

# Aufgaben und Lösungen zu der Vorlesung Niederdruckplasmen und Mikrostrukturtechnik

**Gerhard Franz**

ISBN 978-3-943872-05-7

4. Juli 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das Plasma</b>	<b>1</b>
1.1	Debye-Länge . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Ladungsträger</b>	<b>3</b>
2.1	Streuquerschnitte . . . . .	3
2.2	Diffusion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Materie im statischen DC-Feld</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Materie im elektromagnet. Wechselfeld</b>	<b>13</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	13
4.2	Kapazitive Entladungen . . . . .	17
4.3	Induktive Entladungen . . . . .	20
4.4	ECR-Anregung . . . . .	22
4.5	Plasmaschwingungen . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Sputtern</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Plasmadiagnostik</b>	<b>33</b>
6.1	Bulk-Temperatur . . . . .	33



# 1 Das Plasma

## 1.1 Debye-Länge

**Aufgabe 1.1** Bestimmen Sie die DEBYE-Länge in einem Plasma für Elektronen

- $T_e: 4 \text{ eV}, n_e: 10^8/\text{cm}^3: 14,9 \times 10^{-2} \text{ cm};$
- $T_e: 2 \text{ eV}, n_e: 10^9/\text{cm}^3: 33,3 \times 10^{-3} \text{ cm};$
- $T_e: 10 \text{ eV}, n_e: 10^6/\text{cm}^3: 2,35 \text{ cm}.$

**Aufgabe 1.2** Wie hoch ist für diese Längen die Anzahl der Elektronen innerhalb der DEBYE-Kugel ( $4\pi/3 \times \lambda_D^3$ )?

**Lösung.**

- $V_D = 13,9 \text{ mm}^3 = 13,9 \times 10^{-3} \text{ cm}^3;$
- $V_D = 154,7 \times 10^{-3} \text{ mm}^3 = 154,7 \times 10^{-6} \text{ cm}^3;$
- $V_D = 54400 \text{ mm}^3 = 54,4 \text{ cm}^3.$

Daraus folgt für die Zahl der Elektronen innerhalb der DEBYE-Kugel:

- $N = 1,39 \times 10^6$  Elektronen;
- $N = 154,7 \times 10^3$  Elektronen;
- $N = 54,4 \times 10^6$  Elektronen.

**Aufgabe 1.3** Wie groß ist der mittlere Elektronenabstand und das Verhältnis  $a = \lambda_D/r$ ?

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

**Lösung.**

- $\sqrt[3]{10} \times 10^{-3} \text{ cm} = 2,15 \times 10^{-3} \text{ cm} \Rightarrow a = 67,5;$
- $\sqrt[3]{1} \times 10^{-3} \text{ cm} = 1 \times 10^{-3} \text{ cm} \Rightarrow a = 32,5;$
- $\sqrt[3]{1} \times 10^{-2} \text{ cm} = 1 \times 10^{-2} \text{ cm} \Rightarrow a = 228.$

## 2 Ladungsträger

### 2.1 Streuquerschnitte

**Aufgabe 2.1** Bestimmen Sie die Mittlere Freie Weglänge für einen Moleküldurchmesser  $d$  von  $5 \text{ \AA}$  und einen Druck von  $1 \text{ atm}$  bzw.  $1 \mu$  ( $1 \text{ mTorr}$ )!

**Lösung.** Die Teilchenzahldichte beträgt bei  $1 \text{ atm}$  und  $300 \text{ K}$   $2,5 \cdot 10^{19}/\text{cm}^3$ . Damit ergibt sich mit

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{n\pi d^2} \quad (1)$$

eine Wert von

- $510 \text{ \AA}$  bei  $1 \text{ atm}$  und
- $3,88 \text{ cm}$  bei  $1 \text{ mTorr}$  ( $0,13 \text{ Pa}$ ).

**Aufgabe 2.2** Schätzen Sie ab, welcher Bruchteil eines Neutronenstrahls beim Durchtritt durch einen Riegel von  $1 \text{ cm}$  Dicke gestreut worden ist! Dabei ist der Durchmesser eines Atoms in der Größenordnung von  $1 \text{ \AA}$  und der Kerndurchmesser fünf Größenordnungen darunter, und nur direkte Stöße führen bei Vernachlässigung der magnetischen WW zu einer Ablenkung.

**Lösung.** In einer Schicht von  $1 \text{ cm}$  Dicke sind  $10^8$  Atomlagen gestapelt. Da das Radienverhältnis von Kern/Atom  $10^{-5}$  beträgt, ist die Flächenbelegung der Kerne  $10^{-10}$  der Gesamtfläche. Also ist bei einer Dicke von  $10^8$  Atomen eine Streuung an jedem hundertsten Kern zu erwarten.

**Aufgabe 2.3** In einer Sputterkammer beträgt der Druck der Entladung zwischen  $5$  und  $40 \text{ mTorr}$  ( $1$  bis  $5 \text{ Pa}$ ), und der Abstand Target/Substrat  $l$  typisch  $10 \text{ cm}$ . Bestimmen Sie mit dem BEER-LAMBERTSchen Gesetz den Bruchteil der Molekeln, die ungestreut diese Strecke zurücklegen würden, wenn  $l/\lambda = 0,1$  bzw.  $l/\lambda = 1$ !

**Lösung.**

$$N = N_0 e^{-l/\lambda}. \quad (1)$$

- $\frac{l}{\lambda} = 0,1 : \frac{N}{N_0} = 0,905.$
- $\frac{l}{\lambda} = 1 : \frac{N}{N_0} = 0,368.$

In Wirklichkeit ist aber selbst bei niedrigsten Drücken  $\lambda$  nur etwa  $\frac{1}{3}$  des Abstandes Target/Substrat!

**Aufgabe 2.4** 1. Wie unterscheiden sich Streuquerschnitte für Anregungen mit und ohne Schwellenenergie (BETHE-Formel)?

2. Diskutieren Sie die Konsequenzen für den Streuquerschnitt für den elastischen Stoß und denjenigen für die Ionisation, jeweils von Elektronen mit neutralen Ar-Molekeln!

**Lösung.**

1. Die Energieabhängigkeit ist derart, daß in jenem Fall ein Maximum jenseits etwa der doppelten Schwellenenergie, in diesem Fall für einfache Gase (Wasserstoff und Helium) das Maximum bei  $E = 0$  zu finden ist, für alle anderen Gase wird ein ähnlicher Verlauf wie im Falle des unelastischen Streuquerschnitts beobachtet, weil ein Einfluß der äußeren Elektronenschalen auftritt. Bei niedrigen Elektronenenergien dagegen beobachtet man bei allen anderen Gasen den RAMSAUER-Effekt.
2. Das bedeutet für den elastischen Stoß ( $H_2$  und He), daß der Einfluß des Streuquerschnitts bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten am höchsten ist, sonst bei mittleren Geschwindigkeiten.

**Aufgabe 2.5** Was ist der Grund, daß die Maxima der Streuquerschnitte für den unelastischen Stoß alle zwischen 100 und 150 eV liegen? Rechnen Sie die DE BROGLIE-Wellenlänge für ein Elektron aus und ziehen Sie die nötigen Schlußfolgerungen!

**Lösung.** Bei dieser Energie entspricht die DE BROGLIE-Wellenlänge den atomaren Dimensionen. Daher wird die Elektronenwelle hier am stärksten gestreut:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1)$$

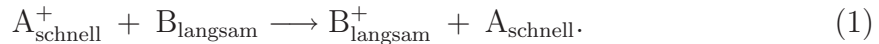
Bei einer Energie von 100 eV ( $= 1,6 \cdot 10^{-17}$  J) ist dann der Impuls

$$p = \sqrt{2m_e E} = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-17}} = 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/sec.} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{5,4 \cdot 10^{-24}} = 1,2 \text{ \AA.} \quad (3)$$

**Aufgabe 2.6** Was ist ein Charge-Transfer? Begründen Sie mit einem Argument aus der Mechanik die Effizienz des resonanten Charge-Transfers!

**Lösung.** Ein Übertrag von Ladung ohne Übertrag von kinetischer Energie:



Der Energieübertrag ist bei gleich schweren Massen maximal. Daher ist der *resonante Charge-Transfer* ähnlich effizient wie Elektronenstöße, obwohl die Energie der stoßenden Partikeln um Größenordnungen niedriger als die der Elektronen ist.

**Aufgabe 2.7** Definieren Sie

- $\alpha$ -Ionisation,
- $\beta$ -Ionisation!

**Lösung.** Mit  $\alpha$  und  $\beta$  wird die Zunahme des Elektronenstroms in Abhängigkeit vom Kathodenabstand beschrieben, ausgelöst durch Stoßionisation entweder von Elektronen oder Ionen:

- $\alpha$ -Ionisation:  $e^- + A_2 \longrightarrow A_2^+ + 2e^-$ ,
- $\beta$ -Ionisation:  $A_2^+ + A_2 \longrightarrow 2 A_2^+ + e^-$ .

Auf dem Weg von der Kathode zur Anode erhöht sich so der Elektronenstrom lawinenartig um

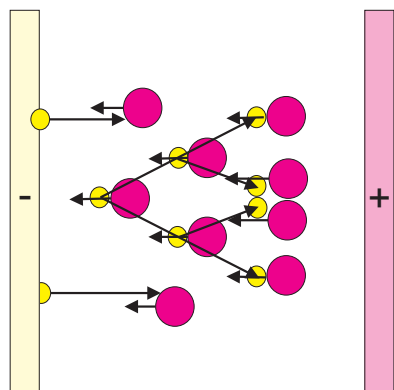
$$I = I_0 \exp(\alpha d) \quad (1)$$

mit  $I_0$  dem Wert an der Kathode und  $d$  dem Elektrodenabstand (s. Abb. 2.1).

**Aufgabe 2.8** Vergleichen Sie die Energieabhängigkeit von Streuquerschnitten der Ionisation von Elektronen und Molekeln. Warum ist die Ionisationswahrscheinlichkeit im Plasma trotz nahezu gleicher Abhängigkeit und auch Maximalwerten so unterschiedlich?

**Lösung.** Die Geschwindigkeit der Molekeln ist deutlich geringer als die der Elektronen, daher bewegt man sich beim Streuquerschnitt der Anregung durch Molekeln ( $\beta$ -Ionisation) auf dem linken, ansteigenden Ast ganz am Anfang bei sehr kleinen Werten.





**Abb. 2.1.** Schematische Darstellung der Auslösung einer Lawine von Ladungsträgern durch Stoßionisation. Lks: Kathode mit kathodischer Randschicht, re.: Anode mit anodischer Randschicht.

**Aufgabe 2.9** Frequenz für den elastischen Stoß zwischen Elektronen und Molekeln  $\nu_m$ :

Wie lautet die Gleichung? In welchem speziellen Fall ist  $\nu_m$  nur eine Funktion der Teilchenzahldichte?

**Lösung.**

$$\nu_m = n\sigma v. \quad (1)$$

wobei  $n$  die Teilchenzahldichte der Molekeln, mit denen ein Elektron stößt. Ist  $\sigma \propto 1/v$ , wie es für Wasserstoff und Helium der Fall ist, dann ist die Stoßfrequenz ausschließlich eine Funktion der Teilchenzahldichte der Molekeln. Dies ist gerade dann der Fall, wenn die Abhängigkeit des Streuquerschnitts von der Geschwindigkeit und die molekulare Geschwindigkeit gerade komplementär sich zueinander verhalten. Dies ist für ein Potential, das mit  $r^{-4}$  abfällt (Potential zwischen einer permanenten Ladung und einem durch sie induzierten Dipol), gegeben:

$$\sigma_{\text{Streu}} = \frac{A}{v}. \quad (2)$$

## 2.2 Diffusion

**Aufgabe 2.10** Bestimmen Sie mit Formeln aus der kinetischen Gastheorie den Diffusionskoeffizienten für Stickstoff bei einer Gastemperatur von 1 000 K [ $\sigma(\text{N}_2)$  : 11,0 Å<sup>2</sup>] und 1 Pa.

**Lösung.** Wir starten mit der Gleichung für

$$D = \frac{1}{3} \lambda \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \quad (1)$$

so daß wir  $\lambda$  und  $\langle v^2 \rangle$  bestimmen müssen:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}, \quad (1)$$

$$n = 9,8 \cdot 10^{14} / \text{cm}^3, \quad (2)$$

$$\lambda = 0,66 \text{ cm}, \quad (3)$$

$$\sqrt{\langle v^2(\text{N}_2) \rangle} = 9,43 \cdot 10^4 \text{ cm/s}. \quad (4)$$

$$D = 2,08 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}. \quad (5)$$

Mit der Formel für den Random Walk ergibt sich für das mittlere Verschiebungsquadrat nach 1 sec:

$$\langle x^2 \rangle = 2D\tau = 208 \text{ m}^2. \quad (6)$$

**Aufgabe 2.11** Bestimmen Sie mit Formeln aus der kinetischen Gastheorie den Diffusionskoeffizienten für Elektronen der Energie 5 eV beim Durchgang durch Argon bei einer Gastemperatur von 300 K und 1 Pa. Rechnen Sie mit einem  $\sigma(\text{Ar})$  von  $15 \text{ \AA}^2$ .

**Lösung.** Wir starten mit der Gleichung für

$$D = \frac{1}{3} \lambda \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \quad (1)$$

so daß wir  $\lambda$  und  $\langle v^2 \rangle$  bestimmen müssen.

**Lösung.** Die Dichte der Ar-Atome bei 300 K und 1 Pa beträgt  $2,42 \cdot 10^{14} / \text{cm}^3$ , die Geschwindigkeit der Elektronen  $8,1 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}$ . Damit wird das *MFP* der Elektronen  $2,75 \text{ cm}$  und  $D$   $2,23 \cdot 10^8 \text{ cm}^2$  oder  $223 \text{ m}^2$ .

**Aufgabe 2.12** Bestimmen Sie die Verhältnisse der LARMOR-Radien für Elektronen der Temperatur 4 eV und für  $\text{Ar}^+$ -Ionen der Temperatur 0,05 eV!

**Lösung.**

$$r = \frac{m_{\text{e,Ar}^+} v}{e_0 B} \wedge E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m_{\text{e,Ar}^+}}. \quad (1)$$

$$2E_{\text{kin}} \cdot m = p^2. \quad (2)$$

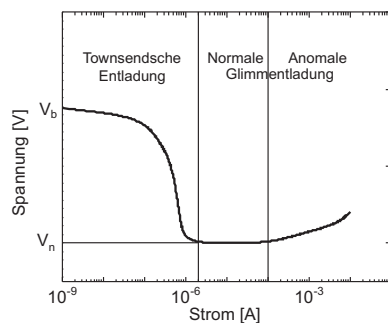
$$r = \frac{\sqrt{2E_{\text{kin}} \cdot m}}{e_0 B}. \quad (3)$$

$$\frac{r_e}{r_{\text{Ar}^+}} = \frac{\sqrt{(8 \text{ eV}) \cdot (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}}{\sqrt{(0,10 \text{ eV}) \cdot (70000 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}}. \quad (4)$$

$$\frac{r_e}{r_{\text{Ar}^+}} = \sqrt{\frac{8}{7000}} = 0,0338 \Rightarrow \left(\frac{r_e}{r_{\text{Ar}^+}}\right)^{-1} = 29,6. \quad (5)$$

### 3 Materie im statischen DC-Feld

**Aufgabe 3.1** Wie aus der Abbildung ersichtlich, weist eine TOWNSENDSche Entladung einen negativen differentiellen Widerstand auf. Um ein Durchgehen der Entladung durch den Lawineneffekt zu vermeiden, arbeitet man mit einer Drossel. Bestimmen Sie für eine Leuchtstoffröhre mit einer Leistung von 60 W, die mit einer Betriebsspannung von 60 V am normalen Netz mit 230 V betrieben werden soll, welchen (frequenzabhängigen) Vorwiderstand man einbauen muß!



**Abb. 3.1.** Im Bereich der TOWNSENDSchen Entladung ist der differentielle Widerstand negativ, wodurch der Strom bei steigender Betriebsspannung wächst.

**Lösung.**

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}. \tag{1}$$

Eine 60 W-Leuchtstoffröhre benötigt bei 60 V 1 A  $\Rightarrow R = 60 \Omega$ . Aus einer 230 V-Steckdose kommt also 1 A  $\Rightarrow Z = 230 \Omega$ .

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{230^2 - 60^2} = 222 \Omega. \tag{2}$$

Die Induktanz muß also  $X_L = \omega L \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = 0,71 \text{ H}$  sein. Der Wirkungsgrad wird durch einen Vorwiderstand verbessert, der den Strom begrenzt, ohne Wärme zu entwickeln.

**Aufgabe 3.2** Eine wesentliche Größe in einer DC-Entladung ist das Verhältnis  $E/p$  mit  $E$  dem für den Durchbruch notwendigen elektrischen Feld und  $p$  dem Entladungsdruck (bzw. in der Darstellung von PASCHEN:  $U_B$  gegen  $p \times d$  mit der Durchbruchspannung  $U_B$  und  $d$  dem Elektrodenabstand). Zeigen Sie quantitativ, daß es ein

Minimum als Folge zweier konkurrierender Mechanismen der Energieaufnahme und Energiedissipation gibt!

**Lösung.** Wenn die Elektronen die Strecke  $\lambda$  in einem Feld  $U/d$  durchfallen, haben sie die Energie

$$\frac{e_0 U \lambda}{d} \quad (1)$$

aufgenommen. Dieser Energiegewinn muß zum Zünden des Plasmas mindestens gleich dem Ionisierungspotential  $E_{\text{Ion}}$  sein. Die mittlere freie Weglänge ist

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (2)$$

mit  $n$  der Teilchenzahldichte und  $\sigma$  dem Streuquerschnitt der Ionisation,  $n$  ist bei konstanter (!) Temperatur dem Druck der Entladung proportional:  $p = nRT$ . Folglich ist

$$\frac{U}{d} = \frac{\sigma p E_{\text{Ion}}}{e_0 k_B T}. \quad (3)$$

Zahlenbeispiele:

- $p$ : 1 bar ( $10^5$  Pa = 10 N/cm<sup>2</sup>);  $E_{\text{Ion}}$ : 15,8 eV  $\rightarrow U/d \approx 7,5 \times 10^3$  V/cm;
- $p$ : 1 Pa (7,5 mTorr,  $10^{-1}$  mbar): 0,075 V/cm.

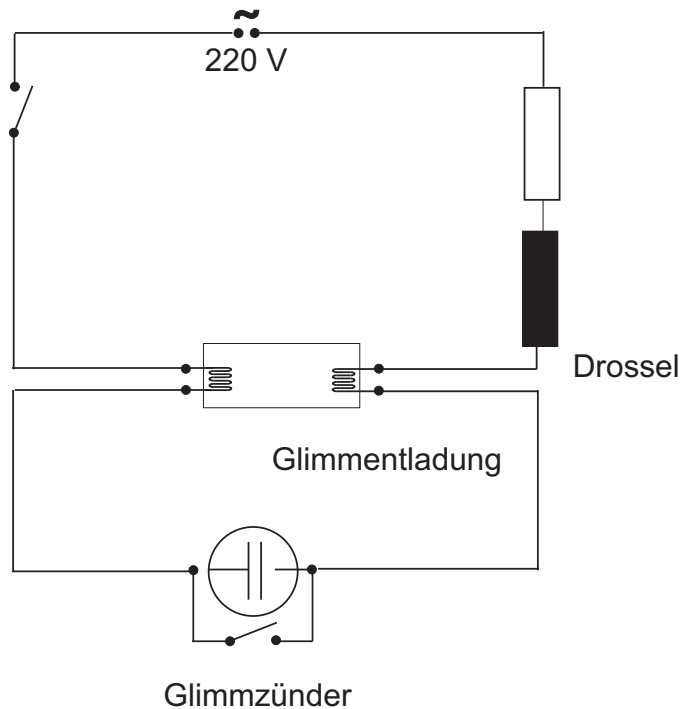
Für hohe Gasdichten (kleines  $\lambda$ ) benötigt man also ein großes Feld, für niedrige Gasdichten (großes  $\lambda$ ) dagegen nur kleine Felder, der Quotient  $E/p$  ist über einen großen Druckbereich nahezu konstant (mit schwach positiver Steigung). Zu sehr niedrigen Drücken steigt der zum Durchbruch erforderliche Wert allerdings steil an, weil nahezu alle auf hinreichende Geschwindigkeit gebrachten Elektronen durch Wandreaktionen verloren gehen. Die Kurve  $pd \rightarrow U_B$  oder  $p \rightarrow E_B$  muß ein Minimum aufweisen.

**Aufgabe 3.3** Die Durchbruchsspannung ist bedeutend höher als die zum Erhalt der Entladung notwendige Betriebsspannung. Erklären Sie dies! Mittels der Zeichnung beschreiben Sie, wie beim Öffnen des Stromkreises ein Spannungsstoß entsteht, der leicht einige hundert Volt erreicht, eine für Leuchtstoffröhren ausreichende Zündspannung. Wenn die Drossel eine Eigeninduktivität von 1 H = 1 Vs/A hat, und ein Strom von 2,5 A (eff) fließt: wie hoch ist die induzierte Spannung ( $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$ , Netzfrequenz: 50 Hz)?

**Lösung.**

$$U_{\text{ind}} = -L\dot{I}, \quad (1)$$

Der Spitzenwert ist  $\sqrt{2} \cdot 2,5$  A, die maximale Änderung während einer halben Periode ( $\frac{1}{100}$  sec) ist



**Abb. 3.2.** Zündung einer Leuchtstoffröhre mit Glimmzünder und Drosselspule. Bei Stromfluß zündet die Glimmlampe, die Elektroden verbiegen und berühren sich  $\Rightarrow$  Kurzschluß, wodurch die Elektroden zum Glühen gebracht werden. Elektronen treten aus der Kathode aus; es fließt ein schwacher Strom durch die Leuchtstoffröhre, der aber immerhin größer ist als der durch die Glimmlampe, weil deren Widerstand jetzt bedeutend höher als der der Leuchtstoffröhre ist. Daraufhin kühlen die Bimetallstreifen ab, der Kontakt öffnet sich wieder, und es kommt zu einem abrupten Ende des Stromflusses. Diese Stromänderung induziert in der Drossel einen Spannungsstoß, der hoch genug ist, um die Leuchtstoffröhre zu zünden.

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot \sqrt{2}}{0,01} \text{ Asec} = 707 \text{ A/sec.} \quad (2)$$

Also ist die induzierte Spannung 707 V.

**Aufgabe 3.4** Wenn  $\alpha$  eine für das Gas charakteristische Größe ist ( $\alpha = n\sigma$  mit  $\sigma$  dem Streuquerschnitt der Ionisation), warum gilt das nicht auch für  $\gamma$ ?

**Lösung.**  $\gamma$  ist nicht nur eine Eigenschaft der kinetischen Energie der auftreffenden Ionen und der Austrittsarbeit  $W_A$  des Targets, sondern hängt zusätzlich empfindlich von der Oberflächenbeschaffenheit des Targets ab.

**Aufgabe 3.5** Beschreiben Sie die Bereiche Kathoden-Dunkelraum und Glühzone als existenznotwendige Bereiche einer DC-Entladung!

**Lösung.** Im Kathodendunkelraum entnehmen die Elektronen und Ionen dem E-Feld Energie und werden in der Glühzone durch Stöße (inelastisch und elastisch) abgebremst. Die inelastischen Stöße sind verantwortlich für die Ionisation, aber auch die optische Anregung etc.

**Aufgabe 3.6** In die Gleichung für die Ionisationsrate durch Elektronenstoß gehen verschiedene Faktoren ein. Welche? Warum existiert eine Schwelle für diesen Prozeß?

**Lösung.**

$$G_{\text{Ion}} = \int_{E_{\text{Ion}}}^{\infty} \sigma_{\text{Ion}}(v) f(v) v dv. \quad (1)$$

**Aufgabe 3.7** Was ist die typische Größe des Kathodenfalls einer anomalen Entladung, wie sie zum DC-Sputtern notwendig ist? Was ist das für ein Energiebereich? Welche Prozesse sind folglich bei der Erzeugung von  $\gamma$ -Elektronen zu berücksichtigen?

**Aufgabe 3.8** Warum ist der Wert für die Durchbruchspannung wesentlich höher als der für den Betrieb (Unterhalt) einer Entladung?

**Lösung.** Auf Grund der starken Erniedrigung des Diffusionskoeffizienten der Elektronen (ambipolare Diffusion) wird die Effizienz der Entladung wesentlich größer. Damit reichen wesentlich niedrigere Spannungen zur Aufrechterhaltung der kritischen Ladungsträgerdichte (Stoßlawine) aus.

# 4 Materie im elektromagnet. Wechselfeld

## 4.1 Allgemeines

**Aufgabe 4.1** Ein  $\text{Ar}^+$ -Ion und ein Elektron werden bei 13,56 MHz mit 500 V/cm beschleunigt. Wie hoch sind ihre Geschwindigkeiten nach ihrer Beschleunigungs-Halbperiode, wie groß ist der zurückgelegte Weg? Was macht das für die erhaltene kinetische Energie aus?

**Lösung.**

$$F = e_0 E = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e_0}{m} E_0 \cos \omega t \quad (2)$$

Die maximale Geschwindigkeit wird nach einer Viertelperiode erreicht (Durchgang durch die Nullage):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e_0}{m\omega} E_0 \sin \omega t \Big|_0^{T/4} = \frac{e_0}{m\omega} E_0. \quad (3)$$

Nach  $T/2$ , am Umkehrpunkt, ist die Geschwindigkeit wieder Null:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e_0}{m\omega} E_0 \sin \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{0 \times e_0}{m\omega} E_0. \quad (4)$$

Damit ist die maximale Geschwindigkeit mit

- $e_0 = 1,6 \times 10^{-19}$  C,
- $m_e = 9,11 \times 10^{-28}$  g und
- $m_{\text{Ar}^+} = 6,6 \times 10^{-23}$  g und
- $\omega = 85,16 \times 10^6$  Hz:
- $v_{e^-} = 1,03 \times 10^{10}$  cm/s,  $v^2 = 1,061 \times 10^{20}$  cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>;
- $v_{\text{Ar}^+} = 1,42 \times 10^5$  cm/s,  $v^2 = 2,02 \times 10^{10}$  cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>.



Der zurückgelegte Weg ergibt sich durch nochmalige Integration:

$$x = \frac{e_0}{m\omega^2} E_0 \cos \omega t \Big|_0^{T/2}, \quad (5)$$

$$x = \frac{2e_0}{m\omega^2} E_0, \quad (6)$$

damit also für Elektron und  $\text{Ar}^+$  240 cm bzw. 33  $\mu\text{m}$ .

Die übertragenen Energien sind auf das Elektron:  $3 \times 10^4$  eV, auf das  $\text{Ar}^+$ -Ion:  $8,3 \times 10^{-1}$  eV!

**Aufgabe 4.2** Wie lange ist ein Wellenzug einer Lichtwelle, wenn der Sprung des Elektrons 10 ns dauert?

**Lösung.**

$$l = c \times 10 \text{ ns} = 10 \times 10^{-9} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm.}$$

Ein Wellenzug ist 300 cm lang, also für blaues Licht 7,5 Millionen Wellenzüge, für rotes Licht die Hälfte.

**Aufgabe 4.3** Trägt man die zum Durchbruch notwendigen Feldstärken  $E_B$  gegen den Gasdruck auf, beobachtet man ein Minimum bei mittleren Drücken. Diskutieren Sie dieses Minimum als Folge zweier gegenläufiger Effekte.

**Lösung.** Die Leistungsaufnahme eines Elektrons ist

$$P_{\text{abs}} = -1/2 e_0 \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}_e, \quad (1)$$

mit der AC-Beweglichkeit (in der das effektive Feld steckt),

$$\mu_{\text{AC}} = -\frac{e_0}{m_e} \frac{\nu_m - i\omega}{\omega^2 + \nu_m^2} \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_e = \mu_{\text{AC}} \mathbf{E}_0 \quad (3)$$

also

$$P_{\text{abs}} = -1/2 e_0 \cdot \mu_{\text{AC}} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0. \quad (4)$$

Damit ergibt sich die Frequenzabhängigkeit der Leistungsaufnahme zu

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{ne_0^2}{m_e} \cdot E_0^2 \cdot \frac{\nu_m^2 + \omega^2 - 2\nu_m^2}{(\nu_m^2 + \omega^2)^2} \quad (5)$$

und das Maximum bei  $\omega = \nu_m$ , was so erklärt werden kann:

Fall (1): Hoher Gasdruck  $\nu_m^2 \gg \omega^2$  (viele Stöße pro Schwingung): Die vom Feld auf das Elektron übertragene Energie wird in elastischen Stößen zwischen Elektronen und Molekeln dissipiert, und zwar ist der Energieverlust pro Stoß  $\Delta\varepsilon$  über den LAN-GEVINSchen Energieverlustparameter  $2m_e/(m_i+m_e)$ , also ungefähr  $2m_e/m_i$ , definiert:

$$\Delta\varepsilon \approx \frac{1}{|\nu_m|} \cdot \frac{e_0^2 E_{\text{eff}}^2}{m_e \nu_m} = \frac{2m_e}{m_i} \langle \varepsilon_e \rangle \quad (6)$$

mit  $\langle \varepsilon_e \rangle$  der mittleren Energie der Elektronen, womit das elektrische Feld wird

$$E_{\text{eff}} = \nu_m \cdot \sqrt{\frac{2m_e^2}{e_0^2 m_i} \cdot \langle \varepsilon_e \rangle}, \quad (7)$$

das effektive Feld ist folglich proportional  $\nu_m$ , also  $p$ . Die Abhängigkeit ist damit ähnlich wie im DC-Fall (aufgenommene Energie ist proportional  $E/p$  mit  $E$  der elektrischen Feldstärke).

Fall (2): Niedriger Gasdruck  $\nu_m^2 \ll \omega^2$  (viele Schwingungen pro Stoß): Da hier das *MFP* der Elektronen zunimmt, sinkt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron dem Feld Energie entnimmt. Deswegen muß bei sinkendem Gasdruck das Feld um den Betrag des effektiven Feldes ansteigen. Unter der vereinfachenden Annahme, daß alle unelastischen Stöße eine Ionisierung verursachen, ist die absorbierte Leistung  $P_{\text{abs}} = \nu_{\text{Ion}} \langle \varepsilon_{\text{Ion}} \rangle$ , womit für die Ionisierungsfrequenz folgt:

$$\nu_{\text{Ion}} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_{\text{Ion}}} = \frac{e_0 E^2}{m_e \varepsilon_{\text{Ion}} \nu_m} \cdot \frac{\nu_m^2}{\nu_m^2 + \omega^2}, \quad (8)$$

was sich für  $\nu_m \ll \omega$  zu

$$\nu_{\text{Ion}} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_{\text{Ion}}} = \frac{e_0^2 E^2}{m_e \varepsilon_{\text{Ion}}} \cdot \frac{\nu_m}{\omega^2} \quad (9)$$

vereinfacht. Also ist

$$P_{\text{abs}} = \varepsilon_{\text{Ion}} \cdot \frac{e_0^2 E^2}{m_e \varepsilon_{\text{Ion}}} \cdot \frac{\nu_m}{\omega^2} \quad (10)$$

Für die Durchbruchbedingung gilt andererseits  $\nu_{\text{Ion}} = D/\Lambda^2$  (mit  $\Lambda$  der Diffusionslänge, die ausschließlich von den Dimensionen des Reaktors abhängt), wobei  $D$  sich aus der kinetischen Gastheorie zu  $D = \lambda \langle v \rangle / 3$  ergibt (mit  $\lambda$  dem *MFP*):

$$\nu_{\text{Ion}} = \frac{\lambda \langle v \rangle}{3\Lambda^2}. \quad (11)$$

Da  $\langle v \rangle$  geschrieben werden kann als  $\langle v \rangle = \lambda \nu_m$ , folgt schließlich für das Verhältnis von Stoß- zu Ionisierungsfrequenz:

$$\frac{\nu_{\text{Ion}}}{\nu_m} = \frac{\lambda^2}{3\Lambda^2} \quad (12)$$

bzw.

$$\nu_{\text{Ion}} \cdot \nu_{\text{m}} = \frac{\langle v^2 \rangle}{3\Lambda^2} \quad (13)$$

Deswegen ist  $E$  proportional  $\omega$  und umgekehrt proportional  $\nu_{\text{m}}$  und damit auch  $p$ .

Mit  $\langle \varepsilon_e \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_e^2 \rangle$  ist schließlich

$$E = \frac{\omega}{e_0 \Lambda \nu_{\text{m}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{\text{Ion}} \langle \varepsilon_e \rangle}. \quad (14)$$

Das Minimum liegt folglich an dem Punkt, an dem die Stoßfrequenz  $\nu_{\text{m}}$  gleich der Frequenz des angelegten RF-Feldes  $\omega_{\text{RF}}/(2\pi)$  wird.

**Aufgabe 4.4** Zeigen Sie, daß die maximale Bewegungsenergie der Elektronen im stoßfreien MW-Plasma ( $\nu = 2,45$  GHz) bedeutend niedriger als im RF-Plasma ( $\nu = 13,56$  MHz) ist.

**Lösung.** Analog zur Lsg. Aufgabe (4.1) ergibt sich ein Unterschied in den Geschwindigkeiten, der in folgender Tabelle zusammengefaßt ist.

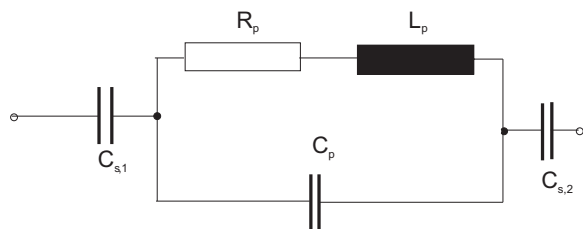
**Tabelle 4.1.** Geschwindigkeit und kinetische Energie eines in einem HF-Feld frei schwingenden Elektrons ohne Stöße bei den Anregungsfrequenzen 13,56 MHz und 2,45 GHz

$\nu$	$E$ [V/cm]	$v$ [cm/s]	$E_{\text{kin}}$ [eV]
13,56 MHz	1	$2,07 \cdot 10^7$	0,12
	10	$2,07 \cdot 10^8$	12,2
	100	$2,07 \cdot 10^9$	1217
2,45 GHz	10	$1,14 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^{-4}$
	100	$1,14 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^{-2}$
	1000	$1,14 \cdot 10^8$	3,6

Tatsächlich nehmen die Elektronen diese maximale Energie kaum auf, da sie bereits vorher einen Stoß mit Phasenerstörung erleiden. Typische Frequenzen für den elastischen Stoß sind etwa ( $e_0^-$  in Argon):

- für 133 Pa (1 Torr,  $3,54 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ )  $3,8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,
- für 13,3 Pa (100 mTorr)  $382 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  und
- für 1,3 Pa (10 mTorr)  $38 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ .

Der Anregungsfrequenz von 13,56 MHz entspricht eine Kreisfrequenz von 85 MHz, der Anregungsfrequenz von 2,45 GHz eine von 15 GHz (Verhältnis etwa 180). Das entspricht Stoßfrequenzen bei Drücken von 22 mTorr bzw. 4 Torr. Bei diesen Frequenzen ist die Gleichstromleitfähigkeit gleich der komplexen Leitfähigkeit, und der induktive Widerstand  $R = \omega L$  gleich dem OHMSchen.



**Abb. 4.1.** Ersatzschaltbild einer kapazitiven Entladung. Im symmetrischen Fall ist  $C_{s,1} = C_{s,2}$ .

## 4.2 Kapazitive Entladungen

**Aufgabe 4.5** Wenn man unter kapazitiver Einkopplung die Einwirkung eines elektrischen und unter induktiver Einkopplung die eines magnetischen Feldes versteht, warum sind dann auch mit Spulen bei niedrigen Plasmadichten nur kapazitive Einkopplungen möglich?

**Lösung.** Nach der Zündung wird zunächst bei niedrigen Plasmadichten die sog.  $E$ -Mode angeregt, bei der das  $E$ -Feld hoch ist. Erst wenn die Ladungsträgerdichte steigt, kann das  $H$ -Feld überhaupt wirksam werden: Umschlag zum  $H$ -Modus.

In der Konsequenz bedeutet das zu Beginn der Entladung ein  $E$ -Feld, dessen Stärke sich nach den Potentialen an den Enden der Spule bemisst, während später, im  $H$ -Modus, die Spannungsabfälle an jeder Wicklung von Bedeutung sind.

**Aufgabe 4.6** Zeigen Sie, daß in einer symmetrischen Entladung bei steigender Leistungseinkopplung ein Umschlag von elektronischer zu ionischer Aufheizung erfolgt und gleichzeitig das OHMSche Gesetz ( $U \propto I$ ) durch eine quadratische Stromabhängigkeit abgelöst wird, so daß die an der heißen Elektrode entstehende Gleichspannung proportional  $\sqrt{P_{\text{RF}}}$  wird.

**Lösung.** Wir können das Ersatzschaltbild einer symmetrischen Entladung mit dieser Abbildung beschreiben, wobei wir von einer rein OHMSchen Last im Plasma selbst ausgehen. Dabei soll sowohl der OHMSche Widerstand der Glühzone  $R_p$  aus zwei Anteilen bestehen: dem Widerstand bedingt durch OHMSche Aufheizung,  $R_\Omega$ , und dem durch stochastische Aufheizung,  $R_{\text{st}}$ :  $R_p = R_\Omega + R_{\text{st}}$ . Dazu kommt ein kapazitiver Anteil,  $C_p$ , und ein induktiver Anteil,  $L_p$ , der auf die Trägheit der Elektronen im RF-Feld zurückzuführen ist. In den Randschichten sind der OHMSche Widerstand,  $R_s$ , bedingt durch Energiedissipation, die u. a. zur Beschleunigung der Ladungsträger durch die gleichgerichtete Schichtspannung führt, sowie kapazitiver Anteil des Verschiebungsstroms,  $C_s$ , parallel geschaltet. Dieser berechnet sich für zwei hintereinander geschaltete Randschichten der Fläche  $A$  und der Dicke  $d_s$  nach

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_{s,1}} + \frac{1}{C_{s,2}} \quad (1)$$

mit

$$C_{S,1} = C_{S,2} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{A}{d_S}, \quad (2)$$

also  $C_S = C_{S,1}/2$ , damit also

$$R_S = 1/\omega C_S = \frac{2d_S}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega A}. \quad (3)$$

Da in der Randschicht die Dichte bewegter Ladungsträger gegen Null geht, ist  $\varepsilon = 1$ . Sind die Widerstände von Randschicht und Glühzone im einfachsten Modell hintereinander geschaltet:

$$R = R_P + R_S, \quad (4)$$

dann ist der Strom durch beide gleich, und wir können schreiben:

$$V = I(R_P + R_S) = V_P + V_S, \quad (51)$$

und für die absorbierte Leistung folgt

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} I_{\text{RF}} (V_{\text{P,RF}} + I_{\text{RF}} R_S) \quad (5)$$

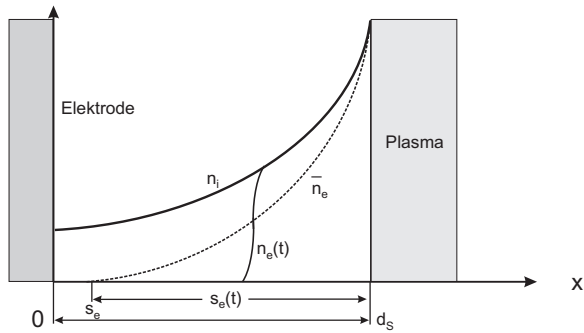
mit  $V_P$  dem Plasmapotential, der Index „RF“ bezeichnet die Amplitude. Außerdem gilt dann für den Potentialabfall in der Randschicht

$$V_S = \sqrt{V^2 - I^2(R_P^2 - 2R_P R_S)}. \quad (6)$$

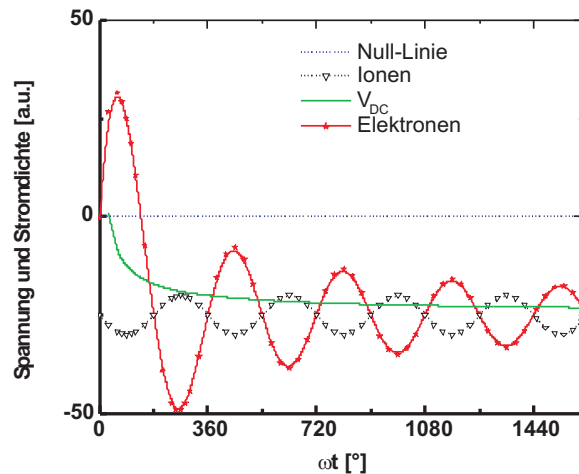
Wegen des Ionisierungsgleichgewichts in der Glühzone ist der Potentialabfall in ihr nahezu unabhängig vom Strom der Entladung. Grenzfälle: für kleine  $I$  hängt die absorbierte Leistung linear von  $I$  ab, die Konstante ist  $V_{\text{P,RF}}$ ; also gilt für kleine  $I$  das OHMSche Gesetz. Für große Ströme erwartet man dagegen eine Abhängigkeit  $P \propto I^2$  (mit einem kleineren linearen Anteil des ersten Summanden aus der vorletzten Gl.). Anschaulich bedeutet dieser Umschlag in der Stromabhängigkeit in der Leistung, daß sich der Absorptionsmechanismus von der Aufheizung der Elektronen zu der der Ionen verschiebt.

**Aufgabe 4.7** Beschreiben Sie den Verlauf der Ladungsträgerdichten für  $\oplus$  und  $\ominus$  in der kathodischen Randschicht. Warum nimmt die Ladungsträgerdichte  $\rho$  Richtung Elektrode ab? Was versteht man unter der BOHM-Kante?

**Lösung.**



**Abb. 4.2.** Die Elektronendichte nimmt, von der BOHM-Kante kommend, an der fast noch Ladungsneutralität herrscht, aber die Ionen bereits vom Potentialtrichter erfaßt worden sind, sehr viel stärker als die Ionendichte ab. Beide müssen aus Kontinuitätsgründen abnehmen, da die Stromdichte als Produkt aus Dichte der Ladungsträger und deren Geschwindigkeit  $j = \rho \cdot v$  konstant ist.



**Abb. 4.3.** Die Oberflächen der Elektroden laden sich negativ auf, wenn sie gegen DC-Strom durch Hochpaßfilter abgekoppelt sind.

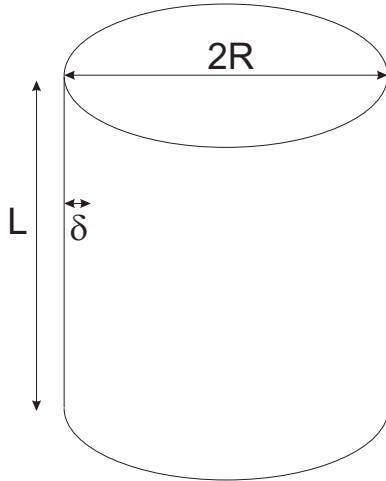
**Aufgabe 4.8** Beschreiben Sie die Elektrodenvorgänge in kapazitiv gekoppelten Entladungen unmittelbar nach dem Zünden der Entladung!

**Lösung.** Aufgrund der unterschiedlichen Beweglichkeiten der Ladungsträger laden sich die Elektroden so lange negativ auf, bis die Stromdichten entgegengesetzt gleich groß sind.

<sup>1</sup>Diese Summe ist der Realteil des Widerstandes; in ihr ist der kapazitive Anteil nicht enthalten!

### 4.3 Induktive Entladungen

**Aufgabe 4.9** Bestimmen Sie die absorbierte Leistung in der Mantelschicht der Skintiefe  $\delta$ , wenn die zylindrische Spule die Länge  $l = L$  und den Radius  $r = R$  hat ( $\delta \ll R$ , s. Abb. 4.4).



**Abb. 4.4.** Der Strompfad durch die zylindrische Randschicht bei einer induktiven Entladung. Die Skintiefe soll klein gegenüber dem Radius sein, so daß man mit konstanter Stromdichte in der zylindrischen Randzone rechnen kann.

**Lösung.** Die induzierte Stromdichte erreicht den Wert  $j$ , kommend von Null, so daß der Strom in der Mantelschicht der Dicke  $\delta$

$$I = j2\pi RL \quad (1)$$

wird. Die Leistung ist

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} I^2 R \quad (2)$$

mit

$$R = \rho c = \frac{c}{\sigma} = \frac{l}{A\sigma} = \frac{\delta}{2\pi RL\sigma} \quad (3)$$

dem Widerstand in der Plasmasäule. Also ist

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \frac{(j2\pi RL)^2 \delta}{2\pi RL\sigma} = \frac{1}{2} \frac{j^2}{\sigma} 2\pi RL\delta. \quad (4)$$

**Aufgabe 4.10** Bestimmen Sie den Plasmawiderstand und die Eigeninduktivität der Plasmasäule aus der absorbierten Leistung in der Mantelschicht der Skintiefe  $\delta$ , wenn die zylindrische Spule die Länge  $l = L$  und den Radius  $r = R$  hat!

**Lösung.** Wenn die induzierte Stromdichte  $j$  ist, dann ist die Stromstärke in der Randschicht der Dicke  $\delta$  und der Länge  $L$

$$I = jL\delta; \quad (1)$$

gleichzeitig ist die im Plasma absorbierte Leistung

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2}I_{\text{p}}^2 R_{\text{p}}, \quad (2)$$

was gleich der in Aufgabe 4.9 bestimmten Leistungsabgabe ans Plasma ist. Also

$$R_{\text{p}} = \frac{2\pi R}{L\sigma\delta}. \quad (3)$$

Der Fluß ist

$$\Phi = L_{\text{p}}I_{\text{p}}, \quad (4)$$

wobei

$$\Phi = BA = \mu_0 H_z \pi R^2 \wedge H_z = \frac{I}{L} = j_{\text{p}}\delta. \quad (5)$$

Somit erhalten wir

$$L_{\text{p}} = \frac{\mu_0 \pi R^2}{L}. \quad (6)$$

**Aufgabe 4.11** Wenn wir einen Spule der Länge  $L$  mit dem Radius  $\rho$  betrachten, die um eine Plasmaquelle mit Innendurchmesser  $R$  mit  $N$  Windungen (also mit  $n = N/L$  Amperewindungen gewickelt ist, dann ist die Induktionsmatrix

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{RF}} &= i\omega L_{11}I_{\text{RF}} + i\omega L_{12}I_{\text{P}} \\ V_{\text{P}} &= i\omega L_{21}I_{\text{RF}} + i\omega L_{22}I_{\text{P}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

mit der Selbstinduktivität  $L_{11}$  in der Spule, im Plasma,  $L_{22}$ , und den Gegeninduktivitäten  $L_{12} = L_{21}$

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= L_{\text{S}} = \frac{\mu_0 \pi N^2 \rho^2}{L}, \\ L_{22} &= L_{\text{P}} = \frac{\mu_0 \pi R^2}{L}, \\ L_{12} &= L_{21} = \frac{\mu_0 \pi N R^2}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wie groß ist die Impedanz  $Z_{\text{S}} = \frac{V_{\text{RF}}}{I_{\text{RF}}}$ ?

**Lösung.**

$$V_{\text{P}} = -I_{\text{P}}R_{\text{P}} = i\omega L_{12}I_{\text{RF}} + i\omega L_{22}I_{\text{P}} \quad (3)$$

$$-I_{\text{P}}(R_{\text{P}} + i\omega L_{22}) = i\omega L_{12}I_{\text{RF}} \quad (4)$$

$$I_{\text{P}} = -\frac{i\omega L_{12}I_{\text{RF}}}{R_{\text{P}} + i\omega L_{22}} \quad (5)$$



$$Z_S = R_S + i\omega L_S = \frac{V_{\text{RF}}}{I_{\text{RF}}} = i\omega L_S + \frac{\omega^2 L_{21}^2}{R_P + i\omega L_P}, \quad (6)$$

was für  $\delta \ll R$ , damit  $R_P \ll i\omega L_P$ , geschrieben werden kann:

$$Z_S = i\omega L_S + \frac{i\omega L_{21}^2}{L_P} \left(1 - \frac{R_P}{i\omega L_P}\right) = i\omega \left(L_P + \frac{L_{12}^2}{L_P}\right) + R_P \left(\frac{L_{12}}{L_P}\right)^2, \quad (7)$$

verkürzt also

$$Z_S = i\omega(L_{11} - nL_{12}) + n^2 R_P \quad (8)$$

mit  $R_S = n^2 R_P$  und  $L_S = L_{11} - nL_{12}$ .

#### 4.4 ECR-Anregung

**Aufgabe 4.12** Ein Ar-Ion mit einer kinetischen Energie  $\frac{1}{2}mv^2$  von 0,042 eV wird von einem magnetischen Feld der Flußdichte 0,0875 Tesla eingefangen und gyriert in diesem. Wie groß ist der LARMOR-Radius?

**Aufgabe 4.13** Ein Elektron mit einer kinetischen Energie  $\frac{1}{2}mv^2$  von 5 eV wird von einem magnetischen Feld der Flußdichte 0,0875 Tesla eingefangen und gyriert in diesem. Wie groß ist der LARMOR-Radius?

**Lösung.**

$$F_L = F_z \quad (1)$$

$$e_0 v B = \frac{m_e v^2}{r} \quad (2)$$

$$r = \frac{m_e v}{e_0 B} \quad (3)$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ m/sec} \quad (4)$$

$$r = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm.} \quad (5)$$

## 4.5 Plasmaschwingungen

**Aufgabe 4.14** Warum können elektromagnetische Wechselfelder im Plasma absorbiert werden? Beschreiben Sie den Mechanismus der Absorption! Aus der Herleitung der Plasmaschwingungsgleichung kann eine Analogie zum mathematischen Pendel gezogen werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ne_0^2}{\varepsilon_0 m_e} x = 0. \quad (1)$$

Welche Größe entspricht der Federkonstanten  $D$ , welche der Pendelmasse  $m$ ? Wie groß ist die Eigenfrequenz  $\omega_0$ ?

**Lösung.** Es existieren im Gegensatz zum Dielektrikum freie Ladungsträger, die zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden können und damit Energie des Wellenfeldes aufnehmen und durch elastische Stöße dissipieren. Damit wird die Energie des Wellenfeldes vernichtet, also absorbiert.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ne_0^2}{\varepsilon_0 m_e} x = 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} x = 0. \quad (2)$$

$$D = \frac{ne_0^2}{\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Die Ladungsträgerdichte  $\rho = ne_0$  hat also die Funktion der Federkonstanten  $D$ . Je höher  $\rho$  ( $D$ ), um so höher die Eigenfrequenz, umso härter die Feder. Umgekehrt ist bei der sehr viel größeren Ionenmasse die Frequenz niedriger oder die Feder weicher.

**Aufgabe 4.15** In der Gleichung für die Plasmafrequenz stehen als Variable die relative DK und die Elektronendichte. Unter der Annahme, daß sie gleich der Teilchendichte ist: warum schimmern Gold gelb und Kupfer rot?

**Lösung.** Gold muß eine Plasma-Frequenz im Violetten ( $\lambda = 450$  nm), Kupfer im Grünen ( $\lambda = 550$  nm) haben, damit die Metalle in ihren Komplementärfarben schimmern können. Also ist

$$\nu_{\text{Cu}} = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \wedge \nu_{\text{Au}} = 6,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}; \quad (1)$$

$$\omega_{\text{Cu}} = 34,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \wedge \omega_{\text{Au}} = 42,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}; \quad (2)$$

$$\omega_{\text{Cu,Au}} = \sqrt{\frac{ne_0^2}{\varepsilon\varepsilon_0 m_e}}; \quad (3)$$

**Tabelle 4.2.** Wellenlängen, ab denen Alkalimetalle transparent werden.

Metall	$\lambda$ (exp.) Å	$\lambda$ (theoret.) Å
Li	1550	1550
Na	2100	2090
K	3150	2870
Rb	3400	3220

$$V_M = \frac{m_M}{\rho} \Rightarrow V_{\text{Cu}} = 7,14 \text{ cm}^3 \wedge V_{\text{Au}} = 10,21 \text{ cm}^3; \quad (4)$$

$$n_{e,\text{Cu}} = 8,4 \cdot 10^{22}/\text{cm}^3 \wedge n_{e,\text{Au}} = 5,9 \cdot 10^{22}/\text{cm}^3; \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{ne_0^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 m_e}. \quad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 m_e} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,81 \cdot 10^{-31}} \cdot \frac{\text{V m}}{\text{Coul kg}}. \quad (7)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 m_e} = 0,032 \cdot 10^5 \text{ m}^3. \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\text{Cu}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3,2 \cdot 10^3 = 23,04. \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\text{Au}} = 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot 3,2 \cdot 10^3 = 10,56. \quad (10)$$

Das ist durch die Polarisation der Atomrüpfen bedingt, denn die Elektronen fallen ja ab der Plasmafrequenz aus! Andere Metalle haben wesentlich kleinere relative DKs und werden daher erst später transparent, so etwa Natrium ab 210 nm ( $\omega_0 = 14,4 \cdot 10^{14}$  Hz, s. Tabelle 1.1).

**Aufgabe 4.16** Ar-Plasmadichte  $n = 10^{10}/\text{cm}^3$ . Bestimmen Sie  $\omega_p$  von  $\text{Ar}^+$ -Ionen und Elektronen! Diskutieren Sie die Konsequenzen bei sich kontinuierlich steigender Anregungsfrequenz!

**Lösung.** Die Kreisfrequenzen betragen 900 MHz bzw.  $\frac{900}{\sqrt{40 \times 1836}} = 3,33$  MHz (entspricht also einem  $\nu$  von 143 bzw. 0,5 MHz). Regt man mit steigender Frequenz an, wird die Welle absorbiert; die Ionen können ab 500 kHz nicht mehr folgen, sind also quasistationär und nehmen keine Energie mehr auf, die Elektronen folgen ab 140 MHz. Darüber verhält sich das Plasma wie ein schwach absorbierendes Dielektrikum (nur Phasenverschiebung und Streuung). Für die übliche Industrie-Frequenz von 13 MHz bedeutet das dann: **nur die Elektronen werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt.**

**Aufgabe 4.17** Elektronendichte von  $10^6/\text{cm}^3$ , Elektronentemperatur von 0,05 eV. Bestimmen Sie die *Cutoff*-Frequenz und die Eindringtiefe von Radiowellen im Mittelwellen- und Kurzwellenband. Was bedeutet das Auftreten eines Wertes von  $\varepsilon \leq 1$  für die DK, was für den Brechungsindex?

**Lösung.**  $\omega_P$  ist 9 MHz.

Die MAXWELLSche Relation  $\varepsilon = n^2$  (Vergleich der Wellengleichung für Vakuum, hergeleitet aus den MAXWELL-Gleichungen auf der einen Seite (s. Skript im Intranet), und  $c$  aus optischen Gesetzen)

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}; \quad (1)$$

im Vakuum sind  $\varepsilon, \mu$  beide Eins; im (nichtmagnetischen) Medium ist  $\mu$  nahe Eins, der Brechungsindex größer als Eins:

$$c_{\text{Vakuum}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}; \quad (2)$$

$$c/n = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0}}; \quad (3)$$

$$n = \sqrt{\varepsilon}; \quad (4)$$

muß im Komplexen erweitert werden zu

$$\varepsilon_{\text{R}} = \Re(N^2); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\text{I}} = \Im(N^2). \quad (6)$$

$$\varepsilon = n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 \Rightarrow n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}; \quad (7)$$

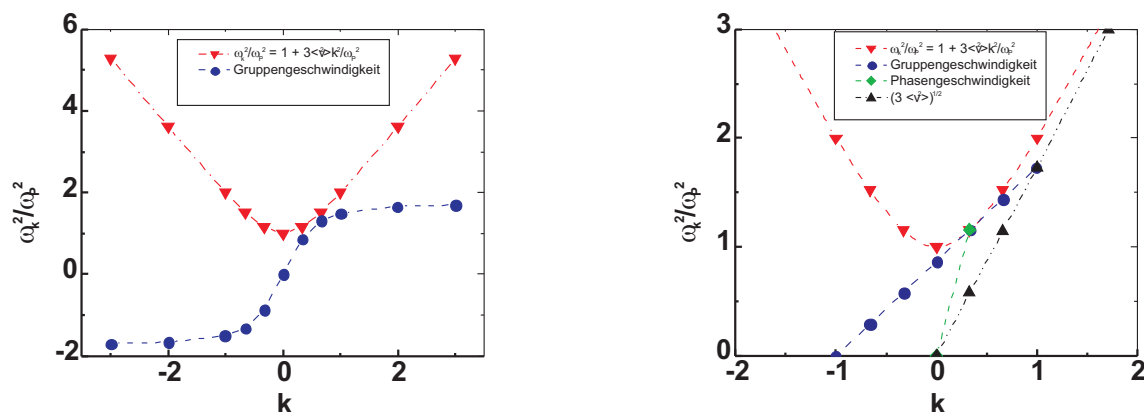
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2\right); \quad (8)$$

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}}; \quad (9)$$

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_P^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_P^2}; \quad (10)$$

$$v_{\text{G}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{2kc^2}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_P^2}} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\text{Ph}}} = c \times \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}. \quad (11)$$

Mittelwellen haben ein Band von 500 bis 1600 kHz. Für 1000 kHz ergibt sich ein  $\omega$  von 6,3 MHz, eine Wellenlänge  $\lambda$  von 300 m (im Vakuum) und ein Wellenvektor  $k$  von 0,021/m.



**Abb. 4.5.** BRILLOUIN-Diagramm der Dispersionsrelation  $\omega_k^2 = \omega_P^2 + 3 \langle v^2 \rangle k^2$  über einen großen (lks.) und einen kleinen (re.)  $k$ -Bereich.

- Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k}$ : für jeden Punkt eine Gerade vom Ursprung;
- Gruppengeschwindigkeit  $v_G = \frac{d\omega}{dk}$ : für jeden Punkt eine Tangente;
- thermische Geschwindigkeit  $\sqrt{3 \langle v^2 \rangle} = \sqrt{3/2 \langle v_w^2 \rangle}$ : für große  $k$  (kleine  $\lambda$ ) etwa gleich  $v_{\text{Ph}}$  und  $v_G$ . Für kleine  $k$  dagegen ist  $v_G$  bedeutend langsamer als  $\sqrt{3 \langle v^2 \rangle}$ , obwohl  $v_{\text{Ph}}$  sehr groß gegen  $\sqrt{3 \langle v^2 \rangle}$  ist.

Kurzwellen beginnen bei 6 MHz (49 m-Band) und gehen bis 23 MHz (13 m-Band), damit ein  $\omega$  von 37,8 MHz oder 145 MHz. Das sind Vakuumwellenlängen von 50 m bzw. 13 m, Wellenvektoren von 0,1256/m bzw. 0,483/m.

Für ein Plasma ist der Brechungsindex immer kleiner 1, und er kann im Fall des „Cutoffs“ Null, im Falle der Absorption imaginär werden.

- $0 < n < 1$ :  $v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_P}{\omega})^2}} > 1$ . Einsetzen ergibt  $n = 0,97$  bzw.  $0,998$ . Mit

Gl. (1) ergibt sich also im Fall der Kurzwelle ein Wert für die Gruppengeschwindigkeit von  $0,97c$  bzw.  $0,998c$ . Der Wellenvektor verkürzt sich auf  $0,1224/\text{m}$  bzw.  $0,4824/\text{m}$ .

- $n = 0$ :  $v_{\text{Ph}} \gg c$ ;  $v_G = 0$ ;  $k = 0$ ,  $\lambda \Rightarrow \infty$ .
- $n$  imaginär: Einsetzen ergibt einen Wellenvektor  $k$  von  $2,142i \times 10^{-4}/\text{cm}$  und einen Imaginärteil des Brechungsindex  $n$  von  $1,025i$ . Die Welle gilt als gedämpft, wenn sie auf  $1/e$  abgefallen ist. Das ist dann der Fall, wenn

$$e^{-1} = e^{-kx} \Rightarrow x = \frac{1}{k} = 46,68 \text{ m} \approx 0,17 \times \lambda_{\text{Vakuum}}. \quad (12)$$

**Aufgabe 4.18** Zu Aufgabe 4.10: Wie groß ist das Reflexionsvermögen von Kupfer und Gold 5000 und 10000 Å gegen Luft bei Annahme der FRESNELSchen Formeln für  $\tilde{n} = n - i\kappa$ , senkrechte Inzidenz, also

$$R = \frac{1 - n)^2 + \kappa^2}{(1 + n)^2 + \kappa^2} \quad (1)$$

Man vergleiche insbesondere den kurzwelligen Wert mit dem sich völlig unspektakulär verhaltenden Silber!

**Tabelle 4.3.** Werte des komplexen Brechungsindex für die Münzmetalle.

Metall	5000 Å		10 000 Å	
	$n$	$\kappa$	$n$	$\kappa$
Cu	1,031	2,78	0,147	6,93
Ag	0,17	2,94	0,13	6,83
Au	0,84	1,84	0,18	6,04

**Lösung.** Die Werte für Cu (0,65 bei 5000 Å bzw. 0,99 bei 10 000 Å) und Au (0,50 bei 5000 Å bzw. 0,98 bei 10 000 Å) reflektieren das farbliche Verhalten der beiden Metalle gegenüber Ag (0,93 bei 5000 Å bzw. 0,99 bei 10 000 Å).

**Aufgabe 4.19** Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}}$ :

Machen Sie sich an Hand der ebenen Welle mit dem Begriff der Phase, ihrer Geschwindigkeit, dem Wellenvektor und der Kreisfrequenz vertraut. Sie sollten damit erklären können, wie die Phasengeschwindigkeit definiert ist.

**Lösung.** Ist die Phase konstant, ist

$$\omega t = kx. \quad (1)$$

Damit wird

$$v_{\text{Ph}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (2)$$

**Aufgabe 4.20** Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{G}}$ :

In einem Paket von Wellen eng beieinanderliegender Wellenlänge ist die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{G}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung für die Phasengeschwindigkeit die Äquivalenz von  $v_{\text{G}}$  und  $v_{\text{Ph}}$  für fehlende Dispersion.

**Lösung.**

$$v_{\text{G}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{2kc^2}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_P^2}} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\text{Ph}}} = c. \quad (1)$$

**Aufgabe 4.21** Gruppengeschwindigkeit  $v_G$ :

In einem Paket von Wellen, das eine Oktave breit sei, und das sich durch ein dispergierendes Medium bewege ( $c_2 = \frac{9}{10}c_1$ ), ist die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1)$$

Wie hoch ist die Gruppengeschwindigkeit dieser Gruppe?

**Lösung.**

$$\psi_1 = \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (2)$$

$$\psi_2 = \cos\left((\omega + \Delta\omega)t - \frac{2\pi x}{\lambda + \Delta\lambda}\right), \quad (3)$$

was entwickelt

$$\psi_2 = \cos\left((\omega + \Delta\omega)t - \frac{2\pi x}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)\right) \quad (4)$$

ergibt. Damit wird die Summe

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \Psi\Phi \quad (5.1)$$

mit

$$\Psi = 2 \cos\left(\frac{2\omega + \Delta\omega}{2}t - \frac{2\pi x}{2\lambda} \left(2 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)\right) \quad (5.2)$$

und

$$\Phi = \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{2\pi x}{2\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right). \quad (5.3)$$

Da nach Vor.  $\Delta\omega \ll \omega \wedge \Delta\lambda \ll \lambda$ , ist der erste Faktor  $\Psi$  nahezu die Welle  $\psi_1$ , und  $\Phi$  stellt die veränderliche Amplitude dieser Welle dar, die ihr erstes Maximum bei  $t = 0, x = 0$  hat, und die weiteren Maxima sind gegeben durch das Verschwinden des Arguments der Cosinus-Funktion

$$\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{2\pi x}{2\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0, \quad (6)$$

woraus für die Vorwärtsbewegung des Maximums folgt:

$$v = \frac{x}{t} = -\frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (7)$$

oder differentiell

$$v = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda}. \quad (8)$$

Da die Phasengeschwindigkeit  $c = \nu\lambda$  ist, folgt für ihre Wellenlängenabhängigkeit:

$$\frac{dc}{d\lambda} = \lambda \frac{d\nu}{d\lambda} + \nu \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{dc}{d\lambda} - \nu \right) \quad (9)$$

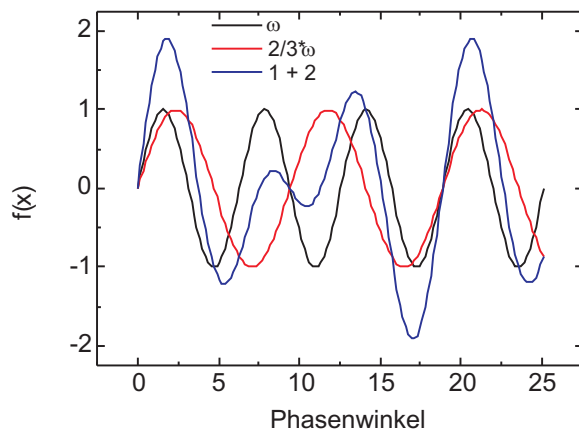
Einsetzen von (9) in (8):

$$v_G = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (10)$$

mithin

$$v_G = c \left( 1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{10} c. \quad (11)$$

Ist das Medium dispersionsfrei, ist  $v = v_G = c$ , und die Welle zerfließt nicht. Z. B. zeigt das Vakuum für Lichtwellen diese Eigenschaft; sonst würde das weiße Licht eines Sterns, etwa nach einer durch den Mond verursachten Sternfinsternis, beim Wiederauftauchen in seine Spektralfarben zerlegt worden sein. Normale Dispersion:  $\frac{dc}{d\lambda} > 0$ , negative Dispersion:  $\frac{dc}{d\lambda} < 0$ , z. B. im Glasprisma.



**Abb. 4.6.** Zwei Wellen der Frequenz  $\omega_1$  und  $\frac{2}{3}\omega_1$  überlagern sich.

**Aufgabe 4.22** *Gruppengeschwindigkeit  $v_G$ :*

Nach der Dispersionstheorie ist der Brechungsindex für eine Resonanzfrequenz bei  $\omega_0$  ohne Dämpfung

$$n^2 = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

definiert, was für Frequenzen, die höher als die Eigenfrequenz sind, einen Brechungsindex kleiner Eins bedeutet, damit eine Phasengeschwindigkeit, die größer als  $c$  ist. Wie verhält sich  $v_G$ ?

**Lösung.**



$$v_G = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2)$$

Mit  $k = \omega/c$  kann man auch schreiben

$$v_G = \frac{d\omega}{d\omega/c}, \quad (3)$$

was für die Phasengeschwindigkeit im Medium mit dem Brechungsindex  $n$

$$v_G = \frac{d\omega}{d\frac{\omega n}{c_0}} \quad (4)$$

ergibt. Das Differential  $d\omega n$  ist  $\omega dn + n d\omega$ , also

$$v_G = c_0 \frac{d\omega}{n d\omega + \omega dn} \Rightarrow v_G = c_0 \frac{1}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (5)$$

Kümmern wir uns nun um den Nenner: Differenziert man Gl. (1) nach  $\omega$ , erhält man für  $\frac{dn}{d\omega}$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{A}{n} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (6)$$

Nach (1) ist

$$A = (n^2 - 1)(\omega_0^2 - \omega^2), \quad (7)$$

so daß

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (8)$$

und

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (9)$$

werden. Wir erhalten folglich für den Nenner

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{n^2(\omega_0^2 - \omega^2) + (n^2 - 1)\omega^2}{n(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{n^2\omega_0^2 - \omega^2}{n(\omega_0^2 - \omega^2)} : \quad (10)$$

Da nach Vor.  $\omega > \omega_0$  und  $n < 1$ , ist der Nenner immer größer als Eins, mithin  $v_G < c$ .

# 5 Sputtern

**Aufgabe 5.1** Bestimmen Sie die Kontamination durch Restluft für einen gerade wachsenden Film aus Aluminium bei einer Wachstumsrate von  $500 \text{ \AA}/\text{min}$  bei einer Restgasatmosphäre von  $10^{-5}$  Torr! Nehmen Sie dazu an, daß die Zusammensetzung der Restatmosphäre gleich der der Luft bei 760 Torr ist!

**Lösung.**

Die Stromdichte von Gasmolekeln auf eine Wand ist bei einer Teilchenzahldichte  $n$  und einer mittleren Geschwindigkeit von

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1)$$

$$j = \frac{1}{4} n \langle v \rangle . \quad (2)$$

Mit dem idealen Gasgesetz rechnen wir den Druck unter Standardbedingungen (298 K) um von Torr in die Teilchenzahldichte

$$n = 9,565 \cdot 10^{18} \frac{p}{T} \frac{1}{\text{cm}^3}, \quad (3)$$

und für die mittlere Geschwindigkeit errechnen wir mit dem Molekulargewicht ( $M$  ist das Molgewicht in g)

$$m = \frac{M}{N_A} \quad (4)$$

und Gl. (1)

$$\langle v \rangle = 14,551 \sqrt{\frac{T}{M}} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}. \quad (5)$$

Damit erhalten wir schließlich

$$j = 3,513 \cdot 10^{22} \frac{p}{\sqrt{MT}} \frac{1}{\text{cm}^2 \text{ sec}}. \quad (6)$$

Unter der Annahme, daß die Dichte des aufwachsenden Films gleich der *Bulk*-Dichte ist ( $\rho = 2,699 \text{ g/cm}^3$ ), ist das Gewicht von  $1 \text{ cm}^2$  eines Films von  $500 \text{ \AA}$  Dicke  $13,495 \text{ \mu g}$  (ein Al-Atom wiegt  $4,498 \cdot 10^{-23} \text{ g}$ ). Damit besteht der Film aus  $3 \cdot 10^{17}$  Atomen, womit die Abscheiderate sich zu

$$DR = 5 \cdot 10^{15} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (7)$$

errechnet. Der Beschuß mit Luftmolekeln ist nach Gl. (5)

$$j = 4 \cdot 10^{15} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} : \quad (8)$$

die Kontaminationsrate ist fast genauso hoch wie die Depositionsrate! Bei einer Reduktion der Restatmosphäre auf  $10^{-6}$  Torr, was schon ein sehr passabler Wert ist, liegt demnach die Kontaminationsrate immer noch bei 8 % — für viele Anwendungen, insbesondere niederohmiger Metallabscheidungen, immer noch ein indiskutabler Wert.

# 6 Plasmadiagnostik

## 6.1 Bulk-Temperatur

**Aufgabe 6.1** Die DOPPLERverschiebung eines sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegendem Objekts ist gegeben durch

$$\lambda' = \lambda \pm \frac{v}{\nu_0}, \quad (1)$$

wenn

$$\lambda = \frac{c}{\nu_0}. \quad (2)$$

Dann ist die halbe Spektralverbreiterung

$$\frac{\delta}{2} = \Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{v}{\nu_0} = \frac{v}{c} \cdot \frac{c}{\nu_0} = \frac{\lambda}{c} \cdot v. \quad (3)$$

Die durch den DOPPLEReffekt bedingte Verbreiterung einer Spektrallinie, die meist bei der Halbwertsbreite abgegeben wird, und die man als GAUSSkurve approximieren kann, ist

$$\pm\delta_{\text{FWHM}} = \frac{\lambda}{c} \cdot v_{\text{max}} \ln 2 = \sqrt{\frac{2k_{\text{B}}T}{m} \ln 2} = \sqrt{\frac{2k_{\text{B}}T}{m}} \sqrt{\ln 2}, \quad (4)$$

wobei die erste Wurzel das Maximum und die zweite Wurzel die Halbwertsbreite der GAUSSschen Glockenkurve — was die Geschwindigkeit angeht — definiert. Bestimmen Sie aus der Halbwertsbreite von  $\frac{1}{2}\delta = 0,015 \text{ \AA}$  bzw.  $0,0108 \text{ \AA}$  der He-Linie bei  $5876 \text{ \AA}$  die Temperaturen des leuchtenden Heliums!

**Lösung.** Die Temperaturen ergeben sich zu  $25$  bzw.  $-196 \text{ }^\circ\text{C}$ .