

Ordnungsreduktion geometriebasierter Differentialgleichungssysteme unter Berücksichtigung schwacher Nichtlinearitäten

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Physiker
Horst Müller

geboren am 02. Oktober 1974 in Buchen im Odenwald

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Michael Bestehorn

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Michael Fröhner

Gutachter: PD Dr. rer. nat. habil. Ralf Bergmann

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Januar 2005

PACS

02.30.Yy: Control theory

89.20.Bb: Industrial and technological research and development

für Tina
für die gemeinsame Zeit

Zusammenfassung / Abstract

Ordnungsreduktion geometriebasierter Differentialgleichungssysteme unter Berücksichtigung schwacher Nichtlinearitäten

Diese Arbeit untersucht Methoden der Ordnungsreduktion schwach nichtlinearer Finite-Elemente und Finite-Differenzen Systeme.

Die Nichtlinearitäten werden in einheitlicher Weise mittels einer Taylor Reihenentwicklung parametrisiert. Diese Darstellung dient als Normalform, auf der die Methoden der Ordnungsreduktion operieren.

Die Modelle hoher Ordnung werden mittels projektionsbasierter Verfahren auf Systeme mit nur noch wenigen Freiheitsgraden reduziert. Diese Verfahren beruhen auf Krylov-Unterraum Methoden (Arnoldi-Verfahren) und Methoden der Zustandsauswahl (Guyan-Verfahren) für den linearen Fall. Darüberhinaus werden zwei weitere Methoden der nichtlinearen Ordnungsreduktion vorgestellt, das Verfahren der adiabatischen Elimination schnell relaxierender Variablen und das Verfahren der nichtlinearen Frequenzgangs Anpassung.

Die Eignung der projektiven Reduktionsmethoden wird anhand von akademischen und industrierelevanten Beispielen demonstriert.

Model Order Reduction of Geometry-Based Systems including Weak Nonlinearities

We describe techniques of model order reduction (MOR) for weakly nonlinear finite element and finite difference models.

Nonlinearities are uniquely parameterized by means of a Taylor series expansion. The MOR-methods operate on this standard-representation.

We use projection-based MOR methods to get manageable nonlinear behavioral models. These approaches are based on Krylov-subspace (Arnoldi-method) and state-selection (Guyan-method) techniques for the linear case. Moreover, we propose other MOR approaches for the nonlinear case: MOR by adiabatic elimination of fast relaxing variables and a nonlinear approach in the frequency domain.

The applicability of the projection-based methods is demonstrated on both, academic and industrial examples.

Kurzfassung

Unter dem Begriff „Ordnungsreduktion“ werden halbautomatische Methoden verstanden, um Differentialgleichungssysteme mit vielen Freiheitsgraden durch Verhaltensmodelle zu approximieren, also durch Differentialgleichungssysteme mit deutlich weniger Freiheitsgraden. Abhängig von den Einsatzbereichen des Verhaltensmodells erfolgt diese Approximation unter verschiedenen Gesichtspunkten; deshalb sind in den vergangenen Jahrzehnten insbesondere für lineare Systeme eine Vielzahl von Verfahren der Ordnungsreduktion entwickelt worden.

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, Methoden der Ordnungsreduktion für geometriebasierte Modelle bereitzustellen, also für numerische Modelle, die auf einer Ortsdiskretisierung beruhen, beispielsweise auf der Basis des Finite-Elemente oder des Finite-Differenzen Verfahrens. Die betrachteten Modelle entstammen verschiedenen, insbesondere für technische Anwendungen interessanten Bereichen der Physik. Dabei werden insbesondere schwache Nichtlinearitäten — Nichtlinearitäten, die das quantitative, jedoch nicht das qualitative Systemverhalten beeinflussen — in die Betrachtung mit einbezogen. Die Verhaltensmodelle sollen in erster Linie das Systemverhalten für stationäre oder langsam veränderliche Zustände (näherungsweise) korrekt wiedergeben, um beispielsweise Echtzeitsimulationen für regelungstechnische Anwendungen zu ermöglichen.

Besondere Aufmerksamkeit wird dem Gesamtprozess gewidmet: Es wird ein durchgängiges Gesamtverfahren der Modellreduktion entwickelt, vom geometriebasierten Ausgangsmodell bis zum Verhaltensmodell.

Eine einheitliche Normalform des der Ordnungsreduktion zugrunde liegenden Systems wird vorgestellt. Diese Normalform berücksichtigt einerseits durch Einführung einer Trägheitsmatrix die Besonderheiten geometriebasierter Modelle, nämlich die große Zahl von Freiheitsgraden und die oftmals spärliche Besetzung der Systemmatrizen. Andererseits wird eine einheitliche Parametrisierung nichtlinearer Terme eingeführt, die auf einem Potenzreihenansatz beruht. Darüberhinaus können einfache Randbedingungen in der Systemdarstellung berücksichtigt werden.

Als Schnittstelle zu kommerziellen Programmpaketen zur Simulation geometriebasierter Modelle werden Methoden für die Überführung des geometriebasierten Ausgangsmodells in die Normalform erarbeitet, insbesondere für die Parametrisierung der nichtlinearen Systemanteile durch den Potenzreihenansatz der Normalform. Ausgangspunkt der Parametrisierung ist dabei jeweils eine Serie linearisierter Ausgangsmodelle in verschiedenen Arbeitspunkten, wie sie von einigen kommerziellen Programmpaketen erhalten werden können.

Für die eigentliche Ordnungsreduktion werden zunächst bereits bekannte Methoden auf den Fall geometriebasierter, schwach nichtlinearer Modelle angepasst. Es werden insbeson-

KURZFASSUNG

dere zwei für den linearen Fall entwickelte Verfahren betrachtet, das Guyan-Verfahren und das Arnoldi-Verfahren. Die ihnen zugrunde liegenden Konzepte werden erläutert und auf der Basis eines einheitlichen Formalismus diskutiert. Dieser Formalismus beruht auf Projektionen zwischen den Zustandsräumen des vollen und des reduzierten Systems; er lässt sich in Verbindung mit der Potenzreihendarstellung der Nichtlinearitäten in naheliegender Weise auf nichtlineare Systeme verallgemeinern. Neben diesen Ansätzen werden zwei weitere Verfahren der nichtlinearen Ordnungsreduktion vorgeschlagen, das Verfahren der adiabatischen Elimination schnell relaxierender Variablen und das Verfahren der Frequenzgangsanpassung.

Die Methoden der Parametrisierung und Ordnungsreduktion werden anhand von Beispielen aus verschiedenen Bereichen der Physik demonstriert: Zwei Beispiele behandeln die Wärmeausbreitung unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten und Wärmestrahlung; das erste Beispiel hat vorbereitenden, akademischen Charakter, das zweite Beispiel entstammt einer industriellen Anwendung. Ein weiteres industrierelevantes Beispiel betrachtet die Ausbreitung magnetischer Felder in Materie, auch hier unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten. Auch dieser Anwendung liegt eine Diffusionsgleichung zugrunde, die sich jedoch im nichtlinearen Fall von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet. Das letzte Beispiel betrachtet ein einfaches mechanisches Modell auf der Grundlage der Schwingungsgleichung und damit im Unterschied zu den vorherigen Anwendungen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; in diesem Fall werden durch eine Randbedingung induzierte Nichtlinearitäten betrachtet.

Den Kern dieser Arbeit bildet die Entwicklung von Methoden der Ordnungsreduktion für geometriebasierte Modelle mit schwachen Nichtlinearitäten und die erfolgreiche Anwendung dieser Methoden auf industrierelevante Beispiele. Damit wird demonstriert, dass Methoden der Ordnungsreduktion auch im schwach nichtlinearen Fall für geometriebasierte Modelle geeignet sind.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung / Abstract	vii
Kurzfassung	ix
Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xvii
Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole	xix
1 Einleitung	1
1.1 Numerische Simulationen und Verhaltensmodelle	1
1.2 Begriffsbildungen zur Modellreduktion	3
1.3 Bekannte Ansätze zur Ordnungsreduktion	5
1.4 Aufgabenstellung und Aufbau der vorliegenden Arbeit	9
2 Modellreduktion in der Synergetik	13
2.1 Versklavungsprinzip der Synergetik	13
2.2 Strukturbildung in dünnen Filmen	16
3 Ordnungsreduktion linearer Systeme	25
3.1 Zustandsraumdarstellung zeitinvarianter linearer Systeme	25
3.2 Übertragungsfunktion	29
3.3 Ordnungsreduktion	31
3.4 Projektive Methoden der Ordnungsreduktion	33
3.5 Projektive Approximation der Übertragungsfunktion	40
3.6 Ordnungsreduktion nach Äquivalenztransformationen	49
3.7 Frequenzgangsanpassung	51
4 Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme	53
4.1 Systemdarstellung	53
4.2 Ordnungsreduktion	59
4.3 Ordnungsreduktion durch Projektion der Zustandsgleichung	61
4.4 Adiabatische Elimination schnell relaxierender Variablen	65
4.5 Frequenzgangsanpassung	68
4.6 Bewertung des reduzierten Systems	70

INHALTSVERZEICHNIS

5	Tensorielle Parametrisierung der Nichtlinearitäten	75
5.1	Parametrisierung anhand stationärer Lösungen und dazugehöriger Matrizen	75
5.2	Bestimmung vollständiger Tensoren	77
5.3	Bestimmung vereinfachter Z_s -Tensoren	78
6	Anwendungsbeispiele	83
6.1	Wärmeausbreitung in dreidimensionalem Stab	83
6.2	Wärmeausbreitung in einem Abgas-Sensor	94
6.3	Diffusion magnetischer Felder in Materie	104
6.4	Biegebalken unter Einfluss einer Zwangsbedingung	114
7	Diskussion	127
7.1	Zusammenfassung	127
7.2	Ausblick	131
A	Transformationen linearer Systeme	133
A.1	Eichtransformation	133
A.2	Koordinatentransformation	134
A.3	Äquivalenztransformation	134
A.4	Ähnlichkeitstransformation	135
A.5	Eigenwertproblem	136
A.6	Balancierte Darstellung	137
B	Momentenkriterium und Krylov-Unterraum Verfahren	139
B.1	Nichtbijektive Projektionen	139
B.2	Momentenkriterium und Krylov-Unterraum Verfahren	140
C	Störungstheorie zweiter Ordnung	141
C.1	Schwache Koppelung	141
C.2	Reihenentwicklung und Übertragungsverhalten	142
C.3	Eigenwertentwicklung der Tangenzustandsmatrix	144
D	Identifikation von Tensoren aus Kontraktionen niedrigerer Stufe	147
D.1	Problemstellung	147
D.2	Identifikation ohne Symmetriebedingungen	149
D.3	Identifikation vollsymmetrischer Tensoren	151
D.4	Identifikation teilsymmetrischer Tensoren	155
D.5	Verallgemeinerungen	156
E	Nichtlineare Wärmeausbreitung	159
E.1	Wärmeleitungsgleichung	159
E.2	Oberflächeneffekte	162

F	Diffusion magnetischer Felder	165
F.1	Diffusionsgleichung	165
F.2	Magnetischer Fluss	169
G	Schwingungsgleichung mechanischer Systeme	171
G.1	Zustandsraumdarstellung der Schwingungsgleichung	171
G.2	Proportionale Dämpfung	172
G.3	Nichtlinearitäten	173
	Nachwort und Danksagung	177
	Literaturverzeichnis	179
	Lebenslauf	187

Abbildungsverzeichnis

1.1	Mehrstufiger Prozess der Modellreduktion	5
2.1	Bifurkationsdiagramm und verallgemeinertes Potential	17
2.2	Maxwell-Konstruktion für schematischen Druckverlauf	21
2.3	Strukturbildung in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten	23
3.1	Veranschaulichung nichtbijektiver linearer Abbildungen	34
6.1	Finite-Elemente Modell und Abwicklung des Stabs	85
6.2	Stationäre Zustände der Temperaturverteilung des Stabs	91
6.3	Sprungantwort der Temperatur des Stabs	92
6.4	Gleichungsfehler und Reduktionsfehler der Sprungantwort des Stabes	93
6.5	Finite-Elemente Modell des Abgas-Sensors	95
6.6	Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeiten des Abgas-Sensors	100
6.7	Stationärer Zustände der Temperaturverteilung des Abgas-Sensors	101
6.8	Sprungantwort der Temperatur des Abgas-Sensors	102
6.9	Gleichungsfehler und Reduktionsfehler der Sprungantwort des Abgas-Sensors	103
6.10	Schematische Darstellung der Felddiffusion	105
6.11	Materialkennlinie für die Felddiffusion	109
6.12	Stationäre Zustände für verschiedene Randbedingungen der Felddiffusion	110
6.13	Sprungantwort der magnetischen Induktion der Felddiffusion	111
6.14	Sprungantwort des magnetischen Fluss der Felddiffusion	112
6.15	Fehler der Sprungantwort des magnetischen Fluss der Felddiffusion	113
6.16	Schematische Darstellung des Biegebalkens	115
6.17	Exemplarischer Verlauf eines Elements der Zustandsmatrix des Biegebalkens	121
6.18	Überblick über den Verlauf der Elemente der Zustandsmatrix des Biegebalkens	122
6.19	Imaginärteile der Eigenwerte der Tangenzustandsmatrizen des Biegebalkens	123
6.20	Frequenzantwort der Endauslenkung des Biegebalkens	124
6.21	Stationäre Zustände der Querauslenkung des Biegebalkens (Biegelinie)	125
6.22	Sprungantwort der Endauslenkung des Biegebalkens	126
B.1	Veranschaulichung der Eigenschaften nichtbijektiver linearer Abbildungen	139
D.1	Vektorisiertes Gleichungssystem	158

Tabellenverzeichnis

6.1	Materialeigenschaften und Modellparameter des Stabs	86
6.2	Ausgewählte Materialeigenschaften und Modellparameter des Stabes	96
6.3	Materialeigenschaften und Modellparameter der Felddiffusion	106
6.4	Materialeigenschaften und Modellparameter des Biegebalkens	116
7.1	Vergleich der projektiven Verfahren der Ordnungsreduktion	128
D.1	Komponenten der vektorisierten Beispiel-Tensoren	157

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

Verzeichnis der bedeutendsten in dieser Arbeit verwendeten Abkürzungen und Symbole. Symbole, die lediglich von lokaler Bedeutung sind — insbesondere viele der im Anhang verwendeten Symbole — werden hier nicht aufgeführt. Für Symbole, die durch Sub- oder Superskripte in mannigfaltiger Weise differenziert werden, sind in der ersten Tabelle nur die Hauptsymbole vermerkt; die Bedeutungen der Sub- und Superskripte werden in der zweiten Tabelle erläutert. Insbesondere werden Größen des vollen Systems durch den Subskript n , Größen des reduzierten Systems durch den Subskript m gekennzeichnet. In der dritten Tabelle werden einige selten verwendete Operatoren angeführt; in der vierten Tabelle werden schließlich Besonderheiten der in dieser Arbeit verwendeten Notation verzeichnet.

Abkürzungen und Akronyme

BL-Tensor	Bilineartensor \mathcal{B} der Stufe $\binom{1}{2}$
DOF	Referenznummer eines Freiheitsgrads („degree of freedom“)
NL-Tensor	Nichtlinearitätstensor; Zusammenfassung von Z_s -Tensoren \mathcal{A}_s und BL-Tensoren \mathcal{B}
Z_s -Tensor	Zustandstensor \mathcal{A}_s der Stufe $\binom{1}{s}$
Z_s/t -Matrix	Matrix $S_{s,t}$ zur Beschreibung des Z_s -Tensors \mathcal{A}_s im Rahmen des Matrizenansatz

Eigenständige lateinische und griechische Symbole

A	Zustandsmatrix
\overline{A}	Sekantenzustandsmatrix
\tilde{A}	Tangentenzustandsmatrix
\mathcal{A}_s	Z_s -Tensor: Zustandstensor der Stufe $\binom{1}{s}$
B	Eingangsmatrix
\mathcal{B}	BL-Tensor: Bilineartensor der Stufe $\binom{1}{2}$
C	Ausgangsmatrix
C_m^*	reduzierte Ausgangsmatrix bei Strukturhaltung
D	Durchgangsmatrix
$\vec{e}_{\vec{x}_m}$	reduzierte Gleichungsfehler der Zustandsgleichung
$\vec{e}_{\vec{x}_n}$	voller Gleichungsfehler der Zustandsgleichung

VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN UND SYMBOLE

\vec{e}_y	Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung
\vec{f}	Zustandsfunktion
F	frequenzabhängiger Anteil der Übertragungsfunktion
\vec{g}	Ausgangsfunktion
G	Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung
G₀	Stationäre Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung
G_k	Partialsumme der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung um die Entwicklungsfrequenz 0 bis zur Ordnung k
G_{σ, k}	Partialsumme der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion der Zustandsgleichung um die Entwicklungsfrequenz σ bis zur Ordnung k
\vec{h}	Trägheitsfunktion
H	Übertragungsfunktion der Ausgangsgleichung
H₀	Stationäre Übertragungsfunktion der Ausgangsgleichung
H_k	Partialsumme der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion der Ausgangsgleichung um die Entwicklungsfrequenz 0 bis zur Ordnung k
H_{σ, k}	Partialsumme der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion der Ausgangsgleichung um die Entwicklungsfrequenz σ bis zur Ordnung k
I	Einheitsmatrix bzw. Identitätsmatrix
J	Trägheitsmatrix
$\mathcal{K}_m(\mathbf{M}; \vec{w})$	Krylov-Unterraum der Dimension m zu Matrix \mathbf{M} und Vektor \vec{w}
L	Matrix der Linkseigenvektoren
\vec{l}_i	Linkseigenvektor zu Eigenwert λ_i
Λ	Diagonalmatrix der Eigenwerte
λ_i	Eigenwert i
m	Systemordnung des reduzierten Systems
n	Allgemeines Symbol für Anzahlen, spezifiziert durch Subskripte
n	Systemordnung eines allgemeinen Systems und insbesondere des vollen Systems
o	Stützfrequenz im Fourier-Raum
ω	Frequenz
ω_0	Anregfrequenz
p	Anzahl der Eingangsgrößen
p	dimensionsloser Skalierungsparameter
P	Auswahlmatrix als Spezialfall der Reduktionsmatrix
q	Anzahl der Ausgangsgrößen

\vec{r}	Reduktionsfehler
\mathbf{R}	Matrix der Rechtseigenvektoren
\mathbf{R}	Reduktionsmatrix
$\tilde{\mathbf{R}}$	transformierte Reduktionsmatrix
\vec{r}_i	Rechtseigenvektor zu Eigenwert λ_i
\mathcal{R}_m	Unterraum der Dimension m
s	Laplace-Variable
$\mathbf{S}_{s,t}$	Zs/t-Matrix zur Beschreibung des Zs-Tensors \mathcal{A}_s nach dem Matrizenansatz
σ	Entwicklungsfrequenz bzw. Stützfrequenz im Laplace-Raum
t	Zeit
\mathbf{T}	Ähnlichkeitstransformation
\mathbf{T}_e	Eichtransformation
\mathbf{T}_k	Koordinatentransformation
\vec{u}	Eingangsvektor
\mathbf{V}	Rekonstruktionsmatrix
\vec{x}	Zustandsvektor
\vec{y}	Ausgangsvektor

Sub- und Superskripte

ext	extern (externe Last)
dy	dynamisch
ld	Last
lin	linear
m	Größe des reduzierten Systems (Kennzeichnung durch die Ordnung m des reduzierten Zustandsvektors)
M	Master-Freiheitsgrad / Anteil
n	Größe des vollen Systems (Kennzeichnung durch die Ordnung n des vollen Zustandsvektors)
nl	nichtlinear
S	Slave-Freiheitsgrad / Anteil
st	stationär
vir	virtuell (virtuelle Last)
wk	Arbeitspunkt

Operatoren

$\text{colspan}(\mathbf{M})$	Durch die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{M} aufgespannter linearer Vektorraum
------------------------------	---

VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN UND SYMBOLE

$\text{diag}_{i=1}^n (a_i)$	Diagonalmatrix aus den Diagonalelementen a_i mit $1 \leq i \leq n$
$\Im \{ \cdot \}$	Imaginärteil
$\text{rank}(\mathbf{M})$	Rang der Matrix \mathbf{M}
$\mathcal{O}(\cdot)$	„von Ordnung...“
$\Re \{ \cdot \}$	Realteil
$\text{urbi}(\vec{w})$	Urbild des Ergebnisvektors \vec{w} unter einer linearen Abbildung

Besonderheiten der Notation

$\binom{o}{u}$	Stufenklammer: o obere Indizes (Anzahl der oberen Indizes), u untere Indizes (Anzahl der unteren Indizes)
$\binom{z_1 \dots z_o}{s_1 \dots s_u}$	Dimensionsklammer: z_i Zeilen (geordnete Folge der Dimensionen der oberen Indizes), s_j Spalten (geordnete Folge der Dimensionen der unteren Indizes)
$*[\cdot, \dots]$	Kontraktionsklammer: Kontraktion der unteren Indizes eines Tensors über die eingeschlossenenen Objekte
(\dots) bzw. $[\dots]$	Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsklammer: Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung eines Tensors über die eingeschlossenen Indizes
$\lceil \cdot \rceil$ bzw. $\lfloor \cdot \rfloor$	Runden zur nächsten ganzen Zahl Richtung $+\infty$ bzw. $-\infty$
$\vec{\tilde{w}}$	Tilde zur Kennzeichnung eines Objekts (hier des Vektors \vec{w}) als Ergebnis einer linearen Abbildung bzw. Transformation

In dieser Arbeit gilt (falls lokal nicht anders angegeben) die *Einsteinsche Summenkonvention*, das bedeutet, bei Formeln in Indexschreibweise ist über gleichlautende untere und obere Indizes über den Wertebereich des Index zu summieren. Beispielsweise gilt für das Ergebnis $\vec{w} \binom{z}{s}$ eines Matrix-Vektor-Produkts von Matrix $\mathbf{M} \binom{z}{s}$ mit Vektor $\vec{v} \binom{s}{1}$ neben $\vec{w} = \mathbf{M} \vec{v}$ die abkürzende Indexschreibweise $w^i = \sum_{j=1}^s M_j^i v^j \equiv M_j^i v^j$.

Kommata oder Strichpunkte zwischen Subskripten dienen in dieser Arbeit lediglich zur Gliederung derselben (Kommata) und zur Separierung von Subskripten zur differenzierten Bezeichnung von Objekten und Indizes zur Indizierung von Tensorkomponenten (Strichpunkte). Es handelt sich also *nicht* um die in der Differentialgeometrie gebräuchliche Kurzschreibweise partieller oder kovarianter Ableitungen.

1 Einleitung

1.1 Numerische Simulationen und Verhaltensmodelle

1.1.1 Numerische Simulationen in der Produktentwicklung

Numerische Simulationen gehören heute bei der Entwicklung technischer Produkte zu den Standardwerkzeugen. Ihr Einsatz dient zunächst der Vorhersage physikalisch-technischer Eigenschaften der Produkte, Eigenschaften, die vormals nur auf theoretischer Basis mittels vereinfachender, analytischer Modelle oder messtechnisch anhand unter großem Aufwand hergestellter Prototypen zugänglich waren.

Während analytische Modelle und reale Prototypen auch heute noch ihre Berechtigung im Produktentwicklungsprozess haben — erstere vornehmlich in der Voraufentwicklung, um ein qualitatives Verständnis der zugrunde liegenden physikalischen Vorgänge zu erhalten, letztere hauptsächlich in der Endphase der Entwicklung zur Verifikation des „vorläufig-endgültigen“ Entwurfs —, steht mit numerischen Simulationen ein relativ neues, mächtiges Werkzeug zur Verfügung. Numerische Simulationen können in Extremfällen in der Voraufentwicklung für die Modellbildung bisher unzugängliche Gebiete vorhersagbar machen. In Standardanwendungen stellen sie während der Produktentwicklung effiziente Methoden für Parameteroptimierungen dar.

Im Vergleich zu vereinfachenden, analytischen Modellen zeichnen sich numerische Simulationen im Allgemeinen durch eine höhere Genauigkeit aus. Gegenüber dem messtechnischen Ansatz an Prototypen liefern numerische Simulationen zunächst oft eine umfassendere und genauere Vorhersage; jedoch liegt hier der ausschlaggebende Vorteil numerischer Simulationen in dem im Vergleich zur messtechnischen Herangehensweise sehr viel geringeren Aufwand: Die Herstellung und Vermessung realer Prototypen ist geld-, zeit- und technologieintensiv. Die Vorhersagegenauigkeit und Effizienz numerischer Simulationen ermöglicht durch reduzierte Sicherheitszuschläge und ausgedehnte Parameterstudien eine effiziente und optimierte Auslegung der Produkte.

Ein andauernder Trend ist die zunehmende Komplexität numerischer Simulationen. Zunächst wächst die pure Größe der Modelle parallel zur stetigen Zunahme der rechentechnischen Möglichkeiten an; dies geschieht entweder rein quantitativ, beispielsweise durch eine feinere Vernetzung geometriebasierter Modelle, oder auch qualitativ, beispielsweise durch den Übergang von einer vereinfachenden zweidimensionalen zu einer dreidimensionalen Beschreibung des Modells. Weiterhin werden zunehmend komplexere Wechselwirkungen in Simulationen mit einbezogen: Neue physikalische Domänen werden durch den Einsatz neuer mathematischer Methoden erschlossen, komplizierte Wechselwirkungen werden durch modellhafte Ansätze für die Simulation parametrisiert, nichtlineare Wechselwirkungen werden

1 EINLEITUNG

berücksichtigt. Als neuere Entwicklung gibt es auch die Koppelung von Simulationen unterschiedlichster physikalischer Domänen zu Mehrbereichssimulationen.

1.1.2 Geometriebasierte Modelle

In dieser Arbeit werden numerische Modelle betrachtet, die das zeitliche Verhalten physikalischer Eigenschaften für einen begrenzten Bereich des Ortsraums, im Folgenden *Rechengebiet* genannt, simulieren. Die physikalische Modellbildung führt für solche Fragestellungen in vielen Fällen auf partielle Differentialgleichungssysteme für die gesuchten Eigenschaften. Für numerische Simulationen wird das System partieller Differentialgleichungen in der Regel mittels einer *Ortsdiskretisierung* näherungsweise durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben. Das kontinuierliche Rechengebiet wird also in diskreter Form im Modell abgebildet, das heißt, das Modell beschreibt das Verhalten der physikalischen Größen an einer eventuell großen, aber endlichen Auswahl von Punkten. Die Anzahl der zur Beschreibung des Rechengebiets verwendeten Punkte steht dabei in direkter Beziehung zur *Ordnung* des Modells, der Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade. Die Anzahl der Freiheitsgrade pro Punkt hängt dabei im Wesentlichen von der geometrischen Dimension des betrachteten Modells und der Ordnung des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems ab, der höchsten vorkommenden zeitlichen Ableitung.¹ Derartige Modelle werden in dieser Arbeit *geometriebasierte Modelle* genannt.

In der Grundlagenforschung liegt das Hauptaugenmerk bei numerischen Simulationen oft auf der Berücksichtigung und Untersuchung der Eigenschaften verschiedenartigster Wechselwirkungen. Zur Herausstellung und Trennung der Wechselwirkungseffekte von den durch die geometrischen Verhältnissen induzierten Eigenschaften werden für solche Studien üblicherweise einfache Geometrien verwendet. Die Modellgleichungen werden dann oft mittels der Finite-Differenzen Methode oder eines verwandten Verfahrens diskretisiert. Für technische Fragestellungen ist andererseits oft eine komplizierte Geometrie vorgegeben. In diesen Fällen werden für die Erstellung und Ortsdiskretisierung der Modelle üblicherweise computergestützte Konstruktionsmethoden eingesetzt; die Simulation erfolgt dann meist auf Basis der Finite-Elemente Methode, für die kommerzielle Programmpakete für viele physikalische Domänen vorliegen.

1.1.3 Verhaltensmodelle und Ordnungsreduktion

Ergänzend zu komplexen numerischen Simulationen werden andererseits vielfach einfache Verhaltensmodelle benötigt, die eine schnelle Vorhersage des Modellverhaltens bzw. wesentlicher Modelleigenschaften ermöglichen — eventuell auf Kosten der erzielten Genauigkeit. Als wichtiges Einsatzgebiet solcher Verhaltensmodelle sei die Regelungstechnik genannt, wo

¹ Sowohl die Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade eines Modells als auch die höchste vorkommende Ableitung eines Differentialgleichungssystems werden üblicherweise als Ordnung bezeichnet. Eine Verwechslungsgefahr besteht im Allgemeinen nicht.

1.2 BEGRIFFSBILDUNGEN ZUR MODELLREDUKTION

de facto eine Echtzeitsimulation der relevanten Modelleigenschaften erforderlich ist. Ein weiteres Anwendungsgebiet sind komplexe Mehrbereichssimulationen. Hier können Teilsysteme durch Verhaltensmodelle implementiert werden, um den Gesamtaufwand der Simulation zu begrenzen. Für die Koppelung der Teilmodelle bietet sich beispielsweise ein Netzwerksimulator an. Schließlich werden innerhalb der Finite-Elemente Methode, insbesondere in der Strukturmechanik, Verhaltensmodelle im Rahmen der Substrukturtechnik eingesetzt. Dabei werden Teile der Gesamtstruktur durch Verhaltensmodelle ersetzt, um das Gesamtsystem handhabbar zu machen.

Eine Möglichkeit zur Erstellung einfacher Verhaltensmodelle ist der analytische bzw. halb-analytische Ansatz, bei dem die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge des Modells durch analytische Gleichungen bzw. Ingenieursformeln oder auch einiger weniger Differentialgleichungen wiedergegeben werden. Die in den Formeln auftretenden Modellparameter werden heute vielfach mittels numerischer Simulationen optimiert. Der Hauptvorteil dieses Vorgehens liegt in der parametrischen und damit nicht an das Einzelmodell gebundenen Modellbeschreibung sowie in dem durch die analytischen Zusammenhänge gewonnenen physikalischen Verständnis des Zusammenwirkens der Modellparameter. Nachteilig ist die durch die im Modellbildungsprozess erforderlichen Näherungen beschränkte Genauigkeit des Modells. Außerdem ist dieses Vorgehen auch durch einen großen Aufwand gekennzeichnet, der zum Herausarbeiten der für das Systemverhalten maßgeblichen physikalischen Effekte und zum Ableiten des Gleichungssystems benötigt wird.

Unter diesen Gesichtspunkten sind Methoden wünschenswert, die aus den vorliegenden „großen“ Modellen für die im Produktentwicklungsprozess durchgeführten numerischen Simulationen — hier sind insbesondere geometriebasierte Modelle gemeint — „kleine“ Verhaltensmodelle ableiten, die damit gewissermaßen eine Lücke im Modellbildungsprozess schließen.

Methoden, die solches leisten, werden in der Regelungstechnik unter dem Begriff „Ordnungsreduktion“ zusammengefasst. Allerdings sind die typischen Größenordnungen der in der Regelungstechnik betrachteten Modelle und insbesondere das Größenverhältnis zwischen „großen“ und „kleinen“ Modellen nicht derart extrem, wie sie die hier aufgestellte Fragestellung impliziert: Während in der Regelungstechnik eine Reduktion von einigen zehn bis einigen hundert Freiheitsgraden auf einige wenige bis einige zehn Freiheitsgrade üblich ist, erfordert die Reduktion geometriebasierter Modelle eine Reduktion von mehreren bis vielen tausend Freiheitsgraden auf einige wenige Freiheitsgrade. Die in der Regelungstechnik etablierten Verfahren zur Ordnungsreduktion müssen deshalb auf ihre Eignung für derart extreme Rahmenbedingungen kritisch überprüft werden.

1.2 Begriffsbildungen zur Modellreduktion

In dieser Arbeit wird der Begriff *Modell* für eine allgemeine mathematische Beschreibung eines physikalisch-technischen Vorgangs verwendet. Ein Modell kann auch implizit vorliegen, etwa in der Beschreibungssprache eines Finite-Elemente Programmpakets. Im Gegensatz dazu

1 EINLEITUNG

bezeichnet der Begriff *System* die spezielle formale Darstellung eines Modells in einer *Normalform*. In dieser Arbeit wird als Normalform ausschließlich die Zustandsraumdarstellung von Differentialgleichungssystemen verwendet, entweder linearer Differentialgleichungssysteme oder einer speziellen Klasse nichtlinearer Differentialgleichungssysteme.

In der deutschen Literatur zur Ordnungsreduktion werden die Begriffe Modellvereinfachung und Ordnungsreduktion unterschieden:

Unter dem Begriff *Modellvereinfachung* werden allgemein Verfahren zur Vereinfachung physikalisch-technischer Modelle verstanden. Die Modellvereinfachung beinhaltet Methoden wie zum Beispiel Diskretisierung (für diese Arbeit ist beispielsweise die Ortsdiskretisierung von großer Bedeutung), Linearisierung um einen Arbeitspunkt, Vernachlässigung kleiner Terme, Approximation funktionaler Zusammenhänge, usw. Ein durch solche Vereinfachungen erhaltenes reduziertes Modell wird immer nur eine Näherung der bestmöglichen Modellbeschreibung darstellen. Die Eigenschaften, die das reduzierte Modell möglichst gut erhalten soll, hängen dabei von der Aufgabenstellung und somit insbesondere vom Einsatzgebiet des reduzierten Modells ab.

Eine spezielle Vorgehensweise der Modellvereinfachung ist die *Ordnungsreduktion*. Dabei handelt es sich um Verfahren, die ein (gewöhnliches) Differentialgleichungssystem mit vielen Freiheitsgraden, das *volle System*, durch ein ebensolches System mit deutlich weniger Freiheitsgraden, das *reduzierte System*, approximieren. Die Ordnungsreduktion soll *halbautomatisch* erfolgen, das bedeutet, mittels eines Algorithmus, der bis auf das Setzen einiger Steuerungsparameter determiniert ist. Insbesondere soll das Verfahren keine eingehende physikalisch-technische Analyse des vollen Systems erfordern, sondern allenfalls eine mathematische Analyse der Systemeigenschaften beinhalten.

Die Automatisierbarkeit der Ordnungsreduktion erfordert, dass das volle System in einer bestimmten formalen Darstellung, der bereits oben angeführten *Normalform*, vorliegt. Diese Normalform ist üblicherweise eine Standardform der zugrunde liegenden Systemtheorie, um die direkte Anwendbarkeit der Reduktionsverfahren auf Standardsysteme zu gewährleisten. Im Allgemeinen liegt das zugrunde liegende Modell jedoch nicht in der erforderlichen Normalform vor und ist zudem oftmals mit dieser inkompatibel — ein solches Modell wird hier im Folgenden als *Originalmodell* bezeichnet. Ein Originalmodell kann in einem formal zweistufigen Prozess in die Normalform überführt bzw. „gezwängt“ werden. Zunächst wird mit den Methoden der Modellvereinfachung, beispielsweise der Approximation von Materialkennlinien durch funktionale Zusammenhänge, ein vereinfachtes, mit der Normalform möglichst kompatibles Modell abgeleitet, im Folgenden *Ausgangsmodell* genannt. Danach wird eine *Parametrisierung* des Ausgangsmodells durch die Normalform durchgeführt.

Für die Fragestellung dieser Arbeit liegt deshalb ein mehrstufiger Prozess der *Modellreduktion* vor, der in Abbildung (1.1) noch einmal zusammengefasst ist.

Die in der Literatur bekannten Verfahren der Ordnungsreduktion verwenden für das volle System und das reduzierte System im Wesentlichen die gleiche formale Darstellung, also die gleiche Normalform. Diese Eigenschaft wird in dieser Arbeit als *Formerhaltung* bezeichnet. Zum Beispiel sind eine Reihe von Verfahren der Ordnungsreduktion entwickelt worden,

1.3 BEKANNTE ANSÄTZE ZUR ORDNUNGSREDUKTION

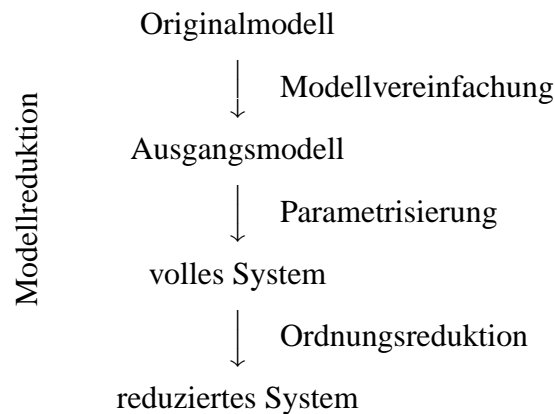


Abbildung 1.1: Mehrstufiger Prozess der Modellreduktion

die einem linearen, zeitkontinuierlichen System in Zustandsraumdarstellung ein ebensolches reduziertes System zur Seite stellen.

Bei einigen Verfahren der Ordnungsreduktion können die Variablen des reduzierten Systems als Auswahl der Variablen des vollen Systems aufgefasst werden; diese Variablen des vollen Systems behalten also ihre Interpretation bei, während die übrigen aus dem System entfernt werden. Das Verhalten der übernommenen Variablen orientiert sich damit am Verhalten der originalen Variablen und kann deshalb intuitiv verstanden werden. Diese Eigenschaft von Reduktionsverfahren wird in dieser Arbeit als *Strukturerhaltung* bezeichnet.

Ein älterer Übersichtsartikel zum Thema Modellreduktion, hier aus dem Blickwinkel der Regelungstechnik betrachtet, ist beispielsweise (TMF92a; TMF92b; TMF92c).

1.3 Bekannte Ansätze zur Ordnungsreduktion

1.3.1 Ordnungsreduktion linearer Systeme

Seit vielen Jahrzehnten wurden und werden Methoden der Ordnungsreduktion linearer Systeme entwickelt. Die Beschränkung auf lineare Systeme spiegelt dabei auf der einen Seite deren immense Bedeutung im Rahmen der Modellbildung und Regelung wieder: Die Eigenschaften vieler physikalisch-technischer Systeme lassen sich in guter oder sogar hervorragender Näherung durch lineare Systeme mathematisch beschreiben. Auf der anderen Seite bietet die geschlossene Theorie linearer Systeme (siehe zum Beispiel (Che84)) ein solides theoretisches Fundament und durch die entwickelten Methoden und Werkzeuge vielerlei Ansatzmöglichkeiten zur Entwicklung von Reduktionsmethoden.

Methoden der Ordnungsreduktion linearer Systeme wurden im Wesentlichen auf zwei Gebieten entwickelt:

1 EINLEITUNG

1.3.1.1 Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung

Im Rahmen der Finite-Elemente Methode bzw. der Strukturmechanik wurden Methoden der Ordnungsreduktion für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung entwickelt; Methoden, deren Hauptaugenmerke auf der Approximation der stationären Zustände des Systems, des Systemverhaltens für langsam veränderliche Zustände, und / oder der niedrigsten Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen liegen.

Eine der ersten Methoden für diese Systeme wurde in (Guy65) vorgeschlagen, eine Methode, die auch für diese Arbeit eine große Rolle spielt. Diese Methode wird in dieser Arbeit als originales Guyan-Verfahren bezeichnet. Hier werden die wesentlichen Zustände des vollen Systems im Sinne der Strukturhaltung ins reduzierte System übernommen; die übrigen Zustände werden durch ihre stationären Werte näherungsweise berücksichtigt.

In (YI91) und (YI93) wird ebenfalls ein Reduktionsverfahren vorgeschlagen, das die Strukturhaltung gewährleistet. Hier erfolgt die Reduktion in zwei Stufen: Zunächst wird eine Ordnungsreduktion mit dem originalen Guyan-Verfahren durchgeführt. Das resultierende Guyan-System wird in ein äquivalentes System erster Ordnung transformiert und dort mittels balancierter Verfahren weiter reduziert. Schließlich werden die so erhaltenen Zustände mittels einer weiteren Transformation durch eine Auswahl von Zuständen des Guyan-Systems linear-kombiniert, womit die Strukturhaltung wiederhergestellt wird. Das reduzierte System liegt jedoch als System erster Ordnung vor und erfüllt die Formerhaltung damit *nicht*.

In (MS96) werden ebenfalls Reduktionsverfahren untersucht, die auf einer balancierten Darstellung beruhen. Es werden einerseits Bedingungen angegeben, unter denen ein reduziertes System nach Umwandlung in ein äquivalentes System erster Ordnung und Reduktion mit einem balancierten Verfahren wieder in die Darstellung zweiter Ordnung zurücktransformiert werden kann, um ein formerhaltendes Verfahren zu gewährleisten. Andererseits werden Methoden angegeben, die direkt in der Darstellung zweiter Ordnung operieren, also ohne Umweg über Systeme erster Ordnung.

In (Pet86) wird eine systematische Darstellung verschiedener in der Strukturmechanik etablierter Methoden der Ordnungsreduktion angegeben. Die dort vorgestellten Methoden orientieren sich an der Wiedergabe der betragsmäßig kleinsten Eigenwerte und der dazugehörigen Eigenvektoren.

1.3.1.2 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Im Rahmen der Regelungstechnik wurden für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung eine Vielzahl von Verfahren der Ordnungsreduktion entwickelt, die für unterschiedliche Einsatzgebiete und unterschiedliche Normalformen verschiedene Aspekte des vollen Systems im reduzierten System korrekt wiedergeben sollen. Für die meisten der vorgeschlagenen Verfahren wurden nach ihrer Veröffentlichung Verbesserungen, Erweiterungen und alternative Lösungsstrategien vorgeschlagen, so dass heute eine fast unüberschaubare Vielzahl von Re-

1.3 BEKANNTE ANSÄTZE ZUR ORDNUNGSREDUKTION

duktionsverfahren existiert. Diese Verfahren können nach der ihnen zugrunde liegenden Herangehensweise in einige wenige Klassen eingeteilt werden.

Systeme höherer Ordnung können immer durch äquivalente Systeme erster Ordnung ersetzt werden. Auf diese Weise sind die hier vorgestellten Methoden auf allgemeine (lineare) Systeme anwendbar. Die dadurch erhaltenen reduzierten Systeme lassen sich jedoch im Allgemeinen nicht mehr in der Ausgangsnormalform höherer Ordnung darstellen, dieses Vorgehen gewährleistet die Formerhaltung also *nicht* (für Systeme zweiter Ordnung siehe hierzu beispielsweise (MS96)).

Neben dem bereits angeführten Übersichtsartikel (TMF92a; TMF92b; TMF92c) wird in (Föl83), (FV93) und (Hip92) ein Überblick über Ordnungsreduktion linearer Systeme gegeben, wobei jeweils unterschiedliche Schwerpunkte bei der Auswahl der vorgestellten Verfahren gesetzt werden.

In (Eit81) wird ein strukturerhaltendes Verfahren vorgestellt, das für sprungförmige äußere Anregungen das reduzierte System durch die Minimierung eines Gleichungsfehlers bestimmt.

Der in (Lit79a) vorgestellte modale Ansatz der Ordnungsreduktion erscheint vom Standpunkt der Physik aus besonders interessant. Dieses Verfahren bewertet in Verbindung mit der Steuer- und Beobachtbarkeit insbesondere die Eigenwerte und Eigenmoden des Systems. In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls ein modaler Ansatz für den nichtlinearen Fall vorgestellt, der jedoch nicht auf dem Verfahren von (Lit79a) beruht.

In (HP90a; HP90b) werden einige Varianten des auf (Moo81) zurückgehenden Verfahrens der Ordnungsreduktion in balancierter Darstellung eingehend betrachtet. Diese Verfahren liefern im Rahmen der regelungstechnischen Anwendungen sehr gute Reduktionsergebnisse, sie sind jedoch rechentechnisch sehr aufwändig und für große Systeme numerisch nicht stabil, so dass sie für die in dieser Arbeit betrachtete Aufgabenstellung ungeeignet sind.

In (VS87) wird ein projektionsbasierter Ansatz der Ordnungsreduktion vorgestellt, bei dem durch das reduzierte System verschiedene, das volle System charakterisierende Parameter nachgebildet werden (Parameter-Matching) — beispielsweise das Übertragungsverhalten im niederfrequenten Bereich. In der neueren Literatur treten mit den Krylov-Unterraum Verfahren ähnliche Ansätze in den Vordergrund, speziell in der Ausprägung als Arnoldi-Verfahren, das auf dem Arnoldi-Algorithmus zur numerisch robusten Bestimmung von Projektionsmatrizen beruht. Solche Verfahren werden beispielsweise in (SKW96), (WW98) oder (LS04) vorgestellt und angewendet. Einige Gesichtspunkte dieser Verfahren werden in (Gri97) ausführlicher behandelt. Diese Verfahren spielen in dieser Arbeit eine große Rolle, da sie sich auf die hier betrachteten nichtlinearen Systeme erweitern lassen. Zudem sind sie rechentechnisch wenig aufwändig sowie numerisch sehr robust.

Einige neue Verfahren für unterschiedliche Normalformen werden in (Led00) vorgeschlagen. Dort wird der Eignung der Verfahren für geometriebasierte Modelle besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Insbesondere das dort vorgestellte Frequenzgangverfahren wird in dieser Arbeit näher betrachtet.

1.3.2 Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme

Wie bereits erläutert, lassen sich viele physikalisch-technische Systeme durch lineare oder — im Sinne der Modellvereinfachung — linearisierte Systeme beschreiben. In vielen anderen Fällen stellt eine Linearisierung nur eine unzureichende Näherung des Systemverhaltens dar. Einerseits treten durch Nichtlinearitäten qualitativ neue Effekte auf, wie zum Beispiel Phasenübergänge, chaotisches Verhalten, usw. Speziell Phasenübergänge werden in Kapitel (2) unter dem besonderen Augenmerk der Modellvereinfachung etwas ausführlicher betrachtet. Andererseits können nach einer Linearisierung in dem für die Anwendung relevanten Arbeitsbereich die geforderten Genauigkeitsansprüche oft nicht erreicht werden; eine Überdeckung des Arbeitsbereichs durch mehrere, in verschiedenen Arbeitspunkten linearisierte Systeme ist aufgrund der Übergänge zwischen den Systemen oft problematisch. Abhilfe kann hier die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte schaffen — in Modellbildung, Simulation und Ordnungsreduktion.

Seit einiger Zeit werden daher auch Verfahren der Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme entwickelt. Ein Problem bei der Entwicklung von Reduktionsverfahren für nichtlineare Systeme stellt das Fehlen einer geschlossenen Theorie solcher Systeme dar, sowie das Fehlen ausgereifter bzw. allgemein anwendbarer Methoden der Systemanalyse. Beispielsweise mangelt es bereits an einer expliziten, für die Ordnungsreduktion geeigneten Normalform. Die bisher vorgestellten Reduktionsverfahren nichtlinearer Systeme verwenden meist eine speziell auf das jeweilige Einsatzgebiet zugeschnittene Normalform und sind deshalb in ihren Anwendungen stark eingeschränkt.

Auch für den nichtlinearen Bereich werden in (TMF92a; TMF92b; TMF92c) bereits einige Bemerkungen gemacht und auch ältere Verfahren der Ordnungsreduktion vorgestellt.

In (Has85), in (Pal87) und (LM90) sowie in (Loh94a) oder ausführlicher in (Loh94b) werden Verfahren der Ordnungsreduktion vorgeschlagen, die die nichtlinearen Anteile ohne Reduktion in das reduzierte System übernehmen. Während (Has85) voraussetzt, dass die nichtlinearen Anteile ausschließlich von den in das reduzierte System übernommenen „dominanten“ Zustandsgrößen abhängen, wird in (Pal87) und (LM90) sowie in (Loh94a) und (Loh94b) das Ein- und Ausgangsverhalten des nichtlinearen Systemanteils mittels linearer Transformationen an eine Serie zeitabhängiger Testrechnungen angepasst, deren Zeitverläufe das zu beschreibende Systemverhalten abdecken sollen. Neben der Problematik der Auswahl von geeigneten Zeitverläufen bei den zuletztgenannten Varianten ist hier noch einmal zu betonen, dass die nichtlinearen Systemanteile bei diesen Verfahren nicht reduziert werden.

Ein neuerer Ansatz der Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme wird in (CW00) und ausführlicher in (Che99) vorgeschlagen. Hier wird das projektive Arnoldi-Verfahren für lineare Systeme auf multilineare Systemanteile erweitert. Durch diese spezielle Annahme einer expliziten Normalform für den nichtlinearen Systemanteil wird letztlich im Gegensatz zu den im vorhergehenden Absatz vorgestellten Verfahren auch eine Reduktion des nichtlinearen Systemanteils ermöglicht. In (Phi00) wird eine Anpassung der die Ordnungsreduktion vermittelnden Projektion an das nichtlineare Systemverhalten vorgeschlagen, in (BS02) werden ähnliche

1.4 AUFGABENSTELLUNG UND AUFBAU DER VORLIEGENDEN ARBEIT

Methoden für den in der Regelungstechnik weit verbreiteten bilinearen Ansatz zur Darstellung nichtlinearer Systeme vorgestellt (für bilineare Systeme siehe beispielsweise (Bea87)). Eine erweiterte Form des multilinearen Ansatz zur Parametrisierung der nichtlinearen Systemanteile stellt die Grundlage der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Normalform für nichtlineare Systeme dar.

Eine relativ neue Herangehensweise an die nichtlineare Ordnungsreduktion für Systeme zweiter Ordnung wird in (PP97) diskutiert. Die dort vorgestellte Methode beruht auf nichtlinearen Normalmoden, einer Verallgemeinerung der Eigenschwingungen linearer mechanischer Systeme (für nichtlineare Normalmoden siehe beispielsweise (SP91) oder (V^+ 96)). Auch diese Methode basiert auf einem multilinearen Ansatz zur Parametrisierung der Nichtlinearitäten; außerdem setzt sie eine Diagonalisierung und damit Entkoppelung der linearen Systemanteile voraus. In dieser Darstellung werden Gleichungen für eine Approximation der nichtlinearen Normalmoden des vollen Systems durch die des reduzierten Systems abgeleitet, wobei die Formerhaltung durch die Einführung von Nichtlinearitäten höherer Ordnung verletzt wird. Das Verfahren weist formale Ähnlichkeiten mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren der adiabatischen Elimination schnell relaxierender Variablen auf.

In (RW01) und (RW02) wird ein Verfahren vorgestellt, das den Arbeitsbereich durch eine Serie reduzierter linearisierter Systeme in verschiedenen Arbeitspunkten überdeckt, anstatt ein nichtlineares System explizit durch einen nichtlinearen Ansatz zu formulieren und zu reduzieren. Auch hier wird das Arnoldi-Verfahren zur Reduktion der linearisierten Systeme eingesetzt.

Eine weitere Herangehensweise zur Parametrisierung eines nichtlinearen Verhaltens ist die Identifikation von geeigneten Modellen anhand ihres Ausgangsverhaltens bei vorgegebenem Eingangsverhalten. Beispielsweise werden in (KV99) oder auch in (WK99) Verfahren zur Parameteridentifikation nichtlinearer Systeme vorgestellt, die auf einer Beschreibung des Systems durch eine Volterra-Reihe basieren. Da ein solches Vorgehen einerseits physikalisch schlecht motiviert ist und da andererseits das vorhandene Wissen über das System nicht in die Modellbeschreibung mit einfließt, werden solche Ansätze hier nicht untersucht.

1.4 Aufgabenstellung und Aufbau der vorliegenden Arbeit

1.4.1 Aufgabenstellung dieser Arbeit

Gegenstand dieser Arbeit ist die Bereitstellung von Methoden der Ordnungsreduktion für geometriebasierte Modelle unter Berücksichtigung schwacher Nichtlinearitäten.

Die betrachteten Modelle entstammen verschiedenen Bereichen der Physik, insbesondere solcher Bereiche, die für technische Anwendungen interessant erscheinen. Die Modelle zeichnen sich insbesondere durch ihr stabiles Systemverhalten aus.

Die verwendete Normalform orientiert sich an der Zustandsraumdarstellung zeitinvarianter linearer Systeme. Die Normalform ist ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung, Sys-

1 EINLEITUNG

teme höherer Ordnung — man denke etwa an mechanische Systeme — müssen gegebenenfalls durch äquivalente Systeme erster Ordnung ersetzt werden.

In dieser Arbeit werden lediglich *schwache Nichtlinearitäten* betrachtet. Damit ist eine Reihe von (nicht unabhängigen) Forderungen gemeint, die die betrachteten Systeme erfüllen sollen:

- Die Nichtlinearitäten sollen zwar das quantitative, nicht jedoch das qualitative Systemverhalten beeinflussen; qualitativ neue Systemeigenschaften wie beispielsweise Instabilitäten oder chaotisches Verhalten werden ausgeschlossen.
- Die Nichtlinearitäten sollen in eindeutiger Weise und „glatt“ von den den Systemzustand charakterisierenden Größen abhängen; Effekte wie beispielsweise Hysterese sind dadurch ebenfalls ausgeschlossen. Unter dieser Voraussetzung wird eine einheitliche Parametrisierung der Nichtlinearitäten durch eine explizite Normalform ermöglicht, die eine Ordnungsreduktion auch der nichtlinearen Systemanteile gewährleistet.
- Das Verhalten des linearisierten Systems soll eine bereits brauchbare Näherung des nichtlinearen Systemverhaltens darstellen. Dadurch kann eine Orientierung der Ordnungsreduktion des nichtlinearen Anteils an der Reduktion des linearen Anteils erfolgen.

Die betrachteten Methoden der Ordnungsreduktion sollen in erster Linie das Systemverhalten für stationäre und langsam veränderliche Zustände (näherungsweise) korrekt wiedergeben. Für stabile Systeme (das sind Systeme, deren sämtliche Eigenwerte des linearen Systemanteils einen negativen Realteil aufweisen) soll das durch die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte des linearisierten Systems dominierte Verhalten durchaus noch durch das reduzierte System approximiert werden, das reduzierte System soll also über den quasistationären Bereich hinaus noch brauchbare Ergebnisse liefern. Außerdem sollen die rechentechnischen Voraussetzungen der Reduktionsverfahren auch die Reduktion sehr großer Systeme ermöglichen. Unter diesen Gesichtspunkten werden vorhandene Methoden der Ordnungsreduktion analysiert und neue Methoden entwickelt.

Die Ortsdiskretisierung wird in dieser Arbeit mittels der Finite-Differenzen oder der Finite-Elemente Methode durchgeführt. Die auf der Finite-Differenzen Methode beruhenden Modelle werden — unter Zuhilfenahme von Methoden der Modellvereinfachung — direkt in der in dieser Arbeit betrachteten Normalform nichtlinearer Systeme aufgestellt. Für die Ordnungsreduktion mittels kommerzieller Software simulierter nichtlinearer Modelle wird eine Schnittstelle für das oben beschriebene Problem der Parametrisierung vorgestellt, also für die Überführung des Finite-Elemente Ausgangsmodells in das volle System innerhalb der hier betrachteten Normalform.

Ein mögliches Einsatzgebiet der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden sind beispielsweise nichtlineare Finite-Elemente Simulationen der Wärmeausbreitung. In diesem Fall spielen Materialnichtlinearitäten und die physikalisch intrinsisch nichtlineare Wärmestrahlung eine Rolle. Ein ebenso wichtiges, jedoch auch komplexeres Anwendungsgebiet sind mechanische Finite-Elemente Simulationen: Diese sind aufgrund geometrischer Nichtlinearitäten intrinsisch nichtlinear, hinzu kommen eventuell weitere nichtlineare Effekte.

1.4 AUFGABENSTELLUNG UND AUFBAU DER VORLIEGENDEN ARBEIT

Ziele dieser Arbeit sind also

- das Aufstellen einer geeigneten, physikalisch motivierten Normalform zur Repräsentation schwach nichtlinearer geometriebasierter Systeme,
- das Bereitstellen geeigneter Methoden der Ordnungsreduktion,
- die Entwicklung von Methoden zur Parametrisierung von insbesondere Finite-Elemente Modellen durch die gewählte Normalform, sowie
- die Demonstration der Anwendbarkeit dieser Methoden an industrierelevanten Beispielen.

Besondere Aufmerksamkeit wird dabei insbesondere der Entwicklung eines durchgängigen Gesamtverfahrens der Modellreduktion im Sinne von Abbildung (1.1) geschenkt.

1.4.2 Aufbau dieser Arbeit

In Kapitel (2) wird zunächst das Thema Ordnungsreduktion aus dem Blickwinkel der Physik betrachtet. Insbesondere das Versklavungsprinzip der Synergetik weist formale Ähnlichkeiten mit einigen regelungstechnischen Methoden der Ordnungsreduktion auf, auch wenn die Synergetik — im Gegensatz zu den meisten, jedoch nicht allen in der Regelungstechnik betrachteten Modellen — in diesem Punkt sogar das Verhalten lokal instabiler Systeme beschreiben kann.

Kapitel (3) diskutiert die Methoden der Ordnungsreduktion linearer Systeme, insofern sie den Ausgangspunkt für die Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme darstellen. Nach der Einführung und Diskussion der verwendeten Normalform werden verschiedene Verfahren der Ordnungsreduktion vorgestellt. Insbesondere die projektive Herangehensweise wird ausführlich diskutiert, da sich diese Form der Ordnungsreduktion auf natürliche Weise auf den schwach nichtlinearen Fall erweitern lässt.

In Kapitel (4) werden dann Methoden der Ordnungsreduktion schwach nichtlinearer Systeme erarbeitet. Zunächst wird die lineare Normalform im Sinne einer Taylor-Reihenentwicklung auf die in dieser Arbeit verwendete nichtlineare Normalform erweitert; anschließend werden einige Eigenschaften dieser Normalform diskutiert. Schließlich werden Methoden für die Ordnungsreduktion solcher Systeme vorgestellt. Diese Methoden stellen im Allgemeinen Erweiterungen und Anpassungen der diskutierten Methoden für lineare Systeme dar.

Kapitel (5) schließlich stellt Verfahren zur Parametrisierung von Ausgangsmodellen durch die in dieser Arbeit verwendete Normalform nichtlinearer Systeme vor. Ausgangspunkt ist dabei eine Reihe linearisierter Systeme in verschiedenen Arbeitspunkten, in Anlehnung an die von dem hier verwendeten, kommerziellen Finite-Elemente Programmpaket erhaltenen Daten. Es werden zunächst rechentechnisch aufwändige Verfahren zur Identifikation der in der nichtlinearen Normalform verwendeten Terme in ihrer allgemeinsten Form entwickelt. Danach werden praktikablere Methoden einer vereinfachten Parametrisierung der Nichtlinearitäten vorgestellt.

Danach wird in Kapitel (6) die Anwendbarkeit der verschiedenen Methoden an einigen Beispielen aus verschiedenen Bereichen der Physik demonstriert. Zwei Beispiele behandeln die

1 EINLEITUNG

Wärmeausbreitung unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten und Wärmestrahlung. Die folgende Anwendung betrachtet die Ausbreitung magnetischer Felder in Materie, auch hier unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten. Das letzte Beispiel betrachtet ein mechanisches Modell auf Grundlage der Schwingungsgleichung; in diesem Fall werden durch eine Randbedingung induzierte Nichtlinearitäten betrachtet.

In Kapitel (7) werden abschließend die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Weiterentwicklungen gegeben.

2 Modellreduktion in der Synergetik

In diesem Kapitel wird das Thema Ordnungsreduktion am Beispiel der Synergetik aus dem Blickwinkel der Physik betrachtet. In Abschnitt (2.1) wird das Versklavungsprinzip der Synergetik erläutert, das Ähnlichkeiten mit einigen formalen regelungstechnischen Methoden der Ordnungsreduktion aufweist. In Abschnitt (2.2) werden diese Überlegungen zur Strukturbildung im Rahmen der Synergetik am Beispiel der Strukturbildung in dünnen Filmen verdeutlicht.

2.1 Versklavungsprinzip der Synergetik

In vielen Bereichen der Physik, jedoch auch in vielen Nachbarwissenschaften — namentlich etwa in der Chemie, Biologie, Soziologie usw. —, treten offene, nichtlineare Systeme auf. Diese Systeme sind zum einen durch ein nichtlineares Verhalten gekennzeichnet; zum anderen weisen sie einen ständigen Energiedurchsatz auf und sind damit fern vom thermischen Gleichgewicht. Solche Systeme zeigen in der Nähe von Phasenübergängen, also Instabilitätspunkten, oft die Tendenz, vergleichsweise einfache, regelmäßige Strukturen in Raum und / oder Zeit auszubilden.

Die auf Haken zurückgehende interdisziplinäre Wissenschaft *Synergetik* stellt Methoden bereit, die eine solche Strukturbildung quantitativ beschreiben. Eine Einführung in die Synergetik gibt beispielsweise der Artikel (Hak75), der die Grundlage für das Buch (Hak83b) darstellt.

2.1.1 Versklavungsprinzip und adiabatische Elimination

In diesem Abschnitt wird das Versklavungsprinzip und die Methode der adiabatischen Elimination erläutert. Das in Abschnitt (4.4) vorgestellte formale Verfahren der Ordnungsreduktion beruht auf diesen Prinzipien.

Es sei ein nichtlineares System gegeben, dessen linearer Anteil in modaler Form vorliegt, also ein System der Form

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1 &= \lambda_1 x^1 + f_{\text{nl}}^1(x^1, \dots, x^n) , \\ &\vdots \\ \dot{x}^n &= \lambda_n x^n + f_{\text{nl}}^n(x^1, \dots, x^n) , \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

mit den *Amplituden* (bzw. *Moden*) $x^i(t)$, den *Eigenwerten* λ_i des linearen Systemanteils und dem nichtlinearen Systemanteil $f_{\text{nl}}^i(x^1, \dots, x^n)$, wobei $1 \leq i \leq n$. Es sei hervorgehoben,

2 MODELLREDUKTION IN DER SYNERGETIK

dass die nichtlinearen Systemanteile f_{nl}^i keine konstanten oder linearen Beiträge enthalten sollen.

Die Eigenwerte seien nach ihren Realteilen absteigend geordnet,

$$\Re \{ \lambda_1 \} \geq \dots \geq \Re \{ \lambda_n \} , \quad (2.2)$$

so dass innerhalb der stabilen Eigenwerte, $\Re \{ \lambda_i \} < 0$, die „langsamen“ einen kleineren Index erhalten als die „schnellen“.

Die Eigenwerte seien außerdem in zwei Gruppen eingeteilt: Die *Ordnungsparameter* $1 \leq k \leq m$ mit

$$\Re \{ \lambda_k \} \geq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq m , \quad (2.3)$$

sowie die *Slave-Moden* $m + 1 \leq l \leq n$ mit

$$\Re \{ \lambda_l \} < 0 \ll - \max_{k=1}^m (|\lambda_k|) \quad \text{für} \quad m + 1 \leq l \leq n . \quad (2.4)$$

Der lineare Systemanteil der Ordnungsparameter ist also nicht notwendigerweise stabil. Der lineare Anteil der Slave-Moden ist stabil; darüberhinaus entwickeln sich die Slave-Moden sehr viel schneller als die Ordnungsparameter. Betrachtet man ihre Entwicklung als instantan, so können sie *adiabatisch eliminiert* werden, das bedeutet, die Slave-Moden werden durch ihre stationären Zustände x_{st}^l approximiert.

Durch Setzen von $\dot{x}^l = 0$ für die Slave-Moden ist deren nichtlineare stationäre Lösung x_{st}^l implizit durch

$$0 = \lambda_l x_{\text{st}}^l + f_{\text{nl}}^l (x^1, \dots, x^m, x_{\text{st}}^{m+1}, \dots, x_{\text{st}}^n) , \quad (2.5)$$

gegeben. Wird weiterhin angenommen, dass $|x^l| \ll |x^k|$ ist, was wegen $|\Re \{ \lambda_l \}| \gg |\Re \{ \lambda_k \}|$ gerechtfertigt scheint, können im nichtlinearen Anteil f_{nl}^l von (2.5) die x_{st}^l in niedrigster Ordnung vernachlässigt und durch Null ersetzt werden. Damit gilt näherungsweise (nun explizit!)

$$x_{\text{st}}^l \approx \frac{1}{\lambda_l} f_{\text{nl}}^l (x^1, \dots, x^m) . \quad (2.6)$$

Dieser Ausdruck wird in die Gleichungen für die Ordnungsparameter eingesetzt, was auf das reduzierte Gleichungssystem

$$\dot{x}^k \approx \lambda_k x_{\text{st}}^k + f_{\text{nl}}^k (x^1, \dots, x^m, x_{\text{st}}^{m+1}, \dots, x_{\text{st}}^n) \quad (2.7)$$

für die Ordnungsparameter $1 \leq k \leq m$ führt.

Wie aus (2.6) ersichtlich, werden die Slave-Moden durch die Ordnungsparameter „verklavt“, worauf die Bezeichnung dieser Vorgehensweise zurückzuführen ist. Das Systemverhalten wird gemäß (2.7) durch das Verhalten der Ordnungsparameter dominiert.

2.1.2 Strukturbildung am Beispiel der Haken-Zwanzig-Gleichungen

Wie diese Methoden die Bildung einfacher Strukturen in komplexen physikalischen Systemen erklären können, sei an einem einfachen Beispiel erläutert.

Wir betrachten die *Haken-Zwanzig-Gleichungen*, das ist das dynamische System

$$\dot{x}^1 = -k_1 x^1 - a x^1 x^2, \quad (2.8)$$

$$\dot{x}^2 = -k_2 x^2 + b (x^1)^2, \quad (2.9)$$

mit

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 > 0 \gg |k_1|, \quad a, b > 0 \quad (2.10)$$

(siehe etwa (Hak75)). Durch adiabatische Elimination ergibt sich

$$x_{st}^2 = \frac{b}{k_2} (x^1)^2 \quad (2.11)$$

und

$$\dot{x}^1 \approx -k_1 x^1 - \frac{ab}{k_2} (x^1)^3, \quad (2.12)$$

eine Gleichung, die beispielsweise das Verhalten eines überdämpften anharmonischen Oszillators¹ beschreibt.

Definiert man hier die *verallgemeinerte Kraft* F und das *verallgemeinerte Potential* Φ durch

$$\dot{x}^1 = F(x^1), \quad F(x^1) = -\frac{\partial}{\partial x^1} \Phi(x^1), \quad (2.13)$$

mit verschwindender Integrationskonstante also

$$F(x^1) = -k_1 x^1 - \frac{ab}{k_2} (x^1)^3, \quad (2.14)$$

$$\Phi(x^1) = +\frac{1}{2} k_1 (x^1)^2 + \frac{1}{4} \frac{ab}{k_2} (x^1)^4, \quad (2.15)$$

so erhält man die Gleichgewichtszustände des Systems (also die stationären Zustände) als Extrema des verallgemeinerten Potentials. Man kann leicht zeigen, dass für dieses System $d\Phi/dt \leq 0$ gilt; deshalb entsprechen Minima des Potentials einem stabilen, Maxima einem instabilen Gleichgewicht.

Eine Diskussion der Kraft bzw. des Potentials ergibt, dass Gleichung (2.12) im stationären Fall abhängig vom Vorzeichen von k_1 ein qualitativ unterschiedliches Verhalten aufweist: Für $k_1 > 0$ ist $x_{st,0}^1 = 0$ ein stabiles Gleichgewicht; für $k_1 < 0$ ist das Gleichgewicht $x_{st,0}^1 = 0$

¹ Bei einem überdämpften System wird das dynamische Verhalten vom Dämpfungsterm dominiert, der Trägheitsterm kann vernachlässigt werden. Auf diese Weise vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

2 MODELLREDUKTION IN DER SYNERGETIK

instabil, es treten zwei neue stabile Gleichgewichtszustände $x_{st,1/2}^1$ auf. Insgesamt gilt für die stationären Zustände

$$x_{st,0}^1 = 0 \quad \text{stabil für } k_1 > 0 \quad ; \quad (2.16)$$

$$x_{st,0}^1 = 0 \quad \text{instabil für } k_1 < 0 \quad , \quad (2.17)$$

$$x_{st,1/2}^1 = \pm \sqrt{\frac{-k_1 k_2}{ab}} \quad \text{stabil für } k_1 < 0 \quad . \quad (2.18)$$

Das System unterliegt bei $k_1 = 0$ also einer Bifurkation. Auf diese Weise wird durch das Vorzeichen von k_1 , also durch eine Eigenschaft des Teilsystems der Ordnungsparameter, das qualitative Systemverhalten bestimmt — insbesondere auch das Verhalten der Slave-Moden.

Das Bifurkationsdiagramm und das verallgemeinerte Potential sind in Abbildung (2.1) für einen exemplarischen Parametersatz grafisch dargestellt.

Es sei nun ein komplexes System in der Nähe eines Phasenübergangs betrachtet, wobei der für den Phasenübergang kritische Systemparameter im Sinne eines Steuerparameters variiert wird. Für eine eventuell auftretende Strukturbildung ist nun insbesondere von Bedeutung, welche Moden abhängig vom Steuerparameter zuerst instabil werden: Diese versklaven als Ordnungsparameter im oben genannten Sinne die übrigen Moden und dominieren das Systemverhalten und die Strukturbildung.

In (Hak75), sowie in (Hak83b), (Hak83a) und (Bes95) werden die Methoden der Synergetik auf eine Reihe von Systemen aus verschiedenen physikalischen und nichtphysikalischen Bereichen angewendet. An dieser Stelle sollen die vorgestellten Methoden anhand einiger neuerer Arbeiten zur Strukturbildung in dünnen Flüssigkeitsfilmen demonstriert werden.

2.2 Strukturbildung in dünnen Filmen

In diesem Abschnitt wird die Strukturbildung in dünnen Flüssigkeitsfilmen betrachtet. Ein Übersichtsartikel zum Thema dünne Filme speziell für ein-Schicht-Systeme ist (ODB97).

Die Diskussion der zugrunde liegenden Gleichungen und Mechanismen erfolgt hier analog zu (BN01), wo die Strukturbildung an dem überschaubaren ein-Schicht-System eines horizontalen Flüssigkeitsfilms mit einer freien Oberfläche demonstriert wird.²

Schließlich werden einige Resultate numerischer Simulationen aus (M⁺05) zur Rayleigh-Taylor Instabilität eines zwei-Schicht-Systems zweier Flüssigkeiten zwischen zwei festen Flächen präsentiert.³

² In (BN01) werden über die hier vorgestellten Ergebnisse hinaus auch geneigte Flüssigkeitsfilme mit der Ausbildung von „Fingern“ an der Flüssigkeitsfront betrachtet.

³ In (M⁺05) wird die Strukturbildung in der Grenzschicht eines zwei-Schicht-Systems zweier Flüssigkeiten zwischen zwei festen Flächen unter Einbeziehung einer Vielzahl physikalischer Effekte diskutiert; die vorgestellten Ergebnisse stellen nur einen kleinen Teilaspekt dieser Arbeit dar.

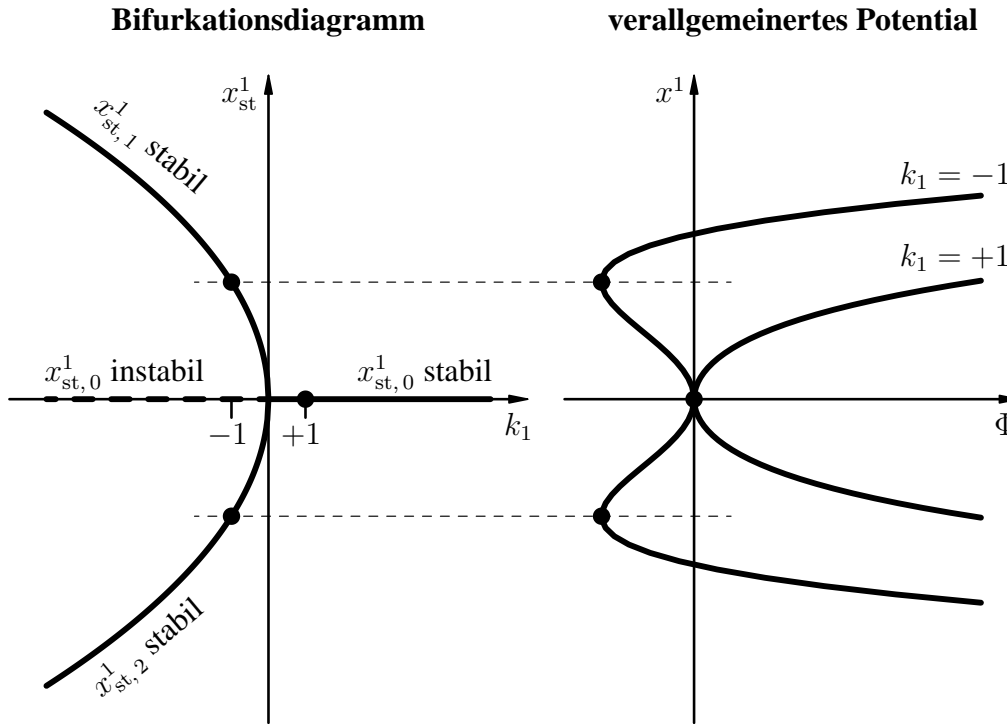


Abbildung 2.1: Bifurkationsdiagramm und verallgemeinertes Potential für die Haken-Zwanzig-Gleichungen

Im Bifurkationsdiagramm (linkes Diagramm) sind die stationären Zustände x_{st}^1 über dem Ordnungsparameter k_1 aufgetragen, die stabilen (durchgezogen) und instabilen (gestrichelt) Zweige gemäß (2.16) bis (2.18).

In der Darstellung des verallgemeinerten Potentials (rechtes Diagramm) ist das verallgemeinerte Potential Φ über dem Zustand x^1 aufgetragen, exemplarisch für die Ordnungsparameter $k_1 = -1$ und $k_1 = +1$ gemäß (2.15).

Weiterhin liegen den Diagrammen die Parameter a , $b = 1$ und $k_2 = 10$ zugrunde; die Bedingungen aus (2.10) sind damit erfüllt, insbesondere gilt für den dargestellten Bereich des Bifurkationsdiagramms näherungsweise $k_2 \gg |k_1|$.

Das rechte Diagramm wurde um 90° nach rechts gekippt und gespiegelt, um übereinstimmende Ordinatenachsen zu erzielen.

Die stabilen stationären Zustände für die beiden dargestellten Potentiale sind in beiden Diagrammen markiert (Punkte), für den Ordnungsparameter $k_1 = -1$ wurden außerdem die Hilfslinien zur Konstruktion des Bifurkationsdiagramms angedeutet (dünne gestrichelte Linien).

2.2.1 Grundgleichungen

Nach Reynolds können dünne Filme im Sinne einer Modellvereinfachung in *Langwellen-* bzw. *Schmiermittelnäherung* beschrieben werden (siehe beispielsweise (ODB97)). Dabei werden die zugrunde liegenden Navier-Stokes-Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung sowie die relevanten Randbedingungen durch eine Entwicklungsgleichung für die *Filmdicke* h angenähert.⁴ Die Näherung erfolgt im Sinne einer Reihenentwicklung nach dem kleinen Parameter

$$\varepsilon \equiv h k \ll 1 \quad (2.19)$$

mit der *Wellenzahl* k der betrachteten Strukturen, die Schmiermittelnäherung stellt also eine Langwellennäherung dar. Im Zuge der Schmiermittelnäherung werden die ursprünglichen, das System beschreibenden physikalischen Größen, wie beispielsweise Druck und Geschwindigkeit, durch die Filmdicke eliminiert; sie können im Nachhinein über Funktionale aus der Lösung für die Filmdicke rekonstruiert werden.

Nach (BN01) kann die Dicke h des Films als Funktion der horizontalen Koordinaten $\vec{x} = (x^1, x^2)^T$ und der Zeit t in Erhaltungsform als

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(h) \quad (2.20)$$

geschrieben werden. Anhand der Erhaltungsform von (2.20) ist sofort ersichtlich, dass für geeignete Randbedingungen am Rechengebiet die *mittlere Dicke* h_0 eine Erhaltungsgröße darstellt,

$$h_0 \equiv \frac{\iint d^2\vec{x} h}{\iint d^2\vec{x}} = \text{konst.} , \quad (2.21)$$

was der Erhaltung des Flüssigkeitsvolumens entspricht (Kompressibilitäts-, Wärmeausdehnungs-, und Verdampfungseffekte werden hier nicht betrachtet). Die mittlere Dicke wird im Folgenden als Ordnungsparameter verwendet.

Die in (2.20) auftretende *Stromdichte* \vec{S} ist durch die *Mobilität* Q der Flüssigkeit, sowie die *verallgemeinerte Kraft* \vec{F} bzw. das *verallgemeinerte Potential* Φ gegeben durch

$$\vec{S}(h) = Q(h) \vec{F}(h) = -Q(h) \vec{\nabla} \Phi(h) . \quad (2.22)$$

Die Mobilität wird im Folgenden als positiv angenommen, $Q > 0$. $\vec{\nabla}$ ist der horizontale (zweidimensionale) Nabla-Operator.

Das Potential wiederum kann als Variation des Funktionals der *Freien Energie* \mathcal{F} der Oberfläche erhalten werden,

$$\Phi(h) = \frac{\delta}{\delta h} \mathcal{F}[h] . \quad (2.23)$$

Stabile stationäre Zustände des Flüssigkeitsfilms entsprechen einem Minimum der Freien Energie, wobei zusätzlich (2.21) als Nebenbedingung zu erfüllen ist. Für die Freie Energie

⁴ In komplizierteren Fällen treten mehrere Entwicklungsgleichungen auf.

2.2 STRUKTURBILDUNG IN DÜNNEN FILMEN

kann dabei unter Einbeziehung der *Oberflächenspannung* σ und eines zusätzlichen *Trennungsdrucks* π bzw. *Trennungspotentials* ϕ ,

$$\pi(h) = -\frac{d}{dh} \phi(h) , \quad (2.24)$$

das *Ginzburg-Landau-Funktional*

$$\mathcal{F}[h] = \iint d^2\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} \sigma (\vec{\nabla}h)^2 + \phi(h) \right\} \quad (2.25)$$

verwendet werden.

Der Trennungsdruck π parametrisiert intermolekulare Kräfte. Er wurde zunächst eingeführt als abstoßende Kraft zur Berücksichtigung stabilisierender Kräfte für sehr dünne Filme zur Vermeidung von Filmrissen. Ein einfacher Ansatz hierfür sind etwa Van-der-Waals Kräfte, die integral auf ein effektives Potential der Form $\phi \propto -h^{-3}$ zwischen den beiden Oberflächen des Films führen. Der neuere, in (BN01) verwendete *Ansatz von Pismen und Pomeau* aus (PP00) parametrisiert die Benetzungseigenschaften der Flüssigkeit phänomenologisch; das qualitative Verhalten dieses Ansatzes wird im nächsten Abschnitt diskutiert. Die Berücksichtigung weiterer physikalischer Effekte führt — bei allen Unterschieden in der Formulierung und in der Vorgehensweise — oftmals zu ähnlichen Überlegungen und qualitativ ähnlichen Ergebnissen; in diesem Sinn steht der Druck π bzw. das Potential ϕ hier auch stellvertretend für zusätzliche physikalische Effekte.

Setzt man nun alle diese Gleichungen ineinander ein, erhält man einen expliziten Ausdruck für (2.20) mit den führenden Termen

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\vec{x}, t) = D(h) \Delta h - Q(h) \Delta^2 h + \dots \quad (2.26)$$

Die *Diffusionskonstante* D ist dabei durch

$$D(h) = Q(h) \frac{d^2}{dh^2} \phi(h) = -Q(h) \frac{d}{dh} \pi(h) \quad (2.27)$$

gegeben, Δ ist der horizontale (zweidimensionale) Laplace-Operator.

2.2.2 Stabilitätsanalyse und Strukturbildung

Aufbauend auf (2.26), kann nun eine lineare Stabilitätsanalyse für einen flachen Film erfolgen, also für den stationären Zustand $h(\vec{x}, t) \equiv h_0 = \text{konst.}$

Man erhält mit einem Ansatz einer kleinen, räumlich periodischen Störung um den stationären Zustand mit der Wellenzahl k die exponentielle *Wachstumsrate* γ ,

$$\gamma(k) = -D(h_0) k^2 - Q(h_0) k^4 , \quad (2.28)$$

2 MODELLREDUKTION IN DER SYNERGETIK

für die Amplituden der Störung (vergleiche für den qualitativen Verlauf dieser Größe auch Gleichung (2.15) und Abbildung (2.1), rechtes Diagramm). Für $D(h_0) > 0$ gilt $\gamma < 0$, der stationäre Zustand ist somit stabil. Für $D(h_0) < 0$ gilt in einem bestimmten Bereich der Wellenzahl $\gamma > 0$; diese Moden sind instabil, bei der dominanten Wellenzahl k_{dom} ,

$$k_{\text{dom}}(h_0) = \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{D(h_0)}{Q(h_0)}} = \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dh^2} \phi(h) \Big|_{h=h_0}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \pi(h) \Big|_{h=h_0}}, \quad (2.29)$$

ist die Wachstumsrate maximal. Diese kritische Wellenzahl wird bei einer Strukturbildung aus infinitesimalen Störungen heraus zuerst sichtbar, bis die nichtlinearen Beiträge von (2.20) bzw. (2.26) das Systemverhalten dominieren.

Das Vorzeichen von $D(h_0)$ bestimmt also über die Stabilität eines flachen Films. Dieses Vorzeichen ist nun über (2.27) für $Q > 0$ direkt mit dem Vorzeichen der Ableitung $d\pi/dh|_{h_0}$ verknüpft. Der Verlauf des Drucks $\pi(h)$ für den Ordnungsparameter $h = h_0$ gibt also Auskunft über die Stabilität eines flachen Films der Dicke h_0 : Für $d\pi/dh|_{h_0} < 0$ ist der flache Film stabil, für $d\pi/dh|_{h_0} > 0$ ist er jedoch instabil.

In Abbildung (2.2) wird ein typischer Druckverlauf $\pi(h)$ nach dem Ansatz von Pismen und Pomeau schematisch dargestellt. Der flache Film ist dabei im Allgemeinen stabil, in einem begrenzten Höhenbereich $h_{\text{inst, min}} < h_0 < h_{\text{inst, max}}$ jedoch instabil.⁵ Für einen flachen Film im instabilen Bereich kann eine Maxwell-Konstruktion Aufschluss über die weitere Entwicklung geben (siehe hierzu Abbildung (2.2)): Abhängig von der mittleren Höhe h_0 im Vergleich zur kritischen Höhe h_{crit} (erhalten aus der Maxwell-Konstruktion) sind Tropfen ($h_0 < h_{\text{crit}}$) oder Löcher ($h_0 > h_{\text{crit}}$) energetisch bevorzugt, im Übergangsbereich ($h_0 = h_{\text{crit}}$) bilden sich in numerischen Simulationen labyrinthartige Strukturen aus.

2.2.3 Numerische Simulationen

Numerische Simulationen der vollen nichtlinearen Gleichungen (2.26) in (BN01) bestätigen dieses Verhalten.

Abhängig von der mittleren Dicke h_0 bilden sich in der Zeitskala (2.28) auf der Längenskala (2.29) Tropfen bzw. Löcher aus. Im nichtlinearen Bereich vereinigen sich sukzessive kleinere Tropfen / Löcher zu größeren, wie die Minimierung von (2.25) erwarten lässt. Insbesondere die Lage des Übergangs zwischen Tropfen und Löchern, die Labyrinthstruktur bei $h_0 = h_{\text{crit}}$, wird im numerischen Experiment bestätigt.

In (M⁺05) wird die Strukturbildung in der Grenzschicht eines zwei-Schicht-Systems zweier Flüssigkeiten zwischen zwei festen Flächen betrachtet, wobei verschiedene Mechanismen von Instabilitäten diskutiert werden (unter anderem Gravitation, thermokapillarer Effekt, externe elektrische Spannung). In Abbildung (2.3) sind exemplarisch Ergebnisse von nichtlinearen numerischen Simulationen eines *Rayleigh-Taylor* instabilen Systems dargestellt. Die Rayleigh-Taylor Instabilität beruht auf dem Zusammenspiel von Gravitation und Oberflächenspannung:

⁵ Für andere Parametersätze können auch qualitativ andere Verläufe auftreten.

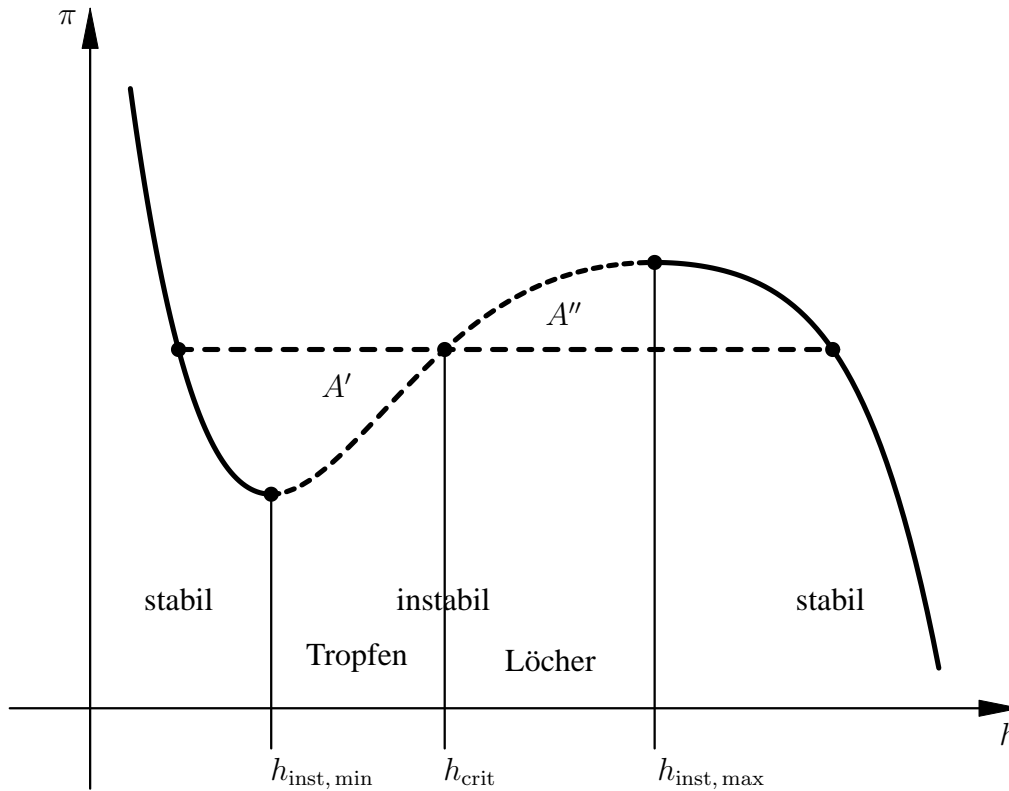


Abbildung 2.2: Maxwell-Konstruktion für schematischen Druckverlauf

Schematischer Verlauf des Drucks π über der Filmdicke h für den in (BN01) verwendeten Ansatz von Pismen und Pomeau.

Ein flacher Film der mittleren Dicke h_0 ist stabil für $d\pi/dh|_{h_0} < 0$, hier also für $h_0 < h_{\text{inst, min}}$ bzw. $h_0 > h_{\text{inst, max}}$ (Druckverlauf durchgezogen), er ist instabil für $d\pi/dh|_{h_0} > 0$, hier also für $h_{\text{inst, min}} < h_0 < h_{\text{inst, max}}$ (Druckverlauf gestrichelt).

Für Druckverläufe, die dem hier dargestellten schematischen Druckverlauf qualitativ ähneln, kann eine Maxwell-Konstruktion Aufschluss über die weitere Entwicklung eines flachen Films im instabilen Bereich geben: Die Maxwell-Linie (horizontale gestrichelte Linie) wird nach dem Prinzip der (betragsmäßigen) Flächengleichheit von A' , A'' konstruiert; es ergibt sich die kritische Höhe h_{crit} . Für $h_0 < h_{\text{crit}}$ sind Tropfen energetisch begünstigt, für $h_0 > h_{\text{crit}}$ sind Löcher energetisch bevorzugt. Für $h_0 = h_{\text{crit}}$ bilden sich labyrinthartige Strukturen aus.

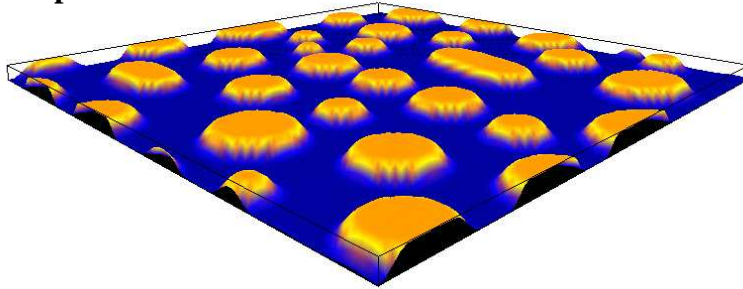
2 MODELLREDUKTION IN DER SYNERGETIK

Bei dem betrachteten zwei-Schicht-System besitzt das obere Fluid eine größere Dichte als das untere und destabilisiert damit den flachen Film.

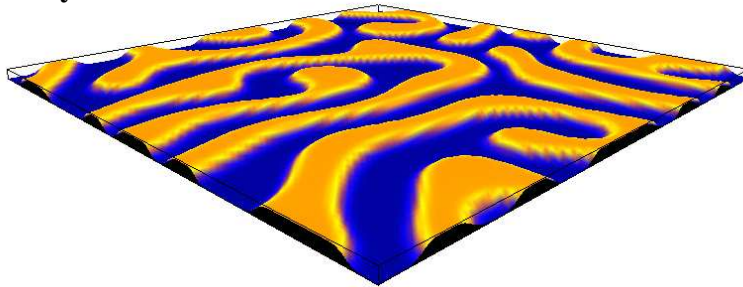
Auch hier weist der für die Instabilität relevante effektive Druck schematisch einen zu Abbildung (2.2) ähnlichen Verlauf auf. Der Übergang zwischen Tropfen und Löchern wird auch hier wieder durch eine Maxwell-Konstruktion beschrieben. Die nichtlinearen Simulationen bestätigen die Vorhersagen der linearen Stabilitätsanalyse, insbesondere auch hier wieder die Lage des Übergangs zwischen Tropfen und Löchern.

2.2 STRUKTURBILDUNG IN DÜNNEN FILMEN

Tropfen



Labyrinth



Löcher

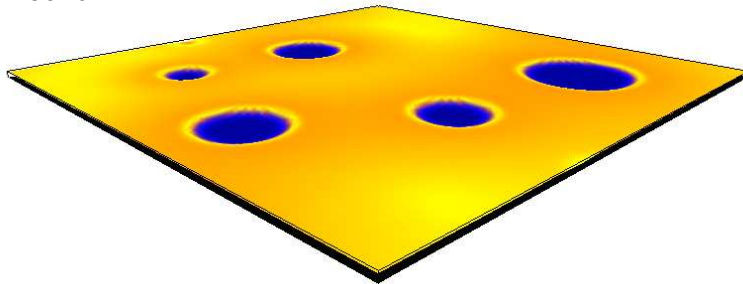


Abbildung 2.3: Strukturbildung in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten

Momentaufnahmen nichtlinearer numerischer Simulationen von Rayleigh-Taylor instabilen, anfänglich flachen Grenzschichten von zwei-Schicht-Systemen zweier Flüssigkeiten aus (M⁺05).

Wie die lineare Stabilitätsanalyse erwarten lässt, bilden sich abhängig vom Verhältnis der mittleren Dicken der beiden Flüssigkeitsfilme Tropfen, Löcher oder im Übergangsbereich Labyrinthstrukturen aus.

3 Ordnungsreduktion linearer Systeme

In diesem Kapitel wird das Thema Ordnungsreduktion linearer Systeme behandelt. Einerseits wird die Aufgabenstellung der Ordnungsreduktion mathematisch präzisiert, andererseits werden einige ausgewählte Verfahren der Ordnungsreduktion ausführlicher vorgestellt. Diese bilden den Ausgangspunkt für eine Erweiterung auf nichtlineare Systeme im nächsten Kapitel.

In den vergangenen Jahrzehnten sind eine Vielzahl verschiedener Verfahren zur Ordnungsreduktion linearer Systeme vorgestellt worden; zu vielen Verfahren existieren darüberhinaus noch eine ganze Reihe von Abwandlungen. Hier wird lediglich auf Verfahren für die in dieser Arbeit ausschließlich betrachtete Zustandsraumdarstellung von Systemen eingegangen. Es werden vorwiegend solche Verfahren vorgestellt, die eine Übertragung in den nichtlinearen Bereich ermöglichen.

In Abschnitt (3.1) wird zunächst die in dieser Arbeit verwendete Normalform linearer Systeme vorgestellt und unter verschiedenen Gesichtspunkten diskutiert. Danach wird in Abschnitt (3.2) das wichtige Konzept der Übertragungsfunktion erläutert. Schließlich folgt in (3.3) eine mathematische Präzisierung der Aufgabe der Ordnungsreduktion sowie die Vorstellung verschiedener Forderungen von Eigenschaften des reduzierten Systems. Schließlich folgt in Abschnitt (3.4) das für diese Arbeit überaus wichtige Konzept der projektiven Herangehensweise an das Reduktionsproblem, das die Grundlage für verschiedene in Abschnitt (3.5) vorgestellte Reduktionsverfahren darstellt und das darüberhinaus durch seine Erweiterungsmöglichkeit auf multilineare Systeme die Basis für einige Reduktionsverfahren nichtlinearer Systeme des nächsten Kapitels darstellt. In Abschnitt (3.6) wird eine andere Klasse von Reduktionsverfahren kurz vorgestellt; diese beruht auf einer Äquivalenztransformation des Systems, durch die eine Bewertung wichtiger Systemeigenschaften ermöglicht wird. Abschließend wird in Abschnitt (3.7) das relativ neue Reduktionsverfahren der Frequenzgangs Anpassung erläutert.

3.1 Zustandsraumdarstellung zeitinvarianter linearer Systeme

Hier werden kurz die in dieser Arbeit relevanten Grundlagen linearer Systeme vorgestellt.

Zunächst wird die in dieser Arbeit verwendete Normalform linearer Differentialgleichungssysteme eingeführt, danach wird auf das Konzept der Übertragungsfunktion ausführlicher eingegangen.

3.1.1 Normalform linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten zunächst eine Form der *Zustandsraumdarstellung* zeitinvarianter linearer Gleichungssysteme der Regelungstechnik:

$$\mathbf{J} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u} \quad , \quad (3.1)$$

$$\vec{y} = \mathbf{C} \vec{x} + \mathbf{D} \vec{u} \quad . \quad (3.2)$$

Die erste dieser Gleichungen wird im Folgenden *Zustandsgleichung* genannt, die zweite *Ausgangsgleichung*. Darin sind¹ $\vec{u}(t) \binom{p}{1}$ der *Eingangsvektor*, das heißt, der Vektor der p von außen auf das System einwirkenden Steuergrößen, $\vec{y}(t) \binom{q}{1}$ der *Ausgangsvektor* der q Meßgrößen. $\vec{x}(t) \binom{n}{1}$ ist der *Zustandsvektor* des Differentialgleichungssystems, wobei n die *Systemordnung* desselben darstellt. Diese Vektoren sind über die *Zustandsmatrix* $\mathbf{A} \binom{n}{n}$, die *Eingangsmatrix* $\mathbf{B} \binom{n}{p}$, die *Ausgangsmatrix* $\mathbf{C} \binom{q}{n}$, die *Durchgangsmatrix* $\mathbf{D} \binom{q}{p}$ und die *Trägheitsmatrix* $\mathbf{J} \binom{n}{n}$ miteinander verknüpft.

Die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{J} werden in der gesamten Arbeit als zeitunabhängig betrachtet, was bereits eine wesentliche Einschränkung darstellt. Die Zustandsmatrix \mathbf{A} und die Trägheitsmatrix \mathbf{J} eines gegebenen Systems werden darüber hinaus als regulär, also invertierbar vorausgesetzt.

Bei einem *Single-Input System* ist insbesondere $p = 1$; hier entartet die Eingangsmatrix \mathbf{B} zu einem Vektor \vec{B} . Entsprechend entartet bei einem *Single-Output System* mit $q = 1$ die Ausgangsmatrix \mathbf{C} zu einem Vektor \vec{C}^T .

3.1.2 Bedeutung der einzelnen Terme

Das Systemverhalten wird zunächst im Wesentlichen durch die Zustandsgleichung (3.1) bestimmt.

Das zugrunde liegende Differentialgleichungssystem für den Zustandsvektor \vec{x} ist durch die Zustandsmatrix \mathbf{A} und die Trägheitsmatrix \mathbf{J} gegeben, wobei \mathbf{J} lediglich das dynamische Systemverhalten ($\vec{x} \neq \vec{0}$) beeinflusst.

Der Term $\mathbf{B} \vec{u}(t)$ stellt einen äußeren Antrieb des Systems dar, im Folgenden meist als *Last* bezeichnet. Die Aufteilung in \mathbf{B} und \vec{u} wird vorgenommen, um die Verteilung \mathbf{B} der Last auf die Zustandsgrößen von ihrem zeitlichen Verhalten $\vec{u}(t)$ zu separieren. Das qualitative Zeitverhalten der Komponenten des Eingangsvektors wird im Folgenden als *Anregung* bezeichnet (zum Beispiel sinusoidale Anregung, stufenförmige Anregung usw.).

Die gegenseitige Normierung der beiden Bestandteile ist zunächst willkürlich, für das Systemverhalten ist lediglich die Kombination $\mathbf{B} \vec{u}(t)$ von Bedeutung. In dieser Arbeit wird

¹ Die *Dimensionsklammer* $\binom{z}{s}$ gibt Dimensionen von Matrizen und Tensoren an: z Zeilen (Dimension der oberen Indizes), s Spalten (Dimension der unteren Indizes). Einer Matrizen- bzw. Tensor-Multiplikation entspricht dann eine Kontraktion zweier aufeinander folgender Objekte über den unteren Index der ersten Objekts und den oberen Index der zweiten Objekts; die involvierten Dimensionen müssen dabei übereinstimmen.

jedoch davon ausgegangen, dass die Größenordnung der Last im Wesentlichen durch die Eingangsmatrix gegeben ist; der Eingangsvektor wird als dimensionslose Steuergröße der Größenordnung 1_p aufgefasst.

Die Ausgangsgleichung (3.2) dient dazu, aus dem Zustandsvektor \vec{x} und dem Eingangsvektor \vec{u} den interessierenden Ausgangsvektor \vec{y} linear zu kombinieren. Die Ausgangsmatrix \mathbf{C} transformiert dabei den Zustandsvektor, die Durchgangsmatrix \mathbf{D} dient für den Eingangsvektor als Bypass zur Zustandsgleichung.

3.1.3 Trägheitsmatrix und Standardisierung

In der Regelungstechnik wird oft auf eine nichttriviale Trägheitsmatrix verzichtet, das heißt, die Trägheitsmatrix wird als Identität angenommen, $\mathbf{J} = \mathbf{I}_n$. Dieser Fall wird in dieser Arbeit als *Standardisierung* bezeichnet (vergleiche Anhang (A)). Standardisierung kann für alle betrachteten Systeme durch Linksmultiplikation von (3.1) mit \mathbf{J}^{-1} herbeigeführt werden.

Bei der Ortsdiskretisierung geometriebasierter physikalisch-technischer Systeme erhält man im Allgemeinen Systeme mit vielen Freiheitsgraden, deren Systemmatrizen \mathbf{J} , \mathbf{A} , \mathbf{B} zwar groß, jedoch spärlich besetzt sind. Insbesondere erhält man oft auch nichtdiagonale Trägheitsmatrizen. Eine Überführung in Standardisierung $\mathbf{J} = \mathbf{I}_n$ würde in solchen Fällen die Besetzungsstruktur der beiden übrigen Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} zerstören, also zu vollbesetzten Matrizen führen. Dies ist aufgrund des Speicherbedarfs und der Verschlechterung der rechen-technischen Möglichkeiten unbedingt zu vermeiden; deshalb werden in dieser Arbeit meist auch nichttriviale Trägheitsmatrizen berücksichtigt.

Nichtdiagonale Trägheitsmatrizen sind oftmals — jedoch nicht immer! — physikalisch schlecht motiviert: Sie entstammen eher der mathematischen Formulierung der Ortsdiskretisierung als dem zugrunde liegenden physikalischen Modell. Solch künstlich verteilte Trägheitsmatrizen beeinflussen im Wesentlichen das Systemverhalten bei schnellen Veränderungen, ein Bereich, der eben wegen der zunehmenden Bedeutung der Gittereigenschaften der Ortsdiskretisierung in dieser Arbeit nicht im Zentrum der Betrachtung steht. Auf langsame Veränderungen der Zustände hat diese künstliche Verteilung nur einen geringen Einfluss. In diesen Fällen einer künstlich verteilten Trägheitsmatrix ist es oft gerechtfertigt, die Trägheitsmatrix künstlich zu diagonalisieren, im einfachsten Fall durch Summieren über die einzelnen Zeilen. Dieses Vorgehen reduziert den rechentechnischen Aufwand enorm, da bei vielen Verfahren der Ordnungsreduktion letztlich doch eine Multiplikation mit der inversen Trägheitsmatrix erforderlich ist.

3.1.4 Randbedingungen

Isoliert betrachtete physikalische Systeme werden durch Randbedingungen in ein Modell der wirklichen (oder auch künstlichen) Welt eingebettet. Diese Randbedingungen beeinflussen — neben den physikalischen Grundgleichungen — oft das Systemverhalten in entscheidendem Maße. In dieser Arbeit sind insbesondere Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen

von Bedeutung. Bei *Dirichlet-Randbedingung* wird der Wert der zu bestimmenden physikalischen Größe auf dem Rand des Rechengebiets vorgegeben, im *inhomogenen Fall* durch beliebige Werte, im *homogenen Fall* durch den Wert Null. Bei *Neumann-Randbedingungen* wird die Normalableitung der gesuchten Größe auf dem Rand des Rechengebiets vorgegeben, auch hier im *inhomogenen Fall* durch beliebige Werte, im *homogenen Fall* durch den Wert Null.

In vielen Fällen — insbesondere im Fall von Neumann-Randbedingungen — ändern Randbedingungen die Grundgleichungen für die am Simulationsrand liegenden Zustandsgrößen \vec{x}_{rand} und damit die Zustandsmatrix \mathbf{A} ab. Oft — insbesondere im Fall von inhomogenen Randbedingungen — ergeben sich auch zusätzliche an das System angelegte Lasten, im Folgenden *virtuelle Lasten* genannt, und damit Änderungen der Eingangsmatrix \mathbf{B} und des Eingangsvektors \vec{u} . Da Randbedingungen im Allgemeinen nicht willentlich durch die Eingangsgrößen geändert werden können und auch einer anderen Dynamik unterliegen, als die von außen beeinflussbaren Lasten, ist in diesem Fall eine Trennung von Eingangsmatrix und Eingangsvektor in einen von außen frei bestimmbaren *externen Anteil* \mathbf{B}_{ext} , $\vec{u}_{\text{ext}}(t)$ und einen durch die Randbedingungen vorgegebenen *virtuellen Anteil* \mathbf{B}_{vir} , $\vec{u}_{\text{vir}}(t)$ gemäß

$$\mathbf{B} \equiv \left(\mathbf{B}_{\text{ext}} \quad \mathbf{B}_{\text{vir}} \right) , \quad \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}_{\text{ext}} \\ \vec{u}_{\text{vir}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

durchzuführen.

Oftmals weisen alle virtuellen Anteile die gleiche Dynamik auf und können daher zu einem Vektor \vec{B}_{vir} bzw. einem Skalar $u_{\text{vir}}(t)$ zusammengezogen werden, was im Folgenden *Single-Input Randbedingung* genannt wird. Der in diesem Zusammenhang wichtigste und in dieser Arbeit hauptsächlich betrachtete Fall ist der eines konstanten virtuellen Eingangs, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_{\text{vir}}(t) \equiv 1$, im Folgenden als *stationäre Randbedingung* bezeichnet.

In dem in diesem Kapitel betrachteten linearen Fall können virtuelle Lasten durch die Einführung geeigneter Relativkoordinaten, das heißt, eine Verschiebung des Bezugspunkts, oftmals vermieden werden: Das Gesamtsystem wird in zwei Teilsysteme aufgeteilt, wobei jeweils ein Lastanteil (extern oder virtuell) Null gesetzt wird, $\vec{u}_{\text{ext}}(t) = \vec{0}$ oder $\vec{u}_{\text{vir}}(t) = \vec{0}$. Die Lösungen werden anschließend superponiert. Mag dieses Vorgehen für stationäre Randbedingungen gerechtfertigt sein (hier liefert der virtuelle Lastanteil lediglich einen konstanten Offset), so ist es jedoch im Fall von allgemeineren Randbedingungen fraglich.

Im nichtlinearen Fall gilt das Superpositionsprinzip nicht mehr. Hier ist die Verschiebung des Bezugspunktes auch für stationäre Randbedingungen mit teilweise aufwändigen Transformationen verbunden (siehe Abschnitt (4.1.4)). In diesem Fall sollte nach Möglichkeit auf die Einführung von Relativkoordinaten verzichtet werden.

Für die Ordnungsreduktion spielt die Aufteilung in externe und virtuelle Lasten zunächst keine Rolle. Jedoch sind einige Verfahren der Ordnungsreduktion zunächst nur für Single-Input Systeme definiert; in diesem Fall muss eine Erweiterung auf Multi-Input Systeme vorgenommen werden, wobei gegebenenfalls die Eigenschaften der Randbedingungen in die Be-

trachtung mit einfließen können. Darüberhinaus beeinträchtigt die virtuelle Last oftmals die für einige Verfahren wichtige Besetzungsstruktur der Eingangsmatrix.

Als ein Beispiel für virtuelle Lasten sei hier die Berücksichtigung von Wärmebädern bei der Simulation der Wärmeausbreitung angeführt: Durch Wärmebäder einer Temperatur ungleich der Bezugstemperatur treten Wärmeflüsse auf, die durch virtuelle Lasten in Form von stationären Randbedingungen modelliert werden können.

3.2 Übertragungsfunktion

Formal lässt sich das Gleichungssystem (3.1), (3.2) nach einer Laplace-Transformation. Man erhält die Lösungen

$$\vec{x}(s) \equiv \mathbf{G}(s) \vec{u}(s) = (s\mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \vec{u}(s), \quad (3.4)$$

$$\vec{y}(s) \equiv \mathbf{H}(s) \vec{u}(s) = [\mathbf{D} + \mathbf{C} (s\mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] \vec{u}(s) \quad (3.5)$$

mit den Übertragungsfunktionen $\mathbf{G}(s)$ (n) und $\mathbf{H}(s)$ (q) der Zustands- und Ausgangsgrößen und der komplexen Laplace-Variablen s .

Es erweist sich als nützlich, die Abkürzung $\mathbf{F}(s)$ (n) für den frequenzabhängigen Anteil der Übertragungsfunktionen

$$\mathbf{F}(s) \equiv s\mathbf{J} - \mathbf{A} \quad (3.6)$$

einzuführen, womit dann die Übertragungsfunktionen durch

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{F}(s)^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C} \mathbf{F}(s)^{-1} \mathbf{B} \quad (3.8)$$

gegeben ist. Es sei noch zur Klarstellung angemerkt, dass der Superskript hier und in den folgenden Relationen einen Exponent und nicht etwa einen Index darstellt.

3.2.1 Reihenentwicklung

Die Übertragungsfunktion lässt sich um eine komplexe Entwicklungsfrequenz $|\sigma| < \infty$ im Laplace-Raum in eine Taylor-Reihe entwickeln. Mit der Beziehung

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}^i \quad (3.9)$$

für invertierbare Matrizen \mathbf{M} ergibt sich durch Umschreiben von (3.6) auf die verschobene Laplace-Variable $\tilde{s} = s - \sigma$ für $\mathbf{F}(s)^{-1}$ die Entwicklung

$$\mathbf{F}(s)^{-1} = - \sum_{i=0}^{\infty} \{(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}\}^i (\mathbf{A} - \sigma\mathbf{J})^{-1} (s - \sigma)^i$$

3 ORDNUNGSREDUKTION LINEARER SYSTEME

$$= + \sum_{i=0}^{\infty} \{ \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{J} \}^i \mathbf{F}(\sigma)^{-1} (\sigma - s)^i . \quad (3.10)$$

Damit folgen die Entwicklungen der Übertragungsfunktionen bis zur Ordnung k zu

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\sigma,k}(s) &\equiv \mathbf{G}_{\sigma,k}(s) \vec{u}(s) \\ &= + \sum_{i=0}^k \{ \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{J} \}^i \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{B} (\sigma - s)^i \vec{u}(s) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_{\sigma,k}(s) &\equiv \mathbf{H}_{\sigma,k}(s) \vec{u}(s) \\ &= [\mathbf{D} + \sum_{i=0}^k \mathbf{C} \{ \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{J} \}^i \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{B} (\sigma - s)^i] \vec{u}(s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die einzelnen Terme der Reihenentwicklungen werden auch *Momente* der Übertragungsfunktionen genannt. Zur Nomenklatur sei angemerkt, dass unter den Ausdrücken $\mathbf{G}_{\sigma,k}$ und $\mathbf{H}_{\sigma,k}$ die *Partialsommen* von Momenten der Übertragungsfunktionen verstanden werden, nicht die Momente selbst.

Eine Entwicklung um die Laplace-Variable $\sigma = 0$ ist für diese Arbeit von besonderer Bedeutung. In diesem Fall ergeben sich die vereinfachten Ausdrücke

$$\mathbf{F}(s)^{-1} = - \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J})^i \mathbf{A}^{-1} s^i \quad (3.13)$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{x}_k(s) &\equiv \mathbf{G}_k(s) \vec{u}(s) \\ &= - \sum_{i=0}^k (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} s^i \vec{u}(s) , \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_k(s) &\equiv \mathbf{H}_k(s) \vec{u}(s) \\ &= [\mathbf{D} - \sum_{i=0}^k \mathbf{C} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} s^i] \vec{u}(s) . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ähnliche Reihenentwicklungen existieren für den hochfrequenten Limes $\sigma \rightarrow \infty$ der Übertragungsfunktion. In dieser Arbeit stehen jedoch die niederfrequenten Systemeigenschaften im Vordergrund, da bei ortsdiskreten Systemen im hochfrequenten Limes zunehmend Eigenschaften des Diskretisierungsgitters dargestellt werden; deshalb werden die Entwicklungen um $\sigma \rightarrow \infty$ hier nicht angegeben.

3.2.2 Sinusoidale Anregung und Stationäre Lösung

Für $s \rightarrow \sigma$ brechen die Reihenentwicklungen (3.11) und (3.12) nach den nullten Ordnungen ab, die in diesem Fall den Wert der Übertragungsfunktion an der Stelle $s = \sigma$ annehmen:

$$\begin{aligned}\vec{x}(s \rightarrow \sigma) &= \mathbf{G}(\sigma) \vec{u}(\sigma) = \mathbf{G}_{\sigma,0}(\sigma) \vec{u}(\sigma) \\ &= \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{B} \vec{u}(\sigma) \quad ,\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{y}(s \rightarrow \sigma) &= \mathbf{H}(\sigma) \vec{u}(\sigma) = \mathbf{H}_{\sigma,0}(\sigma) \vec{u}(\sigma) \\ &= [\mathbf{D} + \mathbf{C} \mathbf{F}(\sigma)^{-1} \mathbf{B}] \vec{u}(\sigma) \quad .\end{aligned}\quad (3.17)$$

Für $\sigma = 0$ folgen als nullte Terme der Reihenentwicklungen die *stationären Lösungen* $\vec{x}(s=0) \equiv \vec{x}_{\text{st}}$ und $\vec{y}(s=0) \equiv \vec{y}_{\text{st}}$ zum *stationären Eingang* $\vec{u}(s=0) \equiv \vec{u}_{\text{st}}$,

$$\vec{x}_{\text{st}} \equiv \mathbf{G}_0 \vec{u}_{\text{st}} = - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \vec{u}_{\text{st}} \quad ,\quad (3.18)$$

$$\vec{y}_{\text{st}} \equiv \mathbf{H}_0 \vec{u}_{\text{st}} = [\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] \vec{u}_{\text{st}} \quad .\quad (3.19)$$

3.3 Ordnungsreduktion

Aufbauend auf diese Vorbetrachtungen kann nun der Begriff *Ordnungsreduktion* (linearer Systeme) für diese Arbeit systematisch gefasst werden.

3.3.1 Formerhaltende Ordnungsreduktion und Messgrößenerhaltung

Gegeben sei ein lineares System hoher Systemordnung n , im Folgenden *volles System* genannt, das in der Zustandsraumdarstellung

$$\mathbf{J}_n \dot{\vec{x}}_n = \mathbf{A}_n \vec{x}_n + \mathbf{B}_n \vec{u} \quad ,\quad (3.20)$$

$$\vec{y}_n = \mathbf{C}_n \vec{x}_n + \mathbf{D}_n \vec{u}\quad (3.21)$$

durch die Vektoren $\vec{u}(t) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_n(t) \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_n(t) \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Matrizen $\mathbf{A}_n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_n \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_n \begin{pmatrix} q \\ n \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_n \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}_n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Dieses volle System soll mittels (halb-) automatischer Verfahren durch ein *reduziertes System* approximiert werden. Dies soll bei Beachtung der Formerhaltung wiederum in Zustandsraumdarstellung vorliegen, wobei der Zustandsvektor des reduzierten Systems die im Vergleich zum vollen System kleine Systemordnung m , also

$$m \ll n\quad (3.22)$$

aufweisen soll. Das reduzierte System ist also durch

$$\mathbf{J}_m \dot{\vec{x}}_m = \mathbf{A}_m \vec{x}_m + \mathbf{B}_m \vec{u} \quad ,\quad (3.23)$$

3 ORDNUNGSREDUKTION LINEARER SYSTEME

$$\vec{y}_m = \mathbf{C}_m \vec{x}_m + \mathbf{D}_m \vec{u} , \quad (3.24)$$

also durch die Vektoren $\vec{u}(t) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_m(t) \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_m(t) \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Matrizen $\mathbf{A}_m \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_m \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_m \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_m \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}_m \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$ gegeben.

Der Zustandsvektor sowie die Systemmatrizen von vollem und reduziertem System werden durch die Subskripte „n“ und „m“, die die jeweilige Systemordnung symbolisieren, unterschieden. Da der Ausgangsvektor des reduzierten Systems lediglich eine Approximation desjenigen des vollen Systems darstellt, sind auch diese Vektoren durch entsprechende Subskripte zu unterscheiden. Jedoch ist der Eingangsvektor der beiden Systeme identisch; er trägt daher keinen Subskript.

Die Forderung einer guten Approximation bedeutet, dass der *Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung* $\vec{e}_{\vec{y}} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{e}_{\vec{y}} = \vec{y}_m - \vec{y}_n , \quad (3.25)$$

in einem zu definierenden Sinn minimiert werden soll. Diese Forderung wird im Folgenden *Messgrößenerhaltung* genannt.

3.3.2 Eigenschaften der Reduktionsverfahren

Da die Anforderungen an das Ergebnis der Reduktion in den verschiedenen Einsatzbereichen stark variieren, sind in den vergangenen Jahrzehnten eine Reihe von Verfahren zur Ordnungsreduktion linearer Systeme entwickelt worden. An das reduzierte System werden bestimmte Forderungen gestellt, die die gewünschten Eigenschaften des reduzierten Systems sicherstellen.

In dieser Arbeit sollen durch das reduzierte System vor allem stationäre und langsam veränderliche Zustände des vollen Systems korrekt wiedergegeben werden, wobei das durch die niedrigsten Eigenwerte dominierte Systemverhalten durchaus noch ausreichend genau approximiert werden soll. Die Erzielung dieses Verhaltens durch die Betrachtung der Übertragungsfunktion des Systems ist Hauptaugenmerk dieses Abschnitts.

3.3.2.1 Stationäre Genauigkeit

Eine der wichtigsten Eigenschaften, die ein Verfahren der Ordnungsreduktion aufweisen kann, ist *stationäre Genauigkeit*. Das bedeutet, dass der stationäre Zustand des vollen Systems im reduzierten System exakt reproduziert wird, dass also der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung (3.25) im stationären Zustand verschwindet:

$$\vec{e}_{\vec{y},st} = \vec{0}_q \quad \text{bzw.} \quad \vec{y}_{m,st} = \vec{y}_{n,st} . \quad (3.26)$$

3.3.2.2 Übertragungsfunktion

Eine Forderung, die man im Frequenzbereich an das reduzierte System stellen kann, ist die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen $\mathbf{H}_n(s) \binom{q}{p}$ und $\mathbf{H}_m(s) \binom{q}{p}$ des originalen und des reduzierten Systems an einer Stützstelle s im Laplace-Bereich,

$$\mathbf{H}_m(s) = \mathbf{H}_n(s) . \quad (3.27)$$

Momentenkriterium

Mit Hilfe der Reihenentwicklung (3.12) kann die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen von vollem und reduziertem System in einer Umgebung der Entwicklungsfrequenz σ im Laplace-Bereich näherungsweise gefordert werden, in dem die niedrigsten Momente $0 \leq i \leq k$ der Übertragungsfunktionen und somit die Partialsummen der Übertragungsfunktionen der Ausgangsgleichung übereinstimmen sollen:

$$\mathbf{H}_{m,\sigma,k}(s) = \mathbf{H}_{n,\sigma,k}(s) , \quad (3.28)$$

oder speziell für die Entwicklungsfrequenz $\sigma = 0$

$$\mathbf{H}_{m,k}(s) = \mathbf{H}_{n,k}(s) . \quad (3.29)$$

Diese Eigenschaft und ihre Varianten werden im Folgenden als *Momentenkriterium* bezeichnet.

Stationäre Genauigkeit

Die stationäre Genauigkeit kann auch als Spezialfall der Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen nach (3.27) bei der Frequenz $s = 0$ bzw. nach (3.29) für $k = 0$ aufgefasst werden:

$$\mathbf{H}_{m,0} = \mathbf{H}_{n,0} . \quad (3.30)$$

3.4 Projektive Methoden der Ordnungsreduktion

In diesem Abschnitt wird einer der wichtigsten Formalismen zur Repräsentation von Reduktionsverfahren vorgestellt, die projektive Methode der Ordnungsreduktion.

Zunächst werden die formalen Grundlagen des Projektionsansatzes eingeführt, danach werden die bereits vorgestellten Charakteristika von Reduktionsverfahren auf den hier betrachteten Fall spezialisiert. In Abschnitt (3.4.6) wird ein neues Charakteristikum vorgestellt, die Zustandsgrößenerhaltung. Schließlich wird in Abschnitt (3.4.7) erläutert, wie durch eine Projektion der Zustandsgleichung das reduzierte System erhalten werden kann.

Ein zentraler Aspekt der projektiven Methode, nämlich die Wahl geeigneter Abbildungen zwischen den Zustandsräumen, wird auf Abschnitt (3.5) verschoben.

3.4.1 Nichtbijektive Projektion der Zustandsräume des vollen und reduzierten Systems

Wir betrachten einen Zustandsvektor $\vec{x}_n \equiv \vec{x}_n(t)$ aus dem Zustandsraum \mathbb{R}^n des vollen Systems und den korrespondierenden Zustandsvektor $\vec{x}_m \equiv \vec{x}_m(t)$ aus dem Zustandsraum \mathbb{R}^m des reduzierten Systems, jeweils als Lösung von Gleichung (3.20) und (3.23) zu einer beliebigen Zeit t . Bei der hier betrachteten Klasse von Methoden der Ordnungsreduktion wird die Reduktion durch Projektionsmatrizen zwischen den Zustandsräumen des vollen und reduzierten Systems vermittelt. Die durch die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix repräsentierten linearen Abbildungen werden in Abbildung (3.1) grafisch veranschaulicht.

Die *Reduktionsmatrix* $\mathbf{R} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ projiziert via

$$\widetilde{\vec{x}}_m = \mathbf{R} \vec{x}_n \quad (3.31)$$

den Zustandsraum \mathbb{R}^n des vollen Systems auf den Zustandsraum \mathbb{R}^m des reduzierten Systems; die Reduktionsmatrix bildet den vollen Zustandsvektor \vec{x}_n auf einen *Bildvektor* $\widetilde{\vec{x}}_m$ (angedeutet durch die Tilde) aus dem \mathbb{R}^m ab. Ein bedeutender Spezialfall liegt vor, wenn die Reduktionsmatrix als Auswahlmatrix einer Untermenge von Zuständen des vollen Zustandsvektors gewählt wird; dieser Fall wird in Abschnitt (3.4.6) behandelt.

Für die Umkehrung von (3.31) wird eine *Rekonstruktionsmatrix* $\mathbf{V} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ benötigt, die eine Abbildung des \mathbb{R}^m in einen geeignet gewählten m -dimensionalen Unterraum \mathcal{R}_m des \mathbb{R}^n gemäß

$$\widetilde{\vec{x}}_n = \mathbf{V} \vec{x}_m \quad (3.32)$$

repräsentiert; die Rekonstruktionsmatrix bildet den reduzierten Zustandsvektor \vec{x}_m auf einen *Bildvektor* $\widetilde{\vec{x}}_n$ (angedeutet durch die Tilde) aus \mathcal{R}_n ab.

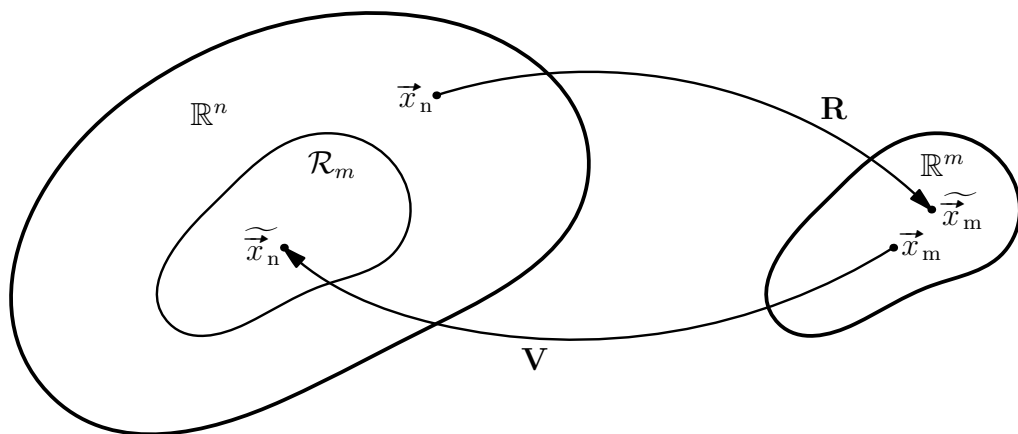


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der durch die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix repräsentierten linearen Abbildungen

Diese Abbildung dient zur Veranschaulichung der in Abschnitt (3.4.1) diskutierten linearen Abbildungen zwischen den Zustandsräumen des vollen und reduzierten Systems.

3.4 PROJEKTIVE METHODEN DER ORDNUNGSREDUKTION

Als zentrale Bedingung für die Ordnungsreduktion sollen die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix im Sinne von

$$\mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{I}_m \quad (3.33)$$

verallgemeinert invers zueinander sein.

Der Unterraum \mathcal{R}_m soll dabei so gewählt werden, dass er möglichst genau diejenigen Zustände enthält, die für das Systemverhalten maßgeblich sind; der Zustandsvektor des vollen Systems sollte sich also möglichst in der Nähe dieses Unterraums bewegen.

3.4.2 Zustandsgrößenerhaltung

Unter Verwendung dieser Projektionsmatrizen werden zunächst der *volle* und der *reduzierte Gleichungsfehler der Zustandsgleichung* $\vec{e}_{\vec{x}_n}^{(n)}$ und $\vec{e}_{\vec{x}_m}^{(m)}$ definiert als

$$\vec{e}_{\vec{x}_n} = \widetilde{\vec{x}}_n - \vec{x}_n = \mathbf{V} \vec{x}_m - \vec{x}_n, \quad (3.34)$$

$$\vec{e}_{\vec{x}_m} = \vec{x}_m - \widetilde{\vec{x}}_m = \vec{x}_m - \mathbf{R} \vec{x}_n, \quad (3.35)$$

also als Abweichung des aus dem reduzierten System rekonstruierten Zustandsvektors und des Zustandsvektors des vollen Systems. bzw. als Abweichung des reduzierten Zustandsvektors und des aus dem Zustandsvektor des vollen Systems projizierten Zustandsvektors. Der reduzierte Gleichungsfehler steht mit dem vollen Gleichungsfehler der Zustandsgleichung in dem Zusammenhang

$$\vec{e}_{\vec{x}_m} = \mathbf{R} \vec{e}_{\vec{x}_n}. \quad (3.36)$$

Bei der Formulierung der Ordnungsreduktion mit Hilfe von Projektionsmatrizen wird an das reduzierte System meist die Forderung der Minimierung des (vollen oder reduzierten) Gleichungsfehlers der Zustandsgleichung gestellt. Diese Forderung wird in dieser Arbeit als (*volle oder reduzierte*) *Zustandsgrößenerhaltung* bezeichnet.

3.4.3 Auswertung von Messgrößenerhaltung und Zustandsgrößenerhaltung

Messgrößenerhaltung (3.25) und volle Zustandsgrößenerhaltung (3.34) liefern in dieser Formulierung der Ordnungsreduktion zusammen die Ausdrücke

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_n \mathbf{V}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_n \quad (3.38)$$

für die reduzierte Ausgangs- und Durchgangsmatrix. Damit schreibt sich der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung unter Zuhilfenahme des vollen Gleichungsfehlers der Zustandsgleichung als

$$\vec{e}_{\vec{y}} = \mathbf{C}_n \vec{e}_{\vec{x}_n}. \quad (3.39)$$

3.4.4 Stationäre Genauigkeit

Die Forderung der stationären Genauigkeit kann zunächst für die Zustandsgleichung gestellt werden. Der volle Gleichungsfehler der Zustandsgleichung (3.34) soll im stationären Zustand verschwinden, also

$$\vec{e}_{\vec{x}_{n,st}} = \vec{0}_n \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\vec{x}}_{n,st} \equiv \mathbf{V} \vec{x}_{m,st} = \vec{x}_{n,st} . \quad (3.40)$$

Verwendung der stationären Lösungen der Zustandsgleichungen (3.20) und (3.23) liefert für die reduzierte Eingangsmatrix \mathbf{B}_m als notwendiges Kriterium²

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{R} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \quad (3.41)$$

und damit dann als hinreichendes Kriterium die Bedingung

$$\mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n . \quad (3.42)$$

Fordert man jetzt die stationäre Genauigkeit der Ausgangsgleichung (3.26), so ergibt sich mit der Ausgangs- und Durchgangsmatrix nach (3.37) und (3.38) und der eben abgeleiteten reduzierten Eingangsmatrix (3.41) der Ausdruck

$$\mathbf{C}_n \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n . \quad (3.43)$$

als hinreichendes Kriterium.

3.4.5 Übereinstimmung der Übertragungsfunktion und Momentenkriterium

Die Übereinstimmung der Übertragungsfunktion an einer Stützstelle s im Laplace-Bereich (3.27) reduziert sich mit den Gleichungen (3.37) und (3.38) im Wesentlichen auf eine Bedingung für die Übertragungsfunktion der Zustandsgrößen:

$$\mathbf{C}_n \mathbf{V} \mathbf{G}_m(s) = \mathbf{C}_n \mathbf{G}_n(s) . \quad (3.44)$$

Für das Momentenkriterium (3.28) und seine Spezialfälle gelten analoge Beziehungen.

3.4.6 Strukturhaltung

Ein aussichtsreicher Weg, eine gute Reduktion zu erhalten, ist, eine Auswahl der Zustandsgrößen selbst im reduzierten System möglichst gut zu approximieren. Dadurch wird Strukturhaltung erreicht, das bedeutet, die ausgewählten Zustandsgrößen behalten im Wesentlichen ihre Interpretation bei.

² Das Kriterium ist für die reduzierte Zustandsgrößenerhaltung (3.35) — $\tilde{\vec{x}}_{m,st} \equiv \mathbf{R} \vec{x}_{n,st} = \vec{x}_{m,st}$ bzw. $\vec{e}_{\vec{x}_{m,st}} = \vec{0}_m$ — auch hinreichend.

3.4.6.1 Auswahlmatrix und Ausgangsmatrix

Strukturerhaltung wird gewährleistet, in dem als Reduktionsmatrix \mathbf{R} eine *Auswahlmatrix* $\mathbf{P} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ verwendet wird, deren Zeilen Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^n darstellen,

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{P} . \quad (3.45)$$

Eine geeignete Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} muß dann gemäß (3.33) gefunden werden. Sie besteht im Wesentlichen aus der transponierten Auswahlmatrix mit zusätzlichen Einträgen in den entstehenden Nullzeilen, mit denen das Systemverhalten verbessert werden kann.

Ein strukturerhaltendes Verfahren kann insbesondere dann Anwendung finden, wenn die Ausgangsmatrix des vollen Systems nur einen Teil der Zustandsgrößen berücksichtigt, wenn also einige ihrer Spalten aus Nullvektoren bestehen. Dann dürfen für die Ermittlung des Ausgangsvektors die dazugehörigen Zustandsgrößen im reduzierten System fehlen. Die Ausgangsmatrix \mathbf{C}_n lässt sich in diesem Fall darstellen als Produkt einer *reduzierten Ausgangsmatrix* $\mathbf{C}_m^* \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix}$ und einer als Reduktionsmatrix verwendeten Auswahlmatrix \mathbf{P} ,

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_m^* \mathbf{P} . \quad (3.46)$$

Im Folgenden wird bei strukturerhaltenden Verfahren immer die Gültigkeit der Relation (3.46) vorausgesetzt.

3.4.6.2 Messgrößenerhaltung und Zustandsgrößenerhaltung

Für eine strukturerhaltende Reduktion folgt aus (3.37) sofort

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_m^* . \quad (3.47)$$

Für den Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung ergibt sich damit

$$\vec{e}_{\vec{y}} = -\mathbf{C}_m^* \vec{e}_{\vec{x}_m} . \quad (3.48)$$

3.4.6.3 Stationäre Genauigkeit

Bei der Wahl der reduzierten Eingangsmatrix nach (3.41) zu

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{P} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n . \quad (3.49)$$

ist für eine strukturerhaltende Reduktion das hinreichende Kriterium (3.43) für die stationäre Genauigkeit des Ausgangsvektors identisch erfüllt, auch wenn die hinreichende Bedingung (3.42) der stationären Genauigkeit des Zustandsvektors nicht notwendigerweise gewährleistet ist.³ Damit ist in diesem Fall (3.49) notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Gewährleistung der stationären Genauigkeit der Ausgangsgleichung.

³ Jedoch ist die stationäre Genauigkeit des reduzierten Zustandsvektors auch hinreichend erfüllt; vergleiche Fußnote zu Gleichung (3.41).

3.4.6.4 Übereinstimmung der Übertragungsfunktion und Momentenkriterium

Für die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen von vollem und reduziertem System an einer Stützstelle s im Laplace-Bereich (3.27) ergibt sich bei Strukturhaltung

$$\mathbf{C}_m^* \mathbf{G}_m(s) = \mathbf{C}_m^* \mathbf{P} \mathbf{G}_n(s) . \quad (3.50)$$

Auch hier gelten für das Momentenkriterium (3.28) und seine Spezialfälle analoge Beziehungen.

3.4.6.5 Verzicht auf Rekonstruktion des vollen Zustandsvektors

Bei der strukturhaltenden Reduktion kann oft auf eine Rekonstruktion des gesamten Zustandsvektors $\widetilde{\vec{x}}_n$ gemäß (3.32) verzichtet werden: In den in diesem Unterabschnitt abgeleiteten Beziehungen tritt die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} nicht auf, in die hier untersuchten Eigenschaften des reduzierten Systems fließen jeweils ausschließlich die durch \mathbf{P} ausgewählten Zustände ein. Erfolgt die Reduktion nicht über die in Abschnitt (3.4.7) vorgestellte Projektion der Zustandsgleichung kann die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} eventuell komplett aus dem Verfahren eliminiert werden (wie beispielsweise bei der Frequenzgangsanpassung, vergleiche Abschnitt (3.7)).

3.4.7 Projektion der Zustandsgleichung

Mit Hilfe der Transformationen (3.31) und (3.32) kann die Zustandsgleichung des vollen Systems in den Zustandsraum des reduzierten Systems transformiert werden:

3.4.7.1 Reduktionsbedingung

Für die Transformation erweist es sich als zweckmäßig, Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e,n} \binom{n}{n}$ und $\mathbf{T}_{e,m} \binom{m}{m}$ im Sinne von Gleichung (A.3) für das originale und das reduzierte System in die Betrachtung mit einzubeziehen.

Ausgehend von der vollen Zustandsgleichung (3.20) erfolgt die Projektion in den Zustandsraum des reduzierten Systems in vier Schritten:

- Zunächst wird auf die volle Zustandsgleichung die Eichtransformation $\mathbf{T}_{e,n}$ angewendet (Multiplikation von links mit $\mathbf{T}_{e,n}$).
- Jetzt wird unter Verwendung der Reduktionsmatrix \mathbf{R} die linksseitige Projektion vorgenommen (Multiplikation von links mit \mathbf{R}).
- Danach wird auf die linksseitig reduzierte Zustandsgleichung die Eichtransformation $\mathbf{T}_{e,m}$ angewendet (Multiplikation von links mit $\mathbf{T}_{e,m}^{-1}$).
- Schließlich wird unter Verwendung der Zustandsgrößenerhaltung der volle Zustandsvektor gemäß (3.32) durch $\vec{x}_n \approx \widetilde{\vec{x}}_n$ approximiert.

3.4 PROJEKTIVE METHODEN DER ORDNUNGSREDUKTION

Aus der vollen Zustandsgleichung (3.20),

$$\mathbf{J}_n \dot{\vec{x}}_n = \mathbf{A}_n \vec{x}_n + \mathbf{B}_n \vec{u} , \quad (3.51)$$

folgt damit die Näherung

$$\mathbf{T}_{e,m}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n \mathbf{V} \dot{\vec{x}}_m = \mathbf{T}_{e,m}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{A}_n \mathbf{V} \vec{x}_m + \mathbf{T}_{e,m}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{B}_n \vec{u} , \quad (3.52)$$

oder mit der *transformierten Reduktionsmatrix* $\tilde{\mathbf{R}} \binom{m}{n}$,

$$\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{T}_{e,m}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} , \quad (3.53)$$

kurz

$$\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{J}_n \mathbf{V} \dot{\vec{x}}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{A}_n \mathbf{V} \vec{x}_m + \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{B}_n \vec{u} . \quad (3.54)$$

Ein Vergleich von (3.54) mit der reduzierten Zustandsgleichung (3.23),

$$\mathbf{J}_m \dot{\vec{x}}_m = \mathbf{A}_m \vec{x}_m + \mathbf{B}_m \vec{u} , \quad (3.55)$$

liefert sofort die *Reduktionsbedingungen*

$$\mathbf{J}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{J}_n \mathbf{V} , \quad (3.56)$$

$$\mathbf{A}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{A}_n \mathbf{V} , \quad (3.57)$$

$$\mathbf{B}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{B}_n \quad (3.58)$$

für die reduzierten Größen. Insbesondere gilt für den frequenzabhängigen Anteil der Übertragungsfunktion (3.6)

$$\mathbf{F}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{F}_n \mathbf{V} , \quad (3.59)$$

was für die nachfolgenden Betrachtungen von Bedeutung ist.

Die Eichtransformation $\mathbf{T}_{e,n}$ des vollen Systems wird verwendet, um die Approximation bestimmter Eigenschaften des vollen Systems durch das reduzierte System sicherzustellen. Wählt man beispielsweise $\mathbf{T}_{e,n} = \mathbf{A}_n^{-1}$, so wird die notwendige Bedingung (3.41) der stationären Genauigkeit erfüllt, wie man durch Einsetzen von (3.57) in (3.58) nach Verwendung von (3.53) und (3.33) leicht bestätigen kann. Weitere Beispiele hierfür werden in Abschnitt (3.5) gegeben.

Die Eichtransformation $\mathbf{T}_{e,m}$ des reduzierten Systems dient dazu, durch eine frei wählbare Eichbedingung Einfluss auf die reduzierte Systemdarstellung zu nehmen:

3.4.7.2 Eichbedingung

Im Allgemeinen wird man für das reduzierte System Standardeichung verlangen, also die reduzierte Trägheitsmatrix als Identität wählen, was nach (3.56) und (3.53) durch

$$\mathbf{T}_{e,m} = \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n \mathbf{V} \quad (3.60)$$

3 ORDNUNGSREDUKTION LINEARER SYSTEME

erreicht wird. Aus den Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) ergeben sich dann die Ausdrücke

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{I}_m, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{A}_m = (\mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n \mathbf{V})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{A}_n \mathbf{V}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{B}_m = (\mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n \mathbf{V})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{e,n} \mathbf{B}_n \quad (3.63)$$

für die reduzierten Matrizen der Zustandsgleichung.

Für die weiteren Betrachtungen werden jedoch meist die Reduktionsbedingungen in ihrer allgemeinen Form (3.56) bis (3.58) verwendet.

3.4.7.3 Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix

Bei gegebener Reduktionsmatrix \mathbf{R} und Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} sowie unter zusätzlicher Vorgabe von Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e,n}$ und $\mathbf{T}_{e,m}$ ist das reduzierte System damit vollständig bestimmt. Geeignet gewählte Transformationsmatrizen sollen dabei das Verhalten der reduzierten Zustandsgleichung unter verschiedenen Gesichtspunkten optimieren (siehe hierzu Abschnitt (3.5)).

3.4.8 Vergleich mit Äquivalenztransformation

Die projektive Methode der Ordnungsreduktion weist eine formale Ähnlichkeit mit der in Anhang (A.3) erläuterten Äquivalenztransformation auf: Ersetzt man dort die Eichtransformation⁴ \mathbf{T}_e durch die transformierte Reduktionsmatrix $\tilde{\mathbf{R}}$ und die Inverse der Koordinatentransformation \mathbf{T}_k durch die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} , also

$$\mathbf{T}_e \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{T}_k^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{V}, \quad (3.64)$$

so wird der Zusammenhang von (A.8) mit (3.31), (3.32) und (3.33) sowie von (A.13) mit (3.37), (3.38) und insbesondere mit den Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) offensichtlich. Im Unterschied zur Äquivalenztransformation ist die projektive Ordnungsreduktion in der Regel jedoch keine bijektive Transformation!

3.5 Projektive Approximation der Übertragungsfunktion

In diesem Abschnitt werden zwei Ordnungsreduktionsverfahren vorgestellt, die auf einer Projektion der Zustandsgleichung mit Hilfe der Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) basieren.

Durch die geeignete Wahl der Transformationsmatrizen soll dabei das Übertragungsverhalten des vollen Systems durch das reduzierte System approximiert werden. Bei den hier

⁴ \mathbf{T}_e ist hier *nicht* eine der in der Definition (3.53) von $\tilde{\mathbf{R}}$ verwendeten Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e,n}$ bzw. $\mathbf{T}_{e,m}$!

3.5 PROJEKTIVE APPROXIMATION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

vorgestellten Verfahren wird dies durch die Übereinstimmung der Partialsummen der Reihenentwicklungen der Übertragungsfunktionen von vollem und reduziertem System bis zu einer gewissen Ordnung erreicht.

Beim ersten Verfahren, dem Arnoldi-Verfahren, wird durch das Miteinbeziehen der Eingangsmatrix in den Reduktionsalgorithmus die Übereinstimmung der Partialsummen bis zu einer möglichst hohen Ordnung erreicht. Beim zweiten Verfahren, dem Gyan-Verfahren, wird unter Berücksichtigung der Strukturhaltung nur eine Übereinstimmung der ersten beiden Ordnungen gelingen, dafür jedoch teilweise unabhängig von der Eingangsmatrix.

Die Einsatzmöglichkeiten und Eigenschaften dieser beiden Verfahren sind in Tabelle (7.1) auf Seite 128 noch einmal zum Vergleich zusammengestellt.

3.5.1 Ansatz ohne Strukturhaltung

Dieser Ansatz führt auf das Arnoldi-Verfahren. Zunächst werden die relevanten Charakteristika für das Verfahren weiter spezialisiert, danach wird gezeigt, wie die abgeleitete Bedingung durch einen Krylov-Unterraum-Ansatz erfüllt werden kann. Die technische Realisierung erfolgt durch den Arnoldi-Algorithmus.

3.5.1.1 Übereinstimmung der Übertragungsfunktion

Die Bedingung der Übereinstimmung der Übertragungsfunktion (3.44) kann durch Einsetzen der Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) sowie von (3.53) und (3.59) in den expliziten Ausdruck (3.7) unter Verwendung der Eichtransformation

$$\mathbf{T}_{e,n} = \mathbf{F}_n(s)^{-1} \quad (3.65)$$

in die Bedingung

$$\mathbf{C}_n \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{F}_n(s)^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{F}_n(s)^{-1} \mathbf{B}_n \quad (3.66)$$

umgeformt werden.

3.5.1.2 Momentenkriterium

Das Momentenkriterium (3.28) bis zur Ordnung k schreibt sich nach Beachtung der Bemerkung zu Gleichung (3.44) unter Verwendung der Reihenentwicklung (3.11) und nach Einsetzen der Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) sowie von (3.53) und (3.59) mit der Eichtransformation

$$\mathbf{T}_{e,n} = \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \quad (3.67)$$

als

$$\mathbf{C}_n \mathbf{V} [\mathbf{R} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{V}]^i \mathbf{R} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (3.68)$$

Übereinstimmung der Übertragungsfunktion und stationäre Genauigkeit

Für $i = 0$ ergibt sich als Bedingung der Übereinstimmung der Übertragungsfunktion an der Entwicklungsfrequenz σ der Ausdruck

$$\mathbf{C}_n \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad (3.69)$$

der mit (3.66) übereinstimmt.

Speziell für $\sigma = 0$ ist wegen $\mathbf{T}_{e,n} = -\mathbf{A}_n^{-1}$ die notwendige Bedingungen (3.40) der stationären Genauigkeit erfüllt, wie bereits angemerkt wurde. Die hinreichende Bedingung (3.42) der stationären Genauigkeit ist äquivalent zur hier abgeleiteten Beziehung (3.69).

Vollständige Induktion

Als hinreichend zur Erfüllung des Momentenkriteriums bis zur Ordnung k ist die Bedingung

$$\mathbf{V} [\mathbf{R} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{V}]^i \mathbf{R} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (3.70)$$

Durch vollständige Induktion über i erhält man daraus den äquivalenten Ausdruck

$$\mathbf{V} \mathbf{R} [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (3.71)$$

3.5.1.3 Arnoldi-Verfahren

Im Fall von *Krylov-Unterraum Verfahren* wird die Forderung (3.71) und / oder verwandte Forderungen für ein Single-Input System für eine im Laplace-Bereich frei wählbare Entwicklungsfrequenz σ bis zu einer bestimmten Ordnung erfüllt. Solche Verfahren werden in (Gri97) ausführlich diskutiert. Das Arnoldi-Verfahren ist eine spezielle Variante dieser Verfahrensklasse.

Grundlagen

Bei der in dieser Arbeit verwendeten Variante ist die Eichtransformation $\mathbf{T}_{e,n}$ des vollen Systems durch (3.67) gegeben.

Zur Erfüllung von (3.71) wird der durch die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} aufgespannte Unterraum \mathcal{R}_m als *Krylov-Unterraum* $\mathcal{K}_m \left[\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n; \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \vec{B}_n \right]$ gewählt. $\mathcal{K}_m(\mathbf{M}; \vec{w})$ ist dabei der Unterraum

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{M}; \vec{w}) = \text{colspan} \{ \mathbf{M}^i \vec{w}, 0 \leq i < m \} \quad (3.72)$$

3.5 PROJEKTIVE APPROXIMATION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

des Zustandsraumes \mathbb{R}^n . Es lässt sich leicht zeigen, dass durch diese Wahl Gleichung (3.71) für die ersten m Momente, also mit $k = m - 1$ erfüllt ist (siehe dazu Anhang (B)).

\mathbf{V} kann konstruktiv beispielsweise durch den *Arnoldi-Algorithmus* ermittelt werden; in dieser Ausprägung wird das Reduktionsverfahren in der Literatur als *Arnoldi-Verfahren* bezeichnet. Der Arnoldi-Algorithmus ist ein modifizierter Gram-Schmidt-Prozess zur Ermittlung einer orthonormalen Basis eines Krylov-Unterraums (siehe beispielsweise (SKW96)). Die orthonormierten Basisvektoren dieses Krylov-Unterraums bilden die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{V} . In diesem Fall ist $\mathbf{R} = \mathbf{V}^T$ aufgrund der Spalten-Orthonormalität von \mathbf{V} eine geeignete, (3.33) erfüllende Reduktionsmatrix.

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{R}_m = \text{colspan} \{ \mathbf{V} \} = \mathcal{K}_m \left[\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n; \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \vec{B}_n \right], \quad (3.73)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}^T. \quad (3.74)$$

Die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrizen entstammen dem Arnoldi-Algorithmus, das Reduktionsverfahren ist damit bestimmt.

Behandlung einer komplexen Entwicklungsfrequenz

Bei der Reduktion mechanischer oder im Allgemeinen schwingungsfähiger Systeme sind insbesondere auch komplexe Entwicklungsfrequenzen $\sigma \in \mathbb{C}$ von Bedeutung. In diesem Fall sind die Spannvektoren des Krylov-Unterraums und damit die Spaltenvektoren \vec{v}_i der Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} komplex, was dann auch zunächst eine komplexe reduzierte Zustandsmatrix $\mathbf{A}_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ nach sich zieht. Eine reelle reduzierte Zustandsmatrix $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ kann durch die gleichzeitige Behandlung der Entwicklungsfrequenz σ und deren komplex konjugiertem $\bar{\sigma}$ sichergestellt werden:

Die komplex konjugierte Entwicklungsfrequenz $\bar{\sigma}$ liefert im Vergleich zu σ die komplex konjugierten Vektoren \vec{v}_i . Die Vektoren \vec{v}_i und \vec{v}_i können durch Summen- und Differenzbildung zu reellen Spaltenvektoren linearkombiniert werden, was letztendlich zur Berücksichtigung der Real- und Imaginärteile der Vektoren \vec{v}_i führt.

Der Rekonstruktionsmatrix liegt in diesem Fall also nicht die Entwicklungsfrequenz σ , sondern vielmehr das Frequenzpaar $\sigma, \bar{\sigma}$ zugrunde. Für jede Ordnung der Erfüllung des Momentenkriteriums werden in diesem Fall zwei Spannvektoren im Krylov-Unterraum und damit zwei Freiheitsgrade im reduzierten Zustandsvektor benötigt — im Gegensatz zu jeweils einem Spannvektor und Freiheitsgrad im Fall einer reellen Entwicklungsfrequenz.

Erweiterung auf Multi-Input Systeme und mehrere Entwicklungsfrequenzen

Im Fall von Multi-Input Systemen kann jede Spalte der Eingangsmatrix wie ein Single-Input System behandelt werden. Lediglich die korrekte Orthonormierung der gesamten Rekonstruk-

tionsmatrix ist zu gewährleisten. Unterschiedliche Spalten können dabei auch unterschiedliche Ordnungen des Momentenkriteriums erfüllen; dies ist zum Beispiel interessant für die Berücksichtigung virtueller Lasten:

Bei stationären Randbedingungen $\vec{B}_{\text{vir}}, u_{\text{vir}}(t) \equiv 1$, kann durch einen Freiheitsgrad zur Erfüllung des Momentenkriteriums für die nullte Ordnung die stationäre Genauigkeit im (extern) unbelasteten Zustand $\vec{u}_{\text{ext}}(t) \equiv \vec{0}$ sichergestellt werden; die übrigen Freiheitsgrade des reduzierten Systems widmen sich dann ausschließlich den externen Lasten $\mathbf{B}_{\text{n,ext}}$.

Betrachtet man beispielsweise gemäß (3.3) ein System mit einem externen Eingang $\vec{B}_{\text{n,ext}}, u_{\text{ext}}$, und stationären Randbedingungen $\vec{B}_{\text{n,vir}}, u_{\text{vir}} \equiv 1$, so kann anstelle (3.73) die Rekonstruktionsmatrix gemäß

$$\mathcal{R}_m = \text{colspan}\{\mathbf{V}\} \subset \begin{cases} \mathcal{K}_{m-1} \left[\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n; \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \vec{B}_{\text{n,ext}} \right] \\ -\mathbf{A}_n^{-1} \vec{B}_{\text{n,vir}} \end{cases} \quad (3.75)$$

gewählt werden; die Orthonormierungsbedingung (3.74) wird beibehalten. Dies stellt eine Alternative zu der in Abschnitt (3.1.4) diskutierten Einführung von Relativkoordinaten dar; diese Alternative wird insbesondere im Fall nichtlinearer Systeme von Bedeutung sein.

Durch die gleiche Methode — die Hinzunahme zusätzlicher Freiheitsgrade und anschließende Orthonormierung der Rekonstruktionsmatrix — lassen sich auch mehrere Entwicklungsfrequenzen berücksichtigen.

Bemerkungen

Das Arnoldi-Verfahren ist prinzipiell für beliebige Entwicklungsfrequenzen σ geeignet; insbesondere für die Entwicklungsfrequenz $\sigma = 0$ wurden jedoch gute Ergebnisse erzielt. Für $\sigma = 0$ stellt das Momentenkriterium ein relativ gutes dynamisches Verhalten im niederfrequenten Bereich in Verbindung mit stationärer Genauigkeit sicher. In dieser Arbeit werden ausschließlich Anwendungen mit $\sigma = 0$ betrachtet; im Folgenden ist mit der Bezeichnung *Arnoldi-Verfahren* deshalb immer das Verfahren für $\sigma = 0$ gemeint, falls nicht eine andere Entwicklungsfrequenz explizit angegeben wird.

Das Arnoldi-Verfahren ist insbesondere auch für stark besetzte Eingangsmatrizen \vec{B}_n geeignet; hier weist beispielsweise das später vorgestellte Gyan-Verfahren Schwächen auf.

Ein Nachteil des Arnoldi-Verfahrens ist, dass die Eingangsmatrix \vec{B}_n in die Bestimmung von \mathbf{R} , \mathbf{V} und \mathbf{A}_m explizit eingeht, dass diese Größen also bei Veränderung der Eingangsmatrix — abgesehen von einer reinen Skalierung, die auch im Eingangsvektor absorbiert werden kann — neu bestimmt werden müssen.

Darüberhinaus ist das Arnoldi-Verfahren nicht strukturerhaltend; die reduzierten Zustände sind also nicht anschaulich, eine Interpretation des Verhaltens der Zustandsgleichung bedarf also immer der Rekonstruktion mittels der Rekonstruktionsmatrix.

3.5.2 Ansatz mit Strukturerhaltung

Dieser Ansatz führt zum Guyan-Verfahren. Nach der Spezialisierung der relevanten Charakteristika unter Beachtung der Strukturerhaltung wird demonstriert, dass eine Übertragung des in der Literatur bekannten originalen Guyan-Verfahrens in die Zustandsraumdarstellung unter bestimmten Voraussetzungen die abgeleiteten Bedingungen bis zu einem gewissen Grad erfüllt.

3.5.2.1 Übereinstimmung der Übertragungsfunktion

Die Beziehung (3.50) in der expliziten Form (3.7) wird durch die Wahl der Eichtransformation (3.65) und durch die Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) unter Verwendung von (3.53) und (3.59) identisch erfüllt: Die Übereinstimmung der Übertragungsfunktion an einer frei wählbaren Stelle im Laplace-Bereich ist in dem hier vorliegenden Fall also sichergestellt.

3.5.2.2 Momentenkriterium

Das Momentenkriterium (3.28) bis zur Ordnung k liefert bei Beachtung der Bemerkung zu Gleichung (3.50) unter Verwendung der Reihenentwicklung (3.11) und nach Einsetzen der Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) sowie von (3.53) und (3.59) und der Eichtransformation (3.67) den Ausdruck

$$\mathbf{C}_m^* [\mathbf{P} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{V}]^i \mathbf{P} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_m^* \mathbf{P} [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (3.76)$$

Übereinstimmung der Übertragungsfunktion und stationäre Genauigkeit

Für $i = 0$ wird diese letzte Beziehung automatisch erfüllt, was für $\sigma = 0$ zu stationär genauen Systemen führt.

Vollständige Induktion

Als hinreichende Bedingung für das Momentenkriterium findet man den Ausdruck

$$[\mathbf{P} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{V}]^i \mathbf{P} \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{P} [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (3.77)$$

wofür sich mittels vollständiger Induktion die hinreichende Bedingung

$$\mathbf{V} \mathbf{P} [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n = [\mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{J}_n]^i \mathbf{F}_n(\sigma)^{-1} \mathbf{B}_n, \quad 0 \leq i \leq k - 1. \quad (3.78)$$

ableiten lässt.

Im Gegensatz zur entsprechenden Gleichung (3.71) ist die Induktionsverankerung in diesem Fall durch Konstruktion sichergestellt und die Übereinstimmung der Entwicklungen der Übertragungsfunktionen bis zur Ordnung k verlangt lediglich das Einhalten der Bedingung (3.78) bis zur Ordnung $i = k - 1$ (anstelle von $i = k$).

3.5.2.3 Guyan-Verfahren

Das hier vorgestellte *Guyan-Verfahren* stellt eine Verallgemeinerung des in (Guy65) betrachteten Verfahrens auf Systeme in Zustandsraumdarstellung dar. Das originale Guyan-Verfahren wurde für mechanische Finite-Elemente Systeme, also für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung mit symmetrischen Matrizen entwickelt. Hier erfolgt eine Übertragung der Methode auf Systeme der Form (3.1), (3.2). In der Literatur wird das Verfahren aus (Guy65) als Guyan-Verfahren bezeichnet. In dieser Arbeit wird dieser Begriff für die hier vorgestellte Verallgemeinerung in die Zustandsraumdarstellung verwendet; das Verfahren aus (Guy65) wird im Folgenden als originales Guyan-Verfahren bezeichnet.

Die im Folgenden vorgeschlagene Übertragung des originalen Guyan-Verfahrens in den Zustandsraum wurde in der Literatur bisher nicht erörtert. Zwar gibt es bei der stationären Reduktion formale Ähnlichkeiten mit einigen balancierten Verfahren (vergleiche Abschnitt (3.6.3)), jedoch wird dort die Reduktion immer nach einer Bewertung in der balancierten Darstellung vorgenommen. Insbesondere die in diesem Abschnitt neu eingeführte dynamische Reduktion stellt einen Fortschritt des Formalismus dar.

Das Guyan-Verfahren verbindet die Zustandsgrößenerhaltung mit einer Approximation der beiden niedrigsten Ordnungen der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion um die Entwicklungsfrequenz $\sigma = 0$: Forderung (3.78) wird für $k = 1$ exakt, für höhere Ordnungen nur noch approximativ mit rasch abnehmender Güte erfüllt.

Idee und stationäre Reduktion

Die Grundidee des Guyan-Verfahrens ist, eine Auswahl von Zustandsgrößen ins reduzierte System zu übernehmen und die übrigen adiabatisch zu eliminieren, das heißt, durch ihre stationären Zustände zu approximieren.

Dafür wird der Zustandsvektor zunächst so umsortiert, dass die ins reduzierte System übernommenen m Zustandsgrößen die Indizes 1 bis m erhalten. Diese Zustandsgrößen werden im Folgenden *Master-Freiheitsgrade* $\vec{x}_M \binom{m}{1}$ genannt, die übrigen *Slave-Freiheitsgrade* $\vec{x}_S \binom{n-m}{1}$. Dadurch wird der volle Zustandsvektor \mathbf{A}_n in zwei Teilvektoren gesplittet, wobei die Master-Freiheitsgrade im Sinne der Strukturhaltung als reduzierter Zustandsvektor \vec{x}_m interpretiert werden:

$$\vec{x}_n \equiv \begin{pmatrix} \vec{x}_M \\ \vec{x}_S \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_m \approx \vec{x}_M. \quad (3.79)$$

3.5 PROJEKTIVE APPROXIMATION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Trägheits-, Zustands-, Eingangs- und Ausgangsmatrix \mathbf{J}_n , \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n , \mathbf{C}_n des vollen Systems werden in analoger Weise in die Submatrizen $\mathbf{J}_{MM} \binom{m}{m}$, $\mathbf{J}_{MS} \binom{m}{n-m}$, $\mathbf{J}_{SM} \binom{n-m}{m}$, $\mathbf{J}_{SS} \binom{n-m}{n-m}$, $\mathbf{A}_{MM} \binom{m}{m}$, $\mathbf{A}_{MS} \binom{m}{n-m}$, $\mathbf{A}_{SM} \binom{n-m}{m}$, $\mathbf{A}_{SS} \binom{n-m}{n-m}$, $\mathbf{B}_M \binom{m}{p}$, $\mathbf{B}_S \binom{n-m}{p}$, $\mathbf{C}_M \binom{q}{m}$, $\mathbf{C}_S \binom{q}{n-m}$ aufgeteilt,

$$\mathbf{J}_n \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{MM} & \mathbf{J}_{MS} \\ \mathbf{J}_{SM} & \mathbf{J}_{SS} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_n \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{MM} & \mathbf{A}_{MS} \\ \mathbf{A}_{SM} & \mathbf{A}_{SS} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B}_M \\ \mathbf{B}_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_n \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{C}_M & \mathbf{C}_S \end{pmatrix}; \quad (3.80)$$

lediglich die Durchgangsmatrix \mathbf{D}_n des vollen Systems bleibt in ihrer ursprünglichen Form erhalten. Damit lassen sich Zustands- und Ausgangsgleichung (3.20), (3.21) in einen Master- und einen Slave-Anteil splitten.

Für einen stationären Zustand erhält man aus der gesplitteten Zustandsgleichung die Bedingungen

$$\vec{0}_m = \mathbf{A}_{MM} \vec{x}_{M,st} + \mathbf{A}_{MS} \vec{x}_{S,st} + \mathbf{B}_M \vec{u}_{st}, \quad (3.81)$$

$$\vec{0}_{n-m} = \mathbf{A}_{SM} \vec{x}_{M,st} + \mathbf{A}_{SS} \vec{x}_{S,st} + \mathbf{B}_S \vec{u}_{st}. \quad (3.82)$$

Auflösen des Slave-Anteils (3.82) nach $\vec{x}_{S,st}$ (unter Voraussetzung der Invertierbarkeit von \mathbf{A}_{SS}) und Einsetzen in den Master-Anteil (3.81) sowie in die gesplittete Ausgangsgleichung legen die reduzierten Matrizen

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_{MM} - \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM}, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_M - \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{B}_S, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_M - \mathbf{C}_S \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM}, \quad (3.85)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_n - \mathbf{C}_S \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{B}_S \quad (3.86)$$

nahe; eine reduzierte Trägheitsmatrix lässt sich aus dieser Betrachtung jedoch nicht ableiten.

Man sieht, dass hier auch bei verschwindender Durchgangsmatrix \mathbf{D}_n des vollen Systems das reduzierte System sprungfähig sein kann, also eine nicht verschwindende reduzierte Durchgangsmatrix \mathbf{D}_m aufweisen kann: Die Slave-Zustände „springen“ quasi instantan auf ihre stationären Endwerte und liefern über den Zusatzterm von \mathbf{D}_m gegebenenfalls entsprechende Ausgangssignale.

Formalismus und dynamische Reduktion

In (Guy65) und (Led00) wird für das originale Guyan-Verfahren durch eine Energiebetrachtung gezeigt, dass die für den stationären Fall abgeleitete Transformation auch bei der Reduktion der Massen- und Dämpfungsmatrix ihre Berechtigung hat. Ein analoges Argument soll hier für das Guyan-Verfahren vorgestellt werden.

3 ORDNUNGSREDUKTION LINEARER SYSTEME

Mit der Eichtransformation des vollen Systems nach (3.67) für $\sigma = 0$,

$$\mathbf{T}_{e,n} = -\mathbf{A}_n^{-1}, \quad (3.87)$$

der Eichtransformation des reduzierten Systems

$$\mathbf{T}_{e,m} = -(\mathbf{P} \mathbf{A}_n \mathbf{V})^{-1} \quad (3.88)$$

sowie der Auswahl- und Rekonstruktionsmatrix in Anlehnung an (Guy65) und (Led00),

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM} \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

wird für das Guyan-Verfahren der Formalismus der projektiven Ordnungsreduktion anwendbar.

Für den stationären Fall erhält man aus den Reduktionsbedingungen (3.57) und (3.58) unter Verwendung von (3.53) sowie aus (3.37) im Wesentlichen die Ergebnisse (3.83) bis (3.85) wieder, für die reduzierte Zustands- und Eingangsmatrix

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \mathbf{V} = \mathbf{A}_{MM} - \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n = \mathbf{B}_M - \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{B}_S, \quad (3.91)$$

für die reduzierte Ausgangsmatrix

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_n \mathbf{V} = \mathbf{C}_M - \mathbf{C}_S \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM}. \quad (3.92)$$

Lediglich der Korrekturterm der reduzierten Durchgangsmatrix nach (3.86) findet keine Entsprechung innerhalb dieses Formalismus.

Von zentraler Bedeutung für die hier vorgestellte Variante des Guyan-Verfahrens ist jedoch das Ergebnis für den dynamischen Fall: Aus der Reduktionsbedingung (3.56) folgt eine nicht-triviale Trägheitsmatrix \mathbf{J}_m ,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{V} = & \mathbf{J}_{MM} - \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{J}_{SM} - \mathbf{J}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM} \\ & + \mathbf{A}_{MS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{J}_{SS} \mathbf{A}_{SS}^{-1} \mathbf{A}_{SM}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Aufgrund des letzten Terms in (3.93) liegt das reduzierte System zunächst nicht in Standardform vor, $\mathbf{J}_m \neq \mathbf{I}_m$, auch wenn das volle System die Bedingung $\mathbf{J}_n = \mathbf{I}_n$ der Standardform erfüllt!

Bei verschwindenden Slave-Anteilen der Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_S = \mathbf{0}$ ist die Bedingung (3.46) für strukturerhaltende Verfahren erfüllt. Es lässt sich dann zeigen, dass für verschwindende Slave-Anteile der Eingangsmatrix $\mathbf{B}_S = \mathbf{0}$ Bedingung (3.78) mit $k = 1$ erfüllt ist — über die stationäre Genauigkeit hinaus wird also eine weitere Ordnung der Übertragungsfunktion des vollen Systems durch das reduzierte System korrekt wiedergegeben.

Bemerkungen

Das Guyan-Verfahren orientiert sich am stationären Zustand des Systems und ist für den dynamischen Fall nur mäßig geeignet. Es eignet sich besonders gut für schwach besetzte Eingangsmatrizen, so dass $\mathbf{B}_S = \mathbf{0}$ erfüllt werden kann. Ist dies nicht möglich, leidet darunter die Reduktionsgüte speziell im dynamischen Fall. Oft wird die Besetzung der Eingangsmatrix durch virtuelle Lasten dominiert. Dann kann insbesondere für stationäre Randbedingungen $\vec{B}_{\text{vir}}, u_{\text{vir}}(t) \equiv 1$, die Einführung von Relativkoordinaten nach Abschnitt (3.1.4) sinnvoll sein.

Das Verfahren sichert die Strukturhaltung und ist auch für Multi-Input Systeme geeignet. Die Eingangsmatrix \mathbf{B}_n geht in die Bestimmung von \mathbf{P} , \mathbf{V} und \mathbf{A}_m nicht explizit ein, so dass eine quantitative Veränderung der Eingangsmatrix bei unveränderter Besetzungsstruktur keine Neubestimmung dieser Größen nötig macht; lediglich zusätzliche Einträge an bisherigen Slave-Freiheitsgraden werden eine neue Reduktion erforderlich machen.

3.6 Ordnungsreduktion nach Äquivalenztransformationen

Eine weitere wichtige Klasse von Reduktionsverfahren führt die eigentliche Reduktion nach einer geeigneten *Äquivalenztransformation* des zugrunde liegenden Systems durch, die insbesondere eine *Koordinatentransformation* des Zustandsvektors enthält. Diese Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Zustände in der transformierten Darstellung gemäß einer Bewertungsstrategie ordnen und die Zustände mit dem größten Gewicht ins reduzierte System übernehmen.

Alle in diesem Abschnitt verwendeten Transformationen werden in Anhang (A) ausführlich behandelt.

3.6.1 Verbindung zu projektiven Verfahren

Lassen sich die Reduktionsverfahren für die transformierten Systeme als projektive Verfahren im Sinne von Abschnitt (3.4.1) darstellen, speziell unter Verwendung Relationen (3.37) und (3.38) sowie der Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58), so lassen sich auch die Gesamtverfahren (einschließlich Äquivalenztransformation) ebenfalls als Projektion formulieren, wobei die transformierte Reduktionsmatrix $\tilde{\mathbf{R}}$ durch $\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{T}_e$, die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} durch $\mathbf{T}_k \mathbf{V}$ zu ersetzen ist:

$$\tilde{\mathbf{R}} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{T}_e, \quad \mathbf{V} \rightsquigarrow \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{V}. \quad (3.94)$$

Hierbei sind \mathbf{T}_e und \mathbf{T}_k die Eich-⁵ und Koordinatentransformation der Äquivalenztransformation.

⁵ \mathbf{T}_e ist hier *nicht* eine der in der Definition (3.53) von $\tilde{\mathbf{R}}$ verwendeten Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e,n}$ bzw. $\mathbf{T}_{e,m}$!

3 ORDNUNGSREDUKTION LINEARER SYSTEME

In diesem Fall muss die Äquivalenztransformation nicht explizit ausgeführt werden, falls die Bestimmung der Transformationsmatrizen dies nicht erfordert. Dies ist insbesondere im unten diskutierten Fall nichtlinearer Systeme von großem Vorteil, da eine Bestimmung und Speicherung von im Allgemeinen vollbesetzten transformierten Tensoren höherer Stufe unterbleiben kann.

3.6.2 Modale Verfahren

Bei *modalen Verfahren* wird zunächst eine Eigentransformation des Systems durchgeführt (siehe Anhang (A.5)). Damit ist die Zustandsgleichung zunächst diagonalisiert, also entkoppelt, und in Standardform gebracht.

Als Beispiel eines modalen Verfahrens wird hier das in (Lit79a) vorgestellte Verfahren kurz erläutert. Dieses Verfahren ist letztlich für die Rekonstruktion der Original-Zustandsgrößen, also für die Umkehrung der Eigentransformation, auf Zustandsgrößenerhaltung angewiesen, also darauf, dass für den Ausgangsvektor nur eine Auswahl von Original-Zustandsgrößen relevant ist.

Durch die Entwicklung einer geeigneten Bewertungsstrategie, die neben dem Betrag der Eigenwerte auch deren Steuer- und Beobachtbarkeit (also die Eingangs- und Ausgangsmatrix) in Betracht zieht, wird der Einfluss der Eigenmoden auf das Systemverhalten abgeschätzt. In (Lit83) werden mehrere modale Bewertungsstrategien verglichen. Insbesondere betragsmäßig kleine Eigenwerte, also langsam veränderliche Moden, werden bei der Bewertung bevorzugt. Die dominierenden Eigenmoden werden dann ins reduzierte System übernommen, die übrigen Eigenmoden werden zunächst vernachlässigt.

Für die Rekonstruktion der Original-Zustandsgrößen werden die vernachlässigten Eigenmoden jedoch benötigt. Anstatt sie (wie bei einem *Truncation-Ansatz* üblich) einfach Null zu setzen, werden sie approximativ berücksichtigt, indem sie als Linearkombination der dominierenden Eigenmoden angesetzt werden. Durch die Minimierung eines Fehlermaßes wird dann die Sprungantwort des reduzierten Systems an die des vollen Systems angepasst; man erhält daraus eine Ähnlichkeitstransformation (siehe Anhang (A.4)), mit der schließlich ein System direkt für die relevanten Original-Zustandsgrößen erhalten wird.

3.6.3 Balancierte Verfahren

Balancierte Verfahren gehen von der *balancierten Darstellung* des zugrunde liegenden Systems aus (siehe Anhang (A.6)). In dieser sind die Zustände bereits anhand ihrer *Singulärwerte* geordnet. Die Bedeutung dieser Darstellung für die Ordnungsreduktion wurde zuerst in (Moo81) erkannt. In (HP90a; HP90b) werden einige Varianten der auf (Moo81) zurückgehenden Methode eingehend betrachtet; (Hip92) schließlich stellt einen Übersichtsartikel zu diesem Themenkreis dar. Ähnlich wie bei den modalen Verfahren werden die Zustände mit den dominierenden Singulärwerten in das reduzierte System übernommen.

Die übrigen Zustände werden entweder Null gesetzt (*Truncation-Ansatz*), was insbesondere im niedrigen Frequenzbereich zu merklichen Fehlern führt; der Fehler verschwindet jedoch im Grenzfall höchster Frequenzen. Oder sie werden analog zum Guyan-Verfahren gemäß (3.83) bis (3.86) durch ihre stationären Zustände berücksichtigt (*Singular-Perturbation-Ansatz*), was im hohen Frequenzbereich merkliche Fehler verursacht; dafür ist das reduzierte System stationär genau. Über den gesamten Frequenzbereich betrachtet, erfüllen beide Varianten jedoch die gleiche Fehlernorm (siehe (LA89)).

3.7 Frequenzgangsanpassung

Das in (Led00) vorgeschlagene Reduktionsverfahren der *Frequenzgangsanpassung* stellt die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen von Originalmodell und reduziertem Modell an einer Serie von $n_\sigma + 1$ Stützstellen σ_i , $0 \leq i \leq n_\sigma$ mit $\sigma_0 = 0$ im Laplace-Bereich sicher.

Das Verfahren gewährleistet Strukturhaltung. Es basiert *nicht* auf einer Projektion der Zustandsgleichung.

3.7.1 Übereinstimmung der Übertragungsfunktion

Ausgangspunkt ist die Bedingung der Übereinstimmung der Übertragungsfunktion von Originalmodell und reduziertem Modell, für die die Bedingung (3.50) abgeleitet wurde. Als hinreichendes Kriterium wird in (Led00) der Ausdruck

$$\mathbf{G}_m(\sigma_i) = \mathbf{P} \mathbf{G}_n(\sigma_i) , \quad 0 \leq i \leq n_\sigma \quad (3.95)$$

verwendet, wobei für $i = 0$ die Stützfrequenz $\sigma_0 = 0$ verwendet, also stationäre Genauigkeit angestrebt wird.

Für $i = 0$ ergibt sich Ausdruck (3.49) als Bedingung der stationären Genauigkeit. Dies eingesetzt in (3.95) für die übrigen $1 \leq i \leq n_\sigma$ führt nach Einsetzen von (3.4) mit den Abkürzungen $\mathbf{W}_l(\sigma_i) \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ und $\mathbf{W}_r(\sigma_i) \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{W}_l(\sigma_i) = \mathbf{P} [\mathbf{A}_n^{-1} + (\sigma_i \mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{B}_n , \quad (3.96)$$

$$\mathbf{W}_r(\sigma_i) = \sigma_i \mathbf{P} (\sigma_i \mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_n , \quad (3.97)$$

auf die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{A}_m \mathbf{W}_l(\sigma_i) = \mathbf{W}_r(\sigma_i) , \quad 1 \leq i \leq n_\sigma \quad (3.98)$$

für die reduzierte Zustandsmatrix \mathbf{A}_m . Für das reduziertes System wurde dabei Standardzeichnung

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{I}_m \quad (3.99)$$

angenommen.

3.7.2 Bestimmung der reduzierten Zustandsmatrix

Für die Bestimmung der reduzierten Zustandsmatrix aus Gleichungssystem (3.98) sind insbesondere auch komplexe Stützfrequenzen $\sigma_i \in \mathbb{C}$ zu berücksichtigen; die reduzierte Zustandsmatrix soll jedoch weiterhin reell sein, $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Eine reelle Lösung kann erzwungen werden, in dem die Matrizen in (3.98) explizit in Real- und Imaginärteil gesplittet werden. Nullsetzen des Imaginärteils von \mathbf{A}_m führt je Stützstelle auf zwei separierte Gleichungen für den Realteil von \mathbf{A}_m . Unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung kann durch Definition der Hypermatrizen $\mathfrak{W}_1 \binom{m}{2pn_\sigma}$ und $\mathfrak{W}_r \binom{m}{2pn_\sigma}$,

$$\mathfrak{W}_1 = \left(\Re \{ \mathbf{W}_1(\sigma_1) \} \cdots \Re \{ \mathbf{W}_1(\sigma_{n_\sigma}) \} \Im \{ \mathbf{W}_1(\sigma_1) \} \cdots \Im \{ \mathbf{W}_1(\sigma_{n_\sigma}) \} \right), \quad (3.100)$$

$$\mathfrak{W}_r = \left(\Re \{ \mathbf{W}_r(\sigma_1) \} \cdots \Re \{ \mathbf{W}_r(\sigma_{n_\sigma}) \} \Im \{ \mathbf{W}_r(\sigma_1) \} \cdots \Im \{ \mathbf{W}_r(\sigma_{n_\sigma}) \} \right), \quad (3.101)$$

das Gleichungssystem (3.98) schließlich als

$$\mathbf{A}_m \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_r \quad (3.102)$$

geschrieben werden.

Für eine Anzahl von

$$n_\sigma \geq \left\lceil \frac{n}{2p} \right\rceil \quad (3.103)$$

geeignet ausgewählten Stützstellen weist die Matrix \mathfrak{W}_1 den vollen Rang m auf, das System ist damit (über-) bestimmt. In diesem Fall kann Gleichung (3.102) als Optimierungsproblem nach einer *Gauß-Transformation* gelöst werden (siehe beispielsweise (BS⁺95)).

4 Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme

In diesem Kapitel werden die Betrachtungen von linearen Systemen aus dem vorangegangenen Kapitel auf (schwach) nichtlineare Systeme erweitert. Viele Definitionen für lineare Systeme werden sinngemäß auf nichtlineare Systeme verallgemeinert. Eine spezielle Kennzeichnung zur Unterscheidung des linearen und nichtlinearen Falls unterbleibt im Allgemeinen. Lediglich wenn das nichtlineare Systemverhalten im Vergleich zum linearisierten Verhalten betrachtet wird, wird im Folgenden eine Kennzeichnung durch die Subskripte „lin“ für „linear“ bzw. „linearisiert“ und „nl“ für „nichtlinear“ vorgenommen.

In Abschnitt (4.1) wird die in dieser Arbeit verwendete Normalform nichtlinearer Systeme, im Folgenden spezielle Normalform genannt, aus der allgemeinen, jedoch sehr unspezifischen Darstellung herausgearbeitet. In Abschnitt (4.2) wird die Aufgabe der Ordnungsreduktion präzisiert, bevor in Abschnitt (4.3) bis (4.5) verschiedene Ansätze der Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme erläutert werden. In Abschnitt (4.3) wird der projektive Ansatz der Ordnungsreduktion auf nichtlineare Systeme erweitert. In Abschnitt (4.4) erfolgt eine Übertragung der Methode der adiabatischen Elimination aus der Synergetik auf die spezielle Normalform. Schließlich wird in Abschnitt (4.5) das Verfahren der Frequenzgangs Anpassung auf den schwach nichtlinearen Bereich erweitert. In Abschnitt (4.6) werden abschließend Methoden zur Bewertung der Güte eines Reduktionsverfahrens diskutiert; diese beruhen auf einem Vergleich von stationären Lösungen bzw. von Zeitverläufen des vollen und reduzierten Systems.

4.1 Systemdarstellung

4.1.1 Allgemeine Form nichtlinearer Systeme

Die allgemeine Darstellung eines dynamischen Systems lautet

$$\vec{h} \left(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}, t \right) = \vec{f} \left(\vec{x}, \vec{u}, t \right) , \quad (4.1)$$

$$\vec{y} = \vec{g} \left(\vec{x}, \vec{u}, t \right) . \quad (4.2)$$

Darin sind $\vec{u}(t)$ $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ der *Eingangsvektor*, das heißt, der Vektor der p von außen auf das System einwirkenden Steuergrößen, $\vec{y}(t)$ $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ der *Ausgangsvektor* der q Messgrößen. $\vec{x}(t)$ $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der *Zustandsvektor* des Differentialgleichungssystems, n ist die *Systemordnung*. Schließlich sind $\vec{h} \left(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}, t \right)$ die *Trägheitsfunktion*, $\vec{f} \left(\vec{x}, \vec{u}, t \right)$ die *Zustandsfunktion*, $\vec{g} \left(\vec{x}, \vec{u}, t \right)$ die *Ausgangsfunktion*.

4 ORDNUNGSREDUKTION NICHTLINEARER SYSTEME

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Funktionen nicht explizit zeitabhängig sind. Damit gilt

$$\vec{h}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}, t) \equiv \vec{h}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}) \quad , \quad (4.3)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \equiv \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}) \quad , \quad (4.4)$$

$$\vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, t) \equiv \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}) \quad . \quad (4.5)$$

Die Aufteilung der Beiträge zur Zustandsgleichung wird so vorgenommen, dass in der Trägheitsfunktion \vec{h} lediglich Terme berücksichtigt werden, die eine $\dot{\vec{x}}$ -Abhängigkeit beinhalten; alle anderen Terme (inklusive insbesondere eines konstanten Offsets) werden in der Zustandsgleichung \vec{f} absorbiert. Damit gilt insbesondere

$$\vec{h}(\dot{\vec{x}} = \vec{0}_n, \vec{x}, \vec{u}) = \vec{0}_n \quad . \quad (4.6)$$

Beispielsweise werden im Sinne einer Reihenentwicklung in \vec{h} nur solche Terme berücksichtigt, die eine Ableitung nach $\dot{\vec{x}}$ beinhalten.

4.1.2 Reihenentwicklung

Für hinreichend glatte Zustands- und Ausgangsfunktionen ist eine Reihenentwicklung um einen *Arbeitspunkt* $(\vec{u}_{\text{wk}}, \vec{x}_{\text{wk}}, \dot{\vec{x}}_{\text{wk}}, \vec{y}_{\text{wk}})$ durchführbar. Man erhält in der „nullten“ und ersten Ordnung die Terme

$$\begin{aligned} h^i &= 0 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} h^i \Big|_{\dot{\vec{x}}_{\text{wk}}} \cdot (\dot{x}^j - \dot{x}_{\text{wk}}^j) + h_{\text{nl}}^i(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}) \\ &\equiv 0 + J_j^i \cdot (\dot{x}^j - \dot{x}_{\text{wk}}^j) + h_{\text{nl}}^i(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}) \quad , \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^i &= f_{\text{wk}}^i + \frac{\partial}{\partial x^j} f^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \cdot (x^j - x_{\text{wk}}^j) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u^j} f^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \cdot (u^j - u_{\text{wk}}^j) + f_{\text{nl}}^i(\vec{x}, \vec{u}) \\ &\equiv f_{\text{wk}}^i + A_j^i \cdot (x^j - x_{\text{wk}}^j) \\ &\quad + B_j^i \cdot (u^j - u_{\text{wk}}^j) + f_{\text{nl}}^i(\vec{x}, \vec{u}) \quad , \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^i &= g_{\text{wk}}^i + \frac{\partial}{\partial x^j} g^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \cdot (x^j - x_{\text{wk}}^j) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u^j} g^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \cdot (u^j - u_{\text{wk}}^j) + g_{\text{nl}}^i(\vec{x}, \vec{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \equiv g_{\text{wk}}^i + C_j^i &\cdot (x^j - x_{\text{wk}}^j) \\ &+ D_j^i \cdot (u^j - u_{\text{wk}}^j) + g_{\text{nl}}^i(\vec{x}, \vec{u}) \end{aligned} \quad , \quad (4.9)$$

wobei in der Zustandsgleichung die oben diskutierte Aufteilung der Zustandsfunktion und Trägheitsfunktion berücksichtigt ist.

Wählt man als Arbeitspunkt insbesondere eine stationäre Lösung $\vec{x} = \vec{0}_n$ des nichtlinearen Systems,

$$\left(\vec{u}_{\text{wk}}, \vec{x}_{\text{wk}}, \dot{\vec{x}}_{\text{wk}}, \vec{y}_{\text{wk}} \right) = \left(\vec{u}_{\text{wk, st}}, \vec{x}_{\text{wk, st}}, \vec{0}_n, \vec{y}_{\text{wk, st}} \right) \equiv \left(\vec{u}_{\text{wk, st}}, \vec{x}_{\text{wk, st}}, \vec{y}_{\text{wk, st}} \right) , \quad (4.10)$$

so folgt wegen (4.6) aus (4.1), (4.2)

$$\vec{f}(\vec{x}_{\text{wk, st}}, \vec{u}_{\text{wk, st}}) = \vec{0}_n \quad , \quad (4.11)$$

$$\vec{g}(\vec{x}_{\text{wk, st}}, \vec{u}_{\text{wk, st}}) = \vec{y}_{\text{wk, st}} \quad (4.12)$$

und daraus die Größen \vec{f}_{wk} und \vec{g}_{wk} zu

$$\vec{f}_{\text{wk}} = \vec{0}_n \quad , \quad \vec{g}_{\text{wk}} = \vec{y}_{\text{wk, st}} . \quad (4.13)$$

In der Regel misst man darüberhinaus die Variablen \vec{u} , \vec{x} und \vec{y} relativ zu dieser stationären Lösung, also

$$\left(\vec{u}_{\text{wk, st}}, \vec{x}_{\text{wk, st}}, \vec{y}_{\text{wk, st}} \right) \equiv \left(\vec{0}_p, \vec{0}_n, \vec{0}_q \right) ; \quad (4.14)$$

man betrachtet also den stationären Arbeitspunkt als Ursprung der Koordinatensysteme. Mit dieser Wahl von Arbeitspunkt und Koordinatensystem vereinfacht sich die Systemdarstellung.

4.1.3 Allgemeine und spezielle Normalform

In dieser Arbeit seien die Trägheits- und Ausgangsfunktion durch die linearen Ausdrücke gegeben,

$$\vec{h}_{\text{nl}}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{u}) \equiv \vec{0}_n \quad , \quad \vec{g}_{\text{nl}}(\vec{x}, \vec{u}) \equiv \vec{0}_q \quad , \quad (4.15)$$

eine Berücksichtigung von Nichtlinearitäten findet lediglich in der Zustandsfunktion statt.

4.1.3.1 Allgemeine Normalform

Unter diesen Voraussetzungen kann das nichtlineare System in der *allgemeinen Normalform*

$$\mathbf{J} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u} + \vec{f}_{\text{nl}}(\vec{x}, \vec{u}) \quad (4.16)$$

$$\vec{y} = \mathbf{C} \vec{x} + \mathbf{D} \vec{u} \quad (4.17)$$

geschrieben werden. Der nichtlineare Systemanteil ist hier also eine vorgegebene, jedoch zunächst nicht weiter spezifizierte Funktion. Die Charakterisierung als „allgemein“ ist hier lediglich im Gegensatz zu der unten vorgestellten speziellen Normalform zu sehen.

4.1.3.2 Spezielle Normalform

In dieser Arbeit wird im Allgemeinen eine spezielle Form von \vec{f}_{nl} zur Parametrisierung des nichtlinearen Systemanteils verwendet. Diese spezielle Form folgt aus der Erweiterung der oben diskutierten Reihenentwicklung auf höhere Ordnungen. Sie dient einerseits der einheitlichen Darstellung schwach nichtlinearer Systeme, sie wird andererseits eine Ordnungsreduktion auch des nichtlinearen Systemanteils ermöglichen.

Aus dem Blickwinkel des Physikers sind insbesondere Nichtlinearitäten von Interesse, die ausschließlich über den Zustandsvektor vermittelt werden. Es werden deshalb Zustandstensenoren der Stufe¹ $\binom{1}{s}$, im Folgenden als *Zs-Tensoren* $\mathcal{A}_s \binom{n}{n, \dots, n, s \text{ mal}}$ bezeichnet, als

$$\mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_s}^i = \frac{\partial^s}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}} f^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \quad (4.18)$$

definiert, die in der speziellen Normalform als nichtlineare Beiträge berücksichtigt werden.

Darüberhinaus wird der in der Regelungstechnik oft verwendete bilineare Term als Bilineartensor der Stufe $\binom{1}{2}$, im Folgenden als *BL-Tensor* $\mathcal{B} \binom{n}{n, p}$ bezeichnet, als

$$\mathcal{B}_{jk}^i = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial u^k} f^i \Big|_{\vec{x}_{\text{wk}}, \vec{u}_{\text{wk}}} \quad (4.19)$$

eingeführt.

Die Zs-Tensoren und der BL-Tensor eines Systems werden auch zusammenfassend als *NL-Tensoren* (für Nichtlinearitätstensenoren) bezeichnet.

Bei Berücksichtigung von Zs-Tensoren bis zur maximalen Stufe $\binom{1}{s_{\text{max}}}$, also von Zs-Tensoren mit maximal $s = s_{\text{max}}$ unteren Indizes, ist damit der nichtlineare Systemanteil durch

$$\vec{f}_{\text{nl}}(\vec{x}, \vec{u}) = \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_s * \underbrace{[\vec{x}, \dots, \vec{x}]_{s \text{ mal}}} + \mathcal{B} * [\vec{x}, \vec{u}] \quad (4.20)$$

gegeben² und man erhält die *spezielle Normalform* — im Folgenden meist verkürzt als Normalform bezeichnet —

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u} + \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_s * \underbrace{[\vec{x}, \dots, \vec{x}]_{s \text{ mal}}} + \mathcal{B} * [\vec{x}, \vec{u}] \quad (4.21)$$

¹ Die bei der Definition der Tensoren verwendete *Stufenklammer* $\binom{o}{u}$ gibt die Zahlen o der oberen und u der unteren Indizes eines Tensors an; ein Skalar ist in dieser Notation als $\binom{0}{0}$ -Tensor aufzufassen, ein (Spalten-)Vektor als $\binom{1}{0}$ -Tensor, eine Matrix als $\binom{1}{1}$ -Tensor. Mittels der (verallgemeinerten) Dimensionsklammer $\binom{z_1 \dots z_o}{s_1 \dots s_u}$ werden den Stufen des Tensors die zugehörigen Dimensionen als geordnete Folge von z_i „Zeilen“ und s_i „Spalten“ zugeordnet.

² Eine Kontraktion eines Tensors über mehrere untere Indizes wird hier symbolisch mit Hilfe der *Kontraktionsklammer* $*[\cdot, \dots]$ ausgedrückt, die die Objekte einschließt, über die die unteren Indizes kontrahiert werden — als geordnete Folge in der Reihenfolge, in der mittels der Dimensionsklammer die Dimensionen der unteren Indizes definiert werden. Die Kontraktionsklammer ist zum Beispiel im Fall einer Kontraktion eines Tensors mittels zweier Vektoren als $\mathcal{T} * [\vec{v}, \vec{w}] \equiv \sum_j \sum_k \mathcal{T}_{jk} v^j w^k$ aufzufassen.

$$\vec{y} = \mathbf{C} \vec{x} + \mathbf{D} \vec{u}, \quad (4.22)$$

auf der alle in dieser Arbeit vorgestellten Methoden der nichtlinearen Ordnungsreduktion beruhen. Die Eigenschaft der Multilinearität der NL-Tensoren ermöglicht insbesondere eine projektionsbasierte Reduktion des nichtlinearen Systemanteils.

4.1.4 Verschiebung des Bezugspunktes

In diesem Abschnitt wird diskutiert, wie sich die Systemmatrizen und -tensoren bei einer Verschiebung des Bezugspunktes verhalten. Die hier gefundenen Ausdrücke bilden den Ausgangspunkt für eine tensorielle Parametrisierung von Nichtlinearitäten, wie sie in Kapitel (5) vorgestellt wird.

Durch Anlegen einer stationären Last $\vec{u}_{\text{st,ld}} \neq \vec{0}_p$ nimmt das System (4.21), (4.22) den stationären Zustand,

$$(\vec{u}_{\text{st,ld}}, \vec{x}_{\text{st,ld}}, \vec{y}_{\text{st,ld}}) \neq (\vec{0}_p, \vec{0}_n, \vec{0}_q) \quad (4.23)$$

ein. Verschiebt man den Bezugspunkt durch Einführen der neuen Koordinaten

$$\vec{u}_{\text{ld}} \equiv \vec{u} - \vec{u}_{\text{st,ld}}, \quad \vec{x}_{\text{ld}} \equiv \vec{x} - \vec{x}_{\text{st,ld}}, \quad \vec{y}_{\text{ld}} \equiv \vec{y} - \vec{y}_{\text{st,ld}} \quad (4.24)$$

in diesen stationären Zustand, so bleibt das System (4.21), (4.22) in den neuen Koordinaten forminvariant erhalten. Jedoch transformieren die Systemmatrizen und -tensoren gemäß

$$\mathbf{J}_{\text{ld}} = \mathbf{J}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{ld}} = \mathbf{A} &+ \sum_{\tilde{s}=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{\tilde{s}!} \sum_{(k) \in \text{perm}\{\underbrace{\vec{x}_{\text{st,ld}}, \dots}_{\tilde{s}-1 \text{ mal}}, \underbrace{\cdot}_{1 \text{ mal}}\}} \mathbf{A}_{\tilde{s}} * [(k)] \\ &+ \mathbf{B} * [\cdot, \vec{u}_{\text{st,ld}}], \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{A}_{s,\text{ld}} = \mathbf{A}_s + \sum_{\tilde{s}=s+1}^{s_{\text{max}}} \frac{s!}{\tilde{s}!} \sum_{(k) \in \text{perm}\{\underbrace{\vec{x}_{\text{st,ld}}, \dots}_{\tilde{s}-s \text{ mal}}, \underbrace{\cdot, \dots}_{s \text{ mal}}\}} \mathbf{A}_{\tilde{s}} * [(k)], \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B}_{\text{ld}} = \mathbf{B} + \mathbf{B} * [\vec{x}_{\text{st,ld}}, \cdot], \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}_{\text{ld}} = \mathbf{B}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{C}_{\text{ld}} = \mathbf{C}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{D}_{\text{ld}} = \mathbf{D}. \quad (4.31)$$

Die Anzahl der Summanden in der inneren Summe von (4.26) und (4.27), also die Anzahl der Permutationen $P_{\tilde{s}}^s$, ist dabei durch den Binominalkoeffizienten $\binom{\tilde{s}}{s}$ gegeben,

$$P_{\tilde{s}}^s = \binom{\tilde{s}}{s} \equiv \frac{\tilde{s}!}{(\tilde{s}-s)!s!}, \quad (4.32)$$

im Spezialfall der Zustandsmatrix \mathbf{A}_{ld} mit $s = 1$ also durch $P_{\tilde{s}}^1 = \binom{\tilde{s}}{1} \equiv \tilde{s}$. Da alle Kontraktionen der Z_s -Tensoren in (4.26) und (4.27) über den gleichen Vektor $\vec{x}_{\text{st,ld}}$ erfolgen, tragen jeweils nur deren symmetrische Anteile zum Ergebnis bei. Unter Benutzung der Symmetrisierungsklammer (\cdot) (die Summen über die Permutationen werden quasi in die Tensoren gezogen und mit der Anzahl der Permutationen normiert) ergeben sich — hier in Komponentenschreibweise — deshalb die äquivalenten Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_{\text{ld};j}^i &= A_j^i + \sum_{\tilde{s}=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{(\tilde{s}-1)!} \mathcal{A}_{\tilde{s};(j_1 \dots j_{\tilde{s}-1} j)}^i x_{\text{st,ld}}^{j_1} \dots x_{\text{st,ld}}^{j_{\tilde{s}-1}} \\ &+ \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st,ld}}^k, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$A_{s \text{ ld}; \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_s}^i = \mathcal{A}_{s; \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_s}^i + \sum_{\tilde{s}=s+1}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{(\tilde{s}-s)!} \mathcal{A}_{\tilde{s};(j_1 \dots j_{\tilde{s}-s} \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_s)}^i x_{\text{st,ld}}^{j_1} \dots x_{\text{st,ld}}^{j_{\tilde{s}-s}} \quad (4.34)$$

für die Zustandsmatrix \mathbf{A}_{ld} und die Z_s -Tensoren $\mathcal{A}_{s, \text{ld}}$.

Eine Verschiebung des Bezugspunktes kann insbesondere von Vorteil sein, wenn die für die Anwendung bedeutende, typische Last deutlich von Null verschieden ist (im alten Bezugssystem). Dann empfiehlt sich eine Bezugspunktverschiebung in den relevanten Lastbereich, um dort die nichtlinearen Effekte gering zu halten; unter Umständen ist bereits ein linearisiertes System mit der Zustandsmatrix \mathbf{A}_{ld} ausreichend.

Dabei ist zu beachten, dass die Verschiebung selbst relativ aufwändig ist und dass im alten Bezugssystem eventuell verschwindende Z_s -Tensoren niedriger Stufe im neuen Bezugssystem im Allgemeinen ungleich Null sind.

4.1.4.1 Tangenzustandsmatrix

Im Folgenden wird die Zustandsmatrix \mathbf{A}_{ld} nach (4.26) bzw. (4.33) in einem stationären Zustand $(\vec{u}_{\text{st,ld}}, \vec{x}_{\text{st,ld}}, \vec{y}_{\text{st,ld}})$ — außerhalb des Zusammenhangs einer Bezugspunktverschiebung — als *Tangenzustandsmatrix* $\tilde{\mathbf{A}}$ bezeichnet,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\text{ld}}. \quad (4.35)$$

Gleichung (4.26) bzw. die Komponentenschreibweise (4.33) seien zur Vereinfachung späterer Querverweise hier noch einmal angeführt:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{s!} \sum_{(k) \in \text{perm}\{\underbrace{\vec{x}_{\text{st,ld}}, \dots}_{s-1 \text{ mal}}, \underbrace{\cdot}_{1 \text{ mal}}\}} \mathcal{A}_s * [(k)] + \mathcal{B} * [\cdot, \vec{u}_{\text{st,ld}}] \quad (4.36)$$

bzw.

$$\tilde{A}_j^i = A_j^i + \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{(s-1)!} \mathcal{A}_{s;(j_1 \dots j_{s-1} j)}^i x_{\text{st,ld}}^{j_1} \dots x_{\text{st,ld}}^{j_{s-1}} + \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st,ld}}^k \quad (4.37)$$

Die Tangenzustandsmatrix bildet die Grundlage für die Betrachtung linearisierter Systeme.

4.1.4.2 Sekantenzustandsmatrix

Beim Konzept der Sekantenzustandsmatrix wird eine Relation definiert, die den stationären Zustandsvektor $\vec{x}_{st,ld}$ mit dem Eingangsvektor $\vec{u}_{st,ld}$ ähnlich wie im linearen Fall verknüpft:

$$\vec{0}_n = \bar{\mathbf{A}} \vec{x}_{st,ld} + \mathbf{B} \vec{u}_{st,ld}. \quad (4.38)$$

Die auf diese Weise definierte *Sekantenzustandsmatrix* $\bar{\mathbf{A}}$ kann als Grundlage einer iterativen Bestimmung einer nichtlinearen stationären Lösung dienen.

Ein Vergleich mit (4.21) für stationäre Zustände zeigt, dass sich die Sekantenzustandsmatrix durch Ausklammern jeweils eines Zustandsvektors $\vec{x}_{st,ld}$ aus den Kontraktionen über die NL-Tensoren ergibt. Man erhält dann

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_s * \underbrace{[\vec{x}_{st,ld}, \dots, \vec{x}_{st,ld}]_{s-1 \text{ mal}}}_{1 \text{ mal}} + \mathbf{B} * [\cdot, \vec{u}_{st,ld}], \quad (4.39)$$

oder unter Verwendung der Komponentenschreibweise und unter Berücksichtigung der Symmetrisierung aufgrund der Kontraktion über identische Vektoren

$$\bar{A}_j^i = A_j^i + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_s^{(j_1 \dots j_{s-1})j} x_{st,ld}^{j_1} \dots x_{st,ld}^{j_{s-1}} + \mathcal{B}_{jk}^i u_{st,ld}^k \quad (4.40)$$

wobei bei den Z_s -Tensoren jeweils der letzte Zustandsvektor ausgeklammert wurde.

Die Beliebigkeit der Wahl des ausgeklammerten Zustandsvektors führt dazu, dass die Sekantenzustandsmatrix mit der hier angegebenen Definition im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Eindeutigkeit erhielte man beispielsweise durch eine Symmetrisierung über alle unteren Indizes der Z_s -Tensoren; diese Forderung wird jedoch in dieser Arbeit nicht in die Definition der Sekantenzustandsmatrix mit einbezogen.

4.1.5 Störungstheorie zweiter Ordnung

In Anhang (C) wird die Zustandsgleichung (4.21) der speziellen Normalform mit den Methoden der Störungstheorie behandelt. Die dort vorgestellten Ergebnisse können den Ausgangspunkt für Methoden der Ordnungsreduktion darstellen. Beispielsweise beruht das in Abschnitt (4.5) vorgestellte Verfahren der Frequenzganganpassung auf der in Abschnitt (C.2) vorgestellten Verallgemeinerung des Frequenzgangs für nichtlineare Systeme.

4.2 Ordnungsreduktion

Auf der Basis der vorgestellten allgemeinen bzw. speziellen Normalformen (4.16), (4.17) bzw. (4.21), (4.22) kann nun die Aufgabe der Ordnungsreduktion präzisiert werden:

4.2.1 Allgemeine Normalform

In der allgemeinen Normalform soll das volle System

$$\mathbf{J}_n \dot{\vec{x}}_n = \mathbf{A}_n \vec{x}_n + \mathbf{B}_n \vec{u} + \vec{f}_{n, \text{nl}}(\vec{x}_n, \vec{u}) , \quad (4.41)$$

$$\vec{y}_n = \mathbf{C}_n \vec{x}_n + \mathbf{D}_n \vec{u} \quad (4.42)$$

mit dem nichtlinearen Systemanteil $\vec{f}_{n, \text{nl}}(\vec{x}_n, \vec{u}) \binom{n}{1}$ approximiert werden durch das reduzierte System

$$\mathbf{J}_m \dot{\vec{x}}_m = \mathbf{A}_m \vec{x}_m + \mathbf{B}_m \vec{u} + \vec{f}_{m, \text{nl}}(\vec{x}_m, \vec{u}) , \quad (4.43)$$

$$\vec{y}_m = \mathbf{C}_m \vec{x}_m + \mathbf{D}_m \vec{u} , \quad (4.44)$$

mit dem nichtlinearen Systemanteil $\vec{f}_{m, \text{nl}}(\vec{x}_m, \vec{u}) \binom{m}{1}$. Da die Nichtlinearitäten hier nicht weiter spezifiziert sind, ist zunächst unklar, in wiefern eine formale Ähnlichkeit von $\vec{f}_{m, \text{nl}}$ und $\vec{f}_{n, \text{nl}}$ gefordert werden kann, also wie, bzw. ob, die Eigenschaft der Formerhaltung definiert werden kann.

4.2.2 Spezielle Normalform

In der speziellen Normalform soll das System

$$\mathbf{J}_n \dot{\vec{x}}_n = \mathbf{A}_n \vec{x}_n + \mathbf{B}_n \vec{u} + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_{s, n} * \underbrace{[\vec{x}_n, \dots, \vec{x}_n]}_{s \text{ mal}} + \mathcal{B}_n * [\vec{x}_n, \vec{u}] , \quad (4.45)$$

$$\vec{y}_n = \mathbf{C}_n \vec{x}_n + \mathbf{D}_n \vec{u} \quad (4.46)$$

mit den Z_s -Tensoren $\mathcal{A}_{s, n} \binom{n}{n, \dots, n}_{s \text{ mal}}$ der Stufe $\binom{1}{s}$ und dem BL-Tensor $\mathcal{B}_n \binom{n}{n, p}$ der Stufe $\binom{1}{2}$ unter Beachtung der Formerhaltung durch das System

$$\mathbf{J}_m \dot{\vec{x}}_m = \mathbf{A}_m \vec{x}_m + \mathbf{B}_m \vec{u} + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_{s, m} * \underbrace{[\vec{x}_m, \dots, \vec{x}_m]}_{s \text{ mal}} + \mathcal{B}_m * [\vec{x}_m, \vec{u}] \quad (4.47)$$

$$\vec{y}_m = \mathbf{C}_m \vec{x}_m + \mathbf{D}_m \vec{u} . \quad (4.48)$$

mit den Z_s -Tensoren $\mathcal{A}_{s, m} \binom{m}{m, \dots, m}_{s \text{ mal}}$ der Stufe $\binom{1}{s}$ und dem BL-Tensor $\mathcal{B}_m \binom{m}{m, p}$ der Stufe $\binom{1}{2}$ approximiert werden. In diesem Fall ist die Forderung nach Formerhaltung wohldefiniert und legt letztlich das reduzierte System fest.

4.2.3 Eigenschaften der Reduktionsverfahren

Viele Charakteristika der linearen Ordnungsreduktion lassen sich auf den nichtlinearen Fall übertragen, beispielsweise die Messgrößenerhaltung, die stationäre Genauigkeit und auch viele der auf dem projektiven Ansatz beruhenden Eigenschaften, wie beispielsweise die Zustandsgrößenerhaltung und die Strukturhaltung. Diese Charakteristika werden hier nicht erneut definiert.

Andere Charakteristika der linearen Ordnungsreduktion gelten zunächst nur für das linearisierte System, zum Beispiel alle Forderungen, die auf dem Übertragungsverhalten des Systems basieren. Diese können teilweise auf der Basis der vorgestellten Störungstheorie auf schwach nichtlineare Systeme verallgemeinert werden.

4.3 Ordnungsreduktion durch Projektion der Zustandsgleichung

Das in Abschnitt (3.4) ausführlich diskutierte Verfahren der Ordnungsreduktion durch Projektion der Zustandsgleichung lässt sich leicht auf den hier diskutierten, nichtlinearen Fall verallgemeinern. Analog zu Abschnitt (3.4.7) für den linearen Fall wird die nichtlineare Zustandsgleichung (4.41) mittels der transformierten Reduktionsmatrix $\tilde{\mathbf{R}}$ und der Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} in den Zustandsraum des reduzierten Systems projiziert und mit (4.43) verglichen. Zusätzlich zu den linearen Reduktionsbedingungen (3.56) bis (3.58) ergibt sich der Ausdruck

$$\vec{f}_{m, nl}(\vec{x}_m, \vec{u}) = \tilde{\mathbf{R}} \vec{f}_{n, nl}(\mathbf{V} \vec{x}_m, \vec{u}) . \quad (4.49)$$

für den nichtlinearen Systemanteil $\vec{f}_{m, nl}$ des reduzierten Systems.

Dieser Ausdruck lässt sich für jedes nichtlineare System in allgemeiner Normalform sukzessive auswerten. Damit sinkt die Ordnung der für numerische Verfahren zu lösenden linearisierten Gleichungssysteme auf die Ordnung des reduzierten Systems. Durch die Ordnungsreduktion kann deshalb der Aufwand beispielsweise für eine Zeitintegration oder zur Bestimmung einer nichtlinearen stationären Lösung deutlich reduziert werden. Letztlich wird jedoch der das nichtlineare Verhalten beschreibende Anteil $\vec{f}_{n, nl}$ unverändert ins reduzierte System übernommen. Dieses Vorgehen ist insbesondere dann gerechtfertigt, wenn die Auswertung des nichtlinearen Anteils bereits im vollen System keinen großen Aufwand bedeutet, etwa wenn nur wenige Freiheitsgrade durch Nichtlinearitäten beaufschlagt werden. Auf vergleichbarer Basis wurden eine Reihe von Reduktionsverfahren entwickelt: In (Has85) beispielsweise wird vorausgesetzt, dass die nichtlinearen Anteile ausschließlich von den in das reduzierte System übernommenen „dominanten“ Zustandsgrößen abhängen. In (Pal87) und (LM90) sowie in (Loh94a) und (Loh94b) wird das Ein- und Ausgangsverhalten des nichtlinearen Systemanteils mittels linearer Transformationen an eine Serie zeitabhängiger Testrechnungen angepasst.

In der Regel fordert man jedoch auch eine Reduktion des nichtlinearen Systemanteils, insbesondere wenn Darstellung und Auswertung des nichtlinearen Anteils in der vollen Zu-

standsgleichung einen gewissen Aufwand bedeuten. Für die hier betrachtete Projektion der Zustandsgleichung erfordert dies jedoch eine Darstellung von $\vec{f}_{n, nl}$, die eine explizite Auswertung der rechten Seite von (4.49) im Sinne $\vec{f}_{m, nl}(\cdot, \cdot) = \tilde{\mathbf{R}} \vec{f}_{n, nl}(\mathbf{V} \cdot, \cdot)$ ermöglicht. Gerade dies wird durch die in dieser Arbeit verwendete spezielle Normalform erreicht, in dem die Multilinearität der NL-Tensoren ausgenutzt wird: Setzt man den Ausdruck (4.20) in die Reduktionbedingung (4.49) ein, so erhält die Ausdrücke

$$\mathcal{A}_{s, m} = \tilde{\mathbf{R}} \mathcal{A}_{s, n} * \underbrace{[\mathbf{V}, \dots, \mathbf{V}]}_{s \text{ mal}}, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{B}_m = \tilde{\mathbf{R}} \mathcal{B}_n * [\mathbf{V}, \cdot] \quad (4.51)$$

für die reduzierten Tensoren. Im Allgemeinen ergibt sich aus der Projektion der Zustandsgleichung für die „Reduktionstransformation“ das Transformationsverhalten $\tilde{\mathbf{R}} \cdot$ für obere Indizes und $\cdot \mathbf{V}$ für über den Zustandsvektor zu kontrahierende untere Indizes.

Wie im linearen Fall wird die Projektion der Zustandsgleichung durch die Angabe der Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e, n}$ und $\mathbf{T}_{e, m}$ des vollen und reduzierten Systems sowie durch die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix \mathbf{R} und \mathbf{V} festgelegt.

Durch die Wahl der Eichtransformation $\mathbf{T}_{e, m}$ nach (3.60) wird auch im nichtlinearen Fall die Standardgleichung für das reduzierte System gewährleistet.

Als Eichtransformation $\mathbf{T}_{e, n}$ sowie als Projektionsmatrizen \mathbf{R} und \mathbf{V} können zunächst die Matrizen für den linearen Fall verwendet werden. Die Übertragung auf den nichtlinearen Fall liefert gute Ergebnisse, wenn der Einfluss der Nichtlinearitäten nicht zu groß ist, wenn insbesondere das linearisierte System schon eine passable Näherung des Systemverhaltens darstellt. In diesem Fall können die nichtlinearen Terme quasi als zusätzliche Lasten betrachtet werden, wobei die Transformation der nichtlinearen Terme durch die näherungsweise Übertragung von (3.31) und (3.32) motiviert werden kann.

In einem zweiten Schritt können Anpassungen insbesondere der Projektionsmatrizen \mathbf{R} und \mathbf{V} betrachtet werden.

Auf diese Weise ist eine Übertragung des Arnoldi-Verfahrens und des Guyan Verfahrens auf den nichtlinearen Bereich möglich. Hier erfolgen noch einige verfahrensspezifische Bemerkungen sowie Vorschläge für eine Anpassung der Verfahren, um nichtlineare stationäre Genauigkeit zu gewährleisten. Die Einsatzmöglichkeiten und Eigenschaften dieser beiden Verfahren sind in Tabelle (7.1) auf Seite 128 noch einmal zum Vergleich zusammengestellt.

4.3.1 Arnoldi-Verfahren

Die Anwendung des Arnoldi-Verfahrens für die Stützfrequenz $\sigma = 0$ auf den Z2- und Z3-Tensor wurde erstmals in (CW00) und ausführlicher in (Che99) beschrieben. In (Phi00) wird eine Anpassung der Rekonstruktionsmatrix (und damit auch der Reduktionsmatrix) an den nichtlinearen Fall vorgeschlagen, die auf einer Störungstheorie ähnlich der in Abschnitt (C) vorgeschlagenen beruht. In (BS02) wird ein ähnlicher Ansatz für die in der Regelungstechnik verbreiteten bilinearen Systeme erörtert.

4.3.1.1 Nichtlineare stationäre Genauigkeit

Durch die nichtlinearen Terme in der Zustandsraumdarstellung kann im nichtlinearen Fall stationäre Genauigkeit nicht mehr exakt gewährleistet werden, weil sich die vorgestellten Projektionsmatrizen am linearisierten System orientieren. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb eine Modifikation entwickelt, die für eine bestimmte, typische Last nichtlineare stationäre Genauigkeit sicherstellt.

In (3.73) wird für die Entwicklungsfrequenz $\sigma = 0$ als Spannvektor des Krylov-Raums im Wesentlichen die lineare stationäre Lösung des vollen Systems verwendet: Nach (3.6) und (3.18) gilt $\mathbf{F}_n(\sigma = 0)^{-1} \vec{B}_n = -\mathbf{A}_n^{-1} \vec{B}_n = \vec{x}_{n, \text{st, lin}}/u_{\text{st}}$; der Skalierungsfaktor $1/u_{\text{st}}$ durch die Aufteilung der Last in die Single-Input Eingangsmatrix \vec{B}_n und den (stationären) Single-Input Eingangsvektor u_{st} spielt wegen der Orthonormierung im Arnoldi-Algorithmus im linearen Fall keine Rolle. Im nichtlinearen Fall bietet es sich an, anstatt der stationären Lösung des linearisierten Systems die nichtlineare stationäre Lösung $\vec{x}_{n, \text{st, nl}}$ als Spannvektor des Krylov-Raums zu verwenden. Diese kann beispielsweise iterativ bestimmt werden. Damit gilt anstelle von (3.73)

$$\mathcal{R}_m = \text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_m(-\mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{J}_n; \vec{x}_{n, \text{st, nl}}) . \quad (4.52)$$

Formal entspricht dieses Vorgehen der Verwendung einer Ersatz-Eingangsmatrix im Arnoldi-Algorithmus, die im linearisierten System den Einfluss der Nichtlinearitäten parametrisiert.

Dadurch wird nichtlineare stationäre Genauigkeit für einen speziellen Zustand $\vec{x}_{n, \text{st, nl}}$ und damit für einen speziellen Single-Input Eingangsvektor u_{st} erzielt; für andere Werte wird nichtlineare stationäre Genauigkeit nur näherungsweise erreicht, da im nichtlinearen Fall stationäre Lösungen mit dem Eingang nicht mehr kollinear skalieren. Diese Vorgehensweise kann deshalb als Anpassung an einen typischen Wert des Eingangsvektors aufgefasst werden, falls diese relativ gut bekannt ist und nicht zu stark variiert. Im Allgemeinen verbessert sich durch diese Anpassung auch das dynamische Systemverhalten, da der Krylov-Unterraum besser an die relevanten Systemzustände angepasst ist.

Es sei noch angemerkt, dass die stationäre Genauigkeit des linearisierten Systems bei diesem Vorgehen verlorengeht — Es kann also nur entweder stationäre Genauigkeit des linearisierten Systems oder nichtlineare stationäre Genauigkeit erzielt werden.

4.3.1.2 Berücksichtigung stationärer Randbedingungen

Auch im nichtlinearen Fall sei noch gemäß (3.3) ein System mit einem externen Eingang $\vec{B}_{n, \text{ext}}, u_{\text{ext}}$, und stationären Randbedingungen $\vec{B}_{n, \text{vir}}, u_{\text{vir}} \equiv 1$, betrachtet. In Analogie zum linearen Fall (3.75) und unter Beachtung von (4.52) kann hier durch

$$\mathcal{R}_m = \text{colspan}\{\mathbf{V}\} \subset \begin{cases} \mathcal{K}_{m-1}[-\mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{J}_n; \vec{x}_{n, \text{st, nl}}(u_{\text{ext}} = u_{\text{st}}, u_{\text{vir}} \equiv 1)] \\ \vec{x}_{n, \text{st, nl}}(u_{\text{ext}} = 0, u_{\text{vir}} \equiv 1) \end{cases} \quad (4.53)$$

ein gutes dynamisches Verhalten im relevanten Lastbereich und stationäre Genauigkeit für die Randbedingung erzielt werden. Damit kann beispielsweise für einen Einschaltvorgang stationäre Genauigkeit im Anfangs- und Endzustand erreicht werden.

Eine andere mögliche Vorgehensweise ist eine Verschiebung des Arbeitspunktes in den Zustand $\vec{x}_{n, st, nl}$ ($u_{ext} = 0$, $u_{vir} \equiv 1$) mit den Methoden aus Abschnitt (4.1.4). Da eine Arbeitspunktverschiebung insbesondere bei Berücksichtigung von Zs -Tensoren höherer Stufe relativ aufwändig ist und darüberhinaus mit bedeutenden zusätzlichen Einträgen in den NL-Tensoren verbunden sein kann, ist das hier beschriebene Verfahren der „Spendierung“ eines zusätzlichen Freiheitsgrads im reduzierten System oftmals vorzuziehen.

4.3.2 Guyan-Verfahren

Die zweite Variante, die Projektion nach dem Guyan-Verfahren, wurde noch nicht in der Literatur beschrieben. Sie wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt, um dem Arnoldi-Verfahren eine strukturerhaltende Alternative zur Seite zu stellen, die eine stärkere Einflussnahme in die durch das reduzierte System gut approximierten Zustände erlaubt.

4.3.2.1 Nichtlineare stationäre Genauigkeit

Auch im Fall des Guyan-Verfahrens kann nichtlineare stationäre Genauigkeit für eine bestimmte, typische Last erzielt werden, wenn der Slave-Anteil der Eingangsmatrix verschwindet:

Die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix wird dabei nicht aus einer Zerlegung der Tangenzustandsmatrix im Arbeitspunkt bestimmt, sondern aus einer Zerlegung der Sekantenzustandsmatrix von Arbeitspunkt und typischer Last; diese Projektionsmatrizen operieren auf die originalen Systemmatrizen und -tensoren.

Nichtverschwindende Slave-Lasten — beispielsweise durch stationäre Randbedingungen — machen sich bei dieser Methode sehr störend bemerkbar, hier liefert das Verfahren mit lediglich *linearer* stationäre Genauigkeit im Allgemeinen bessere Ergebnisse.

4.3.2.2 Multi-Input Systeme und stationäre Randbedingungen

Das Guyan-Verfahren ist zunächst für Multi-Input Systeme gut geeignet, jedoch leidet auch hier — wie im linearen Fall — die Reduktionsgüte insbesondere im dynamischen Fall, wenn die Slave-Anteile der Eingangsmatrizen nicht verschwinden.

Gegebenenfalls können durch eine Arbeitspunktverschiebung gemäß (4.1.4) zumindest stationäre Randbedingungen „wegtransformiert“ werden, was jedoch im Allgemeinen mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden ist.

4.4 Adiabatische Elimination schnell relaxierender Variablen

Eine weitere Möglichkeit zur Ordnungsreduktion im nichtlinearen Fall besteht in der adiabatischen Elimination der schnell relaxierenden Variablen des nichtlinearen Systems in Anlehnung an die Synergetik. Dieser Ansatz stellt im Wesentlichen eine Spezialisierung des in Abschnitt (2.1.1) erläuterten Vorgehens dar. Es handelt sich hierbei um einen modalen Ansatz: der eigentlichen Ordnungsreduktion geht eine Eigentransformation des linearen Systemanteils voraus.

Das Verfahren wird hier für Systeme formuliert, deren linearer Anteil stabil und diagonalähnlich ist. Die Methode scheint bei geeigneter Wahl der aktiven Moden jedoch auch für linear instabile Systeme geeignet zu sein.

Als Nichtlinearität wird in diesem Abschnitt ausschließlich der Z2-Tensor \mathcal{A}_2 berücksichtigt.

In diesem Abschnitt wird die Einsteinsche Summenkonvention nicht verwendet, alle Summen werden also explizit ausgeschrieben!

4.4.1 Eigentransformation

Zunächst wird das System (4.45), (4.46) einer Eigentransformation unterworfen (siehe Anhang (A.5)). Da der lineare Anteil von (4.45) als diagonalähnlich vorausgesetzt wird, wird dieser durch die Transformation diagonalisiert und damit entkoppelt. Aufgrund der Stabilität gilt außerdem für die Realteile der Eigenwerte λ_i , $1 \leq i \leq n$, des linearen Anteils $\Re\{\lambda_i\} < 0$. Die Eigenwerte werden durch die Eigentransformation nach ihren Realteilen absteigend geordnet zur Diagonalmatrix Λ_n zusammengefasst, also $\Lambda_n = \text{diag}_{i=1}^n(\lambda_i)$, mit

$$0 > \Re\{\lambda_1\} \geq \dots \geq \Re\{\lambda_n\} . \quad (4.54)$$

Die „langsamen“ Eigenwerte erhalten bei dieser Sortierung eine kleine Nummer. Mit den Transformationsmatrizen \mathbf{T}_e , \mathbf{T}_k nach (A.30) erhält man für den nichtlinearen Anteil $\tilde{\mathcal{A}}_{2,n}$ des transformierten Systems den Ausdruck

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2,n} = \mathbf{T}_e \mathcal{A}_{2,n} * [\mathbf{T}_k^{-1}, \mathbf{T}_k^{-1}] , \quad (4.55)$$

so dass die Zustandsgleichung zunächst die Form

$$\dot{\tilde{x}}_n = \Lambda_n \tilde{x}_n + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{A}}_{2,n} * [\tilde{x}_n, \tilde{x}_n] + \tilde{\mathbf{B}}_n \vec{u} \quad (4.56)$$

annimmt.

4.4.2 Ordnungsreduktion

Das Spektrum wird in zwei Gruppen geteilt: die ersten m Moden werden im Folgenden als *aktive Moden* bezeichnet, die übrigen $n - m$ Moden als *passive Moden*.³ Die aktiven

³ Als Teilungskriterium des Spektrums können zunächst die Kriterien für lineare Systeme, etwa das Kriterium von Litz, siehe etwa (Lit83), verwendet werden.

Moden werden im Sinne der Strukturhaltung als reduzierter Zustandsvektor $\widetilde{\vec{x}}_m$ interpretiert. Hierbei ist zu beachten, dass die Bedingung (3.46) im Allgemeinen nicht erfüllt werden kann, da durch die Eigentransformation die Ausgangsmatrix im Allgemeinen stark besetzt ist. Deshalb ist man in diesem Fall auf eine Rekonstruktion des kompletten Zustandsvektors angewiesen, also auf die Bereitstellung einer geeigneten Rekonstruktionsmatrix (vergleiche Abschnitt (3.4.6.5)).

4.4.2.1 Guyan-Ansatz

Die reduzierte Zustandsgleichung ergibt sich zunächst aus einem zum Guyan-Verfahren analogen Vorgehen, wobei die Master-Freiheitsgrade durch die aktiven Moden gegeben sind. Im Unterschied zum Guyan-Verfahren wird hier jedoch eine Aufteilung der Eigenmoden vorgenommen, anstatt einer Auswahl relevanter Zustände im originalen Zustandsraum.

Formal lässt sich dieses Vorgehen darstellen als Projektion mit den Eichtransformationen $\mathbf{T}_{e,n}$ und $\mathbf{T}_{e,m}$ des vollen und reduzierten Systems nach (3.87) und (3.88), hier also

$$\mathbf{T}_{e,n} = -\operatorname{diag}_{i=1}^n(1/\lambda_i) \equiv -\mathbf{\Lambda}_n^{-1}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{T}_{e,m} = -\operatorname{diag}_{i=1}^m(1/\lambda_i) \equiv -\mathbf{\Lambda}_m^{-1}, \quad (4.58)$$

wobei die Auswahlmatrix \mathbf{P} und die Rekonstruktionsmatrix \mathbf{V} nach (3.89) zu verwenden ist, in diesem Fall

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

In diesem speziellen Fall wird — im Gegensatz zum allgemeinen Guyan-Verfahren — (3.60) erfüllt, so dass die Standardeichung erhalten bleibt. Aus den Reduktionsbedingungen (3.90) und (3.91) sowie aus (4.50) erhält man die formerhaltende reduzierte Zustandsgleichung

$$\dot{\widetilde{\vec{x}}}_m = \mathbf{\Lambda}_m \widetilde{\vec{x}}_m + \frac{1}{2} \widetilde{\mathcal{A}}_{2,m} * \left[\widetilde{\vec{x}}_m, \widetilde{\vec{x}}_m \right] + \widetilde{\mathbf{B}}_m \vec{u}. \quad (4.60)$$

Aufgrund der Diagonalität der Zustandsmatrix $\mathbf{\Lambda}_n$ liefert diese Vorgehen zunächst das gleiche Ergebnis, wie ein Truncation-Ansatz, die passiven Moden werden also zunächst einfach „abgeschnitten“.

4.4.2.2 Adiabatische Elimination

Es wird nun angenommen, dass die Dynamik des Systems durch die aktiven Moden dominiert wird; Die passiven Moden folgen den aktiven aufgrund ihrer schnelleren Dynamik instantan. Sie werden deshalb adiabatisch eliminiert, das heißt, sie werden durch ihre stationären Zustände ersetzt.

4.4 ADIABATISCHE ELIMINATION SCHNELL RELAXIERENDER VARIABLEN

Man erhält für den stationären Zustand $\tilde{x}_{n,\text{st}}^l$ für die passive Mode l , $m+1 \leq l \leq n$, durch Nullsetzen der Zeitableitung $\dot{\tilde{x}}_n^l$ in (4.56) zunächst den impliziten Ausdruck

$$\tilde{x}_{n,\text{st}}^l = -\frac{1}{\lambda_l} \sum_{k=1}^p \tilde{B}_{n,k}^l u^k - \frac{1}{2\lambda_l} \sum_{k_1, k_2=1}^n \tilde{\mathcal{A}}_{2,n; k_1 k_2}^l \tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_1} \tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_2}, \quad m+1 \leq l \leq n. \quad (4.61)$$

Die Doppelsumme in Gleichung (4.61) kann als Näherung bereits bei m abgebrochen werden, da die höheren Terme aufgrund der stärkeren Unterdrückung der $\tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_1}$ bzw. $\tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_2}$ durch die betragsmäßig größeren Realteile der Eigenwerte in den Termen $1/\lambda_{k_1}$ bzw. $1/\lambda_{k_2}$ nur wenig beitragen. Dadurch ergibt sich als Näherung der explizite Ausdruck

$$\tilde{x}_{n,\text{st}}^l \approx -\frac{1}{\lambda_l} \sum_{k=1}^p \tilde{B}_{n,k}^l u^k - \frac{1}{2\lambda_l} \sum_{k_1, k_2=1}^m \tilde{\mathcal{A}}_{2,n; k_1 k_2}^l \tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_1} \tilde{x}_{n,\text{st}}^{k_2}, \quad m+1 \leq l \leq n \quad (4.62)$$

für den stationären Zustand der passiven Moden.

Einsetzen von (4.62) in die Zustandsgleichung für die aktiven Moden führt auf ein reduziertes System der Form

$$\dot{\tilde{x}}_m = \Lambda_m \tilde{x}_m + \tilde{\mathbf{B}}_m \vec{u} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{A}}_{2,m} * [\tilde{x}_m, \tilde{x}_m] + \frac{1}{6} \tilde{\mathcal{A}}_{3,m} * [\tilde{x}_m, \tilde{x}_m, \tilde{x}_m] + \tilde{\mathbf{B}}_m * [\tilde{x}_m, u], \quad (4.63)$$

wobei die Terme Λ_m , $\tilde{\mathcal{A}}_{2,m}$ und $\tilde{\mathbf{B}}_m$ mit den entsprechenden Termen des Guyan-Ansatz übereinstimmen. Interessanter sind hier die zusätzlichen Terme $\tilde{\mathcal{A}}_{3,m}$ und $\tilde{\mathbf{B}}_m$, gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{A}}_{3,m; j k_1 k_2}^i = - \sum_{l=m+1}^n \frac{3}{2\lambda_l} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,n; j l}^i + \tilde{\mathcal{A}}_{2,n; l j}^i \right) \tilde{\mathcal{A}}_{2,n; k_1 k_2}^l, \quad (4.64)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m; j k}^i = - \sum_{l=m+1}^n \frac{1}{2\lambda_l} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,n; j l}^i + \tilde{\mathcal{A}}_{2,n; l j}^i \right) \tilde{B}_{n,k}^l, \quad (4.65)$$

die der nichtlinearen Einkoppelung der passiven Moden entstammen. Weitere Terme in höherer als linearer Ordnung in $1/\lambda_l$ sind dabei bereits vernachlässigt.

Durch diese zusätzlichen Terme wird strenggenommen die Formerhaltung verletzt, jedoch gehört die reduzierte Zustandsgleichung noch zu der in dieser Arbeit betrachteten Normalform (4.21).

4.4.2.3 Ausgangsgleichung

Bei der adiabatischen Elimination kann der Einfluss der passiven Moden in der Ausgangsgleichung näherungsweise durch ihre stationären Zustände (4.62) berücksichtigt werden.

4 ORDNUNGSREDUKTION NICHTLINEARER SYSTEME

Der erste Term in (4.62), der dem linearen Anteil des Systems entstammt, führt auf einen Zusatzterm in der Durchgangsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}$,

$$\tilde{D}_{m,k}^i = \tilde{D}_{n,k}^i - \sum_{l=m+1}^n \frac{1}{\lambda_l} \tilde{C}_{n,l}^i \tilde{B}_{n,k}^l. \quad (4.66)$$

Dieser entspricht dem innerhalb des projektiven Ansatz nicht darstellbaren Ausdruck (3.86) des Guyan-Verfahrens.

Der zweite Term in (4.62), verursacht durch die nichtlineare Koppelung des Systems, liefert einen nichtlinearen Beitrag zur Ausgangsgleichung. Dieser verletzt abermals die Formerhaltung, jedoch in einer Weise, die nicht innerhalb der betrachteten Normalform (4.22) dargestellt werden kann. Da unter Annahme schwacher Nichtlinearitäten der zweite Term im Vergleich zum ersten klein sein sollte, kann er vernachlässigt werden, falls keine explizite softwareseitige Unterstützung erfolgen kann.

4.4.2.4 Anwendung

Das Verfahren ist in der hier vorgestellten Form implementiert.

An einem Finite-Differenzen Testsystem der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit einer durch einen Z2-Tensor darstellbaren Materialnichtlinearität liefern die zusätzlichen Terme (4.64), (4.65) und (4.66) keine nennenswerten Beiträge. Ursache dafür ist, dass das Verhalten des Testsystems durch die erste Eigenmode dominiert wird.

Eine Anwendung auf weitere, eventuell auch linear instabile Systeme steht noch aus.

4.5 Frequenzganganpassung

In diesem Abschnitt wird ein strukturerhaltendes Reduktionsverfahren für nichtlineare Systeme vorgestellt, das die nichtlineare Verallgemeinerung des Frequenzgangs nach (C.20) bis (C.24) an einer Serie von $n_o + 1$ Stützstellen ω_i , $0 \leq i \leq n_o$, mit beispielsweise (jedoch nicht notwendigerweise) $\omega_0 = 0$ im Frequenzraum durch das reduzierte System approximiert. Für die linearen Terme nach (C.19) führt das Vorgehen auf die Frequenzganganpassung für lineare Systeme (vergleiche Abschnitt (3.7) und (Led00)).

Das Verfahren lässt sich für alle betrachteten Ordnungen des nichtlinearen Frequenzgangs formulieren; hier wird jedoch nur auf die Ordnung \vec{x}_{10} zur Bestimmung des reduzierten Z2-Tensors $\mathcal{A}_{2,\varepsilon m}$ bzw. $\mathcal{A}_{2,m}$ eingegangen.

4.5.1 Übereinstimmung des Frequenzgangs

Als hinreichendes Kriterium der Übereinstimmung der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^1 \eta^0)$ des Frequenzgangs ergibt sich in Analogie zum linearen Fall unter Beachtung der Strukturerhaltung mit

der Ausprägung $\vec{x}_{n\ 10\ o_i}$ (volles System) und $\vec{x}_{m\ 10\ o_i}$ (reduziertes System) der Größe $\vec{x}_{10\ \omega_0}$ ((C.20)) mit der Anregefrequenz $\omega_0 = o_i$, $0 \leq o_i \leq n_o$ aus (C.20) der Ausdruck

$$\vec{x}_{m\ 10\ o_i} = \mathbf{P} \vec{x}_{n\ 10\ o_i}, \quad 0 \leq o_i \leq n_o. \quad (4.67)$$

oder explizit

$$\mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\mathbf{G}_m(o_i), \mathbf{G}_m(o_i)] = \mathbf{F}_m(2o_i) \mathbf{P} \mathbf{F}_n(2o_i)^{-1} \mathcal{A}_{2, \varepsilon n} * [\mathbf{G}_n(o_i), \mathbf{G}_n(o_i)] \quad (4.68)$$

als hinreichendes Kriterium,

Die Größen $\mathbf{F}_m(\omega)$ und $\mathbf{G}_m(\omega)$ des linearen Anteils des reduzierten System werden als bekannt vorausgesetzt. Die damit vollständig bekannte rechte Seite wird im Folgenden als $\mathbf{W}_r(o_i) \binom{m}{p, p}$ abgekürzt,

$$\mathbf{W}_r(o_i) = \mathbf{F}_m(2o_i) \mathbf{P} \mathbf{F}_n(2o_i)^{-1} \mathcal{A}_{2, \varepsilon n} * [\mathbf{G}_n(o_i), \mathbf{G}_n(o_i)], \quad (4.69)$$

womit man also den Ausdruck

$$\mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\mathbf{G}_m(o_i), \mathbf{G}_m(o_i)] = \mathbf{W}_r(o_i), \quad 0 \leq o_i \leq n_o \quad (4.70)$$

als Bestimmungsgleichung für den reduzierten Z2-Tensor $\mathcal{A}_{2, \varepsilon m}$ bzw. $\mathcal{A}_{2, m}$ erhält.

4.5.2 Bestimmung des reduzierten Z2-Tensors

Die Übertragungsfunktion $\mathbf{G}_m(o_i)$ sowie die rechte Seite $\mathbf{W}_r(o_i)$ von Gleichung (4.70) sind im Allgemeinen komplexe Größen. Um trotzdem einen reellen Z2-Tensor $\mathcal{A}_{2, \varepsilon m}$ zu gewährleisten, $\mathcal{A}_{2, \varepsilon m} \in \mathbb{R}^{m \times m \times m}$, sind entsprechende Nebenbedingungen zu erfüllen. Splitten von (4.70) in Real- und Imaginärteil und Nullsetzen des Imaginärteils von $\mathcal{A}_{2, \varepsilon m}$ liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &+ \mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\Re\{\mathbf{G}_m(o_i)\}, \Re\{\mathbf{G}_m(o_i)\}] \\ &- \mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\Im\{\mathbf{G}_m(o_i)\}, \Im\{\mathbf{G}_m(o_i)\}] = \Re\{\mathbf{W}_r(o_i)\}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} &+ \mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\Re\{\mathbf{G}_m(o_i)\}, \Im\{\mathbf{G}_m(o_i)\}] \\ &+ \mathcal{A}_{2, \varepsilon m} * [\Im\{\mathbf{G}_m(o_i)\}, \Re\{\mathbf{G}_m(o_i)\}] = \Im\{\mathbf{W}_r(o_i)\} \end{aligned} \quad (4.72)$$

für jeweils $0 \leq o_i \leq n_o$.

Diese Gleichungen sind im oberen Index von $\mathcal{A}_{2, \varepsilon m}$ bzw. \mathbf{W}_r entkoppelt, die Bestimmung der m „Scheiben“ des reduzierten Z2-Tensors kann also separat erfolgen. Zur Auflösung des Systems (4.71), (4.72) können diese Scheiben vektorisiert, das heißt, als Vektoren der Dimension $\binom{m^2}{1}$ bzw. $\binom{2(n_o+1)p^2}{1}$ geschrieben werden. Mit einer geeignet definierten Koppelmatrix der Dimensionen $\binom{m^2}{2(n_o+1)p^2}$, die die Kontraktionen der linken Seite von (4.71), (4.72) parametrisiert, lässt sich ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Tensorelemente formulieren.

Für eine Anzahl von

$$n_o \geq \left\lceil \frac{m^2}{2p^2} \right\rceil - 1 \quad (4.73)$$

geeignet gewählten Stützstellen weist die Koppelmatrix den vollen Rang m^2 auf; das System ist damit (über-) bestimmt und lässt sich als Optimierungsproblem lösen.

4.5.3 Anwendung

Auch dieses Verfahren ist in der hier vorgestellten Form implementiert.

Anwendungen auf die eindimensionale Wärmeleitung und auf ein eindimensionales mechanisches Feder-Masse-System zeigen, dass die niedrigsten Ordnungen der Übertragungsfunktion durch das reduzierte System sehr gut wiedergegeben werden. Im Zeitbereich erweisen sich jedoch bereits die linearen Terme des reduzierten Systems oft als instabil. Eine Stabilisierung durch Polspiegelung, wie in (Led00) vorgeschlagen, ist noch nicht umgesetzt.

4.6 Bewertung des reduzierten Systems

Um die Leistungsfähigkeit eines Reduktionsverfahrens beurteilen zu können — und damit auch einen Vergleich verschiedener Verfahren zu ermöglichen —, werden objektive Kriterien der Reduktionsgüte benötigt. Hier sollen verschiedene Kriterien vorgestellt werden, um eine sinnvolle Bewertung sowohl im stationären Fall als auch im dynamischen Fall zu ermöglichen.

Die Gütekriterien, im Folgenden als *Reduktionsfehler* bezeichnet, beruhen im Allgemeinen auf dem Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}$, gegeben nach (3.25) durch

$$\vec{e}_{\vec{y}} = \vec{y}_m - \vec{y}_n, \quad (4.74)$$

der noch geeignet normiert wird. Der Knackpunkt liegt dabei im Auffinden einer geeigneten Normierung. Oft ist es hilfreich, zur Beurteilung und insbesondere zum Vergleich von Reduktionsverfahren auch den originalen, nicht normierten Gleichungsfehler $\vec{e}_{\vec{y}}$ zu Rate zu ziehen.

Insbesondere der Vergleich von reduzierten Systemen, die auf unterschiedlichen Arbeitspunkten beruhen, erweist sich als problematisch. Solche Systeme beruhen auf vollen Systemen, die im Idealfall äquivalent zueinander sind, die jedoch aufgrund unterschiedlicher Bezugspunkte der Reihenentwicklung eine unterschiedliche Aufteilung der Gesamtlösung in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufweisen. Oft weisen die betrachteten Systeme einen (physikalisch oder technisch motivierten) natürlichen Arbeitspunkt auf, von dem aus natürliche Koordinaten \vec{y} gemessen werden. Eine Arbeitspunktverschiebung in den stationären Arbeitspunkt $\vec{y}_{st,ld}$ liefert dann die neuen Relativkoordinaten $\vec{y}_{ld} \equiv \vec{y} - \vec{y}_{st,ld}$ (vergleiche hierzu Abschnitt (4.1.4) und insbesondere Gleichung (4.24)). Ein solcher natürlicher

Arbeitspunkt mit natürlichen Koordinaten ist beispielsweise bei der Simulation der Wärmeausbreitung unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung mit der absoluten Temperaturskala bezüglich des absoluten Temperaturnullpunktes gegeben.

Analog zum Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}$ lassen sich ähnliche Gütekriterien auch für den vollen Gleichungsfehler der Zustandsgleichung $\vec{e}_{\vec{x}_n}$ definieren. In dieser Arbeit beschränken wir uns de jure auf den Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung, wobei meist jedoch durch eine als Projektor gewählte Ausgangsmatrix C_n de facto der Fehler einer Auswahl von Zustandsgrößen betrachtet wird.

4.6.1 Stationärer Reduktionsfehler

Im stationären Fall kann davon ausgegangen werden, dass für den linearen Anteil stets stationäre Genauigkeit erzielt werden kann (beim Guyan-Verfahren zumindest für die Master-Freiheitsgrade). Ein eventuell auftretender Fehler ist stets dem nichtlinearen Anteil zuzuschreiben. Die Berücksichtigung nichtlinearer Anteile im reduzierten System ist daher gerechtfertigt, wenn diese Anteile eine Verbesserung im Vergleich zum linearisierten Systemverhalten darstellen. Das heißt, das Reduktionsverfahren ist als „gut“ zu bewerten, wenn der Betrag des Gleichungsfehlers der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y},st}$ klein ist im Vergleich zum Betrag des nichtlinearen Beitrags $\vec{y}_{n,st,nl} - \vec{y}_{n,st,lin}$ des vollen Systems. Damit ist als *stationärer Reduktionsfehler* \vec{r}_{st} der Ausdruck

$$\vec{r}_{st} = \frac{|\vec{e}_{\vec{y},st}|}{|\vec{y}_{n,st,nl} - \vec{y}_{n,st,lin}|} = \frac{|\vec{y}_{m,st,nl} - \vec{y}_{n,st,nl}|}{|\vec{y}_{n,st,nl} - \vec{y}_{n,st,lin}|} \quad (4.75)$$

ein geeignetes Maß. Das Reduktionsergebnis ist dann für $r_{st}^i \ll 1$, $1 \leq i \leq q$, als „gut“ zu bezeichnen, ansonsten ist die Berücksichtigung der nichtlinearen Anteile fragwürdig.

Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass der Einfluss der nichtlinearen Systemanteile unabhängig von den linearen Anteilen beurteilt werden kann.

Der Nachteil des Vorgehens ist die Abhängigkeit vom gewählten Arbeitspunkt: Durch eine Arbeitspunktverschiebung werden die linearen und nichtlinearen Anteile des vollen Systems bei unveränderter Gesamtlösung verschoben, was direkt in die Normierung des Reduktionsfehlers einfließt. Dies erschwert den Vergleich von Reduktionsverfahren, die auf unterschiedlichen Arbeitspunkten basieren. In diesem Fall ist gegebenenfalls eine vom Arbeitspunkt unabhängige Normierung vorzuziehen (erläutert beim dynamischen Reduktionsfehler im nächsten Abschnitt).

4.6.2 Dynamischer Reduktionsfehler

Im dynamischen Fall ist eine Trennung der Beiträge der linearen und nichtlinearen Anteile des Systems zum Gesamtfehler im Allgemeinen nicht möglich. Oft dominieren in einem Bereich eines transienten Vorgangs die Fehler des linearen Anteils, in einem anderen Bereich die zusätzlichen Abweichungen durch die Nichtlinearitäten. Dadurch ist eine Normierung

des Gleichungsfehlers der Ausgangsgleichung mit dem nichtlinearen Beitrag des vollen Systems nicht mehr ohne weiteres aussagekräftig, es sind gegebenenfalls geeignetere Größen zur Normierung zu wählen. Hierfür bieten sich mehrere Möglichkeiten an.

Zunächst kann eine künstliche Normierung durch einen (möglicherweise auch zeitabhängigen) Normierungsvektor oder auch Normierungsskalar erfolgen, der die Größenordnung des tolerierbaren Fehlers festlegt. Dieses Vorgehen hat in der Praxis den Vorteil, dass der Normierungsvektor anwendungsorientiert gewählt werden kann, wodurch direkt Aussagen über die Einsatzmöglichkeiten eines Reduktionsverfahrens für eine gewünschte Anwendung erzielt werden können. Der Nachteil dieses Vorgehens liegt in der Willkürlichkeit der Wahl des Normierungsvektors.

Eine Normierung mit dem Betrag des absoluten, physikalisch bzw. technisch bedeutsamen Ausgangs im ursprünglichen Arbeitspunkt \vec{y} ist zwar ein natürliches Vorgehen, jedoch ist der anwendungsrelevante Bereich des Ausgangsvektors im Vergleich zu seiner Ausdehnung oft weit von diesem Arbeitspunkt entfernt, so dass auftretende Fehler gegebenenfalls stark unterdrückt werden. Als Beispiel sei einmal mehr die Simulation der Wärmeausbreitung angeführt: Unter Berücksichtigung von Wärmestrahlung ist der absolute Temperaturnullpunkt $T \equiv 0$ ein physikalisch gut motivierter Arbeitspunkt. Viele Fragestellungen treten jedoch in einem speziellen Temperaturbereich, beispielsweise $T \sim 800$ K bis $T \sim 1.200$ K auf, so dass die Fehler bei Normierung mit der absoluten Temperatur entsprechend unterdrückt werden.

Eine Normierung mit dem Betrag des relativen Ausgangs \vec{y}_{ld} bezüglich eines Arbeitspunktes $\vec{y}_{st,ld}$ ist wiederum abhängig vom jeweiligen Arbeitspunkt, was die bereits angeführten Schwierigkeiten für den Vergleich von Systemen verschiedener Arbeitspunkte nach sich zieht.

Was letztenendes anzustreben, jedoch im Allgemeinfall kaum zu definieren ist, ist die Normierung durch den „in der Simulation zu beschreibenden Effekt“. Eine solche Normierung ist unabhängig vom Arbeitspunkt und quantitativ aussagekräftig, jedoch abhängig von der betrachteten Problemstellung sowie der Anregung $\vec{u}(t)$. Für spezielle Klassen von Anregungen lassen sich aber auf der Basis dieser allgemeinen Forderung durchaus vernünftige Ansätze für den Reduktionsfehler finden.

Beispielsweise wird bei den Anwendungen der Reduktionsverfahren in Kapitel (6) oft die Sprungantwort von Systemen betrachtet, das heißt, der Übergang von Systemen von einem stationären Zustand in einen anderen durch einen plötzlichen Sprung des Eingangsvektors. Das Auffinden des stationären Anfangszustands des Ausgangsvektors $\vec{y}_n(t = t_0)$ kann unabhängig von der Simulation des transienten Vorgangs $\vec{y}_n(t)$ erfolgen. Der „in der Simulation zu beschreibende Effekt“ ist damit die Abweichung des Ausgangsvektors vom Anfangszustand $\vec{y}_n(t) - \vec{y}_n(t = t_0)$.

Sei für ein System mit stationären Randbedingungen die Sprungantwort auf das Eingangs-

signal

$$\vec{u}(t) \equiv \begin{pmatrix} \vec{u}_{\text{ext}}(t) \\ u_{\text{vir}}(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{u}_{\text{ext},1} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } t \leq t_0 \\ \begin{pmatrix} \vec{u}_{\text{ext},2} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } t > t_0 \end{cases} \quad (4.76)$$

betrachtet, für ein System ohne virtuelle Last die Sprungantwort auf das Eingangssignal

$$\vec{u}(t) = \begin{cases} \vec{u}_{\text{ext},1} & \text{für } t \leq t_0 \\ \vec{u}_{\text{ext},2} & \text{für } t > t_0 \end{cases} \quad (4.77)$$

Meist ist $\vec{u}_{\text{ext},1} = \vec{0}_{p-1}$ und $\vec{u}_{\text{ext},2} = \vec{1}_{p-1}$; in diesem Fall wird im Folgenden von einem *Standardsprung* zum Zeitpunkt t_0 gesprochen.

Damit wird der *dynamische Reduktionsfehler* $\vec{r}_{\text{dy}}(t)$ definiert als

$$\vec{r}_{\text{dy}}(t) = \frac{|\vec{e}_{\vec{y}}(t)|}{|\vec{y}_{\text{n}}(t) - \vec{y}_{\text{n}}(t=t_0)|} = \frac{|\vec{y}_{\text{m}}(t) - \vec{y}_{\text{n}}(t)|}{|\vec{y}_{\text{n}}(t) - \vec{y}_{\text{n}}(t=t_0)|} \quad (4.78)$$

Das Reduktionsergebnis ist wiederum für $r_{\text{dy}}^i(t) \ll 1$, $1 \leq i \leq q$, als „gut“ zu bezeichnen. Es sei hier noch einmal hervorgehoben, dass diese Definition des Reduktionsfehlers unabhängig vom zugrunde liegenden Arbeitspunkt ist!

Nullstellen im Zähler bzw. Nenner von (4.78) verursachen scharfe Minima bzw. Maxima im Verlauf des Reduktionsfehlers. Diese Artefakte können bei der Beurteilung des Reduktionsergebnisses ignoriert werden.

5 Tensorielle Parametrisierung der Nichtlinearitäten

Im Allgemeinen liegt die Zustandsgleichung eines nichtlinearen Systems nicht in der oben angegebenen speziellen Normalform (4.21) vor, so dass für eine darauf basierende Ordnungsreduktion zunächst eine tensorielle Parametrisierung insbesondere der Nichtlinearitäten vorzunehmen ist, das bedeutet, eine Identifikation der NL-Tensoren aus einer Reihe von Eingangsdaten.

Beispielsweise ist im Fall von Finite-Elemente Systemen anzumerken, dass kommerzielle Programmpakete zwar üblicherweise die Lösung des betrachteten Problems angeben, nicht jedoch die zur Lösung verwendeten Gleichungssysteme. Eine Ausnahme ist hier das Programmpaket PERMAS der INTES GmbH (INT), das Module zur Ausgabe linearisierter Systeme bereitstellt. Alle in dieser Arbeit präsentierten Beispiele zur Ordnungsreduktion nichtlinearer Finite-Elemente Systeme basieren deshalb auf PERMAS-Simulationen, die einem der hier vorgestellten Parametrisierungsverfahren unterzogen wurden.

In diesem Kapitel werden einige Verfahren vorgestellt, die die gesuchten Größen aus einer Serie stationärer Lösungen mit dazugehörigen Tangenten- oder Sekantenzustandsmatrizen identifizieren. In Abschnitt (5.1) werden zunächst die Rahmenbedingungen der Identifikation erläutert. Danach werden in Abschnitt (5.2) Methoden vorgestellt, die eine Bestimmung allgemeiner NL-Tensoren bei Beachtung verschiedener Symmetriebedingungen erlauben; dabei wird stark auf Anhang (D) zurückgegriffen, wo die Grundlagen dieser Methoden in verallgemeinerter Form erarbeitet werden. Der Aufwand zur Bestimmung der NL-Tensoren mit diesen Verfahren ist nur für Systeme mit kleiner Bandbreite und damit im Wesentlichen nur für eindimensionale Modelle tragbar. Deshalb wird in Abschnitt (5.3) eine Parametrisierung einer speziellen, jedoch für viele Anwendungen ausreichenden Klasse von Z_s -Tensoren vorgestellt, die eine Identifikation auch bei großer Bandbreite ermöglicht.

5.1 Parametrisierung anhand stationärer Lösungen und dazugehöriger Tangenten- oder Sekantenzustandsmatrizen

Hier wird von dem Fall ausgegangen, dass alle Z_s -Tensoren \mathcal{A}_s bis zur maximalen Stufe s_{\max} , also $2 \leq s \leq s_{\max}$, sowie der BL-Tensor \mathcal{B} zu bestimmen sind. Es sind auch Fälle denkbar, in denen aufgrund einer Symmetrie im zu beschreibenden System bestimmte Tensoren mit $s < s_{\max}$ verschwinden müssen; dann vereinfacht sich die Parametrisierung entsprechend.

Die Tensoren werden mit Hilfe einer Reihe von $n_{\text{mod}} + 1$ stationären Lösungen $(\vec{u}_{\text{st},l}, \vec{x}_{\text{st},l})$ und den zugehörigen Tangentenzustandsmatrizen $\tilde{\mathbf{A}}_1$ oder Sekantenzustandsmatrizen $\bar{\mathbf{A}}_1$ (vergleiche Abschnitte (4.1.4.1) und (4.1.4.2)), $0 \leq l \leq n_{\text{mod}}$, identifiziert. Alle Daten beziehen

5 TENSORIELLE PARAMETRISIERUNG DER NICHTLINEARITÄTEN

sich dabei nach (4.14) auf den selben stationären Arbeitspunkt $(\vec{u}_{\text{wk, st}}, \vec{x}_{\text{wk, st}}) = (\vec{0}_p, \vec{0}_n)$. Die Zusammenfassung zusammengehöriger Paare von stationären Lösungen und Matrizen wird im Folgenden als *Parametrisierungsdaten* bezeichnet.

Ausgangspunkt der Identifikation sind die Gleichungen (4.37) für die Tangenzzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$,

$$\tilde{A}_j^i = A_j^i + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{(s-1)!} \mathcal{A}_{s; (j_1 \dots j_{s-1} j)}^i x_{\text{st, ld}}^{j_1} \cdots x_{\text{st, ld}}^{j_{s-1}} + \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st, ld}}^k, \quad (5.1)$$

oder (4.40) für die Sekantenzustandsmatrix $\bar{\mathbf{A}}$,

$$\bar{A}_j^i = A_j^i + \sum_{s=2}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \mathcal{A}_{s; (j_1 \dots j_{s-1} j)}^i x_{\text{st, ld}}^{j_1} \cdots x_{\text{st, ld}}^{j_{s-1}} + \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st, ld}}^k, \quad (5.2)$$

die ihrer Bedeutung für die Identifikation wegen hier noch einmal wiedergegeben sind. Die Matrizen sind also im Wesentlichen als Summe über Kontraktionen der NL-Tensoren gegeben.

Welche Form letztendlich zu wählen ist, hängt davon ab, ob als Parametrisierungsdaten Tangenten- oder Sekantenzustandsmatrizen vorliegen: PERMAS beispielsweise liefert für mechanische Simulationen Tangenzzustandsmatrizen, im Fall von Simulationen der Wärmeausbreitung jedoch Sekantenzustandsmatrizen.

Anstatt die Ausdrücke (5.1) und (5.2) direkt für die Identifikation zu verwenden, werden Beziehungen für die n_{mod} *Differenzmatrizen* $\tilde{\mathbf{A}}_1 - \tilde{\mathbf{A}}_0$ bzw. $\bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_0$ aufgestellt, aus denen die linearen Systemanteile entfallen. Dadurch wird die lineare Zustandsmatrix \mathbf{A} nicht Gegenstand der Identifikation (und dadurch gegebenenfalls Gegenstand einer Ausgleichsrechnung), sondern kann separat im Sinne einer Nebenbedingung vorgegeben werden. Im Fall der Identifikation aus Tangenzzustandsmatrizen kann als Zustandsmatrix \mathbf{A} unmittelbar die Bezugs-Tangenzzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_0$ verwendet werden; für $(\vec{u}_{\text{st, 0}}, \vec{x}_{\text{st, 0}}) \neq (\vec{0}_p, \vec{0}_n)$ ist dann lediglich die Einführung geeigneter Relativkoordinaten vorzunehmen. Im Fall einer Identifikation aus Sekantenzustandsmatrizen muss für $(\vec{u}_{\text{st, 0}}, \vec{x}_{\text{st, 0}}) \neq (\vec{0}_p, \vec{0}_n)$ nach der Bestimmung der Tensoren die Zustandsmatrix durch Auflösen von Gleichung (5.2) nach \mathbf{A} erfolgen.

Bei den hier vorgestellten Verfahren wird davon ausgegangen, dass die zur Identifikation verwendeten Differenzmatrizen spärlich besetzt sind. Diese Besetzungsstruktur wird mit Hilfe der *lokalen (Zeilen-) Bandbreite* $n_{\text{band}, i}$, $1 \leq i \leq n$, beschrieben, die angibt, wie viele Matrixelemente \tilde{j}_i in Zeile i der Differenzmatrizen besetzt sind. Die *globale (Zeilen-) Bandbreite* wird für Abschätzungen als $n_{\text{band}} = \max_{i=1}^n (n_{\text{band}, i})$ eingeführt. Außerdem wird die Anzahl der von Null verschiedenen Matrixelemente als *Besetzung* n_{elem} bezeichnet, wobei $n_{\text{elem}} = \sum_{i=1}^n n_{\text{band}, i} \leq n n_{\text{band}}$ gilt. Die Größen $n_{\text{band}, i}$ und n_{band} sind strenggenommen im Sinne einer Vereinigung der Besetzungsstruktur aller Differenzmatrizen zu verstehen, meist

reicht jedoch die Betrachtung einer Differenzmatrix aus. Es sei hier angemerkt, dass in der numerischen Mathematik auch andere Definitionen der Bandbreite verbreitet sind; in dieser Arbeit wird ausschließlich auf die hier eingeführte Definition zurückgegriffen.

5.2 Bestimmung vollständiger Tensoren

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie aus den Differenzgleichungen ein Modell für die gesuchten NL-Tensoren identifiziert werden kann. Dafür sind abhängig von den vorliegenden Parametrisierungsdaten und den Symmetrieforderungen, die an die Z_s -Tensoren gestellt werden, verschiedene Varianten denkbar, die im Folgenden kurz diskutiert werden sollen. Die mathematisch-technischen Aspekte dieser Identifikation wurden in Anhang (D) verlagert.

Die Besetzungsstruktur der Differenzmatrizen wird dabei ausgenutzt, um die Anzahl der zu bestimmenden Parameter drastisch zu reduzieren. Damit verringert sich einerseits der Rechenaufwand, also die Anzahl und die Ordnungen der zu lösenden Gleichungssysteme, sowie die Anzahl $n_{\text{mod}} + 1$ der zur Identifikation benötigten Parametrisierungsdaten. Andererseits erhöht sich zusätzlich die Rechengenauigkeit durch die Verringerung der Ordnung der zu lösenden Gleichungssysteme.

Die Besetzungsstruktur der Zeilen der Differenzmatrizen wird auf die Besetzungsstruktur aller unteren Indizes aller Z_s -Tensoren übertragen. Für eine Abschätzung des Aufwandes der Identifikation werden neben der Anzahl der zu bestimmenden Parameter insbesondere die maximale Anzahl n_{equ} und die maximale Ordnung n_{ord} der zu lösenden Gleichungssysteme sowie die Anzahl n_{mod} der für eine eindeutige Identifikation benötigten Parametrisierungsdaten angegeben.

5.2.1 Identifikation aus Tangenzustandsmatrizen

Bei diesen Verfahren wird Gleichung (5.1) zur Identifikation verwendet. Diese Gleichung ist im oberen Index i entkoppelt, im unteren Index j jedoch durch die Symmetrisierung gekoppelt.

Die Tensoren können mit Hilfe der Methoden aus Anhang (D.4) bestimmt werden. Für jede Zeile i sind die für die besetzten Spalten \tilde{j}_i relevanten Anteile der Z_s -Tensoren eine Anzahl von $c_{S,s}^{\text{band},i}$ unabhängigen Parametern zu bestimmen (vergleiche (D.22), (D.23)), für den BL-Tensor eine Anzahl von p Parametern. Damit ergeben sich für die maximale Anzahl n_{equ} und maximale Ordnung n_{ord} der durchzuführenden Matrixinversionen sowie für die Anzahl n_{mod} der benötigten Parametrisierungsdaten die Abschätzungen

$$n_{\text{equ}} = n, \quad (5.3)$$

$$n_{\text{ord}} \leq \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} c_{S,s}^{\text{band}} + p, \quad (5.4)$$

$$n_{\text{mod}} \geq \left\lceil \frac{1}{n_{\text{band}}} \left(\sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} c_{\text{S},s}^{n_{\text{band}}} + p \right) \right\rceil . \quad (5.5)$$

5.2.2 Identifikation aus Sekantenzustandsmatrizen

Bei diesen Verfahren wird Gleichung (5.2) zur Identifikation verwendet. Diese Gleichung ist in den Indizes i und j entkoppelt; jedoch ist die Besetzungsstruktur in jeder Zeile der Differenzmatrix dieselbe, so dass durch Aufstellung der relevanten Gleichungssysteme jeweils für eine komplette Zeile Mehrfachinversionen ein und derselben Matrix vermieden werden können.

Berücksichtigt man die Symmetriebedingungen der Z_s -Tensoren, so können die gesuchten Tensoren nach Anhang (D.4) bestimmt werden. Für jede Zeile i und jede besetzte Spalte \tilde{j}_i sind für die Z_s -Tensoren eine Anzahl von $c_{\text{S},s-1}^{n_{\text{band},i}}$ unabhängigen Parameter zu bestimmen (vergleiche (D.22), (D.23)), für den BL-Tensor eine Anzahl von p Parametern. Damit ergeben sich für die maximale Anzahl n_{equ} und die maximale Ordnung n_{ord} der durchzuführenden Matrixinversionen sowie für die Anzahl n_{mod} der benötigten Parametrisierungsdaten die Abschätzungen

$$n_{\text{equ}} = n , \quad (5.6)$$

$$n_{\text{ord}} \leq \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} c_{\text{S},s-1}^{n_{\text{band}}} + p , \quad (5.7)$$

$$n_{\text{mod}} \geq \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} c_{\text{S},s-1}^{n_{\text{band}}} + p . \quad (5.8)$$

Mit Hilfe der Inversen für Zeile i sind dann jeweils $n_{\text{band},i} \leq n_{\text{band}}$ Parametervektoren zu bestimmen.

Unter Vernachlässigung der Symmetriebedingungen der Z_s -Tensoren erhält man nach Anhang (D.2) $n_{\text{equ}} = n$, $n_{\text{ord}} \leq \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} n_{\text{band}}^{s-1} + p$, $n_{\text{mod}} \geq \sum_{s=2}^{s_{\text{max}}} n_{\text{band}}^{s-1} + p$.

Finite-Elemente Matrizen sind im Allgemeinen symmetrisch. Auch diese Symmetrie kann bei der Identifikation berücksichtigt werden.

5.3 Bestimmung vereinfachter Z_s -Tensoren

Auch unter Berücksichtigung der Besetzungsstruktur der Differenzmatrizen ist der Aufwand zur Identifikation vollständiger Tensoren für Systeme mit hoher Bandbreite, im Allgemeinen für Modelle zwei- und dreidimensionaler Probleme, nicht mehr tragbar. Deshalb wird hier ein einfacher *Matrizenansatz* der Z_s -Tensoren vorgestellt, bei dem unter Annahme einer sehr einfachen Besetzungsstruktur die Identifikation auch für große Bandbreiten mit einer begrenzten Anzahl von Parametrisierungsdaten durchführbar bleibt.

In diesem Abschnitt wird die Einsteinsche Summenkonvention nicht verwendet, alle Summen werden also explizit ausgeschrieben!

5.3.1 Matrizenansatz

Der Matrizenansatz macht Annahmen über die funktionale Abhängigkeit von Matrixelementen einer das nichtlineare Systemverhalten charakterisierenden Matrix. Die natürlichste Wahl dieser Matrix ist die Tangenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$. Allerdings zeigt sich, dass die Verwendung der Sekantenzustandsmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ eine wesentlich einfachere Darstellung erlaubt, da die Matrixelemente der Sekantenzustandsmatrix aufgrund der fehlenden Symmetrisierung in einer einfacheren Weise von den Elementen der Z_s -Tensoren abhängen, als die Matrixelemente der Tangenzustandsmatrix (siehe (5.2) und (5.1)).

Der Matrizenansatz basiert auf der Annahme, dass ein die Zustände x^i und x^j koppelndes Matrixelement \bar{A}_j^i ausschließlich von ebendiesen Zuständen abhängt. Der durch die Z_s -Tensoren beschriebene Beitrag zur Sekantenzustandsmatrix $\Delta \bar{A}_j^i$ kann deshalb im Allgemeinen als $\Delta \bar{A}_j^i + \sum_{s=1}^{s_{\max}} \frac{1}{s!} \sum_{t=0}^{s-1} (x_{\text{st}, \text{ld}}^i)^t S_{s,t;j}^i (x_{\text{st}, \text{ld}}^j)^{s-t-1}$ geschrieben werden (vergleiche (5.12); der Faktor $1/s!$ ist Konvention). Die Koeffizienten $S_{s,t;j}^i$, $0 \leq t \leq s-1$, $0 \leq s \leq s_{\max}$, werden nun zu einer Serie von Z_s/t -Matrizen $\mathbf{S}_{s,t}$ zusammengefasst, die das nichtlineare Verhalten des Systems parametrisieren. Die i - j -Komponente der Sekantenzustandsmatrix wird ausschließlich durch die i - j -Komponenten der Z_s/t -Matrizen beeinflusst; die Besetzungsstruktur der Z_s/t -Matrizen ist damit im Wesentlichen durch die Besetzungsstruktur der Sekantenzustandsmatrix gegeben.

Die Z_s -Tensoren sind unter diesen Voraussetzungen durch

$$\mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_{s-1} j}^i = \sum_{t=0}^{s-1} \underbrace{\delta_{j_1}^i \dots \delta_{j_t}^i}_{t \text{ mal}} \underbrace{\delta_{j_{t+1}}^j \dots \delta_{j_{s-1}}^j}_{s-t-1 \text{ mal}} S_{s,t;j}^i \quad (5.9)$$

gegeben. Ein Z_s -Tensor wird also durch eine Anzahl von s Z_s/t -Matrizen $\mathbf{S}_{s,t}$, $0 \leq t \leq s-1$, parametrisiert, was die Anzahl der freien Parameter enorm reduziert.

Diese Parametrisierung wird in dieser Arbeit als Spezialfall der allgemeinen Zustandsgleichung (4.21) aufgefasst. Durch einen Bezug auf (4.21) wird eine eventuelle Parametrisierung aller oder einiger Tensoren oder auch nur Tensoranteile durch den Matrizenansatz mit abgedeckt; die Einführung einer neuen, um den Matrizenansatz erweiterten Normalform ist deshalb nicht erforderlich.

5.3.2 Zustandsgleichung, Tangenten- und Sekantenzustandsmatrix

Mit der Parametrisierung (5.9) ergibt sich nach (4.21) für einen Z_s -Tensor der Beitrag $\Delta \vec{f}_{\text{nl}}$ zur Zustandsfunktion zu

$$\Delta f_{\text{nl}}^i = \frac{1}{s!} \sum_{t=0}^{s-1} (x^i)^t \sum_{j=1}^n S_{s,t;j}^i (x^j)^{s-t} . \quad (5.10)$$

Parametrisiert man alle Z_s -Tensoren auf diese Weise, ergibt sich in einem stationären Arbeitspunkt $(\vec{u}_{\text{wk}}, \vec{x}_{\text{wk}}) = (\vec{0}_p, \vec{0}_n)$ aus (5.1) oder auch aus $\partial f^i / \partial x^j |_{x^j = x_{\text{st,ld}}^j}$ die Tangentenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j^i &= A_j^i + \sum_{s=1}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{s!} \sum_{t=0}^{s-1} \left\{ (s-t) (x_{\text{st,ld}}^i)^t S_{s,t;j}^i (x_{\text{st,ld}}^k)^{s-t-1} \right. \\ &\quad \left. + \delta_j^i t (x_{\text{st,ld}}^i)^{t-1} \sum_{k=1}^n S_{s,t;k}^i (x_{\text{st,ld}}^k)^{s-t} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st,ld}}^k , \end{aligned} \quad (5.11)$$

aus (5.2) oder auch durch Ausklammern der letzten Kontraktion aus f^i die Sekantenzustandsmatrix zu

$$\bar{A}_j^i = A_j^i + \sum_{s=1}^{s_{\text{max}}} \frac{1}{s!} \sum_{t=0}^{s-1} (x_{\text{st,ld}}^i)^t S_{s,t;j}^i (x_{\text{st,ld}}^j)^{s-t-1} + \sum_{k=1}^p \mathcal{B}_{jk}^i u_{\text{st,ld}}^k . \quad (5.12)$$

Diese Beziehungen stellen die Grundlage für die Identifikation der Z_s/t -Matrizen dar.

5.3.3 Projektive Ordnungsreduktion

Der Ausdruck (4.50) für die projektive Ordnungsreduktion lässt sich mit (5.9) auf den Fall des Matrizenansatz spezialisieren. Es folgt der Ausdruck

$$\mathcal{A}_{s,m;j_1 \dots j_{s-1} j}^i = \sum_{t=0}^{s-1} \underbrace{V_{j_1}^i \dots V_{j_t}^i}_{t \text{ mal}} \underbrace{V_{j_{t+1}}^j \dots V_{j_{s-1}}^j}_{s-t-1 \text{ mal}} \sum_{\tilde{i}=1}^n \sum_{\tilde{j}=1}^n \tilde{R}_{\tilde{i}}^i S_{s,t;\tilde{j}}^i V_{\tilde{j}}^{\tilde{j}} \quad (5.13)$$

für den reduzierten Z_s -Tensor $\mathcal{A}_{s,m}$.

Man erkennt, dass aufgrund der im Normalfall stark besetzten Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix trotz der äußerst schwachen Besetzung des vollen Z_s -Tensors der reduzierte Z_s -Tensor im Allgemeinen praktisch vollbesetzt ist!

5.3.4 Identifikation der Z_s/t -Matrizen aus Sekantenzustandsmatrizen

Insbesondere Gleichung (5.12) eignet sich für die Identifikation der Z_s/t -Matrizen, da der Ausdruck für die Sekantenzustandsmatrix im oberen und unteren Index vollständig entkoppelt ist; damit kann die Identifikation für jedes Matrixelement separat erfolgen. Die Anzahl n_{equ} der für die Identifikation zu lösenden Gleichungssysteme ist also durch die Besetzung n_{elem} der Differenzmatrizen gegeben. Die Ordnung n_{ord} der zu lösenden Gleichungssysteme sowie die Anzahl n_{mod} der zur Lösung benötigten Parametrisierungsdaten skaliert jetzt Fall nicht mehr mit der Bandbreite n_{band} der Differenzmatrizen, sondern hängt nur noch von der Anzahl der in Betracht kommenden Z_s/t -Matrizen ab.

Bei einer Identifikation aus einer Serie stationärer Lösungen mit dazugehörigen Sekantenzustandsmatrizen aus Gleichung (5.12) — analog zur Identifikation vollständiger Tensoren — ist n_{mod} im Wesentlichen gleich der Anzahl der Z_s/t -Matrizen. Bei der Berücksichtigung aller Matrizen bis zur maximalen Stufe s_{max} erhält man die Ausdrücke

$$n_{\text{equ}} = n_{\text{elem}} \leq n n_{\text{band}} , \quad (5.14)$$

$$n_{\text{ord}} = \frac{1}{2} s_{\text{max}} (s_{\text{max}} + 1) + p , \quad (5.15)$$

$$n_{\text{mod}} \geq \frac{1}{2} s_{\text{max}} (s_{\text{max}} + 1) + p \quad (5.16)$$

für die den Identifikationsaufwand beschreibenden Größen.

Lassen sich bei dem betrachteten Problem die nichtlinearen Beiträge der Z_s -Tensoren unterschiedlicher Stufe voneinander trennen, so ist es bei der Bestimmung vereinfachter Tensoren praktikabel, auch die Identifikation der Z_s/t -Matrizen nach der Tensorstufe zu separieren. Dafür werden Serien spezieller Parametrisierungsdaten benötigt, die nur jeweils Nichtlinearitäten einer bestimmten Stufe berücksichtigen. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass eine eventuell unterschiedliche Besetzungsstruktur der Differenzmatrizen für unterschiedliche Tensorstufen bei der Identifikation berücksichtigt werden kann. Dies senkt einerseits den für die Identifikation benötigten Aufwand, andererseits werden die durch die Ausgleichsrechnung und den modellhaften Charakter des Matrixansatzes entstehenden künstlichen Einträge bei Tensoren „falscher“ Stufe vermieden. So kann beispielsweise bei der Simulation der Wärmeausbreitung unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten (Beschreibung durch Z_s -Tensoren der Stufen $s = 2$ und $s = 3$) und Wärmestrahlung (Beschreibung durch Z_s -Tensor der Stufe $s = 4$) die Besetzung der Z_s -Tensoren auf die jeweils relevanten Bereiche beschränkt werden.

5.3.5 Implementierung

Der Matrizenansatz (5.9) ist im Rahmen dieser Arbeit nicht in dieser Allgemeinheit implementiert. Für jede unterstützte Tensorstufe $2 \leq s \leq 4$ wird lediglich jeweils eine $Z_s/(s - 1)$ -Matrix $S_{s,s-1}$ berücksichtigt. Trotz dieses sehr einfachen Ansatzes wurde bei der Identif-

5 TENSORIELLE PARAMETRISIERUNG DER NICHTLINEARITÄTEN

kation insbesondere im Fall von Simulationen der Wärmeausbreitung sehr gute Ergebnisse erzielt.

Durch diese weitere Vereinfachung wird einerseits der Aufwand zur Identifikation weiter verringert. Andererseits muss jedoch bei einer Arbeitspunktverschiebung teilweise wieder auf die Darstellung durch allgemeine Z_s -Tensoren zurückgegriffen werden. Dies erhöht wiederum den Aufwand der Verschiebung selbst sowie den Aufwand einer nachfolgenden Ordnungsreduktion und eventueller Vergleichsrechnungen zur Beurteilung der Reduktionsgüte — im Vergleich zu einer Darstellung ausschließlich mit Hilfe von Z_s/t -Matrizen, insbesondere bei hoher Tensorstufe s_{\max} und hoher Systemordnung n .

Für eine Anwendung des Matrizenansatz auf mechanische Problemstellungen sind aufgrund der besonderen Besetzungsstruktur der dort auftretenden Z_s -Tensoren Modifikationen in der Interpretation der Z_s/t -Matrizen notwendig (siehe hierzu Anhang (G)). Dies wird bei der vorliegenden Implementierung berücksichtigt.

6 Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel werden die vorgestellten Methoden der Modellreduktion auf mehrere Beispiele aus verschiedenen physikalischen-technischen Domänen angewendet.

Zunächst werden in den Abschnitten (6.1) und (6.2) zwei Beispiele der nichtlinearen Wärmeausbreitung vorgestellt, beide beruhen auf dreidimensionalen Finite-Elemente Simulationen. Während das erste Beispiel der Wärmeausbreitung in einem Stab eher akademischen Charakter hat, kann das zweite Beispiel der Wärmeausbreitung in einem Abgas-Sensor als Fallstudie einer industrierelevanten Fragestellung angesehen werden. Die Anwendung in Abschnitt (6.3) beruht auf einem eindimensionalen Finite-Differenzen Modell der Ausbreitung magnetischer Felder in Materie. Auch wenn das Modell zunächst akademisch anmutet, so kommt die Fragestellung doch auch aus der Industrie: Hier werden mehrere ähnliche Modelle in einer Netzwerksimulation gekoppelt, um die geometrische Struktur magnetischer Akteure (Stellglieder) nachzubilden. Auch dieser Anwendung liegt eine Diffusionsgleichung zugrunde, die sich jedoch im nichtlinearen Fall von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet. Schließlich wird in Abschnitt (6.4) ein mechanisches Anwendungsbeispiel diskutiert, also im Unterschied zu den vorangegangenen Beispielen ein System zweiter Ordnung. Das Modell beruht auf Finite-Elemente Simulationen mit Balkenelementen; es hat akademischen Charakter, demonstriert jedoch das reichhaltigere Verhalten schwingungsfähiger Systeme.

Aspekte der physikalisch-mathematischen Modellierung der in den Beispielen verwendeten physikalischen Domänen — Wärmeausbreitung, Elektromagnetismus und Mechanik — werden in den Anhängen (E), (F) und (G) eingehender betrachtet.

6.1 Wärmeausbreitung in dreidimensionalem Stab

In diesem Abschnitt werden einige der vorgestellten Verfahren der Modellreduktion auf die Wärmeausbreitung in einem dreidimensionalen Stab angewendet. Dieses Beispiel wurde in ähnlicher Form bereits in (MGB03) vorgestellt.

Als Nichtlinearitäten wird einerseits eine fiktive Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit angenommen, andererseits wird Wärmestrahlung in die Betrachtung mit einbezogen. Im Stabinneren wird die Wärme durch Wärmeleitung transportiert. Die Staboberfläche ist über ein Wärmebad sowie über konvektive und strahlende Oberflächen an unterschiedliche Umgebungstemperaturen angekoppelt. Damit enthält dieses Demonstrationsmodell alle wesentlichen Elemente, die bei Finite-Elemente Simulationen der Wärmeausbreitung physikalisch-technischer Problemstellungen standardmäßig mit einbezogen werden.

Anhand dieses eher akademischen Beispiels wird die Anwendbarkeit der projektiven Methoden der Ordnungsreduktion auf diese physikalische Problemklasse demonstriert, insbeson-

dere im Zusammenspiel mit kommerzieller Finite-Elemente Software. In diesem Zusammenhang wird speziell die Anwendbarkeit des Matrizenansatz zur Parametrisierung der Nichtlinearitäten nachgewiesen. Darüberhinaus werden die Arnoldi- und die Guyan-Variante der projektiven Ordnungsreduktion miteinander verglichen und ihre wesentlichen Eigenschaften herausgestellt.

6.1.1 Beschreibung des Modells

Die nichtlineare Wärmeausbreitung wird in Anhang (E) ausführlich behandelt; dort werden die Definitionen und physikalischen Zusammenhänge der hier nur kurz eingeführten Größen ausführlich erläutert.

Die geometrischen Eigenschaften und Randbedingungen des Modells werden in Abbildung (6.1) verdeutlicht. In Tabelle (6.1) sind die Zahlenwerte der Material- und Modellparameter zusammengestellt. Im Text wird auf die Angabe von Zahlenwerten weitgehend verzichtet.

6.1.1.1 Physikalisches Modell

Ein dreidimensionaler Stab der Länge l mit quadratischem Querschnitt der Breite b wird betrachtet. Der Stab besteht aus zwei Materialien (linke Hälfte / rechte Hälfte) mit unterschiedlichen Materialeigenschaften. Die Größenordnung der verwendeten Zahlenwerte orientiert sich dabei an den Eigenschaften von Stahl.

In der linken Hälfte variiert die Wärmeleitfähigkeit λ mit der Temperatur T , es liegt also eine Materialnichtlinearität vor. Das Materialverhalten wird durch den Ansatz $\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T$ parametrisiert. In der rechten Hälfte liegt keine Materialnichtlinearität vor, es gilt also $\lambda(T) \equiv \lambda_0$.

Die Wärmekapazität κ wird in beiden Hälften jeweils als konstant angenommen, $\kappa(T) \equiv \kappa_0$

Die Mantelflächen der linken Hälfte sind über Konvektion — modelliert durch einen linearen Wärmeübergang mit Übergangskoeffizient α — an Wärmebäder unterschiedlicher Temperatur T_0 gekoppelt. Die Mantelflächen der rechten Hälfte sind via Wärmestrahlung nichtlinear mit dem Strahlungskoeffizient ς an Wärmebäder unterschiedlicher Temperatur T_0 gekoppelt.

Die linke Stirnfläche ist direkt an ein Wärmebad einer Temperatur T_0 gekoppelt, die rechte Stirnfläche ist thermisch isoliert. Der Stab wird in der Mittelfläche, also der Trennfläche der beiden Materialien, durch die externe Wärmestromdichte $j_{\text{ext}, a}$, an seinem rechten Ende durch die externe Wärmestromdichte $j_{\text{ext}, b}$ geheizt.

6.1.1.2 Finite-Elemente Modell und volles System

Das physikalische Modell wurde mit der Finite-Elemente Software PERMAS modelliert und simuliert.

6.1 WÄRMEAUSBREITUNG IN DREIDIMENSIONALEM STAB

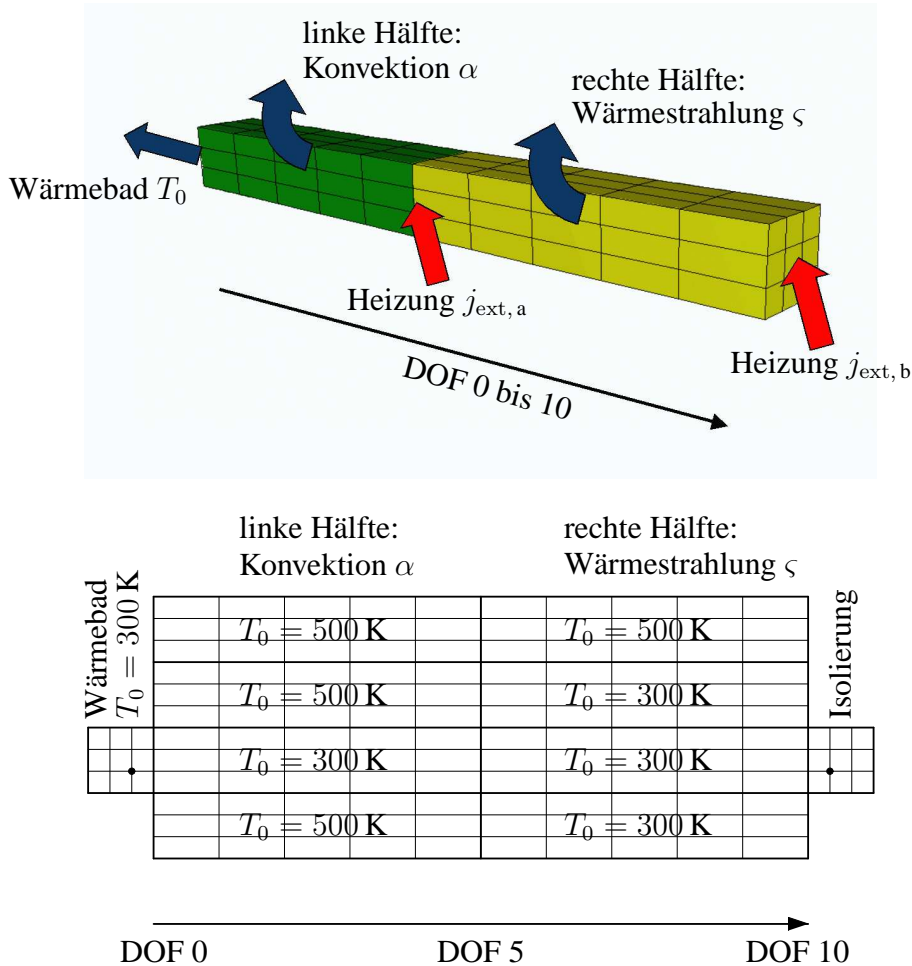


Abbildung 6.1: Finite-Elemente Modell und Abwicklung des Stabs

Finite-Elemente Diskretisierung (oberer Teil der Abbildung) und Abwicklung (unterer Teil der Abbildung) des Stabs. Die Nummerierung der Freiheitsgrade der Knoten derjenigen Achse, deren Temperaturverhalten in der Auswertung betrachtet wird, ist jeweils durch einen Pfeil angedeutet; die Durchstoßpunkte dieser Achse durch die Stirnflächen des Stabes sind in der Abwicklung durch Punkte markiert.

Die Mantelflächen der linken Hälfte sind durch Konvektion mit Übergangskoeffizient α , die der rechten Hälfte durch Wärmestrahlung mit Strahlungskoeffizient ζ an Wärmebäder unterschiedlicher Temperatur T_0 gekoppelt. Die linke Stirnfläche ist direkt an ein Wärmebad der Temperatur T_0 gekoppelt, die rechte Stirnfläche ist thermisch isoliert. An der Mittelfläche und an der rechten Stirnfläche wird der Stab durch die externen Wärmestromdichten $j_{\text{ext},a}$ und $j_{\text{ext},b}$ geheizt.

Die Temperaturen T_0 der Wärmebäder sind der Abwicklung zu entnehmen. Man beachte die transversale Asymmetrie durch die abweichende Temperatur des Wärmebads jeweils einer Mantelfläche pro Hälfte.

Tabelle 6.1: Materialeigenschaften und Modellparameter des Stabs

<i>Materialeigenschaft</i>		<i>Linke Hälfte</i>	<i>Rechte Hälfte</i>	<i>Einheit</i>
Wärmekapazität	κ_0	$5,00 \cdot 10^6$	$5,00 \cdot 10^6$	$\text{J} / \text{m}^3 \text{K}$
Wärmeleitfähigkeit	λ_0	40,00	50,00	$\text{W} / \text{m K}$
	λ_1	$+20,00 \cdot 10^{-3}$	–	$\text{W} / \text{m K}^2$
Übergangskoeffizient	α	50,00	–	$\text{W} / \text{m}^2 \text{K}$
Strahlungskoeffizient	ς	–	$56,70 \cdot 10^{-9}$	$\text{W} / \text{m}^2 \text{K}^4$

<i>Modellparameter</i>		<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>
Länge	l	$100,0 \cdot 10^{-3}$	m
Breite	b	$10,0 \cdot 10^{-3}$	m
externe Wärmestromdichte	$j_{\text{ext}, a}$	$480,0 \cdot 10^3$	W / m^2
	$j_{\text{ext}, b}$	$150,0 \cdot 10^3$	W / m^2
Knotenzahl	\tilde{n}	176	–
Ordnung volles System	n	160	–
Ordnung reduziertes System	m	5	–

Der quadratische Querschnitt ist in 3×3 Elemente und damit 4×4 Knoten, die Längsachse in 10 Elemente und damit 11 Knoten unterteilt. Das Finite-Elemente Modell besteht also aus 90 Elementen mit $\tilde{n} = 176$ Knoten. Die 16 an das Wärmebad gekoppelten Knoten der linken Stirnfläche sind durch die Temperatur des Wärmebads fest vorgegeben und deshalb nicht Teil des zu lösenden Gleichungssystems. Das volle System ist deshalb von Ordnung $n = 160$.

Die Temperatur des Stabes variiert hauptsächlich entlang der Längsachse, in Querrichtung wird kaum ein nennenswerter Temperaturgradient erzielt. Wir betrachten das Verhalten der Temperatur deshalb entlang einer Knotenachse in Längsrichtung im Stabinnern. Diese Knoten werden von links nach rechts durchnummeriert und im Folgenden als $\text{DOF} = 0$ (nicht Bestandteil des vollen Systems!) bis $\text{DOF} = 10$ bezeichnet.¹ Formal — zur Definition des Gleichungsfehlers der Ausgangsgleichung und der Reduktionsgüte — wird eine Ausgangsmatrix definiert, die die zehn Freiheitsgrade $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 10$ als Ausgangsvektor herausprojizieren.

Die Heizung am rechten Stabende ist als konstante Flächenlast modelliert, die Heizung in der Mittelfläche als konstante Knotenlast. Alle diese Lasten sind zu einer externen Single-Input Eingangsmatrix $\vec{B}_{n, \text{ext}}$ zusammengefasst, der durch den Single-Input Eingangsvektor

¹ Das Akronym DOF von „degree of freedom“ wird im Sinne eines Variablenamens für die Referenznummer eines Freiheitsgrades verwendet.

u_{ext} gesteuert wird. Die stationären Randbedingungen werden durch eine virtuelle Last $\vec{B}_{n, \text{vir}}$ beschrieben.

Auf der Grundlage dieses Ausgangsmodells wurden die stationären Zustände und Sekantenzustandsmatrizen für sechs verschiedenen Werte des externen Eingangs u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei virtuellem Eingang $u_{\text{vir}} \equiv 1$ ermittelt. Außerdem wurde für den Arbeitspunkt $T \equiv 0$, also für $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{vir}} = 0$, die Tangenzzustandsmatrix als Bezugs-Tangenzzustandsmatrix für die Parametrisierung bestimmt. Basierend auf diesen Parametrisierungsdaten wurden mit den Methoden aus Abschnitt (5.3) für das volle System die Z2- und Z4-Matrix des Matrizenansatz ermittelt.

6.1.2 Ordnungsreduktion

Auf dieses volle System werden verschiedene projektive Verfahren der Ordnungsreduktion angewendet. Das volle System der Ordnung $n = 160$ wird jeweils auf Ordnung $m = 5$ reduziert.

Zum einen wird das Arnoldi-Verfahren angewendet. Die stationären Randbedingungen werden durch einen Freiheitsgrad berücksichtigt, das dynamische Verhalten wird mittels vier Freiheitsgraden approximiert, wobei für den Eingang $u_{\text{ext}} = 1$ stationäre Genauigkeit im nichtlinearen Fall sichergestellt wird.

Zum anderen wird mit dem Guyan-Verfahren das Verhalten der Zustände $\text{DOF} = 1, 2, 5, 8$ und 10 ins reduzierte System übernommen. Dafür wird zur Berücksichtigung der stationären Randbedingungen zunächst eine Arbeitspunktverschiebung vom Zustand $T \equiv 0$ in den Zustand $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{vir}} = 1$ durchgeführt. Da die externe Eingangsmatrix $\vec{B}_{n, \text{ext}}$ an insgesamt $32 > 5$ Freiheitsgraden besetzt ist, ist trotz der Arbeitspunktverschiebung ein Verschwinden aller Slave-Anteile der Eingangsmatrix bei der niedrigen Zahl der Freiheitsgrade des reduzierten Systems nicht zu erreichen. Daher kann im reduzierten System nichtlineare stationäre Genauigkeit nicht erzielt werden, es wird deshalb das Verfahren zur Gewährleistung lediglich *linearer* stationärer Genauigkeit angewendet.

6.1.2.1 Stationärer Zustand

In Abbildung (6.2) werden für eine Reihe von externen Eingängen u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei konstantem virtuellem Eingang $u_{\text{vir}} = 1$ die stationären Zustände der Temperatur der verschiedenen Systeme miteinander verglichen. Im oberen Teil der Abbildung sind die Ergebnisse des Arnoldi-Verfahrens dargestellt, im unteren Teil der Abbildung die Ergebnisse des Guyan-Verfahrens. Aus der Abbildung wird der Einfluss der Nichtlinearitäten ersichtlich: Auf eine konstante Zunahme der Last zwischen den einzelnen Zuständen zu verschiedenen Eingängen „antwortet“ das System durch eine variable (im Wesentlichen aufgrund der Strahlungskühlung abnehmende) und damit nichtlineare Erwärmung des Stabes.

Zunächst erkennt man die gute Übereinstimmung des aus der Parametrisierung erhaltenen vollen Systems mit den zugrunde liegenden Finite-Elemente Simulationen. Durch die geeignete Wahl der virtuellen und externen Last $\vec{B}_{m, \text{vir}}$ und $\vec{B}_{m, \text{ext}}$ kann für $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$ eine exakte Übereinstimmung erhalten werden, für die dazwischenliegenden Werte erhält man leichte Abweichungen. Diese Aspekte sind unabhängig vom verwendeten Reduktionsverfahren. Zum Vergleich der durch die Parametrisierung hervorgerufenen Abweichungen mit den durch die Reduktion verursachten, sind die Finite-Elemente Ergebnisse in beide Diagramme eingezeichnet.

Bei dem mit dem Arnoldi-Verfahren reduzierten System erzielt man eine exzellente Übereinstimmung der stationären Zustände des reduzierten Systems mit dem vollen System. Für die externen Eingänge $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$ wird nach Konstruktion stationäre Genauigkeit erzielt. Für die dazwischenliegenden Werte sind die Abweichungen so klein, dass sie im Vergleich zum betrachteten Temperaturbereich kaum wahrnehmbar sind.

Bei dem mit dem Gyan-Verfahren reduzierten System sind die Abweichungen erwartungsgemäß größer. Für den hier zugrunde liegenden Arbeitspunkt $u_{\text{ext}} = 0$ wird klarerweise stationäre Genauigkeit erzielt, für die übrigen Werte erhält man Abweichungen, die jedoch klein sind im Vergleich zum nichtlinearen Anteil, so dass auch hier das Reduktionsergebnis als zufriedenstellend bezeichnet werden kann.

6.1.2.2 Sprungantwort

Zur Beurteilung der dynamischen Eigenschaften der betrachteten Reduktionsverfahren wird die Sprungantwort der verschiedenen Systeme ausgewertet. Die Anregung ist als Standardsprung zum Zeitpunkt $t_0 = 10 \text{ ms}$ gemäß Gleichung (4.76) gewählt. Die Größenordnung von t_0 ermöglicht eine logarithmische Darstellung der Zeitachse, in der auch die kürzesten für das Verhalten der betrachteten Gütekriterien charakteristischen Zeitskalen angemessen repräsentiert sind — erkennbar am konstanten Plateau der verschiedenen Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung in Abbildung (6.4) bei kleiner Zeit.

Qualitativer Vergleich der Sprungantwort

Um eine qualitative Vorstellung sowohl des Verlaufs der Sprungantwort als auch der Übereinstimmung der reduzierten mit den vollen Systemen zu erhalten, sind in Abbildung (6.3) die Sprungantworten der Temperatur des Stabes der verschiedenen Systeme jeweils für eine Auswahl von Freiheitsgraden — $\text{DOF} = 2, 5$ und 8 — grafisch dargestellt.

Abgebildet sind jeweils die Temperaturverläufe des vollen Systems und eines reduzierten Systems. Zur Verdeutlichung des nichtlinearen Effekts ist für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 8$ darüberhinaus das linearisierte Verhalten des Finite-Elemente Systems eingezeichnet. Auf eine Darstellung des nichtlinearen Verlaufs des Finite-Elemente Systems wurde verzichtet, da dieser in diesem Maßstab von dem Verlauf des vollen Systems praktisch nicht zu unterscheiden

ist — auch das dynamische Verhalten wird durch die Parametrisierung des nichtlinearen Systems mit Hilfe des Matrizenansatz also korrekt wiedergegeben!

Vergleicht man das lineare Ergebnis für $\text{DOF} = 8$ mit dem nichtlinearen, so entsteht der Eindruck, dass die Dynamik für $t \ll 100$ s durch den linearen Systemanteil dominiert wird; erst danach scheinen die nichtlinearen Anteile einen merklichen Beitrag zu liefern:

Im Anfangszustand befindet sich das System in einem stationären Zustand und damit im Gleichgewicht. In der Zustandsgleichung werden deshalb die vom Zustandsvektor verursachten Beiträge durch die Last kompensiert. Der Lastsprung bewirkt ein Abdriften von diesem stationären Anfangszustand. Die Dynamik dieser Drift wird dabei zunächst von der im Anfangszustand vorliegenden Tangenzzustandsmatrix dominiert, wie man sich anhand einer Arbeitspunktverschiebung in den Anfangszustand klarmachen kann: Nach der Arbeitspunktverschiebung koppelt die Tangenzzustandsmatrix linear an die Abweichung des Zustandsvektors vom Anfangszustand, die nichtlinearen Terme multilinear, also über höhere Potenzen. Da die linearen und nichtlinearen Beiträge erst in der Nähe des Endzustands von vergleichbarer Größenordnung sind, müssen sie in der Nähe des Anfangszustands aufgrund der höheren Potenzen der Koppelung von kleinerer Größenordnung sein, so dass der führende lineare Anteil der Tangenzzustandsmatrix in der Zustandsgleichung dominiert. Als Analogon sei das einfache Potenzgesetz x^s betrachtet: Für $x \approx 1$ („Endzustand“) sind die Potenzgesetze unabhängig von s von vergleichbarer Größenordnung ≈ 1 , für $x \ll 1$ sinkt die Größenordnung mit steigendem s .

Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung und dynamischer Reduktionsfehler

In Abbildung (6.4) wird der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}(t)$ nach Gleichung (4.74) und der dynamische Reduktionsfehler $\vec{r}_{\text{dy}}(t)$ nach Gleichung (4.78) exemplarische für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 8$ für die betrachtete Sprungantwort grafisch dargestellt.

Der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}(t)$ ist für beide Reduktionsverfahren sowohl für das nichtlineare, als auch für das linearisierte System dargestellt. Für $t \ll 100$ s verlaufen die Fehler der nichtlinearen Systeme parallel zu den Fehlern der zugehörigen linearisierten Systeme, die Nichtlinearitäten liefern also allenfalls einen konstanten Offset zum Gleichungsfehler (zur Erzielung der nichtlinearen stationären Genauigkeit $\vec{e}_{\vec{y}, \text{nl}}(t = t_0) = \vec{0}_q$ im Anfangszustand). Der Gleichungsfehler des Gesamtsystems wird also in diesem Bereich durch den Gleichungsfehler des linearen Anteils dominiert.

Bei dem mit dem Arnoldi-Verfahren reduzierten System liegt eine hervorragende Übereinstimmung des reduzierten mit dem vollen System vor. Insbesondere wird im Anfangs- und Endzustand nichtlineare stationäre Genauigkeit erzielt ($\vec{e}_{\vec{y}, \text{nl}} = \vec{0}_q$).

Bei dem mit dem Gyan-Verfahren reduzierten System ist der Anfangszustand mit dem Arbeitspunkt identisch. Hier verschwinden zunächst sowohl der Gleichungsfehler des linearisierten Systems als auch der des nichtlinearen Systems. Für kleinen Zeiten weicht das reduzierte

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

System zumindest merklich vom vollen System ab, um dann schließlich aufgrund der fehlenden nichtlinearen stationären Genauigkeit im Endzustand in einen konstanten Gleichungsfehler einzumünden. Jedoch wird im Endzustand lineare stationäre Genauigkeit ($\vec{e}_{\vec{y}, \text{lin}} = \vec{0}_q$) erzielt!

Der dynamische Reduktionsfehler $\vec{r}_{\text{dy}}(t)$ ist für beide Reduktionsverfahren dargestellt. Für $t \ll 10 \text{ s}$ ist wegen $\vec{r}_{\text{dy}} \gg 1$ die Reduktionsgüte nicht zufriedenstellend, was jedoch — wie am Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung verdeutlicht wird — bereits durch den linearen Anteil verursacht wird; es handelt sich hierbei also nicht um eine Verschlechterung aufgrund der Berücksichtigung der nichtlinearen Terme. Tendenziell weist das Arnoldi-Verfahren einen kleineren Reduktionsfehler auf, insbesondere strebt der Reduktionsfehler für das Arnoldi-Verfahren für große Zeiten aufgrund der stationären Genauigkeit im Endzustand gegen Null, während der Reduktionsfehler für das Guyan-Verfahren bei endlichen Werten verharrt.

6.1 WÄRMEAUSBREITUNG IN DREIDIMENSIONALEM STAB

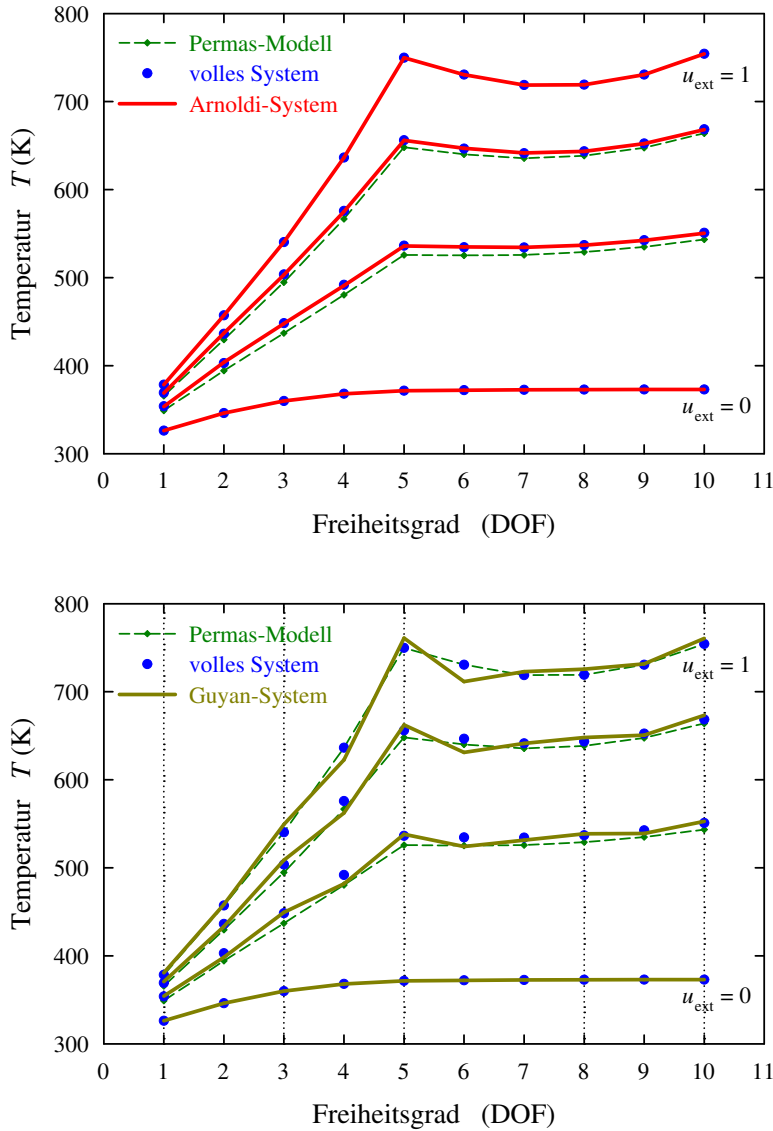


Abbildung 6.2: Stationäre Zustände der Temperaturverteilung des Stabs

Stationäre Temperaturverteilung T des Stabs für die Auswahl von Freiheitsgraden $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 10$ für vier verschiedene externe Eingänge u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei konstantem virtuellen Eingang $u_{\text{vir}} = 1$.

Dargestellt sind die Ergebnisse des PERMAS-Modells (dünne gestrichelte Linien), die Ergebnisse des vollen Systems (Punkte) und die Ergebnisse der reduzierten Systeme (dicke durchgezogene Linien) für das Arnoldi-Verfahren (oberes Diagramm) und für das Guyan-Verfahren (unteres Diagramm). Im Fall des Guyan-Verfahrens wurden die Master-Freiheitsgrade markiert (vertikale gepunktete Linien).

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

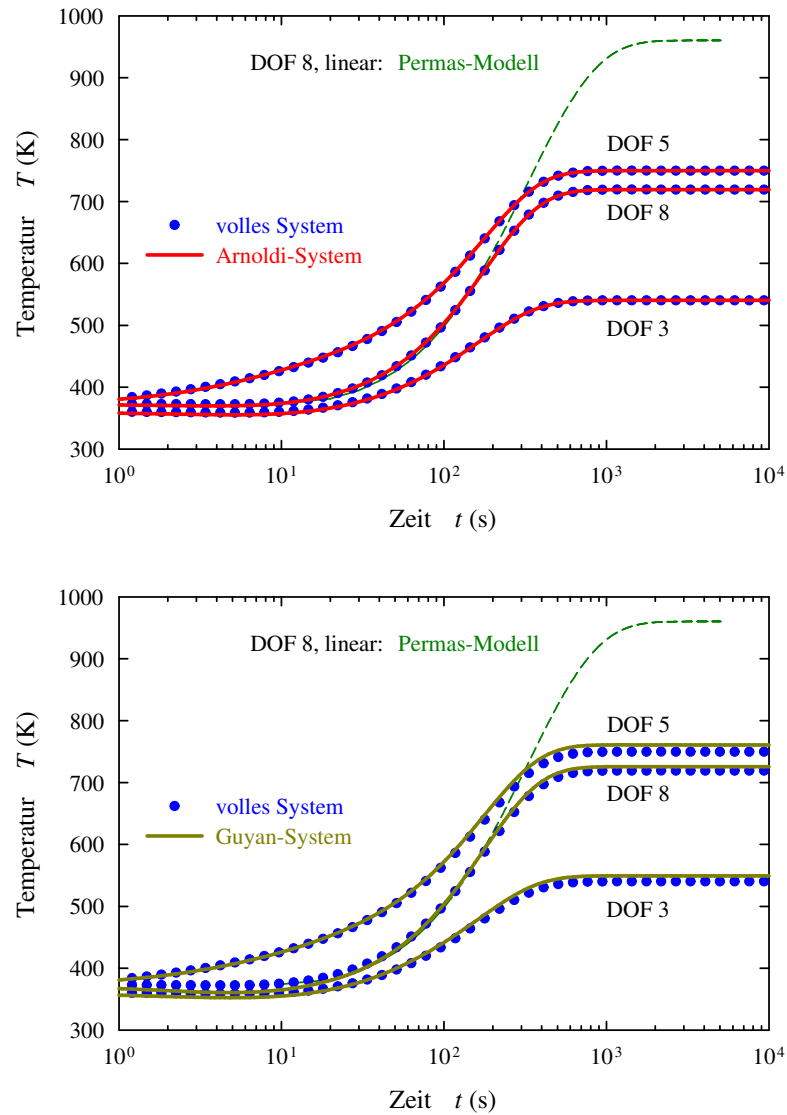


Abbildung 6.3: Sprungantwort der Temperatur des Stabs

Temperaturverlauf T für die Freiheitsgrade $\text{DOF} = 2, 5$ und 8 über der Zeit t für einen Standardsprung mit $t_0 = 10$ ms gemäß (4.76).

Dargestellt sind der Verlauf des vollen Systems (Punkte) sowie der Verlauf der reduzierten Systeme (dicke durchgezogene Linien) für das Arnoldi-Verfahren (oberes Diagramm) und für das Guyan-Verfahren (unteres Diagramm). Zur Einschätzung des nichtlinearen Effekts ist für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 8$ zusätzlich das Ergebnis der PERMAS-Simulation des linearisierten Systems eingezeichnet (dünne gestrichelte Linie).

6.1 WÄRMEAUSBREITUNG IN DREIDIMENSIONALEM STAB

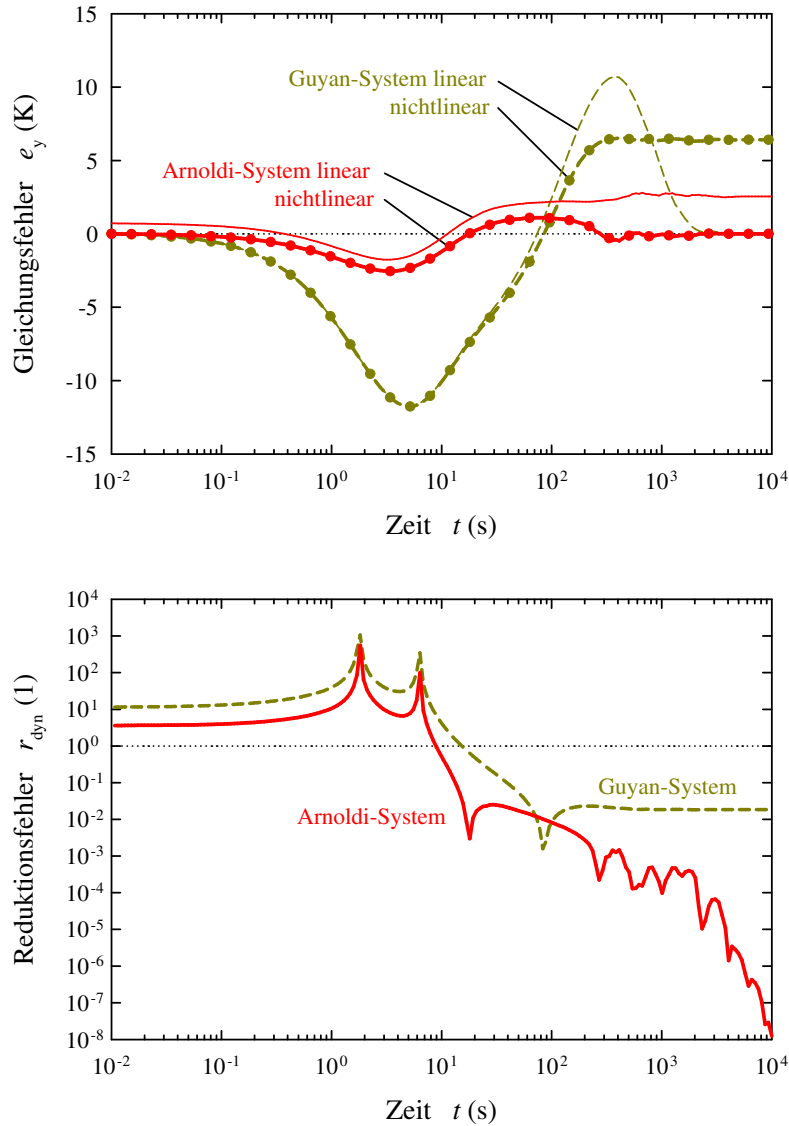


Abbildung 6.4: Gleichungsfehler und Reduktionsfehler der Sprungantwort des Stabes

Gleichungsfehler $\vec{e}_{\vec{y}}$ nach (4.74) (oberes Diagramm) und dynamischer Reduktionsfehler \vec{r}_{dyn} nach (4.78) (unteres Diagramm) für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 8$ über der Zeit t für die in Abbildung (6.3) dargestellte Sprungantwort.

Im oberen Diagramm sind die Gleichungsfehler sowohl der nichtlinearen (dicke Linien mit Punkten) als auch der linearisierten (dünne Linien) Systeme dargestellt, jeweils für das Arnoldi-Verfahren (durchgezogen) und für das Guyan-Verfahren (gestrichelt). Im unteren Diagramm sind die dynamischen Reduktionsfehler des Arnoldi-Systems (durchgezogen) und des Guyan-Systems (gestrichelt) dargestellt.

6.2 Wärmeausbreitung in einem Abgas-Sensor

In diesem Abschnitt wird in einer Fallstudie die Anwendung der Methoden der Modellreduktion auf das industrierelevante Problem der Wärmeausbreitung in einem Abgas-Sensor demonstriert.

Der hier vorgestellte Abgas-Sensor ist in dieser Form nicht als Produkt verwirklicht, der Aufbau des Sensors ist jedoch für eine Reihe von Sensoren zur Bestimmung verschiedener Eigenschaften des Abgas von Verbrennungsmotoren typisch, beispielsweise für Sensoren zur Bestimmung der Sauerstoffkonzentration im Abgas oder der Temperatur des Abgas. Die chemisch-physikalischen Messprinzipien sind nicht Bestandteil der hier vorgestellten Betrachtungen und auch nicht Teil des hier zugrunde liegenden Modells; hier ist ausschließlich die Wärmeausbreitung im Sensor von Bedeutung.

Die in den Simulationen berücksichtigten Effekte sind vergleichbar mit denen des vorangegangenen Beispiels. Auch hier werden eine temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit sowie Wärmestrahlung als nichtlineare Effekte berücksichtigt. Die Simulationen enthalten wiederum die Wärmeleitung im Stabinnern sowie Konvektion und Strahlung auf den Oberflächen, wobei im Unterschied zum vorangegangenen Beispiel an jedem Oberflächenelement Konvektion und Strahlung gleichzeitig berücksichtigt werden.

Das verwendete Finite-Elemente Originalmodell wurde nicht für diese Arbeit erstellt; es entstammt vielmehr einer Studie zur Optimierung der Geometrieparameter des Sensors. Für die Verwendung als Ausgangsmodell der Parametrisierung der Nichtlinearitäten durch die spezielle Normalform war lediglich die Modifikation einiger Parameter der Materialeigenschaften im Sinne einer Modellvereinfachung vonnöten. Die für Standard-Untersuchungen angefertigten Finite-Elemente Modelle können also mit nur kleinen Modifikationen als Ausgangspunkt der nichtlinearen Ordnungsreduktion dienen.

Auch hier wird für die Parametrisierung der Nichtlinearitäten der Matrizenansatz verwendet. Für dieses Beispiel hat sich für die Ordnungsreduktion das Arnoldi-Verfahren als besonders erfolgreich erwiesen.

6.2.1 Beschreibung des Modells

Auch hier sei für die Behandlung der nichtlinearen Wärmeausbreitung auf Anhang (E) verwiesen.

Die geometrischen Eigenschaften des Modells werden in Abbildung (6.5) verdeutlicht, einige ausgewählte Zahlenwerte der Material- und Modellparameter sind in Tabelle (6.2) zusammengestellt. Im Text wird auf die Angabe von Zahlenwerten weitgehend verzichtet.

6.2.1.1 Physikalisches Modell

Der Abgassensor besteht im Wesentlichen aus drei Teilen: dem Keramikfinger, der Keramikpackung und der Metallhülse.

6.2 WÄRMEAUSBREITUNG IN EINEM ABGAS-SENSOR

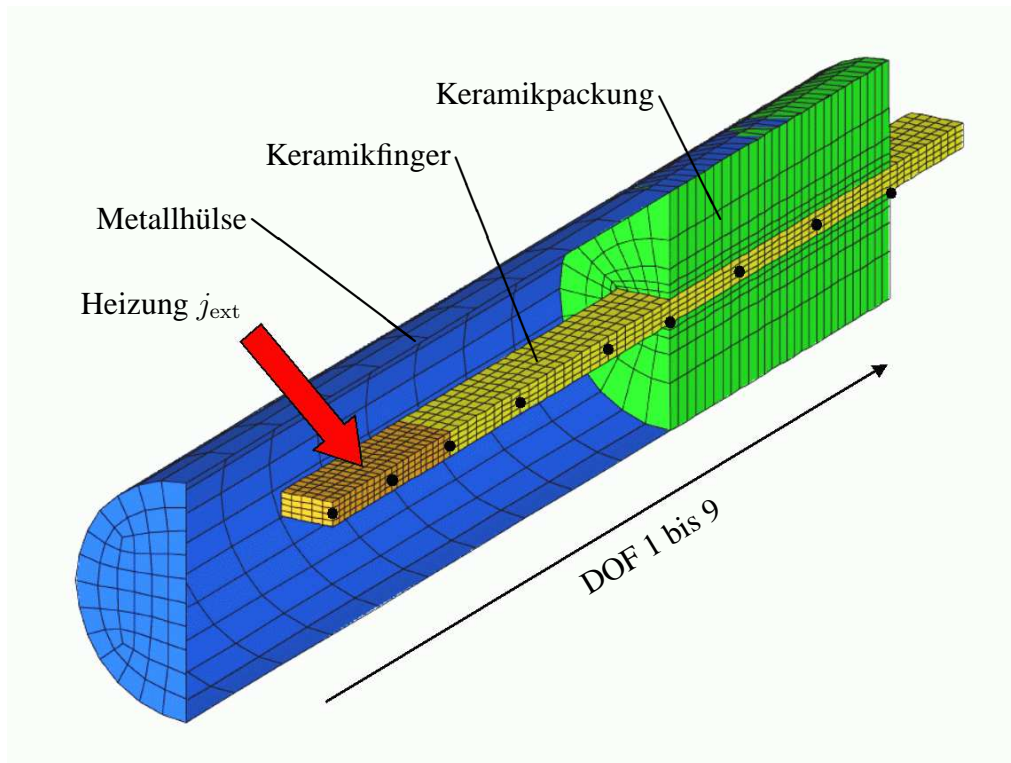


Abbildung 6.5: Finite-Elemente Modell des Abgas-Sensors

Finite-Elemente Diskretisierung der Abgas-Sensors. Aufgrund der Spiegelsymmetrie ist nur eine Hälfte des Sensors modelliert. Die Knoten der in der Auswertung betrachteten Freiheitsgrade sind durch Punkte markiert, ihre Nummerierung ist durch den Pfeil entlang des Keramikfingers angedeutet.

Die verschiedenen funktionalen Strukturen — der Keramikfinger, die Keramikpackung und die Metallhülse — sind markiert. Nicht erkennbar ist die Sandwich-Struktur mit der Zwischenschicht des Keramikfingers. Der vordere Teil des Keramikfingers wird durch die externe Wärmestromdichte j_{ext} geheizt. Die Heizung erfolgt genau genommen in der Zwischenschicht der Sandwichstruktur, zur Kenntlichmachung wurde jedoch die gesamte Oberfläche des beheizten Bereichs des Keramikfingers leicht abgedunkelt.

Tabelle 6.2: Ausgewählte Materialeigenschaften und Modellparameter des Stabes

<i>Materialeig.</i>		Al_2O_3	$Al_2O_3 + Pt$	Fe	<i>Einheit</i>
Wärmekap.	κ_0	$4,00 \cdot 10^6$	$3,85 \cdot 10^6$	$3,90 \cdot 10^6$	$J / m^3 K$
Wärmeleitf.	λ_0	18,89	24,73	47,20	$W / m K$
	λ_1	$-10,20 \cdot 10^{-3}$	$-9,06 \cdot 10^{-3}$	$-7,50 \cdot 10^{-3}$	$W / m K^2$

<i>Modellparameter</i>		<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>
Übergangskoeffizient	α	25,00	$W / m^2 K$
Strahlungskoeffizient	ς	$28,35 \cdot 10^{-9}$	$W / m^2 K^4$
Externe Wärmestromdichte	j_{ext}	$200,00 \cdot 10^3$	W / m^2
Knotenzahl	\tilde{n}	4.895	—
Ordnung volles System	n	4.895	—
Ordnung reduziertes System	m	5	—

Der Keramikfinger mit einer Abmessung von etwa $60 \times 4 \times 1 \text{ mm}^3$ enthält den eigentlichen aktiven Teil des Sensors. Dieser Finger ist als Sandwich-Struktur aufgebaut: Zwischen zwei keramischen Schichten aus — in dem hier betrachteten Modell — Aluminiumoxid Al_2O_3 von jeweils etwa $500 \mu\text{m}$ Dicke befindet sich eine Zwischenschicht von etwa $50 \mu\text{m}$ Dicke. Diese Zwischenschicht besteht ihrerseits wiederum aus einem elektrischen Leiter aus Platin Pt, eingebettet in Aluminiumoxid. Der Platin-Leiter dient zur Ohmschen Heizung des Sensors mittels eines elektrischen Stroms. Diese Heizung dient dem schnellen Erreichen der Arbeitstemperatur des Sensors (etwa $T \sim 800 \text{ K}$ bis $T \sim 1.200 \text{ K}$) aus einem „kalten“ Zustand heraus. Dieser Platin-Leiter ist im vorderen Teil des Fingers zur Erhöhung des elektrischen Widerstands als Mäander ausgeführt, im hinteren Teil als breite Bahn zur Zu- und Ableitung des Stroms. Diese künstliche Heizung des Sensors stellt die externe Last des Modells dar; sie wird in den Simulationen modelliert als konstante externe Wärmestromdichte j_{ext} in den Bereichen der Zwischenschicht mit mäanderförmigem Platin-Leiter.

Die Keramikpackung besteht aus Zirkonoxid und dient zur mechanischen Fassung des Fingers. Die Metallhülse aus Stahl, im Wesentlichen also Eisen Fe, ist lediglich als mechanischer Schutz des Keramikfingers vorgesehen. Sie weist einen Radius von etwa 5 mm und eine Dicke von etwa $500 \mu\text{m}$ auf und ist in der Realität mit größeren Löchern versehen, um einen möglichst ungestörten Gasaustausch zu ermöglichen.

Die dominierenden Materialnichtlinearitäten sind in diesem Modell die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit λ der Materialien Aluminiumoxid, Platin und Eisen. Diese werden in dem interessierenden Temperaturbereich von $T \sim 600 \text{ K}$ bis $T \sim 1.600 \text{ K}$ wieder durch den Ansatz $\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T$ parametrisiert. Ein Vergleich der ursprünglichen Kennlini-

en der verwendeten Materialien mit dem hier verwendeten Ansatz ist in Abbildung (6.6) zu finden.²

Die übrigen Materialparameter — insbesondere die Wärmekapazität κ der verwendeten Materialien — werden als konstant angenommen.

Die Oberflächen des Sensors sind über (lineare) Konvektion, also einen konstanten Übergangskoeffizient α , und Wärmestrahlung, also einen nichtlinearen Strahlungskoeffizient ς an Wärmebäder unterschiedlicher Temperatur T_0 gekoppelt. Eine direkte Koppelung an ein Wärmebad ist in diesem Modell nicht enthalten.

6.2.1.2 Finite-Elemente Modell und volles System

Das Modell wurde mit der Finite-Elemente Software PERMAS modelliert und simuliert. Aufgrund der Spiegelsymmetrie wurde lediglich eine Hälfte des Sensors modelliert, an den Schnittflächen gelten homogene Neumann-Randbedingungen.

Die Geometrie des Platin-Leiters wurde im Finite-Elemente Modell nicht aufgelöst; vielmehr wurde eine homogene Schicht aus Flächenelementen der entsprechenden Dicke modelliert, deren Materialeigenschaften einer Mischung aus etwa je zur Hälfte Platin und Aluminiumoxid entsprechen. Die Metallhülse wurde mittels Schalenelementen modelliert, wobei die Löcher vernachlässigt wurden. Das Finite-Elemente System beinhaltet $\tilde{n} = 4.895$ Knoten, was auch der Ordnung des vollen Systems entspricht, $n = 4.895$.

Die Temperaturverteilung ist insbesondere im Keramikfinger interessant und variiert auch nur in diesem Bereich wesentlich. Deshalb betrachten wir das Temperaturverhalten an einer Auswahl von neun Knoten entlang des Keramikfingers, die vom freien Fingerende aus von $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 9$ durchnummeriert werden. Formal sei auch hier wieder eine entsprechende Ausgangsmatrix gedacht.

Die Heizung im Platin-Mäander wird durch eine konstante Flächenlast modelliert, die als externe Single-Input Eingangsmatrix $\vec{B}_{n, \text{ext}}$ aufgefasst wird, gesteuert durch den Single-Input Eingangsvektor u_{ext} . Die stationären Randbedingungen werden durch eine virtuelle Last $\vec{B}_{n, \text{vir}}$ beschrieben.

Wie bei dem vorangegangenen Beispiel wurden auf der Grundlage dieses Modells die stationären Zustände und Sekantenzustandsmatrizen für sechs verschiedene Werte des externen Eingangs u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei virtuellem Eingang $u_{\text{vir}} \equiv 1$ ermittelt. Außerdem wurde für den Arbeitspunkt $T \equiv 0$, also für $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{vir}} = 0$, die Tangentenzustandsmatrix als Bezugs-Tangentenzustandsmatrix für die Parametrisierung bestimmt. Auf der Grundlage dieser Parametrisierungsdaten wurden mit den Methoden aus Abschnitt (5.3) für das volle System die Z2- und Z4-Matrix des Matrizenansatz ermittelt.

² In dem Finite-Elemente Modell wird nicht reines Platin, sondern ein Aluminiumoxid-Platin-Gemisch verwendet. Die Original-Kennlinie dieses Gemisches wurde aus einer Superposition der Kennlinien der reinen Materialien gewonnen.

6.2.2 Ordnungsreduktion

Auf dieses System wird das Arnoldi-Verfahren der Ordnungsreduktion angewendet. Das volle System der Ordnung $n = 4.895$ wird auf Ordnung $m = 5$ reduziert. Die stationären Randbedingungen werden durch einen Freiheitsgrad berücksichtigt, das dynamische Verhalten wird mittels vier Freiheitsgraden approximiert, wobei für den Eingang $u_{\text{ext}} = 1$ stationäre Genauigkeit im nichtlinearen Fall sichergestellt wird.

6.2.2.1 Stationärer Zustand

In Abbildung (6.7) werden für eine Reihe von externen Eingängen u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei konstantem virtuellen Eingang $u_{\text{vir}} = 1$ die stationären Zustände der Temperatur der verschiedenen Systeme des Stabes miteinander verglichen. Auch hier ist der Einfluss der Nichtlinearitäten an der abnehmenden Erwärmung bei konstanter Lastzunahme ersichtlich.

Das aus der Parametrisierung erhaltene volle System stimmt mit den zugrunde liegenden Finite-Elemente Simulationen ähnlich gut überein, wie bei dem vorangegangenen Beispiel. Auch hier wird für $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$ exakte Übereinstimmung erzielt.

Auch die Übereinstimmung der stationären Zustände des reduzierten Systems mit dem vollen System ist zufriedenstellend. Für die externen Eingänge $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$ wird erwartungsgemäß stationäre Genauigkeit erzielt, für die dazwischenliegenden Werte erhält man kleine, jedoch wahrnehmbare Abweichungen, die etwa die gleichen Größenordnung aufweisen, wie die Parametrisierungsfehler, also die Abweichungen der Ergebnisse des vollen Systems von dem zugrunde liegenden PERMAS-Modell.

6.2.2.2 Sprungantwort

Auch bei diesem Beispiel wird die Sprungantwort ausgewertet. Als Anregung ist ein Standardsprung zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ ms gemäß (4.76) gewählt.

Qualitativer Vergleich der Sprungantwort

In Abbildung (6.8) wird die Sprungantwort der verschiedenen Systeme für Knoten $\text{DOF} = 2$ und 4 miteinander verglichen.

Die Übereinstimmung des vollen Systems mit PERMAS-Simulationen ist exzellent, die Dynamik des Übergangs wird durch das volle System korrekt wiedergegeben.

Die Dynamik des Arnoldi-Systems weicht insbesondere für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 2$ leicht vom vollen System ab, der Übergang erfolgt etwas schneller. Im Anfangs- und Endzustand wird stationäre Genauigkeit erzielt.

Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung und dynamischer Reduktionsfehler

In Abbildung (6.9) wird der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}(t)$ nach Gleichung (4.74) und der dynamische Reduktionsfehler $\vec{r}_{\text{dy}}(t)$ nach Gleichung (4.78) exemplarisch für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 2$ für die betrachtete Sprungantwort grafisch dargestellt.

Wieder wird der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung zunächst durch den linearen Anteil dominiert, erst für $t \gg 10 \text{ s}$ wird der nichtlineare Beitrag wesentlich. Die nichtlineare stationäre Genauigkeit des Anfangs- und Endzustands ist am Verschwinden des Gleichungsfehlers erkennbar ($\vec{e}_{\vec{y}, \text{nl}} = \vec{0}_q$).

Der Reduktionsfehler liefert für $t \gg 10 \text{ ms}$ ein gutes Reduktionsergebnis ($\vec{r}_{\text{dy}} \ll 1$), für kleine Zeitskalen ist das Ergebnis ungenügend ($\vec{r}_{\text{dy}} \approx 1$).

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

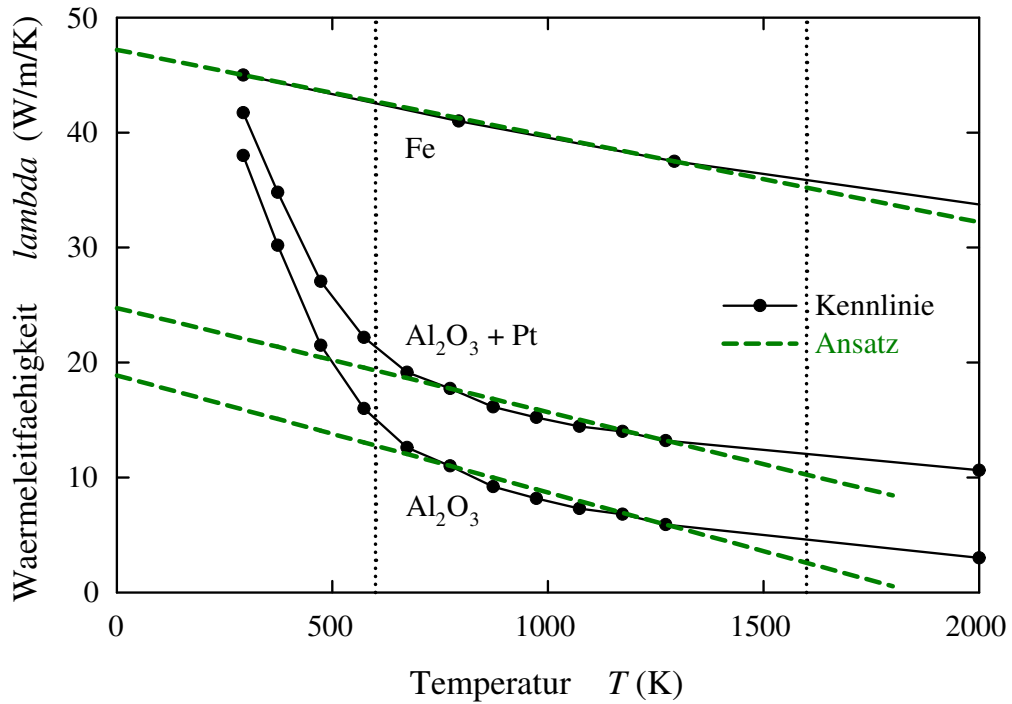


Abbildung 6.6: Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeiten des Abgas-Sensors

Wärmeleitfähigkeiten λ der Materialien Al_2O_3 , $\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Pt}$ (Superposition der Kennlinien der reinen Materialien) und Fe über der Temperatur T .

Verglichen werden jeweils die durch Stützstellen (Punkte) gegebenen ursprünglichen Kennlinien (durchgezogene dünne Linien) mit dem hier verwendeten Ansatz $\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T$ (gestrichelte dicke Linien). Die Zahlenwerte für λ_0 und λ_1 sind der Tabelle (6.2) zu entnehmen.

Der für die Simulation relevante Temperaturbereich von $T \sim 600$ K bis $T \sim 1.600$ K ist durch vertikale gepunktete Linien markiert.

Im relevanten Temperaturbereich ist die Übereinstimmung der Parametrisierung mit der ursprünglichen Kennlinie zufriedenstellend.

6.2 WÄRMEAUSBREITUNG IN EINEM ABGAS-SENSOR

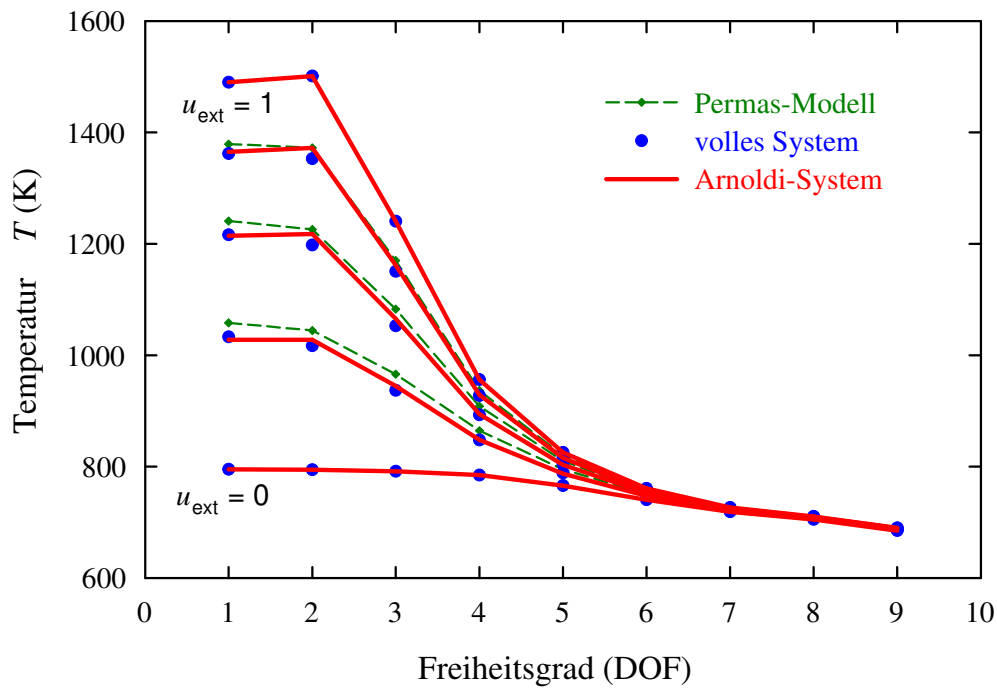


Abbildung 6.7: Stationäre Zustände der Temperaturverteilung des Abgas-Sensors

Stationäre Temperaturverteilung T des Abgas-Sensors für die Auswahl von Freiheitsgraden $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 9$ für fünf verschiedene externe Eingänge u_{ext} , äquidistant verteilt zwischen $u_{\text{ext}} = 0$ und $u_{\text{ext}} = 1$, bei konstantem virtuellem Eingang $u_{\text{vir}} = 1$.

Dargestellt sind die Ergebnisse des PERMAS-Modells (dünne gestrichelte Linien), die Ergebnisse des vollen Systems (Punkte) und die Ergebnisse des Arnoldi-Systems (dicke durchgezogene Linien).

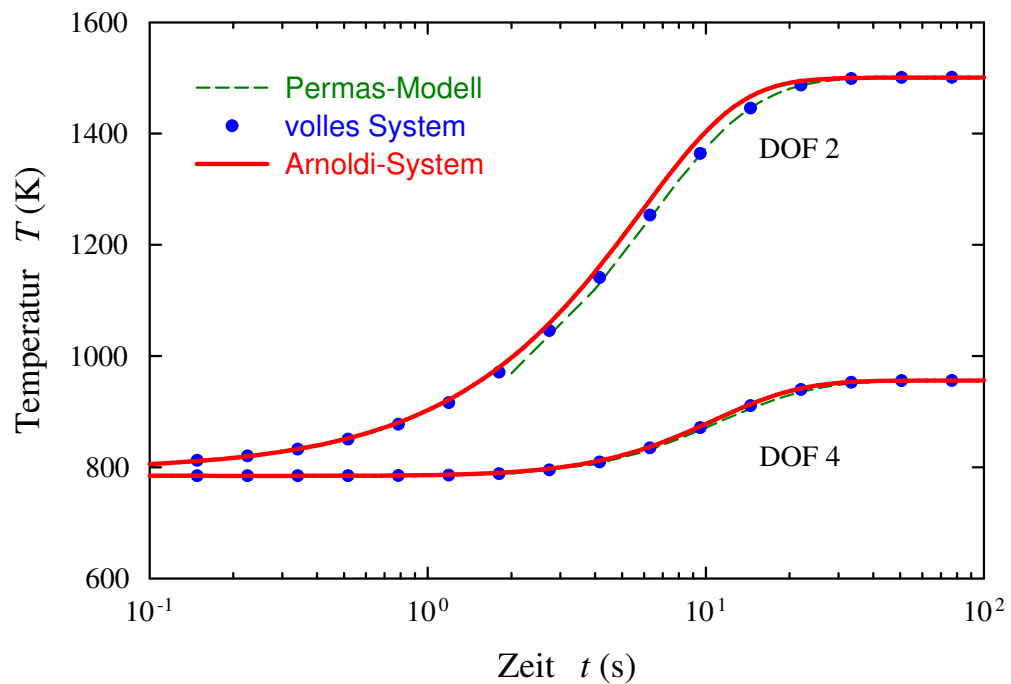


Abbildung 6.8: Sprungantwort der Temperatur des Abgas-Sensors

Temperaturverlauf T für die Freiheitsgrade $\text{DOF} = 2$ und 4 über der Zeit t für einen Standardsprung mit $t_0 = 1$ ms gemäß (4.76).

Dargestellt sind der Verlauf einer PERMAS-Simulation (gestrichelte Linien), die Verläufe des vollen Systems (Punkte) sowie die Verläufe des Arnoldi-Systems (durchgezogene Linien). Für die PERMAS-Simulation liegen aufgrund der konstanten Ausgabe-Schrittweite für $t < 2$ s keine Daten vor.

6.2 WÄRMEAUSBREITUNG IN EINEM ABGAS-SENSOR

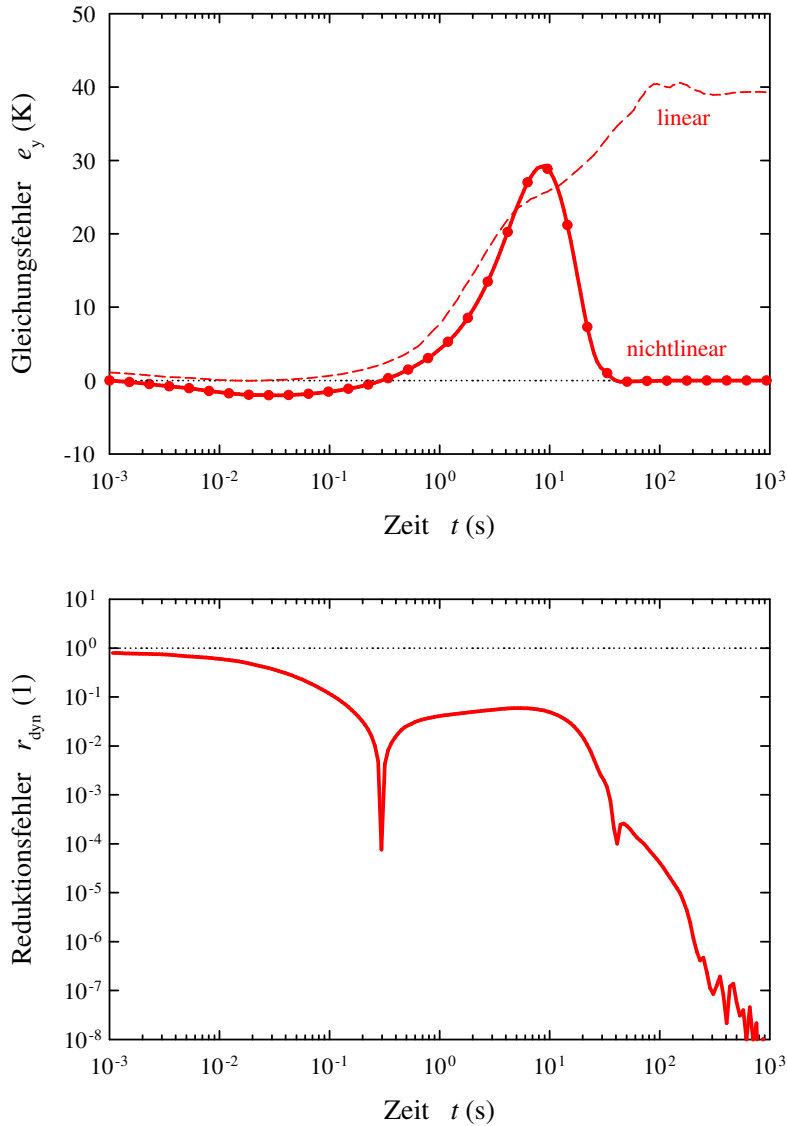


Abbildung 6.9: Gleichungsfehler und Reduktionsfehler der Sprungantwort des Abgas-Sensors

Gleichungsfehler $\vec{e}_{\vec{y}}$ nach (4.74) (oberes Diagramm) und dynamischer Reduktionsfehler \vec{r}_{dyn} nach (4.78) (unteres Diagramm) für Freiheitsgrad $\text{DOF} = 2$ über der Zeit t für die in Abbildung (6.8) dargestellte Sprungantwort.

Im oberen Diagramm sind die Gleichungsfehler sowohl des nichtlinearen (dicke durchgezogene Linie) als auch des linearisierten (dünne gestrichelte Linie) Systems dargestellt, im unteren Diagramm ist der dynamische Reduktionsfehler des Arnoldi-Systems dargestellt.

6.3 Diffusion magnetischer Felder in Materie

In diesem Abschnitt werden einige Methoden der Modellreduktion auf die Diffusion magnetischer Felder in Materie angewendet.

Der zu beschreibende physikalische Effekt ist die Behinderung der Ausbreitung von Magnetfeldern in elektrisch leitender Materie durch die Ausbildung von Wirbelströmen. Die Felddiffusion ist technisch bedeutsam für das Verhalten magnetischer Aktoren (Stellglieder), wie sie beispielsweise in Magnetventilen für Common-Rail-Einspritzsysteme eingesetzt werden. Dort stellt bei Schaltvorgängen der Auf- und Abbau der Magnetfelder in ferromagnetischen Magnetkreisen einen Verzögerungseffekt dar, der die dynamischen Eigenschaften der Aktoren verschlechtert.

Die zu berücksichtigende Nichtlinearität ist die Feldabhängigkeit der magnetischen Permeabilität. Speziell in ferromagnetischen Werkstoffen stellt dies eine starke Materialnichtlinearität dar.

Nach der Modellvereinfachung liegt das Modell bereits in der Normalform vor, so dass bei diesem Beispiel keine nachträgliche Parametrisierung der Nichtlinearitäten notwendig ist. Anhand dieser Anwendung der Ordnungsreduktion wird demonstriert, wie durch die geeignete Auswahl von Master-Freiheitsgraden beim Guyan-Verfahren das Verhalten des vollen Systems in Teilbereichen auf Kosten anderer Bereiche verbessert werden kann. Darüberhinaus kommt in diesem Beispiel eine nichttriviale Ausgangsmatrix zur Anwendung.

6.3.1 Beschreibung des Modells

Die Diffusionsgleichung für die magnetische Induktion wird in Anhang (F) aus den physikalischen Grundgleichungen abgeleitet. Dort sind die Definitionen und physikalischen Zusammenhänge der hier nur kurz eingeführten Größen ausführlich erläutert. Insbesondere wird die netzwerkorientierte Simulation magnetischer Aktoren unter Verwendung eindimensionaler Diffusionsblöcke kurz vorgestellt.

Die geometrischen Eigenschaften und Randbedingungen des hier betrachteten Modells werden in Abbildung (6.10) verdeutlicht. In Tabelle (6.3) sind die Zahlenwerte der Material- und Modellparameter zusammengestellt. Im Text wird auf die Angabe von Zahlenwerten weitgehend verzichtet.

6.3.1.1 Physikalisches Modell

Es wird ein radialer Diffusionsblock betrachtet, also die Diffusion einer axialen magnetischen Induktion B in radialer Richtung unter Annahme von Zylindersymmetrie, oder die Ausbreitung eines axialen Magnetfelds in einem Hohlzylinder mit Innenradius r_i und Außenradius r_a .

Simuliert wird das lokale Verhalten der magnetischen Induktion B . Für die technische Anwendung ist jedoch insbesondere das globale Verhalten von Bedeutung, ausgedrückt durch

6.3 DIFFUSION MAGNETISCHER FELDER IN MATERIE

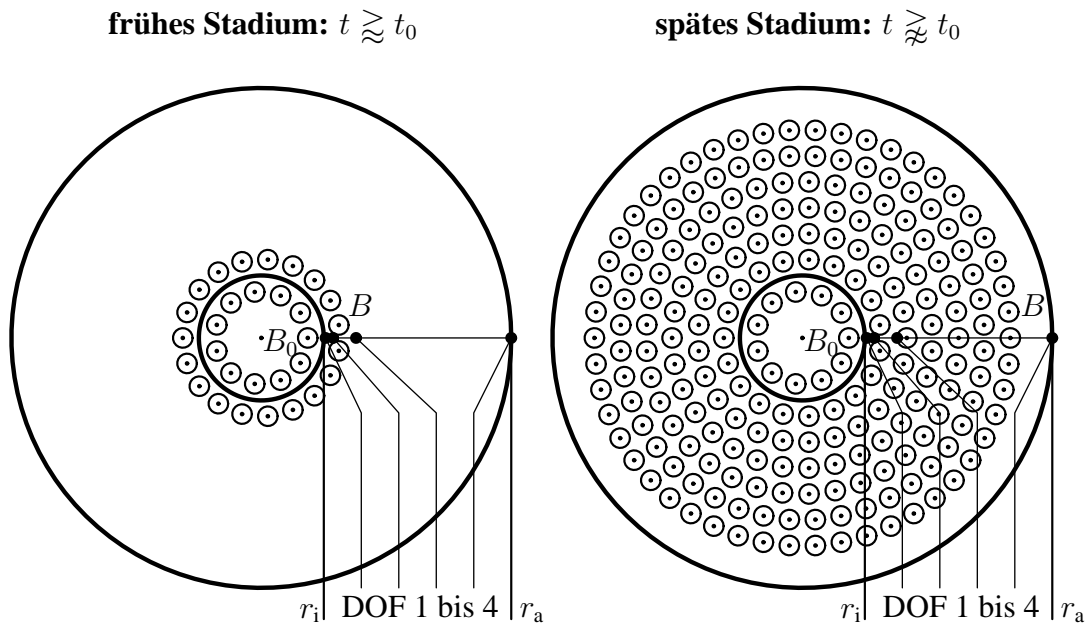


Abbildung 6.10: Schematische Darstellung der Felddiffusion

Zylindersymmetrischer Diffusionsvorgang einer axialen magnetischen Induktion B (angedeutet durch Vektorpfeile) in radialer Richtung. Am Innenrand bei Radius r_i liegt als Randbedingung die externe magnetische Induktion B_0 an (angedeutet durch Vektorpfeile innerhalb des Innenrandes). Die Knoten der in der Auswertung betrachteten Freiheitsgrade sind durch Punkte markiert.

Die externe magnetische Induktion diffundiert in radialer Richtung vom Innenrand zum Außenrand des Rechengebiets. Dargestellt sind ein frühes (links) und ein spätes (rechts) Stadium des Diffusionsvorgangs. Im späten Stadium hat sich die magnetische Induktion im Vergleich zum frühen Stadium deutlich weiter ausgebreitet.

Tabelle 6.3: Materialeigenschaften und Modellparameter der Felddiffusion

<i>Größe</i>		<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>
elektrische Leitfähigkeit	σ	$5,0 \cdot 10^6$	S / m
magnetische Funktion	$\tilde{\mu}_0$	$1,2 \cdot 10^3$	Am / Vs
	$\tilde{\mu}_3$	$0,5 \cdot 10^3$	Am ⁷ / V ⁴ s ⁴
Innenradius	r_i	$20,0 \cdot 10^{-3}$	m
Außenradius	r_a	$80,0 \cdot 10^{-3}$	m
externe magnetische Induktion	B_0	2,0	T
resultierender magnetischer Fluss	Φ_0	$37,7 \cdot 10^{-3}$	Wb
Knotenzahl	\tilde{n}	51	–
Ordnung volles System	n	50	–
Ordnung reduziertes System	m	4	–

den magnetischen Fluss Φ , da dieser die für die mechanische Kraft des Aktors maßgebliche Größe ist.

Das Material des Hohlzylinders sei ferromagnetisch; damit hängt die magnetische Funktion $\tilde{\mu}$ stark von der magnetischen Induktion B ab, es liegt eine starke Materialnichtlinearität vor. Diese wird in dem hier interessierenden Bereich der magnetischen Induktion von $B = 0$ T bis $B \sim 2$ T durch den Ansatz $\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_3 B^3$ parametrisiert. Der Vergleich dieses Ansatzes mit einem realistischen Material in Abbildung (6.11) zeigt, dass die hier verwendete maximale Potenz in der magnetischen Induktion B nicht ausreicht, um das starke Abknicken der wirklichen Kennlinie korrekt wiederzugeben. Deshalb besitzen die hier vorgestellten Ergebnisse lediglich qualitativen Charakter.

Die elektrische Leitfähigkeit σ ist als konstant angenommen.

Die magnetische Induktion ist am Innenrand des Rechengebiets im Sinne einer Dirchlet-Randbedingung zu B_0 vorgegeben. Am Außenrand wird eine homogene Neumann-Randbedingung angenommen.

6.3.1.2 Finite-Differenzen Modell und volles System

Das physikalische Modell dieses eindimensionalen Diffusionsblocks wird, wie in Anhang (F) beschrieben, als Finite-Differenzen Modell diskretisiert und simuliert. Die Ortsdiskretisierung ist in der Normalform (4.21), (4.22) formuliert und liefert damit sofort das volle System.

Das Rechengebiet r_i bis r_a wird an $\tilde{n} = 51$ logarithmisch äquidistant verteilten Knoten diskretisiert. Der Wert der magnetischen Induktion am innersten Knoten ist durch die Dirichlet-

Randbedingung zu B_0 bestimmt, so dass das volle System die Ordnung $n = 50$ aufweist.

Die Randbedingung selbst wird am ersten Knoten des vollen Systems als Last formuliert. Diese Last wird — mangels sonstiger äußerer Antriebe — als Single-Input Eingangsmatrix \vec{B}_n verwendet; sie wird durch den Single-Input Eingangsvektor u kontrolliert. Die zweite Randbedingung ist homogen, eine zusätzliche virtuelle Last tritt deshalb nicht auf.

In der Auswertung wird zunächst die magnetische Induktion B an vier ausgewählten Knoten betrachtet; diese Freiheitsgrade sind von innen nach außen mit $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 4$ durchnummeriert (siehe Abbildung (6.10) und (6.12)). Diese Knoten beinhalten den innersten und äußersten im vollen System enthaltenen Knoten, sowie zwei Knoten dazwischen, so dass die Zeitskalen des Übergangs bei der unten betrachteten Sprungantwort etwa logarithmisch äquidistant verteilt sind. Formal wird wiederum eine entsprechende Projektionsmatrix als Ausgangsmatrix gewählt.

Außerdem wird der magnetischen Fluss Φ analysiert, der ebenfalls durch eine geeignete Ausgangsmatrix erhalten werden kann.

6.3.2 Ordnungsreduktion

Auf das volle System werden wiederum projektive Verfahren der Ordnungsreduktion angewendet, die das System von Ordnung $n = 50$ auf Ordnung $m = 4$ reduzieren.

Es werden erneut das Arnoldi-Verfahren und das Gyan-Verfahren verwendet. Durch die spezielle Art der Randbedingungen unterscheiden sich die stationären Zustände im nichtlinearen und im linearisierten Fall nicht, so dass zur Erzielung der nichtlinearen stationären Genauigkeit keine besonderen Vorkehrungen getroffen werden müssen. Auch eine virtuelle Last tritt hier nicht auf. Beim Gyan-Verfahren sind die in der Auswertung betrachteten Freiheitsgrade $\text{DOF} = 1$ bis 4 als Master-Freiheitsgrade gewählt, um die verschiedenen Zeitskalen des Systems angemessen zu repräsentieren.

6.3.2.1 Stationärer Zustand

In Abbildung (6.12) wird der stationäre Zustand des nichtlinearen und des linearisierten Systems für zwei verschiedene Randbedingungen am Außenrand dargestellt, nämlich eine homogene Neumann-Randbedingung und eine homogene Dirichlet-Randbedingung.

Lediglich die Neumann-Randbedingung ist physikalisch sinnvoll. In diesem Fall stellt sich im ganzen Rechengebiet sowohl im nichtlinearen Fall als auch im linearisierten Fall die am Innenrand anliegende externe magnetische Induktion B ein.

Die Dirichlet-Randbedingung ist hauptsächlich von mathematischem Interesse, sie ist physikalisch kaum zu motivieren. Sie soll hier lediglich den Einfluss der Nichtlinearität verdeutlichen.

6.3.2.2 Sprungantwort

Für das vorliegende physikalisch-technische System ist besonders das dynamische Verhalten von Interesse. Zur Beurteilung desselben wurde die Sprungantwort der verschiedenen Systeme berechnet, wobei als Anregung ein Standardsprung gemäß (4.77) mit $t_0 = 1 \mu\text{s}$ verwendet wird.

Qualitativer Vergleich des Verlaufs der magnetischen Induktion

In Abbildung (6.13) wird für die Freiheitsgrade $\text{DOF} = 1$ bis 4 der Verlauf der magnetischen Induktion des vollen Systems mit den Verläufen der reduzierten Systeme verglichen.

Das Arnoldi-Verfahren ist hier nicht in der Lage, das Systemverhalten für $t \ll 10 \text{ ms}$ korrekt wiederzugeben. Im Gegensatz dazu kann durch die geeignete Auswahl von Master-Freiheitsgraden im Fall des Guyan-Verfahren eine gute Übereinstimmung des Systemverhaltens auf kleinen Zeitskalen erreicht werden — jedoch auf Kosten des Systemverhaltens auf größeren Zeitskalen.

Vergleich des Verlaufs des magnetischen Fluss

In Abbildung (6.14) wird der Verlauf des magnetischen Fluss Φ der verschiedenen Systeme miteinander verglichen, in Abbildung (6.15) wird schließlich der Gleichungsfehler der Ausgangsgleichung $\vec{e}_{\vec{y}}(t)$ nach (4.74) und der dynamische Reduktionsfehler $\vec{r}_{\text{dy}}(t)$ des magnetischen Fluss nach (4.78) betrachtet. Das beim qualitativen Vergleich des Verlaufs der magnetischen Induktion gewonnene Bild wird hier bestätigt:

Beim magnetischen Fluss kann das Arnoldi-Verfahren das Verhalten für $t \ll 10 \text{ ms}$ nicht korrekt wiederzugeben. Das Guyan-Verfahren erzielt auf allen Zeitskalen eine gute Übereinstimmung; jedoch macht sich ein Überschwinger bei einigen 100 ms im linearen Maßstab störend bemerkbar.

Der nichtlineare Gleichungsfehler unterscheidet sich bei diesem Beispiel vom linearisierten deutlich. Aufgrund der speziellen Randbedingungen weisen beide Reduktionsverfahren sowohl nichtlineare als auch linearisierte stationäre Genauigkeit im Anfangs- und Endzustand auf, hier verschwinden deshalb sowohl der nichtlineare, als auch der linearisierte Gleichungsfehler. Der Reduktionsfehler weist für das Arnoldi-Verfahren für $t \gg 1 \text{ ms}$ ein gutes Reduktionsergebnis aus ($\vec{r}_{\text{dy}} \ll 1$), für kleine Zeitskalen jedoch ein ungenügendes ($\vec{r}_{\text{dy}} \approx 1$). Das Ergebnis des Guyan-Verfahrens ist auf allen Zeitskalen zufriedenstellend, insbesondere auch auf kleinen ($\vec{r}_{\text{dy}} \ll 1$); jedoch liefert auf größeren Zeitskalen das Arnoldi-Verfahren tendenziell bessere Ergebnisse.

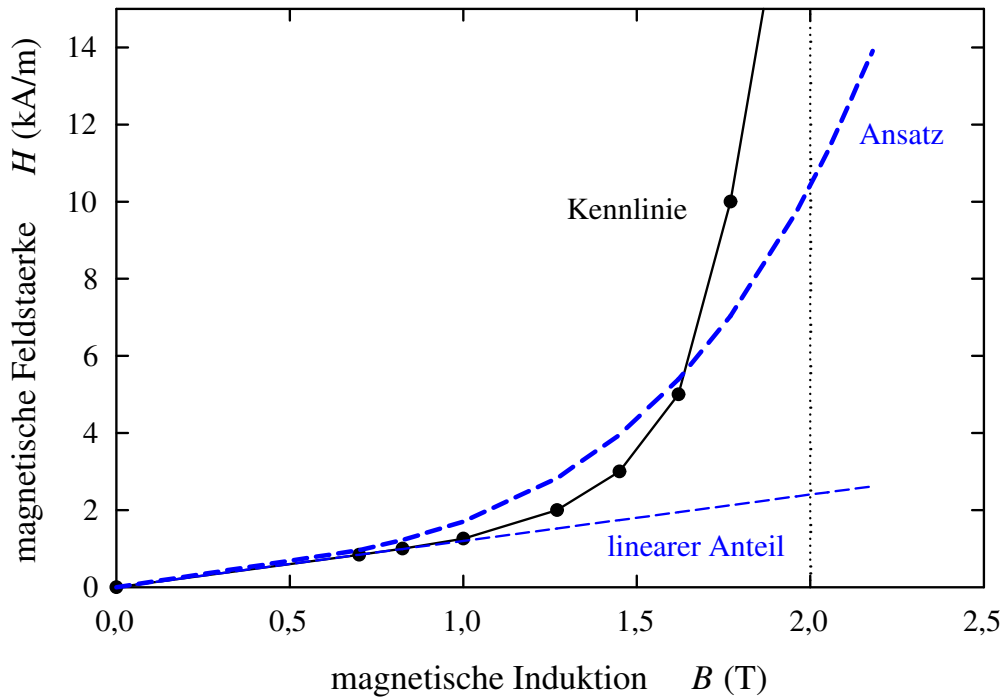


Abbildung 6.11: Materialkennlinie für die Felddiffusion

Magnetische Feldstärke H über der magnetische Induktion B . Die magnetische Funktion $\tilde{\mu}(B)$ ist in diesem Diagramm als Steigung der Sekante durch den Ursprung und einen Wert auf der Kennlinie gegeben.

Verglichen wird die durch Stützpunkte (Punkte) gegebene ursprüngliche Kennlinie (durchgezogene dünne Linie) mit dem hier verwendeten Ansatz $\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_3 B^3$ (gestrichelte dicke Linie). Außerdem ist der lineare Anteil des Ansatzes eingezeichnet (gestrichelte dünne Linie). Die Zahlenwerte für $\tilde{\mu}_0$ und $\tilde{\mu}_3$ sind der Tabelle (6.3) zu entnehmen. Der für die Simulationen relevanten Bereich der magnetischen Induktion von $B = 0$ T bis $B \sim 2$ T ist durch eine vertikale gepunktete Linie markiert.

Die in der Parametrisierung verwendete maximale Potenz in der magnetischen Induktion B reicht nicht aus, um das starke Abknicken der wirklichen Kennlinie korrekt wiederzugeben. Die auf dieser Parametrisierung beruhenden Simulationen werden die Wirklichkeit deshalb allenfalls qualitativ korrekt wiedergeben.

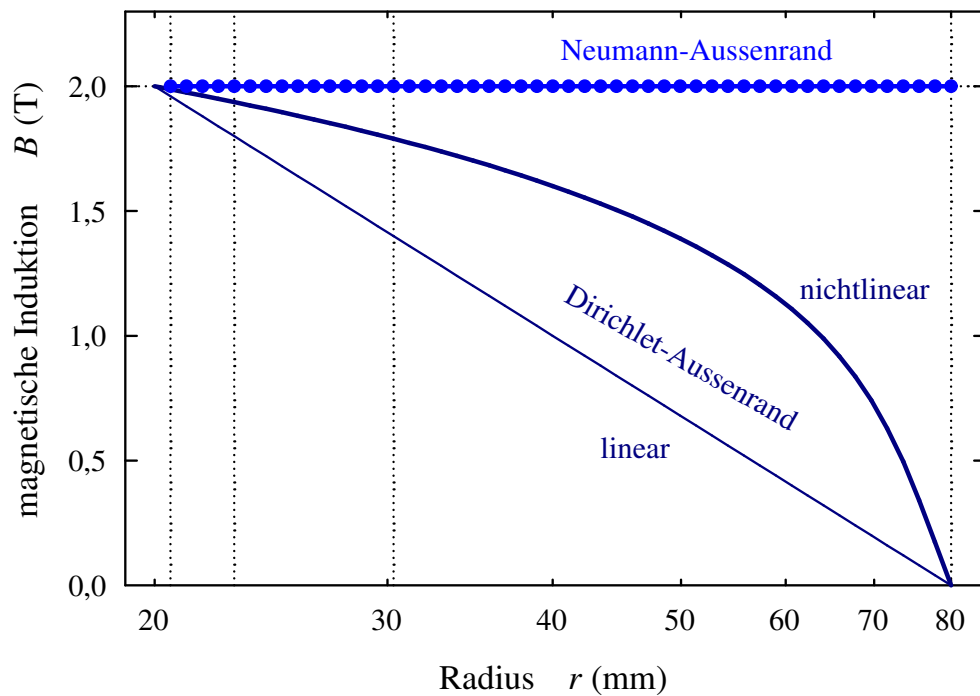


Abbildung 6.12: Stationäre Zustände für verschiedene Randbedingungen der Felddiffusion

Verlauf der magnetischen Induktion B über dem Radius r für verschiedene Randbedingungen am Außenrand. Dargestellt ist der Verlauf für einen homogenen Neumann-Außenrand (Punkte), sowie der nichtlineare (dicke Linie) und linearisierte (dünne Linie) Verlauf für einen homogenen Dirichlet-Außenrand. Die Punkte markieren die Knoten der Freiheitsgrade des vollen Systems, die logarithmisch äquidistant verteilt sind. Zu beachten ist, dass am Innenrand r_i kein Knoten des vollen Systems vorliegt, da hier der Wert der magnetischen Induktion durch die Randbedingung vorgegeben ist. Die Knoten der in der Auswertung betrachteten Freiheitsgrade sind durch vertikale gepunktete Linien markiert.

Der Neumann-Außenrand (Punkte) ist die physikalisch korrekte Randbedingung, die in den dynamischen Simulationen verwendet wird. In diesem Fall weist sowohl im nichtlinearen, als auch im linearisierten Fall das gesamte Simulationsgebiet im stationären Zustand den Wert der am Innenrand anliegenden externen magnetischen Induktion B_0 (markiert durch eine horizontale gepunktete Linie) auf.

Der Dirichlet-Außenrand ist physikalisch kaum realisierbar, diese Randbedingung dient lediglich der Veranschaulichung des Einfluss der Nichtlinearität. Der linearisierte Verlauf (dünne Linie) ergibt in dieser Darstellung eine Gerade; im nichtlinearen Fall (dicke Linie) wird dieser deutlich verzerrt.

6.3 DIFFUSION MAGNETISCHER FELDER IN MATERIE

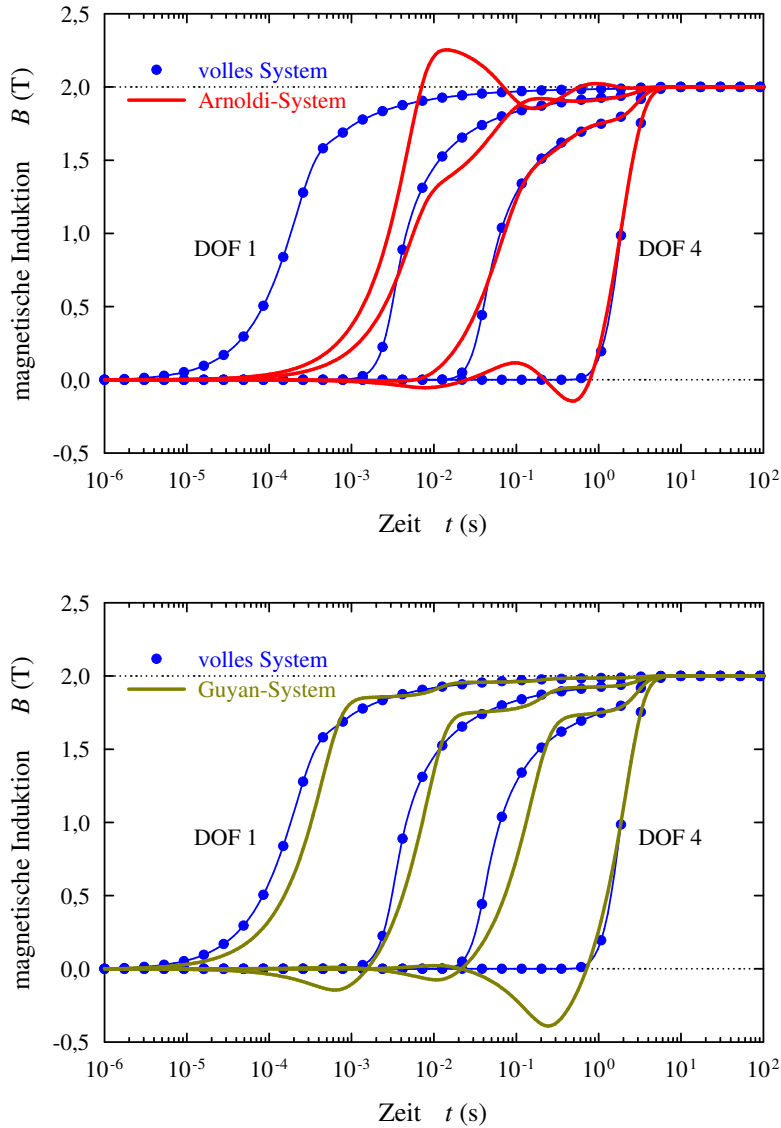


Abbildung 6.13: Sprungantwort der magnetischen Induktion der Felddiffusion

Verlauf der magnetischen Induktion B für die Freiheitsgrade $\text{DOF} = 1$ bis 4 über der Zeit t für einen Standardsprung mit $t_0 = 1 \mu\text{s}$ gemäß (4.77).

Dargestellt sind die Verläufe des vollen Systems (dünne Linien mit Punkten) sowie die Verläufe der reduzierten Systeme (dicke Linien) für das Arnoldi-Verfahren (oberes Diagramm) und für das Guyan-Verfahren (unteres Diagramm). Anfangszustand $B = 0$ und Endzustand $B = B_0$ sind markiert (horizontale gepunktete Linien).

Man erkennt, wie die externe magnetische Induktion B_0 von innen ($\text{DOF} = 1$) nach außen ($\text{DOF} = 4$) in das Rechengebiet eindiffundiert.

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

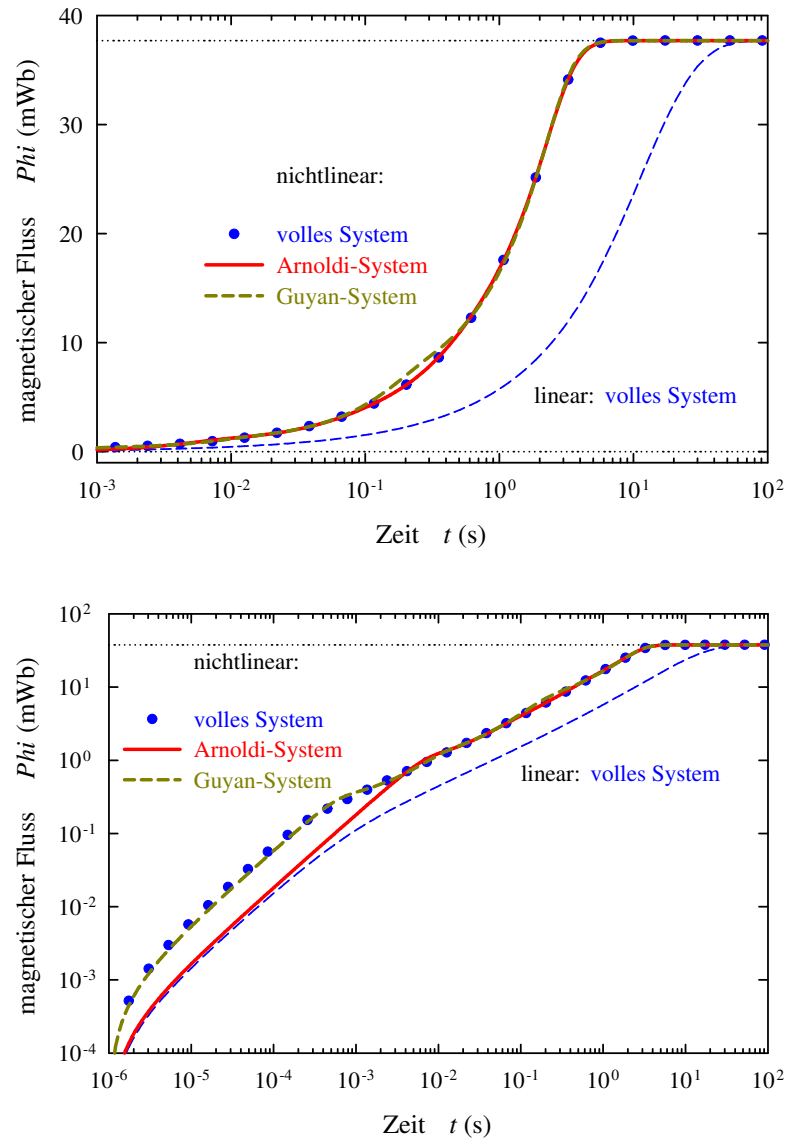


Abbildung 6.14: Sprungantwort des magnetischen Fluss der Felddiffusion

Verlauf des magnetischen Fluss Φ über der Zeit t für einen Standardsprung mit $t_0 = 1 \mu\text{s}$ gemäß (4.77).

Dargestellt sind der Verlauf des vollen Systems (Punkte) sowie der Verlauf des Arnoldi-Systems (dicke durchgezogene Linie) und des Guyan-Systems (gestrichelte dicke Linie); außerdem ist zum Vergleich der Verlauf des linearisierten vollen Systems eingezeichnet (dünne gestrichelte Linie). Anfangszustand $\Phi = 0$ und Endzustand $\Phi = \Phi_0$ sind markiert (horizontale gepunktete Linien). Im oberen Diagramm sind die Kurven linear in der Ordinate aufgezeichnet, im unteren Diagramm logarithmisch.

6.3 DIFFUSION MAGNETISCHER FELDER IN MATERIE

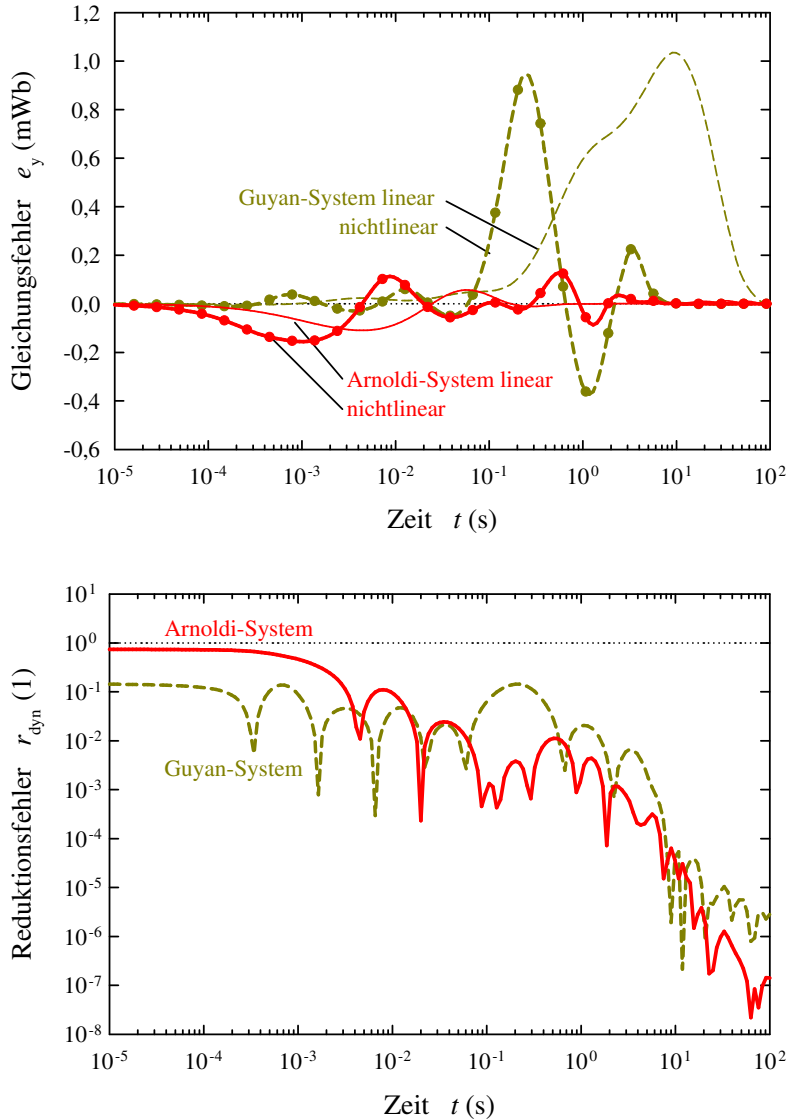


Abbildung 6.15: Gleichungsfehler und Reduktionsfehler der Sprungantwort des magnetischen Fluss der Felddiffusion

Gleichungsfehler $\vec{e}_{\vec{y}}$ nach (4.74) (oberes Diagramm) und dynamischer Reduktionsfehler \vec{r}_{dy} nach (4.78) (unteres Diagramm) des magnetischen Fluss Φ über der Zeit t für die in Abbildung (6.14) dargestellte Sprungantwort.

Im oberen Diagramm sind die Gleichungsfehler sowohl der nichtlinearen (dicke Linien mit Punkten) als auch der linearisierten (dünne Linien) Systeme dargestellt, jeweils für das Arnoldi-Verfahren (durchgezogen) und für das Guyan-Verfahren (gestrichelt). Im unteren Diagramm sind die dynamischen Reduktionsfehler des Arnoldi-Systems (durchgezogen) und des Guyan-Systems (gestrichelt) dargestellt.

6.4 Biegebalken unter Einfluss einer Zwangsbedingung

In diesem Abschnitt wird die Anwendbarkeit einiger Methoden der Modellreduktion auf das mechanische System eines Biegebalkens mit einer Zwangsbedingung demonstriert.

Mechanische Systeme werden durch ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung beschrieben; sie sind prinzipiell schwingungsfähig und weisen deshalb ein reichhaltigeres Verhalten auf als die bisher betrachteten Diffusionsprozesse mit Differentialgleichungssystemen erster Ordnung.

Aufgrund dieses reichhaltigen Verhaltens werden anhand dieses Beispiels — neben stationären Zuständen und Sprungantworten — zusätzliche Systemeigenschaften diskutiert: Der nichtlineare Verlauf von Elementen der Zustandsmatrix wird dargestellt, die Veränderung von Eigenwerten des Systems in verschiedenen Arbeitspunkten wird diskutiert, und die nichtlineare Verallgemeinerung der Frequenzantwort des Systems wird vorgestellt. Der Verlauf von Elementen der Zustandsmatrix dient im Wesentlichen zur Beurteilung der Güte der Parametrisierung des vollen Systems. Die Eigenwerte des Systems und die Frequenzantwort stellen wichtige Systemeigenschaften dar, die von reduzierten Systemen möglichst gut wiedergegeben werden sollten. Auch wenn die Approximation dieser Eigenschaften in dieser Arbeit nicht im Vordergrund steht, kann deren Betrachtung doch zur Beurteilung der Qualität der Reduktionsverfahren herangezogen werden.

Das Modell hat zunächst akademischen Charakter. Jedoch kann es — zusammen mit ähnlichen Modellen mit anderen Rand- und Zwangsbedingungen — als Bestandteil einer Bibliothek von Balkenelementen verwendet werden, um realistische Modelle komplizierterer Strukturen aufzubauen, beispielsweise für mikromechanische Anwendungen.

Die durch die Zwangsbedingung induzierten Nichtlinearitäten dominieren das Verhalten dieses Modells. Geometrische Nichtlinearitäten spielen eine untergeordnete Rolle. Die Materialeigenschaften sind als linear angenommen; sie orientieren sich an den Eigenschaften von Stahl, sind jedoch auf handliche Zahlenwerte gerundet.

Auch hier werden für die Ordnungsreduktion die projektiven Methoden herangezogen. Die Parametrisierung der Nichtlinearitäten beruht in diesem Beispiel auf einer vollständigen Bestimmung der NL-Tensoren und demonstriert damit deren Eignung für Systeme geringer Bandbreite.

6.4.1 Beschreibung des Modells

Die Schwingungsgleichung mechanischer Systeme und die Besonderheiten ihrer Behandlung mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden werden in Anhang (G) kurz erläutert.

Die geometrischen Größen Eigenschaften des Modells werden in Abbildung (6.16) veranschaulicht, die Zahlenwerte der Material- und Modellparameter sind in Tabelle (6.4) angegeben. Im Text wird auf die Angabe von Zahlenwerten weitgehend verzichtet.

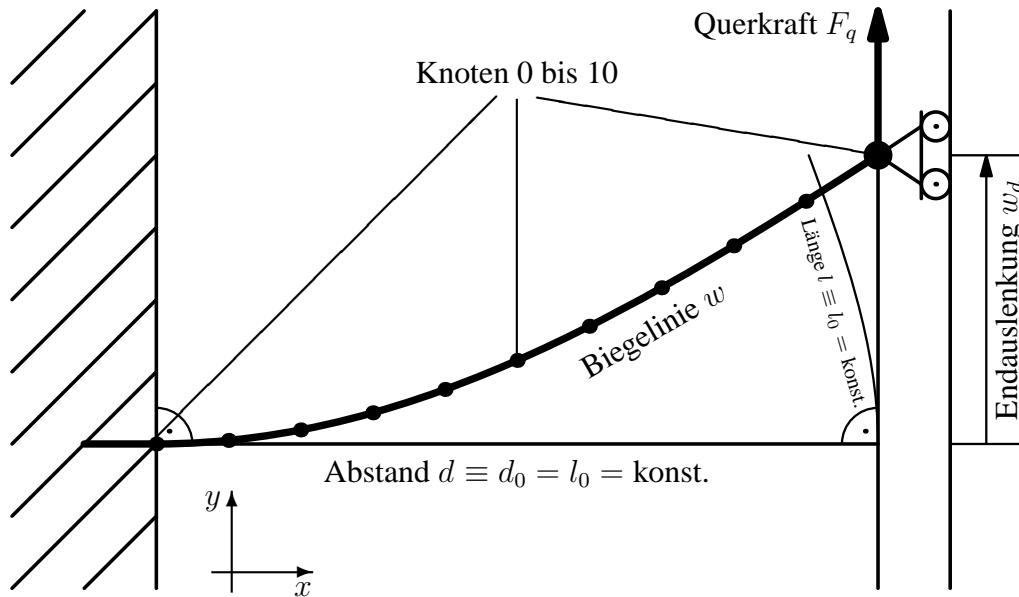


Abbildung 6.16: Schematische Darstellung des Biegebalkens

Dargestellt ist der durch die Querkraft F_q ausgelenkte Zustand des betrachteten Balkens, die Biegelinie $y = w(x)$. Die Endauslenkung $w_d \equiv w(x = d)$ ist als spezieller Wert der Biegelinie am Balkenende aufzufassen. Der Balken wird durch ein Finite-Elemente Modell aus zehn Balkenelementen und $\tilde{n} = 11$ Knoten repräsentiert. Die Knoten sind in der Abbildung durch Punkte markiert; sie sind von links nach rechts von 0 bis 10 durchnummeriert (in der Zeichnung angedeutet). Die die Biegelinie beschreibenden Freiheitsgrade der Querauslenkung der Knoten werden in analoger Weise von $\text{DOF} = 0$ bis $\text{DOF} = 10$ durchnummeriert. Das linke Balkenende (Knoten 0) ist fest eingespannt (angedeutet durch die Lagerung in der „Wand“). Das rechte Balkenende (Knoten 10) ist drehbar gelagert und der Zwangsbedingung $d \equiv d_0 = l_0 = \text{konst.}$ unterworfen (angedeutet durch den „Wagen“). Hierbei sind l die Länge des Balkens, d der Abstand des rechten Balkenendes von der Einspannstelle. Das Subskript 0 kennzeichnet den kräftefreien Zustand. Zum Vergleich ist auch die in dieser Arbeit nicht betrachtete Randbedingung $l \equiv l_0 = \text{konst.}$ angedeutet. Der Ursprung des angedeuteten x - y -Koordinatensystems wird in der Einspannstelle (Knoten 0) angenommen.

Tabelle 6.4: Materialeigenschaften und Modellparameter des Biegebalkens

<i>Größe</i>		<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>
Elastizitätsmodul	E	$2,0 \cdot 10^9$	Pa
Dichte	ρ	$10,0 \cdot 10^3$	kg / m ³
maximale Güte	q_{\max}	25,0	—
bei Kreisfrequenz	ω_{\max}	$50,0 \cdot 10^3$	1 / s
Dämpfungsparameter	α	$1,0 \cdot 10^3$	1 / s
Dämpfungsparameter	β	$400,0 \cdot 10^{-9}$	s
Querschnittsbreite	b	$1,0 \cdot 10^{-3}$	m
Trägheitsmoment	J	$83,3 \cdot 10^{-15}$	m ⁴
Länge	l_0	$10,0 \cdot 10^{-3}$	m
Abstand	d	$10,0 \cdot 10^{-3}$	m
Querkraft	F_q	1,0	N
Drehmoment an der Einspannstelle	M	$10,0 \cdot 10^{-3}$	Nm
Endauslenkung nach linearer Theorie	$w_{d, \text{lin}}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	m
Knotenzahl	\tilde{n}	11	—
Anzahl der Auslenkungsvariablen	\hat{n}	29	—
Ordnung volles System	n	58	—
Ordnung reduziertes System	m	4	—

6.4.1.1 Physikalisches Modell

Der Biegebalken ist an seinem linken Ende fest eingespannt. An seinem rechten Ende ist er drehbar gelagert und der Zwangsbedingung $d \equiv d_0 = l_0 = \text{konst.}$ unterworfen. Hierbei sind l die Länge des Balkens, d der Abstand des rechten Balkenendes von der Einspannstelle; das Subskript 0 kennzeichnet den kräftefreien Zustand. Diese Zwangsbedingung erfordert bei Auslenkung eine Dehnung des Balkens in Längsrichtung, so dass im ausgelenkten Zustand für die Länge $l > l_0$ gilt.

Die mechanischen Eigenschaften des Balkens werden durch seine geometrischen Parameter und seine Materialeigenschaften bestimmt. Es wird von einem quadratischen Querschnitt der Breite b ausgegangen, der ein Trägheitsmoment J für die Richtung der betrachteten Auslenkung (parallel zu einer Mantelfläche des Balkens) bedingt. Das statische Verhalten des Balkens wird durch das Elastizitätsmodul E bestimmt, für das dynamische Verhalten ist darüberhinaus die Dichte ρ von Bedeutung. Außerdem wird eine auf dem α - β -Ansatz basierende proportionale Dämpfung angenommen, parametrisiert durch die maximale Güte q_{\max} bei der Kreisfrequenz ω_{\max} .

Der Balken wird durch eine am rechten Ende angreifende Querkraft F_q ausgelenkt. Nach der linearen Theorie (siehe etwa (Sza84)) ergibt sich die Querauslenkung w , die *Biegelinie*, zu $y = w_{\text{lin}}(x) = F_q / (6 EJ) \cdot l_0^3 (3x^2/l_0^3 - x^3/l_0^3)$ und damit die *Endauslenkung* $w_{d,\text{lin}} \equiv w_{\text{lin}}(x=d) = F_q / (3 EJ) \cdot l_0^3$. Durch die Zwangsbedingung und die damit verbundene Dehnung des Balkens wird jedoch eine starke, nichtlineare Rückstellkraft verursacht, die das Systemverhalten dominiert.

6.4.1.2 Finite-Elemente Modell und volles System

Das stationäre Verhalten des Modells wurde mit der Finite-Elemente Software PERMAS simuliert. Die dynamischen Ergebnisse beruhen auf Simulationen mit der Finite-Elemente Software ABAQUS der ABACOM Software GmbH (ABC).³

Der Biegebalken ist jeweils durch zehn Balkenelementen modelliert, das Modell hat damit $\hat{n} = 11$ Knoten. Die Knoten sind von der Einspannstelle (Knoten 0) bis zum rechten Ende (Knoten 10) aufsteigend durchnummeriert. Jeder Knoten beinhaltet drei Freiheitsgrade, nämlich die Auslenkungen in Längs- und Querrichtung, sowie einen Dreh-Freiheitsgrad. Unterdrückt sind die Freiheitsgrade an Knoten 0 (feste Einspannung), sowie die Auslenkung in Längsrichtung an Knoten 10 (Zwangsbedingung). Damit verbleiben $\hat{n} = 29$ Variablen für die Auslenkung, das volle System ist damit von Ordnung $n = 58$ (vergleiche Anhang (G)).

In der Auswertung wird im Wesentlichen die Biegelinie w , insbesondere die Endauslenkung w_d betrachtet, also die Auslenkungen der Knoten in Querrichtung. Die entsprechenden Freiheitsgrade werden analog zu den Knoten von der Einspannstelle bis zum rechten Ende von $\text{DOF} = 0$ (unterdrückter Freiheitsgrad; nicht Teil des Systems) bis $\text{DOF} = 10$ (Endauslenkung w_d) durchnummeriert. Formal wird wieder eine entsprechende Ausgangsmatrix definiert.

Die Querkraft F_q wird als Single-Input Eingangsmatrix \vec{B}_n modelliert, kontrolliert durch den Single-Input Eingangsvektor u . Die Randbedingungen sind homogen, eine virtuelle Last tritt daher nicht auf.

Auf der Grundlage des PERMAS-Modells wurden die stationären Zustände und Tangentenzustandsmatrizen für acht verschiedene Werte des Eingangs u berechnet, symmetrisch verteilt um den kräftefreien, unbelasteten Zustand $u = 0$, nämlich $u = \pm 1, \pm 3, \pm 6, \pm 10$. Zusätzlich wurde für den kräftefreien Zustand $u = 0$ die Tangentenzustandsmatrix als Bezugs-Tangentenzustandsmatrix für die Parametrisierung bestimmt. Auf Basis dieser Parametrisierungsdaten wurden mit den Methoden aus Abschnitt (5.2) die vollständigen Z1- und Z2-Tensoren des vollen Systems ermittelt; dabei wurde die Symmetrie des linken unteren Quadranten der Zustandsmatrix — also die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix — durch die Berücksichtigung von Nebenbedingungen sichergestellt.

In Abbildung (6.17) ist exemplarisch der Verlauf des Wertes eines Elements der Zustandsmatrix unter Last grafisch dargestellt. Die Übereinstimmung mit PERMAS Vergleichsrechnungen ist im gesamten dargestellten Bereich sehr gut. In der Abbildung sind nur die der

³ Ein entsprechendes PERMAS-Modul stand nicht zur Verfügung.

Parametrisierung zugrunde liegenden Werte dargestellt; weitere Vergleichsrechnungen wurden durchgeführt, jedoch nicht eingezeichnet, da in dem gewählten Maßstab Abweichungen zwischen dem PERMAS Matrixelement und dem Matrixelement des vollen Systems kaum erkennbar sind. In Abbildung (6.18) wird ein qualitativer Überblick über die vorkommenden Verläufe von Matrixelementen gegeben; durch die komplette Dokumentation der Wechselwirkung zwischen zwei Knoten wird dabei ein vollständiger Überblick über die auftretenden Verläufe ermöglicht.

6.4.2 Ordnungsreduktion

Das volle System der Ordnung $n = 58$ wird reduziert auf ein System der Ordnung $m = 4$.

Auch bei diesem Beispiel wird zunächst das Arnoldi-Verfahren verwendet. Hier erweist es sich als vorteilhaft, als Krylov-Raum *nicht* die in (4.52) vorgestellte Form zum Erreichen der nichtlinearen stationären Genauigkeit zu verwenden, sondern die ursprüngliche Form (3.73). Dadurch wird die Symmetrie des kräftefreien Zustands nicht durch die Auszeichnung einer Belastungszustands gebrochen, das reduzierte System beschreibt Auslenkungen in positiver und negativer Richtung gleich gut.

Außerdem wird wiederum das Guyan-Verfahren bemüht, um das Verhalten der Freiheitsgrade $DOF = 5$ und $DOF = 10$ sowie das der zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse zu beschreiben, also das Verhalten der Querauslenkung in der Mitte und am Ende des Balkens. Auch hier wird die Variante für lineare stationäre Genauigkeit bevorzugt, um die Symmetrie des kräftefreien Zustands zu erhalten.

6.4.2.1 Eigenwerte

In Abbildung (6.19) wird das Verhalten der beiden niedrigsten Eigenwerte des Systems betrachtet; genauer, das Verhalten der Imaginärteile der niedrigsten beiden Eigenwerte der Tangenzustandsmatrizen über der Endauslenkung, also die Kreisfrequenzen der niedrigsten Moden von infinitesimal kleinen Schwingungen um stationär ausgelenkte Zustände.

Für die reduzierten Systeme wird aufgrund der verwendeten Reduktionsstrategien erreicht, dass, wie beim vollen System, Eigenwerte als konjugiert komplexe Paare auftreten. Da die reduzierten Systeme die Ordnung $m = 4$ aufweisen, sind mit den beiden dargestellten Eigenwerten bereits alle wesentlich verschiedenen dokumentiert.

Zunächst ist die gute Übereinstimmung der Kreisfrequenzen des aus der Parametrisierung erhaltenen vollen Systems mit denen der zugrunde liegenden Finite-Elemente Matrizen bemerkenswert. Auch hier wurde die Übereinstimmung durch weitere Vergleichsrechnungen überprüft, jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.

Die beiden reduzierten Systeme sind in der Lage, zumindest den niedrigsten Eigenwert 1 näherungsweise korrekt wiederzugeben; dies ist für ein akzeptables dynamisches Verhalten unbedingt erforderlich. Für Eigenwert 2 ist die Approximationsgüte schon deutlich schlechter,

da bei den verwendeten Reduktionsverfahren eine korrekte Wiedergabe der Eigenwerte nicht im Vordergrund steht.

Die Realteile der Eigenwerte⁴, die die Dämpfung der entsprechenden Moden beschreiben, werden von dem Arnoldi-Verfahren ähnlich gut rekonstruiert, das Guyan-Verfahren schneidet hier jedoch deutlich schlechter ab — Die Auswirkungen auf das dynamische Verhalten werden in Abbildung (6.22) deutlich.

Die in Anhang (C) vorgestellte Reihenentwicklung der Eigenwerte (C.28) ist hier aufgrund des starken nichtlinearen Beitrags nicht anwendbar.

6.4.2.2 Frequenzantwort

Abbildung (6.20) demonstriert den Verlauf der in Anhang (C) vorgestellten nichtlinearen Verallgemeinerung des Übertragungsverhaltens des Systems, die auf einer Reihenentwicklung basiert.

Dargestellt ist die lineare Frequenzantwort $\vec{x}_{00\omega_0}$ der Endauslenkung w_d des Biegebalkens, sowie die zweiten Ordnung $\vec{x}_{20\omega_0}$ der Reihenentwicklung der nichtlinearen Frequenzantwort auf eine rein harmonisch Anregung mit der Anregungsfrequenz ω_0 . Die erste Ordnung der Reihenentwicklung tritt aus Symmetriegründen hier nicht auf. Es liegen die Gleichungen (C.19) und (C.21) zugrunde.

Es werden die verschiedenen System miteinander verglichen; Einzelheiten sind der Bildunterschrift zu entnehmen.

6.4.2.3 Stationärer Zustand

In Abbildung (6.21) wird die Biegelinie der verschiedenen Systeme miteinander verglichen, also die stationären Zustände der Querauslenkung. Dargestellt ist die Biegelinie für die Eingänge $u = \pm 1, \pm 4, \pm 7, \pm 10$.

Es ist insbesondere zu beachten, dass der nichtlineare Effekt für die dargestellten Zustände beträchtlich ist: Für die betragsmäßig größte dargestellte Last $u = 10$ beträgt die Endauslenkung im linearen Fall bereits unphysikalische $w_{d,\text{lin}} = 20$ mm, also das zweifache der Balkenlänge l_0 !

Auch in diesem Beispiel wird eine hervorragende Übereinstimmung des aus der Parametrisierung erhaltenen vollen Systems mit den Finite-Elemente Ergebnissen erzielt. Dies ist insbesondere bemerkenswert, weil die dargestellten Zustände nicht genau mit denen der Parametrisierungsdaten korrespondieren. Das volle System gibt also auch Zustände korrekt wieder, für die es *nicht* explizit optimiert ist.

Die Übereinstimmung der reduzierten Systeme ist sowohl für das Arnoldi-System, als auch für das Guyan-System sehr gut. Eine exakte Übereinstimmung im nichtlinearen Fall kann

⁴ Die Realteile sind in dieser Arbeit *nicht* grafisch dargestellt.

nicht erzielt werden, dafür wird die Biegelinie für positive und negative Eingänge gleichermaßen gut wiedergegeben: Die Symmetrie des kräftefreien Zustands macht sich hier in einer Antisymmetrie der Biegelinie *aller* Systeme (insbesondere auch der reduzierten) bezüglich des Eingangs bemerkbar.

6.4.2.4 Sprungantwort

In Abbildung (6.22) wird die Sprungantwort der Endauslenkung w_d des Systems auf einen Standardsprung gemäß (4.77) mit $t_0 = 0$ dargestellt.

Es sei angemerkt, dass im dynamischen Fall das korrekte Systemverhalten mindestens bis zur doppelten stationären Endauslenkung sichergestellt sein muss, um die Überschwinger korrekt wiederzugeben.

Sowohl für den linearen, als auch für den nichtlinearen Fall werden die Ergebnisse der verschiedenen Systeme miteinander verglichen:

Zunächst werden die Verläufe des vollen Systems mit Finite-Elemente Simulationen verglichen. Im linearen Fall sind die verbleibenden Abweichungen wohl auf die unterschiedlichen verwendeten Integrationsverfahren zurückzuführen, da die Systeme hier im Wesentlichen identisch sein sollten.⁵ Im nichtlinearen Fall ist die Übereinstimmung des aus der Parametrisierung erhaltenen vollen Systems mit der Finite-Elemente Simulation bemerkenswert!

Schließlich werden die Verläufe der reduzierten Systeme mit denen des vollen Systems verglichen. Die reduzierten Systeme geben im nichtlinearen Fall sowohl die deutlich geringere Amplitude als auch die höhere Eigenfrequenz der Schwingung korrekt wieder. Das Arnoldi-System kann darüberhinaus auch die Dämpfung richtig wiedergeben, so dass insgesamt eine hervorragende Approximation des nichtlinearen Systemverhaltens erzielt wird. Das Guyan-System weist bei der Wiedergabe der Dämpfung insbesondere im nichtlinearen Fall Schwächen auf.

Auch bei diesem mechanischen Beispiel wird durch die Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte bei der Ordnungsreduktion das Systemverhalten signifikant verbessert!

⁵ Das volle System beruht auf PERMAS-Simulationen, die Sprungantwort auf ABAQUS-Simulationen. Diese Inkonsistenz kann eine weitere Ursache für Abweichungen im dynamischen Fall darstellen, wenn auch die Qualität der Ergebnisse nicht auf einen solchen Effekt hinweist.

6.4 BIEGEBALKEN UNTER EINFLUSS EINER ZWANGSBEDINGUNG

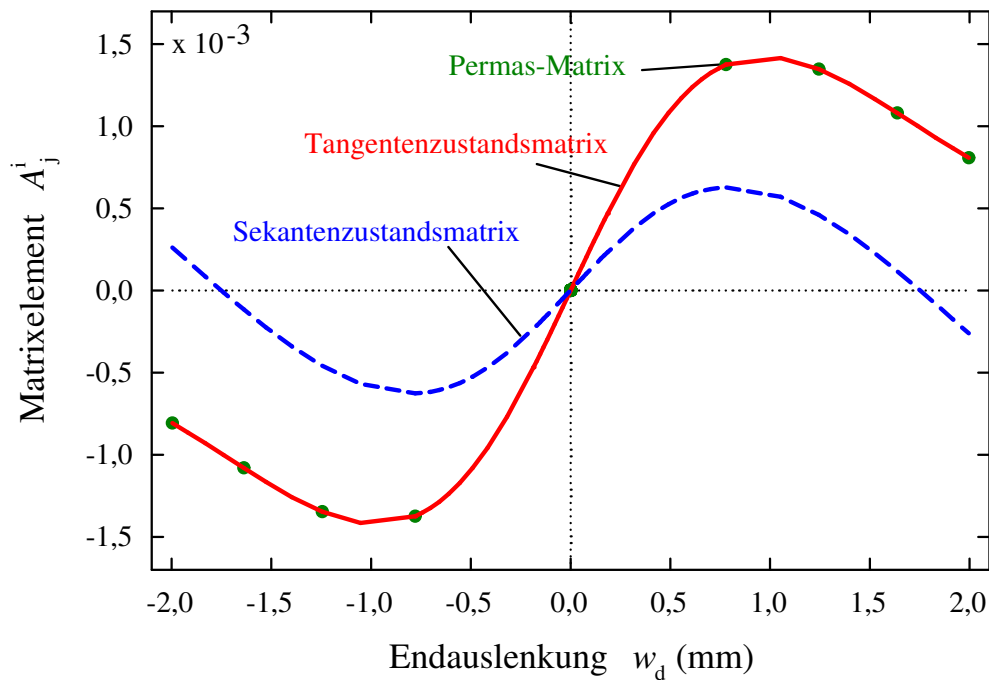


Abbildung 6.17: Exemplarischer Verlauf eines Elements der Zustandsmatrix des Biegebalkens unter Last

Wert eines Elements der Zustandsmatrix des Biegebalkens über der (nichtlinearen) Endauslenkung w_d . Das ausgewählte Element beschreibt die Koppelung zwischen dem Längs- und dem Quer-Freiheitsgrad von Knoten 8; es trägt in Abbildung (6.18) die Nummer 3 bzw. 7.

Dargestellt ist der Wert der $n_{\text{mod}} = 8$ für die Systemidentifikation verwendeten PERMAS Tangentenzustandsmatrizen $\tilde{A}_{l,j}^i$ mit $0 \leq l \leq n_{\text{mod}}$ (Punkte), der Tangentenzustandsmatrix \tilde{A}_j^i des vollen Systems (durchgezogen), sowie der daraus resultierenden Sekantenzustandsmatrix \bar{A}_j^i des vollen Systems (gestrichelt).

In Abbildung (6.18) sind qualitative Verläufe weiterer Elemente der Zustandsmatrix zusammengestellt.

Dort wird die Wechselwirkung der Freiheitsgrade von Knoten 8 untereinander und mit dem Nachbarknoten 9 vollständig dokumentiert, so dass alle wesentlichen im Modell auftretenden Verläufe exemplarisch vertreten sind. Diese Zusammenstellung verdeutlicht die Symmetrie der Zustandsmatrix (obere Hälfte der Abbildung, Übereinstimmung der Elemente 2-4, 3-7 und 6-8), die Symmetrieeigenschaften der einzelnen Elemente unter Lastumkehr (gerade / ungerade), sowie die Entstehung zunächst verschwindender Elemente unter Belastung (alle Elemente mit ungerader Symmetrie, sowie Elemente 6 und 8).

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

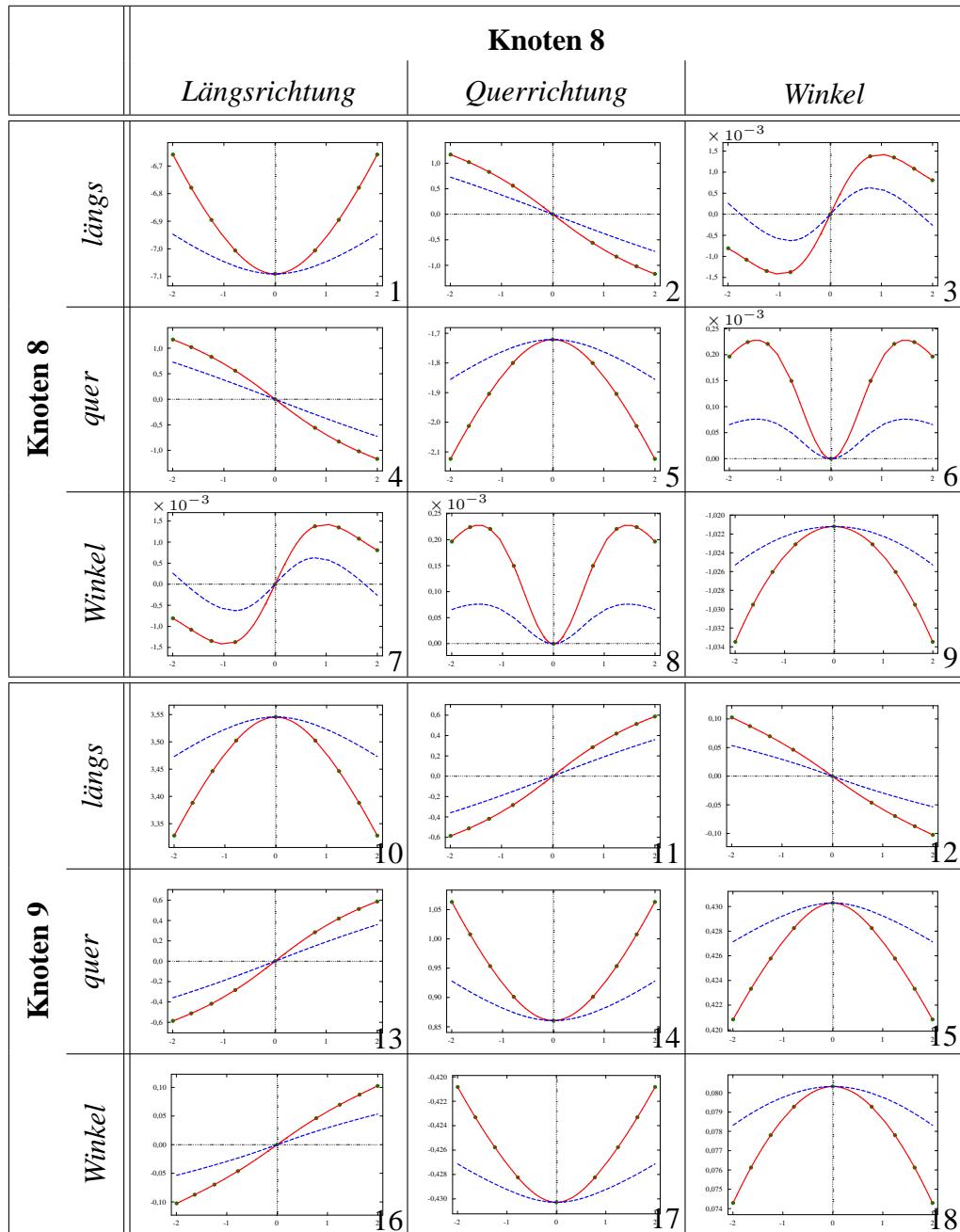


Abbildung 6.18: Überblick über den Verlauf der Elemente der Zustandsmatrix des Biegebalkens unter Last

Wert von Elementen der Zustandsmatrix des Biegebalkens über der (nichtlinearen) Endauslenkung w_d . Die dargestellten Elemente sind von 1 bis 18 durchnummeriert. Die Elemente 3, 6, 7 und 8 sind jeweils mit dem Faktor 10^3 multipliziert, um die Beschriftung der Ordinatenachse zu vereinfachen.

Eine ausführliche Legende ist Abbildung (6.17) zu entnehmen.

6.4 BIEGEBALKEN UNTER EINFLUSS EINER ZWANGSBEDINGUNG

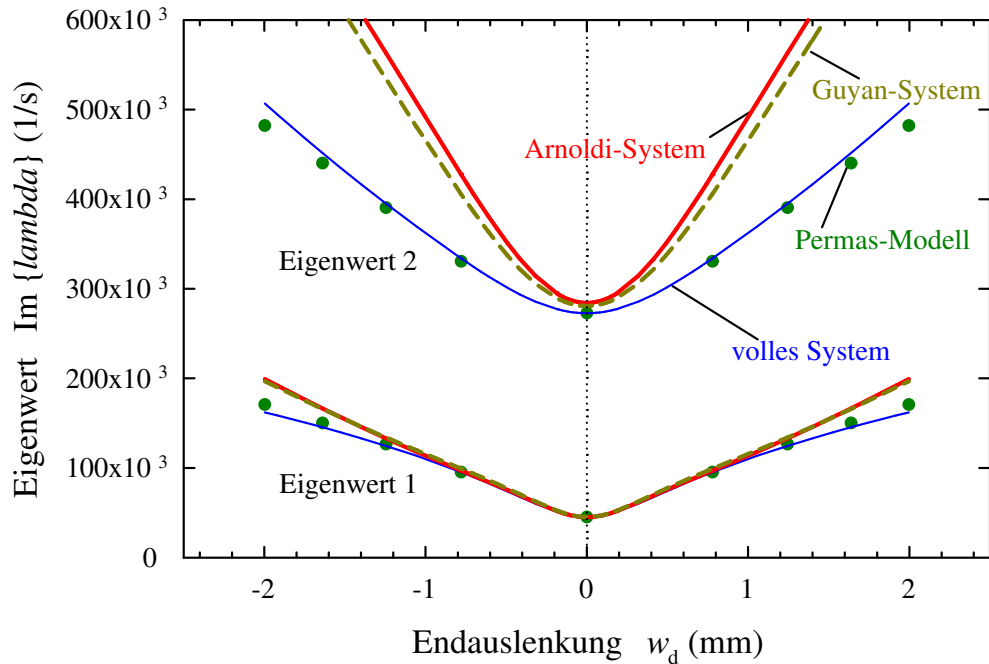


Abbildung 6.19: Imaginärteile der Eigenwerte der Tangenzustandsmatrizen des Biegebalkens

Imaginärteile der beiden niedrigsten Eigenwerte $\Im\{\lambda_i\}$ der Tangenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des Biegebalkens, also die Kreisfrequenzen der niedrigsten Moden von infinitesimal kleinen Schwingungen um stationär ausgelenkte Zustände, aufgetragen über der (nichtlinearen) Endauslenkung w_d .

Verglichen werden die Werte des PERMAS-Modells (Punkte) mit denen des vollen Systems (dünne durchgezogene Linien), sowie mit den Werten des Arnoldi- (dicke durchgezogene Linie) und des Guyan-Systems (gestrichelte dicke Linie). Für den niedrigsten Eigenwert $i = 1$ liegen die Verläufe des Arnoldi- und Guyan-Systems praktisch übereinander, so dass sie optisch hier nur als eine Linie erscheinen.

Die Übereinstimmung des vollen Systems mit dem PERMAS-System ist sehr gut; die reduzierten Systeme geben den Imaginärteil von Eigenwert 1 insbesondere für kleine Auslenkungen gut wieder, den Imaginärteil von Eigenwert 2 jedoch nur eingeschränkt bei sehr kleinen Auslenkungen.

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

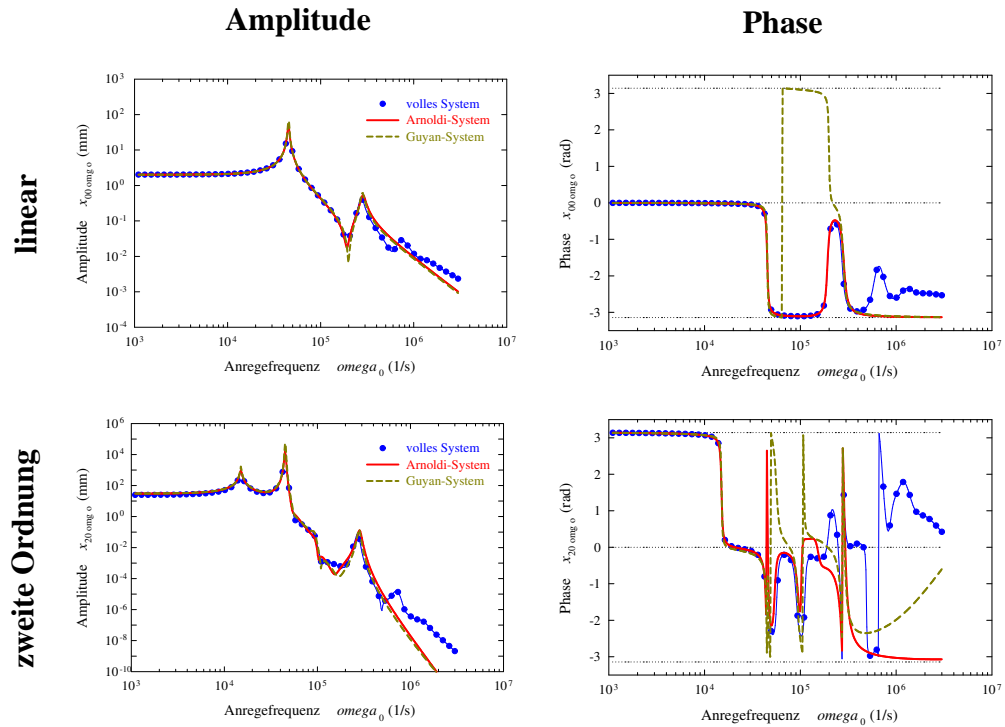


Abbildung 6.20: Frequenzantwort der Endauslenkung des Biegebalkens auf eine rein harmonische Anregung

Amplituden und Phasen der linearen Frequenzantwort $\vec{x}_{00\omega_0}$ der Endauslenkung w_d des Biegebalkens, sowie der zweiten Ordnung $\vec{x}_{20\omega_0}$ der Reihenentwicklung der nichtlinearen Frequenzantwort auf eine rein harmonisch Anregung, aufgetragen über der Anregfrequenz ω_0 . Die erste Ordnung der Reihenentwicklung tritt aus Symmetriegründen hier nicht auf. Es liegen die Gleichungen (C.19) bis (C.21) zugrunde.

Dargestellt sind die Verläufe des vollen Systems (dünne durchgezogene Linien mit Punkten), sowie die des Arnoldi- (dicke durchgezogene Linien) und des Guyan-Systems (dicke gestrichelte Linien), wobei für die reduzierten Systeme die Verläufe zunächst mittels (3.32) in den Zustandsraum des vollen Systems zurücktransformiert wurden. Für die Phasen sind die Grenzen des Wertebereichs $\pm\pi$ markiert (horizontale gepunktete Linien).

Die Übereinstimmung der reduzierten Systeme mit dem vollen System ist im niedrigen Frequenzbereich sehr gut. Ab etwa $\omega_0 = 100 \cdot 10^3$ 1/s (linear) bzw. $\omega_0 = 40 \cdot 10^3$ 1/s (zweite Ordnung) weicht das Guyan-System vom vollen System ab, was sich zunächst durch Phasensprünge bemerkbar macht. Das Arnoldi-System zeigt bis etwa dreifach höhere Anregfrequenzen eine gute Übereinstimmung mit dem vollen System.

Es sei hier noch hervorgehoben, dass im Fall höherer Ordnungen die Antwortfrequenzen *nicht* mit der Anregfrequenz übereinstimmen, sondern Vielfache der Anregfrequenz sind (im Fall der zweiten Ordnung das dreifache; vergleiche Gleichung (C.21)).

6.4 BIEGEBALKEN UNTER EINFLUSS EINER ZWANGSBEDINGUNG

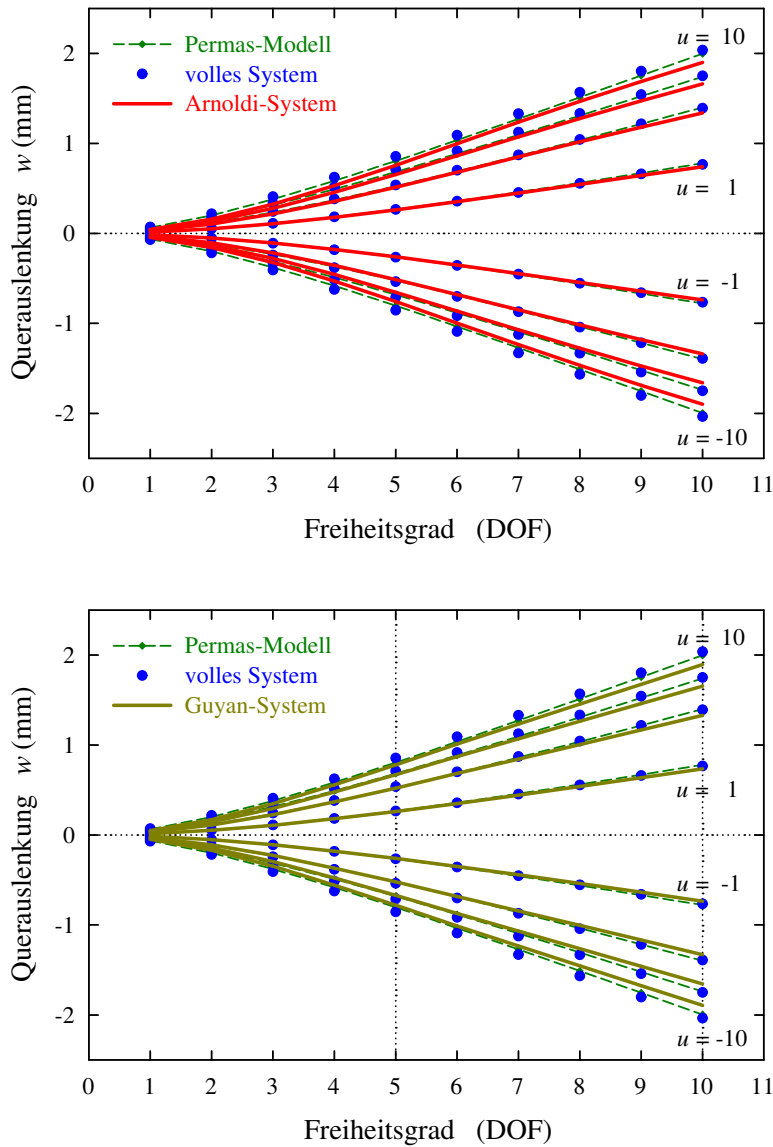


Abbildung 6.21: Stationäre Zustände der Querauslenkung des Biegebalkens (Biegelinie)

Biegelinie w des Biegebalkens für die Knoten 1 bis 10 (stationäre Zustände für die Freiheitsgrade $\text{DOF} = 1$ bis $\text{DOF} = 10$) für acht verschiedene Eingänge $u = \pm 1, \pm 4, \pm 7, \pm 10$.

Dargestellt sind die Ergebnisse des PERMAS-Modells (dünne gestrichelte Linien), die Ergebnisse des vollen Systems (Punkte) und die Ergebnisse der reduzierten Systeme (dicke durchgezogene Linien) für das Arnoldi-Verfahren (oberes Diagramm) und für das Guyan-Verfahren (unteres Diagramm). Im Fall des Guyan-Verfahrens wurden die Master-Freiheitsgrade markiert (vertikale gepunktete Linien).

Die Querauslenkung aller Systeme ist antisymmetrisch bezüglich des Eingangs.

6 ANWENDUNGSBEISPIELE

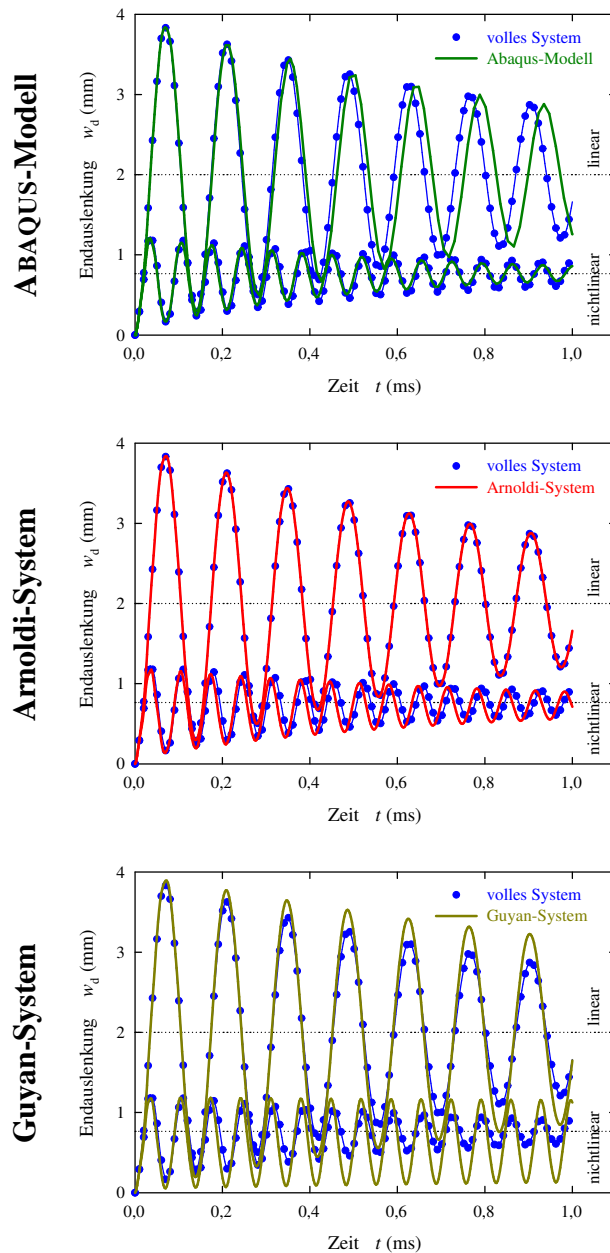


Abbildung 6.22: Sprungantwort der Endauslenkung des Biegebalkens

Verlauf der Endauslenkung w_d des Biegebalkens (Freiheitsgrad $\text{DOF} = 10$) über der Zeit t für einen Standardsprung mit $t_0 = 0$ gemäß (4.77).

Dargestellt sind jeweils die linearen Verläufe (vergleichsweise große Auslenkungen) und die nichtlinearen Verläufe (vergleichsweise kleine Auslenkungen). Das volle System (dünne Linien mit Punkten) wird verglichen mit einem Finite-Elemente Modell und reduzierten Systemen (dicke Linien): Mit ABAQUS-Simulationen (oberes Diagramm), sowie den Ergebnissen des Arnoldi- bzw. Guyan-Systems (mittleres bzw. unteres Diagramm). Die asymptotisch erreichten stationären Endauslenkungen (des vollen Systems) sind markiert (horizontale gepunktete Linien).

7 Diskussion

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Darüberhinaus wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der vorgestellten Methoden gegeben.

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Methoden der Ordnungsreduktion für geometriebasierte Modelle entwickelt, beispielsweise für Finite-Elemente oder Finite-Differenzen Modelle, wobei insbesondere schwache Nichtlinearitäten in die Betrachtung mit einbezogen wurden, wie etwa Materialnichtlinearitäten, geometrische Nichtlinearitäten oder physikalisch intrinsisch nichtlineare Wechselwirkungen.

In der gesamten Arbeit — im linearen wie im nichtlinearen Fall — wurde die Zustandsraumdarstellung von Differentialgleichungssystemen verwendet. Hierbei wurde bei fast allen Betrachtungen eine nichttriviale Trägheitsmatrix mit einbezogen, da eine solche insbesondere im Fall von Finite-Elemente Modellen auftritt. Die lineare Normalform wurde um Terme erweitert, die eine einheitliche Parametrisierung schwacher Nichtlinearitäten gestatten.

Um die Anwendbarkeit der Methoden der Ordnungsreduktion auch auf mit kommerziellen Programmpaketen erstellten Originalmodellen zu gewährleisten, wurden darüberhinaus Methoden zur Parametrisierung von Nichtlinearitäten durch die in dieser Arbeit verwendeten Normalform auf der Basis linearisierter Modelle in verschiedenen Arbeitspunkten entwickelt.

Die vorgestellten Methoden wurden an mehreren, zum Teil industrierelevanten Beispielen aus verschiedenen Bereichen der Physik demonstriert.

Damit steht für geometriebasierte Modelle ein Gesamtverfahren der Modellreduktion im Sinne von Abbildung (1.1) auf Seite 5 zur Verfügung.

7.1.1 Verfahren der Ordnungsreduktion

Es wurden mehrere Methoden der Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme betrachtet:

- das nichtlineare Arnoldi-Verfahren,
- das nichtlineare Gyan-Verfahren,
- die adiabatische Elimination schnell relaxierender Variablen, sowie
- die nichtlineare Frequenzgangs Anpassung.

Die ersten beiden Verfahren, das Arnoldi- und das Gyan-Verfahren, beruhen auf einer projektiven Reduktion der Zustandsgleichung, die das Übertragungsverhalten des linearisierten

7 DISKUSSION

vollen Systems im niederfrequenten Bereich durch das reduzierte System approximieren. Die trotz der sehr unterschiedlichen Darstellung vorhandenen formalen Ähnlichkeiten dieser beiden Verfahren wurden im Rahmen des projektiven Ansatz der Ordnungsreduktion herausgearbeitet. Die Einsatzmöglichkeiten und Eigenschaften dieser beiden Verfahren sind in Tabelle (7.1) noch einmal zum Vergleich zusammengestellt.

Das in der Literatur bereits bekannte Arnoldi-Verfahren wurde erläutert und im nichtlinearen Fall an die betrachtete Systemklasse angepasst. Es wurde ein Vorgehen vorgeschlagen, das nichtlineare stationäre Genauigkeit in einem typischen Lastbereich erzielt. Darüberhinaus wurde eine Möglichkeit angegeben, wie stationäre Randbedingungen ohne eine Arbeitspunktverschiebung berücksichtigt werden können.

Dem Arnoldi-Verfahren wurde als Alternative das Guyan-Verfahren zur Seite gestellt, das aufgrund anderer Charakteristika eine Ergänzung im Bereich der projektiven Verfahren darstellt. Das Guyan-Verfahren, das ursprünglich für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung entwickelt wurde, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf die Zustandsraumdarstellung übertragen, wobei die ursprüngliche Energiebetrachtung durch die Betrachtung der Übertragungseigenschaften ersetzt wurde. Auch für das Guyan-Verfahren wurde eine Anpassung vorgeschlagen, die unter gewissen Voraussetzungen nichtlineare stationäre Genauigkeit in einem typischen Lastbereich ermöglicht.

Tabelle 7.1: Vergleich der projektiven Verfahren der Ordnungsreduktion

Das Arnoldi-Verfahren und das Guyan-Verfahren werden unter verschiedenen Aspekten miteinander verglichen. Dabei steht die Eignung der Verfahren in Bezug auf die Charakteristika des vollen Systems sowie in Bezug auf die Anforderungen an das reduzierte System im Vordergrund.

<i>Charakteristik / Anforderung</i>	<i>Arnoldi</i>	<i>Guyan</i>
Eignung für Multi Input-System	schlecht geeignet	gut geeignet
Eignung für stark besetzte Eingangsmatrix	gut geeignet	schlecht geeignet
Eignung für stationäre Randbedingungen	gut geeignet	schlecht geeignet ^a
Einflussnahme auf das Reduktionsverhalten	nein	ja
Lineare stationäre Genauigkeit	erfüllt ^b	erfüllt ^b
Nichtlineare stationäre Genauigkeit	erreichbar ^c	bedingt erreichbar ^{c,a}
Dynamisches Verhalten	sehr gut	mäßig
Rekonstruktion des vollen Zustandsvektors	sehr gut	näherungsweise ^a
Strukturerhaltung	nein	ja

^aproblematisch bei stark besetzter Eingangsmatrix

^bfalls keine nichtlineare stationäre Genauigkeit angestrebt wird

^cfür eine bestimmte Last

Die adiabatische Elimination schnell relaxierender Variablen stellt eine Übertragung von Methoden aus der Synergetik dar und erlaubt auch die Behandlung von Systemen, deren linearer Systemanteil instabil ist. Das Verfahren beruht auf einer modalen Darstellung des linearen Systemanteils und erfordert zunächst eine Eigentransformation, so dass die berücksichtigten nichtlinearen Systemanteile als vollbesetzt vorauszusetzen sind. Dies stellt hohe Anforderungen an die rechentechnischen Möglichkeiten und schränkt die Ordnung der behandelbaren vollen Systeme ein.

Die Frequenzgangs Anpassung schließlich stellt eine Übertragung des Verfahrens für lineare Systeme auf eine störungstheoretische Behandlung schwach nichtlinearer Systeme dar. Sie approximiert eine Verallgemeinerung der Übertragungsfunktion des nichtlinearen vollen Systems durch das reduzierte System.

7.1.2 Parametrisierung von Nichtlinearitäten

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Methoden entwickelt, die die Parametrisierung von Nichtlinearitäten durch die verwendete spezielle Normalform anhand linearisierter Systeme in verschiedenen Arbeitspunkten ermöglicht. Diese Verfahren ermöglichen insbesondere die Ordnungsreduktion von Systemen, die auf Simulationen mit kommerziellen Finite-Elemente Programmpaketen beruhen. Sie wurden auf die Module zur Ausgabe linearisierter Systeme des Programmpakets PERMAS der INTES GmbH zugeschnitten.

Abgesehen von verschiedenen Varianten, die unterschiedliche Symmetriebedingungen der zu identifizierenden Tensoren und unterschiedliche Definitionen der Linearisierungsvorschrift zugrunde legen, wurden im wesentlichen zwei Klassen von Parametrisierungen entwickelt:

- die Bestimmung vollständiger Tensoren und
- die Bestimmung vereinfachter Tensoren aufbauend auf einem Matrizenansatz.

Die Bestimmung vollständiger Tensoren verwendet direkt die spezielle Normalform zur Identifikation, es werden zunächst keine weiteren einschränkenden Annahmen zugrundegelegt. Dadurch wird eine Vielzahl von Koppelungen zugelassen, die abhängig von der Bandbreite der zur Identifikation verwendeten Matrizen einen beträchtlichen Identifikationsaufwand erfordern. Diese Verfahren sind daher nur für Systeme geringer Bandbreite, das sind im Wesentlichen eindimensionale Systeme, geeignet.

Die Bestimmung vereinfachter Tensoren basiert auf einer speziellen Parametrisierung der Z_s -Tensoren, dem Matrizenansatz, der die möglichen Koppelungen stark einschränkt. Dadurch wird eine deutliche Verringerung des Identifikationsaufwands erreicht: der Aufwand skaliert nicht mehr mit der Bandbreite der Matrizen. Das Verfahren ist damit auch für mehrdimensionale Systeme geeignet und lieferte trotz der in dieser Arbeit realisierten, vereinfachten Implementierung gute Ergebnisse bei der Simulation der Wärmeausbreitung.

7.1.3 Anwendungsbeispiele

Die Anwendbarkeit der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden wurden an mehreren Beispielen aus unterschiedlichen physikalischen Domänen demonstriert: Es wurde

- die Wärmeausbreitung unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten und der intrinsisch nichtlinearen Wärmestrahlung,
- die Diffusion magnetischer Felder in elektrisch leitender Materie unter Berücksichtigung einer starken Materialnichtlinearität, sowie
- die Biegung eines einseitig eingespannten Balkens unter Berücksichtigung einer nichtlinearen Randbedingung (und geometrischer Nichtlinearitäten)

behandelt.

Die Wärmeausbreitung beruht auf PERMAS-Modellen. Aus diesem Bereich werden zwei Beispiele diskutiert, zum einen das akademische Beispiel der Wärmeausbreitung in einem Stab, zum anderen das industrierelevante Beispiel der Wärmeausbreitung in einem Abgas-Sensor. Die beiden Beispiele weisen die Anwendbarkeit des Matrizenansatz zur Bestimmung vereinfachter Tensoren auf mittels kommerzieller Finite-Elemente Programmpakete erstellter Modelle nach. Außerdem wird der Einfluss stationärer Randbedingungen verdeutlicht. Am Beispiel der Wärmeausbreitung im Stab werden die Anwendbarkeit und die unterschiedlichen Charakteristika des Arnoldi- und des Guyan-Verfahrens demonstriert. Das Beispiel der Wärmeausbreitung im Abgas-Sensor zeigt die Anwendbarkeit der Methoden auch auf industrierelevante Modelle: Das zugrunde liegende, mittelgroße Finite-Elemente Originalmodell entstammt einer Studie zur Optimierung der Geometrieparameter, es wurde nicht speziell für Anwendungen der Ordnungsreduktion erstellt.

Das Beispiel der Felddiffusion beruht auf einem Finite-Differenzen Modell. Es vergleicht das Arnoldi- und das Guyan-Verfahren unter dem Gesichtspunkt der möglichen Einflussnahme auf das Verhalten des reduzierten Systems. Hier weist das Guyan-Verfahren aufgrund seiner größeren Flexibilität bei einigen Aspekten Vorteile gegenüber dem Arnoldi-Verfahren auf: durch die geeignete Auswahl der Master-Freiheitsgrade wird insbesondere eine gute Wiedergabe des Systemverhaltens auch auf kurzen Zeitskalen erzielt.

Das mechanische Beispiel der Biegung eines Balkens beruht ebenfalls auf PERMAS-Modellen. Auch hier werden das Arnoldi- und das Guyan-Verfahren miteinander verglichen. Hier steht der Nachweis der Anwendbarkeit der Ordnungsreduktion auch auf mechanische Problemstellungen und damit Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung im Vordergrund. Außerdem wird die Parametrisierung durch Bestimmung vollständiger Tensoren demonstriert. Darüberhinaus werden anhand dieses Beispiels zusätzliche Systemeigenschaften diskutiert, die bei schwingungsfähigen Systemen ein reichhaltigeres Verhalten aufweisen als bei Diffusionsprozessen.

7.2 Ausblick

Auf dem Gebiet der Ordnungsreduktion nichtlinearer Differentialgleichungssysteme finden sich vielerlei Ansatzpunkte für weitere Arbeiten.

Ausgehend von dieser Arbeit, können zunächst durch weitere Anwendungsbeispiele der vorgestellten Methoden in den bereits diskutierten und weiteren physikalischen Domänen die Wirksamkeit der Methoden untermauert bzw. Unzulänglichkeiten aufgedeckt werden. Insbesondere Erweiterungen der speziellen Normalform beispielsweise um Verallgemeinerungen des Bilineartensors sind zu prüfen. Speziell im wichtigen Fall mechanischer Modelle steht die Demonstration der Anwendbarkeit der hier vorgestellten Methoden im Fall von industrierelevanten Problemen noch aus.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden der adiabatischen Elimination schnell relaxierender Variablen sowie der nichtlinearen Frequenzgangs Anpassung wurden bisher lediglich auf einfache Testsysteme angewendet. Es ist zu demonstrieren, unter welchen Bedingungen diese Methoden gegenüber den bereits ausgiebiger erprobten Verfahren Vorteile aufweisen. Auch beinhalten diese Verfahren noch Potenzial für Weiterentwicklungen, beispielsweise in Hinblick auf Nichtlinearitäten höherer Ordnung.

Der Matrizenansatz zur Bestimmung vereinfachter Tensoren wurde bisher nicht in seiner allgemeinsten Form implementiert. Trotzdem lieferte seine Anwendung sehr gute Ergebnisse, so dass eine vollständige Umsetzung des Ansatzes und eine weitergehende Untersuchung seiner Einsatzmöglichkeiten und Grenzen sinnvoll erscheint, insbesondere in Verbindung mit nichttrivialen mechanischen Modellen.

Insgesamt ist für Finite-Elemente Anwendungen bei dem Problem der Parametrisierung von Nichtlinearitäten bzw. bei der allgemeineren Fragestellung der Darstellung von Nichtlinearitäten mit dieser Arbeit ein Punkt erreicht, an dem eine verstärkte Zusammenarbeit mit Herstellern von Finite-Elemente Programmpaketen sinnvoll erscheint. Auf diese Weise können geeignete Schnittstellen zwischen Finite-Elemente Programmpaketen und den Routinen der Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme erstellt werden.

Für volle Systeme mit sehr hoher Systemordnung sind herkömmliche Methoden zum Lösen linearer Gleichungssysteme zu aufwändig für die bei der Ordnungsreduktion benötigten Matrizeninversionen. Hier kann der Einsatz iterativer Methoden zum Lösen von Gleichungssystemen unter Verwendung geeigneter Prädiktionier Vorteile bringen. Der Formalismus der Prädiktionier weist Ähnlichkeiten mit den in dieser Arbeit betrachteten Eich- und Koordinatentransformationen auf. Eine Untersuchung dieses Zusammenhangs kann zu einer Weiterentwicklung der projektiven Reduktionsmethoden insbesondere in Hinblick auf ihre numerischen Eigenschaften führen. Das Arnoldi-Verfahren wurde für lineare Systeme in (Gri97) bereits unter diesem Aspekt betrachtet.

Insbesondere für Materialnichtlinearitäten und vergleichsweise einfache Geometrien bietet diese Arbeit auch Ansätze für *parametrische* reduzierte Modelle, also reduzierte Modelle, bei denen wichtige Modellparameter als freie Parameter des reduzierten Modells im Nachhinein variiert werden können. Die zugrunde liegenden geometrischen Verhältnisse werden

7 DISKUSSION

dabei weiterhin durch die Nichtlinearitätstensoren des reduzierten Systems beschrieben; die freien Parameter spielen dann die Rolle von Vorfaktoren dieser Tensoren. Solche parametrische reduzierte Modelle können als Ausgangspunkt einer Parameteroptimierungen dienen. Eine andere Anwendung dieser Methode wäre die Erstellung einer Bibliothek reduzierter Modelle, beispielsweise für die Felddiffusion, genauer für verschiedene Diffusionsblöcke mit unterschiedlichen Randbedingungen, mit den Materialparametern und geometrischen Blockgrenzen als Parametern.

Die Ordnungsreduktion von Nichtlinearitäten, die sich nicht oder nur schwer durch eine Potenzreihe parametrisieren lassen, erfordert eine eingehende Untersuchung; diese Fragestellung ist noch weitgehend offen.

Teilweise können die erforderlichen Arbeitsbereiche eventuell durch mehrere Modelle mit abschnittsweise polynominalen Kennlinien in verschiedenen Arbeitspunkten überdeckt werden, die dann jeweils mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden bearbeitet werden können. Dabei erscheint insbesondere der Übergang zwischen den Modellen problematisch. Insbesondere ist zu prüfen, ob eine Überdeckung mit wenigen nichtlinearen Modellen gegenüber einer Überdeckung mit mehreren linearen Modellen vorzuziehen ist. Auch für diese Vorgehensweise bietet sich die Felddiffusion mit ihrer stark nichtlinearen Materialkennlinie als Pilotanwendung an.

Schließlich ist zu prüfen, in wieweit andere Ansätze zur Darstellung insbesondere der nichtlinearen Anteile des Systems für eine Ordnungsreduktion geeignet sind, ob also eine andere Normalform für bestimmte Klassen von Nichtlinearitäten vorteilhaft ist.

Letztlich stellt sich hier jedoch die Frage nach Methoden der Ordnungsreduktion *starker* Nichtlinearitäten.

A Transformationen linearer Systeme

Gegeben sei das lineare System (3.1), (3.2),

$$\mathbf{J} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u} , \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{y} = \mathbf{C} \vec{x} + \mathbf{D} \vec{u} , \quad (\text{A.2})$$

mit p Eingängen, q Ausgängen und n Zuständen und regulärer Trägheits- und Zustandsmatrix \mathbf{J} und \mathbf{A} .

Es werden lineare Transformationen vorgestellt, die zu einem System mit gleichem Systemverhalten, aber unterschiedlicher Darstellung der Matrizen führen. Diese Transformationen werden durch reguläre $\binom{n}{n}$ -Matrizen vermittelt. Die Transformationsmatrizen werden in dieser Arbeit mit dem Namen der zugrunde liegenden Transformation bezeichnet.

In Abschnitt (A.1) und (A.2) werden Eich- und Koordinatentransformation vorgestellt, die in Abschnitt (A.3) zur Ähnlichkeitstransformation zusammengefügt werden. In Abschnitt (A.4) wird die Äquivalenztransformation als wichtiger Spezialfall der Ähnlichkeitstransformation eingeführt. Abschnitt (A.5) diskutiert das Eigenwertproblem in der für diese Arbeit benötigten Form, bevor in Abschnitt (A.6) die in der Regelungstechnik bedeutende balancierte Darstellung eines linearen Systems vorgestellt wird.

A.1 Eichtransformation

Für die Zustandsgleichung (A.1) liegt eine Eichfreiheit vor, eine Freiheit in der Systemdarstellung, die durch Linksmultiplikation von (A.1) mit einer regulären, jedoch ansonsten frei wählbaren *Eichtransformation* $\mathbf{T}_e \binom{n}{n}$ vermittelt wird: Mit den transformierten Matrizen

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{J} , \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{A} , \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

ist die forminvariante Darstellung

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\vec{x}} = \tilde{\mathbf{A}} \vec{x} + \tilde{\mathbf{B}} \vec{u} \quad (\text{A.4})$$

der Zustandsgleichung äquivalent zur Darstellung (A.1).

Insbesondere die Übertragungsfunktionen der Zustands- und Ausgangsgrößen nach (3.7) und (3.8) bleiben unter Eichtransformationen unverändert erhalten, der frequenzabhängige Anteil (3.6) transformiert wie Zustandsmatrizen:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_e \mathbf{F} , \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} , \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} . \quad (\text{A.5})$$

A TRANSFORMATIONEN LINEARER SYSTEME

In der Regelungstechnik wird die Trägheitsmatrix meist als Identität vorausgesetzt,

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_n . \quad (\text{A.6})$$

Diese Darstellung wird in dieser Arbeit als *Standardzeichnung* bezeichnet. Sie kann bei Bedarf durch eine Eichtransformation mit

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{J}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

für jedes in dieser Arbeit betrachtete System herbeigeführt werden.

A.2 Koordinatentransformation

Nun wird eine *Koordinatentransformation* \mathbf{T}_k (n) im Zustandsraum betrachtet, die den Zustandsvektor \vec{x} über die Relationen

$$\tilde{\vec{x}} = \mathbf{T}_k \vec{x} , \quad \vec{x} = \mathbf{T}_k^{-1} \tilde{\vec{x}} \quad (\text{A.8})$$

mit seiner transformierten Darstellung $\tilde{\vec{x}}$ verknüpft. Durch Einsetzen in die Systemgleichungen ist unmittelbar ersichtlich, dass mit den transformierten Matrizen

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{J} \mathbf{T}_k^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \mathbf{T}_k^{-1} , & \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{T}_k^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{B} , & \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

das forminvariante transformierte System

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\tilde{\vec{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\vec{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \vec{u} , \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{y} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\vec{x}} + \tilde{\mathbf{D}} \vec{u} \quad (\text{A.11})$$

zu (A.1), (A.2) äquivalent ist. Jedoch hat sich hier die Interpretation des Zustandsvektors geändert!

Das Transformationsverhalten der Übertragungsfunktionen der Zustands- und Ausgangsgrößen nach (3.7) und (3.8) sowie der frequenzabhängige Anteil (3.6) transformieren wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{T}_k^{-1} , \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{T}_k \mathbf{G} , \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} . \quad (\text{A.12})$$

A.3 Äquivalenztransformation

Diese beiden Bestandteile, die Eichtransformation \mathbf{T}_e und die Koordinatentransformation \mathbf{T}_k im Zustandsraum, lassen sich zu der allgemeineren *Äquivalenztransformation* kombinieren. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass mit den transformierten Matrizen

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{J} \mathbf{T}_k^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{A} \mathbf{T}_k^{-1} , & \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{T}_k^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_e \mathbf{B} , & \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

das forminvariante transformierte System

$$\tilde{\mathbf{J}} \tilde{\vec{x}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\vec{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \vec{u} , \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{y} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\vec{x}} + \tilde{\mathbf{D}} \vec{u} \quad (\text{A.15})$$

zu (A.1), (A.2) äquivalent ist.

Das Transformationsverhalten der Übertragungsfunktionen der Zustands- und Ausgangsgrößen nach (3.7) und (3.8) sowie dasjenige des frequenzabhängigen Anteils (3.6) ist wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_e \mathbf{F} \mathbf{T}_k^{-1} , \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{T}_k \mathbf{G} , \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} . \quad (\text{A.16})$$

Im allgemeineren nichtlinearen Fall transformieren sich bei Tensoren der Zustandsgleichung obere Indizes mit \mathbf{T}_e , untere Indizes, die über den Zustandsvektor kontrahiert werden, mit \mathbf{T}_k^{-1} .

A.4 Ähnlichkeitstransformation

Für lineare Systeme in Standardform, also

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_n , \quad (\text{A.17})$$

spielt die *Ähnlichkeitstransformation* eine große Rolle. Diese ist eine Äquivalenztransformation mit

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{T} , \quad \mathbf{T}_k = \mathbf{T} . \quad (\text{A.18})$$

Der Zustandsvektor transformiert analog zu (A.8) über

$$\tilde{\vec{x}} = \mathbf{T} \vec{x} , \quad \vec{x} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\vec{x}} . \quad (\text{A.19})$$

Die Ähnlichkeitstransformation hat insbesondere die Eigenschaft, innerhalb der Standardform invariant zu sein, die Standardform im transformierten System also zu erhalten:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{I}_n . \quad (\text{A.20})$$

Für die übrigen Systemmatrizen ergeben sich aus (A.13) die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} , & \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T} \mathbf{B} , & \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} . \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

Auch hier sei das Transformationsverhalten der Übertragungsfunktionen der Zustands- und Ausgangsgrößen nach (3.7) und (3.8) sowie dasjenige des frequenzabhängigen Anteils (3.6) angegeben:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{T}^{-1} , \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{T} \mathbf{G} , \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} . \quad (\text{A.22})$$

In diesem Fall transformiert die Übertragungsfunktion der Zustandsgrößen also wie die Zustandsgrößen selbst.

A.5 Eigenwertproblem

Für das dynamische Verhalten eines linearen Systems sind die *Eigenwerte* λ_i mit den zugehörigen *Rechtseigenvektoren* \vec{r}_i und *Linkseigenvektoren* \vec{l}_i des Matrixpaars \mathbf{A}, \mathbf{J} von fundamentaler Bedeutung.

Gesucht sind nichttriviale Lösungen der Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \vec{r}_i &= \lambda_i \vec{r}_i & \mathbf{J} \vec{r}_i &= \lambda_i \vec{r}_i, \\ \vec{l}_i^T \mathbf{A} &= \lambda_i \vec{l}_i^T & \vec{l}_i^T \mathbf{J} &= \lambda_i \vec{l}_i^T, \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{J} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^T \quad \mathbf{L}^T \mathbf{J} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^T. \quad (\text{A.24})$$

Dabei ist $\mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} n_e \\ n_e \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i als Diagonalelementen, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}_{i=1}^{n_e}(\lambda_i)$. Die Eigenwerte werden meist nach ihren Realteilen absteigend in $\mathbf{\Lambda}$ angeordnet,

$$\Re\{\lambda_1\} \geq \dots \geq \Re\{\lambda_{n_e}\}, \quad (\text{A.25})$$

wodurch im Fall stabiler Systeme mit $\Re\{\lambda_i\} < 0$ die „langsamen“ Eigenwerte eine kleine Nummer erhalten. $\mathbf{R} \begin{pmatrix} n \\ n_e \end{pmatrix}$ ist eine Matrix mit den Rechtseigenvektoren \vec{r}_i als Spalten, $R_i^j = r_i^j$, $\mathbf{L} \begin{pmatrix} n \\ n_e \end{pmatrix}$ eine Matrix mit den Linkseigenvektoren \vec{l}_i als Spalten, $L_i^j = l_i^j$. Außerdem ist n_e mit $1 \leq i \leq n_e \leq n$ die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren des Matrixpaars; damit haben die Matrizen der Eigenvektoren insbesondere Höchststrang $\text{rank}(\mathbf{L}) = n_e$, $\text{rank}(\mathbf{R}) = n_e$.

Nichttriviale Lösungen von (A.23) bzw. (A.24) erhält man genau dann, wenn die *charakteristische Determinante* verschwindet,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J}) = 0. \quad (\text{A.26})$$

die Eigenwerte ergeben sich damit als Nullstellen der charakteristischen Determinante, die Eigenvektoren dann aus den linearen Gleichungssystemen (A.23) und (A.24).

Aus den Definitionsgleichungen (A.23), (A.24) ist ersichtlich, dass die Linkseigenvektoren des Matrixpaars \mathbf{A}, \mathbf{J} gleich den Rechtseigenvektoren des transponierten Matrixpaars $\mathbf{A}^T, \mathbf{J}^T$ sind.

Unterzieht man (A.23), (A.24) einer Äquivalenztransformation, so erkennt man an (A.26) zunächst, dass die Eigenwerte unverändert erhalten bleiben, also Invarianten der Äquivalenztransformation darstellen. Außerdem ergeben sich die Ausdrücke

$$\widetilde{\vec{r}}_i = \mathbf{T}_k \vec{r}_i, \quad \widetilde{\vec{l}}_i = \mathbf{T}_e^{-T} \vec{l}_i \quad (\text{A.27})$$

für das Transformationsverhalten der Eigenvektoren.

Besitzt das Matrixpaar ein vollständiges Basissystem aus Eigenvektoren (das Matrixpaar heißt dann *diagonalähnlich*), also $n_e = n$, kann die Normierungsbedingung

$$\mathbf{L}^T \mathbf{J} \mathbf{R} = \mathbf{I}_n . \quad (\text{A.28})$$

erfüllt werden. In diesem Fall folgt aus den Eigenbedingungen (A.23), (A.24) sofort die Beziehung

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} , \quad (\text{A.29})$$

Mit der *Eigentransformation*

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{L}^T , \quad \mathbf{T}_k = \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{A.30})$$

lässt sich das System (A.1) also diagonalisieren und damit entkoppeln, die transformierte Zustandsgleichung (A.14) nimmt die Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} , \quad (\text{A.31})$$

an. Die Zustandsgrößen werden in dieser Darstellung auch *Eigenmoden* genannt.

A.6 Balancierte Darstellung

Ausgehend von einem linearen System in Standardform, also

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_n , \quad (\text{A.32})$$

werden die *Steuerbarkeitsmatrix* $\mathbf{P} \binom{n}{n}$ sowie die *Beobachtbarkeitsmatrix* $\mathbf{Q} \binom{n}{n}$ formal definiert als Integrale über eine matrixwertige Exponentialfunktion (siehe beispielsweise (Che84) oder (Moo81)):

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt , \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt . \quad (\text{A.34})$$

Für stabile Systeme lassen sich aus dieser Definition durch Kombination zu den Ausdrücken $\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T$ sowie $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}$, Vertauschung der Exponentialfunktion mit der Zustandsmatrix bzw. deren Transponierten und anschließender partieller Integration Bestimmungsgleichungen von Ljapunov Typ für die Steuer- und Beobachtbarkeitsmatrix ableiten:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T = - \mathbf{B} \mathbf{B}^T , \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = - \mathbf{C}^T \mathbf{C} . \quad (\text{A.36})$$

Ein System heißt *steuerbar* bzw. *beobachtbar*, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{P} bzw. die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q} vollen Rang n haben, $\text{rank}(\mathbf{P}) = n$ bzw. $\text{rank}(\mathbf{Q}) = n$.

A TRANSFORMATIONEN LINEARER SYSTEME

Unter einer Ähnlichkeitstransformation \mathbf{T} kann für die Steuer- und Beobachtbarkeitsmatrix durch Einsetzen der Ausdrücke (A.21) in die Definitionsgleichungen (A.33) und (A.34) das Transformationsverhalten

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T}^T, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{A.37})$$

abgelesen werden; Steuer- und Beobachtungsmatrix transformieren also nicht wie die Systemmatrizen, sie weisen ein komplexeres Transformationsverhalten auf. Die Kombination $\mathbf{P} \mathbf{Q}$ jedoch transformiert wie Systemmatrizen,

$$\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}, \quad (\text{A.38})$$

so dass die Eigenwerte dieser Kombination Invarianten der Ähnlichkeitstransformation darstellen.

Es lässt sich zeigen (siehe zum Beispiel (Moo81)), dass eine Ähnlichkeitstransformation \mathbf{T} existiert, die stabile, steuer- und beobachtbare lineare Systeme in Standardform in eine Form überführt, in der die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{P} und die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q} diagonal und gleich sind,

$$\tilde{\mathbf{P}} = \Sigma, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \Sigma, \quad (\text{A.39})$$

wobei die Diagonalelemente σ_i von Σ , also $\Sigma = \text{diag}_{i=1}^n(\sigma_i)$, die sogenannten *Singulärwerte*, gleich den Wurzeln der Eigenwerte λ_i von $\mathbf{P} \mathbf{Q}$ sind,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{P} \mathbf{Q})} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma = \sqrt{\Lambda(\mathbf{P} \mathbf{Q})} \quad (\text{A.40})$$

(Die Klammern in diesem Ausdruck sind als Argumentklammern zu verstehen). Die Transformation \mathbf{T} ist bis auf Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix \mathbf{U} , $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, die mit Σ vertauscht, also $\mathbf{U} \Sigma = \Sigma \mathbf{U}$, eindeutig bestimmt. Die Singulärwerte σ_i werden außerdem als absteigend geordnet angenommen,

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0. \quad (\text{A.41})$$

Unter diesen Voraussetzungen heißt das transformierte System $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ *balanciert*. Ein Algorithmus zur Transformation eines Systems in die balancierte Darstellung ist beispielsweise in (HP90a) beschrieben.

B Momentenkriterium und Krylov-Unterraum Verfahren

In diesem Anhang wird der in Abschnitt (3.5.1.3) aufgrund der besseren Lesbarkeit übergangene Beweis nachgeliefert, dass durch die Wahl des durch die Rekonstruktionsmatrix aufgespannten Unterraums als Krylov-Unterraum das Momentenkriterium für die niedrigsten Ordnungen erfüllt wird.

In Abschnitt (B.1) wird zunächst eine allgemeine Betrachtung der Eigenschaften der durch die Reduktions- und der Rekonstruktionsmatrix repräsentierten linearen Abbildungen durchgeführt, in Abschnitt (B.2) wird das Ergebnis dann auf den Fall des Krylov-Unterraums angewendet.

B.1 Nichtbijektive Projektionen

Trotz der eher einfachen Zusammenhänge wirkt die mathematisch exakte Formulierung sehr unübersichtlich. Deshalb sind die hier diskutierten Größen sowie insbesondere die Eigenschaften der durch die Reduktions- und der Rekonstruktionsmatrix repräsentierten linearen Abbildungen in Abbildung (B.1) grafisch veranschaulicht.

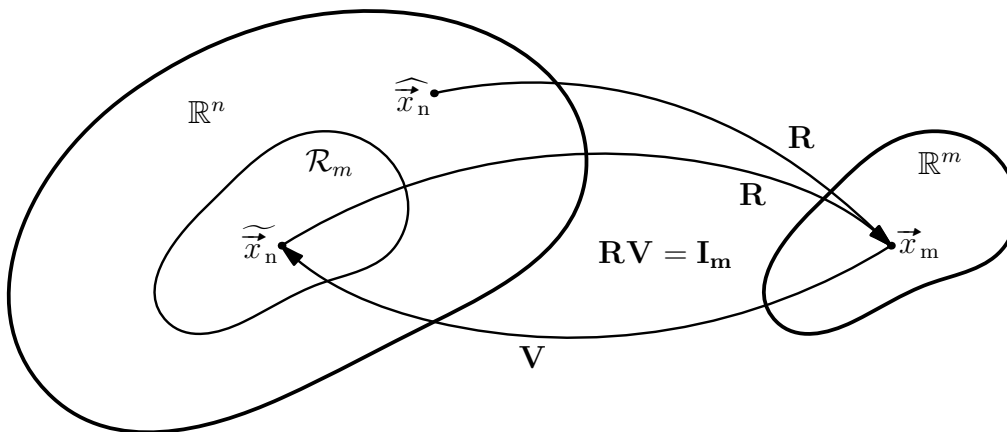


Abbildung B.1: Veranschaulichung der Eigenschaften der durch die Reduktions- und Rekonstruktionsmatrix repräsentierten linearen Abbildungen

Diese Abbildung dient der Veranschaulichung der in Abschnitt (B.1) diskutierten Größen und Zusammenhänge.

B MOMENTENKRITERIUM UND KRYLOV-UNTERRAUM VERFAHREN

Sei \mathcal{R}_m ein m -dimensionaler Unterraum des Raums \mathbb{R}^n , die Rekonstruktionsmatrix $\mathbf{V} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ eine Basis von \mathcal{R}_m , das heißt, eine Matrix, deren Spalten aus Basisvektoren des \mathcal{R}_m bestehen, $\mathcal{R}_m = \text{colspan} \{ \mathbf{V} \}$.

Sei außerdem $\widetilde{\vec{x}}_n \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_m$ ein Vektor aus diesem Unterraum, $\vec{x}_m \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ seine Darstellung in der Basis \mathbf{V} , also

$$\widetilde{\vec{x}}_n = \mathbf{V} \vec{x}_m . \quad (\text{B.1})$$

Die Reduktionsmatrix $\mathbf{R} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, wird als Abbildung des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m aufgefasst. Sei $\widehat{\vec{x}}_n$ ein Vektor aus dem Urbild von \vec{x}_m , $\widehat{\vec{x}}_n \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{urbi}(\vec{x}_m)$; dann gilt definitionsgemäß

$$\vec{x}_m = \mathbf{R} \widehat{\vec{x}}_n . \quad (\text{B.2})$$

Für Reduktions- und Wiederherstellungsmatrix gelte

$$\mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{I}_m . \quad (\text{B.3})$$

Damit ist speziell $\widetilde{\vec{x}}_n \in \text{urbi}(\vec{x}_m)$; ein Vektor aus dem Unterraum \mathcal{R}_m wird deshalb mittels der Reduktionsmatrix auf seine Darstellung in der Basis \mathbf{V} abgebildet:

$$\mathbf{R} \widetilde{\vec{x}}_n = \mathbf{R}\mathbf{V} \vec{x}_m = \vec{x}_m \quad (\text{B.4})$$

und damit

$$\mathbf{V}\mathbf{R} \widetilde{\vec{x}}_n = \mathbf{V} \vec{x}_m = \widehat{\vec{x}}_n . \quad (\text{B.5})$$

B.2 Momentenkriterium und Krylov-Unterraum Verfahren

Nach (3.71) lautet das Momentenkriterium für projektionsbasierte Reduktionsverfahren für Single-Input Systeme

$$\mathbf{V}\mathbf{R} (\mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n)^i \mathbf{T}_{e,n} \vec{B}_n = (\mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n)^i \mathbf{T}_{e,n} \vec{B}_n , \quad 0 \leq i \leq k . \quad (\text{B.6})$$

Man erkennt, dass diese Relation durch (B.5) erfüllt werden kann, wenn sichergestellt wird, dass die relevanten Vektoren im betrachteten Unterraum enthalten sind: $(\mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n)^i \mathbf{T}_{e,n} \vec{B}_n \in \mathcal{R}_m$ für $0 \leq i \leq k$. Aber gerade dies wird durch die Wahl von \mathcal{R}_m als Krylov-Unterraum

$$\mathcal{R}_m = \mathcal{K}_m \left(\mathbf{T}_{e,n} \mathbf{J}_n ; \mathbf{T}_{e,n} \vec{B}_n \right) \quad (\text{B.7})$$

für $k = m - 1$ erreicht.

C Störungstheorie zweiter Ordnung

In diesem Anhang wird die Zustandsgleichung (4.21) der speziellen Normalform mit den Methoden der Störungstheorie behandelt. Nach der Postulation einer schwachen Koppelung in Abschnitt (C.1) wird in Abschnitt (C.2) aufbauend auf einer Reihenentwicklung das Konzept der Übertragungsfunktion auf den nichtlinearen Bereich verallgemeinert. Dies stellt die Grundlage für die in Abschnitt (4.5) auf den nichtlinearen Bereich erweiterte Reduktionsmethode der Frequenzgangs Anpassung dar. Schließlich wird in Abschnitt (C.3) das Verhalten der Eigenwerte der Tangenzustandsmatrix für einen bestimmten Lastzustand abgeschätzt. Diese Relationen können zur Systemanalyse eingesetzt werden; darüberhinaus können sie ebenfalls als Basis für ein Reduktionsverfahren verwendet werden, was jedoch in dieser Arbeit nicht weiter ausgearbeitet ist.

C.1 Schwache Koppelung

Voraussetzung für eine störungstheoretische Behandlung der Zustandsgleichung ist eine schwache Koppelung der Nichtlinearitäten; das bedeutet, dass die nichtlinearen Terme in einem zu definierenden Sinne klein sind im Vergleich zu den linearen Termen.

Die schwache Koppelung wird durch im Allgemeinen physikalisch motivierte *Koppelungskonstanten* ε , η vermittelt, die als skalare Parameter die Größenordnung der NL-Tensoren mit der Zustandsmatrix im Folgenden Sinn vergleichbar macht: Die Z_s -Tensoren \mathcal{A}_s werden über die Koppelungskonstante ε umskaliert, so dass für die skalierten Z_s -Tensoren $\mathcal{A}_{2,\varepsilon}$ für alle relevanten Zustandsvektoren \vec{x} die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{A}_s * \underbrace{[\vec{x}, \dots \vec{x}]^i}_{s \text{ mal}}) \ll (\mathbf{A} \vec{x})^i \\ (\mathcal{A}_{s,\varepsilon} * \underbrace{[\vec{x}, \dots \vec{x}]^i}_{s \text{ mal}}) \sim (\mathbf{A} \vec{x})^i \end{array} \right\} \mathcal{A}_s = \varepsilon^{s-1} \mathcal{A}_{s,\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (\text{C.1})$$

erfüllt sind. Für den BL-Tensor \mathcal{B} wird analog vorgegangen; dieser wird unabhängig von den Z_s -Tensoren über die separate Koppelungskonstante η angekoppelt:

$$\left. \begin{array}{l} (\mathcal{B} * [\vec{x}, \vec{u}]^i) \ll (\mathbf{A} \vec{x})^i \\ (\mathcal{B}_\eta * [\vec{x}, \vec{u}]^i) \sim (\mathbf{A} \vec{x})^i \end{array} \right\} \mathcal{B} = \eta \mathcal{B}_\eta \quad \text{mit} \quad \eta \ll 1 \quad (\text{C.2})$$

Die Gültigkeit dieser Beziehungen muss im Zweifelsfall a posteriori bestätigt werden.

C STÖRUNGSTHEORIE ZWEITER ORDNUNG

Für die hier vorgestellte Störungstheorie zweiter Ordnung beschränken wir uns auf Zs -Tensoren bis zur Stufe $\binom{1}{3}$; damit schreibt sich die Zustandsgleichung als

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u} + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}, \vec{x}] + \frac{\varepsilon^2}{6} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\vec{x}, \vec{x}, \vec{x}] + \eta \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}, \vec{u}] . \quad (\text{C.3})$$

Diese Gleichung ist die Grundlage für die vorgestellte Reihenentwicklung und Eigenwertentwicklung.

C.2 Reihenentwicklung und Übertragungsverhalten

Unter den vorgestellten Voraussetzungen kann eine Reihenentwicklung der Zustandsgleichung in Ordnungen von ε und η durchgeführt werden. Mit dem Ansatz

$$\vec{x} = \vec{x}_{00} + \varepsilon \vec{x}_{10} + \varepsilon^2 \vec{x}_{20} + \eta \vec{x}_{01} + \eta^2 \vec{x}_{02} + \varepsilon \eta \vec{x}_{11} \quad (\text{C.4})$$

(die Indizes der einzelnen Bestandteile geben die Potenzen der Vorfaktoren ε und η an) ergeben sich die Beziehungen

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0 \eta^0) : \dot{\vec{x}}_{00} = \mathbf{A} \vec{x}_{00} + \mathbf{B} \vec{u}, \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^1 \eta^0) : \dot{\vec{x}}_{10} = \mathbf{A} \vec{x}_{10} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00}, \vec{x}_{00}], \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon^2 \eta^0) : \dot{\vec{x}}_{20} = \mathbf{A} \vec{x}_{20} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00}, \vec{x}_{01}] & \quad (\text{C.7}) \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{01}, \vec{x}_{00}] \\ & + \frac{1}{6} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\vec{x}_{00}, \vec{x}_{00}, \vec{x}_{00}], \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0 \eta^1) : \dot{\vec{x}}_{01} = \mathbf{A} \vec{x}_{01} + \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{00}, \vec{u}], \quad (\text{C.8})$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0 \eta^2) : \dot{\vec{x}}_{02} = \mathbf{A} \vec{x}_{02} + \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{01}, \vec{u}], \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon^1 \eta^1) : \dot{\vec{x}}_{11} = \mathbf{A} \vec{x}_{11} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00}, \vec{x}_{01}] & \quad (\text{C.10}) \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{01}, \vec{x}_{00}] \\ & + \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{10}, \vec{u}], \end{aligned}$$

also eine Folge gestaffelter linearer Systeme für die verschiedenen Ordnungen der Entwicklung.

C.2.1 Frequenzantwort

Diese Gleichungen können formal wieder durch Übergang in den Frequenzraum gelöst werden. Im Unterschied zum linearen Fall ist es hier günstiger, eine Fourier-Transformation anstatt der Laplace-Transformation zu verwenden. Man erhält für den linearen Systemanteil

$$\vec{x}_{00}(\omega) \equiv \mathbf{G}(\omega) \vec{u}(\omega) = (i\omega \mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \vec{u}(\omega) . \quad (\text{C.11})$$

$\mathbf{G}(\omega) \binom{n}{p}$ ist hierbei die *Übertragungsfunktion* des linearen Systemanteils; sei außerdem $\mathbf{F}(\omega) \binom{n}{n}$ eine Abkürzung für den frequenzabhängigen Anteil

$$\mathbf{F}(\omega) = i\omega \mathbf{J} - \mathbf{A} \quad (\text{C.12})$$

der Übertragungsfunktion.

Damit ergeben sich für die *Frequenzantwort* sukzessive die Ausdrücke

$$\vec{x}_{10}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{A}_{2,\epsilon} * [\vec{x}_{00}(\omega'), \vec{x}_{00}(\omega - \omega')] , \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{x}_{20}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{A}_{2,\epsilon} * [\vec{x}_{00}(\omega'), \vec{x}_{10}(\omega - \omega')] \quad (\text{C.14})$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{A}_{2,\epsilon} * [\vec{x}_{10}(\omega'), \vec{x}_{00}(\omega - \omega')] \\ + \frac{1}{6 \cdot 2\pi} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' \mathcal{A}_{3,\epsilon} * \begin{bmatrix} \vec{x}_{00}(\omega'), \vec{x}_{00}(\omega'') \\ \vec{x}_{00}(\omega - \omega' - \omega'') \end{bmatrix} ,$$

$$\vec{x}_{01}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{00}(\omega'), \vec{u}(\omega - \omega')] , \quad (\text{C.15})$$

$$\vec{x}_{02}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{01}(\omega'), \vec{u}(\omega - \omega')] , \quad (\text{C.16})$$

$$\vec{x}_{11}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{A}_{2,\epsilon} * [\vec{x}_{00}(\omega'), \vec{x}_{01}(\omega - \omega')] \quad (\text{C.17})$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{A}_{2,\epsilon} * [\vec{x}_{01}(\omega'), \vec{x}_{00}(\omega - \omega')] \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{F}(\omega)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{10}(\omega'), \vec{u}(\omega - \omega')] ,$$

für die höheren Ordnungen.

C.2.2 Harmonische Anregung

Die relativ abstrakten Ausdrücke der Frequenzantwort des vorhergehenden Abschnittes seien an dem Beispiel der rein harmonischen Anregung konkretisiert.

C STÖRUNGSTHEORIE ZWEITER ORDNUNG

Eine harmonischen Anregung

$$\vec{u}(t) = p \vec{u}_{\omega_0} e^{i\omega_0 t} \quad (\text{C.18})$$

mit dem dimensionslosen *Skalierungsparameter* p der Größenordnung 1, der Lastgeometrie \vec{u}_{ω_0} und der Anregefrequenz ω_0 liefert nach Fourier-Rücktransformation die Ausdrücke

$$\vec{x}_{00}(t) \equiv p \vec{x}_{00\omega_0} e^{i\omega_0 t} = p \mathbf{G}(\omega_0) \vec{u}_{\omega_0} e^{i\omega_0 t}, \quad (\text{C.19})$$

$$\vec{x}_{10}(t) \equiv p^2 \vec{x}_{10\omega_0} e^{2i\omega_0 t} = \frac{p^2}{2} \mathbf{F}(2\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0}, \vec{x}_{00\omega_0}] e^{2i\omega_0 t}, \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_{20}(t) \equiv p^3 \vec{x}_{20\omega_0} e^{3i\omega_0 t} &= \frac{p^3}{2} \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0}, \vec{x}_{10\omega_0}] e^{3i\omega_0 t} \quad (\text{C.21}) \\ &+ \frac{p^3}{2} \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{10\omega_0}, \vec{x}_{00\omega_0}] e^{3i\omega_0 t} \\ &+ \frac{p^3}{6} \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0}, \vec{x}_{00\omega_0}, \vec{x}_{00\omega_0}] e^{3i\omega_0 t}, \end{aligned}$$

$$\vec{x}_{01}(t) \equiv p^2 \vec{x}_{01\omega_0} e^{2i\omega_0 t} = p^2 \mathbf{F}(2\omega_0)^{-1} \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{00\omega_0}, \vec{u}_{\omega_0}] e^{2i\omega_0 t}, \quad (\text{C.22})$$

$$\vec{x}_{02}(t) \equiv p^3 \vec{x}_{02\omega_0} e^{3i\omega_0 t} = p^3 \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{01\omega_0}, \vec{u}_{\omega_0}] e^{3i\omega_0 t}, \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_{11}(t) \equiv p^3 \vec{x}_{11\omega_0} e^{3i\omega_0 t} &= \frac{p^3}{2} \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0}, \vec{x}_{01\omega_0}] e^{3i\omega_0 t} \quad (\text{C.24}) \\ &+ \frac{p^3}{2} \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{01\omega_0}, \vec{x}_{00\omega_0}] e^{3i\omega_0 t} \\ &+ p^3 \mathbf{F}(3\omega_0)^{-1} \mathcal{B}_\eta * [\vec{x}_{10\omega_0}, \vec{u}_{\omega_0}] e^{3i\omega_0 t}, \end{aligned}$$

für die verschiedenen Ordnungen der Reihenentwicklung. Hier sind insbesondere die Potenzen des Skalierungsparameters p sowie die Frequenzvervielfachung bei den Termen höherer Ordnung zu beachten.

Die Beziehungen (C.20) bis (C.24) im Frequenzraum können als nichtlineare Verallgemeinerung des linearen Konzepts des Frequenzgangs (C.19), also des Antwortverhaltens des Systems auf eine harmonische Anregung (C.18) angesehen werden.

Diese Ausdrücke können verwendet werden, um das Übertragungsverhalten des linearen Systems und der nichtlinearen Anteile getrennt voneinander zu betrachten. Auf diese Weise kann eine frequenzraumbasierte Bewertung eines reduzierten nichtlinearen Systems erfolgen. Allerdings gelten die daraus abgeleiteten Einsichten in das nichtlineare Übertragungsverhalten streng nur für rein harmonische Anregungen, da das Superpositionsprinzip im nichtlinearen Bereich nicht mehr anwendbar ist.

C.3 Eigenwertentwicklung der Tangenzustandsmatrix

Für das dynamische Verhalten eines linearen bzw. linearisierten Systems sind die Eigenwerte des Matrixpaares \mathbf{A} , \mathbf{J} bzw. $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ von fundamentaler Bedeutung. Deshalb wird hier eine

störungstheoretische Behandlung des Verhaltens der Eigenwerte des linearisierten Systems unter einer stationären Last vorgestellt. Das hier vorliegende Eigenwertproblem eines Matrixpaares wird in Anhang (A.5) ausführlicher behandelt. Wir betrachten hier vereinfachend ein System mit verschwindendem BL-Tensor $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{B}_\eta = \mathbf{0}$.

C.3.1 Tangenzustandsmatrix

Aus Gleichung (4.36), angepasst für die hier zugrundegelegte Form (C.3), erhält man unter Verwendung der Ausdrücke (C.19) und (C.20) mit der Anregungsfrequenz $\omega_0 = 0$ eine Entwicklung der Tangenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in einem belasteten stationären Zustand,

$$\tilde{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} + p\varepsilon \mathbf{A}' + p^2\varepsilon^2 \mathbf{A}'' \quad (\text{C.25})$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0=0}, \cdot] + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\cdot, \vec{x}_{00\omega_0=0}] \quad (\text{C.26})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\vec{x}_{10\omega_0=0}, \cdot] + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{2,\varepsilon} * [\cdot, \vec{x}_{10\omega_0=0}] \quad (\text{C.27}) \\ &+ \frac{1}{6} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0=0}, \vec{x}_{00\omega_0=0}, \cdot] \\ &+ \frac{1}{6} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\vec{x}_{00\omega_0=0}, \cdot, \vec{x}_{00\omega_0=0}] \\ &+ \frac{1}{6} \mathcal{A}_{3,\varepsilon} * [\cdot, \vec{x}_{00\omega_0=0}, \vec{x}_{00\omega_0=0}] . \end{aligned}$$

C.3.2 Eigenwerte

Als Ansatz für die *Eigenwerte* $\lambda_i(p)$ des Matrixpaares $\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{J}$ wird die Reihenentwicklung

$$\lambda_i(p) = \lambda_i + p\varepsilon \lambda'_i + p^2\varepsilon^2 \lambda''_i \quad (\text{C.28})$$

verwendet, wobei λ_i (ohne Funktionsargument!) die Eigenwerte der unbelasteten Tangenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}(p=0) = \mathbf{A}$ darstellen. Für die dazugehörigen *Rechtseigenvektoren* $\vec{r}_i(p)$ und *Linkseigenvektoren* $\vec{l}_i(p)$ wird analog verfahren, \vec{r}_i bzw. \vec{l}_i (ohne Funktionsargumente!) sind die Eigenvektoren der unbelasteten Tangenzustandsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}(p=0) = \mathbf{A}$. Nimmt man vereinfachend ein diagonalähnliches Matrixpaar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten an, so erhält man aus der Störungstheorie die Ausdrücke

$$\lambda'_i = \vec{l}_i^T \mathbf{A}' \vec{r}_i, \quad (\text{C.29})$$

$$\lambda''_i = \vec{l}_i^T \mathbf{A}'' \vec{r}_i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\vec{l}_i^T \mathbf{A}' \vec{r}_j \right) \left(\vec{l}_j^T \mathbf{A}' \vec{r}_i \right) \quad (\text{C.30})$$

C STÖRUNGSTHEORIE ZWEITER ORDNUNG

für die Entwicklungskoeffizienten der Eigenwerte. Die geklammerten Teile von (C.30) sind jeweils für sich genommen Skalare. Die Summe in (C.30) wird aufgrund des Nenners durch die zu λ_i benachbarten Eigenwerte λ_j dominiert. Es sei hier noch explizit angemerkt, dass die Entwicklungskoeffizienten λ'_i, λ''_i der Eigenwerte von der Lastgeometrie $\vec{u}_{\omega_0=0}$ in (C.18) abhängen und deshalb bei Veränderung der Lastgeometrie neu bestimmt werden müssen!

D Identifikation von Tensoren aus Kontraktionen niedrigerer Stufe

In diesem Anhang werden Methoden vorgestellt, die es erlauben, einen Tensor zu bestimmen, wenn eine Serie von Kontraktionen niedrigerer Stufe des Tensors über einen Vektor gegeben sind. Diese Methoden werden in Abschnitt (5.2) verwendet, um aus einer Serie linearisierter Systeme die in dieser Arbeit verwendete Normalform zur Parametrisierung von Nichtlinearitäten zu identifizieren.

Seien eine Serie $1 \leq l \leq n_{\text{mod}}$ stationärer Zustände $(\vec{u}_{\text{st},l}, \vec{x}_{\text{st},l})$ gegeben, sowie die zugehörigen linearisierten Systemmatrizen, im Allgemeinen Tangenten- oder Sekanten-Differenzmatrizen, hier allgemein mit $\mathbf{A}_{\text{lin},l}$ bezeichnet. Die Systemmatrizen werden nun als Summe von Kontraktionen über eine Reihe von Tensoren $\mathcal{A}_s, \mathcal{B}$ dargestellt. Inhalt dieses Anhangs ist, Kontraktionen dieser Art umzukehren, also unter Verwendung der Systemmatrizen $\mathbf{A}_{\text{lin},l}$ und der stationären Zustände $(\vec{u}_{\text{st},l}, \vec{x}_{\text{st},l})$ die Tensoren $\mathcal{A}_s, \mathcal{B}$ zu bestimmen.

Dazu wird in (D.1) die Problemstellung zunächst abstrahiert und verallgemeinert: Die gegebenen stationären Zustände $(\vec{u}_{\text{st},l}, \vec{x}_{\text{st},l})$ werden zu Vektoren \vec{v}_l verallgemeinert, Die gegebenen Systemmatrizen $\mathbf{A}_{\text{lin},l}$ zu Tensoren \mathcal{K}_l , der gesuchte Tensor \mathcal{A}_s (zunächst ausschließlich dieser) zu einem Tensor \mathcal{T} . Die Zusammenfassung zusammengehöriger Paare von Vektoren \vec{v}_l und Tensoren \mathcal{K}_l mit $1 \leq l \leq n_{\text{mod}}$ wird mit dem Begriff *Parametrisierungsdaten* bezeichnet. Das Problem der Umkehrung von Kontraktionen wird nun unter Beachtung verschiedener Symmetrieforderungen in den Abschnitten (D.2), (D.3) und (D.4) analysiert, schließlich werden in Abschnitt (D.5) noch einige Verallgemeinerungen diskutiert.

D.1 Problemstellung

Wir betrachten einen Tensor $\mathcal{T} \binom{1}{n, \dots, n} \text{ k mal}$ der Stufe $\binom{0}{k}$ und der Dimension n . Durch Kontrahieren von q Indizes von \mathcal{T} (ohne Beschränkung der Allgemeinheit die q hinteren) über den n -dimensionalen Vektor $\vec{v} \binom{n}{1}$ entstehe der Tensor $\mathcal{K} \binom{1}{n, \dots, n} \text{ p mal}$ der Stufe $\binom{0}{p}$ und der Dimension n , wobei

$$k = q + p \tag{D.1}$$

gilt. Die Einteilung der Indizes in obere und untere ist willkürlich, gegebenenfalls ist sie der Anwendung anzupassen.

Die genauen Interpretationen dieser abstrakten Tensoren hängen letztlich von der Anwendung ab. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge in diesem Anhang kann beispielsweise in Anlehnung an (5.2) eine spezielle Anwendung ins Auge gefasst werden: Aus einer Serie

D IDENTIFIKATION VON TENSOREN AUS KONTRAKTIONEN NIEDRIGERER STUFE

von Parametrisierungsdaten soll eine Zeile i der Kontraktion über einen Z_s -Tensor simultan betrachtet werden. In diesem Fall erhält man Zeile i der Systemmatrizen $\mathbf{A}_{\text{lin},1}$ aus der Kontraktion von insgesamt $s - 1$ unteren Indizes der i -Komponente des Z_s -Tensors \mathcal{A}_s über jeweils den Vektor $\vec{x}_{\text{st},l}$:

$$\mathcal{T}_{j_1 \dots j_s} \equiv \mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_s}^i, \quad \mathcal{K}_j \equiv A_{\text{lin}; j}^i, \quad v^{\tilde{i}} \equiv x_{\text{st}}^{\tilde{i}}. \quad (\text{D.2})$$

Damit sind die Stufen der Tensoren in diesem Beispiel durch $k = s, q = s - 1, p = 1$ bestimmt. Aus dem sich ergebenden Gleichungssystem soll die i -Komponente des Z_s -Tensors ermittelt werden. Für die Bestimmung des gesamten Z_s -Tensors ist eine solche Bestimmung für alle i mit $1 \leq i \leq n$, also n -mal durchzuführen.

Sei außerdem der Tensor $\mathcal{V} \binom{n, \dots, n}{1} q \text{ mal}$ der Stufe $\binom{q}{0}$ und der Dimension n definiert, gebildet aus den multiplikativen Kombinationen der Vektorkomponenten von \vec{v} ,

$$\mathcal{V}^{\nu_1 \dots \nu_q} \equiv v^{\nu_1} \cdot \dots \cdot v^{\nu_q}. \quad (\text{D.3})$$

\mathcal{K} ist dann durch

$$\mathcal{K} = \mathcal{T} * \left[\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{p \text{ mal}}, \underbrace{\vec{v}, \dots, \vec{v}}_{q \text{ mal}} \right] \equiv \mathcal{T} * \left[\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{p \text{ mal}}, \mathcal{V} \right] \quad (\text{D.4})$$

bzw. in Indexschreibweise

$$\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p \nu_1 \dots \nu_q} v^{\nu_1} \cdot \dots \cdot v^{\nu_q} \equiv \mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p \nu_1 \dots \nu_q} \mathcal{V}^{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (\text{D.5})$$

gegeben.

Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation ist \mathcal{V} vollsymmetrisch,

$$\mathcal{V}^{\nu_1 \dots \nu_q} = \mathcal{V}^{(\nu_1 \dots \nu_q)}, \quad (\text{D.6})$$

wobei die Klammer um die Indizes eine Symmetrisierungsklammer darstellt. Deshalb trägt nur der in den q hinteren Indizes ν_1 bis ν_q symmetrische Anteil des Tensors \mathcal{T} zur Kontraktion \mathcal{K} bei,

$$\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p (\nu_1 \dots \nu_q)} \mathcal{V}^{(\nu_1 \dots \nu_q)}. \quad (\text{D.7})$$

Das bedeutet, dass aus (D.5) oder besser (D.7) aufgrund der Symmetrie von \mathcal{V} prinzipiell nur der in den q hinteren Indizes ν_1 bis ν_q symmetrische Anteil des Tensors \mathcal{T} rekonstruiert werden kann, eine Identifikation von \mathcal{T} mit Hilfe der hier vorgestellten Methoden liefert also nur einen in ν_1 bis ν_q symmetrisierten Repräsentanten des gesuchten Tensors! Für die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen der Identifikation ist dieser symmetrische Anteil von \mathcal{T} jedoch im Allgemeinen ausreichend.

In diesem Anhang werden Methoden vorgestellt, mit denen eine Repräsentation des Originaltensors \mathcal{T} aus einer Serie von n_{mod} Kontraktionen \mathcal{K} niedrigerer Stufe über Vektoren \vec{v}

im Sinne von (D.5) rekonstruiert werden kann; gesucht wird letztlich also immer der Tensor \mathcal{T} . In Abschnitt (D.2) wird zunächst eine vereinfachte Methode vorgestellt, die keinerlei Symmetriebedingungen berücksichtigt; danach folgt in Abschnitt (D.3) eine Methode für den Spezialfall eines vollsymmetrischen Tensors \mathcal{T} . Aufgrund dieser Betrachtungen lässt sich ein Verfahren für den allgemeinen Fall eines teilsymmetrischen Tensors aufbauen; dies und einige Ergänzungen werden in (D.4) kurz erläutert.

D.2 Identifikation ohne Symmetriebedingungen

Wir betrachten hier zunächst Gleichung (D.5) in ihrer Originalform,

$$\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p \nu_1 \dots \nu_q} \mathcal{V}^{\nu_1 \dots \nu_q} . \quad (\text{D.8})$$

Diese Gleichung stellt ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten des Tensors \mathcal{T} dar. Dieses System ist in den „zuschauenden“ Indizes κ_1 bis κ_p entkoppelt, die Identifikation kann für jede dieser n^p Indexkombinationen separat erfolgen.

Hier soll zunächst eine in vielen Fällen praktikable vereinfachte Identifikation aus (D.8) ohne Berücksichtigung der Symmetriebedingungen aus (D.7) vorgestellt werden. Aufgrund der begrenzten Rechengenauigkeit wird die Symmetrie in der hinteren Indizes dabei im Allgemeinen nur näherungsweise wiedergegeben.

D.2.1 Vektorisierte Kontraktionsgleichung

Die n^q Komponenten von \mathcal{V} können zu einem Vektor $\vec{V} \begin{pmatrix} n^q \\ 1 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Definiert man außerdem für jede Kombination κ_1 bis κ_p den Vektor $\vec{T}(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \begin{pmatrix} n^q \\ 1 \end{pmatrix}$ der zu den Indizes ν_1 bis ν_q gehörenden n^q Komponenten von \mathcal{T} (die Nummerierung ist dabei durch die Nummerierung von \vec{V} vorgegeben), so kann Gleichungssystem (D.8) als eine Folge entkoppelter linearer Gleichungen

$$\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \vec{V}^T \vec{T}(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \quad (\text{D.9})$$

geschrieben werden, deren Anzahl n_{equ} und Ordnung n_{ord} durch

$$n_{\text{equ}} = n^p, \quad n_{\text{ord}} = n^q \quad (\text{D.10})$$

gegeben sind.

Zur Bestimmung von $\vec{T}(\kappa_1, \dots, \kappa_p)$ aus (D.9) wird eine Serie von n_{mod} Parametrisierungsdaten verwendet. Das auf diese Weise n_{mod} -fach duplizierte Gleichungssystem ist für eine Anzahl von $n_{\text{mod}} \geq n_{\text{ord}}$, also

$$n_{\text{mod}} \geq n^q \quad (\text{D.11})$$

linear unabhängigen Vektoren \vec{V}_l (über-) bestimmt und das System kann als Optimierungsproblem gelöst werden, wobei die Inversion der aus den n_{mod} Vektoren \vec{V}_l gebildeten Matrix nur einmal für alle n^p Gleichungen durchgeführt werden muss. Damit ist der Tensor \mathcal{T} identifiziert.

D.2.2 Berücksichtigung von Besetzungsstrukturen

Für einen spärlich besetzten Kontraktionstensor \mathcal{K} gilt für viele bzw. die meisten Elemente $\mathcal{K}_{\tilde{\kappa}_1 \dots \tilde{\kappa}_p} = 0$, lediglich eine *Besetzung* von $n_{\text{elem}} \leq n^p$ Elementen verschwindet nicht, wobei meist $n_{\text{elem}} \ll n^p$ gilt. Hinreichend (jedoch nicht notwendig) für das Verschwinden eines Elements $\mathcal{K}_{\tilde{\kappa}_1 \dots \tilde{\kappa}_p}$ ist das Verschwinden aller Elemente von $\vec{T}(\kappa_1, \dots, \kappa_p)$, für die Nullelemente kann also auf das Lösen des Gleichungssystems (D.9) verzichtet werden. Damit sind lediglich

$$n_{\text{equ}} = n_{\text{elem}} \leq n^p \quad (\text{D.12})$$

anstatt n^p Gleichungssysteme zu lösen.

Es sei noch der Fall diskutiert, dass für den Tensor \mathcal{T} eine bestimmte Besetzungsstruktur vorgegeben oder zumindest nahegelegt wird. Hier wird vorausgesetzt, dass für jede Indekskombination κ_1 bis κ_p für jeden einzelnen Index ν_1 bis ν_q von den n Tensorelementen lediglich eine Untermenge der *lokalen Bandbreite* $n_{\text{band},i}(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \leq n$, $1 \leq i \leq n^p$, von Null verschieden sein kann, wobei meist $n_{\text{band},i}(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \ll n$ gilt. Für Nullelemente des Tensors \mathcal{K} kann formal im Sinne des vorhergehenden Absatzes die lokale Bandbreite Null gesetzt werden. Für Abschätzungen sei noch die *globale Bandbreite* $n_{\text{band}} = \max_{i=1}^{n^p} [n_{\text{band},i}(\kappa_1, \dots, \kappa_p)] \leq n$ definiert; meist ist auch hier $n_{\text{band}} \ll n$. System (D.9) kann nun auf die relevanten Komponenten beschränkt werden. die zu lösenden Gleichungen sind nunmehr lediglich von Ordnung

$$n_{\text{ord},i} = n_{\text{band},i}^q(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \leq n_{\text{band}}^q \leq n^q \quad (\text{D.13})$$

anstatt n^q . Für die Anzahl der zur eindeutigen Identifikation zu verwendenden Vektoren und Kontraktionen ergibt sich nun anstatt n^q der Ausdruck

$$n_{\text{mod}} \geq n_{\text{band}}^q \leq n^q. \quad (\text{D.14})$$

Durch die Berücksichtigung der Besetzungsstruktur wird also einerseits die Ordnung der zu lösenden Gleichungssysteme stark verringert, was sowohl eine enorme Verringerung des Rechenaufwands als auch eine deutliche Verbesserung der Rechengenauigkeit bedeutet; andererseits sinkt die Anzahl der zur Identifikation benötigten Vektoren und Kontraktionen.

Durch die Berücksichtigung einer spärlichen Besetzung der \mathcal{K}_l und einer vorgegebenen Besetzungsstruktur von \mathcal{T} sind also nunmehr mittels der Anzahl $n_{\text{mod}} \geq n_{\text{band}}^q$ Parametrisierungsdaten $n_{\text{equ}} = n_{\text{elem}}$ Gleichungssysteme der Ordnung $n_{\text{ord}} \leq n_{\text{band}}^q$ zu lösen, anstatt mittels $n_{\text{mod}} \geq n^q$ Parametrisierungsdaten $n_{\text{equ}} = n^p$ Gleichungssysteme der Ordnung $n_{\text{ord}} = n^q$. Zu beachten ist noch, dass ohne Berücksichtigung der Besetzungsstruktur die aus den n_{mod} Vektoren \vec{V}_l gebildete Matrix nur einmal invertiert werden muss; bei Berücksichtigung der Besetzungsstruktur jedoch muss im Allgemeinen jedes der n_{elem} Gleichungssysteme separat gelöst werden. Trotzdem verringert sich im Allgemeinen für $n_{\text{elem}} \ll n^p$ und $n_{\text{band}} \ll n$ durch die Berücksichtigung der Besetzungsstrukturen der Aufwand zur Identifikation von \mathcal{T} enorm.

D.3 Identifikation vollsymmetrischer Tensoren

Der Tensor \mathcal{T} sei nun als vollsymmetrisch angenommen,

$$\mathcal{T}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathcal{T}_{(\tau_1 \dots \tau_k)} . \quad (\text{D.15})$$

Diese Symmetrie stellt eine Serie von Nebenbedingungen dar, die simultan mit (D.8) erfüllt werden sollen. Die auf diese Weise abgeänderte Gleichung

$$\mathcal{K}_{(\kappa_1 \dots \kappa_p)} = \mathcal{T}_{(\kappa_1 \dots \kappa_p \nu_1 \dots \nu_q)} \mathcal{V}^{(\nu_1 \dots \nu_q)} \quad (\text{D.16})$$

ist im Allgemeinen vollständig gekoppelt, so dass alle unabhängigen Tensorkomponenten simultan gelöst werden müssen. Die Umstrukturierung des Gleichungssystems (D.16) zur expliziten Berücksichtigung der Symmetriebedingungen ist Gegenstand der folgenden Ausführungen.

Es sei schon hier auf das in Abschnitt (D.3.5) vorgestellte Beispiel hingewiesen, in dem die hier abgeleiteten Ergebnisse veranschaulicht werden.

D.3.1 Vielfachheit und Repräsentant

Die Symmetriebedingungen bedeuten explizit, dass alle Tensorkomponenten $\mathcal{T}_{\tau_1 \dots \tau_k}$, die aus einer Permutation (τ_1, \dots, τ_k) der Indexfolge $(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)$ eines Repräsentanten $\mathcal{T}_{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k}$ dieser Gruppe hervorgehen, übereinstimmen, also

$$(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \text{perm} \{(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)\} \implies \mathcal{T}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathcal{T}_{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k} . \quad (\text{D.17})$$

Die Anzahl der Elemente in der Menge der Permutationen $\text{perm} \{(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)\}$ wird im Folgenden Vielfachheit $F^{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k}$ genannt. Sind unter den k Indizes l verschieden mit den Vielfachheiten m_i , $1 \leq i \leq l$, $\sum_{i=1}^l m_i = k$, so ist die Vielfachheit $F^{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k}$ gegeben durch die Anzahl der verallgemeinerten Permutationen $P_k^{(m_1, \dots, m_l)}$,

$$F^{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k} = P_k^{(m_1, \dots, m_l)} , \quad (\text{D.18})$$

wobei

$$P_k^{(m_1, \dots, m_l)} \equiv \frac{k!}{\prod_{i=1}^l m_i!} = \frac{k!}{\underbrace{m_1! \cdot \dots \cdot m_l!}_{l \text{ Faktoren}}} . \quad (\text{D.19})$$

D.3.2 Unabhängige Tensorkomponenten und vektorisierter Tensor

Ein Tensor $\mathcal{T}_{(n, \dots, n) k \text{ mal}}^1$ der Stufe $\binom{0}{k}$ und der Dimension n habe eine Anzahl von $c_{\text{U}, k}^n$ Komponenten, wobei $c_{\text{U}, k}^n$ durch die Zahl $V_{\text{W}, k}^n$ der Variationen von k aus n Elementen mit Wiederholung gegeben ist,

$$c_{\text{U}, k}^n = V_{\text{W}, k}^n , \quad (\text{D.20})$$

D IDENTIFIKATION VON TENSOREN AUS KONTRAKTIONEN NIEDRIGERER STUFE

wobei

$$V_{\mathbb{W},k}^n = n^k \quad (\text{D.21})$$

gilt. Diese Beziehungen wurden in diesem Anhang implizit schon mehrfach verwendet, eine Definition dieser Größen dient an dieser Stelle im Wesentlichen einer sauberen Begriffsbildung. Sei \mathcal{T} nun im Sinne von (D.15) als vollsymmetrisch angenommen; von den $c_{\mathbb{U},k}^n$ Komponenten des Tensors ist dann nur eine Anzahl $c_{\mathbb{S},k}^n$ unabhängig. Diese Anzahl ist durch die Zahl $C_{\mathbb{W},k}^n$ der Kombinationen von k aus n Elementen mit Wiederholung gegeben,

$$c_{\mathbb{S},k}^n = C_{\mathbb{W},k}^n, \quad (\text{D.22})$$

wobei

$$C_{\mathbb{W},k}^n \equiv \binom{n+k-1}{k} \stackrel{k \geq 0}{=} \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (n+i-1) = \frac{1}{k!} \underbrace{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}_{k \text{ Faktoren}} \quad (\text{D.23})$$

ist (für den Spezialfall eines Skalars, $k = 0$, gilt $C_{\mathbb{W},0}^n = 1$). Diese unabhängigen Komponenten können zu einem $c_{\mathbb{S},k}^n$ -dimensionalen Vektor $\vec{T} \binom{c_{\mathbb{S},k}^n}{1}$ zusammengefasst werden.

Für eine explizite Realisierung ist dabei die Frage der Nummerierung der Vektorkomponenten zu klären, das heißt, es ist eine Abbildung zwischen den Tensorkomponenten $\mathcal{T}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ und den Vektorkomponenten $T^{\hat{\tau}}$ zu realisieren. Im Folgenden wird eine Möglichkeit einer solchen Zuordnung beschrieben:

Von den aufgrund der Symmetriebedingung identisch gleichen Tensorkomponenten werden diejenigen als Repräsentanten ausgewählt, deren Indexfolge aufsteigend sortiert ist. Diese Repräsentanten werden dann anhand ihrer Indexfolge ebenfalls aufsteigend im Sinne eines Stellenwertsystems zur Basis n in die Vektordarstellung des Tensors einsortiert.

Die Komponente $\mathcal{T}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ wird durch diese Vorgehensweise über ihren Repräsentant $\mathcal{T}_{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k}$ mit

$$(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k) = \text{sort} \uparrow \{(\tau_1, \dots, \tau_k)\} \quad (\text{D.24})$$

auf die Vektorkomponente $T^{\hat{\tau}}$ mit

$$\hat{\tau} = \text{ind}(n; \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k) \equiv C_{\mathbb{W},k}^n - \sum_{i=1}^k C_{\mathbb{W},k-i+1}^{n-\tilde{\tau}_i} \quad (\text{D.25})$$

abgebildet.

Die Umkehrung dieser Darstellung, also die Bestimmung der Indexfolge $(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)$ des Repräsentanten im Tensor aus dem Index $\hat{\tau}$ der Komponente im vektorisierten Tensor, ist eine Verallgemeinerung des Problems des Auffindens einer Darstellung einer natürlichen Zahl in einem Stellenwertsystem. Für die praktische Realisierung dieser Umkehrung bietet sich auch eine Indextabelle an.

D.3.3 Vektorisierte Kontraktionsgleichung

Damit lässt sich die Kontraktion (D.16) in die vektorisierte Form umschreiben: Der Tensor $\mathcal{T} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n, \dots, n \end{smallmatrix} \right)_{k \text{ mal}}$ wird als $c_{S,k}^n$ -dimensionaler Vektor $\vec{T} \left(\begin{smallmatrix} c_{S,k}^n \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ mit den Komponenten $T^{\hat{\tau}}$ dargestellt, der Tensor $\mathcal{K} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n, \dots, n \end{smallmatrix} \right)_{p \text{ mal}}$ als $c_{S,p}^n$ -dimensionaler Vektor $\vec{K} \left(\begin{smallmatrix} c_{S,p}^n \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ mit den Komponenten $K^{\hat{\kappa}}$, der Tensor $\mathcal{V} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n, \dots, n \end{smallmatrix} \right)_{q \text{ mal}}$ als $c_{S,q}^n$ -dimensionaler Vektor $\vec{V} \left(\begin{smallmatrix} c_{S,q}^n \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ mit den Komponenten $V^{\hat{\nu}}$; zusätzlich werden die Vielfachheiten des Tensors \mathcal{V} zu einem $c_{S,q}^n$ -dimensionalen Vektor $\vec{F} \left(\begin{smallmatrix} c_{S,q}^n \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ zusammengefasst. Den Vektorkomponenten werden dabei die Tensorkomponenten

$$T^{\hat{\tau}} = \mathcal{T}_{\tilde{\tau}_1 \dots \tilde{\tau}_k} \quad , \quad \hat{\tau} = \text{ind}(n; \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k) \quad , \quad (\text{D.26})$$

$$K^{\hat{\kappa}} = \mathcal{K}_{\tilde{\kappa}_1 \dots \tilde{\kappa}_p} \quad , \quad \hat{\kappa} = \text{ind}(n; \tilde{\kappa}_1, \dots, \tilde{\kappa}_p) \quad , \quad (\text{D.27})$$

$$V^{\hat{\nu}} = \mathcal{V}^{\tilde{\nu}_1 \dots \tilde{\nu}_q} \quad , \quad \hat{\nu} = \text{ind}(n; \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_q) \quad , \quad (\text{D.28})$$

$$F^{\hat{\nu}} = F^{\tilde{\nu}_1 \dots \tilde{\nu}_q} \quad (\text{D.29})$$

gemäß der oben vorgestellten Zuordnung zugeteilt. \vec{T} ist mit \vec{K} über eine noch zu bestimmende Koppelmatrix $\mathbf{V} \left(\begin{smallmatrix} c_{S,p}^n \\ c_{S,k}^n \end{smallmatrix} \right)$ durch die lineare Beziehung

$$\vec{K} = \mathbf{V} \vec{T} \quad (\text{D.30})$$

der Ordnung

$$n_{\text{ord}} = c_{S,k}^n \quad (\text{D.31})$$

verknüpft, die zur Gleichung (D.16) äquivalent sein soll.

Zu einem Element $\hat{\kappa}$ des vektorisierten Kontraktionstensors \vec{K} tragen alle Elemente $\hat{\nu}$, $1 \leq \hat{\nu} \leq c_{S,q}^n$, des vektorisierten Kombinationstensors \vec{V} bei; diese werden in Zeile $\hat{\kappa}$ der Koppelmatrix \mathbf{V} in den Spalten $\hat{\tau}'$ der koppelnden Tensorelemente von \vec{T} eingetragen. Die Spalten ergeben sich aus der Zusammenfassung der Indizes von Kontraktions- und Koppeltensor:

$$\hat{\tau}'(\hat{\kappa}, \hat{\nu}) = \text{ind}(n; \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k) \quad (\text{D.32})$$

mit

$$(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k) = \text{sort} \uparrow \{(\tilde{\kappa}_1, \dots, \tilde{\kappa}_p, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_q)\} \quad (\text{D.33})$$

Zusätzlich sind noch die Vielfachheiten der Komponenten des Kombinationstensors $F^{\tilde{\nu}_1 \dots \tilde{\nu}_q}$ zu berücksichtigen. Es ergeben sich damit die Komponenten $V_{\hat{\tau}}^{\hat{\kappa}}$ der spärlich besetzten Koppelmatrix \mathbf{V} zu

$$V_{\hat{\tau}}^{\hat{\kappa}} = \begin{cases} F^{\hat{\nu}} V^{\hat{\nu}} & \text{für} \quad \hat{\tau} = \hat{\tau}'(\hat{\kappa}, \hat{\nu}) \quad , \quad 1 \leq \hat{\kappa} \leq c_{S,p}^n \quad , \quad 1 \leq \hat{\nu} \leq c_{S,q}^n \quad , \\ 0 & \text{sonst} \quad . \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

Von den $c_{S,k}^n$ Elementen jeder Zeile von \mathbf{V} sind also lediglich $c_{S,q}^n$ besetzt.

D IDENTIFIKATION VON TENSOREN AUS KONTRAKTIONEN NIEDRIGERER STUFE

Auch hier wird zur Bestimmung von \vec{T} aus (D.30) eine ganze Serie von n_{mod} Parametrisierungsdaten benötigt. Das n_{mod} -fach duplizierte Gleichungssystem ist für

$$n_{\text{mod}} \geq \left[\frac{c_{\mathcal{S},k}^n}{c_{\mathcal{S},p}^n} \right] \stackrel{p>0}{=} \left[\frac{p! \prod_{i=1}^k (n+i-1)}{k! \prod_{i=1}^p (n+i-1)} \right] = \underbrace{\left[\frac{(n+p) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{(p+1) \cdot \dots \cdot k} \right]}_{k-p=q \text{ Faktoren}} \quad (\text{D.35})$$

(über-) bestimmt, wenn alle Zeilen der verschiedenen Koppelmatrizen linear unabhängig sind. Das System kann als Optimierungsproblem gelöst werden. Damit ist der Tensor \mathcal{T} identifiziert.

D.3.4 Berücksichtigung von Besetzungsstrukturen

Im Fall eines spärlich besetzten Projektionstensors \mathcal{K} bzw. \vec{K} sind viele bzw. die meisten Tensorelemente von \mathcal{K} bzw. \vec{K} gleich Null. Meist ist es wünschenswert, diese Gleichungen von (D.30) im Sinne von Nebenbedingungen exakt zu erfüllen, anstatt nur näherungsweise im Sinne der Ausgleichsrechnung.

Hinreichend (jedoch nicht notwendig) für das Verschwinden eines Elements des Projektionstensors $\mathcal{K}_{\hat{\kappa}_1 \dots \hat{\kappa}_p} = 0$ bzw. $K^{\hat{\kappa}} = 0$ ist das Verschwinden aller beitragenden Elemente $T^{\hat{\tau}'}$ von \mathcal{T} bzw. \vec{T} nach (D.32) und (D.33). Diese Forderung lässt sich in der vektorisierten Kontraktionsgleichung (D.30) formal realisieren durch Streichung der Zeile $\hat{\kappa}$ und zusätzlich auf der rechten Seite aller $c_{\mathcal{S},q}^n$ Spalten der Koppelmatrix \mathbf{V} und Zeilen von \vec{T} , bei denen durch nichtverschwindende Elemente der Koppelmatrix eine Koppelung vorliegt. Die dadurch gestrichenen Elemente von \vec{T} sind Null zu setzen.

Mehrere Nebenbedingungen dieser Art führen oft zur mehrfachen Streichung und Nullsetzung ein und desselben Elements von \vec{T} . Die Anzahl der nichtverschwindenden Elemente von \mathcal{T} bzw. \vec{T} und damit auch die Ordnung n_{ord} des zu lösenden Gleichungssystems und die Mindestzahl n_{mod} der bereitzustellenden Parametrisierungsdaten lässt sich aufgrund dieser schwer zu überblickenden Mehrfachstreichungen für spärlich besetzte Projektionstensoren nicht in einfacher Weise a priori angeben.

D.3.5 Beispiel

Die Ergebnisse von Abschnitt (D.3) seien an einem kleinen Beispiel verdeutlicht (siehe Tabelle (D.1) und Abbildung (D.1)). Wir betrachten den vollsymmetrischen Tensor $\mathcal{T} \binom{1}{3,3,3,3}$ der Stufe $\binom{0}{4}$, $k = 4$, und der Dimension $n = 3$. Die hinteren beiden Indizes, $q = 2$, werden über den Vektor $\vec{v} \binom{3}{1}$ bzw. den Tensor $\mathcal{V} \binom{3,3}{1}$ der Stufe $\binom{2}{0}$ kontrahiert, wobei der Projektionstensor $\mathcal{K} \binom{1}{3,3}$ der Stufe $\binom{0}{2}$, $p = 2$, entsteht. Damit sind von den $c_{\mathcal{U},4}^3 = 81$ Komponenten von \mathcal{T} nur $c_{\mathcal{S},4}^3 = 15$ unabhängig, von den $c_{\mathcal{U},2}^3 = 9$ Komponenten von \mathcal{K} und \mathcal{V} lediglich $c_{\mathcal{S},2}^3 = 6$ unabhängig.

In Tabelle (D.1) werden die Komponenten der vektorisierten Beispiel-Tensoren ihren Repräsentanten gegenübergestellt, um Auswahl und Sortierung der Repräsentanten zu verdeutlichen. Außerdem wird die Vielfachheit der Repräsentanten angegeben. In Abbildung (D.1) wird das daraus abgeleitete vektorisierte Gleichungssystem explizit angegeben.

Für die Berücksichtigung einer Nebenbedingung $K^3 = \mathcal{K}_{13} = \mathcal{K}_{31} = 0$ nach Abschnitt (D.3.4) sind in Tabelle (D.1) die $c_{S,2}^3 = 6$ durch Nullsetzen betroffenen Komponenten von \vec{T} , in Abbildung (D.1) die durch Streichung betroffenen Zeilen und Spalten grau unterlegt.

D.4 Identifikation teilsymmetrischer Tensoren

Nach diesen Betrachtungen sei auf Gleichung (D.7) eingegangen,

$$\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} = \mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p}(\nu_1 \dots \nu_q) \mathcal{V}^{(\nu_1 \dots \nu_q)}, \quad (\text{D.36})$$

bei der sich die Symmetrisierungsklammer nur über die hinteren q Indizes reicht.

Diese ist analog zu Abschnitt (D.2) in den vorderen Indizes κ_1 bis κ_p entkoppelt. Für jede dieser n^p Indexkombinationen können die zu den hinteren, symmetrisierten Indizes ν_1 bis ν_q gehörenden $c_{S,q}^n$ unabhängigen Komponenten des Tensors \mathcal{T} separat mit Hilfe der Methoden aus Abschnitt (D.3) bestimmt werden. Bei diesen n^p separaten Systemen werden also die symmetrisierten Indizes ν_1 bis ν_q von $\mathcal{T}_{\kappa_1 \dots \kappa_p}(\nu_1 \dots \nu_q)$ über $\mathcal{V}^{(\nu_1 \dots \nu_q)}$ vollständig kontrahiert zu den Skalaren $\mathcal{K}_{\kappa_1 \dots \kappa_p}$. Für die Verwendung der Formeln aus Abschnitt (D.3) zur Abschätzung des Aufwands sind die für die hier diskutierte Anwendung relevanten Tensorstufen einzusetzen: Seien die Bezeichnungen für Tensorstufen aus Abschnitt (D.3) hier zur Unterscheidung zu den in diesem Abschnitt verwendeten Symbolen durch eine Tilde markiert, so gilt $\tilde{k} = q$, $\tilde{q} = q$, $\tilde{p} = 0$.

Der Kontraktionstensor \mathcal{K} weise eine Besetzung von $n_{\text{elem}} \leq n^p$ Elementen auf; damit ist die Anzahl n_{equ} der zu lösenden Gleichungssysteme analog zu (D.12) durch

$$n_{\text{equ}} = n_{\text{elem}} \leq n^p \quad (\text{D.37})$$

gegeben.

Sei für den Projektionstensor außerdem eine Besetzungsstruktur vorgegeben, die die lokale Bandbreite $n_{\text{band},i}(\kappa_1, \dots, \kappa_p) \leq n$, $1 \leq i \leq n^p$ und die globale Bandbreite $n_{\text{band}} = \max_{i=1}^{n^p} [n_{\text{band},i}(\kappa_1, \dots, \kappa_p)] \leq n$ aufweist. Die Gleichungssysteme können wieder auf die relevanten Komponenten eingeschränkt werden. Diese eingeschränkten Gleichungssysteme sind in den zu bestimmenden Komponenten ν_1 bis ν_q vollbesetzt und damit nach (D.31) von Ordnung

$$n_{\text{ord},i} = c_{S,q}^{n_{\text{band},i}} \leq c_{S,q}^{n_{\text{band}}}. \quad (\text{D.38})$$

Für die Mindestanzahl der zur Identifikation zu verwendenden Vektoren und Kontraktionen ergibt sich aus (D.35) der Ausdruck

$$n_{\text{mod}} \geq c_{S,q}^{n_{\text{band}}}, \quad (\text{D.39})$$

da sich der Nenner zu $c_{S,0}^{n_{\text{band}}} = 1$ vereinfacht.

D.5 Verallgemeinerungen

Für die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen sind die hier vorgestellten Methoden noch in mehreren Punkten zu verallgemeinern:

Oft ist die rechte Seite von Gleichung (D.5) als Summe (bzw. Differenz im Sinne einer „Differenzmessung“) mehrerer Kontraktionen mit demselben Tensor \mathcal{T} , jedoch unterschiedlichen Vektoren \vec{v}_i gegeben. Dies lässt sich in einfacher Weise durch eine entsprechende Summenbildung der Tensoren \mathcal{V}_i berücksichtigen.

Häufig ist die rechte Seite von (D.5) auch als Summe mehrerer Kontraktionen mit demselben Vektor \vec{v} , jedoch Tensoren \mathcal{T}_i unterschiedlicher Stufen gegeben. In diesem Fall ist die vektorisierte Form \vec{T}_i für alle zu identifizierenden Tensoren und die dazugehörigen Koppelvektoren bzw. Koppelmatrizen aufzustellen und durch Aneinanderhängen zu einem einzigen Vektor \vec{T} und zu einem Koppelvektor bzw. einer Koppelmatrix zusammenzufassen und gemeinsam zu lösen. Hierfür ist eine entsprechend erhöhte Zahl von Vektoren und Kontraktionen bereitzustellen.

Schließlich können zusätzlich noch weitere Terme angekoppelt werden, die sich in weiteren Punkten von den bisher berücksichtigten unterscheiden. Beispielsweise müssen die zu kontrahierenden Indizes einiger Terme nicht notwendigerweise die selbe Dimension aufweisen, wie zuschauende Indizes.

Tabelle D.1: Komponenten der vektorisierten Beispiel-Tensoren

Komponenten der vektorisierten Tensoren, ihrer Repräsentanten und der zugehörigen Vielfachheiten für die Beispiel-Tensoren $\mathcal{T}_{(3,3,3,3)}^1$, $\mathcal{K}_{(3,3)}^1$ und $\mathcal{V}_{(3,3)}^1$ (letzterer basierend auf dem Beispiel-Vektor $\vec{v} \binom{3}{1}$). Grau unterlegt sind diejenigen Komponenten, die Null gesetzt werden, wenn eine Nebenbedingung $K^3 = \mathcal{K}_{13} = \mathcal{K}_{31} = 0$ durch Streichung der involvierten Zeilen und Spalten vorgenommen wird (vergleiche hierzu Abbildung (D.1)).

$T^{\hat{r}}$	$\mathcal{T}_{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3 \tilde{r}_4}$	$F^{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3 \tilde{r}_4}$	$K^{\hat{k}}$	$\mathcal{K}_{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2}$	$F^{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2}$	$V^{\hat{\nu}}$	$\mathcal{V}^{\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2}$	$F^{\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2}$
T^1	\mathcal{T}_{1111}	1	K^1	\mathcal{K}_{11}	1	V^1	\mathcal{V}^{11}	1
T^2	\mathcal{T}_{1112}	4	K^2	\mathcal{K}_{12}	2	V^2	\mathcal{V}^{12}	2
T^3	\mathcal{T}_{1113}	4	K^3	\mathcal{K}_{13}	2	V^3	\mathcal{V}^{13}	2
T^4	\mathcal{T}_{1122}	6	K^4	\mathcal{K}_{22}	1	V^4	\mathcal{V}^{22}	1
T^5	\mathcal{T}_{1123}	12	K^5	\mathcal{K}_{23}	2	V^5	\mathcal{V}^{23}	2
T^6	\mathcal{T}_{1133}	6	K^6	\mathcal{K}_{33}	1	V^6	\mathcal{V}^{33}	1
T^7	\mathcal{T}_{1222}	4	$c_{S,2}^3 = 6, c_{U,2}^3 = 9$			$c_{S,2}^3 = 6, c_{U,2}^3 = 9$		
T^8	\mathcal{T}_{1223}	12						
T^9	\mathcal{T}_{1233}	12						
T^{10}	\mathcal{T}_{1333}	4						
T^{11}	\mathcal{T}_{2222}	1						
T^{12}	\mathcal{T}_{2223}	4						
T^{13}	\mathcal{T}_{2233}	6						
T^{14}	\mathcal{T}_{2333}	4						
T^{15}	\mathcal{T}_{3333}	1						
$c_{S,4}^3 = 15, c_{U,4}^3 = 81$								

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11} \\ \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{22} \\ \mathcal{K}_{23} \\ \mathcal{K}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{11} & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathcal{V}^{11} & \cdot & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \cdot & \mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathcal{V}^{11} & \cdot & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \cdot & 2\mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{V}^{11} & \cdot & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \cdot & \mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{V}^{11} & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \cdot & \cdot & \mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\mathcal{V}^{12} & 2\mathcal{V}^{13} & \cdot & \cdot & \mathcal{V}^{22} & 2\mathcal{V}^{23} & \mathcal{V}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1111} \\ \mathcal{T}_{1112} \\ \mathcal{T}_{1113} \\ \mathcal{T}_{1122} \\ \mathcal{T}_{1123} \\ \mathcal{T}_{1133} \\ \mathcal{T}_{1222} \\ \mathcal{T}_{1223} \\ \mathcal{T}_{1233} \\ \mathcal{T}_{1333} \\ \mathcal{T}_{2222} \\ \mathcal{T}_{2223} \\ \mathcal{T}_{2233} \\ \mathcal{T}_{2333} \\ \mathcal{T}_{3333} \end{pmatrix}$$

Abbildung D.1: Vektorisiertes Gleichungssystem

Vektorisiertes Gleichungssystem für die Beispiel-Tensoren $\mathcal{T}_{(3,3,3,3)}^{(1)}$, $\mathcal{K}_{(3,3)}^{(1)}$ und $\mathcal{V}_{(3,3)}^{(1)}$ (letzterer basierend auf dem Beispiel-Vektor $\vec{v}_{(1)}^{(3)}$). Angegeben sind jeweils die den Komponenten der vektorisierten Tensoren zugeordneten Repräsentanten (vergleiche hierzu Tabelle (D.1)). Grau unterlegt sind diejenigen Zeilen und Spalten, die entfallen, wenn die Nebenbedingung $K^3 = K_{13} = K_{31} = 0$ durch Streichung der involvierten Zeilen und Spalten vorgenommen wird.

E Nichtlineare Wärmeausbreitung

In Abschnitt (E.1) wird zunächst die Wärmeleitung unter Berücksichtigung von Materialnichtlinearitäten diskutiert. In Abschnitt (E.2) werden Oberflächeneffekte in die Betrachtung mit einbezogen, also (lineare) Wärmeübergänge, Konvektion und Wärmestrahlung.

E.1 Wärmeleitungsgleichung

E.1.1 Grundgleichung und Materialgesetze

Betrachtet man die Wärme als Erhaltungsgröße, so gehorchen die *Wärmedichte* q und die *Wärmestromdichte* \vec{j} einer Kontinuitätsgleichung

$$\dot{q} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dot{q}_{\text{ext}} , \quad (\text{E.1})$$

wobei \dot{q}_{ext} die dem System von außen zugeführte Wärmeleistungsdichte ist.

Durch Materialgesetze des Mediums werden die in (E.1) auftretenden Größen durch die *Temperatur* T ausgedrückt.

Die Wärmedichte q wird durch die *Wärmekapazität* $\kappa(T)$ über

$$q = \kappa(T) T \quad (\text{E.2})$$

parametrisiert. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität stellt eine Materialnichtlinearität dar.

Das Fourierschen Gesetz schließlich verknüpft die Wärmestromdichte \vec{j} über die *Wärmeleitfähigkeit* $\lambda(T)$ mit dem Temperaturgradient,

$$\vec{j} = -\lambda(T) \vec{\nabla} T . \quad (\text{E.3})$$

Auch hier bedeutet die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit eine Materialnichtlinearität.

Damit ergibt sich schließlich die Wärmeleitungsgleichung

$$(\kappa T)' - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) = \dot{q}_{\text{ext}} \quad (\text{E.4})$$

zur Beschreibung des Temperaturverhaltens von Körpern zunächst unter Vernachlässigung von Oberflächeneffekten.

E.1.2 Parametrisierung der Materialnichtlinearitäten

Die Wärmekapazität $\kappa(T)$ und die Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ werden im Sinne einer Potenzreihe als schwach temperaturabhängig im Sinne von

$$\kappa(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k T^k, \quad (\text{E.5})$$

$$\lambda(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k T^k, \quad (\text{E.6})$$

angenommen.

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (E.4) ein, erhält man schließlich die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k (T^{k+1})' - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \vec{\nabla} \cdot (T^k \vec{\nabla} T) = \dot{q}_{\text{ext}} \quad (\text{E.7})$$

als Wärmeleitungsgleichung.

Im stationären Zustand gilt $\dot{q} = 0$; hier verschwinden alle zeitabhängigen Terme und die κ_k -Abhängigkeiten entfallen.

In der Praxis kann vielfach die Nichtlinearität der Wärmekapazität vernachlässigt werden. Zur Darstellung der Wärmeleitungsgleichung in der nichtlinearen Normalform (4.21) ist dies Voraussetzung, da in der Normalform multilineare Terme im Zustandsvektor und dessen zeitlicher Ableitung nicht berücksichtigt sind.

E.1.3 Eindimensionaler Fall

Wir beschränken uns nun auf den eindimensionalen Fall in ebener Geometrie, die Ortskoordinate sei x .

E.1.3.1 Stationäre Lösung im quellenfreien Fall

Betrachtet man einen Abschnitt, in dem die externe Wärmeleistungsdichte verschwindet, $\dot{q}_{\text{ext}}(x) \equiv 0$, so folgt damit aus der stationären, eindimensionalen Form $dj/dx = 0$ von Gleichung (E.1) sofort, dass die eindimensionale Wärmestromdichte $j(x) \equiv j_0$ konstant ist. Die eindimensionale, stationäre Form $-\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (T^k T')' = 0$ von (E.7) lässt sich mit dieser Integrationskonstante durch Trennung der Variablen integrieren, wobei als Randbedingung noch $T(x = x_0) = T_0$ vorgegeben wird. Als Lösung ergibt sich für $x(T)$ ein Polynom in T ,

$$x(T) = x_0 + \frac{1}{j_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k+1} (T_0^{k+1} - T^{k+1}). \quad (\text{E.8})$$

Eine inverse analytische Darstellung in der Form $T(x)$ ist im Allgemeinen nicht möglich.

Dieser analytische Ausdruck kann verwendet werden, um numerische Ergebnisse stationärer Rechnungen zu prüfen.

E.1.3.2 Finite-Differenzen Diskretisierung und Normalform

Gleichung (E.7) sei im hier betrachteten eindimensionalen Fall in ebener Geometrie beispielhaft unter Verwendung der Finite-Differenzen Methode auf einem äquidistanten Gitter diskretisiert.

Die Gitterweite sei Δx . Die Temperatur T an den Stützstellen x^i des Gitters, wird zum Zustandsvektor $\vec{x} \equiv \vec{T}$ zusammengefasst, wobei von einer natürlichen Nummerierung der Komponenten ausgegangen wird. Unter Verwendung einer einfachen Ortsdiskretisierung des involvierten Operators ergibt sich für die i -Komponente¹ der Temperatur T^i der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k \left[(T^i)^{k+1} \right] - \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (T^i)^k (T^{i-1} - 2T^i + T^{i+1}) = \dot{q}_{\text{ext}}, \quad (\text{E.9})$$

wobei der innere Superskript einen Index, der äußere einen Exponenten darstellt.

Gleichung (E.9) liegt jetzt in der nichtlinearen Normalform (4.21) vor, die Zustandsmatrix und die Z_s -Tensoren können direkt abgelesen werden. Hier werden nur die nichtverschwindenden Komponenten der Tensoren angegeben, wobei durch die Schreibweise $j = j_a : j_b$ vom Index j der Bereich von der Komponente j_a bis zur Komponente j_b angesprochen wird. Für $k = 0$ liest man für die Zustandsmatrix \mathbf{A} den Ausdruck

$$A_{j=i-1:i+1}^i = \frac{1}{\Delta x^2} \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

ab, für die Z_s -Tensoren erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_{s-1} j=i-1:i+1}^i = \frac{s!}{\Delta x^2} \lambda_{s-1} \underbrace{\delta_{j_1}^i \dots \delta_{j_{s-1}}^i}_{s-1 \text{ mal}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

der auch im Formalismus des Matrizenansatz (5.9) als $Z_s/s - 1$ -Matrix $\mathbf{S}_{s, s-1}$,

$$S_{s, s-1; j=i-1:i+1}^i = \frac{s!}{\Delta x^2} \lambda_{s-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.12})$$

dargestellt werden kann.

E.1.3.3 Randbedingungen

Das Gleichungssystem muss an den Rändern durch Randbedingungen abgeschlossen werden. Beispielsweise kann ein Ende durch eine inhomogene Dirichlet Randbedingung an ein Wärmebad der Temperatur T_0 angekoppelt und damit fest vorgegeben werden. Das andere Ende kann als homogene Neumann Randbedingung gewählt und damit thermisch isoliert werden.

¹ Auf die Komplikationen, die durch Randbedingungen verursacht werden, wird hier nicht eingegangen; deshalb soll der zur i -Komponente korrespondierende Stützpunkt x^i kein Randpunkt sein.

Freiheitsgrade, deren Verhalten durch die Randbedingung explizit vorgegeben wird, werden aus dem Gleichungssystem eliminiert. Ihr Einfluss wird durch virtuelle Lasten an den benachbarten Freiheitsgraden modelliert. Die Anzahl \tilde{n} der Stützstellen ist deshalb von der Ordnung n des Gleichungssystems zu unterscheiden.

E.1.3.4 Implementierung

Die ortsdiskrete nichtlineare Wärmeleitungsgleichung wurde für den eindimensionalen Fall in ebener Geometrie für ein äquidistantes Gitter gemäß (E.9) mit einer frei wählbaren Anzahl von Stützstellen implementiert. Es werden die durch λ_1 und λ_2 parametrisierten Material-nichtlinearitäten, also die Z_s -Tensoren bis zur maximalen Stufe $s_{\max} = 3$, berücksichtigt.

E.2 Oberflächeneffekte

Neben den einfachen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind insbesondere im höherdimensionalen Fall auch allgemeinere, physikalisch motivierte Randbedingungen von Bedeutung.

Im Allgemeinen wechselwirkt das Rechengebiet über die Oberfläche der Temperatur T mit der Umgebung, modelliert als Wärmebad der Temperatur T_0 . Diese Wechselwirkung drückt sich in einer Wärmestromdichte j durch die Oberfläche aus, die dem Rechengebiet Wärme zu- oder abführt.

E.2.1 Linearer Wärmeübergang und Konvektion

Der einfachste Ansatz einer solchen Wechselwirkung ist der eines linearen Wärmeübergangs. In diesem Fall ist die durch eine Oberfläche tretende Wärmestromdichte proportional zu einem *Übergangskoeffizienten* α und der Temperaturdifferenz $T - T_0$, also

$$j_{\text{con}} = \alpha (T - T_0) . \quad (\text{E.13})$$

Die inhomogene Dirichlet- und die homogene Neumann-Randbedingung können als Grenzfall dieses linearen Wärmeübergangs für $\alpha \rightarrow \infty$ und $\alpha \rightarrow 0$ aufgefasst werden.

Der Übergangskoeffizient α ist weniger als Materialeigenschaft aufzufassen; vielmehr parametrisiert er Oberflächeneigenschaften des Rechengebiets (wie zum Beispiel die Oberflächenrauigkeit) sowie die Kontakteigenschaften zum umgebenden Medium. Beispielsweise wird dieser lineare Ansatz in Finite-Elemente Simulationen oft verwendet, um konvektive Oberflächen in einfacher Weise zu modellieren. In diesem Fall parametrisiert der Übergangskoeffizient insbesondere auch die Stömungsverhältnisse des das Rechengebiet umgebenden Transportmediums.

Für eine Darstellung in der Normalform (4.21) kann die ortsdiskrete Form von (E.13) in einen in der Temperatur linearen Term und in einen konstanten Term zerlegt werden. Der

lineare Term wird dann als Bestandteil der Zustandsmatrix aufgefasst, der konstante Term ist Teil der (im Allgemeinen virtuellen) Eingangsmatrix.

E.2.2 Wärmestrahlung

Für den Wärmeaustausch mit der Umgebung mittels Wärmestrahlung gilt nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für die Wärmestromdichte die Beziehung

$$j_{\text{rad}} = \sigma_0 \sigma (T^4 - T_0^4) \equiv \varsigma (T^4 - T_0^4) . \quad (\text{E.14})$$

Darin ist σ der *Emissionskoeffizient*, σ_0 die *Stefan-Boltzmann-Konstante*,

$$\sigma_0 = 56,70 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} . \quad (\text{E.15})$$

Die Kombination aus $\sigma_0 \sigma$ wird noch als *Strahlungskoeffizient* ς eingeführt,

$$\varsigma = \sigma_0 \sigma . \quad (\text{E.16})$$

Für einen ideal schwarzer Strahler gilt für den Emissionskoeffizienten definitionsgemäß $\sigma = 1$, für realistische Materialien ist $0 \leq \sigma \leq 1$. Der Emissionskoeffizient ist keine reine Materialeigenschaft, vielmehr parametrisiert er auch Oberflächeneigenschaften des Rechengebiets (wie zum Beispiel die Oberflächenrauigkeit). Der Emissionskoeffizient ist im Allgemeinen eine Funktion der Frequenz der Strahlung und eventuell des Raumwinkels relativ zur Orientierung des Flächenelements. In dem hier verwendeten Ansatz soll von solchen Abhängigkeiten abgesehen werden, der Emissionskoeffizient ist hier als integraler Wert zu verstehen.

Für eine Darstellung in der Normalform (4.21) kann die ortsdiskrete Form von (E.14) in einen nichtlinearen Term und einen konstanten Term zerlegt werden. Der nichtlineare Term ist als Z4-Tensor bzw. als Z4-Matrix beschreibbar, der konstante Term gibt wiederum einen Beitrag zur (virtuellen) Eingangsmatrix.

Eine Besonderheit weist die Finite-Elemente Software PERMAS auf: Hier ist Wärmestrahlung nicht als eigenständige Eigenschaft der Elemente implementiert. Vielmehr wird Wärmestrahlung als Wärmeübergang analog zu (E.13) mit temperaturabhängigem Übergangskoeffizienten modelliert. Bezeichnet man den hier benötigten speziellen Übergangskoeffizienten als $\tilde{\zeta}(T, T_0)$, so soll also

$$j_{\text{rad}} \equiv \tilde{\zeta}(T, T_0) \cdot (T - T_0) \quad (\text{E.17})$$

gelten. Für den Übergangskoeffizienten erhält durch Abspalten eines Faktors $(T - T_0)$ aus (E.14) mittels Polynomdivision den Ausdruck

$$\tilde{\zeta}(T, T_0) = \varsigma (T^3 + T^2 T_0 + T T_0^2 + T_0^3) . \quad (\text{E.18})$$

Diese besondere Darstellung der Wärmestrahlung muss bei der Identifikation des Z4-Tensors bzw. der Z4-Matrix berücksichtigt werden. Außerdem ist zu beachten, dass der Beitrag von (E.17) zur (virtuellen) Eingangsmatrix für verschiedene Zustände variiert, was eine weitere Komplikation darstellt, da der Beitrag von (E.14) zur (virtuellen) Eingangsmatrix zunächst nicht zugänglich ist.

F Diffusion magnetischer Felder

In Abschnitt (F.1) wird die Diffusionsgleichung für die Diffusion magnetischer Felder ausführlich diskutiert. In Abschnitt (F.2) wird mit dem Integral des magnetischen Flusses eine nichttriviale Ausgangsgleichung vorgestellt.

F.1 Diffusionsgleichung

F.1.1 Grundgleichungen und Materialgesetze

Ausgangspunkt zur Beschreibung der Ausbreitung magnetischer Felder durch eine Diffusionsgleichung sind die Maxwell Gleichungen in *Wirbelstromnäherung*. In dieser Näherung wird die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt, also die von Maxwell eingeführte Korrektur des Durchflutungsgesetzes von Ampère. Die für die Felddiffusion relevanten Gleichungen für die *magnetische Induktion* \vec{B} , die *magnetische Feldstärke* \vec{H} , die *elektrische Feldstärke* \vec{E} sowie die *elektrische Stromdichte* \vec{j} lauten dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (\text{F.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad , \quad (\text{F.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \dot{\vec{B}} \quad . \quad (\text{F.3})$$

Das Gleichungssystem wird durch Materialgesetze des Mediums abgeschlossen:

Die elektrischen Materialeigenschaften werden unter Verwendung des *Ohmschen Gesetz*

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{F.4})$$

durch die *elektrische Leitfähigkeit* σ parametrisiert. Für die hier betrachtete Anwendung wird die elektrische Leitfähigkeit als konstant angenommen, auf der elektrischen Seite liegt also ein lineares Verhalten vor.

Die magnetischen Materialeigenschaften werden unter Verwendung des Ansatzes

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu_0 \mu(\vec{H}) \vec{H} \quad (\text{F.5})$$

durch die *magnetische Permeabilität* μ parametrisiert, wobei die *magnetische Feldkonstante* μ_0 als

$$\mu_0 \equiv 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (\text{F.6})$$

F DIFFUSION MAGNETISCHER FELDER

definiert ist; im Vakuum gilt $\mu(\vec{H}) \equiv 1$. Die magnetische Induktion \vec{B} ist damit eine eindeutige Funktion der magnetischen Feldstärke \vec{H} , Hystereseeffekte sind in diesem Ansatz nicht enthalten. Insbesondere verschwindet bei fehlendem \vec{H} auch \vec{B} , es tritt also keine Remanenz auf. Die magnetische Permeabilität $\mu(\vec{H})$ wird darüberhinaus als skalar angenommen, \vec{H} und \vec{B} sind kollinear. Jedoch weist — insbesondere im Fall von Ferromagnetika — die Funktion $\mu(\vec{H})$ eine starke \vec{H} -Abhängigkeit auf, so dass eine starke Materialnichtlinearität vorliegt!

Für die Felddiffusion erweist es sich als nützlich, durch Einführung der *magnetischen Funktion* $\tilde{\mu}(\vec{B})$ als

$$\tilde{\mu} \equiv \frac{1}{\mu_0 \mu} \quad (\text{F.7})$$

die magnetischen Materialeigenschaften in der Form

$$\vec{H}(\vec{B}) = \tilde{\mu}(\vec{B}) \vec{B} \quad (\text{F.8})$$

zu parametrisieren. Die dafür notwendige Voraussetzung der Invertierbarkeit von (F.5) ist für reale Materialien zumindest näherungsweise meist erfüllt. Auf diese Weise lässt sich die Gleichung zur Beschreibung der Felddiffusion in eine Form bringen, die eine Darstellung in der Normalform (4.21) erlaubt.

F.1.2 Ableitung der Diffusionsgleichung

Zunächst wird von Gleichung (F.2) erneut die Rotation gebildet. Einsetzen der Materialgleichungen (F.4) und (F.7) und Elimination der elektrischen Feldstärke durch Verwendung von (F.3) führt sofort auf die Beziehung

$$\sigma \dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times (\tilde{\mu} \vec{B}) \right]. \quad (\text{F.9})$$

Die doppelte Rotation auf der rechten Seite von (F.9) wird in zwei Stufen aufgelöst, wobei aufgrund von (F.1) einer der entstehenden Terme verschwindet. Es folgt schließlich die Beziehung

$$\sigma \dot{\vec{B}} = \Delta (\tilde{\mu} \vec{B}) - \vec{\nabla} \left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \tilde{\mu}) \right], \quad (\text{F.10})$$

für die Ausbreitung der magnetischen Induktion in elektrisch leitenden Materialien.

F.1.3 Diffusionsblöcke zur netzwerkorientierten Simulation

Zur Simulation des Verhaltens magnetischer Aktoren (Stellglieder) existiert neben dem geometriebasierten Ansatz der Ortsdiskretisierung der gesamten geometrischen Struktur auch ein

netzwerkorientierter Ansatz. Bei letzterem werden einfache eindimensionale *Diffusionsblöcke*, die jeweils die Felddiffusion in eine bestimmte Richtung beschreiben, zu einem magnetischen Netzwerk gekoppelt, das die geometrische Struktur des Aktors wiedergibt.

Innerhalb eines Diffusionsblocks ist oft die Annahme gerechtfertigt, dass die Richtung der magnetischen Induktion \vec{B} senkrecht zum Gradient der magnetischen Funktion $\tilde{\mu}$ ist, so dass das entsprechende Skalarprodukt verschwindet,

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \tilde{\mu}) = 0 . \quad (\text{F.11})$$

Führt man noch den Betrag der magnetischen Induktion B ein,

$$B \equiv |\vec{B}| , \quad (\text{F.12})$$

wird die Felddiffusion schließlich durch die Diffusionsgleichung

$$\sigma \dot{B} = \Delta (\tilde{\mu} B) \quad (\text{F.13})$$

beschrieben.

Man erkennt an dieser Gleichung, dass eine gute elektrische Leitfähigkeit die Diffusion der magnetischen Induktion erschwert, eine hohe magnetische Funktion und damit eine kleine magnetische Permeabilität die Diffusion erleichtert. Insbesondere der Effekt der Sättigung ferromagnetischer Materialien, also die Begrenzung der magnetischen Induktion bei hohen magnetischen Feldstärken und die damit verbundene Abnahme der magnetischen Permeabilität bzw. Zunahme der magnetischen Funktion, bewirkt gegenüber dem linearisierten Verhalten eine Beschleunigung der Diffusion.

Es sei noch auf die Unterschiede der räumlichen Operatoren der Felddiffusionsgleichung (F.13) im Vergleich zur Wärmeleitungsgleichung (E.4) hingewiesen, die auf der jeweiligen Definitionen der der Materialeigenschaften durch die Materialgesetze — (F.8) im Fall der Felddiffusion, (E.3) im Fall der Wärmeleitungsgleichung — beruhen.

F.1.4 Parametrisierung der Materialnichtlinearitäten

In dem für die technische Anwendung interessanten Fall der Felddiffusion in ferromagnetischen Materialien liegt eine starke B -Abhängigkeit der magnetischen Funktion $\tilde{\mu}(B)$ vor, die sich im Allgemeinen kaum durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Trotzdem können qualitative Effekte unter Verwendung eines solchen Ansatz demonstriert werden. Die magnetische Funktion $\tilde{\mu}(B)$ werde deshalb als Potenzreihe

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}_k B^k \quad (\text{F.14})$$

angesetzt.

Durch Einsetzen dieser Parametrisierung in die Diffusionsgleichung (F.13) erhält man die Beziehung

$$\sigma \dot{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \Delta B^{k+1} . \quad (\text{F.15})$$

als Felddiffusionsgleichung.

F.1.5 Finite-Differenzen Diskretisierung und Normalform

Gleichung (F.15) sei beispielhaft unter Verwendung der Finite-Differenzen Methode in ebener Geometrie auf einem äquidistanten Gitter diskretisiert.

Die Ortskoordinate sei x , die Gitterweite sei Δx . Der Betrag der magnetischen Induktion B an den Stützstellen x^i des Gitters wird zum Zustandsvektor $\vec{x} \equiv \vec{B}$ — nicht zu verwechseln mit dem oben betrachteten vektoriellen Darstellung der magnetischen Induktion — zusammengefasst, wobei von einer natürlichen Nummerierung der Komponenten ausgegangen wird. Unter Verwendung der einfachsten Ortsdiskretisierung des involvierten Operators ergibt sich für die i -Komponente¹ des Betrags der magnetischen Induktion B^i der Ausdruck

$$\sigma \dot{B}^i = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}_k \left[(B^{i-1})^{k+1} - 2 (B^i)^{k+1} + (B^{i+1})^{k+1} \right] , \quad (\text{F.16})$$

wobei der innere Superskript einen Index, der äußere einen Exponenten darstellt.

Gleichung (F.16) liegt jetzt in der nichtlinearen Normalform (4.21) vor, die Zustandsmatrix und die Z_s -Tensoren können direkt abgelesen werden. Hier werden nur die nichtverschwindenden Komponenten der Tensoren angegeben, wobei durch die Schreibweise $j = j_a : j_b$ vom Index j der Bereich von der Komponente j_a bis zur Komponente j_b angesprochen wird. Als Zustandsmatrix \mathbf{A} liest man für $k = 0$ den Ausdruck

$$A_{j=i-1:i+1}^i = \frac{1}{\Delta x^2} \tilde{\mu}_0 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.17})$$

ab, für die Z_s -Tensoren erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_{s-1} j=i-1:i+1}^i = \frac{s!}{\Delta x^2} \tilde{\mu}_{s-1} \underbrace{\delta_{j_1}^j \dots \delta_{j_{s-1}}^j}_{s-1 \text{ mal}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} , \quad (\text{F.18})$$

der auch im Formalismus des Matrizenansatz (5.9) als $Z_s/0$ -Matrix $\mathbf{S}_{s,0}$,

$$S_{s,0; j=i-1:i+1}^i = \frac{s!}{\Delta x^2} \tilde{\mu}_{s-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.19})$$

¹ Auf die Komplikationen, die durch Randbedingungen verursacht werden, wird hier nicht eingegangen; deshalb soll der zur i -Komponente korrespondierende Stützpunkt x^i kein Randpunkt sein.

ausgedrückt werden kann.

Auch in der ordiskreten Form sei noch einmal auf den Unterschied der Felddiffusionsgleichung (F.16) zur Wärmeleitungsgleichung (E.9) hingewiesen, der sich auch in den entsprechenden Z_s -Tensoren bzw. Z_s/t -Matrizen niederschlägt: Im Fall der Wärmeleitungsgleichung ist der obere Index der δ -Ausdrücke der $\mathcal{A}_{s; j_1 \dots j_{s-1} j}^i$ gleich dem oberen Index i , im Fall der Felddiffusionsgleichung gleich dem letzten unteren Index j ; dies führt im Matrizenansatz im ersten Fall zu einer $Z_s/s - 1$ -Matrix $\mathbf{S}_{s, s-1}$, im zweiten Fall zu einer $Z_s/0$ -Matrix $\mathbf{S}_{s, 0}$.

F.1.6 Randbedingungen und Last

Bei der vorliegenden Fragestellung ist auf der einen Seite des Diffusionsblocks eine inhomogene Dirichlet Randbedingung, also eine fest vorgegebene magnetische Induktion, verwirklicht, auf der anderen Seite eine homogene Neumann Randbedingung, also ein isolierendes Ende.

Da das System durch keine externe Last beaufschlagt wird, wird stattdessen die die Dirichlet Randbedingung modellierende virtuelle Last als externe Last aufgefasst.

F.1.7 Implementierung

Die ortsdiskrete nichtlineare Felddiffusion wurde für den eindimensionalen Fall auf der Basis von (F.15) in ebener und Zylindergeometrie für ein Gitter mit variabler Gitterweite und frei wählbarer Anzahl von Stützstellen implementiert. Es werden die durch $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ und $\tilde{\mu}_3$ parametrisierten Materialnichtlinearitäten, also die Z_s -Tensoren bis zur maximalen Stufe $s_{\max} = 4$, berücksichtigt.

F.2 Magnetischer Fluss

Für technische Anwendungen ist weniger die lokale magnetische Induktion \vec{B} als vielmehr die integrale Größe des *magnetischen Fluss* Φ von Bedeutung, da dieser letztlich die mechanische Kraft des Aktors bestimmt. Diese ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (\text{F.20})$$

über eine vorgegebene Fläche A .

Im Fall eindimensionaler Diffusionsflöcke ist die Flächennormale der relevanten Fläche meist parallel zur magnetischen Induktion des betrachteten Blocks, so dass sich die vektorielle Gleichung (F.20) zur skalaren Gleichung

$$\Phi = \int_A B dA \quad (\text{F.21})$$

F DIFFUSION MAGNETISCHER FELDER

vereinfacht.

Diese Gleichung lässt sich im Rahmen der Normalform (4.21), (4.22) als lineare Ausgangsgleichung (4.22) diskretisieren, wobei das Integral als durch Flächenelemente gewichtete Summe mittels einer geeigneten Ausgangsmatrix approximiert wird.

G Schwingungsgleichung mechanischer Systeme

In diesem Anhang werden die Grundlagen und Besonderheiten zur Ordnungsreduktion mechanischer Systeme vorgestellt.

Die Modellierung mechanischer Systeme führt im Allgemeinen auf eine Schwingungsgleichung. Diese ist in der Physik wohlbekannt; ihre mathematischen Eigenschaften werden deshalb hier nur insofern betrachtet, wie dies für die hier betrachteten Anwendungen erforderlich ist.

In Abschnitt (G.1) wird die Schwingungsgleichung zunächst in der in dieser Arbeit betrachteten Normalform dargestellt, um sie den Verfahren der Ordnungsreduktion zugänglich zu machen. Ein für numerische Simulationen oft verwendeter Ansatz für die Schwingungsdämpfung wird in Abschnitt (G.2) kurz vorgestellt. Schließlich werden in Abschnitt (G.3) mögliche Nichtlinearitäten für mechanische Systeme diskutiert und Besonderheiten der Implementierung der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren für mechanische Systeme erläutert.

G.1 Zustandsraumdarstellung der Schwingungsgleichung

Mechanische Modelle werden — in linearisierter und bereits ortsdiskreter Form — durch ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung beschrieben, die *Schwingungsgleichung*

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{q}} + \mathbf{D} \dot{\vec{q}} + \mathbf{K} \vec{q} = \mathbf{F} \vec{u} \quad (\text{G.1})$$

für die *Auslenkung* $\vec{q}(t)$ $\begin{pmatrix} \hat{n} \\ 1 \end{pmatrix}$. Hierbei bedeuten \mathbf{M} $\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{n} \end{pmatrix}$ die *Massenmatrix*, \mathbf{D} $\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{n} \end{pmatrix}$ die *Dämpfungsmatrix*, \mathbf{K} $\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{n} \end{pmatrix}$ die *Steifigkeitsmatrix* und \mathbf{F} $\begin{pmatrix} \hat{n} \\ p \end{pmatrix}$ die *Kraftmatrix*; $\vec{u}(t)$ $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der bereits bekannte Eingangsvektor der p Eingangsgrößen. Die Auslenkung \vec{q} mit \hat{n} Variablen ist dabei eine Zusammenfassung der Auslenkung verallgemeinerter Ortskoordinaten (lineare Ortskoordinaten, Winkelkoordinaten usw.).

Um die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden der Ordnungsreduktion anwenden zu können, kann dieses System in ein äquivalentes System erster Ordnung in Zustandsraumdarstellung (3.1),

$$\mathbf{J} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} \vec{u}, \quad (\text{G.2})$$

umgewandelt werden. Die Ordnung n dieses Systems ist

$$n = 2 \hat{n}, \quad (\text{G.3})$$

die Matrizen der Zustandsraumdarstellung setzen sich beispielsweise gemäß

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix} , \quad (\text{G.4})$$

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \cdot \\ \cdot & \mathbf{M} \end{pmatrix} , \quad (\text{G.5})$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \cdot & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} , \quad (\text{G.6})$$

$$\mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} \cdot \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (\text{G.7})$$

aus den Matrizen der Schwingungsgleichung zusammen.

G.2 Proportionale Dämpfung

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die Massenmatrix \mathbf{M} sind im Allgemeinen durch das zugrundeliegende physikalisch-technische Modell vorgegeben. Für die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} steht jedoch oft kein fundiertes Modell zur Verfügung. In der Praxis werden für numerische Simulationen deshalb oft einfache Ansätze für die Dämpfungsmatrix verwendet.

Ein einfacher, aus theoretischer Sicht interessanter Ansatz, ist die *proportionale Dämpfung*, bei der die Dämpfungsmatrix als einfache Linearkombination aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix gebildet wird,

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} ; \quad (\text{G.8})$$

die Parameter α und β stellen skalare Parameter dar. Der Vorteil dieses Ansatzes zeigt sich bei der Lösung des Eigenwertproblems der Schwingungsgleichung: Die Transformationsmatrizen, die das ungedämpfte System diagonalisieren, diagonalisieren aufgrund (G.8) auch die Dämpfungsmatrix, so dass die Schwingungsgleichung vollständig entkoppelt.

Wie sich leicht zeigen lässt, weisen die Eigenmoden der Schwingungsgleichung bei Benutzung des Ansatzes (G.8) abhängig von den Eigenfrequenzen $\omega_{0,i}$ unterschiedliche Gütefaktoren q_i auf. Bei der Kreisfrequenz ω_{\max} wird eine maximale Güte q_{\max} erreicht; diese Größen stehen mit den Parametern α und β über

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max} &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} , & \alpha &= \frac{\omega_{\max}}{2 q_{\max}} , \\ q_{\max} &= \frac{1}{2 \sqrt{\alpha \beta}} , & \beta &= \frac{1}{2 \omega_{\max} q_{\max}} , \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.9})$$

in Verbindung.

Alle in dieser Arbeit betrachteten mechanischen Probleme beinhalten eine auf dem α - β -Ansatz beruhende Dämpfung, die im Allgemeinen durch die Vorgabe von ω_{\max} und q_{\max} parametrisiert wird.

G.3 Nichtlinearitäten

Für mechanische Systeme sind mehrere Klassen von Nichtlinearitäten von Bedeutung: geometrische Nichtlinearitäten, Zwangsbedingungen und Materialnichtlinearitäten.

Die für technische Problemstellungen bedeutendste Klasse ist die der *geometrischen Nichtlinearitäten*. Die in der Schwingungsgleichung (G.1) auftretenden Matrizen parametrisieren im Wesentlichen die für die Problemstellung relevanten Geometrie. Die durch die Schwingungsgleichung beschriebene Auslenkung stellt jedoch gerade eine Veränderung der geometrischen Verhältnisse dar, der durch eine entsprechende Veränderung der Matrizen Rechnung getragen werden muss. Dadurch sind die Matrizen auf natürliche Weise funktional von der Auslenkung abhängig. Diese Abhängigkeiten können von komplexer Natur sein, was eine Parametrisierung durch den in dieser Arbeit verwendeten tensoriellen Ansatz erschwert.

Eine damit verwandte Klasse von Nichtlinearitäten wird durch *Zwangsbedingungen* hervorgerufen: In diesem Fall erfolgt die durch die Schwingungsgleichung beschriebene Auslenkung nicht in natürlicher Weise, sondern muss im Sinne von Randbedingungen gewisse Zwangsbedingungen erfüllen. Die daraus resultierenden geometrischen Verhältnisse können das System in einen unnatürlichen Zustand überführen, der durch starke Kräfte, Momente und Spannungszustände gekennzeichnet ist. Die dieses Verhalten beschreibenden Nichtlinearitäten können daher einen starken Einfluss auf das Systemverhalten haben. Ein solches Beispiel wird in Abschnitt (6.4) diskutiert.

Daneben spielen für mechanische Probleme die in dieser Arbeit häufig betrachteten *Materialnichtlinearitäten* eine Rolle, also die Abhängigkeit der Materialeigenschaften von der Auslenkung. Diese Abhängigkeit kann einerseits direkt sein — man denke etwa an nicht-lineare Federkennlinien —, andererseits indirekt, beispielsweise als Abhängigkeit von dem durch die Auslenkung verursachten Spannungszustand.

G.3.1 Berücksichtigte Formen von Nichtlinearitäten

Die vorgestellten Klassen von Nichtlinearitäten können in einheitlicher Weise als funktionale Abhängigkeit der Matrixelemente der in der Schwingungsgleichung (G.1) auftretenden Matrizen von der Auslenkung parametrisiert werden. In dieser Arbeit wird vereinfachend nur eine Variation der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} in Betracht gezogen, die übrigen Matrizen werden als konstant angenommen.

Insbesondere die Massenmatrix \mathbf{M} wird als konstant angenommen. Für Komponenten der Auslenkung, die lineare Koordinaten beschreiben (im Gegensatz zu Winkelkoordinaten), scheint diese Annahme in guter Näherung gerechtfertigt zu sein: Die Massenmatrix selbst kann zunächst als diagonal angenommen werden; die Verteilung derselben beruht — im Fall von Finite-Elemente Modellen — auf dem Ansatz des zugrunde liegenden Elements. Eine konstante diagonale Massenmatrix entspricht aber der physikalischen Forderung der Erhaltung der dem Element zugewiesenen Masse, in der Summe insbesondere der Gesamtmasse. Eine Verteilung der Elementmasse gemäß dem verwendeten Ansatz sollte — speziell im in

dieser Arbeit betrachteten niederfrequenten Bereich — nur eine untergeordnete Rolle spielen. Damit ist auch die Veränderung der Verteilung nur von untergeordneter Bedeutung, sofern die Gesamtmasse des Elements erhalten bleibt. Für Komponenten der Auslenkung, die Winkelkoordinaten beschreiben, ist der Fall anders geartet: Hier enthält die Massenmatrix Elemente des entsprechenden Trägheitstensors, der direkt von Koordinatendifferenzen und damit von Auslenkungen abhängt. In diesem Fall stellt also die Annahme einer konstanten Massenmatrix eine Näherung dar.

Die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} wird ebenfalls als konstant angenommen; der Zusammenhang (G.8) des Ansatzes der proportionalen Dämpfung gilt deshalb strenggenommen nur im linearisierten Fall. Da die Annahme der proportionalen Dämpfung einerseits physikalisch wenig motiviert ist, und da andererseits die Betrachtung einer nichtlinearen Dämpfung kein Hauptthema dieser Arbeit ist, wurde auf eine nichtlineare Dämpfungsmatrix verzichtet.

Schließlich wird die Matrix \mathbf{F} als konstant angesetzt. Dies stellt in vielen Fällen eine Näherung dar, da die effektiven äußeren Kräfte und Drehmomente durchaus von der Geometrie und damit von der Auslenkung der betrachteten Problemstellung abhängen. Im Fall von Finite-Elemente Simulationen ist hierbei auf die genaue zugrunde liegende Definition der angelegten Last zu achten. Als Beispiel sei ein einseitig eingespannter Balken mit einer betragsmäßig konstanten Querkraft senkrecht (auch in ausgelenktem Zustand!) zum freien Balkenende betrachtet: Durch eine Auslenkung und damit Biegung des Balkens ändert sich der Winkel des freien Balkenendes und damit auch des Kraftvektors im äußeren Koordinatensystem; damit ist eine Änderung der Zerlegung der Kraft in ihre Komponenten mit der Auslenkung verbunden. Die Kraftkomponenten sind hier also eine Funktion der Auslenkung.

G.3.2 Parametrisierung der Nichtlinearitäten

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird als Funktion der Auslenkung \vec{q} angesetzt,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\vec{q}) \quad (\text{G.10})$$

(nicht: $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\vec{x}) \equiv \mathbf{K}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$!) Dabei werden wieder schwache Nichtlinearitäten vorausgesetzt, so dass auch hier ein Potenzreihenansatz anwendbar ist.

Dieser Ansatz wird wieder durch Z_s -Tensoren parametrisiert. Da unter den erläuterten Voraussetzungen konstanter Massen- und Dämpfungsmatrix nur der linke untere Quadrant der Zustandsmatrix (G.6) als nichtlinear angesetzt wird und da dieser darüberhinaus nur von der oberen Hälfte des Zustandsvektors (G.4) abhängt, weisen die Z_s -Tensoren eine spezielle Besetzungsstruktur auf. So ist der obere Index i der Z_s -Tensoren nur für $1 \leq i \leq \hat{n}$ besetzt, die unteren Idizes j_l , $1 \leq l \leq s$, jedoch nur für $\hat{n} + 1 \leq j_l \leq 2\hat{n}$.

Insbesondere der Matrizenansatz aus Abschnitt (5.3) zur Parametrisierung von Z_s -Tensoren durch Z_s/t -Matrizen ist in seiner dort erläuterten Form für die hier betrachtete Koppelung nicht anwendbar. So koppelt das Matricelement A_j^i aus dem linken unteren Quadranten, also

G.3 NICHTLINEARITÄTEN

$\hat{n} + 1 \leq i \leq 2\hat{n}$, $1 \leq j \leq \hat{n}$, die Geschwindigkeit $x^i \equiv \dot{q}^{i-\hat{n}}$ an die Auslenkung $x^j \equiv q^j$. Der Matrizenansatz setzt nun eine Abhängigkeit

$$A_j^i = A_j^i(x^i, x^j) \equiv (\dot{q}^{i-\hat{n}}, q^j) \quad (\text{G.11})$$

voraus. Sinnvoller wäre jedoch, eine Abhängigkeit

$$A_j^i = A_j^i(x^{i-\hat{n}}, x^j) \equiv (q^{i-\hat{n}}, q^j) \quad (\text{G.12})$$

anzusetzen. Die dafür notwendige Uminterpretation der Bedeutung der Z_s/t -Matrizen ist bei der Implementierung der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren berücksichtigt.

Nachwort und Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand in der Abteilung für angewandte Physik der zentralen Forschung und Vorausentwicklung der Robert Bosch GmbH auf der Schillerhöhe in Gerlingen bei Stuttgart. Die Arbeit wurde betreut von Herrn Professor Michael Bestehorn, Inhaber des Lehrstuhls für Theoretische Physik II, statistische Physik und nichtlineare Dynamik, der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus.

Danken möchte ich zunächst der Robert Bosch GmbH für die Fragestellung, die Ressourcen zur Bearbeitung und die Finanzierung dieser Forschungsaufgabe, insbesondere jedoch für die mir gewährte wissenschaftliche Freiheit.

Herrn Professor Michael Bestehorn danke ich für die Betreuung dieser Arbeit, seine Anregungen und Hinweise und die vielen Diskussionen in zwangloser Atmosphäre.

Herrn Professor Michael Fröhner möchte ich für die Erstellung des zweiten Gutachtens danken.

Herrn Privatdozent Ralf Bergmann gilt mein Dank für die Erstellung des dritten Gutachtens und die wertvollen Ratschläge zur Gestaltung wissenschaftlicher Veröffentlichungen und Vorträge.

Schließlich möchte ich Herrn Norbert Streibl Dank sagen für das Vertrauen, das er in mich gesetzt hat, indem er mir diese Forschungsaufgabe übertragen hat.

Herrn Siegbert Götz danke ich für die fundierte firmenseitige Betreuung dieser Arbeit. Ich danke ihm insbesondere für die zahlreichen Diskussionen und Hinweise mit teils wissenschaftlichem, teils andersgelagertem Inhalt. Danke Sigi!

Herrn Klaus Marx gilt mein Dank für die Unterstützung dieser Arbeit und die Möglichkeiten, auch über die Fragestellung dieser Arbeit hinaus meine Fähigkeiten nutzbringend einzusetzen.

Domnic Merkt danke ich für die Unterstützung in Cottbus, die gemeinsam verbrachte Freizeit mit vielen interessanten Diskussionen, sowie die Bilder der numerischen Simulationen zur Strukturbildung in dünnen Filmen. Danke Domnic!

Meinen Kollegen, den Mitgliedern der Abteilung für angewandte Physik, ganz besonders den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Mess-Systemtechnik, danke ich für das ausgesprochen angenehme Arbeitsklima. Ich werde die Zusammenarbeit mit euch vermissen, insbesondere die Frühstückspausen!

Meinen Kollegen, den Mitgliedern der Arbeitsgruppe um Herrn Michael Bestehorn, danke ich dafür, dass sie mir während meiner Aufenthalte in Cottbus das Gefühl vermittelten, dazuzugehören. Das Zelig wird mir fehlen!

NACHWORT UND DANKSAGUNG

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern und ganz besonders meinem Vater Manfred Müller, möchte ich Dank sagen für die Unterstützung, die ich während der langen Jahre meiner Ausbildung in vielfältiger Weise durch sie erfahren habe. Ganz besonders danke ich ihnen jedoch für ihr Interesse an meinen jeweiligen Arbeitsgebieten.

Julia, Vanessa und Jonas danke ich dafür, dass sie mich während der vergangenen Jahre für einige wenige kurze Augenblicke Differentialgleichungssysteme vergessen ließen.

Tina jedoch gilt mein besonderer Dank. Sie hat durch ihre Geduld, ihre Rücksichtnahme und den Verzicht auf gemeinsame Freizeit wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Danke für die gemeinsamen 1.798 Tage!

Literaturverzeichnis

- [ABC] ABACOM Software GmbH. Theaterstraße 30–32, 52 0 62 Aachen, Germany; URL: <http://www.intes.de/>.
- [ABQ96] ABACOM Software GmbH (ABC), Aachen, *ABAQUS Standard User's Manual*, 1996, Version 5.6.
- [Bea87] P. Beater, *Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle*, Fortschritt-Bericht Reihe 8, no. 143, Verein Deutscher Ingenieure Verlag, Düsseldorf, 1987.
- [Bes95] M. Bestehorn, *Strukturbildung durch Selbstorganisation in Flüssigkeiten und in chemischen Systemen*, Reihe Physik, no. 48, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.
- [BN01] M. Bestehorn and K. Neuffer, *Surface Patterns of Laterally Extended Thin Liquid Films in Three Dimensions*, *Physical Review Letters* **87** (2001), no. 4, 046101.
- [BS⁺95] I. N. Bronstein, K. A. Semendjaev, et al., *Taschenbuch der Mathematik*, 2. ed., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.
- [BS02] Z. Bai and D. Skoogh, *Krylov Subspace Techniques for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Dynamical Systems*, *Electronic Proceedings of 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems* (D. S. Gilliam and J. Rosenthal, eds.), 2002.
- [Che84] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston Series in Electrical and Computer Engineering, Holt-Saunders Japan, Tokyo, 1984.
- [Che99] Y. Chen, *Model Order Reduction for Nonlinear Systems*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1999.
- [Cra85] C. A. Crawley, *Model Reduction Methods of Bilinear Control Systems*, *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society*, Institute of Electronic and Electrical Engineers, 1985, pp. 173–175.
- [CW00] Y. Chen and J. White, *A Quadratic Method for Nonlinear Model Order Reduction*, *Proceedings of the International Conference of Modeling and Simulation of Microsystems*, Institute of Electronic and Electrical Engineers, 2000, pp. 477–480.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Eit81] E. Eitelberg, *Model Reduction by Minimizing the Weighted Equation Error*, International Journal of Control **34** (1981), 1113–1123.
- [Föl83] O. Föllinger, *Reduktion der Systemordnung*, Regelungstechnik **30** (1983), no. 11, 367–377.
- [FV93] K. H. Fasol and A. Varga, *Zur Ordnungsreduktion linearer Systeme; Diskussion, Erprobung und Vergleich einiger Methoden*, Automatisierungstechnik **41** (1993), no. 1, 6–18.
- [Gri97] E. J. Grimme, *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.
- [Guy65] R. J. Guyan, *Reduction of Stiffness and Mass Matrix*, AIAA Journal **3** (1965), no. 2, 380.
- [Hak75] H. Haken, *Cooperative Effects in Systems Far from Thermal Equilibrium and in Nonphysical Systems*, Review of Modern Physics **47** (1975), 67.
- [Hak83a] _____, *Advanced Synergetics*, Springer Series in Synergetics, no. 20, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Hak83b] _____, *Synergetics. An Introduction*, 3. ed., Springer Series in Synergetics, no. 1, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Has85] E. Hasenjäger, *Digitale Zustandsregelung für Parabolantennen unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten*, Fortschritt-Bericht Reihe 8, no. 87, Verein Deutscher Ingenieure Verlag, Düsseldorf, 1985.
- [Hip92] P. Hippe, *Frequenzgewichtete Ordnungsreduktion zum Reglerentwurf*, Automatisierungstechnik **40** (1992), no. 12, 447–453.
- [HP90a] D. Hinrichsen and H.-W. Philippsen, *Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen, Teil 1*, Automatisierungstechnik **38** (1990), no. 11, 416–422.
- [HP90b] _____, *Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen, Teil 2*, Automatisierungstechnik **38** (1990), no. 12, 460–460.
- [Hun79a] F. Hund, *Grundbegriffe der Physik*, 2. ed., vol. 1, Hochschultaschenbücher, no. 449, Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1979.
- [Hun79b] _____, *Grundbegriffe der Physik*, 2. ed., vol. 2, Hochschultaschenbücher, no. 450, Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1979.
- [INT] INTES Ingenieursgesellschaft für technische Software GmbH. Schulze-Delitzsch-Straße 16, 70 5 65 Stuttgart, Germany; URL: <http://www.intes.de/>.
- [INT99a] INTES GmbH (INT), Stuttgart, PERMAS *Examples Manual*, E. ed., 1999, INTES Publikation Nummer 550.

- [INT99b] INTES GmbH (INT), Stuttgart, PERMAS *User's Reference Manual*, E. ed., 1999, INTES Publikation Nummer 450.
- [JMF02] Q. Jing, T. Mukherjee, and G. K. Fedder, *Large-Deflection Beam Model for Schematic-Based Behavioral Simulation in NODAS*, Proceedings of the International Conference of Modeling and Simulation of Microsystems, 2002, pp. 136–139.
- [Kau58] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [Kne94] F. K. Kneubühl, *Repetitorium der Physik*, 5. ed., B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1994.
- [KTT02] Robert Bosch GmbH (RB), Stuttgart, *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*, 24. ed., 2002.
- [KV99] A. A. Khan and N. S. Vyas, *Non-Linear Parameter Estimation Using Volterra and Wiener Theories*, Journal of Sound and Vibration **221** (1999), no. 5, 805–821.
- [LA89] Y. Liu and B. D. O. Anderson, *Singular Perturbation Approximation of Balanced Systems*, International Journal of Control **50** (1989), no. 4, 1379–1405.
- [Led00] K.-B. Lederle, *Ordnungsreduktion von Diffusions- und Transportprozessen in verteilten Systemen*, Ph.D. thesis, Otto-von-Guericke Universität, Magdeburg, 2000.
- [Li03] J. Li, *Reduktion nichtlinearer FE-Modelle am Beispiel eines hydrostatischen Wegvergrößerungssystems*, 18: Berichte aus dem Maschinenbau, Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [Lit79a] L. Litz, *Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen*, Regelungstechnik **27** (1979), 80–86.
- [Lit79b] ———, *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*, Hochschulsammlung Ingenieurwissenschaft, Datenverarbeitung, no. 4, Hochschulverlag, Stuttgart, 1979.
- [Lit83] ———, *Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz — Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege*, Regelungstechnik **31** (1983), no. 5, 148–158.
- [LL66] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 2. ed., vol. VII, Elastizitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1966.
- [LM90] H.-P. Löffler and W. Marquardt, *On Order Reduction of Nonlinear Differential-Algebraic Process Models*, Proceedings of the American Control Conference, vol. 2, American Automatic Control Council, 1990, pp. 1546–1551.
- [Loh94a] B. Lohmann, *Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme*, Automatisierungstechnik **42** (1994), no. 10, 466–474.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Loh94b] ———, *Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme*, Fortschritt-Bericht Reihe 8, no. 406, Verein Deutscher Ingenieure Verlag, Düsseldorf, 1994.
- [LS04] B. Lohmann and B. Salimbahrami, *Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden*, *Automatisierungstechnik* **52** (2004), no. 1, 30–38.
- [M⁺05] D. Merkt et al., *Long-Wave Theory of Bounded Two-Layer Films with a Free Liquid-Liquid Interface: Short- and Long-Time Evolution*, *Physics of Fluids* **17** (2005), no. 6, 064104.
- [MAT] The MathWorks Incorporation. Natick, USA; URL: <http://www.mathworks.com/>.
- [MAT96] The MathWorks Incorporation (MAT), Natick, *Using MATLAB*, 1996, Version 5.
- [MGB03] H. Müller, S. Götz, and M. Bestehorn, *Model Order Reduction and Parameterization of Nonlinear Numerical Models*, Proceedings of the International Conference Physics and Control (A. L. Fradkov and A. N. Churilov, eds.), vol. 4, Nonlinear Dynamics and Control, Institute of Electronic and Electrical Engineers, 2003, pp. 1303–1308.
- [Moo81] B. C. Moore, *Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction*, *IEEE Transactions of Automatic Control* **AC-26** (1981), no. 1, 17–32.
- [MS96] D. G. Meyer and S. Srinivasan, *Balancing and Model Reduction for Second-Order Form Linear Systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41** (1996), no. 11, 1632–1644.
- [Nag93] A. Nagel, *Ordnungsreduktion von Finite-Elemente-Modellen großer Raumfahrtstrukturen*, Ph.D. thesis, Universität der Bundeswehr, München, 1993.
- [ODB97] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, *Long-Scale Evolution of Thin Liquid Films*, *Reviews of Modern Physics* **69** (1997), no. 3, 931–980.
- [Pal87] U. Pallaske, *Ein Verfahren zur Ordnungsreduktion mathematischer Prozessmodelle*, *Chemie Ingenieur Technik* **59** (1987), no. 7, 604–605, MS 1617/87.
- [Pet86] N. Petersmann, *Substrukturtechnik und Kondensation bei der Schwingungsanalyse*, Fortschritt-Bericht Reihe 11, no. 76, Verein Deutscher Ingenieure Verlag, Düsseldorf, 1986.
- [Phi00] J. R. Phillips, *Automated Extraction of Nonlinear Circuit Macromodels*, Proceedings of the Custom Integrated Circuits Conference, Institute of Electronic and Electrical Engineers, 2000, pp. 451–454.

- [PP97] E. Pesheck and C. Pierre, *A Global Methodology for the Modal Reduction of Large Nonlinear Systems Containing Quadratic and Cubic Nonlinearities*, Proceedings of the Design Engineering Technical Conferences, American Society of Mechanical Engineers, 1997, pp. 1–11.
- [PP00] L. M. Pismen and Y. Pomeau, *Disjoining Potential and Spreading of Thin Liquid Layers in the Diffuse-Interface Model Coupled to Hydrodynamics*, Physical Review E **62** (2000), no. 2, 2480–2492.
- [RB] Robert Bosch GmbH. Postfach 10 60 70, 70 0 49 Stuttgart, Germany; URL: <http://www.bosch.de/>.
- [RW01] M. Rewienski and J. White, *A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuits and Micromachined Devices*, Proceedings of the International Conference of Computer Aided Design, Institute of Electronic and Electrical Engineers, 2001, pp. 252–257.
- [RW02] ———, *Improving Trajectory Piecewise-Linear Approach to Nonlinear Model Order Reduction for Micromachined Devices Using an Aggregated Projection Basis*, Proceedings of the International Conference of Modeling and Simulation of Microsystems, 2002, pp. 128–131.
- [Sch00] K. Schönherr, *Numerische und symbolische Ordnungsreduktionsverfahren für diskrete und kontinuierliche lineare dynamische Systeme*, Ph.D. thesis, Universität Fridericiana, Karlsruhe, 2000.
- [SKW96] L. M. Silveira, M. Kamon, and J. White, *Efficient Reduced-Order Modeling of Frequency-Dependent Coupling Inductances Associated with 3-D Interconnect Structures*, IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology **B-19** (1996), no. 2, 283–288.
- [SP91] S. W. Shaw and C. Pierre, *Non-Linear Normal Modes and Invariant Manifolds*, Journal of Sound and Vibration **150** (1991), no. 1, 170–173.
- [Sza84] I. Szabó, *Einführung in die Technische Mechanik*, 8. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [TMF92a] I. Troch, P. C. Müller, and K. H. Fasol, *Modellreduktion für Simulation und Reglerentwurf, Teil 1*, Automatisierungstechnik **40** (1992), no. 2, 45–53.
- [TMF92b] ———, *Modellreduktion für Simulation und Reglerentwurf, Teil 2*, Automatisierungstechnik **40** (1992), no. 3, 93–99.
- [TMF92c] ———, *Modellreduktion für Simulation und Reglerentwurf, Teil 3*, Automatisierungstechnik **40** (1992), no. 4, 132–141.
- [V⁺96] A. F. Vakakis et al., *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, Wiley Series in Nonlinear Science, John Wiley and Sons Incorporation, New York, 1996.

LITERATURVERZEICHNIS

- [VS87] J. de Villemagne and R. E. Skelton, *Model Reduction Using a Projection Formulation*, International Journal of Control **46** (1987), 2141–2169.
- [WF02] E. R. Westby and T. A. Fjeldly, *Nonlinear Analytical Reduced-Order Modeling of Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS)*, Proceedings of the International Conference of Modeling and Simulation of Microsystems, 2002, pp. 150–153.
- [WK99] M. Wellers and N. Kositzka, *Identifikation nichtlinearer Systeme mit Wiener- und Hammerstein-Modellansätzen auf Basis der Volterra-Reihe*, Automatisierungstechnik **47** (1999), no. 5, 209–216.
- [WW98] F. Wang and J. White, *Automatic Model Order Reduction of a Microdevice Using the Arnoldi Approach*, Proceedings of the International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers, 1998, pp. 527–530.
- [YI91] K. H. Yae and D. J. Inman, *Control-Oriented Order Reduction of Finite Element Model*, Proceedings of the American Control Conference, American Automatic Control Council, 1991, pp. 2187–2189.
- [YI93] ———, *Control-Oriented Order Reduction of Finite Element Model*, ASME Transactions; Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control **115** (1993), 708–711.
- [ZF97] R. Zurmühl and S. Falk, *Matrizen und ihre Anwendungen*, 7. ed., vol. 1, Grundlagen, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

Lebenslauf

Persönliche Daten

02. Oktober 1974	geboren in Buchen im Odenwald
Familienstand	ledig
Eltern	Manfred Müller Gisela Müller, geborene Speth

Schulbildung

1981 bis 1985	Grundschule Schloßau
1985 bis 1991	Realschule Buchen
1991 bis 1994	Technisches Gymnasium Mosbach
21. Juni 1994	Allgemeine Hochschulreife

Studium

1994 bis 2000	Studium der Physik an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
08. Oktober 1996	Diplom-Vorprüfung
1999 bis 2000	Diplomarbeit an der Landessternwarte Heidelberg-Königstuhl
Thema	Bildung supermassereicher Schwarzer Löcher im frühen Universum
14. April 2000	Diplom-Physiker

Promotion

2000 bis 2005	Industriepromotion bei der Robert Bosch GmbH Stuttgart in Zusammenarbeit mit der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus
Thema	Ordnungsreduktion geometriebasierte Differentialgleichungssysteme unter Berücksichtigung schwacher Nichtlinearitäten
11. Januar 2005	Mündliche Prüfung

Beruf

seit 2000	angestellt bei der Robert Bosch GmbH Stuttgart
-----------	---

