Teil deutlich besser werden. Für das Regionenportfolio ist die annualisierte Rendite auf dem zweiten Level mit 33,68% noch vergleichbar mit derjenigen des ersten Levels. Auf Level 3 ist die annualisierte Performance mit 17,80% zwar schon deutlich niedriger, liegt aber dennoch weit über derjenigen der Buy&Hold-Strategie (8,71% p. a.). Für die Level 4 bis 7 nimmt die Performance danach sukzessive um 1% – 2% p. a.

ab und liegt auf dem letzten Level mit 8,20% p. a. erstmals unter derjenigen der Buy&Hold-Strategie. Beim Länderportfolio ist die Performance auf Level 3 mit 12,84% p. a. schlechter als auf den Level 4 (14,58% p. a.) und 5 (15,63% p. a.) und beträgt auf dem höchsten Level 9,80% p. a. Ab dem sechsten Level schlägt das System nicht mehr den entsprechenden Buy&Hold-Ansatz.

- **Risiko**

In Bezug auf das Risiko zeigt das System wesentliche Vorteile gegenüber dem Buy&Hold-Ansatz. Trotz einer geringeren Performance auf den höchsten drei Level ist die Sharpe-Ratio für das Länderportfolio nur auf Level 8 geringer als diejenige der entsprechenden Buy&Hold-Strategie. Die höchsten Werte werden auf den Level 2 (1,19) und 5 (0,93) erreicht. Bei dem Portfolio, das auf den Regionenindizes basiert, ist die Sharpe-Ratio bis auf Level 8 (0,48) auf allen Level besser als der entsprechende Buy&Hold-Ansatz (0,48). Dies liegt unter anderem daran, dass die annualisierte Standardabweichung geringer ist als bei Buy&Hold: Für die Länderportfolios ist σ_{ann} zum Teil knapp 5% geringer, bei den Regionenportfolios dagegen liegt die annualisierte Standardabweichung für die Level 2 bis 4 leicht darüber, für die nachfolgenden Level leicht darunter.

Ansprechende Ergebnisse zeigen sich darüber hinaus beim Maximum Drawdown: Sowohl für die Einzelmärkte als auch für die beiden Portfolios zeigt sich eine wesentliche Verbesserung im Hinblick auf diese Kennzahl: Für die Buy&Hold-Strategien betragen die maximalen Drawdowns -65,36% beim Länderportfolio bzw. -64,56% beim Regionenportfolio. Die niedrigsten Werte für die Trading-Systematik liegen bei -44,32% (Level 8) respektive -39,85% (Level 6). Auf den übrigen Level sind die maximalen Drawdowns zum Teil deutlich geringer und betragen mitunter weniger als -20%⁵⁹.

- **Anzahl der Trades**

Die Anzahl der Trades nimmt wie erwartet mit steigendem Level deutlich ab. Während auf dem zweiten Level noch durchschnittlich 60 bis 70 Trades pro Jahr

⁵⁹Im praktischen Asset Management ist diese Kennzahl von großer Bedeutung, da ein Fondsmanager in der Regel große Verlustperioden vermeiden will. Gerade nach der Lehman-Pleite und der nachfolgenden Systemkrise in der Finanzbranche verschob sich der Fokus merklich weg von der Rendite- und hin zur Risikoseite.

zu verzeichnen sind, liegt diese Zahl auf dem höchsten Level im mittleren einstelligen Bereich. Auffallend ist auch, dass der prozentuale Anteil an positiven Signalen ebenfalls deutlich sinkt. Dieses Resultat war aber ebenfalls absehbar, da der Verlauf der MRA-Approximationsanteile mit steigendem j immer grober und damit auch träger wird. Das System reagiert somit nur noch auf signifikante Trends und generiert Fehlsignale in denjenigen Phasen, in denen der Markt keine klare Auf- bzw. Abwärtsrichtung besitzt.

4.3.8 Vergleich mit alternativem Trendbestimmungsverfahren

Nachdem die Performance des Trading-Systems in Verbindung mit der MODWT-MRA für das oben beschriebene MSCI Universum eingehend untersucht wurde, stellt sich schließlich noch die Frage, inwiefern hierdurch eine im Vergleich zu alternativen Filtern bessere Trendbestimmung, d. i. profitablere Performance erreicht werden kann. Ein relativ simpler und wie oben bereits erwähnt bei der technisch-quantitativen Analyse von Finanzdaten sehr beliebter Filter (vgl. Papst 2011, S. 22) ist der *gleitende Durchschnitt* (engl. Moving Average (MA)). Gerade bei der Evaluierung von Trends wird der MA-Filter in der Praxis oftmals eingesetzt: Zahlreiche technische Indikatoren wie der Relative Strength Index (RSI) oder MACD basieren auf dem MA-Filter bzw. einer Kombination gleitender Durchschnitte verschiedener Längen, bei der die Güte der Trendindikation des eingesetzten Filters letztlich entscheidend ist. Der folgende Vergleich zwischen dem WT- und MA-basierten Trading-System soll damit zeigen, welcher Filter sich besser als Trendindikator eignet und damit implizit auch zu einer Verbesserung für Indikatoren wie den RSI beitragen kann. Ein solcher Vergleich bietet sich daneben aber auch aufgrund der in Abschnitt 3.2.5 beschriebenen Interpretation der WT im Rahmen des Pyramidenalgorithmus an: Die Skalierungskoeffizienten $\tilde{v}_{j,t}$ ⁶⁰ lassen sich mit gewichteten Durchschnitten auf der Skala $\lambda_j = 2^j$ assoziieren. Ein MA-Filter der Ordnung λ_j auf der anderen Seite entspricht ebenfalls einer Durchschnittsbildung, die sich auf die vergangenen λ_j Werte der Zeitreihe bezieht. Die entscheidende Frage in Bezug auf eine vergleichende Analyse zwischen dem Wavelet- und MA-Filter ist somit, inwieweit die WT durch die Anwendung des Pyramidenalgorithmus einerseits und der damit zusammenhängenden Behandlung der Boundary-Koeffizienten andererseits eine Verbesserung

⁶⁰Und damit auch die Smooth-Koeffizienten $\tilde{s}_{j,t}$ der MRA.

hinsichtlich einer Trendbestimmung erzielen kann.

Für einen adäquaten Vergleich mit der MRA müssen daher die gleitenden Durchschnitte der Ordnung $\lambda_j = 2^j$ mit den MRA-Koeffizienten der Level $j = 1, 2, \dots, 8$ verglichen werden. MA2 ($j=1$), MA4 ($j=2$), MA8 ($j=3$), MA16 ($j=4$), MA32 ($j=5$), MA64 ($j=6$), MA128 ($j=7$) und MA256 ($j=8$) beschreiben dabei die entsprechenden MA-Filter. Die Tabellen 4.3.14 und 4.3.15 zeigen hierfür die annualisierten Renditen (Spalten *MA* mit der jeweiligen Ordnung), die sich in Verbindung mit dem Trading-System ergeben, im Vergleich zur MRA (Spalten *S* mit dem jeweiligen Level). Zusätzlich dazu stellen die Tabellen auch die annualisierten Renditen dar, die sich anhand des in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen VisuShrink-Verfahrens⁶¹ (Spalte *VS* mit dem jeweiligen Level) ergeben⁶².

Für jeden Markt ist die jeweils beste Performance auf den einzelnen Level zur besseren Übersicht farblich markiert. Auf den ersten Blick ist damit sofort ersichtlich, dass die MRA am häufigsten die jeweils besten Resultate erzielt. Am schlechtesten schneidet die VisuShrink-Methode ab. Die höchste Outperformance der MRA-Methode wird wie erwartet sowohl gegenüber der MA- als auch VisuShrink-Methode zumeist bei den Schwellenländerindizes erzielt. So ist die annualisierte Rendite auf dem ersten Level gegenüber MA beispielsweise für EM um 18,63%, Brazil um 32,55% und Russia um 23,38% p. a. höher. Doch auch für Indizes entwickelter Länder ist die Outperformance zum Teil erheblich (Europe: 13,13% p. a., Australia: 15,47% p. a. oder USA: 4,83% p. a.). Auf den anderen Level zeigt sich ein ähnliches Bild, obgleich die Outperformance bei den Industrieländerindizes zum Teil schwankt. Für den breiten Weltindex World ist bis auf Level 4 und 7 eine zum Teil deutlich höhere Performance zu verzeichnen.

Tabelle 4.3.16 gibt eine Übersicht der durchschnittlichen annualisierten Outperformance der MRA-Methode gegenüber dem MA- und VisuShrink-Ansatz für das gesamte MSCI Universum. Wie man sehen kann, wird durch den Einsatz der MRA auf allen Level eine Outperformance erzielt, die im Vergleich zu MA für das erste (6,71% p. a.) und fünfte (3,77% p. a.) Level am höchsten ist. Bezogen auf die Gesamtperiode entspricht dies einer höheren Rendite von etwa 218% bzw. 156%. Im Durchschnitt erzielt

⁶¹Zur Durchführung des VisuShrink-Verfahrens wurden dieselben Einstellungen gewählt, die auch während der Behandlung der Boundary-Koeffizienten bei *Oh* in Abschnitt 4.3.4 zum Einsatz kamen.

⁶²Einzige Ausnahme bildet das höchste Level acht, für das keine Daten von *VS* vorliegen. Der Grund hierfür ist in der R-Funktion *wavShrink* begründet: Im Gegensatz zur *mra*-Funktion benötigt diese Funktion ausreichend Datenpunkte am Anfang der Zeitreihe, um eine WT durchführen zu können. Aufgrund der Datenverfügbarkeit war es jedoch nicht möglich, die hierfür benötigten Datenpunkte zu beschaffen.

das System jährlich 3,13% bzw. 4,09% Rendite mehr als MA bzw. VS. Tabelle 4.3.17 zeigt darüber hinaus, zu wie viel Prozent der MRA-Ansatz die höchste jährliche Performance aller drei Alternativen (zweite Spalte) bzw. eine höhere jährliche Rendite als die MA- (dritte Spalte) und VisuShrink-Methode (vierte Spalte) erzielt. Demnach erreicht das System mit dem MRA-Verfahren bis auf Level 4 und 7 zu mehr als 50% die beste Performance, und auf Level 1, 3 und 8 gar zu mehr als 70%. Eindeutig ist darüber hinaus die Überlegenheit des WT-basierten Trendbestimmungsverfahrens gegenüber dem MA-Filter: Lediglich auf Level 4 ist das Verhältnis mit 50% ausgeglichen; auf allen anderen Level erzielt das System deutlich öfter eine bessere Rendite mit einem Spitzenwert von 81,25% auf dem ersten Level. Noch eindeutiger fällt das Urteil im Hinblick auf das VisuShrink-Verfahren aus: Gerade auf den niedrigen Level funktioniert die MRA-Methode deutlich besser als VS. Auf dem dritten Level erzielt das System gar zu 93,75% eine höhere Wertentwicklung⁶³.

Die Abbildungen 4.3.13 bis 4.3.20 zeigen die Wertentwicklung des Regionenportfolios für die unterschiedlichen Filteralternativen im Vergleich. Wie man sehen kann, erzielt die MRA-Methode für alle Level die beste Wertentwicklung, wobei der Unterschied auf den ersten beiden Level am gravierendsten ist. Die VisuShrink-Methode ist dem MA-Ansatz auf den ersten Level unterlegen, kann diesen aber auf den Level 5 bis 7 ebenfalls outperformen. Für Level 6 und 7 ist die Performance von VisuShrink vergleichbar mit der MRA-Variante bzw. zeitweise sogar ein wenig besser. Auf den höheren Level sind die Unterschiede zwischen den verschiedenen Filter-Methoden generell weniger ausgeprägt, weil alle Ansätze einen relativ groben Verlauf darstellen und nur wenige Signale generiert werden.

4.3.9 Zusammenfassung

In dem vorliegenden Kapitel wurde die Leistungsfähigkeit der WT im Rahmen der technisch-quantitativen Analyse eingehend untersucht. Genauer formuliert wurde der Fokus auf die beiden Fragen gelegt, inwieweit die WT in Form der MRA eingesetzt werden kann, um den Trend von Finanzdaten zu bestimmen, und ob sich daraus eine profitable Trendfolgesystematik entwickeln lässt. Die wesentliche Schwäche der WT im Hinblick auf dieses Einsatzgebiet ergibt sich aus der in Abschnitt 4.3.1 erläuterten

⁶³Für Level 8 liegen aus oben genannten Gründen keine Daten für VS vor.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.14: MRA vs. MA & VisuShrink – Performance Level 1 bis 4 in %

Index Name	S1	MA2	VS1	S2	MA4	VS2	S3	MA8	VS3	S4	MA16	VS4
ACWI	27,11	7,77	7,56	13,96	6,66	-1,02	7,87	1,55	-1,92	11,12	10,38	-0,73
Asia	20,69	13,64	11,80	20,27	18,38	11,83	16,98	14,20	13,02	15,82	9,65	7,38
EM	53,24	34,61	23,63	49,08	27,34	27,63	28,95	23,71	17,27	27,88	21,46	14,55
Europe	-6,35	-19,48	-16,72	-14,67	-7,81	-12,85	-3,20	-10,32	-12,30	-6,31	5,45	-4,43
North America	-17,82	-23,37	-20,53	-20,83	-15,79	-21,14	-15,25	-9,77	-12,15	-5,75	-4,67	-2,93
World	19,19	3,43	11,37	9,19	1,72	0,87	1,47	-0,15	0,73	8,31	9,63	1,43
Australia	5,89	-9,58	-10,00	-1,27	-6,37	-10,47	0,36	1,99	-4,36	6,05	-0,53	1,94
Austria	-3,09	-2,27	-1,69	6,58	6,63	4,16	13,38	4,98	4,44	14,88	0,04	10,97
Belgium	-2,16	-11,81	-10,17	-8,73	-7,17	-8,50	-3,69	-7,49	-6,80	4,86	3,80	4,79
Brazil	40,39	7,84	3,59	13,30	13,90	1,95	-0,30	-3,05	-5,72	13,54	16,65	-0,42
Canada	10,72	3,98	-1,79	13,81	2,87	3,72	5,97	-2,24	-7,51	6,51	4,08	2,28
Chile	34,72	26,82	22,32	24,97	14,98	8,57	26,21	11,91	13,97	22,56	21,70	18,85
China	3,80	3,09	3,20	5,13	4,80	0,07	10,53	15,32	8,02	16,59	8,25	8,38
Colombia	40,62	28,96	24,37	27,27	18,09	9,59	25,58	17,78	3,44	30,24	32,51	15,19
Czech Republic	6,39	3,79	-8,34	-1,59	-8,79	-6,76	-2,30	2,25	-6,13	2,40	7,88	-3,95
Denmark	-10,16	2,15	-3,40	1,38	-6,68	-4,86	-7,47	-3,61	-13,46	2,08	7,58	3,23
Finland	-10,82	-15,25	-13,00	-11,59	-14,45	-19,26	-10,77	-12,46	-19,73	-4,13	5,54	-9,44
France	-16,35	-19,48	-19,61	-19,21	-17,03	-22,72	-14,12	-16,93	-22,37	-14,12	-7,50	-11,92
Germany	-10,04	-13,27	-9,72	-14,07	-7,22	-16,76	-11,47	-16,48	-13,23	-6,95	2,61	-2,61
Greece	19,13	6,40	-0,23	12,59	-3,74	-3,17	10,06	9,95	1,31	20,17	21,00	12,92
Hong Kong	2,06	3,47	0,30	6,89	2,95	1,07	6,32	5,75	-1,98	9,70	6,66	0,63
Hungary	7,21	2,32	-0,06	12,49	2,49	-7,20	9,55	2,91	-1,08	14,16	14,88	5,85
India	24,44	17,84	11,23	26,11	37,96	34,64	35,67	25,22	16,70	31,90	24,43	28,85
Indonesia	54,72	33,80	29,52	46,62	32,43	28,48	27,20	12,73	19,54	32,87	19,53	18,16
Ireland	-7,91	-18,72	-17,30	-12,17	-13,98	-21,77	-12,00	-21,56	-26,95	-18,44	-7,35	-22,69
Italy	-14,11	-12,05	-15,46	-7,76	-8,15	-8,40	-2,89	-3,33	-7,54	8,22	4,90	8,19
Japan	-32,21	-30,03	-29,53	-24,75	-19,10	-17,73	-17,47	-11,62	-18,11	-11,40	-7,60	-4,95
Korea	4,43	0,33	8,37	4,07	-1,25	6,67	-0,27	-7,41	-10,04	3,11	-13,72	-6,95
Malaysia	17,14	13,23	8,54	21,64	20,01	16,04	21,51	14,86	13,47	19,88	14,88	15,39
Mexico	6,81	2,82	3,74	6,18	-0,14	-6,17	3,12	-0,50	-9,71	3,85	8,53	1,00
Netherlands	-10,02	-14,53	-11,99	-11,35	-6,76	-12,38	-6,96	-7,66	-11,50	0,48	-2,72	-4,27
New Zealand	-3,51	-3,93	-5,14	-2,93	-5,66	-8,92	-6,22	-3,18	-12,56	-1,24	3,70	-5,80
Norway	-5,10	-12,89	-16,02	0,27	-0,53	-9,23	6,75	1,19	-5,72	-0,39	6,92	0,06
Peru	9,20	-1,10	-3,72	4,06	5,24	4,49	14,02	8,27	6,97	6,97	-2,92	5,33
Phillipines	28,66	28,72	24,50	34,03	20,39	18,84	24,98	11,58	6,22	18,08	11,82	12,93
Poland	-5,98	-6,82	-8,96	2,91	-9,20	-2,27	-6,52	-7,14	-9,35	4,10	14,93	0,76
Portugal	5,97	8,04	6,43	2,92	8,06	4,50	4,13	6,57	-0,98	6,86	12,41	5,06
Russia	20,58	-2,80	-10,83	18,68	6,04	6,08	19,33	8,73	-1,62	18,52	11,98	12,46
Singapore	-5,49	-2,06	-5,09	3,20	5,84	6,43	4,28	11,19	3,03	14,24	4,86	7,16
South Africa	-7,77	-21,08	-26,37	-8,37	-10,36	-8,28	-11,05	-11,79	-15,45	-0,87	-6,15	-6,10
Spain	-12,16	-18,04	-13,97	-12,45	-4,86	-16,35	-6,24	-0,67	-18,25	-2,87	-0,55	-3,34
Sweden	-10,62	-20,79	-17,92	-14,87	-19,81	-21,87	-8,97	-18,64	-17,76	-14,15	-5,17	-17,37
Switzerland	-13,95	-12,88	-16,34	-14,38	-9,21	-9,94	-11,56	-11,00	-11,48	-7,92	-0,32	-7,17
Taiwan	2,33	-1,86	-3,71	-2,56	1,45	-1,77	7,77	-0,50	-4,64	8,24	4,34	-2,06
Thailand	28,15	24,86	16,85	34,66	20,34	18,41	20,62	5,61	9,75	19,38	5,40	19,67
Turkey	20,02	12,75	13,01	23,73	14,39	26,40	15,70	3,42	-1,76	28,94	19,51	17,98
UK	-16,86	-22,51	-22,92	-20,10	-19,52	-23,32	-12,10	-13,56	-16,74	-14,62	-1,54	-11,93
USA	-21,82	-26,65	-23,78	-24,26	-18,66	-23,34	-15,86	-9,56	-11,97	-6,54	-5,69	-1,59

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.15: MRA vs. MA & VisuShrink – Performance Level 5 bis 8 in %

Index Name	S5	MA32	VS5	S6	MA64	VS6	S7	MA128	VS7	S8	MA256	VS8
ACWI	17,34	6,21	7,34	10,69	7,24	6,28	9,43	10,27	6,29	9,18	3,67	
Asia	16,53	8,43	14,00	15,21	12,46	14,97	16,48	11,09	15,13	6,00	5,39	
EM	23,67	16,53	17,82	21,86	17,91	20,34	17,91	10,26	17,20	13,80	7,32	
Europe	2,84	4,74	3,65	4,46	-0,24	1,53	7,45	9,20	7,88	5,67	2,01	
North America	0,18	-10,03	-1,17	1,56	-1,32	0,64	-0,79	6,89	0,58	4,09	2,68	
World	15,79	3,87	9,21	8,76	5,59	6,52	8,59	11,34	6,19	10,09	3,78	
Australia	6,08	4,64	4,84	8,60	4,28	6,83	3,17	8,99	8,77	4,40	3,75	
Austria	17,95	12,54	16,09	24,73	20,71	16,03	12,41	7,69	17,81	14,45	3,60	
Belgium	11,35	10,20	15,43	10,08	3,63	11,52	11,15	16,31	14,05	11,85	6,07	
Brazil	12,64	10,68	9,36	14,61	20,90	19,70	18,59	11,45	23,45	10,74	10,68	
Canada	0,00	2,45	-1,71	5,94	9,07	3,84	6,25	6,35	8,88	6,43	5,19	
Chile	19,50	14,76	11,43	18,33	14,64	20,11	14,57	9,38	12,33	14,97	9,44	
China	11,66	9,56	9,96	4,91	5,95	11,91	16,35	1,81	15,49	0,92	5,89	
Colombia	28,61	25,54	29,95	28,99	14,71	23,08	18,15	17,50	17,19	22,35	17,66	
Czech Republic	13,29	12,29	16,68	13,03	8,47	8,58	19,41	13,67	17,98	19,40	8,14	
Denmark	9,61	10,45	10,21	4,88	2,49	6,02	9,80	10,28	8,80	9,11	8,25	
Finland	6,52	1,62	2,59	-7,02	-1,00	-8,38	4,63	1,86	10,40	-0,70	0,52	
France	-5,89	-3,94	-0,55	-0,82	3,51	-3,63	3,53	9,35	3,77	7,43	-3,03	
Germany	5,43	8,59	5,91	0,69	3,02	-1,54	12,21	11,18	11,37	5,69	6,03	
Greece	31,10	24,57	32,29	25,36	18,64	24,20	16,73	15,95	16,01	19,17	8,06	
Hong Kong	14,43	6,69	15,70	6,54	11,00	9,42	11,57	10,87	9,99	7,35	7,18	
Hungary	24,46	11,84	21,66	11,96	-10,44	3,95	5,19	-1,49	-1,12	-0,29	-0,54	
India	30,85	18,96	29,18	25,43	10,50	21,18	17,37	7,95	16,60	12,67	7,74	
Indonesia	28,14	11,67	24,92	17,46	15,48	13,91	20,40	17,40	11,77	11,73	5,17	
Ireland	-1,90	2,55	-2,12	-2,46	-6,56	-10,69	1,88	8,97	2,90	7,56	-5,33	
Italy	6,93	2,79	10,26	1,36	-4,32	3,16	5,27	2,42	2,96	1,84	-0,36	
Japan	-4,56	-3,57	-3,00	-7,63	3,22	-5,03	-1,82	-4,89	-0,94	-4,37	-3,94	
Korea	1,51	-10,90	1,08	-2,40	-0,36	-1,66	10,12	4,73	11,20	5,31	-2,24	
Malaysia	18,21	9,74	13,33	15,90	12,72	10,95	13,25	10,96	8,55	10,14	4,14	
Mexico	9,58	4,35	9,33	6,84	2,60	0,40	7,80	8,50	10,46	9,65	4,48	
Netherlands	-1,06	10,42	2,92	8,40	2,06	6,30	2,01	4,28	6,57	3,10	2,40	
New Zealand	8,40	6,61	8,38	9,30	8,68	11,90	14,05	9,89	8,37	7,94	8,06	
Norway	11,95	9,89	12,71	3,45	-2,24	6,41	5,25	7,76	8,14	6,69	-1,73	
Peru	4,76	2,37	1,04	7,55	14,85	6,54	19,75	15,66	19,12	22,94	14,73	
Phillipines	19,54	6,67	13,13	12,35	12,21	2,94	20,57	11,29	19,10	15,21	14,06	
Poland	12,51	3,96	12,78	7,90	-0,32	3,26	4,62	9,10	3,88	7,89	4,35	
Portugal	17,42	26,46	21,66	13,74	9,52	12,64	14,29	12,06	11,96	9,33	3,64	
Russia	10,01	11,12	16,26	3,81	-0,82	-3,18	6,04	1,48	8,09	-2,23	-1,55	
Singapore	15,79	8,06	14,94	12,13	10,19	8,77	10,19	12,76	6,85	12,54	4,28	
South Africa	1,72	2,96	-1,03	-5,03	3,05	-1,85	-3,02	-10,10	-2,09	-3,43	1,14	
Spain	3,04	8,66	2,58	1,51	-0,63	3,14	6,05	2,80	8,75	3,46	-6,05	
Sweden	1,60	4,63	0,50	2,34	-4,70	-3,35	1,36	15,08	2,54	7,82	6,82	
Switzerland	3,64	3,02	7,23	0,80	4,39	2,56	5,75	4,76	5,34	2,13	1,32	
Taiwan	14,41	4,60	4,46	8,49	2,78	10,47	2,18	-4,80	-2,43	1,31	-12,68	
Thailand	19,62	13,62	8,87	8,44	7,53	12,14	10,30	8,60	10,19	5,88	9,06	
Turkey	24,44	14,20	23,60	8,14	7,56	9,96	15,10	6,34	13,56	-1,86	-0,61	
UK	-3,95	-0,76	-0,45	-2,12	-3,98	-1,15	0,94	9,18	5,10	3,70	3,05	
USA	0,11	-9,45	-1,15	0,28	-1,41	-0,17	-1,64	4,91	-2,16	3,46	4,84	

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.3.16: MRA vs. MA & VisuShrink – Durchschnittliche Outperformance (p. a.) in %

Level	Ø Outperformance ggü. MA	Ø Outperformance ggü. VS
j = 1	6,71	8,40
j = 2	3,07	5,92
j = 3	3,55	8,01
j = 4	0,53	4,29
j = 5	3,77	1,12
j = 6	2,42	1,41
j = 7	1,32	0,17
j = 8	3,67	
Mittelwert	3,13	4,19

Tabelle 4.3.17: MRA vs. MA & VisuShrink – Vergleich beste Performance in %

Level	MRA = Max?	MRA > MA?	MRA > VS?
j = 1	77,08	81,25	85,42
j = 2	56,25	62,50	72,92
j = 3	75,00	75,00	93,75
j = 4	47,92	50,00	77,08
j = 5	52,08	70,83	62,50
j = 6	52,08	75,00	62,50
j = 7	45,83	62,50	58,33
j = 8	79,17	79,17	
Mittelwert	60,68	69,53	73,21

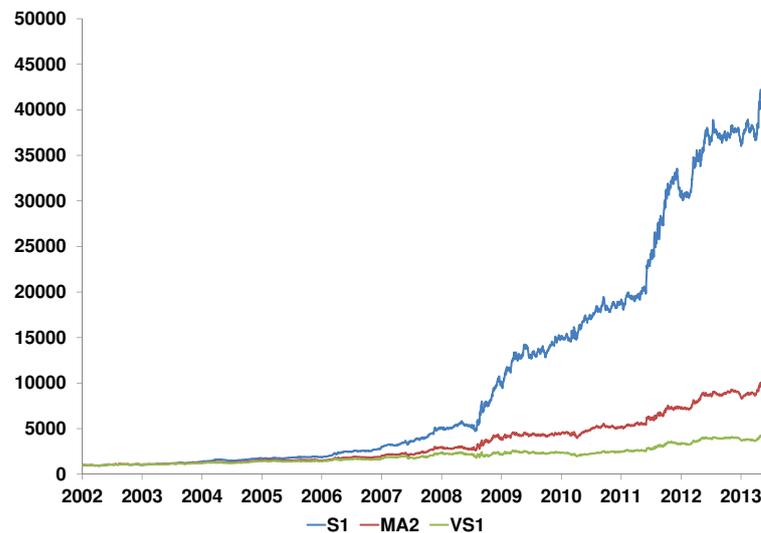


Abbildung 4.3.13: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 1)

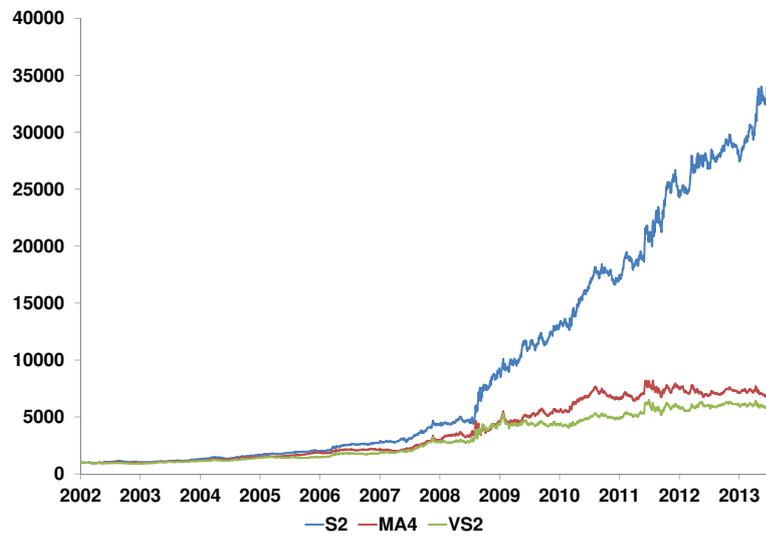


Abbildung 4.3.14: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 2)

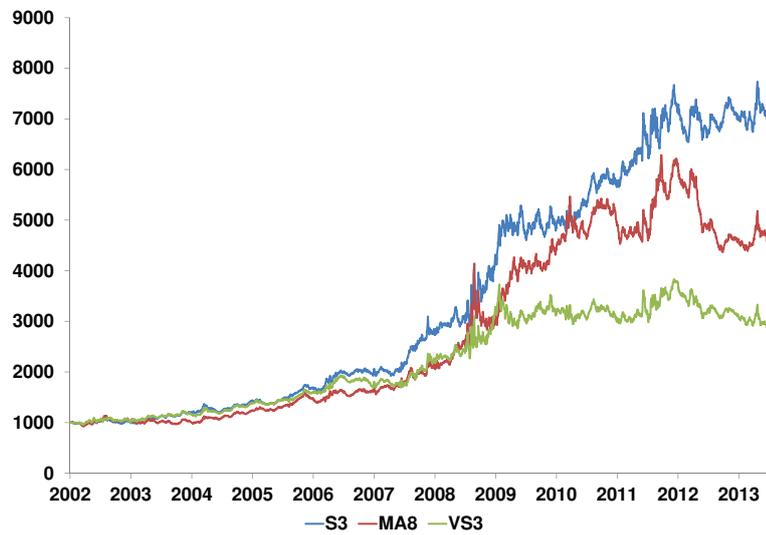


Abbildung 4.3.15: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 3)

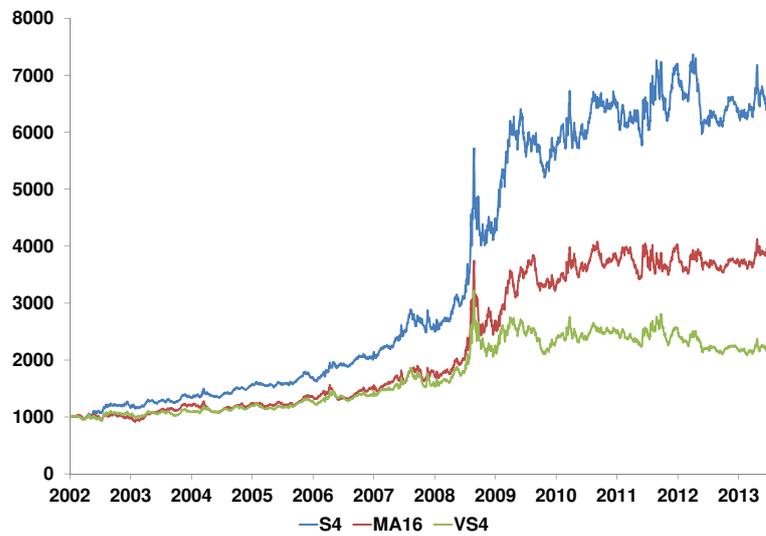


Abbildung 4.3.16: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 4)

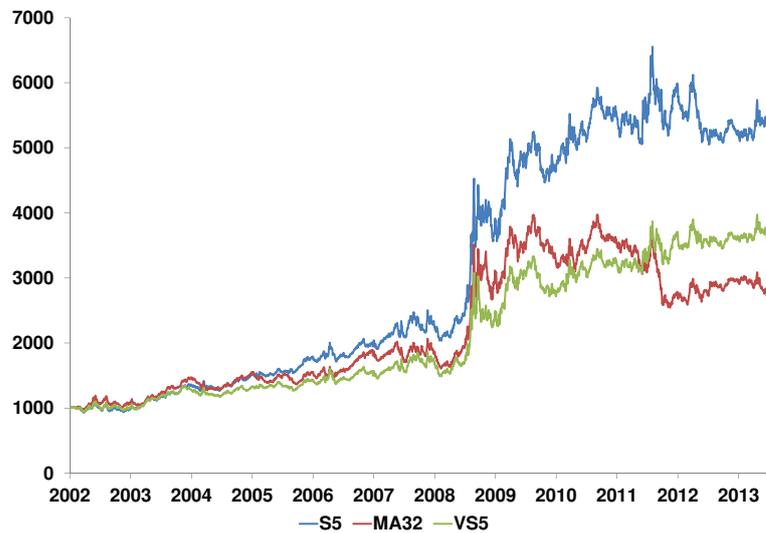


Abbildung 4.3.17: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 5)

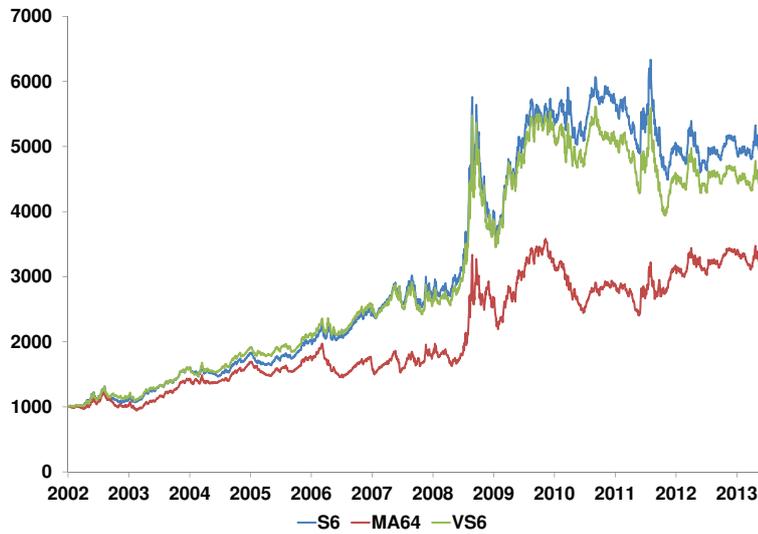


Abbildung 4.3.18: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 6)

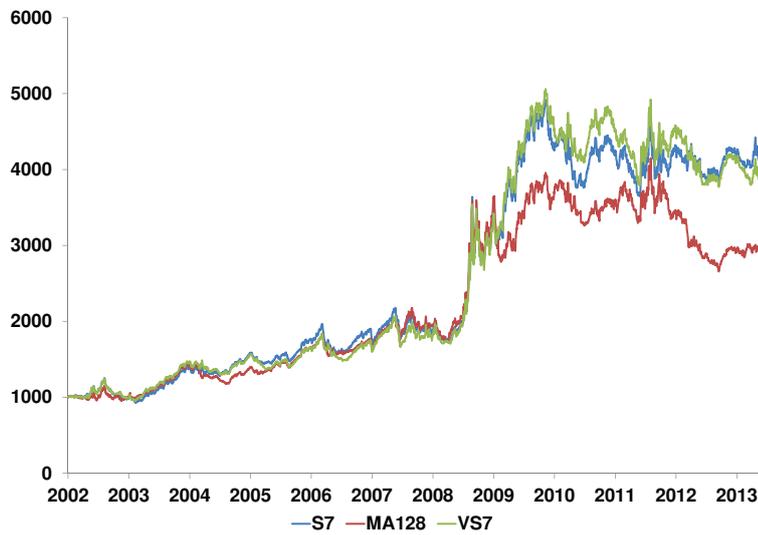


Abbildung 4.3.19: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA & VisuShrink (Level 7)

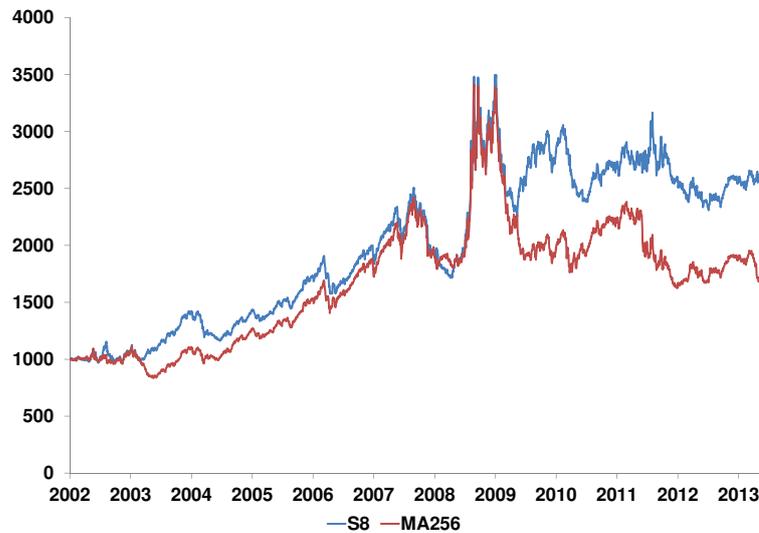


Abbildung 4.3.20: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: MRA vs. MA (Level 8)

ten Randproblematik, die Artefakte bei den WT-Koeffizienten in der Zeit-Skalen-Ebene zur Folge hat. In Abschnitt 4.3.4 fand deshalb einer tiefgehende Analyse verschiedener Augmentationsverfahren statt, bei der sich die *Refl 2*-Methode in Kombination mit dem Haar-Wavelet als beste Lösung im Sinne einer Minimierung der Randeffekte für das in Abschnitt 4.3.3 vorgestellte Trading-System ergab.

In der Folge wurde diese Systemkonfiguration auf ein Universum unterschiedlicher MSCI Aktienindizes auf Tagesbasis angewendet und die Ergebnisse der Trendfolgesystematik in den Abschnitten 4.3.6 und 4.3.7 präsentiert. Die Resultate waren dabei gemischt: Für Indizes aus Schwellenländern war die Performance überwiegend sehr positiv, für das Universum bestehend aus Industrieländern dagegen eher enttäuschend. Diese Asymmetrie konnte jedoch durch ein kombiniertes Portfolio der Trendfolgestrategien ausgeglichen werden. Insbesondere auf den unteren Level waren die Ergebnisse gerade für das Regionenportfolio vielversprechend und sowohl im Hinblick auf die Gesamtrendite als auch auf das Risiko im Sinne der Sharpe Ratio bzw. dem Maximum Drawdown deutlich besser als die entsprechende Buy&Hold-Strategie.

Schließlich wurde in Abschnitt 4.3.8 ein Vergleich mit gleitenden Durchschnitten und dem ebenfalls WT-basierten VisuShrink-Verfahren durchgeführt. Das Ziel dieser Analyse war zu klären, inwiefern die WT-basierte Filtermethode im Hinblick auf eine Tren-

derkennung besser abschneidet als die korrespondierenden MA-Filter, da zahlreiche Indikatoren wie RSI oder MACD mit gleitenden Durchschnitten arbeiten und ggf. auf Basis der WT-basierten Filter bessere Ergebnisse generieren können. Auch hier waren die Ergebnisse des MRA-Ansatzes überlegen und konnten trotz der Randproblematik weitestgehend eine wesentliche Outperformance gegenüber MA erzielen.

4.4 Robuste Portfoliooptimierung auf Basis der Wavelet-Transformation

„I can't sleep' answered the nervous one.
'Why not?' asked the friend.
'I am carrying so much cotton that I can't sleep thinking about it.
It is wearing me out. What can I do?'
'Sell down to the sleeping point', answered the friend.“

(Edwin Lefevre - Reminiscences of a Stock Market Operator)

Im vorhergehenden Abschnitt 4.3 wurde untersucht, inwieweit sich die WT dazu eignet, im Rahmen der technischen Analyse eingesetzt zu werden. Genauer formuliert stand die Frage im Mittelpunkt, ob bzw. inwiefern sich die WT zur Trendextraktion von Wertpapierpreisen verwenden lässt und ob man darauf aufbauend eine profitable Trendfolgesystematik entwickeln kann. Die Ergebnisse waren zum Teil vielversprechend, wobei sich die wesentliche Problematik in den durch die WT induzierten Randeffekten manifestierte. Die Randproblematik war dabei insofern von entscheidender Bedeutung, als dass bei einer solchen Trendbestimmung immer die zum jeweiligen Zeitpunkt letzten verfügbaren Datenpunkte die höchste Kontamination verzeichnen (vgl. Abbildung 4.3.2). Außerdem sind solche Systeme in der Regel auf kurzfristiges, d. i. spekulativ orientiertes Trading ausgelegt und entsprechen weniger einer langfristigen Portfoliostrategie. Ein Dilemma, in dem sich Spekulanten dabei oftmals befinden, wird im eingangs dieses Kapitels formulierten Zitat (Lefevre 2006, S. 104f) aus Edwin Lefevres Schlüsselroman *Reminiscences of a Stock Market Operator* – einer Biographie über Jessie Livermore, der als einer der größten Spekulanten der Wall Street Geschichte gilt – be-

schrieben⁶⁴: Spekulatives Trading in seiner klassischen Form impliziert zumeist singuläre Positionierungen im Markt und damit auch ein hohes Einzeltitel- bzw. -marktrisiko, das selbst erfahrenen Tradern den Schlaf rauben kann.

Zu Livermores Lebzeiten gab es in der Investmentwelt noch kein fundiertes Rahmenkonzept für die Zusammenstellung eines Portfolios – weder auf theoretischer noch praktischer Ebene. Investoren betrachteten potentielle Anlagen vielmehr isoliert und stellten ein Portfolio in der Regel dergestalt zusammen, indem sie die von ihnen präferierten Wertpapiere auf Basis ihres Renditepotentials auswählten, ohne die Beziehungen zwischen den Assets zu analysieren (vgl. Wilmott 2011, S. 55). Erst die bahnbrechende Arbeit von Harry M. Markowitz (Markowitz 1952) Jahrzehnte später konnte eine Antwort auf die Frage liefern, wie ein Portfolio unter Beachtung des Rendite-Risiko-Verhältnisses zusammengestellt werden sollte. Dieser als sogenannte *Modern Portfolio Theory (MPT)* in die Geschichte eingegangene Ansatz revolutionierte die Sichtweise in der Finanzierungstheorie und stellt seit seiner Publikation auch in der Praxis den de-facto Standard für die Zusammensetzung eines Portfolios dar. Allerdings gehen mit dieser Methode auch einige Probleme einher, die mitunter auf der MPT aufbauend alternative Optimierungstechniken wie beispielsweise das Black-Litterman-Verfahren hervorriefen. Auf der anderen Seite besteht im Rahmen der Markowitz-Optimierung seit jeher auch das Bestreben, die Robustheit dieses Ansatzes zu verbessern, um die Schwächen der MPT zu reduzieren. In den nun folgenden Abschnitten soll in Form einer empirischen Analyse untersucht werden, inwiefern die WT für genau diesen Zweck eingesetzt werden kann. Im Zentrum steht dabei die Frage, ob die Robustheit der MPT mit Hilfe der WT verbessert werden kann und ob sich in Abgrenzung zum konventionellen Ansatz mit ungefilterten Zeitreihen ein attraktiveres Rendite-Risiko bei der Portfoliooptimierung ergibt.

Das vorliegende Kapitel ist dabei wie folgt gegliedert: In Abschnitt 4.4.1 werden die Grundzüge der MPT erläutert, ohne dabei näher auf den mathematischen Formalismus einzugehen⁶⁵. Vielmehr soll das grundlegende Konzept der MPT vorgestellt werden, um

⁶⁴In Jack D. Schwagers berühmten Buch *Market Wizards: Interviews with Top Traders*, in dem der Autor zahlreiche Wall Street Legenden interviewt, wird dieses Werk als eines der besten Werke der Trading-Literatur überhaupt zitiert (vgl. z.B. Schwager 2006, S. 341).

⁶⁵Die Literatur über den Markowitz-Ansatz ist äußerst vielfältig und der Formalismus der MPT derart weit verbreitet, dass von einer detaillierten Darstellung des mathematischen Apparats abgesehen wird. Für den interessierten Leser sei dazu beispielsweise auf Markowitz (1952), Markowitz (2008) oder

darauf aufbauend die Schwächen dieses Ansatzes aufzuzeigen und Methoden zu skizzieren, die die Robustheit der MPT verbessern können. In Abschnitt 4.4.2 wird erläutert, wie die WT hierzu verwendet werden kann und welche Aspekte dabei zu beachten sind. Abschnitt 4.4.3 zeigt daraufhin anhand eines Universums von MSCI Länderindizes, wie sich die WT auf die zugrunde liegenden Zeitreihen bzw. insbesondere auf deren statistische Merkmale, die als historische Schätzer für die Parameter der Portfoliooptimierung verwendet werden, im Sinne einer statischen Betrachtung auswirkt. Abschnitt 4.4.4 versucht diese statische Sicht daraufhin anhand eines Benchmarkportfolios dynamisch zu erweitern, d. h. die Auswirkung einer WT-basierten Optimierung im Zeitverlauf zu analysieren. Der vorletzte Abschnitt 4.4.5 stellt die Optimierungsergebnisse weiterer Portfolios dar, während Abschnitt 4.4.6 eine kurze Zusammenfassung dieses Kapitels liefert.

4.4.1 *Modern Portfolio Theory und robuste Optimierung*

Obgleich die MPT bereits über 60 Jahre alt ist, hat der Markowitz-Ansatz nichts an seiner Attraktivität und Beliebtheit eingebüßt. Im Gegenteil: Die wohl größte Finanzkrise seit der Großen Depression von 1929, die seit 2008 die globale Finanzwelt in Atem hält, führte dazu, dass „[...] the focus of academia and practitioners alike has again shifted to the Markowitz approach for selecting assets in a portfolio“ (Pfaff 2013, S. 43). Wie bereits angedeutet, bestand die revolutionäre Einsicht von Markowitz darin, einzelne Wertpapiere nicht isoliert zu betrachten, sondern sie im Rahmen eines Portfolios zu evaluieren. Dabei spielt insbesondere die Beziehung zwischen den einzelnen Wertpapieren eine entscheidende Rolle. Markowitz legte damit den Grundstein für einen quantitativen Optimierungsansatz, bei dem die Zusammensetzung eines Portfolios lediglich von der erwarteten Rendite der Portfoliobausteine und dem Risikoappetit des jeweiligen Investors abhängt (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 17). Als geeignetes Risikomaß empfahl Markowitz, die Renditevarianz der einzelnen Assets heranzuziehen und sie den erwarteten Renditen gegenüberzustellen, weshalb man die MPT auch als *Mean-Variance-Ansatz* bezeichnet (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 23). Durch eine geeignete Gewichtung der einzelnen Wertpapiere im Sinne ihres Rendite-Risiko-Verhältnisses lässt sich mit Hilfe der MPT das Gesamtrisiko im Portfoliokontext durch Diversifikation deutlich re-

Fabozzi, Kolm, Pachamanova und Focardi (2007) verwiesen. Für praktische Implementierungen siehe auch Pfaff (2013) (für R) und Benninga (2008) (für Microsoft Excel).

duzieren. Entscheidend sind dabei die Kovarianzen bzw. Korrelationen der einzelnen Portfoliobausteine: Je geringer die Korrelationen zwischen den Assets sind, desto höher ist der Diversifikationseffekt, der im Rahmen der Portfoliooptimierung erzielt werden kann.

Im MPT-Kontext wurde zur Charakterisierung optimaler Portfolios der Begriff *effizient* geprägt. Portfolios sind demnach effizient, „if they are either risk minimal for a given return level or have the maximum return for a given level of risk“ (Pfaff 2013, S. 44). D. h. dass man das Problem der Markowitz-Optimierung aus zweierlei Perspektiven betrachten kann, die beide im Ergebnis zwar äquivalent sind, mathematisch jedoch zwei unterschiedliche Problemstellungen implizieren. Bei beiden Ansätzen handelt es sich um ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen: Das erste entspricht einer quadratischen Optimierung mit linearen Nebenbedingungen, letzteres ist ein lineares Optimierungsproblem mit quadratischen Nebenbedingungen (vgl. Pfaff 2013, S. 44). Aus Sicht eines rationalen Investors ist es dabei sinnvoll, ein Portfolio mit einem effizienten Rendite-Risiko-Verhältnis auszuwählen, da ansonsten entweder ein Portfolio mit gleicher erwarteter Rendite aber höherem Risiko oder mit gleicher Varianz und geringerer Rendite gehalten wird. Die Menge aller effizienten Portfolios bildet dabei die sogenannte Effizienzlinie, die in Abbildung 4.4.1 für ein Portfolio aus MSCI-Indizes dargestellt ist⁶⁶.

Auf der Abszisse ist dabei die erwartete Varianz („Mean-Var Target Risk“) und auf der Ordinate die erwartete Rendite („Target Return“) aufgetragen. Die Effizienzlinie zeigt diejenigen Portfolios an, die im oben beschriebenen Sinn als effizient gelten. Alle Portfolios, die innerhalb der Hyperbel liegen werden auch *feasible* Portfolios genannt und sind als ineffizient zu bezeichnen (vgl. Pfaff 2013, S. 45). Der blaue Punkt kennzeichnet das Rendite-Risiko-Verhältnis eines gleich gewichteten Portfolios (*Equal Weighted Portfolio (EWP)*), und der rote Punkt beschreibt das sogenannte *Global Minimum Variance (GMV)-Portfolio*, das mit dem geringsten Risiko aller potentiellen Portfoliovariationen ausgestattet ist. Die blaue durchgezogene Linie ist die sogenannte *Kapitalmarktlinie*, die als Tangentiale an der Effizienzlinie ausgehend eines risikolosen Zinses definiert ist⁶⁷. Es lässt sich zeigen, dass jede Kombination eines effizienten Port-

⁶⁶Diese Darstellung dient lediglich der Illustration der Effizienzlinie. Eine genaue Angabe des hierbei verwendeten Universums, das aus den Bestandteilen des MSCI World Index besteht, erfolgt erst in Abschnitt 4.4.3.

⁶⁷In Abbildung 4.4.1 verläuft die Kapitalmarktlinie durch den Ursprung, da der risikolose Zins mit 0%

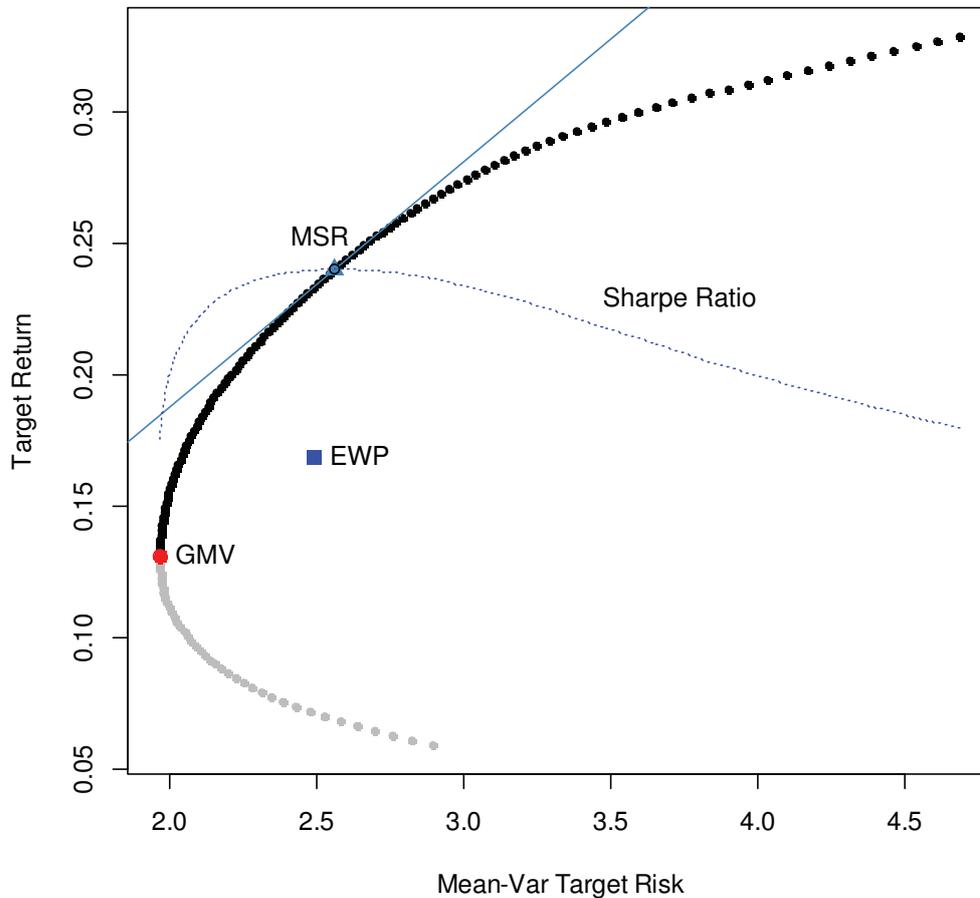


Abbildung 4.4.1: Effizienzlinie – MSCI Universum (MSCI World)

folios und dem risikolosen Zins ein Portfolio, das lediglich auf der Effizienzlinie liegt, dominiert. Der Tangentialpunkt wird dabei als *Marktportfolio* bezeichnet und ergibt sich äquivalent durch eine Sharpe Ratio Optimierung (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 35ff). D. h. das Tangentialportfolio ist dasjenige effiziente Portfolio mit dem attraktivsten Rendite-Risiko-Verhältnis und wird deshalb auch als *Maximum Sharpe-Ratio (MSR)-Portfolio* bezeichnet. Dies wird zusätzlich durch die blaue gestrichelte Linie verifiziert, die den Verlauf der Sharpe Ratio darstellt. Wie man sehen kann, liegt das Maximum dieser Kurve im Tangentialportfolio.

Obwohl die MPT einen revolutionären Durchbruch im Bereich der quantitativen Fi-
definiert wurde.

finanzierungstheorie darstellt, gehen mit diesem Ansatz einige Schwächen einher, die insbesondere im praktischen Asset Management problematisch sind. Im Wesentlichen beziehen sich diese Schwächen auf die beiden Parameter, d. i. die erwartete Rendite und Varianz, die bei der Markowitz-Optimierung die entscheidende Rolle im Hinblick auf die Gewichtungsvektoren spielen (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 139f). Das Problem ist offensichtlich die Unsicherheit, die mit diesen beiden Kennzahlen assoziiert ist. Da man die zukünftige Wertentwicklung der Wertpapiere nicht mit Sicherheit prognostizieren kann, müssen sowohl die erwartete Rendite als auch das damit zusammenhängende Risiko geschätzt werden. Dabei gibt es im Grunde zwei Möglichkeiten: Entweder werden Prognosen als Inputs verwendet, die auf modellbasierten Methoden fußen bzw. Analystenmeinungen zurate gezogen; oder sie werden aus den historischen Daten geschätzt. Beide Wege haben wesentliche Vor- und Nachteile: Modellgetriebene Ansätze wie Faktor- oder GARCH-Modelle bieten die Möglichkeit, tatsächlich zukünftige Renditen auf Basis von Meinungen oder einem vorab spezifizierten Modell zu schätzen, die eine Reihe von Faktoren berücksichtigen und damit eine fundierte Prognose ermöglichen können. Auf der anderen Seite besteht dabei selbstredend immer das Risiko einer falschen bzw. unzureichenden Modellierung. Spezialisierte Analysten bieten darüber hinaus die Möglichkeit, auch eine diskretionäre Komponente in die Schätzung mit einzubeziehen. Allerdings ist die Prognosegüte bzw. ihre Beständigkeit auch hier eher fraglich. Hinzukommend können kleine Fondsboutiquen im Gegensatz zu Großbanken in der Regel nicht die notwendige Infrastruktur bzw. schlichtweg ausreichendes Personal bereitstellen, um proprietäre Meinungen in adäquater Weise zu generieren.

Oftmals bleibt dann lediglich der zweite Weg übrig, d. i. die Parameter aus den historischen Daten zu schätzen. Solche Stichprobenschätzer sind aber oft schlechte Wegweiser und haben enttäuschende Ergebnisse zur Folge (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 140). Genauer formuliert führen historische Schätzer oft zu extremen Gewichtungen und erratischen, zum Teil heftigen Veränderungen der Gewichtungsvektoren zwischen den Sampling-Perioden. Dies hängt insbesondere mit der Tatsache zusammen, dass die Stichprobenschätzer äußerst sensibel auf sogenannte Ausreißer, d. i. extreme Datenpunkte reagieren (vgl. Pfaff 2013, S. 155)⁶⁸. Als Folge ziehen solche Ausreißer große Umschichtungen

⁶⁸Der Schätzer für die Durchschnittsrendite ist dabei weitaus sensibler als derjenige für die Schwankungsbreite der Renditen, weshalb eine GMV-Optimierung in der Regel die vergleichsweise stabilsten Ergebnisse liefert.

nach sich, die letztlich nur auf temporären Schwankungen basieren und hohe Transaktionskosten verursachen, die einen mitunter äußerst negativen Einfluss auf die Wertentwicklung des Portfolios haben können. Insofern ist seit jeher das Bestreben groß, Methoden zu finden, die die Robustheit der Optimierungsergebnisse verbessern.

Hierbei gibt es grundsätzlich wiederum zwei unterschiedliche Wege: Einerseits lässt sich versuchen, eine robuste Optimierung mit klassischen Schätzern durch eine Modifikation des Optimierungsverfahrens zu erzielen. Andererseits kann man Methoden für eine robustere Parameterschätzung entwickeln, die dann in die herkömmliche Markowitz-Optimierung eingehen. Die Bedeutung des Begriffs *robust* ist für die beiden Ansätze allerdings unterschiedlich (vgl. Pfaff 2013, S. 160): Während bei der robusten Parameterschätzung die zentrale Aufgabe darin besteht, Parameter zu definieren, die nicht oder nur unwesentlich durch Ausreißer beeinflusst werden, steht bei der robusten Optimierung „the derivation of an optimal solution for sets of possible parameter constellations“ (Pfaff 2013, S. 160) im Mittelpunkt. Mit anderen Worten versucht man bei robusten Optimierungstechniken Wege zu finden, um den Einfluss der Parameter generell zu reduzieren; man spricht daher auch von einem Optimierungsproblem unter Unsicherheit (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 291)⁶⁹. Die Einbeziehung der WT in die MPT kann im Gegensatz dazu unter das Themengebiet der robusten Parameterschätzung subsumiert werden, da mit Hilfe der WT versucht wird, die Parameter auf Basis der gefilterten Zeitreihen zu schätzen und extreme Datenpunkte damit auszuschließen.

4.4.2 Robuste Parameterschätzung auf Basis der WT

Bei der robusten Parameterschätzung geht es im Wesentlichen also darum, den Einfluss von Ausreißern zu reduzieren. Dies geschieht am einfachsten, indem man solche extremen Datenpunkte trimmt. Das Problem dabei ist jedoch, wie man Ausreißer überhaupt definieren soll. Eine geeignete Klassifizierung hängt nämlich entweder von einem zugrunde liegenden Modell bzw. einer Verteilungsannahme oder einer subjektiven Einschätzung ab (vgl. Pfaff 2013, S. 156). Da die MPT von der Annahme normalverteilter Renditen ausgeht, ist zumindest die Frage nach der Verteilung beantwortet (vgl. Fabozzi et al. 2007, S. 32). Allerdings wurde im theoretischen Abschnitt diskutiert, dass empirische Untersuchungen mehr als deutlich gegen diese Annahme sprechen. Andererseits

⁶⁹Eine gelungene Einführung in diesen Bereich bieten Fabozzi et al. (2007, Kapitel 10) und Pfaff (2013, S. 160ff).

ist auch eine subjektive Beurteilung aus formeller Sicht unbefriedigend bzw. zumindest fragwürdig. Einige Methoden wie beispielsweise die Verwendung des Medians anstatt des Mittelwertes können die Robustheit der Parameterschätzung zum Teil verbessern. Die WT wiederum bietet die Möglichkeit, das Datenmaterial durch Glättung bzw. Shrinkage in einer objektiven Art und Weise zu modifizieren: Die MRA glättet die Zeitreihe im Sinne eines Filters, indem sie eine generalisierte Durchschnittsbildung repräsentiert. Die Shrinkage-Methode ermöglicht es ferner, Ausreißer im Sinne der in Abschnitt 4.3.2 erläuterten Methodik zu quantifizieren und aus der Zeitreihe zu extrahieren. Die Frage ist nun, ob die WT das Sensibilitätsproblem der MPT in Bezug auf extreme Datenpunkte zumindest verbessern kann.

Im Gegensatz zur Verwendung der WT im Rahmen der technischen Analyse (vgl. Kapitel 4.3) ist der Einfluss der Randeffekte in diesem Fall weitaus geringer, da nicht nur der letzte Datenpunkt für die Parameterschätzung entscheidend ist. Im Gegensatz dazu werden für die historische Bestimmung der Parameter in der Regel längere Zeiträume verwendet, so dass die Randeffekte nicht so sehr ins Gewicht fallen, da vergleichsweise nur wenige Datenpunkte von ihnen beeinflusst werden; die Mehrzahl der gefilterten Datenpunkte ist nur sehr gering bzw. gar nicht von den Randeffekten kontaminiert. Ferner kann die Verwendung von gefilterten Daten dazu führen, die vorhandenen Korrelationen zwischen den Assets adäquater zu repräsentieren. Auf Ebene der Sampling-Periode können sich nämlich Korrelationen bilden, die sich im „Big Picture“ in dieser Form gar nicht darstellen (vgl. Wilmott 2011, S. 335ff). Abbildung 4.4.2 illustriert das Problem: Bestimmt man den Korrelationskoeffizienten der beiden Geraden mit durchgezogener Linie auf Basis der Rohdaten, ergibt sich ein Wert von -1 , d. i. einer perfekt negativen Korrelation. Dieser Wert spiegelt jedoch nicht den wahren Sachverhalt im Sinne des eigentlichen Trends wider, da sich die Geraden in dieselbe Richtung bewegen. Die Idee hinter der Einbeziehung der WT ist nun, dass durch eine geeignete Filterung der tatsächliche Zusammenhang zwischen den Assets aufgedeckt werden kann und im Rahmen der MPT damit zu verbesserten Ergebnissen führt. Im Fall von Abbildung 4.4.2 wird dieser Zusammenhang im Sinne eines fallenden Trends durch die gestrichelten Linien angedeutet.

Eine WT-basierte Parameterschätzung im Rahmen der Markowitz-Optimierung zielt somit auf zwei zentrale Fragestellungen ab:

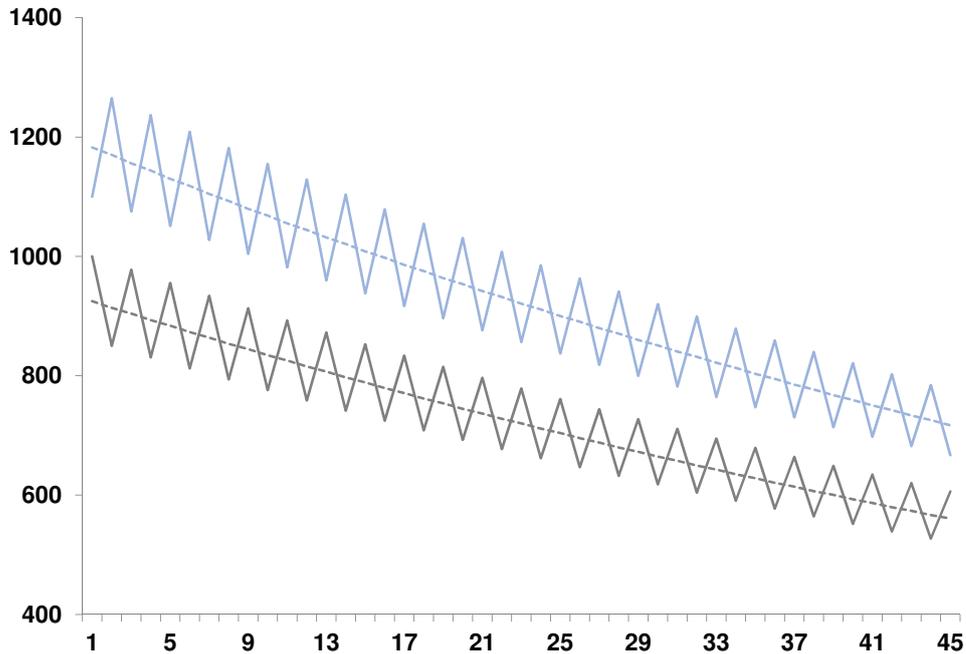


Abbildung 4.4.2: Illustration von zwei vermeintlich perfekt negativ korrelierten Datenreihen

1. Wie wirkt sich die WT-basierte Filterung auf die statistischen Merkmale der zugrunde liegenden Zeitreihen aus? Und welche Folgen ergeben sich daraus für die Verteilungseigenschaften des Datenmaterials? Diese Fragen sind insbesondere von Bedeutung, um ein Gefühl für den Einfluss einer solchen Robustifizierungsmethode auf die Zeitreihen zu entwickeln.
2. Können sich die Nachteile, die sich im Rahmen der Markowitz-Optimierung aufgrund der Sensibilität der Schätzer ergeben – d. i. insbesondere das Auftreten von extremen und sich zu häufig ändernden Gewichtungen –, durch die Anwendung der WT beseitigen oder zumindest abmildern lassen? Lässt sich anders formuliert eine Robustifizierung der Parameterschätzer erzielen, so dass sich gerade unter Einbeziehung von Transaktionskosten eine Performance-Verbesserung des resultierenden Portfolios ergibt? Und wie wirkt sich eine WT-basierte Markowitz-Optimierung auf die Lage und Form der Effizienzlinie aus?

4.4.3 Auswirkungen der WT auf die Effizienzlinie

Um diese Fragen beantworten zu können, wird exemplarisch ein Portfolio betrachtet, das aus den Länderindizes des MSCI World PR Index besteht. Tabelle 4.4.1 zeigt die statistischen Kennzahlen der Indizes, die auf Wochendaten in USD zwischen dem 01.01.1993 und dem 30.08.2013 basieren. Wie bei den vorangegangene Analysen in dieser Arbeit zeigen sich aufgrund der Schiefe und Kurtosis der einzelnen Indizes Zweifel an der Normalverteilungshypothese. So hat Singapore als Extrembeispiel eine Kurtosis von 13,13. Aber auch die anderen Indizes haben größtenteils einen von drei abweichenden Wert. Die Schiefe ist mit Ausnahme von Japan und Singapore bei allen Zeitreihen negativ.

Tabelle 4.4.1: Deskriptive Kennzahlen des MSCI World PR USD Index Universums basierend auf Tagesdaten

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min [%]	Max [%]
Australia	0,18	0,36	3,14	-0,99	9,31	-29,03	16,03
Austria	0,10	0,26	3,66	-1,00	9,27	-31,78	20,74
Belgium	0,13	0,22	3,13	-0,84	5,27	-20,81	12,75
Canada	0,20	0,38	3,10	-0,65	6,81	-22,94	19,34
Denmark	0,25	0,40	2,99	-0,95	6,94	-22,80	15,35
Finland	0,31	0,58	4,70	-0,29	2,23	-22,27	22,71
France	0,15	0,32	3,17	-0,53	4,61	-23,44	14,69
Germany	0,17	0,41	3,40	-0,45	4,27	-22,94	16,42
Hong Kong	0,17	0,24	3,44	-0,17	2,23	-19,00	14,62
Ireland	0,09	0,21	3,60	-1,14	9,79	-32,89	18,08
Israel	0,11	0,15	3,29	-0,05	2,51	-14,89	17,87
Italy	0,12	0,20	3,63	-0,41	4,17	-23,91	19,57
Japan	0,05	0,03	2,91	0,12	1,49	-15,13	11,65
Netherlands	0,16	0,35	3,07	-0,88	7,74	-27,31	15,96
New Zealand	0,12	0,17	3,10	-0,53	4,25	-22,45	13,16
Norway	0,22	0,41	3,78	-0,56	5,79	-24,97	21,23
Portugal	0,11	0,00	3,05	-0,56	3,26	-19,10	13,38
Singapore	0,15	0,00	3,59	0,50	13,13	-19,94	25,67
Spain	0,18	0,20	3,54	-0,54	3,93	-23,14	15,16
Sweden	0,28	0,38	3,92	-0,21	3,69	-21,33	22,54
Switzerland	0,21	0,30	2,68	-0,52	6,62	-21,27	14,02
UK	0,11	0,26	2,71	-0,70	9,74	-24,13	17,64
USA	0,15	0,23	2,42	-0,48	5,39	-18,22	12,22

Als erstes sollen die Auswirkungen der WT auf die statistischen Kennzahlen der transformierten Daten untersucht werden. D. h. konkret, dass die Zeitreihen zunächst mittels der MODWT-MRA transformiert werden, um auf Basis der gefilterten Daten daraufhin eine Markowitz-Optimierung durchzuführen. Das Ziel ist dabei, ein Gefühl zu entwickeln, wie sich μ und σ auf den jeweiligen Level verändern und damit das Ergebnis der Optimierung beeinflussen. Illustrativ wird zu diesem Zweck der Index Germany aus dem oben beschriebenen Universum herangezogen. Tabelle 4.4.2 fasst

hierzu die beiden Kennzahlen zusammen, die sich in Verbindung mit der MRA bzw. VisuShrink-Methode für die Level 1 bis 9 auf Basis des Haar-Wavelets ergeben. Wie man daran erkennen kann, ist der Mittelwert μ bei der MRA auf allen Level geringer als bei den ursprünglichen Daten (vgl. Tabelle 4.4.1) und nimmt mit zunehmender Skala ab. Für die Shrinkage-Methode liegt μ für alle Level j zwar auch etwas darunter, bleibt im Verlauf über die verschiedenen Skalen aber relativ konstant. Hervorstechend ist die Standardabweichung σ , die im Vergleich zur Zeitreihe ($\sigma = 3,40\%$) deutlich kleiner ist und im Falle der MRA bei Level 9 nahezu auf Null fällt. Diese Ergebnisse waren zu erwarten: Mit zunehmender Filterung nimmt die Schwankungsbreite ab, da die gefilterte Zeitreihe immer glatter wird, und reduziert dementsprechend auch den Mittelwert von μ , der als Schätzer für die Optimierung herangezogen wird. Insofern ist zu erwarten, dass sich diese Ergebnisse wesentlich auf die Markowitz-Optimierung auswirken. Bei der VisuShrink-Methode ist der Rückgang von σ zwar nicht ganz so ausgeprägt, entspricht auf dem letzten Level im Vergleich zur ungefilterten Reihe aber dennoch einer Reduktion um ca. 64%.

Im Hinblick auf die Entwicklung der Verteilungsparameter sind die Ergebnisse zweigeteilt: Bei der MRA bleibt die Schiefe bis Level 6 weitgehend konstant bei etwa -1 und nimmt danach leicht höhere Werte um Null an. Die Wölbung nimmt bis auf das letzte Level stetig ab und ist ab Level 7 negativ. Bei der Shrinkage-Methode nimmt die Schiefe sukzessive für jedes Level ab, wohingegen die Werte für die Wölbung stark zunehmen und extreme Ausprägungen annehmen. Sowohl für die Zeitreihe an sich als auch für alle Level der MRA- bzw. VisuShrink-Verfahren ist die Nullhypothese einer Normalverteilung anhand der Jarque-Bera-Statistik zudem deutlich abzulehnen⁷⁰. Die WT kann somit keine Verbesserung dieser Annahme hervorbringen, so wie es aus empirischer Sicht beispielsweise eine Erhöhung der Sampling-Periode bewirkt (vgl. Wilmott 2011, S. 219ff).

Abbildung 4.4.3 zeigt die Renditen der transformierten Daten für Level 7 im Vergleich zur ursprünglichen Zeitreihe. Zur besseren Übersichtlichkeit umfasst der dargestellte Zeitrahmen die Werte zwischen dem 01.01.1999 und 01.01.2001. Man erkennt deutlich, dass die Daten sehr stark gefiltert werden, wobei die Renditen der MRA-Reihe derart gering sind, dass sie auf dieser Skala nur unwesentlich von der Nulllinie abweichen. Abbildung 4.4.4 stellt zudem den Verlauf des Mittelwerts μ und der Standard-

⁷⁰Der p-Wert ist für alle Datenreihen kleiner Null.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.2: MSCI Germany PR Index (Wochendaten) – Auswirkungen der WT auf die statistischen Kennzahlen

	MRA – Haar								
$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
μ [%]	0.14	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.05
σ [%]	2.06	1.39	0.98	0.70	0.50	0.33	0.22	0.10	0.03
Schiefe	-1.10	-1.16	-1.16	-1.10	-1.17	-1.01	-0.40	0.26	-0.02
Kurtosis	4.48	3.63	3.01	2.27	1.56	0.06	-0.89	-1.31	-1.11

	VisuShrink – Haar								
$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
μ [%]	0.14	0.13	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.11
σ [%]	2.16	1.64	1.44	1.35	1.33	1.31	1.27	1.22	1.21
Schiefe	-1.56	-2.96	-4.18	-4.76	-5.00	-5.13	-5.33	-5.68	-5.75
Kurtosis	10.39	27.29	45.70	55.95	60.42	62.86	67.02	74.33	75.98

abweichung σ beider Verfahren gegenüber, wobei die Reihen auf die jeweiligen Werte der ungefilterten Zeitreihe indiziert wurden⁷¹. Wie man sehen kann, werden die durchschnittlichen Renditen bei beiden Verfahren zwar geringer, ab dem vierten Level tritt jedoch eine Art Sättigungseffekt ein und μ nimmt mit steigendem Level j nicht mehr so stark ab. Das Risiko in Form der Standardabweichung σ reduziert sich bis zum dritten Level relativ gesehen in einer ähnlichen Größenordnung, während es auf den nachfolgenden Skalen überproportional abnimmt.

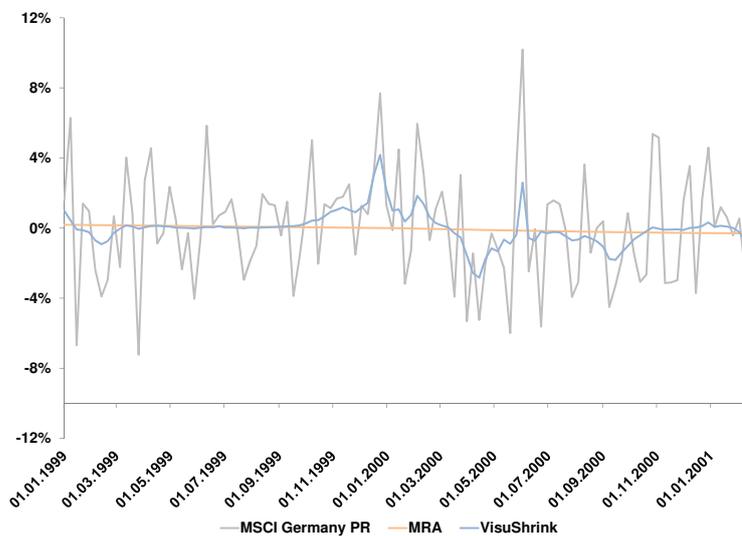


Abbildung 4.4.3: Diskrete Renditen des MSCI Germany vs. MRA vs. VisuShrink (Haar, Level 7)

⁷¹D. h. die Kennzahlen aus Tabelle 4.4.1 entsprechen 100%. „Level 0“ bezeichnet dabei die Rohdaten.

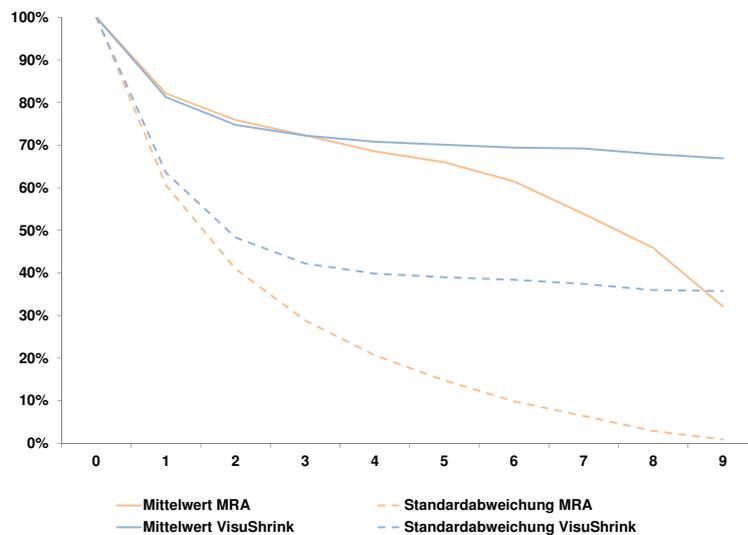


Abbildung 4.4.4: Verlauf: Mittelwert μ und Standardabweichung σ für die MRA und VisuShrink

Um einschätzen zu können, wie sich diese Charakteristika auf die Markowitz-Optimierung auswirken – d. h. insbesondere wie sich die Effizienzlinie mit den WT-basierten Schätzern von μ und σ verändert –, werden im Folgenden die Effizienzlinien auf den verschiedenen Skalen analysiert. Abbildungen 4.4.5 bis 4.4.9 zeigen hierzu die Resultate der Optimierung auf Basis der MRA, d. i. der transformierten Daten für die Level 1 bis 9. Als Filter wurde wiederum das Haar-Wavelet verwendet. Auf der linken Seite von Abbildung 4.4.5 ist zum Vergleich nochmals die Effizienzlinie dargestellt, die sich mit den Rohdaten ergibt. Die einzige Nebenbedingung der Optimierung ist wie bei Abbildung 4.4.1, dass nur positive Gewichtungen im Sinne eines *Long Only*-Portfolios ohne Leerverkäufe erlaubt sind. Insbesondere sind die Gewichtungen nicht auf bestimmte Minimal- bzw. Maximalwerte beschränkt. Anhand der Abbildungen sieht man, dass die WT die Effizienzlinie stark beeinflusst. Insbesondere wird deutlich, dass sich die Krümmung der Linie stetig ausweitet und damit mit steigender Skala ein potenziell besseres Risikoprofil bietet. Auffällig ist zudem, dass das GMV-Portfolio für die Level 1 bis 6 in etwa dieselbe erwartete Rendite wie für die Rohdaten hat, das Risiko mit jedem Level jedoch maßgeblich abnimmt. Erst ab Level 7 verringert sich auch die erwartete Rendite des GMV-Portfolios und liegt auf dem letzten Level nur noch leicht im positiven Bereich. Für das MSR-Portfolio zeigt sich in etwa die gleiche Charakteristik, wobei eine

signifikante Reduktion der erwarteten Rendite erst auf den letzten Level zu verzeichnen ist.

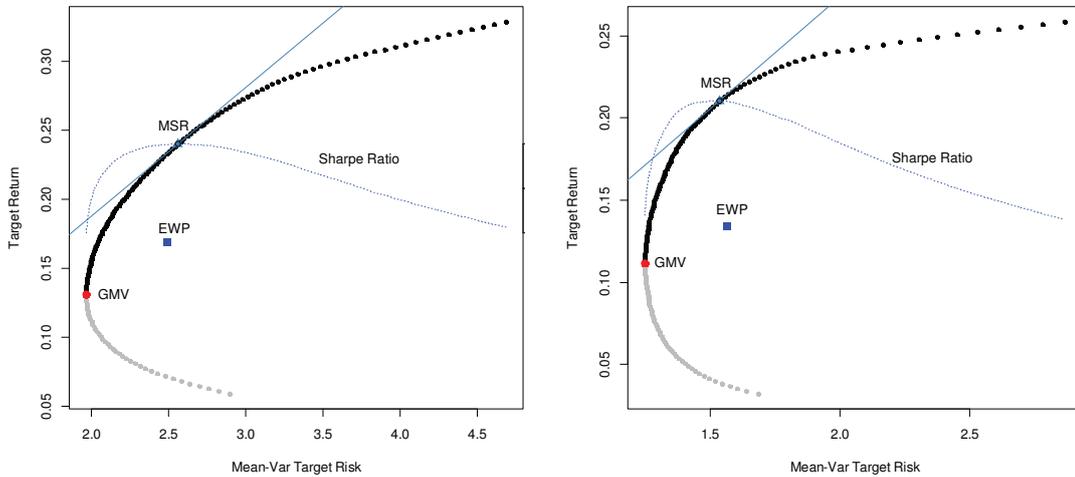


Abbildung 4.4.5: Effizienzlinie (Long only) – Rohdaten (links) & Haar-MRA Level 1 (rechts)

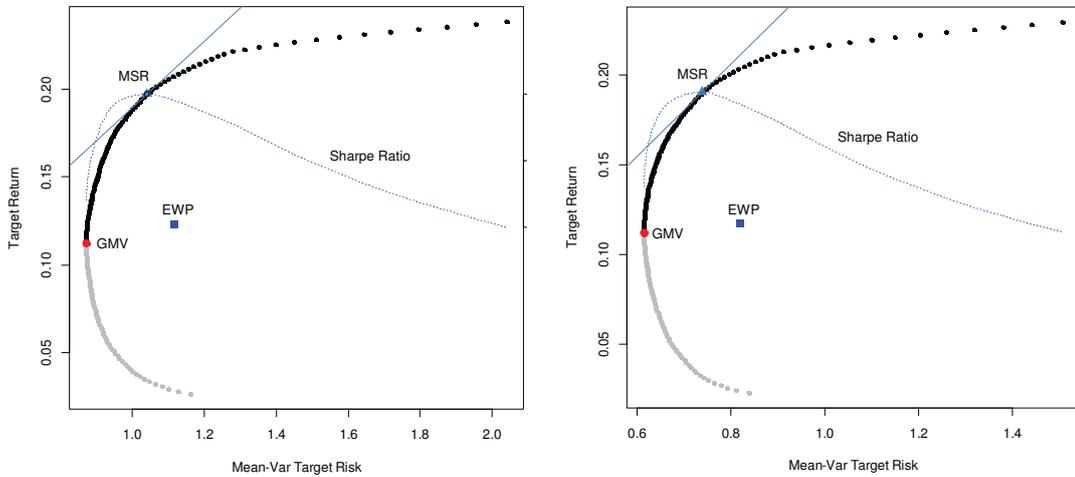


Abbildung 4.4.6: Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 2 (links) & 3 (rechts)

Insgesamt ist die Abnahme der erwarteten Renditen im Vergleich zum Risiko analog zu den weiter oben festgestellten Ergebnissen vergleichsweise geringer, so dass sich

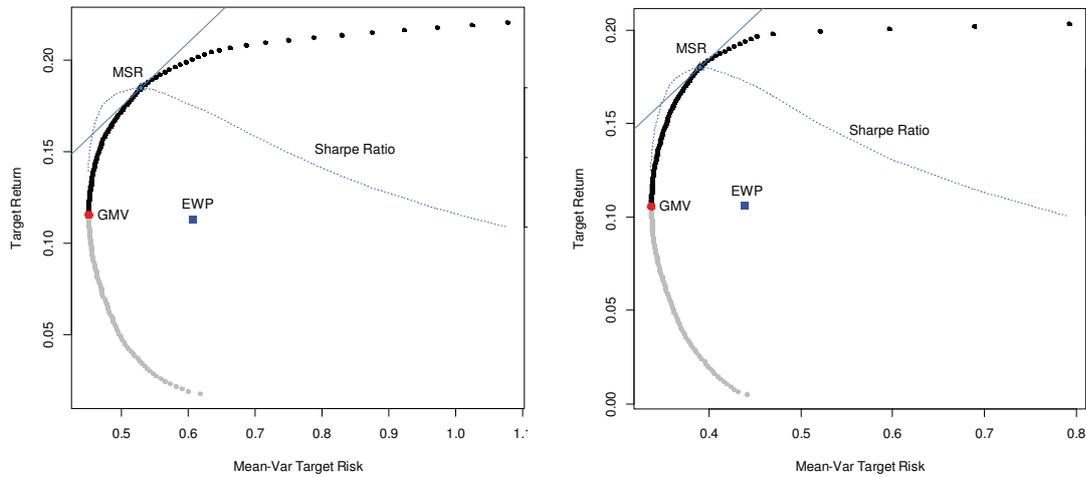


Abbildung 4.4.7: Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 4 (links) & 5 (rechts)

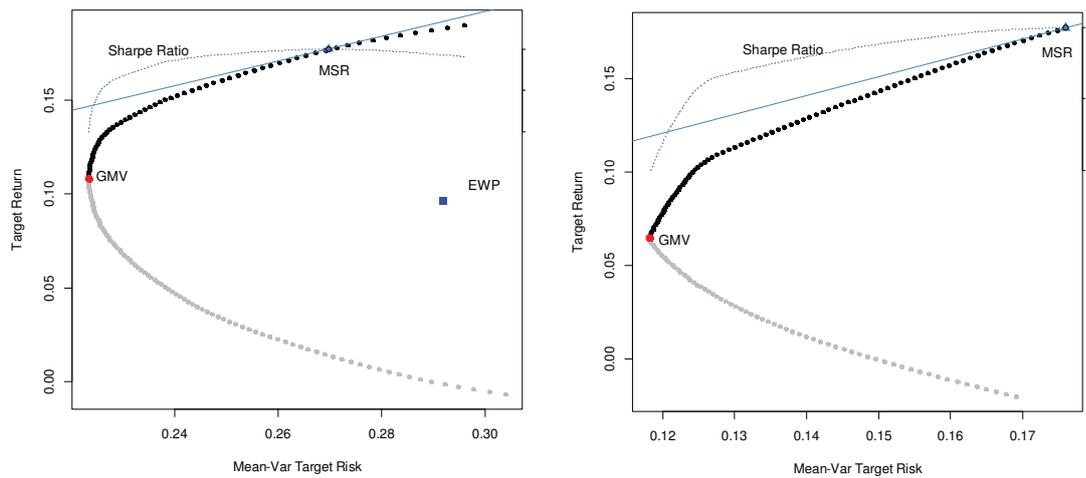


Abbildung 4.4.8: Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 6 (links) & 7 (rechts)

grundsätzlich ein attraktiveres Rendite-Risiko-Profil ergibt, je höher das Transformationslevel ist. Tabelle 4.4.3 bestätigt dieses Resultat nochmals und fasst die Kennzahlen μ und σ^2 zusammen, die sich für das MSR-Portfolio für die drei verschiedenen Wavelets sowohl auf Basis der MRA als auch des VisuShrink-Verfahrens ergeben. Zusätzlich dazu ist auch der Quotient der beiden Werte angegeben, der ähnlich wie die Sharpe Ratio

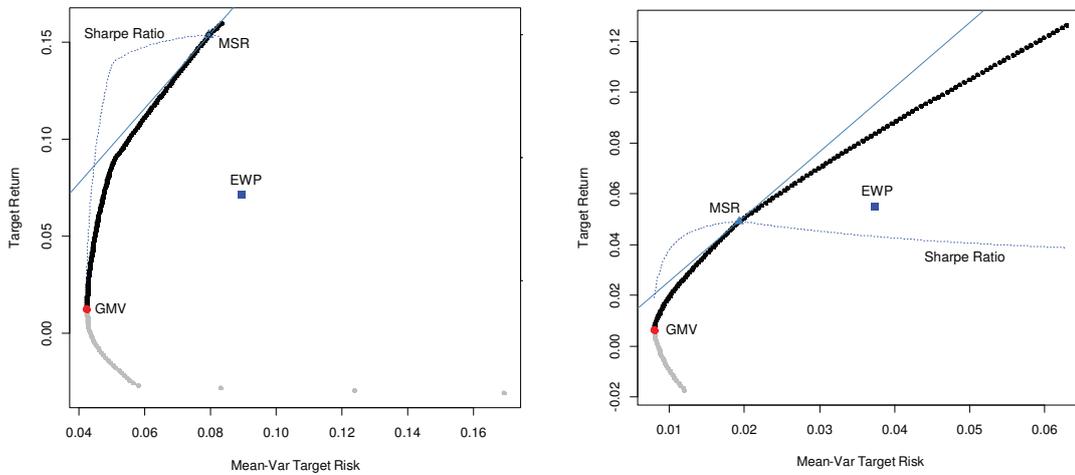


Abbildung 4.4.9: Effizienzlinie (Long only) – Haar-MRA Level 8 (links) & 9 (rechts)

eine Indikation über das Rendite-Risiko-Verhältnis angibt. Bei der MRA fällt sofort auf, dass dieser Quotient mit zunehmendem Level stark ansteigt und für alle Wavelets auf dem letzten Level deutlich über 2 liegt. Bereits auf den ersten Level zeigt sich jedoch eine wesentliche Verbesserung der Kennzahlen im Vergleich zu der Rohdatenoptimierung, bei der sich eine erwartete Rendite von 0,24% und Varianz von 2,56% ergibt, so dass $\frac{\mu}{\sigma^2} = 0,09$. Auf dem ersten Level beträgt die Steigerung dieses Verhältnisses für das Haar-Wavelet bereits ca. 47%, auf dem zweiten Level ist der Wert schon mehr als doppelt so hoch. Für die einzelnen Wavelet-Basisfunktionen sind die Kennzahlen relativ ähnlich, wobei mit dem Haar-Wavelet im Schnitt das geringste Risiko bei in etwa derselben erwarteten Rendite erzielt wird. Mit 0,84 ist der durchschnittliche $\frac{\mu}{\sigma^2}$ -Quotient für Haar damit am höchsten. Beim VisuShrink-Verfahren sind die Ergebnisse zwar ebenfalls besser als bei der Optimierung mit Rohdaten, allerdings sind die Verbesserungen bei weitem nicht so ausgeprägt wie bei der MRA. Die Frage ist nun, wie sich die Gewichtungsvektoren im Zeitverlauf auf Basis einer Optimierung darstellen, bei denen die Schätzer für μ und σ mit Hilfe der MRA-transformierten Daten ergeben und welche Performance letztlich mit Hilfe der WT-basierten Optimierung erzielt werden kann.

Tabelle 4.4.3: WT-basierte Markowitz-Optimierung für das MSCI World Universum

Haar	MRA			VisuShrink		
Level	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$
1	1,53	0,21	0,14	1,62	0,20	0,12
2	1,04	0,20	0,19	1,25	0,19	0,15
3	0,74	0,19	0,26	1,07	0,18	0,17
4	0,53	0,19	0,35	1,01	0,18	0,18
5	0,39	0,18	0,46	0,97	0,17	0,18
6	0,27	0,18	0,66	0,96	0,17	0,18
7	0,18	0,18	1,01	0,95	0,18	0,19
8	0,08	0,15	1,93	0,94	0,18	0,19
9	0,02	0,05	2,55	0,92	0,18	0,19
Mittelwert	0,53	0,17	0,84	1,08	0,18	0,17

D4	MRA			VisuShrink		
Level	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$
1	1,61	0,21	0,13	1,69	0,20	0,12
2	1,12	0,20	0,18	1,28	0,18	0,14
3	0,81	0,19	0,24	1,05	0,17	0,16
4	0,58	0,19	0,32	0,95	0,17	0,18
5	0,43	0,18	0,42	0,90	0,17	0,19
6	0,30	0,18	0,60	0,87	0,17	0,19
7	0,21	0,18	0,87	0,83	0,16	0,20
8	0,09	0,17	1,85	0,82	0,16	0,20
9	0,01	0,03	2,44	0,88	0,18	0,20
Mittelwert	0,57	0,17	0,78	1,03	0,17	0,18

LA8	MRA			VisuShrink		
Level	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$	σ^2	μ	$\frac{\mu}{\sigma^2}$
1	1,66	0,21	0,13	1,79	0,19	0,11
2	1,16	0,20	0,17	1,35	0,18	0,13
3	0,84	0,19	0,23	1,09	0,17	0,15
4	0,60	0,19	0,31	0,97	0,16	0,16
5	0,45	0,18	0,40	0,90	0,16	0,17
6	0,31	0,18	0,57	0,85	0,16	0,18
7	0,22	0,18	0,80	0,81	0,15	0,19
8	0,10	0,17	1,78	0,86	0,17	0,20
9	0,01	0,01	2,88	0,86	0,17	0,20
Mittelwert	0,59	0,17	0,81	1,05	0,17	0,17

4.4.4 WT-basierte Markowitz-Optimierung – MSR Optimierung

Im vorangegangenen Abschnitt 4.4.3 wurde anhand einer bestimmten Beobachtungsperiode untersucht, wie sich die WT auf die statistischen Merkmale von Finanzdaten und die Charakteristika einer Markowitz-Optimierung auswirkt. Demnach ließ sich auf Basis der MRA eine asymmetrische Modifikation der historischen Parameterschätzer erzielen⁷²: Die Durchschnittsrendite μ nimmt gerade auf den höheren Level weniger

⁷²Vgl. Abbildung 4.4.3 und 4.4.4.

stark ab als das Risiko in Form der Varianz σ^2 , so dass mit steigendem Transformationslevel eine stetige Verbesserung des Rendite-Risiko-Potentials erzielt werden kann. Abbildungen 4.4.5 bis 4.4.9 gaben dabei bereits eine ersten Indikation, wie sich die auf den transformierten Datenreihen basierenden Parameterschätzer auf die Effizienzlinie zu einem singulären Zeitpunkt auswirken. Aus praktischer Sicht ist im Rahmen einer robusten Optimierung aber entscheidend, wie sich die Sensibilität der Parameterschätzer und eine damit verbundene Rebalancierung der Gewichtungen *im Zeitverlauf* darstellen und letztlich auf die tatsächliche Wertentwicklung des Portfolios auswirken.

Dabei ist zu beachten, dass der Fokus der weiteren Analysen auf dieser spezifischen Fragestellung liegt, und nicht auf dem Optimierungsverfahren an sich. Beispielsweise können sich die Ergebnisse in Bezug auf die für die Optimierung herangezogene Zeitspanne zum Teil deutlich unterscheiden. Auch die Festlegung bestimmter Grenzen im Sinne erlaubter Maximal- oder Minimalgewichte kann entscheidend für die Performance einer Optimierung sein. Die Ergebnisse einer WT-basierten Robustifizierung sollen aber lediglich relativ betrachtet werden, d. h. dass sie immer im Vergleich zu einer spezifischen Optimierungsmethode mit Rohdaten zu sehen sind. Konkret bedeutet dies, dass die Frage im Mittelpunkt steht, ob im Rahmen einer Markowitz-Optimierung mit einer bestimmten Konfiguration eine Verbesserung der Kennzahlen erreicht werden kann, wenn man die Daten zuvor mit Hilfe der WT filtert. Es wird sogar bewusst in Kauf genommen, dass die Optimierungsergebnisse in der Praxis beispielsweise aufgrund von gesetzlichen Grenzvorgaben zum Teil gar nicht umsetzbar sind, da lediglich die Auswirkungen der WT auf die Optimierungsergebnisse relevant sind. Das deutsche Investmentgesetz (InvG) schreibt beispielsweise vor, dass bei in Deutschland zugelassenen Fonds einzelne Anlagen je nach Wertpapiergattung in der Regel maximal 20% des Fondsvolumens ausmachen dürfen. In den folgenden Analysen werden diese Grenzen zum Teil deutlich überschritten. Dies ist aber aus zweierlei Gründen akzeptabel: Erstens kann eine Strategie nur für einen bestimmten Anteil eines Portfolios umgesetzt werden, so dass Grenzen auch dann eingehalten werden, wenn die Optimierung einen Titel zu 100% allokiert. Ferner unterliegt ein Anleger in einem Depot, d. i. außerhalb eines als Sondervermögens gekennzeichneten Portfolios, in der Regel nicht solchen Grenzen. Zweitens können die Auswirkungen der WT-basierten Optimierung ohne Grenzbeschränkungen weitaus besser evaluiert werden, weil nur dann das volle Ausmaß der WT auf das Optimierungsergebnis sichtbar wird.

Um die eben genannten Fragestellungen in geeigneter Weise diskutieren zu können, bietet es sich aufgrund der Übersichtlichkeit an, zunächst ein Portfolio mit weniger Assets als dasjenige in Abschnitt 4.4.3 zu betrachten. Aus diesem Grund basieren die folgenden Analysen auf einem aus drei Assetklassen bestehenden Benchmark-Portfolio, d. i. dem MSCI World GR USD (Aktien), dem DJ UBS Commodity TR USD (Rohstoffe) und dem iBoxx EUR Sovereigns TR (Renten). Alle drei Indizes reichen in Form von Wochendaten vom 30.03.2001 bis zum 30.08.2013 und sind in EUR denominated bzw. umgerechnet⁷³. Tabelle 4.4.4 zeigt die statistischen Kennzahlen der Indizes. Demnach besaßen Aktien im betrachteten Zeitraum die höchste Schwankungsbreite. Renten hatten im Gegensatz dazu eine Standardabweichung von lediglich 0,55%, weisen aber gleichzeitig die höchste durchschnittliche Rendite von 0,09% auf. Rohstoffe hatten das niedrigste μ bei ähnlichem σ wie Aktien. Es ist daher zu erwarten, dass Anleihen im Backtest eine relativ hohe Gewichtung besitzen werden, da diese Assetklasse das attraktivste Rendite-Risiko-Profil in der betrachteten Periode besaß.

Tabelle 4.4.4: Deskriptive Kennzahlen des Benchmark-Portfolios

Name	μ [%]	Median [%]	σ [%]	Schiefe	Kurtosis	Min [%]	Max [%]
MSCI World GR USD	0,08	0,23	2,47	-0,57	5,77	-18,23	10,82
DJ UBS Commodity TR USD	0,02	0,07	2,27	-0,52	2,38	-13,49	7,34
iBoxx EUR Sovereigns TR	0,09	0,11	0,55	0,13	2,11	-2,06	3,02

Um diese Hypothese zu überprüfen, werden als nächstes die Ergebnisse einer MSR-Optimierung mit und ohne WT-Filterung der zugrunde liegenden Zeitreihen miteinander verglichen. Die Konfiguration des Verfahrens ist dabei wie folgt gewählt:

- Damit sich eine realistische, wenn auch relativ kurzfristige Portfoliostrategie ergibt, werden die Parameter μ und σ aus den historischen Daten mit einer Periode von 75 Wochen, d. i. in etwa 1,5 Jahren geschätzt. Dadurch wird zum einen der empirischen Tatsache zumindest versuchsweise genüge getan, dass erwartete Renditen im Zeitverlauf nicht konstant sind (vgl. Ilmanen 2013, S. 13). Obwohl nämlich historische Schätzer für die Optimierung verwendet werden, impliziert eine derartig kurze Periode zur Ermittlung der Parameter relativ schnelle Veränderungen der betreffenden Werte. Zum anderen ergeben sich dadurch relativ häufig

⁷³Der Download der Daten in EUR erfolgte mit Morningstar.

Umschichtungen, was für die Illustration der Auswirkungen einer WT-basierten Robustifizierung der Markowitz-Optimierung dienlich ist.

- Die Idee in Bezug auf die Implementierung der WT ist dabei, die zugrunde liegenden Daten vor der eigentlichen Optimierung im Sinne eines Filters aufzubereiten, um die Robustheit der Parameterschätzer zu verbessern. Darauf aufbauend wird eine „normale“ Markowitz-Optimierung – in diesem Abschnitt eine MSR-Optimierung – mit den gefilterten Daten durchgeführt und die gesamte Prozedur iterativ wiederholt. Die Renditen der jeweils letzten 75 Wochen werden in Form des Mirroring augmentiert, so dass 150 Datenpunkte vorliegen, und eine MRA mit Hilfe der MODWT durchgeführt. Als Basis wurde gemäß der Resultate in Abschnitt 4.4.3 das Haar-Wavelet für die Level 1 bis 7 verwendet. Bei der MODWT kann dabei maximal Level 7 erreicht werden, da $2^7 = 128$ Wochen entspricht und insgesamt 150 Datenpunkte mitsamt Augmentation verfügbar sind⁷⁴. Abbildung 4.4.10 illustriert die Vorgehensweise schematisch, die ähnlich zu dem in Kapitel 4.3 vorgestellten Trading-System (vgl. Abbildung 4.3.5) ist: Die Schritte (1) bis (3) sind prinzipiell identisch, d. h. die Zeitreihe wird augmentiert (1), eine MODWT durchgeführt (2), so dass eine transformierte Zeitreihe vorliegt (3). Den Unterschied macht Schritt (4): Beim Trading-System wurde der jeweils letzte Wert der transformierten Zeitreihe in einem separaten Vektor gespeichert und damit die gefilterte Zeitreihe aufgebaut. Im vorliegenden Fall wird die vollständige gefilterte Zeitreihe für die Markowitz-Optimierung verwendet, um die Gewichtungsvektoren für den Zeitpunkt x_t zu erhalten. Wie bereits erwähnt sind die Auswirkungen der Randproblematik deswegen hierbei geringer, da die Kontamination zum Ende der verfügbaren Datenreihe dramatisch zunimmt (vgl. Abbildung 4.3.2) und der letzte Wert am meisten von den Randeffekten beeinflusst ist (Trading-Systematik). Für die Optimierung werden im Gegensatz dazu mehr Datenpunkte verwendet, d. h. auch solche, bei denen die Randeffekte bei weitem nicht so stark ins Gewicht fallen.
- Da der erste Gewichtungsvektor nach 75 Wochen generiert wird, umfasst der be-

⁷⁴Höhere Level würden außerdem eine zu starke Glättung der Zeitreihen implizieren und damit mitunter Probleme bereiten, da die Parameterschätzer wie in Abschnitt 4.4.3 bereits angedeutet sehr geringe Wert nahe Null annehmen können und der Optimierungsalgorithmus im Sinne einer Maximierung unter Nebenbedingungen hierbei zu Problemen führt.

trachtete Backtest 575 Datenpunkte zwischen dem 30.08.2002 und dem 30.08.2013. Die Transaktionskosten wurden im Gegensatz zum Trading-System aus Kapitel 4.3 mit 20 Basispunkten relativ hoch angesetzt, was angesichts der Natur einer solchen Portfoliostrategie, die im Gegensatz zum kurzfristig orientierten Trading in der Regel nicht auf kostengünstigen Derivaten sondern aktiv gemanagten Fonds bzw. börsennotierten Indexfonds beruht, durchaus realistisch.

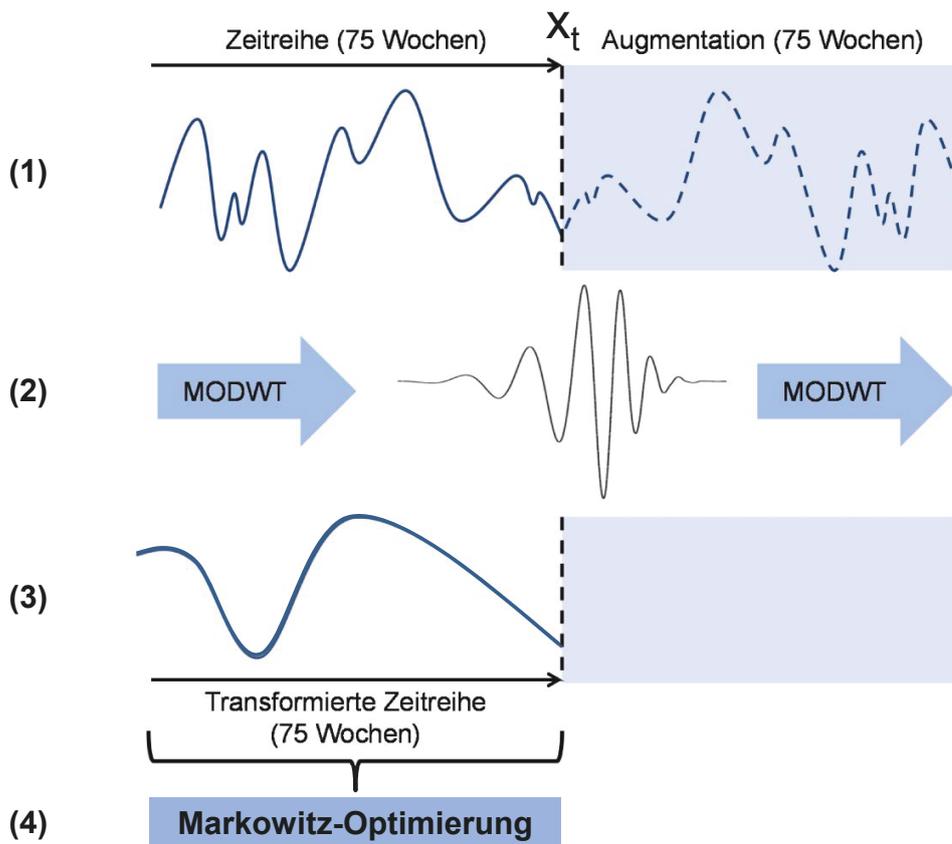


Abbildung 4.4.10: Schematische Darstellung der WT-basierten Markowitz-Optimierung

Tabelle 4.4.5 fasst die Ergebnisse der MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios sowohl auf Basis der Rohdaten (Spalte *Rohdaten*) als auch auf Basis der transformierten Daten für die einzelnen Level (Spalten 1 bis 7) zusammen. Darüber hinaus sind auch die Kennzahlen einer Buy&Hold-Strategie dargestellt, d. i. dem gleichgewichteten Kauf der jeweiligen Assets zum Anfang der Beobachtungsperiode mit gleichzeitigem Halten bis

zum Periodenende. Als Kennzahlen werden die Rendite über den gesamten Zeitraum (*Ret ges [%]*) und annualisiert (*Ret ann [%]*), die Standardabweichung (gesamt: σ [%] und annualisiert: σ ann [%]) wie auch die Sharpe Ratio (*Sharpe*⁷⁵) angegeben. Zudem zeigt die Tabelle den Maximum Drawdown (*max DD [%]*), die maximale und minimale Rendite (*max Ret [%]* und *min Ret [%]*) im beobachteten Zeitraum, wie auch die Anzahl der Trades (*# Trades*), des Turnovers und der Kosten (für beide gesamt und annualisiert). Demnach hätte eine Buy&Hold-Strategie für diesen Zeitraum eine annualisierte Rendite von 3,63% erzielt. Da die jährliche Volatilität mit 8,58% recht hoch ist, ergibt sich eine Sharpe Ratio von 0,42. Das relativ unattraktive Risikoprofil dieser Strategie spiegelt sich außerdem in einem Maximum Drawdown von -27,42% wieder. Allerdings werden hierbei im Gegensatz zu einer Optimierung keine Umschichtungen vorgenommen, so dass auch keine Transaktionskosten entstehen. Dies ist bei der Optimierung auf Basis der Rohdaten vollkommen anders: Mit einer annualisierten Rendite von 3,14% wäre die Performance ohne Berücksichtigung der Transaktionskosten im Bereich der Buy&Hold-Strategie. Allerdings wirken sich die Kosten angesichts eines durchschnittlichen jährlichen Turnovers von über 383% wesentlich auf die Wertentwicklung aus, so dass die annualisierte Rendite um rund 25% auf 2,35% p. a. reduziert wird. Dennoch ist die Sharpe Ratio aufgrund der geringeren Schwankungsbreite von 4,81% mit 0,49 etwas besser. Die übrigen Spalten von Tabelle 4.4.5 fassen die Ergebnisse der WT-basierten Optimierung zusammen. Demnach wird im Vergleich zur Optimierung mit den ungefilterten Zeitreihen auf beinahe allen Level eine höhere Wertentwicklung nach Kosten erreicht. Bereits auf dem ersten Level ist eine generell höhere Performance zu sehen, die darüber hinaus von einer deutlichen Kostenreduzierung flankiert wird, da der Turnover von jährlich etwa 383% auf 282% verringert werden konnte; dies entspricht einer Reduktion um etwa 27% bzw. einer Kosteneinsparung von 21 Basispunkten p. a. Diese Tendenz setzt sich bis einschließlich Level 4 fort. Ab $j = 5$ nehmen die Transaktionen wieder etwas zu, obwohl die Anzahl der Trades bis Level 7 stetig abnimmt.

Eine Erklärung für dieses Verhalten liefern die Abbildungen 4.4.11 bis 4.4.14, die den Verlauf der Gewichtungen anzeigen. Man sieht deutlich, dass die Gewichtungsvektoren mit zunehmender Skala glatter werden und die Veränderungen bis zu einem gewissen Punkt nicht mehr so erratisch sind. Das bedeutet insbesondere, dass die Schwankungen und die damit anfallenden Kosten für Umschichtungen stetig abnehmen. Allerdings

⁷⁵Auch hier wurde der risikolose Zins auf Null gesetzt.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.5: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2		3	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	50.56	42.68	30.62	46.95	37.71	38.35	30.40	40.54	33.48
Ret ann [%]	3.63	3.14	2.35	3.41	2.83	2.87	2.34	3.01	2.55
σ [%]	1.21	0.68	0.68	0.67	0.68	0.72	0.73	0.80	0.80
σ ann [%]	8.58	4.77	4.81	4.74	4.78	5.11	5.15	5.66	5.68
Sharpe	0.42	0.66	0.49	0.72	0.59	0.56	0.45	0.53	0.45
max DD [%]	-27.42	-10.56	-12.91	-8.40	-9.75	-10.83	-12.02	-11.97	-12.88
max Ret [%]	4.16	2.47	2.43	2.23	2.22	2.09	2.09	3.77	3.72
min Ret [%]	-8.56	-3.56	-8.56	-4.01	-4.13	-4.47	-4.57	-4.47	-4.47
# Trades		1,054		946		961		855	
Turnover ges [%]		4,408		3,238		2,948		2,572	
Turnover p.a. [%]		383.30		281.57		256.35		223.65	
Kosten ges [%]		8.82		6.48		5.90		5.14	
Kosten p.a. [%]		0.77		0.56		0.51		0.45	
Level		4		5		6		7	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		67.29	59.82	116.52	103.59	54.70	41.45	87.24	72.76
Ret ann [%]		4.58	4.17	6.96	6.39	3.87	3.07	5.62	4.88
σ [%]		1.10	1.10	1.15	1.16	1.38	1.39	1.25	1.25
σ ann [%]		7.80	7.78	8.14	8.17	9.79	9.82	8.84	8.85
Sharpe		0.59	0.54	0.85	0.78	0.40	0.31	0.64	0.55
max DD [%]		-18.94	-19.13	-19.49	-20.51	-14.90	-15.26	-17.64	-18.64
max Ret [%]		6.85	6.85	6.60	6.60	6.95	6.55	5.36	5.36
min Ret [%]		-6.76	-6.76	-7.20	-7.36	-7.35	-7.35	-5.05	-5.05
# Trades		698		646		578		498	
Turnover ges [%]		2,292		3,072		4,458		4,021	
Turnover p.a. [%]		199.30		267.13		387.65		349.65	
Kosten ges [%]		4.58		6.14		8.92		8.04	
Kosten p.a. [%]		0.40		0.53		0.78		0.70	

werden die Verschiebungen teilweise schon ab Level 5 und besonders für Level 6 und 7 immer extremer: So werden zwar insgesamt weniger Trades notwendig; die Volumina, die pro Trade umgeschichtet werden müssen, nehmen jedoch ebenfalls zu, was sich direkt in den Kosten niederschlägt. An dieser Stelle werden somit zweierlei Erkenntnisse deutlich: Durch den Einsatz der MRA kann eine Glättung der Gewichtungsvektoren und damit eine bis zu einem gewissen Level deutliche Reduzierung der Kosten erzielt werden. Außerdem zeigt sich in Tabelle 4.4.5, dass darüber hinaus eine bessere Performance mit zum Teil attraktiverem Risikoprofil generiert werden kann. Die höchste Sharpe Ratio ergibt sich auf Level 5 mit einem Wert von 0,78 (inklusive Kosten), wobei die annualisierte Rendite mit 6,39% fast dreimal so hoch ist wie bei Optimierung mit Rohdaten. Abbildung 4.4.15 zeigt die Wertentwicklung der einzelnen Portfolios im Vergleich.

Aus praktischer Sicht steht jedoch die Frage im Raum, welches Level nun tatsächlich zum Einsatz kommen sollte. In der Vergangenheit hätte bei diesem Portfolio Level 5 die höchste Wertentwicklung zur Folge gehabt. Es ist aber fraglich, ob dies auch in der

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE FÜR DIE PRAXIS

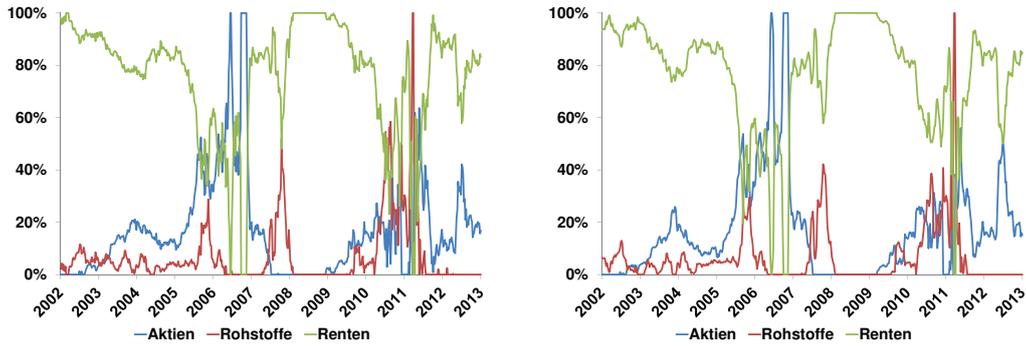


Abbildung 4.4.11: Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: Rohdaten (links) und MRA Level 1 (rechts)

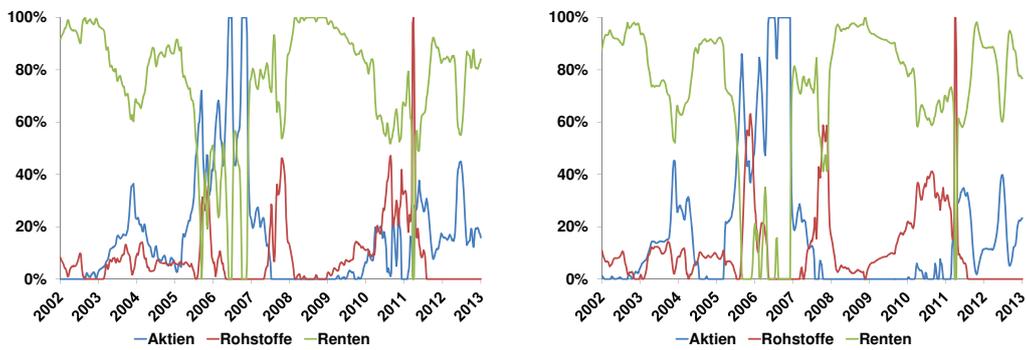


Abbildung 4.4.12: Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 2 (links) und 3 (rechts)

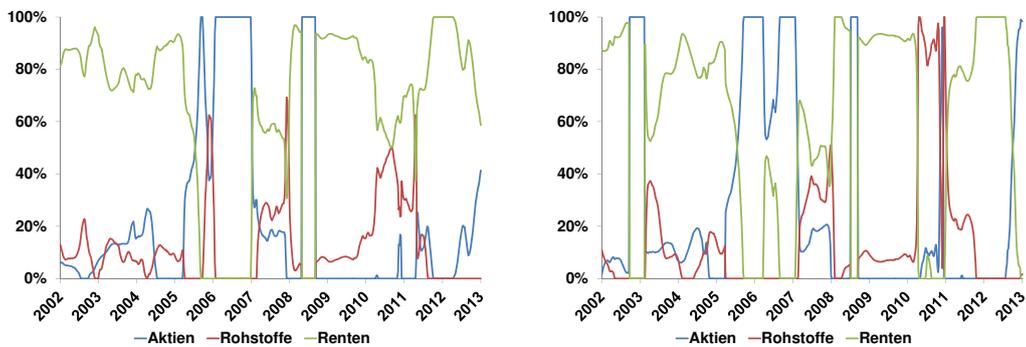


Abbildung 4.4.13: Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 4 (links) und 5 (rechts)

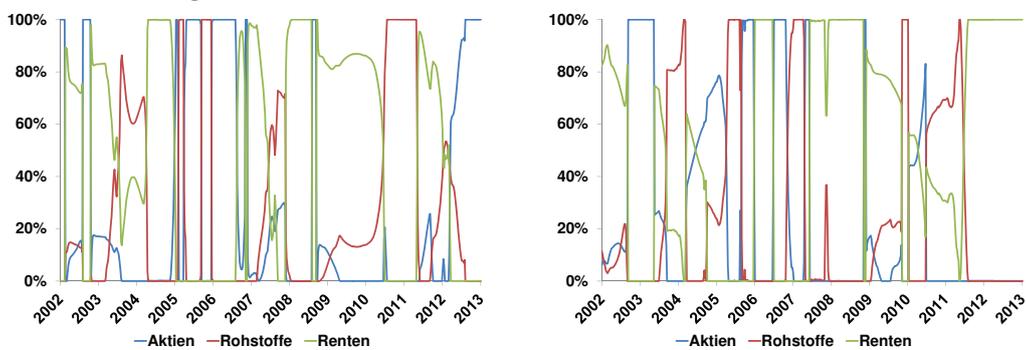


Abbildung 4.4.14: Verlauf Gewichtungen - Benchmark-Portfolio: MRA Level 6 (links) und 7 (rechts)

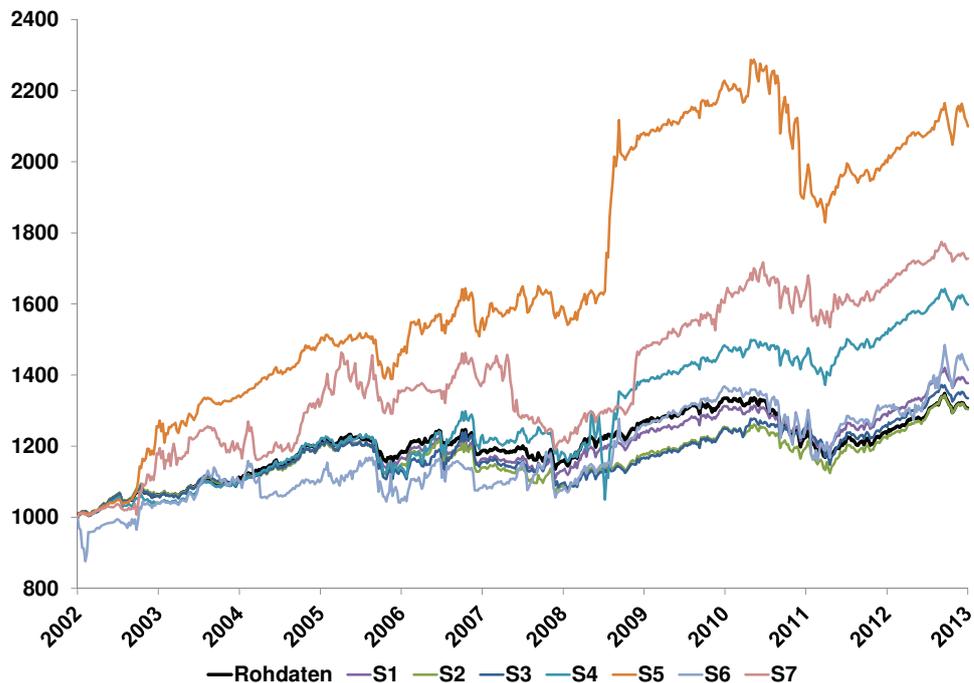


Abbildung 4.4.15: Wertentwicklung: Benchmark-Portfolio auf Basis der MRA (MSR)

Zukunft so sein wird. Ferner haben die Gewichtungsvektoren gerade auf den höheren Level zum Teil extreme Werte angenommen, so dass dort zwar eine Outperformance gegenüber dem Rohdatenportfolio erzielt werden konnte, der Diversifikationseffekt damit aber deutlich reduziert wird. Deswegen werden an dieser Stelle zwei pragmatische Lösungen dieses Problems vorgeschlagen: Bereits auf dem ersten Level, das mit einer geringen Modifizierung des Datenmaterials verbunden ist, zeigte sich eine deutliche Verbesserung sowohl in Bezug auf die Kosten als auch die Performance generell. Insofern bietet schon eine vergleichsweise geringe Filterung der Zeitreihen wesentliche Vorteile bei der Markowitz-Optimierung, ohne dass die Gewichtungsvektoren zu stark verändert werden. Eine andere Herangehensweise könnte darin bestehen, die durchschnittliche Gewichtung der verschiedenen Level heranzuziehen. Dies hätte den Vorteil, dass man sich ex ante nicht auf ein bestimmtes Level festlegen muss. Abbildung 4.4.16 zeigt, wie sich diese Durchschnittsgewichtungen im Zeitverlauf darstellen. Man sieht deutlich, dass der Verlauf der einzelnen Linien weitaus glatter und damit stabiler ist als diejenigen der Optimierung basierend auf Rohdaten. Auf der anderen Seite wer-

den extreme Gewichtungen und insbesondere große abrupte Umschichtungen größtenteils vermieden, was wiederum positiv für die anfallenden Kosten ist. Abbildung 4.4.17 zeigt die Outperformance eines solchen *Durchschnittsportfolios* im Vergleich zur Optimierung auf Basis der Rohdaten. Die Kennzahlen (vgl. Tabelle 4.4.6) sind dabei mit einer Gesamtrendite von 64,63% (4,44% p. a.) vor Kosten bzw. 56,26% (3,96% p. a.) nach Kosten deutlich besser. Die Volatilität ist mit 5,70% zwar etwas höher, die resultierende Sharpe Ratio liegt mit 0,78 bzw. 0,70 (exkl. bzw. inkl. Kosten) aber deutlich über dem Rohdatenportfolio⁷⁶ (vgl. Tabelle 4.4.5). Die Kosten sind mit 45 Basispunkten p. a. ebenfalls wesentlich geringer, was an dem jährlichen Turnover von lediglich 227% liegt, d. i. einer Reduzierung von über 40%.

Tabelle 4.4.6: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (MSR)

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	64,63	56,26
Ret ann [%]	4,44	3,96
σ [%]	0,80	0,81
σ ann [%]	5,68	5,70
Sharpe	0,78	0,70
max DD [%]	-10,55	-11,16
max Ret [%]	2,97	2,97
min Ret [%]	-4,11	-4,13
# Trades		946
Turnover ges [%]		2606
Turnover p. a. [%]		227
Kosten ges [%]		5,21
Kostenp. a. [%]		0,45

⁷⁶Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass alle Performance-Kennzahlen natürlich auf der Verwendung der Rohdaten basieren. Mit *Rohdatenportfolio* soll an dieser Stelle und auch in den folgenden Abschnitten nur diejenige Optimierungsvariante bezeichnet werden, bei der die Rohdaten zur Optimierung, d. h. zur Schätzung von μ und σ und damit zur Generierung der Gewichtungsvektoren verwendet wurden.

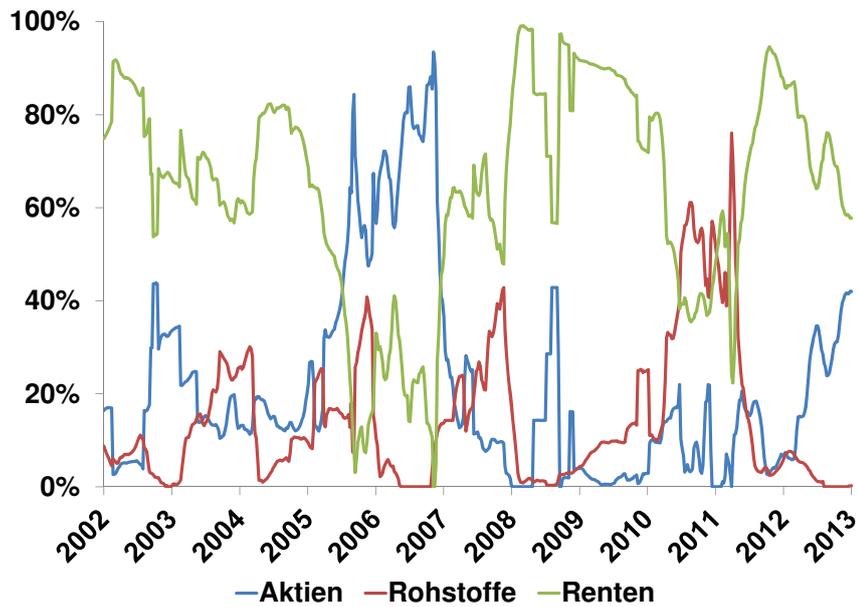


Abbildung 4.4.16: Gewichtungsvektoren: MRA-Durchschnittsportfolio Benchmark (MSR)

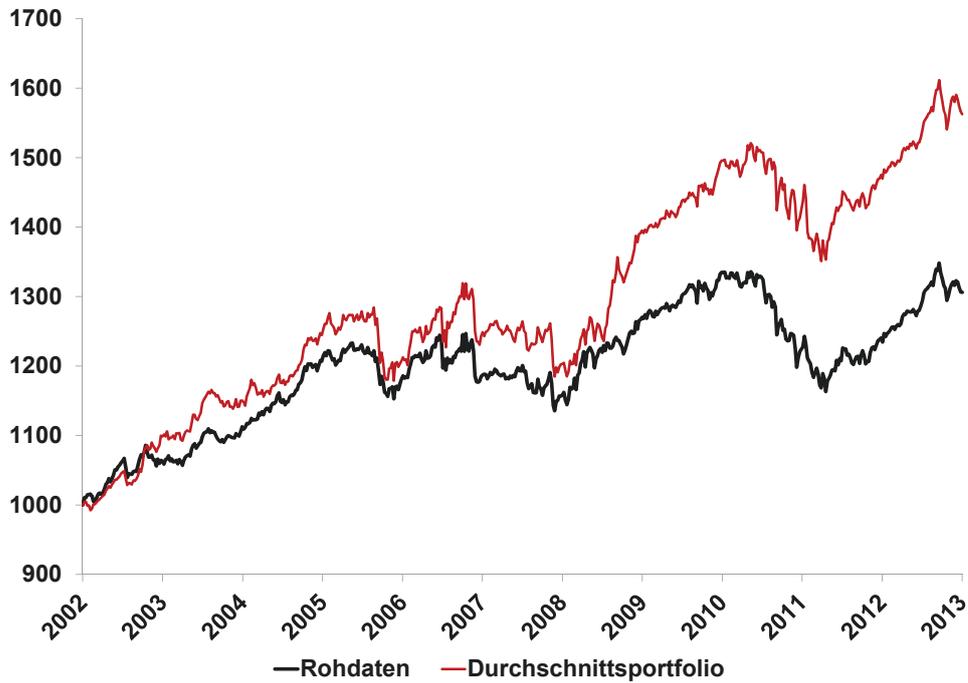


Abbildung 4.4.17: Wertentwicklung: MRA-Durchschnittsportfolio Benchmark (MSR)

4.4.5 WT-basierte Markowitz-Optimierung – Weitere Analysen

Die in Abschnitt 4.4.4 durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass der Einsatz der WT zur Datenaufbereitung in Kombination mit einer anschließenden Markowitz-Optimierung im betrachteten Zeitraum für ein Benchmark-Portfolio zu einer Outperformance im Vergleich zu einer MSR-Optimierung mit Rohdaten führte. Im vorliegenden Abschnitt soll nun anhand weiterer Analysen geklärt werden, ob sich diese Ergebnisse auch für andere Portfolios bzw. Optimierungsmethoden im Rahmen der MPT bestätigen. Hierzu werden die jeweiligen Set-Ups in den folgenden Unterabschnitten kurz erläutert und die Ergebnisse in komprimierter Form diskutiert.

Benchmark-Portfolio – GMV (Wochendaten)

In Abgrenzung zur MSR-Optimierung aus dem vorangegangenen Abschnitt werden als nächstes die Ergebnisse einer GMV-Optimierung des Benchmark-Portfolios evaluiert. Wie weiter oben⁷⁷ bereits beschrieben wurde, ist σ in der Regel weitaus robuster im Hinblick auf Ausreißer als μ , so dass hierbei ein geringerer Einfluss der WT-basierten Optimierung zu erwarten ist. Tabelle 4.4.7 fasst die wesentlichen Kennzahlen zusammen. Die Performance der Rohdatenoptimierung ist dabei mit einer annualisierten Rendite von 3,99%⁷⁸ wesentlich höher als diejenige der MSR-Methode. Da das Risiko mit einer Volatilität von 3,57% ebenfalls geringer ist, resultiert diese Variante der Markowitz-Optimierung in einer Sharpe Ratio von 1,12. Im Hinblick auf die Ergebnisse mit gefilterten Daten heben sich die Kennzahlen im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt weit weniger von der Rohdatenoptimierung ab. Zwar kann auch hier größtenteils eine Verbesserung der Performance erzielt werden, allerdings sind die Unterschiede nicht so ausgeprägt wie bei der MSR-Methode. Die beste Performance zeigt sich mit jährlich 5,13% auf Level 7. Allerdings erhöht sich mit steigender Skala auch das Risiko in Form von σ_{ann} und des Maximum Drawdowns. Die höchste Sharpe Ratio ist mit 1,14 auf dem ersten Level daher nur unwesentlich höher als bei den Rohdaten. Zu bemerken ist, dass sich die annualisierten Standardabweichungen exklusive bzw. inklusive Kosten durchaus unterscheiden, obwohl sie in Tabelle 4.4.7 auf zwei Kommastellen gerundet

⁷⁷Siehe Fußnote 68.

⁷⁸Da in der Praxis immer Transaktionskosten anfallen, sind alle folgenden Kennzahlen – falls nicht explizit anders formuliert – immer inklusive Kosten angegeben.

bis auf Level 6 gleich sind. Auffällig ist auch, dass die Transaktionskosten im Gegensatz zur MSR-Optimierung mit steigendem Level eher zunehmen. Insgesamt sind der Turnover und damit auch die Kosten jedoch auf allen Level deutlich geringer als bei der MSR-Methode.

Abbildung 4.4.18 zeigt die Equity-Kurven der einzelnen Level bzw. desjenigen Portfolios, das sich aus den durchschnittlichen Gewichtungsvektoren über alle Level ergibt, im Vergleich zum Rohdatenportfolio. Auch hier bestätigt sich, dass die Verwendung der durchschnittlichen MRA-Portfoliogewichtungen zu einer Verbesserung des Rendite-Risiko-Profiles führt (vgl. Tabelle 4.4.8): Die annualisierte Performance ist mit 4,39% höher als diejenige des Rohdatenportfolios, so dass sich trotz leicht höherer Volatilität (3,84% p. a.) eine Sharpe Ratio von 1,14 ergibt. Die durchschnittlichen jährlichen Kosten sind mit 0,12% dabei nur unwesentlich höher. Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die WT bei der GMV-Optimierung zu keiner wesentlichen Verbesserung der Performance führt, was wie oben erwähnt womöglich an der geringeren Abhängigkeit dieser Methode von μ liegt. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse gemessen an der Sharpe Ratio, dass die GMV-Methode für dieses Portfolio Set-Up ein attraktiveres Rendite-Risiko-Profil liefert als die MSR-Optimierung.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.7: Performance-Kennzahlen einer GMV-Optimierung des Benchmark-Portfolios (Wochendaten)

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2		3	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	50.56	58.52	56.72	60.20	58.02	59.24	56.64	62.55	59.50
Ret ann [%]	3.63	4.09	3.99	4.19	4.07	4.14	3.99	4.32	4.15
σ [%]	1.21	0.50	0.50	0.50	0.50	0.51	0.51	0.54	0.54
σ ann [%]	8.58	3.57	3.57	3.56	3.56	3.59	3.59	3.84	3.84
Sharpe	0.42	1.15	1.12	1.18	1.14	1.15	1.11	1.13	1.08
max DD [%]	-27.42	-5.88	-5.91	-5.58	-5.75	-5.66	-5.84	-8.15	-8.35
max Ret [%]	4.16	3.27	3.25	3.52	3.52	3.66	3.66	4.02	4.02
min Ret [%]	-3.51	-3.22	-3.26	-2.83	-2.86	-2.62	-2.64	-3.92	-3.93
# Trades		496		584		676		706	
Turnover ges [%]		572		684		825		948	
Turnover p.a. [%]		49.74		59.48		71.74		82.43	
Kosten ges [%]		1.14		1.37		1.65		1.90	
Kosten p.a. [%]		0.10		0.12		0.14		0.16	
Level		4		5		6		7	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		59.25	55.90	65.28	60.16	70.09	66.08	81.67	77.56
Ret ann [%]		4.14	3.94	4.47	4.19	4.74	4.52	5.34	5.13
σ [%]		0.61	0.61	0.67	0.67	0.78	0.78	0.82	0.82
σ ann [%]		4.34	4.34	4.71	4.71	5.53	5.54	5.81	5.81
Sharpe		0.95	0.91	0.95	0.89	0.86	0.82	0.92	0.88
max DD [%]		-10.61	-10.74	-9.87	-10.23	-11.57	-11.78	-12.02	-12.05
max Ret [%]		3.96	3.96	3.77	3.75	4.73	4.72	3.40	3.40
min Ret [%]		-5.12	-5.15	-2.56	-2.57	-4.92	-4.92	-4.65	-4.65
# Trades		694		776		467		482	
Turnover ges [%]		1,064		1,576		1,192		1,146	
Turnover p.a. [%]		92.52		137.04		103.65		99.65	
Kosten ges [%]		2.13		3.15		2.38		2.29	
Kosten p.a. [%]		0.19		0.27		0.21		0.20	

Tabelle 4.4.8: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (GMV)

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	65,88	63,68
Ret ann [%]	4,51	4,39
σ [%]	0,54	0,54
σ ann [%]	3,84	3,84
Sharpe	1,17	1,14
max DD [%]	-6,16	-6,27
max Ret [%]	3,55	3,55
min Ret [%]	-2,94	-2,95
# Trades	555	
Turnover ges [%]	669	
Turnover p. a. [%]	58	
Kosten ges [%]	1,34	
Kostenp. a. [%]	0,12	

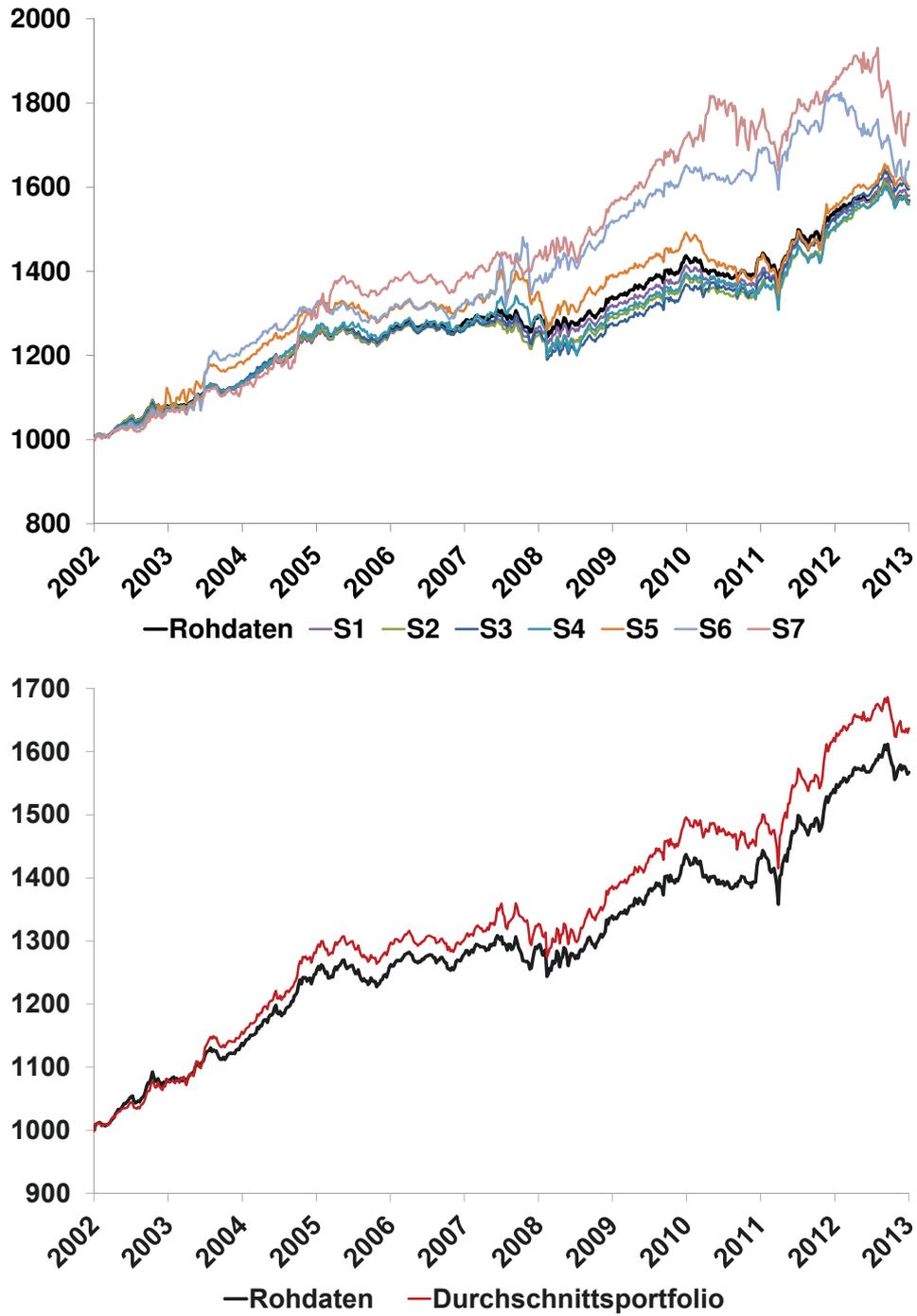


Abbildung 4.4.18: Wertentwicklung Benchmark-Portfolio mit Wochendaten (GMV): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

Benchmark-Portfolio – MSR (Monatsdaten)

Als nächstes werden die Ergebnisse einer MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios auf Basis von Monatsdaten untersucht, d. i. einer monatlichen Neujustierung des Portfolios für denselben Zeitraum. Aufgrund der bereits relativ groben Datengranularität wird die MRA dabei nur bis Level 5 durchgeführt. Tabelle 4.4.9 fasst die wesentlichen Kennzahlen zusammen. Die Performance der Rohdatenoptimierung liegt bei 3,00% p. a. und die Volatilität beträgt 4,41%, so dass sich eine Sharpe Ratio von 0,68 ergibt. Wiederum ist die Performance der MRA-basierten Optimierung für alle Level mit Ausnahme von Level 5 höher, wobei die höchste annualisierte Rendite (5,10%) auf Level 4 erzielt wird. Allerdings nimmt das Risiko in Form der Volatilität und des Maximum Drawdowns auch hier auf allen Level zu, so dass die Sharpe Ratios überall geringer sind als bei den Rohdaten. In Bezug auf die Transaktionskosten zeigt sich ein gemischtes Bild: Zwar nimmt die Anzahl der Trades zunehmend ab, die Gesamtkosten liegen auf den ersten beiden Level aber nur leicht unterhalb der Optimierung auf Basis der Rohdaten bzw. sind auf den anderen Level etwas höher. Abbildung 4.4.19 stellt die Equity-Kurven der einzelnen Level bzw. des Durchschnittsportfolios im Vergleich zum Rohdatenportfolio dar und Tabelle 4.4.10 fasst die Kennzahlen zusammen: Die Sharpe Ratio des Durchschnittsportfolios ist mit 0,62 aufgrund einer annualisierten Standardabweichung von 6,16% etwas niedriger als die des Rohdatenportfolios. Mit einer annualisierten Rendite von 3,81% ist Performance dafür höher, obwohl die jährliche Turnoverquote von 230% mit Gesamtkosten von 5,09% ebenfalls etwas höher ist. Der Maximum Drawdown ist mit -9,84% nur unwesentlich schlechter als bei den Rohdaten, obwohl sich auf den einzelnen Level ein zum Teil deutlich höherer Drawdown ergibt.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.9: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des Benchmark-Portfolios (Monatsdaten)

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	36,49	45,08	38,48	47,65	41,58	50,96	44,64
Ret ann [%]	2,87	3,44	3,00	3,61	3,21	3,82	3,41
σ [%]	2,12	1,26	1,27	1,43	1,45	1,95	1,96
σ ann [%]	7,34	4,35	4,41	4,96	5,01	6,76	6,78
Sharpe	0,39	0,79	0,68	0,73	0,64	0,56	0,50
max DD [%]	-25,54	-7,93	-8,89	-9,26	-10,24	-14,73	-15,95
max Ret [%]	4,94	3,71	3,71	4,21	4,18	11,12	11,12
min Ret [%]	-7,28	-3,59	-3,80	-5,17	-5,30	-9,68	-9,68
# Trades		278		280		240	
Turnover ges [%]		2.320		2.090		2.139	
Turnover p.a. [%]		209,32		188,57		192,99	
Kosten ges [%]		4,64		4,18		4,28	
Kosten p.a. [%]		0,42		0,38		0,39	
Level		3		4		5	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		73,45	63,68	88,58	72,87	30,08	20,83
Ret ann [%]		5,13	4,58	5,94	5,10	2,42	1,73
σ [%]		2,19	2,21	2,61	2,63	2,80	2,81
σ ann [%]		7,60	7,65	9,06	9,12	9,69	9,73
Sharpe		0,68	0,60	0,66	0,56	0,25	0,18
max DD [%]		-22,12	-22,89	-15,11	-15,53	-20,17	-22,34
max Ret [%]		11,12	11,12	11,12	11	9,51	10
min Ret [%]		-7,35	-7,59	-8,50	-8,59	-10,98	-10,98
# Trades		222		193		187	
Turnover ges [%]		2.886		4.336		3.676	
Turnover p.a. [%]		260,39		391,22		331,67	
Kosten ges [%]		5,77		8,67		7,35	
Kosten p.a. [%]		0,52		0,78		0,66	

Tabelle 4.4.10: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das BM-Portfolio (MSR) mit Monatsdaten

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	58,82	50,94
Ret ann [%]	4,30	3,81
σ [%]	1,77	1,78
σ ann [%]	6,14	6,16
Sharpe	0,70	0,62
max DD [%]	-9,60	-9,84
max Ret [%]	6,91	6,90
min Ret [%]	-6,20	-6,26
# Trades		319
Turnover ges [%]		2546
Turnover p. a. [%]		230
Kosten ges [%]		5,09
Kostenp. a. [%]		0,46

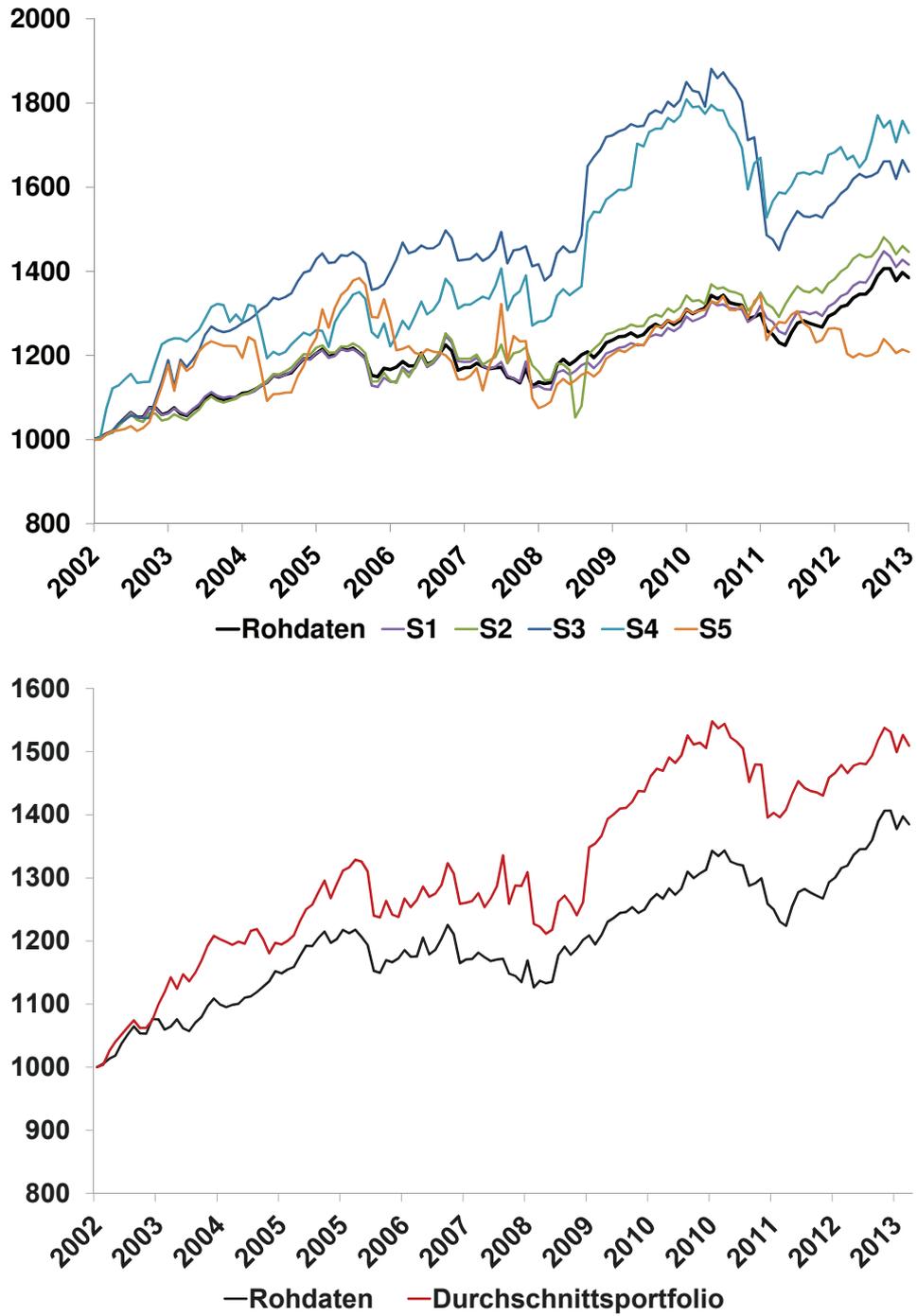


Abbildung 4.4.19: Wertentwicklung Benchmark-Portfolio mit Monatsdaten (MSR): MRA Level 1-5 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

MSCI World Portfolio – MSR (Wochendaten)

Die bisherigen Analysen zeigten, dass die Optimierung mit gefilterten Daten für das Benchmark-Portfolio im Falle der MSR-Methode zu einer Outperformance gegenüber einer Rohdatenoptimierung führte. Auch bei der GMV-Optimierung konnte eine Verbesserung erzielt werden, obgleich sich die Resultate nicht so stark von der Rohdatenoptimierung unterschieden. Die Frage ist nun, ob sich diese Ergebnisse auch für andere Portfolios bestätigen. Aus diesem Grund wird als nächstes das MSCI World Portfolio aus Abschnitt 4.4.3 im Rahmen einer MSR-Optimierung untersucht. Tabelle 4.4.11 fasst die wesentlichen Kennzahlen zusammen. Auffällig ist gleich zu Beginn, dass der jährliche Turnover für die Rohdatenoptimierung mit 1411% extrem hoch ist. Dies spiegelt sich dann auch in der Performance wider: Von insgesamt 136,02% Rendite exklusive Kosten bleiben nach Abzug der Kosten nur noch 33,36% übrig. Durch die höhere Anzahl der Märkte finden bei der Markowitz-Optimierung nun viel mehr Umschichtungen statt, was sich exorbitant auf die Kosten durchschlägt, die im Schnitt 2,83% pro Jahr betragen.

Für die Varianten, bei denen die Daten vorher mit Hilfe der WT transformiert wurden, ist in dieser Hinsicht eine deutliche Verbesserung zu sehen. Gleich auf dem ersten Level ergibt sich eine Reduktion der Umschichtungen um ca. 27%. Die Performance, die exklusive Kosten bereits höher ist (4,86% p. a.), ist mit insgesamt 70,96% inklusive Kosten mehr als doppelt so hoch, so dass sich die Sharpe Ratio ebenfalls auf 0,16 verdoppelt. Noch bessere Resultate liefern die weiteren Level, wobei die höchste Sharpe Ratio (0,39) mit einer jährlichen Rendite von 7,15% auf Level 3 erreicht wird. Die jährlichen Durchschnittskosten wurden dabei mit 1,23% um mehr als die Hälfte reduziert. Abbildung 4.4.20 zeigt wiederum die jeweiligen Equity-Kurven. Man sieht dabei, dass das Durchschnittsportfolio gerade ab der Finanzkrise von 2008 das Rohdatenportfolio deutlich outperformed. Tabelle 4.4.12 zeigt die Kennzahlen: Mit einer Gesamtrendite von 223,80% und einer Volatilität von 16,40% ergibt sich dabei eine Sharpe Ratio von 0,37. In Bezug auf den Maximum Drawdown (-51,72%) und die Kostenquote (1,41% p. a.) ist gegenüber dem Rohdatenportfolio damit eine deutliche Verbesserung zu verzeichnen. Zudem wurde der p. a. Turnover um die Hälfte reduziert.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.11: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des MSCI World Portfolios (Wochendaten)

Level	Buy&Hold	0		1		2		3	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	172,88	136,02	33,36	159,25	70,96	298,45	187,69	412,74	300,03
Ret ann [%]	5,13	4,37	1,44	4,86	2,71	7,13	5,40	8,48	7,15
σ [%]	2,73	2,39	2,41	2,41	2,42	2,48	2,48	2,60	2,61
σ ann [%]	19,27	16,91	17,02	17,05	17,11	17,53	17,56	18,42	18,46
Sharpe	0,27	0,26	0,08	0,29	0,16	0,41	0,31	0,46	0,39
max DD [%]	-64,31	-60,62	-66,74	-64,71	-66,91	-56,58	-59,94	-57,95	-59,19
max Ret [%]		11,65	0,12	10,20	0,10	12,44	0,12	12,44	0,12
min Ret [%]	-21,94	-12,86	-12,86	-12,86	-12,86	-12,86	-12,86	-13,37	-13,37
# Trades		3.934		3.342		2.765		2.502	
Turnover ges [%]		28.366		20.717		16.245		12.344	
Turnover p.a. [%]		1.411,24		1.030,70		808,21		614,13	
Kosten ges [%]		56,73		41,43		32,49		24,69	
Kosten p.a. [%]		2,83		2,07		1,62		1,23	
Level		4		5		6		7	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		419,99	294,90	292,66	164,72	309,67	181,94	189,76	103,07
Ret ann [%]		8,56	7,08	7,05	4,97	7,28	5,30	5,44	3,59
σ [%]		2,65	2,65	2,99	2,99	2,93	2,94	2,97	2,97
σ ann [%]		18,74	18,76	21,13	21,17	20,74	20,77	21,03	21,03
Sharpe		0,46	0,38	0,33	0,23	0,35	0,26	0,26	0,17
max DD [%]		-53,29	-55,09	-62,83	-63,24	-52,07	-54,38	-62,74	-63,39
max Ret [%]		11,01	0,11	18,76	0,19	12,19	0,12	13,19	0,13
min Ret [%]		-13,36	-13,36	-16,68	-16,68	-16,68	-16,68	-18,67	-18,67
# Trades		2.161		2.334		2.008		1.782	
Turnover ges [%]		13.740		19.646		18.654		17.798	
Turnover p.a. [%]		683,58		977,41		928,06		885,47	
Kosten ges [%]		27,48		39,29		37,31		35,60	
Kosten p.a. [%]		1,37		1,96		1,86		1,77	

Tabelle 4.4.12: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für das MSCI World Portfolio (MSR)

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	329,37	223,80
Ret ann [%]	7,53	6,03
σ [%]	2,32	2,32
σ ann [%]	16,39	16,40
Sharpe	0,46	0,37
max DD [%]	-49,80	-51,72
max Ret [%]	11,32	11,30
min Ret [%]	-11,16	-11,16
# Trades	5159	
Turnover ges [%]	14102	
Turnover p. a. [%]	702	
Kosten ges [%]	28,2	
Kostenp. a. [%]	1,41	

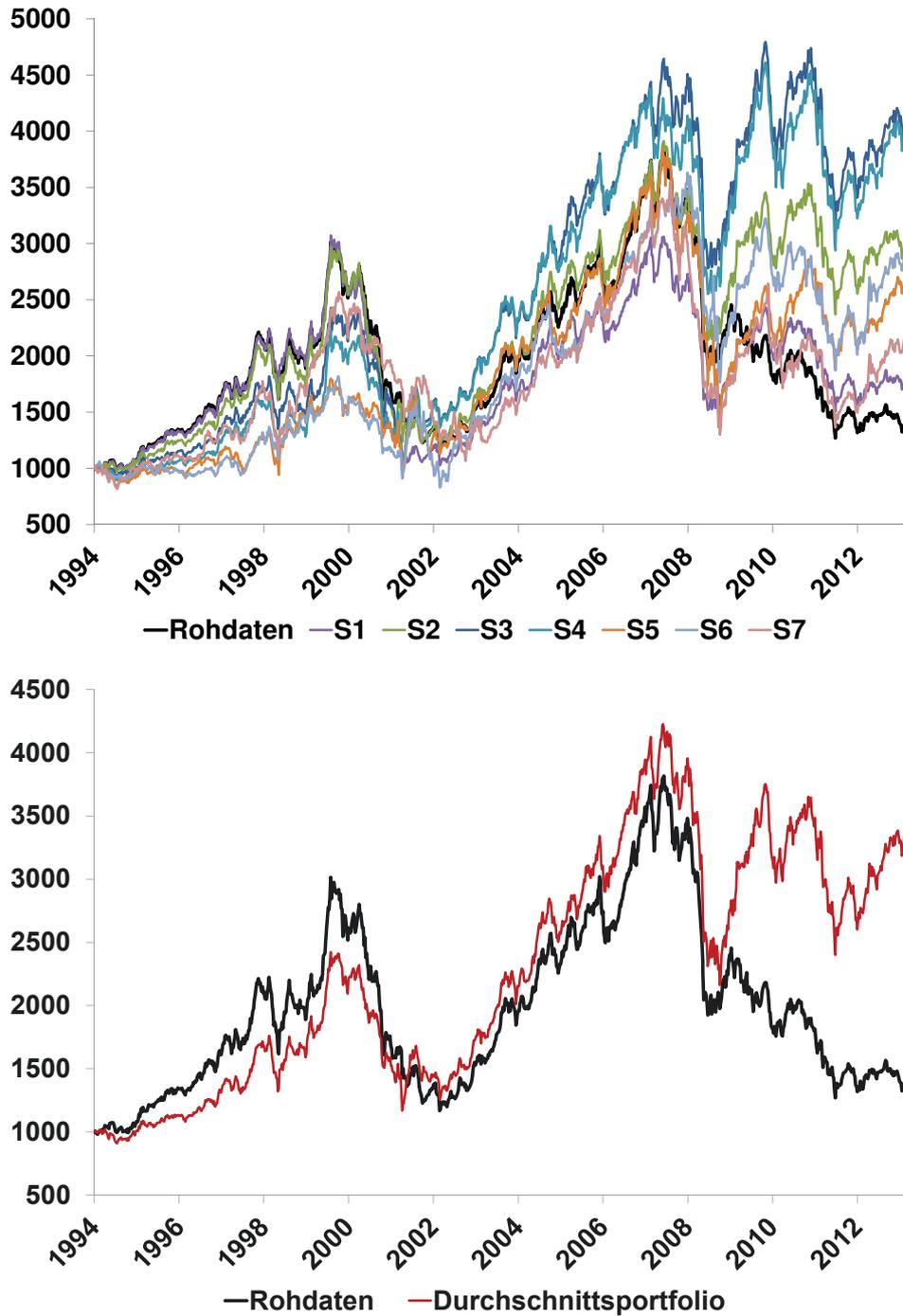


Abbildung 4.4.20: Wertentwicklung: MSCI World Portfolio mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

S&P 500 Sektoren – MSR (Wochendaten)

Für Portfoliomanager, die ein Ländermandat inne haben, ist die Betrachtung eines Portfolios auf Sektorenebene interessant, da sich durch eine geeignete Optimierung hierdurch im besten Fall eine Outperformance gegenüber dem jeweiligen Länderindex ergeben kann. Zu diesem Zweck werden an dieser Stelle die Optimierungsergebnisse für ein Portfolio untersucht, das aus den Sektorenindizes des S&P 500 TR Index in USD besteht. Die Analyse basiert auf Wochendaten, die vom 15.02.1991 bis zum 30.08.2013 reichen, was 1177 Datenpunkten entspricht. Tabelle 4.4.13 fasst die wesentlichen Kennzahlen der Optimierungsergebnisse zusammen. Es zeigt sich, dass die Performance inklusive Kosten auf den Level 1 bis 3 trotz geringerer Performance exklusive Kosten aufgrund der Kosteneinsparung besser ist als diejenige, die mit den Rohdaten erzielt werden konnte. Die höchste annualisierte Rendite ergibt sich mit 10,41% auf Level 4, wo die Sharpe Ratio mit 0,54 rund 42% höher ist als bei der Optimierung mit Rohdaten. Das einzige Level mit einer schwächeren Performance ist Level 6, das eine annualisierte Rendite von 4,02% aufweist. Der Maximum Drawdown ist für die Level 1 bis 4 geringer, und für die übrigen Level etwas höher als bei den Rohdaten. Abbildung 4.4.21 zeigt wiederum die Equity-Kurven der einzelnen Level bzw. des Durchschnittsportfolios im Vergleich und Tabelle 4.4.14 fasst die Kennzahlen zusammen: Für das Durchschnittsportfolio ergibt sich eine annualisierte Rendite von 8,00% und eine Volatilität von 16,27%, was in einer Sharpe Ratio von 0,49 resultiert. Der Maximum Drawdown beträgt -47,82% und der jährliche Turnover liegt mit 500% deutlich unter demjenigen des Rohdatenportfolio, so dass die Kosten sich auf durchschnittlich 0,31% p. a. mehr als halbieren.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.13: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des S&P 500 Sektorportfolios (Wochendaten)

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2		3	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	654,14	672,38	313,91	547,42	317,90	520,10	334,71	636,60	448,09
Ret ann [%]	8,97	9,07	6,23	8,26	6,27	8,06	6,45	8,85	7,50
σ [%]	2,34	2,33	2,33	2,20	2,20	2,26	2,26	2,30	2,30
σ ann [%]	16,52	16,49	16,49	15,55	15,55	15,97	15,97	16,23	16,23
Sharpe	0,54	0,55	0,38	0,53	0,40	0,50	0,40	0,55	0,46
max DD [%]	-53,18	-48,79	-52,47	-45,16	-47,00	-44,42	-45,58	-44,48	-44,82
max Ret [%]	11,77	23,07	22,67	8,79	8,79	23,08	23,08	23,08	23,08
min Ret [%]	-18,60	-17,16	-17,20	-17,10	-17,17	-15,94	-15,94	-16,23	-16,24
# Trades		1.384		1.314		1.091		1.027	
Turnover ges [%]		26.672		18.892		15.286		12.674	
Turnover p.a. [%]		1.133,05		802,55		649,36		538,40	
Kosten ges [%]		15,87		11,17		8,63		7,48	
Kosten p.a. [%]		0,67		0,47		0,37		0,32	
Level		4		5		6		7	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		1.323,34	926,67	518,07	339,50	254,19	152,89	1.025,13	800,64
Ret ann [%]		11,94	10,41	8,04	6,50	5,52	4,02	10,83	9,80
σ [%]		2,72	2,72	2,97	2,97	2,74	2,74	3,25	3,25
σ ann [%]		19,20	19,20	20,97	20,97	19,37	19,37	23,01	23,01
Sharpe		0,62	0,54	0,38	0,31	0,28	0,21	0,47	0,43
max DD [%]		-49,08	-50,49	-65,44	-69,40	-57,08	-58,21	-64,31	-65,15
max Ret [%]		33,96	33,96	33,96	33,96	12,02	12,02	33,96	33,96
min Ret [%]		-16,48	-16,48	-20,83	-20,84	-16,47	-16,47	-21,49	-21,49
# Trades		1.080		901		756		379	
Turnover ges [%]		14.667		15.097		14.082		9.873	
Turnover p.a. [%]		623,07		641,33		598,22		419,41	
Kosten ges [%]		9,63		10,99		10,49		7,98	
Kosten p.a. [%]		0,41		0,47		0,45		0,34	

Tabelle 4.4.14: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für die S&P-Sektoren (MSR)

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	700,82	511,07
Ret ann [%]	9,24	8,00
σ [%]	2,30	2,30
σ ann [%]	16,27	16,27
Sharpe	0,57	0,49
max DD [%]	-47,17	-47,82
max Ret [%]	17,32	17,32
min Ret [%]	-16,04	-16,04
# Trades	1697	
Turnover ges [%]	11780	
Turnover p. a. [%]	500	
Kosten ges [%]	7,34	
Kostenp. a. [%]	0,31	

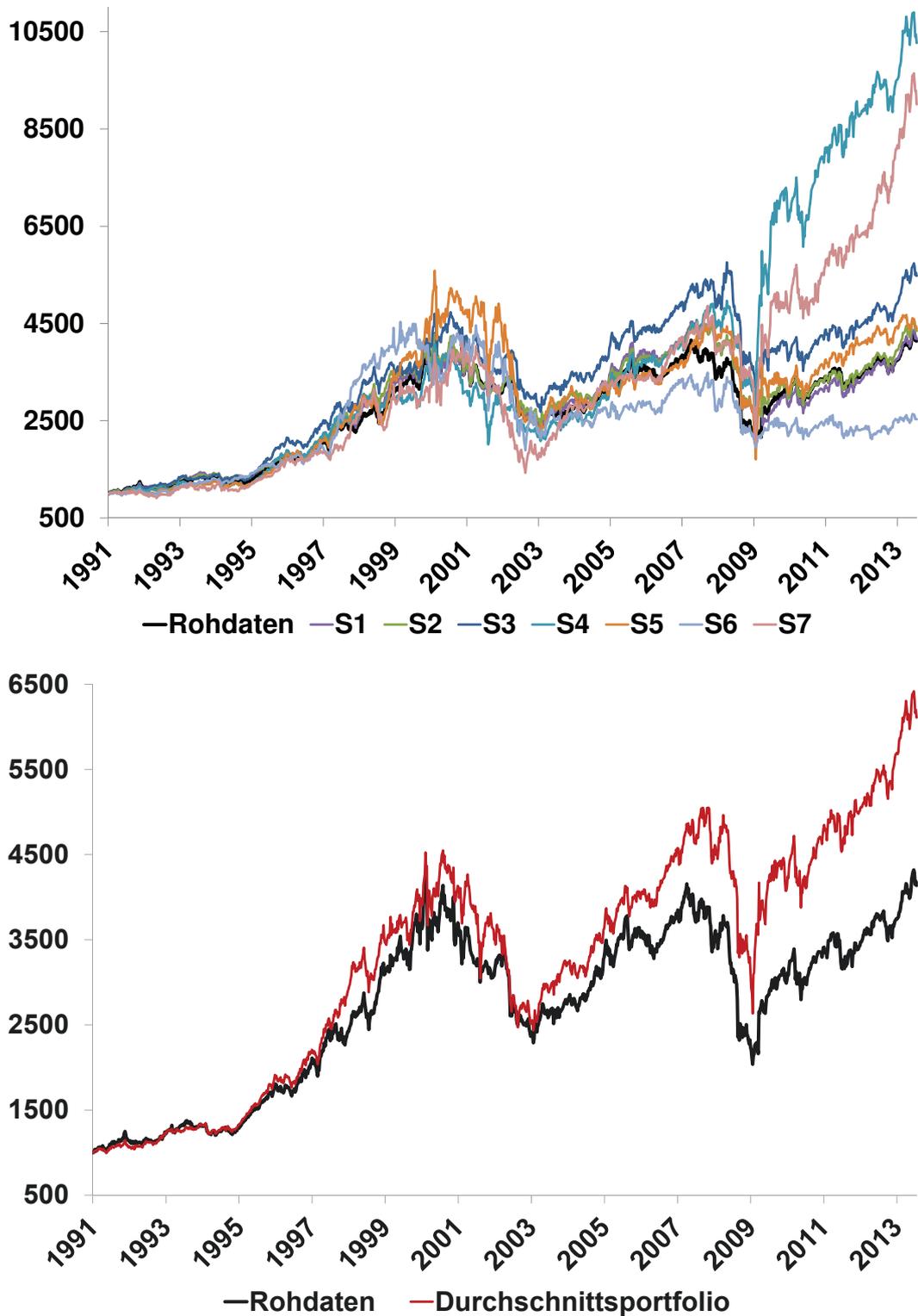


Abbildung 4.4.21: Wertentwicklung: S&P 500 Sektorportfolios mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

S&P 500 Sektoren – MSR (Monatsdaten)

Für die folgende Analyse der S&P 500 TR USD Sektoren auf Basis von Monatsdaten wurde der Zeitraum zur Parameterschätzung probeweise auf 24 Monate erhöht. Die Ergebnisse zeigen auch hier eine deutliche Verbesserung: Auf den Level 1, 2 und 5 ist die Performance besser als bei dem Rohdatenportfolio, wohingegen auf den anderen Level eine leicht schlechtere Wertentwicklung zu verzeichnen ist. Die Kosten sind bis auf Level 3 geringer, wobei sich auf Level 5 mit durchschnittlich 1,00% Kosten p. a. und einer annualisierten Rendite von 11,03% die niedrigsten Kosten bei höchster Performance ergeben. Die höchste Sharpe Ratio (0,65) ergibt sich auf Level 1. Die Anzahl der Trades nimmt mit steigendem Level stetig ab, was jedoch nicht mit derselben Entwicklung in Bezug auf den jährlichen Turnover einhergeht. Insgesamt wird aber auch hier mit dem Durchschnittsportfolio eine bessere Wertentwicklung erzielt, wie Abbildung 4.4.22 bzw. Tabelle 4.4.16 zeigen: Die Sharpe Ratio beträgt dabei 0,59 bei einer annualisierten Rendite bzw. Standardabweichung von 9,31% respektive 15,75%. Die Kosten liegen mit 0,99% unterhalb der Einzellevelportfolios, was an der geringen Turnoverquote von 493% p. a. liegt. Da der betrachtete Zeitraum vom 28.02.1991 bis zum 30.08.2013 (271 Datenpunkte) in etwa demjenigen der vorherigen Analyse mit Wochendaten entspricht, weisen die Equity-Kurven ebenfalls eine relativ große Ähnlichkeit auf. Die Kennzahlen sind bei einer Optimierung auf Monatsebene aber etwas besser.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.15: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des S&P 500 Sektorportfolios (Monatsdaten)

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	656,70	598,27	428,41	865,67	649,79	945,98	699,43
Ret ann [%]	9,41	8,99	7,68	10,56	9,37	10,95	9,68
σ [%]	4,05	4,03	4,05	4,12	4,15	5,04	5,05
σ ann [%]	14,03	13,96	14,03	14,27	14,36	17,45	17,50
Sharpe	0,67	0,64	0,55	0,74	0,65	0,63	0,55
max DD [%]	-49,58	-44,09	-45,80	-41,08	-41,43	-45,75	-47,26
max Ret [%]	10,82	13,28	13,28	13,28	13,28	22,36	22,36
min Ret [%]	-16,64	-14,45	-14,83	-13,99	-14,37	-19,65	-19,65
# Trades		960		896		867	
Turnover ges [%]		13.895		12.600		13.453	
Turnover p.a. [%]		615,28		557,93		595,70	
Kosten ges [%]		27,79		25,20		26,91	
Kosten p.a. [%]		1,23		1,12		1,19	
Level		3		4		5	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		570,70	386,24	380,26	265,49	1.217,97	953,44
Ret ann [%]		8,79	7,28	7,20	5,93	12,10	11,03
σ [%]		5,41	5,42	5,86	5,89	5,71	5,72
σ ann [%]		18,73	18,76	20,29	20,39	19,78	19,81
Sharpe		0,47	0,39	0,35	0,29	0,61	0,56
max DD [%]		-48,95	-54,01	-50,18	-50,53	-48,89	-49,67
max Ret [%]		22,36	22,36	22,30	22	22,36	22
min Ret [%]		-19,65	-19,65	-19,65	-19,65	-17,53	-17,53
# Trades		744		479		321	
Turnover ges [%]		16.114		13.470		11.236	
Turnover p.a. [%]		713,54		596,46		497,54	
Kosten ges [%]		32,23		26,94		22,47	
Kosten p.a. [%]		1,43		1,19		1,00	

Tabelle 4.4.16: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios für die S&P-Sektoren (MSR) mit Monatsdaten

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	826,06	641,44
Ret ann [%]	10,36	9,31
σ [%]	4,54	4,55
σ ann [%]	15,72	15,75
Sharpe	0,66	0,59
max DD [%]	-42,73	-43,45
max Ret [%]	14,73	14,65
min Ret [%]	-14,75	-14,96
# Trades	1463	
Turnover ges [%]	11140	
Turnover p. a. [%]	493	
Kosten ges [%]	22,28	
Kostenp. a. [%]	0,99	

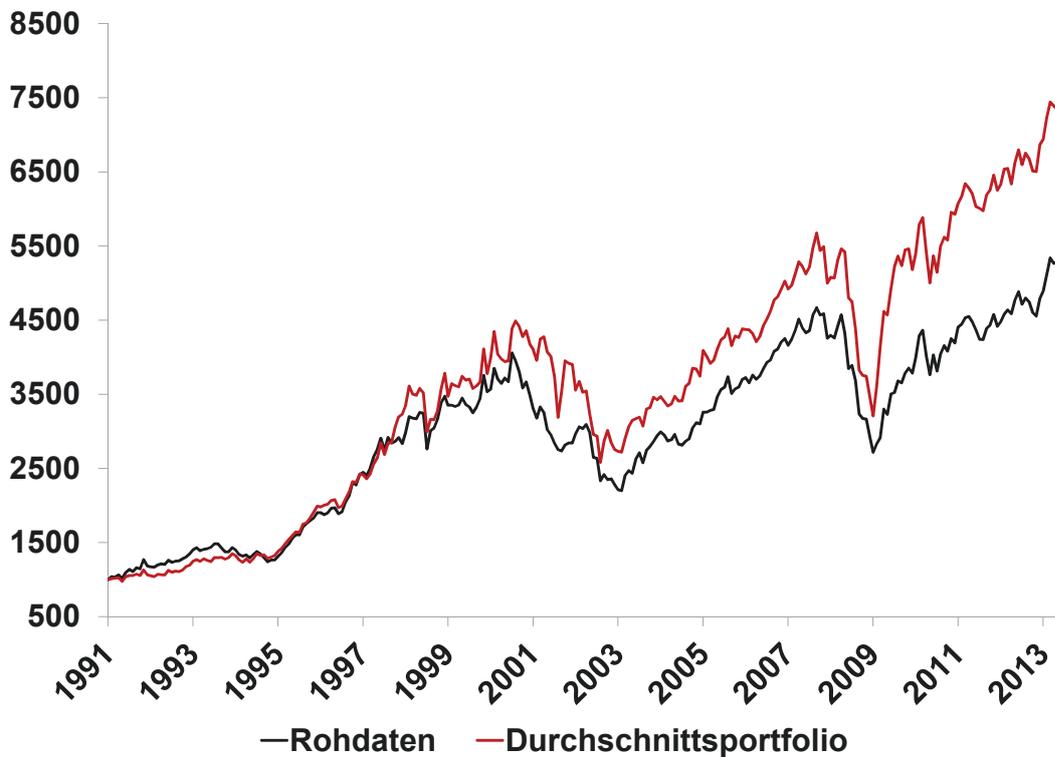
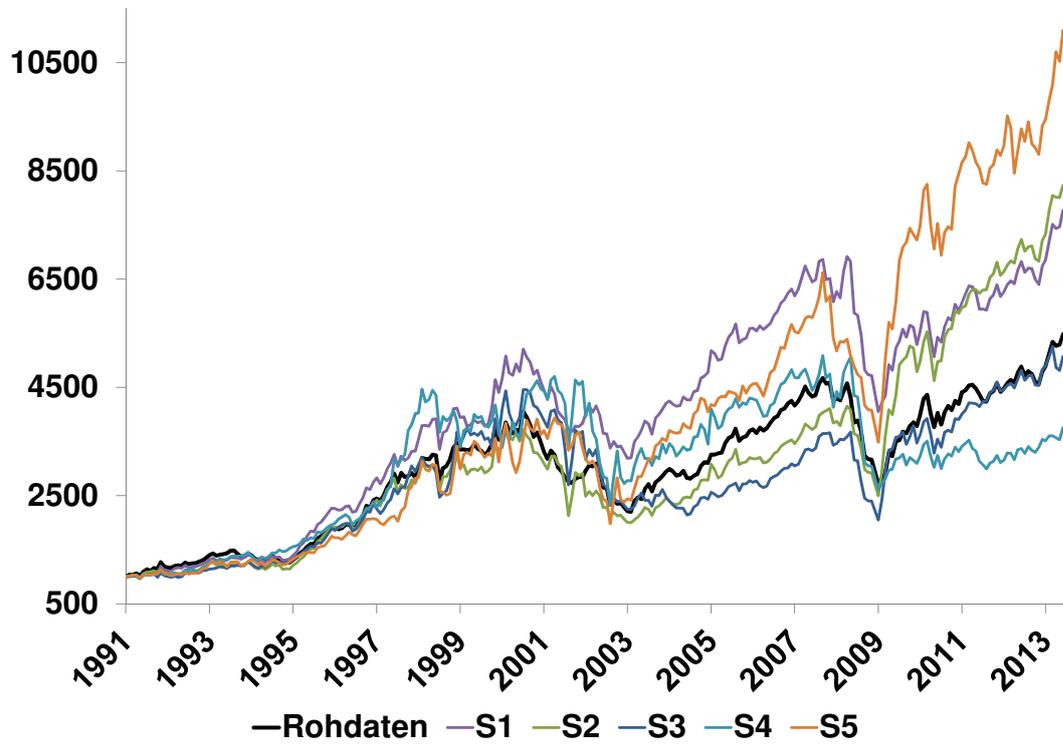


Abbildung 4.4.22: Wertentwicklung: S&P 500 Sektorportfolio mit Monatsdaten (MSR): MRA Level 1-5 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

DAX – MSR (Wochendaten)

Zuletzt wird eine Analyse durchgeführt, die sich auf den Zeitraum um die Finanzkrise von 2008 fokussiert. Um die Auswirkungen dieser Krise auf den Finanzmarkt zu verdeutlichen, wird ein Portfolio aus Einzelaktien, d. i. genauer formuliert aus den aktuellen 30 DAX-Titeln untersucht. Die Schwankungsbreite bei Einzeltiteln ist in der Regel höher als bei Indizes, die per definitionem breiter gestreut und damit mehr diversifiziert sind. Der Startzeitpunkt der Optimierungsperiode ist der 01.08.2003 und die Datenreihen auf Basis von Wochendaten enden am 30.08.2013, was 527 Datenpunkten entspricht. Aufgrund des inhärent höheren Risikos bei Einzeltiteln wurde für die Parameterschätzer zur besseren Stabilisierung ein Zeitrahmen von 100 Wochen gewählt.

Tabelle 4.4.17 zeigt die Ergebnisse der verschiedenen Optimierungsvarianten. Die Kennzahlen der WT-basierten Optimierung sind auf den Level 1 bis 5 wesentlich besser als diejenigen des Rohdatenportfolios. Zwar ist die Performance des Rohdatenportfolios mit einer annualisierten Rendite von 9,45% und einer Sharpe Ratio von 0,34 angesichts des dramatischen Einbruchs während der Finanzkrise erstaunlich gut. Allerdings ergibt sich für die WT-basierte Optimierung bereits auf dem ersten Level eine höhere Sharpe Ratio von 0,40. Die höchste Rendite weist Level 3 auf, auf dem mit annualisiert 28,57% Rendite eine Sharpe Ratio von 0,73 erreicht wird. Anders stellt sich die Situation auf den höheren Level dar. Level 6 weist noch eine leicht positive Gesamtrendite auf, während Level 7 mit -50,98% über die Hälfte des Ausgangsvermögens verliert. Eine Erklärung hierfür könnte die in Abschnitt 4.4.4 diskutierte Eigenschaft der Gewichtungsvektoren sein, mit zunehmenden Level tendenziell extremere Werte anzunehmen. Bei Indizes fällt diese Charakteristik aufgrund der vorhandenen Diversifizierung nicht so stark ins Gewicht. Bei Einzeltiteln kann die Konzentration auf einige wenige Assets zu einem hohen Risiko führen.

Abbildung 4.4.23 zeigt deshalb den Verlauf der Equity-Kurven der verschiedenen Level sowie des Durchschnittsportfolios über alle Level (durchgezogene rote Linie) und nur über die Level 1 bis 5 (gestrichelte rote Linie) an. Obwohl auch das Portfolio, bei dem alle Level in die durchschnittlichen Gewichtungen einfließen, bereits eine Outperformance zeigt, ist das Ergebnis für das reduzierte Durchschnittsportfolio noch besser (vgl. Tabelle 4.4.18): Die annualisierte Rendite beträgt 20,76% (vs. 14,47%) bei einer Volatilität von 31,85% (vs. 30,07%), so dass sich eine Sharpe Ratio von 0,65

(vs. 0,48) ergibt. Auch der Turnover ist mit jährlich 589% dabei etwas geringer als bei der Variante mit allen Level (598%), was sich auch auf die Kostenquote (0,95% vs. 0,97% p. a.) auswirkt. Im Vergleich zur Optimierung auf Basis der Rohdaten entspricht dies einer Reduktion der Gesamtkosten um über 30%. In beiden Fällen ist somit die Wertentwicklung sowohl absolut als auch risikoadjustiert wesentlich höher als bei der Rohdatenoptimierung. Aus der Equity-Kurve ist außerdem deutlich zu erkennen, dass die Wertentwicklung bis 2008 relativ nah am Rohdatenportfolio lag. Der Performance-Unterschied, der letztlich zu den verbesserten Kennzahlen führte, ist dagegen eine Folge einer wesentlich besseren Wertentwicklung nach der Finanzkrise, als das Durchschnittsportfolio enorme Wertzuwächse verzeichnen konnte. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass eine WT-basierte Optimierung gerade in Zeiten, in denen Korrelationen aufgrund externer Schocks oft zusammenlaufen, eine effektivere Methode zur Diversifizierung im Rahmen der MPT darstellt.

KAPITEL 4. WAVELETS - EMPIRISCHE ANALYSE UND ANWENDUNGSGEBIETE
FÜR DIE PRAXIS

Tabelle 4.4.17: Performance-Kennzahlen einer MSR-Optimierung des DAX-Portfolios (Wochendaten)

Level	Buy&Hold	Rohdaten		1		2		3	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %	147,40	217,35	158,60	272,73	217,31	593,85	503,27	1.482,16	1.306,27
Ret ann [%]	8,99	11,60	9,45	13,32	11,60	20,22	18,63	30,02	28,57
σ [%]	2,99	3,91	3,92	4,04	4,05	4,27	4,27	5,56	5,56
σ ann [%]	21,13	27,65	27,69	28,59	28,65	30,18	30,21	39,29	39,31
Sharpe	0,43	0,42	0,34	0,47	0,40	0,67	0,62	0,76	0,73
max DD [%]	-56,14	-63,12	-63,51	-62,74	-63,22	-64,15	-64,47	-65,34	-65,63
max Ret [%]	14,96	25,50	25,49	27,20	27,20	27,20	27,20	48,34	48,34
min Ret [%]	-18,26	-21,03	-21,11	-24,24	-24,43	-25,32	-25,52	-26,15	-26,25
# Trades		2.218		1.769		1.488		1.189	
Turnover ges [%]		10.184		7.962		6.950		5.892	
Turnover p.a. [%]		966,22		755,41		659,39		559,01	
Kosten ges [%]		15,07		12,07		11,70		9,41	
Kosten p.a. [%]		1,43		1,14		1,11		0,89	
Level		4		5		6		7	
Kosten		exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl	exkl	inkl
Ret ges %		812,61	693,37	399,18	319,36	26,36	4,96	-43,65	-50,98
Ret ann [%]		23,39	21,76	16,51	14,60	2,25	0,46	-5,31	-6,55
σ [%]		5,50	5,51	5,72	5,72	4,95	4,96	4,98	4,98
σ ann [%]		38,91	38,93	40,43	40,45	35,01	35,05	35,18	35,18
Sharpe		0,60	0,56	0,41	0,36	0,06	0,01	-0,15	-0,19
max DD [%]		-72,88	-73,28	-71,28	-72,37	-76,53	-79,33	-85,35	-85,96
max Ret [%]		48,35	48,35	48,35	48,35	27,20	27,20	27,20	27,20
min Ret [%]		-27,32	-27,32	-51,58	-51,62	-25,08	-25,08	-25,08	-25,08
# Trades		1.193		1.002		715		575	
Turnover ges [%]		6.978		8.683		9.204		6.952	
Turnover p.a. [%]		662,05		823,81		873,24		659,58	
Kosten ges [%]		11,23		14,32		15,62		10,94	
Kosten p.a. [%]		1,07		1,36		1,48		1,04	

Tabelle 4.4.18: Performance-Kennzahlen des Durchschnittsportfolios (ohne Level 6 und 7) für die Einzelaktien des Dax (MSR)

	ohne Kosten	mit Kosten
Ret ges [%]	724,20	627,49
Ret ann [%]	22,20	20,76
σ [%]	4,50	4,50
σ ann [%]	31,82	31,85
Sharpe	0,70	0,65
max DD [%]	-59,82	-60,30
max Ret [%]	31,77	31,77
min Ret [%]	-19,49	-19,60
# Trades	2019	
Turnover ges [%]	6213	
Turnover p. a. [%]	589	
Kosten ges [%]	10,03	
Kostenp. a. [%]	0,95	

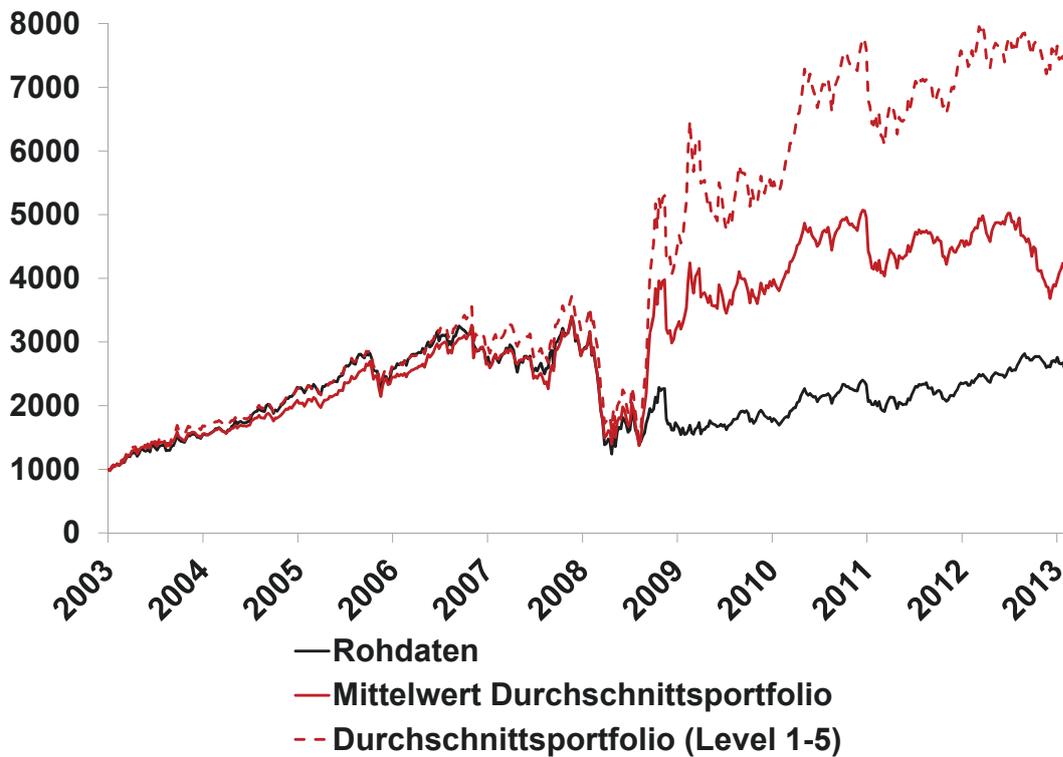
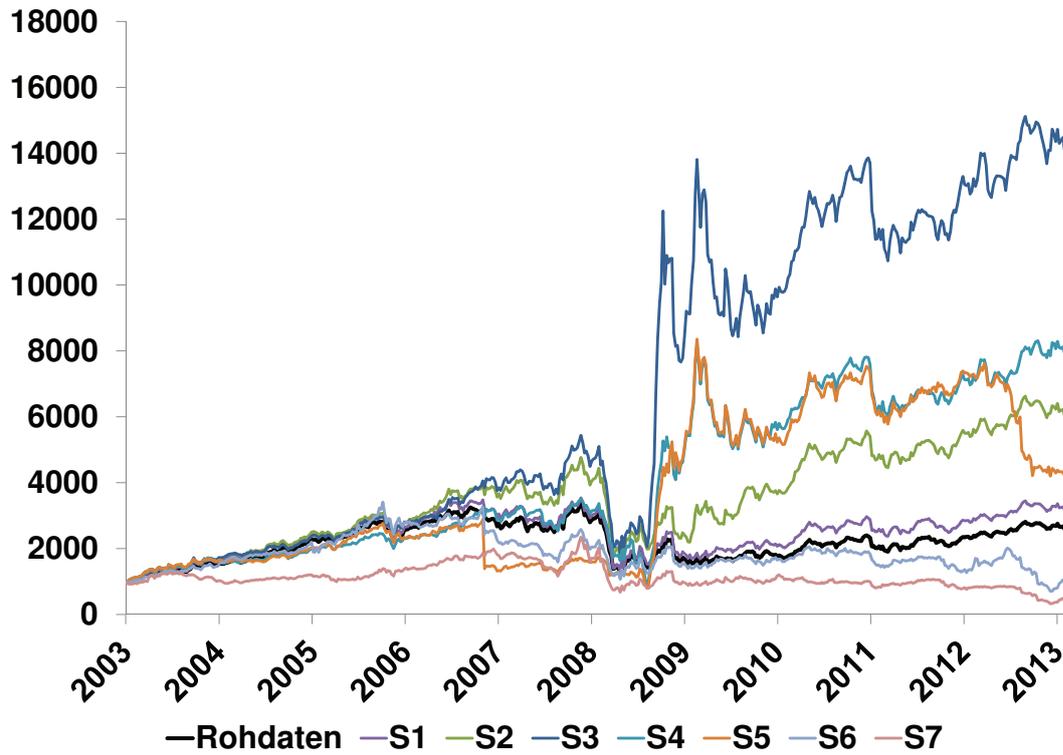


Abbildung 4.4.23: Wertentwicklung: DAX-Portfolio mit Wochendaten (MSR): MRA Level 1-7 (oben) und Durchschnittsportfolio (unten)

4.4.6 Zusammenfassung

Dieses Kapitel befasste sich mit der Verwendungsmöglichkeit der WT im Rahmen der Markowitz-Optimierung. Die Motivation für diesen Ansatz begründet sich durch die Tatsache, dass die MPT zwar einen quantitativen Ansatz zur effizienten Portfoliokonstruktion darstellt, auf der anderen Seite jedoch auch mit einigen Schwächen verbunden ist. Namentlich ist ein großes Problem des Markowitz-Ansatzes, dass die historischen Parameterschätzer sehr sensibel auf sogenannte Ausreißerdaten reagieren. Dies führt gerade in der Praxis zu unverhältnismäßigen, oft auch erratisch schwankenden Gewichtungsvektoren, die hohe Transaktionskosten nach sich ziehen. Die Idee in Bezug auf die WT war dabei, die zugrunde liegenden Daten vor der eigentlichen Optimierung im Sinne eines Filters aufzubereiten, um die Robustheit der Parameterschätzer zu verbessern. Die Ergebnisse der hier vorliegenden Analysen zeigen, dass eine WT-basierte Markowitz-Optimierung zu einer verbesserten Performance und zum Teil auch einem besseren Rendite-Risiko-Profil der einzelnen Portfolios führt. Insbesondere konnte damit eine deutliche Reduktion der Umschichtungen und damit direkt verbunden auch der Kosten erzielt werden, was eine zusätzliche Verbesserung der Rendite zur Folge hatte. Um die Unsicherheit in Bezug der Auswahl des richtigen Level zu umgehen, wurde jeweils das Durchschnittsportfolio gebildet, das auf den durchschnittlichen Gewichtungsvektoren über verschiedene Level beruht. In allen hier untersuchten Fällen konnte mit dem Durchschnittsportfolio eine zum Teil deutliche Verbesserung der Rendite-Risiko-Charakteristik im Vergleich zum Rohdatenportfolio erzielt werden. Allerdings zeigte sich auch schon bei einer geringen Filterung auf dem ersten Level meist eine deutliche Verbesserung der Kennzahlen.

5 Schlussbetrachtung und Ausblick

„If all the economists were laid end to end, they'd never reach a conclusion.“

(George Bernard Shaw)

5.1 Zusammenfassung und kritische Reflexion

Als Basis für die vorliegende Arbeit diente eine naturwissenschaftlich geprägte Sichtweise auf Finanzmärkte. Genauer formuliert lieferte die Physik, die in der deterministischen Welt der unbelebten Natur in der Vergangenheit zu beeindruckenden Erkenntnissen führte, den Ausgangspunkt für den hier beschriebenen Ansatz: der Wavelet-Transformation. Das Ziel war dabei die Beantwortung der Frage, wie Wavelets in der Finanzierungstheorie und -praxis eingebettet werden können und ob man durch sie im Sinne eines mathematischen Mikroskops neuartige Perspektiven auf Finanzmärkte eröffnen kann, die womöglich auch in der von Zufallsereignissen beeinflussten Welt der Börsen wertvolle Erkenntnisse liefern. Der Fokus lag dabei auf der Spektralanalyse im Allgemeinen und auf der Wavelet-Theorie im Speziellen. Im empirischen Teil stand ferner die Frage im Zentrum, inwiefern die WT bei der Analyse von Finanzmärkten und im praktischen Asset Management eingesetzt werden kann.

Den Rahmen der Arbeit bildete die Econophysik, die in Abschnitt 2.1 des der Einführung folgenden Kapitels 2 vorgestellt wurde und zahlreiche Aspekte in sich vereint, die auch bei der WT eine wesentliche Rolle spielen. Als relativ junge Wissenschaftsdisziplin projiziert die Econophysik physikalische Ansätze und insbesondere die naturwissenschaftliche Methode auf Finanzmärkte und versucht damit, neue Antworten auf ökonomische Fragestellungen zu finden. Die Motivation für ihre Emanzipation als eigenständige Wissenschaft bezieht die Econophysik dabei aus zweierlei Quellen: In

den letzten Jahrzehnten steigerte zum einen die zunehmende Datenakkumulation an den Börsen und die gestiegene mathematische Komplexität der verwendeten Modelle sowohl die Nachfrage an Physikern und Mathematikern seitens der Finanzinstitutionen als auch umgekehrt das Interesse der Naturwissenschaftler an diesem Bereich. Diese sogenannten Quants projizierten dabei ihre eigene Denkweise auf Problemstellungen der Finanzierungstheorie und hinterfragten die traditionellen Ansätze kritisch. Dabei führte vor allem die Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis im Hinblick einiger ihrer Elemente wie der Random Walk-Theorie, der Normalverteilungshypothese oder der EMH (Abschnitt 2.2) dazu, dass alternative Ansätze wie die Mandelbrotsche Fraktaltheorie oder komplexe Systeme in den Vordergrund der Econophysik rückten. Diese Themenbereiche wurden daher näher erläutert und die wesentlichen Merkmale wie Selbstähnlichkeit, fraktale Dimension oder der Hurst-Exponent vorgestellt (Abschnitt 2.3), nicht zuletzt weil diese Aspekte auch für die Wavelet-Theorie wichtige Leitplanken darstellen. Obgleich die Auseinandersetzung der Econophysik mit der klassischen Lehre nicht immer korrekt ist und teilweise auf eine mangelnde Kenntnis bzw. einem Missverständnis derselben hindeutet, können zahlreiche ihrer Aspekte interessante Ansatzpunkte darstellen.

Die Verbindungsbrücke zwischen der Econophysik und der Wavelet-Theorie spannte ferner die Auffassung, dass Finanzmärkte komplexe Systeme darstellen, die durch heterogene Marktteilnehmer konstituiert werden und Wertpapierpreise aufgrund der unterschiedlichen Anlagehorizonte der Investoren eine Multiskalenstruktur besitzen. Eine wesentliche Stärke der WT ist dabei, genau ebendiese Multiskalenstruktur von Zeitreihen zu analysieren und in der Zeit-Skalen-Ebene sichtbar zu machen.

Um ein fundiertes Verständnis der Wavelet-Theorie zu vermitteln, wurde in Kapitel 3 die theoretische Basis der WT gelegt. Dabei wurde der Themenkomplex zunächst in einen historischen Kontext eingebettet und aufgezeigt, wie sich die Spektralanalyse von der Fourier- hin zur Wavelet-Transformation entwickelte und welche Protagonisten den größten Anteil an dieser Evolution hatten (Abschnitt 3.1). Daraufhin wurde in Abschnitt 3.2 der mathematische Formalismus der zentralen Transformationsarten, d. i. der CWT, DWT und MODWT diskutiert. Zudem wurden die wichtigsten Vor- und Nachteile der einzelnen Varianten heraus- und die wesentlichen Eigenschaften dargestellt. Ferner wurde die sogenannte Multiskalenanalyse skizziert und aufgezeigt, wie diese im Zusammenhang mit Filterbänken zu einer relativ simplen Implementierung der WT in

Form der FWT in der Praxis führte. Aufgrund der Komplexität und Breite des theoretischen Apparats wurde die Darstellung der Theorie auf die hier wichtigsten Elemente reduziert. Zentral war dabei, das Prinzip der WT zu erläutern und auf diejenigen Aspekte einzugehen, die für die empirischen Analysen notwendig sind. Kritisch ist dabei die vorhandene Literatur zu sehen: Da die WT in ihrer Entwicklung von vielen verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen vorangetrieben wurde, mangelt es in der Fachliteratur oft an einer konsistenten Terminologie und Notation, was eine Auseinandersetzung mit dem Themengebiet zusätzlich erschwert.

Der theoretische Teil bildete die Verständnisbasis für das darauffolgende Kapitel 4, das die empirischen Analysen beinhaltet und das eigentliche Herzstück der Arbeit darstellt. Der erste Abschnitt 4.1 beschäftigte sich dabei mit den Spezifikationen, die bei der praktischen Anwendung eine Rolle spielen. Die wichtigsten Auswahlkriterien für Wavelets wurden beschrieben und einige zentrale Wavelet-Familien vorgestellt. Ferner wurde eine umfassende Literaturübersicht in systematischer Weise erstellt, die zweierlei Ziele hatte: Zum einen sollten mögliche Anwendungsgebiete und bereits erprobte Ansätze der WT für die Praxis aufgezeigt werden. Zum anderen diente die vorhandene Fachliteratur als Vorselektion geeigneter Wavelet-Filter für die darauffolgenden Analysen. Im Laufe der hier vorliegenden Arbeit kristallisierte sich nämlich eine wesentliche Schwäche des Themenbereichs heraus, d. i. das Fehlen eines objektiven Auswahlkriteriums für die Spezifikation eines geeigneten Filters. Zwar können einige Eigenschaften mit bestimmten Zielen einer Analyse assoziiert werden und als grobe Faustregel gilt, dass die Form des Wavelets sich möglichst nah an derjenigen der untersuchten Zeitreihe orientieren soll. Eine systematische Selektionsmethode ist aber bisher nicht vorhanden, so dass die Literatur einen heuristischen Leitfaden zur Eingrenzung der spezifischen Wavelet-Eigenschaften für den empirischen Teil spannte.

In den darauffolgenden empirischen Untersuchungen wurde zunächst dargelegt, wie die WT bei Datenanalysen deskriptiver Art verwendet werden kann (Abschnitt 4.2). Zwei Bereiche wurden dabei thematisiert und wiederum jeweils auf zwei verschiedene Arten untersucht, d. i. qualitativ in Form der CWT und quantitativ in Form der MODWT. Die Verwendung der MODWT im Gegensatz zur DWT begründete sich dabei vor allem durch ihre Eigenschaft, beliebig lange Zeitreihen analysieren zu können und ihrer Translationsinvarianz, d. i. Unabhängigkeit in Bezug auf den gewählten Startzeitpunkt:

- Das erste Gebiet spannte eine Brücke zum theoretischen Teil und befasste sich mit der Selbstähnlichkeit von Finanzdaten. Mit Hilfe der CWT wurde anhand von Konturplots dargestellt, wie sich dieses Phänomen graphisch darstellen lässt. Daraufhin wurden die Ergebnisse anhand der MODWT quantifiziert, indem anhand einer Regressionsmethodik die fraktale Dimension und damit zusammenhängend der Hurst-Exponent verschiedener Indizes geschätzt wurde.
- Als zweites wurde eine sogenannte Varianzanalyse durchgeführt. Auch hier wurde anhand von Konturplots unter Verwendung der CWT zunächst graphisch dargestellt, wie mit Hilfe von Wavelets der zeitliche Verlauf der Varianz in der Multiskalenebene visualisiert werden kann. Daraufhin erfolgte wiederum eine Quantifizierung der Ergebnisse, indem die WT-Koeffizienten unter Verwendung der MODWT auf verschiedenen Skalen dargestellt und berechnet wurden.

Diese Analysen sollten zum einen die breiten Anwendungsmöglichkeiten der WT und insbesondere das Wesen der Multiskalendekomposition illustrieren und zum anderen die CWT bzw. die MODWT anhand praktischer Beispiele erläutern sowie die beiden Transformationsarten voneinander abgrenzen. Eine Schwäche bei der diskreten Variante war dabei die Beschränkung der Skalen auf dyadische Werte, was den Einsatz von Wavelets bei den Analysen merklich einschränkte.

In Abschnitt 4.3 erfolgte daraufhin eine Diskussion einer wichtigen Fragestellung für das praktische Asset Management, d. i. inwieweit sich die WT bei der technischen Analyse bzw. als Indikator im Rahmen von quantitativen Strategien einsetzen lässt. Die zentrale Problematik, die in diesem Bereich auftritt, sind die durch die Transformation induzierten Randeffekte. Da bei der WT immer auch Daten links bzw. rechts des transformierten Datenpunktes liegen müssen, bedarf es einer Verlängerung der Datenreihe, um die Transformation durchführen zu können. Das Problem ist dabei, dass die Kontamination der WT-Koeffizienten umso größer ist, je mehr man sich den äußeren Datenpunkten nähert. Aus diesem Grund wurde die Randproblematik nochmals eingehend diskutiert und verschiedene Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe sich eine Datenaugmentation durchführen lässt. Desweiteren wurde noch das sogenannte Wavelet-Denoising vorgestellt, d. i. eine Methode, die auf systematische Weise versucht, die Rauschkomponente vom eigentlichen Informationsgehalt einer Zeitreihe zu trennen. Um die Verwendung der WT bei quantitativ-technischen Analysen einerseits und die Auswirkungen

der verschiedenen Augmentationsverfahren andererseits evaluieren zu können, wurde ein simples Trading-System implementiert, das auf Basis der gefilterten Daten Kauf- und Verkaufsentscheidungen generiert. Das System wurde dabei sehr einfach gehalten: Sobald die Rendite der gefilterten Reihe zwischen zwei Datenpunkten positiv ist, geht das System long; umgekehrt geht es short, sobald die Rendite negativ wird. Die Logik wurde bewusst simpel gehalten, um die oben erwähnten Sachverhalte möglichst effizient und unverfälscht untersuchen zu können.

Für die Datenaugmentation stellte sich heraus, dass das Haar-Wavelet in Kombination mit einer hier entwickelten Methode, die das sogenannte Mirroring auf die Renditen der Zeitreihe anwendet (*Refl 2-Methode*), zu den besten Ergebnissen führte. Diese Systemkonfiguration wurde im Rahmen des Trading-Systems daraufhin auf ein Universum von Aktienindizes angewandt. Die Resultate waren dabei zweigeteilt: Für Industrieländer war die Performance des Systems überwiegend enttäuschend, für Schwellenländerindizes dagegen zum Teil bemerkenswert. Eine mögliche Erklärung für die Ergebnisse liegt in der Systematik selbst begründet: Da das Trading-System eine Trendfolgesystematik implementiert, funktioniert es per se nur in Phasen bzw. Märkten, wo auch ein Trend vorherrscht. Schwellenländer tendieren aufgrund ihrer geringen Maturität oftmals zur Ausprägung von längerfristigen Trends, während Börsen in Industrieländern normalerweise weitaus reifer und damit auch effizienter sind. Im Mittelpunkt der Analyse stand aber weniger die Performance des Systems an sich, sondern vielmehr die Frage, ob eine Trendextraktion bei Finanzdaten mit Hilfe der WT überhaupt möglich ist und ferner womöglich zu besseren Resultaten führt als alternative Filter. Da eine sehr große Anzahl an technischen Indikatoren in der Finanzwirtschaft auf gleitenden Durchschnitten beruht, wurde deswegen ein Vergleich zwischen Wavelet- und MA-Filtern korrespondierender Länge auf Basis der Trading-Systematik durchgeführt. Die Ergebnisse waren deutlich und zeigten, dass mit Hilfe der WT weitaus bessere Resultate generiert werden konnten.

Als letztes wurde ein weiteres wichtiges Themengebiet der Finanzwirtschaft vorgestellt und in Verbindung mit der WT empirisch untersucht: die sogenannte Markowitz-Optimierung bzw. deren Robustifizierung (Abschnitt 4.4). Die Motivation für die Untersuchung dieses Verfahrens auf Basis der WT ist der Tatsache geschuldet, dass die Randeffekte im Vergleich zum Anwendungsbereich im vorherigen Abschnitt, bei dem vordergründig nur die letzten Datenpunkte relevant sind, hierbei nicht so sehr ins Gewicht fallen. Die Grundlage für die Optimierung bildete nämlich die Schätzung der not-

wendigen Parameter auf Basis der historischen Daten, bei der eine längere Kurshistorie verwendet wird. Obwohl bekannt ist, dass solche Schätzer in der Regel nur schwache Ergebnisse liefern, werden sie in der Praxis dennoch oftmals verwendet, weil schlichtweg eine Alternative dazu fehlt. Die Idee für die Integration von Wavelets in den Optimierungsprozess war dabei, dass man mit Hilfe der transformierten Daten Ausreißer systematisch identifizieren bzw. entfernen kann und damit eine stabilere Basis für die Parameterschätzer erhält, die zu weniger Schwankungen in den Gewichtungsvektoren und damit letztlich zu einer Robustifizierung der Optimierungsergebnisse führt.

Dazu wurde erst einmal untersucht, wie sich die WT-Filterung auf die beiden Parameter μ und σ auswirkt und welche Konsequenzen sich dabei für die Effizienzlinie ergeben. Es zeigte sich, dass eine Filterung der Daten zu einer asymmetrischen Modifikation der beiden Parameter führt: Das Risiko in Form von σ wird durch den Einsatz der gefilterten Daten weit stärker reduziert als μ . Als nächstes wurden die Auswirkungen der WT-basierten Optimierung für die Gewichtungsvektoren untersucht. Dabei zeigte sich, dass mit zunehmender Skala eine deutliche Reduktion der Schwankungen erzielt werden kann und der Verlauf der Gewichtungsvektoren deutlich glatter wird – was sich im Normalfall positiv auf die Anzahl der Umschichtungen und damit auf die Transaktionskosten auswirken sollte.

Anschließend folgte eine Analyse, inwieweit sich die Ergebnisse zwischen der WT-basierten Optimierung und derjenigen auf Basis der Rohdaten im Zeitverlauf unterscheiden. Sie bezog sich dabei auf ein breites Spektrum an Portfolios unterschiedlicher Granularität. Die Resultate waren überwiegend positiv: So konnte zum einen gezeigt werden, dass sich durch die WT-basierte Optimierung größtenteils eine Verbesserung der Performance ergibt. Zudem wirkte sich die Reduzierung des erratischen Verhaltens der Gewichtungsvektoren meist positiv auf die Höhe der Transaktionskosten aus, was eine zusätzliche Outperformance-Quelle gegenüber der Rohdatenoptimierung eröffnete. Eine Schwäche zeigte sich allerdings bei der Wahl der richtigen Skala, da die Performance-Unterschiede auf den verschiedenen Level zum Teil groß waren und sich gerade auf den hohen Level aufgrund extremer Umschichtungen deutlich verschlechterten. Zur Lösung des Selektionsdilemmas wurde daher eine simple, aber pragmatische Lösung implementiert, indem der Mittelwert der jeweiligen Gewichtungsvektoren verschiedener Level herangezogen wurde. Dies führte letztlich zu einem guten Kompromiss aus einer Reduktion der Transaktionskosten bei gleichzeitig positiven Ergebnissen

im Hinblick auf die resultierenden Performance- und Risikokennzahlen. Es zeigte sich aber auch, dass schon eine äußerst geringe Filterung auf dem ersten Level zu einer spürbaren Verbesserung der Ergebnisse führt.

5.2 Leistung der Arbeit

Eine wesentliche Leistung der vorliegenden Arbeit war es aufzuzeigen, wie man Wavelets im praktischen Asset Management einsetzen kann. Dabei ging es vor allem darum, die WT nicht auf spezifische Fragestellungen wie beispielsweise Prognosemodelle anzuwenden, sondern sie in einen möglichst breiten Kontext zu stellen, um das volle Potenzial dieses Ansatzes zu demonstrieren. Ferner wurde im theoretischen Teil eine umfangreiche, wenngleich auch kritische Zusammenfassung der WT erarbeitet und ein systematischer Überblick des theoretischen Rahmens gespannt. Außerdem war die Einbettung der Transformation in den historischen Kontext der Spektralanalyse ein Aspekt, der das Vorhaben der Arbeit im genealogischen Sinne abrundete.

Ein innovativer Faktor war ferner die Einbeziehung der Econophysik. Obgleich sich der Fokus dieser Wissenschaftsdisziplin bisher nur bedingt auf die Spektralanalyse bzw. die Wavelet-Theorie richtete, sprechen einige Aspekte dafür, die WT näher an die Econophysik zu rücken bzw. sie darin zu integrieren. Zum einen erfüllt sie eine ihrer wesentlichen Prämissen, d. i. dass ihre Herkunft als genuin naturwissenschaftliches Instrumentarium primär in der Physik bzw. Mathematik zu finden ist. Zum anderen spielen Begriffe wie Selbstähnlichkeit in beiden Sphären eine wichtige Rolle. Doch vor allem ihre Eigenschaft, Daten in die Multiskalenebene zu überführen und somit die Multiskalenstruktur einer Zeitreihe zu visualisieren, kann wie oben beschrieben hervorragend mit dem Bild der Econophysik in Verbindung gebracht werden. Der Anschauung der Econophysik folgend wurden Finanzmärkte nämlich als komplexe Systeme betrachtet, in denen die Preiskonstitution von Wertpapieren durch heterogene Marktteilnehmer geprägt wird, die verschiedene Anlagehorizonte besitzen und demnach verschiedene Zeitskalen in den Preis eines spekulativen Vermögensgegenstandes induzieren. Die WT kann dabei im Gegensatz zur FT die Zeitkomponente in ihrer Transformation konservieren und Finanzdaten damit weitaus adäquater untersuchen als andere spektralanalytische Methoden.

Im praktischen Teil konnten ebenfalls einige Aspekte diskutiert werden, die einen

positiven Beitrag zum Themenkomplex leisten. Obwohl der Einsatz von Wavelets in der technisch-quantitativen Analyse von Finanzdaten in der Literatur ausgiebig diskutiert und analysiert wurde, mangelt es größtenteils an einer geeigneten Selektionsmethodik der Filter und deren wesentlicher Spezifikationen. Aus diesem Grund wurde die vorhandene Literatur ausgiebig analysiert und ein Überblick über den aktuellen Stand hinsichtlich der hier relevanten Fragestellung erarbeitet. Ferner wurde ein weiterer Gegenstand, der bisher nicht oder nur bedingt im Fokus stand, eingehend thematisiert: die Auswahl der Augmentationsmethode. Häufig wird in der Literatur eine Methode willkürlich ausgewählt, ohne das Vorgehen zu testen oder im Hinblick auf die Analyse gar zu begründen. In der vorliegenden Arbeit wurde dagegen eine Vielzahl an unterschiedlichen und zum Teil selbst entwickelten Verfahren getestet sowie die Eigenschaften der einzelnen Augmentationsmethoden eingehend untersucht, um die geeignetste Methode für Finanzdaten bzw. die hier verwendete Systematik zu bestimmen. Darüber hinaus erfolgte eine vergleichende Analyse mit gleitenden Durchschnitten – eine in der Finanzbranche sehr populäre Form der Filterung und die Basis für zahlreiche quantitative Indikatoren.

Im letzten Abschnitt wurde die WT darüber hinaus in den Kontext der Portfoliotheorie gestellt. Genauer formuliert erfolgte eine genaue Analyse im Hinblick auf die Verwendung der WT im Rahmen einer robusten Optimierung. Die meisten Forschungsarbeiten fokussieren sich auf die Verwendung der WT im Hinblick auf Prognosemodelle oder die Multiskalenzerlegung von Risikokennzahlen. Die Verwendung von gefilterten Daten zur Generierung robuster Parameterschätzer sowie die Untersuchung der Auswirkungen eines solchen Ansatzes auf die Gewichtungsvektoren ist zumindest in dieser Form als innovativ anzusehen.

5.3 Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen

Die Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen sind vielfältig und beziehen sich zum Großteil auf Aspekte, die wesentliche Schwächen der WT darstellen und damit weiteren Optimierungsbedarf verlangen.

- So ist ein großer Nachteil der hier untersuchten Verfahren die Beschränkung der WT auf dyadische Skalen. Gerade eine vergleichende Analyse mit gleitenden

Durchschnitten oder anderen Filtern bedarf der Implementierung von ganzzahligen Verschiebungen. Die notwendigen Algorithmen sind in den neusten Softwarepaketen zum Teil schon enthalten¹, so dass einem Einsatz aus praktischer Sicht nichts im Wege stünde. Ferner gibt es dabei auch die Möglichkeit, eigene, auf die spezifischen Bedürfnisse der Analyse zugeschnittenen Wavelets zu konstruieren, um damit womöglich bessere Ergebnisse zu erhalten. Diese neuste Generation von Wavelets stellt somit ein großes Potenzial im Hinblick auf zukünftige Forschungsvorhaben dar.

- Grundsätzlich wäre die Erarbeitung einer systematischen und konsistenten Selektionsmethodik sowohl der Wavelet-Filter als auch der jeweiligen Spezifizierungen wie beispielsweise die Auswahl der Filterlänge von großer Wichtigkeit, da die bisherige Praxis aus wissenschaftlicher Sicht im Sinne einer Faustregel bzw. der mehr oder minder arbiträren Selektion nicht zufriedenstellend ist.
- Gleiches gilt auch im Hinblick auf die Randproblematik. Gerade bei der technischen Analyse könnten Methoden zur Minderung der Kontamination der Wavelet-Koeffizienten einen wesentlichen Fortschritt darstellen. Erste Ansätze, die in diese Richtung gehen, wurden hier beschrieben und getestet. Eine fundiertere Analyse und Erarbeitung neuer Methoden wäre jedoch von hohem Nutzen.
- In Bezug auf die hier vorgestellten Anwendungen gibt es ebenfalls zahlreiche Ansatzpunkte, die im Hinblick auf eine Verbesserung der Verfahren und Ergebnisse implementiert werden könnten. So ist das vorgestellte Trading-System bewusst simpel gehalten worden, um die Auswirkungen der WT zu analysieren. Allerdings wäre es interessant zu sehen, wie die WT in Verbindung mit komplexeren Systemen harmoniert. Zudem wäre generell eine Analyse von Interesse, die das Potenzial WT-basierter Indikatoren testet. Die Konstruktion eines WT-MACD-Indikators wurde zum Beispiel angesprochen. Aber auch andere quantitative Indikatoren, die insbesondere auf gleitenden Durchschnitten beruhen wie beispielsweise der RSI, könnten auf Basis der WT erstellt und hinsichtlich ihres Potenzials getestet werden.

¹Die neueste Matlab-Version beispielsweise hat solche Wavelets mit Integer-Shifts in ihrem Wavelet-Paket implementiert.

- Im Hinblick auf den Themenkomplex der robusten Optimierung gibt es ebenfalls mehrere Aspekte, die Verbesserungspotenzial aufweisen. Insbesondere die Erarbeitung einer systematischen Selektionsmethodik der zu verwendenden Skala für die Schätzung der Parameter wäre von großem Nutzen. Aber auch die Spezifizierung der Fensterlänge und die Verwendung anderer Filter stellen interessante Ansatzpunkte dar.

Anhang

Anhang: Inhaltsverzeichnis

A.1	Elemente der klassischen Finanzierungstheorie	241
A.2	Alternative Wahrscheinlichkeitsverteilungen	252
A.3	Iterationsregel zur Konstruktion eines fraktalen Objekts	256
A.4	Weitere Methoden der Spektralanalyse	259
A.5	Selbstähnlichkeit – CWT	265
A.6	Varianzanalyse – CWT	273
A.7	Varianzanalyse – MODWT	289
A.8	Ergänzende Auswertungen zu Abschnitt 4.3.4	301
A.9	Ergänzende Auswertungen zu Abschnitt 4.3.7	305

Anhang: Abbildungsverzeichnis

A.1.1	Random Walk - Binomialbaum	242
A.3.1	Konstruktion der Koch-Kurve	257
A.3.2	Koch-Kurve	257
A.4.1	Schematische Darstellung der Fourier-Analyse	259
A.4.2	Schematische Darstellung der Short-Time Fourier-Analyse	261
A.4.3	Heisenberg-Box	263
A.4.4	Zeit-Frequenzpartition für verschiedene Verfahren	264
A.5.1	CWT-Diagramm: Nikkei 225 Average PR JPY Index basierend auf Tagesdaten	265
A.5.2	CWT-Diagramm: Nikkei 225 Average PR JPY Index basierend auf Monatsdaten	265
A.5.3	CWT-Diagramm: DJ UBS Sub Gold TR USD Index basierend auf Tagesdaten	266
A.5.4	CWT-Diagramm: DJ UBS Sub Gold TR USD Index basierend auf Wochendaten	266
A.5.5	CWT-Diagramm: DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD Index basierend auf Tagesdaten	267
A.5.6	CWT-Diagramm: DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD Index basierend auf Wochendaten	267
A.5.7	CWT-Diagramm: BOVESPA Ibovespa BRL Index basierend auf Wochendaten	268
A.5.8	CWT-Diagramm: CSI 300 CNY Index basierend auf Tagesdaten	268
A.5.9	CWT-Diagramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Wochendaten	269
A.5.10	CWT-Diagramm: EURO STOXX GR EUR Index basierend auf Tagesdaten	269
A.5.11	CWT-Diagramm: MSCI EM GR USD Index basierend auf Wochendaten	270
A.5.12	CWT-Diagramm: MSCI Hong Kong USD Index basierend auf Wochendaten	270

A.5.13	CWT-Diagramm: S&P 500 TR USD Index basierend auf Tagesdaten	271
A.5.14	CWT-Diagramm: SIX SMI TR CHF Index basierend auf Tagesdaten	271
A.5.15	CWT-Diagramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Tagesdaten	272
A.5.16	CWT-Diagramm: iBoxx Liquid Corporates Overall TR USD Index basierend auf Tagesdaten	272
A.6.1	Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Tagesdaten	273
A.6.2	Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Wochendaten	273
A.6.3	Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Monatsdaten	274
A.6.4	Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Jahresdaten	274
A.6.5	Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Tagesdaten	275
A.6.6	Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Wochen- daten	275
A.6.7	Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Monatsdaten	276
A.6.8	Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Jahresdaten	276
A.6.9	Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Tagesdaten	277
A.6.10	Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Wochendaten	277
A.6.11	Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Monatsdaten	278
A.6.12	Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Jahresdaten	278
A.6.13	Skalogramm: S&P 500 Consumer Discretionary Sector TR USD In- dex basierend auf Tagesdaten	279
A.6.14	Skalogramm: S&P 500 Financial Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten	279
A.6.15	Skalogramm: S&P 500 Health Care Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten	280
A.6.16	Skalogramm: S&P 500 Information Technology Sector TR USD In- dex basierend auf Tagesdaten	280
A.6.17	Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Tagesdaten	281

A.6.18	Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Wochendaten	281
A.6.19	Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Monatsdaten	282
A.6.20	Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Jahresdaten	282
A.6.21	Skalogramm: iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Tages- daten	283
A.6.22	Skalogramm: iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Mo- natsdaten	283
A.6.23	Skalogramm: iBoxx EUR Corporates TR Index basierend auf Tages- daten	284
A.6.24	Skalogramm: iBoxx EUR Corporates TR Index basierend auf Monats- daten	284
A.6.25	Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Ta- gesdaten	285
A.6.26	Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Wo- chendaten	285
A.6.27	Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Mo- natsdaten	286
A.6.28	Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Jah- resdaten	286
A.6.29	Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index basie- rend auf Tagesdaten	287
A.6.30	Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index basie- rend auf Wochendaten	287
A.6.31	Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub WTI Oil TR USD Index ba- sierend auf Tagesdaten	288
A.6.32	Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub WTI Oil TR USD Index ba- sierend auf Wochendaten	288
A.7.1	MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) -d1 & d2	289

A.7.2	MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) - d3 & d4	290
A.7.3	MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) - d5 & d6	291
A.7.4	MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD (Wochenrenditen) - d7 & d8	292
A.7.5	MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d1 – d3	293
A.7.6	MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d4 – d6	294
A.7.7	MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d7 – d9	295
A.7.8	MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d10 – d12	296
A.7.9	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d1 – d3	297
A.7.10	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d4 – d6	298
A.7.11	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d7 – d9	299
A.7.12	MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d10 – d12	300
A.9.1	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 2)	306
A.9.2	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 2)	306
A.9.3	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 3)	308
A.9.4	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 3)	308
A.9.5	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 4)	310

A.9.6	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 4)	310
A.9.7	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 5)	312
A.9.8	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 5)	312
A.9.9	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 6)	314
A.9.10	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 6)	314
A.9.11	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 7)	316
A.9.12	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 7)	316
A.9.13	Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 8)	318
A.9.14	Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 8)	318

Anhang: Tabellenverzeichnis

A.8.1	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – D4, j=1 bis 4	301
A.8.2	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – D4, j=5 bis 8	302
A.8.3	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – LA8, j=1 bis 4	303
A.8.4	Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – LA8, j=5 bis 8	304
A.9.1	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 2	305
A.9.2	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 2	306
A.9.3	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 3	307
A.9.4	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 3	307
A.9.5	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 4	309
A.9.6	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 4	309
A.9.7	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 5	311
A.9.8	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 5	311
A.9.9	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 6	313
A.9.10	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 6	313
A.9.11	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 7	315
A.9.12	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 7	315
A.9.13	Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 8	317
A.9.14	Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 8	317

A.1 Elemente der klassischen Finanzierungstheorie

A.1.1 *Random Walk und geometrische Brownsche Bewegung*

Eine wichtige Rolle innerhalb der Finanzierungstheorie spielen Modelle, die die Bewegung von Wertpapierpreisen beschreiben. Den Grundstein für das klassische Modell in diesem Bereich legte dabei der französische Mathematiker Louis Bachelier mit seiner Dissertationsschrift „*Theorie de la Spéculation*“ im Jahre 1900. Darin leitete er erstmals die wesentlichen Eigenschaften eines stochastischen Prozesses für das erratische Verhalten von Wertpapierpreisen ab: den sogenannten *Random Walk*. Interessanterweise baute er seine Theorie schon damals auf der Annahme effizienter und vollständiger Märkte auf (vgl. Voit 2005, S. 28ff). Die sogenannte *Effizienzmarkthypothese* (EMH), die in ihrer radikalsten Form besagt, dass sich alle relevanten Informationen eines Wertpapiers vollständig und unverzüglich in dessen Preis widerspiegeln, wurde in ihrer heute bekannten Form erst in den 1960er Jahren von dem US-Ökonomen Eugene Fama formuliert (vgl. Fama 1965a, Fama 1965b, Fama 1970)¹.

Trotz Bacheliers Pionierarbeit fand eine angemessene Rezeption und Würdigung seiner Leistung erst Jahre später statt, unter anderem auch deswegen, weil eine Abhandlung über Finanzmärkte zu der damaligen Zeit innerhalb der mathematisch-akademischen Elite als eher unwissenschaftlich angesehen wurde. Die Entdeckung bzw. erste korrekte Beschreibung der Brownschen Bewegung, d. i. dem Pendant zum Random Walk in stetiger Zeit, wurde daher lange Albert Einstein und Norbert Wiener zugesprochen, deren Arbeiten jedoch erst einige Jahre nach Bacheliers Dissertation veröffentlicht wurden. Erst der französische Mathematiker Paul Lévy entdeckte Bacheliers Schrift wieder, wodurch seine Leistung die nötige Würdigung erhielt (vgl. Voit 2005, S. 40f).

Bacheliers Ziel innerhalb seiner Dissertation war, einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit von Preisfluktuationen spekulativer Vermögensgegenstände zu finden (vgl. Voit 2005, S. 28ff). Im Gegensatz zu zahlreichen Phänomenen in der klassischen Physik, die rein deterministisch ablaufen wie beispielsweise der Pfad eines Massenpunktes im Phasenraum², ist die zeitliche Evolution von Aktienpreisen nicht rein deterministisch

¹Eine genauere Erläuterung der EMH erfolgt in Abschnitt A.1.3.

²Der Phasenraum ist in der Physik ein Zustandsraum, der die Menge aller möglichen Zustände eines dynamischen Systems bezeichnet. In der klassischen Physik wird für einen Massenpunkt ein solcher Phasenraum meist durch den Ort und Impuls des Teilchens beschrieben.

und damit zumindest zum Teil zufällig; die Preisbewegung von Wertpapieren wird daher durch stochastische Prozesse modelliert. Bachelier entwickelte aus diesem Ansatz heraus den Random Walk, d. i. einem stochastischen Prozess in diskreter Zeit, der durch eine Gleichung der Art

$$x_{t+1} = x_t + \epsilon_t \tag{A.1.1}$$

beschrieben werden kann. Der zukünftige Wert einer Zufallsvariable x_{t+1} ergibt sich demnach aus einer Kombination ihres aktuellen Wertes x_t und eines Terms ϵ_t , der als *White Noise* bezeichnet wird, d. i. einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und Varianz gleich Eins, bei der die einzelnen Inkremente unabhängig voneinander sind. Eine Zufallsvariable, deren zukünftige Entwicklung nur von ihrem gegenwärtigen Wert abhängt, erfüllt dabei die sogenannte *Markov-Eigenschaft*. Im Zusammenhang mit dem Kapitalmarkt wird die Markov-Eigenschaft auch oft als „der Markt habe kein Gedächtnis“ paraphrasiert.

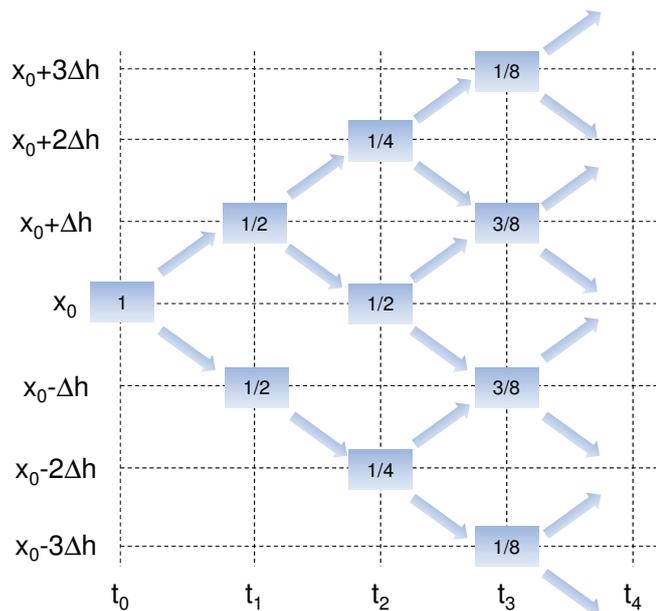


Abbildung A.1.1: Binomialbaum zur Illustration eines Random Walks

Man kann die Bezeichnung Random Walk wörtlich auffassen und sich diesen Pro-

zess dergestalt vorstellen, als dass die Bewegung der Zufallsvariable zwischen zwei Zeitpunkten durch kleine, in ihrer Richtung zufällige und unabhängige Schritte vonstattengeht. Anschaulich lässt sich dieser Umstand durch einen Binomialbaum illustrieren: Die Zufallsvariable x kann sich innerhalb eines Zeitintervalls T , das in n äquidistante Intervalle Δt unterteilt wird, in Δt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ um einen Betrag Δh entweder nach oben oder nach unten bewegen. Abbildung A.1.1 zeigt einen solchen Baum: Innerhalb einer Periode kann Δx demnach den Wert Δh oder $-\Delta h$ annehmen. Wie man sieht, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von x zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt t_i gleich seinem Ausgangswert ist, am größten, da dieser Wert über eine große Anzahl von Pfaden erreicht werden kann.

Es lässt sich zeigen, dass die obige Binomialverteilung gegen eine Normalverteilung konvergiert, falls die Schrittzahl n gegen unendlich divergiert³. Daraus ergibt sich der sogenannte *Wiener-Prozess* (auch: *Brownsche Bewegung*), der einen speziellen Grenzfall des Random Walks darstellt, bei dem genau diese Eigenschaft zutrifft: für $t \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$ entsteht ein Markov-Prozess in stetiger Zeit. Für eine Zufallsvariable z , die dem Wiener-Prozess folgt, lassen sich dabei drei wesentliche Eigenschaften definieren (vgl. Voit 2005, S. 61f):

Definition A.1.1.1 (Wiener-Prozess)

Eine stochastische Zufallsvariable z folgt einem Wiener-Prozess, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. *Aufeinander folgende Zuwächse dz von z sind statistisch unabhängig voneinander.*
2. *Es gilt: $dz = \epsilon \sqrt{dt}$.*
3. *ϵ folgt dabei einer Normalverteilung, d. h.*

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{A.1.2}$$

Gewöhnlich gilt für den Mittelwert $\mu = 0$ und die Varianz $\sigma^2 = 1$, d. h. dass ϵ standardnormalverteilt ist.

³Dieser Umstand wird durch den sogenannten *Zentralen Grenzwertsatz* motiviert, dessen nähere Erörterung in Abschnitt A.1.2 erfolgt.

Eine zusätzliche Verallgemeinerung lässt sich in Form eines Driftterms adt einführen, der die mittlere Wachstumsrate bzw. den Trend symbolisiert:

$$dx = adt + bdz = adt + b\epsilon\sqrt{dt}. \quad (\text{A.1.3})$$

Da ökonomische Größen meist zeitabhängig sind, reicht die Modellierung von Preisfluktuationen mittels eines reinen Wiener-Prozesses in der Regel jedoch nicht aus. Es bietet sich daher eine weitere Verallgemeinerung an, bei der beide Terme noch zusätzlich von der Zeit abhängen. Solche Prozesse werden *Diffusions- bzw. Itô-Prozesse* genannt und können wie folgt dargestellt werden (vgl. Voit 2005, S. 64):

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \quad (\text{A.1.4})$$

wobei $a(x,t)$ und $b(x,t)$ deterministische Funktionen sind. Ein Itô-Prozess ist also eine Kombination aus zwei Komponenten: Einem deterministischen Teil, der durch den Term dt charakterisiert wird und als Trend interpretiert werden kann; und einem stochastischen Teil, welcher durch den Wiener-Prozess dz konstituiert wird.

Aufbauend auf einem solchen Diffusionsprozess lässt sich ein weiteres wichtiges Modell für die Entwicklung von Wertpapierpreisen definieren, d. i. die sogenannte *geometrische Brownsche Bewegung* (gBB). Die Preisevolution einer Aktie wird dabei durch eine stochastische Differentialgleichung eines Itô-Prozesses der Form

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (\text{A.1.5})$$

bzw.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma\epsilon\sqrt{dt} \quad (\text{A.1.6})$$

modelliert. S ist dabei der Preis der Aktie, und ausgehend von Gleichung (A.1.4) lässt sich μ als Driftterm und σ als Standardabweichung interpretieren. dS/S entspricht demnach weißem Rauschen und folgt einer Normalverteilung mit Mittelwert μdt und Volatilität $\sigma\sqrt{dt}$, d. h. $dS/S \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$. Wendet man nun das sogenannte *Itô-Lemma* auf Gleichung (A.1.6) an, ergibt sich die endgültige Form der gBB:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma z}. \quad (\text{A.1.7})$$

A.1.2 Zentraler Grenzwertsatz

Eine Implikation, die sich aus der Annahme des Random Walks auf mathematischer Ebene ergibt, ist die in Abschnitt A.1.1 beschriebene Tatsache, dass die Renditen von Wertpapierpreisen normalverteilt sind. Diese sogenannte *Normalverteilungshypothese* ist ein weiteres Merkmal der klassischen Finanzierungstheorie, das für zahlreiche andere Modelle von Bedeutung ist und mathematisch durch den *Zentralen Grenzwertsatz* (ZGS) motiviert wird. Dieser besagt, dass die normalisierte Summe von unabhängigen, identisch verteilten (Englisch: i.i.d. für independent, identically distributed) Variablen mit endlicher Varianz zu einer Normalverteilung konvergiert (vgl. Fahrmeir, Künstler, Pigeot und Tutz 2010, S. 315ff). Mathematisch präziser formuliert lautet der ZGS wie folgt:

Definition A.1.2.1 (Zentraler Grenzwertsatz)

Es seien X_i mit $i = 1, 2, 3, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 . Für den Mittelwert einer Stichprobe $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ gilt dann:

$$\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1.8})$$

Modifiziert man die Notation mit $a_n = \frac{1}{\sigma / \sqrt{n}}$ und $b_n = \sqrt{n}\mu / \sigma$, dann lässt sich der ZGS umformulieren zu:

$$a_n \sum_{i=1}^n X_i - b_n \longrightarrow Z \sim N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1.9})$$

Ökonomisch motiviert wird der ZGS dadurch, dass Preise von spekulativen Vermögensgegenständen durch eine Vielzahl von Entscheidungen heterogener Individuen beeinflusst werden, die zusammen auf dem Kapitalmarkt agieren. Die Preiskonstitution einer Aktie kann daher durch eine Summe verschiedenster, (mehr oder minder) unabhängiger Einflüsse wie der Zufallsvariablen X_i beschrieben werden. Die weitreichende Akzeptanz und Anwendung der Normalverteilungshypothese beruht also neben einer relativ einfachen Handhabung des mathematischen Instrumentariums auch auf der Tatsache, dass sich diese Charakteristik theoretisch gesehen mittels des ZGS plausibel motivieren lässt (vgl. Borak, Härdle und Weron 2009, S. 22).

Auf zwei Punkte sei an dieser Stelle jedoch kritisch hingewiesen: Zum einen ist der klassische ZGS nur für Verteilungen mit endlicher Varianz gültig. Welche Implikationen eine nicht-endliche Varianz nach sich zieht, wird in Abschnitt A.2.1 noch genauer beschrieben. Zum anderen bezieht sich der ZGS für endliche n exklusiv auf die zentrale Region der Verteilung und nur bedingt auf die Ränder (vgl. Voit 2005, S. 124). Der Satz besagt nämlich, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am Randbereich für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert (vgl. Bouchaud und Potters 2003, S. 28). Auf dem Kapitalmarkt ist die Voraussetzung $n \rightarrow \infty$ praktisch aber nicht umsetzbar, so dass das Verhalten empirischer Daten an den Rändern nicht notwendig gaußförmig ist.

A.1.3 Effizienzmarkthypothese

Ein weiteres Konzept, das allenfalls von einer Minorität von Ökonomen insbesondere der Chicagoer Schule vertreten wird, jedoch in zahlreichen Lehrbüchern über die Finanzmarkttheorie angetroffen werden kann, ist die in Abschnitt 2.2 bereits erwähnte *Effizienzmarkthypothese* (EMH). Die EMH beschäftigt sich mit der Frage, bis zu welchem Grad und in welcher Geschwindigkeit Informationen vom Markt aufgenommen bzw. verarbeitet werden. Ein Markt gilt demnach als effizient, wenn alle relevanten Informationen vollständig und unverzüglich im Preis einer Anlage wiedergespiegelt werden. Fama (1970, S. 383) formulierte diese Charakteristik folgendermaßen: „A market in which prices always 'fully reflect' available information is called 'efficient'“. In der Literatur werden hinsichtlich der EMH in der Regel drei hierarchisch aufeinander bauende Stufen unterschieden: die schwache, die mittelstarke, und die starke Form der Markteffizienz (vgl. Brealey, Myers und Allen 2006, S. 337). Diese drei Formen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Voraussetzungen und den damit verbundenen Implikationen, wobei die Bedeutung des Begriffs „available information“ hierbei eine entscheidende Rolle spielt.

1. Schwache Form der EMH:

Die Random Walk-Hypothese war ein wesentlicher Ausgangspunkt für die Entwicklung der ersten, d. i. schwachen Form der EMH, und wird damit sogar oft gleichgestellt (vgl. Rudd und Clasing 1988, S. 146). Effizienz besteht demnach dahingehend, als dass eine vollständige Inkorporation der historischen Preisentwicklung eines Wertpapiers in ihren aktuellen Kurs gegeben ist und sich dementspre-

chend in ihm widerspiegelt. „Available information“ wird somit primär temporär im Sinne der vergangenen Preisentwicklung verstanden; d. h. der Kurs eines spekulativen Vermögensgegenstandes spiegelt alle Informationen der Vergangenheit – und alle Erkenntnisse, die sich daraus ableiten lassen – in sich wider. Eine Folge ist dabei, dass es im Gesichtskreis der schwachen EMH mit Hilfe der sogenannten *Charttechnik* keine profitable Prognosemöglichkeit für einen Wertpapierkurs gibt (Fama 1965a, S. 34). Die Charttechnik geht nämlich davon aus, dass sich bestimmte Muster – namentlich vor allem Trends – in Kursverläufen wiederholen und man den Preis eines Wertpapiers voraussagen und damit überdurchschnittliche Profite erzielen kann, wenn man diese Sequenzen rechtzeitig erkennt und strategisch auf sie reagiert. Obgleich auch der „[Chart-]Techniker glaubt, dass alles, was möglicherweise die Kurse beeinflussen kann – fundamental, politisch, psychologisch oder sonst wie – durch den Marktpreis aktuell widergespiegelt wird“ (Murphy 2011, S. 23ff), ist er im Gegensatz zum Anhänger der EMH davon überzeugt, dass es auch Möglichkeiten gibt, Chartformationen zum eigenen Vorteil im Sinne einer systematischen Überrendite zu nutzen (vgl. Murphy 2011, S. 38).

2. *Mittelstarke Form der EMH:*

Nachdem sich laut der schwachen EMH aus historischen Informationen keinerlei Schlüsse auf das zukünftige Verhalten von Aktienkursen ziehen lassen, stellt sich die Frage, welchen Einfluss gerade erst veröffentlichte Nachrichten darauf haben. Bezieht sich der Ausdruck „available information“ nämlich auch auf aktuelle, d. h. gerade erst bekannt gewordene, insbesondere öffentlich zugängliche Informationen, ergibt sich die mittelstarke Form der Markteffizienz. In Abgrenzung zur schwachen Form manifestieren sich zu den vergangenen Daten in diesem Fall also zusätzlich auch alle Informationen in den Kursen, die gerade erst publiziert worden sind und von allen Marktteilnehmern eingesehen werden können – sei es beispielsweise in Form einer Veröffentlichung der Quartalsbilanz eines Unternehmens. Bei dieser Form der EMH geht es somit nicht primär darum, welche Informationen in den Aktienkurs eingepreist sind, sondern vielmehr mit welcher Geschwindigkeit sie vom Markt absorbiert und verarbeitet werden. Eigentlich sollte der Aktienpreis dabei innerhalb kürzester Zeit das bereitgestellte Informationsangebot inkorporieren, d. h. sich umgehend und korrekt dem neuen

Informationsumfeld anpassen (vgl. Franke und Hax 2009, S. 398). Fama, Fischer, Jensen und Roll (1969) und Porta, Lakonishok, Shleifer und Vishny (1997) untersuchten diese Fragestellung und kamen letztlich zu dem Schluss, dass die Anpassung und Verarbeitung von Aktienpreisen auf öffentliche Signale im Sinne der mittelstarken Effizienz ausreichend schnell vonstattengeht.

3. *Starke Form der EMH:*

Die dritte, auch als streng oder stark bezeichnete Form der EMH geht noch einen Schritt weiter als die zwei vorausgehenden Varianten. Im starken Sinne gilt ein Markt nämlich dann als effizient, wenn sich *alle* relevanten Informationen in einem Aktienpreis widerspiegeln. Der Begriff „available information“ wird demnach um monopolistische, d. i. genuin private Informationen erweitert. Effizienz in seiner strengsten Form bedeutet also, dass sich schlichtweg alle Informationen, die hinsichtlich einer Unternehmung relevant sind, vollständig und korrekt im Preis der jeweiligen Aktie widerspiegeln: sowohl öffentlich zugängliche als auch private Informationen, wie beispielsweise diejenigen von Insidern, sind im Aktienkurs eingepreist (Fama 1991). Nach dieser Definition ist es damit auch nicht möglich, dass ein professioneller Anleger wie beispielsweise ein Fondsmanger oder ein Manager seines Unternehmens allein aufgrund seines exklusiven Zugangs zu bestimmten Informationen systematisch eine überdurchschnittliche Rendite erzielen kann.

A.1.4 Probleme einiger Ansätze der klassischen Finanzierungstheorie

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Elemente der klassischen Finanzierungstheorie – Random Walk, EMH und ZGS – haben zusammen mit dem Bild des Homo Oeconomicus, d. i. eines rational agierenden Marktteilnehmers, der aufgrund gewisser Erwartungen seine Interessen verfolgt, großen Einfluss auf finanzmathematische Modelle bzw. ökonometrische Methoden gehabt. Das *Black-Scholes-Modell* (BSM) zur Optionspreisbewertung, die Markowitz-Optimierung oder der Value-at-Risk (VaR) Ansatz sind nur einige Modelle, die entweder teilweise auf diesen Annahmen aufbauen oder zumindest von ihnen beeinflusst wurden. Auf akademischer Ebene sind diese Modelle seit langem als unbrauchbar bzw. unrealistisch entlarvt, gehören aus didaktischen Gründen aber immer noch zum Repertoire eines jeden angehenden Ökono-

men. Eine Analogie in der Physik bietet beispielsweise die klassische Mechanik nach Newton, die durch Einsteins allgemeine Relativitätstheorie erweitert, in einen breiteren Kontext gestellt und in gewissem Maße abgelöst wurde, aufgrund ihrer Simplität und Validität für die bei weitem meisten Anwendungen im Alltag nach wie vor relevant und wichtig ist.

In der Praxis sind einige der Annahmen, die von der Econophysik kritisiert werden, jedoch nach wie vor allgegenwärtig. Die Gründe dafür sind dabei recht einleuchtend: Auf dem Börsenparkett bleibt oft keine Zeit für eine komplexe Berechnung von Optionspreisen oder eine Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung höherer Momente, so dass die Normalverteilungshypothese eine simple und daher willkommene Implementierung von Black-Scholes bzw. Markowitz ermöglicht. Auch bei der Berechnung der VaR, die unter anderem auch auf empirischen Verteilungen aufgebaut werden kann, hat man beispielsweise oft das Problem, das bei neu strukturierten Derivaten bzw. maßgeschneiderten Over-the-Counter (OTC) Geschäften gar keine Historie vorliegt, so dass auch hier oft auf die Normalverteilung zurückgegriffen wird. Obwohl also auf wissenschaftlicher Ebene seit langem bekannt und bewiesen ist, dass die oben beschriebenen Annahmen nicht der Realität entsprechen, spielen genau sie in der Praxis oft eine tragende Rolle. Im Folgenden soll daher ein kurzer Überblick skizziert werden, welche Argumente sowohl aus akademischer als auch praktischer Sicht gegen diese Annahmen sprechen.

- **Verbundenheitsproblem**

Aus akademisch-theoretischer Sicht beispielsweise kamen bereits in den frühen 1970ern und 80ern erste Zweifel ob der Validität der EMH auf. Fama (1970) und Fama (1991) thematisieren das sogenannte *Verbundenheitsproblem* (engl. Joint-Hypothesis-Problem), welches die grundlegende Schwierigkeit beschreibt, Markteffizienz per se, d. h. isoliert für sich zu überprüfen. Um nämlich testen zu können, inwieweit ein Markt überhaupt effizient ist, muss simultan ein Modell bereitstehen, das den angemessenen, d. i. fairen Preis einer Aktie bestimmt. Erst durch die Kenntnis eines solchen fairen Referenzpreises lässt sich bestimmen, ob bzw. bis zu welchem Grad ein Markt effizient ist. Modelle wie das Capital Asset Pricing Model (CAPM) können dabei zwar Orientierungshilfe leisten, fraglich

bleibt jedoch immer, inwieweit ein solches Modell selbst fehlerhaft ist.

- **Grossman/Stiglitz-Paradoxon**

Ein anderer, eher empirisch motivierter Einwand folgte in Form des sogenannten *Grossman/Stiglitz-Paradoxons*. Grossman und Stiglitz (1980) hinterfragten kritisch die Voraussetzungen der EMH, d. i. insbesondere diejenige der kostenlosen Informationsbeschaffung und stellten fest, dass ein perfekt effizienter Markt im Falle von positiven Informationskosten zusammenbrechen würde. Die beiden Autoren zeigen zwar, dass informierte Individuen am Markt für Preise sorgen, die sich ihrem ideal-theoretischen, d. i. effizienten Fundamentalwert annähern. Das simple wie auch grundlegende Gesetz von Angebot und Nachfrage regelt dabei den Preismechanismus: Können die professionellen, d. i. in der Regel besser informierten Investoren aus dem ihnen zur Verfügung stehenden Informationsspektrum beispielsweise antizipieren, dass ein Unternehmen eine positive Geschäftsentwicklung nehmen wird, kaufen sie vermehrt diese Aktie und treiben dadurch den Preis in die Höhe. Gleichzeitig signalisieren sie damit aber den weniger informierten Anlegern, ebenfalls in diesen Wert zu investieren. Das Handeln der informierten Investoren setzt demnach einen Mechanismus in Gang, der Informationen von den stark hin zu den weniger informierten Marktteilnehmern transferiert; Informationen werden dadurch indirekt öffentlich, wodurch eine Preisanpassung im Sinne der Markteffizienz möglich ist. In der Realität ist die Beschaffung von Informationen ab einem gewissen Grad jedoch immer an Kosten gekoppelt, seien es direkte Kosten wie beispielsweise Informationsdienste oder indirekte Kosten im Sinne von Opportunitätskosten für den zeitintensiven Prozess der Informationsbeschaffung. Falls sich ein Marktteilnehmer also entschließen sollte, diese Kosten zu tragen, muss sich seine Anfangsinvestition wenigstens amortisieren, d. h. er muss dadurch in eine Position versetzt werden, die es ihm ermöglicht, einen Profit zu erzielen, der die Anfangskosten zumindest kompensiert. Gäbe es diese Profitmöglichkeit nicht, bestünde auch kein Anreiz, in den kostenintensiven Prozess der Informationsbeschaffung zu investieren. Damit könnten aber auch unmöglich alle relevanten Informationen im Aktienkurs eingepreist werden. Paradoxe Weise ist im Falle von kostenintensiver Informationsbeschaffung *Marktineffizienz* – oder besser: Arbitragemöglichkeit – kurzfristig gesehen somit eine wesentliche

Voraussetzung für eine weitverzweigte Informationsdistribution und damit auf langfristige Sicht auch für eine nahezu effiziente Preiskonstitution. In seiner Nobelpreisrede resümiert Stiglitz die Ergebnisse seiner Arbeit mit Grossman dahingehend, als dass „[...] the price system both imperfectly aggregated information and that there was an equilibrium amount of 'disequilibrium'“ (vgl. Stiglitz 2002, S. 145). Ohne die Prämisse kostenloser Information kann es Markteffizienz in ihrer ideal-theoretischen Form somit nicht geben.

- **Empirische Renditen**

Auch aus praktischer Sicht kamen im Laufe der 1980er Jahre jedoch immer mehr Zweifel an der Gültigkeit des klassischen Paradigmas auf. So erschütterte der sogenannte *Schwarze Montag* beim Börsenabsturz 1987 zahlreiche Investoren an der Wall Street und führte auch bei ihnen zu einer kritischen Hinterfragung des klassischen Ansatzes, da die Bildung einer Finanzmarktblase der EMH per se widerspricht. In einem effizienten Markt sind Aktien nämlich stets fair bewertet, so dass es erst gar nicht zu irrationalen Übertreibungen kommen kann. Darüber hinaus stieß die EMH aus institutionell-praktischer Sicht an ihre Grenzen: Neben kostenloser Informationsbeschaffung ist beispielsweise auch die Annahme uneingeschränkter Liquidität unrealistisch, wie der Crash am 19. Oktober 1987 bewiesen hat. Der berühmte Fondsmanager George Soros beispielsweise verlor mit seinem Hedge Fonds Quantum Fund in nur einer Woche ein Vermögen von etwa 840 Millionen US-Dollar, weil er seine Long-Positionen aufgrund eines überfüllten Marktes nicht rechtzeitig liquidieren konnte (vgl. Mallaby 2011, S. 125). Die Annahme eines uneingeschränkt freien und verfügbaren Handels entspricht daher schlichtweg nicht der Realität, so dass diese Modellannahme nicht haltbar ist. Aktienmarktstürze wie der schwarze Montag lassen auch die Normalverteilungshypothese aus empirischer Sicht mehr als fraglich erscheinen. Der damit verbundene, relativ einfache mathematische Apparat und die elegante Handhabung von Risikoparametern führte wohl vor allem in der Praxis dazu, dass diese Annahme relativ unkritisch akzeptiert wurde. Nachdem der französische Mathematiker Benôit Mandelbrot bereits in der frühen 1960er Jahren (Mandelbrot 1963) feststellte, dass die Verteilungsmasse von Renditen an ihren Rändern sehr viel breiter ist, als es die Gaußsche Glockenkurve nahelegt, bestätigte selbst Fama in Fama

(1963) und Fama (1965a) diese Behauptung. Ein $5\text{-}\sigma$ -Ereignis dürfte beispielsweise nur etwa alle 7000 Jahre vorkommen; ein Börsenabsturz wie jener vom 19. Oktober 1987, an dem der Dow Jones Index mehr als 22% verlor, dürfte gar nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 zu 10^{160} auftreten – verglichen der Schätzung für die Restlebensdauer unseres Universums, die etwa im Bereich von 10^{10} Jahren liegt, eine beeindruckende Zahl (vgl. Mallaby 2011, S. 130f). Das Problem mit der Mandelbrotschen Hypothese war jedoch, dass alle Errungenschaften, die mit Hilfe der Normalverteilungshypothese innerhalb der Finanzwissenschaft gewonnen wurden, dadurch auf einmal obsolet würden. Fama urteilte daher, dass die Normalverteilung eine gute und ausreichende Näherung der Realität darstellt und ignorierte damit stellvertretend für weite Teile der Scientific Community Mandelbrots Kritik (vgl. Mallaby 2011, S.130ff).

A.2 Alternative Wahrscheinlichkeitsverteilungen

„Despite the fundamental importance of Bachelier’s process, which has come to be called ‘Brownian motion’, it is now obvious that it does not account for the abundant data accumulated since 1900 by empirical economists, simply because the empirical distributions of price changes are usually too ‘peaked’ to be relative to samples from Gaussian populations“ (Mandelbrot 1963, S. 394).

(Benôit Mandelbrot)

Ein wichtiger Bereich der Econophysik ist die Untersuchung empirischer Verteilungen von Wertpapierrenditen. Die Annahme, dass Renditen normalverteilt sind, ist aufgrund der stilisierten Fakten empirisch nicht haltbar (vgl. Johnson et al. 2003, Kapitel 3). Renditen um den Erwartungswert treten öfter auf und die Verteilungsmasse an den Rändern ist wesentlich breiter, als es die Gaußsche Glockenkurve impliziert. Extreme Ereignisse treten dementsprechend weitaus häufiger auf, was insbesondere im Hinblick auf das Risikomanagement in der Praxis von großer Relevanz ist (Rau-Bredow 2002, S. 603). Eine besondere Klasse von Verteilungen, die diese Charakteristika in sich vereint, ist diejenige sogenannter *stabiler Verteilungen*. Sehr gute Forschungsarbeiten zu

diesem Themenkomplex sind beispielsweise Nolan (2010), Sun, Rachev, Fabozzi und Kalev (2008) oder Sun, Rachev und Fabozzi (2008). Biglova, Ortobelli, Rachev und Fabozzi (2009) stellen dabei insbesondere heraus, wie stabile Verteilungen im Kontext einer Portfolio-Optimierung verwendet werden können. Aber auch andere Verteilungsklassen wie die sogenannte *Studentsche t-Verteilung* können die Verteilung empirischer Wertpapierrenditen oftmals besser beschreiben als die Normalverteilung.

A.2.1 Der generalisierte zentrale Grenzwertsatz

Könnte die Normalverteilungshypothese noch mit Hilfe des ZGS theoretisch motiviert werden, gibt es für stabile Verteilungen eine generalisierte Form dieser Fundierung, d. i. der sogenannte *generalisierte zentrale Grenzwertsatz (gZGS)*⁴. Im Gegensatz zum ZGS wird beim gZGS die Annahme einer endlichen Varianz fallen gelassen. Der Satz kann dabei in Anlehnung an Definition A.1.2.1 wie folgt formuliert werden (vgl. Nolan 2010, S. 22):

Definition A.2.1.1 (Generalisierter Zentraler Grenzwertsatz)

Eine Zufallsvariable Z heißt α -stabil⁵ mit $\alpha \in (0; 2]$, falls und nur falls eine i.i.d. Sequenz von Zufallsvariablen X_i mit $i = 1, 2, 3, \dots$ und Konstanten $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$a_n \sum_{i=1}^n X_i - b_n \xrightarrow{d} Z, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2.1})$$

Der gZGS besagt somit, dass unter der Bedingung nicht-endlicher Varianz der einzig mögliche, nicht-triviale Grenzwert für normalisierte Summen von i.i.d. Zufallsvariablen eine stabile Verteilung ist. Für das Financial Modeling hat diese Tatsache eine wichtige Implikation: Falls die Preiskonstitution von spekulativen Vermögensgegenständen durch eine Vielzahl von unabhängigen Einflüssen wie den Aktionen heterogener Marktteilnehmer beeinflusst wird, ist im Falle nicht-endlicher Varianzen nicht mehr speziell die Normalverteilung relevant. Vielmehr repräsentieren stabile Verteilungen allgemein eine weitaus adäquatere Verteilungsannahme für das Datenmaterial (Nolan 2003, S. 112). Insbesondere kann dem vermehrten Auftreten extremer Ereignisse im Sinne

⁴Es ist zu bemerken, dass die Gauß-Verteilung ebenfalls eine spezielle Form stabiler Verteilungen darstellt.

⁵Wie eine solche Variable genau definiert ist, wird in Abschnitt A.2.2 gezeigt.

von schweren Enden dadurch weitaus besser Rechnung getragen werden und eine Reihe stilisierter Fakten innerhalb eines Modellansatzes berücksichtigt werden.

A.2.2 Stabile Verteilungen und andere Verteilungsalternativen

Obwohl die Tatsache, dass stabile Verteilungen die empirische Realität besser wiedergeben als die Gaußverteilung, schon seit den 1960er Jahren bekannt ist, führte der Mangel an geschlossenen Formen von stabilen Wahrscheinlichkeitsverteilungen dazu, dass sie in der Praxis lange Zeit kaum Anwendung fanden (vgl. Nolan 2010, S. 3). Heutzutage ermöglichen jedoch schnelle Computer und geeignete Softwarepakete die rasche Berechnung der erforderlichen Parameter, so dass der Anwendung in der Praxis im Grunde nichts mehr im Wege stünde. Stabile Variablen sind dabei wie folgt definiert (vgl. Nolan 2003, S. 107):

Definition A.2.2.1 (Stabile Variable)

Es seien X_i mit $i = 1, 2, 3, \dots, n$ i.i.d. Kopien einer Zufallsvariable X . X heißt **stabil** bzw. **stabil in weiteren Sinne**, falls und nur falls die Konstanten $c_n = n^{1/\alpha} > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \tag{A.2.2}$$

Die Zufallsvariable X heißt **strikt stabil** bzw. **stabil im engeren Sinne**, falls $d_n = 0 \forall n$ gilt. X heißt **symmetrisch stabil**, falls X stabil und symmetrisch um Null verteilt ist, d. h. $X \stackrel{d}{=} -X$.

In der Literatur werden die Begriffe stabil, α -stabil, Pareto-stabil oder Lévy-stabil oft synonym verwendet. Ihren Namen haben solche Verteilungen – auch Lévy-stabile Verteilungen genannt – ihrem Entdecker Paul Lévy zu verdanken. Ein stochastischer Prozess, der eine stabile Verteilung generiert, wird dabei *Lévy-Flight* genannt. Im Gegensatz zur geometrischen Brownschen Bewegung ist ein solcher Prozess durch häufige und zum Teil stark ausgeprägte Diskontinuitäten gekennzeichnet, was in direktem Zusammenhang mit schweren Enden und nicht-endlichen Varianzen steht (vgl. Voit 2005, S. 126ff). Zudem lässt sich zeigen, dass Lévy-stabile Verteilungen selbstähnlich sind (vgl. Voit 2005, S. 127).

Zur eindeutigen Beschreibung stabiler Verteilungen sind im Wesentlichen vier Parameter notwendig, wovon der sogenannte *Stabilitätsparameter* (auch *Tail Index*) $\alpha \in (0; 2]$ der wichtigste ist. Durch α wird bestimmt, wie weit die Enden einer Verteilung auslaufen. Für $\alpha = 2$ ergibt sich die Normalverteilung und die Varianz ist endlich. Falls $\alpha < 2$ gilt, ist die Varianz nicht-endlich und die Enden verhalten sich asymptotisch Pareto-verteilt (Nolan 2003, S. 110). Je kleiner der Wert für α ist, desto größer ist die Verteilungsmasse an den Enden. Eine Schwierigkeit mit stabilen Verteilungen ist, dass es nur für wenige Fälle geschlossene, d. i. analytische Darstellungsformen für die Wahrscheinlichkeitsdichten gibt. Genauer gesagt existieren genau drei solcher Darstellungsformen – für die Gauß-, Cauchy- und Lévy-Verteilung. In den übrigen Fällen verwendet man die sogenannte *charakteristische Funktion* $\phi(t)$, d. i. die inverse Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, um stabile Verteilungen zu spezifizieren. Mit $\alpha \neq 2$ verhält sich eine Lévy-stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung L_α dabei asymptotisch wie

$$L_\alpha(x) \propto \frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2.3})$$

Stabile Verteilungen sind demnach in erster Linie über den Stabilitätsparameter $\alpha \leq 2$ definiert. Für selbstähnliche Prozesse nach Definition 2.3.1 lässt sich im Allgemeinen der Zusammenhang zwischen α und dem Hurst-Exponenten durch $H = 1/\alpha$ darstellen (vgl. Voit 2005, S. 116). Da $H \in (0; 1)$ gilt, sind nach dieser Gleichung jedoch Werte $\alpha > 2$ möglich. In der Tat zeigen sich gerade bei Finanzdaten oftmals α -Werte größer 2 (vgl. Voit 2005, S. 149f). In diesem Fall lässt sich zeigen, dass die Summe aus Definition A.2.1 zu einer Normalverteilung konvergiert. Allerdings gibt es Verteilungsalternativen wie die *Studentsche t-Verteilung* oder die sogenannte *Truncated Lévy Verteilung*, die mathematisch mit einem Wert $\alpha > 2$ zu vereinen sind (vgl. Voit 2005, S. 130f). In der Regel können diese Verteilungen ebenfalls eine weitaus adäquatere Beschreibung der empirischen Daten als die Normalverteilung liefern.

A.2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der Verteilungsklasse stabiler Verteilungen und anderer Alternativen diskutiert. Als theoretische Fundierung hierfür dient der gZGS, der eine Verallgemeinerung des ZGS darstellt. Mandelbrot kam im Laufe seiner

Untersuchungen zu dem Schluss, dass stabile Verteilungen anhand ihrer schweren Enden empirisch auftretende Extremszenarien weitaus besser erfassen als die Normalverteilung. Dieser Umstand ist insbesondere im praktischen Risikomanagement von großer Bedeutung. Alternative Verteilungen wie stabile Verteilungen oder die Studentsche t-Verteilung spielen daher auch in der Econophysik eine wichtige Rolle hinsichtlich der Verteilungsannahme für Wertpapierrenditen.

A.3 Iterationsregel zur Konstruktion eines fraktalen Objekts

Dieser iterative Konstruktionsprozess, der in Abbildung A.3.1 anhand der sogenannten *Koch-Kurve* illustriert wird, besteht dabei aus drei Elementen (Frame et al. 2011):

1. Die Ausgangsform wird als *Initiator* bezeichnet, und ist in diesem Falle eine einfache Gerade.
2. Das zweite Element – auch *Generator* genannt – ist diejenige Form, durch die das eigentliche Fraktal iterativ konstruiert wird.
3. Schließlich benötigt man noch eine Iterationsregel, die besagt, dass man im Gesamtobjekt jedwede Kopie des Initiators mit einer skalierten Kopie des Generators substituiert.

Theoretisch kann diese Iterationsregel unendlich oft angewandt werden, wobei die Feinheit des Gesamtobjekts mit jedem Schritt zunimmt, da auf jeder Iterationsstufe eine hierarchisch niedrigere Skala erreicht wird. Die unmittelbare Konsequenz daraus ist, dass ein Fraktal eine unendliche Länge besitzt. Abbildung A.3.2 zeigt eine aus einem solchen Konstruktionsprozess entstandene Koch-Kurve (vgl. Eichhorn und Thiele 1994, S. 192).

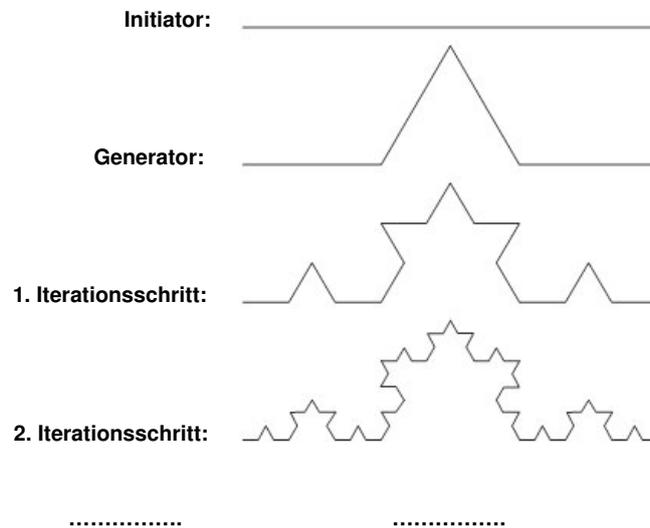


Abbildung A.3.1: Konstruktion der Koch-Kurve

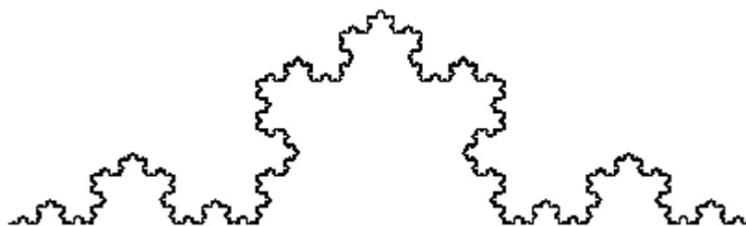


Abbildung A.3.2: Koch-Kurve

A.4 Weitere Methoden der Spektralanalyse

A.4.1 Fourier-Transformation

Die Grundidee der FT ist, eine komplexe Funktion durch eine Superposition von möglichst simplen Funktionen – auch Basisfunktionen genannt – zu approximieren. Fourier verwendete ursprünglich Sinusfunktionen, um periodische Funktionen durch eine geeignete Gewichtung der Basis hinreichend zu approximieren. Eine Funktion $f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t wird dabei in eine Funktion $\hat{f}(\omega)$ in Abhängigkeit von der Frequenz ω transformiert, d. h. $f(t) \rightarrow \hat{f}(\omega)$. Das bedeutet, dass die Funktion von der Zeitebene mit perfekter zeitlicher Auflösung in die Frequenzebene mit perfekter Frequenzauflösung transformiert wird.

Die FT funktioniert dementsprechend analog zu einem physikalischen Phänomen in der Optik, d. i. der Aufspaltung von Licht in ein Kontinuum seiner Spektralfarben mit Hilfe eines optischen Prismas. Sir Isaac Newton erkannte bereits, dass die verschiedenen Wellenlängen des weißen Lichts an der Kante eines Prismas unterschiedlich stark gebrochen werden und am Ende separiert wieder heraustreten. Ganz analog dazu zerlegt die FT ein mathematisches Signal in Bezug auf seine Frequenzen und fächert diese im Frequenzraum wie ein Prisma auf. Abbildung A.4.1⁶ illustriert das Prinzip der FT schematisch.



Abbildung A.4.1: Schematische Darstellung der Fourier-Analyse

Mathematisch lässt sich die FT für Funktionen $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ wie folgt darstellen⁷:

⁶Diese und zahlreiche folgenden Abbildungen, die die einzelnen Verfahren der Zeit-Frequenz-Analyse illustrieren bzw. die Funktionsweise der WT schematisch darstellen, sind Misiti, Misiti, Oppenheim und Poggi (1996) entlehnt.

⁷Im Folgenden wird nur auf die kontinuierliche FT eingegangen. Für eine ausführlichere Erläuterung der mathematischen Charakteristika sowie Herleitungen und Rechenregeln sei wie auch für die Erweiterung auf die diskrete Version der FT auf Clausen und Müller (2001, S. 6ff) verwiesen.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{A.4.1})$$

$\hat{f}(\omega)$ liefert demnach die Frequenzdarstellung von $f(t)$ und gibt an, welche Frequenzen ω in f enthalten sind. Da $\hat{f}(\omega)$ in der Regel komplexwertig ist, verwendet man für die Darstellung der Intensitätsverteilung der Frequenzkomponenten $|\hat{f}(\omega)|$ bzw. die *spektrale Energiedichte* $|\hat{f}(\omega)|^2$ (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 17). Die Rücktransformation ist dementsprechend definiert als:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.4.2})$$

Eine wesentliche Problematik in Bezug auf die FT hinsichtlich der meisten „natürlichen“ Zeitreihen wie ökonomische Daten ist die Verwendung von trigonometrischen Funktionen als Basis. Aufgrund ihrer Periodizität sind Sinus- und Kosinusfunktionen zwar in der Frequenz, jedoch nicht in der Zeit lokalisiert, da sie einen unendlich langen Träger besitzen. Die Zeitinformation wird in der Phase „versteckt“, so dass der genaue Zeitpunkt eines transienten Phänomens in der Transformation nicht spezifiziert werden kann. Die Informationen hinsichtlich der zeitlichen Lokalisierung von Regimewechseln, Schocks, oder anderen plötzlichen Veränderungen spielen aber gerade bei der Analyse von Finanzdaten eine wichtige Rolle, so dass die konventionelle Methode im Sinne der FT auf diesem Gebiet von vornherein nicht geeignet ist und bei instationären Zeitreihen zu zweifelhaften Ergebnissen führt. Aufgrund des unendlichen Trägers trigonometrischer Funktionen manifestiert sich ein Ereignis als eine Art Mittelwert über das gesamte Zeitintervall. Ein lokales Phänomen spiegelt sich dementsprechend als globales Charakteristikum in der Transformierten wider (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 25).

A.4.2 Short-Time Fourier-Transformation

Aus diesen Gründen führte Denis Gabor im Jahr 1941 eine modifizierte Version der FT ein, d. i. die in Abschnitt 3.1 bereits erwähnte GT bzw. STFT. Der Kern dieser Modifikation ist, dass das Signal zunächst in Teilabschnitte partitioniert wird, um in den dadurch entstandenen Fenstern daraufhin jeweils eine FT zu vollziehen. Das Resultat ist, dass immer nur die jeweiligen Teilabschnitte separat in den Frequenzraum überführt werden. Bei der STFT handelt es sich demgemäß um einen Kompromiss aus zeitlicher

und frequenzabhängiger Aufspaltung mit dem Ziel, für eine Funktion $f(t)$ eine transformierte $\hat{f}(\omega, t)$ zu finden, die für das jeweilige Zeitfenster eine Frequenzauflösung von $f(t)$ liefert. Abbildung A.4.2 illustriert die STFT schematisch.

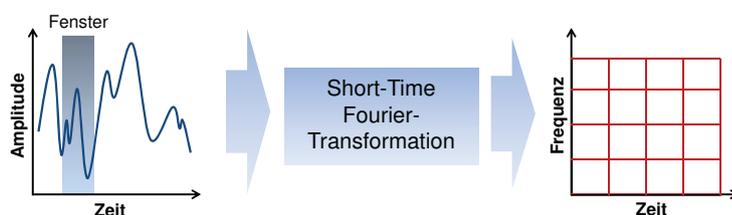


Abbildung A.4.2: Schematische Darstellung der Short-Time Fourier-Analyse

Mathematisch lässt sich die STFT für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ wie folgt darstellen (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 26):

$$\hat{f}(\omega, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{A.4.3})$$

wobei $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|g\| \neq 0$ die Fensterfunktion ist.

Auch wenn die STFT Frequenz- und Zeitebene miteinander verbindet, bleibt die wesentliche Schwäche im Hinblick auf ihre Flexibilität weiterhin bestehen. Die apriori festzulegende Fenstergröße ist während des Transformationsprozesses fixiert, so dass die Auflösung für alle Frequenzen konstant ist. Für weite Fenster erhält man dadurch zwar eine gute Auflösung für niedrige Frequenzen, hohe Frequenzen werden dagegen schlecht lokalisiert und die Unschärfe hinsichtlich der zeitlichen Lokalisierung von Frequenzübergängen nimmt zu. Umgekehrt führt eine Verengung des Zeitfensters zu einer exakteren Lokalisation hoher Frequenzen, resultiert auf der anderen Seite jedoch in einer schlechteren Auflösung in den niederfrequenten Anteilen der Funktion. Im Sinne einer präzisen Analyse solcher Daten ist daher eine Lösung gefragt, die mehr Flexibilität hinsichtlich der Adaptivität an das Datenmaterial bietet.

A.4.3 Heisenbergsche Unschärferelation

Bei jeder simultanen Betrachtung in der Zeit-Frequenz-Ebene gibt es eine physikalische Grenze, die mit einer gewissen Unschärfe der beiden komplementären Größen Zeit und Frequenz einhergeht. Um diesen Sachverhalt besser verstehen zu können, bie-

tet sich zunächst eine Formalisierung der Lokalisierungseigenschaft der Fensterfunktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ aus Gleichung (A.4.3) an⁸ (vgl. Clausen und Müller 2001, S. 35ff). Diese Lokalisierungseigenschaft wird über die beiden Begriffe *Zentrum* $t_0(g)$ und *Breite* $T(g)$ definiert:

$$t_0(g) := \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt, \quad (\text{A.4.4})$$

$$T(g) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (\text{A.4.5})$$

Das Zentrum $\omega_0(g)$ bzw. die Breite $\Omega(g)$ für die Fourier-Transformierte \hat{g} wird analog dazu definiert als:

$$\omega_0(g) := \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{A.4.6})$$

$$\Omega(g) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (\text{A.4.7})$$

Mathematisch entsprechen t_0 bzw. T dem Erwartungswert respektive der Standardabweichung der Zufallsvariable $t \rightarrow |g(t)|^2$. Existieren sowohl Zentrum als auch Breite von g , dann sagt man, dass g um t_0 mit der Fensterbreite T lokalisiert⁹.

Das Problem einer solchen Betrachtung in der Zeit-Frequenz-Domäne ist nun aber, dass es nicht möglich ist, simultan eine beliebig genaue Auflösung der beiden Ebenen herzustellen. Dieser Umstand ist einem allgemeinen physikalische Prinzip geschuldet, d. i. der sogenannten *Heisenbergschen Unschärferelation*. Dieses Prinzip besagt in der Physik, dass zwei komplementäre Eigenschaften eines Teilchens gleichzeitig nicht beliebig genau bestimmt werden können. In der Quantenmechanik werden dabei in der Regel Ort und Impuls des Teilchens betrachtet. Angewandt auf die Spektralanalyse besagt das Prinzip, dass eine Funktion nicht gleichzeitig beliebig präzise in der Zeit t und Frequenz ω lokalisiert werden kann (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 99).

Abbildung A.4.3 illustriert das Prinzip anhand einer sogenannten *Heisenberg-Box*:

⁸Es gilt dabei: $\|g\| = 1$.

⁹Analog dazu sagt man, dass \hat{g} um die Frequenz ω_0 mit Frequenzbandbreite Ω lokalisiert.

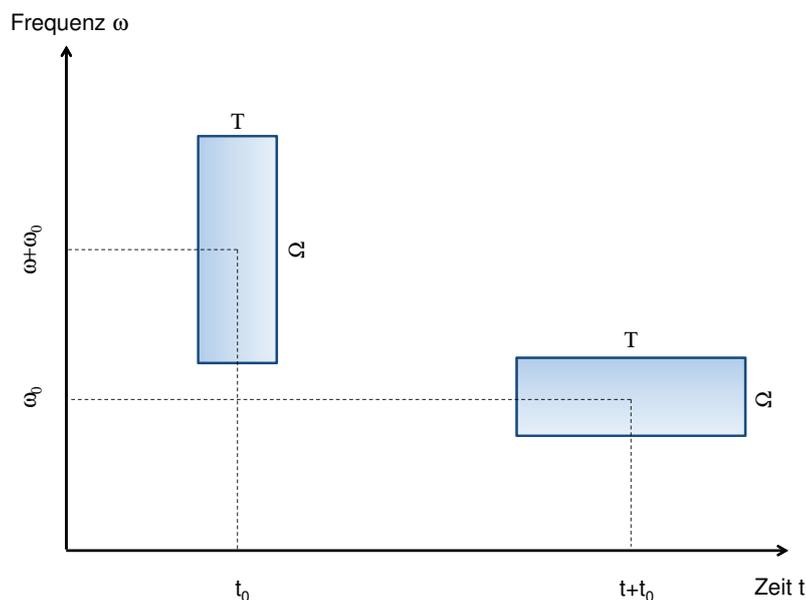


Abbildung A.4.3: Heisenberg-Box

Um eine möglichst gute Auflösung sowohl in der Zeit als auch Frequenz zu erhalten, muss die Fläche $T(g)\Omega(g)$ einer solchen Box möglichst klein werden. Die Unschärfere-lation setzt für diese Fläche jedoch eine untere Grenze (vgl. Mertins 2010, S. 232):

$$T(g)\Omega(g) \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (\text{A.4.8})$$

Gleichung (A.4.8) besagt, dass die Fläche einer Heisenberg-Box mindestens $1/4\pi$ beträgt¹⁰ und sich die dichotomen Größen Zeit und Frequenz komplementär zueinander verhalten. Das bedeutet, dass ab einem gewissen Grad jedwede Reduktion der Unschärfe in einer Sphäre auch immer eine unmittelbare Unschärfezunahme der anderen Ebene zur Folge hat. Ist das Fenster auf der Zeitachse kurz (Seitenlänge T), erhält man auf der einen Seite zwar eine gute Zeitauflösung, muss auf der anderen Seite aber eine schlechtere Frequenzauflösung (Seitenlänge Ω) in Kauf nehmen. Umgekehrt führt eine Fokussierung der Frequenzauflösung in Form einer geringen Seitenlänge Ω zu einem höheren Wert von T , d. h. einer schlechteren Auflösung in der Zeit (vgl. Mertins 2010, S. 230f).

¹⁰Dieses Minimum wird nur bei der GT erreicht, d. h. bei einer STFT unter Verwendung eines Gauß-Fensters.

Die Heisenbergsche Unschärferelation stellt ein fundamentales Prinzip dar und gilt bei allen simultanen Betrachtungen in der Zeit-Frequenz-Ebene.

A.4.4 Zusammenfassung

Am Anfang dieses Abschnittes wurde die FT vorgestellt, die zwar als Ursprung der Spektralanalyse angesehen werden kann, aufgrund ihrer fehlenden Lokalisierungseigenschaft in Bezug auf die Zeit für eine Analyse instationärer Daten jedoch eher ungeeignet ist. Die STFT, welche daraufhin diskutiert wurde, kann diese Schwäche zum Teil überwinden, bietet im Hinblick auf Finanzdaten jedoch ebenfalls zu wenig Flexibilität. Weitaus geeigneter hierfür ist die WT, die einen Kompromiss aus Zeit- und Frequenzanalyse darstellt und sich adaptiv an das Datenmaterial anpassen kann. Darüber hinaus wurde das Prinzip der Heisenbergschen Unschärferelation erläutert, das eine fundamentale Untergrenze jeder simultanen Zeit-Frequenz-Analyse definiert. Abbildung A.4.4 veranschaulicht nochmals die Partition der verschiedenen Domänen innerhalb des Zeit-Frequenz- bzw. Zeit-Skalen-Spektrums (vgl. Gençay et al. 2001b, S. 98).

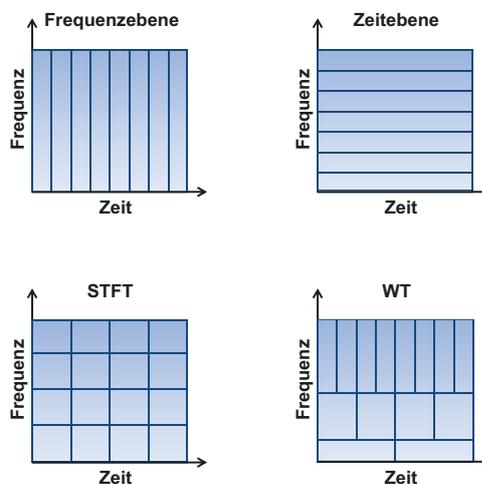


Abbildung A.4.4: Zeit-Frequenzpartition für verschiedene Verfahren

A.5 Selbstähnlichkeit – CWT

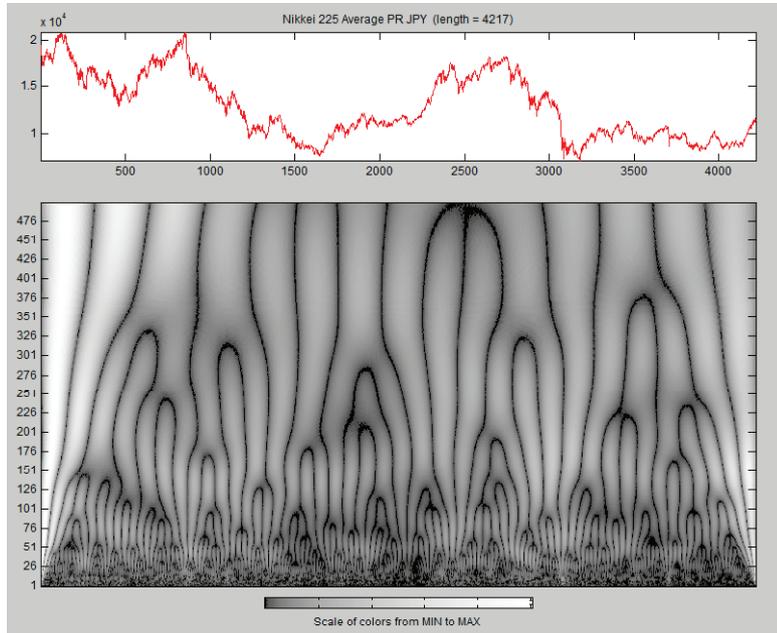


Abbildung A.5.1: CWT-Diagramm: Nikkei 225 Average PR JPY Index basierend auf Tagesdaten

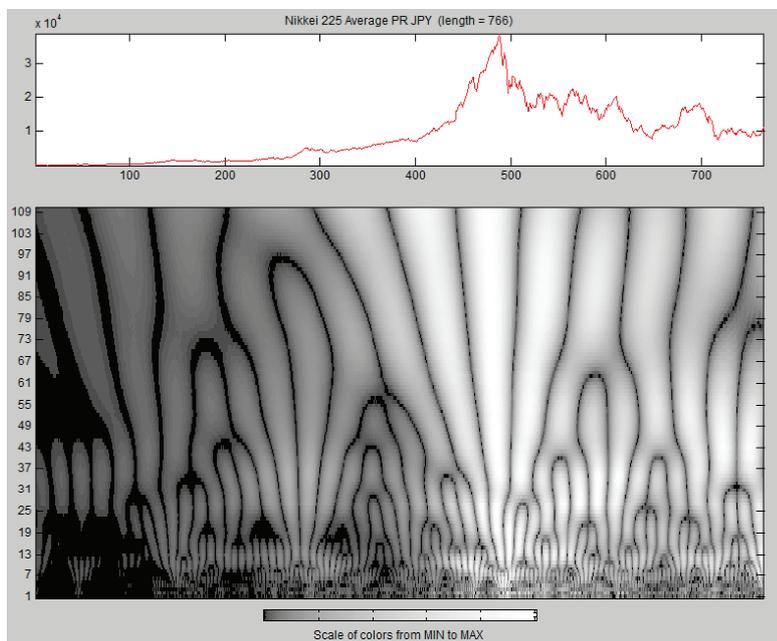


Abbildung A.5.2: CWT-Diagramm: Nikkei 225 Average PR JPY Index basierend auf Monatsdaten

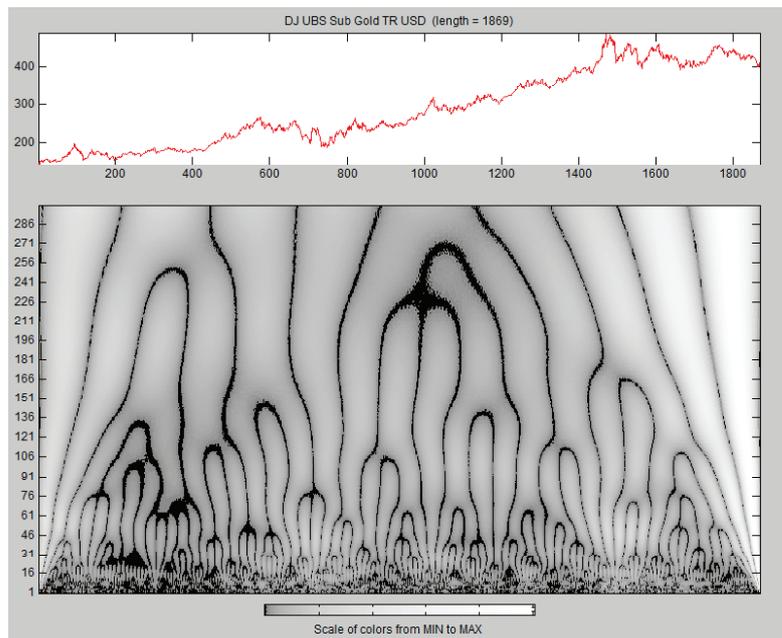


Abbildung A.5.3: CWT-Diagramm: DJ UBS Sub Gold TR USD Index basierend auf Tagesdaten

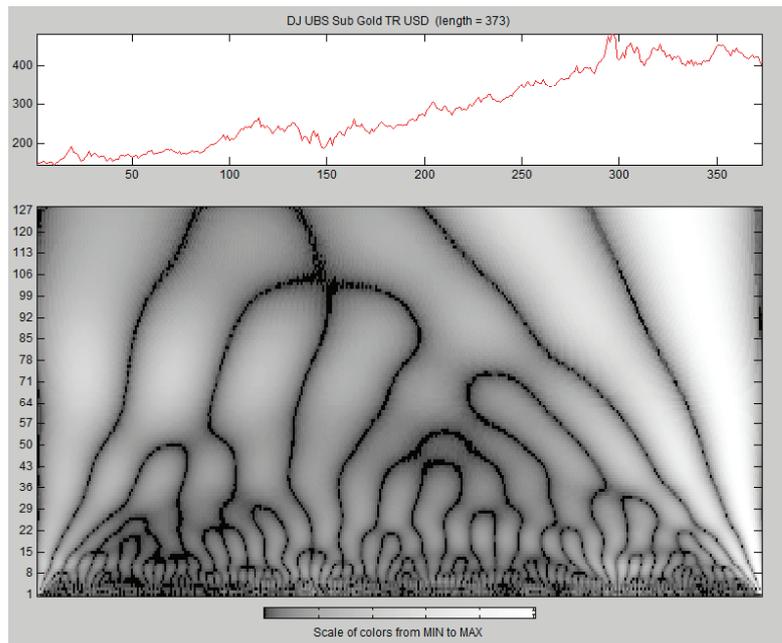


Abbildung A.5.4: CWT-Diagramm: DJ UBS Sub Gold TR USD Index basierend auf Wochendaten

ANHANG

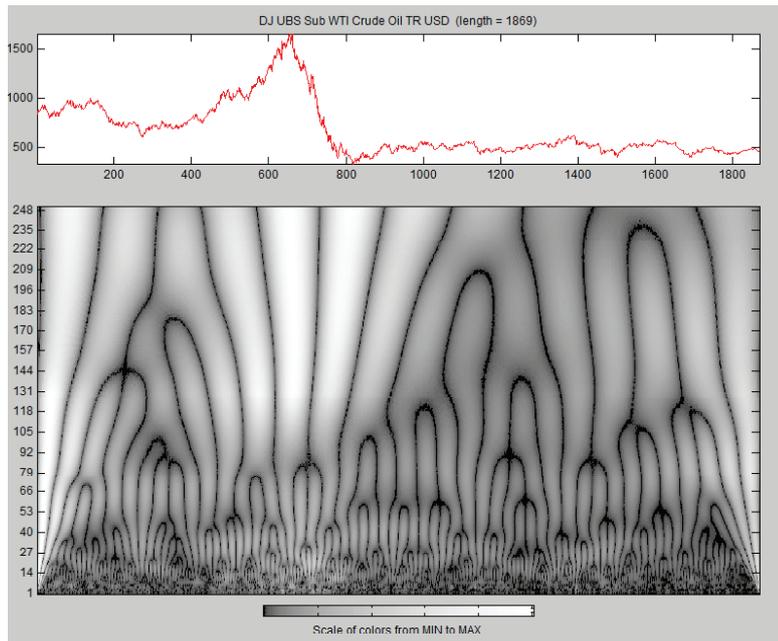


Abbildung A.5.5: CWT-Diagramm: DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD Index basierend auf Tagesdaten

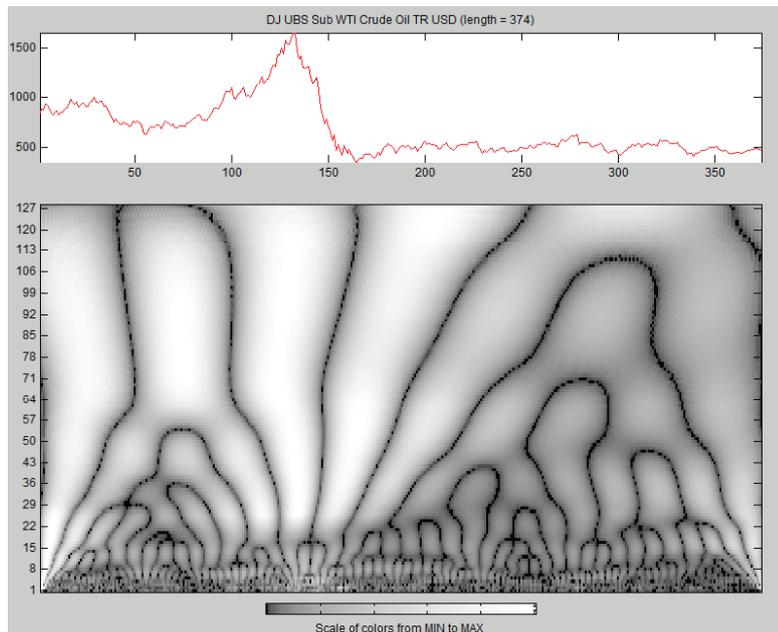


Abbildung A.5.6: CWT-Diagramm: DJ UBS Sub WTI Crude Oil TR USD Index basierend auf Wochendaten

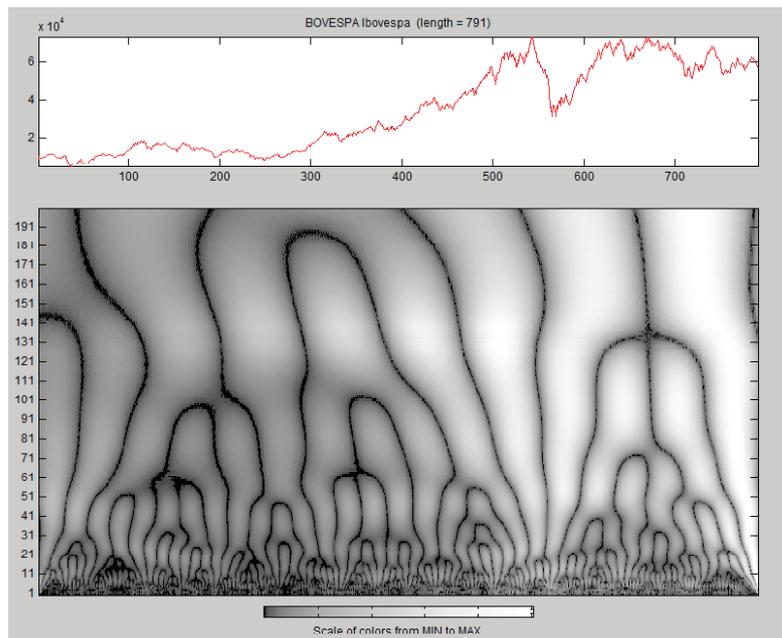


Abbildung A.5.7: CWT-Diagramm: BOVESPA Ibovespa BRL Index basierend auf Wochendaten

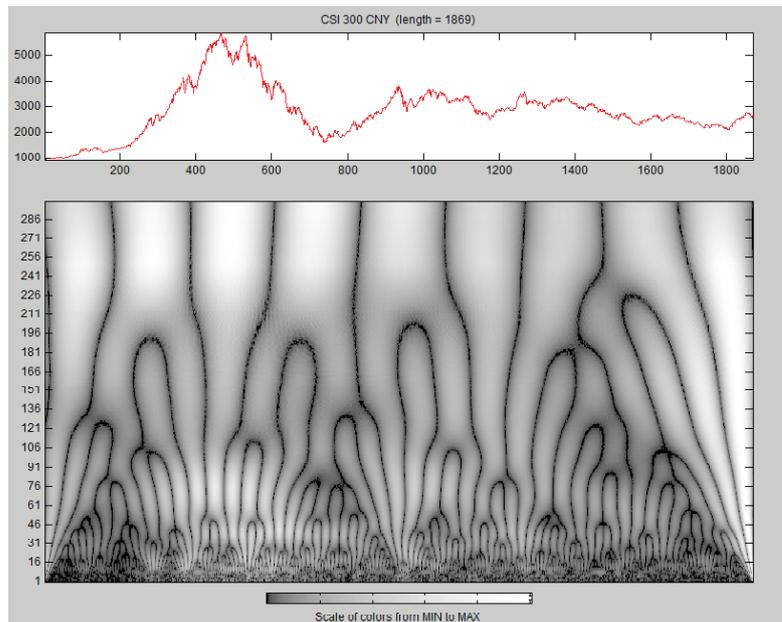


Abbildung A.5.8: CWT-Diagramm: CSI 300 CNY Index basierend auf Tagesdaten

ANHANG

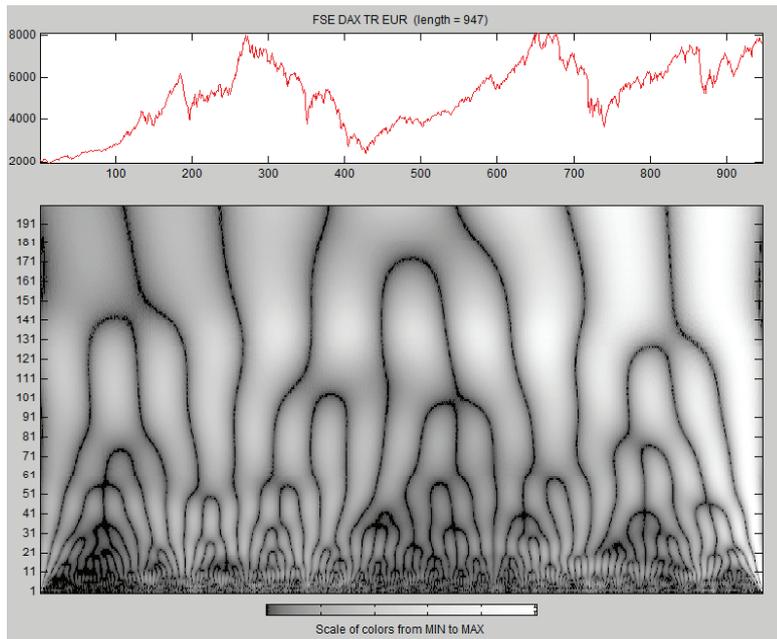


Abbildung A.5.9: CWT-Diagramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Wochendaten

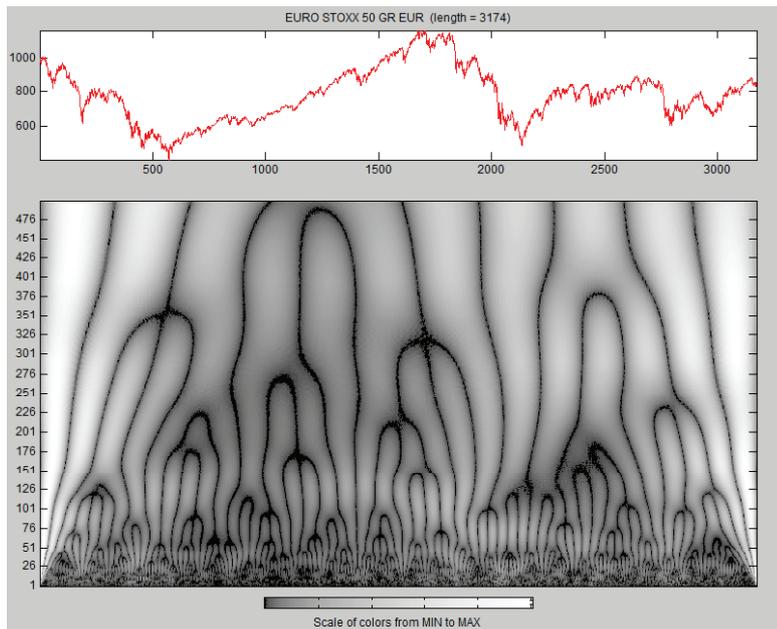


Abbildung A.5.10: CWT-Diagramm: EURO STOXX GR EUR Index basierend auf Tagesdaten

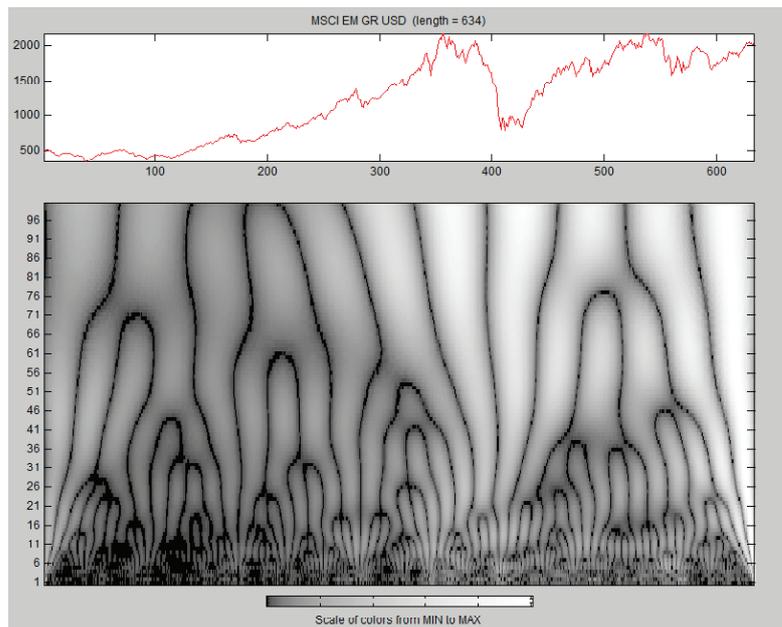


Abbildung A.5.11: CWT-Diagramm: MSCI EM GR USD Index basierend auf Wochendaten

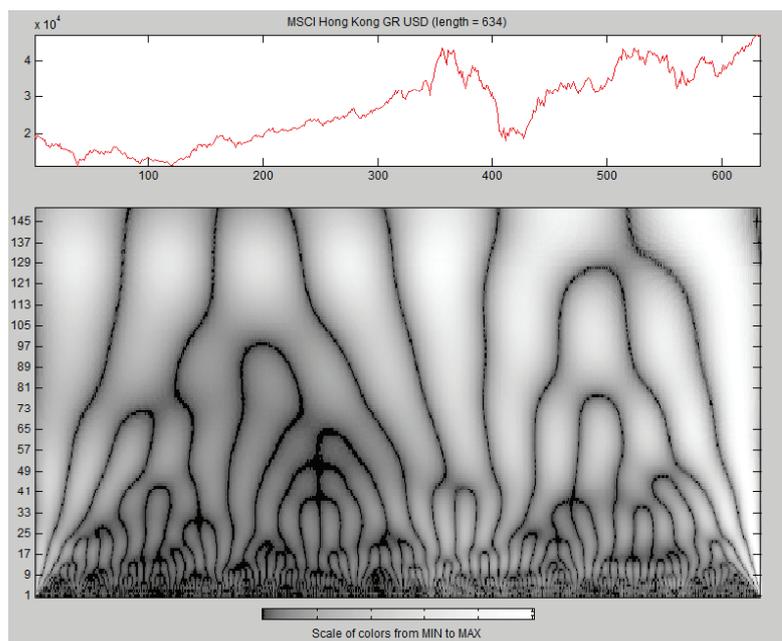


Abbildung A.5.12: CWT-Diagramm: MSCI Hong Kong USD Index basierend auf Wochendaten

ANHANG

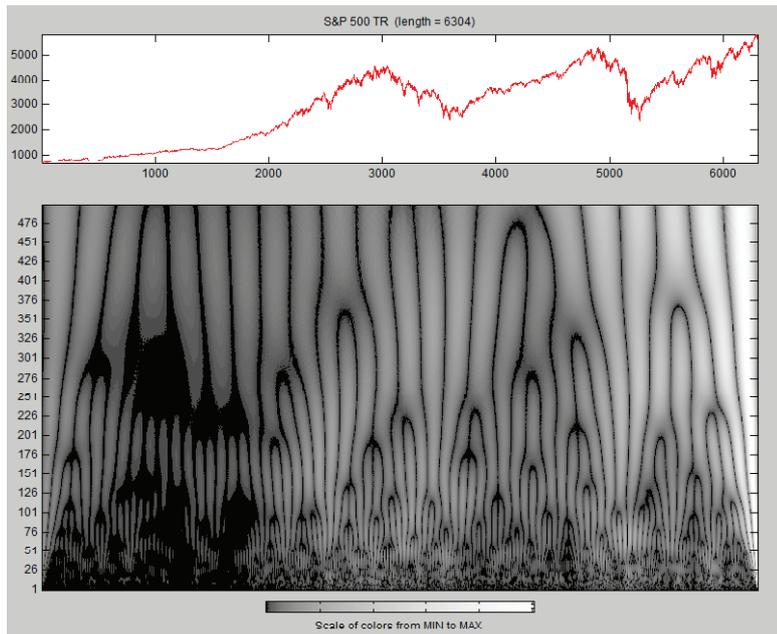


Abbildung A.5.13: CWT-Diagramm: S&P 500 TR USD Index basierend auf Tagesdaten

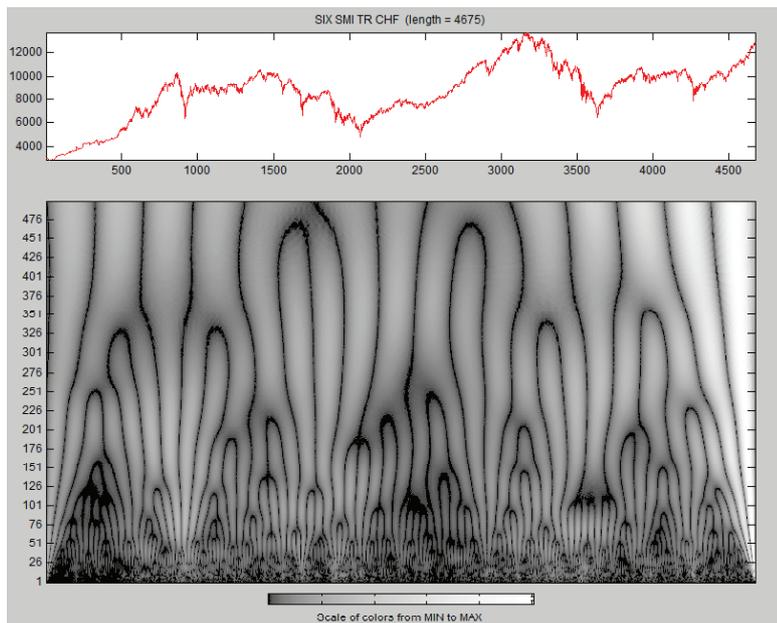


Abbildung A.5.14: CWT-Diagramm: SIX SMI TR CHF Index basierend auf Tagesdaten

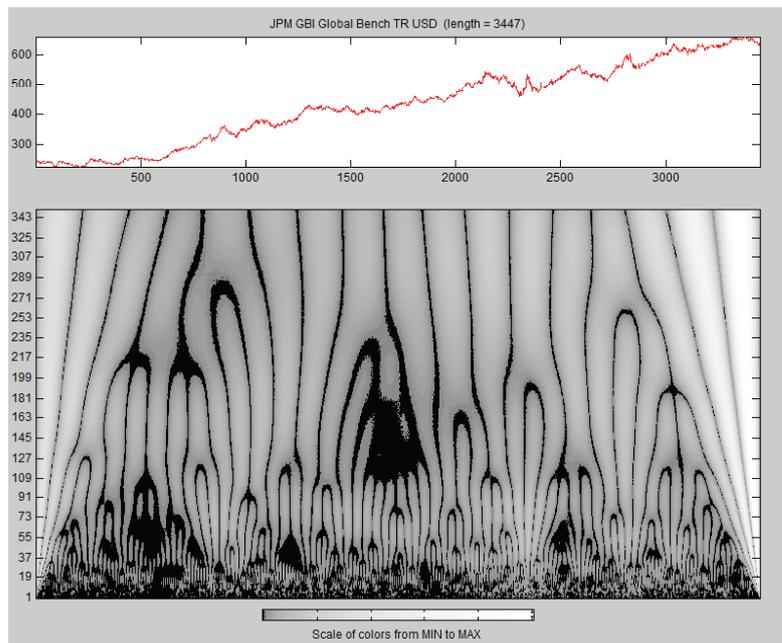


Abbildung A.5.15: CWT-Diagramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Tagesdaten

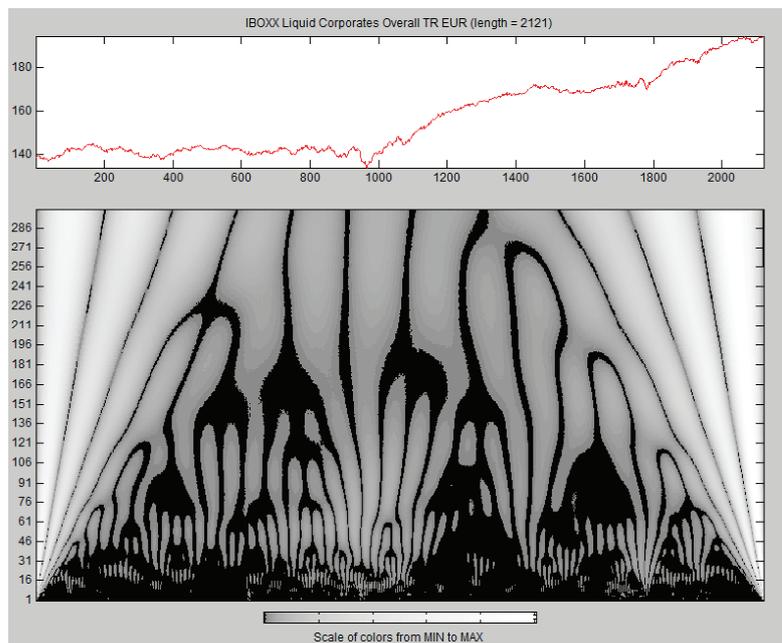


Abbildung A.5.16: CWT-Diagramm: iBoxx Liquid Corporates Overall TR USD Index basierend auf Tagesdaten

A.6 Varianzanalyse – CWT

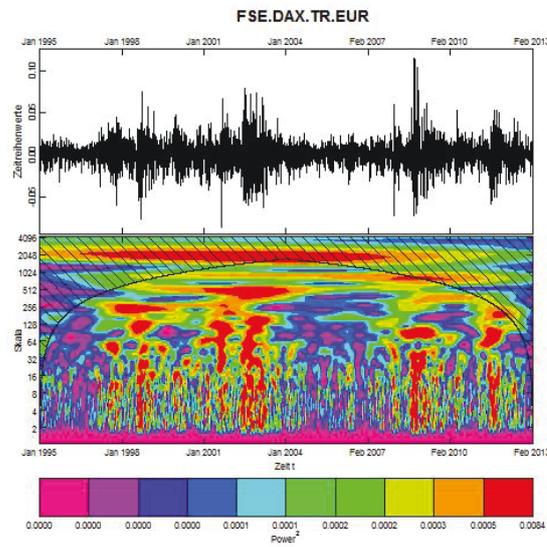


Abbildung A.6.1: Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Tagesdaten

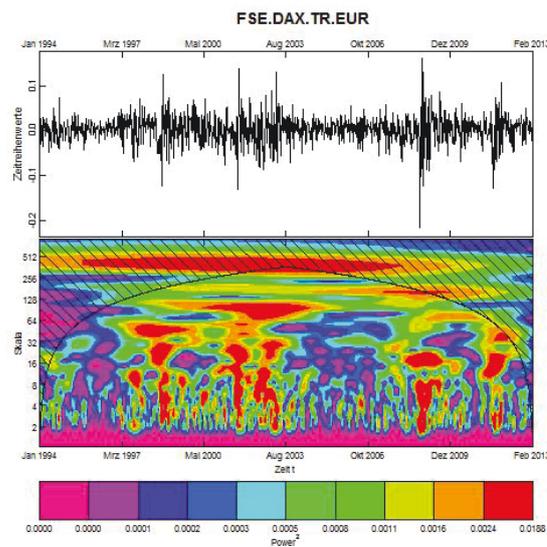


Abbildung A.6.2: Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Wochendaten

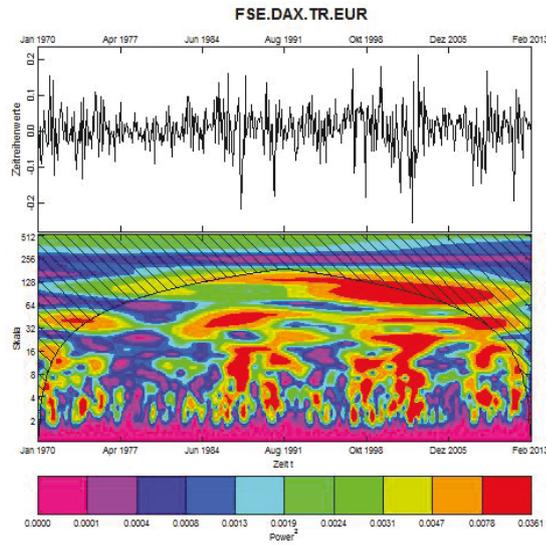


Abbildung A.6.3: Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Monatsdaten

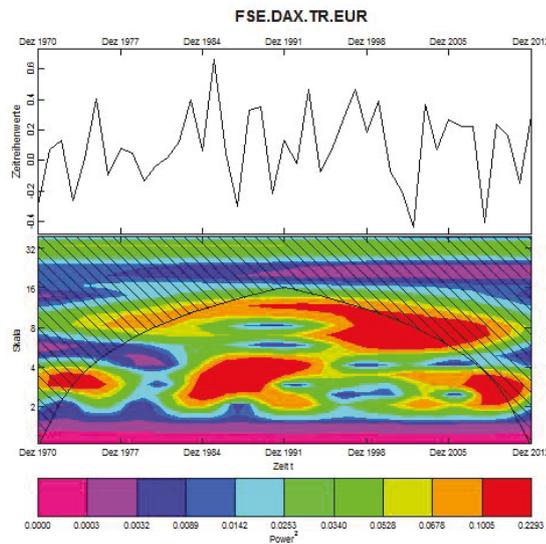


Abbildung A.6.4: Skalogramm: FSE DAX TR EUR Index basierend auf Jahresdaten

ANHANG

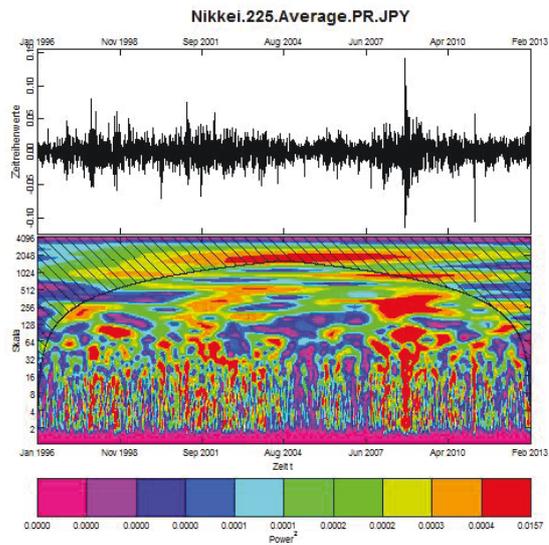


Abbildung A.6.5: Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Tagesdaten

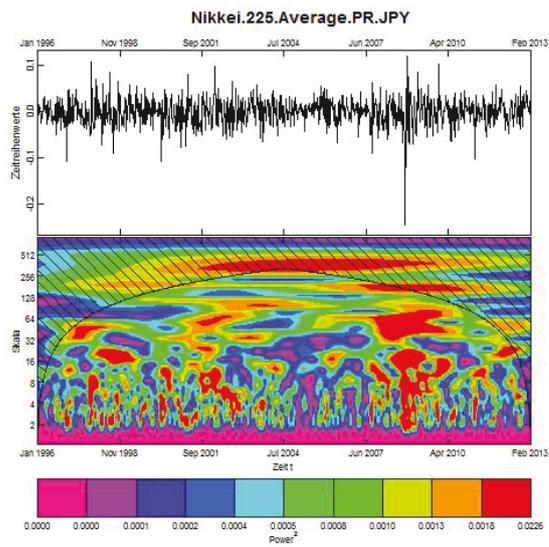


Abbildung A.6.6: Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Wochendaten

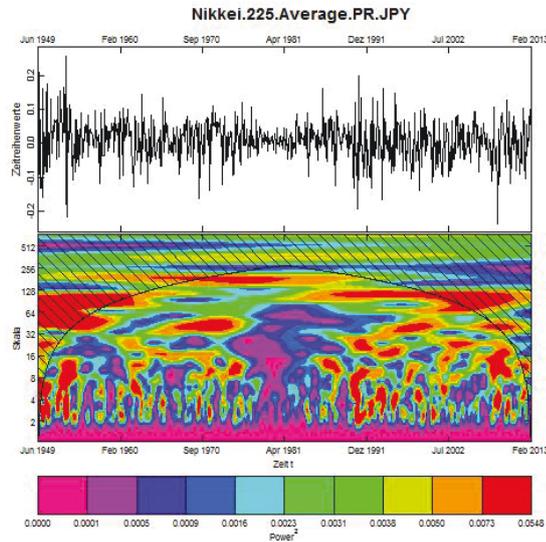


Abbildung A.6.7: Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Monatsdaten

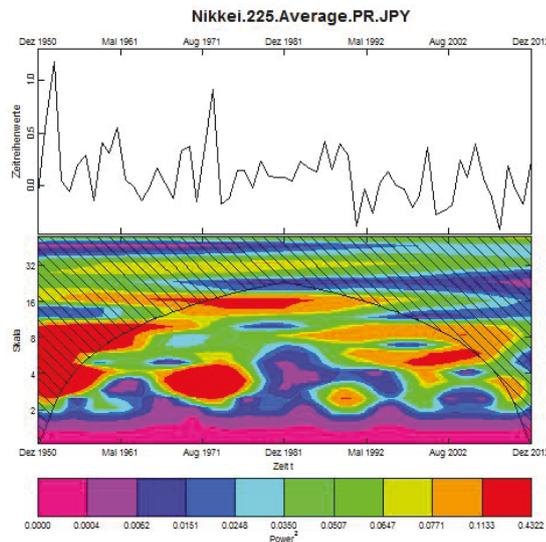


Abbildung A.6.8: Skalogramm: Nikkei 225 Average JPY Index basierend auf Jahresdaten

ANHANG

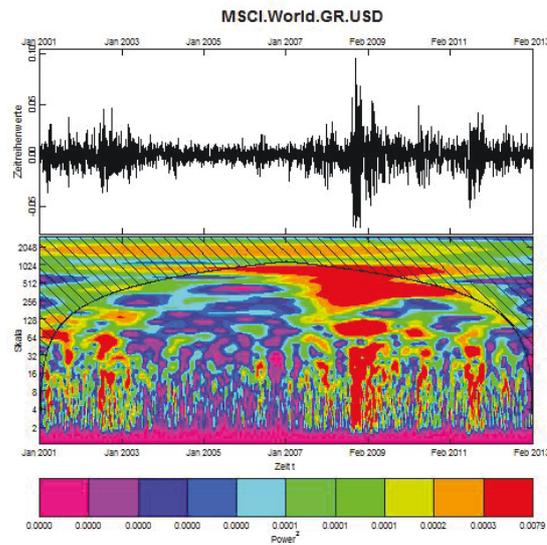


Abbildung A.6.9: Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Tagesdaten

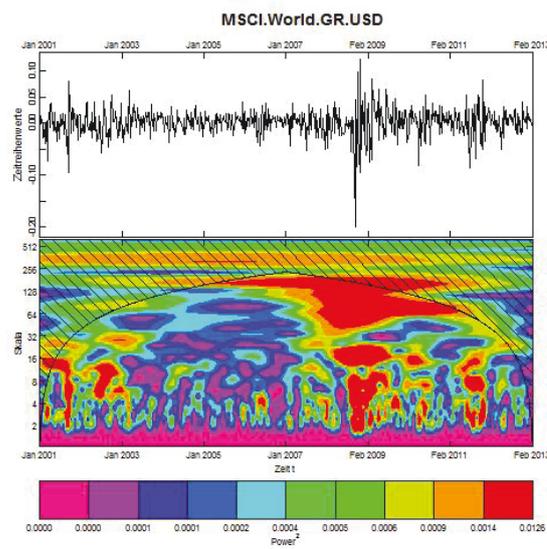


Abbildung A.6.10: Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Wochendaten

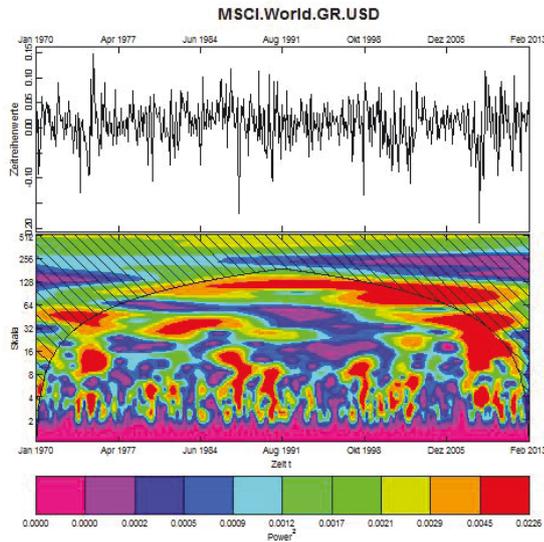


Abbildung A.6.11: Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Monatsdaten

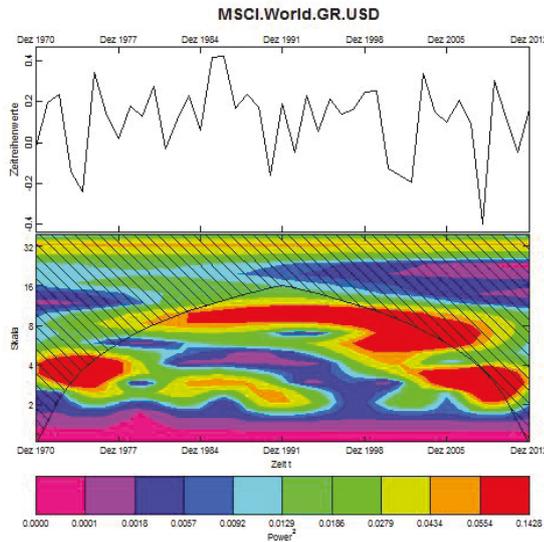


Abbildung A.6.12: Skalogramm: MSCI World GR USD Index basierend auf Jahresdaten

ANHANG

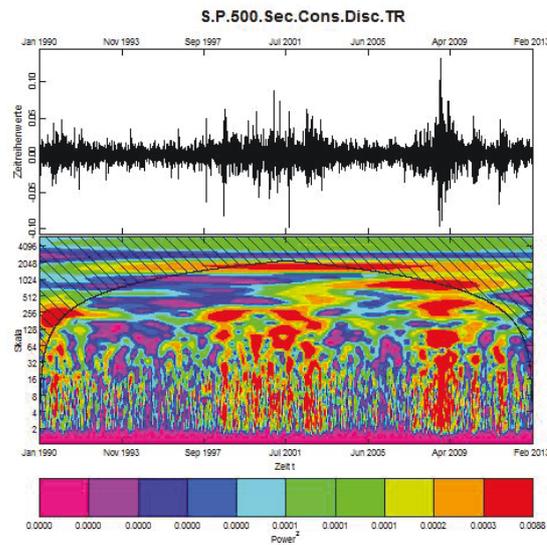


Abbildung A.6.13: Skalogramm: S&P 500 Consumer Discretionary Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten

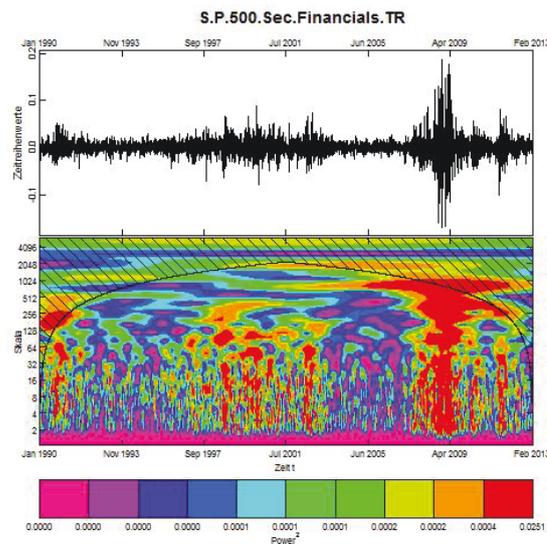


Abbildung A.6.14: Skalogramm: S&P 500 Financial Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten

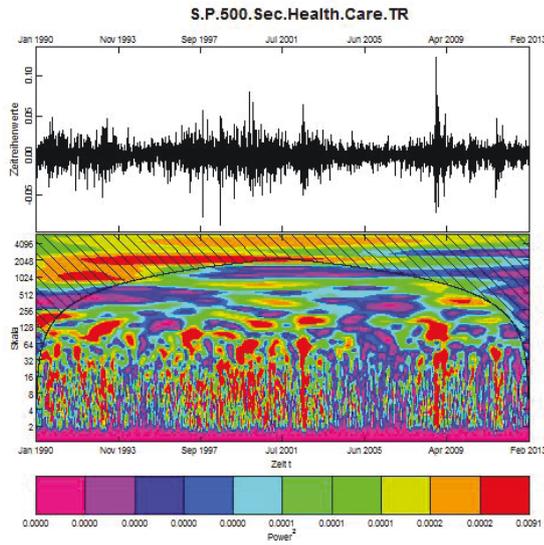


Abbildung A.6.15: Skalogramm: S&P 500 Health Care Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten

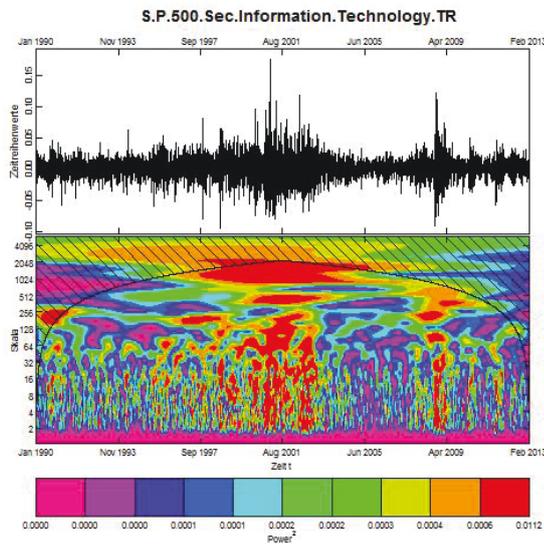


Abbildung A.6.16: Skalogramm: S&P 500 Information Technology Sector TR USD Index basierend auf Tagesdaten

ANHANG

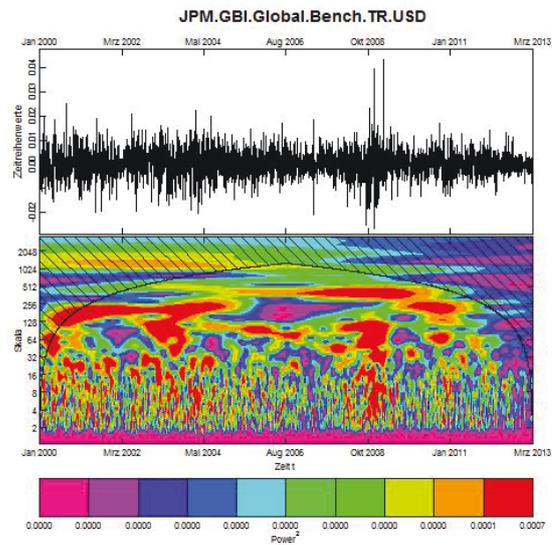


Abbildung A.6.17: Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Tagesdaten

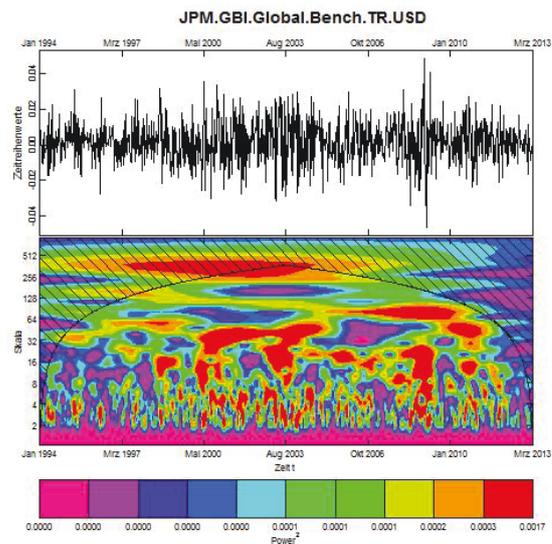


Abbildung A.6.18: Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Wochendaten

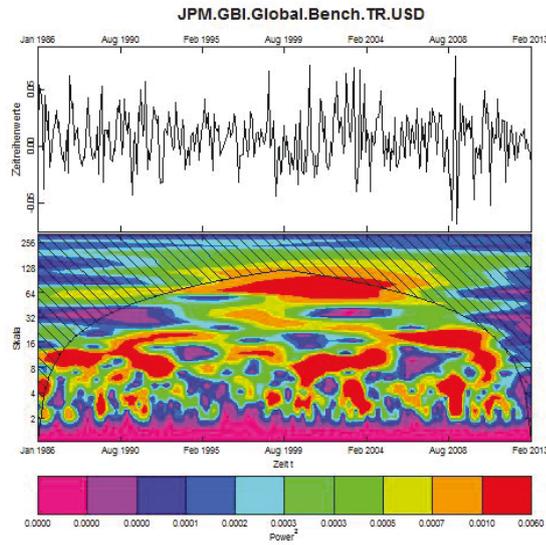


Abbildung A.6.19: Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Monatsdaten

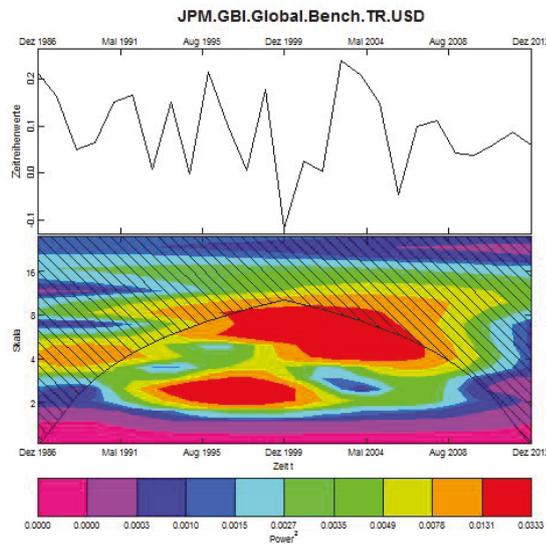


Abbildung A.6.20: Skalogramm: JPM GBI Global Bench TR USD Index basierend auf Jahresdaten

ANHANG

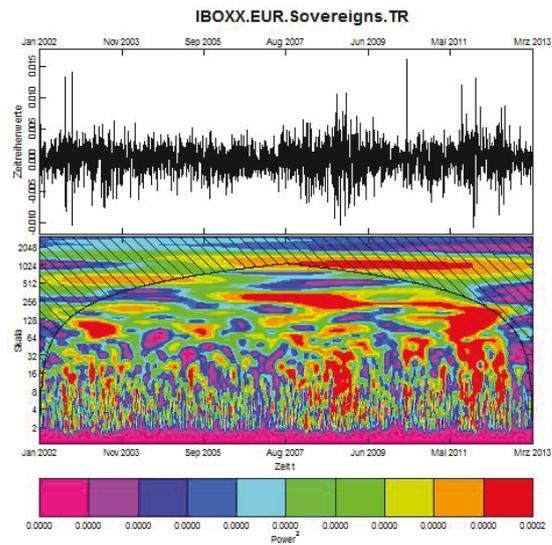


Abbildung A.6.21: Skalogramm: iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Tagesdaten

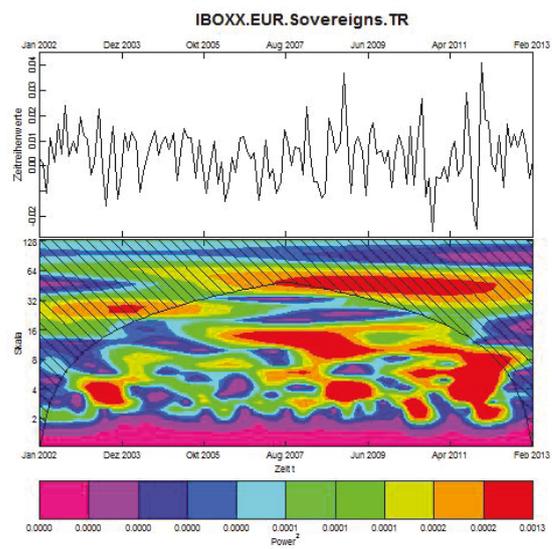


Abbildung A.6.22: Skalogramm: iBoxx EUR Sovereigns TR Index basierend auf Monatsdaten

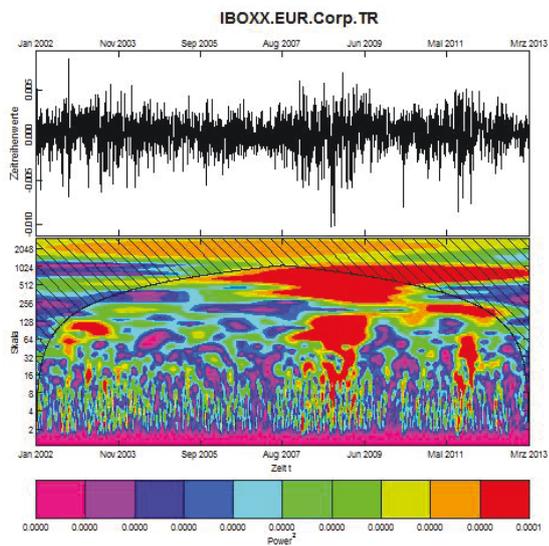


Abbildung A.6.23: Skalogramm: iBoxx EUR Corporates TR Index basierend auf Tagesdaten

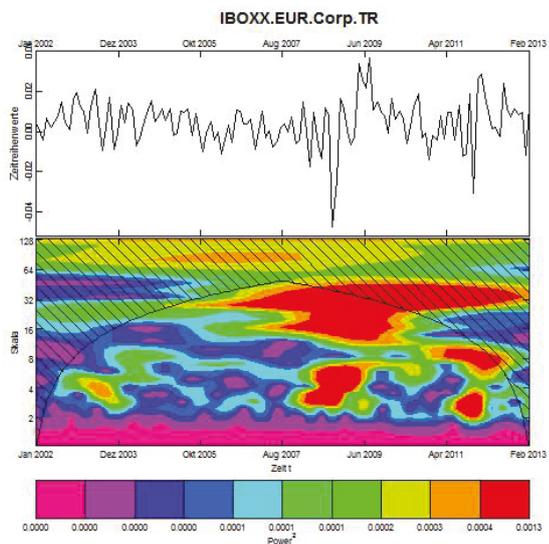


Abbildung A.6.24: Skalogramm: iBoxx EUR Corporates TR Index basierend auf Monatsdaten

ANHANG

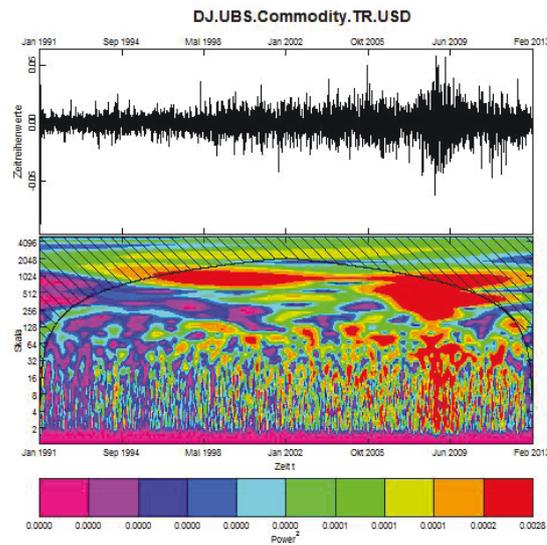


Abbildung A.6.25: Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Tagesdaten

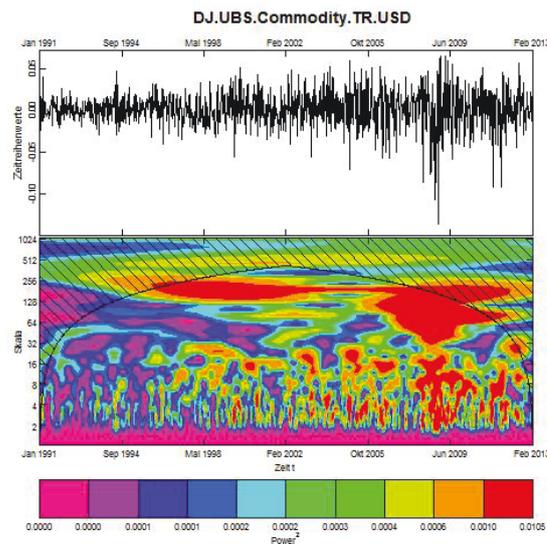


Abbildung A.6.26: Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Wochendaten

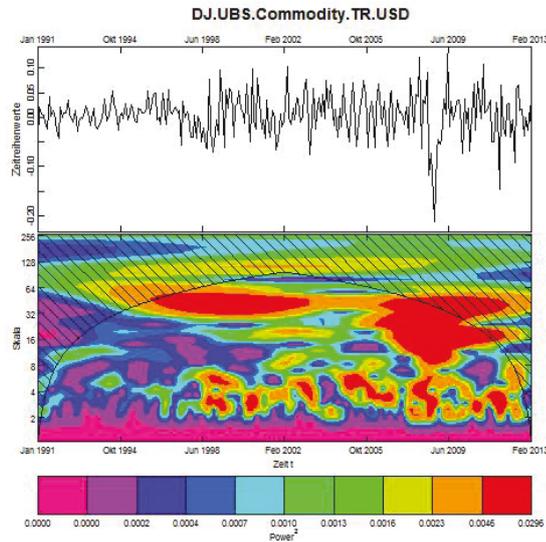


Abbildung A.6.27: Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Monatsdaten

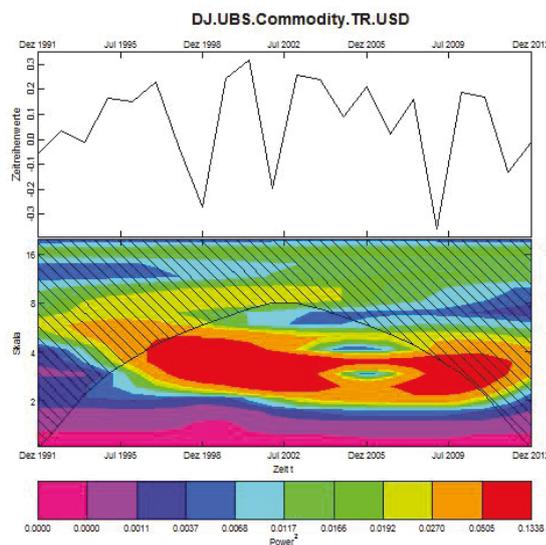


Abbildung A.6.28: Skalogramm: DJ UBS Commodity TR USD Index basierend auf Jahresdaten

ANHANG

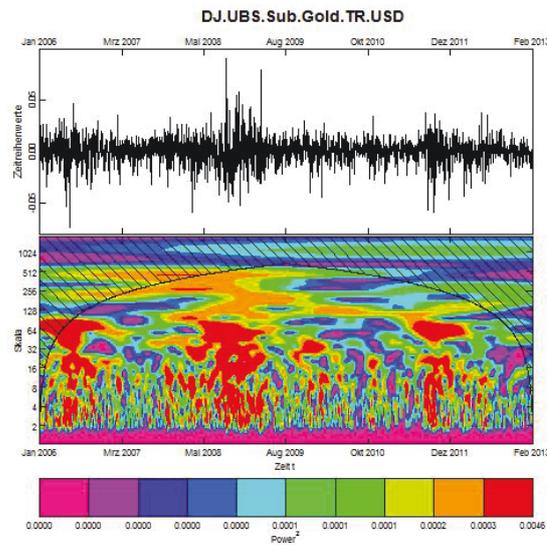


Abbildung A.6.29: Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index basierend auf Tagesdaten

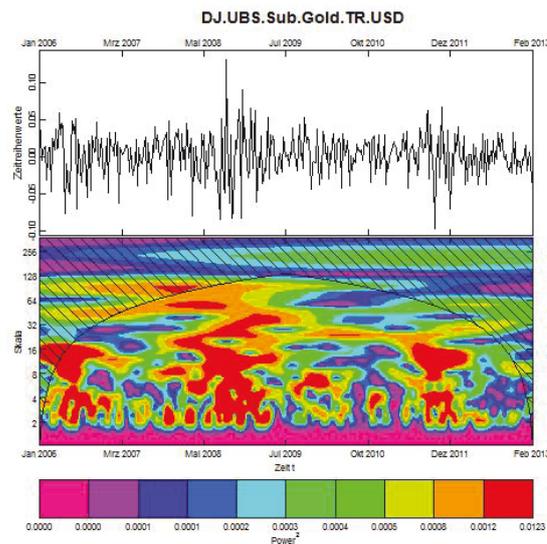


Abbildung A.6.30: Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index basierend auf Wochendaten

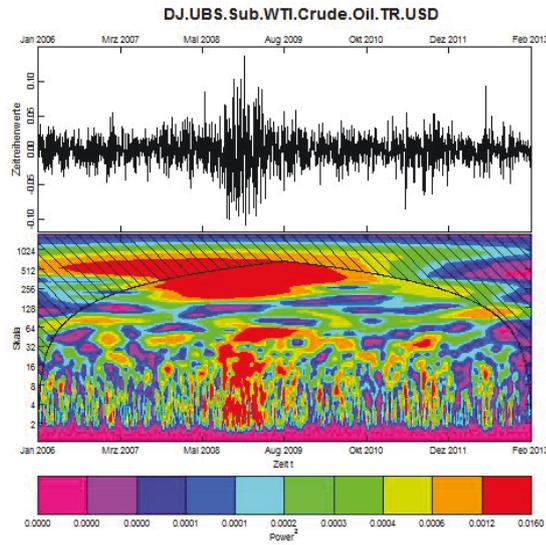


Abbildung A.6.31: Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub WTI Oil TR USD Index basierend auf Tagesdaten

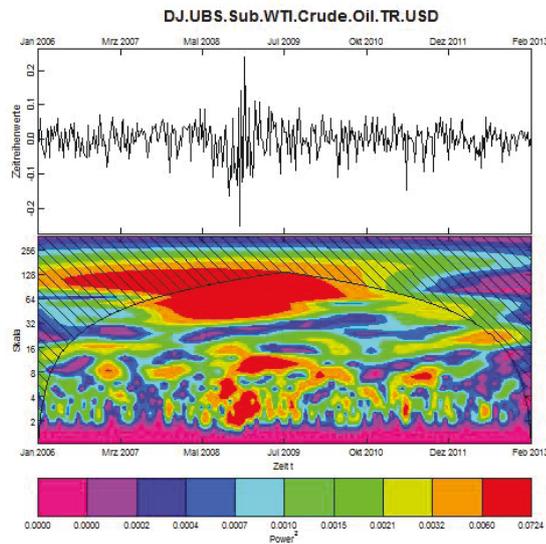


Abbildung A.6.32: Skalogramm: DJ UBS Commodity Sub WTI Oil TR USD Index basierend auf Wochendaten

A.7 Varianzanalyse – MODWT

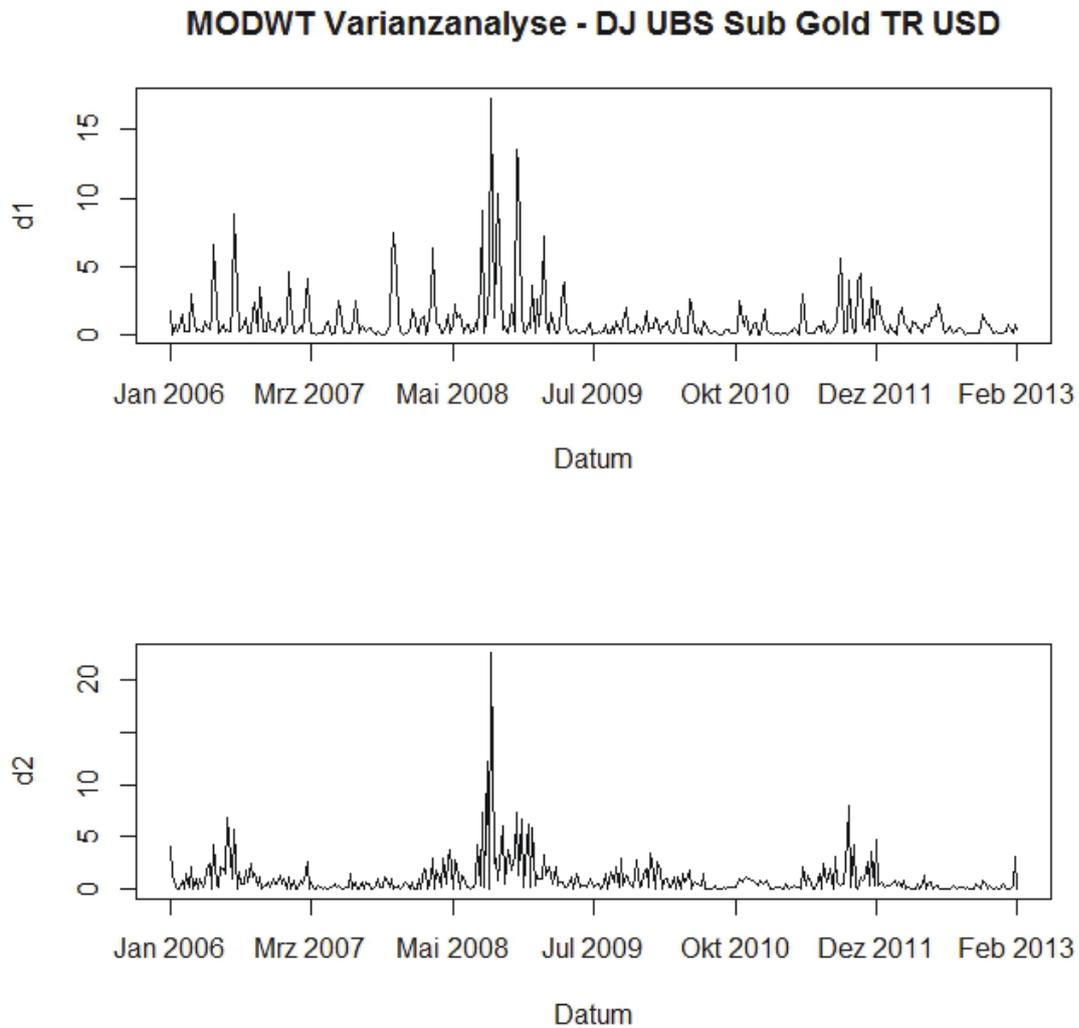


Abbildung A.7.1: MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) -d1 & d2

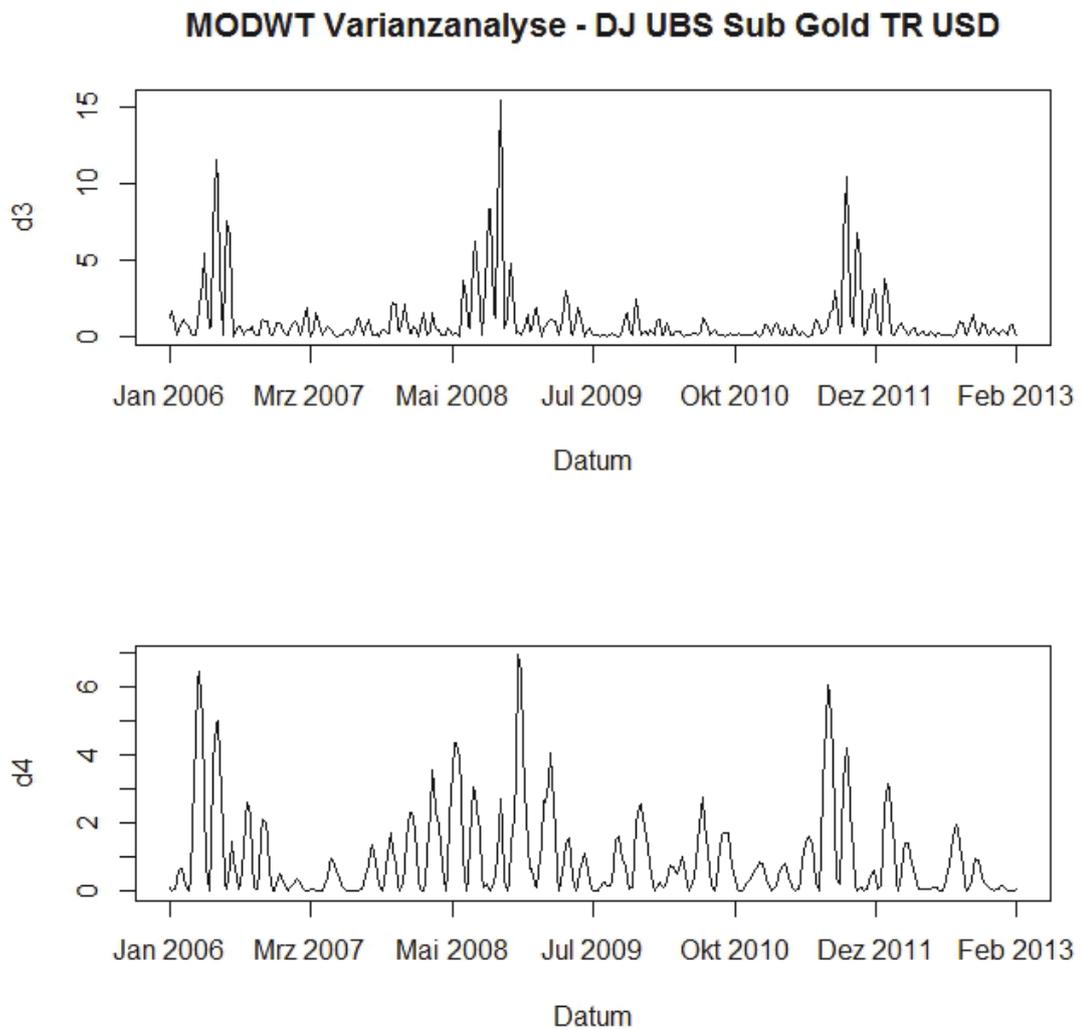


Abbildung A.7.2: MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) - d3 & d4

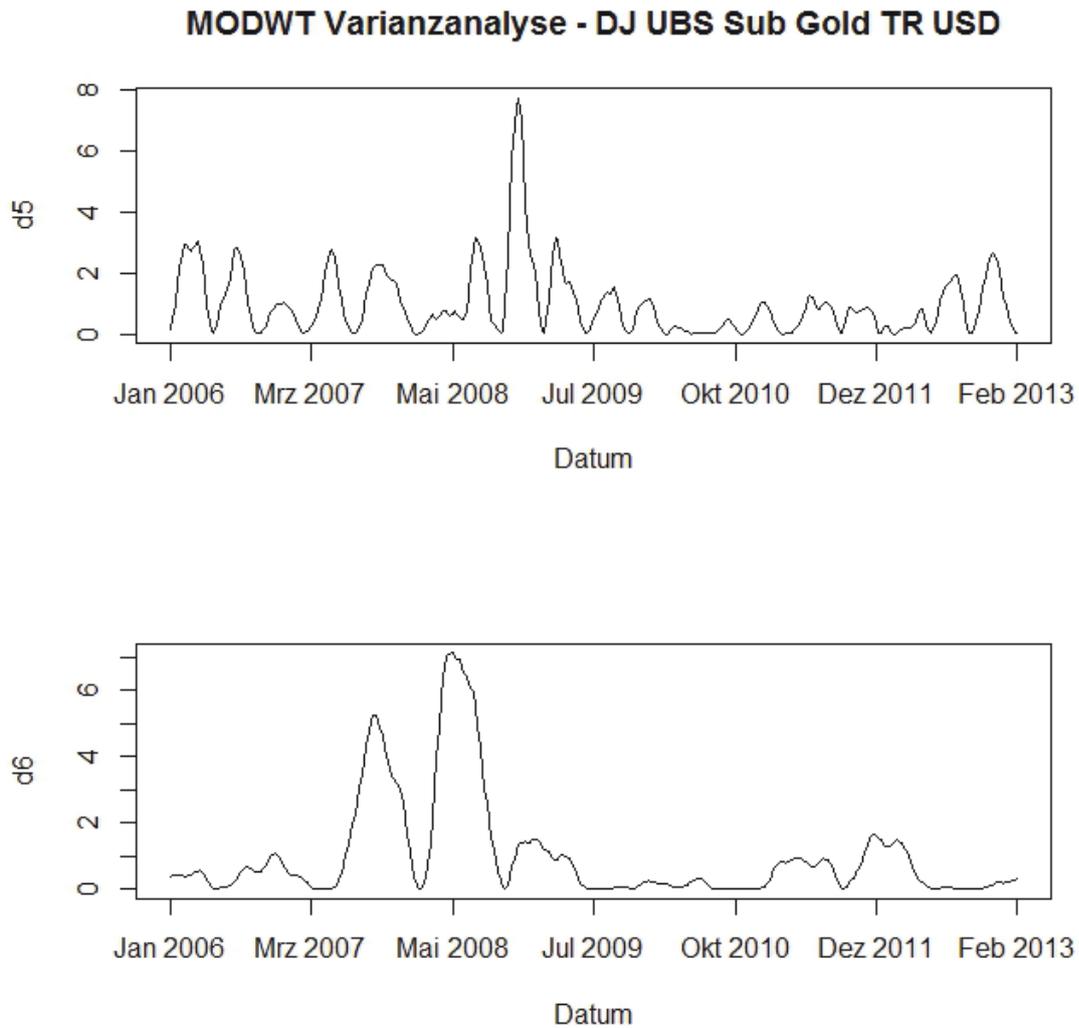


Abbildung A.7.3: MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD Index (Wochenrenditen) - d5 & d6

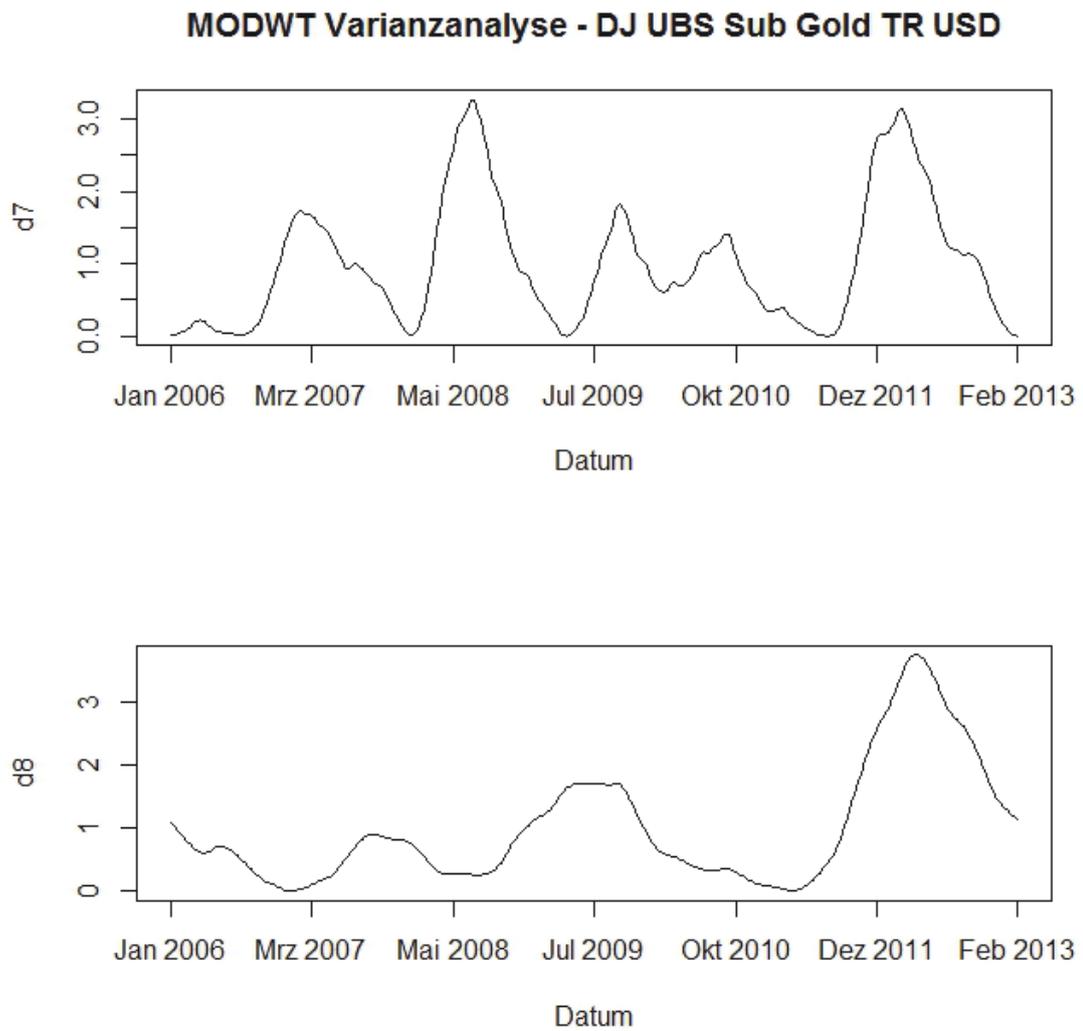


Abbildung A.7.4: MODWT Varianzanalyse des DJ UBS Commodity Sub Gold TR USD (Wochenrenditen) - d7 & d8

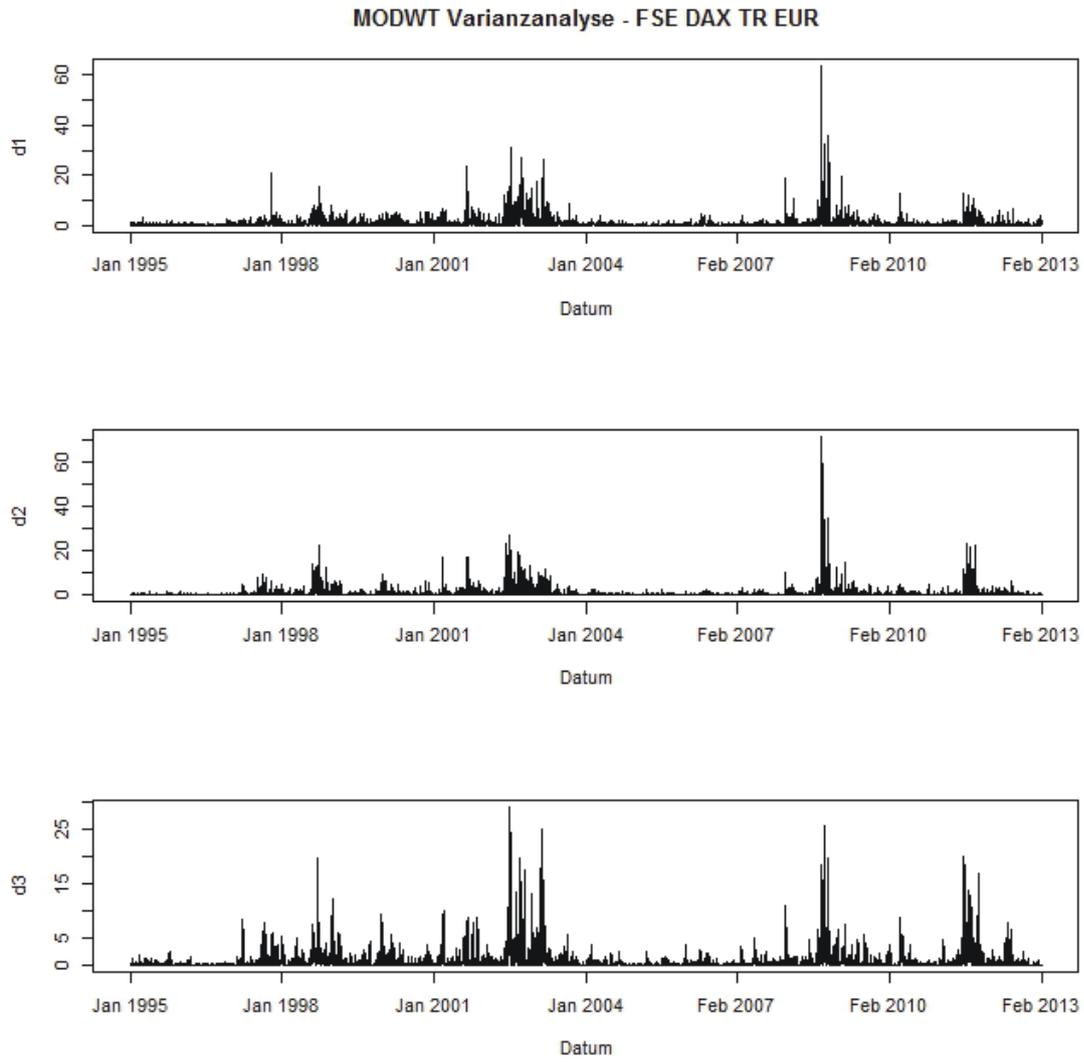


Abbildung A.7.5: MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d1 – d3

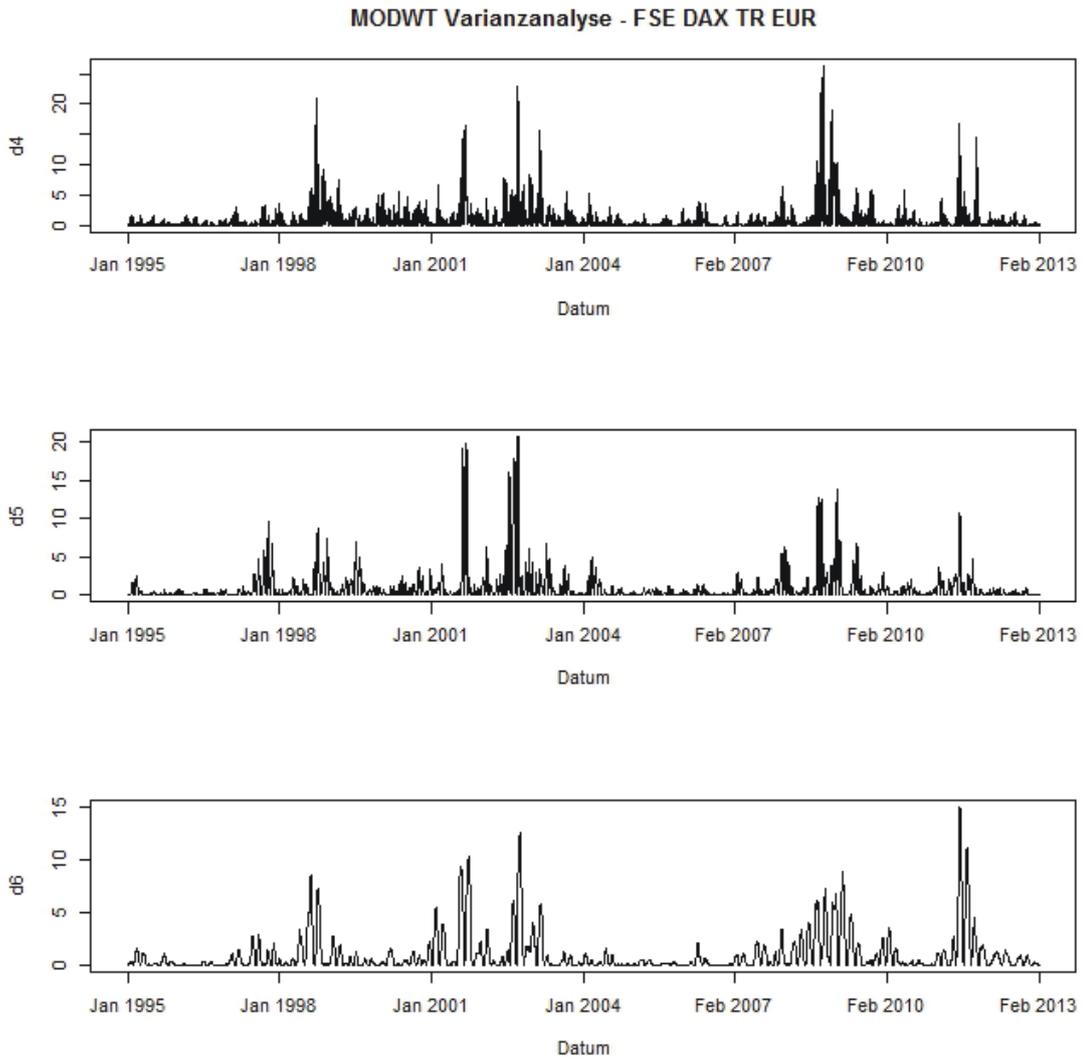


Abbildung A.7.6: MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d4 – d6

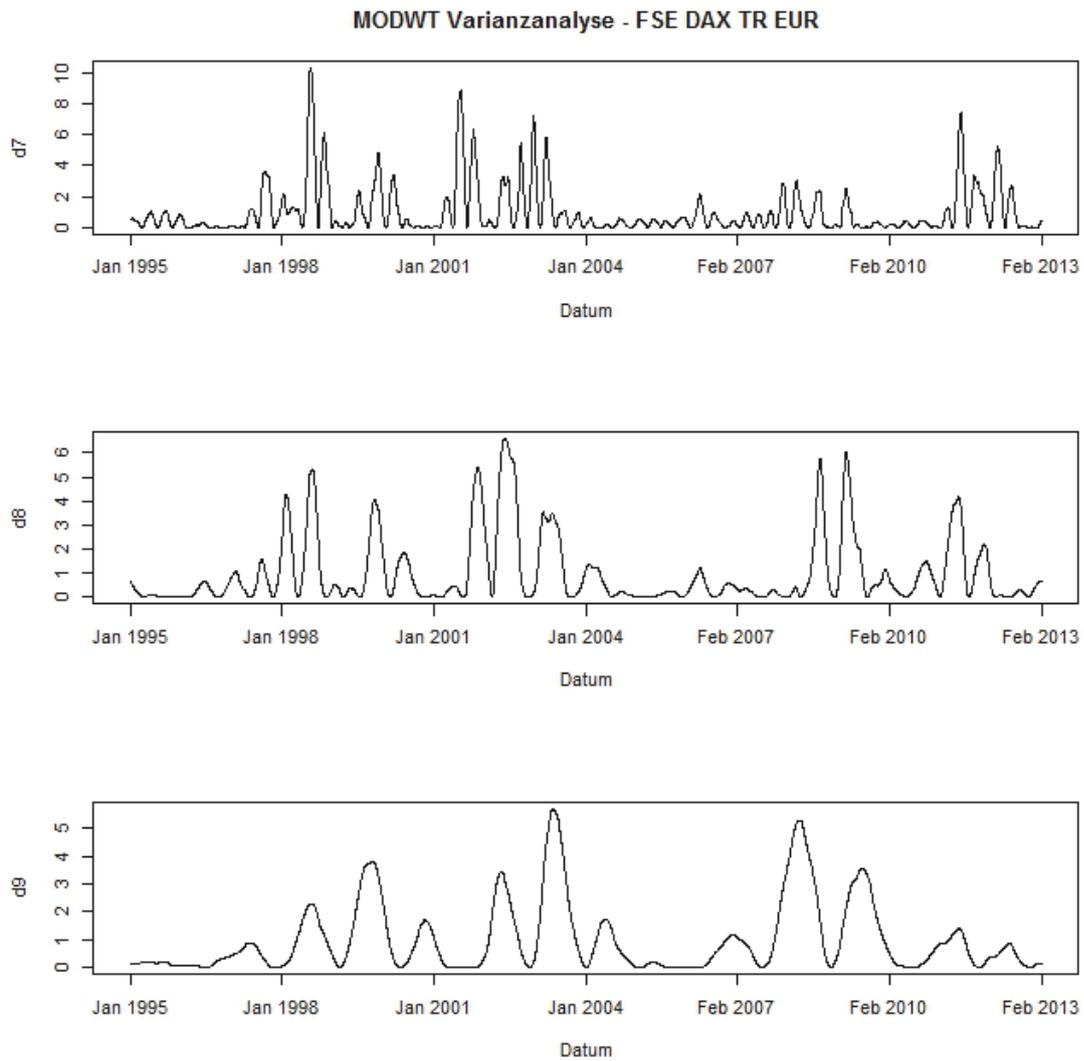


Abbildung A.7.7: MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d7 – d9

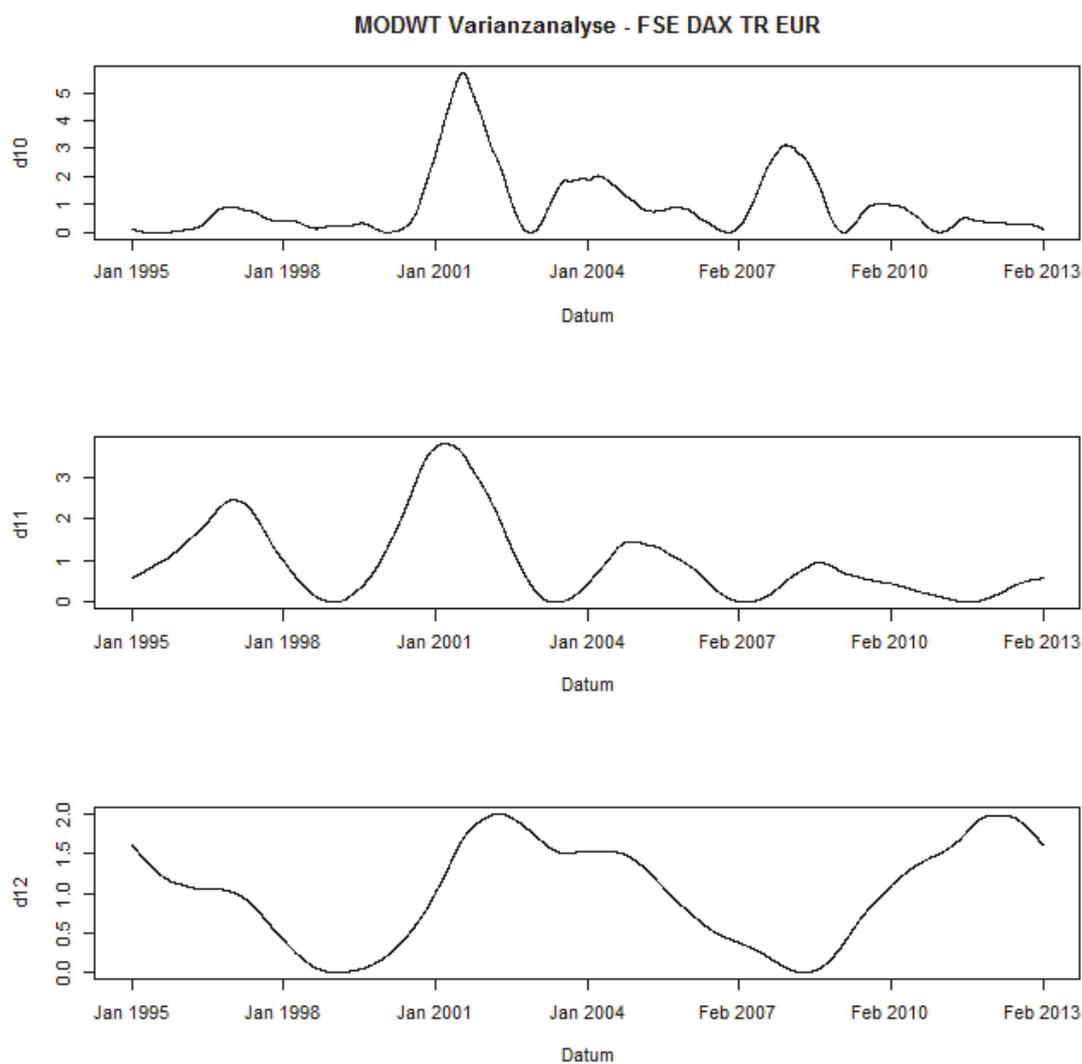


Abbildung A.7.8: MODWT Varianzanalyse des FSE DAX TR EUR Index (Tagesrenditen) - d10 – d12

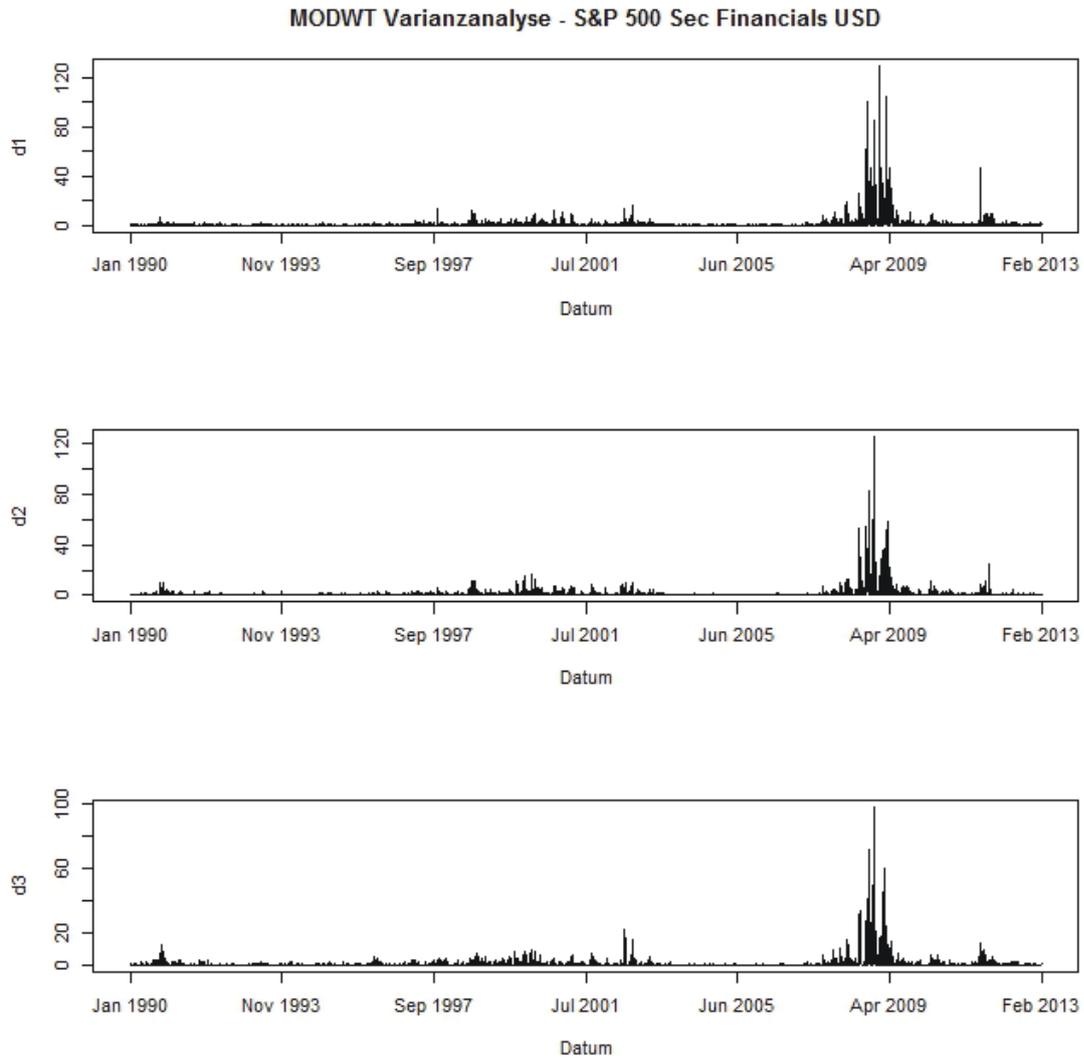


Abbildung A.7.9: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d1 – d3

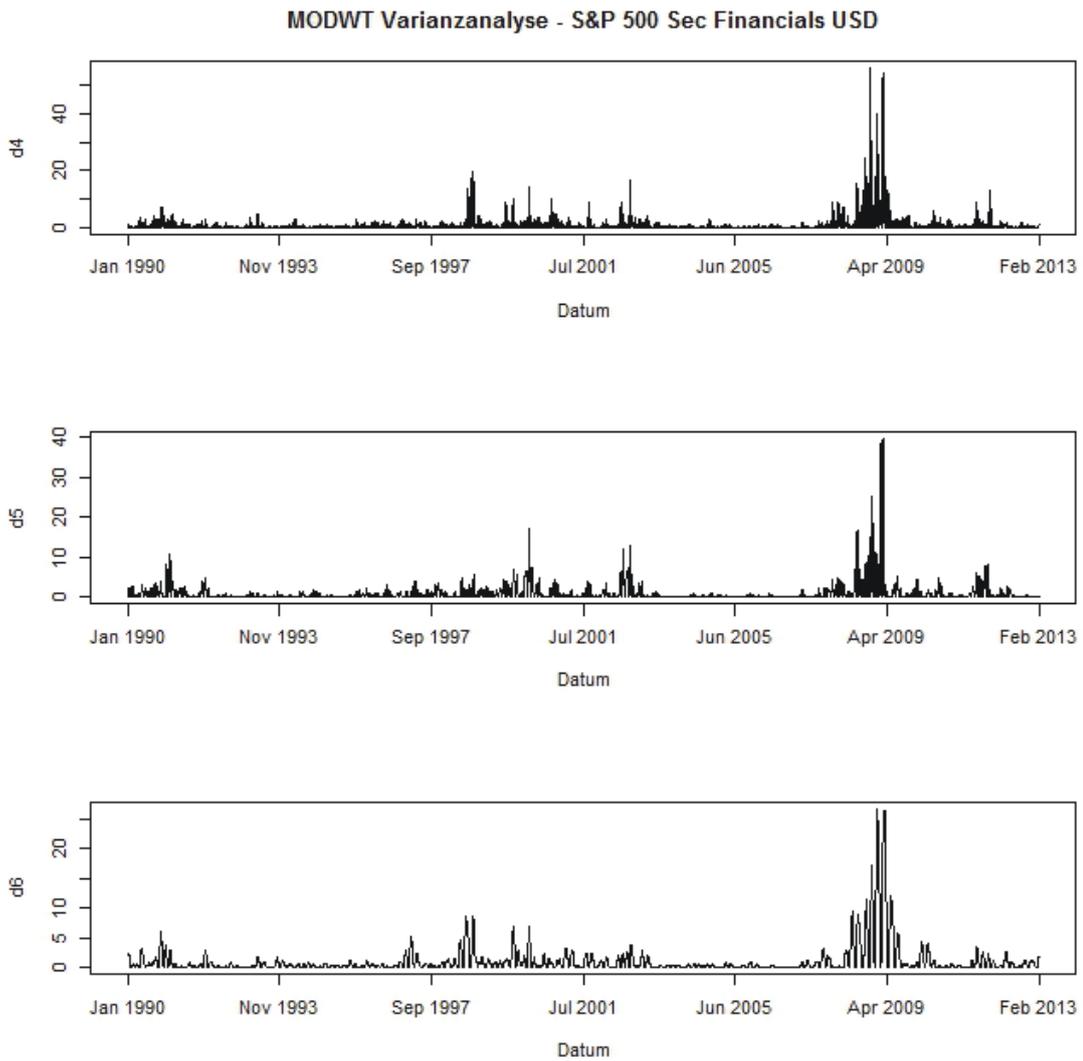


Abbildung A.7.10: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d4 – d6

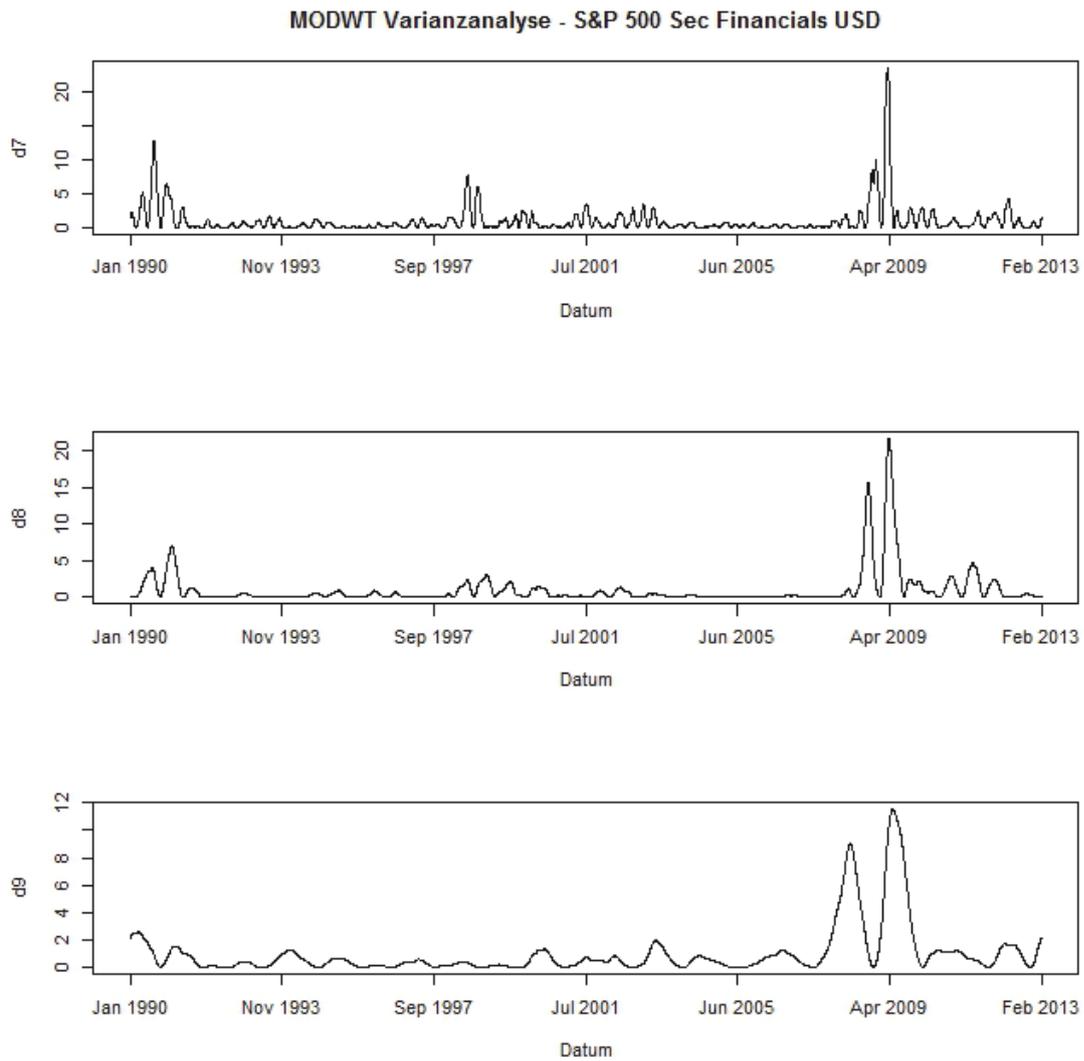


Abbildung A.7.11: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d7 – d9

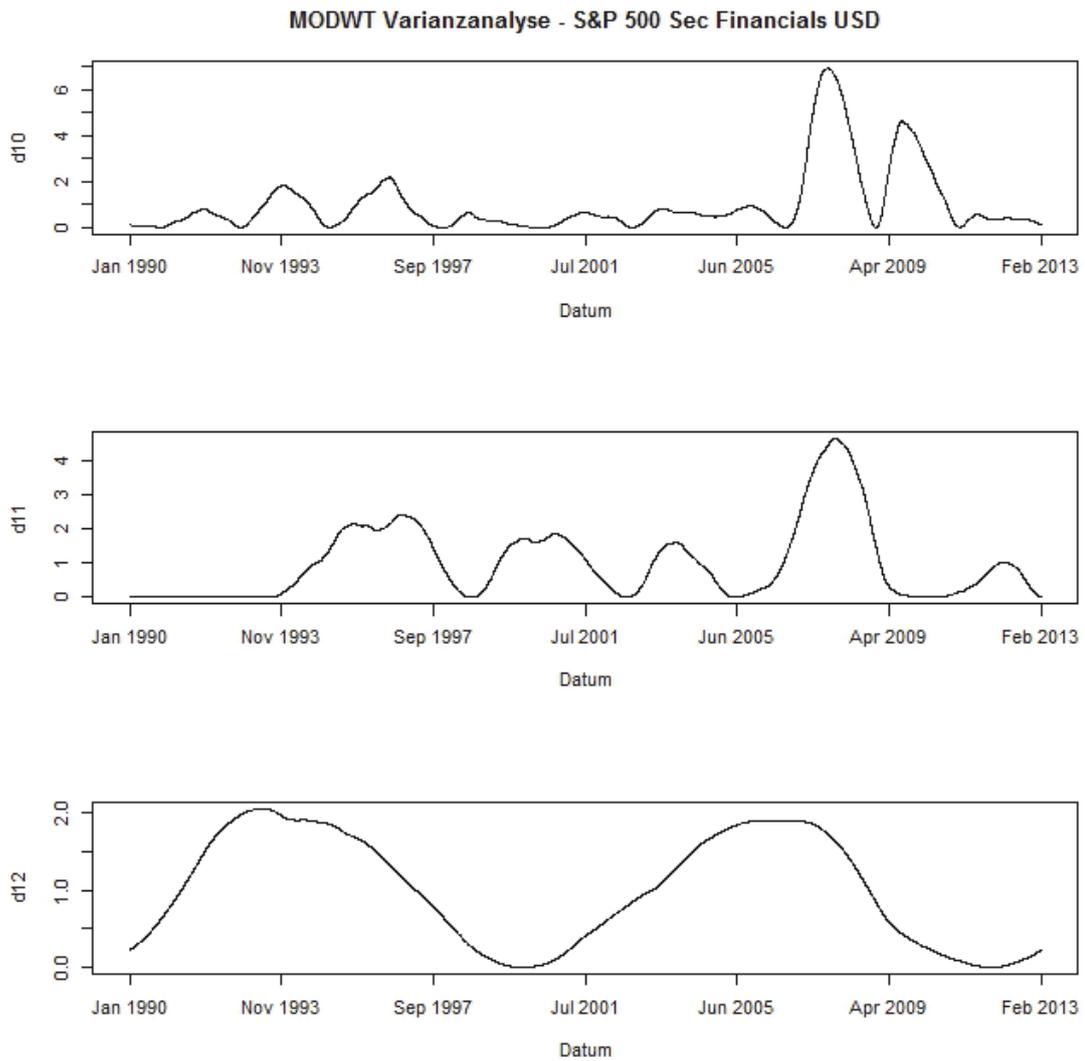


Abbildung A.7.12: MODWT Varianzanalyse des S&P 500 Sec Financials USD Index (Tagesrenditen) - d10 – d12

ANHANG

A.8 Ergänzende Auswertungen zu Abschnitt 4.3.4

Tabelle A.8.1: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – D4, j=1 bis 4

	Perf	Perio	Ref1	Ref 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=1									
Ret ges [%]	6188858,12	212,76	777,43	790,95	561,05	212,76	216,27	233,79	46,06
Ret ann [%]	150,78	9,97	19,84	19,99	17,05	9,97	10,07	10,57	3,21
σ [%]	1,03	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,36	17,57	17,52	17,52	17,53	17,57	17,57	17,56	17,58
Sharpe	9,22	0,57	1,13	1,14	0,97	0,57	0,57	0,60	0,18
max Ret [%]	7,21	6,27	7,14	7,14	7,14	6,27	6,27	7,14	6,27
min Ret [%]	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14
max DD [%]	-13,89	-32,04	-18,21	-18,21	-19,58	-32,04	-32,04	-31,92	-47,76
# Trades	747	989	1078	1078	1059	989	971	1009	909
Trades p.a	62,3	82,4	89,8	89,8	88,3	82,4	80,9	84,1	75,8
# pos Trades	564	384	431	432	419	384	377	389	345
# neg Trades	183	605	647	646	640	605	594	620	564
pos Trades [%]	75,50	38,83	39,98	40,07	39,57	38,83	38,83	38,55	37,95
j=2									
Ret ges [%]	12733021,32	115,63	144,47	144,47	351,47	115,63	103,78	139,59	-17,20
Ret ann [%]	166,32	6,61	7,73	7,73	13,38	6,61	6,11	7,55	-1,56
σ [%]	1,03	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,25	17,57	17,57	17,57	17,55	17,57	17,57	17,57	17,55
Sharpe	10,24	0,38	0,44	0,44	0,76	0,38	0,35	0,43	-0,09
max Ret [%]	7,21	7,14	7,14	7,14	7,14	7,14	7,19	7,19	7,19
min Ret [%]	-9,10	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,10
max DD [%]	-21,31	-24,36	-24,36	-24,36	-21,42	-24,36	-32,53	-27,16	-41,97
# Trades	383	677	739	739	983	677	665	721	623
Trades p.a	31,9	56,4	61,6	61,6	81,9	56,4	55,4	60,1	51,9
# pos Trades	362	268	289	289	365	268	262	282	246
# neg Trades	21	409	450	450	618	409	403	439	377
pos Trades [%]	94,52	39,59	39,11	39,11	37,13	39,59	39,40	39,11	39,49
j=3									
Ret ges [%]	1104720,64	2,92	-6,80	1,13	982,17	2,92	29,62	52,91	-26,61
Ret ann [%]	117,24	0,24	-0,59	0,09	21,95	0,24	2,19	3,60	-2,54
σ [%]	1,06	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,72	17,55	17,56	17,55	17,50	17,55	17,54	17,54	17,51
Sharpe	7,01	0,01	-0,03	0,01	1,25	0,01	0,12	0,21	-0,15
max Ret [%]	7,32	7,32	6,27	6,27	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-11,78	-35,83	-37,93	-34,90	-18,60	-35,83	-44,56	-32,89	-37,57
# Trades	183	465	489	487	1013	465	431	475	407
Trades p.a	15,2	38,7	40,7	40,6	84,4	38,7	35,9	39,6	33,9
# pos Trades	177	162	173	174	418	162	155	171	149
# neg Trades	6	303	316	313	595	303	276	304	258
pos Trades [%]	96,72	34,84	35,38	35,73	41,26	34,84	35,96	36,00	36,61
j=4									
Ret ges [%]	66848,79	132,55	184,70	174,64	851,06	132,55	204,90	180,60	27,87
Ret ann [%]	71,98	7,29	9,11	8,78	20,65	7,29	9,74	8,98	2,07
σ [%]	1,08	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	17,10	17,50	17,50	17,50	17,51	17,50	17,50	17,50	17,50
Sharpe	4,21	0,42	0,52	0,50	1,18	0,42	0,56	0,51	0,12
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-18,77	-31,79	-26,30	-28,01	-18,85	-31,79	-33,27	-26,66	-35,79
# Trades	81	289	309	311	1117	289	275	297	237
Trades p.a	6,7	24,1	25,7	25,9	93,1	24,1	22,9	24,7	19,7
# pos Trades	76	97	106	106	464	97	94	101	81
# neg Trades	5	192	203	205	653	192	181	196	156
pos Trades [%]	93,83	33,56	34,30	34,08	41,54	33,56	34,18	34,01	34,18

ANHANG

Tabelle A.8.2: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – D4, j=5 bis 8

	Perf	Perio	Refl	Refl 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=5									
Ret ges [%]	12065,95	214,15	226,93	223,58	860,84	214,15	360,57	172,75	240,92
Ret ann [%]	49,20	10,01	10,38	10,28	20,75	10,01	13,57	8,72	10,76
σ [%]	1,09	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,10	1,11	1,10
σ ann [%]	17,26	17,48	17,48	17,48	17,50	17,48	17,46	17,48	17,46
Sharpe	2,85	0,57	0,59	0,59	1,19	0,57	0,78	0,50	0,62
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-17,64	-27,08	-27,08	-27,08	-18,85	-27,08	-21,23	-21,26	-21,75
# Trades	41	189	193	189	1187	189	153	195	177
Trades p.a	3,4	15,7	16,1	15,7	98,9	15,7	12,7	16,2	14,7
# pos Trades	40	57	57	56	492	57	50	55	65
# neg Trades	1	132	136	133	695	132	103	140	112
pos Trades [%]	97,56	30,16	29,53	29,63	41,45	30,16	32,68	28,21	36,72
j=6									
Ret ges [%]	4021,96	89,85	92,63	103,65	684,55	89,85	88,95	89,25	71,33
Ret ann [%]	36,33	5,49	5,62	6,11	18,73	5,49	5,45	5,46	4,59
σ [%]	1,10	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,10	1,11
σ ann [%]	17,33	17,48	17,48	17,48	17,51	17,48	17,48	17,47	17,48
Sharpe	2,10	0,31	0,32	0,35	1,07	0,31	0,31	0,31	0,26
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-19,74	-38,81	-38,86	-35,50	-17,96	-38,81	-31,68	-35,65	-45,63
# Trades	22	133	133	127	1258	133	128	140	183
Trades p.a	1,8	11,1	11,1	10,6	104,8	11,1	10,7	11,7	15,2
# pos Trades	22	29	29	29	502	29	24	30	54
# neg Trades	0	104	104	98	756	104	104	110	129
pos Trades [%]	100,00	21,80	21,80	22,83	39,90	21,80	18,75	21,43	29,51
j=7									
Ret ges [%]	1196,76	77,83	84,87	89,25	735,44	77,83	139,99	156,59	140,82
Ret ann [%]	23,81	4,91	5,25	5,46	19,35	4,91	7,57	8,17	7,60
σ [%]	1,10	1,11	1,10	1,10	1,11	1,11	1,10	1,10	1,11
σ ann [%]	17,39	17,47	17,47	17,47	17,50	17,47	17,46	17,46	17,47
Sharpe	1,37	0,28	0,30	0,31	1,11	0,28	0,43	0,47	0,43
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-21,87	-39,39	-36,60	-36,34	-17,33	-39,39	-26,90	-29,82	-29,17
# Trades	7	114	114	110	1288	114	82	98	221
Trades p.a	0,6	9,5	9,5	9,2	107,3	9,5	6,8	8,2	18,4
# pos Trades	7	15	15	15	506	15	18	16	75
# neg Trades	0	99	99	95	782	99	64	82	146
pos Trades [%]	100,00	13,16	13,16	13,64	39,29	13,16	21,95	16,33	33,94
j=8									
Ret ges [%]	832,82	167,74	160,95	176,37	1141,55	162,91	143,06	134,39	126,92
Ret ann [%]	20,45	8,55	8,32	8,84	23,36	8,39	7,68	7,36	7,07
σ [%]	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,10	1,11
σ ann [%]	17,41	17,45	17,45	17,45	17,48	17,45	17,45	17,46	17,47
Sharpe	1,17	0,49	0,48	0,51	1,34	0,48	0,44	0,42	0,40
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-22,53	-49,82	-49,82	-38,33	-17,33	-49,82	-48,31	-49,88	-34,86
# Trades	5	39	39	46	1294	41	42	59	246
Trades p.a	0,4	3,2	3,2	3,8	107,8	3,4	3,5	4,9	20,5
# pos Trades	5	9	9	9	514	9	7	11	88
# neg Trades	0	30	30	37	780	32	35	48	158
pos Trades [%]	100,00	23,08	23,08	19,57	39,72	21,95	16,67	18,64	35,77

ANHANG

Tabelle A.8.3: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – LA8, j=1 bis 4

	Perf	Perio	Refl	Refl 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=1									
Ret ges [%]	6266780,96	203,17	486,10	502,30	555,35	199,87	240,96	211,41	61,83
Ret ann [%]	151,05	9,68	15,88	16,14	16,96	9,58	10,76	9,93	4,09
σ [%]	1,03	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,35	17,57	17,54	17,54	17,53	17,57	17,56	17,57	17,57
Sharpe	9,24	0,55	0,91	0,92	0,97	0,55	0,61	0,57	0,23
max Ret [%]	7,21	6,27	7,14	7,14	7,14	6,27	6,27	6,27	6,27
min Ret [%]	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14
max DD [%]	-13,89	-31,56	-21,34	-19,16	-19,80	-32,18	-29,93	-25,27	-48,29
# Trades	743	977	1090	1090	1050	981	967	1005	931
Trades p.a	61,9	81,4	90,8	90,8	87,5	81,8	80,6	83,8	77,6
# pos Trades	568	383	437	439	420	386	381	387	355
# neg Trades	175	594	653	651	630	595	586	618	576
pos Trades [%]	76,45	39,20	40,09	40,28	40,00	39,35	39,40	38,51	38,13
j=2									
Ret ges [%]	11754507,53	69,91	83,84	83,84	332,55	77,44	106,81	108,00	-38,72
Ret ann [%]	164,56	4,52	5,21	5,21	12,98	4,89	6,24	6,29	-4,00
σ [%]	1,03	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,26	17,57	17,58	17,58	17,55	17,57	17,57	17,57	17,55
Sharpe	10,12	0,26	0,30	0,30	0,74	0,28	0,36	0,36	-0,23
max Ret [%]	7,21	7,14	7,19	7,19	7,14	7,14	7,19	7,19	7,19
min Ret [%]	-9,10	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,14	-9,10
max DD [%]	-21,31	-29,42	-27,10	-27,10	-24,25	-29,42	-32,53	-29,57	-47,93
# Trades	391	695	749	749	959	695	661	713	645
Trades p.a	32,6	57,9	62,4	62,4	79,9	57,9	55,1	59,4	53,7
# pos Trades	369	272	294	294	357	274	267	278	252
# neg Trades	22	423	455	455	602	421	394	435	393
pos Trades [%]	94,37	39,14	39,25	39,25	37,23	39,42	40,39	38,99	39,07
j=3									
Ret ges [%]	783665,11	28,73	6,81	6,74	884,30	26,21	8,61	25,78	-32,65
Ret ann [%]	111,11	2,13	0,55	0,55	20,99	1,96	0,69	1,93	-3,24
σ [%]	1,06	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	16,77	17,54	17,55	17,55	17,51	17,54	17,54	17,54	17,51
Sharpe	6,62	0,12	0,03	0,03	1,20	0,11	0,04	0,11	-0,19
max Ret [%]	7,32	7,32	6,27	6,27	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-11,78	-38,36	-36,21	-36,21	-18,60	-39,15	-50,46	-34,88	-43,33
# Trades	193	451	477	475	981	449	423	467	409
Trades p.a	16,1	37,6	39,7	39,6	81,7	37,4	35,2	38,9	34,1
# pos Trades	184	163	173	172	403	163	155	165	149
# neg Trades	9	288	304	303	578	286	268	302	260
pos Trades [%]	95,34	36,14	36,27	36,21	41,08	36,30	36,64	35,33	36,43
j=4									
Ret ges [%]	44233,73	139,48	101,64	147,77	825,63	134,01	221,43	115,31	-11,28
Ret ann [%]	66,17	7,55	6,02	7,85	20,38	7,34	10,22	6,60	-0,99
σ [%]	1,08	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
σ ann [%]	17,15	17,50	17,51	17,50	17,51	17,50	17,49	17,50	17,50
Sharpe	3,86	0,43	0,34	0,45	1,16	0,42	0,58	0,38	-0,06
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-20,26	-35,14	-33,94	-30,16	-18,85	-35,14	-25,50	-31,56	-43,16
# Trades	85	281	305	305	1099	277	267	291	253
Trades p.a	7,1	23,4	25,4	25,4	91,6	23,1	22,2	24,2	21,1
# pos Trades	80	97	103	105	464	94	89	93	80
# neg Trades	5	184	202	200	635	183	178	198	173
pos Trades [%]	94,12	34,52	33,77	34,43	42,22	33,94	33,33	31,96	31,62

ANHANG

Tabelle A.8.4: Auswertung des Trading-Systems für verschiedene Augmentationsverfahren – LA8, j=5 bis 8

	Perf	Perio	Refl	Refl 2	Konst	Null	Poly	AR(p)	Oh
j=5									
Ret ges [%]	12294,12	168,79	189,49	196,05	806,75	168,56	309,90	180,02	165,14
Ret ann [%]	49,43	8,59	9,26	9,47	20,17	8,58	12,48	8,96	8,46
σ [%]	1,09	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,10	1,11	1,10
σ ann [%]	17,25	17,48	17,47	17,48	17,51	17,48	17,46	17,48	17,47
Sharpe	2,87	0,49	0,53	0,54	1,15	0,49	0,71	0,51	0,48
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-17,64	-27,08	-26,77	-27,08	-18,85	-27,08	-21,23	-19,64	-30,63
# Trades	42	185	187	185	1175	183	151	199	171
Trades p.a	3,5	15,4	15,6	15,4	97,9	15,2	12,6	16,6	14,2
# pos Trades	39	56	58	60	485	56	50	57	65
# neg Trades	3	129	129	125	690	127	101	142	106
pos Trades [%]	92,86	30,27	31,02	32,43	41,28	30,60	33,11	28,64	38,01
j=6									
Ret ges [%]	3184,07	94,82	111,90	139,63	682,25	90,42	89,40	146,43	39,49
Ret ann [%]	33,77	5,71	6,46	7,55	18,70	5,51	5,47	7,81	2,81
σ [%]	1,10	1,11	1,11	1,10	1,11	1,11	1,11	1,10	1,11
σ ann [%]	17,34	17,48	17,47	17,47	17,51	17,48	17,47	17,47	17,48
Sharpe	1,95	0,33	0,37	0,43	1,07	0,32	0,31	0,45	0,16
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-19,74	-43,06	-39,12	-31,93	-18,21	-43,06	-30,85	-26,89	-45,52
# Trades	24	123	125	125	1262	127	124	136	191
Trades p.a	2,0	10,2	10,4	10,4	105,2	10,6	10,3	11,3	15,9
# pos Trades	23	28	27	29	503	28	24	33	51
# neg Trades	1	95	98	96	759	99	100	103	140
pos Trades [%]	95,83	22,76	21,60	23,20	39,86	22,05	19,35	24,26	26,70
j=7									
Ret ges [%]	1219,73	133,11	135,14	116,18	789,47	124,32	117,36	136,59	144,62
Ret ann [%]	23,99	7,31	7,39	6,64	19,98	6,96	6,68	7,44	7,74
σ [%]	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,12	1,10	1,11
σ ann [%]	17,39	17,46	17,46	17,46	17,50	17,46	17,67	17,46	17,47
Sharpe	1,38	0,42	0,42	0,38	1,14	0,40	0,38	0,43	0,44
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-19,74	-34,59	-34,70	-33,73	-18,17	-35,74	-30,37	-30,59	-27,12
# Trades	7	96	96	100	1288	94	101	100	217
Trades p.a	0,6	8,0	8,0	8,3	107,3	7,8	1,7	8,3	18,1
# pos Trades	7	16	14	16	513	15	20	18	74
# neg Trades	0	80	82	84	775	79	81	82	143
pos Trades [%]	100,00	16,67	14,58	16,00	39,83	15,96	19,80	18,00	34,10
j=8									
Ret ges [%]	926,56	127,04	126,30	242,07	1196,83	106,28	128,77	117,70	135,20
Ret ann [%]	21,42	7,07	7,04	10,79	23,81	6,22	7,14	6,70	7,39
σ [%]	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,12	1,10	1,11
σ ann [%]	17,40	17,46	17,46	17,45	17,48	17,46	17,66	17,46	17,47
Sharpe	1,23	0,41	0,40	0,62	1,36	0,36	0,40	0,38	0,42
max Ret [%]	7,32	7,32	7,32	7,32	7,14	7,32	7,32	7,32	7,32
min Ret [%]	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10	-9,14	-9,10	-9,10	-9,10	-9,10
max DD [%]	-23,29	-54,72	-55,14	-34,05	-17,33	-55,93	-48,88	-50,17	-34,32
# Trades	6	45	53	48	1288	48	45	49	244
Trades p.a	0,5	3,7	4,4	4,0	107,3	4,0	0,7	4,1	20,3
# pos Trades	6	12	14	11	511	10	9	9	87
# neg Trades	0	33	39	37	777	38	36	40	157
pos Trades [%]	100,00	26,67	26,42	22,92	39,67	20,83	20,00	18,37	35,66

A.9 Ergänzende Auswertungen zu Abschnitt 4.3.7

Ergebnisse: Level 2

Tabelle A.9.1: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 2

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	379,57	13,96	1,10	17,38	0,80	-23,32	729	61	41
Asia	816,42	20,27	1,36	21,43	0,95	-25,63	718	60	39
EM	11950,03	49,08	1,31	20,64	2,38	-16,24	681	57	44
Europe	-85,09	-14,67	1,50	23,75	-0,62	-86,44	833	69	33
North America	-93,93	-20,83	1,30	20,48	-1,02	-94,87	829	69	30
World	187,19	9,19	1,11	17,56	0,52	-24,36	745	62	39
Australia	-14,18	-1,27	1,65	26,06	-0,05	-64,54	779	65	35
Austria	114,77	6,58	1,94	30,70	0,21	-65,89	769	64	36
Belgium	-66,60	-8,73	1,64	25,91	-0,34	-79,19	871	73	32
Brazil	347,59	13,30	2,28	36,13	0,37	-59,05	792	66	38
Canada	372,10	13,81	1,50	23,77	0,58	-31,77	758	63	37
Chile	1350,66	24,97	1,41	22,26	1,12	-30,59	735	61	40
China	82,25	5,13	1,81	28,69	0,18	-55,95	739	62	37
Colombia	1705,26	27,27	1,69	26,64	1,02	-55,45	755	63	38
Czech Republic	-17,48	-1,59	1,85	29,25	-0,05	-75,15	783	65	34
Denmark	17,90	1,38	1,54	24,32	0,06	-57,79	797	66	35
Finland	-77,20	-11,59	2,01	31,86	-0,36	-81,82	835	70	33
France	-92,27	-19,21	1,72	27,25	-0,70	-93,05	843	70	31
Germany	-83,80	-14,07	1,75	27,67	-0,51	-85,43	831	69	32
Greece	315,13	12,59	2,22	35,17	0,36	-73,03	757	63	37
Hong Kong	122,56	6,89	1,35	21,42	0,32	-34,39	739	62	37
Hungary	310,48	12,49	2,37	37,53	0,33	-50,73	781	65	36
India	1518,63	26,11	1,78	28,15	0,93	-30,93	724	60	39
Indonesia	9770,47	46,62	1,97	31,16	1,50	-48,84	722	60	39
Ireland	-78,92	-12,17	1,99	31,45	-0,39	-89,90	829	69	34
Italy	-62,05	-7,76	1,76	27,90	-0,28	-75,18	813	68	33
Japan	-96,70	-24,75	1,44	22,81	-1,08	-97,57	881	73	30
Korea	61,34	4,07	2,01	31,74	0,13	-69,42	766	64	36
Malaysia	949,70	21,64	0,98	15,49	1,40	-18,56	710	59	40
Mexico	105,45	6,18	1,70	26,92	0,23	-50,25	779	65	36
Netherlands	-76,45	-11,35	1,64	26,00	-0,44	-80,61	821	68	33
New Zealand	-30,02	-2,93	1,40	22,13	-0,13	-40,43	818	68	32
Norway	3,32	0,27	2,08	32,88	0,01	-74,83	792	66	38
Peru	61,30	4,06	1,98	31,23	0,13	-48,76	790	66	34
Philippines	3260,19	34,03	1,56	24,60	1,38	-22,39	702	58	41
Poland	41,05	2,91	2,08	32,85	0,09	-69,34	834	69	35
Portugal	41,23	2,92	1,48	23,33	0,13	-57,15	801	67	34
Russia	681,05	18,68	2,41	38,16	0,49	-40,21	783	65	39
Singapore	45,88	3,20	1,38	21,74	0,15	-33,05	809	67	32
South Africa	-64,99	-8,37	1,87	29,59	-0,28	-74,63	799	67	36
Spain	-79,72	-12,45	1,84	29,03	-0,43	-83,07	829	69	32
Sweden	-85,51	-14,87	1,98	31,27	-0,48	-94,00	835	70	33
Switzerland	-84,49	-14,38	1,31	20,75	-0,69	-87,10	861	72	30
Taiwan	-26,75	-2,56	1,54	24,42	-0,10	-56,94	798	66	32
Thailand	3454,17	34,66	1,69	26,79	1,29	-23,20	715	60	41
Turkey	1186,84	23,73	2,59	40,88	0,58	-55,70	784	65	36
UK	-93,23	-20,10	1,49	23,55	-0,85	-93,52	869	72	30
USA	-96,43	-24,26	1,31	20,67	-1,17	-96,93	847	71	29

ANHANG

Tabelle A.9.2: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 2

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	587,92	17,45	0,93	14,72	1,19	-23,11
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	3146,86	33,68	1,19	18,81	1,79	-16,04
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

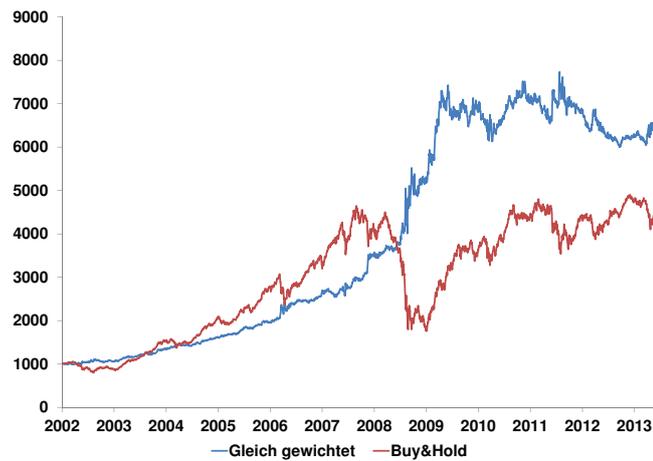


Abbildung A.9.1: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 2)

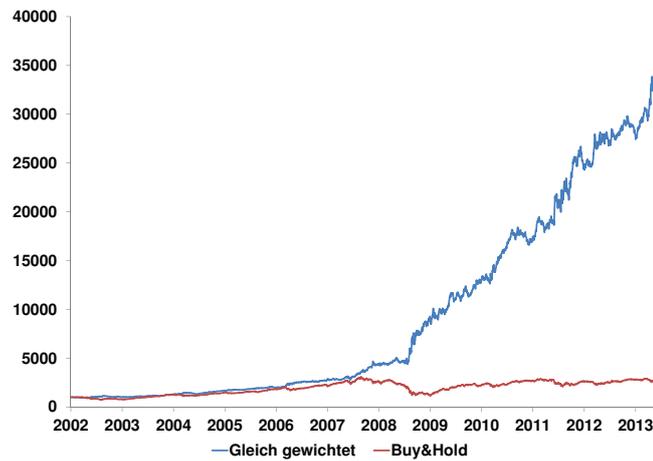


Abbildung A.9.2: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 2)

ANHANG

Ergebnisse: Level 3

Tabelle A.9.3: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 3

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	148,10	7,87	1,10	17,37	0,45	-32,37	473	39	37
Asia	556,83	16,98	1,35	21,41	0,79	-25,57	488	41	35
EM	2013,78	28,95	1,31	20,73	1,40	-21,11	451	38	38
Europe	-32,32	-3,20	1,50	23,72	-0,13	-64,77	535	45	31
North America	-86,27	-15,25	1,29	20,47	-0,75	-87,84	573	48	27
World	19,14	1,47	1,11	17,55	0,08	-36,41	505	42	35
Australia	4,35	0,36	1,65	26,03	0,01	-49,06	527	44	31
Austria	351,35	13,38	1,94	30,66	0,44	-57,59	520	43	33
Belgium	-36,28	-3,69	1,64	25,89	-0,14	-86,02	549	46	30
Brazil	-3,51	-0,30	2,29	36,14	-0,01	-79,64	529	44	33
Canada	100,59	5,97	1,50	23,75	0,25	-51,34	504	42	36
Chile	1533,88	26,21	1,41	22,23	1,18	-32,54	477	40	37
China	232,36	10,53	1,81	28,65	0,37	-48,34	493	41	34
Colombia	1438,03	25,58	1,68	26,62	0,96	-47,43	491	41	33
Czech Republic	-24,36	-2,30	1,85	29,23	-0,08	-66,66	557	46	29
Denmark	-60,60	-7,47	1,54	24,29	-0,31	-80,71	565	47	30
Finland	-74,52	-10,77	2,01	31,83	-0,34	-78,56	557	46	30
France	-83,90	-14,12	1,72	27,22	-0,52	-85,41	573	48	30
Germany	-76,82	-11,47	1,75	27,65	-0,41	-78,60	555	46	30
Greece	215,87	10,06	2,22	35,15	0,29	-59,23	519	43	33
Hong Kong	108,57	6,32	1,35	21,40	0,30	-38,98	501	42	34
Hungary	198,88	9,55	2,37	37,51	0,25	-46,75	511	43	34
India	3790,21	35,67	1,78	28,08	1,27	-23,14	464	39	38
Indonesia	1693,64	27,20	1,97	31,19	0,87	-58,89	515	43	34
Ireland	-78,42	-12,00	1,99	31,42	-0,38	-91,02	571	48	30
Italy	-29,68	-2,89	1,76	27,87	-0,10	-61,37	537	45	29
Japan	-90,01	-17,47	1,44	22,80	-0,77	-91,37	607	51	28
Korea	-3,14	-0,27	2,01	31,72	-0,01	-73,77	508	42	33
Malaysia	936,35	21,51	0,98	15,46	1,39	-25,39	465	39	35
Mexico	44,58	3,12	1,70	26,89	0,12	-40,76	539	45	33
Netherlands	-57,93	-6,96	1,64	25,97	-0,27	-66,11	553	46	31
New Zealand	-53,70	-6,22	1,40	22,09	-0,28	-62,42	590	49	26
Norway	118,99	6,75	2,08	32,83	0,21	-78,56	528	44	31
Peru	382,55	14,02	1,97	31,18	0,45	-38,22	508	42	33
Philippines	1352,86	24,98	1,56	24,59	1,02	-26,07	471	39	37
Poland	-55,46	-6,52	2,08	32,84	-0,20	-81,86	543	45	29
Portugal	62,55	4,13	1,47	23,29	0,18	-53,49	545	45	30
Russia	733,99	19,33	2,41	38,13	0,51	-45,55	493	41	36
Singapore	65,26	4,28	1,37	21,70	0,20	-43,98	535	45	31
South Africa	-75,46	-11,05	1,87	29,55	-0,37	-85,48	523	44	31
Spain	-53,85	-6,24	1,83	29,00	-0,22	-72,15	535	45	30
Sweden	-67,63	-8,97	1,98	31,23	-0,29	-83,59	561	47	31
Switzerland	-77,10	-11,56	1,31	20,72	-0,56	-79,03	575	48	28
Taiwan	145,51	7,77	1,54	24,36	0,32	-33,32	534	44	34
Thailand	848,37	20,62	1,70	26,82	0,77	-31,93	489	41	36
Turkey	475,36	15,70	2,58	40,87	0,38	-50,01	529	44	31
UK	-78,73	-12,10	1,49	23,54	-0,51	-79,51	583	49	26
USA	-87,41	-15,86	1,31	20,66	-0,77	-88,61	573	48	27

Tabelle A.9.4: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 3

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	325,37	12,84	0,92	14,50	0,89	-18,61
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	613,00	17,80	1,15	18,21	0,98	-19,98
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

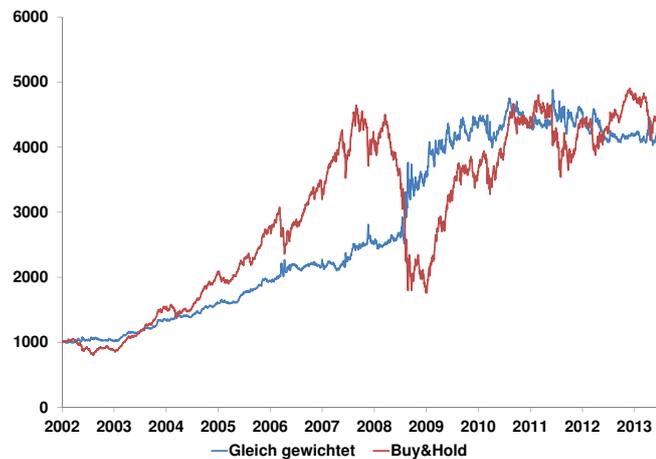


Abbildung A.9.3: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 3)

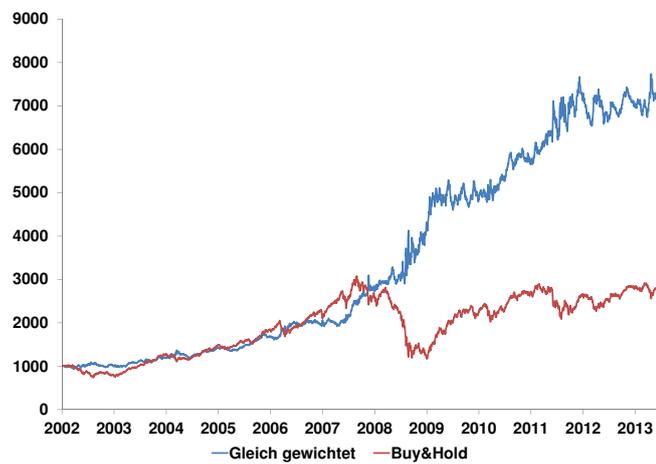


Abbildung A.9.4: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 3)

ANHANG

Ergebnisse: Level 4

Tabelle A.9.5: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 4

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	254,22	11,12	1,10	17,33	0,64	-33,41	321	27	33
Asia	482,76	15,82	1,35	21,38	0,74	-33,03	345	29	29
EM	1812,71	27,88	1,31	20,71	1,35	-29,36	287	24	33
Europe	-54,24	-6,31	1,50	23,70	-0,27	-70,46	399	33	26
North America	-50,85	-5,75	1,29	20,44	-0,28	-69,24	373	31	26
World	160,70	8,31	1,11	17,51	0,47	-33,57	315	26	33
Australia	102,27	6,05	1,64	26,00	0,23	-39,82	363	30	27
Austria	428,34	14,88	1,94	30,63	0,49	-53,73	326	27	27
Belgium	76,69	4,86	1,64	25,86	0,19	-63,79	375	31	26
Brazil	358,82	13,54	2,28	36,07	0,38	-63,33	317	26	31
Canada	113,23	6,51	1,50	23,73	0,27	-49,23	353	29	27
Chile	1048,81	22,56	1,41	22,22	1,02	-25,14	313	26	32
China	530,87	16,59	1,81	28,60	0,58	-37,96	331	28	29
Colombia	2282,32	30,24	1,68	26,58	1,14	-34,41	302	25	32
Czech Republic	32,92	2,40	1,85	29,19	0,08	-62,15	393	33	24
Denmark	28,07	2,08	1,53	24,26	0,09	-69,22	335	28	29
Finland	-39,68	-4,13	2,01	31,80	-0,13	-70,25	377	31	28
France	-83,91	-14,12	1,72	27,20	-0,52	-85,55	399	33	21
Germany	-57,88	-6,95	1,75	27,62	-0,25	-80,49	397	33	22
Greece	806,79	20,17	2,22	35,10	0,57	-39,72	349	29	28
Hong Kong	203,88	9,70	1,35	21,36	0,45	-40,45	331	28	28
Hungary	390,13	14,16	2,37	37,48	0,38	-51,41	341	28	27
India	2673,09	31,90	1,78	28,08	1,14	-32,42	303	25	34
Indonesia	2927,75	32,87	1,97	31,15	1,06	-46,13	319	27	30
Ireland	-91,34	-18,44	1,99	31,39	-0,59	-95,51	423	35	23
Italy	158,14	8,22	1,76	27,83	0,30	-53,35	369	31	26
Japan	-76,61	-11,40	1,44	22,78	-0,50	-79,15	415	35	24
Korea	44,43	3,11	2,00	31,69	0,10	-38,46	342	28	29
Malaysia	780,66	19,88	0,98	15,45	1,29	-29,74	307	26	34
Mexico	57,39	3,85	1,70	26,87	0,14	-46,24	365	30	25
Netherlands	5,90	0,48	1,64	25,93	0,02	-63,41	383	32	26
New Zealand	-13,94	-1,24	1,40	22,06	-0,06	-52,06	396	33	23
Norway	-4,55	-0,39	2,08	32,83	-0,01	-87,67	373	31	27
Peru	124,54	6,97	1,97	31,17	0,22	-42,45	359	30	26
Philippines	634,97	18,08	1,56	24,60	0,74	-42,19	336	28	30
Poland	61,87	4,10	2,07	32,81	0,12	-79,60	367	31	28
Portugal	121,78	6,86	1,47	23,27	0,29	-63,65	381	32	27
Russia	667,94	18,52	2,41	38,12	0,49	-60,51	311	26	34
Singapore	393,95	14,24	1,37	21,64	0,66	-29,78	345	29	28
South Africa	-9,97	-0,87	1,87	29,52	-0,03	-75,13	363	30	27
Spain	-29,46	-2,87	1,83	28,97	-0,10	-66,43	363	30	26
Sweden	-83,96	-14,15	1,97	31,21	-0,45	-93,38	391	33	24
Switzerland	-62,87	-7,92	1,31	20,70	-0,38	-71,38	407	34	24
Taiwan	158,63	8,24	1,54	24,32	0,34	-34,43	348	29	30
Thailand	737,55	19,38	1,69	26,79	0,72	-30,79	337	28	28
Turkey	2011,79	28,94	2,58	40,80	0,71	-41,60	325	27	32
UK	-85,00	-14,62	1,49	23,51	-0,62	-85,60	441	37	23
USA	-55,58	-6,54	1,31	20,64	-0,32	-71,57	371	31	28

Tabelle A.9.6: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 4

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	411,16	14,58	0,99	15,65	0,93	-30,44
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	547,60	16,86	1,16	18,28	0,92	-31,32
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

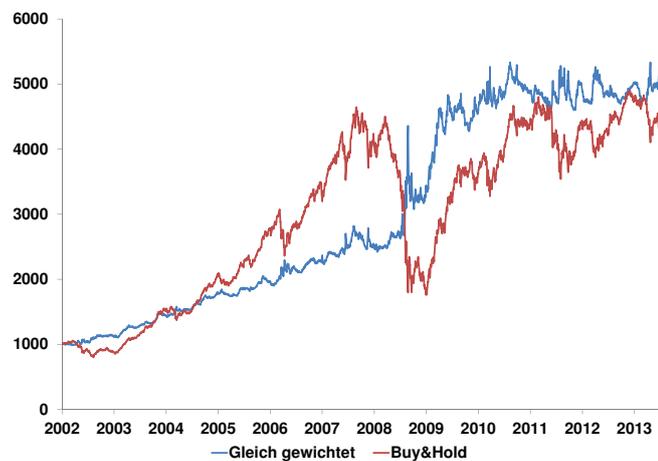


Abbildung A.9.5: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 4)

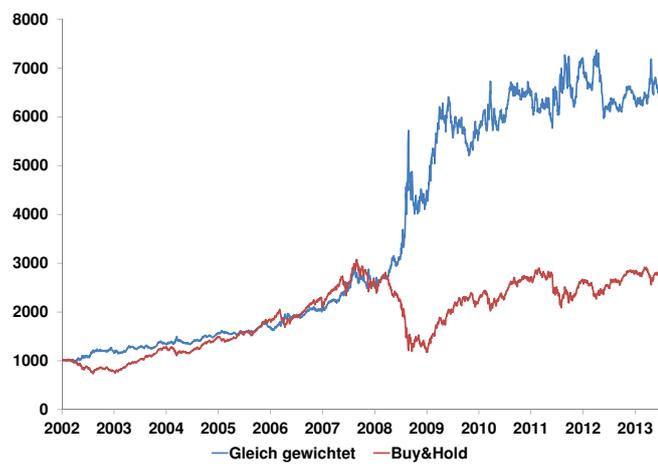


Abbildung A.9.6: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 4)

ANHANG

Ergebnisse: Level 5

Tabelle A.9.7: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 5

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	581,05	17,34	1,09	17,28	1,00	-18,34	183	15	36
Asia	527,30	16,53	1,35	21,37	0,77	-27,63	229	19	27
EM	1179,58	23,67	1,31	20,72	1,14	-27,05	199	17	29
Europe	39,94	2,84	1,50	23,66	0,12	-51,65	255	21	22
North America	2,22	0,18	1,29	20,41	0,01	-38,65	243	20	26
World	480,63	15,79	1,10	17,46	0,90	-17,64	177	15	36
Australia	103,11	6,08	1,64	25,97	0,23	-42,71	247	21	22
Austria	624,75	17,95	1,94	30,60	0,59	-48,89	234	19	20
Belgium	263,20	11,35	1,63	25,82	0,44	-40,64	255	21	21
Brazil	317,34	12,64	2,28	36,06	0,35	-62,74	237	20	24
Canada	0,04	0,00	1,50	23,73	0,00	-67,60	247	21	24
Chile	747,92	19,50	1,40	22,21	0,88	-36,89	177	15	32
China	275,47	11,66	1,81	28,60	0,41	-48,91	242	20	27
Colombia	1948,12	28,61	1,68	26,57	1,08	-41,27	198	16	27
Czech Republic	347,11	13,29	1,84	29,15	0,46	-60,03	252	21	21
Denmark	200,61	9,61	1,53	24,23	0,40	-36,02	224	19	25
Finland	113,37	6,52	2,01	31,76	0,21	-54,40	218	18	24
France	-51,74	-5,89	1,72	27,18	-0,22	-71,16	303	25	18
Germany	88,68	5,43	1,74	27,58	0,20	-46,63	243	20	23
Greece	2478,84	31,10	2,22	35,05	0,89	-40,32	209	17	29
Hong Kong	403,99	14,43	1,35	21,32	0,68	-34,43	207	17	28
Hungary	1280,95	24,46	2,37	37,43	0,65	-50,01	221	18	27
India	2418,26	30,85	1,77	28,06	1,10	-33,32	195	16	34
Indonesia	1860,60	28,14	1,97	31,15	0,90	-39,32	215	18	29
Ireland	-20,52	-1,90	1,98	31,37	-0,06	-73,80	273	23	22
Italy	123,37	6,93	1,76	27,81	0,25	-60,91	250	21	22
Japan	-42,85	-4,56	1,44	22,75	-0,20	-65,31	281	23	20
Korea	19,68	1,51	2,00	31,67	0,05	-47,28	258	21	26
Malaysia	644,63	18,21	0,98	15,43	1,18	-20,43	197	16	28
Mexico	199,88	9,58	1,70	26,84	0,36	-37,71	243	20	26
Netherlands	-12,02	-1,06	1,64	25,92	-0,04	-58,81	263	22	20
New Zealand	163,34	8,40	1,39	22,02	0,38	-32,54	236	20	25
Norway	287,41	11,95	2,07	32,78	0,36	-67,13	223	19	30
Peru	74,62	4,76	1,97	31,16	0,15	-70,84	241	20	23
Philippines	751,19	19,54	1,55	24,57	0,79	-40,91	193	16	28
Poland	311,28	12,51	2,07	32,76	0,38	-42,61	232	19	23
Portugal	587,11	17,42	1,47	23,21	0,75	-51,75	220	18	25
Russia	214,34	10,01	2,41	38,12	0,26	-73,51	231	19	25
Singapore	480,77	15,79	1,37	21,62	0,73	-27,46	213	18	30
South Africa	22,70	1,72	1,87	29,50	0,06	-78,95	251	21	24
Spain	43,27	3,04	1,83	28,95	0,11	-51,61	243	20	22
Sweden	21,02	1,60	1,97	31,18	0,05	-64,88	243	20	24
Switzerland	53,56	3,64	1,31	20,65	0,18	-32,29	249	21	24
Taiwan	402,94	14,41	1,54	24,28	0,59	-37,75	197	16	29
Thailand	758,27	19,62	1,69	26,76	0,73	-30,81	217	18	30
Turkey	1279,16	24,44	2,58	40,80	0,60	-47,51	192	16	32
UK	-38,36	-3,95	1,49	23,49	-0,17	-65,88	277	23	19
USA	1,32	0,11	1,30	20,61	0,01	-38,69	243	20	25

Tabelle A.9.8: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 5

		Länderindizes					
		Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet		470,16	15,63	1,05	16,64	0,94	-25,87
Buy&Hold		326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
		Regionenindizes					
		Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet		437,26	15,06	1,15	18,11	0,83	-23,99
Buy&Hold		172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

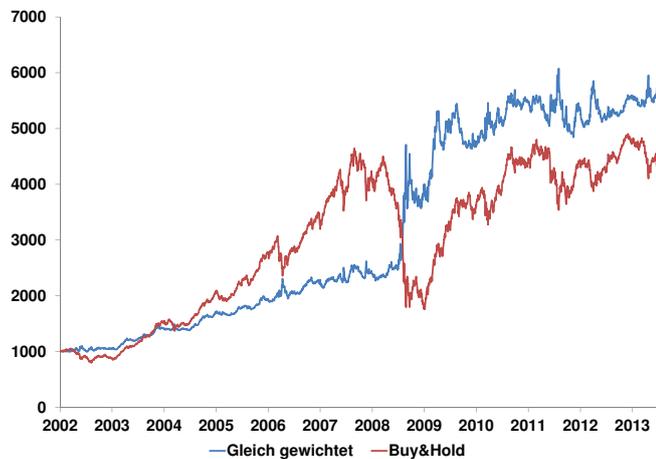


Abbildung A.9.7: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 5)

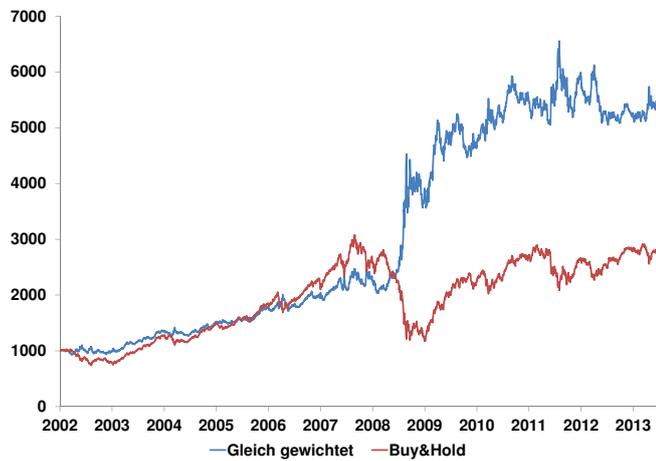


Abbildung A.9.8: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 5)

ANHANG

Ergebnisse: Level 6

Tabelle A.9.9: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 6

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	238,20	10,69	1,09	17,30	0,62	-26,42	131	11	24
Asia	447,04	15,21	1,35	21,35	0,71	-43,30	125	10	25
EM	971,98	21,86	1,31	20,70	1,06	-43,25	107	9	32
Europe	68,80	4,46	1,50	23,64	0,19	-52,29	156	13	19
North America	20,47	1,56	1,29	20,39	0,08	-36,55	167	14	20
World	173,98	8,76	1,10	17,47	0,50	-27,07	138	11	22
Australia	169,26	8,60	1,64	25,95	0,33	-40,00	170	14	20
Austria	1317,57	24,73	1,93	30,56	0,81	-41,46	128	11	27
Belgium	216,52	10,08	1,63	25,81	0,39	-50,78	139	12	19
Brazil	413,68	14,61	2,28	36,04	0,41	-55,37	161	13	16
Canada	99,96	5,94	1,50	23,70	0,25	-40,61	178	15	19
Chile	653,26	18,33	1,40	22,21	0,83	-37,23	129	11	26
China	77,69	4,91	1,81	28,60	0,17	-75,00	177	15	17
Colombia	2020,66	28,99	1,68	26,56	1,09	-33,78	131	11	26
Czech Republic	334,61	13,03	1,84	29,14	0,45	-48,94	158	13	22
Denmark	77,04	4,88	1,53	24,22	0,20	-55,05	196	16	14
Finland	-58,26	-7,02	2,01	31,77	-0,22	-76,38	192	16	17
France	-9,36	-0,82	1,72	27,16	-0,03	-74,50	162	13	19
Germany	8,59	0,69	1,74	27,57	0,02	-63,07	178	15	20
Greece	1406,22	25,36	2,22	35,05	0,72	-43,55	161	13	23
Hong Kong	113,87	6,54	1,35	21,33	0,31	-45,45	160	13	18
Hungary	287,75	11,96	2,37	37,44	0,32	-50,35	137	11	23
India	1416,54	25,43	1,77	28,06	0,91	-39,36	127	11	30
Indonesia	589,55	17,46	1,97	31,17	0,56	-61,86	147	12	20
Ireland	-25,79	-2,46	1,98	31,36	-0,08	-76,34	191	16	17
Italy	17,60	1,36	1,76	27,80	0,05	-61,19	152	13	25
Japan	-61,41	-7,63	1,44	22,74	-0,34	-73,50	237	20	16
Korea	-25,28	-2,40	2,00	31,66	-0,08	-81,15	174	14	19
Malaysia	487,26	15,90	0,98	15,43	1,03	-27,17	123	10	33
Mexico	121,13	6,84	1,70	26,82	0,25	-57,48	159	13	17
Netherlands	163,16	8,40	1,64	25,88	0,32	-43,03	144	12	25
New Zealand	190,75	9,30	1,39	22,01	0,42	-45,76	142	12	23
Norway	50,19	3,45	2,07	32,79	0,11	-76,19	174	14	17
Peru	139,46	7,55	1,97	31,13	0,24	-59,55	157	13	20
Philippines	304,56	12,35	1,55	24,58	0,50	-36,26	147	12	22
Poland	149,14	7,90	2,07	32,76	0,24	-46,14	160	13	23
Portugal	368,74	13,74	1,47	23,21	0,59	-46,03	129	11	20
Russia	56,59	3,81	2,41	38,12	0,10	-65,01	188	16	17
Singapore	295,01	12,13	1,37	21,61	0,56	-31,28	153	13	21
South Africa	-46,19	-5,03	1,86	29,48	-0,17	-87,19	185	15	18
Spain	19,69	1,51	1,83	28,93	0,05	-70,78	178	15	18
Sweden	31,94	2,34	1,97	31,17	0,07	-63,63	160	13	17
Switzerland	10,02	0,80	1,31	20,65	0,04	-36,75	177	15	18
Taiwan	166,01	8,49	1,54	24,29	0,35	-40,41	149	12	21
Thailand	164,35	8,44	1,69	26,79	0,31	-50,35	163	14	21
Turkey	155,85	8,14	2,58	40,83	0,20	-58,75	156	13	22
UK	-22,63	-2,12	1,48	23,47	-0,09	-52,14	184	15	18
USA	3,38	0,28	1,30	20,59	0,01	-37,97	169	14	18

Tabelle A.9.10: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 6

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	282,11	11,83	1,06	16,81	0,70	-35,79
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	377,07	13,92	1,13	17,89	0,78	-39,85
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

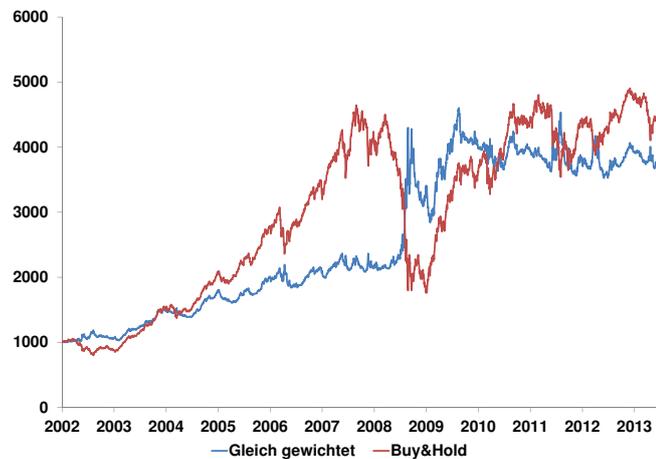


Abbildung A.9.9: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 6)

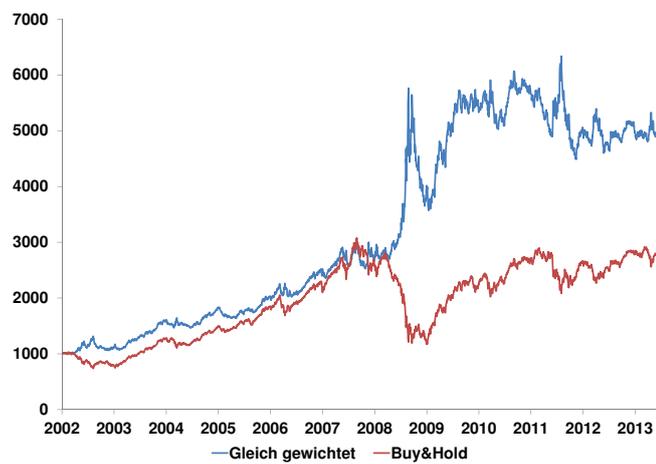


Abbildung A.9.10: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 6)

ANHANG

Ergebnisse: Level 7

Tabelle A.9.11: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 7

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	194,85	9,43	1,09	17,30	0,55	-31,41	96	8	19
Asia	523,98	16,48	1,35	21,34	0,77	-30,74	81	7	25
EM	622,04	17,91	1,31	20,71	0,86	-28,59	87	7	21
Europe	136,86	7,45	1,49	23,63	0,32	-39,72	102	8	19
North America	-9,08	-0,79	1,29	20,39	-0,04	-51,92	130	11	13
World	168,88	8,59	1,10	17,46	0,49	-30,62	106	9	18
Australia	45,44	3,17	1,64	25,96	0,12	-56,52	131	11	14
Austria	307,26	12,41	1,93	30,59	0,41	-57,84	104	9	13
Belgium	255,72	11,15	1,63	25,79	0,43	-57,11	108	9	15
Brazil	673,53	18,59	2,28	36,02	0,52	-58,29	91	8	19
Canada	106,92	6,25	1,50	23,69	0,26	-36,58	126	10	13
Chile	411,37	14,57	1,40	22,21	0,66	-37,82	93	8	13
China	515,42	16,35	1,81	28,56	0,57	-48,17	90	7	24
Colombia	639,88	18,15	1,68	26,59	0,68	-63,65	109	9	17
Czech Republic	740,22	19,41	1,84	29,10	0,67	-40,67	74	6	23
Denmark	206,91	9,80	1,53	24,20	0,40	-45,06	84	7	17
Finland	72,18	4,63	2,01	31,74	0,15	-52,73	110	9	17
France	51,62	3,53	1,72	27,14	0,13	-35,21	134	11	13
Germany	298,55	12,21	1,74	27,53	0,44	-29,99	92	8	22
Greece	540,33	16,73	2,22	35,06	0,48	-61,37	103	9	15
Hong Kong	272,03	11,57	1,35	21,30	0,54	-33,86	99	8	19
Hungary	83,43	5,19	2,37	37,45	0,14	-61,51	129	11	13
India	583,64	17,37	1,78	28,08	0,62	-40,28	89	7	19
Indonesia	828,17	20,40	1,97	31,15	0,65	-42,68	95	8	19
Ireland	25,02	1,88	1,98	31,34	0,06	-80,18	115	10	10
Italy	85,28	5,27	1,76	27,78	0,19	-40,93	116	10	16
Japan	-19,78	-1,82	1,44	22,72	-0,08	-58,55	129	11	12
Korea	218,03	10,12	2,00	31,63	0,32	-47,34	100	8	19
Malaysia	345,01	13,25	0,98	15,43	0,86	-22,11	69	6	25
Mexico	146,19	7,80	1,70	26,82	0,29	-53,66	117	10	15
Netherlands	26,91	2,01	1,64	25,89	0,08	-52,09	124	10	15
New Zealand	384,08	14,05	1,39	21,98	0,64	-34,89	87	7	20
Norway	84,80	5,25	2,07	32,77	0,16	-65,28	114	9	18
Peru	770,00	19,75	1,97	31,09	0,64	-60,41	85	7	19
Philippines	843,40	20,57	1,55	24,54	0,84	-31,97	69	6	19
Poland	72,01	4,62	2,07	32,75	0,14	-48,76	124	10	15
Portugal	396,70	14,29	1,47	23,19	0,62	-35,74	97	8	21
Russia	102,19	6,04	2,41	38,10	0,16	-64,36	129	11	15
Singapore	220,28	10,19	1,37	21,61	0,47	-49,77	99	8	16
South Africa	-30,80	-3,02	1,86	29,47	-0,10	-78,98	155	13	13
Spain	102,44	6,05	1,83	28,91	0,21	-61,49	110	9	17
Sweden	17,54	1,36	1,97	31,16	0,04	-59,22	114	9	13
Switzerland	95,60	5,75	1,30	20,62	0,28	-31,89	106	9	17
Taiwan	29,56	2,18	1,54	24,29	0,09	-56,50	113	9	19
Thailand	224,41	10,30	1,69	26,77	0,38	-62,22	109	9	15
Turkey	440,66	15,10	2,58	40,80	0,37	-63,65	83	7	18
UK	11,88	0,94	1,48	23,46	0,04	-44,00	144	12	14
USA	-17,99	-1,64	1,30	20,59	-0,08	-54,19	138	11	12

Tabelle A.9.12: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 7

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	266,81	11,45	1,07	16,84	0,68	-33,38
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	318,45	12,68	1,12	17,77	0,71	-27,04
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

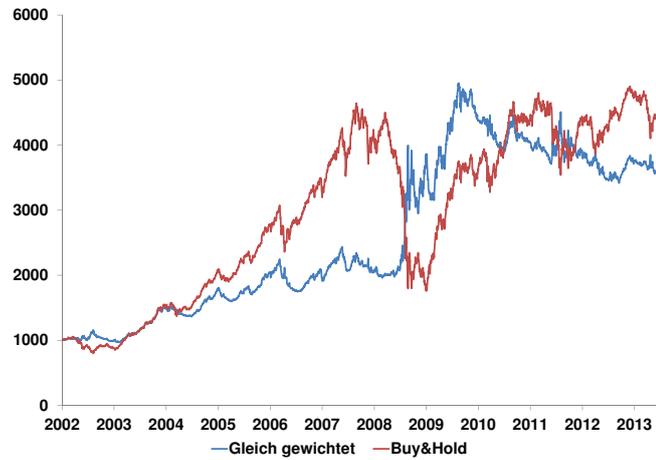


Abbildung A.9.11: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 7)

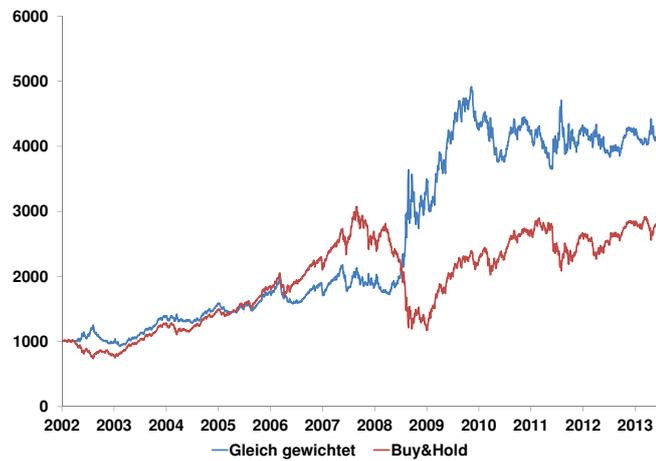


Abbildung A.9.12: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 7)

ANHANG

Ergebnisse: Level 8

Tabelle A.9.13: Ergebnisse MSCI Universum – Haar, Level 8

Index Name	Ret [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]	# Trades	Trades p.a.	pos Trades [%]
ACWI	186,93	9,18	1,09	17,28	0,53	-40,86	55	5	16
Asia	101,13	6,00	1,35	21,36	0,28	-56,42	57	5	18
EM	371,62	13,80	1,31	20,72	0,67	-39,62	45	4	31
Europe	93,91	5,67	1,49	23,62	0,24	-62,18	63	5	13
North America	61,69	4,09	1,29	20,37	0,20	-48,15	52	4	19
World	217,07	10,09	1,10	17,45	0,58	-37,91	45	4	22
Australia	67,62	4,40	1,64	25,94	0,17	-51,49	71	6	10
Austria	405,37	14,45	1,93	30,58	0,47	-62,11	52	4	21
Belgium	283,44	11,85	1,63	25,78	0,46	-62,82	67	6	9
Brazil	240,02	10,74	2,28	36,03	0,30	-74,44	65	5	15
Canada	111,27	6,43	1,50	23,68	0,27	-53,36	73	6	11
Chile	433,37	14,97	1,40	22,20	0,67	-45,43	51	4	18
China	11,62	0,92	1,81	28,59	0,03	-71,43	86	7	15
Colombia	1025,67	22,35	1,68	26,56	0,84	-54,96	49	4	18
Czech Republic	739,62	19,40	1,84	29,10	0,67	-55,73	31	3	23
Denmark	184,67	9,11	1,53	24,20	0,38	-60,38	51	4	16
Finland	-8,09	-0,70	2,01	31,74	-0,02	-64,33	62	5	11
France	136,19	7,43	1,72	27,12	0,27	-54,03	47	4	17
Germany	94,26	5,69	1,74	27,54	0,21	-67,15	57	5	16
Greece	720,29	19,17	2,22	35,05	0,55	-58,54	43	4	16
Hong Kong	134,11	7,35	1,35	21,31	0,34	-40,18	60	5	18
Hungary	-3,39	-0,29	2,37	37,45	-0,01	-86,29	69	6	13
India	318,65	12,67	1,78	28,08	0,45	-45,44	55	5	18
Indonesia	278,48	11,73	1,97	31,17	0,38	-57,84	75	6	11
Ireland	139,70	7,56	1,98	31,32	0,24	-75,67	71	6	14
Italy	24,41	1,84	1,76	27,78	0,07	-66,17	87	7	14
Japan	-41,52	-4,37	1,44	22,71	-0,19	-68,71	115	10	11
Korea	86,05	5,31	2,00	31,62	0,17	-50,41	55	5	18
Malaysia	218,80	10,14	0,98	15,44	0,66	-36,44	55	5	18
Mexico	202,15	9,65	1,70	26,80	0,36	-52,54	57	5	12
Netherlands	44,27	3,10	1,64	25,88	0,12	-63,99	77	6	10
New Zealand	150,10	7,94	1,39	21,99	0,36	-49,94	69	6	14
Norway	117,53	6,69	2,07	32,76	0,20	-78,51	52	4	15
Peru	1092,34	22,94	1,97	31,07	0,74	-54,75	33	3	21
Philippines	447,14	15,21	1,55	24,56	0,62	-40,02	47	4	23
Poland	148,86	7,89	2,07	32,74	0,24	-68,38	52	4	15
Portugal	191,77	9,33	1,47	23,20	0,40	-53,55	53	4	13
Russia	-23,74	-2,23	2,41	38,11	-0,06	-85,61	93	8	11
Singapore	312,61	12,54	1,37	21,59	0,58	-40,81	35	3	17
South Africa	-34,23	-3,43	1,86	29,47	-0,12	-76,51	95	8	8
Spain	50,49	3,46	1,83	28,91	0,12	-68,37	71	6	10
Sweden	146,91	7,82	1,97	31,14	0,25	-71,52	54	4	17
Switzerland	28,85	2,13	1,30	20,63	0,10	-63,97	89	7	11
Taiwan	16,90	1,31	1,54	24,28	0,05	-45,30	62	5	21
Thailand	98,47	5,88	1,69	26,77	0,22	-64,81	73	6	15
Turkey	-20,22	-1,86	2,58	40,83	-0,05	-69,18	81	7	9
UK	54,57	3,70	1,48	23,44	0,16	-58,13	65	5	12
USA	50,48	3,46	1,30	20,57	0,17	-49,58	70	6	14

Tabelle A.9.14: Zusammenfassung MSCI Universum – Haar, Level 8

Länderindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	206,57	9,80	1,09	17,25	0,57	-44,32
Buy&Hold	326,69	12,87	1,22	19,34	0,67	-65,36
Regionenindizes						
	Ret ges [%]	Ret ann [%]	σ [%]	σ ann [%]	Sharpe	max DD [%]
Gleich gewichtet	157,09	8,20	1,09	17,20	0,48	-39,20
Buy&Hold	172,20	8,71	1,15	18,18	0,48	-64,56

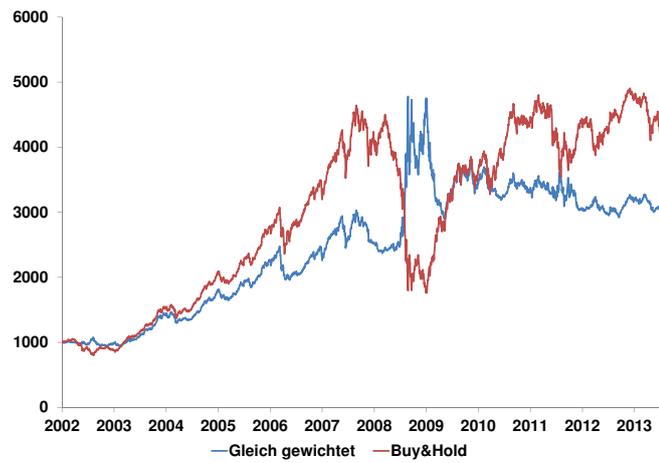


Abbildung A.9.13: Vergleich Wertentwicklung – Länderindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 8)

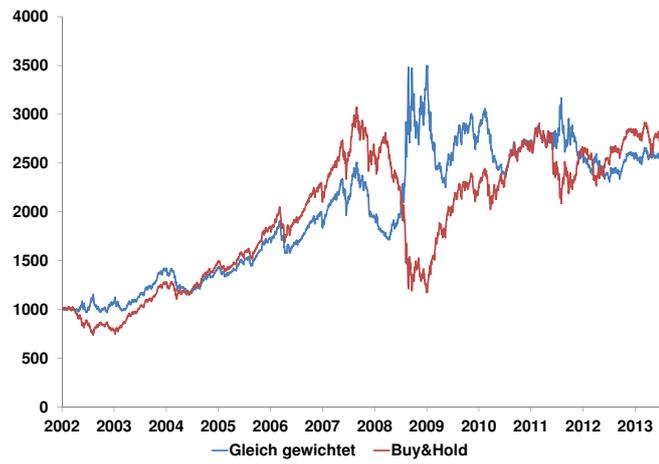


Abbildung A.9.14: Vergleich Wertentwicklung – Regionenindizes: Gleich gewichtet vs. Buy&Hold (Level 8)

Literaturverzeichnis

- Abramovich, F., Bailey, T. C. und Sapatinas, T. (2000), Wavelet analysis and its statistical applications, in: *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, Vol. 49, No. 1, S. 1–29.
- Antoniadis, A. et al. (2007), Wavelet methods in statistics: Some recent developments and their applications, in: *Statistics Surveys*, Vol. 1, S. 16–55.
- Arneodo, A., Audit, B., of Brodie, E.-B. B., Nicolay, S., Touchon, M., D’Aubenton-Carafa, Y., Huvet, M. und Thermes, C. (2009), Fractals and Wavelets: What Can We Learn on Transcription and Replication from Wavelet-Based Multifractal Analysis of DNA Sequences, in: Myers, R. (Hrsg.): *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, New York, S. 3893–3924.
- Ausloos, M. (2000), Statistical physics in foreign exchange currency and stock markets, in: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 285, No. 1, S. 48–65.
- Baltas, A.-N. und Kosowski, R. (2013), Momentum strategies in futures markets and trend-following funds, SSRN eLibrary.
- Benninga, S. (2008), *Financial Modeling*, Cambridge.
- Beylkin, G. und Keiser, J. M. (1997), On the adaptive numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases, in: *Journal of Computational Physics*, Vol. 132, No. 2, S. 233–259.
- Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S. und Fabozzi, F. (2009), Modeling, Estimation, and Optimization of Equity Portfolios with Heavy-Tailed Distributions, in: Satchell, S. (Hrsg.): *Optimizing Optimization: The Next Generation of Optimization Applications and Theory*, London, S. 117–141.

- Boltežar, M. und Slavič, J. (2004), Enhancements to the continuous wavelet transform for damping identifications on short signals, in: *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, No. 5, S. 1065–1076.
- Borak, S., Härdle, W. und Weron, R. (2009), Stable Distributions, in: Čížek, P., Härdle, W. und Weron, R. (Hrsg.): *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Berlin, S. 21–44.
- Bouchaud, J.-P. und Potters, M. (2003), *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge.
- Bradley, A. P. (2003), Shift-invariance in the discrete wavelet transform, in: *Proceedings of VIIth Digital Image Computing: Techniques and Applications*, Sydney.
- Brealey, R. A., Myers, S. C. und Allen, F. (2006), *Principles of Corporate Finance*, Boston.
- Capobianco, E. (2001), Wavelet transforms for the statistical analysis of returns generating stochastic processes, in: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 03, S. 511–534.
- Černá, D. und Finěk, V. (2010), Reducing boundary errors in wavelet image compression, in: *ICNAAM 2010: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010*, Vol. 1281, AIP Publishing, S. 1726–1729.
- Černá, D. und Finěk, V. (2012), Discrete wavelet transform for finite signals, Working Paper, 11th International Conference APLIMAT 2012.
- Chakraborti, A., Patriarca, M. und Santhanam, M. (2007), Financial time-series analysis: A brief overview, in: Chatterjee, A. und Chakraborti, A. (Hrsg.): *Econophysics of Markets and Business Networks*, Berlin, S. 51–67.
- Challet, D., Marsili, M. und Zhang, Y.-C. (2009), *Minority Games: Interacting Agents in Financial Markets*, New York.
- Chun-Lin, L. (2010), A tutorial of the wavelet transform, Working Paper, NTUEE, Taiwan.

- Clare, A., Seaton, J., Smith, P. N. und Thomas, S. (2014), Trend following, risk parity and momentum in commodity futures, in: *International Review of Financial Analysis*, Vol. 31, S. 1–12.
- Clausen, M. und Müller, M. (2001), *Zeit-Frequenz-Analyse und Wavelettransformationen*, Vorlesungsskript, Universität Bonn.
- Cohen, A., Daubechies, I. und Vial, P. (1993), Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, in: *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 1, No. 1, S. 54–81.
- Conlon, T., Crane, M. und Ruskin, H. J. (2008), Wavelet multiscale analysis for hedge funds: scaling and strategies, in: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 387, No. 21, S. 5197–5204.
- Constantine, W. und Percival, D. (2011), *WMTSA: Wavelet Methods for Time Series Analysis*, R package version 1.1-1.
- Cont, R. (2001), Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, in: *Quantitative Finance*, Vol. 1, S. 223–236.
- Cornish, C. R., Bretherton, C. S. und Percival, D. B. (2006), Maximal overlap wavelet statistical analysis with application to atmospheric turbulence, in: *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 119, No. 2, S. 339–374.
- Crowley, P. M. und Lee, J. (2005), Deconposing the co-movement of the business cycle: a time-frequency analysis of growth cycles in the euro zone, *Bank of Finland Research Discussion Papers 12/2005*.
- Crowley, P. M. und Pankki, S. (2005), An intuitive guide to wavelets for economists, *Bank of Finland Research Discussion Papers 1/2005*, Vol. 1.
- Daubechies, I. (1988), Orthonormal bases of compactly supported wavelets, in: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41, No. 7, S. 909–996.
- Daubechies, I. (1996), Where do wavelets come from? A personal point of view, in: *Proceedings of the IEEE*, Vol. 84, No. 4, S. 510–513.

- Donoho, D. L. und Johnstone, I. M. (1995), Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage, in: *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, No. 432, S. 1200–1224.
- Donoho, D. L. und Johnstone, I. M. (1998), Minimax estimation via wavelet shrinkage, in: *The Annals of Statistics*, Vol. 26, No. 3, S. 879–921.
- Donoho, D. L. und Johnstone, J. M. (1994), Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, in: *Biometrika*, Vol. 81, No. 3, S. 425–455.
- Eichhorn, E. und Thiele, E. (1994), Fraktale und Mathematik – Eine elementare Einführung, in: *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*, Berlin, S. 191–206.
- Evertsz, C. J., Hendrych, R., Singer, P. und Peitgen, H.-O. (1999), Fraktale Geometrie von Börsenzeitreihen: Neue Perspektiven ökonomischer Zeitreihenanalysen, in: Mainzer, K. (Hrsg): *Komplexe Systeme und nichtlineare Dynamik in Natur und Gesellschaft*, Berlin, S. 400–419.
- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. und Focardi, S. M. (2007), *Robust Portfolio Optimization and Management*, Hoboken.
- Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I. und Tutz, G. (2010), *Statistik*, Heidelberg.
- Fama, E. F. (1963), Mandelbrot and the stable paretian hypothesis, in: *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, S. 420–429.
- Fama, E. F. (1965a), The behavior of stock-market prices, in: *The Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, S. 34–105.
- Fama, E. F. (1965b), Random walks in stock market prices, in: *Financial Analysts Journal*, Vol. 21, No. 5, S. 55–59.
- Fama, E. F. (1970), Efficient capital markets: A review of theory and empirical work, in: *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, S. 383–417.
- Fama, E. F. (1991), Efficient capital markets: II, in: *The Journal of Finance*, Vol. 46, No. 5, S. 1575–1617.

- Fama, E. F., Fisher, L., Jensen, M. C. und Roll, R. (1969), The adjustment of stock prices to new information, in: *International Economic Review*, Vol. 10, No. 1, S. 1–21.
- Fernandez, V. (2006), The CAPM and value at risk at different time-scales, in: *International Review of Financial Analysis*, Vol. 15, No. 3, S. 203–219.
- Frame, M., Mandelbrot, B. und Neger, N. (2011), *Fractal Geometry*, (Zugriff am 09.12.2011).
URL: <http://classes.yale.edu/fractals>
- Franke, G. und Hax, H. (2009), *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 6. Aufl., Berlin.
- Fuertes, A.-M., Miffre, J. und Rallis, G. (2010), Tactical allocation in commodity futures markets: Combining momentum and term structure signals, in: *Journal of Banking & Finance*, Vol. 34, No. 10, S. 2530–2548.
- Gallegati, M., Ramsey, J. B. und Semmler, W. (2013), Time scale analysis of interest rate spreads and output using wavelets, in: *Axioms*, Vol. 2, No. 2, S. 182–207.
- Gao, R. X. und Yan, R. (2011), *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*, New York.
- Gençay, R., Selçuk, F. und Whitcher, B. (2001a), Scaling properties of foreign exchange volatility, in: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 289, No. 1, S. 249–266.
- Gençay, R., Selçuk, F. und Whitcher, B. J. (2001b), *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, London.
- Gherman, M., Terebes, R. und Borda, M. (2012), Time series analysis using wavelets and GJR-GARCH models, in: *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2012 Proceedings of the 20th European, IEEE*, S. 2138–2142.
- Gneiting, T., Ševčíková, H., Percival, D. B. et al. (2012), Estimators of fractal dimension: Assessing the roughness of time series and spatial data, in: *Statistical Science*, Vol. 27, No. 2, S. 247–277.

- Goedecker, S. (2009), Wavelets and their application for the solution of poisson's and schrödinger's equation, in: Publication Series of John von Neumann Institute for Computing (NIC), Vol. 42, S. 507–534.
- Granger, C. (1966), The typical spectral shape of an economic variable, in: *Econometrica*, Vol. 34, No. 1, S. 150–161.
- Granger, C. W. J., Hatanaka, M. et al. (1964), *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton.
- Graps, A. (1995), An introduction to wavelets, in: *IEEE Computational Science and Engineering*, Vol. 2, No. 2, S. 50–61.
- Grech, D. und Mazur, Z. (2004), Can one make any crash prediction in finance using the local hurst exponent idea?, in: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 336, No. 1, S. 133–145.
- Grossman, S. J. und Stiglitz, J. E. (1980), On the impossibility of informationally efficient markets, in: *American Economic Review*, Vol. 70, No. 3, S. 393–408.
- Grossmann, A. und Morlet, J. (1984), Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, in: *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 15, No. 4, S. 723–736.
- Hannonen, M. (2006), An analysis of trends and cycles of land prices using wavelet transforms, in: *International Journal of Strategic Property Management*, Vol. 10, No. 1, S. 1–21.
- Heijmans, H. (1993), *Discrete Wavelets and Multiresolution Analysis*, in: Koornwinder, T. (Hrsg.): *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, Vol. 1, Singapur, S. 49–80.
- Hwang, W.-L. und Mallat, S. (1994), Characterization of self-similar multifractals with wavelet maxima, in: *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 1, No. 4, S. 316–328.
- Ilmanen, A. (2013), *Expected Returns: An Investors Guide to Harvesting Market Rewards*, Chichester.

- In, F. und Kim, S. (2006), The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and futures market: A new approach using wavlet analysis, in: *Journal of Business*, Vol. 79, No. 2, S. 799–820.
- Johansen, A. und Sornette, D. (2010), Shocks, crashes and bubbles in financial markets, in: *Brussels Economic Review*, Vol. 53, No. 2, S. 201–253.
- Johnson, N. F., Jeffries, P. und Hui, P. M. (2003), *Financial Market Complexity*, Oxford.
- Kahneman, D. (2011), *Thinking, Fast and Slow*, New York.
- Kahneman, D. und Tversky, A. (1974), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, in: *Science*, Vol. 185, No. 4157, S. 1124–1131.
- Kahneman, D. und Tversky, A. (1979), Prospect theory: An analysis of decision under risk, in: *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, Vol. 47, No. 2, S. 263–291.
- Kendall, M. G. und Ord, J. (1983), *Time-Series*, Oxford.
- Kumar, P. und Foufoula-Georgiou, E. (1997), Wavelet analysis for geophysical applications, in: *Review of Geophysics*, Vol. 35, No. 4, S. 385–412.
- Levefre, E. (2006), *Reminiscences of a Stock Market Operator*, Hoboken.
- Lin, L., Ren, R. und Sornette, D. (2009), A consistent model of 'explosive' financial bubbles with mean-reversing residuals, in: *Swiss Finance Institute Research Paper*.
- MacKenzie, D. A. (2006), *An Engine, Not a Camera: How Financial Models Shape Markets*, Cambridge.
- Mackenzie, D., Daubechies, I., Kleppner, D., Mallat, S., Meyer, Y., Ruskai, M. B. und Weiss, G. (2001), *Wavelets: Seeing the forest and the trees*, National Academy of Sciences, Washington D.C.
- Mallaby, S. (2011), *Mehr Geld als Gott: Hedgefonds und ihre Allmachtsfantasien*, München.

- Mallat, S. G. (1989), A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, in: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, S. 674–693.
- Mandelbrot, B. (1963), The variation of certain speculative prices, in: The Journal of Business, Vol. 36, No. 4, S. 394–419.
- Mandelbrot, B. B. und Hudson, R. L. (2004), The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward, New York.
- Mantegna, R. N. und Stanley, E. H. (2000), An Introduction to Econophysics - Correlations and Complexity in Finance, Cambridge.
- Markowitz, H. (1952), Portfolio selection, in: The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, S. 77–91.
- Markowitz, H. M. (2008), Portfolio Selection: Die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl, München.
- Masset, P. (2008), Analysis of financial time-series using fourier and wavelet methods, Working Paper, University of Fribourg (Switzerland) - Faculty of Economics and Social Science.
- Matos, J. A., Gama, S., Ruskin, H. J., Sharkasi, A. A. und Crane, M. (2008), Time and scale hurst exponent analysis for financial markets, in: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 387, No. 15, S. 3910–3915.
- McCauley, J. L. (2009), Dynamics of Markets: The New Financial Econometrics, Cambridge.
- Melkemi, K. und Mokhtari, Z. (2007), Wavelet bases of the interval: A new approach, in: International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 1, S. 1019–1030.
- Merry, R. und Steinbuch, M. (2005), Wavelet theory and applications, Working Paper, Eindhoven University of Technology.
- Mertins, A. (2010), Signaltheorie, Wiesbaden.

- Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G. und Poggi, J.-M. (1996), Wavelet Toolbox, Manual, The MathWorks Inc.
- Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G. und Poggi, J.-M. (2007), Wavelets and their Applications, ISTE.
- Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G. und Poggi, J.-M. (2009), Wavelet Toolbox 4 User's Guide, Manual, The MathWorks Inc.
- Mitra, S. K. (2012), Is Hurst exponent value useful in forecasting financial time series?, in: Asian School Science, Vol. 8, No. 8, S. 111–120.
- Moro, E. (2004), The minority game: an introductory guide, in: arXiv preprint cond-mat/0402651.
- Murphy, J. J. (2011), Technische Analyse der Finanzmärkte, München.
- Nason, G. P. (2008), Wavelet Methods in Statistics with R, New York.
- Nawrocki, D. (1995), R/S analysis and long term dependence in stock market indices, in: Managerial Finance, Vol. 21, No. 7, S. 78–91.
- Niemann, H. (2003), Klassifikation von Mustern, Springer.
- Nolan, J. P. (2003), Modeling Financial Data with Stable Distributions, in: Rachev, S. (Hrsg.): Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, New York, S. 106–130.
- Nolan, J. P. (2010), Stable distributions - models for heavy tailed data.
URL: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>
- Norsworthy, J. R., Li, D. und Gorener, R. (2000), Wavelet-based analysis of time series: an export from engineering to finance, in: Engineering Management Society, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE, S. 126–132.
- O'Farrell, J. (2007), An Utterly Impartial History of Britain: Or 2000 Years of Upper Class Idiots in Charge, London.

- Oh, H.-S. und Lee, T. (2005), Hybrid local polynomial wavelet shrinkage: wavelet regression with automatic boundary adjustment, in: *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 48, No. 4, S. 809–819.
- Oh, H.-S., Naveau, P. und Lee, G. (2001), Polynomial boundary treatment for wavelet regression, in: *Biometrika*, Vol. 88, No. 1, S. 291–298.
- Papst, V. (2011), Technische quantitative Investmentstrategien - Empirische Untersuchung Wavelet-basierter Handelsmodelle und Optimierung von Handelssystemportfolios, Dissertation, Universität Kiel.
- Percival, D. B. und Walden, A. T. (2008), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge.
- Pereyra, M. C. und Mohlenkamp, M. J. (2004), Wavelets, their friends, and what they can do for you, Working Paper, European Mathematical Society.
- Pfaff, B. (2013), *Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R*, Chichester.
- Polikar, R. (1999), The Story of Wavelets, in: Mastorakis, N. (Hrsg.): *Physics and Modern Topics in Mechanical and Electrical Engineering*, World Scientific and Eng. Society Press, S. 192–197.
- Porta, R. L., Lakonishok, J., Shleifer, A. und Vishny, R. W. (1997), Good news for value stocks: Further evidence on market efficiency, in: *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 2, S. 859–874.
- Preis, T., Virnau, P., Paul, W. und Schneider, J. J. (2009), Accelerated fluctuations analysis by graphic cards and complex pattern formation in financial markets, in: *New Journal of Physics*, Vol. 11, No. 9, S. 1–21.
- Qian, B. und Rasheed, K. (2004), Hurst exponent and financial market predictability, in: *Proceedings of The 2nd IASTED International Conference on Financial Engineering and Applications*, S. 203–209.
- Raab, K. und Kessler, M. (1986), *Lateinische Wortkunde*, München.

- Raihan, S. M., Wen, Y. und Zeng, B. (2005), Wavelet: A new tool for business cycle analysis, Working Paper, Federal Reserve Bank of St. Louis 2005-050A.
- Ramsey, J. B. (1999), The contribution of wavelets to the analysis of economic and financial data, in: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 357, No. 1760, S. 2593–2606.
- Ramsey, J. B. (2002), Wavelets in economics and finance: Past and future, in: *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 6, No. 3, S. 1–27.
- Ranta, M. (2010), *Wavelet Multiresolution Analysis of Financial Time Series*, Dissertation, Universitas Wasaensis.
- Rau-Bredow, H. (2002), Value at Risk, Normalverteilungshypothese und Extremwertverhalten, in: *Finanz Betrieb: Zeitschrift für Unternehmensfinanzierung und Finanzmanagement*, Vol. 3, S. 603–607.
- Renaud, O., Starck, J. und Murtagh, F. (2005), Wavelet-based combined signal filtering and prediction, in: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, Vol. 35, No. 6, S. 1241–1251.
- Rickles, D. (2010), Econophysics and the complexity of financial markets, in: Hooker, C. (Hrsg.): *Handbook of the Philosophy of Science, Vol 10: Philosophy of Complex Systems*, Oxford, S. 531–568.
- Rudd, A. und Clasing, H. K. (1988), *Modern Portfolio Theory: The Principles of Investment Management*, New York.
- Rybski, D. (2006), *Untersuchung von Korrelationen, Trends und synchronem Verhalten in Klimazeitreihen*, Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen.
- Samia, M., Dalenda, M. und Saoussen, A. (2009), Accuracy and conservatism of VaR models: A wavelet decomposed VaR approach versus standard ARMA-GARCH method, in: *International Journal of Economics and Finance*, Vol. 1, No. 2, S. 174–184.

- Schleicher, C. (2002), An introduction to wavelets for economists, Working Paper, Bank of Canada - Working Paper 2002-3.
- Schlüter, S. und Deuschle, C. (2010), Using wavelets for time series forecasting: Does it pay off?, in: IWQW Discussion Paper 04/2010.
- Schwager, J. D. (2006), Market Wizards: Interviews with Top Traders, Columbia.
- Setz, T. (2011), Wavelet analysis on stochastic time series - a visual introduction with an examination of long term financial time series, Working Paper, ETH Zürich - Computational Science and Engineering.
- Silverman, B. W. (1999), Wavelets in statistics: beyond the standard assumptions, in: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 357, No. 1760, S. 2459–2473.
- Simon, H. (1981), The Sciences of the Artificial, Cambridge.
- Sornette, D. (2003), Why Stock Market Crash: Critical Events in Complex Financial Systems, Princeton.
- Sornette, D. und Johansen, A. (2001), Significance of log-periodic precursors to financial crashes, in: Quantitative Finance, Vol. 1, No. 4, S. 452–471.
- Stanley, H. E., Afanasyev, V., Amaral, L., Buldyrev, S., Goldberger, A., Havlin, S., Leschhorn, H., Maass, P., Mantegna, R. N., Peng, C.-K. et al. (1996), Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from dna and physiology to econophysics, in: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 224, No. 1, S. 302–321.
- Stanley, H. E., Amaral, L. A. N., Canning, D., Gopikrishnan, P., Lee, Y. und Liu, Y. (1999), Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics?, in: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 269, No. 1, S. 156–169.
- Stiglitz, J. E. (2002), Information and the change in the paradigm in economics, in: American Economic Review, Vol. 92, No. 1, S. 460–551.

- Stoffel, A. (2011), Wavelets und filterbänke, Vorlesungsskript, Cologne University of Applied Sciences.
- Stolojescu, C. L. (2012), A Wavelets Based Approach for Time Serie Mining, Dissertation, Université de Bretagne-Sud.
- Stone, R. W. und Lyman, R. A. (2011), Trading with a day job: Can automated trading strategies be profitable?, in: Journal of Business and Economics Research, Vol. 5, No. 10, S. 25–34.
- Strang, G. (1989), Wavelets and dilation equations: A brief introduction, in: SIAM Review, Vol. 31, No. 4, S. 614–627.
- Su, H., Liu, Q. und Li, J. (2012), Boundary effects reduction in wavelet transform for time-frequency analysis., in: WSEAS Transactions on Signal Processing, Vol. 8, No. 4, S. 169–179.
- Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F. J. und Kalev, P. S. (2008), Fractals in trade duration: capturing long-range dependence and heavy tailedness in modeling trade duration, in: Annals of Finance, Vol. 4, No. 2, S. 217–241.
- Sun, W., Rachev, S. Z. und Fabozzi, F. (2008), Long-range Dependence, Fractal Processes, and Intra-Daily Data, in: Seese, D., Weinhardt, C. und Schlottermann, F. (Hrsg.): Handbook on Information Technology in Finance, Berlin, S. 543–585.
- Sweldens, W. (1995), Construction and Applications of Wavelets in Numerical Analysis, Dissertation, Catholic University of Leuven.
- Torrence, C. und Compo, G. P. (1998), A practical guide to wavelet analysis, in: Bulletin of the American Meteorological Society, Vol. 79, No. 1, S. 61–78.
- Unser, M. und Aldroubi, A. (1996), A review of wavelets in biomedical applications, in: Proceedings of the IEEE, Vol. 84, No. 4, S. 626–638.
- Verma, R. und Goel, A. (2011), Wavelet application in fingerprint recognition, in: International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE) ISSN, Vol. 1, No. 4, S. 2231–2307.

- Voit, J. (2005), *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, Berlin.
- Vuorenmaa, T. A. (2004), *A Multiresolution Analysis of Stock Market Volatility Using Wavelet Methodology*, Dissertation, University of Helsinki.
- Vuorenmaa, T. A. (2005), *A wavelet analysis of scaling laws and long-memory in stock market volatility*, Working Paper, Bank of Finland Research Discussion Paper (27).
- Wadi, S. A. und Ismail, M. T. (2011), *Selecting wavelet transforms model in forecasting financial time series data based on arima model*, in: *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 5, No. 7, S. 315–326.
- Walden, A. T. (2001), *Wavelet analysis of discrete time series*, in: Casacuberta, Carles and Miro-Roig, RosaMaria and Verdera, Joan and Xambo-Descamps, Sebastia (Hrsg.): *European Congress of Mathematics*, Vol. 202 of *Progress in Mathematics*, Basel, S. 627–641.
- Wei, H. und Billings, S. (2005), *Singularity and similarity detection for signals using the wavelet transform*, University of Sheffield Research Report No. 899.
- Wilmott, P. (2011), *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*, Chichester.
- www.eurexchange.com (2014).
 URL: <http://www.eurexchange.com/exchange-de/handel/handelskalender/handelszeiten/144364/?frag=144368>
- www.msci.com (2014).
 URL: <http://www.msci.com/products/indices/tools>
- www.xetra.com (2014), *Xetra - handelszeiten*.
 URL: http://deutsche-boerse.com/it/dispatch/de/listcontent/gdb_navigation/about_us/20_FWB_Frankfurt_Stock_Exchange/65_Trading_Hours/page0_DB_SP_FWB-Handelszeiten.htm
- Yamada, H. und Honda, Y. (2005), *Do stock prices contain predictive information on business turning points? A wavelet analysis*, in: *Applied Financial Economics Letters*, Vol. 1, No. 1, S. 19–23.

Yousefi, S., Weinreich, I. und Reinarz, D. (2005), Wavelet-based prediction of oil prices, in: *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 25, No. 2, S. 265–275.

Zhang, B.-L., Coggins, R., Jabri, M. A., Dersch, D. und Flower, B. (2001), Multiresolution forecasting for futures trading using wavelet decompositions, in: *Neural Networks, IEEE Transactions on*, Vol. 12, No. 4, S. 765–775.

Zhang, P. (2012), *Statistical self-similarity in time series from financial data & chaotic dynamical systems*, Dissertation, Wake Forest University.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Die Dissertation ist bisher keiner anderen Fakultät vorgelegt worden.

Ich erkläre, dass ich bisher kein Promotionsverfahren erfolglos beendet habe und dass keine Aberkennung eines bereits erworbenen Doktorgrades vorliegt.

Ort, Datum

Unterschrift