

**Plasmaphysik I**  
**Voraussetzungen**  
**SS 2012**

**Gerhard Franz**  
ISBN 978-3-943872-01-9

30. Juni 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vakuum</b>	<b>3</b>
1.1	Saugleistung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kinetische Gastheorie</b>	<b>5</b>
2.1	Systemdefinitionen . . . . .	5
2.2	Temperatur und Nullter Hauptsatz . . . . .	5
2.2.1	Absolute Temperatur . . . . .	6
2.3	Druck eines Gases . . . . .	7
2.4	Zustandsgleichung (qualitativ) . . . . .	8
2.5	Ideales Gas . . . . .	9
2.5.1	Partialdruckgesetz von Dalton . . . . .	10
2.5.2	Boltzmann-Formel . . . . .	11
2.5.3	Maxwell-Verteilung . . . . .	12
2.5.3.1	Bestimmung der Konstanten. . . . .	13
2.6	Mittlere freie Weglänge . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>17</b>
3.1	Maxwell-Gleichungen . . . . .	17
3.2	Das Coulombsche Gesetz und das elektrische Feld . . . . .	18
3.2.1	Ladungsdichte . . . . .	18
3.3	Elektrisches Potential . . . . .	19
3.4	Die elektrische Feldstärke als Flußdichte . . . . .	21
3.5	Elektrische Felder . . . . .	22
3.5.1	Homogen geladene Kugel . . . . .	22
3.5.2	Unendlich langer Draht . . . . .	23
3.5.3	Homogen geladene Ebene (Blatt) . . . . .	24
3.5.4	Feld zwischen zwei homogen geladenen Ebenen . . . . .	24
3.5.5	Innerhalb eines elektrischen Leiters . . . . .	24
3.5.6	Innerhalb eines metallischen Hohlraums . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Potential und elektrisches Feld</b>	<b>27</b>
4.1	Dipolpotential . . . . .	27
4.1.1	Approximatives Dipolpotential . . . . .	27
4.1.2	Das elektrische Feld eines Dipols . . . . .	29

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	1
4.2 Influenz und Bildkraft . . . . .	32
4.3 Der Parallelplatten-Kondensator . . . . .	33
4.3.1 Speicherung von Ladung . . . . .	34
4.3.2 Feldstärke und Ladungsdichte . . . . .	35
<b>5 Dispersion</b>	<b>37</b>
5.1 Kapazität . . . . .	37
5.2 Erzwungene Schwingungen . . . . .	37
5.3 Polarisierung . . . . .	41
<b>6 Dispersion im Plasma</b>	<b>43</b>
6.1 Wellengleichung im Vakuum . . . . .	43
6.2 1. Näherung ohne Stoßdämpfung . . . . .	44
6.3 Bewegungsgleichung . . . . .	44
6.4 Ausbreitungsgeschwindigkeiten . . . . .	45
6.5 Wellenlänge und Eindringtiefe . . . . .	46
<b>7 HF-Kopplung: Quantitative Beschreibung</b>	<b>49</b>
7.1 Reihenresonanzkreis . . . . .	49
7.2 Parallelresonanzkreis . . . . .	49
7.3 Gekoppelte Parallelschwingkreise . . . . .	49

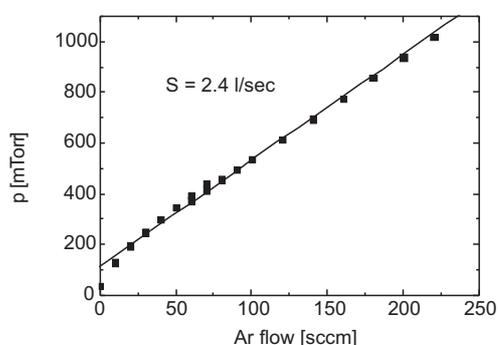
In diesem Teil werden in sieben Kapiteln einige Voraussetzungen für diese Vorlesung *in extenso* niedergelegt. Sie sind nicht Vorlesungsstoff.

# 1 Vakuum

Kein Niederdruckplasma ohne Vakuum. In diesem Kapitel werden die zum Verständnis notwendigen Vakuumbegriffe wiederholt.

## 1.1 Saugleistung

Die Saugleistung wird bestimmt durch definierte Zuflüsse von Gasen in einen Reaktor einer bestimmten Größe. Es stellt sich dann ein bestimmter Druck ein, der eben von der Saugleistung abhängt. In Abb. 1.1. wird das gezeigt. 50 sccm Fluß von Argon bedeuten einen Durchsatz von 0.63 l Torr/s, der resultierende Druck von 234 mTorr bedeutet eine Saugleistung von 2.7 l/s (overall value 2.4 l/s). Bei Drücken unter 100 mTorr (15 Pa) wird das Knudsen-Regime erreicht, und die Saugleistung beginnt, eine Druckfunktion zu werden.



**Abb. 1.1.** Saugleistung von Argon und Di-Parylen.

Die in den besprochenen Reaktoren verwendeten Drücke überstreichen mehrere Größenordnungen. Angestrebt wird immer ein ausgewogenes Verhältnis von Pumpleistung und Gasfluß, der in *sccm* gemessen wird, wobei unter 1 sccm 1 cm<sup>3</sup> idealen Gases bei Standardbedingungen (298 K und 1 bar) verstanden wird: 1 sccm entspricht also  $6,0223 \cdot 10^{23}$  Molekeln/22414 cm<sup>3</sup> min =  $2,69 \cdot 10^{19}$  Molekeln/cm<sup>3</sup>min oder 1,69 lPa/sec oder  $12,7 \cdot 10^{-3}$  lTorr/sec. Bei hohen Arbeitsgasdrücken werden die Gasflüsse also höher gewählt als bei niedrigen Gasdrücken. Zur Dimensionierung muß folgende Beziehung beachtet werden Tab. 1.1, KNUDSEN-Regime:  $0,5 \geq K \geq 0,01$ ):

$$\tau = V/S \wedge \frac{p \cdot V}{Q}, \quad (1.1)$$

**Tabelle 1.1.** Druck der Entladung, mittlere freie Weglänge  $\lambda$  bei einem Durchmesser von  $d = 50$  cm, der KNUDSEN-Zahl  $K = \lambda/d$ , und Typ des Gasflusses.

Druck [Torr]	mittlere freie Weglänge $\lambda$ [cm]	$K$	Gasfluß
$10^{-3}$	5	0.1	KNUDSEN
$10^{-2}$	0.5	0.01	KNUDSEN
$10^{-1}$	0.05	$10^{-3}$	viscous
1	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-4}$	viscous

mit  $\tau$  der Einschlußzeit (*Residence-Time*) im Reaktor,  $V$  dem Kammervolumen [l],  $S$  der Pumpleistung [l/s] und  $Q$  dem Gasfluß, wobei  $1 \text{ Torr l/s} = 79 \text{ sccm}$ , und die Einflüsse von Druck und Gaszusammensetzung auf die Pumpleistung vernachlässigt werden.

Typische Werte der Einschlußzeit betragen zwischen 0,5 und 50 sec unter der Voraussetzung, daß die Reaktanden nicht verbraucht werden. Der Gasfluß soll laminar (viskos) sein,<sup>1</sup> was dann der Fall ist, wenn die REYNOLDS-Zahl etwa kleiner als Tausend ist, sie ist gegeben durch

$$R \propto \frac{Q}{\eta \cdot d} \quad (1.2)$$

mit  $\eta$  der Viskosität und  $d$  dem Durchmesser des durchströmten Rohres. Erschwerend zur Abschätzung von  $\tau$  kommt hinzu, daß der Gastransport noch durch Diffusion beeinflusst wird.

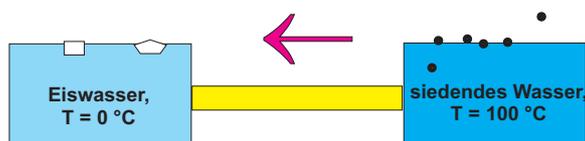
---

<sup>1</sup>Wir unterscheiden zwischen den Bereichen der viskosen Strömung (bis etwa  $p \cdot d > 1 \text{ Pa cm}$ ), dem sich der Übergangsbereich der KNUDSEN-Strömung bis etwa  $10^{-2} \text{ Pa cm}$  anschließt; darunter liegt der molekulare Strömungsbereich.

## 2 Kinetische Gastheorie

### 2.1 Systemdefinitionen

Ein *abgeschlossenes System*, dem keinerlei Wechselwirkung mit der Umgebung möglich ist, befindet sich dann in *thermischem Gleichgewicht*, wenn Temperatur und Druck überall gleich sind. Ein *offenes System* dagegen tauscht sich mit seiner Umgebung so lange aus, bis Druck und Temperatur sich angeglichen haben. Das kann ohne Stoff- oder Teilchentransport verlaufen, man spricht dann von einem geschlossenen System, aber auch mit Materietransport. Um etwa Druckunterschiede auszugleichen, fließen Molekeln von einem Hochdruck- in ein Tiefdruckgebiet, fließen aus einem „heiße“ Gebiet Molekeln in ein „kaltes“ Gebiet (Abb. 2.1). Die dabei ablaufenden Vorgänge heißen *kinetische Prozesse*. Da das System dabei von einem Zustand des Ungleichgewichts in einen Zustand des Gleichgewichts übergeht, sind diese Vorgänge *irreversibel*.



**Abb. 2.1.** Wärme fließt von heißen Zonen nach kalten Zonen.

Wir werden uns zunächst entweder mit abgeschlossenen oder geschlossenen Systemen beschäftigen.

### 2.2 Temperatur und Nullter Hauptsatz

In flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand befinden sich die Molekeln in ständiger, chaotischer Bewegung, der sog. *Wärmebewegung*. Diese Bewegung ist nicht auf atomare Dimensionen beschränkt (BROWNSche Molekularbewegung).

Werden zwei Körper in Berührung gebracht (sog. *thermischer Kontakt*), so findet zwischen ihnen auf Grund der Zusammenstöße zwischen den Molekeln ein Energieaustausch statt. Dafür ist charakteristisch, daß die Energie vom wärmeren zum kälteren Körper übertragen wird, und zwar so lange, bis der Zustand *thermischen Gleichgewichts* erreicht ist. Dieser ist dann erreicht, wenn keine Temperaturunterschiede im System mehr festzustellen sind. Dazu macht man folgendes Gedankenexperiment:

Zwei sich nicht berührende abgeschlossene Systeme seien jeweils in thermischem Kontakt mit einem dritten, abgeschlossenen System (*Wärmebad*). Dann gilt wechselseitig: **Wenn sich die Temperaturen ausgeglichen haben, befinden sich alle drei Systeme im thermischen Gleichgewicht.** Dieser Zusammenhang wird als 0. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet.

Wir überlegten beim Wärmetransport durch Wärmeleitung, daß die Energie durch Stöße zwischen Molekeln übertragen wird (Physik I). Dieses atomare Bild wollen wir zur Charakterisierung dieses Prozesses den Energieübertragung mit dem Begriff der *Temperatur* verbinden. Dazu könnte prinzipiell jede Eigenschaft eines Körpers benutzt werden, die vom Grad seiner Erwärmung abhängt, z. B. die Ausdehnung einer Quecksilbersäule, die im thermischen Gleichgewicht mit dem inkriminierten Körper steht. Sie hat sich im täglichen Leben als sehr zweckmäßig erwiesen; es ist aber offensichtlich, daß sie für die Beschreibung beliebiger anderer Eigenschaften ungeeignet ist, weil *sie von den zufälligen Eigenschaften bestimmter Stoffe abhängt*.

### 2.2.1 Absolute Temperatur

Es muß folglich eine physikalische Größe gefunden werden, die auch für andere Körper, die mit dem betrachteten Gegenstand in thermischem Gleichgewicht stehen, *denselben Wert* hat. Diese Größe ist die mittlere kinetische Energie der Translation von Gasmolekeln. Sind die Mittelwerte für die Molekeln zweier Gase gleich, so wird insgesamt keine Energie übertragen (obwohl einzelne Molekeln durchaus Energie austauschen), und man definiert  $\frac{2}{3}$  dieser Größe als *Temperatur*:

$$T = \frac{2}{3} E_{\text{kin},i} = \frac{2}{3} \frac{m_i \langle v_i^2 \rangle}{2}, \quad (2.1)$$

wobei der Index das *ite* Teilchen bezeichnet. Die Klammern bedeuten den Mittelwert: entweder den *Scharmittelwert* verschiedener Molekeln zum gleichen Zeitpunkt oder den *Zeitmittelwert* einer Molekel zu verschiedenen Zeiten, was sich meist als äquivalent erweist (sog. *Ergodenhypothese*).

Auf Grund dieser Definition besitzt die Temperatur die Dimension einer Energie und kann daher in entsprechenden Einheiten, z. B. Joule oder eV, angegeben werden. Dagegen spricht zweierlei:

- Die Wärmebewegung macht nur einen winzigen Bruchteil eines Joule aus;
- die Messung von Energien einzelner Teilchen ist außerordentlich kompliziert.

Daher verwendet man das Grad als Einheit (FAHRENHEIT  $\rightarrow$  CELSIUS  $\rightarrow$  KELVIN); dabei wird in Formeln für die CELSIUS-Temperatur  $\vartheta$  und für die KELVIN-Temperatur  $T$  geschrieben; die Einheit ist in beiden Fällen einfach „K“ [oft sieht man noch  $^\circ$ ], und der Umrechnungsfaktor zwischen Joule und Grad heißt BOLTZMANN-Konstante  $k_B$ :

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}, \quad (2.2)$$

bei der die Potenz deswegen so interessant ist, weil 1 Mol aus  $6,02 \cdot 10^{23}$  Molekeln besteht (AVOGADRO-Konstante). Das Produkt aus beiden ergibt

$$k_B N_A \equiv R = 8,314 \text{ J/Mol K}, \quad (2.3)$$

die uns bereits als *Gaskonstante* bekannt ist. Der Umrechnungsfaktor zwischen 1 eV und Grad ist  $1 \text{ eV} = 11\,600 \text{ K}$ . Bei Zimmertemperatur (80 Grad Fahrenheit oder  $25^\circ \text{C}$  oder  $300 \text{ K}$ ) hat also jede Molekel eine mittlere kinetische Energie von  $0,025 = 1/40 \text{ eV}$  (oder  $6,17 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ ) oder ein Mol eine solche von  $2,4 \text{ kJ}$ . Damit wird aus unserer Gl. (2.1):

$$k_B T = \frac{2}{3} E_{\text{kin},i} = \frac{2 m_i \langle v_i^2 \rangle}{3}. \quad (2.4)$$

Wir sehen, daß wegen des immer positiven Quadrats der Geschwindigkeit die Temperatur immer positiv sein muß. Dies ist aber kein Naturgesetz. Vielmehr gibt es Fälle, bei denen das System in einem Zustand negativer Temperatur sich befindet (z. B. Besetzungsinversion beim Laser).

Damit können wir die Gl. (2.4) zur Geschwindigkeit auflösen:

$$v_{\text{therm.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}. \quad (2.5)$$

$m$  ist die Masse einer Molekel oder eines an der BROWNSchen Bewegung teilnehmenden Teilchens. Bei jenen wird der Bruch mit  $N_A$  erweitert, so daß das Produkt  $m N_A$  gleich dem Molekulargewicht  $\mu$  (in relativen Einheiten) ist:

$$v_{\text{therm.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 R T}{\mu}} = 158 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ m/sec}. \quad (2.6)$$

**Beispiel 2.1**  $\langle v^2 \rangle$  von  $\text{N}_2$  bei  $25^\circ \text{C}$ : Einsetzen in Gl. (2.6) ergibt mit einem Wert von 28 g einen Wert von  $515 \text{ m/sec}$  ( $= 1\,854 \text{ km/h}$ ), während die thermische Geschwindigkeit von Wasserstoffmolekülen bei Raumtemperatur  $1,9 \cdot 10^3 \text{ m/sec}$ , also etwa  $2 \text{ km/sec}$  beträgt.

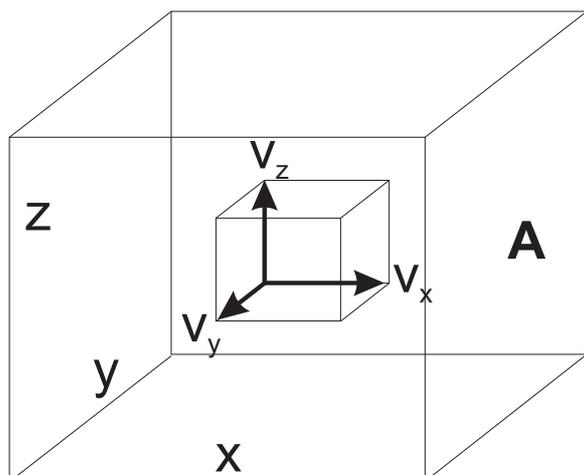
Da in Gln. (2.5/2.6) die Masse im Nenner steht, ist klar, daß die Wärmebewegung für Molekeln sehr bedeutend, für Mikroteilchen, die an der BROWNSchen Molekularbewegung teilnehmen, noch endlich und für größere Teilchen völlig unbedeutend ist.

## 2.3 Druck eines Gases

Ein Gas übt auf Grund der Wärmebewegung seiner Molekeln einen Druck auf die Gefäßwände aus, wobei ein Impulsaustausch stattfindet. Dieser Druck wirkt isotrop und ist auf alle Gefäßwände gleich stark (Abb. 2.2).

Die Einheit des Drucks im MKS-System ist  $1 \text{ Pa}$ :

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (2.7.1)$$



**Abb. 2.2.** Die Molekeln fliegen chaotisch durch den Raum und stoßen mit den Wänden zusammen (elastischer Stoß mit Impulstransfer). Daher ist der in jede Richtung ausgeübte Druck ( $p = F/A$ ) in jedem irdischen Behälter gleich groß (Absehen von Gravitationseffekten).

also hat der Druck die Dimension Kraft/Fläche oder Energie/Volumen. 1 Pa ist eine sehr kleine Größe. Daher sind im Gebrauch:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}, \quad (2.7.2)$$

$$1 \text{ at} = 0,981 \text{ bar}, \quad (2.7.3)$$

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,033 \text{ at}, \quad (2.7.4)$$

$$1 \text{ Torr} = 1,333 \text{ mbar}. \quad (2.7.5)$$

## 2.4 Zustandsgleichung (qualitativ)

Als *makroskopische Eigenschaften* eines Körpers bezeichnet man diejenigen, die ihn als Ganzes charakterisieren, ohne daß seine molekulare Struktur betrachtet werden (die natürlich seine Eigenschaften bestimmen). Dazu zählen *Druck*, *Volumen* und *Temperatur*, die nicht voneinander unabhängig sind, sondern nur zwei wählbar sind, während sich die dritte Größe als eindeutige Funktion der beiden anderen ergibt. Dieser funktionale Zusammenhang heißt *Zustandsgleichung*.

Die Zustandsgleichung kann nur für einfachste Systeme ermittelt werden. Zusätzlich wird die Situation durch die gleichzeitige Anwesenheit mehrerer verschiedener Substanzen erschwert. Da wir nach der Abhängigkeit zwischen drei Größen fragen, muß man dreidimensionale Koordinatensysteme konstruieren, auf denen die Zustandsgleichung flächig aufgetragen wird. Gewöhnlich stellt man daher Schnitte durch die Fläche dar, bei denen eine Größe konstant gehalten wird.

- $p$  konstant: Isobaren;
- $T$  konstant: Isothermen;

- $V$  konstant: Isochoren.

Der Zustand thermischen Gleichgewichts erfordert Gleichheit der Temperatur *und* des Drucks in allen Teilbereichen des Systems. Anderenfalls würden Ausgleichsprozesse ausgelöst.

## 2.5 Ideales Gas

Ein Gas, bei dem von der Wechselwirkung zwischen den Molekeln abgesehen werden kann, bezeichnet man als *ideales Gas*. Die Gesamtenergie des Gases, also seiner Bestandteile: seiner Molekeln, besteht nur aus kinetischer Energie. Daher gelten die Gleichungen der Mechanik dafür exakt. Wegen der Vielzahl der Molekeln betrachtet man aber nur die statistische Gesamtheit.

Ein Gas sei in einen Kubus der Länge  $l$  eingeschlossen. Wie hoch ist der Druck auf die sechs Wände? Dazu bestimmen wir den Impulsaustausch mit einer Wand:

$$\Delta p = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x \quad (2.8)$$

mit  $m$  der Molekelmasse. Da es den Weg zur Gegenwand in der Zeit

$$T = \frac{l}{v_x} \quad (2.9)$$

zurücklegt, benötigt es die Zeit  $2T$  bis zum nächsten Stoßereignis an dieser Wand. Innerhalb einer Sekunde geschieht dieses also mit der Frequenz

$$\nu = \frac{v_x}{2l}, \quad (2.10)$$

wobei nach Gl. (2.8) pro Sekunde der Impuls

$$p = 2mv_x\nu = 2mv_x \frac{v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l} \quad (2.11)$$

übertragen wird. Damit ist die an der Wand angreifende Gesamtkraft  $F_x$ , die von allen  $N$  Molekeln ausgeübt wird,

$$F_x = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^N mv_x^2. \quad (2.12)$$

Bei  $N$  Molekeln kann dies Summe als Produkt von  $N$  mit dem Mittelwert  $m \langle v_x^2 \rangle$  geschrieben werden. Da alle drei Richtungen völlig gleichberechtigt sind, gilt weiter

$$m \langle v_x^2 \rangle = m \langle v_y^2 \rangle = m \langle v_z^2 \rangle, \quad (2.13.1)$$

und wegen

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 \quad (2.13.2)$$

$$m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (2.13.3)$$

somit für die Gesamtkraft

$$F_x = \frac{1}{l} \frac{N}{3} m \langle v^2 \rangle. \quad (2.14)$$

Jetzt ist das Volumen des Kubus  $V = l^3$  und seine Seitenfläche  $A = l^2$ , so daß

$$F_x = pl^2 = \frac{pl^3}{l} = \frac{pV}{l}, \quad (2.15)$$

womit wir

$$pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} N E_{\text{kin}} \quad (2.16)$$

erhalten. Man sieht daraus sehr schön, daß der Druck tatsächlich eine Energiedichte ist. Mit unserer Temperaturdefinition in Gl. (2.4) (für eine Molekel) kombiniert, ergibt sich auf andere Weise die *Zustandsgleichung des idealen Gases* ( $N = N_A$  für 1 Mol und  $R = k_B N_A$ )

$$k_B T = \frac{2}{3} E_{\text{kin},i} \wedge pV = \frac{2}{3} N E_{\text{kin},i} \Rightarrow 1 \text{ Mol}, N = N_A : pV = RT. \quad (2.17)$$

Diese Gleichung gilt für alle idealen Gase. Gerade durch die Definition als „ideales Gas“ verliert jedes Gas auch den letzten Rest seiner Identität.<sup>1</sup> Jedes Gas besteht jedoch aus atomaren oder molekularen Individuen und verhält sich daher — vor allem bei Annäherung an den Siedepunkt — immer weniger als ideales Gas.

Aus Gl. (2.17) ergibt sich ferner für das Molvolumen ( $n = 1 \wedge N = N_A$ ) bei *STP*:

$$V_M = 22,41 : \quad (2.18)$$

**Axiom 2.1** *Gleiche Volumina verschiedener Gase enthalten bei gleichen Drücken und gleichen Temperaturen dieselbe Anzahl von Molekeln* (Regel von AVOGADRO).

### 2.5.1 Partialdruckgesetz von Dalton

In der Gl. (2.17) steht ein  $i$ ,

$$k_B T = \frac{2}{3} E_{\text{kin},i}, \quad (2.19)$$

das die individuelle Molekel charakterisiert. Die anderen können gleich- oder auch verschiedenartig sein, so daß das  $N$  auch eine Summe aus verschiedenen Molekelsorten sein kann:

<sup>1</sup>Wir müssen beachten, daß  $R$  die Dimension Joule/Mol K hat; das  $n$  in Gl. (2.17) hat die Eigenschaft einer Stoffmenge; die Einheit ist Mol; für  $n = 1$  ist  $N = N_A$ .

$$N = \sum_i N_i, \quad (2.20)$$

wobei  $N_i$  die Anzahl der Molekeln der  $i$ -ten Gassorte bezeichnet. Damit ergibt sich

$$pV = N_1 k_B T + N_2 k_B T + \dots, \quad (2.21)$$

wobei

$$p_i = \frac{N_i}{V} k_B T \quad (2.22)$$

wenn nach Voraussetzung jede Gassorte das ganze Volumen einnimmt. Damit setzt sich der Gesamtdruck aus den Einzel- oder Partialdrücken zusammen:

$$p = \sum_i p_i : \quad (2.23)$$

und wir erhalten das DALTONSches Partialdruckgesetz auf eine andere Weise.

### 2.5.2 Boltzmann-Formel

Die an den Molekeln eines idealen Gases in einem Kraftfeld (Schwerefeld) angreifenden Kräfte sind nicht überall gleich, sondern von Ort zu Ort verschieden. Einfachster Fall: eindimensionales Feld in  $z$ -Richtung (z. B. radial gerichtet). Wie groß ist der Druckunterschied  $\Delta p$  auf die Flächen eines Einheitskubus in Feldrichtung, wenn die Gasdichte  $n$  ist und die Fläche  $A$ , auf die die Kraft  $F$  wirkt?

$$dp = nF dz \wedge dp = -dz n \frac{dU}{dz} = -ndU. \quad (2.24)$$

Da wir ein ideales Gas angenommen haben, für das

$$pV = Nk_B T \vee p = nk_B T, \quad (2.25)$$

dann gilt bei Temperaturgleichheit in diesem Gas

$$dp = k_B T dn, \quad (2.26)$$

was mit Gl. (2.24)

$$\frac{dn}{n} = d(\ln n) = -\frac{1}{k_B T} dU, \quad (2.27.1)$$

woraus

$$\ln n = -\frac{U}{k_B T} + \text{const} \quad (2.27.2)$$

oder der BOLTZMANNschen Formel

$$n = n_0 e^{-U/k_B T} \quad (2.28)$$

folgt, mit  $n_0$  der Konstanten bei  $U = 0$ . Wir haben damit eine Vorschrift gewonnen, die Aussagen über die relative Verteilung der Molekeln, reduziert auf die Energie  $U = 0$ , ermöglicht. — Da sich der Druck von der Dichte im vorliegenden Fall durch den konstanten Faktor  $k_B T$  unterscheidet, gilt diese Formel auch für den Druck:

$$p = p_0 e^{-U/k_B T} \quad (2.29)$$

Für ein Schwerfeld gilt  $U = mgz$  mit  $m$  der Molekelmasse, und bei der (irrealen) Voraussetzung  $T \neq T(z)$  erhalten wir die *Barometerformel*

$$p = p_0 e^{mgz/k_B T}. \quad (2.30)$$

### 2.5.3 Maxwell-Verteilung

Für den Fall eines idealen Gases  $A$  ist die Energie einer einzelnen Molekel ausschließlich kinetische Energie, also

$$E = \frac{1}{2} m_A v^2. \quad (2.31)$$

Da die Geschwindigkeiten  $v$  der einzelnen Molekeln verschieden voneinander sind, stellt sich die Frage, wie häufig die unterschiedlichen Geschwindigkeiten sind, also die Frage nach der Geschwindigkeitsverteilung  $f(v)$ . Es liegt nahe, dafür den BOLTZMANNschen Ansatz zu verwenden. Nach Gl. (2.28) schreiben wir anstelle  $U$  für die Innere Energie  $E_{\text{kin}}$  und erhalten

$$\frac{n}{n_0} = f(E) = \text{const} e^{-E_{\text{kin}}/k_B T}. \quad (2.32)$$

Da nach Gl. (2.31) die kinetische Energie proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Molekeln ist, gilt folglich

$$f(v) = \text{const} \exp\left(-\frac{m_A v^2}{2k_B T}\right). \quad (2.33)$$

Berücksichtigen wir noch, daß für die drei Raumrichtungen die Gleichung für die Kugel gilt, da nach Voraussetzung keine Richtung ausgezeichnet sein soll:<sup>2</sup>

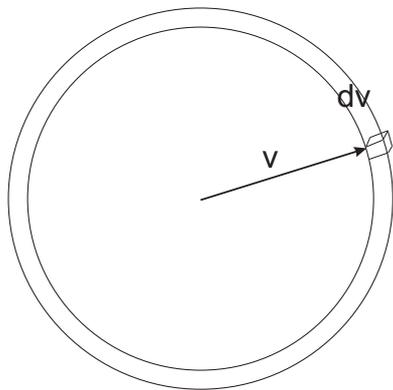
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad (2.34)$$

dann ist die Zahl  $dN$  der Molekeln, deren Geschwindigkeitskomponenten in den Intervallen zwischen  $v_x$  und  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  und  $v_y + dv_y$  sowie  $v_z$  und  $v_z + dv_z$  liegt,

$$dN = \text{const} f(v) dv_x dv_y dv_z = \text{const} \exp\left(-\frac{m_A v^2}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.35)$$

<sup>2</sup>Auf die drei Raumrichtungen müssen die Geschwindigkeiten deswegen gleichmäßig verteilt sein, weil es sonst eine Vorzugsrichtung gäbe, in die sich die Molekeln bewegen würden.

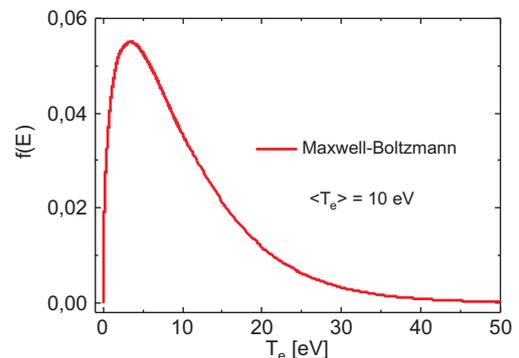
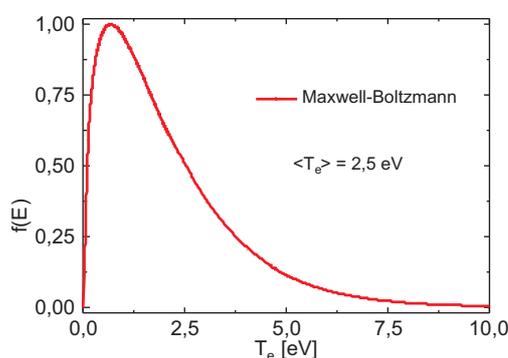
**2.5.3.1 Bestimmung der Konstanten.** Die MAXWELL-Verteilung kann in einer Form geschrieben werden, die die Verteilung der Molekeln auf die Beträge der Geschwindigkeiten anzeigt. Dazu muß die Bestimmung der Gesamtzahl der Molekeln vorgenommen werden, für die bei unterschiedlichen Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  die Summe  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  gleich ist. Die Möglichkeit, aus verschiedenen Zahlen nun die gleiche Summe zu bilden, nimmt mit der Größe der Zahl dramatisch zu: *die Zahl der Realisierungsmöglichkeiten steigt steil an*. Dieses statistische Gewicht wird in Abb. 2.3 veranschaulicht; es ist dies offenbar die Summe der (infinitesimal kleinen) Volumenelemente einer Geschwindigkeits-Hohlkugel mit  $v$  dem Radiusvektor, der Dicke  $v + dv$  und der Oberfläche  $4\pi v^2$ .



**Abb. 2.3.** Ein Volumenelement mit den Seitenlängen  $dv_x$ ,  $dv_y$ ,  $dv_z$  und dem Abstand  $v$  vom Mittelpunkt bildet ein (infinitesimal kleines) Volumenelement einer Hohlkugel mit den Oberflächen  $4\pi(v + dv)^2$  und  $4\pi v^2$ .

Ersetzt man also in der MAXWELL-Verteilung das Produkt  $dv_x dv_y dv_z$  durch  $4\pi^2 v^2 dv$ , ergibt sich die Zahl der Molekeln mit Geschwindigkeiten zwischen  $v$  und  $v + dv$ :

$$dN = \text{const} \exp\left(-\frac{m_A v^2}{2k_B T}\right) v^2 dv. \quad (2.36)$$



**Abb. 2.4.** Vergleich der Verteilungsfunktionen für Elektronen nach MAXWELL-BOLTZMANN für zwei verschiedene Elektronentemperaturen.

Die Konstante ergibt sich dann durch Normierung der Verteilungsfunktion auf Eins. Die Verteilungsfunktion ist Null bei  $v = 0$ , erreicht bei einem bestimmten Wert  $v = v_0$  ein Maximum und fällt bei weiter wachsender Geschwindigkeit wieder ab. Das Maximum ergibt sich die Extremalbildung von Gl. (2.36) zu

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m_A}}. \quad (2.37)$$

Wie bei jeder unsymmetrischen Verteilung liegt der Mittelwert außerhalb des Maximums. Das ist in Abb. 2.4 für Elektronen in einem Plasma gezeigt, die sich nach MB verhalten (sollen). Wie ersichtlich, ist der häufigste Wert sehr viel niedriger als der Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrates. Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_A}}, \quad (2.38)$$

das mittlere Geschwindigkeitsquadrat ist

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m_A}, \quad (2.39)$$

so daß

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_A \langle v_A^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (2.40)$$

folgt.

**Axiom 2.2** *Bei gleicher Temperatur besitzen die Molekeln gleiche mittlere kinetische Energie (Gleichverteilungssatz).*

## 2.6 Mittlere freie Weglänge

In Gasen sind die Molekeln ziemlich weit voneinander entfernt und bewegen sich als freie, praktisch nicht wechselwirkende Teilchen. Eine Wechselwirkung besteht nur dann, wenn sie untereinander zusammenstoßen. Diese Eigenschaft unterscheidet Gas und Flüssigkeit, deren Molekeln dauernd miteinander wechselwirken, so daß nicht von einzelnen Zusammenstößen gesprochen werden kann.

Die Zusammenstöße erfolgen völlig chaotisch (streifend, zentral, frontal, rechtwinklig sind einige ausgezeichnete Positionen). Daher ist auch der Weg, den die Molekel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen zurücklegt, von Mal zu Mal unterschiedlich. Daher definiert man die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  oder  $l$ . Wenn  $\langle v \rangle$  die mittlere thermische Geschwindigkeit ist, ist

$$\lambda \propto \langle v \rangle \tau = \frac{\langle v \rangle}{\nu_m}, \quad (2.41)$$

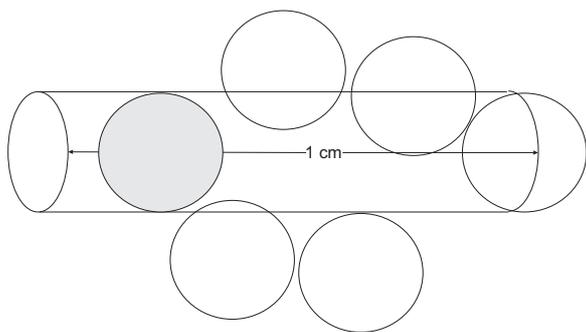
mit  $\tau$  der Zeit zwischen zwei Stößen und  $\nu_m$  der Stoßfrequenz. Alle Größen werden in der Molekularkinetik häufig und parallel verwendet.

Wann tritt ein Stoßereignis ein? Wenn sich zwei Molekeln mit zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten so nahe kommen, daß nach dem Stoß andere Geschwindigkeiten resultieren.

Was ist nahe? Sind Molekeln nicht Punktmassen? Molekeln besitzen ein Volumen; sie werden als Kugeln angenähert. Die Zielfläche, die eine zweite Molekel treffen muß, wird Wirkungsquerschnitt, Streuquerschnitt oder kurz Querschnitt genannt und mit  $\sigma$  bezeichnet (Abb. 2.5).

**Beispiel 2.2** Der größte Abstand, bei dem bei Molekeln mit dem Radius  $r_0$  eine Berührung erfolgen kann, ist  $2r_0$ . Die Zielfläche wird also durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius  $2r_0$  ist und dessen Mittelpunkt im Mittelpunkt der betrachteten Molekel liegt. Folglich ist der Wirkungsquerschnitt selbst<sup>3</sup>

$$\sigma = 4\pi r_0^2. \quad (2.42)$$



**Abb. 2.5.** Eine Molekel stößt auf einem Weg von 1 cm Länge mit allen Molekeln zusammen, die innerhalb seiner Grundfläche liegen. Wie daraus ersichtlich, ist das  $1/4$  des Streuquerschnitts.

**Beispiel 2.3** Wir betrachten eine Molekel mit der Querschnittsfläche  $\sigma$ , die einen Weg von  $s = 1$  cm zurücklegt. Dabei schneidet sie einen Zylinder der Fläche  $\sigma$  heraus (Abb. 2.4). Wenn die Teilchenzahldichte  $n$  ist, dann befinden sich im Zylinder  $n\sigma$  Molekeln. Folglich erleidet die Molekel auf ihrem Weg  $n\sigma$  Zusammenstöße. Damit ist die mittlere freie Weglänge

$$\lambda \propto \frac{1}{n\sigma} : \quad (2.43)$$

die mittlere freie Weglänge ist nur von der Gasdichte abhängig!<sup>4</sup>

**Beispiel 2.4** Luft bei  $0^\circ\text{C}$  und  $10^5$  Pa (1 atm):  $n \approx 3 \cdot 10^{19}/\text{cm}^3$ ,  $\sigma \approx 0,5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \Rightarrow \lambda \approx 0,1 \mu\text{m}$ .  $\langle v \rangle \approx 5 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$  (500 m/sec)  $\Rightarrow \tau \approx 0,2 \text{ nsec}$ .

<sup>3</sup>Tatsächlich sind die meisten Molekeln weder Kugeln, noch sind sie fest. Da jedoch die WW mit der Entfernung stark abnimmt, erfolgt erst dann ein Zusammenstoß, wenn sie einander nahezu „streifen“.

<sup>4</sup> $\sigma$  ist ganz schwach temperaturabhängig und nimmt mit sinkender Temperatur geringfügig zu, z. B. für Wasserstoff um 20 % von  $+100$  nach  $-100^\circ\text{C}$ .



# 3 Elektrostatik

## 3.1 Maxwell-Gleichungen

Ebenso wie die gesamte Mechanik aus den drei NEWTONSchen Axiomen folgt, entwickelt sich die Elektrodynamik aus den vier MAXWELL-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.4)$$

Wir sehen, daß in den Gln. (3.2) und (3.3) die beiden Felder miteinander verkoppelt sind. Für den statischen Fall: alle Ladungen sind im Raum fixiert oder bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, verschwinden die Zeitableitungen:

*Elektrostatik:*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \iiint \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.6)$$

*Magnetostatik:*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.8)$$

Dabei sind die Konstanten

$$\varepsilon_0 c^2 = \frac{10^7}{4\pi} \quad (3.9)$$

und

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9. \quad (3.10)$$

Wie wir den Gln. (3.5) und (3.6) auf der einen und den Gln. (3.7) und (3.8) auf der anderen Seite entnehmen, sind im statischen Fall Elektrizität und Magnetismus separate Erscheinungen. Im elektrischen Fall liegt ein wirbelfreies Feld mit endlicher Ergiebigkeit, im magnetischen Fall ein divergenzfreies Wirbelfeld vor.

## 3.2 Das Coulombsche Gesetz und das elektrische Feld

Warum ist das COULOMBSche Gesetz nicht in den MAXWELL-Gleichungen enthalten? Nur, damit sie schön symmetrisch bleiben?

Das COULOMBSche Gesetz beschreibt die wechselwirkende Kraft zwischen Punktladungen:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (3.11)$$

Wegen der Superponierbarkeit gilt dieses Gesetz auch für die Wechselwirkung zwischen Ensembles of Punktladungen.

Dabei ist das *elektrische Feld*, das die Ladung  $q_1$  am Punkt (1) erzeugt und am Punkt (2) gemessen wird,

$$\mathbf{E}(1) = \frac{\mathbf{F}_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (3.12)$$

Der *vektorielle Charakter* bedeutet eine Zerlegung in die drei Raumkomponenten, z. B. für  $x$ :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}}, \quad (3.13)$$

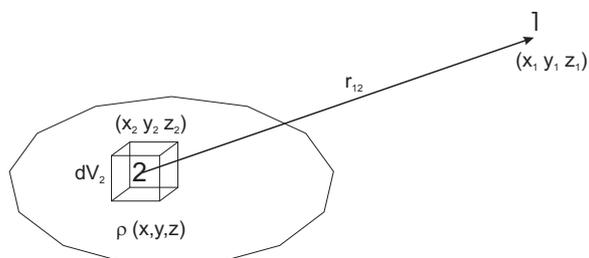
die Superponierbarkeit

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^3} \mathbf{r}_{1j}. \quad (3.14)$$

### 3.2.1 Ladungsdichte

Prinzipiell sind Ladungen diskret aufgebaut, d. h. sie bestehen aus Einheiten, die sich durch bestimmte, ganzzahlige Intervalle unterscheiden. Aus größerer Distanz dagegen verschwimmen diese Unterschiede zu einem Kontinuum, und wir drücken dies durch die Einführung der Dichte der Ladungsträger oder der Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  aus:

$$dq_2 = \rho(2)dV_2 \quad (3.15)$$



**Abb. 3.1.** Das elektrische Feld an der Stelle (1) rührt von der Verteilung von Ladungen an der Stelle (2) her und wird durch Volumen-Integration über die Verteilung erhalten. Prinzipiell kann die Stelle (1) sich auch innerhalb der wolkenigen Ladungsträgerverteilung befinden.

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_V \frac{\rho(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2 (x_1 - x_2)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}}. \quad (3.16)$$

Damit können wir aus einer Verteilung von Ladungen ihr Feld an einer anderen Stelle bestimmen (Abb. 3.1).

Umgekehrt ergibt sich aus der 1. MAXWELL-Gleichung (3.1), daß  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ , das Quellenfeld der elektrischen Feldstärke, als Quelle die elektrischen Ladungen bzw. deren räumliche Dichte hat, an denen die elektrischen Feldlinien beginnen und enden. Gegenteiliges gilt für das Magnetfeld, daher ist wegen der Nichtexistenz magnetischer Ladungen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

### 3.3 Elektrisches Potential

Die Arbeit, die beim Verschieben einer bestimmten Ladung aus einer räumlichen Verteilung von Ladungen gegen die elektrische Kraft aufzubringen ist, berechnet sich nach

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} : \quad (3.17)$$

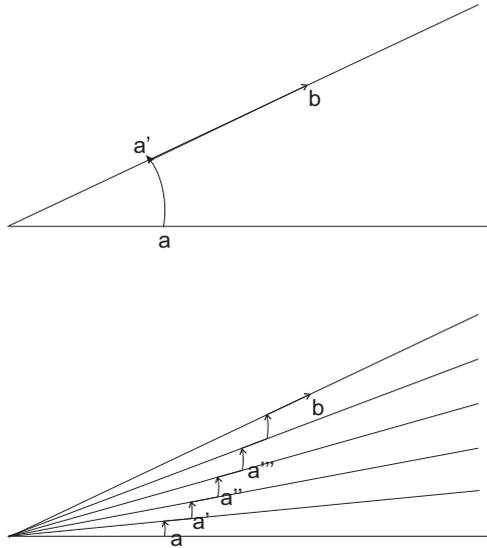
die Richtung der Bewegung ist entgegengesetzt zu den Kraftkomponenten, über den Weg integriert, bzw. für die Arbeit der Einheitsladung  $Q$ :

$$W(\text{Einheit}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.18.1)$$

und für parallele Vektoren

$$W(\text{Einheit}) = - \int_a^b E_x \cdot dx. \quad (3.18.2)$$

Das Ergebnis der Arbeit muß unabhängig vom zurückgelegten Weg sein, sonst könnte man dem Feld bei einem Zyklus Energie entnehmen (*Perpetuum mobile 1. Art*, Abb. 3.2):



**Abb. 3.2.** Senkrecht zu den Feldlinien (von  $a$  nach  $a'$  usw.) wird keine Arbeit geleistet. Daher ist die Arbeit nur aus den einzelnen Beiträgen parallel zum Feld endlich und damit unabhängig vom beschrittenen Weg.

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \Phi(a) - \Phi(b) : \quad (3.19)$$

Da (die auf die Einheitsladung bezogene) geleistete Arbeit nur von den Endpunkten abhängt, kann sie als Differenz zweier Zahlen,  $\Phi(a)$  und  $\Phi(b)$ , angegeben werden. Definieren wir einen Punkt als Referenz, z. B. in der Unendlichkeit, dann können wir für eine im Ursprung sich befindende Ladung mit Gl. (3.19) schreiben

$$-\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( 0 - \frac{1}{r} \right) \equiv \Phi(r), \quad (3.20)$$

und wir bezeichnen  $\Phi(r)$  als (elektrostatiches) Potential der Ladung  $q$  an der Stelle  $r$ . Das Superpositionsprinzip gilt auch für Potentiale, so daß wir für ein Ensemble von Ladungen auch

$$\Phi(r_1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}} \quad (3.21.1)$$

bzw. für eine Ladungsdichte

$$\Phi(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}} \quad (3.21.2)$$

schreiben können. Damit ist die an der Einheitsladung  $Q$  entlang der Strecke geleistete Arbeit

$$dW = \Phi(x + dx, y, z) - \Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx, \quad (3.22)$$

woraus durch Vergleich mit Gl. (3.18.2)

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \text{ zyklisch} \quad (3.23.1)$$

folgt, oder vektoriell

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (3.23.2)$$

die das skalare Potentialfeld mit dem vektoriellen elektrischen Feld verknüpft. Konkret bedeutet das die Gradientenbildung des Feldes  $1/r$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (3.24)$$

Wenn  $\mathbf{E}$  der Gradient eines skalaren Feldes ist, dann muß das elektrische Feld frei von Wirbeln sein:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.4)$$

### 3.4 Die elektrische Feldstärke als Flußdichte

Der Zusammenhang zwischen einem Entfernungsgesetz für die Strahlungsdichte (optisch oder akustisch) und dem COULOMBSchen Gesetz war so augenfällig, daß versucht wurde, auch die von einer positiven Ladung ausgehenden und von einer negativen Ladung aufgenommenen Feldlinien als Fluß zu deuten, obwohl kein Materiefluß beobachtet wird. Wenn  $\mathbf{E}$  so ein Fluß oder die Dichte eines Flusses wäre, müßte er in der Nähe einer Punktladung eine  $1/r^2$ -Abhängigkeit zeigen. Die Ergiebigkeit dieses Flusses ist ursächlich verknüpft mit der Anwesenheit von Ladungen; ein Gebiet, das keine Ladungen enthält und nur von Feldlinien „durchströmt“ wird, hat die Divergenz Null.

Wenn die Ladung innerhalb des Volumens sich befindet, und warum soll das Volumen keine Kugel sein?, ist der Wert von  $\mathbf{E}$  überall auf der Oberfläche

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (3.25.1)$$

und seine Richtung ist senkrecht zur Oberfläche der Kugel (Äquipotentialfläche). Der Fluß selbst ist dann das Produkt aus Flußdichte und Oberfläche:

$$F = \int E_n \, dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.25.2)$$

und damit — wie die Strahlungsfluß — unabhängig von der Oberfläche. Der Fluß durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung, dividiert durch  $\epsilon_0$ . Aus Kap. 1 wissen wir, daß

$$\int_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV, \quad (3.26)$$

und damit ergibt sich die 2. MAXWELLSche Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.5)$$

## 3.5 Elektrische Felder

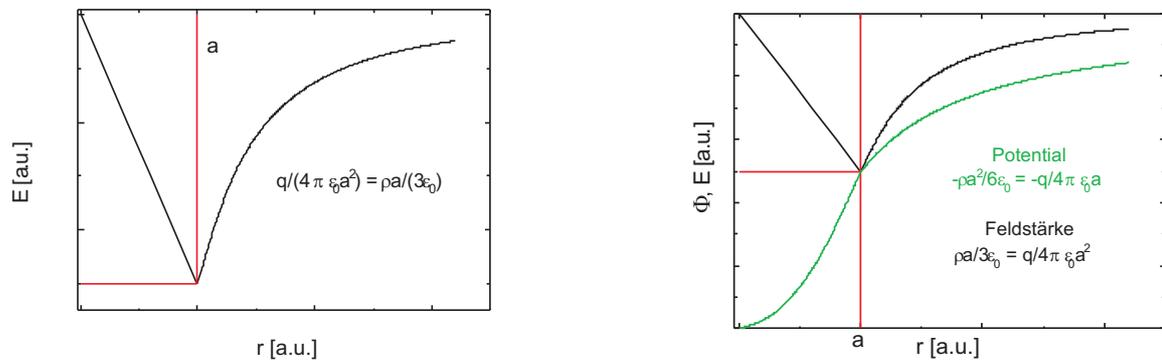
### 3.5.1 Homogen geladene Kugel

Wenn die Kugel nur an der Oberfläche geladen wäre, wäre das elektrische Feld innerhalb der Kugel Null. Betrachten wir eine Oberfläche des Radius  $r$  innerhalb der Kugel, dann ist nach Gl. (3.24)

$$\int E_n dA = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (3.27)$$

wobei die Ladung  $q$  gleich dem Produkt der Ladungsdichte mit dem eingeschlossenen Volumen ist:

$$q = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho. \quad (3.28)$$



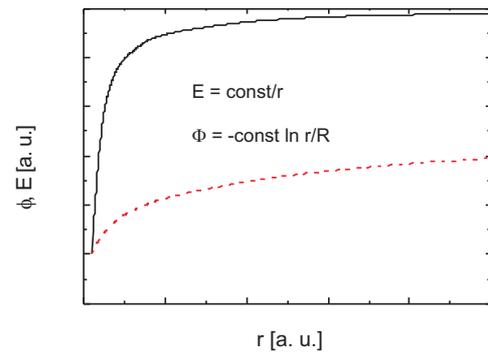
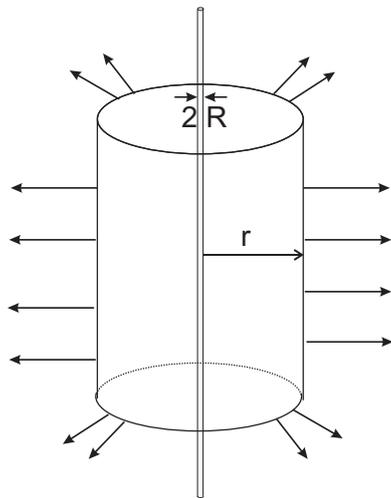
**Abb. 3.3.** Das Feld einer Kugel mit homogener Ladungsverteilung ist innerhalb der Kugel dem Radius direkt und außerhalb dem Quadrat des Abstands vom Mittelpunkt umgekehrt proportional. Das bedeutet für das Potential einen parabolischen Abfall bis zur Kugeloberfläche; danach einen Anstieg, der umgekehrt proportional zum Abstand ist.

Damit ergibt sich das Feld innerhalb der Kugel zu (Abb. 3.3)

$$E = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r. \quad (3.29)$$

### 3.5.2 Unendlich langer Draht

In einem unendlich langen Draht sei die Ladungsdichte gleich. Das elektrische Feld zeigt radial nach außen. Wäre dies nicht so, gäbe es also axiale Komponenten in Richtung eines Endes, müßte es durch entsprechendes Gegenfeld kompensiert werden, woraus wieder ein ausschließlich radiales Feld resultierte (Abb. 3.4).





### 3.5.6 Innerhalb eines metallischen Hohlraums

Wir betrachten eine beliebig geformte, geschlossene metallische Hohlfläche. Auf dieser Oberfläche kann sich keine Nettoladung befinden. Aber können sich dort einzelne positive und negative Ladungen ohne Ladungsausgleich aufhalten?

Sollte das der Fall sein, dann kann man eine Feldlinie von  $\oplus$  zu  $\ominus$  ziehen, deren Linienintegral  $\int E ds$  verschieden von Null ist. Für eine geschlossene Schleife (für das das Linienintegral in der Elektrostatik immer Null ist), geht sie durch das Metall, für das  $\mathbf{E} = 0$ . Daher können in einem metallischen Hohlraum keine Felder existieren, was die perfekte Abschirmwirkung eines FARADAY-Käfigs erklärt. Kein noch so großes Feld auf einer Seite eines Abschirmblechs kommt auf der anderen Seite „an“.



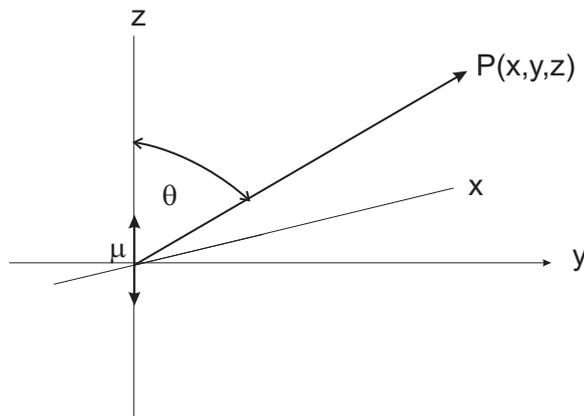
# 4 Potential und elektrisches Feld

## 4.1 Dipolpotential

Unter Verwendung der Gln. (3.21) wird für zwei Ladungen  $+Q$  und  $-Q$ , die um  $d$  voneinander getrennt sind, das Potential an der Stelle  $(x, y, z)$  (Abb.4.1):

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{+Q}{\sqrt{[(z - (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{[(z + (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (4.1)$$

Dieser Fall eines Ladungsensembles ist wichtig für das Potential zweier gegensätzlicher Ladungen, die um einen Abstand getrennt sind, der klein ist gegen die Entfernung, an der das Potential bestimmt wird. Man spricht von einem Dipol, z. B. Wasser oder Ammoniak, aber auch der HERTZsche Dipol, der zur Abstrahlung von Rundfunkwellen benutzt wird.



**Abb. 4.1.** Das elektrische Feld an der Stelle  $P(x, y, z)$  eines weit entfernten Dipols  $\mu$ , der aus zwei Ladungen  $+e_0$  und  $-e_0$  im Abstand  $d$  besteht.

### 4.1.1 Approximatives Dipolpotential

Für den Fall, daß die beiden Ladungen immer näher aneinanderrücken, so daß  $d \rightarrow 0$ , löschen die Ladungen sich aus, und das Potential verschwindet. Für sehr kleine Abstände allerdings kann man Gl. (4.1) entwickeln, wobei wir zunächst von einer

Binomial-Entwicklung Gebrauch machen und Glieder höherer Ordnung in  $h$  vernachlässigen:

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd. \quad (4.2)$$

Wegen der Kugelgleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.3)$$

wird

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right), \quad (4.4)$$

und damit wird für die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{[(z - (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1 - (zd/r^2)]}} \approx \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (zd/r^2)}}, \quad (4.5.1)$$

die nach erneuter Entwicklung von  $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - 1/2x$

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right) \quad (4.5.2)$$

ergibt. Entsprechend für die andere Hälfte der Gl. (4.1)

$$-\frac{1}{\sqrt{[(z + (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2}} \approx -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right) \quad (4.5.3)$$

ergibt. Damit ergibt sich als Summe für das skalare Potential eines Dipols

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} Qd : \quad (4.6)$$

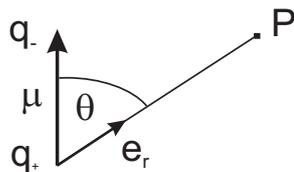
das Potential eines Dipols ist proportional dem Produkt aus Ladung und Abstand, dem *Dipolmoment*  $\mu$ . Beachten wir noch, daß

$$z = r \cos \theta, \quad (4.7)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Dipolachse und dem Radiusvektor zum Punkt  $(x, y, z)$  ist, können wir Gl. (4.6) schreiben als

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu \cos \theta}{r^2} : \quad (4.8)$$

Das Potential eines Dipols fällt mit  $1/r^2$  von der Dipolachse ab, das elektrische Feld folglich mit  $1/r^3$ . Gl. (4.7) eröffnet uns noch den Weg einer besonders eleganten, vektoriellen Schreibweise für das Potential des Dipols, ist doch



**Abb. 4.2.** Der Dipol in vektorieller Schreibweise.

$$\cos \theta = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_r \quad (4.9)$$

mit  $\mathbf{e}_r$  dem Einheitsvektor des Radiusvektors, wenn der Punkt  $(x, y, z)$  durch  $\mathbf{r}$  charakterisiert wird. Damit erhalten wir für das Potential eines Dipols (Abb. 4.2):

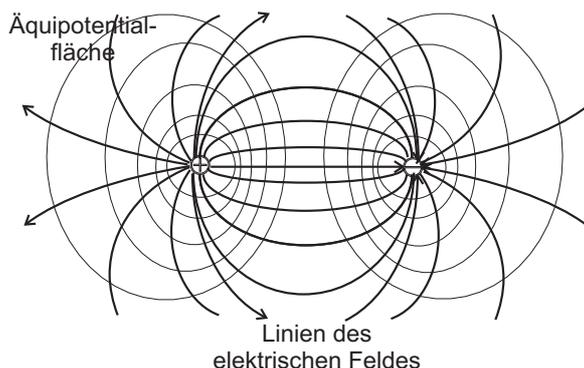
$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.10.1)$$

eine Formel, die für jede beliebige Orientierung der Dipolachse zum Radiusvektor gilt. Danach ist das Potential auf der Symmetrieebene des Dipols Null, nicht aber das Feld  $\mathbf{E}$  (Abb. 4.3).

Da nach Gl. (3.24)  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , kann man für das Potential eines Dipols auch

$$\Phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \mathbf{d} \cdot -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{e_0}{r} \right) = \mathbf{d} \cdot \phi(r) \quad (4.10.2)$$

schreiben: Das Potential eines Dipols ist das einer Punktladung,  $\phi(r)$ , skalar multipliziert mit dem Abstand der beiden den Dipol konstituierenden Teilladungen, was eine Manifestation des Superpositionsprinzips ist.



**Abb. 4.3.** Elektrischer Dipol: Äquipotentialflächen, aus denen der elektrische Feldstärkevektor als Flächennormale (Gradient) entsteht. Die Feldlinien beginnen auf den Oberflächen der positiven Ladungen und enden auf denen der negativen, so daß das Potential auf der Dipolachse Null wird.

#### 4.1.2 Das elektrische Feld eines Dipols

ermitteln wir komponentenweise aus Gl. (4.10) ( $z \parallel \boldsymbol{\mu}$ ) unter Beachtung von  $r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ , so daß

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{r^3 - 3/2 zr 2z}{r^6}, \quad (4.11.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{-3zr 2x}{2r^6}, \quad (4.11.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{-3zr 2y}{2r^6}, \quad (4.11.3)$$

woraus mit (4.7)

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left( 1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}, \quad (4.12.1)$$

wird, sowie

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5} \wedge E_y = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}, \quad (4.12.2)$$

die zusammengefaßt eine Komponente ergeben, die senkrecht zur  $z$ -Achse (und damit zur Dipolachse) in der  $xy$ -Ebene orientiert ist, und die daher die *transversale* Komponente genannt wird (Abb. 4.4):

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}, \quad (4.12.3)$$

da

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 - z^2} = r \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} = r \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = r \sin \theta. \quad (4.13)$$

Für  $\theta = 0^\circ$  und  $\theta = 90^\circ$  ist nach Gl. (4.13) die transversale Komponente Null; das Feld besteht hier nur aus einer axialen Komponente, wobei das Feld für  $\theta = 0^\circ$  doppelt so groß und entgegengesetzt dem Feld bei  $\theta = 90^\circ$  gerichtet ist. Der Gesamtbetrag der elektrischen Feldstärke ergibt sich zu

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}. \quad (4.14)$$

Eine sehr viel elegantere Ableitung ergibt sich direkt aus Gl. (4.10) zu

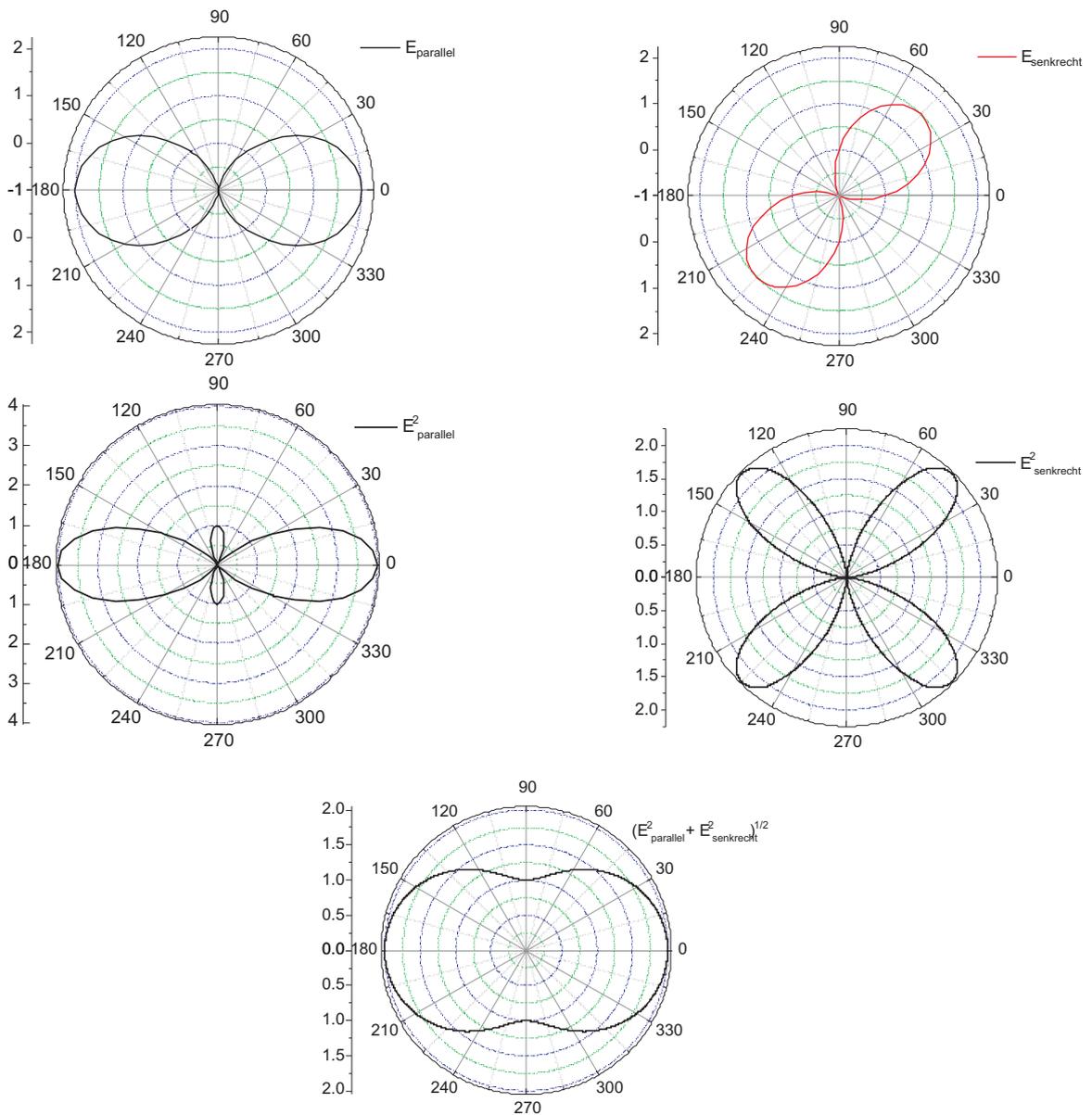
$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \nabla \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r} \nabla \frac{1}{r^3} \right). \quad (4.15.1)$$

Ausdifferenzieren ergibt z. B. für den ersten Term der Summe

$$\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu_x x) = \mu_x \mathbf{i}, \quad (4.15.2)$$

also für drei (kartesische) Komponenten:

$$\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) = \mu_x \mathbf{i} + \mu_y \mathbf{j} + \mu_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\mu}, \quad (4.15.3)$$



**Abb. 4.4.** Oben: Die Komponenten der Feldstärke eines Dipols. Für  $\theta = 0^\circ$  (Sender und Empfänger stehen parallel) und  $\theta = 90^\circ$  (Sender und Empfänger stehen senkrecht zueinander) ist nach Gl. (4.13) die transversale Komponente Null; das Feld besteht hier nur aus einer axialen Komponente (lks.), wobei das Feld für  $\theta = 0^\circ$  doppelt so groß und entgegengesetzt dem Feld bei  $\theta = 90^\circ$  gerichtet ist; re.o.: das transversale Feld. M. lks.: Das Quadrat der Komponente der axialen Feldstärke, M.re.: das Quadrat der transversalen Komponente. Unten die für die vom Dipol abgestrahlte Energie wichtige gesamte Feldstärke, berechnet nach Gl. (4.14).

während der zweite Term, z. B. in  $x$ -Richtung, ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = -3r^{-4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (4.15.4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.15.5)$$

oder

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{r}, \quad (4.15.6)$$

so daß insgesamt sich für die  $x$ -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5} x, \quad (4.15.7)$$

und für die drei Komponenten sich entsprechend

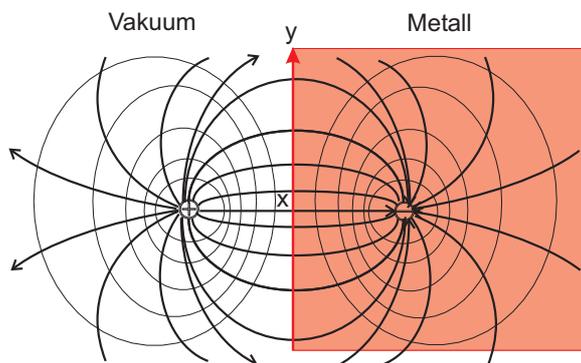
$$\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5} \mathbf{r}, \quad (4.15.8)$$

ergeben. Damit folgt für das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \boldsymbol{\mu} \right). \quad (4.15.9)$$

## 4.2 Influenz und Bildkraft

Wird nach Abb. 4.5 eine Probeladung vor eine Metallplatte gebracht, die frei bewegliche, d. h. insbesondere verschiebbare, Elektronen enthält, dann krümmen sich die Feldlinien derart, daß sie normal auf der Oberfläche stehen. Jede tangentiale Feldlinie würde solange Ladungen verschieben, bis sie senkrecht auf der Metalloberfläche stünde.



**Abb. 4.5.** Die Feldlinien einer Probeladung vor einer metallischen Fläche enden auf dieser senkrecht. Die Ladungen werden im metallischen Volumen verschoben, wodurch ein zusätzliches Feld entsteht.

Wenn der horizontale Abstand zur Metalloberfläche  $x$  sei, dann ist die Feldkomponente der positiven Punktladung

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4.16.1)$$

Wenn wir dazu das entgegengesetzt gleiche elektrische Feld addieren, das von der negativen (virtuellen) Bildladung erzeugt wird, bekommen wir

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (4.16.2)$$

bzw. für die Ladungsdichte an der Oberfläche

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E(y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4.17)$$

Die Größe der entstandenen Bildladung ermitteln wir damit zu

$$Q = \int \sigma(r) dA = \int \sigma(r) 2\pi r dr, \quad (4.18)$$

also zu

$$Q = -\int_{y=0}^{y=\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} 2\pi r dr. \quad (4.19)$$

Substituieren wir  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , wird

$$Q = -Qx \int_{r=0}^{r=\infty} r \frac{dr}{r^3}, \quad (4.20)$$

woraus

$$Q = Qx \left| \frac{1}{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{y=0}^{y=\infty} \Rightarrow Q = Qx \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right] = -Q \quad (4.21)$$

folgt. Diese Spiegelladung scheint bei  $-x$  zu liegen, so daß der Abstand der beiden Ladungen  $2x$  wäre, womit die tatsächlich ausgeübte Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2x)^2} \quad (4.22)$$

ist.

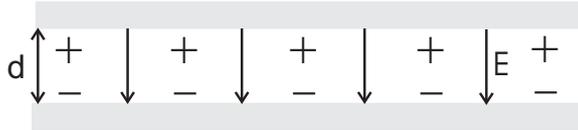
### 4.3 Der Parallelplatten-Kondensator

Wir geben zwei gleich große (Fläche  $A$ ), metallische Platten im Abstand  $d$  vor, auf denen eine jeweils gleiche Anzahl entgegengesetzter Ladungen  $Q$  verteilt ist, so daß das Feld zwischen den Platten gegeben ist durch (Abb. 4.6)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\mathbf{d}}{d}, \quad (4.23)$$

(außerhalb ist es Null, und jede einzelne Platte liefert die Hälfte, s. a. Gl. (3.34)) und ihre Potentialdifferenz

$$U = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (4.24)$$



**Abb. 4.6.** Parallelplatten-Kondensator. Auf den Platten der Fläche  $A$  ist die Ladungsdichte  $\sigma = Q/A$ .

Die Potentialdifferenz oder Spannung ist die Arbeit pro Einheitsladung, die erforderlich ist, um eine Ladung von der einen zur anderen Platte zu bringen; diese Arbeit kann negatives oder positives Vorzeichen haben:

$$U = Ed = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} Q. \quad (4.25)$$

Die Spannung ist also wegen des Superpositionsprinzips

- proportional zum Abstand der Platten,
- proportional zur Ladungsdichte (und damit zur Ladung überhaupt),

und wir fassen den Bruch zur (inversen) *Kapazität* zusammen:

$$U = \frac{Q}{C}, \quad (4.26)$$

was für den speziellen Fall des Plattenkondensators

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (4.27)$$

ergibt.

### 4.3.1 Speicherung von Ladung

Mit dem Plattenkondensator speichern wir Ladung nach Gl. (4.27), und zwar um so mehr,

- je größer die Fläche der Platten und
- je kleiner ihr Abstand zueinander ist.

Dabei nehmen wir zunächst an, daß sich zwischen den Platten Luft oder Vakuum befindet. Es hat sich gezeigt, daß das Einbringen eines sog. *Dielektrikums*,<sup>1</sup> einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Ladungsspeicherung ermöglicht. Dies wird durch einen zusätzlichen Faktor  $\varepsilon$ , die relative oder einfach Dielektrizitätskonstante,<sup>2</sup> in der Gl. (4.27) berücksichtigt:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d}. \quad (4.28)$$

### 4.3.2 Feldstärke und Ladungsdichte

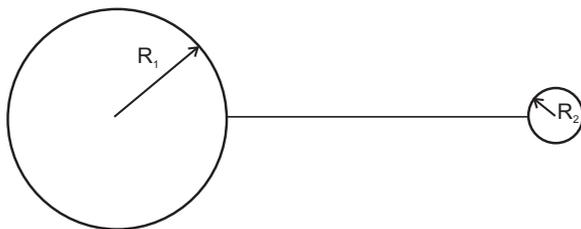
Nach Gl. (3.35) ist die Feldstärke proportional der Ladungsdichte, die selbst wieder umgekehrt proportional der Fläche ist, auf der sich die Ladung verteilt. Daher stehen die Felder zweier gleich hoch geladener Kugeln im Verhältnis

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q/r_1^2}{Q/r_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (4.29)$$

An einer Nadelspitze muß gleiches Potential herrschen wie am Nadelschaft (die gesamte Nadeloberfläche, sofern sie aus Metall und nicht wie bei den alten Germanen aus den Splittern von Knochen besteht, ist eine Äquipotentialfläche). Das Potential hängt aber nur linear, nämlich mit  $1/r$ , vom (Krümmungs-)Radius ab, die Feldstärke ist jedoch nach Gl. (4.21) proportional der Ladungsdichte, also von  $1/r^2$ :

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (4.30)$$

Um das semiquantitativ zu bestimmen, stellen wir uns zwei Kugeln stark unterschiedlichen Radius vor, die durch einen Draht miteinander verbunden sind, so daß sie gleiches Potential aufweisen (Abb. 4.7):



**Abb. 4.7.** Eine Nadel wird approximiert durch zwei Kugeln mit bedeutend unterschiedlichem Radius, die durch einen Draht miteinander verbunden sind.

$$\Phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \wedge \Phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}. \quad (4.31)$$

<sup>1</sup>wörtlich übersetzt: Nichtleiter.

<sup>2</sup>im Laborslang: DK

Wg.  $\Phi_1 = \Phi_2$  muß dann

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (4.32)$$

sein. Damit werden die Felder nach

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (4.33)$$

umgekehrt proportional den Radien; an der kleineren Kugel herrscht also die größere Feldstärke (Spitzenentladung ab der sog. Durchbruchfeldstärke möglich, s. Aufgaben zu Kap. 4 und 5).

# 5 Dispersion

## 5.1 Kapazität

Ein vakuumgefüllter Plattenkondensator weist die Kapazität

$$C = \frac{Q_0}{U_0} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (5.1)$$

auf. Wird Materie der relativen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  zwischen die Platten gebracht, steigt die Kapazität um  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{C}{C_{\text{vak}}}, \quad (5.2)$$

womit sich nach Gl. (5.1) bei konstanter Ladung auf den Platten die Spannung auf

$$U_D = \frac{U_0}{\varepsilon} \quad (5.3)$$

verringert; gleiches gilt für die Feldstärke. Nach dem GAUSSschen Satz ist aber der Fluß  $\Phi = EA$  durch eine beliebige Fläche gleich  $Q/\varepsilon_0$ . Folglich muß sich die effektive Ladung auf

$$Q_P = Q_0 - Q_D = Q_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon_0 E_0 A \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \quad (5.4)$$

verringert haben, wobei der Index P für *Polarisation* und der Index D für *Dielektrikum* stehen. Diese zusätzlichen, virtuellen Ladungen auf dem Dielektrikum sind den Kondensatorplatten dicht benachbart und im Vorzeichen entgegengesetzt gerichtet. Die Stärke des materieerfüllten Kondensatorfeldes wird berechnet nach

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \wedge \mathbf{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (5.5)$$

## 5.2 Erzwungene Schwingungen

Wird ein System durch eine periodische Kraft  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}$  von außen zum Schwingen gebracht, führt es erzwungene Schwingungen aus. Sei die rücktreibende Kraft eine Federkraft, dann ist die DGl für die ungedämpfte Schwingung

$$m\ddot{\mathbf{x}} + D\mathbf{x} - \mathbf{F}_0 e^{i\omega t} = 0. \quad (5.6)$$

Setzt man für die Kreisfrequenz  $\omega_0$  des ungestörten Systems den Wert  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$  ein, wird

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} - \frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{i\omega t} = 0. \quad (5.7)$$

Im eingeschwungenen Zustand wird mit dem Ansatz  $\psi = \psi_0 e^{i\omega t}$

$$\psi_0 (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{F_0}{m} = 0, \quad (5.8)$$

und für die Amplitude  $\psi_0$  dieser Schwingung folgt aus (5.8)

$$\psi_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.9)$$

Nach der Gl. (5.9) wird die Amplitude unendlich für den Fall, daß die Störfrequenz gleich der Eigenfrequenz  $\omega_0$  ist: *Resonanz*. In Wirklichkeit ist die Schwingung immer gedämpft, was durch die Einführung eines Dämpfungsglieds in Gl. (5.7) berücksichtigt wird:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{r}{m} \dot{\mathbf{x}} + \frac{D}{m} \mathbf{x} - \frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{i\omega t} = 0. \quad (5.10)$$

Im eingeschwungenen Fall und mit dem Ansatz

$$\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - \alpha)}, \quad (5.11)$$

der eine Phasenverschiebung zwischen Erreger und angeregtem System berücksichtigt, erhält man für die Ableitungen von Gl. (5.11)

$$\dot{\psi} = i\omega\psi \wedge \ddot{\psi} = -\omega^2\psi. \quad (5.12)$$

Einsetzen in Gl. (5.10) ergibt ( $\frac{D}{m} = \omega_0^2$ )

$$-\omega^2 + \frac{r}{m}i\omega + \frac{D}{m} - \frac{F_0}{\psi_0 m} e^{i\alpha} = 0; \quad (5.13.1)$$

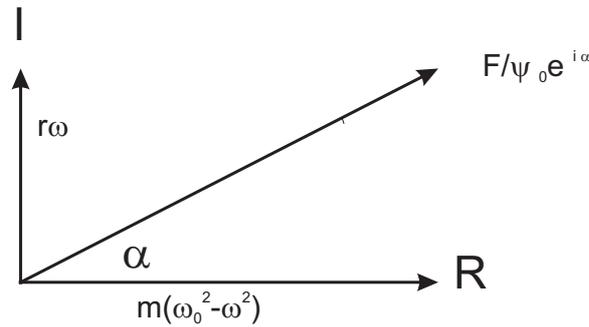
$$m(\omega_0^2 - \omega^2) + ri\omega = \frac{F_0}{\psi_0} e^{i\alpha}. \quad (5.13.2)$$

Dabei ist  $\frac{F_0}{\psi_0} e^{i\alpha} = x + iy$  mit  $x = m(\omega_0^2 - \omega^2)$  und  $y = r\omega$  (Abb. 5.1).

$$\frac{F_0}{\psi_0} = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + r^2\omega^2}, \quad (5.14)$$

so daß für die Amplitude folgt (Abb. 5.2):

$$\psi_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + r^2\omega^2}}. \quad (5.15)$$



**Abb. 5.1.** Zeigerdiagramm der erzwungenen Schwingung.  $x$ -Achse: Realteil,  $y$ -Achse: Imaginärteil.

Die Schwingung wird also durch Real- oder Imaginärteil von  $\psi = \psi_0 e^{i\omega t}$  beschrieben:

$$\psi = \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + r^2\omega^2}}, \quad (5.16)$$

und die Phasendifferenz ergibt sich aus Abb. 5.1 zu

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{r\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (5.17.1)$$

woraus für den Winkel  $\alpha$  folgt

$$\alpha = \arctan \frac{r\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (5.17.2)$$

Die Gleichung ist recht kompliziert; daher ist es nützlich, sich die Grenzfälle genauer zu betrachten (Abbn. 5.2 und 5.3):

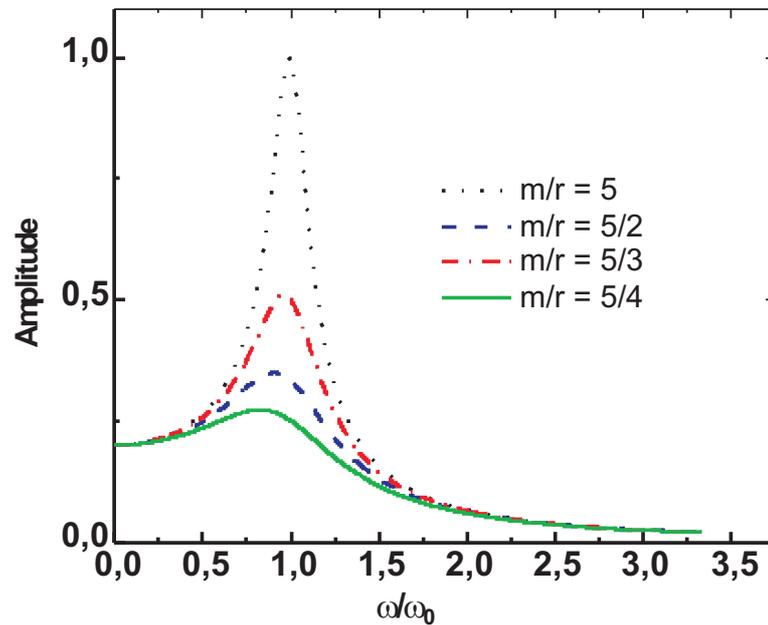
1.  $\omega \ll \sqrt{\frac{D}{m}} \wedge \omega \ll \frac{D}{r}$ : Die Rückstellkraft  $D$  bestimmt das Geschehen. Damit vereinfacht sich die DGl (5.10) zu

$$x = \frac{F_0}{D} e^{i\omega t} : \quad (5.18)$$

- keine Phasendifferenz zwischen Erreger ( $F$ ) und System ( $x$ ), weil Masse und Auslenkung, damit auch Geschwindigkeit und Beschleunigung, klein sind (quasistatischer Bereich).
- Leistungs- bzw. Energieaufnahme:

$$E = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = 0.^1 \quad (5.19)$$

<sup>1</sup>Das Integral aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ist immer Null.



**Abb. 5.2.** Resonanzkurven für verschiedene Verhältnisse von  $m/r$  bei einer Eigenfrequenz von  $\omega = 1 \text{ sec}^{-1} = 1 \text{ Hz}$ .

2.  $\omega \gg \sqrt{\frac{D}{m}} \wedge \omega \gg \frac{D}{r}$ : Das Trägheitsglied ( $\propto m\omega^2$ ) bestimmt das Geschehen:

$$m\ddot{x} = F_0 e^{i\omega t} \Rightarrow x = -\frac{F_0}{m\omega^2} e^{i\omega t}. \quad (5.20)$$

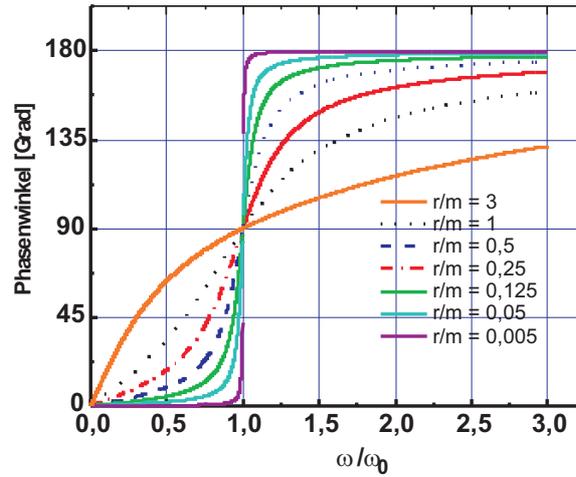
- Beschleunigung und Kraft sind in Phase, also hängt die Auslenkung um  $180^\circ$  hinterher: Das System ist „quasifrei“.
- Leistungs- und Energieaufnahme sind wieder Null.

3. Reibungskraft und Erregerkraft sind etwa gleich:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (5.21)$$

- Phasendifferenz zwischen Geschwindigkeit und Erregerkraft:  $\frac{1}{2}\pi$ .
- $\Rightarrow$  Das System nimmt ständig Energie auf.
- Die Amplitude ist wegen

$$\frac{r}{m} \dot{\psi} = \frac{r}{m} \omega \psi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (5.22)$$



**Abb. 5.3.** Phasenverschiebung einer erzwungenen Schwingung gegen die erregende Kraft als Funktion des Frequenzverhältnisses  $\omega/\omega_0$  für verschiedene Werte von  $r/m$ .

$$\psi_0 = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{D}{m}}} = \frac{F_0}{r\omega}. \quad (5.23)$$

### 5.3 Polarisation

Auf einen Dipol wirke die mit  $\omega$  periodisch einwirkende Kraft

$$F = e_0 E_0 \cos \omega t, \quad (5.24)$$

- die weit entfernt von der Resonanzfrequenz sein soll ( $\omega \ll \omega_0$ ). Dann sind für kleine Auslenkungen Kraft und Auslenkung gleichgerichtet; die Phasenverschiebung ist Null (quasistatischer Fall).
- Bei Annäherung an die Resonanzfrequenz fängt die Auslenkung an, der erregenden Kraft hinterherzuhinken; bei  $\omega = \omega_0$  ist die Phasenverschiebung  $-90^\circ$ , dafür ist nun die Geschwindigkeit (also der Strom,  $\propto \omega E$ ) und die Kraft in Phase, die Auslenkung ist minimal.
- Bei  $\omega \gg \omega_0$  schließlich sind Kraft und Beschleunigung in Phase, die Auslenkung hinkt um  $180^\circ$  hinterher.

Die aufgenommene Leistung kann aus dem Produkt  $Ej \cos \varphi$  ermittelt werden. Danach ist an der Resonanz die Aufnahme maximal ( $\propto E^2 \omega$ ). Die Dipole stehen senkrecht zur Feldrichtung und werden maximal beschleunigt. Dagegen sind im quasistatischen Fall die Dipole parallel zum Feld gerichtet ( $\varepsilon > 1$ ), im quasifreien Fall dagegen antiparallel ( $\varepsilon < 1$ ).

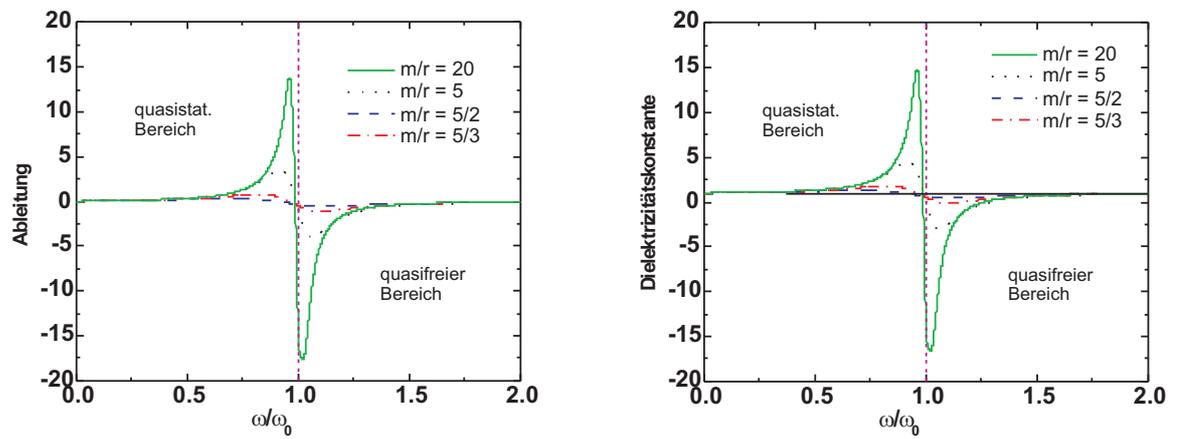


Abb. 5.4. Die Ableitung der Resonanzkurven und das Quadrat des Brechungsindex

# 6 Dispersion im Plasma

## 6.1 Wellengleichung im Vakuum

Bildung der doppelten Rotation einer Feldstärke und Einsetzen in die andere Maxwellgleichung ergibt die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} \wedge \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

für Lösungen von Feldern ebener elektromagnetischer Wellen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \wedge \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})), \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c^2} \cdot \mathbf{E}, \quad (6.3)$$

für die das FARADAYSche Gesetz gilt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{B} \quad (6.4)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \nabla \times \mathbf{B} = -i^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}, \quad (6.5)$$

wobei wir den Entwicklungssatz angewendet haben:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (6.6)$$

Für eine ebene Welle ist die Phasengeschwindigkeit

$$\phi = \omega t - kx \Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}. \quad (6.7.1)$$

Der Brechungsindex ist das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit zur Phasengeschwindigkeit im Medium:

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}. \quad (6.7.2)$$

im Vakuum ist die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}}$  gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , also ist der Brechungsindex Eins.

## 6.2 1. Näherung ohne Stoßdämpfung

Arbeitet man nicht im Vakuum, sondern in einem Leiter mit Leitungsstrom, muß das BIOT-SAVARTSche Gesetz erweitert werden:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.8)$$

von dem die Zeitableitung ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (6.9)$$

Vom Induktionsgesetz her wissen wir, daß

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (6.10)$$

Erneut Entwicklungssatz:

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (6.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (6.13)$$

Ebene Wellen, für die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ :

$$-k^2 \mathbf{E} = \mu_0 i \omega \mathbf{j} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (6.14)$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = \frac{i \omega}{\varepsilon_0} \mathbf{j}. \quad (6.15)$$

## 6.3 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons in einem transversalen  $\mathbf{E}$ -Feld, das von einer externen Quelle  $\mathbf{E}_0$  unterstützt wird, ist

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e_0 \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (6.16)$$

für die Geschwindigkeit ergibt sich also

$$\mathbf{v}_e = -\frac{e_0}{m_e} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (6.17)$$

Der Strom ist für Mikrowellen oder Licht nur einer der Elektronen:

$$\mathbf{j}_e = -e_0 n_e \mathbf{v}_e. \quad (6.18)$$

Damit ergibt sich für Gl. (6.15)

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = \frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_e e_0 \frac{e_0 \mathbf{E}}{i m_e \omega}, \quad (6.19)$$

worin wir die Plasmafrequenz erkennen:

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_P e_0^2}{m_e \varepsilon_0}}, \quad (6.20)$$

also

$$\omega^2 = \omega_P^2 + c^2 k^2. \quad (6.21)$$

## 6.4 Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Damit wird die Dispersionsrelation erweitert. Die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}}$  ist größer als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ :

$$v_{\text{Ph}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_P^2}{k^2}, \quad (6.22)$$

die Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{gr}}$  ist jedoch kleiner als  $c$ :

$$\frac{d\omega}{dk} = v_{\text{gr}} = \frac{c^2}{v_{\text{Ph}}}. \quad (6.23)$$

Wir können das noch in vielfach verwendete Formen umschreiben; dabei gehen wir von Gl. (6.21) aus.

$$\frac{\omega^2 - \omega_P^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}, \quad (6.24)$$

woraus folgt

$$\omega^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_P}{\omega} \right)^2 \right] = c^2 k^2 \quad (6.25)$$

oder

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_P}{\omega} \right)^2 \right] = c^2. \quad (6.26)$$

Wir sehen, daß

$$c = v_{\text{Ph}} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_P}{\omega} \right)^2} \quad (6.27)$$

kleiner als  $v_{\text{Ph}}$  wird und umgekehrt

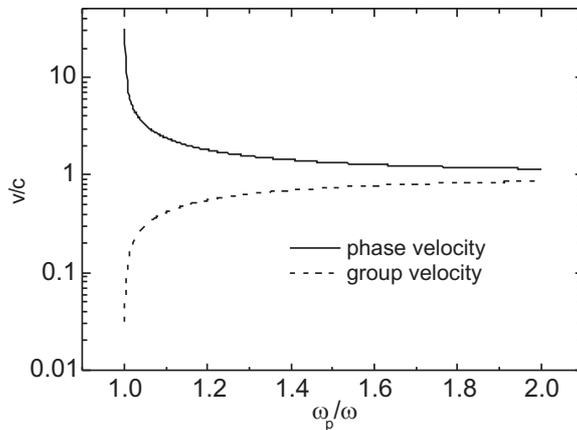
$$v_{\text{Ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{P}}}{\omega}\right)^2}}. \quad (6.28)$$

Für die Gruppengeschwindigkeit gehen wir erneut von Gl. (6.21) aus:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2k}{2\sqrt{\omega_{\text{P}}^2 + c^2k^2}} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\text{Ph}}}. \quad (6.29)$$

Wir sehen, daß  $v_{\text{gr}}$  immer um dasselbe Verhältnis kleiner als  $c$  ist, um das  $v_{\text{Ph}}$  größer ist (Abb. 6.1):

$$v_{\text{gr}} = \frac{c^2}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{P}}}{\omega}\right)^2}. \quad (6.30)$$



**Abb. 6.1.** Below the plasma frequency  $\omega_{\text{p}}$ , the refractive index becomes imaginary:  $v_{\text{ph}} \rightarrow \infty, v_{\text{g}} \rightarrow 0$ : Cutoff. Both velocities are rapidly changing functions of frequency in the vicinity of cutoff. Above, both velocities slowly approach unity.

## 6.5 Wellenlänge und Eindringtiefe

Was passiert mit einem Lichtstrahl der Frequenz  $\omega$ , der in ein Plasma hineingestrahlt wird? Die Wellenlänge

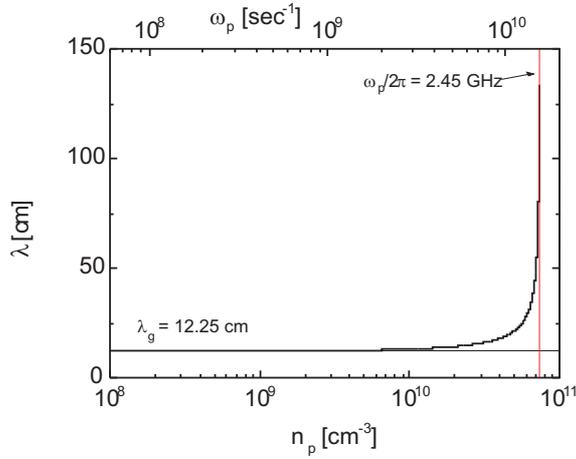
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (6.31)$$

wird den Wert

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2 - \omega_{\text{P}}^2}} = 2\pi c \sqrt{\frac{1}{\omega^2 - \omega_{\text{P}}^2}} \quad (6.32)$$

annehmen. Wird die Plasmadichte (und damit auch die Plasmafrequenz) erhöht, wird die Welle länger und immer länger, bis  $k$  Null wird (Abb. 6.2).

Für Dichten, die größer als diese kritische Plasmadichte sind, kann die Dispersionsbeziehung [Gl. (6.22)] für reelle Zahlen nicht mehr gelöst werden:



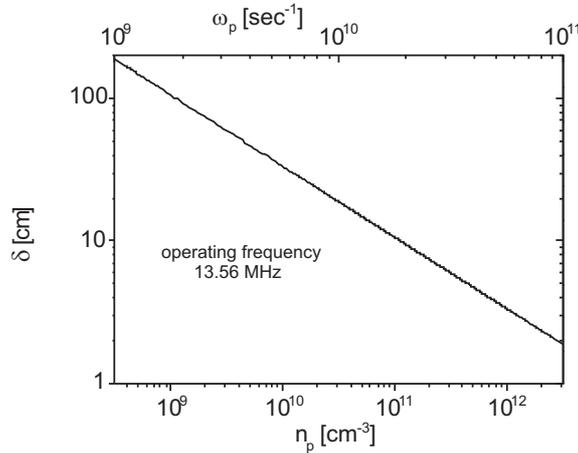
**Abb. 6.2.** Am Cutoff wird die Wellenlänge unendlich, hier gezeigt für ein Mikrowellenplasma, das bei 2,45 GHz angeregt wird mit der Grenzwellenlänge  $\lambda_g = 12,25$  cm. Die Cutoff-Dichte beträgt  $7,3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ .

$$n_c = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e_0^2}. \quad (6.33)$$

Die Welle erfährt hier eine exponentielle Dämpfung, und ist auf der Länge

$$\delta = \frac{1}{|k|} = \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2 - \omega_p^2}} \quad (6.34)$$

auf 1 etel abgefallen (Abb. 6.3).



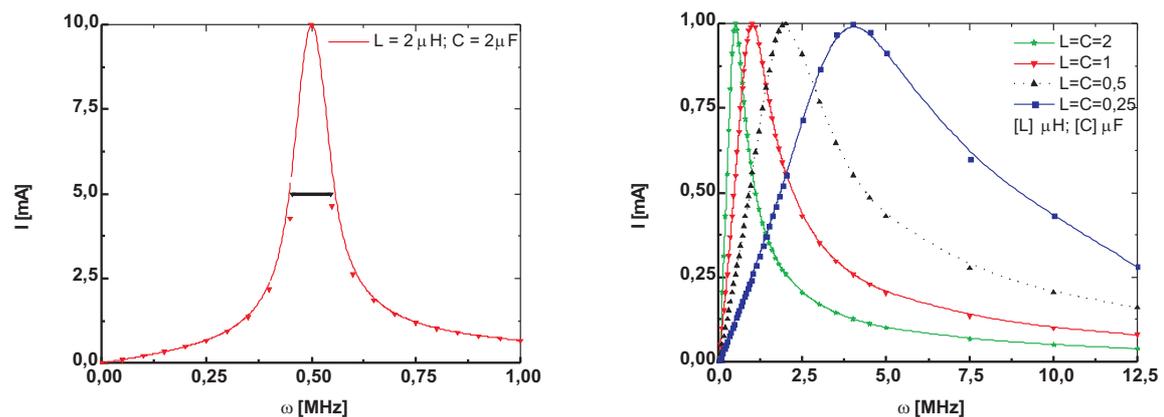
**Abb. 6.3.** Für Hochdichteplasmen ist die Plasmafrequenz größer als die Anregungsfrequenz. Die Welle kann nur innerhalb der Skintiefe  $\delta$  in das Plasma eindringen, hier gezeigt für  $f = 13,56$  MHz.



# 7 HF-Kopplung: Quantitative Beschreibung

Im folgenden wird dargestellt, wie die Einkopplung im kapazitiven und induktiven Fall berechnet wird. Ausgegangen wird von den beiden Grenzfällen des Reihen- und Parallelresonanzkreises, an die sich die Betrachtung gekoppelter Parallelkreise anschließt.

## 7.1 Reihenresonanzkreis



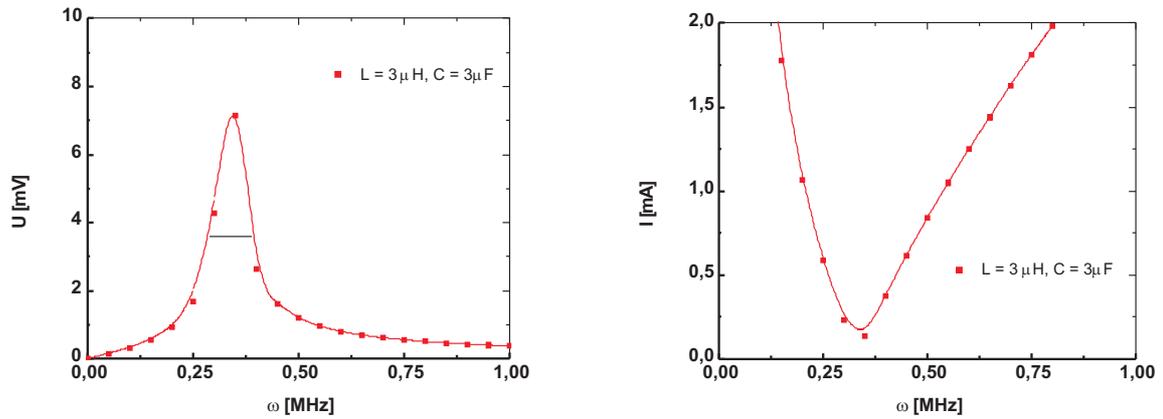
**Abb. 7.1.** Lks: Resonanzkurve eines Serienkreises für  $R = 0,1 \Omega$  und  $L = 2 \mu\text{H}$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$ . Der Strom wird an der Resonanzstelle maximal.

Resonanzkurven eines Serienkreises für verschiedene Werte von  $L$  und  $C$  (von  $1/4$  bis  $2 \cdot 10^{-6}$   $\mu\text{H}$  bzw.  $\mu\text{F}$  bei konstantem  $R = 1 \Omega$ ). Der Strom wird zwar an der Resonanzstelle maximal, ist aber teilweise stark gedämpft.

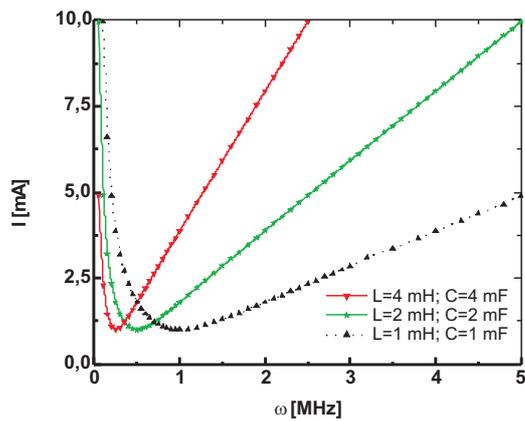
## 7.2 Parallelresonanzkreis

## 7.3 Gekoppelte Parallelschwingkreise

1. induktive Spannungskopplung;
2. induktive Stromkopplung;

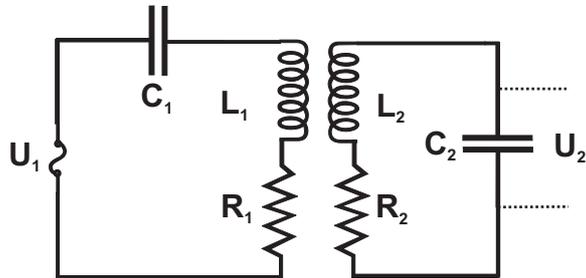


**Abb. 7.2.** In einem Parallelresonanzkreis ist der Strom am Extremwert im Minimum und die Spannung im Maximum; hier gezeigt für  $R = 0,1 \Omega$  und  $L = 10 \mu\text{H}$  und  $C = 10 \mu\text{F}$ .

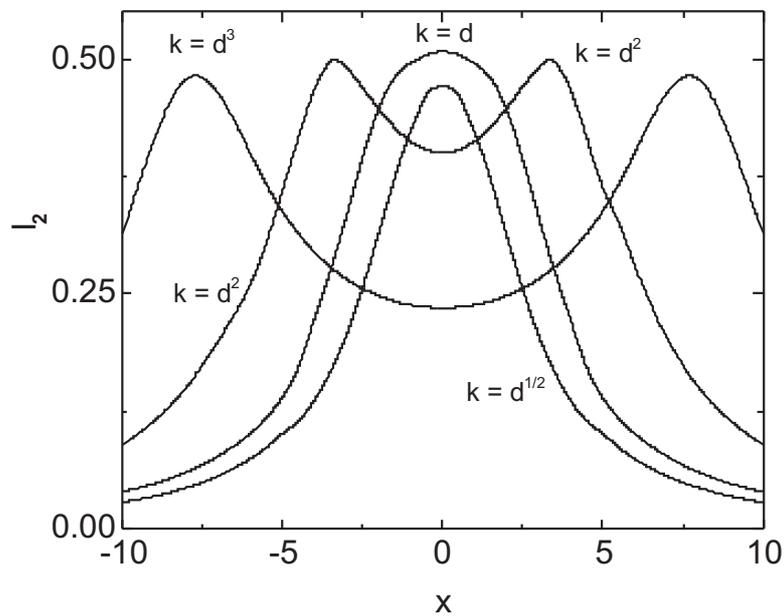


**Abb. 7.3.** In einem Parallelresonanzkreis ist der Strom am Extremwert im Minimum; hier gezeigt für verschiedene Werte von  $L$  und  $C$  bei konstantem  $R$  ( $0,1 \Omega$ ).

3. kapazitive Spannungskopplung;
4. kapazitive Stromkopplung;
5. Trafokopplung (Übertrager).



**Abb. 7.4.** Zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise mit primärer Reihenspeisung (Trafo-  
kopplung).



**Abb. 7.5.** Resonanzkurven für den im Resonanzkreis fließenden Strom  $I_2$  für vier verschiedene Verstimmungen von  $k/d$ .