

Charakterisierung und Anwendung von flächig periodischen Metall-Ringgeflechten

Von der
Fakultät für Maschinenbau, Elektrotechnik und
Wirtschaftsingenieurwesen
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Diplom-Ingenieur (univ.)
Olaf Lenk**

Geboren am 20. September 1971 in Bad Saarow-Pieskow

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Ch. Leyens
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. A. Kühhorn
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. B. Viehweger
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. J. Wellnitz (FH Ingolstadt)

*A shrilling trompelt sowned from on hye,
And unto battail bad them selves adresse:
Their shining shieldes about their westes they tye,
And burning blades about their heades doe blesse,
The instruments of wrath and heavienesse.
With greedy force each other doth assayle,
And strike so fiercely, that they do impresse
Deepe dinted furrows in the battred mayle:
The yron walles to ward their blows are weak and fraile.*

Edmund Spenser
“The Faerie Queene”
Book I - Canto V

Danksagung

Wie so viele wissenschaftlichen Arbeiten ist auch diese Dissertation in einem langen – manchmal endlos erscheinenden – Prozess entstanden, welcher sowohl von Rückschlägen aber auch von unvergleichlichen Erfahrungen geprägt war. In dieser Zeit habe ich im Grossen wie im Kleinen vielfältige Unterstützung erfahren, welche die erfolgreiche Arbeit erst möglich gemacht hat.

In diesem Zusammenhang gilt mein Dank zunächst der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus, in persona Prof. Leyens und Prof. Vieweger, die mir als externem Doktoranden den Weg zur Promotion ermöglicht hat. Diesen Dank möchte ich insbesondere auf Prof. Kühhorn ausweiten, der meinen Weg mit entsprechendem Rat begleitet hat.

Desweiteren hatte ich während der Promotion die Möglichkeit, auch über den Horizont der Strukturmechanik hinauszublicken. Hierbei möchte Prof. Szameit von der Universität Wien erwähnen, dessen Expertise bei der historischen Betrachtung von Ringgeflechten grosse Hilfe war. Ebenso hat war es möglich, durch die Unterstützung von Dr. Praxl und seinem Team am Institut für Rechtsmedizin der Ludwig-Maximilian-Universität München, das Ringgeflecht in neuartigen Anwendungen zu untersuchen. Gleiches gilt für die Friedrich Münch GmbH, vertreten durch Hr. Ritter und Hr. Duhatschek, welche mit der Erfahrung zur technischen Umsetzung der Ringgeflechtherstellung unschätzbare Hilfe geleistet hat.

Höchster Dank gebührt jedoch Prof. Wellnitz, dessen Einsatz und Enthusiasmus auch während schwieriger Zeiten die beste Motivation war. Diesen Dank möchte ich auf sein Team mit Dr. L. König, U. Burger und M. Hartmann ausweiten.

Meinen Eltern möchte ich aus tiefsten Herzen für Ihre langjährige Unterstützung, ihren Rat und Zuspruch danken.

Letztendlich wäre diese Arbeit jedoch ohne die liebevolle Unterstützung meiner Frau Helke unmöglich gewesen. Für ihren Zuspruch, ihren Rat, ihre Energie aber auch ihre Geduld kann ich ihr nicht genug danken.

Inhaltsverzeichnis

	<i>Seite</i>
Zusammenfassung	10
Abstract	11
Formelzeichen und Vereinbarungen	12
1 Vorbetrachtung	17
1.1 Entwicklung und Verbreitung von Ringgeflechten	17
1.2 Handwerkliche und industrielle Fertigung	23
2 Topologie des Ringgeflechts	26
2.1 Mikroebene	27
2.2 Mesoebene	36
2.3 Makroebene	41
2.4 Methode des Repräsentativen Volumenelements (RVE)	47
3 Materialverhalten von Ringgeflechten	60
3.1 Materialgesetze	60
3.2 Lastrichtungen des Ringgeflechts	64
3.3 Beitrag zum Materialgesetz für Ringgeflechte	71
4 Mechanik des Ringgeflechts	75
4.1 Analytische Betrachtung linear-elastischer Eigenschaften	76
4.1.1 Linear elastisches Verhalten unter axialer Zugbelastung	78
4.1.2 Linear elastisches Verhalten unter lateraler Zugbelastung	94
4.1.3 Linear elastisches Verhalten unter Schubbelastung	99
4.2 Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur numerischen Bestimmung von Materialparametern	101
4.2.1 Geometrische Modellbildung des RVE und Elementierung	101
4.2.2 Randbedingungen	104
4.2.3 Analysemodus	105
4.2.4 Ergebnisse der Finite-Elemente-Analyse	108
4.2.5 Exemplarische Ableitung des Elastizitätsmoduls	116
4.3 Experimentelle Bestimmung von Materialparametern	121
4.3.1 Versuchsaufbau	123
4.3.2 Versuchsdurchführung	125
4.3.3 Versuchsauswertung	126
5 Anwendungsbeispiele für Ringgeflechte	133
5.1 Analyse von Impaktvorgängen	133
5.2 Simulation eines Kleinkörperanpralls	138
5.2.1 Modellbildung	139
5.2.2 Simulationsergebnisse	141
5.3 Simulation eines Großkörperanpralls	144
5.3.1 Modellbildung	144
5.3.2 Simulationsergebnisse	147
6 Schlussfolgerung und Ausblick	153
7 Literaturverzeichnis	154

Appendix

Appendix A	Arbeitsweise von Ringflechtmaschinen	161
A1	Funktionen eines Arbeitskopfes	161
A2	Funktionen eines Maschinenkorpus	163
Appendix B	Elementierung des Finite-Elemente-Modells des RVE eines Ringgeflechts	165
B1	Wahl des Elementtyps	165
B2	Elementdichte	169
Appendix C	Elektro-Mechanische Universalprüfmaschine Zwick Z010 – Technische Daten	174

Zusammenfassung

Metallische Ringgeflechte werden in verschiedenen Anwendungen zum Körperschutz gegen Schläge, Stiche und Schnitte eingesetzt. Dabei hat sich das Anwendungsgebiet von einem ausschließlich militärischen Gebrauch auf Bereiche des Arbeitsschutzes, der Architektur sowie der Schmuckindustrie verlagert.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Betrag dazu, metallische Ringgeflechte über ein elastisches Ersatzmodell näherungsweise abzubilden und somit das Systemverhalten in einer entsprechenden Anwendung analytisch zu erfassen.

Die dazu nötigen globalen Materialeigenschaften werden über geeignete Methoden aus dem inhomogenen Aufbau des Ringgeflechts in eine vereinfachte kontinuumsmechanische Beschreibung überführt. Eine derartige Homogenisierung kann sowohl über analytische, numerische als auch experimentelle Verfahren erreicht werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der analytische Ansatz über die Einführung eines Repräsentativen Volumenelements ermöglicht, dessen linear elastisches Verhalten auf eine übergeordnete, globale Hierarchieebene übertragen wird. Numerische Untersuchungen an diesem Volumenelement bestätigen die analytischen Ergebnisse und erlauben einen Einblick in das Verhalten bei Überschreiten der Elastizitätsgrenze. Über einachsige Zugversuche gelingt die experimentelle Erfassung des globalen, plastischen Materialverhaltens bis zum sukzessiven Versagen des Ringgeflechts.

Die derart gewonnenen Kenntnisse über das globale Strukturverhalten fließen abschließend in die Untersuchung von Anwendungsbeispielen flächiger Ringgeflechte ein und werden über Vergleichsmessungen validiert.

Abstract

In a multitude of applications, metallic chain mail is utilised for body protection against hits, stitches and cuts. Hereby the area of application has changed from an originally military use into areas of work safety, architecture and fashion industry.

The present document is intended to support the basic understanding to generally describe metallic chain mail by a representative model allowing to analytically evaluate the system behaviour within a specific application.

The therefore required global material properties are translated from the inhomogeneous built-up of the chain mail into a simplified mechanical description. Such homogenisation can be achieved by analytical, numerical as well as experimental methods. Within the described investigations the analytical approach is achieved by definition of a representative unit cell and the translation of its local linear elastic behaviour into a global level. Numerical investigations validate the analytical approach and allow an outlook beyond the elastic region. By unidirectional tensile tests the global material behaviour is determined up to the successive failure of the chain mail.

The derived knowledge on the global structural behaviour is finally inserted into the investigation of application examples and validated by comparative measurements.

Formelzeichen und Vereinbarungen

Koordinatensysteme

$\{x, y, z\}$	Kartesische Koordinaten
$\{x, y, z\}_T$	Kartesische Koordinaten der Mesoebene /des Einzelringes / des Torus
$\{x, y, z\}_{RVE}$	Kartesische Koordinaten der Makroebene / des Ringgeflechts
$\{x, y, z\}_{global}$	Kartesische Koordinaten der Makroebene / des Ringgeflechts
$\{\eta, \xi, \zeta\}$	Lokales Koordinatensystem

Lateinische Zeichen

a	Exponent der Ramberg-Osgood-Beziehung
\vec{a}_1, \vec{a}_2	Basisvektoren auf der Torusoberfläche
\vec{a}_3	Normalenvektor auf der Torusoberfläche
A	Fläche
b	Breite des Ringgeflechts
C	Konstante der Ramberg-Osgood-Beziehung
$C_1 \dots C_6$	Geometrische Geflechtsgrößen
C_{ij}	Komponenten der Steifigkeitsmatrix
C_{ijkl}	Komponenten des Steifigkeitstensors
d	Innendurchmesser eines Einzelringes
D	Außendurchmesser eines Einzelringes
E	Elastizitätsmodul isotroper Materialien
E_i	Elastizitätsmodul nicht-isotroper Materialien in der Richtung i
\vec{F}	generalisierter Kraftvektor
\vec{F}_{Tj}^{Ki}	Kontaktkraftvektor am Kontaktpunkt Ki des Torus j
F_{Tj}^{Ki}	Betrag der Kontaktkraft \vec{F}_{Tj}^{Ki}
FR_m	Kraft bei Erreichen der Bruchspannung
$FR_{p0,2}$	Kraft bei Erreichen der Fließspannung (bei 0,2% plastischer Verzerrung)
G	Schubmodul isotroper Materialien

$G1 \dots G10$	Kennzeichnung der Geflechtsgröße
H	Dicke des Ringgeflechts
H_{ij}	Verschiebungsgradienten
I	Flächenträgheitsmoment
$[J]$	Trägheitsmatrix
l	Länge
\vec{M}	generalisierter Momentenvektor
M	Flächengewicht des Ringgeflechts
M_{RVE}	Masse der Repräsentativen Volumenelements
M_{SB}	Biegemoment am Schnittufer
n	Verfestigungsexponent der Ramberg-Osgood-Beziehung
N	Anzahl der Ringe pro Quadratmeter im Ringgeflecht
N_S	Normalkraft am Schnittufer
N_x	Anzahl der Ringe pro Meter axialer Länge im Ringgeflecht
N_y	Anzahl der Ringe pro Meter lateraler Länge im Ringgeflecht
\vec{P}	Ortsvektor
Q_S	Querkraft am Schnittufer
r	Radialer Abstand von der Ringmittellinie zur Torusoberfläche
R	Radialer Abstand vom Ringmittelpunkt zur Ringmittellinie
R_m	Bruchspannung
$R_{p0,2}$	Fließspannung (bei 0,2% plastischer Verzerrung)
s	Standardabweichung
S_{ij}	Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix
t	Ringdrahtdurchmesser
t_0, t_1, t_2, t_3	Zeitschritte
\vec{T}_{trans}	Kartesischer Translationsvektor
$[T_{rot}]$	Rotationsmatrix
T	Temperatur
\vec{u}	Verschiebungsvektor
u	Betrag des Verschiebungsvektors
V_T	Torusvolumen
V_{RVE}	Volumen des Repräsentativen Volumenelements
W	Formänderungsergänzungsenergie

Griechische Zeichen

α_i	Komponenten des Vektors der thermischen Ausdehnungskoeffizienten
β	Verschräkungswinkel
Δl	Längenänderung
Δt	Zeitinkrement
Δx	Komponente des Translationsvektors
Δy	Komponente des Translationsvektors
Δz	Komponente des Translationsvektors
ΔT	Temperaturänderung
ε	Gesamtverzerrung
ε_{el}	Elastische Verzerrung
ε_{pl}	Plastische Verzerrung
ε_j	Komponenten des Verzerrungsvektors
ε_{kl}	Komponenten des Verzerrungstensors
φ	Geflechtvolumengehalt
ϕ	Winkel entlang eines Torusmeridians
γ	Schubverzerrung
θ	Winkel entlang eines Torusbreitenkreises
ρ	Dichte des Torusmaterials
σ	Spannung
σ_0	Vorspannung
σ_1	Maximale Hauptspannung
σ_2	Mittlere Hauptspannung
σ_3	Minimale Hauptspannung
σ_i	Komponenten des Spannungsvektors
σ_{ij}	Komponenten des Spannungstensors
ν_{ij}	Querkontraktion in Richtung j bei Belastung in Richtung i
τ	Schubspannung
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor
ψ	Geometriebeiwert

Indizes

<i>global</i>	Bezug auf globale Koordinaten
<i>K1</i>	Bezug auf Kontaktpunkt 1
<i>K2</i>	Bezug auf Kontaktpunkt 2
<i>RVE</i>	Bezug aus des Repräsentative Volumenelement
<i>SP</i>	Parameterwert an einem Stützpunkt der Parameterkurve
<i>T</i>	Bezug auf einen Torus
<i>T1</i>	Bezug auf einen Torus 1
<i>T2</i>	Bezug auf einen Torus 2
<i>x</i>	Bezug auf die axiale Richtung des Ringgeflechts
<i>y</i>	Bezug auf die laterale Richtung des Ringgeflechts
<i>z</i>	Bezug auf die Dickenrichtung des Ringgeflechts

Einheiten

°	Winkelgrad
%	Prozent
°C	Grad Celsius
<i>kg</i>	Kilogramm
<i>K</i>	Kelvin
<i>m</i>	Meter
<i>mm</i>	Millimeter
<i>ms</i>	Millisekunde
<i>N</i>	Newton
<i>Pa</i>	Pascal
<i>s</i>	Sekunde

Symbole und Vereinbarungen

$//$	<i>Parallel</i>
$() \cdot ()$	skalares Produkt
$() \times ()$	Kreuzprodukt
$()^{-1}$	Inverse
$()^T$	Transposition
$(\dot{ })$	Einfache zeitliche Ableitung
$(\ddot{ })$	Zweifache zeitliche Ableitung
\emptyset	Arithmetischer Mittelwert
<i>cos</i>	Kosinus
<i>i, j, k, l</i>	Laufvariable
π	<i>Pi (3,142...)</i>
<i>sin</i>	Sinus

Abkürzungen

<i>Abb.</i>	Abbildung
<i>AG</i>	Aktiengesellschaft
<i>ca.</i>	zirka
<i>e. V.</i>	eingetragener Verein
<i>Gl.</i>	Gleichung
<i>GmbH</i>	Gesellschaft mit beschränkter Haftung
<i>max.</i>	Maximum
<i>min.</i>	Minimum
<i>MKS</i>	Mehrkörpersystem
®	Registrierter Handelsname
<i>REM</i>	Rasterelektronenmikroskop
<i>RVE</i>	Repräsentatives Volumenelement
<i>SP</i>	Stützpunkt
<i>Tab.</i>	Tabelle
<i>v. Chr.</i>	vor Christus
<i>vgl.</i>	vergleiche
<i>z. B.</i>	zum Beispiel

1 Vorbetrachtung

Ringgeflechte weisen eine räumlich periodische, anisotrope Gitterstruktur auf und bilden somit eine Untergruppe der zellularen Festkörper, zu denen Materialien wie Schäume und Honigwaben gehören. Im Gegensatz zu diesen sind Ringgeflechte - oft auch als Kettengeflechte bezeichnet - seit Jahrtausenden bekannt und werden in ihrem jeweiligen Einsatzgebiet als Schutzwaffe gegen Hiebe und Schnitte von Schwertern, Schlagwaffen und Schnittwerkzeugen nach unverändertem Prinzip verwendet.

1.1 Entwicklung und Verbreitung von Ringgeflechten

Das erstmalige Auftreten von Ringgeflechten ist zeitlich nicht gesichert. Vielmehr gibt es seit der frühen Eisenzeit eine zunächst unabhängige Entwicklung von Ringgeflechten sowohl in Europa und Persien als auch in Japan. Aufgrund kultureller und gebietlicher Überschneidungen haben sich in den folgenden zwei Jahrtausenden lokale Ringgeflechtstypen und -bauweisen über den gesamten euro-asiatischen Kulturkreis verbreitet. Während in Mittelasien noch im ausgehenden Neolithikum eine Metallverarbeitung in Form von Gold- und Kupferarbeiten nur minimal verbreitet war, hat sich dort die Herstellung von individuellen Bronzeringen in der frühen Bronzezeit (ab dem 3. Jahrtausend v. Chr.) etabliert. Jedoch erst in der späten Bronzezeit (Ende 2. Jahrtausend v. Chr.) wurde die Technik zur Herstellung von Ringverbunden entwickelt. Erst für die Zeit um 600 v. Chr. gibt es Belege einer militärischen Verwendung bei in Mittelasien beheimateten Reitervölkern. Durch seine Komplexität im Aufbau und dem daraus resultierenden Herstellungsaufwand war das Tragen einer Ringgeflechtspanzerung der militärischen Elite vorbehalten und diente zudem als Statussymbol. Zeugnisse europäischer Ringgeflechte gehen auf etruskischen Ursprung zurück, die sich bis in das 8./9. Jahrhundert v. Chr. zurückverfolgen lassen. Mit der Entwicklung feinhandwerklicher Techniken ab 600 v. Chr. wurden hier erste militärische Bronzegeflechte hergestellt. Gesicherte Erkenntnisse zur Verwendung von Ringgeflechten in Europa liegen erst für die späte Eisenzeit (in der Phase der La Tène – Kultur) ab etwa dem späten 4. Jahrhundert v. Chr. vor (vgl. [**Kro 08**]).

Zu dieser Zeit lernten keltische Krieger (z. B. Söldner aus Gallien), die in den Diadochenreichen des Nahen und Mittleren Ostens Kriegsdienste versahen, dort den Ringpanzer kennen und brachten derartige Panzerhemden in ihre Heimat. Das schon damals hoch entwickelte Eisenhandwerk erlaubte es danach, Ringpanzer in kleinen Serien für die heimische Kriegerelite zu fertigen.



Abb. 1-1 *Standbild eines gallischen Kriegers in römischer Rüstung*
- „Lorica Hamata“
(Quelle: F. Philibert-Caillat, *Museum Calvet, Avignon*)

Ab dem 2. Jahrhundert v. Chr. erstreckte sich das expandierende Römische Reich bis nach Gallien hinein, wodurch römische Truppen mit dem Ringgeflechtspanzer in Berührung kamen und schnell in die eigene Ausrüstung und die ihrer Söldner übernahmen (siehe [Abb. 1-1]). Mit der Ausbreitung des Römischen Reiches, vor allem aber durch intensive politische und wirtschaftliche Kontakte, verbreitete sich die Verwendung von Ringgeflechtem letztendlich im gesamten europäischen Raum. Auch in nachrömischer Zeit hat sich das Ringgeflecht als Standardpanzerung sowohl bei Fuß- als auch bei Reitertruppen erhalten. Vom Frühmittelalter (ab dem 5. Jahrhundert) bis ins Hochmittelalter (bis 14. Jahrhundert) bildeten Panzer aus Ringgeflecht die wichtigste Schutzwaffe der europäischen Kriegereliten.

In dieser Zeit wurden die Ringgeflechte nach und nach auf den Schutz des gesamten Körpers erweitert, abgestimmt und durch sekundäre Panzerungen, etwa ab dem 13. Jahrhundert durch Plattenpanzer, ergänzt (siehe [*Sza 91*]). Als wichtiges Zeugnis der allgemeinen Verwendung von Ringgeflechtem gilt dabei der „Teppich von Bayeux“ (siehe [*Abb. 1-2*]), der die Invasion Britanniens durch die normannische Eroberer darstellt.



Abb. 1-2 Ausschnitt aus dem „Teppichs von Bayeux“, 1066
(Quelle: Dan Koehl, *Tapestry de Bayeux*)

Mit der Weiterentwicklung der Waffentechnik, so die beginnende Verbreitung der Armbrust ab dem 11. Jahrhundert, wurde die Schutzwirkung der Kettengeflechte zunehmend aufgehoben. Gegen Pfeile aus kurzer Distanz und wuchtige Stöße mit spitzen Waffen im Nahkampf konnte das Ringgeflecht nur bedingten Schutz bieten. So heißt es in von Eschenbachs *Parzival* (vgl. [*Her 12*]):

» ...
Dort nahm man seiner Wunden Acht:
Es waren fünfzig oder mehr;
Doch hatten durch der Ringe Wehr
Die Pfeile nicht zu tief gestochen;
Vom Schild war ihre Kraft gebrochen.«

Um dieser nachlassenden Schutzwirkung entgegenzuwirken, wurden stärkere Eisendrähte als auch verbesserte Ringverschlüsse durch Vernietung eingearbeitet. Beginnend ab der Mitte des 13. Jahrhunderts wurden zusätzliche Plattenröcke aus Blech und/oder Leder sowie Arm- und Beinschienen über dem Ringgeflecht getragen. Mit der ab dem ausgehenden 15. Jahrhundert zunehmenden Verbreitung von tragbaren Feuerwaffen verlieren Ringgeflechtspanzer vollends ihre militärische Bedeutung. Ringpanzer werden danach in Europa im 16. und frühen 17. Jahrhundert hauptsächlich noch für den Export in das Osmanische Reich und nach Asien (z. B. für den *Namban*-Handel nach Japan 1543-1650) gefertigt, aber auch dort lässt die Verwendung durch den vermehrten Einsatz von Schusswaffen im 17. Jahrhundert rasch nach. Durch den Wegfall dieser Anwendungsgebiete verlor die Herstellung von Ringgeflechten ihre Bedeutung und das damit verbundene Wissen ging nahezu verloren. Einzig in folkloristischem Zusammenhang ist die handwerkliche Geflechtherstellung nach historischem Vorbild bis heute zu finden.

Erst im Ersten Weltkrieg unternahm die britische Armee Versuche, Ringgeflechte als Gesichtsschutz für Panzersoldaten einzusetzen (siehe [Abb. 1-3]). Ziel war es, die Besatzung bei Treffern am Panzer gegen abplatzende Innenwandsplitter sowie gegen herausgeschleuderte Nietköpfe zu schützen.



Abb. 1-3 Englische Splitterschutzmaske mit Mundschutz aus Ringgeflecht, 1917
(Quelle: Gaius Cornelius, Muckleburgh Sammlung, Weybourne (GB))

Trotz der guten Schutzwirkung wurde diese Maske von den Panzermansschaften bald als im Einsatz nicht praktikabel verworfen. Grund dafür waren das eingeschränkte Sichtfeld, die schlechte Beatmung sowie die Irritation durch das bewegte Ringgeflecht.

Die zu dieser Zeit verstärkt entwickelte industrielle Fertigung von Ringgeflechten wurde jedoch in andere Anwendungsbereiche überführt. Eine erste und weiterhin existierende Verwendung findet sich in der Schmuckindustrie bei der Herstellung von Accessoires wie Handtaschen, Geldbörsen und Armbändern. Des Weiteren hat sich das Ringgeflecht durch seine Eigenschaft der Schnittfestigkeit besonders als Schutzkleidung für die Lebensmittelindustrie bewährt. Ein Beispiel eines Schutzhandschuhs für die Fleisch verarbeitende Industrie ist in [Abb. 1-4] dargestellt, weitere Schutzformen finden sich in Schürzen, Stulpen und Hauben.



Abb. 1-4 Schutzhandschuh „**niroflex**[®] **HAWK**“
(Quelle: Friedrich Münch GmbH)

Neben der klassischen Aufgabe des Schnittschutzes wird das Ringgeflecht in neuartigen Anwendungen auch als architektonisches Gestaltungsmittel verwendet (siehe [Abb. 1-5]). Dabei eröffnen die Drapierbarkeit, die Teiltransparenz sowie die Wirkung unter Beleuchtung einzigartige Möglichkeiten der Darstellung, welche durch eine lange Lebensdauer unter allen Umgebungsbedingungen ergänzt werden. Mit dem Einsatz robuster, automatisierter Herstellungsprozesse sind für diese Anwendungen auch große Flächen kostengünstig zu produzieren.



Abb. 1-5 Gestaltung der Außenfassade der Swarovski AG in Wattens (Österreich) unter Verwendung von Edelstahlringgeflecht (Quelle: Friedrich Münch GmbH)

Die produktspezifische Entwicklung konzentriert sich derzeit auf eine automatisierte Verbindungstechnik zwischen Einzelgeflechten und deren Einbindung in variable Befestigungssysteme. Diese Variabilität in Verbindung mit den Eigenschaften der Schnittfestigkeit und dem elasto-plastischen Energieaufnahmevermögen erlaubt eine Erweiterung auf Anwendungen mit struktureller Funktionalität. Beispiel dafür ist die Verwendung des Geflechts als Schutzbande bei Sportarten, in denen sicherheitsrelevante Kriterien zum Schutz von Sportlern und Zuschauern zu erfüllen sind. Auf diese Schutzfunktion wird in Kapitel 5 explizit eingegangen.



Abb. 1-6 Schutzbande der ALPINA GmbH bei der Alpinen Ski-Weltmeisterschaft in Bormio (Italien) 2005 (Quelle: privat)

1.2 Handwerkliche und industrielle Fertigung

Die Ringgeflechtsherstellung im historischen Kontext ist vor allem mit den Möglichkeiten der handwerklichen Fertigung verbunden. Abgeleitet aus der althochdeutschen Bezeichnung für den Ringpanzer – dem *Sarwat* – wurde der handwerkliche Geflechtsschmied als *Sarwürker* (auch *Sarwürhte* [aus dem Mittelhochdeutschen: *sar* = Kriegsrüstung, *würhte* = Verfertiger], *Sarworhte*, *Sarwörter*) bezeichnet. Dem Sarwürker als Zuarbeit steht am Anfang des Herstellungsprozesses das Ziehen des Eisendrahtes in die gewünschte Drahtstärke. Dieses Gewerbe der *Nadler* hat die Aufgabe, vorgefertigte Metallstäbe derart durch Schablonen zu ziehen, dass sich der Draht auf den gewünschten Querschnitt verjüngt.



Abb. 1-7 Zeitgenössische Darstellung von Drahtzieher/Nadler (links) und Sarwürker (rechts), um 1425 (Quelle: Stadtbibliothek Nürnberg)

Der so entstandene Draht wird vom Sarwürker auf eine Holz- oder Metallwelle aufgewickelt. Die entstandene Spirale – der sogenannte *Wurm* – wird anschließend mit einem Stechbeitel oder ähnlichen Werkzeug längsseitig aufgetrennt, wodurch leicht geöffnete Einzelringe entstehen.

In weiteren Arbeitsschritten werden die Einzelringe manuell in Sequenzen zusammengebracht, wodurch regelmäßige Geflechtsstreifen entstehen, die in einem Schnittmuster angeordnet und durch Einzelringe miteinander verbunden werden. Das Auseinanderfallen des Ringverbundes wird durch das Schließen der einzelnen Ringe verhindert. Dies erfolgt durch ein Zusammendrücken der Ringe, sodass die Nachbarringe nicht aus dem Öffnungsschlitz gleiten können. Um den Ringverbund auch im Gebrauch zusammenzuhalten, werden verschiedene Techniken zum dauerhaften Verschließen der Einzelringe angewandt. Dabei werden die Ringenden entweder in der Esse verschweißt oder die abgeflachten Enden vernietet, verklammert oder durch Ösen verschlossen.

Diese handwerkliche Fertigung ist mit einem hohen manuellen Aufwand sowie mit Schwankungen in der Verarbeitungsqualität verbunden. Beides – Wirtschaftlichkeit und Qualitätssicherung – sind für eine Großserienfertigung unerlässlich. Für die Herstellung kleinteiliger Produkte der Schmuckindustrie haben sich halb-automatisierte Verfahren etabliert, die durch eine manuelle Endbearbeitung ergänzt werden. Bei großflächigen Anwendungen wird eine automatisierte Fertigung angestrebt, um das wirtschaftliche Potenzial nutzen zu können.

Im Gegensatz zur manuellen Herstellung ist eine Vorfertigung und spätere Verbindung von kleineren Geflechtsteilen maschinell nicht umsetzbar. Vielmehr bietet sich durch den regulären periodischen Aufbau des Geflechts die Möglichkeit eines zeilenweisen Hinzufügens von einzelnen Ringen. Dazu muss in ein bestehendes Geflecht ein Ring eingefügt, zusammengebogen und dauerhaft geschlossen werden. Eine derartige Sequenz kann maschinell realisiert werden, wobei seit deren ersten Umsetzung im Jahr 1897 durch die Schmuckfirma Ernst Gideon Bek, Pforzheim, unterschiedliche Varianten von Ringflechtmaschinen zum Einsatz kommen.

Für Geflechte in Bahnbreiten bis ca. 1,2 m werden Maschinen (Hersteller „Lange Feinwerktechnik GmbH“) eingesetzt, die mit der linearen Weiterstellung eines beweglichen Arbeitskopfes das Geflecht zeilenweise aufbauen ([*Abb. 1-8*]). Während der Arbeitskopf dem Einsetzen neuer Ringe dient, ist der Korpus der Maschine für den Vorschub des aufgebauten Geflechts konzipiert. Über ein System von Nadeln, welche in die letzte Geflechtsreihe eingreifen, werden die Halterung als auch der Transport des Geflechts realisiert. Die Stabilität dieser Halterung basiert auf der Geflechtsstraffung aufgrund dessen Eigengewichts.

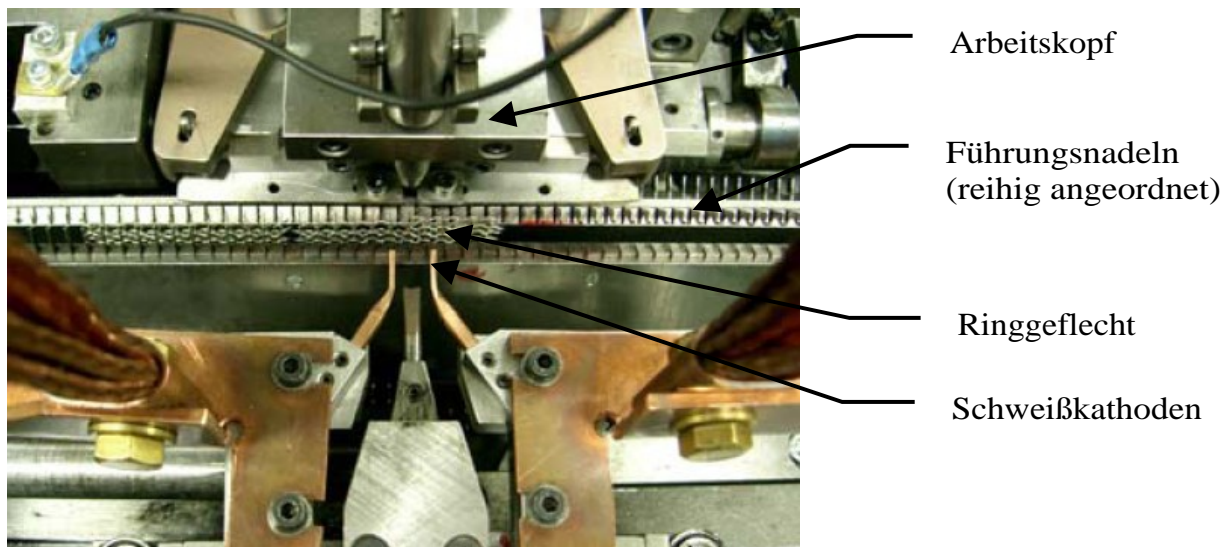


Abb. 1-8 *Komponentenanordnung einer Linearflechtmaschine, Hersteller „Lange Feinwerktechnik GmbH“ (Quelle: [Ste 04])*

Für größere Bahnbreiten von derzeit bis zu 5 m ist die Arbeitsgeschwindigkeit eines einzelnen Arbeitskopfes zu gering. Um diese zu erhöhen, werden bis zu sechs feststehende Arbeitsköpfe in Reihe geschaltet. Im Gegensatz zu den Linearmaschinen wird das Geflecht an den Arbeitsköpfen vorbeigeführt. Diese Anordnung wird z. B. in Rundflechtmaschinen realisiert. Hier wird der Transport des Geflechts über einen Nadelmechanismus gewährleistet, die Straffung erfolgt über das Geflechtsgewicht. In alternativen Maschinenkonfigurationen (siehe [Abb. 1-9]) wird das frei hängende Geflecht durch ein Rollensystem nach oben abgeführt, was die filigrane Nadeltechnik ersetzt. Eine Beschreibung der Arbeitsweisen von Linear- und Rundflechtmaschinen erfolgt im [Appendix A].

In allen Maschinentypen ist die Funktionalität der Geflechtbildung – Drahtzufuhr, Ringbiegung und Ringeinführung – auf den Arbeitskopf konzentriert. Zusätzlich wird ein dauerhafter Ringverschluss durch eine Widerstandsschweißung, Plasmaschweißung oder Laserschweißung erreicht. Eine detaillierte Gegenüberstellung dieser Schweißtechniken erfolgt in [Ste 04]. Die Prozesssicherheit, die Qualität der Schweißnaht hinsichtlich Gefügeveränderung und Restfestigkeit als auch die hohe Wirtschaftlichkeit in der Massenproduktion geben der Laserschweißung einen Vorteil gegenüber anderen Verfahren.

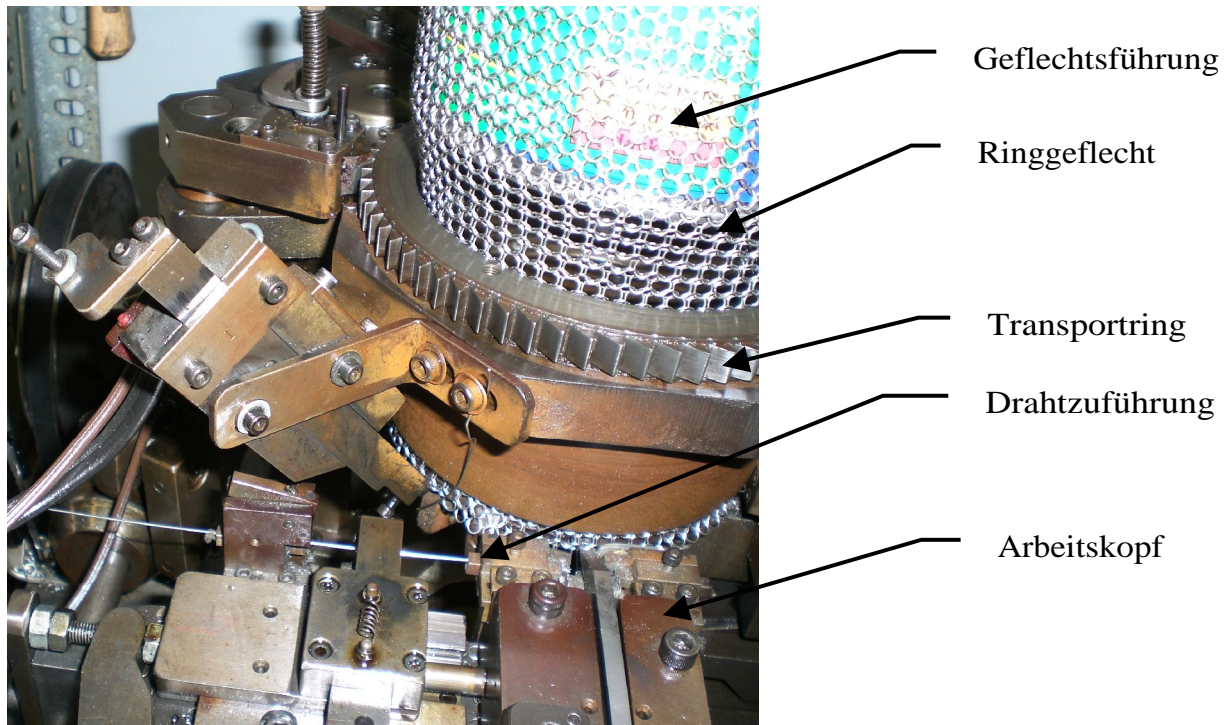


Abb. 1-9 Rundflechtmaschine, Hersteller „AZON Corporation“
(Quelle: Institut für Technik und Design e. V., Ingolstadt)

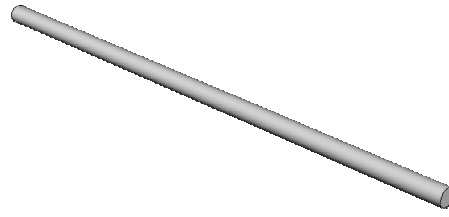
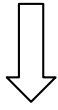
Für Sonderformen und nicht drapierbare Konturen müssen manuell zusätzliche Verbindungsringe in das Geflecht eingesetzt werden. Dabei werden einzelne Ringe in separaten, von Hand angesteuerten Arbeitsköpfen derart positioniert und verschweißt, dass sich angepasste Verbindungen oder Raffungen einstellen.

2 Topologie des Ringgeflechts

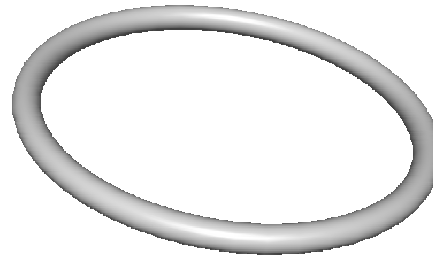
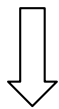
Ringgeflechte bestehen – wie durch den Namen gekennzeichnet – aus einer geflechtartigen Anordnung von einzelnen, zunächst unabhängigen Ringen. Deren flächige Anordnung führt zu einer periodischen Verteilung innerhalb eines diskontinuierlichen Geflechts. Zum Verständnis der Lastübertragung und der beschreibenden Materialparameter erfordert dieses hierarchische Aufbauprinzip eine Betrachtung subsequent aufbauender Ebenen des Ringgeflechtes:

- Mikroebene - Basismaterialien zur Einzelringherstellung
- Mesoebene - Definition des Einzelringes als Grundelement des Ringgeflechts
- Makroebene - Flächige Anordnung von Ringen innerhalb des Geflechts

Mikroebene
(gezogener Draht)



Mesoebene
(Einzelring)



Makroebene
(Ringgeflecht)

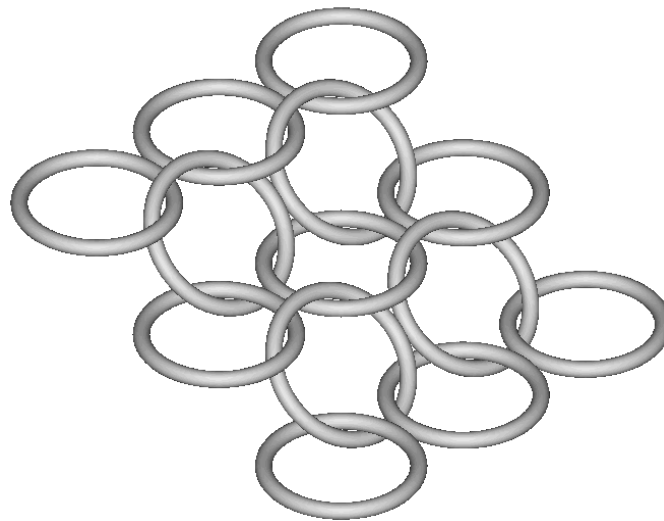


Abb. 2-1 Hierarchische Stufung der Entwicklungsebenen des Ringgeflechts

2.1 Mikroebene

Über die Definition der Mikroebene erfolgt die elementare Beschreibung der Grundelemente eines diskontinuierlichen Materials. Mit der Definition des Einzelringes als Grundelement des Ringgeflechts werden dessen Eigenschaften über die Mikromechanik des Ringwerkstoffes bestimmt. Während bei gleichartiger Betrachtung von Faserverbundmaterialien die Molekularstruktur der Fasern und der Bettung ausschlaggebend ist, wird die Mikroebene von Ringgeflechten durch die Werkstoffwahl des Drahtes gebildet.

Zur Herstellung von Einzelringen eignen sich alle Materialien, mit denen sich ein hoher Umformgrad während der Ringbiegung erreichen lässt. Für die industrielle Fertigung technischer Geflechte haben sich Runddrähte sowohl aus Edelstählen als auch aus Aluminium-, Titan- und Kupferlegierungen bewährt. Durch Prozesse wie Lasersintern oder Spritzgießen lassen sich auch polymere Werkstoffe verarbeiten. Diese haben aufgrund der geringen Materialfestigkeit keine technische Bedeutung und werden lediglich zu dekorativen Zwecken verwendet (vgl. [*Hor 06*]).

Mit Rücksicht auf das derzeitige Haupteinsatzgebiet in der Fleisch verarbeitenden Industrie wird bei der Materialwahl vor allem Wert auf Lebensmitteltauglichkeit sowie auf allergische Unbedenklichkeit gelegt. Eine Auswahl gängiger Materialien wird in [*Tab. 2-1*] aufgeführt.

Drahttyp	Stahl 1.4306	Stahl 1.4404	Stahl 1.4462	Messing 204 Cu	Titan Grade 2	Titan Grade 4
Drahtspezifikation	DIN EN 10088	DIN EN 10088	DIN 17223 / 1	DIN 17682	ASTM 348	ASTM 348
Beschaffenheit	Normalgeglüht	Lösungsgeglüht	Normalgeglüht	Normalgeglüht	Normalgeglüht	Normalgeglüht
Zugfestigkeit [x 10⁶ Pa]	650 - 750	530 - 680	900 – 1010	780 - 850	400 – 500	550 - 630
Prüfdehngrenze [x 10⁶ Pa]	360 – 400	200	500 – 600	450 – 550	300 – 350	380 - 430
Min. Bruchdehnung	35 %	40 %	25 %	35 %	30 %	20 %
Korrosionsbeständigkeit	Gut	Sehr gut	Sehr gut	Gut	Sehr gut	Sehr gut
Schweißfähigkeit	Gut	Sehr gut	Sehr gut	Sehr gut	Sehr gut	Sehr gut

Tab. 2-1 *Eigenschaften (lieferantenabhängig) von Metalldrähten zur Einzelringherstellung (Quelle: Friedrich Münch GmbH)*

Der rostfreie Federstahldraht der Sorte 1.4404 hat sich sowohl aus Gründen der Verarbeitbarkeit, Einsatzbeständigkeit sowie Wirtschaftlichkeit bewährt und wird für die Betrachtung der Mikroebene als Referenz verwendet. Über den Kurznamen X2CrNiMo17-12-2 wird dessen chemische Zusammensetzung gekennzeichnet (siehe [*Tab. 2-2*]).

Chemischer Bestandteil	Gewichtsanteil [%]
Kohlenstoff	≤ 0,03
Silizium	≤ 1,00
Mangan	≤ 2,00
Phosphor	0,045
Schwefel	≤ 0,015
Stickstoff	≤ 0,11
Chrom	16,50 – 18,50
Molybdän	2,00 – 2,50
Nickel	10,00 – 13,00

Tab. 2-2 Chemische Zusammensetzung von Chrom-Nickel-Stahl 1.4404

Dieser austenitische Chrom-Nickel-Stahl bietet eine besonders günstige Kombination von Verarbeitbarkeit, Schweißbarkeit, mechanischen Eigenschaften und Korrosionsbeständigkeit. Wichtigste Eigenschaft dieser Stahlgruppe ist die hohe Korrosionsbeständigkeit, die durch den Legierungsgehalt an Chrom und Molybdän getrieben wird. Auf die Zulegierung von Kohlenstoff wird größtenteils aus korrosionschemischen Gründen verzichtet. Im Gegensatz dazu hat das Zulegieren von Stickstoff den Vorteil, dass neben einer Verbesserung der Festigkeit auch die Korrosionsbeständigkeit verbessert wird.

Wie bei ferritischen Stählen ist auch bei diesem austenitischen Stahl zum Erreichen guter mechanischer Werte ein feinkörniges Gefüge notwendig. Dies wird durch eine abschließende Wärmebehandlung über ein Lösungsglühen bei Temperaturen zwischen 1000 und 1150°C mit anschließender Abkühlung in Wasser oder in Luft erreicht, wodurch die Ausbildung von Ausscheidungen vermieden wird.

Wesentlicher Bestandteil der Ringherstellung ist eine Formgebung durch Drahtbiegung. Durch diese Kaltumformung wird eine Steigerung der Dehngrenze erreicht, wobei der Umformungsgrad für die Verfestigungsstufe verantwortlich ist. [Abb. 2-2] zeigt beispielhaft die höhere Kaltverfestigungsneigung von austenitischen Stählen im Vergleich zu ferritischen Stählen. Bei dieser Kaltumformung kann es zusätzlich zur Bildung von Verformungsmartensit kommen.

Das hohe Dehnungsvermögen – die Bruchdehnungswerte austenitischer Stähle sind fast doppelt so hoch wie die der ferritischen Stähle – führt zu sehr guter Kaltumformbarkeit. Daraus resultieren günstige Eigenschaften zum Tiefziehen und Streckziehen sowie eine gute Abkantbarkeit. Besondere Bedeutung haben auch die höheren Kerbschlagarbeitswerte, die bis zu sehr tiefen Temperaturen auf einem hohen Niveau liegen. Daraus läßt sich die hohe Schutzwirkung des Ringflechts gegen Schnitte und Schläge sowie dessen hohes Energieabsorptionsvermögen ableiten.

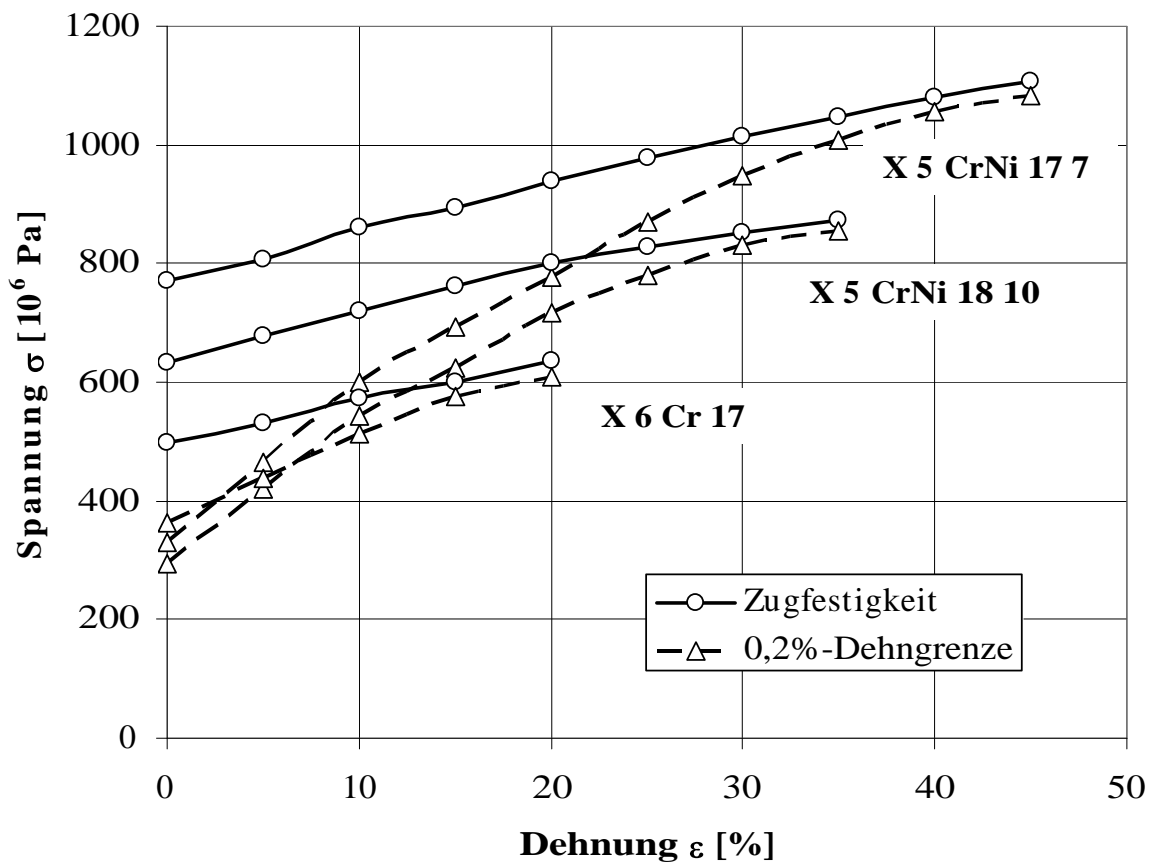


Abb. 2-2 Exemplarische Darstellung des Kaltverfestigungsverhaltens verschiedener Chrom-Nickel-Stähle (Quelle: [ISER 03])

Federstahldraht 1.4404 ist in seiner reinen Lieferform nach EN10088-2 normiert. In dieser Norm sind die physikalischen Grundeigenschaften sowie elastische und plastische Eigenschaften des Drahtes mit ihren Minimalwerten quantifiziert. Eine Aufstellung dieser Werte erfolgt in [Tab. 2-3].

Eigenschaft	Kennwert
Dichte	8000 kg·m ⁻³
Wärmeausdehnungskoeffizient	17 · 10 ⁻⁶ K ⁻¹
Wärmeleitfähigkeit	15 W (m·K) ⁻¹
Spezifische Wärme	500 J (kg·K) ⁻¹
Spezifischer elektrischer Widerstand	0,75 Ω · mm ² ·m ⁻¹
Elastizitätsmodul E	200 · 10 ⁹ Pa
Querkontraktionszahl	0,27 – 0,30
Dehngrenze R _{P0,2}	240 · 10 ⁶ Pa
Zugfestigkeit R _m	530 - 680 · 10 ⁶ Pa
Bruchdehnung A	min. 40%

Tab. 2-3 Minimale Materialeigenschaften von Edelstahl 1.4404 bei 20°C
(Quelle: [Spez M])

Für den Referenz-Federdraht 1.4404 wurden beim Drahtzulieferer „Sprint Metall Edelstahlziehereien GmbH“ an mehreren Materialproben quasi-statische Zugversuche im elasto-plastischen Bereich nach [Spez A] ausgeführt (siehe [Spr 07]). Die zugehörigen Messwerte der Zugversuche sind in [Tab. 2-4] zusammengefasst und beschreiben das Verhalten bis zum Versagen des Prüfdrahtes.

Test Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	Ø	s
Drahtdurchmesser (Soll) [10 ⁻³ m]	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	0,00%
Drahtdurchmesser (Ist) [10 ⁻³ m]	1,091	1,095	1,104	1,098	1,098	1,098	1,098	1,105	1,099	0,41%
Bruchspannung R_m [10 ⁶ Pa]	752	761	760	757	759	754	759	748	756	0,60%
Fließspannung R_{p0,2} [10 ⁶ Pa]	401	404	412	411	410	433	425	414	414	2,55%
Bruchdehnung [%]	43	44	43	43	43	41	42	43	43	2,07%
Bruchkraft FR_m [N]	714	711	715	725	719	713	719	717	717	0,61%
Fließkraft FR_{p0,2} [N]	381	378	388	394	388	410	403	397	392	2,76%

Tab. 2-4 Festigkeitskennwerte aus Zugversuchen an Chrom-Nickel-Stahl 1.4404 mit Mittelwertbildung und Standardabweichung (Quelle: [Spr 07])

Der Verlauf der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurve der Federdrahtprobe wird in [Abb. 2-3] einem Zugversuch mit unbearbeitetem Rohmaterial gegenübergestellt. Im Vergleich dieser Spannungs-Dehnungs-Kurven fällt auf, dass die am Federdraht aufgenommene Kurve eine höhere Fließ- und Bruchspannung bei gleichzeitig geringerer Bruchdehnung ausweist.

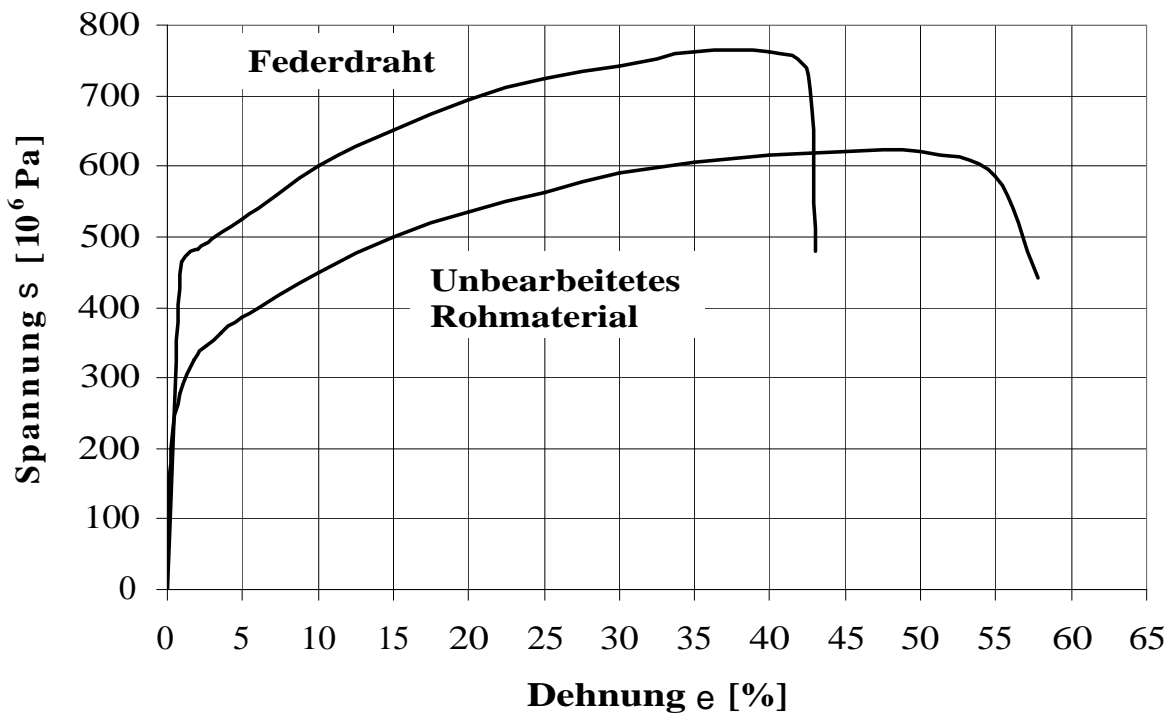


Abb. 2-3 Spannungs-Dehnungs-Diagramm an Chrom-Nickel-Stahl 1.4404
 Vergleich von Rohmaterialproben (Quelle: [EIX 03])
 und Federdrahtproben (Mittelwerte nach [Tab. 2-4])

Dieses Verhalten erklärt sich aus der Lieferform des Drahtes, der eine Kaltverformung durch den Prozess des Drahtziehens erfahren hat. Diese Umformung bewirkt eine entsprechende Kaltverfestigung des austenitischen Gefüges. Der Einfluss des so aufgebrauchten Verformungsgrades wird in [Abb. 2-4] an einem gleichartigen Draht dargestellt. Für den Federdraht wird eine mittlere Bruchdehnung von 43% gemessen, während die Rohmaterialprobe eine Bruchdehnung 58% aufweist. Diese Differenz der Bruchdehnung wird nach [Abb. 2-4] durch einen Verformungsgrad von 7% bedingt, welche durch das Ziehen des Drahtes erreicht wird.

Gleichzeitig bewirkt dieser Verformungsgrad eine Erhöhung der Fließgrenze auf $450 \cdot 10^6$ Pa und der Bruchspannung auf $725 \cdot 10^6$ Pa. Im Rahmen der Messabweichung korrespondieren diese Werte gut mit der gemessenen Festigkeit aus dem Drahtzugversuch (siehe [Tab. 2-4]).

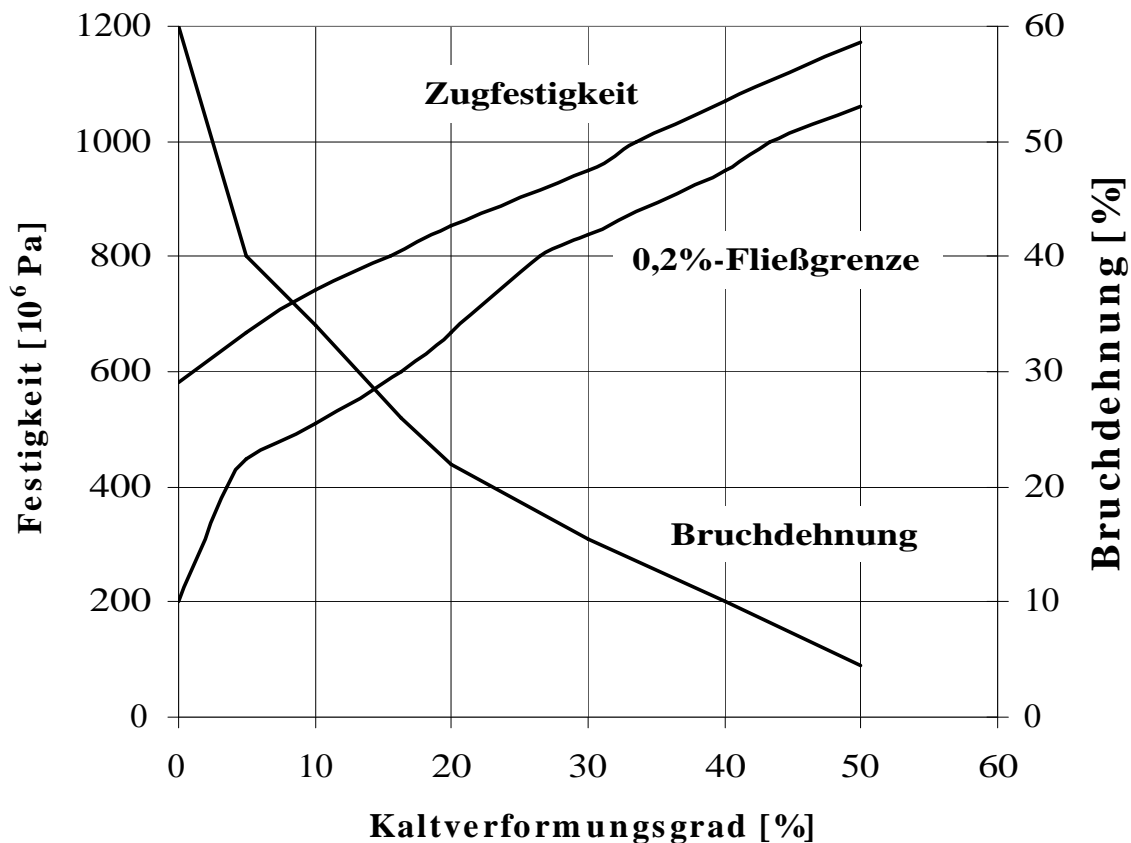


Abb. 2-4 Einfluss des Kaltverformungsgrades auf die Fließ- und Bruchfestigkeit von Chrom-Nickel-Stahl 1.4307;
Chrom-Nickel-Stahl 1.4404 mit gleichartigen Verhältnissen
(Quelle: [EIX 03] und [NDI 63])

Während das elastische Verhalten durch den Elastizitätsmodul gekennzeichnet wird, lässt sich das plastische Verhalten des Federdrahtes anhand von Stützpunkten des Spannungs-Dehnungs-Diagramms in [Abb. 2-3] abbilden. Diese Stützpunkte werden in [Tab. 2-5] zusammengefasst.

Stützpunkt	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5	SP6	SP7	SP8	SP9	SP10	SP11	SP12
Dehnung [%]	1	2	2,5	3	5	7,5	10	15	20	25	30	35
Spannung [10 ⁶ Pa]	466	483	490	497	525	560	600	651	693	725	742	756

Tab. 2-5 Stützpunkte des Spannungs-Dehnungs-Diagramms für Federdrahtzugproben nach [Abb. 2-3] mit Drahtdurchmesser 1,1 mm (Spannungswerttoleranz $\pm 15 \cdot 10^6$ Pa)

Zur Überprüfung der Datenkonsistenz wird die Spannungs-Dehnungs-Kurve mithilfe des Ramberg-Osgood-Gesetzes (vgl. [Ram 43]) ausgewertet werden:

$$\varepsilon = \Delta\varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{C}\right)^n \quad [\text{Gl. 2-1}]$$

Hierin ist die Konstante C

$$C = 10^{\frac{a \cdot \log \sigma_{SP2} - \log \sigma_{SP1}}{a-1}} = 575,8 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad [\text{Gl. 2-2}]$$

mit

$$a = \frac{\log\left(\varepsilon_{SP1} - \frac{\sigma_{SP1}}{E}\right)}{\log\left(\varepsilon_{SP2} - \frac{\sigma_{SP2}}{E}\right)} = 1,2053. \quad [\text{Gl. 2-3}]$$

Der Verfestigungsexponent n wird bestimmt nach

$$n = \frac{\log\left(\varepsilon_{SP1} - \frac{\sigma_{SP1}}{E}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_{SP1}}{C}\right)} = 23,02. \quad [\text{Gl. 2-4}]$$

Dieser Verfestigungskoeffizient korrespondiert mit den exemplarischen Spannungs-Dehnungs-Verläufen, die in [Abb. 2-5] in Abhängigkeit vom Verfestigungskoeffizienten dargestellt sind.

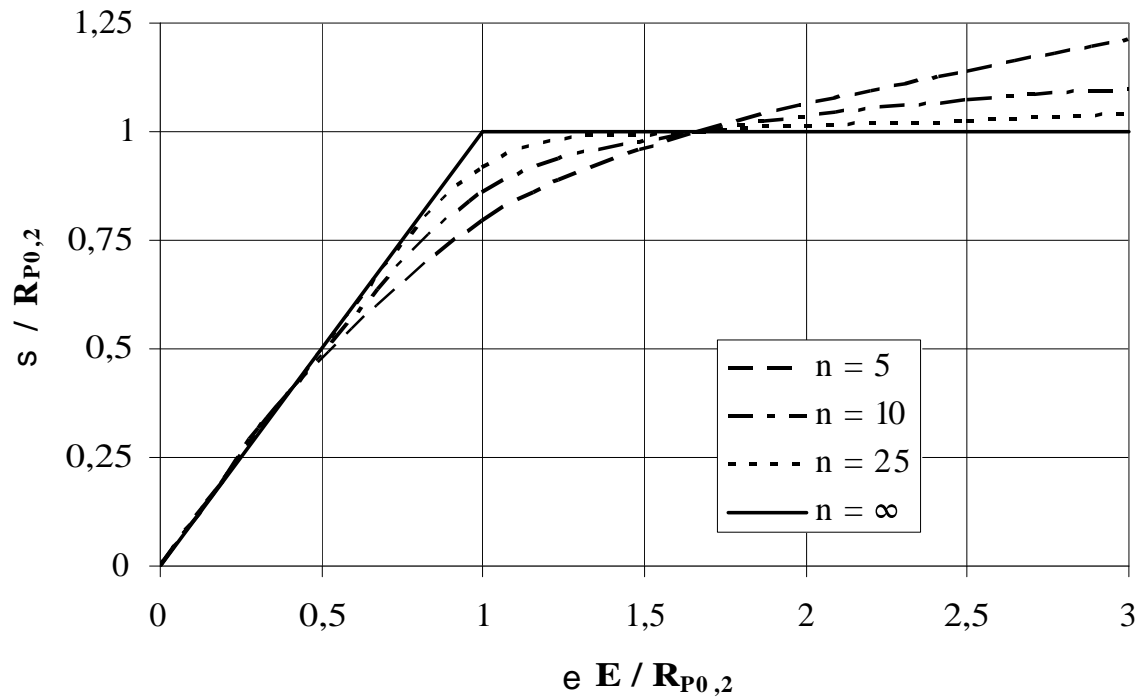


Abb. 2-5 Einfluss des Verfestigungskoeffizienten auf die Nichtlinearität des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens (Quelle: [EIX 03])

Die analytische Bestimmung der 0,2%-Fließgrenze ergibt:

$$R_{p0,2} = C \cdot 0,002^{1/n} = 439 \cdot 10^6 \text{ Pa} . \quad [\text{Gl. 2-5}]$$

Die analytische Fließgrenze liegt 6% über dem gemittelten Messwert aus [Tab. 2-4]. Da die Berechnung der Fließgrenze auf den Stützwerten der Messkurve nach [Tab. 2-5] basiert, geht deren Messtoleranz von 15% in den analytischen Wert ein. Unter Berücksichtigung dieser Toleranz in den Stützwerten decken sich gemittelte und analytische Fließgrenzen.

2.2 Mesoebene

Mit dem Begriff der Mesoebene wird die Materialbeschreibung auf ein unabhängiges Zwischenelement erweitert. Im Falle des vorliegend untersuchten Ringgeflechts wird die Mesoebene durch den einzelnen, geschlossenen Ring dargestellt, welcher durch den Ringaußendurchmesser und den Durchmesser des Ringdrahtes bestimmt wird.

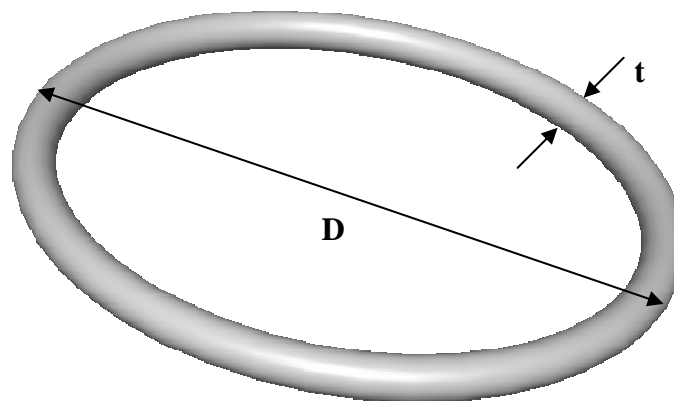


Abb. 2-6 Exemplarische Darstellung eines Einzelringes

In [Tab. 2-6] werden derzeit verfügbare Ringgrößen des Herstellers „Friedrich Münch GmbH“ aufgeführt. Durch den Herstellprozess unterliegt der Einzelring einer Formtoleranz. Kennzeichnend dafür ist eine Ovalisierung des Ringes von +0/-1,5% sowie einer Abweichung in der Ebenheit von $\pm 1,5\%$. Mit Hinblick auf seinen großflächigen Einsatz wird das Geflecht G9 für nachfolgende Untersuchungen als Referenzgröße verwendet.

	Größen von Einzelringen									
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
D [mm]	3,60	4,00	4,20	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00	12,00	12,00
d [mm]	2,50	3,00	3,10	5,80	5,60	5,40	5,00	4,80	9,80	9,20
t [mm]	0,55	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	1,00	1,10	1,10	1,30

Tab. 2-6 Nominalgrößen industriell hergestellter Einzelringe
(Quelle: Friedrich Münch GmbH)

In [Abb. 2-6] ist der Einzelring in seiner idealisierten Form dargestellt, d. h. als geschlossener geometrischer Körper - dem Ringtorus. Bedingt durch die Herstellung aus einem gebogenen Federdraht muss jedoch im realen Ring eine Trennstelle bestehen. Für den Einsatz eines Ringes im Geflecht stellt diese Trennung eine erhebliche Schwächung dar, deren Bedeutung dadurch noch verstärkt wirkt, dass sich die Position der Trennstelle nicht definieren lässt. Solche nicht geschlossenen Ringe haben aufgrund der daraus resultierenden lediglich statistischen Bestimmbarkeit der Materialeigenschaften keine technische Relevanz. Daher werden während der Herstellung des Ringgeflechts sämtliche Einzelringe über eine Schweißung dauerhaft geschlossen, was die Materialfestigkeit nahezu vollständig wieder hergestellt.

Für die weitere Betrachtung werden diese Toleranzen vernachlässigt. Vielmehr wird der Ring in seiner mathematisch idealisierten Form als Torus mit konstanter, kreisförmiger Querschnittsfläche beschrieben. Die Oberfläche des Torus wird explizit in kartesischen Koordinaten dargestellt, wobei das Koordinatensystem zentrisch in der Ringmitte positioniert ist (siehe [Abb. 2-7]):

$$0 = \left(R - \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \right)^2 + z_T^2 - r^2. \quad [\text{Gl. 2-6}]$$

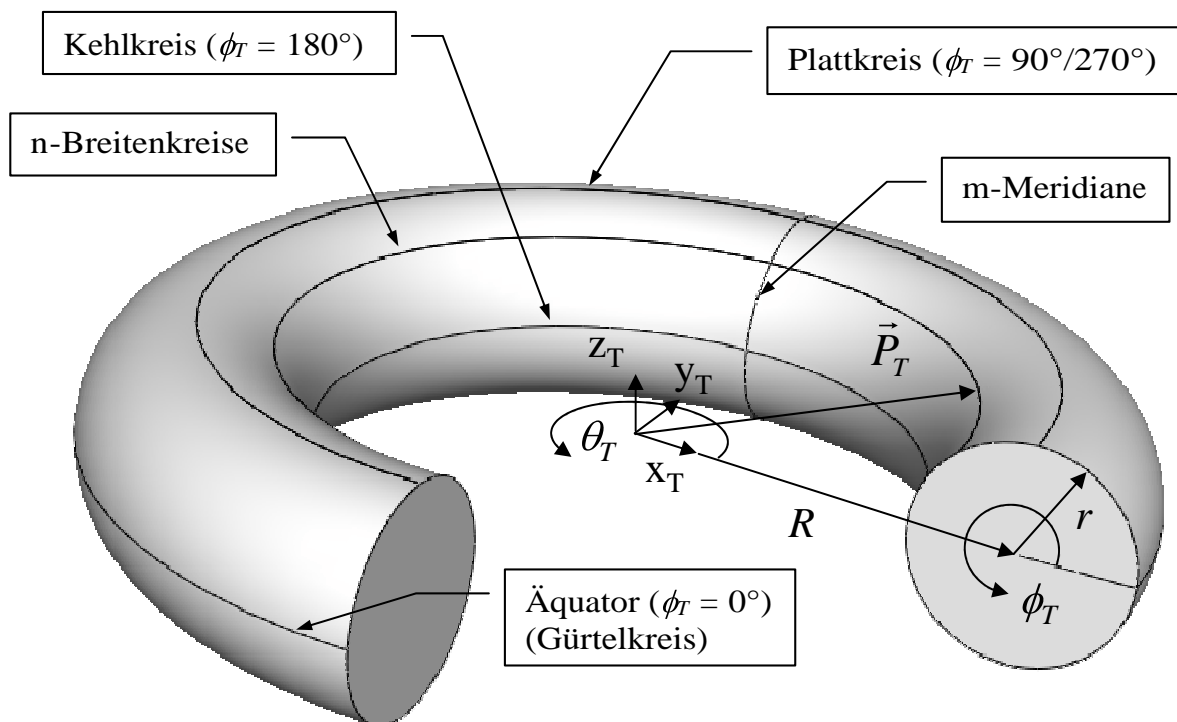


Abb. 2-7 Topologische Parameter der Torusdefinition

Für die weitere Beschreibung wird der Ortsvektor \vec{P}_T eingeführt, welcher die Position jeden Punktes auf der Torusoberfläche definiert:

$$\vec{P}_T(\theta, \phi)_T = \begin{pmatrix} x_T(\theta, \phi)_T \\ y_T(\theta, \phi)_T \\ z_T(\phi)_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\theta_T) + r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \\ R \cdot \sin(\theta_T) + r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \\ r \cdot \sin(\phi_T) \end{pmatrix}, \quad [\text{Gl. 2-7}]$$

mit $0 \leq \theta_T < 2\pi$; $0 \leq \phi_T < 2\pi$; $r = \frac{1}{2}t > 0$; $R = \frac{1}{2}(D-t) > r$.

Die Metrik des Torus folgt der Ableitung des Ortsvektors \vec{P}_T nach den Koordinaten θ_T und ϕ_T . Daraus ergeben sich die kovarianten Basisvektoren $\vec{a}_{1,T}$ und $\vec{a}_{2,T}$, welche tangential zur Oberfläche in Richtung dieser Parametervariation verlaufen. Aus dem Kreuzprodukt der Basisvektoren bildet sich der Normalenvektor $\vec{a}_{3,T}$, der senkrecht auf der Torusoberfläche steht und von dieser wegzeigt. Die orthogonalen Basisvektoren $(\vec{a}_{1,T}, \vec{a}_{2,T}, \vec{a}_{3,T})$ bilden somit ein orthogonales Rechtssystem:

$$\vec{a}_{1,T}(\theta, \phi)_T = \frac{\partial \vec{P}_T}{\partial \theta_T} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\theta_T) - r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \\ R \cdot \cos(\theta_T) + r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\text{Gl. 2-8}]$$

$$\vec{a}_{2,T}(\theta, \phi)_T = \frac{\partial \vec{P}_T}{\partial \phi_T} = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) \\ -r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) \\ r \cdot \cos(\phi_T) \end{pmatrix}, \quad [\text{Gl. 2-9}]$$

$$\vec{a}_{3,T}(\theta, \phi)_T = \vec{a}_{1,T} \times \vec{a}_{2,T} = \begin{pmatrix} R \cdot r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r^2 \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos^2(\phi_T) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r^2 \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos^2(\phi_T) \\ R \cdot r \cdot \sin(\phi_T) + r^2 \cdot \sin(\phi_T) \cdot \cos(\phi_T) \end{pmatrix}. \quad [\text{Gl. 2-10}]$$

Diese Darstellung des Ortsvektors \vec{P}_T bezieht sich auf ein Koordinatensystem (x_T, y_T, z_T) , welches zentrisch in der Ringmitte positioniert ist.

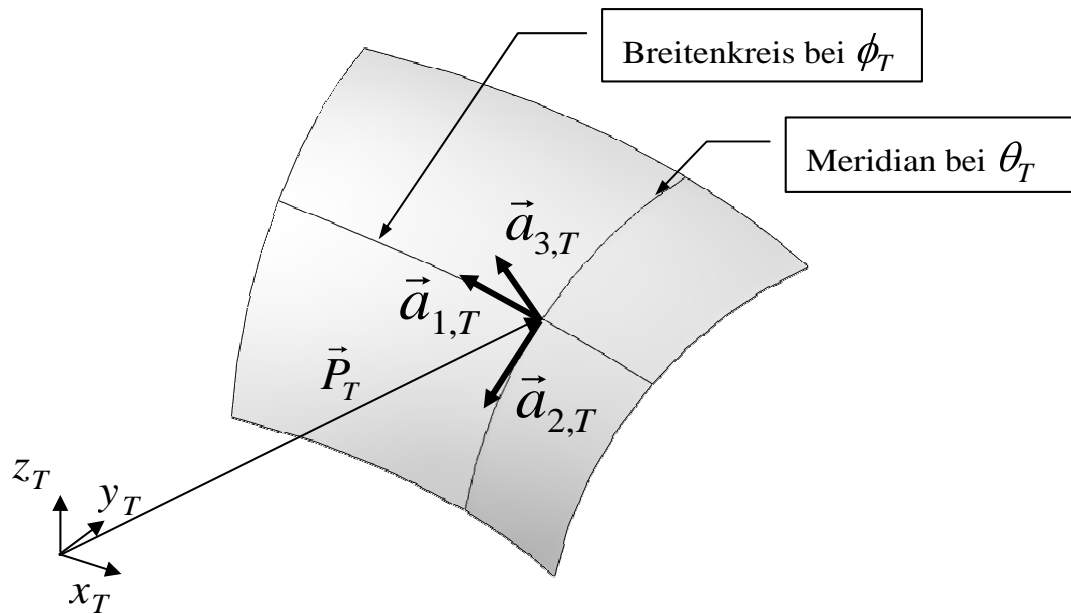


Abb. 2-8 Ortsvektor und Basisvektoren auf der Torusoberfläche

Wird der Ortsvektor auf ein beliebig orientiertes Koordinatensystem bezogen, muss für den Ortsvektor eine Koordinatentransformation derart erfolgen, dass translatorische wie rotatorische Komponenten berücksichtigt werden. Die Translation zwischen den Koordinatensystemen wird durch die Verschiebungskomponenten Δx_T , Δy_T und Δz_T dargestellt, der rotatorische Anteil durch die Winkel $\beta_{x,T}$, $\beta_{y,T}$ und $\beta_{z,T}$. Wird die Rotation des Ringes realistisch auf eine Neigung um eine Querachse beschränkt (hierbei gilt $y_T \parallel y_{T,global}$), so reduziert sich die Rotation auf den Neigungswinkel $\beta_{y,T} = \beta_T$.

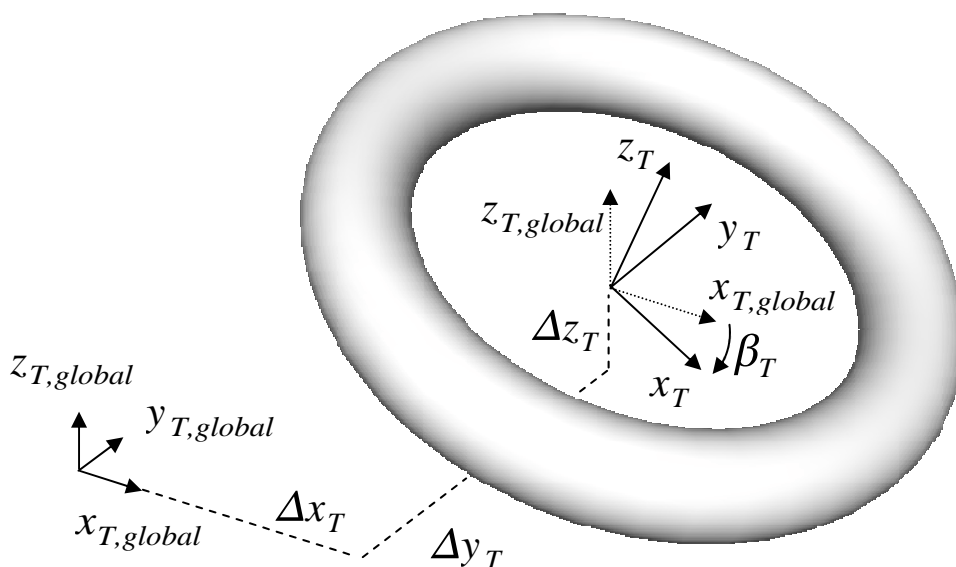


Abb. 2-9 Translatorische und rotatorische Komponenten der Torusposition

Der auf das globale Koordinatensystem bezogene Ortsvektor ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T,global}(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_{T,global} &= \begin{pmatrix} x_T(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_T \\ y_T(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_T \\ z_T(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_T \end{pmatrix}_{global} = \\ &= [\vec{T}_{rot}(\beta_T)]_{global} \cdot \vec{P}_T(\theta, \phi)_T + \vec{T}_{trans}(\Delta x_T, \Delta y_T, \Delta z_T)_{global} \quad . \end{aligned} \quad [GL. 2-11]$$

Mit

$$[\vec{T}_{rot}(\beta_T)]_{global} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_T) & 0 & \sin(\beta_T) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_T) & 0 & \cos(\beta_T) \end{bmatrix} \quad , \quad [GL. 2-12]$$

$$\vec{T}_{trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)_{T,global} = \begin{pmatrix} \Delta x_T \\ \Delta y_T \\ \Delta z_T \end{pmatrix}_{global} \quad . \quad [GL. 2-13]$$

Folgt für den Ortsvektor bezogen auf eine globale Koordinatenbasis:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T,global}(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_{T,global} &= \\ &= \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) + r \cdot \cos(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r \cdot \sin(\beta_T) \cdot \sin(\phi_T) + \Delta x_T \\ R \cdot \sin(\theta_T) + r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + \Delta y_T \\ -R \cdot \sin(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) - r \cdot \sin(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r \cdot \cos(\beta_T) \cdot \sin(\phi_T) + \Delta z_T \end{pmatrix}_{global} \quad . \end{aligned} \quad [GL. 2-14]$$

Hierin gilt: $0 \leq \theta_{T,global} < 2\pi$; $0 \leq \phi_{T,global} < 2\pi$; $r > 0$; $R > r$.

Durch Ableitungen nach den beschreibenden Parametern des so entstandenen Ortsvektors nach [GL. 2-14] erhält man die Basisvektoren sowie den Normalenvektor der Torusoberfläche des gedrehten Torus bezogen auf globale Koordinaten:

$$\vec{a}_{1,T,global}(\beta, \theta, \phi)_{T,global} = \frac{\partial \vec{P}_{T,global}}{\partial \theta_T} = \begin{pmatrix} \cos(\beta_T) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_T) - r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T)) \\ R \cdot \cos(\theta_T) + r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \\ -\sin(\beta_T) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_T) - r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T)) \end{pmatrix}_{global},$$

[GL. 2-15]

$$\vec{a}_{2,T,global}(\beta, \theta, \phi)_{T,global} = \frac{\partial \vec{P}_{T,global}}{\partial \phi_T} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta_T) \cdot r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) + \sin(\beta_T) \cdot r \cdot \cos(\phi_T) \\ -r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) \\ \sin(\beta_T) \cdot r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) + \cos(\beta_T) \cdot r \cdot \cos(\phi_T) \end{pmatrix}_{global},$$

[GL. 2-16]

$$\vec{a}_{3,T,global}(\beta, \theta, \phi)_T = \vec{a}_{1,T,global} \times \vec{a}_{2,T,global} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta_T) & 0 & \sin(\beta_T) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_T) & 0 & \cos(\beta_T) \end{bmatrix}_{global} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot r \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r^2 \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos^2(\phi_T) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r^2 \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos^2(\phi_T) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T) + r^2 \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) \end{pmatrix}_{global}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot (\cos(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) - \sin(\beta_T) \cdot \sin(\phi_T)) \cdot (r \cdot \cos(\theta_T) + R) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos(\phi_T) + r^2 \cdot \sin(\theta_T) \cdot \cos^2(\phi_T) \\ r \cdot (\cos(\beta_T) \cdot \sin(\phi_T) + \sin(\beta_T) \cdot \cos(\theta_T) \cdot \sin(\phi_T)) \cdot (r \cdot \cos(\theta_T) + R) \end{pmatrix}_{global}.$$

[GL. 2-17]

2.3 Makroebene

Die in der Mesoebene definierten individuellen Zwischenelemente lassen sich in geeigneter Weise zusammenführen und formen somit eine übergeordnete Hierarchieebene. Über diese Makroebene wird die Gesamtheit des Materials erfasst, was die Grundlage einer globalen Betrachtung bildet. Im Falle des Ringgeflechts erlaubt ein geeigneter Herstellprozess das wechselseitige Ineinandergreifen einzelner, auf der Mesoebene identischer Ringe in eine Anzahl von flächig benachbarten Ringen, wodurch eine Geflechtsstruktur gebildet wird.

Diese Makroebene repräsentiert die flächig periodische Anordnung von Zwischenelementen und formt damit eine globale Abbildung eines diskontinuierlichen Materials.

Bei der einfachsten Form der Geflechtsbildung erfolgt der Eingriff eines Ringes in vier Nachbarringe, wodurch sich ein Muster 1:4 einstellt.

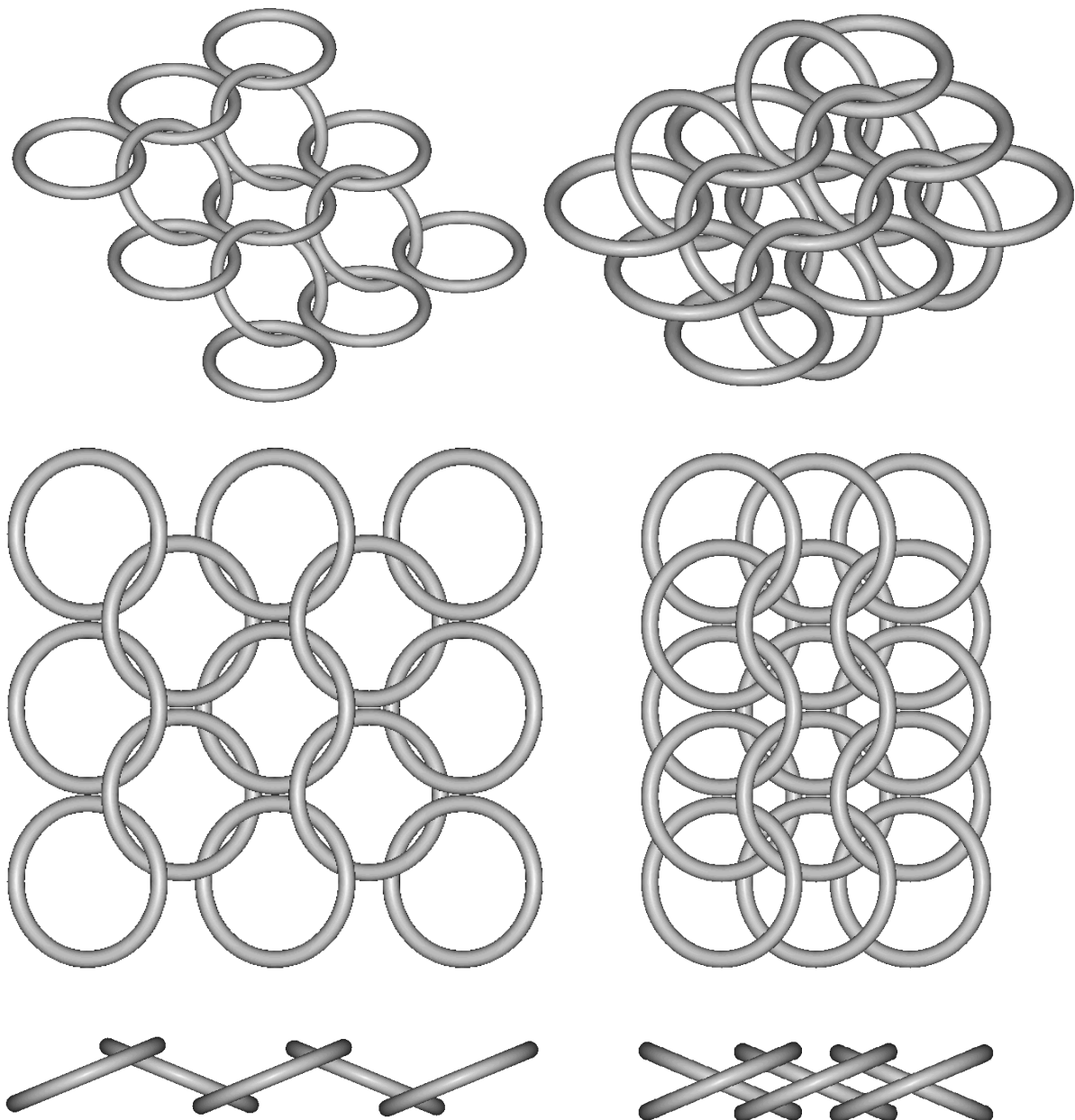


Abb. 2-10 Schematische Darstellung von Ringgeflechten mit Musterbildung 1:4 (links) und 1:6 (rechts)

Darüber hinaus kann ein Ring auch in sechs, acht oder mehr benachbarte Ringe eingreifen, wodurch ein dichteres aber auch schwereres Geflecht entsteht. Der Einfluss der Ringbindung auf die Dichte des Geflechts wird in [Abb. 2-10] verdeutlicht. Mit Rücksicht auf die derzeit umgesetzte industrielle Fertigung beschränken sich die nachfolgenden Betrachtungen auf eine Ringbindung von 1:4.

Die vorherige Abbildung macht die Notwendigkeit deutlich, Vorzugsrichtungen zu definieren, an denen sich die anisotropen Materialeigenschaften entwickeln. In [Abb. 2-11] ist für diese globalen Vorzugsrichtungen die Indizierung „x“, „y“ und „z“ definiert. Dabei wird mit „x“ jene Richtung gekennzeichnet, welche sich durch die gegenseitige axiale Verschränkung der Ringe definiert. In der gleichen Ebene, jedoch senkrecht zur Richtung „x“, beschreibt die Richtung „y“ die laterale Ausdehnung des Ringgeflechts. Die Richtung „z“ steht normal auf der durch die Richtungen „x“ und „y“ aufgespannten Ebene.

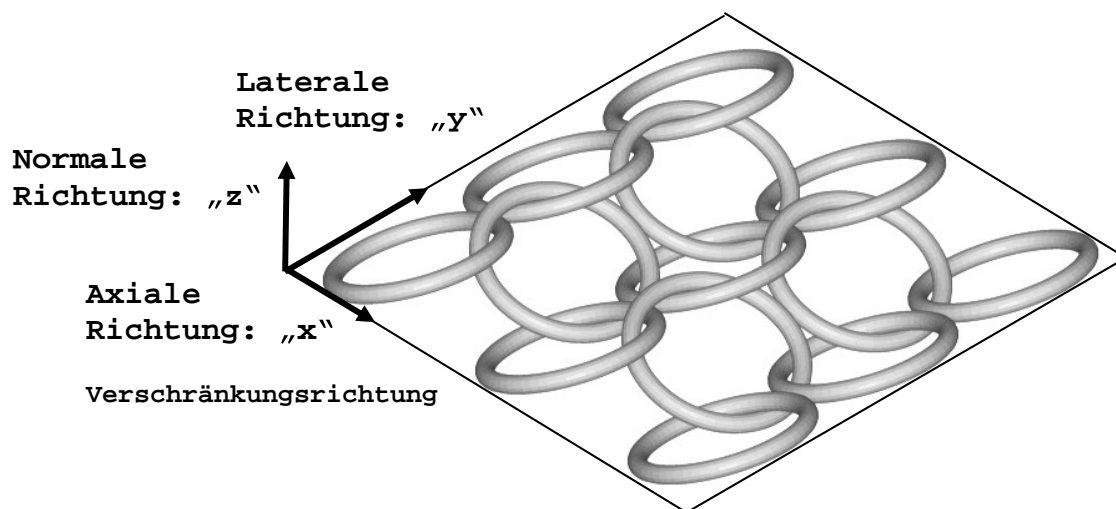


Abb. 2-11 Indizierung der Vorzugsrichtungen des Ringgeflechts

Basierend auf dieser Darstellung werden Informationen gewonnen, um den Materialaufwand und das eingenommene Volumen zu bestimmen. Dabei wird die Gesamtbreite des Geflechts durch die Anzahl der lateralen, d. h. in Richtung „y“, angeordneten Ringe und deren Ringaußendurchmesser bestimmt. Die Dicke des Geflechts wird durch seine Ausdehnung in Richtung „z“ gebildet. Die axiale Ausdehnung des Geflechts, d. h. in Richtung „x“, wird durch die gegenseitige Positionierung der Ringe in verschränkter Lage bestimmt.

Im unbelasteten Zustand können sich die angeordneten Ringe gegeneinander beliebig verschieben, eine Formsteife ist nicht gegeben. Erst unter axialer Zugbelastung erfahren die Ringe eine Selbstpositionierung, in der sie sich gegenseitig stützen. Nach Einnehmen dieser Lage durch diese Vorspannung ist eine weitere Kraftübertragung in ebener Zug- und Schubrichtung möglich.

Die Positionierung der Geflechtsringe und die gegenseitige Stützung unter axialer Vorspannung folgen einer sequenziellen Abfolge von Starrkörperbewegungen bis hin zum kraftübertragenden Kontakt. Diese sequenzielle Abfolge wird in [Abb. 2-12] schematisch dargestellt:

- Zwei benachbarte Ringe greifen ineinander, treten jedoch nicht miteinander in Kontakt, [Abb. 2-12(A)].
- Wird der linke Ring im Raum fixiert und der rechte Ring einer beliebigen Kraft in Richtung „x“ ausgesetzt, so folgt der rechte Ring mit einer Starrkörpertranslation der resultierenden Kraftwirkungslinie. Diese Bewegung wird gestört, wenn beide Ringe erstmalig in Kontakt treten, [Abb. 2-12 (B)].
- Die Krümmung der Ringe im Kontaktpunkt sowie die Nichtparallelität zwischen den Normalenvektoren der Ringoberflächen und der Belastungsrichtung bewirkt eine resultierende Kraft, die ein laterales Abgleiten der Ringe aneinander bewirkt. Ist der Massenmittelpunkt des Ringes zusätzlich nicht kollinear mit der resultierenden Kraftwirkungslinie, folgt ein Hebelarm der eine Starrkörperrotation des rechten Ringes bedingt, [Abb. 2-12 (C)].
- Ist die Ringkrümmung relativ zur Belastungsrichtung abfallend, können Ringe durch Translation aneinander abgleiten. Erreicht die Ringkrümmung einen Umkehrpunkt, kommt die Lateralbewegung zur Ruhe. Wenn der Kontaktpunkt und der Ringmittelpunkt in einer Linie mit der Belastung liegen, ergibt sich eine Parallelität zwischen Normalenvektor im Kontaktpunkt und Belastungsrichtung. Eine weitere Starrkörperrotation ist nicht möglich, [Abb. 2-12 (D)].

Diese Abfolge zeigt, dass sich auch bei beliebiger relativer Ausgangslage der Ringe eine definierte Endlage zueinander einstellt. Bei Veränderung der wirkenden Belastung verändert sich das Gleichgewicht an den Ringen, was nur durch deren Neupositionierung ausgeglichen werden kann.

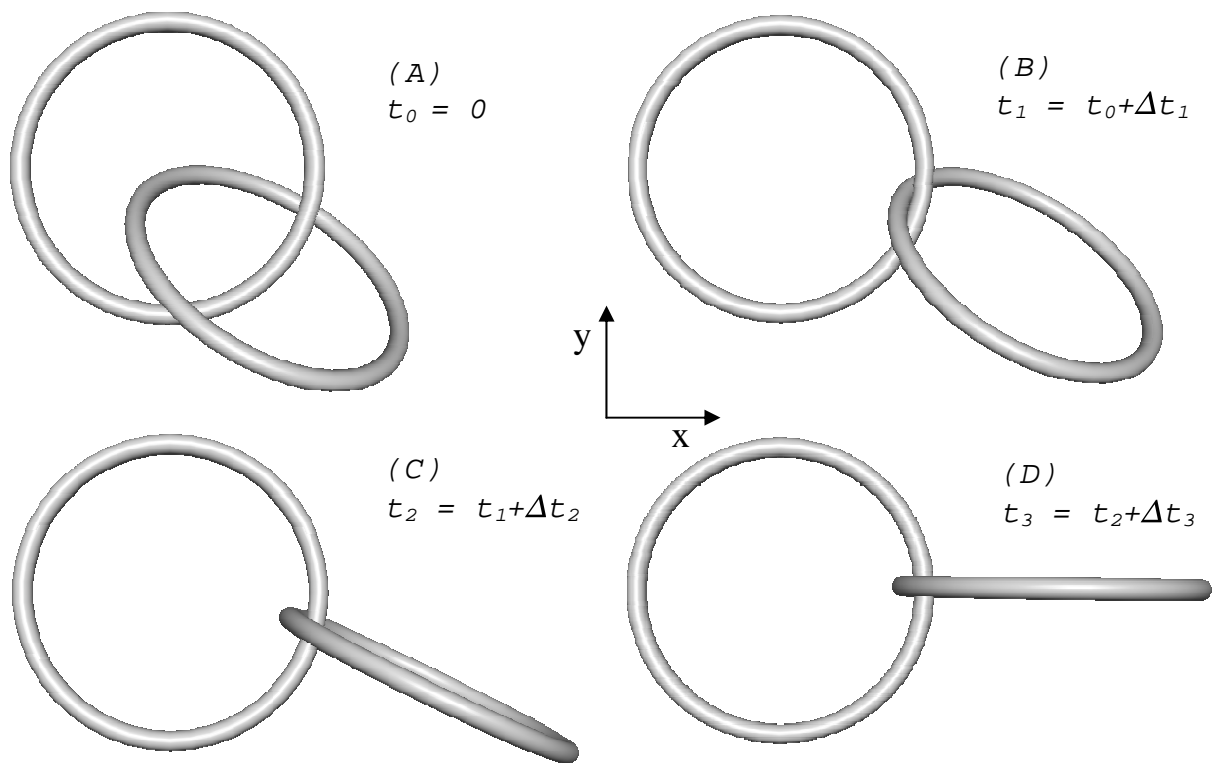


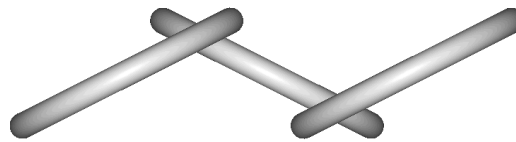
Abb. 2-12 Schematische Darstellung der sequenziellen Selbstpositionierung von benachbarten Einzelringen bei Belastung in Richtung „x“

Die beschriebene Abfolge verwendet in einer Ringbindung 1:1 von zwei Einzelringen die Randbedingung, dass sich die Ringe frei zueinander bewegen können. Werden Ringe in einer realen Geflechtsbindung mit einer Bindung von 1:4 betrachtet, so ist eine freie Bewegung wie in [Abb. 2-12] kaum möglich.

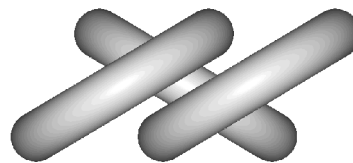
Unter einer Vorspannungslast, die in axialer Verschränkungsrichtung auf das Geflecht wirkt, gleiten zunächst ineinandergreifende Ringe in axialer Richtung aneinander ab, wobei eine Kraft lediglich über Kontaktpunkte übertragen wird. Durch die Symmetrie der Kontaktkraftvektoren sowie durch die Stützung der Nachbarringe ist die laterale Bewegung einzelner Ringe begrenzt. Mit dem Abgleiten verändert sich die Position des punktuellen Kontakts der Ringe, wobei sich die im Kontaktpunkt wirkenden Kraftvektoren in der Zusammensetzung ihrer Komponenten ändern. In der Folge richten sich die Ringe gegenseitig auf, wodurch sich die charakteristische Schrägstellung der Ringe einstellt und sich eine reguläre, zeilenweise periodische Anordnung der Ringe ausbildet.

Wie stark die Verschränkung nach der Positionierung ist, d. h. welche gegenseitige Winkelstellung der Ringe sich ergibt, hängt von der Dimensionierung der Einzelringe ab, also durch die Variation der Parameter Ringaußendurchmesser und Ringdrahtstärke. Diese Abhängigkeit ist in [Abb. 2-13] qualitativ verdeutlicht. In dieser maßstäblichen Abbildung ist zunächst ein Grundzustand mit dem beispielhaften Verhältnis von Außendurchmesser zu Drahtstärke von $D/t = 10$ dargestellt. Variiert man die Parameter der Einzelringe derart zu $D/t < 10$, so ergibt sich bei der Positionierung eine größere relative Schrägstellung der Ringe zueinander. Im umgekehrten Fall, mit $D/t > 10$, folgt eine geringere Schrägstellung sowie eine flachere Lage des Geflechts. Bei gleichen Größenverhältnissen D/t des Geflechts ergibt sich eine direkte Skalierung unabhängig von der Ringdimension.

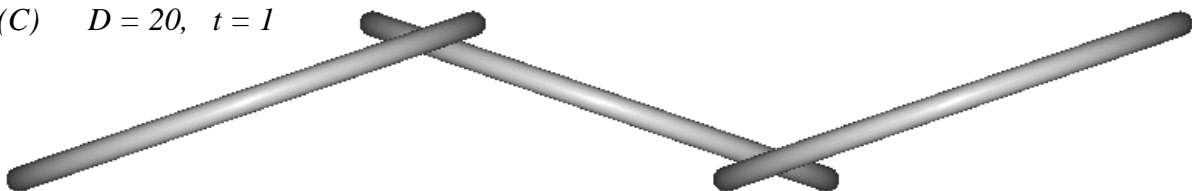
(A) $D = 10, t = 1$



(B) $D = 10, t = 2$



(C) $D = 20, t = 1$



(D) $D = 20, t = 2$

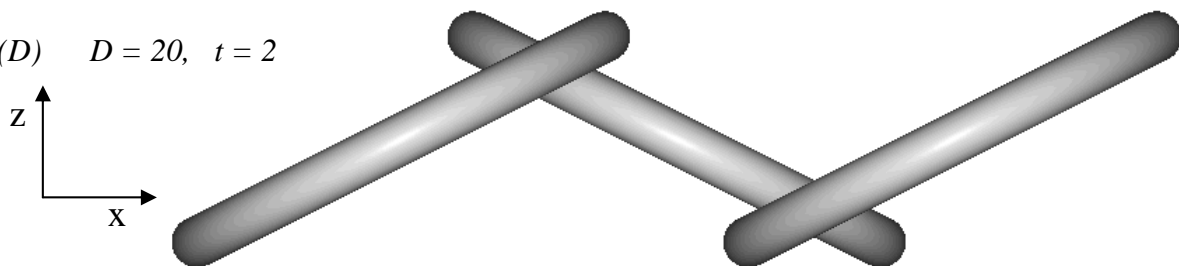


Abb. 2-13 Abhängigkeit der Geflechtsgröße von den Parametern des Einzelringes (Ringlage unter Vorspannung in Verschränkungsrichtung)

2.4 Methode des Repräsentativen Volumenelements (RVE)

In Analogie zu anderen diskontinuierlichen Materialien wie Wabenkernstrukturen oder zellularen Festkörpern ist das Ringgeflecht auf seiner Makroebene durch die periodische Anordnung von mesoebenen Einzelringen geprägt. Die Periodizität des Geflechts ist gekennzeichnet durch das wechselseitige Auftreten einer Einheitszelle, deren charakteristische Länge deutlich unter den Abmessungen der Gesamtstruktur liegt. Der in [Abb. 2-14] umrandete Bereich verdeutlicht eine solche Einheitszelle bestehend aus zwei ineinander verschränkten Viertelringen, welche sich durch Spiegelung an Symmetrie- wie Antimetrieebenen derart vervielfältigen, dass sich ein periodischer Gesamtaufbau ergibt. Die Form der Einheitszelle ist derart gewählt, dass sich ebene Randbedingungen für die Bestandteile der Einheitszelle einstellen. Dabei werden die Viertelringe so geteilt, dass sich Kreisquerschnitte an den Schnittflächen der Einheitszelle ergeben.

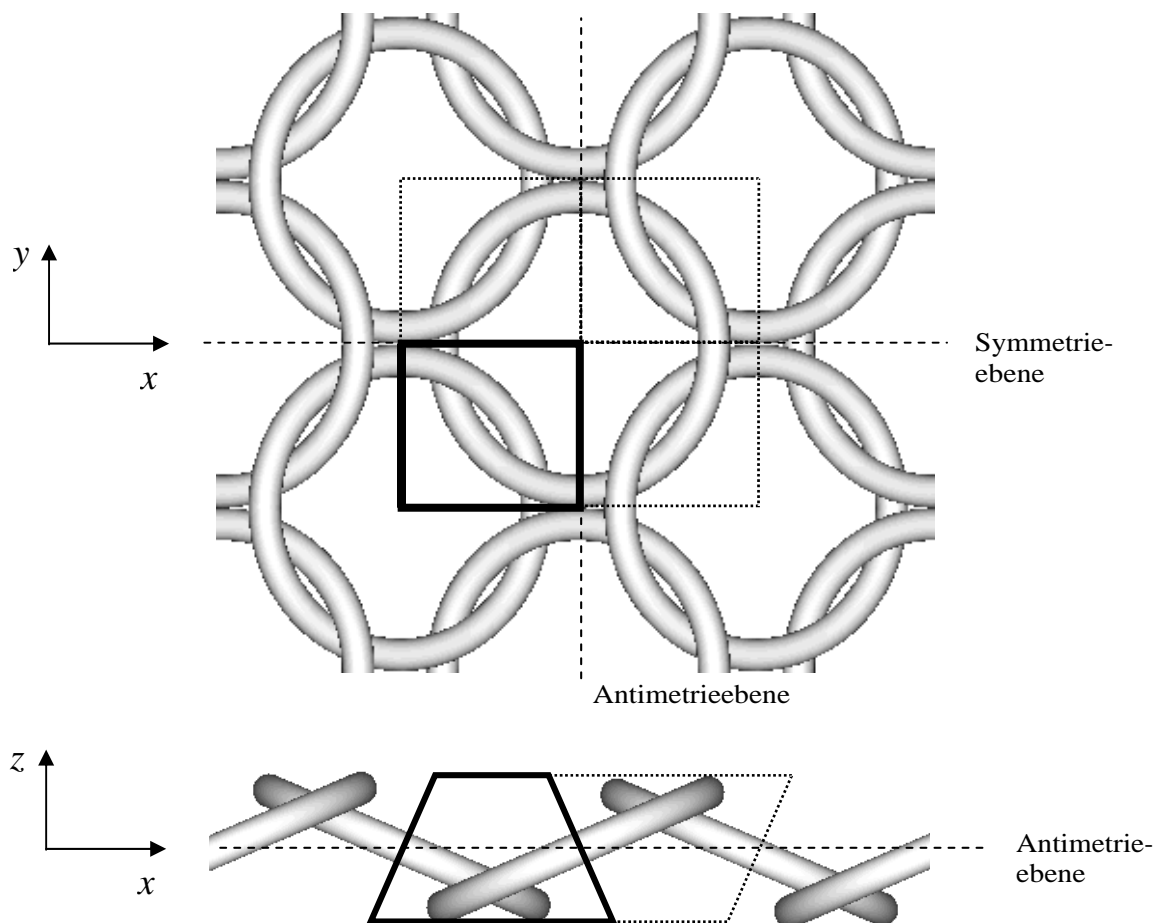


Abb. 2-14 Kennzeichnung von Einheitszellen und deren periodischer Anordnung an Symmetrie- und Antimetrieebenen im Ringgeflecht

Die Berandung der Einheitszelle umschließt demnach ein Volumen, in welchem sich ein struktureller Aufbau derart manifestiert, dass die Effektiveigenschaften des Ringgeflechts repräsentativ abgebildet werden. Eine derartige Abbildung wird als „Repräsentatives Volumenelement“ (RVE) bezeichnet.

Durch Einführung eines RVE lassen sich Effekte der Mikro- und Mesoebene auf die Makroebene übertragen, ohne jedoch eine durchgängige Modellierung der gesamten Mikrostruktur vornehmen zu müssen. Vielmehr werden die Effekte der Mikrostruktur durch Homogenisierung ihres Verhaltens auf Effektiveigenschaften der Makrostruktur überführt. Eine solche Homogenisierung kann nach [Hil 63] auf zwei Teilprobleme aufgeteilt werden:

- (1) Definition mechanischer Kennwerte, die das kontinuumsmechanische Verhalten der Makrostruktur effektiv beschreiben,
- (2) Bestimmung dieser Kennwerte unter Berücksichtigung eines geeigneten Zusammenhangs zwischen mikroskopischer und makroskopischer Struktur.

Während die mechanischen Kennwerte der Makrostruktur des Ringgeflechts über die Kennwerte eines elasto-plastischen Materialgesetzes ermittelt werden können, beruht die Überführung von Materialkennwerten von der Mikro- auf die Makroebene auf dem Prinzip der mechanischen Äquivalenz beider Ebenen.

Verschiedene Methoden erlauben die Beschreibung dieser mechanischen Äquivalenz für das elastische Verhalten eines Stoffes unter der Annahme kleiner Deformationen. Die Kontinuumstheorie klassischer Elastizität basiert auf der Konvention, dass jeder materielle Punkt innerhalb der Makrostruktur ein Teilvolumen repräsentiert, welches in seiner Größe deutlich kleiner als das Gesamtvolumen ist. Das Materialverhalten der materiellen Punkte muss repräsentativ für das jeden anderen materiellen Punktes und damit der gesamten Materialprobe sein. Ein Beispiel dafür ist die Gefügestruktur in einer metallischen Materialprobe. Ist eine dieser Bedingungen – kleines Teilvolumen und repräsentatives Materialverhalten – verletzt, verliert die klassische Kontinuumsmechanik ihre Anwendungsmöglichkeit, wenn nicht der diskrete Aufbau der Mikrostruktur explizit abgebildet wird.

Des Weiteren basiert die klassische Kontinuumstheorie auf der Annahme, dass Belastungen zwischen zwei benachbarten materiellen Punkten nur durch einen Kraftvektor übertragen werden, worauf die Definition der Spannung in der Materialprobe beruht (vgl. [*Bet 93*]). Damit ist die klassische Kontinuumstheorie geeignet für einen Spannungsverlauf, der in seiner Variation klein genug ist, um für einen materiellen Punkt als gleichförmig angenommen zu werden.

Derartige Annahmen gelten nicht für Bereiche, in denen lokalisierte Deformationen auftreten, welche im Verhältnis zur Materialprobengröße an Gewicht gewinnen. In diesen Fällen werden erweiterte kontinuumsmechanische Ansätze verwendet, um die Ungleichmäßigkeit des Spannungsverlaufs abbilden zu können.

Drei Klassen der erweiterten Kontinuumstheorie werden identifiziert: Theorien höherer Wertigkeit, Theorien höherer Ordnung sowie nichtlokale Theorien. Zu den Theorien höherer Ordnung gehört die Cosserat-Theorie (vgl. [*Cos 09*]), in der die Interaktion zwischen benachbarten materiellen Punkten durch einen Momentenvektor zusätzlich zum Kraftvektor der klassischen Theorie beschrieben wird. Damit werden zu den Verschiebungen auch Rotationen als kinematische Deformationsgrößen eingeführt.

Viele zelluläre Materialien (z. B. Schäume) können als mechanische Struktur aus verbundenen Balken angesehen werden. In diesen Materialien ist Biegung der dominante Deformationsmechanismus, sodass in der Mikroebene sowohl Verschiebungen als auch Verdrehungen präsent sind. Die Größenordnung der Mikroebene ist dabei entscheidend für die Erfassung der Deformation (vgl. [*Onc 00*], [*Lak 93*]). Für dichte zelluläre Festkörper werden Homogenisierungsmethoden beschrieben, welche auf Makroebene ein Cosserat-Kontinuum und auf Mikroebene ein klassisches Kontinuumsmodell oder ebenfalls ein Cosserat-Kontinuum vorschlagen. Diese Homogenisierungen eignen sich hauptsächlich für Balkenstrukturen, welche auf Makroebene einen elastischen und isotropen Charakter aufweisen (vgl. [*Den 98*]). Für die Ermittlung der Cosserat'schen Materialparameter werden die Größeneffekte der Mikroebene explizit ausgewertet.

Diese Methodik ist bei mechanischen Standardelementen wie Balken oder Platten entwickelt, die sich in kleinere Abschnitte bei gleichartiger Mechanik unterteilen lassen (vgl. [*Gau 76*], [*Red 78*]).

Ringgeflechte lassen sich als diskontinuierliches Kontinuum beschreiben, welches durch eine geringe Dichte als auch durch ein orthotropes und elasto-plastisches Materialverhalten charakterisiert wird. Für eine Homogenisierung des Ringgeflechts müssen nicht nur Balkenelemente sondern auch deren kinematische Interaktion berücksichtigt werden.

Um die Mikrostruktur des Ringgeflechts zum Zweck einer Homogenisierung zu erschließen, kann die Methode des „Repräsentativen Volumenelements“ (RVE) angewendet werden. Diese eignet sich besonders, wenn sich die Mikrostruktur deutlich von der idealisierten Annahme eines zwar groben, aber dennoch gleichförmigen Aufbaus entfernt (vgl. [*Onc 02*]). Dabei wird durch das RVE eine Zwischenebene eingeführt, dessen Verhalten zunächst durch eine detaillierte Beschreibung des umschlossenen Volumens charakterisiert wird. Das Verhalten der Makrostruktur lässt sich dann durch Vervielfältigung des RVE ableiten. Für zelluläre Festkörper (vgl. [*Gib 99*], [*Hoh 03*], [*Wan 04*]) und Faserverbundmaterialien (vgl. [*HSB 79*], [*Jon 98*], [*Puc 96*], [*Tsa 03*]) wurden vergleichbare Ansätze auf der Basis des RVE erstellt und validiert.

Ein äquivalenter Ansatz für Ringgeflechte ist nicht verfügbar und soll in der vorliegenden Untersuchung durch die Beschreibung des RVE erfolgen. Dabei sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- Gleichmäßige Periodizität und Verschränkung aller Ringe im Geflecht,
- Die Geflechtsebene ist makroskopisch homogen,
- Eine Geflechtsebene ist in den lastübertragenden Zustand vorgespannt.

Diese Annahmen stellen ein vereinfachtes Modell der Geflechtsebene dar, da aufgrund von Fertigungstoleranzen die Gleichmäßigkeit der Einzelringe, die Regelmäßigkeit ihrer Anordnung und damit die Homogenität innerhalb des Geflechts nicht vollständig gewährleistet sind. Die resultierenden lokalen Variationen beeinflussen das globale Materialverhalten jedoch nur insignifikant und sollen in den Untersuchungen vernachlässigt werden.

Über eine Vermessung des Ringgeflechts lassen sich die geometrischen Beziehungen C_1 bis C_4 des RVE bestimmen und ergänzend rechnerisch ermitteln. Diese werden für das Referenzgeflecht der Größe G9 mit einem Außendurchmesser von 12 mm und einer Ringdrahtstärke von 1,1 mm in [Tab. 2-7] aufgelistet. Über die Vermessung ergibt sich ein Verschränkungswinkel β von $23,5^\circ$.

Parameter	H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Parameterwert [10^{-3} m]	5,4	17,5	8,9	10,0	11,0	6,4	4,3
Toleranz [10^{-3} m]	$\pm 0,20$	$\pm 0,50$	$\pm 0,25$	$\pm 0,25$	$\pm 0,25$	$\pm 0,25$	$\pm 0,20$

Tab. 2-7 Geometrische Parameter einer Ringgeflechtseinheitszelle

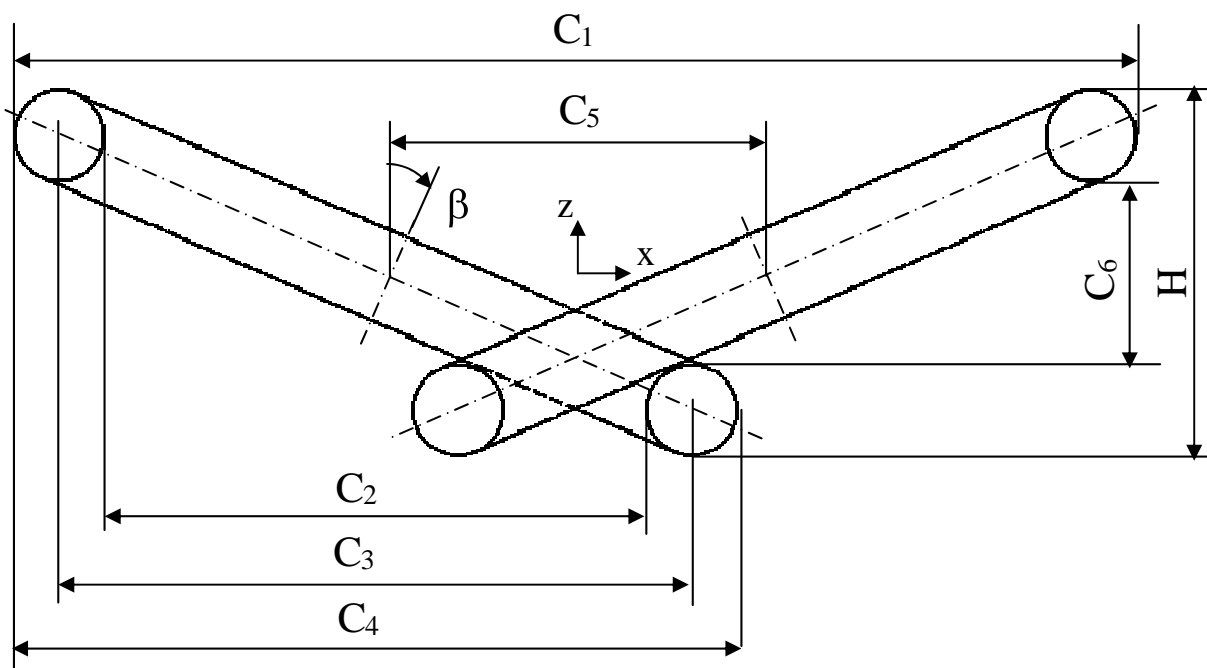


Abb. 2-15 Beschreibende geometrische Parameter für die Einzelringstellung innerhalb des Ringgeflechts

Das Volumen dieses RVE ergibt sich zu:

$$V_{RVE} = C_5 \cdot H \quad . \quad [Gl. 2-18]$$

Das von den darin enthaltenen Viertelringen eingenommene Volumen beträgt:

$$V_T = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot R \cdot \left(\frac{t}{2} \right)^2 \right) \quad . \quad [\text{Gl. 2-19}]$$

Um das Flächengewicht eines Ringgeflechts bestimmen zu können, wird der Parameter φ als Geflechsvolumengehalt eingeführt:

$$\varphi = \frac{V_T}{V_{RVE}} \quad . \quad [\text{Gl. 2-20}]$$

Das Gewicht des RVE bestimmt sich aus dem von den Viertelringen eingenommenen Volumen und der Dichte des Ringmaterials:

$$M_{RVE} = V_T \cdot \rho_T = \varphi \cdot V_{RVE} \cdot \rho_T \quad . \quad [\text{Gl. 2-21}]$$

In einem Geflecht der Vergleichsgröße von 1 m x 1 m befindet sich demnach folgende Anzahl von Volumenelementen in axialer und lateraler Ausdehnung des Ringgeflechts:

$$N_x = \frac{1 \text{ m}}{C_5 / \text{Zelle}} \quad , \quad [\text{Gl. 2-22}]$$

$$N_y = \frac{1 \text{ m}}{\frac{1}{2} D / \text{Zelle}} \quad . \quad [\text{Gl. 2-23}]$$

Somit ergibt sich die Gesamtanzahl der Elemente zu:

$$N = N_x \cdot N_y \quad . \quad [\text{Gl. 2-24}]$$

Das Flächengewicht des Ringgeflechts pro Quadratmeter ist demnach:

$$M = N \cdot M_{RVE} \quad . \quad [\text{Gl. 2-25}]$$

Entwickelt man diese Beziehungen für die Ringgrößen G1 bis G10 nach [**Tab. 2-6**], so ergeben sich die Kennwerte für die Flächengewichte wie in [**Tab. 2-8**] ausgeführt.

Die metrischen Beziehungen dieses RVE werden in einem Koordinatensystem definiert, welches zentrisch zwischen den Viertelringen liegt. Die x-y-Ebene dieses Koordinatensystems fällt mit der Mittelebene des flächigen Ringgeflechts zusammen.

Nr.	Anzahl von Einheitszellen pro 1 m x 1 m		V_T [mm ³]	V_{RVE} [mm ³]	φ [%]	M_{RVE} [g]	M [kg m ⁻²]
	N_x	N_y					
G1	704	556	1,14	4,99	22,8	0,009	3,56
G2	532	500	1,08	7,50	14,4	0,008	2,30
G3	526	476	1,36	8,44	16,1	0,011	2,73
G4	243	286	2,84	42,33	6,7	0,023	1,58
G5	262	286	3,81	42,13	9,0	0,031	2,28
G6	282	286	4,89	41,65	11,8	0,039	3,16
G7	340	286	7,40	37,74	19,6	0,059	5,75
G8	376	286	8,81	35,94	24,5	0,071	7,57
G9	146	167	16,27	216,46	7,3	0,130	3,16
G10	160	167	22,31	236,88	9,4	0,178	4,75

Tab. 2-8 Nominale Flächen- und Gewichtskennwerte unterschiedlicher Ringflechtsgrößen

Basierend auf [Gl. 2-14] ergeben sich die Ortsvektoren für die Viertelringe „Torus 1“ und „Torus 2“ innerhalb des RVE wie dargestellt in [Abb. 2-16]:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T1,RVE}(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_{T1,RVE} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_{T1}) & 0 & \sin(\beta_{T1}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_{T1}) & 0 & \cos(\beta_{T1}) \end{pmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R_{T1} \cdot \cos(\theta_{T1}) + r_{T1} \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ R_{T1} \cdot \sin(\theta_{T1}) + r_{T1} \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ r_{T1} \cdot \sin(\phi_{T1}) \end{pmatrix}_{RVE} + \begin{pmatrix} \Delta x_{T1} \\ \Delta y_{T1} \\ \Delta z_{T1} \end{pmatrix}_{RVE}, \end{aligned}$$

[Gl. 2-26]

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T2,RVE}(\beta, \theta, \phi, \Delta x, \Delta y, \Delta z)_{T2,RVE} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_{T2}) & 0 & \sin(\beta_{T2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_{T2}) & 0 & \cos(\beta_{T2}) \end{pmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R_{T2} \cdot \cos(\theta_{T2}) + r_{T2} \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ R_{T2} \cdot \sin(\theta_{T2}) + r_{T2} \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ r_{T2} \cdot \sin(\phi_{T2}) \end{pmatrix}_{RVE} + \begin{pmatrix} \Delta x_{T2} \\ \Delta y_{T2} \\ \Delta z_{T2} \end{pmatrix}_{RVE}. \end{aligned}$$

[Gl. 2-27]

Mit den beschreibenden Parametern der Viertelringe:

$$\pi \leq \theta_{T1,RVE} < \frac{3}{2}\pi \quad , \quad 0 \leq \phi_{T1,RVE} < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta_{T2,RVE} < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \phi_{T2,RVE} < 2\pi .$$

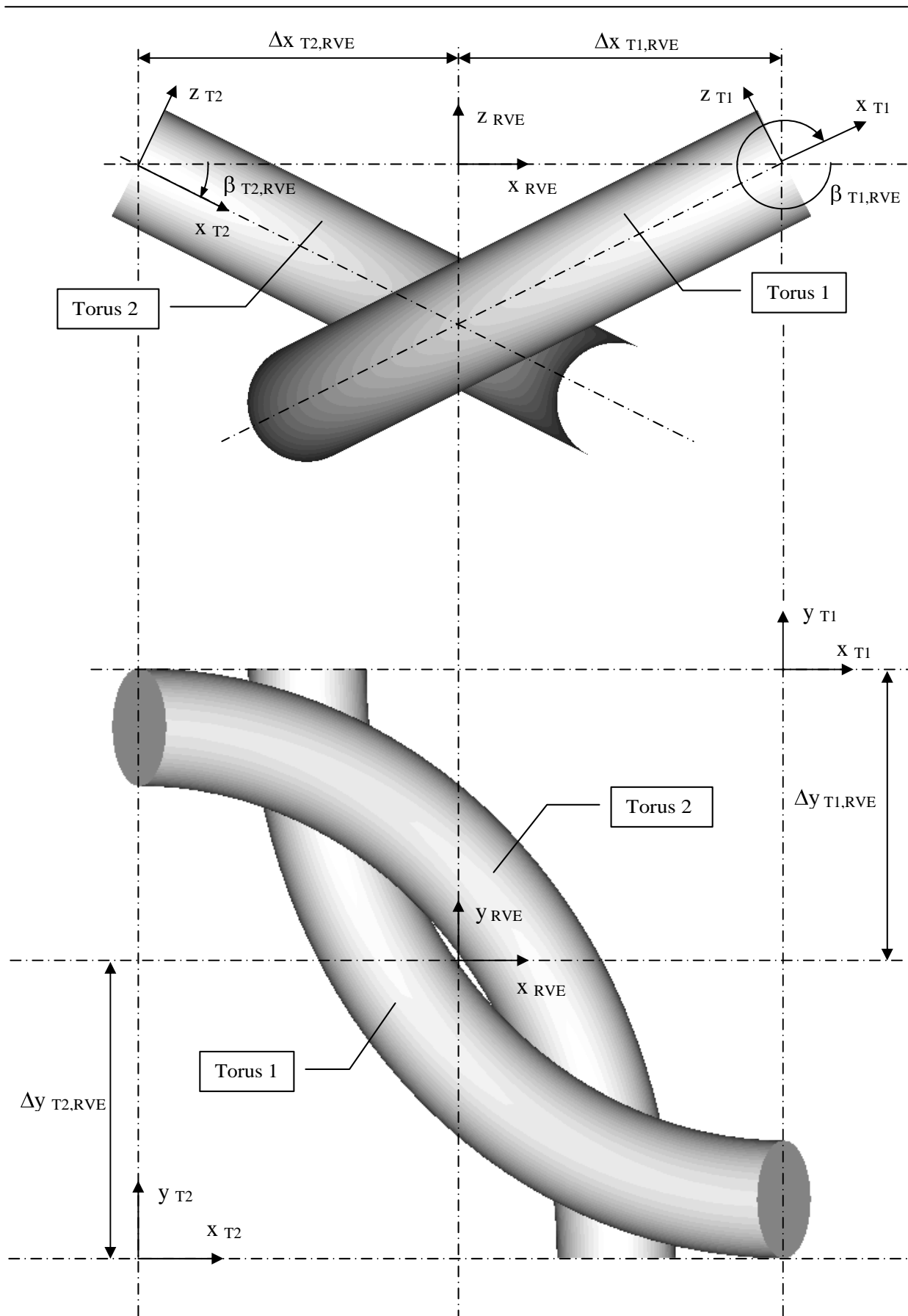


Abb. 2-16 Positionsparameter von Einzelringvierteln innerhalb des RVE

Basierend auf [Abb. 2-16] werden folgende Vereinbarungen getroffen:

- $R_{T1} = R_{T2} = R$, d. h. alle Ringe haben den gleichen Basisdurchmesser
 - $r_{T1} = r_{T2} = r$, d. h. alle Ringe haben die gleiche Drahtdicke
 - $\Delta x_{T1,RVE} = \Delta x_{RVE}$
 - $\Delta x_{T2,RVE} = -\Delta x_{T1,RVE} = -\Delta x_{RVE}$,
d. h. beide Ringe haben gleichen axialen Abstand ihres Mittelpunktes zum Koordinatensystem der Einheitszelle. Die Richtung des Abstandes ist für beide Ringe entgegengesetzt.
 - $\Delta y_{T1,RVE} = \Delta y_{RVE}$
 - $\Delta y_{T2,RVE} = -\Delta y_{T1,RVE} = -\Delta y_{RVE}$,
d. h. beide Ringe haben gleichen lateralen Abstand ihres Mittelpunktes zum Koordinatensystem der Einheitszelle. Die Richtung des Abstandes ist für beide Ringe entgegengesetzt.
 - $\Delta y_{RVE} = \frac{1}{2}(R + r)$
 - $\Delta z_{T1,RVE} = \Delta z_{T2,RVE} = 0$,
d. h. die Ursprünge der jeweiligen Koordinatensysteme der Ringe liegen in der x-y-Ebene des Koordinatensystems der Einheitszelle.
 - $\beta_{T2,RVE} = \beta_{RVE}$
 - $\beta_{T1,RVE} = 2\pi - \beta_{T2,RVE} = 2\pi - \beta_{RVE}$,
d. h. beide Ringe der Einheitszelle haben die gleiche Schrägstellung im jeweiligen Koordinatensystem des Ringes. Die Richtung der Schrägstellung ist entgegengesetzt. Dabei beachte man den Geltungsbereich des Parameters θ , der eine Verschränkung um den Winkel $(2\pi - \beta_{T2,RVE}) = (2\pi - \beta_{RVE})$ bedingt.
- $$\Rightarrow \begin{aligned} \cos(\beta_{T1,RVE}) &= \cos(2\pi - \beta_{RVE}) &= \cos(\beta_{RVE}) \\ \sin(\beta_{T1,RVE}) &= \sin(2\pi - \beta_{RVE}) &= -\sin(\beta_{RVE}) \\ \cos(\beta_{T2,RVE}) &= \cos(\beta_{RVE}) \\ \sin(\beta_{T2,RVE}) &= \sin(\beta_{RVE}) \end{aligned}$$

Der translatorische Anteil Δx_{RVE} bleibt durch das axiale Abgleiten der Viertelringe variabel. Mit dem Abgleiten stellen sich verschiedene Winkel β_{RVE} ein, sodass auch dieser rotatorische Anteil variabel ist.

Mit den vorgestellten Konventionen vereinfachen sich [Gl. 2-26] und [Gl. 2-27] zu:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T1,RVE}(\beta, \theta, \phi, \Delta x)_{T1,RVE} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\theta_{T1}) + r \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ R \cdot \sin(\theta_{T1}) + r \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ r \cdot \sin(\phi_{T1}) \end{pmatrix}_{RVE} + \begin{pmatrix} \Delta x_{RVE} \\ \frac{1}{2}(R+r) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

[Gl.2-28]

$$\begin{aligned} \vec{P}_{T2,RVE}(\beta, \theta, \phi, \Delta x)_{T2,RVE} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\theta_{T2}) + r \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ R \cdot \sin(\theta_{T2}) + r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ r \cdot \sin(\phi_{T2}) \end{pmatrix}_{RVE} - \begin{pmatrix} \Delta x_{RVE} \\ \frac{1}{2}(R+r) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[Gl. 2-29]

Durch Ableitung der so entstanden Ortsvektoren des Torus 1 werden die kovarianten Basisvektoren und der Normalenvektor seiner Torusoberfläche bestimmt:

$$\vec{a}_{1,T1,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T1,RVE} = \frac{\partial \vec{P}_{T1,RVE}}{\partial \theta_{T1}} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_{T1}) - r \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1})) \\ R \cdot \cos(\theta_{T1}) + r \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ \sin(\beta) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_{T1}) - r \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1})) \end{pmatrix}_{RVE},$$

[Gl. 2-30]

$$\vec{a}_{2,T1,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T1,RVE} = \frac{\partial \vec{P}_{T1,RVE}}{\partial \phi_{T1}} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta) \cdot r \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \sin(\phi_{T1}) - \sin(\beta) \cdot r \cdot \cos(\phi_{T1}) \\ -r \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \sin(\phi_{T1}) \\ -\sin(\beta) \cdot r \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \sin(\phi_{T1}) + \cos(\beta) \cdot r \cdot \cos(\phi_{T1}) \end{pmatrix}_{RVE},$$

[Gl. 2-31]

$$\begin{aligned} \vec{a}_{3,T1,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T1,RVE} &= \vec{a}_{1,T1,RVE} \times \vec{a}_{2,T1,RVE} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot r \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) + r^2 \cdot \cos(\theta_{T1}) \cdot \cos^2(\phi_{T1}) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) + r^2 \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos^2(\phi_{T1}) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_{T1}) + r^2 \cdot \sin(\theta_{T1}) \cdot \cos(\phi_{T1}) \end{pmatrix}_{RVE}. \end{aligned}$$

[Gl. 2-32]

Mit dem gleichen Vorgehen erhält man durch Ableitung des Ortsvektors des Torus 2 die Basisvektoren und den Normalenvektor seiner Torusoberfläche:

$$\vec{a}_{1,T2,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T2,RVE} = \frac{\partial \vec{P}_{T2,RVE}}{\partial \theta_{T2}} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_{T2}) - r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2})) \\ R \cdot \cos(\theta_{T2}) + r \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ -\sin(\beta) \cdot (-R \cdot \sin(\theta_{T2}) - r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2})) \end{pmatrix}_{RVE},$$

[Gl. 2-33]

$$\vec{a}_{2,T2,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T2,RVE} = \frac{\partial \vec{P}_{T2,RVE}}{\partial \phi_{T2}} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta) \cdot r \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \sin(\phi_{T2}) + \sin(\beta) \cdot r \cdot \cos(\phi_{T2}) \\ -r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \sin(\phi_{T2}) \\ \sin(\beta) \cdot r \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \sin(\phi_{T2}) + \cos(\beta) \cdot r \cdot \cos(\phi_{T2}) \end{pmatrix}_{RVE},$$

[Gl. 2-34]

$$\begin{aligned} \vec{a}_{3,T2,RVE}(\beta, \theta, \phi)_{T2,RVE} &= \vec{a}_{1,T2,RVE} \times \vec{a}_{2,T2,RVE} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}_{RVE} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot r \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) + r^2 \cdot \cos(\theta_{T2}) \cdot \cos^2(\phi_{T2}) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) + r^2 \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \cos^2(\phi_{T2}) \\ R \cdot r \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \sin(\phi_{T2}) + r^2 \cdot \sin(\theta_{T2}) \cdot \sin(\phi_{T2}) \cdot \cos(\phi_{T2}) \end{pmatrix}_{RVE}. \end{aligned}$$

[Gl. 2-35]

Mit diesen Beziehungen werden die Viertelringe des RVE vollständig beschrieben. Die Kraftübertragung innerhalb des RVE ist durch die Definition der Kontaktpunkte zwischen den Viertelringen bestimmt. Diese Kontaktpunkte sind dadurch gekennzeichnet, dass die Ortsvektoren nach [Gl. 2-28] und [Gl. 2-29] zusammenfallen und die Normalenvektoren nach [Gl. 2-32] und [Gl. 2-35] vom Betrag her gleich und im Richtungssinn entgegengesetzt sind.

Dieses Gleichungssystem ist nur vollständig lösbar, wenn sich bei bekannter axialer Positionierung Δx_{RVE} eine spezifische Verschränkung β_{RVE} einstellt. Hierbei ist die analytische Lösung nur für Teilbereiche von $\Delta x_{RVE} > C_5/4$ möglich. Die lastübertragende Positionierung ist durch die Einnahme des Maximalwertes $\Delta x_{max} = C_5/2$ gekennzeichnet. Für die Geflechtsgrößen G1 bis G10 werden in [Tab. 2-8] die Parameter der Verschränkung und der Kontaktpunkte in Meridianen und Breitenkreisen aufgelistet.

Hierbei stellt sich durch die periodische Symmetrie eine Beziehung der Kontaktpunktparameter ein:

$$\begin{aligned} \theta_{T1}^{K1} &= \pi + \theta_{T2}^{K2} & , & & \phi_{T1}^{K1} &= \phi_{T2}^{K2} & , \\ \theta_{T2}^{K1} &= \pi - \theta_{T1}^{K2} & , & & \phi_{T2}^{K1} &= \phi_{T1}^{K2} & . \end{aligned} \quad [Gl. 2-36]$$

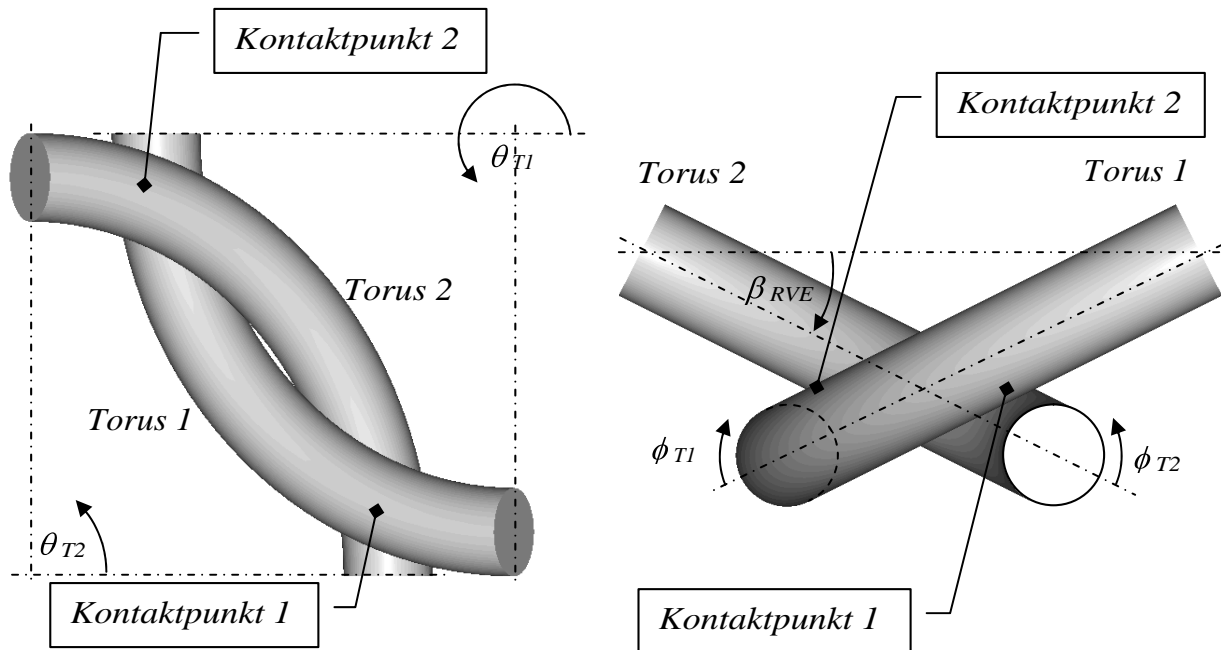


Abb. 2-17 Kennzeichnung der Torusparameter innerhalb eines RVE

Nr.	D [mm]	t [mm]	Δx_{\max} [mm]	β [°]	Kontaktpunkt 1				Kontaktpunkt 2			
					θ_{T1}^{K1} [°]	ϕ_{T1}^{K1} [°]	θ_{T2}^{K1} [°]	ϕ_{T2}^{K1} [°]	θ_{T1}^{K2} [°]	ϕ_{T1}^{K2} [°]	θ_{T2}^{K2} [°]	ϕ_{T2}^{K2} [°]
G1	3,60	0,55	0,71	27,4	253,0	256,7	18,1	147,4	198,1	147,4	73,0	256,7
G2	4,00	0,50	0,94	25,3	246,1	252,9	17,6	147,7	197,6	147,7	66,1	252,9
G3	4,20	0,55	0,95	25,4	248,5	257,7	16,6	147,4	196,6	147,4	68,5	257,7
G4	7,00	0,60	2,06	21,4	238,4	255,5	16,4	142,9	196,4	142,9	58,4	255,5
G5	7,00	0,70	1,91	22,9	242,1	257,2	15,8	140,2	195,8	140,2	62,1	257,2
G6	7,00	0,80	1,77	24,4	244,1	255,9	16,8	147,0	196,8	147,0	64,1	255,9
G7	7,00	1,00	1,47	26,4	249,9	251,9	18,8	150,6	198,8	150,6	69,9	251,9
G8	7,00	1,10	1,33	27,9	252,2	250,4	20,6	152,4	200,6	152,4	72,2	250,4
G9	12,00	1,10	3,22	22,4	238,9	255,0	16,9	145,3	196,9	145,3	58,9	255,0
G10	12,00	1,30	3,13	23,4	245,0	260,1	14,9	137,6	194,9	137,6	65,0	260,1

Tab. 2-9 Nominale Positionsparameter von Kontaktpunkten unterschiedlicher Geflechtsgrößen bei Lastübertragung im RVE

Diese in [Tab. 2-9] aufgeführten Parameter beschreiben den Kontakt der Ringviertel in kraftübertragender Verschränkung. Über die Gleichungen [Gl. 2-28] und [Gl. 2-29] sowie [Gl. 2-32] und [Gl. 2-35] ist die Bestimmung der Kontaktpunkte aber auch für den nicht kraftübertragenden Zustand des Geflechts möglich. In Abhängigkeit von der axialen Position der Geflechtsringe stellt sich eine Variation der Kontaktpunkte ein, die sich in einer Ableitkurve ausdrücken lässt:

$$\begin{pmatrix} \theta_{Tj}^{Ki} \\ \phi_{Tj}^{Ki} \end{pmatrix} = f(\Delta x_{RVE}) . \quad [Gl. 2-37]$$

Für die Geflechtsgröße G9 ist eine derartige Ableitkurve in [Abb. 2-18] beispielhaft dargestellt.

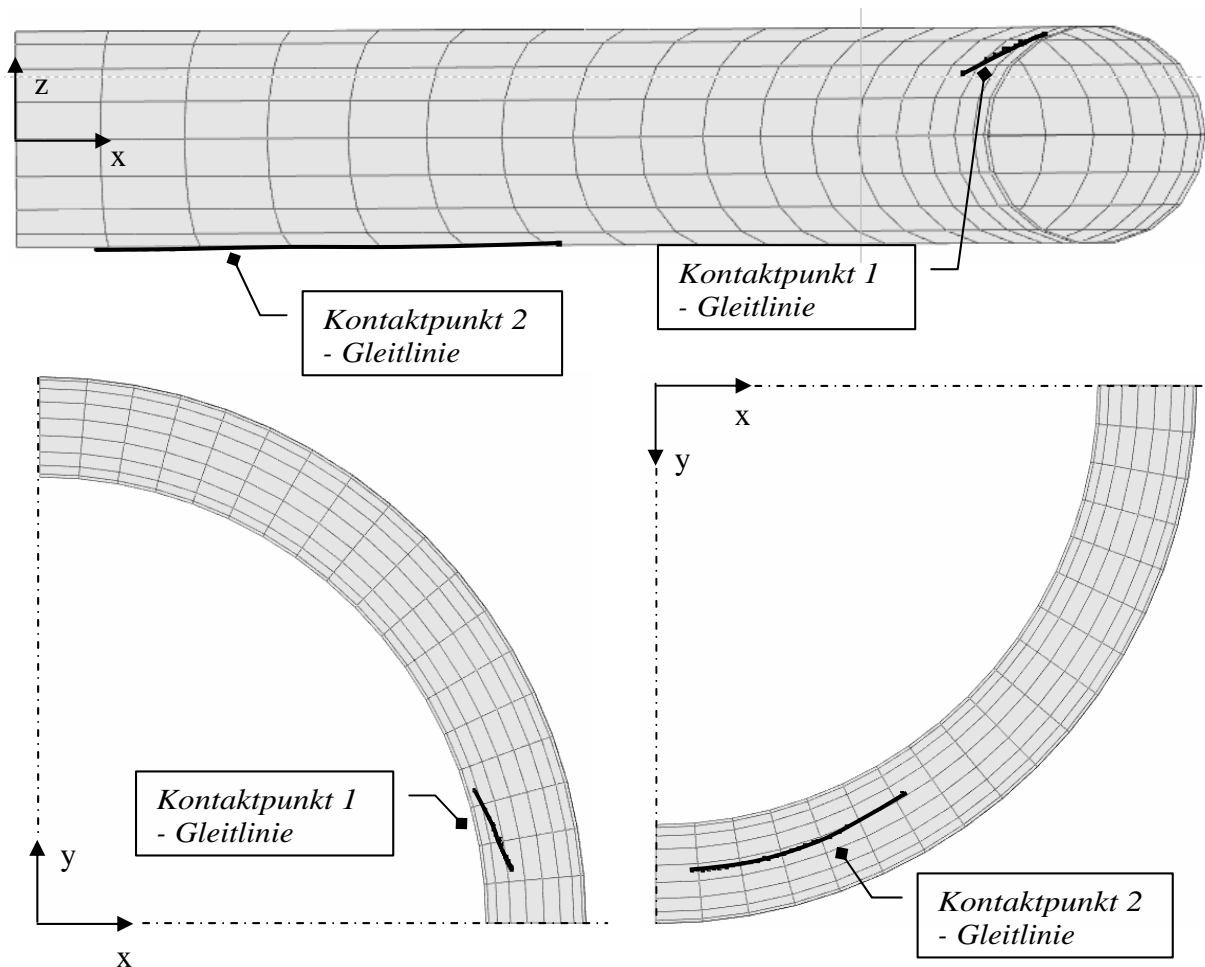


Abb. 2-18 Darstellung einer Ableitkurve auf der Ringoberfläche (isoparametrisch dargestellt)

3 Materialverhalten von Ringflechten

3.1 Materialgesetze

Der Zusammenhang zwischen aufgebrachtter Belastung und resultierender Deformation eines beliebigen Bauteils wird generell durch entsprechende Gesetzmäßigkeiten des Materialverhaltens beschrieben. Aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher Materialkonfigurationen und ihrer weit gefächerten Deformationsstadien folgen diese Abhängigkeiten in ihrer allgemeinsten Form nichtlinearen sowie temperatur- und zeitabhängigen Beziehungen. Für eine Vielzahl technischer Anwendungen, in denen konstante Kräfte kurzzeitig in konstanter Umgebung wirken, lassen sich die Materialgesetze auf eine lineare Form reduzieren:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad [Gl. 3-1]$$

Hierin sind σ_{ij} die Komponenten des Spannungstensors, C_{ijkl} die Komponenten des Steifigkeitstensors und ε_{kl} die Komponenten des Verzerrungstensors. Der Steifigkeitstensor wird somit durch einen Tensor 4. Stufe mit 81 unabhängigen Komponenten dargestellt. Da der Steifigkeitstensor aus energetischen Gründen eine Haupt-symmetrie besitzt, reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Konstanten auf 45:

$$C_{ijkl} = C_{klij} . \quad [Gl. 3-2]$$

Sowohl der Spannungstensor als auch der Verzerrungstensor sind symmetrisch, sodass für den Steifigkeitstensor sowohl die linke als auch die rechte Subsymmetrie gelten. Mit der Forderung nach Hyperelastizität reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf 21:

$$\text{Linke Subsymmetrie:} \quad C_{ijkl} = C_{jikl} , \quad [Gl. 3-3]$$

$$\text{Rechte Subsymmetrie:} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} . \quad [Gl. 3-4]$$

Diese Komponenten können in einer symmetrischen Matrix angeordnet werden, wodurch sich das Hooke'sche Materialgesetz in Voigt'scher Darstellung vereinfacht:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j , \quad i, j = 1, \dots, 6 . \quad [Gl. 3-5]$$

Zur Bestimmung der Materialantwort auf eine Belastung wird diese Beziehung invertiert:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad [GL. 3-6]$$

mit $S_{ij} = C_{ij}^{-1}$. [GL. 3-7]

Hierin bezeichnet σ_i die Komponenten des Spannungsvektors, C_{ij} die Komponenten der Steifigkeitsmatrix, S_{ij} die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix und ε_j die Komponenten des Verzerrungsvektors.

Wird zusätzlich der Einfluss der Temperatur berücksichtigt, wird das Materialgesetz entsprechend erweitert:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j + \alpha_i \cdot \Delta T. \quad [GL. 3-8]$$

Dabei kennzeichnen α_i die Temperatureausdehnungskoeffizienten und ΔT die Temperaturdifferenz.

Anisotropie ist die allgemeinste Form des Hooke'schen Materialgesetzes und ist dadurch gekennzeichnet, dass keine Symmetrieebene bezüglich der elastischen Eigenschaften mit einer der kartesischen Koordinatenebenen zusammenfällt. Das Materialgesetz nach [GL. 3-8] für anisotrope Materialien lautet in Voigt'scher Darstellung:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \cdot \Delta T. \quad [GL. 3-9]$$

symm

Über die 21 voneinander unabhängigen Komponenten der Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitsmatrix sind sämtliche Spannungen und Verzerrungen miteinander gekoppelt.

Fällt eine Ebene elastischer Symmetrie mit einer Materialkoordinatenachse zusammen, spricht man von monokliner Anisotropie. Die Anzahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten reduziert sich dabei auf 13 mechanische und 4 thermische, was damit eine teilweise Entkopplung der Spannungen und Verzerrungen bewirkt. Im Falle einer Symmetrieebene 1-2 erhält man für das Materialgesetz exemplarisch den Ausdruck:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & 0 \\ & \text{symm} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \cdot \Delta T \quad . \quad [Gl. 3-10]$$

Fallen alle drei Symmetrieebenen bezüglich der Elastizität mit den drei Koordinatenachsen zusammenfallen, ergibt sich eine Entkopplung der Schubspannungen von den Längsdehnungen. Die Anzahl der unabhängigen mechanischen Elastizitätskonstanten reduziert sich auf 9, die Anzahl der thermisch unabhängigen Konstanten auf 3. Das so formulierte orthotrope Materialgesetz beschreibt die meisten in der Praxis vorkommenden Materialien und lautet in Voigt'scher Darstellung:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symm} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \Delta T \quad . \quad [Gl. 3-11]$$

Ein solches orthotropes Verhalten stellt sich beispielsweise ein, wenn die Hauptrichtungen einer unidirektionalen Faserverbundschicht mit den rechtwinklig aufeinander stehenden Ebenen zusammenfallen.

Werden in einem orthotropen Material zwei Richtungen durch die gleichen Materialparameter bestimmt, so sind deren Eigenschaften nicht mehr richtungsabhängig. Bei diesem Spezialfall der Orthotropie – der transversalen Isotropie – ist die Anzahl der mechanischen Kenngrößen nur noch 5, die der thermischen 2.

Herrschen in allen Koordinatenrichtungen gleiche elastische Eigenschaften, so wird das Materialverhalten durch zwei unabhängige mechanische und eine thermische Kenngröße bestimmt – es stellt sich ein isotropes Materialgesetz ein:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \cdot (S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ & \text{symm} & & & 2 \cdot (S_{11} - S_{12}) & 0 \\ & & & & & 2 \cdot (S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta T \quad .$$

[Gl. 3-12]

Die Komponenten der Nachgiebigkeits- bzw. der Steifigkeitsmatrix lassen sich über die Einführung von physikalischen, materialspezifischen Kennwerten besetzen.

Diese Kennwerte werden als Elastizitäts- bzw. Schubmodul E_i sowie als Querkontraktionszahl ν_{ij} bezeichnet. Während die Matrixform die komplexe Materialantwort auf eine äußere Belastung darstellt, beschreiben die Materialkennwerte das spezifische Verhalten auf eine isolierte Lastrichtung. Zwischen den Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix und den Materialkennwerten gelten folgende Beziehungen:

$$S_{ij} = \frac{1}{E_i}, \quad i = j, \quad \text{[Gl. 3-13]}$$

$$S_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_i}, \quad i \neq j. \quad \text{[Gl. 3-14]}$$

Über die Symmetrieeigenschaft der Nachgiebigkeitsmatrix $S_{ij} = S_{ji}$ ergibt sich eine Beziehung der Art:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad . \quad \text{[Gl. 3-15]}$$

Setzt man die Materialkennwerte in die entsprechende Formulierung ein und invertiert die Nachgiebigkeitsmatrix, erhält man die jeweilige Steifigkeitsmatrix. Für das orthotrope Materialgesetz nach [Gl. 3-II] erhält man die Steifigkeitsmatrix zu:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} & \frac{1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} & \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} & \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix},$$

[Gl. 3-16]

mit

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3}.$$

[Gl. 3-17]

Damit wird über die Einführung der Elastizitätskennwerte das elastische Materialverhalten eindeutig beschrieben.

3.2 Lastrichtungen des Ringflechts

Die Evolution des Materialgesetzes erfolgt unter den Vereinfachungen, die durch die Richtungsäquivalenz der Systemantwort vorgegeben werden. Zur Ermittlung des Materialverhaltens des Ringflechts wird entsprechend dessen Lastübertragung betrachtet. Eine Lastübertragung durch das Geflecht ist nur möglich, wenn sich die Ringe im Geflecht in einer verschränkten Lage zueinander befinden und eine weitere Starrkörpertranslation durch Abgleiten über das Kontaktkraftgleichgewicht unterbunden wird. Dies wird durch eine Vorspannung in Verschränkungsrichtung erreicht (siehe [Abb. 3-1]). Unter Annahme dieser Vorspannung werden die

Richtungen des Geflechts auf eine mögliche Kraftübertragung zunächst phänomenologisch untersucht.

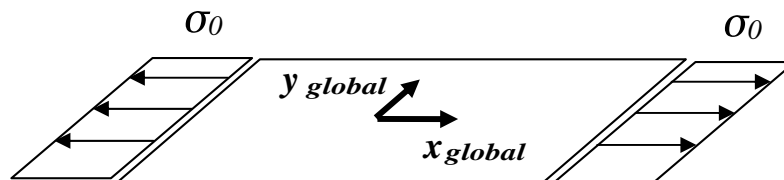
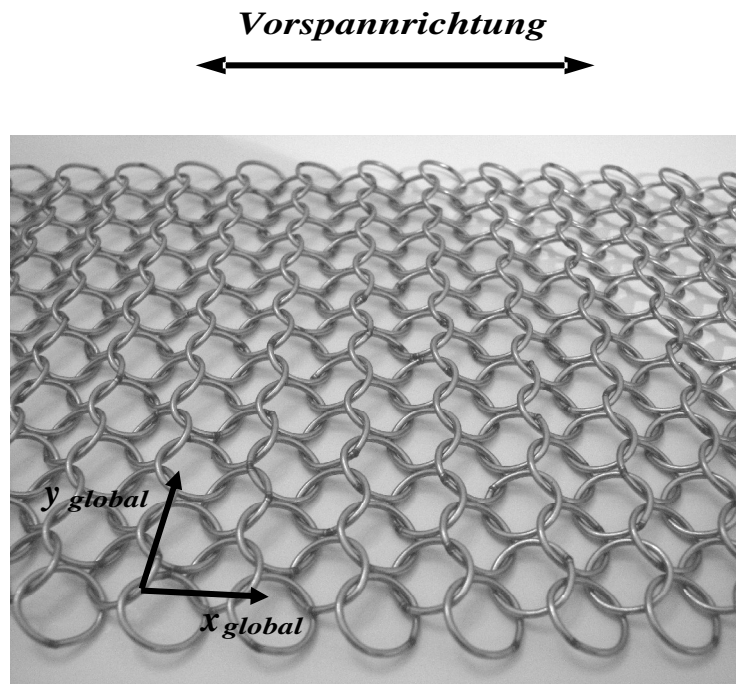


Abb. 3-1 Vorspannung des Ringgeflechts in Verschränkungsrichtung

Axiale Zugbelastung

Unter einer Zugkraft, die in Verschränkungsrichtung, d. h. zusätzlich und in Richtung der Vorspannung, aufgebracht wird, bleibt die Lage der Ringe zueinander erhalten, da die periodische und symmetrische Kontaktpaarung der Ringe im Geflecht nicht aufgelöst wird. Vielmehr wird ab dem Maximalwert der Schrägstellung die aufgebrachte Kraft in eine zunächst elastische, später plastische Gestaltänderung der Einzelringe durch Biegung und Ovalisierung umgesetzt.

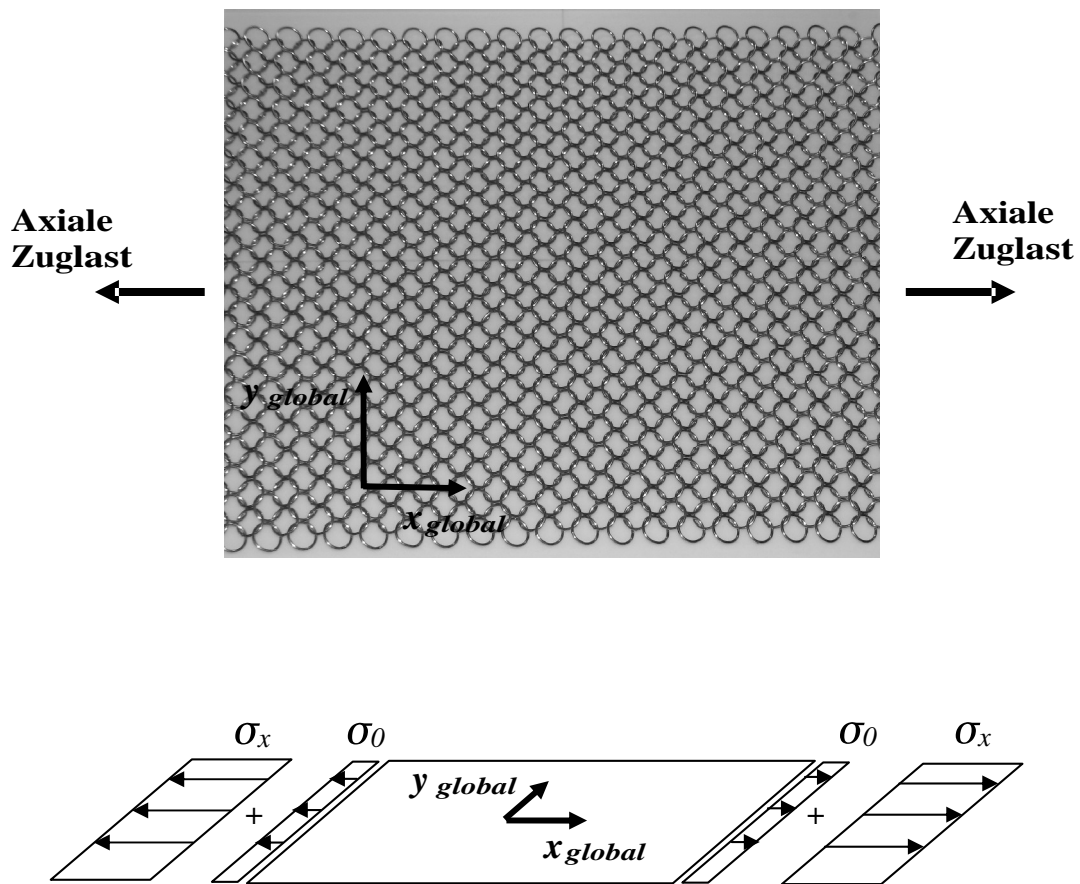


Abb. 3-2 Vorspannung σ_0 und axiale Zugbelastung σ_x des Ringgeflechts

Axiale Druckbelastung

Durch eine Druckbelastung, die in Verschränkungsrichtung entgegen der Vorspannung wirkt, gleiten ineinandergreifende Ringe aneinander ab. Daraus folgt ein Aufeinanderschieben der Ringe bis hin zur Zusammenstauchung. Damit reagiert das Geflecht als Mechanismus anstatt als kontinuumsmechanisches System. Da die elasto-mechanischen Eigenschaften somit nicht zur Wirkung kommen, bildet dieses Verhalten einen Triviallastfall und ist nicht Bestandteil der nachfolgenden Untersuchungen.

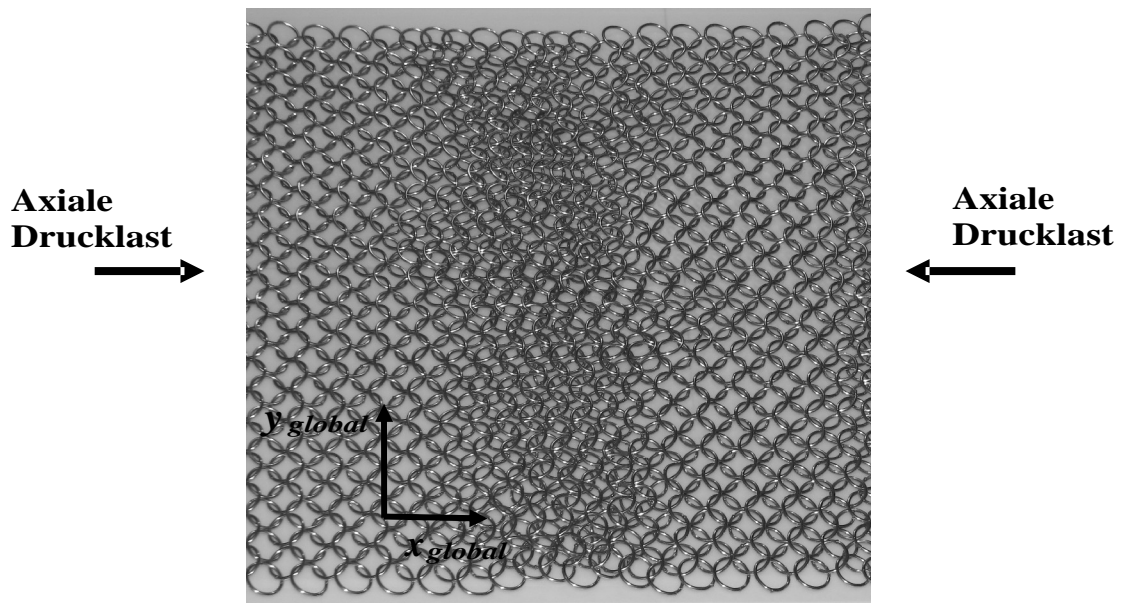


Abb. 3-3 Axiale Drucklast in Verschränkungsrichtung des Ringgeflechts

Laterale Zugbelastung

Ist das Geflecht alleinig lateral auf Zug belastet, erfolgt zunächst eine Starrkörperbewegung der Ringe durch laterales Abgleiten. In der Folge zieht sich das Geflecht in Verschränkungsrichtung zusammen. Hintereinanderliegende Ringreihen schieben sich derart übereinander, dass die Kontaktpunkte der Ringe aneinander rücken. Damit ist das nachfolgend auftretende elasto-plastische laterale Materialverhalten durch die Ovalisierung der Ringe gekennzeichnet. Werden laterale und axiale Zuglast überlagert, z. B. durch starre Randbedingungen bzw. durch das Eigengewicht eines hängenden Geflechts, so stellt sich ein biaxialer Belastungszustand ein. Hierin wird ein reines laterales Abgleiten behindert. Der lateralen Ausdehnung durch Ovalisierung wird zusätzlich eine axiale Biegung und Ovalisierung entgegengesetzt. Eine axiale Verformungsbehinderung bewirkt demnach eine höhere laterale Steifigkeit des Geflechts.

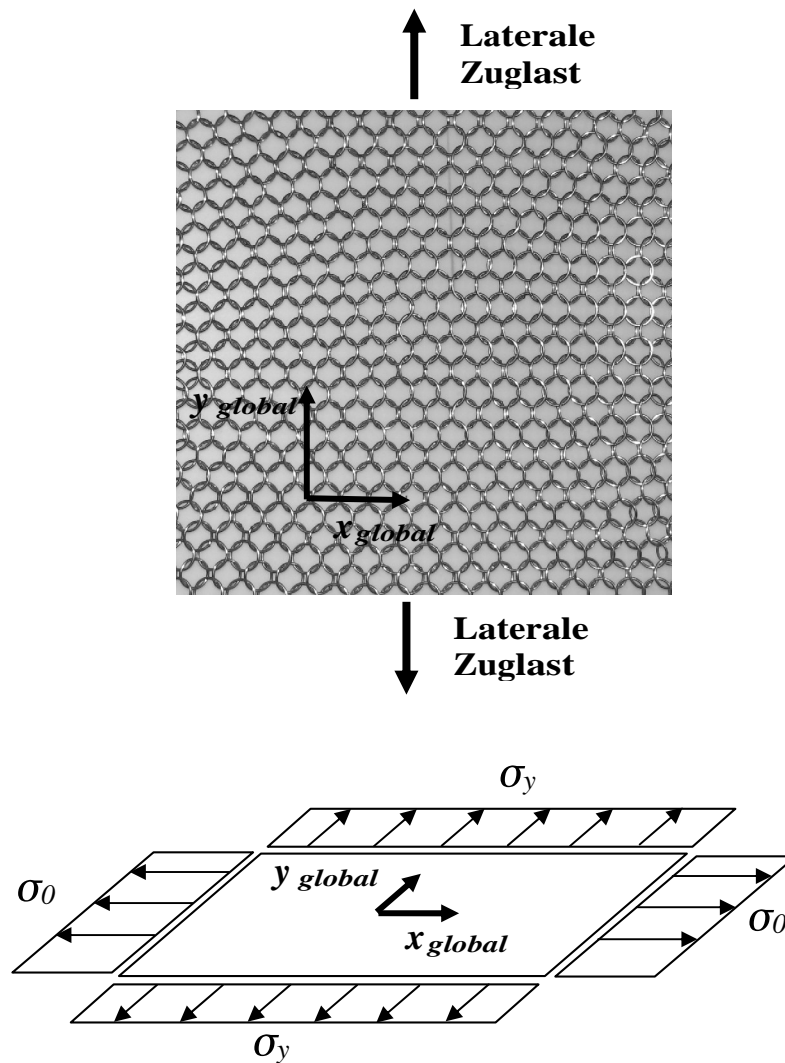


Abb. 3-4 Laterale Zugbelastung am Ringgeflecht

Laterale Druckbelastung

Wie bei der axialen Druckbelastung wird auch bei lateraler Drucklast das Ringgeflecht aus kraftübertragender Lage zusammengeschoben, wobei das Geflecht als Mechanismus wirkt. Der kraftübertragende Ringkontakt wird aufgehoben und das elasto-mechanische Verhalten kommt nicht zur Wirkung. Dieser Triviallastfall wird nachfolgend nicht untersucht.

Transversale Zugbelastung

Eine Zugbelastung in Dickenrichtung des Geflechts kann in zwei Ausprägungen auftreten – entgegengesetzt gerichtete Kraftvektoren auf der Geflechtsober- und Geflechtsunterseite sowie alleinige senkrechte Zugkraft auf ein randgestütztes Geflecht.

Aufgrund der Ausbreitung des Ringgeflechtes ist eine flächige Kraftübertragung auf Ober- und Unterseite nicht umsetzbar, da eine derartige Krafteinleitung weder realisierbar noch realistisch erscheint.

Technisch bedeutsamer ist der lokale oder flächige Krafteintrag senkrecht zum randgestützten Geflecht, unabhängig von der Kraftwirkungsrichtung (siehe [Abb. 3-5]). Aufgrund der Biegeschlaffheit des Geflechtes bewirkt eine solche Belastung eine globale Durchbiegung mit einem ebenen, biaxialen Spannungszustand. Damit lässt sich diese Belastungsart in eine Zugbelastung in axialer und lateraler Richtung überführen.

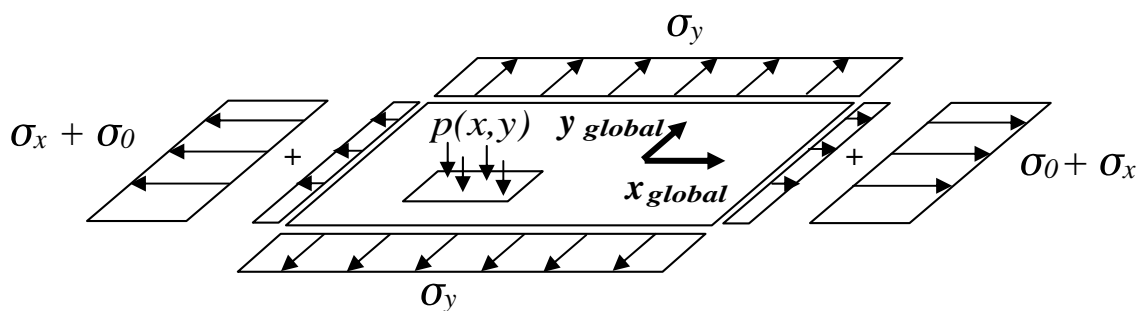
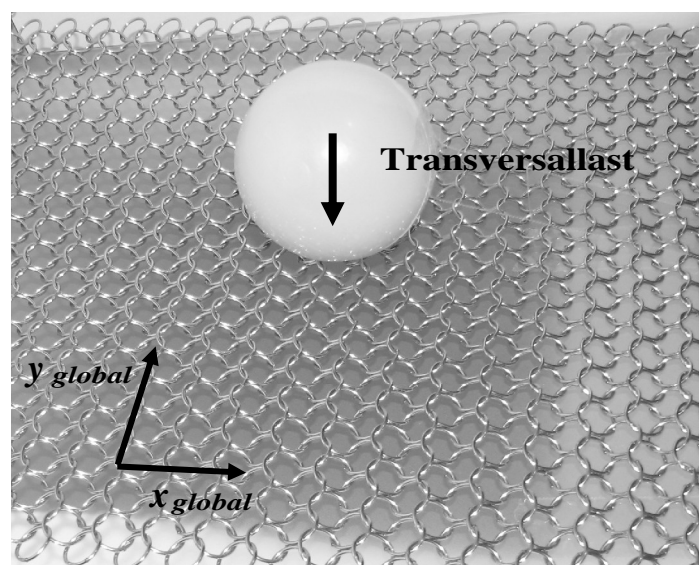


Abb. 3-5 Transversale Zugbelastung am Ringgeflecht

Transversale Druckbelastung

Eine Druckbelastung senkrecht auf Ober- und Unterseite des Ringgeflechtes resultiert in einer Stauchung des Geflechtes, sodass die elasto-mechanischen Eigenschaften nicht mehr wirken. Dieser Triviallastfall wird entsprechend nicht weiter untersucht.

Ebene Schubbelastung

Durch die vorgespannte Ausgangslage der Ringe zueinander erhält das ansonsten schubweiche Geflecht eine Schublast übertragende Funktionalität. Mit Querschubbelastung werden die Kontaktkraftkomponenten verändert und die symmetrische Kraftverteilung in den Kontaktpunkten benachbarter Ringe wird aufgehoben. In der Folge verschiebt sich die Position der Kontaktpaare in Ringumfangsrichtung. Diese Neupositionierung wird durch Einzwängung in die Ringreihe behindert, die Schubkraft wird in der Folge in eine Ovalisierung der Ringe umgesetzt.

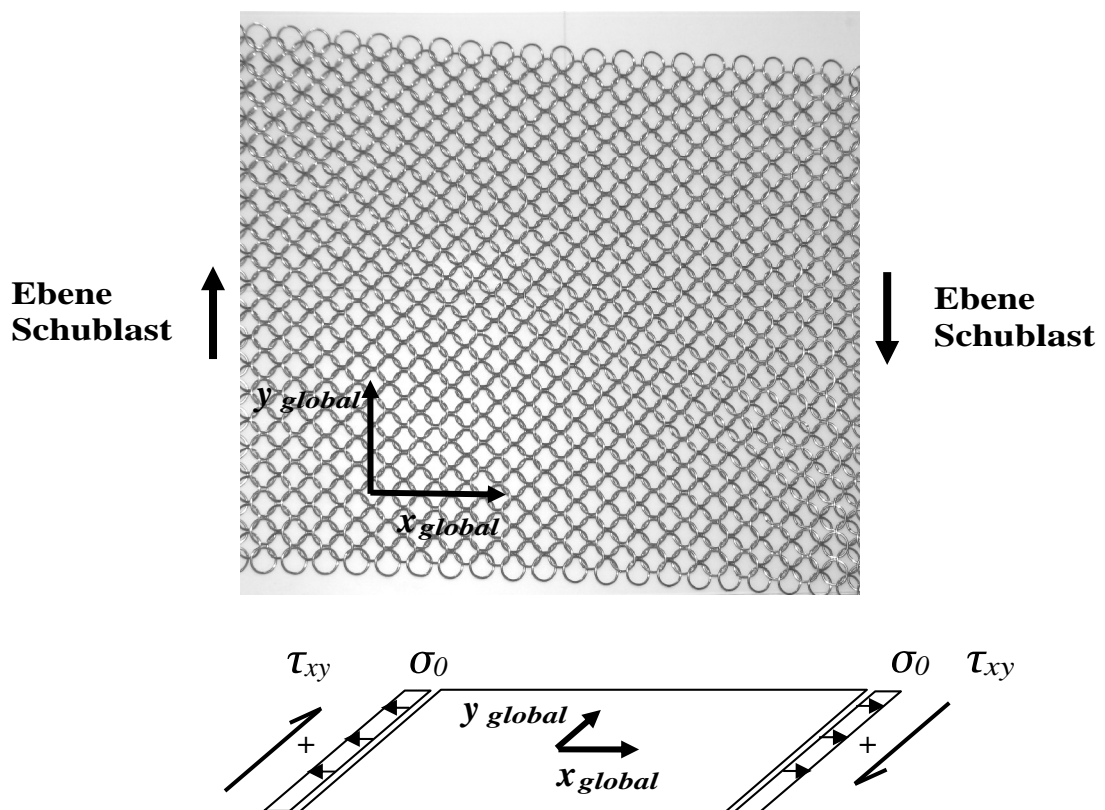


Abb. 3-6 Laterale Schublast am Ringgeflecht

Transversale Schubbelastung

Eine Schubkraft in Dickenrichtung des Geflechts aufgebracht bewirkt eine Starrkörperrotation jener Ringe, die dem Kraftangriff benachbart sind. In diesem kinematischen System kann die transversale Schublast aufgrund der nicht vorhandenen Schubsteifigkeit nicht übertragen werden. Dieser Triviallastfall wird nachfolgend nicht betrachtet.

3.3 Beitrag zum Materialgesetz für Ringgeflechte

Aus der phänomenologischen Betrachtung der Fähigkeit zur Lastübertragung lassen sich für ein Ringgeflecht folgende Gegebenheiten ablesen:

- Ein Ringgeflecht kann nur in der Geflechtsebene Kräfte aufnehmen, womit es als ebenes Flächentragwerk charakterisiert wird.
- Das Ringgeflecht ist biegeschlaff, Biegemomente werden nicht übertragen.
- Zur Lastübertragung ist eine Vorspannung nötig, um die Einzelringe in eine Position zu bringen, in der kein weiteres Ableiten der Ringe möglich ist.
- In der Geflechtsebene werden nur Zug- und Schubbelastungen übertragen.
- Das Deformationsverhalten des Ringgeflechts auf ebenen Zug ist abhängig von der Belastungsrichtung.

Somit erfüllt das Ringgeflecht die mechanische Charakteristik einer orthotropen Membran, welche richtungsabhängige Materialeigenschaften hat.

Membrane als klassische Flächentragwerke weisen einen ebenen Spannungszustand auf, wodurch gilt:

$$\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{23} = 0. \quad [Gl. 3-19]$$

Eine derartige Vereinbarung bedeutet, dass Spannungen in Dickenrichtung des Ringgeflechts nicht übertragen werden. Diese Vereinbarung berücksichtigt nicht die Spannungsverteilung innerhalb der Mesoebene, in welcher die Einzelringe durch ihre Schrägstellung innerhalb des RVE einer Biegebelastung in Dickenrichtung ausgesetzt werden. In Betrachtung klassischer Flächentragwerke bedingt eine Spannung in Dickenrichtung einen ebenen Verzerrungszustand. Die Biegung der Einzelringe führt jedoch zu deren Abknickung, was eine Deformation in Dickenrichtung bedeutet. Damit ergibt sich eine Mischform der Deformationszustände auf Mesoebene.

Durch die Skalierung des RVE auf die Makroebene des Ringgeflechts ergibt sich ein Ebenen-Dicken-Verhältnis deutlich größer 100. Aufgrund dieses gegenüber der Ebene untergeordneten Dickeneffekts wird vereinbart, dass die Definition des ebenen Spannungszustandes nach [Gl. 3-19] auf globaler Ebene des Ringgeflechts gilt.

Ausgehend vom orthotropen Materialgesetz nach [Gl. 3-II], Berücksichtigung von [Gl. 3-19] und Anpassung der Komponentenindizierung auf die Koordinatenkonvention des Ringflechts erhält man unter Herausnahme von Temperatureffekten ein ebenes, orthotropes, linear elastisches Materialgesetz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} . \quad [\text{Gl. 3-20}]$$

Mit Anwendung von [Gl. 3-16] auf das ebene Problem wird das Materialgesetz auf Materialkennwerte zurückgeführt:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} . \quad [\text{Gl. 3-21}]$$

Somit wird durch die Ermittlung der Elastizitätsmodule, des Schubmoduls und der Querkontraktion des Ringflechts das linear elastische Verhalten auf Makroebene erfasst. Die Module wirken als Proportionalitätsfaktoren zwischen dem Spannungsvektor aus externer Belastung und der resultierenden Materialverzerrung. Diese Kennwerte lassen sich analytisch, numerisch oder experimentell bestimmen, wenn sowohl die externe Belastung als auch die Verzerrung des Ringflechts bekannt sind. Zur Ermittlung des Spannungszustandes am Flächentragwerk werden die extern wirkenden Zug- und Querkräfte auf die projizierten Querschnittsflächen bezogen:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_i}, \quad \tau_{xy} = \frac{F_{xy}}{A_x} \quad \text{mit } i = x, y . \quad [\text{Gl. 3-22}]$$

Dieser Bezug ermöglicht eine Betrachtung auf der Makroebene des Geflechts und erlaubt eine experimentelle Bestimmung seines Deformationsverhaltens unter ebener Belastung. Hierbei kann eine durch den Versuchsaufbau erzeugte Kraft auf die Abmaße des Geflechtsprobekörpers bezogen werden.

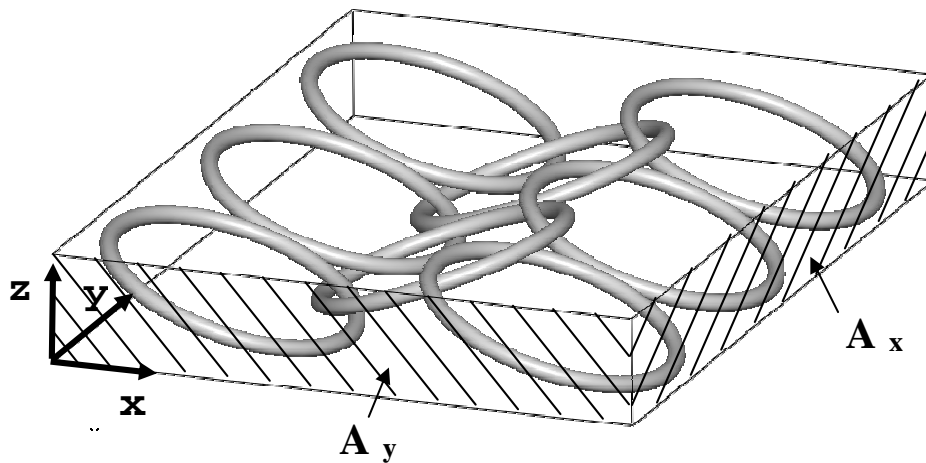


Abb. 3-7 Definition der Projektionsflächen des Ringflechts

Mit der Rückführung des periodischen Ringflechts auf ein RVE ergeben sich die Projektionsflächen entsprechend [Abb. 3-8]. Diese Darstellung erlaubt die analytische und numerische Betrachtung des RVE unter Berücksichtigung des Flächenanteils des RVE an der Querschnittsfläche des Ringflechts.

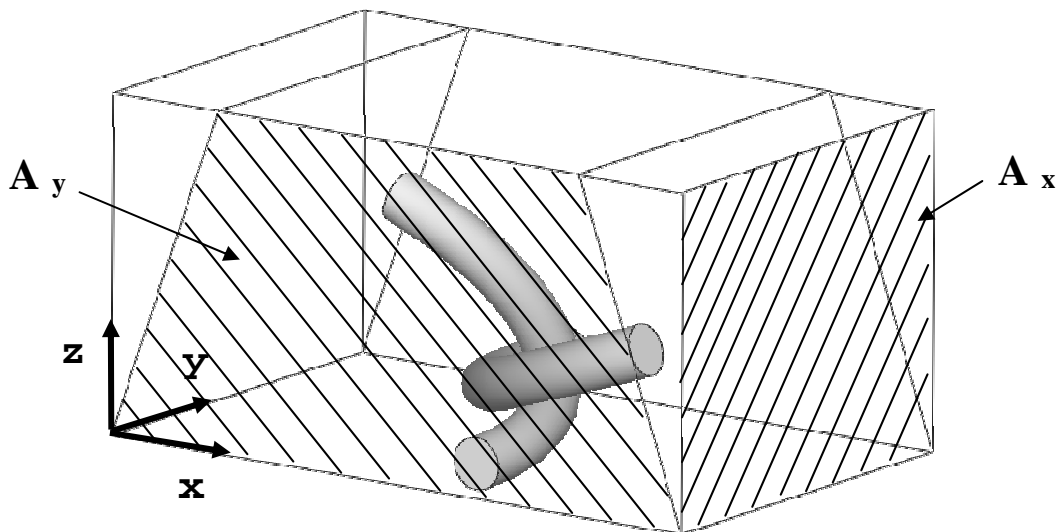


Abb. 3-8 Definition der Flächenprojektion des RVE eines Ringflechts

Die aufgrund der externen Belastung auftretenden Verzerrungen werden durch den Deformationszustand des ebenen Flächentragwerkes charakterisiert. Während im undeformierten Zustand der Referenzkonfiguration jeder Punkt des Tragwerkes durch einen anfänglichen Ortsvektor gekennzeichnet ist, wird im deformierten Zustand der Momentankonfiguration der Ortsvektor sowohl in seinem Betrag als auch in seiner Richtung verändert. Der Abstandsvektor benachbarter Punkte des

Tragwerkes wird ebenso in Richtung und Betrag geändert. Wird ein raumfestes Bezugssystem angenommen, folgt in Lagrange'scher Beschreibung diese Verschiebungsdifferenz benachbarter Punkte:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = H_{ij} dx_j . \quad [Gl. 3-23]$$

Der Tensor 2. Stufe H_{ij} bezeichnet den Verschiebungsgradienten, welcher die Relativverschiebung benachbarter Punkte vollständig beschreibt.

Da Relativverschiebung durch eine Änderung des Betrages als auch der Richtung des Abstandsvektors gekennzeichnet ist, setzt sich der Verschiebungsgradient im Sinne kleiner Deformationen nach geometrisch linearer Theorie durch einen Verzerrungstensor ε_{ij} und einen Drehtensor ω_{ij} additiv zusammen:

$$H_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} . \quad [Gl. 3-24]$$

Die Komponenten des Drehtensors ω_{ij} beschreiben eine Drehung des materiellen Punktes. Da diese keine Verzerrung und somit Spannung im Tragwerk erzeugt, wird der Drehtensor in der weiteren Betrachtung vernachlässigt.

Der Verzerrungstensor ε_{ij} beschreibt die Streckung als auch die Gestaltänderung eines materiellen Teilchens. Mit der Annahme kleiner Verschiebungen, mit Berücksichtigung des ebenen Tragwerksproblems und der Koordinatenkonvention des Ringflechts ergibt sich der infinitesimale Verzerrungstensor zu:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} . \quad [Gl. 3-25]$$

Darin sind die Verzerrungen des ebenen Tragwerkes:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} , \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} . \quad [Gl. 3-26]$$

Aufgrund der Kopplung des verwendeten Materialgesetzes sind bei einachsiger Belastung die Verzerrungen des ebenen Tragwerkes über einen dimensionslosen Faktor – die Querkontraktionszahl – miteinander verbunden:

$$\varepsilon_y = -\nu_{xy} \cdot \varepsilon_x , \quad \varepsilon_x = -\nu_{yx} \cdot \varepsilon_y . \quad [Gl. 3-27]$$

Der Anteil der Gleitung (Winkeländerung) des ebenen Tragwerkes wird ausgedrückt durch:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad . \quad [Gl. 3-28]$$

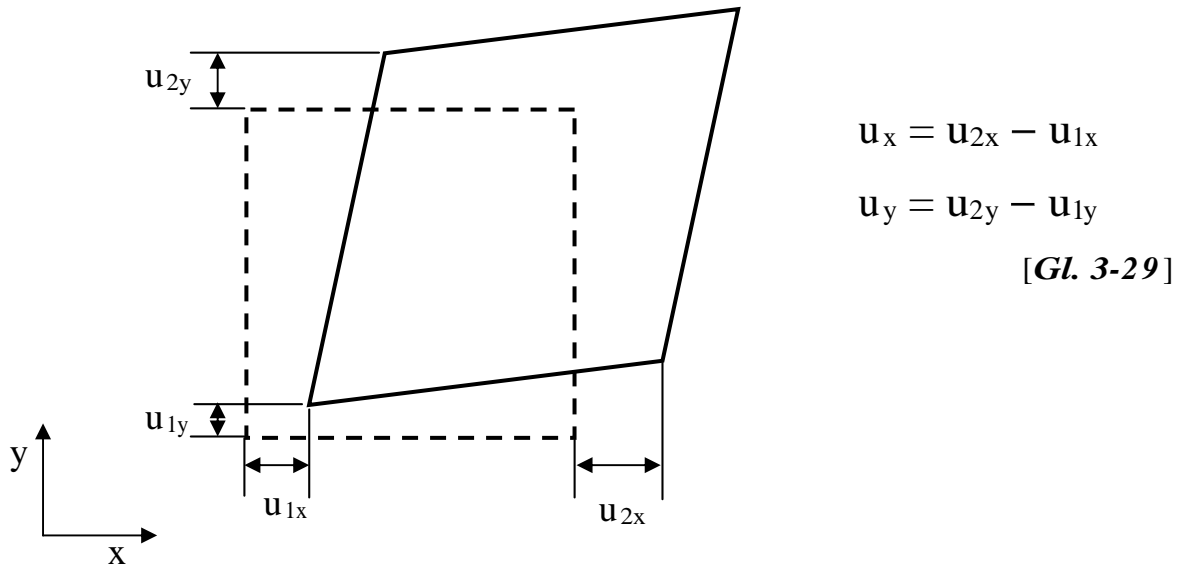


Abb. 3-10 Deformationskomponenten eines ebenen Flächentragwerkes

4 Mechanik des Ringflechts

Die für die Beschreibung des orthotropen Materialgesetzes des Ringflechtes benötigten mechanischen Kennwerte können analytisch, numerisch als auch experimentell über die Deformation des Geflechtes unter externer Belastung bestimmt werden, wobei das verwendete Verfahren auf die erwartete Lösung angepasst gewählt wird.

Im Fall des Ringflechtes eignet sich die analytische Betrachtung der Einzelringe innerhalb des Repräsentativen Volumenelements unter der Annahme linearer Elastizität. Eine Berücksichtigung einer überelastischen Verformung des RVE ist aufgrund der Materialnichtlinearität entsprechend aufwendig. Hierfür wird ein numerischer Ansatz unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente eingeführt, welcher die Teilplastifizierung des Ringdrahtes (somit der Mikroebene des Ringflechtes) auf das RVE überträgt.

Das so gewonnene Verständnis für das Materialverhalten auf Ebene des RVE wird auf die Makroebene des Ringflechts übertragen und durch experimentelle Untersuchungen ergänzt. Diese Untersuchungen umfassen auch das starke Plastifizierungsvermögen des Ringflechts und die damit verbundenen großen Deformationen.

Sowohl [*Spez A*] als auch [*Spez C*] schlagen bei der Ermittlung der mechanischen Materialkennwerte eine separate Betrachtung von axialer und lateraler Zugbelastung sowie ebener Schubbelastung vor. Identische Ansätze finden sich mit vergleichbarem Vorgehen zu Wabenkernstrukturen und zellularen Festkörpern (vgl. [*Gib 99*], [*Bec 99*] - [*Bec 02*]) und sollen nachfolgend Anwendung finden.

4.1 Analytische Betrachtung linear-elastischer Eigenschaften

Zug- ebenso wie Schubbelastungen können im Ringflecht erst übertragen werden, wenn ineinander greifende Ringe in einer vorgespannten Lage der Verschränkung zueinander angeordnet sind. Diese verschränkte Lage ist gekennzeichnet durch zwei Kontaktpunkte konstanter Position, die innerhalb des RVE den Lastpfad von einem Viertelring zum anderen darstellen. Ausgehend von der Verschränkung der Einzelringe in [*Abb. 2-16*] zeigt [*Abb. 4-1*] die Kontaktkraftwirkung am separierten Viertelring.

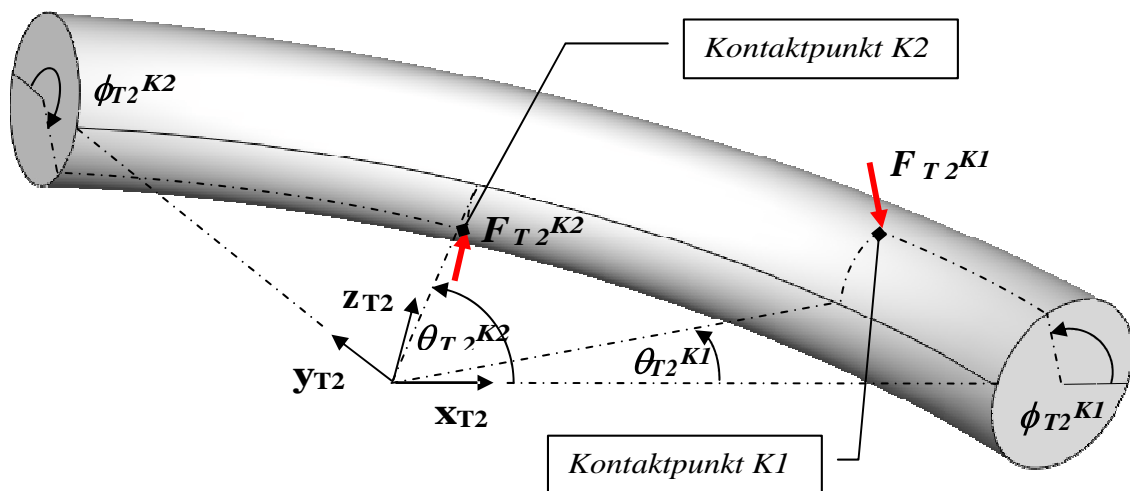


Abb. 4-1 Kontaktkraftkomponenten am separierten Viertelring
(exemplarisch am „Torus 2“)

Die Kraftvektoren $F_{T_j^{K_i}}$ an den Kontaktpunkten K_{T_i} (mit $i = 1, 2$) des Torus $j = 1, 2$ stehen dabei normal auf der jeweiligen Viertelringoberfläche, entsprechen in ihrer Wirkungsrichtung dem Kreuzprodukt der Basisvektoren der lokalen Tangentialebenen und werden nach [Gl. 2-32] und [Gl. 2-35] ermittelt. Die dazu benötigten Positionsparameter $\theta_{T_j^{K_i}}$ und $\phi_{T_j^{K_i}}$ der Kontaktpunkte werden durch Anwendung der Gleichheitsbeziehungen nach [Gl. 2-27] bestimmt und sind in [Tab. 2-9] für verschiedene Ringflechtsgrößen aufgeführt.

Unter Berücksichtigung des Verhältnisses zwischen Ringdicke und Ringumfang derzeit gängiger Ringflechtsgrößen wird die analytische Betrachtung der Viertelringe innerhalb des RVE auf einen eindimensionalen Kreisbogenträger reduziert, der mit der Mittellinie der Viertelringe zusammenfällt (siehe [Abb. 4-2]). Die geometrische Zuordnung der Kontaktkraftkoordinaten erfolgt in [Abb. 4-3].

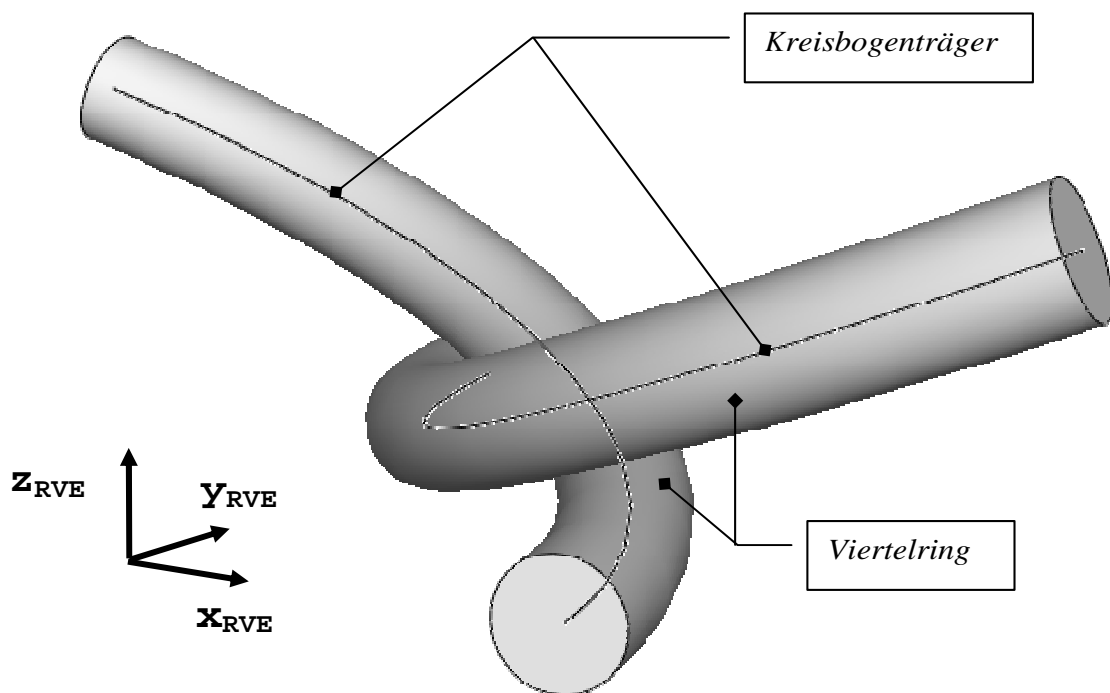


Abb. 4-2 Reduktion der Darstellung der Viertelringe des RVE auf Kreisbogenelemente koinzident mit den Mittellinien der Viertelringe

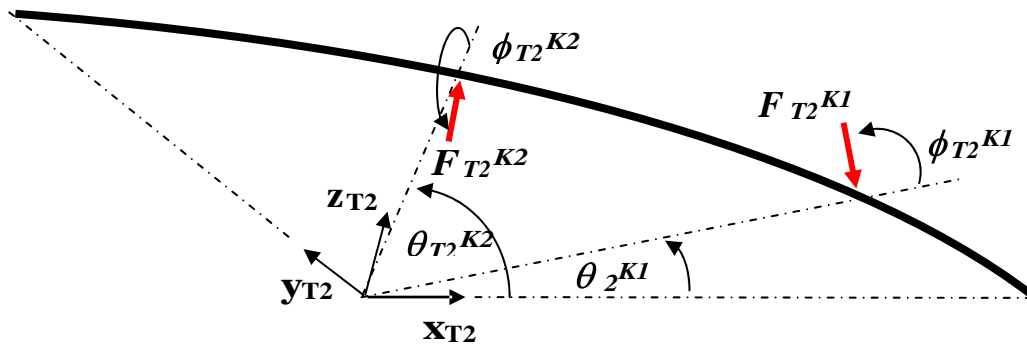


Abb. 4-3 *Abbildung eines Viertelringes des RVE als Kreisbogenträger sowie Position und Wirkrichtung von Kontaktkräften*

Die Ermittlung der elastischen Deformationen des Kreisbogenträgers innerhalb eines RVE – unabhängig von der Belastungsrichtung – sowie die Ermittlung elastischer Materialkennwerte erfolgt in mehreren Schritten:

- Schritt 1 Aufstellen eines mechanischen Ersatzsystems eines Kreisbogenträgers und Identifikation von externen Lasten und Reaktionslasten (z. B. Kontaktkräfte zum benachbarten Kreisbogenträger im RVE)
- Schritt 2 Ermittlung des Schnittkraftverlaufs im Kreisbogenträger
- Schritt 3 Ermittlung der Kontaktkräfte am Kreisbogenträger
- Schritt 4 Bestimmung der Deformation des Kreisbogenträgers an repräsentativen Positionen
- Schritt 5 Ermittlung des Verzerrungszustandes des Kreisbogenträgers
- Schritt 6 Ermittlung linear elastischer Materialkennwerte

4.1.1 Linear elastisches Verhalten unter axialer Zugbelastung

Eine axiale Zugbelastung greift in der Mittelebene des RVE an und wird an den axialen Schnittflächen der Viertelringe in das RVE eingebracht. Da sich die Viertelringe innerhalb des RVE in einer Verschränkungslage befinden, stellt sich ein kombinierter Zug-, Biege- und Torsionszustand in den Ringen ein.

Mit der Beschränkung auf das linear elastische Verhalten der Viertelringe lassen sich die Verformungen in der Ebene der Viertelringe und senkrecht dazu zunächst getrennt betrachten und abschließend superponieren (siehe [Abb. 4-4]).

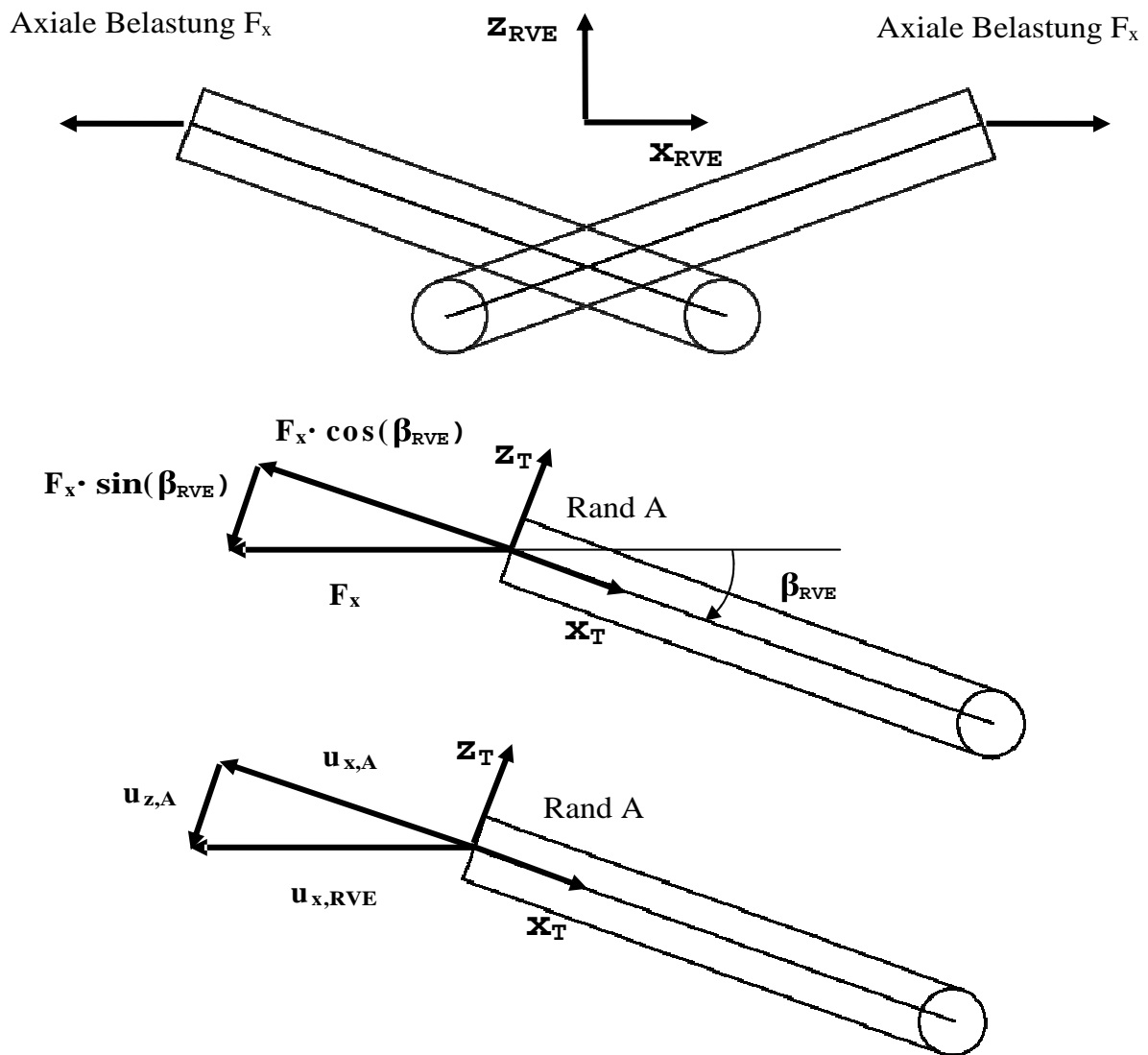


Abb. 4-4 Illustration der axialen Zugbelastung und Deformation am RVE und deren Aufteilung in Komponenten in der Viertelringebene sowie senkrecht zur Viertelringebene (kombinierte Darstellung von Viertelringen und den zugehörigen Mittellinien)

Die Schritte der Deformationsbestimmung am RVE werden nachfolgend für die Belastung in der Ebene jenes Kreisbogenträgers ausgearbeitet, der den Torus 2 abbildet. Dazu wird zunächst auf die Deformation in der Ebene des Viertelringes eingegangen:

Schritt 1 Das mechanische Ersatzsystem besteht aus einem Kreisbogenträger unter einer externen Belastung F_x , die als eine Kraft $F_x \cdot \cos(\beta_{RVE})$ in der Ebene des Viertelringes wirkt und am linken Rand A des Trägers angreift.

Durch die Symmetriebedingungen der Verformung im Einzelring muss am Rand A auch ein Schnittbiegemoment $M_{B,A}$ wirken. Am rechten Schnittufer B wirken ein Schnittbiegemoment $M_{B,B}$ als auch Schnittkraft F_B , die sich durch die Symmetriebedingungen zu Null ergibt. Die Kontaktpunkte zum Nachbarring wirken als Loslager, sodass nur Kräfte normal zum Bogenträger wirken.

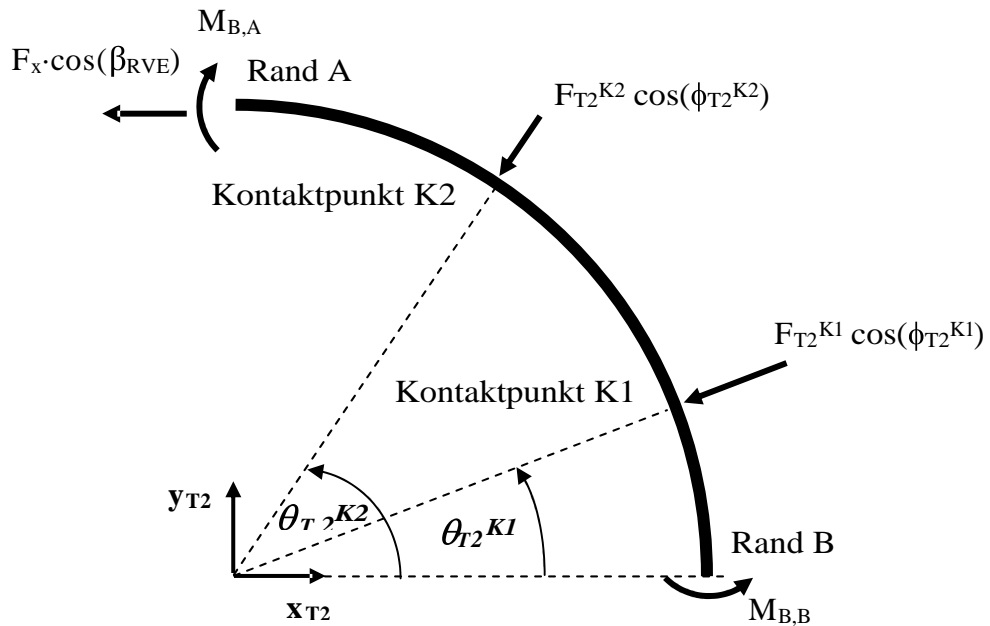
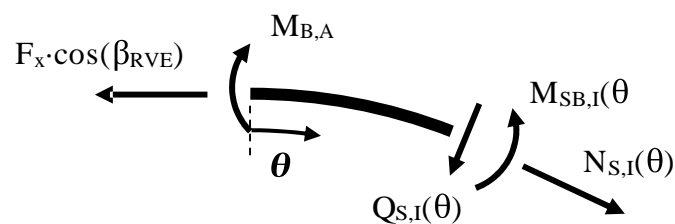


Abb. 4-5 Illustration von externen Lasten und Schnitt- wie Reaktionskräften in der Ebene des freigeschnittenen Kreisbogenträgers

Schritt 2 Die Ermittlung des Schnittkraftverlaufs am Kreisbogenträger erfolgt entsprechend den Kraftangriffspunkten abschnittsweise.

Abschnitt 1 $0 \leq \theta < (\pi/2 - \theta_{T2}^{K2})$



$$N_{S,I}(\theta) = F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \cos(\theta)$$

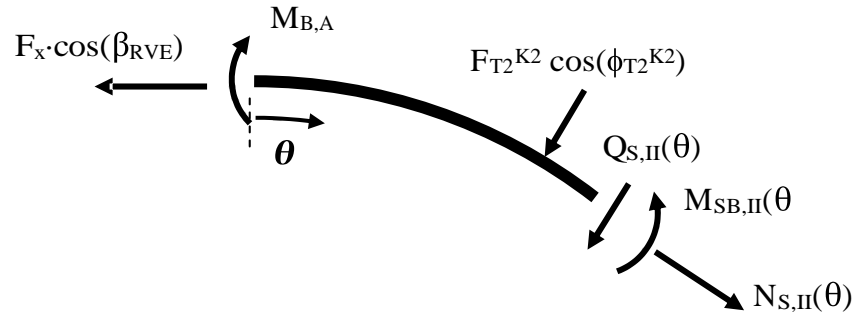
$$Q_{S,I}(\theta) = -F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \sin(\theta)$$

[Gl. 4-1]

$$M_{SB,I}(\theta) = M_{B,A} - F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta))$$

Abschnitt 2

$$(\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}) \leq \theta < (\pi/2 - \theta_{T2}^{K1})$$



$$N_{S,II}(\theta) = F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \cos(\theta) - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)$$

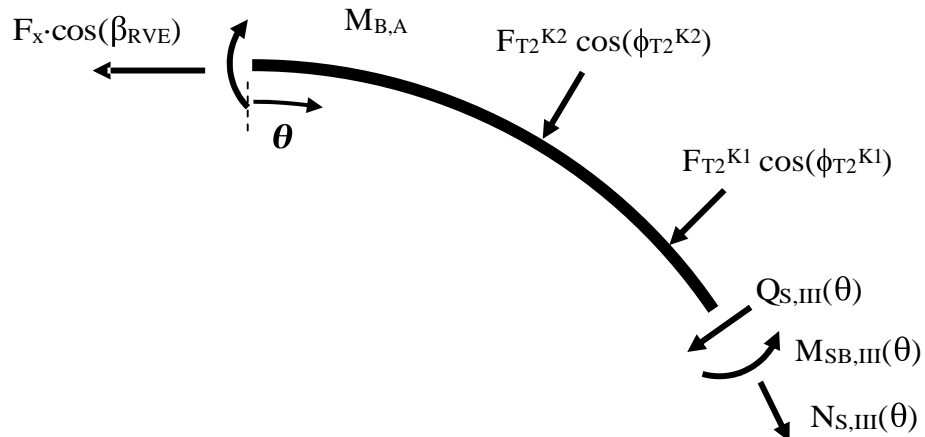
$$Q_{S,II}(\theta) = -F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \sin(\theta) - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)$$

$$M_{SB,II}(\theta) = M_{B,A} - F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot \cos(1 - \theta) - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)$$

[Gl. 4-2]

Abschnitt 3

$$(\pi/2 - \theta_{T2}^{K1}) \leq \theta \leq (\pi/2)$$



$$\begin{aligned}
N_{S,III}(\theta) &= F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \cos(\theta) - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right) - \\
&\quad - F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K1}\right)\right) \\
Q_{S,III}(\theta) &= -F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot \sin(\theta) - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right) - \\
&\quad - F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K1}\right)\right) \\
M_{SB,III}(\theta) &= M_{B,A} - F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot \cos(1 - \theta) - \\
&\quad - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right) - \\
&\quad - F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K1}\right)\right)
\end{aligned}$$

[Gl. 4-3]

Schritt 3 Unter Verwendung des Zweiten Satzes von Castigliano lässt sich die Deformation an der Stelle eines Lastpunktes ermitteln, indem die Formänderungsergänzungsenergie W des elastischen Systems nach der Belastung im Lastpunkt abgeleitet wird:

$$\frac{\partial W}{\partial F} = u = \sum_i \int \left(\frac{N_i(s)}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial N_i(s)}{\partial F} + \psi \cdot \frac{Q_i(s)}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_i(s)}{\partial F} + \frac{M_{Bi}(s)}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{Bi}(s)}{\partial F} \right) ds$$

mit $\psi=10/9$ für Kreisquerschnitte.

[Gl. 4-4]

Unter der Bedingung, dass an den Kontaktstellen zum Nachbarring eine Deformation in Kontaktkraftrichtung nicht möglich ist (d. h. $u^{Ki} = 0$), kann im Umkehrschluss die Kontaktkraft ermittelt werden. Ebenso ergibt sich die Verdrehung am freigeschnittenen Rand A des Viertelringes aufgrund der Ringsymmetrie zu Null. Damit wird aus dem Gleichungssystem der drei Ableitungen nach den unbekanntem Reaktionskräften die Kräfte an den Kontaktpunkten ermittelt.

$$\frac{\partial W}{\partial F_{T2}^{K1}} = u_{T2}^{K1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial F_{T2}^{K2}} = u_{T2}^{K2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial M_{B,A}} = \kappa_A = 0 \quad .$$

[Gl. 4-5]

[Gl. 4-6] zeigt exemplarisch die Ableitung nach der Kontaktkraft F^{K1} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_{T2}^{K1}} = u_{T2}^{K1} = 0 = & \\ = \int_0^{\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}} & \left(\frac{N_{S,I}}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial N_{S,I}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{\psi \cdot Q_{S,I}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,I}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{M_{SB,I}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,I}}{\partial F_{T2}^{K1}} \right) \cdot R \, d\theta + \\ + \int_{\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}}^{\pi/2 - \theta_{T2}^{K1}} & \left(\frac{N_{S,II}}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial N_{S,II}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{\psi \cdot Q_{S,II}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,II}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{M_{SB,II}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,II}}{\partial F_{T2}^{K1}} \right) \cdot R \, d\theta + \\ + \int_{\pi/2 - \theta_{T2}^{K1}}^{\pi/2} & \left(\frac{N_{S,III}}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial N_{S,III}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{\psi \cdot Q_{S,III}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,III}}{\partial F_{T2}^{K1}} + \frac{M_{SB,III}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,III}}{\partial F_{T2}^{K1}} \right) \cdot R \, d\theta \end{aligned}$$

[Gl. 4-6]

Für die verschiedenen Geflechtsgrößen ergibt sich durch die verschiedenen Kontaktpunktparameter auch eine individuelle Verteilung der Kontaktkräfte. [Tab. 4-1] listet die Verhältnisse des Betrages der Kontaktkräfte zur externen, in der Ringebene wirkenden Kraft $F_x \cdot \cos(\beta_{RVE})$ auf.

Nr.	$\frac{F_{T2}^{K1}}{F_x \cdot \cos(\beta_{RVE})}$	$\frac{F_{T2}^{K2}}{F_x \cdot \cos(\beta_{RVE})}$
G1	1,0095	1,7011
G2	0,8127	2,0467
G3	0,9167	1,9995
G4	0,5631	3,0083
G5	0,7807	2,7260
G6	0,7669	2,2326
G7	0,8790	1,7690
G8	0,8918	1,5432
G9	0,5605	2,7386
G10	0,9699	2,6712

Tab. 4-1 Kontaktkraftverteilung am Einzelring unter axialer Zugbelastung

Schritt 4 Mit der Anwendung des Zweiten Satzes von Castigliano und dem Einsetzen der in [Tab. 4-1] aufgeführten Kontaktkräfte wird am Rand A des Viertelringes die axiale Randverschiebung $u_{x,A}$ bestimmt:

$$u_{x,A} = \frac{\partial W}{\partial (F_x \cdot \cos(\beta_{RVE}))} \quad . \quad [Gl. 4-7]$$

Ein analoges Vorgehen wird für die Belastung des Kreisbogenträgers senkrecht zu seiner Ebene angewendet. Da durch die Betrachtung der Kreisbogenebene die Kontaktkräfte schon ermittelt wurden, können die Schritte 1 bis 3 für die Belastung senkrecht zur Kreisbogenebene übersprungen werden.

Schritt 4 Die Verschiebung des Randes A aufgrund einer senkrecht wirkenden Kraftkomponente $F_x \cdot \sin(\beta_{RVE})$ wird durch die Ableitung der Formänderungsergänzungsenergie nach dieser Kraft ermittelt:

$$u_{z,A} = \frac{\partial W}{\partial (F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} \quad . \quad [Gl. 4-8]$$

Der dazu nötige Schnittkraftverlauf wird an einem freigeschnittenen mechanischen Ersatzsystem ermittelt, welches die Kraftbestandteile senkrecht zur Ebene des Kreisbogenträgers enthält (siehe [Abb. 4-6]).

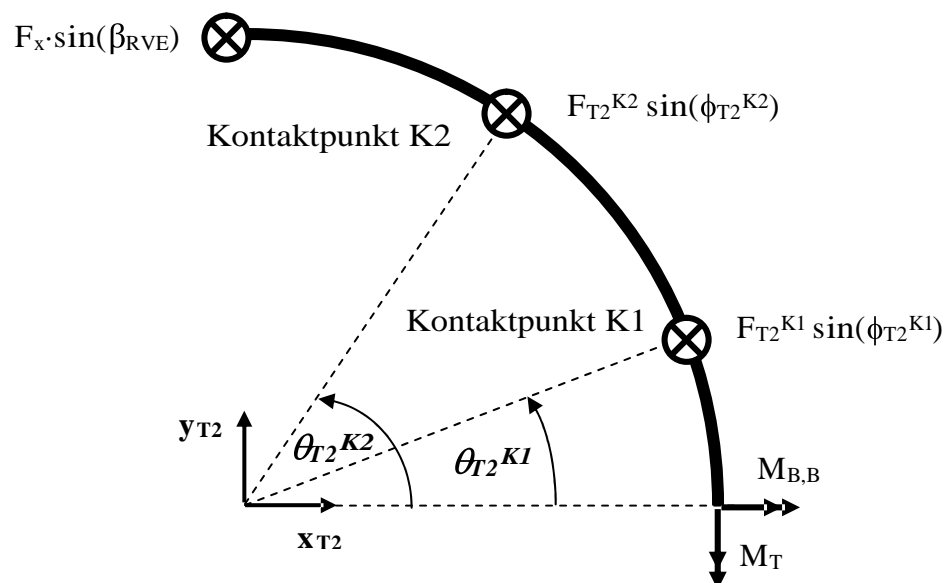
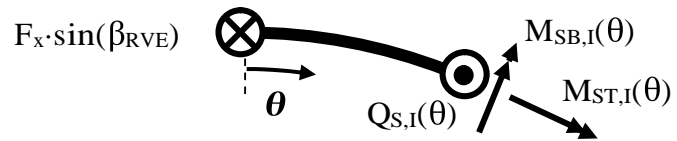


Abb. 4-6 Illustration von externen Lasten und Schnitt- wie Reaktionskräften senkrecht zur Ebene des Kreisbogenträgers

Abschnitt 1

$$0 \leq \theta < (\pi/2 - \theta_{T2}^{K2})$$



$$Q_{S,I}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE})$$

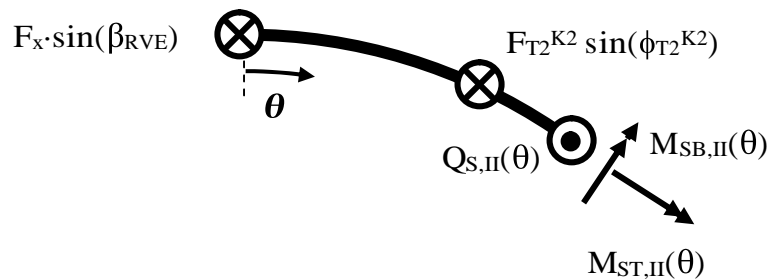
$$M_{SB,I}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot \sin(\theta)$$

[Gl. 4-9]

$$M_{ST,I}(\theta) = -F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta))$$

Abschnitt 2

$$(\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}) \leq \theta < (\pi/2 - \theta_{T2}^{K1})$$

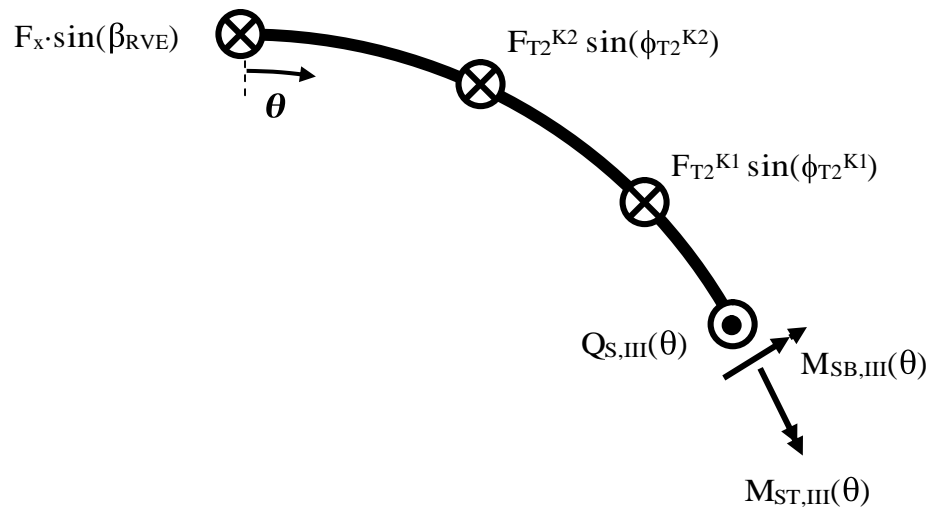


$$Q_{S,II}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) + F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2})$$

$$M_{SB,II}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot \sin(\theta) + \\ + F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)$$

$$M_{ST,II}(\theta) = -F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta)) - \\ - F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \left(1 - \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)\right)$$

[Gl. 4-10]



$$Q_{S,III}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) + F_{T2}^{K1} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K1}) + F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2})$$

$$M_{SB,II}(\theta) = F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot \sin(\theta) +$$

$$+ F_{T2}^{K1} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K1}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K1}\right)\right) +$$

$$+ F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)$$

$$M_{ST,II}(\theta) = -F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}) \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta)) -$$

$$- F_{T2}^{K1} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K1}) \cdot R \cdot \left(1 - \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K1}\right)\right)\right) -$$

$$- F_{T2}^{K2} \cdot \sin(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \left(1 - \cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{T2}^{K2}\right)\right)\right)$$

[Gl. 4-11]

Durch Einsetzen dieser Schnittkraft- und Schnittmomentenverläufe wird die Absenkung des Kraftangriffspunktes ermittelt:

$$\begin{aligned}
u_{z,A} &= \frac{\partial W}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} = \\
&= \int_0^{\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}} \left(\frac{\psi \cdot Q_{S,I}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,I}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \frac{M_{SB,I}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,I}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_{ST,I}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{ST,I}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} \right) \cdot R d\theta + \\
&+ \int_{\pi/2 - \theta_{T2}^{K2}}^{\pi/2 - \theta_{T2}^{K1}} \left(\frac{\psi \cdot Q_{S,II}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,II}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \frac{M_{SB,II}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,II}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_{ST,II}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{ST,II}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} \right) \cdot R d\theta + \\
&+ \int_{\pi/2 - \theta_{T2}^{K1}}^{\pi/2} \left(\frac{\psi \cdot Q_{S,III}}{G \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{S,III}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \frac{M_{SB,III}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{SB,III}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_{ST,III}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{ST,III}}{\partial(F_x \cdot \sin(\beta_{RVE}))} \right) \cdot R d\theta.
\end{aligned}$$

[Gl. 4-12]

Schritt 5 Aus den Betrachtungen zur Deformation in der Kreisbogenebene und senkrecht zu dieser Ebene ergibt sich eine Gesamtdeformation in axialer Richtung des RVE am Rand A:

$$u_{x,RVE} = \sqrt{(u_{x,A})^2 + (u_{z,A})^2} \quad . \quad [Gl. 4-13]$$

Der Bezug dieser Längenänderung auf die axiale Anfangslänge des RVE ergibt die Axialverzerrung des RVE. Da sich die bisherige Betrachtung auf den separierten Einzelring bezogen hat, muss dessen Axialdeformation innerhalb des RVE verdoppelt werden:

$$\varepsilon_{x,RVE} = \frac{\Delta l_{x,RVE}}{l_{x,RVE}} = \frac{2 \cdot u_{x,RVE}}{C5} \quad . \quad [Gl. 4-14]$$

Beim Vergleich der Deformationsanteile wird deutlich, dass die Verformung $u_{z,A}$ senkrecht zur Ringebene die ebene Verformung $u_{x,A}$ um bis zu einer Größenordnung übersteigt. Dies folgt aus dem dominanten Effekt der Überlagerung von Biege- und Torsionsmomenten beim senkrechten Belastungsanteil.

Da mit steigender Ringdrahtstärke die Trägheitsmomente der Biege- und Torsionsquerschnittsfläche mit der vierten Potenz ansteigen, wird auch die Axialdeformation und somit Axialverzerrung des RVE entsprechend stark behindert.

Diesem Effekt steht der größere Verschränkungswinkel der Einzelringe gegenüber, welcher sich mit größerer Ringdrahtstärke einstellt. Durch die Wirkung eines größeren Verschränkungswinkels über dessen Sinusbeziehung kann dieser den Effekt der größeren Flächenmomente nicht aufwiegen.

Schritt 6 Zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls in axialer Richtung des RVE wird eine Einheitsflächenlast auf den axialen Randbereich des RVE aufgebracht. Entsprechend der Größe dieser Querschnittsfläche A_x stellt sich eine Kraft in der Mittelebene des RVE ein, welche eine Deformation der Einzelringe und damit die Axialverzerrung des RVE bewirkt.

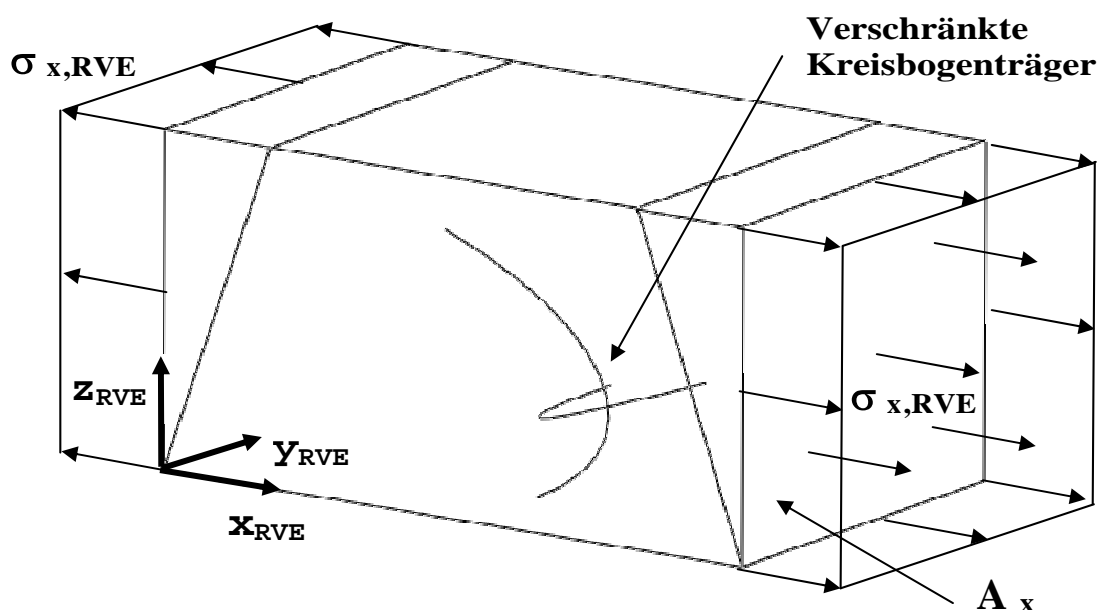


Abb. 4-7 Axialspannung auf der Flächenprojektion des RVE

Durch das Verhältnis von Axialspannung zu –verzerrung wird das axiale Elastizitätsmodul ermittelt:

$$E_{x,RVE} = \frac{\sigma_{x,RVE}}{\varepsilon_{x,RVE}} \quad [Gl. 4-15]$$

[Tab. 4-2] stellt für die unterschiedlichen Ringflechtsgrößen die bestimmenden Parameter für das axiale Elastizitätsmodul zusammen.

Nr.	A _x [10 ⁻⁶ m ²]	σ _{x,RVE} [10 ⁶ Pa]	I _{x,RVE} [10 ⁻³ m]	ΔI _{x,RVE} [10 ⁻⁶ m]	ε _{x,RVE} [10 ⁻³]	E _{x,RVE} [10 ⁶ Pa]
G1	3,516	1	1,420	2,327	1,639	610
G2	3,992	1	1,880	5,352	2,847	351
G3	4,442	1	1,900	7,109	3,742	267
G4	10,273	1	4,120	88,760	21,544	46
G5	11,030	1	3,820	56,026	14,667	68
G6	11,764	1	3,540	18,233	5,150	194
G7	12,837	1	2,940	3,202	1,089	918
G8	13,513	1	2,660	0,993	0,373	2677
G9	32,400	1	6,400	88,083	13,763	72
G10	33,297	1	6,260	90,056	14,386	69

Tab. 4-2 Parameter zur Bestimmung des axialen Elastizitätsmoduls am RVE

Die grafische Auswertung der ermittelten axialen Elastizitätsmodule verdeutlicht die Abhängigkeit von den Größenverhältnissen der Einzelringe. Eine Interpolation zwischen den Datenpunkten führt auf funktionale Approximationen der Form:

$$E_{x,RVE} = 3,4 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{D}{t}\right)^{-3,404} \cdot 10^6 Pa \quad [Gl. 4-16]$$

bzw.

$$E_{x,RVE} = 3,1 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{D}{t}\right)^{-6,528} \cdot 10^6 Pa \quad [Gl. 4-17]$$

Beide Gleichungen weisen eine hohe Übereinstimmung bei Ringgrößenverhältnissen $D/t > 8,5$ auf. Kleinere Verhältnisse weisen auf die gegensätzliche Wirkung der Parameter D und t :

- Relativ große Ringdrahtstärken t bewirken eine Erhöhung der Widerstandsmomente gegen Biegung und Torsion der Kreisbogenträger. Die verringerte Deformation resultiert in geringeren Verzerrungen des RVE und damit höheren Elastizitätsmodulen.
- Relative kleine Ringdurchmesser D erhöhen den Winkel der Verschränkung zwischen den Kreisbogenträgern. Dies führt zu einer Dominanz des Deformationsanteils senkrecht zur Kreisbogenebene, woraus eine entsprechend hohe axiale Verzerrung des RVE und das geringe Elastizitätsmodul des RVE resultieren.

Damit sind die Approximationen nach [Gl. 4-16] und [Gl. 4-17] für eine erste Abschätzung des Elastizitätsmoduls geeignet, ersetzen aber nicht eine individuelle Betrachtung des elastischen Verhaltens des RVE.

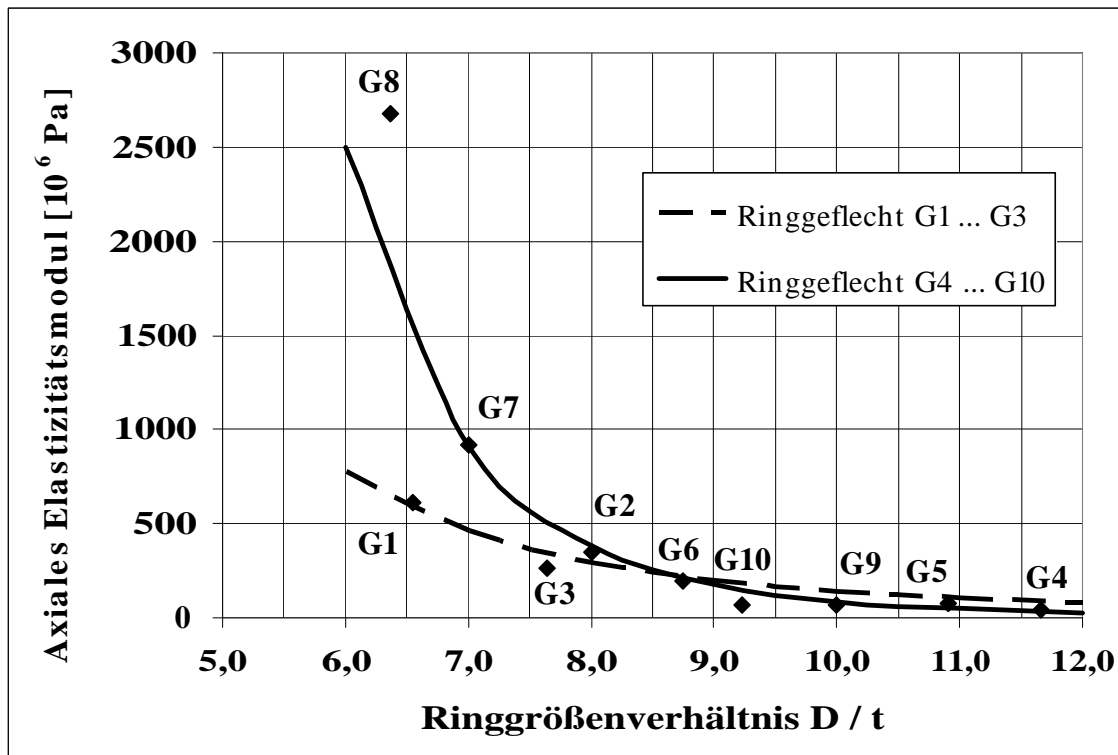


Abb. 4-8 Abhängigkeit des axialen Elastizitätsmoduls $E_{x,RVE}$ des Ringgeflechts von den Größenverhältnissen der Einzelringe (Ringgröße G1 bis G10)

Neben einer Axialdeformation unter axialer Zugbelastung erlauben die Randbedingungen an den Viertelringen eines RVE eine Ovalisierung des Ringes derart, dass am Rand A zusätzlich eine Querdeformation $u_{y,A}$ in lateraler Richtung auftritt (siehe [Abb. 4-9]). Diese Deformation wird nur durch den Belastungsanteil $F_x \cdot \cos(\beta_{RVE})$ in der Kreisbogenebene ausgelöst. Die Kraftkomponente $F_x \cdot \sin(\beta_{RVE})$ senkrecht zu dieser Ebene trägt nicht zur Ringovalisierung bei.

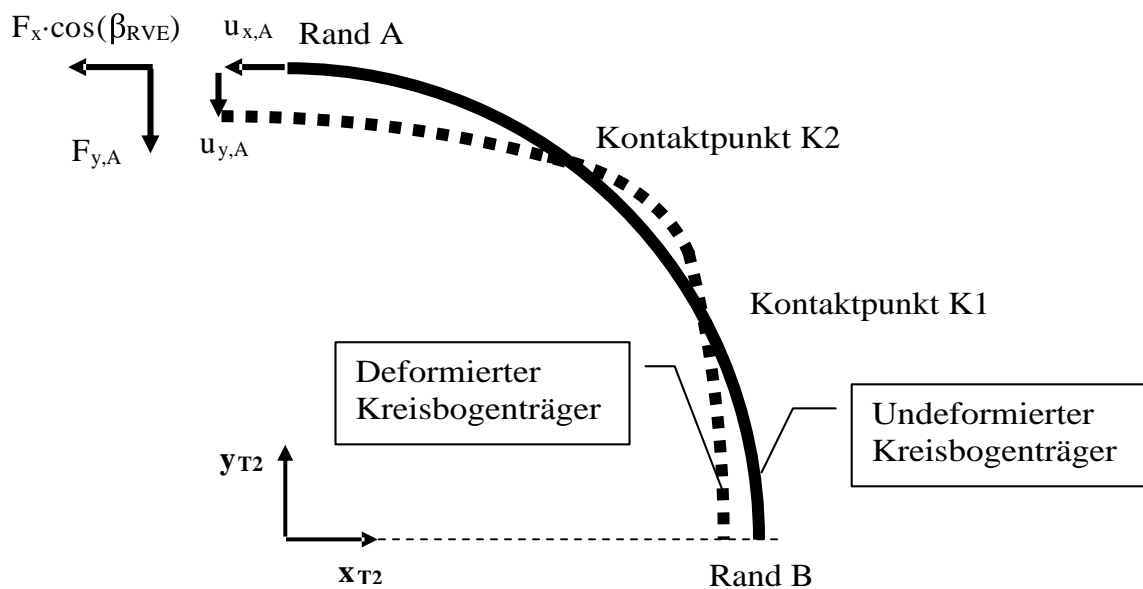


Abb. 4-9 Illustration der Querdeformation am Kreisbogenträger unter axialer Zugbelastung des RVE und virtueller Querbelastung

Zur Bestimmung der Querdeformation wird unter Verwendung des Zweiten Satzes von Castigliano eine virtuelle Kraft $F_{y,A} = 0$ eingeführt, welche am Rand A in Richtung der Deformation wirkt. Die ebenen Schnittkraft- und Schnittbiegemomentverläufe nach [Gl. 4-1] bis [Gl. 4-3] werden um den Anteil dieser virtuellen Kraft erweitert. Die Ableitung der Formänderungsergänzungsenergie nach dieser virtuellen Kraft, unter Verwendung der Schnittkraft- und Schnittbiegemomentverläufe, führt auf die Querdeformation in Richtung der Kraft $F_{y,A}$:

$$u_{y,A} = u_{y,RVE} = \frac{\partial W}{\partial F_{y,A}} \quad . \quad [Gl. 4-18]$$

Aus der Querdeformation wird die Verzerrung $\varepsilon_{y,RVE}$ in lateraler Richtung ermittelt:

$$\varepsilon_{y,RVE} = \frac{u_{y,RVE}}{R} \quad . \quad [Gl. 4-19]$$

Damit folgt nach [Gl. 3-27] für die Querkontraktionszahl:

$$\nu_{xy,RVE} = -\frac{\varepsilon_{y,RVE}}{\varepsilon_{x,RVE}} \quad . \quad [Gl. 4-20]$$

Die Anwendung dieser Beziehung zeigt für verschiedene Geflechtsgrößen Querkontraktionszahlen mit Werten deutlich kleiner als 0,1 (siehe [Tab. 4-3]).

Nr.	$\varepsilon_{x,RVE}$ [10 ⁻³]	$\varepsilon_{y,RVE}$ [10 ⁻³]	ν_{xy} [-]
G1	1,639	0,029	0,017
G2	2,847	0,012	0,004
G3	3,742	0,030	0,008
G4	21,544	0,375	0,017
G5	14,667	0,079	0,005
G6	5,151	0,013	0,002
G7	1,089	0,025	0,023
G8	0,373	0,023	0,060
G9	13,763	0,295	0,021
G10	14,386	0,006	0,001

Tab. 4-3 Querkontraktion am RVE für verschiedene Ringgeflechtsgrößen, ermittelt aus einer axialen Zugbelastung von $1 \cdot 10^6$ Pa

Die grafische Auswertung der in [Tab. 4-3] ermittelten Querkontraktionszahlen verdeutlicht diese Abhängigkeit von der Größe der Einzelringe. [Abb. 4-10] führt für die Querkontraktionszahl auf eine quadratische Approximation der Form:

$$\nu_{xy,RVE} = 0,0046 \cdot \left(\frac{D}{t}\right)^2 - 0,0859 \cdot \left(\frac{D}{t}\right) + 0,401 \quad . \quad [Gl. 4-21]$$

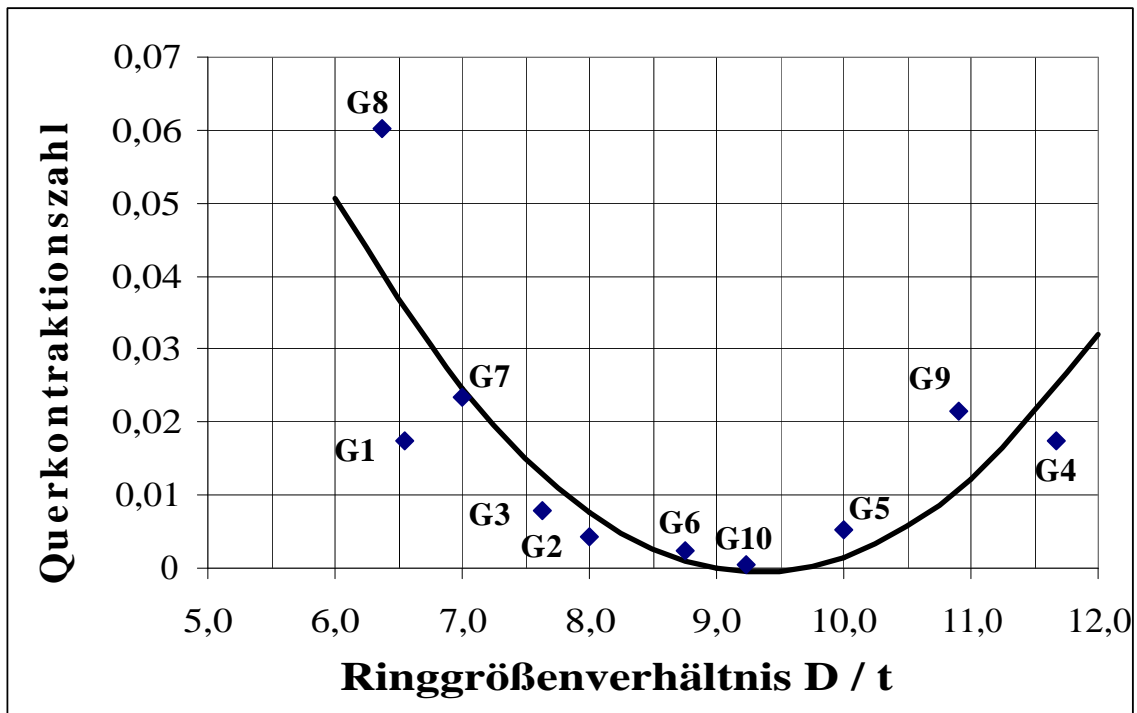


Abb. 4-10 Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_{xy} des Ringflechts von den Größenverhältnissen der Einzelringe (Ringgröße G1 bis G10)

Entsprechend [Abb. 4-10] ist die Querkontraktionszahl für Ringflechte nicht konstant sondern abhängig von den Größenverhältnissen der Einzelringe. Dabei weist die Approximationskurve einen Wendepunkt auf:

- Ansteigende Querkontraktionszahlen bei Größenverhältnissen $D/t < 9,27$ kennzeichnen Geflechtsgrößen, die nach [Abb. 4-8] auch hohe axiale Elastizitätsmodule aufweisen. Eine größere Ringdrahtstärke behindert Axial- wie Querdeformation gleichermaßen. Größere Ringdrahtstärken bewirken zusätzlich einen größeren Verschränkungswinkel, geringere Axialverzerrung und ein größeres axiales Elastizitätsmodul. Die Querdeformation bleibt vom Verschränkungswinkel unbeeinflusst. Die Querkontraktionszahl steigt als Verhältniswert der Verzerrungen somit bei geringerer Axialverzerrung an.
- Ansteigende Querkontraktionszahlen bei Größenverhältnissen $D/t > 9,27$ kennzeichnen Geflechtsgrößen mit geringerem Elastizitätsmodul.

Verantwortlich dafür ist die geringere Ringdrahtstärke mit ihrem Einfluss auf die Flächenträgheitsmomente. Der geringe Verschränkungswinkel behindert eine große Axialdeformation, so dass die Querdeformation in Verhältnis dazu ansteigt und zu höheren Querkontraktionszahlen führt.

4.1.2 Linear elastisches Verhalten unter lateraler Zugbelastung

Laterale Zugbelastung des Ringflechts bedeutet das Aufbringen einer externen Belastung quer zur Verschränkungsrichtung. Um diese Belastung übertragen zu können, müssen die Einzelringe des Geflechts in Kontakt miteinander stehen, was die Existenz einer axialen Vorspannung voraussetzt. Die nachfolgenden Untersuchungen zum elastischen Verhalten in lateraler Richtung werden unter Annahme einer solchen Vorspannung durchgeführt. Die Höhe der Vorspannung soll dabei keine axiale Deformation bewirken.

Um das elastische Verhalten des Ringflechts zu ermitteln, wird ein Vorgehen gewählt, wie es auch bei der Betrachtung des Axialverhaltens angewendet wurde.

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass eine Lateralbelastung in der Ebene der Einzelringe des RVE wirkt. Kraftkomponenten senkrecht zur Ringebene, bedingt durch die Vektoren der Kontaktkräfte zwischen den Einzelringen, werden nicht berücksichtigt, da sie keinen Einfluss auf die Lateralverformung haben.

Schritt 1 Das mechanische Ersatzsystem besteht aus einem Kreisbogenträger unter einer externen Belastung F_y , die Rand B des Trägers angreift.

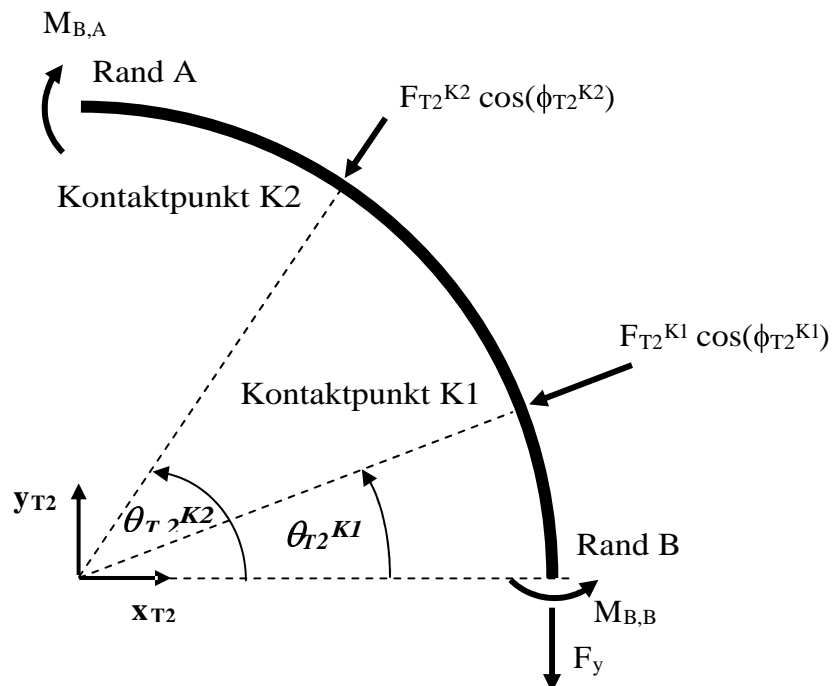


Abb. 4-11 Illustration von externen Lasten und Schnitt- wie Reaktionskräften in der Ebene des freigeschnittenen Kreisbogenträgers

Durch die Symmetriebedingungen der Verformung im Einzelring muss am Rand B auch ein Schnittbiegemoment $M_{B,B}$ wirken. Am linken Schnittufer A wirken ein Schnittbiegemoment $M_{B,A}$ als auch Schnittkraft F_A , die sich durch die Symmetriebedingungen zu Null ergibt.

Die Kontaktpunkte wirken als Loslager, sodass nur Kräfte normal zum Bogenträger wirken.

Schritt 2 Die Ermittlung des Schnittkraftverlaufs am Kreisbogenträger erfolgt entsprechend den Kraftangriffspunkten abschnittsweise. Die führt auf Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentverläufe analog zu [Gl. 4-1] bis [Gl. 4-3].

Abschnitt 1 $0 \leq \theta < (\theta_{T2}^{K1})$

$$\begin{aligned} N_{S,I}(\theta) &= F_y \cdot \cos(\theta) \\ Q_{S,I}(\theta) &= F_y \cdot \sin(\theta) \\ M_{SB,I}(\theta) &= F_y \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta)) - M_{B,B} \end{aligned} \quad [Gl. 4-22]$$

Abschnitt 2 $(\theta_{T2}^{K1}) \leq \theta < (\theta_{T2}^{K2})$

$$\begin{aligned} N_{S,II}(\theta) &= F_y \cdot \cos(\theta) - F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K1}) \\ Q_{S,II}(\theta) &= F_y \cdot \sin(\theta) + F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \cos(\theta - \theta_{T2}^{K1}) \\ M_{SB,II}(\theta) &= F_y \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta)) + F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot R \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K1}) - M_{B,B} \end{aligned} \quad [Gl. 4-23]$$

Abschnitt 3 $(\theta_{T2}^{K2}) \leq \theta \leq (\pi/2)$

$$\begin{aligned} N_{S,III}(\theta) &= F_y \cdot \cos(\theta) - F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K1}) - \\ &\quad - F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K2}) \\ Q_{S,III}(\theta) &= F_y \cdot \sin(\theta) + F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot \cos(\theta - \theta_{T2}^{K1}) + \\ &\quad + F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot \cos(\theta - \theta_{T2}^{K2}) \\ M_{SB,III}(\theta) &= F_y \cdot R \cdot (1 - \cos(\theta)) + F_{T2}^{K1} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K1}) \cdot R \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K1}) + \\ &\quad + F_{T2}^{K2} \cdot \cos(\phi_{T2}^{K2}) \cdot R \cdot \sin(\theta - \theta_{T2}^{K2}) - M_{B,B} \end{aligned} \quad [Gl. 4-24]$$

Schritt 3 Mit Verwendung des Zweiten Satzes von Castigliano und unter der Bedingung, dass an den Kontaktstellen eine Deformation in Kontaktkraftrichtung nicht möglich ist (d. h. $u^{K_i} = 0$), werden die Kräfte an den Kontaktpunkten ermittelt. Ebenso ergibt sich die Verdrehung am freigeschnittenen Rand B des Viertelringes aufgrund der Ringsymmetrie zu Null. Damit werden die Kräfte an den Kontaktpunkten aus dem Gleichungssystem der drei Ableitungen der Formänderungsergänzungsenergie W des elastischen Systems nach den unbekanntenen Reaktionskräften ermittelt:

$$\frac{\partial W}{\partial F_{T2}^{K1}} = u_{T2}^{K1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial F_{T2}^{K2}} = u_{T2}^{K2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial M_{B,B}} = \kappa_B = 0 \quad .$$

[Gl. 4-25]

Für die verschiedenen Geflechtsgrößen ergibt sich durch die verschiedenen Kontaktpunktparameter auch eine individuelle Verteilung der Kontaktkräfte. [Tab. 4-4] listet die Verhältnisse des Betrages der Kontaktkräfte zur Lateralkraft F_y auf.

Nr.	$\frac{F_{T2}^{K1}}{F_y}$	$\frac{F_{T2}^{K2}}{F_y}$
G1	0,9023	0,9832
G2	0,8446	0,8687
G3	0,8581	0,9618
G4	0,8382	0,7086
G5	0,8925	0,8470
G6	0,8342	0,8268
G7	0,8535	0,9003
G8	0,8694	0,8245
G9	0,8136	0,6923
G10	0,9456	0,9126

Tab. 4-4 Kontaktkraftverteilung am Einzelring in unter lateraler Zugbelastung

Schritt 4 Werden die Kontaktkräfte nach [Tab. 4-4] verwendet, erlaubt die Anwendung des Zweiten Satzes von Castigliano die Bestimmung der lateralen Randverschiebung $u_{y,B}$:

$$u_{y,B} = u_{y,RVE} = \frac{\partial W}{\partial F_y} \quad . \quad [Gl. 4-26]$$

Schritt 5 Der Bezug dieser Längenänderung auf die laterale Anfangslänge des RVE ergibt die Lateralverzerrung des RVE. Da sich die bisherige Betrachtung auf den separierten Einzelring bezogen hat, muss dessen Lateraldeformation innerhalb des RVE verdoppelt werden:

$$\varepsilon_{y,RVE} = \frac{\Delta l_{y,RVE}}{l_{y,RVE}} = \frac{2 \cdot u_{y,RVE}}{\frac{D}{2}} \quad . \quad [Gl. 4-27]$$

Schritt 6 Zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls in lateraler Richtung des RVE wird eine Einheitsflächenlast auf den lateralen Randbereich des RVE aufgebracht. Entsprechend der Größe dieser Querschnittsfläche A_y stellt sich eine Kraft in der Mittelebene des RVE ein, welche eine Deformation der Einzelringe und damit die Lateralverzerrung des RVE bewirkt.

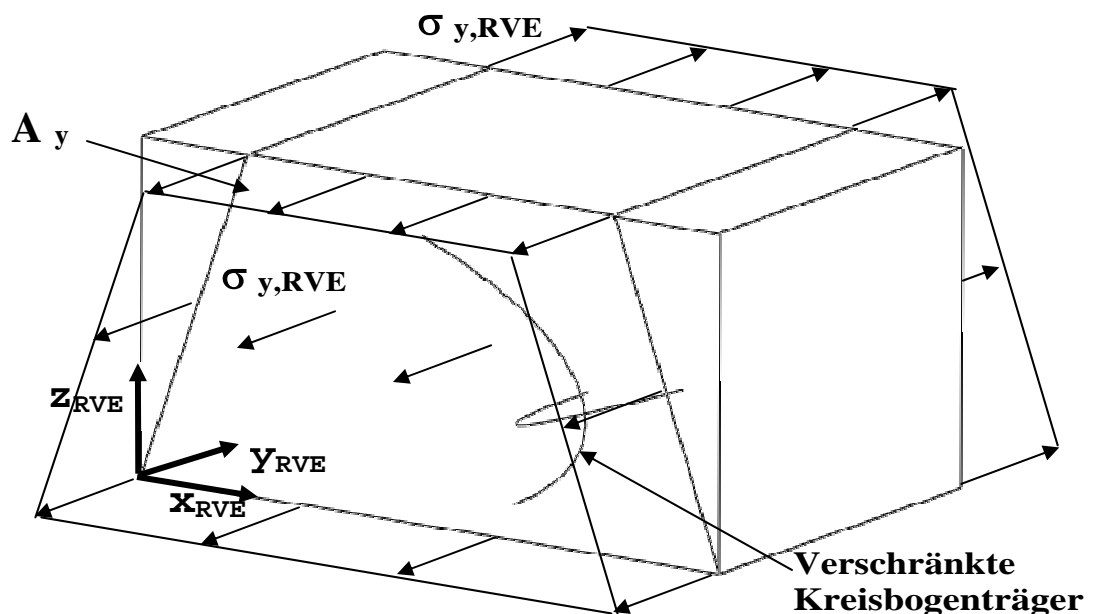


Abb. 4-12 Lateralspannung auf der Flächenprojektion des RVE

Durch das Verhältnis von Lateralspannung zu Lateralverzerrung wird das laterale Elastizitätsmodul ermittelt:

$$E_{y,RVE} = \frac{\sigma_{y,RVE}}{\varepsilon_{y,RVE}} \quad [Gl. 4-28]$$

[Tab. 4-5] stellt für die unterschiedlichen Ringflechtsgrößen die bestimmenden Parameter für das axiale Elastizitätsmodul zusammen.

Nr.	A_y [10^{-6} m^2]	$\sigma_{y,RVE}$ [10^6 Pa]	$I_{y,RVE}$ [10^{-3} m]	$\Delta l_{y,RVE}$ [10^{-6} m]	$\varepsilon_{y,RVE}$ [10^{-3}]	$E_{y,RVE}$ [10^6 Pa]
G1	2,774	1	1,800	0,381	0,211	4726
G2	3,752	1	2,000	0,732	0,366	2733
G3	4,020	1	2,100	0,697	0,332	3014
G4	12,093	1	3,500	4,958	1,417	706
G5	12,039	1	3,500	2,968	0,848	1179
G6	11,899	1	3,500	1,802	0,515	1942
G7	10,783	1	3,500	0,827	0,236	4231
G8	10,270	1	3,500	0,625	0,179	5601
G9	33,834	1	6,000	6,197	1,033	968
G10	34,740	1	6,000	4,064	0,677	1476

Tab. 4-5 Parameter zur Bestimmung des lateralen Elastizitätsmoduls am RVE

Die grafische Auswertung der ermittelten lateralen Elastizitätsmodule verdeutlicht die Abhängigkeit von den Größenverhältnissen der Einzelringe. Eine Interpolation zwischen den Datenpunkten führt auf eine funktionale Approximation der Form:

$$E_{y,RVE} = 2,8 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{D}{t}\right)^{-3,3628} \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad [Gl. 4-29]$$

Die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der relativen Ringdrahtstärke folgt aus dem dominanten Deformationsanteilen aus dem Biegemoment und der Normalkraft. Ein stärkerer Ringdraht steht der Deformation entgegen und bewirkt ein erhöhtes Elastizitätsmodul.

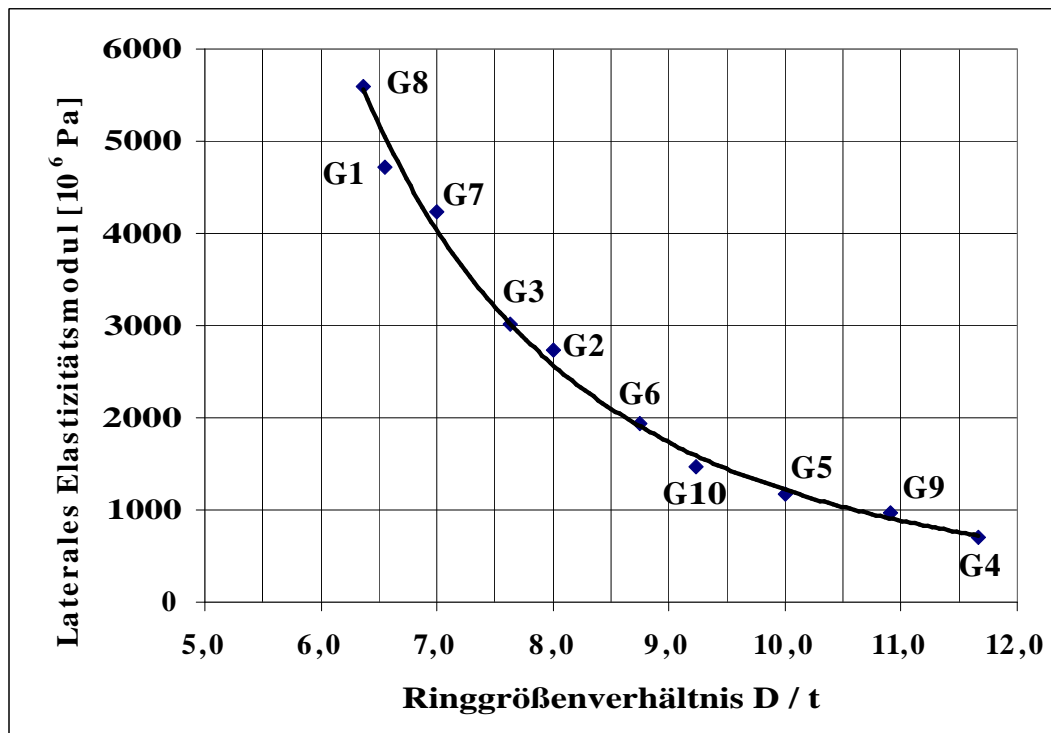


Abb. 4-12 Abhängigkeit des lateralen Elastizitätsmoduls $E_{y,RVE}$ des Ringgeflechts von den Größenverhältnissen der Einzelringe (Ringgröße G1 bis G10)

4.1.3 Linear elastisches Verhalten unter Schubbelastung

Die bisherigen Betrachtungen ebener Zugbelastung in axialer wie lateraler Richtung des RVE basierten auf der Annahme symmetrischer Lastverteilung. Dies ermöglichte die Reduktion der Betrachtung auf zwei verschränkte Viertelringe in der Abbildung als Kreisbogenträger.

Unter ebener Schubbelastung wird diese Lastverteilungssymmetrie aufgehoben. Vielmehr bildet sich ein diagonales Gitter von kraftübertragend geschlossenen Kontaktpunkten und geöffneten Kontaktpunkten (siehe [Abb. 4-13]).

Die Möglichkeit zur Schubübertragung bedarf der Voraussetzung einer axialen Vorspannung, um den Kontakt zwischen den Einzelringen des Geflechts zu gewährleisten. Eine Schubbelastung hebt diesen Kontakt teilweise auf und bewirkt ein Abgleiten der Ringe aneinander.

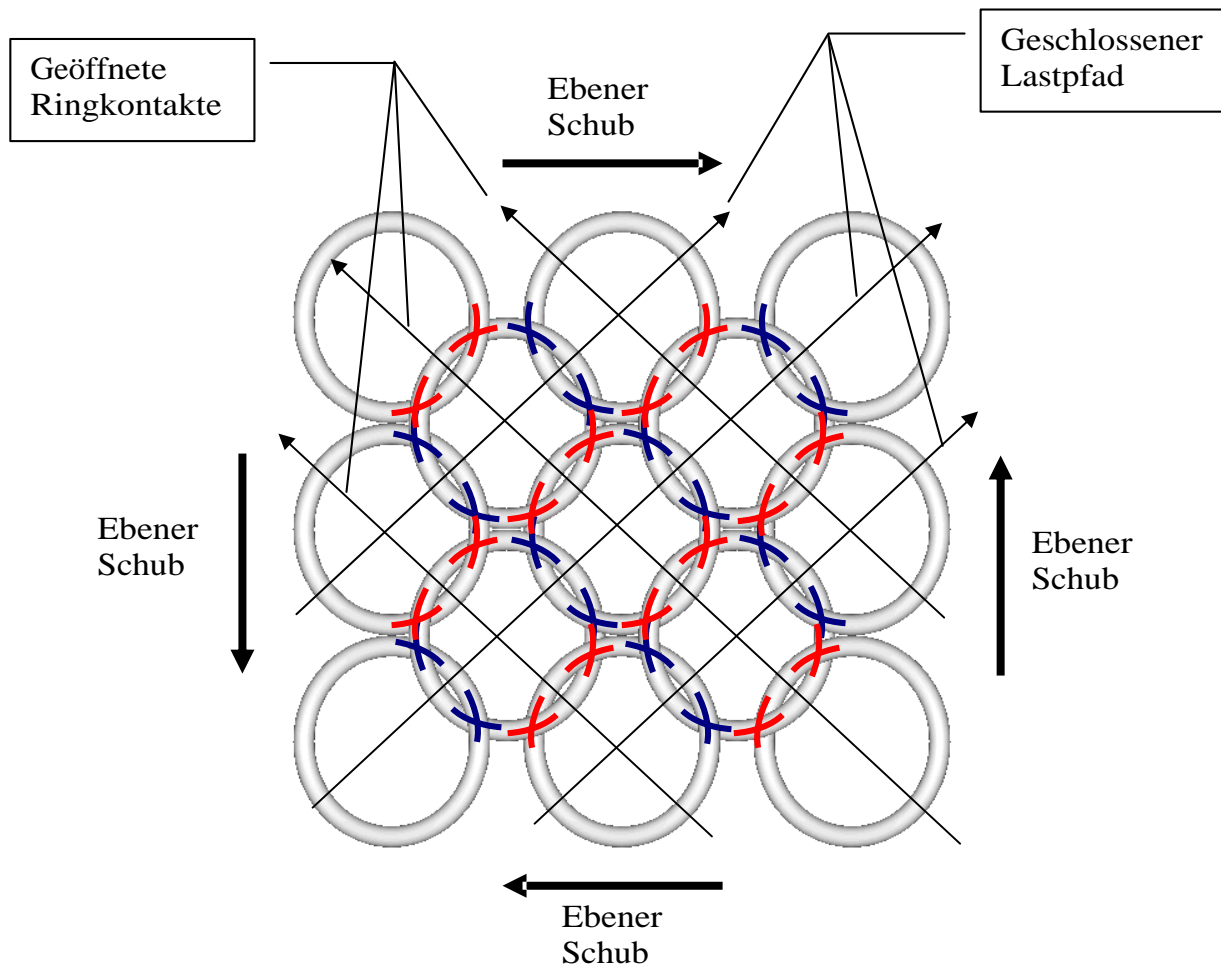


Abb. 4-13 Lastverteilung in Ringgeflecht bei ebener Schubbelastung
 (blau – Kontakt zwischen Einzelringen,
 rot – Kontakt zwischen Einzelringen ist aufgehoben)

Für die Fähigkeit, höhere Schubbelastungen übertragen zu können, ist demnach eine größere axiale Vorspannung nötig. Diese verhindert, dass sich benachbarte Ringe übereinander schieben und den Geflechtsverbund aufheben. Damit ist das Schubmodul nicht mehr allein abhängig vom Aufbau des Ringgeflechts sondern auch von der axialen Vorspannung.

Aufgrund des geringen elastischen Deformationsvermögens unter Axialbelastung sowie die geringe Vorspannung unter den in Kapitel 1 diskutierten Anwendungen wird die mögliche Schubübertragung als vernachlässigbar angesehen. Daher wird das Ringgeflecht als schubschlaff vereinbart.

4.2 Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur numerischen Bestimmung von Materialparametern

In Analogie zur analytischen Ermittlung der orthotropen, linear-elastischen Materialeigenschaften des Ringgeflechts, soll ein äquivalenter Ansatz numerisch verfolgt werden. Das Spannungs-Dehnungsverhalten des Ringgeflechts wird durch die Abbildung des RVE mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung des Softwarepaketes ABAQUS Version 6.6. simuliert.

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen ist das Vorgehen zur Modellbildung, der Berechnung und der Ergebnisauswertung äquivalent für unterschiedlichen Belastungsrichtungen. Variationen ergeben sich hierbei durch die Wahl der Belastungsrichtung und der kinematischen Randbedingungen. Nachfolgend wird exemplarisch der Ablauf der numerischen Berechnung und die Ergebnisauswertung für die axiale Zugbelastung der Einheitszelle dargestellt. Berücksichtigt werden dabei die translatorische und rotatorische Bewegung beim Abgleiten der Ringe in einem kinematischen Mehrkörpersystem sowie die elasto-plastische Deformation der Einzelringe in der Einheitszelle.

4.2.1 Geometrische Modellbildung des RVE und Elementierung

Unter Verwendung der globalen Abmessungen der exemplarisch gewählten Ringgröße G9 mit

Ringaußendurchmesser 12,0 mm,

Ringdrahtdicke 1,1 mm

wird ein geometrisches Modell eines Viertelringes erstellt und unter Berücksichtigung der periodischen Symmetrie im Ringgeflecht in eine verschränkte Position zu einem weiteren Viertelring gestellt (siehe [**Abb. 4-14**]).

In ihrer Ausgangsposition besteht kein Kontakt zwischen den Viertelringen des so gebildeten RVE. Der laterale Abstand der Ringmittelpunkte beträgt die Hälfte der Ringaußendurchmesser, der axiale Abstand der Ringmittelpunkte bleibt zunächst

unbestimmt und wird in der Zugrichtung im Rahmen der Belastung dahin gehend variiert, dass die Viertelringe in eine Position der axialen Vorspannung gehen.

Dieses Modell wird für die Ringgeflechtgröße G9 aufgestellt, was einen direkten Ergebnisvergleich zur analytischen Betrachtung und einen direkten Bezug auf die praktische Verwendung der ermittelten Kennwerte erlaubt (vgl. [Bur 09]).

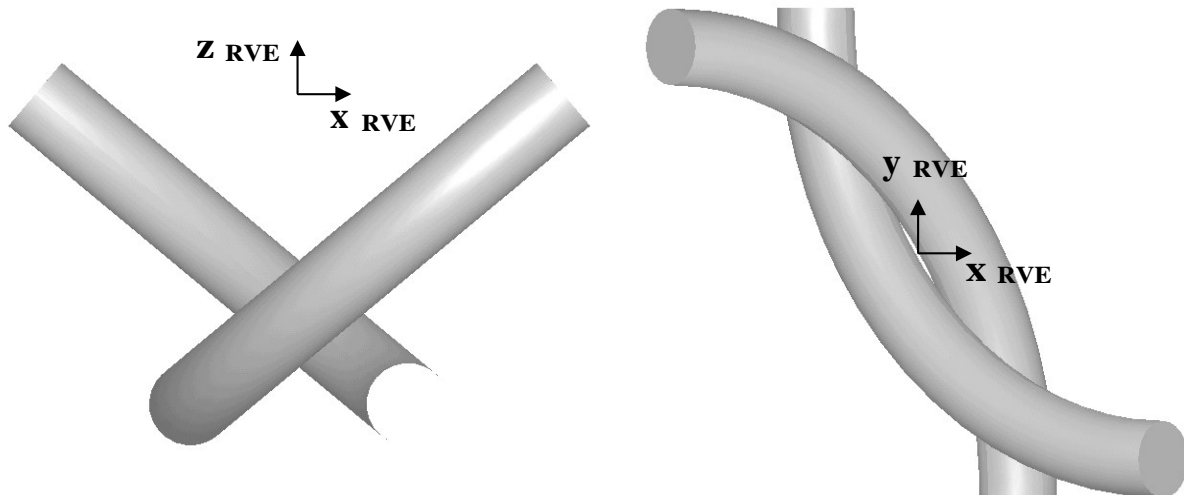


Abb. 4-14 Repräsentative Geometrie des RVE

Die Modellierung des RVE mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode muss das dominierende Zug- und Biegeverhalten der individuellen Geflechtsringe abbilden und quasi-statische Vorgänge unter elastischer Biegung bis hin zur Teilplastifizierung abbilden können. Zur Definition des Ringmaterials werden elastische und plastische Materialkennwerte für Federdrahtstahl Typ 1.4404 verwendet. Eine Auflistung und Diskussion der verwendeten Rohmaterialwerte erfolgte im Kapitel 2.1 .

Die Wahl des verwendeten Elementtyps sowie der Elementierungsdichte beeinflusst die Qualität der Berechnungsergebnisse entscheidend. Zusätzlich wird das Wirkprinzip des Geflechts durch den abgleitenden Kontakt zwischen den Ringen bestimmt. Um beide Mechanismen – Ringbiegung und Ringkontakt – berücksichtigen zu können, werden dreidimensionale Elemente vom ABAQUS-Typ C3D8I verwendet, die nachfolgende Eigenschaften aufweisen:

- Acht Elementknoten in Hexaeder-Anordnung,
- Lineare Funktion des elementaren Verschiebungsansatzes,
- Inkompatibler Verschiebungsmodus der Elementknoten.

Die Elementdichte des Modells ist darauf abgestimmt, sowohl die Steifigkeit der Viertelringe als auch die Kontaktbeziehung untereinander korrekt abbilden zu können. Entlang der Breitenkreise erfolgt eine äquidistante Elementierung mit einem Element pro Grad. Auf den Meridianschnitten erfolgt eine angepasste Elementierung auf der mit Kontakt beaufschlagten Ringinnenseite äquidistant mit einem Element pro 5° , während die freie Ringaußenseite äquidistant mit einem Element pro 15° elementiert ist (siehe [Abb. 4-15] und [Abb. 4-16]). Eine Diskussion der gewählten Elementierung erfolgt in [Appendix B].

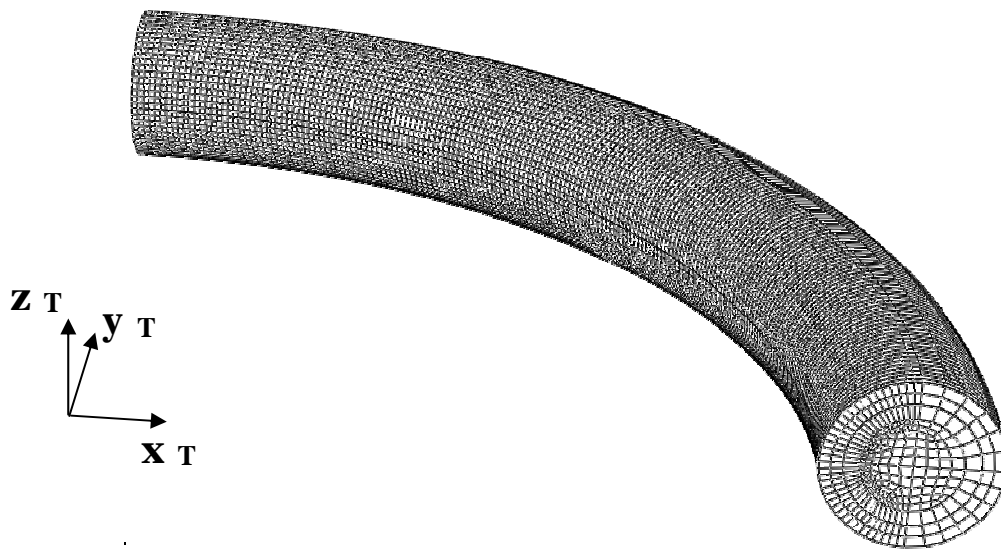


Abb. 4-15 Elementierung eines Viertelringes

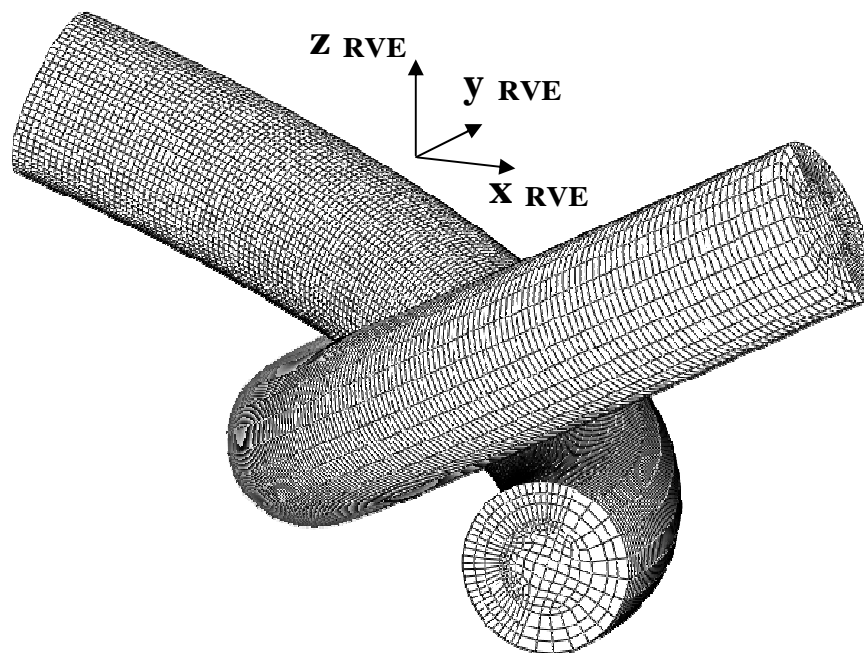


Abb. 4-16 Anordnung elementierter Viertelringe innerhalb des RVE

Die Kraftübertragung innerhalb des Ringgeflechts erfolgt über den Kontakt zwischen den jeweiligen Viertelringpaaren. Dazu werden zwischen den Viertelringen des RVE zwei Kontaktpaare gebildet, deren geometrische Position mit dem Abgleiten der Ringe variiert. Im Finite-Elemente-Modell wird ein allgemeiner Kontakt der Ringoberflächen definiert, in welchem die anfängliche Kontaktbeziehung zwischen zwei Elementknoten zugunsten anderer, näher liegender Elementknotenpaare aufgelöst werden kann (ABAQUS-Nomenklatur „Sliding Contact“). Da die Kraftübertragung von einem Viertelring auf den nächsten nur über die Kontaktknoten erfolgt, stellen sich bei der Simulation des Abgleitvorganges Sprünge in der Reaktionskraft und Singularitäten in der Verteilung der Kontaktflächenpressung ein. Je feiner demnach die Elementierung gewählt wird, desto fließender kann das Abgleiten und damit der Spannungs-Dehnungs-Verlauf numerisch abgebildet werden. Die gewählte Elementierung trägt dieser Anforderung nach einer feinen Auflösung der Kontaktformulierung Rechnung.

4.2.2 Randbedingungen

Die im Finite-Element-Modell verwendeten geometrischen und kinematischen Randbedingungen entsprechen den in Kapitel 4.1 Diskutierten. Um die Randbedingungen in das Modell einzuführen, werden zunächst Referenzpunkte in den Flächenmittelpunkten der Viertelringenden eingefügt, jeweils mit Referenz auf individuelle Koordinatensysteme (vgl. [Abb. 4-17]), welche parallel zum globalen Koordinatensystem liegen.

Diese Referenzpunkte werden in den drei translatorischen Freiheitsgraden über Starrkörperelemente mit den Enden der Viertelringe verbunden und stellen so ein Ebenbleiben der Querschnitte und damit den geometrisch symmetrischen Aufbau der Einheitszelle sicher.

Der Übergang zwischen Starrkörperelementen und Volumenelementen ist durch die singuläre Kraftübertragung von Spannungsüberhöhungen gekennzeichnet, welche in die Bewertung des Spannungszustandes im RVE nicht berücksichtigt werden.

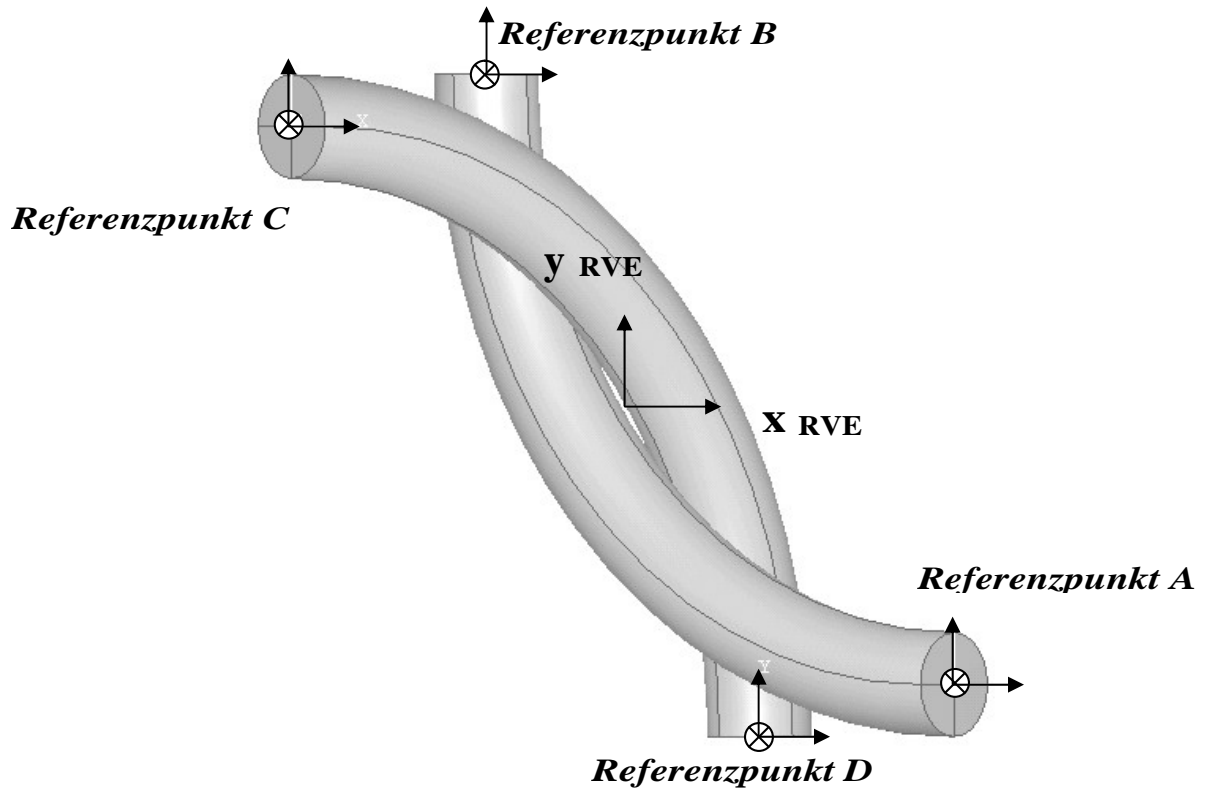


Abb. 4-17 Referenzpunkte an den Viertelringenden zur Definition der Randbedingungen

4.2.3 Analysemodus

Für die numerische Berechnung wird das Finite-Elemente-Paket ABAQUS in der Version 6.6 verwendet. Innerhalb dieses Paketes stehen sowohl implizite als auch explizite Lösungsmethoden zu Verfügung (siehe [ABA U2]). Der direkte Vergleich zwischen implizierter und expliziter Analyse hat im Bezug auf die Berechnung des Kraft-Weg-Verhaltens der Einheitszelle keinen deutlichen Vorteil einer der beiden Methoden gezeigt.

Für die Verwendung der impliziten Methode von ABAQUS/STANDARD stehen:

- Quasi-statische Aufbringung der Belastung,
- Keine Berücksichtigung von Massenträgheiten,
- Stabile Lösung innerhalb jedes Lösungsincrements.

Eine solche stabile Lösung ist zwingend nötig, woraus sich die Anforderung nach entsprechend feiner Elementierung ableitet. Dies wiederum beeinflusst die nötige Rechenzeit exponentiell mit der Anzahl der modellinternen Freiheitsgrade (vgl. [**Kno 92**]).

Dem gegenüber steht die Charakteristik des expliziten Lösungsalgorithmus, der von ABAQUS/EXPLICIT verwendet wird:

- Verwendung kleiner Inkremente der expliziten Analyse zur Vermeidung eines rechenintensiven, iterativen Lösungsprozesses führt zu einer stabilen Lösung,
- Vereinfachte Berücksichtigung der Kontaktformulierung,
- Vermeidung von lokalen Instabilitäten während der Kraftübertragung in Kontakt dominierten Problemen.

ABAQUS/EXPLICIT verwendet bei der Lösungsentwicklung immer den Ansatz über die allgemeine Bewegungsgleichung des mechanischen Systems, woraus sich die Abhängigkeit der Lösung vom Betrachtungszeitraum, von der Modellmasse und der Systemdämpfung erklärt. Die Abhängigkeit des Lösungsverlaufs der Reaktionskraft vom Betrachtungszeitraum ist in [**Abb. 4-18**] exemplarisch dargestellt. Aus diesem Vergleich werden folgende Schlüsse für die explizite Lösung gezogen:

- Bei zu geringem Betrachtungszeitraum (hier 0,01 Sekunden) nimmt der Einfluss der modellbezogenen Massenträgheit überproportional zu, was nicht dem quasi-statischen Charakter der expliziten Untersuchung entspricht. Bei größer werdendem Betrachtungszeitraum nimmt der Einfluss der Massenträgheit asymptotisch ab.
- Mit der Massenträgheit werden selbstinduzierte Massenkräfte im System übertragen, welche nicht dem realen, quasi-statischen System entsprechen.

Mit größerem Betrachtungszeitraum stellt sich eine stabilere explizite Formulierung der anfänglichen Kontaktdefinition ein. Die übertragene Kraft, abhängig von der aufbrachten Verformung und der Reaktion im Kontaktpunkt, wird durch den größeren Betrachtungszeitraum von numerischen Schwankungen bereinigt und nähert sich einem stabilen Wert an.

Obwohl jede explizite Lösung zum Ende des Betrachtungszeitraumes stabil wird, ist der Lösungsverlauf von Sprüngen im internen Kraftverlauf gekennzeichnet, was eine Auswertung der zu simulierenden Kraft-Weg-Kurve gerade im elastischen Bereich erschwert. Mit der Wahl eines hinreichend kleinen Betrachtungszeitraumes nimmt der Einfluss der Massenträgheit des Modells auf die Ergebnisqualität stetig zu, vergrößert aber auch den zeitlichen Berechnungsaufwand signifikant.

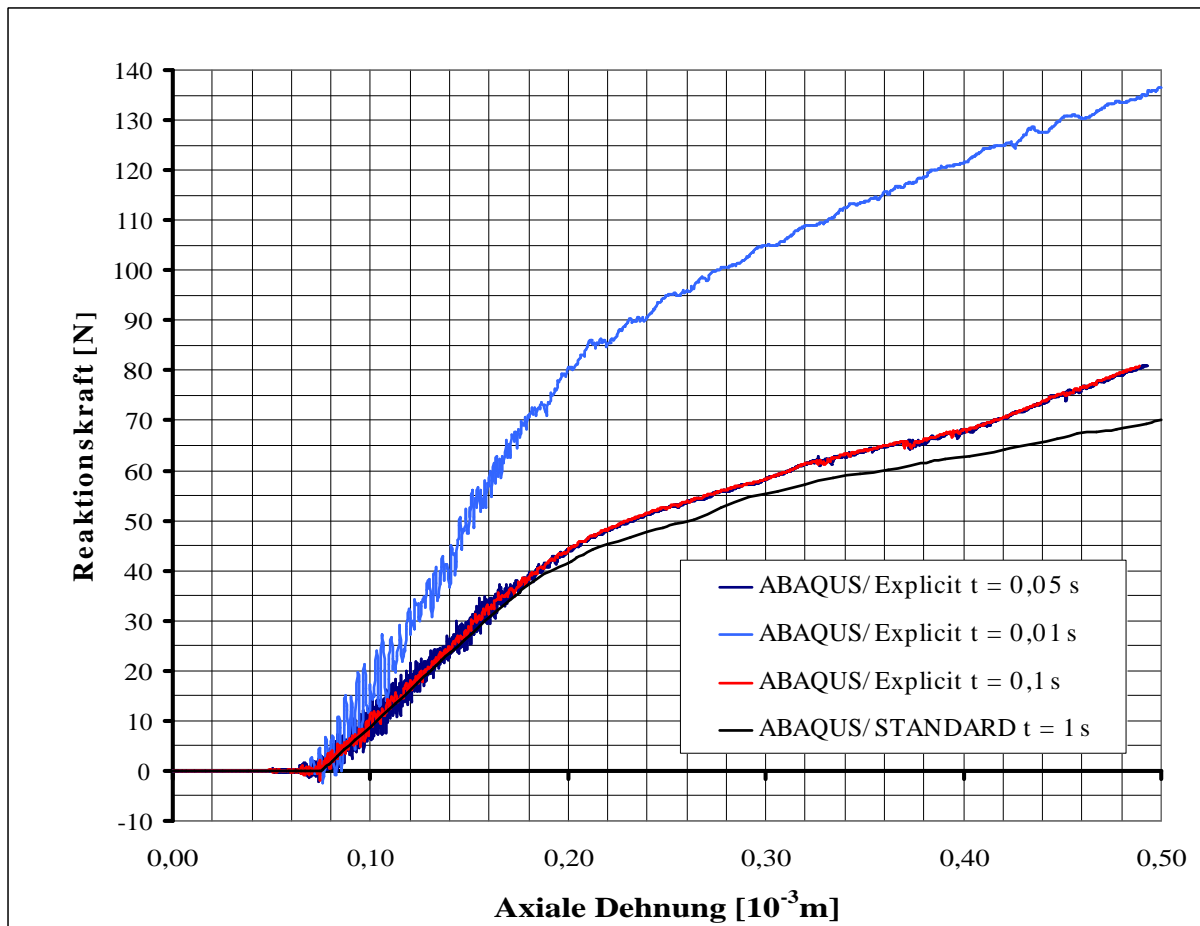


Abb. 4-18 Vergleich von Kraft-Weg-Kurven eines RVE in Abhängigkeit des ABAQUS-Lösungsalgorithmus

Mit der Wahl einer hinreichenden Inkrementierung bietet die implizite Lösung eine sichere und stabile Lösung und vermeidet die Unsicherheiten der expliziten Lösung hinsichtlich späterer Datenauswertung im elastischen Bereich. Die weiteren Untersuchungen des Kraft-Weg-Verhaltens werden dementsprechend implizit durchgeführt.

4.2.4 Ergebnisse der Finite-Elemente-Analyse

Basierend auf dem entwickelten Finite-Element-Modell wird das Deformationsverhalten des RVE als Systemantwort auf die entsprechende axiale Belastung ermittelt. Hierbei wird der linksseitige Ringquerschnitt am Referenzpunkt C axial fixiert, während die Axialverformung am rechtsseitigen Ringquerschnitt am Referenzpunkt A aufgebracht wird. Dabei wird, ausgehend von einer separierten Anfangsposition der Ringviertel, die Einheitszelle zunächst in eine gegenseitige Verschränkung bis hin zur Lastübertragung geführt. Im weiteren Verlauf verformt sich die Einheitszelle elastisch, bei weiterer Erhöhung der Belastung auch teilplastisch.

Über den gesamten Bereich der axialen Verformung des RVE wird die daraus resultierende Reaktionskraft an der axialen Randbedingung des RVE numerisch ermittelt. Das Verhältnis beider Parameter wird in der Kraft-Weg-Kurve nach [Abb. 4-19] dargestellt. Im Rahmen der Untersuchung liegt das Hauptaugenmerk auf dem linear elastischen Verformungsbereich. In [Abb. 4-20] ist der Verlauf der Deformation aufgrund einer axialen Zugbelastung inkrementell dokumentiert.

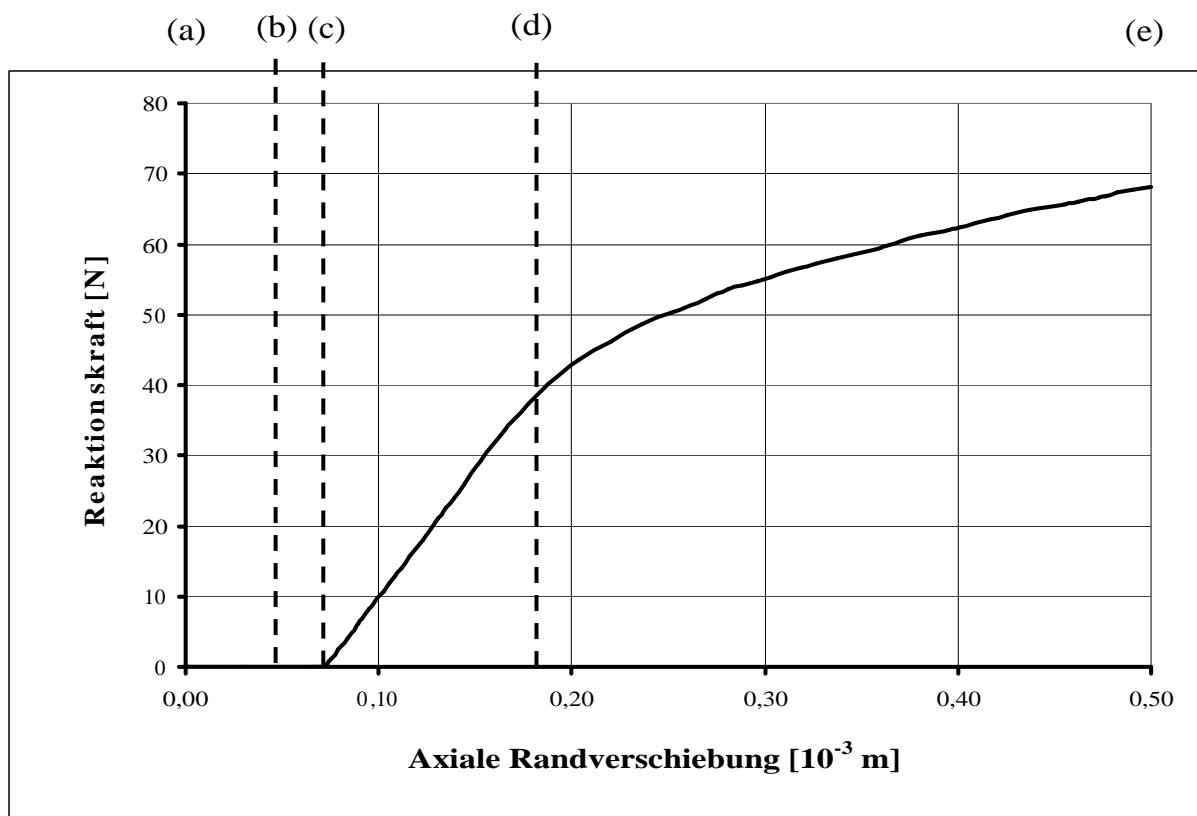
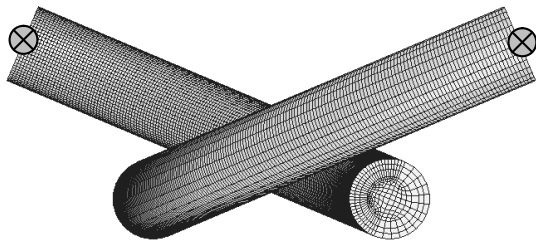


Abb. 4-19 Elastoplastische Kraft-Verschiebungs-Kurve des RVE unter Axiallast

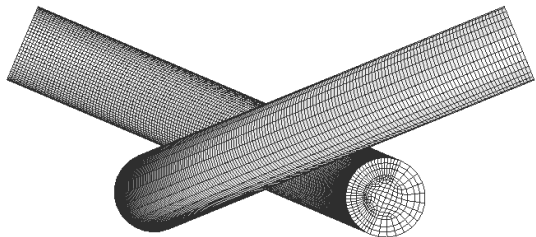
Position (a)

Referenzpunkt C

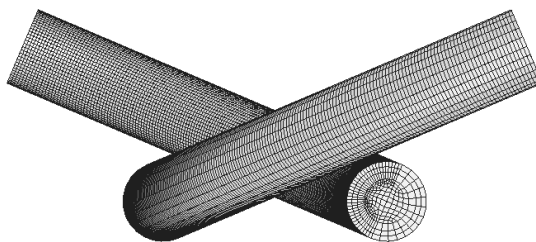
Referenzpunkt A



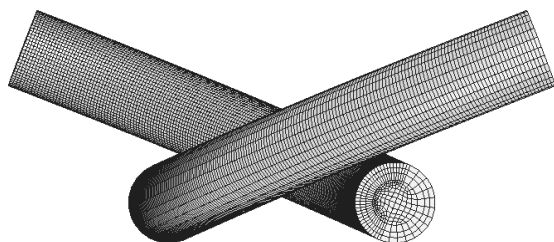
Position (b)



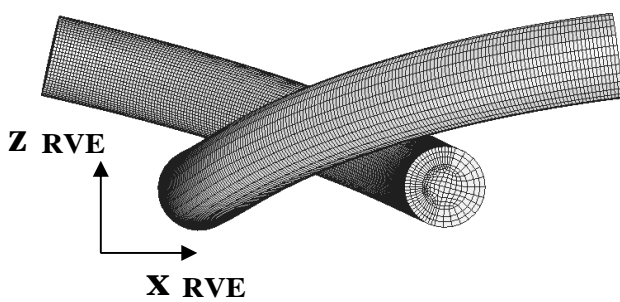
Position (c)



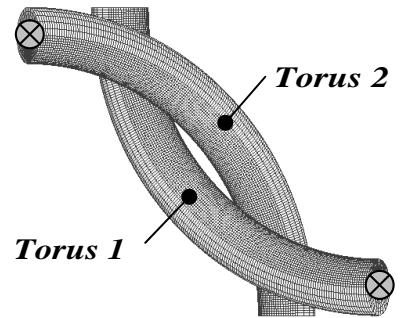
Position (d)



Position (e)



Referenzpunkt C



Referenzpunkt A

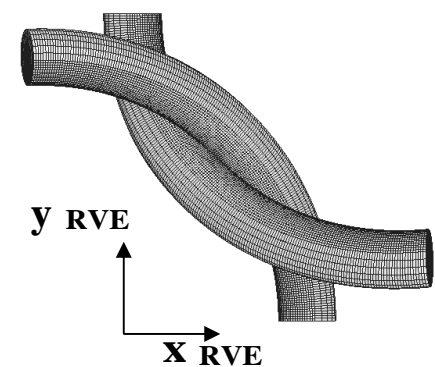
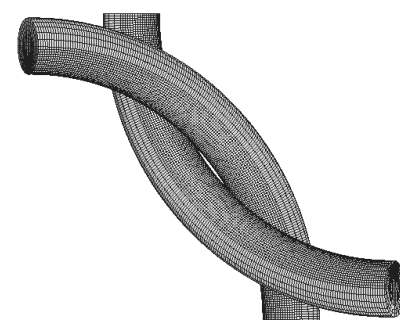
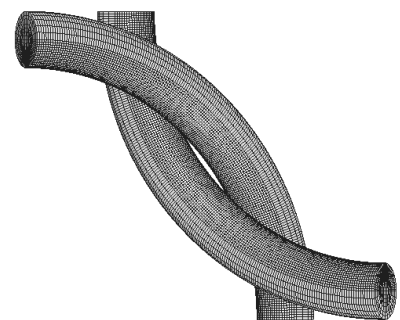
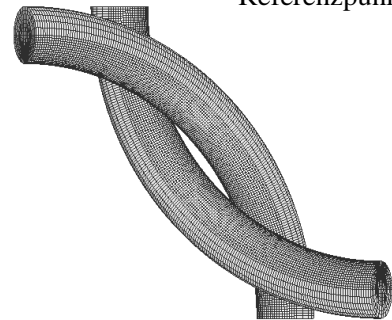


Abb. 4-20 Elastoplastische Verformung der Einheitszelle unter axialer Zuglast

Diese Lastverformung kann in folgende Abschnitte unterteilt werden:

- Position (a)

Beide Ringviertel befinden sich in verschränkter Anfangslage. Die axiale Position zueinander sowie der Verschränkungswinkel sind unbestimmt, die Ringviertel stehen nicht miteinander im Kontakt. In lateraler Richtung sind beide Ringviertel zentriert und symmetrisch fixiert.
- Abschnitt (a) \Rightarrow (b)

Am Referenzpunkt (A) wird linear eine axiale Randverschiebung aufgebracht, was zu einer geradlinigen, axialen Starrkörpertranslation von Torus 1 führt. Diese Bewegung bleibt bis zum ersten Ringkontakt [Position (b)] erhalten. Torus 2 verharrt dabei translatorisch und rotatorisch in seiner Position.
- Abschnitt (b) \Rightarrow (c)

Nach dem Erstkontakt wirken in den Kontaktpunkten Kraftkomponenten auf beide Ringviertel. Die Kraftwirkungslinien der Kontaktkräfte liegen nicht in den Ebenen der Einzelringe, woraus Rotationsmomente um die Ringquerachse resultieren.

Die Kontaktkräfte sind in lateraler Richtung durch die Symmetriebedingungen im Geflecht ausgeglichen, wodurch eine Rotation um die Axial- und Vertikalachse eliminiert werden. In axialer Richtung findet dieser Ausgleich nicht statt. Es wird eine Starrkörperrotation der Ringviertel angeregt, welche zu der weiterhin wirkenden Starrkörpertranslation zu superponieren ist. Die Starrkörperbewegung wird mit Erreichen einer vorgespannten Verschränkungslage beendet.
- Abschnitt (c) \Rightarrow (d)

Die Verschränkung ist durch eine Kraftübertragung über die Kontaktpunkte gekennzeichnet. Der direkte Vergleich der Kontaktpunkte aus analytischer und numerischer Betrachtung zeigt eine hohe Übereinstimmung, was die Validität des FE-Modells bestätigt.

Abweichungen der Kontaktpositionen werden durch die Diskretisierung des numerischen Modells bestimmt, haben im Kräftegleichgewicht der Einheitszelle aber einen untergeordneten Einfluss.

Bei Ringgröße G9 mit $D=12$ mm und $t=1,1$ mm ergibt sich für das RVE folgender Vergleich der Kontaktpunktposition:

	Analytisch (vgl. [Tab. 2-9])		Numerisch	
	Torus 1			
Parameter	θ_{T1}^{Ki}	ϕ_{T1}^{Ki}	θ_{T1}^{Ki}	ϕ_{T1}^{Ki}
Kontaktpunkt i=1	238,9°	255,0°	237,2°	250,0°
Kontaktpunkt i=2	163,1°	145,3°	163°	145,0°
Toleranz			$\pm 0,5^\circ$	$\pm 2,5^\circ$
	Torus 2			
Parameter	θ_{T2}^{Ki}	ϕ_{T2}^{Ki}	θ_{T2}^{Ki}	ϕ_{T2}^{Ki}
Kontaktpunkt i=1	16,9°	145,3°	17,0°	145,0°
Kontaktpunkt i=2	58,9°	255,0°	57,2°	250,0°
Toleranz			$\pm 0,5^\circ$	$\pm 2,5^\circ$

Tab. 4-6 Vergleich der ermittelten Kontaktpunktepositionen bei Erreichen einer lastübertragenden Vorspannung

Der Kraftfluss durch die Ringviertel bewirkt eine elastische Biegung der Ringe in der Ebene der Viertelringe als auch senkrecht dazu. Die Umkehrpunkte der Biegung werden dabei durch die Kontaktpunkte der Ringviertel definiert. Die resultierenden Deformationen werden in [Abb. 4-21] verdeutlicht.

Zur Bewertung des Spannungszustandes werden in [Abb. 4-22] die Maximal-Hauptspannungen dargestellt, welche aus der Biegedeformation folgen. Aufgrund des Momentenverlaufs entlang der Ringmittellinie, bildet sich im Bereich der Kontaktpunkte der größte Deformationsgradient aus, was zu den höchsten Spannungswerten führt.

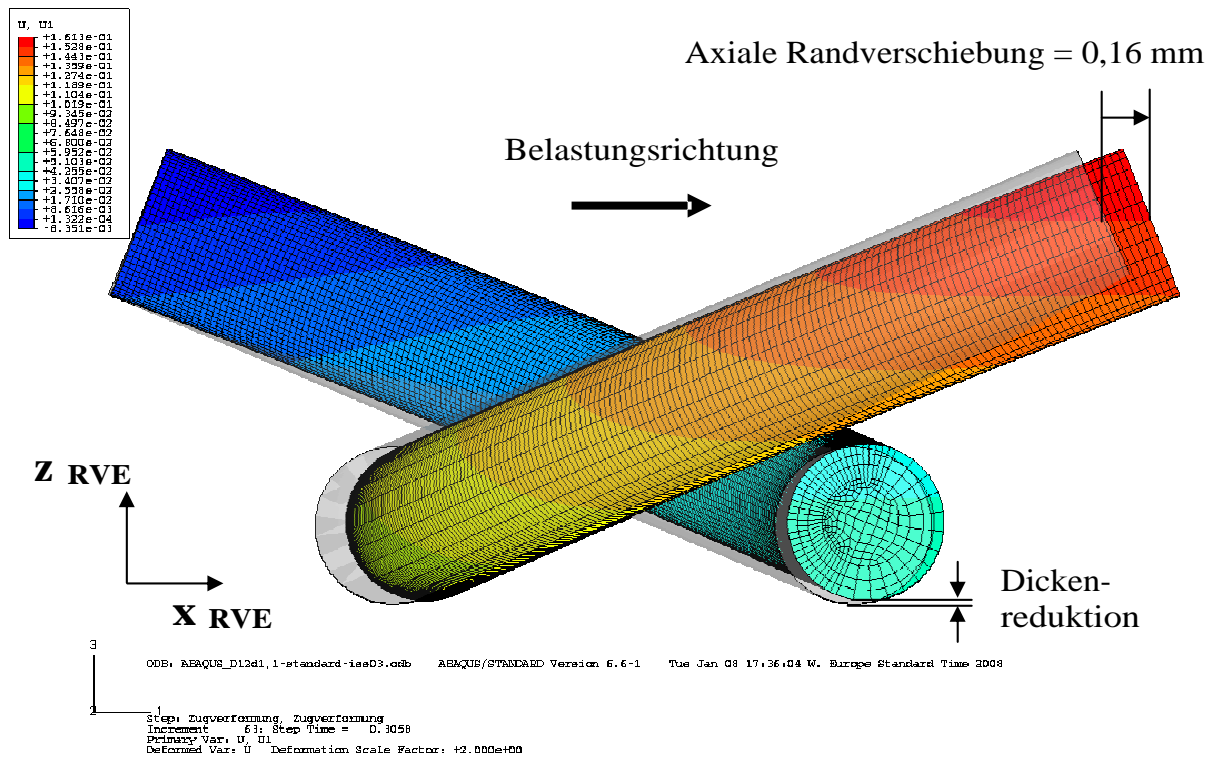


Abb. 4-21 Deformation des RVE in Verschränkungsrichtung unter Axiallast im elastischen Bereich des Betrachtungsfensters nach [Abb. 4-19] (Deformation zweifach überhöht dargestellt)

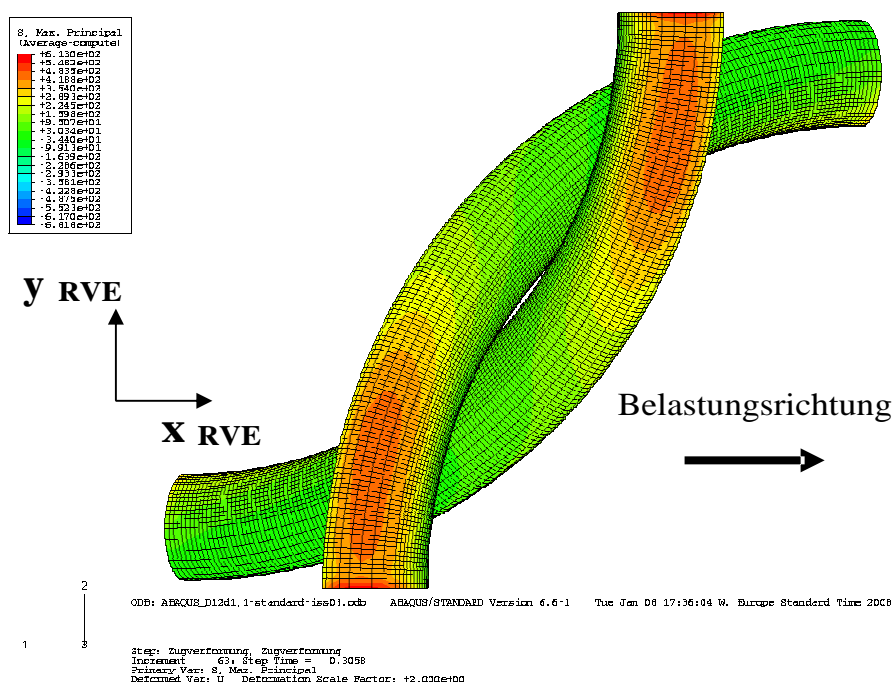


Abb. 4-22 Maximale Hauptspannungen im elastisch deformierten Viertelring (Deformation zweifach überhöht dargestellt)

Die angegebene elastische Deformation bezieht sich auf das Gesamtverhalten des RVE. Durch die Modellierung des Kontaktes ergibt sich eine Lastkonzentration über individuelle, gegenüberliegende Elementknotenpaare. Diese Lastkonzentration führt zu einer lokalen Spannungsüberhöhung. Basierend auf Betrachtungen mit idealisierter Geometrie konzentriert sich diese Spannungsüberhöhung in einem singulären Punktkontakt, was zu einer Hertzschen Pressung führt. Die Abbildung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode setzt den Kontakt zwischen Knoten innerhalb einer Einflusszone um, was zu einer flächigen Ausbreitung der Kontaktbildung führt (siehe [Abb. 4-23]). Die Kontaktspannung, welche die Materialfließgrenze übersteigt, hat aufgrund ihres auf die Oberfläche beschränkten Einflusses keine Effekte auf das Globalverhalten des RVE.

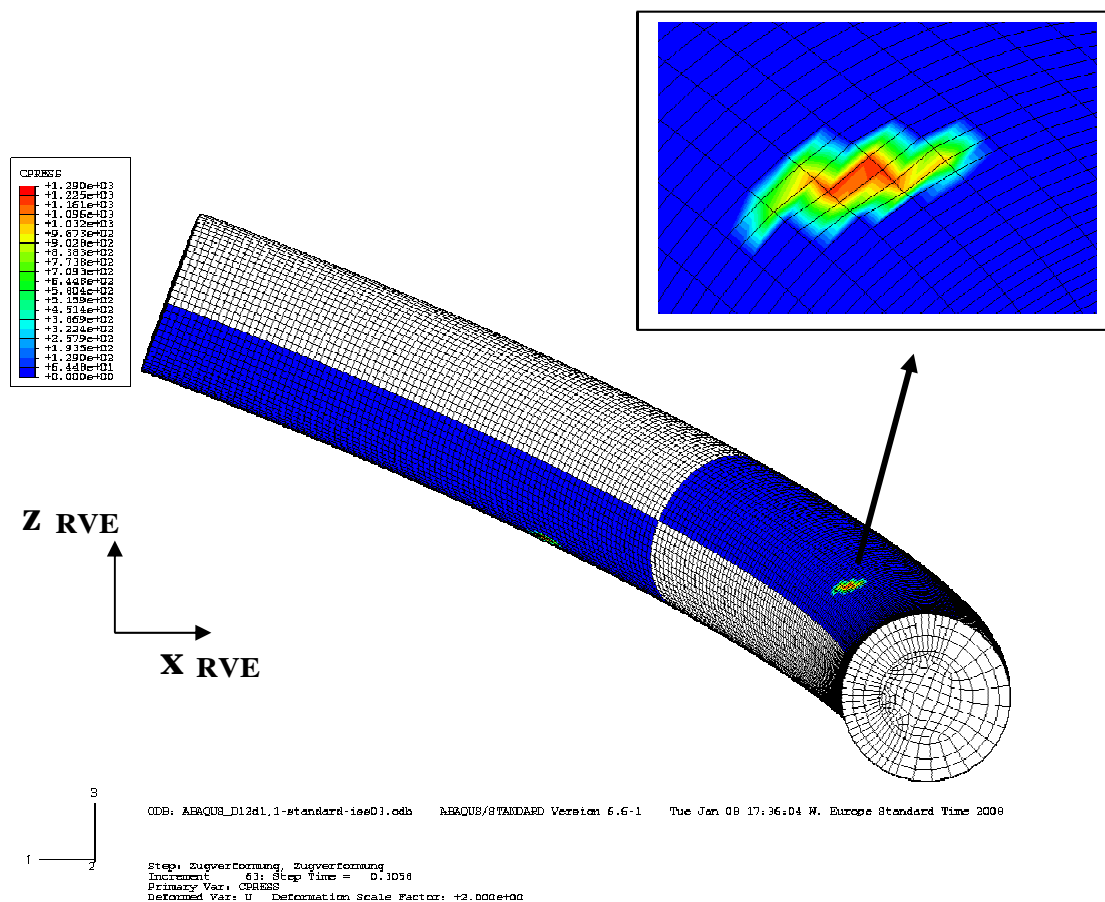


Abb. 4-23 Maximale Hauptspannungen im elastisch deformierten Viertelring (Deformation überhöht dargestellt)

- Abschnitt (d) \Rightarrow (e)

Mit Erhöhung der Belastung werden die Bereiche höherer Biegespannung über die Materialfließgrenze geführt. Zur Bewertung der Plastifizierung unter dominanter Biegebelastung wird die Fließbedingung nach von Mises verwendet, bei der die elastischen Gestaltänderungsanteile der Formänderungsenergie einen kritischen Wert überschreiten. Eine mögliche Formulierung der Fließbedingung kann über die Hauptspannungen erfolgen:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \cdot R_{p0,2}^2 \quad [Gl. 4-30]$$

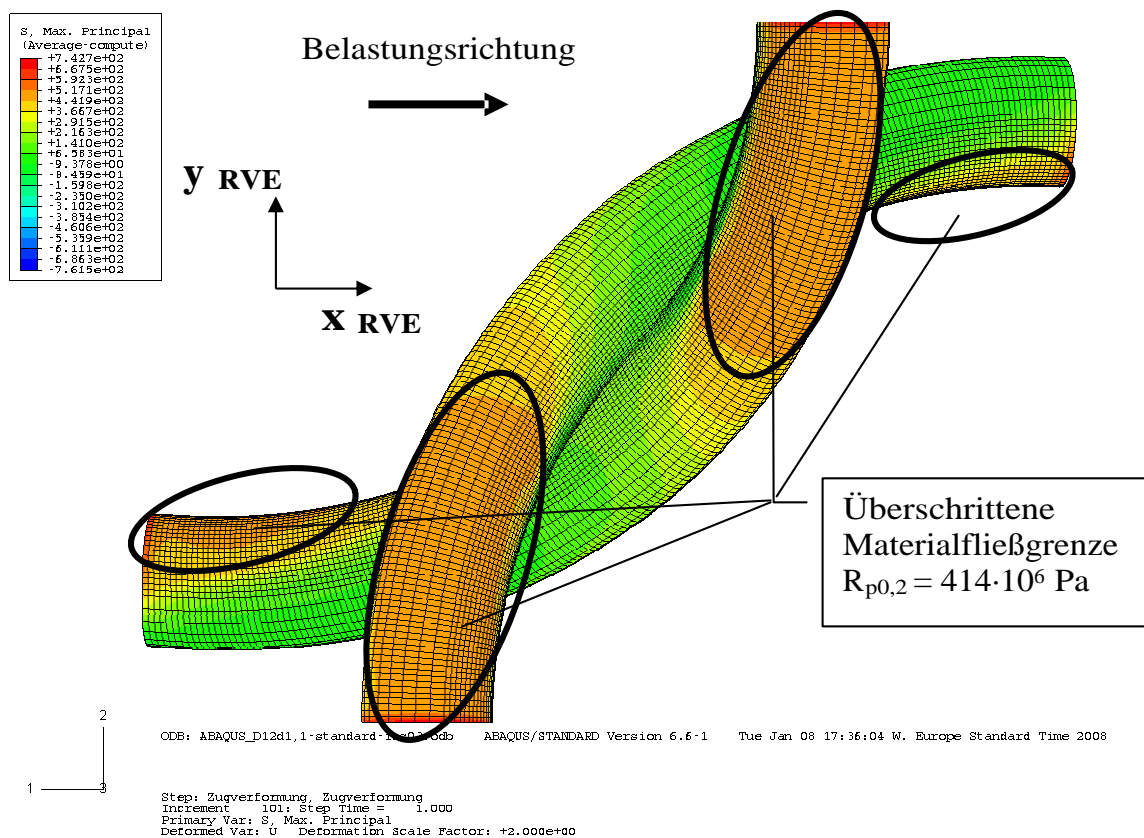


Abb. 4-24 Plastifizierungsbereiche am RVE unter Axiallast am Ende des Betrachtungsfensters nach [Abb. 4-19]

Diese lokale Teilplastifizierung der Geflechtsringe führt zu einem Anstieg des Verformungsgradienten bei gleichzeitiger Kaltverfestigung des Ringmaterials. Die Verformung wird dabei durch das stärkere Abknicken der Ringviertel dominiert, was zu einem Anstieg der Axialdehnung führt (siehe [Abb. 4-25]).

Zugleich flacht der Verschränkungswinkel ab, was zu einer deutlichen Reduktion der Geflechtdicke führt (siehe [Abb. 4-26]).

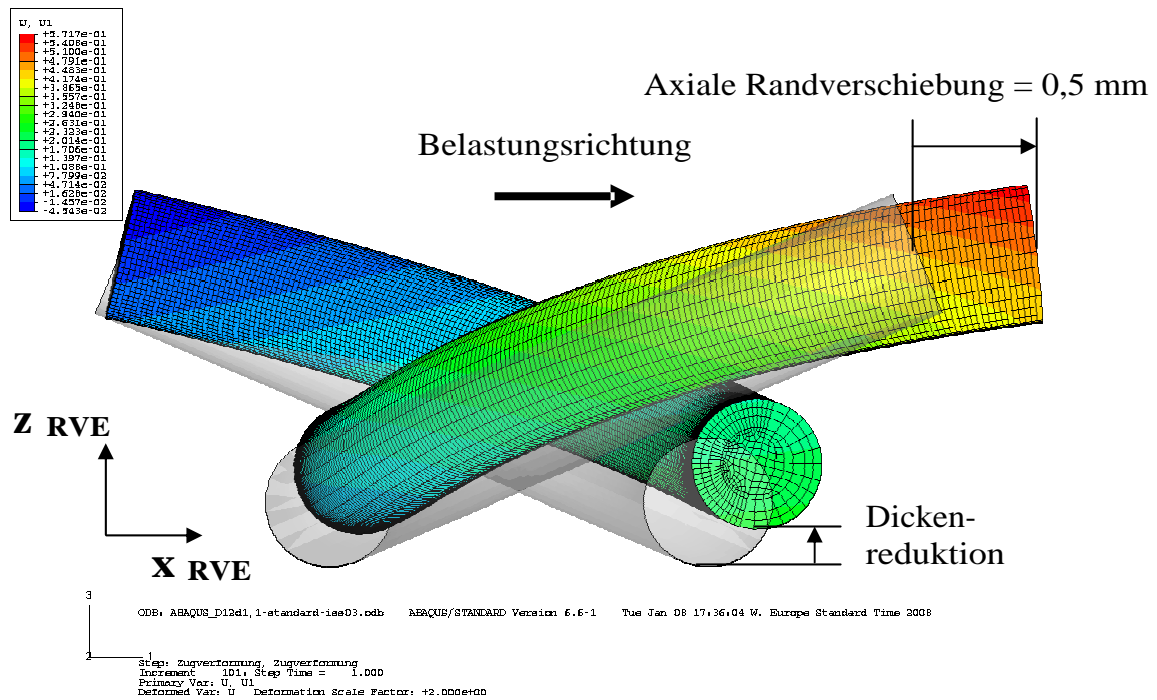


Abb. 4-25 Deformation des RVE in Verschränkungsrichtung unter Axiallast am Ende des Betrachtungsfensters nach [Abb. 4-19] (Deformation zweifach überhöht dargestellt)

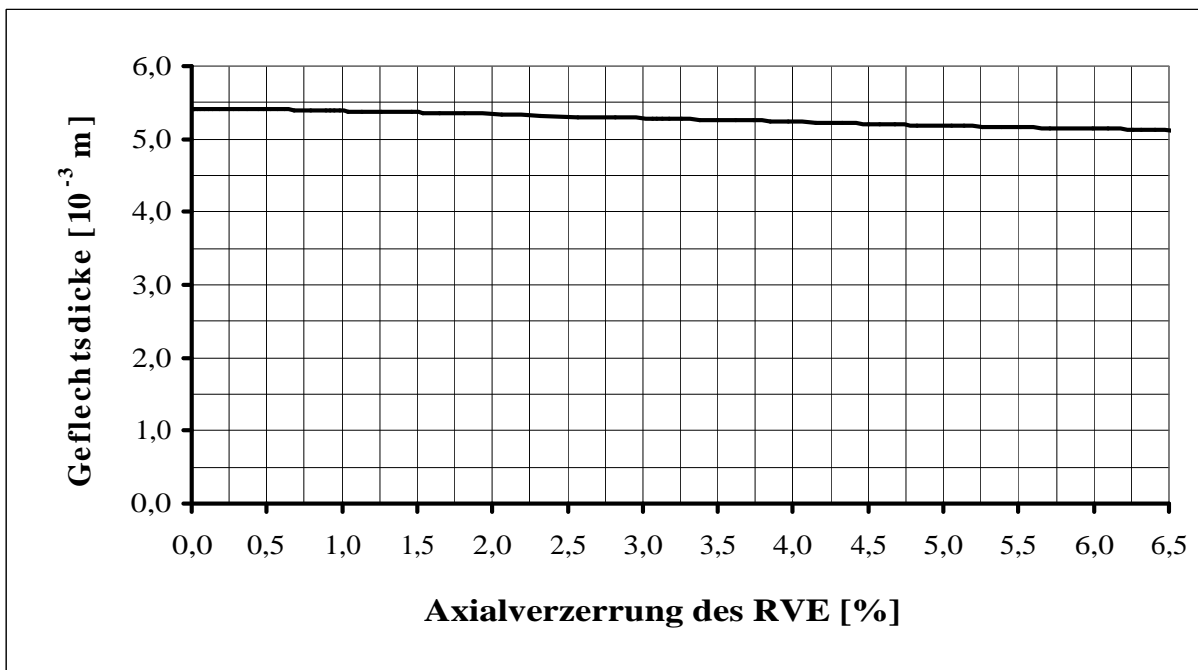


Abb. 4-26 Reduktion der Dicke von Ringgeflecht der Größe G9 unter Axiallast

4.2.5 Exemplarische Ableitung des Elastizitätsmoduls

Aus den Finite-Elemente-Untersuchungen soll über die Beurteilung der erzeugten Kraft-Weg-Beziehung der axiale Elastizitätsmodul als exemplarischer Materialparameter gewonnen werden.

Während [Abb. 4-19] die elasto-plastische Kraft-Weg-Kurve aufgrund axialer Zugbelastung zeigt, wird in [Abb. 4-27] diese Kurve auf den elastischen Verformungsbereich eingegrenzt (entspricht Bereich (c) - (d) in [Abb. 4-20]). Dabei wird als Weg nur diejenige Dehnung betrachtet, welche auf elastische Verformung der Einheitszelle zurückgeht. Starkörperbewegungen aufgrund anfänglicher Vorspannung sind in dieser Darstellung eliminiert.

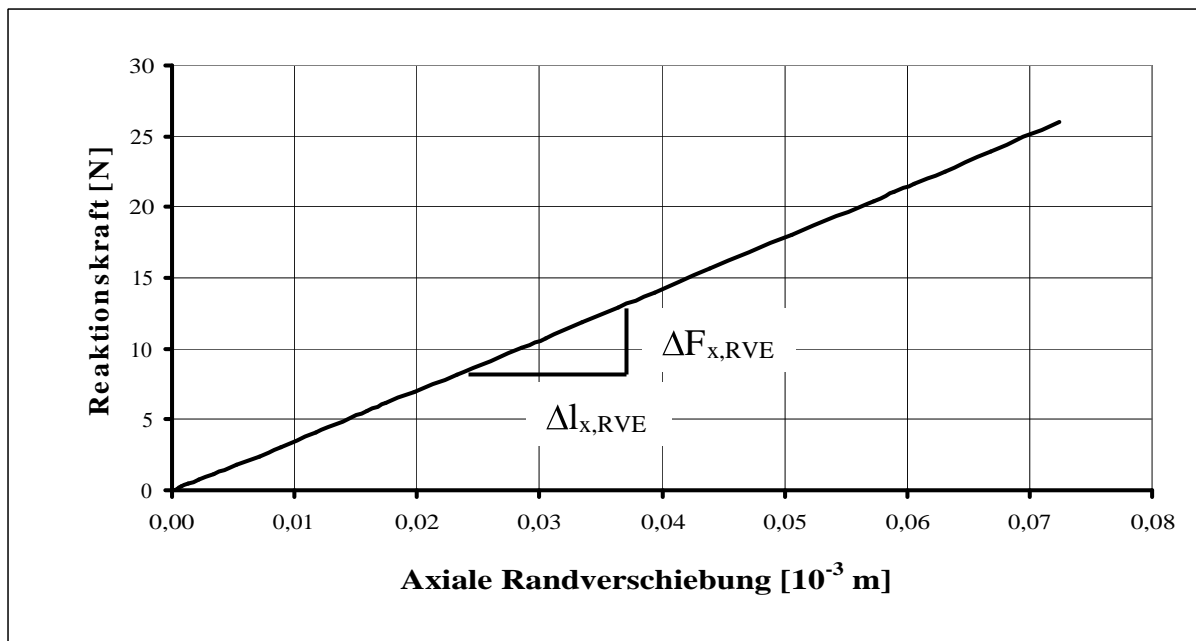


Abb. 4-27 Numerisch ermittelte Kraft-Weg-Kurve des RVE eines Ringflechts der Größe G9 unter axialer Zuglast im elastischen Bereich

Mit Hilfe einer linearen Interpolation der numerisch inkrementell bestimmten Kraft- und Verschiebungswerte kann die Steigung der sich einstellenden Geraden über folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{F_{x,RVE}}{\Delta l_{x,RVE}} = 351,36 \frac{N}{10^{-3} m} \quad [Gl. 4-31]$$

In einem Dehnungsbereich bis 0,07 mm Bereich stellt sich eine lineare Deformation des RVE ein. Bezogen auf die anfängliche axiale Länge $l = C5$ des RVE bewirkt eine Einheitslängenänderung Δl von 0,01 mm die nominale Axialverzerrung ε_x zu:

$$\varepsilon_{x,RVE} = \frac{\Delta l_{x,RVE}}{l_{x,RVE}} = \frac{0,01\text{mm}}{6,4\text{mm}} = 0,00156 \quad . \quad [\text{Gl. 4-32}]$$

Zur Längenänderung des RVE von 0,01 mm wird eine entsprechende Zugkraft F_x ermittelt:

$$F_{x,RVE} = 351,36 \frac{\text{N}}{10^{-3}\text{m}} \cdot \Delta l_{x,RVE} = 351,36 \frac{\text{N}}{10^{-3}\text{m}} \cdot 0,01 \cdot 10^{-3}\text{m} = 3,51\text{N} \quad . \quad [\text{Gl. 4-33}]$$

Diese Zugkraft wird auf die projizierte Querschnittsfläche des RVE bezogen:

$$A_x = H \cdot \frac{D}{2} = 5,4 \cdot 10^{-3}\text{m} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}\text{mm}}{2} = 32,4 \cdot 10^{-6}\text{m}^2 = 32,4\text{mm}^2 \quad . \quad [\text{Gl. 4-34}]$$

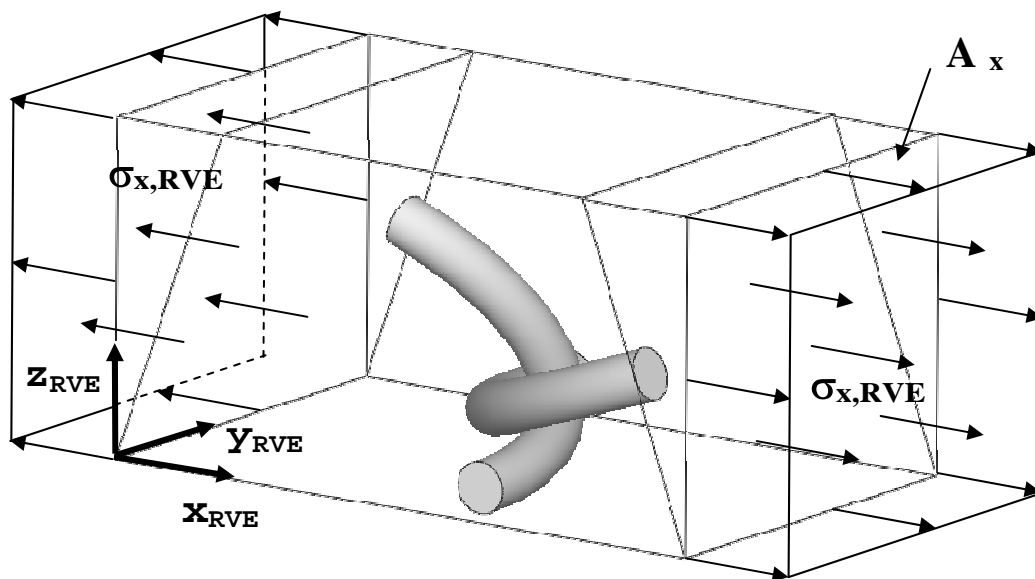


Abb. 4-28 Axialspannung auf der Flächenprojektion des RVE

Somit beträgt die auf das RVE wirkende Axialspannung:

$$\sigma_{x,RVE} = \frac{F_{x,RVE}}{A_x} = \frac{3,51\text{N}}{32,4 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0,108 \cdot 10^6\text{Pa} \quad . \quad [\text{Gl. 4-35}]$$

Über die Anwendung der Beziehungen des orthotropen Materialgesetzes nach [Gl. 3-21] wird unter Annahme der einachsigen axialen Belastung das axiale Elastizitätsmodul ermittelt:

$$E_{x,RVE} = \frac{\sigma_{x,RVE}}{\varepsilon_{x,RVE}} = \frac{0,108 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{0,00156} = 69,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad [\text{Gl. 4-36}]$$

Der ermittelte Wert basiert auf nominalen Ausgangswerten der Geometriebeschreibung. Werden die geometrischen Toleranzen auf das RVE angewendet, so variiert der Projektionsquerschnitt des RVE und damit die wirkende homogene Spannung. Dieses führt zu einer Variation des Elastizitätsmoduls:

	RVE-Höhe	RVE-Breite	RVE-Fläche	Axiale RVE-Spannung	Axiales Elastizitätsmodul
Minimal Wert	5,20 mm	5,91 mm	30,73 mm ²	0,114·10 ⁶ Pa	73,1·10 ⁶ Pa
Nominal Wert	5,40 mm	6,00 mm	32,40 mm ²	0,108·10 ⁶ Pa	69,4·10 ⁶ Pa
Maximal Wert	5,60 mm	6,00 mm	33,60 mm ²	0,104·10 ⁶ Pa	66,7·10 ⁶ Pa

Tab. 4-7 *Abhängigkeit des axialen Elastizitätsmoduls von der geometrischen Toleranz des RVE*

Die Gegenüberstellung analytisch und numerisch ermittelter Materialkennwerte ergibt eine Übereinstimmung des axialen Elastizitätsmoduls als auch der Querkontraktion und validiert damit den numerischen Ansatz.

	Analytisch	Numerisch
Axiales Elastizitätsmodul	72,1·10 ⁶ Pa	69,4·10 ⁶ Pa
Querkontraktionszahl	0,021	0,029

Tab. 4-8 *Vergleich von ermittelten Nominalwerte für Elastizitätskennwerte für ein Ringgeflecht der Größe G9*

Der Verlauf des Spannungs-Dehnungs-Diagramms nach [Abb. 4-29] dokumentiert den Verlauf der Teilplastifizierung bis zu einer Verzerrung von 6,25 %. Die Stützpunkte des Diagramms sind in [Tab. 4-9] aufgelistet.

Stützpunkt	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5	SP6	SP7	SP8	SP9
Dehnung [%]	0	0,78	1,56	2,34	3,12	3,91	4,69	5,47	6,25
Spannung [10 ⁶ Pa]	0	0,56	1,09	1,43	1,63	1,75	1,86	1,97	2,05

Tab. 4-9 Nominale Stützpunkte des axialen Spannungs-Dehnungs-Diagramms für ein RVE der Ringflechtsgröße G_9

Über die Beziehung des Ramberg-Osgood-Gesetzes (vgl. [Ram 43]) wird unter Verwendung des Elastizitätsmoduls des RVE dessen Teilplastifizierung und damit die des gesamten Geflechts ausgewertet:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E_{x,RVE}} + \left(\frac{\sigma}{C} \right)^n \quad [Gl. 4-37]$$

Hierin ist die Konstante C

$$C = 10^{\frac{a \cdot \log \sigma_{SP5} - \log \sigma_{SP4}}{a-1}} = 7,906 \cdot 10^6 \text{ Pa} , \quad [Gl. 4-38]$$

mit

$$a = \frac{\log \left(\varepsilon_{SP4} - \frac{\sigma_{SP4}}{E_{x,RVE}} \right)}{\log \left(\varepsilon_{SP5} - \frac{\sigma_{SP5}}{E_{x,RVE}} \right)} = 1,209 \quad [Gl. 4-39]$$

Der Verfestigungsexponent n des RVE wird bestimmt nach

$$n = \frac{\log \left(\varepsilon_{SP4} - \frac{\sigma_{SP4}}{E_{x,RVE}} \right)}{\log \left(\frac{\sigma_{SP4}}{C} \right)} = 3,439 \quad [Gl. 4-40]$$

Der Vergleich zwischen dem Verfestigungsexponenten auf Mikroebene (somit des geraden Federdrahtes) und auf Makroebene (somit des RVE) ist Ausdruck des deutlichen Unterschiedes im Deformationsverhaltens der Ebenen. Der hohe Exponent auf Mikroebene (Wert = 23,02) ist durch die Durchplastifizierung des gesamten Drahtquerschnitts unter axialer Zuglast gekennzeichnet. Dies führt zu entsprechend starker Abflachung des Verfestigungsverlaufs für die Mikroebene. Im Gegensatz dazu erfolgt im RVE keine Durchplastifizierung. Vielmehr weisen durch das Deformationsbild unterschiedliche Bereiche der Mesoebene unterschiedliche Spannungswerte und somit eine sukzessive Plastifizierung auf.

Die analytische Bestimmung der 0,2%-Fließgrenze ergibt für das RVE:

$$R_{p0,2} = C \cdot 0,002^{1/n} = 1,29 \cdot 10^6 \text{ Pa} . \quad [\text{Gl. 4-41}]$$

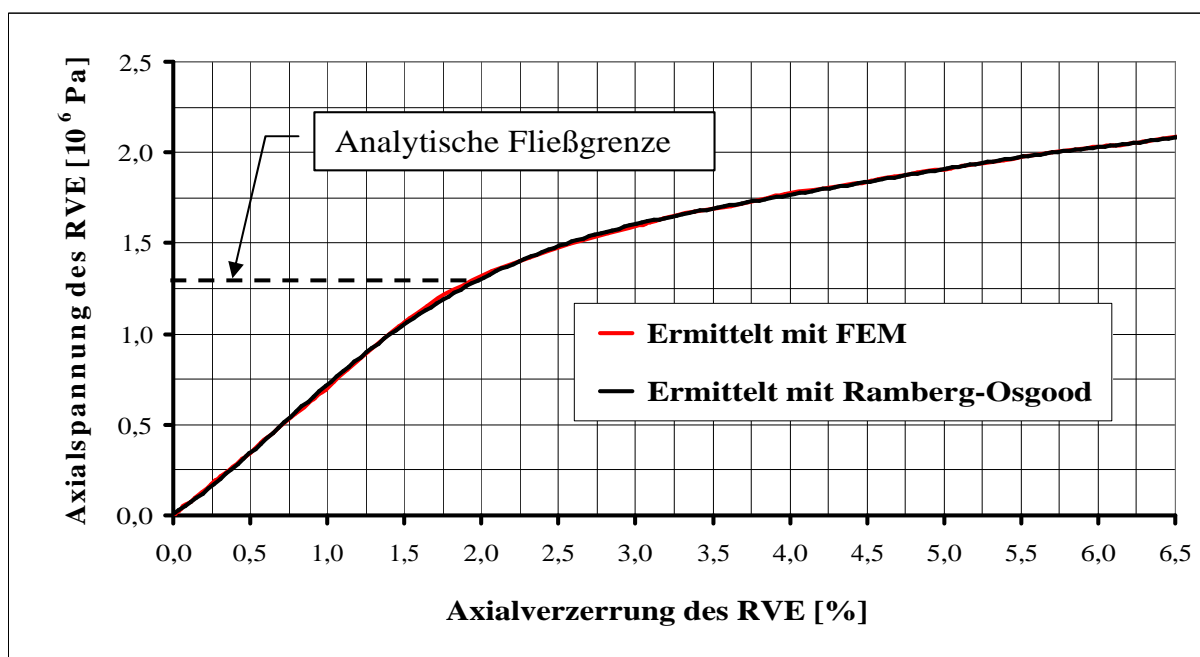


Abb. 4-29 Gegenüberstellung von Spannungs-Dehnungs-Kurven am RVE einer Ringflechtsgröße G9 ermittelt mit FEM und Ramberg-Osgood-Beziehung

Die Bestimmung der Fließgrenze erlaubt die Beurteilung von grundlegenden Anwendungen, wie z. B. das vertikale Abhängen von Ringflecht. Ein Beispiel dafür ist der Einsatz in dekorativen bzw. architektonischen Anwendungen.

Um bei einem Ringgeflecht der Größe G9 die Fließgrenze des RVE von $1,29 \cdot 10^{-6}$ Pa zu erreichen, muss eine Axiallast wie folgt wirken:

$$F_{x,RVE} = R_{p0,2} \cdot A_x = 1,29 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot 32,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 41,79 \text{ N} \quad . \quad [\text{Gl. 4-42}]$$

Die Geflechtmassse, die nötig ist um diese Kraft zu erzeugen, ergibt sich beim Abhängen unter Gravitationslast:

$$m = \frac{F_{x,RVE}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{41,79 \text{ N}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 4,26 \text{ kg} \quad . \quad [\text{Gl. 4-43}]$$

Mit der in [Tab. 2-8] angegebenen Masse von $130 \cdot 10^{-6}$ kg pro RVE wird eine Anzahl von 32733 axial angeordneten RVE benötigt, um die kritische Masse von 4,26 kg zu erzeugen. Über die Anzahl von 146 RVE pro laufendem Meter, kann eine Geflechtbahn der Größe G9 von bis zu 224 m Länge abgehängt werden, ohne eine Plastifizierung von Einzelringen zu bewirken.

4.3 Experimentelle Bestimmung von Materialparametern

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten mit Hilfe analytischer und numerischer Verfahren die Elastomechanik der Einheitszelle in die makroskopischen Eigenschaften des Geflechts überführt wurde, sollen diese Elastizitätsbeziehungen über Tests exemplarisch validiert werden. Dazu soll mit einem geeigneten Versuchsaufbau eine axiale Zugbelastung aufgebracht und das resultierende Verformungsverhalten ermittelt werden. Auf die Abweichungen im Versuchsaufbau zur Ermittlung des Verhaltens bei lateraler Zugbelastung und ebene Schubbelastung wird entsprechend eingegangen.

Klassische Verzerrungsmesstechnik basiert auf der Applikation von Messstreifen zur Ermittlung der Oberflächendehnung eines Körpers. Dazu ist eine entsprechend geeignete Oberfläche in Form und Größe nötig. Das Ringgeflecht weist keine geschlossene Oberfläche auf, sodass eine Befestigung von Dehnmessstreifen ausgeschlossen ist.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen wurde versucht, das Dehnungsverhalten der einzelnen Ringe mittels einer berührungsfreien Verzerrungsmessung durch Speckle-Interferometrie zu erfassen. Diese Messmethodik basiert auf dem Vergleich eines Graubildmusters vom unverformten und deformierten Prüfkörper welches durch Beleuchtung mit einem Lasersystem erzeugt wird. Wird der beleuchtete Körper deformiert, erfährt das reflektierte Laserlicht relativ zur Laserbeleuchtung eine Phasenverschiebung, welche als Maß für die Deformation ausgewertet wird (siehe [Abb. 4-30]).

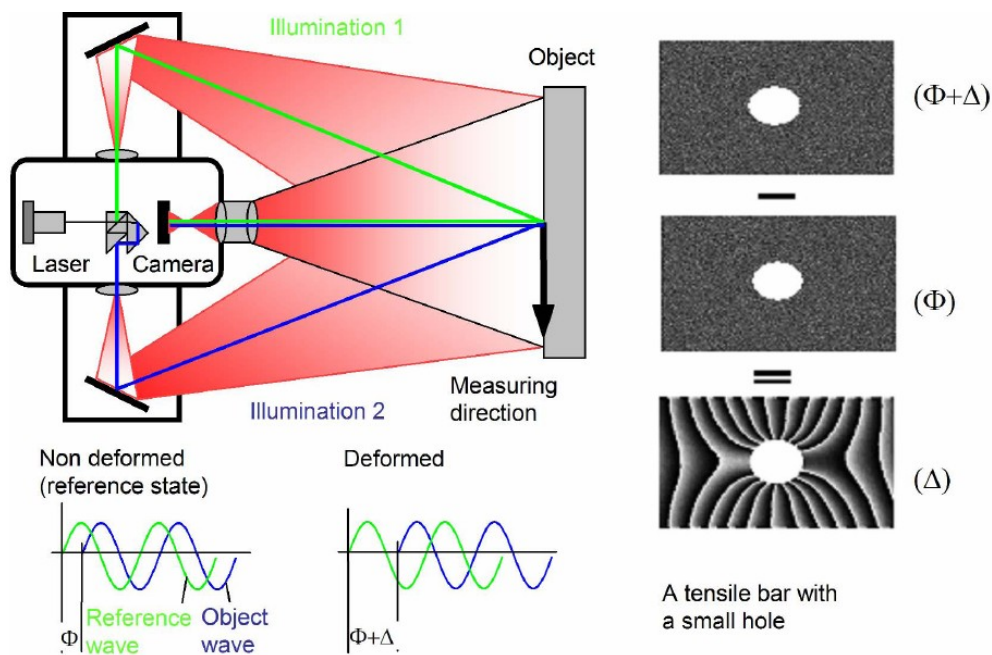


Abb. 4-30 Prinzipschema optischer Deformationsmessung mittels Speckle-Interferometrie (Quelle: [Ett 06])

Für eine zuverlässige Messung zum Graubildvergleich müssen über die Justierung der Prüflast kleine Verformungsinkremente realisiert werden, um eine hinreichende Bildauflösung zu gewährleisten. Durch die geringe Steifigkeit der Geflechtsringe ergeben sich auch bei geringer Prüflast signifikante Verformungen. Die Verformungsinkremente hinreichend klein zu halten ist mit der Lasttoleranz der verwendeten Prüfmaschine nicht möglich. Des Weiteren weist jeder Einzelring im Geflecht eine gekrümmte Oberfläche auf, was die Fokussierung der Laserbeleuchtung fehleranfällig macht. Da die Auswertung des Graubildmusters keine Korrelation für dreidimensionale Konturen zulässt, ist eine zuverlässige Spannungsauswertung einzelner Ringe über die Verwendung von Speckle-Interferometrie derzeit nicht möglich.

4.3.1 Versuchsaufbau

Der statische Zugversuch hält sich an die Versuchsvorgaben nach [*Spez A*] mit dem Ziel der Aufnahme einer Kraft-Weg-Kurve, welche das elasto-plastische Werkstoffverhalten des Ringflechts abbildet. Hierbei unterscheiden sich die Versuchsvorgaben für axiale und laterale Belastung nicht.

Der Zugversuch wird mittels einer Universalprüfmaschine vom Typ Zwick Z010/TN2A durchgeführt, welche um eine softwarebasierte Auswertung durch das Programm Zwick Test Expert V11.0 ergänzt wird. Eine Aufstellung der technischen Daten der Prüfmaschine erfolgt in [*Appendix C*].

Zur Aufnahme von Prüfkörpern wird ein Standardlastzapfen verwendet, am welchem eine spezielle Prüfkörperfixierung angebracht wird. Zum Aufbringen der Prüflast wird der Lastzapfen, der an einer Traverse befestigt ist, über die Drehung von Gewindestangen axial verschoben und der Prüfling dadurch gedehnt. Der Materialwiderstand gegen diese Dehnung resultiert in einer Prüfkraft, welche über einen piezoelektrischen Sensor gemessen und an die Steuersoftware zur Auswertung übermittelt wird. Der prinzipielle Aufbau der Prüfmaschine ist in [*Abb. 4-31*] dargestellt.

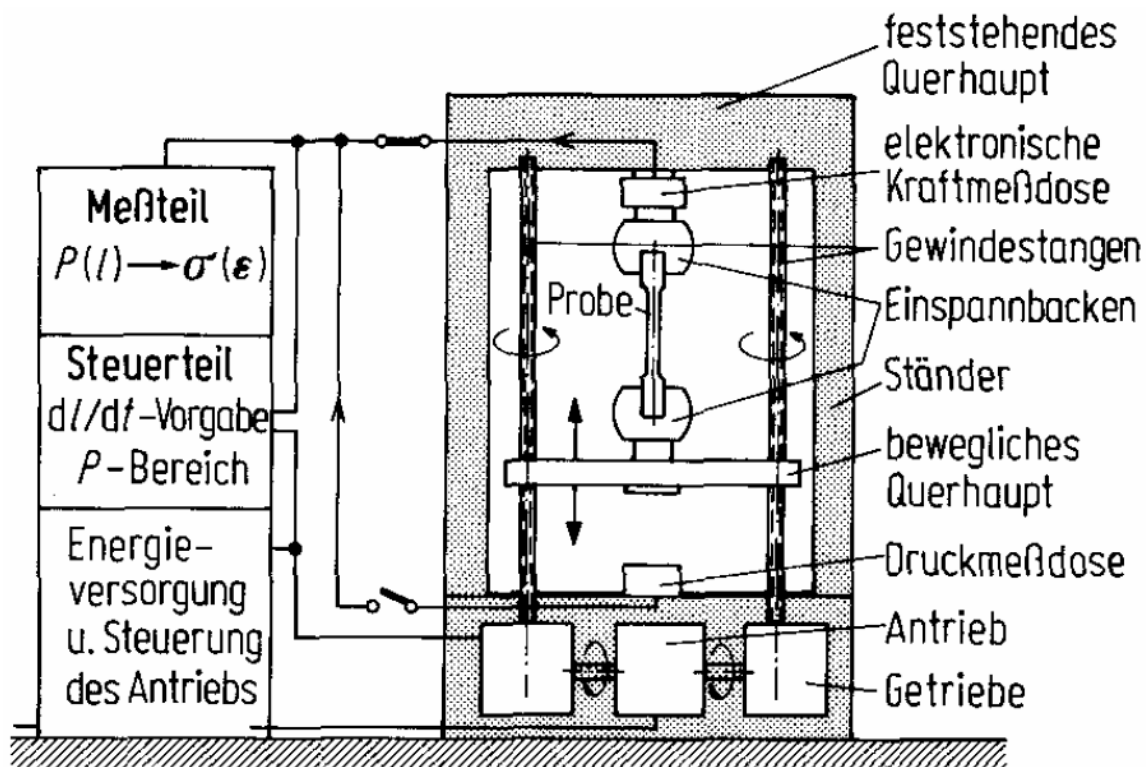


Abb. 4-31 Prinzipskizze einer Zugprüfanlage nach [*Spez A*]

Aus Gründen der Datenkonsistenz wird als Probekörper ein Geflecht aus Chrom-Nickel-Stahl 1.4404 in der Geflechtsgröße G9 gewählt, was einen direkten Vergleich mit den analytischen und numerischen Materialuntersuchungen erlaubt. Das Probegeflecht weist eine minimale Breite von 14 Ringen auf, wodurch eine großflächige Lasteinleitung und Nivellierung von Fertigungstoleranzen des Ringgeflechts erreicht wird. Die axiale Länge des Geflechts umfasst sieben Ringreihen, wobei jeweils zwei Reihen zur Fixierung verwendet werden. Die zu prüfende freie axiale Länge beträgt demnach drei Reihen. Dadurch wird der Einfluss der Querkontraktion minimiert und eine unidirektionale Materialbelastung erreicht.

Das Ringgeflecht wird an den Seiten der Lasteinleitung in eine Fixierungsvorrichtung nach [Abb. 4-32] eingelegt. Ringe der ersten Querreihe werden in dieser Vorrichtung durch lateral äquidistant verteilte Stifte positioniert. Eine solche Fixierung ermöglicht die zentrische Verspannung der Probe in der Zugprüfmaschine und einen gleichförmigen Lasteintrag. Das Verschließen der Fixierung erfolgt derart, dass keine Biegung in die freie Prüflängung der Geflechtsringe eingebracht wird.

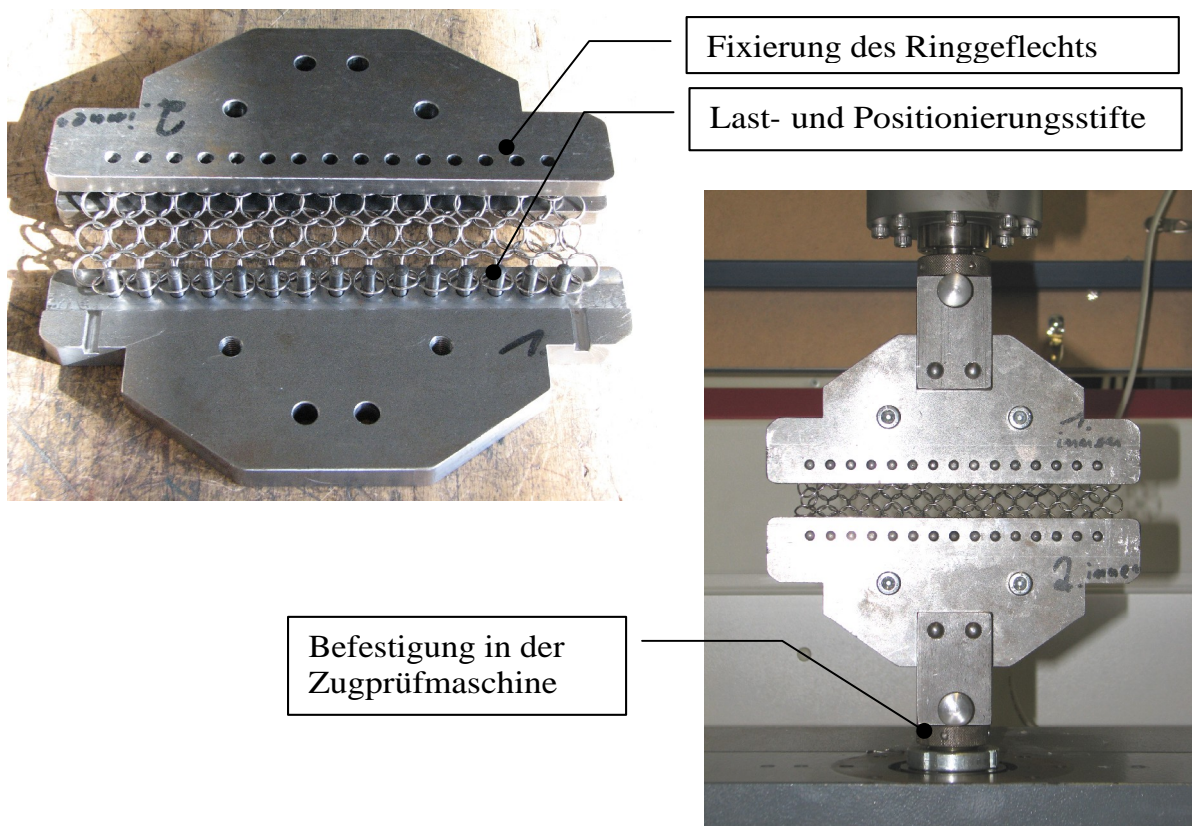


Abb. 4-32 Fixierungsvorrichtung und Testeinspannung für ein Ringgeflecht der Größe G9

Zur Berücksichtigung der Randeffekte aufgrund der endlichen Breite des Ringgeflechts werden zusätzlich Proben der Geflechtsgröße G9 mit 25 freien, in Zugrichtung angeordneten Ringreihen (siehe [Abb. 4-33]) einer unidirektionalen, axialen Belastung ausgesetzt. Das Prinzip der Fixierungsvorrichtung für das Ringgeflecht als auch die Befestigung in der Zugprüfmaschine bleiben unverändert.



Abb. 4-33 Geflechtsprobe mit 25 freien Ringreihen der Geflechtsgröße G9

4.3.2 Versuchsdurchführung

Die Zugprüfmaschine Zwick Z010 ist in der Lage, über den Verfahrenweg der servomechanischen Traverse eine Kraft in Bewegungsrichtung der Traverse auf den Prüfkörper aufzubringen. Über die Vordefinition einer maximalen Zugbelastung von 10000 N wird das zuvor fixierte Ringgeflecht axial zügig belastet. Der Verfahrenweg wird dabei kontinuierlich mit $0,15 \cdot 10^{-3}$ m/s erhöht und über die Wegmessung der Traverse aufgezeichnet. Als Abbruchkriterium wird das Versagen von 25% der Geflechtsringe definiert, um die Bruchdehnung auf einen für den Messweg der Prüfmaschine angepassten Wert zu begrenzen. Das Abbruchkriterium wird während des Versuchsvorganges visuell kontrolliert, der Abbruch der Messung erfolgt durch einen manuellen Eingriff in die Prüfmaschinensteuerung. Dieses Vorgehen wird an drei Prüfkörpern wiederholt.

Die Messung der so aufgebrachtten Zugkraft wurde über die piezoelektrische Messsonde der Traverse realisiert. Die über die Datenerfassung der Prüfmaschine ermittelten Werte für Verformungsweg und Prüfkraft werden als Rohdaten aus der Prüfmaschine ausgegeben und zur weiteren Verarbeitung aufbereitet.

4.4.3 Versuchsauswertung

Die Proben mit drei freien Ringreihen weisen eine Prüflänge von $19,2 \cdot 10^{-3}$ m auf, was einer Ausdehnung von drei RVE entspricht. Basierend auf den analytischen und numerischen Voruntersuchungen wird ein elastischer Deformationsbereich von $0,33 \cdot 10^{-3}$ m erwartet (entspricht dreimal dem elastischen Bereich eines einzelnen RVE). Größere Traversenwege weisen auf eine Plastifizierung der Ringflechts hin. [Abb. 4-34] zeigt den messtechnisch ermittelten Kraft-Weg-Verlauf der drei Zugproben mit drei freien Ringreihen.

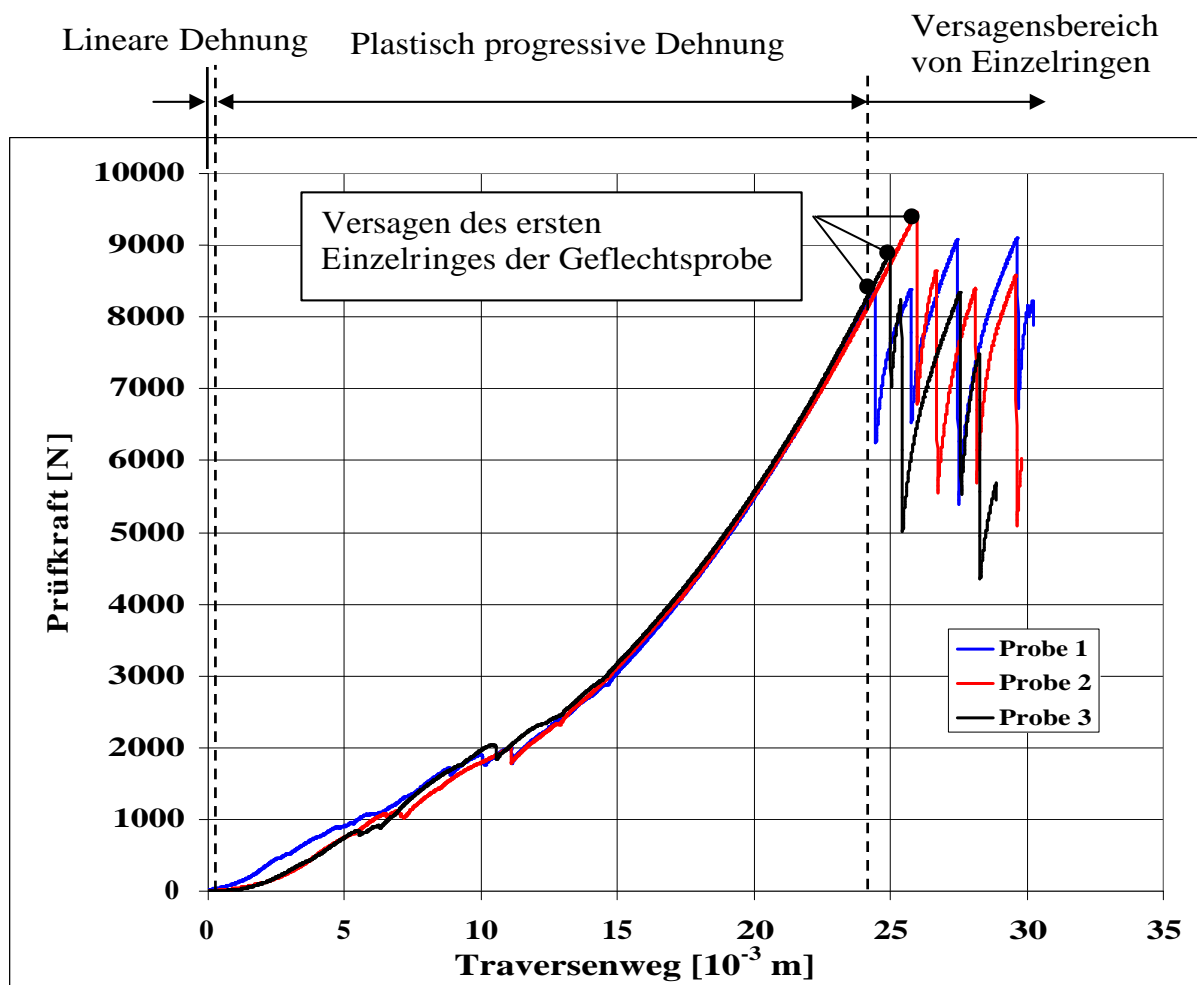


Abb. 4-34 Prüfkraft-Weg-Kurve für Geflechtsgröße G9 mit drei Ringreihen

Der Verformungsverlauf lässt sich hierbei in drei Abschnitte gliedern:

- Lineare Dehnung

In diesem Abschnitt erfahren die Geflechtsringe eine gleichmäßige Biegeverformung und somit eine lineare Längung. Diese Biegeverformung bewirkt gleichermaßen eine Ringovalisierung als auch eine Biegung aus der Ringebene heraus.

Die Erfassung des linearen Dehnungsbereich wird durch die Messcharakteristik und Toleranz der Zugprüfmaschine erschwert. Die im elastischen Deformationsbereich maximal ertragbare Kraft wird basierend auf den numerischen Untersuchungen auf 42 N begrenzt. Dies entspricht 0,42 % der maximalen Prüfkraft der Zugprüfmaschine von 10.000 N und liegt damit innerhalb der Messtoleranz der Prüfmaschine.

- Plastisch progressive Dehnung

Die zuvor erfolgte lineare Biegeverformung geht im weiteren Verlauf der Zugbelastung in eine progressive Verformung über. In diesem Bereich werden in [Abb. 4-34] zusätzlich leichte Sprünge im Dehnungsverlauf dokumentiert. Diese resultieren aus lokalen Abgleitbehinderungen (z. B. durch leicht vorovalisierte Ringe), die sich unter Zugbelastung lösen.

Durch ihre spezifische plastische Materialcharakteristik erfahren die Chrom-Nickel-Geflechtsringe eine Kaltverfestigung, was zu einem höheren Materialwiderstand führt. Dieser bewirkt einen stärkeren Anstieg der Kraft-Dehnungs-Kurve, wie in [Abb. 4-34] dargestellt. Für andere Ringmaterialien differiert der Verlauf der plastischen Dehnung.

Nachdem die Ovalisierung bis hin zur Quadratisierung der Ringe zunimmt, endet der Abschnitt mit einem Abknicken der verschränkten Ringe.

- Versagen von Einzelringen

Mit dem Ansteigen der Zugbelastung versagen nacheinander einzelne Ringe durch Reißen des Drahtes. Dass diese Ringe immer im Inneren des Geflechts liegen, erklärt sich aus der Lastbeteiligung von jeweils vier Nachbarringen, während am Rand der Geflechtsprobe diese Nachbarringe und damit deren Zuglastkomponenten fehlen. [Tab. 4-10] dokumentiert die aufgenommenen Versagenskräfte beim Bruch des ersten Ringes. Dieser, wie auch ca. 90% aller dokumentierten Brüche, tritt an der Verschweißungsstelle der Einzelringe auf (siehe [Abb. 4-35]), an der das Gefüge durch die Schweißung geschwächt ist.

Das Versagen eines Ringes erzeugt unmittelbar eine Lastumlagerung auf benachbarte Ringe, welche dadurch stärker verformt werden. Dieses bewirkt einen positiven Verformungsgradienten. Dieses Einzelversagen mehrt sich mit steigender Belastung bis hin zum globalen Versagen über der gesamten Geflechtsbreite.

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Ø	s
Bruchlänge [10 ⁻³ m]	24,4	25,9	25,0	25,1	3,0 %
Bruchdehnung [%]	127	135	130	131	3,0 %
Bruchkraft [N]	8387	9463	8844	8898	6,1 %
Bruchkraft/Ring [N]	599	676	631	635	6,1 %

Tab. 4-10 Experimentell ermittelte Kennwerte für das Erstversagen von Einzelringen der Geflechtsgröße G9 (dreireihig) unter Axialbelastung



Abb. 4-35 Deformierter Einzelringes der Größe G9 nach Versagen

Die Untersuchung der Versagensfläche unter dem Rasterelektronenmikroskop erlaubt eine Detaillierung des Versagensgeschehens. Das verwendete REM vom Typ LEO440 der Firma Leo Elektromikroskope GmbH ist in der Lage, über seine Wolfram-Haarnadelkathode und sein energiedispersives Röntgenanalysesystem eine bis zu 300.000-fach vergrößerte Bild Darstellungen zu erzeugen und die metallurgische Zusammensetzung der Versagensfläche durchzuführen.

Die REM-Untersuchung des Einzelringes an der Versagensstelle identifiziert einen Gewaltbruch unter statischer Belastung, der sich von der Mitte der Versagensfläche zu den Rändern hin ausbreitet. Dieser Gewaltbruch ist gekennzeichnet durch eine typische Wabenstruktur des Bruchmaterials, wobei die Form der Versagensfläche auf die Duktilität des Materials und damit auf die zuvor erfolgte Plastifizierung hinweist. Hin zu den Rändern der Versagensfläche erfolgt ein duktiles Abscheren des Materials, was durch das Auftreten von Scherwaben belegt wird.

Unter der REM-Aufnahme wird auch die Imperfektion der Versagensfläche deutlich. Durch den Herstellungsprozess – das Schneiden des Federdrahtes – ergibt sich eine vordeformierte Oberfläche. Diese wird während der Geflechtsherstellung verschweißt. Die Auswertung verschiedener Versagensflächen zeigt den Qualitätseinfluss der Schweißung (Bedeckung der Schnittenden, der Wärmeeinflusszone und der Gefügeausbildung) auf das Versagensbild und die Festigkeitseigenschaften. Aus diesem Einfluss resultiert die Variation des Erstversagens des gesamten Ringgeflechts wie aufgezeigt in [Abb 4-36].

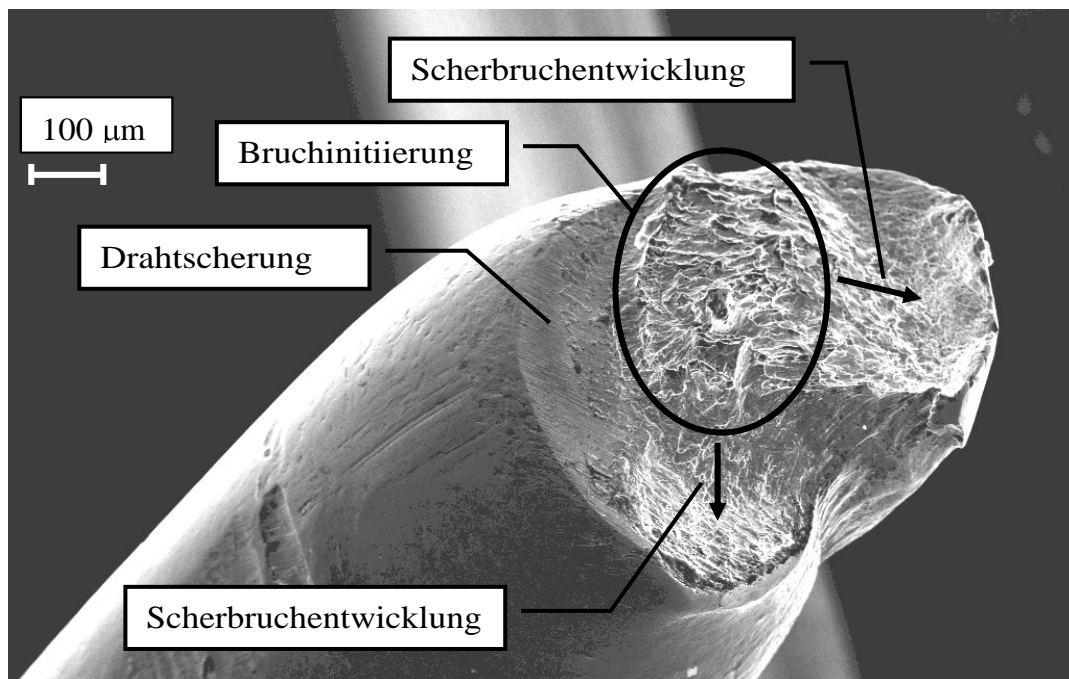


Abb. 4-36 REM-Darstellung der Versagensfläche eines gerissenen Einzelringes

Nach Modifikation des Versuchsaufbaus zur Berücksichtigung einer Probenlänge von 25 freien Ringreihen werden identische Prüfverfahren angewendet, um an drei Proben das Deformationsverhalten zu ermitteln. Die resultierende Kraft-Weg-Kurve ist in [Abb. 4-37] dargestellt.

Die freie Probenlänge entspricht einer Anzahl von 25 RVE. Der elastische Deformationsbereich wird damit auf eine maximale Längung von $2,88 \cdot 10^{-3}$ m eingegrenzt (entspricht 25-mal dem elastischen Bereich eines einzelnen RVE). Größerer Traversenwege weisen auf eine Plastifizierung der Ringflechts hin.

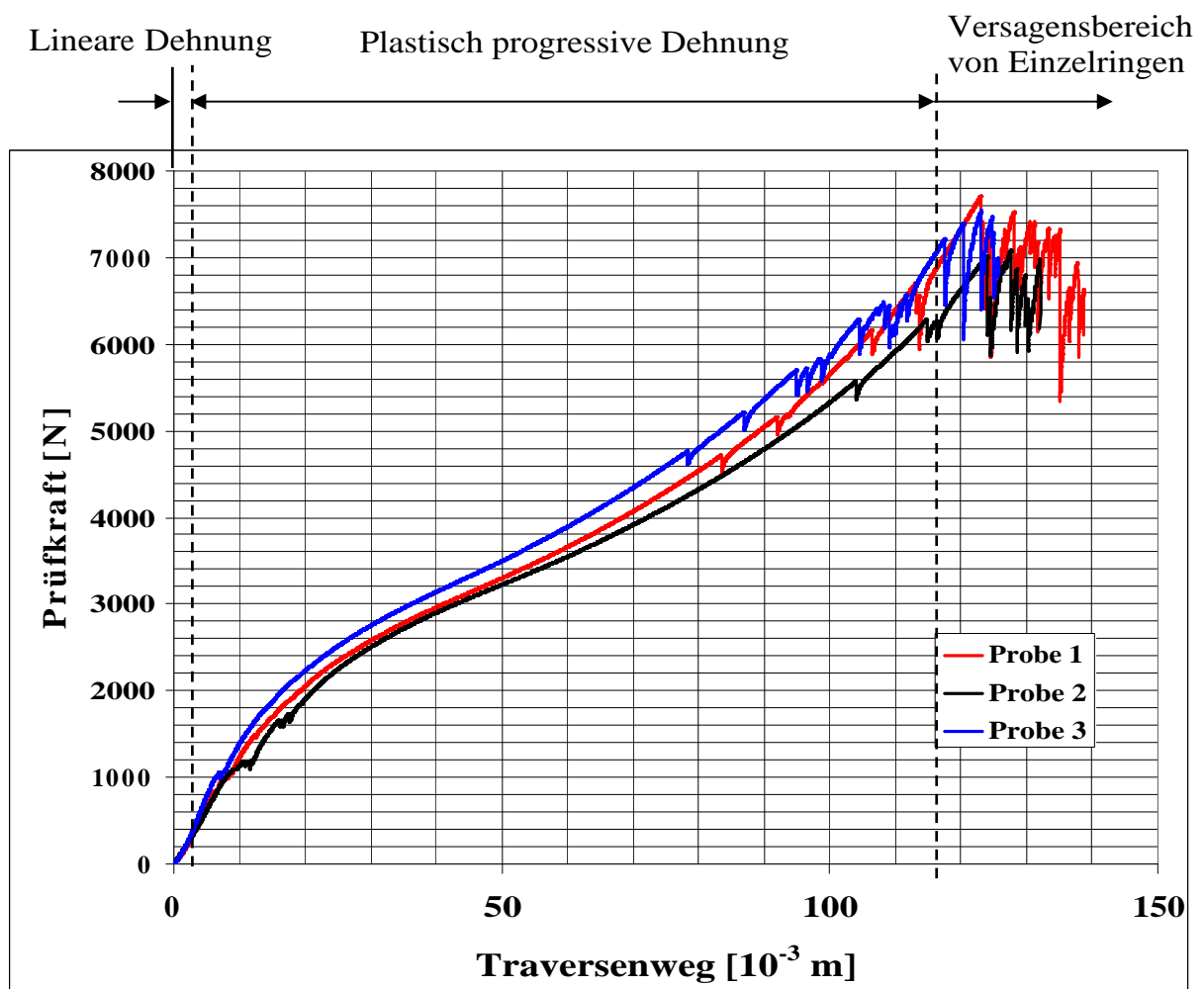


Abb. 4-37 Prüfkraft-Weg-Kurve für Geflechtsgröße G9 mit 25 Ringreihen

Unabhängig von der Länge der Probenkörper lassen sich anhand [Abb. 4-37] die gleichen Deformationszustände identifizieren. Die Kennwerte für das Erstversagen einzelner Ringe in der Geflechtsprobe sind in [Tab. 4-11] aufgeführt.

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Ø	S
Bruchlänge [10 ⁻³ m]	123,1	127,6	123,1	124,6	2,1 %
Bruchdehnung [%]	77	80	77	77	2,1 %
Bruchkraft [N]	7712	7082	7538	7444	4,4 %
Bruchkraft/Ring [N]	482	443	471	465	4,4 %

Tab. 4-11 Experimentell ermittelte Kennwerte für das Erstversagen von Einzelringen der Geflechtsgröße G9 (25-reihig) unter Axialbelastung

Der Vergleich der Kennwerte nach [Tab. 4-10] und [Tab. 4-11] weist deutlich reduzierte Werte der Bruchdehnung und der Bruchkraft für die 25-reihige Probe auf. Die Unterschiede gehen auf die Deformation der Einzelringe im Probengeflecht zurück, die sich deutlich von der idealisierten Lastverteilung (symmetrische Kontaktkräfte zwischen allen Ringen im Geflecht) entfernen. Grund dafür ist die Gegebenheit, dass am Geflechtsrand mindestens ein Nachbarring fehlt, wodurch in der Ebene kein Kontaktkraftsymmetrie mehr wirkt. In der Folge werden Ringe vom Probenrand zur Probenmitte gezogen. Dadurch verändern sich die Kontaktkraftkomponenten der benachbarten Ringzeile, was gleichfalls zu einer – wenn auch verminderten – Ringverschiebung zur Probenmitte hin führt. Dies bewirkt eine starke Einschnürung des Ringgeflechts. Nach [Abb. 4-38] ergibt sich eine Einschnürung von 45,8% beim Versagen des ersten Einzelringes.

Als Resultat werden einzelne Ringe einer zusätzlichen Querkraft und damit Schubdeformation ausgesetzt, was bei gegebener Axialdehnung zu höheren lokalen Spannungen in den Ringen führt. Die gemessene Axialkraft bildet damit nur eine Komponente des inneren Belastungszustandes ab. Die Querkraftkomponente wird über die Messtechnik nicht erfasst. Im Umkehrschluss stellt sich ein Erstversagen von einzelnen Ringen bei geringerer gemessener Axiallast ein, was durch die Werte in [Tab. 4-11] belegt wird.

Im unbelasteten Zustand ist eine solche Einschnürung durch Gravitationslasten nicht erkennbar, wodurch die Randeffekte im linear elastischen Einsatz des Geflechts vernachlässigt werden können.

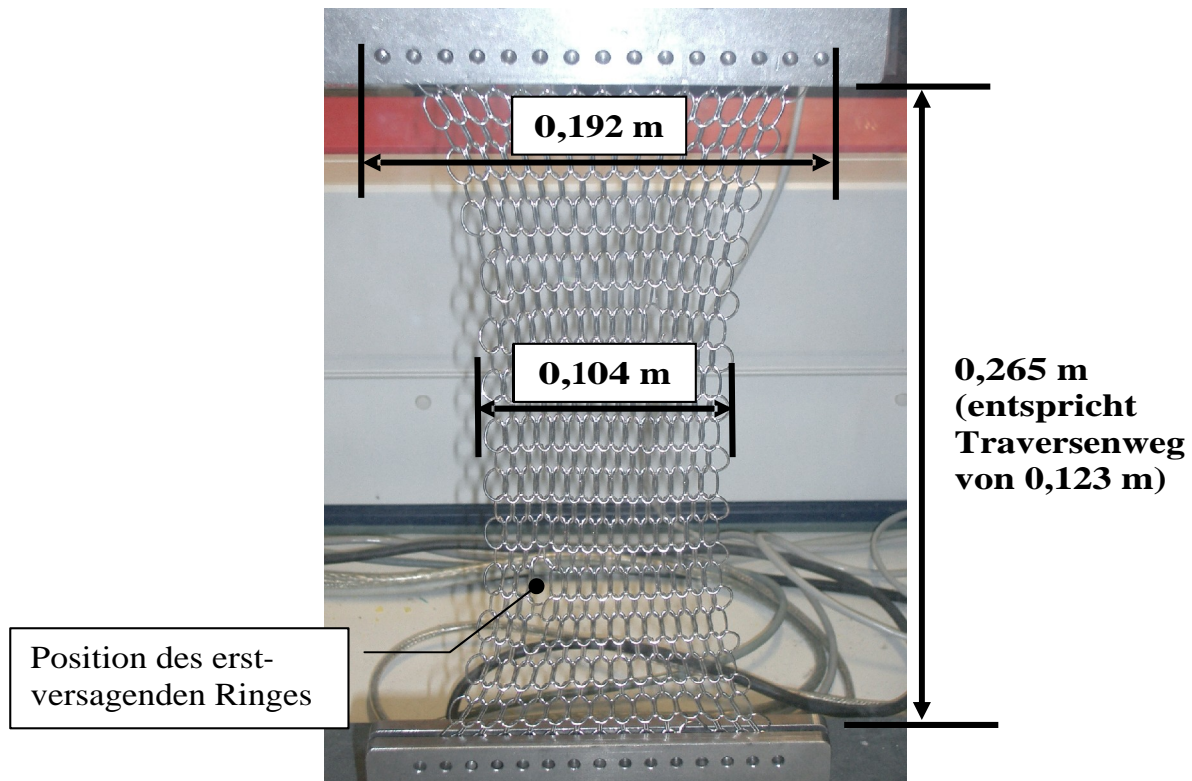


Abb. 4-38 Einschnürung einer Geflechtsprobe (25-reihig) unter axialer Belastung bei Erstversagen eines Geflechtsringes

Analog zu den analytischen und numerischen Betrachtungen wird die Ermittlung linear elastischer Materialeigenschaften aus den experimentellen Messdaten angestrebt.

Mit der Betrachtung des axialen Zugversuches von [Abb. 4-34] wird deutlich, dass eine Beschränkung auf einen elastischen Bereich bzw. eine Isolation der elastischen Verformungskurve aufgrund des geringen Anteils an der Gesamtverformung nicht praktikabel ist. Die Messgenauigkeit im elastischen Bereich wird beeinflusst durch:

- Formtoleranzen der Einzelringe in der Geflechtsprobe,
- Fertigungsbedingte geometrische Toleranzen der Fixiervorrichtung,
- Installation des Probekörpers in der Prüfmaschine.

In der Folge werden in der Geflechtsprobe inhomogene Verzerrungszustände erreicht, die sich nicht explizit auflösen lassen und die Messergebnisse im elastischen Deformationsbereich verfälschen. Dies berücksichtigend werden die elastischen Materialeigenschaften des Ringgeflechts nicht aus der experimentell ermittelten Deformationscharakteristik abgeleitet.

5 Anwendungsbeispiele für Ringgeflechte

In Kapitel 1 wurden historische und aktuelle Anwendungsgebiete von Ringgeflechtem vorgestellt. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen wurde auch nach einer Erweiterung des Einsatzspektrums gesucht. Unter Verwendung der zuvor gewonnenen homogenen Materialparameter sollen nachfolgend Untersuchungen solcher Anwendungen diskutiert werden.

5.1 Analyse von Impaktvorgängen

Über die Basiseigenschaften des Geflechtes – hohe lokale Festigkeit, hohe globale Elastizität und Plastifizierungsfähigkeit – erschließt sich die Möglichkeit der Absorption kinetischer Energie von kleinen wie großen Impaktoren im niederen und mittleren Geschwindigkeitsbereich bis 60 m/s^{-1} . Eine Diskussion von Ringgeflechtem und Ringgeflechtshybriden unter ballistischer Belastung von Impaktoren höherer Geschwindigkeit findet sich in [*Bur 09*].

Relativ zur Elastizitätscharakteristik des Ringgeflechtes wirken Festkörperimpaktoren als nichtdeformierbare Starrkörper. Um derartige Impaktvorgänge simulieren zu können, haben sich numerische Methoden zur Analyse von Mehrkörpersystemen bewährt, welche die Kinematik des Einschlagvorgangs und die Veränderung des Bewegungszustandes des Impaktors abbilden. Des Weiteren kann ein Mehrkörpersystem aus einer Vielzahl von Einzelkörpern bestehen, die über individuelle, nichtlineare Beziehungen translatorisch und rotatorisch miteinander verbunden sind. Bei der Interaktion dieser Starrkörper ist eine solche Mehrkörpersimulation ausreichend.

Die Kinematik von Starrkörpern wird durch die zweite zeitliche Ableitung der Körperfreiheitsgrade in expliziter Form bestimmt. Mit der Definition einer Position und Geschwindigkeit jedes Einzelkörpers wird deren Anfangszustand beschrieben. Mit der Abbildung als Starrkörper – beschrieben durch ihre Masse, ihren Massenschwerpunkt und ihre Trägheitsmomente – ist die Anzahl der Freiheitsgrade im Mehrkörpersystem linear abhängig von der Anzahl der Einzelkörper.

Die Körperform ist dabei lediglich von Bedeutung, wenn Körperkontaktprobleme zu betrachten sind. Die Körperform als auch die Trägheitsmomente sind in einem körpereigenen Koordinatensystem definiert.

Zur Beschreibung der Kinetik des Starrkörpers wird die Bewegung des lokalen Koordinatensystems bezüglich eines globalen, raumfesten Referenzkoordinatensystems beobachtet. Die Lage eines jeden Punktes i des Starrkörpers wird durch einen Ortsvektor \vec{P}_i in diesem Referenzkoordinatensystem als Summe aus dem Ortsvektor des Massenschwerpunktes \vec{r} und der relativen Lage des Punktes \vec{p}_i beschrieben:

$$\vec{P}_i = \vec{r} + \vec{p}_i \quad . \quad \text{[Gl. 5-1]}$$

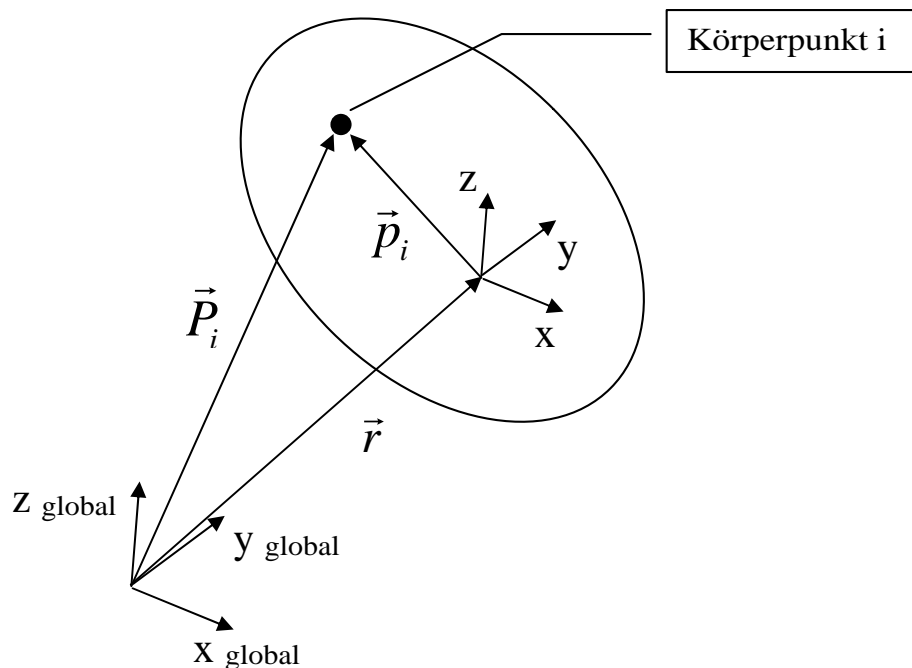


Abb. 5-1 Illustration von Parameter zur Starrkörperbeschreibung

Geschwindigkeit und Beschleunigung der Körperpunkte ergeben sich durch die zweite zeitliche Ableitung der Ortsvektoren:

$$\dot{\vec{P}}_i = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{p}_i \quad , \quad \text{[Gl. 5-2]}$$

$$\ddot{\vec{P}}_i = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{p}}_i = \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{p}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) . \quad \text{[Gl. 5-3]}$$

Die translatorische Bewegung eines Starrkörpers bezüglich seines Massenschwerpunktes wird durch den Impulssatz, die rotatorische Bewegung durch den Drallsatz ausgedrückt, welche nach D'Alembert in Lagrange'scher Fassung lauten:

$$\text{Impulssatz} \quad m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad , \quad [\text{Gl. 5-4}]$$

$$\text{Drallsatz} \quad [J] \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times [J] \cdot \vec{\omega} = \vec{M} \quad . \quad [\text{Gl. 5-5}]$$

Hierin ist m die Masse, J die Trägheitsmatrix und $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Starrkörpers. Die in den resultierenden Kräften F und den Momenten M enthaltenen Bindungskräfte der Gelenke sind bis zur Bestimmung der Körperbeschleunigung unbekannt. Über die Anwendung numerischer Verfahren zur Lösung des Differentialgleichungssystems werden diese Beschleunigungen unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen ermittelt.

Besteht das Mehrkörpersystem aus verschiedenen, miteinander über Gelenke verbundenen Einzelkörpern (vgl. [Wit 77], [Str 00]), so wird die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpermassenschwerpunktes i jedes Einzelkörpers in Abhängigkeit von der Position des Einzelkörpers j über die Freiheitsgrade \vec{d}_{ij} dieser Gelenke beschrieben, welche abhängig von der Art des Gelenktyps sind. Greifen diese Gelenke nicht im Massenschwerpunkt der Einzelkörper an, so muss die Darstellung der Gelenkfreiheitsgrade um den Lagevektor \vec{c}_{ij} bzw. \vec{c}_{ji} auf die lokalen Koordinatensysteme (η, ξ, ζ) der Gelenkpunkte i und j erweitert werden.

$$\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{c}_{ij} + \vec{d}_{ij} - \vec{c}_{ji} \quad , \quad [\text{Gl. 5-6}]$$

$$\dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{r}}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{c}_{ij} + \dot{\vec{d}}_{ij} - \vec{\omega}_j \times \vec{c}_{ji} \quad , \quad [\text{Gl. 5-7}]$$

$$\ddot{\vec{r}}_j = \ddot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{c}_{ij} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{c}_{ij}) + \dot{\vec{d}}_{ij} - \dot{\vec{\omega}}_j \times \vec{c}_{ji} - \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{c}_{ji}) \quad . \quad [\text{Gl. 5-8}]$$

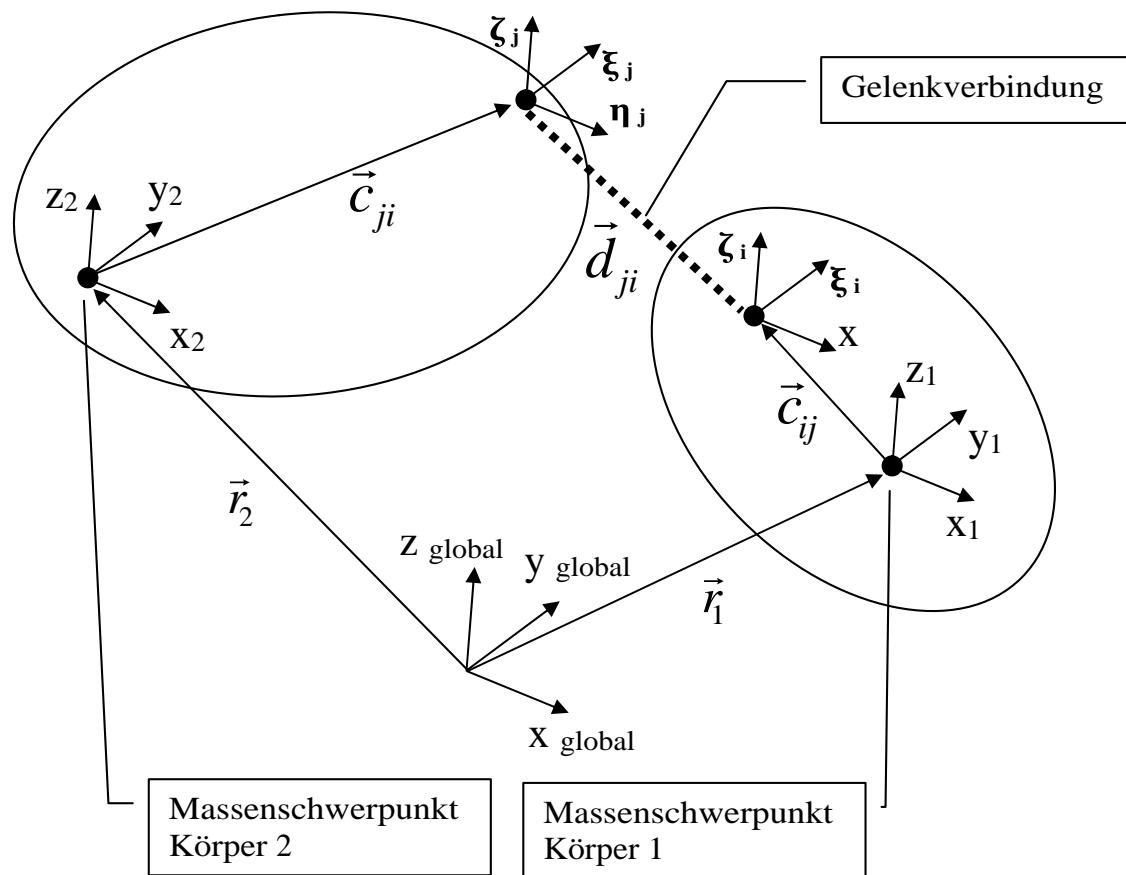


Abb. 5-2 Illustration von Parameter zur Verbindung von Starrkörpern innerhalb eines Mehrkörpersystems

Für Mehrkörperkontaktbedingungen, die durch einen hohen Unterschied in der Elastizität der Kontaktpartner geprägt ist, hängt die Systemantwort des auftreffenden Starrkörpers stark von der Nachgiebigkeit des elastischen Kontaktpartners ab. Diese Abhängigkeit zu erfassen ist eine erweiterte Abbildung der Interaktion nötig, wie sie durch Finite-Elemente-Programme realisiert wird.

Derartige Erweiterungen werden durch flexible Mehrkörpersysteme realisiert, welche zusätzliche Freiheitsgrade zur Beschreibung der Körperdeformation in die Formulierung aufnehmen. Da diese Deformationen sowohl elastisch als auch inelastisch (z. B. elasto-plastisch, viskos etc.) sein können, spricht man von *flexiblen* und nicht von *elastischen* Mehrkörpersystemen.

Flexible Mehrkörpersysteme werden nach den erwarteten Lösungen unterschieden:

- Methode kleiner Deformationen,
- Methode großer Deformationen mit kleinen Verzerrungen,
- Methode großer Deformationen mit großen Verzerrungen.

Diese Methoden greifen auf angepasste Lösungsansätze zurück:

- Mitbewegte Referenzkonfiguration

Dieser Ansatz wird zur Beschreibung kleiner Körperdeformationen verwendet. Dabei können die Körper selbst großen Rotationen unterliegen. In dieser Formulierung setzt sich die Position eines Punktes additiv aus Vektoren der Starrkörpertranslation und Starrkörperrotation sowie einem Deformationsvektor zusammen. Diese Deformationen werden über eine Diskretisierung und unter Verwendung geeigneter Ansatzfunktionen bestimmt und werden in Referenz auf generalisierte Körperkoordinaten dargestellt, welche durch die Bewegungsgleichung ermittelt werden.

- Inkrementelle Formulierung

Die inkrementelle Formulierung wird zur Modellierung großer Deformationen von Strukturelementen verwendet, wobei Elemente mittels Position und Rotationsparameter beschrieben werden. In den einzelnen Berechnungsschritten wird das Inkrement der Rotationen verwendet. Um Fehler und Instabilitäten in der Berechnung zu vermeiden, muss die Inkrementierung auf die Größe des Simulationsproblems angepasst werden.

- Formulierung absoluter Knotenkoordinaten

Der Ansatz der Formulierung absoluter Knotenkoordinaten dient zur Modellierung großer Deformationen und großen Verzerrungen. Dazu werden die Knotenverschiebungen aus der Ortsänderung individueller Körperpunkte ermittelt. Des Weiteren werden die Richtungsableitungen mehrerer Punktepositionen eines Körpers verwendet, um den Verzerrungszustand zu ermitteln. Die Knotenkoordinaten dienen dabei als Freiheitsgrade für die Beschreibung der Deformation. Da keine Rotationsfreiheitsgrade eingeführt werden, sind Ansatzfunktionen so gewählt, dass beliebige Starrkörpertranslationen und -rotationen sowie Deformationen dargestellt werden können.

Für die Mehrkörpersimulation von Ringgeflecht in Szenarien der Energieabsorption nach Impaktoreinschlag wird das Softwarepaket „MADYMO“ verwendet, welches das inkrementelle Verfahren über Zeitschrittinkremente implementiert.

5.2 Simulation eines Kleinkörperanpralls

Eine Anwendung des Ringgeflechts kann in der Aufgabe bestehen, als Schutzzaun kleinere Körper in ihrer Bewegung zu behindern und ggfs. diese vollständig abzufangen. Als klassisches Beispiel soll der Einschlag eines Golfballs in ein frei hängendes Ringgeflecht dienen, dessen Verhalten nach dem Einschlag soll über eine Simulation ausgewertet werden soll. Der Simulation liegt ein entsprechender Freifeldversuch zugrunde, bei der ein Golfball mit einer Anfangsgeschwindigkeit per manuellem Abschlag versehen wird.

Der Aufbau eines solchen Versuches ist in [Abb. 5-3] dargestellt. Der Versuchsverlauf wird über Hochgeschwindigkeitsaufnahmen bei 1000 Bildern pro Sekunde dokumentiert. Über die Verwendung des Softwarepaketes „SIMI Motion“ erfolgt die Analyse der Starrkörperbewegung sowohl des Impaktors als auch des Ringgeflechtes. Die Ergebnisse des Versuches dienen der Validierung der Ergebnisse der Berechnung des Mehrkörpersystems.

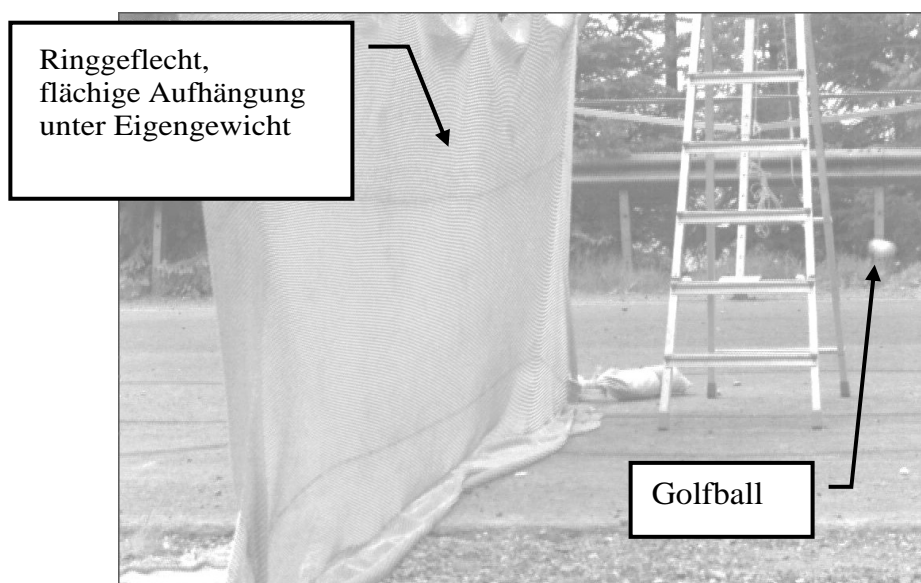


Abb. 5-3 Versuchsaufbau einer Ringgeflechtsprobe für Golfballeinschlag

5.2.1 Modellbildung

Die Modellierung dieses Einschlagvorganges bedarf der Berücksichtigung zweier mechanischer Gegebenheiten – der Elastizität des Ringgeflechtes und des Starrkörperverhaltens des Golfballes.

Das Analysemodell bildet einen frei hängenden Vorhang aus Ringgeflecht mit einer Breite von 5 m und einer Höhe von 2 m ab. Dieser ist am oberen Rand in den drei translatorischen Freiheitsgraden festgelegt, die anderen Ränder sind frei. Durch Gravitation wird das Ringgeflecht in Verschränkungsrichtung vorgespannt.

Das Ringgeflecht wird durch finite Elemente mit bilinearer Ansatzfunktion abgebildet. Die Elementgröße beträgt 0,05 m x 0,05 m und repräsentiert dabei auf Makroebene eine Vielzahl von flächig angeordneten RVE des Ringgeflechtes. Um den Einfluss unterschiedlicher Ringgrößen im Geflecht beurteilen zu können, werden die Eigenschaften zweier Geflechte berücksichtigt:

- Geflechtsgröße G4:
 - Ringaußendurchmesser 7 mm,
 - Ringdrahtdurchmesser 0,6 mm,
 - Flächengewicht 1,58 kg·m⁻²,
- Geflechtsgröße G9:
 - Ringaußendurchmesser 12 mm,
 - Ringstärke 1,1 mm,
 - Flächengewicht 3,16 kg m⁻².

Die Elastizität des Ringgeflechtes wird durch die MADYMO-Elementdefinition MEM4 mit Membraneigenschaften ausgestattet, welche die Übertragung von Drucklasten unterbinden (siehe [*MRM 05*]). Die orthotropen, linear-elastischen Materialeigenschaften sind den analytischen Betrachtungen aus Kapitel 4.1 entnommen. Die MADYMO-Elementeigenschaften ermöglichen die Verwendung einer schubschlaffen Membran. Aufgrund der erwarteten Belastung durch den Golfballeinschlag werden die Materialeigenschaften des Ringgeflechtes auf deren elastischen Bereich beschränkt. Durch die hohe Differenz der Materialsteifigkeit wird der Golfball im Rahmen der Analyse als Starrkörper beschrieben. Der Durchmesser von 42,67 mm (1,680 inches) und das Gewicht von 45,93 g (1,620 ounces) werden durch [*R&A 03*] definiert.

Parameter	E_x	E_y	ν_{xy}
Parameterwert Geflecht G4	$46 \cdot 10^6$ Pa	$706 \cdot 10^6$ Pa	0,017
Parameterwert Geflecht G9	$72 \cdot 10^6$ Pa	$968 \cdot 10^6$ Pa	0,021

Tab. 5-1 Linear-elastische Materialkennwerte von Ringgeflechten in der Mehrkörpersimulation

Um ein entsprechendes Ein- und Abrollen des Golfballes zu simulieren, wird der Golfball nicht als Punktmasse sondern als Festkörper mit realen Abmessungen und einer gleichförmigen Elementdichte von 36 Elementen an den Umfangskreisen des Golfballs abgebildet.

Da dem Golfball die Charakteristik eines Starrkörpers zugewiesen wurde, müssen keine Materialeigenschaften definiert werden.

Zur Abbildung der transienten Belastungsszenarios wird dem Golfball, entsprechend der Vermessung in der Versuchsdurchführung, eine Anfangsgeschwindigkeit von $55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ normal zur Geflechtsoberfläche zugeordnet.

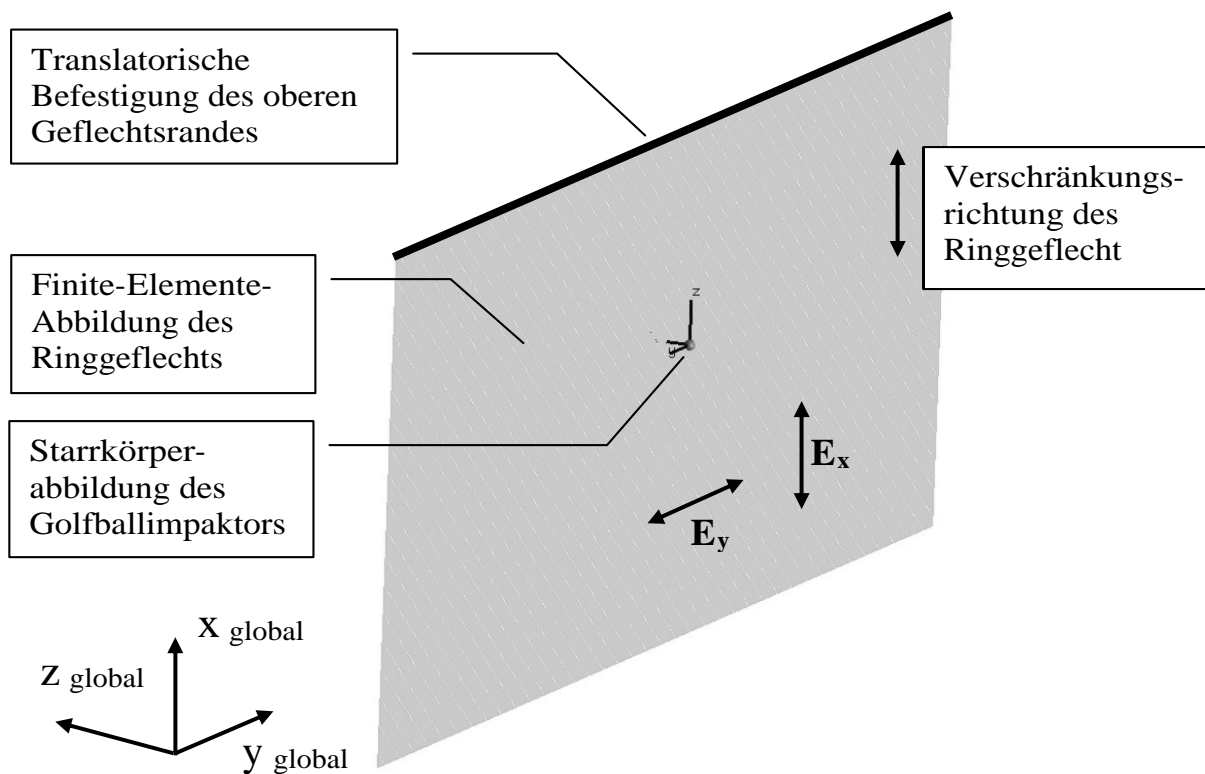


Abb. 5-4 Modellaufbau zur Simulation eines Golfballeinschlags

5.2.2 Simulationsergebnisse

Über die kombinierte Starrkörper- und Finite-Elemente-Analyse wird die Systemantwort in Form der Bewegung des Ringflechtes als auch der Geschwindigkeit des Impaktors ermittelt. Nach dem Erstkontakt zwischen Impaktor und Ringflecht breitet sich im Kontaktpunkt die Stelle höchster Deformation ringförmig um den Impaktor aus (siehe [Abb. 5-5]).

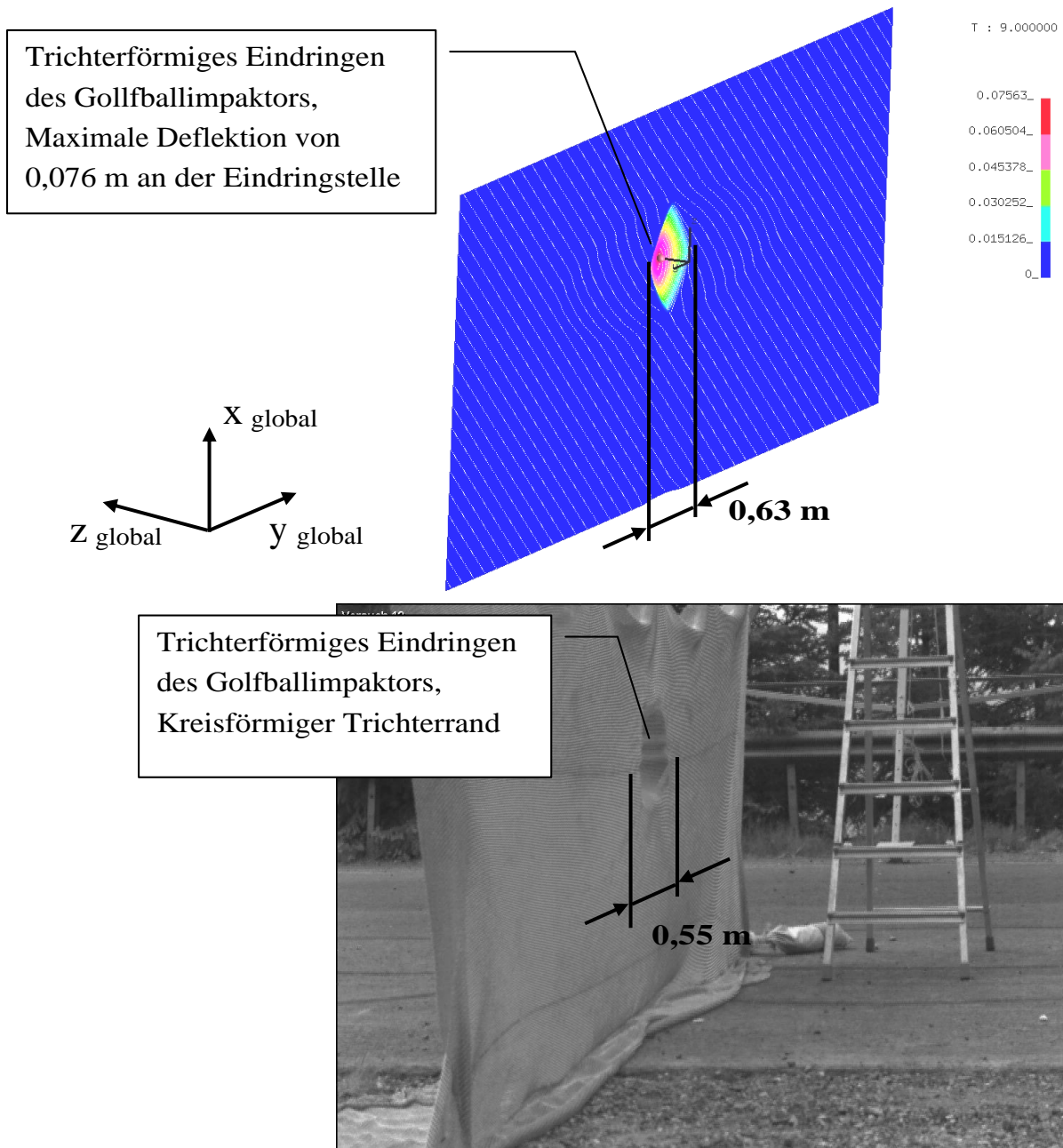


Abb. 5-5 Simuliertes und experimentelles Deformationsfeld beim Eindringen des Golfballimpaktors

Im weiteren zeitlichen Verlauf geht das Deformationsfeld in eine Wellenform über, was sich in einem Rückschwingen der Einschlagstelle ausdrückt. Dies führt zu einer Rückbeschleunigung des Impaktors, welcher daraufhin die Geflechtsebene entgegen der ursprünglichen Bewegungsrichtung verlässt.

Ein Vergleich mit der Hochgeschwindigkeitsaufnahme des Versuches erlaubt einen direkten Vergleich der Deformationsfelder und der Wellenausbreitung. Die beiden beschreibenden Größen zeigen visuell hinreichende Übereinstimmung.

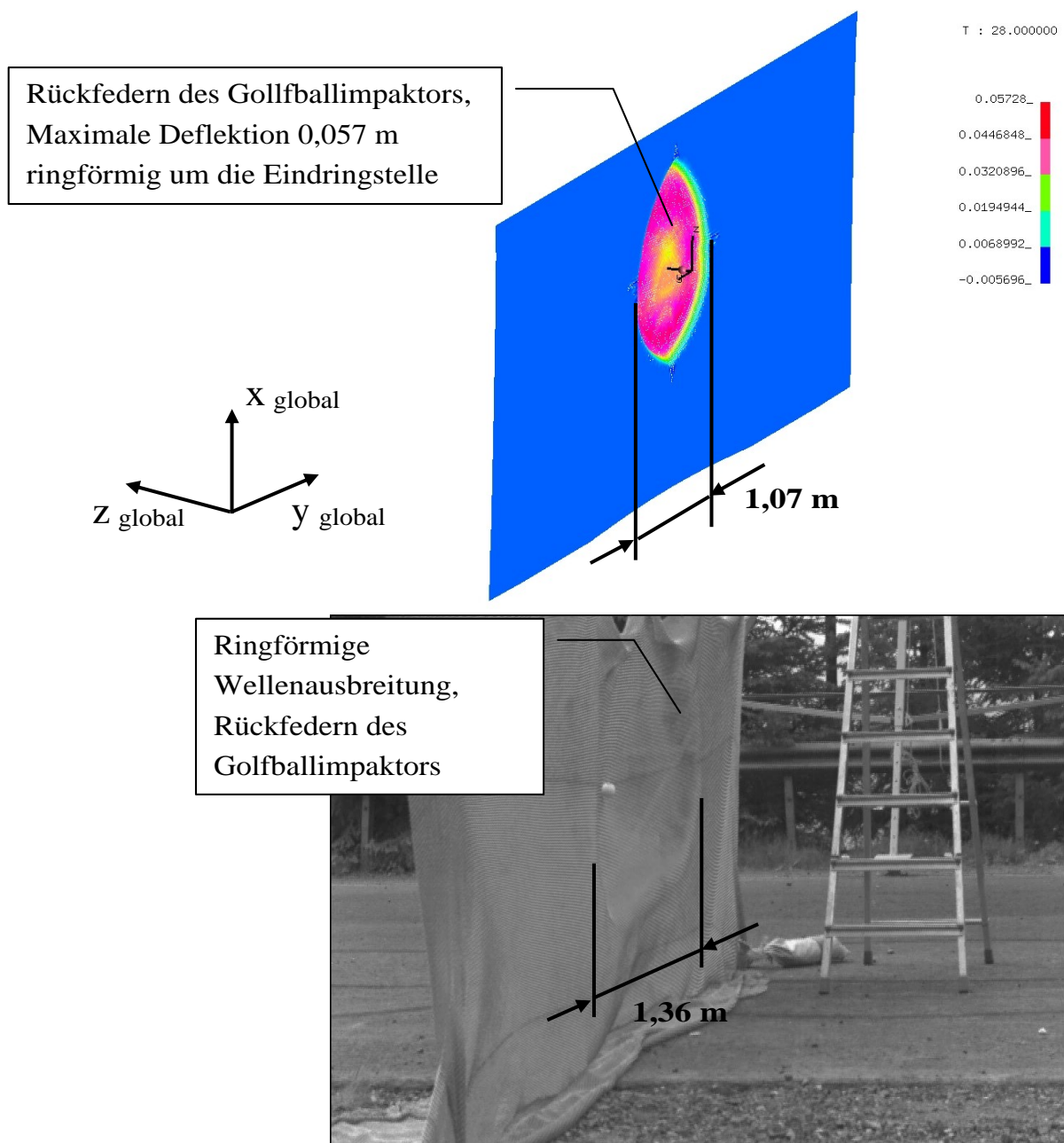


Abb. 5-6 *Simuliertes und experimentelles Deformationsfeld beim Zurückfedern des Golfballimpaktors*

Ein genauerer Vergleich wird über die Betrachtung den zeitlichen Verlauf der Impaktorgeschwindigkeit erreicht, wie in [Abb. 5-7] aufgezeigt. Im zeitlichen Bereich des direkten Einschlagvorganges zeigt die Simulation eine erhöhte Verzögerung des Impaktors. Der Unterschied geht auf numerische Effekte in der Simulation zurück, welche durch die Kopplung von Starrkörper- und Finite-Elemente-Simulation zurückgehen. Durch die sequenzielle Bearbeitung beider Algorithmen wird der Einschlag in das Geflecht zunächst als Starrkörperkontakt abgebildet. Dies führt zu einer entsprechend hohen Verzögerung. Die daraus resultierende Kraftwirkung wird anschließend in das Finite-Element-Modell eingebracht und führt dann zu einer elastischen Verformung des Ringgeflechts. Sobald sich dieser Anfangsvorgang stabilisiert hat, zeigen sowohl die Simulation als auch der Versuch äquivalente Verzögerungswerte, was die Validität der Modellbildung wie der Simulation aufzeigt.

Ein gleichartiger Ansatz erlaubt die Betrachtung unterschiedlicher Geflechtsgrößen. Mit einem höheren Flächengewicht erhöht sich die Massenträgheit des Geflechts, was einer Auslenkung entgegensteht. Durch die fehlende Elastizität des Impaktors wird dessen kinetische Energie nicht in einem elastischen Potenzial gespeichert und in einem Rückspringen freigesetzt. Ein erhöhtes Flächengewicht drückt sich demnach direkt in einer erhöhten, wenn auch nicht vollständigen Verzögerung aus.

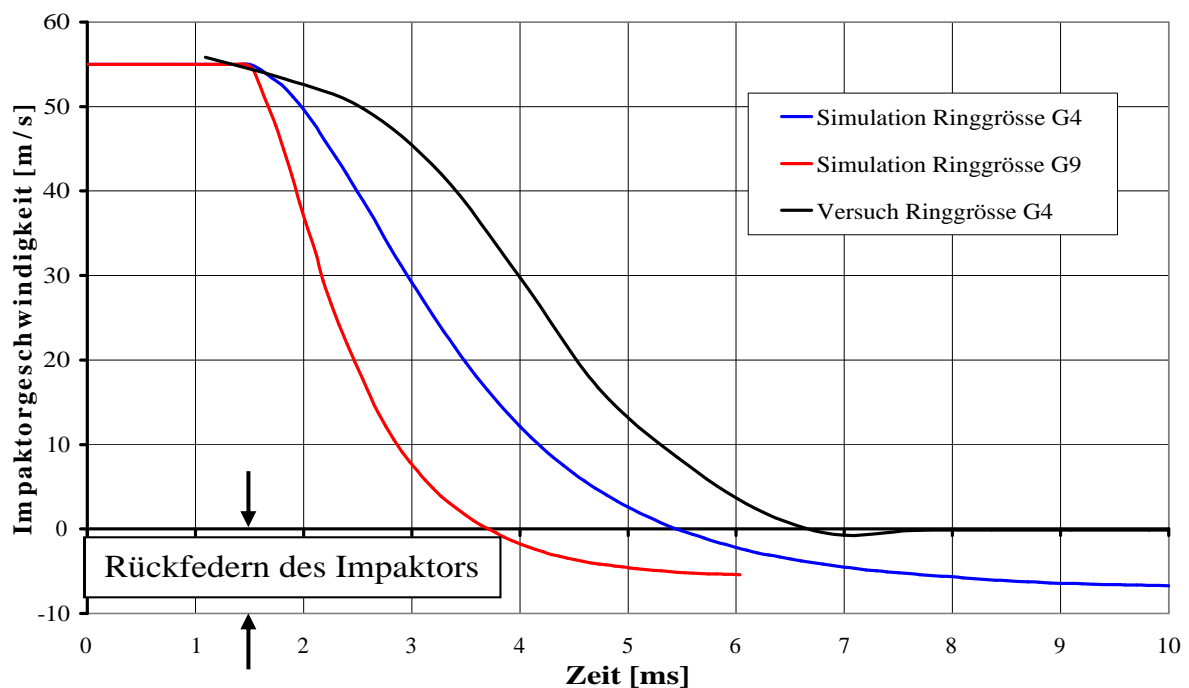


Abb. 5-7 Vergleich der zeitlichen Entwicklung von Impaktorgeschwindigkeiten

5.3 Simulation eines Großkörperanpralls

Über die Analyse der Systemantwort des Golfballeinschlages und den Vergleich mit dem äquivalenten Test ist die Verwendung der numerischen Simulation gelungen. Die Möglichkeit dieser Simulation soll nachfolgend in einer möglichen praktischen Anwendung des Ringgeflechts dargestellt werden.

Der Oberbegriff „Impaktor“ umfasst auch den Bereich menschlicher Impaktoren. Hierzu gehört das sichere Abfangen eines menschlichen Körpereinschlages, wie er bei Unfällen verschiedener Art auftreten kann. Dazu zählen Motorradunfälle und Stürze beim Abfahrtskillauf, welche in der Vergangenheit zu zahlreichen schwerwiegenden Verletzungen geführt haben. Bei der Beurteilung menschlicher Impaktoren wird dabei nicht nur die globale Systemantwort betrachtet, sondern auch Reaktionskräfte und Beschleunigungen auf unterschiedliche Körperbereiche, was eine Aussage über gesundheitliche Gefährdungen zulässt. Mit der Möglichkeit, die Energie eines Impaktors zu absorbieren und den Impaktor hinreichend sicher abzubremesen, eröffnen sich entsprechende Anwendungsgebiete in der Verkehrs- als auch Sporttechnik.

5.3.1 Modellbildung

Für die Simulation eines Großkörperanpralls wird das Mehrkörpersystem, welches für den Kleinkörperanprall entwickelt wurde, über die Veränderung des Impaktors ergänzt. Als Ringgeflecht wird die Geflechtsgröße G9 mit Ringdurchmesser 12 mm verwendet, die Elementgröße umfasst ein Ringgeflecht der Größe 0,05 m x 0,05 m. Die Materialeigenschaften des Ringgeflechts wurden in [**Tab. 5-1**] aufgeführt.

Das Modell eines menschlichen Impaktors kann dabei unterschiedlichen Modellierungsmethoden folgen.

- Eine Modellierung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode bildet die Körperbestandteile individuell ab und weist den Körperbereichen spezifische Materialmodelle zu. Damit können Aussagen über die Beanspruchungen einzelner Knochen oder Gewebe erfolgen. Je nach Detaillierungsgrad steigt der Berechnungsaufwand signifikant an.

-
- Körperteile werden als Starrkörper modelliert und über Verbindungselemente entsprechend des menschlichen Körperbaus verbunden. Diesen Verbindungselementen (z. B. Gelenken) werden human-mechanische Steifigkeitseigenschaften zugewiesen. Während die Mehrkörpersimulation Aussagen über Körperkräfte und –beschleunigungen trifft, erlaubt die nachträgliche Applikation von Körpermaterialmodellen die Beurteilung von Gewebeschädigungen. Das Softwarepaket MADYMO beinhaltet die dafür geeigneten Eigenschaften menschlicher Körpermodelle (siehe [*MMM 05*]).

Da die Abbildung des Körperbaus als Starrkörper deutliche Vorteile bei der Modellierung als auch beim Berechnungsaufwand hat, wird dieses Vorgehen für die nachfolgenden Betrachtungen angewandt.

Das Menschenmodell – im Körperbau repräsentativ hinsichtlich Größe, Gewicht, Dichteverteilung und Körperbeweglichkeit – setzt sich aus einer Vielzahl von Massenpunkten zusammen, welche ein verbundenes Mehrkörpersystem bilden. Die Massenpunkte repräsentieren einzelne Teile des menschlichen Skeletts.

Die Verbindung der Körperteile erfolgt über Modelle menschlicher Gelenke mit repräsentativen Steifigkeiten und Bewegungsfreiheitsgraden. Die Charakteristik unterschiedlicher Körpergelenke wurde in separaten, klinischen Versuchsreihen ermittelt. Eine Beschreibung dieser Gelenkeigenschaften findet sich z. B. in [*Zat 98*].

Die Körpermassenpunkte sind von Körpergewebeteilen umgeben, die als facettierte Volumenkörper modelliert, mit repräsentativer Massenverteilung und Steifigkeit versehen sind und entsprechend der Gewebeeigenschaften reagieren. Eine umfassende Beschreibung der elasto-mechanischen wie kinematischen Körper-eigenschaften findet sich z. B. in [*Fun 93*].

Eine Darstellung des inneren Körpergerüsts und der äußeren Körperhülle erfolgt in [*Abb. 5-8*]. Das um das Ringgeflecht erweiterte Analysemodell wird in [*Abb. 5-9*] dargestellt. Hierbei wird dem Menschenmodell eine Masse von 80 kg und eine Anfangsgeschwindigkeit von $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ senkrecht zum Ringgeflecht zugeordnet.

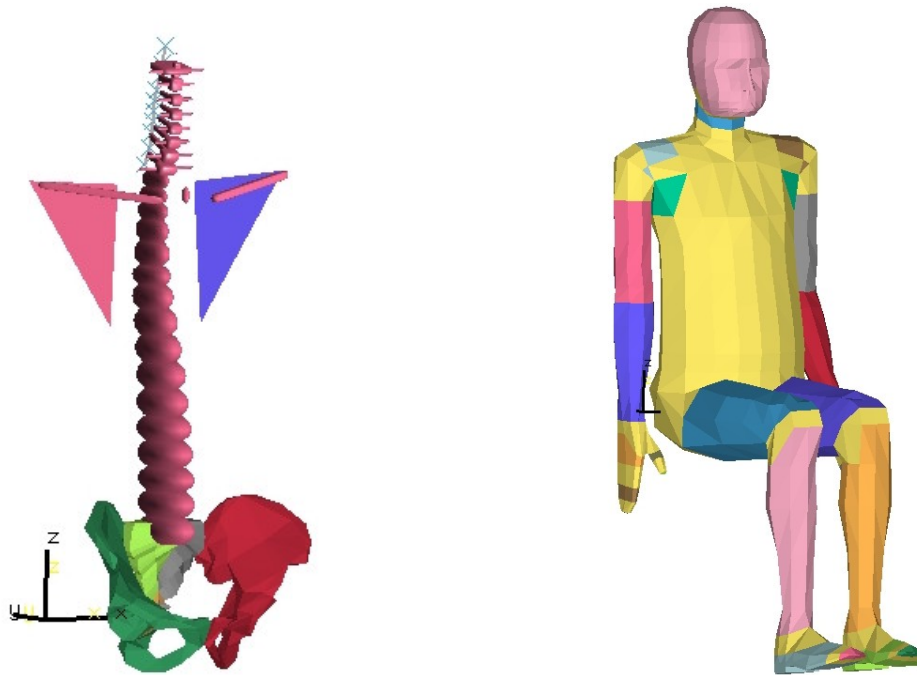


Abb. 5-8 Darstellung des MADYMO-Simulationsmodells eines menschlichen Körpers als skelettiertes Grundgerüst (links) und mit Gewebe (rechts)

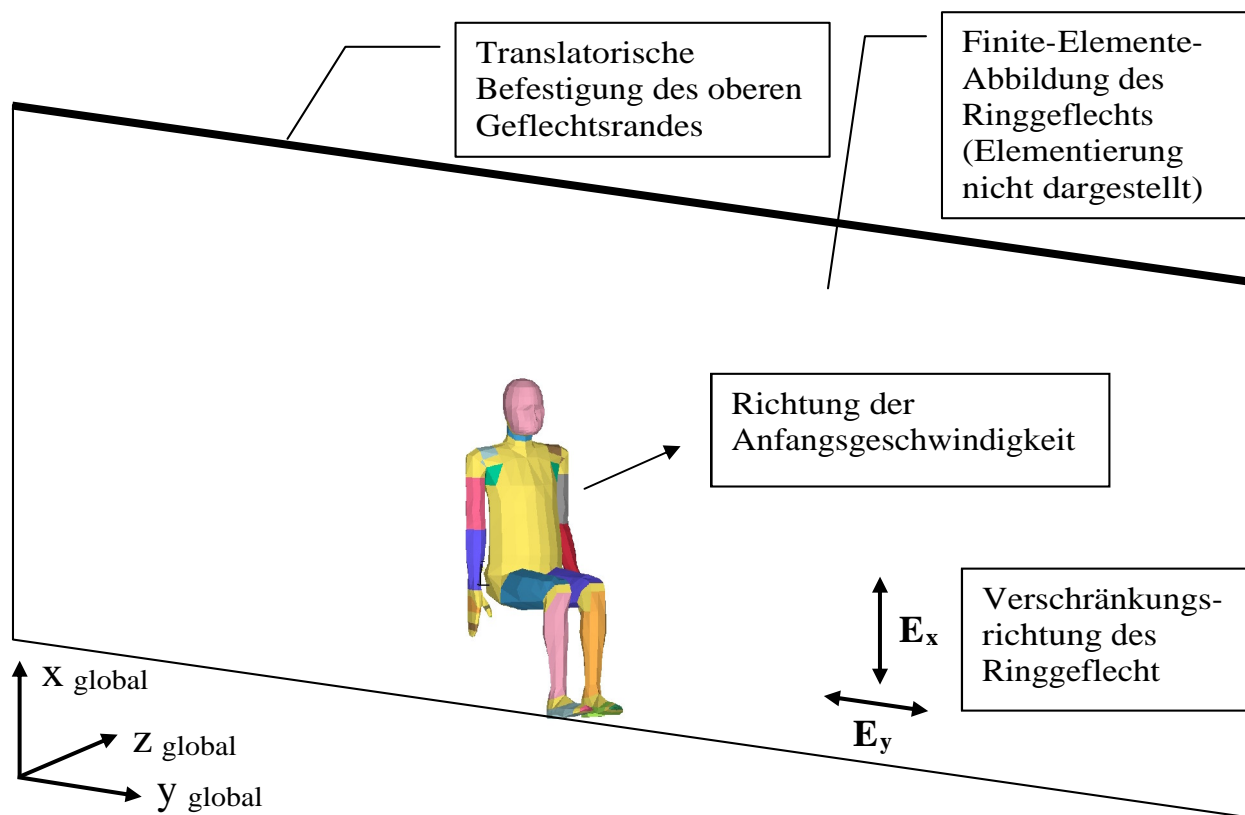


Abb. 5-9 Simulationsmodell für den menschlichen Großkörpereinschlag in ein Ringgeflecht

5.3.2 Simulationsergebnisse

Die Impaktanalyse des menschlichen Körpers erlaubt zunächst eine Beurteilung der Auslenkung des Ringflechts ebenso wie der Bewegung des Impaktors.

Wie in [Abb. 5-10] dargestellt, taucht der seitlich auftreffende Körper örtlich direkt in das Ringgeflecht ein. Aufgrund dessen Schubweichheit bewirken die Körperkonturen dabei eine lokale Verschiebung der Ringe. Mit tieferem Eintauchen stellt sich eine entsprechende globale Dehnung ein. Am Ende der Eintauchphase fängt sich der Körper im Geflecht, was zu einem vollständigen Stopp führt. Da der Körper nicht gleichmäßig über seiner gesamten Länge vom Ringgeflecht umschlossen wird, ergibt sich ein rotatorischer Bewegungsanteil, was zu einem Abkippen des Körpers führt (siehe [Abb. 5-11]).

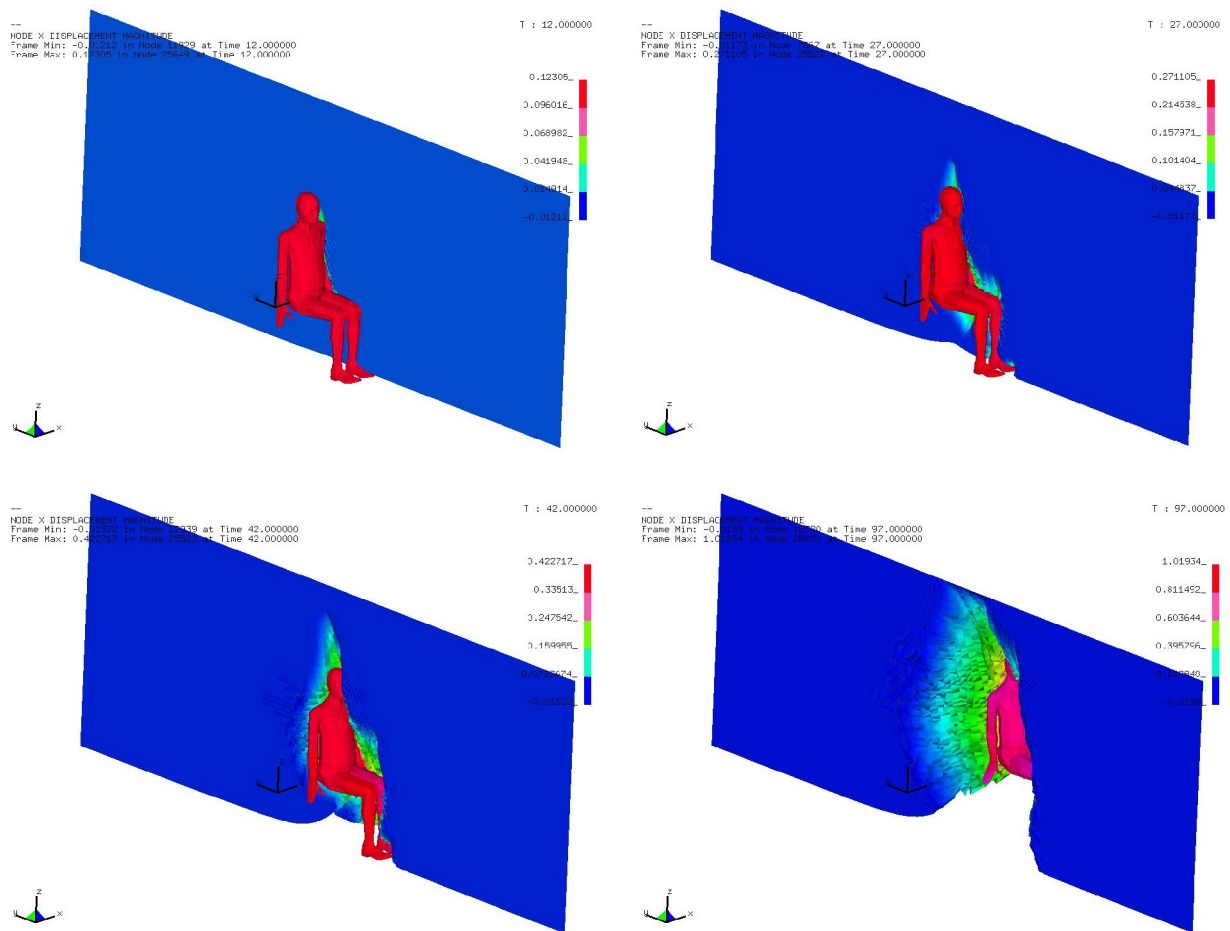


Abb. 5-10 Ergebnis der Impaktsimulation eines menschlichen Körpers – zeitliche Entwicklung der Auslenkung des Ringflechts

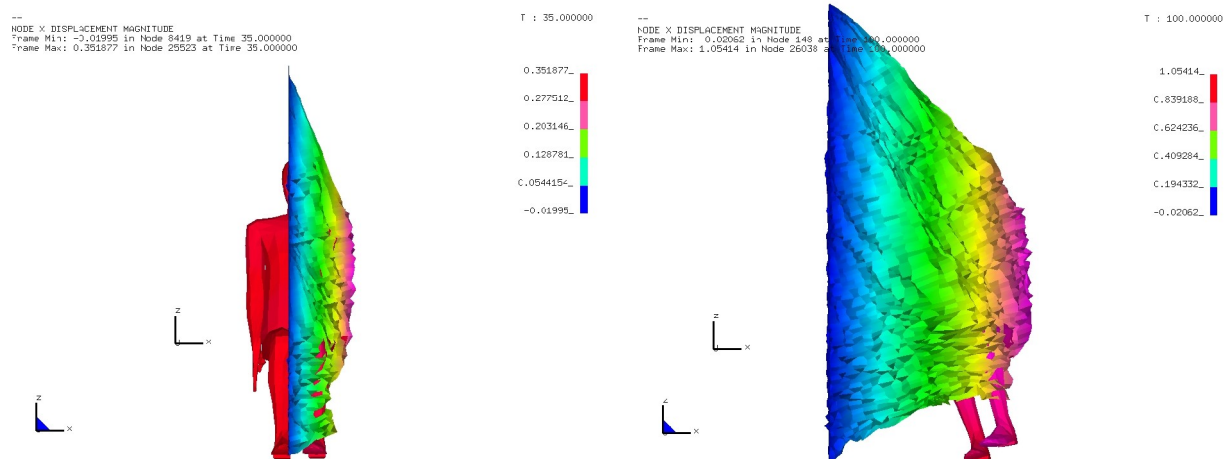


Abb. 5-11 *Ergebnis der Impaktsimulation eines menschlichen Körpers – Darstellung des Eindrehens des Impaktors in das Ringgeflecht*

Die Akzeptanz eines derartigen Abfangmechanismus wird über die Wirkung auf den menschlichen Körper beurteilt. Das Menschenmodell erlaubt für die Analyse eine direkte Berechnung von Schädigungsparametern, die eine direkte Aussage über Verletzungen in verschiedenen Körperbereichen treffen. Zu diesen Parametern gehören die Beschleunigungen einzelner Körperteile, die Winkeländerung von Gelenken sowie die Kräfte auf die inneren Organe. Die Beurteilung solcher Parameter wird z. B. in [Sch 04] ausgeführt.

In [Abb. 5-12] und [Abb. 5-13] werden die Beschleunigungen des Kopf- bzw. des Beckenbereiches über dem Betrachtungszeitraum dargestellt. Hierbei ist die Ergebniskurve durch einen stark sprunghaften Verlauf gekennzeichnet. Dieser Verlauf stellt sich durch die gekoppelte Betrachtung von Starrkörperbewegung und Finite-Elemente-Analyse ein. An den Punkten der Zeitinkrementierung kann demnach die Starrkörper- oder die Finite-Elemente-Antwort ermittelt werden, die jedoch voneinander abweichen. Die Höhe der Antwortsprünge kann durch eine stärkere Auflösung der Zeitinkremente verringert werden, was jedoch den numerischen Aufwand exponentiell steigert.

Um den Verlauf der numerisch ermittelten Datenpunkte dennoch zu glätten, wird durch Einführung einer Faltungsfunktion eine Funktionalanalyse durchgeführt, die auf einer Fouriertransformation basiert.

Das Glättungsverfahren unterliegt der Grundlage, dass Integrale der Form

$$\bar{f}(x) = \int f(y) \cdot k(y-x) dx \quad [\text{Gl. 5-9}]$$

durch Multiplikation der Fouriertransformierten von $f(y)$ und $k(y-x)$ ermittelt werden können. Hierin wird $f(y)$ durch die diskreten, numerischen Systemantwortdaten der gekoppelten Analyse gebildet. Die Funktion $k(y-x)$ wird durch den Kern der Faltung nach

$$k(y-x) = e^{-K \cdot (n/N)^2} \quad [\text{Gl. 5-10}]$$

gebildet und wird ebenfalls einer Fouriertransformation unterzogen. Hierin bilden n das betrachtete Zeitschrittinkrement, N die Anzahl der Zeitschrittinkremente und K eine Konstante. Die Rücktransformation des Produktes der Fouriertransformierten ergibt die geglättete Ergebniskurve, welche zur Auswertung der Mehrkörperanalyse herangezogen wird.

Im Gegensatz zur regelmäßigen Objektabbremmung eines kleinen Impaktor aus [Abb. 5-7] ergibt sich für den menschlichen Körper ein unregelmäßiges Beschleunigungsmuster für verschiedene Körperbereiche. Diese erklärt sich aus dem zeitlichen Abstand des Kontaktes verschiedener Körperregionen mit dem Ringgeflecht (vgl. [Abb. 5-12]) als auch aus dem Eindrehen des Körpers in das Ringgeflecht.

Ein Maximalbetrag für die Kopfbeschleunigung stellt sich mit dem 3,3-fachen der Erdbeschleunigung ein, für die Beckenbeschleunigung ergibt sich ein Maximalwert vom 1,4-fachen der Erdbeschleunigung. Derartige Werte führen in der Regel nicht zu körperlichen Schäden oder Traumata.

Zusätzlich werden durch die geringen Beschleunigungen die Kräfte auf die inneren Organe begrenzt, was Anrisse oder gar Abrisse von Blutgefäßen verhindert. Zusätzlich führt das Eindrehen des Körpers in das Ringgeflecht zu einer Stabilisierung des Körpers, was das Verdrehen einzelner Gelenke bzw. Wirbel verhindert.

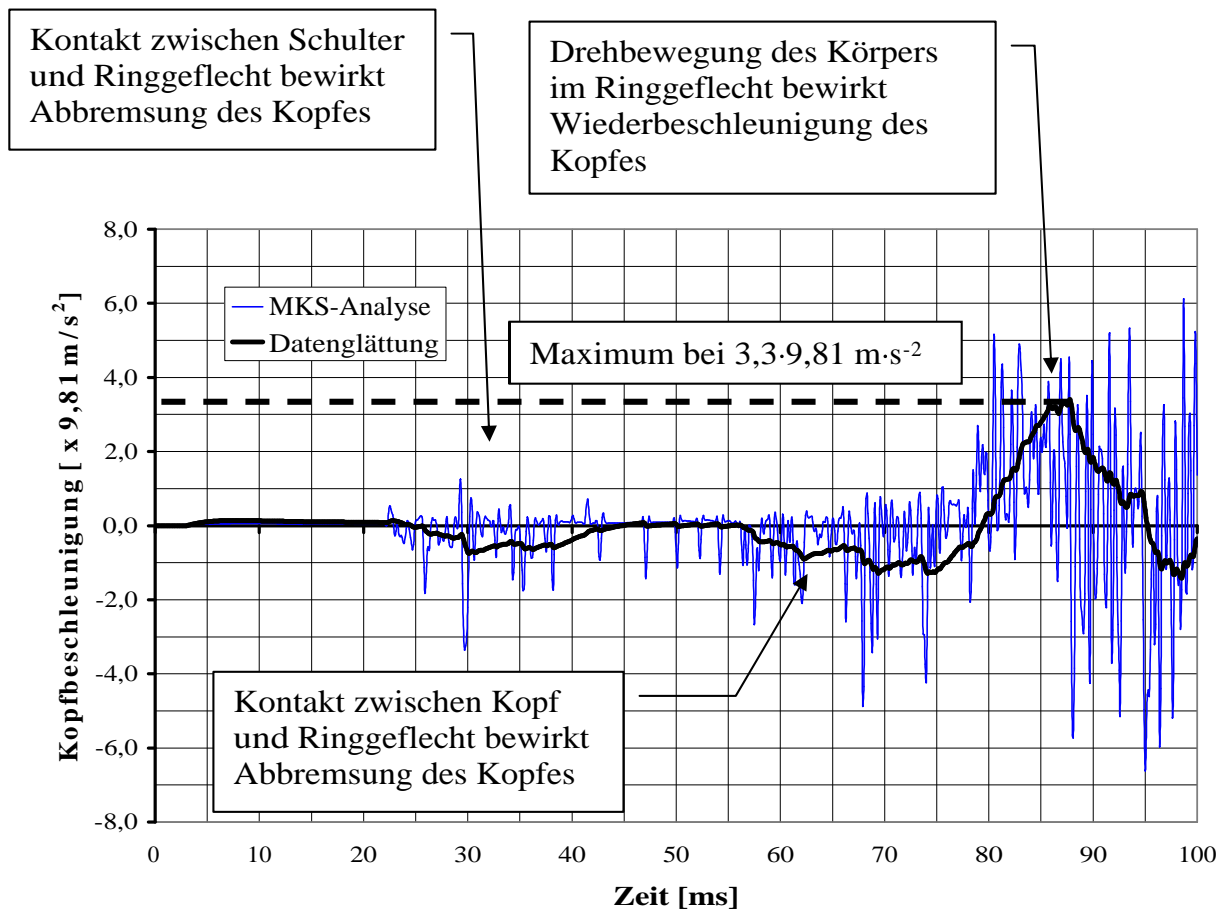


Abb. 5-12 Zeitlicher Verlauf der Kopfbeschleunigung in Aufprallrichtung

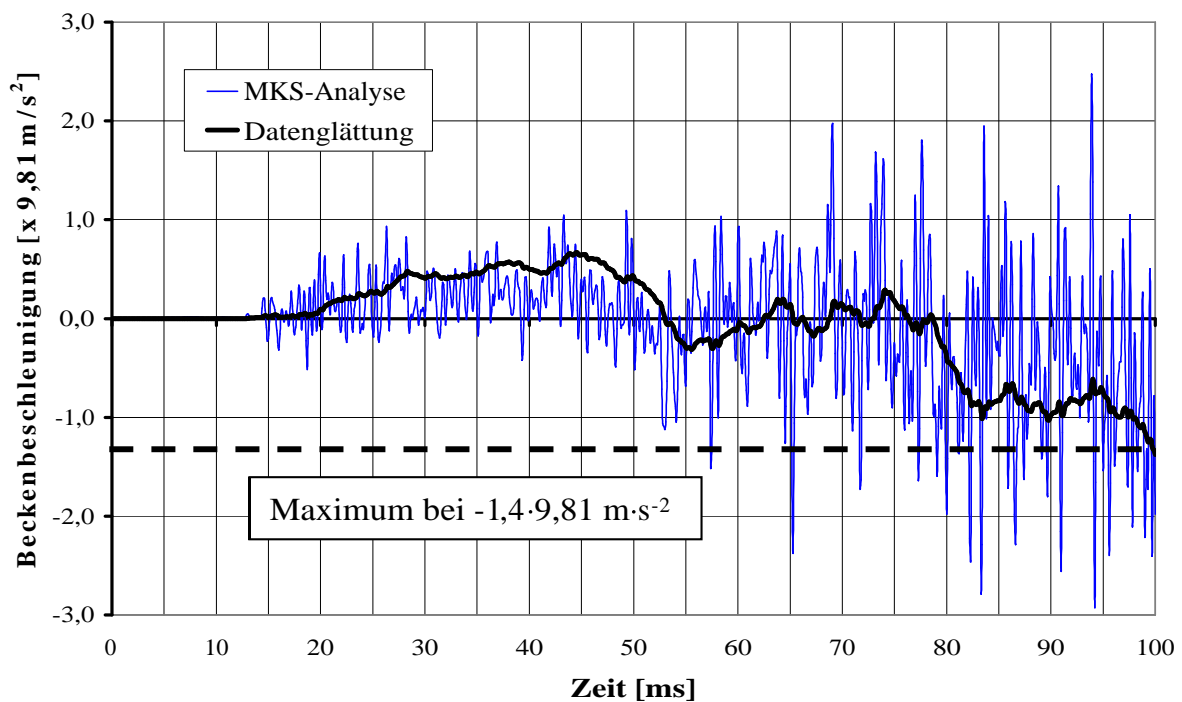


Abb. 5-13 Zeitlicher Verlauf der Beckenbeschleunigung in Aufprallrichtung

In Freifeldversuchen mit repräsentativen Körpergewichten konnte das Abfangen von Impaktoren experimentell untersucht werden. Der dazu verwendete Testaufbau ist in [Abb. 5-14] dargestellt.

Dabei wurde ein Ringgeflecht mit einer Breite von 20 m an Seilen abgehängt. Die Höhe des Geflechts beträgt 2 m. Um ein Durchrutschen des Impaktors zu verhindern, wurde das Ringgeflecht am Boden mit 0,5 m umgelegt.

Das Ringgeflecht wurde einem soliden Impaktor von 76,8 kg mit einer Aufprallgeschwindigkeit von 85, 95 und 115 km/h ausgesetzt. Dies führt zu einem kinetischen Energieeintrag zwischen $42,8 \cdot 10^3$ J und $78,4 \cdot 10^3$ J.

Der Impaktor stellt dabei ein Äquivalent zu einem verunfallten Motorradfahrer dar, welcher nach dem Sturz über die Fahrbahn rutscht. Das Freisetzen des Impaktors ist derart gewählt, dass er mit seiner Stirnseite in das Ringgeflecht einschlägt, was den Energieeintrag auf die kleinstmögliche Fläche begrenzt und damit einen konservativen Ansatz zu Beurteilung des Einschlagszenarios ermöglicht.

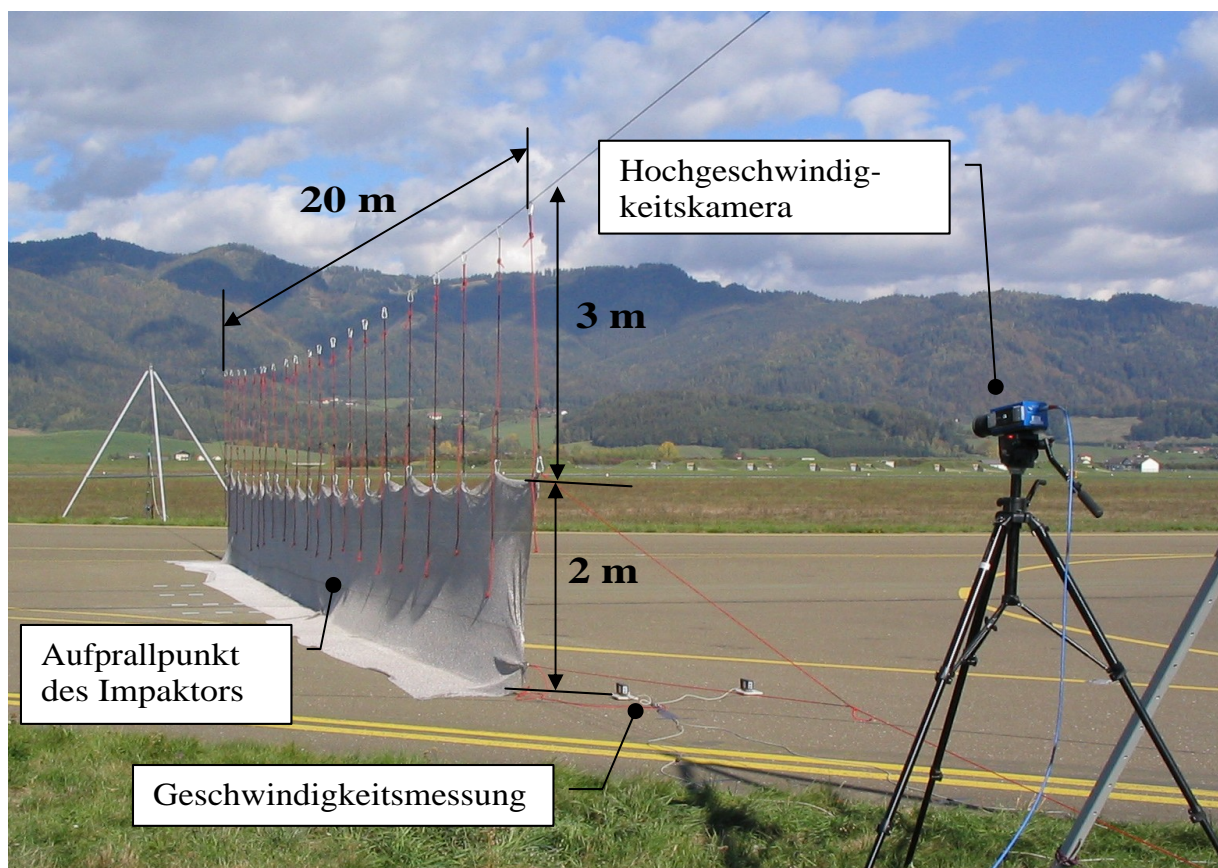


Abb. 5-14 Freifeldversuchsaufbau für Großkörperimpaktoren

In diesen Versuchen wurde phänomenologisch die Abbremswirkung ermittelt. Mit den Aufnahmen der Hochgeschwindigkeitskamera bei 1000 Bildern pro Sekunde werden die Ergebnisse der Simulation des menschlichen Körpereinschlages validiert.

Die Auswertung der Hochgeschwindigkeitsaufnahmen erlaubt eine Beobachtung des Impaktors und des Ringgeflechts ab dem Zeitpunkt der Messaktivierung. Der Impaktor dringt zunächst mit der Stirnseite in das Ringgeflecht ein und verursacht eine lokale Deformation des Ringgeflechts (siehe [Abb. 5-15 links]). Der Impaktor wird zunächst über seine Stirnfläche abgebremst, anschliessend vom Ringgeflecht umschlossen und durch dieses eingewickelt (siehe [Abb. 5-15 rechts]). Die daraus resultierende Achsrotation des Impaktors wird in der Simulation wie im Versuch entsprechend belegt.

Während ein Impaktor ohne Ringgeflecht nach ca. 48 m zur Ruhe kommt, wird der Impaktor im Ringgeflecht abgefangen, eingewickelt und nach hinten freigegeben. Der maximale Auslaufweg beträgt ca. 8 m. Dies bedeutet einen signifikanten Gewinn an Sicherheit nach einem Sturz, was bei dem Verunfallten die Schwere seiner Verletzungen entscheidend verringern kann.

t = 99 ms



t = 155 ms

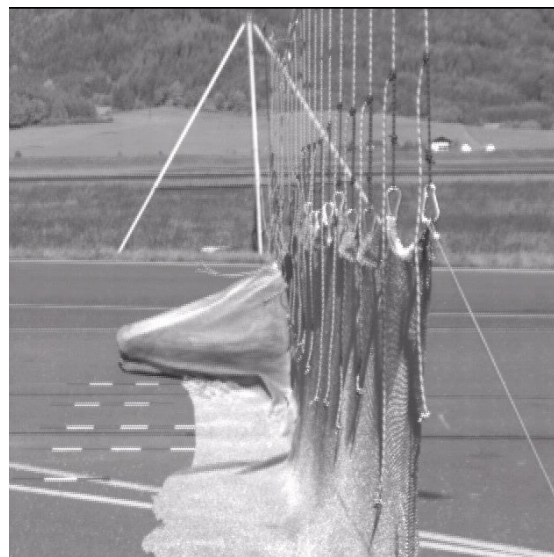


Abb. 5-15 Zeitlicher Verlauf eines Großkörpereinschlages bei 95 km/h in ein abgehangenes Ringgeflecht

6 Schlussfolgerung und Ausblick

Die Möglichkeit einer industriellen Fertigung von metallischem Ringgeflecht erlaubt dessen Einsatz in großflächigen Anwendungen in Bereichen der Architektur und der Sportschutzausrüstung. Um Ringgeflechte für diese Anwendungsgebiete zu qualifizieren, ist deren Materialcharakteristik von grundlegender Bedeutung.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag dazu, die Materialcharakteristik von Ringgeflechten systematisch zu ermitteln. Dazu wird die Topologie des Ringgeflechts erfasst und dessen analytische Betrachtung durch Rückführung auf Hierarchieebenen ermöglicht. Mit der daraus abgeleiteten Identifizierung und analytischen Beschreibung eines Repräsentativen Volumenelements sowie der Bildung eines mechanischen Ersatzmodells werden die orthotropen, linear elastischen Materialparameter ermittelt. Mit der Abbildung des Repräsentativen Volumenelements über die Finite-Elemente-Methode wird die Materialbetrachtung in den elasto-plastischen Bereich erweitert. Eine abschließende experimentelle Prüfung des Ringgeflechts ermöglicht eine Beurteilung des Deformationsvermögens bis hin zum Versagen einzelner Ringe im Geflecht.

Die Verwendung der analytisch ermittelten Materialeigenschaften zur Simulation von Szenarien eines Körperereinschlages zeigt das hohe Potenzial des Ringgeflechts für Schutzausrüstungen in Niedergeschwindigkeitsbereich auf .

Die vorliegende Arbeit hat sich auf das elastische Verhalten des Ringgeflechts konzentriert und die grundlegenden Zusammenhänge in der Geflechtstopologie und –kinematik dargestellt. Nichtlineare Effekte, die vor allem in Anwendungen unter Hochgeschwindigkeitseinschlag zum Tragen kommen, wurden in den bisherigen Untersuchungen nicht berücksichtigt. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, Ringgeflechte in eine Bettungsmasse einzubringen bzw. als Bestandteil eines Verbundaufbaus einzusetzen. Für derartige Verbunde ergeben sich spezifische mechanische Eigenschaften sowie ein verändertes Deformations- und Versagensverhalten, was auch eine Berücksichtigung von Dickeneffekten einschließt. Die dabei denkbaren Möglichkeiten ballistischer Schutzwirkung zu untersuchen ist ein valides Anliegen weiterführender Untersuchungen.

7 Literaturverzeichnis

- [Alt 94] Altenbach, J.; Altenbach, H.
„Einführung in die Kontinuumsmechanik“
Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994
- [Bec 99] Becker, W.; Hohe, J.
„Effective elastic properties of triangular grid structures”
Composite Structures 45, Seite 131-145, 1999
- [Bec 00] Becker, W.; Hohe, J.
“A mechanical model for two-dimensional cellular sandwich
cores with general Geometry”
Computational Materials Science 19, Seite 108-115, 2000
- [Bec 01] Becker, W.; Hohe, J.
„A refined analysis of the effective elasticity tensor for general
cellular sandwich Cores”
International Journal of Solids and Structures 38,
Seite 3689-3717, 2001
- [Bec 02] Becker, W.; Hohe, J.
„Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular
sandwich cores: Homogenization, material models, and properties”
ASME Applied Mechanics Reviews 55, Seite 61-87, 2002
- [Bet 93] Betten, J.
“Kontinuumsmechanik – Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik”
Springer Verlag, Berlin, 1993
- [Bur 09] Burger, U.
„Ein Beitrag zur Untersuchung des Impactverhaltens von
Verbundwerkstoffen mit metallischem Ringgeflecht“
Dissertation, Technische Universität Berlin, 2009
- [Cha 68] Chamis, C. C. ; Sendekyj, G. P.
“Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of
Fibrous Composites“
Journal of Composite Materials 2, 1968
- [Cos 09] Cosserat, E.; Cosserat, F.
“Theorie des Corps Deformables”
Hermans et Fils, Paris, 1909
- [Cur 94] Curry, A.; Hughes, M. (Hrsg.)
„Arms, Armies and Fortifications in the Hundred Years War”
Woodbridge, 1994

-
- [Dah 04] Dahlberg, T.
“Procedure to calculate deflections of curved beams”
International Journal of Engineering,
Vol. 20, Nr. 3, Seite 503-513, 2004
- [Den 98] Dendievel, R.; Forest, S.; Canova, G.
“An estimation of overall properties of heterogeneous
Cosserat materials”
Journal of Physics IV, Band 8, Seite 111–118, 1998
- [EIX 03] Euro Inox and the Steel Construction Institute (Hrsg.)
“Design Manual For Structural Stainless Steel - Commentary”
2. Auflage, 2003
- [Ett 04] Ettemeyer, A.
“Material and Component Validation by Speckle Interferometry and
Correlation Methods”
World Conference on Non-Destructive Testing, Montreal, 2004
- [Ett 06] Ettemeyer, A.
“Speckle-Interferometrie”
Praktikumsskript, Fachhochschule München, 2006
- [Fey 00] Feyrer, K.
„Drahtseile: Bemessung, Betrieb, Sicherheit“
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2000
- [For 06] Forest, S.
„Mechanics of Cosserat Media – An Introduction“
Ecole des Mines de Paris, Evry, 2006
- [Fun 93] Fung, Y. C.
“Biomechanics – Mechanical Properties of Living Tissues”
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1993
- [Gar 94] García de Jalón, J.; Bayo, E.
"Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems.
The Real-Time Challenge"
Springer Verlag, New York, 1994
- [Gau 76] Gauthier, R. D.; Jahsman, W. E.
"Bending of a curved bar of micropolar elastic material",
Journal of Applied Mechanics, Band 43, Seite 502-503, 1976
- [Gib 99] Gibson, L.; Ashby, M.
“Cellular Solids”
2. Auflage, Cambridge University Press, 1999

-
- [Her 12] von Eschenbach, W.
„Parzival“
Übertragen von Wilhelm Hertz
J. G. Cottasche Buchhandlung, Stuttgart, 1912
- [Hil 63] Hill, R.
„Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles“
J. Mech. Phys. Solids 11, Seite 357-372, 1963
- [Hoh 99] Hohe, J.; Beschorner, C.; Becker, W.
„Effective elastic properties of hexagonal and quadrilateral
grid structures“
Composite Structures 46, Seite 73-89, 1999
- [Hoh 03] Hohe, J.
„Elastizitätsverhalten von Sandwich-Zellkernen und
zweidimensionalen Modellschäumen“
1. Auflage, Shaker Verlag, 2003
- [Hor 07] Horsham, K.
MATERIALICA Design + Technology Award 2007
München, 2007
- [ISER 03] Informationsstelle Edelstahl Rostfrei (Hrsg.)
„Edelstahl Rostfrei – Eigenschaften“
3. Auflage, Merkblatt 821, Düsseldorf, 2003
- [Joh 83] Johnson, G. R.; Cook, W. H.
“Constitutive model and data for metals subjected to large strains, high
strain rates and high temperatures”
7th International Symposium on Ballistics, 1983
- [Jon 98] Jones, R. M.
„Mechanics of Composite Materials“
2. Auflage, Taylor & Francis Inc, 1998
- [Kno 92] Knothe, K.; Wessel, K.
„Finite Elemente: Eine Einführung für Ingenieure“
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1992
- [Klu 15] Kluge, F.
„Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache“
8. Auflage, Straßburg, 1915
- [Kre 92] Kreissing, R.
„Einführung in die Plastizitätstheorie“
Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1992

-
- [Kro 08] Krohn, N.
„Zeitgeschichtliche Aspekte der Ringgeflechtsentwicklung“
Gastvortrag, Prochain Jahrestreffen, 2008
- [Lak 93] Lakes, R.S.
“Strongly Cosserat elastic lattice and foam materials for enhanced toughness”
Cellular Polymers, Band 12, 1993
- [Lak 95] Lakes, R.
„Experimental Methods for Study of Cosserat Elastic Solids and other Generalized Elastic Continua“
Continuum Models for Materials with Micro-Structure, Seite 1-22,
J. Wiley, New York, 1995
- [NDI 63] Nickel Development Institute (Hrsg.)
“Mechanical and Physical Properties of Austenitic Chromium-Nickel Stainless Steels at Ambient Temperatures”
Inco Europe Limited, 1963
- [Onc 00] Onck, P.R.; Andrews, E.W.; Gibson, L.J.
“Size effects in ductile cellular solids. Part I: modelling“
International Journal of Mechanical Science,
Band 34, S. 681–699, 2000
- [Onc 02] Onck, P. R.
„Cosserat Modeling of Cellular Solids“
C. R. Mecanique 330, Seite 717-722, 2002
- [Puc 96] Puck, A.
“Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis”
Carl Hanser Verlag, München/Wien, 1996
- [R&A 03] The Royal and Ancient Golf Club of St Andrews (Hrsg.)
„Rules of Golf“
30. Auflage, Williams Lea Group, London, 2003
- [Ram 43] Ramberg, W.; Osgood, R.
“Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters
(NACA Technical Note 902) “
National Advisory Committee for Aeronautics, 1943
- [Red 78] Krishna Reddy, G. V.; Venkatasubramanian, N. K.
"On the flexural rigidity of a micropolar elastic circular cylinder"
Journal of Applied Mechanics, Band 45, Seite 429-431, 1978
- [Sch 04] Schmitt, K.-U.; Niederer, F.; Walz, F.
„Trauma Biomechanics“
1. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2004

-
- [Spr 07] Sprint Metall Edelstahlziehereien GmbH
„Zugversuche an Federdraht 1.4404“
Prüfprotokoll, 2007
- [Sza 91] Szameit, E.
„Einführung in die mittelalterliche Waffenkunde“
Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien, 1991
- [Ste 04] Steinmetz, B.
„Entwicklung und Aufbau einer Ringgeflechtsmaschine“
Diplomarbeit, Fachhochschule Ingolstadt, 2004
- [Str 00] Stronge, W. J.
„Impact Mechanics“
Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [Tsa 03] Tsai, S.W.
“Theory of Composites Design”
Electronic Version, Stanford University, 2003
- [Wan 04] Wang, A.-J.; McDowell, D. L.
“In-Plane Stiffness and Yield Strength of Periodic Metal Honeycombs”
Journal of Engineering Materials and Technology,
Vol. 126, S. 137-156, 2004
- [Wit 77] Wittenburg, J.,
“Dynamics of Systems of Rigid Bodies”
Teubner Verlag, Stuttgart, 1977
- [Zat 98] Zatsiorsky, V. M.
„Kinematics of Human Motion“
2. Auflage, Human Kinetics, Champaign (USA), 1998

Sonstige Literatur

- [ABA B1] ABAQUS Version 6.6. Benchmarks Manual
Kapitel 2.1.2 “Geometrically nonlinear analysis of a cantilever beam”
- [ABA B2] ABAQUS Version 6.6. Benchmarks Manual
Kapitel 2.3.5 “Performance of continuum and shell elements for linear analysis of bending problems”
- [ABA T1] ABAQUS Version 6.6. Theory Manual
Kapitel 3.2 “Continuum Elements“
- [ABA U1] ABAQUS Version 6.6. User´s Manual
Kapitel 14 “Continuum Elements”
- [ABA U2] ABAQUS Version 6.6. User´s Manual
Kapitel 6 “Analysis Types”
- [ABA U3] ABAQUS Version 6.6. User´s Manual
Kapitel 13.1.4 “Section Controls”
- [HSB 79] Luftfahrttechnisches Handbuch - Handbuch Strukturberechnung
„Abschätzung der Elastizitätskonstanten unidirektionaler
Faserverbundschichten“
Artikel 37102-02, 1979
- [HSB 92] Luftfahrttechnisches Handbuch - Handbuch Strukturberechnung
„Beziehung zwischen Schnitt- und Belastungsgrößen beim
Kreisbogenträger unter Rand-, Linien- und Temperaturbelastung“
Artikel 31319-01, 1992
- [MMM 05] MADYMO Version 6.3 Model Manual
TNO Automotive, 2005
- [MRM 05] MADYMO Version 6.3 Reference Manual
TNO Automotive, 2005
- [MTM 05] MADYMO Version 6.3 Theory Manual
TNO Automotive, 2005
- [Spez A] DIN EN 10002-1 2001-12
“Metallische Werkstoffe – Zugversuch
Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur“
- [Spez B] ASTM E 8M 2004
“Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials”
- [Spez C] ASTM E 111 2004
“Standard Test Method for Young s Modulus, Tangent Modulus and
Chord Modulus”

-
- [Spez D] ASTM E 399-90 Re-approved 1997
“Test Method for Plain-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials”
- [Spez E] ASTM E- 1820-01 2001
“Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness”
- [Spez F] ISO 12135 2002-12
“Metallic materials - Unified method of test for the determination of quasistatic fracture toughness”
- [Spez G] DIN 51212 1998-10
„Verwindeversuch an Drähten“
- [Spez H] DIN 51215 1975-09
„Winkelversuch an Drähten“
- [Spez I] DIN EN 10270-1, Ausgabe:2001-12
„Stahldraht für Federn - Teil 1:
Patentiert-gezogener unlegierter Federstahldraht“
- [Spez J] DIN EN 10270-2, Ausgabe:2001-12
„Stahldraht für Federn - Teil 2:
Ölschlussvergüteter Federstahldraht“
- [Spez K] DIN EN 10270-3, Ausgabe:2001-08
„Stahldraht für Federn - Teil 3:
Nichtrostender Federstahldraht“
- [Spez L] DIN 17224, Ausgabe:1982-02
„Federdraht und Federband aus nichtrostenden Stählen
Technische Lieferbedingungen“

Appendix A Arbeitsweise von Ringflechtmaschinen

Die industrielle Produktion von Ringgeflechten lässt sich unter Berücksichtigung von Wirtschaftlichkeit und Prozesssicherheit nur über eine geeignete maschinelle Fertigung erreichen. Die Arbeitsweise der dazu verwendeten Maschinen wird durch zwei Teilaspekte bestimmt – Halterung und Transport des Geflechts sowie das Zuführen und Einsetzen neuer Einzelringe. Während der Maschinenkorpus das Geflecht hält und weiterbewegt, ist für das Einsetzen neuer Ringe ein Arbeitskopf verantwortlich ist.

A1 Funktionen eines Arbeitskopfes

Im Arbeitskopf der Ringflechtmaschine werden sequenziell alle Arbeitsschritte zum Geflechtsaufbau durchgeführt. Diese Sequenz beginnt mit der Zufuhr eines metallischen Drahtes. Diese Zufuhr erfolgt mit einem Drahtvorschub, welcher dem späteren Umfang der Ringgröße entspricht. Durch ein Schneidwerkzeug wird der Draht getrennt und in das Formwerkzeug eingebettet. Hier wird das gerade Drahtstück auf einen Dorn gedrückt, wodurch der Draht eine U-Form einnimmt ([*Abb. A-1 (A)*]). Die offenen Flanken werden zunächst leicht nach innen vorgebogen ([*Abb. A-1 (B)*]) bevor das U-Profil über eine Vorschubbewegung in das bestehende Geflecht eingeführt wird ([*Abb. A-1 (C)*]). In einem weiteren Schritt wird das U-Profil in seine endgültige Ringform gebogen. Durch die Biegung erfolgt eine Festigkeitssteigerung des Drahtmaterials durch Kaltverformung. Die Werkzeugkontur muss dabei dem elastischen Zurückfedern des Drahtes Rechnung tragen. Abschließend erfolgt eine Verschweißung der Ringenden ([*Abb. A-1 (D)*]).

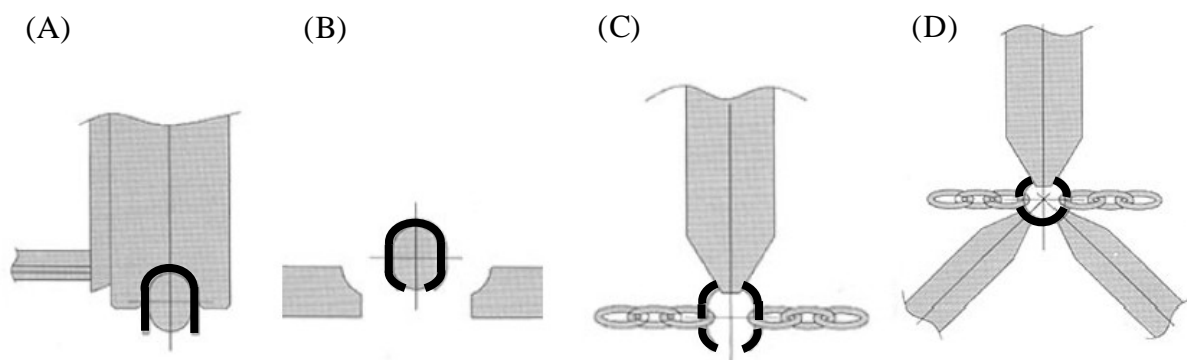


Abb. A-1 Funktionssequenz eines Arbeitskopfes

(Quelle: [*Ste 04*])

In [Abb. A-2] wird die konstruktive Umsetzung eines Arbeitskopfes dargestellt. Die direkte mechanische Ansteuerung der Einzelwerkzeuge im Arbeitskopf durch Kurvenscheiben erfüllt dabei alle Kriterien an einen präzisen und verschleißarmen Werkzeuglauf bei gleichzeitig hoher Prozessgeschwindigkeit von mehr als 100 Ringen pro Minute. Der Verschluss der Ringe durch eine klassische Widerstandsschweißung (dargestellt in [Abb. A-2]) wird in neuen Maschinentypen durch eine Laserschweißung ersetzt, was zu einer höheren Schweißgüte und Ringfestigkeit in der Wärmeeinflusszone führt.

Die beschriebene Sequenz findet sich bei allen Ringflechtmaschinen, wenn auch in leicht modifizierter Form. Gründe für die Prozessmodifikation sind die Ausgestaltung der Einzelwerkzeuge, welche für die Güte der Zwischenschritte verantwortlich sind. Beispiele dafür sind die Führung des Biegedorns, die Flankenbiegung als auch die Führung der Schweißeinrichtung.

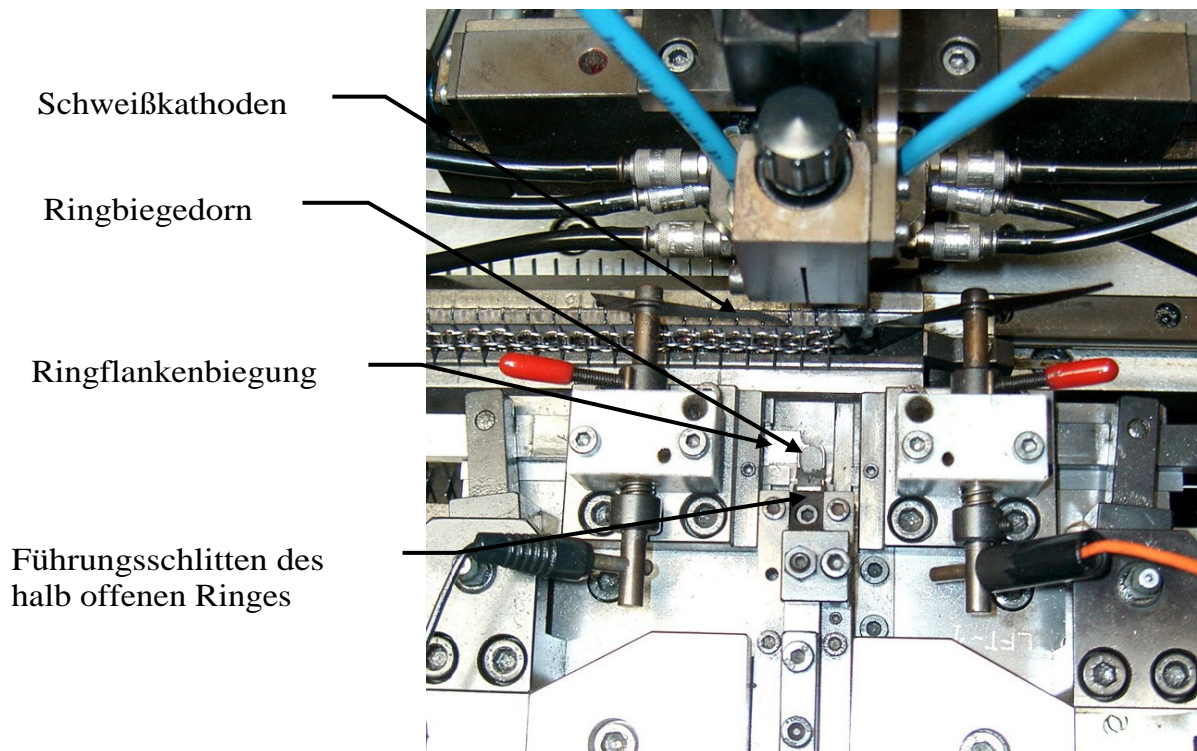


Abb. A-2 Arbeitskopf für eine ebene Geflechtsmaschine,
Hersteller „Lange Feinwerktechnik GmbH“
(Quelle: [Ste 04])

A2 Funktionen eines Maschinenkorpus

Ringflechtmaschinen sind derzeit in der Lage, Geflechte in Bahnbreiten bis zu 5 m zu produzieren. Die Bauweise der Ringflechtmaschine muss dabei den Fertigungsbedingungen Rechnung tragen.

Derzeitige Anwendungen von Ringgeflecht lassen sich mit Bahnbreiten von bis zu 1,2 m realisieren. Dies wird durch Linearflechtmaschinen erreicht, welche einen einzelnen beweglichen Arbeitskopf besitzen, der das Geflecht zeilenweise aufbaut. Das Geflecht muss dazu flächig ausgebreitet sein, um die Bewegung des Arbeitskopfes zu ermöglichen. Der Maschinenkorpus muss demnach das Geflecht fixieren und nach erfolgter Einführung einer neuen Zeile das Geflecht um eine Zeilenlänge weiterbewegen. Beides – Fixierung und Transport - wird durch ein System von Nadeln erreicht, welche die Einzelringe auf der gesamten Geflechtszeilenbreite festhalten. Die Ansteuerung der Nadeln erfolgt mechanisch über Kurvenscheiben.

Für Geflechte mit größeren Bahnbreiten sind Linearmaschinen aufgrund der Beschränkung auf einen einzelnen Arbeitskopf zu langsam. Die Verwendung von Rundflechtmaschinen erlaubt am Maschinenumfang die Anbringung mehrerer Arbeitsköpfe, welche in Stufen das Geflecht erweitern (siehe [Abb. A-3]). Die Maschinenkonstruktion bedingt die Fertigung eines Geflechtsschlauches, welcher abschließend längst getrennt wird, um ein flächiges Geflecht zu erhalten. Die synchrone Bewegung mehrerer Arbeitsköpfe ist nicht möglich. Vielmehr wird das Geflecht vom Maschinenkorpus gehalten und durch Drehung um die Maschinenachse an den Arbeitsköpfen entlanggeführt. Diese Führung kann sowohl durch ein Nadelsystem oder durch eine Spiralsteuerung erfolgen. Beim Nadelsystem wird das Geflecht durch sein Eigengewicht auf den Nadeln gehalten und nach unten abgehängt. Die Nadeln als auch deren Trägerstruktur wird über Kurvenscheiben mechanisch verstellt.

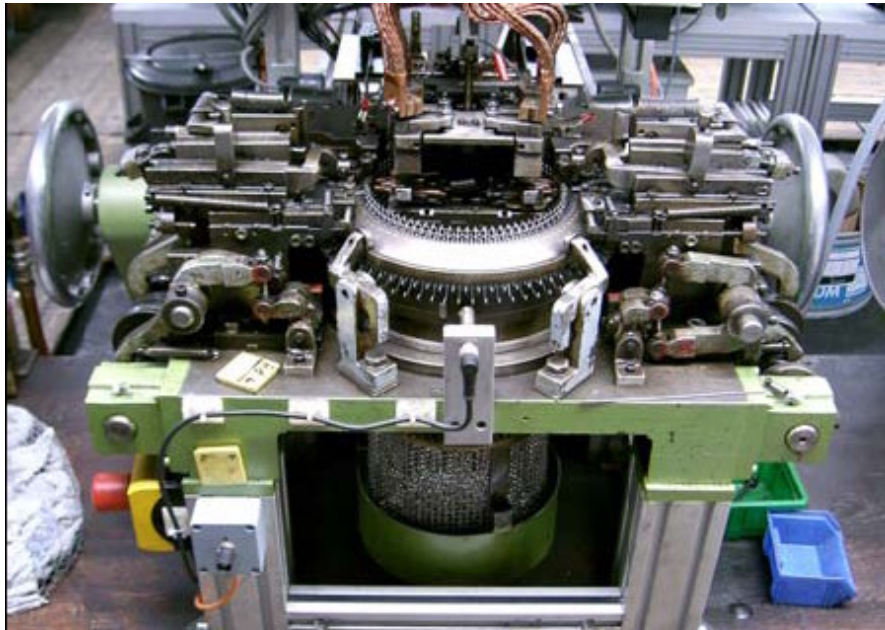


Abb. A-3 Rundflechtmaschine mit Nadelsystem,
Hersteller „Lange Feinwerktechnik“ (Quelle: [Ste 04])

Bei einer Spiralsteuerung (siehe [Abb. A-4]) wird das Geflecht durch zwei mit Spiralen versehene Ringe nach oben geführt. Der Geflechtaufbau erfolgt am unteren freien Rand. Die Taktung des Weitertransports des Geflechts erfolgt über einen Zahnkranz, der mechanisch über eine Nockenwelle angesteuert wird.

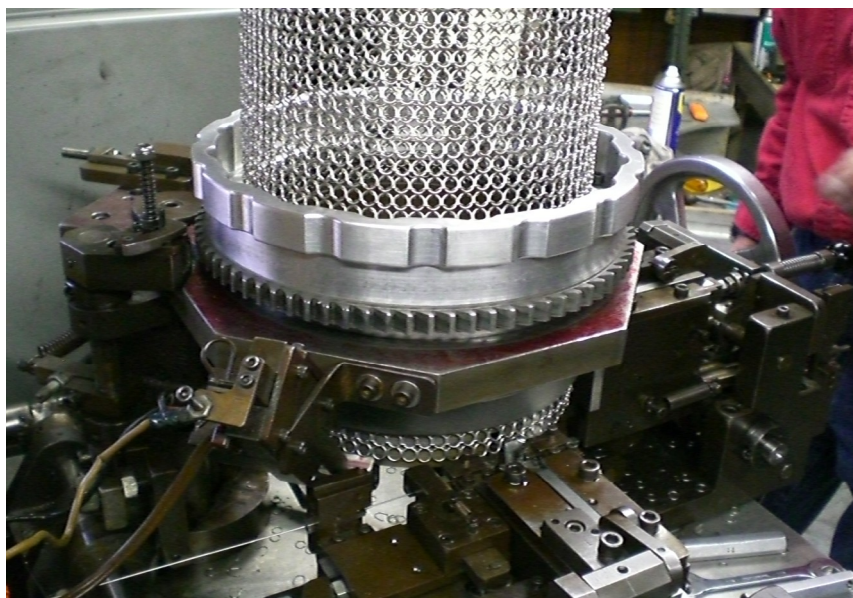


Abb. A-3 Rundflechtmaschine mit Spiralsteuerung,
Hersteller „AZON Corporation“ (Quelle: [Ste 04])

Appendix B Elementierung des Finite-Elemente-Models des RVE eines Ringflechts

Um die Verformung der Einzelringe innerhalb des RVE auch über den elastischen Bereich hinaus betrachten zu können, wird in Kapitel 4.2 ein detailliertes Finite-Element-Modell aufgestellt. Die Validität dieses Modells und die Qualität der daraus gewonnenen Ergebnisse hängen dabei maßgeblich von der Elementierung des Modells ab, welche sich durch zwei Einflussgrößen variieren lässt:

- Typ des verwendeten finiten Elements,
- Dichte der Elementierung.

Die Bestimmung der für die vorliegende Problematik am besten geeigneten Elementierung soll nachfolgend betrachtet werden.

B1 Wahl des Elementtyps

Das in Rahmen dieser Untersuchung verwendete Finite-Elemente-Programm ABAQUS 6.6 bietet eine Vielzahl von Elementen an, die angepasst an die jeweilige Problemstellung ausgewählt werden können. Dabei unterscheiden sich die Elemente hinsichtlich ihrer

- Dimensionalität (1D, 2D, 3D),
- Formgebung (z.B. tetrahedral, hexahedral),
- Ansatzfunktion (linear, quadratisch) zur Deformationsinterpolation,
- Integration zur Spannungsberechnung.

Der Aufbau und die geometrischen Verhältnisse des untersuchten Viertelrings erlauben eine generelle Rückführung auf ein eindimensionales Balkenelement. Die Verschränkung und nachfolgende Kraftübertragung zwischen ineinandergreifenden Ringen bedarf dabei einer Kontaktformulierung, die innerhalb von ABAQUS für räumliche Balken jedoch nicht möglich ist. Da der Ringquerschnitt keine Richtungsdominanz aufweist, eignen sich auch zweidimensionale Elemente nicht für eine modelltechnische Beschreibung. Entsprechend soll die Einheitszelle durch dreidimensionale Kontinuumselemente abgebildet werden.

Diese ermöglichen eine entsprechend genaue Beurteilung des Kontakts zwischen den Ringen der Einheitszelle als auch die dezidierte plastische Verformung der Ringe. Dreidimensionale Kontinuumselemente liegen in ABAQUS in Form von Tetraedern, Dreiecksprismen und Hexaedern vor (siehe [Abb. B-1]).

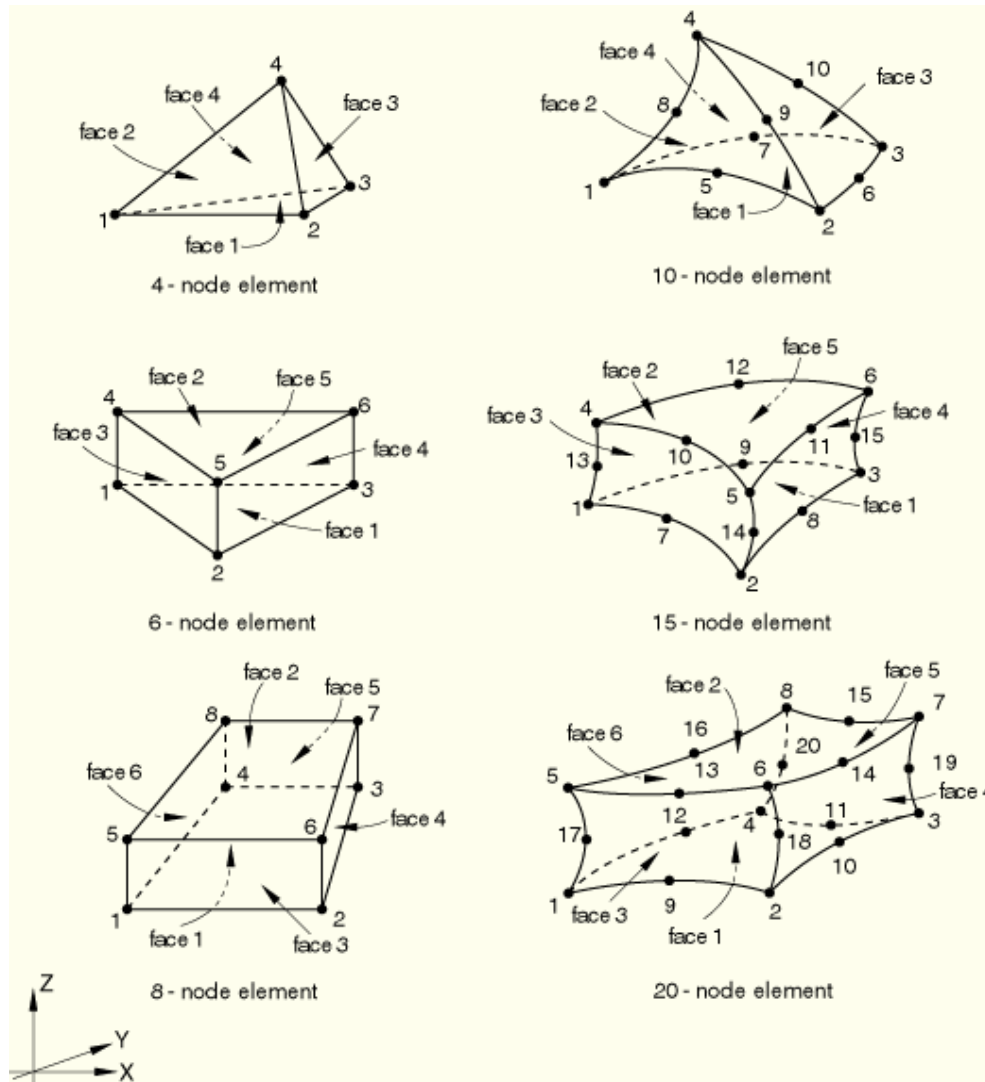


Abb. B-1 Kategorisierung dreidimensionaler Kontinuumselemente
(Quelle [ABA UI])

Innerhalb dieser Gruppen wiederum kann zwischen Ansatzfunktionen erster und zweiter Ordnung gewählt werden, ebenso wie dem Integrationsschema zur Spannungsberechnung. Zusätzlich sind die derart gestalteten regulären Elementgrundtypen dahin gehend verändert, auf spezifische Problemstellungen mit der entsprechenden Ergebnissenauigkeit regieren zu können. Die verschiedenen Elementtypen und –abwandlungen werden in [ABA UI] detailliert ausgeführt und sind nicht Gegenstand dieser Ausführung.

Aus der phänomenologischen Betrachtung der Zugversuche in Kapitel 4 wird deutlich, dass die Ringe des Geflechts unter kombinierter Zug- und Biegebelastung stehen. Der gewählte Elementtyp muss also in der Lage sein, dieses Lastszenario entsprechend genau abbilden zu können. In [ABA B1] und [ABA B2] wurden für biegebelastete Balkenstrukturen nichtlineare Vergleichsrechnungen dokumentiert, um die Validität von Elementtypen (auch in Abhängigkeit von der Vernetzungsqualität) zu prüfen. Aufgrund dieser Untersuchungen werden folgende hexahedrale Kontinuumsselemente identifiziert, welche in den Vergleichsrechnungen die genauesten Ergebnisse liefern:

- Elemente mit linearer Ansatzfunktion
 - C3D8R (8-Knotenelement, hexahedral, reduzierte Integration)
 - C3D8I (8-Knotenelement, hexahedral, volle Integration, inkompatibler Verschiebungsmode)
- Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion
 - C3D20 (20-Knotenelement, hexahedral, volle Integration)
 - C3D20R (20-Knotenelement, hexahedral, reduzierte Integration)

Für diese genannten Elementtypen wird in [Abb. B-2] die Verformung eines exemplarischen, einseitig eingespannten Biegebalkens in Abhängigkeit des Elementtyps dargestellt. Die Abmessungen dieses Biegebalkens entsprechen denen des abgewickelten Ringes der Einheitszelle.

Wie schon in [ABA B1] und [ABA B2] diskutiert wird auch in obigem Beispiel deutlich, dass die linearen Elemente mit inkompatiblen Verformungsmodus ebenso gute Ergebnisse liefern wie die quadratischen Elemente. Durch den eingeführten inkompatiblen Verformungsmodus wird das „Shear Locking“ derart verhindert, dass auch die linearen Elemente eine Biegung entsprechend genau abbilden können.

Während im linear-elastischen und leicht plastischen Bereich alle Elementierungen ein nahezu identisches Verformungsbild liefern und mit der analytischen Lösung der Balkenbiegung übereinstimmen, differieren bei steigendem Verformungsgrad die Biegelinien deutlich, was sich in der Differenz der Verschiebungen der Lastangriffspunkte ausdrückt (siehe [Abb. B-3]).

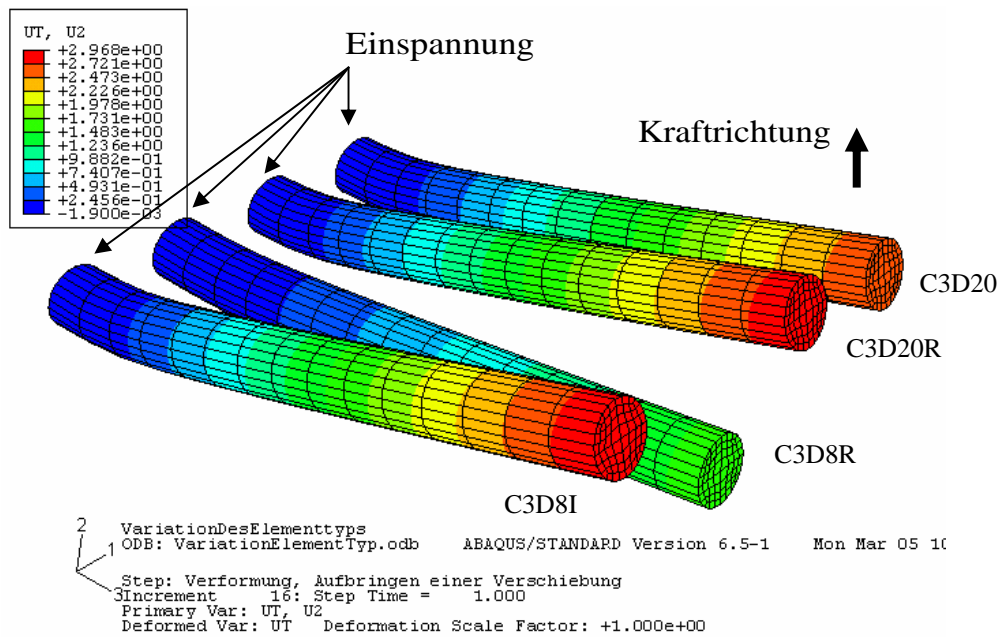


Abb. B-2 Balkenbiegung unter Einheitslast in Abhängigkeit des Elementtyps

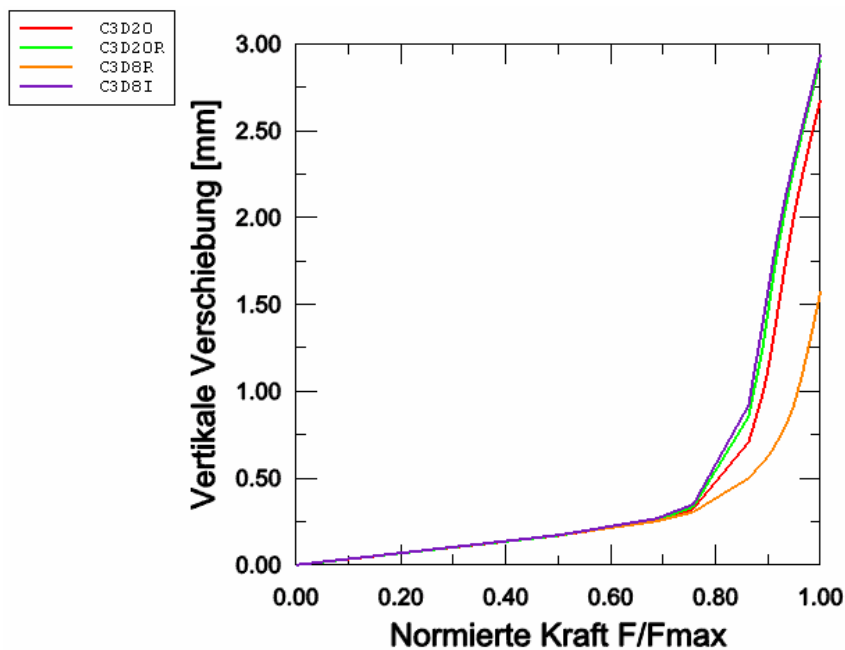


Abb. B-3 Balkenbiegung unter Einheitslast in Abhängigkeit des Elementtyps – vertikale Auslenkung des Lastangriffspunktes

Basierend auf der Verformungsanalyse lässt sich auch die Spannungsverteilung im untersuchten Biegebalken untersuchen. Hier ergibt sich eine deutlich bessere Auflösung des Spannungsgradienten in Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion. Dieser Nachteil kann durch eine angepasste Elementdichte ausgeglichen werden.

Aus der Diskussion in [ABA UI] und [ABA TI] und den Beispielen in [ABA BI] und [ABA B2] wird deutlich, dass die Elemente C3D8I und C3D20R auch über den elastischen Bereich hinaus die genauesten Ergebnisse für die aufgebrachte Biegebelastung liefern, was durch den Vergleich mit der analytischen Lösung unterstrichen wird. Die Äquivalenz der Systemantwort dieser Elementierungen wird in [Abb. B-3] gezeigt.

Für die im Test beobachtete Antwort der Ringgeflechtseinheitszelle auf äußere Zuglast – interzellulärer Kontakt, hohe Zug- und Biegeverformung im Ring – werden in [ABA UI] das hexahedrale Kontinuumselement erster Ordnung mit inkompatiblen Verschiebungsmoden (C3D8I) empfohlen, was durch die vorhergehende Analyse bestätigt wird. Entsprechend wird für die Modellierung des RVE des Ringgeflechts das Element C3D8I verwendet.

B2 Elementdichte

Eine zweite Einflussgröße auf die Qualität der Elementierung bildet die Wahl der Elementdichte. Dazu gehören für die vorliegende Problemstellung nach [Abb. B-4]:

- Anzahl der Elemente axial entlang der Breitenkreise - Richtung (A),
- Anzahl der Elemente entlang der Meridiane - Richtung (B),
- Anzahl und Anordnung der Elemente am Ringquerschnitt – Richtung (C).

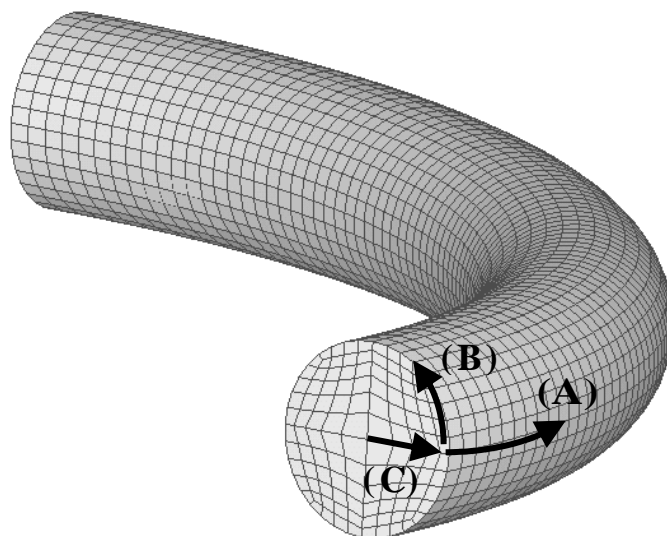


Abb. B-4 Richtungsverlauf der Elementdichteangaben

Um die Abhängigkeit der Systemantwort von der Elementdichte zu untersuchen, wurde für den Elementtyp C3D8I der einfache Biegebalken des vorhergehenden Beispiels derart modelliert, dass sich eine unterschiedliche axiale Elementdichte von 10 / 15 / 24 / 39 und 78 Elementen ergibt. Diese axiale Elementdichte dient in der Modellierung des RVE als Maßangabe für die Breitenkreisrichtung (A) gemäß [Abb. B-4]. Die Elementierung des Balkenquerschnittes bleibt dabei zunächst konstant. Das entsprechende Verformungsbild unter vertikaler Einheitslast ist in [Abb. B-5] dargestellt.

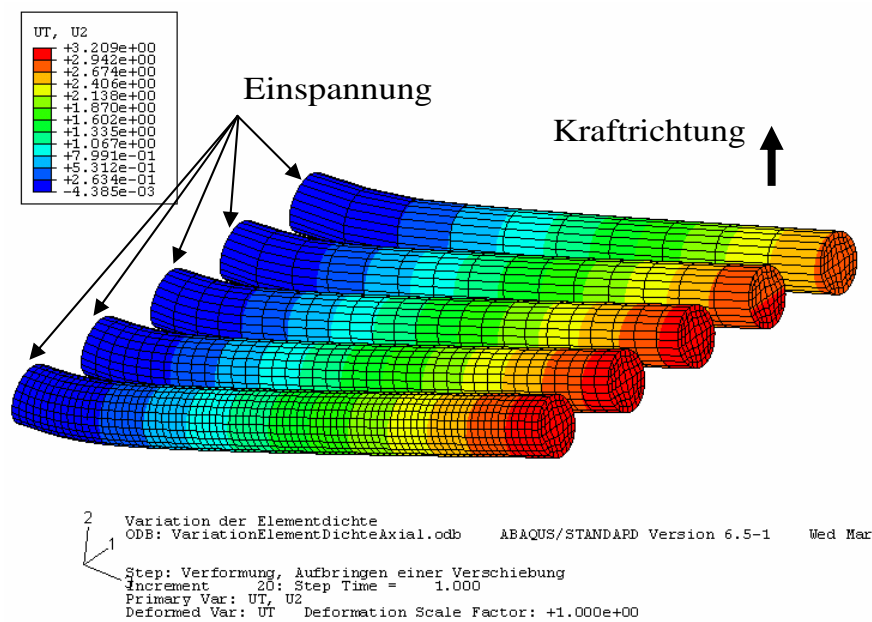


Abb. B-5 Balkenbiegung in Abhängigkeit der axialen Elementanzahl

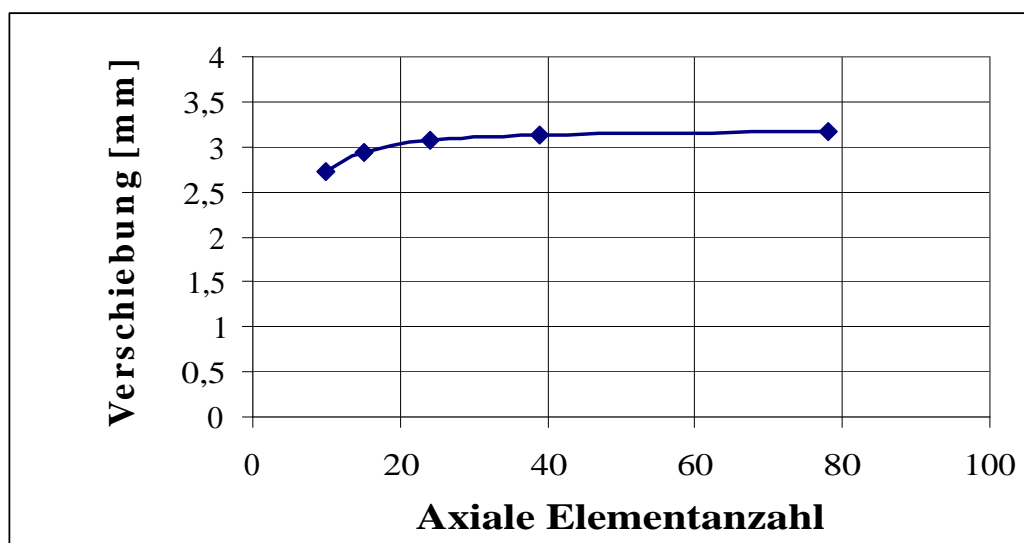


Abb. B-6 Balkenbiegung unter Einheitslast in Abhängigkeit der axialen Elementanzahl – vertikale Verformung des Lastangriffspunktes

Mit der Erhöhung der axialen Elementdichte nähert sich die maximale Endpunktverschiebung asymptotisch einem Grenzwert an (siehe [Abb. B-6]). Die letzte Verdopplung der axialen Elementdichte von 39 auf 78 Elemente resultiert in einem Verformungszuwachs von 1,5 % und liegt damit im Rahmen der Rechengenauigkeit. Zusätzlich wird mit der Erhöhung der axialen Elementdichte eine bessere Auflösung des Spannungsgradienten erreicht (siehe [Abb. B-7]). Die maximale Hauptspannung nähert sich bei steigender Elementanzahl asymptotisch einem Grenzwert (siehe [Abb. B-8]).

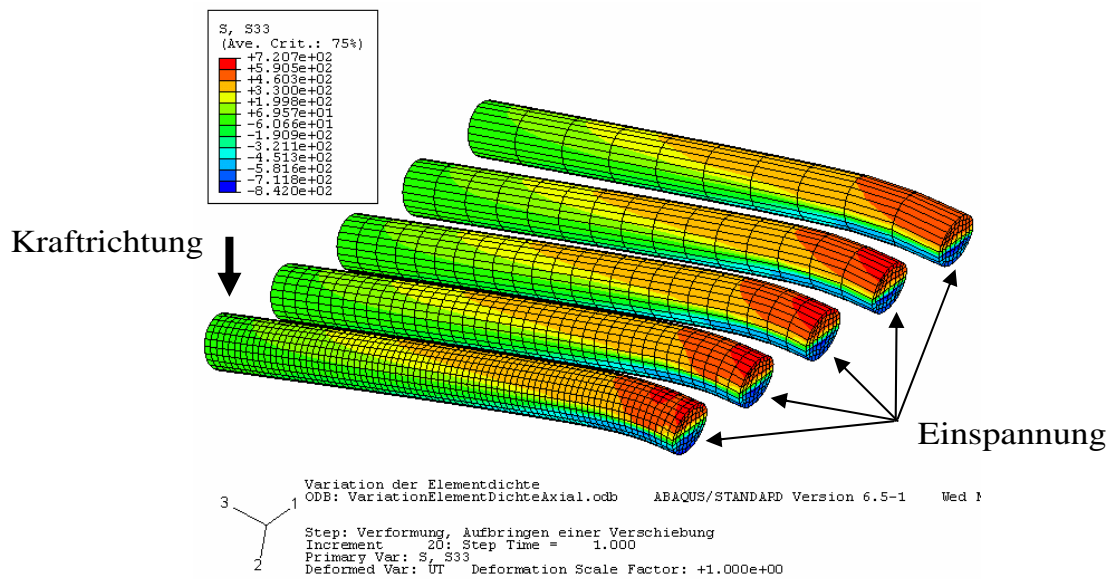


Abb. B-7 Biegespannungsverteilung unter Einheitslast in Abhängigkeit der axialen Elementanzahl

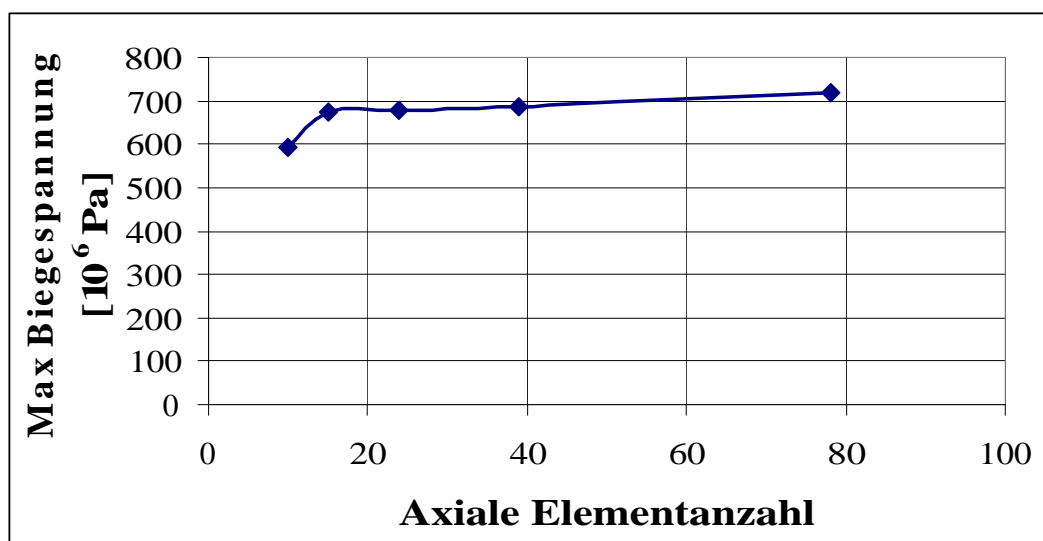


Abb. B-8 Maximale Biegespannung in Abhängigkeit der axialen Elementanzahl

Zusätzlich zur axialen Elementdichte wird der Einfluss der Elementierung des Ringquerschnitts überprüft. Dazu wird der schon beschriebene Biegebalken mit dem Element C3D8I so elementiert, dass am Umfang zwischen 20 und 60 Elemente und in der Querschnittshöhe zwischen 6 und 12 Elemente gleichförmig angeordnet sind. Das Verformungsbild zeigt im linear-elastischen und leicht plastischen Bereich eine weitestgehende Übereinstimmung, im Bereich fortgeschrittener Teilplastifizierung weichen die Endpunktverschiebungen um 10 % ab.

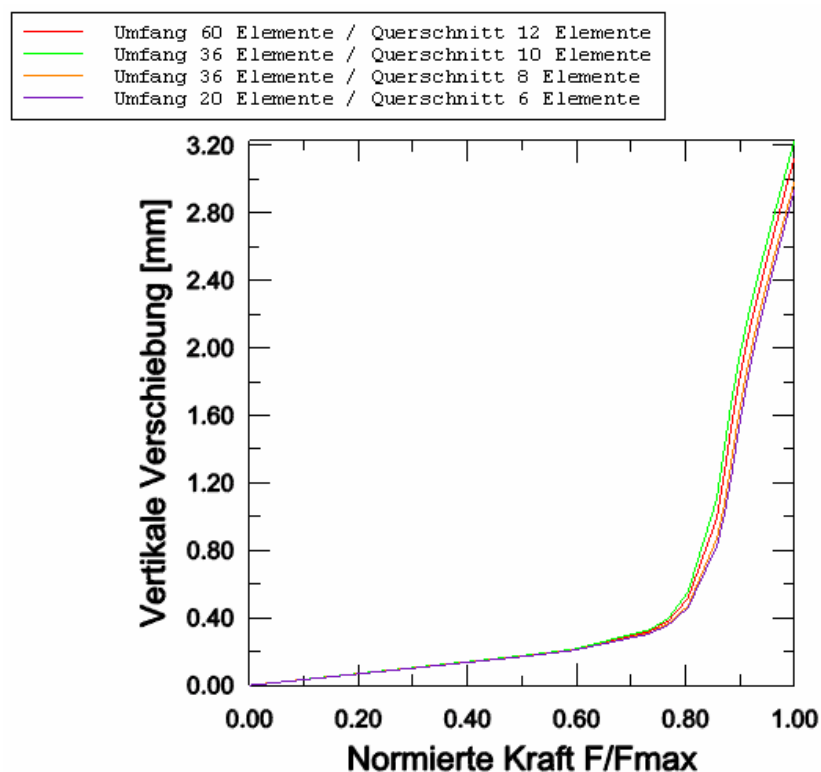


Abb. B-9 *Balkenbiegung unter Einheitslast in Abhängigkeit der Querschnitts-elementierung – vertikale Auslenkung des Lastangriffspunktes*

Für die Problematik der Einheitszelle muss noch die Forderung nach einer entsprechenden Abbildungsgenauigkeit des Kontaktverhaltens umgesetzt werden. Da in dieser Einheitszelle ein abgleitender Kontakt realisiert werden muss, der eine Variation der in Kontaktverbindung stehenden Elementknoten erfordert, ist eine entsprechend hohe Elementdichte im Kontaktbereich zu realisieren. Da sich im Beispiel der Einheitszelle der Kontaktbereich auf den oberen und unteren Plattkreis einschränken lässt, wird die Elementierung im Kontaktbereich stark verfeinert. Dies stellt auch bei einer Rotation der Einzelringe zueinander sicher, dass eine hinreichend gute Auflösung der Kontaktdefinition erreicht wird.

Unter Berücksichtigung der zuvor beschriebenen Abhängigkeiten wird eine Elementierung gewählt, die dem Berechnungsziel genügt:

- Elementierung in Richtung der Breitenkreise mit einem Element pro Grad.
- Entlang der Meridianlinie, welche nicht in Kontakt tritt, werden gleichmäßig 14 Elemente auf 180° verteilt.
- Entlang der Meridianlinie, welche in Kontakt tritt, werden 24 Elemente auf 180° verteilt. Dabei stellt das Längenverhältnis 1:5 eine angepasste Elementierungsdichte sicher.
- Der während der Ringbiegung dominant belastete Randbereich des Ringquerschnittes wird gleichmäßig elementiert. Im schubbelasteten Querschnittsinneren dient die feine Elementierung einer hinreichenden Spannungsauflösung.

Die Elementierung von Viertelringen innerhalb eines RVE ist in [**Abb. B-10**] dargestellt.

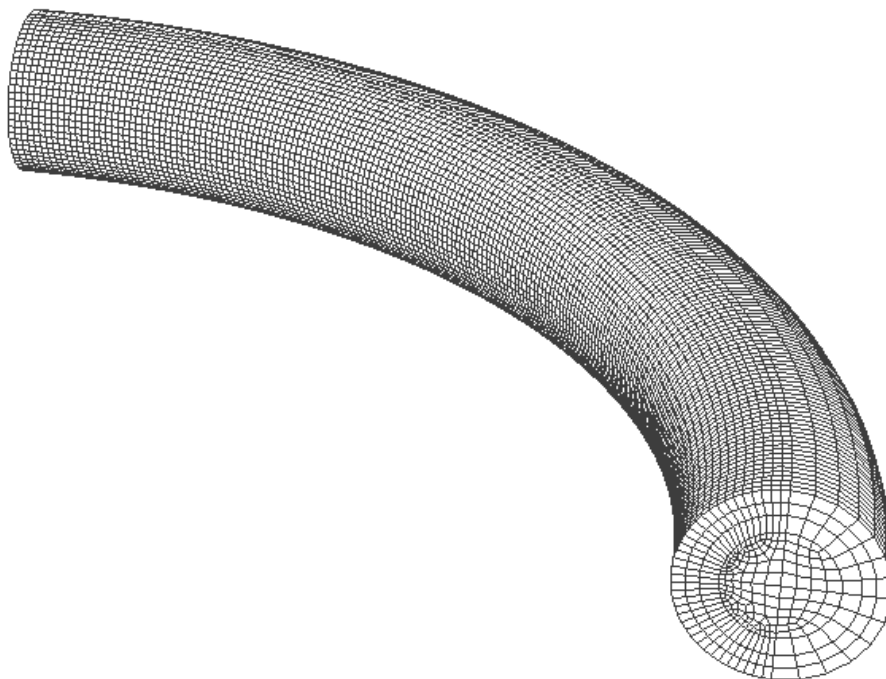


Abb. B-10 Elementierung eines Ringes innerhalb des RVE des Ringflechts

Appendix C Elektro-Mechanische Prüfmaschine

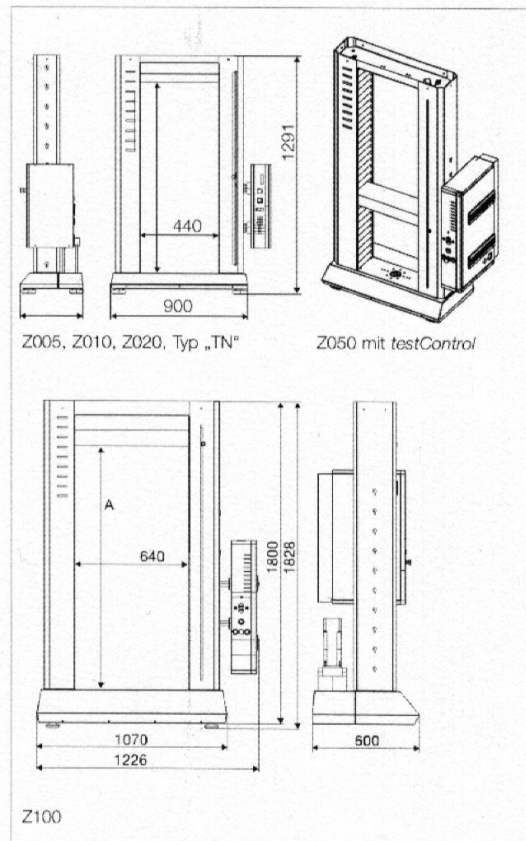
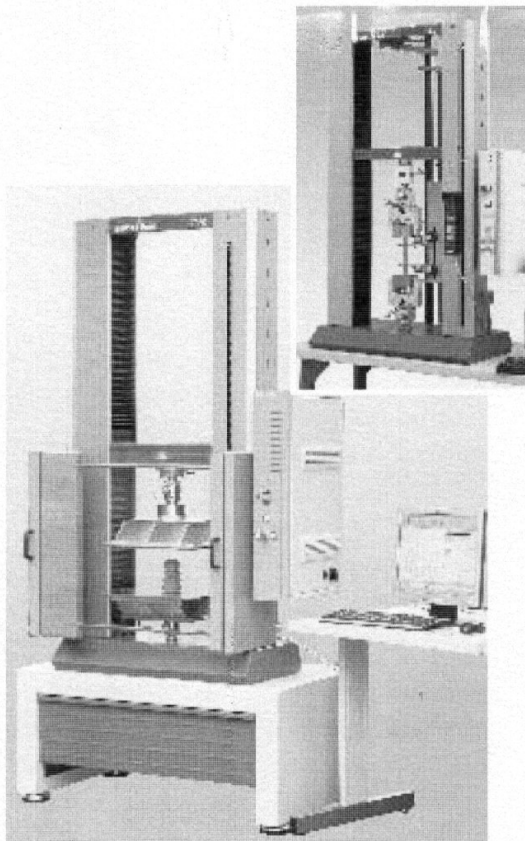
Zwick Z010 – Technische Daten

Zwick / Roell

Zwick
Materialprüfung

Produktinformation

ProLine Tischprüfmaschinen Z005 bis Z100



Anwendungsbereich

Funktionsprüfung an Bauteilen und einfache Materialprüfung

Vorteile/Merkmale

- Hochwertiger, ein-/zweisäuliger Lastrahmen
- Robuster und langlebiger Industrieantrieb
- Präzise Führung der Traverse durch Stahlsäule/geschliffene Linearachse mit kugelgelagertem Schlitten
- Der große Kraft-/Messbereich erschließt ein weites Einsatzgebiet
- Preislich attraktive Prüflösungen für Routine- und Standardanwendungsfälle

- Einfache Bedienbarkeit
- In Synergie mit der Prüfsoftware *testXpert*® entsteht größter Komfort und Bedienergonomie
- *testXpert*®-Standard-Prüfvorschriften für die ProLine garantieren intuitiv bedienbare und auf die jeweilige Anwendung zugeschnittene Prüfabläufe zum niedrigsten Preis
- CE-konforme Ausführung
- Die Aufstellung auf bereits vorhandenen Industriemöbeln ermöglicht eine Arbeitsraumposition in optimaler Bedienerhöhe
- Mit einer Lieferzeit von 2 Wochen für alle ProLine-Produkte des Pur-Portfolios setzt Zwick Maßstäbe

Produktinformation

ProLine Tischprüfmaschinen Z005 bis Z100

Bestell-Position Typ	Lastrahmen										Antrieb		Mess- und Steuerelektronik		Anschlusswerte										
T1-FB100TN Z100 TN	100 kN	100	640	1360	1275	1800	1070	1226	600	600	600	530	60	mm/min	% von v_{Nenn}	µm	µm	fc	fc	V(PH,N,PE)	230	50/60	3	KVA	
T1-FB050TN Z050 TN	50	440	1370	1285	1744	850	1021	433	433	516	325	36	0,0005	0,0005	... 600	<0,0125	0,016	± 2	± 2	fc	fc	230	50/60	3	KVA
DO-FB050TN Z050 TN	50 ¹⁾	440	1370	1285	1744	850	980	433	433	325	36	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 180	<0,0125	0,015	± 2	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
DO-FB030TN Z030 TN	30 ¹⁾	440	1370	1285	1744	850	980	433	433	325	36	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 300	<0,0125	0,025	± 2	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
DO-FB020TN Z020 TN	20 ¹⁾	440	1050	980	1331	770	900	356	356	133	20	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 500	<0,0125	0,047	± 3	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
DO-FB010TN Z010 TN	10 ¹⁾	440	1050	980	1331	770	900	356	356	130	20	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 1000	<0,0125	0,095	± 2	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
DO-FB005TN Z005 TN	5	440	1070	1000	1331	770	900	356	356	105	20	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 500	<0,0125	0,040	± 2	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
DO-FB005TS Z005 TS	5	440	570	500	881	770	900	356	356	90	20	0,1 ^{1,2)}	0,1 ^{1,2)}	... 500	<0,0125	0,040	± 2	Std.	Std.	115/230	50/60	0,8	0,8	3	KVA
Lastrahmen Prüfkraft F_N in Zug- / Druckrichtung Arbeitsraumbreite Höhe des Arbeitsraums (Maß A) ¹⁾ Max Weg der Fahrtraverse ¹⁾ Höhe Breite Breite mit Elektronikeinheit Tiefe Tiefe mit Elektronikeinheit Gesamtgewicht mit Elektronikeinheit Anschlussbolzen unten Ø (im Lieferumfang enthalten)																									
Antrieb Traversengeschwindigkeit v_{min} ... v_{Nenn} Genauigkeit der eingestellten Geschw. <0,0125 Wegauflösung des Antriebs Positionier-/Wiederholgenauigkeit																									
Mess- und Steuerelektronik Elektronik ³⁾																									
Anschlusswerte Elektrischer Anschluss Netzfrequenz Leistungsaufnahme																									

Allgemeine Daten zu allen Lastrahmen

Lackierung: RAL 7011 eisengrau, edelstahl-metallic, RAL 3031 orientrot

Umgebungstemperatur: + 10 ... + 35 °C, Luftfeuchtigkeit (nicht kondensierend): 20 ... 90 %

Mess- und Steuerelektronik

Kraftmessung Klasse 0,5 / 1 je nach Kraftaufnehmer, entsprechend DIN EN ISO 7500-1 (DIN 51220, DIN 51302),

ISO R147, ASTM E4, BS 1610 Grade A, NF A 03-501

Nullpunktkorrektur automatisch bei Messbeginn, Messsignal-Laufzeit für alle Kanäle,

Ausgangsschnittstelle RS232, Benötigter PC-Anschluss (bei PC-Betrieb): COM1

Alle Daten bei Raumtemperatur.

Änderungen im Zuge der Weiterentwicklung vorbehalten.

¹⁾ Bei F_{max} gilt: 75 % von V_{max} , bei V_{max} gilt: 75 % von F_{max}
²⁾ Wert gilt für den Stand Alone-Betrieb, bei Betrieb über PC ist eine minimale Prüfgeschwindigkeit von 0,001 mm/min möglich.
³⁾ fc = testControl: Messbereich bis zu 165% von F_N bei Kraftaufnehmer mit F_{max} 2,5 kN bis zu 130% von F_N , Reale Auflösung in Zug-/Druckrichtung 162.000 ... 912.000 Punkte, Erfassungsraten intern 500 Hz, Messwertgruppen-Übertragungsrate an PC 100 Hz, Std., Standard-Elektronik: Messbereich bis zu 150 % von F_N bei Kraftaufnehmer mit F_{max} 2,5 kN bis zu 120% von F_N , Reale Auflösung in Zug-/Druckrichtung 100.000 Punkte, Erfassungsraten intern 400 Hz, Messwertgruppen-Übertragungsrate an PC 50 Hz
⁴⁾ Ohne Einbauten

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.