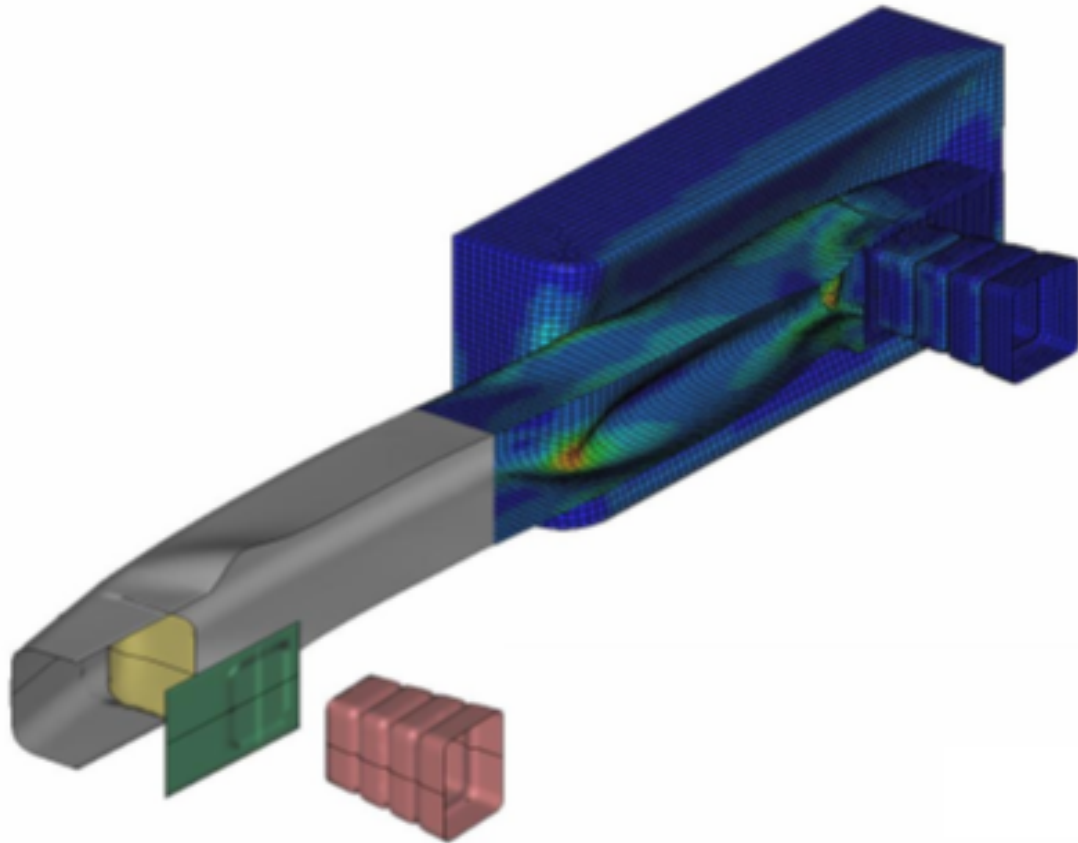


Diplomarbeit

Finite-Elemente Crashsimulation eines Stoßfängerquerträgers inklusive Crashbox mittels einer nichtlinearen Kurzzeitanalyse



Fachhochschule Düsseldorf FB 04

vorgelegt von: Michael Czech

Bearbeitungszeitraum: 24.09.2004 – 24.01.2005

Erster Prüfer: Prof. Dr. W. Scheideler

Zweiter Prüfer: Prof. Dr. A. Jahr

1	Einleitung.....	4
1.1	Aufgabe	5
1.2	Gliederung	6
2	Einführung in Finite-Elemente-Berechnungen.....	8
2.1	Grundgleichungen der Elastostatik	8
2.2	Verschiebungen und Dehnungen am festen Körper	8
2.2.1	Deformationsgradient.....	8
2.2.2	Dehnungen	10
2.3	Spannungen und Kräfte am festen Körper	13
2.4	Prinzip der virtuellen Arbeit	17
2.5	Verschiebungsmethode	19
2.5.1	Einführung	19
2.5.2	Dreieckselement für ebene elastische Probleme	22
2.5.3	Wahl des Verschiebungsansatzes	24
2.5.4	Dehnungen	27
2.5.5	Element-Steifigkeitbeziehungen.....	28
3	Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen.....	31
3.1	Iterations-Methoden	32
3.2	Die Kräfte im dynamischen Gleichgewicht	35
3.3	Lösung der Bewegungsgleichung	36
3.4	Direkte Integration	38
3.4.1	Zentrale Differenzenmethode.....	39
3.4.2	Lösung nichtlinearer Gleichungen in kinetischen Berechnungen...	42
3.5	Isoparametrisches Konzept	43
4	Simulation.....	47
4.1	Ablauf der Simulation	47
4.2	Erstellung des Modells	50
4.3	Schalenelemente	52
4.4	Konstitutive Beziehungen	60
4.4.1	Materialmodelle.....	61

4.4.2	Elastoplastisches Materiallmodel	61
4.4.3	Von- Mises-Plastizität	64
4.5	Kontaktbedingungen.....	68
4.6	Analyse der Crashbox.....	70
4.6.1	Anfangs- und Randbedingungen	70
4.6.2	Voruntersuchung.....	72
4.6.3	Ergebnisse der Crashboxanalyse	74
4.7	Analyse des Stoßfängerquerträgers.....	80
4.7.1	Anfangs- und Randbedingungen	80
4.7.2	Ergebnisse der Analyse des Stoßfängerquerträgers	81
4.8	Analyse des Gesamtsystems mit 40 Prozent Überdeckung	89
4.8.1	Anfangs-und Randbedingungen	89
4.8.2	Ergebnisse der Analyse des Gesamtsystems.....	92
4.8.3	Diskussion der Ergebnisse	95
Anhang A.....		96
Abbildungsverzeichnis		96
Literaturangabe		98
Technische Zeichnungen.....		99

1 Einleitung

Die Prägung des Begriffs Finite-Elemente-Methode (FEM) wird im Allgemeinen *Clough* (1960) zugeschrieben. Er verband mit dem Begriff die Modellvorstellung, dass ein Körper (Kontinuum) durch eine endliche Anzahl von Teilbereichen (finiten Elementen) unterteilt wird. Die eigentliche Methode basiert auf den Arbeiten von *Ostenfeld* und *Argyris* (1954). Bei einer Berechnung eines Problems entstehen zum Teil sehr große Gleichungssysteme, welche das menschliche Gehirn nicht mehr erfassen kann. Aus diesem Grund fand die FEM erst mit der Entwicklung leistungsfähigerer (aber auch billigerer) Computer ihren Durchbruch. Die FEM wird heute für Berechnungsaufgaben im Ingenieurwesen auf breiter Ebene (Luft und Raumfahrt, Maschinen- und Fahrzeugbau) erfolgreich angewendet. Die Methode wird dort angewandt, um physikalische Probleme in Form von ingenieurwissenschaftlichen Berechnungen und Konstruktionen zu lösen. Das Prinzip der FEM sieht also vor, den zu berechnenden Körper durch eine endliche Anzahl von finiten Elementen zu zerlegen. Für jedes Element wird nun die Lösung der Gleichungen ermittelt. Durch das Zusammenfügen der Lösungen der einzelnen Elemente ermittelt man die Lösung der Gesamtstruktur. Mit Hilfe der finiten Elemente wird das physikalische Problem auf ein mathematisches idealisiert. Die Finite-Elemente-Berechnung löst dann das mathematische Problem. Da es sich bei der Lösungstechnik um ein numerisches Verfahren handelt, muss man sich immer im Klaren sein, dass die Lösung nur eine Annäherung an die eigentliche Lösung des physikalischen Problems bzw. Modells sein kann. Strebt die Größe der finiten Elemente, die einen Körper beschreiben gegen Null, so strebt auch die Lösung des mathematischen Problems immer näher an die eigentliche Lösung. Mit anderen Worten, je feiner das Netz der finiten Elemente, desto genauer die Lösung, aber auch entsprechend aufwendiger (länger) ist die Berechnung am Computer. Diese Annäherung hängt auch noch von anderen Parametern ab, welche das mathematische Modell beschreiben. Da es aber selbst im feinsten mathematischen Modell unmöglich ist, alle Parameter einzubeziehen, die in der Natur vorhanden sind, kann die exakte Lösung des physikalischen Modells nicht ermittelt werden.

Die Anfänge der FEM beschränkten sich auf statische, linear-elastische Berechnungen. Statisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Belastungen an dem Modell nur sehr langsam aufgebracht werden, linear-elastisch beschreibt das Materialverhalten.

In den meisten praktischen Berechnungen besteht das linear-elastische Materialverhalten (das Hookesche Gesetz) nur für den Zustand kleiner Dehnungen bzw. Verzerrungen. Diese Berechnungen gehen nicht über die Elastizitätsgrenze hinaus. Demgegenüber stehen die nichtlinearen Finite-Elemente-Berechnungen. Wie der Name schon sagt, werden hier die FE-Modelle über den Bereich der Elastizität hin beansprucht. Grosse Verzerrungen und/oder große Verschiebungen kennzeichnen diese Art der Berechnungen. Plastische Verformungen treten in Form von bleibenden Dehnungen auf. Sowohl lineare als auch nichtlineare Berechnungen können entweder statisch oder aber auch dynamisch erfolgen. Im zweiten Fall müssen zusätzliche Kräfte wie Trägheits- und Dämpfungskräfte berücksichtigt werden.

1.1 Aufgabe

Diese Arbeit befasst sich mit der Simulation eines Stoßfängerquerträgers. In dieser Berechnung prallt der Stoßfängerquerträger mit einer hohen Geschwindigkeit auf eine Barriere auf, dabei entstehen große Verformungen. Die gesamte Simulation spielt sich innerhalb von wenigen Millisekunden ab. Das Problem ist also gekennzeichnet durch die Lösung eines nichtlinearen dynamischen Problems mit großen Verschiebungen und Dehnungen.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein FE-Modell zu erstellen und anschließend zu berechnen, welches durch die folgenden Punkte beschrieben wird.

- Der Stoßfängerquerträger ist ein dünnwandiges Modell, deshalb werden (finite) Schalenelemente verwendet um das Modell zu beschreiben. Diese sollen das Verhalten des Modells durch die auftretenden Belastungen realitätsnah darstellen.
- Das Material (Stahl) wird über die Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht, es

kommt also zu plastischen Verformungen. Effekte wie eine Verfestigung, bei der das Material mit zunehmender Beanspruchung "fester" wird, treten dabei auf.

- Bei den großen Verformungen muss sichergestellt werden, dass sich die einzelnen Komponenten des Stoßfängerquerträgers nicht selbst durchdringen. Des Weiteren muss sichergestellt werden, dass das FE-Programm den Aufprall des Stossfängerquerträgers auf die Barriere erkennt und dementsprechend behandelt. Diese Probleme werden unter dem Begriff Kontaktdefinition zusammengefasst.
- Wie schon erwähnt, läuft der gesamte Vorgang innerhalb von wenigen Millisekunden ab. Für die Lösung solch eines kurzzeitigen dynamischen Problems stehen spezielle Verfahren wie die direkte Integration zur Verfügung.

1.2 Gliederung

Kapitel 2 beschreibt zu Beginn die wichtigsten Begriffe, welche in der nachfolgenden Einführung in die Methode der Finiten-Elemente benötigt werden. Diese Einführung beschreibt die Verschiebungsmethode, anhand eines vereinfachten Modells wird hier die allgemeine Vorgehensweise erläutert. Die Annahmen in der Verschiebungsmethode beschränken sich auf den linear-elastischen Bereich.

Kapitel 3 erweitert die Vorgehensweise auf den nichtlinearen Bereich. Danach werden die Grundgleichungen der Dynamik und das Verfahren der direkten Integration erläutert. Dieses Verfahren wird in dem hier benutzten FE-Programm angewendet. Eine Darstellung der finiten Elemente durch das wichtige isoparametrische Konzept schließt Kapitel 3 ab.

Kapitel 4 befasst sich mit der eigentlichen Simulation. Es wird dargestellt, wie das FE-Modell erzeugt und vernetzt wurde. Die verwendeten Schalenelemente, das Materialmodell, welches die Materialeigenschaften beschreibt und die

Kontaktdefinition werden näher erläutert. Die eigentliche Simulation ist in drei Teile gegliedert.

- Analyse der Crashbox
Hierbei werden mehrere Varianten der Deformationselemente berechnet, welche sich hinter dem Stoßfängerquerträger befinden.
- Analyse des Stoßfängerquerträgers
Auch hier erfolgt eine Variantenuntersuchung.
- Analyse des Gesamtsystems
Das Gesamtsystem setzt sich aus den Komponenten mit den besten Ergebnissen aus den vorhergehenden Analysen. Hierbei wird der Aufprall des Gesamtsystems auf eine versetzte, deformierbare Barriere berechnet.

In jeder Analyse erfolgt am Anfang die Erläuterung der Anfangs- und Randbedingungen, zum Schluss werden die Ergebnisse ausführlich dargestellt.

2 Einführung in Finite-Elemente-Berechnungen

2.1 Grundgleichungen der Elastostatik

Zur Beschreibung des elastomechanischen Verhaltens eines Körpers, der unter der Einwirkung von Kräften steht, sind 15 Gleichungen erforderlich [4]. Die Verformungen werden hierbei als stetig, klein und reversibel angenommen. Die benötigten Beziehungen werden aus Betrachtungen an einem infinitesimalen Quader im dreidimensionalen Raum gewonnen. Man erhält dabei

- 6 Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)
- 6 Spannungs-Dehnungsbeziehungen (Materialgesetz)
- 3 innere Gleichgewichtsbedingungen. (Kinetik)

In diesen Gleichungen treten insgesamt 15 Unbekannte auf

- 3 Verschiebungen $\underline{\mathbf{u}}^T = [u, v, w]$
- 6 Dehnungen $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{yx} \ \varepsilon_{zx} \ \varepsilon_{yz}]$
- 6 Spannungen $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]$

2.2 Verschiebungen und Dehnungen am festen Körper

2.2.1 Deformationsgradient

Mit Hilfe des Deformationsgradienten wird die Deformation eines Körpers bzw. einer Struktur beschrieben [1] [14]. Die deformierte Gestalt einer Struktur ist vollständig beschrieben, falls man an jedem Punkt $\underline{\mathbf{x}}$ mit den Koordinaten x, y, z die kartesischen Verschiebungen u, v, w kennt. Dabei beschreibt u die Verschiebung des Punktes in Richtung von x .

Der Koordinatenvektor

$$\underline{\mathbf{x}}^T = [x \ y \ z] = [x_1 \ x_2 \ x_3] \quad (2.1)$$

beschreibt die unverformte Lage eines solchen Punktes der Struktur und seine Verschiebung durch den Verschiebungsvektor

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})^T = [u_1(\underline{\mathbf{x}}) \quad u_2(\underline{\mathbf{x}}) \quad u_3(\underline{\mathbf{x}})] \quad (2.2)$$

mit $\underline{\mathbf{u}}^T = [u, v, w] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$

Die Veränderung, die ein infinitesimal kleines Linienelement $d\underline{\mathbf{x}}$ beim Übergang vom nichtdeformierten (P, Q) zum deformierten (P', Q') Zustand erfährt, ist in der Abbildung 2.1 dargestellt.

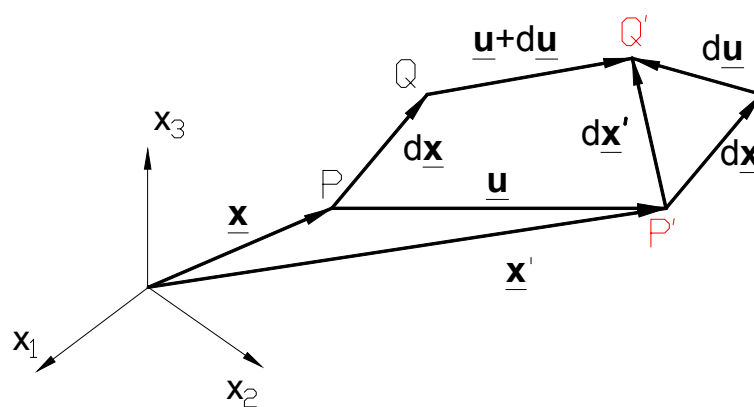


Abb. 2.1

Es ergibt sich für das deformierte Linienelement

$$d\underline{\mathbf{x}}' = d\underline{\mathbf{x}} + d\underline{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

Die Punkte P und Q sind dicht benachbart, zur Beschreibung von $d\underline{\mathbf{u}}$ genügen die ersten (linearen) Gliedern einer Taylorschen Reihe

$$d\underline{\mathbf{u}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_3} dx_3$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} d\underline{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

mit dem so genannten Verschiebungsgradienten $\mathbf{f}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j}$ [14] (2.5)

(Partielle Ableitung der Verschiebungen nach den Ortkoordinaten)

$$\Rightarrow d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}d\mathbf{x} = (\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}})d\mathbf{x} = (\delta_{ij} + \mathbf{f}_{ij})d\mathbf{x}_j$$

$$\delta: \text{Kronecker-Delta} \quad \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Deformationsgradient: $\mathbf{X}_{ij} = (\delta_{ij} + \mathbf{f}_{ij})$ (2.6)

$$\Rightarrow d\mathbf{x}' = \mathbf{X}_{ij}d\mathbf{x}_j$$
 (2.7)

Der Deformationsgradient ermöglicht die Transformation eines beliebigen Linienelements $d\mathbf{x}$ an der Stelle \mathbf{x} in sein deformiertes Abbild $d\mathbf{x}'$ an der Stelle \mathbf{x}' .

2.2.2 Dehnungen

Ein häufig verwendetes Maß für Dehnungen stellt der GREEN-LAGRANGEsche Dehnungs- bzw. Verzerrungstensor $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ (nicht zu verwechseln mit der Elastizitätsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$) dar .

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \quad [1] [3] [14] \quad (2.8)$$

mit $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{X}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}$ (rechte CAUCHY-GREEN-Tensor) (2.9)

mit $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ als Einheitsmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}} &= \underline{\underline{\mathbf{X}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{ik} = (\delta_{ij} + \mathbf{f}_{ij})(\delta_{ik} + \mathbf{f}_{ik}) \\ &= (\delta_{ij} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j})(\delta_{ik} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_j} \right) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{f}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{f}}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}) \quad (2.11)$$

Das quadratische Glied $\underline{\underline{\mathbf{f}}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}$ zeigt den nichtlinearen Charakter des GREEN-LAGRANGEschen Dehnungstensors. In der linearen Theorie wird dieser Anteil unter Annahme kleiner Verschiebungsgradienten ($\|\underline{\underline{\mathbf{f}}}\| = 1$) vernachlässigt, so dass aus $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ dann der lineare Verzerrungstensor $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ folgt

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{f}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}^T) \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Da die Matrix $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ symmetrisch ist, beinhaltet sie insgesamt nur 6 unabhängige Komponenten. Zusammengefasst zu einem Dehnungsvektor erhält man die Dehnungs-Verschiebungsbeziehung zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yx} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad (2.13)$$

Dabei ist die Matrix $\underline{\underline{D}}$ kein Zahlenfeld, sondern ein Differential- oder Matrixoperator, der hier auf \underline{u} anzuwenden ist, und zwar formal nach den Regeln der Matrixmultiplikation.

Die Hauptdiagonale der Matrix ε_{ij} beschreibt Normaldehnungen wie z.B. ε_{xx} (siehe Abb.2.2).

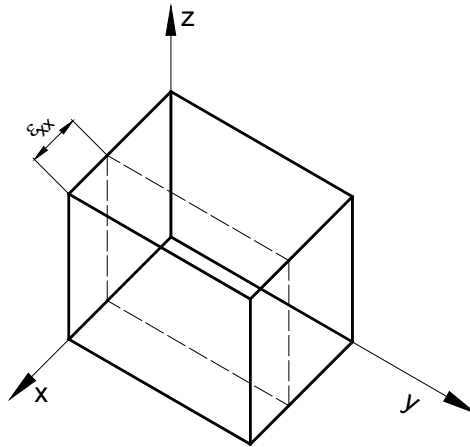


Abb. 2.2

Die Nebenglieder entsprechen Schubdehnungen wie z.B. ε_{yz} (siehe Abb. 2.3).

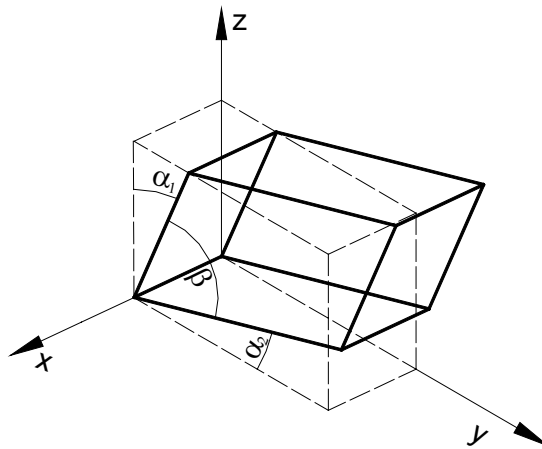


Abb. 2.3

$$\beta = 90^\circ - 2\varepsilon_{yz}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

2.3 Spannungen und Kräfte am festen Körper

Durch die Betrachtung eines beliebig herausgeschnittenen, infinitesimalen Quaders wie in Abb. 2.4 dargestellt, werden die inneren Kräfte an den Schnittflächen dargestellt. Diese Schnittkräfte, bezogen auf die Schnittfläche, bezeichnet man als Spannungen. Der erste Index der Spannungssymbole zeigt die zugehörige Flächennormale an, der zweite die Krafrichtung auf den sichtbaren Flächen des Quaders.

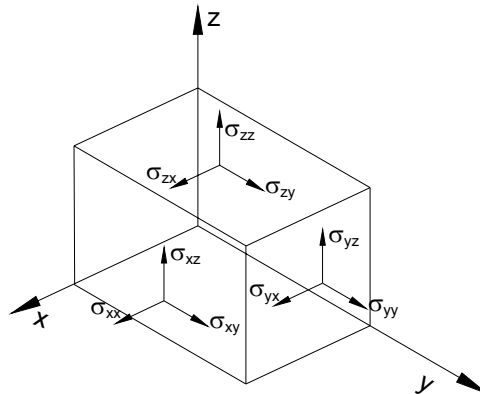


Abb. 2.4

$$\underline{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{“CAUCHY Spannungstensor“} \quad [8] \quad (2.14)$$

Aus der Betrachtung des Momentengleichgewichtes am infinitesimalen Quader folgt die Symmetrie des Cauchy Tensors

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$$

Die verbleibenden 6 Spannungen im Spannungsvektor $\underline{\sigma}^T$ zusammengefasst

$$\underline{\sigma}^T = \left[\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \right] \quad (2.15)$$

Die Spannungen erhält man aus der Spannungs-Dehnungsbeziehung

Die konstitutive Beziehung bzw. das Materialgesetz nach Hook stellt einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{Hook'sche Gesetz}) \quad (2.16)$$

hierbei verknüpft die Elastizitätsmatrix bzw. der Materialtensor $\underline{\underline{E}}$ [2] die Komponenten des Spannungsvektors mit den Komponenten des Dehnungsvektors. Für den isotropen dreidimensionalen Fall lautet die Elastizitätsmatrix

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & & & \\ & (1-\nu) & \nu & & & \\ & & (1-\nu) & & & \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & & \\ & \text{sym} & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Nicht eingetragene Elemente sind Null

Mit E als Elastizitätsmodul und ν als Querkontraktion.

Analog zu der Beziehung zwischen den Dehnungen und den Verschiebungen gibt es auch eine entsprechende Relation zwischen den Spannungen und der äußeren Belastung. Es ist dabei die Forderung nach Kräftegleichgewicht im Inneren und an der Oberfläche des Tragwerks zu erfüllen. Die am infinitesimalen Quader angreifenden Volumenkräfte und Spannungen müssen im Gleichgewicht sein.

Mit dem Vektor der Volumenkraft verursacht durch das Eigengewicht

$$\underline{\underline{p}}_v = \begin{bmatrix} p_{vx} \\ p_{vy} \\ p_{vz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

erhält man für die x-Richtung

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + p_{vx} = 0$$

und für die anderen zwei Koordinatenrichtungen gilt entsprechend

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + p_{vy} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + p_{vz} = 0$$

Spaltet man den Spannungsvektor aus diesem Gleichungssystem ab, erhält man die entsprechende Matrixdarstellung, wobei der schon im Abschnitt 2.2.2 benutzte Differentialoperator **D** erscheint.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{vx} \\ p_{vy} \\ p_{vz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\underline{\mathbf{p}}}_v = 0 \tag{2.18}$$

Zur Veranschaulichung der Gleichgewichtsbeziehungen an der Körperoberfläche werden die Oberfläche eines herausgeschnittenen infinitesimalen Prismas betrachtet und erneut die Kräftegleichgewichte in den Koordinatenrichtungen angesetzt (siehe Abb. 2.5).

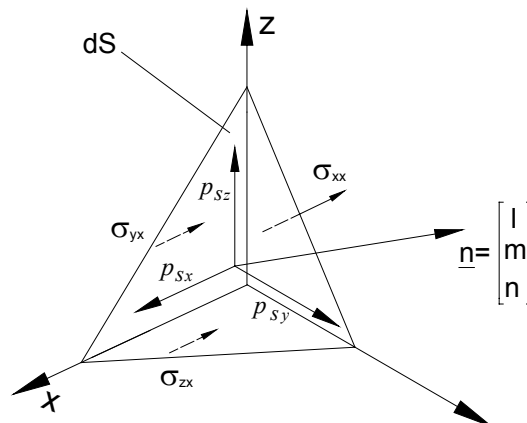


Abb. 2.5

mit dem Vektor der Oberflächenkraft:

$$\underline{\mathbf{p}}_s = \begin{bmatrix} p_{Sx} \\ p_{Sy} \\ p_{Sz} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Der Bereich der Oberfläche hat die Größe dS und ist mit der Oberflächennormalen $\underline{\mathbf{n}}$ (Einheitsvektor) festgelegt. Die in den Koordinatenebenen liegenden Schnittflächen des Prismas können als Projektion der Oberfläche dS angesehen werden, und entsprechend ergibt sich ihre Größe $\mathbf{l}dS$, $\mathbf{m}dS$ und $\mathbf{n}dS$. Mit Kenntnis aller Bezugsflächen kann dann das Kräftegleichgewicht formuliert werden.

Es ergibt sich entsprechend den Volumenkräften das folgende Gleichungssystem:

$$\mathbf{l}\sigma_{xx} + \mathbf{m}\tau_{yx} + \mathbf{n}\tau_{zx} - p_{Sx} = 0$$

$$\mathbf{l}\tau_{xy} + \mathbf{m}\sigma_{yy} + \mathbf{n}\tau_{zy} - p_{Sy} = 0$$

$$\mathbf{l}\tau_{xz} + \mathbf{m}\tau_{yz} + \mathbf{n}\sigma_{zz} - p_{Sz} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{Sx} \\ p_{Sy} \\ p_{Sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^T \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{p}}_s = 0 \quad (2.20)$$

Wobei \mathbf{l}, \mathbf{m} und \mathbf{n} die Komponenten des Normaleneinheitsvektors der Oberfläche sind.

2.4 Prinzip der virtuellen Arbeit

Grundlage für die verschiebungsbezogene Finite-Elemente-Lösung ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit abgeleitet worden ist. [2] [4] [5]

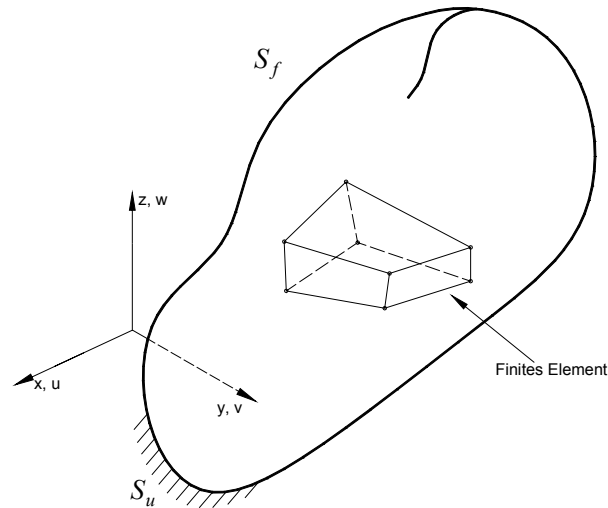


Abb. 2.6

Das Prinzip sagt aus: wenn sich der in Abb. 2.6 dargestellte Körper im Gleichgewicht befindet, muss für beliebige, kompatible, kleine, dem Körper im Gleichgewichtszustand erteilte virtuelle Verschiebungen, die an den vorgeschriebenen Verschiebungen Null sind (der Körper ist im Bereich S_u fest eingespannt, wahre Verschiebungen sind hier nicht zugelassen, dementsprechend dürfen auch keine virtuellen auftreten), die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit sein, d.h.

$$\text{I.V.A.} = \text{Ä.V.A.}$$

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_S \underline{\underline{p}}_s^T \underline{\underline{u}} dS + \int_V \underline{\underline{p}}_v^T \underline{\underline{u}} dV + \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{u}} \quad (2.21)$$

Spannungen im Gleichgewicht mit den Lasten

Virtuelle Verzerrungen, die den virtuellen Verschiebungen $\underline{\underline{u}}$ entsprechen

Hierbei bezeichnet $\underline{\underline{u}}$ die virtuellen Verschiebungen und $\underline{\underline{\varepsilon}}$ die ihnen entsprechenden virtuellen Verzerrungen, wobei der obere Querstrich virtuelle Größen kennzeichnet. Die virtuellen Verschiebungen (und entsprechende virtuelle Verzerrungen) sind keine wirklichen Verschiebungen, die der Körper infolge der auf ihnen wirkenden Belastung tatsächlich erfährt. Vielmehr sind die virtuellen Verschiebungen von den tatsächlichen Verschiebungen vollkommen unabhängig; sie werden im Zuge der Berechnung lediglich als Gedankenexperiment eingeführt, damit man die Gleichgewichtsbeziehungen in der Integralform aufstellen kann.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nicht auf linear-elastische Rechnung beschränkt. Über das Stoffgesetz wird keine Aussage gemacht. Analog der vorhergehenden Abschnitte ergeben sich die Größen zu

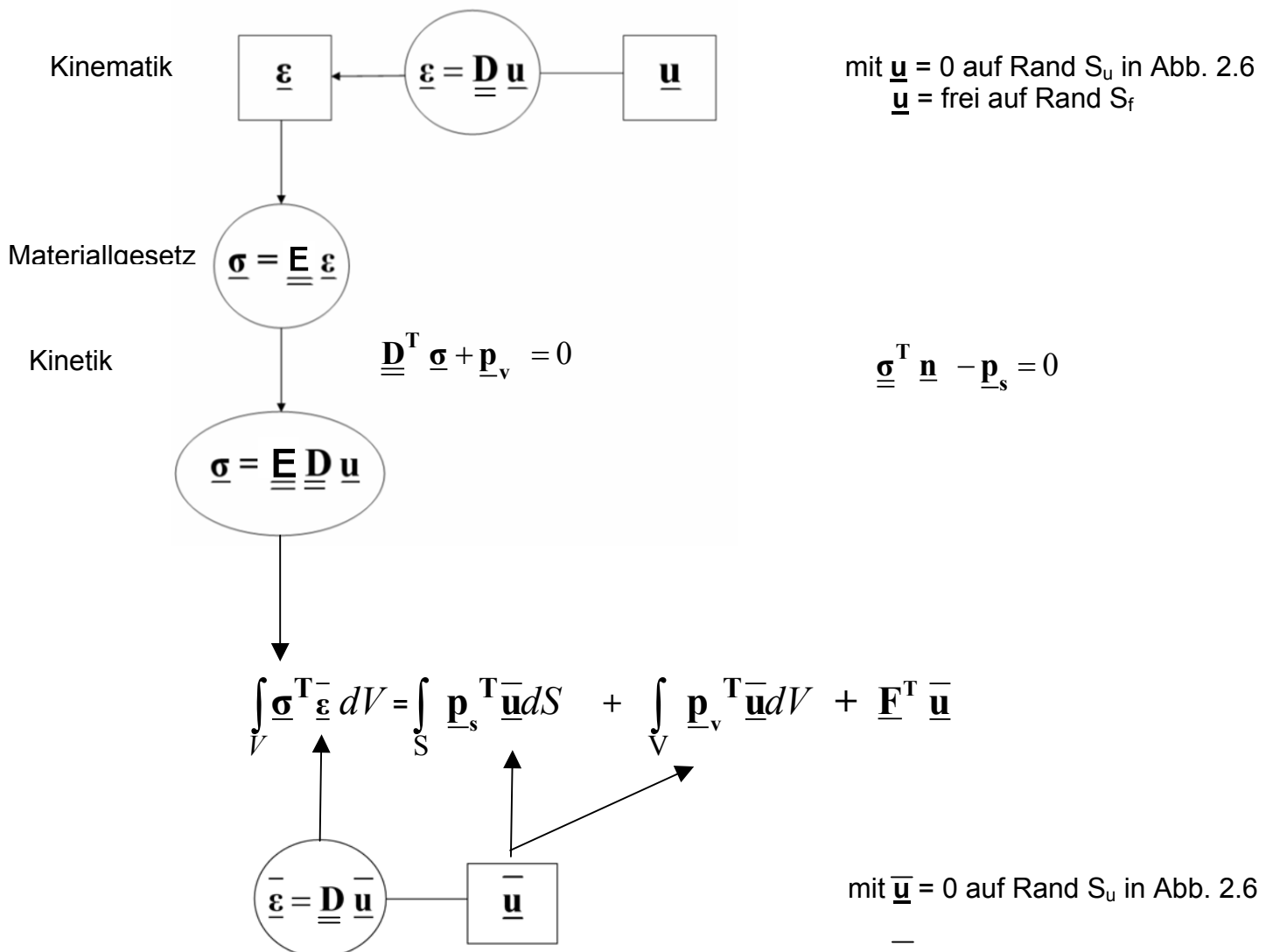


Abb. 2.7

$$\Rightarrow \int_V [\underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}]^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} dV = \int_S \underline{\mathbf{p}}_s^T \underline{\underline{\mathbf{u}}} dS + \int_V \underline{\mathbf{p}}_v^T \underline{\underline{\mathbf{u}}} dV + \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad (2.22)$$

Als unbekannte Zustandsgröße treten in Gl. 2.22 nur Verschiebungsgrößen auf. Verfahren auf Grundlage von Gl. 2.22 werden deshalb als *Verschiebungsgrößenverfahren* (Verschiebungsmethode) [4] [5] [9] bezeichnet.

2.5 Verschiebungsmethode

2.5.1 Einführung

In Abbildung 2.8 ist eine einfache elastische Feder dargestellt, die der linearen Beziehung $F = ku$ (2.23) gehorcht.

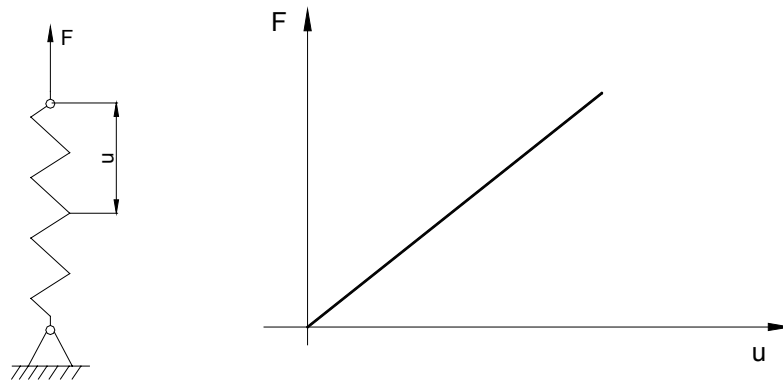


Abb. 2.8

Darin sind $u = \frac{1}{k}F$ die Auslenkung der Feder infolge der Kraft F und k die Federkonstante, die allein ausreicht, um die einfache Struktur (Feder) zu charakterisieren. Die Federkonstante k ist ein Maß für die *Steifigkeit*, während der Kehrwert $\frac{1}{k}$ die *Nachgiebigkeit* des Federelements ausdrückt.

Bei einer komplizierten Struktur, wie beispielsweise dem in Abb. 2.9 dargestellten statisch unbestimmten Rahmen, will man die Verschiebungen in den Knoten B, C, D, E und die Stabkräfte ermitteln.

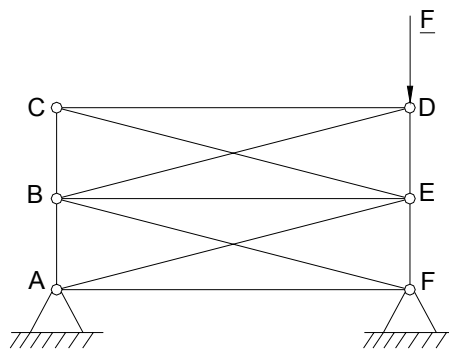


Abb. 2.9

Man versucht, Gleichung 2.23 zu verallgemeinern gemäß der kompakten Matrix-Darstellung

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \quad (2.24)$$

Darin sind \mathbf{F}_i und \mathbf{u}_j Spaltenmatrizen, deren Elemente sämtliche Knotenkräfte und sämtliche Knotenverschiebungen enthalten. Die Verschiebungen \mathbf{u}_j von Körperpunkten (Knoten) hängen eindeutig von der Wirkung aller Kräfte \mathbf{F}_i ab. Im Falle der Linearität muss auch die Umkehrung gelten, und zwar gehört zu einem Verformungszustand ein eindeutiger Kräftezustand. Die Größe \mathbf{K}_{ij} stellt die *Steifigkeitsmatrix* dar [1] [2] [5]. Die Steifigkeitsbeziehungen 2.24 bilden die Grundlage der Matrix-Verschiebungsmethode (Steifigkeitsmethode). Die Hauptaufgabe besteht darin, die Steifigkeitsmatrix für die vorliegende Gesamtstruktur aufzustellen. Danach erfolgt die Lösung des betreffenden Problems (Ermittlung sämtlicher Knotenkräfte und Knotenverschiebungen durch numerische Rechenoperationen).

Für eine elastische Struktur wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix stets aus den Einzelsteifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente zusammengestellt.

Um die Starrkörperverschiebung und Drehung des Systems auszuschalten, muss eine Mindestanzahl von Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben werden. Andernfalls ist es unmöglich, das Gleichungssystem zu lösen. Dieser physikalisch

offensichtliche Sachverhalt wird mathematisch dadurch ausgedrückt, dass sich die Matrix \mathbf{K}_{ij} dann als singular erweist, d.h. zu \mathbf{K}_{ij} existiert keine inverse Matrix da $\det \underline{\underline{\mathbf{K}}} = 0$ ist. In der Abbildung 2.10 geschieht das durch ein Fest- und ein Loslager am unteren Rand.

Die Verschiebungsmethode kann auf ein Kontinuum, das beispielsweise elastisch oder auch plastisch beansprucht wird, ausgedehnt werden.

Kontinuum wird definiert als: Körper, bei dem der ganze Rauminhalt stetig mit Materie ausgefüllt ist.

Während beim Fachwerk oder einer aus Federn zusammengesetzten Struktur eine Aufteilung in finite Elemente bereits durch die Konstruktion vorgegeben ist, muss beim Kontinuum zu Beginn der Rechnung erst eine dem Problem angepasste Diskretisierung vorgenommen werden.

Abbildung 2.10 zeigt eine mögliche Diskretisierung einer ebenen Scheibe durch Dreieckselemente.

- Das Kontinuum wird durch gedachte Linien oder Flächen in eine Anzahl *finiter Elemente* zerlegt.
- Dabei wird angenommen, dass die Elemente durch eine bestimmte Anzahl von Knotenpunkten – angeordnet an den Elementrändern – untereinander verbunden sind. Die Verschiebungen der Knotenpunkte werden hier als die grundlegenden unbekanntes Größen des Problems aufgefasst.
- Der Verschiebungszustand innerhalb jedes finiten Elementes wird mit Hilfe eines Systems gewählter Funktion in Abhängigkeit von den Knotenpunktverschiebungen eindeutig festgelegt.
- Durch diese Verschiebungsfunktion ist auch der Verzerrungszustand im Inneren eines Elementes eindeutig in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen bestimmt. Aus diesen Verzerrungen kann unter Beachtung eventuell vorhandener Anfangsverzerrungen mit dem Stoffgesetz des Materials die Spannungsverteilung im gesamten Element und damit auch an dessen Rändern ermittelt werden.
- Es wird ein System von Knotenkräften bestimmt, das im Gleichgewicht mit den Oberflächen- und Volumenkräften steht und als *Ersatzbelastung* fungiert. Das führt letztlich auf die Beziehung der Form 2.24.

Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgt auf der Basis des Prinzips der virtuellen Arbeiten. Hierhin gehen die Stoffeigenschaften des Kontinuums und auch der Verschiebungsansatz ein.

2.5.2 Dreieckselement für ebene elastische Probleme

Im Folgenden soll die Steifigkeitsmatrix für ein Dreieckselement unter Berücksichtigung linear elastischen Verhaltens bei ebenem Spannungszustand (ESZ) aufgestellt werden. Der ESZ tritt in dünnen Scheiben, wie z. B. in dünnwandigen Leichtbaukonstruktionen, auf. Die Dickenausdehnung kann hierbei vernachlässigt werden, weshalb folgende Annahmen für die Spannungen und Verzerrungen gemacht werden.

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0, \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

aber $\varepsilon_{zz} \neq 0$ (wegen Querkontraktion)

Mit dieser Annahme ergibt sich die Spannungs-Dehnungsbeziehung mit der reduzierten Elastizitätsmatrix $\underline{\underline{E}}$ zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad [4] \quad (2.25)$$

Abbildung 2.11 zeigt eine mögliche Diskretisierung einer ebenen Scheibe durch sechs Dreieckselemente. Für diese Struktur wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix stets aus den Einzelsteifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente zusammengestellt, deshalb wird hier beispielhaft das schraffierte Dreieckselement betrachtet. Es wird ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem benutzt. Darin haben die drei Knoten 1, 2 und 3 die Koordinaten $(x_1, y_1), \dots, (x_3, y_3)$. Bei ebenem Problem hat das Dreieckselement je Knoten zwei Freiheitsgrade, nämlich die Verschiebungen in x und in y-Richtung. Die Knotenverschiebungen und Knotenkräfte sind in der Abbildung 2.11 eingetragen.

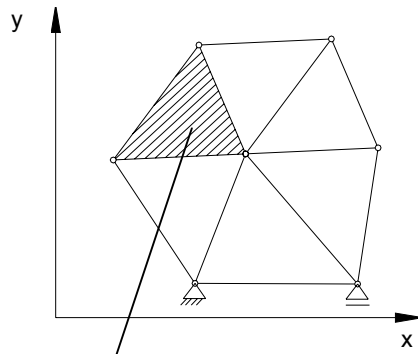


Abb. 2.10

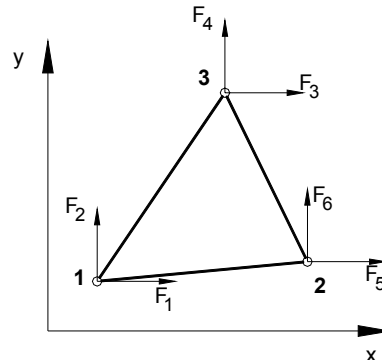
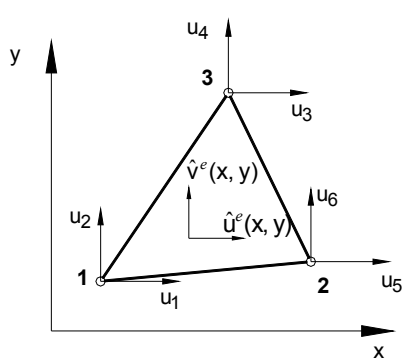


Abb. 2.11

Sämtliche Knotenverschiebungen und Knotenkräfte können in Spaltenvektoren zusammengefasst werden:

$$\mathbf{u}_j^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_i^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

Da diesem Element keine Freiheitsgrade entzogen sind, sind alle Elemente in \mathbf{u}_j^e und \mathbf{F}_i^e nicht Null. Der Index „e“ weist auf die lokalen Verschiebungen bzw. Kräfte am einzelnen Element hin. Da jeder Spaltenvektor sechs Koordinaten besitzt, ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{ij}^e des ebenen Dreieckselementes eine 6x6 Matrix.

Für das einzelne Element gilt:

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{K}_{ij}^e \mathbf{u}_j^e \quad \text{oder} \quad \underline{\mathbf{F}}^e = \underline{\mathbf{K}}^e \underline{\mathbf{u}}^e \quad (2.26)$$

2.5.3 Wahl des Verschiebungsansatzes

Mit Hilfe der Ansatzfunktionen (Formfunktionen oder Interpolationsfunktionen) werden die Verschiebungen in irgendeinen Punkt innerhalb des Elements durch die Verschiebungen in den Knotenpunkten dargestellt [2] [5] [7].

Gesucht sind also die Verschiebungen in jedem Punkt innerhalb des Elementes:

$$\hat{u}^e(x, y) \text{ und } \hat{v}^e(x, y)$$

die durch die Knotenverschiebungen \mathbf{u}_j^e ausgedrückt werden sollen. Im Wesentlichen müssen Verschiebungsansätze die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Die Ansatzfunktion darf keine Verzerrungen oder Spannungen hervorrufen, wenn ein Element nur Starrkörperbewegungen vollführt.
- Die Ansatzfunktion muss stetig sein. Stetigkeit ist im Inneren und auf dem Rand zu verlangen, falls das Element mit einem Element desselben Typs oder mit Elementen desselben Ansatzes in Berührung kommt.

Abbildung 2.12 veranschaulicht den Begriff der Starrkörperbewegung:

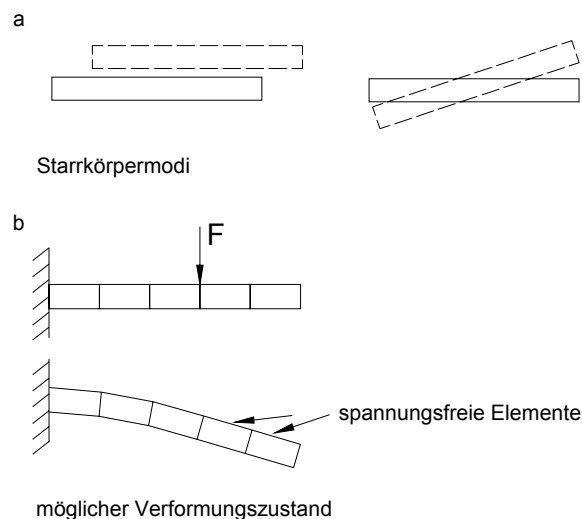


Abb. 2.12

Am Verformungsbild des Kragbalkenbeispiels erkennt man, warum ein Element in der Lage sein muss, diese Starrkörperbewegungen zu ermöglichen. Die Elemente

rechts vom Kraftangriff sind unbeanspruch, müssen aber trotzdem der Form der Biegelinie folgen.

Da das Dreieckselement in Abbildung 2.11 drei Knotenpunkte besitzt, liegen sechs Freiheitsgrade vor, so dass ein linearer Verschiebungsansatz mit sechs Ansatzfreiwerten $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6)$ gewählt werden kann:

$$\begin{aligned}\hat{u}^e(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \hat{v}^e(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y\end{aligned}\tag{2.27 a/b}$$

Dann sind die sechs Konstanten α_1 bis α_6 aus der Forderung zu bestimmen, dass sich bei Einsetzen der Knotenkoordinaten die entsprechenden Knotenverschiebungen ergeben.

Aus

$$\begin{aligned}u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\ u_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_5 + \alpha_3 y_5\end{aligned}$$

lassen sich α_1, α_2 und α_3 bestimmen. Damit ergibt sich schließlich

$$\hat{u}^e(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left[(a_1 + b_1 x + c_1 y) u_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) u_3 + (a_3 + b_3 x + c_3 y) u_5 \right]\tag{2.28 a}$$

wobei gilt:

$$\begin{array}{lll}a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 & a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 & a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2 & c_2 = x_1 - x_3 & c_3 = x_2 - x_1\end{array}$$

Weiter ist

$$2V = 2A_{\text{Dreieck } 123} = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{Fläche des Dreiecks}$$

Für die vertikale Verschiebung gilt analog:

$$\hat{v}^e(x,y) = \frac{1}{2V} \left[(a_1 + b_1x + c_1y)u_2 + (a_2 + b_2x + c_2y)u_4 + (a_3 + b_3x + c_3y)u_6 \right] \quad (2.28 \text{ b})$$

Die obigen Beziehungen 2.28a und 2.28b lassen sich in der Grundform darstellen:

$$\underline{\hat{u}}^e = \begin{bmatrix} \hat{u}^e(x,y) \\ \hat{v}^e(x,y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{N}}^e \underline{u}^e = \left[\underline{\underline{I}} \underline{N}_i \right]^e \underline{u}^e \quad (2.29)$$

Hierin ist $\underline{\underline{I}}$ eine Einheitsmatrix und $\underline{\underline{N}}^e$ die Interpolationsmatrix der Verschiebungen mit

$$N_i = \frac{1}{2V} (a_i + b_i x + c_i y) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

Die in diesem Verschiebungsansatz auftretenden Funktionen N_i sind die vorher schon erwähnten Interpolationsfunktionen. Der Verschiebungsansatz muss so gewählt werden, dass benachbarte Elemente vor, während und nach der Verformung nicht auseinander klaffen, so dass Lücken entstehen. Schließlich müssen beide Gleichungen ($\hat{u}(x,y)$ und $\hat{v}(x,y)$) vom selben mathematischen Typ sein, da der Werkstoff geometrisch isotrop ist.

Aufgrund des linearen Charakters des Ansatzes erhält man im Inneren des Dreieckselementes ein konstantes Verzerrungsfeld und damit auch ein konstantes Spannungsfeld. Verbesserungen erhält man durch Verschiebungsansätze höherer Ordnung. Dann müssen beim Dreieckselement neben den drei Eckpunkten noch weitere Knotenpunkte vorgesehen werden.

Die Zahl der Freiheitsgrade kann dadurch erhöht werden, dass man neben Eckknotenpunkten zusätzlich noch Zwischenknotenpunkte auf den Elementrändern vorgibt. Mit der Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade wächst auch der Grad der Polynome für die Verschiebungsansätze. Aus Abbildung 2.13 können die Polynomterme (PASCALSches Dreieck) je nach Knotenzahl entnommen werden. Man spricht dann auch von „Elementen höherer Ordnung“. Diese Methode bezeichnet man als p-Methode, demgegenüber steht die h-Methode. In der h-Methode werden keine weiteren Freiheitsgrade am Element selbst definiert, sondern die Anzahl der finiten Elemente erhöht, also die Struktur feiner diskretisiert. [5]

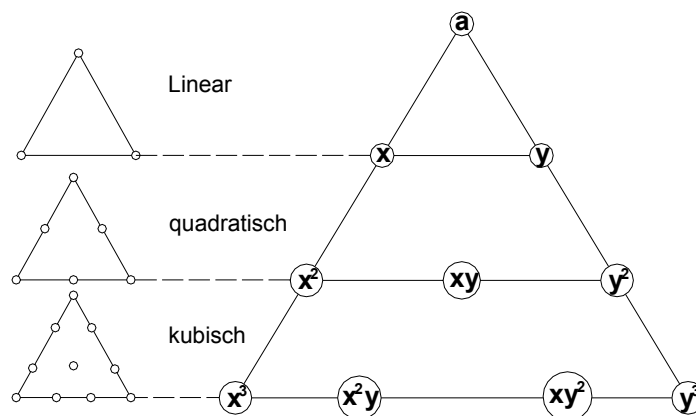


Abb. 2.13

Die Anzahl der vorgesehenen Knotenpunkte (links) stimmt mit der Anzahl der Polynomterme (rechts) überein.

2.5.4 Dehnungen

Im Falle des ebenen Spannungszustandes ist der Deformationszustand an jedem inneren Punkt des Elementes durch die drei Dehnungen ε_{xx}^e , ε_{yy}^e und ε_{xy}^e gemäß

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ 2\varepsilon_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^e(x,y) \\ \hat{v}^e(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \hat{\underline{\underline{u}}}^e \quad (2.31)$$

gegeben.

Mit $\underline{\hat{\mathbf{u}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{N}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e$ erhält man

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e \quad (2.32)$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e \quad (2.33)$$

Für $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^e$ ergibt sich

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{D}}} [\underline{\underline{\mathbf{I}}} N_i]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2V} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^e$ ist die Dehnungs-Verschiebungsmatrix [2] [5], man erhält ihre Zeilen durch Differenzieren der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}^e$ nach den Ortkoordinaten.

2.5.5 Element-Steifigkeitbeziehungen

Durch

$$\mathbf{F}_i^{eT} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6]$$

seien die den Oberflächenkräften und Volumenkräften des Elementes statisch äquivalenten Knotenkräfte definiert. Jede Kraft \mathbf{F}_i^{eT} muss die gleiche Anzahl richtungsmäßig übereinstimmender Kraftkomponenten wie die zugehörigen Knotenverschiebungen \mathbf{u}_j^e haben.

Es möge $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^{-e}$ eine virtuelle Verrückung an den Knoten sein. Entsprechend lauten die virtuellen Verschiebungen und Dehnung innerhalb des Elements

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{u}}}}^{-e} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{-e} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{-e} \quad (2.35)$$

und

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{u}}}^e \quad (2.36)$$

Die von den Knotenkräften verrichtete äußere virtuelle Arbeit ergibt sich aus der Summe der Produkte der einzelnen Kraftkomponenten mit den zugehörigen Verschiebungen. In Matrizenschreibweise ausgedrückt, also zu

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^e \quad (2.37)$$

Analog ergibt sich die spezifische Formänderungsarbeit zufolge der Spannungen und der Volumenkraft zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{eT} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e - \underline{\underline{\mathbf{p}}}_v^{eT} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{eT} (\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{eT} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^e - \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{p}}}_v^e) \quad (2.38)$$

Durch Gleichsetzen der äußeren Arbeit mit der Formänderungsarbeit, die sich durch eine über das Volumen des Elementes V^e erstreckende Integration ergibt, erhält man

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^e \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{eT} = \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{eT} \left(\int \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{eT} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^e dV^e - \int \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{p}}}_v^e dV^e \right) \quad [7] \quad (2.39)$$

Da diese Beziehung für einen beliebigen Wert der virtuellen Verrückungen gültig ist, kann man aus einem Faktorenvergleich entnehmen

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^e = \int \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{eT} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^e dV^e - \int \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{p}}}_v^e dV^e \quad (2.40)$$

Dieses Ergebnis ist für jede beliebige Spannungs-Dehnungs-Beziehung gültig.

Die Knotenkräfte $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^e$ können im linearen Fall mit 2.26 folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^e \underline{\underline{\mathbf{u}}}^e$$

Die Spannungen werden in 2.40 durch

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{E}}}^e \underline{\underline{\mathbf{B}}}^e \underline{\underline{\mathbf{u}}}^e \quad (\underline{\underline{\mathbf{E}}} \text{ A Materialtensor bzw. Elastizitätsmatrix})$$

ersetzt, somit ergibt sich die Steifigkeitsmatrix des einzelnen Elements zu

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^e = \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^e \underline{\underline{\mathbf{B}}}^e dV^e \quad (2.41)$$

Die Steifigkeitsmatrix der gesamten Struktur setzt sich aus den Lösungen der einzelnen Element Größen zusammen.

3 Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen

Bei der Einführung in die Methode der Finiten-Elemente in Kapitel 2 wird angenommen, dass die Verschiebungen der Finiten-Elemente-Gruppierung infinitesimal klein sind. Entsprechend war das Material linear-elastisch und die Randbedingungen änderten sich nicht während einer Berechnung. Die daraus abgeleitete Gleichgewichtsaussage gehorchte stets der Beziehung

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

für statische Berechnungen.

Der Vektor der Lasten ist eine lineare Funktion der Verschiebungen; d.h. setzt man vor die Verschiebungen $\underline{\mathbf{u}}$ einen konstanten Faktor α also $\alpha \underline{\mathbf{u}}$, so ergibt sich der entsprechende Lastvektor zu $\alpha \underline{\mathbf{F}}$. Trifft diese Aussage nicht zu, so wird eine nichtlineare Berechnung durchgeführt.

Der Typ bzw. die Art der Nichtlinearität soll durch folgende Klassifizierung angegeben werden:

- Geometrische Nichtlinearität
Problemstellungen dieser Art kennzeichnen sich durch große Verschiebung und Verdrehungen.
- Physikalische Nichtlinearität
Darunter fasst man nichtlineares Werkstoffverhalten zusammen. Wird z.B. ein Zugstab über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet, so fängt das Material an zu fließen und es sind bleibende Dehnungen zu erkennen (elastoplastisches Verhalten).
- Nichtlineare Randbedingungen
Ändern sich im Laufe einer Berechnung die Randbedingungen so spricht man von nichtlinearen Randbedingungen. Prallt z.B. ein Modell auf eine Wand auf, so werden den Knoten, welche sich im Kontakt mit der Wand befinden, Freiheitsgrade entzogen.

Diese Formen der Nichtlinearitäten können auch gekoppelt in Erscheinung treten.

3.1 Iterations-Methoden

Wenn die Berechnung geometrisch oder materiell nichtlineare Zustände oder zeitabhängige Phänomene enthält, müssen die Gleichgewichtsbeziehungen für den gesamten in Frage kommenden Zeitbereich gelöst werden. Diese Berechnung der Antwort wird mit einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Lösung ausgeführt. Grundlegend für eine inkrementelle Schritt-für-Schritt-Lösung ist die Annahme, dass die Lösung für einen diskreten Zeitpunkt t bekannt ist und dass sie für den diskreten Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht wird, wobei Δt ein Inkrement an Zeit ist. Demnach lautet in nichtlinearen Berechnungen die Gleichgewichtsbeziehung eines Systems zu der Zeit $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{F}} - {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{F}}$ enthält die von außen einwirkenden Knotenlasten, und ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{R}}$ ist der Vektor der Knotenpunktkräfte, welche den Element-Spannungen äquivalent sind. Anders als in Kapitel 2 hängen die Knotenpunktkräfte ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{R}}$ hier nichtlinear von den Knotenpunktverschiebungen ab. Somit ist es erforderlich, in der Lösung von 3.2 zu iterieren [2].

Da die Lösung zur Zeit t bekannt ist, kann man

$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{R}} = {}^t\underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}} \quad (3.3)$$

schreiben.

Dabei ist $\underline{\mathbf{R}}$ der Zuwachs der Knotenpunktkräfte, der dem Zuwachs der Element-Verschiebungen und –Spannungen von der Zeit t bis zur Zeit $t + \Delta t$ entspricht.

Dieser Vektor kann mit einer Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^t\underline{\mathbf{K}}$ [2], die den geometrischen und materiellen Bedingungen zur Zeit t entspricht, angenähert werden:

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{B}}^t \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

$${}^t \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{F}} - {}^t \underline{\mathbf{R}} \quad (3.5)$$

$\underline{\mathbf{u}}$ ist ein Vektor von inkrementellen Knotenpunktverschiebungen und

$${}^t \underline{\mathbf{K}} = \frac{\partial {}^t \underline{\mathbf{R}}}{\partial {}^t \underline{\mathbf{u}}} \quad (3.6)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix entspricht also der Ableitung der inneren Elementknotenpunktkräfte ${}^t \underline{\mathbf{R}}$ nach den Knotenpunktverschiebungen ${}^t \underline{\mathbf{u}}$.

Das am häufigsten verwendete Iterationsschemata für nichtlineare Finite-Elemente-Gleichungen ist die *Newton-Raphson*-Iteration [2] [4]. Wenn die Lasten unabhängig von den Verschiebungen sind, löst man mit diesem Verfahren für $i = 1, 2, 3, \dots$ die Beziehungen

$${}^{t+Vt} \underline{\mathbf{K}}^{(i-1)} \underline{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} = \underline{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{F}}^{(i-1)} = {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{F}} - {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{R}}^{(0)} \quad (3.7)$$

mit

$${}^{t+Vt} \underline{\mathbf{K}}^{(i-1)} = \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right] \Big|_{{}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}}^{(i-1)}} \quad \text{als augenblickliche Tangentesteifigkeitsmatrix.}$$

$${}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} = {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \underline{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{u}}^{(i)} \quad (3.8)$$

Dabei sind

$${}^{t+Vt} \underline{\mathbf{K}}^{(0)} = {}^t \underline{\mathbf{K}} \quad ; \quad {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{R}}^{(0)} = {}^t \underline{\mathbf{R}} \quad ; \quad {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}}^{(0)} = {}^t \underline{\mathbf{u}}$$

die Anfangsbedingungen in dieser Iteration.

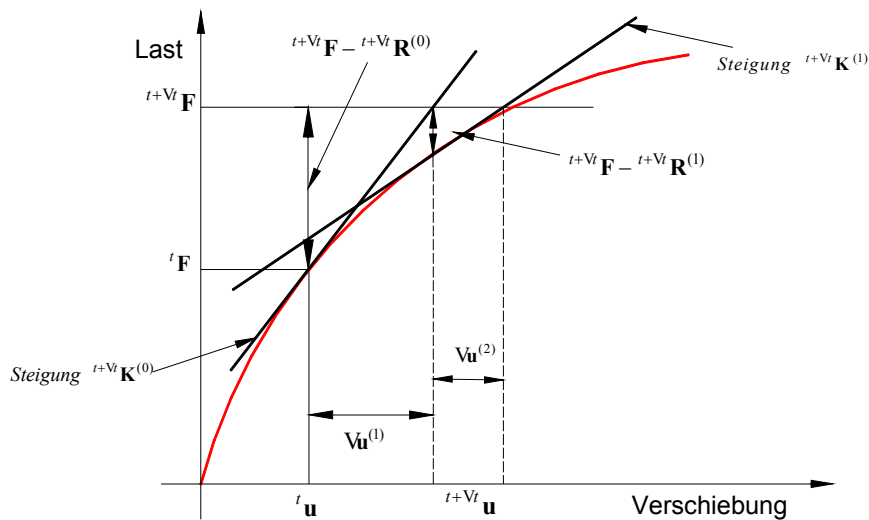


Abb. 3.1

Ein charakteristisches Merkmal dieser Iteration ist es, dass in jeder Iteration eine neue Tangentensteifigkeitsmatrix berechnet wird, weshalb sie als volle *Newton-Raphson*-Methode bezeichnet wird. Aus diesem Grund liegt der Großteil der Rechenkosten bei diesem Verfahren bei der Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrix. Da diese Berechnung ziemlich teuer sein kann, wenn Systeme großer Ordnung behandelt werden, kann es effektiv sein, andere Lösungsverfahren zu verwenden. Die verschiedenen Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme unterscheiden sich primär nach der Art der verwendeten Tangentenmatrix zur Berechnung der linearisierten Gleichung 3.7. Die *modifizierte Newton-Raphson*-Iteration [2] [4] erfordert weniger Neubildung der Tangentensteifigkeitsmatrix als die volle *Newton-Raphson*-Methode; sie stützt die Fortschreibung der Steifigkeitsmatrix auf einer zulässigen Gleichgewichtslage ab.

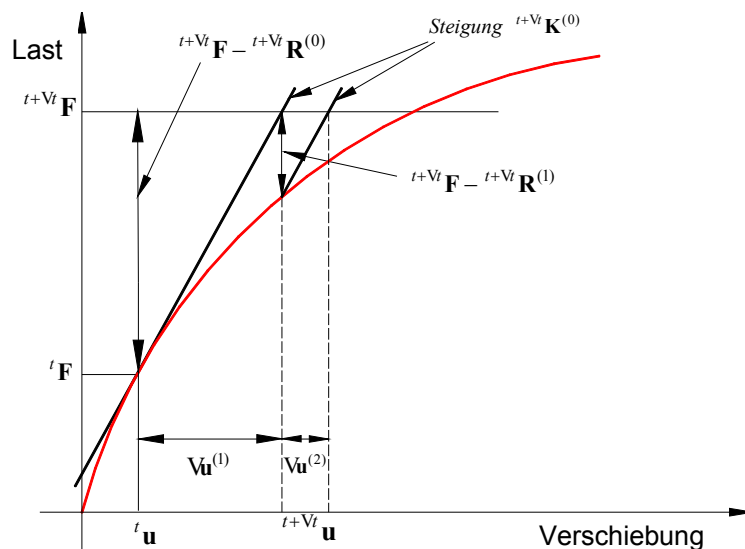


Abb. 3.2

3.2 Die Kräfte im dynamischen Gleichgewicht

In der Statik bilden sich zwischen den äußeren Kräften $\underline{\mathbf{F}}$ und elastischen Rückstellkräften $\underline{\mathbf{F}}_e$ ein Gleichgewicht. Die Gleichung $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}}$ beschreibt das statische Gleichgewicht der Element-Gruppierung (siehe Kapitel 2.5). Bei diesen Gleichgewichtsbetrachtungen können sich die wirkenden Lasten mit der Zeit ändern. In diesem Fall ändern sich die Verschiebungen ebenfalls mit der Zeit. $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}}$ beschreibt das Gleichgewicht zu jedem beliebigen Zeitpunkt.

Wenn die Lasten jedoch schnell veränderlich sind, dann muss ein dynamisches Problem gelöst werden. Auch in der Dynamik gibt es zu jedem Zeitpunkt t einen solchen Gleichgewichtszustand (Prinzip von D'Alembert). Bei der Betrachtung dieses Gleichgewichts sind jedoch zusätzliche Kräfte zu berücksichtigen.

Die kinetischen Gleichgewichtsbeziehungen lauten in diesem Fall

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \overset{\text{g}}{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \overset{\text{g}}{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad [10] \quad (3.11)$$

$\overset{\text{g}}{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}(t) = \frac{d\underline{\underline{\mathbf{u}}}}{dt}$ und $\overset{\text{gg}}{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}(t) = \frac{d^2\underline{\underline{\mathbf{u}}}}{dt^2}$ bezeichnen dann die Geschwindigkeit und die

Beschleunigung der Knotenpunkte. Nach dem Newtonschen Grundgesetz (Kraft = Masse x Beschleunigung) hat die Beschleunigung die Trägheitskräfte

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_t = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \overset{\text{gg}}{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} \quad (3.12)$$

zur Folge.

$\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ ist in 3.12 die Massenmatrix. Sie ist definiert durch

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \int_V \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{N}}} dV \quad [2] \quad (3.13)$$

$\underline{\underline{\rho}}$ ist die Massendichte des Elements und $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ die Interpolationsmatrix für die Verschiebungen.

Durch die Summe von Integralen über das Volumen aller finiten Elemente der Gesamtstruktur ergibt sich die Massenmatrix zu

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(m)} = \sum_m \int_V \rho^{(m)} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{(m)\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{(m)} dV \quad (3.14)$$

Der hochgestellte Index m kennzeichnet das m te Element.

Falls Dämpfungskräfte auftreten, werden diese durch

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_d \quad (3.15)$$

beschrieben.

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ ist in 3.15 die Dämpfungsmatrix. Sie ist definiert durch

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \int_V \kappa \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{N}}} dV \quad [2] \quad (3.16)$$

κ ist hier die Dämpfungskonstante.

Die Dämpfungsmatrix der Gesamtstruktur ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(m)} = \sum_m \int_V \kappa^{(m)} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{(m)\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}^{(m)} dV \quad (3.17)$$

Mit der Vernachlässigung der Dämpfungskräfte wird 3.11 zu

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (3.18)$$

Die Behandlung eines Problems dieser Art besteht aus der Berechnung der Matrix

$\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ sowie des Lastvektors $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$, der Ermittlung der Antwort $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ oder $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ und dann der Berechnung der Spannungen.

3.3 Lösung der Bewegungsgleichung

Im Abschnitt 3.3 wurden die Bewegungsgleichungen hergeleitet welche die kinetische Antwort eines Systems von finiten Elementen beherrschen; sie lauten

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (3.19)$$

Zuerst wird die Lösung der linearen Bewegungsgleichung 3.19 behandelt, dann wird die Lösung nichtlinearer Gleichungen von Finiten-Elemente-Systemen erörtert.

Aus statischer Betrachtung zu der Zeit t kann die Gleichung 3.19 auch als

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_t(t) + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_d(t) + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e(t) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}(t) \quad (3.20)$$

geschrieben werden.

Dabei sind die Trägheitskräfte $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_t(t) = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$, die Dämpfungskräfte $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_d(t) = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ und die elastischen Kräfte $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_e(t) = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ zeitabhängig. In kinetischen Berechnungen wird daher im Prinzip das statische Gleichgewicht zu der Zeit t betrachtet, das die Wirkung von beschleunigungsabhängigen Trägheitskräften und geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungskräften mit einschließt. Umgekehrt werden die Bewegungsgleichungen 3.19 in statischen Berechnungen unter Vernachlässigung von Trägheits- und Dämpfungskräften betrachtet.

Bei der Auflösung der Bewegungs-DGL 3.19 nimmt man an, dass alle Systemgrößen $(\underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbf{u}}})$ zu einem Zeitpunkt t bekannt sind; gesucht sind dann diese Größen zu dem späteren Zeitpunkt $t + \sqrt[3]{V}t$. Die dazu angewandten Verfahren lassen sich demgemäß so klassifizieren, wie der Übergang von t nach $t + \sqrt[3]{V}t$ ermittelt wird:

- Bei *expliziten Verfahren* (direkte Integration) [2] [4] [9] wird der Zustand zum Zeitpunkt $t + \sqrt[3]{V}t$ alleine auf Basis des dynamischen Gleichgewichts zum Zeitpunkt t ermittelt.
Sie erfordern eine geringe Rechenzeit, haben jedoch eine Stabilitätsgrenze. Diese Stabilitätsgrenze ist gleich der Zeitdauer, die eine elastische Spannungswelle benötigt, um durch das kleinste finite Element im Netz zu laufen.

- Bei *implizierten Verfahren* [2] [4] wird der Zustand auf Basis des dynamischen Gleichgewichts zum Zeitpunkt $t + \sqrt{t}$ unter Nutzung von Iterationen über alle Zeitschritte dargestellt.

Diese Verfahren benötigen keine Stabilitätsgrenze, da die Zeitschritte um mehrere Größenordnungen größer sind. Die hat aber den Nachteil, dass die FE-DGL zu jedem Zeitpunkt zu lösen ist.

Trotz der schlechten Genauigkeit wird auf Grund des hohen Gewinns an Rechenzeit das explizite Verfahren üblicherweise in der nichtlinearen FE-Dynamik (schnelle Umformung, Fahrzeugcrash etc.) verwendet. Innerhalb dieser Diplomarbeit wird zur Lösung der nichtlinearen dynamischen Probleme das explizite Verfahren aus dem Programmsystem LS-DYNA verwendet [9].

3.4 Direkte Integration

Als direkte Integration wird die Lösung von DGLs mit einem numerischen Schritt-für-Schritt-Verfahren bezeichnet. Die direkte numerische Integration beruht im Wesentlichen darauf, dass nicht versucht wird, die Gleichung 3.19 zu jeder beliebigen Zeit t zu befriedigen. Stattdessen bemüht man sich, 3.19 nur in diskreten Zeitintervallen zu erfüllen. Wie bereits oben erwähnt, wird also das statische Gleichgewicht, das nun auch Trägheits- und Dämpfungskräfte einschließt, in diskreten Zeitpunkten innerhalb des Lösungsintervalls gesucht. Voraussetzung für das Verfahren ist, dass die Verschiebungs-, Geschwindigkeits-,

und Beschleunigungsvektoren $({}^0 \underline{\mathbf{u}}, {}^0 \underline{\dot{\mathbf{u}}}, {}^0 \underline{\ddot{\mathbf{u}}})$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt sind und die Lösung von $t = 0$ bis T gesucht wird. Die zu betrachtende Zeitspanne T wird in n gleiche Intervalle $\Delta t = \frac{T}{n}$ unterteilt und die Näherungslösungen werden zu den Zeitpunkten $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ bestimmt.

3.4.1 Zentrale Differenzenmethode

Die Central Difference Methode [2] [4] [9] (realisiert in dem hier verwendeten nichtlinearen FE-Programm LS-DYNA) ist eine Realisierung der in Abschnitt 3.4 dargestellten Vorgehensweise. Diese approximiert über finite Differenzen.

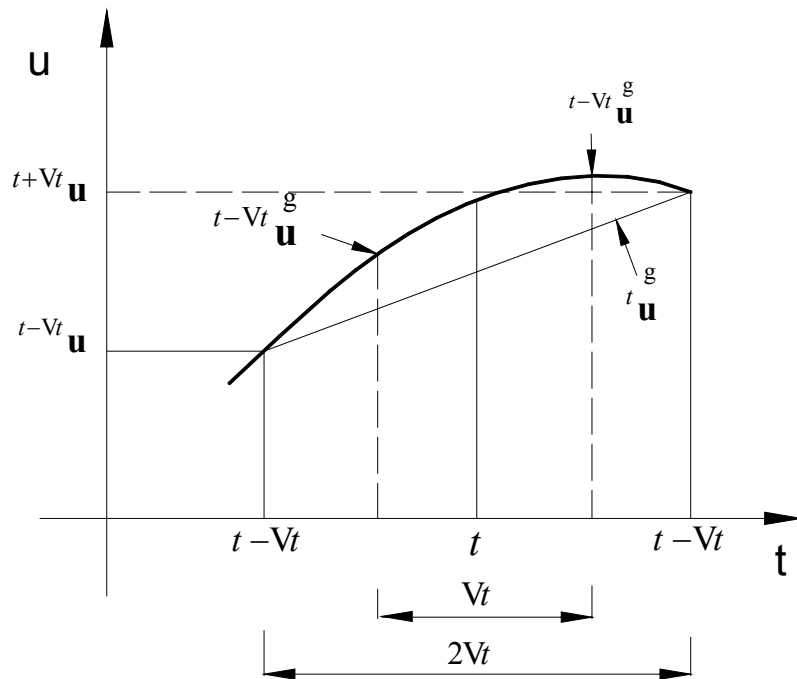


Abb. 3.3

Hiernach kann die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t abgeschätzt werden zu

$${}^t \underline{\mathbf{u}}^g = \frac{1}{2Vt} ({}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}} - {}^{t-Vt} \underline{\mathbf{u}}) \quad (3.21)$$

und die Beschleunigung zu

$${}^t \underline{\mathbf{u}}^g = \frac{1}{Vt^2} ({}^{t-Vt} \underline{\mathbf{u}} - 2 {}^t \underline{\mathbf{u}} + {}^{t+Vt} \underline{\mathbf{u}}) \quad (3.22)$$

Die Verschiebungslösung für die Zeit $t+Vt$ erhält man von 3.19 zu der Zeit t :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^t \underline{\mathbf{u}}^g + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^t \underline{\mathbf{u}}^g + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^t \underline{\mathbf{u}}^g = {}^t \underline{\mathbf{F}} \quad (3.23)$$

Wenn die Beziehungen 3.21 und 3.22 für ${}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}}^g$ und ${}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}}^g$ in 3.23 eingesetzt werden, ergibt sich die Gleichung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}^2} \underline{\underline{\mathbf{M}}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}\right) {}^{t+\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = {}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \frac{2}{\sqrt{t}^2} \underline{\underline{\mathbf{M}}}\right) {}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}} - \left(\frac{1}{\sqrt{t}^2} \underline{\underline{\mathbf{M}}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}\right) {}^{t-\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad (3.24)$$

welche nach ${}^{t+\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ aufgelöst werden kann.

Zur Berechnung von ${}^{t+\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ mittels der zentralen Differenzenmethode, braucht man ${}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ und ${}^{t-\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$. Für die Berechnung der Lösung zu der Zeit Δt muss daher ein besonderes Startverfahren verwendet werden, da dort die Werte für ${}^{t-\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ aus den Anfangsbedingungen ${}^0 \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ (welche als bekannt vorausgesetzt werden bzw. sich aus 3.19 zum Zeitpunkt 0 berechnen lassen) zu bestimmen ist. Die Gleichungen 3.21 und 3.22 können dazu verwendet werden, um ${}^{0-\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ zu erhalten. Damit ergibt sich

$${}^{0-\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = {}^0 \underline{\underline{\mathbf{u}}} - \sqrt{t} {}^0 \underline{\underline{\mathbf{u}}}^g + \frac{\sqrt{t}^2}{2} {}^0 \underline{\underline{\mathbf{u}}}^g \quad (3.25)$$

Die Lösung von ${}^{t+\sqrt{t}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ beruht also auf der Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit t . Daher wird das Integrationsverfahren als *explizite Integrationsmethode* bezeichnet.

Ein Vorteil dieser Methode ist, dass keine effektive Steifigkeitsmatrix berechnet werden muss. Dies erspart Berechnungszeit. Methoden, welche die Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit $t+\sqrt{t}$ verwenden, werden als implizite Integrationsmethoden bezeichnet.

Die Wahl eines geeigneten Zeitschrittes \sqrt{t} ist in der direkten Integration von großer Bedeutung. Einerseits muss der Zeitschritt klein genug sein, um eine genaue Lösung zu erhalten; auf der anderen Seite soll der Zeitschritt nicht kleiner als nötig sein, weil die Lösung mit einem solchen Zeitschritt teurer würde als nötig. Ein wichtiger Gesichtspunkt für die Anwendung des zentralen Differenzschemas ist die Forderung, dass der Zeitschritt \sqrt{t} bei der Integrationsmethode kleiner sein

muss als ein kritischer Wert Δt_{krit} . Integrationsschemata wie die zentrale Differenzenmethode, die die Verwendung eines Zeitschritts Δt erfordern, der kleiner als der kritische Zeitschritt Δt_{krit} ist, werden als bedingt stabil bezeichnet. Wird hier ein Zeitschritt gewählt, der größer als Δt_{krit} ist, ist die Integration instabil. Das bedeutet, dass beliebige Fehler, die beispielsweise durch Rundungen im Rechner entstehen, anwachsen und die berechnete Antwort wertlos machen.

Die Bedingung, dass $\Delta t \leq \frac{L}{c}$

mit L =Elementlänge, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ = Wellengeschwindigkeit

mit E als E-Modul und ρ als die Materialdichte

sein soll, wird nach Courant, Friedrichs und Lewy als CFL-Bedingung bezeichnet [2] [5]. Diese Bedingung wird verwendet, um Δt zu ermitteln. Physikalisch beschreibt Δt die Zeit, die eine Schallwelle im betrachteten Material braucht, um von einem Knoten des Elements zum anderen zu gelangen. Die vorstehende Abschätzung gilt für Stab- und Balkenstrukturen. Bei den hier verwendeten Schalenelementen bestimmt sich die Schallwellenausbreitungsgeschwindigkeit zu

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (3.26)$$

und die charakteristische Länge $L = \frac{A_s}{L_{max}}$

mit A_s als Schalenfläche und L_{max} als der größten Elementkantenlänge

Damit wird als Problem sichtbar, dass das kleinste Element die Rechenzeit dominiert [4].

3.4.2

Lösung nichtlinearer Gleichungen in kinetischen Berechnungen

Der in den Abschnitten 3.4 und 3.4.1 behandelte Algorithmus für die Zeitintegration wird auch zur Ermittlung einer nichtlinearen kinetischen Antwort verwendet. Wie in linearen Berechnungen (siehe Abschnitt 3.3) wird das kinetische Gleichgewicht des Finite-Elemente-Systems zur Zeit t betrachtet, um die Verschiebungen zur Zeit $t + \sqrt{V}t$ zu berechnen. Bei Vernachlässigung einer Dämpfungsmatrix wird für jede diskrete Zeitschrittlösung mit den Gleichungen

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}} = {}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}} - {}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}} \quad (3.27)$$

gearbeitet.

Mit ${}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}}$ als Vektor der äußeren Knotenpunktlasten zur Zeit t und ${}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ als Vektor der den Element-Spannungen äquivalenten Knotenpunktkräfte zur Zeit t .

Wenn man also ${}^{t-\sqrt{V}t} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ und ${}^t \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ kennt, werden die Beziehungen 3.21/ 3.22 und 3.27 wie in der linearen Berechnung dazu benutzt, um ${}^{t+\sqrt{V}t} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ zu berechnen.

Die strenge Beschränkung des Zeitschritts für die Integration gilt genauso in der nichtlinearen Berechnung. Während jedoch Steifigkeitseigenschaften in einer linearen Berechnung konstant bleiben, ändern sich diese Eigenschaften in einer nichtlinearen Untersuchung während der Berechnung der Antwort. Diese Veränderungen des materiellen und/oder geometrischen Zustands gehen in die Berechnung des Kraftvektors ${}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ein. Wenn also das System steifer wird, muss auch der Zeitschritt $\sqrt{V}t$ verkleinert werden. Die Anpassung des Zeitschrittes muss so erfolgen, dass die Bedingung $\sqrt{V}t \leq \sqrt{V}t_{krit}$ mit Sicherheit für alle Zeiten erfüllt ist [2].

3.5 Isoparametrisches Konzept

Das Ziel einer Finite-Elemente-Diskretisierung muss sein, die äußere Geometrie eines Bauteils so exakt wie möglich zu erfassen. In der Praxis wird dies mit ausschließlich gerade berandeten Elementen nicht möglich sein, da technische Konturen in der Regel nicht immer gerade, sondern viel öfter gekrümmt sind. Um hier bessere Möglichkeiten der Abbildung zu haben, müssen Elemente mit flexibel anpassbaren Rändern, so genannte *isoparametrische Elemente*, definiert werden [2] [3]. Der Grundgedanke bei der Formulierung von isoparametrischen finiten Elementen ist, dass sowohl die Geometrie als auch die Feldgrößen im Elementgebiet durch die gleichen Ansatzfunktionen approximiert werden. Die Verbindung zwischen den Element-Verschiebungen und den Knotenpunktverschiebungen geschieht bei dem isoparametrischen Konzept direkt über die Interpolationsfunktionen, die auch Formfunktionen genannt werden. Der grundlegende Schritt bei der Formulierung von isoparametrischen finiten Elementen ist die Darstellung der Element-Koordinaten und Element-Verschiebungen in Form von Interpolationen, wobei das natürliche Koordinatensystem des Elements verwendet wird. Dieses Koordinatensystem ist ein-, zwei- oder dreidimensional, je nach der Dimensionalität des Elements. Die Koordinateninterpolationen für ein allgemein dreidimensionales Element lauten:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^q N_i x_i \quad \hat{y} = \sum_{i=1}^q N_i y_i \quad \hat{z} = \sum_{i=1}^q N_i z_i \quad (3.28)$$

Dabei sind \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Elements (hier lokale Koordinaten); x_i , y_i , z_i mit $i = 1, \dots, q$ sind die Koordinaten der q Element-Knoten. Die Interpolationsfunktionen N_i sind im natürlichen Koordinatensystem des Elements definiert, das die Variablen ξ_1, ξ_2 und ξ_3 (falls dreidimensional) hat, die von -1 bis 1 laufen (siehe Abb. 3.4).

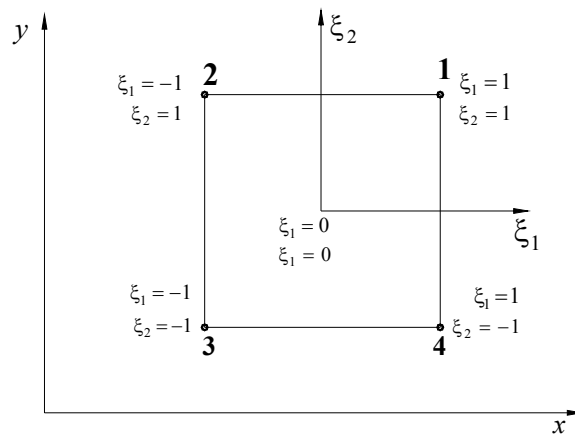


Abb. 3.4

Bei der Verwendung der oben genannten Koordinateninterpolation zeigt sich, dass die Elemente gekrümmte Ränder haben können. Dies ist ein wichtiger Vorteil gegenüber Finite-Elemente-Formulierungen mit generalisierten Koordinaten. Abbildung 3.5 zeigt ein solch gekrümmtes Acht-Knoten-Element und dessen Abbildung auf das der isoparametrischen Formulierung zugrunde liegende Einheitsquadrat. Das Einheitsquadrat stellt eine Referenzkonfiguration dar, welche nie von dem Körper eingenommen wird.

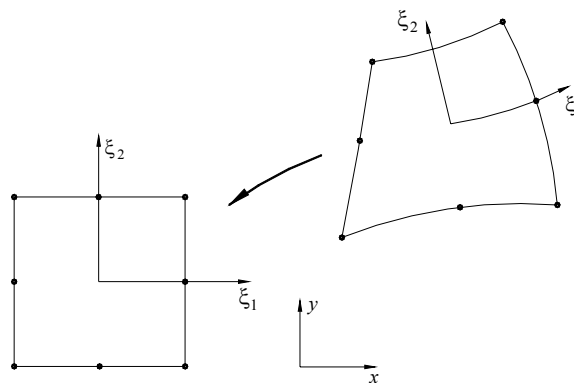


Abb. 3.5

Isoparametrische Elemente nutzen also eine spezielle Transformation mit gleichartigen Funktionen, um krummlinig berandete Gebiete in gerade berandete "Einheitsgebiete" zu überführen. Die in 3.28 unbekanntenen Größen sind die Interpolationsfunktionen N_i [2] [3]. Die Fundamenteleigenschaft einer Interpolationsfunktion N_i ist, dass sie im natürlichen Koordinatensystem am Knoten i den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert Null hat. Diese Bedingung kann dazu verwendet werden, die Funktionen N_i für eine bestimmte Knotenpunkt-Anordnung systematisch zu bestimmen.

Für das in Abb. 3.4 dargestellte Vier-Knoten-Element lauten die Interpolationsfunktionen

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Wie zuvor erwähnt, werden in der isoparametrischen Formulierung die Element-Verschiebungen in gleicher Weise wie die Geometrie interpoliert; man verwendet

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^q N_i \mathbf{u}_i \quad \hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^q N_i \mathbf{v}_i \quad \hat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^q N_i \mathbf{w}_i \tag{3.30}$$

Dabei sind $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{w}}$ die lokalen Element-Verschiebungen in einem beliebigen Punkt des Elements, und \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i sowie \mathbf{w}_i die entsprechenden Element-Verschiebungen seiner Knoten ($i = 1, \dots, q$).

Um die Steifigkeitsmatrix berechnen zu können, muss zuvor die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ermittelt werden. Die Element-Dehnungen erhält man in Form von Ableitungen nach den lokalen Koordinaten. Da die Element-Verschiebungen im natürlichen Koordinatensystem unter Verwendung von 3.30 definiert sind, müssen die Ableitungen nach ξ_1, ξ_2, ξ_3 verknüpft werden. Der dazu verwendete Operator ist der *Jacobische Operator* $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ [2] [3] [7].

Es gilt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.31)$$

Der Jacobische Operator $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ verknüpft die Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten mit den Ableitungen nach den lokalen Koordinaten.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (3.32)$$

Nachdem die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial w}{\partial z}$ nach 3.32 mit 3.30 berechnet worden ist, kann die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ aufgestellt werden. Für sie gilt

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad (3.33)$$

Für die Steifigkeitmatrix gilt $\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \int_V \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} dV$ (siehe Kapitel 2.5.5). Die Elemente von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ sind in der isoparametrischen Formulierung Funktionen der natürlichen Koordinaten ξ_1, ξ_2 und ξ_3 . Daher erstreckt sich das Volumenintegral über das Volumen der natürlichen Koordinaten, und auch das Volumenelement dV muss durch natürliche Koordinaten ausgedrückt werden. Allgemein gilt

$$dV = \det \underline{\underline{\mathbf{J}}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.34)$$

wobei $\det \underline{\underline{\mathbf{J}}}$ die Determinante des Jacobischen Operators ist.

Somit ergibt sich die Steifigkeitsmatrix in der isoparametrischen Formulierung zu

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \int_V \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \det \underline{\underline{\mathbf{J}}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad [2] \quad (3.35)$$

Die Integration wird im Einheitsquadrat mit dem natürlichen Koordinatensystem des isoparametrischen Elements ausgeführt.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \det \underline{\underline{\mathbf{J}}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.36)$$

4 Simulation

Dieses Kapitel befasst sich mit der Simulation des Stoßfängerquerträgers. Hierzu wird das Gesamtsystem in die Einzelkomponenten Crashbox und Stoßfängerquerträger aufgeteilt. Durch diese Einzelbetrachtungen erhofft man sich bessere Einblicke für die Gestaltung der jeweiligen Komponenten, als in einer Simulation des ganzen Systems. Hierbei werden idealisierende Annahmen getroffen, wie z.B. starre, nicht verformbare Wände. Diese Annahmen ermöglichen eine schnellere Erstellung des FE-Modells und dessen Berechnung. Aus diesem Grund konnten mehrere Varianten der Einzelkomponenten untersucht werden. Um die Aussagekraft dieser Methode zu untersuchen, wird am Ende das Gesamtsystem in einer Simulation untersucht. Die Maße des Gesamtsystems mit den Einzelkomponenten entnimmt man aus den technischen Zeichnungen in Anhang A.

4.1 Ablauf der Simulation

Die linke Seite der Abbildung 4.1 zeigt die Frontpartie eines Pkws. Zu erkennen ist der Stoßfängerquerträger (grün) mit dahinter liegenden Längsträgern (rot). Zwischen dem Stoßfänger und den Längsträgern befinden sich zwei Deformationselemente (Crashbox). Durch eine gezielte Deformation sollen diese Elemente einen Teil der Aufprallenergie aufnehmen. Das System (Stoßfänger mit Crashboxen), wie es in diesem Kapitel simuliert wird, zeigt die rechte Seite der Abbildung 4.1.

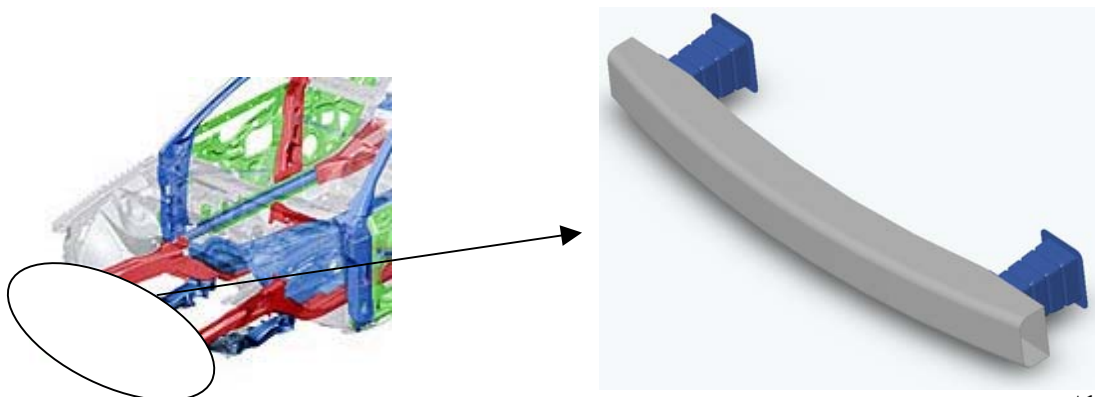


Abb. 4.1

Zur Analyse wurde das Programm LS-DYNA Version 970 mit dem Femb PC Pre-Processor 28.0 verwendet. Es handelt sich um eine auf 10 000 Elemente begrenzte Studentenversion. Die Analyse des Systems ist in drei Teile gegliedert.

Der erste Teil (Abschnitt 4.6) befasst sich mit der Analyse der Crashbox.

Im Hinblick auf ein gutes Deformationsverhalten werden hierbei mehrere Varianten der Crashboxen untersucht. Anhand eines Beispiels wird der Weg der Analyse ausführlich dargestellt. Die Ergebnisse der jeweiligen Varianten werden am Ende ausgewertet und diskutiert. Das Prinzip der Simulation soll anhand Abbildung 4.2 veranschaulicht werden.

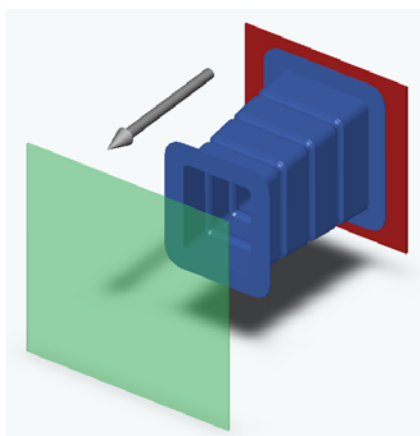


Abb. 4.2

Die Crashbox bewegt sich mit der dahinter liegenden Wand (rot) mit einer konstanten Geschwindigkeit entlang der Pfeilrichtung. Die rote Wand ist fest mit der Crashbox verbunden und wird als starr (rigid wall) definiert. Sie dient in dieser Berechnung der Simulation einer hinter der Crashbox mitgeführten Masse, wie es in realen Versuchen praktiziert wird. Die grüne Fläche simuliert die Wand, auf die die Crashbox aufprallt. Auch diese Wand wird als starr (rigid wall) angenommen. Mit der Option *Rigidwall_Planar_Moving* und *Rigidwall_Planar* hat man die Möglichkeit, diese Wände sehr schnell zu definieren. Eine Vernetzung mit Elementen ist nicht weiter nötig.

Im zweiten Teil (Abschnitt 4.7) werden verschiedene Varianten des Stoßfängerquerträgers simuliert. Die Grundform (blau in Abb. 4.3) des Stoßfängers wurde als vorgegeben angenommen. Die Unterschiede zeigen sich in

Form von zusätzlichen Verstärkungsblechen mit unterschiedlichen Wandstärken im Inneren. Auch ein offenes Profil wurde simuliert. Abbildung 4.3 zeigt links das ganze Modell einer Variante und rechts das Viertelmodell, wie es aufgrund von Symmetrieeigenschaften berechnet worden ist. Die Crashbox mit den besten Deformationseigenschaften aus der vorhergehenden Analyse wurde in diesem Teil verwendet.

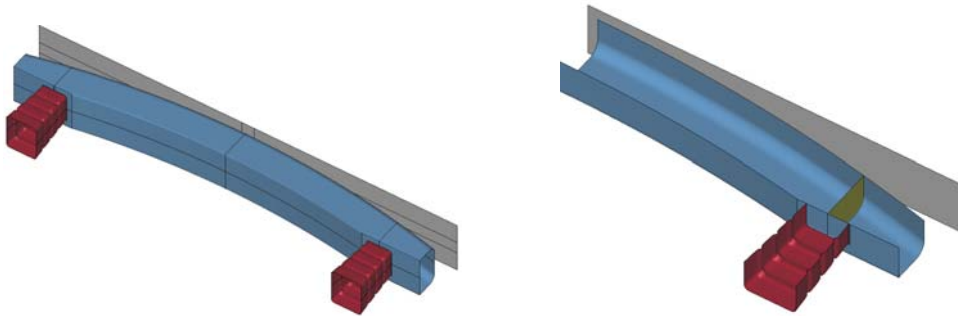


Abb. 4.3

Das Prinzip dieser Analyse ist ähnlich der der Crashbox. Abb. 4.4 zeigt einen Versuchsaufbau, wie er in der Realität praktiziert wird. Abb. 4.5 veranschaulicht die Simulation. Der Stoßfängerquerträger, mit den dahinter liegenden Crashboxen, fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit gegen eine Wand. Auch hier wird die Wand als starr angenommen. Die hinter dem Stoßfängerquerträger mitgeführte Masse simuliert die starre rote Wand.



Abb. 4.4

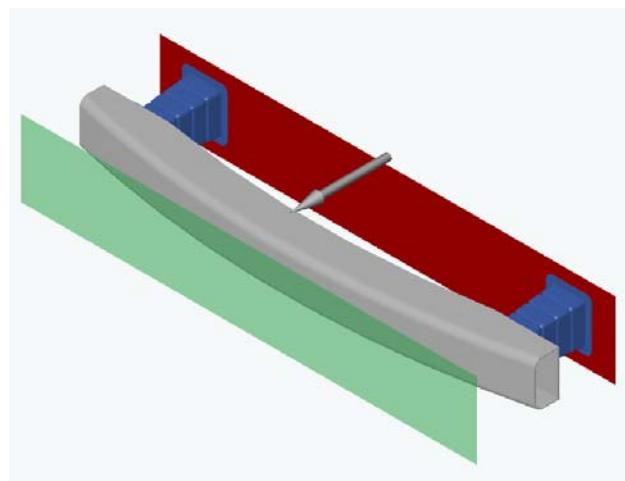


Abb.4.5

Aus den Ergebnissen der Teile I und II wurden die Komponenten für das Gesamtsystem in Teil III zusammengestellt. Die Simulation im dritten Teil (Abschnitt 4.8) unterscheidet sich von den vorhergehenden Analysen dadurch, dass die Barriere, auf die das System aufprallt, nicht durchgehend, sondern versetzt ist (siehe Abb. 4.6).

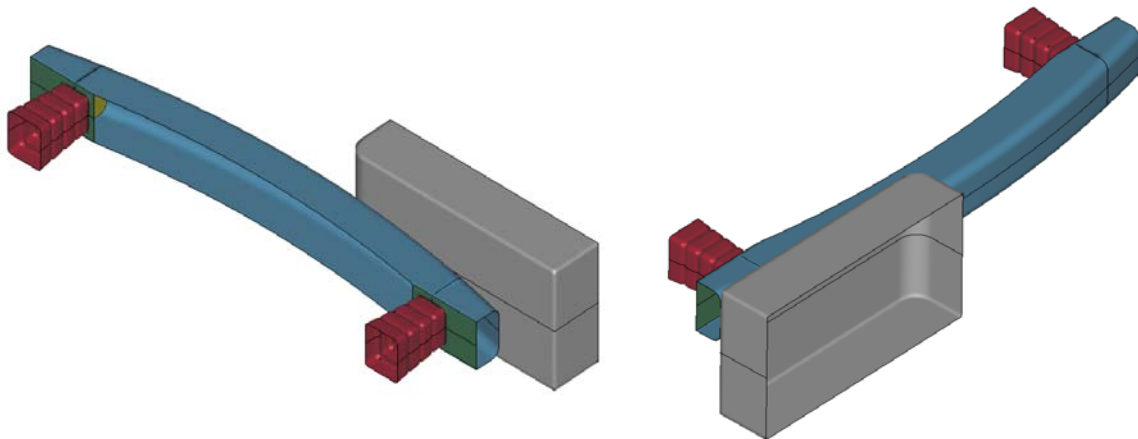


Abb. 4.6

Der Stoßfänger ist zu etwa 40% überdeckt, ein Wert, wie er auch in realen Versuchen Anwendung findet. Der Barriere wird ebenfalls aus Schalenelementen modelliert und ist verformbar.

4.2 Erstellung des Modells

Die Vorgehensweise wird anhand eines Modells der Crashbox dargestellt, sie ist aber allgemeingültig für alle Analysen dieser Arbeit.

In modernen FE-Programmen hat man die Möglichkeit, das Modell mittels eines internen Generators zu erstellen oder aber die Geometrie aus externen Dateien zu importieren. In dieser Analyse wurde die zweite Methode angewendet. Das 3-D Modell der Crashbox und später des Gesamtsystems wurden mit einem CAD-Programm erstellt, als IGES bzw. VDA Datei abgespeichert und anschließend in das FE-Programm importiert. Durch die Mehrzahl an Optionen eines CAD-Programms ist man schneller und auch wesentlich flexibler im Hinblick auf Änderungen am Modell. Bei komplexen Strukturen treten jedoch gelegentlich Probleme bei dieser Methode auf, das FE-Programm ist dann nicht in der Lage,

alle Oberflächen fehlerfrei zu erkennen. Nach dem Import der Datei bedarf es hierbei einer Bereinigung des Modells. Probleme dieser Art traten bei Dateien im IGES Format gelegentlich auf, gekrümmte Flächen konnten nicht fehlerfrei eingelesen werden.

Nachdem die Geometrie des Modells erstellt worden ist, erfolgt anschließend die Vernetzung. Bei der Vernetzung wird das Modell mittels der Finiten Elemente beschrieben (siehe Abb. 4.7).

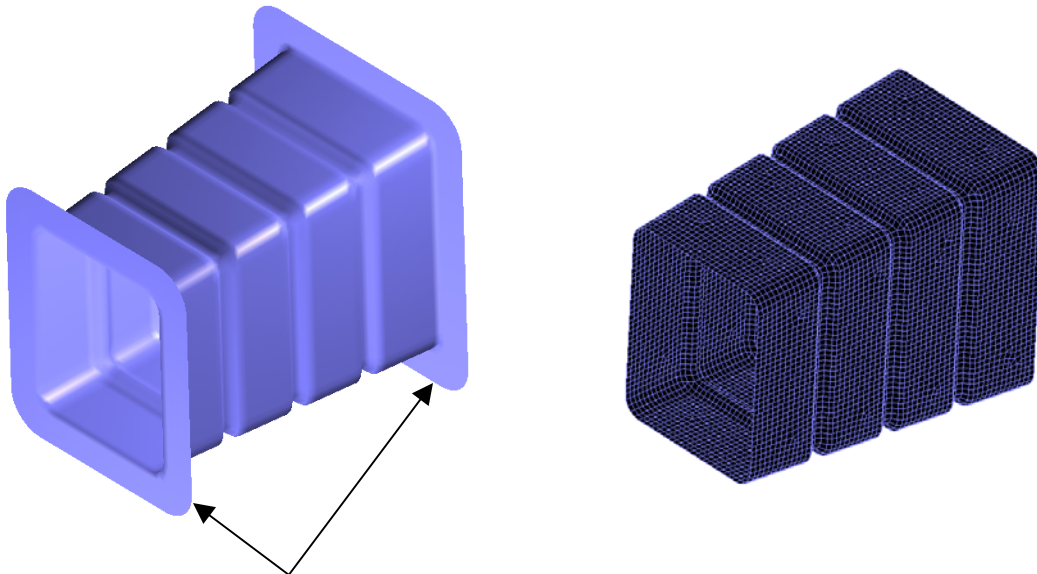


Abb. 4.7

Die rechteckigen Flansche stellen die Verbindung an der Vorderseite mit dem Stoßfängerquerträger und dahinter mit dem Längsträger dar. Diese wurden nicht mit in die Vernetzung einbezogen. Eine Erklärung hierfür folgt in Kapitel 4.6.1. Obwohl aufgrund von Symmetrieeigenschaften nur ein Viertel des Modells berechnet werden müsste, wurde hier die Hälfte des Modells vernetzt und anschließend berechnet (siehe Abb. 4.8b).

Bereits bei der Erstellung des CAD-Modells kann man einige Aspekte berücksichtigen, welche die spätere Vernetzung erleichtern. So wurde beispielsweise nicht das linke Modell in Abbildung 4.7 importiert, sondern das in Abbildung 4.8a. Im CAD-Modell sind die Wandstärken der Crashbox zu erkennen, beim FE-Modell hat jedes Schalenelement die Dicke Null. Programmintern wird den Elementen die gewünschte Wandstärke zugewiesen, eine visuelle Darstellung bleibt jedoch aus. Bei der Netzgenerierung muss man die zu vernetzenden Flächen dem FE-Programm zuweisen. Anders als mit Volumenelementen benötigt

man beim Vernetzen mit Schalenelementen nur die Oberflächen der Crashbox, die Flächen im Inneren werden nicht gebraucht. Um Fehler bei der Auswahl der Flächen zu vermeiden, wurde das zu importierende Modell der Box im CAD-Programm nicht ausgewandert.

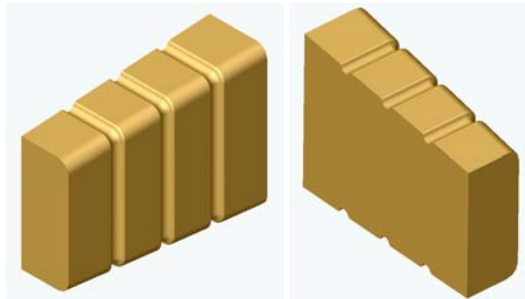


Abb.4.8a



Abb. 4.8b

Bei der Erstellung des Netzes wurde die Option *Plate Mesh* → *Surface Mesh* → *Topology Mesh* verwendet. Durch diesen Befehl werden ausgewählte Oberflächen mit Schalenelementen vernetzt. Bei dieser Methode entstehen gelegentlich Fehler bei der Netzgenerierung. Knotenpunkte benachbarter Elemente liegen nicht exakt aufeinander. Durch den Befehl *Node* → *Check Coincident* lassen sich diese Fehler beheben. Dabei entstehen gelegentlich einzelne, sehr kleine Elemente, welche sich sehr stark auf die Rechenzeit auswirken (siehe Kapitel 3.4.1). Die hier berechneten Modelle wurden mit jeweils ca. 9500 Belytschko-Lin-Tsay-Schalenelementen vernetzt. Da man mit dieser Anzahl an Elementen in dieser Programmversion knapp an das Limit geht, ergibt sich ein weiterer Vorteil aus den Symmetrieeigenschaften. Die 9500 Elemente diskritisieren nur die Hälfte des Modells, hierdurch erzielt man ein besseres Ergebnis.

4.3 Schalenelemente

Schalenelemente gehören zu einer gesonderten Familie der finiten Elemente. Sie verwenden ein besonderes Konzept, um das Verhalten dünnwandiger Teile zu beschreiben [2] [9] [11] [13]. Sie sind von unschätzbarem Wert bei der Modellierung vieler technischer und natürlicher Strukturen. Bleche in der Automobilindustrie, der Rumpf eines Flugzeuges und Gehäuse von Handys sind nur einige Beispiele, wo Schalenelemente auftreten. Würde man diese Geometrien mit Kontinuums-elementen (z.B. 8-Knoten-Volumenelementen) modellieren, würde dies zu einer enormen Menge an Elementen und, damit

verbunden, zu einer aufwendigen Berechnung führen. Die Abbildung 4.9 zeigt, wie ein dünnwandiges Rohr mit 4-Knoten-Schalenelementen vernetzt ist. Zum Vergleich ist das Rohr auf der rechten Seite mit 8-Knoten-Volumenelementen vernetzt.

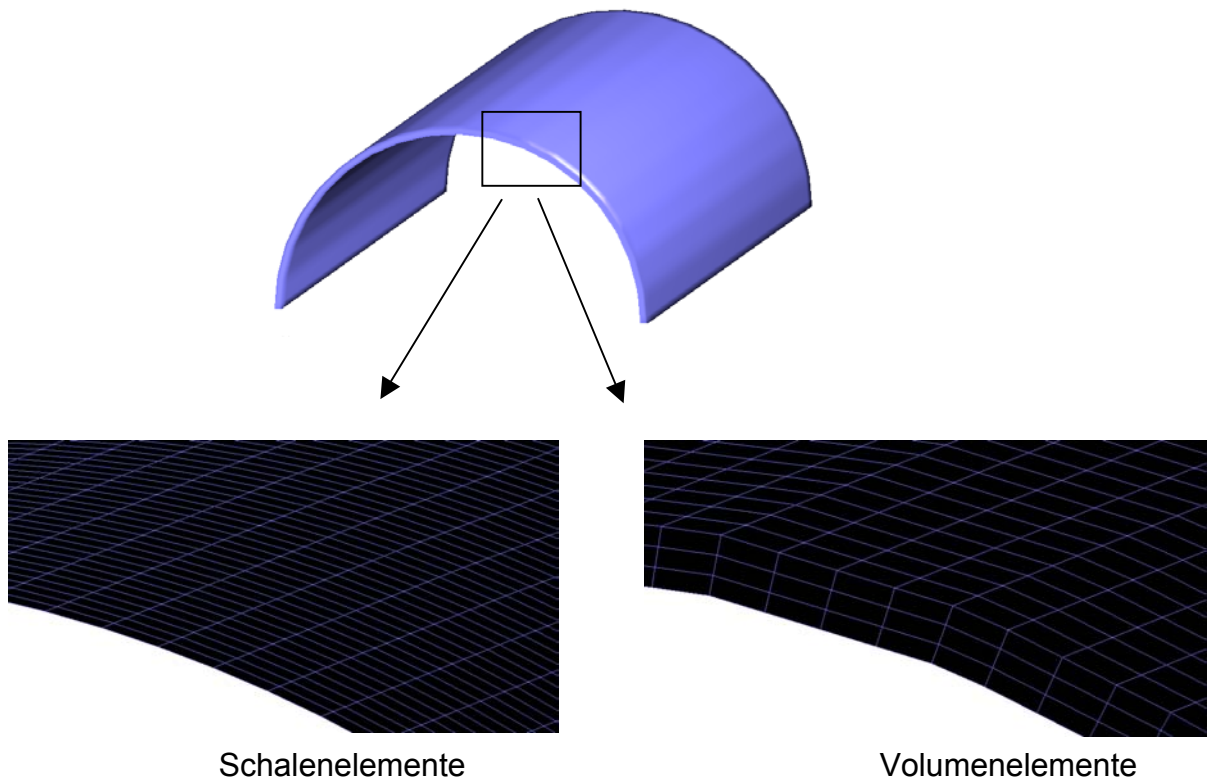


Abb. 4.9

Durch das Konzept der Schalenelemente, welches im Anschluss erläutert wird, lässt sich das Verhalten dünnwandige Körper besser beschrieben als mit einer vergleichbaren Anzahl an Volumenelementen. Um entsprechende Ergebnisse mit Volumenelementen zu erhalten, müsste das Rohr in Dickenrichtung noch feiner unterteilt werden als auf der rechten Seite in Abbildung 4.9 dargestellt.

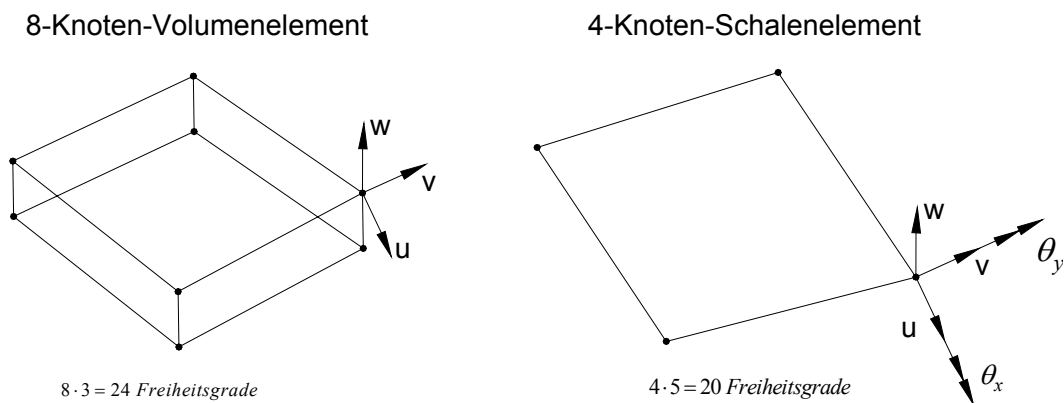


Abb. 4.10

Ein einzelnes 8-Knoten-Volumenelement hat bereits vier Freiheitsgrade mehr als ein 4-Knoten-Schalelement. Dabei handelt es sich um ein einfaches Volumenelement, ohne zusätzliche Drehungen als Freiheitsgrade an den Knotenpunkten (siehe Abb. 4.10).

Bei dem hier verwendeten Schalelement handelt es sich um das Belytschko-Lin-Tsay-Schalelement [9]. Dieses Schalelement ist sehr effizient, es benötigt weit weniger Rechenschritte als alle anderen Schalelemente in LS-DYNA und ist trotzdem sehr robust und genau. Es ist das Standard-Schalelement in LS-DYNA, welches bevorzugt angewendet werden sollte.

Dieses Vier-Knoten-Schalelement erhält man durch Überlagern eines Plattenelements und eines Elements für den ebenen Spannungszustand [2] (siehe Abb. 4.11).

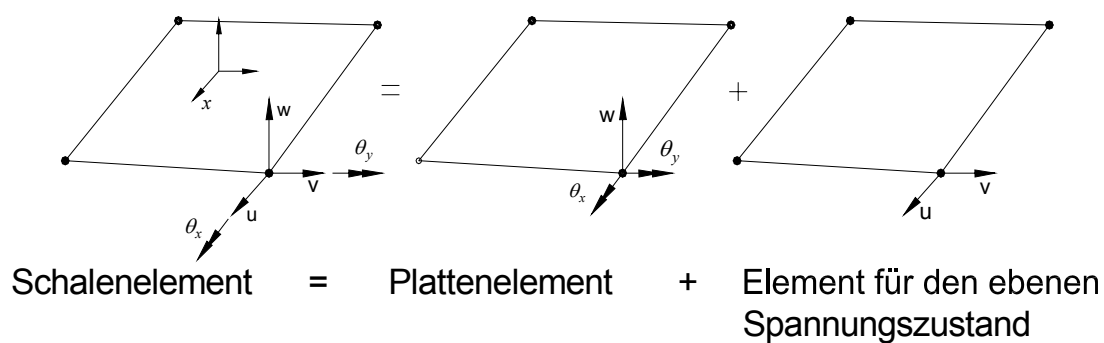


Abb. 4.11

Man erhält also ein Vier-Knoten-Schalelement mit 20 Freiheitsgraden (fünf pro Knoten). Das Plattenelement hat folgende Freiheitsgrade: Transversale Verschiebung w sowie die Drehungen um die x- bzw. y-Achse θ_y und θ_x . Dazu kommen die zwei Freiheitsgrade des Elements für den ebenen Spannungszustands u und v , welche auch als Membrananteil bezeichnet werden [1] [2]. Beliebige gekrümmte Schalen können als Gruppierung dieses flachen Elements modelliert werden.

Die Definition dieses Schalelements basiert auf der Schalentheorie von *Mindlin-Reissner* [2] [11] [13]. Für den Fall einer dünnen Schale (großes Verhältnis: Schalenlänge zu Schalendicke) findet eine Annäherung an die Schalentheorie von Kirchhoff statt [1] [2] [9] [11].

Diese beiden Theorien beschreiben die Schalenkinematik. In beiden Theorien wird davon ausgegangen, dass die Teilchen der Materie, die sich ursprünglich auf einer senkrechten Geraden \mathbf{g} zur undeformierten Mittelfläche der Schale befanden, während der Deformation auf einer Geraden bleiben. Nach der Kirchhoffschen Theorie werden Schubverformungen vernachlässigt, und die Geraden bleiben während der Deformation senkrecht zur deformierten Mittelfläche. Die Mindlin-Reissner-Schalentheorie berücksichtigt Schubverformungen; demzufolge bleibt die ursprünglich zur Mittelfläche normale Gerade während der Deformation im Allgemeinen nicht senkrecht zur deformierten Mittelfläche. Abbildung 4.12 zeigt im Vergleich die Verformung des Querschnitts der Schale nach beiden Theorien. Die linke Seite dieser Abbildung zeigt die Schalenverformung ohne, die rechte mit Schubverformung. Es zeigt sich, dass die gesamte Drehung der ursprünglich zu der Mittelfläche normalen Geraden \mathbf{g} aus der Drehung der Geraden und der Schubverformung zusammengesetzt ist.

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon$$

Dabei ist ε die über den Querschnitt konstante Schubverzerrung.

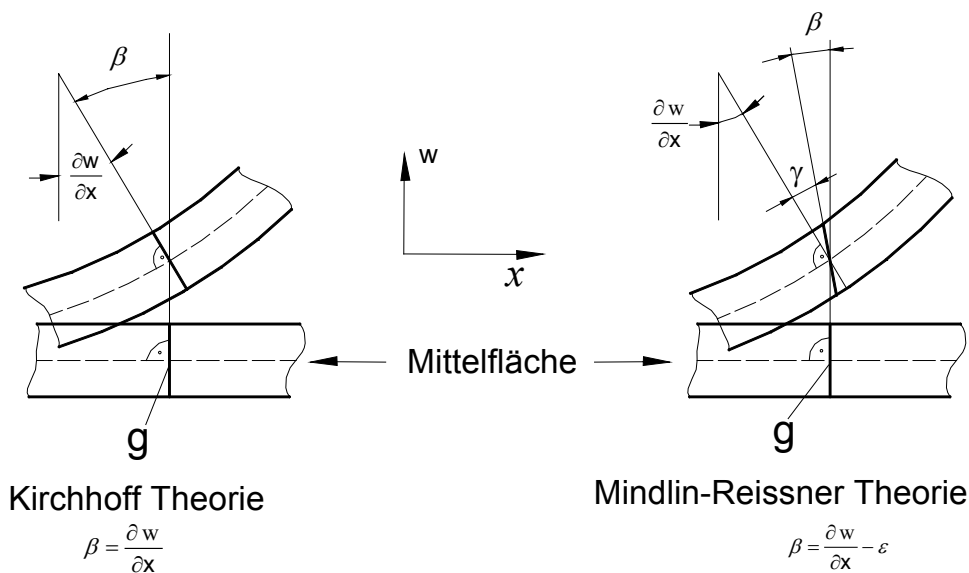


Abb. 4.12

Experimente zeigen, dass die Annahmen der Kirchhoff-Theorie in der Vorhersage des Verhaltens dünner Schalen genauer sind [13]. Dickere Schalen werden durch die Mindlin-Reissner-Theorie besser beschrieben, da hier transversale Schubspannungen (σ_{xz} , σ_{yz} in Abb. 4.13) an Bedeutung zunehmen. Die Mindlin-Reissner-Annahmen können auch auf dünne Schalen angewendet werden, in dem

Fall bleibt die Gerade \mathbf{g} annähernd senkrecht zur Mittelfläche. Dies ist die oben angesprochene Annäherung an die Schalentheorie von Kirchhoff für dünne Schalen. Diese Annäherung findet in LS-DYNA über einen Korrekturfaktor für den Querschub, welcher bei kleinen Dicken wirksam wird, statt [9].

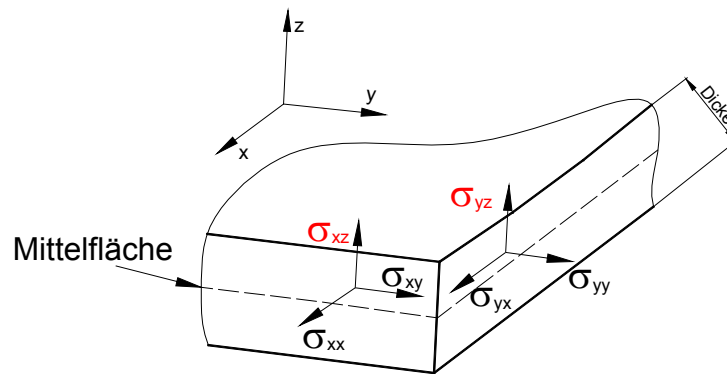


Abb. 4.13

Das Belytschko-Lin-Tsay-Schalenelement wird in dieser Analyse verwendet. Es handelt sich hierbei um ein 5-Parameter-vier-Knoten-Element mit bilinearen Ansatzfunktionen und einem Quadraturpunkt [13] [9] [2]. Der Begriff des 5-Parameter-Elements wird anhand Abb. 4.14 und 4.15 erläutert.

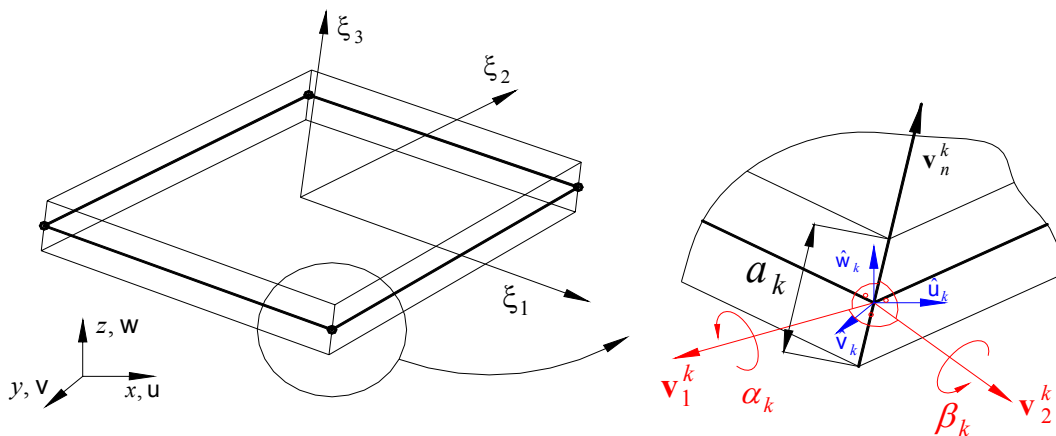


Abb. 4.14

Alle Punkte mit $\xi_3 = 0$ bilden die Mittelebene der Schale. Die Visualisierung der Schalenelemente in den FE-Programmen findet über diese Mittelfläche statt. Am FE-Modell ist also nur die Mittelfläche zu sehen, die eigentliche Geometrie der Schale (Dicke) ermittelt das Programm über die Interpolation. Die Interpolation der

Geometrie im natürlichen Koordinatensystem der Schale mit Knotenanzahl q erhält man durch

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{x}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k \mathbf{v}_{nx}^k \\ \hat{\mathbf{y}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{y}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k \mathbf{v}_{ny}^k \\ \hat{\mathbf{z}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{z}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \mathbf{v}_{nz}^k\end{aligned}\quad (4.1)$$

mit:

$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$	kartesische Koordinaten eines beliebigen Punktes im Element
$\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k$	kartesische Koordinaten des Knotenpunktes k
a_k	Schalendicke im Knotenpunkt k
$\mathbf{v}_{nx}^k, \mathbf{v}_{ny}^k, \mathbf{v}_{nz}^k$	Komponenten des zu Schalenmittelfläche normalen Einheitsvektor \mathbf{v}_n^k in Richtung ξ_3 im Knotenpunkt k
$N_k(\xi_1, \xi_2)$	Interpolationsfunktionen im natürlichen Koordinatensystem des Elements. (Isoparametrisches Konzept—siehe Abschn. 3.5)

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)$$

Durch die Annahme, eine Gerade in ξ_3 -Richtung bleibt auch nach der Deformation gerade (Kirchhoff und Mindlin-Reissner), kann die Verschiebung der auf ihr liegenden Punkte durch die Bewegung des Punktes $\xi_3 = 0$ und zwei Drehungen α_k, β_k um Achsen in der Schalenmittelfläche dargestellt werden. Diese Achsen stellen die Vektoren \mathbf{v}_1^k und \mathbf{v}_2^k dar, welche senkrecht zueinander und senkrecht zu \mathbf{v}_n^k stehen.

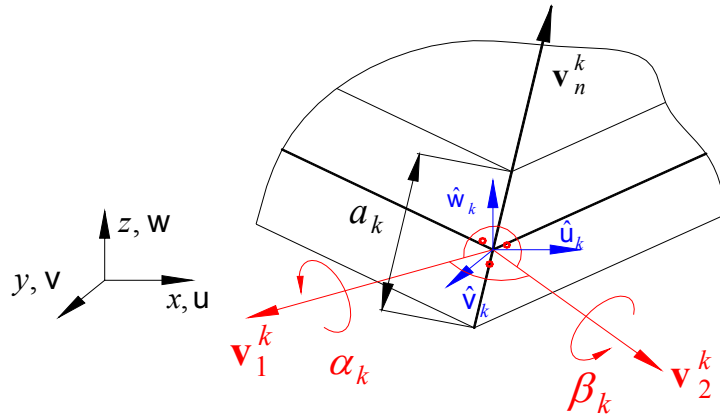


Abb. 4.15

Wie in Abb. 4.15 zu erkennen ist, produziert die Drehung β_k auf der Oberseite Verschiebungen in Richtung \mathbf{v}_1 und α_k entsprechend in Richtung $-\mathbf{v}_2$. Die Verschiebungen des Vektors $\hat{\mathbf{x}}(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ kann also mit fünf Parametern beschrieben werden. Das sind die Verschiebungen $\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k$ und die Drehungen α_k und β_k . Eine Längenänderung des Vektors wird nicht betrachtet, somit ist eine Dickenänderung der hier verwendeten Schalelemente ausgeschlossen.

Die Interpolation der Verschiebungen ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k u_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k \mathbf{v}_{nx}^k \\
 \hat{v}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k v_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k \mathbf{v}_{ny}^k \\
 \hat{w}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k w_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k \mathbf{v}_{nz}^k
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Drehung des normalen Einheitsvektors \mathbf{v}_n^k wird durch die Drehung um die beiden Einheitsvektoren \mathbf{v}_1^k und \mathbf{v}_2^k dargestellt.

Mit $\mathbf{v}_n^k = -\mathbf{v}_{2n}^k \beta + \mathbf{v}_{1n}^k \alpha$ wird 4.2 zu

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{u}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k (-\mathbf{v}_{2x}^k \beta_k + \mathbf{v}_{1x}^k \alpha_k) \\ \hat{\mathbf{v}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{v}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k (-\mathbf{v}_{2y}^k \beta_k + \mathbf{v}_{1y}^k \alpha_k) \\ \hat{\mathbf{w}}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^q N_k \mathbf{w}_k + \frac{\xi_3}{2} \sum_{k=1}^q a_k N_k (-\mathbf{v}_{2z}^k \beta_k + \mathbf{v}_{1z}^k \alpha_k)\end{aligned}\quad (4.3)$$

mit

$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$	Verschiebungen eines beliebigen Punktes im Element
$\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$	Verschiebungen des Knotenpunktes k
a_k	Schalendicke im Knotenpunkt k
$\mathbf{v}_{1x}^k, \mathbf{v}_{1y}^k, \mathbf{v}_{1z}^k$	Komponenten der Einheitsvektoren \mathbf{v}_1^k und \mathbf{v}_2^k im Knoten-
$\mathbf{v}_{2x}^k, \mathbf{v}_{2y}^k, \mathbf{v}_{2z}^k$	punkt k

Für die Integration des Elementes wäre eine 2 x 2 Gauss-Quadratur notwendig. Es tritt jedoch folgendes Problem auf: Je dünner das Element ist, desto geringer ist der Anteil der Schubfestigkeit des Elements. Durch die numerische Integration wird die Schubfestigkeit bei dünnen Schalen unter Ansatz der Theorie nach Mindlin-Reissner jedoch überschätzt, es kommt zur so genannten Schubsperrung. Die Schubsperrung kann durch eine reduzierte Integration verhindert werden, die sich in der Praxis bewährt hat [2]. Es wird also mit einer reduzierten Ein-Punkt-Gauss-Quadratur integriert [2] [9] [12]. Die Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung kann definiert werden. Alle Analysen wurden mit fünf Integrationspunkten in Dickenrichtung durchgeführt.

Die Finite-Elemente-Formulierung des hier verwendeten Vier-Knoten-Schalenelements basiert auf der Konstruktion eines mitdrehenden elementeigenen Koordinatensystems (ξ, η, ζ) mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i [9] (siehe Abb. 4.16).

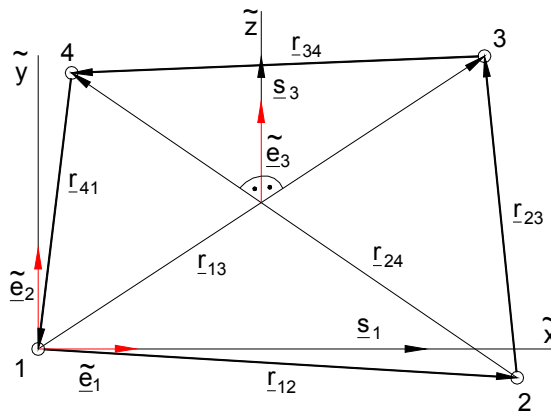


Abb. 4.16

mit
$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{s}_3}{\|\underline{s}_3\|}, \quad (4.4)$$

$$\underline{s}_3 = \underline{r}_{13} \times \underline{r}_{24}$$

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{s}_1}{\|\underline{s}_1\|} \quad (4.5)$$

$$\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 \quad (4.6)$$

Die Basisvektoren \underline{e}_1 und \underline{e}_2 spannen eine Ebene auf, welche tangential zur Mittelfläche des Elements verläuft, \underline{e}_3 steht normal auf den Diagonalen des Elements.

Die im oberen Koordinatensystem entsprechenden Knotenkräfte und Momente ergeben sich zu

$$\left[\underline{f}_{kx}^0, \underline{f}_{ky}^0, \underline{f}_{kz}^0, \underline{m}_{kx}^0, \underline{m}_{ky}^0 \right]$$

wobei k die Elementknoten beschreibt

4.4 Konstitutive Beziehungen

Um eine brauchbare Antwort (Lösung) des durch die finiten Elemente beschriebenen Körpers zu erhalten, ist es erforderlich geeignete konstitutive Beziehungen zu verwenden. Diese konstitutiven Beziehungen beschreiben das Materialverhalten des Körpers unter den gegebenen Belastungen und werden

auch als Materialmodell bezeichnet. Abschnitt 4.4.1 zeigt einen Überblick über die wichtigsten Materialmodelle [2].

4.4.1 Materialmodelle

Elastisch, linear

Die in Abschnitt 2.5 dargestellte Verschiebungsmethode verwendet dieses Materialmodell. Die Spannung ist eine Funktion der Verzerrung.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{E}} = \text{konstant}$$

Elastisch, nichtlinear

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{E}} \text{ als Funktion der Verzerrungen für den nichtlinear-elastischen Fall}$$

Elastoplastisch

Bis zur Fließgrenze weist dieses Materialmodell linear-elastisches Materialverhalten, danach werden die Spannungen mit Hilfe von Fließbedingungen, Fließ- und Verfestigungsgesetzen berechnet.

Kriechend

Wachsende Verzerrungen unter konstanter Last oder abnehmende Spannungen unter konstanten Verformungen kennzeichnen dieses Modell aus.

Viskoplastisch

Dieses Materialmodell berücksichtigt Effekte, welche durch die Geschwindigkeit der Verformungen auftreten.

4.4.2 Elastoplastisches Materialmodell

Im Folgenden werden die Grundlagen des elastoplastischen Materialmodells erläutert. In Abschnitt 4.4.3 wird das konkrete Modell vorgestellt, welches hier angewandt wurde.

In den allgemeinen ingenieurtechnischen Berechnungen wird häufig das Hook'sche Gesetz ($\sigma = E \varepsilon$) als Materialgesetz verwendet. Das Hook'sche Gesetz besagt, dass die Spannungen und Dehnungen sich proportional zueinander verhalten. Kennzeichnend für dieses Materialgesetz ist also, dass man direkt aus den Spannungen die Dehnungen berechnen kann. Nach der Entlastung bleiben keine Dehnungen vorhanden. Die Art dieser Berechnung wird als physikalisch und geometrisch linear bezeichnet.

Die Elastizitätsgrenze (Punkt **A**) gibt die maximale Spannung an, bei der nach Entlastung der Körper keine bleibenden Verlängerungen aufweist. Bei höherer Belastung wird der Körper bleibend gedehnt. Nach Erreichen der Streckgrenze nimmt die Dehnung merklich zu, obwohl die Spannung zunächst konstant ist. Diesen Vorgang nennt man *Fließen* (siehe Abb. 4.17). Der Werkstoff verhält sich jetzt bei der Deformation plastisch. Verursacht wird diese Erscheinung durch das Abgleiten der ineinander verhakten Gefügeteile.

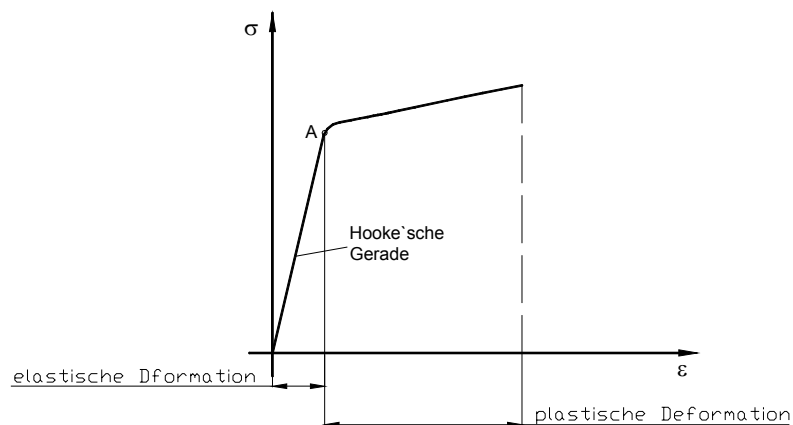


Abb. 4.17

Es kann also beobachtet werden, dass nach einer Entlastung eines Körpers Dehnungen zurückbleiben, obwohl der Körper frei von jeglicher Beanspruchung ist. Diese Dehnungen bezeichnet man als bleibende Dehnungen. Bei einer Wiederbelastung bis zum vorher erreichten Spannungszustand verhält sich der Zuwachs der Dehnungen in Bezug auf den Zuwachs der Spannungen linear elastisch. Die Spannungen resultieren nur aus den elastischen Dehnungen. Die konstitutiven Beziehungen für anelastische Werkstoffe können in zwei Gruppen unterteilt werden. Zum einen in die der zeitabhängigen Materialgesetze, welche in der Viskoplastizitätstheorie behandelt werden, und zum anderen in die Gruppe derer, die durch eine Zeitunabhängigkeit gekennzeichnet sind.

Dem nahezu ersten elastoplastischen Materialgesetz wurde ein Modell mit idealplastischem Werkstoff zugrunde gelegt. In diesem Modell würde für den einachsigen Spannungszustand nach Erreichen der Fließgrenze (Fließspannung σ_F) der plastische Modul mit dem Wert $E_{pl} = 0$ zurückgegeben, wobei es zur keiner Verfestigung kommen würde. Anhand Abbildung 4.18 soll der Begriff der Verfestigung verdeutlicht werden.

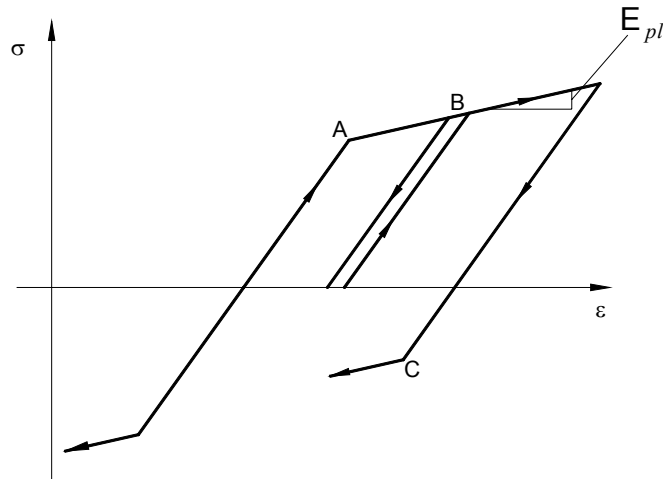


Abb. 4.18

Liegt die Streckgrenze bei Erstbelastung am Punkt **A**, so zeigt das Modell nach Entlastung von Punkt **B** und Wiederbelastung rein elastisches Verhalten bis zum Punkt **B** zurück. Es besitzt also einen elastischen Bereich. Die Streckgrenze für die Zweitbelastung liegt höher als diejenige der Erstbelastung. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Verfestigung* (engl. hardening). Im vorliegenden Modell geht er mit einer Herabsenkung der Streckgrenze bei Belastung in der Gegenrichtung (Punkt **C**) einher. Diesen Effekt bezeichnet man als *Bauschinger effekt* [12].

Es können folgende Arten der Verfestigung unterschieden werden.

- Aufweitung des zulässigen elastischen Bereichs bzw. der Fließfläche im Spannungsraum
 - isotrope Verfestigung [9] [12]
- Änderung der Lage des zulässigen Bereichs bzw. der Fließfläche im Spannungsraum
 - kinematische Verfestigung [9] [12]

Bei der kinematischen Verfestigung verschiebt sich der Mittelpunkt des elastischen Bereiches (siehe Abb. 4.19). Die kinematische Verfestigung stellt also eine Approximation des Bauschinger-effektes dar.

Das gesamte Materialgesetz lässt sich in drei Hauptbestandteile gliedern:

- die Fließfunktion bzw. Fließbedingung
- die Fließregel
- das Verfestigungsgesetz

4.4.3 Von- Mises-Plastizität

In dieser Simulation wird das Material-Modell Nr. 3 (Elastic Plastic with Kinematic Hardening) verwendet [9]. Isotrope, kinematische oder eine Kombination aus beiden Verfestigungsarten stehen zur Verfügung.

In der Von-Mises-Plastizitätstheorie stellt die Fließfunktion

- einen Zylinder im Hauptspannungsraum dar (siehe Abb. 4.19)
- wird mit Hilfe von Spannungsdeviatoren beschrieben
- ist unabhängig von der hydrostatischen Spannung

Ein wesentlicher Punkt bei der Formulierung des Materialgesetzes ist die Invarianz gegenüber einer Drehung des gewählten Koordinatensystems. Hierbei spielen die Invarianten des Spannungsdeviators eine wichtige Rolle.

Spannungsdeviator:
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (4.7)$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

mit
$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4.8)$$

Invarianten des Spannungsdeviators:

1. Invariante $\mathbf{I}_1 = \mathbf{s}_{ii} = 0$ (4.9)

2. Invariante $\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{ij}$ (4.10)

3. Invariante $\mathbf{I}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{jk} \mathbf{s}_{ki}$ (4.11)

Von-Mises-Fließfunktion: $f = \sqrt{3\mathbf{I}_2} - \sigma_F = 0$ (4.12)

$\rightarrow f = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0$ (4.13)

Die Werte der Fließfunktion haben folgende Bedeutung:

- $f < 0$ \rightarrow linear elastisches Materialverhalten
- $f = 0$ \rightarrow plastisches Materialverhalten
- $f > 0$ \rightarrow unzulässiger Zustand

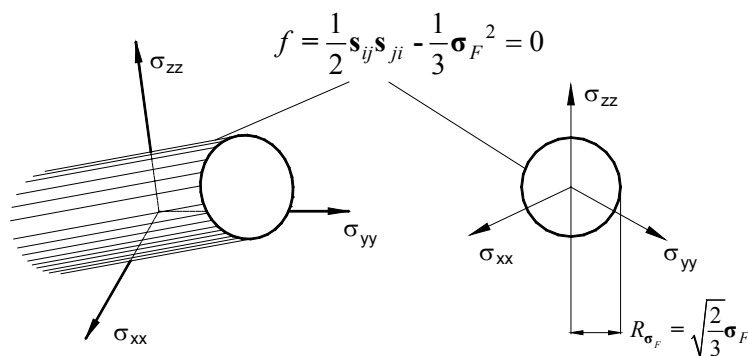


Abb. 4.19

$\sigma_F = \sqrt{3\mathbf{I}_2}$ (4.14)

$\|R_{\sigma_F}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F$ (4.15)

Der Grundsatz der Von-Mises-Fließbedingung besteht darin, dass die effektive Spannung mit einem Maximalwert verglichen wird, um den Zustand des Materials bezüglich der aktuellen oder der Spannung, die sich aus einem gewählten Inkrement ergibt, festzustellen. Der Radius R_{σ_F} ergibt sich in dieser Formulierung aus der Projektion des aktuellen Spannungsvektors auf die Deviatorebene, er wird mit einem konstanten Radius r_{σ_v} verglichen. Für die Berechnung von r_{σ_v} genügt ein einachsiger Versuch (z.B. Zugversuch). Hierbei kann die Vergleichsspannung direkt aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm abgelesen werden. Oft wird hierfür die Spannung verwendet, bei der ein deutliches Abweichen von der anfangs vorhandenen Linearität zu erkennen ist.

Das in dieser Analyse verwendete Materialmodell von LS-DYNA beinhaltet die Möglichkeit einer gemischten Verfestigung. Da es bei der kinematischen Verfestigung zu einer Verschiebung der Fließfläche kommen kann, lautet die Von-Mises -Fließfunktion hier:

$$f = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{ij} \boldsymbol{\eta}_{ij} - \frac{\sigma_F^2}{3} = 0 \quad (4.16)$$

mit $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathbf{s}_{ij} - \boldsymbol{\alpha}_{ij}$

Hierbei stellt $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ die Verschiebung der Fließfläche dar. Der Parameter $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ stellt somit einen Spannungstensor, mit dem der aktuelle Tensor reduziert wird.

Der momentane Radius der Fließfläche σ_F ist die Summe der Anfangsfließfläche

$$\sigma_0 \text{ plus die Weitung um } \beta E_P \boldsymbol{\varepsilon}_{eff}^P \quad (4.17)$$

mit $\beta \equiv$ Verfestigungsparameter

$$\beta=0 \quad \rightarrow \text{ kinematische Verfestigung}$$

$$\beta \geq 0 \quad \text{und} \quad \beta \leq 1 \quad \rightarrow \text{ gemischte kinematische / isotropische Verfestigung}$$

$$\beta = 1 \quad \rightarrow \text{ isotropische Verfestigung}$$

$E_P \equiv$ plastisches Verfestigungs-Modul

$$E_p = \frac{E_{pl} E}{E - E_{pl}} \quad (4.18)$$

$\epsilon_{eff}^p \equiv$ effektive plastische Verzerrung

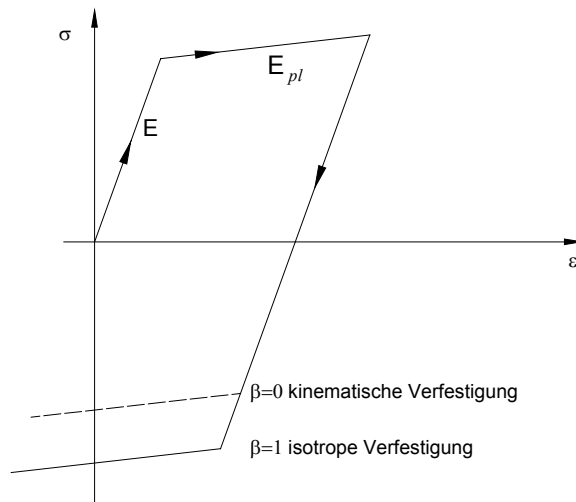


Abb. 4.20

Die Spannungen werden in diesem Materialmodell wie folgt aktualisiert,

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} = {}^t \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.19)$$

mit

${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\sigma}}$ als aktueller Spannungstensor

${}^t \underline{\underline{\sigma}}$ als Spannungstensor des vorhergehenden Zeitschrittes

$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\epsilon}}$ als Spannungszuwachs verursacht durch

$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{\epsilon}}$ als Inkrement der Dehnungen

und $\underline{\underline{G}}$ als Materialtensor

für den linearen Fall gilt das Hook'sche Gesetz und somit $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{E}}$

und es wird nichts weiter unternommen, falls die Fließfunktion nicht verletzt wird. Falls doch, dann wird ein Inkrement an plastischen Verzerrungen errechnet, die Spannungen werden zur Fließfläche zurück gestuft und der Mittelpunkt der Fließfläche wird aktualisiert.

Die hier dargestellten Materialwerte gelten für alle Modelle, falls nichts anderes angegeben:

Material-Modell Nr. 3 (Elastic Plastic with Kinematic Hardening)

Dichte	$\rho = 7.8500 \text{ g/cm}^3$
E-Modul	$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0.33$
Fließspannung	$\sigma_F = 300 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungs-Modul	$E_{pl} = 30000 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungsparameter	$\beta = 1$ (isotropische Verfestigung)

Dies entspricht einer Stahlsorte mit einer durchschnittlichen Festigkeit. In der Realität werden die Komponenten des Stoßfängerquerträgers aus hochfesten Stahlsorten zusammengestellt.

4.5 Kontaktbedingungen

Die bisherigen FE-Formulierungen bezogen sich nur auf das mechanische Verhalten unabhängiger Körper. Hat man es mit mehr als einem Körper (zusammengebaute Strukturen) zu tun, so besteht die Möglichkeit des Körperkontaktes infolge Verformung. Die dabei auftretenden Effekte wie Grenzflächendeformation, Haftung, Reibung oder wieder Trennung der Körper infolge eines Körperkontaktes müssen berücksichtigt werden. Es ist daher erforderlich, ein Verfahren zur Verfügung zu haben, welches im Kontaktfall zwischen den Körpern die mechanische Gegebenheiten realitätsnah abbildet. In einigen FE-Programmen bedient man sich der finiten Kontaktelemente. Mithilfe dieser Kontaktelemente modelliert man die Grenzflächen der Körper in den Bereichen, wo man Kontakt vermutet. Solange kein Kontakt auftritt, läuft die Berechnung in der bekannten Weise ab. Sollten aber Kontaktflächen aufeinander treffen, so setzt ein iterativer Gleichgewichtsalgorithmus ein. In einer Crash-Analyse treten jedoch sehr große Verformungen auf, so dass eine genaue Vorhersage, wo und wie Kontakt zwischen den einzelnen Strukturen auftritt, sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich ist. Das Programm LS-DYNA verfügt über eine Option, mit der das Programm automatisch Kontakt erkennt und entsprechend behandelt. Die Kontaktdefinition erfolgt in LS-DYNA über die Option

parts (Teile), *parts sets* (Teilesätze) und *node sets* (Knotensätze). In dieser Analyse wurde die erste Option verwendet. Anhand Abbildung 4.21 wird die Kontaktdefinition erläutert.

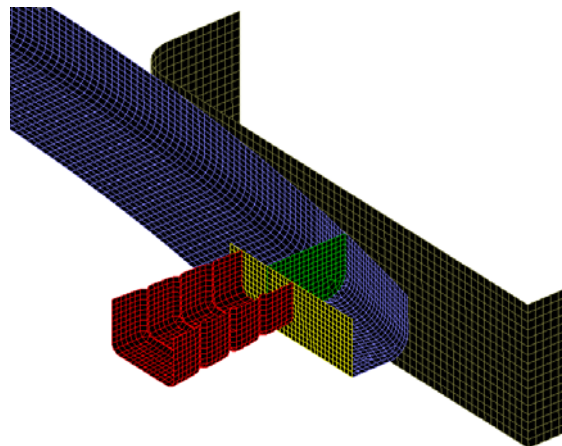


Abb. 4.21

Die Abb. 4.21 zeigt das halbe Modell des Stoßfängers (blau) mit der Crashbox(rot) und den entsprechenden Verstärkungsblechen (gelb und grün). Die schwarze Wand simuliert die Barriere, auf die der Stoßfänger aufprallt.

Wie zuvor erwähnt, wird der Kontakt zwischen einzelnen Teilen (*parts*) definiert. Insgesamt erkennt man in der Abb. 4.21, den Farben entsprechend, fünf verschiedene Teile. Mit der Option *Contact_Automatic Single_Surface_ID* wird verhindert, dass sich ein Teil im Laufe der Berechnung selbst durchdringt. Diese Option wurde auf die Teile rot, gelb, grün und blau angewendet. Der Befehl *Contact_Automatic Surface_to_Surface_ID* definiert den (möglichen) Kontakt zwischen zwei Teilen. Auch diese Option wurde mehrmals angewendet, z.B. rot zu gelb, gelb zu grün, grün zu blau usw. Bei der Kontaktdefinition zwischen zwei Teilen wird das eine Teil als Slave und das zweite als Master definiert. Mit Slave bezeichnet man Körper oder Flächen, deren Punkte daraufhin geprüft werden sollen, ob sie in den anderen, den Master, eindringen. Der umgekehrte Fall wird gewöhnlich nicht überprüft.

LS-DYNA verwendet das Penalty-Verfahren [9] [2] bei der Kontaktbehandlung. Hat das Programm ein Eindringen eines Knoten erkannt, wird auf den Knoten eine Kraft aufgebracht, die proportional zur Eindringtiefe ist. Des Weiteren ist das Coulom'sche Reibgesetz implementiert. Dieses wird mit den beiden Reibungskoeffizienten μ_s und μ_d definiert. Dabei ist μ_s der statische

Haftreibungskoeffizient und μ_d der dynamische Gleitreibungskoeffizient. Für eine Kontaktfläche sei F_n der Betrag des senkrecht auf die Teilfläche wirkenden resultierenden Kraftvektors und F_r der Betrag des tangential auf die Teilfläche wirkenden resultierenden Kraftvektors. Ist $|F_r| \leq \mu_s \cdot F_n$, so gibt es keine Relativbewegung zwischen den Teilflächen. Die Teilflächen haften aneinander. Falls die tangentielle Kraftkomponente F_r die maximale Haftkraft $\mu_s \cdot F_n$ überschreitet, so gleiten die Flächen aneinander ab. Während der Gleitreibung ist die tangentielle Reibwiderstandskraft F_r gleich der dynamischen Gleitreibung $\mu_d \cdot F_r$.

Für alle Kontaktdefinitionen in sämtlichen Analysen wurden folgende Koeffizienten für die Paarung Stahl auf Stahl angenommen:

Haftreibungskoeffizient $\mu_s = 0,2$

Gleitreibungskoeffizient $\mu_d = 0,1$

4.6 Analyse der Crashbox

4.6.1 Anfangs- und Randbedingungen

Aufgrund der Symmetrie der Crashbox wird nur die Hälfte des Modells berechnet, dadurch wird die Berechnungszeit reduziert. Nachdem das Modell erstellt und vernetzt worden ist, muss anschließend die Symmetrieebene definiert werden. Hierzu werden die Knoten, welche sich auf der Symmetrieebene (hier y-z- Ebene) befinden, zu einem Knotensatz (*Node Set*) zusammengefasst (weiß hervorgehoben). Über diesen Knotensatz wird über die Option *Boundary:SPC Card* → *Symmetry* die Symmetrieebene definiert (siehe Abb. 4.22).

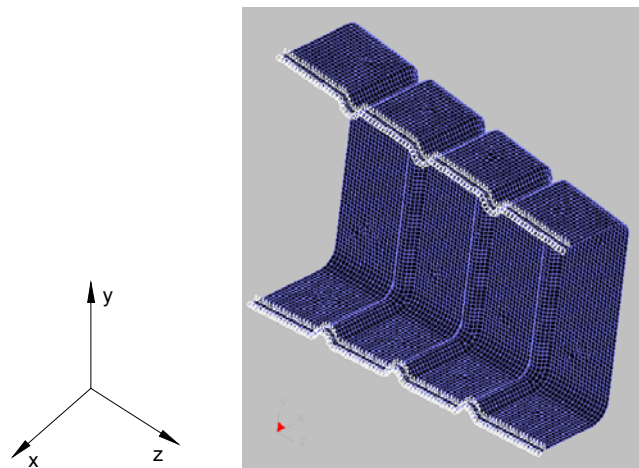


Abb. 4.22

Wie schon in Kapitel 4.2 erwähnt, werden die beiden Flansche nicht mitvernetzt. Sie verbinden die Crashbox mit dem davor liegenden Stoßfängerquerträger und dem sich dahinter befindenden Längsträger (siehe Abb. 4.23).

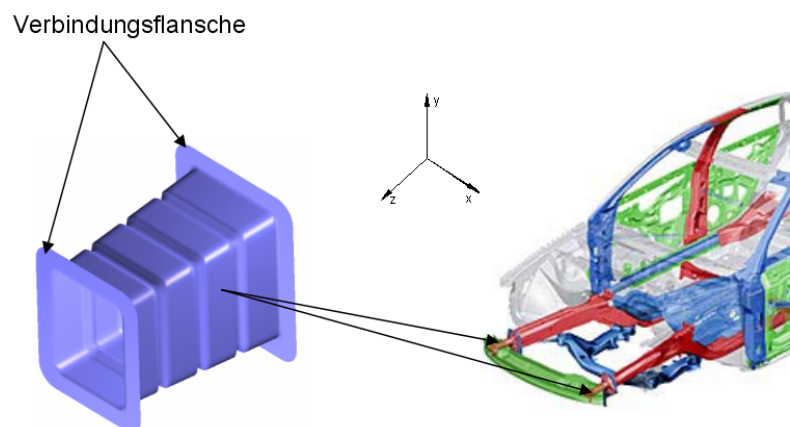


Abb. 4.23

In dieser Simulation wird angenommen, dass die Flansche aufgrund ihrer festen Verbindung mit den anderen Teilen sich nur in der z-Richtung bewegen können. Um diese Annahme in die Simulation einzubeziehen, werden erneut zwei Knotensätze definiert, diese befinden sich vorne und hinten auf der Crashbox. (siehe Abb. 4.24)

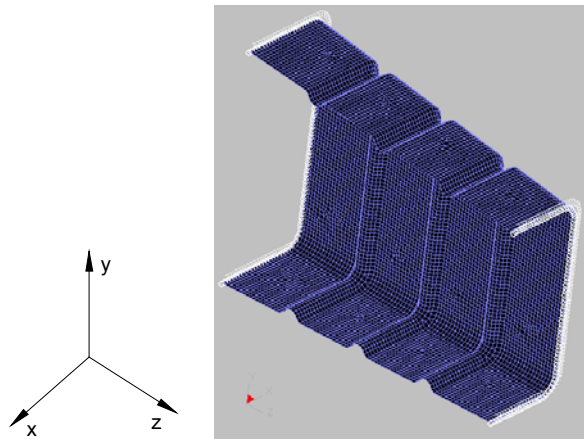


Abb. 4.24

Diesen Knoten werden alle Freiheitsgrade entzogen, bis auf die Möglichkeit, sich entlang der z-Achse zu bewegen. Hierdurch wird ersichtlich, dass eine Vernetzung der Flansche nicht notwendig ist.

Über einen vierten Knotensatz und die Option *Initial Conditions* → *Initial Velocity* wird dem Modell die Anfangsgeschwindigkeit entlang der z-Achse zugewiesen. Dieser Knotensatz beinhaltet alle Knoten des gesamten Modells. Die Geschwindigkeit beträgt 20 m/s und die Masse der hinteren Wand beträgt 100 kg. Wegen der Symmetrie beträgt die Gesamtmasse 200 kg.

4.6.2 Voruntersuchung

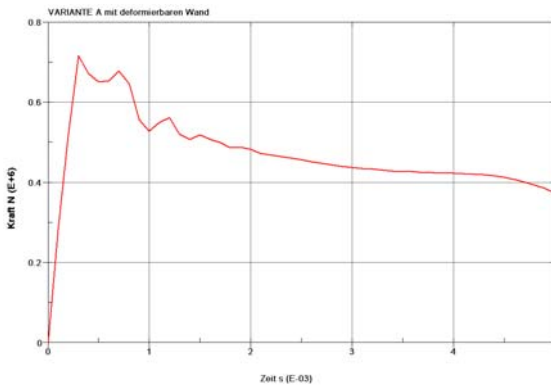
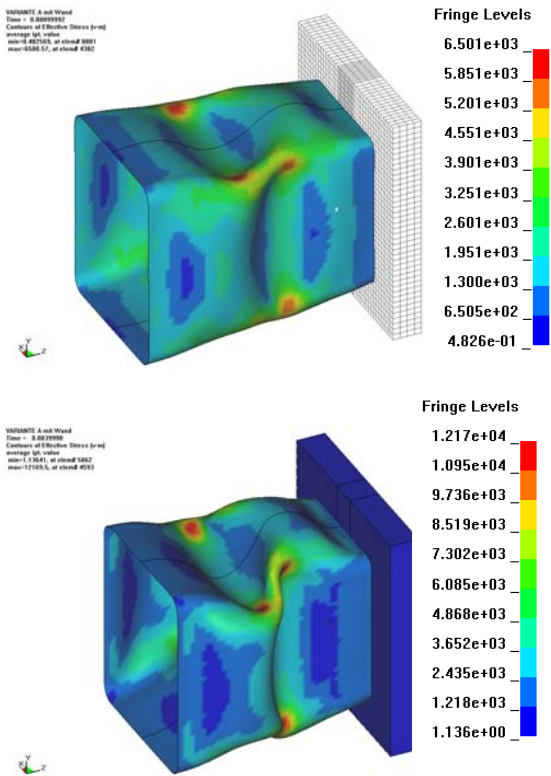
Das FE-Programm besitzt die Möglichkeit, in der optischen Ausgabe der Berechnung das ganze Modell darzustellen, obwohl aufgrund der Symmetrieeigenschaften nur das halbe Modell berechnet worden ist.

Um sicherzustellen, dass die Ergebnisse der anschließenden Berechnungen zu verwerten sind, wurde eine Vorberechnung durchgeführt. In dieser prallt das Modell der Crashbox auf eine verformbare Wand auf. Diese besteht aus 8-Knoten-Volumenelementen. Den Volumenelementen wurde ein elastisches Materialmodell mit $\rho = 3.8500 \text{ g/cm}^3$, E-Modul = 100.000 N/mm^2 und $\nu = 0.3$ zugewiesen

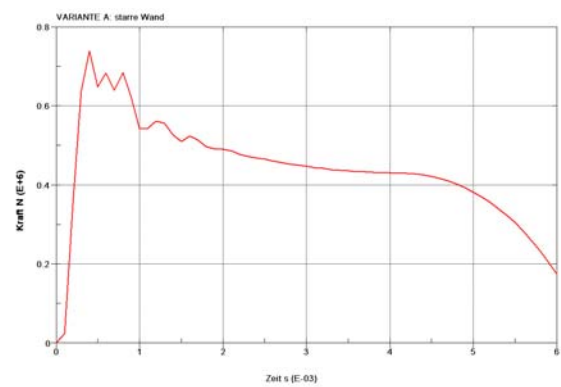
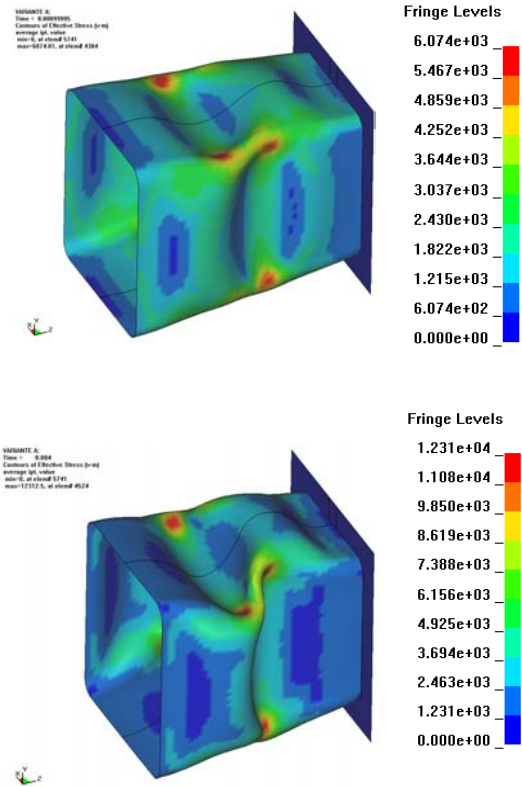
In Abbildung 4.25 sind die Verformungen und die durchschnittlichen Von-Mises-Vergleichsspannungen dargestellt. Der Durchschnitt bildet sich aus den Werten der unteren, mittleren und der oberen Fläche der Schalenelemente der Crashbox.

Es wird deutlich, dass die auftretenden Verformungen und Spannungen sich nicht stark unterscheiden.

verformbare Wand



starre Wand



Die zwei Diagramme in zeigen die Kraft F_w , welche auf die rote Wand in Abbildung 4.25, in Folge der Deformation der Crashbox, ausgeübt wird.

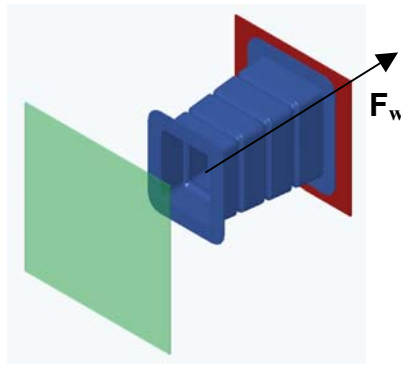


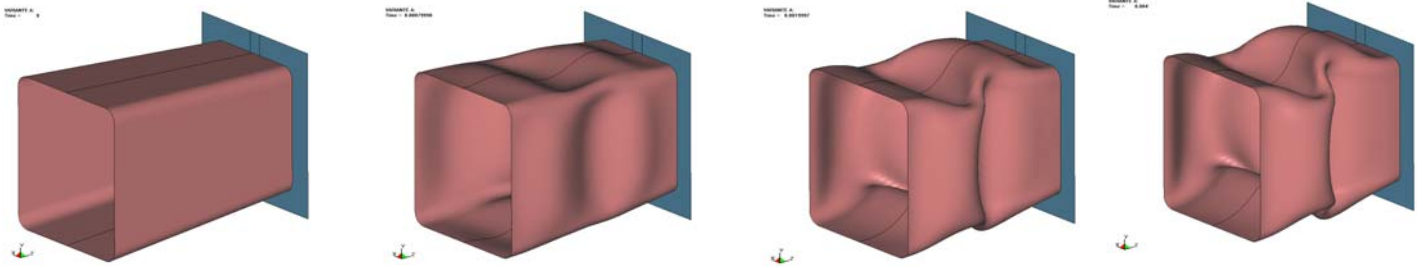
Abb. 4.25

Auch hier zeigen sich keine wesentlichen Unterschiede auf, der Verlauf der beiden Kraftkurven ist vergleichbar. Somit ist für die Analyse der Verformungen und Spannungen die Methode mit den beiden schnell zu modellierenden, starren Wänden ausreichend.

4.6.3 Ergebnisse der Crashboxanalyse

Bei der Auswertung der Ergebnisse wurden folgende Aspekte berücksichtigt:

- Das rein optische Deformationsverhalten der jeweiligen Variante wird beurteilt.
Durch Zustandsaufnahmen zu bestimmten Zeitpunkten werden die Deformationen bildlich dargestellt.
- Die im Modell auftretenden Spannungen werden graphisch dargestellt.
Die durchschnittlichen Von-Mises-Spannungen werden erneut durch Zustandsaufnahmen graphisch dargestellt (kN/mm^2)
- Welche Kräfte werden in dem hinter der Crashbox liegenden Längsträger weitergeleitet?
In einem F-t-Diagramm wird die Kraft F_w (siehe Abb. 4.25) ausgegeben, welche auf die hinter der Crashbox mitgeführte Wand ausgeübt wird.



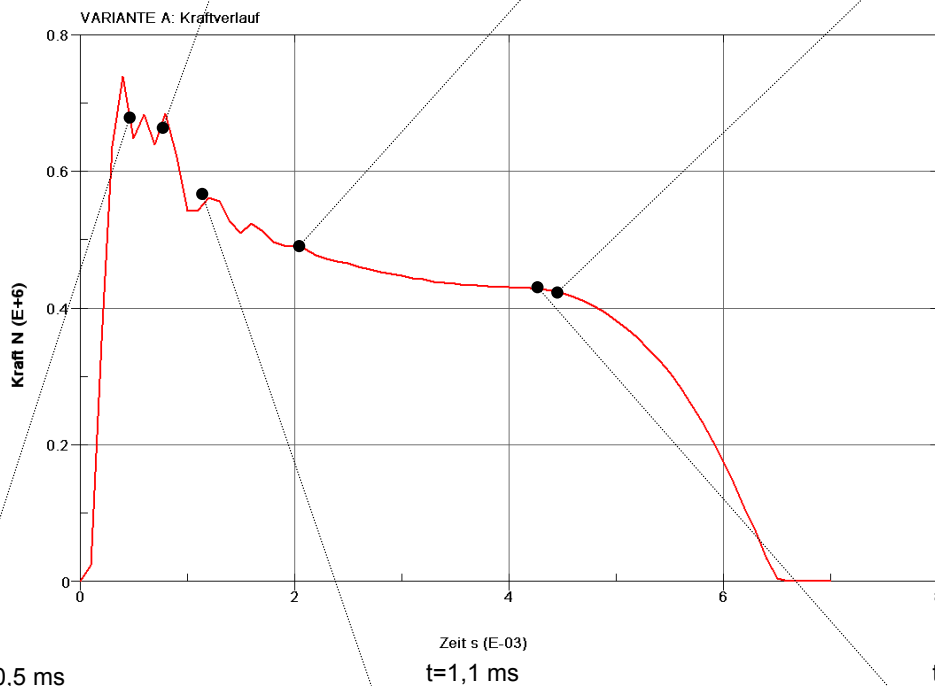
t=0
Länge: 180 mm

t= 0,8 ms

t= 2 ms

Bei t= 4,5 ms
Länge: 144 mm

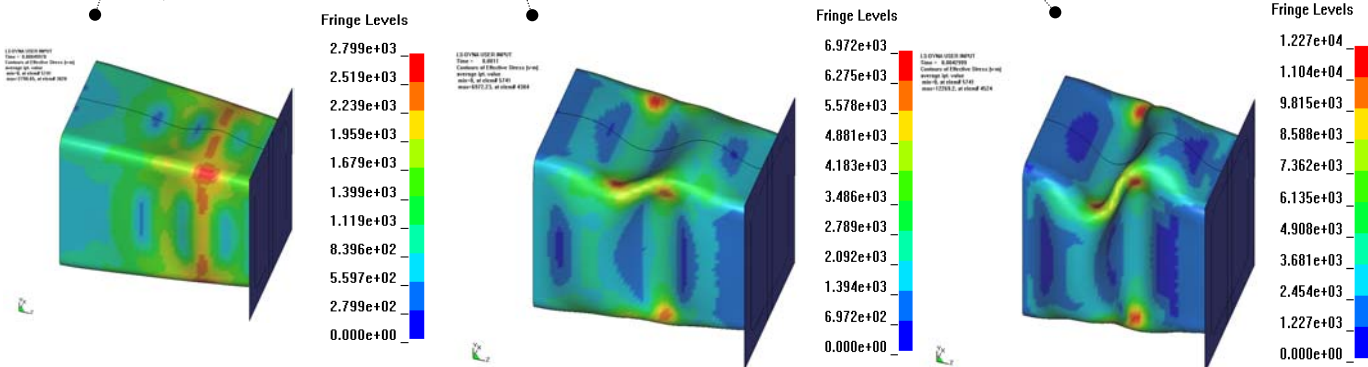
Variante A



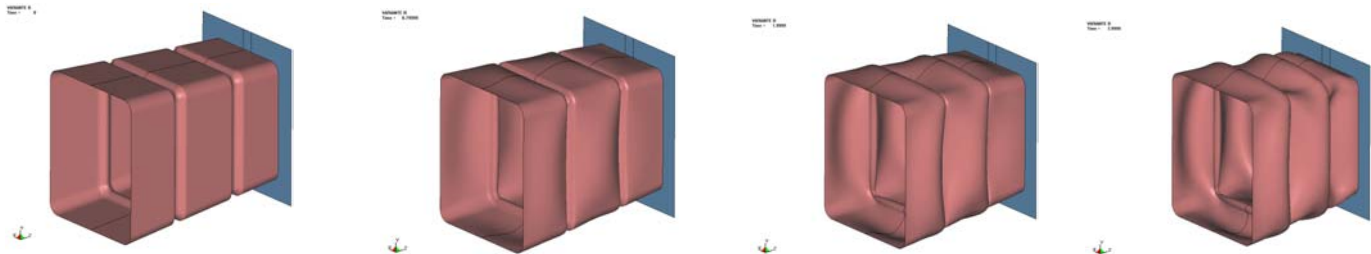
t=0,5 ms

Zeit s (E-03)
t=1,1 ms

t=4,3 ms



Diese Variante beinhaltet keine Falten, welche eine gezielte Deformation ermöglichen sollen. Kurz nachdem die Crashbox auf die Wand aufgeprallt ist, steigt die Kraft, welche durch die Crashbox auf die hintere Wand übertragen wird, auf ein Maximum von etwa 750 kN. An diesem Kraftverlauf wird ersichtlich, dass diese Variante anfangs sehr steif ist. Das komplett gestauchte Modell hat eine Endlänge von 144 mm (Ausgangslänge 180 mm). Der Deformationsweg beträgt 36 mm.



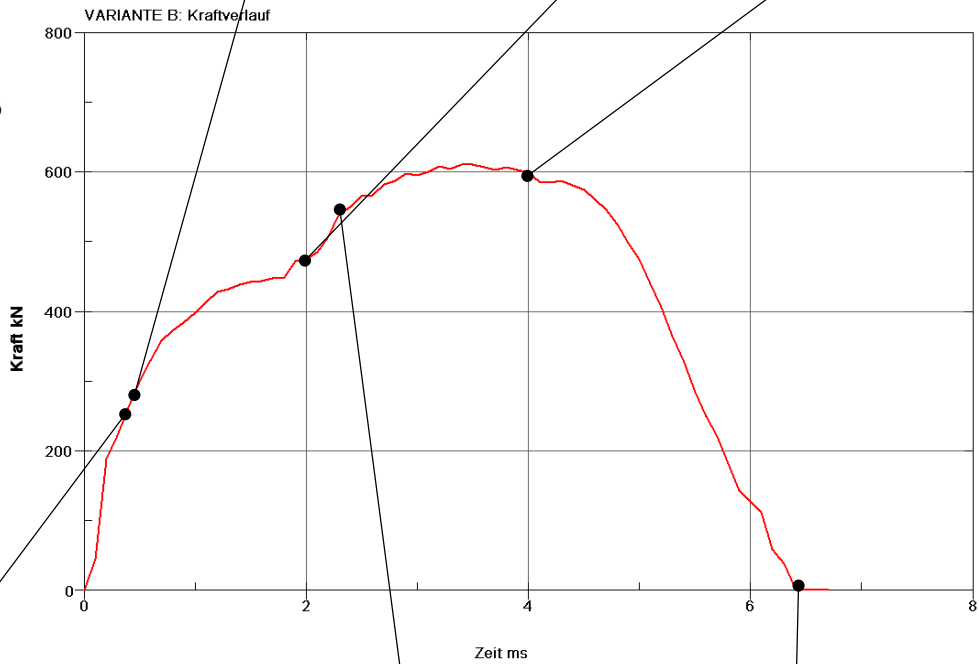
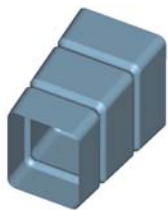
t=0
Länge: 180 mm

t= 0,8 ms

t= 2 ms

t= 4 ms
Bei t= 4,3ms
Länge: 133 mm

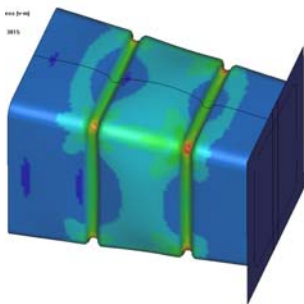
Variante B



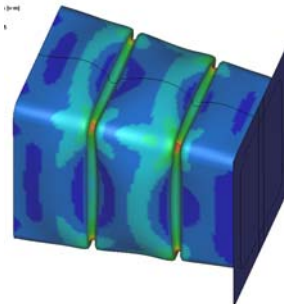
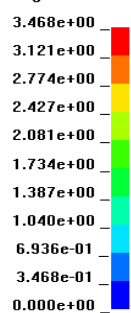
t= 0,5 ms

t= 2,5 ms

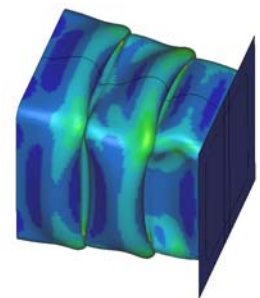
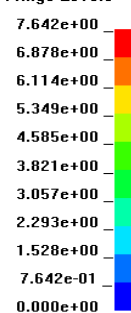
t= 6,5 ms



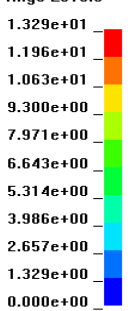
Fringe Levels



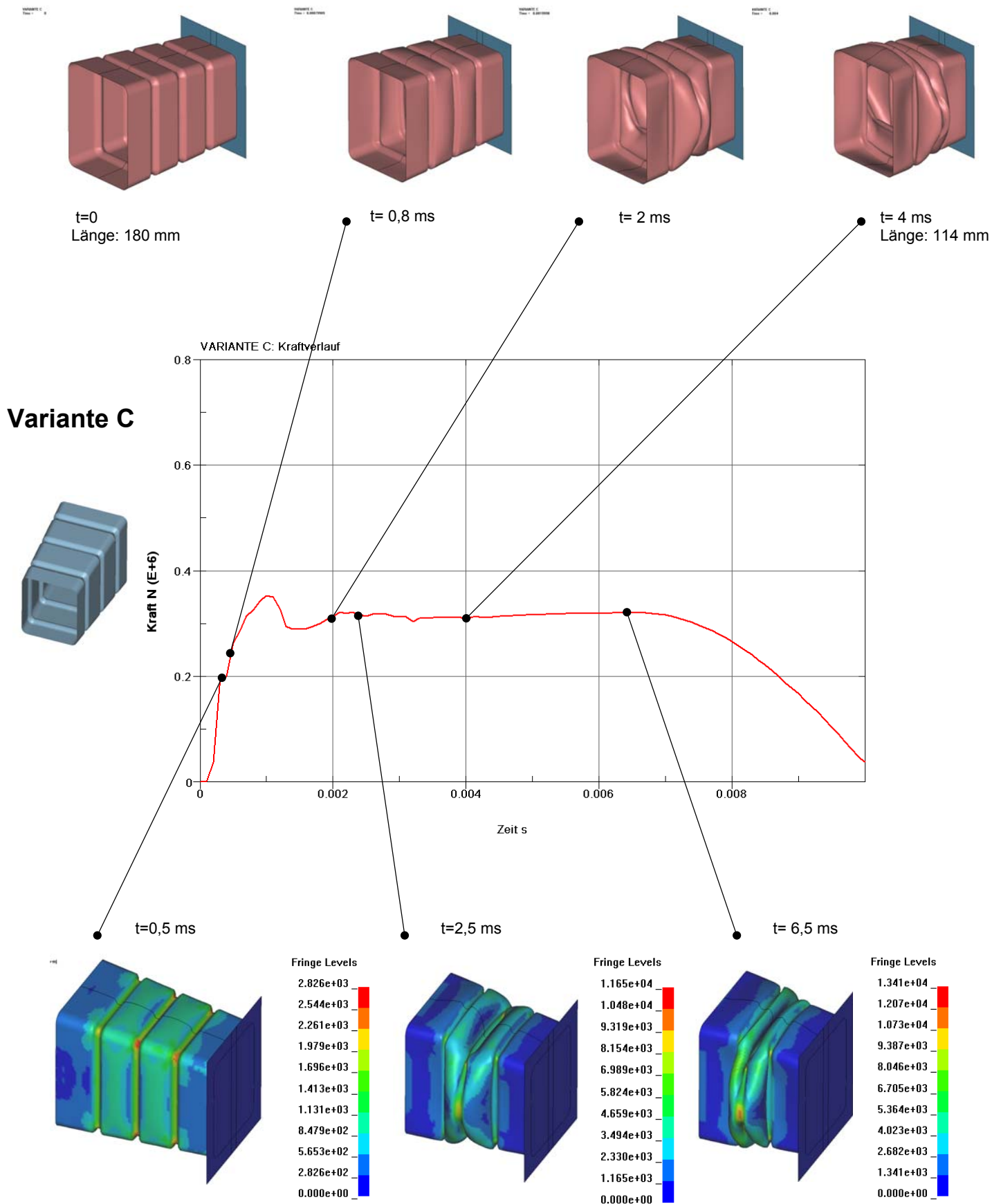
Fringe Levels



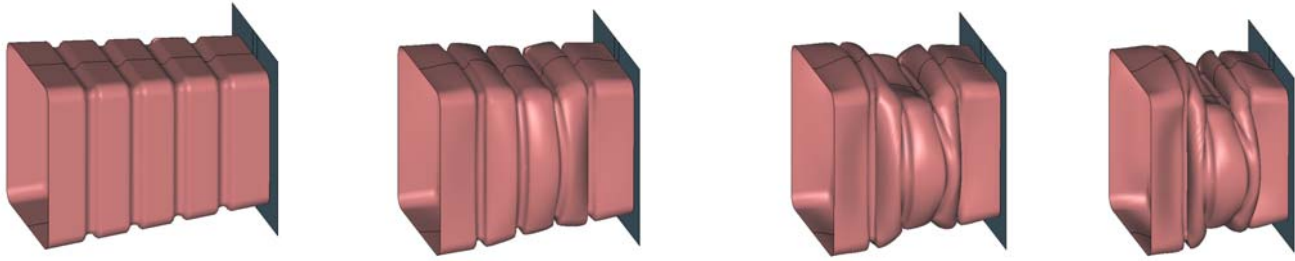
Fringe Levels



Die Deformation beginnt an den beiden Falten. Diese erleichtern die Verformung, eine Kraftspitze zu Beginn bleibt aus. Trotzdem steigt der Wert nach 3 ms auf etwa 600kN. Der Deformationsweg beträgt 47 mm. Der Umformvorgang dauert genauso lange wie bei der Variante A, etwa 6,5 ms.



Die Variante C beginnt sich im Bereich der mittleren Falte zu verformen. Die Kraft steigt nur am Anfang auf etwa 350 kN, bleibt dann fast konstant knapp über 300 kN. Der Deformationsweg ist 66 mm lang, also fast doppelt so lang wie der der Variante A.



t=0
Länge: 180 mm

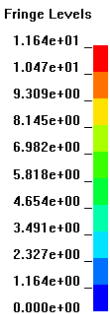
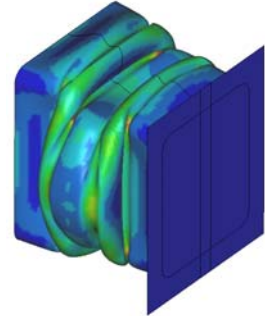
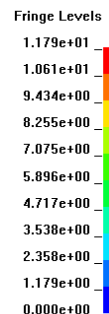
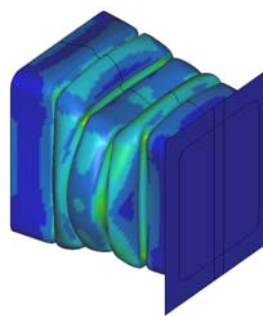
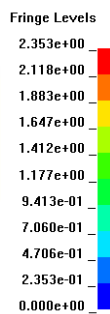
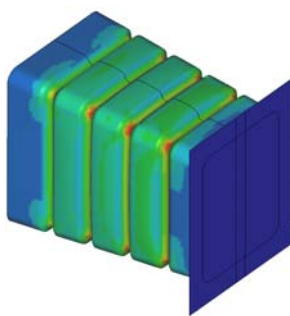
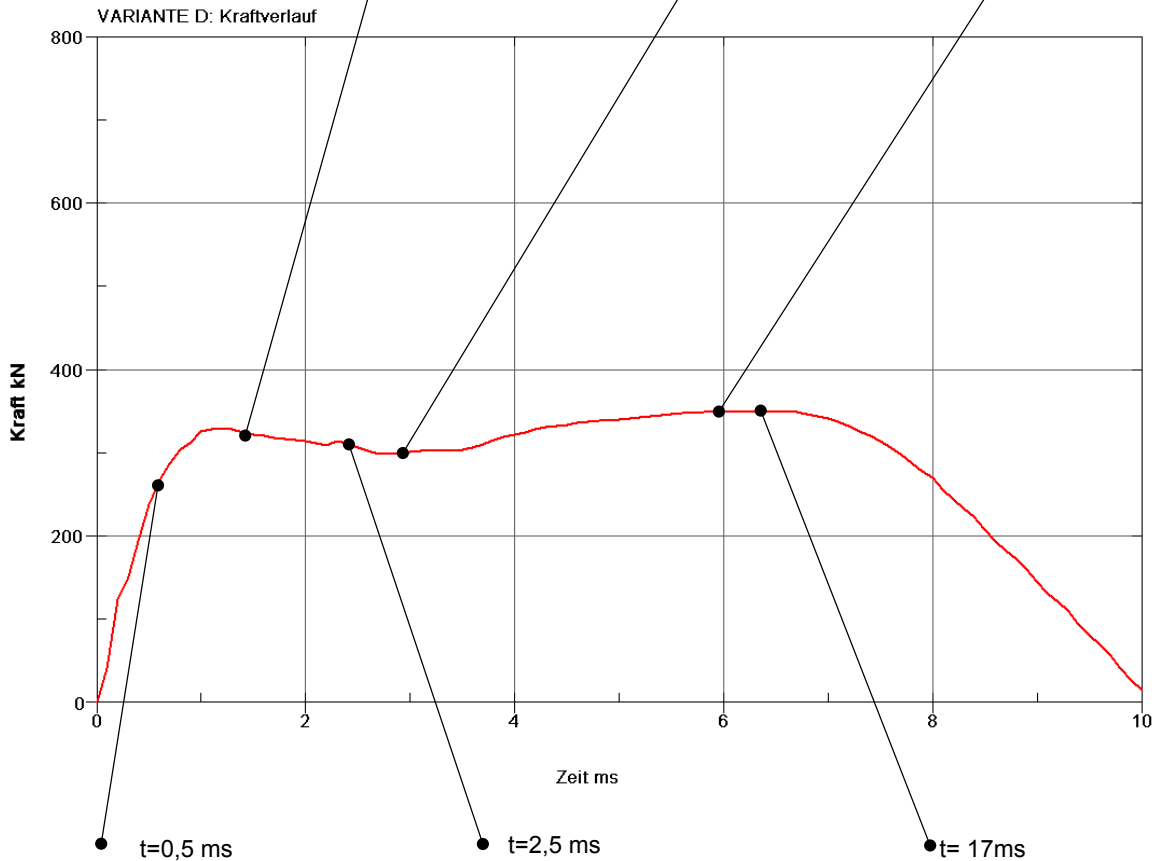
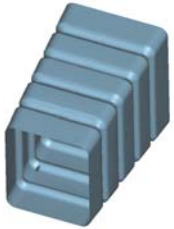
t= 1,4 ms

t= 3 ms

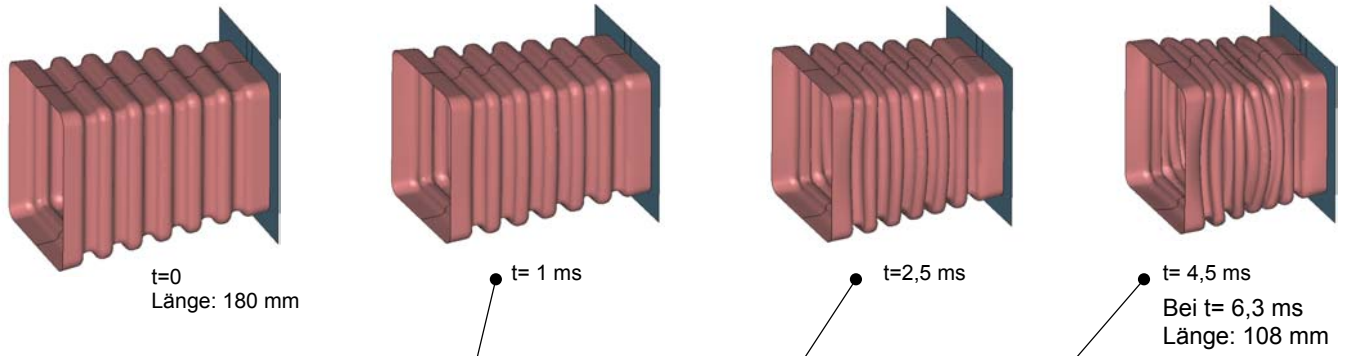
t= 6 ms

Bei t= 6,4 ms
Länge: 112 mm

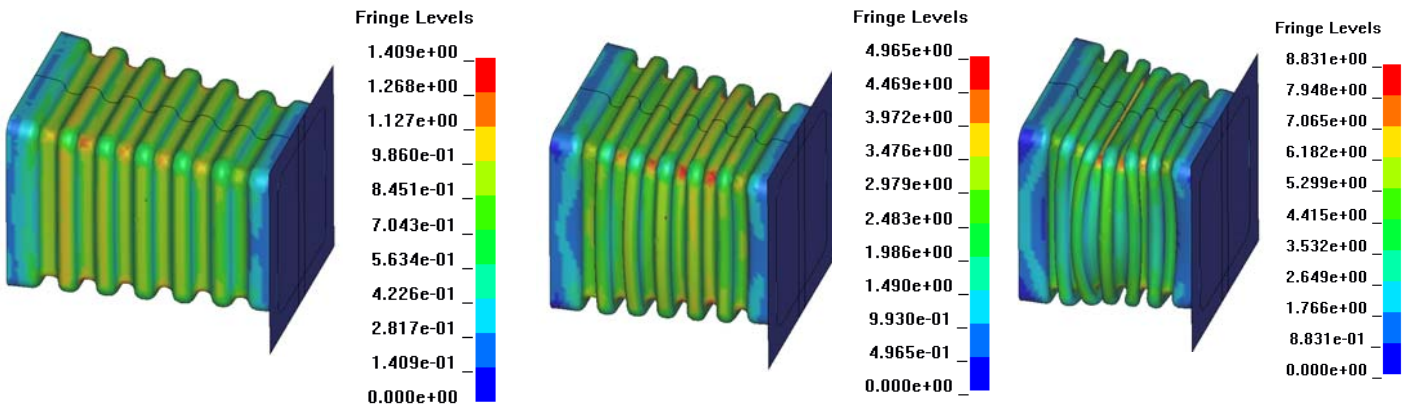
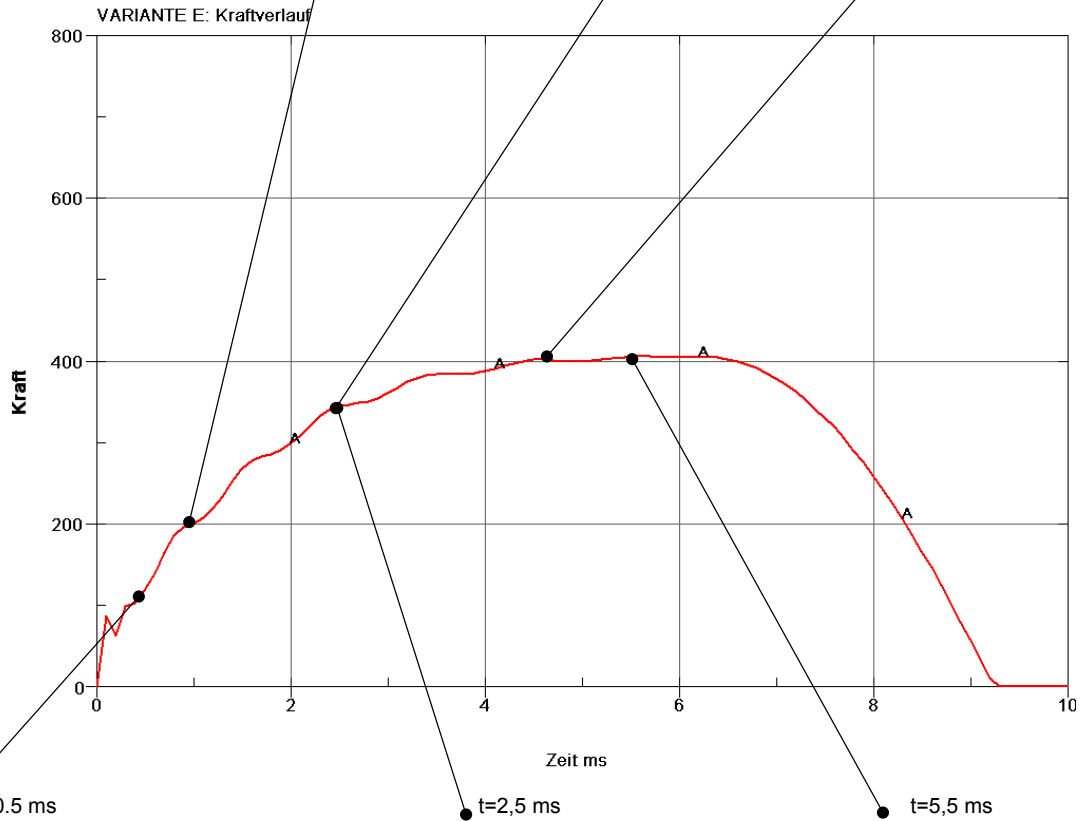
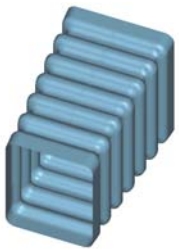
Variante D



Der Kraftverlauf ähnelt sehr dem der Variante C. Auch der Deformationsweg und die Deformationszeit sind nahezu identisch. Die Verformung beginnt im mittleren Bereich, nach etwa 2 ms knickt der mittlere Steg zwischen den beiden innere Falten nach innen weg und wird bis zum Schluss nicht verformt.



Variante E



Die Deformation verläuft wie erwartet, die Crashbox wird durch die vorgegebenen Falten wie eine Ziehharmonika zusammengestaucht. Der Anstieg des Kraftverlaufs ist zu Beginn wesentlich flacher als bei den vorherigen Analysen. Die Falten erleichtern zur Beginn die Deformation der Box.

Die Kraft steigt danach knapp über 400 kN. Die Spannungen verteilen sich bei diesem Modell gleichmäßiger als im vorherigen Modell. Diese Variante hat den längsten Deformationsweg, nämlich 72 mm.

Für die Simulation des Stoßfängerquerträgers und später des Gesamtsystems fällt die Wahl auf die Variante C. Der Kraftverlauf ist niedriger als bei allen anderen Varianten. Das Modell besitzt noch Reserven bei einer Steigerung der hinten mitgeführten Masse.

4.7 Analyse des Stoßfängerquerträgers

4.7.1 Anfangs- und Randbedingungen

Die folgenden Aspekte sind für alle Varianten des Stoßfängerquerträgers gültig. Bei der Vernetzung wurden hier die vollständigen Symmetrieeigenschaften ausgenutzt und nur ein Viertel des Systems vernetzt (siehe Abb. 4.27) und anschließend berechnet.

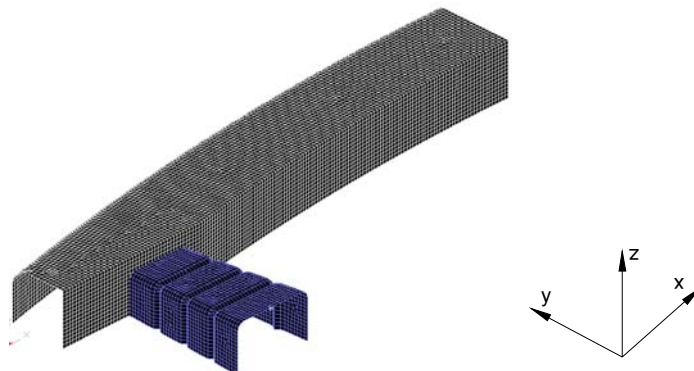


Abb. 4.27

Die Symmetrieffläche ist die x-y-Fläche und die y-z-Fläche.

Einem Knotensatz am hinteren Ende der Crashbox werden erneut alle Freiheitsgrade entzogen bis auf die Translation in y-Richtung (siehe Abb. 4.28). Diese stellt die feste Verbindung mit der dahinter liegenden starren Wand dar.

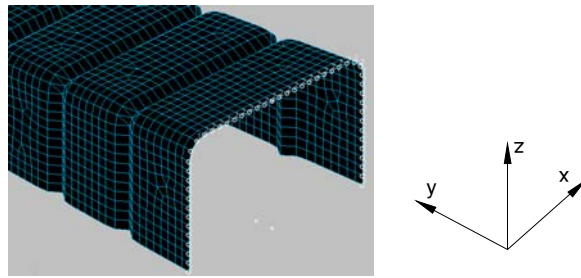


Abb. 4.28

Dieser Wand wird eine Masse von 100 kg zugewiesen. Aufgrund der Symmetrie (Viertelmodell) hat die ganze Wand eine Masse von 400 kg.

An der vorderen Seite ist die Crashbox fest mit dem Stoßfänger verbunden. Dem System wird eine Geschwindigkeit von 20m/s zugewiesen.

Es werden die gleichen Elemente verwendet wie bei der vorhergehenden Analyse.

4.7.2 Ergebnisse der Analyse des Stoßfängerquerträgers

Die Ergebnisse der verschiedenen Varianten sind im Nachfolgenden dargestellt. Da diese Varianten sich hauptsächlich im Bereich vor der Crashbox unterscheiden, ist zum besseren Verständnis auch das Viertelmodell dargestellt.

Variante 1

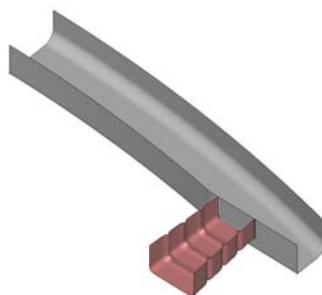
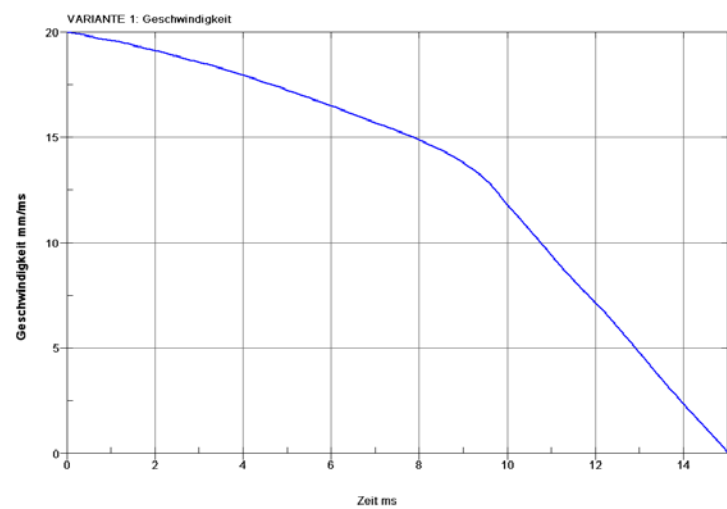
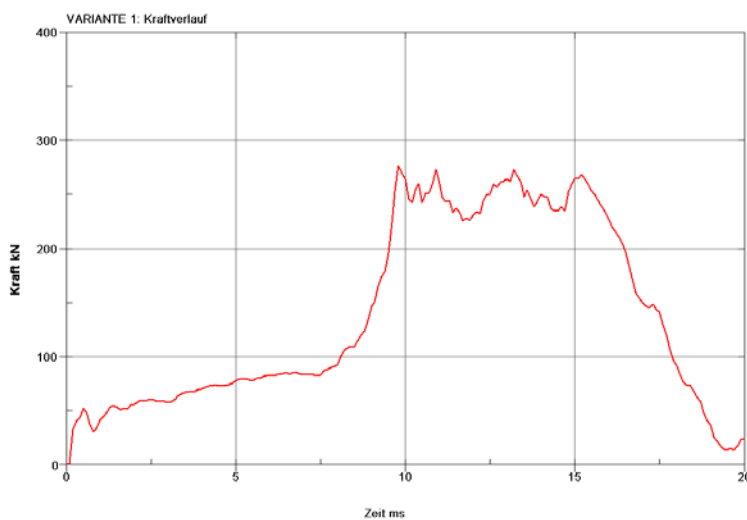
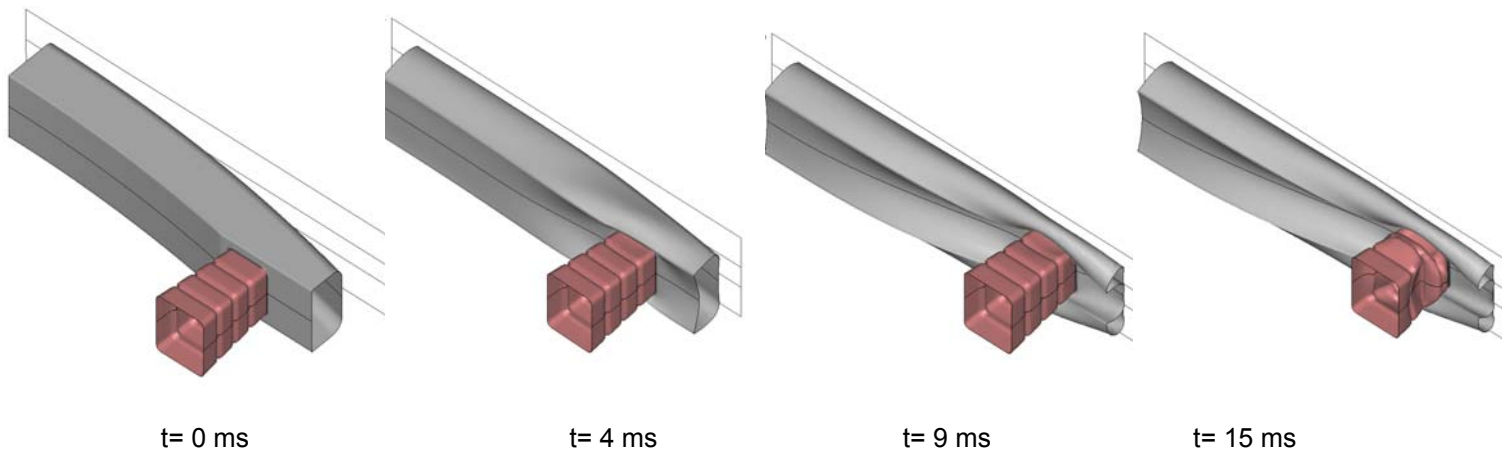


Abb. 4.30

Die Variante A weist ein geschlossenes Profil ohne jegliche Verstärkungen im Inneren des Stoßfängers auf. Die Wandstärke beträgt durchgehend 3 mm, auch die der Crashbox.



Die rote Kurve zeigt erneut die Kraft, welche auf die starre Wand hinter der Crashbox wirkt. Die blaue Kurve stellt die Geschwindigkeitsabnahme dieser Wand dar. Die Deformation des Stoßfängers trägt nicht viel dazu bei, die Geschwindigkeit abzubauen. Erkennbar ist dies am flachen Verlauf der Kurve. Erst nach ca. 9 ms wird der Verlauf steiler, zu dieser Zeit beginnt sich die Crashbox zu deformieren.

Variante 2

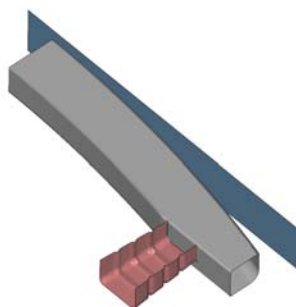
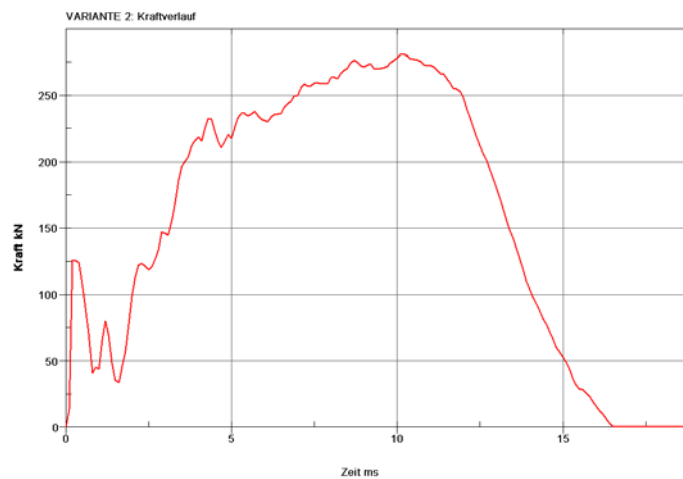
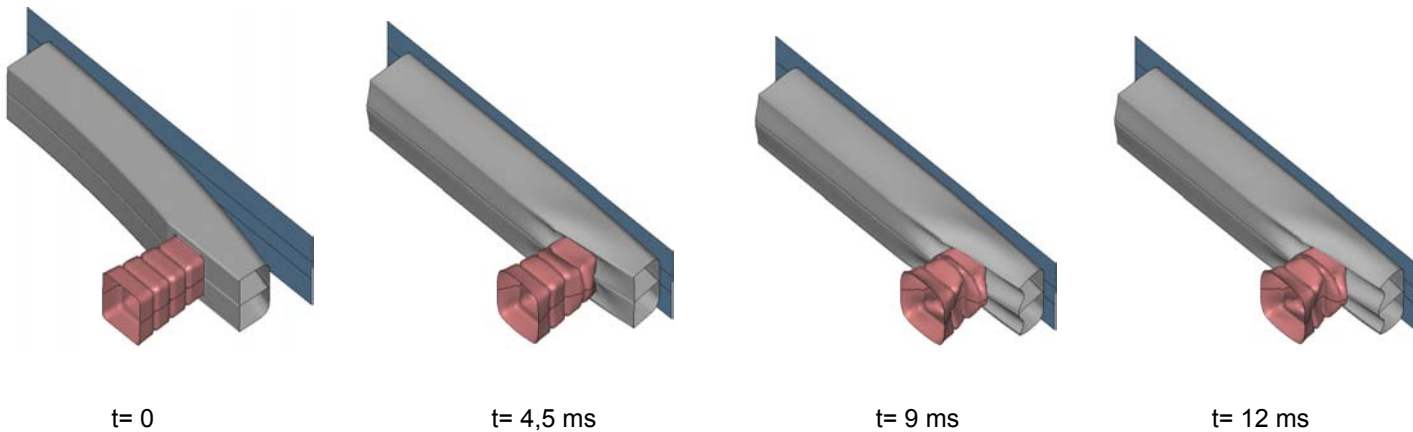


Abb. 4.31

Ein durchgehender Verstärkungssteg kennzeichnet die Variante 2. Die Wandstärke des Profils und des Verstärkungssteiges betragen 3 mm.



Die Auswirkungen der Verstärkung sind erkennbar, die Verformungen des Stoßfängers sind sehr gering. Der Verstärkungssteg im Inneren versteift den Stoßfänger zu sehr. Des Weiteren bewirkt er, dass sich die Crashbox ab einer Zeit von ca. 4 ms um diesen faltet (siehe Abb. 4.32).

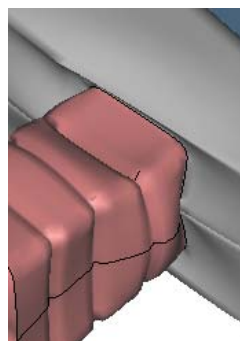


Abb. 4.32

Variante 3

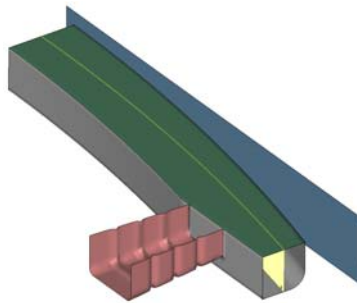
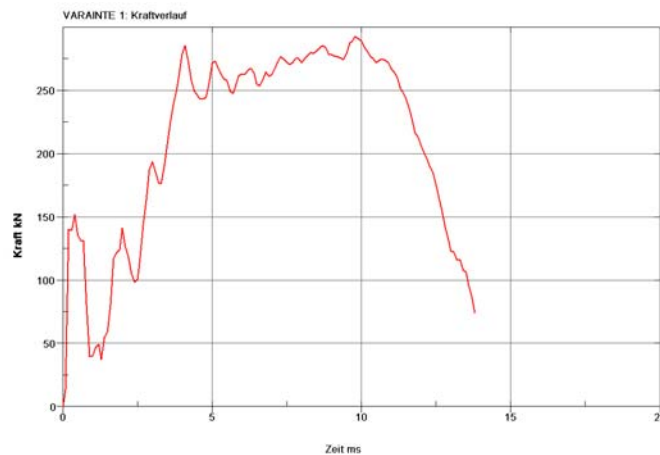
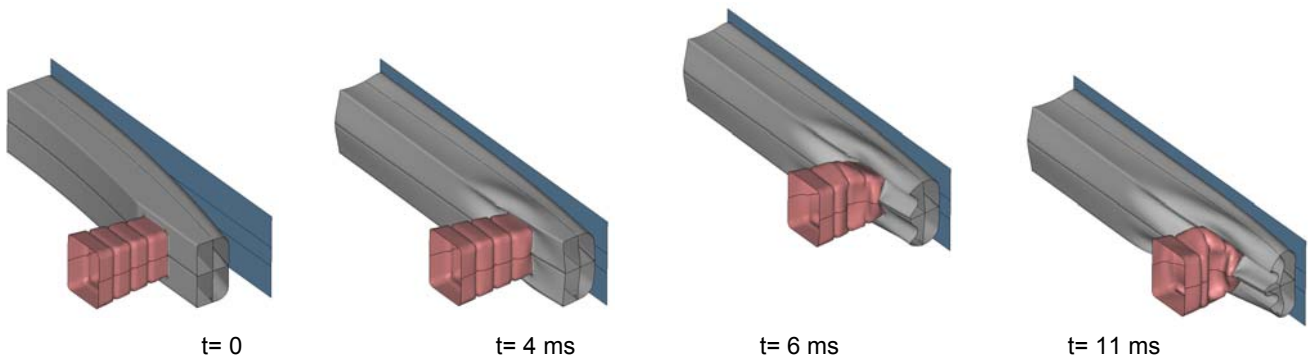


Abb. 4.33

Diese Variante beinhaltet einen weiteren Verstärkungssteg (gelb) im Inneren. Dieser soll verhindern, dass sich die Crashbox um die waagerechte Verstärkung (grün) faltet. Die Wandstärken sind in dieser Variante verkleinert worden. Die Wandstärke des Stossfängers (grau) wurde reduziert auf 2mm, die Crashbox hat nach wie vor eine Wandstärke von 3 mm, der grüne und der gelbe Steg haben eine Wandstärke von 1mm.



Die Ergebnisse zeigen keine Verbesserung. Im Gegenteil, die Box faltet sich noch stärker um den Verstärkungssteg. Die zusätzliche Verstärkung hat somit keine

positive Auswirkung auf das Deformationsverhalten. Zusätzliche Berechnungen mit noch geringeren Wandstärken im Inneren ergaben ebenfalls keine wesentlichen Verbesserungen.

Variante 4

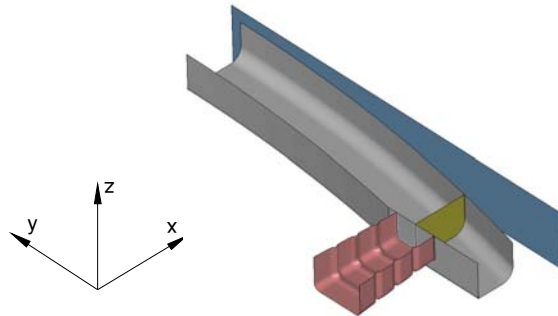
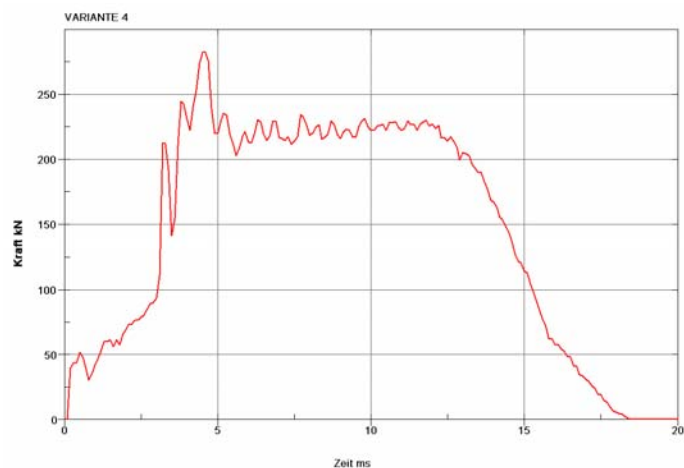
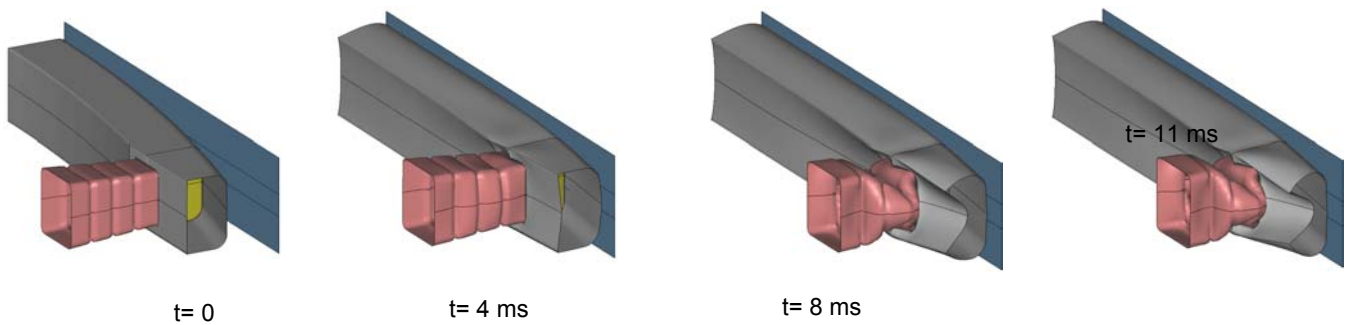


Abb. 4.34

Um das ungünstige Deformationsverhalten der Crashbox zu beseitigen, wurden die Verstärkungen der Varianten 2 und 3 entfernt. Ein einzelner Steg (gelb), mittig vor der Crashbox, ist die einzige Verstärkung in der Variante 4. Da die Breite der Crashbox in z-Richtung größer ist als die in y-Richtung, sollte sich diese nicht so stark um den gelben Verstärkungssteg falten als bei den vorherigen Simulationen. Die Wandstärken betragen alle 3mm.



Die Crashbox faltet sich ebenfalls um die Verstärkung im Inneren, aber längst nicht so stark wie zuvor. Um diese Variante zu verbessern, sollten zwei Punkte berücksichtigt werden.

1. Die Wandstärke des gelben Verstärkungssteiges ist zu hoch. Abbildung 4.35 zeigt links die Kontur des Verstärkungssteiges zum Zeitpunkt $t=0$ und rechts die entsprechende zum Zeitpunkt $t=11\text{ms}$.

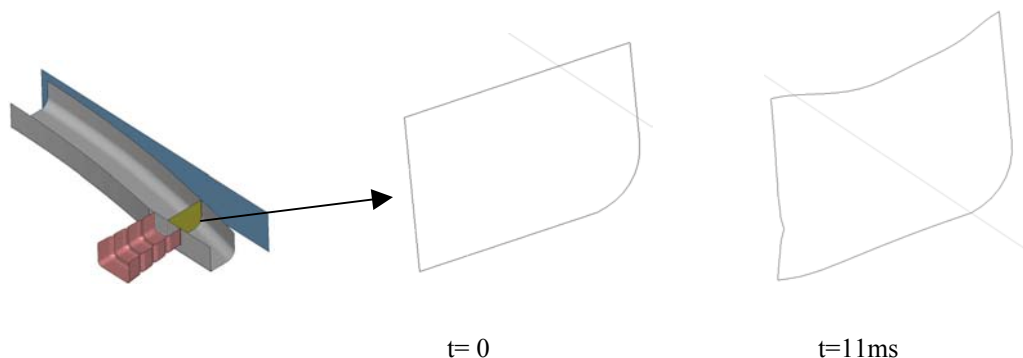


Abb. 4.35

Wie zu erkennen ist, sind die Verformungen gering. Die Wandstärke sollte reduziert werden.

2. Die Wand vor der Crashbox sollte versteift werden. Abbildung 4.36 zeigt diesen Bereich (grün) zum Zeitpunkt $t=2,5$ und $t=4,5\text{ms}$.

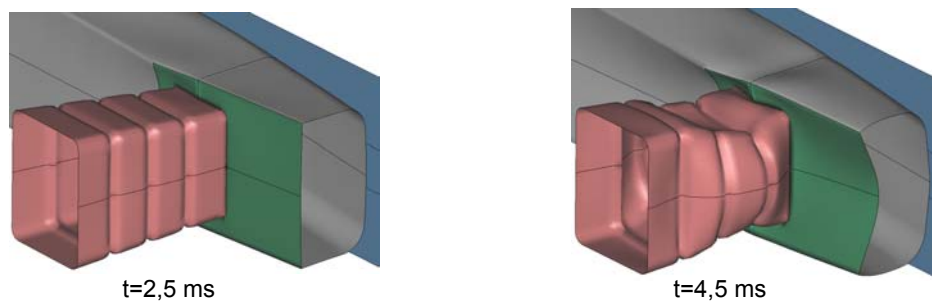


Abb. 4.36

Durch die Wölbung der grünen Wand ist die Auflagefläche vor der Crashbox nicht mehr eben. Hierdurch deformiert sich die Crashbox anders als in der Analyse der Variante C (siehe Abschnitt 4.6.3).

Variante 5

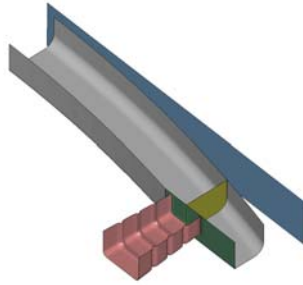
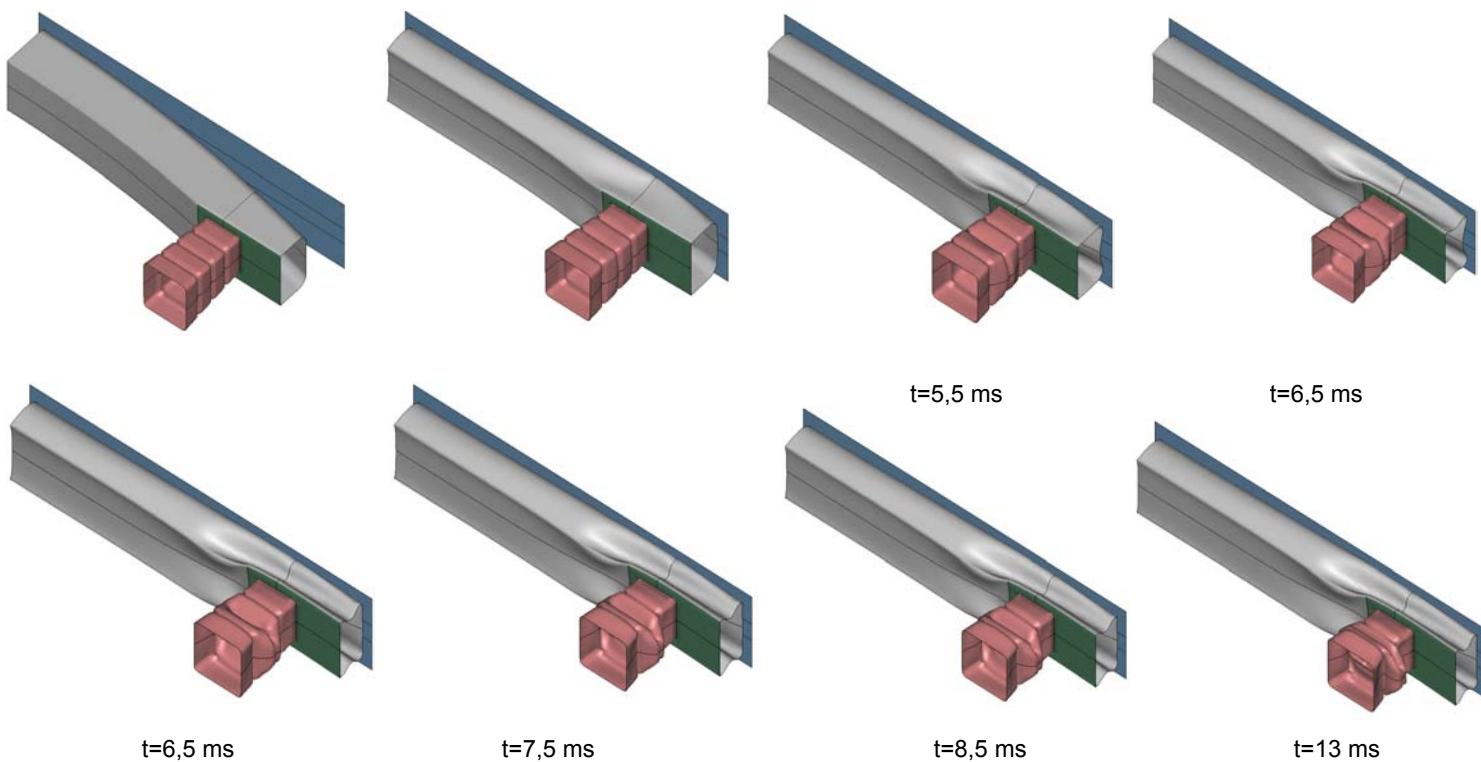
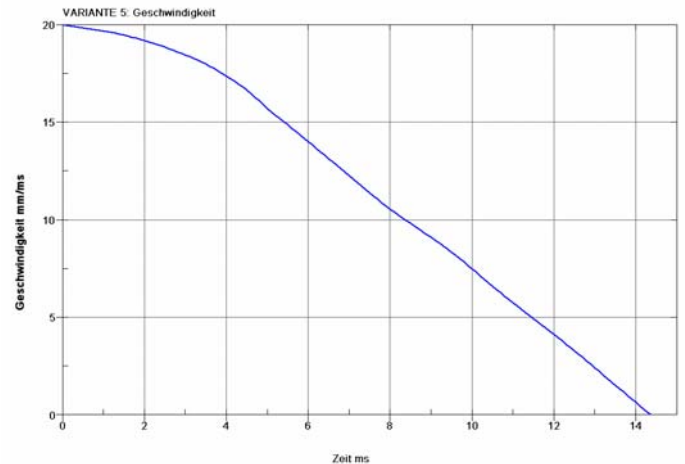
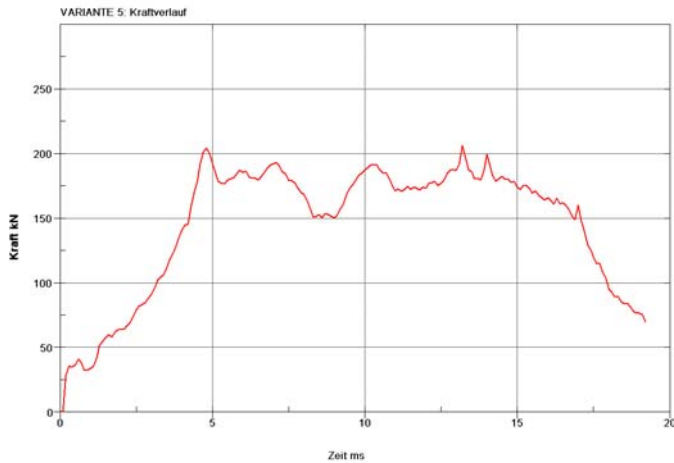


Abb. 4.37

Die 2 Punkte aus den Ergebnissen der Variante 4 werden auf die Variante 5 angewendet. Nach mehreren Berechnungen wurde die Wandstärke des Verstärkungssteges (gelb) auf 0,5 mm herabgesetzt. Gleichzeitig wurde die grüne Wand vor der Crashbox verstärkt. Die Verstärkung beinhaltet eine Erhöhung der Wandstärke auf 10 mm. Des Weiteren wird der grünen Wand ein Material mit einer höheren Festigkeit zugewiesen. Die Fließspannung σ_F wurde für die grüne Wand von 300 N/mm^2 auf 450 N/mm^2 erhöht. Alle anderen Werte bleiben gleich (siehe Abschnitt 4.4.1).





Die Verbesserungen sind erkennbar. Zu Beginn verformt sich der Stoßfänger, ab einer Zeit von ca. 4.5 ms beginnt sich die Crashbox mitzudeformieren. Die Verformung des Stossfängers geht bis etwa 8 ms, den Rest der Energie baut die Crashbox ab. Die Kraft bleibt während des gesamten Vorgangs fast immer unter 200 kN. Die blaue Kurve bestätigt, dass die Geschwindigkeit gleichmäßig von den beiden Komponenten gleichmäßig abgebaut wird. Durch die Verstärkung des Bereichs vor der Crashbox deformiert sich diese fast identisch wie bei der Einzelanalyse der Variante C in Abschnitt 4.4.1. Die Abbildung 4.38 zeigt links den Endzustand des Deformationsvorgangs der Variante C aus Abschnitt 4.4.1 und rechts den entsprechenden Zustand aus dieser Analyse.

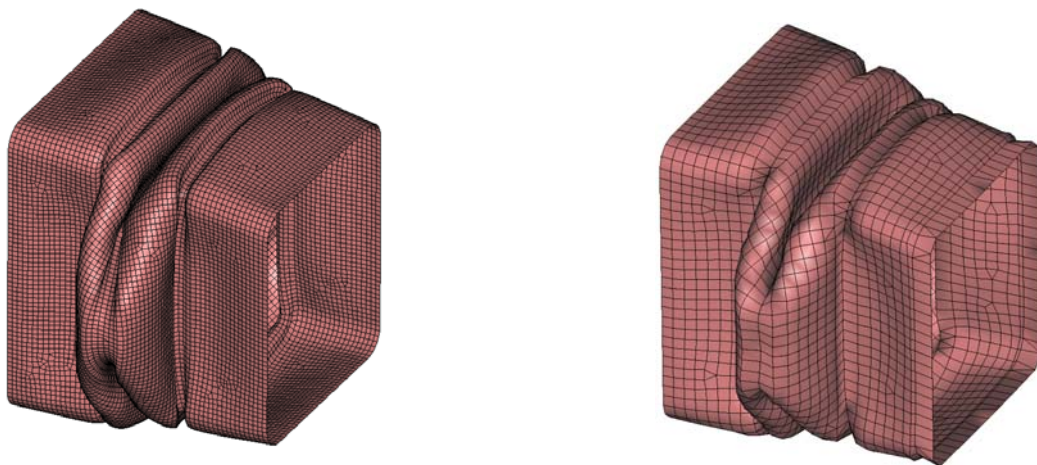


Abb. 4.38

Diese Abbildung zeigt auch die unterschiedlichen Größen der Elemente aus den beiden Analysen. Bei der Einzel-Komponenten-Untersuchung war das Netz viel feiner, da hier nur die Hälfte der Crashbox vernetzt wurde.

4.8 Analyse des Gesamtsystems mit 40 Prozent Überdeckung

Aus den Ergebnissen der beiden vorhergehenden Analysen setzt sich das Gesamtsystem für diese Simulation zusammen. Dieses besteht aus der Crashbox-Variante C und der Stoßfängervariante 5. Dieses System prallt in der Simulation auf eine versetzte, deformierbare Barriere auf (siehe Abbildung 4.39).

Links ist ein Teil des Gesamtsystems in schattiertem Modus dargestellt, rechts erkennt man die vernetzten Komponenten. Abbildung 4.39 dient nur der visuellen Darstellung, im FE-Programm ist das ganze Modell vernetzt.

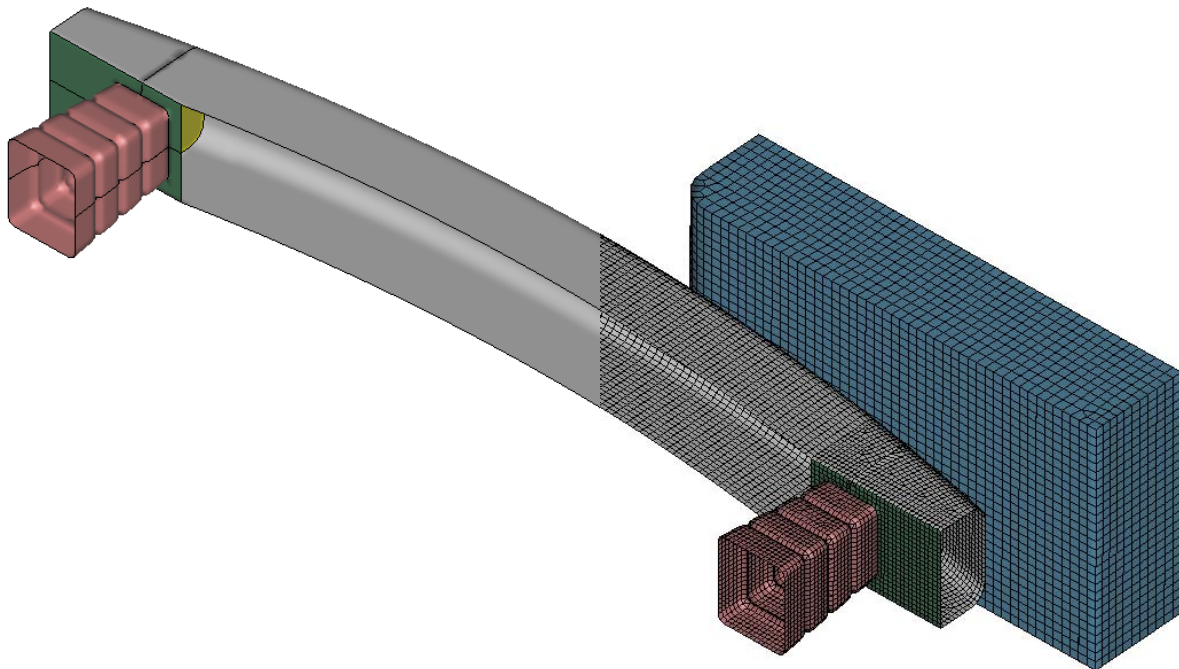


Abb. 4.39

4.8.1 Anfangs-und Randbedingungen

Die Barriere ist in dieser Analyse nicht durchgehend, sie überdeckt den Stoßfänger zu etwa 40 Prozent. Hierdurch ergeben sich andere Randbedingungen als in Abschnitt 4.7. Auf Grund von Symmetrie konnte das Viertel-Modell des Stoßfängers in Abschnitt 4.7 berechnet werden. Hier muss das halbe Modell berechnet werden, da die Barriere nur eine Symmetrieebene hat.

Abbildung 4.40 zeigt die Symmetrieebene (x-y) und den dazugehörigen Knotensatz.

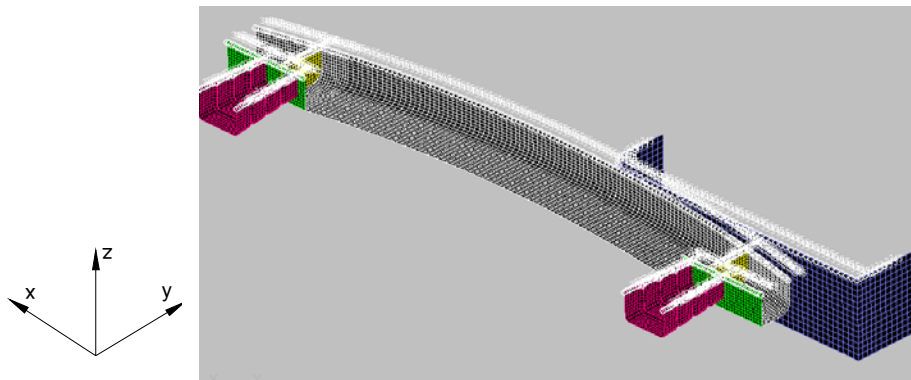


Abb. 4.40

In dieser Simulation besteht die Barriere aus Belytschko-Lin-Tsay-Schalenelementen. Es handelt sich hierbei um das gleiche Element wie es in den Analysen zuvor verwendet wurde.



Abb. 4.41

Abbildung 4.41 zeigt die Barriere von der Vorder- und Rückseite. Zu erkennen ist, dass diese hinten offen ist. Den Knoten auf der Rückseite der Barriere werden alle Freiheitsgrade entzogen. Somit ist die Barriere entlang der roten Markierung in Abbildung 4.42 fest eingespannt.

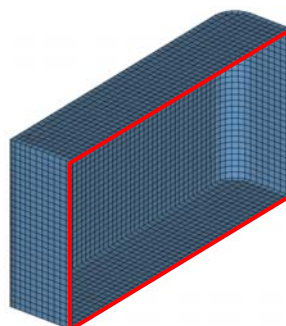


Abb. 4.42

Die Barriere hat eine Wandstärke von 5 mm und die gleichen Materialkennwerte wie das Gesamtsystem mit Ausnahme der Wand vor der Crashbox.

Gesamtsystem + Barriere: Material-Modell Nr. 3 (Elastic Plastic with Kinematic Hardening)

Dichte	$\rho = 7.8500 \text{ g/cm}^3$
E-Modul	$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0.3$
Fließspannung	$\sigma_F = 300 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungs-Modul	$E_{pl} = 30000 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungsparameter	$\beta = 1$ (isotropische Verfestigung)

Wand vor der Crashbox: Material-Modell Nr. 3

Dichte	$\rho = 7.8500 \text{ g/cm}^3$
E-Modul	$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0.3$
Fließspannung	$\sigma_F = 450 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungs-Modul	$E_{pl} = 30000 \text{ N/mm}^2$
Verfestigungsparameter	$\beta = 1$ (isotropische Verfestigung)

Die hinter dem Gesamtsystem mitgeführte starre Wand (*RigidWall_Planar_Moving*), erstreckt sich über die ganze Länge des Gesamtsystems und ist mit beiden Crashboxen fest verbunden. Das blaue Rechteck in Abb. 4.43 zeigt diese Wand. Der Wand wird eine Masse von 200 kg zugewiesen. Diese 200 kg beziehen sich auf das halbe Modell, das ganze Modell schieben also 400 kg gegen die Wand.

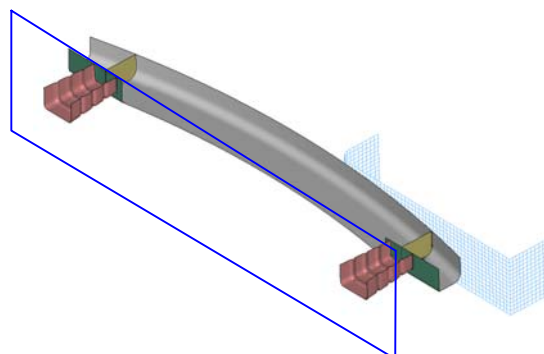


Abb. 4.43

Auch den beiden Crashboxen werden am hinteren Ende (roter Rand in Abb. 4.44) alle bis auf einen Freiheitsgrad entzogen Die Translation in y-Richtung bleibt frei. Dieses simuliert erneut die feste Verbindung mit dem sich dahinter befindenden Längsträger.

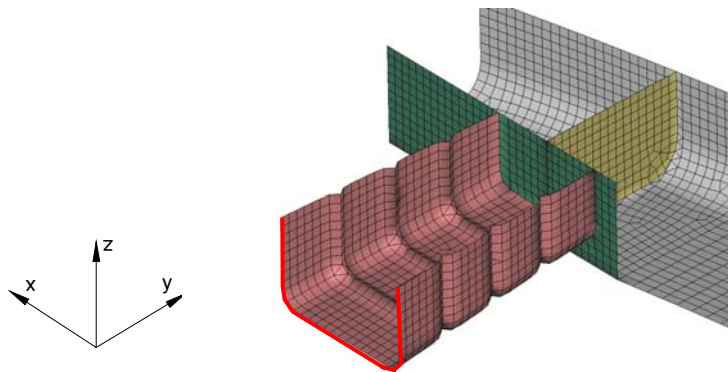


Abb. 4.44

Über einen Knotensatz, der alle Knoten des Gesamtsystems beinhaltet, wird dem System die Anfangsgeschwindigkeit von $20 \text{ mm/ms} = 20 \text{ m/s}$ zugewiesen. Die Wandstärken entsprechen der Variante 5 aus Abschnitt 4.7. So hat der Stoßfängerquerträger eine Wandstärke von 2,5 mm, die Crashbox 3 mm, die grüne Wand 10 mm und der gelbe Verstärkungssteg 0,5 mm.

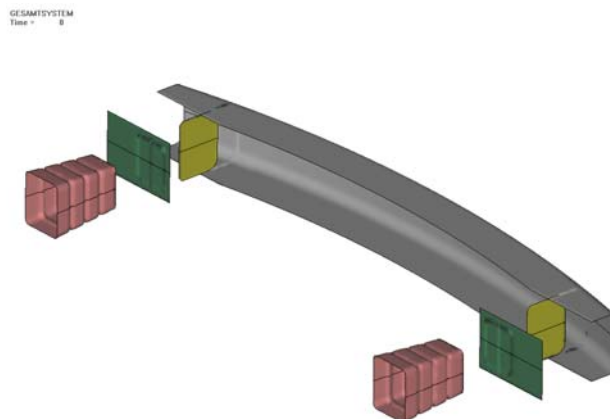
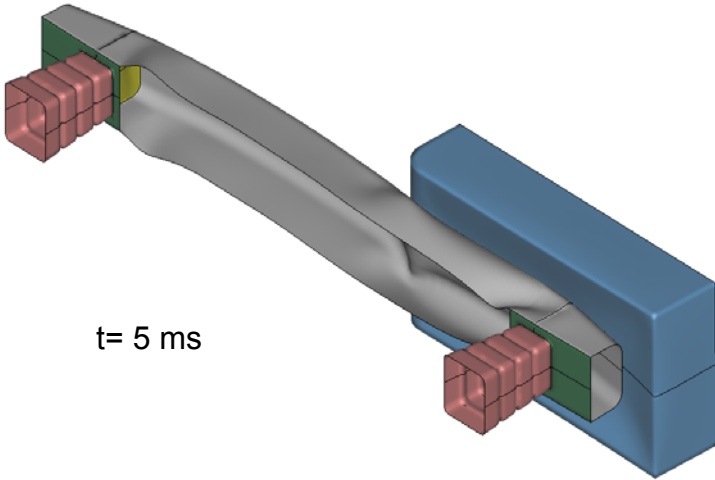
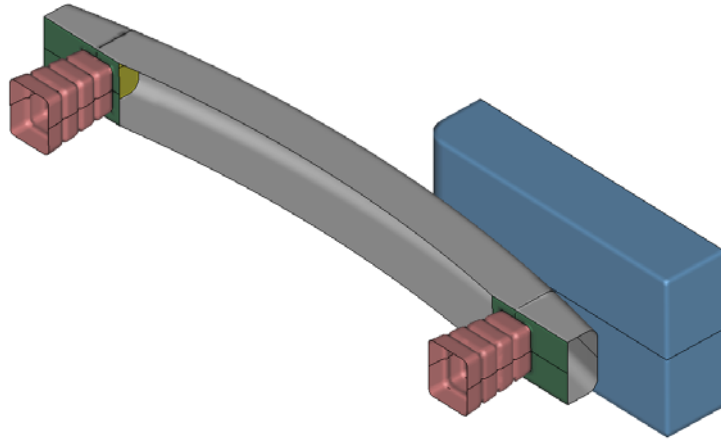


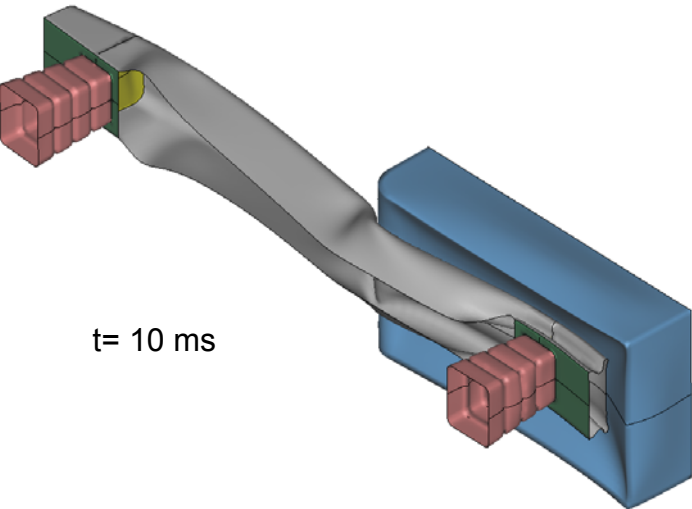
Abb. 4.45

4.8.2 Ergebnisse der Analyse des Gesamtsystems

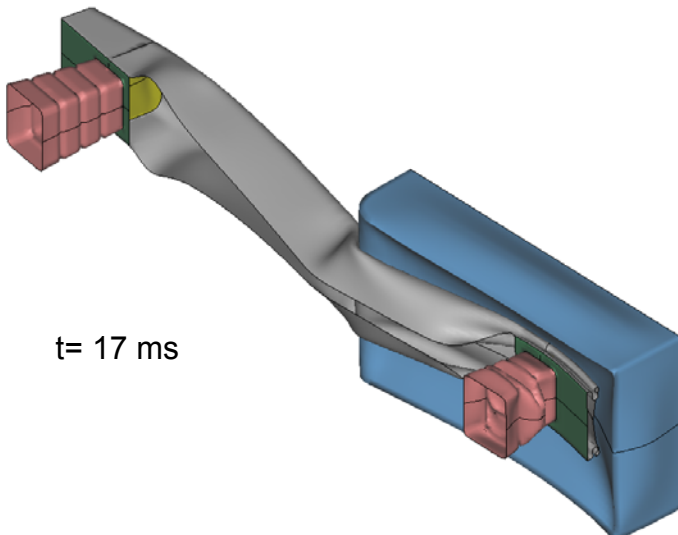
Die Ergebnisse werden durch Zustandsaufnahmen dargestellt. Diese sind in dem schattierten Modus und entsprechenen dazu die durchschnittlichen Von-Mises Spannungen. Die Spannungen werden in kN/mm^2 angegeben.



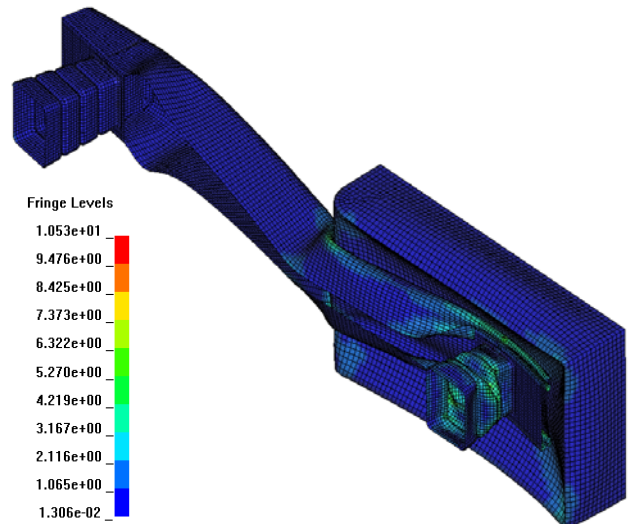
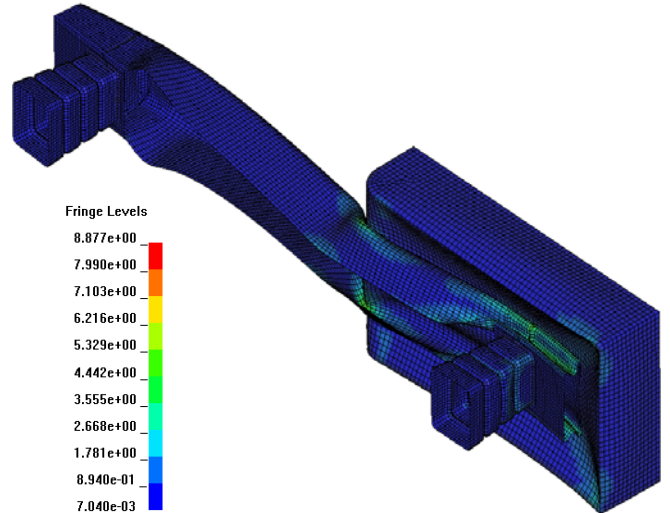
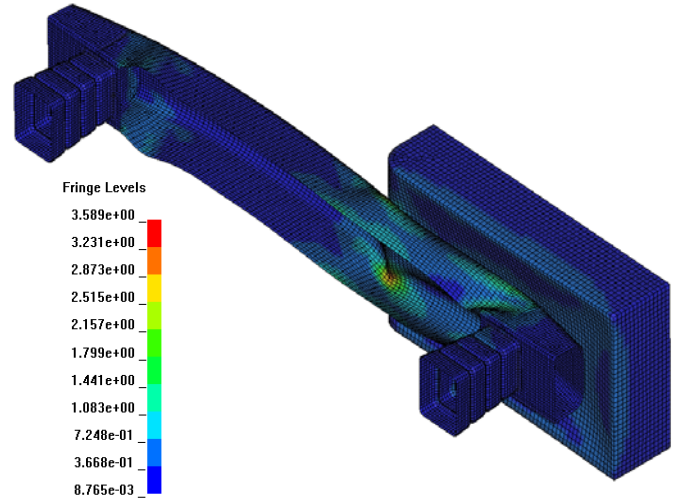
t= 5 ms

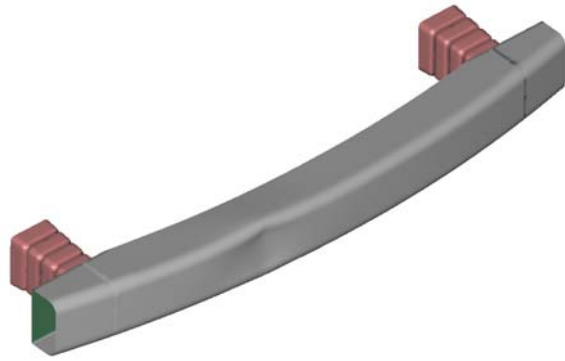
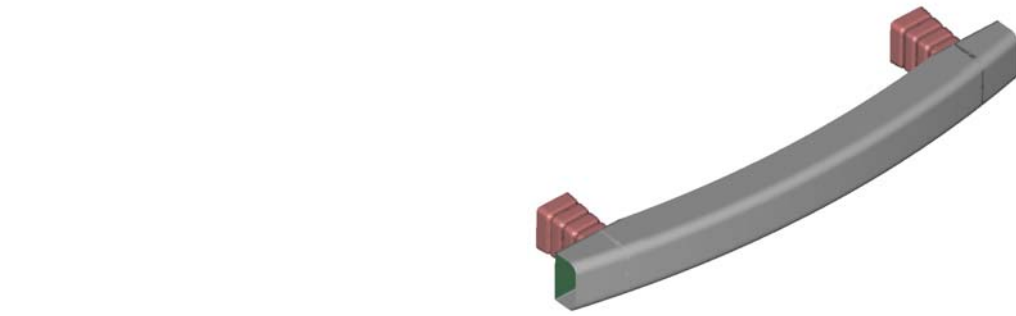


t= 10 ms

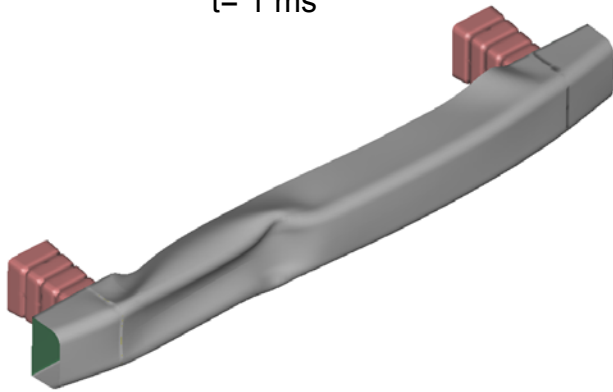


t= 17 ms

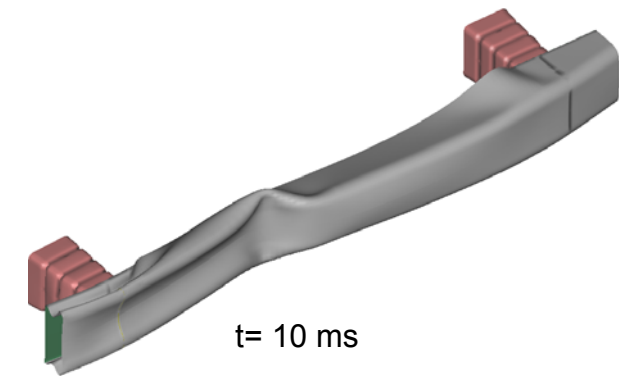




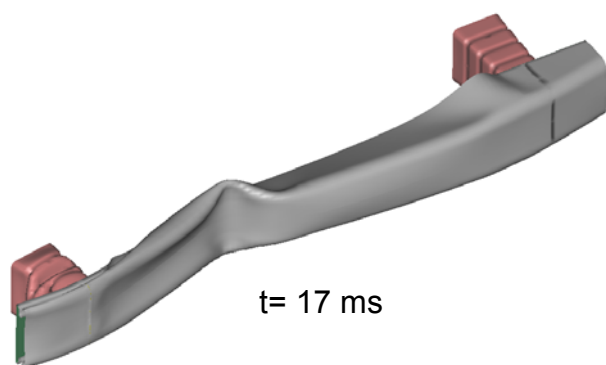
t= 1 ms



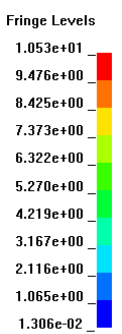
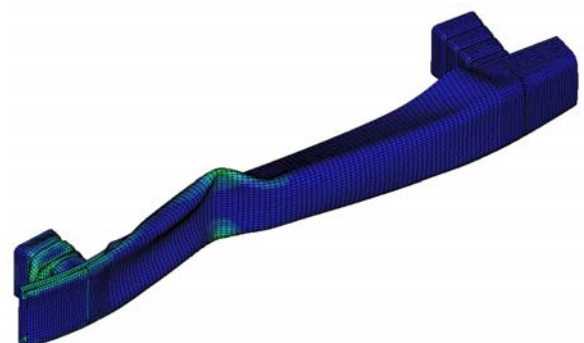
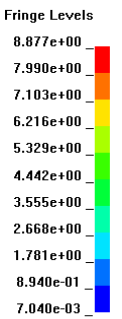
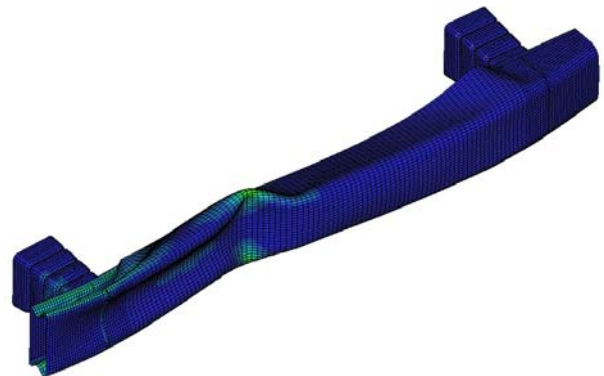
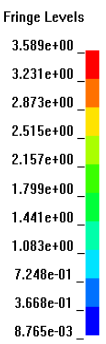
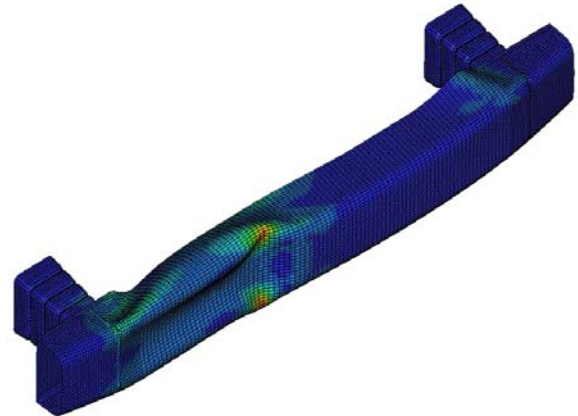
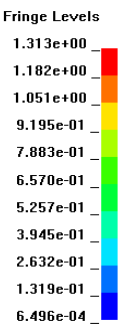
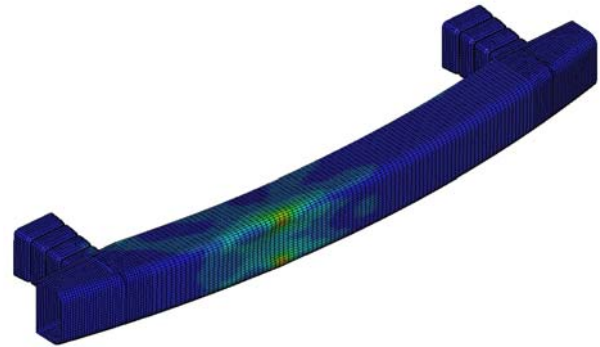
t= 5 ms



t= 10 ms



t= 17 ms



Nachdem der Stoßfängerquerträger in Kontakt mit der Barriere gekommen ist, beginnen beide Komponenten sich zu verformen. Dieser Vorgang dauert ca. 13 ms. Der Stoßfängerquerträger ist nach dieser Zeit komplett zusammengestaucht. Hierbei sind Unterschiede zu den Ergebnissen der vorhergehenden Analyse erkennbar. Das Modell des Stoßfängerquerträgers wurde in dem Abschnitt 4.7 nicht so stark zusammengestaucht wie hier. In dem Bereich mit der größten Verformung an der Barriere, wird diese ca. 80 mm eingedrückt. Ab 13 ms beginnt sich die Crashbox zu verformen. Die Verformung der Crashbox verläuft vergleichbar wie in der Einzelanalyse der Variante C (Abschnitt 4.6).

4.8.3 Diskussion der Ergebnisse

Die Vorgehensweise in dieser Arbeit war, das Gesamtsystem eines Stoßfängerquerträgers in seine Komponenten aufzuteilen und diese gesondert zu untersuchen. Aus den Ergebnissen der Einzeluntersuchungen wurde dann das Gesamtsystem gebildet und als solches simuliert.

In den Analysen der Einzelkomponenten in den Abschnitten 4.6 (Crashbox) und 4.7 (Stoßfängerquerträger) wurden einige Idealisierungen getroffen. So wurde beispielsweise die Wand auf die die Crashbox und der Stoßfängerquerträger aufprallen als eben und nicht verformbar angenommen. In der Analyse 4.8 wurde der Aufprall des Gesamtsystems auf eine versetzte und deformierbare Barriere simuliert. Die Analyse des Gesamtsystems (Abschnitt 4.8) zeigt, dass die Ergebnisse der Abschnitte 4.6 und 4.7 durchaus anwendbar sind. Zwar unterscheiden sich aufgrund der deformierbaren Barriere die Verformungen in dieser Analyse leicht von denen der Einzeluntersuchungen. Für die Auslegung der Komponenten ist die Methode der Einzeluntersuchungen jedoch gut anwendbar, wenn eine anschließende Simulation aller Komponenten im Gesamtsystem betrachtet wird.

Anhang A

Abbildungsverzeichnis

- Abb. 2.1 Änderung eines infinitesimal kleinen Linienelements $d\underline{x}$ zu $d\underline{x}'$
- Abb. 2.2 Normaldehnung ε_{xx}
- Abb. 2.3 Schubdehnung ε_{yz}
- Abb. 2.4 Spannungen am infinitesimalen Quader
- Abb. 2.5 Kraft an der Oberfläche
- Abb. 2.6 Körper mit vorgegebenen Verschiebungen an der Oberfläche S_u und freien Verschiebungen an S_f
- Abb. 2.7 Zustandsgrößen für das Verschiebungsgrößenverfahren
- Abb. 2.8 Belastete lineare Feder und entsprechende Auslenkung
- Abb. 2.9 Statisch unbestimmter Rahmen
- Abb. 2.10 Ebene Scheibe unterteilt durch Dreieckselemente
- Abb. 2.11 Knotenverschiebungen und Knotenkräfte des Dreieckselementes
- Abb. 2.12 Starrkörperbewegungen
- Abb. 2.13 PASCALSches Dreieck
- Abb. 3.1 volle Newton-Raphson-Iteration
- Abb. 3.2 modifizierte Newton-Raphson-Iteration
- Abb. 3.3 Diskretisierung des Verschiebungsverlaufs
- Abb. 3.4 Isoparametrisches Vier-Knoten-Element
- Abb. 3.5 Abbildung eines Acht-Knoten-Elements auf die isoparametrische Referenzkonfiguration
- Abb. 4.1 Anordnung des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.2 Prinzip der Crashboxanalyse
- Abb. 4.3 Symmetrien des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.4 Prinzip der Analyse des Stoßfängerquerträgers in der Realität
- Abb. 4.5
- Abb. 4.6 Vordere und hintere Ansicht des Stoßfängerquerträgers mit versetzter Barriere
- Abb. 4.7 Modell der Crashbox

- Abb. 4.8a Nicht ausgewandertes Halbmodell der Crashbox für den Import in das FE-Programm
- Abb. 4.8b Vernetztes Halbmodell der Crashbox
- Abb. 4.9 Unterschied: Schalenelemente – Volumenelemente
- Abb. 4.10 Vergleich: Acht-Knoten-Volumenelement – Vier-Knoten-Schalenelement
- Abb. 4.11 Komponenten des Vier-Knoten-Schalenelements
- Abb. 4.12 Vergleich der Schalentheorien von Kirchhoff und Mindlin-Reissner
- Abb. 4.13 Spannungen an der Schale
- Abb. 4.14 Zur Definition der Schalenkinematik
- Abb. 4.15 Zur Definition der Drehung des Vektors $\mathbf{a}_k \mathbf{v}_n^k$
- Abb. 4.16 Vier-Knoten-Schalenelement mit mitdrehenden Koordinatensystem
- Abb. 4.17 Spannungs-Dehnungs- Diagramm
- Abb. 4.18 Zum Begriff der Verfestigung
- Abb. 4.19 Fließfläche im Hauptspannungsraum
- Abb. 4.20 Vergleich: kinematische – isotropische Verfestigung
- Abb. 4.21 Halbmodell des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.22 Knotensatz für die Definition der Symmetrie
- Abb. 4.23 Anordnung der Crashbox
- Abb. 4.24 Knotensatz mit nur einem Freiheitsgrad (translation in z-Richtung)
- Abb. 4.25 Kraft F_w auf die hintere starre Wand
- Abb. 4.26 Stoßfängerquerträger
- Abb. 4.27 Viertelmodell des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.28 Knotensatz mit nur einem Freiheitsgrad (translation in y-Richtung)
- Abb. 4.30 Variante 1 des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.31 Variante 2 des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.32 Crashbox faltet sich um Verstärkungssteg
- Abb. 4.33 Variante 2 des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.34 Variante 3 des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.35 Verformung des Verformungssteges
- Abb. 4.36 Verformung des Bereiches vor der Crashbox
- Abb. 4.37 Variante 5 des Stoßfängerquerträgers
- Abb. 4.38 Vergleich der Verformungen der Crashbox
- Abb. 4.39 Gesamtsystem

- Abb. 4.40 Knotensatz für die Definition der Symmetrie
- Abb. 4.41 Vorder- und Rückseite der vernetzte Barriere
- Abb. 4.42 Feste Einspannung der Barriere
- Abb. 4.43 Zur Definition der hinteren starren Wand mit einer Masse 200kg
- Abb. 4.44 Knotensatz (entlang der roten Linie) mit nur einem Freiheitsgrad
(translation in y-Richtung)
- Abb. 4.45 Gesamtsystem als in der Explosionsdarstellung

Literaturangabe

BÜCHER

- [1] John Argyris, Hans-Peter Mlejnek (1986):
Die Methode der Finiten Elemente in der Strukturmechanik Band I:
Verschiebungsmethode in der Statik, Friedr. Vieweg & Sohn Wiesbaden
- [2] Klaus-Jürgen Bathe (2002)
Finite-Elemente-Methoden, Springer Verlag
- [3] Peter Wriggers (2001)
Nichtlineare Finite-Element-Methoden, Springer Verlag
- [4] Bernd Klein (2003)
FEM Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode, Friedr.
Vieweg & Sohn Wiesbaden
- [5] Josef Betten (1997/2003)
Finite Elemente für Ingenieure 1, Springer Verlag
- [6] Josef Betten (1998)
Finite Elemente für Ingenieure 2, Springer Verlag
- [7] O.C. Zienkiewicz (1984)
Methode der finiten Elemente
- [8] Klaus Knothe, Heribert Wessels 1991
Finite Elemente, Springer Verlag
- [9] LS-DYNA Theoretical Manual
- [10] John Argyris, Hans-Peter Mlejnek (1997):
Die Methode der Finiten Elemente in der Strukturmechanik Band III:
Computerdynamik der Tragwerke, Friedr. Vieweg & Sohn Wiesbaden

- [11] Y. Basar und W.B. Krätzig (1985)
Mechanik der Flächentragwerke, Friedr. Vieweg & Sohn Wiesbaden

INTERNET

- [13] Ted Belytschko(1998)
Chapter 9, Shells and Structures

<http://www.tam.northwestern.edu/tb/Book/Chapter%209.pdf>

VORLESUNG

- [14] Vorlesung: Prof. Dr. W. Scheideler
Angewandte Finite-Elemente-Methode