

**Schädigungsmechanische Charakterisierung  
kunststoffvergossener Bauteile -  
Schädigungslokalisierung und Lebensdauervorhersage**

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Physiker Univ.

Marcus Sonner

geboren am 28.09.1971 in Passau

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Dr. h. c. Ernst Sigmund

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Herbert Reichl

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Michel

Tag der mündlichen Prüfung: 06.02.2004

*Meinen Eltern*  
*Regina und Karl Sonner*

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen der Schädigungsmechanik</b>                 | <b>10</b> |
| 2.1      | Gültigkeitsbereich der Schädigungsmechanik . . . . .      | 10        |
| 2.2      | Anwendung zur Lebensdauervorhersage . . . . .             | 14        |
| 2.3      | Schädigungsmaße und Versagenskriterium . . . . .          | 15        |
| 2.3.1    | Flächenbezogenes Schädigungsmaß . . . . .                 | 15        |
| 2.3.2    | Volumenbezogenes Schädigungsmaß . . . . .                 | 17        |
| 2.4      | Effektive Spannung . . . . .                              | 18        |
| 2.5      | Materialgleichungen mit Schädigung . . . . .              | 20        |
| 2.6      | Richtungsabhängige Schädigung . . . . .                   | 22        |
| 2.6.1    | Schädigungstensor zweiter Stufe . . . . .                 | 22        |
| 2.6.2    | Schädigungstensor vierter Stufe . . . . .                 | 24        |
| 2.7      | Messung der Schädigung . . . . .                          | 26        |
| 2.7.1    | Messung des effektiven Elastizitätsmoduls . . . . .       | 26        |
| 2.7.2    | Messung der Hysteresefläche bei Zyklusversuchen . . . . . | 28        |
| 2.8      | Schädigungsakkumulation . . . . .                         | 29        |
| <b>3</b> | <b>Viskoelastisches Materialmodell</b>                    | <b>34</b> |
| 3.1      | Viskoelastische Materialgleichungen . . . . .             | 34        |
| 3.2      | Experimentelle Charakterisierung . . . . .                | 37        |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>INHALTSVERZEICHNIS</i>   | 4         |
| 3.3 Verifikation des Materialmodells . . . . .                            | 40        |
| 3.3.1 Finite-Elemente-Simulation am Demonstrator . . . . .                | 41        |
| 3.3.2 Messung der Dehnungen mit Grauwert-Korrelation . . . . .            | 42        |
| 3.4 Numerische Implementierung . . . . .                                  | 45        |
| 3.4.1 Diskretisierung des viskoelastischen Materialmodells . . . . .      | 45        |
| 3.4.2 Programmierung und Verifikation . . . . .                           | 49        |
| <b>4 Viskoelastisches Schädigungsmodell</b>                               | <b>53</b> |
| 4.1 Materialgleichungen des viskoelastischen Schädigungsmodells . . . . . | 53        |
| 4.2 Schädigungsmechanische Charakterisierung . . . . .                    | 54        |
| 4.2.1 Stabiler Zyklus für viskoelastisches Material . . . . .             | 54        |
| 4.2.2 Hysteresefläche und Schädigungsmaß . . . . .                        | 56        |
| 4.2.3 Bestimmung der Energiefestigkeit . . . . .                          | 58        |
| 4.2.4 Bestimmung der kritischen Schädigung . . . . .                      | 61        |
| 4.3 Numerische Implementierung . . . . .                                  | 65        |
| 4.3.1 Diskretisierung des Schädigungsmodells . . . . .                    | 65        |
| 4.3.2 Programmierung des Schädigungsmodells . . . . .                     | 68        |
| 4.3.3 Eigenschaften des Schädigungsmodells . . . . .                      | 68        |
| <b>5 Schädigungslokalisierung</b>   | <b>75</b> |
| 5.1 Demonstrator-Geometrie . . . . .                                      | 75        |
| 5.2 Simulation des Schädigungsfeldes . . . . .                            | 81        |
| 5.3 Experimentelle Bestimmung der Schädigung . . . . .                    | 82        |
| <b>6 Lebensdauervorhersage</b>  | <b>89</b> |
| 6.1 Lebensdauer nach Schädigungsmodell . . . . .                          | 89        |
| 6.2 Lebensdauer nach Coffin-Manson . . . . .                              | 96        |
| <b>7 Zusammenfassung</b>  | <b>99</b> |



|  |            |
|--|------------|
| <i>INHALTSVERZEICHNIS</i>  | 5          |
| <b>A Tensoralgebra</b>   | <b>101</b> |
| A.1 Einheitstensoren . . . . .   | 101        |
| A.2 Zerlegung des Dehnungs- und Spannungstensors . . . . .                 | 102        |
| <b>B Newton-Raphson-Verfahren</b>  | <b>103</b> |
| <b>C Diskretisierung der Viskoelastizität</b>                              | <b>106</b> |
| C.1 Berechnung der Spannungsänderung $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ . . . . . | 106        |
| C.1.1 Änderung der hydrostatischen Spannung . . . . .                      | 107        |
| C.1.2 Änderung des Spannungsdeviators . . . . .                            | 107        |
| C.2 Berechnung des effektiven Zeitinkrements $\Delta\tau$ . . . . .        | 110        |
| C.3 Berechnung der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}^V$ . . . . .                  | 111        |
| C.3.1 Hydrostatischer Anteil der Jacobi-Matrix . . . . .                   | 111        |
| C.3.2 Deviatoranteil der Jacobi-Matrix . . . . .                           | 111        |
| <b>D Diskretisierung des Schädigungsmodells</b>                            | <b>113</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>115</b> |

# Kapitel 1

## Einleitung

Elektronische Bauteile sind während ihres Betriebes Umwelteinflüssen ausgesetzt. Mechanische Kräfte, Temperaturänderungen und Feuchtigkeit können auf das Bauteil einwirken. Zum Schutz vor diesen Einflüssen und zur elektrischen Isolation werden elektronische Komponenten häufig mit einer Kunststoff-Verpackung umgeben. Die Verpackung trägt so wesentlich zur Erhöhung der Zuverlässigkeit und zur Verlängerung der Lebensdauer des Systems bei.

In elektronischen Bauteilen werden Materialien mit verschiedenen thermischen Ausdehnungskoeffizienten kombiniert. Temperaturänderungen führen deshalb zu einem unterschiedlichen Ausdehnungsverhalten der Materialien und verursachen mechanische Spannungen und Dehnungen, die sich auf die Kunststoff-Ummantelung übertragen können. Diese thermo-mechanische Belastung führt im Kunststoff zur Entstehung von mikroskopischen Rissen und Hohlräumen. Während der Belastungsgeschichte des Bauteils können sich diese mikroskopischen Defekte vergrößern, akkumulieren und zu einem makroskopischen Riss anwachsen. Die Entstehung eines makroskopischen Risses in der Kunststoff-Verpackung kann die Funktionalität des gesamten Systems beeinträchtigen und schließlich zu seinem Versagen führen. Um den Einfluss der Verpackung auf die Zuverlässigkeit und Lebensdauer von elektronischen Bauteilen zu verstehen, ist es notwendig, die Schädigungsentwicklung unter thermo-mechanischer Belastung näher zu betrachten.

Die vorliegende Arbeit untersucht das Schädigungsverhalten eines hochgefüllten Reaktionsharzes, das zur Verpackung elektronischer Komponenten verwendet wird. Im schädigungsfreien Zustand zeigt dieser Kunststoff viskoelastisches Materialverhalten. Die durch thermo-mechanische Belastung entstehenden Mikroschädigungen beeinflussen das mechanische Verhalten. Deshalb ist das viskoelastische Materialverhalten des Kunststoffs unter dem Einfluss

von Schädigung zu formulieren und experimentell zu charakterisieren. Um die Lebensdauer unter thermo-mechanischer Belastung vorhersagen zu können, wird die zeitliche Entwicklung der Schädigung modelliert und ein viskoelastisches Schädigungsmodell mit einem geeigneten Versagenskriterium vorgeschlagen.

Mit dem eingeführten viskoelastischen Schädigungsmodell kann die räumliche Verteilung der Schädigung in der Kunststoff-Verpackung simuliert werden. Aus dem berechneten Schädigungsfeld lassen sich besonders beanspruchte Bereiche erkennen, in denen bei fortschreitender Schädigung mit einem Versagen des Materials zu rechnen ist. Daraus können Rückschlüsse auf konstruktive Verbesserungen des Bauteils gezogen werden. Das Schädigungsmodell kann so zur Erhöhung der Zuverlässigkeit von elektronischen Bauteilen beitragen. Die vorliegende Arbeit untersucht die Schädigungslokalisierung unter zyklischer mechanischer Belastung durch Anwendung des vorgeschlagenen Schädigungsmodells auf eine geeignete Demonstrator-Geometrie.

Die Entstehung von Schädigung unter thermo-mechanischer Belastung und der Einfluss von Schädigung auf das Materialverhalten können durch die Schädigungsmechanik beschrieben werden. Die Anfänge dieser Theorie gehen zurück in das Jahr 1924, als Palmgren in Dauerlauftests die Haltbarkeit von Kugellagern unter wechselnden Belastungen untersuchte [1]. Zur Formulierung eines Versagenskriteriums schlug Palmgren eine lineare Schädigungsakkumulation der einzelnen Belastungsstufen vor. Das Verhältnis der Umdrehungen bei einer bestimmten Last zur Lebensdauer unter derselben Last wurde dabei als Schädigung interpretiert. Damit konnte der Zustand des Materials durch eine phänomenologische Schädigungsvariable beschrieben werden, die aufgrund von Vorversuchen bestimmt wurde. Dieses Versagenskriterium wurde 1945 von Miner [2] wieder aufgegriffen und ist seitdem als Palmgren-Miner-Gesetz [3] bekannt. Bei der von Palmgren und Miner eingeführten Schädigungsvariable handelt es sich allerdings *nicht* um eine kontinuumsmechanische Variable, die eine räumliche Verteilung der Schädigung im Material beschreibt. Vielmehr wird der Zustand des Materials durch eine globale Variable charakterisiert. Der Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten wird durch dieses Konzept *nicht* beschrieben.

Um den Einfluss einer diskreten Verteilung von Mikrodefekten auf das Materialverhalten zu beschreiben, führte 1958 Kachanov eine kontinuierliche Schädigungsvariable ein [4]. Dies bezeichnet den Anfang der Schädigungsmechanik. Mit einem Schädigungsgesetz konnte die zeitliche Entwicklung der Schädigung modelliert und das Versagen des Materials für Kriechen vorhergesagt werden [5]. Mit der Einführung eines kontinuierlichen Schädigungsma-

ßes nahm die Schädigungsmechanik eine rasante Entwicklung mit zahlreichen Anwendungen für verschiedene Materialien [6]. Die Untersuchungen konzentrierten sich dabei vor allem auf Materialien wie Metalle oder Lote, die plastisches oder viskoplastisches Materialverhalten zeigen [6–8]. Die Anwendung der Schädigungsmechanik auf gefüllte Kunststoffe mit viskoelastischem Materialverhalten bedarf dagegen noch weiterer Untersuchung. Ziel dieser Arbeit ist es, die Konzepte der Schädigungsmechanik auf viskoelastische Materialien zu übertragen und experimentell zu überprüfen. Dazu wird die Theorie der linearen Viskoelastizität mit einem Schädigungsmaß modifiziert und ein viskoelastisches Schädigungsmodell abgeleitet.

In der Literatur sind bereits Schädigungsmodelle für viskoelastische Materialien bekannt. Park und Schapery schlugen 1996 ein viskoelastisches Schädigungsmodell vor [9], das auf verschiedene gefüllte Kompositmaterialien angewendet wurde [10–12]. Die Schädigung wird dabei durch interne Zustandsvariablen  $S_m$  beschrieben. Der Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten wird durch Materialfunktionen  $C_{ij}(S_m)$  vermittelt, die von den Schädigungsvariablen  $S_m$  abhängen. Die zeitliche Entwicklung der internen Zustandsvariablen wird durch ein gefordertes Potenzgesetz modelliert. In diesem Modell werden die Schädigungsvariablen als zusätzliche Parameter eingeführt, ohne diese schädigungsmechanisch zu interpretieren. Außerdem ist die experimentelle Bestimmung der Materialfunktionen  $C_{ij}$  aufwendig und nur über eine geeignete Approximation durchführbar [10, 13]. In Abhängigkeit vom Material müssen mehrere Materialfunktionen experimentell charakterisiert werden, die wiederum von mehreren internen Zustandsvariablen abhängen können. Für die praktische Beurteilung der Zuverlässigkeit ist dieses Modell damit nur bedingt geeignet.

Ein weiteres Modell zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens unter dem Einfluss von Schädigung wurde 2001 von Abdel-Tawab und Weitsman vorgeschlagen [14]. Das viskoelastische Materialverhalten wird hier abhängig von internen viskoelastischen Zustandsvariablen beschrieben, die die Freiheitsgrade der molekularen Bewegung im Polymer repräsentieren. Die Schädigung wird als symmetrischer Tensor zweiter Stufe dargestellt. Unter Verwendung einer Schädigungsfläche wird eine Bedingung für Schädigungsentwicklung formuliert, die mit der Fließfläche der Plastizitätstheorie [15] verglichen werden kann. Die Schädigungsrate folgt aus einer Potentialfunktion und ist in ihrer mathematischen Darstellung dem plastischen Fließgesetz ähnlich. Da die Schädigungsrate zudem von den internen viskoelastischen Zustandsvariablen abhängt, ist die mathematische Form der Schädigungsrate kompliziert und kommt nicht ohne vereinfachende Annahmen aus. Weiter ist in diesem Modell nicht aufgeführt, wie die benötigten Materialparameter

experimentell charakterisiert werden können.

Aufgrund der Schwierigkeiten der vorgestellten Modelle wird in dieser Arbeit ein viskoelastisches Schädigungsmodell für ein hochgefülltes Reaktionsharz entwickelt, das mit vertretbarem Aufwand experimentell charakterisiert werden kann und eine Lebensdauervorhersage unter zyklischer thermo-mechanischer Belastung gestattet. Zur Verifikation der Lebensdauervorhersage wird das vorgeschlagene viskoelastische Schädigungsmodell mit dem phänomenologischen Coffin-Manson-Gesetz [16, 17] verglichen, das in der Mikroelektronik breite Verwendung findet [18–25]. Die Anwendung des Schädigungsmodells auf einen geeigneten Demonstrator gestattet die Simulation des Schädigungsfeldes. Dadurch kann die Schädigungslokalisierung im Demonstrator untersucht werden. Das simulierte Schädigungsfeld wird anschließend mit dem Verfahren der Grauwert-Korrelation experimentell nachgewiesen.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Schädigungsmechanik

Während ihres Betriebs wirken mechanische Kräfte, Temperaturänderungen und Feuchtigkeit auf elektronische Komponenten ein. Um die Bauteile vor Umwelteinflüssen zu schützen, werden diese häufig mit einer Kunststoff-Verpackung umgeben. Die Verpackung erhöht so die Zuverlässigkeit und die Lebensdauer des Bauteils. Thermo-mechanische Belastungen verursachen eine Schädigung dieser Verpackung und können schließlich zum Versagen der Komponente führen. Dieser fortschreitende Prozess der Schädigung kann mit Konzepten der Schädigungsmechanik beschrieben werden. Im Folgenden werden deshalb die grundlegenden Konzepte der Schädigungsmechanik erläutert.

### 2.1 Gültigkeitsbereich der Schädigungsmechanik

Die Schädigungsmechanik beschreibt den fortschreitenden Prozess der Schädigung eines Materials vom schädigungsfreien Zustand bis zu seinem Versagen. Um den Gültigkeitsbereich dieser Theorie einzugrenzen, muss zunächst definiert werden, was unter einem *schädigungsfreien Zustand* und dem *Versagen* eines Materials zu verstehen ist. Abhängig von der betrachteten Größenskala gibt es dazu unterschiedliche Betrachtungsweisen.

Von einem *mikroskopischen* Standpunkt aus kann der *schädigungsfreie Zustand* eines Materials durch die Forderung festgelegt werden, dass das Material auf mikroskopischer Skala frei von Defekten wie Rissen und Hohlräumen

ist. Diese mikroskopische Definition ist in ihrer idealisierten Form nicht erfüllbar und kann experimentell nicht überprüft werden. Deshalb wird in dieser Arbeit eine andere Definition für den Zustand schädigungsfreien Materials verwendet.

Auf einer *makroskopischen* Skala kann das Material kontinuumsmechanisch durch sein mechanisches Verhalten charakterisiert werden. Da Schädigung das mechanische Verhalten des Materials beeinflusst, kann Schädigung als die Veränderung der Materialeigenschaften bezogen auf den Ausgangszustand des Materials aufgefasst werden. Ein Material im schädigungsfreien Zustand besitzt dann dieselben Materialeigenschaften wie ein gleichartiges Material in seinem Ausgangszustand. Der Ausgangszustand eines Materials lässt sich nicht objektiv feststellen. In der Regel wird als Ausgangszustand der Zustand bezeichnet, in dem sich das Material am Anfang seiner Belastungsgeschichte befindet. Der schädigungsfreie Zustand eines Materials kann demnach folgendermaßen definiert werden:

**Definition 2.1** *Ein Material wird dann als schädigungsfrei angesehen, wenn sein mechanisches Verhalten dem Materialverhalten im Ausgangszustand entspricht.*

Aus dieser Definition ergibt sich, dass die Veränderung des Materialverhaltens gegenüber dem Ausgangszustand als Schädigung anzusehen ist. Dies führt zu folgender Definition der Schädigung:

**Definition 2.2** *Die Veränderung des mechanischen Materialverhaltens gegenüber dem Materialverhalten im Ausgangszustand wird als Schädigung bezeichnet.*

Um den Begriff *Versagen* zu definieren, ist zu beachten, dass die Schädigungsmechanik als kontinuumsmechanische Theorie die diskrete, mikroskopische Struktur der Materie als Kontinuum beschreibt. Folglich wird angenommen, dass die Materie den Raum stetig ausfüllt und jedem Punkt Materialeigenschaften und mechanische Größen zugeordnet werden können. Die den einzelnen Punkten zugeordneten Eigenschaften ergeben sich durch räumliche Mittelung über ein so genanntes *repräsentatives Volumenelement*. Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung geschädigter Materie muss eine geeignete Größe dieses repräsentativen Volumenelements definiert werden [26]. Dazu werden verschiedene Größenskalen unterschieden.





folgende Materialien ist die Größe des repräsentativen Volumenelements zur schädigungsmechanischen Charakterisierung näherungsweise angegeben [28]:

- Metalle und Keramiken:  $(0,1 \text{ mm})^3$
- Polymere und Komposite:  $(1 \text{ mm})^3$
- Holz:  $(10 \text{ mm})^3$
- Beton:  $(100 \text{ mm})^3$ .

Nach Einführung der Mesoskala, auf der das geschädigte Material beschrieben wird, kann der Begriff des Versagens als Bruch des repräsentativen Volumenelements auf der Mesoskala definiert werden. Das Versagen des Materials ist damit gleichbedeutend mit der Initiierung eines Risses auf der Makroskala [29]. Dies führt zu folgender Definition des Versagens:

**Definition 2.3** *Das Versagen eines Materials ist durch die Initiierung eines makroskopischen Risses gekennzeichnet.*

Mit dieser Definition des Versagens bietet sich eine Möglichkeit, Schädigungsmechanik und Bruchmechanik voneinander abzugrenzen. Diese Abgrenzung soll anhand Abbildung 2.1 erläutert werden. Die Schädigungsmechanik beschreibt auf der Mesoskala den Prozess der Schädigung, ausgehend von einem Material im schädigungsfreien Ausgangszustand. Durch Schädigung entstehen im Material Mikrorisse und Mikroporen, die sich vergrößern und gegenseitig wechselwirken. Die Schädigungsakkumulation dieser Mikrodefekte führt schließlich zur Initiierung eines makroskopischen Risses und damit zum Versagen im Sinne der Schädigungsmechanik. Mit dem Versagen auf mesoskopischer Ebene und dem Auftreten einer diskontinuierlichen Struktur auf der Mesoskala endet der Bereich, der von der Schädigungsmechanik beschrieben wird. Die Fortpflanzung des initiierten Risses wird auf makroskopischer Ebene von der Bruchmechanik beschrieben. Diese Theorie betrachtet den initiierten Riss als Diskontinuität in einem kontinuierlichen Material. Die Bruchmechanik beschreibt Spannungs- und Dehnungsfelder in der Umgebung der Risspitze und die Rissausbreitung bis zum makroskopischen Bruch des Materials.

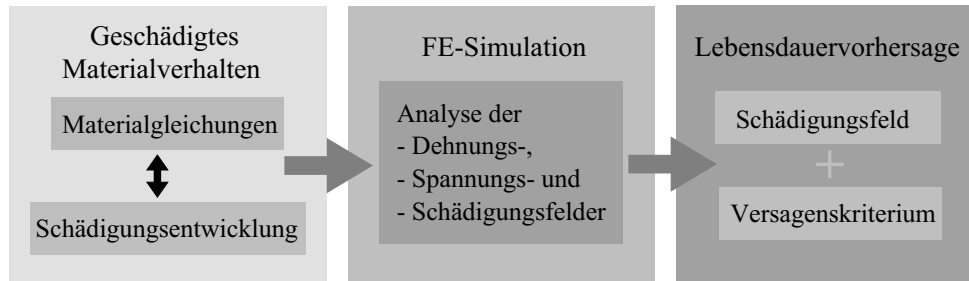


Abbildung 2.2: Schädigungsmechanik und Lebensdauervorhersage

## 2.2 Anwendung der Schädigungsmechanik zur Lebensdauervorhersage

In dieser Arbeit soll ein Kunststoff, der als Verpackung elektronischer Bauteile eingesetzt wird, schädigungsmechanisch charakterisiert und daraus eine Lebensdauervorhersage unter thermo-mechanischen Belastungen abgeleitet werden. Um die fortschreitende Schädigung des Materials zu beschreiben, werden Konzepte der Schädigungsmechanik verwendet.

Die Anwendung der Schädigungsmechanik zur Lebensdauervorhersage wird in Abbildung 2.2 vorgestellt. Das mechanische Materialverhalten wird durch Materialgleichungen beschrieben, während die zeitliche Schädigungsentwicklung durch die Evolution eines Schädigungsmaßes ausgedrückt wird. Die aus der thermo-mechanischen Belastung des Bauteils resultierenden Dehnungs- und Spannungsfelder führen zur Entwicklung von Schädigung. Andererseits beeinflusst die Schädigung wiederum das mechanische Materialverhalten. Mechanisches Materialverhalten und Schädigung sind demnach vollständig miteinander gekoppelt und können nicht getrennt voneinander beschrieben werden.

Um das Materialverhalten unter dem Einfluss von Schädigung simulieren zu können, müssen die gekoppelten Material- und Schädigungsgleichungen in ein numerisches Berechnungsverfahren implementiert und gleichzeitig gelöst werden. Als weit verbreitetes Verfahren für Probleme der Strukturmechanik findet hier die Finite-Elemente-Methode Anwendung (vgl. Abb. 2.2). Der in dieser Arbeit betrachtete Kunststoff zeigt im schädigungsfreien Ausgangszustand viskoelastisches Materialverhalten. Wegen der vollständigen Kopplung von Viskoelastizität und Schädigung kann nicht auf die Möglichkeiten zurückgegriffen werden, die derzeitige FE-Programme zur Simulation viskoelastischen Materialverhaltens bieten.

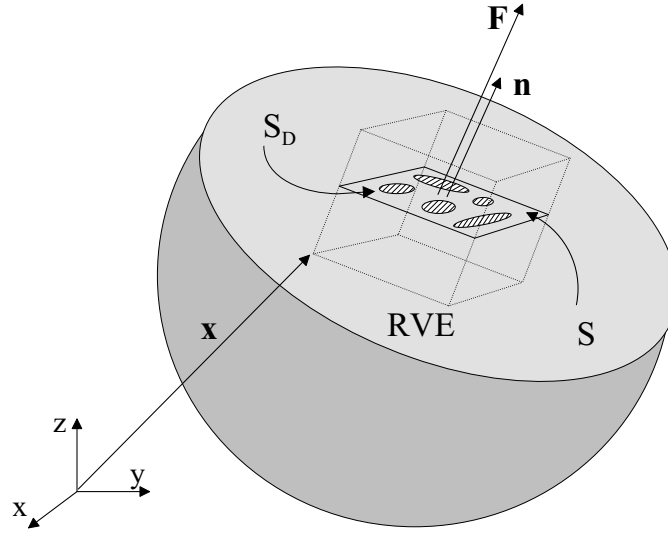
Zunächst ist durch Kopplung von Viskoelastizität und Schädigung ein viskoelastisches Schädigungsmodell mathematisch zu formulieren. Dieses Schädigungsmodell kann dann als benutzerdefiniertes Materialmodell in ein Finite-Elemente-Programm implementiert werden. Zur Simulation des geschädigten Materialverhaltens wird in dieser Arbeit das weit verbreitete FE-Programm ABAQUS verwendet, das die Programmierung eines benutzerdefinierten Materialmodells in einer Subroutine gestattet. In einer FE-Analyse, in die neben dem Schädigungsmodell die Geometrie und die thermo-mechanische Belastung des Bauteils eingehen, werden die Dehnungs-, Spannungs- und Schädigungsfelder ermittelt (vgl. Abb. 2.2). Aus dem simulierten Schädigungsfeld lässt sich erkennen, an welchen Stellen das Bauteil kritischen Belastungen ausgesetzt ist. Der Vergleich des simulierten Schädigungsfeldes mit einem geeigneten Versagenskriterium ermöglicht die Lebensdauervorhersage des betrachteten Materials.

## 2.3 Schädigungsmaße und Versagenskriterium

Die Schädigungsmechanik beschreibt die Schädigung eines Materials vom schädigungsfreien Ausgangszustand bis zur Initiierung eines makroskopischen Risses. Der Zustand der Schädigung wird dabei durch eine interne Zustandsvariable beschrieben. Diese Zustandsvariable gibt an, wie geschädigt das Material zu einer bestimmten Zeit an einem Raumpunkt ist, und wird deshalb als *Schädigungsmaß* bezeichnet. Im Folgenden werden Schädigungsmaße vorgestellt, die sich als skalare Größen darstellen lassen. Skalare Schädigungsmaße eignen sich besonders, um isotrope Schädigung zu beschreiben. Auf die Modellierung anisotroper Schädigung durch so genannte Schädigungstensoren wird in einem späteren Abschnitt eingegangen.

### 2.3.1 Flächenbezogenes Schädigungsmaß

Zur Beschreibung der Schädigung durch ein skalares Schädigungsmaß zeigt Abbildung 2.3 ein repräsentatives Volumenelement auf der Mesoskala. Dieses Volumenelement befindet sich am Raumpunkt  $\mathbf{x}$  und besitzt im Innern das Flächenelement  $\delta S$  mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$ . Geschädigte Bereiche in diesem Volumenelement erzeugen Schnittflächen mit der Fläche  $\delta S$  und verkleinern den Bereich, der von ungeschädigter Materie eingenommen wird. Durch das Verhältnis der Fläche  $\delta S_D$  der geschädigten Bereiche zur Gesamt-

Abbildung 2.3: Definition des flächenbezogenen Schädigungsmaßes  $D$ 

fläche  $\delta S$  lässt sich ein skalares Schädigungsmaß

$$D(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \frac{\delta S_D(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\delta S} \quad (2.1)$$

definieren. Dieses Schädigungsmaß wurde erstmals von Kachanov 1958 eingeführt [4]. Weil in diesem Schädigungsmaß Flächen zueinander ins Verhältnis gesetzt werden, handelt es sich um ein *flächenbezogenes* Schädigungsmaß.

Da die von den geschädigten Bereichen erzeugte Schnittfläche  $\delta S_D$  von der Orientierung des Flächenelements  $\delta S$  abhängt, ist das Schädigungsmaß  $D$  ebenfalls von der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  abhängig. In dieser Abhängigkeit kommt die Richtungsabhängigkeit der Schädigung zum Ausdruck. Für *isotrope* Schädigung ist die Fläche  $\delta S_D$  unabhängig von der Flächenorientierung  $\mathbf{n}$ . Im Fall isotroper Schädigung vereinfacht sich das Schädigungsmaß (2.1) zu

$$D(\mathbf{x}) = \frac{\delta S_D(\mathbf{x})}{\delta S} \quad (2.2)$$

und ist durch ein skalares Schädigungsfeld gegeben. Das Schädigungsmaß  $D$  kann Werte zwischen Null und Eins annehmen:

$$0 \leq D(\mathbf{x}) \leq 1. \quad (2.3)$$

Für schädigungsfreies Material nimmt das Schädigungsmaß den Wert Null an. Einem vollständig geschädigten Volumenelement entspricht das Schädigungsmaß  $D = 1$ . Bei realem Materialverhalten tritt Versagen allerdings

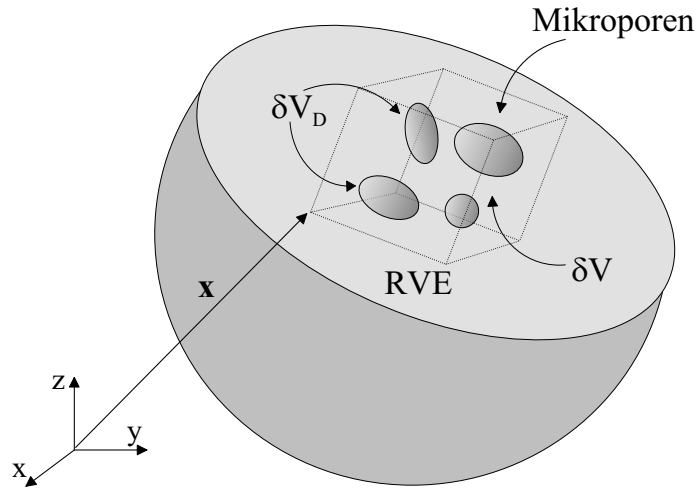


Abbildung 2.4: Definition des volumenbezogenen Schädigungsmaßes  $D_V$

schon bei einer Schädigung  $D < 1$  ein. Durch Einführung einer *kritischen Schädigung*  $D_C$  kann so ein *Versagenskriterium* definiert werden:

**Definition 2.4** *Versagen eines Materials tritt ein, wenn die Schädigung  $D$  die kritische Schädigung  $D_C$  erreicht:*

$$D = D_C. \quad (2.4)$$

Mit diesem Versagenskriterium ist das Versagen des Materials charakterisiert.

### 2.3.2 Volumenbezogenes Schädigungsmaß

Neben flächenbezogenen Schädigungsmaßen lassen sich auch *volumenbezogene* Schädigungsmaße definieren, indem das Volumen der geschädigten Bereiche ins Verhältnis mit dem Volumen des repräsentativen Volumenelements gesetzt wird. Abbildung 2.4 zeigt ein repräsentatives Volumenelement, in dem sich durch Schädigung Mikroporen gebildet haben. Das Verhältnis des geschädigten Volumens  $\delta V_D$  zum Gesamtvolumen  $\delta V$  ergibt das volumenbezogene Schädigungsmaß

$$D_V(\mathbf{x}) = \frac{\delta V_D(\mathbf{x})}{\delta V}. \quad (2.5)$$

Diese Definition der Schädigung wurde ursprünglich von Gurson und Tvergaard vorgeschlagen [30–33]. Materialien, in denen Schädigung vor allem

durch die Bildung von Mikroporen dominiert wird, können durch dieses Schädigungsmaß beschrieben werden.

Für isotrope Schädigung kann der Zustand des geschädigten Materials durch skalare Schädigungsmaße charakterisiert werden. Wirken auf das geschädigte Material mechanische Kräfte, so entstehen Spannungen im Material. Die entstehenden Spannungen werden von der Schädigung im Material beeinflusst. Deshalb stellt sich die Frage, wie die Spannung in einem geschädigten Material beschrieben werden kann.

## 2.4 Effektive Spannung

Um die mechanische Spannung anzugeben, die im Fall isotroper Schädigung auf das geschädigte Material wirkt, ist in Abbildung 2.5 ein repräsentatives Volumenelement dargestellt, auf das eine mechanische Kraft wirkt. Auf der linken Seite dieser Abbildung wird ein Volumenelement mit geschädigten Bereichen gezeigt. Dieser Teil der Abbildung stellt den *physikalischen Raum* dar. Auf das Flächenelement  $\delta S$  wirkt hier die Kraft  $\delta F$  in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$ . Diese Kraft  $\delta F$  verursacht auf der Fläche  $\delta S$  die mechanische Normalspannung

$$\sigma = \frac{\delta F}{\delta S}. \quad (2.6)$$

Da geschädigte Bereiche in der Spannung  $\sigma$  keine Berücksichtigung finden, wird diese Spannung als *makroskopische Spannung* bezeichnet. Welche Spannung wirkt nun auf das geschädigte Material?

Zur Beantwortung dieser Frage ist zu beachten, dass die geschädigten Bereiche  $\delta S_D$  zu einer Verkleinerung der Fläche  $\delta S$  führen, auf die die Kraft  $\delta F$  wirkt. Die verbleibende Fläche ungeschädigten Materials wird als *effektive Fläche*  $\delta \tilde{S}$  bezeichnet. Für isotrope Schädigung ergibt sich nach Definition (2.2) für die effektive Fläche  $\delta \tilde{S}$  der Ausdruck

$$\delta \tilde{S} := \delta S - \delta S_D = (1 - D) \delta S. \quad (2.7)$$

Das rechte Teilbild von Abbildung 2.5 zeigt die effektive Fläche  $\delta \tilde{S}$  im *effektiven Raum*. Die Spannung auf diese effektive Fläche wird durch die *effektive Spannung*  $\tilde{\sigma}$  ausgedrückt, die im Folgenden berechnet werden soll.

Da die Kraft  $\delta F$  nur auf ungeschädigte Bereiche des Materials wirken kann, wirkt im physikalischen und effektiven Raum dieselbe Kraft

$$\delta \tilde{F} = \delta F. \quad (2.8)$$

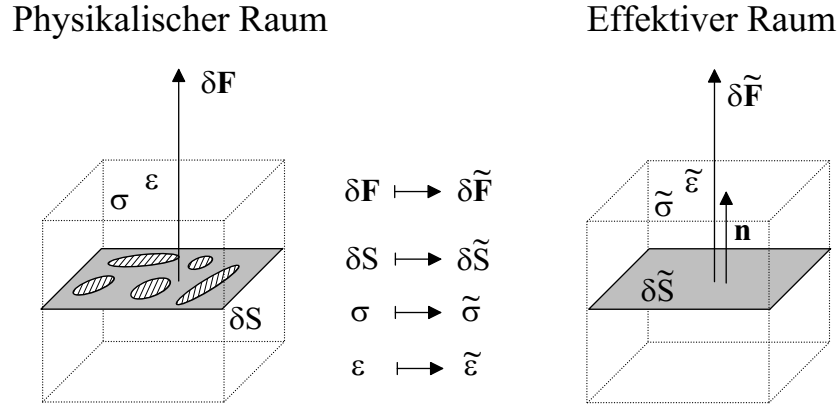


Abbildung 2.5: Physikalischer und effektiver Raum

Im effektiven Raum wirkt die Kraft  $\delta \tilde{\mathbf{F}}$  allerdings auf die verkleinerte effektive Fläche  $\delta \tilde{S}$ . Unter Verwendung der Gleichungen (2.6), (2.7) und (2.8) ergibt sich für die effektive Spannung

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta \tilde{\mathbf{F}}}{\delta \tilde{S}} = \frac{\delta \mathbf{F}}{(1-D)\delta S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)}. \quad (2.9)$$

Die Verkleinerung der lasttragenden Fläche, auf die die Kraft  $\delta \tilde{\mathbf{F}}$  im effektiven Raum wirkt, führt damit zu einer Erhöhung der effektiven Spannung  $\tilde{\sigma}$  auf das verbleibende ungeschädigte Material.

Im Fall isotroper Schädigung kann der Faktor  $1/(1-D)$  auf jede Komponente des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  angewendet werden. Der effektive Spannungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  kann dann als

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)} \quad (2.10)$$

geschrieben werden. Hier und im Folgenden wird durch Fettdruck symbolisiert, dass es sich bei der fett gedruckten Größe um einen Tensor handelt, während Variablen in Normalschrift skalare Größen darstellen.

Das Konzept der effektiven Spannung [5] wurde 1968 von Rabotnov [34] vorgeschlagen. In diesem Konzept wird der *physikalische Raum* mit geschädigtem Material formal in einen *effektiven Raum* mit quasi-schädigungsfreiem Material transformiert (s. Abb. 2.5). Das Flächenelement  $\delta S$  des physikalischen Raums wird dabei in ein effektives Flächenelement  $\delta \tilde{S}$  mit quasi-schädigungsfreiem Material abgebildet. Entsprechend werden die mechanischen Größen  $\delta \mathbf{F}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  des physikalischen Raums in effektive Größen  $\delta \tilde{\mathbf{F}}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  transformiert. Für isotrope Schädigung bestehen mit den Gleichungen (2.7), (2.8)

und (2.10) zwischen physikalischem und effektivem Raum folgende Transformationen:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{F}} &= \delta\mathbf{F} \\ \delta\tilde{\mathbf{S}} &= (1 - D) \delta\mathbf{S} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  beschreibt den Spannungszustand im geschädigten Material. Neben der mechanischen Spannung beeinflusst Schädigung das gesamte Verhalten eines Materials. Um die Materialgleichungen für geschädigtes Material angeben zu können, wird eine weitere Transformation für die mechanischen Dehnungen

$$\boldsymbol{\epsilon} \mapsto \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\tag{2.12}$$

benötigt. Diese Transformation ergibt sich aus so genannten Äquivalenz-Prinzipien, mit deren Hilfe sich die Materialgleichungen für geschädigtes Material aus dem bekannten Materialverhalten für schädigungsfreies Material ableiten lassen.

## 2.5 Materialgleichungen mit Schädigung

Zur Ableitung von Materialgleichungen für geschädigtes Material aus bekanntem Materialverhalten für schädigungsfreies Material wurden zahlreiche Äquivalenz-Prinzipien vorgeschlagen und untersucht [35–39]. In dieser Arbeit wird das von Chaboche vorgeschlagene *Prinzip der äquivalenten Dehnungen* [40, 41] verwendet.

Dieses Prinzip der äquivalenten Dehnungen fordert die Äquivalenz der physikalischen und effektiven Dehnungen (vgl. Abb. 2.5). Im physikalischen Raum wird das geschädigte Material abgebildet, während das Material im effektiven Raum durch einen quasi-schädigungsfreien Zustand beschrieben wird. Die physikalische Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}$  ist damit mit der makroskopischen Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Schädigung  $D$  verbunden, während die effektive Dehnung  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  mit der effektiven Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  und einem schädigungsfreien Zustand ( $D = 0$ ) assoziiert wird. Das Prinzip der äquivalenten Dehnungen lässt sich demnach mathematisch folgendermaßen formulieren:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma}, D) = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, 0).\tag{2.13}$$

Mit dieser Gleichung wird das Dehnungsverhalten eines geschädigten Materials im physikalischen Raum auf das Dehnungsverhalten eines schädigungsfreien Materials im effektiven Raum zurückgeführt. Die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$



kann als die Spannung interpretiert werden, die auf schädigungsfreies Material wirken muss, um dieselbe Dehnung zu erzeugen, die die makroskopische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  an einem geschädigten Material hervorbringt [38, 39].

Nach dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip kann das Dehnungsverhalten eines geschädigten Materials aus dem Dehnungsverhalten eines schädigungsfreien Materials abgeleitet werden, indem die makroskopische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  durch die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  ersetzt wird. Daraus ergeben sich die Materialgleichungen für geschädigtes Material aus den bekannten Materialgleichungen für schädigungsfreies Material. Das Schädigungsmaß  $D$  geht dabei über die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  in die Materialgleichungen des geschädigten Materials ein.

Anhand der Modifikation linear elastischen Materialverhaltens durch Schädigung soll das Prinzip der äquivalenten Dehnungen veranschaulicht werden. Das Materialgesetz für linear elastisches Material im physikalischen Raum lautet

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_0 \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.14)$$

wobei  $\mathbf{E}_0$  den Elastizitätsmodul als Tensor vierter Stufe und  $\cdot \cdot$  das doppelte Skalarprodukt bezeichnen. Im effektiven Raum hat das Elastizitätsgesetz für quasi-schädigungsfreies Material die Form

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 \cdot \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.15)$$

Nach dem Prinzip der äquivalenten Dehnungen (2.13) folgt mit  $\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  die Gleichung

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.16)$$

Im Fall isotroper Schädigung kann mit Gleichung (2.10) die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  durch die makroskopische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und die Schädigung  $D$  ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich die makroskopische Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{E}_0 \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.17)$$

eines linear elastischen Materials mit Schädigung. In dieser Materialgleichung tritt der Elastizitätsmodul  $\mathbf{E}_0$  multipliziert mit dem Faktor  $(1 - D)$  auf. Nach Definition des *effektiven Elastizitätsmoduls*

$$\tilde{\mathbf{E}} := (1 - D) \mathbf{E}_0 \quad (2.18)$$

lässt sich linear elastisches Materialverhalten mit Schädigung in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.19)$$

schreiben. Durch die Bildung von Mikrorissen und -hohlräumen reduziert sich nach Gleichung (2.7) mit zunehmender Schädigung  $D$  die lasttragende effektive Fläche  $\delta\tilde{S}$ . Infolge dieser Flächenreduktion nimmt der effektive Elastizitätsmodul  $\tilde{\mathbf{E}}$  und damit die makroskopische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  mit zunehmender Schädigung ab.

Das Prinzip der äquivalenten Dehnungen beantwortet die Frage, wie aus Materialgleichungen für schädigungsfreies Material Materialgleichungen für geschädigtes Material abgeleitet werden können und wie das Materialverhalten unter dem Einfluss von Schädigung modifiziert wird.

## 2.6 Richtungsabhängige Schädigung

In den bisherigen Betrachtungen wurde Schädigung als isotrop betrachtet, was zu einer erheblichen Vereinfachung des mathematischen Formalismus führt. Im Allgemeinen ist Schädigung allerdings ein richtungsabhängiges Phänomen. Um diese Richtungsabhängigkeit abzubilden, werden anstatt skalarer Schädigungsmaße Tensoren als Schädigungsmaße verwendet. Im Folgenden wird dargestellt, wie anisotrope Schädigung durch so genannte Schädigungstensoren beschrieben werden kann.

### 2.6.1 Schädigungstensor zweiter Stufe

Um Schädigung in einem orthotropen Material zu formulieren, schlagen Murakami und Ohno [42, 43] einen Schädigungstensor

$$\mathbf{D}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 D_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i \quad (2.20)$$

zweiter Stufe in Hauptdiagonalform vor. Dabei sind  $D_i$  die Hauptwerte des Tensors. Die Hauptrichtungen  $\mathbf{v}_i$  bilden ein orthonormales Basissystem. Die Vektoren  $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$  sind über ein Tensorprodukt miteinander verbunden und bilden so einen Tensor zweiter Stufe.

Zur Interpretation dieses Schädigungsmaßes wird im physikalischen Raum das Flächenelement  $\delta\mathbf{S} = \mathbf{n} \delta S$  mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  definiert. Im effektiven Raum wird das entsprechende effektive Flächenelement  $\delta\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{n}} \delta\tilde{S}$  mit der Flächennormalen  $\tilde{\mathbf{n}}$  eingeführt. Abbildung 2.6 zeigt diese Flächen im physikalischen und effektiven Raum in der kartesischen Basis  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Durch

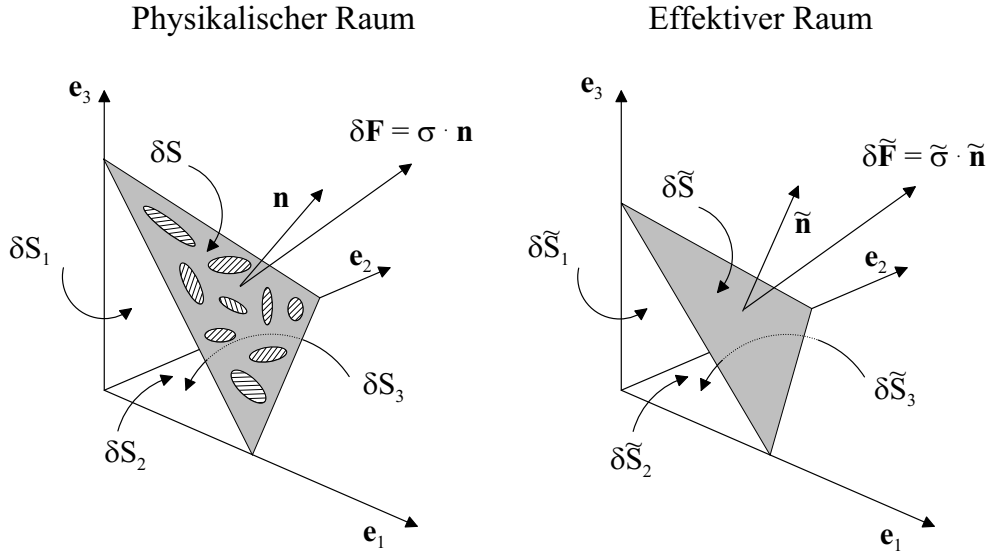


Abbildung 2.6: Orthotrope Schädigung im physikalischen und effektiven Raum

Transformation des Flächenelements  $\delta\mathbf{S}$  in den effektiven Raum ergibt sich das effektive Flächenelement

$$\delta\tilde{\mathbf{S}} = (\mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)}) \cdot \delta\mathbf{S}, \quad (2.21)$$

wobei  $\mathbf{I}^{(2)}$  den Einheitstensor zweiter Stufe darstellt, dessen Eigenschaften im Anhang A vorgestellt werden. Durch  $\cdot$  ist das einfache Skalarprodukt bezeichnet. Für die  $i$ -te Komponente der Gleichung (2.21) gilt

$$\delta\tilde{S}_i = (1 - D_i) \delta S_i. \quad (2.22)$$

Mit der Gesamtfläche der geschädigten Bereiche

$$\delta\mathbf{S}_D = \delta\mathbf{S} - \delta\tilde{\mathbf{S}} \quad (2.23)$$

können die Hauptwerte  $D_i$  im Sinne von Gleichung (2.1) als Verhältnis der geschädigten Bereiche  $\delta S_{Di}$  des Flächenelements in Richtung  $\mathbf{e}_i$  zu seiner Gesamtfläche  $\delta S_i$  interpretiert werden:

$$D_i = \frac{\delta S_{Di}}{\delta S_i}. \quad (2.24)$$

Anschließend stellt sich die Frage, wie die effektive Spannung für ein orthotrop geschädigtes Material dargestellt werden kann. Zur Beantwortung dieser

Frage ist zu beachten, dass nach Gleichung (2.11) die Kräfte im physikalischen und effektiven Raum durch die identische Abbildung gegeben sind:

$$\delta\tilde{\mathbf{F}} = \delta\mathbf{F}. \quad (2.25)$$

Die Kräfte in beiden Räumen lassen sich als Skalarprodukt zwischen dem jeweiligen Spannungstensor und dem entsprechenden Flächenelement ausdrücken. Aus Gleichung (2.25) folgt mit Gleichung (2.21) die Bedingung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{S} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{S}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{S} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)}) \cdot \delta\mathbf{S} \quad \forall \delta\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Da diese Bedingung für alle Flächenelemente  $\delta\mathbf{S}$  im physikalischen Raum erfüllt sein muss, lässt sich die effektive Spannung schreiben als

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{as} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)})^{-1}. \quad (2.27)$$

Der so erhaltene Spannungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{as}$  ist in der Regel asymmetrisch. Da nur der symmetrische Anteil des Tensors in die kontinuumsmechanischen Materialgleichungen eingeht, ergibt sich die effektive Spannung [44] als

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)})^{-1} + (\mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (2.28)$$

Für den Fall isotroper Schädigung  $\mathbf{D}^{(2)} = D \mathbf{I}^{(2)}$  reduziert sich dieser Ausdruck für die effektive Spannung entsprechend Gleichung (A.3) aus Anhang A auf den Ausdruck (2.10) der isotropen effektiven Spannung.

## 2.6.2 Schädigungstensor vierter Stufe

Anisotrope Schädigung kann durch einen Schädigungstensor vierter Stufe charakterisiert werden. Dazu wird das Prinzip der äquivalenten Dehnungen und das Konzept der effektiven Spannung auf linear elastisches Material angewendet [45].

Linear elastisches Materialverhalten kann nach dem Prinzip der äquivalenten Dehnungen im physikalischen und effektiven Raum durch die Gleichungen (2.16) und (2.19) beschrieben werden:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.30)$$

In Verallgemeinerung des Konzepts der effektiven Spannung (2.10) wird ein Schädigungstensor  $\mathbf{D}^{(4)}$  vierter Stufe eingeführt, so dass die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  durch

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{D}^{(4)})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.31)$$

gegeben ist.  $\mathbf{I}^{(4)}$  stellt den Einheitstensor vierter Stufe dar, dessen Eigenschaften in Anhang A zusammengefasst werden. Die Transformation des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  zur effektiven Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  kann durch einen so genannten Schädigungseffekt-Tensor  $\mathbf{M}(\mathbf{D})$  vermittelt werden [46–51]:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.32)$$

Einsetzen des Ausdrucks (2.31) in die Gleichung (2.29) führt unter anschließender Verwendung der Gleichung (2.30) auf folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{D}^{(4)})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ (\mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{D}^{(4)})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad \forall \boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Da diese Bedingung für alle Dehnungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  erfüllt sein muss, gilt für den Schädigungstensor  $\mathbf{D}^{(4)}$  folgende Gleichung

$$(\mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{D}^{(4)})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0. \quad (2.34)$$

Durch Umformen dieses Ausdrucks und unter Berücksichtigung der Eigenschaft (A.7) aus Anhang A folgt der Schädigungstensor

$$\mathbf{D}^{(4)} = \mathbf{I}^{(4)} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}_0^{-1} \quad (2.35)$$

und der effektive Elastizitätsmodul

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{D}^{(4)}) \cdot \mathbf{E}_0. \quad (2.36)$$

Unter der Annahme isotroper Schädigung  $\mathbf{D}^{(4)} = D \mathbf{I}^{(4)}$  reduzieren sich die effektive Spannung (2.31) und der effektive Elastizitätsmodul (2.36) auf die entsprechenden Ausdrücke (2.10) und (2.18) in ihrer isotropen Form.

Durch die Definition eines Schädigungsmaßes ist die mathematische Form der effektiven Spannung festgelegt. Richtungsabhängige Schädigung kann durch Schädigungstensenoren höherer Stufe charakterisiert werden. Unter der Annahme isotroper Schädigung vereinfachen sich die vorgestellten Schädigungstensenoren (2.20) und (2.35) zum skalaren Schädigungsmaß (2.2) und reproduzieren die isotropen Ausdrücke für die effektive Spannung (2.10) und den effektiven Elastizitätsmodul (2.18). Für isotrope Schädigung ist damit die Beschreibung der Schädigung durch Schädigungstensenoren der Darstellung durch ein skalares Schädigungsmaß äquivalent.

In dieser Arbeit soll das schädigungsmechanische Verhalten eines Kunststoffes charakterisiert werden. Das Schädigungsverhalten dieses Kunststoffes wird als isotrop angenommen. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit zur Beschreibung der Schädigung das skalare Schädigungsmaß (2.2) und die sich daraus ergebende effektive Spannung (2.10) verwendet.

## 2.7 Messung der Schädigung

Nach Einführung eines skalaren Schädigungsmaßes, durch das der Zustand des geschädigten Materials charakterisiert wird, stellt sich die Frage, wie dieses Schädigungsmaß experimentell bestimmt werden kann. Da Schädigung das mechanische Verhalten eines Materials verändert, kann das Schädigungsmaß über die Änderung der Materialeigenschaften bestimmt werden. In der Literatur werden zahlreiche Verfahren vorgeschlagen, mit denen das Schädigungsmaß aus der Änderung der makroskopischen Materialeigenschaften ermittelt werden kann [8].

### 2.7.1 Messung des effektiven Elastizitätsmoduls

Das elastische Verhalten eines geschädigten Materials wird durch die Gleichungen (2.18) und (2.19) beschrieben. Für einen einachsigen Zugversuch vereinfachen sich diese Gleichungen auf ihre skalare Form. Der effektive Elastizitätsmodul kann als

$$\tilde{E} = (1 - D) E_0 \quad (2.37)$$

geschrieben werden. Für die makroskopische Spannung gilt bei einachsiger Belastung

$$\sigma = \tilde{E} \epsilon. \quad (2.38)$$

Aus dem Materialverhalten unter einachsiger Belastung kann mit Gleichung (2.38) der effektive Elastizitätsmodul  $\tilde{E}$  bestimmt werden. Bei bekanntem Elastizitätsmodul  $E_0$  ergibt sich daraus nach Gleichung (2.37) die Schädigung

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E_0}. \quad (2.39)$$

Diese Bestimmung der Schädigung über den effektiven Elastizitätsmodul basiert auf dem Konzept der effektiven Spannung und dem Prinzip der äquivalenten Dehnungen und wurde unter anderem von Kachanov vorgeschlagen [5].

Dieses Messverfahren erfordert eine genaue Bestimmung des Elastizitätsmoduls und damit eine hohe Genauigkeit bei der Bestimmung von kleinen Dehnungen. Externe Dehnungsaufnehmer sind in der Lage, Dehnungen mit hoher Genauigkeit zu erfassen. Bei einem externen Ansetzaufnehmer (Multisens) wird durch Kontaktierung des Prüfkörpers die lokale Verformung bestimmt und über Metallarme auf eine Messmechanik übertragen. Diese Messmethode eignet sich vor allem für monotone Zugversuche.

Bei dynamischen Versuchen mit Zug- und Druckphasen kann das Messergebnis durch mechanisches Spiel in den Lastumkehrpunkten beeinflusst werden. Dies führt zu einer Verringerung der Messgenauigkeit. Bei dynamischen Versuchen bietet sich deshalb die Traversenwegmessung zur Bestimmung der Dehnung an. Hier wird die Dehnung des Zugstabs über die Auslenkung der Traverse bestimmt. Aus der Kraft, die auf die Probe aufgebracht wird, und der Querschnittsfläche des Zugstabs lässt sich die Spannung ermitteln. Bei bekannter Dehnung und Spannung kann eine Spannungs-Dehnungskurve erzeugt werden, die das mechanische Verhalten des Materials wiedergibt.

Zur Bestimmung der Schädigung wird der effektive Elastizitätsmodul im linearen Bereich dieser Spannungs-Dehnungskurve während der Entlastung des Prüfkörpers ermittelt. Durch mechanisches Spiel und viskose Effekte zeigt die Spannungs-Dehnungskurve in der Nähe der Lastumkehrpunkte nichtlineares Verhalten. Für die Bestimmung des effektiven Elastizitätsmoduls während der Entlastung des Prüfkörpers ist deswegen ein Spannungsbereich zu wählen, in dem das mechanische Verhalten annähernd linear ist. In der Regel wird das Materialverhalten im Spannungsbereich

$$0,15 \sigma_{max} < \sigma < 0,85 \sigma_{max} \quad (2.40)$$

als linear angenommen [8].  $\sigma_{max}$  bezeichnet hier die maximale Spannung vor der Entlastung der Probe.

Weiter setzt die Bestimmung der Schädigung eine homogene Verteilung der Schädigung im Prüfkörper voraus. Bei spröden Materialien tritt Schädigung häufig lokalisiert auf. Um eine annähernde Gleichverteilung der Schädigung sicherzustellen, werden bei spröden Materialien kleine Zugstab-Geometrien verwendet. Bei dynamischen Versuchen werden häufig Proben mit kreisförmigem oder quadratischem Querschnitt bevorzugt [52–54]. Durch diese Gestaltung wird das Risiko minimiert, dass der Zugstab während der Druckphase durch Knicken zerstört wird.

### 2.7.2 Messung der Hystereseffläche bei Zyklusversuchen

Bei Zyklusversuchen kann die Schädigung  $D$  alternativ durch die von der Spannungs-Dehnungskurve während eines Zyklus eingeschlossene Fläche bestimmt werden [55–59]. Für geschädigtes Material wird dazu die *effektive Hystereseffläche*

$$\tilde{W} = \int_{\text{Zyklus}} \sigma d\epsilon \quad (2.41)$$

definiert. Die Fläche  $\tilde{W}$  kann als externe Arbeit interpretiert werden, die am Material während eines Zyklus verrichtet wird. Nach wenigen Zyklen stellt sich für schädigungsfreies Material eine stabile Spannungs-Dehnungskurve ein. Die Hystereseffläche in diesem stabilen Zyklus wird als *initiale Hystereseffläche*  $W_0$  bezeichnet und charakterisiert das Material im schädigungsfreien Ausgangszustand. Unter Verwendung der effektiven Spannung (2.10) lässt sich die effektive Hystereseffläche (2.41) zum Ausdruck

$$\tilde{W} = \int_{\text{Zyklus}} (1 - D) \tilde{\sigma} d\epsilon = (1 - D) \int_{\text{Zyklus}} \tilde{\sigma} d\epsilon \quad (2.42)$$

umformen. Hier wurde vorausgesetzt, dass die Schädigung während eines Zyklus annähernd konstant ist und sich nur im Verlauf des Zyklusversuchs ändert. Mit dieser Annahme lässt sich die Schädigung  $D$  in Gleichung (2.42) vor das Integral ziehen. Zwischen effektiver Spannung  $\tilde{\sigma}$  und der Dehnung  $\epsilon$  besteht nach dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip (2.13) der gleiche funktionale Zusammenhang wie für schädigungsfreies Material. Das letzte Integral in Gleichung (2.42) ist somit mit der initialen Hystereseffläche identisch:

$$W_0 = \int_{\text{Zyklus}} \tilde{\sigma} d\epsilon. \quad (2.43)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in den Ausdruck (2.42) folgt für die effektive Hystereseffläche  $\tilde{W}$  die Beziehung

$$\tilde{W} = (1 - D)W_0. \quad (2.44)$$

Daraus kann bei bekannter initialer Hystereseffläche  $W_0$  die Schädigung

$$D = 1 - \frac{\tilde{W}}{W_0} \quad (2.45)$$

durch Bestimmung der effektiven Hystereseffläche  $\tilde{W}$  ermittelt werden.



Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens besteht in der Integration (2.41) über einen vollständigen Zyklus. Dadurch kann auf die Angabe eines linearen Bereiches (2.40), wie es für die lineare Approximation des effektiven Elastizitätsmoduls im vorausgehenden Abschnitt notwendig war, verzichtet werden. Außerdem ist die Integration numerisch stabiler und weniger anfällig für Messungenauigkeiten als die lineare Approximation der Entlastungskurve. Der in dieser Arbeit betrachtete Kunststoff unterliegt zyklischen Belastungen. Wegen der geschilderten Vorzüge wird die Schädigung im Kunststoff über die effektiven Hysteresefflächen der Zyklen bestimmt.

## 2.8 Schädigungsakkumulation

Durch thermo-mechanische Beanspruchung entstehen in einem Material Dehnungen und Spannungen, die über die Bildung von Mikrorissen und Mikroporen zur Schädigung des Materials führen. Diese Mikroschädigungen können durch Anwachsen und Akkumulation einen makroskopischen Riss bilden, der das Versagen des Werkstoffs zur Folge haben kann. Um die Lebensdauer eines Materials bei vorgegebener Belastungsgeschichte vorhersagen zu können, werden Kenntnis über die zeitliche Schädigungsentwicklung und ein geeignetes Versagenskriterium benötigt.

In Rahmen einer thermodynamischen Formulierung [60] der Schädigungsmechanik ergibt sich das mechanische Materialverhalten aus einem Zustandspotential. Die zeitliche Änderung der Zustandsvariablen wird aus einem Dissipationspotential abgeleitet.

Als Zustandspotential wird zunächst die elastische Energiedichte  $\omega_{el}$  eines geschädigten Materials betrachtet. Die elastische Energiedichte  $\omega_{el}$  ergibt sich durch Integration des Materialgesetzes (2.19) über eine Verformung vom dehnungsfreien Ausgangszustand zu einem Zustand mit der elastischen Dehnung  $\epsilon^{el}$ :

$$\omega_{el} = \int_0^{\epsilon^{el}} \sigma \cdot d\epsilon^{el} = \frac{1}{2} \epsilon^{el} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \cdot \epsilon^{el} = \frac{1}{2} (1 - D) \epsilon^{el} \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \epsilon^{el}. \quad (2.46)$$

Hier wurde die Definition des effektiven Elastizitätsmoduls (2.18) verwendet. Für  $D = 0$  ergibt sich die elastische Energiedichte eines schädigungsfreien Materials. Die elastische Energiedichte  $\omega_{el}$  hängt von den elastischen Dehnungen  $\epsilon^{el}$  und der Schädigung  $D$  ab. Partielle Ableitung nach diesen Variablen liefert die Materialgleichungen. So ergibt die Ableitung der elastischen

Energiedichte  $\omega_{el}$  nach der elastischen Dehnung  $\epsilon^{el}$  das bekannte Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \omega_{el}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{el}} = (1 - D) \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad (2.47)$$

für geschädigtes Material. Über den effektiven Elastizitätsmodul  $\tilde{\mathbf{E}}$  hängt die elastische Energiedichte  $\omega_{el}$  von der Schädigung  $D$  ab. Durch partielle Ableitung der elastischen Energie  $\omega_{el}$  nach der Schädigung  $D$  kann die zur Schädigung assoziierte Variable

$$Y := -\frac{\partial \omega_{el}}{\partial D} \quad (2.48)$$

definiert werden.  $Y$  gibt die Änderung der elastischen Energie pro Schädigungszunahme an, also die bei Schädigung freigesetzte elastische Energie. Die Variable  $Y$  wird deshalb als *Energiefreisetzungsrate* bezeichnet. Da die freigesetzte elastische Energie  $\partial \omega_{el}$  negativ ist, ist nach Definition (2.48) die Energiefreisetzungsrate  $Y$  positiv:

$$Y \geq 0. \quad (2.49)$$

Die Energiefreisetzungsrate  $Y$  kann mit der *bruchmechanischen Energiefreisetzungsrate*

$$G := -\frac{\partial U}{\partial A} \quad (2.50)$$

bei Rissfortschritt verglichen werden. Die bruchmechanische Energiefreisetzungsrate  $G$  gibt die Änderung der inneren Energie  $\partial U$  im Verhältnis zur bei Rissfortschritt erzeugten Fläche  $\partial A$  an, während die Energiefreisetzungsrate  $Y$  die Änderung der inneren Energie im Verhältnis zum Schädigungsfortschritt  $\partial D$  angibt [61]. Damit beschreiben beide Größen auf verschiedenen Größenskalen vergleichbare Phänomene. Die Energiefreisetzungsrate  $Y$  beschreibt auf der Mesoskala die Entstehung von Mikrorissen und Mikroporen, während die bruchmechanische Energiefreisetzungsrate  $G$  den Fortschritt eines makroskopischen Risses auf der Makroskala beschreibt.

Zur weiteren Interpretation der Energiefreisetzungsrate wird die explizite Form der Energiefreisetzungsrate

$$Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^{el} \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad (2.51)$$

berechnet, die sich aus Definition (2.48) und der elastischen Energie (2.46) ergibt. Mit dem Materialgesetz (2.16) für geschädigte Elastizität folgt für die Energiefreisetzungsrate die Form

$$Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^{el} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.52)$$

Wird die elastische Energiedichte des verbleibenden ungeschädigten Materials mit

$$\tilde{\omega}_{el} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^{el} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.53)$$

definiert, dann gilt für die Energiefreisetzungsrate

$$Y = \tilde{\omega}_{el}. \quad (2.54)$$

Die Energiefreisetzungsrate entspricht damit der im ungeschädigten Anteil des Materials verbleibenden elastischen Energie. Dies ist sinnvoll, da nur im verbleibenden ungeschädigten Material Energie gespeichert und damit freigesetzt werden kann. Aus der elastischen Energie (2.46) für geschädigtes Material ergibt sich über die explizite Form der Energiefreisetzungsrate (2.51) die bekannte Beziehung

$$Y = \frac{\omega_{el}}{1 - D}, \quad (2.55)$$

die eine Verbindung zwischen Energiefreisetzungsrate  $Y$ , elastischer Energie  $\omega_{el}$  und Schädigung  $D$  herstellt [29].

Als assoziierte Variable der Schädigung  $D$  stellt die Energiefreisetzungsrate  $Y$  die treibende Kraft für die Schädigungsentwicklung dar. Im Allgemeinen wird die zeitliche Änderung der Schädigung durch ein so genanntes Dissipationspotential  $F_D$  dargestellt. Die Schädigungsrate

$$\dot{D} = -\frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad (2.56)$$

ergibt sich dann durch partielle Ableitung des Dissipationspotentials  $F_D$  nach der Energiefreisetzungsrate  $Y$ . Für verschiedene Schädigungsmechanismen und Belastungen ist eine geeignete funktionale Form des Dissipationspotentials  $F_D$  zu wählen [62–65].

Für die Abhängigkeit des Dissipationspotentials  $F_D$  von der Energiefreisetzungsrate  $Y$  wird häufig ein Potenzgesetz verwendet [66–68]. Mikromechanische Betrachtungen [28] und die Forderung, dass die Schädigungsrate proportional zur freigesetzten Energie sein soll, legen eine quadratische Abhängigkeit des Dissipationspotentials [61, 69, 70] von der Energiefreisetzungsrate nahe:

$$F_D \sim Y^2. \quad (2.57)$$

Aus diesem Grunde wird in dieser Arbeit zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung im betrachteten Kunststoff ebenfalls eine quadratische Abhängigkeit des Dissipationspotentials von der Energiefreisetzungsrate verwendet.

Darüber hinaus wird die Schädigung stark von inelastischen Prozessen beeinflusst. Die Akkumulation von inelastischen Dehnungen trägt wesentlich zur Schädigung des Materials bei. Um den Einfluss der inelastischen Dehnungen auf die Schädigung wiedergeben zu können, wird der Dehnungstensor  $\epsilon$  in elastische Dehnungen  $\epsilon^{el}$  und inelastische Dehnungen  $\epsilon^{in}$  aufgeteilt:

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{in}. \quad (2.58)$$

Die Akkumulation der inelastischen Dehnungen im Material wird durch die Vergleichsgröße

$$\dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{in} \cdot \dot{\epsilon}^{in} \right)^{1/2} \quad (2.59)$$

beschrieben.  $\dot{p}$  wird als *Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung* bezeichnet. Der Beitrag inelastischer Prozesse zur Schädigungsentwicklung wird durch Proportionalität des Dissipationspotentials  $F_D$  zur Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\dot{p}$  abgebildet [28, 70]:

$$F_D \sim \dot{p}. \quad (2.60)$$

Die Forderungen (2.57) und (2.60) ergeben damit folgenden funktionalen Zusammenhang für das Dissipationspotential:

$$F_D(Y, p) = \frac{1}{2} S \left( \frac{Y}{S} \right)^2 \dot{p}. \quad (2.61)$$

Die Energiefestigkeit  $S$  wurde dabei als Materialparameter eingeführt. Partielle Ableitung dieses Dissipationspotentials nach der Schädigung liefert entsprechend Gleichung (2.56) die Schädigungsrate

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{p}. \quad (2.62)$$

Dieses *Schädigungsgesetz* beschreibt die zeitliche Schädigungsentwicklung. Die zeitliche Änderung der Schädigung ist proportional zur Energiefreisetzungsrates  $Y$  und zur Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\dot{p}$ . Da  $Y$  und  $\dot{p}$  positiv sind, ist die Schädigungsrate ebenfalls positiv:

$$\dot{D} \geq 0. \quad (2.63)$$

Die Schädigung in einem Material kann demnach zeitlich nur zunehmen, was die Irreversibilität des Schädigungsprozesses widerspiegelt.

In diesem Kapitel wurde ein Schädigungsmodell zur Lebensdauervorhersage vorgestellt, das auf einen Kunststoff unter thermo-mechanischer Belastung

angewendet werden soll. Die Schädigung im Kunststoff wird als isotrop angenommen. Es konnte gezeigt werden, dass isotrope Schädigung durch ein skalares Schädigungsmaß beschrieben werden kann. Durch das Konzept der effektiven Spannung und das Dehnungsäquivalenz-Prinzip können Materialgleichungen für geschädigtes Material aus schädigungsfreiem Materialverhalten abgeleitet werden.

Durch Schädigung wird elastische Energie im Material freigesetzt. Diese freigesetzte Energie trägt zusammen mit inelastischen Prozessen zur Schädigung des Materials bei. Die zeitliche Entwicklung der Schädigung wird durch ein Schädigungsgesetz beschrieben, in dem die Schädigungsrate proportional zur Energiefreisetzungsrates und zur Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung ist. Die Schädigung im Material nimmt zu, bis bei Erreichen einer kritischen Schädigung Versagen in Form eines makroskopischen Risses eintritt. Die Materialgleichungen für geschädigtes Material und die Kenntnis der Schädigungsentwicklung gestatten so zusammen mit dem vorgestellten Versagenskriterium eine Lebensdauervorhersage für den betrachteten Kunststoff.

Der in dieser Arbeit betrachtete Kunststoff zeigt im schädigungsfreien Ausgangszustand viskoelastisches Materialverhalten. Aus diesem Materialverhalten kann durch Kopplung von Viskoelastizität und Schädigung das geschädigte Materialverhalten des Kunststoffs abgeleitet werden. Im nächsten Kapitel wird das viskoelastische Materialmodell für den betrachteten Kunststoff vorgestellt.

# Kapitel 3

## Viskoelastisches Materialmodell

Bevor das Materialverhalten des betrachteten Kunststoffes unter dem Einfluss von Schädigung formuliert werden kann, muss sein Materialverhalten im schädigungsfreien Ausgangszustand beschrieben werden. Dieser Kunststoff besitzt bei Raumtemperatur annähernd elastisches Verhalten mit einem geringen Anteil an inelastischen Dehnungen. Bei höherer Temperatur zeigt der Kunststoff Relaxation und Kriechen. Um das Materialverhalten dieses Kunststoffes zu charakterisieren, wird deswegen ein viskoelastisches Materialmodell verwendet.

### 3.1 Viskoelastische Materialgleichungen

Viskoelastisches Material reagiert auf eine zeitlich konstante Dehnung mit einer Spannung, die mit zunehmender Zeit abnimmt. Diese Beobachtung wird als *Relaxation* bezeichnet. Wird dagegen an das Material eine zeitlich konstante Spannung angelegt, zeigt es eine mit der Zeit zunehmende Dehnung. Dieser Vorgang heißt *Kriechen*.

Eine Dehnungsänderung hat bei viskoelastischem Material eine Änderung der Spannung zur Folge, die mit zunehmender Zeit abnimmt. Eine wesentliche Eigenschaft viskoelastischen Materials ist es, dass sein Spannungsverhalten auch durch zeitlich zurückliegende Dehnungsänderungen beeinflusst wird. Dieses Verhalten kommt im viskoelastischen Faltungsintegral

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(\tau - \tau') \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt' \quad (3.1)$$

zum Ausdruck [71]. Hier bezeichnet  $\mathbf{R}(\tau)$  den von der effektiven Zeit  $\tau$  abhängigen Relaxationsmodul, wobei die effektive Zeit mit  $\tau = \tau(t)$  und  $\tau' = \tau(t')$  von der physikalischen Zeit abhängt. Das Temperaturverhalten des Materials kann durch Einführung der *effektiven Zeit*

$$\tau := \int_0^t \frac{dt'}{a_T(T(t'))} \quad (3.2)$$

beschrieben werden, die durch Skalierung mit einem temperaturabhängigen *Zeit-Verschiebungsfaktor*  $a_T(T)$  aus der physikalischen Zeit  $t$  hervorgeht:

$$d\tau = \frac{dt}{a_T(T)}. \quad (3.3)$$

Die Einführung der effektiven Zeit  $\tau$  lässt sich folgendermaßen begründen: Viskoelastische Effekte nehmen mit der Temperatur zu. Mit zunehmender Temperatur verlaufen Relaxations- und Kriechprozesse schneller. Die Zeit scheint damit bei höheren Temperaturen schneller zu vergehen als bei niedrigeren. Dies führt zur Skalierung der physikalischen Zeit  $t$  mit dem temperaturabhängigen Zeit-Verschiebungsfaktor  $a_T(T)$ . Materialien, die mit diesem Konzept der *Zeit-Temperatur-Verschiebung* beschrieben werden können, heißen *thermorheologisch einfach* [72].

Als Referenztemperatur  $T_{ref}$  wird die Temperatur bezeichnet, bei der physikalische und effektive Zeit übereinstimmen:

$$a_T(T_{ref}) = 1. \quad (3.4)$$

Das Relaxationsverhalten bei Referenztemperatur  $T_{ref}$  wird durch den zeitabhängigen Relaxationsmodul  $\mathbf{R}(t)$  charakterisiert. Mit dem Konzept der Zeit-Temperatur-Verschiebung kann das Relaxationsverhalten bei anderen Temperaturen  $T$  durch das Relaxationsverhalten bei Referenztemperatur ausgedrückt werden:

$$\mathbf{R}(t, T) = \mathbf{R}(\tau). \quad (3.5)$$

Bei konstanter Temperatur entspricht damit die Skalierung (3.3) auf einer logarithmischen Zeitskala einer Verschiebung der Relaxationskurve um den Betrag  $-\log(a_T)$  [73]. Durch Verschiebung der Relaxationskurve bei Referenztemperatur ergibt sich das Relaxationsverhalten bei anderen Temperaturen [72]. Das viskoelastische Material ist also durch den temperaturabhängigen Zeit-Verschiebungsfaktor  $a_T(T)$  und das Relaxationsverhalten  $\mathbf{R}(\tau)$  vollständig charakterisiert.

Für isotropes Materialverhalten kann der *tensorielle* Relaxationsmodul  $\mathbf{R}(\tau)$  durch einen von der effektiven Zeit  $\tau$  abhängigen Kompressionsmodul  $K(\tau)$  und Schubmodul  $G(\tau)$  dargestellt werden:

$$\mathbf{R}(\tau) = K(\tau) \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} + 2G(\tau) \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right). \quad (3.6)$$

$\mathbf{I}^{(2)}$  und  $\mathbf{I}^{(4)}$  sind die Einheitstensoren zweiter und vierter Stufe. Gleichung (3.6) ergibt sich aus der bekannten Zerlegung des Elastizitätstensors in einen Kompressions- und Schubmodul [74, 75]. Dieser Zusammenhang lässt sich auf die lineare Viskoelastizität mit einem zeitabhängigen Relaxationsmodul übertragen [76].

Der Kompressionsmodul  $K(\tau)$  und der Schubmodul  $G(\tau)$  können als *Prony-Serien*

$$K(\tau) = K_\infty + \sum_{i=1}^m K_i e^{-\tau/\tau_i} \quad (3.7)$$

$$G(\tau) = G_\infty + \sum_{i=1}^m G_i e^{-\tau/\tau_i} \quad (3.8)$$

geschrieben werden [72, 77, 78]. Kompressions- und Schubmodul werden dabei durch eine Summe von Exponentialfunktionen genähert. Die Prony-Serien sind durch die *Prony-Koeffizienten*  $K_i$ ,  $G_i$  und die *Relaxationszeiten*  $\tau_i$  parametrisiert.  $K_\infty$  und  $G_\infty$  geben den Kompressions- und Schubmodul für unendlich lange Zeiten ( $t \rightarrow \infty$ ) an.  $m$  bezeichnet die Anzahl der verwendeten Exponentialfunktionen. Der initiale Kompressions- und Schubmodul ist durch

$$K_0 := K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^m K_i \quad (3.9)$$

$$G_0 := G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^m G_i \quad (3.10)$$

definiert.  $K_0$  und  $G_0$  entsprechen dem zeitunabhängigen Kompressions- und Schubmodul der Elastizitätstheorie. Damit ist viskoelastisch isotropes Material durch den von der effektiven Zeit abhängigen Kompressions- und Schubmodul und die temperaturabhängige Zeit-Verschiebungsfunktion  $a_T(T)$  vollständig charakterisiert.



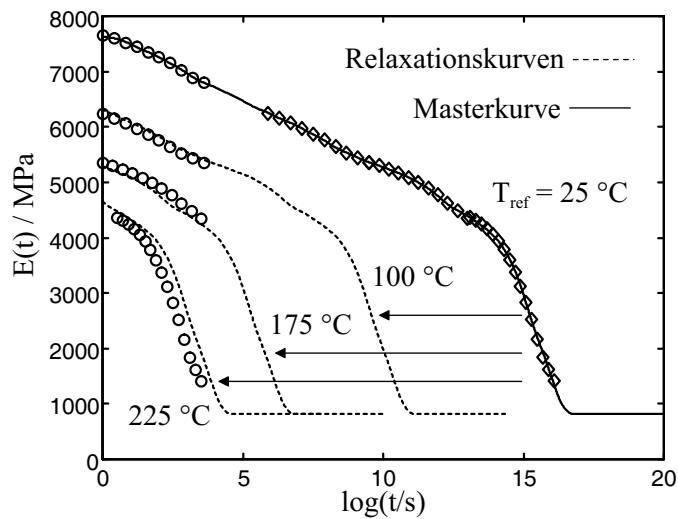


Abbildung 3.1: Relaxationskurven bei verschiedenen Temperaturen und Erzeugung einer Masterkurve [81]. Die bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Relaxationskurven sind als Kreise  $\circ$  dargestellt. Durch Verschiebung lässt sich aus den verschobenen Relaxationskurven ( $\diamond$ ) eine Masterkurve erzeugen, die als durchgezogene Linie zu sehen ist. Das aus der Masterkurve für verschiedene Temperaturen  $T \neq T_{ref}$  abgeleitete Relaxationsverhalten ist jeweils als gestrichelte Linie eingezeichnet.

## 3.2 Experimentelle Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens

Anstatt Kompressions- und Schubmodul für viskoelastisch isotropes Material direkt zu bestimmen, werden in einem einachsigen Relaxationsversuch der zeit- und temperaturabhängige Elastizitätsmodul  $E(\tau)$  und die Poissonzahl  $\nu(\tau)$  ermittelt. Zur Charakterisierung viskoelastischen Materialverhaltens werden diese Größen dann in einen Kompressionsmodul  $K(\tau)$  und Schubmodul  $G(\tau)$  umgerechnet. Wegen der Zeitabhängigkeit des isotropen Relaxationsmoduls (3.6) im Faltungsintegral (3.1) können zur Umrechnung nicht die aus der linearen Elastizitätstheorie bekannten Beziehungen [79] verwendet werden. Unter Verwendung der Laplace-Transformation lassen sich allerdings Elastizitätsmodul und Poissonzahl in Kompressions- und Schubmodul umrechnen [80].

Zur experimentellen Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E(\tau)$  werden Relaxationsversuche bei der Referenztemperatur  $T_{ref} = 25\text{ °C}$  und den Tem-

peraturen  $T = 100^\circ\text{C}$ ,  $175^\circ\text{C}$  und  $225^\circ\text{C}$  durchgeführt [81]. Die zugehörigen Relaxationskurven  $E(t, T)$  sind in Abbildung 3.1 als Kreise  $\circ$  zu sehen. Durch Verschiebung der Relaxationskurven höherer Temperaturen in Richtung der Relaxationskurve für die Referenztemperatur  $T_{ref}$  lässt sich eine sogenannte *Masterkurve*  $E(\tau)$  erstellen. Die in Richtung der Referenztemperatur verschobenen Messpunkte sind in Abbildung 3.1 als Rauten  $\diamond$  dargestellt. Die aus den verschobenen Messwerten approximierten Masterkurve wird als durchgezogene Linie gezeigt. Die Relaxationskurven  $E(t, T)$  für Temperaturen  $T \neq T_{ref}$  ergeben sich durch Verschiebung der Masterkurve entsprechend den Gleichungen (3.5) und (3.3). Die verschobenen Relaxationskurven  $E(t, T)$  sind in Abbildung 3.1 als gestrichelte Linien abgebildet.

Die durch Verschiebung der Relaxationskurven erzeugte Masterkurve  $E(\tau)$  wird durch die Prony-Serie

$$E(\tau) = E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\tau/\tau_i} \quad (3.11)$$

mit den Prony-Koeffizienten  $E_i$  und den Relaxationszeiten  $\tau_i$  approximiert.  $E_\infty$  gibt den Elastizitätsmodul für unendlich lange Zeiten ( $t \rightarrow \infty$ ) an. Der initiale Elastizitätsmodul ist durch

$$E_0 := E(0) = E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i \quad (3.12)$$

definiert. Der initiale Elastizitätsmodul  $E_0$  entspricht dem zeitunabhängigen Elastizitätsmodul der Elastizitätstheorie.

Zur Charakterisierung des betrachteten Kunststoffes wird  $m = 16$  verwendet. Die Koeffizienten der Prony-Serie werden durch Least-Square-Approximation mit nichtnegativen Koeffizienten bestimmt [82]. Daraus ergibt sich  $E_\infty = 816$  MPa. Die approximierten Masterkurve ist in Abbildung 3.1 als durchgezogene Linie zu sehen.

Untersuchungen von Kunststoffen der betrachteten Materialklasse haben gezeigt, dass das effektive Zeitverhalten der Poissonzahl  $\nu(\tau)$  in sehr guter Näherung durch die Annahme eines konstanten Kompressionsmoduls

$$K(\tau) = K_0 \quad (3.13)$$

bestimmt werden kann [83]. Der initiale Kompressionsmodul  $K_0$  lässt sich aus der gemessenen initialen Poissonzahl  $\nu_0 = \nu(0)$  und dem initialen Elastizitätsmodul  $E_0$  über die aus der Elastizitätstheorie bekannte Beziehung

$$K_0 = \frac{E_0}{3(1 - 2\nu_0)} \quad (3.14)$$

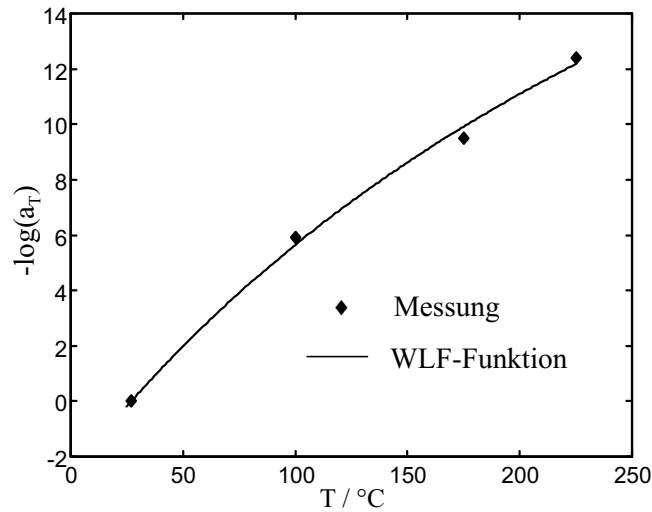


Abbildung 3.2: Approximation der Zeit-Verschiebungsfaktoren durch die WLF-Funktion [81]

berechnen [79]. Aus dem bekannten Kompressionsmodul (3.13) und dem approximierten Elastizitätsmodul (3.11) lässt sich unter Verwendung der Laplace-Transformation der Schubmodul  $G(\tau)$  errechnen, wie in [80] gezeigt wird.

Aus der Verschiebung der gemessenen Relaxationskurven  $E(t, T)$  zur Erzeugung der Masterkurve (3.11) und der Definition der effektiven Zeit (3.3) ergeben sich die Zeit-Verschiebungsfaktoren  $a_T(T)$  für die jeweilige Versuchstemperatur. Das Temperaturverhalten des Zeit-Verschiebungsfaktors  $a_T(T)$  wird durch die Williams-Landell-Ferry-Funktion (WLF-Funktion)

$$-\log(a_T) = h(T) := \frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})} \quad (3.15)$$

genähert [84, 85]. Die Koeffizienten  $C_i$  der WLF-Funktion werden ebenfalls durch Least-Square-Approximation [86–90] bestimmt. In Abbildung 3.2 sind die experimentell ermittelten Zeit-Verschiebungsfaktoren  $a_T(T)$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  als Rauten  $\blacklozenge$  dargestellt [81]. Die approximierte WLF-Funktion ist als durchgezogene Linie zu sehen.

Mit der Prony-Serie (3.11) für den Relaxationsmodul  $E(\tau)$  und der WLF-Funktion (3.15) für die Zeit-Temperatur-Verschiebung sind für den betrachteten Kunststoff alle Materialparameter bestimmt, die zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens benötigt werden. In Abbildung 3.3 wird bei verschiedenen Temperaturen der experimentell ermittelte Relaxationsmodul  $E(\tau)$

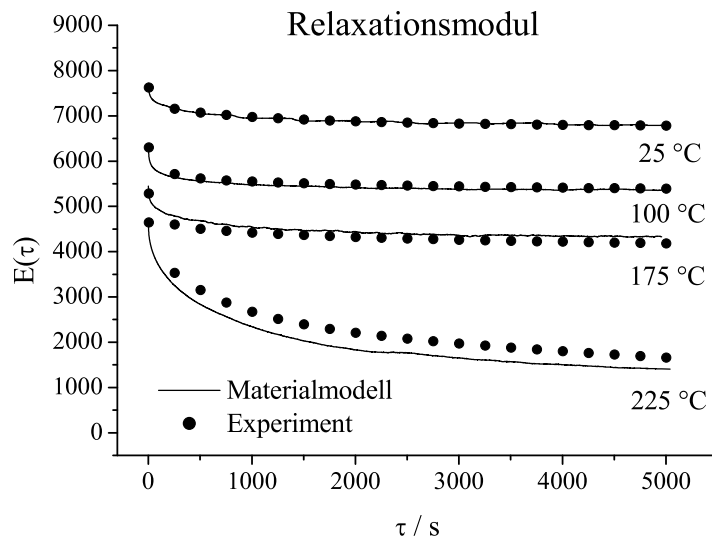


Abbildung 3.3: Zeitverlauf des experimentell ermittelten und simulierten Relaxationsmoduls  $E(\tau)$  für verschiedene Temperaturen [91]

mit einem theoretischen Relaxationsmodul verglichen, der sich durch Simulation aus dem ermittelten Materialmodell ergibt [91]. Der Zeitverlauf des experimentellen Relaxationsmoduls ist als durchgezogene Linie zu sehen. Der Zeitverlauf des simulierten Relaxationsmoduls ist durch gefüllte Kreise • dargestellt. Simulierte und experimentell bestimmte Werte zeigen bei den verschiedenen Temperaturen gute Übereinstimmung. Das Relaxationsverhalten des Kunststoffes wird somit vom charakterisierten Materialmodell gut abgebildet. Dieses Materialmodell soll nun auf eine geeignete Demonstrator-Geometrie angewendet werden.

### 3.3 Verifikation des Materialmodells

Um das ermittelte viskoelastische Materialmodell für den betrachteten Kunststoff zu verifizieren, wird das Materialmodell in einer FE-Analyse auf eine Demonstrator-Geometrie angewendet. Zur Verifikation des Materialmodells werden die simulierten Dehnungen unter thermo-mechanischer Belastung mit gemessenen Dehnungswerten verglichen, die durch Grauwert-Korrelation bestimmt werden [81].

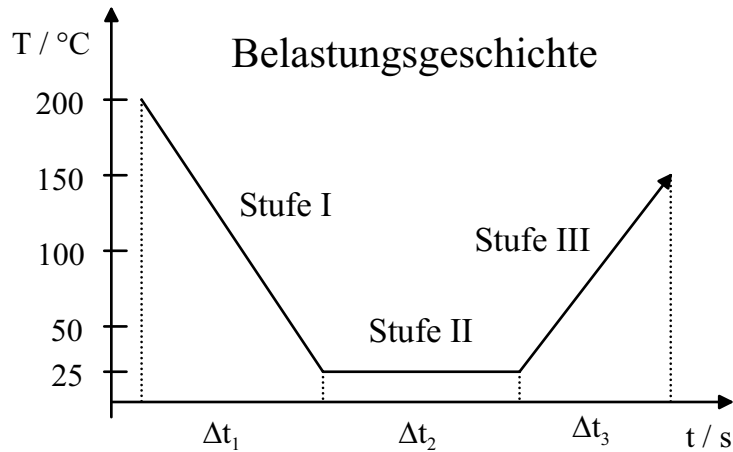


Abbildung 3.4: Belastungsgeschichte des Kunststoffes [81]

### 3.3.1 Finite-Elemente-Simulation am Demonstrator

Als Demonstrator wird eine in der Elektronik typische Anordnung benutzt, in der der charakterisierte Kunststoff als Verpackung elektronischer Komponenten verwendet wird. Dadurch kann das Bauteil vor Umwelteinflüssen und mechanischen Belastungen geschützt werden. Wegen der viskoelastischen Eigenschaften des betrachteten Kunststoffes muss die FE-Analyse zeitabhängig durchgeführt werden. Um die Dehnungen im Demonstrator simulieren zu können, ist also der gesamte Belastungsverlauf zu berücksichtigen [81].

Abbildung 3.4 zeigt die Belastungsgeschichte des Kunststoffes. Da der Kunststoff bei einer Temperatur von 200  $^{\circ}\text{C}$  vergossen und getempert wird, kann der Demonstrator bei dieser Temperatur als spannungsfrei angenommen werden. Dieser Zustand bildet den Ausgangspunkt der Simulation. Nach der Prozessierung wird der Demonstrator auf die Raumtemperatur von 25  $^{\circ}\text{C}$  abgekühlt. Die Abkühlung der Komponente ist in Abbildung 3.4 durch die Belastungsstufe I dargestellt. Die Lagerung der Komponente nach Abkühlung wird durch die Belastungsstufe II abgebildet. Diese Stufe berücksichtigt die im viskoelastischen Material auftretende Relaxation. Um die simulierten Dehnungen im Kunststoff experimentell zu überprüfen, wird nach Lagerung der Probe ein weiterer Temperaturschritt durchgeführt, bei dem die Probe von Raumtemperatur 25  $^{\circ}\text{C}$  auf die Temperatur von 150  $^{\circ}\text{C}$  erwärmt wird. Die thermische Belastung während des Experiments wird in Abbildung 3.4 durch Belastungsstufe III dargestellt.

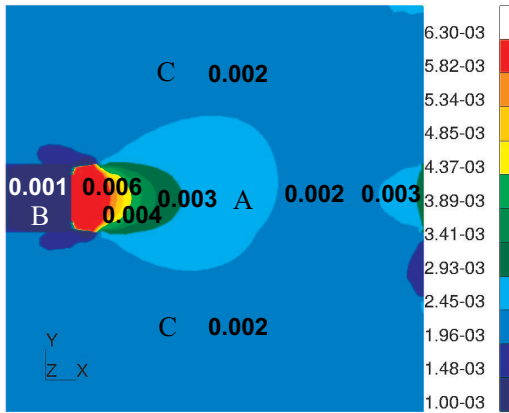
Zur Verifikation des Materialmodells werden die Dehnungsdifferenzen zwischen Anfang und Ende der Belastungsstufe III unter Berücksichtigung der

Vorgeschichte simuliert. Diese simulierten Dehnungsunterschiede lassen sich mit den Dehnungsänderungen vergleichen, die durch die thermische Belastung während des Experiments hervorgerufen werden und experimentell bestimmt werden können. Abbildung 3.5 stellt in den Teilbildern (a-c) die simulierten Dehnungsinckremente  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  und die Scherdehnungen  $\epsilon_{xy}$  während des letzten Belastungsschritts dar [81]. Diese simulierten Dehnungsinckremente werden im nächsten Abschnitt mit experimentell ermittelten Dehnungen verglichen.

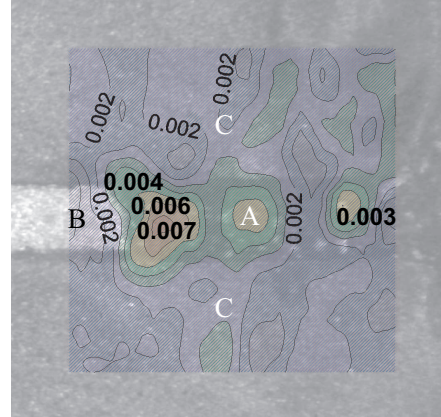
### 3.3.2 Messung der Dehnungen mit Grauwert-Korrelation

Zur experimentellen Bestimmung der Dehnungen wird der Demonstrator in einem zusätzlichen Temperaturschritt belastet. Dieser Temperaturschritt ist in Abbildung 3.4 als Stufe III bezeichnet. In diesem Belastungsschritt wird die Probe von Raumtemperatur 25 °C auf 150 °C aufgeheizt. Die aus der thermischen Belastung der Probe resultierenden Dehnungen werden dann durch Grauwert-Korrelation [92] ermittelt. Dazu werden mit einem optischen Mikroskop Bilder der Oberflächenstruktur der Probe bei Raumtemperatur und bei 150 °C aufgenommen. Das Bild bei Raumtemperatur dient als Referenzbild, das mit der deformierten Struktur bei 150 °C korreliert werden kann. Die Grauwert-Korrelation wird mit der Software microDAC [81, 93–97] durchgeführt. Aus der Korrelation des Referenzbildes bei Raumtemperatur und des Bildes der belasteten Probe ergeben sich die Dehnungen während des letzten Belastungsschritts. Mit diesem Verfahren lassen sich Dehnungen mit einer Messgenauigkeit von  $\pm 10^{-3}$  bestimmen.

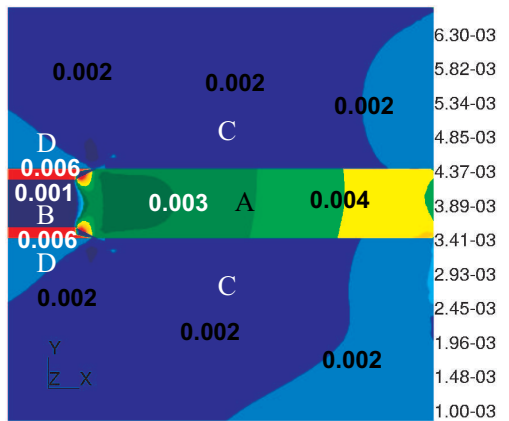
Die mit microDAC ermittelten Dehnungen sind in Abbildung 3.5 als Teilbilder (d-f) dargestellt [81]. Einzelne Bereiche werden in den Teilbildern durch Großbuchstaben (A-D) hervorgehoben. Die gemessenen Dehnungswerte  $\epsilon_{xx}$  im Kunststoff (Bereich A) variieren in Teilbild (d) von 0,002 bis 0,007 und nehmen in Richtung Keramik (Bereich B) zu. Am rechten Bildrand befindet sich ein lokales Extremum mit einer gemessenen Dehnung von 0,003. Diese Messwerte und ihre Zunahme werden von der Simulation mit hoher Genauigkeit wiedergegeben. In der Simulation (Teilbild a) ist im Kunststoff (Bereich A) ein Anstieg der Dehnungswerte von 0,002 auf 0,006 zu erkennen. Am rechten Bildrand in Teilbild (a) ist ebenfalls ein lokales Extremum mit einer Dehnung von 0,003 zu sehen. Die gemessene Dehnung in der Keramik (Bereich B) liegt bei 0,002 (Teilbild d). In der Simulation gehen die Dehnungen in der Keramik auf 0,001 zurück. Im Trägermaterial (Bereich C) werden au-



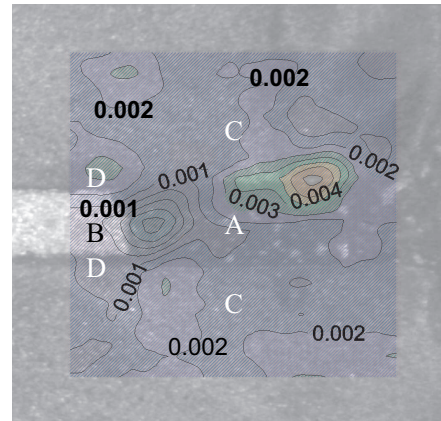
a) Simulierte Dehnungen  $\epsilon_{xx}$



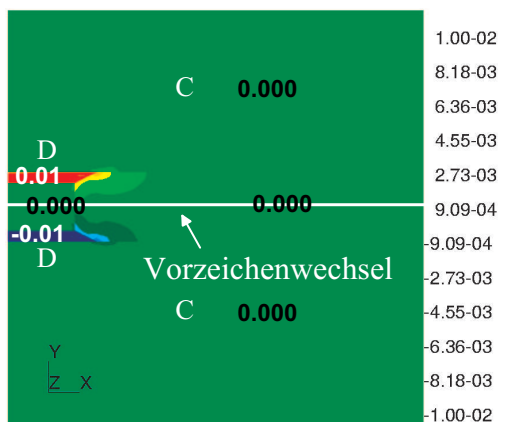
d) Gemessene Dehnungen  $\epsilon_{xx}$



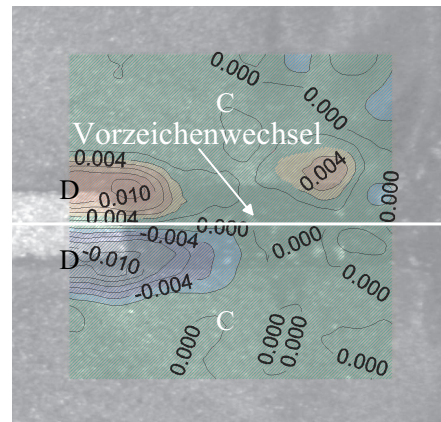
b) Simulierte Dehnungen  $\epsilon_{yy}$



e) Gemessene Dehnungen  $\epsilon_{yy}$



c) Simulierte Dehnungen  $\epsilon_{xy}$



f) Gemessene Dehnungen  $\epsilon_{xy}$

Abbildung 3.5: Simulation und Messung von Dehnungsfeldern am Demonstrator [81]

ßerhalb der lokalen Extrema sowohl in der Simulation (Teilbild a), als auch in der Messung (Teilbild d) Dehnungen von 0,002 gefunden.

Die gemessenen Dehnungen  $\epsilon_{yy}$  in y-Richtung liegen im Trägermaterial (Bereich C) bei annähernd 0,002 (Teilbild e). Diese Werte stimmen mit der Simulation überein, in der im Trägermaterial (Bereich C) ebenfalls Dehnungswerte von 0,002 berechnet werden (Teilbild b). In der Keramik (Bereich B) sind sowohl in der Simulation, als auch in der Messung Werte von 0,001 festzustellen. Die in der Simulation (Teilbild b) auftretenden stark lokalisierten Maxima in den Bereichen D werden von der Messung in Teilbild (e) nicht aufgelöst.

Da der simulierte Demonstrator in x- und y-Richtung nicht vollständig symmetrisch ist, resultieren aus der Temperaturerhöhung Scherdehnungen. Die gemessenen Scherdehnungen  $\epsilon_{xy}$  zeigen in Teilbild (f) Extremwerte von  $\pm 0,01$  in den Bereichen D. Außerhalb dieses Bereiches sind die Scherdehnungen annähernd Null. Dies wird auch von der Simulation in Teilbild (c) wiedergegeben. Bei vertikaler Bewegung vom oberen Extremum zum unteren Extremum ist in Teilbild (f) ein Vorzeichenwechsel der Scherdehnungen zu sehen. Dieser Vorzeichenwechsel findet sich auch im simulierten Scherdehnungsfeld in Teilbild (c). Das simulierte Dehnungsfeld wird damit in hoher Genauigkeit von den gemessenen Dehnungswerten wiedergegeben. Simulation und Messung stehen in guter Übereinstimmung.

Damit wird das schädigungsfreie Materialverhalten des Kunststoffes durch das benutzte viskoelastische Materialmodell gut abgebildet. Als schädigungsfreies Materialmodell bildet das verifizierte viskoelastische Materialmodell den Ausgangspunkt für die Charakterisierung geschädigten Materialverhaltens, das durch Modifizierung mit einem Schädigungsmaß aus dem schädigungsfreien Materialmodell hervorgeht (vgl. Abschnitt 2.5).

Um Viskoelastizität mit Schädigung simulieren zu können, muss das viskoelastische Materialmodell mit einem Schädigungsmaß gekoppelt werden. Das resultierende Schädigungsmodell ist dann als benutzerdefiniertes Materialverhalten in ein FE-Programm zu implementieren. FE-Programme stellen dazu so genannte Subroutines zur Verfügung, die frei programmiert werden können. Über definierte Schnittstellen können Variablen zwischen FE-Programm und Subroutine ausgetauscht werden. Zur Implementierung des viskoelastischen Schädigungsmodells wird zunächst schädigungsfreie Viskoelastizität als benutzerdefiniertes Materialmodell programmiert. Nach Verifikation dieses Materialmodells wird dann der Programmcode mit einem Schädigungsmaß modifiziert. Die numerische Implementierung des viskoelastischen Materialmodells wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.



## 3.4 Numerische Implementierung der Viskoelastizität

Die Lösung eines Finite-Elemente-Problems der Strukturmechanik wird durch Iteration ermittelt. Wegen seiner hohen Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität wird zur Lösung nichtlinearer Modelle häufig das Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Dieses Iterationsverfahren wird in Anhang B näher erläutert.

Für zeitabhängige FE-Probleme muss die kontinuierliche Zeit in diskrete Zeitschritte aufgeteilt werden. Das Iterationsverfahren wird dann für jeden Zeitschritt durchgeführt. Zur numerischen Diskretisierung des Materialmodells ist die Spannungsänderung in jedem Zeitinkrement zu berechnen. Um das Newton-Raphson-Verfahren anwenden zu können, muss zudem die Jacobi-Matrix des Materialmodells angegeben werden. Anschließend kann das diskretisierte Materialmodell als benutzerdefiniertes Materialverhalten in ein FE-Programm implementiert werden.

### 3.4.1 Diskretisierung des viskoelastischen Materialmodells

Zur Durchführung des Newton-Raphson-Verfahrens bei einem zeitabhängigen FE-Problem wird zunächst die kontinuierliche Zeit  $t$  in diskrete Zeitschritte  $t^k, k \in \mathbb{N}$  unterteilt. In jedem Zeitinkrement

$$\Delta t := t^{k+1} - t^k \quad (3.16)$$

ist dann bei vorgegebener Dehnungsänderung

$$\Delta \epsilon := \epsilon(t^{k+1}) - \epsilon(t^k) \quad (3.17)$$

die Spannung  $\sigma(t^{k+1})$  am Ende des jeweiligen Zeitinkrements gesucht. Dazu wird für jeden Zeitschritt  $\Delta t$  die Spannungsänderung

$$\Delta \sigma := \sigma(t^{k+1}) - \sigma(t^k) \quad (3.18)$$

berechnet. Für eine schnelle Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens wird die Jacobi-Matrix des Materialmodells benötigt. Die Spannungsänderung  $\Delta \sigma(\Delta \epsilon)$  hängt vom vorgegebenen Dehnungsincrement  $\Delta \epsilon$  ab. Durch

partielle Ableitung der Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  lässt sich für das betrachtete Zeitinkrement die gesuchte *Jacobi-Matrix*

$$\mathbf{J}^V := \left( \frac{\partial \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\epsilon}} \right) \quad (3.19)$$

für Viskoelastizität als Tensor vierter Stufe definieren. In Anhang C werden die Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  in Abhängigkeit des Dehnungsinkrements  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  und die Änderung des effektiven Zeitinkrements  $\Delta\tau$  berechnet. Daraus kann die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  abgeleitet werden. Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse aus Anhang C vorgestellt.

### Berechnung der Spannungsänderung $\Delta\boldsymbol{\sigma}$

Unter Verwendung des isotropen Relaxationsmoduls (3.6) kann das viskoelastische Faltungsintegral (3.1) zunächst in einen hydrostatischen und deviatorischen Anteil aufgespalten werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^\tau 2G(\tau - \tau') \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' + \mathbf{I}^{(2)} \int_0^\tau 3K(\tau - \tau') \frac{d\epsilon_H}{d\tau'} d\tau'. \quad (3.20)$$

Hier bezeichnet  $\epsilon_H$  die hydrostatische Dehnung und  $\mathbf{e}$  den Dehnungsdeviator, die in Anhang A eingeführt werden. In Gleichung (3.20) wurde die Zeitintegration nach Definition (3.2) durch Integration über die effektive Zeit  $\tau$  ersetzt. Der Spannungstensor kann ebenfalls in eine hydrostatische Spannung  $\sigma_H$  und einen Spannungsdeviator  $\mathbf{s}$  aufgespalten werden. Nach Berechnung der hydrostatischen Spannungsänderung  $\Delta\sigma_H$  und der Änderung des Spannungsdeviators  $\Delta\mathbf{s}$  ergibt sich die Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  aus

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\sigma_H \mathbf{I}^{(2)} + \Delta\mathbf{s}. \quad (3.21)$$

Zunächst folgt unter der Annahme eines konstanten Kompressionsmoduls (3.13) aus Gleichung (3.20) die hydrostatische Spannung

$$\sigma_H = 3K_0 \epsilon_H. \quad (3.22)$$

Für die Änderung der hydrostatischen Spannung  $\Delta\sigma_H$  während eines Zeitinkrements gilt dann

$$\Delta\sigma_H = 3K_0 \Delta\epsilon_H. \quad (3.23)$$

Durch Vergleich mit dem bekannten Elastizitätsgesetz [79] kann die hydrostatische Dehnung  $\epsilon_H$  in Gleichung (3.22) mit der *hydrostatischen elastischen Dehnung*

$$\epsilon_H^{el} = \epsilon_H \quad (3.24)$$

identifiziert werden. Mit der Aufspaltung des Dehnungstensors (2.58) in elastische und inelastische Anteile folgt daraus, dass die *hydrostatische inelastische Dehnung* verschwindet:

$$\epsilon_H^{in} = 0. \quad (3.25)$$

Hier wurde die Linearität der Spur in der Definition der hydrostatischen Dehnung (A.8) in Anhang A benutzt. Aus dem Verschwinden der hydrostatischen inelastischen Dehnung folgt nach Definition des Dehnungsdeviators (A.9), dass der inelastische Dehnungstensor  $\epsilon^{in}$  mit dem inelastischen Dehnungsdeviator  $\mathbf{e}^{in}$  identisch ist:

$$\epsilon^{in} = \mathbf{e}^{in}. \quad (3.26)$$

Aus der Annahme eines konstanten Kompressionsmoduls ergibt sich somit die Folgerung, dass nur die deviatorischen Anteile zur inelastischen Dehnung  $\epsilon^{in}$  beitragen, während die hydrostatischen Anteile verschwinden.

Weiter folgt unter Verwendung der Prony-Serie (3.8) für den Spannungsdeviator  $\mathbf{s}$  der Ausdruck

$$\mathbf{s} = 2G_0 \left( \mathbf{e} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \right), \quad (3.27)$$

wobei  $G_0$  wie in Gleichung (3.10) definiert ist. Außerdem wurden die *normierten Schubmodule*

$$\alpha_i := \frac{G_i}{G_0} \quad (3.28)$$

und die *Prony-Dehnungen*

$$\mathbf{e}_i := \int_0^\tau \left( 1 - e^{(\tau'-\tau)/\tau_i} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (3.29)$$

eingeführt. Wieder kann nach dem bekannten Elastizitätsgesetz [79] der Klammerausdruck in Gleichung (3.27) als Deviator der elastischen Dehnung

$$\mathbf{e}^{el} = \mathbf{e} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (3.30)$$

interpretiert werden. Nach den Gleichungen (2.58) und (3.26) ergeben sich dann die inelastischen Dehnungen als

$$\epsilon^{in} = \mathbf{e}^{in} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i. \quad (3.31)$$

Diese Beziehung wird später zur Programmierung der Änderung der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  während eines Zeitinkrements entsprechend Gleichung (2.59) verwendet.

Zur Berechnung der Änderung des Spannungsdeviators  $\Delta \mathbf{s}$  wird nach Gleichung (3.27) die Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta \mathbf{e}_i$  während eines Zeitinkrements benötigt. Im Anhang C wird unter Verwendung der Definition (3.29) für die Änderung der Prony-Dehnungen nach [98] folgender Ausdruck hergeleitet:

$$\Delta \mathbf{e}_i = \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \Delta \mathbf{e} + (1 - e^{-\Delta \tau / \tau_i}) (\mathbf{e}(t^k) - \mathbf{e}_i(t^k)). \quad (3.32)$$

Die Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta \mathbf{e}_i$  ist damit auf die Änderung des Dehnungsdeviators  $\Delta \mathbf{e}$  und die Änderung der effektiven Zeit  $\Delta \tau$  zurückgeführt. Bei bekanntem effektiven Zeitinkrement  $\Delta \tau$  ist nach Gleichung (3.27) die Änderung des Spannungsdeviators  $\Delta \mathbf{s}$  durch

$$\Delta \mathbf{s} = 2G_0 \left( \Delta \mathbf{e} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta \mathbf{e}_i \right) \quad (3.33)$$

gegeben. Entsprechend Gleichung (3.21) ist damit die Spannungsänderung  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  bei vorgegebener Dehnungsänderung  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$  durch die Gleichungen (3.33) und (3.23) gegeben.

### Berechnung des effektiven Zeitinkrements $\Delta \tau$

Zur Berechnung der Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta \mathbf{e}_i$  nach Gleichung (3.32) wird das effektive Zeitinkrement  $\Delta \tau$  benötigt. Für konstante Temperatur ( $\Delta T = 0$ ) während des Zeitinkrements  $\Delta t$  kann das effektive Zeitinkrement  $\Delta \tau$  direkt aus Definition (3.2) berechnet werden. Daraus folgt die Änderung der effektiven Zeit

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{a_T(T(t^k))} \quad \text{für } \Delta T = 0. \quad (3.34)$$

Findet im Zeitinkrement  $\Delta t$  eine Temperaturänderung ( $\Delta T \neq 0$ ) statt, kann die WLF-Funktion  $h(T)$  in Definition (3.15) im Zeitinkrement  $\Delta t$  durch eine lineare Funktion genähert werden [98]. Nach Integration entsprechend Gleichung (3.2) ergibt sich daraus das effektive Zeitinkrement

$$\Delta \tau = \frac{a_T(T(t^{k+1}))^{-1} - a_T(T(t^k))^{-1}}{h(T(t^{k+1})) - h(T(t^k))} \Delta t \quad \text{für } \Delta T \neq 0. \quad (3.35)$$

Mit dem effektiven Zeitinkrement  $\Delta\tau$  ist die Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  in Abhängigkeit der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  bekannt. Daraus kann nun die viskoelastische Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  berechnet werden.

### Berechnung der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}^V$

Durch partielle Ableitung der Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  folgt nach Definition (3.19) die gesuchte Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}^V = K_0 \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} + 2G_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta\tau} (e^{-\Delta\tau/\tau_i} - 1) \right] \right\} \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right) \quad (3.36)$$

für schädigungsfreie Viskoelastizität. Die Herleitung der viskoelastischen Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  ist ebenfalls in Anhang C aufgeführt.

Mit Berechnung der Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ , des effektiven Zeitinkrements  $\Delta\tau$  und der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  ist das viskoelastische Materialmodell vollständig diskretisiert und kann als benutzerdefiniertes Materialmodell in das FE-Programm ABAQUS implementiert werden. Um die korrekte Programmierung des Materialmodells zu überprüfen, wird das benutzerdefinierte Materialmodell mit dem viskoelastischen Materialmodell, das von ABAQUS zur Verfügung gestellt wird, verglichen.

### 3.4.2 Programmierung und Verifikation

Zur Programmierung von benutzerdefinierten Materialmodellen stellt das FE-Programm ABAQUS die Subroutine UMAT zur Verfügung. Diese Subroutine ist eine frei programmierbare Fortran-Routine, die an jedem Integrationspunkt von ABAQUS aufgerufen wird. Über definierte Schnittstellen lassen sich Variablen zwischen FE-Programm und Subroutine austauschen.

Abbildung 3.6 erläutert die Funktionsweise der Subroutine UMAT. Als Eingabe werden die Zeit  $t$  mit dem Zeitinkrement  $\Delta t$ , die Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  mit dem dazugehörigen Dehnungsincrement  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  und die Temperatur  $T(t)$  mit der Temperaturänderung  $\Delta T$  übergeben. Weiter wird die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  definiert. Die Subroutine UMAT gestattet es, so genannte Zustandsvariablen zu definieren, die neben den thermo-mechanischen Größen den Zustand des Materials beschreiben. Diese Zustandsvariablen zum

| Eingabe   | UMAT  | Ausgabe  |
|---|---|--|
| Zeit $t, \Delta t$<br>Dehnung $\varepsilon(t), \Delta\varepsilon$<br>Temperatur $T(t), \Delta T$<br>Spannung $\sigma(t)$<br>Zustandsvariablen $e_i(t)$<br>Materialparameter | Änderung der Spannung $\Delta\sigma$<br>Änderung der Zustandsvariablen $\Delta e_i$<br>Jacobi-Matrix $\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}$ | Spannung $\sigma(t + \Delta t)$<br>Zustandsvariablen $e_i(t + \Delta t)$ |

Abbildung 3.6: Funktionsweise der Subroutine UMAT zur Erstellung eines benutzerdefinierten Materialmodells

Zeitpunkt  $t$  müssen ebenfalls an die Subroutine übergeben werden. Zur Programmierung schädigungsfreier Viskoelastizität werden die Prony-Dehnungen  $\mathbf{e}_i(t)$  als Zustandsvariablen definiert. Zusätzlich werden die Materialparameter des Modells an die Subroutine übergeben.

Mit diesen Eingaben kann nun in der Subroutine die Spannungsänderung  $\Delta\sigma$  nach den Gleichungen (3.23), (3.33) und (3.21) berechnet werden. Die Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta\mathbf{e}_i$  wird über Gleichung (3.32) programmiert. Für eine stabile Konvergenz des Newton-Raphson-Iterationsverfahrens wird in der Subroutine UMAT zusätzlich die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  entsprechend Gleichung (3.36) ermittelt (vgl. Abb. 3.6). Nach Berechnung der Spannungsänderung  $\Delta\sigma$  und der Änderung der Zustandsvariablen  $\Delta\mathbf{e}_i$  können die Spannung  $\sigma(t + \Delta t)$  und die Zustandsvariablen  $\mathbf{e}_i(t + \Delta t)$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  angegeben werden. Die Spannung und die Zustandsvariablen am Ende des Zeitinkrements werden als Ausgabe an das FE-Programm zurückgegeben.

Damit ist es möglich, unter Verwendung von UMAT schädigungsfreie Viskoelastizität als benutzerdefiniertes Materialmodell in das FE-Programm ABAQUS zu implementieren [99]. Um die korrekte Programmierung dieses Materialmodells zu überprüfen, wird das in der Subroutine UMAT programmierte Materialmodell mit dem viskoelastischen Materialmodell verglichen, das von ABAQUS standardmäßig über die Routine VISCO zur Verfügung gestellt wird.

Zunächst wird ein einachsiges Relaxationsexperiment bei verschiedenen Temperaturen simuliert. Während der Zugphase  $\Delta t_1 = 3\text{ s}$  wird auf den Zugstab eine Dehnung von  $\Delta\varepsilon = 0,25\%$  aufgebracht. Diese Dehnung bleibt dann während einer Haltephase von  $\Delta t_2 = 5000\text{ s}$  konstant. Das Relaxationsexperiment wurde unter Verwendung des benutzerdefinierten Materialmodells (UMAT) und der Standard-ABAQUS-Routine VISCO simuliert. Abbildung

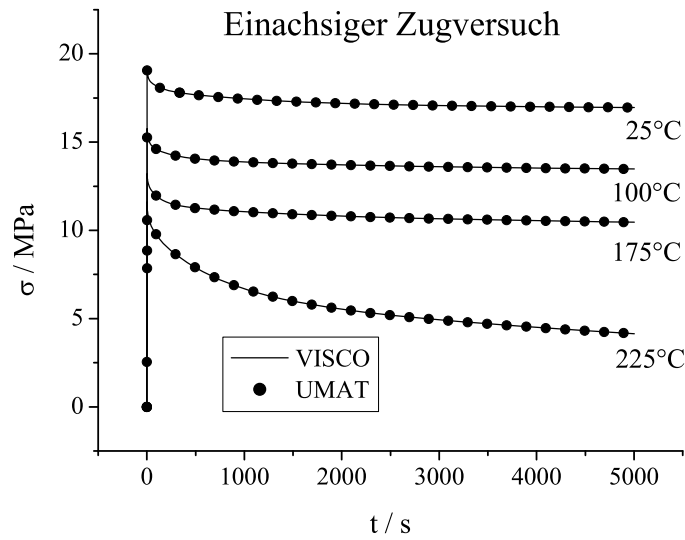


Abbildung 3.7: Vergleich der Subroutine UMAT und der Standard-Routine VISCO für einen einachsigen Zugversuch

3.7 zeigt bei verschiedenen Temperaturen die Spannung  $\sigma(t)$  in Zugrichtung in Abhängigkeit der Zeit  $t$ . Die Simulation mit der Standard-Routine VISCO ist als durchgezogene Linie zu sehen, während die Simulation mit der Subroutine UMAT durch gefüllte Kreise  $\bullet$  dargestellt ist. Die beiden Simulationen stimmen mit einem relativen Fehler von

$$\delta\sigma_{rel} = \left| \frac{\sigma_{umat} - \sigma_{visco}}{\sigma_{visco}} \right| < 10^{-6} \quad (3.37)$$

sehr gut überein.

Um die Übereinstimmung des in UMAT definierten Materialmodells mit der Standard-Routine VISCO auch für andere Spannungskomponenten zu überprüfen, wird zusätzlich ein Schubversuch simuliert. In einem Zeitraum von  $\Delta t_1 = 3$  s wird auf einen Würfel eine Scherung von  $\Delta\epsilon_{12} = 0,5\%$  aufgebracht, die dann über den Zeitraum  $\Delta t_2 = 600$  s konstant bleibt. Der Schubversuch bei der Temperatur  $T = 100^\circ\text{C}$  ist in Abbildung 3.8 schematisch dargestellt. In dieser Abbildung werden die aus einer Simulation mit der Subroutine UMAT und der Standard-Routine VISCO resultierenden Spannungskomponenten in Abhängigkeit der Zeit  $t$  gezeigt. Die Simulation mit der Standard-Routine VISCO ist wieder als durchgezogene Linie zu sehen, während die Simulation mit der Subroutine UMAT durch gefüllte Kreise  $\bullet$  dargestellt ist.

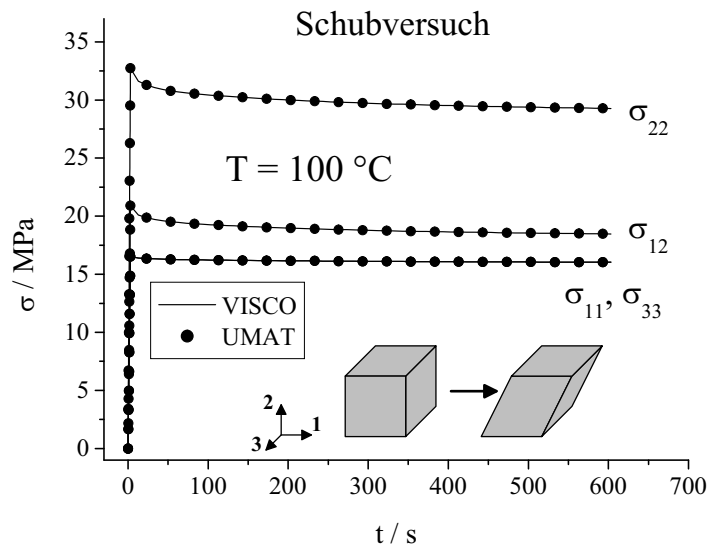


Abbildung 3.8: Vergleich der Subroutine UMAT und der Standard-Routine VISCO für einen Schubversuch

Die beiden Simulationen stimmen sehr gut überein, und es gilt die Abschätzung für den relativen Fehler aus Ungleichung (3.37).

Die Simulation des einachsigen Zugversuchs bei verschiedenen Temperaturen und des Schubversuchs zeigen, dass schädigungsfreie Viskoelastizität durch das in der Subroutine UMAT programmierte Materialmodell mit höchster Genauigkeit wiedergegeben wird. Das Temperaturverhalten und der mehrachsige Spannungszustand werden im Vergleich zur Standard-Routine VISCO mit einem relativen Fehler  $\delta\sigma_{rel} < 10^{-6}$  abgebildet. Damit sind die mit UMAT und VISCO programmierten Materialmodelle numerisch äquivalent. Das in UMAT programmierte Materialmodell beschreibt damit schädigungsfreie Viskoelastizität. Um ein Modell für Viskoelastizität mit Schädigung zu erhalten, kann dieses benutzerdefinierte Materialmodell nun mit einem Schädigungsmaß modifiziert werden.



# Kapitel 4

## Viskoelastisches Schädigungsmodell

Um die Schädigung von viskoelastischem Material unter thermo-mechanischer Belastung beschreiben zu können, wird in dieser Arbeit ein viskoelastisches Schädigungsmodell vorgeschlagen und untersucht. Durch Kopplung mit einem Schädigungsmaß lassen sich aus dem vorgestellten viskoelastischen Materialmodell die Materialgleichungen dieses Schädigungsmodells ableiten. In diesem Kapitel wird das viskoelastische Schädigungsmodell entwickelt und für den betrachteten Kunststoff experimentell charakterisiert.

### 4.1 Materialgleichungen des viskoelastischen Schädigungsmodells

Das Schädigungsverhalten des betrachteten Kunststoffs wird durch ein viskoelastisches Schädigungsmodell beschrieben. Die Materialgleichungen dieses Schädigungsmodells lassen sich aus dem viskoelastischen Materialmodell durch Modifikation mit einem Schädigungsmaß ableiten. Dazu wird das Dehnungsäquivalenz-Prinzip aus Abschnitt 2.5 auf das viskoelastische Faltungsintegral (3.1) angewendet. Im effektiven Raum mit quasi-schädigungsfreiem Material gilt dieses Faltungsintegral für die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  und Dehnung  $\tilde{\epsilon}$ :

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(\tau - \tau') \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} dt'. \quad (4.1)$$

Aus dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip (2.13) folgt das Faltungsintegral

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(\tau - \tau') \cdot \dot{\epsilon} dt' \quad (4.2)$$

für Viskoelastizität mit Schädigung, wobei die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  für isotrope Schädigung durch Gleichung (2.10) definiert ist.

Das Schädigungsmaß  $D$  geht über die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  in das Schädigungsmodell ein. Die zeitliche Entwicklung der Schädigung wird durch das Schädigungsgesetz (2.62) beschrieben:

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{p}. \quad (4.3)$$

Dabei ist die Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\dot{p}$  durch die Gleichungen (2.59) und (3.31) gegeben. Aufgrund thermo-mechanischer Belastungen akkumuliert sich Schädigung im Material entsprechend dem Schädigungsgesetz (4.3), bis nach dem Versagenskriterium (2.4) die kritische Schädigung  $D_C$  erreicht ist. Zusammen mit dem viskoelastischen Materialmodell aus Kapitel 3 ist damit das viskoelastische Schädigungsmodell vollständig beschrieben.

## 4.2 Experimentelle Charakterisierung des Schädigungsmodells

Um das Schädigungsverhalten des betrachteten Kunststoffes unter zyklischer Wechselbelastung zu charakterisieren, werden dehnungsgesteuerte Zyklusversuche durchgeführt. Zunächst ist zu klären, ob das in Abschnitt 2.7.2 vorgestellte Verfahren zur Messung der Schädigung über die effektive Hystereseffläche auf viskoelastische Materialien übertragen werden kann.

### 4.2.1 Stabiler Zyklus für viskoelastisches Material

Die effektive Hystereseffläche kann nur dann ein geeignetes Schädigungsmaß darstellen, wenn sich für schädigungsfreies Material ein zeitlich konstanter Wert einstellt. Die Spannungs-Dehnungskurve befindet sich dann in einem *stabilen* Zyklus.

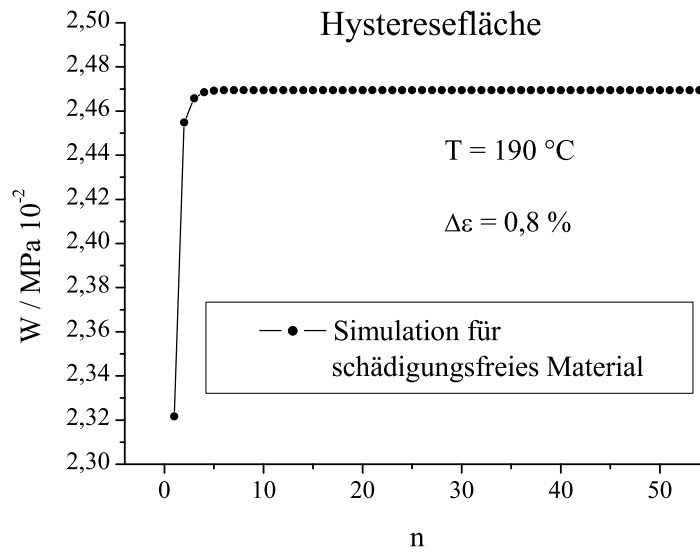


Abbildung 4.1: Simulation der Hystereseffläche  $W$  in Abhängigkeit der Zyklen  $n$  für schädigungsfreies Material in einem dehnungsgesteuerten Zyklusversuch. Nach wenigen Zyklen stellt sich für viskoelastisches Material eine konstante Hystereseffläche ein.

Zur Untersuchung, ob sich für die Hystereseffläche bei viskoelastischem Material ein stabiler Wert einstellt, wird das experimentell charakterisierte viskoelastische Materialmodell aus Abschnitt 3.2 zur Simulation eines dehnungsgesteuerten Zyklusversuchs verwendet. Abbildung 4.1 zeigt die Hystereseffläche  $W$  für schädigungsfreies Material in einem dehnungsgesteuerten Zyklusversuch in Abhängigkeit der Zykuszahl  $n$ . Die Hystereseffläche wurde für die Dehnungsamplitude  $\Delta\varepsilon = 0,8 \text{ } \%$  und die Temperatur  $T = 190 \text{ } ^\circ\text{C}$  berechnet. Nach einem starken Anstieg erreicht die Hystereseffläche nach etwa 10 Zyklen einen konstanten Wert. Das schädigungsfreie viskoelastische Material befindet sich damit bereits nach wenigen Zyklen in einem stabilen Zyklus. Demnach erfüllt die Hystereseffläche die Voraussetzung, dass sich für schädigungsfreies Material ein konstanter Wert einstellt. Die effektive Hystereseffläche  $\tilde{W}$  nach Gleichung (2.45) kann somit als Schädigungsmaß für viskoelastisches Material verwendet werden.

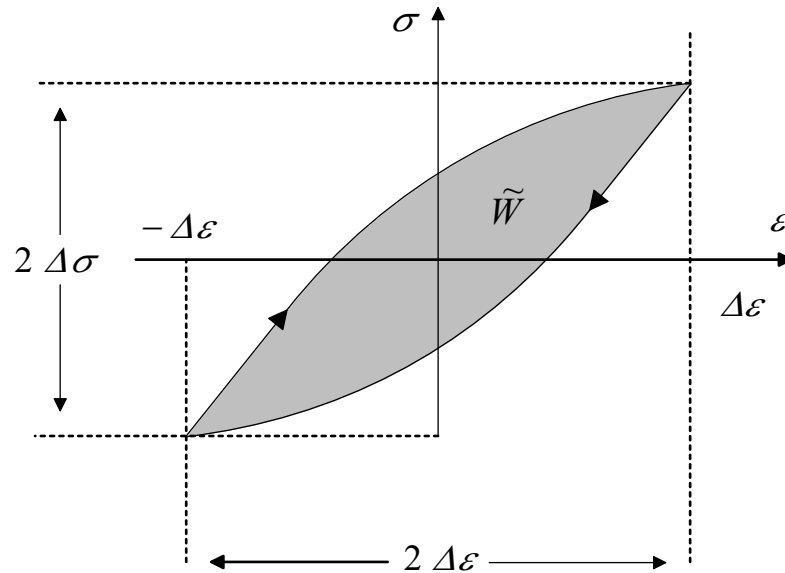


Abbildung 4.2: Dehnungsgesteuerter Zyklusversuch für viskoelastisches Material

#### 4.2.2 Hystereseffläche und Schädigungsmaß

Zur Bestimmung der effektiven Hystereseffläche  $\tilde{W}$  werden für den betrachteten Kunststoff dehnungsgesteuerte Zyklusversuche durchgeführt. Der Zugstab wird dabei unter einachsiger Zug-Druck-Belastung mit konstanter Dehnungsrate  $\dot{\epsilon} = const.$  abwechselnd auf die Dehnung  $\pm\Delta\epsilon$  gezogen oder gestaucht. Abbildung 4.2 zeigt die daraus resultierende Spannungs-Dehnungskurve für viskoelastisches Material. Die effektive Hystereseffläche  $\tilde{W}$  ist die von der Spannungs-Dehnungskurve eingeschlossene Fläche, die sich mathematisch durch Integration der Spannungs-Dehnungskurve berechnen lässt.

Der betrachtete Kunststoff zeigt bei Raumtemperatur annähernd elastisches Materialverhalten mit geringen inelastischen Dehnungen. Diese bei Raumtemperatur geringen viskosen Effekte führen zu kleinen Hysteresefflächen. Bei niedrigen Temperaturen kann das Schädigungsverhalten des betrachteten Kunststoffs als spröde charakterisiert werden. Bei höheren Temperaturen nehmen die viskosen Effekte und damit die von der Spannungs-Dehnungskurve eingeschlossene Fläche zu. Unter zyklischer Wechselbelastung zeigt der betrachtete Kunststoff bei höherer Temperatur eine kontinuierlich zunehmende Schädigung. Deshalb wird das Schädigungsverhalten des viskoelastischen Materials bei erhöhter Temperatur charakterisiert.

Für den betrachteten Kunststoff wurden Zyklusversuche mit unterschied-

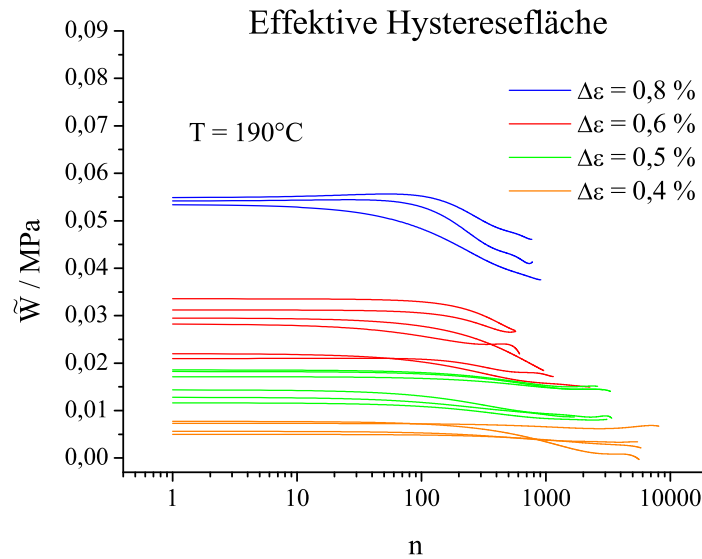


Abbildung 4.3: Experimentell bestimmte effektive Hysteresefflächen  $\tilde{W}$  in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$ . Die Hysteresefflächen wurden in einem dehnungsgesteuerten Zyklusversuch bei der Temperatur  $T = 190^\circ\text{C}$  für unterschiedliche Dehnungsamplituden  $\Delta\epsilon$  bestimmt.

lichen Dehnungsamplituden  $\Delta\epsilon$  bei der Temperatur  $T = 190^\circ\text{C}$  und der konstanten Dehnungsrate  $\dot{\epsilon} = 0,1\%/s$  durchgeführt. Die effektive Hystereseffläche  $\tilde{W}$  in Abhängigkeit der Zyklen  $n$  ist in Abbildung 4.3 auf einer logarithmischen Skala dargestellt. Zu Versuchsbeginn zeigt die Hystereseffläche einen stabilen Wert. Dieser Wert liefert die initiale Hystereseffläche  $W_0$  und charakterisiert den schädigungsfreien Zustand des Kunststoffes. Im weiteren Zeitverlauf ist eine Abnahme der Hystereseffläche  $\tilde{W}$  zu erkennen, die sich kurz vor Versagen des Kunststoffes stark beschleunigt. Bei gleicher Dehnungsamplitude sind die gemessenen Verläufe parallel verschoben. Diese Parallelverschiebung ist auf Schwankungen der Materialeigenschaften zurückzuführen. Der beschriebene Verlauf der Hystereseffläche ist in Abbildung 4.3 für unterschiedliche Dehnungsamplituden  $\Delta\epsilon$  zu beobachten. Mit abnehmender Dehnungsamplitude nehmen auch die absoluten Werte der Hystereseffläche ab.

Aus dem experimentell ermittelten Zeitverlauf der Hystereseffläche lässt sich der Schädigungsverlauf während des Zyklusversuchs ableiten. Durch Skalierung mit der initialen Hystereseffläche  $W_0$  kann nach Gleichung (2.45) das

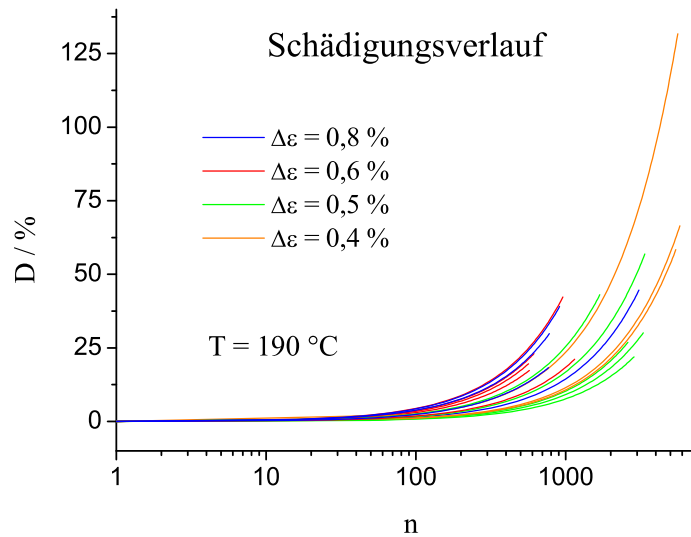


Abbildung 4.4: Schädigungsverlauf für dehnungsgesteuerten Zyklusversuch mit unterschiedlichen Dehnungsamplituden  $\Delta\varepsilon$ . Die Zyklusversuche wurden bei der Temperatur  $T = 190\text{ °C}$  durchgeführt.

Schädigungsmaß  $D$  berechnet werden. Durch lineare Approximation lässt sich daraus der Schädigungsverlauf im betrachteten Kunststoff ermitteln. Abbildung 4.4 zeigt den so ermittelten Schädigungsverlauf in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$ . Da sich die kritische Zykluszahl  $n_R$  für verschiedene Dehnungsamplituden stark unterscheidet, ist die Zykluszahl  $n$  logarithmisch aufgetragen. Die Schädigungsverläufe für verschiedene Zugstäbe weisen starke Schwankungen auf. In den Schädigungsverläufen lässt sich aufgrund der hohen Schwankungen zwischen den einzelnen Zugstäben keine direkte Abhängigkeit von der Dehnungsamplitude  $\Delta\varepsilon$  erkennen.

### 4.2.3 Bestimmung der Energiefestigkeit

Zur schädigungsmechanischen Charakterisierung des betrachteten Kunststoffs muss aus den gemessenen Schädigungskurven die Energiefestigkeit  $S$  bestimmt werden, die im Schädigungsgesetz (2.62) als Materialparameter eingeführt wurde. Dazu ist zunächst durch Integration des Schädigungsgesetzes

(2.62) die Schädigungszunahme pro Zyklus zu berechnen:

$$\frac{dD}{dn} = 4 \int_0^{\Delta t} \dot{D} dt = 4 \int_0^{\Delta t} \frac{Y}{S} \dot{p} dt. \quad (4.4)$$

Ein Zyklus wurde hier in vier Abschnitte der Zeitspanne  $\Delta t$  zerlegt. Im ersten Abschnitt wird in das Material die Dehnung  $\Delta\epsilon$  eingebracht. Anschließend wird im zweiten Abschnitt das Material entlastet, bis die Dehnung  $\epsilon = 0$  erreicht ist. Im dritten Abschnitt wird das Material dann auf die Dehnung  $-\Delta\epsilon$  zusammengestaucht und im vierten wieder auf die Dehnung  $\epsilon = 0$  entlastet. Aus der Aufteilung eines Zyklus in vier Zeitabschnitte  $\Delta t$  resultiert der Faktor 4 in Gleichung (4.4).

Der Zeitverlauf der Energiefreisetzungsrates  $Y$  lässt sich nach Gleichung (2.52) durch

$$Y(t) = \frac{1}{2} \epsilon^{el}(t) \tilde{\sigma}(t) \quad (4.5)$$

ausdrücken. Für einen dehnungsgesteuerten Zyklusversuch mit konstanter Dehnungsrate  $\dot{\epsilon}$  lassen sich die elastische Dehnung  $\epsilon^{el}(t)$  und die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}(t)$  durch

$$\epsilon^{el}(t) = \frac{\Delta\epsilon^{el}}{\Delta t} t \quad (4.6)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} t \quad (4.7)$$

approximieren. Die Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\dot{p}$  wird durch

$$\dot{p} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (4.8)$$

genähert. Einsetzen der Gleichungen (4.6) und (4.7) in den Ausdruck (4.5) liefert eine quadratische Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates  $Y(t)$  von der Zeit  $t$ :

$$Y(t) = \frac{1}{2} \frac{\Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t^2} t^2. \quad (4.9)$$

Verwendung der Gleichungen (4.9) und (4.8) im Ausdruck (4.4) und anschließende Integration ergeben für die Schädigungszunahme pro Zyklus den Ausdruck

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2}{3S} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p. \quad (4.10)$$

Durch experimentelle Bestimmung der Schädigungszunahme lässt sich aus Gleichung (4.10) die Energiefestigkeit

$$S = \frac{2 \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p}{3 \left(\frac{dD}{dn}\right)_{exp}} \quad (4.11)$$

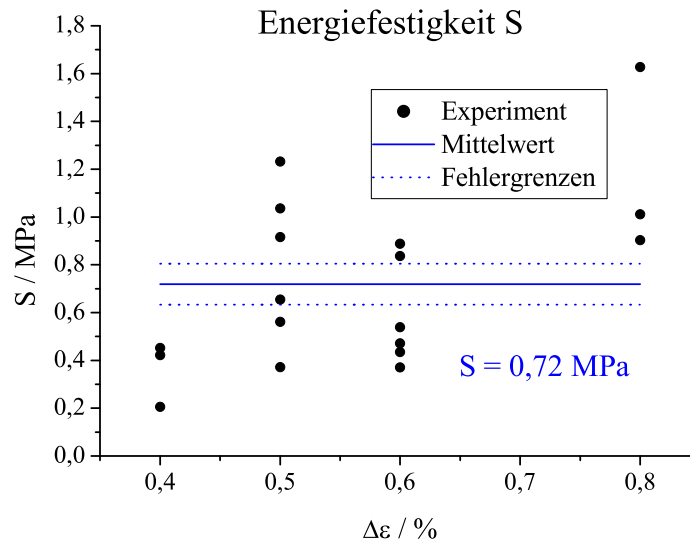


Abbildung 4.5: Experimentelle Bestimmung der Energiefestigkeit. Die Energiefestigkeit  $S$  (blaue Linie) wird durch Mittelwertbildung aus den experimentell ermittelten Werten ( $\bullet$ ) berechnet. Durch Mittelwertbildung kann der Fehler der Energiefestigkeit  $S$  stark reduziert werden. Die Fehlergrenzen sind als blau gepunktete Linien eingezeichnet.

bestimmen. Die Energiefestigkeit wird für jeden durchgeführten Versuch einzeln ermittelt und daraus durch Mittelung die Energiefestigkeit  $S$  des Materials berechnet.

In Abbildung 4.5 sind die experimentell ermittelten Werte der Energiefestigkeit  $S$  für jeden Zugstab als gefüllte Kreis  $\bullet$  dargestellt. Aufgrund von Schwankungen in den Materialeigenschaften zeigt das Schädigungsverhalten der einzelnen Zugstäbe eine große Streuung (vgl. Abb. 4.4). Dies führt zu einer großen Streuung der gemessenen Energiefestigkeiten. Durch Mittelwertbildung lässt sich allerdings der Fehler bei Bestimmung der Energiefestigkeit stark reduzieren. Die gemittelte Energiefestigkeit

$$S = (0,72 \pm 0,09) \text{ MPa} \quad (4.12)$$

ist als blaue Schwerpunktsgerade in Abbildung 4.5 eingetragen. Die Fehlergrenzen der Energiefestigkeit sind als blau gepunktete Linien zu sehen.



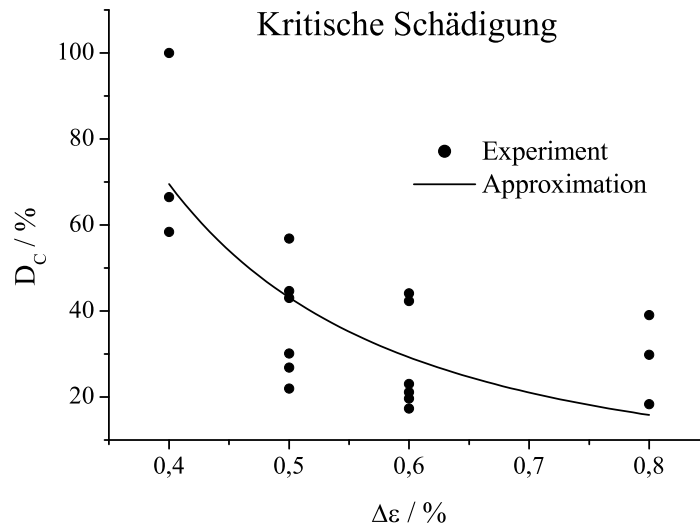


Abbildung 4.6: Kritische Schädigung  $D_C$  in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$

#### 4.2.4 Bestimmung der kritischen Schädigung

Für die schädigungsmechanische Charakterisierung muss als weiterer Materialparameter die kritische Schädigung bestimmt werden. Die kritische Schädigung  $D_C$  ergibt sich aus der Schädigung bei Versagen des Materials. Aus den Schädigungsverläufen in Abbildung 4.4 lässt sich für den betrachteten Kunststoff die kritische Schädigung  $D_C$  in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ermitteln. In Abbildung 4.6 ist die kritische Schädigung in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude dargestellt. Die experimentell bestimmten Werte für die kritische Schädigung sind als gefüllte Kreise  $\bullet$  zu sehen. Die kritische Schädigung  $D_C$  nimmt mit zunehmender Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ab. Die Abhängigkeit der kritischen Schädigung von der Dehnungsamplitude soll im Folgenden untersucht werden.

Über die Energie, die bis zum Versagen im Material freigesetzt wird, lässt sich ein Zusammenhang zwischen kritischer Schädigung  $D_C$  und Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  herstellen. Die bis zum Versagen freigesetzte Energie  $J_{krit}$  ergibt sich nach Definition (2.48) durch Integration der Energiefreisetzungsrates  $Y$  über die Schädigung  $D$ :

$$J_{krit} = \int_0^{D_C} Y dD = const. \quad (4.13)$$

Die kritische freigesetzte Energie  $J_{krit}$  kann für ein Material als konstant angenommen werden [28]. Unter dieser Annahme lässt sich die Abhängigkeit der kritischen Schädigung  $D_C$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ableiten.

Dazu wird im Ausdruck (4.13) die Integration über die Schädigung  $D$  durch eine Zeitintegration ersetzt:

$$J_{krit} = \int_0^{t_C} Y(t) \dot{D} dt. \quad (4.14)$$

Hier wird bis zur Zeit  $t_C$  integriert, die das Versagen des Materials angibt. Die Schädigungsrate im Integral (4.14) kann durch das Schädigungsgesetz (4.3) ausgedrückt werden. Die kritische freigesetzte Energie hat dann die Form

$$J_{krit} = \frac{1}{S} \int_0^{t_C} Y(t)^2 \dot{p} dt. \quad (4.15)$$

Die Zeitintegration bis zum Versagen lässt sich in eine Integration über einzelne Zyklen zerlegen:

$$J_{krit} = \frac{4 n_R}{S} \int_0^{\Delta t} Y(t)^2 \dot{p} dt. \quad (4.16)$$

Ein Zyklus wurde hier in vier Abschnitte der Zeitspanne  $\Delta t$  unterteilt, wie bereits im vorangehenden Abschnitt ausgeführt wurde. Aus dieser Zerlegung in vier Zeitabschnitte  $\Delta t$  resultiert der Faktor 4 in Gleichung (4.16). Das Versagen des Material ist durch die kritische Zykluszahl  $n_R$  festgelegt. Um über die gesamte Schädigungsentwicklung bis zum Versagen zu integrieren, muss deshalb in Gleichung (4.16) noch mit der kritischen Zykluszahl  $n_R$  multipliziert werden. Verwendung der Gleichungen (4.8) und (4.9) und anschließende Zeitintegration liefern dann den Ausdruck

$$J_{krit} = \frac{1}{5S} (\Delta\epsilon^{el})^2 (\Delta\tilde{\sigma})^2 \Delta p n_R. \quad (4.17)$$

Nach Gleichung (4.10), die die Zunahme der Schädigung pro Zyklus angibt, kann die kritische Schädigung  $D_C$  durch

$$D_C = \frac{2}{3S} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p n_R \quad (4.18)$$

ausgedrückt werden. Verwenden der kritischen Schädigung (4.18) in Gleichung (4.17) führt auf die Beziehung

$$J_{krit} = \frac{3}{10} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} D_C. \quad (4.19)$$

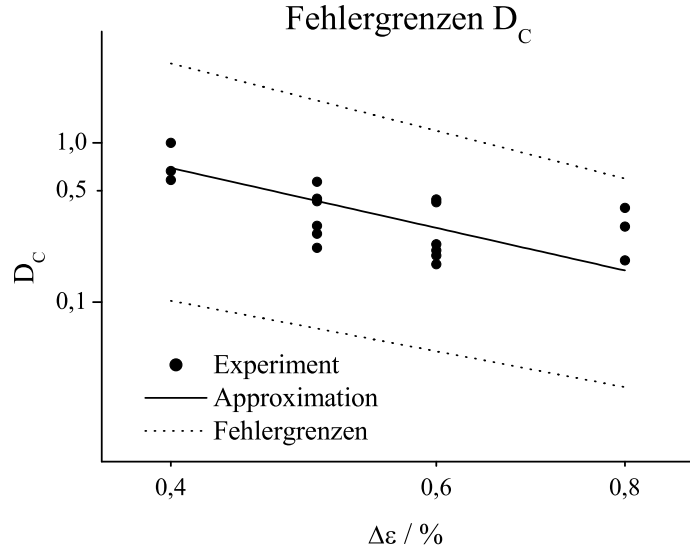


Abbildung 4.7: Fehlergrenzen für die Approximation der kritischen Schädigung. Die kritische Schädigung  $D_C$  ist auf einer doppelt logarithmischen Skala in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  aufgetragen.

Für einen Zyklusversuch mit konstanter Dehnungsrate und vergleichbaren effektiven Belastungszeiten  $\Delta\tau$  verhält sich zudem die elastische Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  und die effektive Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  annähernd proportional zur Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ :

$$\Delta\epsilon \sim \Delta\tilde{\sigma} \sim \Delta\epsilon^{el}. \quad (4.20)$$

Die Proportionalität zwischen der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  und der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  ergibt sich bei konstanter Dehnungsrate  $\dot{\epsilon}$  aus dem viskoelastischen Faltungsintegral (4.2), indem die konstante Dehnungsrate  $\dot{\epsilon}$  vor das Integral gezogen wird. Die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  ist nach dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip mit dem Spannungsverhalten des schädigungsfreien Materials identisch. Die Proportionalität zwischen der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  und der elastischen Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  folgt deshalb aus den Gleichungen (3.22) und (3.27) für viskoelastisches Material zusammen mit den Identifikationen (3.24) und (3.30) für die elastische Dehnung.

Verwendung der Proportionalität (4.20) im Ausdruck (4.19) führt dann zur Aussage

$$J_{krit} \sim D_C \Delta\epsilon^2. \quad (4.21)$$

Unter der bereits erwähnten Annahme, dass die kritische freigesetzte Energie  $J_{krit}$  für ein Material konstant ist, ergibt sich daraus eine indirekt quadratische Abhängigkeit der kritischen Schädigung  $D_C$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ :

$$D_C = \frac{\alpha}{\Delta\epsilon^2}. \quad (4.22)$$

$\alpha$  wurde hier als Proportionalitätskonstante eingeführt. In Verallgemeinerung dieser Beziehung kann die kritische Schädigung  $D_C$  durch die Funktion

$$D_C = \frac{\alpha}{\Delta\epsilon^m} \quad (4.23)$$

mit einem zusätzlichen Parameter  $m$  genähert werden. Um die in Gleichung (4.22) behauptete Abhängigkeit der kritischen Schädigung zu überprüfen, werden die experimentell ermittelten Werte für die kritische Schädigung mit der Funktion (4.23) approximiert und die Funktionsparameter  $\alpha$  und  $m$  berechnet. Die approximierte Kurve ist in Abbildung 4.6 als durchgezogene Linie zu sehen. Aus der Approximation folgen die Parameter

$$\begin{aligned} \alpha &= (5,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \\ m &= 2,1 \pm 0,3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Durch die Approximation ergibt sich ein Exponent  $m \approx 2$ . Damit bestätigt sich der abgeleitete funktionale Zusammenhang für die kritische Schädigung, der in Gleichung (4.22) behauptet wurde.

Die Fehlergrenzen der Approximation sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Hier ist die kritische Schädigung  $D_C$  auf einer doppelt logarithmischen Skala in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  aufgetragen. Die experimentell bestimmten Werte für die kritische Schädigung liegen innerhalb der ermittelten Fehlergrenzen. Die Approximation der kritischen Schädigung bestätigt damit die in Gleichung (4.23) angenommene funktionale Form. Die kritische Schädigung  $D_C$  ist dann durch die Parameter (4.24) charakterisiert.

Mit Bestimmung der Energiefestigkeit  $S$  und der Charakterisierung der kritischen Schädigung  $D_C$  durch die Funktion (4.23) mit den Parametern (4.24) ist der betrachtete Kunststoff bei der gewählten Temperatur  $T = 190^\circ\text{C}$  schädigungsmechanisch vollständig charakterisiert.

Nach der experimentellen Charakterisierung kann das viskoelastische Schädigungsmodell dazu verwendet werden, das Schädigungsverhalten des betrachteten Kunststoffs unter zyklischer mechanischer Belastung zu simulieren. Dazu muss das in Abschnitt 4.1 vorgeschlagene Schädigungsmodell in ein FE-Programm implementiert werden. Im folgenden Abschnitt wird die numerische Implementierung des viskoelastischen Schädigungsmodells vorgestellt.

### 4.3 Numerische Implementierung des viskoelastischen Schädigungsmodells

Zur numerischen Implementierung des viskoelastischen Schädigungsmodells muss die kontinuierliche Zeit in diskrete Zeitschritte unterteilt werden. Zur Diskretisierung des Schädigungsmodells ist dann für jedes Zeitinkrement die Spannungsänderung bei vorgegebener Dehnungsänderung zu berechnen. Daraus lässt sich die Jacobi-Matrix für das viskoelastische Schädigungsmodell ableiten. Anschließend kann das diskretisierte Schädigungsmodell in ein FE-Programm implementiert werden.

#### 4.3.1 Diskretisierung des Schädigungsmodells

Zur Diskretisierung des Schädigungsmodells wird die kontinuierliche Zeit in diskrete Zeitschritte  $t^k, k \in \mathbb{N}$  aufgeteilt. Die Spannungsänderung  $\Delta\sigma$  ergibt sich nach Gleichung (2.10) aus der Schädigungszunahme  $\Delta D$  und der effektiven Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\sigma}$  im Zeitinkrement  $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ . Die Spannung  $\sigma$  am Anfang und am Ende des Zeitinkrements  $\Delta t$  ist durch

$$\begin{aligned}\sigma(t^k) &= [1 - D(t^k)] \tilde{\sigma}(t^k) \\ \sigma(t^{k+1}) &= [1 - D(t^{k+1})] \tilde{\sigma}(t^{k+1})\end{aligned}\quad (4.25)$$

gegeben. Daraus kann die Spannungsänderung

$$\Delta\sigma := \sigma(t^{k+1}) - \sigma(t^k) \quad (4.26)$$

berechnet werden. Mit den Definitionen

$$\Delta\tilde{\sigma} := \tilde{\sigma}(t^{k+1}) - \tilde{\sigma}(t^k) \quad (4.27)$$

$$\Delta D := D(t^{k+1}) - D(t^k) \quad (4.28)$$

ergibt sich aus den Gleichungen (4.25) und (4.26) die Spannungsänderung

$$\Delta\sigma = [1 - D(t^k)] \Delta\tilde{\sigma} - \Delta D \Delta\tilde{\sigma} - \Delta D \tilde{\sigma}(t^k) \quad (4.29)$$

in Abhängigkeit der Schädigungszunahme  $\Delta D$  und der effektiven Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\sigma}$ .

Durch partielle Ableitung der Spannungsänderung  $\Delta\sigma$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta\epsilon$  kann die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}^D := \left( \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\epsilon} \right) \quad (4.30)$$

des viskoelastischen Schädigungsmodells als Tensor vierter Stufe definiert werden. Die effektive Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta\boldsymbol{\epsilon})$  und die Schädigungszunahme  $\Delta D(\Delta\boldsymbol{\epsilon})$  im Ausdruck (4.29) hängen von der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  ab. Partielle Ableitung der Spannungsänderung (4.29) nach dem Dehnungsinkrement  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  liefert dann den Ausdruck

$$\mathbf{J}^D = [1 - D(t^{k+1})] \frac{\partial \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t^{k+1}) \frac{\partial \Delta D}{\partial \Delta\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (4.31)$$

Die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t^{k+1})$  und die partielle Ableitung der Schädigungszunahme sind über ein Tensorprodukt verbunden und bilden so einen Tensor vierter Stufe.

Die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  beschreibt nach dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip (2.13) das Verhalten des schädigungsfreien Materials. Für die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  des viskoelastischen Schädigungsmodells gilt das Faltungsintegral (4.2). Ein Vergleich mit dem viskoelastischen Faltungsintegral (3.1) zeigt, dass sich die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  wie die Spannung des schädigungsfreien viskoelastischen Materialmodells verhält. Damit ist im Ausdruck (4.31) die partielle Ableitung der effektiven Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  mit der viskoelastischen Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  identisch, die bereits in Gleichung (3.36) berechnet wurde:

$$\frac{\partial \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \mathbf{J}^V. \quad (4.32)$$

Die partielle Ableitung der Schädigungszunahme  $\Delta D$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  in Gleichung (4.31) wird in dieser Arbeit als *Schädigungsmatrix*

$$\mathbf{M}^D := \frac{\partial \Delta D}{\partial \Delta\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.33)$$

eingeführt. Die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  stellt einen Tensor zweiter Stufe dar. Mit den Gleichungen (4.32) und (4.33) folgt für die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^D$  der Ausdruck

$$\mathbf{J}^D = [1 - D(t^{k+1})] \mathbf{J}^V - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t^{k+1}) \mathbf{M}^D. \quad (4.34)$$

In diesem Ausdruck sind wieder die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t^{k+1})$  und die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  über ein Tensorprodukt verbunden und bilden so einen Tensor vierter Stufe. Die viskoelastische Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  im Ausdruck (4.34) ist durch Gleichung (3.36) gegeben. Die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  wird im Folgenden berechnet.

**Berechnung der Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$** 

Die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  kann aus der Schädigungszunahme  $\Delta D$  im betrachteten Zeitinkrement abgeleitet werden. Die Schädigungszunahme  $\Delta D$  während des Zeitinkrements  $\Delta t$  ist nach dem Schädigungsgesetz (4.3) durch

$$\Delta D = \frac{Y(t^k)}{S} \Delta p \quad (4.35)$$

gegeben. Daraus folgt für die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  der Ausdruck

$$\mathbf{M}^D = \frac{Y(t^k)}{S} \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (4.36)$$

Nach Gleichung (2.59) gilt für die Änderung der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  der Ausdruck

$$\Delta p = \left( \frac{2}{3} \Delta \mathbf{e}^{in} \cdot \Delta \mathbf{e}^{in} \right)^{1/2}. \quad (4.37)$$

Die partielle Ableitung der Änderung der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$  wird in Anhang D berechnet. Es ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{2}{3 \Delta p} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \Delta \mathbf{e}^{in}. \quad (4.38)$$

Dabei ist die Änderung der inelastischen Dehnung  $\Delta \mathbf{e}^{in}$  nach Gleichung (3.31) durch

$$\Delta \mathbf{e}^{in} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta \mathbf{e}_i \quad (4.39)$$

gegeben. Die Änderung  $\Delta \mathbf{e}^{in}$  kann damit auf die Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta \mathbf{e}_i$  zurückgeführt werden, die durch Gleichung (3.32) beschrieben wird. Mit den Gleichungen (4.36) und (4.38) folgt für die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  der Ausdruck

$$\mathbf{M}^D = \frac{2 Y(t^k)}{3 S \Delta p} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \Delta \mathbf{e}^{in}. \quad (4.40)$$

Mit der Schädigungsmatrix (4.40) ist nach Gleichung (4.34) die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^D$  des viskoelastischen Schädigungsmodells vollständig bekannt und kann zur numerischen Implementierung des Schädigungsmodells verwendet werden.

### 4.3.2 Programmierung des Schädigungsmodells

Das viskoelastische Schädigungsmodell wird als benutzerdefiniertes Materialmodell in das FE-Programm ABAQUS implementiert. Dazu wird das in der Subroutine UMAT programmierte viskoelastische Materialmodell, das in Abschnitt 3.4.2 vorgestellt wurde, mit dem Schädigungsmaß  $D$  modifiziert.

Zunächst wird in der Fortran-Routine UMAT die effektive Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\sigma}$  berechnet. Da sich die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  entsprechend dem schädigungsfreien viskoelastischen Materialmodell verhält, können zur Berechnung der effektiven Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\sigma}$  die diskreten viskoelastischen Materialgleichungen aus Abschnitt 3.4.1 verwendet werden. Aus der effektiven Spannungsänderung  $\Delta\tilde{\sigma}$  wird dann nach Gleichung (4.27) die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}(t^{k+1})$  am Ende des Zeitinkrements ermittelt. Die Schädigungszunahme  $\Delta D$  ist durch das diskrete Schädigungsgesetz (4.35) gegeben. Nach Gleichung (4.28) ergibt sich daraus die Schädigung  $D(t^{k+1})$  zum Zeitpunkt  $t^{k+1}$ . Mit Gleichung (4.25) ist dann die Spannung  $\sigma(t^{k+1})$  am Ende des Zeitinkrements bekannt.

Mit diesem modifizierten Materialmodell kann nun das Schädigungsverhalten des betrachteten Kunststoffes simuliert werden. Zunächst sollen die Eigenschaften des viskoelastischen Schädigungsmodells qualitativ untersucht werden.

### 4.3.3 Eigenschaften des Schädigungsmodells

Anhand des viskoelastischen Schädigungsmodells lässt sich der Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten qualitativ untersuchen. Durch Simulation des Modells lassen sich wesentliche Eigenschaften des viskoelastischen Schädigungsmodells ableiten und bereits abgeleitete Beziehungen verifizieren.

Die hohe Energiefestigkeit  $S$  des betrachteten Kunststoffes führt im Verlauf eines Zyklusversuchs bei üblichen Belastungen zu einer relativ langsamen Zunahme der Schädigung. Ein signifikanter Einfluss der Schädigung ist deshalb erst nach vielen Zyklen festzustellen. Um den Einfluss der Schädigung innerhalb weniger Zyklen zu verdeutlichen, wird zur Untersuchung des viskoelastischen Schädigungsmodells eine geringere Energiefestigkeit verwendet. Die nachfolgenden Betrachtungen geben damit *nicht* das Schädigungsverhalten des charakterisierten Kunststoffes wieder, sondern dienen dazu, wesentliche Eigenschaften des viskoelastischen Schädigungsmodells darzustellen.



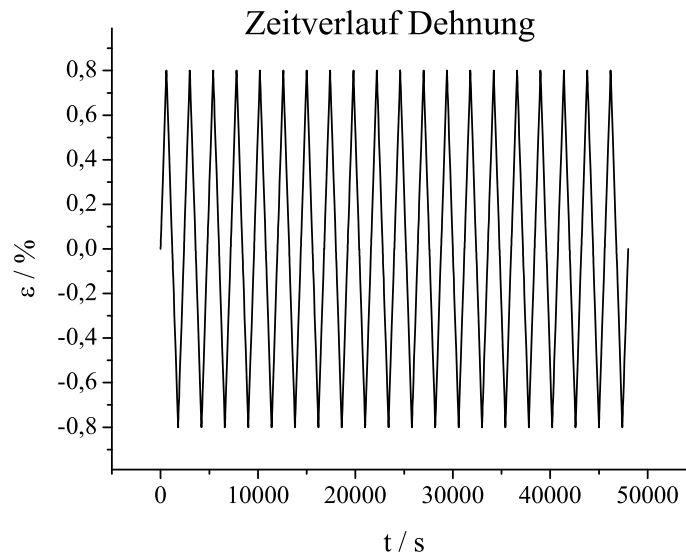


Abbildung 4.8: Dehnungsverlauf für dehnungsgesteuerten Zyklusversuch. Die Dehnungsamplitude beträgt  $\Delta\epsilon = 0,8\%$  und die Zeitspanne  $\Delta t = 600$  s.

Zur qualitativen Untersuchung des viskoelastischen Schädigungsmodells wird ein dehnungsgesteuerter Zyklusversuch simuliert und die Änderung des Materialverhaltens mit fortschreitender Schädigung beobachtet. Zur Verdeutlichung der Simulationsergebnisse wird eine theoretische Energiefestigkeit von  $S_{theo} = 0,01$  MPa angenommen. Die Dehnungsamplitude des Zyklusversuchs beträgt  $\Delta\epsilon = 0,8\%$ . Der Zyklusversuch wird für die Temperatur  $T = 225$  °C und die Zeitspanne  $\Delta t = 600$  s simuliert. Der Dehnungsverlauf für diesen Zyklusversuch ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Anhand dieser vorgegebenen Belastung wird mit der angenommenen Energiefestigkeit die Schädigung und die daraus resultierende Spannung im Material berechnet.

### Schädigungsakkumulation

Die simulierte Schädigung in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$  ist in Abbildung 4.9 zu sehen. Die Schädigung  $D$  nimmt dabei linear mit der Anzahl der Zyklen  $n$  zu. Analytisch kommt diese lineare Zunahme der Schädigung in der bereits vorgestellten Formel (4.10) zum Ausdruck, die für einen dehnungsgesteuerten Zyklusversuch die Zunahme der Schädigung in Abhängigkeit der Versuchsparameter beschreibt. Durch lineare Approximation der Schädigungskurve in

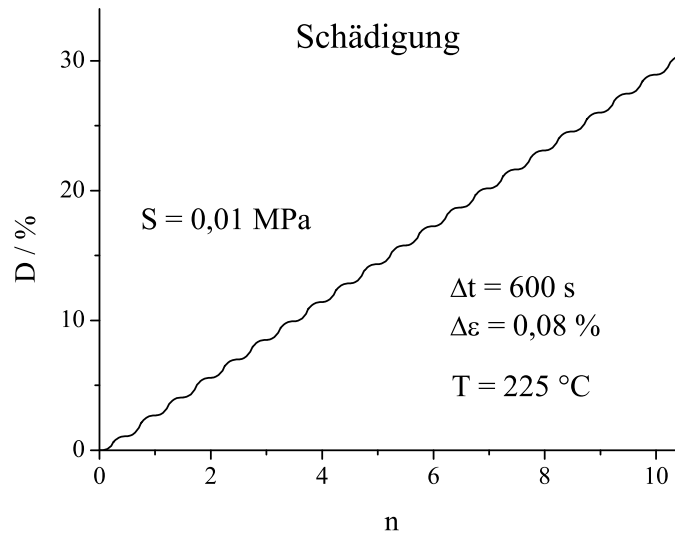


Abbildung 4.9: Schädigung  $D$  für dehnungsgesteuerten Zyklusversuch in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$

Abbildung 4.9 lässt sich diese Formel verifizieren. Die lineare Approximation der simulierten Schädigungskurve  $D(n)$  liefert die Steigung

$$\left( \frac{dD}{dn} \right)_{sim} = 2,921 \cdot 10^{-2}. \quad (4.41)$$

Für die durchgeführte Simulation lassen sich durch Mittelwertbildung die Versuchsparameter für die elastische Dehnungsamplitude  $\Delta \epsilon_{el}$ , die effektive Spannungsamplitude  $\Delta \tilde{\sigma}$  und die Amplitude der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  berechnen. Für diese Versuchsparameter ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{el} &= 3,925 \cdot 10^{-3} \\ \Delta \tilde{\sigma} &= 30,06 \text{ MPa} \\ \Delta p &= 4,049 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Mit diesen Werten kann über die Näherungsformel (4.10) die theoretische Steigung der Schädigungskurve

$$\left( \frac{dD}{dn} \right)_{theo} = 3,185 \cdot 10^{-2} \quad (4.43)$$

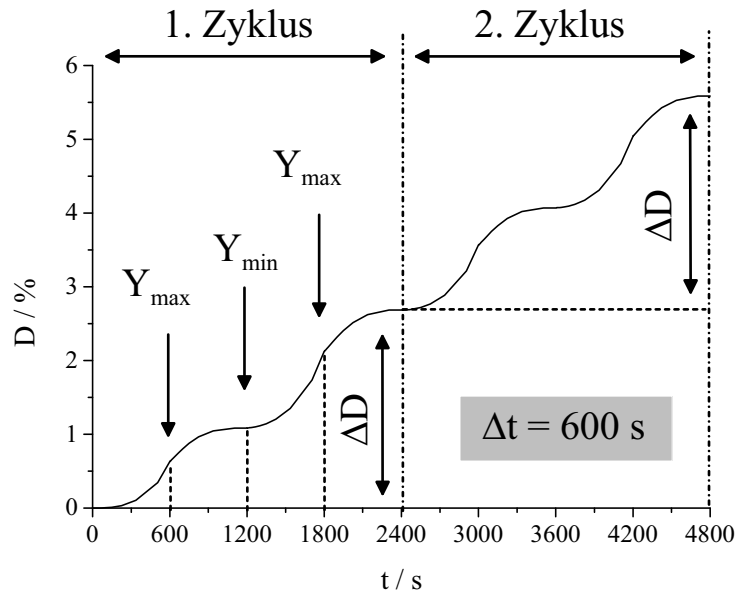


Abbildung 4.10: Schädigungsentwicklung innerhalb der ersten beiden Zyklen

berechnet werden. Die Steigung der simulierten Schädigungskurve und die aus der Näherungsformel (4.10) abgeleitete Steigung stimmen mit

$$\left(\frac{dD}{dn}\right)_{theo} \approx \left(\frac{dD}{dn}\right)_{sim} \quad (4.44)$$

in guter Näherung überein. Die Formel (4.10) kann damit als Näherung zur Berechnung der Schädigungszunahme pro Zyklus verwendet werden. Durch Simulation des viskoelastischen Schädigungsmodells konnte gezeigt werden, dass die Schädigung linear mit der Anzahl der Zyklen akkumuliert. Die theoretische Steigung, die in Formel (4.10) berechnet wurde, stimmt mit der simulierten Steigung der Schädigungskurve in guter Näherung überein.

Obwohl sich die Schädigungszunahme über mehrere Zyklen linear verhält, zeigt die Schädigungskurve innerhalb eines Zyklus nichtlineares Verhalten. In Abbildung 4.9 lässt sich dieses nichtlineare Verhalten der Schädigungskurve als Wellenlinie erkennen. Wie ist dieses nichtlineare Verhalten der Schädigung innerhalb eines Zyklus zu erklären?

Um das nichtlineare Verhalten der Schädigung innerhalb eines Zyklus zu untersuchen, ist in Abbildung 4.10 der Schädigungsverlauf für die ersten beiden Zyklen abgebildet. Hier ist deutlich das nichtlineare Verhalten der Schädigung innerhalb eines Zyklus zu erkennen. In einem Zyklus wechseln sich

Zug- und Druck-Phasen mit Entlastungsphasen ab. An den Umkehrpunkten erreicht die Dehnung ihren maximalen und minimalen Wert  $\pm\Delta\epsilon$ . Gleichzeitig besitzen die elastische Dehnung  $\epsilon_{el}$  und die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  an den Umkehrpunkten Maximal- und Minimalwerte. Nach Gleichung (2.52) nimmt dann die Energiefreisetzungsrates  $Y$  bei den Umkehrpunkten ihren maximalen  $Y_{max}$  Wert an.

Die Schädigungszunahme ist entsprechend Gleichung (2.62) proportional zur Energiefreisetzungsrates  $Y$  und zur Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\dot{p}$ . Bei einem dehnungsgesteuerten Zyklusversuch ist die Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung annähernd konstant. Damit verhält sich die Schädigungsrate proportional zur Energiefreisetzungsrates  $Y$ :

$$\dot{D} \sim Y. \quad (4.45)$$

Da die Energiefreisetzungsrates in den Umkehrpunkten maximal ist, ist demnach die Steigung der Schädigungskurve ebenfalls maximal. Im simulierten Zyklusversuch beträgt die Dauer einer Be- oder Entlastungsphase  $\Delta t = 600$  s. Die Umkehrpunkte sind also bei  $t = 600$  s und  $t = 1800$  s zu beobachten. In Abbildung 4.10 zeigt die Schädigungskurve zu diesen Zeitpunkten maximale Steigung.

Zu den Zeitpunkten der Nulldurchgänge der Dehnung ist die Energiefreisetzungsrates entsprechend Gleichung (2.52) annähernd gleich Null. Wegen der Proportionalität (4.45) verschwindet damit ebenso die Steigung der Schädigungskurve. Zu den Zeitpunkten  $t = 0$  s,  $1200$  s und  $2400$  s hat die Dehnung ihre Nulldurchgänge. In Abbildung 4.10 zeigt die Schädigungskurve zu diesen Zeiten eine verschwindende Steigung. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich das nichtlineare Verhalten der Schädigung innerhalb der einzelnen Zyklen. Nach einer Zeitintegration über einen Zyklus kann dieses nichtlineare Verhalten durch eine lineare Schädigungszunahme pro Zyklus genähert werden.

### Spannungsverlauf

Die für den beschriebenen Zyklusversuch simulierte makroskopische Spannung  $\sigma$  ist in Abbildung 4.11 in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$  dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Spannungsamplitude mit zunehmender Zykluszahl abnimmt. Die Abnahme der Spannung entspricht nach Gleichung (2.10) der fortschreitenden Schädigung des Materials mit wachsender Zykluszahl. Mit zunehmender Schädigung des Materials verringert sich die lasttragende Fläche. Dies führt zu einer Abnahme der makroskopischen Spannung.

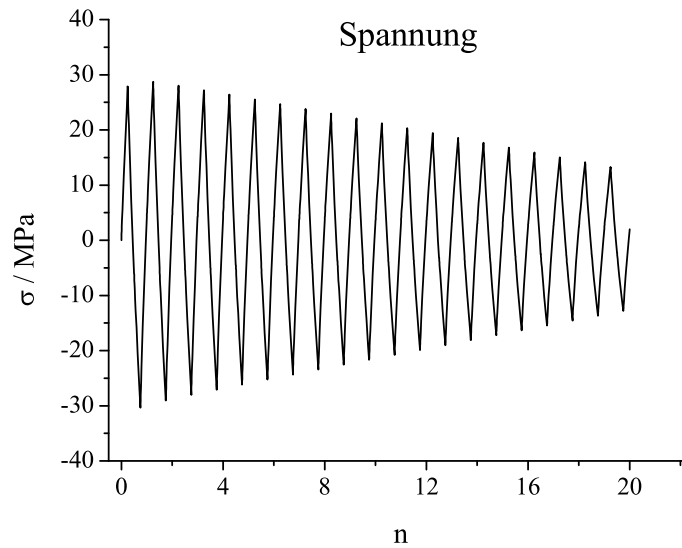


Abbildung 4.11: Spannungsverlauf für dehnungsgesteuerten Zyklusversuch. Mit zunehmender Schädigung  $D$  verringert sich die makroskopische Spannungsamplitude  $\Delta\sigma$ .

### Hysterese

Die Abnahme der Spannungsamplitude lässt sich auch in der simulierten Spannungs-Dehnungskurve erkennen, die in Abbildung 4.12 gezeigt wird. Während im dehnungsgesteuerten Zyklusversuch die Dehnungsamplitude konstant bleibt, ist die durch Schädigung abnehmende Spannungsamplitude durch zwei Pfeile gekennzeichnet. Mit fortschreitender Schädigung verkleinert sich die Hystereseffläche eines Zyklus. Diese Verkleinerung der Hystereseffläche wurde in Gleichung (2.45) zur experimentellen Bestimmung der Schädigung verwendet. Mit zunehmender Schädigung verringert sich die Spannungsamplitude des Zyklus und damit die Arbeit, die für das Durchlaufen eines Zyklus aufgebracht werden muss.

Die Simulation des Schädigungsmodells für einen dehnungsgesteuerten Zyklusversuch zeigt eine lineare Zunahme der Schädigung mit der Zykluszahl. Durch Zeitintegration über einen Zyklus kann die lineare Zunahme der Schädigung in Abhängigkeit der Zykluszahl analytisch begründet werden. Für die Steigung der Schädigungskurve wurde eine analytische Näherungsformel hergeleitet. Die simulierte Steigung und die sich aus der Näherungsformel

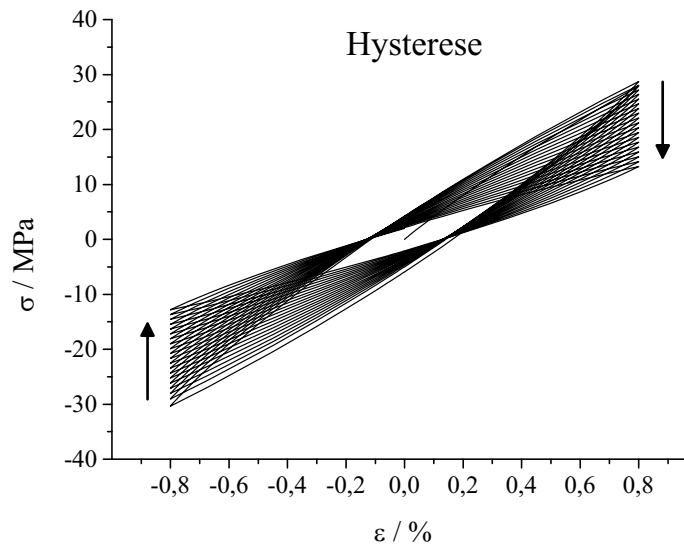


Abbildung 4.12: Hysterese für dehnungsgesteuerten Zyklusversuch. Während im dehnungsgesteuerten Zyklusversuch die Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  konstant bleibt, verringert sich mit zunehmender Schädigung  $D$  die makroskopische Spannungsamplitude  $\Delta\sigma$ .

ergebende Steigung stehen in guter Übereinstimmung. Das nichtlineare Verhalten der Schädigung innerhalb eines Zyklus konnte anhand des verwendeten Schädigungsgesetzes erklärt werden. Mit zunehmender Schädigung nimmt die makroskopische Spannungsamplitude ab und die Hysteresefläche eines Zyklus verkleinert sich. Dies entspricht den physikalischen Vorstellungen des vorgeschlagenen Schädigungsmodells.

Mit der durchgeführten Diskretisierung des viskoelastischen Schädigungsmodells und der Berechnung der Jacobi-Matrix ist es gelungen, das Schädigungsmodell numerisch stabil in ein FE-Programm zu implementieren. Zur numerischen Implementierung wurde das viskoelastische Schädigungsmodell als benutzerdefiniertes Materialverhalten programmiert. Das viskoelastische Schädigungsmodell kann nun zur Simulation des Schädigungsfeldes unter thermomechanischer Belastung verwendet werden. Im folgenden Kapitel wird die Schädigungslokalisierung an einem Demonstrator untersucht.

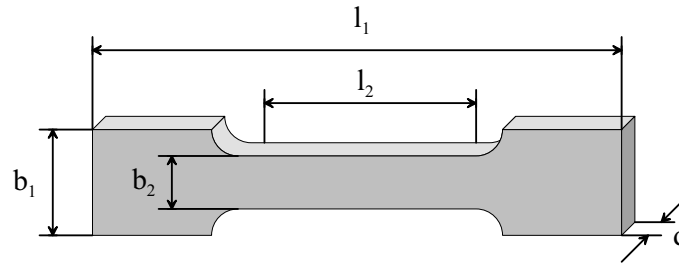
# Kapitel 5

## Schädigungslokalisierung

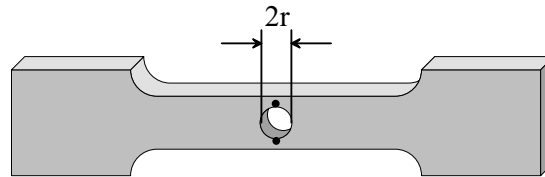
Thermo-mechanische Belastungen verursachen in der Regel eine fortschreitende Schädigung des Materials. Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit eines Bauteils ist es notwendig, die räumliche Verteilung der Schädigung in diesem Bauteil zu ermitteln. Aus dem Schädigungsfeld lässt sich erkennen, an welchen Stellen das Bauteil kritischen Belastungen ausgesetzt ist. Ein Überschreiten der kritischen Schädigung kann in diesen Bereichen zu einem Versagen des Materials führen. Aus der Schädigungslokalisierung im Bauteil kann daher die Zuverlässigkeit des Bauteils unter vorgegebener Belastung abgeleitet werden. Aus der räumlichen Verteilung der Schädigung lassen sich zudem Rückschlüsse auf konstruktive Verbesserungen des Bauteils ziehen. Die Simulation des Schädigungsfeldes kann so zur Erhöhung der Zuverlässigkeit beitragen. Durch Anwendung des viskoelastischen Schädigungsmodells auf eine geeignete Demonstrator-Geometrie wird in diesem Kapitel das Schädigungsfeld unter zyklischer Belastung simuliert und anschließend mit Grauwert-Korrelation experimentell untersucht.

### 5.1 Demonstrator-Geometrie

Zur Simulation des Schädigungsfeldes werden die Zugstäbe, die zur experimentellen Charakterisierung des Schädigungsmodells verwendet wurden, geeignet modifiziert. Diese Zugstäbe sind in Teilbild (a) der Abbildung 5.1 schematisch dargestellt. Die Zugstäbe besitzen die Gesamtlänge  $l_1$  mit der Breite  $b_1$  im Einspannbereich. Im schmalen Bereich weist der Zugstab die Länge  $l_2$  und die Breite  $b_2$  auf. Durch diese Größen ist die Geometrie des Zugstabs



a) Zugstab zur Schädigungscharakterisierung



b) Demonstrator-Geometrie

Abbildung 5.1: Zugstab-Geometrien. Teilbild (a) zeigt den Zugstab zur experimentellen Charakterisierung des Schädigungsmodells. In Teilbild (b) ist die Demonstrator-Geometrie zur Simulation des Schädigungsfeldes abgebildet. Das eingebrachte Loch verursacht eine Spannungsüberhöhung und damit eine Schädigungslokalisierung. Die Bereiche mit erwarteter maximaler Schädigung sind durch zwei schwarze Punkte gekennzeichnet.

festgelegt. Zur schädigungsmechanischen Charakterisierung wurden Zugstäbe mit folgenden geometrischen Größen verwendet:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 35 \text{ mm} \\
 l_2 &= 12 \text{ mm} \\
 b_1 &= 6 \text{ mm} \\
 b_2 &= 2 \text{ mm} \\
 d &= 2 \text{ mm.}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Die normgerechte Form des Zugstabs stellt dabei im schmalen Bereich eine annähernd homogene Spannungsverteilung sicher [100]. Bei Zyklusversuchen ist deshalb eine homogene Verteilung der Schädigung im schmalen Bereich zu erwarten. Wie in Abschnitt 2.7 erwähnt wurde, ist eine homogene Schädigung des Zugstabs eine grundlegende Voraussetzung zur schädigungsmechanischen Charakterisierung des betrachteten Materials.

Zur Simulation des Schädigungsfeldes ist es allerdings vorteilhaft, eine Geometrie zu wählen, bei der Schädigung an vorgegebenen Stellen lokalisiert



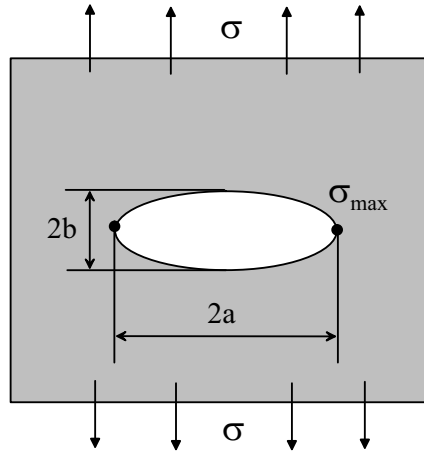


Abbildung 5.2: Unendlich ausgedehnte Zugscheibe mit elliptischem Loch (nach [101]). Die im Unendlichen angebrachte Spannung  $\sigma$  verursacht am elliptischen Loch eine Spannungsüberhöhung  $\sigma_{max}$ . Die Stellen mit maximaler Spannung sind mit schwarzen Punkten gekennzeichnet.

auftritt. Dies ermöglicht, Bereiche mit verschiedenen Schädigungswerten zu unterscheiden und die Simulationsergebnisse auf physikalische Plausibilität zu prüfen. Um diese Schädigungslokalisierung zu erreichen, wird in den Zugstab aus Teilbild (a) der Abbildung 5.1 ein Loch eingebracht. Der Zugstab mit Loch ist in Teilbild (b) dargestellt. Das Loch mit dem Radius  $r$  führt zu einer Spannungsüberhöhung am Lochrand und damit zu einer starken Lokalisation der Schädigung in diesem Bereich. Die Bereiche mit hoher Schädigungslokalisierung sind in Teilbild (b) durch schwarze Punkte gekennzeichnet. In diesen Bereichen sollte vom viskoelastischen Schädigungsmodell eine ausgeprägte Schädigungslokalisierung vorhergesagt werden.

Um die Simulationsergebnisse experimentell zu verifizieren, wird anschließend mit dem Demonstrator ein kraftgesteuerter Zyklusversuch durchgeführt. Während der einzelnen Zyklen werden mit einem Rasterelektronenmikroskop Aufnahmen angefertigt. Aus diesen Bildern lassen sich durch Grauwert-Korrelation [93–97] Dehnungsfelder errechnen, die Rückschlüsse auf die räumliche Verteilung der Schädigung erlauben. Wegen der hohen Vergrößerung kann im Rasterelektronenmikroskop nur ein räumlich begrenzter Bereich des Zugstabs beobachtet werden. Zur experimentellen Überprüfung ist deshalb eine ausgeprägte Schädigungslokalisierung an vorgegebenen Stellen von Vorteil.

Um eine ausreichende Schädigungslokalisierung zu erreichen, muss das eingebrachte Loch hinreichend klein sein. Es stellt sich deshalb die Frage, ab welchem Radius  $r$  das eingebrachte Loch als hinreichend klein anzusehen ist.

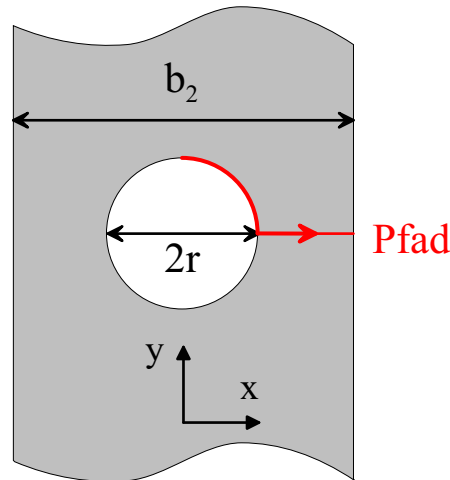


Abbildung 5.3: Definition des Pfads entlang des Lochrands der Demonstrator-Geometrie

Zur Beantwortung dieser Frage wird das Problem der Zugscheibe mit elliptischem Loch herangezogen, das aus der linear-elastischen Bruchmechanik bekannt ist [79, 101]. Dieses Problem ist in Abbildung 5.2 skizziert. In einer *unendlich* ausgedehnten Zugscheibe aus linear-elastischem Material befindet sich ein elliptisches Loch mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ . Im Unendlichen ist an der Scheibe die Spannung  $\sigma$  angebracht. Das elliptische Loch verursacht am Rand der Halbachse  $a$  eine Spannungsüberhöhung. Die beiden Punkte mit der maximalen Spannung  $\sigma_{max}$  sind in Abbildung 5.2 als schwarze Punkte eingetragen. Inglis fand 1913 für eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit elliptischem Loch die Beziehung

$$\sigma_{max} = \sigma \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (5.2)$$

zwischen der maximalen Spannung  $\sigma_{max}$  und der Spannung  $\sigma$  im Unendlichen [102]. Für ein kreisförmiges Loch mit  $a = b$  ist damit die maximale Spannung  $\sigma_{max}$  dreimal so hoch wie Spannung  $\sigma$  am Rand der Scheibe:

$$\sigma_{max} = 3 \sigma. \quad (5.3)$$

Dieses Ergebnis gilt für eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit kreisförmigem Loch. Dabei wird angenommen, dass das Spannungsfeld am Loch nicht vom Rand der Scheibe beeinflusst wird. Umgekehrt kann die Beziehung (5.3) dann auch auf sehr kleine Löcher in einer *endlich* ausgedehnten Scheibe angewendet werden. Mit Definition des *Spannungskonzentrationsfaktors*

$$\kappa := \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \quad (5.4)$$

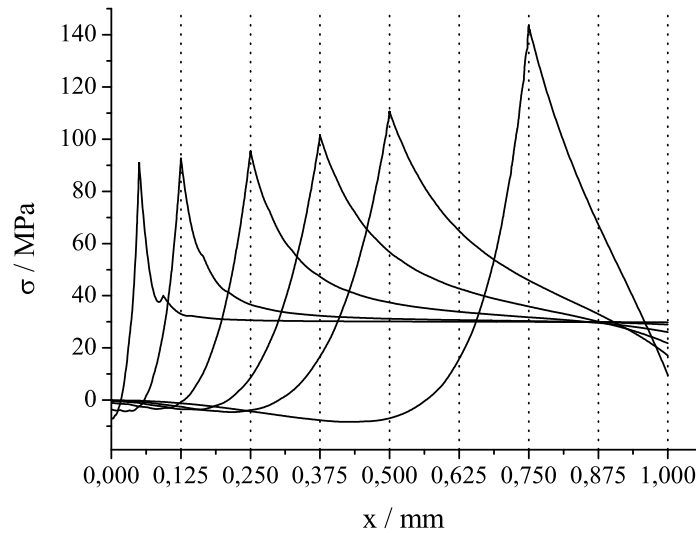


Abbildung 5.4: Spannung in y-Richtung entlang eines Pfads um den Lochrand für verschiedene Radien  $r$ . Die Spannungskurven besitzen jeweils bei  $x = r$  ein Maximum. Der verwendete Pfad wurde in Abbildung 5.3 definiert und ist durch seine x-Koordinate parametrisiert.

liefert Gleichung (5.3) damit ein Maß für die Kleinheit des eingebrachten Loches. Der Radius  $r$  ist dann als hinreichend klein zu betrachten, wenn der Spannungskonzentrationsfaktor  $\kappa(r)$  sich der Zahl 3 annähert:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \kappa(r) = 3. \quad (5.5)$$

Um für die Demonstrator-Geometrie aus Abbildung 5.1 zu beurteilen, ab welchem Radius das eingebrachte Loch hinreichend klein ist, wurde die Spannungsverteilung in der Umgebung des Lochrands für unterschiedliche Lochradien simuliert. Zur Verdeutlichung der Spannungslokalisierung wurde die Spannung entlang eines Pfads um den Lochrand berechnet. Dieser Pfad ist in Abbildung 5.3 als rote Kurve eingezeichnet und wird durch seine x-Koordinate parametrisiert. Zur Berechnung des Spannungsfeldes wurde auf den Demonstrator in einer Belastungszeit  $\Delta t = 35$  s eine Dehnung von  $\Delta \epsilon = 0,4\%$  in y-Richtung aufgebracht.

Die daraus resultierende Spannung in y-Richtung wird in Abbildung 5.4 für verschiedene Lochradien gezeigt. Die erwartete Spannungsüberhöhung lässt sich für alle simulierten Radien erkennen. Die Spannungskurven besitzen bei

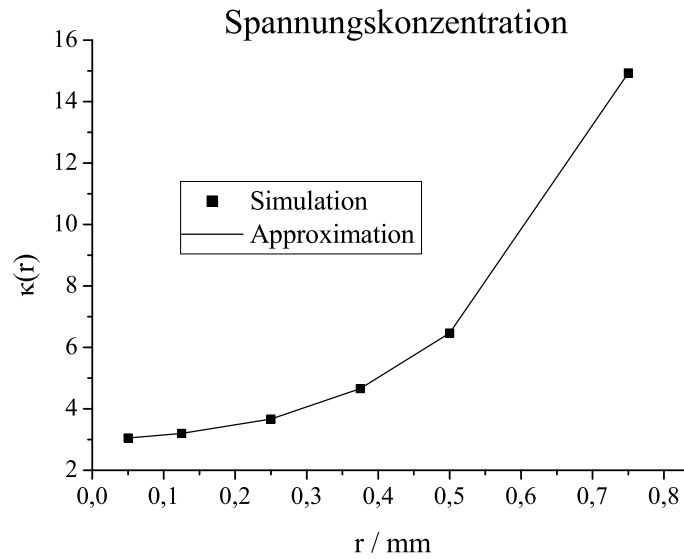


Abbildung 5.5: Spannungskonzentrationsfaktor  $\kappa(r)$  in Abhängigkeit des Lochradius  $r$  bei einer Probenbreite von  $b_2 = 2$  mm

der x-Koordinate  $x = r$  jeweils ein Maximum. Das Spannungsmaximum  $\sigma_{max}$  nimmt mit wachsendem Radius  $r$  zu, was durch die zunehmende Reduktion der lasttragenden Fläche zu erklären ist. Mit abnehmendem Radius zeigen die Flanken des Maximums eine wachsende Steilheit. Wie erwartet, nimmt die Spannungslokalisierung mit abnehmendem Radius zu.

Als Maß für die Spannungslokalisierung ist in Abbildung 5.5 der Spannungskonzentrationsfaktor  $\kappa(r)$  in Abhängigkeit des Radius  $r$  aufgetragen. Mit abnehmendem Radius  $r$  nähert sich der Spannungskonzentrationsfaktor  $\kappa(r)$  entsprechend Gleichung (5.5) asymptotisch dem Zahlenwert 3. Die Übereinstimmung des Spannungskonzentrationsfaktors mit dem theoretischen Grenzwert für ein kleines Loch ist ein Maß für die Spannungslokalisierung. Ab einem Radius von  $r = 0,25$  mm ist bei einer Probenbreite  $b_2 = 2$  mm annähernd der theoretische Grenzwert erreicht. Für Radien  $r \leq 0,25$  mm ist deshalb eine ausreichende Lokalisation der Spannung und damit des Schädigungsfeldes gegeben. Hinsichtlich der Spannungs- und Schädigungslokalisierung kann folglich ein Loch mit dem Radius  $r = 0,25$  mm als ausreichend klein betrachtet werden. Mit der Festlegung des Lochradius

$$r = 0,25 \text{ mm} \quad (5.6)$$

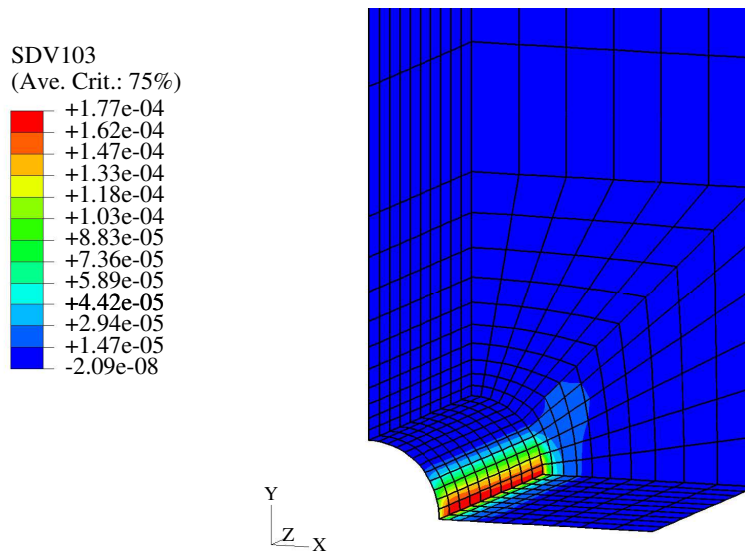


Abbildung 5.6: Schädigungsfeld für zyklische Belastung des Demonstrators. Die Schädigung ist nach  $n = 20$  Zyklen dargestellt.

ist damit die Demonstrator-Geometrie zusammen mit Gleichung (5.1) entsprechend Abbildung 5.1 festgelegt. Für die vorgestellte Demonstrator-Geometrie soll nun das Schädigungsfeld unter zyklischen Belastungen simuliert werden.

## 5.2 Simulation des Schädigungsfeldes

Zur Simulation des Schädigungsfeldes wird das viskoelastische Schädigungsmodell auf die vorgestellte Demonstrator-Geometrie angewendet. In einem Zyklusversuch wird dazu auf den Zugstab abwechselnd eine Dehnung von  $\Delta\epsilon = \pm 0,283\%$  aufgebracht. Die Be- und Entlastungsphasen dauern jeweils  $\Delta t = 5,5$  s. Der Zyklusversuch wird bei Raumtemperatur  $T = 25^\circ\text{C}$  durchgeführt. Das schädigungsmechanische Verhalten des Kunststoffes ist durch seine experimentell bestimmte Energiefestigkeit (4.12) charakterisiert. Die Simulation wird für  $n = 20$  Zyklen durchgeführt. Aus Symmetriegründen reicht es aus, ein Achtel des Demonstrators zu simulieren.

Das simulierte Schädigungsfeld für das Ein-Achtel-Modell des Demonstrators wird in Abbildung 5.6 gezeigt. Die Umgebung des Loches ist dabei vergrößert dargestellt. Um die Innenseite des Loches sichtbar zu machen, ist der

Zugstab leicht gedreht. Am unteren Lochrand zeigt sich im rot gefärbten Bereich eine deutliche Lokalisierung der Schädigung. In diesem Bereich erreicht die Schädigung nach 20 Zyklen ihren maximalen Wert  $D_{max} = 1,77 \cdot 10^{-4}$ . Mit zunehmender Entfernung vom Lochrand nimmt die Schädigung stark ab. Außerhalb des Loches ist die Schädigung annähernd konstant. Der Demonstrator bleibt hier mit der minimalen Schädigung  $D_{min} = 2,09 \cdot 10^{-8}$  nahezu ungeschädigt. Damit liegt die minimale Schädigung  $D_{min}$  in Entfernung vom Loch um 4 Größenordnungen unter der maximalen Schädigung  $D_{max}$  am Lochrand. Die Simulation zeigt folglich eine ausgeprägte Schädigungslokalisierung am unteren Lochrand, wie sie im vorangehenden Abschnitt vorhergesagt wurde.

Aufgrund der Spannungsüberhöhung der gewählten Demonstrator-Geometrie ist das simulierte Schädigungsfeld physikalisch plausibel. Das vorgestellte viskoelastische Schädigungsmodell ist damit in der Lage, die Schädigung des Demonstrators räumlich korrekt abzubilden. Es stellt sich nun die Frage, ob die simulierte Schädigungslokalisierung am Lochrand experimentell nachgewiesen werden kann.

### 5.3 Experimentelle Bestimmung der Schädigung

Die festgestellte Schädigungslokalisierung soll am vorgestellten Demonstrator überprüft werden. Dazu wird der Demonstrator in einem kraftgesteuerten Zyklusversuch belastet. Während des Versuchs werden in einem Rasterelektronenmikroskop Bilder von der unmittelbaren Umgebung des Loches aufgenommen. Aus diesen Bildern lässt sich unter Verwendung von Grauwert-Korrelation das Dehnungsfeld in der Nähe des Loches berechnen. Bei einem *kraftgesteuerten* Versuch kann eine zunehmende Dehnung als Entfestigung des Materials interpretiert werden. Aus den gemessenen Dehnungsfeldern lässt sich so auf die fortschreitende Schädigung des Materials schließen. Durch Vergleich der gemessenen Dehnungsfelder mit dem simulierten Schädigungsfeld kann das verwendete Schädigungsmodell überprüft werden.

#### Simulation des Dehnungsfeldes

Zur Simulation des Dehnungsfeldes wird das viskoelastische Schädigungsmodell auf den vorgestellten Demonstrator angewendet. Aus Symmetriegründen

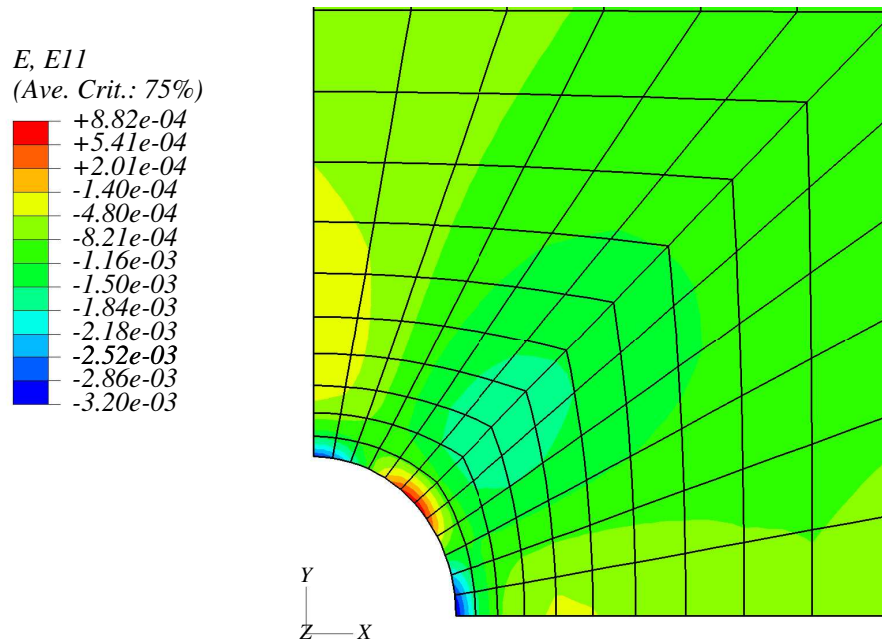


Abbildung 5.7: Simulierte Dehnungen  $\epsilon_{11}$  in x-Richtung

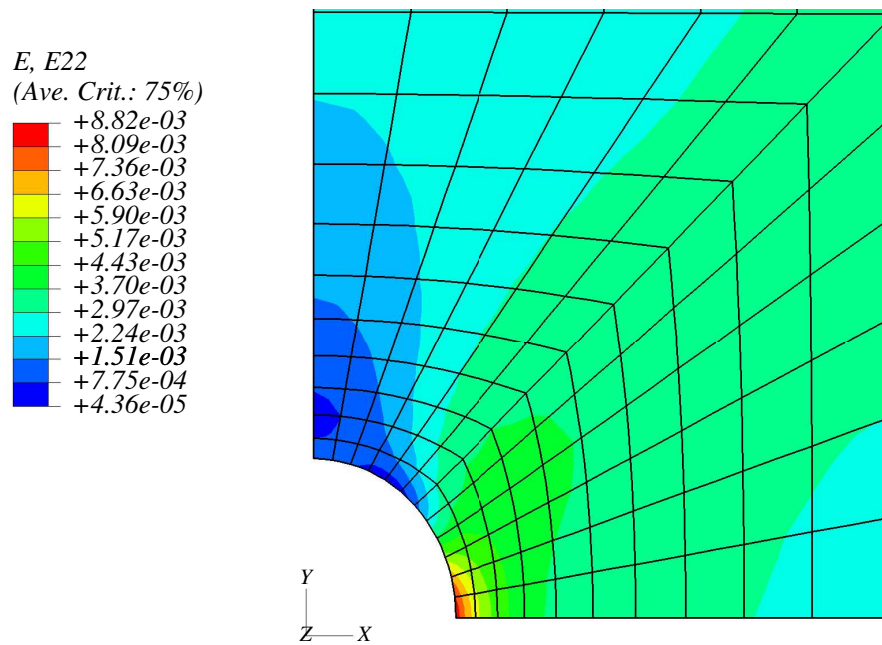


Abbildung 5.8: Simulierte Dehnungen  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung

kann die Simulation wieder auf ein Achtel des Demonstrators reduziert werden. Die zyklische Belastung des Demonstrators wird durch die Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon = 0,283\%$  wiedergegeben. Bei Raumtemperatur  $T = 25^\circ\text{C}$  beträgt die Zeit für Be- und Entlastung  $\Delta t = 5,5\text{ s}$ .

Diese Vorgaben erzeugen an den Einspannflächen des Demonstrators eine Spannungsamplitude von  $\Delta\sigma = 21,25\text{ MPa}$ . Bei einer Querschnittsfläche von  $S = 4\text{ mm}^2$  entspricht dies der Kraftamplitude

$$\Delta F = \Delta\sigma \cdot S = 85\text{ N}, \quad (5.7)$$

die im Zyklusversuch aufgebracht wurde. In der Simulation lassen sich die Dehnungen in der Umgebung des Loches berechnen. Die Dehnungsfelder sind jeweils nach 20 Zyklen angegeben.

Das simulierte Dehnungsfeld  $\epsilon_{11}$  in x-Richtung ist in Abbildung 5.7 zu sehen. Aufgrund der Kontraktion in Querrichtung sind die Dehnungen  $\epsilon_{11}$  negativ. Am oberen und unteren Lochrand weisen die Dehnungen jeweils ein Minimum von  $\epsilon_{11}^{min} = -3,2 \cdot 10^{-3}$  auf. Die Dehnungen in Entfernung vom Loch liegen etwa bei  $\epsilon_{11} \approx -1 \cdot 10^{-3}$ . Damit zeigen die Dehnungen in x-Richtung am unteren und oberen Lochrand eine Lokalisation.

Abbildung 5.8 stellt das simulierte Dehnungsfeld  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung dar. Eine Dehnungslokalisation ist hier nur am unteren Lochrand zu erkennen. Am unteren Lochrand betragen die maximalen Dehnungen  $\epsilon_{22}^{max} = 8,8 \cdot 10^{-3}$ , während am oberen Lochrand die Dehnungen in y-Richtung mit  $\epsilon_{22}^{min} = 4,4 \cdot 10^{-5}$  fast verschwinden. Die Dehnungen in Abstand vom Loch liegen bei etwa  $\epsilon_{22} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . Die Dehnungen  $\epsilon_{22}$  in Zugrichtung sind damit größer als die aufgrund der Querkontraktion hervorgerufenen Dehnungen  $\epsilon_{11}$  in x-Richtung. Am unteren Lochrand weist das Dehnungsfeld in y-Richtung eine deutliche Dehnungslokalisation auf. Die simulierten Dehnungsfelder können nun mit experimentell bestimmten Dehnungsfeldern verglichen werden.

## Bestimmung der Schädigung mit Grauwert-Korrelation

Zur experimentellen Überprüfung der Schädigungslokalisation wird mit dem vorgestellten Demonstrator ein kraftgesteuerter Zyklus-Versuch durchgeführt. Im Zyklusversuch wird der Demonstrator bei Raumtemperatur  $T = 25^\circ\text{C}$  mit der Kraftamplitude  $\Delta F = 85\text{ N}$  belastet. Während des Versuchs werden mit einem Rasterelektronenmikroskop in der unmittelbaren Umgebung des Loches Bilder aufgenommen. Das im Kraft-Nullpunkt aufgenommene Bild



dient dabei als Referenzbild. Das Bild des Demonstrators im darauf folgenden Kraft-Maximum gibt den belasteten Zustand des Zugstabs wieder. Durch Grauwert-Korrelation des Referenzbildes mit dem Bild des maximal belasteten Demonstrators lassen sich die Dehnungsänderungen in diesem Belastungsschritt berechnen. Bei einem *kraftgesteuerten* Zyklusversuch kann eine zunehmende Dehnung als Entfestigung des Materials interpretiert werden. Auf diese Weise kann die fortschreitende Schädigung des Materials experimentell nachgewiesen werden. Durch Vergleich der gemessenen Dehnungsfelder mit dem simulierten Schädigungsfeld lässt sich das vorgeschlagene Schädigungsmodell überprüfen.

Mit dem Verfahren der Grauwert-Korrelation lassen sich Dehnungen mit einer Genauigkeit von

$$\delta\epsilon = 1 \cdot 10^{-3} \quad (5.8)$$

in x- und y-Richtung bestimmen. Wie aus den simulierten Dehnungsfeldern in den Abbildungen 5.7 und 5.8 hervorgeht, sind die Dehnungen  $\epsilon_{11}$  in x-Richtung kleiner als die Dehnungen  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung. Dies entspricht einer Querkontraktion mit der Poissonzahl

$$\nu = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} \approx 0,3. \quad (5.9)$$

Damit liegen die kleineren Dehnungen  $\epsilon_{11}$  in x-Richtung im Bereich der Messgenauigkeit und können durch das Verfahren nicht mehr aufgelöst werden. Die Dehnungen  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung liegen dagegen über der Messgenauigkeit. Im Folgenden werden deshalb nur die Dehnungsfelder in y-Richtung ausgewertet.

Abbildung 5.9 zeigt das experimentell bestimmte Dehnungsfeld  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung nach  $n = 2000$  Zyklen. Bei Belastung ergibt sich in der unmittelbaren Umgebung des Lochrands ein Dehnungsmaximum von etwa 0,006. Diese erhöhten Dehnungen erstrecken sich über einen weit ausgedehnten Bereich in der Nähe des Lochrands. Das simulierte Dehnungsfeld in Abbildung 5.8 weist in der näheren Umgebung des Lochrands Dehnungen von etwa 0,007 auf. Das simulierte Dehnungsmaximum wird damit vom Experiment mit guter Genauigkeit wieder gegeben. Ausgehend von der Mitte des Lochrands zum oberen und unteren Ende des Loches zeigt das experimentell ermittelte Dehnungsfeld in Abbildung 5.9 einen Gradienten von 0,006 auf annähernd Null. Dieser Gradient wird ebenfalls von der Simulation in Abbildung 5.8 vorhergesagt. Eine Bewegung vom Dehnungsmaximum in horizontaler Richtung zum linken Bildrand liefert eine Abnahme der experimentellen Dehnungen (Abb. 5.9) von 0,006 auf 0,002. Die Simulation (Abb. 5.8) zeigt bei dieser

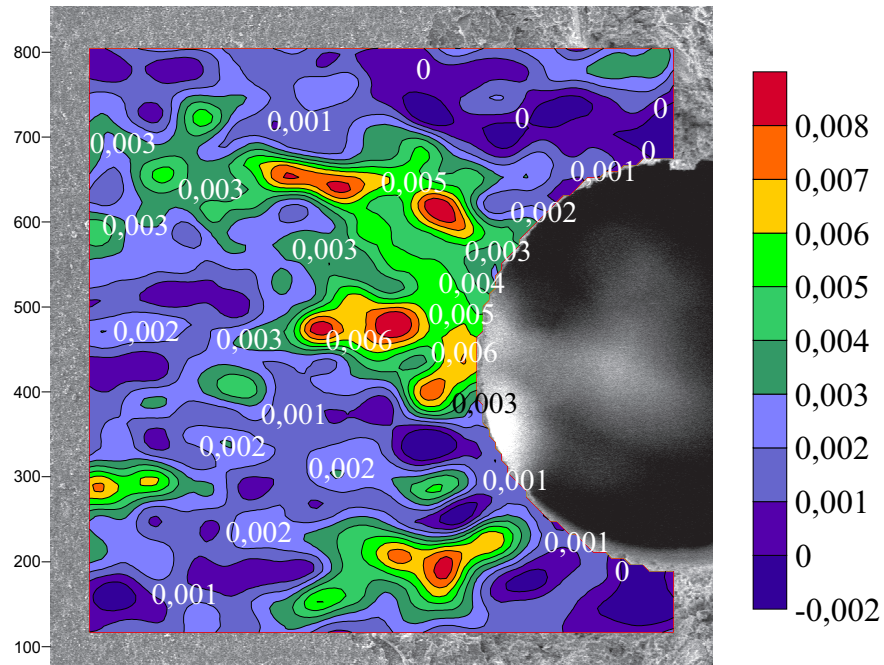


Abbildung 5.9: Experimentell bestimmtes Dehnungsfeld in y-Richtung nach 2000 Zyklen

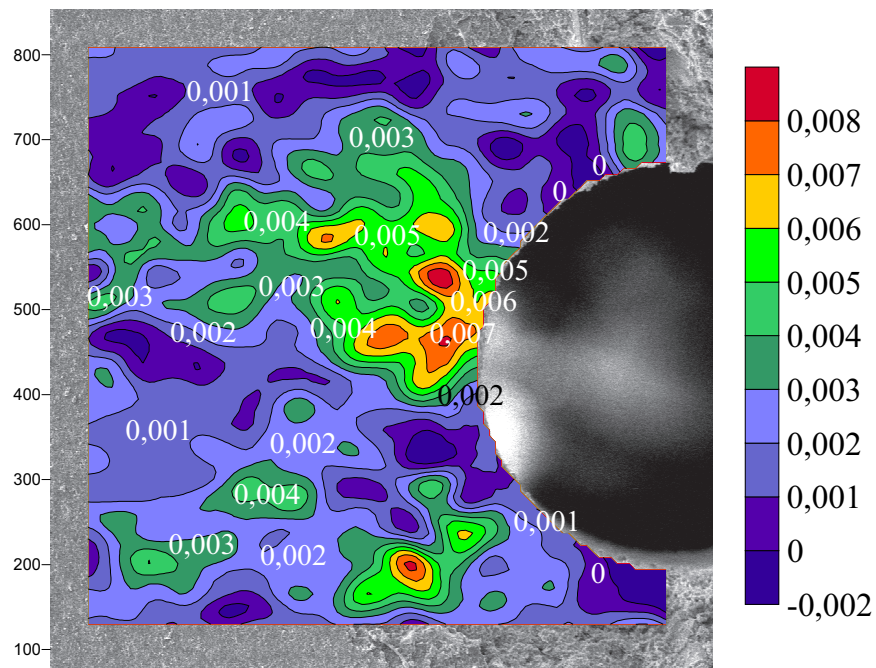


Abbildung 5.10: Experimentell bestimmtes Dehnungsfeld in y-Richtung nach 4800 Zyklen

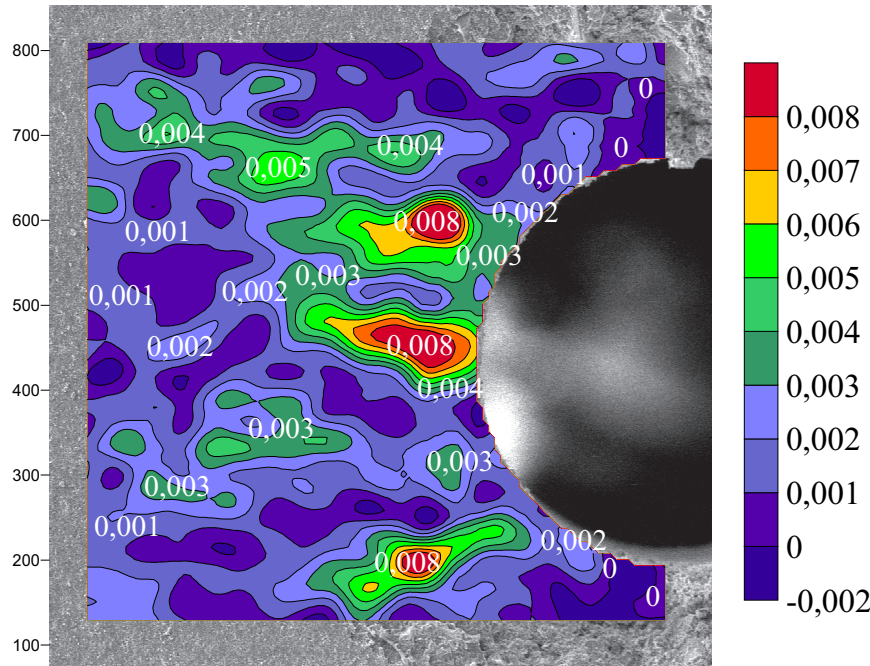


Abbildung 5.11: Experimentell bestimmtes Dehnungsfeld in y-Richtung nach 6500 Zyklen

Bewegung ebenfalls eine Abnahme der Dehnungen von 0,007 auf etwa 0,002. Das Experiment (Abb. 5.9) weist in Entfernung vom Loch Dehnungen von 0,002 bis 0,003 auf. Dies entspricht ebenfalls den simulierten Dehnungen der Abbildung 5.8, die in Entfernung vom Loch Werte von 0,002 bis 0,004 annehmen. Die experimentell bestimmten Dehnungen geben damit das simulierte Dehnungsfeld mit hoher Genauigkeit wieder. Wie in der Simulation zeigen die experimentellen Dehnungen eine Lokalisation in der Umgebung des Loches. Die im Experiment festgestellten Dehnungsüberhöhungen am unteren Bildrand und in der oberen Bildhälfte von Abbildung 5.9 werden von der Simulation nicht wiedergegeben. Diese Dehnungsüberhöhungen können auf Inhomogenitäten des Materials zurückgeführt werden.

Die experimentell bestimmten Dehnungen  $\epsilon_{22}$  in y-Richtung nach 4800 Zyklen sind in Abbildung 5.10 dargestellt. In der Nähe des Lochrands befindet sich hier wiederum eine Maximum von etwa 0,007. Im Vergleich zu Abbildung 5.9 sind die Dehnungen am Lochrand von 0,006 auf 0,007 angestiegen. Der Bereich mit erhöhten Dehnungen ist in Abbildung 5.10 stärker lokalisiert als in Abbildung 5.9. Dies weist auf eine zunehmende Entfestigung des Materials und eine zunehmende Schädigungslokalisierung in diesem Bereich hin. In Abbildung 5.10 lässt sich ebenfalls ein Gradient um den Lochrand beobachten,

in dem die Dehnungen von 0,007 auf annähernd Null abnehmen. Ebenso ist eine Abnahme der Dehnungen in horizontaler Richtung vom Lochrand zum linken Bildrand zu erkennen. Die Dehnungswerte in Entfernung vom Loch liegen zwischen 0,002 und 0,004 und entsprechen damit ebenfalls der Simulation in Abbildung 5.8. Nach 4800 Zyklen stimmen gemessenes Dehnungsfeld und simuliertes Dehnungsfeld ebenfalls gut überein. Im Vergleich zum Dehnungsfeld nach 2000 Zyklen (Abb. 5.9) ist hier allerdings eine Erhöhung des Dehnungsmaximums und eine stärkere Lokalisation der Dehnung zu beobachten.

Das in Abbildung 5.11 gezeigte Dehnungsfeld wurde nach 6500 Zyklen aufgenommen. Hier ist in der Mitte des Lochrands deutlich ein Dehnungsmaximum zu erkennen. Die Dehnung in diesem Bereich ist auf 0,008 angestiegen. Durch die zyklische Belastung wird das Material in diesem Bereich zunehmend entfestigt, was zu einem Anstieg der Dehnungen in diesem Bereich führt. Die zunehmende Entfestigung des Materials lässt sich als zunehmende Schädigung mit wachsender Zykluszahl interpretieren. Ein Vergleich mit den Bildern nach 2000 und 4800 Zyklen zeigt, dass der Bereich höherer Dehnungen nach 6500 Zyklen bereits sehr stark lokalisiert ist. Dadurch kann eine zunehmende Schädigungslokalisierung beobachtet werden.

Durch die zunehmende Dehnung am Lochrand konnte die fortschreitende Schädigung des Materials und die Schädigungslokalisierung experimentell nachgewiesen werden. Die experimentell festgestellte Schädigungslokalisierung entspricht dem simulierten Schädigungsfeld in Abbildung 5.6. Das vorgeschlagene Schädigungsmodell ist somit in der Lage, die räumliche Verteilung der Schädigung in guter Übereinstimmung mit dem Experiment wiederzugeben.

# Kapitel 6

## Lebensdauervorhersage

Mit dem vorgestellten Schädigungsmodell kann die Schädigungsentwicklung im betrachteten Kunststoff unter thermo-mechanischer Belastung vorhergesagt werden. Ein Überschreiten der kritischen Schädigung führt durch die Bildung eines makroskopischen Risses zum Versagen des Materials. Durch Anwendung des viskoelastischen Schädigungsmodells auf zyklische Belastung lässt sich die kritische Zykluszahl berechnen, bei der ein Versagen des Kunststoffs zu erwarten ist. In diesem Kapitel wird die kritische Zykluszahl in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude hergeleitet.

Phänomenologisch kann die Abhängigkeit der kritischen Zykluszahl von der Dehnungsamplitude durch das bekannte Coffin-Manson-Gesetz [16, 17] beschrieben werden. Dieses Gesetz findet in der Mikroelektronik weite Anwendung [18–25]. Bei bekannten Materialparametern kann es ebenfalls zur Lebensdauervorhersage verwendet werden. Zum Vergleich mit dem viskoelastischen Schädigungsmodell werden die gemessenen kritischen Zykluszahlen zusätzlich durch das Coffin-Manson-Gesetz approximiert. Dadurch kann das viskoelastische Schädigungsmodell überprüft und das phänomenologisch abgeleitete Coffin-Manson-Gesetz schädigungsmechanisch begründet werden.

### 6.1 Lebensdauer nach viskoelastischem Schädigungsmodell

Aus dem viskoelastischen Schädigungsmodell lässt sich die Schädigungsentwicklung unter zyklischer mechanischer Belastung herleiten. Für einen dehnungsgesteuerten Zyklusversuch mit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  wurde in

Gleichung (4.10) die Schädigungszunahme pro Zyklus abgeleitet:

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2}{3S} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p. \quad (6.1)$$

Hier bezeichnen  $\Delta\epsilon^{el}$  die elastische Dehnungsamplitude,  $\Delta\tilde{\sigma}$  die effektive Spannungsamplitude und  $\Delta p$  die Amplitude der äquivalenten inelastischen Dehnung. Durch Integration der Schädigungsrate (6.1) folgt die Schädigungsentwicklung

$$D(n) = \frac{2}{3S} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p n \quad (6.2)$$

in Abhängigkeit der Zykluszahl  $n$ . Mit dem Versagenskriterium (2.4) folgt aus

$$D_C = \frac{2}{3S} \Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p n_R \quad (6.3)$$

die kritische Zykluszahl

$$n_R = \frac{3S}{2} \frac{D_C}{\Delta\epsilon^{el} \Delta\tilde{\sigma} \Delta p}. \quad (6.4)$$

Für einen dehnungsgesteuerten Zyklusversuch ist damit die kritische Belastung in Abhängigkeit der Zyklusparameter  $\Delta\epsilon^{el}$ ,  $\Delta\tilde{\sigma}$  und  $\Delta p$  und der Materialeigenschaften gegeben. Die Energiefestigkeit  $S$  des Kunststoffes wurde in Abschnitt 4.2.3 entsprechend Gleichung (4.11) experimentell bestimmt. Daraus ergibt sich die Energiefestigkeit in Gleichung (4.12). Die Abhängigkeit der kritischen Schädigung  $D_C$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  wird in Gleichung (4.23) beschrieben. Die kritische Schädigung ist dabei durch die Parameter (4.24) charakterisiert.

Zusammen mit der schädigungsmechanischen Charakterisierung des Materials lässt sich aus Gleichung (6.4) die kritische Zykluszahl  $n_R$  berechnen. Dadurch ist es möglich, in Abhängigkeit von den Zyklusparametern die Lebensdauer der Kunststoff-Verpackung vorherzusagen.

Für einen Zyklusversuch mit konstanter Dehnungsrate  $\dot{\epsilon}$  und vergleichbaren effektiven Belastungszeiten  $\Delta\tau$  verhalten sich entsprechend Ausdruck (4.20) die elastische Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  und die effektive Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  annähernd proportional zur Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . Für die durchgeführten Zyklusversuche kann die lineare Abhängigkeit der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  durch

$$\Delta\tilde{\sigma} = K_1 \Delta\epsilon \quad (6.5)$$

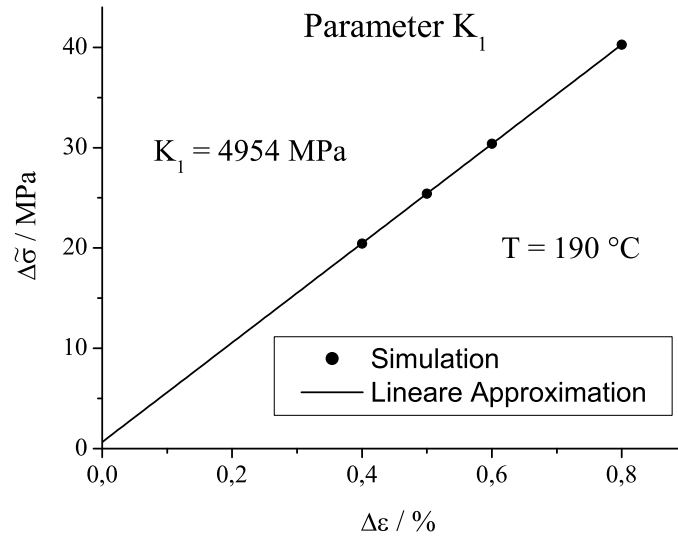


Abbildung 6.1: Lineare Abhängigkeit der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . Aus der Steigung der approximierten Geraden lässt sich der Proportionalitätsfaktor  $K_1$  bestimmen

beschrieben werden. Hier wurde der von der effektiven Belastungszeit  $\Delta\tau$  abhängige Proportionalitätsfaktor  $K_1(\Delta\tau)$  eingeführt. Um den Proportionalitätsfaktor  $K_1$  für die durchgeführten Zyklusversuche zu bestimmen, werden für die verwendeten Dehnungsamplituden  $\Delta\epsilon$  die zugehörigen effektiven Spannungsamplituden  $\Delta\tilde{\sigma}$  simuliert. Die lineare Abhängigkeit der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta\tilde{\sigma}$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ist für die Temperatur  $T = 190^\circ\text{C}$  in Abbildung 6.1 gezeigt. Die simulierten Zahlenpaare sind als gefüllte Kreise  $\bullet$  wiedergegeben. Die durchgezogene Linie gibt die lineare Approximation der simulierten Werte wieder. Die simulierten Zahlenpaare liegen auf der approximierten Geraden, die annähernd durch den Ursprung geht. Damit kann die angenommene Proportionalität (6.5) für die verwendeten Versuchsparameter bestätigt werden. Für die durchgeführten Versuche lässt sich der Proportionalitätsfaktor

$$K_1 = (4954 \pm 10) \text{ MPa} \quad (6.6)$$

aus der Steigung der approximierten Geraden bestimmen.

Die Proportionalität zwischen der elastischen Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  und der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  kann für die durchgeführten Versuche durch die Gleichung

$$\Delta\epsilon^{el} = K_2 \Delta\epsilon \quad (6.7)$$

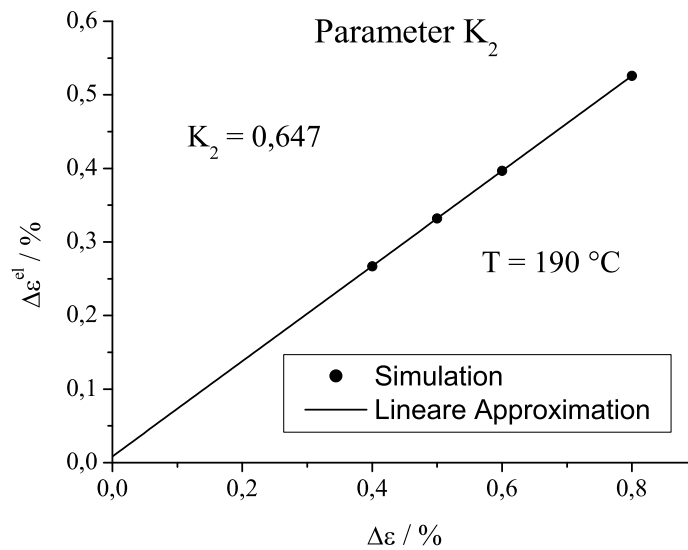


Abbildung 6.2: Lineare Abhängigkeit der elastischen Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . Aus der Steigung der approximierten Geraden lässt sich der Proportionalitätsfaktor  $K_2$  bestimmen

wiedergegeben werden. Hier wurde der Proportionalitätsfaktor  $K_2(\Delta\tau)$  eingeführt, der ebenfalls von der effektiven Belastungszeit  $\Delta\tau$  abhängt. Die lineare Abhängigkeit zwischen der elastischen Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon^{el}$  und der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Aus der Steigung der approximierten Geraden ergibt sich für die durchgeführten Versuche der Proportionalitätsfaktor

$$K_2 = 0,647 \pm 0,001. \quad (6.8)$$

Zuletzt verhält sich für vergleichbare effektive Belastungszeiten  $\Delta\tau$  die Amplitude der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  annähernd proportional zur Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . Für die durchgeführten Zyklusversuche wird diese Proportionalität durch die Gleichung

$$\Delta p = K_3 \Delta\epsilon \quad (6.9)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor  $K_3(\Delta\tau)$  beschrieben. Die lineare Abhängigkeit der Amplitude der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Aus der Steigung der approximierten Geraden lässt sich wiederum der Proportionalitätsfaktor



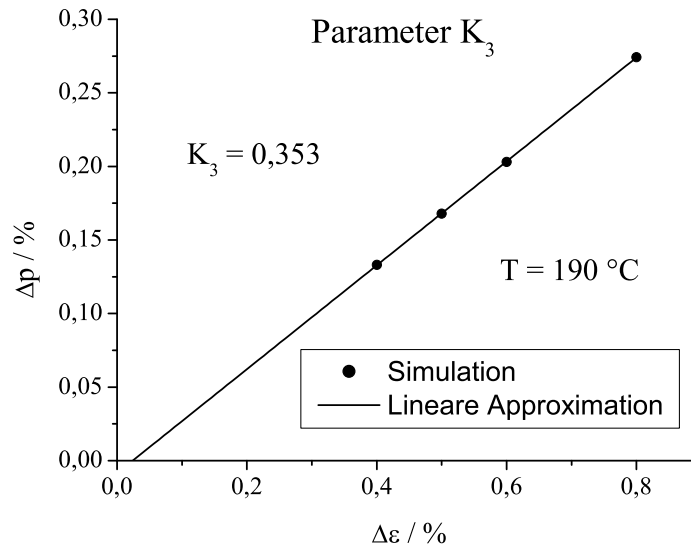


Abbildung 6.3: Lineare Abhängigkeit der Amplitude der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  von der Dehnungsamplitude  $\Delta \epsilon$ . Aus der Steigung der approximierten Geraden lässt sich der Proportionalitätsfaktor  $K_3$  bestimmen.

$K_3$  bestimmen:

$$K_3 = 0,353 \pm 0,001. \quad (6.10)$$

Wegen der Aufspaltung der Dehnungen in elastische und inelastische Anteile in Gleichung (2.58) stehen die Proportionalitätsfaktoren  $K_2$  und  $K_3$  über die Gleichung

$$K_2 + K_3 = 1 \quad (6.11)$$

miteinander in Beziehung. Die approximierten Proportionalitätsfaktoren  $K_2$  und  $K_3$  erfüllen nach den Gleichungen (6.8) und (6.10) diese Beziehung.

Die Zyklusparameter  $\Delta \tilde{\sigma}$ ,  $\Delta \epsilon^{el}$  und  $\Delta p$  lassen sich durch die Gleichungen (6.5), (6.7) und (6.9) in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta \epsilon$  ausdrücken. Die eingeführten Proportionalitätsfaktoren  $K_i$  hängen dabei von der effektiven Belastungszeit  $\Delta \tau$  ab. Durch Definition der Konstante

$$K := K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \quad (6.12)$$

kann für die durchgeführten Versuche die kritische Zykluszahl  $n_R$  in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta \epsilon$  ausgedrückt werden. Aus den Gleichungen (6.6), (6.8) und (6.10) folgt der Zahlenwert

$$K = (1131 \pm 8) \text{ MPa}. \quad (6.13)$$

Mit den Gleichungen (6.5), (6.7) und (6.9) und der Definition (6.12) der Konstanten  $K$  lässt sich entsprechend Ausdruck (6.4) die kritische Zykluszahl in der Form

$$n_R = \frac{3S}{2K} \frac{D_C}{\Delta\epsilon^3} \quad (6.14)$$

schreiben. Die kritische Schädigung  $D_C$  hängt nach Gleichung (4.23) ebenfalls von der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  ab. Einsetzen der kritischen Schädigung (4.23) in den Ausdruck (6.14) liefert die kritische Zykluszahl

$$n_R = \frac{3S}{2K} \frac{\alpha}{\Delta\epsilon^{m+3}} \quad (6.15)$$

in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . In dieser Gleichung kommt die Abhängigkeit der kritischen Zykluszahl  $n_R$  von einer Potenz der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  zum Ausdruck. Diese Abhängigkeit von der Dehnungsamplitude ist auch aus dem phänomenologisch begründeten Coffin-Manson-Gesetz [16, 17] bekannt, das in der Mikroelektronik häufig zur Lebensdauervorhersage angewendet wird.

In die Lebensdauervorhersage (6.15) geht die Energiefestigkeit  $S$  als Schädigungsparameter ein. Die kritische Schädigung  $D_C$  wird durch die Parameter  $\alpha$  und  $m$  entsprechend Gleichung (4.24) charakterisiert. Die in Definition (6.12) eingeführte Konstante  $K$  lässt sich aus der Proportionalität der Zyklusparameter für eine gegebene Temperatur  $T$  und vergleichbare effektive Belastungszeiten  $\Delta\tau$  bestimmen. Damit kann die Lebensdauer in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  aus dem viskoelastischen Schädigungsmodell abgeleitet werden.

Abbildung 6.4 zeigt die kritische Zykluszahl  $n_R$ , die sich für den charakterisierten Kunststoff aus dem viskoelastischen Schädigungsmodell ergibt. Die kritische Zykluszahl  $n_R$  ist auf einer doppelt logarithmischen Skala in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  aufgetragen. Die durchgezogene Linie gibt die vom Schädigungsmodell vorhergesagte Lebensdauer an. Die in Zyklusversuchen ermittelten kritischen Zykluszahlen sind als gefüllte Kreise • angegeben. Die gemessenen kritischen Zykluszahlen streuen gleichmäßig um die durchgezogene Linie, die vom Schädigungsmodell als Lebensdauer vorhergesagt wird. Für die Parameter, die in Gleichung (6.15) zur Vorhersage der Lebensdauer eingehen, sind jeweils Fehlergrenzen bekannt. Aufgrund der angegebenen Genauigkeiten können die maximale und minimale kritische Zykluszahl und damit die Fehlergrenzen des viskoelastischen Schädigungsmodells bestimmt werden. Die berechneten Fehlergrenzen sind in Abbildung 6.4 als gestrichelte Linien eingezeichnet. Die gemessenen Lebensdauern liegen alle innerhalb dieser Fehlergrenzen. Durch das vorgestellte Schädigungsmodell

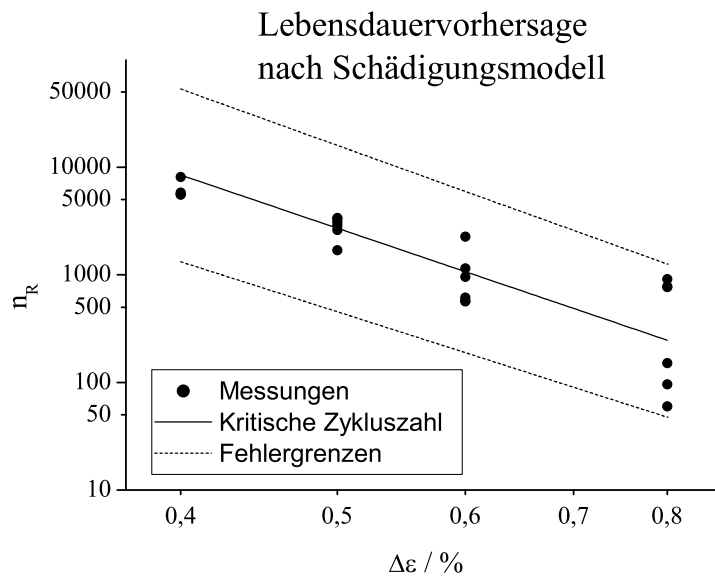


Abbildung 6.4: Lebensdauervorhersage nach viskoelastischem Schädigungsmodell. Die aus dem Schädigungsmodell abgeleitete kritische Zykluszahl  $n_R$  ist als durchgezogene Linie angegeben. Die experimentell bestimmten kritischen Zykluszahlen sind als gefüllte Kreise  $\bullet$  eingetragen. Die Fehlergrenzen des Modells sind als gestrichelte Linien zu sehen.

wird damit die Lebensdauer in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten vorhergesagt.

Die kritische Zykluszahl (6.15) gibt die Lebensdauer des charakterisierten Kunststoffes gut wieder. Das vorgestellte viskoelastische Schädigungsmodell kann somit zur Lebensdauervorhersage verwendet werden. Die Schädigung des Materials wird dabei durch das isotrope Schädigungsmaß (2.2) abgebildet. Es zeigt sich, dass die Verwendung eines isotropen Schädigungsmaßes für hochgefüllte Reaktionsharze keine wesentliche Einschränkung darstellt. Die Schädigungsentwicklung im Material kann durch das geforderte Schädigungsgesetz (2.62) beschrieben werden. Die eingeführten Materialparameter lassen sich experimentell in einachsigen Zyklusversuchen charakterisieren. Durch das vorgeschlagene Schädigungsmodell kann damit die Schädigungsentwicklung von viskoelastischem Material unter zyklischer mechanischer Belastung vorhergesagt werden.

Die Lebensdauer eines Bauteils kann phänomenologisch durch das bekannte

Coffin-Manson-Gesetz beschrieben werden. Da dieses Gesetz in der Zuverlässigkeitsbewertung häufig verwendet wird, soll im Folgenden das vorgestellte viskoelastische Schädigungsmodell mit dem phänomenologischen Coffin-Manson-Gesetz verglichen werden.

## 6.2 Lebensdauer nach Coffin-Manson

Die Lebensdauer unter zyklischer Belastung kann phänomenologisch auch durch das Coffin-Manson-Gesetz [16, 17] vorhergesagt werden. Coffin und Manson entdeckten den Einfluss der inelastischen Dehnung auf die Schädigung und formulierten unabhängig voneinander ein Kriterium für die Lebensdauer unter zyklischer Belastung. In Abhängigkeit der äquivalenten inelastischen Dehnungsamplitude  $\Delta p$  wird für die kritische Zykluszahl  $n_R$  die Beziehung

$$n_R = \left( \frac{\Delta p}{C} \right)^\gamma \quad (6.16)$$

angenommen. Der *Coffin-Manson-Koeffizient*  $C$  und der *Coffin-Manson-Exponent*  $\gamma$  werden durch Funktionsapproximation aus den experimentellen Lebensdauern bestimmt. Das Lebensdauer-Kriterium (6.16) ist in der Zuverlässigkeitsbewertung von Mikrosystemen weit verbreitet [18–25].

Für die durchgeführten Zyklusversuche ist nach Gleichung (6.9) die äquivalente inelastische Dehnungsamplitude  $\Delta p$  annähernd proportional zur Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$ . Mit dieser Gleichung lässt sich das Coffin-Manson-Gesetz als

$$n_R = \left( \frac{\Delta\epsilon}{\tilde{C}} \right)^\gamma \quad (6.17)$$

mit einem *modifizierten* Coffin-Manson-Koeffizienten  $\tilde{C}$  schreiben. Formal ist diese Gleichung mit der Lebensdauervorhersage (6.15) identisch, die aus dem viskoelastischen Schädigungsmodell abgeleitet wurde.

Die gemessenen kritischen Zykluszahlen  $n_R$  können nun in Abhängigkeit der eingebrachten Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon$  durch Gleichung (6.17) approximiert werden. Die approximierte Coffin-Manson-Kurve ist in Abbildung 6.5 als blaue durchgezogene Linie dargestellt. Die experimentell ermittelten Lebensdauern werden als gefüllte Kreise • gezeigt. Die gemessenen kritischen Zykluszahlen  $n_R$  werden durch das Coffin-Manson-Modell gut wiedergegeben. Die Fehlergrenzen des Coffin-Manson-Modells sind als blau gestrichelte Linien eingezeichnet. Die gemessenen Werte liegen innerhalb der Fehlergrenzen des Coffin-Manson-Modells.

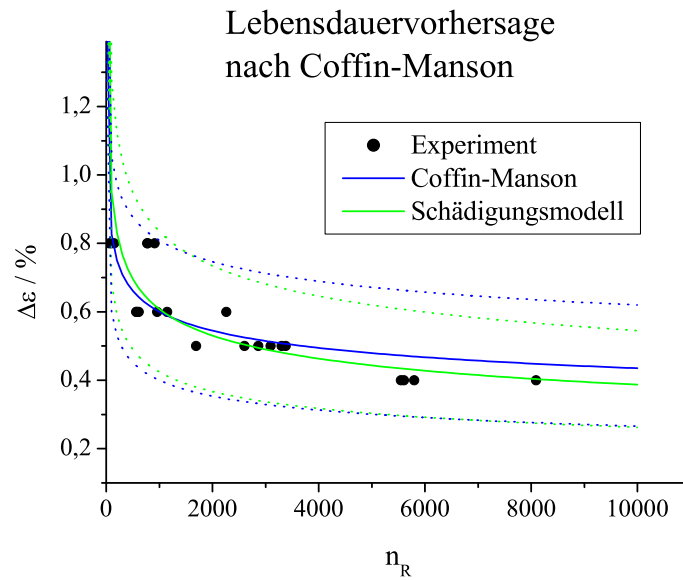


Abbildung 6.5: Approximation der experimentellen Lebensdauern durch das Coffin-Manson-Gesetz und Vergleich mit dem viskoelastischen Schädigungsmodell. Die Fehlergrenzen der Modelle sind jeweils als gestrichelte Linien eingetragen.

Um die Coffin-Manson-Approximation mit dem viskoelastischen Schädigungsmodell vergleichen zu können, wird in Abbildung 6.5 zusätzlich die Lebensdauervorhersage des viskoelastischen Schädigungsmodells gezeigt. Das viskoelastische Schädigungsmodell ist als grüne durchgezogene Linie eingetragen. Die zugehörigen Fehlergrenzen sind als grün gestrichelte Linien zu sehen. Das viskoelastische Schädigungsmodell zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Coffin-Manson-Gesetz. Für kleine Dehnungsamplituden wird die Lebensdauer durch das Schädigungsmodell genauer wiedergegeben. Dagegen wird die Lebensdauer für kleine Dehnungsamplituden durch das Coffin-Manson-Gesetz etwas überschätzt. Außerdem sind die Fehlergrenzen des viskoelastischen Schädigungsmodells etwas geringer als die Fehlergrenzen der Coffin-Manson-Approximation.

Durch die Übereinstimmung mit dem Coffin-Manson-Gesetz konnte das in Kapitel 4 vorgestellte viskoelastische Schädigungsmodell verifiziert werden. Die Lebensdauervorhersage (6.17) des Coffin-Manson-Modells hat mathematisch dieselbe Form wie die Lebensdauervorhersage (6.15) des viskoelastischen Schädigungsmodells. Damit lässt sich das phänomenologisch eingeführte Coffin-Manson-Gesetz als Spezialfall des viskoelastischen Schädigungsmodells interpretieren.

fin-Manson-Gesetz schädigungsmechanisch begründen.

Der Unterschied zwischen dem phänomenologischen und dem schädigungsmechanischen Ansatz besteht in der Bestimmung der zugehörigen Materialparameter. Im Coffin-Manson-Modell werden die Material-Parameter direkt durch Approximation der gemessenen Lebensdauern in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude bestimmt. Bei einer gegebenen Temperatur können so die Lebensdauern für die betrachteten Dehnungsamplituden gut wiedergegeben werden. Im vorgestellten Schädigungsmodell wird dagegen die Schädigungsentwicklung im Material beschrieben. Die Materialparameter des Schädigungsmodells werden in dehnungsgesteuerten Zyklusversuchen für eine gegebene Temperatur charakterisiert. Das Versagen des Materials ist dabei durch das Erreichen einer kritischen Schädigung definiert. Mit dem experimentell charakterisierten Schädigungsmodell lässt sich so die Lebensdauer des Materials unter thermo-mechanischer Belastung vorhersagen.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Zum Schutz vor Umwelteinflüssen und zur elektrischen Isolation werden elektronische Komponenten mit einer Kunststoff-Verpackung umgeben. Die Verpackung trägt wesentlich zur Erhöhung der Zuverlässigkeit und zur Verlängerung der Lebensdauer des Bauteils bei. Die vorliegende Arbeit untersucht die Schädigungsentwicklung in einem hochgefüllten Reaktionsharz, das zur Verpackung elektronischer Systeme eingesetzt wird.

Die Schädigung des Kunststoffs kann durch ein isotropes Schädigungsmaß beschrieben werden. Es zeigt sich, dass die Annahme einer isotropen Schädigung für den charakterisierten Kunststoff keine wesentliche Einschränkung darstellt. Das Versagen des Materials ist durch die Erzeugung eines makroskopischen Risses definiert und wird durch das Erreichen einer kritischen Schädigung bestimmt. Die zeitliche Schädigungsentwicklung kann durch eine Schädigungsrate modelliert werden, die als proportional zur Energiefreisetzungsrates und zur Rate der äquivalenten inelastischen Dehnung angenommen wird.

Im schädigungsfreien Zustand lässt sich der Kunststoff durch linear viskoelastisches Materialverhalten beschreiben. Die viskoelastischen Materialparameter werden in Relaxationsexperimenten bei verschiedenen Temperaturen experimentell charakterisiert. Durch Erzeugung einer Masterkurve wird gezeigt, dass das Relaxationsverhalten thermorheologisch einfach formuliert werden kann. Zur Verifikation des ermittelten Materialmodells wird für einen Demonstrator das Dehnungsfeld unter thermischer Belastung simuliert. Die mit dem Verfahren der Grauwert-Korrelation bestimmten Dehnungsfelder stimmen in hoher Genauigkeit mit der Simulation überein.

Um das Schädigungsverhalten des Kunststoffs zu beschreiben, wird ein viskoelastisches Schädigungsmodell entwickelt. Das Schädigungsmodell kann durch

Anwendung des Dehnungsäquivalenz-Prinzips und des Konzepts der effektiven Spannung abgeleitet werden. Bei gegebener Temperatur können die Schädigungsparameter in dehnungsgesteuerten Zyklusversuchen charakterisiert werden. Aus der Abnahme der effektiven Hystereseffläche wird dabei die Schädigung des Materials bestimmt. Daraus ergibt sich die kritische Schädigung bei Versagen des Kunststoffes. Die Energiefestigkeit lässt sich aus der Steigung der Schädigungskurven berechnen. Damit ist es gelungen, das viskoelastische Schädigungsmodell experimentell vollständig zu charakterisieren.

Zur numerischen Implementierung des Schädigungsmodells wird die Jacobi-Matrix für das viskoelastische Schädigungsmodell analytisch abgeleitet. Damit kann das Schädigungsmodell unter Verwendung des Newton-Raphson-Verfahrens numerisch stabil in ein FE-Programm implementiert werden. Die Simulation des Schädigungsfeldes für eine geeignete Demonstrator-Geometrie zeigt an der vorhergesagten Stelle eine ausgeprägte Schädigungslokalisierung. In einem kraftgesteuerten Zyklusversuch lässt sich durch Grauwert-Korrelation, die auf Aufnahmen eines Rasterelektronenmikroskops angewendet wird, die fortschreitende Schädigung des Materials experimentell nachweisen. Die experimentell festgestellte Schädigungslokalisierung entspricht mit hoher Genauigkeit dem simulierten Schädigungsfeld. Durch das Schädigungsmodell wird somit die räumliche Verteilung der Schädigung sehr gut wiedergegeben.

Zur Lebensdauervorhersage wird aus dem viskoelastischen Schädigungsmodell für dehnungsgesteuerte Zyklusversuche die kritische Zykluszahl in Abhängigkeit der Dehnungsamplitude abgeleitet. Formal stimmt die hergeleitete Beziehung mit dem bekannten Coffin-Manson-Gesetz überein, das auf diese Weise schädigungsmechanisch begründet werden kann. Die gemessenen Lebensdauern werden vom viskoelastischen Schädigungsmodell sehr gut vorhergesagt. Durch die Übereinstimmung mit dem Coffin-Manson-Modell lässt sich das entwickelte Schädigungsmodell verifizieren. Für kleine Dehnungsamplituden gibt das viskoelastische Schädigungsmodell die Lebensdauer genauer wieder. Zudem sind die Fehlergrenzen des Schädigungsmodells geringer als die Fehler der Coffin-Manson-Approximation. Das vorgestellte Schädigungsmodell ist somit in der Lage, die Schädigungsentwicklung unter mechanischer Belastung zu modellieren. Das geforderte Versagenskriterium ermöglicht die Lebensdauervorhersage unter zyklischer Beanspruchung.

Damit ist es in dieser Arbeit gelungen, ein viskoelastisches Schädigungsmodell zu entwickeln, das die räumliche Schädigungsverteilung und die Schädigungsentwicklung eines gefüllten Kunststoffes unter zyklischer Belastung vorhersagen kann.



# Anhang A

## Tensoralgebra

In diesem Anhang sind Beziehungen aus der Tensoralgebra zusammengestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden.

### A.1 Einheitstensoren

Der *Einheitstensor zweiter Stufe*  $\mathbf{I}^{(2)}$  ist durch

$$\mathbf{I}^{(2)} := \delta_{ij} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \quad (\text{A.1})$$

definiert, wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta bezeichnet und  $\{\mathbf{v}_i\}$  eine orthonormierte Basis darstellt. Die Vektoren  $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j$  sind über ein Tensorprodukt miteinander verknüpft und bilden so einen Tensor zweiter Stufe. In Definition (A.1) wird nach der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes summiert.

Der *Einheitstensor vierter Stufe*  $\mathbf{I}^{(4)}$  ist durch

$$\mathbf{I}^{(4)} := \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l \quad (\text{A.2})$$

definiert. Mit  $\mathbf{A}^{(2)}$  als Tensor zweiter Stufe gelten für die Einheitstensoren  $\mathbf{I}^{(2)}$  und  $\mathbf{I}^{(4)}$  folgende Beziehungen:

$$\mathbf{I}^{(2)} \cdot \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{I}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{A}^{(2)} = \text{Sp}(\mathbf{A}^{(2)}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{I}^{(4)} \cdot \cdot \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)}, \quad (\text{A.5})$$

wobei

$$\text{Sp}(\mathbf{A}^{(2)}) := A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (\text{A.6})$$

die Spur des Tensors  $\mathbf{A}^{(2)}$  bezeichnet. Das einfache Skalarprodukt wird als  $\cdot$  geschrieben, das doppelte Skalarprodukt ist durch  $\cdot\cdot$  gekennzeichnet. Mit  $\mathbf{B}^{(4)}$  als Tensor vierter Stufe gilt zusätzlich die Beziehung

$$\mathbf{I}^{(4)} \cdot\cdot \mathbf{B}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)}. \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Zerlegung des Dehnungs- und Spannungstensors

Der Dehnungstensor kann in einen Dehnungsdeviator und eine hydrostatische Dehnung zerlegt werden. Die *hydrostatische Dehnung*  $\epsilon_H \in \mathbb{R}$  ist durch

$$\epsilon_H := \frac{1}{3} \text{Sp}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (\text{A.8})$$

definiert. Der *Dehnungsdeviator*  $\mathbf{e}$  wird durch

$$\mathbf{e} := \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_H \mathbf{I}^{(2)} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}^{(2)} \quad (\text{A.9})$$

eingeführt. Entsprechend werden die *hydrostatische Spannung*

$$\sigma_H := \frac{1}{3} \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{A.10})$$

und der *Spannungsdeviator*

$$\mathbf{s} := \boldsymbol{\sigma} - \sigma_H \mathbf{I}^{(2)} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}^{(2)} \quad (\text{A.11})$$

definiert. Wegen  $\text{Sp}(\mathbf{I}^{(2)}) = 3$  gilt für Dehnungs- und Spannungsdeviator

$$\text{Sp}(\mathbf{e}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Sp}(\mathbf{s}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Aus den Definitionen (A.9) und (A.11) und den Eigenschaften der Einheits-tensoren (A.4) und (A.5) lassen sich die Beziehungen

$$\mathbf{e} = \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right) \cdot\cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{s} = \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right) \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.15})$$

ableiten.

# Anhang B

## Newton-Raphson-Verfahren

Die Lösung von Finite-Elemente-Problemen lässt sich auf die Bestimmung der Nullstelle einer mehrdimensionalen Funktion zurückführen. Das Newton-Raphson-Verfahren stellt ein iteratives Verfahren dar, um die Nullstelle einer Funktion zu finden. Das Verfahren wird im Folgenden erläutert.

Die *Freiheitsgrade* eines Finite-Elemente-Problems werden mit  $u_i, i = 1, \dots, n$  bezeichnet und im  $n$ -dimensionalen *Vektor der Knotenvariablen*  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  zusammengefasst. Die Lösung  $\tilde{\mathbf{u}}$  des Finite-Elemente-Problems ist so zu wählen, dass die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

erfüllt ist [98, 103, 104].  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$  stellt als Funktion der Knotenvariablen  $\mathbf{u}$  den Vektor der *verallgemeinerten Kräfte*  $F_i$  dar, die den Knotenvariablen  $u_i$  zugeordnet sind. Zur iterativen Bestimmung der Nullstelle  $\tilde{\mathbf{u}}$  von Gleichung (B.1) wird im Newton-Raphson-Verfahren [105–107] durch die Rekursionsformel

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - F'(\mathbf{u}_k)^{-1} F(\mathbf{u}_k) \quad (\text{B.2})$$

eine Folge  $\{\mathbf{u}_k\}$  definiert. Unter der Bedingung, dass die *Jacobi-Matrix*

$$F'(\mathbf{u}) := \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right) \quad (\text{B.3})$$

invertierbar ist, und weiteren Voraussetzungen [107, 108] konvergiert die Folge  $\{\mathbf{u}_k\}$  gegen die Lösung  $\tilde{\mathbf{u}}$  der Gleichgewichtsbedingung (B.1):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{u}}. \quad (\text{B.4})$$

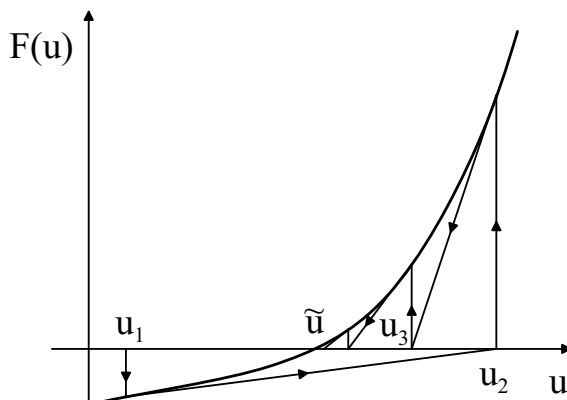


Abbildung B.1: Geometrische Interpretation des Newton-Raphson-Verfahrens

Die Rekursionsformel (B.2) besitzt im *eindimensionalen* eine einfache geometrische Interpretation [106]. Diese wird in Abbildung B.1 veranschaulicht. Um ausgehend von der Knotenvariable  $u_k \in \mathbb{R}$  eine bessere Näherung  $u_{k+1}$  zu erhalten, wird im Punkt  $u_k$  die Tangente an die Kurve  $F(u)$  gebildet. Der nach Vorschrift (B.2) berechnete Punkt  $u_{k+1}$  ist der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse. Wie in der Abbildung B.1 zu erkennen ist, konvergiert die Folge  $\{u_k\}$  gegen die Nullstelle  $\tilde{u}$  der Funktion  $F(u)$ .

Ein wesentlicher Vorzug des Newton-Raphson-Verfahrens liegt in seiner hohen Konvergenzgeschwindigkeit. Um die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens zu verdeutlichen, wird wieder der *eindimensionale* Fall betrachtet [106]. Die konvexe Funktion  $F \in C^3(J)$  sei auf dem kompakten Intervall  $J$  dreimal stetig differenzierbar und mit  $F' > 0$  streng monoton wachsend. Die durch

$$\Phi(u) := u - \frac{F(u)}{F'(u)} \quad (\text{B.5})$$

definierte Abbildung  $\Phi$  ist dann auf  $J$  zweimal stetig differenzierbar:  $\Phi \in C^2(J)$ . Die Nullstelle  $\tilde{u}$  der Funktion  $F$  ist mit dem Fixpunkt der Funktion  $\Phi$  identisch:

$$\Phi(\tilde{u}) = \tilde{u} \Leftrightarrow F(\tilde{u}) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Mit Definition (B.5) lässt sich die Newton-Raphson-Folge  $\{u_k\}$  als Fixpunkt-Iteration

$$u_{k+1} = \Phi(u_k) \quad (\text{B.7})$$

schreiben. Die Taylor-Entwicklung der Funktion  $\Phi$  um den Fixpunkt  $\tilde{u}$  führt auf

$$u_{k+1} = \Phi(u_k) = \Phi(\tilde{u}) + (u_k - \tilde{u}) \Phi'(\tilde{u}) + \frac{1}{2} (u_k - \tilde{u})^2 \Phi''(\tilde{u}) \quad (\text{B.8})$$

mit  $\tilde{u}' \in (\tilde{u}, u_k) \subset J$ . Daraus ergibt sich wegen  $\Phi(\tilde{u}) = \tilde{u}$  und  $\Phi'(\tilde{u}) = 0$  die Abweichung der neuen Näherungslösung  $u_{k+1}$  von der Lösung  $\tilde{u}$  als

$$u_{k+1} - \tilde{u} = \frac{1}{2} \Phi''(\tilde{u}') (u_k - \tilde{u})^2. \quad (\text{B.9})$$

Wegen  $\Phi \in C^2(J)$  ist  $\Phi''$  auf dem kompakten Intervall  $J$  stetig.  $\frac{1}{2}|\Phi''(\tilde{u}')|$  kann dann durch die positive Konstante

$$A := \frac{1}{2} \max_J |\Phi''(\tilde{u}')| > 0 \quad (\text{B.10})$$

abgeschätzt werden. Für die Abweichung der Iteration  $u_{k+1}$  von der Nullstelle  $\tilde{u}$  gilt dann die Ungleichung

$$|u_{k+1} - \tilde{u}| \leq A |u_k - \tilde{u}|^2. \quad (\text{B.11})$$

Aufgrund dieser Ungleichung wird das Newton-Raphson-Verfahren als *quadratisch konvergent* bezeichnet. Der Fehler einer nachfolgenden Iteration  $u_{k+1}$  nimmt quadratisch mit dem Fehler der vorangehenden Iteration  $u_k$  ab. Die quadratische Konvergenz lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall übertragen [108]. Die hohe Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Raphson-Verfahrens, die in seiner quadratischen Konvergenz zum Ausdruck kommt, stellt einen seiner wesentlichen Vorzüge dar.

Ein weiterer Vorzug liegt darin, dass es sich beim Newton-Raphson-Verfahren um ein Iterationsverfahren handelt, bei dem die nachfolgende Näherungslösung nur von der vorher gefundenen Lösung abhängt. Jede gefundene Näherungslösung kann als erster Schritt des Verfahrens angesehen werden. Es muss daher nicht bei jedem Iterationsschritt mit der angestrebten Genauigkeit gerechnet werden. Das hat zur Folge, dass Rundungsfehler sich nicht akkumulieren, sondern das Verfahren vorher gemachte Fehler vergisst. Dies trägt wesentlich zur Stabilität des Verfahrens bei. Die hohe Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität erklären die weite Verbreitung des Newton-Raphson-Verfahrens zur Lösung von FE-Problemen.

In dieser Arbeit wird zur Programmierung des viskoelastischen Materialmodells und zur Programmierung des viskoelastischen Schädigungsmodells ebenfalls das Newton-Raphson-Verfahren verwendet.

# Anhang C

## Diskretisierung der Viskoelastizität

Zur Lösung von zeitabhängigen FE-Problemen wird die kontinuierliche Zeit in diskrete Zeitschritte aufgeteilt. Für jedes Zeitinkrement wird die Gleichgewichtslösung durch Iteration ermittelt. In dieser Arbeit wird als Iterationsverfahren das so genannte Newton-Raphson-Verfahren verwendet, das in Anhang B beschrieben wird. Um dieses Verfahren auf Viskoelastizität anwenden zu können, muss das Materialmodell zunächst diskretisiert werden. Bei vorgegebener Dehnungsänderung ist dabei die Spannungsänderung für jedes Zeitinkrement zu berechnen. Daraus kann dann die Jacobi-Matrix (3.19) für schädigungsfreie Viskoelastizität berechnet werden, die für eine stabile Konvergenz des Verfahrens benötigt wird.

### C.1 Berechnung der Spannungsänderung $\Delta\sigma$

Für isotropes viskoelastisches Material ist der Relaxationsmodul  $\mathbf{R}(\tau)$  durch Gleichung (3.6) gegeben. Verwendung des isotropen Relaxationsmoduls (3.6) im viskoelastischen Faltungsintegral (3.1) führt auf den Ausdruck

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t 2G(\tau - \tau') \dot{\mathbf{e}} dt' + \mathbf{I}^{(2)} \int_0^t 3K(\tau - \tau') \dot{\epsilon}_H dt'. \quad (\text{C.1})$$

Hier wurde die hydrostatische Dehnung  $\epsilon_H$  und der Dehnungsdeviator  $\mathbf{e}$  verwendet (s. Anhang A). In Gleichung (C.1) lässt sich die Zeitintegration nach Definition (3.2) durch Integration über die effektive Zeit  $\tau$  ersetzen. Daraus

folgt der Ausdruck

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^\tau 2G(\tau - \tau') \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' + \mathbf{I}^{(2)} \int_0^\tau 3K(\tau - \tau') \frac{d\epsilon_H}{d\tau'} d\tau', \quad (\text{C.2})$$

der in Abschnitt 3.4.1 als Gleichung (3.20) verwendet wurde. Zur Berechnung der Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  wird die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  in eine hydrostatische Spannung  $\sigma_H$  und einen Spannungsdeviator  $\mathbf{s}$  aufgespalten und die Änderung der beiden Anteile getrennt berechnet [98].

### C.1.1 Änderung der hydrostatischen Spannung $\Delta\sigma_H$

Die hydrostatische Spannung ergibt sich nach Definition (A.10) aus Gleichung (C.2) als

$$\sigma_H = \int_0^\tau 3K(\tau - \tau') \frac{d\epsilon_H}{d\tau'} d\tau', \quad (\text{C.3})$$

wobei Beziehung (A.12) verwendet wurde. Unter der Annahme eines konstanten Kompressionsmoduls (3.13) folgt mit der Anfangsbedingung  $\epsilon_H(0) = 0$  der Ausdruck

$$\sigma_H = 3K_0 \epsilon_H. \quad (\text{C.4})$$

Daraus ergibt sich die Änderung der hydrostatischen Spannung

$$\Delta\sigma_H = 3K_0 \Delta\epsilon_H, \quad (\text{C.5})$$

die in Gleichung (3.23) behauptet wurde.

### C.1.2 Änderung des Spannungsdeviators $\Delta\mathbf{s}$

Der Spannungsdeviator  $\mathbf{s}$  ergibt sich nach Definition (A.11) aus Gleichung (C.2) als

$$\mathbf{s} = \int_0^\tau 2G(\tau - \tau') \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau', \quad (\text{C.6})$$

wobei die hydrostatische Spannung (C.3) verwendet wurde. Unter Verwendung der Prony-Serie (3.8) folgt daraus der Ausdruck

$$\mathbf{s} = \int_0^\tau 2 \left( G_\infty + \sum_{i=1}^m G_i e^{(\tau' - \tau)/\tau_i} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau'. \quad (\text{C.7})$$

Diese Gleichung kann mit den normierten Schubmodulen (3.28) und den *Prony-Dehnungen*

$$\mathbf{e}_i := \int_0^\tau \left(1 - e^{(\tau'-\tau)/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (\text{C.8})$$

zum Ausdruck

$$\mathbf{s} = 2G_0 \left( \mathbf{e} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \right) \quad (\text{C.9})$$

umgeformt werden, der in Gleichung (3.27) verwendet wurde. Hier wurde zudem die Definition (3.10) des initialen Schubmoduls  $G_0$  benutzt.

Damit die Änderung des Spannungsdeviators  $\Delta\mathbf{s}$  in einem Zeitinkrement ermittelt werden kann, muss die Änderung

$$\Delta\mathbf{e}_i := \mathbf{e}_i(t^{k+1}) - \mathbf{e}_i(t^k) \quad (\text{C.10})$$

der Prony-Dehnungen berechnet werden. Die Prony-Dehnungen  $\mathbf{e}_i(t^{k+1})$  zum Zeitpunkt  $t^{k+1}$  ergeben sich nach Definition (C.8) als Integral

$$\mathbf{e}_i(t^{k+1}) := \int_0^{\tau^{k+1}} \left(1 - e^{(\tau'-\tau^{k+1})/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau'. \quad (\text{C.11})$$

Dieses Integral kann in zwei Summanden zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t^{k+1}) &= \int_0^{\tau^k} \left(1 - e^{(\tau'-\tau^{k+1})/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \\ &\quad + \int_{\tau^k}^{\tau^{k+1}} \left(1 - e^{(\tau'-\tau^{k+1})/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau'. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Mit der Definition  $\Delta\tau = \tau^{k+1} - \tau^k$  gilt die Identität

$$1 - e^{(\tau'-\tau^{k+1})/\tau_i} = 1 - e^{-\Delta\tau/\tau_i} + e^{-\Delta\tau/\tau_i} \left(1 - e^{(\tau'-\tau^k)/\tau_i}\right). \quad (\text{C.13})$$

Im zweiten Summanden von Gleichung (C.12) kann die Zeitableitung des Dehnungsdeviators während des effektiven Zeitinkrements  $\Delta\tau$  durch

$$\frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} \approx \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta\tau} \quad (\text{C.14})$$

approximiert werden. Einsetzen der Identität (C.13) in den ersten Summanden von Gleichung (C.12) und Verwendung der Näherung (C.14) im zweiten



Summanden führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t^{k+1}) &= (1 - e^{-\Delta\tau/\tau_i}) \int_0^{\tau^k} \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \\ &+ e^{-\Delta\tau/\tau_i} \int_0^{\tau^k} \left(1 - e^{(\tau' - \tau^k)/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \\ &+ \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta\tau} \int_{\tau^k}^{\tau^{k+1}} \left(1 - e^{(\tau' - \tau^{k+1})/\tau_i}\right) d\tau'. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Das erste Integral in Gleichung (C.15) entspricht mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{e}(0) = 0$  dem Dehnungsdeviator

$$\mathbf{e}(t^k) = \int_0^{\tau^k} \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (\text{C.16})$$

zum Zeitpunkt  $t^k$  und das zweite Integral ist mit den Prony-Dehnungen

$$\mathbf{e}_i(t^k) = \int_0^{\tau^k} \left(1 - e^{(\tau' - \tau^k)/\tau_i}\right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (\text{C.17})$$

identisch. Durch Integration kann das dritte Integral zu

$$\int_{\tau^k}^{\tau^{k+1}} \left(1 - e^{(\tau' - \tau^{k+1})/\tau_i}\right) d\tau' = \Delta\tau - \tau_i (1 - e^{-\Delta\tau/\tau_i}) \quad (\text{C.18})$$

umgeformt werden. Einsetzen der Integrale (C.16), (C.17) und (C.18) in Gleichung (C.15) unter Verwendung der Definition (C.10) liefert die Änderung der Prony-Dehnungen

$$\Delta\mathbf{e}_i = \left[1 + \frac{\tau_i}{\Delta\tau} (e^{-\Delta\tau/\tau_i} - 1)\right] \Delta\mathbf{e} + (1 - e^{-\Delta\tau/\tau_i}) (\mathbf{e}(t^k) - \mathbf{e}_i(t^k)), \quad (\text{C.19})$$

die in Gleichung (3.32) behauptet wurde. Mit den Änderungen der Prony-Dehnungen  $\Delta\mathbf{e}_i$  ergibt sich nach Gleichung (C.9) die Änderung des Spannungsdeviators

$$\Delta\mathbf{s} = 2G_0 \left( \Delta\mathbf{e} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta\mathbf{e}_i \right), \quad (\text{C.20})$$

die als Gleichung (3.33) verwendet wurde. Aus der hydrostatischen Spannungsänderung  $\Delta\sigma_H$  und der Änderung des Spannungsdeviators  $\Delta\mathbf{s}$  lässt sich über die Gleichung

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\sigma_H \mathbf{I}^{(2)} + \Delta\mathbf{s} \quad (\text{C.21})$$

die Spannungsänderung  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  bei bekanntem effektiven Zeitinkrement  $\Delta\tau$  berechnen.

## C.2 Berechnung des effektiven Zeitinkrements $\Delta\tau$

Zur Berechnung der Änderung der Prony-Dehnungen  $\Delta\epsilon_i$  nach Ausdruck (C.19) wird das effektive Zeitinkrement  $\Delta\tau$  benötigt. Für konstante Temperatur ( $\Delta T = 0$ ) während des Zeitinkrements  $\Delta t$  kann das effektive Zeitinkrement  $\Delta\tau$  direkt aus Definition (3.2) berechnet werden. Daraus folgt die Änderung der effektiven Zeit

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{a_T(T(t^k))} \quad \text{für } \Delta T = 0. \quad (\text{C.22})$$

Findet im Zeitinkrement  $\Delta t$  eine Temperaturänderung ( $\Delta T \neq 0$ ) statt, wird der Zeitverlauf der WLF-Funktion  $h(T)$  im Zeitinkrement  $\Delta t$  durch eine lineare Funktion genähert [98]:

$$h(T(t)) = -\log(a_T(T(t))) = a + bt. \quad (\text{C.23})$$

Die Parameter der Geraden sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$a = \frac{1}{\Delta t} [t^{k+1} h(T(t^k)) - t^k h(T(t^{k+1}))] \quad (\text{C.24})$$

$$b = \frac{1}{\Delta t} [h(T(t^{k+1})) - h(T(t^k))]. \quad (\text{C.25})$$

Zur Berechnung des effektiven Zeitinkrements  $\Delta\tau$  muss entsprechend Gleichung (3.2) über das Zeitinkrement  $\Delta t$  integriert werden. Mit der Näherung (C.23) führt die Integration auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{dt'}{a_T(T(t'))} = \int_{t^k}^{t^{k+1}} 10^{a+bt'} dt' = \\ &= \frac{1}{b \ln(10)} \left( 10^{a+bt^{k+1}} - 10^{a+bt^k} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Dieser Ausdruck kann mit den Gleichungen (C.23) und (C.25) zur behaupteten Gleichung (3.35) für das effektive Zeitinkrement

$$\Delta\tau = \frac{a_T(T(t^{k+1}))^{-1} - a_T(T(t^k))^{-1}}{h(T(t^{k+1})) - h(T(t^k))} \Delta t \quad \text{für } \Delta T \neq 0 \quad (\text{C.27})$$

für nichtkonstante Temperatur umgeformt werden. Bei bekanntem effektiven Zeitinkrement ist damit die Spannungsänderung  $\Delta\sigma(\Delta\epsilon)$  in Abhängigkeit des Dehnungsinkrements  $\Delta\epsilon$  bekannt. Daraus kann die Jacobi-Matrix für schädigungsfreie Viskoelastizität berechnet werden.

### C.3 Berechnung der viskoelastischen Jacobi-Matrix $\mathbf{J}^V$

Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  ergibt sich nach Definition (3.19) durch partielle Ableitung des Spannungsinkrements  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  nach dem Dehnungsincrement  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ . Durch Aufspaltung der Spannung in eine hydrostatische Spannung und einen Spannungsdeviator entsprechend Gleichung (C.21) kann die Jacobi-Matrix als

$$\mathbf{J}^V = \frac{\partial\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial\Delta\mathbf{s}}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{I}^{(2)} \frac{\partial\Delta\sigma_H}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{C.28})$$

geschrieben werden. Der Einheitstensor  $\mathbf{I}^{(2)}$  und die partielle Ableitung der hydrostatischen Spannung sind über ein Tensorprodukt verbunden und bilden so einen Tensor vierter Stufe. Der hydrostatische Anteil und der Deviatoranteil der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  werden im Folgenden berechnet.

#### C.3.1 Hydrostatischer Anteil der Jacobi-Matrix

Der hydrostatische Anteil der Jacobi-Matrix ergibt sich durch Anwendung der Kettenregel als

$$\frac{\partial\Delta\sigma_H}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial\Delta\sigma_H}{\partial\Delta\epsilon_H} \frac{\partial\Delta\epsilon_H}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (\text{C.29})$$

Aus Gleichung (C.5) folgt

$$\frac{\partial\Delta\sigma_H}{\partial\Delta\epsilon_H} = 3K_0 \quad (\text{C.30})$$

und Definition (A.8) ergibt

$$\frac{\partial\Delta\epsilon_H}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)}. \quad (\text{C.31})$$

Einsetzen der Ausdrücke (C.30) und (C.31) in Gleichung (C.29) liefert die Gleichung

$$\frac{\partial\Delta\sigma_H}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} = K_0 \mathbf{I}^{(2)}. \quad (\text{C.32})$$

Damit ist der hydrostatische Anteil der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$  berechnet.

#### C.3.2 Deviatoranteil der Jacobi-Matrix

Der Deviatoranteil der Jacobi-Matrix kann durch Anwendung der Kettenregel in der Form

$$\frac{\partial\Delta\mathbf{s}}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial\Delta\mathbf{s}}{\partial\Delta\mathbf{e}} \cdot \frac{\partial\Delta\mathbf{e}}{\partial\Delta\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{C.33})$$

geschrieben werden. Der erste Term kann aus der Änderung des Spannungsdeviators (C.20) unter Verwendung der Prony-Dehnungen (C.19) berechnet werden:

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{s}}{\partial \Delta \mathbf{e}} = 2G_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \mathbf{I}^{(4)}. \quad (\text{C.34})$$

Der zweite Term folgt aus der Definition des Dehnungsdeviators (A.9) oder aus Beziehung (A.14) als

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{e}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)}. \quad (\text{C.35})$$

Aus den Eigenschaften (A.5) und (A.7) des Einheitstensors  $\mathbf{I}^{(4)}$  ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke (C.34) und (C.35) in Gleichung (C.33) der Deviatoranteil

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{s}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = 2G_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right) \quad (\text{C.36})$$

der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}^V$ . Durch Zusammenführen des hydrostatischen Anteils (C.32) und des Deviatoranteils (C.36) entsprechend Gleichung (C.28) folgt der Ausdruck für die viskoelastische Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}^V = K_0 \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} + 2G_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right), \quad (\text{C.37})$$

der in Gleichung (3.36) behauptet wurde.

# Anhang D

## Diskretisierung des Schädigungsmodells

Zur Diskretisierung des viskoelastischen Schädigungsmodells wird in Abschnitt 4.3.1 die Schädigungsmatrix  $\mathbf{M}^D$  berechnet. Dabei wird für die partielle Ableitung der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  nach der Dehnungsänderung  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$  der Ausdruck (4.38) verwendet. Diese Gleichung wird im Folgenden abgeleitet.

Die Änderung der äquivalenten inelastischen Dehnung  $\Delta p$  ist durch Gleichung (4.37) gegeben. Nach der Kettenregel folgt für die partielle Ableitung der äquivalenten inelastischen Dehnung der Ausdruck

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \mathbf{e}^{in}} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{e}^{in}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (\text{D.1})$$

Für den ersten Term in Gleichung (D.1) folgt mit Gleichung (4.37) die Beziehung

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \mathbf{e}^{in}} = \frac{2}{3\Delta p} \Delta \mathbf{e}^{in}. \quad (\text{D.2})$$

Der zweite Term lässt sich mit der Änderung der inelastischen Dehnung (4.39) und der Änderung der Prony-Dehnungen (3.32) als

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{e}^{in}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \frac{\partial \Delta \mathbf{e}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{D.3})$$

schreiben. Mit Gleichung (C.35) aus Anhang C folgt daraus der Ausdruck

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{e}^{in}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \left( \mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{I}^{(2)} \right). \quad (\text{D.4})$$

Da die Änderung der inelastischen Dehnung  $\Delta \mathbf{e}^{in}$  nach Gleichung (3.31) ein Deviator ist, verschwindet seine Spur mit

$$\text{Sp}(\Delta \mathbf{e}^{in}) = 0. \quad (\text{D.5})$$

Einsetzen der Gleichungen (D.2) und (D.4) in den Ausdruck (D.1) liefert mit den Eigenschaften (A.4) und (A.5) der Einheitstensoren und der Gleichung (D.5) den Ausdruck

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{2}{3\Delta p} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ 1 + \frac{\tau_i}{\Delta \tau} (e^{-\Delta \tau / \tau_i} - 1) \right] \right\} \Delta \mathbf{e}^{in}, \quad (\text{D.6})$$

der in Gleichung (4.38) behauptet wurde.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Palmgren. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Zeitschrift VDI*, 68:339–341, 1924.
- [2] M.A. Miner. Cumulative Damage in Fatigue. *J. Appl. Mech.*, 12:A159–A164, 1945.
- [3] J. Hult. Introduction and General Overview. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre, editor, *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications*, number 295 in Courses and Lectures, International Centre for Mechanical Sciences, pages 1–36. Springer, Wien - New York, 1987.
- [4] L.M. Kachanov. Time of the Rupture Process under Creep Conditions. *Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn.*, 8:26–31, 1958.
- [5] L. M. Kachanov. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.
- [6] J. Skrzypek and A. Ganczarski. *Modelling of Material Damage and Failure of Structures - Theory and Applications*. Springer, Berlin, 1999.
- [7] H. Altenbach and J.J. Skrzypek. *Creep and Damage in Materials and Structures*. Number 399 in Courses and Lectures - International Centre for Mechanical Sciences. Springer, Wien, 1999.
- [8] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Univ. Pr., Cambridge, 1994.
- [9] S.W. Park and R.A. Schapery. A Viscoelastic Constitutive Model For Particulate Composites With Growing Damage. *Int. J. Solid Structures*, 34(8):931–947, 1997.
- [10] S.W. Park, Y.R. Kim and R.A. Schapery. A Viscoelastic Continuum Damage Model and its Application to Uniaxial Behavior of Asphalt Concrete. *Mechanics of Materials*, 24:241–255, 1996.

- [11] R.A. Schapery. Constitutive Equations For Special Linear Viscoelastic Composites with Growing Damage. In B.L. Karihaloo, Y.W. Mai, M.I. Ripley and R.O. Ritchie, editor, *Advances in Fracture Research - Proceedings of the Ninth International Conference on Fracture, 1-5 April 1997, Sydney, Australia*, volume 6 - High Strain Rate Fracture and Impact Mechanics, pages 3019–3027. Pergamon, Amsterdam, 1997.
- [12] K. Ha and R.A. Schapery. A Three-Dimensional Viscoelastic Constitutive Model for Particulate Composites with Growing Damage and its Experimental Validation. *Int. J. Solids Structures*, 35(26-27):3497–3517, 1998.
- [13] R.A. Schapery. Simplifications in the Behavior of Viscoelastic Composites with Growing Damage. In G.J. Dvorak, editor, *Proceedings of IUTAM Symposium in Inelastic Deformation of Composite Materials, Troy, New York*, pages 193–214. Springer, New York-Wien, 1990.
- [14] K. Abdel-Tawab and Y.J. Weitsman. A Strain-Based Formulation for the Coupled Viscoelastic Damage Behavior. *Journal of Applied Mechanics*, 68:304–311, 2001.
- [15] J.J. Skrzypek. *Plasticity and Creep - Theory, Examples and Problems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
- [16] L.F. Coffin. A Study of Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 76:930–950, 1954.
- [17] S.S. Manson. Behavior of Materials under Conditions of Thermal Stress. Report 1170, National Advisory Commission on Aeronautics, Cleveland: Lewis Flight Propulsion Laboratory, 1954.
- [18] W. Engelmaier. Figures of Merit Design Tools for Surface Mount Solder Joint Reliability. *Soldering & Surface Mount Technology*, 10:17–22, 1992.
- [19] R. Darveaux, K. Banerji, A. Mawer and G. Dody. Reliability of Plastic Ball Grid Array Assembly. In J.H. Lau, editor, *Ball Grid Array*, 379–442. McGraw Hill, New York, 1995.
- [20] H.J. Albrecht, W. Dreyer, T. Hauck, J. Jendryny, W.H. Müller, R. Tilgner. Modelling the Lifetime of Microelectronic Components: A Challenge for Material Science and Computational Engineering. In T. Winkler and A. Schubert, editor, *Materials Mechanics, Fracture Mechanics*,



- Micro Mechanics*, pages 69–82. Fraunhofer IZM and Chemnitzer Werkstoffmechanik GmbH, Berlin/Chemnitz, 1999.
- [21] J. Auersperg, T. Winkler and D. Vogel. Damage and Fracture Evaluation in Microelectronic Assemblies by FEA and Experimental Investigations. In T. Winkler and A. Schubert, editor, *Materials Mechanics, Fracture Mechanics, Micro Mechanics*, pages 222–230. Fraunhofer IZM and Chemnitzer Werkstoffmechanik GmbH, Berlin/Chemnitz, 1999.
- [22] R. Dudek, M. Nylén, A. Schubert, B. Michel, H. Reichl. An Efficient Approach to Predict Solder Fatigue Life and its Application to SMD and Area Array Components. In T. Winkler and A. Schubert, editor, *Materials Mechanics, Fracture Mechanics, Micro Mechanics*, pages 365–374. Fraunhofer IZM and Chemnitzer Werkstoffmechanik GmbH, Berlin/Chemnitz, 1999.
- [23] Z. Qian and S. Liu. Life Prediction of Solder Interconnects for Advanced Packaging. In T. Winkler and A. Schubert, editor, *Materials Mechanics, Fracture Mechanics, Micro Mechanics*, pages 462–470. Fraunhofer IZM and Chemnitzer Werkstoffmechanik GmbH, Berlin/Chemnitz, 1999.
- [24] J. Auersperg, J. Simon, A. Schubert and B. Michel. Thermo-Mechanical Reliability Analysis and Structural Optimisation of CSP. In B. Michel and T. Winkler, editor, *Proceedings of the International Conference and Exhibition Micro Materials 1997*, pages 375–378, Berlin, 1997. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V and Fraunhofer IZM, Goldenbogen, Dresden.
- [25] J. Jendryny, W.H. Müller and H.J. Albrecht. Models and Concepts for Lifetime Prediction of SMT Solder Joints: A Comparison and Critical Evaluation. In B. Michel and T. Winkler, editor, *Proceedings of the International Conference and Exhibition Micro Materials 1997*, pages 907–912, Berlin, 1997. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V and Fraunhofer IZM, Goldenbogen, Dresden.
- [26] D. Krajcinovic. Continuum Damage Mechanics: When and How? *Int. J. Damage Mechanics*, 4:217–229, 1995.
- [27] J. Altenbach and H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [28] J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin, 1996.

- [29] J.L. Chaboche. Continuum Damage Mechanics, Part I - General concepts. *J. Appl. Mech.*, 55:59–64, 1988.
- [30] A.L. Gurson. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Trans. ASME, J. Eng. Mat. and Tech.*, 99(1):2–15, 1977.
- [31] V. Tvergaard. Material Failure by Void Coalescence in Localized Shear Bands. DCAMM Report No. 221, Techn. Univ. of Denmark, Lyngby, 1-26, 1981.
- [32] V. Tvergaard. Numerical Study of Localization in a Void Sheet. DCAMM Report No. 377, Techn. Univ. of Denmark, Lyngby, 1-19, 1988.
- [33] J.A. Nemes, J. Eftis, P.W. Randles. Viscoplastic Constitutive Modeling of High Strain-Rate Deformation, Material Damage and Spall Fracture. *Trans. ASME*, 57(6):282–291, 1990.
- [34] Ju.N. Rabotnov. Creep Rupture. In *Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech.*, pages 342–349, Stanford, Calif., 1968.
- [35] S.F. Taher, M.H. Baluch and A.H. Al-Gadhib. Towards a Canonical Elastoplastic Damage Model. *Eng. Fracture Mechanics*, 48(2):151–166, 1994.
- [36] J.P. Cordebois and F. Sidoroff. Damaged Induced Elastic Anisotropy. In J.P. Boehler, editor, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, pages 761–774. Martinus Nijhoff, 1983.
- [37] C.L. Chow and T.J. Lu. An Analytical and Experimental Study of Mixed-mode Ductile Fracture under Nonproportional Loading. *Int. J. Damage Mech.*, 1:191–236, 1992.
- [38] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain- and Stress-based Continuum Damage Models. I. Formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 23(7):821–840, 1987.
- [39] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain- and Stress-based Continuum Damage Models. II. Computational Aspects. *Int. J. Solids Struct.*, 23(7):841–869, 1987.
- [40] J.L. Chaboche. *Description Thermodynamique et Phenomenologique de la Viscoplasticite Cyclique avec Endommagement*. These, Univ. Paris VI, Publication ONERA, No. 3, 1978.

- [41] J. Lemaitre. Evaluation of Dissipation and Damage in Metals. In *Proc. I.C.M. Kyoto*, volume 1, Japan.
- [42] S. Murakami, N. Ohno. A Continuum Theory of Creep and Creep Damage. In A.R.S. Ponter and D.R. Hayhurst, editor, *Creep in Structures*, pages 442–444. Springer, Berlin, 1981.
- [43] S. Murakami. Anisotropic Aspects of Material Damage and Application of Continuum Damage Mechanics. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre, editor, *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications*, number 295 in Courses and Lectures, International Centre for Mechanical Sciences, pages 91–133. Springer, Wien - New York, 1987.
- [44] S. Murakami. Mechanical Modelling of Material Damage. *J. Appl. Mech.*, 55(6):280–286, 1988.
- [45] J.L. Chaboche. The Concept of Effective Stress Applied to Elasticity and Viscoplasticity in the Presence of Anisotropic Damage. In J.P. Boehler, editor, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, pages 737–760. Martinus Nijhoff, 1982.
- [46] C.L. Chow and Y. Wei. Constitutive Modeling of Material Damage for Fatigue Failure Prediction. *International Journal of Damage Mechanics*, 8:355–375, October 1999.
- [47] G.Z. Voyiadjis and P.I. Kattan. A Plasticity-Damage Theory for Large Deformation of Solids, Part I: Theoretical Formulation. *Int. J. Eng. Sci.*, 30(9):1089–1108, 1992.
- [48] J.L. Chaboche. Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage. *Int. J. Damage Mech.*, 2:311–329, 1993.
- [49] X.F. Chen and C.L. Chow. On Damage Strain Energy Release Rate  $Y$ . *Int. J. Damage Mech.*, 4(3):251–263, 1995.
- [50] G.Z. Voyiadjis and T. Park. Anisotropic Damage for the Characterization of the Onset of Macro-Crack Initiation in Metals. *Int. J. Damage Mech.*, 5(1):68–92, 1996.
- [51] G.Z. Voyiadjis and T. Park. Kinematics of Large Elastoplastic Damage Deformation. In G.Z. Voyiadjis, J.W.W. Ju and J.L. Chaboche, editor, *Damage Mechanics in Engineering Materials*, pages 45–64. Elsevier Science, Amsterdam, 1998.

- [52] ASTM International, West Conshohocken. *E 466-96: Standard Practice for Conducting Force Controlled Constant Amplitude Axial Fatigue Tests of Metallic Materials*, 2002.
- [53] ISO - International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland. *ISO 1099-1975(E): Metals - Axial Load Fatigue Testing*, 1st edition, 1975.
- [54] ASTM International, West Conshohocken. *E 606-92: Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing*, 1998.
- [55] X. Zhang, S.W.R. Lee and Y.H. Pao. A Damage Evolution Model for Thermal Fatigue Analysis of Solder Joints. *Transactions of the ASME. Journal of Electronic Packaging*, 122(3):200–206, Sept. 2000.
- [56] J.H. Lau and Y.H. Pao. *Solder Joint Reliability of BGA, CSP, Flip Chip and Fine Pitch SMT Assemblies*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [57] Y.H. Pao et al. Measurement of Mechanical Behavior of High Lead Lead-Tin Solder Joints Subjected to Thermal Cycling. *ASME J. Electron. Packag.*, 114:135–144, 1992.
- [58] Y.H. Pao, R. Govila, S. Badgley and E. Jih. An Experimental and Finite Element Study of Thermal Fatigue of PbSn Solder Joints. *ASME J. Electron. Packag.*, 115:1–8, 1993.
- [59] Y.H. Pao, S. Badgley, R. Govila and E. Jih. An Experimental and Modeling Study of Thermal Cyclic Behavior of Sn-Cu and Sn-Pb Solder Joints. In P. Borgesen et al., editor, *MRS Symposium Proceedings, Electronic Packaging Materials Science VII*, volume 323, pages 153–158, 1994.
- [60] K. Santaoja. *Thermomechanics of Solid Materials with Application to the Gurson-Tvergaard Material Model*, volume 312 of *VTT Publications*. Technical Research Centre of Finland, 1997.
- [61] J. Lemaitre. Local Approach of Fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5/6):523–537, 1986.
- [62] H.Y. Agha, F. Hild and R. Billardon. Microscopic and Mesoscopic Damage Localization. In D.L. McDowell, editor, *Fatigue and Fracture*, volume 1315 of *STP*, pages 119–130. ASTM, West Conshohocken, U.S.A., 1997.

- [63] S.R. Bodner. Evolution Equations for Isotropic and Anisotropic Damage Growth. In J. Lemaitre, editor, *EUROMECH Colloquium on Damage Mechanics*, Cachan, France, 1981.
- [64] S. Murakami. Effects of Cavity Distribution in Constitutive Equations of Creep and Creep Damage. In J. Lemaitre, editor, *EUROMECH Colloquium on Damage Mechanics*, Cachan, France, 1981.
- [65] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. A Nonlinear Model of Creep-Fatigue Damage Cumulation and Interaction. In *Proc. IUTAM Symp. on Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies*. Springer, Gothenburg, 1974.
- [66] J.L. Chaboche. Continuum Damage Mechanics, Part II - Damage Growth, Crack Initiation and Crack Growth. *J. Appl. Mech.*, 55:65–72, 1988.
- [67] P. Germain, Q.S. Nguyen and P. Suquet. Continuum Thermodynamics. *ASME J. Appl. Mech.*, 50:1010–1020, 1983.
- [68] J. Dufailly and J. Lemaitre. Modeling very low Cycle Fatigue. *Int. J. Damage Mech.*, 4:153–170, 1995.
- [69] J. Lemaitre. Formulation and Identification of Damage Kinetic Constitutive Equations. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre, editor, *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications*, number 295 in Courses and Lectures, International Centre for Mechanical Sciences, pages 37–89. Springer, Wien - New York, 1987.
- [70] W.H. Tai and B.X. Yang. A New Microvoid-damage Model for Ductile Fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(3):377–384, 1986.
- [71] L. Boltzmann. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, Sitzungsbericht. *Kaiserlich. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl.*, 70(2):275–306, 1874.
- [72] Y. M. Haddad. *Viscoelasticity of Engineering Materials*. Chapman & Hall, London, 1995.
- [73] R.A. Schapery. Viscoelastic Behavior and Analysis of Composite Materials. In G.P. Sendeckyi, editor, *Mechanics of Composite Materials*, volume 2, chapter 4, pages 85–168. Academic, New York, 1974.
- [74] J. Betten. *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer, Berlin, 1993.

- [75] J. Betten. *Tensorrechnung für Ingenieure*. Teubner, Stuttgart, 1987.
- [76] Y.C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [77] A. D. Drozdov. *Stability in Viscoelasticity*, volume 38 of *Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [78] G.J. Creus. *Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures*, volume 16 of *Lecture Notes in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [79] D. Gross and Th. Seelig. *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer Verlag, Berlin, 3rd edition, 2001.
- [80] O. Wittler, P. Sprafke, H. Walter, A. Gollhardt, D. Vogel and B. Michel. Time and Temperature Dependent Mechanical Characterization of Polymers for Microsystems Applications. In *Materials Week 2000, International Congress on Advanced Materials, their Processes and Applications*, München, Germany, 25-28 September 2000. Werkstoffwoche-Partnerschaft GbR.
- [81] M. Sonner, A. Gollhardt, D. Vogel, P. Sprafke, B. Michel and H. Reichl. Life Time Prediction on Polymer Encapsulated Components. In *Materials Week 2001, International Congress on Advanced Materials, their Processes and Applications*, number 732, München, Germany, 1-4 September 2001. Werkstoffwoche-Partnerschaft GbR.
- [82] C.L. Lawson and R.J.Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, 1974.
- [83] O. Wittler. *Bruchmechanische Analyse von viskoelastischen Werkstoffen in elektronischen Bauteilen*. Dissertation, Fakultät IV: Elektrotechnik und Informatik, Technische Universität Berlin, 2003. To be published.
- [84] J.D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1980.
- [85] A.D. Drozdov. *Mechanics of Viscoelastic Solids*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [86] K. Levenberg. A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares. *Quarterly Applied Math.*, 2:164–168, 1944.

- [87] J.J. More. The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory. In G.A. Watson, editor, *Numerical Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 630, pages 105–116. Springer Verlag, 1977.
- [88] J.E. Dennis, Jr. Nonlinear Least Squares. In D. Jacobs, editor, *State of the Art in Numerical Analysis*, pages 269–312. Academic Press, 1977.
- [89] T.F. Coleman and Y. Li. On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *Mathematical Programming*, 67(2):189–224, 1994.
- [90] T.F. Coleman and Y. Li. An Interior Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6:418–445, 1996.
- [91] M. Sonner, P. Sprafke, B. Michel. Damage Mechanical Material Characterization and Structural Finite Element Analysis of Polymer Encapsulation Materials. In B. Courtois, J.M. Karam, K.W. Markus, B. Michel, T. Mukherjee, J.A. Walker, editor, *Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS 2002*, volume 4755, pages 576–583, Cannes, France, 6-8 May 2002. Proceedings of SPIE.
- [92] M. Dost, E. Kieselstein and R. Erb. Displacement Analysis by Means of Grey Scale Correlation at Digitized Images and Image Sequence Evaluation for Micro- and Nanoscale Applications. In B. Michel, editor, *Mechanical Reliability, Simulation, Characterisation, Testing*, volume 1 of *Micromaterials and Nanomaterials*, pages 30–35. Micro Materials Center at Fraunhofer IZM, Berlin, 2002.
- [93] D. Vogel, J. Auersperg, A. Schubert, B. Michel and H. Reichl. Deformation Analysis on Flip Chip Solder Interconnects by microDAC. In R.K. Mahidhara, editor, *Design & Reliability of Solder and Solder Interconnects*, pages 429–438. TMS Publication, 1997.
- [94] D. Vogel, C. Jian and I. de Wolf. Experimental Validation of Finite Element Modeling. In G.Q. Zhang, editor, *Benefiting from Thermal and Mechanical Simulations in Micro-Electronics*, pages 113–133. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [95] D. Vogel, J. Auersperg, and B. Michel. Characterization of Electronic Packaging Materials and Components by Image Correlation Methods. In *Advanced Photonic Sensors and Application II, Nov. 27-30 2001, Singapore*, volume 4596 of *Proc. of SPIE*, pages 237–247, 2001.

- [96] D. Vogel, R. Kühnert, M. Dost and B. Michel. Determination of Packaging Material Properties Utilizing Image Correlation Techniques. *Journal of Electronic Packaging*, 124:345–351, Dec. 2002.
- [97] D. Vogel, J. Keller, A. Gollhardt and B. Michel. Displacement and Strain Field Measurements for Nanotechnology Applications. In *IEEE-Nano 2002, Aug 25-28, 2002, Arlington, USA*, Proc. of IEEE, pages 37–40, 2002.
- [98] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, U.S.A. *ABAQUS - Theory Manual, Version 5.8*, 1998.
- [99] N. Depoorter, M. Sonner, P. Sprafke and Pr. Coutellier. Simulating Damage Accumulation on Abaqus. Diplomarbeit, ENSIMEV (Ecole Nationale Supérieure d’Ingénieurs en Mécanique Energétique de Valenciennes), France, 2002.
- [100] DIN 53504. *Prüfung von Kautschuk und Elastomeren: Bestimmung von Reißfestigkeit, Zugfestigkeit, Reißdehnung und Spannungswerten im Zugversuch*. Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin, Mai 1994.
- [101] T.L. Anderson. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Inc., New York, 2nd edition, 1995.
- [102] C.E. Inglis. Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects*, 55:219–241, 1913.
- [103] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente - Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*, volume 47 of *Teubner Studienbücher Mathematik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 3rd edition, 1991.
- [104] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1-Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill Book Company, London, 4th edition, 1989.
- [105] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1999.
- [106] W. Walter. *Analysis 1*, volume 3 of *Grundwissen Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1990.



- [107] W. Walter. *Analysis 2*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992.
- [108] J. Stoer. *Einführung in die Numerische Mathematik I*, volume 105 of *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

# Danksagung

An dieser Stelle danke ich allen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Prof. B. Michel führte mich in die faszinierende Welt der Bruch- und Schädigungsmechanik ein. Sein Engagement und seine Unterstützung waren Grundstein dieser Arbeit. Bei Prof. H. Reichl bedanke ich mich für richtungsweisende Gespräche und die intensive Betreuung. Prof. E. Sigmund danke ich für die fruchtbare Zusammenarbeit und zahlreiche Anregungen.

Dr. D. Vogel und Astrid Gollhardt unterstützten mich bei den Experimenten zur Grauwert-Korrelation. Sie haben wesentlich zum experimentellen Teil der Arbeit beigetragen.

Peter Sprafke und Dr. W. Endres danke ich für die exzellente Einarbeitung. Nicolas Depoorter hat mich bei der Programmierung des viskoelastischen Materialmodells unterstützt. Dr. A. Zimmermann und Dr. M. Mužic von der Robert Bosch GmbH danke ich für die kooperative Zusammenarbeit.

Olaf Wittler und Hans Walter standen mir bei fachlichen und technischen Fragen hilfreich zur Seite. Allen anderen Mitarbeitern am Fraunhofer Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration danke ich für die ständige Hilfsbereitschaft und das anregende Arbeitsumfeld.

Bernd Kämpfe bin ich in Freundschaft verbunden. Ich danke ihm für das zeitaufwendige Korrekturlesen der Arbeit. Mit zahlreichen kritischen Anregungen hat er zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Mein Vater begleitete mich bei meinen ersten Schritten in die Welt der Mathematik. Ihm fühle ich mich in tiefem Respekt und Liebe verbunden. Sein abschließendes Korrekturlesen der Arbeit schließt den Kreis.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern für ihre allumfassende Liebe und Unterstützung. Ihnen ist diese Arbeit gewidmet.