

Lösung des Dirichletproblems für G -minimale Graphen mit einer Kontinuitäts- und Approximationsmethode

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin

Claudia Szerement, geb. Werner

geboren am 27.01.1982 in Cottbus

Gutachter: Prof. Dr. Friedrich Sauvigny

Gutachter: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Dierkes

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Grundlagen der gewichteten Differentialgeometrie	13
1.1 Flächen im \mathbb{R}^3	13
1.2 Die Gewichtsmatrix und die gewichteten Fundamentalformen	14
1.3 Krümmungsbegriffe	18
1.4 Spezielle Parametersysteme	20
1.5 Die gewichteten Ableitungsgleichungen	22
1.6 Die gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen	24
2 G-Minimalflächen und ihre Interpretation	27
2.1 Definition G -Minimalflächen und Deutung	27
2.2 G -minimale Graphen als quasilineare, elliptische Differentialgleichungen	29
2.3 G -Minimalflächen aus Variationsproblemen	35
2.4 Divergenzdarstellung nach Bers	44
2.5 Historische Bemerkungen	45
3 Differentialgleichungen für Flächenvektor X und Normalenvektor N	55
3.1 Ein elliptisches System für den Flächenvektor X	55
3.2 Ein elliptisches System für den Normalenvektor N	56
3.3 Abschätzung von $ \Delta X $ und $ \Delta N $	59
3.4 Ein alternatives elliptisches System für N in beliebigen Parametern	62
4 Dirichletproblem für strikt konvexe Gebiete - die Kontinuitätsmethode	67
4.1 C^0 -Abschätzung und Eindeutigkeit	68
4.2 Randgradientenabschätzung	70
4.3 Innere Gradientenabschätzung	73
4.4 Globale Hölderabschätzung des Gradienten	74
4.5 Graphenkompaktheit	87
4.6 Graphenstabilität	88
4.7 Lösung des Dirichletproblems mit der Kontinuitätsmethode	93
5 Dirichletproblem für konvexe Gebiete - die Approximationsmethode	95
5.1 A-priori-Abschätzungen	95
5.1.1 Abschätzung des Oberflächeninhalts	95

5.1.2	Die ebene Abbildung f und Abschätzung des Oberflächenelements W	99
5.1.3	Stetigkeitsmodule für X und N	104
5.2	Parametrischer Kompaktheitssatz	110
5.3	Approximation konvexer Gebiete	115
5.4	Lösung des Dirichletproblems mit der Approximationsmethode	118
	Anhang	121
	Literaturverzeichnis	127

Einleitung

Das Problem und die Methoden

In der vorliegenden Arbeit wollen wir das Dirichletproblem für G -minimale Graphen in zwei Dimensionen mit einer Kontinuitäts- und Approximationsmethode lösen.

Die Klasse der G -Minimalflächen (oder Immersionen vom Minimalflächentyp) wurde erstmals von Finn im Jahre 1954 in seiner Arbeit [Fi1] betrachtet und stellt in natürlicher Weise eine Erweiterung von Minimalflächen dar. Sauvigny hat dann später in seiner Habilitationsschrift [S2] u.a. für solche Immersionen Gewichtsmatrizen G eingeführt, von denen wir in unserer Arbeit ausgehen wollen. Sei also $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ – später wird die Normale N der Fläche X die Rolle von Z einnehmen – eine positiv definite und symmetrische Gewichtsmatrix, von der wir vier Eigenschaften fordern: Für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gelte

- $G(\lambda Z) = G(Z)$ für alle $\lambda \in (0, +\infty)$
- $Z \circ G(Z) = Z$
- $\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ G(Z) \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$, $g_0 \in [0, +\infty)$
- $\det G(Z) = 1$

Auf einem beschränkten und einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, das den Nullpunkt enthalte, betrachten wir dann G -minimale Graphen

$$X = X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y)) \in C^{3+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

mit der Normalen

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta(x, y)|^2}}(-\zeta_x(x, y), -\zeta_y(x, y), 1) \in C^{2+\alpha}(\Omega),$$

für die

$$\nabla_{ds_G^2}(X, N) = h^{ij} X_{x^i} \cdot N_{x^j}^t = 0 \quad \text{in } \Omega$$

gilt, und dessen Höhenfunktion $\zeta = \zeta(x, y)$ einer quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung genügt:

$$\mathcal{M}_G \zeta := a(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Wir stellen uns nun folgendes Dirichletproblem:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet, an dessen Rand $\partial\Omega$ wir keine Differenzierbarkeit voraussetzen. Zu stetigen Randdaten $\varphi = \varphi(x, y) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\partial\Omega)$ wollen wir die Existenz einer eindeutigen Funktion ζ des Dirichletproblems für G -minimale Graphen

$$\begin{aligned} \zeta &\in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{0.1}$$

beweisen.

Unsere Methode zur Lösung basiert auf zwei Teilen. Zunächst lösen wir mit Hilfe einer konstruktiven Kontinuitätsmethode – die von Sauvigny in [S4] vorgeschlagene Methode für die H -Flächengleichung – das Problem in einer dichten Klasse, nämlich für strikt konvexe Gebiete Ω mit einer regulären $C^{2+\alpha}$ -Jordankurve $\partial\Omega$ als Berandung. Zu Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ zeigen wir dabei die Existenz einer eindeutigen Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ für dieses Dirichletproblems wie folgt: Wir benötigen zunächst eine Startlösung für spezielle Dirichlet-Randdaten φ . Wählen wir Nullrandwerte $\varphi(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \partial\Omega$, so finden wir die triviale Lösung $\zeta(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, für unsere Differentialgleichung. Dann betrachten wir die Familie von Randdaten

$$\varphi_t(x, y) := t\varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

mit $0 \leq t \leq 1$ und $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ und zeigen mit der Graphenkompaktheit und der Graphenstabilität die Abgeschlossenheit bzw. Offenheit des Problems. Damit gilt schließlich

$$\{t \in [0, 1] : \text{Dirichletproblem besitzt zu Randdaten } \varphi_t \text{ eine Lösung}\} = [0, 1],$$

und mit $t = 1$ erhalten wir unsere Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Im zweiten Teil, einem parametrischen Zugang, approximieren wir nun konvexe Gebiete ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an den Rand durch eine Folge strikt konvexer Gebiete $\Omega^{(n)}$ mit regulären $C^{2+\alpha}$ -Jordankurven $\partial\Omega^{(n)}$ als Berandung und stetige Randdaten durch $C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ -Funktionen $\varphi^{(n)}$. Mit der Kontinuitätsmethode existiert für jedes n eine Lösung $\zeta^{(n)} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ der zugehörigen Dirichletprobleme. Wir führen dann gewichtet konforme Parameter ein, so dass die elliptischen Systeme für den Flächenvektor X und den Normalenvektor N in Diagonalform vorliegen

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v \quad \text{in } B \\ \Delta N &= 2KWN + (N \wedge N_v) \circ G(N)_u + (N_u \wedge N) \circ G(N)_v \quad \text{in } B, \end{aligned}$$

für welche wir eine $C^{2+\alpha}$ -Abschätzung im Innern herleiten können. Diese benötigen wir im parametrischen Kompaktheitssatz, der uns die Abgeschlossenheit des Problems

$$\begin{aligned} X &\in C^{3+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B}), \\ \Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v \quad \text{in } B, \\ X_u \circ G(N) \circ X_u^t - X_v \circ G(N) \circ X_v^t &= 0 = X_u \circ G(N) \circ X_v^t \quad \text{in } B, \\ X : \partial B &\rightarrow \Gamma \quad \text{topologisch,} \quad \Gamma := \{(u, v, \varphi(u, v)) : (u, v) \in \partial B\}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

liefert. Wir beachten, dass wir dabei immer auf der Einheitskreisscheibe B parametrisieren. Schließlich werden wir erkennen, dass die Grenzlösung wieder ein G -minimaler Graph auf dem konvexen Gebiet Ω ist.

Da die Gradientenabschätzungen aus Kapitel 5 auf der Uniformisierungsmethode beruhen, sind unsere Ergebnisse auf den Fall $n = 2$ beschränkt. Wir behandeln aber das Dirichletproblem für G -minimale Graphen, die nicht notwendig aus einem Variationsproblem stammen. Zudem vereinigen wir parametrische und nichtparametrische Methoden, die konstruktiv sind und Stabilitätsaussagen enthalten. Somit können wir das vielbetrachtete Dirichletproblem für Gleichungen vom Minimalflächentyp auf eine neue Art und Weise behandeln, als dies bisher in der Literatur getan wurde. Wir sind so außerdem in der Lage, das Dirichletproblem für konvexe Gebiete mit Ecken und beliebige stetige Randdaten zu lösen. Unser Anliegen ist es auch, verschiedene Betrachtungsweisen von G -Minimalflächen in der Literatur zu vergleichen und zu vereinigen.

Wir wollen noch eine Abgrenzung zu Lösungsmethoden in der Literatur geben. Entscheidend für die Lösbarkeit des Dirichletproblems quasilinearere, elliptischer Differentialgleichungen ist die a-priori Randgradientenabschätzung einer Lösung. Es ist bekannt, dass in zwei Dimensionen von dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mindestens Konvexität (bzw. äquivalente geometrische Bedingungen) gefordert werden muss (müssen), damit das Problem für jede quasilineare, elliptische Gleichung zu hinreichend glatten Randdaten gelöst werden kann. Andernfalls müssen geeignete Strukturbedingungen an die Differentialgleichung und alternative geometrische Forderungen an das Gebiet gestellt werden (vgl. [GT], Kap. 12 und 14). In zwei Dimensionen verweisen wir auf Arbeiten von Schauder [Sch] und Nirenberg [Ni], die a-priori Abschätzungen von Lösungen linearer, elliptischer Gleichungen verwenden, um das Dirichletproblem für quasilineare, elliptische Gleichungen mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes zu lösen. Sie fordern insbesondere eine sogenannte Drei-Punkte-Bedingung von der Randkurve Γ .

Gilbarg und Trudinger lösen im hervorragenden Grundlehrenbuch zu elliptischen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung [GT] das Dirichletproblem für quasilineare, elliptische Differentialgleichungen mit Strukturbedingungen (und somit für gewisse G -minimale Graphen) auf regulären, konvexen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einer topologischen und abstrakten Methode der nichtlinearen Funktionalanalysis (Leray-Schauderscher Fixpunktsatz im Banachraum). Dies stellt einen reinen Existenzsatz dar, der im Vergleich zu unserer Methode keine Stabilitätsbetrachtung beinhaltet. Sie fordern dabei gewisse Strukturbedingungen von der Differentialgleichung. Ladyshenskaya und Ural'tseva benutzen in [LU] ebenfalls diesen Leray-Schauder-Satz, um die Existenzfrage bei quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen zu beantworten. Bergner und Dittrich verwenden in [BD] diese Methode, um das Dirichletproblem für Graphen vorgeschriebener gewichteter mittlerer Krümmung in n Dimensionen auf beschränkten, gewichtet mittel-konvexen $C^{2+\alpha}$ -Gebieten direkt in dieser Klasse zu lösen. Wir verwenden im Kapitel 4 Teilaspekte der Herangehensweise für unsere $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung von ζ bis zum Rand, wenngleich unser Zugang zum Dirichletproblem bedeutend anders ist.

Lau in [Lau] sowie Schulz und Williams in [SW] lösen das Dirichletproblem für Gleichun-

gen vom Minimalflächentyp sowie vom Mittleren Krümmungstyp in Divergenzform ohne Krümmungsvoraussetzungen an das Gebiet Ω zu stellen. Dafür benötigen sie für die Randdaten $\varphi \in C^{0+1}(\partial\Omega)$ eine Kleinheitsbedingung in der Lipschitz-Norm. Ersterer benutzt die Konstruktion von Sub- und Superlösungen, um das Problem mit Hilfe der Perronschen Methode lösen zu können. Letztere verwenden eine Kombination von bekannten Techniken (Variationsmethode, Perronsche Methode, Störungstechnik) in Zusammenhang mit der Barrierekonstruktion, um Existenz zu zeigen. Wir wollen hier aber keine weiteren Einschränkungen an die Randdaten fordern und verlangen deshalb Konvexität vom Gebiet. Für Immersionen aus einem Variationsproblem und einem parametrischen Zugang zum Dirichletproblem der nichtparametrischen G -Minimalflächengleichung haben wir bisher folgende Resultate: Winklmann betrachtet in seiner Arbeit [W] kritische Punkte $X \in C^\infty(K, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{K}, \mathbb{R}^3)$ des parametrischen Funktionals

$$\mathcal{F}[X] = \iint_K F(X_u \wedge X_v) dudv,$$

genannt F -minimale Immersionen, die durch eine orientierte geschlossene Jordankurve Γ , welche zugleich einen Graph über den Rand eines ebenen konvexen Gebietes $K \subset \mathbb{R}^2$ darstellt, positiv beschränkt wird. Dabei erkennt der Autor X als eindeutigen Graph über K , ohne Stabilität der Fläche zu fordern. Für seinen Beweis des Radó-Typ-Resultats benutzt er Techniken der komplexen Analysis. Unter der Voraussetzung, dass Γ einer „bounded slope condition“ genügt, kann mit [GT] weiterhin die Existenz einer F -minimalen Einbettung gezeigt werden. Es bleibt die Frage offen, ob die Regularitätsvoraussetzung $X \in C^\infty(B)$ für Extremalen des Funktionals \mathcal{F} gegeben ist. Hildebrandt und von der Mosel konnten in ihren Arbeiten [HM1], [HM2] die Existenz eines konform parametrisierten Minimierers von \mathcal{F} in der Klasse $X \in C^\alpha(B) \cap C^0(\bar{B})$ und zusätzlich die höhere Regularität $X \in H^{2,2}(B) \cap C^{1+\alpha}(\bar{B})$ zeigen, falls F eine sogenannte perfekte Dominanzfunktion besitzt. Setzen wir für die stabile Immersion X vorgeschriebener F -mittlerer Krümmung \mathcal{H}_F , dies sind insbesondere kritische Punkte des Funktionals

$$\mathcal{F}[X] := \iint_B \{F(X_u \wedge X_v) + \langle Q(X), X_u \wedge X_v \rangle\} dudv, \quad \operatorname{div} Q = \mathcal{H}_F,$$

mit $\delta^2 \mathcal{F}[X] \geq 0$, die Regularität $C^3(B, \mathbb{R}^3) \cap C^{1+\alpha}(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$ voraus, so zeigen Clarenz und von der Mosel in [CM2] ebenfalls ein Radó-Typ-Resultat für strikt konvexe Gebiete und weiteren Voraussetzungen an \mathcal{H}_F . Es bleibt dabei die offene Frage, ob man die Regularitätsvoraussetzung auf $X \in C^3(B) \cap C^0(\bar{B})$ abschwächen kann, wenn X konform parametrisiert ist und keine inneren Verzweigungspunkte besitzt. Wir bemerken noch, dass G -Minimalflächen aus einem Variationsproblem nur einen Spezialfall der Gleichungen vom Minimalflächentyp darstellen.

Gliederung der Arbeit

In Kapitel 1 behandeln wir die Grundlagen der gewichteten Differentialgeometrie. Dabei führen wir in Abschnitt 1.2 unsere Gewichtsmatrizen G gemäß [S3] und [Fr] ein, mit denen wir die gewichteten Fundamentalformen h, L und e definieren. Damit erklären wir in Abschnitt 1.3 die gewichtete mittlere Krümmung \mathcal{H}_G und die Gaußsche Krümmung \mathcal{K} . Anschließend behandeln wir in Abschnitt 1.4 gewichtet konforme Parameter, die in Kapitel 3 und 5 eine entscheidende Rolle einnehmen. Wir beschreiben weiterhin Flächen als Graphen, für welche wir später das Dirichletproblem formulieren wollen. Das Kapitel beenden wir mit den gewichteten Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten sowie den gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen. Diese benötigen wir insbesondere für die elliptischen Systeme von X und N in Kapitel 3.

Die Definition von G -Minimalflächen und deren Interpretation sind Bestandteil von Kapitel 2. In Abschnitt 2.1 geben wir zunächst eine geometrische Deutung an und erkennen die Erweiterung der Klasse von Minimalflächen auf G -Minimalflächen. Die Höhenfunktion ζ von G -minimalen Graphen $X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ erfüllt dabei eine quasilineare, elliptische Differentialgleichung, die die Grundlage unseres Dirichletproblems bildet. Umgekehrt können wir in Abschnitt 2.2 Lösungen von quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen als G -minimale Graphen erkennen. Anschließend betrachten wir Variationsprobleme, dessen kritische Punkte ebenfalls G -Minimalflächen darstellen. Eine Divergenzdarstellung nach Bers für quasilineare, elliptische Gleichungen, deren Koeffizienten nur von den partiellen Ableitungen der Lösung abhängen, soll Gegenstand von Abschnitt 2.4 sein. Dabei beziehen wir uns auf die Arbeit [B] von Bers. Wir benötigen sie für die Oberflächeninhaltsabschätzung in Abschnitt 5.1.1. Am Ende des Kapitels gehen wir noch auf verschiedene Definitionen für Gleichungen vom Minimalflächentyp ein, die bis heute in der Literatur auftauchen und vergleichen diese mit unserer.

Kapitel 3 enthält wichtige Differentialgleichungen für den Flächenvektor X sowie den Normalenvektor N , die die Grundlage von Kapitel 5 bilden. In gewichtet konformen Parametern leiten wir in Abschnitt 3.1 und 3.2 mit Hilfe der gewichteten Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten elliptische Systeme für X und N her. Dabei sind aufgrund der günstigen Parameterwahl die Systeme in den zweiten Ableitungen diagonalisiert, und wir erhalten als Hauptteil den Laplace-Operator Δ . In Abschnitt 3.3 schätzen wir dann $|\Delta X|$ und $|\Delta N|$ ab und arbeiten das quadratische Wachstum im Gradienten heraus, so dass wir später die Gradientenabschätzung von Heinz anwenden können. Wir bemerken noch die wichtige Eigenschaft, dass das System für N von X entkoppelt ist. In Abschnitt 3.4 leiten wir noch ein alternatives elliptisches System für N in beliebigen Parametern her. Dieses verwenden wir insbesondere für die innere Gradientenabschätzung von ζ in Abschnitt 4.3 sowie für die Grapheneigenschaft der Grenzlösung bei Anwendung des parametrischen Kompaktheitssatzes zur Lösung des Dirichletproblems in Abschnitt 5.4.

Nachdem die Grundlagen in Anlehnung an die Arbeiten [S3] und [Fr] geschaffen sind, betrachten wir nun in Kapitel 4 zunächst das Dirichletproblem für G -minimale Graphen $X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ auf beschränkten und strikt konvexen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer regulären $C^{2+\alpha}$ -Jordankurve $\partial\Omega$ als Berandung und Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

Dazu leiten wir, teilweise mit Techniken aus [GT], nur mit Hilfe der quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung aus Abschnitt 2.2 eine $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung bis zum Rand für ζ her. Aus der Abschätzung $\sup_{\Omega} |\zeta(x, y)| \leq \sup_{\partial\Omega} |\zeta(x, y)|$ in Abschnitt 4.1, die mit Hilfe eines Vergleichssatzes schnell gezeigt ist, folgt sofort die Eindeutigkeit des Dirichletproblems und die triviale Lösung $\zeta \equiv 0$ für Nullrandwerte. Für unsere Randgradientenabschätzung in Abschnitt 4.2 benötigen wir explizit die strikt Konvexität des Gebietes Ω , die eine gleichmäßige Stützebenenbedingung (in der Literatur bekannt als „bounded slope condition“) nach sich zieht. Bei der inneren Gradientenabschätzung in Abschnitt 4.3 benutzen wir für die dritte Komponente N^3 des Normalenvektors N das alternative elliptische System für N aus Abschnitt 3.4 und leiten eine Differentialungleichung her, welche einem schwachen Minimumprinzip unterliegt. Dabei orientieren wir uns an [BD]. Um dann noch eine globale Hölderabschätzung in Abschnitt 4.4 zu beweisen, benutzen wir in zwei Dimensionen die Theorie quasikonformer Abbildungen aus der Funktionentheorie, wozu unsere Abbildung $\zeta_x - i\zeta_y$ gehört. Mit Morrey's Lemma erhalten wir zunächst eine innere Hölderabschätzung. Eine Spiegelung über den Rand liefert uns schließlich die globale Abschätzung. Mit der Schauderabschätzung aus [S6] gelangen wir zu einer $C^{2+\alpha}$ -Abschätzung bis zum Rand, die wir für den Beweis der Graphenkompaktheit in Abschnitt 4.5 benötigen. In Abschnitt 4.6 zeigen wir noch die Graphenstabilität unter kleinen Störungen der Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$. Der mit Hilfe der Fixpunktiteration geführte Beweis orientiert sich an einer entsprechenden Aussage für H -Flächen aus [S6], Kap. XII, §9. Die oben beschriebene Kontinuitätsmethode liefert uns dann die Existenz der eindeutigen Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ unseres Dirichletproblems auf dem regulären, beschränkten und strikt konvexen $C^{2+\alpha}$ -Gebiet Ω zu Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

Mit Hilfe der Approximationsmethode in Kapitel 5 können wir das Dirichletproblem für konvexe Gebiete mit eventuell auftretenden Ecken und stetigen Randdaten lösen. In Vorbereitung auf den parametrischen Kompaktheitssatz beweisen wir in Abschnitt 5.1 eine Abschätzung des Oberflächeninhalts, die wir für den Stetigkeitsmodul für X bis zum Rand benötigen. Um später eine Gradientenschranke an N für das elliptische System für N herzuleiten, brauchen wir eine Kleinheitsbedingung an das System, welche wir mit einem Stetigkeitsmodul für N im Innern erreichen können. Desweiteren betrachten wir die ebene Abbildung f beim Einführen gewichtet konformer Parameter genauer und beweisen damit eine Abschätzung für das Oberflächenelement nach unten. Dies benötigen wir für den Nachweis, dass das Grenzelement N beim parametrischen Kompaktheitssatz wirklich die Normale an X darstellt. Der Beweis dieses wichtigen Kompaktheitssatzes in Abschnitt 5.2 beruht auf gewichtet konformen Parametern und den elliptischen Systemen für X und N , so dass wir mit potentialtheoretischen Betrachtungen innere $C^{2+\alpha}$ -Abschätzungen und mit Arzelà-Ascoli die gleichmäßige Konvergenz im Innern bis zu ihren zweiten Ableitungen erhalten. Das Grenzelement $\{X, N\}$ ist wieder eine Lösung X des parametrischen Problems (0.2) mit der Normale N . Wir müssen dann noch in Abschnitt 5.3 die konvexen Gebiete durch reguläre, strikt konvexe Gebiete approximieren. Dazu orientieren wir uns an [S1]. Schließlich erhalten wir mit der oben beschriebenen Approximationsmethode die Existenz der eindeutigen Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ auf dem konvexen Gebiet Ω zu stetigen Randdaten $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt an dieser Stelle meinem akademischen Lehrer und Betreuer dieser Arbeit Herrn Prof. Dr. F. Sauvigny für das in mich gesetzte Vertrauen, konstruktive Gespräche und die gesamte wissenschaftliche Ausbildung. Durch seine hervorragenden Vorlesungen und Seminare wurde mein Interesse an der Theorie partieller Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie geweckt und geschult. Wertvolle Hinweise und Anregungen verdanke ich ebenso Herrn Prof. Dr. S. Fröhlich, der für mich stets Zeit fand. Erwähnen und danken möchte ich auch Herrn Dr. M. Bergner für fruchtbare Diskussionen im Laufe der letzten Jahre.

Mein ganz persönlicher Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, die mich durch motivierende Worte unterstützt, Freiräume geschaffen und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Kapitel 1

Grundlagen der gewichteten Differentialgeometrie

In diesem Kapitel legen wir die Grundlagen der gewichteten Differentialgeometrie und beweisen wichtige Identitäten, die wir in unserer Arbeit benötigen. Dabei orientieren wir uns an den Darstellungen und Ausführungen in [Fr] und [S3].

1.1 Flächen im \mathbb{R}^3

Auf einem beschränkten und einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, das den Nullpunkt enthalte (was wir nachfolgend nicht mehr explizit erwähnen und stillschweigend annehmen), betrachten wir Abbildungen

$$X = X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{3+\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \quad (1.1)$$

mit Hölderexponent $\alpha \in (0, 1)$, die wir als Parametrisierung einer Fläche verstehen. Im folgenden notieren wir nicht notwendig den Bildraum und schreiben zum Beispiel kurz $C^{3+\alpha}(\Omega)$, wenn es aus dem Kontext klar ist. Wir erklären dann das Oberflächenelement W durch

$$W = W(u, v) := |X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)|, \quad (u, v) \in \Omega, \quad (1.2)$$

und setzen stets

$$W > 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (1.3)$$

voraus. Dabei bedeuten die unteren Indizes u und v die partiellen Ableitungen bezüglich der entsprechenden Parameter. Gelegentlich setzen wir auch $u^1 = u$ bzw. $u^2 = v$ oder $w = (u, v)$ oder $w = u + iv$. Mit \wedge bezeichnen wir das Kreuzprodukt zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 , und $|\cdot|$ sei die Länge (Betrag) eines Vektors. Vektoren X verstehen wir hier als Zeilenvektoren, X^t als transponierten Spaltenvektor.

Definition 1.1 *Eine stetig differenzierbare Abbildung $X = X(u, v)$ aus (1.1) mit der Eigenschaft $W(u, v) > 0$ nennen wir differentialgeometrisch regulär bzw. eine Immersion.*

Bemerkung 1.1 *Es gilt*

$$W = \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \quad \text{in } \Omega \quad (1.4)$$

mit dem Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle := X \cdot Y^t$ zweier Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

Eigenschaft (1.3) sichert uns die punktweise Definiertheit der sphärischen Abbildung (auch Gauß-Abbildung genannt)

$$N(u, v) := \frac{X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)}{|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)|} : \Omega \rightarrow S^2, \quad (1.5)$$

der Immersion X mit der zweidimensionalen Einheitssphäre $S^2 := \{Y \in \mathbb{R}^3 : |Y| = 1\}$ im \mathbb{R}^3 . Wir nennen $N = N(u, v)$ auch die Normale an die Fläche X im Punkt $(u, v) \in \Omega$, die gemäß der Definition senkrecht auf den Richtungsvektoren X_u und X_v steht. Es gelten die folgenden Gleichungen

$$\langle X_{u^i}, N \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \quad \text{und} \quad |N|^2 = 1.$$

Später verwenden wir als Parametergebiete auch die offenen Kreisscheiben $B_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $\epsilon \in (0, +\infty)$ und Mittelpunkt $a = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$. Wir schreiben dann kurz $B := B_1(0)$, wenn wir die Einheitskreisscheibe um den Nullpunkt meinen, und $B_\epsilon := B_\epsilon(0)$ für die Kreisscheibe um den Nullpunkt mit Radius ϵ .

1.2 Die Gewichtsmatrix und die gewichteten Fundamentalformen

Wir statten den Raum \mathbb{R}^3 mit einer speziellen Metrik aus, welche durch eine positiv definite und symmetrische Matrix

$$G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^{3 \times 3}), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (1.6)$$

induziert wird. Gemäß Sauvigny in [S3] und Fröhlich in [Fr] setzen wir folgende Eigenschaften voraus: Für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gelten

$$(G1) \text{ (Homogenität vom Grad 0)} \quad G(\lambda Z) = G(Z) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, +\infty)$$

$$(G2) \text{ (Eigenwertrelation)} \quad Z \circ G(Z) = Z$$

$$(G3) \text{ (Elliptizität)} \quad \frac{1}{1+g_0} |\xi|^2 \leq \xi \circ G(Z) \circ \xi^t \leq (1+g_0) |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit einer reellen Konstante $g_0 \in [0, +\infty)$

$$(G4) \text{ (Normierung)} \quad \det G(Z) = 1$$

Wir nennen eine Matrix $G = G(Z)$ aus (1.6) mit den Eigenschaften (G1) bis (G4) eine Gewichtsmatrix. Mit G ist dann auch G^{-1} eine Gewichtsmatrix. Neben der Elliptizitätskonstante $g_0 \in [0, +\infty)$ benötigen wir später noch eine Größe, welche die Ableitung der Gewichtsmatrix quantitativ abschätzt. Sei also $g_1 \in [0, +\infty)$ eine Konstante, die

$$\sqrt{\sum_{i,j,l=1}^3 G_{ij,z^l}(Z)^2} \leq g_1 \quad \text{für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (1.7)$$

erfüllt. Dabei sind die $G_{ij}(Z)$ die Komponenten der Gewichtsmatrix $G(Z)$.

Falls $Z = (z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $z^3 \neq 0$ gilt, genügen die Einträge G_{11} , G_{12} und G_{22} , um die Matrix

$$G = (G_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} G' & a^t \\ a & b \end{pmatrix}$$

mit $G' = (G_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $a = (G_{13}, G_{23}) \in \mathbb{R}^2$ und $b = G_{33} \in \mathbb{R}$ eindeutig zu beschreiben. Wegen Eigenschaft (G2) haben wir nämlich

$$((z^1, z^2), z^3) \circ G = ((z^1, z^2) \circ G' + z^3 a, (z^1, z^2) \cdot a^t + z^3 b) = ((z^1, z^2), z^3),$$

woraus sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} (z^1, z^2) \circ G' + z^3 a &= (z^1, z^2), \\ (z^1, z^2) \cdot a^t + z^3 b &= z^3 \end{aligned}$$

ergeben. Wir erhalten somit

$$a = \frac{1}{z^3} (z^1, z^2) \circ [\mathbb{E}^2 - G'], \quad (1.8)$$

$$b = 1 - \frac{1}{(z^3)^2} (z^1, z^2) \circ [\mathbb{E}^2 - G'] \circ (z^1, z^2)^t \quad (1.9)$$

mit der zweidimensionalen Einheitsmatrix $\mathbb{E}^2 \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Der Fall $G(Z) \equiv \mathbb{E}^3$ mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ liefert uns die Theorie der klassischen Differentialgeometrie (siehe z.B. [BL]). Es gilt dann $g_0 = g_1 = 0$ für die Konstanten in (G3) und (1.7).

Mit Hilfe der Matrix G werden wir nun die drei gewichteten Fundamentalformen definieren. Hierzu betrachten wir die gewichtete, symmetrische Weingartenabbildung

$$\mathcal{W}_G(u, v) := -G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ \partial N^t(u, v) \circ (\partial X^t(u, v))^{-1} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{T}_{X(u,v)} \rightarrow \mathcal{T}_{X(u,v)} \quad (1.10)$$

auf dem Tangentialraum $\mathcal{T}_{X(u,v)} := \{Y \in \mathbb{R}^3 : \langle Y, N(u, v) \rangle = 0\}$ im Flächenpunkt $X(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, mit den linearen Abbildungen

$$\partial X^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{T}_{X(u,v)}, \quad \partial N^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{T}_{X(u,v)},$$

die durch die Jacobischen Matrizen

$$\begin{aligned} \partial X &:= \begin{pmatrix} x_u^1 & x_u^2 & x_u^3 \\ x_v^1 & x_v^2 & x_v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \\ \partial N &:= \begin{pmatrix} N_u^1 & N_u^2 & N_u^3 \\ N_v^1 & N_v^2 & N_v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \end{aligned}$$

beschrieben werden. Da ∂X^t injektiv ist, existiert die Umkehrabbildung, und wir bezeichnen sie mit $(\partial X^t(u, v))^{-1}$. Wir bemerken, dass die auf \mathcal{T}_X eingeschränkten Abbildungen $\partial N^t \circ (\partial X^t)^{-1}$ und $G(N)^{-\frac{1}{2}}$ symmetrisch sind. Für die Definition der Matrix $G^{-\frac{1}{2}}$ beachten wir noch die Spektralzerlegung der positiv definiten Matrix G : Seien $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte der Matrix G und T eine feste Orthonormalbasis, dann definieren wir für beliebiges $p \in \mathbb{R}$

$$G^p := T \circ \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} \circ T^{-1}.$$

Damit gelten die Rechenregeln

$$G^{p+q} = G^p \circ G^q, \quad G^1 = G, \quad G^0 = \mathbb{E}^3, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.2 Die gewichtete erste, zweite und dritte Fundamentalform der Immersion X sind auf dem Tangentialraum \mathcal{T}_X wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I_G(X) &:= \{G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}^t \circ \{G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}, \\ II_G(X) &:= \{\mathcal{W}_G \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}^t \circ \{G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}, \\ III_G(X) &:= \{\mathcal{W}_G \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}^t \circ \{\mathcal{W}_G \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Einsetzen der gewichteten Weingartenabbildung liefert uns insbesondere

Satz 1.1 Es gelten

$$\begin{aligned} I_G(X) &= \partial X \circ G(N) \circ \partial X^t, \\ II_G(X) &= -\partial N \circ \partial X^t = -\partial X \circ \partial N^t, \\ III_G(X) &= \partial N \circ G(N)^{-1} \circ \partial N^t. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Beweis: Die erste Identität sehen wir mit (1.11) sofort ein. Desweiteren berechnen wir

$$\begin{aligned} II_G(X) &= \partial X \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{W}_G^t \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t \\ &= -\partial X \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ \partial X^{-1} \circ \partial N \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t \\ &= -\partial N \circ \partial X^t \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} III_G(X) &= \partial X \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{W}_G^t \circ \mathcal{W}_G \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t \\ &= \partial X \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ \partial X^{-1} \circ \partial N \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ \dots \\ &\quad \dots \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ \partial N^t \circ (\partial X^t)^{-1} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ \partial X^t \\ &= \partial N \circ G(N)^{-1} \circ \partial N^t. \end{aligned}$$

q.e.d.

Für die Koeffizienten der gewichteten Fundamentalformen führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} h_{ij}(u, v) &:= X_{u^i}(u, v) \circ G(N) \circ X_{u^j}(u, v)^t = \langle X_{u^i}(u, v) \circ G(N), X_{u^j}(u, v) \rangle, \\ L_{ij}(u, v) &:= -X_{u^i}(u, v) \cdot N_{u^j}(u, v)^t = -\langle X_{u^i}(u, v), N_{u^j}(u, v) \rangle, \\ e_{ij}(u, v) &:= N_{u^i}(u, v) \circ G(N)^{-1} \circ N_{u^j}(u, v)^t = \langle N_{u^i}(u, v) \circ G(N)^{-1}, N_{u^j}(u, v) \rangle \end{aligned} \quad (1.13)$$

für $i, j = 1, 2$. Die Matrizen bezeichnen wir kurz mit

$$\begin{aligned} h &:= I_G(X) = (h_{ij})_{i,j=1,2}, \\ L &:= II_G(X) = (L_{ij})_{i,j=1,2}, \\ e &:= III_G(X) = (e_{ij})_{i,j=1,2}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die gewichtete zweite Fundamentalform nicht explizit von der Wahl der Gewichtsmatrix G abhängt. Differenzieren wir die Identität $\langle X_{u^i}, N \rangle = 0$ nach u^j , so folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle X_{u^i}, N \rangle = \langle X_{u^i u^j}, N \rangle + \langle X_{u^i}, N_{u^j} \rangle$$

mit den zweiten partiellen Ableitungen

$$X_{u^i u^j} := \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Wir haben somit

$$L_{ij}(u, v) = \langle X_{u^i u^j}(u, v), N(u, v) \rangle.$$

Wählen wir für die Gewichtsmatrix G die Einheitsmatrix \mathbb{E}^3 , so kommen wir auf die gewöhnlichen Fundamentalformen der klassischen Differentialgeometrie. Wir bezeichnen dann die (nichtgewichtete) erste Fundamentalform mit

$$g := I_{\mathbb{E}^3}(X) = (g_{ij})_{i,j=1,2}, \quad g_{ij} = \langle X_{u^i}, X_{u^j} \rangle.$$

Mit Hilfe von I_G definieren wir die gewichtete Metrik

$$ds_G^2 := h_{11}(u, v)du^2 + 2h_{12}(u, v)dudv + h_{22}(u, v)dv^2 \quad (1.14)$$

und für $G = \mathbb{E}^3$ die nichtgewichtete Metrik

$$ds^2 := g_{11}(u, v)du^2 + 2g_{12}(u, v)dudv + g_{22}(u, v)dv^2. \quad (1.15)$$

Für das Oberflächenelement bezüglich der gewichteten Metrik ds_G^2 ,

$$W_{ds_G^2}(u, v) := \sqrt{h_{11}(u, v)h_{22}(u, v) - h_{12}(u, v)^2} > 0, \quad (u, v) \in \Omega, \quad (1.16)$$

und das Oberflächenelement bezüglich der nichtgewichteten Metrik ds^2 ,

$$W(u, v) = W_{ds^2}(u, v) = \sqrt{g_{11}(u, v)g_{22}(u, v) - g_{12}(u, v)^2} > 0, \quad (u, v) \in \Omega, \quad (1.17)$$

wollen wir im nachfolgenden Hilfssatz die Identität

$$W(u, v) = W_{ds_G^2}(u, v) \quad \text{für alle } (u, v) \in \Omega$$

zeigen (siehe [Fr], Abschnitt 1.3.1). Daher hat die Gewichtsmatrix keinen Einfluß auf W .

Hilfssatz 1.1 *Das Oberflächenelement $W = W(u, v)$ hängt nicht von der Wahl der Gewichtsmatrix G ab.*

Beweis: Wegen

$$N \circ G(N) \circ X_{u^i}^t = N \cdot X_{u^i}^t = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$N \circ G(N) \circ N^t = |N|^2 = 1$$

nach (G2), und wegen (G4) gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz (vgl. [BL], §2, Gleichung (20))

$$\begin{aligned} W_{ds_G^2}^2 &= h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \\ &= (X_u \circ G(N) \circ X_u^t)(X_v \circ G(N) \circ X_v^t) - (X_u \circ G(N) \circ X_v^t)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} X_u \circ G(N) \circ X_u^t & X_u \circ G(N) \circ X_v^t & 0 \\ X_v \circ G(N) \circ X_u^t & X_v \circ G(N) \circ X_v^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X_u \circ G(N) \circ X_u^t & X_u \circ G(N) \circ X_v^t & X_u \circ G(N) \circ N^t \\ X_v \circ G(N) \circ X_u^t & X_v \circ G(N) \circ X_v^t & X_v \circ G(N) \circ N^t \\ N \circ G(N) \circ X_u^t & N \circ G(N) \circ X_v^t & N \circ G(N) \circ N^t \end{pmatrix} \\ &= \det\{(X_u, X_v, N)^t \circ G(N) \circ (X_u^t, X_v^t, N^t)\} \\ &= \det\{(X_u, X_v, N)^t \circ (X_u^t, X_v^t, N^t)\} \cdot \det G(N) \\ &= \det\{(X_u, X_v, N)^t \circ (X_u^t, X_v^t, N^t)\} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = W^2 \end{aligned}$$

mit der Determinante $\det A$ einer quadratischen Matrix A .

q.e.d.

1.3 Krümmungsbegriffe

Wir definieren die gewichtete mittlere und Gaußsche Krümmung mit Hilfe der Koeffizienten L_{ij} der gewichteten zweiten Fundamentalform aus (1.13) und den Koeffizienten $h^{ij} = h^{ij}$ der inversen Matrix h^{-1} , d.h.

$$h_{ij}h^{jk} = \delta_i^k := \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

Beachte dabei (und in der gesamten Arbeit) die Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes, unten und oben, wird summiert. Bei lateinischen Indizes führen wir die Summation von 1 bis 2 aus.

Definition 1.3 *Als gewichtete mittlere Krümmung $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_G(X)$ der Immersion X setzen wir*

$$\mathcal{H}_G(X) := \frac{1}{2} \operatorname{spur}(L \circ h^{-1}) = \frac{1}{2} L_{ij} h^{ji}. \quad (1.18)$$

Ihre Gaußsche Krümmung $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ ist definiert als

$$\mathcal{K}(X) := \det(L \circ h^{-1}). \quad (1.19)$$

Wir berechnen konkret

$$h^{-1} = \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} L \circ h^{-1} &= \begin{pmatrix} L_{11}h^{11} + L_{12}h^{21} & L_{11}h^{12} + L_{12}h^{22} \\ L_{21}h^{11} + L_{22}h^{21} & L_{21}h^{12} + L_{22}h^{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \begin{pmatrix} L_{11}h_{22} - L_{12}h_{12} & -L_{11}h_{12} + L_{12}h_{11} \\ L_{12}h_{22} - L_{22}h_{12} & -L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{H}_G = \frac{L_{11}h_{22} - 2L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11}}{2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)} = \frac{L_{11}h_{22} - 2L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11}}{2W^2}. \quad (1.20)$$

Für die Gaußsche Krümmung ergibt sich

$$\mathcal{K} = \det L \cdot \det h^{-1} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}. \quad (1.21)$$

Wegen Hilfssatz 1.1 hängt die Gaußsche Krümmung nicht von der Wahl der Gewichtsmatrix ab, sodass wir nicht zwischen gewichteter und nichtgewichteter Gaußscher Krümmung unterscheiden müssen. Im nichtgewichteten Fall $G(Z) \equiv \mathbb{E}^3$ stimmt die gewichtete mittlere Krümmung \mathcal{H}_G mit der gewöhnlichen mittleren Krümmung

$$\mathcal{H} := \frac{1}{2} \operatorname{spur}(L \circ g^{-1}) = \frac{L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12} + L_{22}g_{11}}{2W^2}$$

überein.

Definition 1.4 Sei $G(Z) \equiv \mathbb{E}^3$. Weiter bezeichnen wir mit $S^1(X(u, v))$ den Kreis um den Flächenpunkt $X(u, v)$ mit Radius 1 auf der Tangentialebene $\mathcal{T}_{X(u, v)}$, welche durch die Vektoren $X_u(u, v)$ und $X_v(u, v)$ aufgespannt wird. Dann nennen wir die Eigenvektoren $Z \in S^1(X(u, v))$ der nichtgewichteten Weingartenabbildung $\mathcal{W} := \mathcal{W}_{\mathbb{E}^3} = -\partial N^t \circ (\partial X^t)^{-1}$ Hauptkrümmungsrichtungen und die Eigenwerte κ_X Hauptkrümmungen der Fläche im betreffenden Flächenpunkt $X(u, v)$.

Für eine Darstellung $Z = aX_u + bX_v \in S^1(X)$ bedeutet dies, dass der Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ Eigenvektor und $\kappa = \kappa_X$ Eigenwert der Matrix $L \circ g^{-1}$ sind. Gemäß [K], Abschnitt 3.5, gibt es stets zwei zueinander orthogonale Hauptkrümmungsrichtungen Z_1 und Z_2 sowie zwei Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \operatorname{spur}(L \circ g^{-1}) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \\ \mathcal{K} &= \det(L \circ g^{-1}) = \kappa_1 \kappa_2 \end{aligned}$$

mit der (nichtgewichteten) mittleren Krümmung \mathcal{H} .

Die drei gewichteten Fundamentalformen sind voneinander linear abhängig. Wir wollen den linearen Zusammenhang im nachfolgendem Satz mit Hilfe der beiden Krümmungen \mathcal{H}_G und \mathcal{K} herleiten (vgl. [Fr], Abschnitt 1.6.1).

Satz 1.2 Die Immersion X sei gegeben. Dann gilt für beliebige Gewichtsmatrizen G ,

$$e - 2\mathcal{H}_G(X)L + \mathcal{K}(X)h = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.22)$$

mit den gewichteten Fundamentalformen h , L und e aus (1.13).

Beweis: Die gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29),

$$N_{u^i} = -L_{ij}h^{jk}X_{u^k} \circ G(N), \quad i = 1, 2,$$

die wir im Abschnitt 1.5 beweisen werden, liefern

$$\begin{aligned} e_{il} &= N_{u^i} \circ G(N)^{-1} \circ N_{u^l}^t \\ &= \{L_{ij}h^{jk}X_{u^k} \circ G(N)\} \circ G(N)^{-1} \circ \{L_{lm}h^{mn}X_{u^n} \circ G(N)\}^t \\ &= \{L_{ij}h^{jk}X_{u^k}\} \cdot \{L_{lm}h^{mn}X_{u^n} \circ G(N)\}^t \\ &= L_{ij}h^{jk}X_{u^k} \circ G(N) \circ X_{u^n}^t h^{nm}L_{ml} = L_{ij}h^{jk}h_{kn}h^{nm}L_{ml} \\ &= L_{ij}\delta_n^j h^{nm}L_{ml} = L_{ij}h^{jm}L_{ml}. \end{aligned}$$

Für $i = l = 1$ ergibt sich mit (1.20) und (1.21) zum Beispiel

$$\begin{aligned} e_{11} &= L_{11}h^{11}L_{11} + L_{12}h^{21}L_{11} + L_{11}h^{12}L_{21} + L_{12}h^{22}L_{21} \\ &= (L_{11}h^{11} + 2L_{12}h^{12} + L_{22}h^{22})L_{11} - (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)h^{22} \\ &= \frac{L_{11}h_{22} - 2L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}L_{11} - \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}h_{11} \\ &= 2\mathcal{H}_GL_{11} - \mathcal{K}h_{11}. \end{aligned}$$

Die anderen Koeffizienten folgen analog.

q.e.d.

1.4 Spezielle Parametersysteme

Wir wollen nun drei spezielle Parametrisierungen einer Fläche angeben. Zum einen werden wir die große Bedeutung von gewichtet konformen Parametern in dieser Arbeit erkennen, die nur in 2 Dimensionen Verwendung finden. Damit lassen sich später unsere Differentialgleichungssysteme für X und N in den zweiten Ableitungen in Diagonalförm überführen. Desweiteren lösen wir unser Dirichletproblem für Graphen, die wir hiermit einführen wollen. Am Ende erwähnen wir dann noch sogenannte Hauptkrümmungsparameter, die wir für die geometrische Interpretation von G -Minimalflächen benötigen.

Sei $B := B_1(0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe um den Nullpunkt. Mit Hilfe des Uniformisierungssatzes (siehe [S6], Kap. XII, §8) führen wir gewichtet konforme Parameter $(u, v) \in B$ durch die Eigenschaften

$$h_{11}(u, v) = W(u, v) = h_{22}(u, v), \quad h_{12}(u, v) = 0 \quad \text{in } B \quad (1.23)$$

ein mit den Koeffizienten $h_{ij} = h_{ij}(u, v)$ der gewichteten ersten Fundamentalform aus (1.13) und dem Oberflächenelement $W = W(u, v)$ aus (1.2). Dies sind die gewichteten Konformitätsrelationen. Äquivalent dazu sind die folgenden Bedingungen:

$$X_u \circ G(N) \circ X_u^t = W = X_v \circ G(N) \circ X_v^t, \quad X_u \circ G(N) \circ X_v^t = 0 \quad \text{in } B$$

oder

$$\begin{aligned} \left| X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right| &= \sqrt{W} = \left| X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right|, \\ \left(X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right)^t &= 0 \quad \text{in } B \end{aligned}$$

(siehe Beweis von Hilfssatz 3.1 in Abschnitt 3.2). In komplexer Form schreiben sich die gewichteten Konformitätsrelationen als

$$X_w \circ G(N) \circ X_w^t = 0, \quad w = u + iv \in B, \quad (1.24)$$

mit der Wirtingerableitung $X_w := \frac{1}{2}(X_u - iX_v)$. Denn es gilt

$$\begin{aligned} X_w \circ G(N) \circ X_w &= \frac{1}{4}(X_u - iX_v) \circ G(N) \circ (X_u - iX_v)^t \\ &= \frac{1}{4}\{X_u \circ G(N) \circ X_u^t - X_v \circ G(N) \circ X_v^t - 2i(X_u \circ G(N) \circ X_v^t)\}. \end{aligned}$$

Für die gewichtete Metrik

$$ds_G^2 = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$$

ergibt sich dann die isotherme Form

$$ds_G^2 = W(du^2 + dv^2).$$

Wegen (1.22) gibt es im Fall $\mathcal{H}_G \equiv 0$ dann auch gewisse Konformitätsrelationen für N , nämlich

$$\begin{aligned} N_u \circ G(N)^{-1} \circ N_u^t &= -\mathcal{K}W = N_v \circ G(N)^{-1} \circ N_v^t, \\ N_u \circ G(N)^{-1} \circ N_v^t &= 0 \quad \text{in } B. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu Flächengraphen. Zu einer Funktion $\zeta = \zeta(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ erklären wir durch

$$X = X(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x, y) := (x, y, \zeta(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.25)$$

die Koordinaten einer Fläche und nennen ζ die Höhenfunktion des Flächengraphen X über der (x, y) -Ebene. Dabei unterscheiden wir beim Definitionsgebiet Ω nicht zwischen der Flächendarstellung mittels Parameter (u, v) oder Euklidischer Koordinaten (x, y) . Für einen Graphen X berechnen wir

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, \zeta_x), \\ X_y &= (0, 1, \zeta_y), \\ X_x \wedge X_y &= (-\zeta_x, -\zeta_y, 1). \end{aligned}$$

Die unteren Indizes x und y bedeuten dabei die partiellen Ableitungen bezüglich x und y . Daraus ergibt sich die Normale

$$N(x, y) := \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.26)$$

Die dritte Komponente der Graphennormale genügt der Ungleichung

$$N(x, y) \cdot e_3^t > 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega$$

mit dem Einheitsvektor $e_3 := (0, 0, 1)$. Somit bildet die Normale in die obere Halbsphäre

$$S_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

ab. Wir erwähnen noch die gelegentliche Setzung $x^1 := x$ und $x^2 := y$.

Zum Schluß behandeln wir noch sogenannte Hauptkrümmungparameter. Eine differenzierbare Flächenkurve $c(t) = X(u(t), v(t))$ nennen wir Krümmungslinie, falls $c'(t) \neq 0$ gilt, und

$$\frac{c'(t)}{|c'(t)|}$$

Hauptkrümmungsrichtung ist (vgl. Definition 1.4 aus Abschnitt 1.3). Es existieren stets zwei linear unabhängige Hauptkrümmungsrichtungen. Gilt für die zugehörigen Hauptkrümmungen $\kappa_1(u, v) \neq \kappa_2(u, v)$ in einen Punkt $(u, v) \in \Omega$, so kann man gemäß [K], Hilfssatz 3.6.6, die Fläche in einer Umgebung von (u, v) derart parametrisieren, dass die Parameterlinien den Krümmungslinien entsprechen. Gilt dagegen $\kappa_1(u, v) = \kappa_2(u, v)$ in einem Punkt $(u, v) \in \Omega$, so kann jede Richtung als Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet werden, und wir wählen hier zwei zueinander orthogonale Richtungen aus. Gemäß [L], Ausführungen nach Satz 5.4, gilt nun zusammenfassend: Man kann die Fläche in einer Umgebung von (u, v) derart parametrisieren, dass die Parameterlinien die Krümmungslinien berühren. Dann gelten die Gleichungen

$$L_{11}(u, v) = \kappa_1(u, v)g_{11}(u, v), \quad L_{22}(u, v) = \kappa_2(u, v)g_{22}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega, \quad (1.27)$$

sowie

$$L_{12}(u, v) = 0, \quad g_{12}(u, v) = 0, \quad (u, v) \in \Omega. \quad (1.28)$$

1.5 Die gewichteten Ableitungsgleichungen

Um später elliptische Systeme für den Flächen- und Normalenvektor zu erhalten, brauchen wir die grundlegenden Ableitungsgleichungen der gewichteten Differentialgeometrie. Wir orientieren uns dabei an [Fr], Abschnitt 1.5. In Termen der Tangentialvektoren $X_u \circ G(N)$ und $X_v \circ G(N)$ wollen wir zunächst die Ableitungen N_{u^i} , $i = 1, 2$, der sphärischen Abbildung N darstellen.

Satz 1.3 *Die Immersion X sei gegeben. Dann gelten die gewichteten Weingartenschen Gleichungen*

$$N_{u^i} = -L_{ij}h^{jk}X_{u^k} \circ G(N), \quad i = 1, 2. \quad (1.29)$$

Beweis: Die Vektoren $X_u \circ G(N)$, $X_v \circ G(N)$ und N sind in jedem festen Punkt $(u, v) \in \Omega$ linear unabhängig und bilden somit eine Basis des Vektorraumes \mathbb{R}^3 . Wenn wir die

Identität $|N|^2 = \langle N, N \rangle = 1$ nach u^i differenzieren, erhalten wir zunächst $\langle N_{u^i}, N \rangle = 0$ für $i = 1, 2$. Wir machen nun zunächst den Ansatz

$$N_{u^i} = a_i^m X_{u^m} \circ G(N) + a_i^3 N, \quad i = 1, 2. \quad (1.30)$$

Skalare Multiplikation mit N^t liefert dann

$$0 = \langle N_{u^i}, N \rangle = a_i^m \langle X_{u^m} \circ G(N), N \rangle + a_i^3 \langle N, N \rangle = a_i^3, \quad i = 1, 2,$$

wenn wir noch $\langle X_{u^m} \circ G(N), N \rangle = \langle N \circ G(N), X_{u^m} \rangle = \langle N, X_{u^m} \rangle = 0$, $m = 1, 2$, mit Hilfe der Eigenschaft (G2) der Gewichtsmatrix beachten. Somit kann N_{u^i} in Termen der Tangentialvektoren $X_u \circ G(N)$ und $X_v \circ G(N)$ dargestellt werden. Um die Koeffizienten a_i^m , $i, m = 1, 2$, zu bestimmen, multiplizieren wir (1.30) skalar mit $X_{u^j}^t$, $j = 1, 2$, und erhalten

$$-L_{ij} = \langle N_{u^i}, X_{u^j} \rangle = a_i^m \langle X_{u^m} \circ G(N), X_{u^j} \rangle = a_i^m h_{mj}.$$

Es folgt somit

$$-L_{ij} h^{jk} = a_i^m h_{mj} h^{jk} = a_i^m \delta_m^k = a_i^k.$$

q.e.d.

Wir betrachten nun die zweiten Ableitungen $X_{u^i u^j}$ des Flächenvektors X , die wir später für die elliptischen Systeme benötigen werden. Dazu stellen wir die Ableitungsvektoren in Termen des begleitenden Dreibeins $\{X_u, X_v, N\}$ dar.

Satz 1.4 *Die Immersion X sei gegeben. Dann gelten die gewichteten Gaußschen Ableitungsgleichungen*

$$X_{u^i u^j} = (\Gamma_{ij}^k + \Omega_{ij}^k) X_{u^k} + L_{ij} N, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.31)$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} h^{kl} (h_{li,uj} + h_{jl,ui} - h_{ij,ul}), \quad h_{ij,ul} := \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l}, \quad (1.32)$$

sowie ihren gewichteten Korrekturtermen

$$\Omega_{ij}^k := -\frac{1}{2} h^{kl} (\omega_{lij} + \omega_{jli} - \omega_{ijl}), \quad \omega_{ijl} := X_{u^i} \circ G_{u^l}(N) \circ X_{u^j}^t, \quad G_{u^l}(N) := \frac{\partial G(N)}{\partial u^l}. \quad (1.33)$$

Beweis: Wir machen den Ansatz

$$X_{u^i u^j} = b_{ij}^k X_{u^k} + c_{ij} N, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.34)$$

und bestimmen die Koeffizienten b_{ij}^k und c_{ij} . Eine erste skalare Multiplikation mit N^t liefert

$$L_{ij} = \langle X_{u^i u^j}, N \rangle = b_{ij}^k \langle X_{u^k}, N \rangle + c_{ij} |N|^2 = c_{ij}.$$

Um die Koeffizienten b_{ij}^k zu erhalten, multiplizieren wir den Ansatz (1.34) skalar mit $G(N) \circ X_{u^l}^t$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle X_{u^i u^j} \circ G(N), X_{u^l} \rangle &= b_{ij}^k \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^l} \rangle + c_{ij} \langle N \circ G(N), X_{u^l} \rangle \\ &= b_{ij}^k h_{kl} =: b_{ilj}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Wegen $X_{u^i u^j} = X_{u^j u^i}$ beachten wir noch $b_{ilj} = b_{jli}$. Mit (1.33) gelten

$$\begin{aligned} b_{ilj} &= \langle X_{u^i} \circ G(N), X_{u^l} \rangle_{u^j} - \langle X_{u^i} \circ G_{u^j}(N), X_{u^l} \rangle - \langle X_{u^i} \circ G(N), X_{u^l u^j} \rangle \\ &= h_{il, u^j} - \omega_{ilj} - b_{lij} \end{aligned}$$

bzw.

$$h_{il, u^j} = b_{ilj} + b_{lij} + \omega_{ilj}.$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} h_{jl, u^i} + h_{li, u^j} - h_{ij, u^l} &= b_{jli} + b_{lji} + b_{lij} + b_{ilj} - b_{ijl} - b_{jil} + \omega_{jli} + \omega_{lij} - \omega_{ijl} \\ &= 2b_{ilj} + \omega_{jli} + \omega_{lij} - \omega_{ijl}. \end{aligned}$$

Mit (1.35) folgt

$$b_{ilj} = b_{ij}^k h_{kl} = \frac{1}{2}(h_{jl, u^i} + h_{li, u^j} - h_{ij, u^l}) - \frac{1}{2}(\omega_{jli} + \omega_{lij} - \omega_{ijl}),$$

woraus sich

$$b_{ij}^k = \frac{1}{2}h^{kl}(h_{jl, u^i} + h_{li, u^j} - h_{ij, u^l}) - \frac{1}{2}h^{kl}(\omega_{jli} + \omega_{lij} - \omega_{ijl}) = \Gamma_{ij}^k + \Omega_{ij}^k$$

ergibt.

q.e.d.

Bemerkung 1.2 1. Im nichtgewichteten Fall $G(Z) \equiv \mathbb{E}^3$ verschwinden alle Ω_{ij}^k , und wir erhalten die bekannten Gaußschen Ableitungsgleichungen

$$X_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k X_{u^k} + L_{ij} N, \quad i, j = 1, 2$$

(siehe z.B. [BL], §57).

2. Wir hätten auch den Ansatz

$$X_{u^i u^j} = a_{ij}^k X_{u^k} \circ G(N) + c_{ij} N, \quad i, j = 1, 2,$$

anstatt (1.34) machen können. Multiplikation mit X_{u^l} würde dann aber nicht die Ableitungen h_{il, u^j} liefern. Unsere Darstellung von oben wird sich jedoch als vorteilhaft in Bezug auf die elliptischen Systeme zeigen.

1.6 Die gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen

Für ein elliptisches System des Normalenvektors N in beliebigen Parametern in Abschnitt 3.4 benötigen wir noch die gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen, die zugleich Integrierbarkeitsbedingungen, also notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit der gewichteten Gleichungen von Weingarten und Gauß, sind (vgl. [Fr], Abschnitt 1.7.2).

Satz 1.5 Die Immersion X sei gegeben. Dann gelten die gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen

$$L_{11, v} + (\Gamma_{11}^m + \Omega_{11}^m)L_{m2} = L_{12, u} + (\Gamma_{12}^m + \Omega_{12}^m)L_{m1} \quad (1.36)$$

$$L_{21, v} + (\Gamma_{21}^m + \Omega_{21}^m)L_{m2} = L_{22, u} + (\Gamma_{22}^m + \Omega_{22}^m)L_{m1} \quad (1.37)$$

Beweis: Aus den gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29) und den gewichteten Gaußschen Ableitungsgleichungen (1.31) erhalten wir

$$\begin{aligned}
X_{u^i u^j u^k} &= (\Gamma_{ij}^l + \Omega_{ij}^l)_{u^k} X_{u^l} + (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) X_{u^m u^k} + L_{ij, u^k} N + L_{ij} N_{u^k} \\
&= (\Gamma_{ij, u^k}^l + \Omega_{ij, u^k}^l + (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m)(\Gamma_{mk}^l + \Omega_{mk}^l) - L_{ij} L_{km} h^{mn} \nu_n^l) X_{u^l} \\
&\quad + (L_{ij, u^k} + (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{mk}) N,
\end{aligned} \tag{1.38}$$

mit Funktionen ν_n^l , die

$$X_{u^n} \circ G(N) = \nu_n^l X_{u^l}$$

erfüllen. Wegen $X \in C^{3+\alpha}$ ist

$$X_{u^i u^v} - X_{u^i v u} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \tag{1.39}$$

richtig. Da $\{X_u, X_v, N\}$ ein linear unabhängiges System bilden, folgt mit (1.39), dass die Normalenkomponenten von $X_{u^i u^v}$ und $X_{u^i v u}$ gleich sein müssen. Für $i = 1$ erhalten wir (1.36) und für $i = 2$ die Identität (1.37). q.e.d.

Kapitel 2

G -Minimalflächen und ihre Interpretation

Wir möchten in diesem Kapitel nun G -Minimalflächen in Anlehnung an [S3] und [Fr] definieren und eine geometrische Interpretation in Bezug auf Minimalflächen liefern. Dabei gehen wir am Ende auch auf unterschiedliche Definitionen in der Literatur ein. Desweiteren werden wir erkennen, dass G -Minimalflächen als spezielle quasilineare, elliptische Differentialgleichungen (Abschnitt 2.2) sowie als kritische Punkte bestimmter Funktionale bei Variationsproblemen (Abschnitt 2.3) auftauchen. Schließlich wollen wir in Abschnitt 2.4 für unsere quasilineare, elliptische und homogene Differentialgleichung eine Divergenzdarstellung nach Bers notieren, die den Voraussetzungen der Oberflächeninhaltsabschätzung in Kapitel 5 genügt.

2.1 Definition G -Minimalflächen und Deutung

Wir führen zunächst den parameterinvarianten Beltrami-Operator erster Art nach [BL], §88, ein. Auf der Fläche $X = X(u^1, u^2)$ seien die stetig differenzierbaren Funktionen $\Psi = \Psi(u^1, u^2)$ und $\Phi = \Phi(u^1, u^2)$ gegeben. Dann definieren wir

$$\nabla_{ds_G^2}(\Psi, \Phi) := h^{ij} \Psi_{u^i} \Phi_{u^j}$$

bezüglich der gewichteten Metrik

$$ds_G^2 = h_{ij} du^i du^j, \quad h_{ij} = X_{u^i} \circ G(N) \circ X_{u^j}^t,$$

mit einer Gewichtsmatrix $G = G(Z)$.

Definition 2.1 *Wir nennen die Immersion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ eine G -Minimalfläche, wenn X die parameterinvariante Differentialgleichung*

$$0 = \nabla_{ds_G^2}(X, N) = h^{ij} X_{u^i} \cdot N_{u^j}^t = -L_{ij} h^{ji} \quad (2.1)$$

mit dem Beltrami-Operator erster Art $\nabla_{ds_G^2}(\cdot, \cdot)$ erfüllt.

Wir wollen diese Definition geometrisch interpretieren, indem wir die Differentialgleichung (2.1) in die Krümmungsgleichung

$$\rho_1(u, v)\kappa_1(u, v) + \rho_2(u, v)\kappa_2(u, v) = 0$$

mit gewissen Gewichten $\rho_1 = \rho_1(u, v), \rho_2 = \rho_2(u, v) > 0$ und den Hauptkrümmungen $\kappa_1 = \kappa_1(u, v)$ und $\kappa_2 = \kappa_2(u, v)$ der Fläche X im betreffenden Flächenpunkt umwandeln (vgl. [S3], Bemerkung nach Definition 2).

Satz 2.1 *Sei X eine G -Minimalfläche, die die Differentialgleichung $0 = \nabla_{ds_G^2}(X, N)$ bezüglich einer Gewichtsmatrix $G = G(Z)$ erfüllt. Die Vektoren $Z_1(u, v)$ und $Z_2(u, v)$ seien die zwei Hauptkrümmungsrichtungen im betreffenden Flächenpunkt $X(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$. Wir definieren die positiven Gewichte*

$$\begin{aligned} \rho_1(u, v) &:= Z_1(u, v) \circ G(N) \circ Z_1(u, v)^t > 0, \\ \rho_2(u, v) &:= Z_2(u, v) \circ G(N) \circ Z_2(u, v)^t > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

unter Verwendung von Hauptkrümmungsparametern in diesem Punkt. Dann gilt

$$\rho_1(u, v)\kappa_1(u, v) + \rho_2(u, v)\kappa_2(u, v) = 0 \quad \text{für alle } (u, v) \in \Omega. \quad (2.3)$$

Beweis: Wir führen in die Fläche Hauptkrümmungsparameter gemäß Abschnitt 1.4 ein. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_{11}(u, v) &= \kappa_1(u, v)g_{11}(u, v), & L_{22}(u, v) &= \kappa_2(u, v)g_{22}(u, v), \\ g_{12}(u, v) &\equiv 0 \equiv L_{12}(u, v), & (u, v) &\in \Omega. \end{aligned}$$

Wir formen nun (2.1) wie folgt um

$$\begin{aligned} 0 &= L_{11}h^{11} + 2L_{12}h^{12} + L_{22}h^{22} = \kappa_1g_{11}\frac{h_{22}}{W^2} + \kappa_2g_{22}\frac{h_{11}}{W^2} \\ &= \kappa_1|X_u|^2\frac{X_v \circ G(N) \circ X_v^t}{W^2} + \kappa_2|X_v|^2\frac{X_u \circ G(N) \circ X_u^t}{W^2} \\ &= \kappa_1\left(\frac{|X_u|}{W}X_v\right) \circ G(N) \circ \left(\frac{|X_u|}{W}X_v^t\right) + \kappa_2\left(\frac{|X_v|}{W}X_u\right) \circ G(N) \circ \left(\frac{|X_v|}{W}X_u^t\right) \end{aligned}$$

mit dem Oberflächenelement $W = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = |X_u||X_v|$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (|X_v|^{-1}X_v) \circ G(N) \circ (|X_v|^{-1}X_v^t)\kappa_1 + (|X_u|^{-1}X_u) \circ G(N) \circ (|X_u|^{-1}X_u^t)\kappa_2 \\ &= (Z_1 \circ G(N) \circ Z_1^t)\kappa_1 + (Z_2 \circ G(N) \circ Z_2^t)\kappa_2 \\ &=: \rho_1\kappa_1 + \rho_2\kappa_2 \end{aligned}$$

mit den orthonormalen Hauptkrümmungsrichtungen

$$Z_1 := \frac{1}{|X_v|}X_v \quad Z_2 := \frac{1}{|X_u|}X_u$$

und den Gewichten aus (2.2). q.e.d.

Für die Gewichte haben wir nach Eigenschaft (G3) aus Abschnitt 1.2 die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + g_0} \leq \rho_i \leq 1 + g_0, \quad i = 1, 2.$$

Im nichtgewichteten Fall $G(Z) \equiv \mathbb{E}^3$ gelten

$$\rho_1 \equiv 1, \quad \rho_2 \equiv 1$$

und damit die wohlbekanntete Krümmungsgleichung für Minimalflächen

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 0.$$

Die Klasse der G -Minimalflächen bildet also in natürlicher Weise eine Erweiterung der Klasse der Minimalflächen. Dabei verschwindet nicht die gewöhnliche mittlere Krümmung $\mathcal{H} = \kappa_1 + \kappa_2$, sondern die Hauptkrümmungen werden noch mit Gewichten belegt. Der Begriff G -Minimalfläche wird zudem sinnvoll, wenn wir noch

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2} \operatorname{spur}(L \circ h^{-1}) = \frac{1}{2} L_{ij} h^{ji} = -\frac{1}{2} \nabla_{ds_G^2}(X, N) = 0$$

beachten und somit die gewichtete mittlere Krümmung Null ist. Desweiteren stellen wir mit

$$\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \kappa_1^2 \leq 0 \tag{2.4}$$

fest, dass G -Minimalflächen eine nichtpositive Gaußsche Krümmung in Ω besitzen.

2.2 G -minimale Graphen als quasilineare, elliptische Differentialgleichungen

Wir wollen zunächst eine Differentialgleichung für G -minimale Graphen herleiten und anschließend einen Zusammenhang mit quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen liefern.

Sei der G -minimale Graph $X = (x, y, \zeta(x, y))$, $(x, y) \in \Omega$, mit dem Oberflächenelement $W = \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}$ und der Normalen $N = \frac{1}{W}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)$ gegeben. Dabei sei $G = G(Z) = (G_{ij}(Z))_{i,j=1,2,3}$ eine Gewichtsmatrix mit den Eigenschaften (G1) bis (G4) aus Abschnitt 1.2, für die

$$G_{ij} = G_{ij}(N) = G_{ij} \left(\frac{(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)}{W} \right) = G_{ij}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) =: \tilde{G}_{ij}(\zeta_x, \zeta_y), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

gilt. Mit $h_{ij} := X_{x^i} \circ G(N) \circ X_{x^j}^t$ gilt dann

$$\begin{aligned} h_{11} &= X_x \circ G(N) \circ X_x^t = (1, 0, \zeta_x) \circ G(N) \circ (1, 0, \zeta_x)^t \\ &= G_{11}(N) + 2\zeta_x G_{13}(N) + \zeta_x^2 G_{33}(N), \\ h_{12} = h_{21} &= X_x \circ G(N) \circ X_y^t = (1, 0, \zeta_x) \circ G(N) \circ (0, 1, \zeta_y)^t \\ &= G_{12}(N) + \zeta_x G_{23}(N) + \zeta_y G_{13}(N) + \zeta_x \zeta_y G_{33}(N), \\ h_{22} &= X_y \circ G(N) \circ X_y^t = (0, 1, \zeta_y) \circ G(N) \circ (0, 1, \zeta_y)^t \\ &= G_{22}(N) + 2\zeta_y G_{23}(N) + \zeta_y^2 G_{33}(N), \end{aligned}$$

sowie $h^{-1} = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix}$ für die inverse Matrix. Die Koeffizienten der zweiten gewichteten Fundamentalform $L_{ij} = X_{x^i x^j} \cdot N^t$ berechnen sich zu

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{W} (0, 0, \zeta_{xx}) \cdot (-\zeta_x, -\zeta_y, 1)^t = \frac{\zeta_{xx}}{W} \\ L_{12} = L_{21} &= \frac{1}{W} (0, 0, \zeta_{xy}) \cdot (-\zeta_x, -\zeta_y, 1)^t = \frac{\zeta_{xy}}{W} \\ L_{22} &= \frac{1}{W} (0, 0, \zeta_{yy}) \cdot (-\zeta_x, -\zeta_y, 1)^t = \frac{\zeta_{yy}}{W}. \end{aligned}$$

Wir können nun die quasilineare Differentialgleichung mit (2.1) berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{ds_G^2}(X, N) = -(L_{11}h^{11} + 2L_{12}h^{21} + L_{22}h^{22}) \\ &= -\frac{1}{W^2}(L_{11}h_{22} - 2L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11}) \\ &= -\frac{1}{W^3} \{ (G_{22}(N) + 2\zeta_y G_{23}(N) + \zeta_y^2 G_{33}(N))\zeta_{xx} \\ &\quad - 2(G_{12}(N) + \zeta_x G_{23}(N) + \zeta_y G_{13}(N) + \zeta_x \zeta_y G_{33}(N))\zeta_{xy} \\ &\quad + (G_{11}(N) + 2\zeta_x G_{13}(N) + \zeta_x^2 G_{33}(N))\zeta_{yy} \} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= (G_{22}(N) + 2\zeta_y G_{23}(N) + \zeta_y^2 G_{33}(N))\zeta_{xx} \\ &\quad - 2(G_{12}(N) + \zeta_x G_{23}(N) + \zeta_y G_{13}(N) + \zeta_x \zeta_y G_{33}(N))\zeta_{xy} \\ &\quad + (G_{11}(N) + 2\zeta_x G_{13}(N) + \zeta_x^2 G_{33}(N))\zeta_{yy}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wollen wir die Koeffizienten nur in Abhängigkeit von ζ_x und ζ_y , so benutzen wir die Darstellung der Differentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{G}_{22}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_y \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y))\zeta_{xx} \\ &\quad - 2(\tilde{G}_{12}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \zeta_y \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y))\zeta_{xy} \\ &\quad + (\tilde{G}_{11}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_x \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y))\zeta_{yy}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Satz 2.2 Die Höhenfunktion $\zeta = \zeta(x, y)$ von G -minimalen Graphen $X = X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ genügt der homogenen, quasilinearen und elliptischen Differentialgleichung

$$a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.7)$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned} a(\zeta_x, \zeta_y) &:= \tilde{G}_{22}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_y \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y) \\ b(\zeta_x, \zeta_y) &:= - \left[\tilde{G}_{12}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \zeta_y \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y) \right] \\ c(\zeta_x, \zeta_y) &:= \tilde{G}_{11}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_x \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

bezüglich der vorgelegten Gewichtsmatrix G aus Abschnitt 1.2. Die Koeffizienten erfüllen weiterhin $a(\zeta_x, \zeta_y)c(\zeta_x, \zeta_y) - b(\zeta_x, \zeta_y)^2 = 1 + |\nabla\zeta|^2 = W^2$ und sind $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ -Funktionen bezüglich der p, q -Variablen.

Beweis: Die Differentialgleichung (2.7) haben wir bereits bewiesen. Wegen $ac - b^2 = h_{22}h_{11} - h_{12}^2 = W^2$ haben wir die Normierung der Koeffizienten. Die Regularität folgt aus der Regularität der Gewichtsmatrix G . Wir zeigen nun noch die folgende Elliptizitätsbedingung

$$0 < \frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} a(p,q) & b(p,q) \\ b(p,q) & c(p,q) \end{pmatrix} \circ \xi^t \leq (1+g_0)(1+p^2+q^2)|\xi|^2$$

für alle $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$ und für alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Zunächst gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix} = W^2 \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}^{-1} = W^2(\partial X \circ G(N) \circ \partial X^t)^{-1}.$$

Wegen Eigenschaft (G3) gilt mit $\eta := \xi \circ \partial X$,

$$\frac{1}{1+g_0}|\eta|^2 \leq \eta \circ G(N) \circ \eta^t = \xi \circ \partial X \circ G(N) \circ \partial X^t \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\eta|^2.$$

Für Graphen berechnen wir konkret

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &= |\xi \circ \partial X|^2 = |(\xi^1, \xi^2, \xi^1\zeta_x + \xi^2\zeta_y)|^2 = (1+\zeta_x^2)(\xi^1)^2 + (1+\zeta_y^2)(\xi^2)^2 + 2\zeta_x\zeta_y\xi^1\xi^2 \\ &= \xi \circ \begin{pmatrix} 1+\zeta_x^2 & \zeta_x\zeta_y \\ \zeta_x\zeta_y & 1+\zeta_y^2 \end{pmatrix} \circ \xi^t \end{aligned}$$

und erhalten für die quadratische Form auf der rechten Seite den kleinsten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den größten Eigenwert $\lambda_2 = 1 + |\nabla\zeta|^2 = W^2$, so dass

$$|\xi|^2 \leq |\eta|^2 \leq W^2|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Somit folgt

$$\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ (\partial X \circ G(N) \circ \partial X^t) \circ \xi^t \leq (1+g_0)W^2|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2$$

bzw. für die Inverse

$$\frac{1}{(1+g_0)W^2}|\xi|^2 \leq \xi \circ (\partial X \circ G(N) \circ \partial X^t)^{-1} \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Schließlich gilt

$$\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} a(p,q) & b(p,q) \\ b(p,q) & c(p,q) \end{pmatrix} \circ \xi^t \leq (1+g_0)W^2|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ und für alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ mit $W^2 = 1 + p^2 + q^2$.

q.e.d.

Bemerkung 2.1 *Wir bemerken noch, dass die Koeffizienten a , b und c nur von den Einträgen \tilde{G}_{11} , \tilde{G}_{12} und \tilde{G}_{22} der Gewichtsmatrix G abhängen. Es gilt insbesondere für Graphen*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{13} &= \zeta_x(\tilde{G}_{11} - 1) + \zeta_y\tilde{G}_{12}, \\ \tilde{G}_{23} &= \zeta_x\tilde{G}_{12} + \zeta_y(\tilde{G}_{22} - 1), \\ \tilde{G}_{33} &= 1 + (\zeta_x, \zeta_y) \circ \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} - 1 & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} - 1 \end{pmatrix} \circ (\zeta_x, \zeta_y)^t. \end{aligned}$$

Wegen (1.8) und (1.9) aus Abschnitt 1.2 haben wir nämlich

$$\begin{aligned}
(\tilde{G}_{13}, \tilde{G}_{23}) &= (-\zeta_x, -\zeta_y) \circ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} \end{pmatrix} \right] \\
&= (\zeta_x(\tilde{G}_{11} - 1) + \zeta_y \tilde{G}_{12}, \zeta_x \tilde{G}_{12} + \zeta_y(\tilde{G}_{22} - 1)), \\
\tilde{G}_{33} &= 1 - (-\zeta_x, -\zeta_y) \circ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} \end{pmatrix} \right] \circ (-\zeta_x, -\zeta_y)^t \\
&= 1 + (\zeta_x, \zeta_y) \circ \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} - 1 & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} - 1 \end{pmatrix} \circ (\zeta_x, \zeta_y)^t.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun umgekehrt auf dem beschränkten und einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Lösung $\zeta \in C^{3+\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$, der quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung

$$a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.9)$$

mit den Koeffizientenfunktionen $a, b, c \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$, wobei wir ohne Einschränkung

$$ac - b^2 = 1 + |\nabla\zeta|^2 = W^2 \quad (2.10)$$

voraussetzen. Dies bedeutet eine Normierung der Koeffizienten. Die Lösung $\zeta = \zeta(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, lässt sich als Graph $X = X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ über dem Gebiet Ω mit dem Normalenvektor

$$N = \frac{1}{W}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)$$

veranschaulichen. Wir konstruieren nun eine Gewichtsmatrix G , welche die Lösungen der Differentialgleichung (2.9) als G -minimale Graphen erkennen lässt. Die Ideen stammen aus [S3].

Wir setzen

$$M = M(x, y) := \left(\begin{pmatrix} 1 + \zeta_x^2 & \zeta_x \zeta_y \\ \zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \circ \partial X \right) \begin{matrix} \\ \\ N(x, y) \end{matrix} \quad (2.11)$$

sowie

$$D = D(x, y) := \begin{pmatrix} c & -b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

und definieren die Gewichtsmatrix

$$G(N) := M(x, y)^t \circ D(x, y) \circ M(x, y). \quad (2.13)$$

Dabei erhalten wir die Abhängigkeit der Gewichtsmatrix von N aus der Matrix M . Wir wollen die Eigenschaften einer Gewichtsmatrix verifizieren:

(G1) Wir setzen die Gewichtsmatrix entlang Strahlen $\{\lambda N\}$ konstant fort, so dass gilt

$$G(\lambda N) = G(N) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, +\infty).$$

(G2) Wir zeigen $N \circ G(N) = N$. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 + \zeta_x^2 & \zeta_x \zeta_y \\ \zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \circ \partial X &= \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1 + \zeta_y^2 & -\zeta_x \zeta_y \\ -\zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_x^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_x \\ 0 & 1 & \zeta_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1 + \zeta_y^2 & -\zeta_x \zeta_y & \zeta_x \\ -\zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_x^2 & \zeta_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass

$$M = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1 + \zeta_y^2 & -\zeta_x \zeta_y & \zeta_x \\ -\zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_x^2 & \zeta_y \\ -W\zeta_x & -W\zeta_y & W \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

gilt. Somit gelangen wir zu

$$\frac{1}{W}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \circ M^t = \frac{1}{W^3}(0, 0, W^3) = (0, 0, 1).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} N \circ G(N) &= \frac{1}{W}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \circ M^t \circ D \circ M \\ &= (0, 0, 1) \circ M = N. \end{aligned}$$

(G3) Wir wollen die Elliptizität $\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ G(N) \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\xi|^2$ zeigen. Dazu beweisen wir zunächst folgende Identität

$$\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \partial X \circ G(N) \circ \partial X^t = h. \quad (2.15)$$

Es gilt mit (2.14)

$$\begin{aligned} M \circ \partial X^t &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} 1 + \zeta_y^2 & -\zeta_x \zeta_y & \zeta_x \\ -\zeta_x \zeta_y & 1 + \zeta_x^2 & \zeta_y \\ -W\zeta_x & -W\zeta_y & W \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \zeta_x & \zeta_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} W^2 & 0 \\ 0 & W^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \partial X \circ G(N) \circ \partial X^t &= (M \circ \partial X^t)^t \circ D \circ M \circ \partial X^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c & -b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & -b & 0 \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt. Mit der Bedingung

$$\frac{1}{1+g_0} \leq \frac{\xi \circ \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \circ \xi^t}{\xi \circ \begin{pmatrix} 1+\zeta_x^2 & \zeta_x \zeta_y \\ \zeta_x \zeta_y & 1+\zeta_y^2 \end{pmatrix} \circ \xi^t} \leq 1+g_0 \quad \text{für alle } \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
(2.16)

lässt sich dann (G3) wie folgt beweisen: Zunächst gilt wegen (2.15)

$$\xi \circ \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \circ \xi^t = \xi \circ \partial X \circ G(N) \circ \partial X^t \circ \xi^t =: \eta \circ G(N) \circ \eta^t$$

mit $\eta := \xi \circ \partial X$, woraus wir wie im Beweis von Satz 2.2

$$|\eta|^2 = \xi \circ \begin{pmatrix} 1+\zeta_x^2 & \zeta_x \zeta_y \\ \zeta_x \zeta_y & 1+\zeta_y^2 \end{pmatrix} \circ \xi^t$$

berechnen. Somit gilt

$$\frac{1}{1+g_0} |\eta|^2 \leq \eta \circ G(N) \circ \eta^t \leq (1+g_0) |\eta|^2.$$

Eigenschaft (2.16) muss für die konkrete Differentialgleichung nachgerechnet werden. Quasilineare, elliptische Differentialgleichungen, die diese nicht erfüllen, sind nicht vom sogenannten Minimalflächentyp.

(G4) Wir zeigen nun noch $\det G(N) = 1$. Mit (2.14) haben wir bereits

$$M = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1+\zeta_y^2 & -\zeta_x \zeta_y & \zeta_x \\ -\zeta_x \zeta_y & 1+\zeta_x^2 & \zeta_y \\ -W\zeta_x & -W\zeta_y & W \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \det M &= \frac{1}{W^6} (W(1+\zeta_y^2)(1+\zeta_x^2) + W\zeta_x^2\zeta_y^2 + W\zeta_x^2\zeta_y^2 + W\zeta_x^2(1+\zeta_x^2) \\ &\quad + W\zeta_y^2(1+\zeta_y^2) - W\zeta_x^2\zeta_y^2) \\ &= \frac{1}{W^5} (1 + 2\zeta_x^2 + 2\zeta_y^2 + 2\zeta_x^2\zeta_y^2 + \zeta_x^4 + \zeta_y^4) \\ &= \frac{1}{W^5} (1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^2 = \frac{1}{W}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\det G(N) = \det M \cdot \det D \cdot \det M = \frac{ac - b^2}{W^2} = 1.$$

Satz 2.3 Die Lösung $\zeta = \zeta(x, y) \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ der quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung

$$a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit den Koeffizientenfunktionen $a, b, c \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$, die gemäß $ac - b^2 = 1 + |\nabla \zeta|^2 = W^2$ normiert seien, ist die Höhenfunktion eines G-minimalen Graphen $X = X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ mit G aus (2.13), insofern (2.16) erfüllt ist.

Beweis: Die Eigenschaften der Gewichtsmatrix G aus (2.13) haben wir bereits bewiesen. Es verbleibt zu zeigen, dass X ein G -minimaler Graph ist. Wegen (2.15) gilt

$$h^{-1} = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

und weiterhin

$$\zeta_{x^i x^j} = W X_{x^i x^j} \cdot N^t = W L_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

so dass wir schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= a\zeta_{xx} + 2b\zeta_{xy} + c\zeta_{yy} = W^3(L_{11}h^{11} + 2L_{12}h^{21} + L_{22}h^{22}) = W^3 \operatorname{spur}(L \circ h^{-1}) \\ &= -W^3 \nabla_{ds_G^2}(X, N) \end{aligned}$$

haben.

q.e.d.

Bemerkung 2.2 Den Minimalflächenfall erhalten wir für

$$a(\zeta_x, \zeta_y) = 1 + \zeta_y^2, \quad b(\zeta_x, \zeta_y) = -\zeta_x \zeta_y, \quad c(\zeta_x, \zeta_y) = 1 + \zeta_x^2.$$

Wir rechnen dann leicht nach, dass die Gewichtsmatrix aus (2.13) die Einheitsmatrix \mathbb{E}^3 ist.

2.3 G -Minimalflächen aus Variationsproblemen

Wir wollen in diesem Abschnitt als Beispiel spezielle parametrische und nichtparametrische Funktionale betrachten, wobei die kritischen Punkte G -Minimalflächen sind. Dazu behandeln wir die ortsunabhängigen, parametrischen Funktionale

$$\mathcal{F}[X] := \iint_{\Omega} F(X_u \wedge X_v) dudv \quad (2.17)$$

mit der nur von $Z = (z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{R}^3$ abhängigen Dichtefunktion

$$F = F(Z) \in C^{4+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \quad \alpha \in (0, 1),$$

die der Homogenitätsbedingung

$$F(\lambda Z) = \lambda F(Z) \quad \text{für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \text{ für alle } \lambda \in (0, +\infty), \quad (2.18)$$

genügen. Diese sichert uns die Parameterinvarianz des Funktionals. Betrachten wir nämlich eine positiv orientierte Transformation $\tilde{u} = \tilde{u}(u, v)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, so berechnen wir mit Hilfe der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} F(X_u \wedge X_v) dudv &= \iint_{\Omega} F((\tilde{u}_u \tilde{v}_v - \tilde{u}_v \tilde{v}_u) X_{\tilde{u}} \wedge X_{\tilde{v}}) dudv \\ &= \iint_{\Omega} F(X_{\tilde{u}} \wedge X_{\tilde{v}}) (\tilde{u}_u \tilde{v}_v - \tilde{u}_v \tilde{v}_u) dudv \\ &= \iint_{\tilde{\Omega}} F(X_{\tilde{u}} \wedge X_{\tilde{v}}) d\tilde{u} d\tilde{v}. \end{aligned}$$

Wir wollen nachstehend die folgenden Definitionen für die Ableitungen benutzen:

$$\begin{aligned} F_Z(Z) &:= (F_{z^1}(Z), F_{z^2}(Z), F_{z^3}(Z)), \\ F_{ZZ}(Z) &:= (F_{z^\mu z^\nu}(Z))_{\mu, \nu=1,2,3}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mit Hilfe der Homogenitätsbedingung beweisen wir dann folgenden

Hilfssatz 2.1 *Der Vektor $F_Z(Z)$ ist positiv homogen vom Grad 0 in Z , d.h.*

$$F_Z(\lambda Z) = F_Z(Z) \quad \text{für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \text{ für alle } \lambda \in (0, +\infty). \quad (2.20)$$

Die Matrix $F_{ZZ}(Z)$ ist positiv homogen vom Grad -1 in Z , d.h.

$$F_{ZZ}(\lambda Z) = \frac{1}{\lambda} F_{ZZ}(Z) \quad \text{für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \text{ für alle } \lambda \in (0, +\infty). \quad (2.21)$$

Ferner gelten die Eulerschen Homogenitätsrelationen

$$Z \cdot F_Z(Z)^t = F(Z), \quad (2.22)$$

$$Z \circ F_{ZZ}(Z) = 0, \quad (2.23)$$

für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Beweis: Wenn wir die Homogenitätsbedingung (2.18) nach den Komponenten z^μ für $\mu = 1, 2, 3$ ableiten, erhalten wir

$$\lambda F_{z^\mu}(\lambda Z) = \lambda F_{z^\mu}(Z), \quad \mu = 1, 2, 3,$$

also (2.20). Nochmaliges Ableiten nach z^ν , $\nu = 1, 2, 3$ führt zu

$$\lambda^2 F_{z^\mu z^\nu}(\lambda Z) = \lambda F_{z^\mu z^\nu}(Z), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3,$$

also (2.21). Differenzieren wir die Homogenitätsbedingung (2.18) nach λ , so erhalten wir

$$F_Z(\lambda Z) \cdot Z^t = F(Z),$$

und (2.22) folgt mit $\lambda = 1$. Leiten wir (2.20) nach λ ab, so ergibt sich

$$F_{ZZ}(\lambda Z) \circ Z^t = 0$$

und mit $\lambda = 1$ die Relation (2.23). q.e.d.

Mit folgender Elliptizitätsbedingung an $F_{ZZ}(Z)$ werden wir später u.a. die Elliptizitätskonstante $g_0 \geq 0$ der Gewichtsmatrix $G(Z)$ aus Abschnitt 1.2 realisieren, insofern die Immersion X aus einem Variationsproblem stammt: Mit zwei reellen Konstanten $M_1, M_2 \in (0, +\infty)$ gelte

$$M_1 |\xi|^2 \leq \xi \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi^t \leq M_2 |\xi|^2 \quad (2.24)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ und $Z \in S^2 := \{Y \in \mathbb{R}^3 : |Y| = 1\}$, so dass $\langle Z, \xi \rangle = 0$ gilt. Beide Eigenwerte $\lambda_i = \lambda_i(Z)$, $i = 1, 2$, der eingeschränkten symmetrischen Abbildung

$$F_{ZZ}(Z)|_{\mathcal{T}_Z} : \mathcal{T}_Z \rightarrow \mathcal{T}_Z, \quad \mathcal{T}_Z := \{Y \in \mathbb{R}^3 : \langle Y, Z \rangle = 0\},$$

sind also positiv, und es gilt

$$0 < M_1^2 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det F_{ZZ}(Z)|_{\mathcal{T}_Z} \leq M_2^2. \quad (2.25)$$

Wir betrachten nun die erste Variation $\delta\mathcal{F}[X]$ und berechnen die Euler-Lagrange-Gleichung für kritische Punkte des parametrischen Funktionals $\mathcal{F}[X]$ aus (2.17).

Satz 2.4 *Sei X kritisch für $\mathcal{F}[X]$ aus (2.17), d.h. es sei $\delta\mathcal{F}[X] = 0$ erfüllt. Dann gilt*

$$[N_u \circ F_{ZZ}(N), N, X_v] + [N_v \circ F_{ZZ}(N), X_u, N] = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.26)$$

Hierbei benutzen wir das Spatprodukt

$$[X, Y, Z] := X \cdot (Y \wedge Z)^t$$

für Vektoren $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$.

Beweis: Wir betrachten eine Normalenvariation der Fläche X , nämlich

$$\tilde{X}(u, v; \epsilon) := X(u, v) + \epsilon\varphi(u, v)N(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und $\epsilon \in (-\epsilon_0, +\epsilon_0)$, $\epsilon_0 > 0$. Nach [C], S. 317, genügt es, nur eine Normalenvariation zu betrachten, da die erste Variation unabhängig von tangentialen Variationen ist. Wir entwickeln in erster Ordnung

$$\begin{aligned} \tilde{X}_u &= X_u + \epsilon\varphi N_u + \epsilon\varphi_u N \\ \tilde{X}_v &= X_v + \epsilon\varphi N_v + \epsilon\varphi_v N \\ \tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v &= X_u \wedge X_v + \epsilon(X_u \wedge N_v + N_u \wedge X_v)\varphi \\ &\quad + \epsilon(X_u \wedge N\varphi_v + N \wedge X_v\varphi_u) + o(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mit dem Landau-Symbol $o(\epsilon)$, definiert durch

$$f(\epsilon) = o(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{\epsilon} = 0,$$

und berechnen damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{F}[\tilde{X}] &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \iint_{\Omega} F(\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v) dudv \\ &= \iint_{\Omega} F_Z(\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v)^t dudv. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die erste Variation ist die Ableitung

$$\delta\mathcal{F}[X] := \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{F}[\tilde{X}] \right|_{\epsilon=0}.$$

Dann haben wir unter Beachtung von (2.20) zunächst

$$\begin{aligned}
0 = \delta\mathcal{F}[X] &= \iint_{\Omega} F_Z(X_u \wedge X_v) \cdot (X_u \wedge N_v + N_u \wedge X_v)^t \varphi \, dudv \\
&\quad + \iint_{\Omega} F_Z(X_u \wedge X_v) \cdot (X_u \wedge N \varphi_v + N \wedge X_v \varphi_u)^t \, dudv \\
&= \iint_{\Omega} \{F_Z(N) \cdot (X_u \wedge N_v)^t + F_Z(N) \cdot (N_u \wedge X_v)^t\} \varphi \, dudv \\
&\quad + \iint_{\Omega} \{F_Z(N) \cdot (X_u \wedge N)^t \varphi_v + F_Z(N) \cdot (N \wedge X_v)^t \varphi_u\} \, dudv \\
&= \iint_{\Omega} \{[F_Z(N), X_u, N_v] + [F_Z(N), N_u, X_v]\} \varphi \, dudv \\
&\quad + \iint_{\Omega} \{[F_Z(N), X_u, N] \varphi_v + [F_Z(N), N, X_v] \varphi_u\} \, dudv \\
&= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \{[F_Z(N), N, X_v] \varphi, [F_Z(N), X_u, N] \varphi\} \, dudv \\
&\quad - \iint_{\Omega} \{[(F_Z(N))_u, N, X_v] + [(F_Z(N))_v, X_u, N]\} \varphi \, dudv \\
&\quad - \iint_{\Omega} \underbrace{\{[F_Z(N), N, X_{vu}] + [F_Z(N), X_{uv}, N]\}}_{=0} \varphi \, dudv \\
&= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \{[F_Z(N), N, X_v] \varphi, [F_Z(N), X_u, N] \varphi\} \, dudv \\
&\quad - \iint_{\Omega} \{[N_u \circ F_{ZZ}(N), N, X_v] + [N_v \circ F_{ZZ}(N), X_u, N]\} \varphi \, dudv.
\end{aligned}$$

Wegen $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ verschwindet das Integral über die Divergenz

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \{[F_Z(N), N, X_v] \varphi, [F_Z(N), X_u, N] \varphi\} \, dudv = 0.$$

Wir haben somit

$$0 = \iint_{\Omega} \{[N_u \circ F_{ZZ}(N), N, X_v] + [N_v \circ F_{ZZ}(N), X_u, N]\} \varphi \, dudv$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Das Fundamentallema der Variationsrechnung liefert uns schließlich die Euler-Lagrange-Gleichung

$$[N_u \circ F_{ZZ}(N), N, X_v] + [N_v \circ F_{ZZ}(N), X_u, N] = 0.$$

q.e.d.

Wir definieren nun gemäß [S3] folgende Gewichtsmatrix

$$G(Z) := \left(\frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(Z)}} F_{ZZ}(Z) + Z^t \circ Z \right)^{-1} \quad (2.28)$$

für $Z \in S^2$ und zeigen die Eigenschaften der Gewichtsmatrix (G1) bis (G4):

(G1) Wir setzen die Gewichtsmatrix entlang Strahlen $\{\lambda Z\}$ konstant fort, so dass gilt

$$G(\lambda Z) = G(Z) \quad \text{für alle } Z \in S^2, \lambda \in (0, +\infty).$$

(G2) Mit $Z \circ F_{ZZ}(Z) = 0$ aus (2.23) und

$$\begin{aligned} Z \circ (Z^t \circ Z) &= (z^1, z^2, z^3) \circ \begin{pmatrix} (z^1)^2 & z^1 z^2 & z^1 z^3 \\ z^1 z^2 & (z^2)^2 & z^2 z^3 \\ z^1 z^3 & z^2 z^3 & (z^3)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (z^1)^3 + z^1(z^2)^2 + z^1(z^3)^2 \\ (z^1)^2 z^2 + (z^2)^3 + z^2(z^3)^2 \\ (z^1)^2 z^3 + (z^2)^2 z^3 + (z^3)^3 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} z^1 ((z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2) \\ z^2 ((z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2) \\ z^3 ((z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2) \end{pmatrix}^t \stackrel{(|Z|^2=1)}{=} Z \end{aligned}$$

erhalten wir die Eigenschaft $Z \circ G(Z)^{-1} = Z$, woraus sich $Z \circ G(Z) = Z$ ergibt.

(G3) Für $\xi \in \mathcal{T}_Z$ haben wir $\xi \circ (Z^t \circ Z) = 0$, und somit gilt

$$G(Z)^{-1} \Big|_{\mathcal{T}_Z} = \frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(Z)}} F_{ZZ}(Z) \Big|_{\mathcal{T}_Z}. \quad (2.29)$$

Wegen (2.24) haben wir

$$M_1 |\xi|^2 \leq \xi \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi^t \leq M_2 |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{T}_Z.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{1+g_0} = \frac{M_1}{M_2},$$

so folgt mit (2.25)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+g_0} \sqrt{\det F_{ZZ}(Z)} |\xi|^2 \\ & \leq \frac{1}{1+g_0} M_2 |\xi|^2 = M_1 |\xi|^2 \leq \xi \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi^t \leq M_2 |\xi|^2 = (1+g_0) M_1 |\xi|^2 \\ & \leq (1+g_0) \sqrt{\det F_{ZZ}(Z)} |\xi|^2, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ G(Z)^{-1} \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{T}_Z$$

bzw.

$$\frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 \leq \xi \circ G(Z) \circ \xi^t \leq (1+g_0)|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{T}_Z$$

ergibt.

Es reicht wegen (G2) aus, die Ungleichung für Vektoren aus dem Tangentialraum \mathcal{T}_Z zu betrachten.

(G4) Wegen $Z_{u^i} \cdot Z^t = 0$, $i = 1, 2$, aus $Z \in S^2$ finden wir eine Orthonormalbasis $B' = \{\text{Lin}\{Z_u, Z_v\}, Z\}$ mit der linearen Hülle $\text{Lin}\{Z_1, Z_2\}$ zweier Vektoren Z_1, Z_2 , so dass die (x, y) -Ebene in die Tangentialebene $\mathcal{T}_Z = \text{Lin}\{Z_u, Z_v\}$ transformiert wird. Für einen Vektor $\xi = aZ_1 + bZ_2 + cZ \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis B' , wobei $Z_1, Z_2 \in \mathcal{T}_Z$ so zu wählen sind, dass sie aufeinander senkrecht stehen, gilt nun

$$\begin{aligned} \xi \circ G(Z)^{-1} &= (aZ_1 + bZ_2) \circ G(Z)^{-1} + cZ \circ G(Z)^{-1} \\ &= (aZ_1 + bZ_2) \circ \frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(Z)}} F_{ZZ}(Z) + cZ \circ \mathbb{E}^3. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$G(Z)^{-1}|_{\mathcal{T}_Z} = \frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(Z)}} F_{ZZ}(Z) \Big|_{\mathcal{T}_Z}, \quad G(Z)^{-1}|_{\text{Lin}\{Z\}} = \mathbb{E}^3|_{\text{Lin}\{Z\}}$$

und die Determinanten sind 1. Da die Determinantenfunktion invariant unter einer Basistransformation ist, folgt $\det G(Z)^{-1} = 1$ und somit

$$\det G(Z) = 1 \quad \text{für alle } Z \in S^2.$$

Mit Hilfe dieser Gewichtsmatrix zeigen wir nun, dass kritische Punkte des Funktionals $\mathcal{F}[X]$ G -Minimalflächen sind.

Satz 2.5 *Ein kritischer Punkt X von $\mathcal{F}[X]$ erfüllt die nichtlineare, elliptische und homogene Gleichung*

$$\nabla_{ds_G^2}(X, N) = h^{ij} X_{u^i} \cdot N_{u^j}^t = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.30)$$

mit dem Beltrami-Operator erster Art $\nabla_{ds_G^2}(\cdot, \cdot)$ bezüglich der gewichteten Metrik $ds_G^2 = h_{ij} du^i du^j$ und der Gewichtsmatrix $G = G(Z)$ aus (2.28). Somit stellt X eine G -Minimalfläche dar.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch einen Hilfssatz (siehe [S3], Gleichung (2.20)).

Hilfssatz 2.2 *Seien $Q \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine reguläre, symmetrische Matrix und $X, Y \in \mathbb{R}^3$ zwei beliebige Vektoren. Dann gilt*

$$(X \circ Q) \wedge (Y \circ Q) = (\det Q)(X \wedge Y) \circ Q^{-1}. \quad (2.31)$$

Beweis: Mit einem beliebigen Vektor $Z \in \mathbb{R}^3$ berechnen wir mit dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\begin{aligned} & (Z \circ Q) \cdot \{(X \circ Q) \wedge (Y \circ Q) - (\det Q)(X \wedge Y) \circ Q^{-1}\}^t \\ &= [Z \circ Q, X \circ Q, Y \circ Q] - (\det Q)(Z \circ Q \circ Q^{-1})(X \wedge Y)^t \\ &= (\det Q)\{[Z, X, Y] - [Z, X, Y]\} = 0, \end{aligned}$$

was unsere Behauptung zeigt.

q.e.d.

Beweis von Satz 2.5: Nach Hilfssatz 2.2 haben wir

$$\begin{aligned} & \{N_u \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}\} \wedge \{X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \{N_u \circ G(N)^{-1} \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} \wedge \{X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \left(\det G(N)^{\frac{1}{2}}\right) \{(N_u \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v\} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{(N_u \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v\} \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29) aus Abschnitt 1.5 ist

$$\begin{aligned} (N_u \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v &= -(L_{1j}h^{j1}X_u \circ G(N) \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v - \dots \\ &\quad \dots - (L_{1j}h^{j2}X_v \circ G(N) \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v \\ &= -L_{1j}h^{j1}X_u \wedge X_v \end{aligned}$$

ein Vielfaches der Normale N , und (G2) liefert

$$\{N_u \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}\} \wedge \{X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} = (N_u \circ G(N)^{-1}) \wedge X_v$$

und analog

$$\{X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} \wedge \{N_v \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}\} = X_u \wedge (N_v \circ G(N)^{-1}).$$

Mit diesen Identitäten und (2.29) formen wir (2.26) wie folgt um:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(N)}} [N_u \circ F_{ZZ}(N), X_v, N] + \frac{1}{\sqrt{\det F_{ZZ}(N)}} [X_u, N_v \circ F_{ZZ}(N), N] \\ &= [N_u \circ G(N)^{-1}, X_v, N] + [X_u, N_v \circ G(N)^{-1}, N] \\ &= [N_u \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}, X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, N] + [X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, N_v \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}, N]. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $[X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, N] = W$ liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} N_u \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \\ X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \\ N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}})^t & (X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}})^t & N^t \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \\ N_v \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \\ N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}})^t & (X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}})^t & N^t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} N_u \cdot X_u^t & N_u \cdot X_v^t & 0 \\ X_v \circ G(N) \circ X_u^t & X_v \circ G(N) \circ X_v^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} X_u \circ G(N) \circ X_u^t & X_u \circ G(N) \circ X_v^t & 0 \\ N_v \cdot X_u^t & N_v \cdot X_v^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= h_{22}(N_u \cdot X_u^t) - h_{21}(N_u \cdot X_v^t) + h_{11}(N_v \cdot X_v^t) - h_{12}(N_v \cdot X_u^t) \\
&= W^2 h^{ij} X_{u^i} \cdot N_{v^j}^t = W^2 \nabla_{ds_G^2}(X, N)
\end{aligned}$$

mit der abkürzenden Schreibweise $\det A = |A|$ für die Determinante einer Matrix A . Dabei beachten wir in den ersten beiden Zeilen, dass wir das Spatprodukt auch als Determinante einer Matrix (mit Zeilen- bzw. Spaltenvektoren) schreiben können. q.e.d.

Bemerkung 2.3 *Den Minimalflächenfall erhalten wir für $F(Z) = |Z|$. Daraus ergibt sich wieder die Einheitsmatrix \mathbb{E}^3 für die Gewichtsmatrix G aus (2.28).*

Betrachten wir nun eine nichtparametrische Extremale $X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$ des parametrischen Variationsproblem mit dem Funktional aus (2.17), so lässt sich diese als kritischen Punkt des zugehörigen nichtparametrischen Variationsproblem mit

$$\tilde{\mathcal{F}}[\zeta] := \mathcal{F}[X] = \iint_{\Omega} F(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) dx dy = \iint_{\Omega} \tilde{F}(\zeta_x, \zeta_y) dx dy$$

auffassen. Es gilt $F(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) =: \tilde{F}(\zeta_x, \zeta_y)$ mit $\tilde{F}(p, q) \in C^{4+\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Wir berechnen dann die nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung wie folgt:

Zu einem $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und $\epsilon \in (-\epsilon_0, +\epsilon_0)$, $\epsilon_0 > 0$, setzen wir $\tilde{\zeta} := \zeta + \epsilon\varphi$ und berechnen für $\tilde{X} := (x, y, \tilde{\zeta})$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{F}[\tilde{X}] = - \iint_{\Omega} F_Z(-\tilde{\zeta}_x, -\tilde{\zeta}_y, 1) \cdot (\varphi_x, \varphi_y, 0)^t dx dy.$$

Damit gilt für die erste Variation

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}[X] &= \left. \frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathcal{F}[\tilde{X}] \right|_{\epsilon=0} = - \iint_{\Omega} F_Z(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \cdot (\varphi_x, \varphi_y, 0)^t dx dy \\
&= - \iint_{\Omega} \{F_{z^1}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)\varphi_x + F_{z^2}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)\varphi_y\} dx dy \\
&= \iint_{\Omega} \{\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y)\varphi_x + \tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y)\varphi_y\} dx dy \\
&= \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y)\varphi, \tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y)\varphi) dx dy \\
&\quad - \iint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dx}\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy}\tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) \right\} \varphi dx dy \\
&= - \iint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dx}\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy}\tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) \right\} \varphi dx dy
\end{aligned}$$

wegen $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Für kritische Punkte folgt

$$0 = - \iint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dx}\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy}\tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) \right\} \varphi dx dy$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, und wir erhalten die nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy}\tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

in Divergenzform. Aufgrund von Satz 2.5 gilt nun

Satz 2.6 *Sei der Graph $X(x, y) = (x, y, \zeta(x, y)) \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ kritisch für $\mathcal{F}[X]$ aus (2.17) mit den Voraussetzungen (2.18) und (2.24). Dann gilt die quasilineare, elliptische Differentialgleichung in Divergenzform*

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy}\tilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.32)$$

mit $\tilde{F}(\zeta_x, \zeta_y) = F(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)$. Zudem ist X ein G -minimaler Graph.

Führen wir die Differentiation in (2.32) aus, so erhalten wir eine quasilineare, elliptische Differentialgleichung der Form

$$a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0$$

mit den Koeffizienten

$$a(\zeta_x, \zeta_y) = \tilde{F}_{pp}(\zeta_x, \zeta_y), \quad b(\zeta_x, \zeta_y) = \tilde{F}_{pq}(\zeta_x, \zeta_y), \quad c(\zeta_x, \zeta_y) = \tilde{F}_{qq}(\zeta_x, \zeta_y).$$

2.4 Divergenzdarstellung nach Bers

Wir betrachten die quasilineare, elliptische Differentialgleichung

$$a(p, q)\zeta_{xx} + 2b(p, q)\zeta_{xy} + c(p, q)\zeta_{yy} = 0 \quad (2.33)$$

mit den Setzungen $p := \zeta_x$ und $q := \zeta_y$. Die Koeffizientenfunktionen a, b und c sind dabei in einem Gebiet Θ der (p, q) -Ebene definiert, gehören zur Klasse $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ und erfüllen o.B.d.A. die Elliptizitätsbedingung

$$ac - b^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0.$$

Unser Ziel ist es, die Differentialgleichung (2.33) in die Divergenzform

$$\frac{d\eta(p, q)}{dx} + \frac{d\mu(p, q)}{dy} = 0 \quad (2.34)$$

umzuwandeln, um für diese Klasse von Lösungen in Abschnitt 5.1.1 eine Abschätzung des Oberflächeninhalts herzuleiten. Notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der Gleichungen (2.33) und (2.34) ist die Existenz einer nichtverschwindenden Funktion $\chi(p, q) \neq 0$, so dass

$$\eta_p = \chi a, \quad \eta_q + \mu_p = 2\chi b, \quad \mu_q = \chi c$$

gilt. O.B.d.A. nehmen wir $\chi > 0$ an. Umstellen der ersten Gleichung nach χ und Einsetzen in die zweite und dritte Gleichung ergibt das System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \eta_p \\ \eta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a/c \\ -1 & 2b/c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_p \\ \mu_q \end{pmatrix} \quad \text{in } \Theta. \quad (2.35)$$

Bers betrachtet in [B] solche linearen, elliptischen Systeme erster Ordnung und zeigt die Existenz einer Lösung. Es gilt folgender Satz (vgl. [B], Satz B):

Satz 2.7 *Unter obigen Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen a, b und c der Differentialgleichung (2.33) existiert ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus $\omega(p, q) = \eta(p, q) + i\mu(p, q)$ in Θ , der das System (2.35) löst und die Eigenschaften*

(i) $\eta_p > 0$ in Θ

(ii) $\eta(0, 0) = \mu(0, 0) = 0, \quad \eta_p(0, 0) = 1, \quad \eta_q(0, 0) = 0$

(iii) $\eta_p\mu_q - \eta_q\mu_p > 0$ in Θ

(iv) ω ist beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von Θ

besitzt.

Wir präzisieren noch die Eigenschaft (iii): Aus der Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel folgt die Abschätzung

$$1 \leq 1 + p^2 + q^2 = ac - b^2 = \frac{\eta_p\mu_q}{\chi^2} - \left(\frac{\eta_q + \mu_p}{2\chi} \right)^2 \leq \frac{1}{\chi^2}(\eta_p\mu_q - \eta_q\mu_p).$$

Somit ist die positive Definitheit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \eta_p & \eta_q \\ \mu_p & \mu_q \end{pmatrix}$$

gezeigt. In der kompakten Menge $\Theta_1 := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p^2 + q^2 \leq 1\}$ existiert dann eine positive Konstante $m_1 \in (0, \infty)$, so dass

$$m_1 |\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} \eta_p & \eta_q \\ \mu_p & \mu_q \end{pmatrix} \circ \xi^t \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ und für alle } (p, q) \in \Theta_1 \quad (2.36)$$

gilt. Aus (iv) erhalten wir für eine kompakte Menge $\Theta_2 \subset \Theta$ eine nichtnegative Konstante $k_0 = k_0(\Theta_2) \in [0, \infty)$, so dass

$$\eta(p, q)^2 + \mu(p, q)^2 \leq k_0^2 \quad \text{für alle } (p, q) \in \Theta_2 \quad (2.37)$$

erfüllt ist. Um den Voraussetzungen der Oberflächeninhaltsabschätzung, Satz 5.1 aus Abschnitt 5.1.1, gerecht zu werden, fordern wir gegebenenfalls solch eine zusätzliche Divergenzdarstellung, so dass die Konstanten m_1 und k_0 a-priori bekannt sind. Diese Daten benötigen wir in Kapitel 5. In der Literatur (siehe z.B. [Fi1], [Lau], [SW]) wird die Divergenzdarstellung für Gleichungen vom Minimalflächentyp ebenso gefordert, um das Dirichletproblem zu lösen. Insbesondere gehören G -minimale Graphen, die aus dem Variationsproblem $\delta \iint_{\Omega} \tilde{F}(p, q) dx dy = 0$ stammen und für deren Integrand $\tilde{F}_{pp} + \tilde{F}_{qq} < 1$

für alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ gilt oder G -minimale Graphen, die $\eta(p, q)^2 + \mu(p, q)^2 = O(\sqrt{p^2 + q^2})$ erfüllen, zu dieser Klasse (vgl. [Fi1]).

Es wäre wünschenswert, wenn wir direkt in der von uns betrachteten Klasse der G -Minimalflächen eine Divergenzdarstellung notieren könnten.

2.5 Historische Bemerkungen

Wir wollen in diesem Abschnitt noch auf verschiedene Definitionen und Betrachtungsweisen von G -Minimalflächen eingehen, die seit den 50er Jahren in der Literatur auftauchen. Dabei gehen wir auch auf die Zusammenhänge mit unserer Darstellung ein. Wir verzichten allerdings aufgrund der Vielzahl von Arbeiten über dieses Thema auf Vollständigkeit und erwähnen nur wichtige Wegbereiter und Autoren, die unserer Betrachtungsweise am nächsten sind.

Wir beginnen mit der Betrachtungsweise basierend auf quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen.

Finn definiert bereits im Jahre 1954 in [Fi1] wohl als Erster Differentialgleichungen vom Minimalflächentyp. Eine Differentialgleichung

$$\begin{aligned} a(p, q)\zeta_{xx} + 2b(p, q)\zeta_{xy} + c(p, q)\zeta_{yy} &= 0 \\ a > 0, \quad ac - b^2 &= 1 + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

mit den üblichen Setzungen $p = \zeta_x$, $q = \zeta_y$ gehört zu dieser Klasse, wenn es für alle (x, y) aus dem Definitionsbereich und für alle p, q eine Konstante $K \in [1, \infty)$ gibt, die die Ungleichung

$$a(1 + p^2) + 2bpq + c(1 + q^2) \leq 2KW^2, \quad W = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

erfüllt. Die Metriken

$$ds_1^2 = (1 + p^2)(d\xi^1)^2 + 2pqd\xi^1d\xi^2 + (1 + q^2)(d\xi^2)^2 = g_{ij}d\xi^i d\xi^j$$

mit der ersten Fundamentalform für Graphen

$$g = (g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq \\ pq & 1 + q^2 \end{pmatrix}$$

und

$$ds_2^2 = c(d\xi^1)^2 - 2bd\xi^1d\xi^2 + a(d\xi^2)^2 = a_{ij}d\xi^i d\xi^j$$

mit

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

stehen dann in einer quasi-konformen Beziehung, d.h. die Dilatation

$$\delta = \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)_{\max} : \left(\frac{ds_2}{ds_1} \right)_{\min}$$

ist gleichmäßig beschränkt. Ein infinitesimaler Kreis in einem gegebenen Punkt in einer Metrik ist eine infinitesimale Ellipse in der anderen Metrik, und der Quotient δ von großer Halbachse und kleiner Halbachse wird als Dilatation bezeichnet. Zur Berechnung orientieren wir uns an [BL], §44, wo das Verfahren für Hauptkrümmungen beschrieben ist. Es handelt sich um Extremalprobleme unter Nebenbedingungen,

$$\max / \min \frac{c(d\xi^1)^2 - 2bd\xi^1d\xi^2 + a(d\xi^2)^2}{(1 + p^2)(d\xi^1)^2 + 2pqd\xi^1d\xi^2 + (1 + q^2)} = \max_{g_{ij}d\xi^i d\xi^j=1} / \min_{g_{ij}d\xi^i d\xi^j=1} a_{ij}d\xi^i d\xi^j,$$

welche mit dem Lagrange-Multiplikator λ gemäß den Bedingungsgleichungen

$$2(a_{ij} - \lambda g_{ij})d\xi^j = 0, \quad i = 1, 2, \quad g_{ij}d\xi^i d\xi^j = 1,$$

behandelt werden können. Daraus folgt

$$\det(A - \lambda g) = 0,$$

und mit dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$0 = \det(A - \lambda g) \det g^{-1} = \det((A - \lambda g) \circ g^{-1}) = \det(A \circ g^{-1} - \lambda \mathbb{E}^2),$$

woraus sich eine Eigenwertgleichung ergibt. λ ist also Lösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - \text{spur}(A \circ g^{-1})\lambda + \det(A \circ g^{-1}) = 0.$$

Andererseits ist wegen

$$0 = 2(a_{ij} - \lambda g_{ij})d\xi^i d\xi^j = 2a_{ij}d\xi^i d\xi^j - 2\lambda$$

klar, dass λ gleich einem der Extremwerte sein muss. Wir berechnen nun konkret

$$\begin{aligned} A \circ g^{-1} &= \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} c(1+q^2) + bpq & -b(1+p^2) - cpq \\ -b(1+q^2) - apq & a(1+p^2) + bpq \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bestimmen die Eigenwerte

$$\lambda_{\min, \max} = \frac{a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2) \pm \sqrt{(a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2))^2 - 4W^4}}{2W^2},$$

welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \lambda_{\max} &= \det(A \circ g^{-1}) = 1, \\ \lambda_{\min} + \lambda_{\max} &= \text{spur}(A \circ g^{-1}) = \frac{a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2)}{W^2} \quad \text{für alle } (p, q) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

erfüllen. Demnach gilt für die Dilatation $\delta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$ die Bedingungsgleichung

$$\delta + \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} = \frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{\sqrt{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}} = \frac{a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2)}{W^2} \leq 2K,$$

und die Dilatation ist gemäß

$$0 < K - \sqrt{K^2 - 1} \leq \delta \leq K + \sqrt{K^2 - 1}$$

beschränkt (vgl. auch [N], §576). Die Größe $\frac{1}{2} \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right)$ wird als Exzentrizität einer Metrik in Bezug auf eine andere Metrik bezeichnet. Eine Elliptizitätsbedingung der Art (2.16) geht also bereits auf Finn zurück. Für die Dilatation gilt dann

$$\frac{1}{(1+g_0)^2} \leq \delta \leq (1+g_0)^2.$$

Im Gegensatz zu Finn haben wir allerdings eine konkretere Differentialgleichung und später in Kapitel 3 Differentialgleichungssysteme in gewichtet konformen Parametern zur Hand. Finn zeigt in seiner Arbeit [Fi1] eine Flächeninhaltsabschätzung ([Fi1], Hilfssatz 4 bis 6), Gradientenabschätzungen in Abhängigkeit von Flächeninhaltsschranken ([Fi1], Satz I) und in Abhängigkeit der Größe der Lösung ([Fi1], Satz III). Weiter werden Wachstums- und Approximationssätze ([Fi1], Satz V bis VII) bewiesen. Schließlich zeigt er noch Existenzsätze zum Dirichletproblem für konvexe Gebiete mit C^2 -Rand und nichtverschwindender Krümmung sowie stetigen Randdaten. Durch eine Approximation mittels C^2 -Randdaten genügt die Randkurve dann einer sogenannten Drei-Punkte-Bedingung (vgl. Bemerkung

4.5 aus Abschnitt 4.2 in unserer Arbeit), wofür bekannte Existenzsätze (z.B. [Ni]) zur Verfügung stehen. In seiner Arbeit [Fi2] werden dann a-priori Abschätzungen für den Gradienten einer Lösung hergeleitet. Dabei geht er mit Hilfe von [B] immer von einer möglichen Divergenzdarstellung $\Theta_x + \Lambda_y = 0$ mit $\Theta^2 + \Lambda^2 < 1$ und $\Theta(0,0) = \Lambda(0,0) = 0$ aus.

Simon erweitert 1977 in [Si2] die Klasse auf Gleichungen vom Mittleren-Krümmungstyp in der Form

$$a(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = d(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)$$

mit den Bedingungen

$$(i) \quad |\xi|^2 - \frac{\langle \xi, (p, q) \rangle^2}{1 + p^2 + q^2} \leq a(x, y, z, p, q)(\xi^1)^2 + 2b(\dots)\xi^1\xi^2 + c(\dots)(\xi^2)^2 \leq \dots$$

$$\dots \leq \gamma \left(|\xi|^2 - \frac{\langle \xi, (p, q) \rangle^2}{1 + p^2 + q^2} \right)$$

für alle $(x, y, z, p, q) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ und für alle $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$

$$(ii) \quad |d(x, y, z, p, q)| \leq \mu\sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{für alle } (x, y, z, p, q) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

mit Konstanten γ und μ . Für $d \equiv 0$ erhalten wir Gleichungen vom Minimalflächentyp. Bedingung (i) bedeutet, dass die quadratische Form

$$\xi \circ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \circ \xi^t$$

nach unten und oben beschränkt ist in Termen der quadratischen Form

$$|\xi|^2 - \frac{\langle \xi, (p, q) \rangle^2}{1 + p^2 + q^2} = \xi \circ \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1 + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + p^2 \end{pmatrix} \circ \xi^t.$$

Es gilt dann

$$1 \leq \frac{\xi \circ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \circ \xi^t}{\xi \circ \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} 1 + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + p^2 \end{pmatrix} \circ \xi^t} \leq \gamma,$$

womit eine Elliptizitätsbedingung der Art (2.16) ebenfalls erfüllt ist. Mit (2.38) betrachten wir analog zu obigen Ausführungen die Dilatation

$$\sqrt{\frac{1}{\gamma}} \leq \delta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \leq \sqrt{\gamma}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{\min, \max}$ der Matrix

$$W^2 A^{-1} \circ g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq \\ pq & 1 + q^2 \end{pmatrix},$$

die

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\lambda_{\max} &= \det(W^2 A^{-1} \circ g) = W^4, \\ \lambda_{\min} + \lambda_{\max} &= \text{spur}(W^2 A^{-1} \circ g) = a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2).\end{aligned}$$

erfüllen. Demnach gilt

$$\delta + \frac{1}{\delta} = \frac{a(1+p^2) + 2bpq + c(1+q^2)}{W^2} \leq 2\sqrt{\gamma},$$

was äquivalent zu Finn's Bedingung für Gleichungen vom Minimalflächentyp ist. Simon zeigt erstmals die analoge geometrische Charakterisierung zu (2.3) für Gleichungen vom Mittleren-Krümmungstyp. Für Gleichungen vom Minimalflächentyp bedeutet dies

$$\rho_1\kappa_1 + \rho_2\kappa_2 = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.39)$$

Für die Gewichte haben wir die Ungleichung

$$\frac{1}{1+g_0} \leq \rho_i \leq 1+g_0, \quad i = 1, 2,$$

woraus sich

$$\frac{1}{(1+g_0)^2} \leq \frac{\rho_i}{\rho_j} \leq (1+g_0)^2, \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

ergibt. Quadrieren der Gleichung (2.39) und anschließende Division durch $\rho_1\rho_2 > 0$ liefert uns die Gleichung

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\kappa_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\kappa_2^2 = -2\kappa_1\kappa_2$$

und demnach die Ungleichung

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \leq (1+g_0)^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\kappa_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\kappa_2^2 \right) = -2(1+g_0)^2\kappa_1\kappa_2.$$

Dies bedeutet folgendes: Für G -minimale Graphen ist die Gauß-Abbildung N K -quasi-konform mit $K = -(1+g_0)^2$ (vgl. [Si1], Definition (1.8) sowie Beispiel (1.9)). Simon benutzt diese wichtige Eigenschaft der Quasikonformität, um eine Hölderabschätzung nach Morrey's Methode zu beweisen ([Si1], Satz 2.2) und damit eine stärkere Regularitätstheorie für Graphen zu erhalten. Dies sind in der Arbeit [Si1] ein Bernstein-Satz ([Si1], Satz 4.1), eine Harnackungleichung ([Si1], Satz 4.2), eine Gradientenabschätzung für ζ ([Si1], Folgerung 4.3), eine innere Hölderabschätzung für N ([Si1], Satz 4.3) sowie eine globale Hölderabschätzung für ζ , die stetig Lipschitz-Randdaten annimmt ([Si1], Satz 4.4). Weiter zeigt er in [Si2] ein Bers-Typ Satz ([Si2], Satz 6), der das Randverhalten des Gradienten $\nabla\zeta$ untersucht, wobei ζ außerhalb einer kompakten Menge definiert ist, ein Satz über die Hebbarkeit von isolierten Singularitäten für ζ ([Si2], Satz 7) sowie eine punktweise Abschätzung der Hauptkrümmungen ([Si2], Satz 8). Für den inhomogenen Fall $d \neq 0$, also Gleichungen vom Mittleren-Krümmungstyp, zeigt er weiter analoge Resultate, allerdings mit stärkeren Voraussetzungen oder schwächeren Behauptungen.

Sauvigny gibt 1990 in [S3] erstmals eine adäquate parametrische Beschreibung für Immersionen X vom Minimalflächentyp mit Hilfe einer Gewichtsmatrix $G = G(X, Z)$ an, die die Grundlage unserer Arbeit bildet. Diese Matrizen können dann sowohl auf Lösungen homogener, quasilinear, elliptischer Gleichungen

$$a(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\dots)\zeta_{xy} + c(\dots)\zeta_{yy} = 0$$

als auch auf ortsunabhängige Variationsprobleme mit dem Funktional

$$\iint_B F(X_u \wedge X_v) dudv$$

angewendet werden (vgl. unsere Abschnitte 2.2 und 2.3). Durch Einführen isothermer Parameter in die gewichtete erste Fundamentalform im Großen mittels des Uniformisierungssatzes aus [S6], Kap. XII, §8 beweist er Krümmungsabschätzungen und Sätze vom Bernstein-Typ mit einer anderen Methode als bei Simon. Fröhlich erweitert in seiner Habilitationsschrift [Fr] die Klasse auf Immersionen vom Mittleren-Krümmungstyp und führt dafür u.a. Krümmungsabschätzungen in gewichtet konformen Parametern durch. Grundlegend dafür sind die elliptische Systeme für X und N , die wir in Kapitel 3 unserer Arbeit herleiten werden.

G -Minimalflächen aus Variationsproblemen, einem Spezialfall vom Minimalflächentyp, wurden u.a. von folgenden Autoren behandelt:

Jenkins betrachtet 1961 in seiner Arbeit [J] parametrische Funktionale der Form (2.17) mit den Eigenschaften

- (i) $F = F(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, (0, +\infty))$
- (ii) $F(\lambda Z) = \lambda F(Z)$ für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, für alle $\lambda \in (0, +\infty)$
- (iii) $m_1|Z| \leq F(Z) \leq m_2|Z|$ für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit positiven Konstanten m_1 und m_2
- (iv) F regulär, d.h. die durch $F(Z) = 1$ definierte Fläche hat überall positive Gaußsche Krümmung

für den Integranden F . Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung für nichtparametrische Extremalen eine quasilineare, elliptische Differentialgleichung in Divergenzform und stellt gleichzeitig eine Gleichung vom Minimalflächentyp gemäß [F1] dar (vgl. [J], Satz 2). In [JS1] formulieren Jenkins und Serrin notwendige Bedingungen für den Integranden \tilde{F} des zugehörigen nichtparametrischen Variationsproblem, der in diesem Fall $\tilde{F}(p, q) = F(p, q, -1)$ erfüllt (bzgl. innere Einheitsnormale), so dass F regulär ist. Dies sind

- (I) $\tilde{F} > 0$
- (II) $\tilde{F}_{pp}\tilde{F}_{qq} - \tilde{F}_{pq}^2 > 0$
- (III) $|\nabla\tilde{F}| \leq A_1, \quad |\tilde{F} - p\tilde{F}_p - q\tilde{F}_q| \leq A_2$

$$(IV) \quad \frac{(1+p^2)\tilde{F}_{pp} + 2pq\tilde{F}_{pq} + (1+q^2)\tilde{F}_{qq}}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{\tilde{F}_{pp}\tilde{F}_{qq} - \tilde{F}_{pq}^2}} \leq 2K$$

mit positiven Konstanten A_1 , A_2 und K . Regularität wird als Elliptizität des Problems verstanden. Damit definieren die Autoren „nichtparametrische Variationsprobleme vom Minimalflächentyp“. Für eine ausführliche Diskussion verweisen wir auf [JS1] S. 187 – 190. Eigenschaft (IV) korrespondiert insbesondere mit der Elliptizitätsbedingung (2.16). Die Autoren zeigen in [JS1] weiterführende a-priori Abschätzungen von Finn für Graphenlösungen. Dies sind Gradientenabschätzungen ([JS1], Satz 1 und 4), punktweise Krümmungsabschätzung und Abschätzung der zweiten Ableitung ([JS1], Satz 2), eine Harnackungleichung ([JS1], Satz 3) sowie verschiedene Konvergenzssätze ([JS1], §7). Sie bilden die Grundlage für die Lösung des Dirichletproblems in [JS2] mit dem Leray-Schauderschen Fixpunktsatz im Banachraum zunächst für strikt konvexe Gebiete und dann mit der Peronschen Methode (vgl. [N], §642-672 für die Minimalflächengleichung) für konvexe Gebiete. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, dessen Rand aus einer endlichen Zahl von offenen, konvexen Bögen zusammen mit ihren Endpunkten besteht. Auf jedem dieser Bögen sind entweder stetige Randdaten oder Werte $\pm\infty$ vorgegeben. Im letzteren Fall müssen die Bögen geradlinig sein.

Simon zeigt in [Si2] ebenfalls und allgemeiner, dass die nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung eines parametrischen Funktionals

$$\mathcal{F}[X] = \iint_{\Omega} F(X, X_v \wedge X_u) dudv$$

mit den Eigenschaften

$$(i) \quad F(X, \lambda Z) = \lambda F(X, Z) \text{ für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \text{ für alle } \lambda \in (0, +\infty)$$

$$(ii) \quad |\xi'|^2 \leq \xi \circ |Z| F_{ZZ}(X, Z) \circ \xi^t \leq \gamma |\xi'|^2, \quad \xi' = \xi - \frac{\langle \xi, Z \rangle}{|Z|^2} Z, \text{ für alle } Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^3 \text{ mit einer Konstante } \gamma$$

(vgl. (2.18) und (2.24) aus Abschnitt 2.3) stets eine Gleichung vom Mittleren-Krümmungstyp ist (siehe auch [LU2], S. 687 – 690). Für die Koeffizientenfunktionen wurden dabei die Setzungen

$$\begin{pmatrix} a(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y) & b(\dots) \\ b(\dots) & c(\dots) \end{pmatrix} = \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} F_{z^i z^j}(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y, -1), \quad i, j = 1, 2,$$

$$d(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y) = -\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \sum_{i=1}^3 F_{z^i x^i}(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y, -1)$$

vorgenommen. Wir wollen hier die Aussage für den Fall $F(X, Z) = F(Z)$ zeigen. Aus der Homogenitätsbedingung (i) folgern wir gemäß (2.23) $Z \circ F_{ZZ}(Z) = 0$ und demnach $Z \circ F_{ZZ}(Z) \circ Z^t = 0$. Die quadratische Form

$$\xi \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi^t, \quad \xi \in \mathbb{R}^3,$$

ist also nicht positiv definit. Bei regulären (d.h. elliptischen) Problemen kann dies nur für ξ parallel zu Z auftreten. Deswegen gilt für alle Vektoren $\xi' \in \mathbb{R}^3$, die orthogonal zu Z sind, nach (ii) die Ungleichungen

$$|\xi'|^2 \leq \xi' \circ |Z| F_{ZZ}(X, Z) \circ \xi'^t \leq \gamma |\xi'|^2. \quad (2.40)$$

Für einen beliebigen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ haben wir wegen $Z \circ F_{ZZ}(Z) = 0$ außerdem

$$\xi \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi^t = \xi' \circ F_{ZZ}(Z) \circ \xi'^t, \quad \xi' = \xi - \frac{\langle \xi, Z \rangle}{|Z|^2} Z, \quad (2.41)$$

mit dem zu Z orthogonalen Vektor ξ' . Die nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung des parametrischen Funktional berechnet sich nach Ausführung der Differentiation (siehe Abschnitt 2.3) zu

$$\tilde{F}_{pp}(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xx} + 2\tilde{F}_{pq}(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xy} + \tilde{F}_{qq}(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{yy} = 0.$$

Multiplikation der Gleichung mit $\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}$ ergibt die Koeffizienten $a(\zeta_x, \zeta_y)$, $b(\zeta_x, \zeta_y)$ und $c(\zeta_x, \zeta_y)$, wenn wir noch

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{pp}(\zeta_x, \zeta_y) &= F_{z^1 z^1}(\zeta_x, \zeta_y, -1), \\ \tilde{F}_{pq}(\zeta_x, \zeta_y) &= F_{z^1 z^2}(\zeta_x, \zeta_y, -1), \\ \tilde{F}_{qq}(\zeta_x, \zeta_y) &= F_{z^2 z^2}(\zeta_x, \zeta_y, -1) \end{aligned}$$

beachten. Damit haben wir für beliebiges $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^2$ die Identität

$$\begin{aligned} \hat{\xi} \circ \begin{pmatrix} a(\zeta_x, \zeta_y) & b(\zeta_x, \zeta_y) \\ b(\zeta_x, \zeta_y) & c(\zeta_x, \zeta_y) \end{pmatrix} \circ \hat{\xi}^t &= \hat{\xi} \circ \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{pp}(\zeta_x, \zeta_y) & \tilde{F}_{pq}(\zeta_x, \zeta_y) \\ \tilde{F}_{pq}(\zeta_x, \zeta_y) & \tilde{F}_{qq}(\zeta_x, \zeta_y) \end{pmatrix} \circ \hat{\xi}^t \\ &= \xi \circ \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} F_{ZZ}(\zeta_x, \zeta_y, -1) \circ \xi^t \\ &= \xi' \circ \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} F_{ZZ}(\zeta_x, \zeta_y, -1) \circ \xi'^t \\ &= \xi' \circ F_{ZZ}(N) \circ \xi'^t \end{aligned}$$

mit $\xi = (\hat{\xi}, 0) \in \mathbb{R}^3$ sowie $\xi' = \xi - \langle \xi, N \rangle N$ und der nach innen gerichteten Normale

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} (\zeta_x, \zeta_y, -1).$$

Es gilt weiter

$$|\xi'|^2 = |\xi|^2 - \langle \xi, N \rangle^2 = |(\hat{\xi}, 0)|^2 - \langle (\hat{\xi}, 0), N \rangle^2 = |\hat{\xi}|^2 - \frac{\langle \hat{\xi}, (\zeta_x, \zeta_y) \rangle^2}{1 + |\nabla \zeta|^2}.$$

Mit (2.40) und (2.41) folgt somit

$$|\hat{\xi}|^2 - \frac{\langle \hat{\xi}, (p, q) \rangle^2}{1 + p^2 + q^2} \leq \hat{\xi} \circ \begin{pmatrix} a(p, q) & b(p, q) \\ b(p, q) & c(p, q) \end{pmatrix} \circ \hat{\xi}^t \leq \gamma \left(|\hat{\xi}|^2 - \frac{\langle \hat{\xi}, (p, q) \rangle^2}{1 + p^2 + q^2} \right)$$

für alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^2$, und die Differentialgleichung

$$a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0$$

ist nach Simon vom Minimalflächentyp.

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir noch die Betrachtungsweise von Clarenz und von der Mosel erwähnen, die das parametrische Funktional

$$\mathcal{F}[X] = \int_{\Omega} F(X, N) dA \quad (2.42)$$

in n Dimensionen mit der bekannten Homogenitätsvoraussetzung behandeln. Der erste Autor beschreibt in [C] Extremalen als Flächen vorgeschriebener mittlerer F -Krümmung $\hat{\mathcal{H}}_F = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ (\partial X \circ F_{ZZ} \circ \partial X^t) \circ g^{-1})$ durch die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\hat{\mathcal{H}}_F = \sum_{i=1}^{n+1} F_{z^i x^i}(X, N).$$

Dies können wir in Bezug auf unsere Definition einer Gewichtsmatrix G und gewichteter mittlerer Krümmung \mathcal{H}_G vergleichen. Setzen wir $F_{ZZ}(Z) =: \hat{G}$ (vgl. (2.28) für unsere G -Minimalflächen aus Variationsproblemen), so erhalten wir eine in der Literatur ebenfalls gebräuchliche Definition der Gewichtsmatrix, die wir mit \hat{G} bezeichnen. Bergner und Dittrich in [BD] sowie Bergner und Fröhlich in [BF] fordern zum Beispiel die alternativen Bedingungen

$$(G1') \text{ (Homogenität vom Grad } -1) \quad \hat{G}(\lambda Z) = \frac{1}{\lambda} \hat{G}(Z) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, +\infty)$$

$$(G2') \text{ (Kerneigenschaft)} \quad Z \circ \hat{G}(Z) = 0$$

$$(G3') \text{ (Elliptizität)} \quad 0 < \xi \circ \hat{G}(Z) \circ \xi^t \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \text{ mit } \langle \xi, Z \rangle = 0$$

Die Normierung (G4) entfällt, so dass das Oberflächenelement $W_{ds_G^2}$ explizit von G abhängt. Es existiert eine Umrechnung zwischen unseren Gewichtsmatrizen G und den Matrizen \hat{G} gemäß

$$\hat{G}(Z) = \frac{1}{|Z|^3} (G^{-1}(Z)|Z|^2 - Z^t \circ Z). \quad (2.43)$$

Für $\hat{G}(Z) = |Z|^{-3}(\mathbb{E}^3|Z|^2 - Z^t \circ Z)$ erhalten wir dann den Minimalflächenfall. Unsere Wahl der Gewichtsmatrix G wird sich aber als sinnvoll erweisen, da die elliptischen Systeme für X und N in gewichtet konformen Parametern eine für unsere Zwecke einfache Gestalt annehmen.

Die Autoren definieren dann die gewichtete mittlere Krümmung durch

$$\hat{\mathcal{H}}_F = \hat{\mathcal{H}}_{\hat{G}} = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ h \circ g^{-1})$$

mit $h = \partial X \circ \hat{G} \circ \partial X^t$. Dies entspricht bis auf einen Faktor unserer Definition

$$2\mathcal{H}_{\hat{G}} = \text{spur}(L \circ \hat{h}^{-1}),$$

wenn wir

$$\hat{h}^{-1} = (\partial X \circ \hat{G}^{-1} \circ \partial X^t)^{-1}$$

setzen. Sie benutzen also bei ihrer Definition genau die inverse Gewichtsmatrix \hat{G}^{-1} . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ h \circ g^{-1} &= (\partial X^t)^{-1} \circ (\partial X)^{-1} \circ \partial X \circ \hat{G} \circ \partial X^t \circ (\partial X^t)^{-1} \circ (\partial X)^{-1} \\ &= (\partial X^t)^{-1} \circ \hat{G} \circ (\partial X)^{-1} = (\partial X \circ \hat{G}^{-1} \circ \partial X^t)^{-1}. \end{aligned}$$

Clarenz beweist in [C] für $F = F(X, Z)$ in n Dimensionen eine Differentialgleichung für X mit dem F -Laplace-Beltrami-Operator ([C], Satz 2). Mit deren Hilfe können Einschließungssätze ([C], Satz 2.3 für $F = F(Z)$ und Satz 2.4) sowie Einschließungseigenschaften ([C], Folgerungen 2.6, 2.7 sowie 2.8 für $F = F(Z)$) gezeigt werden, woraus Nicht-Existenzresultate für \mathcal{F} -Extremalen folgen. Ein Kompaktheitssatz für \mathcal{F} -minimale Immersionen in zwei Dimensionen und ortsunabhängigem Integranden $F = F(Z)$, die kritisch für \mathcal{F} sind und schwach monoton von einer geschlossenen Jordankurve berandet werden, zeigen Clarenz und von der Mosel in der Arbeit [CM1], Satz 1. Dafür benutzen sie in Anlehnung an [S3] F -konforme Parameter und sind im Beweisgedanke ähnlich unserem parametrischen Kompaktheitssatz (Satz 5.4 aus Abschnitt 5.2). Sie erhalten dabei als Nebenprodukt eine isoperimetrische Ungleichung für \mathcal{F} -minimale Immersionen ([CM1], Satz 2). Erwähnen möchten wir auch noch die Arbeit [CM2], wo in n Dimensionen und $F = F(X, Z)$ eine Differentialgleichung für die Normale mit dem F -Laplace-Beltrami-Operator hergeleitet wird ([CM2], Satz 1.1). Schließlich zeigen die Autoren noch Einschließungssätze im \mathbb{R}^{n+1} für Flächen in zylindrischer Randkonfiguration ([CM2], Satz 1.2 für $F = F(Z)$ und Satz 1.3 für $F = F(X, Z)$).

Ergebnisse aus der Literatur zum Dirichletproblem für G -Minimalflächen haben wir bereits in der Einleitung erwähnt. Wir verzichten deshalb an dieser Stelle auf die Nennung weiterer Autoren, die sich mit G -Minimalflächen und Flächen vom gewichteten mittleren Krümmungstyp in dieser Hinsicht beschäftigt haben.

Kapitel 3

Differentialgleichungen für Flächenvektor X und Normalenvektor N

In diesem Kapitel werden wir in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 in gewichtet konformen Parametern arbeiten und so elliptische Systeme für den Flächenvektor X und den Normalenvektor N herleiten, die uns für Kapitel 5 von großem Nutzen sein werden. Hierfür muss X kein Graph sein. Unsere Ausführungen orientieren sich an der Darstellung in [Fr], wiewohl Sauvigny bereits in [S3] diese Ergebnisse erzielte. Weiter leiten wir in Abschnitt 3.4 ein alternatives System für den Normalenvektor N her, welches wir für eine innere Gradientenabschätzung in Abschnitt 4.3 und für den parametrischen Kompaktheitssatz in Abschnitt 5.2 benötigen.

3.1 Ein elliptisches System für den Flächenvektor X

Wir wiederholen zunächst die gewichteten Gaußschen Ableitungsgleichungen (1.31) aus Abschnitt 1.5,

$$X_{u^i u^j} = (\Gamma_{ij}^k + \Omega_{ij}^k)X_{u^k} + L_{ij}N, \quad i, j = 1, 2,$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}h^{kl}(h_{li,u^j} + h_{jl,u^i} - h_{ij,u^l})$$

sowie ihren gewichteten Korrekturtermen

$$\Omega_{ij}^k = -\frac{1}{2}h^{kl}(\omega_{lij} + \omega_{jli} - \omega_{ijl}), \quad \omega_{ijl} = X_{u^i} \circ G_{u^l}(N) \circ X_{u^j}.$$

Unter Benutzung gewichtet konformer Parameter aus Abschnitt 1.4, wo

$$h_{11} = W = h_{22}, \quad h_{12} = 0 \quad \text{in } B$$

gilt, nehmen die Christoffel-Symbole der Immersion X folgende Form an:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{W_u}{2W}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{W_v}{2W}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{W_u}{2W}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{W_v}{2W}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{W_u}{2W}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{W_v}{2W}.\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir für G -Minimalflächen in gewichtet konformen Parametern

$$0 = \mathcal{H}_G = \frac{L_{11}h_{22} - 2L_{12}h_{12} + L_{22}h_{11}}{2W^2} = \frac{L_{11}W + L_{22}W}{2W^2} = \frac{L_{11} + L_{22}}{2W}$$

und somit

$$L_{11} + L_{22} = 0.$$

Wir berechnen nun unter Verwendung gewichtet konformer Parameter

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_{uu} + X_{vv} \\ &= (\Gamma_{11}^1 + \Omega_{11}^1)X_u + (\Gamma_{11}^2 + \Omega_{11}^2)X_v + L_{11}N \\ &\quad + (\Gamma_{22}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Gamma_{22}^2 + \Omega_{22}^2)X_v + L_{22}N \\ &= (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 + \Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + \Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v \\ &\quad + (L_{11} + L_{22})N \\ &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v.\end{aligned}$$

Damit haben wir ein elliptisches System für den Flächenvektor X . Die gewichteten Korrekturterme berechnen sich in gewichtet konformen Parametern zu

$$\Omega_{ii}^k = -\frac{1}{2}h^{kl}(\omega_{lii} + \omega_{ili} - \omega_{iil}) = -\frac{1}{2}h^{kl}(2\omega_{lii} - \omega_{iil}) = -\frac{1}{2W}(2\omega_{kii} - \omega_{iik}).$$

Satz 3.1 *Sei die G -Minimalfläche $X \in C^{2+\alpha}(B)$ in gewichtet konformen Parametern gegeben. Dann genügt der Flächenvektor $X = X(u, v)$ in B dem System*

$$\Delta X = (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v \quad (3.1)$$

mit den gewichteten Korrekturtermen

$$\Omega_{ii}^k = -\frac{1}{2W}(2\omega_{kii} - \omega_{iik}), \quad \omega_{ijk} = X_{u^i} \circ G_{u^k}(N) \circ X_{u^j}^t, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Bemerkung 3.1 *Wir bemerken die Kopplung des Systems mit dem Gradienten des Normalenvektors N über die gewichteten Korrekturterme Ω_{ii}^k .*

3.2 Ein elliptisches System für den Normalenvektor N

Unter Verwendung gewichtet konformer Parameter leiten wir durch Differenzieren der gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29) aus Abschnitt 1.5 ein elliptisches System für den Normalenvektor N her. Dazu benötigen wir noch einen Hilfssatz (vgl. [S3], S. 78).

Hilfssatz 3.1 *Für Immersionen X mit Normalenvektor N gelten in gewichtet konformen Parametern die Identitäten*

$$X_u \circ G(N) = X_v \wedge N, \quad X_v \circ G(N) = N \wedge X_u. \quad (3.2)$$

Beweis: Das Vektortripel

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{W}} X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{W}} X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}}, N \right\}$$

bildet ein orthonormiertes begleitendes Dreibein an die Fläche X . Dies sehen wir mit Hilfe der gewichteten Konformitätsrelationen

$$\begin{aligned} W &= X_{u^i} \circ G(N) \circ X_{u^i}^t \\ &= X_{u^i} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ X_{u^i}^t \\ &= \left(X_{u^i} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right) \circ \left(X_{u^i} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right)^t \\ &= \left| X_{u^i} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right|^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= X_u \circ G(N) \circ X_v^t \\ &= X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \circ X_v^t \\ &= \left(X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right) \circ \left(X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right)^t \end{aligned}$$

sowie unter Benutzung von Hilfssatz 2.2 aus Abschnitt 2.3

$$\begin{aligned} \left(X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right) \wedge \left(X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right) &= (X_u \wedge X_v) \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \\ &= |X_u \wedge X_v| \cdot N \circ G(N)^{-\frac{1}{2}} \\ &= WN \end{aligned}$$

ein. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} X_v \circ G(N)^{\frac{1}{2}} &= N \wedge \{X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \left\{ N \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right\} \wedge \left\{ X_u \circ G(N)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= (N \wedge X_u) \circ G(N)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

womit die zweite Identität in (3.2) bewiesen ist. Ferner berechnen wir

$$\begin{aligned} X_u &= (N \wedge X_u) \wedge N \\ &= \{X_v \circ G(N)\} \wedge \{N \circ G(N)\} \\ &= (X_v \wedge N) \circ G(N)^{-1} \end{aligned}$$

und somit die erste Identität.

q.e.d.

Für das elliptische System schreiben wir nun die gewichteten Weingartenschen Gleichungen

$$N_{u^i} = -L_{ij}h^{jk}X_{u^k} \circ G(N), \quad i = 1, 2,$$

unter Verwendung gewichtet konformer Parameter in der Form

$$N_u = -\frac{L_{11}}{W}X_u \circ G(N) - \frac{L_{12}}{W}X_v \circ G(N), \quad (3.3)$$

$$N_v = -\frac{L_{21}}{W}X_u \circ G(N) - \frac{L_{22}}{W}X_v \circ G(N). \quad (3.4)$$

Mit (3.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} N \wedge N_u &= -\frac{L_{11}}{W}N \wedge (X_u \circ G(N)) - \frac{L_{12}}{W}N \wedge (X_v \circ G(N)) \\ &= -\frac{L_{11}}{W}N \wedge (X_v \wedge N) - \frac{L_{12}}{W}N \wedge (N \wedge X_u) \\ &= -\frac{L_{11}}{W}X_v + \frac{L_{12}}{W}X_u \end{aligned}$$

und analog

$$N \wedge N_v = -\frac{L_{12}}{W}X_v + \frac{L_{22}}{W}X_u.$$

Nochmaliges Anwenden von (3.3) und (3.4) zusammen mit $L_{11} + L_{22} = 0$ liefert

$$\begin{aligned} N \wedge N_u &= \frac{L_{12}}{W}X_u + \frac{L_{22}}{W}X_v - \frac{L_{11} + L_{22}}{W}X_v = -N_v \circ G(N)^{-1}, \\ N \wedge N_v &= -\frac{L_{12}}{W}X_v - \frac{L_{11}}{W}X_u + \frac{L_{11} + L_{22}}{W}X_u = N_u \circ G(N)^{-1} \end{aligned}$$

und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} N_u &= (N \wedge N_v) \circ G(N), \\ N_v &= -(N \wedge N_u) \circ G(N). \end{aligned}$$

Wir differenzieren diese Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} N_{uu} &= (N_u \wedge N_v) \circ G(N) + (N \wedge N_{uv}) \circ G(N) \\ &\quad + (N \wedge N_v) \circ G_u(N), \\ N_{vv} &= -(N_v \wedge N_u) \circ G(N) - (N \wedge N_{uv}) \circ G(N) \\ &\quad - (N \wedge N_u) \circ G_v(N). \end{aligned}$$

Summation ergibt

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_{uu} + N_{vv} \\ &= 2(N_u \wedge N_v) \circ G(N) + (N \wedge N_v) \circ G_u(N) + (N_u \wedge N) \circ G_v(N) \\ &= 2\mathcal{K}WN \circ G(N) + (N \wedge N_v) \circ G_u(N) + (N_u \wedge N) \circ G_v(N) \\ &= 2\mathcal{K}WN + (N \wedge N_v) \circ G_u(N) + (N_u \wedge N) \circ G_v(N) \end{aligned}$$

mit der Gaußschen Krümmung \mathcal{K} . Wir beachten dabei

$$\begin{aligned}
N_u \wedge N_v &= \left\{ \frac{L_{11}}{W} X_u \circ G(N) + \frac{L_{12}}{W} X_v \circ G(N) \right\} \wedge \dots \\
&\quad \dots \wedge \left\{ \frac{L_{12}}{W} X_u \circ G(N) + \frac{L_{22}}{W} X_v \circ G(N) \right\} \\
&= \left(\frac{L_{11}L_{22}}{W^2} - \frac{L_{12}^2}{W^2} \right) (X_u \circ G(N)) \wedge (X_v \circ G(N)) \\
&= \mathcal{K}(X_u \wedge X_v) \circ G(N)^{-1} \\
&= \mathcal{K}(X_u \wedge X_v) = \mathcal{K}WN.
\end{aligned}$$

Somit haben wir den Beweis für

Satz 3.2 *Sei die G -Minimalfläche $X \in C^{3+\alpha}(B)$ in gewichtet konformen Parametern gegeben. Dann genügt ihr Normalenvektor $N = N(u, v) \in C^{2+\alpha}(B)$ in B dem System*

$$\begin{aligned}
\Delta N &= 2(N_u \wedge N_v) \circ G(N) + (N \wedge N_v) \circ G_u(N) + (N_u \wedge N) \circ G_v(N) \\
&= 2\mathcal{K}WN + (N \wedge N_v) \circ G_u(N) + (N_u \wedge N) \circ G_v(N).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Bemerkung 3.2 1. *Da die Gewichtsmatrix nur von der Normalen N abhängt, ist dieses System vom Flächenvektor X entkoppelt.*

2. *Wir werden in Abschnitt 3.4 noch ein alternatives System für den Normalenvektor in beliebigen Parametern herleiten.*

3.3 Abschätzung von $|\Delta X|$ und $|\Delta N|$

Unter Verwendung gewichtet konformer Parameter erhalten wir nun für die Ausdrücke $|\Delta X|$ und $|\Delta N|$ das quadratische Wachstum in den Gradienten. Um die nichtlinearen, elliptischen Systeme kontrollieren zu können, benötigen wir eine Abschätzung der Ableitungen der Gewichtsmatrix G . Dazu verhilft uns folgender

Hilfssatz 3.2 *Für einen beliebigen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$|\xi \circ G_{u^m}(Z)| \leq g_1 |Z_{u^m}| |\xi|, \quad m = 1, 2, \tag{3.6}$$

für alle $Z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit g_1 aus

$$\sqrt{\sum_{i,j,l=1}^3 G_{ij,z^l}(Z)^2} \leq g_1$$

(vgl. (1.7) in Abschnitt 1.2).

Beweis: Sei $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig gewählt. Dann berechnen wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung und unter Beachtung der Summenkonvention

$$\begin{aligned} |\xi \circ G_{u^m}(Z)|^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(G_{ij, z^k}(Z) z_{u^m}^k \xi^j \right)^2 \leq |\xi|^2 \sum_{i,j=1}^3 \left(G_{ij, z^k}(Z) z_{u^m}^k \right)^2 \\ &\leq |\xi|^2 |Z_{u^m}|^2 \sum_{i,j,k=1}^3 G_{ij, z^k}(Z)^2 \leq g_1^2 |\xi|^2 |Z_{u^m}|^2. \end{aligned}$$

q.e.d.

Hilfssatz 3.3 *Unter Verwendung gewichtet konformer Parameter gelten*

$$\begin{aligned} |\Omega_{11}^1| &\leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_u|, \\ |\Omega_{11}^2| &\leq (1+g_0)g_1 |N_u| + \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_v|, \\ |\Omega_{21}^1| = |\Omega_{12}^1| &\leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_v|, \\ |\Omega_{21}^2| = |\Omega_{12}^2| &\leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_u|, \\ |\Omega_{22}^1| &\leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_u| + (1+g_0)g_1 |N_v|, \\ |\Omega_{22}^2| &\leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_v|. \end{aligned}$$

Beweis: Zunächst gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| = 1$ bzw. $\eta \in \mathbb{R}^3$ mit $|\eta| = 1$ die Ungleichung

$$|\eta \circ A \circ \xi^t| = |\eta \circ (A \circ \xi^t)| \leq |\eta| \cdot |\xi \circ A| = |\xi \circ A|.$$

Wir schätzen dann wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |\Omega_{11}^1| &= \left| -\frac{1}{2} h^{11} \omega_{111} \right| = \frac{1}{2W} |X_u \circ G_u(N) \circ X_u^t| \\ &= \frac{|X_u|^2}{2W} \left| \frac{X_u}{|X_u|} \circ G_u(N) \circ \frac{X_u^t}{|X_u|} \right| \leq \frac{|X_u|^2}{2W} \left| \frac{X_u}{|X_u|} \circ G_u(N) \right|. \end{aligned}$$

Weiterhin beachten wir die Ungleichung

$$\frac{|X_{u^i}|^2}{W} \leq 1 + g_0, \quad i = 1, 2,$$

die aus der Elliptizitätsbedingung (G3) von $G(N)$ folgt, denn

$$\frac{1}{1+g_0} |X_{u^i}|^2 \leq X_{u^i} \circ G(N) \circ X_{u^i}^t = W, \quad i = 1, 2.$$

Mit Hilfssatz 3.2 ergibt sich dann

$$|\Omega_{11}^1| \leq \frac{|X_u|^2}{2W} \cdot g_1 |N_u| \left| \frac{X_u}{|X_u|} \right| \leq \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_u|.$$

Ebenso behandeln wir

$$\begin{aligned} \Omega_{11}^2 &= -\frac{1}{2}h^{22}(\omega_{211} + \omega_{121} - \omega_{112}) = -h^{22}\omega_{121} + \frac{1}{2}h^{22}\omega_{112} \\ &= -\frac{1}{W}X_u \circ G_u(N) \circ X_v^t + \frac{1}{2W}X_u \circ G_v(N) \circ X_u^t \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |\Omega_{11}^2| &\leq \frac{|X_u||X_v|}{W} \left| \frac{X_u}{|X_u|} \circ G_u(N) \circ \frac{X_v^t}{|X_v|} \right| + \frac{|X_u|^2}{2W} \left| \frac{X_u}{|X_u|} \circ G_v(N) \circ \frac{X_u^t}{|X_u|} \right| \\ &\leq \frac{|X_u|^2 + |X_v|^2}{2W} \left| \frac{X_v}{|X_v|} \circ G_u(N) \right| + \frac{|X_u|^2}{2W} \left| \frac{X_u}{|X_u|} \circ G_v(N) \right| \\ &\leq \frac{|X_u|^2 + |X_v|^2}{2W} g_1 |N_u| + \frac{|X_u|^2}{2W} g_1 |N_v| \\ &\leq (1+g_0)g_1 |N_u| + \frac{(1+g_0)g_1}{2} |N_v|. \end{aligned}$$

Die anderen Ungleichungen zeigt man analog.

q.e.d.

Satz 3.3 *Seien die gewichtet konform parametrisierte G -Minimalfläche $X \in C^{3+\alpha}(B)$ und ihr Normalenvektor $N \in C^{2+\alpha}(B)$ gegeben. Dann gelten in B*

$$|\Delta X| \leq 2(1+g_0)g_1 |\nabla X| |\nabla N|, \quad (3.7)$$

$$|\Delta N| \leq (1+g_1) |\nabla N|^2. \quad (3.8)$$

Beweis: Aus (3.1) und Hilfssatz 3.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} |\Delta X| &\leq (|\Omega_{11}^1| + |\Omega_{22}^1|) |X_u| + (|\Omega_{11}^2| + |\Omega_{22}^2|) |X_v| \\ &\leq (1+g_0)g_1 (|N_u| + |N_v|) (|X_u| + |X_v|) \\ &\leq 2(1+g_0)g_1 |\nabla X| |\nabla N|, \end{aligned}$$

wenn wir noch die Ungleichung $a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ für $a, b > 0$ beachten. Gleichung (3.5) und Hilfssatz 3.2 liefern uns

$$\begin{aligned} |\Delta N| &\leq 2|N_u \wedge N_v| + |(N \wedge N_v) \circ G_u(N)| + |(N_u \wedge N) \circ G_v(N)| \\ &\leq 2|N_u \wedge N_v| + g_1 |N \wedge N_v| |N_u| + g_1 |N_u \wedge N| |N_v| \\ &\leq 2|N_u| |N_v| + g_1 |N_v| |N_u| + g_1 |N_u| |N_v| \\ &\leq (1+g_1) |\nabla N|^2, \end{aligned}$$

wobei wir $2|a \wedge b| \leq 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$ für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ anwenden.

q.e.d.

3.4 Ein alternatives elliptisches System für N in beliebigen Parametern

Ausgehend von einer Störung der Immersion X in Normalenrichtung der gewichteten mittleren Krümmung $\mathcal{H}_G(X)$, welche wir im Anhang behandeln, erhalten wir in erster Ordnung einen elliptischen Operator

$$\mathcal{L}_G := h^{ji} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} + P^r \frac{\partial}{\partial u^r} + c$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned} P^r &:= -(\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} + h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}, \quad r = 1, 2, \\ c &:= L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li} = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}). \end{aligned}$$

Wir beachten für den gesamten Abschnitt die Summenkonvention bei unten und oben auftretenden gleichen Indizes, für lateinische Indizes von 1 bis 2, für griechische Indizes von 1 bis 3. Weiter definieren wir mit Y^μ die μ -te Komponente des Vektors $Y \in \mathbb{R}^3$.

Wir zeigen nun, dass der Normalenvektor $N \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ das elliptische System

$$\mathcal{L}_G N = h^{ji} N_{u^i u^j} + P^r N_{u^r} + cN = 0 \quad \text{in } \Omega$$

erfüllt. Unter Verwendung der gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29) aus Abschnitt 1.5 beginnen wir mit

$$\begin{aligned} h^{ji} N_{u^i u^j} &= h^{ji} \{-L_{is} h^{sk} X_{u^k} \circ G\}_{u^j} \\ &= -h^{ji} L_{is, u^j} h^{sk} X_{u^k} \circ G - h^{ji} L_{is} h_{u^j}^{sk} X_{u^k} \circ G - h^{ji} L_{is} h^{sk} (\partial_k X \circ G)_{u^j}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Aus dem Beweis der gewichteten Codazzi-Mainardi-Gleichungen aus Abschnitt 1.6 nutzen wir die Identität

$$\begin{aligned} h^{ji} L_{is, u^j} h^{sk} &= h^{ji} L_{ij, u^s} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} - h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk} \\ &= (h^{ji} L_{ij})_{u^s} h^{sk} - h_{u^s}^{ji} L_{ij} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} \\ &\quad - h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk} \\ &= H_{G, u^s} h^{sk} - h_{u^s}^{ji} L_{ij} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} \\ &\quad - h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk} \\ &= -h_{u^s}^{ji} L_{ij} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} - h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk}, \end{aligned}$$

welche wir in (3.9) einsetzen:

$$\begin{aligned} h^{ji} N_{u^i u^j} &= \left(h_{u^s}^{ji} L_{ij} h^{sk} - h^{ji} L_{is} h_{u^j}^{sk} \right) X_{u^k} \circ G \\ &\quad + \left(-h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk} \right) X_{u^k} \circ G \\ &\quad - h^{ji} L_{is} h^{sk} (X_{u^k} \circ G)_{u^j} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Um $(X_{u^k} \circ G)_{uj}$ zu berechnen, drücken wir den Vektor $X_{u^k} \circ G$ mit Hilfe des begleitenden Dreibeins $\{X_u, X_v, N\}$ aus. Wir machen den Ansatz

$$X_{u^k} \circ G = v^m X_{u^m} + \langle X_{u^k} \circ G, N \rangle N = v^m X_{u^m}.$$

Eine skalare Multiplikation mit X_{u^l} liefert uns dann

$$h_{kl} = \langle X_{u^k} \circ G, X_{u^l} \rangle = v^m \langle X_{u^m}, X_{u^l} \rangle = v^m g_{ml}$$

bzw.

$$v^m = h_{kl} g^{lm}.$$

Somit ergibt sich unter Beachtung der gewichteten Gaußschen Ableitungsgleichungen (1.31) aus Abschnitt 1.5,

$$\begin{aligned} (X_{u^k} \circ G)_{uj} &= h_{kl,uj} g^{lm} X_{u^m} + h_{kl} g_{uj}^{lm} X_{u^m} + h_{kl} g^{lm} X_{u^m u^j} \\ &= h_{kl,uj} g^{lm} X_{u^m} + h_{kl} g_{uj}^{lm} X_{u^m} + h_{kl} g^{lm} (\Gamma_{mj}^k + \Omega_{mj}^k) X_{u^k} \\ &\quad + h_{kl} g^{lm} L_{mj} N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir müssen nun die Ableitungen der gewichteten und nichtgewichteten ersten Fundamentalforn bzw. ihrer Inversen berechnen. Aus

$$0 = (\delta_l^i)_{u^s} = (h^{ij} h_{jl})_{u^s} = h_{u^s}^{ij} h_{jl} + h^{ij} h_{jl, u^s}$$

folgt zunächst

$$h_{u^s}^{ik} = -h^{ij} h_{jl, u^s} h^{lk}$$

und analog

$$g_{u^j}^{lm} = -g^{li} g_{ik, u^j} g^{km}.$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} h_{jl, u^s} &= \langle X_{u^j u^s} \circ G, X_{u^l} \rangle + \langle X_{u^j} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle + \langle X_{u^j} \circ G, X_{u^l u^s} \rangle \\ &= (\Gamma_{js}^m + \Omega_{js}^m) h_{ml} + (\Gamma_{ls}^m + \Omega_{ls}^m) h_{jm} + \langle X_{u^j} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle, \\ g_{ik, u^j} &= \langle X_{u^i u^j}, X_{u^k} \rangle + \langle X_{u^i}, X_{u^k u^j} \rangle \\ &= (\Gamma_{ij}^s + \Omega_{ij}^s) g_{sk} + (\Gamma_{kj}^s + \Omega_{kj}^s) g_{is} \end{aligned} \quad (3.12)$$

und erhalten

$$h_{u^s}^{ik} = -h^{ij} (\Gamma_{js}^k + \Omega_{js}^k) - (\Gamma_{ls}^i + \Omega_{ls}^i) h^{lk} - h^{ij} \langle X_{u^j} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle h^{lk}, \quad (3.13)$$

$$g_{u^j}^{lm} = -g^{li} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) - (\Gamma_{kj}^l + \Omega_{kj}^l) g^{km}. \quad (3.14)$$

Einsetzen von (3.12) und (3.14) in (3.11) ergibt

$$\begin{aligned} (X_{u^k} \circ G)_{uj} &= (\Gamma_{kj}^m + \Omega_{kj}^m) h_{ml} g^{lr} X_{u^r} + (\Gamma_{lj}^m + \Omega_{lj}^m) h_{km} g^{lr} X_{u^r} \\ &\quad + \langle X_{u^k} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle g^{lr} X_{u^r} - h_{kl} g^{li} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) X_{u^m} \\ &\quad - h_{kl} (\Gamma_{kj}^l + \Omega_{kj}^l) g^{km} X_{u^m} + h_{kl} g^{lm} (\Gamma_{mj}^k + \Omega_{mj}^k) X_{u^k} \\ &\quad + h_{kl} g^{lm} L_{mj} N \\ &= (\Gamma_{kj}^m + \Omega_{kj}^m) h_{ml} g^{lr} X_{u^r} + \langle X_{u^k} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle g^{lr} X_{u^r} + h_{kl} g^{lm} L_{mj} N \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wir setzen nun (3.13) und (3.15) in (3.10) ein und erhalten zunächst

$$\begin{aligned}
& h^{ji} N_{u^i u^j} \\
= & \left\{ -h^{jm} (\Gamma_{ms}^i + \Omega_{ms}^i) L_{ij} h^{sk} - (\Gamma_{ls}^j + \Omega_{ls}^j) h^{li} L_{ij} h^{sk} - h^{jm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle h^{li} L_{ij} h^{sk} \right. \\
& + h^{ji} L_{is} h^{sm} (\Gamma_{mj}^k + \Omega_{mj}^k) + h^{ji} L_{is} (\Gamma_{lj}^s + \Omega_{lj}^s) h^{lk} + h^{ji} L_{is} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle h^{lk} \\
& \left. - h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} + h^{ji} (\Gamma_{is}^m + \Omega_{is}^m) L_{mj} h^{sk} \right\} X_{u^k} \circ G \\
& - h^{ji} L_{is} h^{sk} (\Gamma_{kj}^m + \Omega_{kj}^m) h_{ml} g^{lr} X_{ur} - h^{ji} L_{is} h^{sk} \langle X_{u^k} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle g^{lr} X_{ur} \\
& - h^{ji} L_{is} h^{sk} h_{kl} g^{lm} L_{mj} N \\
= & -h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} X_{u^k} \circ G - h^{jm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle h^{li} L_{ij} h^{sk} X_{u^k} \circ G \\
& + h^{ji} L_{is} h^{sm} (\Gamma_{mj}^k + \Omega_{mj}^k) X_{u^k} \circ G - h^{ji} L_{is} h^{sk} (\Gamma_{kj}^m + \Omega_{kj}^m) h_{ml} g^{lr} X_{ur} \\
& h^{ji} L_{is} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle h^{lk} X_{u^k} \circ G - h^{ji} L_{is} h^{sk} \langle X_{u^k} \circ G_{u^j}, X_{u^l} \rangle g^{lr} X_{ur} \\
& - h^{ji} L_{il} g^{lm} L_{mj} N \\
= & -h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} X_{u^k} \circ G - h^{jm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle h^{li} L_{ij} h^{sk} X_{u^k} \circ G \\
& - L_{il} g^{lm} L_{mj} h^{ji} N, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

wenn wir beim letzten Gleichheitszeichen noch $X_{u^k} \circ G = h_{kl} g^{lm} X_{u^m}$ beachten. In der geschweiften Klammer summieren sich die 1., 2., 5. und 8. Summanden außerdem zu Null. Mit

$$\begin{aligned}
c & = L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G, X_{u^m} \circ G \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li} \\
& = L_{ij} h^{jk} \langle h_{kr} g^{rt} X_{u^t}, X_{u^m} \circ G \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li} \\
& = L_{ij} h^{jk} h_{kr} g^{rt} h_{tm} h^{ms} L_{sl} h^{li} \\
& = L_{ij} g^{js} L_{sl} h^{li} = \text{spur} (L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1})
\end{aligned}$$

haben wir in Gleichung (3.16) bereits den Term cN erreicht. Wir benutzen nun folgende Vertauschungsregel, um auf den Term $P^r N_{ur}$ zu gelangen: Für jeden Vektor $V \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle V, N_{u^i} \rangle h^{ij} X_{u^j} \circ G = \langle V, X_{u^i} \circ G \rangle h^{ij} N_{u^j}. \tag{3.17}$$

Um dies zu zeigen, benutzen wir die gewichteten Weingartenschen Gleichungen und berechnen

$$\begin{aligned}
\langle V, N_{u^i} \rangle h^{ij} X_{u^j} \circ G & = -\langle V, X_{u^k} \circ G \rangle L_{il} h^{lk} h^{ij} X_{u^j} \circ G \\
& = -\langle V, X_{u^k} \circ G \rangle h^{kl} L_{li} h^{ij} X_{u^j} \circ G \\
& = \langle V, X_{u^k} \circ G \rangle h^{kl} N_{u^l}.
\end{aligned}$$

Wir schreiben nun

$$\langle X_{u^m} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle = \langle X_{u^m} \circ G_{z^\mu}, X_{u^l} \rangle N_{u^s}^\mu = \langle V_{ml}, N_{u^s} \rangle$$

mit Hilfe des Vektors $V_{ml} \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten

$$V_{ml}^\mu := \langle X_{u^m} \circ G_{z^\mu}, X_{u^l} \rangle, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Die Vertauschungsregel (3.17) liefert dann

$$\langle V_{ml}, N_{u^s} \rangle h^{sk} X_{u^k} \circ G = \langle V_{ml}, X_{u^s} \circ G \rangle h^{sk} N_{u^k}.$$

Somit haben wir in (3.16)

$$\begin{aligned} h^{ji} N_{u^i u^j} &= -h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) L_{ms} h^{sk} X_{u^k} \circ G - h^{jm} \langle X_{u^m} \circ G_{u^s}, X_{u^l} \rangle h^{li} L_{ij} h^{sk} X_{u^k} \circ G \\ &\quad - L_{il} g^{lm} L_{mj} h^{ji} N \\ &= h^{ji} (\Gamma_{ij}^m + \Omega_{ij}^m) N_{u^m} - h^{li} L_{ij} h^{jm} \langle X_{u^m} \circ G_{z^\mu}, X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G)^\mu h^{sk} N_{u^k} - cN \\ &= -P^m N_{u^m} - cN, \end{aligned}$$

womit

$$\mathcal{L}_G N = h^{ji} N_{u^i u^j} + P^m N_{u^m} + cN = 0$$

gezeigt ist. Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

Satz 3.4 *Sei die G -Minimalfläche $X \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ gegeben. Dann genügt ihr Normalenvektor $N \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ dem elliptischen System*

$$\mathcal{L}_G N := h^{ji} N_{u^i u^j} + P^r N_{u^r} + cN = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.18)$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned} P^r &:= -(\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} + h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}, \quad r = 1, 2, \\ c &:= \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3 1. *Werten wir das System (3.18) in gewichtet konformen Parametern aus, so erhalten wir es in der Form*

$$\Delta N = aX_u \circ G(N) + bX_v \circ G(N) - |\nabla N|^2 N$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{W} \{(\Omega_{11}^1 - 2\Omega_{12}^2 - \Omega_{22}^1) L_{11} + (\Omega_{11}^2 + 2\Omega_{12}^1 - \Omega_{22}^2) L_{12}\}, \\ b &= \frac{1}{W} \{(\Omega_{11}^2 + 2\Omega_{12}^1 - \Omega_{22}^2) L_{11} + (\Omega_{22}^1 + 2\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}^1) L_{12}\}. \end{aligned}$$

Dieses System wurde bereits in [Fr], Abschnitt 2.31.1, hergeleitet.

2. *Im Minimalflächenfall erhalten wir*

$$h^{ij} = g^{ij}, \quad P^r = -\Gamma_{ij}^r g^{ji}, \quad c = \text{spur}((L \circ g^{-1})^2),$$

und somit die bereits bekannte Differentialgleichung für die Normale

$$\mathcal{L}_G N = \Delta N + \text{spur}((L \circ g^{-1})^2) N = 0$$

mit dem Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta := \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(W g^{il} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = g^{il} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} - g^{ik} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial u^l},$$

der in konformen Parametern dem mit dem Vorfaktor $\frac{1}{W}$ multiplizierten Laplace-

Operator $\frac{1}{W} \Delta := \frac{1}{W} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$ entspricht.

Kapitel 4

Dirichletproblem für strikt konvexe Gebiete - die Kontinuitätsmethode

Ausgehend von der quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung für G -minimale Graphen aus Abschnitt 2.2 stellen wir uns nun zunächst folgendes Dirichletproblem $\mathcal{DP}(\varphi)$: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet mit einer regulären $C^{2+\alpha}$ -Jordankurve $\partial\Omega$ als Berandung. Wir geben uns eine Gewichtsmatrix

$$G = G(Z) = (G_{ij}(Z))_{i,j=1,2,3} \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

mit den Eigenschaften (G1) bis (G4) aus Abschnitt 1.2 vor. Zu Dirichlet-Randdaten $\varphi = \varphi(x, y) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ zeigen wir mit der Kontinuitätsmethode die Existenz einer eindeutigen Lösung $\zeta = \zeta(x, y) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{DP}(\varphi) : \quad \mathcal{M}_G \zeta := a(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{yy} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit den $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ -Koeffizientenfunktionen (bzgl. p, q)

$$\begin{aligned} a(\zeta_x, \zeta_y) &= \tilde{G}_{22}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_y \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y), \\ b(\zeta_x, \zeta_y) &= - \left[\tilde{G}_{12}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \tilde{G}_{23}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_y \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x \zeta_y \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y) \right], \\ c(\zeta_x, \zeta_y) &= \tilde{G}_{11}(\zeta_x, \zeta_y) + 2\zeta_x \tilde{G}_{13}(\zeta_x, \zeta_y) + \zeta_x^2 \tilde{G}_{33}(\zeta_x, \zeta_y) \end{aligned}$$

und der Setzung $\tilde{G}_{ij}(\zeta_x, \zeta_y) = G_{ij}((-\zeta_x, -\zeta_y, 1)) = G_{ij}(N)$ mit der Normalen

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}} (-\zeta_x, -\zeta_y, 1).$$

Dabei ist die Elliptizitätsbedingung

$$0 < \frac{1}{1 + g_0} |\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} a(p, q) & b(p, q) \\ b(p, q) & c(p, q) \end{pmatrix} \circ \xi^t \leq (1 + g_0)(1 + p^2 + q^2) |\xi|^2$$

für alle $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2$ und für alle $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

Dazu leiten wir in den Abschnitten 4.1 bis 4.4 sukzessiv eine a priori $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung bis zum Rand der Lösung ζ her, die wir für den Beweis der Graphenkompaktheit in Abschnitt 4.5 benötigen. Es sei bemerkt, dass wir bei jeder Abschätzung nur die minimale Regularität von ζ voraussetzen. Zusammen mit der Graphenstabilität in Abschnitt 4.6 erhalten wir dann die eindeutige Lösbarkeit des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ in Abschnitt 4.7. Dabei geht die genaue Struktur der Koeffizienten der Differentialgleichung nicht in die Beweise ein, sondern nur die Quasilinearität und Elliptizität.

Bemerkung 4.1 1. Wir bemerken zunächst mit [GT], Hilfssatz 6.38., dass die Randfunktion $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ in der gleichen Regularitätsklasse auf eine global definierte Funktion $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\Phi = \varphi$ auf $\partial\Omega$ fortgesetzt werden kann. Es sei also o.B.d.A. sofort $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, wenn wir dies in den Beweisen benötigen, auch wenn in den Voraussetzungen nur $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ angenommen wird.

2. Wir beachten noch, dass jede Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ sofort zur Klasse $C^{3+\alpha}(\Omega)$ gehört. Denn die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung sind insbesondere $C^{1+\alpha}$ -Funktionen, und mit Hilfe der inneren Schaudertheorie erhalten wir die höhere Regularität für ζ . Demnach gilt für den Normalenvektor $N \in C^{2+\alpha}(\Omega)$.

Zu Beginn definieren wir für eine Funktion $f = f(x) = f(x^1, x^2) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ noch folgende Größen

$$\begin{aligned} \|f\|_0^\Omega &:= \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, & \|f\|_{0,\alpha}^\Omega &:= \sup_{\substack{x', x'' \in \Omega \\ x' \neq x''}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}, \\ \|f\|_1^\Omega &:= \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^2 |f_{x^i}(x)|, & \|f\|_{1,\alpha}^\Omega &:= \sup_{\substack{x', x'' \in \Omega \\ x' \neq x''}} \sum_{i=1}^2 \frac{|f_{x^i}(x') - f_{x^i}(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}, \\ \|f\|_2^\Omega &:= \sup_{x \in \Omega} \sum_{i,j=1}^2 |f_{x^i x^j}(x)|, & \|f\|_{2,\alpha}^\Omega &:= \sup_{\substack{x', x'' \in \Omega \\ x' \neq x''}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{|f_{x^i x^j}(x') - f_{x^i x^j}(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}, \end{aligned}$$

sowie die Normen

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha^\Omega &:= \|f\|_0^\Omega + \|f\|_{0,\alpha}^\Omega, \\ \|f\|_{1+\alpha}^\Omega &:= \|f\|_0^\Omega + \|f\|_1^\Omega + \|f\|_{1,\alpha}^\Omega, \\ \|f\|_{2+\alpha}^\Omega &:= \|f\|_0^\Omega + \|f\|_1^\Omega + \|f\|_2^\Omega + \|f\|_{2,\alpha}^\Omega \end{aligned}$$

in den Räumen $C^\alpha(\overline{\Omega})$, $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ bzw. $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

4.1 C^0 -Abschätzung und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt benötigen wir noch keine weitere Einschränkung an das Gebiet Ω . Es sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet.

Satz 4.1 Sei $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ aus (4.1) zu einer Randverteilung $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann gilt die C^0 -Abschätzung

$$\sup_{\Omega} |\zeta(x, y)| \leq \sup_{\partial\Omega} |\zeta(x, y)|. \quad (4.2)$$

Beweis: Wir erinnern uns an den Vergleichssatz für quasilineare, elliptische Operatoren \mathcal{M}_G (vgl. [GT], Satz 10.1.):

Seien $\zeta, \eta \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ zwei Funktionen, die

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &\leq \mathcal{M}_G \eta \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &\geq \eta \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllen, dann gilt $\zeta \geq \eta$ in Ω .

Wir wählen als Vergleichsfunktion zunächst die konstante Funktion

$$\eta_1(x, y) := \sup_{\partial\Omega} |\varphi(x, y)|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \\ &= a(\eta_{1,x}, \eta_{1,y})\eta_{1,xx} + 2b(\eta_{1,x}, \eta_{1,y})\eta_{1,xy} + c(\eta_{1,x}, \eta_{1,y})\eta_{1,yy} \\ &= \mathcal{M}_G \eta_1 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &\leq \eta_1 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und somit $\zeta \leq \eta_1$ in Ω . Ebenso haben wir für $\eta_2(x, y) := -\sup_{\partial\Omega} |\varphi(x, y)|$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= \mathcal{M}_G \eta_2 \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &\geq \eta_2 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und somit $\zeta \geq \eta_2$ in Ω . Insgesamt erhalten wir

$$-\sup_{\partial\Omega} |\varphi(x, y)| = \eta_2(x, y) \leq \zeta(x, y) \leq \eta_1(x, y) = \sup_{\partial\Omega} |\varphi(x, y)| \quad \text{in } \Omega,$$

woraus $\sup_{\Omega} |\zeta(x, y)| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi(x, y)|$ folgt.

q.e.d.

Bemerkung 4.2 Für Nullrandwerte $\varphi \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ erhalten wir mit Satz 4.1 sofort die triviale Lösung $\zeta \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$.

Satz 4.2 (Eindeutigkeit) Seien $\zeta, \eta \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ zwei Funktionen, die das Dirichletproblem $\mathcal{DP}(\varphi)$ zur stetigen Randfunktion $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ lösen. Dann gilt $\zeta \equiv \eta$ in Ω .

Beweis: Aus

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= \mathcal{M}_G \eta \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \eta \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

folgt ebenfalls mit dem Vergleichssatz für quasilineare, elliptische Operatoren die Identität $\zeta \equiv \eta$ in Ω .

q.e.d.

4.2 Randgradientenabschätzung

Für die Randgradientenabschätzung benötigen wir explizit, dass Ω ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet ist. Wir führen dazu zunächst die folgende Definition ein.

Definition 4.1 *Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nennen wir strikt konvex zum Parameter $\kappa > 0$, falls es zu jedem Randpunkt $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ eine Stütz-Kreisscheibe $B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$ mit Radius $\frac{1}{\kappa} > 0$ und Mittelpunkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass*

$$(i) \quad \Omega \subset B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$$

$$(ii) \quad (x_0, y_0) \in \partial B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$$

gilt.

Bemerkung 4.3 *1. Der Rand der Stütz-Kreisscheibe besitzt in jedem Punkt die Krümmung κ . In der Literatur (z.B. [S1]) taucht daher auch die Bezeichnung κ -konvexes Gebiet auf. Solche Gebiete sind also in jedem Randpunkt „echt“ gekrümmt mit einer nach unten durch $\kappa > 0$ beschränkten Krümmung.*

2. Jedes strikt konvexe Gebiet ist konvex. Die Umkehrung gilt nicht. Konvexe Gebiete D mit der Eigenschaft $z_1, z_2 \in D \Rightarrow tz_1 + (1-t)z_2 \in D$, $t \in [0, 1]$, können im Gegensatz zu strikt konvexen Gebieten auch durch lineare Randstücke berandet sein.

Für die Jordankurve $\Gamma := \{(x, y, \varphi(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\Omega\}$ definieren wir noch eine gleichmäßige Stützebenenbedingung, die uns dann eine Randgradientenabschätzung liefert.

Definition 4.2 *Die Jordankurve Γ mit $\varphi = \varphi(x, y) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genügt einer gleichmäßigen Stützebenenbedingung, falls zu jedem Punkt $P_0 := (x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \in \Gamma$ Vektoren $a_{(x_0, y_0)}^\pm \in \mathbb{R}^2$ existieren, so dass für die Ebenen*

$$\pi_{(x_0, y_0)}^\pm(x, y) = a_{(x_0, y_0)}^\pm \cdot (x - x_0, y - y_0)^t + \varphi(x_0, y_0), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

gilt:

1. $\pi_{(x_0, y_0)}^-(x, y) \leq \varphi(x, y) \leq \pi_{(x_0, y_0)}^+(x, y)$ für alle $(x, y), (x_0, y_0) \in \partial\Omega$
2. $|\nabla \pi_{(x_0, y_0)}^\pm| = |a_{(x_0, y_0)}^\pm| \leq L$ für alle $(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \in \Gamma$

mit einer Konstanten $L \geq 0$ unabhängig vom Punkt $P_0 \in \Gamma$.

Bemerkung 4.4 *Die Kurve Γ ist dann also in jedem Punkt $P_0 \in \Gamma$ nach unten und oben auf dem Zylinder $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ beschränkt durch die Ebenen $\pi_{(x_0, y_0)}^\pm$ und stimmt in P_0 mit ihnen überein. Die Anstiege dieser Ebenen sind gleichmäßig beschränkt durch eine von P_0 unabhängige Konstante L .*

Unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet Ω und die Randwerte φ erfüllt Γ solch eine gleichmäßige Stützebenenbedingung.

Hilfssatz 4.1 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet zum Parameter κ mit der Randregularität $\partial\Omega \in C^2$ und φ eine auf ganz $\bar{\Omega}$ definierte Funktion mit $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ gegeben. Dann erfüllt $\Gamma = \{(x, y, \varphi(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\Omega\}$ eine gleichmäßige Stützebenenbedingung.

Beweis: Sei $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ ein beliebiger Randpunkt. Wir konstruieren zunächst eine untere Stützebene $\pi_{(x_0, y_0)}^-$. Da Ω strikt konvex ist, existiert eine Stütz-Kreisscheibe $B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$ mit $\Omega \subset B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$ und $(x_0, y_0) \in \partial B_{\frac{1}{\kappa}}(x^*, y^*)$. Daraus erhalten wir insbesondere

$$(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 \leq \frac{1}{\kappa^2}, \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

sowie

$$(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

Zu $c > 0$ betrachten wir nun die Funktion

$$\tilde{\varphi}(x, y) := \varphi(x, y) + c \left((x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right), \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

und beachten

$$\tilde{\varphi}(x, y) \leq \varphi(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\varphi}(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0). \quad (4.4)$$

Weiter berechnen wir den Gradient $\nabla\tilde{\varphi}$ und die Hesse-Matrix $H_{\tilde{\varphi}}$,

$$\nabla\tilde{\varphi}(x, y) = \nabla\varphi(x, y) + 2c(x - x^*, y - y^*), \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$H_{\tilde{\varphi}}(x, y) = H_{\varphi}(x, y) + 2c\mathbb{E}^2, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Da die Einheitsmatrix \mathbb{E}^2 positiv definit ist, können wir nun $c = c(\|\varphi\|_2^\Omega) > 0$ so groß wählen, dass $H_{\tilde{\varphi}}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \bar{\Omega}$ positiv definit ist. Damit ist die Funktion $\tilde{\varphi}$ in $\bar{\Omega}$ konvex und eine Taylorentwicklung um $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ liefert

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, y) &= \tilde{\varphi}(x_0, y_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^t \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) \circ H_{\tilde{\varphi}}(x', y') \circ (x - x_0, y - y_0)^t \\ &\geq \tilde{\varphi}(x_0, y_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^t, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

mit $x_0 < x' < x$ und $y_0 < y' < y$. Zusammen mit (4.3) und (4.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &\geq \tilde{\varphi}(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x_0, y_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^t \\ &= \varphi(x_0, y_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^t, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\pi_{(x_0, y_0)}^-(x, y) := \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^t + \varphi(x_0, y_0)$, und für $a_{(x_0, y_0)}^- := \nabla\tilde{\varphi}(x_0, y_0)$ gilt die Abschätzung

$$|a_{(x_0, y_0)}^-| \leq |\nabla\varphi(x_0, y_0)| + 2c|(x_0 - x^*, y_0 - y^*)| \leq \|\varphi\|_1^{\partial\Omega} + 2c\frac{1}{\kappa} =: L \quad (4.5)$$

mit einer Konstante $L = L(\|\varphi\|_2^\Omega, \kappa)$ unabhängig von $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Wir beachten, dass c von $\|\varphi\|_2^\Omega$ abhängt. Somit haben wir eine untere Stützebene gefunden. Für eine obere Stützebene konstruieren wir mit obigen Rechnungen eine untere Stützebene zu $-\varphi$. q.e.d.

Bemerkung 4.5 In der Literatur wird die gleichmäßige Stützebenenbedingung aus Definition 4.2 als „bounded slope condition“ bezeichnet. Sie ist in zwei Dimensionen für beschränkte, konvexe Gebiete äquivalent zur Drei-Punkte-Bedingung, wo jede Wahl von drei Punkten auf Γ in einer Ebene mit beschränktem Anstieg liegt (Beweis siehe [GT], S. 314/315). Schauder zeigt 1933 in [Sch], §2, für ein Ovalgebiet Ω mit überall positiver Randkrümmung und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $x(s), y(s), z(s)$ für die Randkurvendarstellung $\Gamma = \{(x = x(s), y = y(s), z = z(s)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq s \leq l\}$ solch eine Drei-Punkte-Bedingung. Miranda beweist 1965 in [Mi], Satz 6.2, für beschränkte, gleichmäßig konvexe Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, und $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine „bounded slope condition“, während Hartman 1966 in seiner Arbeit [Ha], Folgerung 4.3., die geringere Regularität $\partial\Omega \in C^{1+1}$ und $\varphi \in C^{1+1}(\partial\Omega)$ für den Beweis benötigt. Da wir aber für weitere Sätze die höhere Regularität $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ und $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ benutzen, genügt es, die stärkeren Voraussetzungen aus Hilfssatz 4.1 zu fordern.

Mit Hilfe der Methode der Barrierefunktionen können wir nun den Gradienten einer Lösung des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ am Rand nach oben durch eine Konstante abschätzen.

Satz 4.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet zum Parameter κ mit der Randregularität $\partial\Omega \in C^2$. Zu Randdaten $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ betrachten wir eine Lösung $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems für G -minimale Graphen $\mathcal{DP}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann gilt die Randgradientenabschätzung

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla \zeta| \leq L \tag{4.6}$$

mit der Konstanten $L = L(\|\varphi\|_2^\Omega, \kappa) \geq 0$ aus (4.5).

Beweis: Mit Hilfssatz 4.1 erfüllt die Jordankurve Γ eine gleichmäßige Stützebenenbedingung. Sei $(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \in \Gamma$ beliebig, dann wählen wir als Barrierefunktionen die Ebenen $\pi_{(x_0, y_0)}^\pm$ mit $|\nabla \pi_{(x_0, y_0)}^\pm| \leq L$ aus dem Beweis von Hilfssatz 4.1. Der Vergleichssatz für quasilineare, elliptische Operatoren liefert uns wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta = 0 &= \mathcal{M}_G \pi_{(x_0, y_0)}^\pm \quad \text{in } \Omega, \\ \pi_{(x_0, y_0)}^- &\leq \zeta = \varphi \leq \pi_{(x_0, y_0)}^+ \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Ungleichung

$$\pi_{(x_0, y_0)}^- \leq \zeta \leq \pi_{(x_0, y_0)}^+ \quad \text{in } \Omega.$$

Zusammen mit

$$\pi_{(x_0, y_0)}^\pm(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0) = \zeta(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in \partial\Omega,$$

folgt schließlich

$$|\nabla \zeta(x_0, y_0)| \leq |\nabla \pi_{(x_0, y_0)}^\pm| \leq L \quad \text{für alle } (x_0, y_0) \in \partial\Omega$$

und somit die gewünschte Randgradientenabschätzung.

q.e.d.

- Bemerkung 4.6** 1. Eine Randgradientenabschätzung kann auch für reguläre, konvexe Gebiete gemäß [GT], Satz 14.2, erbracht werden. Dazu müssen aber die Strukturbedingungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung (4.1) überprüft werden. Aufgrund der Approximation am Ende unserer Arbeit genügt es, in einer dichten Teilklasse zu arbeiten und nur die Voraussetzungen von Satz 4.3 für die Randgradientenabschätzung zu fordern.
2. Bergner und Dittrich zeigen in [BD] eine Randgradientenabschätzung direkt für Graphen vorgeschriebener gewichteter mittlerer Krümmung in konvexen Gebieten (falls $n = 2$).

4.3 Innere Gradientenabschätzung

Es genügt wieder, Ω als ein beschränktes Gebiet aufzufassen.

Für den Beweis einer inneren Gradientenabschätzung benutzen wir die Differentialgleichung der Normalen in beliebigen Parametern in der Form

$$\mathcal{L}_G N := h^{ij} N_{u^i u^j} + P^r N_{u^r} + cN = 0 \quad \text{in } \Omega$$

aus Abschnitt 3.4 mit den Koeffizientenfunktionen

$$P^r = -(\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} + h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}, \quad r = 1, 2,$$

$$c = L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li} = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}).$$

Entscheidend ist dabei das Vorzeichen von c , um ein Minimumprinzip auf die Differentialgleichung anwenden zu können. Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 4.2 Für die Koeffizientenfunktion $c = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1})$ gilt die Vorzeichenbedingung

$$c \geq 0.$$

Beweis: Wir benötigen folgende Ungleichung

$$4(\mathcal{H}_G)^2 = (\text{spur}(L \circ h^{-1}))^2 \leq \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}) \text{spur}(h^{-1}),$$

die unter einer beliebigen Parameterwahl invariant bleibt. Zum Beweis genügt also eine spezielle Parametrisierung, die wir wie folgt wählen: Zum gegebenen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$ sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, welche $X(0) = p_0$, $g(0) = \mathbb{E}^2$ und $L(0) = (\kappa_1, \kappa_2) \circ \mathbb{E}^2$ erfüllt mit den Hauptkrümmungen κ_i , $i = 1, 2$, der Fläche X im Punkt p_0 . Dann gilt

$$\begin{aligned} 4(\mathcal{H}_G)^2 = (\text{spur}(L \circ h^{-1}))^2 &= \left(\sum_{i=1}^2 \kappa_i h^{ii} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^2 \kappa_i^2 h^{ii} \right) \left(\sum_{i=1}^2 h^{ii} \right) \\ &= \text{spur}(L \circ L \circ h^{-1}) \text{spur}(h^{-1}) \\ &= \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}) \text{spur}(h^{-1}). \end{aligned}$$

Wegen $0 = 4(\mathcal{H}_G)^2 \leq \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}) \text{spur}(h^{-1})$ und $\text{spur}(h^{-1}) \geq 0$ aus der Elliptizitätsbedingung (G3) von G folgt $c = \text{spur}(L \circ g^{-1} \circ L \circ h^{-1}) \geq 0$. q.e.d.

Satz 4.4 Sei $\zeta \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ aus (4.1) zu einer Randverteilung $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$. Dann gilt die innere Gradientenabschätzung

$$\sup_{\Omega} |\nabla\zeta(x, y)| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla\zeta(x, y)|. \quad (4.7)$$

Beweis: Wir betrachten die dritte Komponente der Normalen des Graphen $X = (x, y, \zeta)$ und definieren

$$\Psi(x, y) := N^3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\zeta(x, y)|^2}} > 0$$

mit $\Psi \in C^2(\Omega)$, welche die lineare, elliptische Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_G\Psi = h^{ij}\Psi_{x^i x^j} + P^r\Psi_{x^r} + c\Psi = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit $x^1 := x$ und $x^2 := y$ erfüllt. Wegen $\Psi > 0$ und $c \geq 0$ aus Hilfssatz 4.2 gilt die Differentialungleichung

$$h^{ij}\Psi_{x^i x^j} + P^r\Psi_{x^r} \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

für welche das schwache Minimumprinzip (vgl. [GT], Satz 3.1.) angewendet werden kann. Demnach gilt

$$\inf_{\Omega} \Psi \geq \inf_{\partial\Omega} \Psi,$$

woraus sich nach Definition von Ψ sofort

$$\sup_{\Omega} |\nabla\zeta| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla\zeta|$$

ergibt.

q.e.d.

Bemerkung 4.7 Auf eine innere Gradientenabschätzung kann auch wie folgt geschlossen werden: Die sphärische Abbildung $N : \overline{B} \rightarrow S^2$ einer gewichtet konform parametrisierten G -Minimalfläche ist mit Hilfe einer Hartman-Wintner-Entwicklung aus [HW] eine offene Abbildung (siehe z.B. [S3], Beweis von Hilfssatz 7), d.h. eine offene Umgebung eines Punktes $(u, v) \in B$ wird auf eine offene Umgebung des Bildes $N(u, v) \in S^2$ abgebildet. Würde der Gradient der Höhenfunktion ζ eines G -minimalen Graphen sein Maximum in einem inneren Punkt $(u^*, v^*) \in B$ annehmen, dann wäre die dritte Komponente $N^3(u^*, v^*)$ der sphärischen Abbildung (nach geeigneter Drehung) dort minimal, im Widerspruch zur Offenheit.

4.4 Globale Hölderabschätzung des Gradienten

Für eine Hölderabschätzung des Gradienten benutzen wir in Anlehnung an [GT], Kap. 12, in zwei Dimensionen die Theorie quasikonformer Abbildungen, von denen Morrey in der Arbeit [Mo] schon innere Hölderstetigkeit zeigen konnte. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet mit der Randregularität $\partial\Omega \in C^2$. Die Randdaten erfüllen $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$. Dann erhalten wir nach den Sätzen 4.1, 4.3 und 4.4 in den Abschnitten 4.1 bis 4.3 für eine Lösung $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ die globale C^1 -Abschätzung

$$\|\zeta\|_0^{\Omega} + \|\zeta\|_1^{\Omega} \leq C_1 \quad (4.8)$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$. Die Abhängigkeit vom Parameter κ der strikten Konvexität ersetzen wir dabei durch die Abhängigkeit von $\partial\Omega$. Dann können wir unsere quasilineare, elliptische Differentialgleichung

$$\mathcal{M}_G\zeta = a(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\zeta_{yy} = 0$$

mit Koeffizienten $a, b, c \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ als lineare, gleichmäßig elliptische Differentialgleichung in Ω behandeln. Denn wir haben

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{1+g_0}|\xi|^2 &\leq \xi \circ \begin{pmatrix} a(\zeta_x, \zeta_y) & b(\zeta_x, \zeta_y) \\ b(\zeta_x, \zeta_y) & c(\zeta_x, \zeta_y) \end{pmatrix} \circ \xi^t \\ &\leq (1+g_0)(1+|\nabla\zeta|^2)|\xi|^2 \leq (1+g_0)(1+C_1^2)|\xi|^2 \end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit den nach unten und oben beschränkten Eigenwerten

$$\lambda^*(\zeta_x, \zeta_y) \geq \frac{1}{1+g_0} > 0, \quad \Lambda^*(\zeta_x, \zeta_y) \leq (1+g_0)(1+C_1^2). \quad (4.9)$$

Definition 4.3 Eine stetig differenzierbare Abbildung $\Psi = \Psi(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ von einem Gebiet Ω der (x, y) -Ebene in die (p, q) -Ebene heißt (K, K') -quasikonform, wenn es zwei Konstanten K und K' mit $K \geq 1$ und $K' \geq 0$ gibt, so dass die Ungleichung

$$|\nabla\Psi|^2 = p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leq 2K(p_xq_y - p_yq_x) + K'$$

erfüllt ist.

Wir werden im folgenden zeigen, dass die ersten Ableitungen $p := \zeta_x$ und $q := \zeta_y$ der Lösung ζ einer linearen, gleichmäßig elliptischen Gleichung in zwei Dimensionen gerade (K, K') -quasikonform sind. Dazu betrachten wir die lineare, gleichmäßig elliptische und inhomogene Differentialgleichung

$$\mathcal{M}'_G\zeta := a(x, y)\zeta_{xx} + 2b(x, y)\zeta_{xy} + c(x, y)\zeta_{yy} = f(x, y) \quad (4.10)$$

mit beschränkter rechter Seite $f = f(x, y) \in C^0(\Omega)$, $\sup_\Omega f \leq m$. Inhomogen aus dem Grund, weil wir später eine globale Abschätzung erreichen wollen. Weiter seien

$$\lambda = \lambda(x, y) = \lambda^*(\zeta_x, \zeta_y) \geq \frac{1}{1+g_0} \quad \text{und} \quad \Lambda = \Lambda(x, y) = \Lambda^*(\zeta_x, \zeta_y) \leq (1+g_0)(1+C_1^2) \quad (4.11)$$

die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix, so dass der Quotient gemäß

$$\frac{\Lambda}{\lambda} \leq (1+g_0)^2(1+C_1^2)$$

beschränkt ist. Wir können (4.10) als System 1. Ordnung

$$ap_x + 2bp_y + cq_y = f, \quad p_y = q_x$$

schreiben. Multiplikation der ersten Gleichung mit p_x ergibt

$$\lambda(p_x^2 + p_y^2) \leq ap_x^2 + 2bp_xp_y + cp_y^2 = fp_x - cp_xq_y + cp_yq_x = c(p_yq_x - p_xq_y) + fp_x.$$

Ebenso erhalten wir bei Multiplikation mit q_y ,

$$\lambda(q_x^2 + q_y^2) \leq aq_x^2 + 2bq_xq_y + cq_y^2 = ap_yq_x + fq_y - ap_xq_y = a(p_yq_x - p_xq_y) + fq_y.$$

Addition beider Ungleichungen zusammen mit der gleichmäßigen Elliptizität liefert uns

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 &\leq \frac{a+c}{\lambda}(p_yq_x - p_xq_y) + \frac{f}{\lambda}(p_x + q_y) \\ &\leq \frac{\lambda + \Lambda}{\lambda}(p_yq_x - p_xq_y) + \frac{m}{\lambda}(|p_x| + |q_y|) \\ &\leq \{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}(p_yq_x - p_xq_y) + (1 + g_0)m(|p_x| + |q_y|). \end{aligned}$$

Für $f \equiv 0$ ist dann $p - iq$ K -quasikonform mit $K := \frac{1}{2}\{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}$. Für $f \not\equiv 0$ formen wir mit Hilfe von

$$(1 + g_0)m(|p_x| + |q_y|) \leq \frac{\epsilon}{2}(|p_x| + |q_y|)^2 + \frac{1}{2\epsilon}(1 + g_0)^2m^2 \leq \epsilon(p_x^2 + q_y^2) + \frac{1}{2\epsilon}(1 + g_0)^2m^2, \quad \epsilon > 0,$$

weiter um: Dazu wählen wir $\epsilon = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leq \{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}(p_yq_x - p_xq_y) + \frac{1}{2}(p_x^2 + q_y^2) + (1 + g_0)^2m^2,$$

woraus sich

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leq 2\{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}(p_yq_x - p_xq_y) + 2(1 + g_0)^2m^2$$

ergibt. Somit ist für $f \not\equiv 0$ die Abbildung $p - iq$ (K, K') -quasikonform mit

$$K = \{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}, \quad K' = 2(1 + g_0)^2m^2.$$

Bemerkung 4.8 Wählen wir in obiger Rechnung $\epsilon > 0$ beliebig klein, so kommt die Konstante K dem Term $\frac{1}{2}\{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\} > 1$ (vgl. Fall: $f \equiv 0$) beliebig nahe. K geht später in die Hölderkonstante und den Hölderexponenten ein: Je näher K der 1 kommt, desto größer sind der Hölderexponent und die -konstante.

Wir fassen unsere Überlegungen im folgenden Hilfssatz zusammen:

Hilfssatz 4.3 Sei die lineare, gleichmäßig elliptische Differentialgleichung

$$a(x, y)\zeta_{xx} + 2b(x, y)\zeta_{xy} + c(x, y)\zeta_{yy} = f(x, y)$$

mit beschränkter rechter Seite $f = f(x, y) \in C^0(\Omega)$, $\sup_{\Omega} f \leq m$ und $\zeta \in C^2(\Omega)$ gegeben. Die Eigenwerte λ und Λ der Koeffizientenmatrix erfüllen dabei (4.11). Dann ist die Abbildung $p - iq := \zeta_x - i\zeta_y$ in Ω

1. K -quasikonform mit $K = \frac{1}{2}\{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}$, falls $f \equiv 0$
2. (K, K') -quasikonform mit $K = \{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}$ und $K' = 2(1 + g_0)^2m^2$, falls $f \not\equiv 0$

mit C_1 aus (4.8).

Für quasikonforme Abbildungen erreichen wir nun eine Abschätzung des Dirichletintegrals, welche die Morreysche Wachstumsbedingung erfüllt (vgl. [GT], Hilfssatz 12.1). Wir

schreiben hier kurz

$$\mathcal{D}(r; z) := \mathcal{D}_{B_r(z)}(\Psi) := \iint_{B_r} |\nabla \Psi(x, y)|^2 dx dy$$

für das Dirichletintegral von $\Psi = \Psi(x, y) \in \mathbb{R}^2$ über der Kreisscheibe $B_r(z)$, da die Abhängigkeit vom Radius r und vom Punkt z von entscheidender Bedeutung ist.

Hilfssatz 4.4 Sei $\Psi = p + iq$ (K, K')-quasikonform in einer Kreisscheibe $B_R = B_R(z_0) = B_R(x_0, y_0)$ mit $K > 1$ und $K' \geq 0$. Weiter gelte $|\Psi| \leq M$ in B_R . Dann gilt für alle Kreisscheiben $B_r = B_r(z_0)$ mit $r \leq \frac{R}{2}$ die Abschätzung des Dirichletintegrals

$$\mathcal{D}(r; z_0) = \iint_{B_r} |\nabla \Psi|^2 dx dy = \iint_{B_r} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) dx dy \leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \quad (4.12)$$

mit $\alpha = K - \sqrt{K^2 - 1}$ und $C = c_1(K)(M^2 + K'R^2)$.

Beweis: Wir unterdrücken die Abhängigkeit von z_0 und schreiben kurz $\mathcal{D}(r) = \mathcal{D}(r; z_0)$.

- Wir zeigen zunächst eine Schranke des Dirichletintegrals in der Kreisscheibe vom Radius $\frac{R}{2}$. Für jede konzentrische Kreisscheibe $B_r \subset B_R$ gilt aufgrund der Quasikonformität

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r) &= \iint_{B_r} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) dx dy \leq 2K \iint_{B_r} (p_x q_y - p_y q_x) dx dy + K' \pi r^2 \\ &= 2K \int_{\partial B_r} p q_s ds + K' \pi r^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei s die Bogenlänge entlang des Kreises ∂B_r in mathematisch positiver Richtung bezeichnet. Durch Einführen von Polarkoordinaten können wir die Ableitung $\mathcal{D}'(r)$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r) &= \iint_{B_r} |\nabla \Psi(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_{\rho=0}^r \left(\int_{\vartheta=0}^{2\pi} |\nabla \Psi(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta))|^2 \rho d\vartheta \right) d\rho \end{aligned}$$

mit einem von r unabhängigen Integranden. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(r) &= \int_{\vartheta=0}^{2\pi} |\nabla \Psi(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta))|^2 r d\vartheta \\ &= \int_{\partial B_r} |\nabla \Psi|^2 ds \end{aligned}$$

Damit und mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung können wir nun das Randintegral in (4.13) berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r} pq_s ds &\leq \left(\int_{\partial B_r} p^2 ds \cdot \int_{\partial B_r} (q_x^2 + q_y^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\partial B_r} p^2 ds \cdot \int_{\partial B_r} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq (M^2 \cdot 2\pi r \cdot \mathcal{D}'(r))^{1/2} = M(2\pi r \cdot \mathcal{D}'(r))^{1/2}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\mathcal{D}(r) \leq 2KM(2\pi r \cdot \mathcal{D}'(r))^{1/2} + K'\pi R^2, \tag{4.15}$$

wenn wir im zweiten Summand von (4.13) noch r durch R ersetzen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: Ist

$$\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) \leq K'\pi R^2, \tag{4.16}$$

dann haben wir eine gewünschte Schranke an das Dirichletintegral in der Kreisscheibe $B_{R/2}$, und wir können mit Beweispunkt 2 fortfahren. Wenn aber $\mathcal{D}(r) > K'\pi R^2$ für ein $r = r_0 < \frac{R}{2}$ ausfällt, dann gilt dies auch für alle größeren r . Wir können dann die zu (4.15) äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{8\pi K^2 M^2 r} \leq \frac{\mathcal{D}'(r)}{(\mathcal{D}(r) - K'\pi R^2)^2}$$

von $r_1 = \frac{R}{2} > r_0$ bis $r_2 = R$ integrieren und erhalten für die linke Seite

$$\int_{R/2}^R \frac{1}{8\pi K^2 M^2 r} dr = \frac{1}{8\pi K^2 M^2} (\ln R - \ln \frac{R}{2}) = \frac{1}{8\pi K^2 M^2} \ln 2.$$

Integration der rechten Seite ergibt

$$\int_{R/2}^R \frac{\mathcal{D}'(r)}{(\mathcal{D}(r) - K'\pi R^2)^2} dr = -\frac{1}{\mathcal{D}(R) - K'\pi R^2} + \frac{1}{\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) - K'\pi R^2} < \frac{1}{\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) - K'\pi R^2},$$

unter Beachtung von $\mathcal{D}(R) > K'\pi R^2$. Dies liefert uns die Schranke für das Dirichletintegral

$$\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) \leq \frac{8\pi K^2 M^2}{\ln 2} + K'\pi R^2 \tag{4.17}$$

in der Kreisscheibe $B_{R/2}$, welche den ersten Fall (4.16) ebenfalls beinhaltet.

2. Mit (4.17) wollen wir nun eine Wachstumsabschätzung für $\mathcal{D}(r)$, $r \leq \frac{R}{2}$, herleiten.

Dazu zeigen wir zunächst eine schärfere Abschätzung für $\int_{\partial B_r} pq_s ds$, als wir dies in

(4.14) getan haben. Sei

$$\bar{p} = \bar{p}(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} p ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \vartheta) d\vartheta$$

der Mittelwert von p über dem Kreis ∂B_r unter Verwendung von Polarkoordinaten. Dann gilt zunächst

$$\int_{\partial B_r} pq_s ds = \int_{\partial B_r} (p - \bar{p})q_s ds \leq \int_{\partial B_r} \left[\frac{(p - \bar{p})^2}{2r} + \frac{r}{2}q_s^2 \right] ds.$$

Wir benutzen die Wirtingerungleichung aus [Bl], §23, für 2π -periodische und stetig differenzierbare Funktionen $f = f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, die dann

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx$$

erfüllen. Der Beweis ergibt sich bei Betrachtung der Fourierreihenentwicklung für f und f' und Benutzung der Parsevalschen Gleichung. Mit $p = p(r, \vartheta)$ erhalten wir eine in ϑ 2π -periodische und stetig differenzierbare Funktion $p(r, \vartheta)$, die

$$\int_0^{2\pi} (p(r, \vartheta) - \bar{p}(r)) d\vartheta = 0$$

erfüllt. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} (p(r, \vartheta) - \bar{p}(r))^2 d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} p_\vartheta(r, \vartheta)^2 d\vartheta,$$

woraus sich wegen $ds = r d\vartheta$ und $p_\vartheta = rp_s$ die Ungleichung

$$\int_{\partial B_r} (p - \bar{p})^2 ds = \int_0^{2\pi} (p - \bar{p})^2 r d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} p_\vartheta^2 r d\vartheta = r^2 \int_{\partial B_r} p_s^2 ds$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\int_{\partial B_r} pq_s ds \leq \frac{r}{2} \int_{\partial B_r} (p_s^2 + q_s^2) ds. \quad (4.18)$$

Wir wollen das Integral auf der rechten Seite weiter abschätzen. Ausgehend von den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |p_x q_y| &\leq \frac{\alpha}{2} p_x^2 + \frac{1}{2\alpha} q_y^2, \\ |p_y q_x| &\leq \frac{\alpha}{2} q_x^2 + \frac{1}{2\alpha} p_y^2, \quad \alpha > 0, \end{aligned}$$

schätzen wir die Quasikonformitätsungleichung wie folgt ab

$$\begin{aligned} p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2 &\leq 2K(p_x q_y - p_y q_x) + K' \leq 2K(|p_x q_y| + |p_y q_x|) + K' \\ &\leq \alpha K(p_x^2 + q_x^2) + \frac{1}{\alpha} K(p_y^2 + q_y^2) + K' \end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha = K - \sqrt{K^2 - 1} \in (0, 1)$ bzw. $K = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}$, so finden wir

$$p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2 \leq \frac{1 + \alpha^2}{2} (p_x^2 + q_x^2) + \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2} (p_y^2 + q_y^2) + K'$$

bzw.

$$p_x^2 + q_x^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} (p_y^2 + q_y^2) + \frac{2K'}{1 - \alpha^2}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} p_x^2 + q_x^2 &= \frac{1}{1 + \alpha^2} (p_x^2 + q_x^2 + \alpha^2 (p_x^2 + q_x^2)) \\ &\leq \frac{1}{1 + \alpha^2} \left(p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2 + \frac{2\alpha^2 K'}{1 - \alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Quasikonformitätsungleichung ist unter einer Rotation

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} (x', y'), \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

invariant, denn es gilt

$$\begin{aligned} p_{x'}^2 + q_{x'}^2 + p_{y'}^2 + q_{y'}^2 &= (p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha)^2 + (q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha)^2 \\ &\quad + (-p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha)^2 + (-q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha)^2 \\ &= p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2, \\ p_{x'} q_{y'} - p_{y'} q_{x'} &= (p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha)(-q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha) \\ &\quad - (-p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha)(q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha) \\ &= p_x q_y - p_y q_x. \end{aligned}$$

Somit bleibt die Ungleichung (4.19) erfüllt, wenn wir (p_x, q_x) durch jede Richtungsableitung (p_s, q_s) ersetzen. Einsetzen von (4.19) in (4.18) ergibt die genauere

Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r} pq_s ds &\leq \frac{r}{2(1+\alpha^2)} \left(\int_{\partial B_r} (p_x^2 + q_x^2 + p_y^2 + q_y^2) ds + \int_{\partial B_r} \frac{2\alpha^2 K'}{1-\alpha^2} ds \right) \\ &= \frac{r}{2(1+\alpha^2)} \mathcal{D}'(r) + \frac{2\pi\alpha^2 K'}{1-\alpha^4} r^2. \end{aligned}$$

Somit gilt für das Dirichletintegral unter Beachtung von (4.13) und $K = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}$ die Ungleichung

$$\mathcal{D}(r) \leq 2K \int_{\partial B_r} pq_s ds + K' \pi r^2 \leq \frac{r}{2\alpha} \mathcal{D}'(r) + K' \pi r^2 \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right),$$

woraus wir

$$-\frac{d}{dr}(r^{-2\alpha} \mathcal{D}(r)) = 2\alpha r^{-2\alpha-1} \mathcal{D}(r) - r^{-2\alpha} \mathcal{D}'(r) \leq 2\alpha K' \pi \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) r^{1-2\alpha}$$

herleiten. Integration von r bis $\frac{R}{2}$ liefert

$$-\left(\frac{R}{2}\right)^{-2\alpha} \mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) + r^{-2\alpha} \mathcal{D}(r) \leq K' \pi \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \left[\left(\frac{R}{2}\right)^{2-2\alpha} - r^{2-2\alpha} \right]$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r) &\leq \frac{r^{2\alpha}}{\left(\frac{R}{2}\right)^{2\alpha}} \mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) + K' \pi \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \left[\left(\frac{R}{2}\right)^{2-2\alpha} r^{2\alpha} - r^2 \right] \\ &\leq \left[\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right) + K' \pi \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right] \frac{r^{2\alpha}}{\left(\frac{R}{2}\right)^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

wenn wir noch $r^2 > 0$ beachten. Nun können wir die Schranke für $\mathcal{D}\left(\frac{R}{2}\right)$ aus (4.17) einsetzen und erhalten die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r) &\leq \left[\frac{8\pi K^2 M^2}{\ln 2} + K' \pi R^2 + K' \pi \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \frac{R^2}{4} \right] \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \cdot 2^{2\alpha} \\ &\leq \left[\frac{32\pi}{\ln 2} K^2 M^2 + \pi \left(4 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \right) K' R^2 \right] \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \\ &\leq \max\{c_2(K), c_3(K)\} (M^2 + K' R^2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \\ &=: c_1(K) (M^2 + K' R^2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{mit } c_2(K) := \frac{32\pi}{\ln 2} K^2 \text{ und } c_3(K) := \pi \left(4 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \right).$$

q.e.d.

Wir zeigen nun Morrey's Lemma, welches bereits 1938 in [Mo] bewiesen wurde. Wir wollen hier aber einen Beweis nach Ladyzhenskaya und Ural'tseva aus [LU], Hilfssatz 4.1, geben.

Hilfssatz 4.5 Seien $\Psi = p + iq \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ und $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ mit $\text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega) > R > 0$ gegeben. Angenommen, es gibt positive Konstanten $\alpha \in (0, 1)$, c und R' , so dass

$$\mathcal{D}(r; z) = \iint_{B_r(z)} |\nabla\Psi|^2 dx dy = \iint_{B_r(z)} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) dx dy \leq cr^{2\alpha} \quad (4.20)$$

für alle Kreisscheiben $B_r(z)$ mit Mittelpunkt $z = (x, y) \in \tilde{\Omega}$ und Radius $0 < r \leq R' \leq R$ erfüllt ist. Dann gilt für alle $z_1, z_2 \in \tilde{\Omega}$ mit $|z_2 - z_1| \leq R'$ die Ungleichung

$$|\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| \leq C^*(c, \alpha) |z_2 - z_1|^\alpha$$

mit $C^*(c, \alpha) := 8\sqrt{\frac{c}{\pi}} \frac{1 + \alpha}{\alpha(2 + \alpha)}$.

Beweis:

1. Zu $r > 0$ wählen wir zwei Punkte $z_1, z_2 \in \tilde{\Omega}$ mit $|z_2 - z_1| = r \leq R'$ und $\text{dist}(z_i, \partial\Omega) > R \geq R' \geq r$, $i = 1, 2$. Seien $B_r(z_1)$, $B_r(z_2)$ und $\tilde{B} := B_{\frac{r}{2}}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ die Kugeln mit Radien r bzw. $\frac{r}{2}$ und Mittelpunkten z_1, z_2 bzw. $\frac{z_1 + z_2}{2}$, welche $\tilde{B} \subset B_r(z_i)$, $i = 1, 2$, erfüllen. Wir wählen nun $\tilde{z} \in \tilde{B}$ und berechnen

$$\begin{aligned} |\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| &\leq |\Psi(z_2) - \Psi(\tilde{z})| + |\Psi(\tilde{z}) - \Psi(z_1)| \\ &= \left| \int_{z_2}^{\tilde{z}} \frac{\partial\Psi}{\partial t} dt \right| + \left| \int_{z_1}^{\tilde{z}} \frac{\partial\Psi}{\partial t} dt \right| \\ &\leq \int_{z_2}^{\tilde{z}} \left| \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right| dt + \int_{z_1}^{\tilde{z}} \left| \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right| dt, \end{aligned}$$

wobei die Integration und Differentiation von Ψ auf der rechten Seite entlang der Liniensegmente mit Endpunkten z_1 und \tilde{z} bzw. z_2 und \tilde{z} zu verstehen sind. Eine Integration beider Seiten bezüglich $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{B}$ liefert

$$\begin{aligned} &|\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ &= |\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| \iint_{\tilde{B}} d\tilde{x} d\tilde{y} = \iint_{\tilde{B}} |\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\leq \iint_{\tilde{B}} \left(\int_{z_2}^{\tilde{z}} \left| \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right| dt \right) d\tilde{x} d\tilde{y} + \iint_{\tilde{B}} \left(\int_{z_1}^{\tilde{z}} \left| \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right| dt \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\leq \iint_{|\tilde{z}-z_2| \leq r} \left(\int_{z_2}^{\tilde{z}} |\nabla\Psi| dt \right) d\tilde{x} d\tilde{y} + \iint_{|\tilde{z}-z_1| \leq r} \left(\int_{z_1}^{\tilde{z}} |\nabla\Psi| dt \right) d\tilde{x} d\tilde{y} =: I_2 + I_1 \end{aligned}$$

2. Es genügt, eine Schranke für I_1 zu bestimmen. Das Integral I_2 kann dann analog behandelt werden. Durch Einführen von sphärischen Koordinaten, Radius ρ und zweidimensionale Winkelkoordinate ω , um Mittelpunkt z_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\rho=0}^r \int_{|\omega|=1} \left(\int_{t=0}^{\rho} |\nabla \Psi(z_1 + t\omega)| dt \right) \rho d\rho d\omega \\ &= \int_{\rho=0}^r \left(\int_{t=0}^{\rho} \int_{|\omega|=1} |\nabla \Psi(z_1 + t\omega)| \rho dt d\omega \right) d\rho. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Hilfsfunktion

$$\Phi(\rho) := \iint_{B_\rho(z_1)} |\nabla \Psi| dx dy = \int_{\tau=0}^{\rho} \int_{|\omega|=1} |\nabla \Psi(z_1 + \tau\omega)| \tau d\tau d\omega, \quad \rho \in [0, r],$$

deren Integrand unabhängig von ρ ist. Damit berechnet sich die Ableitung nach ρ zu

$$\Phi'(\rho) = \int_{|\omega|=1} |\nabla \Psi(z_1 + \rho\omega)| \rho d\omega. \quad (4.21)$$

Unter Beachtung der Hölder-Ungleichung gilt zunächst

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= \iint_{B_\rho(z_1)} |\nabla \Psi| \cdot 1 dx dy \leq \left(\iint_{B_\rho(z_1)} |\nabla \Psi|^2 dx dy \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_{B_\rho(z_1)} dx dy \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{c\rho^{2\alpha}} \cdot \sqrt{\pi\rho^2} = \sqrt{c\pi}\rho^{1+\alpha}, \quad \rho \in [0, r], \end{aligned}$$

denn aus $B_\rho(z_1) \subset B_r(z_1)$ mit $z_1 \in \tilde{\Omega}$ und $r \leq R' \leq R$ folgt mit (4.20) insbesondere $\iint_{B_\rho(z_1)} |\nabla \Psi|^2 dx dy \leq c\rho^{2\alpha}$ für alle $\rho \in [0, r]$. Mit (4.21) folgt dann nach partieller

Integration

$$\begin{aligned} &\int_{t=0}^{\rho} \left(\int_{|\omega|=1} |\nabla \Psi(z_1 + t\omega)| d\omega \right) dt = \int_{t=0}^{\rho} \frac{\Phi'(t)}{t} dt = \left[\frac{\Phi(t)}{t} \right]_{t=0}^{\rho} + \int_{t=0}^{\rho} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt \\ &\leq \sqrt{c\pi} \left\{ \left[\frac{t^{1+\alpha}}{t} \right]_{t=0}^{\rho} + \int_{t=0}^{\rho} \frac{t^{1+\alpha}}{t^2} dt \right\} = \sqrt{c\pi} \left\{ \rho^\alpha + \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \right]_{t=0}^{\rho} \right\} = \frac{\sqrt{c\pi}(1+\alpha)}{\alpha} \rho^\alpha. \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\rho=0}^r \rho \left(\int_{t=0}^{\rho} \int_{|\omega|=1} |\nabla \Psi(z_1 + t\omega)| dt d\omega \right) d\rho \leq \frac{\sqrt{c\pi}(1+\alpha)}{\alpha} \int_{\rho=0}^r \rho^{1+\alpha} d\rho \\ &= \frac{\sqrt{c\pi}(1+\alpha)}{\alpha(2+\alpha)} r^{2+\alpha} \end{aligned}$$

und analog

$$I_2 \leq \frac{\sqrt{c\pi}(1+\alpha)}{\alpha(2+\alpha)} r^{2+\alpha}.$$

3. Somit gilt die gewünschte Hölderabschätzung

$$\begin{aligned} |\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| &\leq \frac{4}{\pi r^2} (I_1 + I_2) \leq \frac{4 \cdot 2\sqrt{c\pi}(1+\alpha)}{\pi\alpha(2+\alpha)} \frac{r^{2+\alpha}}{r^2} \\ &= 8\sqrt{\frac{c}{\pi}} \frac{1+\alpha}{\alpha(2+\alpha)} r^\alpha =: C^*(c, \alpha) |z_2 - z_1|^\alpha. \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir können nun eine innere Hölderabschätzung für quasikonforme Abbildungen zeigen (vgl. [GT], Satz 12.3).

Hilfssatz 4.6 Sei Ψ (K, K')-quasikonform in einem Gebiet Ω mit $K > 1$ und $K' \geq 0$. Es gelte weiterhin $|\Psi| \leq M$. Sei $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ mit $\text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega) > d$ gegeben. Dann gilt für alle $z_1, z_2 \in \tilde{\Omega}$

$$|\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| \leq C \left| \frac{z_2 - z_1}{d} \right|^\alpha$$

mit $\alpha = K - \sqrt{K^2 - 1}$ und $C = \tilde{c}(K)(M + \sqrt{K'}d)$.

Beweis: Sei zunächst $|z_2 - z_1| \leq \frac{d}{2}$. Mit $R' = \frac{d}{2}$ und $R = d$ gilt nach Hilfssatz 4.4

$$\mathcal{D}(r) \leq C \left(\frac{r}{d} \right)^{2\alpha} = \frac{C}{d^{2\alpha}} r^{2\alpha}$$

für alle $r \leq \frac{d}{2} \leq d$ mit $C = c_1(K)(M^2 + K'd^2)$ und $\alpha = \alpha(K) = K - \sqrt{K^2 - 1}$. Gemäß Hilfssatz 4.5 haben wir dann

$$\begin{aligned} |\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| &\leq 8\sqrt{\frac{C}{d^{2\alpha}\pi}} \frac{1+\alpha}{\alpha(2+\alpha)} |z_2 - z_1|^\alpha \\ &= 8\sqrt{\frac{c_1(K)(M^2 + K'd^2)}{\pi}} \frac{1+\alpha}{\alpha(2+\alpha)} \left| \frac{z_2 - z_1}{d} \right|^\alpha \\ &\leq \tilde{c}_1(K)(M + \sqrt{K'}d) \left| \frac{z_2 - z_1}{d} \right|^\alpha \end{aligned}$$

mit $\tilde{c}_1(K) = 8\sqrt{\frac{c_1(K)}{\pi}} \frac{1+\alpha}{\alpha(2+\alpha)}$. Für $|z_2 - z_1| > \frac{d}{2}$ gilt

$$|\Psi(z_2) - \Psi(z_1)| \leq 2M \leq 2M \left| \frac{z_2 - z_1}{\frac{d}{2}} \right|^\alpha \leq 2 \cdot 2^\alpha M \left| \frac{z_2 - z_1}{d} \right|^\alpha.$$

Setzen wir $\tilde{c}(K) = \max\{\tilde{c}_1(K), 2 \cdot 2^\alpha M\}$, dann ist der Hilfssatz bewiesen.

q.e.d.

Wir fassen unser Ergebnis für die innere Hölderabschätzung des Gradienten zusammen:

Satz 4.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet mit der Randregularität $\partial\Omega \in C^2$. Zu Randdaten $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ betrachten wir eine Lösung $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems für G -minimale Graphen $\mathcal{DP}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_G\zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Dann gilt die innere Hölderabschätzung des Gradienten

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in \tilde{\Omega} \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\nabla\zeta(z_2) - \nabla\zeta(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leq C_2 \quad (4.22)$$

für alle $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, $\text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega) > d$, mit einer Konstanten $C_2 = C_2(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega, d)$ und dem Hölderexponenten $\alpha = \alpha(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$.

Beweis: Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Abschnittes wissen wir, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Abbildung $\zeta_x - i\zeta_y$ K -quasikonform in Ω mit $K := \frac{1}{2}\{1 + (1 + g_0)^2(1 + C_1^2)\}$ ist. Wir beachten $K' = 0$ und $|\zeta_x - i\zeta_y| = |\nabla\zeta| \leq C_1$ mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$. Hilfssatz 4.6 liefert uns dann in jedem Gebiet $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ die Abschätzung

$$\frac{|\nabla\zeta(z_2) - \nabla\zeta(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leq C_2$$

für $z_1, z_2 \in \tilde{\Omega}$, $z_1 \neq z_2$, mit einer Konstanten $C_2 = \tilde{c}(K)C_1d^{-\alpha} = C_2(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega, d)$ und dem Hölderexponenten $\alpha = \alpha(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$. q.e.d.

Für eine globale Hölderabschätzung des Gradienten wollen wir ein Spiegelungsprinzip anwenden (vgl. [GT], Bemerkung (4) nach Satz 12.3). Dazu erzeugen wir Nullrandwerte für unser Dirichletproblem, erhalten damit eine inhomogene Differentialgleichung und biegen dann noch den Rand lokal gerade. Sei also Ω ein beschränktes, strikt konvexes C^2 -Gebiet und $\zeta \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung von $\mathcal{DP}(\varphi)$ mit $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. Aufgrund der C^1 -Abschätzung von ζ bis zum Rand können wir die Differentialgleichung $\mathcal{M}_G\zeta = 0$ als lineare, gleichmäßig elliptische Differentialgleichung auffassen und schreiben $\mathcal{M}'_G\zeta = 0$. Dann definieren wir $\eta := \zeta - \varphi$ in $\bar{\Omega}$, so dass $\eta \in C^2(\bar{\Omega})$ das Dirichletproblem

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'_G\eta &= \mathcal{M}'_G\zeta - \mathcal{M}'_G\varphi = -\mathcal{M}'_G\varphi =: f \quad \text{in } \Omega, \\ \eta &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

löst. Aufgrund der Regularität von Ω finden wir für alle Randpunkte $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ eine offene Kreisscheibe $\hat{B} = B(x_0, y_0)$ um Mittelpunkt (x_0, y_0) und einen C^2 -Diffeomorphismus $\Psi: \hat{B} \rightarrow D$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, so dass

$$\begin{aligned}D^+ &:= \Psi(\hat{B} \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \\ I &:= \Psi(\hat{B} \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \\ \Psi &\in C^2(\hat{B}), \quad \Psi^{-1} \in C^2(D)\end{aligned}$$

gilt. Dabei werden die Koordinaten (x, y) auf die neuen Koordinaten $(\xi, \mu) = \Psi(x, y)$ abgebildet, und wir setzen $\tilde{\eta}(\xi, \mu) = \tilde{\eta}(\Psi(x, y)) := \eta(x, y)$. Die Differentialgleichung transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}'_G \tilde{\eta} &:= \tilde{a}(\xi, \mu) \tilde{\eta}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}(\xi, \mu) \tilde{\eta}_{\xi\mu} + \tilde{c}(\xi, \mu) \tilde{\eta}_{\mu\mu} = \mathcal{M}'_G \eta|_{(x,y)=(x(\xi,\mu),y(\xi,\mu))} \\ &= -\widetilde{\mathcal{M}}'_G \tilde{\varphi} =: \tilde{f} \quad \text{in } \hat{B} \cap \Omega \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\xi, \mu) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2|_{(x,y)=(x(\xi,\mu),y(\xi,\mu))}, \\ \tilde{b}(\xi, \mu) &= a\xi_x\mu_x + b\xi_x\mu_y + b\xi_y\mu_x + c\xi_y\mu_y|_{(x,y)=(x(\xi,\mu),y(\xi,\mu))}, \\ \tilde{c}(\xi, \mu) &= a\mu_x^2 + 2b\mu_x\mu_y + c\mu_y^2|_{(x,y)=(x(\xi,\mu),y(\xi,\mu))}. \end{aligned}$$

Somit besitzt der Operator $\widetilde{\mathcal{M}}'_G$ die gleiche Struktur und Eigenschaften wie \mathcal{M}'_G . Insbesondere erwähnen wir, dass die zugehörigen Eigenwerte $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\Lambda}$ der Koeffizientenmatrix nach unten bzw. oben durch Konstanten beschränkt sind, welche nur von den Daten g_0 , $\|\varphi\|_2^\Omega$ und $\partial\Omega$ abhängen. Die rechte Seite \tilde{f} ist wegen $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ zudem stetig und nach

$$\sup_D |\tilde{f}| = \sup_\Omega |f| = \sup_\Omega |\mathcal{M}'_G \varphi| \leq C(\|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega) =: m$$

beschränkt. Nach Hilfssatz 4.3 ist die Abbildung $\tilde{p} - i\tilde{q} = \tilde{\eta}_\xi - i\tilde{\eta}_\mu$ (k, k')-quasikonform in D^+ mit $k = k(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$ und $k' = k'(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$. Wegen $\tilde{\eta}_\xi = 0$ auf $\mu = 0$ können wir folgende Spiegelung benutzen:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\xi, \mu) &= \begin{cases} \tilde{p}(\xi, \mu), & (\xi, \mu) \in D^+ \cup I \\ -\tilde{p}(\xi, -\mu), & (\xi, \mu) \in D^- \end{cases}, \\ \tilde{q}(\xi, \mu) &= \begin{cases} \tilde{q}(\xi, \mu), & (\xi, \mu) \in D^+ \cup I \\ \tilde{q}(\xi, -\mu), & (\xi, \mu) \in D^- \end{cases}, \end{aligned}$$

wenn wir noch $D^- = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : (\xi, -\eta) \in D^+\}$ setzen. Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\xi(\xi, \mu) &= -\tilde{p}_\xi(\xi, -\mu), \\ \tilde{p}_\mu(\xi, \mu) &= \tilde{p}_\mu(\xi, -\mu), \\ \tilde{q}_\xi(\xi, \mu) &= \tilde{q}_\xi(\xi, -\mu), \\ \tilde{q}_\mu(\xi, \mu) &= -\tilde{q}_\mu(\xi, -\mu), \quad (\xi, \mu) \in D^-, \end{aligned}$$

ist $\tilde{p} - i\tilde{q}$ (k, k')-quasikonform in $D = D^+ \cup I \cup D^-$, und wir können die innere Hölderabschätzung, Hilfssatz 4.6, auf das Gebiet D anwenden. Insbesondere erhalten wir dann eine Hölderabschätzung für $\tilde{p} - i\tilde{q}$ auf dem Rand I . Eine Rücktransformation auf unsere ursprünglichen Koordinaten (x, y) liefert uns eine Hölderabschätzung für $p - iq = \zeta_x - i\zeta_y$ auf $\partial\Omega$. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 4.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet mit der Randregularität $\partial\Omega \in C^2$. Zu Randdaten $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ betrachten wir eine Lösung $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems für G -minimale Graphen $\mathcal{DP}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann gilt die globale Hölderabschätzung des Gradienten

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Omega \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\nabla\zeta(z_2) - \nabla\zeta(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leq C_3 \quad (4.23)$$

mit einer Konstanten $C_3 = C_3(g_0, \|\varphi\|_2^\Omega, \partial\Omega)$.

4.5 Graphenkompaktheit

Wir kommen nun zu einem wichtigen Satz für die Kontinuitätsmethode, welcher uns die Abgeschlossenheit des Problems liefert. Dabei betrachten wir eine konvergente Folge von Randdaten und die Lösungsfolge der zugehörigen Dirichletprobleme und werden erkennen, dass diese als $C^{2+\alpha}$ -Lösung des entsprechenden Dirichletproblems konvergiert. Zum Beweis benötigen wir die a-priori-Abschätzungen der letzten Abschnitte sowie die Schauderabschätzungen aus [S6].

Satz 4.7 (Graphenkompaktheit) Gegeben seien ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $C^{2+\alpha}$ -Jordankurve $\partial\Omega$ und eine Folge von Randdaten $\varphi^{(k)} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$, die gleichmäßig beschränkt in der $C^{2+\alpha}$ -Norm gemäß

$$\|\varphi^{(k)}\|_{2+\alpha}^\Omega \leq M \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots,$$

sind und im Raum $C^2(\partial\Omega)$ gegen

$$\varphi(x, y) := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x, y) \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$$

konvergieren. Weiter sei die Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ gegeben. Dann besitzt die Folge von Lösungen $\{\zeta^{(k)}\}_{k=1,2,\dots} \subset C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ der zugehörigen Dirichletprobleme $\mathcal{DP}(\varphi^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, ein Grenzelement $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ als Lösung von $\mathcal{DP}(\varphi)$.

Beweis: Satz 4.1 aus Abschnitt 4.1 liefert uns die C^0 -Abschätzung

$$\|\zeta^{(k)}\|_0^\Omega = \sup_{\Omega} |\zeta^{(k)}(x, y)| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi^{(k)}(x, y)| \leq M, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die globale Gradientenabschätzung erhalten wir aus der Randgradientenabschätzung, Satz 4.3 aus Abschnitt 4.2, zusammen mit der inneren Gradientenabschätzung, Satz 4.4 aus Abschnitt 4.3,

$$\begin{aligned} \|\zeta^{(k)}\|_1^\Omega &= \sup_{\Omega} \{|\zeta_x^{(k)}(x, y)| + |\zeta_y^{(k)}(x, y)|\} \\ &\leq \sqrt{2} \sup_{\Omega} |\nabla\zeta^{(k)}(x, y)| \leq \sqrt{2} \sup_{\partial\Omega} |\nabla\zeta^{(k)}(x, y)| \leq \sqrt{2}L(M, \partial\Omega), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mit der globalen Hölderabschätzung des Gradienten, Satz 4.6 aus Abschnitt 4.4,

$$\begin{aligned} \|\zeta^{(k)}\|_{1,\alpha}^\Omega &= \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Omega \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\zeta_x^{(k)}(z_2) - \zeta_x^{(k)}(z_1)| + |\zeta_y^{(k)}(z_2) - \zeta_y^{(k)}(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \\ &\leq \sqrt{2} \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Omega \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\nabla \zeta^{(k)}(z_2) - \nabla \zeta^{(k)}(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leq C_3(g_0, M, \partial\Omega), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

erhalten wir dann die $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung

$$\|\zeta^{(k)}\|_{1+\alpha}^\Omega = \|\zeta^{(k)}\|_0^\Omega + \|\zeta^{(k)}\|_1^\Omega + \|\zeta^{(k)}\|_{1,\alpha}^\Omega \leq C_4(g_0, M, \partial\Omega), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Wir verwenden nun die Schauderabschätzung aus [S6], Kap. IX, §5, Satz 1 und 2, um eine $C^{2+\alpha}$ -Abschätzung für die Lösungsfolge $\{\zeta^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ zu erreichen. Dazu können wir unsere Differentialgleichung $\mathcal{M}_G \zeta^{(k)} = 0$ wieder als lineare, gleichmäßig elliptische Differentialgleichung $\mathcal{M}'_G \zeta^{(k)} = 0$ betrachten. Die Koeffizienten $a, b, c \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ sind wegen der $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung (4.24) in der $C^\alpha(\bar{\Omega})$ -Norm beschränkt, d.h.

$$\|a\|_\alpha^\Omega + \|b\|_\alpha^\Omega + \|c\|_\alpha^\Omega \leq H$$

mit einer Konstanten $H > 0$. Wir erzeugen uns Nullrandwerte und betrachten für $k = 1, 2, \dots$ folgende Dirichletprobleme:

$$\begin{aligned} \eta^{(k)} &:= \zeta^{(k)} - \varphi^{(k)} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \\ \mathcal{M}'_G \eta^{(k)} &= -\mathcal{M}'_G \varphi^{(k)} =: f^{(k)} \quad \text{in } \Omega, \\ \eta^{(k)} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Fortsetzen der Randwerte $\varphi^{(k)}$ auf ganz $\bar{\Omega}$, ohne die $C^{2+\alpha}$ -Norm zu vergrößern, liefert uns zudem die Abschätzung

$$\|f^{(k)}\|_\alpha^\Omega \leq C^* = C^*(H, M).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\|\zeta^{(k)}\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_5 \|f^{(k)}\|_\alpha^\Omega \leq C_6 \quad (4.25)$$

mit einer Konstanten $C_6 = C_6(g_0, M, \partial\Omega)$ unabhängig von k . Unter sukzessiver Anwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli und der a-priori-Abschätzung (4.25) gehen wir über zu einer Teilfolge $\{\zeta^{(k_l)}\}_{l=1,2,\dots}$, die bis zu ihren zweiten Ableitungen gleichmäßig gegen $\zeta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ konvergiert. Die Funktion ζ löst dann das Dirichletproblem $\mathcal{DP}(\varphi)$. q.e.d.

4.6 Graphenstabilität

Um die Offenheit unseres Problems zu zeigen, beweisen wir mit Hilfe einer Fixpunktiteration die Graphenstabilität, welche uns für gestörte Randdaten immer noch eine Lösung des Dirichletproblems liefert. Dabei müssen wir für unser Gebiet Ω nur eine Regularitätsvoraussetzung fordern.

Satz 4.8 (Graphenstabilität) Gegeben sei ein beschränktes $C^{2+\alpha}$ -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $\zeta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ zu Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ und Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Dann gibt es ein $\epsilon = \epsilon(\zeta) > 0$, so dass für alle Randdaten $\tilde{\varphi} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ mit

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \epsilon$$

das Problem $\mathcal{DP}(\tilde{\varphi})$ lösbar ist.

Beweis: Wir folgen dem Beweis von [S6], Kap. XII, §9, Hilfssatz 4, für die nichtparametrische Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

- Wir stören unsere Höhenfunktion ζ mit einer Funktion $\eta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ und erhalten so den neuen Graphen $\tilde{X}(x, y) = (x, y, \zeta(x, y) + \eta(x, y))$ mit dem Normalenvektor

$$\tilde{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\zeta + \nabla\eta|^2}}(-\nabla\zeta - \nabla\eta, 1).$$

$\zeta + \eta$ soll neben ζ auch die Differentialgleichung (4.1) erfüllen. Es muss daher

$$\begin{aligned} 0 = & a(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\zeta_{xx} + 2b(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\zeta_{xy} + c(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\zeta_{yy} \\ & + a(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\eta_{xx} + 2b(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\eta_{xy} + c(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y)\eta_{yy} \end{aligned} \quad (4.26)$$

gelten, und wir entwickeln die Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned} a(\zeta_x + \eta_x, \zeta_y + \eta_y) &= a(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\eta_x + \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\eta_y \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p^2}\eta_x^2 + 2\frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p\partial q}\eta_x\eta_y + \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial q^2}\eta_y^2 \right) \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle $(p_0, q_0) = (\zeta_x, \zeta_y) + t \cdot (\eta_x, \eta_y)$, $0 < t < 1$. Eine analoge Entwicklung leiten wir für die Koeffizienten b und c her. Einsetzen in (4.26) ergibt eine lineare, elliptische DGL für η :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta &:= a(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{yy} \\ &+ \left\{ \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{xx} + 2\frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{xy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{yy} \right\} \eta_x \\ &+ \left\{ \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{xx} + 2\frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{xy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{yy} \right\} \eta_y \\ &= a(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y)\eta_{yy} + d(x, y)\eta_x + e(x, y)\eta_y \\ &= \Phi(\eta) \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit den Setzungen

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{xx} + 2\frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{xy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p}\zeta_{yy} \\ e(x, y) &:= \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{xx} + 2\frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{xy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q}\zeta_{yy} \end{aligned}$$

und der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta) := & - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p^2} \zeta_{xx} + \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial p^2} \zeta_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial p^2} \zeta_{yy} \right\} \eta_x^2 \\
& - \left\{ \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \zeta_{xx} + 2 \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \zeta_{xy} + \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \zeta_{yy} \right\} \eta_x \eta_y \\
& - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial q^2} \zeta_{xx} + \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial q^2} \zeta_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial q^2} \zeta_{yy} \right\} \eta_y^2 \\
& - \left\{ \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p} \eta_x \eta_{xx} + \frac{\partial a(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q} \eta_y \eta_{xx} + 2 \frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p} \eta_x \eta_{xy} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\partial b(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q} \eta_y \eta_{xy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial p} \eta_x \eta_{yy} + \frac{\partial c(\zeta_x, \zeta_y)}{\partial q} \eta_y \eta_{yy} \right\} \\
& - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p^2} \eta_x^2 \eta_{xx} + \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \eta_x \eta_y \eta_{xx} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(p_0, q_0)}{\partial q^2} \eta_y^2 \eta_{xx} \right\} \\
& - \left\{ \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial p^2} \eta_x^2 \eta_{xy} + 2 \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \eta_x \eta_y \eta_{xy} + \frac{\partial^2 b(p_0, q_0)}{\partial q^2} \eta_y^2 \eta_{xy} \right\} \\
& - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial p^2} \eta_x^2 \eta_{yy} + \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial p \partial q} \eta_x \eta_y \eta_{yy} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(p_0, q_0)}{\partial q^2} \eta_y^2 \eta_{yy} \right\},
\end{aligned}$$

die quadratisch und von höherer Ordnung in $\eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$ ist. Die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung (4.27) sind abhängig von $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy}$. Die Elliptizität von \mathcal{L} folgt aus der Elliptizität von \mathcal{M}_G . Wir wollen die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung (4.27) zeigen. Nach Voraussetzung soll η auf dem Rand $\partial\Omega$ in der $C^{2+\alpha}$ -Norm gemäß

$$\|\eta\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \epsilon$$

beschränkt sein.

2. Für die rechte Seite $\Phi(\eta)$ zeigen wir zunächst folgende Kontraktionsbedingung:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2)\|_{\alpha}^{\Omega} & \leq C(\rho) \|\eta_1 - \eta_2\|_{2+\alpha}^{\Omega} \quad \text{für alle } \eta_j \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \\
\text{mit } \|\eta_j\|_{2+\alpha}^{\Omega} & \leq \rho, \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

wobei $C = C(\rho)$ geeignet zu wählen ist. Dabei gilt $C(\rho) \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0+$. Dazu betrachten wir drei Fälle, die in Linearkombination auf der rechten Seite erscheinen.

(a) $\Phi(\eta) = \eta_{x^i} \eta_{x^j}$, $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2) & = \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j} \\
& = \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} - \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j} + \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j} \\
& = \eta_{1,x^i} (\eta_{1,x^j} - \eta_{2,x^j}) + \eta_{2,x^j} (\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}) \\
\|\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2)\|_{\alpha} & \leq \rho \|\eta_{1,x^j} - \eta_{2,x^j}\|_{\alpha} + \rho \|\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}\|_{\alpha} \\
& \leq C(\rho) \|\eta_1 - \eta_2\|_{2+\alpha}
\end{aligned}$$

(b) $\Phi(\eta) = \eta_{x^i} \eta_{x^j x^k}$, $i, j, k = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2) &= \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j x^k} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j x^k} \\
&= \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j x^k} - \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j x^k} + \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j x^k} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j x^k} \\
&= \eta_{1,x^i} (\eta_{1,x^j x^k} - \eta_{2,x^j x^k}) + \eta_{2,x^j x^k} (\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}) \\
\|\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2)\|_\alpha &\leq \rho \|\eta_{1,x^j x^k} - \eta_{2,x^j x^k}\|_\alpha + \rho \|\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}\|_\alpha \\
&\leq C(\rho) \|\eta_1 - \eta_2\|_{2+\alpha}
\end{aligned}$$

(c) $\Phi(\eta) = \eta_{x^i} \eta_{x^j} \eta_{x^k x^l}$, $i, j, k, l = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2) &= \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} \eta_{1,x^k x^l} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j} \eta_{2,x^k x^l} \\
&= \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} \eta_{1,x^k x^l} - \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} \eta_{2,x^k x^l} + \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} \eta_{2,x^k x^l} \\
&\quad - \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j} \eta_{2,x^k x^l} + \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^j} \eta_{2,x^k x^l} - \eta_{2,x^i} \eta_{2,x^j} \eta_{2,x^k x^l} \\
&= \eta_{1,x^i} \eta_{1,x^j} (\eta_{1,x^k x^l} - \eta_{2,x^k x^l}) + \eta_{1,x^i} \eta_{2,x^k x^l} (\eta_{1,x^j} - \eta_{2,x^j}) \\
&\quad + \eta_{2,x^j} \eta_{2,x^k x^l} (\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}) \\
\|\Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2)\|_\alpha &\leq \rho^2 \|\eta_{1,x^k x^l} - \eta_{2,x^k x^l}\|_\alpha + \rho^2 \|\eta_{1,x^j} - \eta_{2,x^j}\|_\alpha \\
&\quad + \rho^2 \|\eta_{1,x^i} - \eta_{2,x^i}\|_\alpha \\
&\leq C(\rho) \|\eta_1 - \eta_2\|_{2+\alpha}
\end{aligned}$$

Beachten wir außerdem $a, b, c \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$, so ist (4.28) gezeigt. Wir bemerken noch $\Phi(0) = 0$.

3. Mit Hilfe der Schaudertheorie (vgl. [S6], Kap. IX, §5 und §6) lösen wir das lineare Dirichletproblem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\eta &= f \quad \text{in } \Omega, \\
\eta &= \Psi \quad \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

eindeutig durch eine Funktion $\eta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ zu jeder rechten Seite $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ und allen Randdaten $\Psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

Für Nullrandwerte $\Psi \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ setzen wir

$$C_*^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) := \{\eta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) : \eta = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und schreiben $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}|_{C_*^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}$ für die Einschränkung von \mathcal{L} auf den Raum $C_*^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Da der Kern dieses Operators

$$\ker\{\mathcal{L}_0\} := \{\eta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) : \mathcal{L}_0\eta = 0\} = \{0\}$$

nur aus der 0 besteht, ist $f = \mathcal{L}_0(\eta) : C_*^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ invertierbar, und wir haben nach [S6], Kap. IX, §5, Satz 2, die Schauderabschätzung $\|\eta\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_1 \|f\|_\alpha^\Omega$ bzw.

$$\|\mathcal{L}_0^{-1}(f)\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_1 \|f\|_\alpha^\Omega \quad \text{für alle } f \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \quad (4.29)$$

mit einer positiven Konstanten $C_1 = C_1(g_0, \|\zeta\|_{2+\alpha}^\Omega, \Omega)$.

4. Zu den Randwerten $\|\Psi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \epsilon$ lösen wir zunächst das Problem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\eta_0 &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \eta_0 &= \Psi \quad \text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

Dazu müssen wir die Lösung η_0 in der $C^{2+\alpha}$ -Norm durch ihre Randwerte abschätzen. Die Abschätzung der Lösung in der C^0 -Norm erhalten wir gemäß [S5], Kap. VI, §1, Satz 1,

$$\|\eta_0\|_0^\Omega \leq \sup_{\partial\Omega} |\Psi|.$$

Ähnlich wie bei der globalen Hölderabschätzung des Gradienten von ζ (vgl. Abschnitt 4.4) biegen wir nun den Rand lokal gerade und setzen die Randwerte in den umgebenen Raum fort, ohne die $C^{2+\alpha}$ -Norm zu vergrößern. Wir verzichten dabei auf eine Umbenennung von Ω und Ψ . Durch Subtraktion der erweiterten Randwerte erhalten wir für $\tilde{\eta}_0 := \eta_0 - \Psi$ die inhomogene Differentialgleichung mit Nullrandwerten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{\eta}_0 &= -\mathcal{L}\Psi \quad \text{in } \Omega, \\ \tilde{\eta}_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned}$$

für welche wir die Schauderabschätzung aus [S6], Kap. IX, §5, Satz 2,

$$\|\tilde{\eta}_0\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_2 \|\mathcal{L}\Psi\|_\alpha^\Omega$$

mit einer Konstante $C_2 = C_2(g_0, \|\zeta\|_{2+\alpha}^\Omega, \Omega)$ anwenden können. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\eta_0\|_{2+\alpha}^\Omega - \|\Psi\|_{2+\alpha}^\Omega &\leq \|\eta_0 - \Psi\|_{2+\alpha}^\Omega = \|\tilde{\eta}_0\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_2 \|\mathcal{L}\Psi\|_\alpha^\Omega \\ &\leq C_2^+ \|\Psi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega}\end{aligned}$$

bzw.

$$\|\eta_0\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C_3 \|\Psi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq C_3 \cdot \epsilon \quad (4.30)$$

mit einer Konstanten $C_3 = C_3(g_0, \|\zeta\|_{2+\alpha}^\Omega, \Omega)$.

5. Methode der sukzessiven Approximation: Nun iterieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\eta_{k+1} &= \Phi(\eta_k) \quad \text{in } \Omega \\ \eta_{k+1} &= \Psi \quad \text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, \dots$. Dann haben wir

$$\mathcal{L}_0(\eta_{k+1} - \eta_k) = \mathcal{L}_0\eta_{k+1} - \mathcal{L}_0\eta_k = \Phi(\eta_k) - \Phi(\eta_{k-1}),$$

wobei die Funktion $\eta_{k+1} - \eta_k$ Nullrandwerte besitzt, und somit \mathcal{L}_0 invertierbar ist. Damit gilt für

$$\eta_{k+1} - \eta_k = \mathcal{L}_0^{-1}(\Phi(\eta_k) - \Phi(\eta_{k-1}))$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\eta_{k+1} - \eta_k\|_{2+\alpha}^\Omega &= \|\mathcal{L}_0^{-1}(\Phi(\eta_k) - \Phi(\eta_{k-1}))\|_{2+\alpha}^\Omega \\ &\stackrel{(4.29)}{\leq} C_1 \|\Phi(\eta_k) - \Phi(\eta_{k-1})\|_\alpha^\Omega \stackrel{(4.28)}{\leq} C_1 \cdot C(\rho) \|\eta_k - \eta_{k-1}\|_{2+\alpha}^\Omega\end{aligned}$$

für $\|\eta_k\|_{2+\alpha}^\Omega \leq \rho$, $k = 1, 2, \dots$. Wir wählen nun ρ so klein, dass $C_1 \cdot C(\rho) \leq \frac{1}{2}$ gilt. Dies ist möglich, da $C(\rho) \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0+$ richtig ist. Damit schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned} \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_{2+\alpha}^\Omega &\leq \frac{1}{2} \|\eta_k - \eta_{k-1}\|_{2+\alpha}^\Omega \leq \frac{1}{2^k} \|\eta_1 - \eta_0\|_{2+\alpha}^\Omega \\ &\leq \frac{1}{2^k} \{ \|\eta_1\|_{2+\alpha}^\Omega + \|\eta_0\|_{2+\alpha}^\Omega \} \stackrel{(4.30)}{\leq} \frac{C \cdot \rho}{2^k}, \end{aligned}$$

wenn wir $\epsilon = \rho$ hinreichend klein wählen. Wir haben somit eine konvergente Majorante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\eta_{k+1} - \eta_k\|_{2+\alpha}^\Omega \leq C\rho \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2C\rho < +\infty$$

gefunden. Demnach konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\eta_{k+1} - \eta_k) =: \eta - \eta_0$$

im Banachraum $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Für hinreichend kleines ϵ gibt es also ein $\eta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $\mathcal{L}\eta = \Phi(\eta)$.

q.e.d.

4.7 Lösung des Dirichletproblems mit der Kontinuitätsmethode

Wir lösen nun das Dirichletproblem für ein beschränktes, strikt konvexes $C^{2+\alpha}$ -Gebiet mit der Kontinuitätsmethode.

Satz 4.9 *Sei Ω ein beschränktes, strikt konvexes Gebiet mit einer regulären $C^{2+\alpha}$ -Jordankurve $\partial\Omega$ als Berandung. Zu vorgegebener Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ und Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ existiert dann genau eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ für G -minimale Graphen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\varphi \not\equiv 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, da sonst das Problem trivial ist. Wir betrachten die Familie von Randwerten $\varphi_t := t\varphi$, $t \in [0, 1]$, und die zugehörigen Dirichletprobleme $\mathcal{DP}(\varphi_t)$:

$$\begin{aligned} \zeta_t &\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \\ \mathcal{M}_G \zeta_t &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta_t &= \varphi_t \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir zeigen mit Hilfe der Graphenstabilität und Graphenkompaktheit, dass $\mathcal{DP}(\varphi_t)$ für jedes $t \in [0, 1]$ eine Lösung besitzt. Für $t = 1$ ist dann unser ursprüngliches Dirichletproblem $\mathcal{DP}(\varphi)$ gelöst.

1. Für $t = 0$ haben wir Nullrandwerte, und es existiert die triviale Start-Lösung $\zeta_0 \equiv 0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ gemäß Bemerkung 4.2 aus Abschnitt 4.1. Mit der Graphenstabilität, Satz 4.8 aus Abschnitt 4.6, existiert dann ein $\epsilon > 0$, so dass die Dirichletprobleme $\mathcal{DP}(\varphi_t)$ für alle $0 \leq t \leq \tilde{t} \leq \frac{\epsilon}{\|\varphi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega}}$ lösbar sind.

2. Sei

$$t_0 := \sup \{ \tilde{t} \in [0, 1] : \mathcal{DP}(\varphi_t) \text{ besitzt eine Lösung für alle } t \leq \tilde{t} \} > 0$$

definiert. Wir wählen nun eine beliebige Folge $\{t_n\}_{n=1,2,\dots} \subset [0, 1]$ mit $0 \leq t_n < t_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$. Dann gibt es nach 1. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung $\zeta_{t_n} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ von $\mathcal{DP}(\varphi_{t_n})$. Die Graphenkompaktheit, Satz 4.7 aus Abschnitt 4.5, liefert uns auch eine Lösung $\zeta_{t_0} := \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{t_n} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ von $\mathcal{DP}(\varphi_{t_0})$ mit $\varphi_{t_0} := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}$.

Angenommen es wäre $t_0 < 1$, so finden wir wieder mit der Graphenstabilität ein

$$\epsilon = \epsilon(\zeta_{t_0}) > 0, \text{ so dass } \mathcal{DP}(\varphi_t) \text{ für alle } t \in \left[t_0 - \frac{\epsilon}{\|\varphi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega}}, t_0 + \frac{\epsilon}{\|\varphi\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega}} \right] \text{ lösbar ist.}$$

Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_0 . Also muss $t_0 = 1$ gelten, und wir haben damit die Existenz einer Lösung unseres Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi)$ gezeigt.

Die Eindeutigkeit folgt bereits aus Abschnitt 4.1, Satz 4.2.

q.e.d.

Diese konstruktive Kontinuitätsmethode können wir ebenso in n Dimensionen durchführen. Dafür müssen wir insbesondere für den Beweis der globalen Hölderabschätzung des Gradienten andere Methoden (De Giorgi-Nash-Moser, vgl. [S6], Kap. X, bzw. [GT], Kap. 13) anwenden. Da wir aber bei der Approximationsmethode im nachfolgendem Kapitel in gewichtet konformen Parametern arbeiten, die nur in zwei Dimensionen eingeführt werden können, haben wir uns auf diesen Fall beschränkt.

Kapitel 5

Dirichletproblem für konvexe Gebiete - die Approximationsmethode

Die Idee der folgenden Approximationsmethode stammt aus der Dissertation von Sauvigny ([S1], §4) und wird in diesem Kapitel auf unser Dirichletproblem übertragen. Wir arbeiten hier insbesondere in gewichtet konformen Parametern, und die elliptischen Systeme aus Kapitel 3 kommen zum Einsatz. Von entscheidender Bedeutung ist hierbei der parametrische Kompaktheitssatz, für welchen wir zunächst in Abschnitt 5.1 Abschätzungen herleiten. Danach approximieren wir allgemeine konvexe Gebiete durch reguläre, strikt konvexe Gebiete und wenden darauf die Lösung des zugehörigen Dirichletproblems mit der Kontinuitätsmethode aus Kapitel 4 an. Der parametrische Kompaktheitssatz liefert uns dann eine Lösung des Dirichletproblems für konvexe Gebiete: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$. Zu gegebener Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ und stetigen Randwerten $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ suchen wir eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

5.1 A-priori-Abschätzungen

5.1.1 Abschätzung des Oberflächeninhalts

Um ein Stetigkeitsmodul für den Flächenvektor X zu konstruieren, benötigen wir insbesondere eine Abschätzung des Oberflächeninhalts. Wenn G -minimale Graphen X als kritische Punkte des parametrischen Funktionals

$$\mathcal{F}[X] := \iint_{\Omega} F(X_u \wedge X_v) \, dudv$$

entstehen, erhalten wir als nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung sofort in Divergenzform

$$\frac{d}{dx} \widetilde{F}_p(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy} \widetilde{F}_q(\zeta_x, \zeta_y) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

(vgl. Satz 2.6 aus Abschnitt 2.3). In Abschnitt 2.4 haben wir jedoch gezeigt, dass sich unsere Differentialgleichung für G -minimale Graphen immer in Divergenzform schreiben lässt. Wir werden nun eine obere Schranke für den Oberflächeninhalt von Graphen in Divergenzform beweisen (siehe [Fi1], Hilfssätze 4 bis 6, und [Fr], Abschnitt 2.19).

Satz 5.1 *Sei $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \eta(\zeta_x, \zeta_y) + \frac{d}{dy} \mu(\zeta_x, \zeta_y) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit vorgeschriebenen Randwerten $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Ferner gelten die Voraussetzungen

(V1) $\eta(p, q)^2 + \mu(p, q)^2 \leq k_0^2$ für alle $(p, q) \in \Theta_2 := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : |(p, q)| \leq C_1\}$ mit einer Konstanten $k_0 = k_0(C_1) \in [0, +\infty)$ und C_1 aus (4.8)

(V2) $m_1 |\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} \eta_p(\tilde{p}, \tilde{q}) & \eta_q(\tilde{p}, \tilde{q}) \\ \mu_p(\tilde{p}, \tilde{q}) & \mu_q(\tilde{p}, \tilde{q}) \end{pmatrix} \circ \xi^t$, $m_1 \in (0, +\infty)$,
für alle $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ und für alle $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2 \leq 1$

(V3) $\eta(0, 0) = \mu(0, 0) = 0$

Dann gilt die Abschätzung

$$\mathcal{A}(\zeta) := \iint_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \, dx dy \leq |\Omega| + \frac{k_0}{m_1} \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} |\partial\Omega| \quad (5.2)$$

mit dem Flächeninhalt $|\Omega|$ des Gebietes Ω und der Länge $|\partial\Omega|$ des Randes $\partial\Omega$.

Beweis: Wir setzen $p := \zeta_x$ und $q := \zeta_y$ und betrachten die Funktion

$$\gamma(t) := p\eta(tp, tq) + q\mu(tp, tq), \quad t \in [0, 1].$$

Dann gilt nach (V3)

$$\gamma(0) = 0 \quad \text{und} \quad \gamma(1) = p\eta(p, q) + q\mu(p, q).$$

Für reelles $t \in [0, 1]$ definieren wir eine Zahl $m_1^*(t) \in (0, +\infty)$, so dass gilt

$$m_1^*(t) |\xi|^2 \leq \xi \circ \begin{pmatrix} \eta_p(tp, tq) & \eta_q(tp, tq) \\ \mu_p(tp, tq) & \mu_q(tp, tq) \end{pmatrix} \circ \xi^t$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$. Gemäß (V2) fordern wir dann

$$(a) \quad p^2 + q^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad m_1^*(t) \geq m_1 \quad \text{für} \quad t \leq \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$(b) \quad p^2 + q^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad m_1^*(t) \geq m_1 \quad \text{für} \quad t \leq 1$$

Dann gilt in beiden Fällen $(tp)^2 + (tq)^2 = t^2(p^2 + q^2) \leq 1$. Nun differenzieren wir γ und erhalten

$$\gamma'(t) = \eta_p(tp, tq)p^2 + \eta_q(tp, tq)pq + \mu_p(tp, tq)pq + \mu_q(tp, tq)q^2.$$

Mit der Definition von $m_1^*(t)$ ergibt sich $m_1^*(t)(p^2 + q^2) \leq \gamma'(t)$ und somit

$$\gamma(1) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t) dt \geq (p^2 + q^2) \int_0^1 m_1^*(t) dt.$$

Wir betrachten die beiden Fälle $p^2 + q^2 \geq 1$ bzw. ≤ 1 :

- $p^2 + q^2 \geq 1$: ($\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$)

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{nach (a)}}{\Rightarrow} \gamma(1) &\geq (p^2 + q^2) \int_0^{(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}} m_1^*(t) dt \\ &\stackrel{(0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}})}{\geq} (p^2 + q^2) \int_0^{(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}} m_1 dt \\ &= m_1(p^2 + q^2) \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = m_1 \sqrt{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

- $p^2 + q^2 \leq 1$:

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{nach (b)}}{\Rightarrow} \gamma(1) &\geq (p^2 + q^2) \int_0^1 m_1^*(t) dt \stackrel{(0 \leq t \leq 1)}{\geq} (p^2 + q^2) \int_0^1 m_1 dt \\ &= m_1(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\gamma(1) = p\eta(p, q) + q\mu(p, q) \geq \begin{cases} m_1(p^2 + q^2), & \text{falls } (p^2 + q^2) \leq 1 \\ m_1 \sqrt{p^2 + q^2}, & \text{falls } (p^2 + q^2) \geq 1 \end{cases}. \quad (5.3)$$

Aus (5.1) wissen wir

$$\operatorname{div}(\zeta\eta, \zeta\mu) = p\eta + q\mu + \zeta\left(\frac{d}{dx}\eta + \frac{d}{dy}\mu\right) = p\eta + q\mu.$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (p\eta + q\mu) dx dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} (\zeta\eta, \zeta\mu) dx dy = \int_{\partial\Omega} \zeta(\eta, \mu) \cdot \nu^t ds \\ &\leq \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \sqrt{\eta^2 + \mu^2} ds \end{aligned}$$

mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor $\nu = \nu(s)$ am Rand $\partial\Omega$. Mit (V1) ergibt sich dann

$$\iint_{\Omega} (p\eta + q\mu) dx dy \leq \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} k_0 |\partial\Omega|.$$

Wir setzen nun $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, y) \in \Omega : p^2 + q^2 \geq 1\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x, y) \in \Omega : p^2 + q^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Für $p^2 + q^2 \geq 1$ benutzen wir $\sqrt{1 + p^2 + q^2} \leq 1 + \sqrt{p^2 + q^2}$ und erhalten somit

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy &\leq \iint_{\Omega_1} dx dy + \iint_{\Omega_1} \sqrt{p^2 + q^2} dx dy \\ &\leq |\Omega_1| + \frac{1}{m_1} \iint_{\Omega_1} (p\eta + q\mu) dx dy. \end{aligned}$$

Für $p^2 + q^2 \leq 1$ benötigen wir $\sqrt{1 + p^2 + q^2} \leq 1 + p^2 + q^2$, und es folgt

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy &\leq \iint_{\Omega_2} dx dy + \iint_{\Omega_2} (p^2 + q^2) dx dy \\ &\leq |\Omega_2| + \frac{1}{m_1} \iint_{\Omega_2} (p\eta + q\mu) dx dy. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy \leq |\Omega| + \frac{k_0}{m_1} \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} |\partial\Omega|.$$

q.e.d.

Bemerkung 5.1 1. Die isoperimetrische Ungleichung (vgl. [O], Abschnitt 1) erlaubt uns noch, $|\Omega|$ zu eliminieren. Es gilt nämlich

$$|\Omega| \leq \frac{|\partial\Omega|^2}{4\pi}.$$

Dies ergibt die Abschätzung

$$\mathcal{A}(\zeta) \leq \frac{|\partial\Omega|^2}{4\pi} + \frac{k_0}{m_1} \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} |\partial\Omega|. \quad (5.4)$$

2. Für G -minimale Graphen aus einem Variationsproblem genügen die partiellen Ableitungen $\eta = \tilde{F}_p$ und $\mu = \tilde{F}_q$ der Dichtefunktion \tilde{F} den Voraussetzungen des Satzes. Dabei ist (V1) wegen [JS2], Anhang erfüllt. Voraussetzung (V2) sieht man mit (2.24) ein. (V3) kann gemäß [JS1], S. 190, mit einer Normalisierung erreicht werden. Multiplizieren wir nämlich eine Konstante und Addieren eine lineare Funktion in p und q zu \tilde{F} , so bleiben die Extremalen unverändert, und wir können $\nabla \tilde{F}(0,0) = 0$ erfüllen. Für allgemeine G -minimale Graphen haben wir in Abschnitt 2.4 bei der Divergenzdarstellung nach Bers bereits gezeigt, dass die Voraussetzungen erfüllt sind, bzw. die Differentialgleichung für G -minimale Graphen so normiert werden kann.

5.1.2 Die ebene Abbildung f und Abschätzung des Oberflächenelements W

Zunächst präzisieren wir das Einführen von gewichtet konformen Parametern und erhalten so wichtige Eigenschaften für die ebene Abbildung f .

Satz 5.2 Auf einem beschränkten $C^{2+\alpha}$ -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, das den Nullpunkt enthalte, sei eine Lösung $\zeta = \zeta(x, y) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ der G -Minimalflächengleichung

$$\mathcal{M}_G \zeta = a(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xx} + 2b(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{xy} + c(\zeta_x, \zeta_y) \zeta_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

gegeben. Dann gibt es einen $C^{2+\alpha}$ -Diffeomorphismus

$$f : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega} \in C^{2+\alpha}(\bar{B}), \quad w = (u, v) \mapsto f(w) = (x, y),$$

mit

$$\begin{aligned} J_f &= x_u y_v - x_v y_u > 0 \quad \text{in } \bar{B}, \\ f(0, 0) &= (0, 0), \\ f(\partial B) &= \partial \Omega, \end{aligned} \tag{5.5}$$

so dass die umparametrisierte Fläche

$$X(w) : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\bar{B}), \quad X(w) := (f(w), \zeta \circ f(w)),$$

in gewichtet konformen Parametern vorliegt. Sie genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1) X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2) X_v \\ X_u \circ G(N) \circ X_u^t &= X_v \circ G(N) \circ X_v^t, \quad X_u \circ G(N) \circ X_v^t = 0 \quad \text{in } B \end{aligned} \tag{5.6}$$

mit den gewichteten Korrekturtermen Ω_{ii}^k aus (1.33) in Abschnitt 1.5. Die Abbildung f genügt einem Stetigkeitsmodul: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Funktion $\delta(\epsilon) : (0, \infty) \rightarrow (0, \frac{1}{4})$, welche nur von den Daten $g_0, k_0, m_1, \|\zeta\|_0^{\partial\Omega}, |\partial\Omega|$ abhängt, so dass für alle $w, w' \in \bar{B}$ mit $|w - w'| \leq \delta(\epsilon)$ die Oszillationsabschätzung

$$|f(w) - f(w')| \leq \epsilon \tag{5.7}$$

folgt.

Beweis: Mittels des Uniformisierungssatzes führen wir gewichtet konforme Parameter ein (siehe hierzu [S6], Kap. XII, §8). Es existiert dann ein $C^{2+\alpha}$ -Diffeomorphismus f mit den Eigenschaften (5.5). Mit Hilfe des Abbildungsgrades sieht man dann ein, dass $f : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega}$ eine topologische Abbildung ist. In Abschnitt 3.1 haben wir gezeigt, dass die umparametrisierte Fläche die Gleichungen (5.6) erfüllt.

Ein Stetigkeitsmodul für die ebene Abbildung f leiten wir mit Hilfe der Abschätzung des Flächeninhalts für Graphen, der Abschätzung des Dirichletintegrals und dem Courant-Lebesgue-Lemma her. Satz 5.1 und Bemerkung 5.1 liefern uns zunächst

$$\mathcal{A}(\zeta) \leq \frac{|\partial\Omega|^2}{4\pi} + \frac{k_0}{m_1} \|\zeta\|_0^{\partial\Omega} |\partial\Omega|.$$

Aufgrund der gewichteten Konformitätsrelationen erhalten wir ebenfalls eine Abschätzung des Dirichletintegrals

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B(f) &:= \iint_B \{|f_u(u, v)|^2 + |f_v(u, v)|^2\} dudv \leq \iint_B \{|X_u(u, v)|^2 + |X_v(u, v)|^2\} dudv \\ &\leq (1 + g_0) \iint_B \{X_u(u, v) \circ G(N) \circ X_u(u, v)^t + X_v(u, v) \circ G(N) \circ X_v(u, v)^t\} dudv \\ &= 2(1 + g_0) \iint_B |X_u \wedge X_v(u, v)| dudv = 2(1 + g_0) \mathcal{A}(X) = 2(1 + g_0) \mathcal{A}(\zeta) \\ &\leq A(g_0, k_0, m_1, \|\zeta\|_0^{\partial\Omega}, |\partial\Omega|). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Gemäß [S6], Kap. XII, §5, Satz 3, zeigen wir für beliebiges $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ die Abschätzung

$$|f(w_1) - f(w_0)| \leq 4\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} \quad (5.9)$$

für alle $w_0, w_1 \in \bar{B}$ mit $|w_1 - w_0| \leq \delta$. O.B.d.A. können wir dabei

$$4\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} < d$$

mit dem Durchmesser $d := \text{diam}(\Omega)$ des Gebietes Ω annehmen, da die Abschätzung sonst trivial wäre. Sei dazu also $w_0 \in \bar{B}$ ein beliebiger Punkt und $\delta \in (0, \frac{1}{4})$. Das Courant-Lebesgue-Lemma (vgl. [S5], Kap. I, §5, Satz 3) liefert dann die Existenz einer Zahl $\delta^* \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, so dass

$$\int_{\substack{|w-w_0|=\delta^* \\ w \in B}} |df(w)| \leq 2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} \quad (5.10)$$

gilt. Wir definieren dann folgende Mengen

$$D := \{w \in \bar{B} : |w - w_0| \leq \delta^*\}, \quad \gamma := \{w \in \bar{B} : |w - w_0| = \delta^*\}$$

mit ihren topologischen Bildern $\hat{D} := f(D)$ und $\hat{\gamma} := f(\gamma)$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(a) $\underline{D} \subset B$: Dann gilt $\partial\hat{D} = \hat{\gamma}$, und wir haben für die Länge von $\hat{\gamma}$ die Abschätzung

$$L(\hat{\gamma}) \leq 2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}}.$$

Da die Abbildung f topologisch ist, erhalten wir

$$|f(w) - f(w_0)| \leq 2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} \quad \text{für alle } w \in D.$$

(b) $\overline{\partial D} \cap \partial B \neq \emptyset$: Dann gibt es einen Punkt $\bar{w} \in \gamma \cap \partial B$, für den $\hat{z} = f(\bar{w}) \in \hat{\gamma} \cap \partial\Omega$ gilt. Die Abschätzung (5.10) liefert

$$\hat{\gamma} \subset \Sigma := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \hat{z}| \leq 2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} \right\}. \quad (5.11)$$

Durch eine Translation kann man $|\hat{z}| = \frac{d}{2}$ erreichen. Mit

$$2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} < \frac{d}{2}$$

folgt $0 \notin \Sigma$. Wegen $\delta^* \leq \sqrt{\delta} < \frac{1}{2}$ und $\partial D \cap \partial B \neq \emptyset$ gilt dann ebenso $0 \notin D$. Wäre nämlich $0 \in D$, so würde für $\bar{w} \in \partial D \cap \partial B \subset D$ aus

$$|\bar{w}| - |w_0| \leq |\bar{w} - w_0| \leq \delta^* < \frac{1}{2}$$

und $|0 - w_0| \leq \delta^* < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$|\bar{w}| < \frac{1}{2} + |w_0| < 1$$

gelten, im Widerspruch zu $|\bar{w}| = 1$. Damit ist $0 \notin D$ gezeigt. Da $f : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega}$ topologisch und nullpunkttreu ist, folgt aus $\hat{\gamma} \subset \Sigma$ die Inklusion $\hat{D} \subset \Sigma$. Damit erhalten wir für alle $w \in D$ die Abschätzung

$$|f(w) - f(w_0)| \leq |f(w) - f(\bar{w})| + |f(\bar{w}) - f(w_0)| \leq 4\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}}$$

aus (5.11)

Wegen $\delta \leq \delta^*$ und daraus schlußfolgernd $\{w \in \bar{B} : |w - w_0| \leq \delta\} \subset D$ gilt obige Behauptung (5.9). Weiter haben wir

$$|f(w_1) - f(w_0)| \leq 4\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} \leq 4\sqrt{\frac{\pi A}{-\log(4\delta)}} = \epsilon$$

für alle $w_0, w_1 \in \bar{B}$ mit $|w_1 - w_0| \leq \delta$, wenn wir $\delta = \delta(\epsilon) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{16\pi A}{\epsilon^2}\right) \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ wählen. Aus $A = A(g_0, k_0, m_1, \|\zeta\|_0^{\partial\Omega}, |\partial\Omega|)$ folgt noch die Abhängigkeit von δ . q.e.d.

Bemerkung 5.2 Für die Regularität $\zeta \in C^{3+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ erhalten wir abweichend

$$f : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega} \in C^{2+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B}) \quad \text{mit} \quad J_f > 0 \text{ in } B.$$

Wir wollen nun einen Hilfssatz für die ebene Abbildung f zeigen (vgl. [S3], Hilfssatz 4), der uns später die gewünschte Differentialungleichung $|\Delta f| \leq C|\nabla f|$ im Beweis des parametrischen Kompaktheitssatzes liefert.

Hilfssatz 5.1 *Der G -minimale Graph*

$$X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)) = (f(u, v), \zeta \circ f(u, v)) : B \rightarrow \mathbb{R}^3$$

liege in gewichtet konformen Parametern vor. Dann gibt es eine Konstante $C_* = C_*(g_0)$, so dass die Ungleichung

$$|\nabla X(u, v)|^2 \leq C_* |\nabla f(u, v)|^2, \quad (u, v) \in B, \quad (5.12)$$

richtig ist.

Beweis: Aus der Elliptizität der Gewichtsmatrix $G = (G_{ij})_{i,j=1,2,3}$,

$$\frac{1}{1+g_0} |\xi|^2 \leq \xi^t \circ G \circ \xi \leq (1+g_0) |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^3, \quad (5.13)$$

folgern wir

$$0 < \frac{1}{1+g_0} \leq G_{ii} \leq 1+g_0 \quad (5.14)$$

$$|G_{ij}| \leq 2(1+g_0), \quad i \neq j. \quad (5.15)$$

Die erste Ungleichung sehen wir mit Hilfe von $\xi = e_i$ (i -ter Einheitsvektor) wegen

$$\frac{1}{1+g_0} = \frac{1}{1+g_0} |\xi|^2 \leq \xi \circ G \circ \xi^t = G_{ii} \leq (1+g_0) |\xi|^2 = 1+g_0$$

ein. Für die zweite Ungleichung wählen wir $\xi = e_i + e_j$ für $i \neq j$ und erhalten

$$\begin{aligned} 2|G_{ij}| &= |\xi \circ G \circ \xi^t - G_{ii}(\xi^i)^2 - G_{jj}(\xi^j)^2| \\ &\leq \xi \circ G \circ \xi^t + G_{ii}(\xi^i)^2 + G_{jj}(\xi^j)^2 \\ &\stackrel{(5.13), (5.14)}{\leq} (1+g_0) |\xi|^2 + 2(1+g_0) = 4(1+g_0), \end{aligned}$$

woraus $|G_{ij}| \leq 2(1+g_0)$, $i \neq j$ folgt. Für $i = j$ haben wir bereits (5.14). Insgesamt gilt also

$$|G_{ij}| \leq c_1(g_0), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Wir verwenden die gewichteten Konformitätsrelationen in komplexer Form aus (1.24) in Abschnitt 1.4

$$X_w \circ G \circ X_w^t = 0, \quad w = u + iv \in B,$$

um die dritte Komponente x_w^3 wie folgt zu eliminieren:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+g_0}|x_w^3|^2 &\leq |G_{33}x_w^3x_w^3| \\
&= |G_{11}x_w^1x_w^1 + 2G_{12}x_w^1x_w^2 + 2G_{13}x_w^1x_w^3 + 2G_{23}x_w^2x_w^3 \\
&\quad + G_{22}x_w^2x_w^2| \\
&\leq c_1(g_0) \{ |x_w^1|^2 + |x_w^2|^2 + 2|x_w^1||x_w^2| + 2|x_w^1||x_w^3| \\
&\quad + 2|x_w^2||x_w^3| \}.
\end{aligned}$$

Mit $2ab \leq \frac{1}{\epsilon}a^2 + \epsilon b^2$, $\epsilon > 0$ beliebig, folgern wir

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc &\leq 2(a^2 + b^2) + 2ac + 2bc \\
&\leq 2(a^2 + b^2) + \frac{1}{\epsilon}a^2 + \epsilon c^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2 + \epsilon c^2 \\
&= \left(2 + \frac{1}{\epsilon}\right)(a^2 + b^2) + 2\epsilon c^2
\end{aligned}$$

Wir können obige Ungleichung fortsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+g_0}|x_w^3|^2 &\leq \left(2 + \frac{1}{\epsilon}\right) c_1(g_0)(|x_w^1|^2 + |x_w^2|^2) + 2\epsilon c_1(g_0)|x_w^3|^2 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+g_0} - 2\epsilon c_1(g_0)\right) |x_w^3|^2 &\leq \left(2 + \frac{1}{\epsilon}\right) c_1(g_0)(|x_w^1|^2 + |x_w^2|^2) \\
\Leftrightarrow |x_w^3|^2 &\leq c_2(g_0)(|x_w^1|^2 + |x_w^2|^2) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{4}((x_u^3)^2 + (x_v^3)^2) &\leq c_2(g_0) \left(\frac{1}{4}((x_u^1)^2 + (x_v^1)^2) + \frac{1}{4}((x_u^2)^2 + (x_v^2)^2)\right) \\
\Leftrightarrow |\nabla x^3|^2 &\leq c_2(g_0)|\nabla f|^2,
\end{aligned}$$

wenn wir ϵ hinreichend klein wählen, so dass $\frac{1}{1+g_0} - 2\epsilon c_1(g_0) > 0$ erfüllt ist. Dann gilt weiter

$$|\nabla X|^2 = |\nabla f|^2 + |\nabla x^3|^2 \leq (1 + c_2(g_0))|\nabla f|^2.$$

q.e.d.

Für unseren parametrischen Kompaktheitssatz benötigen wir eine Abschätzung des Oberflächenelements nach unten, die wir nun erbringen wollen.

Satz 5.3 *Sei der gewichtet konform parametrisierte G -minimale Graph $X = X(u, v) = (f(u, v), \zeta \circ f(u, v)) \in C^{2+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B})$ gegeben. Weiter gelte für die ebene Abbildung f die Differentialungleichung $|\Delta f| \leq C|\nabla f|$ in B . Dann gibt es für jedes $r \in (0, 1)$ eine Konstante*

$$c = c(C, g_0, k_0, m_1, \|\zeta\|_0^{\partial\Omega}, |\partial\Omega|, r),$$

so dass wir für das Oberflächenelement W eine Abschätzung nach unten,

$$W \geq c > 0 \quad \text{in } \overline{B_r}, \tag{5.16}$$

haben.

Beweis: Zunächst schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} J_f &= x_u y_v - x_v y_u \leq |x_u y_v| + |x_v y_u| \leq |x_u| |y_v| + |x_v| |y_u| \\ &\leq |x_u|^2 + |y_v|^2 + |x_v|^2 + |y_u|^2 = |\nabla f|^2 \leq |X_u|^2 + |X_v|^2. \end{aligned}$$

Mit $\frac{1}{1+g_0} |X_{u^i}|^2 \leq X_{u^i} \circ G(N) \circ X_{u^i}^t$, $i = 1, 2$, folgt dann in gewichtet konformen Parametern

$$2W = X_u \circ G(N) \circ X_u^t + X_v \circ G(N) \circ X_v^t \geq \frac{1}{1+g_0} (|X_u|^2 + |X_v|^2) \geq \frac{1}{1+g_0} |\nabla f|^2.$$

Die Verzerrungsabschätzung von Heinz (vgl. [S6], Kap. XII, §5, Satz 3) liefert

$$|\nabla f(u, v)| \geq \Theta(C, A, r) > 0, \quad (u, v) \in \overline{B}_r,$$

mit der Konstanten A aus (5.8). Als Voraussetzungen benötigen wir $f : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega} \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ topologisch, $f(0, 0) = (0, 0)$, $J_f(w) > 0$ in B und $\mathcal{D}_B(f) \leq \text{const}$, welche wir aus Satz 5.2 gewinnen. Wir beachten noch, dass wir im Beweis der Verzerrungsabschätzung das Bildgebiet B durch Ω ersetzen können. Wir erhalten insgesamt

$$W(u, v) \geq \frac{1}{2(1+g_0)} |\nabla f(u, v)|^2 \geq \frac{1}{2(1+g_0)} \Theta(C, A, r)^2 > 0, \quad (u, v) \in \overline{B}_r.$$

q.e.d.

5.1.3 Stetigkeitsmodule für X und N

Für den Beweis des parametrischen Kompaktheitssatzes in Abschnitt 5.2 benötigen wir einen Stetigkeitsmodul für den Normalenvektor N im Innern sowie einen Stetigkeitsmodul für den Flächenvektor X bis zum Rand. Wir beginnen zunächst mit einem Einschließungssatz für G -Minimalflächen (vgl. [Fr], Abschnitt 2.9.3).

Hilfssatz 5.2 *Die gewichtet konform parametrisierte G -Minimalfläche $X : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben. Weiter sei $K_r \subset \mathbb{R}^3$ die kleinste Kugel, welche die Randkurve $X(\partial B)$ enthält, also $X(\partial B) \subset K_r$. Dann gilt*

$$X(\overline{B}) \subset K_r.$$

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass G -Minimalflächen nach (2.4) aus Abschnitt 2.1 nichtpositive Gaußsche Krümmung $\mathcal{K} \leq 0$ besitzen. Angenommen, es existiert ein Punkt $w_0 \in B$ mit $X(w_0) \notin K_r$. Dann gibt es aus Gründen der Kompaktheit einen weiteren inneren Punkt $w_1 \in B$, so dass der Flächenpunkt $X(w_1)$ die Sphäre $S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$ vom Radius $R > r$ berührt. Dort gilt für die Gaußsche Krümmung $K(w_1) \geq \frac{1}{R^2} > 0$, womit wir einen Widerspruch erzeugt haben. q.e.d.

Der G -minimale Graph $X = X(u, v) = (f(u, v), \zeta \circ f(u, v)) \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ liege nun in gewichtet konformen Parametern vor. Dann gehört die einfach geschlossene Jordankurve $\tilde{\Gamma} := \{(u, v, \tilde{\zeta}(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \partial B\}$ mit $\tilde{\zeta}(u, v) := \zeta \circ f(u, v)$, $(u, v) \in \overline{B}$, zur Klasse $C^{2+\alpha}$, und folgende Bogen-Sehnen-Bedingung gilt (siehe [N], §23 und §24): Seien $z_1, z_2 \in \tilde{\Gamma}$

gewählt und $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$ eine Zerlegung in zwei zusammenhängende, abgeschlossene Bögen $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$ mit Endpunkten z_1, z_2 . Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\eta = \eta(\epsilon)$, so dass für beliebige $z_1, z_2 \in \tilde{\Gamma}$ mit $|z_1 - z_2| \leq \eta$ folgt

$$\min(\text{diam } \tilde{\Gamma}_1, \text{diam } \tilde{\Gamma}_2) \leq \epsilon.$$

Die Oberflächeninhaltsabschätzung, Satz 5.1, liefert uns eine Abschätzung für das Dirichletintegral gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B(X) &:= \iint_B \{|X_u|^2 + |X_v|^2\} dudv \\ &\leq (1 + g_0) \iint_B \{X_u(u, v) \circ G(N) \circ X_u(u, v)^t + X_v(u, v) \circ G(N) \circ X_v(u, v)^t\} dudv \\ &= 2(1 + g_0) \iint_B |X_u \wedge X_v(u, v)| dudv = 2(1 + g_0)\mathcal{A}(X) = 2(1 + g_0)\mathcal{A}(\zeta) \\ &\leq A(g_0, k_0, m_1, \|\zeta\|_0^{\partial\Omega}, |\partial\Omega|). \end{aligned}$$

Das Courant-Lebesgue-Lemma liefert dann zu jedem $w_0 \in \bar{B}$ und $\delta \in (0, 1)$ ein $\delta^* = \delta^*(w_0, \delta) \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ mit

$$L := \int_{\substack{|w-w_0|=\delta^* \\ w \in B}} |dX(w)| \leq 2\sqrt{\frac{\pi A}{-\log \delta}} =: C(\delta). \quad (5.17)$$

Wegen $C(\delta) \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ können wir $0 < \delta < \frac{1}{4}$ so klein wählen, dass zu $0 < \epsilon < \text{dist}((0, 0), \partial\Omega)$ die Konstante $C(\delta)$ die Bedingung

$$C(\delta) \leq \min\left(\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \frac{\epsilon}{2}\right)$$

mit $\eta(\epsilon)$ aus der Bogen-Sehnen-Bedingung erfüllt.

Setzen wir $U = U_{\delta^*}(w_0) := \{w \in \bar{B} : |w - w_0| \leq \delta^*\}$, so können wir den Rand ∂U von U in zwei Mengen zerlegen

$$\begin{aligned} \gamma &:= \{w \in \bar{B} : |w - w_0| = \delta^*\}, \\ \beta &:= \{w \in \partial B : |w - w_0| \leq \delta^*\}, \end{aligned}$$

wobei β auch leer sein kann. Abschätzung (5.17) liefert dann eine obere Schranke an die Länge L der Kurve $X(\gamma)$, und es ist

$$|X(w_1) - X(w_2)| \leq L \leq C(\delta) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für } w_1, w_2 \in \gamma \quad (5.18)$$

richtig. Sei nun β nichtleer, dann finden wir zwei Punkte z_1, z_2 mit $\{z_1, z_2\} = \gamma \cap \beta$ und zerlegen die Randkurve $X(\partial B)$ in die beiden zusammenhängenden Teilbögen $X(\beta)$ und $X(\alpha)$ mit

$$\alpha := \overline{\partial B \setminus \beta} = \{w \in \partial B : |w - w_0| \geq \delta^*\},$$

für welche die Bogen-Sehnen-Bedingung die Ungleichung

$$\min(\text{diam } X(\beta), \text{diam } X(\alpha)) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

liefert. Nehmen wir an, es gilt

$$\text{diam } X(\alpha) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (5.19)$$

dann folgt

$$\text{diam } f(\alpha) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Die Kurve $f(\alpha) \cup f(\gamma) = f(\alpha \cup \gamma)$ ist eine einfach geschlossene Jordankurve im \mathbb{R}^2 , welche das Gebiet $f(B \setminus U)$ berandet. Aus (5.18) und (5.19) folgt

$$\text{diam } f(\alpha \cup \gamma) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

und weiter

$$\text{diam } f(B \setminus U) \leq \text{diam } f(\alpha \cup \gamma) \leq \epsilon. \quad (5.20)$$

Wegen $\delta < \frac{1}{4}$ haben wir $(0, 0) \in B \setminus U$ und somit $f(0, 0) = (0, 0) \in f(B \setminus U)$. Das führt uns aber zur Abschätzung

$$\text{diam } f(B \setminus U) \geq |f(0, 0) - f(z_1)| \geq \text{dist}((0, 0), \partial\Omega) > \epsilon,$$

im Widerspruch zu (5.20). Somit gilt

$$\text{diam } X(\beta) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir erhalten daraus

$$|X(\tilde{w}_1) - X(\tilde{w}_2)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für } \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \beta.$$

Zusammen erhalten wir für Randpunkte $w_1, w_2 \in \partial U$ die Abschätzung

$$|X(w_1) - X(w_2)| \leq \epsilon.$$

Falls β leer ist, folgt diese Ungleichung sofort aus (5.18). Es gibt also ein $a = (a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$X(\partial U) \subset K_\epsilon(a) := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2 < \epsilon^2\}.$$

Der Einschließungssatz, Hilfssatz 5.2, liefert uns schließlich eine Abschätzung im Innern, $X(U) \subset K_\epsilon(a)$, woraus

$$|X(w_1) - X(w_2)| \leq |X(w_1) - a| + |X(w_2) - a| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \quad w_1, w_2 \in U,$$

abgeleitet werden kann. Da $w_0 \in \overline{B}$ beliebig gewählt war, folgt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\epsilon)$, so dass es für jedes $w_0 \in \overline{B}$ ein $\delta^*(w_0) \geq \delta$ gibt, für welches die Abschätzung

$$|X(w_0) - X(w_1)| \leq 2\epsilon \quad \text{für alle } w_1 \in \overline{B} \text{ mit } |w_0 - w_1| \leq \delta^*$$

gilt. Wir haben damit einen Stetigkeitsmodul für X bis zum Rand bewiesen und fassen zusammen

Hilfssatz 5.3 *Sei X ein G -minimaler Graph in gewichtet konformen Parametern. Dann genügt X dem Stetigkeitsmodul: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass für alle $w_0, w_1 \in \overline{B}$ mit $|w_0 - w_1| \leq \delta$ die Oszillationsabschätzung*

$$|X(w_0) - X(w_1)| \leq 2\epsilon$$

gilt.

Für den Stetigkeitsmodul des Normalenvektors N verwenden wir die stereographische Projektion, angewendet auf N , und zeigen die Quasikonformität dieser ebenen Abbildung. Die innere Hölderabschätzung (Hilfssatz 4.6 aus Abschnitt 4.4) liefert uns dann den Stetigkeitsmodul. Für die Herleitung verweisen wir auf [S3], §8, bzw. [Fr], Abschnitt 2.25.

Sei dazu also die gewichtet konform parametrisierte G -Minimalfläche X mit der Normalen N , die der Ungleichung

$$N \cdot e_3^t \geq \cos \omega \quad \text{in } B \tag{5.21}$$

mit $e_3 = (0, 0, 1)$ und einem Winkel $\omega \in [0, \pi)$ genüge, gegeben. Betrachten wir die sphärische Kappe $S_\omega^2 := \{Z \in S^2 : Z \cdot e_3^t \geq \cos \omega\}$, die eine Umgebung des Südpols auslässt, so gilt also $N(u, v) \in S_\omega^2$ für $(u, v) \in B$. Sei nun $\text{SP} : S_\omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion (siehe z.B. [BL], S. 232 und S. 240) mit

$$\text{SP}(z^1, z^2, z^3) = (\xi, \eta) := \left(\frac{z^1}{1 + z^3}, \frac{z^2}{1 + z^3} \right)$$

sowie der Umkehrabbildung

$$\text{SP}^{-1}(\xi, \eta) = \left(\frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2} \right).$$

Mit Hilfe der Kugelkoordinaten

$$z^1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z^2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z^3 = \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

erhalten wir

$$\text{SP}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{1 + \cos \vartheta}, \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{1 + \cos \vartheta} \right).$$

Längen werden bei der stereographischen Projektion verzerrt dargestellt. Wir bezeichnen mit $\sigma = \sigma(z^1, z^2, z^3)$ die Verzerrung unter SP und mit

$$\chi = \chi(\xi, \eta) = \sigma(z^1(\xi, \eta), z^2(\dots), z^3(\dots))^{-1}$$

die Verzerrung unter SP^{-1} . Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma(z^1, z^2, z^3) &= \frac{1}{1 + z^3} = \frac{1}{1 + \cos \vartheta} = \sigma(\vartheta, \varphi), \\ \chi(\xi, \eta) &= \frac{2}{1 + \xi^2 + \eta^2} = 1 + \cos \vartheta = \chi(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die ebene Abbildung

$$\Phi(u, v) = (\Phi^1(u, v), \Phi^2(u, v)) := \text{SP}(N(u, v)), \quad (u, v) \in B,$$

wobei die Normale N die Bedingung $N(u, v) \in S_\omega^2$, $(u, v) \in B$, mit einem $\omega \in [0, \pi)$ erfülle, und zeigen die Beschränktheit

$$|\Phi(u, v)| \leq \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega}, \quad (u, v) \in B, \quad (5.22)$$

sowie die Quasikonformität

$$|\Phi_u^1|^2 + |\Phi_u^2|^2 + |\Phi_v^1|^2 + |\Phi_v^2|^2 \leq 2(1 + g_0)(\Phi_u^1 \Phi_v^2 - \Phi_v^1 \Phi_u^2) \quad \text{in } B. \quad (5.23)$$

mit der Exzentrizität $K = 1 + g_0$. Es gilt zunächst

$$|\text{SP}(\vartheta, \varphi)| = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \omega],$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite eine monoton wachsende und stetige Funktion in ϑ darstellt. Demnach wird das Maximum für $\vartheta = \omega$ angenommen, und wir haben (5.22) gezeigt.

Weiter gilt für die Verzerrung $\chi(\vartheta, \varphi) = 1 + \cos \vartheta$ der Abbildung SP^{-1} - eine in ϑ monoton fallende und stetige Funktion - die Abschätzung

$$0 < 1 + \cos \omega \leq \chi(\xi, \eta) \leq 2, \quad (5.24)$$

falls $\text{SP}^{-1}(\xi, \eta) \in S_\omega^2$. Somit ist folgende (2×2) -Matrix für $(u, v) \in B$ wohldefiniert

$$M(u, v) := \frac{1}{\chi(\Phi(u, v))^2} \partial_{(\xi, \eta)} \text{SP}^{-1}(\Phi(u, v)) \circ G(N(u, v))^{-1} \circ \partial_{(\xi, \eta)} \text{SP}^{-1}(\Phi(u, v))^t$$

mit

$$\partial_{(\xi, \eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} z_\xi^1(\xi, \eta) & z_\xi^2(\dots) & z_\xi^3(\dots) \\ z_\eta^1(\xi, \eta) & z_\eta^2(\dots) & z_\eta^3(\dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\xi \\ Z_\eta \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen mit Hilfe der Eigenschaft (G3) der Gewichtsmatrix G eine Elliptizitätseigenschaft für $M = M(u, v)$, nämlich

$$\frac{1}{1 + g_0} |\mu|^2 \leq \mu \circ M(u, v) \circ \mu^t \leq (1 + g_0) |\mu|^2, \quad (u, v) \in B, \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{R}^2. \quad (5.25)$$

Mit

$$\begin{aligned} z_\xi^1 &= \frac{2(1 - \xi^2 + \eta^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}, & z_\eta^2 &= \frac{2(1 + \xi^2 - \eta^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} \\ z_\xi^2 &= \frac{-4\xi\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = z_\eta^1 \\ z_\xi^3 &= \frac{-4\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}, & z_\eta^3 &= \frac{-4\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} \end{aligned}$$

ergibt sich zunächst

$$|Z_\xi|^2 = \chi^2 = |Z_\eta|^2, \quad Z_\xi \cdot Z_\eta^t = 0,$$

woraus

$$|\mu \circ \partial_{(\xi, \eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta)|^2 = \chi(\xi, \eta)^2 |\mu|^2$$

folgt. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+g_0}|\mu|^2 &= \frac{1}{\chi(\Phi)^2} \frac{1}{1+g_0} |\mu \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta)|^2 \\
&\leq \frac{1}{\chi(\Phi)^2} (\mu \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\Phi)) \circ G(N)^{-1} \circ (\mu \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\Phi))^t \\
&\leq \frac{1}{\chi(\Phi)^2} (1+g_0) |\mu \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta)|^2 \\
&= (1+g_0) |\mu|^2,
\end{aligned}$$

womit (5.25) gezeigt ist. Es gilt mit den Eigenschaften (G2) und (G4) der Gewichtsmatrix G weiterhin

$$\det M(u, v) = 1, \quad (u, v) \in B. \quad (5.26)$$

Denn wir berechnen mit $Z_\xi \cdot Z^t = 0 = Z_\eta \cdot Z^t$, was durch Ableiten von $Z \cdot Z^t = 1$ gilt, und dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\begin{aligned}
&\det (\partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta) \circ G(Z)^{-1} \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\xi, \eta)^t) \\
&= \det \begin{pmatrix} Z_\xi \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\xi^t & Z_\xi \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\eta^t & 0 \\ Z_\eta \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\xi^t & Z_\eta \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\eta^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} Z_\xi \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\xi^t & Z_\xi \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\eta^t & Z_\xi \circ G(Z)^{-1} \circ Z^t \\ Z_\eta \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\xi^t & Z_\eta \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\eta^t & Z_\eta \circ G(Z)^{-1} \circ Z^t \\ Z \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\xi^t & Z \circ G(Z)^{-1} \circ Z_\eta^t & Z \circ G(Z)^{-1} \circ Z^t \end{pmatrix} \\
&= \det \{ (Z_\xi, Z_\eta, Z)^t \circ G(Z)^{-1} \circ (Z_\xi^t, Z_\eta^t, Z^t) \} \\
&= \det \{ (Z_\xi, Z_\eta, Z)^t \cdot (Z_\xi^t, Z_\eta^t, Z^t) \} \cdot \det G(Z)^{-1} \\
&= \det \begin{pmatrix} |Z_\xi|^2 & Z_\xi \cdot Z_\eta^t & 0 \\ Z_\xi \cdot Z_\eta^t & |Z_\eta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi(\xi, \eta)^4,
\end{aligned}$$

wenn wir noch $Z \circ G(Z)^{-1} = Z$ und $\det G(Z)^{-1} = 1$ beachten.

Der lineare Zusammenhang der gewichteten Fundamentalfolgen, Satz 1.2 aus Abschnitt 1.3, liefert uns für $\mathcal{H}_G \equiv 0$ und in gewichtet konformen Parametern die Identität

$$\begin{aligned}
&\partial_{(u,v)} \Phi(u, v) \circ M(u, v) \circ \partial_{(u,v)} \Phi(u, v)^t \\
&= \frac{1}{\chi(\Phi(u, v))^2} \partial_{(u,v)} N(u, v) \circ G(N(u, v))^{-1} \circ \partial_{(u,v)} N(u, v)^t \\
&= -\frac{\mathcal{K}(u, v)}{\chi(\Phi(u, v))^2} \partial_{(u,v)} X(u, v) \circ G(N(u, v)) \circ \partial_{(u,v)} X(u, v)^t \\
&= -\frac{\mathcal{K}(u, v) W(u, v)}{\chi(\Phi(u, v))^2} \mathbb{E}^2, \quad (u, v) \in B,
\end{aligned}$$

wenn wir noch $N(u, v) = \text{SP}^{-1}(\Phi(u, v))$ und somit

$$\partial_{(u,v)} N(u, v) = \partial_{(u,v)} \Phi(u, v) \circ \partial_{(\xi,\eta)} \text{SP}^{-1}(\Phi(u, v))$$

beachten. Mit

$$\begin{aligned}\det(\partial\Phi \circ M \circ \partial\Phi^t) &= \frac{\mathcal{K}^2 W^2}{\chi(\Phi)^4}, \\ \text{spur}(\partial\Phi \circ M \circ \partial\Phi^t) &= -\frac{2\mathcal{K}W}{\chi(\Phi)^2}\end{aligned}$$

berechnen wir weiter

$$\begin{aligned}\Phi_u^1 \Phi_v^2 - \Phi_v^1 \Phi_u^2 &= \det \partial\Phi = (\det \partial\Phi \cdot \det M \cdot \det \partial\Phi^t)^{1/2} = (\det(\partial\Phi \circ M \circ \partial\Phi^t))^{1/2} \\ &= -\frac{\mathcal{K}W}{\chi(\Phi)^2} = \frac{1}{2} \text{spur}(\partial\Phi \circ M \circ \partial\Phi^t) = \frac{1}{2}(\Phi_u \circ M \circ \Phi_u^t + \Phi_v \circ M \circ \Phi_v^t) \\ &\geq \frac{1}{2(1+g_0)} (|\Phi_u|^2 + |\Phi_v|^2) = \frac{1}{2(1+g_0)} (|\Phi_u^1|^2 + |\Phi_u^2|^2 + |\Phi_v^1|^2 + |\Phi_v^2|^2),\end{aligned}$$

unter Beachtung von $\mathcal{K} \leq 0$ aus (2.4) in Abschnitt 2.1. Damit ist die Quasikonformität (5.23) gezeigt.

Hilfssatz 4.6 aus Abschnitt 4.4 liefert in jeder kompakt enthaltenen Kreisscheibe $\tilde{B} \subset\subset B$ eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(g_0, \omega, d) > 0$ mit $d := \text{dist}(\tilde{B}, \partial B)$ und einen Hölderexponent $\alpha = \alpha(g_0) \in (0, 1)$, so dass für alle $w_1, w_2 \in \tilde{B}$ gilt

$$|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)| \leq \tilde{C}|w_2 - w_1|^\alpha.$$

Wählen wir zunächst $\nu \in (0, 1)$, dann $w_0 \in B_{1-\frac{1}{2}\nu}$ und schließlich $w_1, w_2 \in B_\delta(w_0)$ mit $\delta \in (0, \frac{1}{2}\nu)$, dann liegen $w_1, w_2 \in \tilde{B}$ mit einem beliebigen $\tilde{B} \subset\subset B$. Wir setzen also $\tilde{B} := B_\delta(w_0)$ und erhalten

$$|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)| \leq \tilde{C}(g_0, \omega, \nu)(2\delta(\nu))^{\alpha(g_0)} \leq \tilde{\epsilon},$$

wenn wir noch $\delta = \delta(g_0, \omega, \nu; \tilde{\epsilon}) < \min \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{C}} \right)^{1/\alpha}, \frac{1}{2}\nu \right\}$ setzen. Unter Beachtung der

Abschätzung (5.24) für die Verzerrung der inversen Abbildung $\text{SP}^{-1}(\Phi(u, v))$ gelangen wir so zu einem Stetigkeitsmodul für den Normalenvektor N im Innern. Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

Hilfssatz 5.4 *Sei die gewichtet konform parametrisierte G -Minimalfläche X gegeben. Ihr Normalenvektor N genüge*

$$N \cdot e_3^t \geq \cos \omega \quad \text{in } B \tag{5.27}$$

mit einem Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Weiter seien $\epsilon > 0$ und $\nu \in (0, 1)$ gewählt. Dann existiert ein $\delta = \delta(g_0, \omega, \nu; \epsilon) \in (0, \frac{1}{2}\nu)$, so dass für alle $w_0 \in B_{1-\frac{1}{2}\nu}$ und für alle $w_1, w_2 \in B_\delta(w_0)$ die Oszillationsabschätzung $|N(w_1) - N(w_2)| \leq \epsilon$ gilt.

5.2 Parametrischer Kompaktheitssatz

Ein Kompaktheitssatz für parametrische, elliptische Funktionale mit einer ähnlichen Herangehensweise wie der unsrigen finden wir in [CM1].

In gewichtet konformen Parametern erfüllt ein G -minimaler Graph

$$X = X(u, v) = (f(u, v), \zeta \circ f(u, v)) \in C^{3+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B}),$$

der das Dirichletproblem zu stetigen Randdaten $\tilde{\varphi}(u, v) := \varphi \circ f(u, v) \in C^0(\partial B)$ löst, das System

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v, \\ X_u \circ G(N) \circ X_u^t - X_v \circ G(N) \circ X_v^t &= 0 = X_u \circ G(N) \circ X_v^t \quad \text{in } B, \\ X : \partial B &\rightarrow \Gamma \quad \text{topologisch} \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit $\Gamma := \{(u, v, \tilde{\varphi}(u, v)) : (u, v) \in \partial B\}$.

Satz 5.4 (Parametrischer Kompaktheitssatz) *Es sei die Folge der Randdaten $\tilde{\varphi}^{(k)} \in C^{2+\alpha}(\partial B)$, $k = 1, 2, \dots$, gegeben, die zudem gleichmäßig beschränkt in der C^0 -Norm gemäß*

$$\|\tilde{\varphi}^{(k)}\|_0^{\partial B} \leq M \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots \quad (5.29)$$

sei und gleichmäßig auf ∂B gegen eine stetige Funktion

$$\tilde{\varphi}(u, v) := \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}^{(k)}(u, v) \in C^0(\partial B)$$

konvergiere. Zur Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ betrachten wir die Folge von G -minimalen Graphen $X^{(k)} \in C^{3+\alpha}(B) \cap C^{2+\alpha}(\overline{B})$, die in gewichtet konformen Parametern vorliegen und für jedes $k = 1, 2, \dots$ das System (5.28) erfüllen. Dann besitzt $\{X^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ ein Grenzelement $X \in C^{3+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B})$ als Lösung von (5.28).

Beweis:

1. Durch Einführen gewichtet konformer Parameter existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Diffeomorphismus

$$f^{(k)} : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega} \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad \text{mit } f^{(k)}(0, 0) = (0, 0), \quad J_{f^{(k)}}(u, v) > 0 \text{ in } \overline{B},$$

so dass wir

$$X^{(k)}(u, v) = (f^{(k)}(u, v), \zeta^{(k)} \circ f^{(k)}(u, v))$$

schreiben können. Mit dem Einschließungssatz folgern wir zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $X^{(k)}$. Denn es gilt auf dem Rand

$$|X^{(k)}(u, v) \cdot e_3^t| = |\zeta^{(k)} \circ f^{(k)}(u, v)| = |\varphi^{(k)} \circ f^{(k)}(u, v)| \leq M \quad \text{für alle } (u, v) \in \partial B.$$

Also gibt es eine Kugel K , welche die Randkurven $X^{(k)}(\partial B)$ enthält. Hilfssatz 5.2 aus Abschnitt 5.1.3 liefert dann $X^{(k)}(\overline{B}) \subset K$, womit die Folge $\{X^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ in \overline{B} gleichmäßig beschränkt mit einer Konstante $M^* \geq M$ ist. Wir weisen nun noch die gleichgradige Stetigkeit von $X^{(k)}$ nach. In Hilfssatz 5.3 aus Abschnitt 5.1.3 haben wir einen lokalen Stetigkeitsmodul für X hergeleitet. Analog zum dortigen Beweis

zeigen wir den gleichmäßigen lokalen Stetigkeitsmodul: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass für alle $w_0, w_1 \in \bar{B}$ mit $|w_0 - w_1| \leq \delta$ die Oszillationsabschätzung

$$|X(w_0) - X(w_1)| \leq 2\epsilon$$

gilt. Wir beachten dabei, dass wir das Dirichletintegral $\mathcal{D}_B(X^{(k)})$ wegen (5.29) unabhängig von k abschätzen können. Damit haben wir die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\{X^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ in \bar{B} nachgewiesen.

2. Da $X^{(k)}$ gewichtet konform parametrisiert ist, erhalten wir die elliptischen Systeme

$$|\Delta X^{(k)}| \leq C_1 |\nabla X^{(k)}| |\nabla N^{(k)}| \quad (5.30)$$

$$|\Delta N^{(k)}| \leq C_2 |\nabla N^{(k)}|^2 \quad \text{in } B \quad (5.31)$$

gemäß (3.7) und (3.8) aus Abschnitt 3.3 mit den Konstanten $C_1 = C_1(g_0, g_1)$ und $C_2 = C_2(g_1)$. Zur Erinnerung: g_1 aus (1.7) in Abschnitt 1.2 ist eine Schranke an die ersten partiellen Ableitungen der Gewichtsmatrix $G(N)$. Wir leiten zunächst eine Gradientenschranke an $N^{(k)}$ mit Hilfe der Differentialungleichung (5.31) her. Dazu benötigen wir die Kleinheitsbedingung $aM_1 < 1$ mit $|\Delta N^{(k)}| \leq a|\nabla N^{(k)}|^2$ in B und $|N^{(k)}| \leq M_1$ in \bar{B} , die wir mit Hilfe eines Stetigkeitsmoduls für $N^{(k)}$ aus Hilfssatz 5.4 in Abschnitt 5.1.3 erreichen können. Wir beachten dabei, dass wegen $N^{(k)} \cdot e_3^t > 0$ die Voraussetzung (5.27) mit $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ erfüllt ist. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(g_0, \nu; \epsilon) \in (0, \frac{1}{2}\nu)$, $\nu \in (0, 1)$, so dass für festes $w_1 \in B_\delta(w_0)$ mit $w_0 \in B_{1-\frac{1}{2}\nu}$ wir

$$|N^{(k)}(w) - N^{(k)}(w_1)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } w \in B_\delta(w_0)$$

erhalten. Setzen wir

$$\hat{N}^{(k)}(w) := \frac{1}{\epsilon}(N^{(k)}(w) - N^{(k)}(w_1)) : \bar{B}_\delta(w_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

der Klasse $C^{2+\alpha}(\bar{B}_\delta(w_0), \mathbb{R}^3)$, so haben wir

$$|\hat{N}^{(k)}(w)| \leq 1, \quad w \in \bar{B}_\delta(w_0),$$

und

$$|\Delta \hat{N}^{(k)}(w)| = \frac{1}{\epsilon} |\Delta N^{(k)}(w)| \leq \frac{1}{\epsilon} C_2 |\nabla N^{(k)}(w)|^2 = \epsilon C_2 |\nabla \hat{N}^{(k)}(w)|^2, \quad w \in B_\delta(w_0).$$

Wählen wir $\epsilon = \frac{1}{2C_2}$, so erhalten wir für alle $w \in B_\delta(w_0)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Differentialungleichung

$$|\Delta \hat{N}^{(k)}(w)| \leq \frac{1}{2} |\nabla \hat{N}^{(k)}(w)|^2, \quad w \in B_\delta(w_0),$$

mit

$$|\hat{N}^{(k)}(w)| \leq 1, \quad w \in \bar{B}_\delta(w_0).$$

Die Gradientenabschätzung von Heinz für elliptische Systeme (siehe [S6], Kap. XII, §2, Satz 1) liefert uns für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante C , so dass die Ungleichung

$$|\nabla N^{(k)}(w)| = \epsilon |\nabla \hat{N}^{(k)}(w)| \leq \epsilon C(R) = \frac{C(R)}{2C_2} =: C_3(g_1, R)$$

für alle $w \in B_R \subset B$ erfüllt ist. Daraus ergeben sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ die neuen Systeme:

$$\left| \Delta X^{(k)} \right| \leq C_4 \left| \nabla X^{(k)} \right| \quad (5.32)$$

$$\left| \Delta N^{(k)} \right| \leq C_5 \quad \text{in } B_R \quad (5.33)$$

mit Konstanten $C_4 = C_4(g_0, g_1, R) := C_1(g_0, g_1)C_3(g_1, R)$ und $C_5 = C_5(g_1, R) := C_3(g_1, R)^2$.

3. Die ebenen Abbildungen $f^{(k)}$ erfüllen nun mit (5.32) und Hilfssatz 5.1 aus Abschnitt 5.1.2 die Differentialungleichung

$$|\Delta f^{(k)}| \leq |\Delta X^{(k)}| \leq C_4 |\nabla X^{(k)}| \leq C_4 \sqrt{C_*} |\nabla f^{(k)}| \quad \text{in } B_R.$$

Außerdem liefert der Beweis von Satz 5.2 eine Abschätzung des Dirichletintegrals für $f^{(k)}$, unabhängig von k . Mit der Verzerrungsabschätzung nach Heinz (vgl. [S6], Kap. XII, §5, Satz 3) erhalten wir eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(g_0, g_1, k_0, m_1, M, R, r) > 0$, so dass

$$|\nabla f^{(k)}(w)| \leq \tilde{C}, \quad w \in \bar{B}_r,$$

und damit

$$|\nabla X^{(k)}| \leq \sqrt{C_*} |\nabla f^{(k)}| \leq \sqrt{C_*} \tilde{C} \quad \text{in } B_r \subset B_R \subset B$$

richtig ist. Aus (5.32) und (5.33) ergeben sich die neuen Systeme

$$\left| \Delta X^{(k)} \right| \leq C_6$$

$$\left| \Delta N^{(k)} \right| \leq C_5 \quad \text{in } B_r$$

mit Konstanten $C_5 = C_5(g_1, R)$ und $C_6 = C_6(g_0, g_1, k_0, m_1, M, R, r)$.

4. Die innere $C^{1+\alpha}$ -Abschätzung (vgl. [S6], Kap. XII, §2, Satz 2) liefert für ein festes $\alpha \in (0, 1)$,

$$\|X^{(k)}\|_{1+\alpha}^K \leq C_7, \quad (5.34)$$

$$\|N^{(k)}\|_{1+\alpha}^K \leq C_8, \quad (5.35)$$

mit einer kompakten Menge $K \subset B_r \subset B$. Wir beachten dabei noch die Kleinheitsbedingung $|X^{(k)}| \leq M^*$ in \bar{B} aus Punkt 1, wobei M^* von M abhängt. Die Konstanten C_7 und C_8 hängen dabei von $g_0, g_1, k_0, m_1, M, K, \alpha$ bzw. g_1, K, α ab. Wir wenden nun die inneren Schauderabschätzungen aus [S6], Kap. IX, §5, Satz 4,

an, um eine $C^{2+\alpha}$ -Abschätzung von $X^{(k)}$ und $N^{(k)}$ zu erhalten. Dazu betrachten wir die linearen, elliptischen Differentialgleichungen

$$\Delta X^{(k)} = c_1^{(k)} X_u^{(k)} + c_2^{(k)} X_v^{(k)} =: g_1^{(k)} \quad (5.36)$$

$$\Delta N^{(k)} = a^{(k)} N_u^{(k)} + b^{(k)} N_v^{(k)} + c^{(k)} N^{(k)} =: g_2^{(k)} \quad \text{in } B \quad (5.37)$$

aus Abschnitt 3.1 (Gleichung (3.1)) und Abschnitt 3.4 (Gleichung (3.18)) mit Hauptteil Δ und rechter Seite $g_1^{(k)}$ und $g_2^{(k)}$. Wir beachten die Abhängigkeit der Koeffizienten $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, a^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)}$ von $\nabla X^{(k)}, \nabla N^{(k)}$ und mit (5.34) und (5.35) die $C^\alpha(K)$ -Regularität der rechten Seiten $g_1^{(k)}$ und $g_2^{(k)}$. Somit erhalten wir

$$\|X^{(k)}\|_{2+\alpha}^{K_d} \leq C^+ \left(\|X^{(k)}\|_0^K + \|g_1^{(k)}\|_\alpha^K \right) \leq C_9 \quad (5.38)$$

$$\|N^{(k)}\|_{2+\alpha}^{K_d} \leq C^- \left(\|N^{(k)}\|_0^K + \|g_2^{(k)}\|_\alpha^K \right) \leq C_{10} \quad (5.39)$$

für die Menge $K_d := \{x \in K : \text{dist}\{x, \partial K\} > d\}$ mit den Konstanten

$$C_9 = C_9(g_0, g_1, k_0, m_1, M, K, d, \alpha) \quad \text{und} \quad C_{10} = C_{10}(g_1, K, d, \alpha).$$

Wir beachten: je größer wir die Mengen $K_d \subset K \subset B_r \subset B_R \subset B$ wählen, desto größer sind die Konstanten C_3 bis C_{10} . Insgesamt erhalten wir die Regularität $X^{(k)}, N^{(k)} \in C^{2+\alpha}(B)$ im Innern.

5. Unter sukzessiver Anwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli und den Abschätzungen (5.38) und (5.39) gehen wir über zu einer Diagonalfolge $\{X^{(k_l)}, N^{(k_l)}\}_{l=1,2,\dots}$, die gleichmäßig auf dem Abschluß \bar{B} und deren ersten und zweiten Ableitungen gleichmäßig im Innern B gegen ein Paar $\{X, N\}$ mit $X \in C^{2+\alpha}(B) \cap C^0(\bar{B})$ und $N \in C^{2+\alpha}(B)$ konvergiert. Wir müssen nun noch überprüfen, ob das Grenzelement N auch die Einheitsnormale an X darstellt: Zunächst gilt

$$|N| = \lim_{k \rightarrow \infty} |N^{(k)}| = 1.$$

Wegen der Abschätzung des Oberflächenelements nach unten, Satz 5.3 aus Abschnitt 5.1.2, gilt für jedes $k = 1, 2, \dots$,

$$W^{(k)} = |X_u^{(k)} \wedge X_v^{(k)}| \geq C > 0 \quad \text{in } B,$$

mit einer Konstante unabhängig von k . In der Grenze erhalten wir wegen der Konvergenz $X^{(k)} \rightarrow X$ in $C^2(B)$, die Ungleichung

$$|X_u \wedge X_v| = W := \lim_{k \rightarrow \infty} W^{(k)} > 0 \quad \text{in } B.$$

Somit gilt

$$N = \lim_{k \rightarrow \infty} N^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_u^{(k)} \wedge X_v^{(k)}}{|X_u^{(k)} \wedge X_v^{(k)}|} = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} \quad \text{in } B,$$

und N ist die Normale an X . Wegen der C^2 -Konvergenz genügt X den Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v \\ X_u \circ G(N) \circ X_u^t - X_v \circ G(N) \circ X_v^t &= 0 = X_u \circ G(N) \circ X_v^t \quad \text{in } B\end{aligned}$$

und ist damit eine G -Minimalfläche in gewichtet konformen Parametern. Dabei durchläuft X die Kurve Γ zunächst schwach monoton und dann mit dem üblichen Schluß auch stark monoton. Es existieren nämlich keine Intervalle, wo X konstant bleibt, sonst könnte man mit Hilfe der gewichteten Konformitätsrelationen und dem Ähnlichkeitsprinzip $X_w(w) \equiv 0$ in B herleiten, was unmöglich ist. Aus $N \in C^{2+\alpha}(B)$ folgern wir schließlich noch $X \in C^{3+\alpha}(B)$.

q.e.d.

5.3 Approximation konvexer Gebiete

Wir orientieren uns an [S1], §2, und wollen zunächst ein konvexes Gebiet Ω ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$ (d.h. Ecken sind möglich) durch strikt konvexe Gebiete $\Omega^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, mit der Regularität $\partial\Omega^{(n)} \in C^{2+\alpha}$ approximieren. Wir beachten dabei die Definition 4.1 aus Abschnitt 4.2 und die anschließende Bemerkung 4.3: Konvexe Gebiete können durch lineare Randstücke berandet sein, während der Rand von strikt konvexen Gebieten „echt“ gekrümmt ist.

Mit drei Punkten $(x_\nu, y_\nu) \in \partial\Omega$, $\nu = 1, 2, 3$, die wir in positiver Orientierung in Bezug auf die (x, y) -Ebene wählen, wird $\Gamma := \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in \partial\Omega\}$ zur Jordankurve mit der vorgeschriebenen Orientierung durch die Punkte $\pi_\nu := (x_\nu, y_\nu, \varphi(x_\nu, y_\nu))$, $\nu = 1, 2, 3$.

Hilfssatz 5.5 (Approximation I) *Sei Ω ein beschränktes, konvexes Gebiet mit zugehöriger Jordankurve $\partial\Omega$. Dann existiert eine Folge strikt konvexer Gebiete $\{\Omega^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ mit $\Omega^{(n)} \subset \Omega$, $\partial\Omega^{(n)} \in C^{2+\alpha}$ und $|\partial\Omega^{(n)}| \leq l$ für $n = 1, 2, \dots$*

Beweis: Zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir auf $\partial\Omega$ endlich viele Punkte $z^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, i(n)$, mit $z^{(i(n)+1)} = z^{(1)}$, die nicht in eventuell auftretenden Ecken liegen mögen. Auf nichtlinearen Randstücken gelte für deren Abstand

$$|z^{(l+1)} - z^{(l)}| \leq \frac{1}{n}, \quad l = 1, 2, \dots, i(n).$$

Auf linearen Randstücken hingegen wählen wir immer nur einen Punkt, der beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gegen die Ecke in positiver Richtung laufen möge. Dann verbinden wir die Punkte $z^{(l)}$ mit $z^{(l+1)}$ durch Kreissegmente, und das so entstandene Gebiet $\tilde{\Omega}^{(n)}$ ist strikt konvex und approximiert Ω . Als Abschätzung für die Länge des Polygons $\partial\tilde{\Omega}^{(n)}$ erhalten wir

$$|\partial\tilde{\Omega}^{(n)}| \leq \frac{\pi}{2} |\partial\Omega| =: l.$$

Wir müssen nun noch die entstandenen Ecken $z^{(l)}$ des Polygons $\partial\tilde{\Omega}^{(n)}$ abglätten, so dass die so konstruierte Kurve $\partial\Omega^{(n)}$ die gewünschte Regularität $C^{2+\alpha}$ besitzt, $|\partial\Omega^{(n)}| \leq l$

erfüllt und $\Omega^{(n)}$ strikt konvex ist. Durch Drehung und Translation des Gebietes können wir die Ecke lokal durch eine Funktion $f(x) \in C^{2+\alpha}([0, \epsilon])$, $\epsilon > 0$, mit

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &> 0, \\ f''(x) &\geq 0 \quad \text{in } [0, \epsilon] \end{aligned}$$

beschreiben und setzen

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0, \epsilon) \\ f(-x), & x \in (-\epsilon, 0] \end{cases}.$$

Wir wählen nun $x^* \in (0, \epsilon)$ hinreichend klein, so dass

$$\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} < \frac{1}{x^*} \quad (5.40)$$

gilt. Dann glätten wir die Ecke wie folgt ab: Im Intervall $[-x^*, x^*]$ ersetzen wir $F(x)$ durch die Funktion

$$g(x) := -b \cos(ax) + c, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2a}.$$

Dabei wählen wir $a, b, c \in (0, \infty)$ derart, dass f und g bis einschließlich der zweiten Ableitung in x^* übereinstimmen:

$$f(x^*) = g(x^*) = -b \cos(ax^*) + c, \quad (5.41)$$

$$f'(x^*) = g'(x^*) = ab \sin(ax^*), \quad (5.42)$$

$$f''(x^*) = g''(x^*) = a^2 b \cos(ax^*). \quad (5.43)$$

Wir bestimmen nun a so, dass zunächst $0 < x^* \leq \frac{\pi}{2a}$ bzw. $0 < a \leq \frac{\pi}{2x^*}$ gilt. Dann realisieren wir Eigenschaft (5.40), indem wir berechnen:

$$\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{a^2 b \cos(ax^*)}{ab \sin(ax^*)} = \frac{a \cos(ax^*)}{\sin(ax^*)} =: h(a), \quad a \in \left(0, \frac{\pi}{2x^*}\right].$$

Mit $h\left(\frac{\pi}{2x^*}\right) = 0$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} h(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\cos(ax^*) - ax^* \sin(ax^*)}{x^* \cos(ax^*)} = \frac{1}{x^*}$ und der Eigenschaft, dass $h(a)$ eine monoton fallende, stetige Funktion ist, finden wir ein a , so dass (5.40) gilt. Aus (5.42) bestimmen wir b und aus (5.41) die Konstante c . Die so konstruierte Funktion

$$G(x) := \begin{cases} F(x), & x \in (-\epsilon, -x^*] \\ g(x), & x \in [-x^*, x^*] \\ F(x), & x \in [x^*, \epsilon) \end{cases} \in C^{2+\alpha}((-\epsilon, \epsilon))$$

glättet die Ecke wie gewünscht ab. Die Krümmung der Kurve $(x, g(x))$, $x \in [-x^*, x^*]$, berechnet sich nun zu

$$\frac{g''(x)}{(1 + g'(x)^2)^{3/2}} = \frac{a^2 b \cos(ax^*)}{(1 + a^2 b^2 \sin^2(ax^*))^{3/2}}$$

und eine Kurvendiskussion ergibt, dass das Minimum in den Randpunkten $\pm x^*$ angenommen wird. Da stimmt sie allerdings mit der Krümmung der Kurve $(x, F(x))$ überein. Somit sind die so definierten Gebiete $\Omega^{(n)}$ mit den abgeglätteten Kurven $\partial\Omega^{(n)} \in C^{2+\alpha}$ strikt konvex. Indem wir $x^* \in (0, \epsilon)$ hinreichend klein wählen, können wir außerdem noch $|\partial\Omega^{(n)}| \leq l$ für $n = 1, 2, \dots$ erreichen. q.e.d.

Hilfssatz 5.6 (Approximation II) *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$ und $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Randfunktion. Mit Γ bezeichnen wir die zugehörige Jordankurve und schreiben*

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\Omega, z = \varphi(x, y)\} = \{Y(\vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi]\}.$$

Dann können wir Γ approximieren durch Kurven $\Gamma^{(n)} := \{Y^{(n)}(\vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$, $n = 1, 2, \dots$, mit strikt konvexen Projektionsgebieten $\Omega^{(n)} \subset \Omega$, dessen Rand die Regularität $\partial\Omega^{(n)} \in C^{2+\alpha}$ sowie die Längenabschätzung $|\partial\Omega^{(n)}| \leq l$ erfüllt, und mit Randfunktionen $\varphi^{(n)} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega^{(n)})$. Es gilt weiterhin:

$$Y^{(n)}(\vartheta) \rightarrow Y(\vartheta) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{gleichmäßig in } [0, 2\pi].$$

Beweis: Sei $C_{2\pi}^k(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^k(\mathbb{R}), f(\vartheta + 2\pi) = f(\vartheta)\}$ die Klasse der auf ganz \mathbb{R} definierten 2π -periodischen Funktionen aus $C^k(\mathbb{R})$. Wir können dann den Rand des Gebietes Ω beschreiben durch:

$$\partial\Omega : \quad x(\vartheta) = r(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = r(\vartheta) \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

mit $r(\vartheta) \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$. Nach Hilfssatz 5.5 existiert eine Folge $\{\Omega^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ strikt konvexer Gebiete mit den oben genannten Eigenschaften. Wir können $\partial\Omega^{(n)}$ wiederum wie folgt darstellen:

$$\partial\Omega^{(n)} : \quad x(\vartheta) = r^{(n)}(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = r^{(n)}(\vartheta) \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

mit $r^{(n)}(\vartheta) \in C_{2\pi}^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt:

$$r^{(n)}(\vartheta) \rightarrow r(\vartheta) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{gleichmäßig in } [0, 2\pi].$$

Die stetige Randfunktion $\varphi(\vartheta) \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ approximieren wir nun noch gleichmäßig in $[0, 2\pi]$ durch Funktionen $\varphi^{(n)}(\vartheta) \in C_{2\pi}^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$. Die so konstruierten Jordankurven

$$\Gamma^{(n)} = \{Y^{(n)}(\vartheta) : Y^{(n)}(\vartheta) = (r^{(n)}(\vartheta) \cos \vartheta, r^{(n)}(\vartheta) \sin \vartheta, \varphi^{(n)}(\vartheta)), \vartheta \in [0, 2\pi]\}$$

erfüllen die gewünschten Eigenschaften, und es gilt

$$Y^{(n)}(\vartheta) \rightarrow Y(\vartheta) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{gleichmäßig in } [0, 2\pi].$$

Dabei ist $Y(\vartheta) = (r(\vartheta) \cos(\vartheta), r(\vartheta) \sin(\vartheta), \varphi(\vartheta))$ eine Darstellung von Γ . q.e.d.

5.4 Lösung des Dirichletproblems mit der Approximationsmethode

Wir kommen nun zum Hauptresultat unserer Arbeit.

Satz 5.5 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\partial\Omega)$ eine stetige Randfunktion. Dann existiert zur Gewichtsmatrix $G = G(Z) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ genau eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ unseres Dirichletproblems für G -minimale Graphen:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3 *Wir betonen hier, dass keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω gestellt werden, und somit das Dirichletproblem auch für konvexe Gebiete mit Ecken gelöst werden kann.*

Beweis: Sei $\Gamma = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in \partial\Omega\}$ die durch drei Punkte orientierte Jordankurve. Gemäß Hilfssatz 5.6 aus Abschnitt 5.3 approximieren wir Γ durch Kurven $\Gamma^{(n)}$ mit einem strikt konvexen Projektionsgebiet $\Omega^{(n)}$ der Regularität $\partial\Omega^{(n)} \in C^{2+\alpha}$ und Länge $|\partial\Omega^{(n)}| \leq l$ sowie den Randfunktionen $\varphi^{(n)} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega^{(n)})$, welche in der $C^{2+\alpha}$ -Norm beschränkt sind. Mit Hilfe der Kontinuitätsmethode, Satz 4.9 aus Abschnitt 4.7, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung $\zeta^{(n)} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega^{(n)}})$ des Dirichletproblems $\mathcal{DP}(\varphi^{(n)})$. Bemerkung 4.1 aus Kapitel 4 liefert uns noch die benötigte höhere Regularität $\zeta^{(n)} \in C^{3+\alpha}(\Omega^{(n)})$ und somit $X^{(n)} = (x, y, \zeta^{(n)}(x, y)) \in C^{3+\alpha}(\Omega^{(n)}) \cap C^{2+\alpha}(\overline{\Omega^{(n)}})$ sowie $N^{(n)} \in C^{2+\alpha}(\Omega^{(n)}) \cap C^{1+\alpha}(\overline{\Omega^{(n)}})$. Durch Einführen gewichtet konformer Parameter können wir den parametrischen Kompaktheitssatz, Satz 5.4 aus Abschnitt 5.2 anwenden, der uns im Grenzfall eine Lösung $X \in C^{3+\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B})$ des Systems

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Omega_{11}^1 + \Omega_{22}^1)X_u + (\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2)X_v, \\ X_u \circ G(N) \circ X_u^t - X_v \circ G(N) \circ X_v^t &= 0 = X_u \circ G(N) \circ X_v^t \quad \text{in } B, \\ X : \partial B &\rightarrow \Gamma \quad \text{topologisch} \end{aligned}$$

liefert. Dabei durchläuft X die Kurve Γ stark monoton.

Wir zeigen nun die Grapheneigenschaft der Grenzlösung X , d.h.

$$\Psi := N \cdot e_3^t > 0 \quad \text{in } B$$

mit dem Einheitsvektor $e_3 = (0, 0, 1)$. Aus dem Beweis der inneren Gradientenabschätzung, Satz 4.4 aus Abschnitt 4.3, wissen wir, dass die dritte Komponente der Normale $\Psi \geq 0$ die lineare, gleichmäßig elliptische Differentialungleichung

$$\Psi_{uu} + \Psi_{vv} + P^1 W \Psi_u + P^2 W \Psi_v \leq 0 \quad \text{in } B$$

erfüllt. Wir beachten dabei noch die gewichtet konforme Parametrisierung. Das starke Minimumprinzip (vgl. [GT], Satz 3.5.) liefert uns $\Psi \equiv 0$, falls das Minimum $\Psi = 0$ im

Innern von B angenommen wird. Dies führt zu einem Widerspruch, so dass $\Psi = N \cdot e_3^t > 0$ in B gezeigt ist, und X ein Graph in B darstellt. Wir schließen daraus weiter, dass

$$J_f = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = (X_u \wedge X_v) \cdot e_3^t = WN \cdot e_3^t > 0 \quad \text{in } B$$

gilt, woraus $f(B) = \Omega$ folgt, denn f stellt eine offene Abbildung dar. Da $f : \partial B \rightarrow \partial\Omega$ bereits topologisch ist, erhalten wir mit $f : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega}$ ebenfalls eine topologische Abbildung. Der Fundamentalsatz über die inverse Abbildung liefert uns mit der Abbildung $f = f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) : \bar{B} \rightarrow \bar{\Omega}$ einen Diffeomorphismus der Klasse $C^{2+\alpha}(B) \cap C^0(\bar{B})$. Mit $\zeta = \zeta(x, y) := x^3(f^{-1}(x, y))$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, erhalten wir schließlich die eindeutige Lösung der Klasse $C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ unseres Dirichletproblems. q.e.d.

Wir haben in unserer Arbeit zunächst die Kontinuitätsmethode auf ein modifiziertes Problem angewendet, welches in einer dichten Teilklasse unseres ursprünglichen Dirichletproblems liegt. Dieser „Umweg“ war einerseits hilfreich, um das Dirichletproblem mit einer Approximation auch für konvexe Gebiete mit Ecken lösen zu können und andererseits notwendig, um die Regularitätsfrage bis zum Rand zu klären. Einen Stabilitätssatz (wie Satz 4.8 aus Abschnitt 4.6) und einen Kompaktheitssatz in der Form

Es seien die Randdaten $\varphi^{(k)} \in C^0(\partial\Omega)$ für $k = 1, 2, \dots$ gegeben. Wir betrachten die Folge von Lösungen $\zeta^{(k)}$ der zugehörigen Dirichletprobleme $\mathcal{P}(\varphi^{(k)})$:

$$\begin{aligned} \Omega &\text{ beschränktes, konvexes Gebiet mit } C^{2+\alpha}\text{-Jordankurve } \partial\Omega \\ \mathcal{M}_G \zeta &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \zeta &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Weiter konvergiere die Folge $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ gleichmäßig auf $\partial\Omega$ gegen

$$\varphi(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x) \in C^0(\partial\Omega).$$

Dann besitzt $\{\zeta^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ ein Grenzelement $\zeta \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ als Lösung von $\mathcal{P}(\varphi)$.

können wir auch für konvexe $C^{2+\alpha}$ -Gebiete parametrisch beweisen. Für unsere Kontinuitätsmethode und einem rein parametrischen Zugang zum Dirichletproblem benötigen wir allerdings noch einen Regularitätssatz der Art

Sei ζ eine Lösung des Dirichletproblems $\mathcal{P}(\varphi)$ zu Randdaten $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$. Dann folgt $\zeta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Dieser verlangt beim Beweis ein Stetigkeitsmodul für N bis zum Rand und damit eine Randbedingung an die Normale, um Lösungen der gekoppelten, elliptischen Systeme bis zum Rand abschätzen zu können. Es ist uns bisher nicht bekannt, ob geeignete Randbedingungen existieren und wie diese aussehen könnten.

Anhang

Wie in Abschnitt 3.4 erwähnt, wollen wir im Anhang eine Taylor-Entwicklung für die gewichtete mittlere Krümmung $\mathcal{H}_G(X)$, die in Normalenrichtung gestört wird, herleiten. Die Ideen stammen aus einer Diskussion mit Herrn Dr. rer. nat. Matthias Bergner.

Wir betrachten die Immersion $X \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ mit ihrem Normalenvektor $N \in C^{2+\alpha}(\Omega)$. Nach (1.18) aus Abschnitt 1.3 ist die gewichtete mittlere Krümmung \mathcal{H}_G der Immersion X definiert durch

$$\mathcal{H}_G(X) := \frac{1}{2} L_{ij} h^{ji}.$$

Satz A.1 *Seien $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl. Die Taylor-Entwicklung der gewichteten mittleren Krümmung \mathcal{H}_G berechnet sich gemäß*

$$\mathcal{H}_G(X + \epsilon\varphi N) = \mathcal{H}_G(X) + \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{L}_G \varphi + o(\epsilon)$$

mit dem linearen, elliptischen Operator \mathcal{L}_G definiert durch

$$\mathcal{L}_G \varphi := h^{ji} \varphi_{u^i u^j} + P^r \varphi_{u^r} + c\varphi. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} P^r &:= -(\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} + h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{2^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}, \quad r = 1, 2, \\ c &:= L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li}. \end{aligned}$$

Beweis:

- Wir betrachten die Normalenstörung

$$\tilde{X} := X + \epsilon\varphi N$$

und ihre Ableitungen

$$\tilde{X}_{u^i} = X_{u^i} + \epsilon\varphi_{u^i} N + \epsilon\varphi N_{u^i}, \quad i = 1, 2.$$

Um den Operator \mathcal{L}_G zu berechnen, benötigen wir

$$2 \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{H}_G(\tilde{X}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_{ij} \right|_{\epsilon=0} \cdot h^{ji} + L_{ij} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}^{ji} \right|_{\epsilon=0}.$$

Mit \tilde{L}_{ij} und \tilde{h}^{ji} bezeichnen wir die gewichtete zweite Fundamentalform bzw. die Inverse der gewichteten ersten Fundamentalform der gestörten Fläche \tilde{X} .

2. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_{ij} \right|_{\epsilon=0} &= - \left. \frac{d}{d\epsilon} \langle \tilde{X}_{u^i}, \tilde{N}_{u^j} \rangle \right|_{\epsilon=0} \\
&= - \left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{X}_{u^i} \right|_{\epsilon=0}, N_{u^j} \right\rangle - \left\langle X_{u^i}, \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N}_{u^j} \right|_{\epsilon=0} \right\rangle \\
&= - \langle \varphi_{u^i} N + \varphi N_{u^i}, N_{u^j} \rangle - \left\langle X_{u^i}, \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0} \right)_{u^j} \right\rangle. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Differentiation der Identität $\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = 1$ nach ϵ und anschließende Auswertung an der Stelle $\epsilon = 0$ liefert uns

$$\left\langle N, \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0} \right\rangle = 0.$$

Da $\{X_u \circ G(N), X_v \circ G(N), N\}$ ein orthogonales Dreibein bilden, finden wir also Koeffizienten α_j mit

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0} = \alpha_j \cdot X_{u^j} \circ G(N).$$

Wir berechnen dazu

$$\left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0}, X_{u^i} \right\rangle = \alpha_j \langle X_{u^j} \circ G(N), X_{u^i} \rangle = \alpha_j h_{ji}.$$

Andererseits gilt wegen $\langle \tilde{N}, \tilde{X}_{u^i} \rangle = 0$ die Identität

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \langle \tilde{N}, \tilde{X}_{u^i} \rangle \right|_{\epsilon=0} \\
&= \left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0}, X_{u^i} \right\rangle + \langle N, \varphi_{u^i} N + \varphi N_{u^i} \rangle \\
&= \left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0}, X_{u^i} \right\rangle + \varphi_{u^i}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\alpha_j h_{ji} = \left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0}, X_{u^i} \right\rangle = -\varphi_{u^i},$$

woraus sich

$$\alpha_j = -h^{ij} \varphi_{u^i}$$

ergibt. Damit gilt

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0} = -h^{ji} \varphi_{u^i} \cdot X_{u^j} \circ G(N).$$

Wir benötigen nun noch

$$\begin{aligned}
\left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N} \right|_{\epsilon=0} \right)_{u^j} &= -h_{u^j}^{kl} \varphi_{u^l} \cdot X_{u^k} \circ G(N) - h^{kl} \varphi_{u^l u^j} \cdot X_{u^k} \circ G(N) \\
&\quad - h^{kl} \varphi_{u^l} \cdot (\partial_k X \circ G(N))_{u^j},
\end{aligned}$$

um die Gleichung (A.2) weiter umzuformen:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_{ij} \right|_{\epsilon=0} &= -\varphi \langle N_{u^i}, N_{u^j} \rangle + h_{uj}^{kl} \varphi_{u^l} \langle X_{u^i}, X_{u^k} \circ G(N) \rangle \\
&\quad + h^{kl} \varphi_{u^l u^j} \langle X_{u^i}, X_{u^k} \circ G(N) \rangle + h^{kl} \varphi_{u^l} \langle X_{u^i}, (\partial_k X \circ G(N))_{u^j} \rangle \\
&= -\varphi \langle N_{u^i}, N_{u^j} \rangle + h_{uj}^{kl} \varphi_{u^l} h_{ik} + h^{kl} \varphi_{u^l u^j} h_{ik} \\
&\quad + h^{kl} \varphi_{u^l} [h_{ik, u^j} - \langle X_{u^i u^j}, X_{u^k} \circ G(N) \rangle].
\end{aligned}$$

Beachten wir

$$0 = \left(h^{kl} h_{lm} \right)_{u^j} = h_{uj}^{kl} \cdot h_{lm} + h^{kl} \cdot h_{lm, u^j},$$

so gilt

$$h_{uj}^{kl} = -h^{ks} \cdot h_{sm, u^j} \cdot h^{ml}.$$

Weiter erhalten wir mit Hilfe der gewichteten Gaußschen Ableitungsgleichungen (1.31) aus Abschnitt 1.5,

$$\begin{aligned}
\langle X_{u^i u^j}, X_{u^k} \circ G(N) \rangle &= \langle (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) X_{u^r} + L_{ij} N, X_{u^k} \circ G(N) \rangle \\
&= (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h_{rk}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der gewichteten Weingartenschen Gleichungen (1.29) aus Abschnitt 1.5 bekommen wir schließlich noch

$$\begin{aligned}
\langle N_{u^i}, N_{u^j} \rangle &= \langle -L_{il} h^{lk} X_{u^k} \circ G(N), -L_{jm} h^{ms} X_{u^s} \circ G(N) \rangle \\
&= L_{il} h^{lk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^s} \circ G(N) \rangle h^{sm} L_{mj}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_{ij} \right|_{\epsilon=0} &= -L_{il} h^{lk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^s} \circ G(N) \rangle h^{sm} L_{mj} \cdot \varphi + \varphi_{u^i u^j} \\
&\quad - h_{ik} h^{ks} h_{sm, u^j} h^{ml} \varphi_{u^l} + h_{ik, u^j} h^{kl} \varphi_{u^l} - (\Gamma_{ij}^s + \Omega_{ij}^s) h_{sk} h^{kl} \varphi_{u^l} \\
&= -L_{il} h^{lk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^s} \circ G(N) \rangle h^{sm} L_{mj} \cdot \varphi + \varphi_{u^i u^j} \\
&\quad - (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) \varphi_{u^r}. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

3. Wir leiten nun eine Gleichung für $\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}^{ij} \right|_{\epsilon=0}$ her. Zunächst benötigen wir die Ablei-

tung der gewichteten ersten Fundamentalform der gestörten Fläche, nämlich

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}_{ij} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \langle \tilde{X}_{u^i} \circ G(\tilde{N}), \tilde{X}_{u^j} \rangle \right|_{\epsilon=0} \\
&= \left\langle \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{X}_{u^i} \right|_{\epsilon=0} \circ G(N) + X_{u^i} \circ \left. \frac{d}{d\epsilon} G(\tilde{N}) \right|_{\epsilon=0}, X_{u^j} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle X_{u^i} \circ G(N), \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{X}_{u^j} \right|_{\epsilon=0} \right\rangle \\
&= \langle \varphi_{u^i} N \circ G(N) + \varphi N_{u^i} \circ G(N), X_{u^j} \rangle + \left\langle X_{u^i} \circ \left. \frac{d}{d\epsilon} G(\tilde{N}) \right|_{\epsilon=0}, X_{u^j} \right\rangle \\
&\quad + \langle X_{u^i} \circ G(N), \varphi_{u^j} N + \varphi N_{u^j} \rangle \\
&= \langle N_{u^i} \circ G(N), X_{u^j} \rangle \varphi + \langle X_{u^i} \circ G(N), N_{u^j} \rangle \varphi \\
&\quad + \left\langle X_{u^i} \circ \left. \frac{d}{d\epsilon} G(\tilde{N}) \right|_{\epsilon=0}, X_{u^j} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der gewichteten Weingartenschen Gleichungen ergeben sich

$$\begin{aligned}
\langle N_{u^i} \circ G(N), X_{u^j} \rangle &= \langle -L_{is} h^{sm} X_{u^m} \circ G(N) \circ G(N), X_{u^j} \rangle \\
&= -L_{is} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G(N), X_{u^j} \circ G(N) \rangle, \\
\langle X_{u^i} \circ G(N), N_{u^j} \rangle &= \langle X_{u^i} \circ G(N), -L_{js} h^{sm} X_{u^m} \circ G(N) \rangle \\
&= -L_{js} h^{sm} \langle X_{u^i} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle.
\end{aligned}$$

Die Ableitung der Gewichtsmatrix berechnen wir zu

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} G(\tilde{N}) \right|_{\epsilon=0} = G_{z^\mu}(N) \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{N}^\mu \right|_{\epsilon=0} = G_{z^\mu}(N) \cdot (-h^{rs} \varphi_{ur} (X_{u^s} \circ G(N))^\mu),$$

wobei die Summation über den Index μ von 1 bis 3 geht. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}_{ij} \right|_{\epsilon=0} &= -L_{is} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G(N), X_{u^j} \circ G(N) \rangle \varphi \\
&\quad - L_{js} h^{sm} \langle X_{u^i} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle \varphi \\
&\quad - h^{rs} \varphi_{ur} (X_{u^s} \circ G(N))^\mu \langle X_{u^i} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^j} \rangle.
\end{aligned}$$

Aus

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} (\tilde{h}^{jk} \tilde{h}_{ki}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}^{jk} \right|_{\epsilon=0} \cdot h_{kl} + h^{jk} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}_{kl} \right|_{\epsilon=0}$$

berechnen wir die Ableitung der Inversen

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}^{ji} \right|_{\epsilon=0} &= -h^{jk} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}_{kl} \right|_{\epsilon=0} \cdot h^{li} \\
&= h^{jk} L_{ks} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G(N), X_{u^l} \circ G(N) \rangle h^{li} \varphi \\
&\quad + h^{jk} L_{ls} h^{sm} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{li} \varphi \\
&\quad + h^{jk} h^{rs} \varphi_{ur} (X_{u^s} \circ G(N))^\mu \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle h^{li}. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

4. Mit Gleichung (A.3) und (A.4) berechnen wir nun

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{H}_G(\tilde{X}) \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_{ij} \Big|_{\epsilon=0} \cdot h^{ji} + L_{ij} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \tilde{h}^{ji} \Big|_{\epsilon=0} \\
&= h^{ji} \varphi_{u^i u^j} - h^{ji} (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) \varphi_{u^r} \\
&\quad - h^{ji} L_{il} h^{lk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^s} \circ G(N) \rangle h^{sm} L_{mj} \varphi \\
&\quad + L_{ij} h^{jk} L_{ks} h^{sm} \langle X_{u^m} \circ G(N), X_{u^l} \circ G(N) \rangle h^{li} \varphi \\
&\quad + L_{ij} h^{jk} L_{ls} h^{sm} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{li} \varphi \\
&\quad + L_{ij} h^{jk} h^{rs} \varphi_{u^r} (X_{u^s} \circ G(N))^\mu \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle h^{li} \\
&= h^{ji} \varphi_{u^i u^j} - \left\{ (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} - h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle \right. \\
&\quad \left. \cdot (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr} \right\} \varphi_{u^r} \\
&\quad + L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li} \varphi.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
-P^r &:= (\Gamma_{ij}^r + \Omega_{ij}^r) h^{ji} - h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}, \\
c &:= L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G(N), X_{u^m} \circ G(N) \rangle h^{ms} L_{sl} h^{li},
\end{aligned}$$

so ist die Entwicklung bewiesen.

q.e.d.

Bemerkung A.1 *Mit dieser Entwicklung für die gewichtete mittlere Krümmung \mathcal{H}_G lässt sich auch ein Störungsresultat (ähnlich wie Satz 4.8 aus Abschnitt 4.6) für strikt stabile G -Minimalflächen, die $\mathcal{L}\xi \leq 0$ in Ω für eine positive Funktion $\xi = \xi(u, v) : \bar{\Omega} \rightarrow (0, +\infty) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ erfüllen und wozu G -minimale Graphen gehören, beweisen.*

Am Ende wollen wir noch ein paar Aussagen über den Operator \mathcal{L}_G tätigen. Obige Rechnungen können wir in beliebigen Dimensionen und Parametern durchführen. Wenden wir den Operator auf den Normalenvektor N an, so erhalten wir ein alternatives elliptisches System für N , wie wir in Abschnitt 3.4 gesehen haben. Da die Koeffizienten von N und den partiellen Ableitungen N_{u^i} , $i = 1, 2$, abhängen, ist das System nicht mehr linear.

Wir führen mit Hilfe der gewichteten Metrik (analog zu [BL], §61 - §64) die kovariante Ableitung D_j gemäß

$$\begin{aligned}
D_j T_i &:= T_{i,u^j} - (\Gamma_{ji}^k + \Omega_{ji}^k) T_k, \\
D_j T^{ik} &:= T_{uj}^{ik} + (\Gamma_{jl}^i + \Omega_{jl}^i) T^{lk} + (\Gamma_{jl}^k + \Omega_{jl}^k) T^{il},
\end{aligned}$$

für einfach kovariante Tensoren T_i und zweifach kontravariante Tensoren T^{ik} ein. Damit definieren wir den gewichteten Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta_G := D_j \left(h^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = D_j \left(h^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} + h^{ij} D_j \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right).$$

Unser Operator \mathcal{L}_G aus (A.1) lässt sich dann in der Form

$$\mathcal{L}_G \varphi = \Delta_G \varphi + \tilde{P}^r \varphi_{u^r} + c \varphi$$

mit der modifizierten Koeffizientenfunktion

$$\tilde{P}^r = -D_j(h^{jr}) + h^{li} L_{ij} h^{jk} \langle X_{u^k} \circ G_{z^\mu}(N), X_{u^l} \rangle (X_{u^s} \circ G(N))^\mu h^{sr}$$

schreiben. Man kann schließlich zeigen, dass bei Variationsproblemen die Funktionen \tilde{P}^r , $r = 1, 2$, identisch verschwinden. Zum Vergleich verweisen wir auf [BD] und [CM2], die allerdings mit anderen Gewichtsmatrizen und gewichteter mittlerer Krümmung arbeiten und ähnliche Ergebnisse erzielen.

Literaturverzeichnis

- [Be] Matthias Bergner: *Das Dirichlet-Problem für Graphen von vorgeschriebener mittlerer Krümmung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2006
- [BD] Matthias Bergner, Jens Dittrich: *On surfaces of prescribed weighted mean curvature*. Calc. Var. **33** (2008), 169-185
- [BF] Matthias Bergner, Steffen Fröhlich: *Existence, Uniqueness and graph representation for weighted minimal hypersurfaces*. Ann. Global Anal. Geom. **36** (2009), 363-373
- [B] Lipman Bers: *Univalent solutions of linear elliptic systems*. Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 513-526
- [Bl] Wilhelm Blaschke: *Kreis und Kugel*. 2. Auflage, Berlin: Walter de Gruyter, 1956
- [BL] Wilhelm Blaschke, Kurt Leichtweiß: *Elementare Differentialgeometrie*. Grundlehrern der mathematischen Wissenschaften **1**, 5. Auflage, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1973
- [C] Ulrich Clarenz: *Enclosure theorems for extremals of elliptic parametric functionals*. Calc. Var. **15** (2002), 313-324
- [CM1] Ulrich Clarenz, Heiko von der Mosel: *Compactness theorems and an isoperimetric inequality for critical points of elliptic parametric functionals*. Calc. Var. **12** (2001), 85-107
- [CM2] Ulrich Clarenz, Heiko von der Mosel: *On surfaces of prescribed F -mean curvature*. Pacific J. Math. **213**, No. 1 (2004), 15-36
- [Fi1] Robert Finn: *On equations of minimal surface type*. Annals of Math. **60**, No. 3 (1954), 397-416
- [Fi2] Robert Finn: *New estimates for equations of minimal surface type*. Arch. Rat. Mech. Anal. **14** (1963), 337-375
- [Fr] Steffen Fröhlich: *Über zweidimensionale nichtlineare elliptische Systeme der geometrischen Analysis*. Habilitationsschrift, Technische Universität Darmstadt, 2008

- [GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **224**, 2. Auflage, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1983
- [Ha] Philip Hartman: *On the bounded slope condition*. Pacific J. Math. **18** (1966), 495-511
- [HW] Philip Hartman, A Wintner: *On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations*. Amer. J. Math. **75** (1953), 449-476
- [HM1] Stefan Hildebrandt, Heiko von der Mosel: *Plateau's problem for parametric double integrals: I. Existence and regularity in the interior*. Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 926-955
- [HM2] Stefan Hildebrandt, Heiko von der Mosel: *Plateau's problem for parametric double integrals: II. Regularity at the boundary*. J. Reine Angew. Math. **565** (2003), 207-233
- [J] Howard Jenkins: *On two-dimensional variational problems in parametric form*. Arch. Rat. Mech. Anal. **8** (1961), 181-206
- [JS1] Howard Jenkins, James Serrin: *Variational problems of minimal surface type. I*. Arch. Rat. Mech. Anal. **12** (1963), 185-212
- [JS2] Howard Jenkins, James Serrin: *Variational problems of minimal surface type. III. The Dirichlet problem with infinite data*. Arch. Rat. Mech. Anal. **29** (1968), 304-322
- [K] Wilhelm Klingenberg: *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Heidelberger Taschenbücher Band **107**, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1973
- [LU] Olga A. Ladyzhenskaya, Nina N. Ural'tseva: *Linear and quasilinear elliptic equations*. New York London: Academic Press, 1968
- [LU2] Olga A. Ladyzhenskaya, Nina N. Ural'tseva: *Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations*. Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 677-703
- [Lau] Chi-ping Lau: *The existence and non-existence of a non-parametric solution to equations of minimal surface type*. Analysis **4** (1984), 177-196
- [L] Detlef Laugwitz: *Differentialgeometrie*. 3. Auflage, Stuttgart: Teubner-Verlag, 1977
- [Mi] Mario Miranda: *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1965), 233-249
- [Mo] Charles B. Morrey, Jr.: *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126-166

- [Ni] Louis Nirenberg: *On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity*. Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 103-156
- [N] Johannes C. C. Nitsche: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **199**, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1975
- [O] Robert Osserman: *The isoperimetric inequality*. Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 1182-1238
- [S1] Friedrich Sauvigny: *Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene*. Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen, 1981
- [S2] Friedrich Sauvigny: *A-priori-Abschätzungen der Hauptkrümmungen für Immersionen vom Mittleren-Krümmungs-Typ mittels Uniformisierung und Sätze vom Bernstein-Typ*. Habilitationsschrift, Georg-August-Universität Göttingen, 1988
- [S3] Friedrich Sauvigny: *Curvature estimates for immersions of minimal surface type via uniformization and theorems of Bernstein type*. manuscripta math. **67** (1990), 69-97
- [S4] Friedrich Sauvigny: *Deformation of boundary value problems for surfaces with prescribed mean curvature*. Analysis **21** (2001), 157-169
- [S5] Friedrich Sauvigny: *Partial differential equations 1, Foundations and integral representations*. Universitext, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006
- [S6] Friedrich Sauvigny: *Partial differential equations 2, Functional analytic methods*. Universitext, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006
- [Sch] Juliusz P. Schauder: *Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen*. Math. Z. **37** (1933), 623-634
- [SW] Friedmar Schulz, Graham H. Williams: *Barriers and existence results for a class of equations of mean curvature type*. Analysis **7** (1987), 359-374
- [Si1] Leon Simon: *A Hölder estimate for quasiconformal maps between surfaces in Euclidean space*. Acta math. **139** (1977), 19-51
- [Si2] Leon Simon: *Equations of mean curvature type in 2 independent variables*. Pacific J. Math. **69**, No.1 (1977), 245-268
- [W] Sven Winklmann: *Existence and uniqueness of F -minimal surfaces*. Ann. Glob. Anal. Geom. **24** (2003), 269-277