

# Charakterisierung des Erwartungswertes am Graphen der Verteilungsfunktion

Roland Uhl\*

## Zusammenfassung

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße kann generell am Graphen ihrer Verteilungsfunktion durch eine naheliegende Gleichheit zweier Flächeninhalte festgelegt werden. Äquivalent dazu lässt er sich mit zwei uneigentlichen Riemann-Integralen darstellen. Davon ausgehend werden die Tschebyschow-Ungleichung und ihre Modifikation mit strikten Ungleichheitszeichen hergeleitet.

## 1 Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  häufig in drei Schritten definiert:

1. als eine Summe oder Reihe, falls  $X$  diskret ist,
2. als ein Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$ , falls  $X$  eine Dichte besitzt,
3. im allgemeinen Fall als ein gewisses Stieltjes-Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$  oder als das (Lebesgue-)Integral von  $X$  bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$ .

An Hochschulen für angewandte Wissenschaften jedoch stehen kaum Stieltjes- oder Maß-Integrale zur Verfügung (den Curricula nach), sodass sich Schritt 3 doch nicht ohne Weiteres durchführen oder gar anwenden lässt.

Glücklicherweise kann der Erwartungswert  $\mu = E(X)$  einer Zufallsgröße  $X$  allgemein am Graphen ihrer Verteilungsfunktion  $F$  durch die Gleichheit zweier Flächeninhalte charakterisiert werden. Das scheint kaum bekannt zu sein, obwohl diese Gleichheit recht nahe liegt, um damit  $\mu$  als einen Mittelwert von  $X$  generell zu definieren (vgl. Gleichung (1)). Sie führt umgehend auf eine bekanntere Darstellung von  $\mu$  mittels  $F$  als Differenz von zwei uneigentlichen Riemann-Integralen (siehe (3)).

Davon ausgehend beweisen wir die Tschebyschow-Ungleichung, ebenso ihre Modifikation mit strikten Ungleichheitszeichen anstelle der beiden schwachen. Dabei werden keine Regeln für den Erwartungswert wie etwa die Linearität verwendet.

## 2 Zufallsgröße und Verteilungsfunktion

Wir legen einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  mit Ergebnismenge  $\Omega$ , Ereignismenge/-system  $\mathcal{S}$  und Wahrscheinlichkeitsmaß  $P: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  zugrunde.

---

\*Technische Hochschule Brandenburg • 12.12.2023 • E-Mail: [roland.uhl@th-brandenburg.de](mailto:roland.uhl@th-brandenburg.de) • Veröffentlichung auf dem OPUS-Publikationsserver der Hochschulbibliothek

Eine Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Zufallsgröße* oder auch *reelle Zufallsvariable*, wenn für jede reelle Zahl  $x$  die durch „ $X \leq x$ “ beschriebene Teilmenge von  $\Omega$  ein Ereignis ist, also

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{S}$$

gilt. Für jedes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist dann auch die Teilmenge „ $X \in I$ “ von  $\Omega$  ein Ereignis. Die *Verteilungsfunktion*  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $X$  lässt sich nun durch

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

definieren. Sie ist monoton wachsend mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Außerdem gilt für  $x \in \mathbb{R}$  stets

$$\lim_{t \rightarrow x-} F(t) = P(X < x), \quad \lim_{t \rightarrow x+} F(t) = F(x).$$

D. h. die Funktion  $F$  ist rechtsseitig stetig, und ihre Sprunghöhe  $\geq 0$  an der Stelle  $x$  gibt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „ $X = x$ “ an.

**Median.** Die Zufallsgröße  $X$  besitzt (mindestens) einen *Median*, also eine reelle Zahl  $m$  mit  $P(X < m) \leq \frac{1}{2}$  und  $P(X > m) \leq \frac{1}{2}$ , d. h. mit

$$\lim_{t \rightarrow m-} F(t) \leq \frac{1}{2} \leq F(m)$$

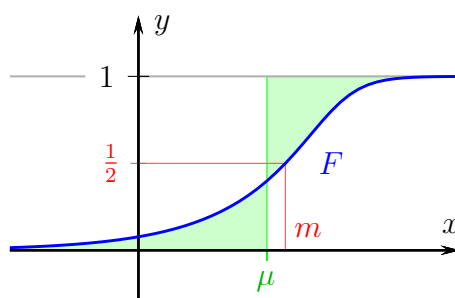
(die letzte Ungleichung wegen  $F(m) = 1 - P(X > m)$ ). Das trifft insbesondere im Fall  $F(m) = \frac{1}{2}$  zu und bei stetigem  $F$  auch nur dann (in der nachfolgenden Zeichnung ist das rot skizziert).

### 3 Allgemeine Definition des Erwartungswertes

Von einer Zufallsgröße  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wollen wir nun einen Mittelwert  $\mu$  festlegen, der den gesamten Verlauf ihrer Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  berücksichtigt. Naheliegender ist doch die Forderung, dass die beiden grün unterlegten Flächen, beschrieben durch

$$x \leq \mu, 0 \leq y \leq F(x) \quad \text{bzw.} \quad x \geq \mu, F(x) \leq y \leq 1,$$

denselben (uneigentlichen) Flächeninhalt haben sollen:



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\mu} F(x) dx = \int_{\mu}^{\infty} (1 - F(x)) dx.} \quad (1)$$

Dazu äquivalent ist

$$\int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\mu} F(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx - \underbrace{\int_0^{\mu} (1 - F(x)) dx}_{-\mu + \int_0^{\mu} F(x) dx}. \quad (2)$$

Auf beiden Seiten können wir den Summanden  $\int_0^\mu F(x) dx$  weglassen und dann die Gleichung nach  $\mu$  umstellen. So ergibt sich der

**SATZ.** Gegeben sei eine Zufallsgröße  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$ . Für eine reelle Zahl  $\mu$  gilt Gleichung (1) mit konvergenten Integralen genau dann, wenn

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx \quad (3)$$

ist, ebenfalls mit konvergenten Integralen.

**DEFINITION.** In diesem Fall sagen wir, dass der *Erwartungswert* von  $X$  (in  $\mathbb{R}$ ) existiert, und setzen ihn gleich  $\mu$ , kurz  $E(X) = \mu$ .

Die Integrale in (1) und (3) können als uneigentliche Riemann-Integrale aufgefasst werden. Denn ihre Integranden  $F$  und  $1 - F$  sind monoton wachsend bzw. fallend und somit über jedes beschränkte Intervall Riemann-integrierbar. In Gleichung (2) dürfen wir anstelle der Integrationsgrenze 0 irgendeine reelle Zahl  $c$  nehmen und erhalten die allgemeinere Darstellung

$$E(X) = c + \int_c^\infty (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^c F(x) dx. \quad (4)$$

**BEISPIEL.** Die tägliche Niederschlagsmenge (Einheit:  $\ell/m^2 = \text{mm}$ ) an einem Ort werde vereinfacht als eine Zufallsgröße  $X$  modelliert, für die gilt:

$$P(X < 0) = 0, \quad P(X > x) = \alpha e^{-\lambda x}, \quad \text{falls } x \geq 0,$$

mit zwei positiven Konstanten  $\alpha < 1$  und  $\lambda$ .<sup>1</sup> Das Ereignis „ $X = 0$ “ (kein Niederschlag) tritt dann ein mit der (positiven) Wahrscheinlichkeit

$$P(X = 0) = P(X \leq 0) - \underbrace{P(X < 0)}_0 = 1 - P(X > 0) = 1 - \alpha.$$

Die Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $X$  erhalten wir für  $x \geq 0$  durch

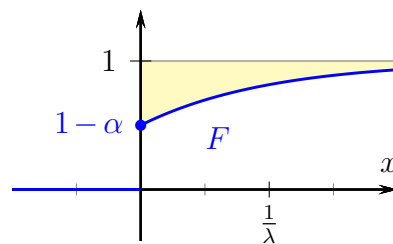
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \alpha e^{-\lambda x}.$$

Für  $x < 0$  ist das Ereignis „ $X \leq x$ “ aber eine Teilmenge des Ereignisses „ $X < 0$ “, und so gilt  $F(x) = 0$ .

Damit können wir den Erwartungswert der täglichen Niederschlagsmenge  $X$  gemäß (3) berechnen:

$$E(X) = \mu = \int_0^\infty \alpha e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^b = \frac{\alpha}{\lambda}$$

(Inhalt der gelb unterlegten Fläche). Dagegen versagen hier die Formeln (11) und (15), weil die Zufallsgröße  $X$  weder diskret ist noch eine Dichte besitzt.



<sup>1</sup>Die groben Näherungswerte  $\alpha = \frac{1}{2}$  (wie bei der folgenden Zeichnung) und  $\lambda = \frac{1}{4 \text{ mm}}$  führen etwa auf  $P(X > 1 \text{ mm}) \approx 0,389$  und  $E(X) = 2 \text{ mm}$ .

## 4 Übliche Definitionen des Erwartungswertes

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  lässt sich allgemein mit Hilfe ihrer Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch als *Stieltjes-Integral* erklären:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x);$$

siehe Bronstein [Gl. (5.38)]<sup>2</sup> oder Henze [S. 148]. Das kann genauer als ein uneigentliches Riemann-Stieltjes-Integral aufgefasst werden, weil der Integrand  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  stetig und der Integrator  $F$  monoton wachsend ist.

Der Erwartungswert von  $X$  kann ebenfalls als *Maß-Integral* definiert werden:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP;$$

siehe Henze [Gl. (5.35)]. Hier liegt das Lebesgue-Integral der Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  über die Menge  $\Omega$  bezüglich des (Wahrscheinlichkeits-) Maßes  $P$  vor.

**Konsistenz mit Abschnitt 3.** Gleichung (3) bei unserer Definition stimmt mit Henze [Gl. (5.42)] überein. Außerdem wird dort festgestellt, dass der Erwartungswert von  $X$  genau dann existiert, wenn

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx < \infty \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^0 F(x) dx < \infty$$

ist.

## 5 Varianz und Tschebyschow-Ungleichung

DEFINITION. Die *Varianz* einer Zufallsgröße  $X$  mit Erwartungswert  $\mu \in \mathbb{R}$  wird erklärt durch

$$V(X) = E((X - \mu)^2),$$

soweit auch dieser Erwartungswert (in  $\mathbb{R}$ ) existiert, und die *Standardabweichung* von  $X$  dann durch

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Die hier auftretende Funktion  $Y = (X - \mu)^2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Y(\omega) = (X(\omega) - \mu)^2 \quad (\omega \in \Omega)$$

ist tatsächlich eine Zufallsgröße. Denn für jede reelle Zahl  $y \geq 0$  lässt sich die Teilmenge „ $Y \leq y$ “ von  $\Omega$  auch durch „ $X \in [\mu - \sqrt{y}, \mu + \sqrt{y}]$ “ beschreiben, während sich für  $y < 0$  die leere Menge ergibt.

<sup>2</sup>Dabei spielt es keine Rolle, dass dort die Verteilungsfunktion durch  $F(x) = P(X < x)$  definiert ist.

Dass eine Zufallsgröße  $X$  von ihrem Erwartungswert stark abweicht im Vergleich zu  $\sigma_X$ , ist wenig wahrscheinlich:

SATZ. Von einer Zufallsgröße  $X$  mit Erwartungswert  $\mu$  existiere auch die Varianz  $V(X)$ . Für jede reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  gilt dann die *Tschebyschow-Ungleichung*

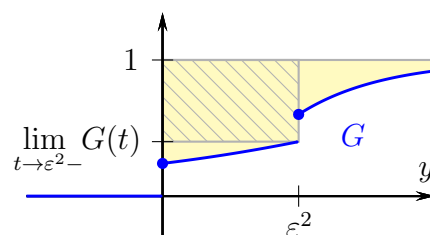
$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}. \quad (5)$$

Bei ihr liegt genau dann Gleichheit vor, wenn das Ereignis „ $X \in \{\mu - \varepsilon, \mu, \mu + \varepsilon\}$ “ mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt.

BEISPIEL. Im Fall  $\sigma_X > 0$  tritt etwa das Ereignis „ $|X - \mu| \geq 2\sigma_X$ “ mit einer Wahrscheinlichkeit  $\leq V(X)/(2\sigma_X)^2 = \frac{1}{4}$  ein; d. h. die Zufallszahl  $X(\omega)$  mit  $\omega \in \Omega$  fällt in das offene Intervall  $(\mu - 2\sigma_X, \mu + 2\sigma_X)$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $\frac{3}{4}$ .

BEWEIS.<sup>3</sup> Zunächst stellen wir die Varianz von  $X$  mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $G$  von  $Y = (X - \mu)^2$  gemäß (3) dar:

$$V(X) = E(Y) = \int_0^\infty (1 - G(y)) dy$$



(Inhalt der gelb unterlegten Fläche). Offensichtlich lässt sich dieses Integral nach unten abschätzen durch

$$V(X) \geq \varepsilon^2 \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \varepsilon^2 -} G(t)\right) \quad (6)$$

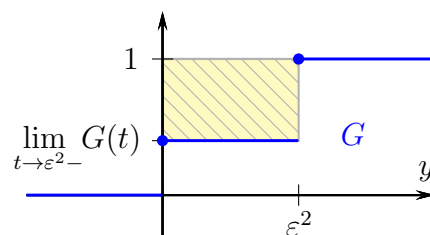
(Flächeninhalt des schraffierten Rechtecks). Den zweiten Faktor schreiben wir noch um:

$$1 - \lim_{t \rightarrow \varepsilon^2 -} G(t) = 1 - P(Y < \varepsilon^2) = P(Y \geq \varepsilon^2) = P(|X - \mu| \geq \varepsilon). \quad (7)$$

So ergibt sich eine zu (5) äquivalente Ungleichung.

Bei Ungleichung (5) wie auch bei (6) liegt doch genau dann Gleichheit vor, wenn  $G$  treppenförmig wie nebenstehend verläuft, d. h. wenn

$$P(Y = 0) + P(Y = \varepsilon^2) = 1$$

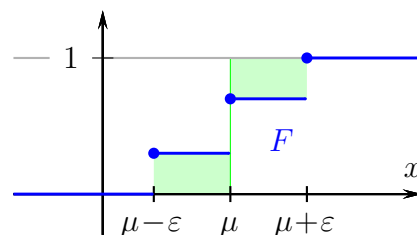


ist, wenn also das Ereignis „ $Y \in \{0, \varepsilon^2\}$ “ mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt.  $\square$

Im Gleichheitsfall bei der Tschebyschow-Ungleichung (5) nimmt demnach die Zufallsgröße  $X$  höchstens die drei Werte  $\mu - \varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\mu + \varepsilon$  fast sicher an. Dabei muss übrigens außer  $\varepsilon \geq \sigma_X$  noch

$$P(X = \mu - \varepsilon) = P(X = \mu + \varepsilon) = \frac{1 - P(X = \mu)}{2}$$

sein. Denn nur bei solch einer symmetrischen Verteilung gilt auch  $E(X) = \mu$ , wie sich am Graphen der Verteilungsfunktion  $F$  von  $X$  mit (1) erkennen lässt.



<sup>3</sup>Im Fall  $V(X) > 0$  lässt sich (5) auch aus der „strikten“ Tschebyschow-Ungleichung (8) herleiten, indem zunächst dort  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon_k = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{k}$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) ersetzt wird.

„Strikte“ **Tschebyschow-Ungleichung.** Im Fall  $V(X) > 0$  können die beiden schwachen Ungleichheitszeichen in (5) durch strikte ersetzt werden:

SATZ. Eine Zufallsgröße  $X$  mit Erwartungswert  $\mu$  habe eine Varianz  $V(X) > 0$ . Für jede reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  gilt dann

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) < \frac{V(X)}{\varepsilon^2}. \quad (8)$$

BEWEIS. Wenn in Abschätzung (5) Ungleichheit (also „<“) bzw. Gleichheit vorliegt, so folgt (8) wegen  $P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq P(|X - \mu| \geq \varepsilon)$  bzw. weil dann  $P(|X - \mu| > \varepsilon) = 0$  ist.  $\square$

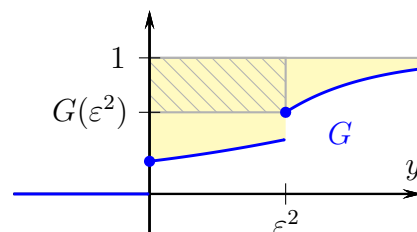
ZWEITER BEWEIS. In unserem Beweis der ursprünglichen Tschebyschow-Ungleichung brauchen wir nur die Gleichungskette (7) zu ersetzen durch

$$1 - G(\varepsilon^2) = 1 - P(Y \leq \varepsilon^2) = P(Y > \varepsilon^2) = P(|X - \mu| > \varepsilon)$$

und die Abschätzung (6) durch

$$V(X) > \varepsilon^2 \cdot (1 - G(\varepsilon^2)).$$

Hier kann tatsächlich keine Gleichheit vorliegen, weil sonst  $G(y) = 1$  für alle  $y \geq 0$  und somit  $V(X) = 0$  wäre.<sup>4</sup>  $\square$



**Entgegengerichtete Ungleichungen.** Ist weiterhin  $\mu = E(X)$ , so gilt

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) > 0 \quad \text{für } \varepsilon \leq \sigma_X. \quad (9)$$

Denn andernfalls wäre  $\varepsilon > 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \varepsilon^2-} G(t) = 1$  wegen (7), und es folgte  $V(X) = E(Y) = \int_0^{\varepsilon^2} (1 - G(y)) dy < \varepsilon^2$ , also  $\sigma_X < \varepsilon$ ; Widerspruch! Wir erhalten noch umgekehrt

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) > 0 \quad \text{für } \varepsilon < \sigma_X \quad (10)$$

aus Ungleichung (9) (diese mit einem etwas größeren  $\varepsilon$ ).

**Verschiebungssatz.** Allgemein gilt  $V(X) = E(X^2) - \mu^2$  mit  $\mu = E(X)$ ; siehe Henze [S. 90, 148]. Auf Beweise dazu und zu den nachfolgenden Formeln gehen wir nicht ein.

## 6 Diskrete Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir *diskret*, wenn ihre Bildmenge  $X(\Omega)$  endlich oder abzählbar unendlich ist. Werden deren paarweise verschiedenen Elemente mit  $x_i$  ( $i \in M$ ) bezeichnet und mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_i = P(X = x_i)$  angenommen, so gilt

$$E(X) = \sum_{i \in M} x_i p_i \quad (11)$$

und

$$V(X) = \sum_{i \in M} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i \in M} x_i^2 p_i - \mu^2 \quad \text{mit } \mu = E(X); \quad (12)$$

<sup>4</sup>Offensichtlich ist genau dann  $V(X) = 0$ , wenn das Ereignis „ $X = \mu$ “ mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt.

dabei existiert  $E(X)$  bzw.  $V(X)$  genau dann (in  $\mathbb{R}$ ), wenn entweder Summen vorliegen (d. h. wenn die Indexmenge  $M$  endlich ist) oder die jeweilige Reihe absolut konvergiert; siehe Bronstein [5.1.3.] oder Henze [Gl. (4.8), (4.15), (4.16)].

In den beiden nachfolgenden Beispielen bestimmen wir jeweils den Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße  $X$  zwar nach Gleichung (3) mit der Verteilungsfunktion, aber dabei wird die alternative Berechnung gemäß Formel (11) offensichtlich.

BEISPIEL. Ein einzelnes Spiel beim französischen Roulette lässt sich idealisiert durch den Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  mit  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$  beschreiben. Ein Spieler setze nun 10 € auf das mittlere Dutzend  $A = \{13, 14, \dots, 24\}$ . Weil er seinen Einsatz verdreifacht zurückerhält bzw. verliert, beträgt sein Gewinn  $X$  je nach gefallener Zahl  $\omega$  dann

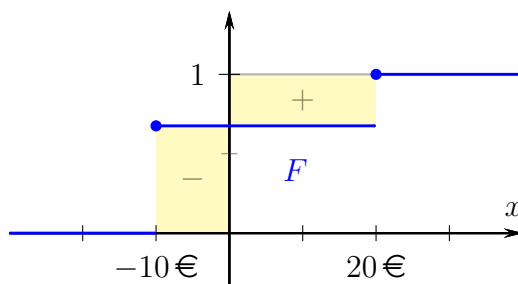
$$X(\omega) = x_1 = 20 \text{ € für } \omega \in A, \quad X(\omega) = x_2 = -10 \text{ € für } \omega \in \Omega \setminus A.$$

Der Gewinn  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine diskrete Zufallsgröße und nimmt die beiden Funktionswerte  $x_1$  und  $x_2$  mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = P(X = 20 \text{ €}) = P(A) = \frac{12}{37}, \quad p_2 = P(X = -10 \text{ €}) = P(\Omega \setminus A) = \frac{25}{37}$$

an. Für die Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $X$  gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < -10 \text{ €,} \\ \frac{25}{37}, & \text{falls } -10 \text{ €} \leq x < 20 \text{ €,} \\ 1, & \text{falls } 20 \text{ €} \leq x. \end{cases}$$



Ihre positiven Sprunghöhen sind  $p_1$  und  $p_2$  an den Stellen  $x_1$  und  $x_2$ .

Damit können wir den Erwartungswert des Gewinns  $X$  gemäß Gleichung (3) bestimmen:

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \int_0^\infty (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx \\ &= 20 \text{ €} \cdot \frac{12}{37} - 10 \text{ €} \cdot \frac{25}{37} = -\frac{10}{37} \text{ €} \approx -0,27 \text{ €} \end{aligned}$$

(Differenz der Flächeninhalte der beiden gelb unterlegten Rechtecke). Aber hier wird doch letztlich

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = \sum_{i=1}^2 x_i p_i$$

gerechnet, in direkter Übereinstimmung mit Formel (11)!<sup>5</sup> Übrigens ergibt sich noch mit (12) die Varianz

$$V(X) = \sum_{i=1}^2 x_i^2 p_i - \mu^2 = 400 \text{ €}^2 \cdot \frac{12}{37} + 100 \text{ €}^2 \cdot \frac{25}{37} - \frac{100}{37^2} \text{ €}^2 = \frac{270\,000}{1369} \text{ €}^2$$

und die Standardabweichung  $\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 14,04 \text{ €}$  des Gewinns.

<sup>5</sup>Gäbe es beim Roulette keine 0, so wäre  $p_1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ ,  $p_2 = \frac{2}{3}$  und  $E(X) = 20 \text{ €} \cdot \frac{1}{3} - 10 \text{ €} \cdot \frac{2}{3} = 0$ .

BEISPIEL. Das zweimalige Werfen eines Würfels werde idealisiert durch den Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  mit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  beschrieben. Die erste Augenzahl  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\omega = (x, y) \mapsto X(\omega) = x \quad (\omega \in \Omega)$$

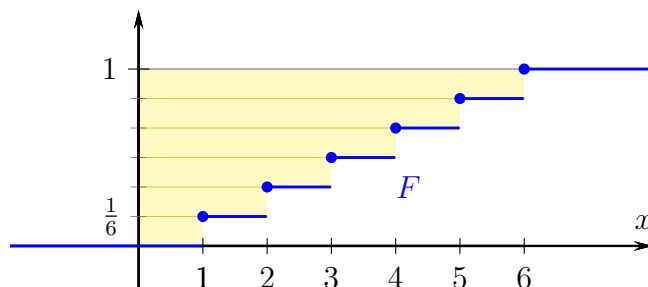
ist eine diskrete Zufallsgröße und nimmt die sechs Werte  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{6}$  an ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Die Verteilungsfunktion  $F$  von  $X$  ist treppenförmig mit

$$F(x) = 0 \quad \text{für } x < 1,$$

$$F(x) = 1 \quad \text{für } x \geq 6$$

sowie für  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  jeweils

$$F(x) = \frac{i}{6}, \quad \text{falls } i \leq x < i + 1.$$



Der Erwartungswert der Augenzahl  $X$  ist gemäß (3) der Inhalt der gelb unterlegten Fläche. Diese zerlegen wir in sechs Rechtecke mit Breite  $x_i$  und Höhe  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ):

$$E(X) = \mu = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

in Übereinstimmung mit Formel (11)! Schließlich führt noch (12) auf die Varianz

$$V(X) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i - \mu^2 = \sum_{i=1}^6 i^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 91 \cdot \frac{1}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

und die Standardabweichung  $\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 1,708$ .

**Zu den Ungleichungen in Abschnitt 5.** Von irgendeiner Zufallsgröße  $X$  seien nur der Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  (oder die Varianz  $\sigma^2$ ) bekannt. Ist noch  $\varepsilon > 0$  gegeben, so kann über die Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \geq \varepsilon)$  außer (5) und (9) lediglich ausgesagt werden, dass sie im Intervall  $[0, 1]$  liegen muss. Entsprechendes trifft im Fall  $\sigma > 0$  auch noch auf  $P(|X - \mu| > \varepsilon)$  und (8), (10) zu.

Denn für eine weitere vorgegebene Zahl  $p$  mit

$$0 \leq p \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{falls } \varepsilon > \sigma, \quad 0 < p \leq 1, \quad \text{falls } \varepsilon \leq \sigma, \quad (13)$$

wird  $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = p$ , wenn  $X$  nur die drei Werte  $\mu - \delta, \mu, \mu + \delta$  mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = \mu - \delta) = \frac{\sigma^2}{2\delta^2} = P(X = \mu + \delta), \quad P(X = \mu) = 1 - \frac{\sigma^2}{\delta^2} \quad (14)$$

annimmt und dabei  $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{p}}$  für  $p > 0$  bzw.  $\sigma < \delta < \varepsilon$  für  $p = 0$  ist. Im Fall  $\sigma > 0$  wird aber  $P(|X - \mu| > \varepsilon) = p$ , wenn von der Zahl  $p$  statt (13) nun

$$0 \leq p < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{falls } \varepsilon \geq \sigma, \quad 0 < p \leq 1, \quad \text{falls } \varepsilon < \sigma,$$

gefordert wird und bei der diskreten Verteilung (14) von  $X$  wieder  $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{p}}$  für  $p > 0$  bzw. jetzt  $\sigma \leq \delta \leq \varepsilon$  für  $p = 0$  ist.



## 7 Zufallsgrößen mit Dichte

Lässt sich die Verteilungsfunktion  $F$  einer Zufallsgröße  $X$  darstellen in der Form

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit einer Lebesgue-integrierbaren Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , so heißt diese *Dichte* von  $X$ .  $F$  ist dann stetig, an jeder Stetigkeitsstelle  $x$  von  $f$  sogar differenzierbar mit  $F'(x) = f(x)$ , und es gilt, analog zu (11) und (12),

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (15)$$

und

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad \text{mit } \mu = E(X); \quad (16)$$

dabei existiert  $E(X)$  bzw.  $V(X)$  genau dann, wenn der jeweilige Integrand Lebesgue-integrierbar ist; siehe Henze [Gl. (5.40) und S. 148].

An Hochschulen für angewandte Wissenschaften genügt es wohl, hier nur das Riemann-Integral zugrunde zu legen. Dabei kann bei einer Dichte  $f$  zugelassen werden, dass das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  (konvergent mit dem Wert 1) nicht nur „bei  $-\infty$  und  $\infty$ “ uneigentlich ist, sondern möglicherweise auch noch an endlich vielen reellen Stellen.<sup>6</sup> Nun existiert  $E(X)$  bzw.  $V(X)$  genau dann, wenn das jeweilige uneigentliche Integral konvergiert.

BEISPIEL. Aus dem Dreieck

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \leq 1, 0 \leq y \leq x + 1\}$$

mit Flächeninhalt  $I_{\Omega} = 2$  werde ein Punkt rein zufällig, aber gleichverteilt gewählt, was sich durch einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  beschreiben lässt. Die erste Koordinate  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des Punktes ist eine Zufallsgröße, und für ihre Verteilungsfunktion  $F$  gilt

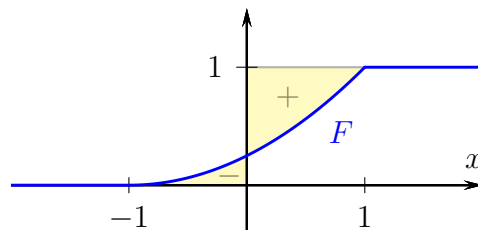
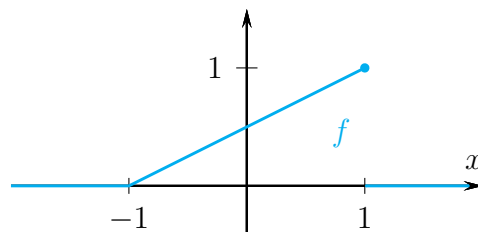
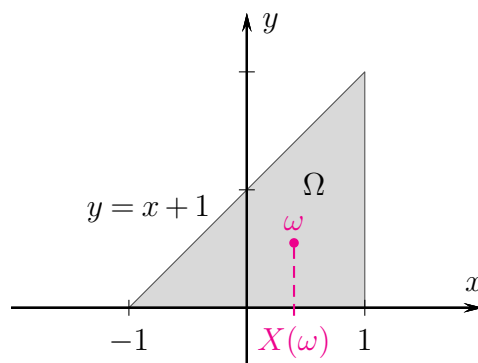
$$F(x) = P(A_x) = \frac{I_{A_x}}{I_{\Omega}} = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit dem durch „ $X \leq x$ “ beschriebenen Ereignis  $A_x \subseteq \Omega$  und dessen Flächeninhalt  $I_{A_x}$  sowie der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Berechnung des Integrals (oder elementargeometrisch:  $A_x$  ist meist ein Dreieck oder  $\emptyset$ ) ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } 1 \leq x. \end{cases}$$



<sup>6</sup>Das ist etwa bei der Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad der Fall, nämlich an der Stelle 0.

Wir bestimmen den Erwartungswert von  $X$  zunächst gemäß (3), also als Differenz der Inhalte der beiden gelb unterlegten Flächen:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4}(x+1)^2\right) dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{4}(x+1)^2 dx \\ &= \left[x - \frac{1}{12}(x+1)^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{12}(x+1)^3\right]_{-1}^0 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kürzer ist die Berechnung nach Gleichung (4) mit  $c = 1$ :

$$E(X) = 1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^2 dx = 1 - \left[\frac{1}{12}(x+1)^3\right]_{-1}^1 = 1 - \frac{8}{12} = \frac{1}{3}.$$

Um aber hier einen Zusammenhang zu Formel (15) zu erkennen, führen wir noch eine Produkt-/partielle Integration durch, der Einfachheit halber bei dem letzten Integral, und berücksichtigen dabei  $F'(x) = f(x)$  für  $x \neq 1$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 - \int_{-1}^1 F(x) dx = 1 - \underbrace{\left[xF(x)\right]_{-1}^1}_{F(1)+F(-1)=1} + \int_{-1}^1 xF'(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 + x) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir von der Koordinate  $X$  des Punktes noch gemäß (16) die Varianz

$$V(X) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{2}(x+1) dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

und die Standardabweichung  $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,471$ .

## Literatur

Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A. (1991). *Taschenbuch der Mathematik* (25. Aufl.). Nauka; Teubner; Deutsch. <https://d-nb.info/911383220>

Henze, Norbert (2019). *Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie*. Inkl. zahlreicher Erklärvideos. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59563-3>