



# TRADING

## INVESTING

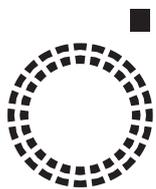
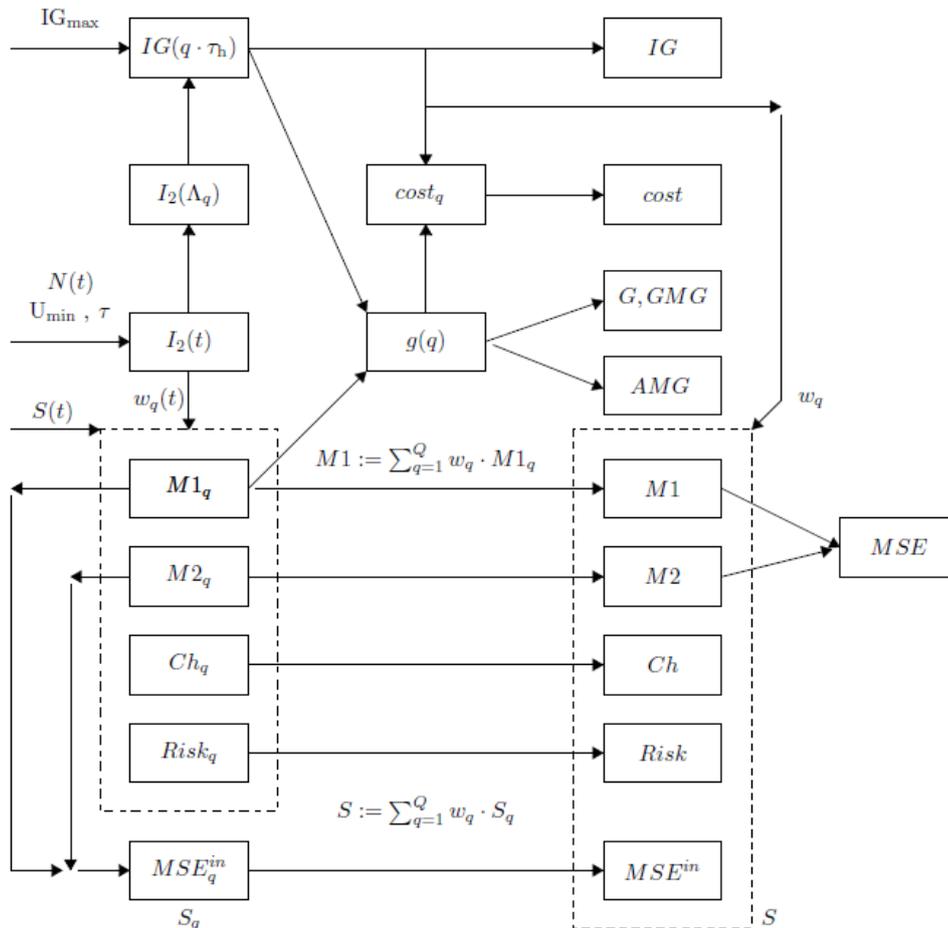
### Investieren unter Nebenbedingungen

#### Teil 3: Erweiterung der Statistik

Peter Vogel

Faculty of Media

Hochschule Duesseldorf, University of Applied Sciences



Fachbereich Medien  
Faculty of Media



Hochschule Düsseldorf  
University of Applied Sciences

## Vorwort

Der dritte Teil der Schriftenreihe „Trading“ stellt eine Fortsetzung des Investierens in Wertpapiere aus den ersten beiden Teilen dar. Er beinhaltet die Einführung neuer Begriffe, die Weiterentwicklung theoretischer Zusammenhänge als auch experimentelle Ergebnisse für historische Kursdaten und einen Markt mit künstlichen Zeitreihen. Die Arbeit wendet sich an alle, die der Thematik offen gegenüber stehen und eine gewisse Affinität zur Mathematik mitbringen. Daher kommen beispielsweise Fachleute aus der Mathematik und Physik oder der Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften in Betracht. Die Arbeit liegt wie der zweite Teil wieder in deutscher Sprache vor, nicht zuletzt wegen der Schwierigkeiten mit einer vernünftigen Begriffsbildung. Die englische Sprache ist insofern in der deutschen Fassung eingeplant, dass mathematische Bezeichnungen in eine englische Version unverändert übernommen werden können.

Der Autor dankt seinem Mitarbeiter Patrick Blättermann für seine vielseitige Unterstützung. Ein Dank auch an die Bibliothek der Hochschule Düsseldorf für den freundlichen Support betreffend der Schriftenreihe und Frau Söhnitz sowie Herrn Hagendorn für die Durchsicht des Manuskripts.

# Investieren unter Nebenbedingungen — Teil 3: Erweiterung der Statistik um Volatilität, Chance, Risiko und Handelskosten

Peter Vogel \*

30. September, 2019

## Kurzfassung

Der dritte Teil der Schriftenreihe entwickelt die statistische Beschreibung für das Investieren in Wertpapiere weiter, welche in den ersten beiden Teilen begonnen wurde. Die dort eingeführten Statistikgrößen betreffen Gewinnfaktoren bzw. Renditen und den Investitionsgrad. Die neu eingeführten Statistikgrößen beinhalten ein Maß für Chance, Risiko, Volatilität sowie Handelskosten. Alle Statistikgrößen beruhen auf den gleichen Nebenbedingungen zur Festlegung des Umfangs eingegangener Investitionen wie in den ersten beiden Teilen. Die entwickelte Statistik hängt daher von mehreren Investitionsparametern ab, mit denen unterschiedliches Investitionsverhalten eingegrenzt werden kann. Ein Investitionsparameter ist die Haltefrist, die angibt, wie lange eine eingegangene Investition „gehalten wird“, bevor sie beendet wird. Der Verkauf von Wertpapieren nach einer fest vorgegeben Haltefrist liefert nur eine erste Orientierung und muss daher in einem künftigen Teil der Schriftenreihe erweitert werden. Die im dritten Teil weiter entwickelte Theorie ist wie bisher frei von Annahmen über den Kursverlauf der Wertpapiere. Es wird wieder eine endliche Menge von Wertpapieren gehandelt und die Investition in ein Wertpapier setzt voraus, dass eine Kaufbedingung erfüllt ist. Experimentelle Ergebnisse für einen Markt mit historischen Kursdaten sowie einen Markt mit Random Walks belegen die Stärke der Statistikgrößen.

### Stichwörter:

Investieren unter Nebenbedingungen, gleitender Durchschnitt, Chance und Risiko, Volatilität, Handelskosten, Momentum-Strategie, Mean-Reversion-Effekt

---

\*Hochschule Düsseldorf, Fachbereich Medien, University of Applied Sciences, e-mail: peter.vogel@hs-duesseldorf.de.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Bisherige Statistik</b>	<b>6</b>
2.1	Überblick . . . . .	6
2.2	Investitionsrate und Investitionsgrad . . . . .	7
2.3	Gewinnfaktoren . . . . .	7
2.4	Segmentweise Beschreibung . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Erweiterung der Statistik</b>	<b>10</b>
3.1	Exogene Größen . . . . .	10
3.2	Überblick . . . . .	10
3.3	GMG und AMG . . . . .	11
3.4	Moment erster Ordnung . . . . .	12
3.5	Gewichtete Mittelwerte . . . . .	14
3.6	Mittlerer quadratischer Fehler . . . . .	15
3.7	Chance und Risiko . . . . .	18
3.8	Handelskosten . . . . .	19
3.9	Einfluss der Investitionsparameter . . . . .	22
3.9.1	Kleiner maximaler Investitionsgrad . . . . .	22
3.9.2	Großer maximaler Investitionsgrad . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Referenz-Statistik: Gewöhnliche Mittelung</b>	<b>26</b>
4.1	Moment erster Ordnung . . . . .	26
4.2	Gewichtung . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse für historische Kursdaten</b>	<b>28</b>
5.1	Eine Momentum-Strategie als Kaufbedingung . . . . .	30
5.2	Parametrisierte Kaufbedingung (Experten-Plots) . . . . .	31
5.3	Zeitliche Verläufe für die Momentum-Strategie . . . . .	36
5.4	Referenz-Statistik . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse für Random Walks</b>	<b>43</b>
6.1	Definition eines künstlichen Marktes . . . . .	43
6.2	Statistische Auswertung . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>46</b>
<b>8</b>	<b>Anhang A. Random Walks</b>	<b>48</b>
<b>9</b>	<b>Anhang B. Symbole und Formeln</b>	<b>50</b>
<b>10</b>	<b>Anhang C. Begriffe</b>	<b>56</b>
	<b>Literatur</b>	<b>57</b>

## 1 Einführung

In [1] wurde ein Handelsprozess für einen Markt bestehend aus endlich vielen Wertpapieren abstrakt beschrieben. Der Kauf von Wertpapieren wird durch eine Kaufbedingung gesteuert, welche für jeden Handelstag die Menge der für einen Kauf infrage kommenden Wertpapiere festlegt, die sogenannten Kaufkandidaten. Die gekauften Wertpapiere werden per Zufall unter den Kaufkandidaten ausgewählt [2]. Jede eingegangene Investition wird nach Ablauf einer Haltefrist  $\tau_h$  beendet.

Bei einer statistischen Beschreibung des Handelsprozesses werden alle Kaufkandidaten gekauft. Umfang und Anzahl eingegangener Investitionen werden an jedem Handelstag abhängig vom *Gesamtkapital* an diesem Tag vorgenommen. Es setzt sich aus dem *Barkapital* und der *Investition* zusammen. Das Barkapital beschreibt den Umfang liquider Mittel, die Investition den Umfang des investierten Kapitals. Nähere Einzelheiten darüber sind dem sogenannten idealen Handelssystem aus [1] zu entnehmen.

### Exogene Größen:

Alle bisherigen Statistikgrößen basieren auf zwei sog. exogenen Größen, der Anzahl der Kaufkandidaten und den Gewinnfaktoren eines Handelstages. Der Grund für die Bezeichnung als exogene Größen liegt darin begründet, dass sie in [1] die Gleichungen für den Handelsprozess von außen wie Input-Größen steuern. Die zwei exogenen Größen lauten

- $N(t)$ : Anzahl Kaufkandidaten am Handelstag  $t$ ,  $N(t) := |\text{buy}(t)|$ .

Hierbei bezeichnet  $\text{buy}(t)$  die Menge aller Kaufkandidaten am Handelstag  $t$ . Dies sind alle Wertpapiere, für welche eine Kaufbedingung am Handelstag  $t$  erfüllt ist, die sog. Kaufkandidaten. Ihre Anzahl wird mit  $N(t)$  bezeichnet. Sie ist gemäß

$$N(t) \leq N$$

begrenzt, wobei  $N$  die Anzahl der Wertpapiere des Marktes bezeichnet.

- $M1(t)$ : Gewinnfaktor für am Handelstag  $t$  eingegangene Investitionen, definiert für  $N(t) > 0$  gemäß

$$M1(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in \text{buy}(t)} G(n, t), \quad G(n, t) := s(n, t + \tau_h) / s(n, t). \quad (1)$$

$G(n, t)$  ist das Verhältnis der zwei Kurswerte  $s(n, t)$  und  $s(n, t + \tau_h)$  für Wertpapier Nummer  $n$  bei einer Haltefrist von  $\tau_h$  Handelstagen. Der Gewinnfaktor  $M1(t)$  entsteht durch eine arithmetische Mittelung der Kursverhältnisse  $G(n, t)$  über alle Kaufkandidaten. In [1] wird die Bezeichnung  $G(t)$  verwendet — auch für den Fall, dass  $\text{buy}(t)$  eine Zufallsauswahl der Kaufkandidaten beinhaltet.

### Bezug zur Literatur:

Gewinnfaktoren werden gegenüber Renditen auch in diesem dritten Teil der Schriftenreihe bevorzugt. Der Zusammenhang zwischen einem Gewinnfaktor  $GF$  und der zugehörigen Rendite  $R$  ist durch  $R = GF - 1$  gegeben. Der Ausdruck  $G(n, t) - 1$  ist die (diskrete) Rendite (simple net return) eines einzelnen Wertpapiers für einen bestimmten Handelstag [3], [4].  $M1(t) - 1$  ist die mittlere Rendite eines Tages für eine Kaufbedingung. Hierbei bezieht sich die Rendite auf mehrere Wertpapiere, wie die Rendite eines Portfolios [3] – [6]. In der „Mean-Varianz-Portfoliotheorie“ wird die Rendite als eine Zufallsvariable interpretiert. Für sie werden der Erwartungswert und die Varianz gebildet, wobei die Varianz als Maß für das Risiko verwendet wird, z.B. [3], [4], [6], [7], [8]. Das Sharpe-Ratio setzt die mittlere Rendite mit der Standardabweichung ins Verhältnis [3] – [8]. Die Beurteilung eines Risikos mit Hilfe einer Varianz ist insofern nachteilhaft, da nicht nur Unterschreitungen der mittleren Rendite sondern auch Überschreitungen in die Varianz einbezogen werden [3], [6], [9]. Die Varianz ist vielmehr ein Maß für die Streuung und daher besser als Maß für die Volatilität eines Wertpapiers oder Portfolios geeignet [5], [8], [9]. Bessere Maße für das Risiko ergeben sich folglich durch eine „Semistreuung“, beispielsweise eine Semivarianz, bei der nur Unterschreitungen der mittleren Rendite berücksichtigt werden [3], [6]. Bei Verwendung des Absolutfehlers anstelle des quadratischen Fehlers ergibt sich die

absolute Semiabweichung [3]. Ein weiteres Maß für das Risiko ist der Value at Risk (VaR) [3], [6], [7], [8]. Hierbei wird ein Schwellwert für die Rendite angegeben, dessen Unterschreitung mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erfolgt. In [5] wird eine Nutzenfunktion verwendet, um das Verhalten eines Investors in einem Maß für das Risiko zu berücksichtigen.

Ein individueller Investor wird in dieser Arbeit in Form von Investitionsparametern ebenfalls berücksichtigt. Die Investitionsparameter und die Anzahl der Kaufkandidaten legen die zeitliche Verteilung des Umfangs eingegangener Investitionen fest. Eine mehrstufige Mittelung der Kursverhältnisse  $G(n, t)$  bzw. einer Funktion von  $G(n, t)$  mit Hilfe dieser Verteilung liefert Statistikgrößen für den gesamten Handelszeitraum. Beispielsweise wird beim Risiko die Häufigkeit der Unterschreitung eines vorgegebenen Schwellwerts für  $G(n, t)$  zugrunde gelegt. Insofern basiert die Risikodefinition auf der gleichen Idee wie der VaR oder eine shortfall-Wahrscheinlichkeit [6], [10]. Die Definition einer Chance wird in Anlehnung an das Risiko vorgenommen, indem die Überschreitung eines vorgegebenen Schwellwertes für  $G(n, t)$  zugrunde gelegt wird. Der Fehler wird wie bei einer Varianz als eine mittlere quadratische Schwankung für  $G(n, t)$  eingeführt. Handelskosten werden ebenfalls berücksichtigt.

### Aufbau der Arbeit:

Der theoretische und experimentelle Teil sind strikt voneinander getrennt. Die Theorie wird in den Kap. 3 und 4 ausgebaut, experimentelle Ergebnisse werden in den Kap. 5 und 6 gezeigt.

- In Kap. 2 werden die in der Schriftenreihe bislang entwickelten Statistikgrößen kompakt dargestellt, in Kap. 3 um Moment erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler sowie Handelskosten erweitert. Wie die bisherigen Statistikgrößen Gewinnfaktor und Investitionsgrad hängen auch die neuen Statistikgrößen von Investitionsparametern ab.
- In Kap. 4 wird gezeigt, dass die neuen Statistikgrößen eine gewöhnliche Mittelung als Sonderfall beinhalten. Darunter wird eine arithmetische Mittelung verstanden, die sich über alle Kaufkandidaten im gesamten Handelszeitraum erstreckt.
- Kap. 5 erprobt die Statistikgrößen für einen Markt mit historischen Kursdaten bei einer Haltefrist von 30 Tagen. Experimentelle Ergebnisse für die Haltefrist von 1 Tag sind der besseren Übersichtlichkeit wegen auf einen eigenständigen Ergänzungsteil zu Teil 3 ausgelagert. Abschn. 5.4 vergleicht die statistischen Ergebnisse mit einer gewöhnlichen Mittelung (Kap. 4).
- In Kap. 6 wird ein künstlicher Markt bestehend aus Random Walks definiert und statistisch ausgewertet.
- Im Anhang A werden Random Walks zur Festlegung von Chance und Risiko herangezogen. Außerdem befinden sich in den Anhängen B und C jeweils eine Liste von Symbolen mit Formeln sowie eine Liste mit Begriffen.

**Hinweis:** Für die experimentellen Ergebnisse ist Abschn. 3.9 nicht zwingend erforderlich. Die Referenz-Statistik (Kap. 4) wird nur in Abschn. 5.4 benötigt.

## 2 Bisherige Statistik

### 2.1 Überblick

Die folgende Abbildung gibt einen Überblick über die in [1] und [2] eingeführten Statistikgrößen. Es werden der besseren Übersichtlichkeit wegen nicht alle sondern nur die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigten Statistikgrößen dargestellt.

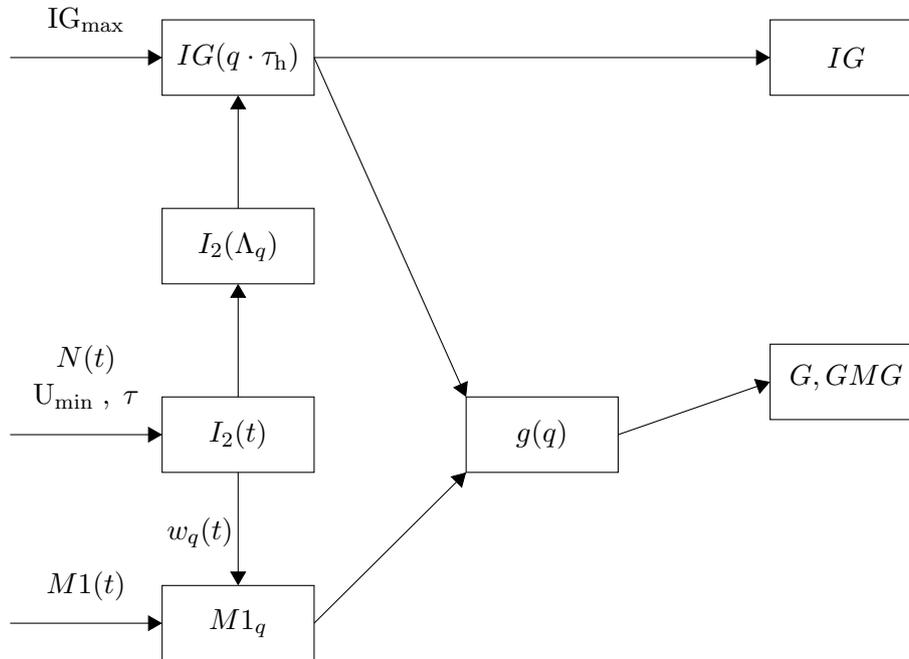


Abbildung 1: Bisherige Statistik

#### Investitionsparameter:

Die Statistikgrößen hängen neben den exogenen Größen  $N(t)$  und  $M1(t)$  von Investitionsparametern ab, die bereits in [2] eingeführt wurden. Mit Hilfe der Investitionsparameter werden Nebenbedingungen definiert, um den Umfang von Neuinvestitionen an jedem Handelstag festzulegen. Die folgende Liste gibt einen Überblick über die Investitionsparameter.

$$\tau_h \in \mathbb{N} : \text{Haltefrist bzw. Sichtweite,} \quad (2a)$$

$$U_{\min} \in \mathbb{N} : \text{Investitionsstreuung,} \quad (2b)$$

$$\tau > 0 : \text{Investitionsdauer ohne Begrenzung des Investitionsgrades,} \quad (2c)$$

$$\tau' := \tau \cdot IG_{\max} : \text{Investitionsdauer mit Begrenzung des Investitionsgrades,} \quad (2d)$$

$$0 < IG_{\max} \leq 1 : \text{Maximaler Investitionsgrad.} \quad (2e)$$

#### Segmentierung:

Aus den exogenen Größen werden für jeden Handelstag  $t$  Investitionsraten und Investitionsgrade sowie Gewinnfaktoren gebildet. Der Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  und das Moment erster Ordnung  $M1_q$  beziehen sich auf das  $q$ -te Segment, der Investitionsgrad  $IG$  und der Gewinnfaktor  $G$  auf den gesamten Handelszeitraum. Segmente stellen Subperioden des Handelszeitraums dar. Das  $q$ -te Segment enthält die  $\tau_h$  aufeinanderfolgenden Handelstage  $(q-1)\tau_h < t \leq q \cdot \tau_h$  und wird mit  $\Lambda_q$  bezeichnet. Die Segmentnummer  $q$  beginnt bei  $q = 1$  und endet bei  $q = Q + 1$ .

## 2.2 Investitionsrate und Investitionsgrad

*Investitionsraten* geben den Umfang der in einem bestimmten Zeitraum eingegangenen Investitionen an, während ein *Investitionsgrad* den Umfang des investierten Kapitals wiedergibt. In beiden Fällen wird das Gesamtkapital als Bezugsgröße verwendet, das sich aus dem Barkapital und dem investierten Kapital zusammensetzt. Die Investitionsrate  $I_2(t)$  stellt eine Hilfsgröße dar und ist gemäß

$$I_2(t) := \min\{N(t)/U_{\min}, 1/\tau\} \quad (3)$$

definiert. Sie hängt von der Anzahl  $N(t)$  der Kaufkandidaten am Handelstag  $t$  ab sowie von den beiden Investitionsparametern  $U_{\min}$  und  $\tau$ . Da keine Abhängigkeit vom maximalen Investitionsgrad  $IG_{\max}$  besteht, wird  $I_2(t)$  als *Investitionsrate ohne Begrenzung des Investitionsgrades* bezeichnet. Mit Hilfe der Investitionsrate  $I_2(t)$  wird in [1] eine Investitionsrate  $I^+(t)$  gebildet, die den maximalen Investitionsgrad  $IG_{\max}$  berücksichtigt, um daraus weitere Statistikgrößen abzuleiten. Da die Investitionsrate  $I^+(t)$  im weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt wird, wird sie nicht angegeben.

Eine Summierung der Investitionsraten  $I_2(t)$  über alle Handelstage eines Segments liefert die Investitionsrate

$$I_2(\Lambda_q) := \sum_{t \in \Lambda_q} I_2(t) \quad (4)$$

für das  $q$ -te Segment. Zwischen dieser Investitionsrate und dem Investitionsgrad am Ende des  $q$ -ten Segments besteht nach [1, Gl. (94)] der folgende Zusammenhang:

$$IG(q \cdot \tau_h) = \min\{I_2(\Lambda_q), IG_{\max}\}. \quad (5)$$

Die Mittelung der Investitionsgrade  $IG(q \cdot \tau_h)$  über alle Segmente liefert den mittleren Investitionsgrad im gesamten Handelszeitraum,

$$IG := \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h). \quad (6)$$

Hierbei erfolgt eine Mittelung nicht über alle Handelstage, sondern es werden nur Investitionsgrade am Ende der Segmente gemittelt.  $IG$  ist wie  $IG(q \cdot \tau_h)$  durch  $IG_{\max}$  begrenzt. Folglich bedeutet  $IG = IG_{\max}$ , dass für alle Segmente  $IG(q \cdot \tau_h) = IG_{\max}$  gilt, d.h. der maximale Investitionsgrad  $IG_{\max}$  wird am Ende jedes Segmentes erreicht. Nur in diesem Fall ist auch  $IG = IG_{\max}$ .  $IG = 1$  stellt den Sonderfall dar, dass  $IG_{\max} = 1$  am Ende jedes Segments erreicht wird. In diesem Fall besteht Vollinvestition.

## 2.3 Gewinnfaktoren

Gewinnfaktoren ergeben sich durch eine bestimmte Art der Mittelung von Kursverhältnissen  $G(n, t)$  über alle Kaufkandidaten. Ein Gewinnfaktor größer als 1 stellt einen Gewinn dar, ein Gewinnfaktor kleiner als 1 einen Verlust, bezogen auf die durch die Haltefrist vorgegebene Sichtweite. Die Rendite (engl. „return“) ergibt sich aus einem Gewinnfaktor  $GF$  gemäß  $GF - 1$ .

Der Gewinnfaktor für das  $q$ -te Segment wird für den Fall eingeführt, dass das Segment Kaufkandidaten enthält, d.h. für

$$N_q := \sum_{t \in \Lambda_q} N(t) > 0. \quad (7)$$

Dies ist nach (3) und (4) äquivalent zu  $I_2(\Lambda_q) > 0$ . Nach (5) ist dies wegen  $IG_{\max} > 0$  gleichwertig mit  $IG(q \cdot \tau_h) > 0$ . Das Vorhandensein von Kaufkandidaten im  $q$ -ten Segment ist somit wie folgt gekennzeichnet:

$$N_q > 0 \iff I_2(\Lambda_q) > 0 \iff IG(q \cdot \tau_h) > 0. \quad (8)$$

Für  $U_q > 0$  sind daher die Gewichtswerte

$$w_q(t) := \frac{I_2(t)}{I_2(\Lambda_q)}, \quad t \in \Lambda_q, \quad I_2(\Lambda_q) > 0 \quad (9)$$

wohldefiniert. Die Gewichtung der Gewinnfaktoren  $M1(t)$  mit diesen Gewichtswerten liefert dann den Gewinnfaktor für das  $q$ -te Segment gemäß

$$M1_q := \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot M1(t), \quad N_q > 0, \quad (10)$$

in [1] mit  $G_e(\Lambda_q)$  bezeichnet. Die Gewichtswerte  $w_q(t)$  und damit auch die Gewinnfaktoren  $M1_q$  hängen nicht von  $IG_{\max}$  ab, sondern nur von den Investitionsparametern  $U_{\min}$  und  $\tau$ .

Im Gegensatz zu den Gewinnfaktoren  $M1_q$  wird der Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  bei den Gewinnfaktoren

$$g(q) := 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot [M1_q - 1] \quad (11)$$

berücksichtigt. Sie werden daher als „Gewinnfaktoren für begrenzte Investition“ bezeichnet.

Mit Hilfe der Gewinnfaktoren  $g(q)$  wird der Gewinnfaktor für begrenzte Investition für den gesamten Handelszeitraum gemäß

$$G := \prod_{q=1}^Q g(q) \quad (12)$$

definiert. Durch die Produktbildung wird eine Reinvestition in den Segmenten bzw. Subperioden für  $1 \leq q \leq Q$  vorgenommen. Eine Normierung des Gewinnfaktors auf die Dauer  $\tau_h$  eines Segments ergibt sich aus dem geometrischen Mittelwert (Geometric Mean Gain Factor)

$$GMG := G^{1/Q} = \left[ \prod_{q=1}^Q g(q) \right]^{1/Q}. \quad (13)$$

## 2.4 Segmentweise Beschreibung

Für die Statistikgrößen  $IG(q \cdot \tau_h)$ ,  $M1_q$  und  $g(q)$  gelten nach [1, Gl. (33) – (35)] die folgenden Zusammenhänge:

$$I_{new}(\Lambda_q) = IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h), \quad (14a)$$

$$sale(\Lambda_{q+1}) = M1_q \cdot I_{new}(\Lambda_q), \quad (14b)$$

$$C_{tot}((q+1) \cdot \tau_h) = g(q) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h), \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (14c)$$

Hierbei sind

- $I_{new}(\Lambda_q)$  die *Neuinvestition* im  $q$ -ten Segment, gegeben als Summe aller im Segment eingegangenen Investitionen,
- $sale(\Lambda_{q+1})$  der Erlös aus allen Verkäufen im  $q+1$ -ten Segment,
- $C_{tot}(q \cdot \tau_h)$  das Gesamtkapital am Ende des  $q$ -ten Segments.

### Erklärung:

Das Gesamtkapital am Ende des  $q$ -ten Segments teilt sich gemäß

$$C_{tot}(q \cdot \tau_h) = [1 - IG(q \cdot \tau_h)] \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) + IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h)$$

in zwei Anteile auf:

1. Der erste Anteil entspricht dem nicht investierten Kapital und wird unverändert in das  $q+1$ -te Segment übernommen.
2. Der zweite Anteil entspricht der in (14a) angegebenen Neuinvestition im  $q$ -ten Segment. Er liefert nach (14b) den Erlös

$$sale(\Lambda_{q+1}) = IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q.$$

Daraus resultiert für das  $q + 1$ -te Segment das Gesamtkapital

$$C_{tot}((q + 1) \cdot \tau_h) = [1 - IG(q \cdot \tau_h)] \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) + IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q .$$

Division durch  $C_{tot}(q \cdot \tau_h)$  liefert den in (11) angegebenen Gewinnfaktor  $g(q)$  in der Form

$$g(q) = [1 - IG(q \cdot \tau_h)] \cdot 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q .$$

Der Faktor 1 verdeutlicht, dass es sich bei dem nicht investierten Kapital im  $q$ -ten Segment um eine risikolose Anlage mit der Rendite 0 handelt.

### Verlauf des Gesamtkapitals:

Im ersten Segment treten keine Erlöse auf. Das Barkapital nimmt um den Umfang an vorgenommenen Neuinvestitionen ab und im gleichen Umfang steigt die Investition, sodass das Gesamtkapital im ersten Segment konstant gleich dem Anfangsbarkapital  $C_{cash}(0)$  ist [1, Gl. (29)]. Insbesondere gilt für das Ende des ersten Segments

$$C_{tot}(1 \cdot \tau_h) = C_{cash}(0) . \quad (15)$$

Aus (14c) erhält man daraus

$$C_{tot}((q + 1) \cdot \tau_h) = C_{cash}(0) \cdot \prod_{q'=1}^q g(q') . \quad (16)$$

Mit Hilfe des *kumulativen Gewinnfaktors*

$$G_{cum}(q) := \prod_{q'=1}^q g(q') , \quad G_{cum}(0) := 1 \quad (17)$$

lässt sich der Verlauf des Gesamtkapitals am Ende eines Segments gemäß

$$C_{tot}((q + 1) \cdot \tau_h) = C_{cash}(0) \cdot G_{cum}(q) \quad (18)$$

darstellen. Für  $q = Q$  liefert der kumulative Gewinnfaktor den Gewinnfaktor  $G$  in (12) für den gesamten Handelszeitraum,

$$G = \frac{C_{tot}((Q + 1) \cdot \tau_h)}{C_{cash}(0)} = \prod_{q=1}^Q g(q) = G_{cum}(Q) . \quad (19)$$

### Der Fall $N_q = 0$ :

Bei fehlenden Kaufkandidaten im  $q$ -ten Segment ist der Gewinnfaktor  $M1_q$  in (10) nicht definiert. Nach (8) ist in diesem Fall  $IG(q \cdot \tau_h) = 0$  und nach (14a)  $I_{new}(\Lambda_q) = 0$ , d.h. es werden keine Investitionen im  $q$ -ten Segment vorgenommen. Folglich wird der undefinierte Faktor  $M1_q - 1$  in (11) mit 0 multipliziert. Der Konvention  $0 \cdot x = 0$  für eine undefinierte Größe  $x$  folgend resultiert  $g(q) = 1$ . Aus (14c) erhält man für  $g(q) = 1$

$$C_{tot}((q + 1) \cdot \tau_h) = C_{tot}(q \cdot \tau_h) .$$

Dies bedeutet, dass jedes Segment ohne Kaufkandidaten das Gesamtkapital am Segmentende unverändert lässt und auch keinen Einfluss auf den Gewinnfaktor  $G$  in (12) nimmt.

### 3 Erweiterung der Statistik

#### 3.1 Exogene Größen

Neben den bereits eingeführten exogenen Größen, die Anzahl  $N(t)$  der Kaufkandidaten eines Tages und die Gewinnfaktoren  $M1(t)$ , werden drei weitere exogene Größen eingeführt. Sie stellen wie  $M1(t)$  Tages-Mittelwerte dar, wobei eine Funktion von  $G(n, t)$  über alle Kaufkandidaten eines Tages gemittelt wird: Die quadrierten Werte  $G(n, t)$  sowie die Indikator-Funktionen der Mengen  $G(n, t) > G_C$  und  $G(n, t) < G_R$ . Die Tages-Mittelwerte beinhalten eine Division durch  $N(t)$ , weswegen diese nur für  $N(t) > 0$  definiert sind. Alle exogenen Größen, die Anzahl der Kaufkandidaten eines Tages und die Tages-Mittelwerte, sind im Folgenden aufgelistet.

- $N(t)$ : Die Anzahl Kaufkandidaten,
- Gewinnfaktoren bzw. Momente erster Ordnung eines Handelstages gemäß (1),

$$M1(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} G(n, t), \quad (20a)$$

- Moment zweiter Ordnung eines Handelstages,

$$M2(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} G^2(n, t), \quad (20b)$$

- Chance, welche die relative Häufigkeit dafür angibt, dass das Kursverhältnis  $G(n, t)$  einen Schwellwert  $G_C$  überschreitet,

$$Ch(t) := \frac{1}{N(t)} |\{n \in buy(t) | G(n, t) > G_C\}|, \quad (20c)$$

- Risiko, welche die relative Häufigkeit dafür angibt, dass das Kursverhältnis  $G(n, t)$  einen Schwellwert  $G_R$  unterschreitet,

$$Risk(t) := \frac{1}{N(t)} |\{n \in buy(t) | G(n, t) < G_R\}|. \quad (20d)$$

#### 3.2 Überblick

Die Definitionen der bisherigen Statistik in Abb. 1 (S. 6) sind auch in der erweiterten Statistik in Abb. 2 (S. 11) enthalten.

An die Stelle von  $M1(t)$  tritt die Größe  $S(t)$ , die stellvertretend für eine der exogenen Größen  $M1(t), M2(t), Ch(t)$  und  $Risk(t)$  steht. Aus diesen exogenen Größen werden die *Segment-Mittelwerte*  $M1_q, M2_q, Ch_q$  und  $Risk_q$  gebildet, die neben der jeweiligen exogenen Größe  $S(t)$  von den Gewichtswerten  $w_q(t)$  abhängen. Aus den Segment-Mittelwerten werden mit Hilfe der Gewichtswerte  $w_q$  die Momente erster und zweiter Ordnung  $M1, M2$  sowie Chance und Risiko für den gesamten Handelszeitraum gebildet. Der mittlere quadratische Fehler  $MSE$  als Maß für Volatilität nimmt eine Sonderrolle ein: Die segmentweise Bildung aus den Momenten  $M1_q$  und  $M2_q$  führt auf den inneren Fehler  $MSE_q^{in}$ , woraus der innere Fehler  $MSE^{in}$  für den gesamten Handelszeitraum gebildet wird. Der Fehler  $MSE$  bezieht sich ebenfalls auf den gesamten Handelszeitraum und wird direkt aus den Momenten  $M1$  und  $M2$  gebildet.

Neben den neu eingeführten Mittelwerten in der unteren Hälfte von Abb. 2 (S. 11) enthält die erweiterte Statistik die Statistikgrößen für Handelskosten sowie den Arithmetic Mean Gain Faktor  $AMG$ . Alle neuen Statistikgrößen werden in den folgenden Abschnitten von Kap. 3 definiert.

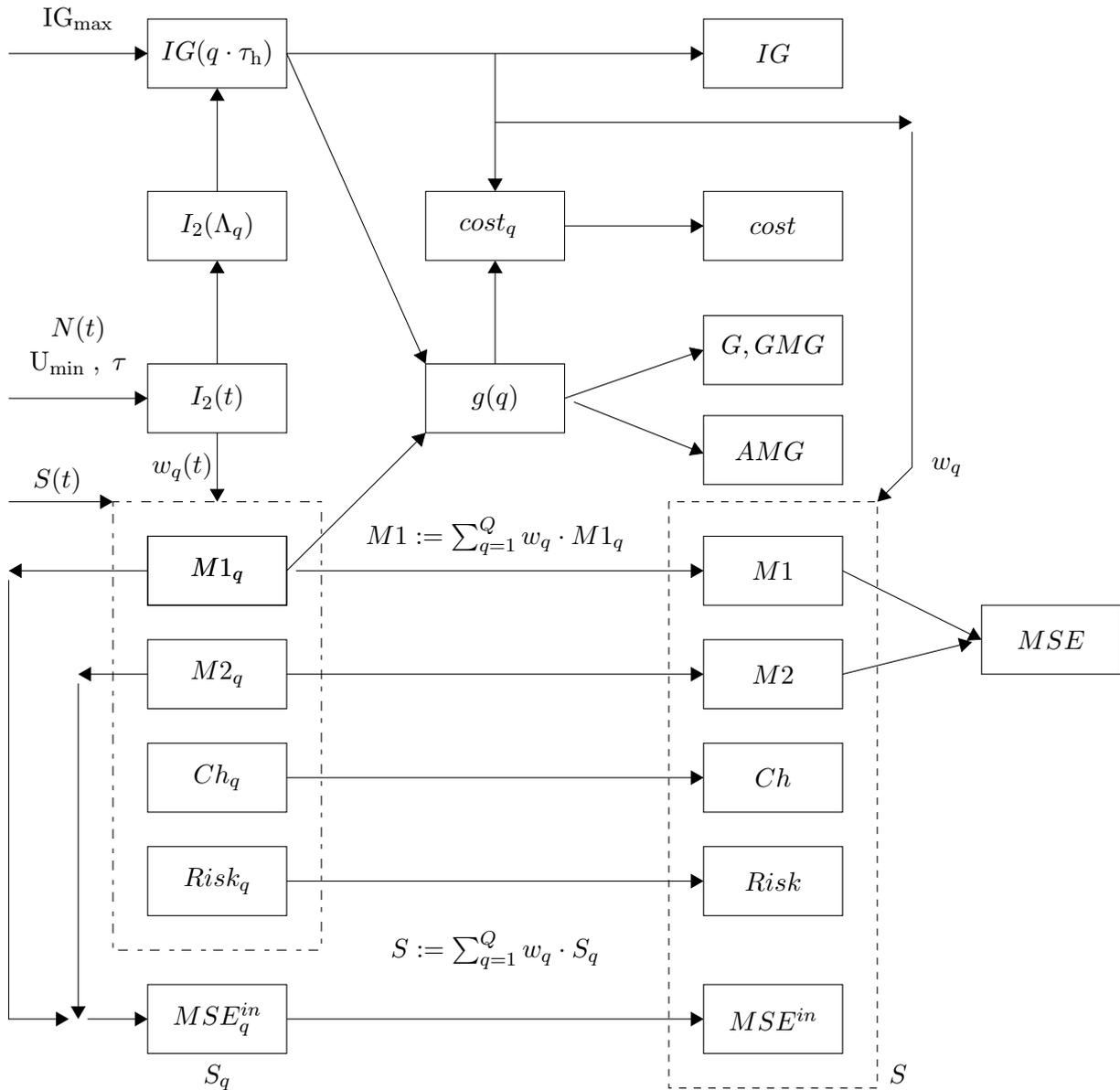


Abbildung 2: Erweiterte Statistik

### 3.3 GMG und AMG

Beim Gewinnfaktor  $GMG$  in (13),

$$GMG = \left[ \prod_{q=1}^Q g(q) \right]^{1/Q},$$

wird das geometrische Mittel der Gewinnfaktoren  $g(q)$  gebildet. Dabei beinhaltet die Produktbildung eine Reinvestition. Naheliegend ist der Vergleich mit einer arithmetischen Mittelung der Gewinnfaktoren  $g(q)$ , d.h. mit dem Arithmetic Mean Gain Factor

$$AMG := \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q g(q). \quad (21)$$

Wie der  $GMG$  gibt auch der  $AMG$  einen „mittleren Gewinnfaktor bei begrenzter Investition“ für den gesamten Handelszeitraum an. Im Unterschied zum  $GMG$  wird beim  $AMG$  jedoch keine Reinvestition vorgenommen. Kleine Gewinnfaktoren  $g(q)$  beeinflussen den arithmetischen Mittelwert weniger als

den geometrischen Mittelwert. Beispielsweise bewirkt ein einziger Gewinnwert  $g(q) = 0$ , dass auch  $GMG = 0$  gilt. Allgemeingültig besteht der Zusammenhang

$$AMG \geq GMG .$$

Der Unterschied zwischen dem  $AMG$  und  $GMG$  ist gering, wenn die Werte  $g(q)$  nur geringfügig um ihren arithmetischen Mittelwert  $AMG$  schwanken:

$$g(q) \approx AMG \Rightarrow AMG \approx GMG .$$

Bei konstanten Werten  $g(q) = AMG$  sind  $AMG$  und  $GMG$  identisch. Der  $AMG$  kann insofern einen Ersatz für den  $GMG$  darstellen. Ein Vorteil gegenüber dem  $GMG$  besteht darin, dass der  $AMG$  die Konstruktionsvorschrift zur Definition der im Folgenden eingeführten statistischen Größen, dem Moment erster und zweiter Ordnung und dem daraus abgeleiteten Fehler sowie Chance und Risiko beinhaltet. Bei diesen Statistikgrößen unterbleibt wie beim  $AMG$  eine Reinvestition.

### 3.4 Moment erster Ordnung

Das Einsetzen der Gewinnfaktoren

$$g(q) = 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot (M1_q - 1)$$

in (21) führt zunächst auf

$$AMG = 1 + \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q - \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h) .$$

Der dritte Summand ist der mittlere Investitionsgrad  $IG$  für den gesamten Handelszeitraum in (6). Damit lautet der zweite Summand

$$\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q = IG \cdot \sum_{q=1}^Q w_q \cdot M1_q$$

mit den Gewichtswerten

$$w_q := \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{Q \cdot IG} = \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^Q IG(q' \cdot \tau_h)} . \quad (22)$$

Hierbei wird  $IG > 0$  vorausgesetzt, d.h. es finden im Handelszeitraum Investitionen statt. Die Gewichtswerte  $w_q$  treten wie Wahrscheinlichkeiten auf, d.h. es handelt sich um nichtnegative Zahlen, die die Summe 1 ergeben. Mit den Gewichtswerten  $w_q$  werden die Gewinnfaktoren  $M1_q$  gewichtet, um das sog. Moment erster Ordnung für den gesamten Handelszeitraum gemäß

$$M1 := \sum_{q=1}^Q w_q \cdot M1_q \quad (23)$$

zu bilden. Als Ergebnis erhält man  $AMG = 1 + IG \cdot M1 - IG$  oder

$$AMG = 1 + IG \cdot [M1 - 1] . \quad (24)$$

Wie der  $AMG$  stellt  $M1$  einen mittleren Gewinnfaktor für Investitionen in ein Segment des Handelszeitraums ohne Reinvestition dar.  $M1$  wird jedoch nicht durch  $IG$  begrenzt und stellt den  $AMG$  für  $IG = 1$ , d.h. bei Vollinvestition dar.

#### Bemerkung zu $w_q$ und $M1$ :

Mit den Gewichtswerten  $w_q$  lässt sich (8) offensichtlich wie folgt erweitern:

$$N_q > 0 \iff I_2(\Lambda_q) > 0 \iff IG(q \cdot \tau_h) > 0 \iff w_q > 0 . \quad (25)$$

Für  $w(q) > 0$  folgt  $N(q) > 0$  und  $M1_q$  in (10) ist definiert. Für  $w_q = 0$  ergibt sich in (23) der Summand  $w_q \cdot M1_q = 0$ . Die Summanden in (23) sind daher alle definiert.

### Alternative Darstellung:

Das Moment erster Ordnung lässt sich als gewichtete Summe der Tages-Mittelwerte  $M1(t)$  darstellen, wie im Folgenden ausgeführt wird. Durch Einsetzen von (10),

$$M1_q = \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot M1(t), \quad N_q > 0,$$

in (23) erhält man zunächst

$$M1 = \sum_{q=1}^Q w_q \cdot \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot M1(t).$$

Die Zusammenfassung der Gewichtswerte  $w_q$  und  $w_q(t)$  liefert die Gewichtswerte

$$w(t) := w_q \cdot w_q(t), \quad t \in \Lambda_q \quad (26)$$

eines Handelstages. Als Ergebnis folgt für  $M1$

$$M1 = \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot M1(t). \quad (27)$$

(27) stellt eine gewichtete Summe der Tages-Mittelwerte  $M1(t)$  dar. Der Summationsbereich erstreckt sich hierbei über die Handelstage  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h = T - \tau_h$ . Die Summierung in (27) setzt nicht voraus, dass  $T$  ein ganzzahlig Vielfaches von  $\tau_h$  ist. Darin ist ein Vorteil vom  $M1$  gegenüber den Gewinnfaktoren  $G$  und  $GMG$  zu sehen.

### Bemerkung zu $w(t)$ und $M1$ :

Für die Auswertung von (26) an einem Handelstag  $t$  wird die Nummer  $q$  desjenigen Segmentes benötigt, welches den Handelstag  $t$  enthält. Hierbei sind die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Das  $q$ -te Segment enthält keine Kaufkandidaten.

Für  $N_q = 0$  folgt aus (25)  $w_q = 0$ . In diesem Fall gilt für alle Gewichtswerte des  $q$ -ten Segments  $w(t) = 0$ . Der Handelstag  $t$  liefert somit keinen Beitrag zu  $M1$ .

2. Das  $q$ -te Segment enthält Kaufkandidaten.

Für  $N_q > 0$  folgt aus (25)  $w_q > 0$  sowie  $I_2(\Lambda_q) > 0$ . Für die Gewichtswerte  $w(t)$  erhält man aus (26) mit (22) und (9)

$$w(t) = \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^Q IG(q' \cdot \tau_h)} \cdot \frac{I_2(t)}{I_2(\Lambda_q)}, \quad t \in \Lambda_q. \quad (28)$$

Der Definition von  $I_2(t)$  in (3) entnimmt man

$$N(t) > 0 \iff I_2(t) > 0. \quad (29)$$

Folglich ist für  $N(t) = 0$  auch  $w(t) = 0$  und damit der Summand in (27),  $w(t) \cdot M1(t) = 0$ . Für  $N(t) > 0$  dagegen ist  $M1(t)$  wohldefiniert und damit der Summand  $w(t) \cdot M1(t)$ .

### 3.5 Gewichtete Mittelwerte

Die Konstruktion des Momentes erster Ordnung dient als Vorbild für weitere Statistikgrößen, dem Moment zweiter Ordnung und dem Fehler, sowie Chance und Risiko. Daher wird im Folgenden die Konstruktion allgemeingültig für eine Statistikgröße dargestellt, deren Werte für Handelstage  $t$  mit  $S(t)$  bezeichnet werden.  $S_q$  und  $S$  stellen die Segment-Mittelwerte für Segmentnummer  $q$  bzw. für den gesamten Handelszeitraum dar.

#### Gewichtswerte:

Die bisher aufgetretenen Gewichtswerte spielen bei der Konstruktion eine wichtige Rolle. Die etwas verstreuten Definitionen werden an dieser Stelle wie folgt zusammengefasst:

$$w_q(t) = \frac{I_2(t)}{I_2(\Lambda_q)}, \quad t \in \Lambda_q, \quad I_2(\Lambda_q) > 0, \quad (30a)$$

$$w_q = \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^Q IG(q' \cdot \tau_h)}, \quad (30b)$$

$$w(t) = w_q \cdot w_q(t), \quad t \in \Lambda_q. \quad (30c)$$

Die erste Beziehung entspricht der Definition in (9). Die zweite Beziehung entspricht (22), die dritte Beziehung entspricht (26). Alle Gewichtswerte sind nichtnegativ. Eine Summierung der Gewichtswerte ergibt

$$\sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) = 1, \quad w_q > 0, \quad (31a)$$

$$\sum_{q=1}^Q w_q = 1, \quad (31b)$$

$$\sum_{t \in \Lambda_q} w(t) = w_q \cdot \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) = w_q. \quad (31c)$$

Die Summe der Gewichtswerte  $w(t)$  über alle Handelstage  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h$  ergibt folglich ebenfalls 1, wie aus der zweiten und dritten Beziehung folgt.

Die Gewichtswerte können als Verteilungen für den Umfang an eingegangenen Investitionen über der Zeit interpretiert werden. Zur Begründung wird auf [1] verwiesen. Dort werden  $IG(q \cdot \tau_h)$  und  $w_q(t)$  als Investitionsraten interpretiert. Hierbei stellt der Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  nach (14a) die Investitionsrate

$$IG(q \cdot \tau_h) = \frac{I_{new}(\Lambda_q)}{C_{tot}(q \cdot \tau_h)}$$

dar. Die Gewichtswerte  $w_q(t)$  geben nach [1, Gl. (114)],

$$w_q(t) = I_{new}(t) / I_{new}(\Lambda_q),$$

die Neuinvestition am Handelstag  $t$  bezogen auf die Neuinvestition im  $q$ -ten Segment an.

Bei einer Interpretation der Gewichtswerte als Verteilungen kann von den Gewichtswerten  $w(t)$  ausgegangen werden. Diese geben die Verteilung von Neuinvestitionen über die Handelstage  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h$  an. Durch Summierung von  $w(t)$  über die Handelstage eines Segments ergeben sich nach (31c) die Gewichtswerte

$$w_q = \sum_{t \in \Lambda_q} w(t). \quad (32)$$

Sie stellen die Verteilung von Neuinvestitionen über die Segmente  $1 \leq q \leq Q$  dar. Aus  $w(t)$  und  $w_q$  folgen gemäß (30c) die Gewichtswerte

$$w_q(t) = \frac{w(t)}{w_q}, \quad t \in \Lambda_q, \quad w_q > 0. \quad (33)$$

Sie geben die Verteilung an Neuinvestitionen innerhalb eines Segments an, sofern in diesem Segment Investitionen eingegangen werden, d.h. für  $w_q > 0$ .

### Statistikgrößen:

Da die Gewichtswerte als Verteilungen für Neuinvestitionen über der Zeit interpretiert werden können, ergeben sich durch gewichtete Mittelung von  $S(t)$  mit diesen Gewichtswerten die Statistikgrößen  $S_q$  und  $S$ . Für den gesamten Handelszeitraum erhält man

$$S := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot S(t) . \quad (34)$$

Für  $S$  erhält man durch Einsetzen von (30c) in (34)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{q=1}^Q \sum_{t \in \Lambda_q} [w_q \cdot w_q(t)] \cdot S(t) \\ &= \sum_{q=1}^Q w_q \cdot S_q \end{aligned} \quad (35)$$

mit

$$S_q := \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot S(t) , \quad w_q > 0 . \quad (36)$$

Nach (35) kann die Statistikgröße  $S$  durch eine Mittelung der Segment-Mittelwerte  $S_q$  dargestellt werden. Die Herleitung von (35) aus (34) lässt sich umkehren: Definiert man die Statistikgröße  $S$  mit Hilfe von (35), folgt die Darstellung in (34). Davon wurde bei der Herleitung von  $M1$  in (27) Gebrauch gemacht. Daher spielt es keine Rolle, ob  $S$  durch (34) oder (35) definiert wird. Somit findet man auch eine Rechtfertigung für Abb. 2 (S. 11): Aus den exogenen Größen  $S(t)$  können zunächst Segment-Mittelwerte bestimmt und daraus die Statistikgrößen für den gesamten Handelszeitraum gebildet werden.

### 3.6 Mittlerer quadratischer Fehler

Der mittlere quadratische Fehler, im Folgenden kurz als Fehler bezeichnet, ist ein Maß für die Schwankungen der Kursverhältnisse

$$G(n, t) = s(n, t + \tau_h) / s(n, t)$$

und damit ein Maß für die Volatilität. Hierbei wird die Definition an das in der Arbeit verfolgte Statistik-Konzept angepasst. Der Fehler wird als gewichtete mittlere quadratische Abweichung der Kursverhältnisse  $v(n, t)$  von  $M1$  definiert. Mit dem Vorbild in (34) werden

$$MSE := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot MSE(t) , \quad (37a)$$

$$MSE(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t) - v]^2 , \quad v := M1 , \quad N(t) > 0 \quad (37b)$$

gebildet. Der Fehler  $MSE$  tritt als ein Schätzfehler auf, wenn die Kursverhältnisse  $G(n, t)$  für alle Handelstage durch die Konstante  $v = M1$  „geschätzt“ werden. Dabei ist zunächst nicht selbstverständlich, dass  $M1$  die beste Schätzung im Sinne eines kleinsten Fehlers liefert. Dieser Sachverhalt ergibt sich aus folgender Umformung: Mit Hilfe der Momente  $M1(t)$  und  $M2(t)$  erster Ordnung in (20a) und (20b) erhält man für eine beliebige Konstante  $v$

$$\begin{aligned} MSE(t) &= \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G^2(n, t) - 2v \cdot G(n, t) + v^2] \\ &= M2(t) - 2v \cdot M1(t) + v^2 \end{aligned} \quad (38)$$

und daraus

$$MSE = \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot MSE(t) = M2 - 2v \cdot M1 + v^2$$

mit dem Moment zweiter Ordnung für den gesamten Handelszeitraum,

$$M2 := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot M2(t). \quad (39)$$

Wie in (27) findet eine Gewichtung mit  $w(t)$  statt, wobei die Momente  $M2(t)$  gewichtet werden. Differentiation von  $MSE$  nach  $v$  liefert  $v = M1$  als Minimalstelle. Dies bedeutet, dass  $M1$  den optimalen Schätzwert darstellt. Der Fehler beträgt in diesem Fall

$$MSE = M2 - M1^2. \quad (40)$$

Die Segmentmittelwerte werden gemäß (36) definiert, wobei die Fehlerwerte  $MSE(t)$  (38) für  $v = M1$  zu entnehmen sind:

$$\begin{aligned} MSE_q &:= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot MSE(t) \\ &= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot [M2(t) - 2M1 \cdot M1(t) + M1^2] \\ &= M2_q - 2M1 \cdot M1_q + M1^2. \end{aligned} \quad (41)$$

### Innerer Fehler:

Zur Bestimmung des Fehlers werden zunächst die Momente  $M1$  und  $M2$  gebildet, indem eine gewichtete Mittelung über die Segment-Mittelwerte  $M1_q$  und  $M2_q$  vorgenommen wird und dann wie bei einer Varianz die Konstruktion des Fehlers nach (40) vorgenommen. Hierbei wird die Frage aufgeworfen, welche Fehlergröße entsteht, wenn die Reihenfolge vertauscht wird, d.h. es wird zunächst für jedes Segment

$$MSE_q^{in} := M2_q - M1_q^2 \quad (42)$$

gebildet und danach eine gewichtete Mittelung gemäß

$$MSE^{in} := \sum_{q=1}^Q w_q \cdot MSE_q^{in} \quad (43)$$

vorgenommen. Die Fehlerwerte in (42) und (43) werden als innerer Fehler bezeichnet. Eine Begründung für diese Bezeichnung ergibt sich aus der Analyse der Segment-Mittelwerte in (42). Es ist für  $v := M1_q$

$$\begin{aligned} MSE_q^{in} &= M2_q - 2v \cdot M1_q + v^2 \\ &= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot [M2(t) - 2v \cdot M1(t) + v^2] \\ &= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G^2(n, t) - 2v \cdot G(n, t) + v^2] \\ &= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t) - v]^2 \\ &= \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot MSE^{in}(t) \end{aligned} \quad (44)$$

mit

$$MSE^{in}(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t) - M1_q]^2. \quad (45)$$

Der innere Fehler eines Segments stellt somit eine gewichtete mittlere quadratische Abweichung der Kursverhältnisse  $G(n, t)$  von ihrem Segment-Mittelwert  $v = M1_q$  dar. Die Gewichtung erfolgt hierbei mit den Faktoren  $w_q(t)$ . Der innere Fehler für den gesamten Handelszeitraum ergibt sich nach (43) durch eine Mittelung über die inneren Fehler für alle Segmente.

Der innere Fehler  $MSE^{in}$  kann wie der Fehler  $MSE$  als ein „Schätzfehler“ interpretiert werden. Im Unterschied zum Fehler  $MSE$  in (37) werden die Kursverhältnisse nicht durch die Konstante  $v = M1$  geschätzt, sondern segmentweise durch die segmentabhängigen Konstanten  $M1_q$ . Daher ist zu erwarten, dass der innere Fehler unterhalb des Fehlers  $MSE$  liegt. Die Differenz

$$MSE^{out} := MSE - MSE^{in} \quad (46)$$

wird als äußerer Fehler bezeichnet und im Folgenden bestimmt.

### Äußerer Fehler:

Einsetzen des Fehlers  $MSE$  gemäß (40) und des inneren Fehlers  $MSE^{in}$  gemäß (42) und (43) in (46) liefert

$$\begin{aligned} MSE^{out} &= MSE - MSE^{in} = [M2 - M1^2] - \sum_{q=1}^Q w_q \cdot [M2_q - M1_q^2] \\ &= M2 - M1^2 - \left[ M2 - \sum_{q=1}^Q w_q \cdot M1_q^2 \right] \\ &= \sum_{q=1}^Q w_q \cdot M1_q^2 - M1^2 \\ &= \sum_{q=1}^Q w_q \cdot [M1_q^2 - 2M1^2 + M1^2] \\ &= \sum_{q=1}^Q w_q \cdot [M1_q^2 - 2M1 \cdot M1_q + M1^2] \\ &= \sum_{q=1}^Q w_q \cdot [M1_q - M1]^2 . \end{aligned}$$

Demnach stellt der äußere Fehler eine mittlere quadratische Abweichung der Segment-Mittelwerte  $M1_q$  von der Konstanten  $M1$  dar und ist daher nicht negativ. Er besitzt die Darstellung

$$MSE^{out} = \sum_{q=1}^Q w_q \cdot MSE_q^{out} , \quad MSE_q^{out} := [M1_q - M1]^2 . \quad (47)$$

Ein äußerer Fehler  $MSE^{out} > 0$  kann auch dann auftreten, wenn für alle Segmente der innere Fehler gleich 0 ist. In diesem Fall treten keine Schwankungen der Kursverhältnisse  $G(n, t)$  innerhalb eines Segments auf, aber Schwankungen von Segment zu Segment in Form unterschiedlicher Segment-Mittelwerte  $M1_q$ . Auf der anderen Seite ist der Fall möglich, dass die Segment-Mittelwerte  $M1_q$  nicht schwanken ( $MSE^{out} = 0$ ), aber Schwankungen innerhalb der Segmente vorliegen ( $MSE^{in} > 0$ ).

**Fazit:** Der Fehler  $F$  setzt sich somit aus zwei voneinander unabhängigen Fehlerkomponenten gemäß

$$MSE = MSE^{in} + MSE^{out} \quad (48)$$

zusammen und stellt insofern einen Gesamtfehler dar. Die erste Fehlerkomponente ist der innere Fehler, welcher die Schwankungen innerhalb eines Segments beschreibt. Die zweite Fehlerkomponente ist der äußere Fehler, welcher die Schwankungen zwischen den Segmenten darstellt.

### 3.7 Chance und Risiko

Einsetzen der Tages-Mittelwerte für Chance und Risiko in (34) liefert Chance und Risiko für den gesamten Handelszeitraum gemäß

$$Ch := \sum_{q=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot Ch(t), \quad Risk := \sum_{q=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot Risk(t). \quad (49)$$

Auch bei Bestimmung von Chance und Risiko mit Hilfe der Segment-Mittelwerte  $Ch_q$  und  $Risk_q$  gemäß (35) werden die Tages-Mittelwerte benötigt, da die Segment-Mittelwerte nach (36) von den Tages-Mittelwerten abhängen. Die Tages-Mittelwerte  $Ch(t)$  und  $Risk(t)$  hängen nach (20c) und (20d) von den Kursverhältnissen  $G(n, t) = s(n, t + \tau_h) / s(n, t)$  ab, die für jeden Handelstag für alle Kaufkandidaten  $buy(t)$  ausgewertet werden müssen. Die Tages-Mittelwerte hängen außerdem von den Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  ab, welche noch festgelegt werden müssen.

#### Festlegung der Konstanten:

Für die Wahl der Konstanten ist

$$G_C > 1, \quad G_R := 1/G_C \quad (50)$$

naheliegender. Beispielsweise bedeutet  $G_C = 2$  einen Kursanstieg von 100% innerhalb der Haltefrist (Kursverdopplung), welche bei großen Haltefristen sinnvoll sein kann. In diesem Fall ist  $G_R = 0.5$  und entspricht einem Kursrückgang von 50% (Kurshalbierung).  $G_C$  ist so festzulegen, dass faire Vergleiche für verschiedene Kaufbedingungen und Sichtweiten möglich sind. Um die Ergebnisse für Chance und Risiko einfach interpretieren zu können, wird gefordert, dass die Konstanten nicht von den Kursdaten  $s(n, t)$  abhängen. Eine Abhängigkeit besteht daher nur von der Haltefrist. Zur Festlegung der Konstanten  $G_C = G_C(\tau_h)$  werden anstelle realer Kursdaten künstliche Kursdaten verwendet. Hierbei werden die Kursverhältnisse  $s(t + 1) / s(t)$  durch statistisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen (i.i.d.) beschrieben. Diese Voraussetzung beansprucht keine realistische Beschreibung realer Kursdaten, sondern stellt nur ein Hilfsmittel da, um die Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  festzulegen.

Um unterschiedliche Schwankungen der Kursverhältnisse zu berücksichtigen, wird ein zur Standardabweichung der Kursverhältnisse proportionaler Zusammenhang gemäß

$$G_C(\tau_h) - 1 = \lambda \cdot \sigma(\tau_h) \quad (51)$$

vorgeschlagen. Hierbei ist  $\lambda$  ein Proportionalitätsfaktor und

$$\sigma^2(h) := \text{var}\{v_h(t)\}, \quad v_h(t) := \frac{s(t+h)}{s(t)} \quad (52)$$

bezeichnet die von der Haltefrist  $h = \tau_h$  abhängige Varianz des Kursverhältnisses  $v_h(t)$ .

Nach Lemma 4 (S. 49) ist die Varianz für den künstlichen Markt näherungsweise proportional zur Haltefrist:

$$\sigma^2(\tau_h) \approx \tau_h \cdot \sigma^2(1), \quad \tau_h \cdot \sigma^2(1) \ll 1. \quad (53)$$

Die Anwendbarkeit dieser Näherungsformel ist hierbei auf nicht zu große Haltefristen beschränkt. Einsetzen des Näherungswerts in (51) liefert

$$G_C(\tau_h) - 1 = \lambda \cdot \sqrt{\tau_h} \cdot \sigma(1).$$

Für  $\tau_h = 30$  wird die Konstante  $G_C$  gemäß

$$G_C(\tau_h = 30) := 5/4 \quad (54)$$

festgelegt. Man erhält

$$1/4 = \lambda \cdot \sqrt{30} \cdot \sigma(1)$$

und daraus als Ergebnis

$$G_C(\tau_h) := 1 + \frac{1}{4\sqrt{30}}\sqrt{\tau_h} \quad (55)$$

Die Schranken  $G_C$  und  $G_R$  hängen somit nicht von den Kursdaten und insbesondere nicht von  $\sigma(1)$  ab, sondern nur von der Schrittweite  $\tau_h$ . Für den Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  folgt der von  $\sigma(1)$  abhängige Wert

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sigma(1)}.$$

### 3.8 Handelskosten

Beim Handeln von Wertpapieren fallen bei jeder Transaktion Kosten an, die im Folgenden als Handelskosten bezeichnet werden. Sie hängen vom Umfang der Neuinvestition beim Kauf und dem Erlös beim Verkauf eines Wertpapiers ab. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, dass die Handelskosten einen bestimmten Prozentsatz  $p_{cost}$  der Neuinvestition bzw. des Erlöses betragen. Darüber hinausgehende Kosten, die im Falle eines kleinen Umfangs an Neuinvestitionen und Erlösen bei einer Transaktion stärker ins Gewicht fallen, werden hierbei nicht berücksichtigt. Diese vereinfachende Annahme ermöglicht die Einführung der Handelskosten als eine weitere statistische Größe.

Eine erste Möglichkeit, Handelskosten zu berücksichtigen, besteht darin, sie in den Handelsprozess zu integrieren. Dies bedeutet, dass die segmentweise Beschreibung in (14) zu erweitern ist. Ein Ansatz könnte darin bestehen, das Gesamtkapital am Ende eines Segments um die im Segment angefallenen Kosten gemäß

$$C_{tot}((q+1) \cdot \tau_h) = g(q) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) - cost_q$$

zu reduzieren. Dieser Ansatz verkompliziert den Handelsprozess wesentlich. Außerdem hängen dann alle statistischen Größen vom Prozentsatz  $p_{cost}$  ab und blähen die Statistik auf. Daher wurde dieser Ansatz aufgegeben und stattdessen versucht, die Handelskosten in Abhängigkeit vom Handelsprozess zu bestimmen. In diesem Fall wird der Handelsprozess nicht von den Handelskosten beeinflusst. Stattdessen werden die Handelskosten für jedes Segment sowie für den gesamten Handelszeitraum als die statischen Größen  $cost_q$  und  $cost$  in Abhängigkeit vom Handelsprozess bestimmt.

#### Definition der Kosten:

Ausgangspunkt für die Herleitung der Handelskosten sind die segmentweise Beschreibung des Handelsverlaufs gemäß (14) und insbesondere die Entwicklung des Gesamtkapitals am Segmentende gemäß (18). Es ist naheliegend, die Handelskosten für ein Segment als  $p_{cost}$ -Anteil aus Neuinvestition und Erlös im Segment zu definieren. Zu einfacheren Ergebnissen gelangt man jedoch, indem die im Segment eingegangene Investition und der daraus im folgenden Segment resultierende Erlös zusammengefasst werden, d.h. es wird definiert:

$$cost_q := p_{cost} \cdot [I_{new}(\Lambda_q) + sale(\Lambda_{q+1})], \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (56)$$

Die Definition der Kosten in (56) berücksichtigt keine Kosten einzelner Transaktionen. Diese stehen bei einer segmentweisen Beschreibung des Handelsprozesses auch nicht zur Verfügung. Stattdessen werden die Handelskosten pauschal durch einen bestimmten Prozentsatz eines Umsatzes erfasst, der sich aus Neuinvestitionen und zugehörigen Erlösen zusammensetzt. Die Handelskosten für den gesamten Handelszeitraum setzen sich aus den Kosten in den Segmenten gemäß

$$cost := \sum_{q=1}^Q cost_q \quad (57)$$

zusammen.

#### Kostenfaktoren:

Wie das Gesamtkapital in (19) werden auch die Kosten auf das Anfangsbarkapital bezogen, d.h. es werden  $CF_q := cost_q/C_{cash}(0)$  und  $CF := cost/C_{cash}(0)$  gebildet. Sie werden als Kostenfaktoren bezeichnet und im Folgenden näher analysiert.

**Kostenfaktor für Segmente:**

Einsetzen von (14b) in (56) führt auf

$$\begin{aligned} cost_q &= p_{cost} \cdot [I_{new}(\Lambda_q) + M1_q \cdot I_{new}(\Lambda_q)] \\ &= p_{cost} \cdot I_{new}(\Lambda_q) \cdot [1 + M1_q] . \end{aligned}$$

Einsetzen von (14a) liefert

$$cost_q = p_{cost} \cdot IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{tot}(q \cdot \tau_h) \cdot [1 + M1_q] .$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs in (18) zwischen dem Gesamtkapital am Segmentende und dem kumulativen Gewinnfaktor folgt

$$cost_q = p_{cost} \cdot IG(q \cdot \tau_h) \cdot C_{cash}(0) \cdot G_{cum}(q-1) \cdot [1 + M1_q] .$$

Der kumulative Gewinnfaktor  $G_{cum}(q-1)$  legt zusammen mit dem Anfangs-Barkapital das Gesamtkapital am Ende des  $q$ -ten Segments fest. Sein anteiliger Einsatz für Neuinvestitionen im  $q$ -ten Segment wird durch den Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  beschrieben. Damit sind der Umfang an Neuinvestitionen im  $q$ -ten Segment und damit auch der Erlös im  $q+1$ -ten Segment festgelegt. Multiplikation mit  $p_{cost}$  liefert die Kosten im  $q$ -ten Segment. Für den Kostenfaktor des  $q$ -ten Segments erhält man

$$CF_q = p_{cost} \cdot IG(q \cdot \tau_h) \cdot G_{cum}(q-1) \cdot [1 + M1_q] . \quad (58)$$

**Kostenfaktor für den gesamten Handelszeitraum:**

Aus der Beziehung (11),

$$g(q) = 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot [M1_q - 1]$$

folgt

$$IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q = IG(q \cdot \tau_h) + g(q) - 1$$

und daraus

$$\begin{aligned} CF_q &= p_{cost} \cdot [IG(q \cdot \tau_h) + IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q] \cdot G_{cum}(q-1) \\ &= p_{cost} \cdot [IG(q \cdot \tau_h) + IG(q \cdot \tau_h) + g(q) - 1] \cdot G_{cum}(q-1) \\ &= p_{cost} \cdot [2IG(q \cdot \tau_h) \cdot G_{cum}(q-1) + G_{cum}(q) - G_{cum}(q-1)] , \end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung der Zusammenhang  $G_{cum}(q) = g(q) \cdot G_{cum}(q-1)$  benutzt wurde. Die Addition der Kostenfaktoren liefert den Kostenfaktor für den gesamten Handelszeitraum gemäß

$$CF_q = p_{cost} \cdot \left[ 2 \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h) \cdot G_{cum}(q-1) + \sum_{q=1}^Q [G_{cum}(q) - G_{cum}(q-1)] \right] .$$

1. Erste Summe:

Mit den Gewichtswerten  $w_q$  in (22) erhält man für die erste Summe

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h) \cdot G_{cum}(q-1) &= Q \cdot IG \cdot \sum_{q=1}^Q \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{Q \cdot IG} \cdot G_{cum}(q-1) \\ &= Q \cdot IG \cdot \sum_{q=1}^Q w_q \cdot G_{cum}(q-1) . \end{aligned}$$

2. Zweite Summe:

Nach (17) ist  $G_{cum}(0) = 1$ . Daraus erhält man für die zweite Summe

$$\sum_{q=1}^Q [G_{cum}(q) - G_{cum}(q-1)] = G_{cum}(Q) - G_{cum}(0) = G - 1 .$$

Für den Kostenfaktor des gesamten Handelszeitraums erhält man das Ergebnis

$$CF = \frac{cost}{C_{cash}(0)} = p_{cost} \cdot [2Q \cdot IG \cdot \overline{G_{cum}} + G - 1] \quad (59)$$

mit dem *mittleren kumulativen Gewinnfaktor*

$$\overline{G_{cum}} := \sum_{q=1}^Q w_q \cdot G_{cum}(q-1). \quad (60)$$

### Diskussion:

Der erste Anteil in (59) enthält den *mittleren kumulativen Gewinnfaktor*. Er folgt dem gleichen Konstruktionsprinzip wie das Moment  $M1$  und die anderen mit  $w_q$  gewichteten Mittelwerte in Abb. 2 (S. 11). Im Unterschied zu diesen Statistikgrößen beinhaltet der mittlere kumulative Gewinnfaktor wie der Gewinnfaktor  $G$  eine Reinvestition. Die Multiplikation des mittleren kumulativen Gewinnfaktors mit  $2Q \cdot IG$  bewirkt, dass der erste Anteil des Kostenfaktors bei einem großen Handelszeitraum, d.h. für eine große Anzahl der Segmente, in der Regel den zweiten Anteil  $G - 1$  dominiert. Der mittlere kumulative Gewinnfaktor hängt von der Verteilung der Gewinnfaktoren  $g(q)$  im Handelszeitraum ab. Zur Erläuterung werden zwei Sonderfälle betrachtet, für die ein einziger Gewinnfaktor  $g(q)$  ungleich 1 ist. Dieser Gewinnfaktor entspricht dann dem Gewinnfaktor  $G$  für den gesamten Handelszeitraum. Der Einfachheit halber werden konstante Investitionsgrade  $IG(q \cdot \tau_h) = IG$  angenommen, d.h. es gilt  $w_q = 1/Q$ .

1. Fall: Die Gewinne sind auf den Handelsbeginn konzentriert:

$$g(1) = G > 1, \quad g(2) = g(3) = \dots = g(Q) = 1.$$

In diesem Fall werden Handelskosten durch hohe Umsätze verursacht, die keine Gewinne abwerfen. Für die kumulativen Gewinnfaktoren folgt

$$G_{cum}(q-1) = \begin{cases} 1 & : q = 1 \\ G & : q > 1 \end{cases}$$

Der mittlere kumulative Gewinnfaktor beträgt daher

$$\overline{G_{cum}} = \frac{1}{Q} \cdot [1 + (Q-1) \cdot G].$$

Bei einer großen Anzahl der Segmente,  $Q \gg 1$ , resultiert

$$\overline{G_{cum}} \approx G.$$

2. Fall: Gewinne treten nur am Handelsende auf:

$$g(1) = g(2) = \dots = g(Q-1) = 1, \quad g(Q) = G > 1.$$

Für die kumulativen Gewinnfaktoren folgt

$$G_{cum}(q-1) = 1, \quad 1 \leq q \leq Q.$$

Der mittlere kumulative Gewinnfaktor beträgt daher

$$\overline{G_{cum}} = 1.$$

Ein großer Gewinnfaktor  $G$  am Handelsende hat keinen Einfluss auf den mittleren kumulativen Gewinnfaktor. Er beträgt 1 und ist damit viel kleiner als im ersten Fall.

### 3.9 Einfluss der Investitionsparameter

Es soll der Einfluss der Investitionsparameter auf die neu eingeführten statistischen Größen geklärt werden. Die Haltefrist bzw. Sichtweite  $\tau_h$  beeinflusst über die Kursverhältnisse  $G(n, t) = s(n, t + \tau_h) / s(n, t)$  alle exogenen Größen, d.h. die Tages-Mittelwerte für Momente erster und zweiter Ordnung sowie Chance und Risiko und damit sämtliche Statistikgrößen in Abb. 2 (S. 11) bis auf die Investitionsrate  $I_2(t)$  und die Investitionsgrade  $IG(q \cdot \tau_h)$  und  $IG$ . Die Investitionsparameter  $U_{\min}$  und  $\tau$  wirken über  $I_2(t)$  auf sämtliche Statistikgrößen. Auf die Auswirkungen des maximalen Investitionsgrades  $IG_{\max}$  auf die Statistikgrößen wird im Folgenden näher eingegangen.

$IG_{\max}$  hat keinen Einfluss auf  $I_2(t)$ , wie Abb. 2 (S. 11) zeigt, und damit auch keinen Einfluss auf die Segment-Mittelwerte für Momente, Chance und Risiko. Allerdings begrenzt  $IG_{\max}$  die Investitionsgrade  $IG(q \cdot \tau_h)$  und damit auch  $IG$ , denn es gilt nach (5)

$$IG(q \cdot \tau_h) = \min\{I_2(\Lambda_q), IG_{\max}\} \leq IG_{\max} . \quad (61)$$

$IG_{\max}$  nimmt daher Einfluss auf die Gewinnfaktoren  $g(q)$  und damit auch auf die Gewinnfaktoren  $G$ ,  $AMG$  und  $GMG$  für den gesamten Handelszeitraum sowie die Handelskosten. Die Gewichtswerte  $w_q$  in (22) sind ebenfalls von  $IG_{\max}$  abhängig. Daher werden auch alle anderen statistischen Größen des gesamten Handelszeitraums wie Momente, Chance, Risiko und Fehler durch  $IG_{\max}$  beeinflusst. Ihre Abhängigkeit von  $IG_{\max}$  erfolgt dabei nicht über die Segment-Mittelwerte, da diese nicht von  $IG_{\max}$  abhängen, sondern über die Gewichtswerte  $w_q$  in (22). Dieser Einfluss ist jedoch schwächer als der Einfluss von  $IG_{\max}$  auf Gewinnfaktoren, was im Folgenden anhand kleiner Werte für  $IG_{\max}$  verdeutlicht wird.

#### 3.9.1 Kleiner maximaler Investitionsgrad

##### Einfluss auf die Gewinnfaktoren und Handelskosten:

Der Einfluss von  $IG_{\max}$  auf die Gewinnfaktoren  $g(q)$  in (11) lässt sich wie folgt darstellen:

$$g(q) = [1 - IG(q \cdot \tau_h)] \cdot 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot M1_q . \quad (62)$$

Die Gewinnfaktoren  $g(q)$  ergeben sich somit aus einer „Mischung“ in Form einer Konvexkombination der Werte 1 und  $M1_q$ , wobei das „Mischungsverhältnis“ durch den Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  festgelegt wird. Für den Investitionsgrad 1 wird nur  $M1_q$  „ausgewählt“, für den Investitionsgrad 0 nur der Wert 1. Nähert sich  $IG_{\max}$  dem Wert 0, nähert sich folglich  $g(q)$  dem Wert 1. Die Gewinnfaktoren  $G$ ,  $AMG$  und  $GMG$  streben daher ebenfalls gegen 1. Der Kostenfaktor geht nach (59) gegen 0, denn der Investitionsgrad  $IG$  geht wegen  $IG \leq IG_{\max}$  gegen 0 und  $G - 1$  geht ebenfalls gegen 0, wenn sich  $G$  dem Wert 1 nähert.

##### Einfluss auf Momente, Chance, Risiko und Fehler:

Für Segmente, die keine Kaufkandidaten enthalten, ist nach (8)  $I_2(\Lambda_q) = 0$  und  $IG(q \cdot \tau_h) = 0$ . Wenn das  $q$ -te Segment Kaufkandidaten enthält, d.h. für  $N(q) > 0$ , ist nach (8)  $I_2(\Lambda_q) > 0$ . Wenn  $IG_{\max}$  diesen Wert unterschreitet, erhält man aus (61)

$$IG_{\max} \leq I_2(\Lambda_q) \Rightarrow IG(q \cdot \tau_h) = IG_{\max} , \quad (63)$$

d.h. der maximale Investitionsgrad  $IG_{\max}$  wird für das  $q$ -te Segment erreicht. Ist  $IG_{\max} \leq I_2(\Lambda_q)$  für alle Segmente, die Kaufkandidaten enthalten,

$$IG_{\max} \leq I_{2,min}^+ := \min\{I_2(\Lambda_q) > 0 \mid 1 \leq q \leq Q\} , \quad (64)$$

ist nach (63) für diese Segmente  $IG(q \cdot \tau_h) = IG_{\max}$ . Mit  $Q^+$  als die Anzahl der Segmente, die Kaufkandidaten enthalten, folgen für die Gewichtswerte

$$w_q = \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^{Q^+} IG(q' \cdot \tau_h)}$$

in (22)

$$w_q = \begin{cases} \frac{IG_{\max}}{Q^+ \cdot IG_{\max}} = \frac{1}{Q^+} : N(q) > 0 \\ 0 : N(q) = 0 \end{cases} \quad (65)$$

Dies bedeutet, dass die Gewichtswerte  $w_q$  nicht von  $IG_{\max}$  abhängen, wenn  $IG_{\max}$  den in (64) definierten Schwellwert  $I_{2,\min}^+$  unterschreitet, sondern gleichverteilt über die Segmente mit Kaufkandidaten sind. Der Wert von  $IG_{\max}$  hat dann auch keinen Einfluss auf Momente, Chance, Risiko und Fehler für den gesamten Handelszeitraum. Diese Statistikgrößen ergeben sich nach (35) folglich durch arithmetische Mittelung von Segment-Mittelwerten.

Fassen wir zusammen:

**LEMMA 1 (Kleiner maximaler Investitionsgrad)** *Nähert sich  $IG_{\max}$  dem Wert 0, streben die Gewinnfaktoren gegen 1 und der Investitionsgrad und die Kosten streben gegen 0. Der Einfluss von  $IG_{\max}$  auf die Gewichtswerte  $w_q$  und Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler für den gesamten Handelszeitraum geht verloren, wenn  $IG_{\max}$  den Schwellwert  $I_{2,\min}^+$  in (64) unterschreitet. Die Gewichtswerte  $w_q$  sind in diesem Fall gemäß (65) gleichmäßig auf die Segmente verteilt, welche Kaufkandidaten enthalten.*

**Bemerkung zum Schwellwert  $I_{2,\min}^+$ :**

Der Schwellwert  $I_{2,\min}^+$  hat Ähnlichkeit mit dem in [1] eingeführten Schwellwert

$$I_{2,\min} = \min\{I_2(\Lambda_q) \mid 1 \leq q \leq Q\}.$$

Dieser Schwellwert definiert den sog. Linearitätsbereich  $IG_{\max} \leq I_{2,\min}$ , welcher durch den mittleren Investitionsgrad  $IG = IG_{\max}$  gekennzeichnet ist. Im Unterschied zu (64) erstreckt sich die Minimierung auf alle Segmente. Daraus resultiert  $I_{2,\min} = 0$ , wenn es Segmente ohne Kaufkandidaten gibt. In (64) dagegen erfolgt die Minimierung nur für Segmente mit Kaufkandidaten und man erhält daher stets einen positiven Schwellwert  $I_{2,\min}^+ > 0$ . Seine Beziehung zum Schwellwert  $I_{2,\min}$  ist durch

$$I_{2,\min}^+ \geq I_{2,\min}$$

gegeben.

### 3.9.2 Großer maximaler Investitionsgrad

Im Folgenden wird für den maximale Investitionsgrad

$$IG_{\max} \geq I_{2,\max} := \max\{I_2(\Lambda_q) \mid 1 \leq q \leq Q\} \quad (66)$$

vorausgesetzt. Dieser Bereich wird in [1] als *Sättigungsbereich* bezeichnet. Nach (61) ist in diesem Bereich

$$IG(q \cdot \tau_h) = I_2(\Lambda_q), \quad 1 \leq q \leq Q, \quad (67)$$

d.h.  $IG_{\max}$  begrenzt nicht den Investitionsgrad. In diesem Fall hat der Investitionsparameter  $IG_{\max}$  weder Einfluss auf den Investitionsgrad  $IG$  noch auf die Gewinnfaktoren  $g(q)$  in (11) und damit auch nicht auf den Gewinnfaktor  $G$ . Es wird nachgeprüft, dass im Sättigungsbereich auch kein Einfluss auf die in der vorliegenden Arbeit eingeführten Statistikgrößen besteht. Zweitens wird die Abhängigkeit der Statistikgrößen von den Investitionsparametern  $U_{\min}$  und  $\tau$  angegeben.

**Sättigungsbereich und Investitionsdauer:**

In [1] wurden „Turbulenzen“ in der Abhängigkeit des Handelsprozesses von der Investitionsdauer  $\tau$  bei kleiner Investitionsdauer gefunden. Diese werden durch die Investitionsregel

$$\tau' = \tau \cdot IG_{\max} \geq \tau_h \quad (68)$$

reduziert bzw. vermieden. Hierbei stellt  $\tau'$  die modifizierte Investitionsdauer in (2) dar, bei der die Begrenzung des Investitionsgrades durch  $IG_{\max}$  berücksichtigt wird. Der Zusammenhang zwischen

der Investitionsregel und dem Sättigungsbereich ergibt sich aus folgender in [1] nicht enthaltenen elementaren Abschätzung: Nach (3) ist zunächst

$$I_2(t) = \min\{N(t)/U_{\min}, 1/\tau\} \leq 1/\tau. \quad (69)$$

Daraus folgt die für alle Segmente gültige Abschätzung

$$I_2(\Lambda_q) = \sum_{t \in \Lambda_q} I_2(t) \leq \tau_h/\tau, \quad 1 \leq q \leq Q$$

bzw. die Ungleichung

$$I_{2,max} \leq \tau_h/\tau. \quad (70)$$

Wird die Investitionsregel (68) befolgt, ergibt sich

$$IG_{\max} \geq \tau_h/\tau \geq I_{2,max},$$

d.h.  $IG_{\max}$  liegt automatisch im Sättigungsbereich, wenn die Investitionsregel angewandt wird. Die Investitionsregel schaltet daher den Einfluss des Investitionsparameters  $IG_{\max}$  auf die Statistikgrößen aus. Dem Sättigungsbereich kommt somit eine besondere Bedeutung zu. Die Analyse der Statistikgrößen für den Sättigungsbereich ist daher geboten.

### Gewichtswerte $w_q$ :

Einsetzen von (63) ergibt für die Gewichtungsfaktoren  $w_q$  in (22) für den Sättigungsbereich

$$w_q = \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^Q IG(q' \cdot \tau_h)} = \frac{I_2(\Lambda_q)}{\sum_{q'=1}^Q I_2(\Lambda_{q'})}. \quad (71)$$

Um die Abhängigkeit der Gewichtungsfaktoren  $w_q$  von den Investitionsparametern  $U_{\min}$  und  $\tau$  zu erkennen, wird der sogenannte *gedeckelte Tagesumfang*

$$\widehat{N}(t) := \min\{N(t), U_{\min}/\tau\} \quad (72)$$

eingeführt. Hierbei wird die Anzahl der Kaufkandidaten auf den Schwellwert  $U_{\min}/\tau$  begrenzt. Durch die Deckelung wird die Anzahl der Kaufkandidaten nicht berücksichtigt, wenn diese den Schwellwert überschreitet. Die größtmögliche Deckelung liegt für einen Schwellwert  $U_{\min}/\tau \leq 1$  vor. Dann erfasst der gedeckelte Tagesumfang nur die Information, ob Kaufkandidaten vorliegen oder nicht. Mit Hilfe des gedeckelten Tagesumfangs können die Investitionsraten  $I_2(t)$  und  $I_2(\Lambda_q)$  gemäß

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \min\{N(t)/U_{\min}, 1/\tau\} \\ &= \frac{1}{U_{\min}} \cdot \widehat{N}(t) \end{aligned} \quad (73a)$$

$$I_2(\Lambda_q) = \frac{1}{U_{\min}} \cdot \widehat{N}_q, \quad \widehat{N}_q := \sum_{t \in \Lambda_q} \widehat{N}(t) \quad (73b)$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnet  $\widehat{N}_q$  den gedeckelten Umfang für das  $q$ -te Segment. Für die Gewichtungsfaktoren  $w_q$  folgt

$$w_q = \frac{\widehat{N}_q}{\widehat{N}_{tot}}, \quad \widehat{N}_{tot} := \sum_{q'=1}^Q \widehat{N}_{q'}, \quad (74)$$

wobei  $\widehat{N}_{tot}$  den gedeckelten Umfang des gesamten Handelszeitraum bezeichnet. Die Darstellung in (74) zeigt, dass die Gewichtswerte  $w_q$  wie die gedeckelten Umfänge bezüglich der Investitionsparameter  $U_{\min}$  und  $\tau$  nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  abhängen. Diese Art der Abhängigkeit lässt sich auf die anderen Gewichtswerte sowie Momente, Chance, Risiko und Fehler übertragen, wie im Folgenden ausgeführt wird.

1. Gewichtswerte  $w_q(t)$  und  $w(t)$ :  
Für  $w_q(t)$  in (30a) folgt aus (73a)

$$w_q(t) = \frac{I_2(t)}{I_2(\Lambda_q)} = \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{N}_q}, \quad t \in \Lambda_q.$$

Für  $w(t)$  in (30c) erhält man mit (74)

$$\begin{aligned} w(t) &= w_q \cdot w_q(t) = \frac{\widehat{N}_q}{\widehat{N}_{tot}} \cdot \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{N}_q} \\ &= \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{N}_{tot}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Die Gewichtswerte  $w_q(t)$  und  $w(t)$  hängen somit wie  $w_q$  ebenfalls nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  ab.

2. Segment-Mittelwerte:

Die Segment-Mittelwerte  $M1_q$ ,  $M2_q$ ,  $Ch_q$ ,  $Risk_q$  und  $MSE_q^{in}$  ergeben sich aus einer Gewichtung von Tages-Mittelwerten mit den Gewichtswerten  $w_q(t)$  (s. Abb. 2 (S. 11)) und hängen somit nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  ab.

3. Statistikgrößen für  $M1$ ,  $M2$ ,  $Ch$ ,  $Risk$  und  $MSE^{in}$ :

Diese Statistikgrößen ergeben sich aus den entsprechenden Segment-Mittelwerten bei einer Gewichtung mit  $w_q$  und hängen somit ebenfalls nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  ab.

4. Fehler  $MSE$  und Segmentwerte  $MSE_q$ :

Mit  $M1$  und  $M2$  hängt auch der Fehler  $MSE = M2 - M1^2$  nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  ab. Nach (41) trifft dies ebenso für die Segment-Mittelwerte  $MSE_q$  zu. Die Abhängigkeit vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  besteht auch für den inneren und äußeren Fehler für die Segment-Mittelwerte und den gesamten Handelszeitraum.

Fassen wir zusammen:

**LEMMA 2 (Großer maximaler Investitionsgrad)** *Im Sättigungsbereich  $IG_{\max} \geq I_{2,max}$  hat der maximale Investitionsgrad  $IG_{\max}$  keinen Einfluss auf die Statistik. Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler hängen bezüglich der Investitionsparameter  $U_{\min}$  und  $\tau$  nur vom Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  ab.  $IG_{\max}$  liegt im Sättigungsbereich, wenn die Investitionsregel  $\tau' \geq \tau_h$  in (68) mit der modifizierten Investitionsdauer  $\tau' = \tau \cdot IG_{\max}$  erfüllt ist.*

**Ergänzung:** In [1] werden reale Kursdaten statistisch untersucht und dabei der Zusammenhang

$$I_{2,max} = \tau_h/\tau \quad (76)$$

festgestellt. Die Ungleichung in (70) ist in diesem Fall mit Gleichheit erfüllt. Der Sättigungsbereich  $IG_{\max} \geq I_{2,max}$  ist dann durch  $\tau \cdot IG_{\max} \geq \tau_h$ , also gerade durch die Investitionsregel  $\tau' \geq \tau_h$  in (68) charakterisiert. Investitionsregel und Sättigungsbereich sind somit deckungsgleich.

Der Grund für (76) ist der für die statistische Auswertung zugrunde gelegte große Handelszeitraum. Er verursacht Segmente, für welche die sog. *Liquiditätsbedingung*

$$N(t) \geq U_{\min}/\tau$$

an allen Handelstagen des Segments erfüllt ist. Nach (3) ist dann  $I_2(t) = 1/\tau$  und daher  $I_2(\Lambda_q) = \tau_h/\tau$ . Die Ungleichung in (70) ist daher mit Gleichheit erfüllt. Damit ist gezeigt: Die Aussage in Lemma 2 (S. 25), wonach aus der Investitionsregel der Sättigungsbereich folgt, lässt sich umkehren, wenn es liquide Segmente gibt. Dies sind Segmente, für welche an allen Handelstagen des Segments die Liquiditätsbedingung erfüllt ist.

## 4 Referenz-Statistik: Gewöhnliche Mittelung

Im Folgenden werden den statistischen Größen für Momente, Chance, Risiko und Fehler „gewöhnliche Mittelwerte“ gegenüber gestellt. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass über alle Kaufkandidaten im Handelszeitraum arithmetisch gemittelt wird. Erst beim Schreiben der vorliegenden Arbeit wurde festgestellt, dass durch geeignete Wahl der Investitionsparameter die neu eingeführten statistischen Größen mit den gewöhnlichen Mittelwerten übereinstimmen. Zunächst wird das Konzept, durch geeignete Wahl der Investitionsparameter statistische Größen auf arithmetische Mittelwerte zurückzuführen, anhand des Momentes erster Ordnung dargestellt. Dann erfolgt die Erweiterung auf die statistischen Größen Chance, Risiko und Fehler.

### 4.1 Moment erster Ordnung

Im Folgenden wird das Moment erster Ordnung in (27),

$$\begin{aligned} M1 &= \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot M1(t) , \\ M1(t) &= \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in \text{buy}(t)} G(n, t) , \quad N(t) > 0 \end{aligned}$$

mit dem arithmetischen Mittelwert

$$M1' := \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \sum_{n \in \text{buy}(t)} G(n, t) \quad (77)$$

verglichen. Hierbei bezeichnet

$$N_{tot} := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} N(t) \quad (78)$$

die Anzahl aller Kaufkandidaten im Handelszeitraum  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h$ .

Der Unterschied zwischen  $M1$  und  $M1'$  besteht darin, dass bei  $M1$  eine zweifache Mittelung vorgenommen wird: Zunächst werden die Tages-Mittelwerte  $M1(t)$  für jeden Handelstag  $t$  gebildet. Dann erfolgt eine gewichtete Mittelung von  $M1(t)$  mit den Gewichtswerten  $w(t)$  über alle Handelstage. Um  $M1$  mit  $M1'$  vergleichen zu können, wird  $M1'$  in Abhängigkeit von den Tages-Mittelwerten  $M1(t)$  dargestellt. Dies gelingt in einfacher Weise durch die folgende Umformung, wobei nur über Handelstage mit  $N(t) > 0$  zu summieren ist:

$$\begin{aligned} M1' &= \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \sum_{n \in \text{buy}(t)} \frac{N(t)}{N_{tot}} \cdot \frac{1}{N(t)} \cdot G(n, t) \\ &= \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \frac{N(t)}{N_{tot}} \cdot M1(t) . \end{aligned} \quad (79)$$

Es besteht daher Übereinstimmung mit der statistischen Größe  $M1$ , falls die Gewichtswerte  $w(t)$  mit  $N(t)/N_{tot}$  übereinstimmen. Dies trifft bei geeigneter Wahl der Investitionsparameter zu, wie im Folgenden gezeigt wird.

### 4.2 Gewichtung

Die Investitionsparameter  $U_{\min}$ ,  $\tau$  und  $IG_{\max}$  bewirken zwei Begrenzungen der Investitionsraten bzw. Investitionsgrade: Eine Begrenzung von  $I_2(t)$  und eine Begrenzung von  $IG(q \cdot \tau_h)$  gemäß der Beziehungen (69) und (61),

$$I_2(t) = \min\{N(t)/U_{\min} , 1/\tau\} , \quad (80)$$

$$IG(q \cdot \tau_h) = \min\{I_2(\Lambda_q) , IG_{\max}\} . \quad (81)$$

Beide Begrenzungen können durch geeignete Wahl der Investitionsparameter aufgehoben werden.

1. Keine Begrenzung durch die Investitionsdauer:

Die Begrenzung von  $I_2(t)$  durch  $1/\tau$  entfällt nach (80) unter der Voraussetzung

$$N(t) \leq U_{\min}/\tau \text{ (erste Voraussetzung)}. \quad (82)$$

In diesem Fall ist  $I_2(t)$  an allen Handelstagen durch  $I_2(t) = N(t)/U_{\min}$  gegeben. Nach (72) findet in diesem Fall keine Decklung statt, d.h. es gilt

$$\widehat{N}(t) = N(t), \quad \widehat{N}_{tot} = N_{tot}. \quad (83)$$

Da die Anzahl der Kaufkandidaten für alle Handelstage durch die Anzahl  $N$  der Wertpapiere begrenzt ist, kann durch einen ausreichend großen Wert für  $U_{\min}$  gemäß

$$U_{\min} \geq N \cdot \tau \quad (84)$$

die Begrenzung von  $I_2(t)$  verhindert werden.

2. Keine Begrenzung durch  $IG_{\max}$ :

Eine Begrenzung von  $IG(q \cdot \tau_h)$  durch  $IG_{\max}$  entfällt nach (81) unter der Voraussetzung

$$IG_{\max} \geq I_2(\Lambda_q) \text{ (zweite Voraussetzung)}. \quad (85)$$

$IG_{\max}$  liegt somit im Sättigungsbereich (66). Die Gewichtswerte  $w(t)$  sind daher durch (75) gegeben,

$$w(t) = \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{N}_{tot}}. \quad (86)$$

Werden beide Voraussetzungen kombiniert, ergeben sich die Gewichtswerte

$$w(t) = \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{N}_{tot}} = \frac{N(t)}{N_{tot}}, \quad (87)$$

also genau die Gewichtswerte in der Darstellung von  $M1'$  in (79). Die statistischen Größe  $M1$  und  $M1'$  stimmen dann überein. Die erste Voraussetzung kann stets durch einen ausreichend großen Wert für  $U_{\min}$  gemäß (84) erreicht werden. Die zweite Voraussetzung beinhaltet, das  $IG_{\max}$  im Sättigungsbereich liegt. Nach Lemma 2 (S. 25) ist dafür die Investitionsregel in (68) hinreichend.

Die Statistikgrößen für Momente zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler erhält man wie das Moment erster Ordnung aus der Darstellung in (34),

$$S' := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot S(t), \quad w(t) = N(t)/N_{tot}.$$

Für die Momente erster und zweiter Ordnung sowie Chance und Risiko sind für  $S(t)$  die in (20) definierten Tages-Mittelwerte einzusetzen, für den Fehler die Tages-Mittelwerte des Fehlers gemäß (37b) mit  $M1 = M1'$ . Dies führt auf

$$M1' = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \sum_{n \in buy(t)} G(n, t), \quad (88a)$$

$$M2' = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \sum_{n \in buy(t)} G^2(n, t), \quad (88b)$$

$$Ch' = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} |\{n \in buy(t) | G(n, t) > G_C\}|, \quad (88c)$$

$$Risk' = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} |\{n \in buy(t) | G(n, t) < G_R\}|, \quad (88d)$$

$$MSE' = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t) - M1']^2. \quad (88e)$$

Fassen wir zusammen:

**LEMMA 3 (Referenz-Statistik)** *Wenn die Investitionsstreuung  $U_{\min}$  ausreichend groß wie in (84) gewählt wird und der maximale Investitionsgrad im Sättigungsbereich  $IG_{\max} \geq I_{2,\min}$  liegt, was unter der Investitionsregel  $\tau' = \tau \cdot IG_{\max} \geq \tau_h$  in (68) der Fall ist, sind die Gewichtswerte durch  $w(t) = N(t)/N_{tot}$  gegeben und Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler ergeben sich durch gewöhnliche Mittelung gemäß (88).*

Das Moment erster Ordnung ist nach (88) das mittlere Kursverhältnis  $G(n, t)$  eines Kaufkandidaten im Handelszeitraum, das Moment zweiter Ordnung das mittlere quadratische Kursverhältnis. Die Chance gibt die relative Häufigkeit dafür dar, dass das Kursverhältnis  $G(n, t)$  eines Kaufkandidaten im Handelszeitraum die Schranke  $G_C$  übertrifft. Analog erhält man für das Risiko die relative Häufigkeit dafür, dass das Kursverhältnis  $G(n, t)$  eines Kaufkandidaten im Handelszeitraum unter der Schranke  $G_R$  liegt. Schließlich gibt der Fehler die mittlere quadratische Abweichung des Kursverhältnisses  $G(n, t)$  von seinem Mittelwert im Handelszeitraum an.

Die Gewichtung für die Referenz-Statistik mit  $w(t) = N(t)/N_{tot}$  liefert für eine große Anzahl Kaufkandidaten an einem Handelstag  $t$  einen entsprechend großen Gewichtswert  $w(t)$ . Hierbei wird nicht berücksichtigt, dass Neuinvestitionen an diesem Tag nur begrenzt vorgenommen werden. Im Gegensatz dazu kann durch eine Decklung der Anzahl der Kaufkandidaten mit der Schranke  $U_{\min}/\tau$  dieser Sachverhalt berücksichtigt werden. Für Werte von beispielsweise 1-2 für die Schranke  $U_{\min}/\tau$  wird durch die Decklung die Anzahl der Kaufkandidaten drastisch reduziert.

## 5 Experimentelle Ergebnisse für historische Kursdaten

### Markt:

Der verwendete Markt ist „FEBRDUSA\_1“, welcher auch in [1] und [2] benutzt wurde. Es handelt sich um historische Eröffnungskurse von 867 Aktien, die an der Frankfurter Börse gehandelt wurden. Die Auswahl der Wertpapiere wurde im Hinblick auf die Datenqualität vorgenommen und ist in [11] dargestellt.

### Handelszeitraum und Haltefrist:

Der Handelszeitraum ist die zweite Hälfte des in [1] eingeführten Basis-Zeitraums, welcher die Handelstage vom 2.1.1987 bis 2.6.2017 beinhaltet (7680 Tage). Der Handelszeitraum umfasst somit 3840 Handelstage vom 23.4.2002 (3841) bis zum 2.6.2017. Da die Haltefrist  $\tau_h = 30$  Handelstage beträgt, liegen  $3840/30 = 128$  Segmente vor und  $Q$  beträgt 127. Die für die statistische Auswertung benutzten Kursverhältnisse  $s(t + \tau_h)/s(t)$  werden für alle Handelstage ausgewertet, für die  $t$  und  $t + \tau_h$  im Handelszeitraum liegen. Somit endet  $t$  vor dem 2.6.2017 bei  $t = 7650$  (20.4.2017).

### Investitionsparameter:

Neben der Haltefrist werden die weiteren Investitionsparameter  $U_{\min}$  (Investitionsstreuung),  $\tau$  (Investitionsdauer),  $IG_{\max}$  (maximaler Investitionsgrad) und die Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  für Chance und Risiko benötigt. Sie lauten:

$$\tau_h = \tau = 30, U_{\min} = 45, IG_{\max} = 1, \quad (89a)$$

$$G_C = 1.25, G_R = 1/G_C = 0.8. \quad (89b)$$

Die Werte in der ersten Zeile entsprechen somit den Einstellungen in [1]. Die Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  in der zweiten Zeile werden für die beiden in dieser Arbeit eingeführten Statistikgrößen Chance und Risiko benötigt und entsprechen (50) und (55) für die Haltefrist  $\tau_h = 30$  Handelstage. Der Schwellwert für Deckelung beträgt  $U_{\min}/\tau = 1.5$ , sodass eine signifikante Decklung der Tages-Umfänge  $N(t)$  gemäß (72) vorliegt. Die modifizierte Investitionsdauer beträgt  $\tau' = \tau \cdot IG_{\max} = \tau_h$ . Die Investitionsregel in (68) ist daher mit Gleichheit erfüllt und  $IG_{\max}$  liegt im Sättigungsbereich auf der Grenze. Nach Lemma 2 (S. 25) ist der Einfluss der Investitionsparameter  $U_{\min}$  und  $\tau$  auf Momente, Chance, Risiko und Fehler durch das Verhältnis  $U_{\min}/\tau$  festgelegt.

**Kaufbedingungen:**

Alle Kaufbedingungen werden mit Hilfe des Merkmals

$$c_1 := c_1(t) := s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$$

gebildet. Hierbei bezeichnet

$$GD_{200}\{s\}(t) := \frac{1}{200} \sum_{t'=t-200+1}^t s(t')$$

den gleitenden Durchschnitt der letzten 200 Handelstage.

Eine näher untersuchte Kaufbedingung ähnelt der Kaufbedingung  $1.5 \leq c_1 < 1.6$  aus [1]. Sie lautet

$$1.5 \leq c_1 < 1.625 \text{ (Momentum-Strategie)}. \quad (90)$$

Für den Kauf eines Wertpapiers wird somit ein Kurs verlangt, der zwischen 50 und 62.5% und somit recht deutlich über dem gleitenden Durchschnitt der letzten 200 Tage liegt, d.h. es wird auf weiter steigende Kurse gesetzt. Es handelt sich somit wie in [7] um eine mit Hilfe eines gleitenden Durchschnitts gebildete *Momentum-Strategie*. Die Kaufbedingung in (90) unterscheidet sich von denen in [7], [12], [13], [14], [15], welche das Überschreiten eines gleitenden Durchschnitts für den Kauf zugrunde legen. Auf diesen Unterschied und eine Optimierung der Kaufbedingung wird nicht eingegangen, da es in der vorliegenden Arbeit um die Demonstration von Statistikgrößen anhand eines Beispiels geht.

Im Unterschied zu [1] wird die Kaufbedingung aber durch einen Zusatz modifiziert, um Wertpapiere mit kleinen Kurswerten, sogenannte *Pennystocks*, vom Kauf auszuschließen [16]. Es wurde nämlich festgestellt, dass ohne den Ausschluss von Pennystocks experimentelle Ergebnisse vom Kurswert des Wertpapiers am Kauftag abhängen. Auf diesen Pennystock-Effekt wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen, sondern in einem späteren Teil der Schriftenreihe über Datenqualität. Der Zusatz lautet

$$s^*(t) \geq 2. \quad (91)$$

Hierbei bezeichnet  $s^*(t)$  den unkorrigierten Kurswert (Eröffnungskurs) des Wertpapiers am Handelstag  $t$ . Im Unterschied zu  $s(t)$  wird dieser Kurs nicht aufgrund von Kapitalmaßnahmen wie beispielsweise Aktiensplits korrigiert, sondern stellt den ursprünglichen Kurswert der Aktie am Handelstag  $t$  dar. Die Bedingung wird daher nicht durch Kapitalmaßnahmen nach dem Handelstag  $t$  beeinflusst, was für die Reproduzierbarkeit experimenteller Ergebnisse erforderlich ist. Die vollständige Kaufbedingung lautet somit

$$1.5 \leq c_1 < 1.625, \quad s^*(t) \geq 2. \quad (92)$$

Durch den Zusatz wird der Kauf von Wertpapieren bei kleinen Kursen verhindert. Nicht verhindert wird der Verkauf eines Wertpapiers bei Kursen unterhalb des Schwellwertes 2 aufgrund gefallener Kurse.

**Statistische Auswertung:**

Die statistische Auswertung erfolgt zunächst mit Hilfe eines Experten und dann durch eine statistische Formelauswertung. Der *Experte* zeigt die Abhängigkeit der Statistik vom Merkmal  $c_1$ , im Folgenden als *Experten-Plots* bezeichnet. Hierbei stellt jeder *Knoten* eine mit dem Merkmal  $c_1$  parametrisierte Kaufbedingung dar. Der erste Knoten (1,1) beinhaltet den sog. *Grundbereich*  $0 \leq c_1 < 2$ . Der Knoten (5, 12) beinhaltet die Momentum-Strategie in (92). Es handelt sich um den 12. *signifikanten Knoten* in der Ebene 5. In dieser Ebene wird der Grundbereich viermal halbiert, woraus 16 Intervalle der Länge  $2/16 = 0.125$  resultieren. Für signifikante Knoten beträgt die Anzahl der Kaufkandidaten mindestens 200. Der erste signifikante Knoten beinhaltet das Intervall  $0.125 \leq c_1 < 0.25$  und der 12.-te signifikante Knoten beinhaltet das Intervall  $1.5 \leq c_1 < 1.625$ . Für den Knoten (5, 12) erfolgt eine statistische Formelauswertung, welche mehr ins Detail geht. Hierbei wird der zeitliche Verlauf der Statistikgrößen anhand von *Segmentverläufen* aufgezeigt. Bei allen experimentellen Ergebnissen wird dabei der Zusatz  $s^*(t) \geq 2$  verwendet.

## 5.1 Eine Momentum-Strategie als Kaufbedingung

Die folgende Tabelle enthält die statische Auswertung durch einen Experten für die Momentum-Strategie. Die Statistikgrößen sind im Knoten (5, 12) gespeichert. Die Kosten werden nicht im Experten bestimmt, da sie dort (noch) nicht implementiert sind, sondern mit Hilfe einer statistischen Formelauswertung. Zum Vergleich sind in der Tabelle in einer weiteren Spalte die Statistikgrößen für den Grundbereich  $0 \leq c_1 < 2$  angegeben. Der Wert  $c_1 = 2$  wird nur selten erreicht oder überschritten, sodass der Grundbereich praktisch einer Auswertung der Kursverhältnisse  $G(n, t) = s(n, t+30)/s(n, t)$  ohne Kaufbedingung für das Merkmal  $c_1$  entspricht. In diesem Fall ist nur die Bedingung  $s^*(t) \geq 2$  zur Unterdrückung des Pennystock-Effekts wirksam.

Statistikgröße	Momentum-Strategie	Grundbereich
Kaufbedingung	$1.5 \leq c_1 < 1.625, s^*(t) \geq 2$	$c_1 < 2, s^*(t) \geq 2$
Knoten	(5, 12)	(1, 1)
Anzahl Kaufkandidaten	19,709	2,759,942
Investitionsgrad $IG$	82.4%	100%
Kostenfaktor	1.87	0.672
Gewinnfaktor (nicht normiert)	19.24	4.635
Gewinnfaktor annualisiert	1.214	1.106
$GMG$	1.024	1.012
$AMG$	1.026	1.013
$AMG$ annualisiert	1.234	1.117
Moment $M1$	1.031	1.013
Chance	9.7%	3%
Risiko	6.8%	3.6%
Fehler $\sqrt{MSE}$	0.187	0.128
Innerer Fehler $\sqrt{MSE^{in}}$	0.171	0.118

Tabelle 1: Statistikgrößen für die Momentum-Strategie und Vergleich mit dem Grundbereich

### Normierungen:

Eine Normierung des Gewinnfaktors erfolgt in Form des  $GMG$  und einer Annualisierung. Durch die Definition  $GMG = G^{1/Q}$  ist der Bezugs-Zeitraum für den  $GMG$   $\tau_h = 30$  Handelstage. Bei einer Annualisierung beträgt der Bezugs-Zeitraum 1 Jahr und entspricht 250 Handelstagen. Der annualisierte Gewinnfaktor ist gemäß

$$G_{an} := GMG^{250/\tau_h} = G^{250/[Q \cdot \tau_h]}$$

definiert. Bei der Normierung werden die 250 Handelstage eines Jahres mit der Anzahl  $Q \cdot \tau_h$  Handelstagen ins Verhältnis gesetzt. Für den  $AMG$  lautet die Definition analog

$$AMG_{an} := AMG^{250/[Q \cdot \tau_h]}.$$

### Diskussion der Ergebnisse:

Die große Anzahl an Kaufkandidaten für den Grundbereich wird dadurch verursacht, dass der Grundbereich (näherungsweise) den Fall darstellt, dass keine Kaufbedingung mit dem Merkmal  $c_1$  benutzt wird. Der Investitionsgrad beträgt daher 100% und entspricht dem maximalen Investitionsgrad. Bei der Momentum-Strategie dagegen besteht keine Vollinvestition.

**Gewinnfaktoren:** Den annualisierten Gewinnfaktoren entnimmt man: Die Rendite für die Momentum-Strategie beträgt 21.4% pro Jahr ( $1.214 - 1$ ) und liegt damit deutlich über dem Wert für den Grundbereich, welche immerhin 10.6% beträgt. Zu Vergleichszwecken wird oft eine *buy-and-hold*-Strategie

benutzt, z.B. in [4], [12], [17], [18]. Sie liefert für den Markt FEBRDUSA\_1 die Rendite 10.2% pro Jahr (in Tab. 1 (S. 30) nicht dargestellt) und liegt damit etwas unter der Rendite für den Grundbereich. Die Gewinnfaktoren in unnormierter Form zeigen die Auswirkung für den zugrunde gelegten Handelszeitraum von über 15 Jahren. Für die Momentum-Strategie bewirkt der große Handelszeitraum eine Vervielfachung des Anfangs-Barkapitals um fast das 20-fache ( $G=19.24$ ) und ist damit wesentlich größer als für den Grundbereich ( $G=4.64$ ).

Der Effekt einer arithmetischen Mittelung beim *AMG* gegenüber einer geometrischen Mittelung beim *GMG* zeigt die Tabelle ebenfalls: Der *AMG* liegt etwas über dem *GMG*. Dies bedeutet, dass die arithmetische Mittelung etwas zu optimistisch ist. Auch bei einer Annualisierung kommt dieser Effekt zum Ausdruck.

Das Moment  $M1$  erster Ordnung liegt deutlich über dem Wert für den Grundbereich. Der Zusammenhang zwischen  $M1$  und dem *AMG* in (24),

$$AMG = 1 + IG \cdot [M1 - 1] ,$$

kann durch Einsetzen der Werte für den Investitionsgrad  $IG$ ,  $M1$  und *AMG* bestätigt werden. Für den Grundbereich stimmen *AMG* und  $M1$  überein, da für den Grundbereich Vollinvestition besteht ( $IG = 1$ ).

**Chance, Risiko und Fehler:** Für den Grundbereich liegt die Chance etwas unter dem Risiko — obwohl die durchschnittlichen Rendite für den Grundbereich 10.6% pro Jahr beträgt. Im Gegensatz zum Grundbereich liegt für die Momentum-Strategie die Chance deutlich über dem Risiko. Damit wird der Vorteil der Momentum-Strategie gegenüber dem Grundbereich untermauert. Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass der Fehler *MSE* bei der Momentum-Strategie gegenüber dem Grundbereich deutlich größer ist. Es liegt andererseits auf der Hand, dass eine deutlich bessere Gewinnentwicklung zu höheren Schwankungen der Kursverhältnisse  $G(n, t) = s(n, t + 30)/s(n, t)$  führt.

Chance und Risiko hängen von den Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  ab, welche gemäß (50) und (55) an die Haltefrist angepasst sind. Eine Beurteilung dieser Anpassung erfordert daher unterschiedliche Haltefristen. Bei Experimenten mit dem Markt FEBRDUSA\_1 zeigt sich, dass bei großer Haltefrist die Chance deutlich über dem Risiko liegt. Beispielsweise ergeben sich für den Grundbereich und  $\tau = \tau_h$ ,  $U_{\min} = 45$ ,  $IG_{\max} = 1$  für

$$\tau_h = 500 : Ch = 9.6\%, Risk = 5.8\% \text{ und für } \tau_h = 1000 : Ch = 15.7\%, Risk = 5.3\% .$$

Dies ist vermutlich auf die Rendite von 10.6% pro Jahr zurückzuführen. Eine genau Beurteilung der Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  anhand dieser Ergebnisse ist jedoch unklar und vermutlich nicht möglich.

## 5.2 Parametrisierte Kaufbedingung (Experten-Plots)

Als Kaufbedingung werden für das Merkmal  $c_1$  Intervalle gemäß

$$a \leq c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t) < b, s^*(t) \geq 2$$

verwendet. Die Implementierung erfolgt mit einem Experten für das Merkmal  $c_1$  und den zugrunde gelegten Handelszeitraum. Zunächst werden statistische Ergebnisse für Ebene 5 gezeigt, dann werden Knoten für Ebene 8 geplottet. Da nur signifikante Knoten geplottet werden, beginnen alle Plots mit dem Intervall  $0.125 \leq c_1 < 0.25$ . Experten-Plots für die Kosten werden nicht gezeigt, da die Kosten für Experten derzeit nicht implementiert sind, sondern nur für eine statistische Formelauswertung.

- Abb. 3 (S. 33): Vergleich zwischen *GMG* und *AMG*

Beide Größen werden annualisiert angegeben. Für den *GMG* bedeutet dies eine Umrechnung des Gewinnfaktors  $G$  von  $\tau_h = 30$  Handelstagen auf ein Jahr. Der *GMG* verläuft unter dem *AMG*, wie die Theorie vorhersagt. Die Abweichungen sind für die ersten Knoten signifikant. Gewinnfaktor und *AMG* nehmen bis zum Knoten 12 zu, danach fallen sie ab. Die Momentum-Strategie wird durch den Knoten 12 angegeben und liefert den größten Gewinnfaktor  $G_{an} = 1.214 < AMG_{an} = 1.234$ .

- Abb. 4 (S. 33): Chance und Risiko

Der zweite Plot zeigt die Verläufe für Chance und Risiko. Demnach liegen Chance und Risiko in der Mitte um den Merkmalwert  $c_1 = 1$  nahe bei 0 und nehmen nach außen hin deutlich zu. Der Plot ihrer Differenz  $Ch - Risk$  zeigt einen monotonen Anstieg (bis auf den ersten und die letzten beiden Knoten). Insbesondere überwiegt für Merkmalwerte  $c_1 < 1$  das Risiko für Merkmalwerte  $c_1 > 1$  die Chance — mit Ausnahme des ersten Knotens, für den Chance und Risiko etwa übereinstimmen. Man kann dies auch an den beiden Plots für Chance und Risiko ablesen: Der Verlauf der Chance stellt eine „V-Formation“ mit der Spitze in der Mitte dar. Durch leichtes „Kippen“ der V-Formation im Uhrzeigersinn entsteht der Verlauf für das Risiko.

- Abb. 5 (S. 34): Fehler

Der Fehler wird als Wurzel aus dem *MSE* angegeben, d.h. als *Root Mean Square Error (RMS)*. Er ist für die beiden mittleren Knoten um  $c_1 = 1$  am kleinsten und nimmt nach außen hin deutlich zu, wobei die Zunahme für Merkmalwerte  $c_1 < 1$  deutlich stärker ist als für Merkmalwerte  $c_1 > 1$ .

- Abb. 6 (S. 34): Investitionsgrad

Der Investitionsgrad ist für die vier mittleren Knoten (Knoten 6 – 9) am größten ( $IG = 100\%$ ) und fällt nach außen hin deutlich ab. Dies wird dadurch verursacht, dass im Außenbereich die Kaufbedingung seltener erfüllt ist.

- Abb. 7 (S. 35): Moment erster Ordnung und *AMG*

Das Moment erster Ordnung ist im mittleren Bereich am kleinsten und nimmt — abgesehen von den letzten zwei Knoten — nach außen hin deutlich zu. Der Unterschied zwischen dem Moment erster Ordnung und dem *AMG* lässt sich mit (24) erklären: Für die 4 mittleren Knoten 6 – 9 ist der Investitionsgrad  $IG = 1$  (siehe Abb. 6 (S. 34)). Folglich stimmen *M1* und *AMG* für diese Knoten überein. Während *M1* nach außen hin zunimmt, trifft dies für den *AMG* nicht zu. Sein Verlauf wird durch die Abnahme des Investitionsgrades nach außen hin verursacht. Das Moment erster Ordnung dagegen wird vom Investitionsgrad nicht beeinträchtigt. Abb. 7 (S. 35) deckt daher nicht nur ein hohes Moment *M1* für die Momentum-Strategie in Form von Knoten 12 auf, sondern auch höhere Momente für die ersten drei Knoten 1 – 3. Diese Knoten zeigen somit einen *Mean-Reversion-Effekt* wie in [19] für eine Haltefrist von 1 bis 3 Monaten, bei dem eine Kurserholung stattfindet, nachdem die Kurse sehr deutlich unter den gleitenden Durchschnitt der letzten 200 Handelstage gefallen sind. Im Unterschied zu Knoten 12 liegen die Investitionsgrade jedoch deutlich unter dem für Knoten 12, wie Abb. 6 (S. 34) zeigt. Die Gewinnfaktoren *G* für diese Knoten sind nach Abb. 3 (S. 33) daher gering. Der verwendete Markt bestehend aus 867 Wertpapieren stellt somit zu wenig Kaufkandidaten zur Verfügung, um von diesen Knoten zu profitieren.

**Bemerkung:** Dies gilt nur bei der ausschließlichen Benutzung eines einzigen Knotens, aber nicht bei einer Mischung von Knoten in Form einer Oder-Verknüpfung. Eine „Beimischung“ der Knoten 1 – 3 zum Knoten 12 ist daher in der Lage, den Gewinnfaktor zu steigern. Eine genaue Analyse ist einem weiteren Teil der Schriftenreihe vorbehalten.

- Abb. 8 (S. 35): Chance für eine große Knotenmenge

Bislang wurden Knotenmengen der Ebene 5 geplottet. Die Auswahl anderer Knotenmengen unter den 6746 Knoten des vorliegenden Experten ist ebenfalls möglich. Beispiele sind End- und Randknoten, welche durch die Topologie des Binärbaums des Experten definiert sind. Unter den vielen Möglichkeiten wird an dieser Stelle nur ein Beispiel dargestellt: Es werden alle Knoten der Ebene 8 geplottet. Diese Menge enthält 116 signifikante Knoten. Als Statistikgröße wird die Chance gewählt. Auffallend sind die Schwankungen der Chance-Werte im Außenbereich. Sie werden durch die abnehmende Anzahl Kaufkandidaten im Außenbereich verursacht.

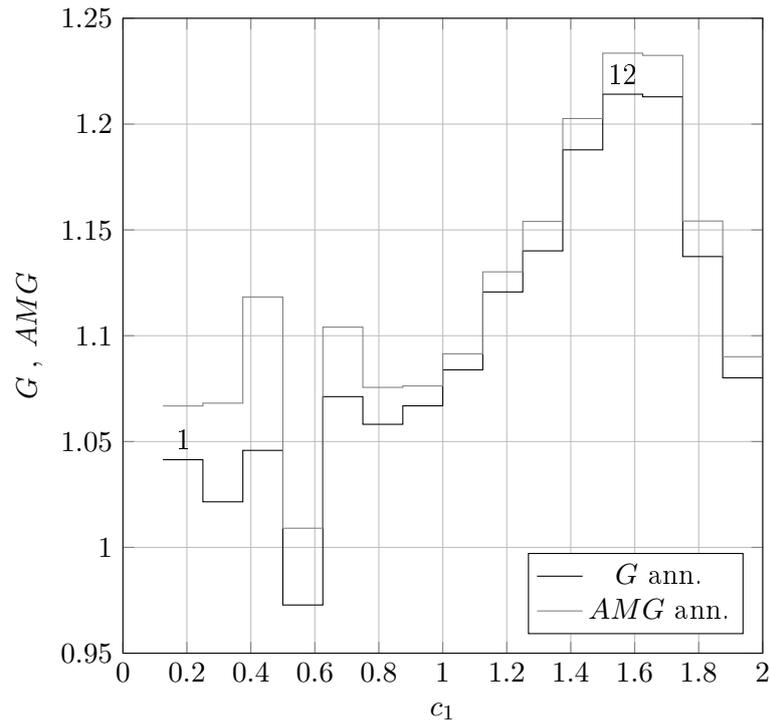


Abbildung 3: Gewinnfaktor  $G$  und  $AMG$  (beide annualisiert) für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

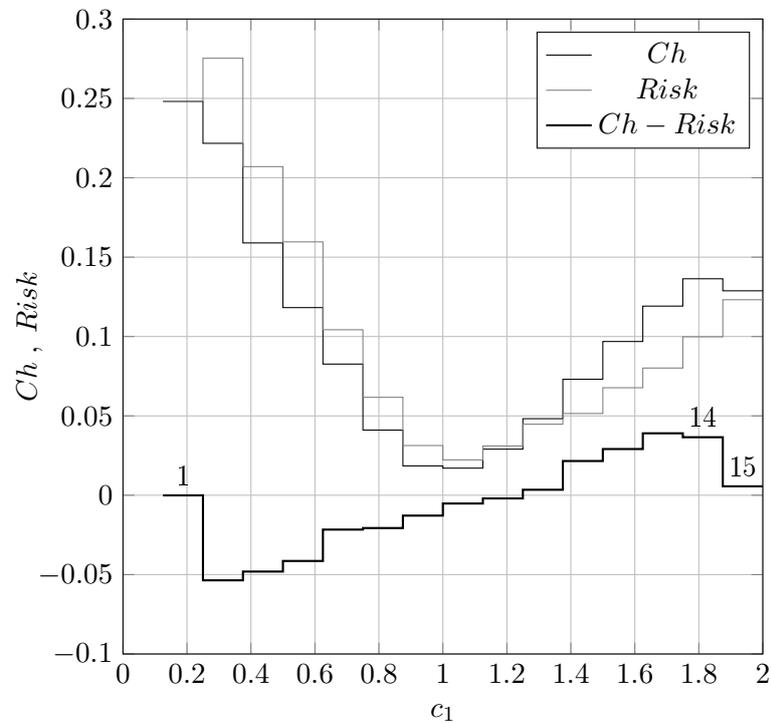


Abbildung 4: Chance und Risiko für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

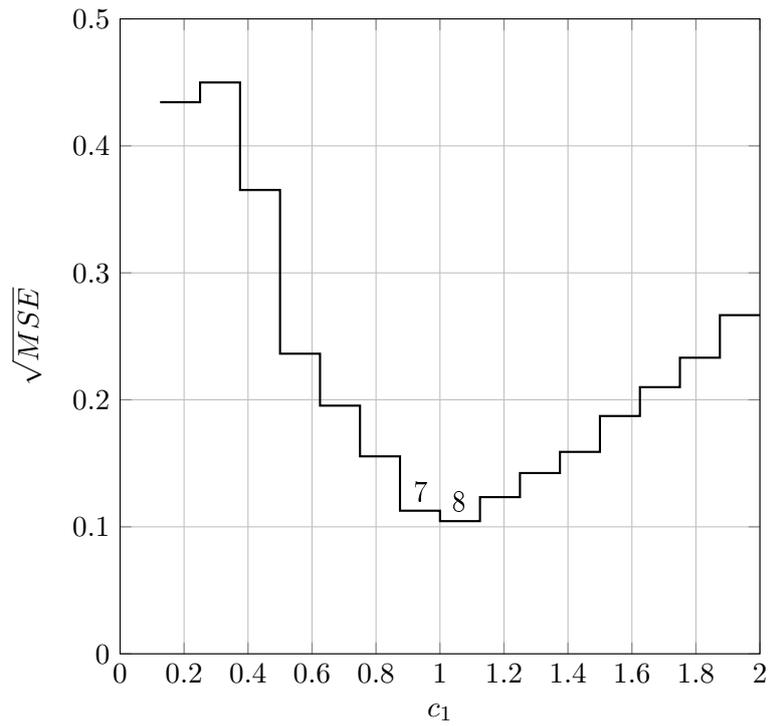


Abbildung 5: Wurzel aus Fehler für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

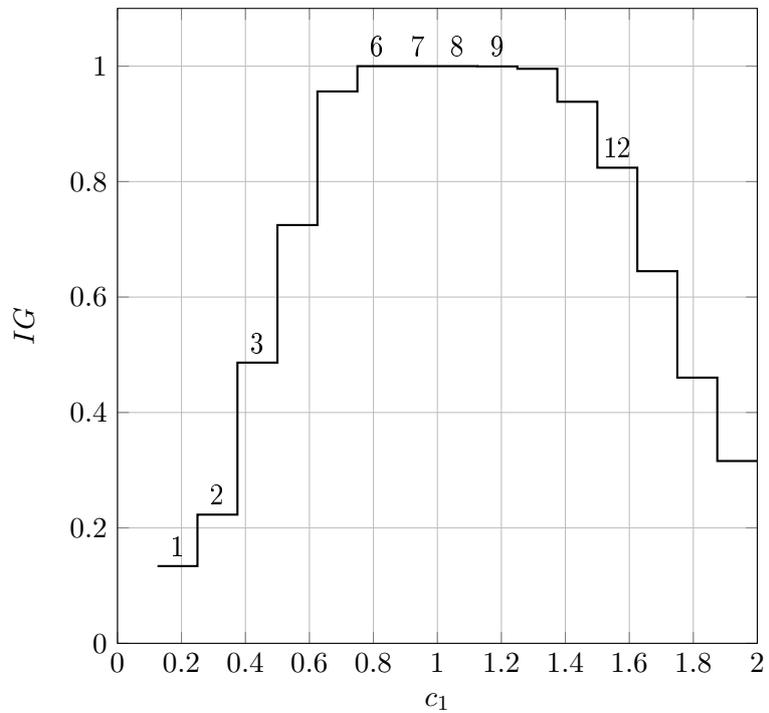


Abbildung 6: Investitionsgrad für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

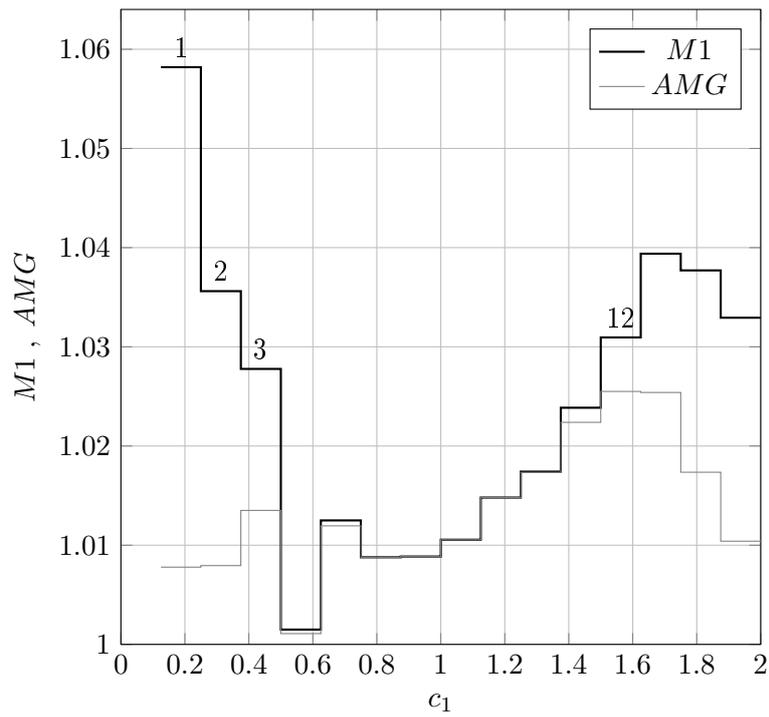


Abbildung 7:  $M1$  und  $AMG$  für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

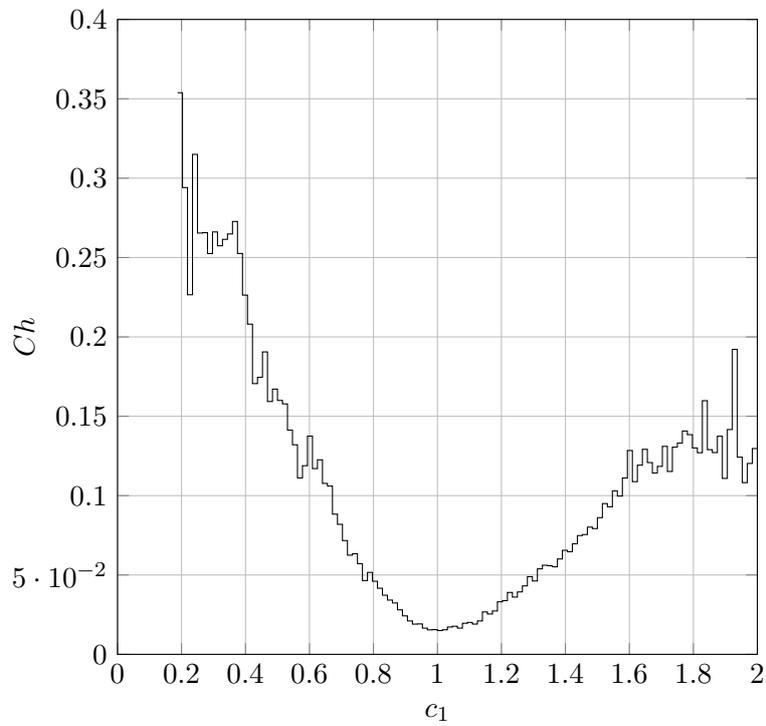


Abbildung 8: Chance für Ebene 8 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$

### 5.3 Zeitliche Verläufe für die Momentum-Strategie

Im Folgenden werden Segmentverläufe für die Kaufbedingung in (92) dargestellt. Mit  $q$  wird die Segmentnummer bezeichnet, welche im Bereich  $1 \leq q \leq Q = 127$  liegt.

- Abb. 9 (S. 37), oben: Kumulativer Gewinnfaktor

Der kumulative Gewinnfaktor ist in (17) definiert. Die logarithmische Skalierung der y-Achse deckt auf, dass der stärkste Anstieg zu Beginn des Handelszeitraums erfolgt. Der Verlauf des kumulativen Erfolges zeigt zwei signifikante Rückschläge: Ein erster Rückschlag nach dem Hoch bei Segmentnummer  $q = 51$  und einen zweiten Rückschlag nach dem Hoch bei  $q = 73$ . Die folgende Tabelle stellt die beiden Rückschläge sowie einen davor liegenden kleineren Rückschlag dar. Die angegebenen Handelstage beziehen sich auf das Ende eines Segments.

Hoch/Tief	Segmentnummer $q$	Handelstag	$G_{cum}(q)$
Hoch	34	21.4.2006	3.78
Tief	37	29.8.2006	3.22
Hoch	51	30.4.2008	6.75
Tief	60	26.5.2009	4.23
Hoch	73	1.12.2010	8.25
Tief	82	20.12.2011	5.53

Tabelle 2: Hochs und Tiefs des kumulativen Gewinnfaktors

- Abb. 9 (S. 37), unten: Kumulativer Kostenfaktor

Beim kumulativen Kostenfaktor werden die in den Segmenten auftretenden Kosten gemäß

$$CF_{cum}(q) := \frac{1}{C_{cash}(0)} \cdot \sum_{q'=1}^q cost_{q'} \quad (93)$$

aufsummiert. Sein Verlauf ähnelt dem Verlauf des kumulativen Gewinnfaktors. Im Unterschied zum Gewinnfaktor steigt der kumulative Kostenfaktor jedoch beständig, insbesondere auch in den Phasen eines Gewinnrückgangs.

- Abb. 10 (S. 38) und Abb. 11 (S. 38): Anzahl Kaufkandidaten und Investitionsgrad  
Es sind für jedes Segment die Anzahl  $N_q$  der Kaufkandidaten sowie der Investitionsgrad  $IG(q \cdot \tau_h)$  dargestellt. Die Anzahl der Kaufkandidaten beträgt in allen Segmenten mindestens zwei und ist in vielen Segmenten deutlich größer. Daraus resultiert für die meisten Segmente der Investitionsgrad  $IG = 1$  (Vollinvestition). Die logarithmische Skalierung der y-Achse hebt die Tiefs als „Spitzen“ deutlich hervor. Sie stimmen mit den Tiefs des Investitionsgrades (Handelstiefs) im zweiten Plot zeitlich überein.
- Abb. 12 (S. 39): Chance und Risiko  
Dargestellt ist die Differenz aus Chance und Risiko. Bis zum Hoch des Erfolges bei  $q = 51$  ist in der Regel die Chance größer als das Risiko. In den Rückgangs-Phasen des Erfolges nach den Segmentnummern 51 und 73 treten größere Ausschläge nach unten auf, in denen das Risiko überwiegt. Eine Ausnahme stellt Segmentnummer 55 dar. Für dieses Segment ist die Chance deutlich größer als das Risiko und die Differenz beträgt 0.75.
- Abb. 13 (S. 39): Fehler  
Es wird der Gesamtfehler  $MSE_q$  dargestellt und mit dem äußeren Fehler  $MSE_q^{out}$  verglichen. Der Gesamtfehler weist vier Hochs auf, deren Segmentnummern im Plot markiert sind:  
1.) Hochs bei  $q=30$  und  $q=34$ : Die ersten beiden Hochs treten bei  $q = 30$  und  $q = 34$ , dem ersten Hoch des Erfolges, auf.

2.) Hoch bei  $q=58$ : Dieses Hoch befindet sich kurz vor dem Tief des Erfolges bei  $q = 60$ . Im Unterschied zu den anderen Hochs ist der äußere Fehler signifikant, d.h. dieses Hoch wird vor allem durch einen größeren äußeren Fehler verursacht. Dagegen sind die anderen Hochs auf einen großen inneren Fehler zurückzuführen.

3.) Hoch bei  $q=106$ : Das Hoch bei  $q=106$  befindet sich in einer Anstiegsphase des Erfolges, die bei Segmentnummer  $q = 105$  beginnt.

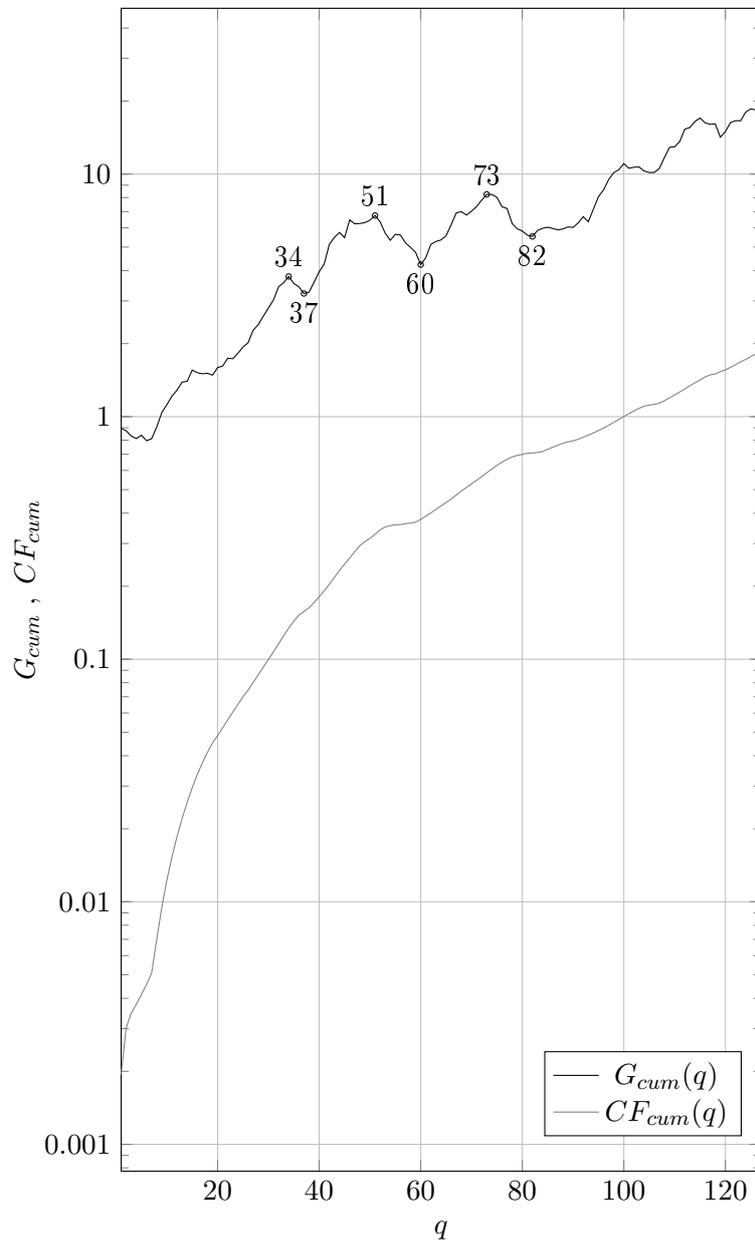


Abbildung 9: Segmentverlauf des kumulativen Gewinn- und Kostenfaktors für die Momentum-Strategie

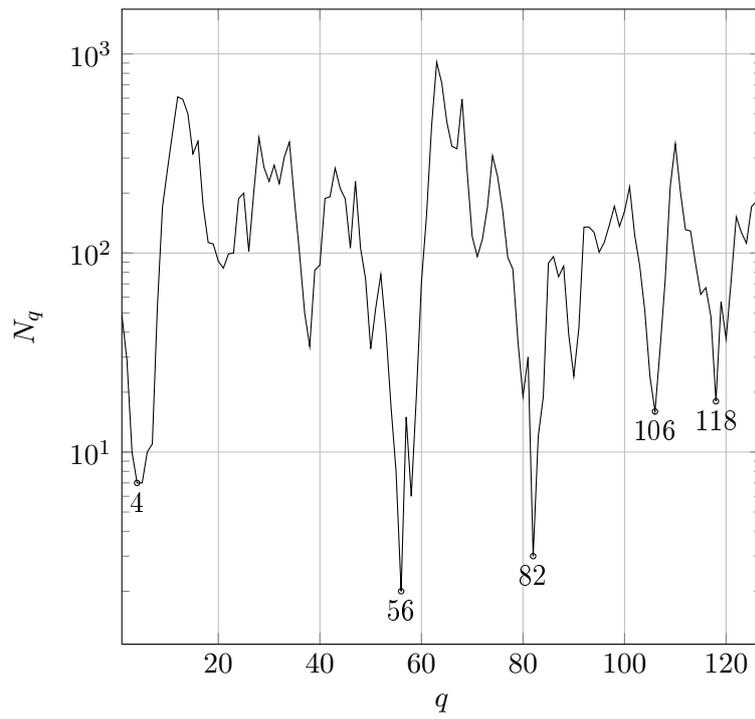


Abbildung 10: Segmentverlauf der Anzahl der Kaufkandidaten für die Momentum-Strategie

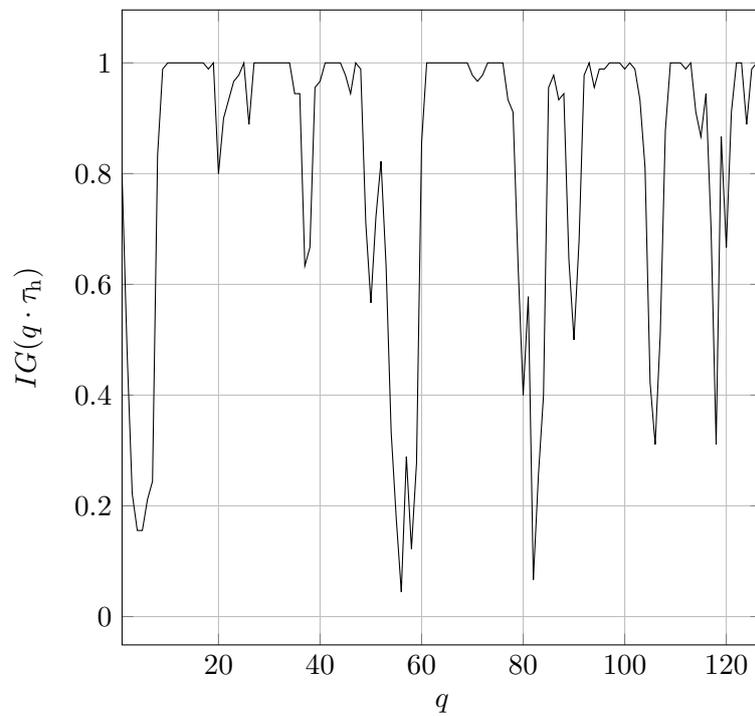


Abbildung 11: Segmentverlauf des Investitionsgrades für die Momentum-Strategie

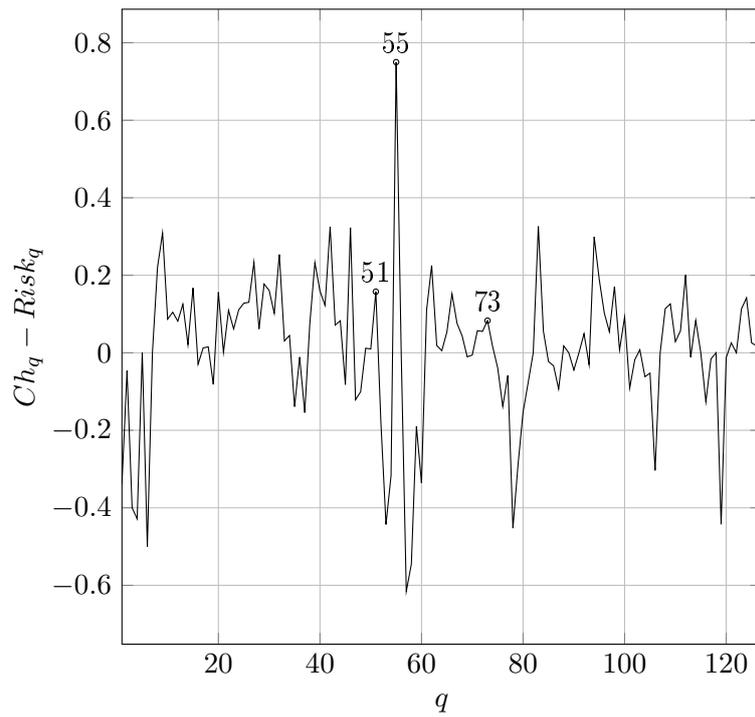


Abbildung 12: Segmentverlauf von Chance und Risiko für die Momentum-Strategie

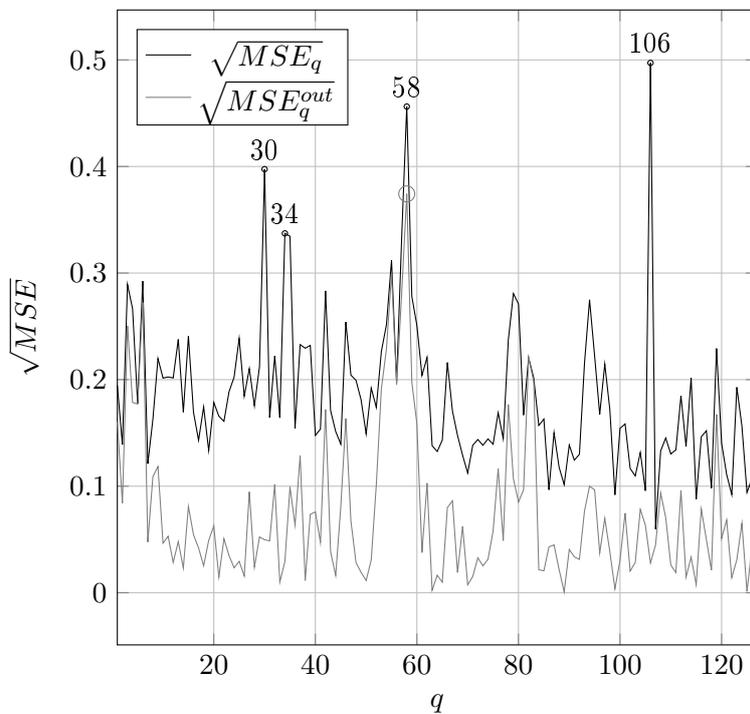


Abbildung 13: Segmentverlauf des Fehlers für die Momentum-Strategie

## 5.4 Referenz-Statistik

Im Folgenden werden bisherige statistische Ergebnisse mit der Referenz-Statistik verglichen. Für die Referenz-Statistik entsprechen die Einstellungen denen in (89) bis auf den Investitionsparameter  $U_{\min}$ . Nach Lemma 3 (S. 28) ist die Referenz-Statistik durch einen ausreichend großen Wert für  $U_{\min}$  gemäß  $U_{\min} \geq N \cdot \tau$  in (84) einstellbar. Die Anzahl  $N$  der Wertpapiere des Marktes FEBRDUSA\_1 beträgt  $N = 867$  [11]. Aus  $\tau = 30$  resultiert  $U_{\min} \geq 867 \cdot 30 = 26,010$ , sodass  $U_{\min} = 100T$  auch für größere Märkte ausreichend groß ist. Der Vergleich erfolgt somit durch zwei unterschiedliche Investitionsstreuungen:

- $U_{\min} = 45$  gemäß (89) für die Statistik,
- $U_{\min} = 10^5$  gemäß (84) für die Referenz-Statistik.

Zunächst werden Experten-Plots für das Moment erster Ordnung sowie Chance und Risiko gezeigt. Dargestellt werden wie bisher die Knoten der Ebene 5. Die größten Abweichungen der Referenz-Statistik von der Statistik treten für die ersten beiden Knoten auf. Zur näheren Analyse der Abweichungen werden Segmentverläufe für den zweiten Knoten dargestellt. Die Kaufbedingung für diesen Knoten lautet

$$0.25 \leq c_1 < 0.375, \quad s^*(t) \geq 2. \quad (94)$$

Anstelle der Segment-Mittelwerte  $S_q$  werden *Segmentanteile*  $w_q \cdot S_q$  dargestellt. Sie geben den Beitrag eines Segments an der Statistikgröße

$$S = \sum_{q=1}^Q w_q \cdot S_q$$

an. Durch die Segmentanteile soll untersucht werden, wie sich die Abweichungen der Referenz-Statistik von der Statistik zeitlich verteilen.

### Parametrisierte Kaufbedingung (Experten-Plots):

- Abb. 14 (S. 41): Moment erster Ordnung  
Signifikante Unterschiede treten für die Knoten 1 und 2 auf.
- Abb. 15 (S. 41): Chance und Risiko  
Signifikante Unterschiede treten für die Knoten 1 bis 3 auf. Die Referenz-Statistik verzerrt sogar die Realität, denn sie verspricht ein viel zu gutes Chance-Risiko-Verhältnis.

### Zeitliche Verläufe für den zweiten Knoten:

- Abb. 16 (S. 42): Segmentanteile für das Moment erster Ordnung
- Abb. 17 (S. 42): Segmentanteile für Chance und Risiko

In beiden Plots fällt der Peak für die Referenz-Statistik bei  $q = 59$  auf. Für das Moment erster Ordnung besteht außerdem ein großer Peak bei  $q = 4$ . Beide Peaks werden durch die sehr große Anzahl Kaufkandidaten,  $N_4 = 482$  und  $N_{59} = 604$  verursacht. Die Momente  $M1_q$  werden daher für diese Segmente mit großen Gewichtswerten  $w_q = N_q/N_{tot}$  gewichtet und es resultieren große Segmentanteile  $w_q \cdot M1_q$ . Hierbei wird nicht berücksichtigt, dass Neuinvestitionen nur begrenzt vorgenommen werden. Im Gegensatz zur Referenz-Statistik wird dies bei der Statistik durch eine Decklung der Anzahl der Kaufkandidaten mit der Schranke  $U_{\min}/\tau = 45/30 = 1.5$  berücksichtigt. Die Referenz-Statistik führt somit zu Übertreibungen, die bei der Statistik vermieden werden. Die Statistik wirkt gegenüber der Referenz-Statistik ausgleichend: Große Peaks werden verringert. Dafür sind kleine Peaks in der Regel etwas stärker ausgeprägt als bei der Referenz-Statistik.

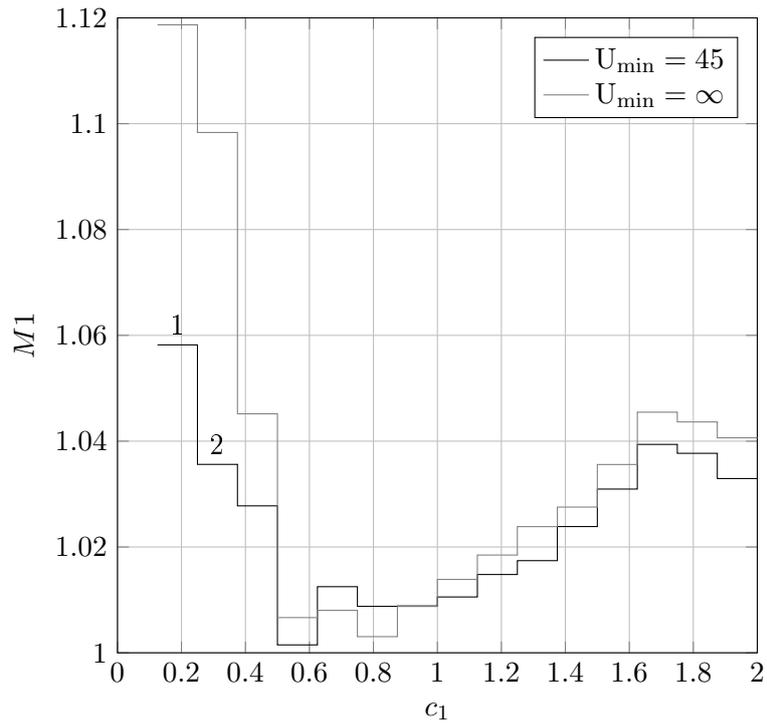


Abbildung 14: Moment erster Ordnung für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$  — Vergleich mit der Referenz-Statistik

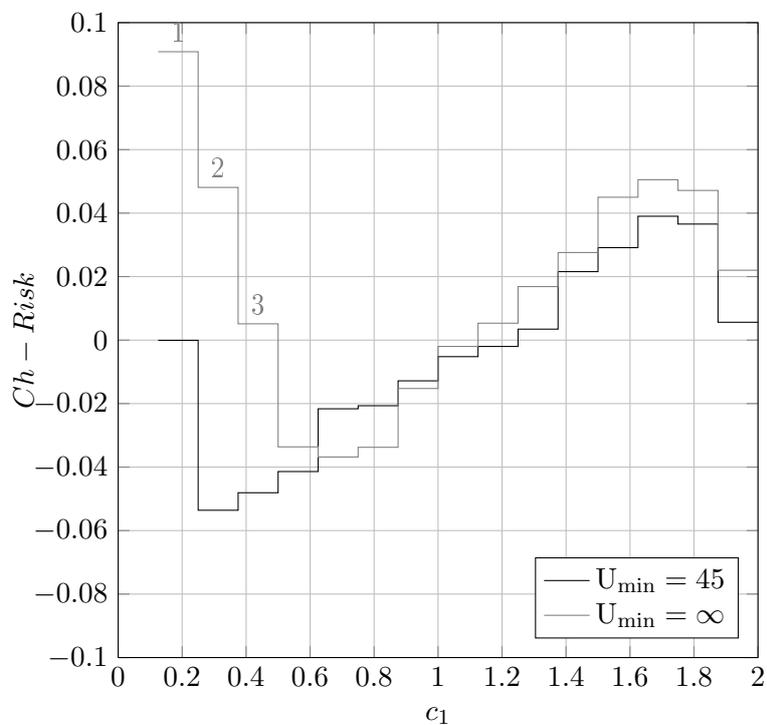


Abbildung 15: Chance und Risiko für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$  — Vergleich mit der Referenz-Statistik

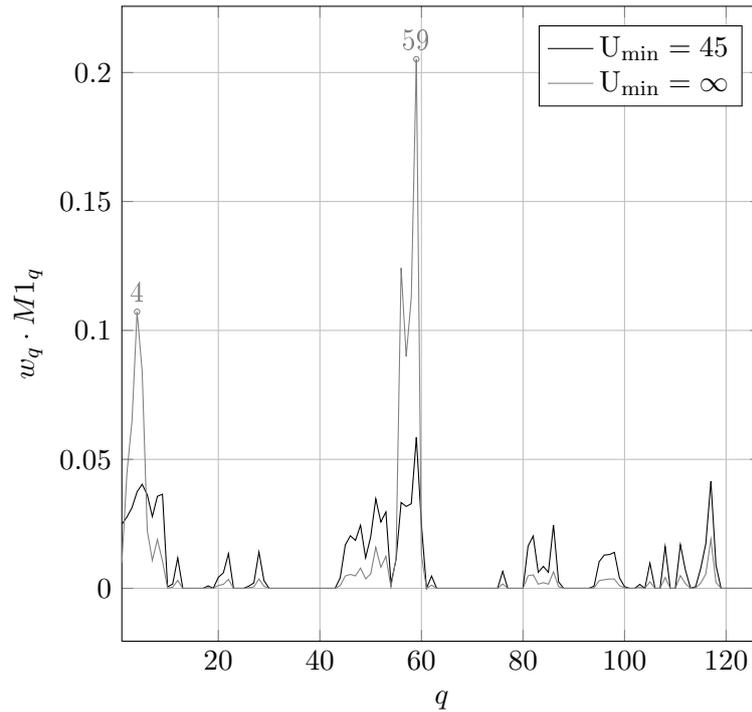


Abbildung 16: Verlauf des Segmentanteils für das Moment erster Ordnung für den zweiten Knoten (5, 2) — Vergleich mit der Referenz-Statistik

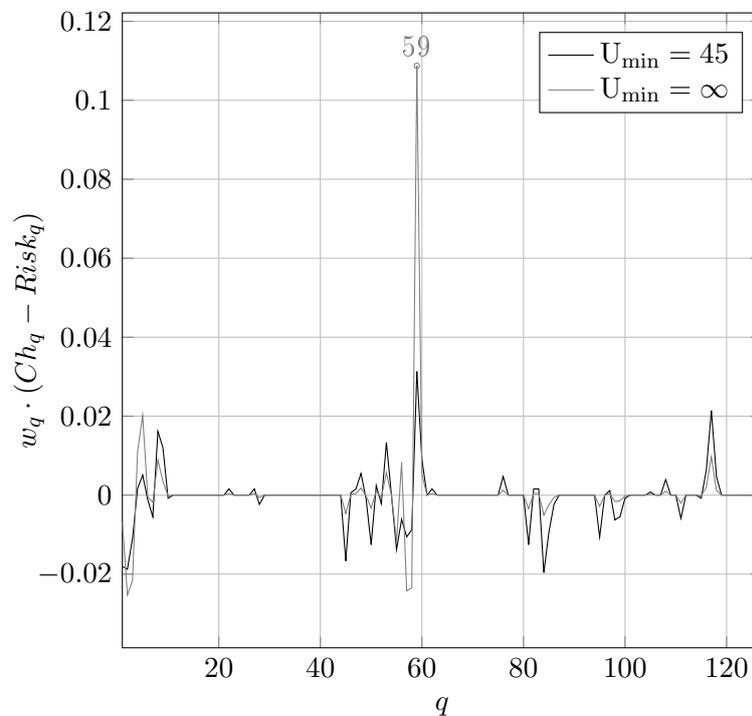


Abbildung 17: Verlauf des Segmentanteils für Chance und Risiko für den zweiten Knoten (5, 2) — Vergleich mit der Referenz-Statistik

## 6 Experimentelle Ergebnisse für Random Walks

Anstelle des Marktes FEBRDUSA\_1 historischer Kursdaten wird im Folgenden ein künstlicher Markt für statistische Auswertungen herangezogen. Damit wird das Ziel verfolgt, die bisherigen signifikanten statistischen Ergebnisse zu untermauern.

### 6.1 Definition eines künstlichen Marktes

Ausgangspunkt für die Definition des künstlichen Marktes sind statistisch unabhängige und identisch verteilte Kursverhältnisse

$$v_1(t) = s(t+1)/s(t) ,$$

wie sie bei der Herleitung der Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  zur Definition von Chance und Risiko in Abschn. 3.7 und im Anhang A vorausgesetzt werden. Aus diesen Kursverhältnissen werden gemäß

$$s(t) := s(0) \cdot \prod_{t'=0}^{t-1} v_1(t') \quad (95)$$

die Kurse jedes Wertpapiers des künstlichen Marktes erzeugt. Hierbei stellt  $s(0) := 100$  einen *Anfangswert* dar. Die ersten Kurswerte sind folglich

$$\begin{aligned} s(1) &= s(0) \cdot s(1)/s(0) = s(0) \cdot v_1(0) , \\ s(2) &= s(0) \cdot s(1)/s(0) \cdot s(2)/s(1) = s(0) \cdot v_1(0) \cdot v_1(1) . \end{aligned}$$

Der künstliche Markt soll  $N = 1000$  künstliche Wertpapiere enthalten und die Handelstage jedes Wertpapier variieren gemäß  $1 \leq t \leq 6000$ . Da die Kursverhältnisse  $v_1(t)$  identisch verteilt sind, besitzen sie an allen Handelstagen die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Insbesondere sind Erwartungswerte und Varianzen an allen Handelstagen gleich. Für die statistischen Auswertungen wird für  $v_1(t)$  eine Laplace-Verteilung angenommen mit

$$\mu(1) := E\{v_1(t)\} = 1 , \quad \sigma^2(1) = var\{v_1(t)\} = 0.001 . \quad (96)$$

Auf die statistische Unabhängigkeit der Kursverhältnisse  $v_1(t)$  und die Wahl einer Laplace-Verteilung wird im Folgenden näher eingegangen.

#### Statistische Unabhängigkeit:

Eine wichtige Konsequenz aus der statistischen Unabhängigkeit von  $v_1(t)$  ist die in Lemma 4 (S. 49) gemachte Feststellung, dass keine statistische Abhängigkeit zwischen der Kaufbedingung und dem Kursverhältnis  $v_h(t) = s(t+h)/s(t)$  besteht. Die Experten-Plots in Abschn. 5.2 sprechen eine andere Sprache: Aus den Kursverhältnissen  $v_h(t)$  werden Statistikgrößen wie das Moment erster Ordnung, Chance, Risiko und Fehler gebildet, die deutlich von einer Kaufbedingung abhängen. Der künstliche Markt erhebt daher nicht den Anspruch, historische Kursdaten realistisch zu beschreiben. Ungeachtet dessen wird wie in [13], [14], [20] eine statistische Auswertung für den künstlichen Markt vorgenommen. Sie dient der experimentellen Bestätigung der Unabhängigkeit der Statistikgrößen von der Kaufbedingung und soll damit die gefundenen signifikanten statistischen Ergebnisse für den realen Markt absichern.

#### Laplace-Verteilung für $v_1(t)$ :

Für das Kursverhältnis  $v_1(t)$  wird eine Laplace-Verteilung vorausgesetzt. Diese Wahl wird durch Messungen für den Markt FEBRDUSA\_1 motiviert, welche in dieser Arbeit nicht dargestellt werden. Ein grundsätzliches Problem der Laplace-Verteilung besteht darin, dass negative Kursverhältnisse  $v_1(t)$  auftreten können. Bei der hier vorgenommenen Einstellung in (96) treten jedoch nur Kursverhältnisse in einer kleinen Umgebung des Erwartungswertes 1 auf. Ein „Abschneiden“ der Kursverhältnisse  $v_1(t)$  ist daher nicht erforderlich.

Negative Kurswerte können beispielsweise durch die exp-Funktion vermieden werden, indem die Zufallsvariable  $v_1 := exp[x]$  gebildet wird, wobei  $x$  Laplace-verteilt mit dem Erwartungswert 0 ist.

Bei kleinen Schwankungen von  $x$  ist das Kursverhältnis  $v_1(t)$  dann näherungsweise ebenfalls Laplace-verteilt. Auf eine in der Finanzmathematik wichtige Verteilung stößt man, wenn anstelle einer Laplace-Verteilung für  $x$  eine Gauß-Verteilung verwendet wird [4]. Ob diese oder andere Verteilungen besser geeignet sind als eine Laplace-Verteilung, wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

## 6.2 Statistische Auswertung

Die Einstellungen für die Auswertung entsprechen den Einstellungen in (89). Die statische Auswertung des künstlichen Marktes liefert jedoch vollkommen andere Ergebnisse als für den historischen Markt FEBRDUSA\_1. Im Gegensatz zu den bisherigen Experten-Plots ergeben sich für den künstlichen Markt horizontale Verläufe. Eine Ausnahme stellt der Investitionsgrad dar, welcher ebenfalls im Außenbereich abnimmt. Abhängigkeiten vom Merkmal  $c_1$  bestehen für den künstlichen Markt nur insofern, dass Schwankungen der Statistikgrößen im Außenbereich von  $c_1$  zunehmen. Der Effekt wird für kleinere Intervalle deutlicher, weswegen auch ein Plot für Ebene 8 gezeigt wird.

- Abb. 18 (S. 44): Gewinnfaktor (annualisiert) für Ebene 5  
Die Skalierung der y-Achse ist wie in Abb. 3 (S. 33) vorgenommen, welche den Gewinnfaktor für den bisher verwendeten Markt FEBRDUSA\_1 zeigt.
- Abb. 19 (S. 45): Chance und Risiko für Ebene 5  
Der horizontale Verlauf steht ebenfalls im Gegensatz zu Abb. 4 (S. 33). Die beiden gestrichelten Linien geben Chance und Risiko für den Grundbereich  $0 \leq c_1 < 2$  an.
- Abb. 20 (S. 45): Chance und Risiko für Ebene 8  
Die Schwankungen der Statistikgrößen nehmen wie in Abb. 8 (S. 35) im Außenbereich zu. Eine mathematische Analyse der Schwankungen erfordert eine Beschreibung der Statistikgrößen als Zufallsvariablen und sprengt den Rahmen dieser Arbeit.

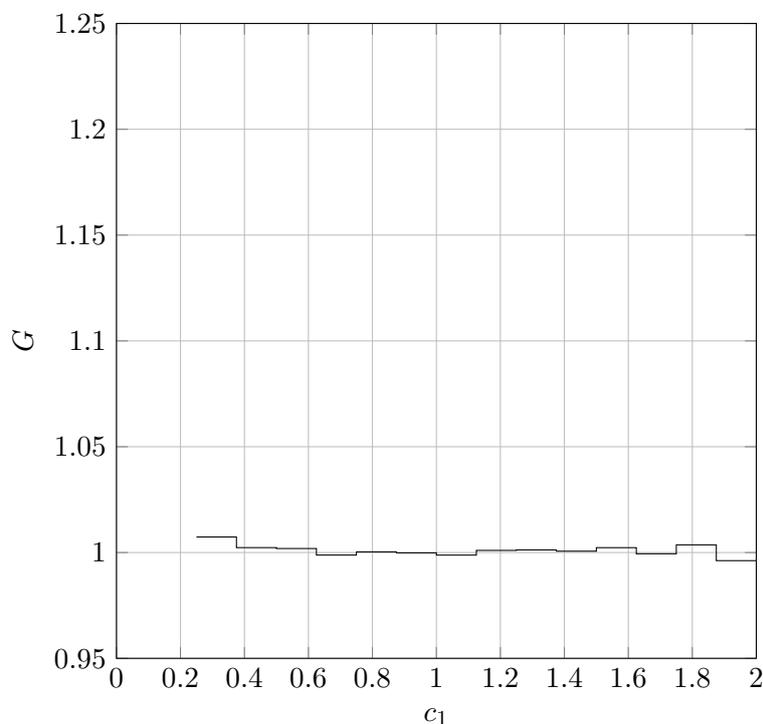


Abbildung 18: Gewinnfaktor (annualisiert) für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$  — Random Walk (vgl. Abb. 3 (S. 33))

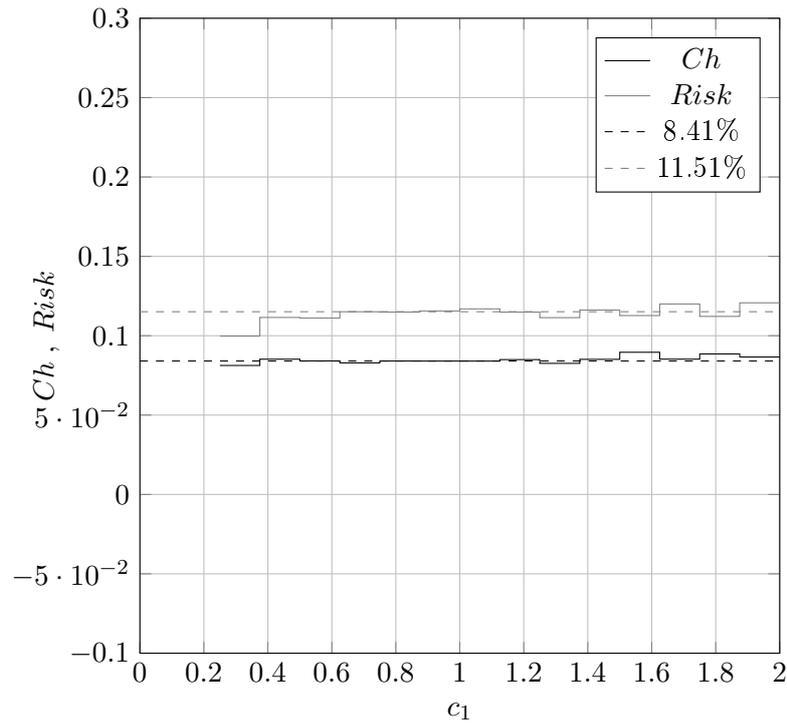


Abbildung 19: Chance und Risiko für Ebene 5 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$  — Random Walk (vgl. Abb. 4 (S. 33))

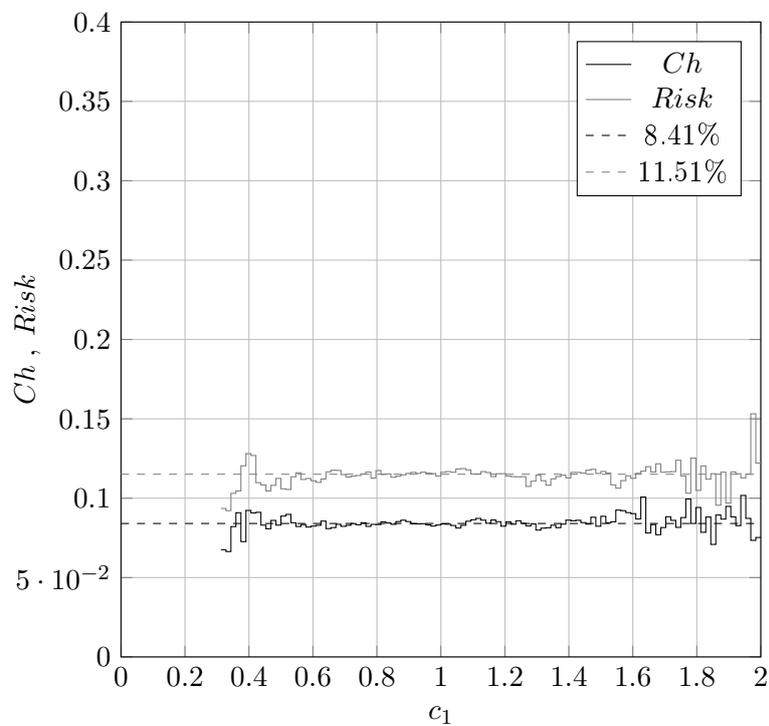


Abbildung 20: Chance für Ebene 8 und Merkmal  $c_1 = s(t)/GD_{200}\{s\}(t)$  — Random Walk (vgl. Abb. 8 (S. 35))

## 7 Zusammenfassung

Der dritte Teil der Schriftenreihe erweitert die in den ersten beiden Teilen eingeführten Statistikgrößen, den Gewinnfaktor bzw. die Rendite und den Investitionsgrad, um die Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler sowie die Handelskosten. Zu diesem Zweck werden zunächst Tages-Mittelwerte der Kursverhältnisse  $G(n, t) = s(n, t + \tau_h)/s(n, t)$  für Momente zweiter Ordnung, Chance und Risiko gebildet. Sie hängen von einer Kaufbedingung ab und bilden zusammen mit den Momenten erster Ordnung und der Anzahl der Kaufkandidaten  $N(t)$  eines Handelstages die *exogenen Größen* für den in [1] eingeführten Handelsprozess (ideales Handelssystem). Aus den Tages-Mittelwerten werden durch eine zweite Mittelung über alle Handelstage die neuen Statistikgrößen definiert. Die zweite Mittelung benutzt Gewichtungsfaktoren, die von  $N(t)$  und Investitionsparametern abhängen. Damit werden alle Statistikgrößen mit dem Handelsprozess verkoppelt. Einen Überblick gibt Abb. 2 (S. 11).

**Einfluss der Investitionsparameter:** Der Einfluss der Investitionsparameter auf die Statistikgrößen wird detailliert untersucht: In Abschn. 3.9 der Einfluss des maximalen Investitionsgrades  $IG_{\max}$ , in Kap. 4 der Sonderfall einer gewöhnlichen Mittelung, welcher zum Vergleich herangezogen und daher als *Referenz-Statistik* bezeichnet wird. Die Ergebnisse sind in den Lemmata 1–3 festgehalten.

**Lemma 1 (S. 23):** Nähert sich  $IG_{\max}$  dem Wert 0, streben die Gewinnfaktoren gegen 1 und der Investitionsgrad und die Kosten streben gegen 0. Der Einfluss von  $IG_{\max}$  auf die Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler geht verloren, wenn  $IG_{\max}$  einen bestimmten Schwellwert unterschreitet.

**Lemma 2 (S. 25):** Im Sättigungsbereich  $IG_{\max} \geq I_{2, \max}$  hat  $IG_{\max}$  keinen Einfluss auf die Statistikgrößen. Momente erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler hängen bezüglich der Investitionsparameter  $U_{\min}$  und  $\tau$  nur vom Verhältniss  $U_{\min}/\tau$  ab. Der Sättigungsbereich liegt insbesondere unter der Investitionsregel  $\tau' = \tau \cdot IG_{\max} \geq \tau_h$  vor. Diese Regel verhindert nach [1] „Turbulenzen“ in der Abhängigkeit des Handelsprozesses von der Investitionsdauer  $\tau$ .

**Lemma 3 (S. 28):** Die zweifache Mittelung, welche den Momenten erster und zweiter Ordnung, Chance, Risiko und Fehler zugrunde liegt, enthält eine gewöhnliche Mittelung als Sonderfall (Referenz-Statistik). Dieser Sonderfall liegt vor, wenn  $U_{\min}$  ausreichend groß gewählt wird und die Investitionsregel  $\tau' \geq \tau_h$  erfüllt ist.

**Experimentelle Ergebnisse für historische Kursdaten:** Experimentelle Ergebnisse werden für den realen Markt FEBRDUSA\_1 bei einer Haltefrist von 30 Handelstagen gezeigt. Sie untermauern bisherige experimentelle Ergebnisse der Schriftenreihe und liefern eine detailliertere statistische Beschreibung.

**Momentum-Strategie:** So liefert die Momentum-Strategie, welche mit Hilfe des gleitenden Durchschnitts von 200 Handelstagen gebildet wird, für das Moment erster Ordnung sowie Chance und Risiko deutlich bessere Werte als ohne Kaufbedingung.

**Experten-Plots:** Sie zeigen eine starke Abhängigkeit der Statistikgrößen von der Kaufbedingung. Dies belegen die gefundenen *V-Formationen* für Chance, Risiko und Fehler sowie das Moment erster Ordnung. Die V-Formation für das Moment erster Ordnung ergibt sich daraus, dass diese Statistikgröße im Gegensatz zum Gewinnfaktor nicht von einem geringen Investitionsgrad betroffen ist. Sie zeigt neben einem hohen Moment  $M1$  für die Momentum-Strategie einen *Mean-Reversion-Effekt* für stark gefallene Kurse unterhalb des gleitenden Durchschnitts von 200 Handelstagen. Die Experten-Plots für den Gewinnfaktor  $G$  bzw.  $GMG$  und  $AMG$  zeigen außerdem, dass der  $AMG$  zu hohe Renditen liefert, da keine Reinvestition berücksichtigt wird.

**Segmentverläufe:** Sie zeigen den zeitlichen Verlauf von Statistikgrößen für Segmente und geben damit Einblick in den Handelsprozess. Während der kumulative Gewinnfaktor zwei größere zeitliche Rückschläge im Handelszeitraum aufzeigt, steigen die Handelskosten beständig an. Dabei reagiert der Handelsprozess bei diesen Rückgängen mit einem verringerten Investitionsgrad aufgrund einer geringeren Anzahl von Kaufkandidaten. Der Segmentverlauf für Chance und Risiko zeigt, dass auch bei Kursrückgängen ausnahmsweise die Chance das Risiko überwiegen kann. Der Verlauf des Fehlers zeigt Spitzen, die sich abhängig vom Zeitpunkt in unterschiedlicher Weise aus einem inneren und äußeren Fehler zusammensetzen.

**Referenz-Statistik:** Die zweifache Mittelung zeigt gegenüber einer gewöhnlichen Mittelung, die der Referenz-Statistik zugrunde liegt, signifikante Unterschiede für das Moment erster Ordnung und das Chance-Risiko-Verhältnis. Die Analyse der Segmentanteile, aus denen sich Statistikgrößen zusammensetzen, liefert eine Begründung für diese Unterschiede: Die Referenz-Statistik neigt zu Übertreibungen, die bei großen Tagesumfängen an bestimmten Handelstagen zustande kommen. Die Statistik vermeidet solche Übertreibungen, weil sie berücksichtigt, dass Investitionen nur im begrenzten Umfang eingegangen werden. Dies erfolgt durch Deckelung der Tagesumfänge und wirkt im Vergleich zur Referenz-Statistik „ausgleichend“.

**Random Walks:** Random Walks werden in der Arbeit zu zwei unterschiedlichen Zwecken herangezogen. Erstens werden mit ihrer Hilfe die Konstanten  $G_C$  und  $G_R$  definiert, welche bei der Definition von Chance und Risiko benötigt werden. Zweitens werden experimentelle Ergebnisse für einen künstlichen Markt dargestellt, der Random Walks enthält. Die statistische Auswertung bestätigt, dass für den künstlichen Markt die Statistikgrößen nicht von der Kaufbedingung abhängen — ganz im Gegensatz zu den experimentellen Ergebnissen für den Markt mit historischen Kursdaten. Damit wird die gefundene starke Abhängigkeit der Statistikgrößen von der Kaufbedingung für den realen Markt abgesichert.

## 8 Anhang A. Random Walks

Es wird die Näherungsformel (53) für den Fall begründet, dass die Kursverhältnisse

$$v_1(t) = \frac{s(t+1)}{s(t)} \quad (\text{A1})$$

für aufeinander folgende Handelstage statistisch unabhängig und identisch verteilt sind. In diesem Fall bilden die logarithmierten Kurswerte einen *Random Walk*, z.B. [3].

### Varianz der Kursverhältnisse:

Mit Hilfe der Beziehung

$$v_h(t) = \frac{s(t+h)}{s(t)} = \frac{s(t+1)}{s(t)} \cdot \frac{s(t+2)}{s(t+1)} \cdot \dots \cdot \frac{s(t+h)}{s(t+h-1)}$$

lässt sich das Kursverhältnis für Sichtweite  $h \in \mathbb{N}$  wie in [3] und [4] auf Kursverhältnisse für Sichtweite 1 gemäß

$$v_h(t) = \prod_{i=0}^{h-1} v_1(t+i) \quad (\text{A2})$$

zurückführen. Die statistischen Eigenschaften der Kursverhältnisse  $v_h(t)$  sind damit auf die Verteilung einer eindimensionalen Zufallsvariable zurückgeführt. Diese beschreibt die an allen Handelstagen  $t$  gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung des Kursverhältnisses  $v_1(t)$  mit

$$\mu(1) = E\{v_1(t)\} = 1, \quad \sigma^2(1) = \text{var}\{v_1(t)\}. \quad (\text{A3})$$

Wegen des Erwartungswertes 1 besteht keine *Drift*.

Die statistische Unabhängigkeit der Kursverhältnisse  $v_1(t)$  ermöglicht eine einfache Bestimmung von Erwartungswert und Varianz des Kursverhältnisses  $v_h(t)$ . Insbesondere hängen diese Größen nicht von einer Kaufbedingung ab:

- Eine Kaufbedingung  $buy(t)$  hängt von Kurswerten bis zum Zeitpunkt  $t$  und damit nur von Kursverhältnissen  $v_1(t')$  für  $t' < t$  ab,
- das Kursverhältnis  $v_h(t)$  hängt nach (A2) von Kursverhältnissen  $v_1(t')$  für  $t' \geq t$  ab.

Es besteht daher keine statistische Abhängigkeit zwischen der Kaufbedingung und dem Kursverhältnis  $v_h(t)$ . Daher hängt die Varianz von  $v_h(t)$  nicht von einer Kaufbedingung ab. Aus [21] folgt für die Varianz von  $v_h(t)$  bei statistischer Unabhängigkeit von  $v_1(t)$

$$\begin{aligned} \sigma^2(h) = \text{var}\{v_h(t)\} &= \text{var} \prod_{i=0}^{h-1} v_1(t+i) \\ &= \prod_{i=0}^{h-1} [\text{var}\{v_1(t+i)\} + E^2\{v_1(t+i)\}] - \prod_{i=0}^{h-1} E^2\{v_1(t+i)\} \\ &= [\sigma^2(1) + \mu^2(1)]^h - [\mu^2(1)]^h. \end{aligned}$$

Sie berücksichtigt für  $\mu(1) \neq 1$  den Fall, dass eine Drift in der Kursentwicklung besteht. Unter der Voraussetzung in (A3),  $\mu(1) = 1$ , erhält man als Ergebnis

$$\sigma^2(h) = [1 + \sigma^2(1)]^h - 1. \quad (\text{A4})$$

Die Varianz wächst somit exponentiell mit der Sichtweite.

### Näherung:

Der Ausdruck

$$[1+x]^h = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} x^i = 1 + h \cdot x + \frac{h(h-1)}{2} x^2 + \dots$$

lässt sich für  $h \cdot |x| \ll 1$  durch den linearen Term  $1 + h \cdot x$  annähern und man erhält den Näherungswert in (53),

$$\sigma^2(h) \approx h \cdot \sigma^2(1), \quad h \cdot \sigma^2(1) \ll 1. \quad (\text{A5})$$

Der Näherungswert beschreibt den exponentiellen Anstieg für nicht zu große Sichtweiten durch einen linearen Anstieg. Die Varianz der Kursverhältnisse  $v_h(t)$  ist dann proportional zur Sichtweite.

### Zusammenhang mit Random Walks:

Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der Kursverhältnisse  $v_1(t)$  ergibt sich für die logarithmierten Kurswerte ein Random Walk, denn es ist

$$\log[s(t+1)] = \log[s(t)] + \log[v_1(t)] \quad (\text{A6})$$

und die logarithmierten Kursverhältnisse  $\log[v_1(t)]$  sind wie  $v_1(t)$  statistisch unabhängig und identisch verteilt.

### Logarithmierte Kursverhältnisse:

Für die logarithmierten Kursverhältnisse

$$\tilde{v}_h(t) := \log[v_h(t)] \quad (\text{A7})$$

folgt aus (A2)

$$\begin{aligned} \tilde{v}_h(t) &= \log \prod_{i=0}^{h-1} v_1(t+i) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \tilde{v}_1(t+i). \end{aligned}$$

Aus der statistischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $\tilde{v}_1(t)$  ergibt sich für die Varianz [3], [4]

$$\text{var}\{\tilde{v}_h(t)\} = h \cdot \text{var}\{\tilde{v}_1(t)\}. \quad (\text{A8})$$

Die Näherungsformel (A5) ist für die logarithmierten Kursverhältnisse  $\tilde{v}_h(t)$  daher exakt erfüllt. Der Zusammenhang in (A8) ermöglicht einen anderen Blick auf die Näherung in (A5). Aus den logarithmierten Kursverhältnissen  $\tilde{v}_h(t)$  erhält man die Kursverhältnisse  $v_h(t)$  gemäß

$$v_h(t) = \exp[\tilde{v}_h(t)].$$

Die lineare Näherung  $\exp(x) \approx 1 + x$ ,  $x \approx 0$  liefert

$$v_h(t) \approx 1 + \tilde{v}_h(t), \quad \tilde{v}_h(t) \approx 0.$$

Folglich ist  $\text{var}[v_h(t)] \approx \text{var}[\tilde{v}_h(t)]$ . Da für die logarithmierten Kursverhältnisse die Varianz proportional zur Sichtweite ist, trifft dies für die nicht logarithmierten Kursverhältnisse  $v_h(t)$  näherungsweise zu.

Fassen wir zusammen:

**LEMMA 4 (Random Walks)** *Für statistisch unabhängige identisch verteilte Kursverhältnisse  $v_1(t) = s(t+1)/s(t)$  besteht keine statistische Abhängigkeit zwischen der Kaufbedingung und dem Kursverhältnis  $v_h(t) = s(t+h)/s(t)$ . Nach (A5) ist bei kleinen Haltefristen die Varianz von  $v_h(t)$  näherungsweise proportional zur Haltefrist. Die logarithmierten Kurswerte stellen einen Random Walk dar und für die logarithmierten Kursverhältnisse ist die Näherungsformel (A5) exakt erfüllt.*

## 9 Anhang B. Symbole und Formeln

### Investitionsparameter

$\tau_h$	Haltefrist für Verkäufe
$U_{\min}$	Investitionsstreuung über mehrere Wertpapiere ( $U_{\min} \in \mathbb{N}$ )
$\tau$	Investitionsdauer bzw. zeitliche Investitionsstreuung ( $\tau > 0$ )
$\tau'$	Modifizierte Investitionsdauer $\tau' := \tau \cdot \text{IG}_{\max}$
$\text{IG}_{\max}$	Maximaler Investitionsgrad ( $0 < \text{IG}_{\max} \leq 1$ )

### Wertpapiere

$T$	Der Handelszeitraum umfasst die Handelstage $1 \leq t \leq T$
$N$	Anzahl der Wertpapiere des Marktes
$s(t)$	Kurs eines Wertpapiers (security) am Handelstag $t$
$s^*(t)$	Unkorrigierter Kurs eines Wertpapiers am Handelstag $t$
$s(n, t)$	Kurs des Wertpapiers Nummer $n$ am Handelstag $t$
$buy(t)$	Menge aller Kaufkandidaten am Handelstag $t$
$G(n, t)$	Kursverhältnis bzw. Gewinnfaktor für Wertpapier Nummer $n$ am Handelstag $t$ , $G(n, t) := s(n, t + \tau_h) / s(n, t)$

### Segmentierung

$\Lambda_q$	$q$ -tes Segment, gegeben durch die $\tau_h$ aufeinander folgenden Handelstage $(q - 1)\tau_h + 1 \leq t \leq q \cdot \tau_h$ , $1 \leq q \leq Q + 1$
$Q + 1$	Anzahl aller Segmente, gegeben durch $Q + 1 = T / \tau_h$
$Q$	Anzahl der Segmente bis auf das letzte Segment, dass keinen Erlös im Handelszeitraum $1 \leq t \leq T$ bewirkt
$Q^+$	Anzahl der Segmente mit Kaufkandidaten, $Q^+ :=  \{1 \leq q \leq Q   N_q > 0\} $

### Segmentweise Beschreibung

$C_{cash}(0)$	Barkapital zu Beginn des Handelns
$I_{new}(\Lambda_q)$	Neuinvestition im $q$ -ten Segment, definiert als Summe aller Neuinvestitionen im Segment
$sale(\Lambda_q)$	Erlös aus allen Verkäufen im $q$ -ten Segment
$C_{tot}(q \cdot \tau_h)$	Gesamtkapital am Ende des $q$ -ten Segments mit $C_{tot}(1 \cdot \tau_h) = C_{cash}(0)$

### Exogene Größen

$N(t)$	Anzahl der Kaufkandidaten am Handelstag $t$ , $N(t) =  buy(t) $ .
--------	---

Die folgenden exogenen Größen sind Tages-Mittelwerte, die nur für  $N(t) > 0$  definiert sind.

$G(t) = M1(t)$  Gewinnfaktor für den Handelstag  $t$  und die Haltefrist  $\tau_h$ , gegeben durch das Moment erster Ordnung

$$M1(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} G(n, t)$$

$M2(t)$  Moment zweiter Ordnung für Handelstag  $t$ ,

$$M2(t) := \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t)]^2$$

$Ch(t)$  Chance für Handelstag  $t$ , gegeben durch

$$Ch(t) := \frac{1}{N(t)} |\{n \in buy(t) | G(n, t) > G_C\}|$$

mit der von der Haltefrist  $\tau_h$  abhängigen Konstanten

$$G_C := 1 + \frac{1}{4\sqrt{30}} \sqrt{\tau_h}$$

$Risk(t)$  Risiko für Handelstag  $t$ , gegeben durch

$$Risk(t) := \frac{1}{N(t)} |\{n \in buy(t) | G(n, t) < G_R\}|$$

mit der von der Haltefrist  $\tau_h$  abhängigen Konstanten

$$G_R := 1/G_C$$

Investitionsraten und Investitionsgrad

$I_2(t)$  Investitionsrate ohne Begrenzung des Investitionsgrades, gegeben durch

$$I_2(t) := \min\{N(t)/U_{\min}, 1/\tau\}$$

$I_2(\Lambda_q)$  und für das  $q$ -te Segment

$$I_2(\Lambda_q) := \sum_{t \in \Lambda_q} I_2(t)$$

$IG(q \cdot \tau_h)$  Investitionsgrad am Ende des  $q$ -ten Segments,

$$IG(q \cdot \tau_h) = \min\{I_2(\Lambda_q), IG_{\max}\}.$$

Entspricht der Investitionsrate  $I_{new}(\Lambda_q)/C_{tot}(q \cdot \tau_h)$  für das  $q$ -te Segment

$IG$  Investitionsgrad für den gesamten Handelszeitraum,

$$IG := \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q IG(q \cdot \tau_h)$$

$I_{2,min}^+$  Untere Grenze von  $IG_{\max}$ ,  

$$I_{2,min}^+ := \min\{I_2(\Lambda_q) > 0 \mid 1 \leq q \leq Q\}$$

$I_{2,max}$  Obere Grenze von  $IG_{\max}$ ,  

$$I_{2,max} := \max\{I_2(\Lambda_q) \mid 1 \leq q \leq Q\}$$

Anzahl Kaufkandidaten

$N_q$  Anzahl Kaufkandidaten im  $q$ -ten Segment,  

$$N_q := \sum_{t \in \Lambda_q} N(t), \quad 1 \leq q \leq Q$$

$N_{tot}$  Anzahl Kaufkandidaten im Zeitraum  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h$  ,  

$$N_{tot} := \sum_{q=1}^Q N_q$$

$\widehat{N}$  Gedeckelte Anzahl Kaufkandidaten, für einen Handelstag  $t$  gegeben durch  

$$\widehat{N}(t) := \min\{N(t), U_{\min}/\tau\}$$

Gewichtswerte für die Verteilung von Neuinvestitionen

$w_q(t)$  Verteilung innerhalb des  $q$ -ten Segments,  

$$w_q(t) := \frac{I_2(t)}{I_2(\Lambda_q)}, \quad t \in \Lambda_q, \quad I_2(\Lambda_q) > 0$$

$w_q$  Verteilung über die Segmente  $1 \leq q \leq Q$ ,  

$$w_q := \frac{IG(q \cdot \tau_h)}{\sum_{q'=1}^Q IG(q' \cdot \tau_h)}$$

$w(t)$  Verteilung über die Handelstage  $1 \leq t \leq Q \cdot \tau_h$ ,  

$$w(t) := w_q \cdot w_q(t), \quad t \in \Lambda_q$$

Aus einer Verteilung  $w(t)$  folgen

$$\begin{aligned} w_q &= \sum_{t \in \Lambda_q} w(t), \\ w_q(t) &= \frac{w(t)}{w_q}, \quad t \in \Lambda_q, \quad w_q > 0 \end{aligned}$$

Verteilung für die Referenz-Statistik,

$$w(t) := \frac{N(t)}{N_{tot}}$$

Momente  $M1$  und  $M2$ ,  $Ch$  und  $Risk$

$S(t)$  Statistikgrößen für Handelstag  $t$  (Tages-Mittelwerte)

$S_q$  Statistikgrößen für Segmentnummer  $q$ ,

$$S_q := \sum_{t \in \Lambda_q} w_q(t) \cdot S(t)$$

$S$  Statistikgrößen für den gesamten Handelszeitraum,

$$S := \sum_{t=1}^{Q \cdot \tau_h} w(t) \cdot S(t) = \sum_{q=1}^Q w_q \cdot S_q$$

$S'$  Referenz-Statistikgrößen für den gesamten Handelszeitraum

Rendite und Gewinnfaktoren

$R$  Rendite, gegeben durch Gewinnfaktor  $-1$

$G(t) = M1(t)$  Gewinnfaktor für den Handelstag  $t$  (siehe exogene Größen)

$M1_q$  Moment erster Ordnung für Segmentnummer  $q$  (siehe Statistikgröße  $S_q$ ),

$$M1_q = \frac{sale(\Lambda_{q+1})}{I_{new}(\Lambda_q)}, \quad I_{new}(\Lambda_q) > 0$$

$g(q)$  Gewinnfaktor für begrenzte Investition in das  $q$ -te Segment,

$$\begin{aligned} g(q) &= \frac{C_{tot}((q+1) \cdot \tau_h)}{C_{tot}(q \cdot \tau_h)} \\ &= 1 + IG(q \cdot \tau_h) \cdot [M1_q - 1] \end{aligned}$$

A) Gesamter Handelszeitraum ohne Reinvestition

$M1$  Moment erster Ordnung (siehe Statistikgröße  $S$ )

$AMG$  Mittlerer Gewinnfaktor für begrenzte Investition in ein Segment des Handelszeitraums,

$$AMG := \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q g(q) = 1 - IG + IG \cdot M1$$

B) Gesamter Handelszeitraum mit Reinvestition

$G$  Gewinnfaktor für begrenzte Investition,

$$G := \prod_{q=1}^Q g(q)$$

*GMG* Gewinnfaktoren  $G$ , normiert auf die Dauer  $\tau_h$  eines Segments,

$$GMG := G^{1/Q} = \left[ \prod_{q=1}^Q g(q) \right]^{1/Q}$$

$G_{cum}(q)$  Kumulativer Gewinnfaktor für das  $q$ -te Segment,

$$G_{cum}(q) := \prod_{q'=1}^q g(q'), \quad G_{cum}(0) := 1$$

$\overline{G_{cum}}$  Mittlerer kumulativer Gewinnfaktor,

$$\overline{G_{cum}} := \sum_{q=1}^Q w(q) \cdot G_{cum}(q-1)$$

Fehler (Volatilität)

$MSE(t)$  Mittlerer quadratischer Fehler für Handelstag  $t$ ,

$$\begin{aligned} MSE(t) &:= \frac{1}{N(t)} \sum_{n \in buy(t)} [G(n, t) - M1]^2, \quad N(t) > 0 \\ &= M2(t) - 2M1 \cdot M1(t) + M1^2 \end{aligned}$$

$MSE_q$  Fehler für  $q$ -tes Segment (siehe Statistikgröße  $S_q$ ),

$$MSE_q = M2_q - 2M1 \cdot M1_q + M1^2$$

$MSE$  Fehler für den gesamten Handelszeitraum (siehe Statistikgröße  $S$ ),

$$MSE = M2 - M1^2$$

$MSE_q^{in}$  Innerer Fehler für  $q$ -tes Segment,

$$MSE_q^{in} := M2_q - M1_q^2$$

$MSE_q^{out}$  Äußerer Fehler für  $q$ -tes Segment,

$$MSE_q^{out} := [M1_q - M1]^2$$

$MSE^{in}, MSE^{out}$  Innerer und äußerer Fehler für den gesamten Handelszeitraum (siehe Statistikgröße  $S$ )

Kosten

$cost_q$  Kosten für das  $q$ -te Segment,

$$cost_q := p_{cost} \cdot [I_{new}(\Lambda_q) + sale(\Lambda_{q+1})]$$

$cost$  Kosten für den gesamten Handelszeitraum,

$$cost := \sum_{q=1}^Q cost_q$$

$CF_q$  Kostenfaktor für das  $q$ -te Segment,

$$\begin{aligned} CF_q &:= \frac{cost_q}{C_{cash}(0)} \\ &= p_{cost} \cdot IG(q \cdot \tau_h) \cdot G_{cum}(q-1) \cdot [1 + M1_q] \end{aligned}$$

$CF$  Kostenfaktor für den gesamten Handelszeitraum,

$$\begin{aligned} CF &:= \frac{cost}{C_{cash}(0)} \\ &= p_{cost} \cdot [2Q \cdot IG \cdot \overline{G_{cum}} + (G-1)] \end{aligned}$$

$CF_{cum}(q)$  Kumulativer Kostenfaktor,

$$CF_{cum}(q) := \frac{1}{C_{cash}(0)} \cdot \sum_{q'=1}^q cost_{q'}$$

#### Künstliche Kursdaten

$v_h(t)$  Kursverhältnisse  $v_h(t) := s(t+h)/s(t)$ ,  $h \in \mathbb{N}$

$\mu(1)$  Erwartungswert von  $v_1(t)$

$\sigma^2(h)$  Varianz von  $v_h(t)$ ,

$$\sigma^2(h) := var\{v_h(t)\} = [1 + \sigma^2(1)]^h - 1$$

## 10 Anhang C. Begriffe

Barkapital	Umfang liquider Mittel für die Investition in Wertpapiere
Decklung	Der Einfluss der Anzahl der Kaufkandidaten auf Statistikgrößen besteht nur bis zu einem Schwellwert, der von Investitionsparametern abhängt
exogene Größen	Steuern den Handelsprozess (des sog. idealen Handelssystems) als Input-Größen
Experte	Zeigt die Abhängigkeit der Statistikgrößen von der Kaufbedingung. Die Kaufbedingung ist durch Merkmale parametrisiert, die den vergangenen Kursverlauf charakterisieren.
Experten-Plot	Zeigt die Abhängigkeit einer Statistikgröße von den Parametern der Kaufbedingung
FEBRDUSA_1	Verwendeter Markt für historische Kursdaten
Gesamtkapital	Summe aus Barkapital und Investition
Gewinnfaktor	Hängt mit einer Rendite gemäß Rendite = Gewinnfaktor - 1 zusammen
Grundbereich	Merkmalbereich für den ersten Knoten eines Experten
Investition	Der Umfang des in Wertpapiere investierten Kapitals
Investitionsgrad	Gibt das Verhältnis des investierten Kapitals zum Gesamtkapital an
Investitionsrate	Gibt den Umfang der in einem bestimmten Zeitraum eingegangenen Investitionen im Verhältnis zum Gesamtkapital an
Kaufbedingung	Muss erfüllt sein, um eine Neuinvestition in ein Wertpapier einzugehen
Kaufkandidat	Wertpapier, für welches die Kaufbedingung erfüllt ist
Knoten	Jeder Knoten eines Experten beinhalten eine Kaufbedingung und die Statistikgrößen. Knoten sind in Ebenen angeordnet und in jeder Ebene durchnummeriert. Die erste Ebene enthält nur einen Knoten, den sog. Grundbereich.
Markt	Eine endliche Menge von Wertpapieren
Momentum-Strategie	Die Kaufbedingung setzt auf weiter steigende Kurse
Neuinvestition	Umfang an Investitionen, die an einem Handelstag oder in einem Segment eingegangen werden
Referenz-Statistik	Statistikgrößen bei gewöhnlicher Mittelung
Sättigungsbereich	Der maximale Investitionsgrad wirkt nicht begrenzend
Segmentierung	Zerlegung des Handelszeitraums in disjunkte Bereiche mit jeweils $\tau_h$ aufeinander folgenden Handelstagen, den Segmenten
Segmentanteil	Gibt den Beitrag eines Segments an einer Statistikgröße an
Segment-Mittelwerte	Statistikgrößen für Segmente
Segmentverlauf	Gibt den Verlauf eines Segment-Mittelwertes oder Segmentanteils über der Segmentnummer an
signifikanter Knoten	Knoten mit einer Mindestanzahl Kaufkandidaten von 200
Statistikgrößen	Gewinnfaktoren, Investitionsgrade, Momente erster und zweiter Ordnung, Fehler, Chance, Risiko und Handelskosten
Tages-Mittelwerte	Die für jeden Handelstag definierten Momente erster und zweiter Ordnung, Chance und Risiko sowie Fehler

## Literatur

- [1] P. Vogel (2018): Investieren unter Nebenbedingungen — Teil 2: Erweiterung der Statistik auf Haltefristen größer als ein Tag. Düsseldorf: University of Applied Sciences, *Trading*, No. 2, 1–76.
- [2] P. Vogel (2017): Investing as random trial. Düsseldorf: University of Applied Sciences, *Trading*, No. 1, 1–37.
- [3] F. Schmid, M. Trede (2006): *Finanzmarktstatistik*. Springer.
- [4] J. Y. Campbell, A.W. Lo, A. C. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [5] W. Breuer, M. Gürtler, F. Schuhmacher (2010): *Portfoliomanagement I — Grundlagen*. Gabler Lehrbuch.
- [6] E. Mondello (2015): *Portfoliomanagement — Theorie und Anwendungsbeispiele*. Springer Gabler.
- [7] P. Treleaven, M. Galas, V. Lalchand (2013): Algorithmic trading review. *Communications of the ACM*, Vol. 56, No. 11, 76–85.
- [8] T. Heidorn, C. Schäffler (2017): *Finanzmathematik in der Bankpraxis — vom Zins zur Option*. Gabler.
- [9] J. Kremer (2005): *Einführung in die Diskrete Finanzmathematik*. Springer.
- [10] F. Wagner (2018): Shortfallrisiko. Gabler Wirtschaftslexikon, <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/shortfallrisiko-52495/version-275627>
- [11] P. Vogel (2018): Marktdaten zur Schriftenreihe Trading. Düsseldorf: University of Applied Sciences, *Trading*, No. 1.1, 1–15.
- [12] T. S. Coe, K. Laosethakul (2010): Should individual investors use technical trading rules to attempt to beat the market? *American Journal of Economics and Business Administration*, Vol. 2, No. 3, 201–209.
- [13] T. L. Chong, T. H. Lam (2010): Predictability of nonlinear trading rules in the U.S. stock market. *Quantitative Finance*, Vol. 10, No. 9, 1067–1076.
- [14] W. Brock, J. Lakonishok, B. LeBaron (1992): Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 5, 1731–1764.
- [15] R. Sullivan, A. Timmermann, H. White (1999): Data-snooping, technical trading rule performance, and the bootstrap. *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 5, 1647–1691.
- [16] C. Heldt (2018): Penny Stocks. Gabler Wirtschaftslexikon, <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/penny-stocks-45757/version-269045>
- [17] J. Andrea-Felix, F. Fernandez-Rodriguez (2008): Improving Moving Average Trading Rules with Boosting and Statistical Learning Methods. *Journal of Forecasting*, Vol. 27, No. 5, 433–449.
- [18] G. Dorflleitner, C. Klein (2002): Kursprognose mit Hilfe der technischen Analyse – eine empirische Untersuchung. *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 16, No. 4, 497–521.
- [19] N. Jegadeesh (1990): Evidence of predictable behavior of security returns. *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 3, 881–898.
- [20] J. Conrad, G. Kaul (1998): An Anatomy of Trading Strategies. *The Review of Financial Studies*, Vol. 11, No. 3, 489–519.
- [21] L. A. Goodman (1962): The Variance of the Product of K Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, No. 297, 54–60.

# IMPRINT

**Hochschule Duesseldorf  
University of Applied Sciences**

**Faculty of Media  
Muensterstrasse 156  
40476 Duesseldorf**

**More information on the series „Trading“:  
[https://opus4.kobv.de/opus4-hs-duesseldorf/solrsearch/index/search/  
searchtype/series/id/10](https://opus4.kobv.de/opus4-hs-duesseldorf/solrsearch/index/search/searchtype/series/id/10)  
editor-in-chief Prof. Dr. Peter Vogel  
ISSN 2567-2347**

**Trading ; 3 : Investing  
DOI 10.20385/2567-2347/2019.3  
URN urn:nbn:de:hbz:due62-opus-20373**

**The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available on the Internet at <http://dnb.dnb.de>.**

**Citation:**

**P. Vogel (2019): Investieren unter Nebenbedingungen - Teil 3: Erweiterung der Statistik. Duesseldorf: University of Applied Sciences, Series Trading, No. 3 (Investing), 1-59, available online: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:due62-opus-20373>**

