

Moving Windows zum Testen auf Change-Points

Sequentielle und beste Tests

Zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

bei der Mathematisch-Geographischen Fakultät
der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt

eingereichte und genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Math. oec. Univ.

Andreas Gegg

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 2013

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Bischoff
Korreferent: Prof. Dr. Enkelejd Hashorva

Eichstätt im April 2013

*Meiner Frau Katharina
sowie meinen Kindern
Sophia und Jeremias*

Danksagung

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Wolfgang Bischoff, der von Anfang an großes Vertrauen in mich setzte. Er gab nicht nur den Anstoß zu dem Thema, sondern begleitete und förderte den Fortgang der vorliegenden Arbeit entscheidend mit. Im Laufe unserer gemeinsamen Zeit an der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt hat er darüber hinaus maßgeblich zu meiner Entwicklung als Wissenschaftler beigetragen.

Herrn Prof. Dr. Enkelejd Hashorva möchte ich für die bereitwillige Übernahme des Korreferates ganz herzlich Dank sagen.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Dr. Hans Fischer für zahlreiche motivierende Diskussionen sowie bei PD Dr. Lydia Außenhofer und Prof. Dr. Günther Wirsching für Ihre Gesprächsbereitschaft bei Fragen und Unklarheiten. Frau Hildegund Schulz-Merkel danke ich für die äußerst angenehme Zusammenarbeit während meiner Tätigkeit als Mitarbeiter am Lehrstuhl und für die Durchsicht der Arbeit auf äußere Fehler.

Meinen Eltern, Geschwistern und insbesondere auch meinen Schwiegereltern gilt mein Dank für ihre große Rücksichtnahme und Unterstützung in den letzten Jahren. Fürs „Korrekturlesen“ bedanke ich mich bei meiner Schwägerin Barbara Klein und bei meiner Frau Katharina ganz herzlich. Ihr und unseren Kindern Sophia und Jeremias danke ich in ganz besonderer Weise für vielen Verzicht und steten Zuspruch. Ohne die aufmunternden Worte und das Verständnis meiner Frau für die Besonderheiten einer Dissertation in Mathematik wäre die vorliegende Arbeit nicht in dieser Qualität möglich gewesen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vii
Symbolverzeichnis	ix
I Problemstellung und Nicht-sequentielle Betrachtungen	1
1 Problemstellung und asymptotische Betrachtungen	3
1.1 Einleitung	3
1.2 Asymptotische Problemstellung	8
2 Nicht-sequentielle Testverfahren	15
2.1 Gleichmäßig bester α -Niveau Test	15
2.1.1 Wiener-Integral und Cameron-Martin Theorem	16
2.1.2 Teststatistik und Entscheidungsregel	18
2.1.3 Testgüte	19
2.2 Rückwärts-Operator und Verbesserung der Güte	22
2.3 Tests vom Kolmogorov-Typ	25
2.3.1 Teststatistik und Entscheidungsregel	26
2.3.2 Güte der Kolmogorov-Tests für allgemeine Alternativen	27
2.3.3 Güte bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	28
2.4 Maximum Increase-Test	29
2.4.1 Definition und Eigenschaften	30
2.4.2 Teststatistik und Entscheidungsregel	31
2.5 Gütevergleich bei Vorliegen einer Sprungfunktion unter der Alternative	33
2.5.1 Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	34
2.5.2 Alternative $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	35

II	Sequentielle Testverfahren basierend auf Fenstern	39
3	Sequentielle Testverfahren mit unbeschränkter Fensterlänge	41
3.1	Problem- und Zielsetzung bei sequentiellen Verfahren	41
3.2	Neuinterpretation zweier nicht-sequentieller Tests	43
3.2.1	Kolmogorov- und Maximum Increase-Test im sequent. Kontext . . .	44
3.2.2	Vergleich der Verfahren bei Vorliegen einer Sprungfunktion	45
4	Sequentielle Testverfahren mit konstanter Fensterlänge p	49
4.1	Der Slepian- p -Prozess	51
4.1.1	Die bedingte Markov-Eigenschaft des Slepian- p -Prozesses	57
4.1.2	Das Supremum eines Slepian- p -Prozesses	60
4.1.3	Slepian- p -Prozess und affine Schranken	65
4.1.4	Stückweise Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeit	70
4.2	Der Kolmogorov-Slepian- p -Test	76
4.2.1	Literaturüberblick	76
4.2.2	Kritische Werte	77
4.2.3	Testgüte	80
4.3	Testgüte und Performancevergleich für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	82
4.3.1	Testgüte im Fall $\theta = 0$	83
4.3.2	Testgüte im Fall $p \geq \max(\theta, 1 - \theta)$	84
4.3.3	Testgüte im Fall $\frac{1}{2} \leq p < \max(\theta, 1 - \theta)$	85
4.3.4	Performancevergleich: Numer. Berechnungen und Simulationen	88
4.3.5	Zur Wahl der Fensterlänge p	94
4.4	Der p -Wert des Tests	95
5	Sequentielle Testverfahren mit maximaler Fensterlänge p	97
5.1	Der Wiener-Slepian- p -Prozess	98
5.2	Der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test	99
5.2.1	Kritische Werte	100
5.2.2	Performancevergleich bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	101
5.2.3	Zur Wahl der Fensterlänge p	105
III	Beste α-Niveau Tests	107
6	Der Kernel eines Gauß-Prozesses	109
6.1	Eigenschaften des Kernels und Verallg. von Cameron-Martin	109

6.2	Der Kernel für spezielle Gauß-Prozesse	111
6.2.1	Der Kernel im Falle eines Slepian- p -Prozesses	112
6.2.2	Der Kernel des Wiener-Slepian- p -Prozesses	113
7	Beste α-Niveau Tests	119
7.1	Bester Slepian- p -Test	119
7.1.1	Free Brownian Motion und dazu verteilungsäquivalente Prozesse . . .	119
7.1.2	Slepian- p -Prozess und Free Brownian Motion	123
7.1.3	Bester α -Niveau Test für allgemeine Alternativen	127
7.1.4	Gleichmäßig bester α -Niveau Test für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$	130
7.2	Gleichmäßig bester Wiener-Slepian- p -Test	138
7.2.1	Teststatistik und Entscheidungsregel	138
7.2.2	Vergleich mit bestem α -Niveau Test für Brownsche Bewegungen . . .	143
IV	Anhang	145
A	Beweise zu Kapitel 2	147
A.1	Einfache Hypothesen und bester α -Niveau Test	147
A.2	Rückwärts-Operator und Verbesserung der Güte	149
A.3	Tests vom Kolmogorov-Typ	150
A.4	Maximum Increase-Test	153
B	Herleitung des Kernel-Begriffs	155
B.1	Formale Definition von „Kernel“	155
B.2	Weitere Eigenschaften des Kernels eines Slepian- p -Prozesses	157
Index		161
Literaturverzeichnis		163

Abbildungsverzeichnis

1.1	Funktionsweise des Partialsummen-Operators T_n	10
1.2	Funktion $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ und zugehöriges Signal s_f	12
2.1	Güte des besten α -Niveau Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$)	20
2.2	Funktion $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ und zugehörige Signale $s_f(t) = \mu(t - \theta)^+$ und $\overleftarrow{s}_f(t) = \mu \min(t, 1 - \theta)$, ($t \in [0, 1]$, $\mu > 0$, $\theta \in [0, 1]$)	25
2.3	Die zur Funktion $f(t) = 2t$ gehörigen Signale $s_f(t) = t^2$ und $\overleftarrow{s}_f(t) = 2t - t^2$ ($t \in [0, 1]$)	26
2.4	Güte verschiedener nicht-sequentieller Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)	35
2.5	Güte des besten α -Niveau Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ im Falle, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau,1]}$ die wahre Regressionsfunktion ist im Vergleich mit Kolmogorov- und Maximum Increase-Test (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)	36
2.6	Güte verschiedener nicht-sequentieller Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante I) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante II) (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)	37
3.1	Verfahrensstopppzeit des Kolmogorov- und Maximum Increase-Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante I) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante II) (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	47
4.1	Kovarianzfunktion $\gamma_{W^p} = (p - t)^+$	53
4.2	Bedingte Dichte von $W_t^p W_0^p = x_1$	58
4.3	Funktion $\mu \left(p - (\theta - t)^+ \right)^+$ für die Fälle $p < \theta$ (links) und $p \geq \theta$ (rechts)	83
4.4	Berechnete und simulierte Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$)	89
4.5	Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests im Vergleich mit Maximum Increase- und Kolmogorov-Test bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen, bei Kolmogorov-Test Berechnungen)	91

4.6	Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p - und des Maximum Increase-Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	92
4.7	Ausschnitt Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests im Vergleich mit Maximum Increase-Test bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	93
4.8	Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	94
4.9	Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	96
5.1	Güte der verschiedenen sequentiellen Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen, bei Kolmogorov Berechnungen)	102
5.2	Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	103
5.3	Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests und des Maximum Increase-Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	104
5.4	Güte des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	105
5.5	Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)	106
7.1	Gütefunktionen des besten Tests (für Brownsche Bewegungen), des besten Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Vorliegen der Alternative $f_0 = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Berechnungen)	136
7.2	Güte des besten Tests (für Brownsche Bewegungen) und des besten Slepian- p -Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ im Falle, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau,1]}$ die wahre Regressionsfunktion ist (Niveau $\alpha = 0.1$; Berechnungen)	137
7.3	Gütefunktionen des besten* Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests für $p \in (0, 1]$ bei Vorliegen der Alternative $f \equiv \mu p$ (Niveau $\alpha = 0.1$; beim besten* Test Berechnungen, bei Kolmogorov-Slepian- p Simulationen) .	139

Tabellenverzeichnis

4.1	Berechnete/simulierte $(1 - \alpha)$ -Quantile $c_{1-\alpha;p}$ von $\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p$	80
5.1	Simulierte $(1 - \alpha)$ -Quantile $k_{1-\alpha;p}$ von $\sup_{t \in [0, 1]} V_t^p$, für $p = 1$ zusätzlich berechnet	100

Symbolverzeichnis

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem alle auftretenden stochastischen Prozesse/ Zufallsvariablen definiert sind
$\mathbf{E}, \mathbf{Var}, \mathbf{Cov}$	Erwartungswert, Varianz, Kovarianz
\mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^n	Menge der reellen Zahlen bzw. der n -dimensionalen, reellwertigen Vektoren
\mathbb{N} bzw. \mathbb{Z}	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots\}$ bzw. der ganzen Zahlen
$BV([0, T])$	Menge der Funktionen beschränkter Variation auf $[0, T]$, $T > 0$, S. 16
$C([0, T])$	Menge der stetigen Funktionen auf $[0, T]$, $T > 0$, S. 17
$L^2([0, T])$	quadratisch integrierbare Funktionen auf $[0, T]$, $T > 0$, S. 11
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$	Skalarprodukt in $L^2([0, T])$, $T > 0$, S. 11
T_n	Partialsummen-Operator, S. 9
$\mathbf{1}_{(a,b]}$	Indikatorfunktion des Intervalls $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$, S. 12
x^+	$\max(x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$
λ	Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, S. 11
s_f	Das von $f \in L^2([0, T])$ induzierte Signal, S. 11
\leftarrow	Rückwärts-Operator, S. 22
z_γ	γ -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung, d.h. $z_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$ für $\gamma \in (0, 1)$, S. 18
\det	Determinante einer quadratischen Matrix
diag	Diagonalmatrix
α	$\in (0, 1)$, Signifikanzniveau eines Tests

p	> 0 , Fensterlänge beim (Wiener-)Slepian- p -Prozess
θ	$\in [0, 1)$ Lage des Change-Points bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$
ϕ (bzw. ϕ_{σ^2})	Dichte der $N(0, 1)$ (bzw. für $\sigma > 0$ der $N(0, \sigma^2)$) -Verteilung, S. 18 und S. 150
Φ (bzw. Φ_{σ^2})	Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$ (bzw. für $\sigma > 0$ der $N(0, \sigma^2)$)-Verteilung, S. 18 und S. 150
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	Gleichheit nach Verteilung, S. 60
$B_{[s,t]}$ bzw. B	Standard Brownsche Bewegung mit Pfaden in $C([s, t])$ bzw. $C([0, \infty))$, S. 10
Y	asymptotisches Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = Y = s_f + B_{[0,1]}$, S. 14
\overleftarrow{Y}	rückwärtiges, asymptotisches Regressionsmodell, S. 23
\mathbb{I} bzw. \mathbb{D}	Maximum Increase- bzw. Decrease-Operator, S. 30
W^p	zentrierter Slepian- p -Prozess, $p > 0$, S. 54
\mathbb{W}^p	Slepian- p -Prozess, $p > 0$, mit Erwartungswert m , S. 127
φ_p	Dichte der endlich-dimensionalen Verteilung von $W_{[0,p]}^p$, S. 54
Δ^p	Linearer Operator für Slepian- p -Prozess, S. 81
$\pi_{p,g}$	Dichte der first hitting time, dass W^p die Gerade $g(t) = b + at$ kreuzt, S. 53 und S. 66
D^p	Linearer Operator für Wiener-Slepian- p -Prozess, S. 113
V^p	zentrierter Wiener-Slepian- p -Prozess, S. 99
\mathbb{V}^p	Wiener-Slepian- p -Prozess mit Erwartungswert m , S. 138
\mathcal{H}	reproduzierender Kernel Hilbert Raum/Kernel der Brown. Bew., S. 17 und S. 109
\mathcal{H}_{BM}	Kernel der Brownschen Bewegung, S. 109

$\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$	Kernel des Slepian- p -Prozesses, S. 112
$\mathcal{H}_{\text{Wiener-SL-}p}$	Kernel des Wiener-Slepian- p -Prozesses, S. 116
$c_{1-\alpha;p}$	$(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p$, S. 50 und Tabelle 4.1
$k_{1-\alpha;p}$	$(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sup_{t \in [0, 1]} V_t^p$, S. 98 und Tabelle 5.1
$u_{1-\alpha;p}$	kritischer Wert des besten α -Niveau Tests für Slepian- p -Prozesse, S. 127

Teil I

Problemstellung und Nicht-sequentielle Betrachtungen

1 Problemstellung und asymptotische Betrachtungen

1.1 Einleitung

In nahezu allen Bereichen des täglichen Lebens werden heutzutage Daten aufgezeichnet und ausgewertet. Beispielsweise misst eine Maschinenbaufirma die Durchmesser der produzierten Zylinder oder ein Automobilhersteller die Durchlaufzeit der gefertigten Fahrzeuge. Oftmals ist dann von Interesse, ob es einen Zeitpunkt gibt, an dem eine Veränderung eingetreten ist. Dieser Punkt wird in der Literatur auch als *Change-Point* bezeichnet. Um Abweichungen vom Normalzustand schnellstmöglich entgegenwirken zu können, ist es wichtig, einen Change-Point rechtzeitig zu identifizieren. Andererseits soll jedoch in den laufenden Prozess nicht unnötig eingegriffen werden.

Change-Point Probleme treten insbesondere im Bereich der Qualitätskontrolle auf. Dort ist von Bedeutung,

- ob der Produktionsprozess über eine gewisse Zeitspanne gleich einer vorgegebenen Konstanten ist (d.h. ob der Prozess „in control“ ist)
- oder aber ob sich die Qualität verschlechtert hat (d.h. ob der Prozess „out of control“ ist) und dementsprechend korrigierend eingegriffen werden muss, falls der Prozess noch läuft.

Für detaillierte Anwendungsbeispiele von Change-Point Problemen verweisen wir auf Basseville und Nikiforov (1993), Hawkins und Olwell (1998) und Montgomery (2009).

Wir nehmen im Nachfolgenden an, dass

- i) der Betrachtungszeitraum beschränkt ist und wir diesen daher als $[0, 1]$ annehmen können.
- ii) Weiterhin gehen wir davon aus, dass der Produktionsprozess mit Hilfe eines Regressi-

onsmodells modelliert werden kann. Wir betrachten also das Modell

$$Z(t) = f(t) + \epsilon(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1.1.1)$$

wobei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regressions-Funktion und $\epsilon(t)$ eine zentrierte Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2 > 0$ ist.

Damit lässt sich die Problemstellung im Bereich der Qualitätskontrolle wie folgt beschreiben: Man möchte wissen, ob f gleich einer bekannten Konstanten c , $c \in \mathbb{R}$, ist oder aber ob ein Change-Point eingetreten ist und demnach f nicht konstant ist. Da c als bekannt vorausgesetzt wird, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c = 0$ annehmen und die Nullhypothese

$$H_0 : f \equiv 0$$

stellt somit den Fall dar, dass der Prozess „in control“ ist. Weiter nehmen wir an:

- iii) f wächst mit schlechter werdender Qualität, d.h. je schlechter die Qualität, desto größer f .
- iv) Ist die Qualität nicht mehr zufriedenstellend, so kann sich der Prozess selbst nicht wieder verbessern. Nur durch einen externen Eingriff ist es möglich, den Prozess wieder „in control“ zu bringen.

Aus iii) und iv) folgt, dass für f unter der Alternative

$$f \geq 0 \text{ und } f \text{ monoton wachsend} \quad (1.1.2)$$

gelten muss.

Literaturüberblick

Das Lösen von Change-Point Fragestellungen ist „von entscheidender Bedeutung hinsichtlich sicherheitstechnischer, ökologischer und ökonomischer Aspekte“ (Basseville und Nikiforov, 1993, S.XI). Daher ist es naheliegend, dass diesen Problemen viel Aufmerksamkeit geschenkt wird. Die Arbeiten von Csörgő und Horváth (1988); Zacks (1991); Basseville und Nikiforov (1993); Chen und Gupta (2000); Human und Graham (2007); Hawkins u. a. (2007) sowie Poor und Hadjiliadis (2009) stellen die verschiedenen Problemstellungen im Bereich der Change-Point Analyse dar und skizzieren verschiedene Verfahren, die zur Lösung des jeweiligen Problems geeignet sind. Sie zeigen die Breite der Change-Point Problemstellungen

auf und ermöglichen dem Leser (durch Literaturhinweise) ein vertieftes Studium in die jeweilige Richtung. Wir weisen explizit darauf hin, dass wir nur daran interessiert sind, einen Strukturbruch überhaupt zu entdecken und nicht etwa, die Lage des Change-Points θ zu schätzen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die noch zu präzisierenden Hypothesen mit Hilfe eines α -Niveau Tests ($\alpha \in (0, 1)$) untersucht werden. Ein dazu in der Literatur gängiger Ansatz ist es, den Residuenpartialsummenprozess (oder Varianten desselbigen) des zugehörigen Modells (1.1.1) zu betrachten (vgl. Gardner, 1969; Brown u. a., 1975; MacNeill, 1978a,b; Sen, 1982; MacNeill und Jandhyala, 1985; Jandhyala und MacNeill, 1989; Bischoff, 1998; Jandhyala u. a., 1999; Bischoff und Miller, 2000; Bischoff, 2002; Bischoff u. a., 2003, 2004, 2005, 2006; Bischoff und Somayasa, 2009; Bischoff, 2010; Bischoff und Gegg, 2010, 2011, und die darin angegebenen Literaturhinweise).

Gliederung und Ergebnisse der Arbeit

Teil I In Abschnitt 1.2 führen wir zunächst unsere Notation ein und formalisieren die Problemstellung für das sog. *asymptotische Regressionsmodell*.

Für diese Problemstellung stellen wir dann in Kapitel 2 verschiedene Lösungsansätze vor, die im nicht-sequentiellen Kontext eingesetzt werden können. Wir führen hierzu einen neuen Operator, den sog. *Rückwärts-Operator* „ \leftarrow “ ein, womit wir unter anderem bekannte Resultate einfacher ausdrücken können. Darüber hinaus stellen wir einen neuartigen Test, den sog. *Maximum Increase-Test* vor. In einem abschließenden Abschnitt vergleichen wir die verschiedenen Verfahren hinsichtlich ihrer Güte bei Vorliegen verschiedener Sprungfunktionen unter der Alternative. Die dabei verwendeten Berechnungen und Darstellungen sind bis dato in der Literatur unseres Wissens nach noch nicht aufgetaucht.

Teil II In Teil II der Arbeit präsentieren wir neuartige, sequentielle Verfahren bzw. Betrachtungsweisen zur Beantwortung der Change-Point Fragestellung im asymptotischen Regressionsmodell.

In Abschnitt 3.1 präzisieren wir, was unter sequentiellen Verfahren im Allgemeinen zu verstehen ist und untersuchen in Abschnitt 3.2 sequentielle Prozeduren, bei denen alle bis zum Zeitpunkt t , $t \in [0, 1]$, vorhandenen Daten mit einfließen. Wir verwenden dazu einige nicht-sequentielle Verfahren aus Kapitel 2 und setzen diese im sequentiellen Kontext ein. Die vorgestellte Betrachtungsweise von sequentiellen Verfahren ist unseres Wissens nach neu. Zum Vergleich der verschiedenen *Verfahrensstoppszeit*-Verteilungen führen wir Simulationen durch und verwenden zur Ergebnispräsentation eine neu entwickelte Darstellungsform. Diese

Darstellungsweise kommt im Laufe der Arbeit an verschiedenen Stellen zum Einsatz.

In Kapitel 4 werden für die Teststatistik nicht alle vorhandenen Daten verwendet, sondern nur ein bestimmter Ausschnitt der Länge p , $p > 0$. Wir betrachten hier also die Situation eines „moving windows“. Für jedes dieser Fenster definieren wir eine bestimmte Teststatistik, wodurch ein stochastischer Prozess entsteht. Diesen nennen wir *Slepian- p -Prozess* und bezeichnen ihn mit $W^p = (W_t^p)_{t \geq 0}$. In Abschnitt 4.1 charakterisieren wir W^p näher und geben hierfür zahlreiche neue Resultate an. Wir berechnen unter anderem die Dichte der endlich-dimensionalen Verteilungen von W^p und weisen in Abschnitt 4.1.1 die sog. *bedingte Markov-Eigenschaft* von W^p nach. Beides ist in der Literatur für $p = 1$ bekannt, für allgemeines $p > 0$ bisher jedoch nicht. In Abschnitt 4.1.2 geben wir einen analytischen Ausdruck für die Verteilung von $\sup_{t \in [0, T]} W_t^p$, $T \geq 0$, an. Für $T \leq p$ ist diese Verteilung unseres Wissens nach in der Literatur noch nicht aufgetaucht. Im Fall $T > p$ hingegen ist die Verteilung relativ kompliziert und bekannt (vgl. Cressie, 1980, S. 835f.). In Abschnitt 4.1.3 berechnen wir eine bedingte Dichte der „first hitting time“ $\inf\{t \geq 0 | W_t^p > b + at\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, auf $[0, p]$. Diese Dichte wird für allgemeines $p > 0$ unseres Wissens nach erstmalig in dieser Arbeit dargestellt, im Falle $p = 1$ findet sie sich in Abrahams (1984). Des Weiteren berechnen wir in diesem Abschnitt

$$\mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T])$$

mit $T \in (0, p]$. Soweit wir wissen, ist diese Wahrscheinlichkeit in der Literatur (auch für den Fall $p = 1$) bisher noch nicht bestimmt worden. In Abschnitt 4.1.4 stellen wir eine Möglichkeit vor, die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(W_t^p \leq h(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T])$$

für allgemeine Schrankenfunktionen $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise durch iterierte Integrale zu berechnen. Bisher war hierfür in der Literatur nur der Fall behandelt worden, dass h stückweise konstant, $p = 1$ und der Anfangs- und Endpunkt W_0^p und W_T^p fest sind. Um die angesprochenen iterierten Integrale als Approximation für beliebige Schranken h einsetzen zu können, geben wir für $p > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(W_t^p \leq b + a(t - t_1) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2] \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{t_2}^p = x_2) \quad \text{für } [t_1, t_2] \subseteq [0, p]$$

an. Diese ist bisher in der Literatur nur im Falle $p = 1, a = 0$ bekannt.

In Abschnitt 4.2 studieren wir einen neuartigen sequentiellen Test, welchen wir für $p \in (0, 1]$

Kolmogorov-Slepian- p -Test nennen. Wir geben hierfür analytische Formeln an, mit deren Hilfe der kritische Wert bestimmt werden kann. Diese Formeln sind für $p > \frac{1}{2}$ neu und in diesem Fall auch numerisch berechenbar. Des Weiteren skizzieren wir mögliche Abschätzungen für die Testgüte, welche aufgrund der obig genannten neuen Resultate nun möglich sind.

Für die Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$, $\theta \in [0, 1)$, berechnen wir im Fall $p \geq \frac{1}{2}$ explizit die Testgüte in Abschnitt 4.3. Wir erhalten diese erstmalig veröffentlichten Gütefunktionen durch diverse Fallunterscheidungen (Abschnitt 4.3.1 – 4.3.3). Diese Güten sind numerisch berechenbar. In Abschnitt 4.3.4 vergleichen wir diese Berechnungen mit von uns durchgeführten Simulationen. Außerdem präsentieren wir in diesem Abschnitt die Ergebnisse unserer Simulationsstudie zur Güte und Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests im Falle $p \in (0, 1]$. Ein derartiger Vergleich wurde bisher in der Literatur noch nicht angestellt. Zur Wahl der Fensterlänge p ist in der Literatur (Chu u. a., 1995) lediglich zu finden, dass dies ein schwieriges Thema sei. Um dieses Feld etwas besser zu beleuchten, präsentieren wir in Abschnitt 4.3.5 eine Simulationsstudie zur Wahl der Fensterlänge p .

Eine Mischung aus „alle bis zum Zeitpunkt t vorhandenen Daten werden verwendet“ und „moving window mit Fensterlänge p “ wird in Kapitel 5 studiert. Durch diese Art der Fensterbildung erhalten wir den *Wiener-Slepian- p -Prozess*, welchen wir in Abschnitt 5.1 näher beschreiben. Soweit uns bekannt ist, wurde dieser Prozess bisher in der Literatur noch nicht betrachtet. In Abschnitt 5.2 definieren wir den zugehörigen *Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test*. Zu diesem Test führen wir Simulationen durch, um die kritischen Werte und die Testgüte zu erhalten.

Für jedes der sequentiellen Verfahren aus den Kapiteln 3 – 5 simulieren wir die Testgüte und die Verfahrensstopzeit bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0, 1)$. Wir stellen die Ergebnisse am Ende der jeweiligen Kapitel dar und zeigen dadurch, dass die neu konzipierten Kolmogorov-(Wiener-)Slepian- p -Tests bei Vorliegen gewisser Alternativen den sequentiellen Standard-Tests aus Kapitel 3 vorzuziehen sind.

Teil III In Kapitel 6 stellen wir zunächst wichtige Eigenschaften des *Kernels* zusammen (Abschnitt 6.1). Anschließend geben wir den Kernel des Slepian- p -Prozesses (Abschnitt 6.2.1) bzw. denjenigen des Wiener-Slepian- p -Prozesses (Abschnitt 6.2.2) an. Diese Kernel tauchten bisher in der Literatur noch nicht auf.

In Abschnitt 7.1 bestimmen wir einen besten Test für Slepian- p -Prozesse $W_{[0,T]}^p = (W_t^p)_{t \in [0,T]}$ mit $0 < T \leq p$. Dazu geben wir in Satz 7.1.7 die Dichte eines skalierten Slepian- p -Prozesses mit geeigneter Erwartungswertfunktion $m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der Verteilung eines bestimmten Gaußschen Prozesses an. In der Literatur ist diese Dichte bisher nur im Falle

$m \equiv 0$ und $p = 1$ explizit berechnet worden. In Abschnitt 7.1.3 präsentieren wir erstmalig einen besten α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse. Für diesen Test betrachten wir in Abschnitt 7.1.4 eine Sprungfunktion unter der Alternative, wodurch wir den Test auf einen *gleichmäßig* besten α -Niveau Test erweitern können. Die Rechnungen zum Nachweis des gleichmäßig besten Tests sind zwar länglich, die resultierende Teststatistik jedoch bei Vorliegen einer konkreten Realisierung leicht berechenbar. Für den gleichmäßig besten Test geben wir auch die Gütefunktion explizit an. Diese verwenden wir, um den *besten Slepian- p -Test* mit anderen Testverfahren zu vergleichen.

In Abschnitt 7.2 betrachten wir nochmals den eingeführten Wiener-Slepian- p -Prozess $V^p = (V_t^p)_{t \geq 0}$ und stellen hierfür einen besten α -Niveau Test vor. Dazu geben wir für $p > 0, T > 0$ und einer geeigneten Erwartungswertfunktion $m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ den Likelihoodquotienten $\frac{d\mathbb{P}^{V^p}_{[0, T]+m}}{d\mathbb{P}^{V^p}_{[0, T]}}$ explizit an (sh. Abschnitt 7.2.1). Abschließend zeigen wir in Abschnitt 7.2.2, wie der beste Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse mit demjenigen für Brownsche Bewegungen zusammenhängt.

Teil IV Im Anhang (Teil IV) finden sich in Kapitel A Beweise zu Kapitel 2 und in Kapitel B weiterführende Informationen zum Begriff des *Kernels*. Dabei leiten wir den Kernel-Begriff in Abschnitt B.1 formal her und präsentieren in Abschnitt B.2 weitere, bisher unbekannte Eigenschaften des Kernels eines Slepian- p -Prozesses.

Verwendete Software

Alle in der nachfolgenden Arbeit durchgeführten numerischen Berechnungen und Simulationen wurden mit Hilfe des Statistik-Pakets R (R Core Team, 2012) durchgeführt. Dazu wurden vor allem die R-Packete `plyr` (Wickham, 2011), `ggplot2` (Wickham, 2009) und `cubature` (Johnson und Narasimhan, 2011) verwendet.

Ausgewählte analytische Formeln wurden mit Hilfe von `Maple` (Version 16) hergeleitet bzw. überprüft.

1.2 Asymptotische Problemstellung

Gegeben sei das Regressionsmodell

$$Z(t) = f(t) + \epsilon(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1.2.1)$$

mit den Design-Punkten $t_{ni} = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ fest. Die zugehörigen Zufallsvariablen

$$Z(t_{ni}) = f(t_{ni}) + \epsilon(t_{ni}), \quad i = 1, \dots, n,$$

seien stochastisch unabhängig mit identisch verteilten Fehlern $\epsilon(t_{n1}), \dots, \epsilon(t_{nn})$, welche $\mathbf{E}(\epsilon(t_{n1})) = 0$ und $\mathbf{Var}(\epsilon(t_{n1})) = \sigma^2 > 0$ haben. Um die Formeln nicht unnötig zu verkomplizieren, nehmen wir $\sigma^2 = 1$ an. Diese Annahme stellt in unserem Fall keine Einschränkung dar, da:

- i) Ist σ^2 bekannt, so kann man $Z^*(t_{ni}) := \frac{1}{\sigma}Z(t_{ni})$ anstatt $Z(t_{ni})$ betrachten. Für $Z^*(t_{ni})$ gilt nämlich: $\mathbf{Var}(Z^*(t_{ni})) = 1$.
- ii) Ist σ^2 unbekannt, so bleiben die nachfolgenden, asymptotischen Resultate richtig, wenn man $Z^*(t_{ni}) := \frac{1}{\hat{\sigma}_n}Z(t_{ni})$ (mit einem konsistenten Schätzer $\hat{\sigma}_n$ für σ) anstatt $Z(t_{ni})$ betrachtet. Die Korrektheit der jeweiligen Grenzwerte folgt dann unmittelbar mit einer verallgemeinerten Version des „Mapping Theorems“ (Billingsley, 1968, Theorem 5.5).

Der Beobachtungsraum wird mit Hilfe des Partialsummen-Operators

$$T_n : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow C([0, 1]) \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} & \longmapsto \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} z_i + (nt - \lfloor nt \rfloor)z_{\lfloor nt \rfloor + 1}, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

injektiv in $C[0, 1]$ eingebettet. Dabei ist $\sum_{i=k}^{k-1} z_i := 0$ ($k \in \mathbb{N}$), $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$ für $x \geq 0$. Abbildung 1.1 zeigt den Graphen von $T_n(z)$ für $z := (z_1, \dots, z_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.2.1 (Partialsummenprozess)

Der Prozess $T_n(z_1, \dots, z_n) \in C([0, 1])$ heißt Partialsummenprozess (PSP) (basierend auf $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$).

Lässt man die Anzahl der Beobachtungen n gegen ∞ konvergieren, so kann man (unter $H_0 : f \equiv 0$) auf Verteilungsannahmen im Modell (1.2.1) verzichten. Es gilt:

Theorem 1.2.2 (Donsker)

Sei $(t_{ni})_{i=1, \dots, n}$ ein Dreiecksschema von Design-Punkten mit $t_{ni} = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\epsilon(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ eine standardisierte Zufallsvariable und $\epsilon(t_{n1}), \dots, \epsilon(t_{nn})$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Dann gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(\epsilon(t_{n1}), \dots, \epsilon(t_{nn})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_{[0,1]},$$

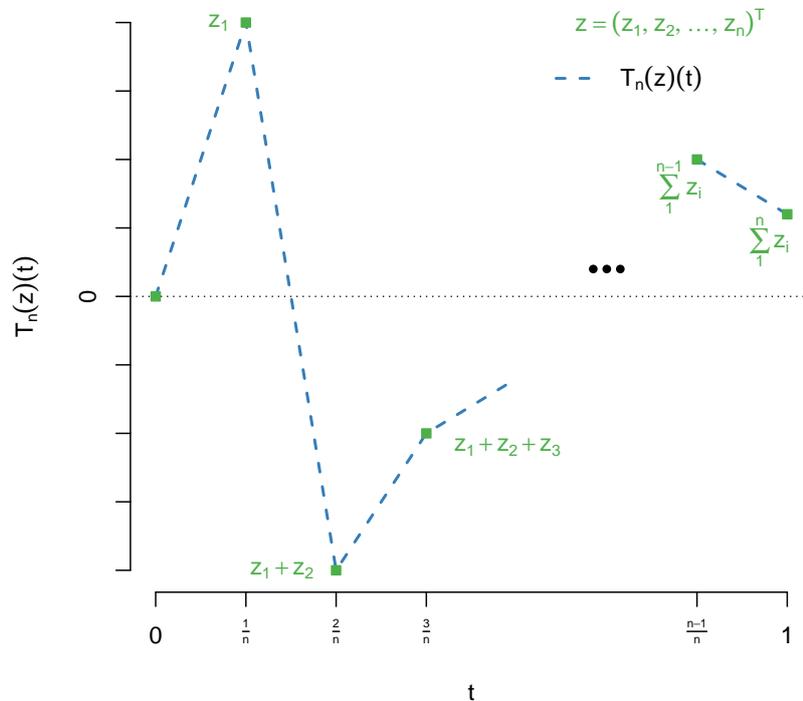


Abbildung 1.1: Funktionsweise des Partialsummen-Operators T_n

wobei \xrightarrow{D} die schwache Konvergenz in $C[0,1]$ bezeichnet und $B_{[0,1]} := (B_t)_{t \in [0,1]}$ eine Standard Brownsche Bewegung mit Pfaden in $C([0,1])$ ist.

BEWEIS sh. z. B. Billingsley (1999, S. 90f.) ■

Bemerkung 1.2.3 In der gesamten, vorliegenden Arbeit sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung mit Pfaden in $C([0, \infty))$. Weiterhin gelte für einen stochastischen Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ und $a < b$, $a, b \geq 0$ die Bezeichnung

$$Y_{[a,b]} := (Y_t)_{t \in [a,b]}.$$

Unter „ $H_0 : f \equiv 0$ “ gilt im Modell (1.2.1):

$$Z(t_{ni}) = \epsilon(t_{ni}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Das Dreiecksschema $(\epsilon(t_{ni}))_{i=1,\dots,n}$ erfüllt die Voraussetzungen des Donsker-Theorems und damit gilt für den *asymptotischen Partialsummenprozess* unter H_0 :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(Z(t_{n1}), \dots, Z(t_{nn})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_{[0,1]}. \quad (1.2.2)$$

Um den asymptotischen Partialsummenprozess auch für den Fall $f \neq 0$ berechnen zu können, benötigen wir eine einheitliche Notation: Wir bezeichnen mit \mathcal{B} die σ -Algebra der Borel-Mengen auf \mathbb{R} und für $T > 0$ mit $\mathcal{B}([0, T]) := \mathcal{B} \cap [0, T]$ diejenige auf $[0, T]$. Weiter seien λ das Lebesgue-Maß auf \mathcal{B} und

$$\mathcal{L}^2 := \left\{ g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ messbar mit } \int_{[0, T]} g^2 d\lambda < \infty \right\}$$

die Menge der quadratisch λ -integrierbaren Funktionen sowie

$$L^2([0, T]) := L^2([0, T], \lambda) := \mathcal{L}^2 \setminus \{g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ messbar mit } g \equiv 0 \lambda\text{-f.s.}\}. \quad (1.2.3)$$

Wie üblich behandeln wir die Elemente von $L^2([0, T])$ wie Funktionen (vgl. Elstrodt, 2007, S. 230f.) und identifizieren dabei Funktionen, die λ -f.s. übereinstimmen. Auf $L^2([0, T])$ betrachten wir für $f, g \in L^2([0, T])$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{[0, T]} fg d\lambda \quad (1.2.4)$$

und die zugehörige Norm $\|f\|_{L^2}^2 := \int_{[0, T]} f^2 d\lambda$. Damit sind wir nun in der Lage, das *Signal* s_f zu definieren:

Definition 1.2.4 (Signal s_f)

Für $f \in L^2([0, T])$ ist s_f das Signal, welches von f induziert wird. Es ist definiert gemäß

$$s_f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{[0, t]} f d\lambda. \quad (1.2.5)$$

Beispiel 1.2.5 Es sei $\mu > 0$ und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

a) Für $f \equiv \mu$ ist $s_f(t) = \mu t$, $t \in [0, 1]$.

b) Die Indikatorfunktion von $(a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_{(a, b]}$. Sie ist

definiert durch

$$\mathbf{1}_{(a,b]}(t) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } t \in (a, b] \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}. \quad (1.2.6)$$

Ist $f = \mu \cdot \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ für ein $\theta \in [0, 1)$, so gilt ($t \in [0, 1]$):

$$s_f(t) = \int_{[0,t]} f \, d\lambda = \mu \lambda([0, t] \cap [\theta, 1]) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t < \theta \\ \mu(t - \theta) & , \text{ falls } t \geq \theta \end{cases}.$$

Setzt man für $x \in \mathbb{R}$: $x^+ := \max(0, x)$, so kann man s_f auch wie folgt darstellen:

$$s_f(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+, \quad t \in [0, 1].$$

Abbildung 1.2 zeigt die entsprechenden Graphen von f und s_f .

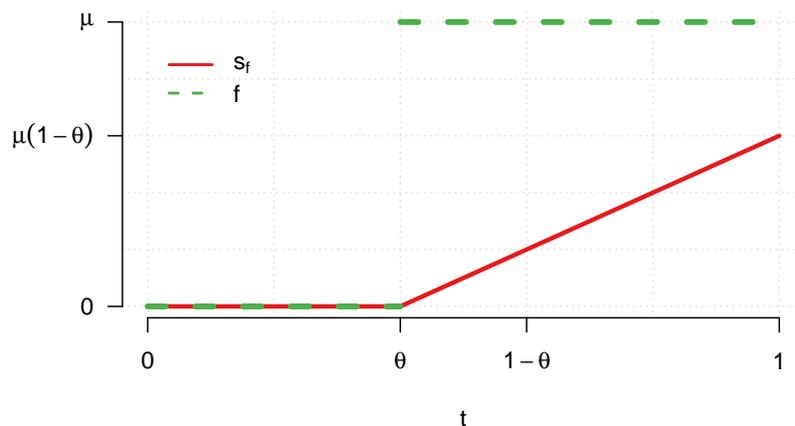


Abbildung 1.2: Funktion $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ und zugehöriges Signal s_f

Im Falle $f \not\equiv 0$ gilt im Modell (1.2.1):

$$Z(t_{ni}) = f(t_{ni}) + \epsilon(t_{ni}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Betrachtet man für dieses Modell den zugehörigen Partialsummenprozess, so gilt aufgrund der Linearität von T_n :

$$T_n(Z(t_{n1}), \dots, Z(t_{nn})) = T_n(f(t_{n1}), \dots, f(t_{nn})) + T_n(\epsilon(t_{n1}), \dots, \epsilon(t_{nn})). \quad (1.2.7)$$

Nach (1.1.2) ist $f \geq 0$ und f monoton wachsend unter der Alternative. Aus Letzterem aber folgt, dass f Riemann-integrierbar ist, womit folgt:

$$\begin{aligned} T_n \left(\frac{1}{n} f(t_{n1}), \dots, \frac{1}{n} f(t_{nn}) \right) (t) &= \frac{1}{n} T_n \left(f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right) \right) (t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)}{n} f\left(\frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx = s_f(t). \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Bemerkung 1.2.6 Der Grenzwert des asymptotischen Partialsummenprozesses in (1.2.8) ist ein Riemann-Integral. Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir allerdings im Nachfolgenden das Lebesgue-Integral. Daher fassen wir f als Element aus $L^2([0, 1])$ auf.

In der nachfolgenden Bemerkung interpretieren wir den Grenzwert (1.2.8) in einer eher heuristischen Art und Weise:

Bemerkung 1.2.7 Unter Zuhilfenahme des Donsker-Theorems (Theorem 1.2.2) folgt, dass für festes und hinreichend großes n , der Prozess

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(Z(t_{n1}), \dots, Z(t_{nn})) \text{ approximativ wie } \sqrt{n}s_f + B_{[0,1]}$$

verteilt ist. Folglich ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Reparametrisierung des Parameterraumes nötig, um eine Grenzverteilung unter der Alternative zu erhalten (vgl. Bischoff und Miller, 2000, S. 666).

Wir betrachten das sog. *lokalisierte (Regressions-)Modell* (vgl. z. B. Bischoff u. a., 2005, S. 87)

$$Z^*(t_{ni}) = \frac{1}{\sqrt{n}} f(t_{ni}) + \epsilon(t_{ni}), \quad i = 1, \dots, n$$

mit der zugehörigen Nullhypothese

$$H_0 : \frac{1}{\sqrt{n}} f \equiv 0.$$

Diese Nullhypothese ist für festes n zur ursprünglichen Nullhypothese „ $H_0 : f \equiv 0$ “ äquivalent. Mit Hilfe der sog. *asymptotischen, relativen Effizienz* (vgl. z. B. Nikitin, 1995, S. 1ff.) ist es möglich, verschiedene Tests durch Betrachtung lokalisierter Modelle zu vergleichen. Wegen (1.2.7) – (1.2.8) und dem Donsker-Theorem (Theorem 1.2.2) gilt für das lokalisierte Modell:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(Z^*(t_{n1}), \dots, Z^*(t_{nn})) \\ &= \frac{1}{n} T_n\left(f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} T_n\left(\epsilon\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \epsilon\left(\frac{n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} s_f + B_{[0,1]}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Dabei ist der Grenzwert aufgrund des „Continuous Mapping Theorems“ (Billingsley, 1999, S. 21) richtig.

Definition 1.2.8 (Asymptotisches Regressionsmodell)

Das Modell

$$Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]} \tag{1.2.10}$$

heißt das zu $Z(t) = f(t) + \epsilon(t)$, $t \in [0, 1]$, gehörige asymptotische Regressionsmodell.

Für das Regressionsmodell $Z(t) = f(t) + \epsilon(t)$, $t \in [0, 1]$, aus (1.2.1) wird in der Einleitung die Nullhypothese $H_0 : f \equiv 0$ explizit angegeben. Des Weiteren fordern wir in (1.1.2), dass unter der Alternative

$$f \geq 0 \text{ und } f \text{ monoton wachsend}$$

gelten muss.

In den nachfolgenden Kapiteln wird ausschließlich das asymptotische Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ betrachtet. Für dieses Modell ist die obige Nullhypothese äquivalent zu

$$H_0 : s_f \equiv 0.$$

Unter der Alternative ist s_f wegen (1.1.2) monoton wachsend. Eine genau Spezifikation der Gegenhypothese ist allerdings vom betrachteten Testverfahren abhängig. Wir geben daher die untersuchten Hypothesen für jeden Test explizit in den jeweiligen Kapiteln an.

2 Nicht-sequentielle Testverfahren

Im Folgenden betrachten wir eine spezielle Change-Point Fragestellung: die sog. nicht-sequentielle (auch „off-line“ genannte) Problematik. Dabei geht man davon aus, dass alle durchzuführenden Beobachtungen vorliegen und man im Nachhinein entscheiden möchte, ob ein Change-Point aufgetreten ist oder nicht. Das Ziel in diesem Kontext ist es, einen tatsächlich aufgetretenen Strukturbruch mit hoher Wahrscheinlichkeit zu entdecken. Bei einem α -Niveau Test, welchen wir im Nachfolgenden untersuchen, soll demnach die sog. (Test-)Güte (oder „Power“) maximiert werden.

In Abschnitt 2.1 präsentieren wir zunächst den in der Literatur wohlbekanntesten *gleichmäßig besten Test* für Brownsche Bewegungen und geben in Korollar 2.1.11 eine Abschätzung für die Testgüte an, welche unseres Wissens nach neu ist. Anschließend führen wir in Abschnitt 2.2 einen neuen Operator, den sog. *Rückwärts-Operator* „ \leftarrow “ ein. Mit Hilfe von „ \leftarrow “ können wir unter anderem bekannte Resultate einfacher ausdrücken und systematischer analysieren. In Abschnitt 2.3 führen wir dann den bekannten *gewöhnlichen* bzw. *rückwärtigen Kolmogorov-Test* ein. Neu in diesem Zusammenhang ist der Einsatz von „ \leftarrow “ beim rückwärtigen Test. Wir präsentieren in Satz 2.3.1 b) eine unseres Wissens nach neuartige Güte-Abschätzung für den rückwärtigen Kolmogorov-Test. In Abschnitt 2.4 stellen wir den sog. *Maximum Increase-Test* vor. Soweit wir wissen, wird der Maximum Increase eines Prozesses hier erstmalig als Teststatistik verwendet. In einem abschließenden Abschnitt 2.5 vergleichen wir die vorgestellten Verfahren hinsichtlich ihrer Güte bei Vorliegen versch. Sprungfunktionen unter der Alternative. Ein derartiger Vergleich wurde unseres Wissens nach bisher noch nicht durchgeführt.

Um den Lesefluss nicht unnötig zu stören, stellen wir die Beweise der meisten Aussagen im Anhang (Kapitel A) dar.

2.1 Gleichmäßig bester α -Niveau Test

Unter einem *besten α -Niveau Test* wollen wir im Nachfolgenden einen Test verstehen, der einerseits mit Wahrscheinlichkeit α , $\alpha \in (0, 1)$, einen Fehler 1. Art zulässt und andererseits die Testgüte maximiert (vgl. z. B. Witting und Müller-Funk, 1995). Der beste α -Niveau

Test ist im Falle der Brownschen Bewegung in der Literatur wohlbekannt. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels stellen wir diesen Test vor.

Um einen besten α -Niveau Test angeben zu können, ist es nötig, die Gegenhypothese (bis ggf. auf einen Skalierungsparameter) festzulegen. Wir betrachten für $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ die sog. *einfachen Hypothesen*

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f = s_{f_0} , \quad (2.1.1)$$

wobei $f_0 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine bekannte Funktion ist mit

$$f_0 \in BV([0,1]) \text{ und } \|f_0\|_{L^2} > 0. \quad (2.1.2)$$

Dabei ist $BV([0,T]) := \{h : [0,T] \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ ist von beschränkter Variation}\}$ für $T > 0$.

Zur Konstruktion des besten α -Niveau Tests verwenden wir im Nachfolgenden das Neyman-Pearson Lemma in Verbindung mit dem Cameron-Martin Theorem. Daher stellen wir zunächst in Abschnitt 2.1.1 das Cameron-Martin Theorem dar, wozu wir den Begriff des *Wiener-Integrals* benötigen. Anschließend präsentieren wir in Abschnitt 2.1.2 den angekündigten besten α -Niveau Test und studieren in Abschnitt 2.1.3 dessen Güte.

2.1.1 Wiener-Integral und Cameron-Martin Theorem

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $f_0 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Wiener (1922) definiert erstmals stochastische Integrale vom Typ

$$\int_0^1 f_0(t) dB_t. \quad (2.1.3)$$

Paley, Wiener und Zygmund (1933) erweitern dieses Integral auf Integranden $f_0 \in L^2([0,1])$. Daher wird das Integral (2.1.3) in der Literatur als *Paley-Wiener-Zygmund-Integral* oder auch nur als *Wiener-Integral* bezeichnet. Für eine formale Definition des Wiener-Integrals $\int_0^1 f_0(t) dB_t$ sei beispielsweise auf Kuo (2006) verwiesen. Wir zitieren einige in der Literatur wohlbekannte Eigenschaften:

Lemma 2.1.1 (Eigenschaften des Wiener-Integrals) *Es seien $f_0 \in L^2([0,1])$ und $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Dann gilt:*

a)

$$\int_0^1 f_0(t) dB_t \sim N(0, \|f_0\|_{L^2}^2) . \quad (2.1.4)$$

b) Ist f_0 sogar von beschränkter Variation, so stimmt der Wert des Wiener-Integrals $\int_0^1 f_0(t) dB_t$ mit demjenigen des pfadweisen Riemann-Stieltjes Integrals

$$\int_0^1 f_0(t) B(dt, \omega) \quad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega \text{ überein.}$$

c) Das Wiener-Integral und das stochastische Itô-Integral stimmen fast-sicher überein.

BEWEIS Teil a) entspricht Theorem 2.3.4 in Kuo (2006), Teil b) wird beispielsweise in Kuo (2006, S. 12) bewiesen. Ein Beweis zu c) findet sich in Park und Skoug (1988, S. 593). ■

Der sog. reproduzierende Kernel Hilbert Raum der Brownschen Bewegung

$$\mathcal{H} := \{s_f \mid f \in L^2([0, 1])\}$$

spielt für die Hypothesen (2.1.1) eine wichtige Rolle. Die Relevanz wird durch das Cameron-Martin Theorem ausgedrückt. Anstatt die Original-Darstellung aus Cameron und Martin (1944) zu zitieren, präsentieren wir eine moderner aufbereitete und allgemeinere Version (Mörters und Peres, 2010, S. 25ff.).

Theorem 2.1.2 (Cameron-Martin)

Es sei $F \in C([0, 1]) := \{h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ ist stetig}\}$ mit $F(0) = 0$. Wir bezeichnen mit \mathbb{L}_0 bzw. \mathbb{L}_F die Verteilung einer Standard Brownschen Bewegung mit Pfaden in $C([0, 1])$ und Erwartungswertfunktion 0 bzw. F . Dann gilt:

a) $F \notin \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{L}_F$ ist singulär zu \mathbb{L}_0 .

b) $F \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{L}_F$ und \mathbb{L}_0 sind äquivalent,

d.h. die beiden Maße sind gegenseitig absolutstetig und haben damit dieselben Nullmengen.

Sind die Maße äquivalent, so gilt für $F = s_{f_0}$ mit $f_0 \in L^2[0, 1]$:

$$\frac{d\mathbb{L}_{s_{f_0}}}{d\mathbb{L}_0}(B) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f_0\|_{L^2}^2 + \int_0^1 f_0(t) dB_t\right) \quad \text{für } \mathbb{L}_0\text{-fast alle } B \in C[0, 1]. \quad (2.1.5)$$

Dabei ist $\int_0^1 f_0(t) dB_t$ ein Wiener-Integral.

Korollar 2.1.3 Es seien $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ eine Standard Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $f_0 \in BV[0, 1]$. Dann gilt:

$$\frac{d\mathbb{P}^{s_{f_0} + B_{[0,1]}}}{d\mathbb{P}^{B_{[0,1]}}}(g) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f_0\|_{L^2}^2 + \int_0^1 f_0 dg\right) \quad \text{für } \mathbb{P}^{B_{[0,1]}}\text{-fast alle } g \in C[0, 1],$$

wobei $\int_0^1 f_0 dg$ als Riemann-Stieltjes Integral aufgefasst werden kann.

BEWEIS folgt unmittelbar aus Theorem 2.1.2 in Verbindung mit Lemma 2.1.1 b). ■

Beispiel 2.1.4 Für $f_0 = \mu \cdot \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0, 1)$ gilt: $f_0 \in BV[0, 1]$ und (vgl. Beispiel 1.2.5)

$$s_{f_0}(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+, \quad t \in [0, 1],$$

sowie $\|f_0\|_{L^2} = \mu\sqrt{1 - \theta}$. Somit gilt nach Korollar 2.1.3 für $\mathbb{P}^{B_{[0,1]}}$ -fast alle $g \in C([0, 1])$:

$$\frac{d\mathbb{P}^{s_{f_0} + B_{[0,1]}}}{d\mathbb{P}^{B_{[0,1]}}}(g) = \exp\left(-\mu^2 \frac{1 - \theta}{2} + \mu \int_{\theta}^1 1 dg\right) = \exp\left(-\mu^2 \frac{1 - \theta}{2} + \mu [g(1) - g(\theta)]\right).$$

2.1.2 Teststatistik und Entscheidungsregel

Für die Hypothesen aus (2.1.1) ist es sogar möglich, einen gleichmäßig besten α -Niveau Test zu konstruieren. Die Gegenhypothese muss dabei – bis auf einen Parameter $\mu > 0$ – fixiert sein.

Bemerkung 2.1.5 Im weiteren Verlauf dieser Arbeit bezeichnen wir die Verteilungsfunktion bzw. Dichte der $N(0, \sigma^2)$ -Verteilung mit Φ_{σ^2} bzw. ϕ_{σ^2} . Ist $\sigma^2 = 1$, so wird der Index bei Φ_1 bzw. ϕ_1 auch einfach weggelassen.

Weiterhin sei (sofern nicht anders deklariert) z_γ das γ -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung, also $z_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$ für $\gamma \in (0, 1)$.

Satz 2.1.6 (Gleichmäßig bester α -Niveau Test für Brownsche Bewegungen)

Betrachte für $Y = Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Es ex. } \mu > 0 \text{ mit } s_f = \mu \cdot s_{f_0},$$

wobei $f_0 \in BV[0, 1]$ bekannt ist mit $\|f_0\|_{L^2} > 0$.

Ein gleichmäßig bester α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$, ist dann gegeben durch:

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \quad \iff \quad \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha},$$

wobei das Integral vom Riemann-Stieltjes Typ.

BEWEIS sh. Anhang, Kapitel A.1 ■

Wir bezeichnen im Nachfolgenden den Test aus Satz 2.1.6 als *besten Test* (für Brownsche Bewegungen).

Beispiel 2.1.7 Sei $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$. Weiter sei $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]} \in BV([0,1])$ mit $\theta \in [0,1)$. Dann ist $s_{f_0}(t) = (t - \theta)^+$, $t \in [0,1]$, $s_{f_0}(1) > 0$ und $\|f_0\|_{L^2} = \sqrt{1 - \theta}$ (vgl. Beispiel 2.1.4). Nach Satz 2.1.6 ist damit ein gleichmäßig bester α -Niveau Test für

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Es ex. ein } \mu > 0 \text{ mit } s_f(t) = \mu(t - \theta)^+, t \in [0,1],$$

gegeben durch:

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \quad \iff \quad \frac{Y(1) - Y(\theta)}{\sqrt{1 - \theta}} > z_{1-\alpha}. \quad (2.1.6)$$

In Satz 2.1.6 wird ein gleichmäßig bester α -Niveau Test für den Fall bewiesen, dass für den Skalierungsparameter μ unter der Alternative $\mu > 0$ gilt. Im Falle $\mu < 0$ ist eine leichte Modifikation der Teststatistik vorzunehmen, wie die nachfolgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 2.1.8 In der Situation von Satz 2.1.6 ist ein gleichmäßig bester α -Niveau Test für

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Es ex. } \mu < 0 \text{ mit } s_f = \mu \cdot s_{f_0}$$

gegeben durch die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne „}H_0 : s_f \equiv 0\text{“ ab} \quad \iff \quad -\frac{1}{\|f_0\|_2} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha},$$

BEWEIS sh. Anhang, Kapitel A.1 ■

2.1.3 Testgüte

Im nachfolgenden Satz 2.1.9 geben wir die Güte des besten α -Niveau Tests aus Satz 2.1.6 an. Diese Güte ist insbesondere für Vergleiche wichtig, da andere Testverfahren durch diese beste Güte nach oben beschränkt sind.

Satz 2.1.9

Es sei $f \in L^2([0,1])$ die wahre Funktion in $Y = s_f + B_{[0,1]}$. Weiter sei $f_0 \in BV[0,1]$ mit $\|f_0\|_{L^2} > 0$ eine (ggf. weitere) Funktion, welche zur Konstruktion des besten α -Niveau Tests

aus Satz 2.1.6 verwendet wird. Die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha},$$

aus Satz 2.1.6 führt zu folgender Güte:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\langle f_0, f \rangle_{L^2}}{\|f_0\|_{L^2}}\right).$$

Im Falle $f = f_0$ ist diese gegeben durch: $1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \|f_0\|_{L^2})$.

BEWEIS sh. Anhang, Kapitel A.1 ■

Beispiel 2.1.10 Gegeben sei die Situation aus Beispiel 2.1.7, d.h. für $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$ sollen die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{Es ex. ein } \mu > 0 \text{ mit } s_f(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+, \quad t \in [0,1],$$

entschieden werden. Dabei ist $\theta \in [0,1]$ fest. Mit der Notation aus Satz 2.1.9 ist $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$.

a) Ist $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ für ein $\mu > 0$ die wahre Funktion unter der Alternative, so ist die Testgüte gegeben durch:

$$1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \mu\sqrt{1-\theta}\right), \quad \mu \geq 0.$$

Sie ist in Abbildung 2.1 für verschiedene Werte θ dargestellt.

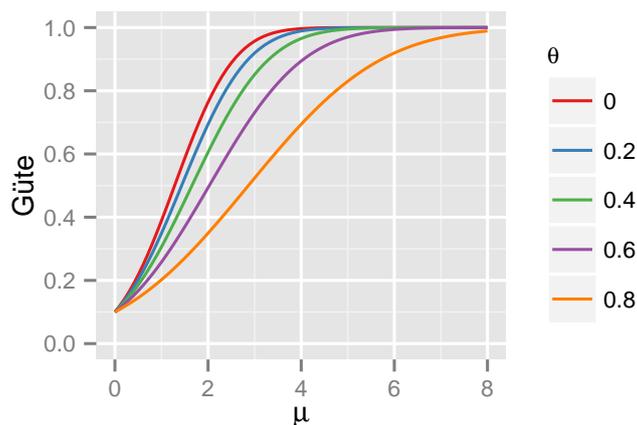


Abbildung 2.1: Güte des besten α -Niveau Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$)

b) Ist aber $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau,1]}$ für $\tau \in [0,1)$ und $\mu > 0$ die wahre Funktion unter der Alternative, so folgt:

$$\frac{\langle f_0, f \rangle_{L^2}}{\|f_0\|_{L^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\theta}} \int_{[\theta,1]} \mathbf{1}_{(\max(\theta,\tau),1]} d\lambda = \mu \frac{1 - \max(\theta, \tau)}{\sqrt{1-\theta}}.$$

Somit ist die Güte gegeben durch (vgl. Satz 2.1.9):

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y(1) - Y(\theta)}{\sqrt{1-\theta}} > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \mu \frac{1 - \max(\theta, \tau)}{\sqrt{1-\theta}}\right).$$

Wir stellen diese Güte in Abschnitt 2.5 (Abbildung 2.5) dar, wo wir diesen Test mit anderen Testverfahren hinsichtlich ihrer Güte vergleichen.

Für $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$ betrachten wir nun die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \geq s_{f_0} \tag{2.1.7}$$

mit f_0 geeignet. s_{f_0} ist also das minimale Signal, welches es zu entdecken gilt. Mit Hilfe von Satz 2.1.9 zeigen wir, dass bei Anwendung des besten α -Niveau Tests eine minimale Güte garantiert werden kann. Soweit wir wissen, ist diese Abschätzung bisher in der Literatur so noch nicht aufgetaucht.

Korollar 2.1.11 (Minimale Güte des besten α -Niveau Tests) *Es seien*

$f \in L^2([0,1])$ die wahre Funktion in $Y = s_f + B_{[0,1]}$ und $f_0 \in BV([0,1])$ eine weitere Funktion mit

$$s_f \geq s_{f_0} \quad \text{und} \quad f_0 \geq 0, \|f_0\|_{L^2} > 0.$$

Für die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne „}H_0 : s_f \equiv 0\text{“ ab} \quad \iff \quad \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha}$$

des besten α -Niveau Tests aus Satz 2.1.6 gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha}\right) \geq 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \|f_0\|_{L^2}).$$

BEWEIS Zunächst kann die Güte mit Hilfe von Satz 2.1.9 wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\langle f_0, f \rangle_{L^2}}{\|f_0\|_{L^2}}\right). \tag{2.1.8}$$

Aus $f_0 \geq 0$ und $s_f \geq s_{f_0}$ folgt nun $f \geq f_0$ und damit:

$$\langle f_0, f \rangle_{L^2} = \langle f_0, f_0 \rangle_{L^2} + \langle f_0, f - f_0 \rangle_{L^2} \geq \|f_0\|_{L^2}^2, \quad (2.1.9)$$

da $\langle f_0, f - f_0 \rangle_{L^2} \geq 0$ wegen $f_0 \geq 0$ und $f - f_0 \geq 0$. Setzt man aber nun (2.1.9) in (2.1.8) ein, so ergibt sich genau die Abschätzung aus Korollar 2.1.11. ■

2.2 Rückwärts-Operator und Verbesserung der Güte

Um einen besten α -Niveau Test zu erstellen, ist es nötig, dass die Regressionsfunktion unter H_1 (zumindest bis auf einen Skalierungsparameter) bekannt ist (vgl. Abschnitt 2.1). In der Praxis ist allerdings die genaue Gegenhypothese nur äußerst selten bekannt. Wir stellen daher im Folgenden Methoden vor, bei denen die Gegenhypothese nicht näher spezifiziert werden muss. Wir betrachten für $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0. \quad (2.2.1)$$

Bevor wir uns in Abschnitt 2.3 Tests vom Kolmogorov-Typ zuwenden, stellen wir zunächst in diesem Abschnitt eine Transformation von $Y = s_f + B_{[0,1]}$ vor, mit deren Hilfe die Güte verbessert wird (vgl. Bischoff u. a., 2005, S. 87). Wir führen dazu einen neuartigen, in der Literatur bisher nicht betrachteten Operator ein:

Definition 2.2.1 (Rückwärts-Operator)

Seien $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die zu g rückwärtige Funktion \overleftarrow{g} wird definiert durch:

$$\overleftarrow{g} : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto g(b) - g(b + a - t) \end{cases} .$$

„ $\overleftarrow{}$ “ wird im Nachfolgenden als Rückwärts-Operator bezeichnet.

Die Anwendung des Rückwärts-Operators auf einen Partialsummenprozess ergibt wiederum einen Partialsummenprozess, welcher durch Umdrehen der Summationsreihenfolge entsteht:

Lemma 2.2.2 Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\Psi_n := T_n(z_1, \dots, z_n) \in C([0, 1])$ der Partialsummenprozess basierend auf z_1, \dots, z_n . Dann gilt für den Prozess mit umgedrehter Summationsreihenfolge:

$$T_n(z_n, \dots, z_1) = \overleftarrow{\Psi}_n .$$

BEWEIS Es genügt, die Gleichheit aus Lemma 2.2.2 für alle t der Form $t = \frac{k}{n}$ mit $k = 0, 1, \dots, n$ zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} T_n(z_n, \dots, z_1) \left(\frac{k}{n} \right) &= \sum_{i=1}^k z_{n+1-i} = \sum_{i=n-k+1}^n z_i = \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^{n-k} z_i \\ &= \Psi_n(1) - \Psi_n\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \overleftarrow{\Psi}_n\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Für den rückwärtigen, asymptotischen Partialsummenprozess des lokalisierten Modells folgt:

a) unter „ $H_0: f \equiv 0$ “:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(\epsilon(t_{nn}), \dots, \epsilon(t_{n1})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_{[0,1]}, \quad (2.2.2)$$

nach dem Donsker-Theorem 1.2.2

b) und unter H_1 :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n}} T_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}f(t_{nn}) + \epsilon(t_{nn}), \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}f(t_{n1}) + \epsilon(t_{n1})\right) \\ &= \frac{1}{n} T_n(f(t_{nn}), \dots, f(t_{n1})) + \frac{1}{\sqrt{n}} T_n(\epsilon(t_{nn}), \dots, \epsilon(t_{n1})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \overleftarrow{s}_f + B_{[0,1]}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

nach Lemma 2.2.2 und dem Donsker-Theorem 1.2.2.

Analog zur Definition des asymptotischen Regressionsmodells (Definition 1.2.8) definieren wir:

Definition 2.2.3 (Rückwärtiges, asymptotisches Regressionsmodell)

Das Modell

$$\overleftarrow{Y} = \overleftarrow{s}_f + B_{[0,1]} \quad (2.2.4)$$

heißt das zu $Z(t) = f(t) + \epsilon(t)$, $t \in [0, 1]$, gehörige rückwärtige, asymptotische Regressionsmodell.

Im nachfolgenden Lemma 2.2.4 zeigen wir, dass durch Betrachtung der rückwärtigen Version (2.2.4) bei Tests vom Kolmogorov-Typ eine größere Güte erreicht wird. Weiterhin geben wir dort elementare Eigenschaften des Rückwärts-Operators an.

Lemma 2.2.4 *Es seien $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ konstant. Dann gilt:*

a) $\overleftarrow{g} \equiv c \Rightarrow c = 0$ und g ist ebenfalls konstant.

b) Der Rückwärts-Operator ist linear und translationsinvariant,
d.h. für $f := c \cdot (g + h)$ gilt: $\overleftarrow{f} = c \cdot (\overleftarrow{g} + \overleftarrow{h})$ und $\overleftarrow{g+c} = \overleftarrow{g}$.

c) $\overleftarrow{g}(a) = 0$. Ist zusätzlich $g(a) = 0$, so gilt:

c1) $\overleftarrow{g}(b) = g(b)$.

c2) „ \leftarrow “ ist zu sich selbst invers, also: $\overleftarrow{\overleftarrow{g}} = g$.

d) Ist $f \in L^2([0, 1])$, so gilt für \overleftarrow{s}_f :

d1)

$$\overleftarrow{s}_f(t) = \int_{(1-t, 1]} f \, d\lambda = \int_{[0, t)} f(1-s) \, \lambda(ds), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.2.5)$$

Insbesondere ist $\overleftarrow{s}_f(0) = 0 = s_f(0)$ sowie $\overleftarrow{s}_f(1) = s_f(1)$.

d2) Für $f \geq 0$ mit f monoton wachsend gilt:

$$\overleftarrow{s}_f(t) \geq s_f(1) \cdot t \geq s_f(t), \quad t \in [0, 1].$$

d3) Für $t \in [0, 1]$ gilt: $s_{\overleftarrow{f}}(t) = t \cdot f(1) - \overleftarrow{s}_f(t)$ und $\overleftarrow{s}_{\overleftarrow{f}}(t) = t \cdot f(1) - s_f(t)$.

Insbesondere ist $s_{\overleftarrow{f}} = \overleftarrow{s}_f \iff f \equiv 0$.

BEWEIS Die Aussagen a)-c) und d1) folgen unmittelbar aus der Definition von „ \leftarrow “. Ein formaler Beweis zu d2) und d3) findet sich im Anhang (Kapitel A.2). ■

Gemäß unseren Voraussetzungen ist unter H_1 die Regressionsfunktion $f \geq 0$ mit f monoton wachsend. Wegen $\overleftarrow{s}_f \geq s_f$ (Lemma 2.2.4 d)) hat damit jeder sinnvolle Test eine größere Güte, wenn die Teststatistik auf dem rückwärtigen \overleftarrow{Y} anstatt auf dem gewöhnlichen asymptotischen Partialsummenprozess Y beruht. Insbesondere gilt dies für Tests vom Kolmogorov- (sh. Abschnitt 2.3) oder Cramer-von-Mises-Typ.

Wir geben einige Beispiele an, welche die Funktionsweise von „ \leftarrow “ verdeutlichen sollen und zugleich für unsere weiteren Untersuchungen von Interesse sind:

Beispiel 2.2.5 i) Für $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, gilt: $\overleftarrow{g} \equiv 0$.

ii) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \equiv \mu$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $s_f(t) = \mu t$ und

$$\overleftarrow{s}_f(t) = \mu \cdot 1 - \mu(1-t) = \mu \cdot t = s_f(t), \quad t \in [0, 1].$$

iii) Sei $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ mit $\theta \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $t \in [0, 1]$:

$$s_f(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+ \quad (\text{sh. Beispiel 1.2.5})$$

sowie wegen Lemma 2.2.4 d):

$$\overleftarrow{s}_f(t) = \mu \cdot \int_{(1-t,1]} \mathbf{1}_{(\theta,1]} d\lambda = \mu \begin{cases} t & , \text{ falls } \theta \leq 1-t \\ 1-\theta & , \text{ falls } \theta > 1-t \end{cases} = \mu \cdot \min(t, 1-\theta).$$

Abbildung 2.2 stellt die Funktionen f , s_f und \overleftarrow{s}_f graphisch dar. Aus dieser ist insbesondere die Ungleichung $\overleftarrow{s}_f \geq s_f$ ersichtlich.

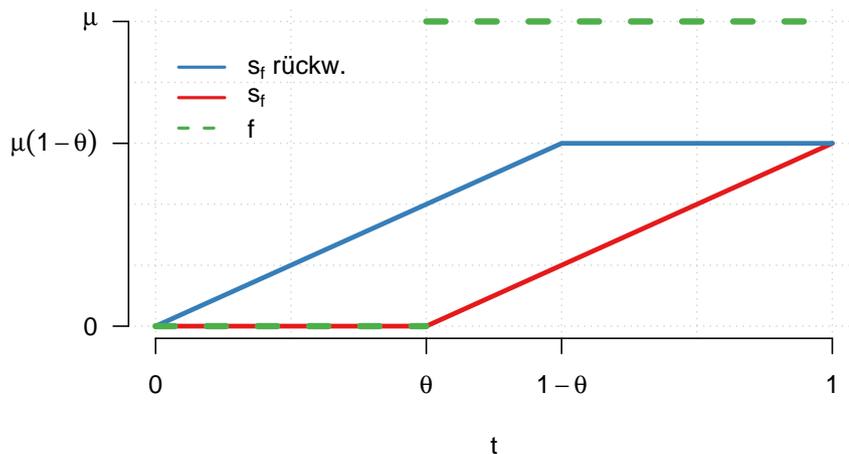


Abbildung 2.2: Funktion $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ und zugehörige Signale $s_f(t) = \mu(t - \theta)^+$ und $\overleftarrow{s}_f(t) = \mu \min(t, 1 - \theta)$, ($t \in [0, 1]$, $\mu > 0$, $\theta \in [0, 1)$)

iv) Für $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 2t$ gilt: $s_f(t) = t^2$ und damit

$$\overleftarrow{s}_f(t) = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2, \quad t \in [0, 1].$$

In Abbildung 2.3 zeigen wir die Funktionen s_f und \overleftarrow{s}_f .

2.3 Tests vom Kolmogorov-Typ

Wir betrachten für $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0. \quad (2.3.1)$$

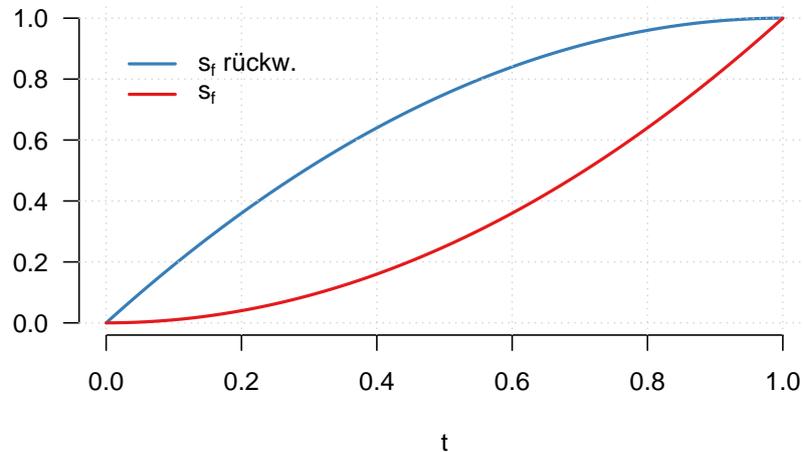


Abbildung 2.3: Die zur Funktion $f(t) = 2t$ gehörigen Signale $s_f(t) = t^2$ und $\overleftarrow{s}_f(t) = 2t - t^2$ ($t \in [0, 1]$)

Zur Lösung dieser Fragestellung stellen wir im Folgenden zwei Tests vom Kolmogorov-Typ vor.

2.3.1 Teststatistik und Entscheidungsregel

Für zwei monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 \in L^2([0, 1])$ mit $0 \leq f_1 \leq f_2$ gilt: $s_{f_1} \leq s_{f_2}$. Damit folgt, dass

$$Y = s_f + B_{[0,1]} \quad \text{bzw.} \quad \overleftarrow{Y} = \overleftarrow{s}_f + \overleftarrow{B}_{[0,1]}$$

wächst, falls f wächst. Somit führen wegen $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B(t) > z_{1-\alpha/2}) = \alpha$ (vgl. z. B. Billingsley, 1999, S. 92) die folgenden Entscheidungsregeln zu sinnvollen α -Niveau Tests, $\alpha \in (0, 1)$:

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \sup_{t \in [0,1]} Y(t) > z_{1-\alpha/2} \quad (2.3.2)$$

$$\text{bzw.} \quad \text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}(t) > z_{1-\alpha/2} . \quad (2.3.3)$$

Die Teststatistik und Entscheidungsregel aus (2.3.2) bzw. (2.3.3) ist vom Kolmogorov-Typ. Im Nachfolgenden bezeichnen wir diese Tests daher auch als (*gewöhnlichen*) *Kolmogorov-* bzw. *rückwärtigen Kolmogorov-Test*.

2.3.2 Güte der Kolmogorov-Tests für allgemeine Alternativen

Für allgemeine Signalfunktionen s_f ist die Güte der Kolmogorov-Tests analytisch nicht berechenbar (vgl. z. B. Bischoff u. a. 2005). Nur für wenige Spezialfälle sind explizite analytische Formeln für die sogenannte „Boundary Crossing Probability“ bekannt¹. Allerdings stellen Wang und Pötzelberger (1997) (bzw. Pötzelberger und Wang (2001) für den zweiseitigen Fall) ein Verfahren vor, mit dem man die gesuchte Überschreitungs-Wahrscheinlichkeit näherungsweise (numerisch) bestimmen kann. Sie schlagen dazu vor, die Signalfunktionen s_f durch stückweise affine Funktionen zu approximieren.

In Korollar 2.1.11 wird eine minimale Güte bei Anwendung des besten α -Niveau Tests bewiesen. Auch in dem hier vorliegenden Fall der Kolmogorov-Tests kann man Güteabschätzungen angeben.

Satz 2.3.1 (Güte-Abschätzungen für Kolmogorov-Tests)

Seien $f \in L^2([0,1])$ mit $f \geq 0$ und f monoton wachsend die wahre Funktion aus $Y = s_f + B_{[0,1]}$.

a) Für die Güte der Kolmogorov-Tests gilt:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}_t > z_{1-\alpha/2} \right) \geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + t s_f(1)] > z_{1-\alpha/2} \right) \geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} Y_t > z_{1-\alpha/2} \right).$$

b) Sind $f_1, f_2 \in L^2([0,1])$ zwei weitere Funktionen mit

$$s_{f_1}(1) = s_f(1) = s_{f_2}(1) \quad \text{und} \quad s_{f_1} \leq s_f \leq s_{f_2}, \quad (2.3.4)$$

so folgt darüber hinaus:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + s_{f_2}(t)] > z_{1-\alpha/2} \right) &\geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} Y_t > z_{1-\alpha/2} \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + s_{f_1}(t)] > z_{1-\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + \overleftarrow{s}_{f_1}(t)] > z_{1-\alpha/2} \right) &\geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}_t > z_{1-\alpha/2} \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + \overleftarrow{s}_{f_2}(t)] > z_{1-\alpha/2} \right). \end{aligned}$$

¹Wang und Pötzelberger (1997) geben eine Übersicht bekannter Resultate an.

BEWEIS sh. Anhang, Kapitel A.3. ■

Soweit uns bekannt ist, ist die in Satz 2.3.1 b) dargestellte Abschätzung für den rückwärtigen Kolmogorov-Test neu.

Es sei s_f die wahre Funktion in $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $s_f(1) =: a \in \mathbb{R}$. Dann folgt insbesondere aus Satz 2.3.1 a), dass der rückwärtige Kolmogorov-Test mindestens die Güte

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} [B_t + at] > z_{1-\alpha/2} \right)$$

hat. Diese letzte Wahrscheinlichkeit wiederum stellt eine obere Schranke für die Güte des gewöhnlichen Kolmogorov-Tests dar – unabhängig davon, wie die Funktion s_f aussieht.

Weiß man neben $s_f(1) = a$ noch mehr über das Signal wie $s_f \leq s_{f_2}$ bzw. $s_{f_1} \leq s_f$, so kann man mit Hilfe von Satz 2.3.1 b) insbesondere die Güte des rückwärtigen Kolmogorov-Tests nach unten bzw. oben abschätzen.

2.3.3 Güte bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$

Im Falle, dass $f := \mu \cdot \mathbf{1}_{(\theta,1]} \in L^2([0,1])$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0,1)$ die wahre Regressionsfunktion im Modell $Y = s_f + B_{[0,1]}$ ist, können wir die Güte der Kolmogorov-Tests (2.3.2) – (2.3.3) explizit berechnen. Für $t \in [0,1]$ gilt nach Beispiel 2.2.5:

$$s_f(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+ \quad \text{und} \quad \overleftarrow{s}_f(t) = \mu \cdot \min(t, 1 - \theta). \quad (2.3.5)$$

Die Funktionen in (2.3.5) sind stückweise affin (vgl. Abbildung 2.2). Daher können wir die Beweisidee aus Wang und Pötzelberger (1997) verwenden, um die Güte der beiden Kolmogorov-Tests für diesen Fall analytisch anzugeben.

Satz 2.3.2 (Güte der Kolmogorov-Tests)

Es seien $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]} \in L^2([0,1])$ mit $\mu > 0$, $\theta \in [0,1)$ die wahre Funktion in $Y = s_f + B_{[0,1]}$.

a) Im Fall $\theta = 0$ sind die Gütefunktionen der beiden Kolmogorov-Tests gleich und gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} Y(t) > z_{1-\alpha/2} \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}(t) > z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= \Phi(\mu - z_{1-\alpha/2}) + \exp(2\mu z_{1-\alpha/2}) \Phi(-\mu - z_{1-\alpha/2}). \end{aligned}$$

b) Im Fall $\theta \in (0, 1)$ ist die Güte des gewöhnlichen Kolmogorov-Tests gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} Y(t) > z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \phi_{\theta}(x) \left[1 - \exp \left(-\frac{2z_{1-\alpha/2}(z_{1-\alpha/2} - x)}{\theta} \right) \right] \cdot \left\{ \Phi_{1-\theta}(\mu(\theta - 1) + z_{1-\alpha/2} - x) \right. \\ & \quad \left. - \exp(2\mu(z_{1-\alpha/2} - x)) \cdot \Phi_{1-\theta}(\mu(\theta - 1) - z_{1-\alpha/2} + x) \right\} dx. \end{aligned}$$

c) Im Fall $\theta \in (0, 1)$ ist die Güte des rückwärtigen Kolmogorov-Tests gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \bar{Y}(t) > z_{1-\alpha/2} \right) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta)} \left[1 - \exp \left(-\frac{2z_{1-\alpha/2}(z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x)}{1-\theta} \right) \right] \\ & \quad \times \left[2\Phi_{\theta}(z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x) - 1 \right] \cdot \phi_{1-\theta}(x) dx. \end{aligned}$$

BEWEIS sh. Anhang, Kapitel A.3 ■

Die Gütefunktionen aus Satz 2.3.2 lassen sich numerisch berechnen. Sie sind beim Gütevergleich der verschiedenen Verfahren in Kapitel 2.5 graphisch dargestellt (sh. Abbildung 2.4). In diesen Plots zeigt sich unter anderem, dass die Güte des rückwärtigen Kolmogorov-Tests tatsächlich besser ist als diejenige des (gewöhnlichen) Kolmogorov-Tests.

2.4 Maximum Increase-Test

Das wohl verbreitetste, *sequentielle* Verfahren, um einen Change-Point in einer Folge von Beobachtungen zu entdecken, ist das sogenannte „CuSum“-Verfahren. Dabei steht „CuSum“ für *Cumulative Sums*. Es wird erstmalig von Page (1954, 1955) zur Lösung eines Change-Point Problems vorgeschlagen. Bei geeigneter Skalierung konvergiert die CuSum-Teststatistik unter H_0 für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen den Maximum Increase der Standard Brownschen Bewegung (Taylor 1975 oder auch Csörgö und Horváth 1997, S. 90).

Im nachfolgenden Abschnitt untersuchen wir zunächst die *nicht-sequentielle* Variante des Maximum Increase-Tests. In Abschnitt 3.2.1 gehen wir dann weiter auf dieses Verfahren ein, wenn es im sequentiellen Kontext eingesetzt wird.

2.4.1 Definition und Eigenschaften

Wir definieren den „Maximum Increase“-Operator wie folgt (vgl. z. B. Salminen und Vallois, 2007):

Definition 2.4.1 (Maximum Increase/Decrease)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der sog. „Maximum Increase“ von g gegeben durch:

$$\mathbb{I}(g) := \sup_{t \in [a, b]} \left(g(t) - \inf_{s \in [a, t]} g(s) \right).$$

Der „Maximum Decrease“ (in der Finanzmathematik auch „maximal downfall“ genannt) ist definiert durch $\mathbb{D}(g) := \mathbb{I}(-g)$.

Lemma 2.4.2 (Eigenschaften von \mathbb{I} und \mathbb{D}) Seien $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda, c \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt:

a) $0 \leq \min \{ \mathbb{D}(g), \mathbb{I}(g) \}$

b) $\mathbb{I}(g + c) = \mathbb{I}(g)$ und

$$\mathbb{I}(\lambda g) = |\lambda| \cdot \begin{cases} \mathbb{I}(g) & , \text{ falls } \lambda \geq 0 \\ \mathbb{D}(g) & , \text{ falls } \lambda < 0 \end{cases}.$$

c) $\mathbb{I}(g + h) \leq \mathbb{I}(g) + \mathbb{I}(h)$ und $\mathbb{D}(g + h) \leq \mathbb{D}(g) + \mathbb{D}(h)$

d) Es sei $\tilde{g}(t) := c - g(b + a - t)$, $t \in [a, b]$. Dann folgt: $\mathbb{I}(\tilde{g}) = \mathbb{I}(g)$ und damit insbesondere: $\mathbb{I}(\overleftarrow{g}) = \mathbb{I}(g)$, wobei „ $\overleftarrow{}$ “ der Rückwärts-Operator aus Definition 2.2.1 ist.

BEWEIS folgt unmittelbar aus der Definition von \mathbb{I} oder elementaren Umformungen. Für c) und d) ist der Zusammenhang $\mathbb{I}(g) = \sup_{s \in [a, b]} \left[\left(\sup_{t \in [s, b]} g(t) \right) - g(s) \right]$ hilfreich. ■

Die Ungleichung „ $\mathbb{I}(g + h) \leq \mathbb{I}(g) + \mathbb{I}(h)$ “ in Lemma 2.4.2 c) kann sowohl eine echte Ungleichung als auch eine Gleichung sein:

Beispiel 2.4.3 Es seien $g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Für $g := \mathbf{1}_{[0, 0.3]}$ und $h := \mathbf{1}_{(0.3, 1]}$ folgt: $g + h \equiv 1$, womit folgt:

$$0 = \mathbb{I}(g + h) < \mathbb{I}(g) + \mathbb{I}(h) = 0 + 1 = 1.$$

b) Sind g und h konstant 1, so ist $g + h \equiv 2$ und damit: $0 = \mathbb{I}(g + h) = \mathbb{I}(g) + \mathbb{I}(h)$.

2.4.2 Teststatistik und Entscheidungsregel

Wir betrachten für $Y = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ das Testproblem

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0. \quad (2.4.1)$$

Lemma 2.4.4 *Es seien $f_1, f_2 \in L^2([0,1])$ zwei Funktionen mit $0 \leq f_1 \leq f_2$.*

Dann ist s_{f_i} monoton wachsend ($i = 1, 2$) mit $0 \leq s_{f_1} \leq s_{f_2}$. Aus Letzterem kann insbesondere $\mathbb{I}(s_{f_1}) \leq \mathbb{I}(s_{f_2})$ gefolgert werden.

BEWEIS Die Monotonie von s_{f_i} und die Ungleichung $0 \leq s_{f_1} \leq s_{f_2}$ folgen unmittelbar aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals. Nach Definition von \mathbb{I} ist der Maximum Increase von s_{f_i} ($i = 1, 2$) gegeben durch:

$$\mathbb{I}(s_{f_i}) = \sup_{t \in [0,1]} \left(s_{f_i}(t) - \inf_{s \in [0,t]} s_{f_i}(s) \right).$$

Da $s_{f_i} \geq 0$ gilt, ist $\inf_{s \in [0,t]} s_{f_i}(s) = s_{f_i}(0) = 0$ für alle $t \in [0,1]$, $i = 1, 2$. Damit aber folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(s_{f_1}) &= \sup_{t \in [0,1]} \left(s_{f_1}(t) - \inf_{s \in [0,t]} s_{f_1}(s) \right) = \sup_{t \in [0,1]} s_{f_1}(t) \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} s_{f_2}(t) = \sup_{t \in [0,1]} \left(s_{f_2}(t) - \inf_{s \in [0,t]} s_{f_2}(s) \right) = \mathbb{I}(s_{f_2}), \end{aligned}$$

womit Lemma 2.4.4 bewiesen ist. ■

Aus Lemma 2.4.4 folgt, dass $\mathbb{I}(Y)$ wächst, falls das Signal s_f wächst. Wir schlagen daher die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \quad \iff \quad \mathbb{I}(Y) = \sup_{t \in [0,1]} \left[Y_t - \inf_{s \in [0,t]} Y_s \right] > c_{1-\alpha} \quad (2.4.2)$$

vor. Dabei ist $c_{1-\alpha} \in \mathbb{R}$ derart, dass $\mathbb{P}(\mathbb{I}(B_{[0,1]}) > c_{1-\alpha}) = \alpha$ gilt. Wir bezeichnen den α -Niveau Test aus (2.4.2) als *Maximum Increase-Test*. In der Literatur wurde, soweit wir wissen, der Maximum Increase bisher noch nicht in diesem Kontext des Testens eingesetzt. Folglich ist die Entscheidungsregel (2.4.2) neuartig.

Die Verteilung von $\mathbb{I}(B_{[0,1]})$ ist in der Literatur wohlbekannt. Es gilt:

Satz 2.4.5 (Verteilung von $\mathbb{I}(B_{[0,T]})$)

Seien $T > 0$ und $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Dann gilt für

$B_{[0,T]} = (B_t)_{t \in [0,T]}$:

$$\mathbb{I}(B_{[0,T]}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{t \in [0,T]} |B_t|.$$

BEWEIS Eine Beweisskizze sowie weiterführende Literaturhinweise befindet sich im Anhang (Kapitel A.4). ■

Die Verteilung von $\sup_{t \in [0,T]} |B_t|$ ist in der Literatur wohlbekannt. Nach Borodin und Salminen (2002, Formel 1.1.15.4 bzw. 3.1.1.4) gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,T]} |B_t| \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-x}^x \exp \left(-\frac{(z + 4kx)^2}{2T} \right) - \exp \left(-\frac{(z + 2x + 4kx)^2}{2T} \right) dz. \quad (2.4.3)$$

Damit kann der kritische Wert $c_{1-\alpha} > 0$ in (2.4.2) – zumindest numerisch – bestimmt werden. Wir tun dies in Abschnitt 2.5, wo wir den Maximum Increase-Test mit anderen Testverfahren hinsichtlich der Güte vergleichen.

Bemerkung 2.4.6 *Wählt man den Maximum Increase $\mathbb{I}(Y)$ als Teststatistik, so ist es egal, ob man den gewöhnlichen Prozess Y oder den rückwärtigen Prozess \overleftarrow{Y} betrachtet, da $\mathbb{I}(Y) = \mathbb{I}(\overleftarrow{Y})$ (sh. Lemma 2.4.2) gilt.*

Bemerkung 2.4.7 *Es seien $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $M_t := \sup_{s \in [0,t]} B_s$ der zugehörige Maximum-Prozess.*

1. Lévy (1948) hat erstmals nachgewiesen, dass die beiden Prozesse

$$(M_t - B_t)_{t \in [0,1]} \quad \text{und} \quad (|B_t|)_{t \in [0,1]} \quad (2.4.4)$$

dieselbe Verteilung besitzen. Dafür zeigte er, dass die beiden Prozesse aus (2.4.4) Markov-Prozesse sind, welche den gleichen Übergangskern besitzen.

2. Der Prozess $(M_t - B_t)_{t \geq 0}$ wird auch als „Reflected Brownian Motion“ bezeichnet.
3. Graversen und Shiryaev (2000) konnten erstmals die Lévy-Formel (sh. Beweis zu Satz 2.4.5) auf den Fall $(B_t + \mu t)_{t \in [0,T]}$ mit $\mu \neq 0$ verallgemeinern. Aus dieser Formel kann gefolgert werden, dass

$$\mathbb{I} \left((B_t + \mu t)_{t \in [0,T]} \right) \quad (2.4.5)$$

*die gleiche Verteilung wie eine Reflected Brownian Motion mit Drift μ besitzt*².

²Für eine formale Definition einer Reflected Brownian Motion mit Drift μ sei beispielsweise auf Peskir (2005) verwiesen.

Wir weisen explizit darauf hin, dass eine Reflected Brownian Motion mit Drift $\mu \neq 0$ eine andere Verteilung als

$$\sup_{t \in [0, T]} |B_t + \mu t| \quad (2.4.6)$$

besitzt und somit die Verteilungen von (2.4.5) und (2.4.6) im Falle $\mu \neq 0$ *nicht* gleich sind. Für den Spezialfall $f \equiv \mu$ (also $s_f(t) = \mu t$, $t \in [0, 1]$) kann die Güte des Tests (2.4.2) explizit berechnet werden. Magdon-Ismail u. a. (2004) geben nämlich die Verteilung sowie den Erwartungswert von

$$\mathbb{D}((B_t + \gamma t)_{t \in [0, T]}) \quad \text{für } \gamma \in \mathbb{R}$$

an. Da die Verteilungen von

$$\mathbb{I}((B_t + \mu t)_{t \in [0, T]}) \quad \text{und} \quad \mathbb{D}((B_t - \mu t)_{t \in [0, T]})$$

gleich sind, kann das Resultat von Magdon-Ismail u. a. (2004) verwendet werden, um die Güte des Tests (2.4.2) für die Alternative $f \equiv \mu$, $\mu > 0$, zu bestimmen.

2.5 Gütevergleich bei Vorliegen einer Sprungfunktion unter der Alternative

Wir vergleichen in diesem Abschnitt den besten α -Niveau Test, den gewöhnlichen/rückwärtigen Kolmogorov-Test und den Maximum Increase-Test hinsichtlich ihrer Güte. Neben diesen vier Tests betrachten wir auch noch den *Endpunkt*-Test. Dieser α -Niveau Test hat bei Vorliegen von $Y = s_f + B_{[0,1]}$, $f \in L^2([0, 1])$, die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff Y(1) > z_{1-\alpha} \quad (2.5.1)$$

mit zugehöriger Gütefunktion

$$\mathbb{P}(Y(1) > z_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - s_f(1)). \quad (2.5.2)$$

2.5.1 Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$

Es sei $f = \mu \cdot \mathbf{1}_{(\theta,1]} \in L^2([0,1])$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0,1)$ die wahre Regressionsfunktion in $Y = s_f + B_{[0,1]}$. Nach Beispiel 2.2.5 gilt (vgl. auch Abbildung 2.2 auf Seite 25):

$$s_f(t) = \mu \cdot (t - \theta)^+ \quad \text{und} \quad \overline{s}_f(t) = \mu \cdot \min(t, 1 - \theta), \quad t \in [0, 1].$$

Es gilt:

- a) Verwendet man bei der Konstruktion des besten α -Niveau Tests aus Satz 2.1.6 die richtige Funktion $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$, so ist die Testgüte gegeben durch (sh. Beispiel 2.1.10):

$$1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \mu \sqrt{1 - \theta} \right), \quad \mu \geq 0.$$

- b) Die Güte des Endpunkt-Tests ist für $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ nach (2.5.2) gegeben durch:

$$1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \mu \cdot (1 - \theta) \right).$$

- c) In Satz 2.3.2 finden sich die Güten des gewöhnlichen bzw. rückwärtigen Kolmogorov-Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$.

Die Gütefunktionen der oben beschriebenen Tests sind in Abhängigkeit von $\mu \geq 0$ in Abbildung 2.4 dargestellt. Der kritische Wert $c_{1-\alpha}$ des Maximum Increase-Tests wurde mit Hilfe der Formel (2.4.3) berechnet. Um die Güte des Maximum Increase-Tests zu erhalten, werden Simulationen durchgeführt. Dabei werden für jede Kombination von θ und μ 10.000 Wiederholungen durchgeführt und jeweils ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen zur Approximation an die Brownsche Bewegung verwendet. Erwartungsgemäß liefert der beste α -Niveau tatsächlich die beste Güte. Das zweitbeste Verfahren ist durch den rückwärtigen Kolmogorov-Test gegeben. Der Endpunkt-Test und der Maximum Increase-Test weisen eine ähnliche Güte auf, wobei der letztgenannte bei großer Sprunghöhe μ besser ist. Das Verfahren mit geringster Güte ist der gewöhnliche Kolmogorov-Test.

Es sei nun $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau,1]}$ die wahre Regressionsfunktion. Wir betrachten in Abbildung 2.5 diejenigen Güten, welche entstehen, wenn man zur Konstruktion des besten α -Niveau Tests die (ggf. falsche) Funktion $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ verwendet. Gemäß Beispiel 2.1.10 ist die Güte dann:

$$1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu [1 - \max(\theta, \tau)]}{\sqrt{1 - \theta}} \right), \quad \mu \geq 0.$$

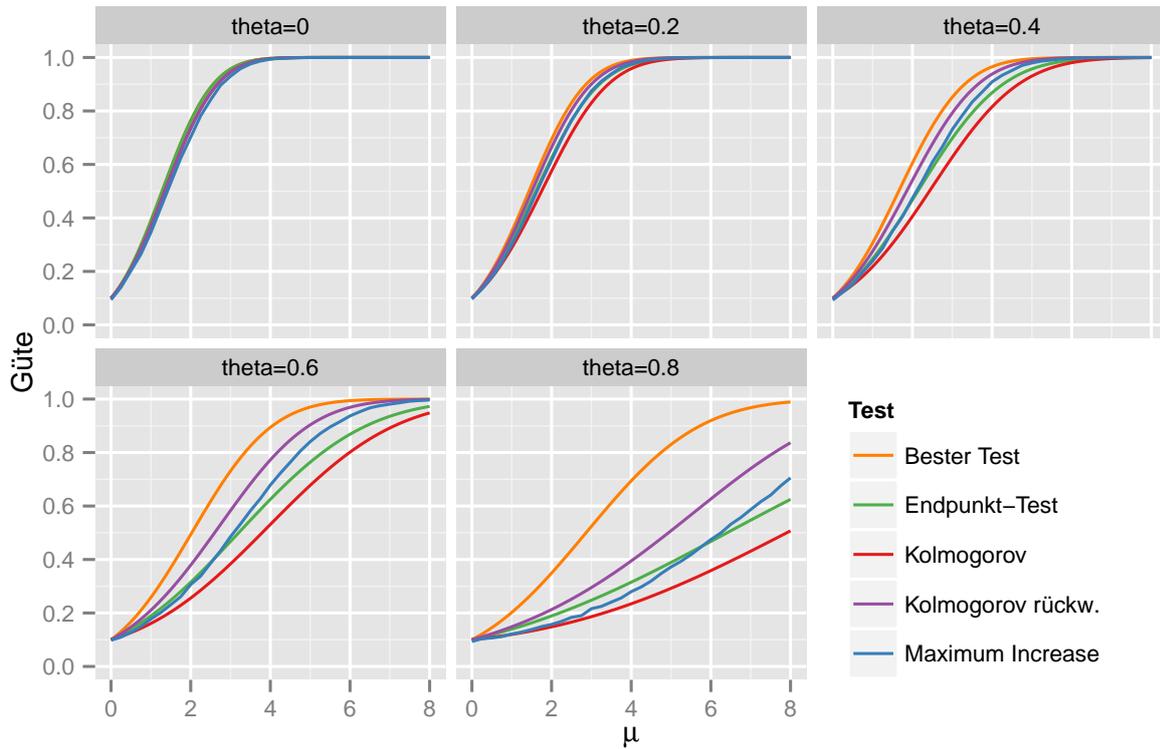


Abbildung 2.4: Güte verschiedener nicht-sequentieller Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)

Zu Vergleichszwecken stellen wir in Abbildung 2.5 neben dieser Güte nochmals die Güten des (gewöhnlichen) Kolmogorov- und des Maximum Increase-Tests dar. Aus dieser Abbildung ist ersichtlich, dass selbst der vermeintlich schlechte Kolmogorov-Test den besten α -Niveau Test dominiert, falls θ schlecht gewählt wird. Hier zeigen sich die Vorteile des Kolmogorov- und des Maximum Increase-Tests: bei diesen Verfahren ist eine genaue Spezifikation der Alternative nicht notwendig.

2.5.2 Alternative $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$

Anstatt die Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (im Nachfolgenden als *Variante I* bezeichnet) zu betrachten, ist es auch interessant die folgende *Variante II*

$$f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]} \quad (2.5.3)$$

als Alternative zu studieren. Für die Funktionen aus (2.5.3) gilt: $s_f(1) = \mu$. Der Wert $s_f(1)$ ist demnach bei Variante II von θ unabhängig. In Abbildung 2.6 zeigen wir die Güte bei

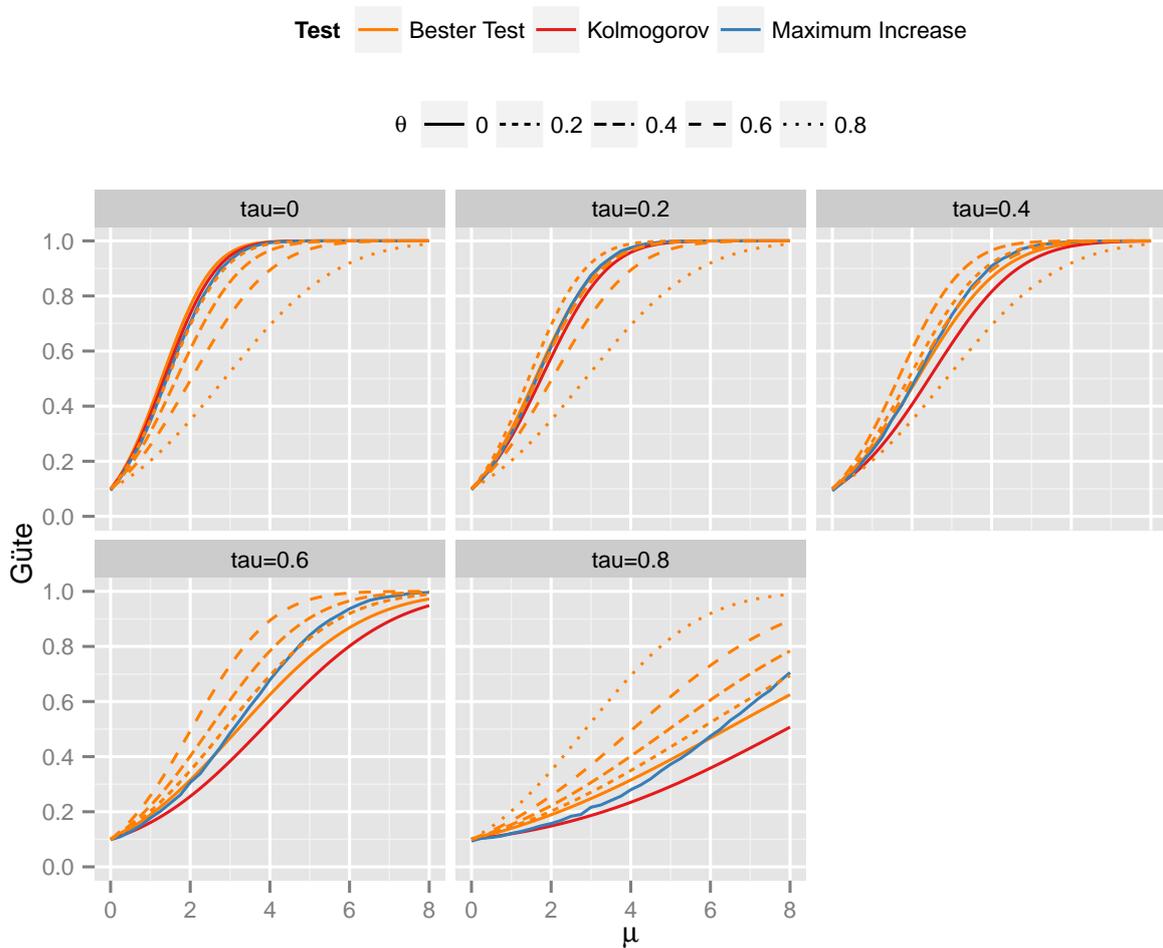


Abbildung 2.5: Güte des besten α -Niveau Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ im Falle, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau,1]}$ die wahre Regressionsfunktion ist im Vergleich mit Kolmogorov- und Maximum Increase-Test (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)

Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (=Variante I, sh. auch Abbildung 2.4) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (=Variante II). Die Gütefunktionen von Variante I werden stets von denjenigen von Variante II dominiert, weil gleiches für die entsprechenden Signalfunktionen s_f gilt. Des Weiteren ist festzustellen, dass alle Tests ein starkes, kurzes Signal besser entdecken können als ein schwaches, langes Signal (vgl. hierzu die Werte $\theta = 0$ und $\theta = 0.8$ bei Variante II).

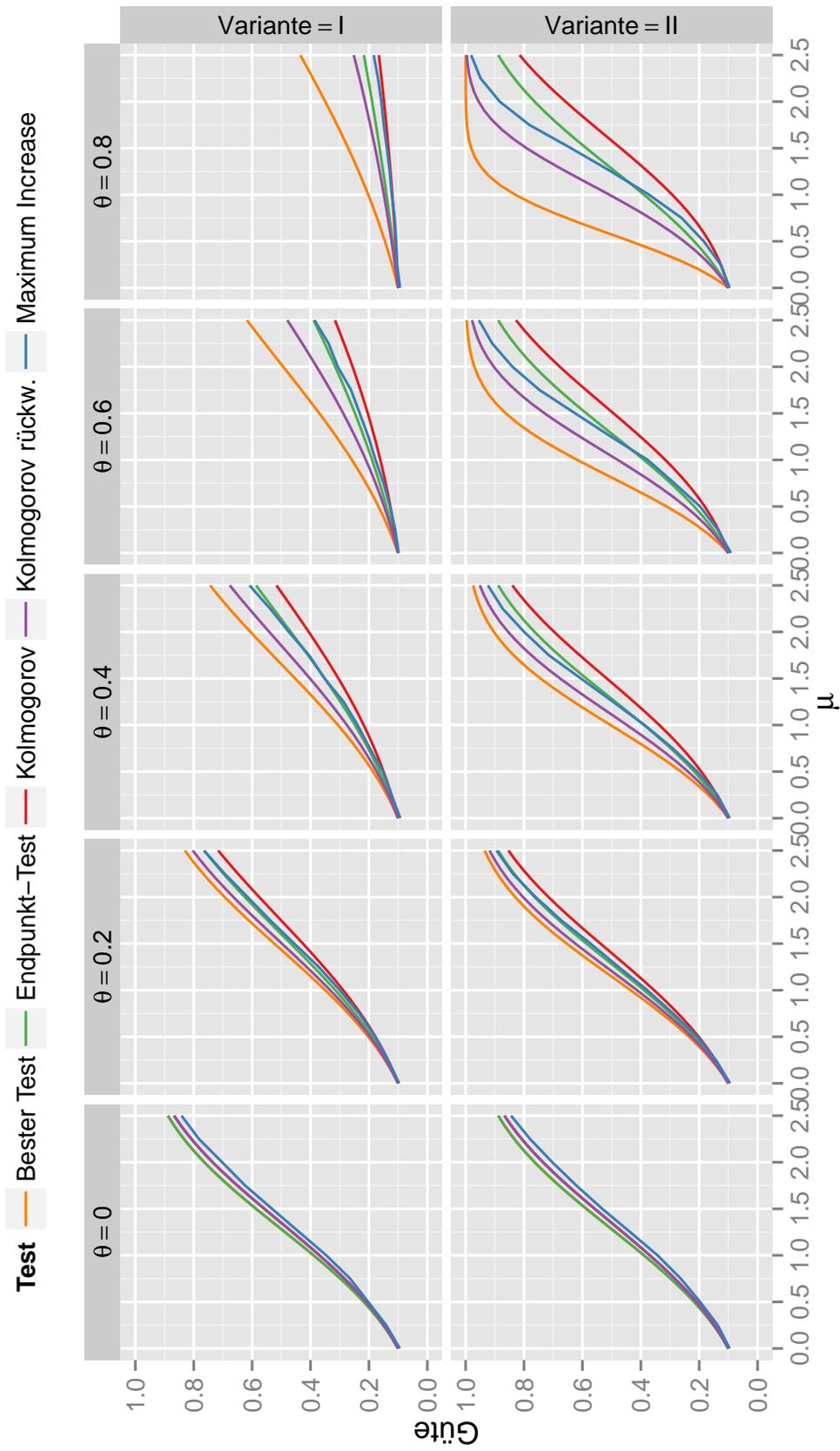


Abbildung 2.6: Güte verschiedener nicht-sequentieller Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ (Variante I) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ (Variante II) (Niveau $\alpha = 0.1$, bei Maximum Increase Simulationen)

Teil II

Sequentielle Testverfahren basierend auf Fenstern

3 Sequentielle Testverfahren mit unbeschränkter Fensterlänge

Im nachfolgenden Abschnitt 3.1 stellen wir zunächst dar, was unter *sequentiellen Verfahren* im Allgemeinen zu verstehen ist und welche Kriterien dieselbigen idealerweise erfüllen. Hierzu führen wir den Begriff der *Verfahrensstopzeit* ein, welcher in der Literatur (soweit wir wissen) bisher so noch nicht aufgetaucht ist.

Anschließend betrachten wir in Abschnitt 3.2 Testverfahren, die alle bis zum Zeitpunkt t vorhandenen Daten heranziehen. Man könnte diese Verfahren auch als „klassische, sequentielle Verfahren“ bezeichnen. Wir zeigen in Abschnitt 3.2 neue Interpretationsmöglichkeiten dieser Verfahren auf. Zum Vergleich der Verfahrensstopzeiten führen wir Simulationen durch. Um Verfahrensstopzeit-Verteilungen graphisch miteinander vergleichen zu können, präsentieren wir eine neu entwickelte Darstellungsform.

3.1 Problem- und Zielsetzung bei sequentiellen Verfahren

Wir betrachten das asymptotische Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$, einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ und das Testproblem

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0. \quad (3.1.1)$$

Im Unterschied zu Kapitel 2 wollen wir jedoch in den Kapiteln 3 – 5 sogenannte *sequentielle* Verfahren studieren. Dabei geht man davon aus, dass die Beobachtungen Y_t bezüglich der „externen Variable“ $t \in [0, 1]$ geordnet sind. Häufig interpretiert man t als Zeit, was wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit ebenfalls tun. Bei sequentiellen Verfahren wird nach jeder Beobachtung Y_t die Entscheidung getroffen, ob H_0 mit den bereits vorhandenen Beobachtungen $Y_{[0,t]} = (Y_s)_{s \in [0,t]}$ abgelehnt werden kann oder nicht. Man entscheidet sich also zwischen:

Prozedere wird gestoppt, da H_0 mit den vorliegenden Daten $Y_{[0,t]}$ abgelehnt werden kann.	\longleftrightarrow	Weitere Beobachtung wird durchgeführt, da H_0 mit den vorliegenden Daten $Y_{[0,t]}$ nicht abgelehnt werden kann.
---	-----------------------	---

Bei sequentiellen Verfahren gilt es im Wesentlichen vier *Performancegrößen* zu berücksichtigen (vgl. z. B. Jeske u. a. 2009):

- (P1) Fehler 1. Art,
- (P2) Fehler 2. Art (bzw. Testgüte),
- (P3) Rechen- und Implementationsaufwand sowie
- (P4) Zeit, bis eine falsche Nullhypothese entdeckt wird (= *Reaktionszeit*).

Bei der *Reaktionszeit* wird insbesondere die Differenz zwischen „Lage des wahren Change-Points“ und „Verfahren schlägt Alarm“ betrachtet. Anstatt der Reaktionszeit, müssen wir in dieser Arbeit eine Modifikation dieser Zeit betrachten. Diese Modifikation ist nötig, da gemäß unseren Voraussetzungen der Betrachtungszeitraum durch $[0, 1]$ gegeben ist und somit t durch 1 nach oben beschränkt ist. Ist $t = 1$, so wird das Verfahren gestoppt – unabhängig davon, ob die (ggf. falsche) Nullhypothese verworfen werden kann oder nicht. Dieses „Stoppen in spätestens $t = 1$ “ ist bei der Formulierung aus (P4) nicht vorgesehen. Dort geht man nämlich davon aus, dass t beliebig groß werden kann, also $t \in [0, \infty)$ gilt. Wir nennen die von uns vorgeschlagene Modifikation *Verfahrensstopzeit* und definieren diese wie folgt:

Definition 3.1.1 (Verfahrensstopzeit \mathfrak{T})

In der vorliegenden Arbeit ist die Verfahrensstopzeit \mathfrak{T} eines sequentiellen Testverfahrens diejenige Zeit, zu der das Verfahren stoppt – entweder, weil H_0 mit den Beobachtungen $Y_{[0,1]}$ abgelehnt werden kann oder weil das Ende des Betrachtungszeitraums erreicht ist.

Die Verfahrensstopzeit \mathfrak{T} ist demnach aus $[0, 1]$. Wir betrachten das folgende Beispiel, um die Ziel-Anforderungen an \mathfrak{T} etwas näher zu beschreiben.

Beispiel 3.1.2 *Es sei $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ das asymptotische Regressionsmodell mit $f \in L^2([0, 1])$. Unter H_0 ist $f \equiv 0$. Wir betrachten die Situation, dass unter H_1 die Regressionsfunktion f von der Gestalt*

$$f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]} \quad \text{für } \mu > 0 \text{ und } \theta \in [0, 1)$$

ist. Es sei \mathfrak{T} die Verfahrensstopppzeit eines sequentiellen Verfahrens, bei dem ein Fehler 1. Art in Höhe von α , $\alpha \in (0, 1)$, zugelassen wird.

- a) Unter H_0 wird mit Wahrscheinlichkeit α die Nullhypothese abgelehnt. Folglich nimmt \mathfrak{T} unter H_0 auch Werte kleiner 1 an und es gilt: $\mathbb{P}(\mathfrak{T} < 1) = \alpha$.
- b) Unter H_1 wäre es wünschenswert, dass die Nullhypothese mit hoher Wahrscheinlichkeit abgelehnt wird und das Verfahren bei Auftreten des Change-Points θ stoppt, also $\mathfrak{T} = \theta$ gilt. Analog zur Situation aus a) lässt es sich allerdings auch unter H_1 nicht vermeiden, dass bereits vor Auftreten des Change-Points fälschlicherweise gestoppt wird.

Ein ideales sequentielles Verfahren, würde die Performancegrößen **(P1)** – **(P3)** minimieren und

(P4') die Verfahrensstopppzeit

gemäß der obigen Ausführungen optimieren. Ein solches „Ideal-Verfahren“ aber existiert im Allgemeinen nicht. Im weiteren Verlauf der Arbeit stellen wir daher sequentielle Verfahren derart ein, dass sie einen vorgegebenen Fehler 1. Art haben – die Performancegröße **(P1)** wird also kontrolliert. Anschließend werden diese Verfahren hinsichtlich Testgüte und Verfahrensstopppzeit verglichen und bezüglich des Rechen- und Implementationsaufwandes diskutiert.

3.2 Neuinterpretation zweier nicht-sequentieller Tests

Zum Zeitpunkt t , $t \in [0, 1)$, kennt man den Prozess $Y_{[0,1]} = (Y_s)_{s \in [0,1]}$ noch nicht ganz, sondern nur den Abschnitt $Y_{[0,t]} = (Y_s)_{s \in [0,t]}$. Möchte man demnach zum Zeitpunkt t entscheiden, ob H_0 abgelehnt werden kann, so kann man lediglich $Y_{[0,t]}$ zur Entscheidungsfindung heranziehen. Es sei für $t \in [0, 1]$

$$F_t : C[0, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

ein *Monotonie erhaltendes* Funktional, d.h. F_t erfüllt für monoton wachsende Signalfunktionen s_g, s_h ($g, h \in L^2([0, t])$) die Eigenschaft:

$$s_g \leq s_h \Rightarrow F_t(s_g) \leq F_t(s_h) . \tag{3.2.1}$$

Wir beschränken uns hier auf monoton wachsende Signalfunktionen, da unter der Alternative aus (3.1.1) s_f als monoton wachsend vorausgesetzt wird. Es sei $X_t := F_t(Y_{[0,t]})$ die zum Fenster $[0, t]$ gehörige Teststatistik. Wegen der Forderung (3.2.1) wird diese größer, falls

das Signal s_f größer wird. Daher ist eine sinnvolle, sequentielle Entscheidungsvorschrift gegeben durch:

$$\text{Stoppe zum Zeitpunkt } t \text{ (und lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab)} \iff X_t > k_{1-\alpha} . \quad (3.2.2)$$

Dabei ist $k_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\sup_{t \in [0,1]} F_t(B_{[0,t]})$, $\alpha \in (0, 1)$. Mit der eingeführten Notation kann die Verfahrensstopzeit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(X_{[0,1]})$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} \inf\{t \in [0, 1] \mid X_t > k_{1-\alpha}\} & , \text{ falls } \sup_{t \in [0,1]} X_t > k_{1-\alpha} \\ 1 & , \text{ falls } \sup_{t \in [0,1]} X_t \leq k_{1-\alpha} \end{cases} . \quad (3.2.3)$$

Bemerkung 3.2.1 Aufgrund der Definition von $k_{1-\alpha}$ führt die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \sup_{t \in [0,1]} X_t > k_{1-\alpha} \quad (3.2.4)$$

zu einem α -Niveau Test. Insbesondere hat damit das sequentielle Verfahren (3.2.2) einen vorgegebenen Fehler 1. Art, womit die Performancegröße (**P1**) kontrolliert wird.

3.2.1 Kolmogorov- und Maximum Increase-Test im sequentiellen Kontext

Naheliegende, Monotonie erhaltende Funktionale F_t bzw. damit zusammenhängende Teststatistiken $X_t = F_t(Y_{[0,t]})$, $t \in [0, 1]$, sind:

- i) $X_t = Y_t$ (Endpunkt des Fensters $[0, t]$),
- ii) $X_t = \sup_{s \in [0,t]} Y_s$ (Teststatistik des gew. Kolmogorov-Tests in $[0, t]$),
- iii) $X_t = \sup_{s \in [0,t]} (Y_t - Y_{t-s})$ (Teststatistik des rückw. Kolmogorov-Tests in $[0, t]$),
- iv) $X_t = \mathbb{I}(Y_{[0,t]})$ (Maximum Increase in $[0, t]$).

Aus der Definition der Operatoren aus i) – iii) folgt unmittelbar deren „Monotonie erhaltende“-Eigenschaft, für den Maximum Increase-Operator wird dies in Lemma 2.4.4 gezeigt.

Bemerkung 3.2.2 Für das Funktional aus i) bzw. iv) ist es egal, ob man den gewöhnlichen Prozess $Y_{[0,t]}$ oder den rückwärtigen Prozess $\overleftarrow{Y}_{[0,t]}$ heranzieht, da

$$(Y_{[0,t]})(t) = Y_t = (\overleftarrow{Y}_{[0,t]})(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{I}(Y_{[0,t]}) = \mathbb{I}(\overleftarrow{Y}_{[0,t]})$$

gilt (vgl. Definition 2.2.1 bzw. Lemma 2.4.2).

In i) ist $\sup_{t \in [0,1]} X_t = \sup_{t \in [0,1]} Y_t$, sodass die Entscheidungsvorschrift aus (3.2.4) gerade der Kolmogorov-Test aus Abschnitt 2.3 ist.

Im Fall ii) und iv) stimmen die Tests gemäß (3.2.4) mit den entsprechenden Tests aus Kapitel 2 überein, da

$$\begin{aligned} \text{im Fall ii): } \quad & \sup_{t \in [0,1]} X_t = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{s \in [0,t]} Y_s = \sup_{t \in [0,1]} Y_t \\ \text{und im Fall iv): } \quad & \sup_{t \in [0,1]} X_t = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{t' \in [0,t]} \sup_{s \in [0,t']} Y_{t'} - Y_s = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{s \in [0,t]} Y_t - Y_s = \mathbb{I}(Y_{[0,1]}) \end{aligned}$$

gilt.

Situation iii) ist der wohl interessanteste Fall: Die sequentielle Anwendung der rückwärtigen Kolmogorov-Teststatistik führt zum Maximum Increase-Test, da

$$\sup_{t \in [0,1]} X_t = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{s \in [0,t]} (Y_t - Y_{t-s}) = \sup_{t \in [0,1]} \left(Y_t - \inf_{s \in [0,t]} Y_s \right) = \mathbb{I}(Y_{[0,1]})$$

gilt.

Damit ist gezeigt, dass

- die sequentielle Anwendung der Teststatistiken aus i) bzw. ii) zum Kolmogorov-Test und
- die sequentielle Anwendung der Teststatistiken aus iii) bzw. iv) zum Maximum Increase-Test führen.

3.2.2 Vergleich der Verfahren bei Vorliegen einer Sprungfunktion unter der Alternative

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine Simulationsstudie zum Vergleich der beiden sequentiellen Verfahren aus Abschnitt 3.2.1. Wir betrachten hierzu die Performancegrößen Testgüte, Verfahrensstopzeit und Rechen- bzw. Implementationsaufwand.

Die Gütefunktionen des (nicht-sequentiellen) Kolmogorov-Tests und des (nicht-sequentiellen) Maximum Increase-Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante I) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$, $\theta \in [0, 1)$, werden in Kapitel 2.5 (Abbildung 2.4 bzw. 2.6) dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass der Maximum Increase-Test den Kolmogorov-Test (bzgl. der Güte) dominiert, falls $\theta > 0$ ist. Ist jedoch $\theta = 0$, so weisen die Abbildungen für den Kolmogorov-Test eine bessere Güte aus.

Hinsichtlich des Rechen- und Implementationsaufwandes ist anzumerken, dass beide Verfahren mit vertretbarem numerischen Aufwand berechnet werden können. Beim Kolmogorov-Test allerdings ist der kritische Wert $z_{1-\alpha/2}$ deutlich einfacher zu bestimmen und darüberhinaus ist die Teststatistik leichter zu berechnen. Folglich ist der Kolmogorov-Test bei der Performancegröße **(P3)** Rechen- und Implementationsaufwand dem Maximum Increase-Test vorzuziehen.

Es bleibt noch, die beiden sequentiellen Verfahren hinsichtlich ihrer Verfahrensstopzeit miteinander zu vergleichen. Diese simulieren wir und führen dabei für jede Kombination aus μ und θ 10.000 Wiederholungen durch. Bei jeder Wiederholung wird ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen zur Approximation an die Brownsche Bewegung verwendet. Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Da für die Verfahrensstopzeit

$$\mathfrak{T} = 1 \text{ gilt, falls } H_0 \text{ nicht abgelehnt werden kann,}$$

ist es nicht sinnvoll, eine *mittlere Verfahrensstopzeit* zu berechnen. Stattdessen stellen wir die simulierten Quantile der Verfahrensstopzeit in Abbildung 3.1 dar. Analog zu den Güteplots in Abschnitt 2.5 tragen wir auf der x -Achse die Sprunghöhe $\mu \geq 0$ und auf der y -Achse die Verfahrensstopzeit ab. Die 0.1-, 0.5- und 0.9-Quantile der jeweiligen Verfahrensstopzeiten sind mittels farbiger Linien eingezeichnet. Die untere bzw. obere Begrenzung der farbige dargestellten Flächen kennzeichnen die 0.25- bzw. 0.75-Quantile. Diese Darstellungsform der Verfahrensstopzeit ist angelehnt an diejenige eines Boxplots. Sie ist, soweit wir wissen, in der Literatur bisher noch nicht zum Einsatz gekommen und daher neu. Wir bringen diese Darstellungsform im weiteren Verlauf dieser Arbeit an verschiedenen Stellen zum Einsatz.

Abbildung 3.1 zeigt, dass für $\theta > 0$ der Maximum Increase-Test schneller reagiert als der Kolmogorov-Test. Ist der Change-Point $\theta = 0$, so ist es gerade umgekehrt. Wie auch schon bei den Güteplots in Abbildung 2.6 erkennbar, ist es auch bei der Verfahrensstopzeit in Abbildung 3.1 so, dass insbesondere große Werte θ zu deutlichen Unterschieden zwischen Variante I und II führen. Des Weiteren kann man aus dieser Darstellung deutlich sehen, dass die Variation bei Variante I deutlich größer ist als bei Variante II. Darüberhinaus ist der Unterschied zwischen Kolmogorov- und Maximum Increase-Test bei Variante II geringer als bei Variante I.

Zusammenfassend ist damit festzuhalten, dass im Falle $\theta = 0$ der Kolmogorov-Test zu bevorzugen ist. Dieser ist nämlich einfach in der Implementation und liefert zudem bessere Gütewerte und Verfahrensstopzeiten als der Maximum Increase-Test. Ist jedoch – wie in der Praxis meist üblich – $\theta > 0$, so weist der Maximum Increase-Test bessere Werte bei

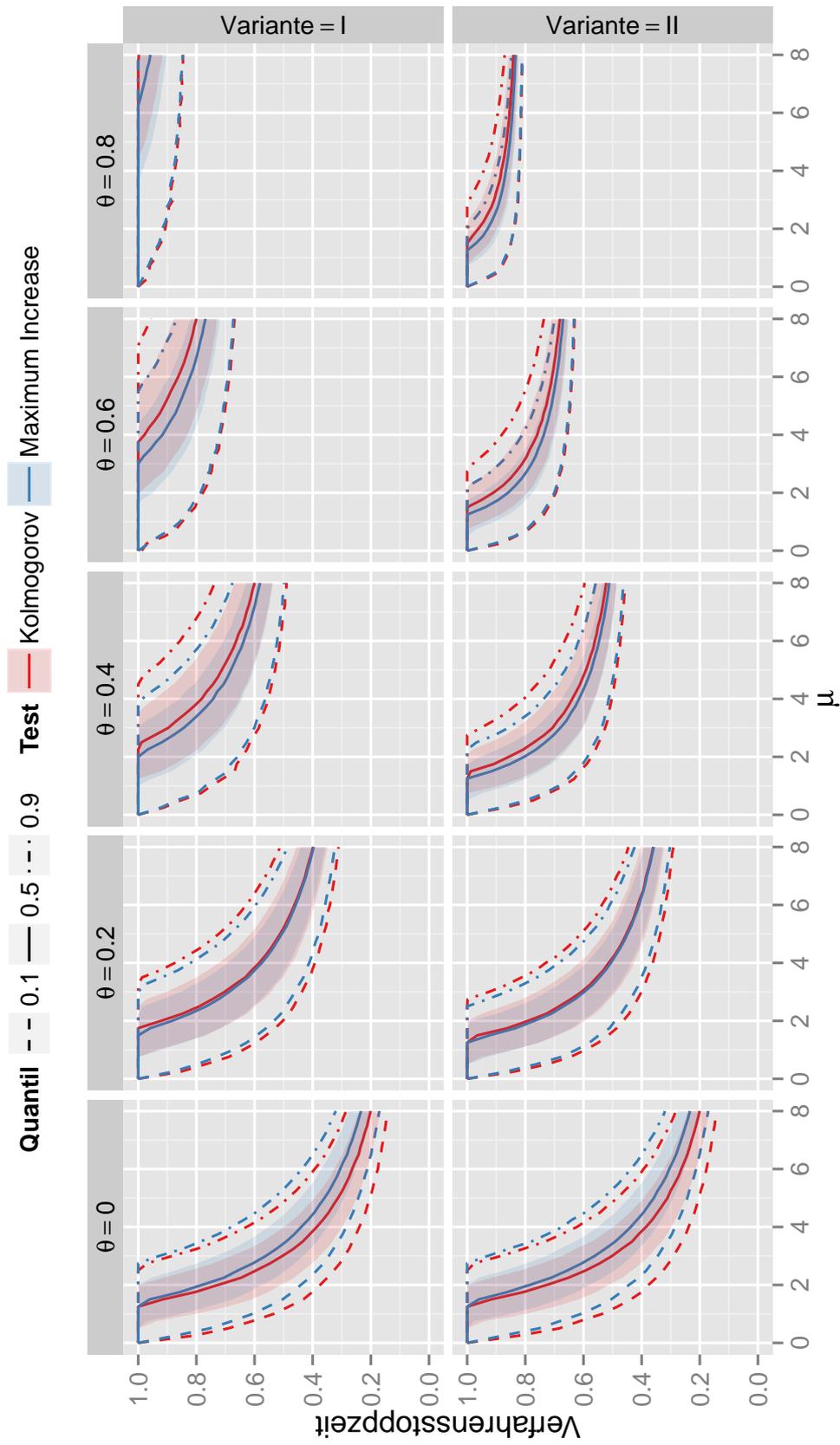


Abbildung 3.1: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov- und Maximum Increase-Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante I) bzw. $f = \frac{\mu}{1-\theta} \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Variante II) (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

Güte und Verfahrensstopzeit auf und ist daher zu bevorzugen.

In den nachfolgenden Kapiteln 4 – 5 betrachten wir einfach zu berechnende Modifikationen des Kolmogorov-Tests, welche auch im Falle $\theta > 0$ akzeptable Werte bei Testgüte und Verfahrensstopzeit aufweisen.

4 Sequentielle Testverfahren mit konstanter Fensterlänge p

Wir betrachten für das asymptotische Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ wieder das Testproblem

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0.$$

Dazu studieren wir im Nachfolgenden sequentielle Testverfahren, bei denen die Teststatistik zum Zeitpunkt $t \in [p, 1]$ aus den Beobachtungen $(Y_s)_{s \in [t-p, t]} =: Y_{[t-p, t]}$ konstruiert wird. Dabei ist $p \in (0, 1]$ die Fensterlänge und $Y_{[t-p, t]}$ das sog. „*moving window*“. Anstatt den Abschnitt $Y_{[t-p, t]}$ direkt zu verwenden, nehmen wir für jedes Fenster eine Translation vor, so dass der resultierende Prozess in 0 startet. Wir betrachten also für $t \in [p, 1]$ die *translatierten Prozesse*

$$(Y_s - Y_{t-p})_{s \in [t-p, t]} =: Y_{[t-p, t]} - Y_{t-p}.$$

Durch diese Translation geht die Information von Y_{t-p} verloren und $Y_{[t-p, t]} - Y_{t-p}$ entspricht der Information der Daten im Intervall $(t-p, t]$. Aufgrund der Translationsinvarianz des Rückwärts-Operators „ \leftarrow “ (sh. Lemma 2.2.4 b)) spielt die obige Translation bei Betrachtung der rückwärtigen Version keine Rolle. Es gilt:

$$\overleftarrow{Y_{[t-p, t]} - Y_{t-p}} = \overleftarrow{Y_{[t-p, t]}}, \quad t \in [p, 1].$$

Analog zu der Vorgehensweise in Kapitel 3.2 kann man auch hier für jedes Fenster ein geeignetes Funktional

$$F_t : C[t-p, t] \rightarrow \mathbb{R}$$

und die zugehörige Teststatistik $X_t := F_t(Y_{[t-p, t]} - Y_{t-p})$, $t \in [p, 1]$, betrachten. F_t kann dabei eines der in Kapitel 3.2 i) – iv) genannten Funktionale sein, wenn man F_t auf die hier vorliegenden Fenster anpasst. Die Aussage aus Bemerkung 3.2.2 gilt dann entsprechend.

Bemerkung 4.0.1 Der ursprüngliche Prozess $Y = Y_{[0,1]}$ hat als Zeitintervall $[0, 1]$. Bei den translatierten Prozessen $(Y_{[t-p,t]} - Y_{t-p})_{t \in [p,1]}$ verkürzt sich das Zeitintervall auf $[p, 1]$. Ähnlich verhält es sich auch beim Differenzieren von Zeitreihen: Die Anzahl der differenzierten Werte ist kleiner als die Anzahl der ursprünglichen Beobachtungen und ist abhängig von der Spannweite der Differenz.

Im Nachfolgenden beschränken wir uns auf den Fall, dass die zu $Y_{[t-p,t]} - Y_{t-p}$ gehörige Teststatistik X_t der Endpunkt ist. Es seien also $p \in (0, 1]$ die Fensterlänge und

$$X_t := Y_t - Y_{t-p}$$

der Endpunkt des translatierten Prozesses $Y_{[t-p,t]} - Y_{t-p}$, $t \in [p, 1]$. Wir betrachten die sequentielle Entscheidungsvorschrift

Stoppe zum Zeitpunkt $t \in [p, 1]$ (und lehne $H_0 : s_f \equiv 0$ ab)

$$\iff Y_t - Y_{t-p} > c_{1-\alpha;p}, \quad (4.0.1)$$

wobei $c_{1-\alpha;p} > 0$ der kritische Wert ist mit

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (B_t - B_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) = \alpha \quad (4.0.2)$$

für $\alpha \in (0, 1)$. Eine breit angelegte Untersuchung des Prozesses $(B_t - B_{t-p})_{t \in [p,1]}$ wird erstmalig in den nachfolgenden Abschnitten durchgeführt. Eine detaillierte Darstellung, welche Resultate in der vorliegenden Arbeit neu und welche Aussagen bereits in der Literatur bekannt sind, findet sich in der Einleitung (Abschnitt 1.1). Wir weisen an dieser Stelle nur auf die beiden wichtigsten, neuen Resultate hin: Die (auch für $p = 1$ und $a = 0$) erstmalige Berechnung von

$$\mathbb{P} (B_{t+p} - B_t \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T])$$

in Satz 4.1.17 bzw. Theorem 4.1.22 ($a, b \in \mathbb{R}$, $T \in (0, p]$) und eine stückweise Berechnungsmöglichkeit von

$$\mathbb{P} (B_{t+p} - B_t \leq h(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T])$$

bei Vorliegen einer beliebigen Schranke h in Theorem 4.1.23 ($T \in (0, p]$).

4.1 Der Slepian- p -Prozess

Wir untersuchen den Prozess

$$(B_t - B_{t-p})_{t \in [p,1]} = (B_{t+p} - B_t)_{t \in [0,1-p]} \quad (4.1.1)$$

aus (4.0.2) genauer, um den kritischen Wert $c_{1-\alpha;p}$ bestimmen zu können.

Bemerkung 4.1.1 In Cressie (1980, S. 834f.) taucht der Prozess $\frac{1}{\sqrt{p}}(B_{t+p} - B_t)_{t \in [0,1-p]}$ durch Betrachtung sog. Scan Statistiken auf. Chu u. a. (1995) betrachten Moving Sums (vgl. Abschnitt 4.2.1) und erhalten dabei als asymptotischen Grenzwert ebenfalls den Prozess $\frac{1}{\sqrt{p}}(B_{t+p} - B_t)_{t \in [0,1-p]}$.

Lemma 4.1.2 Es seien $p > 0$, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $W^p := (W_t^p)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit

$$W_t^p := B(t+p) - B(t), \quad t \geq 0.$$

Dann gilt:

a) W^p ist ein stark-stationärer, zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\gamma_{W^p}(t) = (p - |t|)^+ \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

wobei $x^+ := \max(x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) W^p ist isotrop, d.h. $\gamma_{W^p}(t) = \gamma_{W^p}(|t|)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) Die Pfade von W^p sind stetig, aber in t , $t \geq 0$, f.s. nicht differenzierbar.

d) W^p ist stetig aber nicht differenzierbar im L^2 -Sinne („mean-square continuous and not mean-square differentiable“).

BEWEIS a) Die endlich-dimensionalen Verteilungen von W^p sind normalverteilt, da diese aus einer Linearkombination der Brownschen Bewegung hervorgehen. Damit ist W^p ein Gauß-Prozess. Weiter gilt für alle $t \geq 0$: $W_t^p \sim N(0, p)$, womit W^p insbesondere zentriert ist. Seien nun $s, s+t \geq 0$, dann gilt für die Kovarianz:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Cov}(W_s^p, W_{s+t}^p) \\ &= \mathbf{Cov}(B_{s+p}, B_{s+t+p}) + \mathbf{Cov}(B_s, B_{s+t}) - \mathbf{Cov}(B_s, B_{s+t+p}) - \mathbf{Cov}(B_{s+p}, B_{s+t}) \\ &= (s+p + \min(0, t)) + (s + \min(0, t)) - (s + \min(0, t+p)) - (s + \min(p, t)) \end{aligned}$$

$$=p + \begin{cases} -p & , \text{ falls } |t| \geq p \\ -|t| & , \text{ falls } |t| < p \end{cases} = \gamma_{W^p}(t).$$

Die Kovarianz $\mathbf{Cov}(W_s^p, W_{s+t}^p)$ ist also nur von t abhängig, womit W^p ein schwachstationärer Prozess ist. Im Gaußschen Fall allerdings stimmen schwache und starke Stationarität überein, so dass die angegebenen Behauptungen richtig sind.

- b) Die Isotropie folgt unmittelbar aus der Gestalt der Kovarianzfunktion.
 c) Die Pfade der Brownschen Bewegung sind per Definition stetig, womit dies auch für die Pfade von W^p gilt.

Um zu beweisen, dass W^p in $t \geq 0$ f.s. nicht differenzierbar ist, zeigen wir, dass

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{W^p(t+h) - W^p(t)}{h} \neq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{W^p(t+h) - W^p(t)}{h} \quad (4.1.2)$$

gilt. Wir definieren für $h \in [0, p]$:

$$Z_1(h) := B(t+p+h) - B(t+p) \quad \text{und} \quad Z_2(h) := B(t+h) - B(t).$$

Dann sind Z_1 und Z_2 zwei voneinander unabhängige Standard Brownsche Bewegungen, da die Zuwächse von B über disjunkte Zeitintervalle unabhängig sind und

$$\mathbf{Cov}(Z_1(h), Z_1(h')) = \min(h, h') = \mathbf{Cov}(Z_2(h), Z_2(h')) \quad \text{für } h, h' \in [0, p]$$

gilt. Sei weiter

$$Z_3(h) := \frac{1}{\sqrt{2}} (W^p(t+h) - W^p(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_1(h) - Z_2(h)).$$

Z_3 ist damit ebenfalls eine Standard Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \limsup_{h \searrow 0} \frac{W^p(t+h) - W^p(t)}{h} &= \sqrt{2} \limsup_{h \searrow 0} \frac{Z_3(h)}{h} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} Z_3\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{*}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_3(n)}{\sqrt{n}} = \infty, \end{aligned}$$

wobei \star richtig ist wegen der sog. „time inversion property“ der Brownschen Bewegung.

Analog gilt:

$$\liminf_{h \searrow 0} \frac{W^p(t+h) - W^p(t)}{h} \leq \sqrt{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} Z_3\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_3(n)}{\sqrt{n}} = -\infty,$$

womit (4.1.2) und damit die Nicht-Differenzierbarkeit in t bewiesen ist.

- d) W^p ist stark-stationär und γ_{W^p} ist stetig in 0, womit die L^2 -Stetigkeit folgt (sh. z. B. Abrahamsen, 1997, S. 18).

$\gamma_{W^p}(t) = (p - |t|)^+$ ist in $t = 0$ nicht differenzierbar. Ein stationärer Prozess aber ist genau dann im L^2 -Sinne differenzierbar, wenn die zugehörige Kovarianzfunktion in $t = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist (vgl. z. B. Diggle und Ribeiro 2007, S. 49 und Bartlett 1978, S. 157). Damit ist W^p also nicht im L^2 -Sinne differenzierbar. ■

Abbildung 4.1 zeigt die Gestalt der Kovarianzfunktion γ_{W^p} aus Lemma 4.1.2.

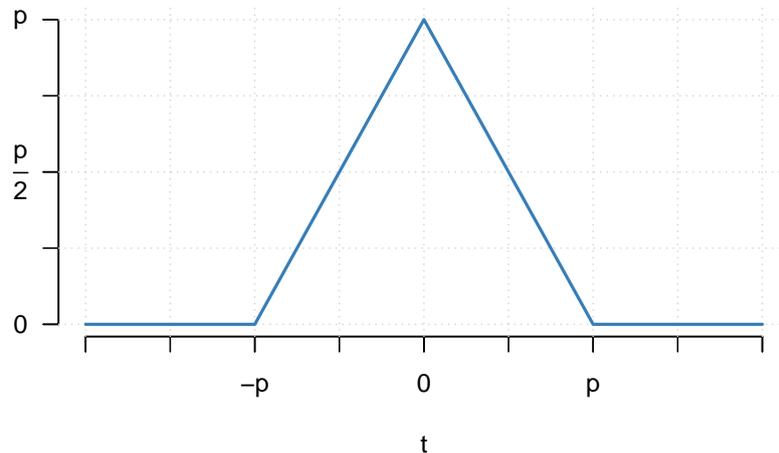


Abbildung 4.1: Kovarianzfunktion $\gamma_{W^p} = (p - |t|)^+$

Im Falle $p = 1$ ist $W^1 = (B_{t+1} - B_t)_{t \geq 0}$ ein sog. *Slepian-Prozess* (vgl. z. B. Azaïs und Wschebor 2009):

Definition 4.1.3 (Slepian-Prozess)

Ein zentrierter, stark stationärer Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(t) = (1 - |t|)^+, \quad t \geq 0,$$

heißt Slepian-Prozess.

Slepian (1961) betrachtet für diesen Prozess erstmals die Dichte $\pi_{1;b}$ der sog. „*first hitting time*“

$$\inf\{t \geq 0 \mid W_t^1 > b\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Allerdings gibt er $\pi_{1;b}(t)$ (bzw. eine bedingte Version davon, vgl. Bemerkung 4.1.21 nur für $t \in (0, 1]$) an. Bis heute ist $\pi_{1;b}(t)$ für $t > 1$ nicht bekannt.

Bemerkung 4.1.4 *In der Literatur wird zwischen einem*

- „Slepian process“ (Slepian, 1961; Azais und Wschebor, 2009) und einem
- „Slepian model process“ (Slepian und Hill, 1963; Leadbetter u. a., 1983)

unterschieden. Trotz der ähnlichen Namensgebung, handelt es sich um zwei verschiedene Prozesse.

In Anlehnung an Definition 4.1.3 erweitern wir den Begriff des Slepian-Prozesses wie folgt:

Definition 4.1.5 (Slepian- p -Prozess)

Es sei $p > 0$. Wir nennen einen zentrierten, stark stationären Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(t) = (p - |t|)^+, \quad t \geq 0,$$

Slepian- p -Prozess.

Mit dieser Bezeichnung ist ein gewöhnlicher Slepian-Prozess ein Slepian-1-Prozess und $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess. Wir geben die Dichte der endlichdimensionalen Verteilungen eines Slepian- p -Prozesses für allgemeines $p > 0$ erstmalig an. Im Falle $p = 1$ findet sich diese Darstellung in Slepian (1961, Formel (3)).

Satz 4.1.6 (Dichte φ_p der endlich-dimensionalen Verteilungen von $W_{[0,p]}^p$)

Es seien $p > 0$ und $W_{[0,p]}^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \in [0,p]}$ ein Slepian- p -Prozess sowie

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq p, \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Eine Lebesgue-Dichte von $(W_{t_1}^p, \dots, W_{t_n}^p)^\top$ ist gegeben durch $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_{t_1}^p = x_1, \dots, W_{t_n}^p = x_n) &= \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{\pi^n (2p - t_n + t_1)}} \left(\prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_1 + x_n)^2}{2(2p - t_n + t_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wegen $W_t^p \sim N(0, p)$ gilt im Falle $n = 1$: $\varphi_p(W_t^p = x) = \phi_p(x)$, $x \in \mathbb{R}, t \in [0, p]$.

BEWEIS Der Fall $n = 1$ ist klar. Daher gelte im Nachfolgenden $n \geq 2$.

Im Falle $p = 1$ entspricht die Aussage aus Satz 4.1.6 der Formel (3) aus Slepian (1961). Wir

erweitern die dort vorgestellte Beweisidee auf den hier vorliegenden Fall eines Slepian- p -Prozesses mit $p > 0$.

Für $s \leq t$ mit $s, t \in [0, p]$ gilt aufgrund der Kovarianzfunktion von W^p (vgl. Definition 4.1.5):

$$\mathbf{Cov}(W_s^p, W_t^p) = p - t + s.$$

Damit aber folgt wegen $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq p$:

$$\begin{pmatrix} W_{t_1}^p \\ W_{t_2}^p \\ W_{t_3}^p \\ \vdots \\ W_{t_n}^p \end{pmatrix} \sim N_n(0, \Sigma) \text{ mit } \Sigma := \begin{pmatrix} p & p - t_2 + t_1 & p - t_3 + t_1 & \cdots & p - t_n + t_1 \\ p - t_2 + t_1 & p & p - t_3 + t_2 & \cdots & p - t_n + t_2 \\ p - t_3 + t_1 & p - t_3 + t_2 & p & \cdots & p - t_n + t_3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ p - t_n + t_1 & p - t_n + t_2 & p - t_n + t_3 & \cdots & p \end{pmatrix}.$$

Für

$$Z := \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} W_{t_1}^p + W_{t_n}^p \\ W_{t_2}^p - W_{t_1}^p \\ W_{t_3}^p - W_{t_2}^p \\ \vdots \\ W_{t_n}^p - W_{t_{n-1}}^p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T} \begin{pmatrix} W_{t_1}^p \\ W_{t_2}^p \\ W_{t_3}^p \\ \vdots \\ W_{t_n}^p \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

gilt damit: $\det(T) = 2$ und $Z \sim N_n(0, T\Sigma T^\top)$, wobei man durch einfaches Nachrechnen

$$T\Sigma T^\top = \text{diag}\left(2(2p - t_n + t_1), 2(t_2 - t_1), 2(t_3 - t_2), \dots, 2(t_n - t_{n-1})\right)$$

zeigen kann. Aufgrund der Diagonalgestalt von $\mathbf{Cov}(Z)$ ist eine Lebesgue-Dichte von Z gegeben durch $g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit $(z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} g(z_1, \dots, z_n) &:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{2(2p - t_n + t_1)}} \left(\prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2(t_i - t_{i-1})}} \right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2}{2(2p - t_n + t_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{z_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right)\right) \\ &= \frac{1}{2^n \sqrt{\pi^n (2p - t_n + t_1)}} \left(\prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right) \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2}{2(2p-t_n+t_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{z_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right)\right). \quad (4.1.4)$$

Weiter gilt mit dem Transformationssatz für Lebesgue-Dichten:

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_{t_1}^p = x_1, \dots, W_{t_n}^p = x_n) &= \det(T) \cdot g(Tx) \\ &= 2 \cdot g\left(x_1 + x_n, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\right), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (4.1.4) ein, so erhält man gerade die zu beweisende Formel aus Satz 4.1.6. ■

Bemerkung 4.1.7 *Der Beweis zu Satz 4.1.6 schlägt fehl, wenn $t_n > p$ ist. Für $t_n > p$ hat nämlich die Kovarianzmatrix von Z aus (4.1.3) keine Diagonalgestalt, womit die Dichte g aus (4.1.4) nicht mehr so einfach angegeben werden kann.*

Da eine gemeinsame Dichte von $(W_{t_1}^p, \dots, W_{t_n}^p)$ existiert, kann auch eine bedingte Dichte berechnet werden:

Korollar 4.1.8 (Bedingte Dichte φ_p) *Es seien $p > 0$, $W_{[0,p]}^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \in [0,p]}$ ein Slepian- p -Prozess, $n, m \in \mathbb{N}$ und*

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq p \quad \text{sowie} \quad 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m \leq p$$

mit $\{t_i | i = 1, \dots, n\} \cap \{s_j | j = 1, \dots, m\} = \emptyset$. Eine Lebesgue-Dichte von

$$(W_{t_1}^p, \dots, W_{t_n}^p)^\top \mid (W_{s_1}^p, \dots, W_{s_m}^p)^\top = y, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m,$$

ist gegeben durch $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_{t_1}^p = x_1, \dots, W_{t_n}^p = x_n \mid W_{s_1}^p = y_1, \dots, W_{s_m}^p = y_m) \\ = \frac{\varphi_p(W_{t_1}^p = x_1, \dots, W_{t_n}^p = x_n, W_{s_1}^p = y_1, \dots, W_{s_m}^p = y_m)}{\varphi_p(W_{s_1}^p = y_1, \dots, W_{s_m}^p = y_m)}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Beispiel 4.1.9 *Nach Satz 4.1.6 gilt für $t, T \in (0, p]$ mit $t \leq T$ und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:*

$$\varphi_p(W_0^p = x_1, W_t^p = x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{2(2p-t)} + \frac{(x_2-x_1)^2}{2t}\right)\right] \quad (4.1.6)$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_0^p = x_1, W_t^p = x_2, W_T^p = x_3) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi^3(2p-T)}} \frac{1}{\sqrt{t \cdot (T-t)}} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_1 + x_3)^2}{2(2p-T)} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2t} + \frac{(x_3 - x_2)^2}{2(T-t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Nach Definition der bedingten Dichte (Korollar 4.1.8) folgt weiter:

$$\varphi_p(W_t^p = x_2 | W_0^p = x_1) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2\pi t(2p-t)}} \cdot \exp \left[-\frac{p(x_2 - x_1(1 - \frac{t}{p}))^2}{2t(2p-t)} \right] \quad (4.1.8)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_t^p = x_2 | W_0^p = x_1, W_T^p = x_3) \\ = \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{\pi t(T-t)}} \cdot \exp \left[-\frac{(x_1(T-t) - x_2T + x_3t)^2}{4tT(T-t)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Abbildung 4.2 zeigt die bedingte Dichte von $W_t^p | W_0^p = x_1$ aus (4.1.8). Im Fall $p \leq t$ ist die Dichte von x_1 unabhängig. Daher ist in Abbildung 4.2 oben rechts nur ein Funktionsgraph sichtbar.

4.1.1 Die bedingte Markov-Eigenschaft des Slepian- p -Prozesses

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Slepian- p -Prozess kein Markov-Prozess ist, er jedoch eine „markovähnliche Eigenschaft“ besitzt, wie Slepian (1961, S. 610) im Falle $p = 1$ erstmalig feststellt³:

Lemma 4.1.10 *Es sei $W_{[0,1]}^1 = (W_t^1)_{t \in [0,1]}$ ein Slepian-Prozess und*

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_l < \dots < t_n < 1.$$

Dann gilt $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(W_{t_i}^1 = x_i \text{ für } i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, l-1, l+1, \dots, n \mid W_{t_k}^1 = x_k, W_{t_l}^1 = x_l) \\ = \varphi_1(W_{t_i}^1 = x_i \text{ für } i = 1, \dots, k-1, l+1, \dots, n \mid W_{t_k}^1 = x_k, W_{t_l}^1 = x_l) \\ \times \varphi_1(W_{t_i}^1 = x_i \text{ für } i = k+1, \dots, l-1, \mid W_{t_k}^1 = x_k, W_{t_l}^1 = x_l). \end{aligned}$$

BEWEIS Durch direktes Nachrechnen unter Verwendung der bedingten Dichte aus Korollar 4.1.8. ■

³Für allgemeins $p > 0$ wird dies bzw. eine ähnliche Aussage erstmalig in Satz 4.1.14 gezeigt.

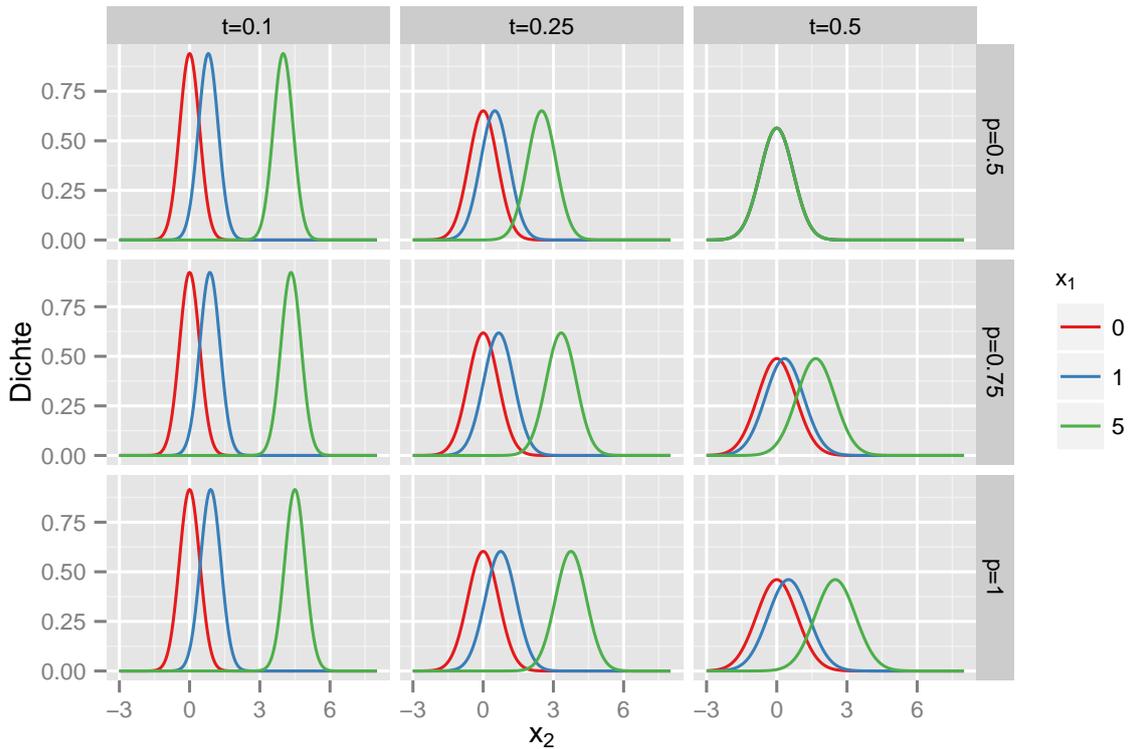


Abbildung 4.2: Bedingte Dichte von $W_t^p | W_0^p = x_1$

Mehr und McFadden (1965, S. 512) drücken diese „markovähnliche Eigenschaft“ in einer etwas anderen Form aus. Wir folgen dieser Darstellung und betrachten dazu das folgende Lemma:

Lemma 4.1.11 *Seien $0 \leq s < s'$ und $X_{[s,s']}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit stetiger Kovarianzfunktion und $\mathbf{Var} X_t > 0$ für alle $t \in (s, s')$. Dann gilt:*

$X_{[s,s']}$ ist ein Markov-Prozess

\iff *Die Kovarianzfunktion von $X_{[s,s']}$ hat eine „Dreiecks-Gestalt“, d.h. es ex. (bis auf Konstanten) eindeutige $k_1, k_2 \in C([s, s'])$ mit*

$$\mathbf{Cov}(X_t, X_{t'}) = k_1(t) \cdot k_2(t') \text{ für alle } t \leq t', t, t' \in [s, s'].$$

BEWEIS Die Behauptung entpricht der Aussage aus Mehr und McFadden (1965, Theorem 1). Wir geben kurz die Beweisidee wieder:

Im Gaußschen Fall stimmen die Markov-Eigenschaft im strikten und erweiterten Sinn überein. Daher folgt die Behauptung mit Hilfe eines Resultates von Doob (1953, Theorem 8.1) für starke Markov-Prozesse. ■

Es seien $0 \leq s < s' \leq T$ und $X_{[0,T]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess. Dann ist der bedingte Prozess

$$(X|X_s = x_0)_{[s,s']} := (X_t | X_s = x_0)_{t \in [s,s']}$$

wiederum ein Gauß-Prozess, dessen Erwartungswert- und Kovarianzfunktion dabei explizit angegeben werden können (vgl. Mehr und McFadden, 1965, S. 512):

$$\mathbf{E} (X_t | X_s = x_0) = \begin{cases} x_0 \frac{\mathbf{Cov}(X_t, X_s)}{\mathbf{Var} X_s} & , \text{ falls } \mathbf{Var} X_s > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \mathbf{Var} X_s = 0 \end{cases} , \quad t \in [s, s'], \quad (4.1.10)$$

und für $t, t' \in [s, s']$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Cov} (X_t | X_s = x_0, X_{t'} | X_s = x_0) \\ &= \mathbf{Cov} (X_t, X_{t'}) - \begin{cases} \frac{\mathbf{Cov}(X_s, X_t) \mathbf{Cov}(X_s, X_{t'})}{\mathbf{Var} X_s} & , \text{ falls } \mathbf{Var} X_s > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \mathbf{Var} X_s = 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Dabei ist die Beweisidee zu den Formeln (4.1.10) bzw. (4.1.11) die Folgende: (X_t, X_0) bzw. $(X_t, X_{t'}, X_0)$ besitzen eine 2- bzw. 3-dimensionale Normalverteilung. Folglich ergibt sich die bedingte Verteilung, wenn man (z.Bsp. bei den zugehörigen Dichten) durch die Bedingung $W_0^p = x_0$ teilt (vgl. z. B. Cramér, 1974, S. 314f.).

Mit der obigen Bezeichnung definieren wir:

Definition 4.1.12 (bedingter Markov-Prozess)

Sei $[s, s'] \subseteq [0, T]$. $X_{[0,T]}$ heißt „bedingter Markov-Prozess auf $[s, s']$ “, falls es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der bedingte Prozess $(X|X_s = x_0)_{[s,s']}$ ein Markov-Prozess ist.

Die spezielle Wahl von x_0 ist unerheblich, wie das nachfolgende Korollar zeigt:

Korollar 4.1.13 In der Situation aus Definition 4.1.12 gilt:

Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(X | X_s = x_0)_{[s,s']}$ ein Markov-Prozess ist.

\iff Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(X | X_s = x)_{[s,s']}$ ein Markov-Prozess.

BEWEIS Die Kovarianzfunktion des bedingten Prozesses $(X|X_s = x_0)_{[s,s']}$ ist nach (4.1.11) vom Startwert x_0 unabhängig. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 4.1.11. ■

Insbesondere für den Slepian- p -Prozess gilt:

Satz 4.1.14

Der Slepian- p -Prozess $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$, $p > 0$, ist kein Markov-Prozess. Er ist ein bedingter Markov-Prozess auf $[0, T]$ für alle $T \in [0, p]$, nicht aber auf $[0, T]$ für $T > p$.

BEWEIS Die Kovarianzfunktion von W^p ist für $0 \leq s \leq t$ gegeben durch:

$$\mathbf{Cov}(W_t^p, W_s^p) = (p - (t - s))^+.$$

Diese hat damit keine Dreiecks-Gestalt, weshalb W^p nach Lemma 4.1.11 kein Markov-Prozess ist. Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Kovarianzfunktion des bedingten Prozesses ist nach (4.1.11) wegen $\mathbf{Var} W_0^p = p > 0$ gegeben durch ($0 \leq t \leq t'$):

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(W_t^p | W_0^p = x_0, W_{t'}^p | W_0^p = x_0) &= (p - (t' - t))^+ - \frac{(p - t)^+ (p - t')^+}{p} \\ &= \begin{cases} (p - t' + t) - \frac{(p-t)(p-t')}{p} = \frac{t(2p-t')}{p} & , \text{ falls } 0 \leq t \leq t' \leq p \\ (p - (t' - t)) - 0 = p - t' + t & , \text{ falls } t' \geq p \text{ und } 0 < t' - t \leq p \\ 0 & , \text{ falls } t' - t > p \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Folglich hat die Kovarianzfunktion des bedingten Prozesses $W^p | W_0^p = x_0$ nur dann eine Dreiecksgestalt, falls $t, t' \in [0, p]$ gilt, womit die Behauptung bewiesen ist. \blacksquare

4.1.2 Das Supremum eines Slepian- p -Prozesses

Das Supremum eines Slepian- p -Prozesses hängt eng mit dem Supremum eines Slepian-Prozesses zusammen, wie das folgende Resultat zeigt (vgl. Cressie, 1980, S. 835).

Satz 4.1.15

Seien $W^1 = (B_{t+1} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian-Prozess und $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess mit $p > 0$. Dann gilt für $T > 0$:

$$\sup_{t \in [0, T]} W^p(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sqrt{p} \sup_{t \in [0, T/p]} W^1(t),$$

wobei „ $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ “ für „Gleichheit nach Verteilung“ steht.

BEWEIS Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} W^p(t) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}(B(t+p) - B(t)) \leq \frac{x}{\sqrt{p}} \text{ für alle } t \in [0, T]\right).$$

Wendet man die sog. „scaling property“ der Brownschen Bewegung an, so ist der obige Ausdruck gleich

$$\mathbb{P}\left(B(t+1) - B(t) \leq \frac{x}{\sqrt{p}} \text{ für alle } t \in \left[0, \frac{T}{p}\right]\right),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Es seien $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $W^1 = (B_{t+1} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian-Prozess. Shepp (1966, 1971) gibt Integral-Gleichungen an, mit deren Hilfe für $T > 0$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^1 \leq x \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1.13)$$

berechnet werden kann. In Verbindung mit Satz 4.1.15 kann somit die Verteilung von

$$\sup_{t \in [0, T]} W_t^p$$

wobei $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess ist, berechnet werden.

Wir zitieren zunächst die angedeuteten Resultate aus Shepp (1966, 1971):

Theorem 4.1.16

Es seien $z, x \in \mathbb{R}$ mit $z < x$. Dann kann man

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} (B_t - B_{t+1}) \leq x \mid B_0 - B_1 = z \right) \quad (4.1.14)$$

mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung berechnen:

i) Fall $0 < T \leq 1$: Sei $\sigma_T := \sqrt{T(2-T)}$, dann ist (4.1.14) gegeben durch

$$\Phi \left(\frac{x - z(1-T)}{\sigma_T} \right) - \exp \left(-\frac{x^2 - z^2}{2} \right) \Phi \left(\frac{z - x(1-T)}{\sigma_T} \right).$$

ii) Fall $T = k \in \mathbb{N}$: Mit $y_1 := x - z$ und

$$D := \{(y_2, \dots, y_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^k \mid y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1}\}$$

lässt sich (4.1.14) berechnen durch ($y_0 := 0$)

$$\frac{1}{\phi(z)} \int_D \det \left[\phi(y_i - y_{j+1} + x)_{i,j=0}^k \right] d(y_2, \dots, y_{k+1}).$$

iii) Fall $T = k + \vartheta$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \vartheta < 1$: Sei $y_1 := x - z$ und

$$D' := \{(y_2, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^{2k+2} \mid y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1} \text{ und } z_0 < \dots < z_{k+1}\},$$

dann ist (4.1.14) gegeben durch ($y_0 := 0$)

$$\frac{1}{\phi(z)} \int_{D'} \det \left[\phi_{\vartheta} (y_i - z_j)_{i,j=0}^{k+1} \right] \cdot \det \left[\phi_{1-\vartheta} (z_i - y_{j+1} + x)_{i,j=0}^k \right] d(y_2, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1}).$$

BEWEIS Der Fall $0 < T \leq 1$ findet sich in Shepp (1966), die Fälle ii) – iii) in Shepp (1971). ■

Damit können wir nun die Verteilung von $\sup_{t \in [0, T]} W_t^p$ für $T \geq 0$ bestimmen:

Satz 4.1.17

Seien $p > 0$, $T \geq 0$, $W_{[0, T]}^p = (W_t^p)_{t \in [0, T]}$ ein Slepian- p -Prozess. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$:

i) Fall $T = 0$:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x \right) = \mathbb{P} (W_0^p \leq x) = \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right).$$

ii) Fall $0 < T \leq p$: Mit $\sigma_{T;p} := \frac{\sqrt{T(2p-T)}}{p}$ und $\tilde{x} := \frac{T \cdot x}{\sqrt{p^3} \sigma_{T;p}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x \right) &= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \Phi \left(\frac{\sqrt{p} x - z(p-T)}{p \sigma_{T;p}} \right) \phi(z) dz - \sigma_{T;p} \cdot \phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) \left[\tilde{x} \Phi(\tilde{x}) + \phi(\tilde{x}) \right]. \end{aligned}$$

iii) Fall $T = kp$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: Seien $y_0 := 0$ und

$$D_+ := \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1} \right\},$$

dann gilt:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x \right) = \int_{D_+} \det \left[\phi \left(y_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_1, \dots, y_{k+1}).$$

iv) Fall $T = kp + \vartheta$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \vartheta < p$: Seien $y_0 := 0$ und

$$D'_+ := \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^{2k+3} \mid 0 < y_1 < \dots < y_{k+1} \text{ und } z_0 < \dots < z_{k+1} \right\},$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x\right) &= \int_{D'_+} \det\left[\phi_{\vartheta/p}(y_i - z_j)_{i,j=0}^{k+1}\right] \\ &\quad \times \det\left[\phi_{1-\vartheta/p}\left(z_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}}\right)_{i,j=0}^k\right] d(y_1, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1}). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.18 Die Darstellung aus Satz 4.1.17 ii) ist neu und bisher in der Literatur noch nicht dagewesen. Die Formeln aus Satz 4.1.17 iii)-iv) hingegen finden sich beispielsweise in Cressie (1980, Theorem 3.1), wenn man beachtet, dass dort $\frac{1}{\sqrt{p}}W_{[0,T]}^p$ anstatt $W_{[0,T]}^p$ betrachtet wird.

BEWEIS (VON SATZ 4.1.17) Es seien $\tilde{T} > 0$ und $W_{[0,\tilde{T}]}^1 = (B_{t+1} - B_t)_{t \in [0,\tilde{T}]}$ ein Slepian-1-Prozess. Dann gilt für $x, z \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, \tilde{T}]} W_t^1 \leq x \mid W_0^1 = z\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, \tilde{T}]} (B_t - B_{t+1}) \leq x \mid B_0 - B_1 = z\right),$$

da $(-B_s)_{s \geq 0}$ wieder eine Standard Brownsche Bewegung ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist für $z > x$ gleich 0, womit wegen $B_0 - B_1 \sim N(0, 1)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, \tilde{T}]} W_t^1 \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \mathbb{P}\left(\sup_{[0, \tilde{T}]} (B_t - B_{t+1}) \leq x \mid B_0 - B_1 = z\right) \phi(z) dz. \quad (4.1.15)$$

Es sei nun $\tilde{T} := \frac{T}{p}$, dann gilt wegen Satz 4.1.15 und (4.1.15) für $W_{[0,T]}^p$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \mathbb{P}\left(\sup_{[0, \tilde{T}]} (B_t - B_{t+1}) \leq \frac{x}{\sqrt{p}} \mid B_0 - B_1 = z\right) \phi(z) dz. \quad (4.1.16)$$

Damit lassen sich die verschiedenen Fälle aus Satz 4.1.17 beweisen:

- i) Folgt sofort aus $W_0^p \stackrel{\mathcal{D}}{=} B_p - B_0 \sim N(0, p)$ und $\Phi_p(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)$ (sh. Lemma A.3.1).
- ii) Für $0 < T \leq p$ gilt $\tilde{T} := \frac{T}{p} \in (0, 1]$. Folglich ist Theorem 4.1.16 i) auf die Wahrscheinlichkeit unter dem Integral in (4.1.16) anwendbar. In diesem Theorem ist ein Ausdruck für $\sigma_{\tilde{T}}$ angegeben – angewandt auf die hier vorliegende Situation ergibt sich:

$$\sigma_{\tilde{T}} = \sqrt{\tilde{T}(2 - \tilde{T})} = \frac{\sqrt{\tilde{T}(2p - T)}}{p}. \quad (4.1.17)$$

$\sigma_{\tilde{T}}$ ist damit gleich $\sigma_{T;p}$ wie in Satz 4.1.17 ii) angegeben. Weiter gilt nach Theorem 4.1.16 i):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, \tilde{T}]} (B_t - B_{t+1}) \leq \frac{x}{\sqrt{p}} \mid B_0 - B_1 = z \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\sqrt{p} x - z(p - T)}{p \sigma_{\tilde{T}}} \right) - \exp \left(-\frac{\frac{x^2}{p} - z^2}{2} \right) \Phi \left(\frac{z - x(p - T)/\sqrt{p^3}}{\sigma_{\tilde{T}}} \right). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Für den zweiten Summanden in (4.1.18) gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \exp \left(-\frac{\frac{x^2}{p} - z^2}{2} \right) \Phi \left(\frac{z - x(p - T)/\sqrt{p^3}}{\sigma_{\tilde{T}}} \right) \phi(z) dz \\ &= \phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \Phi \left(\frac{z - x(p - T)/\sqrt{p^3}}{\sigma_{\tilde{T}}} \right) dz. \end{aligned}$$

Mit Substitution und \tilde{x} aus Satz 4.1.17 ii) ist dieser Ausdruck gleich:

$$\sigma_{\tilde{T}} \phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) \int_{-\infty}^{\tilde{x}} \Phi(s) ds \quad \stackrel{*}{=} \quad \sigma_{\tilde{T}} \phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) [\tilde{x} \Phi(\tilde{x}) + \phi(\tilde{x})].$$

In \star wird dabei eine in der Literatur wohlbekannte Gleichheit für das Integral über Φ verwendet (vgl. Lemma A.3.1). Damit ist die Behauptung aus ii) bewiesen.

- iii) Sei $T = kp$ mit $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\tilde{T} := \frac{T}{p} = k \in \mathbb{N}$ und somit Theorem 4.1.16 ii) auf die Wahrscheinlichkeit unter dem Integral in (4.1.16) anwendbar. Es seien $y_1 := \frac{x}{\sqrt{p}} - z$ und $D := \{(y_2, \dots, y_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^k \mid y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1}\}$. Setzt man in (4.1.16) den Ausdruck aus Theorem 4.1.16 ii) ein, so erhält man:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x \right) = \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \int_D \det \left[\phi \left(y_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_2, \dots, y_{k+1}) dz,$$

wobei $y_0 := 0$ gilt. Wir substituieren nun z durch y_1 . Mit der Definition von D_+ in Satz 4.1.17 und durch Anwendung des Satzes von Fubini (vgl. z. B. Elstrodt, 2007) erhalten wir so, dass der obige Ausdruck gleich

$$\int_{D_+} \det \left[\phi \left(y_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_1, y_2, \dots, y_{k+1})$$

ist. Damit ist Behauptung iii) bewiesen.

iv) Der Fall $T = kp + \vartheta$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \vartheta < p$ verläuft analog zum Beweis von Fall iii):
Zunächst stellen wir fest, dass für $\tilde{T} := \frac{T}{p}$ gilt:

$$\tilde{T} = k + \frac{\vartheta}{p} = k + \tilde{\vartheta} \geq 1, \quad \text{wobei } \tilde{\vartheta} := \frac{\vartheta}{p} \in (0, 1).$$

Damit erfüllt \tilde{T} die Voraussetzungen von Theorem 4.1.16 iii). Setzen wir den dortigen Ausdruck in (4.1.16) ein, so folgt mit D' wie in Theorem 4.1.16 angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} W_t^p \leq x \right) &= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \int_{D'} \det \left[\phi_{\tilde{\vartheta}}(y_i - z_j)_{i,j=0}^{k+1} \right] \\ &\quad \times \det \left[\phi_{1-\tilde{\vartheta}} \left(z_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_2, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1}) dz, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

wobei $y_0 = 0$ und $y_1 = \frac{x}{\sqrt{p}} - z$ gilt. Wir substituieren nun wiederum z durch y_1 und erhalten so, dass (4.1.19) gleich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{D'} \det \left[\phi_{\tilde{\vartheta}}(y_i - z_j)_{i,j=0}^{k+1} \right] \cdot \det \left[\phi_{1-\tilde{\vartheta}} \left(z_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] \\ d(y_2, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1}) dy_1 \end{aligned}$$

ist. Berücksichtigt man die Definition von D'_+ aus Satz 4.1.17 und wendet man auf den letzten Ausdruck den Satz von Fubini an, so ergibt sich die zu beweisende Darstellung aus iv). ■

Bemerkung 4.1.19 *Mit Hilfe der Beweistechniken aus Shepp (1971) kann man Satz 4.1.17 auch direkt – also ohne Verwendung der Verteilungsgleichheit aus Satz 4.1.15 – herleiten.*

4.1.3 Slepian- p -Prozess und affine Schranken

Es seien in diesem Abschnitt $p > 0$ und $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess sowie φ_p die (bedingte) Dichte der endlich-dimensionalen Verteilungen von $W_{[0,p]}^p$ aus Satz 4.1.6 (bzw. Korollar 4.1.8). In diesem Kapitel geben wir erstmalig einen analytischen Ausdruck für

$$\mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T]) \quad (4.1.20)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $T \in (0, p]$ an. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 4.1.20 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $g(t) = b + at$, $t \in [0, p]$, und $\pi_{p;g}$ die Lebesgue-Dichte der „first hitting time“

$$\inf\{t \geq 0 \mid W_t^p > b + at\}$$

sowie $x_0 < b$. Dann gilt für $\pi_{p;g}(\cdot \mid W_0^p = x_0)$ auf $[0, p]$:

$$\begin{aligned} \pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_0) &= \frac{\sqrt{p}(b-x_0)}{t\sqrt{2\pi t(2p-t)}} \cdot \exp\left(-\frac{p\left(b+at-x_0\left(1-\frac{t}{p}\right)\right)^2}{2t(2p-t)}\right) \\ &= \frac{b-x_0}{t} \varphi_p(W_t^p = b+at \mid W_0^p = x_0), \quad t \in (0, p]. \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\pi_{p;g}(0 \mid W_0^p = x_0) := 0$.

Bemerkung 4.1.21 Slepian (1961, S. 612) und Mehr und McFadden (1965, S. 520) geben die Dichte aus Lemma 4.1.20 im Falle $p = 1$ und $a = 0$ an. Abrahams (1984) benutzt die Beweisidee aus Mehr und McFadden (1965), um die Dichte für den allgemeineren Fall $a \in \mathbb{R}$, $p = 1$, herzuleiten. Für allgemeines $p > 0$ wird die Dichte erstmals in dieser Arbeit dargestellt.

BEWEIS (VON LEMMA 4.1.20) Wir verwenden die Beweistechnik aus Mehr und McFadden (1965, S. 520) bzw. Abrahams (1984) und erweitern diese an den entsprechenden Stellen auf den hier vorliegenden Fall $p > 0$.

Es sei B eine Standard Brownsche Bewegung und

$$X_t^p := \frac{2p-t}{\sqrt{p}} B\left(\frac{t}{2p-t}\right) + x_0 \left(1 - \frac{t}{p}\right) \text{ für } t \in [0, p]. \quad (4.1.21)$$

Dann ist $(W^p \mid W_0^p = x_0)_{[0,p]} \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{[0,p]}^p = (X_t^p)_{t \in [0,p]}$, da:

- i) Der bedingte Prozess $(W^p \mid W_0^p = x_0)_{[0,p]}$ ist nach Abschnitt 4.1.1 ein Gauß-Prozess. Dasselbe ist nach Konstruktion auch für $X_{[0,p]}$ richtig.
- ii) Nach (4.1.10) gilt für $t \in [0, p]$:

$$\mathbf{E}(W_t^p \mid W_0^p = x_0) = x_0 \frac{\mathbf{Cov}(W_t^p, W_0^p)}{\mathbf{Var} W_0^p} = x_0 \frac{p-t}{p} = x_0 \left(1 - \frac{t}{p}\right)$$

und ist somit gleich $\mathbf{E}(X_t^p)$.

- iii) Die Kovarianz des bedingten Prozesses $(W^p \mid W_0^p = x_0)_{[0,p]}$ ist nach (4.1.12) gegeben

durch:

$$\mathbf{Cov} (W_t^p | W_0^p = x_0, W_{t'}^p | W_{t'}^p = x_0) = \frac{t(2p-t)}{p} \quad \text{für } 0 \leq t \leq t' \leq p.$$

Andererseits gilt für $0 \leq t \leq t' \leq p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov} (X_t^p, X_{t'}^p) &= \frac{(2p-t)(2p-t')}{p} \mathbf{Cov} \left(B\left(\frac{t}{2p-t}\right), B\left(\frac{t'}{2p-t'}\right) \right) \\ &\stackrel{t \leq t' < 2p}{=} \frac{(2p-t)(2p-t')}{p} \cdot \frac{t}{2p-t} = \frac{t(2p-t)}{p}. \end{aligned}$$

Damit stimmen die Kovarianzfunktionen von $(W^p | W_0^P = x_0)_{[0,p]}$ und $X_{[0,p]}^p$ überein.

Aus i) – iii) folgt nun $(W^p | W_0^P = x_0)_{[0,p]} \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{[0,p]}^p$. Insbesondere ist wegen $B_0 = 0$:
 $(W^p | W_0^P = x_0)(0) = X_0^p = x_0$ und damit gilt die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} X_t^p \text{ ist zum ersten Mal gleich } b + at \text{ für } t \in (0, p] & \quad (4.1.22) \\ \iff B\left(\frac{t}{2p-t}\right) \text{ ist zum ersten Mal gleich } \left[b + at - x_0 \left(1 - \frac{t}{p}\right) \right] \frac{\sqrt{p}}{2p-t} & \text{ für } t \in (0, p]. \end{aligned}$$

Es sei nun $s := \frac{t}{2p-t}$. Dann ist $s \in (0, 1]$ für $t \in (0, p]$ und für die obige Schranke gilt:

$$\left[b + at - x_0 \left(1 - \frac{t}{p}\right) \right] \frac{\sqrt{p}}{2p-t} = \underbrace{\frac{b - x_0}{2\sqrt{p}}}_{=: b'} + \underbrace{\frac{b + 2pa - x_0(1 - 2p)}{2\sqrt{p}}}_{=: a'} s.$$

Damit aber kann die Äquivalenz aus (4.1.22) auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} X_t^p \text{ ist zum ersten Mal gleich } b + at \text{ für } t \in (0, p] & \quad (4.1.24) \\ \iff B_s \text{ ist zum ersten Mal gleich } b' + a's \text{ für } s \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Für die Brownsche Bewegung ist die Dichte der „first hitting time“ der Schranke $g'(s) := b' + a's$, $s \geq 0$, bekannt. Sie ist für $b' > 0$ gegeben durch (sh. z. B. Mehr und McFadden 1965, S. 517 oder Borodin und Salminen 2002, Formel 2.2.0.2):

$$\pi_{\text{BM}; g'}(s) := \frac{b'}{\sqrt{2\pi} s^{3/2}} \exp\left(-\frac{(b' + a's)^2}{2s}\right), \quad s \geq 0. \quad (4.1.25)$$

Aufgrund der Äquivalenz (4.1.24) können wir diese Dichte nun verwenden, um die Dichte

$\pi_{p;g}(\cdot|W_0^p = x_0)$ aus Lemma 4.1.20 zu bestimmen. Es gilt für $t \in [0, p)$:

$$\begin{aligned} \pi_{p;g}(t|W_0^p = x_0) &= \pi_{\text{BM};g'}(s) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{b'}{\sqrt{2\pi} s^{3/2}} \exp\left(-\frac{(b' + a's)^2}{2s}\right) \cdot \frac{(2p-t) + t}{(2p-t)^2} \\ &= \frac{\sqrt{p}(b-x_0)}{t\sqrt{2\pi t(2p-t)}} \cdot \exp\left(-\frac{p\left[b + at - x_0\left(1 - \frac{t}{p}\right)\right]^2}{2t(2p-t)}\right), \end{aligned}$$

womit die erste Gleichung in Lemma 4.1.20 bewiesen ist. Die zweite Gleichung folgt unmittelbar aus der Darstellung der bedingten Dichte in Beispiel 4.1.9, Formel (4.1.8). ■

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun das folgende Theorem beweisen. Soweit wir wissen, ist die dort bewiesene Aussage in der Literatur (auch für den Fall $p = 1$) nicht bekannt.

Theorem 4.1.22

Seien $p > 0$, $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess und $T \in (0, p]$. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T]) &= \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{p}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^T \phi\left(\frac{b+at}{\sqrt{p}}\right) \left[\frac{b-a(p-t)}{p} \Phi\left(\frac{t(b-a(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}}\right) + \sqrt{\frac{2p-t}{pt}} \phi\left(\frac{t(b-a(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}}\right) \right] dt. \end{aligned}$$

BEWEIS Es gilt wegen $W_0^p \sim N(0, p)$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T]) \\ &= \int_{-\infty}^b [1 - \mathbb{P}(W_t^p > b + at \quad \text{für ein } t \in [0, T] \mid W_0^p = x_0)] \phi_p(x_0) dx_0. \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 4.1.20 folgt mit $g(t) := b + at$, $t \in [0, T]$, und dem Satz von Fubini dass der obige Ausdruck übereinstimmt mit:

$$\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{p}}\right) - \int_0^T \int_{-\infty}^b \pi_{p;g}(t|W_0^p = x_0) \phi_p(x_0) dx_0 dt. \tag{4.1.26}$$

Für das innere Integral in (4.1.26) gilt wegen Lemma 4.1.20 ($t \in [0, T]$):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^b \pi_{p;g}(t|W_0^p = x_0) \phi_p(x_0) dx_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \int_{-\infty}^b \frac{b-x_0}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{t}{p}(2p-t)}} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 \left(b+at-x_0\left(1-\frac{t}{p}\right)\right)^2 + x_0^2 t(2p-t)}{2pt(2p-t)}\right) dx_0. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Wir betrachten den Zähler der $\exp(\cdot)$ -Funktion in (4.1.27) genauer. Es gilt:

$$\begin{aligned} & p^2 \left(b+at-x_0\left(1-\frac{t}{p}\right)\right)^2 + x_0^2 t(2p-t) \\ &= p^2(b+at-x_0)^2 + 2px_0t(b+at-x_0) + x_0^2 t^2 + 2px_0^2 t - x_0^2 t^2 \\ &= p^2(b+at)^2 - 2p^2 x_0(b+at) + p^2 x_0^2 + 2px_0t(b+at) \\ &= p^2 \left[\left(1-\frac{t}{p}\right)^2 + \frac{2t}{p} - \frac{t^2}{p^2} \right] (b+at)^2 + p^2 \left[x_0^2 - 2x_0(b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right) \right] \\ &= (2pt-t^2)(b+at)^2 + p^2 \left[x_0^2 - 2x_0(b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right) + (b+at)^2 \left(1-\frac{t}{p}\right)^2 \right] \\ &= t(2p-t)(b+at)^2 + p^2 \left[x_0 - (b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Damit aber ist (4.1.27) gegeben durch:

$$\phi_p(b+at) \int_{-\infty}^b \frac{b-x_0}{t} \cdot \phi_{t(2p-t)/p} \left(x_0 - (b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right) \right) dx_0. \quad (4.1.28)$$

Wir setzen $\sigma^2 := \frac{t(2p-t)}{p}$. Dann folgt mit der Substitution $y := x_0 - (b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right)$ und $z := b - (b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right) = \frac{t(b-a(p-t))}{p}$, dass (4.1.28) gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \phi_p(b+at) \left[b\Phi_{\sigma^2}(z) - \int_{-\infty}^z (y + (b+at)\left(1-\frac{t}{p}\right)) \phi_{\sigma^2}(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{t} \phi_p(b+at) \left[\frac{t(b-a(p-t))}{p} \Phi_{\sigma^2}(z) + \sigma^2 \phi_{\sigma^2}(z) \right]. \end{aligned}$$

ist. Insgesamt folgt damit:

$$\int_{-\infty}^b \pi_{p;g}(t|W_0^p = x_0) \phi_p(x_0) dx_0 = \phi_p(b+at) \left[\frac{b-a(p-t)}{p} \Phi_{\sigma^2}(z) + \frac{\sigma^2}{t} \phi_{\sigma^2}(z) \right]. \quad (4.1.29)$$

Setzt man nun diesen Ausdruck in (4.1.26) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \quad \text{für alle } t \in [0, T]) \\ &= \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{p}}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^T \phi\left(\frac{b+at}{\sqrt{p}}\right) \\ & \quad \times \left[\frac{b-a(p-t)}{p} \Phi\left(\frac{t(b-a(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}}\right) + \frac{\sqrt{\frac{t}{p}(2p-t)}}{t} \phi\left(\frac{t(b-a(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}}\right) \right] dt. \end{aligned}$$

Damit ist Theorem 4.1.22 bewiesen. ■

4.1.4 Stückweise Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeit

Es seien wieder $p > 0$ und $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess sowie φ_p die Dichte (bzw. bedingte Dichte) der endlich-dimensionalen Verteilungen von $W_{[0,p]}^p$ aus Satz 4.1.6 (bzw. Korollar 4.1.8). Im nachfolgenden Theorem 4.1.23 betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, dass W^p unterhalb einer bestimmten Schranke bleibt. Wir zeigen, dass diese Wahrscheinlichkeit stückweise mit Hilfe iterierter Integrale berechnet werden kann. Dieses Resultat ist bisher so in der Literatur noch nicht aufgetaucht (vgl. Bemerkung 4.1.24).

Theorem 4.1.23

Es seien $0 < T \leq p$ und

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für eine beliebige Schranke $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_t^p \leq h(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]) \\ &= \int_{-\infty}^{b_0} \int_{-\infty}^{b_n} \int_{-\infty}^{b_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{b_1} \mathbb{P}(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (0, t_1) \mid W_0^p = x_0, W_{t_1}^p = x_1) \\ & \quad \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}) \mid W_{t_i}^p = x_i, W_{t_{i+1}}^p = x_{i+1}) \\ & \quad \times \varphi_p(W_{t_i}^p = x_i \mid W_0^p = x_0, W_{t_{i+1}}^p = x_{i+1}) \varphi_p(W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n dx_0, \end{aligned}$$

wobei $b_i := h(t_i), i = 0, \dots, n$.

Bemerkung 4.1.24 Es gelte die Notation aus Theorem 4.1.23. Im Falle $p = 1$, $x_0, x_n \in \mathbb{R}$

und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ betrachten Ein-Gal und Bar-David (1975) die Wahrscheinlichkeit

$$P \left(W_t^1 \leq a_i \text{ für alle } t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n \mid W_0^1 = x_0, W_T^1 = x_n \right)$$

und stellen diese als iterierte Integrale dar. Die Formel aus Theorem 4.1.23 stellt für $p = 1$ eine Verallgemeinerung des Resultats von Ein-Gal und Bar-David dar.

BEWEIS (VON THEOREM 4.1.23) Die von Ein-Gal und Bar-David (1975) verwendete Technik erweitern wir an den nötigen Stellen auf die hier vorliegende allgemeinere Situation. Zunächst folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \text{ für alle } t \in [0, T] \right) \\ &= \int_{-\infty}^{h(0)} \int_{-\infty}^{h(T)} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \text{ für alle } t \in (0, t_n) \mid W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ & \quad \times \varphi_p(W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n) dx_n dx_0. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Wir studieren die Wahrscheinlichkeit unter dem Integral genauer. Sei dazu $x_0 \leq b_0 = h(0)$, $x_n \leq b_n = h(t_n)$ und $A_{x_{n-1}} := \{W_0^p = x_0, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1}, W_{t_n}^p = x_n\}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \text{ für alle } t \in (0, t_n) \mid W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{b_{n-1}} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \forall t \in (0, t_{n-1}), W_t^p \leq h(t) \forall t \in (t_{n-1}, t_n) \mid A_{x_{n-1}} \right) \\ & \quad \times \varphi_p(W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} \mid W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n) dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Da $(W^p \mid W_0^p = x_0)_{[0, t_n]}$ ein Markov-Prozess ist (vgl. Abschnitt 4.1.1), stimmt die obige Wahrscheinlichkeit überein mit:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{b_{n-1}} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \forall t \in (0, t_{n-1}) \mid W_0^p = x_0, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} \right) \\ & \quad \times \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \forall t \in (t_{n-1}, t_n) \mid W_0^p = x_0, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1}, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ & \quad \times \varphi_p(W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} \mid W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n) dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Für die zweite Wahrscheinlichkeit unter dem Integral in (4.1.31) gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n) \mid W_0^p = x_0, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1}, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ &= \mathbb{P} \left(W^p(t_n - t) \leq h(t_n - t) \quad \forall t \in (0, t_n - t_{n-1}) \mid W^p(t_n - 0) = x_n, \right. \\ & \quad \left. W^p(t_n - (t_n - t_{n-1})) = x_{n-1}, W^p(t_n - t_n) = x_0 \right). \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Es sei $s_n := t_n - t_{n-1}$ und $\tilde{W}_{[0, s_n]}^p = (\tilde{W}_t^p)_{t \in [0, s_n]}$ mit $\tilde{W}_t^p := W_{t_n - t}^p$ für $t \in [0, s_n]$. Dann gilt aufgrund der starken Stationarität von $W_{[t_{n-1}, t_n]}^p$ (vgl. Lemma 4.1.2): $\tilde{W}_{[0, s_n]}^p$ ist ebenfalls ein Slepian- p -Prozess. Damit folgt, dass (4.1.32) übereinstimmt mit :

$$\mathbb{P} \left(\tilde{W}_t^p \leq h(t_n - t) \quad \forall t \in (0, t_n - t_{n-1}) \mid \tilde{W}_0^p = x_n, \tilde{W}_{t_n - t_{n-1}}^p = x_{n-1}, \tilde{W}_{t_n}^p = x_0 \right)$$

und da $(\tilde{W}^p | \tilde{W}_0^p = x_n)_{[0, s_n]}$ ein Markov-Prozess ist, erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P} \left(\tilde{W}_t^p \leq h(t_n - t) \quad \forall t \in (0, t_n - t_{n-1}) \mid \tilde{W}_0^p = x_n, \tilde{W}_{t_n - t_{n-1}}^p = x_{n-1} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(W_{t_n - t}^p \leq h(t_n - t) \quad \forall t \in (0, t_n - t_{n-1}) \mid W_{t_n}^p = x_n, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n) \mid W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1}, W_{t_n}^p = x_n \right). \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

Setzt man (4.1.33) in (4.1.31) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \text{für alle } t \in (0, t_n) \mid W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{b_{n-1}} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (0, t_{n-1}) \mid W_0^p = x_0, W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} \right) \\ & \quad \times \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n) \mid W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1}, W_{t_n}^p = x_n \right) \\ & \quad \times \varphi_p(W_{t_{n-1}}^p = x_{n-1} | W_0^p = x_0, W_{t_n}^p = x_n) \, dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Wendet man nun dieses Verfahren wiederholt auf die erste Wahrscheinlichkeit unter dem Integral an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{b_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{b_1} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (0, t_1) \mid W_0^p = x_0, W_{t_1}^p = x_1 \right) \\ & \quad \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}) \mid W_{t_i}^p = x_i, W_{t_{i+1}}^p = x_{i+1} \right) \\ & \quad \times \varphi_p(W_{t_i}^p = x_i | W_0^p = x_0, W_{t_{i+1}}^p = x_{i+1}) \, dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (4.1.30) folgt damit die Behauptung aus Theorem 4.1.23. ■

Wir beweisen im Nachfolgenden (Satz 4.1.25 bzw. Satz 4.1.27), dass die in Theorem 4.1.23 auftretenden Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\left(W_t^p \leq h(t) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}) \mid W_{t_i}^p = x_i, W_{t_{i+1}}^p = x_{i+1}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

für affine Funktionen h , also für

$$h(t) = b \quad \text{bzw.} \quad h(t) = b + at, \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.1.34)$$

explizit berechenbar sind. Damit kann man die „Boundary Crossing Probability“

$$\mathbb{P}\left(W_t^p > h(t) \quad \text{für ein } t \in [0, T]\right),$$

$h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig, mit Hilfe von stückweise affinen Funktionen $h_1, h_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_1 \leq h \leq h_2$ nach oben und unten abschätzen.

Satz 4.1.25

Seien $p > 0$, $t_1, t_2 \in [0, p]$ mit $t_1 < t_2$. Weiter seien W^p ein Slepian- p -Prozess und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x_1, x_2 \in (-\infty, b]$:

$$\mathbb{P}\left(W_t^p \leq b \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2] \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{t_2}^p = x_2\right) = 1 - \exp\left(-\frac{(b-x_1)(b-x_2)}{t_2-t_1}\right).$$

BEWEIS Zunächst gilt aufgrund der starken Stationarität von W^p :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(W_t^p \leq b \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2] \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{t_2}^p = x_2\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}W_t^p \leq \frac{b}{\sqrt{p}} \quad \text{für alle } t \in [0, t_2-t_1] \mid \frac{1}{\sqrt{p}}W_0^p = \frac{x_1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}W_{t_2-t_1}^p = \frac{x_2}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der „scaling property“ der Brownschen Bewegung kann man diese Wahrscheinlichkeit auch mit Hilfe eines gewöhnlichen Slepian-Prozesses W^1 ausdrücken:

$$\mathbb{P}\left(W_t^1 \leq \frac{b}{\sqrt{p}} \quad \text{für alle } t \in [0, \frac{t_2-t_1}{p}] \mid W_0^1 = \frac{x_1}{\sqrt{p}}, W_{(t_2-t_1)/p}^1 = \frac{x_2}{\sqrt{p}}\right). \quad (4.1.35)$$

Nach Ein-Gal und Bar-David (1975, S. 551) gilt aber für einen Slepian-Prozess ($T \in (0, 1]$):

$$\mathbb{P}\left(W_t^1 \leq b \quad \text{für alle } t \in [0, T] \mid W_0^1 = x_1, W_T^1 = x_2\right) = 1 - \exp\left[-\frac{(b-x_1)(b-x_2)}{T}\right].$$

Wegen $t_2 - t_1 \leq t_2 \leq p$ ist $0 < \frac{t_2 - t_1}{p} \leq 1$ in (4.1.35). Damit kann man die Formel aus Ein-Gal und Bar-David (1975) in (4.1.35) einsetzen und erhält so die Darstellung aus Satz 4.1.25. ■

Bemerkung 4.1.26 *Wir betrachten die zu Satz 4.1.25 analoge Überschreitungswahrscheinlichkeit einer Brownschen Brücke. Sei dazu $b \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in (-\infty, b]$ und $0 \leq t_1 < t_2$. Dann gilt (vgl. z. B. Siegmund, 1986, S. 375):*

$$\mathbb{P}(B_t \leq b \text{ für alle } t \in [t_1, t_2] \mid B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2) = 1 - \exp\left(-\frac{2(b-x_1)(b-x_2)}{t_2-t_1}\right).$$

Dies ist aber nach Satz 4.1.25 gerade die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}W_t^p \leq b \text{ für alle } t \in [t_1, t_2] \mid \frac{1}{\sqrt{2}}W_{t_1}^p = x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}W_{t_2}^p = x_2\right).$$

Mit den Ausführungen in Kapitel 7.1.2 wird deutlich, warum eine Skalierung mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ als geradezu natürlich anzusehen ist.

Es seien im Nachfolgenden $a, b \in \mathbb{R}$, $g(t) = b + at$, $t \geq 0$ und $\pi_{p,g}$ die Lebesgue-Dichte der „first hitting time“

$$\inf\{t \geq 0 \mid W_t^p > b + at\}$$

aus Lemma 4.1.20. Dabei seien $p > 0$ und $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess.

Satz 4.1.27

Es seien $T \in (0, p]$ und $a, b, x_0, x_T \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < b, x_T < b + aT$. Dann gilt für $t \in (0, T)$:

$$\pi_{p,g}(t \mid W_0^p = x_0, W_T^p = x_T) = \frac{b-x_0}{t} \varphi_p(W_t^p = b + at \mid W_0^p = x_0, W_T^p = x_T). \quad (4.1.36)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir

$$\pi_{p,g}(t \mid W_0^p = x_0, W_T^p = x_T) := 0 \quad \text{für } t \in \{0, T\}.$$

Insbesondere gilt damit für $[t_1, t_2] \subseteq [0, p]$ und $x_1 < b, x_2 < b + a(t_2 - t_1)$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_t^p \leq b + a(t - t_1) \text{ für alle } t \in [t_1, t_2] \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{t_2}^p = x_2) \\ &= 1 - \int_0^{t_2-t_1} \frac{b-x_1}{t} \varphi_p(W_t^p = b + at \mid W_0^p = x_1, W_{t_2-t_1}^p = x_2) dt. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

BEWEIS Ein-Gal und Bar-David (1975) geben Formel (4.1.36) im Falle $p = 1, a = 0$ an. Wir erweitern die dort vorgestellte Beweistechnik auf den hier vorliegenden Fall eines

Slepian- p -Prozesses mit Schranke $b + at$:

Es sei $t \in (0, T)$, $\tau_{p;g} := \inf\{t \geq 0 \mid W_t^p > b + at\}$ die „first hitting time“. Dann ist

$$\{\tau_{p;g} = t\} = \{W_s^p < b + as \text{ für alle } s \in [0, t), W_t^p = b + at\}. \quad (4.1.38)$$

Nun gilt nach dem Satz von Bayes für $t \in (0, T)$:

$$\pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_0, W_T^p = x_T) = \frac{\varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0, \tau_{p;g} = t) \cdot \pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_0)}{\varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0)}.$$

Da $(W^p \mid W_0^p = x_0)_{[0, T]}$ ein Markov-Prozess ist (vgl. Abschnitt 4.1.1), ist der obige Ausdruck wegen $t < T$ und (4.1.38) gleich:

$$\frac{\varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0, W_t^p = b + at) \cdot \pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_0)}{\varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0)}. \quad (4.1.39)$$

Nach Korollar 4.1.8 gilt für die bedingten Dichten:

$$\begin{aligned} \varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0, W_t^p = b + at) &= \frac{\varphi_p(W_0^p = x_0, W_t^p = b + at, W_T^p = x_T)}{\varphi_p(W_0^p = x_0, W_t^p = b + at)} \\ \text{und } \varphi_p(W_T^p = x_T \mid W_0^p = x_0) &= \frac{\varphi_p(W_0^p = x_0, W_T^p = x_T)}{\varphi_p(W_0^p = x_0)} \end{aligned}$$

sowie (wegen Lemma 4.1.20)

$$\begin{aligned} \pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_0) &= \frac{b - x_0}{t} \varphi_p(W_t^p = b + at \mid W_0^p = x_0) \\ &= \frac{b - x_0}{t} \frac{\varphi_p(W_0^p = x_0, W_t^p = b + at)}{\varphi_p(W_0^p = x_0)}. \end{aligned}$$

Setzt man diese drei Darstellungen in (4.1.39) ein, so ergibt sich aufgrund der Definition bedingter Dichten (vgl. Korollar 4.1.8) die erste Gleichung in Satz 4.1.27.

Die Gleichheit (4.1.37) gilt aufgrund der starken Stationarität von $W_{[0, T]}^p$, da:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(W_t^p \leq b + a(t - t_1) \text{ für alle } t \in [t_1, t_2] \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{t_2}^p = x_2) \\ &= \mathbb{P}(W_t^p \leq b + at \text{ für alle } t \in [0, t_2 - t_1] \mid W_0^p = x_1, W_{t_2 - t_1}^p = x_2) \\ &= 1 - \int_0^{t_2 - t_1} \pi_{p;g}(t \mid W_0^p = x_1, W_{t_2 - t_1}^p = x_2) dt. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist richtig, da $\pi_{p;g}$ die Dichte der sog. „first hitting time“ der Gerade $g(t) = b + at$, $t \in [0, t_2 - t_1]$, ist. Damit ist Satz 4.1.27 vollständig bewiesen. ■

4.2 Der Kolmogorov-Slepian- p -Test

Wie zu Beginn von Kapitel 4 dargestellt, betrachten wir das asymptotische Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ und den Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0.$$

Um diese Hypothesen zu untersuchen, studieren wir in diesem Abschnitt die sequentielle Entscheidungsvorschrift aus (4.0.1), also

Stoppe zum Zeitpunkt $t \in [p, 1]$ (und lehne $H_0 : s_f \equiv 0$ ab)

$$\iff Y_t - Y_{t-p} > c_{1-\alpha;p}.$$

Unter der Nullhypothese ist $(Y_{t+p} - Y_t)_{t \in [0, 1-p]}$ ein Slepian- p -Prozess, weshalb die folgende Definition naheliegend ist:

Definition 4.2.1 (Kolmogorov-Slepian- p -Test)

Den Test mit der sequentiellen Entscheidungsvorschrift (4.0.1) bezeichnen wir als Kolmogorov-Slepian- p -Test.

4.2.1 Literaturüberblick

Wir betrachten das ursprüngliche Regressionsmodell

$$Z(t_{ni}) = f(t_{ni}) + \epsilon(t_{ni}), \quad i = 1, \dots, n,$$

aus Abschnitt 1.2. Anstatt die Partialsummen der Residuen zu betrachten, schlagen Hackl (1976) bzw. Bauer und Hackl (1978) erstmals vor, eine „moving sum“ der Residuen r_{n1}, \dots, r_{nn} als Testgröße zu verwenden⁴. Für $m \in \{1, \dots, n\}$ fest ist dabei die k -te „moving sum“ gegeben durch

$$\sum_{i=k}^{k+m-1} r_{ni}, \quad k = 1, \dots, n - m + 1.$$

⁴Genauer gesagt betrachten Hackl (1976) bzw. Bauer und Hackl (1978) sog. *rekursive* Residuen.

Mit der von uns eingeführten Notation ergeben sich diese „moving sums“ auch, wenn man beim Partialsummenprozess $\Psi_n := T_n(r_{n1}, \dots, r_{nn})$ für $p := \frac{m}{n}$ die Differenzen

$$\Psi_n(t+p) - \Psi_n(t) \quad \text{für } t = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-m}{n}$$

betrachtet. Der von uns betrachtete Prozess $(Y_{t+p} - Y_t)_{t \in [0,1-p]}$ im asymptotischen Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ kann demnach als der Grenzwertprozess der „moving sums“ interpretiert werden.

Chu u. a. (1992, 1995) weisen nach, dass unter der Nullhypothese $H_0 : f \equiv 0$ für $p \in (0, 1)$ und $m_n := \lfloor pn \rfloor$ gilt ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{m_n}} \sum_{i=k}^{k+m_n-1} Z(t_{ni}) > x \text{ für ein } k \in 1, \dots, n - m_n + 1 \right) \\ = \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sup_{t \in [0,1-p]} (B_{t+p} - B_t) > x \right). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit aus (4.2.1) geben Chu u. a. (1995) für den Fall $p = \frac{1}{2}$ (vgl. Bemerkung 4.2.3) analytisch an, für $p \neq \frac{1}{2}$ führen sie Simulationen durch. Neben den kritischen Werten finden sich in Chu u. a. (1995) auch Simulationen für die Testgüte.

Fasst man die Residuen r_1, r_2, \dots als Zeitreihe auf, so wird in der Literatur meist der „moving average“

$$\frac{1}{m} \sum_{i=k}^{k+m-1} r_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

anstatt die „moving sum“ betrachtet. Wir folgen dieser Betrachtungsweise jedoch nicht und verweisen daher den interessierten Leser auf die Arbeiten von Roberts (1959, 1966); Lai (1974); Ross (1999); Zhang u. a. (2004); Khoo und Wong (2008).

4.2.2 Kritische Werte

Gemäß der Forderung (4.0.2) ist der kritische Wert des Kolmogorov-Slepian- p -Tests $c_{1-\alpha;p}$, $p \in (0, 1]$, charakterisiert durch ($\alpha \in (0, 1)$):

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (B_t - B_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) = \alpha.$$

Die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite ist aber gerade

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p > c_{1-\alpha;p} \right), \quad (4.2.2)$$

wobei $W_{[0,1-p]}^p$ ein Slepian- p -Prozess ist. Setzt man in Satz 4.1.17 $T = 1 - p$, so kann man Wahrscheinlichkeiten von der Gestalt (4.2.2) berechnen:

Korollar 4.2.2 *Seien $p \in (0, 1]$ und $W_{[0,1-p]}^p = (B_{t+p}^p - B_t)_{t \in [0,1-p]}$ ein Slepian- p -Prozess und $x \in \mathbb{R}$.*

i) Fall $p = 1$: $\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^1 \leq x \right) = \mathbb{P} \left(W_0^1 \leq x \right) = \Phi(x)$.

ii) Fall $p \in [\frac{1}{2}, 1)$: Mit $\sigma_{1-p;p} := \frac{\sqrt{(1-p)(3p-1)}}{p}$ und $\tilde{x} := \frac{(1-p)x}{\sqrt{p(1-p)(3p-1)}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p \leq x \right) &= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{p}} \Phi \left(\frac{\sqrt{p}x - (2p-1)z}{p\sigma_{1-p;p}} \right) \phi(z) dz - \sigma_{1-p;p} \phi \left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) \left[\tilde{x} \Phi(\tilde{x}) + \phi(\tilde{x}) \right]. \end{aligned}$$

iii) Fall $p \in (0, \frac{1}{2})$ und $k := \frac{1-p}{p} \in \mathbb{N}$: Seien $y_0 := 0$ und

$$D_+ := \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1} \right\},$$

dann gilt:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p \leq x \right) = \int_{D_+} \det \left[\phi \left(y_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_1, \dots, y_{k+1}).$$

iv) Fall $p \in (0, \frac{1}{2})$ und $\frac{1-p}{p} = k + \vartheta$: für ein $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \vartheta < 1$: Seien $y_0 := 0$ und

$$D'_+ := \left\{ (y_1, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1})^\top \in \mathbb{R}^{2k+3} \mid 0 < y_1 < \dots < y_{k+1} \text{ und } z_0 < \dots < z_{k+1} \right\},$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p \leq x \right) &= \int_{D'_+} \det \left[\phi_\vartheta (y_i - z_j)_{i,j=0}^{k+1} \right] \\ &\quad \times \det \left[\phi_{1-\vartheta} \left(z_i - y_{j+1} + \frac{x}{\sqrt{p}} \right)_{i,j=0}^k \right] d(y_1, \dots, y_{k+1}, z_0, \dots, z_{k+1}). \end{aligned}$$

BEWEIS Die Behauptungen folgen aus Satz 4.1.17, wenn man dort $T := 1 - p$ setzt:

i) Der Fall $p = 1$ ist äquivalent zu $T = 0$ und damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.17 i).

- ii) Im Fall $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ ist $0 < T \leq 1$. Die Behauptung folgt durch Anwendung von Satz 4.1.17 ii).
- iii) In diesem Fall ist $T = kp \in \mathbb{N}$ und damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.1.17 iii) erfüllt. Anwendung desselbigen führt zur Behauptung.
- iv) Ist $T = kp + \vartheta p$, so führt Anwendung von Satz 4.1.17 iv) zur Behauptung. ■

Bemerkung 4.2.3 *Im Spezialfall $p = \frac{1}{2}$ gilt für den Slepian- p -Prozess:*

- a) *In Korollar 4.2.2 ist $\sigma_{1/2;1/2} = 1$ und $\tilde{x} = \sqrt{2}x$ für $x \in \mathbb{R}$. Damit aber vereinfacht sich die dort angegebene Formel zu*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} W_t^{1/2} \leq x \right) = \Phi \left(\sqrt{2}x \right)^2 - \phi \left(\sqrt{2}x \right) \left[\sqrt{2}x \Phi \left(\sqrt{2}x \right) + \phi \left(\sqrt{2}x \right) \right].$$

Diese Formel findet sich auch in Chu u. a. (1995), wenn man berücksichtigt, dass dort der Prozess $\sqrt{2}W_{[0, \frac{1}{2}]}^{1/2}$ anstatt $W_{[0, \frac{1}{2}]}^{1/2}$ betrachtet wird.

- b) *Hornik (1993, Korollar 2) gibt unter anderem einen algebraischen Ausdruck für die zweiseitige Wahrscheinlichkeit*

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{2}W_t^{1/2} \in [a, b] \quad \text{für alle } t \in [0, \frac{1}{2}] \right)$$

an, wobei $a < b \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe von Korollar 4.2.2 lässt sich der für den Kolmogorov-Slepian- p -Test benötigte kritische Wert $c_{1-\alpha;p}$ theoretisch berechnen. Aus numerischer Sicht ist hierzu Folgendes anzumerken:

- a) Für $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist die numerische Berechnung von $c_{1-\alpha;p}$ problemlos möglich, da die entsprechenden Ausdrücke in Korollar 4.2.2 einfach handzuhaben sind. Damit ist eine schnelle und numerisch stabile Berechnung möglich.
- b) Im Fall $p \in (0, \frac{1}{2})$ sind mehrdimensionale Integrale mit unendlichem Integrationsbereich zu berechnen. Als Integranden treten dabei Determinanten auf. Beide Vorgänge (sowohl Integration als auch Determinanten-Berechnung) sind numerisch aufwändig und äußerst fehleranfällig. Daher ziehen wir es für $p \in (0, \frac{1}{2})$ vor, Simulationen anzustellen. Diese sind selbst bei einer großen Anzahl an Wiederholungen relativ schnell durchzuführen.

Tabelle 4.1: Berechnete/simulierte $(1 - \alpha)$ -Quantile $c_{1-\alpha;p}$ von $\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p$

p	Typ	$1 - \alpha$			
		0.9	0.95	0.975	0.99
0.05	simuliert	0.7192	0.7720	0.8177	0.8772
0.1	simuliert	0.9438	1.0200	1.1021	1.1807
0.15	simuliert	1.1051	1.2062	1.2901	1.3980
0.2	simuliert	1.2127	1.3353	1.4463	1.5808
0.25	simuliert	1.3189	1.4604	1.5874	1.7506
0.3	simuliert	1.3707	1.5355	1.6647	1.8571
0.35	simuliert	1.4419	1.6166	1.7772	1.9537
0.4	simuliert	1.4907	1.6971	1.8895	2.0756
0.45	simuliert	1.5427	1.7404	1.9280	2.1354
0.5	simuliert	1.5682	1.8008	1.9806	2.2044
0.5	berechnet	1.5760	1.8041	2.0037	2.2376
0.55	berechnet	1.5984	1.8425	2.0555	2.3046
0.6	berechnet	1.6142	1.8736	2.0996	2.3634
0.65	berechnet	1.6238	1.8978	2.1362	2.4143
0.7	berechnet	1.6270	1.9151	2.1655	2.4573
0.75	berechnet	1.6233	1.9250	2.1870	2.4921
0.8	berechnet	1.6117	1.9265	2.1997	2.5177
0.85	berechnet	1.5901	1.9176	2.2017	2.5323
0.9	berechnet	1.5542	1.8939	2.1887	2.5314
0.95	berechnet	1.4925	1.8441	2.1492	2.5039
1	berechnet	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263

Tabelle 4.1 zeigt die berechneten bzw. simulierten Werte für $c_{1-\alpha;p}$. Die Simulationen beruhen auf 100.000 Wiederholungen. Zur Approximation an die Brownsche Bewegung wird ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen herangezogen. Im Fall $p = \frac{1}{2}$ sind sowohl die Ergebnisse der Simulation als auch diejenigen der Berechnungen aufgeführt, um zu zeigen, dass beide Werte nahe beieinander liegen.

Bemerkung 4.2.4 *Betrachtet man in Tabelle 4.1 $\frac{1}{\sqrt{p}}c_{1-\alpha;p}$ anstatt $c_{1-\alpha;p}$, so ist $\frac{1}{\sqrt{p}}c_{1-\alpha;p}$ in p streng monoton fallend.*

4.2.3 Testgüte

Wir bestimmen die Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests indem wir die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p, 1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) \tag{4.2.3}$$

berechnen. Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir im Nachfolgenden für $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ den linearen Operator Δ^p mit

$$\Delta^p h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Delta^p h(t) := h(t+p) - h(t), \quad t \geq 0. \quad (4.2.4)$$

Wir wenden Δ^p auch auf Funktionen $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlichem Definitionsbereich $[0, T]$, $T \geq p$, an. Dabei ist allerdings zu beachten, dass sich der Definitionsbereich von $\Delta^p h$ auf $[0, T-p]$ verkürzt, da

$$\Delta^p h : \begin{cases} [0, T-p] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto h(t+p) - h(t) \end{cases}.$$

Lemma 4.2.5 Δ^p ist linear aber nicht injektiv.

BEWEIS Die Linearität ist klar. Weiter werden alle konstanten Funktionen durch Δ^p auf die Nullfunktion abgebildet. Daher kann Δ^p nicht injektiv sein. ■

Damit ist $\Delta^p B_{[0,1]} = W_{[0,1-p]}^p$ ein Slepian- p -Prozess und im asymptotischen Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ gilt:

$$(Y_{t+p} - Y_t)_{t \in [0,1-p]} = \Delta^p Y_{[0,1]} = \Delta^p s_f + \Delta^p B_{[0,1]}.$$

Folglich kann die Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) &= \mathbb{P} (W_t^p > c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \quad \text{für ein } t \in [0, 1-p]) \\ &= 1 - \mathbb{P} (W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1-p]). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Korollar 4.2.6 Im Fall $p = 1$ ist die Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests gegeben durch

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1-p]} (Y_{t+p} - Y_t) > c_{1-\alpha;p} \right) = 1 - \Phi(c_{1-\alpha;p} - s_f(1)).$$

Für $p \in (0, 1)$ ist es jedoch im Allgemeinen nicht möglich, (4.2.5) zu bestimmen. Allerdings zeigt Theorem 4.1.23 auf, dass man Überschreitungswahrscheinlichkeiten von Slepian- p -Prozessen auch stückweise berechnen kann. Die Ausführungen im Anschluss an Theorem 4.1.23 zeigen, wie man diese Eigenschaft einsetzen kann, um Wahrscheinlichkeiten der Form (4.2.5) abzuschätzen/zu approximieren.

Eine weitere (allerdings sehr grobe) Abschätzung liefert die folgende Überlegung:

Korollar 4.2.7 *Es seien $p \in (0, 1]$ und $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ das asymptotische Regressionsmodell. Weiter seien $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$ Konstanten mit*

$$\lambda_1 \leq \Delta^p s_f \leq \lambda_2. \quad (4.2.6)$$

Dann lässt sich die Testgüte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p > c_{1-\alpha; p} - \lambda_1 \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-p]} (Y_{t+p} - Y_t) > c_{1-\alpha; p} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p > c_{1-\alpha; p} - \lambda_2 \right). \end{aligned}$$

Dabei ist W^p ein Slepian- p -Prozess.

BEWEIS folgt unmittelbar aus (4.2.5). ■

Um möglichst scharfe Grenzen für die Abschätzung zu erhalten, wählt man in Korollar 4.2.7 λ_1 maximal und λ_2 minimal.

4.3 Testgüte und Performancevergleich bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$

Wir betrachten den Kolmogorov-Slepian- p -Test aus Abschnitt 4.2 und adaptieren dazu die dort verwendete Notation. Im Nachfolgenden sei $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0, 1)$ die wahre Regressionsfunktion mit (vgl. Beispiel 1.2.5)

$$s_f(t) = \mu(t - \theta)^+, \quad t \in [0, 1].$$

Dann gilt:

Lemma 4.3.1 *Ist $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0, 1)$, so gilt:*

$$\Delta^p s_f(t) = \mu \left(p - (\theta - t)^+ \right)^+, \quad t \in [0, 1 - p].$$

BEWEIS Die Behauptung folgt wegen

$$\Delta^p s_f(t) = s_f(t + p) - s_f(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t + p < \theta \\ \mu(t + p - \theta) & , \text{ falls } t < \theta \leq t + p \\ \mu p & , \text{ falls } t \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \in [0, \theta - p) \\ \mu(p - (\theta - t)) & , \text{ falls } t \in [\theta - p, \theta) \\ \mu p & , \text{ falls } t \in [\theta, 1 - p] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \mu(p - (\theta - t))^+ & , \text{ falls } t \in [0, \theta) \\ \mu p & , \text{ falls } t \in [\theta, 1 - p] \end{cases} = \mu \left(p - (\theta - t)^+ \right)^+ . \blacksquare
 \end{aligned}$$

$\Delta^p s_f$ ist nur auf $[0, 1 - p]$ definiert. In Abbildung 4.3 stellen wir allerdings – um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden – die Funktion

$$\mu \left(p - (\theta - t)^+ \right)^+ \quad \text{für } t \geq 0$$

dar. Für den Fall $p \geq \frac{1}{2}$ geben wir im Nachfolgenden die Testgüte des Kolmogorov-Slepian-

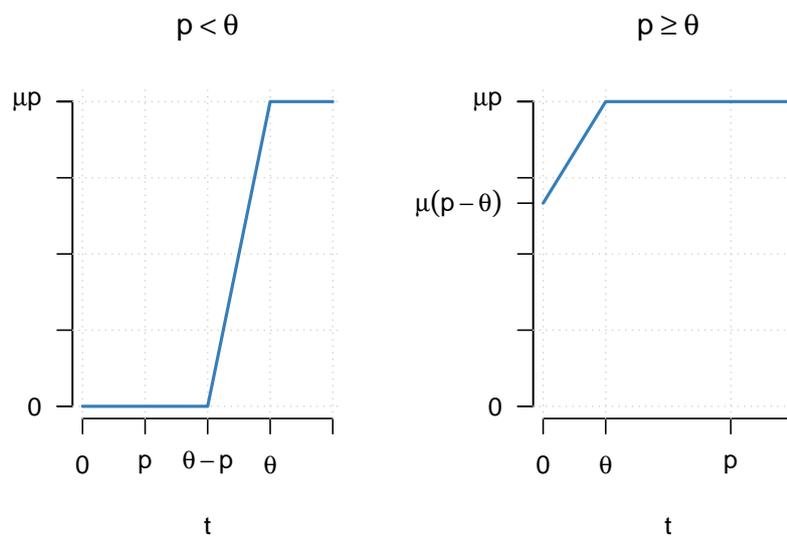


Abbildung 4.3: Funktion $\mu \left(p - (\theta - t)^+ \right)^+$ für die Fälle $p < \theta$ (links) und $p \geq \theta$ (rechts)

p -Tests erstmals explizit an. Für die Situation $p < \frac{1}{2}$ simulieren wir die Testgüte.

4.3.1 Testgüte im Fall $\theta = 0$

Ist $\theta = 0$, so ist die Regressionsfunktion $f \equiv \mu$ und es gilt:

$$s_f(t) = \mu t, \quad t \in [0, 1] \quad \text{und somit} \quad \Delta^p s_f \equiv \mu p .$$

In diesem Fall gilt ferner:

Lemma 4.3.2 *Es seien $Y_t = \mu t + B_t$, $t \in [0, 1]$, das asymptotische Regressionsmodell und $[a, b] \subseteq [0, 1 - p]$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ beliebig:*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [a, b]} (Y_{t+p} - Y_t) > x \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, b-a]} W_t^p > x - \mu p \right), \quad (4.3.1)$$

wobei $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess ist. Insbesondere ist damit die Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests gegeben durch $\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1-p]} W_t^p > c_{1-\alpha; p} - \mu p \right)$.

Analytische Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten aus Lemma 4.3.2 können mit Hilfe von Korollar 4.2.2 angegeben werden.

BEWEIS (VON LEMMA 4.3.2) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [a, b]} Y_{t+p} - Y_t > x \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [a, b]} B(t+p) - B(t) > x - \mu p \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, b-a]} B(t+p) - B(t) > x - \mu p \right), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Für eine graphische Darstellung dieser Güte verweisen wir auf die Abbildungen 4.4 und 4.5.

4.3.2 Testgüte im Fall $p \geq \max(\theta, 1 - \theta)$

Im Fall $p \geq \max(\theta, 1 - \theta)$, also

$$p \geq \theta \geq 1 - p \quad (4.3.2)$$

gilt nach Lemma 4.3.1:

$$\Delta^{p s_f}(t) = \mu(p - \theta) + \mu \cdot t, \quad t \in [0, 1 - p].$$

$\Delta^{p s_f}$ ist somit eine Gerade mit Steigung μ und Achsenabschnitt $\mu(p - \theta)$. Insbesondere hat die Funktion $\Delta^{p s_f}$ für $p \geq \max(\theta, 1 - \theta)$ keinen „Knick“ in $[0, 1 - p]$ (vgl. hierzu auch Abbildung 4.3, rechte Seite). Damit aber kann man die Testgüte mit Hilfe von Theorem 4.1.22⁵ explizit berechnen:

Korollar 4.3.3 *Es sei $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ mit $\mu > 0$, $\theta \in [0, 1)$ und $\max(\theta, 1 - \theta) \leq p \leq 1$. Dann gilt für $Y_{[0, 1]} = s_f + B_{[0, 1]}$:*

⁵In Theorem 4.1.22 wird die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(W_t^p \leq b + at$ für alle $t \in [0, T])$ mit $T \in (0, p]$ angegeben.

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{p}} \right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{1-p} \phi \left(\frac{b-\mu t}{\sqrt{p}} \right) \left[\frac{b+\mu(p-t)}{p} \Phi \left(\frac{t(b+\mu(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}} \right) + \sqrt{\frac{2p-t}{pt}} \phi \left(\frac{t(b+\mu(p-t))}{\sqrt{pt(2p-t)}} \right) \right] dt ,$$

wobei $b := c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta)$ ist.

BEWEIS Wegen $\Delta^p s_f(t) = \mu(p - \theta) + \mu t$ für $t \in (0, 1 - p]$ gilt nach (4.2.5):

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) = 1 - \mathbb{P} (W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta) - \mu \cdot t \text{ für alle } t \in [0, 1 - p]) , \quad (4.3.3)$$

wobei $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess ist. Weiter gilt:

$$p \geq \max(\theta, 1 - \theta) \Rightarrow p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 1 - p \leq p .$$

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 4.1.22 erfüllt. Mit der dortigen Notation ist b wie in Korollar 4.3.3 angegeben und $a := -\mu$. Wendet man Theorem 4.1.22 auf (4.3.3) an, so ergibt sich die Behauptung. ■

4.3.3 Testgüte im Fall $\frac{1}{2} \leq p < \max(\theta, 1 - \theta)$

Wir betrachten nun die Fälle

i) $1 - p < \frac{1}{2} \leq p < \theta$

ii) bzw. $\theta < 1 - p < \frac{1}{2} \leq p$

In diesen Fällen hat die Funktion $\Delta^p s_f$ (vgl. Abbildung 4.3) einen „Knick“ in $[0, 1 - p]$. Daher ist es naheliegend, die gesuchte Überschreitungswahrscheinlichkeit mit Hilfe der stückweisen Berechnungsmethode aus Abschnitt 4.1.4 zu bestimmen.

Korollar 4.3.4 *Es seien $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$, $\theta \in [0,1)$ und $Y = s_f + B_{[0,1]}$. Dann gilt:*

i) *Im Fall $\theta > \frac{1}{2}$ und $p \in [\frac{1}{2}, \theta)$ gilt:*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p}} \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p} - \mu(1-\theta)} \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p}} \left[1 - \exp \left(- \frac{(c_{1-\alpha;p} - x_0)(c_{1-\alpha;p} - x_1)}{\theta - p} \right) \right] \\ & \quad \times \left[1 - \int_0^{1-\theta} \frac{c_{1-\alpha;p} - x_1}{t} \varphi_p (W_t^p = c_{1-\alpha;p} - \mu t \mid W_0^p = x_1, W_{1-\theta}^p = x_2) dt \right] \\ & \quad \times \varphi_p (W_0^p = x_0, W_{\theta-p}^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2) dx_1 dx_2 dx_0. \end{aligned}$$

ii) *Im Fall $\theta < \frac{1}{2}$ und $p \in [\frac{1}{2}, 1 - \theta)$ gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) &= 1 - \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p} - \mu(p-\theta)} \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p} - \mu p} \int_{-\infty}^{c_{1-\alpha;p} - \mu p} \\ & \quad \left[1 - \exp \left(- \frac{(c_{1-\alpha;p} - \mu p - x_1)(c_{1-\alpha;p} - \mu p - x_2)}{1 - p - \theta} \right) \right] \\ & \quad \times \left[1 - \int_0^\theta \frac{c_{1-\alpha;p} - \mu(p-\theta) - x_0}{t} \varphi_p (W_t^p = c_{1-\alpha;p} - \mu(p-\theta) - \mu t \mid W_0^p = x_0, W_\theta^p = x_1) dt \right] \\ & \quad \times \varphi_p (W_0^p = x_0, W_\theta^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2) dx_1 dx_2 dx_0. \end{aligned}$$

BEWEIS Wir verwenden im Nachfolgenden das Theorem 4.1.23 mit $n = 2$, $t_0 = 0$ und $t_2 = 1 - p$. Für $t_1 \in (t_0, t_2) = (0, 1 - p)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} (W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \text{ für alle } t \in [0, 1 - p]). \end{aligned}$$

Mit $b_n := c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t_n)$ für $n \in \{0, 1, 2\}$ folgt weiter wegen Theorem 4.1.23:

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_{-\infty}^{b_0} \int_{-\infty}^{b_2} \int_{-\infty}^{b_1} \mathbb{P} (W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \text{ für alle } t \in (0, t_1) \mid W_0^p = x_0, W_{t_1}^p = x_1) \\ & \quad \times \mathbb{P} (W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \text{ für alle } t \in (t_1, 1 - p) \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2) \\ & \quad \times \varphi_p (W_{t_1} = x_1 \mid W_0^p = x_0, W_{1-p}^p = x_2) \varphi_p (W_0^p = x_0, W_{1-p}^p = x_2) dx_1 dx_2 dx_0 \end{aligned}$$

und aufgrund der Definition der bedingten Dichte (vgl. Korollar 4.1.8) gilt:

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \int_{-\infty}^{b_0} \int_{-\infty}^{b_2} \int_{-\infty}^{b_1} \mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \text{ für alle } t \in (0, t_1) \mid W_0^p = x_0, W_{t_1}^p = x_1 \right) \\
 &\quad \times \mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \Delta^p s_f(t) \text{ für alle } t \in (t_1, 1-p) \mid W_{t_1}^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2 \right) \\
 &\quad \times \varphi_p \left(W_0^p = x_0, W_{t_1}^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2 \right) dx_1 dx_2 dx_0. \tag{4.3.4}
 \end{aligned}$$

i) Für $\frac{1}{2} \leq p < \theta$ folgt für $\Delta^p s_f$ (vgl. Lemma 4.3.1):

$$\Delta^p s_f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \in [0, \theta - p) \\ \mu(t - (\theta - p)) & , \text{ falls } t \in [\theta - p, 1 - p] \end{cases}.$$

Wir wählen in (4.3.4) $t_1 := \theta - p$ und erhalten

$$b_0 = b_1 = c_{1-\alpha;p} \quad \text{und} \quad b_2 = c_{1-\alpha;p} - \mu(1 - \theta)$$

sowie wegen Satz 4.1.25:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \underbrace{\Delta^p s_f(t)}_{=0} \quad \forall t \in (0, \theta - p) \mid W_0^p = x_0, W_{\theta-p}^p = x_1 \right) \\
 &= 1 - \exp \left(- \frac{(c_{1-\alpha;p} - x_0)(c_{1-\alpha;p} - x_1)}{\theta - p} \right)
 \end{aligned}$$

bzw. wegen Satz 4.1.27:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \mu(t - (\theta - p)) \quad \forall t \in (\theta - p, 1 - p) \mid W_{\theta-p}^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2 \right) \\
 &= 1 - \int_0^{1-\theta} \frac{c_{1-\alpha;p} - x_1}{t} \varphi_p \left(W_t^p = c_{1-\alpha;p} - \mu t \mid W_0^p = x_1, W_{1-\theta}^p = x_2 \right) dt.
 \end{aligned}$$

Setzt man die obigen Ausdrücke in (4.3.4) ein, so ergibt sich die Darstellung aus Theorem 4.1.23 i).

ii) Der Beweis verläuft analog zu Fall i), wobei hier $t_1 = \theta$ gewählt werden muss:

Aus $p < 1 - \theta$ folgt $1 - p > \theta$ und somit folgt für Δ^{pS_f} (vgl. Lemma 4.3.1):

$$\Delta^{pS_f}(t) = \begin{cases} \mu(p - \theta) + \mu t & , \text{ falls } t \in [0, \theta] \\ \mu p & , \text{ falls } t \in (\theta, 1 - p] \end{cases}.$$

Wir wählen daher in (4.3.4) $t_1 = \theta$ und erhalten

$$b_0 = c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta) \quad \text{und} \quad b_1 = b_2 = c_{1-\alpha;p} - \mu p$$

sowie wegen Satz 4.1.27:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta) - \mu t \quad \forall t \in (0, \theta) \mid W_0^p = x_0, W_\theta^p = x_1 \right) \\ &= 1 - \int_0^\theta \frac{c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta) - x_0}{t} \varphi_p \left(W_t^p = c_{1-\alpha;p} - \mu(p - \theta) - \mu t \mid W_0^p = x_0, W_\theta^p = x_1 \right) dt. \end{aligned}$$

bzw. wegen Satz 4.1.25:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(W_t^p \leq c_{1-\alpha;p} - \mu p \quad \forall t \in (\theta, 1 - p) \mid W_\theta^p = x_1, W_{1-p}^p = x_2 \right) \\ &= 1 - \exp \left(- \frac{(c_{1-\alpha;p} - \mu p - x_1)(c_{1-\alpha;p} - \mu p - x_2)}{1 - p - \theta} \right). \end{aligned}$$

Einsetzen der obigen Ausdrücke in (4.3.4) ergibt die Formel aus Theorem 4.1.23 ii). ■

4.3.4 Performancevergleich: Numerische Berechnungen und Simulationen

Abbildung 4.4 zeigt die Güte bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ in Abhängigkeit von $\mu \geq 0$ für verschiedene p 's und θ 's. Einerseits simulieren wir dabei jeden Gütepunkt mit 10.000 Wiederholungen und approximieren die Brownsche Bewegung jeweils durch einen Gaußschen Random Walk mit 2.000 Beobachtungen. Andererseits wird die Güte auch explizit mit Hilfe der Darstellungen aus Lemma 4.3.2 sowie den Korollaren 4.3.3 und 4.3.4 berechnet. Da die Berechnungen nur für $p \geq \frac{1}{2}$ möglich sind, betrachten wir in dieser Abbildung nur $p \geq \frac{1}{2}$. Die verschiedenen Farben verdeutlichen, welche analytische Formel jeweils zur Berechnung herangezogen wurde. Aus Abbildung 4.4 geht hervor, dass die simulierten und berechneten Werte sehr nahe zusammenliegen. Dies bedeutet einerseits, dass die Anzahl der Wiederholungen bei der Simulation ausreichend ist und andererseits,

dass die angegebenen Formeln numerisch berechenbar sind und zu richtigen Ergebnissen führen.

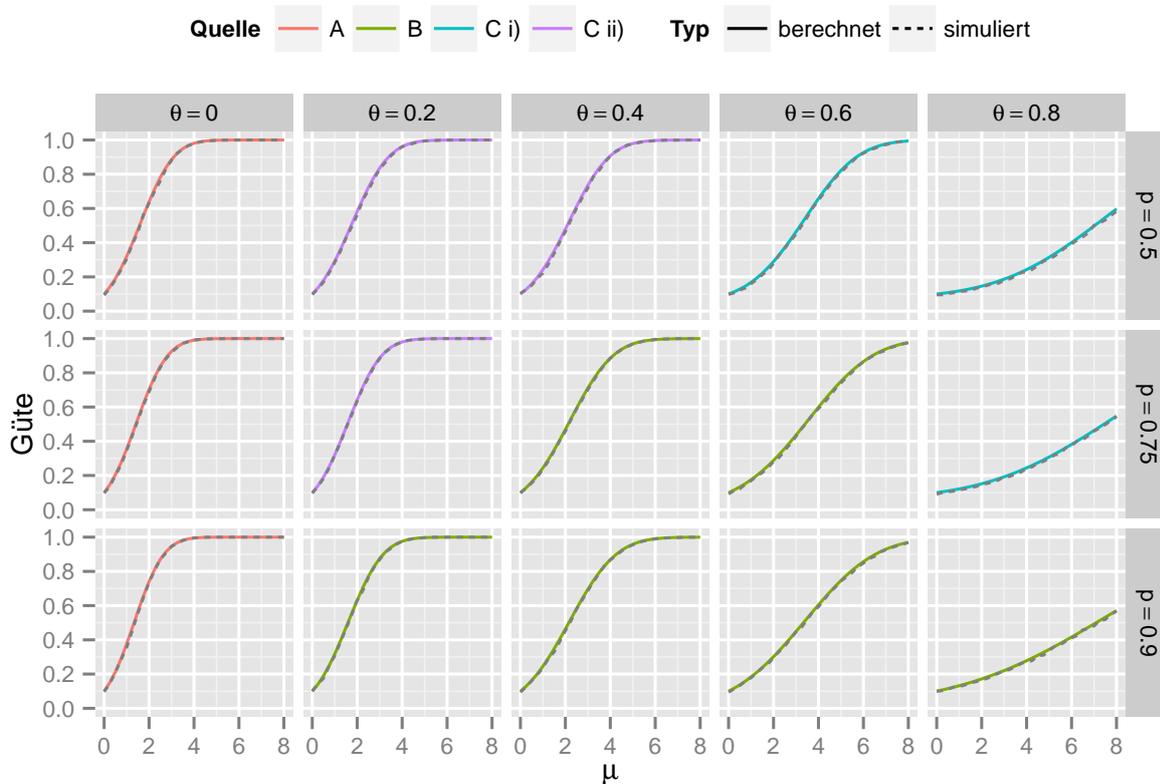


Abbildung 4.4: Berechnete und simulierte Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$)
 Zur Bedeutung von „Quelle“: A = Lemma 4.3.2 i.V. mit Korollar 4.2.2,
 B = Korollar 4.3.3, C = Korollar 4.3.4

Abbildung 4.5 zeigt die simulierte Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests im Vergleich zu den anderen beiden sequentiellen Testverfahren aus Kapitel 3.2. Hierbei ist zu beachten, dass der Kolmogorov- und der Maximum Increase-Test aus Kapitel 3.2 von p unabhängig sind. Wir zeichnen deren Güte lediglich zu Vergleichszwecken in Abbildung 4.5 mit ein. Es gilt:

- 1) In den Fällen $\theta = 0.6$ und $\theta = 0.8$ weist der Kolmogorov-Test eine deutlich schlechtere Güte als der Maximum Increase-Test auf. Wie zu erwarten, führt allerdings für diese θ 's der Kolmogorov-Slepian- p -Test zu einer Güteverbesserung im Vergleich zum Kolmogorov-Tests. Im Fall $\theta = 0.8$ und $p \in \{0.1, 0.25\}$ dominiert der Kolmogorov-Slepian- p -Test sogar den Maximum Increase-Test.

- 2) Für $\theta \in \{0, 0.2, 0.4\}$ ist die Testgüte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests wesentlich von der Wahl der Fensterlänge p abhängig (vgl. hierzu auch Abschnitt 4.3.5).

Abbildung 4.6 zeigt die simulierten Verfahrensstoppszeiten des Kolmogorov-Slepian- p - und des Maximum Increase-Tests. Wir verwenden hierbei die bereits in Abbildung 3.1 eingeführte Darstellungsform. Die horizontalen, grünen Linien treten auf, weil die Verfahrensstoppszeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests durch p nach unten beschränkt ist. Aus den Abbildungen 4.5 – 4.6 geht hervor, dass der Kolmogorov-Slepian- p -Test den Maximum Increase-Test für große Werte θ dominieren kann, wenn man die Fensterlänge p klein genug wählt. In Abbildung 4.7 stellen wir den entsprechenden Ausschnitt aus Abbildung 4.6 noch einmal größer dar. Um den angesprochenen Effekt deutlicher erkennen zu können, betrachten wir auf der y -Achse nur den Bereich $[0.6, 1]$. Ferner haben wir in Abbildung 4.7 das 0.75-Quantil der Kolmogorov-Slepian- p -Verfahrensstoppszeit in weiß eingezeichnet.

Hinsichtlich des Rechen- und Implementationsaufwandes ist der Kolmogorov-Slepian- p -Test zwischen Kolmogorov- und Maximum Increase-Test einzustufen: Die Teststatistik ist selbst mit geringem Implementationsaufwand einfach und schnell berechenbar.

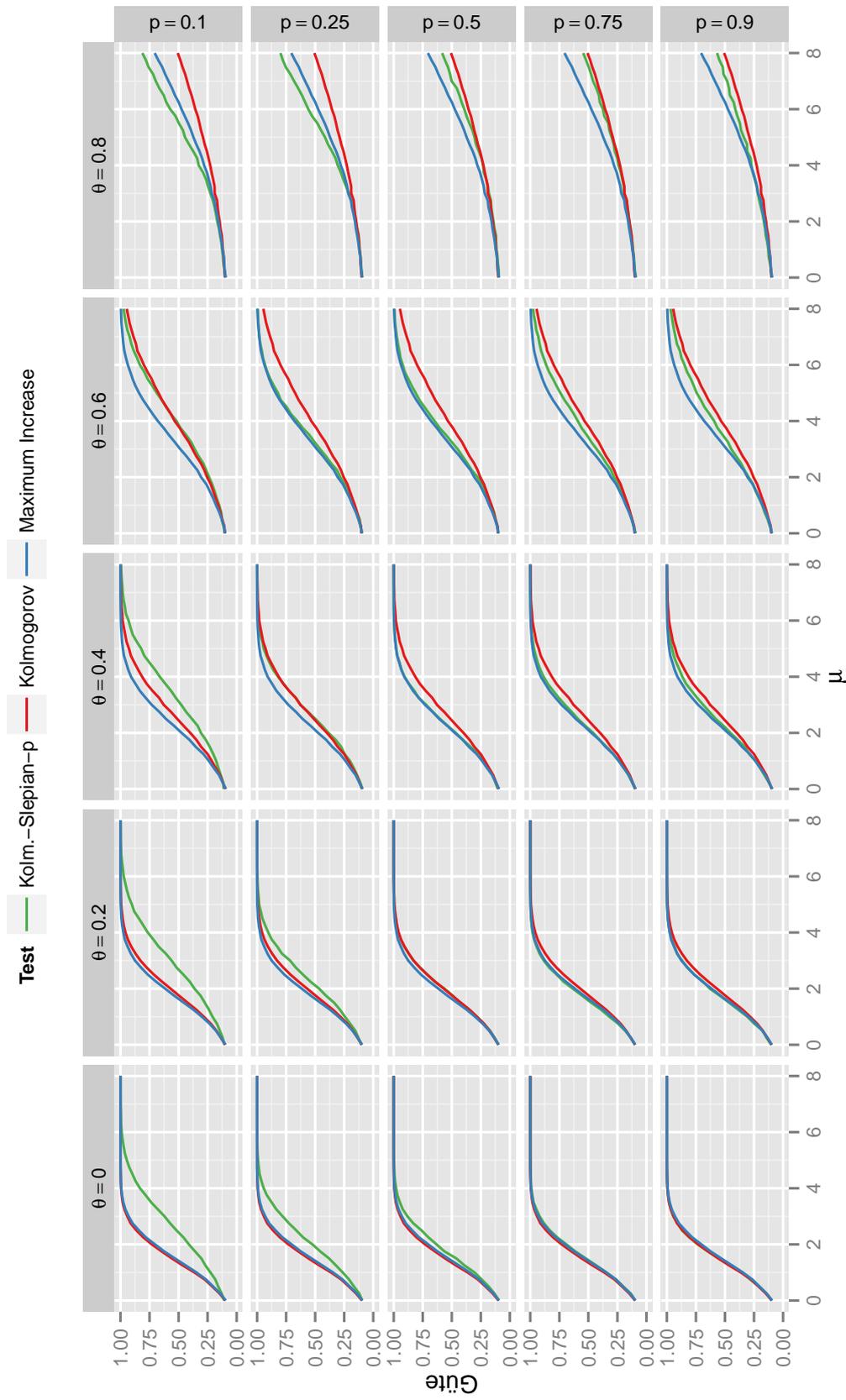


Abbildung 4.5: Güte des Kolmogorov-Slepián- p -Tests im Vergleich mit Maximum Increase- und Kolmogorov-Test bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen, bei Kolmogorov-Test Berechnungen)

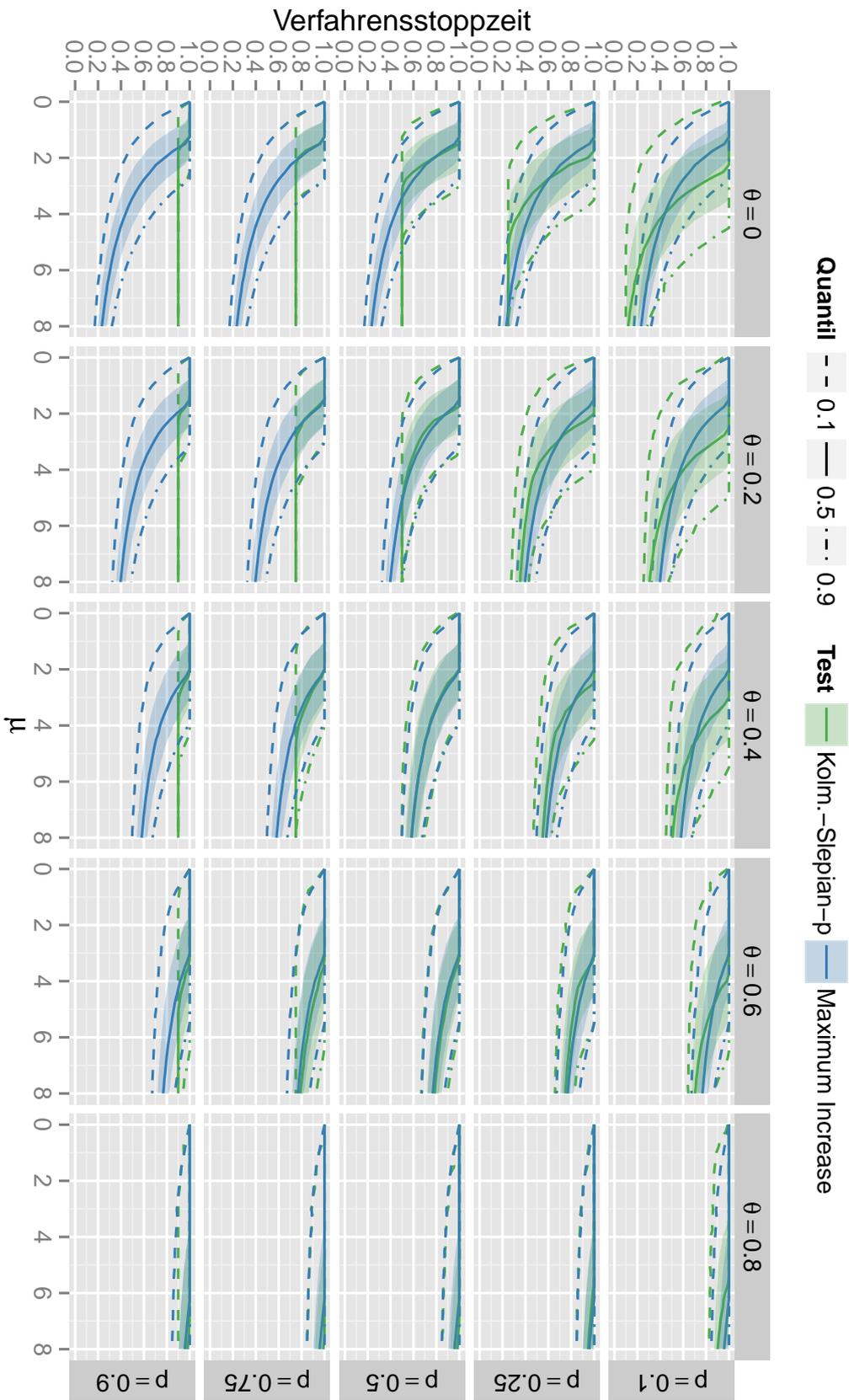


Abbildung 4.6: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p - und des Maximum Increase-Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

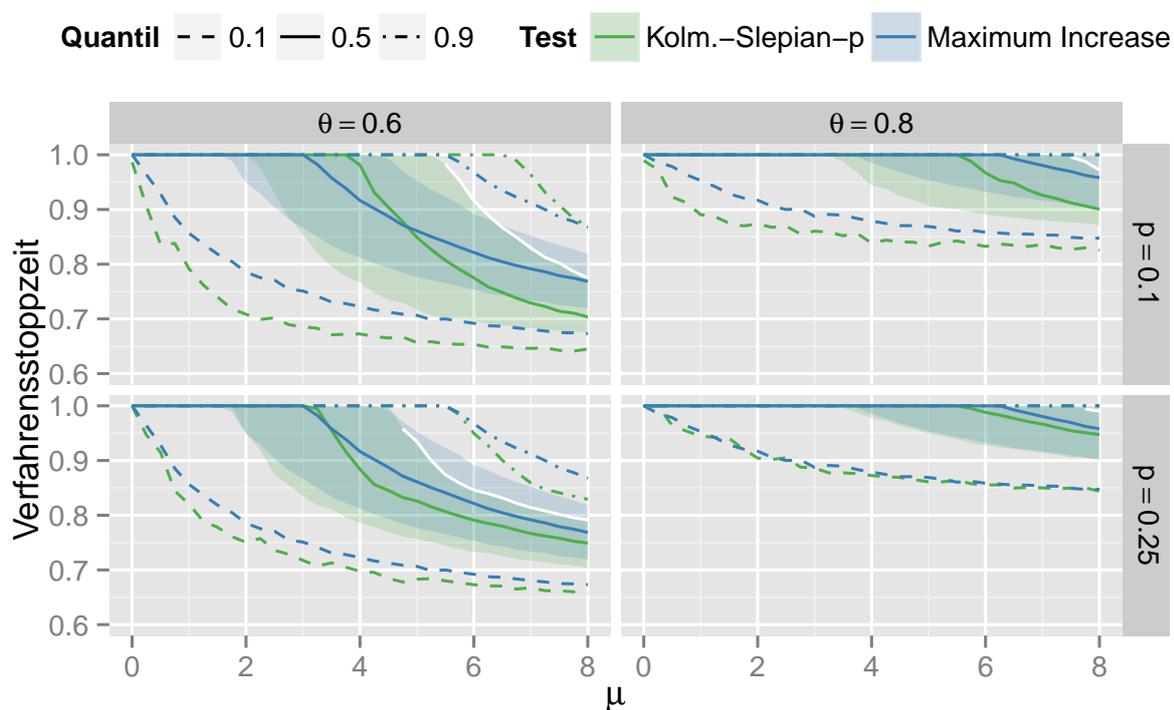


Abbildung 4.7: Ausschnitt Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests im Vergleich mit Maximum Increase-Test bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

4.3.5 Zur Wahl der Fensterlänge p

Die Wahl der optimalen Fensterlänge p ist ein „herausforderndes Forschungsthema“ (Chu u. a., 1995, S. 607) und nicht ohne Weiteres zu beantworten. Abbildung 4.8 zeigt die simulierte Testgüte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\theta \in [0, 1)$ und $\mu > 0$ in Abhängigkeit von $p \in (0, 1]$. Für die Simulationen werden 10.000 Wiederholungen durchgeführt und zur Approximation der Brownschen Bewegung jeweils ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen verwendet.

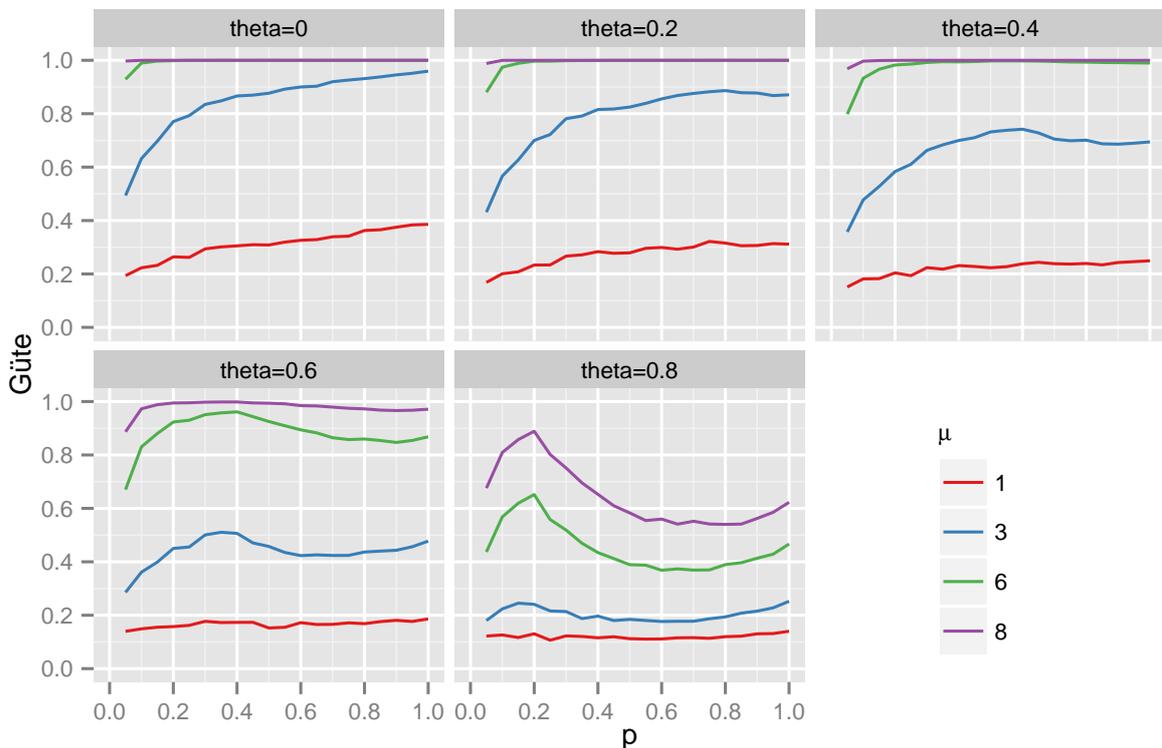


Abbildung 4.8: Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

Abbildung 4.8 zeigt, dass p nicht allzu klein gewählt werden sollte. Um die Testgüte zu maximieren, ist die Fensterlänge $p = 1 - \theta$ eine gute Wahl. Dies kann man damit erklären, dass bei $p = 1 - \theta$ die Differenz $s_f(1) - s_f(1 - p)$ maximal wird.

Neben der Testgüte ist es auch wichtig, die Verfahrensstopzeit bei der Wahl der Fensterlänge p zu beachten. Wir stellen auch hierfür Simulationen (mit den oben beschriebenen Simulationsbedingungen) an und präsentieren die Ergebnisse in Abbildung 4.9. Dabei verwenden wir die bereits in Kapitel 3.2.2 (Abbildung 3.1) beschriebene Darstellung. Die

Tatsache, dass die simulierten Quantile ab einem bestimmten p auf der Winkelhalbierenden liegen, lässt sich damit erklären, dass die Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests durch p nach unten beschränkt ist. Durch diese Beschränktheit nach unten ist eine Interpretation von Abbildung 4.9 kaum möglich. Wir stellen an dieser Stelle eine solche auch gar nicht erst an und verweisen stattdessen auf Kapitel 5, wo wir ein Verfahren studieren, welches nicht nach unten beschränkt ist.

4.4 Der p -Wert des Tests

Anstatt den kritischen Wert $c_{1-\alpha;p}$ zu bestimmen, kann auch der zur Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \sup_{t \in [p,1]} (Y_t - Y_{t-p}) > c_{1-\alpha;p} \quad (4.4.1)$$

gehörige p -Wert berechnet werden. Sei dazu

$$x := \sup_{t \in [0,1-p]} (Y_{t+p} - Y_t)(\omega)$$

die Realisierung der Teststatistik. Dann ist der zugehörige p -Wert derjenige Wert $\alpha_0 \in (0,1)$, für den gilt:

$$x = c_{1-\alpha_0;p} ,$$

wobei $c_{1-\alpha_0;p}$ das $(1 - \alpha_0)$ -Quantil von $\sup_{t \in [0,1-p]} (B_{t+p} - B_t) = \sup_{t \in [0,1-p]} (W_t^p)$ ist (W^p ein Slepian- p -Prozess). Folglich ist der p -Wert des Kolmogorov-Slepian- p -Tests gegeben durch:

$$p\text{-Wert} = 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1-p]} W_t^p > x\right).$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist mit Korollar 4.2.2 analytisch (und im Falle $p \geq \frac{1}{2}$ auch numerisch) berechenbar.

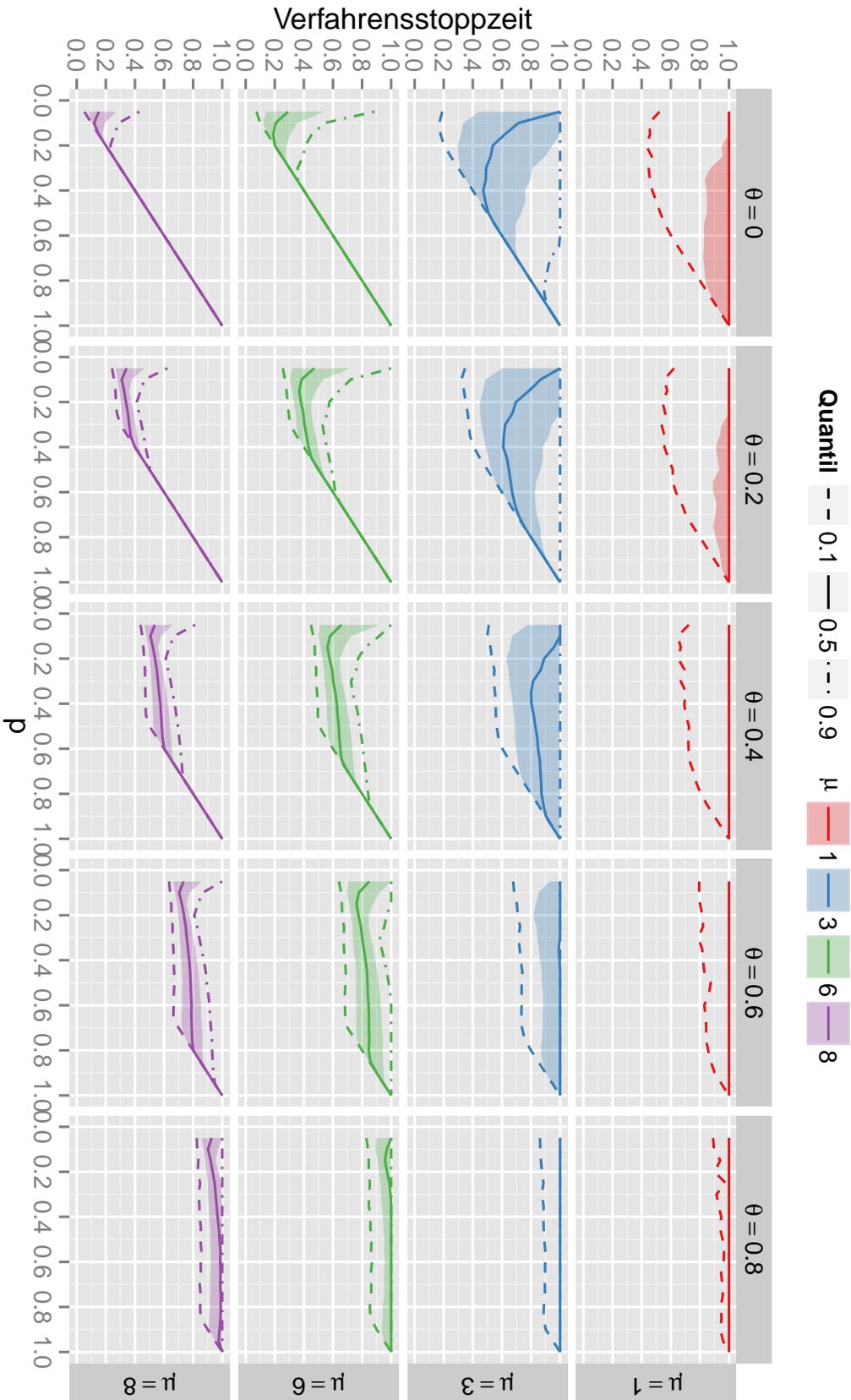


Abbildung 4.9: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

5 Sequentielle Testverfahren mit maximaler Fensterlänge p

Analog zu Kapitel 4, studieren wir auch hier für das asymptotische Regressionsmodell $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0,1])$ und einer Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,1]} = (B_t)_{t \in [0,1]}$ das Testproblem

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f \text{ monoton wachsend mit } s_f(1) > 0.$$

In diesem Kapitel betrachten wir allerdings Fenster mit einer *maximalen Länge* von p , $p \in (0, 1]$. Die in Kapitel 4 betrachteten Fenster $[t-p, t]$ sind für $t \in [0, p)$ nicht definiert (da dann $t-p < 0$). Deshalb wird dort nur der Fall $t \geq p$ behandelt. Da jedoch die Verfahrensstoppszeit möglichst klein sein soll, ist diese Beschränkung nach unten unerwünscht. Wir betrachten daher in diesem Kapitel

i) für $t \in [p, 1]$ – wie auch in Kapitel 4 – den translatierten Prozess $Y_{[t-p,t]} - Y_{t-p}$

und zudem

ii) für $t \in [0, p)$ das Fenster $[0, t]$ mit dem dazugehörigen Prozess $Y_{[0,t]} - Y_0 = Y_{[0,t]}$.

Zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ wird also der Prozess

$$(Y_s - Y_{(t-p)^+})_{s \in [(t-p)^+, t]} = Y_{[(t-p)^+, t]} - Y_{(t-p)^+}$$

untersucht. Soweit uns bekannt ist, werden Fenster mit *maximaler* Fensterlänge erstmals in der vorliegenden Arbeit betrachtet. Analog zu Kapitel 3.2 bzw. Kapitel 4, kann man auch hier für jedes Fenster ein Funktional

$$F_t : C([(t-p)^+, t]) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der zugehörigen Teststatistik $X_t := F_t(Y_{[(t-p)^+, t]} - Y_{(t-p)^+})$ betrachten. Wir beschränken uns wiederum auf den Fall, dass die zum Prozess $Y_{[(t-p)^+, t]} - Y_{(t-p)^+}$ gehörige Teststatistik

X_t der Endpunkt dieses Prozesses ist. Im Nachfolgenden studieren wir also die sequentielle Entscheidungsvorschrift

Stoppe zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ (und lehne $H_0 : s_f \equiv 0$ ab)

$$\iff X_t = Y_t - Y_{(t-p)^+} > k_{1-\alpha;p} . \quad (5.0.1)$$

Dabei ist $k_{1-\alpha;p} > 0$ der kritische Wert, welcher durch die Gleichung

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} (B_t - B_{(t-p)^+}) > k_{1-\alpha;p} \right) = \alpha \quad (5.0.2)$$

bestimmt ist ($\alpha \in (0, 1)$). Soweit wir wissen, ist sowohl der Prozess $(B_t - B_{(t-p)^+})_{t \in [0,1]}$ als auch die Entscheidungsregel (5.0.1) in der Literatur bisher noch nicht betrachtet worden.

5.1 Der Wiener-Slepian- p -Prozess

Wir charakterisieren den in (5.0.2) auftretenden stochastischen Prozess genauer:

Lemma 5.1.1 *Es seien $p > 0$, $T > 0$ und $V_{[0,T]}^p := (B_t - B_{(t-p)^+})_{t \in [0,T]}$. Dann gilt:*

a) $V_{[0,T]}^p$ ist ein zentrierter Gauß-Prozess mit $V_0^p = 0$ und Kovarianzfunktion

$$\mathbf{Cov}(V_s^p, V_{s+t}^p) = (s - (s+t-p)^+)^+ \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } s, s+t \in [0, T].$$

b) $V_{[0,T]}^p$ ist nicht stationär und kein Markov-Prozess.

c) Die Pfade von $V_{[0,T]}^p$ sind stetig.

BEWEIS a) $V_0^p = B_0 = 0$. Weiter ist $V_{[0,T]}^p$ ein zentrierter Gauß-Prozess, da die endlich-dimensionalen Verteilungen von $V_{[0,T]}^p$ zentriert und normalverteilt sind. Für die Kovarianz gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(V_s^p, V_{s+t}^p) &= \mathbf{Cov}(B_s, B_{s+t}) + \mathbf{Cov}(B_{(s-p)^+}, B_{(s+t-p)^+}) \\ &\quad - \mathbf{Cov}(B_{(s-p)^+}, B_{s+t}) - \mathbf{Cov}(B_s, B_{(s+t-p)^+}) \\ &= s + (s-p)^+ - (s-p)^+ - \min(s, (s+t-p)^+) = (s - (s+t-p)^+)^+ . \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

b) Die Kovarianz (5.1.1) hängt sowohl von s als auch von t ab. Folglich ist $V_{[0,T]}^p$ nicht schwach stationär. Weiterhin hat sie keine „Dreiecksgestalt“ und somit ist $V_{[0,T]}^p$ nach Lemma 4.1.11 kein Markov-Prozess.

c) Da die Pfade der Brownschen Bewegung $B_{[0,T]}$ stetig sind, sind auch diejenigen von $V_{[0,T]}^p$ stetig. ■

Für $V_{[0,T]}^p$ aus Lemma 5.1.1 gilt im Falle $T \geq p$:

$$V_t^p = \begin{cases} B_t & , \text{ falls } t \in [0, p) \\ B_t - B_{t-p} & , \text{ falls } t \in [p, T] \end{cases} . \quad (5.1.2)$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass

- $V_{[0,p]}^p$ eine Brownsche Bewegung (also ein *Wiener-Prozess*) ist und
- $V_{[p,T]}^p$ ein Slepian- p -Prozess ist.

Daher wählen wir die folgende Definition:

Definition 5.1.2

Es seien $p > 0$ und $V_{[0,T]}^p = (V_t^p)_{t \in [0,T]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit stetigen Pfaden und $V_0^p = 0$. Gilt

$$\text{Cov}(V_s^p, V_t^p) = (s - (t - p)^+)^+ \quad \text{für } s, t \geq 0, s \leq t,$$

so nennen wir $V_{[0,T]}^p$ einen Wiener-Slepian- p -Prozess.

Soweit wir wissen, wird der Wiener-Slepian- p -Prozess erstmals in der vorliegenden Arbeit eingeführt. Gemäß dieser Definition ist ein Wiener-Slepian- p -Prozess mit Pfaden in $C([0, p])$ eine Standard Brownsche Bewegung.

5.2 Der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test

Nach Definition 5.1.2 ist $(Y_t - Y_{(t-p)^+})_{t \in [0,1]}$ unter der Nullhypothese „ $H_0 : s_f \equiv 0$ “ ein Wiener-Slepian- p -Prozess. Folglich definieren wir:

Definition 5.2.1 (Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test)

Das sequentielle Verfahren mit der Entscheidungsvorschrift

Stoppe zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ (und lehne $H_0 : s_f \equiv 0$ ab)

$$\iff Y_t - Y_{(t-p)^+} > k_{1-\alpha;p}$$

aus (5.0.1) heißt Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test.

Tabelle 5.1: Simulierte $(1-\alpha)$ -Quantile $k_{1-\alpha;p}$ von $\sup_{t \in [0,1]} V_t^p$, für $p = 1$ zusätzlich berechnet

p	Typ	$1 - \alpha$			
		0.9	0.95	0.975	0.99
0.05	simuliert	0.7224	0.7737	0.8198	0.8766
0.1	simuliert	0.9502	1.0279	1.0984	1.1801
0.15	simuliert	1.1040	1.2035	1.2938	1.4025
0.2	simuliert	1.2211	1.3427	1.4529	1.5819
0.25	simuliert	1.3128	1.4525	1.5761	1.7268
0.3	simuliert	1.3891	1.5492	1.6899	1.8544
0.35	simuliert	1.4525	1.6249	1.7818	1.9630
0.4	simuliert	1.4998	1.6894	1.8608	2.0580
0.45	simuliert	1.5454	1.7497	1.9321	2.1497
0.5	simuliert	1.5797	1.8028	1.9985	2.2200
0.55	simuliert	1.6050	1.8435	2.0482	2.2959
0.6	simuliert	1.6352	1.8834	2.1065	2.3631
0.65	simuliert	1.6554	1.9177	2.1455	2.4184
0.7	simuliert	1.6659	1.9409	2.1823	2.4704
0.75	simuliert	1.6738	1.9596	2.2056	2.5077
0.8	simuliert	1.6807	1.9753	2.2322	2.5347
0.85	simuliert	1.6734	1.9770	2.2472	2.5650
0.9	simuliert	1.6737	1.9861	2.2578	2.5738
0.95	simuliert	1.6540	1.9642	2.2431	2.5646
1	simuliert	1.6297	1.9463	2.2214	2.5647
1	berechnet	1.6449	1.9600	2.2414	2.5758

5.2.1 Kritische Werte

Eine analytische Berechnung des kritischen Wertes $k_{1-\alpha;p}$ erweist sich als schwierig. Daher bestimmen wir diesen Wert durch Simulationen näherungsweise. Wir approximieren die Brownsche Bewegung durch einen Gaußschen Random Walk der Länge 2.000 und führen 200.000 Wiederholungen durch. In Tabelle 5.1 sind die Simulationsergebnisse dargestellt. Im Fall $p = 1$ ist $(B_t - B_{(t-1)^+})_{t \in [0,1]} = B_{[0,1]}$, womit in diesem Fall das $(1-\alpha)$ -Quantil einfach berechenbar ist. Für die Standard Brownsche Bewegung gilt nämlich (vgl. z. B. Billingsley, 1999, S. 92):

$$k_{1-\alpha;1} = z_{1-\alpha/2}$$

Wir stellen diesen theoretischen Wert ebenfalls in Tabelle 5.1 dar um zu zeigen, dass die simulierten und theoretischen Werte nahe beisammen liegen.

5.2.2 Performancevergleich bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$

Im Nachfolgenden simulieren wir die Testgüte

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} (Y_t - Y_{(t-p)^+}) > k_{1-\alpha;p} \right)$$

und die Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests. Wir betrachten dazu die Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{[\theta,1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0, 1)$. Für die Simulationen werden jeweils 10.000 Wiederholungen durchgeführt und ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen zur Approximation an die Brownsche Bewegung verwendet.

Die Abbildungen 5.1 – 5.3 zeigen die Gütefunktionen bzw. Verfahrensstopzeiten des Kolmogorov-(Wiener-)Slepian- p -Tests und des gewöhnlichen Kolmogorov- sowie des Maximum Increase-Tests. Wir weisen explizit darauf hin, dass die beiden letztgenannten Tests (vgl. Abschnitt 3.2) von p unabhängig sind. Zu Vergleichszwecken zeichnen wir deren Werte allerdings mit ein.

Der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test weist eine ähnliche Güte wie der Kolmogorov-Slepian- p -Test aus Kapitel 4 auf, weshalb sich diese beiden Gütefunktionen in Abbildung 5.1 meist überdecken. Für $p = 0.9$ und $\theta \in \{0.6, 0.8\}$ ist allerdings der Kolmogorov-Slepian- p -Test etwas besser. Hinsichtlich der Güte gelten damit für den Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test die gleichen Aussagen wie für den Kolmogorov-Slepian- p -Test (vgl. Anmerkungen zu Abbildung 4.5).

Abbildung 5.2 zeigt, dass die Verfahrensstopzeiten des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests auf dem y -Abschnitt $[p, 1]$ gleich sind. Weiter wird durch diese Darstellung deutlich, dass der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test nicht nach unten durch p beschränkt ist. Diesen Effekt kann man besonders gut im Falle $p = 0.75$ oder $p = 0.9$ erkennen: Hier weist der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test eine deutlich bessere Verfahrensstopzeit auf.

In Abbildung 5.3 vergleichen wir die Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests mit derjenigen des Maximum Increase-Tests. Für $p \in \{0.1, 0.25\}$ ergibt sich hier im Wesentlichen das gleiche Bild wie in Abbildung 4.6. Interessant ist hierbei der Fall $p \in \{0.5, 0.75, 0.9\}$, da hier der Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test den Maximum Increase-Test dominiert, falls θ klein ist (also $\theta \in \{0, 0.2\}$ gilt).

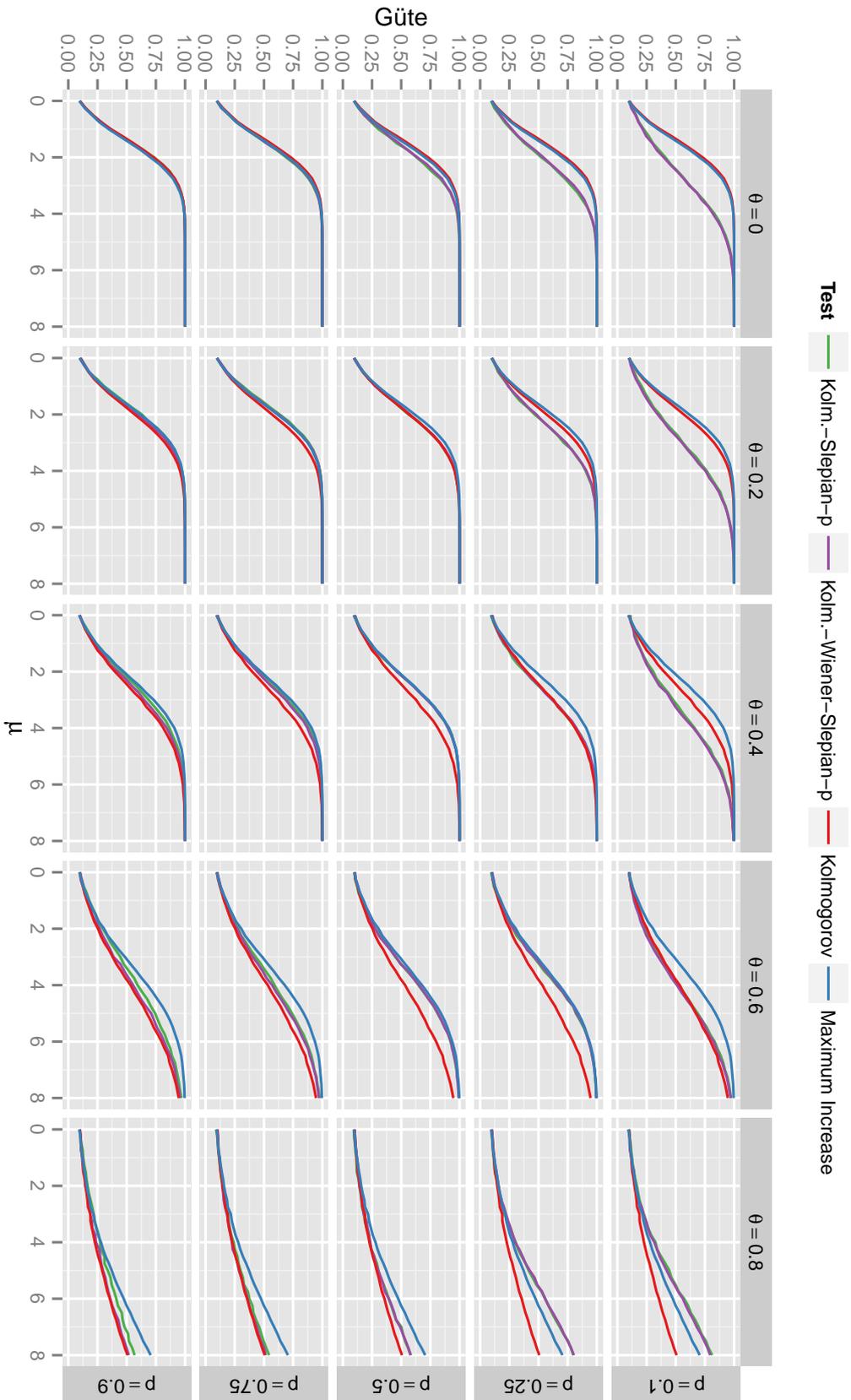


Abbildung 5.1: Güte der verschiedenen sequentiellen Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{[\theta, 1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen, bei Kolmogorov Berechnungen)

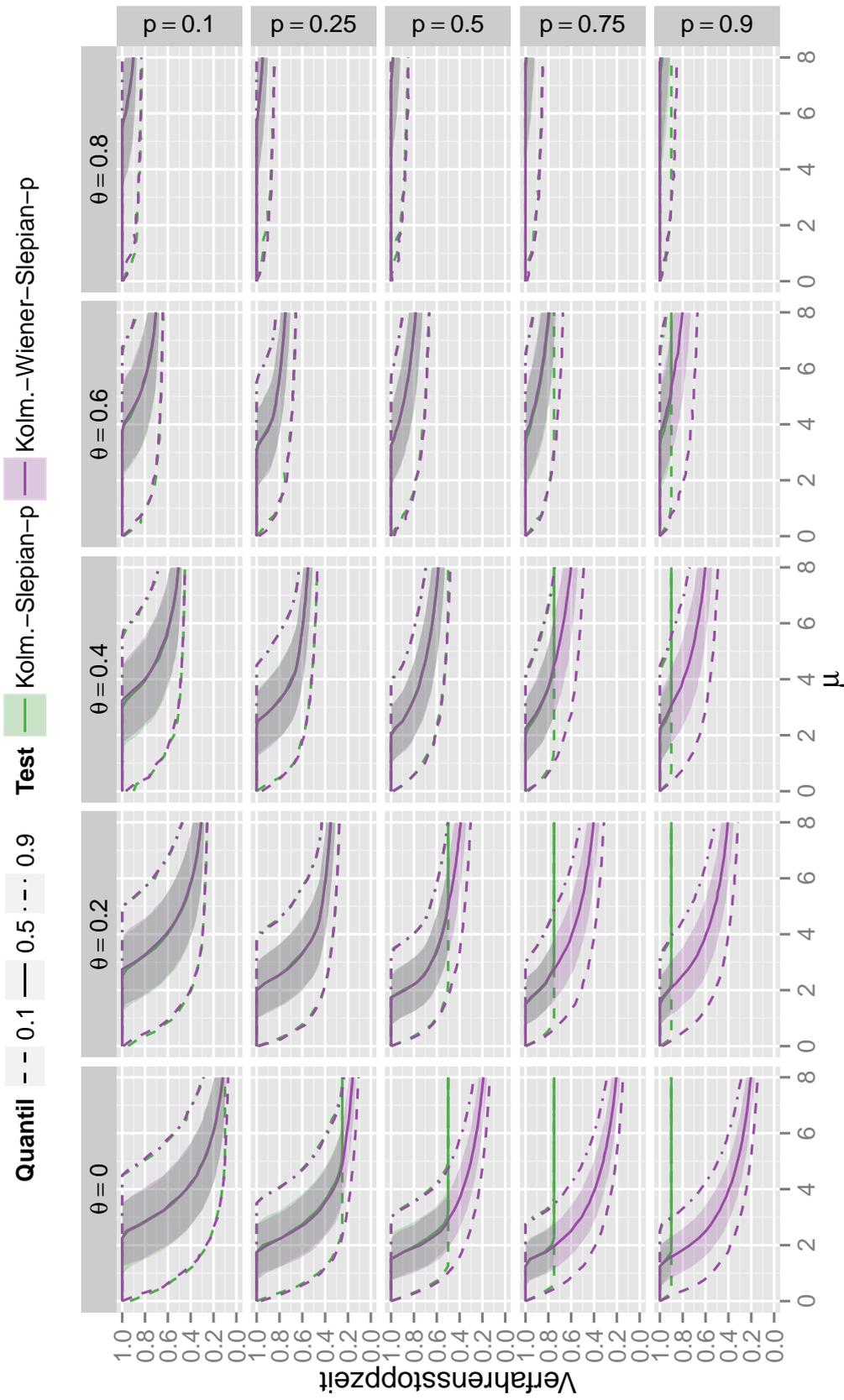


Abbildung 5.2: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

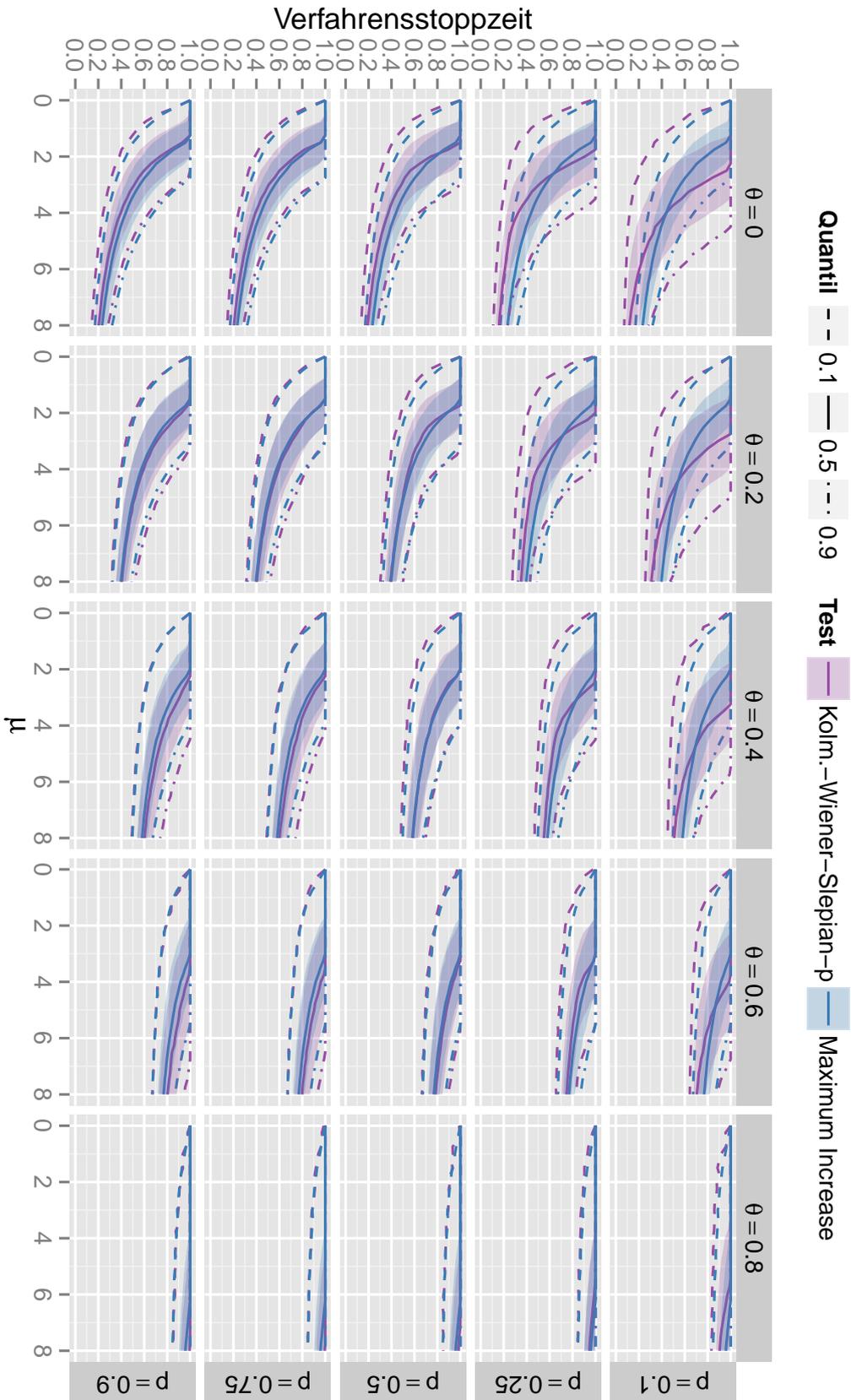


Abbildung 5.3: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests und des Maximum Increase-Tests bei Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

5.2.3 Zur Wahl der Fensterlänge p

Analog zu Kapitel 4.3.5, zeigen wir in den Abbildungen 5.4 – 5.5 die simulierte Testgüte bzw. Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests bei Vorliegen der Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\theta \in [0, 1)$ und $\mu > 0$ in Abhängigkeit von $p \in (0, 1]$. Für die Simulationen werden 10.000 Wiederholungen durchgeführt und zur Approximation der Brownschen Bewegung jeweils ein Gaußscher Random Walk mit 2.000 Beobachtungen verwendet. Abbildung 5.4

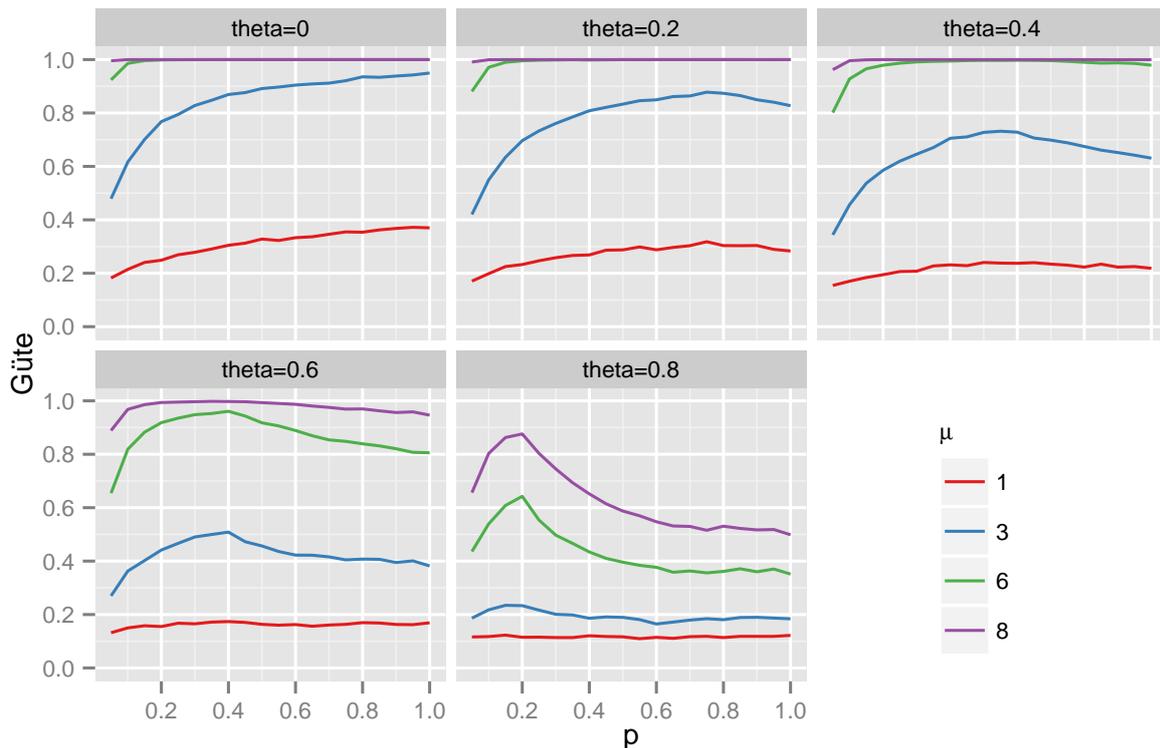


Abbildung 5.4: Güte des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

zeigt, dass die Fensterlänge p auch beim Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test nicht allzu klein gewählt werden sollte. Wie schon beim Kolmogorov-Slepian- p -Test (Abschnitt 4.3.5), ist auch beim Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Test die Fensterlänge $p = 1 - \theta$ eine sehr gute Wahl. Dies lässt sich sowohl an der Testgüte als auch an der Verfahrensstopzeit erkennen – beim Kolmogorov-Slepian- p -Test kann man bei der Verfahrensstopzeit (sh. Abbildung 4.9) aufgrund der Beschränktheit nach unten durch p kaum etwas erkennen und die Empfehlung $p = 1 - \theta$ wird in Abschnitt 4.3.5 einzig mit der Testgüte begründet.

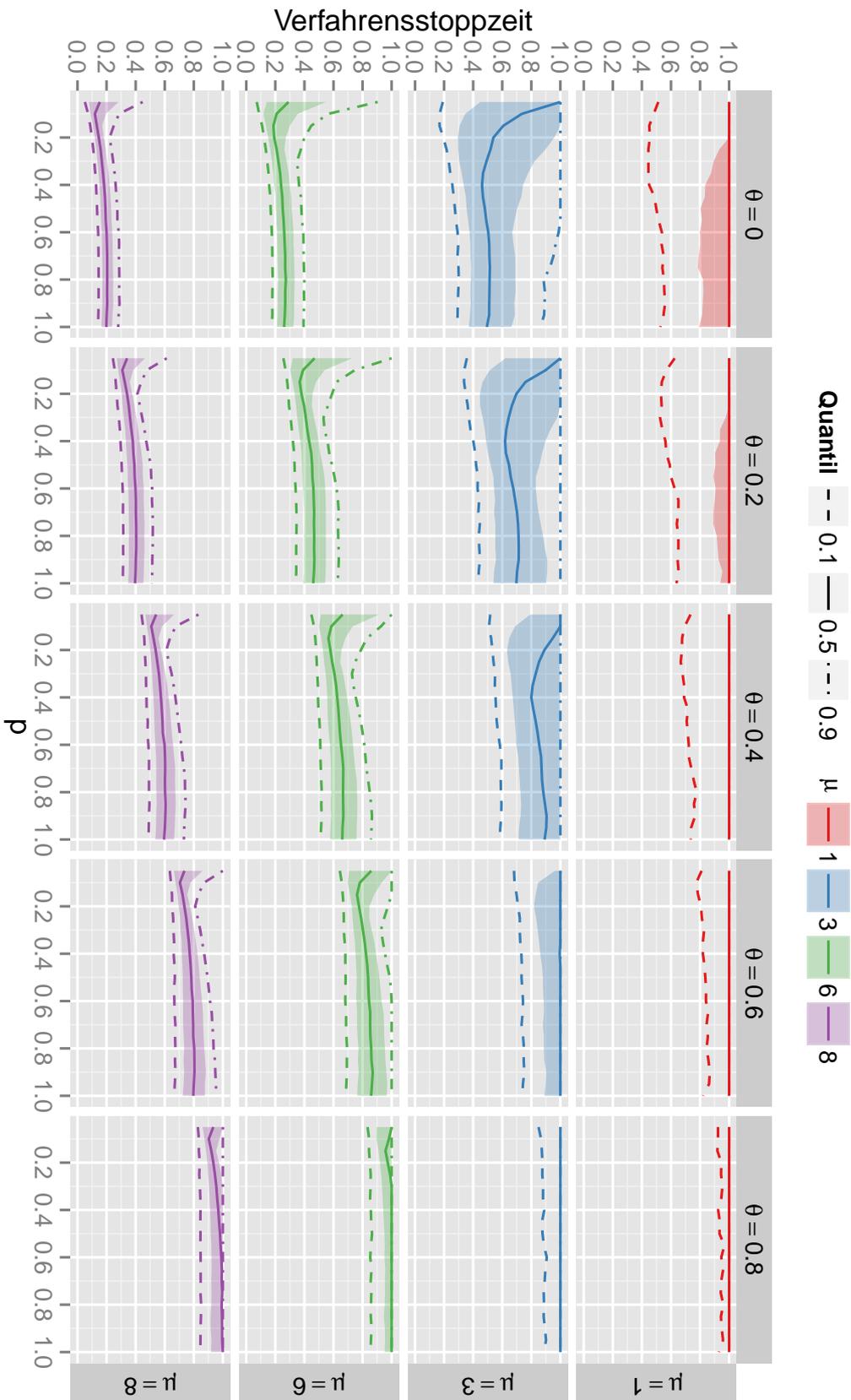


Abbildung 5.5: Verfahrensstopzeit des Kolmogorov-Wiener-Slepian- p -Tests in Abhängigkeit von p für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Simulationen)

Teil III

Beste α -Niveau Tests

6 Der Kernel eines Gauß-Prozesses

In Theorem 2.1.2 stellen wir das Cameron-Martin Theorem in seiner ursprünglichen Form, nämlich für Brownsche Bewegungen, dar. In diesem Abschnitt zitieren wir eine Verallgemeinerung auf beliebige Gauß-Prozesse, wozu der Begriff des „Kernels“ benötigt wird (vgl. Abschnitt 6.1). In Abschnitt 6.2 berechnen wir erstmalig den Kernel für den Slepian- p - und für den Wiener-Slepian- p -Prozess.

6.1 Eigenschaften des Kernels und eine Verallgemeinerung des Cameron-Martin Theorems

Im Nachfolgenden nennen wir lediglich die für uns wichtigen Eigenschaften des *Kernels*. Für eine formale Definition bzw. Herleitung verweisen wir auf Abschnitt B.1 des Anhangs. Der Kernel \mathcal{H}_X eines zentrierten Gauß-Prozesses $X_{[0,T]} = (X_t)_{t \in [0,T]}$, $T > 0$, mit Pfaden in $C([0,T])$, ist ein linearer Unterraum von $C([0,T])$. \mathcal{H}_X ist mit einem Skalarprodukt versehen. Weiter gilt:

Bemerkung 6.1.1 a) *Der sog. „reproduzierende Kernel“ ist eine geschlossene Teilmenge des Kernels (Lifshits, 2012, S. 33).*

b) *Im Falle der Brownschen Bewegung mit Pfaden in $C([0,T])$, $T > 0$, gilt (Lifshits, 2012, S. 28):*

$$\text{reproduzierender Kernel} = \text{Kernel} = \{s_f \mid f \in L^2([0,T])\} =: \mathcal{H}_{BM}.$$

Dabei steht „BM“ für „Brownian Motion“.

c) *Sei $X_{[0,T]} = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit Werten in $C([0,T])$ und Kernel \mathcal{H}_X . Weiter sei $L : C([0,T]) \rightarrow C([0,\tilde{T}])$ eine lineare Abbildung, $\tilde{T} > 0$. Dann ist der Kernel von $Z_{[0,\tilde{T}]} := L \circ X_{[0,T]}$ gegeben durch:*

$$\mathcal{H}_Z = L(\mathcal{H}_X)$$

und die zugehörige Norm ist für $h \in \mathcal{H}_Z$ gegeben durch (Lifshits, 2012, Prop. 4.1).:

$$\|h\|_{\mathcal{H}_Z} = \inf_{\{\tilde{h} \in \mathcal{H}_X \mid L\tilde{h} = h\}} \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}_X} .$$

Es folgt die angesprochene Verallgemeinerung des Cameron-Martin Theorems, wodurch die Relevanz des Kernels zum Vorschein kommt:

Satz 6.1.2 (Verallgemeinerung von Cameron-Martin)

Seien $T > 0$ und $X_{[0,T]} = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit Werten in $C([0,T])$, Verteilung $\mathbb{P}^{X_{[0,T]}}$ und Kernel \mathcal{H}_X . Dann gilt:

$$\mathbb{P}^{X_{[0,T]}+h} \text{ ist absolutstetig bzgl. } \mathbb{P}^{X_{[0,T]}} \iff h \in \mathcal{H}_X .$$

Ist $h \in \mathcal{H}_X$, so gilt:

$$\frac{d\mathbb{P}^{X_{[0,T]}+h}}{d\mathbb{P}^{X_{[0,T]}}}(g) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}_X}^2 + z(g)\right) \quad \text{für } \mathbb{P}^{X_{[0,T]}}\text{-fast alle } g \in C([0,T]).$$

Dabei ist $z : C([0,T]) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, welches den nachfolgenden Bedingungen genügt:

i) Es existiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n : C([0,T]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z .$$

Die Konvergenz ist dabei im $L^2\left(C([0,T]), \mathbb{P}^{X_{[0,T]}}\right)$ -Sinne gemeint.

ii) $\mathbf{E}\left(X_t \cdot z(X_{[0,T]})\right) = h(t)$, $t \in [0,T]$.

BEWEIS Die Aussage entspricht Theorem 5.1 aus Lifshits (2012), wenn man Folgendes berücksichtigt:

i) Lifshits Forderung „ $z \in \mathfrak{X}$ “ ist aufgrund der Definition von \mathfrak{X} (vgl. Abschnitt B.1, Formel (B.1.1)) in dem hier vorliegenden Fall äquivalent zu der Bedingung i) aus Satz 6.1.2.

ii) Wegen Korollar B.1.1 gilt:

$$Iz(t) = \mathbf{E}\left(X_t \cdot z(X_{[0,T]})\right), \quad t \in [0,T].$$

Damit ist Bedingung ii) äquivalent zu Lifshits Forderung „ $Iz = h$ “.

Wir verwenden in Abschnitt 7.2 diese verallgemeinerte Version des Cameron-Martin Theorems, um einen gleichmäßig besten Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse zu beweisen.

Ist $X_{[0,T]} = B_{[0,T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung, so ergibt sich in Satz 6.1.2 gerade der im ursprünglichen Cameron-Martin Theorem (Theorem 2.1.2) angegebene Likelihood-quotient:

Beispiel 6.1.3 *Es seien $T > 0$ und $B_{[0,T]} = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung sowie $f \in L^2([0, T])$. Dann liegt s_f wegen Bemerkung 6.1.1 im Kernel der Brownschen Bewegung (i.Z.: $s_f \in \mathcal{H}_{BM}$) und nach Satz 6.1.2 ist somit*

$$\mathbb{P}^{B_{[0,T]} + s_f} \text{ bzgl. } \mathbb{P}^{B_{[0,T]}} \text{ absolutstetig.}$$

Weiterhin ist

$$z : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad B \mapsto \int_0^T f(s) dB_s$$

stetig und linear mit ($t \in [0, T]$):

$$\mathbf{E} (B_t z(B_{[0,T]})) = \mathbf{E} \left(\int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]} dB \cdot \int_0^T f(s) dB_s \right) \stackrel{*}{=} \int_0^t f d\lambda = s_f(t).$$

Die Gleichheit in \star gilt aufgrund der sog. Isometrie-Eigenschaft des Wiener-Integrals (sh. z. B. Kuo, 2006, S.12). Damit erfüllt z die Bedingungen i) und ii) aus Satz 6.1.2, womit folgt:

$$\frac{d\mathbb{L}_{s_f}}{d\mathbb{L}_0}(B) = \exp \left(-\frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \int_0^T f dB \right) \quad \text{für } \mathbb{L}_0\text{-fast alle } B \in C([0, T]). \quad (6.1.1)$$

Dabei ist \mathbb{L}_{s_f} bzw. \mathbb{L}_0 die Verteilung einer Brownschen Bewegung mit Erwartungswertfunktion s_f bzw. 0. Der Quotient aus (6.1.1) ist für $T = 1$ gerade die Darstellung aus dem ursprünglichen Cameron-Martin Theorem (Theorem 2.1.2).

6.2 Der Kernel für spezielle Gauß-Prozesse

Kombiniert man das Neyman-Pearson Lemma mit dem verallgemeinerten Cameron-Martin Theorem, so kann man beste α -Niveau Tests konstruieren (vgl. Abschnitt 7). Daher geben wir im Nachfolgenden die Kernel für den Slepian- p - und für den Wiener-Slepian- p -Prozess an. Soweit uns bekannt ist, sind diese Kernel in der Literatur bisher noch nicht berechnet worden.

6.2.1 Der Kernel im Falle eines Slepian- p -Prozesses

Es seien $p > 0, T > 0$ und $B_{[0, T+p]} = (B_t)_{t \in [0, T+p]}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Weiter sei $\Delta^p : \mathbb{R}^{[0, T+p]} \rightarrow \mathbb{R}^{[0, T]}$ der lineare Operator aus (4.2.4) mit

$$\Delta^p B_{[0, T+p]} = (B_{t+p} - B_t)_{t \in [0, T]} .$$

Dann können wir den Kernel eines Slepian- p -Prozesses wie folgt darstellen:

Satz 6.2.1 (Kernel eines Slepian- p -Prozesses)

Es seien $p > 0, T > 0$ und $W_{[0, T]}^p$ ein Slepian- p -Prozess. Dann ist der zu $W_{[0, T]}^p$ gehörige Kernel gegeben durch

$$\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p} = \{ \Delta^p s_f \mid f \in L^2([0, T+p]) \} = \{ c + s_k \mid c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T]) \} .$$

Insbesondere gilt $\Delta^p s_f = s_f(p) + s_{\Delta^p f}$ für $f \in L^2([0, T+p])$.

BEWEIS Der Kernel von $B_{[0, T+p]}$ ist gegeben durch $\mathcal{H}_{\text{BM}} = \{ s_f \mid f \in L^2([0, T+p]) \}$. Da Δ^p linear ist, folgt nach Bemerkung 6.1.1 c):

$$\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p} = \Delta^p (\mathcal{H}_{\text{BM}}) = \{ \Delta^p s_f \mid f \in L^2([0, T+p]) \} . \quad (6.2.1)$$

Damit ist die erste Gleichung in Satz 6.2.1 bewiesen. Um die Zweite einzusehen, zeigen wir zunächst, dass $\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p} \subseteq \{ c + s_k \mid c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T]) \}$ gilt. Sei dazu $f \in L^2([0, T+p])$ fest. Dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \Delta^p s_f(t) &= s_f(t+p) - s_f(t) = \int_{[0, p)} f d\lambda + \int_{[p, t+p]} f d\lambda - \int_{[0, t]} f d\lambda \\ &= s_f(p) + s_{\Delta^p f}(t) . \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Somit hat $\Delta^p s_f$ wie behauptet die Form $c + s_k$, wenn man $c := s_f(p) \in \mathbb{R}$ und $k := \Delta^p f \in L^2([0, T])$ wählt. Um $\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p} \supseteq \{ c + s_k \mid c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T]) \}$ einzusehen, sei $c \in \mathbb{R}$ und $k \in L^2([0, T])$ beliebig. Wir definieren

$$f_0(t) := \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} k(t - jp), \quad t \in [0, T+p],$$

wobei $\sum_{j=1}^0 a_j := 0$ für $a_j \in \mathbb{R}$ und $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ für $x \geq 0$. Dann ist

$f_0 \in L^2([0, T + p])$ mit $f_0|_{[0,p]} \equiv 0$ und für $t \in [0, T]$ gilt:

$$\Delta^p f_0(t) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t+p}{p} \rfloor} k(t+p-jp) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} k(t-jp) = k(t).$$

Wir betrachten nun für $c \in \mathbb{R}$ die Verschiebung

$$f := f_0 + \frac{c}{p} \in L^2([0, T + p]).$$

Dann erfüllt f die Gleichung $\Delta^p s_f = c + s_k$, da

$$\Delta^p f(t) = \left[f_0(t+p) + \frac{c}{p} \right] - \left[f_0(t) + \frac{c}{p} \right] = \Delta^p f_0(t) = k(t), \quad t \in [0, T],$$

und (vgl. (6.2.2)):

$$\Delta^p s_f = s_f(p) + s_{\Delta^p f} = \int_{[0,p)} \underbrace{f_0 + \frac{c}{p}}_{=0} d\lambda + s_k = c + s_k.$$

Damit ist $\{c + s_k \mid c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T])\} \subseteq \mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$ ebenfalls gezeigt.

Der Zusatz $\Delta^p s_f = s_f(p) + s_{\Delta^p f}$ gilt wegen (6.2.2), womit Satz 6.2.1 vollständig bewiesen ist. ■

Weitere Eigenschaften des Slepian- p -Kernels geben wir in Abschnitt B.2 des Anhangs an.

6.2.2 Der Kernel des Wiener-Slepian- p -Prozesses

Es seien $p > 0$, $T > 0$. Wir betrachten für $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $D^p : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}^{[0,T]}$ mit

$$D^p h(t) := \begin{cases} h(t) & , \text{ falls } t \in [0, p) \\ h(t) - h(t-p) & , \text{ falls } t \in [p, T] \end{cases}. \quad (6.2.3)$$

Ist $h(0) = 0$, so gilt $(D^p h)(t) = h(t) - h((t-p)^+)$ für $t \in [0, T]$. Insbesondere folgt daraus, dass

$$D^p B_{[0,T]} = \left(B_t - B_{(t-p)^+} \right)_{t \in [0,T]}$$

ein Wiener-Slepian- p -Prozess ist. Im Gegensatz zur Abbildung Δ^p aus Kapitel 4 (vgl. Lemma 4.2.5) ist D^p bijektiv:

Lemma 6.2.2 D^p ist linear und bijektiv. Für die Inverse $(D^p)^{-1} : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}^{[0,T]}$ gilt ($h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$):

$$((D^p)^{-1}h)(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t - jp), \quad t \in [0, T]. \quad (6.2.4)$$

Dabei ist $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$ für $x \geq 0$.

BEWEIS Die Linearität ist klar.

Im Falle $p > T$ ist $D^p h = h$ und nach (6.2.4) ist $(D^p)^{-1}h = h$, womit Lemma 6.2.2 in dieser Situation richtig ist.

Sei daher $p \leq T$. Um die Injektivität einzusehen, seien $h, g \in L^2([0, T])$ zwei Funktionen mit $D^p g = D^p h$. Nach Definition von D^p gilt also:

$$g(t) = h(t) \quad \text{für alle } t \in [0, p] \quad (6.2.5)$$

$$\text{und} \quad g(t) - g(t - p) = h(t) - h(t - p) \quad \text{für alle } t \in [p, T]. \quad (6.2.6)$$

Aus der Gleichheit von g und h auf $[0, p]$ und (6.2.6) folgt:

$$g(t) = h(t) \quad \text{für alle } t \in [p, 2p] \cap [0, T]. \quad (6.2.7)$$

Daraus wiederum kann wegen (6.2.6) $g(t) = h(t)$ für alle $t \in [2p, 3p] \cap [0, T]$ gefolgert werden. Setzt man diese Argumentation induktiv fort, so erhält man: $g(t) = h(t)$ für alle $t \in [0, T]$ und damit die Injektivität von D^p .

Sei nun $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und g die Abbildung aus (6.2.4), also

$$g(t) := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t - jp), \quad t \in [0, T].$$

Dann ist $D^p g = h$ (Beweis sh. unten) und somit D^p surjektiv, also bijektiv. Damit aber folgt auch, dass $g = (D^p)^{-1} h$ gilt, womit (6.2.4) bewiesen ist.

Es bleibt noch die Korrektheit von $D^p g = h$ nachzuweisen:

i) Für $t \in [0, p]$ ist $\lfloor \frac{t}{p} \rfloor = 0$ und damit gilt: $D^p g(t) = g(t) = h(t)$.

ii) Für $t \in [p, T]$ gilt:

$$D^p g(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t - jp) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-p}{p} \rfloor} h(t - p - jp) = h(t).$$

Damit ist Lemma 6.2.2 vollständig bewiesen. ■

Lemma 6.2.3 *Es seien $p > 0, T > 0$ und $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.*

a) *Ist h von beschränkter Variation, so ist dies auch für $D^p h$ und $(D^p)^{-1}h$ richtig.*

b) *Ist h stetig mit $h(0) = 0$, so sind $D^p h$ und $(D^p)^{-1}h$ ebenfalls stetig.*

BEWEIS Im Fall $T < p$ ist $D^p h = h = (D^p)^{-1}h$, womit die Aussagen aus Lemma 6.2.3 unmittelbar folgen. Sei daher nun $T \geq p$.

a) Es sei $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation. Nach Definition ist

$$D^p h(t) := \begin{cases} h(t) & , \text{ falls } t \in [0, p) \\ h(t) - h(t-p) & , \text{ falls } t \in [p, T] \end{cases} \quad (6.2.8)$$

$D^p h$ ist damit als Linearkombination von Funktionen beschränkter Variation selbst von beschränkter Variation.

Für $(D^p)^{-1}h$ gilt nach Lemma 6.2.2 ($t \in [0, T]$):

$$\begin{aligned} ((D^p)^{-1}h)(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t - jp) \\ &= \begin{cases} h(t) & , \text{ falls } t \in [0, p) \\ h(t) + h(t-p) & , \text{ falls } t \in [p, 2p) \cap [0, T] \\ h(t) + h(t-p) + h(t-2p) & , \text{ falls } t \in [2p, 3p) \cap [0, T] \\ \vdots & \end{cases} \quad (6.2.9) \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung aber ist ersichtlich, dass $(D^p)^{-1}h$ ebenfalls eine Linearkombination von Funktionen beschränkter Variation ist. Folglich ist $(D^p)^{-1}h \in BV([0, T])$.

b) Linearkombinationen stetiger Funktionen sind wiederum stetig. Um die Stetigkeit von $D^p h$ einzusehen, genügt es daher wegen (6.2.8), die Stetigkeit in $t = p$ nachzuweisen. Diese folgt allerdings aus:

$$\lim_{t \uparrow p} D^p h(t) = \lim_{t \rightarrow p} h(t) = h(p) = h(p) - h(0) = \lim_{t \rightarrow p} h(t) - h(t-p) = \lim_{t \downarrow p} D^p h(t).$$

Um die Stetigkeit von $(D^p)^{-1}h$ einzusehen, betrachten wir die Darstellung aus (6.2.9). Aufgrund der obigen Argumentation genügt es, die Stetigkeit von $(D^p)^{-1}h$ an den Stellen

$\{kp \mid k \in \mathbb{N} \text{ mit } kp \leq T\}$ nachweisen. Es sei also $k \in \mathbb{N}$ mit $kp \leq T$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow kp} ((D^p)^{-1}h)(t) &= \lim_{t \uparrow kp} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t-jp) = \sum_{j=0}^{k-1} h(kp-jp) + \underbrace{h(kp-kp)}_{=0} \\ &= \lim_{t \downarrow kp} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t-jp) = \lim_{t \downarrow kp} ((D^p)^{-1}h)(t). \end{aligned}$$

Damit folgt $(D^p)^{-1}h \in C([0, T])$, womit die Behauptung aus Lemma 6.2.3 bewiesen ist. ■

Satz 6.2.4 (Kernel eines Wiener-Slepian- p -Prozesses)

Es seien $p > 0$ und $T > 0$. Der Kernel eines Wiener-Slepian- p -Prozesses $V_{[0,T]}^p = (V_t^p)_{t \in [0,T]}$ ist

$$\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl.-}p} := \{s_f \mid f \in L^2([0, T])\}$$

und die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|s_f\|_{\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl.-}p}} = \|(D^p)^{-1}f\|_{L^2}.$$

Insbesondere ist $D^p s_f = s_{D^p f}$ für $f \in L^2([0, T])$.

Bemerkung 6.2.5 Der Kernel des Wiener-Slepian- p -Prozesses ist gleich dem (reproduzierenden) Kernel \mathcal{H} der Brownschen Bewegung. Wir schreiben daher im Folgenden \mathcal{H} anstatt $\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl.-}p}$. Für die zugehörigen Normen auf den Kerneln gilt die Gleichheit jedoch nicht.

BEWEIS (VON SATZ 6.2.4) Es sei $\mathcal{H}_{\text{BM}} = \{s_f \mid f \in L^2([0, T])\}$ der zu $B_{[0,T]}$ gehörige Kernel. D^p ist linear und somit gilt wegen Bemerkung 6.1.1 c):

$$\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl.-}p} = D^p(\mathcal{H}_{\text{BM}}) = \{D^p s_f \mid f \in L^2([0, T])\}. \tag{6.2.10}$$

Zunächst halten wir fest, dass für $f \in L^2([0, T])$ gilt:

$$D^p s_f = s_{D^p f}. \tag{6.2.11}$$

Wir beweisen die Aussage (6.2.11) durch Fallunterscheidung:

i) Fall $t \in [0, p) \cap [0, T]$: $D^p s_f(t) = s_f(t) = \int_{[0,t]} \underbrace{D^p f(s)}_{=f(s)} ds = s_{D^p f}(t).$

Ist $T < p$, so ist (6.2.11) bewiesen. Im Fall $T \geq p$ gilt (6.2.11) ebenfalls, da dann zusätzlich das Folgende richtig ist:

ii) Fall $t \in [p, T]$:

$$\begin{aligned} D^p s_f(t) &= \int_{[0,t]} f(s) \, ds - \int_{[0,t-p]} f(s) \, ds \\ &= \int_{[0,p)} D^p f(s) \, ds + \int_{[p,t]} D^p f(s) \, ds = s_{D^p f}(t). \end{aligned}$$

Für $f \in L^2([0, T])$ ist $D^p f$ ebenfalls aus $L^2([0, T])$ und damit folgt aus (6.2.11): $\mathcal{H}_{\text{Wiener-SI.-}p} \subseteq \{s_f \mid f \in L^2([0, T])\}$.

Um die umgekehrte Teilmengenbeziehung einzusehen sei $s_h \in \{s_f \mid f \in L^2([0, T])\}$, also $h \in L^2([0, T])$. Nach Lemma 6.2.2 erfüllt g definiert durch

$$g(t) := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} h(t - jp), \quad t \in [0, T], \quad (6.2.12)$$

die Gleichung $D^p g = h$. Mit (6.2.11) folgt nun $s_h = D^p s_g$ und damit insbesondere: $s_h \in \mathcal{H}_{\text{Wiener-SI.-}p}$, da $g \in L^2([0, T])$. Folglich ist auch $\{s_f \mid f \in L^2([0, T])\} \subseteq \mathcal{H}_{\text{Wiener-SI.-}p}$ gezeigt.

Nach Bemerkung 6.1.1 c) ist die Norm auf $\mathcal{H}_{\text{Wiener-SI.-}p}$ gegeben durch ($f \in L^2([0, T])$):

$$\begin{aligned} \|s_f\|_{\mathcal{H}_{\text{Wiener-SI.-}p}} &= \inf_{\{s_h \in \mathcal{H}_{\text{BM}} \mid D^p s_h = s_f\}} \|s_h\|_{\mathcal{H}_{\text{BM}}} \\ &= \inf_{\{h \in L^2([0, T]) \mid D^p h = f\}} \|h\|_{L^2} = \|(D^p)^{-1} f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit wegen (6.2.11) gilt. ■

7 Beste α -Niveau Tests

In den nachfolgenden Abschnitten 7.1 bzw. 7.2 geben wir erstmalig beste α -Niveau Tests für Slepian- p - bzw. Wiener-Slepian- p -Prozesse an.

7.1 Bester Slepian- p -Test

Um einen besten α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$, für Slepian- p -Prozesse zu konstruieren, präsentieren wir zunächst in Abschnitt 7.1.1 ein Resultat aus Shepp (1966) zur Verteilungs-Äquivalenz von bestimmten Gauß-Prozessen. Anschließend präzisieren wir dieses Resultat für die Situation eines Slepian- p -Prozesses mit Erwartungswertfunktion m in Abschnitt 7.1.2. In der Literatur wurde dies bisher nur für den Fall $p = 1$ und $m \equiv 0$ getan. In Abschnitt 7.1.3 geben wir erstmals einen besten α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse an. Abschließend diskutieren wir eine zu den Gütebetrachtungen aus Abschnitt 4.3 passende Alternative, wofür wir einen gleichmäßig besten α -Niveau Test mitsamt Güte angeben. Sowohl dieser gleichmäßig beste Test als auch die zugehörige Güte tauchen in dieser Arbeit erstmalig auf.

7.1.1 Free Brownian Motion und dazu verteilungsäquivalente Prozesse

Es sei $X_{[0,T]} = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ein Gauß-Prozess mit Pfaden in $C([0, T])$, $T > 0$. Shepp (1966) hat erstmals dargestellt, unter welchen Bedingungen $\mathbb{P}^{X_{[0,T]}}$ zum Wiener Maß (oder bestimmten Abwandlung desselbigen) äquivalent ist. Eine dieser „Abwandlungen“ des Wiener Maßes ist die Verteilung der (nicht-differenzierbaren) „free Brownian Motion“.

Definition 7.1.1 (Free Brownian Motion)

ξ sei eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgröße, welche von der Standard Brownschen Bewegung $B_{[0,T]} = (B_t)_{t \in [0,T]}$, $T > 0$, stochastisch unabhängig ist. Im Nachfolgenden bezeichnen wir den Prozess

$$\xi + B_{[0,T]} := (\xi + B_t)_{t \in [0,T]}$$

als (nicht-differenzierbare) free Brownian Motion.

Wir erweitern das in Abschnitt 2.1.1 eingeführte Wiener-Integral auf den Fall, dass eine free Brownian Motion als Integrator auftritt:

Definition 7.1.2

Es seien $T > 0$ und $\mathbb{B} := \xi + B_{[0,T]}$ eine free Brownian Motion. Für $f \in L^2([0, T])$ definieren wir:

- i) $\int_0^T f(s) d\mathbb{B}(s) := \int_0^T f(s) d\xi + \int_0^T f(s) dB(s) = \int_0^T f(s) dB(s)$.
Dabei ist $\int_0^T f(s) d\xi = 0$, da der Integrator ξ von s unabhängig ist. $\int_0^T f(s) dB(s)$ ist ein Wiener-Integral.

- ii) Für $c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T])$ seien $m := c + s_k$ und $\mathbb{B}_m(t) := \mathbb{B}(t) - m(t), t \in [0, T]$. Dann:

$$\int_0^T f(s) d\mathbb{B}_m(s) := \int_0^T f(s) d\mathbb{B}(s) - \int_{[0,T]} f(s)k(s) \lambda(ds).$$

Weiter definieren wir für $H \in L^2([0, T]^2)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T H(s, t) d\mathbb{B}_m(s) d\mathbb{B}_m(t) \\ & := \int_{[0,T]} \int_{[0,T]} H(s, t)k(s)k(t) \lambda(ds) \lambda(dt) - \int_{[0,T]} \int_0^T H(s, t) dB(s) k(t)\lambda(dt) \\ & \quad - \int_0^T \int_{[0,T]} H(s, t)k(s) \lambda(ds) dB(t) + \int_0^T \int_0^T H(s, t) dB(s) dB(t). \end{aligned}$$

Dabei ist das letzte Integral ein doppeltes Wiener Integral (sh. z. B. Kuo, 2006, S. 150ff.).

Ist f von beschränkter Variation bzw. H von beschränkter Variation im Sinne von Vitali (vgl. z. B. Bischoff und Somayasa, 2009, S. 2173), so können die Integrale aus Definition 7.1.2 als Riemann-Stieltjes Integrale aufgefasst werden. In diesem Fall ergeben sich die angegebenen Definitionen aus der Tatsache, dass Riemann-Stieltjes Integrale im Integrator linear sind.

Wir zitieren das Shepp (1966)-Resultat für den Fall der free Brownian Motion:

Theorem 7.1.3 (Shepp (1966))

Sei $X_{[0,T]}$ ein Gauß-Prozess mit existierender Erwartungswertfunktion m und Kovarianzfunktion R mit $R(0, 0) > 0$. $\xi + B_{[0,T]}$ sei eine free Brownian Motion.

Dann sind $\mathbb{P}^{X_{[0,T]}}$ und $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ genau dann äquivalent, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $m \in C[0, T]$ derart, dass $m = c + s_k$ für ein $c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T])$.

2) Für die Kovarianzfunktion R gelte

$$R(s, t) = \frac{R(0, s) R(0, t)}{R(0, 0)} + \min(s, t) - \int_0^s \int_0^t K(u, v) du dv, \quad s, t \in [0, T], \quad (7.1.1)$$

$$\text{sowie} \quad \frac{1}{\sqrt{R(0, 0)}} [R(0, t) - R(0, 0)] = \int_0^t a(u) du, \quad t \in [0, T], \quad (7.1.2)$$

wobei $K \in L^2([0, T] \times [0, T])$ ein eindeutiger, symmetrischer Kernel ist mit $1 \notin \sigma(K)$ sowie $a \in L^2([0, T])$.

Dabei ist

$$\sigma(K) := \left\{ \lambda \mid \text{Es ex. } f \neq 0 \in L^2 \text{ mit } \int_0^T K(t, u) f(u) du = \lambda f(t), t \in [0, T] \right\}$$

das Spektrum von K .

Sind die beiden Maße äquivalent, so gilt für $\mathbb{P}^{\xi+B[0, T]}$ -fast alle $\mathbb{B} \in C[0, T]$:

$$\frac{d\mathbb{P}^{X[0, T]}}{d\mathbb{P}^{\xi+B[0, T]}}(\mathbb{B}) = \left[R(0, 0) \prod_{\lambda \in \sigma(K)} (1 - \lambda) \right]^{-1/2} \times \exp \left\{ \right. \quad (7.1.3)$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T H(s, t) d\mathbb{B}_m(s) d\mathbb{B}_m(t) \right. \quad (7.1.4)$$

$$\left. - \frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{2R(0, 0)} \int_0^T \int_0^T H(s, t) a(s) a(t) ds dt \right. \quad (7.1.5)$$

$$\left. + \frac{\mathbb{B}_m(0)}{\sqrt{R(0, 0)}} \int_0^T \int_0^T H(s, t) a(s) ds d\mathbb{B}_m(t) \right. \quad (7.1.6)$$

$$\left. - \frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{2R(0, 0)} \int_0^T a(t)^2 dt + \frac{\mathbb{B}_m(0)}{\sqrt{R(0, 0)}} \int_0^T a(t) d\mathbb{B}_m(t) \right. \quad (7.1.7)$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{R(0, 0)} - \mathbb{B}(0)^2 \right] - \frac{\|k\|_{L^2}^2}{2} + \int_0^T k(s) d\mathbb{B}(s) \right\} \quad (7.1.8)$$

Dabei ist $\mathbb{B}_m(t) := \mathbb{B}(t) - m(t)$, $t \in [0, T]$ und H die zu K gehörige Fredholm Resolvente an der Stelle $\lambda = 1$.

BEWEIS Die obige Aussage kann aus Shepp (1966, Theorem 8) hergeleitet werden, wenn man dort $n = 0$ setzt. Sie findet sich aber auch explizit in Bar-David (1975, S. 725). ■

In Satz 6.2.1 wird erstmalig der Kernel eines Slepian- p -Prozesses angegeben. Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar:

Bemerkung 7.1.4 Eine Funktion m erfüllt die Bedingung 1) aus Theorem 7.1.3 genau dann, wenn m im Kernel des Slepian- p -Prozesses liegt, also

$$m \in \mathcal{H}_{\text{Slepian-}p} = \{c + s_k \mid c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T])\}$$

gilt.

Mit Theorem 7.1.3 kann die nachfolgende Äquivalenz bewiesen werden.

Korollar 7.1.5 Seien $T > 0$ und $B_{[0, T]} = (B_t)_{t \in [0, T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung, die von $\xi \sim N(0, 1)$ stochastisch unabhängig ist. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$:

$$\mathbb{P}^{\lambda(\xi + B_{[0, T]})} \text{ ist äquivalent zu } \mathbb{P}^{\xi + B_{[0, T]}} \iff \lambda = \pm 1 .$$

BEWEIS Sei R_λ die Kovarianzfunktion von $\lambda(\xi + B_{[0, T]})$, also

$$R_\lambda(s, t) = \lambda^2 \mathbf{Cov}(\xi + B_s, \xi + B_t) = \lambda^2(1 + \min(s, t)) , \quad s, t \in [0, T].$$

Wegen $\lambda \neq 0$ folgt $R_\lambda(0, 0) = \lambda^2 > 0$, womit die Voraussetzungen von Theorem 7.1.3 erfüllt sind. Weiter gilt:

- 1) Da $\mathbf{E}(\lambda(\xi + B_t)) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ gilt, ist Bedingung 1) aus Theorem 7.1.3 trivialerweise erfüllt.
- 2) Die Forderung (7.1.2) ist stets erfüllt, da für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{R_\lambda(0, 0)}} [R_\lambda(0, t) - R_\lambda(0, 0)] &= \frac{1}{\lambda} [\lambda^2 - \lambda^2] = 0 \\ &= \int_0^t a(u) \, du \quad , \text{ wobei } a(u) := 0 \text{ für } u \in [0, T]. \end{aligned}$$

Forderung (7.1.1) ist genau dann erfüllt, wenn ein symmetrischer Kernel $K_\lambda \in L^2([0, T]^2)$ existiert mit

$$\int_0^s \int_0^t K_\lambda(u, v) \, du \, dv = \frac{R_\lambda(0, s) R_\lambda(0, t)}{R_\lambda(0, 0)} + \min(s, t) - R_\lambda(s, t) . \quad (7.1.9)$$

Für die rechte Seite in (7.1.9) gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{R_\lambda(0, s) R_\lambda(0, t)}{R_\lambda(0, 0)} + \min(s, t) - R_\lambda(s, t) \\ &= \lambda^2 + \min(s, t) - \lambda^2(1 + \min(s, t)) = (1 - \lambda^2) \min(s, t). \end{aligned}$$

Damit kann K_λ in (7.1.9) nur existieren, falls $1 - \lambda^2 = 0$, also $\lambda = \pm 1$, gilt.

Somit aber ist die Behauptung bewiesen. ■

7.1.2 Slepian- p -Prozess und Free Brownian Motion

Es seien in diesem Abschnitt $p > 0$, $0 \leq T \leq p$ sowie $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung, die von $\xi \sim N(0, 1)$ stochastisch unabhängig ist und $W_{[0, T]}^p$ ein Slepian- p -Prozess.

Lemma 7.1.6 Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, gilt:

$$\mathbb{P}^{\lambda W_{[0, T]}^p} \text{ ist zu } \mathbb{P}^{\xi + B_{[0, T]}} \text{ äquivalent} \iff \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für $p = 1$ verwendet Shepp (1966, Formel (16.5)) die Richtung „ \Leftarrow “ aus Lemma 7.1.6. Die in Lemma 7.1.6 angegebene Äquivalenz und die Verallgemeinerung auf $p > 0$ wird erstmalig in dieser Arbeit bewiesen.

BEWEIS (VON LEMMA 7.1.6) Sei zunächst $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, dann gilt: Der Prozess $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p$ hat die Kovarianzfunktion ($s, t \in [0, T]$):

$$R(s, t) := \mathbf{Cov} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_s^p, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_t^p \right) = \frac{1}{2} (p - |t - s|)^+.$$

Wegen $T \leq p$ aber gilt $|t - s| \leq T \leq p$ und damit folgt weiter

$$R(s, t) = \frac{1}{2} (p - |t - s|) \tag{7.1.10}$$

mit $R(0, 0) = \frac{p}{2} > 0$. Weiter gilt für $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p$:

- 1) Der Erwartungswert von $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_t^p$ ist 0 für alle $t \in [0, T]$ und erfüllt damit die Bedingung 1) aus Theorem 7.1.3.
- 2) Auch die Bedingungen aus Theorem 7.1.3 – 2) werden eingehalten, da der symmetrische Kernel K mit

$$K(u, v) := \frac{1}{2p}, \quad u, v \in [0, T],$$

der Gleichung (7.1.1) genügt. Denn für $s, t \in [0, T]$ mit $T \leq p$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{R(0, s) R(0, t)}{R(0, 0)} + \min(s, t) - R(s, t) &= \frac{(p-t)(p-s)}{2p} + \min(s, t) - \frac{p-|t-s|}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{st}{p} - t - s + 2 \min(s, t) + |t-s| \right] \\ &= \frac{st}{2p} = \int_0^s \int_0^t K(u, v) \, du \, dv . \end{aligned}$$

Das Spektrum von K ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma(K) &= \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \text{Es ex. } f \neq 0 \in L^2([0, T]) \text{ mit } \frac{1}{2p} \int_0^T f(u) \, du = \beta f(t), t \in [0, T] \right\} \\ &= \left\{ \beta \in \mathbb{R} \mid \text{Es ex. } c \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \frac{1}{2p} Tc = \beta c \right\} = \left\{ \frac{T}{2p} \right\} \end{aligned}$$

mit $1 \notin \sigma(K)$, da nach Voraussetzung $T \leq p$ ist.

Die Funktion $a \in L^2([0, T])$ mit $a(u) := -\frac{1}{\sqrt{2p}}$ erfüllt die Gleichung (7.1.2), da

$$\frac{1}{\sqrt{R(0, 0)}} [R(0, t) - R(0, 0)] = \sqrt{\frac{2}{p}} \left[\frac{p-t}{2} - \frac{p}{2} \right] = \int_0^t a(u) \, du .$$

Damit folgt mit Theorem 7.1.3, dass

$$\mathbb{P}^{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}^{\xi+B_{[0, T]}} \quad \text{äquivalent sind.} \quad (7.1.11)$$

Sei nun $\lambda \notin \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Dann gilt für $M \subseteq C([0, T])$ mit M ist in der Borelschen σ -Algebra von $C([0, T])$ enthalten (i.Z. $M \in \mathcal{B}(C([0, T]))$):

$$\mathbb{P}(\lambda W_{[0, T]}^p \in M) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p \in \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} M\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} M} \varphi \, d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0, T]}} ,$$

wobei φ die Radon-Nikodym Dichte $\frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p}}{d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0, T]}}}$ ist. Diese existiert wegen der Äquivalenz von $\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}} W_{[0, T]}^p}$ und $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0, T]}}$ (sh. (7.1.11)). Anwendung des elementaren Transformationssatzes ergibt, dass der obige Ausdruck übereinstimmt mit:

$$\int_M \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} g\right) \mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0, T]})}(dg) .$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{P}^{\lambda W_{[0,T]}^p}$ bzgl. $\mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0,T]})}$ absolutstetig ist. Da $\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}$ und $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ äquivalent sind, folgt mit analoger Argumentation, dass auch $\mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0,T]})}$ bzgl. $\mathbb{P}^{\lambda W_{[0,T]}^p}$ absolutstetig ist und damit, dass

$$\mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0,T]})} \text{ zu } \mathbb{P}^{\lambda W_{[0,T]}^p} \text{ äquivalent ist.} \quad (7.1.12)$$

$\mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0,T]})}$ ist aber nach Korollar 7.1.5 nicht zu $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ äquivalent, da $\lambda \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Folglich existiert ein $M \in \mathcal{B}(C([0, T]))$ mit

$$\mathbb{P}^{\sqrt{2}\lambda(\xi+B_{[0,T]})}(M) = 0 \text{ und } \mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}(M) \neq 0.$$

Wegen (7.1.12) gilt aber $\mathbb{P}^{\lambda(W_{[0,T]}^p)}(M) = 0$ und damit: $\mathbb{P}^{\lambda W_{[0,T]}^p}$ ist nicht zu $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ äquivalent. ■

Es seien im Nachfolgenden $p > 0$, $0 < T \leq p$ und $m = c + s_k$ mit $c \in \mathbb{R}$, $k \in L^2([0, T])$ sowie

$$W_{[0,T]}^p := (W_t^p + m(t))_{t \in [0, T]} \quad (7.1.13)$$

ein Slepian- p -Prozess mit Erwartungswertfunktion m . Mit Hilfe von Lemma 7.1.6 können wir den nachfolgenden Satz 7.1.7 beweisen. Die Aussage dieses Satzes ist für den Spezialfall $p = 1, m \equiv 0$ in der Literatur bekannt (sh. Beispiel 7.1.8). Die allgemeinere Version aus Satz 7.1.7 ist unseres Wissens nach neu.

Satz 7.1.7

$\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}$ ist zu $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ äquivalent und für $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ -fast alle $\mathbb{B} \in C([0, T])$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}}{d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}(\mathbb{B}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ \frac{\mathbb{B}(0)^2}{2} - \frac{[\mathbb{B}_{m/\sqrt{2}}(T) + \mathbb{B}_{m/\sqrt{2}}(0)]^2}{2(2p-T)} - \frac{\|k\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k(s) d\mathbb{B}(s) \right\}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{B}_{m/\sqrt{2}}(t) := \mathbb{B}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}m(t), t \in [0, T]$.

BEWEIS Der Prozess $\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p$ hat die Erwartungswertfunktion $\mathfrak{m} := \frac{1}{\sqrt{2}}m$. Nach Voraussetzung erfüllt \mathfrak{m} die Bedingung 1) aus Theorem 7.1.3 und somit folgt die Äquivalenz von $\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}$ und $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ aus Theorem 7.1.3 und Lemma 7.1.6.

Um die Dichte aus Theorem 7.1.3 explizit angeben zu können, müssen wir noch die zum Kernel $K \in L^2([0, T]^2)$ gehörige Fredholm Resolvente H an der Stelle $\lambda = 1$ berechnen. Aus dem Beweis zu Lemma 7.1.6 erhalten wir: $K \equiv \frac{1}{2p}$.

Um H zu berechnen, folgen wir den in Jerri (1999, S. 253) vorgeschlagenen Weg, wozu wir auch die dortige Notation verwenden. Sei $C_0 := 1$, $D_0(s, t) := K(s, t) = \frac{1}{2p}$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$C_n := \int_0^T D_{n-1}(s, s) ds$$

sowie

$$D_n(s, t) := C_n K(s, t) - n \int_0^T K(s, z) D_{n-1}(z, t) dz.$$

In unserem Fall gilt damit: $C_1 = \frac{T}{2p}$ sowie $D_1(s, t) = \frac{T}{4p^2} - \frac{T}{4p^2} = 0$, woraus $C_n = 0$ und $D_n \equiv 0$ für alle $n \geq 2$ folgt. Damit ist die gesuchte Fredholm Resolvente gegeben durch:

$$H(s, t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} D_n(s, t)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n} = \frac{1/2p}{1 - T/2p} = \frac{1}{2p - T} \quad \text{für alle } s, t \in [0, T]. \quad (7.1.14)$$

Anmerkung: Der Nenner in (7.1.14) kann aufgrund der Voraussetzung $T \leq p$ nicht 0 werden. Wir berechnen nun die in Satz 7.1.7 dargestellte Dichte. Dazu verwenden wir insbesondere $\mathbb{B}_m(t) := \mathbb{B}(t) - m(t) = \mathbb{B}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$, $t \in [0, T]$, und (vgl. Lemma 7.1.6)

$$R(0, 0) = \frac{p}{2}, \quad H \equiv \frac{1}{2p - T}, \quad a \equiv -\frac{1}{\sqrt{2p}}$$

und berechnen die in Theorem 7.1.3 dargestellten Ausdrücke für unseren Fall (Nummern beziehen sich auf Theorem 7.1.3):

$$(7.1.3): \left[R(0, 0) \prod_{\lambda \in \sigma(K)} (1 - \lambda) \right]^{-1/2} = \left[\frac{p}{2} \left(1 - \frac{T}{2p} \right) \right]^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{2p-T}}$$

$$(7.1.4): -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T H(s, t) d\mathbb{B}_m(s) d\mathbb{B}_m(t) = -\frac{1}{2(2p-T)} [\mathbb{B}_m(T) - \mathbb{B}_m(0)]^2$$

$$(7.1.5): -\frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{2R(0,0)} \int_0^T \int_0^T H(s, t) a(s) a(t) ds dt = -\frac{T^2}{2p^2(2p-T)} \mathbb{B}_m(0)^2$$

$$(7.1.6): +\frac{\mathbb{B}_m(0)}{\sqrt{R(0,0)}} \int_0^T \int_0^T H(s, t) a(s) ds d\mathbb{B}_m(t) = -\frac{T}{p(2p-T)} \mathbb{B}_m(0) (\mathbb{B}_m(T) - \mathbb{B}_m(0))$$

$$(7.1.7): -\frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{2R(0,0)} \int_0^T a(t)^2 dt + \frac{\mathbb{B}_m(0)}{\sqrt{R(0,0)}} \int_0^T a(t) d\mathbb{B}_m(t) = -\frac{T}{2p^2} \mathbb{B}_m(0)^2 - \frac{1}{p} \mathbb{B}_m(0) (\mathbb{B}_m(T) - \mathbb{B}_m(0))$$

$$(7.1.8): -\frac{1}{2} \frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{R(0,0)} = -\frac{\mathbb{B}_m(0)^2}{p} \quad \text{und wegen } m = c + s_k \text{ ist } \frac{1}{\sqrt{2}}m = \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}s_k = \frac{c}{\sqrt{2}} + s \frac{1}{\sqrt{2}}k, \text{ womit der zweite Teil in (7.1.8) gegeben ist durch:}$$

$$\frac{1}{2} \mathbb{B}(0)^2 - \frac{\| \frac{1}{\sqrt{2}}k \|_{L^2}^2}{2} + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} k(s) d\mathbb{B}(s) = \frac{\mathbb{B}(0)^2}{2} - \frac{\|k\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k(s) d\mathbb{B}(s).$$

Addiert man die obigen Ausdrücke aus (7.1.5)–(7.1.7) und die erste Zeile von (7.1.8), so ergibt sich mit $b_t := \mathbb{B}_m(t) = \mathbb{B}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$ für $t \in \{0, T\}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{T^2}{2p^2(2p-T)}b_0^2 - \frac{T}{p(2p-T)}b_0(b_T - b_0) - \frac{T}{2p^2}b_0^2 - \frac{1}{p}b_0(b_T - b_0) \\ & = \frac{1}{2p^2(2p-T)} \left[T(2p-T)b_0^2 - 2pTb_0b_T - T(2p-T)b_0^2 - 4p^2b_0b_T + 2pTb_0b_T \right] \\ & = -\frac{4}{2(2p-T)}\mathbb{B}_m(0)\mathbb{B}_m(T). \end{aligned}$$

Setzt man nun die obigen Resultate in die Dichte aus Theorem 7.1.3 ein, so erhält man für $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ -fast alle $\mathbb{B} \in C[0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}}{d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}(\mathbb{B}) &= \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(2p-T)} [\mathbb{B}_m(T) - \mathbb{B}_m(0)]^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{2(2p-T)}\mathbb{B}_m(0)\mathbb{B}_m(T) + \frac{\mathbb{B}(0)^2}{2} - \frac{\|k\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k(s) d\mathbb{B}(s) \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ \frac{\mathbb{B}(0)^2}{2} - \frac{[\mathbb{B}_m(T) + \mathbb{B}_m(0)]^2}{2(2p-T)} - \frac{\|k\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k(s) d\mathbb{B}(s) \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 7.1.7 vollständig bewiesen. ■

Aus Satz 7.1.7 folgt im Fall $p = 1$, $m \equiv 0$:

Beispiel 7.1.8 *Im Falle $0 < T \leq 1$, gilt für einen Slepian-Prozess $W_{[0,T]}^1 = (W_t^1)_{t \in [0,T]}$:*

$$\frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^1}}{d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}(g) = \frac{2}{\sqrt{2-T}} \exp \left\{ \frac{g(0)^2}{2} - \frac{[g(T) + g(0)]^2}{2(2-T)} \right\}$$

für $\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}$ -fast alle $g \in C([0, T])$.

Diese Formel gibt auch Shepp (1966, Formel (16.5)) als ein Beispiel an.

7.1.3 Bester α -Niveau Test für allgemeine Alternativen

Soweit uns bekannt ist, wird erstmalig im Zuge der vorliegenden Arbeit ein bester α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse studiert. Wir geben einen solchen im nachfolgenden Satz 7.1.9 an:

Satz 7.1.9 (Bester α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse)

Es seien $p > 0$, $0 < T \leq p$ und $W_{[0,T]}^p = (W_t^p)_{t \in [0,T]}$ ein Slepian- p -Prozess. Wir betrachten für $W_{[0,T]}^p = m + W_{[0,T]}^p$ mit $m \in \mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$ die Hypothesen

$$H_0 : m \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : m = m_0, \quad (7.1.15)$$

wobei $m_0 = c_0 + s_{k_0}$ mit $c_0 \in \mathbb{R}$, $k_0 \in BV([0, T])$ bekannt.

Dann ist die Teststatistik des besten α -Niveau Tests, $\alpha \in (0, 1)$, gegeben durch:

$$\mathbb{T}(W_{[0,T]}^p | c_0, k_0) := \frac{2c_0 + s_{k_0}(T)}{2p - T} [W_0^p + W_T^p] + \int_0^T k_0(t) dW_t^p.$$

Das auftretende Integral ist dabei vom Riemann-Stieltjes-Typ. Die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : m \equiv 0 \text{ ab} \iff \mathbb{T}(W_{[0,T]}^p | c_0, k_0) > u_{1-\alpha;p}$$

führt zu diesem besten α -Niveau Test. Dabei ist $u_{1-\alpha;p} \in \mathbb{R}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\mathbb{T}(W_{[0,T]}^p | c_0, k_0)$ ⁶. $u_{1-\alpha;p}$ ist von den Parametern α , p , T und c_0 sowie von der Funktion k_0 abhängig.

BEWEIS Wir betrachten die zu (7.1.15) äquivalenten Hypothesen

$$H'_0 : \frac{1}{\sqrt{2}}m \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H'_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}m = \frac{1}{\sqrt{2}}m_0 \quad (7.1.16)$$

mit $\frac{1}{\sqrt{2}}m_0 \in \mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$. Nach Satz 7.1.7 existieren für $\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p$ sowohl unter H'_0 als auch unter H'_1 $\mathbb{P}^{\xi+B[0,T]}$ -Dichten. Das Neyman-Pearson Lemma zur Konstruktion eines besten α -Niveau Tests (siehe bspw. Lehmann und Romano 2005, S.60) ist demnach anwendbar. Da $k_0 \in BV([0, T])$, kann das in Satz 7.1.7 auftretende Integral als Riemann-Stieltjes Integrale aufgefasst werden. Damit folgt für $\mathbb{P}^{\xi+B[0,T]}$ -fast alle $g \in C([0, T])$:

$$\frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W_{[0,T]}^p}}{d\mathbb{P}^{\xi+B[0,T]}}(g) = \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ \frac{g(0)^2}{2} - \frac{[g(T) + g(0)]^2}{2(2p-T)} \right\}$$

⁶Man beachte, dass hier $W_{[0,T]}^p$ anstatt $W_{[0,T]}^p$ steht.

und andererseits mit $g_{m_0}(t) := g(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}m_0(t)$, $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(m_0+W^p)_{[0,T]}}}{d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}(g) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ \frac{g(0)^2}{2} - \frac{[g_{m_0}(T) + g_{m_0}(0)]^2}{2(2p-T)} - \frac{\|k_0\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k_0(t) dg(t) \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2p-T}} \exp \left\{ \frac{g(0)^2}{2} - \frac{[g(T) + g(0)]^2}{2(2p-T)} - \frac{[m_0(T) + m_0(0)]^2}{4(2p-T)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{[g(T) + g(0)] \cdot [m_0(T) + m_0(0)]}{\sqrt{2}(2p-T)} - \frac{\|k_0\|_{L^2}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k_0(t) dg(t) \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Likelihoodquotienten:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(W^p+m_0)_{[0,T]}}}{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W^p_{[0,T]}}}(g) = \frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(W^p+m_0)_{[0,T]}} / d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W^p_{[0,T]}} / d\mathbb{P}^{\xi+B_{[0,T]}}}(g) = \\ &= \exp \left\{ \frac{2c_0 + s_{k_0}(T)}{\sqrt{2}(2p-T)} [g(0) + g(T)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T k_0(t) dg(t) - \frac{[2c_0 + s_{k_0}(T)]^2}{4(2p-T)} - \frac{\|k_0\|_{L^2}^2}{4} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{2c_0 + s_{k_0}(T)}{2(2p-T)} [\mathbb{W}_0^p + \mathbb{W}_T^p] + \frac{1}{2} \int_0^T k_0(t) d\mathbb{W}_t^p - \frac{[2c_0 + s_{k_0}(T)]^2}{4(2p-T)} - \frac{\|k_0\|_{L^2}^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen $g = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{W}_{[0,T]}^p$ eingesetzt wurde. Folglich gilt für eine Konstante $\tilde{u}_{1-\alpha;p} > 0$:

$$\frac{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(W^p+m_0)_{[0,T]}}}{d\mathbb{P}^{\frac{1}{\sqrt{2}}W^p_{[0,T]}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{W}_{[0,T]}^p\right) > \tilde{u}_{1-\alpha;p}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \frac{2c_0 + s_{k_0}(T)}{2p-T} [\mathbb{W}_0^p + \mathbb{W}_T^p] + \int_0^T k_0(t) d\mathbb{W}_t^p \\ & > 2 \ln(\tilde{u}_{1-\alpha;p}) + \frac{[2c_0 + s_{k_0}(T)]^2}{2(2p-T)} + \frac{\|k_0\|_{L^2}^2}{2} =: u_{1-\alpha;p}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Entscheidungsregel aus Satz 7.1.9, womit derselbige bewiesen ist. \blacksquare

7.1.4 Gleichmäßig bester α -Niveau Test für Alternative $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$

Es seien $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ das asymptotische Regressionsmodell mit $f \in L^2([0,1])$ und $p \in (0,1]$. Ist Δ^p der Operator aus (4.2.4) mit $\Delta^p Y_{[0,1]} = (Y_{t+p} - Y_t)_{t \in [0,1-p]}$, so gilt:

$$\Delta^p Y_{[0,1]} = \Delta^p s_f + \Delta^p B_{[0,1]}$$

ist ein Slepian- p -Prozess mit Pfaden in $C([0,1-p])$ und Erwartungswertfunktion $\Delta^p s_f$. Wir betrachten in diesem Abschnitt den Spezialfall, dass unter der Alternative H_1 die Regressionsfunktion von der Gestalt $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\mu > 0$ und $\theta \in [0,1)$ ist. Für diese Situation berechnen wir erstmalig einen gleichmäßig besten α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse. Diesen Test (bzw. dessen Güte) verwenden wir anschließend, um die Güte des besten Tests für Slepian- p -Prozesse mit der Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests aus Abschnitt 4.3 zu vergleichen.

Um die Hypothesen bei Vorliegen von Slepian- p -Prozessen näher zu präzisieren, benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 7.1.10 *Es seien $p \in (0,1]$ und $f = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ mit $\theta \in [0,1)$. Dann gilt mit $k := \mathbf{1}_{((\theta-p)^+, \min(\theta,1-p)]}$:*

$$\Delta^p s_f(t) = (p - \theta)^+ + s_k(t), \quad t \in [0,1-p].$$

BEWEIS (VON LEMMA 7.1.10) Nach Satz 6.2.1 gilt für $t \in [0,1-p]$:

$$\Delta^p s_f(t) = s_f(p) + s_{\Delta^p f}(t).$$

Wegen $s_f(p) = (p - \theta)^+$ und

$$\Delta^p f(t) = \mathbf{1}_{(\theta,1]}(t+p) - \mathbf{1}_{(\theta,1]}(t) = \mathbf{1}_{((\theta-p)^+, \min(\theta,1-p)]}(t), \quad t \in [0,1-p],$$

folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 7.1.11 *Für die Funktion k aus Lemma 7.1.10 gilt:*

$$k(t) = \mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]}(t) \quad \text{für } t \in [0,1-p].$$

Im Nachfolgenden betrachten wir k ausschließlich auf $[0,1-p]$. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir daher im weiteren Verlauf dieser Arbeit $k = \mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]}$ anstatt $k = \mathbf{1}_{((\theta-p)^+, \min(\theta,1-p)]}$.

Damit können wir nun die Hypothesen formal angeben: Wir betrachten im Nachfolgenden für $\Delta^p Y_{[0,1]} = \Delta^p s_f + \Delta^p B_{[0,1]}$, $p \in (0, 1]$, das Testproblem

$$H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{es ex. ein } \mu > 0 \text{ mit } \Delta^p s_f = \mu [(p - \theta)^+ + s_k].$$

Dabei ist $k := \mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]}$ und $\theta \in (0, 1]$. Nachfolgend geben wir für diese Hypothesen im Falle $p \geq \frac{1}{2}$ einen gleichmäßig besten α -Niveau Test an.

Teststatistik und Entscheidungsregel

Um die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese zu bestimmen, wird sich das nachfolgende Lemma als hilfreich erweisen:

Lemma 7.1.12 *Es seien $p > 0$, $W^p = (B_{t+p} - B_t)_{t \geq 0}$ ein Slepian- p -Prozess und c_1, c_2, c_3 reelle Konstanten sowie $0 < t < T$. Dann ist*

$$c_1 W_0^p + c_2 W_t^p + c_3 W_T^p \sim N(0, \sigma^2),$$

wobei $\sigma^2 = 2c_2 [c_3 (t - \min(T, t+p)) - c_1 \min(p, t)] - 2c_3 c_1 \min(T, p) + (c_1 + c_2 + c_3)^2 p$.

BEWEIS Es gilt:

$$\begin{aligned} \eta &:= c_1 W_0^p + c_2 W_t^p + c_3 W_T^p = c_1 B_p + c_2 (B_{t+p} - B_t) + c_3 (B_{T+p} - B_T) \\ &= (-c_2, -c_3, c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} B_t & B_T & B_p & B_{t+p} & B_{T+p} \end{pmatrix}^\top. \end{aligned}$$

Für den letzten Vektor gilt $(B_t, B_T, B_p, B_{t+p}, B_{T+p})^\top \sim N_5(\mathbf{0}, \Sigma)$, wobei

$$\Sigma := \begin{pmatrix} t & t & \min(p, t) & t & t \\ t & T & \min(p, T) & \min(T, t+p) & T \\ \min(p, t) & \min(p, T) & p & p & p \\ t & \min(t+p, T) & p & t+p & t+p \\ t & T & p & t+p & T+p \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt: η ist normalverteilt mit $\mathbf{E}(\eta) = 0$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\eta) &= (-c_2, -c_3, c_1, c_2, c_3) \Sigma (-c_2, -c_3, c_1, c_2, c_3)^\top \\ &= 2c_2 [c_3 (t - \min(T, t+p)) - c_1 \min(p, t)] - 2c_3 c_1 \min(T, p) + (c_1 + c_2 + c_3)^2 p. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Dabei ergibt sich der Ausdruck in (7.1.17) durch elementare Umformungen, womit Lemma 7.1.12 bewiesen ist. \blacksquare

Zur Konstruktion des besten α -Niveau Tests verwenden wir Satz 7.1.9. Dort wird ein Slepian- p -Prozess mit Pfaden in $C([0, T])$, $T > 0$, betrachtet. In der nun vorliegenden Situation hat $\Delta^p Y_{[0,1]}$ Pfade in $C([0, 1-p])$, so dass $T = 1-p$ gilt. Die in Satz 7.1.9 angegebene Forderung $T \leq p$ führt folglich im Falle $T = 1-p$ dazu, dass $p \geq \frac{1}{2}$ erfüllt sein muss. Im nachfolgenden Satz wird daher „ $p \geq \frac{1}{2}$ “ als Voraussetzung angenommen.

Satz 7.1.13 (Gleichmäßig bester Slepian- p -Test bei Alternative $f = \mathbf{1}_{(\theta,1]}$)

Es seien $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$ mit $f \in L^2([0, 1])$ das asymptotische Regressionsmodell. Weiter sei

$$\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p := \Delta^p Y_{[0,1]} = \Delta^p s_f + \Delta^p B_{[0,1]}.$$

Ein gleichmäßig bester α -Niveau Test für

$$H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Delta^p s_f = \mu(p-\theta)^+ + \mu s_{\mathbf{1}_{(\theta-p,\theta]}} \quad \text{für ein } \mu > 0 \quad (7.1.18)$$

ist gegeben durch:

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{\mathbb{T}}_\theta \left(\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p \right) > z_{1-\alpha}.$$

Dabei ist für $g \in C([0, 1-p])$

$$\tilde{\mathbb{T}}_\theta(g) := \frac{1}{\sqrt{2(3p-1)}} \times \begin{cases} (1-\theta)g(0) & -(3p-1)g(\theta-p) & +(3p-\theta)g(1-p) & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 2(1-p-\theta)g(0) & & +2(2p-\theta)g(1-p) & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ (1-p-\theta)g(0) & +(3p-1)g(\theta) & +(2p-\theta)g(1-p) & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p] \end{cases}$$

und

$$\tilde{\sigma}_\theta^2 := \begin{cases} (1-\theta)(3p-\theta) & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 4\theta^2 - 2p^2 - 4\theta + 6p - 4p\theta & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ \theta^2 + 4p^2 - \theta - p\theta & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p] \end{cases}.$$

BEWEIS Wir betrachten zunächst für festes $\mu_0 > 0$ die einfachen Hypothesen

$$H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Delta^p s_f = \mu_0(p-\theta)^+ + \mu_0 s_{\mathbf{1}_{(\theta-p,\theta]}}. \quad (7.1.19)$$

Dann ist nach Satz 7.1.9 die Entscheidungsregel für einen besten α -Niveau Test gegeben durch:

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \mathbb{T}_\theta := \mathbb{T} \left(\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p | \mu_0(p-\theta)^+, \mu_0 \mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]} \right) > u_{1-\alpha;p} . \quad (7.1.20)$$

Dabei ist

$$\mathbb{T}_\theta = \underbrace{\frac{2\mu_0(p-\theta)^+ + \mu_0 s_{\mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]}}(1-p)}{3p-1}}_{=: c_\theta} \left[\mathbb{W}_0^p + \mathbb{W}_{1-p}^p \right] + \mu_0 \int_0^{1-p} \mathbf{1}_{(\theta-p, \theta]}(t) d\mathbb{W}_t^p .$$

Es gilt wegen $1-p \leq p$:

$$c_\theta = \frac{\mu_0}{3p-1} \begin{cases} 1-\theta & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 1+p-2\theta & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ 2p-\theta & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} .$$

Weiter folgt für \mathbb{T}_θ :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\theta &= c_\theta \left[\mathbb{W}_0^p + \mathbb{W}_{1-p}^p \right] + \mu_0 \left[\mathbb{W}^p(\min(\theta, 1-p)) - \mathbb{W}^p((\theta-p)^+) \right] \\ &= \begin{cases} c_\theta \mathbb{W}_0^p - \mu_0 \mathbb{W}_{\theta-p}^p + (c_\theta + \mu_0) \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ (c_\theta - \mu_0) \mathbb{W}_0^p + (c_\theta + \mu_0) \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ (c_\theta - \mu_0) \mathbb{W}_0^p + \mu_0 \mathbb{W}_\theta^p + c_\theta \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} \\ &= \frac{\mu_0}{3p-1} \begin{cases} (1-\theta) \mathbb{W}_0^p - (3p-1) \mathbb{W}_{\theta-p}^p + (3p-\theta) \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ (2-2p-2\theta) \mathbb{W}_0^p + 2(2p-\theta) \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ (1-p-\theta) \mathbb{W}_0^p + (3p-1) \mathbb{W}_\theta^p + (2p-\theta) \mathbb{W}_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} . \end{aligned}$$

Unter der Nullhypothese ist $\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p = \Delta^p B_{[0,1]} =: W_{[0,p]}^p$ ein zentrierter Slepian- p -Prozess. Damit folgt für \mathbb{T}_θ unter H_0 :

$$\mathbb{T}_{\theta; H_0} := \frac{\mu_0}{3p-1} \begin{cases} (1-\theta) W_0^p - (3p-1) W_{\theta-p}^p + (3p-\theta) W_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 2(1-p-\theta) W_0^p + 2(2p-\theta) W_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ (1-p-\theta) W_0^p + (3p-1) W_\theta^p + (2p-\theta) W_{1-p}^p & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} .$$

Aus dieser Darstellung aber kann unter Verwendung von Lemma 7.1.12 $\mathbb{T}_{\theta; H_0} \sim N(0, \sigma_\theta^2)$

gefolgert werden, wobei

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 &= \frac{\mu_0^2}{(3p-1)^2} \begin{cases} 2(3p-1)(1-\theta)(3p-\theta) & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 2(3p-1)[4\theta^2 - 2p^2 - 4\theta + 6p - 4p\theta] & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ 2(3p-1)[\theta^2 + 4p^2 - \theta - p\theta] & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} \\ &= \frac{2\mu_0^2}{3p-1} \begin{cases} (1-\theta)(3p-\theta) & , \text{ falls } \theta \in (p, 1) \\ 4\theta^2 - 2p^2 - 4\theta + 6p - 4p\theta & , \text{ falls } \theta \in [1-p, p] \\ \theta^2 + 4p^2 - \theta - p\theta & , \text{ falls } \theta \in [0, 1-p) \end{cases} . \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

σ_θ^2 in der oben genannten Form erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Terme in Lemma 7.1.12 und Durchführung elementarer Umformungen. Für die Varianz σ_θ^2 aus (7.1.21) gilt: $\sigma_\theta^2 > 0$ und somit folgt:

$$\frac{1}{\sigma_\theta} \mathbb{T}_{\theta; H_0} \sim N(0, 1).$$

Damit führt die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{1}{\sigma_\theta} \mathbb{T}_\theta > z_{1-\alpha} \quad (7.1.22)$$

zu einem besten α -Niveau Test für die Hypothesen (7.1.19).

Die Teststatistik $\frac{1}{\sigma_\theta} \mathbb{T}_\theta$ ist von μ_0 unabhängig. Weiterhin ist sie gleich $\frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{\mathbb{T}}_\theta \left(\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p \right)$ aus Satz 7.1.13. Damit folgt, dass die dort angegebene Entscheidungsregel zu einem gleichmäßig besten α -Niveau Test führt. ■

Bemerkung 7.1.14 *Gilt in der Situation von Satz 7.1.13 unter der Alternative $\mu < 0$, so führt die Entscheidungsregel*

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff -\frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{\mathbb{T}}_\theta \left(\mathbb{W}_{[0,1-p]}^p \right) > z_{1-\alpha} .$$

zu einem besten α -Niveau Test.

Testgüte

Für den besten α -Niveau Test aus Satz 7.1.13 kann auch die Gütefunktion explizit berechnet werden:

Satz 7.1.15

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 7.1.13. Weiter sei $f \in L^2([0, 1])$ die wahre Funktion

in $Y_{[0,1]} = s_f + B_{[0,1]}$. Dann ist die Testgüte des gleichmäßig besten α -Niveau Tests aus Satz 7.1.13 gegeben durch:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(W_{[0,1-p]}^p\right) > z_{1-\alpha}\right) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(\Delta^p s_f\right)\right). \quad (7.1.23)$$

BEWEIS Für die Teststatistik aus Satz 7.1.13 gilt:

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(W_{[0,1-p]}^p\right) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(\Delta^p B_{[0,1]}\right) + \frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(\Delta^p s_f\right).$$

Wegen $\frac{1}{\tilde{\sigma}_\theta} \tilde{T}_\theta\left(\Delta^p B_{[0,1]}\right) \sim N(0, 1)$ folgt daraus aber bereits die Behauptung. \blacksquare

In Abbildung 7.1 stellen wir die Güte aus Satz 7.1.15 für den Fall dar, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ die wahre Regressionsfunktion ist. Zu Vergleichszwecken zeichnen wir auch die berechneten Güten des Kolmogorov-Slepian- p -Tests (vgl. Abbildung 4.4) und diejenige des besten Tests für Brownsche Bewegungen aus Kapitel 2.1 (Beispiel 2.1.10) ein. Wir weisen explizit darauf hin, dass der letztgenannte Test von p unabhängig ist. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass zwischen den angegebenen Tests nahezu kein Unterschied besteht, wenn $\theta \in \{0, 0.2\}$ ist. Ist hingegen $\theta \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$, so spielt die Fensterlänge p für die Güte des besten Slepian- p -Tests offensichtlich eine Rolle: je kleiner p , desto größer ist die Güte. Des Weiteren ist festzuhalten, dass für große Werte θ (z. B. $\theta = 0.8$) der Unterschied zwischen dem Kolmogorov-Slepian- p -Test und dem besten Slepian- p -Test beträchtlich ist. Für kleine θ hingegen ist dies nicht so. Aus der Abbildung ist außerdem ersichtlich, dass die Güte des besten Slepian- p -Tests wesentlich stärker auf die Fensterlänge p reagiert als diejenige des Kolmogorov-Slepian- p -Tests.

Abbildung 7.2 zeigt die Situation, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$, $\theta \in (0, 1]$, die wahre Regressionsfunktion ist, aber $f_0 = \mathbf{1}_{(\tau, 1]}$, $\tau \in (0, 1]$, zur Konstruktion der besten Tests herangezogen wird. Aus der Abbildung geht hervor, dass die beiden besten Tests ähnliche Güten aufweisen, falls der Parameter $\theta = \tau$ gewählt wird. Wird allerdings θ falsch gewählt (Bilder außerhalb der Hauptdiagonalen in Abbildung 7.2), so ist im Allgemeinen der beste Slepian- p -Test robuster. Ist demnach der wahre Change-Point τ unbekannt, so empfiehlt es sich, den besten Slepian- p -Test einzusetzen.

Spezialfall $\theta = 0$ (d.h. $f \equiv \mu$)

Wir betrachten im Nachfolgenden den Spezialfall, dass $f \equiv \mu$, $\mu > 0$, unter der Alternative ist. Mit der obigen Notation ist der Change-Point θ damit gleich 0 und die Hypothesen aus

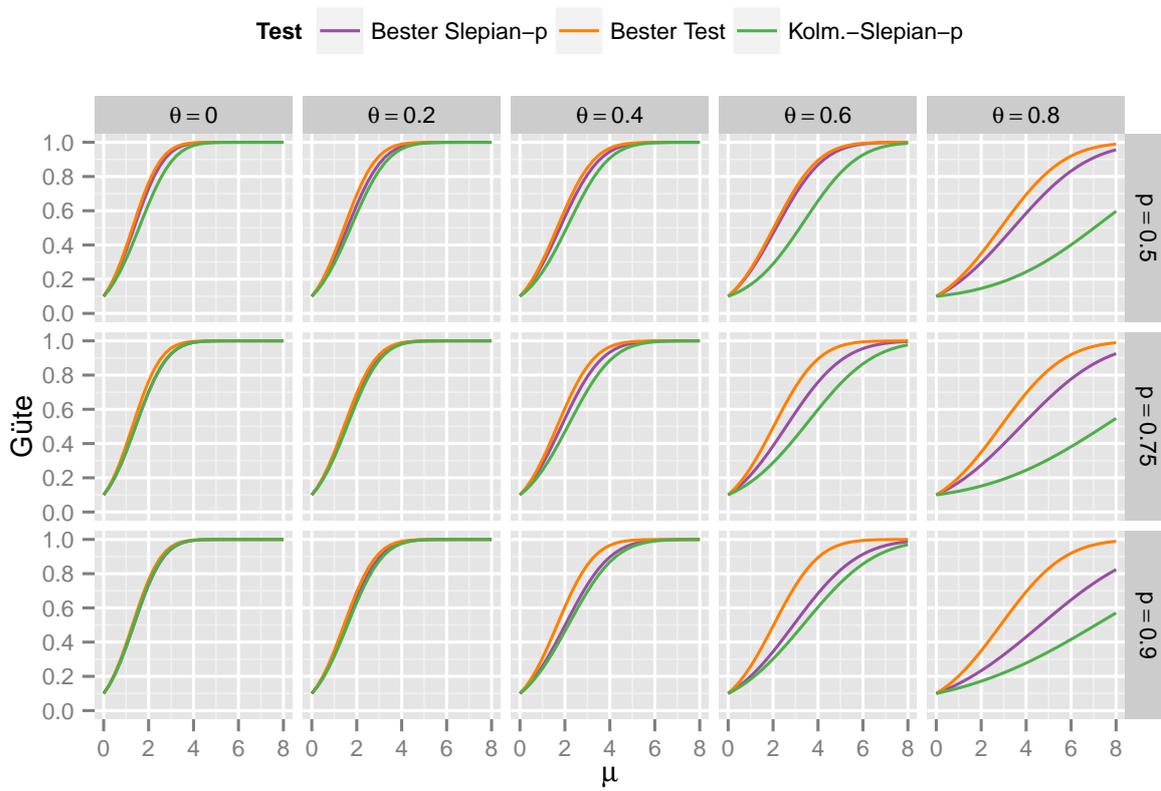


Abbildung 7.1: Gütefunktionen des besten Tests (für Brownsche Bewegungen), des besten Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests bei Vorliegen der Alternative $f_0 = \mu \mathbf{1}_{(\theta,1]}$ (Niveau $\alpha = 0.1$; Berechnungen)

(7.1.18) werden zu

$$H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \Delta^p s_f \equiv \mu \text{ für ein } \mu > 0.$$

Die Entscheidungsregel aus Satz 7.1.13 ist in diesem Fall gegeben durch ($W_{[0,1-p]}^p := \Delta^p Y_{[0,1]} = \Delta^p s_f + \Delta^p B_{[0,1]}$):

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{W_0^p + W_{1-p}^p}{\sqrt{2(3p-1)}} > z_{1-\alpha}. \quad (7.1.24)$$

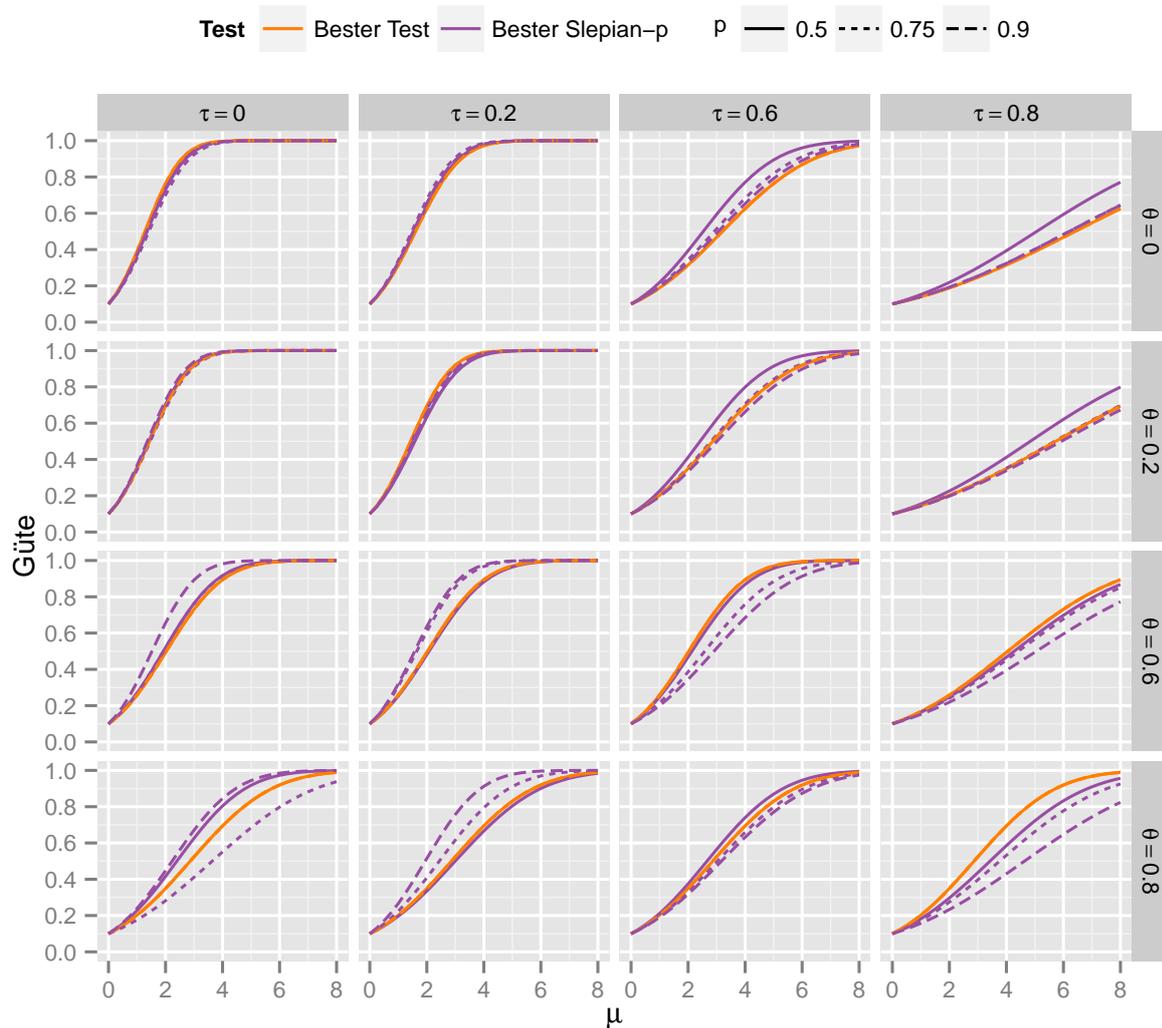


Abbildung 7.2: Güte des besten Tests (für Brownsche Bewegungen) und des besten Slepian- p -Tests für $f_0 = \mathbf{1}_{(\theta, 1]}$ im Falle, dass $f = \mu \mathbf{1}_{(\tau, 1]}$ die wahre Regressionsfunktion ist (Niveau $\alpha = 0.1$; Berechnungen)

Eine der Voraussetzungen in Satz 7.1.13 ist, dass $p \geq \frac{1}{2}$ gelten muss. Fordert man lediglich $p \in (0, 1]$, so gilt für einen Slepian- p -Prozess $W_{[0, 1-p]}^p$ nach Lemma 7.1.12:

$$W^p(0) + W^p(1-p) \sim N(0, 2(p + (2p-1)^+)) ,$$

da

$$\mathbf{Var}(W^p(0) + W^p(1-p)) = -2 \min(p, 1-p) + 4p = 2(p + (2p-1)^+) .$$

Damit führt für $p \in (0, 1]$ die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : \Delta^p s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{W_0^p + W_{1-p}^p}{\sqrt{2(p + (2p - 1)^+)}} > z_{1-\alpha} \quad (7.1.25)$$

zu einem α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$.

Ist $\Delta^p s_f$ die wahre Erwartungswertfunktion von $W_{[0,1-p]}^p$, dann ist die Testgüte gegeben durch:

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{2(p+(2p-1)^+)}} [W_0^p + W_{1-p}^p] > z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\Delta^p s_f(0) + \Delta^p s_f(1-p)}{\sqrt{2(p + (2p - 1)^+)}} \right).$$

Ist $p \geq \frac{1}{2}$, so führt die Entscheidungsregel aus (7.1.25) zu einem gleichmäßig besten α -Niveau Test. Für $p < \frac{1}{2}$ hingegen wird die Güte von derjenigen des Kolmogorov-Slepian- p -Tests dominiert. Wir verdeutlichen dies in Abbildung 7.3, wo wir den Test aus (7.1.25) als *besten** Slepian- p -Test bezeichnen⁷. Für die Güte des Kolmogorov-Slepian- p -Tests aus Abbildung 7.3 greifen wir auf die Simulationsergebnisse aus Abbildung 4.5 zurück.

7.2 Gleichmäßig bester Wiener-Slepian- p -Test

Im Nachfolgenden geben wir einen gleichmäßig besten α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$, für Wiener-Slepian- p -Prozesse an. Hierzu geben wir unter anderem mit Hilfe des verallgemeinerten Cameron-Martin Theorems den Likelihoodquotienten der entsprechenden Dichten in Korollar 7.2.2 explizit an. In einem abschließenden Kapitel 7.2.2 stellen wir dar, wie der beste Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse mit demjenigen für Brownsche Bewegungen zusammenhängt. Da der Wiener-Slepian- p -Prozess erstmalig in der vorliegenden Arbeit auftritt, sind folglich alle in diesem Abschnitt präsentierten Ergebnisse neu.

7.2.1 Teststatistik und Entscheidungsregel

Es seien $p > 0, T > 0$ und $V_{[0,T]}^p = (V_t^p)_{t \in [0,T]}$ ein Wiener-Slepian- p -Prozess und

$$\mathbb{V}_{[0,T]}^p := m + V_{[0,T]}^p$$

mit $m \in \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{H} = \{s_f \mid f \in L^2([0, T])\}$ der Kernel von $V_{[0,T]}^p$ ist (vgl. Satz 6.2.4). Wir

⁷Der Stern „*“ soll dabei verdeutlichen, dass der Test nur im Falle $p \geq \frac{1}{2}$ eine beste Güte liefert.

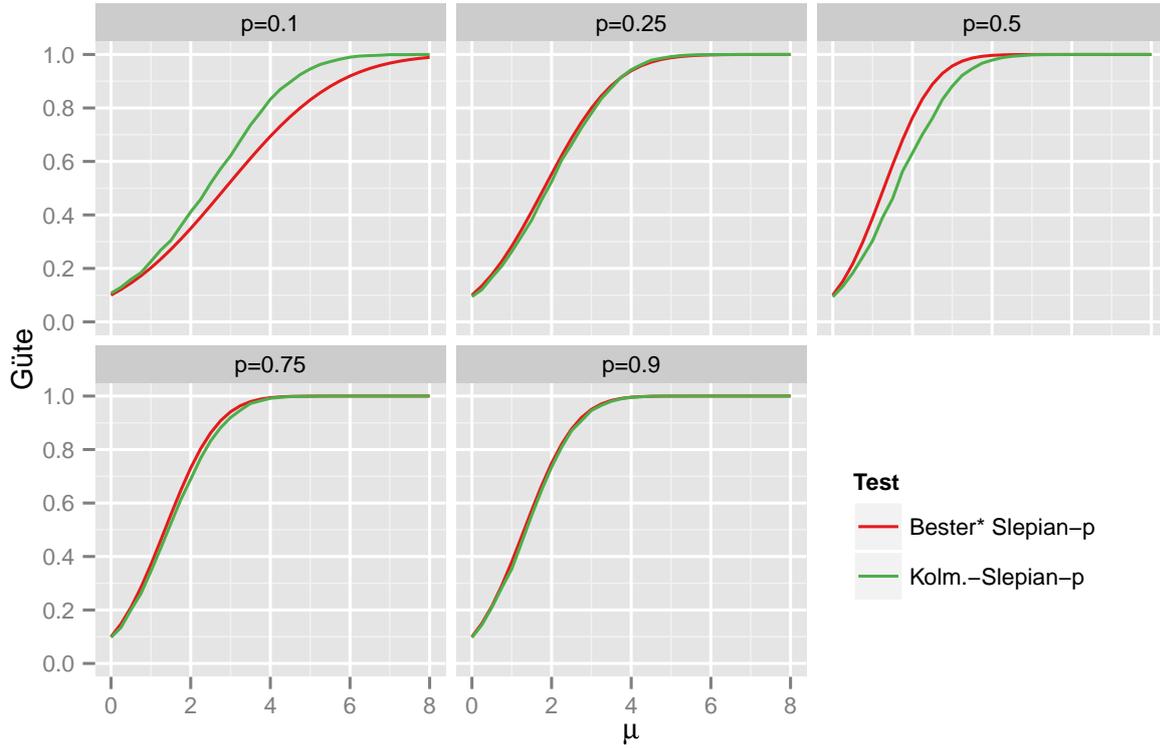


Abbildung 7.3: Gütefunktionen des besten* Slepian- p -Tests und des Kolmogorov-Slepian- p -Tests für $p \in (0, 1]$ bei Vorliegen der Alternative $f \equiv \mu p$ (Niveau $\alpha = 0.1$; beim besten* Test Berechnungen, bei Kolmogorov-Slepian- p Simulationen)

betrachten für $V_{[0,T]}^p$ die Hypothesen

$$H_0 : m \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : m = m_0, \quad (7.2.1)$$

wobei $m_0 = s_{k_0} \in \mathcal{H}$ mit $k_0 \in L^2([0, T])$ bekannt ist. Den angekündigten besten α -Niveau Test konstruieren wir mit Hilfe des Neyman-Pearson Lemmas, wozu wir den Likelihoodquotienten aus dem verallgemeinerten Cameron-Martin Theorem (Satz 6.1.2) verwenden:

$$\frac{d\mathbb{P}_{[0,T]}^{V_{[0,T]}^p + m_0}}{d\mathbb{P}_{[0,T]}^{V_{[0,T]}^p}}(g) = \exp\left(z(g) - \frac{1}{2}\|m_0\|_{\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl-}p}}^2\right) \quad \text{für } \mathbb{P}_{[0,T]}^{V_{[0,T]}^p}\text{-fast alle } g \in C([0, T]). \quad (7.2.2)$$

Dabei ist $z : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$ ein noch zu bestimmendes Funktional und $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\text{Wiener-Sl-}p}}$ die in Satz 6.2.4 angegebene Norm auf dem Kernel des Wiener-Slepian- p -Prozesses. Diese ist für

obiges m_0 gegeben durch:

$$\|m_0\|_{\mathcal{H}_{\text{Wiener-SI-}p}} = \|(D^p)^{-1}k_0\|_{L^2}. \quad (7.2.3)$$

Wir charakterisieren z im nachfolgenden Lemma 7.2.1 näher:

Lemma 7.2.1 *Es seien $p > 0, T > 0$ und $V_{[0,T]}^p$ ein Wiener-Slepian- p -Prozess sowie $k_0 \in BV([0, T])$. Dann erfüllt das Funktional $z : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$z(g) = \begin{cases} \int_0^T (D^p)^{-1}k_0 d(D^p)^{-1}g & , \text{ falls } g(0) = 0 \\ 0 & , \text{ falls } g(0) \neq 0 \end{cases}, \quad g \in C([0, T]), \quad (7.2.4)$$

die folgenden Bedingungen:

i) z ist stetig und linear,

ii) $\mathbf{E} \left(V_t^p \cdot z(V_{[0,T]}^p) \right) = s_{k_0}(t), \quad t \in [0, T]$.

Das Integral ist dabei im Riemann-Stieltjes Sinne zu verstehen.

BEWEIS Nach Lemma 6.2.3 a) ist $(D^p)^{-1}k_0 \in BV([0, T])$ und für $g(0) = 0$ ist nach Lemma 6.2.3 b) $(D^p)^{-1}g$ stetig. Damit ist das im Falle $g(0) = 0$ auftretende Integral im Riemann-Stieltjes Sinne wohldefiniert.

Die Behauptung i) folgt unmittelbar aufgrund der Definition von z .

Um ii) einzusehen verwenden wir, dass $V_{[0,T]}^p$ dieselbe Verteilung besitzt wie $D^p B_{[0,T]} = (B_t - B_{(t-p)^+})_{t \in [0, T]}$. Damit gilt für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(V_t^p \cdot z(V_{[0,T]}^p) \right) &= \mathbf{E} \left((B_t - B_{(t-p)^+}) \cdot \int_0^T (D^p)^{-1}k_0 dB \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^T \mathbf{1}_{[(t-p)^+, t]}(s) dB_s \cdot \int_0^T (D^p)^{-1}k_0(s) dB_s \right). \end{aligned}$$

Mit der Isometrie-Eigenschaft des Wiener-Integrals (sh. z. B. Kuo, 2006, S. 12) folgt weiter:

$$\begin{aligned} &= \int_{(t-p)^+}^t (D^p)^{-1}k_0 d\lambda = s_{(D^p)^{-1}k_0}(t) - s_{(D^p)^{-1}k_0}((t-p)^+) \\ &= D^p s_{(D^p)^{-1}k_0}(t) \stackrel{*}{=} s_{k_0}(t), \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit in \star richtig ist, da

$$D^p s_f = s_{D^p f} \quad \text{für } f \in L^2([0, T])$$

(sh. Satz 6.2.4) gilt. Damit ist Lemma 7.2.1 bewiesen. \blacksquare

Korollar 7.2.2 *Es seien $p > 0$, $T > 0$, $V_{[0, T]}^p$ ein Wiener-Slepian- p -Prozess und $k_0 \in BV([0, T])$. Dann gilt für $\mathbb{P}^{V_{[0, T]}^p}$ -fast alle $g \in C([0, T])$:*

$$\frac{d\mathbb{P}^{V_{[0, T]}^p + s_{k_0}}}{d\mathbb{P}^{V_{[0, T]}^p}}(g) = \exp \left(\int_0^1 (D^p)^{-1} k_0 \, d(D^p)^{-1} g - \frac{1}{2} \|(D^p)^{-1} k_0\|_{L^2}^2 \right).$$

Das Integral ist dabei vom Riemann-Stieltjes Typ.

BEWEIS Das Funktional z aus Lemma 7.2.1 erfüllt die Bedingungen des verallgemeinerten Cameron-Martin Theorems (Satz 6.1.2). Daher folgt die Behauptung, indem man z und die Norm aus (7.2.3) in (7.2.2) einsetzt. \blacksquare

Mit Hilfe des Neyman-Pearson Lemmas lässt sich nun ein gleichmäßig bester α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$, konstruieren:

Satz 7.2.3 (Gleichmäßig bester α -Niveau Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse)

Seien $p > 0, T > 0$ und $V_{[0, T]}^p$ ein Wiener-Slepian- p -Prozess. Wir betrachten für $\mathbb{V}_{[0, T]}^p := m + V_{[0, T]}^p$ mit $m \in \mathcal{H}$ die Hypothesen

$$H_0 : m \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : m = \mu m_0 \quad \text{für ein } \mu > 0,$$

wobei $m_0 \in \mathcal{H}$ mit $m_0 = s_{k_0}$ für $k_0 \in BV[0, T]$ bekannt ist mit $\|k_0\|_{L^2} > 0$.

Weiter seien $\tilde{k}_0 := (D^p)^{-1} k_0$ und $\tilde{\mathbb{V}}_{[0, T]}^p := (D^p)^{-1} \mathbb{V}_{[0, T]}^p$. Dann ist ein gleichmäßig bester α -Niveau Test, $\alpha \in (0, 1)$, gegeben durch:

$$\text{Lehne „}H_0 : m \equiv 0\text{“ ab} \quad \iff \quad \frac{1}{\|\tilde{k}_0\|_{L^2}} \int_0^T \tilde{k}_0(t) \, d\tilde{\mathbb{V}}_t^p > z_{1-\alpha},$$

wobei das Integral vom Riemann-Stieltjes Typ

BEWEIS Nach Lemma 6.2.3 a) bzw. b) ist $\tilde{k}_0 = (D^p)^{-1} k_0$ von beschränkter Variation bzw. $\tilde{\mathbb{V}}_{[0, T]}^p = (D^p)^{-1} \mathbb{V}_{[0, T]}^p$ stetig, da $\mathbb{V}_0^p = 0$ gilt. Daher ist das Integral aus Satz 7.2.3 pfadweise im Riemann-Stieltjes Sinn definiert. Des Weiteren ist $\|\tilde{k}_0\|_{L^2} > 0$, da D^p bijektiv ist und $\|k_0\|_{L^2} > 0$ vorausgesetzt wird.

Wir betrachten zunächst für festes $\mu_0 > 0$ die einfachen Hypothesen

$$H_0 : m \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : m = \mu_0 m_0.$$

Nach dem Neyman-Pearson Lemma ist hierfür ein bester α -Niveau Test gegeben durch die Entscheidungsregel

$$\text{Lehne } H_0 : m \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p + \mu_0 m_0}}{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p}}(V_{[0,T]}^p) > \tilde{u}_{1-\alpha;p}. \quad (7.2.5)$$

Dabei ist $\tilde{u}_{1-\alpha;p} > 0$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil von

$$\frac{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p + \mu_0 m_0}}{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p}}(V_{[0,T]}^p).$$

In Korollar 7.2.2 wird für den Quotienten aus (7.2.5) eine Berechnungsformel angegeben. Mit Hilfe dieser Darstellung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p + \mu_0 m_0}}{d\mathbb{P}^{V_{[0,T]}^p}}(V_{[0,T]}^p) > \tilde{u}_{1-\alpha;p} \\ \iff \frac{1}{\|\mu_0 \tilde{k}_0\|_{L^2}} \int_0^T \mu_0 \tilde{k}_0(t) d\tilde{V}_t^p > \frac{\ln(\tilde{u}_{1-\alpha;p})}{\|\mu_0 \tilde{k}_0\|_{L^2}} + \frac{\|\mu_0 \tilde{k}_0\|_{L^2}}{2} =: \tilde{z}_{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Unter H_0 ist $V_{[0,T]}^p = V_{[0,T]}^p \stackrel{\mathcal{D}}{=} D^p B_{[0,T]}$, wobei $B_{[0,T]} = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist. Damit gilt in diesem Fall für die linke Seite in (7.2.6):

$$\frac{1}{\mu_0 \|\tilde{k}_0\|_{L^2}} \mu_0 \int_0^T \tilde{k}_0(t) d\left((D^p)^{-1} V_{[0,T]}^p\right)(t) \stackrel{H_0}{=} \frac{1}{\|\tilde{k}_0\|_{L^2}} \int_0^T \tilde{k}_0(t) dB_t. \quad (7.2.7)$$

Diese Teststatistik ist nach Lemma 2.1.1 (Eigenschaften des Wiener-Integrals) $N(0, 1)$ -verteilt, womit für den kritischen Wert aus (7.2.6) folgt: $\tilde{z}_{1-\alpha} = z_{1-\alpha}$. Ferner ist diese Statistik von $\mu_0 > 0$ unabhängig, womit die Behauptung bewiesen ist. \blacksquare

7.2.2 Vergleich mit bestem α -Niveau Test für Brownsche Bewegungen

Es seien $T > 0$ und $B_{[0,T]} = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Wir betrachten für $Y_{[0,T]} = s_f + B_{[0,T]}$ mit $f \in L^2([0, T])$ die Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f = s_{f_0}, \quad (7.2.8)$$

wobei $f_0 \in BV([0, T])$ bekannt ist mit $\|f_0\|_{L^2} > 0$.

Nach Satz 2.1.6 (bzw. dessen naheliegende Erweiterung von $[0, 1]$ auf $[0, T]$ in Beispiel 6.1.3) ist ein bester α -Niveau Test für diese Hypothesen gegeben durch:

$$\text{Lehne } H_0 : s_f \equiv 0 \text{ ab} \iff \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^T f_0(t) dY_t > z_{1-\alpha}. \quad (7.2.9)$$

Betrachtet man anstatt $Y_{[0,T]}$ den Prozess $D^p Y_{[0,T]}$, so gilt: $D^p : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}^{[0,T]}$ ist eine bijektive Abbildung mit $D^p s_{f_0} = s_{D^p f_0}$ (vgl. Lemma 6.2.2 und Satz 6.2.4). Daher sind die Hypothesen (7.2.8) äquivalent zu

$$H_0 : D^p s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : D^p s_f = s_{D^p f_0}. \quad (7.2.10)$$

Mit der Notation aus Satz 7.2.3 gilt:

$$\mathbb{V}_{[0,T]}^p = D^p Y_{[0,T]}, \quad k_0 = D^p f_0 \text{ und damit } \tilde{\mathbb{V}}_{[0,T]}^p = Y_{[0,T]}, \quad \tilde{k}_0 = f_0.$$

Die dort angegebene Teststatistik ist folglich gerade

$$\frac{1}{\|\tilde{k}_0\|_{L^2}} \int_0^T \tilde{k}_0(t) d\tilde{\mathbb{V}}_t^p = \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^T f_0(t) dY_t.$$

Dementsprechend führt auch der beste α -Niveau Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse (Satz 7.2.3) zu der Entscheidungsregel des besten α -Niveau Tests für Brownsche Bewegungen aus (7.2.9).

Aus der Äquivalenz der beiden besten Tests kann insbesondere gefolgert werden, dass man bei Betrachtung von $D^p Y_{[0,T]} = (Y_t - Y_{(t-p)^+})_{t \in [0,T]}$ anstatt von $Y_{[0,T]}$ nicht zwingend eine schlechtere Güte erwarten muss. Dies ist allerdings bei $\Delta^p Y_{[0,T]} = (Y_t - Y_{t-p})_{t \in [p,T]}$ aus Abschnitt 7 anders: Der beste α -Niveau Test für Slepian- p -Prozesse hat nämlich eine

schlechtere Güte als derjenige für Brownsche Bewegungen (vgl. etwa Abbildung 7.1).

Nachdem der beste α -Niveau Test für Wiener-Slepian- p -Prozesse im Prinzip mit dem besten α -Niveau Test für Brownsche Bewegungen übereinstimmt, stellen wir an dieser Stelle keine neuen Gütebetrachtungen an und verweisen stattdessen auf Abschnitt 2.1.3 und auf die Abbildungen 7.1 – 7.2.

Teil IV
Anhang

A Beweise zu Kapitel 2

A.1 Einfache Hypothesen und bester α -Niveau Test

Beweis von Satz 2.1.6

Wir betrachten zunächst für $\mu > 0$ fest die einfachen Hypothesen

$$H_0 : s_f \equiv 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : s_f = \mu \cdot s_{f_0} .$$

Sowohl unter der Nullhypothese als auch unter der Alternative existieren $\mathbb{P}^{B[0,1]}$ -Dichten für Y , da:

1. Unter H_0 ist $p_0 : C([0, 1]) \rightarrow [0, \infty)$ mit $p_0(g) = 1$ für $g \in C([0, 1])$ eine $\mathbb{P}^{B[0,1]}$ -Dichte von Y .
2. Unter H_1 (siehe Korollar 2.1.3) ist eine $\mathbb{P}^{B[0,1]}$ -Dichte von Y gegeben durch:

$$p_1(g) := \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mu f_0\|_{L^2}^2 + \mu \int_0^1 f_0 dg\right) \quad \text{für } g \in C[0, 1].$$

Damit existiert nach dem Neyman-Pearson Lemma (sh. z. B. Lehmann und Romano, 2005, S. 60) ein bester α -Niveau Test. Dieser basiert auf dem Quotienten p_1/p_0 und hat die Entscheidungsregel:

$$\text{Lehne } H_0 \text{ ab} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{p_1(Y)}{p_0(Y)} \stackrel{(*)}{=} p_1(Y) > k_{1-\alpha}. \quad (\text{A.1.1})$$

In $(*)$ wird dabei ausgenutzt, dass $p_0 \equiv 1$ ist. $k_{1-\alpha} > 0$ ist das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $p_1(B)$. Es gilt:

$$p_1(Y) > k_{1-\alpha} \Longleftrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mu f_0\|_{L^2}^2 + \mu \int_0^1 f_0 dY\right) > k_{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|\mu f_0\|_{L^2}} \mu \int_0^1 f_0 dY > \frac{1}{2} \|\mu f_0\|_{L^2} + \frac{\ln(k_{1-\alpha})}{\|\mu f_0\|_{L^2}} =: \tilde{z}_{1-\alpha}.$$

Wegen $\mu > 0$ gilt:

$$\frac{1}{\|\mu f_0\|_{L^2}} \mu \int_0^1 f_0 dY = \frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY, \quad (\text{A.1.2})$$

womit die Teststatistik von $\mu > 0$ unabhängig ist. Weiter gilt nach Lemma 2.1.1 a):

$$\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dB \sim N(0,1). \quad (\text{A.1.3})$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p_1(B) > k_{1-\alpha}) = \alpha &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dB > \tilde{z}_{1-\alpha}\right) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \tilde{z}_{1-\alpha} = z_{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Da die Entscheidungsregel von $\mu > 0$ unabhängig ist, handelt es sich tatsächlich um einen gleichmäßig besten α -Niveau Test (vgl. Witting, 1985, S. 198). Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.

Beweis von Bemerkung 2.1.8

Der Beweis verläuft völlig analog zum Fall $\mu > 0$ aus Satz 2.1.6. Einzig die Gleichheit in (A.1.2) ist wegen $\mu < 0$ nicht richtig - es muss in diesem Fall heißen

$$\frac{1}{\|\mu f_0\|_2} \int_0^1 \mu f_0 dY = -\frac{1}{\|f_0\|_2} \int_0^1 f_0 dY.$$

Damit ist die Behauptung von Bemerkung 2.1.8 bewiesen.

Beweis von Satz 2.1.9

Zunächst gilt nach Voraussetzung $Y = s_f + B$ und so:

$$\int_0^1 f_0 dY = \int_0^1 f_0 ds_f + \int_0^1 f_0 dB = \langle f_0, f \rangle_{L^2} + \int_0^1 f_0 dB.$$

Folglich kann die Güte des Tests berechnet werden gemäß:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dY > z_{1-\alpha}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dB > z_{1-\alpha} - \frac{\langle f_0, f \rangle_{L^2}}{\|f_0\|_{L^2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\langle f_0, f \rangle_{L^2}}{\|f_0\|_{L^2}}\right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist richtig, da nach Lemma 2.1.1 a) gilt: $\frac{1}{\|f_0\|_{L^2}} \int_0^1 f_0 dB \sim N(0, 1)$.

Der Zusatz im Fall $f = f_0$ am Ende von Satz 2.1.9 folgt unmittelbar aus der vorangegangenen Darstellung. Satz 2.1.9 ist damit vollständig bewiesen.

A.2 Rückwärts-Operator und Verbesserung der Güte

Beweis von Lemma 2.2.4 d2)–d3)

d2) Aus $f \geq 0$ und $s_f(t) = \int_{[0,t]} f d\lambda$, $t \in [0, 1]$, folgt, dass s_f monoton wachsend ist. Des Weiteren ist s_f (im Lebesgueschen Sinne) differenzierbar mit Ableitung $s_f' = f$. Aus f monoton wachsend folgt daher, dass s_f konvex ist. Somit gilt für $t \in [0, 1]$:

$$s_f(t) = s_f(t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0) \leq t s_f(1) + (1-t) \underbrace{s_f(0)}_{=0} = t \cdot s_f(1) \quad (\text{A.2.1})$$

und

$$\overleftarrow{s}_f(t) = s_f(1) - s_f(1-t) \stackrel{(\text{A.2.1})}{\geq} s_f(1) - s_f(1) \cdot (1-t) = s_f(1) \cdot t.$$

d3) Zunächst folgt aus Formel (2.2.5) in d1):

$$s_{\overleftarrow{f}}(t) = \int_{[0,t]} \overleftarrow{f}(s) \lambda(ds) = t \cdot f(1) - \int_{[0,t]} f(1-s) \lambda(ds) \stackrel{(2.2.5)}{=} t \cdot f(1) - \overleftarrow{s}_f(t). \quad (\text{A.2.2})$$

Unter Verwendung von (A.2.2) folgt:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\overleftarrow{s}}_f(t) &= s_{\overleftarrow{f}}(1) - s_{\overleftarrow{f}}(1-t) \\ &\stackrel{(\text{A.2.2})}{=} [f(1) - \overleftarrow{s}_f(1)] - [(1-t)f(1) - \overleftarrow{s}_f(1-t)] = t \cdot f(1) - s_f(t), \end{aligned}$$

da $\overleftarrow{\overleftarrow{s}}_f(1-t) - \overleftarrow{\overleftarrow{s}}_f(1) = \overleftarrow{\overleftarrow{s}}_f(1-t) - s_f(1) = -s_f(t)$ ist.

Gilt $s_{\overleftarrow{f}} = \overleftarrow{s}_f$, so folgt

$$s_{\overleftarrow{f}}(t) = \overleftarrow{s}_f(t) = t \cdot \frac{f(1)}{2}, \quad t \in [0, 1].$$

Daraus folgt $\overleftarrow{f} \equiv \frac{f(1)}{2}$. Mit Lemma 2.2.4 a) gilt also $\overleftarrow{f} \equiv 0$ und somit $f \equiv 0$. Die Rückrichtung „ $f \equiv 0 \Rightarrow \overleftarrow{s}_f = s_{\overleftarrow{f}}$ “ ist sofort klar.

A.3 Tests vom Kolmogorov-Typ

Beweis von Satz 2.3.1

Es sei $Y = s_f + B_{[0,1]}$.

a) Nach Voraussetzung ist $f \geq 0$ und monoton wachsend, so dass nach Lemma 2.2.4 d2) gilt:

$$\overleftarrow{s}_f(t) \geq s_f(1) t \geq s_f(t), \quad t \in [0, 1].$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung aus Satz 2.3.1 a).

b) Die erste Ungleichung in Satz 2.3.1 b) ist sofort klar. Um die zweite Formel einzusehen, zeigen wir zunächst, dass für $s_{f_1} \leq s_f \leq s_{f_2}$ mit $s_{f_1}(1) = s_f(1) = s_{f_2}(1)$ gilt:

$$\overleftarrow{s}_{f_1} \geq \overleftarrow{s}_f \geq \overleftarrow{s}_{f_2}. \quad (\text{A.3.1})$$

Wegen

$$\overleftarrow{s}_{f_1}(t) = s_{f_1}(1) - s_{f_1}(1-t) \leq s_f(1) - s_f(1-t) = \overleftarrow{s}_f(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

ist die erste Ungleichung in (A.3.1) richtig. Die zweite Ungleichung in (A.3.1) folgt analog. Damit aber folgt die Behauptung aus Satz 2.3.1 b) unmittelbar.

Lemma für die Normalverteilungsdichte/-verteilungsfunktion

Lemma A.3.1 *Es seien $\sigma > 0$ und Φ_{σ^2} bzw. ϕ_{σ^2} die Verteilungsfunktion bzw. Dichte der $N(0, \sigma^2)$ -Verteilung (im Fall $\sigma^2 = 1$ wird der Index auch einfach weggelassen). Dann gilt für $\mu, x \in \mathbb{R}$:*

a) *Die Verteilungsfunktion bzw. Dichte von $N(\mu, \sigma^2)$ ist $\Phi_{\sigma^2}(\bullet - \mu)$ bzw. $\phi_{\sigma^2}(\bullet - \mu)$.*

- b) $\phi_{\sigma^2}(x\sigma) = \frac{1}{\sigma}\phi(x)$ und $\Phi_{\sigma^2}(x\sigma) = \Phi(x)$
 bzw. $\phi_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ und $\Phi_{\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$.

c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^x \Phi_{\sigma^2}(t) dt = x\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \sigma\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right). \quad (\text{A.3.2})$$

BEWEIS (VON LEMMA A.3.1) Die Teile a) und b) folgen unmittelbar aus der Definition der Normalverteilungsdichte bzw. unter Anwendung elementarer Integrationsregeln. Teil c) folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini, denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \Phi_{\sigma^2}(t) dt &= \int_{-\infty}^x \phi_{\sigma^2}(s) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[s,x]}(t) dt ds = \int_{-\infty}^x \phi_{\sigma^2}(s)(x-s) ds \\ &= x\Phi_{\sigma^2}(x) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \left(-\frac{s}{\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) ds \\ &= x\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \sigma\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Damit sind die Behauptungen bewiesen. ■

Beweis von Satz 2.3.2

a) Für $\theta = 0$ erhält man in (2.3.5):

$$s_f(t) = \overleftarrow{s}_f(t) = \mu t, \quad t \in [0, 1].$$

Folglich ist $\overleftarrow{Y} \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$, womit die Güte des gewöhnlichen mit derjenigen des rückwärtigen Kolmogorov-Tests übereinstimmt. Sie ist gegeben durch:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} Y(t) > z_{1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}(t) > z_{1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} (B_t + \mu t) > z_{1-\alpha/2}\right)$$

Die Verteilung des Supremums einer Brownschen Bewegung mit Drift ist in der Literatur wohlbekannt. Nach Borodin und Salminen (2002, Formel 2.1.1.4) ist diese Wahrscheinlichkeit mit $\text{Erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$= \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\frac{z_{1-\alpha/2} - \mu}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \exp(2\mu z_{1-\alpha/2}) \text{Erfc}\left(\frac{z_{1-\alpha/2} + \mu}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \Phi(z_{1-\alpha/2} - \mu) + \exp(2\mu z_{1-\alpha/2}) [1 - \Phi(z_{1-\alpha/2} + \mu)] \\
 &= \Phi(\mu - z_{1-\alpha/2}) + \exp(2\mu z_{1-\alpha/2}) \Phi(-\mu - z_{1-\alpha/2}).
 \end{aligned}$$

b) Für das Komplementär-Ereignis aus Satz 2.3.2 gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} Y(t) \leq z_{1-\alpha/2}\right) &= \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,\theta]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} \mid B_\theta = x\right) \\
 &\quad \times \mathbb{P}\left(\sup_{t \in (\theta,1]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} - \mu(t - \theta) \mid B_\theta = x\right) \cdot \phi_\theta(x) \, dx. \quad (\text{A.3.3})
 \end{aligned}$$

Die erste Wahrscheinlichkeit unter dem Integral ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass eine Brownsche Brücke mit Startpunkt 0 und Endpunkt x in $[0, \theta]$ unterhalb von $z_{1-\alpha/2}$ bleibt. Sie ist gegeben durch (Siegmund, 1986, S. 375)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,\theta]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} \mid B_\theta = x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{2z_{1-\alpha/2}(z_{1-\alpha/2} - x)}{\theta}\right). \quad (\text{A.3.4})$$

Für die zweite Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in (\theta,1]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} - \mu(t - \theta) \mid B_\theta = x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1-\theta]} B_t \leq (z_{1-\alpha/2} - x) - \mu t\right).$$

Wegen der wohlbekannten Formel für die „Boundary Crossing Probability“ einer Brownschen Bewegung mit Drift (vgl. z. B. Borodin und Salminen 2002, Formel 2.1.1.4, S.250) gilt weiter:

$$\begin{aligned}
 &= \Phi\left(-\mu\sqrt{1-\theta} + \frac{z_{1-\alpha/2} - x}{\sqrt{1-\theta}}\right) - \exp(2\mu(z_{1-\alpha/2} - x)) \cdot \Phi\left(-\mu\sqrt{1-\theta} - \frac{z_{1-\alpha/2} - x}{\sqrt{1-\theta}}\right) \\
 &= \Phi_{1-\theta}(\mu(\theta - 1) + z_{1-\alpha/2} - x) - \exp(2\mu(z_{1-\alpha/2} - x)) \cdot \Phi_{1-\theta}(\mu(\theta - 1) - z_{1-\alpha/2} + x). \quad (\text{A.3.5})
 \end{aligned}$$

Setzt man nun (A.3.4)–(A.3.5) in (A.3.3) ein, so ergibt sich die Behauptung.

c) Wir betrachten auch hier wieder die komplementäre Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \overleftarrow{Y}(t) \leq z_{1-\alpha/2}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta)} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1-\theta]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} - \mu t \mid B_{1-\theta} = x\right)
 \end{aligned}$$

$$\times \mathbb{P}\left(\sup_{t \in (1-\theta, 1]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) \mid B_{1-\theta} = x\right) \cdot \phi_{1-\theta}(x) dx.$$

Bei der ersten Wahrscheinlichkeit unter dem Integral handelt es sich um eine Brownsche Brücke mit Drift. Siegmund (1986, S. 375) gibt diese Wahrscheinlichkeit explizit an. Setzen wir diese Darstellung ein, so erhalten wir weiter

$$= \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta)} \left[1 - \exp\left(-\frac{2z_{1-\alpha/2}(z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x)}{1-\theta}\right) \right] \\ \times \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, \theta]} B_t \leq z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x\right) \cdot \phi_{1-\theta}(x) dx.$$

Die zweite Wahrscheinlichkeit unter dem Integral kann beispielsweise mit Hilfe von Billingsley (1999, S. 92) berechnet werden. Es folgt weiter:

$$= \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta)} \left[1 - \exp\left(-\frac{2z_{1-\alpha/2}(z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x)}{1-\theta}\right) \right] \\ \times \left[2\Phi\left(\frac{z_{1-\alpha/2} - \mu(1-\theta) - x}{\sqrt{\theta}}\right) - 1 \right] \cdot \phi_{1-\theta}(x) dx.$$

Wegen $\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{\theta}}\right) = \Phi_{\theta}(z)$ für $z \in \mathbb{R}$ (vgl. Lemma A.3.1) folgt die Behauptung aus Satz 2.3.2.

A.4 Maximum Increase-Test

Beweisskizze von Satz 2.4.5

Wir verwenden zum Beweis von Satz 2.4.5 die in der Literatur wohlbekannte *Lévy-Formel*. Sei dazu $L^0 := (L_t^0)_{t \geq 0}$ die zu $(B_t)_{t \geq 0}$ gehörige „local time in 0“, also

$$L_t^0 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(|B_s| < \epsilon)} ds$$

(sh. Abschnitt VI - §1 in Revuz und Yor 1999). Weiter sei $M_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s$, $t \geq 0$, der Maximums-Prozess der Brownschen Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Dann haben die beiden zweidimensionalen Prozesse $X = (X_t)_{t \geq 0}$ und $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ mit

$$X_t = \begin{pmatrix} M_t - B_t \\ M_t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{X}_t = \begin{pmatrix} |B_t| \\ L_t^0 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung (Beweis unter Verwendung von *Tanaka-Formel* und *Skorohod-Gleichung*, sh. Revuz und Yor 1999, S. 240f). Die Gleichheit in Verteilung von X und \tilde{X} wird als *Lévy-Formel* bezeichnet. Insbesondere folgt aus dieser Formel:

$$\sup_{t \in [0, T]} [M_t - B_t] \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{t \in [0, T]} |B_t| .$$

Für die linke Seite in obiger Gleichung gilt

$$\sup_{t \in [0, T]} [M_t - B_t] = \mathbb{D}(B_{[0, T]}) = \mathbb{I}(-B_{[0, T]}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathbb{I}(B_{[0, T]}) .$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit, da $-B = (-B_t)_{t \geq 0}$ wieder eine Standard Brownsche Bewegung ist. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.4.5.

B Herleitung des Kernel-Begriffs

B.1 Formale Definition von „Kernel“

In den folgenden Darstellungen orientieren wir uns an Lifshits (2012). Wir wiederholen allerdings die dort sehr allgemein gehaltenen Definitionen und Resultate an dieser Stelle nicht und betrachten stattdessen nur den Fall, dass die auftretenden Gauß-Prozesse Werte in $C([0, T])$, $T > 0$, annehmen.

Es sei also in diesem Abschnitt $X_{[0, T]} = (X_t)_{t \in [0, T]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit Pfaden in $C([0, T])$ und Verteilung $\mathbb{P}^{X_{[0, T]}}$. Der Dualraum zu $C([0, T])$ ist gegeben durch (sh. z. B. Werner, 2005, S.62):

$$\begin{aligned} C([0, T])^* &= \{F : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ stetig und linear}\} \\ &= \left\{ \int_{[0, T]} \bullet \, d\mu \mid \mu \text{ reguläres Borelmaß} \right\}. \end{aligned}$$

$F \in C([0, T])^*$ ist linear und damit $F(X_{[0, T]})$ normalverteilt, womit

$$\mathbf{E} \left(F(X_{[0, T]})^2 \right) = \int_{C([0, T])} F(y)^2 \mathbb{P}^{X_{[0, T]}}(dy) < \infty.$$

Folglich ist

$$F \in L_X^2 := L^2(C([0, T]), \mathbb{P}^{X_{[0, T]}}).$$

Damit ist die kanonische Einbettung $I^* : C([0, T])^* \hookrightarrow L_X^2$ wohldefiniert. Sei weiter \mathfrak{X} der Abschluss von $I^*(C([0, T])^*)$ in L_X^2 . Dann können wir I^* auch als Einbettung

$$I^* : C([0, T])^* \hookrightarrow \mathfrak{X} \leq L_X^2 \tag{B.1.1}$$

auffassen. Auf \mathfrak{X} wird durch L_X^2 das Skalarprodukt

$$\langle G_1, G_2 \rangle_{\mathfrak{X}} = \langle G_1, G_2 \rangle_{L_X^2} = \int_{C([0, T])} G_1(y)G_2(y) \mathbb{P}^{X_{[0, T]}}(dy)$$

$$= \mathbf{E} \left(G_1(X_{[0,T]}) G_2(X_{[0,T]}) \right), \quad G_1, G_2 \in \mathfrak{X}, \quad (\text{B.1.2})$$

und die Norm

$$\|G\|_{\mathfrak{X}}^2 = \mathbf{E} \left(G(X_{[0,T]})^2 \right), \quad G \in \mathfrak{X},$$

induziert. Sei

$$I : \mathfrak{X} \rightarrow C([0, T]) \quad (\text{B.1.3})$$

die duale Abbildung zu I^* aus (B.1.1). I existiert und ist eindeutig durch die Gleichung

$$F(I(G)) = \langle I^*(F), G \rangle_{\mathfrak{X}}, \quad \text{für alle } F \in C([0, T])^*, G \in \mathfrak{X}, \quad (\text{B.1.4})$$

charakterisiert (Lifshits, 2012, S. 23).

Korollar B.1.1 Sei $G \in \mathfrak{X}$, dann gilt: $(I(G))(t) = \mathbf{E} (X_t \cdot G(X_{[0,T]}))$, $t \in [0, T]$.

BEWEIS Sei $\delta_t \in C([0, T])^*$ die Projektionsabbildung

$$\delta_t : \begin{cases} C([0, T]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(t) \end{cases} .$$

Wählt man $F = \delta_t$ in (B.1.4), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (I(G))(t) &= \delta_t(I(G)) = \langle I^*(\delta_t), G \rangle_{\mathfrak{X}} \\ &= \int_{C([0, T])} I^*(\delta_t)(y) G(y) \mathbb{P}^{X_{[0, T]}}(dy) = \mathbf{E} (X_t \cdot G(X_{[0, T]})) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Weiterhin gilt:

Lemma B.1.2 $I : \mathfrak{X} \rightarrow C([0, T])$ ist linear und injektiv.

BEWEIS Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $G_1, G_2 \in \mathfrak{X}$. Dann gilt für alle $F \in C([0, T])^*$:

$$\begin{aligned} F(I(\alpha(G_1 + G_2))) &= \alpha (\langle I^*(F), G_1 \rangle_{\mathfrak{X}} + \langle I^*(F), G_2 \rangle_{\mathfrak{X}}) \\ &= \alpha (F(I(G_1)) + F(I(G_2))) \end{aligned}$$

und da F linear ist, folgt weiter:

$$= F(\alpha (I(G_1) + I(G_2))) .$$

Die obige Gleichung aber gilt für alle $F \in C([0, T])^*$, so dass die Linearität von I folgt.

Die Injektivität zeigen wir, indem wir $\text{Kern}(I) = \{\mathbf{0}_{\mathfrak{X}}\}$ beweisen, wobei $\mathbf{0}_{\mathfrak{X}}$ die Nullfunktion in \mathfrak{X} ist. Sei also $\mathbf{0}$ die Nullfunktion in $C([0, T])$ und $G \in \mathfrak{X}$ derart, dass $I(G) = \mathbf{0}$ ist. Dann gilt:

$$0 = F(I(G)) = \langle I^*(F), G \rangle_{\mathfrak{X}} \quad \text{für alle } F \in C([0, T])^*.$$

Sei nun $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C([0, T])^*$ mit

$$I^*(F_n) \rightarrow G, \quad \text{also:} \quad \|I^*(F_n) - G\|_{\mathfrak{X}} \rightarrow 0,$$

dann gilt aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle I^*(F_n), G \rangle_{\mathfrak{X}} = \|G\|_{\mathfrak{X}}^2$$

und somit insbesondere $G = \mathbf{0}_{\mathfrak{X}}$. ■

Insbesondere folgt aus Lemma B.1.2, dass $I : \mathfrak{X} \rightarrow I(\mathfrak{X})$ bijektiv ist und die Inverse $I^{-1} : I(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{X}$ existiert. Damit sind wir nun in der Lage, den „Kernel“ zu definieren.

Definition B.1.3 (Kernel)

Die Menge $\mathcal{H}_X := I(\mathfrak{X}) \subseteq C([0, T])$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_X} := \langle I^{-1}(g_1), I^{-1}(g_2) \rangle_{\mathfrak{X}}, \quad g_1, g_2 \in \mathcal{H}_X,$$

und der zugehörigen Norm

$$\|g\|_{\mathcal{H}_X}^2 := \langle g, g \rangle_{\mathcal{H}_X}, \quad g \in \mathfrak{X},$$

heißt Kernel von $X_{[0, T]}$ (bzw. von $\mathbb{P}^{X_{[0, T]}}$).

B.2 Weitere Eigenschaften des Kernels eines Slepian- p -Prozesses

Die Abbildung f_0 aus dem Beweis zu Satz 6.2.1 ist eindeutig:

Lemma B.2.1 *Es seien $p > 0$, $T > 0$ und $k \in L^2([0, T])$. Dann ist die Funktion*

$$f_0 : \begin{cases} [0, T + p] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} k(t - jp) \end{cases}$$

die einzige Funktion mit

$$f_0|_{[0,p]} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \Delta^p f_0 = k . \quad (\text{B.2.1})$$

BEWEIS Im Beweis zu Satz 6.2.1 zeigen wir, dass f_0 die Eigenschaften (B.2.1) erfüllt.

Sei nun $f' \in L^2([0, T+p])$ eine weitere Funktion mit (B.2.1). Wir behaupten, dass für alle $m \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{p} \rfloor + 1\}$ gilt:

$$f_0|_{[0,mp]} = f'|_{[0,mp]} \Rightarrow f_0|_{[0,(m+1)p] \cap [0,T+p]} = f'|_{[0,(m+1)p] \cap [0,T+p]} . \quad (\text{B.2.2})$$

Wir beweisen (B.2.2) durch vollständige Induktion nach m :

Induktionsanfang $m = 1$: Für $t \in [0, p]$ gilt:

$$0 = \Delta^p f_0(t) - \Delta^p f'(t) = f_0(t+p) - f_0(t) - f'(t+p) + f'(t) = f_0(t+p) - f'(t+p) ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $f_0|_{[0,p]} = f'|_{[0,p]} \equiv 0$ gilt. Damit aber folgt, dass $f_0|_{[0,2p]} = f'|_{[0,2p]}$.

Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$: Für $t \in [(m-1)p, mp] \cap [0, T+p]$ gilt:

$$0 = \Delta^p f_0(t) - \Delta^p f'(t) = f_0(t+p) - f_0(t) - f'(t+p) + f'(t) = f_0(t+p) - f'(t+p) ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $f_0|_{[0,mp]} = f'|_{[0,mp]}$ (Induktionsvoraussetzung) gilt. Folglich ist (B.2.2) bewiesen.

i) Ist $T+p > (\lfloor \frac{T}{p} \rfloor + 1)p$, so folgt aus (B.2.2): $f_0 = f'$.

ii) Im Falle $T+p = (\lfloor \frac{T}{p} \rfloor + 1)p$ muss noch $f_0(T+p) = f'(T+p)$ gezeigt werden. Dies aber folgt wiederum unmittelbar aus

$$0 = f_0(T+p) - f_0(T) - f'(T+p) + f'(T) = f_0(T+p) - f'(T+p) .$$

Damit gilt auch in diesem Falle $f_0 = f'$.

Insgesamt folgt damit, dass f_0 eindeutig ist. ■

Im nachfolgenden Satz zeigen wir eine Möglichkeit auf, die Norm auf dem Kernel eines Slepian- p -Prozesses zu beschreiben.

Satz B.2.2 (Norm auf $\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$)

Es seien $p > 0$ und $\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$ der Kernel eines Slepian- p -Prozesses aus Satz 6.2.1. Weiter sei $m := c + s_k \in \mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$ mit $c \in \mathbb{R}, k \in L^2([0, T])$.

a) Für die Norm $\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}$ gilt:

$$\|c + s_k\|_{\mathcal{H}_{\text{Slepian-}p}}^2 = \inf_{\{f \in L^2[0, T+p] \mid \Delta^p s_f = c + s_k\}} \|f\|_{L^2[0, T+p]}^2 .$$

b) Die Indexmenge aus a) kann näher beschrieben werden.

Sei dazu $f_0 \in L^2([0, T+p])$ die eindeutige Funktion aus dem Beweis zu Satz 6.2.1 mit $f_0|_{[0, p]} \equiv 0$ und $\Delta^p f_0 = k$, dann gilt:

$$\{f \in L^2[0, T+p] \mid \Delta^p s_f = c + s_k\} = f_0 + \mathfrak{K}_c, \quad (\text{B.2.3})$$

wobei

$$\mathfrak{K}_c := \left\{ v \in L^2[0, T+p] \mid s_v(p) = c, v(t) = v\left(t - \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor \cdot p\right) \text{ für } t \in [0, T+p] \right\}$$

die Menge aller Funktionen $v \in \text{Kern}(\Delta^p)$ ist mit $s_v(p) = c$.

BEWEIS a) Nach Bemerkung 6.1.1 ist die Norm in $\mathcal{H}_{\text{Slepian}, p}$ gegeben durch:

$$\|c + s_k\|_{\mathcal{H}_{\text{Slepian}, p}}^2 = \inf_{\{s_f \in \mathcal{H}_{\text{BM}} \mid \Delta^p s_f = c + s_k\}} \|s_f\|_{\mathcal{H}_{\text{BM}}}^2$$

wegen $\|s_f\|_{\mathcal{H}_{\text{BM}}}^2 = \|f\|_{L^2[0, T+p]}^2$ folgt weiter:

$$= \inf_{\{f \in L^2[0, T+p] \mid \Delta^p s_f = c + s_k\}} \|f\|_{L^2[0, T+p]}^2 . \quad (\text{B.2.4})$$

b) $\mathfrak{K}_c \subseteq \text{Kern}(\Delta^p)$, da für $v \in \mathfrak{K}_c$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^p v(t) &= v(t+p) - v(t) \\ &= v\left(t+p - \left\lfloor \frac{t+p}{p} \right\rfloor \cdot p\right) - v\left(t - \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor \cdot p\right) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Damit gilt für $f_0 + v \in f_0 + \mathfrak{K}_c$:

$$\Delta^p s_{f_0+v} = \int_{[0, p)} f_0 + v \, d\lambda + s_{\Delta^p f_0 + \Delta^p v} = s_v(p) + s_{\Delta^p f_0} = c + s_k ,$$

wobei die erste Gleichheit wegen (6.2.2) gilt. Also ist

$f_0 + \mathfrak{K}_c \subseteq \{f \in L^2[0, T+p] \mid \Delta^p s_f = c + s_k\}$. Sei nun andererseits $f \in L^2[0, T+p]$ mit

$\Delta^p s_f = c + s_k$. Damit ist

$$\Delta^p s_f(0) = c + s_k(0) = c$$

und $v := f - f_0 \in \mathfrak{K}_c$, da

i) $s_v(p) = s_f(p) - s_{f_0}(p) = c - 0 = c$.

ii) $\Delta^p v = \Delta^p f - \Delta^p f_0 = k - k = 0$ und somit $v(t) = v(t+p)$ für alle zulässigen $t \in [0, T+p]$.

Es folgt, dass $f = f_0 + (f - f_0) \in f_0 + \mathfrak{K}_c$ ist, womit die Behauptung gezeigt ist. ■

Index

- asymptotischer/s
 - Partialsommenprozess, 11–14
 - Regressionsmodell, 14
 - Regressionsmodell, rückwärtig, 23
- bedingter Markov-Prozess, 59
- Bester Test
 - Brown. Bew., 18
 - Slepian- p , 127
 - Wiener Slepian- p , 141
- Brownsche Bewegung, 10
 - Free, 119
- Cameron-Martin Theorem, 17
- Change-Point, 3
- CuSum, 29
- Donsker-Theorem, 9
- Dreiecksgestalt Kov.-funktion, 58
- first hitting time, 53, 66
- Free Brownian Motion, 119
- Kernel, 109, 157
 - Brown. Bew., 109
 - Slepian- p , 112
 - Wiener-Slepian- p , 116
- Lokalisiertes Modell, 13
- Lévy-Formel, 154
- Maximum Increase I, 30
- Monotonie erhaltend, 43
- MoSum, 76
- Moving Sum, 76
- Moving Window, 49
- Partialsommen
 - asymptotischer Prozess, 11–14
 - Operator T_n , 9
 - Prozess, 9
- Performancegröße, 42
- Regressionsmodell, 4
 - asymptotisches, 14
 - lokalisiertes, 13
 - rückwärtiges, asymptotisches, 23
- Reproduzierender Kernel, 17
- Rückwärts-Operator, 22
- Sequentielle Verfahren, 41
- Signal s_f , 11
- Slepian model process, 54
- Slepian- p -Prozess, 51, 54
 - Dichte, 54
- Slepian-Prozess, 53
- Test
 - Bester Wiener-Slepian- p , 141
 - Bester (für Brown. Bew.), 18

- Bester (Slepian- p), 127
- Bester* Slepian- p , 138
- Endpunkt, 33
- Kolm.-Slepian- p , 76
- Kolm.-Wiener-Slepian- p , 99
- Kolmogorov, gewöhnlich, 26
- Kolmogorov, rückwärtig, 26
- Maximum Increase, 31
- Testgüte
 - Bester (für Brown. Bew.), 19–22
 - Bester Slepian- p , 134
 - Bester Wiener-Slepian- p , 144
 - Endpunkt, 33
 - Kolm.-Slepian- p , 81
 - Kolmogorov-Tests, 27–29
- Theorem
 - Cameron-Martin, 17
 - Verallg., 110
 - Donsker, 9
- Translatierte Prozesse, 49
- Verfahrensstopzeit, 42, 44
- Wiener-Slepian- p -Prozess, 99

Literaturverzeichnis

- [Abrahams 1984] ABRAHAM, J.: Ramp Crossings for Slepian's Process. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 30 (1984), Nr. 3, S. 574–575
- [Abrahamsen 1997] ABRAHAMSEN, P.: *A Review of Gaussian Random Fields and Correlation Functions*. Bd. 917. Oslo : Norwegian Computing Center, 1997
- [Azaïs und Wschebor 2009] AZAÏS, J.-M. ; WSCHEBOR, M.: *Level sets and extrema of random processes and fields*. Hoboken, NJ : Wiley, 2009
- [Bar-David 1975] BAR-DAVID, I.: Radon-Nikodym Derivatives, Passages and Maxima for a Gaussian Process with Particular Covariance and Mean. In: *Journal of Applied Probability* 12 (1975), Nr. 4, S. 724–733
- [Bartlett 1978] BARTLETT, M. S.: *An introduction to stochastic processes : with special reference to methods and applications*. Cambridge [u.a.] : Cambridge Univ. Press, 1978
- [Basseville und Nikiforov 1993] BASSEVILLE, M. ; NIKIFOROV, I. V.: *Detection of abrupt changes: theory and application*. Englewood Cliffs, NJ : PTR Prentice Hall, 1993
- [Bauer und Hackl 1978] BAUER, P. ; HACKL, P.: The Use of MOSUMS for Quality Control. In: *Technometrics* 20 (1978), Nr. 4, S. 431–436
- [Billingsley 1968] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of probability measures*. New York [u.a.] : Wiley, 1968 (Wiley series in probability and mathematical statistics). – ISBN 0-471-07242-7
- [Billingsley 1999] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of probability measures*. New York [u.a.] : Wiley, 1999
- [Bischoff 1998] BISCHOFF, W.: A Functional Central Limit Theorem for Regression Models. In: *The Annals of Statistics* 26 (1998), Nr. 4, S. 1398–1410
- [Bischoff 2002] BISCHOFF, W.: The structure of residual partial sums limit processes of linear regression models. In: *The theory of stochastic processes* 8 (2002), S. 23–28

- [Bischoff 2010] BISCHOFF, W.: Residual Partial Sums Techniques for Fixed Designs to Find Change Points in Linear Regression. In: *Computer modelling and new technologies* 4 (2010), S. 7–13
- [Bischoff und Gegg 2010] BISCHOFF, W. ; GEGG, A.: A Non-Parametric Test for a Change-Point in Linear Profile Data. In: *Journal of applied quantitative methods* 5 (2010), S. 516–524
- [Bischoff und Gegg 2011] BISCHOFF, W. ; GEGG, A.: Partial sum process to check regression models with multiple correlated response : with an application for testing a change point in profile data. In: *Journal of multivariate analysis* 102 (2011), S. 281–291
- [Bischoff u. a. 2003] BISCHOFF, W. ; HASHORVA, E. ; HÜSLER, J. ; MILLER, F.: Exact asymptotics for boundary crossings of the Brownian bridge with trend with application to the Kolmogorov test. In: *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 55 (2003), Nr. 4, S. 849–864
- [Bischoff u. a. 2004] BISCHOFF, W. ; HASHORVA, E. ; HÜSLER, J. ; MILLER, F.: On the power of the Kolmogorov test to detect the trend of a Brownian bridge with applications to a change-point problem in regression models. In: *Statistics & Probability Letters* 66 (2004), Nr. 2, S. 105–115
- [Bischoff u. a. 2005] BISCHOFF, W. ; HASHORVA, E. ; HÜSLER, J. ; MILLER, F.: Analysis of a change-point regression problem in quality control by partial sums processes and Kolmogorov type tests. In: *Metrika* 62 (2005), Nr. 1, S. 85–98
- [Bischoff u. a. 2006] BISCHOFF, W. ; LO HUANG, M.-N. ; YANG, L.: Growth curve models for stochastic modeling and analyzing of natural disinfection of wastewater. In: *Environmetrics* 17 (2006), Nr. 8, S. 827–847
- [Bischoff und Miller 2000] BISCHOFF, W. ; MILLER, F.: Asymptotically optimal tests and optimal designs for testing the mean in regression models with applications to change-point problems. In: *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 52 (2000), Nr. 4, S. 658–679
- [Bischoff und Somayasa 2009] BISCHOFF, W. ; SOMAYASA, W.: The limit of the partial sums process of spatial least squares residuals. In: *Journal of multivariate analysis* 100 (2009), S. 2167–2177
- [Borodin und Salminen 2002] BORODIN, A. N. ; SALMINEN, P.: *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*. Basel [u.a.] : Birkhaeuser, 2002

- [Brown u. a. 1975] BROWN, R. L. ; DURBIN, J. ; EVANS, J. M.: Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 37 (1975), Nr. 2, S. 149–192
- [Cameron und Martin 1944] CAMERON, R. H. ; MARTIN, W. T.: Transformations of Wiener Integrals Under Translations. In: *Annals of Mathematics* 45 (1944), Nr. 2, S. 386–396
- [Chen und Gupta 2000] CHEN, J. ; GUPTA, A. K.: *Parametric statistical change point analysis*. Boston [u.a.] : Birkhäuser, 2000
- [Chu u. a. 1992] CHU, C. ; HORNIK, K. ; KAUN, C.: *MOSUM tests for parameter constancy*. Univ. of Illinois at Urbana-Campaign : BEBR, 1992
- [Chu u. a. 1995] CHU, C. ; HORNIK, K. ; KAUN, C.: MOSUM tests for parameter constancy. In: *Biometrika* 82 (1995), Nr. 3, S. 603–617
- [Cramér 1974] CRAMÉR, Harald: *Mathematical methods of statistics*. 13. print. Princeton : Princeton Univ. Pr., 1974 (Princeton mathematical series ; 9)
- [Cressie 1980] CRESSIE, N.: The Asymptotic Distribution of the Scan Statistic under Uniformity. In: *The Annals of Probability* 8 (1980), Nr. 4, S. 828–840
- [Csörgő und Horváth 1988] CSÖRGŐ, M. ; HORVÁTH, L.: Nonparametric Methods for Changepoint Problems. In: KRISHNAIAH, P. R. (Hrsg.) ; RAO, C.R. (Hrsg.): *Quality control and reliability*. Amsterdam [u.a.] : North-Holland, 1988 (Handbook of statistics 7), S. 403–425
- [Csörgő und Horváth 1997] CSÖRGŐ, M. ; HORVÁTH, L.: *Limit theorems in change point analysis*. Chichester [u.a.] : Wiley, 1997
- [Diggle und Ribeiro 2007] DIGGLE, P. ; RIBEIRO, P. J.: *Model-based geostatistics*. New York : Springer, 2007
- [Doob 1953] DOOB, J. L.: *Stochastic processes*. New York [u.a.] : Wiley, 1953
- [Ein-Gal und Bar-David 1975] EIN-GAL, M. ; BAR-DAVID, I.: Passages and Maxima for a Particular Gaussian Process. In: *The Annals of Probability* 3 (1975), Nr. 3, S. 549–556
- [Elstrodt 2007] ELSTRODT, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Berlin [u.a.] : Springer, 2007

- [Gardner 1969] GARDNER, L. A.: On Detecting Changes in the Mean of Normal Variates. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 40 (1969), Nr. 1, S. 116–126
- [Graversen und Shiryaev 2000] GRAVERSEN, S. E. ; SHIRYAEV, A. N.: An Extension of P. Lévy's Distributional Properties to the Case of a Brownian Motion with Drift. In: *Bernoulli* 6 (2000), Nr. 4, S. 615–620
- [Hackl 1976] HACKL, P.: *Adäquatheitsprüfung in ökonometrischen Modellen: Analyse der zeitlichen Stabilität*. 1976
- [Hawkins und Olwell 1998] HAWKINS, D. M. ; OLWELL, D. H.: *Cumulative sum charts and charting for quality improvement*. New York [u.a.] : Springer, 1998 (Statistics for engineering and physical science)
- [Hawkins u. a. 2007] HAWKINS, D.M. ; QIU, P. ; ZAMBA, K.D.: Change-Point Methods. In: RUGGERI, F. (Hrsg.) ; KENETT, R.S. (Hrsg.) ; FALTIN, F.W. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. New York : Wiley, 2007, S. 301–306
- [Hornik 1993] HORNIK, K.: On the distribution of functionals of stationary Gaussian processes. In: *Statistics & Probability Letters* 18 (1993), Nr. 5, S. 389–395
- [Human und Graham 2007] HUMAN, S.W. ; GRAHAM, M.A.: Average Run Lengths and Operating Characteristic Curves. In: RUGGERI, F. (Hrsg.) ; KENETT, R.S. (Hrsg.) ; FALTIN, F.W. (Hrsg.): *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. New York : Wiley, 2007, S. 159–168
- [Jandhyala und MacNeill 1989] JANDHYALA, V. K. ; MACNEILL, I. B.: Residual partial sum limit process for regression models with applications to detecting parameter changes at unknown times. In: *Stochastic Processes and their Applications* 33 (1989), Nr. 2, S. 309–323
- [Jandhyala u. a. 1999] JANDHYALA, V. K. ; S., Zack ; H., El-Shaarawi A.: Change-point methods and their applications: contributions of Ian MacNeill. In: *Environmetrics* 10 (1999), S. 657–676
- [Jerri 1999] JERRI, A. J.: *Introduction to integral equations with applications*. New York [u.a.] : Wiley, 1999
- [Jeske u. a. 2009] JESKE, D.R. ; MONTES DE OCA, V. ; BISCHOFF, W. ; MARVASTI, M.: Cusum techniques for timeslot sequences with applications to network surveillance. In: *Computational Statistics & Data Analysis* 53 (2009), Nr. 12, S. 4332–4344

-
- [Johnson und Narasimhan 2011] JOHNSON, S.G. ; NARASIMHAN, B.: *cubature: Adaptive multivariate integration over hypercubes*. R package version 1.1-1. Stanford: , 2011. – URL <http://CRAN.R-project.org/package=cubature>
- [Khoo und Wong 2008] KHOO, M.B.C. ; WONG, V. H.: A Double Moving Average Control Chart. In: *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 37 (2008), Nr. 8, S. 1696–1708
- [Kuo 2006] KUO, H.-H.: *Introduction to stochastic integration*. New York [u.a.] : Springer, 2006
- [Lai 1974] LAI, T. L.: Control Charts Based on Weighted Sums. In: *The Annals of Statistics* 2 (1974), Nr. 1, S. 134–147
- [Leadbetter u. a. 1983] LEADBETTER, M. R. ; LINDGREN, G. ; ROOTZEN, H.: *Extremes and related properties of random sequences and processes*. New York [u.a.] : Springer, 1983
- [Lehmann und Romano 2005] LEHMANN, E. L. ; ROMANO, J. P.: *Testing statistical hypotheses*. New York [u.a.] : Springer, 2005
- [Lévy 1948] LÉVY, P.: *Processus stochastiques et mouvement Brownien*. Paris : Gauthier-Villars, 1948 (Monographies des probabilités 6)
- [Lifshits 2012] LIFSHITS, M.: *Lectures on Gaussian processes*. Heidelberg [u.a.] : Springer, 2012
- [MacNeill 1978a] MACNEILL, I. B.: Limit Processes for Sequences of Partial Sums of Regression Residuals. In: *The Annals of Probability* 6 (1978), Nr. 4, S. 695–698
- [MacNeill 1978b] MACNEILL, I. B.: Properties of Sequences of Partial Sums of Polynomial Regression Residuals with Applications to Tests for Change of Regression at Unknown Times. In: *The Annals of Statistics* 6 (1978), Nr. 2, S. 422–433
- [MacNeill und Jandhyala 1985] MACNEILL, I. B. ; JANDHYALA, V. K.: The residual process for non-linear regression. In: *Journal of Applied Probability* 22 (1985), S. 957–963
- [Magdon-Ismail u. a. 2004] MAGDON-ISMAIL, M. ; ATIYA, A. F. ; PRATAP, A. ; ABU-MOSTAFA, Y. S.: On the maximum drawdown of a Brownian motion. In: *Journal of Applied Probability* 41 (2004), Nr. 1, S. 147–161

- [Mehr und McFadden 1965] MEHR, C. B. ; MCFADDEN, J. A.: Certain Properties of Gaussian Processes and Their First-Passage Times. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 27 (1965), Nr. 3, S. 505–522
- [Montgomery 2009] MONTGOMERY, D. C.: *Statistical quality control: a modern introduction*. Hoboken, NJ : Wiley, 2009
- [Mörters und Peres 2010] MÖRTERS, P. ; PERES, Y.: *Brownian motion*. Cambridge [u.a.] : Cambridge Univ. Press, 2010
- [Nikitin 1995] NIKITIN, J. J.: *Asymptotic efficiency of nonparametric tests*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1995
- [Page 1954] PAGE, E. S.: Continuous Inspection Schemes. In: *Biometrika* 41 (1954), Nr. 1/2, S. 100–115
- [Page 1955] PAGE, E. S.: Control Charts with Warning Lines. In: *Biometrika* 42 (1955), Nr. 1/2, S. 243–257
- [Paley u. a. 1933] PALEY, R.E.A.C. ; WIENER, N. ; ZYGMUND, A.: Notes on random functions. In: *Mathematische Zeitschrift* 37 (1933), S. 647–668
- [Park und Skoug 1988] PARK, C. ; SKOUG, D.: A Note on Paley-Wiener-Zygmund Stochastic Integrals. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 103 (1988), Nr. 2, S. 591–601
- [Peskir 2005] PESKIR, G.: On Reflecting Brownian Motion with Drift. In: *Research Report Probability and Statistics Group Manchester* 2005 (2005), Nr. 3, S. 1–8
- [Poor und Hadjiliadis 2009] POOR, H. V. ; HADJILIADIS, O.: *Quickest detection*. Cambridge [u.a.] : Cambridge Univ. Press, 2009
- [Pötzelberger und Wang 2001] PÖTZELBERGER, K. ; WANG, L.: Boundary Crossing Probability for Brownian Motion. In: *Journal of Applied Probability* 38 (2001), Nr. 1, S. 152–164
- [R Core Team 2012] R CORE TEAM: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R 2.15.2. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing (Veranst.), 2012. – URL <http://www.R-project.org/>
- [Revuz und Yor 1999] REVUZ, D. ; YOR, M.: *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin [u.a.] : Springer, 1999

- [Roberts 1959] ROBERTS, S. W.: Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. In: *Technometrics* 1 (1959), Nr. 3, S. pp. 239–250
- [Roberts 1966] ROBERTS, S. W.: A Comparison of Some Control Chart Procedures. In: *Technometrics* 8 (1966), Nr. 3, S. pp. 411–430
- [Ross 1999] ROSS, Sheldon M.: Average Run Lengths for Moving Average Control Charts. In: *Probability in the Engineering and Informational Science* 13 (1999), S. 209–220
- [Salminen und Vallois 2007] SALMINEN, P. ; VALLOIS, P.: On maximum increase and decrease of Brownian motion. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics* 43 (2007), Nr. 6, S. 655–676
- [Sen 1982] SEN, P. K.: Invariance principles for recursive residuals. In: *The Annals of Statistics* 10 (1982), S. 307–312
- [Shepp 1966] SHEPP, L. A.: Radon-Nikodym Derivatives of Gaussian Measures. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 37 (1966), Nr. 2, S. 321–354
- [Shepp 1971] SHEPP, L. A.: First Passage Time for a Particular Gaussian Process. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 42 (1971), Nr. 3, S. 946–951
- [Siegmund 1986] SIEGMUND, D.: Boundary crossing probabilities and statistical applications. In: *The Annals of Statistics* 14 (1986), S. 361–404
- [Slepian 1961] SLEPIAN, D.: First Passage Time for a Particular Gaussian Process. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 32 (1961), Nr. 2, S. 610–612
- [Slepian und Hill 1963] SLEPIAN, D. ; HILL, M.: On the Zeros of Gaussian Noise. In: ROSENBLATT, M. (Hrsg.): *Time Series Analysis*. New York : Wiley, 1963, S. 143–149
- [Taylor 1975] TAYLOR, H. M.: A Stopped Brownian Motion Formula. In: *The Annals of Probability* 3 (1975), Nr. 2, S. 234–246
- [Wang und Pötzelberger 1997] WANG, L. ; PÖTZELBERGER, K.: Boundary crossing probability for Brownian motion and general boundaries. In: *Journal of Applied Probability* 34 (1997), Nr. 1, S. 54–65
- [Werner 2005] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Berlin [u.a.] : Springer, 2005
- [Wickham 2009] WICKHAM, H.: *ggplot2: elegant graphics for data analysis*. New York : Springer, 2009 (use R!)

- [Wickham 2011] WICKHAM, H.: The Split-Apply-Combine Strategy for Data Analysis. In: *Journal of Statistical Software* 40 (2011), Nr. 1, S. 1–29
- [Wiener 1922] WIENER, N.: The average value of a functional. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 22 (1922), S. 454–467
- [Witting 1985] WITTING, H.: *Mathematische Statistik I*. Stuttgart : Teubner, 1985
- [Witting und Müller-Funk 1995] WITTING, H. ; MÜLLER-FUNK, H.: *Mathematische Statistik II*. Stuttgart : Teubner, 1995
- [Zacks 1991] ZACKS, S.: Detection and Change-Point Problems. In: GHOSH, B.K. (Hrsg.) ; SEN, P.K. (Hrsg.): *Handbook of sequential analysis*. New York [u.a.] : Dekker, 1991 (Statistics ; 118), S. 531–562
- [Zhang u. a. 2004] ZHANG, L. ; LAI, C. D. ; GOVINDARAJU, K. ; BEBBINGTON, M.: A Note on Average Run Lengths of Moving Average Control Charts. In: *Economic Quality Control* 19 (2004), Nr. 1, S. 23–27