

# Auswirkungen von Fremdkörperschädigungen und Blending Reparaturen auf die Aeroelastik von Hochdruckverdichter Blisks

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektro- und Energiesysteme der  
Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg zur Erlangung des  
akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Master of Science (M.Sc.)

Benjamin Hanschke

geboren am 30.09.1990 in Guben

Vorsitzender:	apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Beirow
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Dieter Peitsch

Tag der mündlichen Prüfung: 03.11.2023

<https://doi.org/10.26127/BTUOpen-6687>

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Auswirkungen von Fremdkörperschädigungen und Blending Reparaturen auf das aeroelastische Systemverhalten einer modernen Hochdruckverdichter Blisk. Mittels einer vollautomatisierten Prozesskette zur Untersuchung parametrisch definierter Schadensfälle erfolgt eine detaillierte Analyse der Korrelationsbeziehungen zwischen den Schädigungsparametern und deren Einfluss auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit der Komponente. Die hierbei gewonnenen Erkenntnisse fließen in ein Regressionsmodell zur Erstellung von Sensitivitätsplots ein, um eine schnelle Beurteilung der Kritikalität von Schadensfällen im Flottenbetrieb zu ermöglichen. Im Rahmen der aeroelastischen Analysen sind vor allem die Auswirkungen von Blending Reparaturen auf typische Kenngrößen wie die aerodynamische Dämpfung und Anregung von Interesse. Am Beispiel einer im Betrieb hoch ausgelasteten Schwingform wird eine potentielle Überlagerung mehrerer, für die Betriebssicherheit der Komponente kritischer, Effekte dargestellt. Um die Rechenzeiten für derartige Vorhersagen künftig zu verringern, werden zudem unterschiedliche Ansätze zur Reduktion der Simulationsaufwände verglichen.

## Abstract

The present work focusses on the effects of foreign object damages and blending repairs on the aeroelastic system behaviour of a modern high pressure compressor blisk. Utilizing a fully automated process chain for the investigation of parametrically defined damages, a detailed analysis of the correlation between the damage parameters and their influence on the high-cycle fatigue strength of the component is carried out. The results are incorporated into a regression model to generate sensitivity plots for a rapid assessment of the criticality of foreign object damages in fleet operation. In the scope of the aeroelastic analyses, the effects of blending repairs on typical parameters such as aerodynamic damping and excitation are investigated. By the example of a highly loaded mode shape, a potential superposition of several critical effects for the operational safety of the component is discussed. In order to reduce the turn around time for such predictions in the future, different approaches to lower the computational efforts are compared.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>V</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XIX</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Herausforderungen moderner Flugtriebwerke . . . . .	1
1.2 Stand der Technik . . . . .	2
1.3 Zielstellung der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Allgemeine Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Dynamik zyklischer Strukturen . . . . .	7
2.2 Betriebsfestigkeit . . . . .	16
2.2.1 Dauerfestigkeit . . . . .	17
2.2.2 Festigkeitshypothesen . . . . .	20
2.2.3 <i>a<sub>f</sub></i> -Parameter . . . . .	24
<b>3 Aeroelastische Grundlagen</b>	<b>31</b>
3.1 Aeroelastische Phänomene in Axialverdichtern . . . . .	33
3.2 Aeroelastische Problemformulierung . . . . .	36
3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem . . . . .	42
3.3.1 Einzelpassagen Flutterrechnung . . . . .	45
3.3.2 Aerodynamische Einflusskoeffizienten . . . . .	49
3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem . . . . .	53
3.4.1 Vollmodellansatz . . . . .	60
3.4.2 SPMR Ansatz . . . . .	62

<b>4</b>	<b>Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs</b>	<b>65</b>
4.1	Prozesskette . . . . .	66
4.2	Betrachtung der resultierenden Spannungskonzentration . . . . .	72
4.3	Auswirkung auf modale Parameter und hochzyklische Ermüdungsfestigkeit	77
4.4	Sensitivitätsplots zur Schadensbewertung . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen</b>	<b>87</b>
5.1	Testfalldefinition und Betrachtung wesentlicher Einflussfaktoren . . . . .	89
5.2	Aerodynamische Dämpfung . . . . .	95
5.3	Erzwungenes Schwingungsverhalten . . . . .	102
5.3.1	Anregung nominaler und geblendeter Schaufeln . . . . .	103
5.3.2	Rekonstruktionsansatz für unterschiedliche Blendanordnungen .	106
5.3.3	Vereinfachte Abschätzung (SPMR) . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>123</b>
A.1	Modaltransformation . . . . .	123
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungsverzeichnis

<b>AIC</b>	aerodynamische Einflusskoeffizienten - engl. aerodynamic influence coefficients
<b>API</b>	Programmierschnittstelle - engl. application programming interface
<b>AU3D</b>	- engl. aeroelastic unsteady 3D
<b>Blisk</b>	Integrallaufrad - engl. blade integrated disk
<b>CAD</b>	rechnergestützte Konstruktion - engl. computer-aided design
<b>CFD</b>	numerische Strömungsmechanik - engl. computational fluid dynamics
<b>DFT</b>	diskrete Fourier Transformation
<b>EASA</b>	European Aviation Safety Agency
<b>EO</b>	Erregerordnung - engl. engine order bzw. excitation order
<b>FÄE</b>	Formänderungsenergie
<b>FE</b>	finite Elemente
<b>FEM</b>	finite Elemente Methode
<b>FOD</b>	Fremdkörperschädigung - engl. foreign object damage
<b>GEH</b>	Gestaltänderungsenergiehypothese
<b>HAS</b>	Hauptachsensystem

## *Nomenklatur*

<b>IBPA</b>	Phasendifferenzwinkel - engl. inter blade phase angle
<b>MAC</b>	- engl. modal assurance criterion
<b>MRO</b>	- engl. maintenance, repair and overhaul
<b>ND</b>	Knotendurchmesser - engl. nodal diameter
<b>NH</b>	Normalspannungshypothese
<b>NSV</b>	nichtsynchroner Schwingungen - engl. non-synchronous vibrations
<b>OEM</b>	Erstausrüster - engl. original equipment manufacturer
<b>SPMR</b>	Einzelpassagen Mehrblattreihen - engl. single-passage multi-row
<b>SPF</b>	Einzelpassagen Flatterrechnung - engl. single passage flutter
<b>SWM</b>	stehende Welle - engl. standing wave mode
<b>TWM</b>	umlaufende Welle - engl. travelling wave mode
<b>ZZENF</b>	zig-zag shaped excitation in nodal diameters versus frequency

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Bezeichnung
$a, b$	Konstanten
$af$	Produkt aus Schwingungsamplitude $a$ und -frequenz $f$
$\underline{A}$	komplexe Konstante
$A$	Flächeninhalt
$c$	Sehnenlänge - engl. chord length
$c_{\beta_n}$	komplexer Luftkraftkoeffizient - engl. travelling wave mode coefficient
$d_b$	Tiefe des eingebrachten Blends
$d_{fod}$	Eindringtiefe des FOD an der Schaufelvorderkante
$D$	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$e$	Eulersche Zahl
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{kin}$	kinetische Energie
$f$	Frequenz
$\hat{f}_d$	modale Erregerkraftamplitude für geblendete Struktur
$\hat{f}_n$	modale Erregerkraftamplitude für nominale Struktur
$g_l$	Abstandsgewicht
$G$	Schubmodul
$i$	imaginäre Einheit $i^2 = -1$
$I_{yy}$	Flächenträgheitsmoment bezüglich der $y$ -Achse
$k_b$	Federsteifigkeit der direkten Sektorkopplung
$k_d$	Federsteifigkeit der Sektor-Zentrumsverbindung
$K$	Kompressionsmodul
$K_f$	Kerbwirkungszahl
$K_t$	statische Spannungskonzentration
$K_{t_{reg}}$	durch Regressionsansatz vorhergesagter $K_t$ Wert
$l$	Länge
$\underline{l}_j$	$j$ -ter aerodynamischer Einflusskoeffizient
$m$	Masse
$m_b$	modale Masse der geblendeten Eigenform
$m_n$	modale Masse der nominalen Eigenform
$M$	Moment

## Nomenklatur

$N$	Anzahl zyklischer Sektoren des Vollmodells
$N_m$	mechanische Wellendrehzahl
$N_s$	Anzahl Rotorschaukeln
$N_s$	Anzahl Statorschaukeln
$N_x$	Normalkraft in $x$ -Richtung
$N_B$	Schwingspielzahl bis zum Bruch
$p$	Gewichtspotenz
$\tilde{p}$	instationärer aerodynamischer Oberflächendruck
$q$	materialabhängige Kerbempfindlichkeit
$q_j$	$j$ -te Komponente des Vektors der generalisierten Koordinaten
$Q$	Querkraft
$r_{cyl}$	Radius des zylindrischen Abzugskörpers
$r_{fod}$	radiale Position des FOD an der Schaufelvorderkante (relative Höhe)
$s_{ele}$	Kantenlänge der Elemente des Tetraederneztes
$R_e$	Streckgrenze
$R_m$	Zugfestigkeit
$t$	Zeit
$T(t)$	zeitabhängige Funktion für Separationsansatz
$u_j$	Auslenkung / Verschiebung in $j$ -te Koordinatenrichtung
$U(x)$	ortsabhängige Funktion für Separationsansatz
$V_\infty$	Anströmgeschwindigkeit
$w_N^j$	$j$ -te Potenz der $N$ -ten Einheitswurzel
$w_b$	Breite des eingebrachten Blends
$w^s$	spezifische Formänderungsenergie
$w_G^s$	Gestaltänderungsanteil der spezifischen Formänderungsenergie
$w_V^s$	Volumenänderungsanteil der spezifischen Formänderungsenergie
$w^*$	lokaler aerodynamischer Arbeitskoeffizient
$W$	Arbeit
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$z_{max}$	maximaler Abstand zur neutralen Faser eines Balkens

## Griechische Buchstaben

Symbol	Bezeichnung
$\alpha_2$	Abströmwinkel
$\alpha_k$	Spannungsverhältnis
$\beta_k$	Zwischenphasenwinkel des Knotendurchmessers $k$
$\delta_{aero}$	aerodynamische Dämpfung (Abklingkonstante)
$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\omega_{red}$	reduzierte Frequenz
$\Omega$	Erregerkreisfrequenz
$\lambda^2$	Eigenwert
$\Lambda$	logarithmisches Dekrement
$\theta$	Winkelversatz zwischen zyklischen Sektoren
$\hat{\Phi}_{ck}$	Amplitude der Cosinus Eigenform
$\hat{\Phi}_{sk}$	Amplitude der Sinus Eigenform
$\mu$	Massenparameter
$\mu_m$	dimensionsloses modales Massenverhältnis
$\nu_f$	dimensionsloses Frequenzverhältnis
$\varepsilon$	Dehnung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_a$	alternierende Spannung
$\sigma_{dF}$	Druckfestigkeit
$\sigma_A$	dauerschwingfest ertragbare Spannungsamplitude
$\sigma_{AD}$	dauerschwingfest ertragbare Spannungsamplitude (Druckmittelspannung)
$\sigma_{AZ}$	dauerschwingfest ertragbare Spannungsamplitude (Zugmittelspannung)
$\sigma_m$	Mittelspannung
$\sigma_V$	Vergleichsspannung
$\sigma_{VGEH}$	Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese
$\sigma_{VNH}$	Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese
$\sigma_W$	Wechselfestigkeit
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Normalspannungen in $x, y$ und $z$ Richtung
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungen
$\rho$	Dichte
$\varphi$	Phasenversatz

## Vektoren, Matrizen und Tensoren

Symbol	Bezeichnung
<b>A</b>	Koeffizientenmatrix
<b>c</b>	Vektor der generierenden Elemente einer zyklischen Matrix
<b>C</b>	zyklische Matrix
<b><u>C</u></b>	Matrix komplexer Luftkraftkoeffizienten
<b>D</b>	Verzerrungstensor
<b>e</b>	Einheitsvektor
<b>f<sub>aero</sub></b>	aerodynamische Kräfte
<b>f<sup>d</sup></b>	störungsinduzierter Anteil der aerodynamischen Kräfte
<b>f<sup>m</sup></b>	bewegungsinduzierter Anteil der aerodynamischen Kräfte
<b><u>E</u><sub>N</sub></b>	Fouriermatrix / Transformationsmatrix der Dimension $N \times N$
<b>I</b>	Einheitsmatrix
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<b><u>L</u></b>	Matrix der aerodynamischen Einflusskoeffizienten
<b>M</b>	Massenmatrix
<b>x</b>	Zustandsvektor
<b>P<sub>z</sub></b>	zyklische Permutationsmatrix
<b>P</b>	Transformationsmatrix zur Überführung in SWM Formulierung
<b>S</b>	Spannungstensor
<b><math>\hat{S}</math></b>	Spannungsdeviator
<b>S<sub>HAS</sub></b>	Spannungstensor im Hauptachsensystem
<b>u</b>	Verschiebungsvektor in kartesischen Koordinaten
<b>e</b>	Einheitsvektor in Richtung der Koordinatenachsen
<b>q</b>	Vektor generalisierter Koordinaten
<b><math>\hat{q}_\beta</math></b>	Amplitudenvektor der umlaufenden Wellen
<b><math>\hat{q}_{SW}</math></b>	Amplitudenvektor der stehenden Wellen
<b><math>\Phi</math></b>	Eigenform - engl. mode shape
<b><math>\Phi_n</math></b>	Eigenform der geblendeten Struktur
<b><math>\Phi_{ck}</math></b>	Cosinus-Eigenform
<b><math>\Phi_n</math></b>	Eigenform der nominalen Struktur
<b><math>\Phi_{sk}</math></b>	Sinus-Eigenform
<b><math>\Psi</math></b>	Matrix der Eigenformen (Modalmatrix)

## Indizes und sonstige Symbole

Symbol	Bedeutung
$\dot{\bullet}$	Zeitableitung
$\ddot{\bullet}$	zweite Ableitung nach der Zeit
$\underline{\bullet}$	komplexe Variable
$\bar{\bullet}$	konjugiert komplexe Variable
$\hat{\bullet}$	Amplitude einer Größe
$\bullet^T$	transponierte Größe
$\bullet^{-1}$	inverse Matrix
$\bullet_{max}$	Maximalwert einer Größe
$\bullet_{min}$	Minimalwert einer Größe
$\bullet_{\beta_n}$	Größe für den spezifischen IBPA des Knotendurchmessers $n$
$\bullet_{reg}$	Regressionsgröße
$\bullet_{ref}$	Wert bezüglich der Referenzgeometrie
$\bullet_{var}$	Wert bezüglich der variierten Geometrie (FOD oder Blend)
$j, k, l$	allgemeine ganzzahlige Indizes
$\Im\{\bullet\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
$\Re\{\bullet\}$	Realteil einer komplexen Größe
$Sp\bullet$	Spur eines Tensors
$ \bullet $	Betrag einer Größe
$\Delta$	kleine Änderung einer Variable
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	partielle Ableitung
$det\bullet$	Determinante einer Matrix
$\forall$	mathematisches Symbol „für alle“



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispielhafte Blending Reparaturen [1, 130] . . . . .	3
2.1	Allgemeine zyklische Struktur . . . . .	8
2.2	Eigenformen eines zyklischen Beispielsystems . . . . .	10
2.3	Wöhler Diagramm (a) und Einfluss der Mittelspannung auf die Wöhler-Linie (b) . . . . .	18
2.4	Haigh Diagramm . . . . .	19
2.5	Vergleichsspannungsgrenzwerte für den ebenen Spannungszustand in Anlehnung an [65] . . . . .	23
2.6	Kragbalken (a) und Freischnitt eines kleinen Balkenelements (b) . . . .	25
2.7	Schnittlasten (a) und Verschiebungsdarstellung (b) für einen Balken . .	25
3.1	Aeroelastisches Kräftedreieck in Anlehnung an Collar [32] . . . . .	31
3.2	Verdichterkennfeld mit flattersensitiven Bereichen [86] . . . . .	35
3.3	Reduzierte Frequenz in Anlehnung an [50] S.252 . . . . .	42
3.4	Massenparameter in Anlehnung an [137] S.26 . . . . .	44
3.5	CFD Simulationsdomäne inklusive Eigenform für SPF Rechnung . . . .	46
3.6	CFD Simulationsdomäne inklusive Eigenform und Schaufelnummerierung für AIC Rechnung . . . . .	50
3.7	Beitrag der aerodynamische Einflusskoeffizienten zur aerodynamischen Dämpfung . . . . .	52
3.8	Dreidimensionales Strömungsfeld inklusive vielfältiger Strömungseffekte innerhalb eines Axialverdichters ([19] S. 1139) . . . . .	54
3.9	Schematisches Campbell Diagramm ([57] S.574) . . . . .	57
3.10	ZZENF Diagramm . . . . .	59
3.11	Beispielhafte CFD-Domäne für Vollmodellsimulation . . . . .	60
3.12	CFD-Domäne SPMR . . . . .	63

## Abbildungsverzeichnis

4.1	Schematische Darstellung der implementierten, vollautomatisierten Prozesskette . . . . .	66
4.2	Parametrik des genutzten Abzugskörpers für strukturmechanische Analysen	67
4.3	Haigh Diagramm zur Ermittlung der zulässigen dynamischen Spannungsamplitude . . . . .	70
4.4	Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Mode inklusive resultierendem Verschiebungsvektor nach Rotation zur Minimierung des Imaginärteils	71
4.5	Konvergenzstudie zur Ermittlung der notwendigen Elementgröße im geometrischen Variationsbereich . . . . .	73
4.6	Streudiagramme zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur zwischen statischer Spannungsüberhöhung $K_t$ und zylindrischen Schadensparametern	74
4.7	Statische Spannungsüberhöhung $K_t$ und betragsmäßig größte Hauptspannung entlang der Schaufelvorderkante . . . . .	75
4.8	Streudiagramme zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur zwischen statischer Spannungsüberhöhung $K_t$ und zylindrischen Schadensparametern für $r_{fod} = 0.7$ . . . . .	76
4.9	Quadratische Korrelation zwischen statischer Spannungsüberhöhung $K_t$ und dem dimensionslosen Schadensparameter $d_{fod}/r_{cyl}$ sowie relativer Fehler der Regressionsfunktion $\Delta K_t/K_t$ . . . . .	77
4.10	Relative Frequenzabweichung der ersten 20 Moden sowie MAC Matrix in Folge von FODs . . . . .	78
4.11	Relative Abweichung der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit für die ersten 20 Moden der betrachteten Komponente . . . . .	79
4.12	Streudiagramm des relativen $af$ -Wert Verlustes sowie nominaler $af$ -Wert Konturplot der untersuchten Komponente für Mode 1 . . . . .	80
4.13	Streudiagramm des relativen $af$ -Wert Verlustes sowie nominaler $af$ -Wert Konturplot der untersuchten Komponente für Mode 7 . . . . .	81
4.14	Streudiagramm zur Überprüfung der Korrelation zwischen den Schadensparametern und der dynamischen Spannungsüberhöhung am Beispiel von Mode 7 . . . . .	81
4.15	Streudiagramm zur Überprüfung der Korrelation zwischen den Schadensparametern und der damit einhergehenden Auswirkung auf den $af$ -Wert am Beispiel von Mode 7 . . . . .	82

4.16	Konturplot zur Darstellung der $af$ -Wert Sensitivität bezüglich des dimensionslosen Schadensparameters am Beispiel von Mode 7 . . . . .	83
4.17	Korrelationsuntersuchung zwischen hochzyklischer Ermüdungsfestigkeit und dem dimensionslosen Schadensparameter $d_{fod}/r_{cyl}$ auf relativer Schaufelhöhe $r_{fod} = 0.7$ . . . . .	84
4.18	Relative Abweichung des quadratischen und linearen Regressionsansatzes für die $af$ -Wert Vorhersage . . . . .	84
4.19	Korrelationsuntersuchung zwischen hochzyklischer Ermüdungsfestigkeit und dem dimensionslosen Schadensparameter $d_{fod}/r_{cyl}$ unter expliziter Berücksichtigung der Schädigungstiefe $d_{fod}$ . . . . .	85
4.20	Schematische Darstellung des prismatischen Parameterraumes und der gewählten Stützstellen zur Ermittlung der linearen Regressionsparameter	85
4.21	Konturplot zur Darstellung der $af$ -Wert Sensitivität basierend auf dem linearen Regressionsansatz für $d_{fod} = 0.5$ . . . . .	86
5.1	Nominale $af$ -Konturdarstellung der analysierten Eigenform (links Saugseite, rechts Druckseite) . . . . .	88
5.2	Gegenüberstellung von Konturplots des Betrages vom Verschiebungsfeld der untersuchten Eigenformen für die nominale und geblendete Geometrie (Saugseite) . . . . .	89
5.3	Gegenüberstellung der $af$ -Konturdarstellung für nominale und geblendete Geometrie (Saugseite) . . . . .	91
5.4	Einzelpassagen-Mehrblattreihen-Domäne für stationäre CFD Rechnungen	92
5.5	Gegenüberstellung der CFD Netze für die nominale sowie geblendete Schaufel (Druckseite) . . . . .	93
5.6	Vergleich der Strömungsfelder im Blendbereich . . . . .	93
5.7	Gegenüberstellung des Rotorabströmwinkels sowie der statischen Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche im Blendbereich für die nominale und reparierte Schaufel . . . . .	94
5.8	CFD Simulationsdomäne für nominale AIC Rechnung inklusive interpolierter Eigenform (Mode 11) auf Referenzschaufel . . . . .	95
5.9	Real- und Imaginärteil der aerodynamischen Einflusskoeffizienten für die nominale Schaufelgeometrie . . . . .	96

## Abbildungsverzeichnis

5.10	Aerodynamische Dämpfungskurven der nominalen sowie geblendeten Schaufelkaskade . . . . .	97
5.11	Vergleich der lokalen aerodynamischen Arbeitskoeffizienten für IBPA von $-96^\circ$ auf der Druckseite . . . . .	98
5.12	Vergleich der lokalen aerodynamischen Arbeitskoeffizienten für IBPA von $-96^\circ$ auf der Saugseite . . . . .	99
5.13	Darstellung der drei unterschiedlichen Blendkonfigurationen . . . . .	102
5.14	Partielle Darstellung der CFD Domäne und Anordnung der isolierten Blendkonfigurationen im Vollmodell . . . . .	103
5.15	Validierung der DFT Implementierung sowie Darstellung des Signalanteils der resonanten Erregerordnung am Gesamtsignal . . . . .	104
5.16	Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration . . . . .	105
5.17	Simulationsdomäne des Validierungsfalls (variable Blendanordnung) . .	107
5.18	Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln des Validierungsfalls . . . . .	107
5.19	Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte normierte Amplitudenverteilung . . . . .	108
5.20	Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte schaufelindividuelle Phasenlage der aerodynamischen Anregung . . . . .	109
5.21	Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration - 1. Biegemode . . . . .	111
5.22	Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration - 1. Torsionsmode . . . . .	111
5.23	Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte normierte Amplitudenverteilung - 1. Biegemode . . . . .	112
5.24	Delta-Vektoren und Rekonstruktion der schaufelindividuellen Erregeramplituden unter Berücksichtigung von vier druck- und saugseitig benachbarten Profilen - 1. Biegemode . . . . .	113
5.25	Delta-Vektoren und Rekonstruktion der schaufelindividuellen Erregeramplituden unter Berücksichtigung von vier druck- und saugseitig benachbarten Profilen - 1. Torsionsmode . . . . .	114
5.26	Darstellung der SPMR CFD Domäne und interpolierter Eigenform . . .	115

5.27	Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des Validierungsfalls mit der SPMR Vorhersage . . . . .	116
5.28	Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des pseudoresonanten 1. Biegemodes (variable Blendanordnung) mit der SPMR Vorhersage	117
5.29	Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des pseudoresonanten 1. Torsionsmodes (variable Blendanordnung) mit der SPMR Vorhersage	117



# Tabellenverzeichnis

4.1	Parameterbereich des zylindrischen Abzugskörpers zur Ermittlung der resultierenden Spannungskonzentration durch FODs . . . . .	74
5.1	Überblick der analysierten Blendkonfigurationen . . . . .	102
5.2	Zusammenfassung der modalen Parameter der Blendkonfigurationen für Fundamentalmoden . . . . .	110



# 1 Einleitung

## 1.1 Herausforderungen moderner Flugtriebwerke

Immer gravierendere klimatische Veränderungen im Zuge der fortschreitenden globalen Erwärmung bedrohen die Welt wie wir sie kennen. Mit der Unterzeichnung des Pariser Klimaabkommens im Dezember 2015 verpflichtete sich die Staatengemeinschaft zu weitreichenden Klimaschutzmaßnahmen. Das maßgebliche Ziel besteht in der Beschränkung des Temperaturanstiegs auf weniger als zwei Grad verglichen mit dem vorindustriellen Zeitalter [91]. Um dieses ehrgeizige Ziel zu erreichen, willigten alle 27 Mitgliedsstaaten der Europäischen Union im Rahmen des sogenannten „Green Deal“ ein, Europa bis 2050 zum ersten klimaneutralen Kontinent zu machen [46]. Damit einher geht das Zwischenziel die Treibhausgasemissionen bis 2030 auf verantwortungsvolle Weise um mindestens 50% gegenüber dem Vergleichsjahr 1990 zu reduzieren.

Der Luftfahrtsektor ist hierbei für 3.8% des europäischen Kohlenstoffdioxid ( $\text{CO}_2$ ) Ausstoßes direkt verantwortlich [47]. Unter Berücksichtigung weiterer klimaschädlicher Einflussfaktoren beträgt der gesamte Anteil des Luftverkehrs an der weltweiten anthropogenen Klimaerwärmung 3.5% [81]. Um bis 2050 das Ziel des emissionsfreien Fliegens zu erreichen, existieren unterschiedliche Szenarien, welche beispielsweise das Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe (ACARE) [3] oder auch die Air Transport Action Group (ATAG) [4] darlegen. Neben der langfristigen revolutionären Entwicklung neuer Antriebskonzepte wie dem batterieelektrischen oder wasserstoffbasierten Fliegen leisten aufgrund der angestrebten Zwischenziele auch evolutionäre Weiterentwicklungen bisheriger Triebwerkskonzepte einen elementaren Beitrag. In diesem evolutionären Kontext der Antriebsentwicklung existieren wiederum mehrere Möglichkeiten, um die angestrebte Reduktion der klimaschädlichen Emissionen zu realisieren. Zum einen ist die ausreichende Bereitstellung von nachhaltig erzeugten

## 1 Einleitung

Kraftstoffen, sogenannten Sustainable Aviation Fuels ein wichtiges Entwicklungsfeld. Zum anderen lässt sich der Treibstoffbedarf durch weitere Steigerungen des Vortriebswirkungsgrades reduzieren. Die aktuell sparsamsten Flugtriebwerke nutzen bereits ein hohes Nebenstromverhältnis, um diesem Ziel näher zu kommen. Aufgrund des damit einhergehenden Anstiegs des Triebwerksgewichtes sowie des Strömungswiderstandes lassen sich die Fan Durchmesser jedoch nicht beliebig erhöhen, um das Nebenstromverhältnis weiter zu steigern. [4]

Als Alternative verbleibt bei einem identischen Außendurchmesser der Triebwerksgondel die Reduktion der Größe des Kerntriebwerks. Forschungsvorhaben auf diesem Gebiet, wie beispielsweise das Hybrid Thermally Efficient Core (HyTEC) Projekt der NASA, fokussieren in Zusammenarbeit mit unterschiedlichen Triebwerksherstellern eine weitere Steigerung des thermischen Wirkungsgrades bei einer gleichzeitigen Reduktion der Baugruppengröße [90]. Neben den positiven Auswirkungen auf die Effizienz des Triebwerkes durch das weiter gesteigerte Nebenstromverhältnis geht mit einem derartigen Konzept auch eine Gewichtsreduktion des Gesamttriebwerks einher. Jedes hierbei eingesparte Kilogramm hat das Potential, die CO<sub>2</sub> Emissionen während des Lebenszyklus eines Triebwerks um bis zu 25 Tonnen zu reduzieren [23]. Integrale gefertigte Laufräder, im englischen als blade integrated disk (Blisk) oder integrally bladed rotor (IBR) bezeichnet, sind aufgrund des geringeren Komponentengewichts verglichen mit konventionell beschaufelten Scheiben daher eine Schlüsseltechnologie für die Weiterentwicklung von Flugtriebwerken. Einen wesentlichen Nachteil verglichen mit konventionellen Bauweisen stellt jedoch der komplexere Wartungsprozess bei einer Beschädigung solcher Komponenten dar.

## 1.2 Stand der Technik

Bauartbedingt sind im Schadensfall bei einer Blisk die betroffenen Schaufeln nicht einfach austauschbar. Um diesen Nachteil gegenüber konventionell beschaufelten Scheiben zumindest teilweise auszugleichen, haben sich unterschiedliche Reparaturansätze etabliert. Neben Verfahren für die Rekonstruktion von großflächigeren Schäden wie dem Auftragschweißen - engl. patch repair [33, 44, 104] kommen vor allem bei kleineren Beschädigungen gezielte Fräsreparaturen zur Glättung der betroffenen Schaufelareale



Abbildung 1.1: Beispielhafte Blending Reparaturen [1, 130]

zum Einsatz. Diese sogenannten Blending oder Blend Reparaturen sind essenziell, um die Wirtschaftlichkeit der Blisk Technologie im Rahmen der Triebwerksinstandhaltung zu gewährleisten [2, 8]. Typische Beispiele sind Abbildung 1.1 entnehmbar.

Aus der Einführung von Blend Reparaturen im Maintenance, Repair and Overhaul (MRO) Bereich resultiert der Bedarf die Blendauswirkungen möglichst genau mittels Simulationen vorherzusagen. Dies ist notwendig, um auch nach Reparaturen einen sicheren Flottenbetrieb zu garantieren. Aufgrund der vielfältigen Einflüsse von Blendings auf die strukturmechanischen (Eigenfrequenzen, Eigenformen, hochzyklische Ermüdungsfestigkeit, Mistuning), aerodynamischen (Wirkungsgrad, Pumpgrenzabstand, instationäre Druckverteilung) sowie die aeroelastischen Eigenschaften (aerodynamische Dämpfung, aerodynamische Anregung, verändertes Kopplungsverhalten) des Systems hat sich bisher keine umfängliche, einheitliche Bewertungsstrategie etabliert. Viele relevante Veröffentlichungen in diesem Bereich konzentrieren sich hauptsächlich auf das Verständnis einzelner oder mehrerer disziplinspezifischer Effekte.

Im strukturmechanischen Fokus steht vor allem die Fragestellung nach einer geeigneten Formgebung der Blend Reparaturen, um die Integrität des Bauteils über dessen Lebensdauer gewährleisten zu können. Day et al. [38] präsentieren einen Ansatz zur Erstellung einer Blend Datenbank für unterschiedliche zulässige Blendkombinationen. Als Kriterien zur Bewertung von Blends kamen der Eigenfrequenzabstand gegenüber im

## 1 Einleitung

System auftretenden Erregerordnungen sowie eine durch modale Skalierung abgeleitete Schwingungsreserve zum Einsatz. Karger et al. [69] nutzten einen ähnlichen Ansatz zur Formulierung eines Optimierungsproblem für einen parametrisierten Abzugskörper. Mit dem Ziel, die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit und die Schaufelmasse durch die Reparatur möglichst wenig zu beeinflussen, kamen Grenzwerte für die zulässige Eigenfrequenzverschiebung als Nebenbedingung zur Anwendung. Berger et al. [15] führten eine Mehrkriterienoptimierung eines ellipsoiden Abzugskörper mit einer vergleichbaren Vorgehensweise durch. Zudem beschäftigten sich mehrere Forschergruppen mit den Auswirkungen von Eigenfrequenzverschiebungen der reparierten Schaufeln auf strukturmechanische Schwingungsüberhöhungen als Folge dieser Frequenzverstimmung - engl. mistuning [11, 131, 146]. Brown et al. [22] betrachteten zudem die Möglichkeit einer schaufelindividuellen Blend Definition für eine vermessene Realgeometrie unter Berücksichtigung der sich überlagernden Verstimmungs- und Lokalisierungseffekte.

Eine alleinige Berücksichtigung der strukturmechanischen Folgewirkungen ist jedoch nicht ausreichend, um die Einflüsse einer Blendreparatur auf das aeroelastische Gesamtsystem abschätzen zu können. Knapke et al. [73, 74] untersuchten anhand einer Fan Schaufel die aerodynamischen Auswirkungen unterschiedlicher Rückschnitte im Bereich der Blattspitze an der Vorderkante. Stationäre Betrachtungen zeigten eine Varianz der wirkenden Umfangskraft auf die reparierte Schaufel sowie direkt benachbarte Passagen. Eine Analyse der instationären Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche für unterschiedliche Einlassdruckprofile deutete ebenso auf einen direkten Effekt der Blending Reparatur hin. Ekici et al. [45] stellten auf Basis eines Euler-Gleichungslösers neben Varianzen der schaufelindividuellen Erregerkraft zudem eine Veränderung der aerodynamischen Dämpfung für die geblendete Schaufelkonfiguration fest. Das gekoppelte System zeigte hierbei nicht für die geblendete Schaufel selbst, sondern jeweils für die 2. Nachbarschaufel in druck- und saugseitiger Richtung die maximale Schwingungsamplitude. Keller et al. [70] analysierten unterschiedliche Blendkonfigurationen (3 verschiedene radiale Positionen) hinsichtlich ihres Einflusses auf den aerodynamischen Wirkungsgrad, den Verlustbeiwert sowie die aerodynamische Anregung und Dämpfung der ersten Torsionsmode. Basierend auf vereinfachenden Symmetrieanahmen (Einzelschaufelmodellierung pro Blattreihe) ließen sich mittels 3D-numerische Strömungsmechanik - engl. computational fluid dynamics (CFD) Simulationen deutliche Variationen der betrachteten Größen in Abhängigkeit von der Blendgeometrie nachwei-

sen. Schwerdt et al. [112] berücksichtigten neben der Variation der aerodynamischen Dämpfung verschiedener Blendkonfigurationen auch die Streuung der Materialparameter im Fertigungsprozess. Dies ermöglicht eine Betrachtung des Mistuning Einflusses auf die Schwingungsüberhöhung des aeroelastischen Gesamtsystems. Für den analysierten Mode 6 der Geometrie war mittels dieser stochastischen Betrachtung jedoch keine deutliche Varianz der resultierenden Überhöhungsfaktoren durch die Blend Reparaturen nachweisbar.

## 1.3 Zielstellung der Arbeit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen neben den strukturmechanischen Folgewirkungen von Fremdkörperschädigungen - engl. foreign object damages (FODs) auch die aeroelastischen Konsequenzen von Blending Reparaturen analysiert werden. Hinsichtlich der Beurteilung von FODs liegt der Fokus auf einer vereinfachten Modellbildung zur Abschätzung der Auswirkungen auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit des betroffenen Bauteils. Dies resultiert in strukturmechanischen Grenzwerten für die zulässige Schadensgröße unter Gewährleistung eines sicheren Betriebs des Flugtriebwerks.

Die aeroelastischen Analysen verfolgen primär das Ziel, die Auswirkungen von Blending Reparaturen auf wesentliche Kenngrößen zu quantifizieren. Hierzu zählt auch die Überprüfung von häufig in der Literatur getroffenen Annahmen auf ihre Plausibilität und Validität. Speziell betrifft dies die Annahmen, dass bei Blendreparaturen oberhalb von industriespezifischen Grenzwerten für Ähnlichkeitskriterien (modal assurance criterion (MAC)  $> 0.9$ ) keine relevanten Auswirkungen auf die Schaufeleigenform, aerodynamische Dämpfung und Anregung des Systems zu erwarten sind. Im Gegensatz zu den zuvor aufgeführten Publikationen ist explizit keine Fundamentalmode, sondern eine im Betrieb hoch ausgelastete höhere Eigenform Gegenstand der detaillierten aeroelastischen Betrachtungen. Somit beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf die simulationsbasierte Studie grundlegender Effekte von Blendreparaturen. Hiermit soll für den weiteren Forschungsverlauf ein wichtiger Beitrag zum besseren Verständnis von aeroelastischen Gesamtsystemanalysen unter Berücksichtigung von strukturmechanischen und aeroelastischen Verstimmungseffekten geleistet werden.



## 2 Allgemeine Grundlagen

In diesem Kapitel werden die allgemeinen Grundlagen zusammengefasst, welche zum Verständnis der Arbeit notwendig sind. Aufbauend auf einer Einführung in die Dynamik zyklisch symmetrischer Strukturen folgt eine Zusammenfassung der Grundlagen der Betriebsfestigkeit sowie die Erläuterung der *af-strength* als Parameter zur Beurteilung der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit eines Bauteils.

### 2.1 Dynamik zyklischer Strukturen

Viele Problemstellungen im Ingenieurwesen resultieren in einer zyklisch symmetrischen bzw. rotationssymmetrischen Struktur als Lösungsansatz. Beispiele hierfür sind unter anderem Blisks in Flugtriebwerken, Propeller in der Luftfahrt bzw. an Windkrafträdern, Kühltürme von Kraftwerken oder rotierende Scheibenanwendungen wie Festplatten. Im Allgemeinen lässt sich diese Klasse von Strukturen eindeutig anhand eines einzelnen Sektors definieren, wobei eine Aneinanderreihung von  $N$  identischen Sektoren mit Versatz um den Winkel  $\theta_j = 2\pi(j-1)/N$  bezogen auf den Ausgangssektor für  $j = 1, \dots, N$  auf die Gesamtstruktur führt. [116]

Zyklische Systeme besitzen spezielle modale Eigenschaften, welche im Folgenden hergeleitet werden. Auf Basis dieser allgemeinen Erkenntnisse ist es möglich, die Analyse derartiger Systeme zu vereinfachen und somit die Rechenzeit sowie den Modellierungsaufwand zu reduzieren. Ein allgemeines zyklisch symmetrisches System (Abbildung 2.1) mit einem Freiheitsgrad pro Sektor lässt sich durch den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T \quad (2.1)$$

## 2 Allgemeine Grundlagen

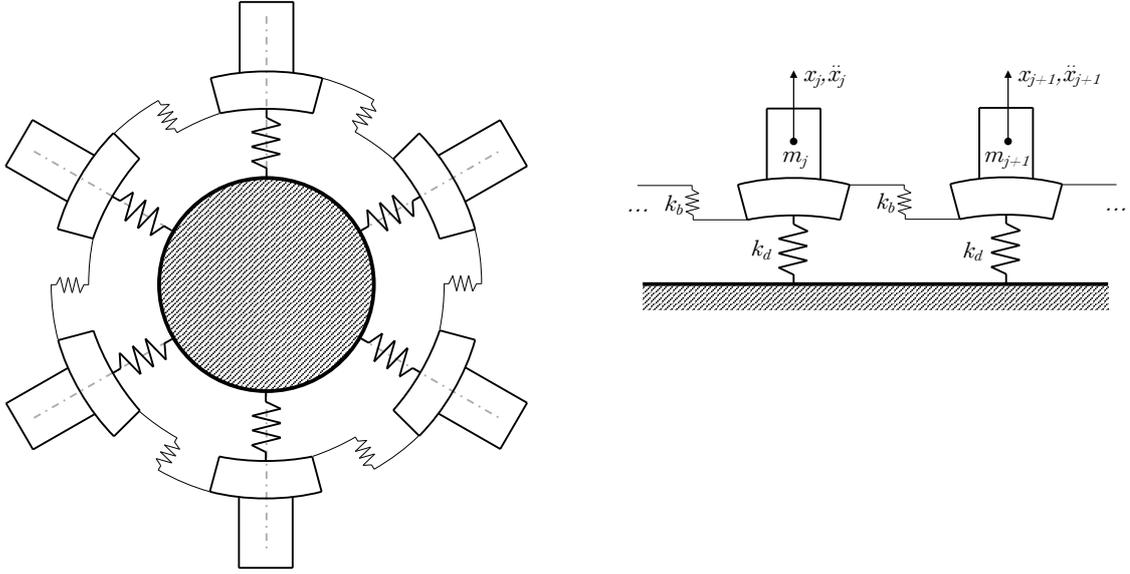


Abbildung 2.1: Allgemeine zyklische Struktur

beschreiben. Der Verschiebungsvektor aus Gleichung (2.1) gilt unter der Voraussetzung, dass mit dem jeweiligen Sektor auch das lokale Koordinatensystem zur Beschreibung des Freiheitsgrades ( $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ ) um den entsprechenden Winkel  $\theta_j$  rotiert wird. Unter Verwendung der Newtonschen Axiome folgt für jeden Sektor der Zusammenhang

$$m_j \ddot{x}_j - k_b x_{j-1} + (k_d + 2k_b) x_j - k_b x_{j+1} = 0. \quad (2.2)$$

Hierbei entspricht  $m_j$  der Masse des Sektors  $j$ ,  $k_{d_j}$  der Federsteifigkeit der Sektor-Zentrumsverbindung und  $k_{b_j}$  der Federsteifigkeit der direkten Sektorkopplung. Für die nachfolgenden Betrachtungen wird von einem unverstimmten System ausgegangen, d.h. alle Massen  $m_j = m$  sowie alle Federsteifigkeiten  $k_{d_j} = k_d$  und  $k_{b_j} = k_b$  sind für jeden Sektor identisch. Da es sich um ein zyklisches Modell handelt, gilt für den Verschiebungsvektor  $x_{N+1} = x_1$  und  $x_0 = x_N$ . Ein System mit  $N$  Sektoren lässt sich basierend auf Gleichung (2.2) in Matrixnotation überführen und resultiert in der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

wobei die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  eine diagonale und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  eine zyklisch

symmetrische Struktur der Dimension  $N \times N$  aufweisen.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_d + 2k_b & -k_b & & & -k_b \\ -k_b & k_d + 2k_b & -k_b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -k_b & k_d + 2k_b & -k_b \\ -k_b & & & & -k_b & k_d + 2k_b \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Zur Lösung des homogenen, linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung dient der allgemeine Ansatz in Exponentialform (vgl. [53] S.122 ff.)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi} e^{\lambda t}. \quad (2.5)$$

Das Einsetzen des Ansatzes (2.5) in die Bewegungsgleichung (2.3) führt zu dem Eigenwertproblem

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = -\lambda^2 \mathbf{M} \mathbf{\Phi}. \quad (2.6)$$

Für reell-symmetrische Matrizen sind sowohl deren  $N$  Eigenwerte  $\lambda_j^2$ , als auch die  $N$  linear unabhängigen Eigenvektoren  $\mathbf{\Phi}_j$  rein reell (vgl. [95] S.140). Aus der Lösung des Problems (2.6) ergeben sich die  $2N$  konjugiert komplexen Wurzeln der Eigenwerte

$$\underline{\lambda}_j = i\omega_j \quad \bar{\lambda}_j = -i\omega_j, \quad (2.7)$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit, definiert durch  $i^2 = -1$ , bezeichnet und  $j$  Werte im Intervall  $[0 : (N - 1)]$  annimmt. Aus Gleichung (2.7) ist ersichtlich, dass diese  $2N$  Wurzeln der Eigenwerte nur  $N$  unterschiedliche Werte für die Eigenkreisfrequenzen des Systems liefern. Die rein reellen Eigenvektoren  $\mathbf{\Phi}_j$  ergeben sich durch die Lösung des Gleichungssystems (2.6) für jeden der ermittelten Eigenwerte  $\lambda_j^2$ . Diese beschreiben die spezifische Relation der Auslenkungen aller Systemfreiheitsgrade zueinander und werden auch als Eigenform, Mode oder im Englischen als Mode Shape bezeichnet. Die Lösung der Bewegungsgleichung des Gesamtsystems erfolgt für jedes konjugiert komplexe Lösungspaar  $\underline{\lambda}_j$  und  $\bar{\lambda}_j$  sowie dem zugehörigen Eigenvektor  $\mathbf{\Phi}_j$  durch eine Überlagerung gemäß des Superpositionsprinzips

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{\Phi}_j \left( \underline{A}_j e^{\underline{\lambda}_j t} + \bar{\underline{A}}_j e^{\bar{\lambda}_j t} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{\Phi}_j [a_j \cos(\omega_j t) - b_j \sin(\omega_j t)]. \quad (2.8)$$

## 2 Allgemeine Grundlagen

Die konjugiert komplexen Konstanten  $\underline{A}_j = \frac{1}{2}(a_j + ib_j)$  und  $\bar{\underline{A}}_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j)$  sind an die Anfangsbedingungen anzupassen. Aufgrund der Charakteristik der homogenen Lösung (2.8), welche sich als Produkt einer ortsabhängigen Funktion (Eigenform) und einem zeitlich schwingenden Anteil darstellt, wird diese Art der Lösung auch als stehende Welle - engl. standing wave mode (SWM) bezeichnet.

Für ein beispielhaftes System mit  $N = 6$  Freiheitsgraden, der Sektormassen  $m = 1$  und den Federsteifigkeiten  $k_d = 2$  sowie  $k_b = 1$  sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenformen Abbildung 2.2 entnehmbar. Für die betrachteten zyklischen Systeme ergeben sich hierbei einige Besonderheiten, welche im Folgenden anhand des Beispiels erläutert werden. Aufgrund der zyklischen Struktur der Massen- und Steifigkeitsmatrix sowie ihrer rein reellen Elemente treten die meisten Eigenwerte  $\underline{\lambda}_j^2$  doppelt auf. Lediglich der Eigenwert  $\underline{\lambda}_0^2$  und bei einer geraden Anzahl an Substrukturen  $N$  auch der Eigenwert  $\underline{\lambda}_{N/2}^2$  bilden hiervon eine Ausnahme [94]. Die verbliebenen Eigenwerte lassen sich ohne

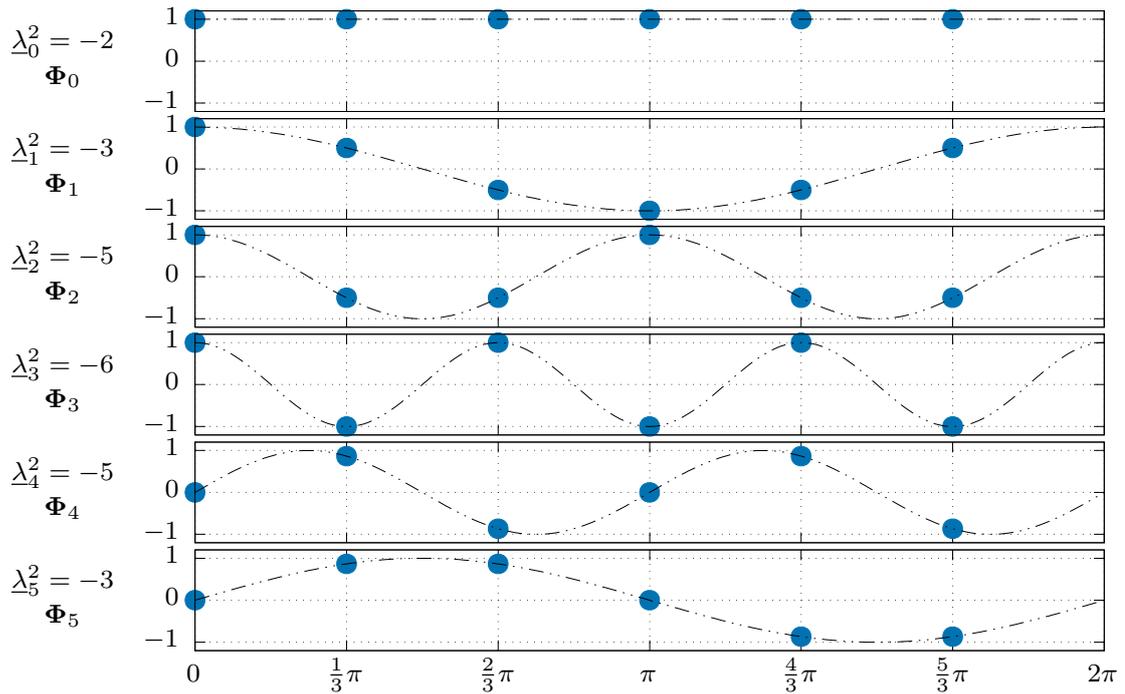


Abbildung 2.2: Eigenformen eines zyklischen Beispielsystems

Beschränkung der Allgemeinheit gemäß der Vorschrift

$$\lambda_k^2 = \lambda_{N-k}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 & \text{wenn } N \text{ gerade} \\ k = 1, \dots, \frac{N-1}{2} & \text{wenn } N \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.9)$$

anordnen (vgl. [128] S.15). Hinsichtlich der Eigenvektoren  $\Phi_j$  des Beispielsystems ist eine Einteilung in 3 wesentliche Gruppen durchführbar [133].

- 1) Alle Substrukturfreiheitsgrade weisen die selbe Auslenkung auf

$$x_j = x_{j+1} \quad \forall j \quad \Phi = [x_1, x_1, \dots, x_1, x_1] \quad (2.10)$$

- 2) Alle Substrukturfreiheitsgrade weisen eine gegenläufige Auslenkung auf

$$x_j = -x_{j+1} \quad \forall j \quad \Phi = [x_1, -x_1, \dots, x_1, -x_1] \quad (2.11)$$

- 3) Alle anderen Moden

$$x_j \neq x_{j+1} \quad x_j \neq -x_{j+1} \quad \forall j \quad \Phi = [x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N] \quad (2.12)$$

Hierbei lassen sich die Eigenvektoren  $\Phi_0$  und  $\Phi_3$  der einzeln auftretenden Eigenwerte gemäß Abbildung 2.2 den Gruppen 1 sowie 2 zuordnen. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass Eigenvektoren der Gruppe 2 ausschließlich für Systeme mit einer geraden Anzahl an Substrukturen  $N$  existieren. Aus den Definitionen in Gleichung (2.10) und (2.11) folgt die Erkenntnis, dass die jeweilige Eigenform der Gesamtstruktur durch Berechnung der Auslenkung eines einzelnen Sektors definiert werden kann.

Alle weiteren Eigenvektoren  $\Phi_j$ , welche den doppelt auftretenden Eigenwerten gemäß Gleichung (2.9) zugeordnet werden können, gehören dementsprechend Gruppe 3 an. Für den vorliegenden Fall reell-symmetrischer Matrizen existieren für jeden doppelten Eigenwert  $\lambda_k^2 = \lambda_{N-k}^2$  je 2 linear unabhängige Eigenvektoren  $\Phi_k$  und  $\Phi_{N-k}$  (vgl. [95] S.140). Aufgrund des Rangabfalls nach dem Einsetzen der Eigenwerte bei der Lösung des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Eigenvektoren  $\Phi_j$  sind diese lediglich bis auf zwei frei wählbare Parameter definiert. Dadurch ist die Umfangsposition der

## 2 Allgemeine Grundlagen

Eigenform nicht festgelegt und unter Einhaltung der linearen Unabhängigkeit können die Eigenvektoren gemäß

$$\Phi_k = \Phi_{ck} = \hat{\Phi}_{ck} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \cos\left(j \cdot \frac{2\pi k}{N}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\{N-1\} \cdot \frac{2\pi k}{N}\right) \end{bmatrix} \quad \Phi_{N-k} = \Phi_{sk} = \hat{\Phi}_{sk} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sin\left(j \cdot \frac{2\pi k}{N}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\{N-1\} \cdot \frac{2\pi k}{N}\right) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

als Cosinus-Moden und Sinus-Moden mit den zugehörigen Amplituden  $\hat{\Phi}_{ck}$  und  $\hat{\Phi}_{sk}$  formuliert werden. Auffällig in Gleichung (2.13) ist, dass die einzelnen Einträge der Eigenvektoren, welche den Sektorauslenkungen entsprechen, einen festen Phasenversatz zwischen benachbarten Freiheitsgraden aufweisen. Im Anwendungsfall der Turbomaschinen wird diese Phasendifferenz zwischen benachbarten Sektoren auch als IBPA - engl. inter blade phase angle  $\beta_k$  bezeichnet.

$$\beta_k = \frac{2\pi k}{N} \quad (2.14)$$

Hierbei bezeichnet der Parameter  $k$ , in Analogie zu den Eigenformen einer kreisrunden Platte, den sogenannten Knotendurchmesser - engl. nodal diameter (ND) der Eigenform. Anhand der Eigenformabwicklungen in Abbildung 2.2 ist der jeweilige Knotendurchmesser durch Abzählen der vollständigen Sinus- oder Cosinusschwingungszyklen ermittelbar.

Die Erkenntnis, dass alle Sektoren nur diskrete Phasenversatzwinkel  $\beta_k$  zu ihren Nachbarn aufweisen können, ermöglicht es nun die Auslenkungen für Eigenvektoren der Gruppe 3 in Abhängigkeit eines einzelnen Sektors anzugeben. Auch die Eigenvektoren der Gruppe 1 und 2 lassen sich in dieser Art darstellen und entsprechen den Sonderfällen der Zwischenphasenwinkel von 0 und  $\pi$  der Cosinus-Moden. Für diese gilt unter Berücksichtigung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} x_{j-1_k} &= \hat{\Phi}_{ck} \cos[(j-1)\beta_k] = x_{j_k} \cos(\beta_k) + \hat{\Phi}_{ck} \sin(j\beta_k) \sin(\beta_k) \\ x_{j_k} &= \hat{\Phi}_{ck} \cos(j\beta_k) \\ x_{j+1_k} &= \hat{\Phi}_{ck} \cos[(j+1)\beta_k] = x_{j_k} \cos(\beta_k) - \hat{\Phi}_{ck} \sin(j\beta_k) \sin(\beta_k) \end{aligned} \quad (2.15)$$

sowie für die Sinus-Moden

$$\begin{aligned}
 x_{j-1_k} &= \hat{\Phi}_{sk} \sin [(j-1)\beta_k] = x_{j_k} \cos(\beta_k) - \hat{\Phi}_{sk} \cos(j\beta_k) \sin(\beta_k) \\
 x_{j_k} &= \hat{\Phi}_{sk} \sin(j\beta_k) \\
 x_{j+1_k} &= \hat{\Phi}_{sk} \sin [(j+1)\beta_k] = x_{j_k} \cos(\beta_k) + \hat{\Phi}_{sk} \cos(j\beta_k) \sin(\beta_k).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Amplituden beider Anteile identisch sind, lässt sich dieser Zusammenhang verkürzt durch folgende Matrixnotation darstellen

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ck}^j \\ \Phi_{sk}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(j\beta_k) & -\sin(j\beta_k) \\ \sin(j\beta_k) & \cos(j\beta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{ck}^0 \\ \Phi_{sk}^0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Hieraus folgt, dass jede Eigenform der  $j$ -ten Substruktur durch eine Expansion der entsprechenden Eigenform des Bezugssektors ermittelt werden kann. Die dargelegten Erkenntnisse ermöglichen zudem eine Bestimmung der Eigenwerte  $\underline{\lambda}_j^2$  basierend auf der Bewegungsgleichung des  $l$ -ten Sektors der Struktur. Einsetzen der Zusammenhänge (2.15) und (2.16) in (2.2) führt jeweils auf

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_l + [-\cos(\beta_k)k_b + (k_d + 2k_b) - \cos(\beta_k)k_b] x_l &= 0 \\
 \ddot{x}_l + \underbrace{2\frac{k_b}{m} \left[ 1 - \cos(\beta_k) + \frac{k_d}{2k_b} \right]}_{\underline{\lambda}_j^2} x_l &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Es ist somit möglich, sowohl die Eigenwerte  $\underline{\lambda}_j^2$  als auch die zugehörigen Eigenvektoren  $\Phi_j$  einer zyklisch symmetrischen Gesamtstruktur anhand der Berechnungen für einen einzelnen Sektor zu bestimmen.

Als Grundlage zur Überführung der erarbeiteten Erkenntnisse auf allgemeine zyklische Probleme sollen die umfangreichen Arbeiten von Davis [37] sowie Olson et al. [94] dienen. Der Vorteil in der Übertragung der Erkenntnisse der zyklischen Matrizen­theorie auf mechanische Systeme liegt in der eleganten Lösungsmöglichkeit für eine Vielzahl von Systemen, welche sich durch zyklische Systemmatrizen beschreiben lassen. Hierzu zählen in entsprechender Formulierung vor allem auch Systeme mit zyklischen Dämpfungsmatrizen, welche im Abschnitt 3 dieser Arbeit von besonderem Interesse sind. Daher werden die zum Verständnis der Arbeit elementaren Zusammenhänge an dieser

## 2 Allgemeine Grundlagen

Stelle in verkürzter Form dargestellt. Für ausführliche Erläuterungen und umfangreiche mathematische Herleitungen sei auf die Fachliteratur [37, 94] verwiesen.

Jede zyklische Matrix  $\mathbf{C}$  der Dimension  $N \times N$  lässt sich anhand eines Vektors  $\mathbf{c}$  der Dimension  $N$  mit den sogenannten generierenden Elementen der Matrix eindeutig beschreiben.

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N] \quad \mathbf{C} = \text{circ}[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ c_N & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Jede weitere Zeile der Matrix ergibt sich durch eine zyklische Verschiebung der vorherigen um eine Position nach rechts. Dieser spezielle Aufbau zyklischer Matrizen ermöglicht die Darstellung in Polynomform gemäß

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{P}_z^{j-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

wobei die zyklische Permutationsmatrix  $\mathbf{P}_z$  entsprechend ihrer Potenz die generierenden Elemente auf den Diagonalen der Matrix anordnet. Um nun die Eigenwerte einer zyklischen Matrix zu bestimmen, sind zunächst die Eigenwerte der Permutationsmatrix zu ermitteln. Diese folgen aus dem speziellen Eigenwertproblem nach Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatz zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms als

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_z - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\Phi} &= 0 \\ \lambda_j^N &= 1 \\ \lambda_j &= w_N^j = e^{i \frac{2\pi j}{N}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet und die Eigenwerte der Matrix den Potenzen der  $N$ -ten Einheitswurzel entsprechen. Da jede zyklische Matrix als Polynom in Abhängigkeit von  $\mathbf{P}_z$  darstellbar ist und zusätzlich alle Potenzen  $\mathbf{P}_z^N$  kommutative Matrizen sind,

gelten die Zusammenhänge (vgl. [127] S.57)

$$\begin{aligned}
 \lambda_j(c_j \cdot \mathbf{P}_z) &= c_j \cdot \lambda_j(\mathbf{P}_z) \\
 \lambda_j(\mathbf{P}_z^k) &= \lambda_j^k \\
 \lambda_j(\mathbf{P}_z + \mathbf{P}_z^2 + \dots + \mathbf{P}_z^{N-1}) &= \lambda_j(\mathbf{P}_z) + \lambda_j(\mathbf{P}_z^2) + \dots + \lambda_j(\mathbf{P}_z^{N-1}).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Somit lassen sich die Eigenwerte einer beliebigen zyklischen Matrix  $\mathbf{C}$  als

$$\lambda_j = \sum_{l=1}^N c_l w_N^{(j-1)(l-1)} \tag{2.23}$$

ermitteln. Die zugehörigen Eigenvektoren  $\Phi_j$  der zyklischen Matrix folgen durch Einsetzen der Eigenwerte  $\lambda_j$  in Gleichung (2.21) als Lösung des linearen Gleichungssystems. Sowohl für die Permutationsmatrix als auch alle Ihre Potenzen resultiert aus diesem Vorgehen die gleiche Basis an Eigenvektoren, welche Spaltenweise in der sogenannten Fouriermatrix  $\mathbf{E}_N$  der Dimension  $N \times N$  zusammengefasst sind.

$$\mathbf{E}_N = [\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N-1}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Da die Fouriermatrix sowohl die Permutationsmatrix  $\mathbf{P}_z$  als auch alle Ihre Potenzen  $\mathbf{P}_z^N$  diagonalisiert, entsprechen ihre jeweiligen Spalten auch den Eigenvektoren jeder zyklischen Matrix  $\mathbf{C}$ . Für alle mechanischen Problemstellungen, welche sich durch zyklische Systemmatrizen beschreiben lassen, sind die Eigenvektoren somit a priori bekannt. Zusätzlich sind diese Erkenntnisse auch auf blockzyklische Matrizen übertragbar [37, 94] und können beispielsweise in der finite Elemente Methode (FEM) ausgenutzt werden.

Vergleicht man nun die Lösungen resultierend aus der zyklischen Matrizentheorie für das zuvor eingeführte Beispielsystem mit den bereits ermittelten Werten, liefern beide Methoden die identischen Eigenwerte. Im Gegensatz dazu scheinen die Eigenvektoren  $\Phi_k$  voneinander abzuweichen, da die bereits ermittelten Lösungen rein reell sind, während die Einträge der Fouriermatrix im Allgemeinen komplexe Werte annehmen. Die in der

## 2 Allgemeine Grundlagen

Fouriermatrix  $\mathbf{E}_N$  enthaltenen Lösungsvektoren lassen sich jedoch als eine komplexe Überlagerung der rein reellen Cosinus- und Sinus-Moden interpretieren

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_k &= \Phi_{ck} + i\Phi_{sk} \\ \underline{\Phi}_{N-k} &= \Phi_{ck} - i\Phi_{sk}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Formuliert man nun analog zu (2.8) die homogene Lösung mittels der komplexen Eigenvektoren folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{k_{max}} \left( \underline{\Phi}_k \underline{A}_k e^{\lambda_k t} + \underline{\Phi}_{N-k} \underline{\bar{A}}_k e^{\bar{\lambda}_{N-k} t} \right) \\ \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=0}^{k_{max}} [a_k \Phi_{ck} - b_k \Phi_{sk}] \cos(\omega_k t) - [b_k \Phi_{ck} + a_k \Phi_{sk}] \sin(\omega_k t),\end{aligned}\tag{2.26}$$

wobei die Konstanten  $a_k$  und  $b_k$  ebenfalls an die Anfangsbedingungen anzupassen sind. Vergleicht man das Ergebnis (2.26) mit der Expansionsregel für Sektoreigenformen (2.17), so ist es beispielsweise für die Parameterkombination  $a_k = 1$  und  $b_k = 0$  äquivalent zur ersten Zeile der Transformationsvorschrift. Für jeden Zeitpunkt  $t = \frac{j\beta_k}{\omega_k}$  wandert die Eigenform also genau einen Sektor weiter. Im Gegensatz zur Formulierung (2.8) ist das Resultat (2.26) physikalisch als umlaufende Welle - engl. travelling wave mode (TWM) interpretierbar.

## 2.2 Betriebsfestigkeit

Grundsätzlich lassen sich Schwingungsanregungen im Betrieb aufgrund der Bauart von Flugtriebwerken nicht verhindern (siehe Abschnitt 3.4). Die Verdichterbeschaukelung ist hierbei einer hochzyklischen Belastung ausgesetzt. Somit ist gemäß den Anforderungen der European Aviation Safety Agency (EASA) [43] ein Nachweis der Betriebsfestigkeit über den gesamten Drehzahlbereich notwendig. Relevante Resonanzdrehzahlen werden mit Hilfe der FEM durch die Erstellung eines Campbell Diagramms identifiziert und die simulatorisch vorhergesagten Schwingungsamplituden (siehe Abschnitt 3.4) anhand von Triebwerkstests im Zulassungsprozess validiert.

### 2.2.1 Dauerfestigkeit

Der Nachweis der Betriebsfestigkeit einer Komponente ist eine lange bekannte Problematik im Ingenieurwesen und hat ihren Ursprung in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Im Bergbau traten wiederholt Probleme mit eisernen Förderketten auf, welche der dauerhaften Belastung nicht stand hielten und durch Drahtseile ersetzt wurden. Ausgangspunkt der im Wesentlichen heute noch gültigen Ermüdungsprüftechniken (vgl. [101] S.4) sind die Untersuchungen von Rankine [102] im Jahre 1843. Anhand von Ermüdungsbrüchen an Eisenbahnachsen war feststellbar, dass die jahrelange Verwendung einer Komponenten zu einer Verringerung der ertragbaren Belastung im Betrieb führt. Die Einführung des Begriffes der Materialermüdung ist in diesem Zusammenhang durch Braithwaite [18] erfolgt. Dieser konnte mit seiner Forschung die Grundlagen für weitere Untersuchungen legen, indem er feststellte, dass die Versagensursache auf ein unerwartetes Materialverhalten bei zyklisch auftretenden Lasten zurückzuführen ist. Die damals eingesetzte Methode der Bauteilauslegung anhand statisch ermittelter Materialkennwerte wurde durch diese Erkenntnisse hinterfragt und führte zu den umfangreichen Arbeiten von Wöhler [142, 143, 144, 145], auf deren Basis bis heute unterschiedliche Materialkennwerte zur Bewertung der zyklischen Belastbarkeit ermittelt werden. Wöhler zeigte, dass Materialien bei einer entsprechend großen Anzahl zyklischer Belastungen versagen, selbst wenn alle Beanspruchungen unterhalb der statischen Belastungsgrenzwerte liegen. Des Weiteren stellte er fest, dass die Belastungsamplitude wesentlichen Einfluss auf die Anzahl der ertragbaren Schwingungszyklen hat. Demnach sind für höhere Lasten weniger Schwingungszyklen bis zum Bauteilversagen notwendig, als dies bei niedrigeren Lasten der Fall ist. Für eine umfangreiche geschichtliche Zusammenfassung der Forschung im Bereich der Materialermüdung sei auf das Übersichtswerk von Schütz [111] verwiesen.

Eine grafische Aufarbeitung der von Wöhler erkannten Zusammenhänge ist in Abbildung 2.3a dargestellt und wird in der deutschsprachigen Literatur als „Wöhler-Linie“ bezeichnet, während im englischsprachigen Raum die Bezeichnung als „S-N Curve“ dominiert. Auf der Abszissenachse erfolgt die logarithmische Auftragung der Schwingungszahl und auf der Ordinatenachse wird die zugehörige Amplitude der alternierenden Spannung  $\sigma_a$  dargestellt. Für eine konstante Mittelspannung  $\sigma_m$  kann anhand von mehreren Schwingungsversuchen für eine gewählte Spannungsamplitude  $\sigma_a$  die Schwingungszahl

## 2 Allgemeine Grundlagen

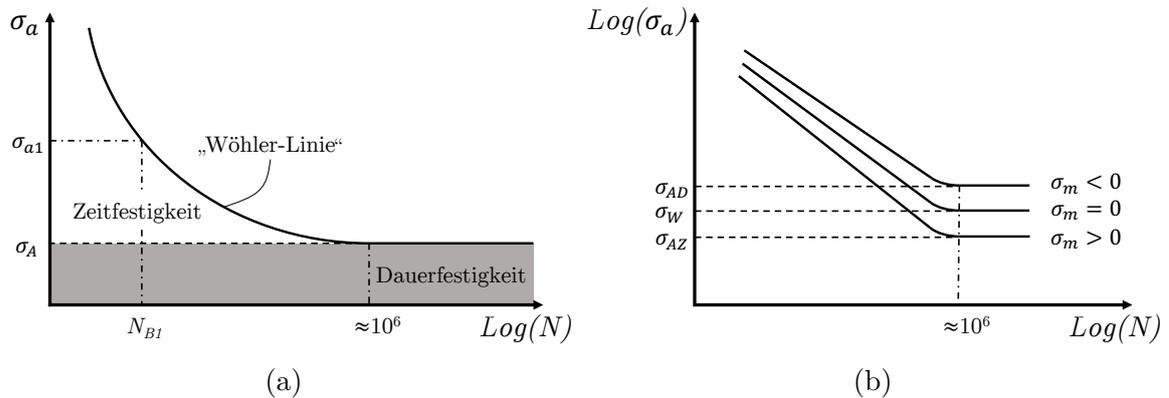


Abbildung 2.3: Wöhler Diagramm (a) und Einfluss der Mittelspannung auf die Wöhler-Linie (b)

bis zum Versagen der Werkstoffprobe ermittelt werden. Wird dieser Versuch für  $j$  Spannungsamplituden  $\sigma_{a_j}$  wiederholt, folgt hieraus die Wöhler-Linie. Dementsprechend bildet die Wöhler-Linie den funktionalen Zusammenhang zwischen der alternierenden Spannung  $\sigma_a$  und der korrespondierenden Schwingspielzahl bis zum Bruch  $N_B$  der untersuchten Probe ab. Für Materialien mit einer ausgeprägten Dauerschwingfestigkeit gilt die Spannungsamplitude  $\sigma_A$ , bei welcher die Werkstoffprobe nach  $10^6$  Schwingzyklen nicht versagt hat, als dauerschwingfest ertragbare Belastung. Für den Spezialfall  $\sigma_m = 0$  wird diese Kenngröße als Wechselfestigkeit  $\sigma_W$  bezeichnet. (vgl. [24] S.94 ff.)

Die im Wöhler Versuch ermittelten Schwingspielzahlen bis zum Bruch der untersuchten Proben sind von einer Vielzahl an Parametern abhängig. Beispielsweise ist der Einfluss unterschiedlicher Mittelspannungen auf die dauerhaft ertragbare alternierende Spannungsamplitude  $\sigma_A$  schematisch in Abbildung 2.3b erfasst. Im Vergleich zur Wechselfestigkeit  $\sigma_W$  für den Spezialfall einer nicht vorhandenen Mittelspannung führen Zugmittelspannungen zu einem Absinken und Druckmittelspannungen zu einem Anstieg der entsprechenden dauerschwingfest ertragbaren Spannungsamplituden  $\sigma_{AZ}$  und  $\sigma_{AD}$ . Hinsichtlich der Auswirkungen von Proben- und Bauteilgrößen, Oberflächenrauigkeit, Effekten durch Oberflächenverfestigung, Einflüssen der Eigenspannungen sowie der Temperatur sei auf ergänzende Literatur verwiesen (vgl. [101] S.105-146; [80] S.277-287; [24] S.101-115).

Zur Beurteilung von Konstruktionen anhand der in statischen Versuchen und Schwingfestigkeitsversuchen ermittelten Materialkennwerte haben sich im Laufe der Zeit zwei

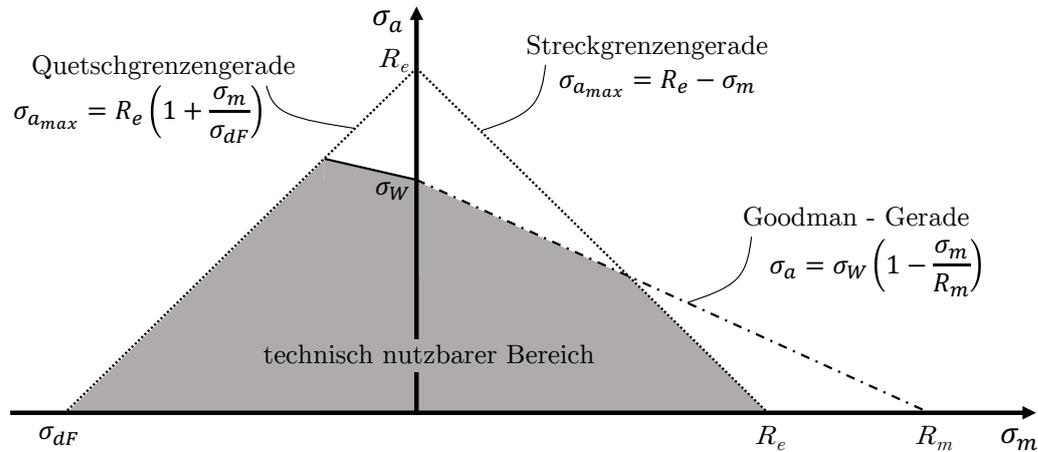


Abbildung 2.4: Haigh Diagramm

sogenannte Dauerfestigkeitsschaubilder etabliert. Beide Schaubilder nach Smith [122] und Haigh [59] stellen den Zusammenhang zwischen der anliegenden Mittelspannung  $\sigma_m$  und der ertragbaren alternierenden Spannungsamplitude  $\sigma_A$  dar. Da im Zuge der vorliegenden Arbeit die Festigkeitsbewertung anhand des Haigh Diagramms erfolgt, wird lediglich dieses Schaubild im Folgenden erläutert. Eine schematische Darstellung des Haigh Diagramms für eine konstante Temperatur zeigt Abbildung 2.4. Hierbei bezeichnet  $R_m$  die Zugfestigkeit,  $R_e$  die Streckgrenze,  $\sigma_W$  die Wechselfestigkeit und  $\sigma_{dF}$  die Druckfestigkeit des Werkstoffes. Die Ermittlung einer statistisch relevanten Aussage bezüglich der zulässigen alternierenden Spannungsamplituden  $\sigma_a$  für einen bestimmten Mittelspannungswert  $\sigma_m$  anhand von Wöhler-Versuchen ist äußerst aufwendig und setzt je nach der benötigten Genauigkeit eine sehr hohe Anzahl untersuchter Proben voraus (vgl. [40];[24] S.98). Um diese Problematik zu umgehen, wird häufig auf eine vereinfachten linearen Zusammenhang auf Basis der Arbeit von Goodman (vgl. [56] S.634) zurückgegriffen. Demnach liegen die dauerschwingfest ertragbaren alternierenden Spannungsamplituden  $\sigma_a$  auf der Verbindungsgeraden der Wechselfestigkeit  $\sigma_W$  und der Zugfestigkeit des Werkstoffes  $R_m$ , der sogenannten Goodman-Geraden

$$\sigma_a = \sigma_W \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right). \quad (2.27)$$

Diese Annahme hat sich in den meisten Fällen als konservativ herausgestellt (vgl. [101] S.29) und ist dementsprechend eine häufig genutzte Vereinfachung. Um zu gewährleisten,

## 2 Allgemeine Grundlagen

dass es während des Betriebs zu keiner plastischen Verformung des Bauteils kommt, wird zusätzlich die Streckgrenzengerade

$$\sigma_{amax} = R_e - \sigma_m \quad (2.28)$$

als Begrenzungslinie im Haigh Diagramm genutzt. Eine Erweiterung des Schaubildes in den Druckmittelspannungsbereich durch eine Verlängerung der Goodman-Gerade ist nicht zulässig. Der genaue Verlauf der zulässigen alternierenden Spannungsamplituden bis zur Einschränkung durch die Quetschgrenzengerade (fette Linie in Abbildung 2.4) muss experimentell bestimmt werden. (vgl. [24] S.98 ff.) Als konservative Annahme kann die Wechselfestigkeit  $\sigma_W$  als Limit im Druckmittelspannungsbereich verwendet werden. Als technisch nutzbarer Bereich im Haigh Diagramm gilt also die Fläche, welche von der Goodman-Geraden, der Streckgrenzengeraden, der Begrenzung im Druckmittelspannungsbereich und der Quetschgrenzengeraden eingeschlossen wird (grauer Bereich in Abbildung 2.4). Alle Kombinationen aus Mittelspannungen  $\sigma_{m_j}$  und zugehörigen alternierenden Spannungsamplituden  $\sigma_{a_j}$  innerhalb dieses Bereiches sind als dauerhaft eingestuft.

### 2.2.2 Festigkeitshypothesen

Da reale Bauteile im Betrieb meist komplexen mehrachsigen Spannungszuständen ausgesetzt sind, stellt sich die Frage nach einer geeigneten Größe um die Vergleichbarkeit mit den experimentell ermittelten Werkstoffkennwerten zu gewährleisten. Zu diesem Zweck wurden Festigkeitshypothesen entwickelt, welche es auf Basis unterschiedlicher Grundgedanken ermöglichen, einen mehrachsigen Spannungszustand in einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand zu überführen. (vgl. [80] S.116) Praktische Relevanz haben in diesem Zusammenhang die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) für Bauteile, welche durch Fließen oder Schubbruch versagen und die Normalspannungshypothese (NH) für Bauteilversagen durch spröden Trennbruch (vgl. [58] S.240 f.). Laut Liu und Zenner [83] ist eine schädigungsmechanische Klassifizierung in „fehlerfreie“ und „fehlerbehaftete“ Werkstoffe sinnvoller als die Gruppierung nach den Werkstoffeigenschaften (duktil oder spröde). Dementsprechend entstehen Risse unter zyklischer Belastung bei „fehlerfreien“ Werkstoffen, z.B. Stählen, durch irreversible plastische Gleitbewegungen.

Ausschlaggebend ist hierbei die Orientierung der Gleitebene und der auftretenden Schubspannungsamplitude. Für die Festigkeitsbewertung derartiger Werkstoffe ist die GEH basierend auf den Erkenntnissen von Huber [68], von Mises [89] und Hencky [65] oder die Schubspannungsintensitätshypothese anzuwenden. Bei „fehlerbehafteten“ Werkstoffen, z.B. Grauguß mit Lamellengraphit, sind werkstoff- und fertigungsbedingt bereits rissähnliche Fehlstellen im Material enthalten, welche ausgehend von der Fehlerorientierung und den anliegenden Normalspannungen für das Werkstoffversagen verantwortlich sind. Zur Beurteilung der Bauteilfestigkeit ist in diesem Zusammenhang die NH zu bevorzugen, welche ihren Ursprung in den Arbeiten von Lamé [78] und Rankine [103] hat.

Alle Festigkeitshypothesen gehen davon aus, dass ein Bauteilversagen eintritt sobald die Vergleichsspannung  $\sigma_V$  die in einachsigen Materialversuchen ermittelten Grenzwerte überschreitet. Zur Definition der unterschiedlichen Vergleichsspannungen sei der Spannungszustand innerhalb eines Bauteils an jedem beliebigen Punkt durch den symmetrischen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  bekannt.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{HAS} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Hierin beschreiben  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  und  $\sigma_{zz}$  die Normalspannungen und  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  sowie  $\tau_{yz}$  die Schubspannungen. In der verwendeten Notation bezeichnet der erste Index der Spannungsgröße die Normalenrichtung der Schnittebene, wobei der zweite Index der Wirkrichtung der Spannungsgröße entspricht. Durch die Lösung des Eigenwertproblems für den Spannungstensor (vgl. [76] S.312 ff.) lassen sich als Eigenwerte die drei Hauptspannungen  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  ermitteln. Jedem der Eigenwerte ist ein entsprechender Eigenvektor zuzuordnen. Gemeinsam spannen diese ein lokales Hauptachsensystem (HAS) auf, in welchem der Spannungstensor  $\mathbf{S}_{HAS}$  Diagonalform annimmt.

Wie zuvor dargelegt, dient als Grundlage der NH die Annahme, dass ein Bauteilversagen in Folge der größten Normalspannung auftritt. Unter der Voraussetzung eines isotropen Materials mit identischen Werkstoffeigenschaften in allen Raumrichtungen und gleichem

## 2 Allgemeine Grundlagen

Werkstoffverhalten unter Zug- und Druckbelastung gilt

$$\sigma_{V_{NH}} = \begin{cases} \sigma_1 & \text{wenn } \sigma_1 \geq |\sigma_3| \\ \sigma_3 & \text{wenn } \sigma_1 < |\sigma_3| \end{cases}. \quad (2.30)$$

Im Gegensatz zur NH geht die GEH davon aus, dass ein Bauteilversagen dann eintritt, wenn die in einem Körper gespeicherte Gestaltänderungsenergie einen materialspezifischen Grenzwert überschreitet. Für Körper aus linear elastischem Material lässt sich die reversibel gespeicherte spezifische Formänderungsenergie (FÄE)  $w^s$  als Doppelskalarprodukt des Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und des Verzerrungstensors  $\mathbf{D}$  berechnen.

$$w^s = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} = w_V^s + w_G^s \quad (2.31)$$

Die Aufteilung der spezifischen FÄE in einen gestalterhaltenden Volumenänderungsanteil  $w_V^s$  und einen volumenerhaltenden Gestaltänderungsanteil  $w_G^s$  wird hierbei durch eine Aufspaltung der Tensoren in einen hydrostatischen Anteil (Volumenänderung) und einen deviatorischen Anteil (Gestaltänderung) erzielt. Für den allgemeinen Spannungstensor aus (2.29) gilt

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} + \frac{1}{3}(\text{Sp}\mathbf{S})\mathbf{I} \quad \text{und} \quad \text{Sp}\mathbf{S} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.32)$$

mit dem Spannungsdeviator  $\hat{\mathbf{S}}$ , der Spur des Spannungstensors  $\text{Sp}\mathbf{S}$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ . Ersetzt man nun den Verzerrungstensor in (2.31) unter Berücksichtigung des linear elastischen Materialgesetzes durch seine spannungsexplizite Formulierung führt dies zu

$$w_V^s + w_G^s = \frac{1}{18K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2], \quad (2.33)$$

wobei  $G$  den Schubmodul sowie  $K$  den Kompressionsmodul bezeichnet und die spezifischen Energieanteile nur noch in Abhängigkeit der Spannungen formuliert sind. (vgl. [76] S.290 ff. und S.510 ff.)

Unter Berücksichtigung der Eingangsannahme für die GEH, dass ein Materialversagen aus der Überschreitung eines Grenzwertes für die gespeicherte FÄE resultiert, hat für die Festigkeitsbeurteilung nur der Term  $w_G^s$  Relevanz. Die Vergleichsspannung lässt sich

somit aus der Forderung ableiten, dass ein Bauteil im allgemeinen Belastungsfall dann versagt, wenn die entsprechende FÄE den im einachsigen Materialversuch ermittelten Grenzwert überschreitet. Hieraus folgt

$$w_{G1D}^s = w_{G3D}^s$$

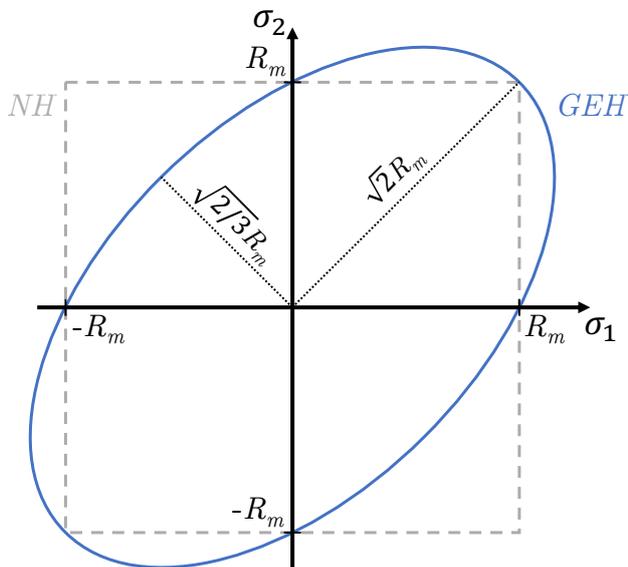
$$\sigma_{V_{GEH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \quad (2.34)$$

mit  $\sigma_{V_{GEH}}$  als Vergleichsspannung für die GEH. Da Ermüdungsanrisse im Allgemeinen von der Bauteiloberfläche ausgehen (vgl. [101] S.69; [58] S.240) ist es sinnvoll, die Unterschiede beider Festigkeitshypothesen anhand des ebenen Spannungszustandes darzustellen, welcher an lastfreien Bauteiloberflächen näherungsweise vorliegt. In diesem Fall vereinfacht sich (2.34) zu

$$\sigma_{V_{GEH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (2.35)$$

und beschreibt die in Abbildung 2.5 blau dargestellte Ellipse im  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  Koordinatensystem. Die große Halbachse weist eine Länge von  $\sqrt{2}R_m$  und die kleine Halbachse eine Länge von  $\sqrt{2/3}R_m$  auf. Alle Hauptspannungszustände innerhalb dieser Ellipse sind im Sinne der Festigkeitsbewertung nach der GEH zulässig. Kombinationen der Hauptspannungen welche sich außerhalb dieser Begrenzung befinden, führen zu einem Bauteilversagen.

Für die NH hingegen sind alle Hauptspannungszustände innerhalb des grau markierten Quadrates zulässig. Sobald eine der Hauptspannungen  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  die Zugfestigkeit  $R_m$  des Materials überschreitet, ist demnach von einem Bauteilversagen auszugehen.



Zusätzlich geht aus Abbildung 2.5 hervor, dass je nach Kombination der Hauptspannungen entweder die NH oder die GEH eine geringere zulässige Vergleichsspannung liefert. Für Spannungsverhältnisse  $\alpha_k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 0$  ist dementsprechend die NH und für  $\alpha_k < 0$  die GEH als konservativ zu bewerten.

Abbildung 2.5: Vergleichsspannungsgrenzwerte für den ebenen Spannungszustand in Anlehnung an [65]

### 2.2.3 $af$ -Parameter

Auf Hochdruckverdichter-Blisks wirken im Betrieb unterschiedliche Lasten, z.B. die Zentrifugallast, thermische Spannungen, Druckgradienten zwischen Druck- und Saugseite der Beschauelung und dynamische Lasten durch die Schaufelschwingung selbst. Während der Entwicklungsphase werden Drücke sowie Temperaturen in aufwendigen Komponententests ermittelt und anhand dieser Messwerte die Simulationsmodelle validiert. Für eine sichere Auslegung der Komponente ist vor allem eine korrekte Ermittlung der wirkenden Spannungen relevant. Die wichtigsten Informationen zur Bestimmung der auftretenden Schaufelbeanspruchung sind hierbei die Frequenz, damit einhergehend die Identifikation der Eigenschwingform, sowie die Amplitude der Schaufelschwingung [6]. Aus diesem Grund wurde bereits Mitte der 50er Jahre der  $af$ -Parameter als Maß für die Beanspruchung von schwingender Beschauelung eingeführt. Außerdem konnte gezeigt werden, dass der  $af$ -Parameter proportional zu dem Betrag der harmonischen Anregung des Strömungsfeldes ist [7]. Im Folgenden wird anhand eines fest eingespannten Balkens gezeigt, dass der  $af$ -Parameter, welcher als ein Produkt aus der Schwingungsamplitude  $a$  und -frequenz  $f$  definiert ist, für Biegebeanspruchungen proportional zu der maximal auftretenden Spannung  $\sigma_{max}$  ist.

Ausgangspunkt für die anschließenden Betrachtungen ist der in Abbildung 2.6a dargestellte Kragbalken mit der Länge  $l$ , der Dichte  $\rho$ , dem Flächeninhalt des Querschnitts  $A$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Flächenträgheitsmoment bezüglich der  $y$ -Achse  $I_{yy}$ . Zur Vereinfachung werden die den Balken definierenden Größen alle als konstant angenommen. Für ein kleines, freigeschnittenes Balkenelement (siehe Abbildung 2.6b) der Masse  $m = \rho A \Delta x$  gilt gemäß den Newton'schen Axiomen

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t). \quad (2.36)$$

Hierbei bezeichnet  $u_3$  die Auslenkung des Balkens in  $z$  Richtung und  $Q$  die auf den Balken wirkende Querkraft. Eine Taylorreihenentwicklung gemäß  $Q(x + \Delta x, t) = Q(x, t) + \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_x \Delta x$  ergibt

$$\rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.37)$$

Nach Bildung des Momentengleichgewichts um das rechte Schnittufer des betrachteten

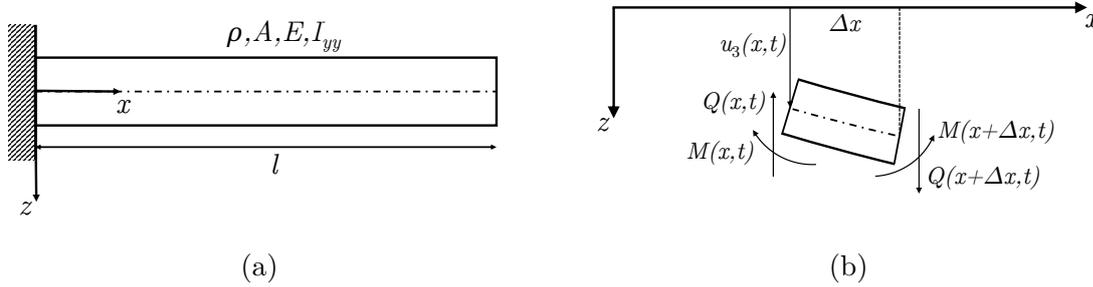


Abbildung 2.6: Kragbalken (a) und Freischnitt eines kleinen Balkenelements (b)

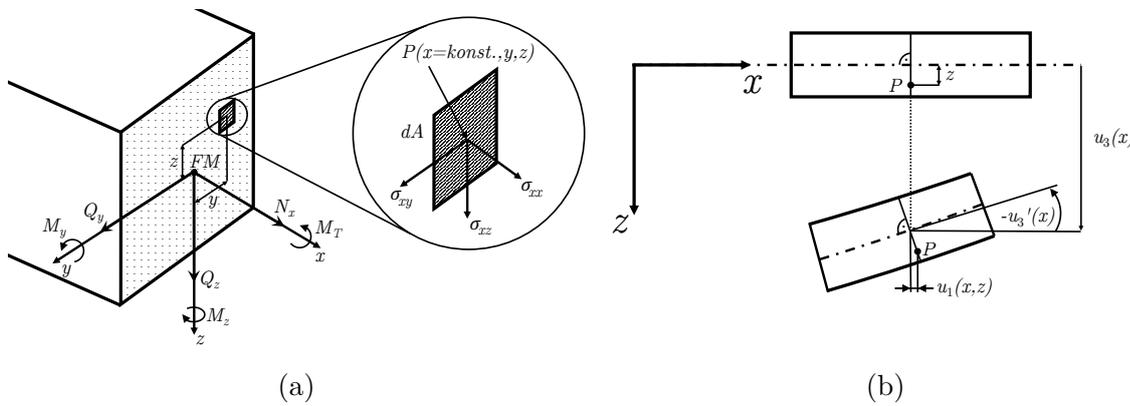


Abbildung 2.7: Schnittlasten (a) und Verschiebungsdarstellung (b) für einen Balken

Balkenelements folgt durch die Taylorreihenentwicklung des Momententerms

$$\begin{aligned}
 -M(x, t) - Q(x, t)\Delta x + M(x + \Delta x, t) &= 0 \\
 \frac{\partial M}{\partial x} &= Q.
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Abbildung 2.7a zeigt die Schnittlasten in einer beliebigen Schnittebene  $x = \textit{konstant}$  des betrachteten Balkens.  $\sigma_{xx}$  sei als Normalspannung und die Größen  $\sigma_{xy}$  sowie  $\sigma_{xz}$  als Schubspannungen definiert, wobei der erste Index die Richtung der Flächennormale und der zweite Index die Wirkrichtung der Spannung angibt. Bezüglich des Flächenmittelpunktes  $FM$  lässt sich der resultierende Kraftwinder anhand folgender Zusammenhänge

## 2 Allgemeine Grundlagen

ermitteln

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{A_s} \sigma_{xx} dA & M_T &= \int_{A_s} (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA \\
 Q_y &= \int_{A_s} \sigma_{xy} dA & M_y &= \int_{A_s} z\sigma_{xx} dA \\
 Q_z &= \int_{A_s} \sigma_{xz} dA & M_z &= \int_{A_s} -y\sigma_{xx} dA.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$N_x$  bezeichnet die Normalkraft auf der Schnittfläche und  $Q_y, Q_z$  die Querkräfte in  $y$ - und  $z$ -Richtung.  $M_T, M_y$  und  $M_z$  entsprechen dem resultierenden Torsionsmoment bezüglich des Flächenmittelpunktes sowie den Momentenwirkungen um die  $y$ - und  $z$ -Achse. Unter Berücksichtigung der Euler'schen Verformungshypothese, wonach Querschnittsflächen des Balkens auch bei Verformung eben und senkrecht zur Balkenachse bleiben (siehe [76] S.348), verschwinden die Schubspannungsanteile gemäß  $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ . Für ein verformtes Balkenelement gemäß Abbildung 2.7b folgt unter ebendieser Voraussetzung

$$\begin{aligned}
 u_1(x, z) &= -\frac{\partial u_3}{\partial x} z \\
 \varepsilon_{xx}(x, z) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} z.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Hierin bezeichnet  $u_1$  die Verschiebung des Balkens in  $x$ -Richtung,  $z$  die Entfernung des Punktes  $P$  von der neutralen Faser des Balkenquerschnitts in  $z$ -Richtung und  $\varepsilon_{xx}$  die Verzerrung in  $x$ -Richtung.

Für eine Balkenbiegung um die  $y$ -Achse resultiert aus der Verwendung des einachsigen Hooke'schen Materialgesetzes  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$  (siehe [76] S.274 ff.) in Kombination mit den Gleichungen (2.39) und (2.40)

$$M_y = E \int_{A_s} \varepsilon_{xx} z dA = -E \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \underbrace{\int_{A_s} z^2 dA}_{I_{yy}}. \tag{2.41}$$

Basierend auf Gleichung (2.37) und den Zusammenhängen (2.38) sowie (2.41) ergibt sich nun die Schwingungsdifferentialgleichung für die Balkenbiegung um die  $y$ -Achse als

$$\begin{aligned}
 \rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI_{yy} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} \\
 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{EI_{yy}}{\rho A} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung wird der Separationsansatz nach Bernoulli verwendet (vgl. [85] S.279), gemäß welchem die gesuchte Lösung  $u_3(x, t)$  ein Produkt aus einer zeitabhängigen Funktion  $T(t)$  und einer ortsabhängigen Funktion  $U(x)$  ist.

$$u_3(x, t) = T(t)U(x) \quad (2.43)$$

Ein Ersetzen der entsprechenden Ausdrücke in Gleichung (2.42) und Separation der Variablen führt zu dem Ausdruck

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \frac{1}{T} = -\frac{EI_{yy}}{\rho A} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \frac{1}{U} = -\omega^2. \quad (2.44)$$

Hierbei ist die linke Seite der Gleichung ausschließlich von der Zeit und die rechte Seite der Gleichung nur vom Ort abhängig. Die Erfüllung dieser Forderung ist nur möglich, wenn beide Seiten gleich einer zeit- und ortsunabhängigen Konstanten sind (vgl. [85] S.274). Für die gewünschte Spannungsbetrachtung ist lediglich der ortsabhängige Anteil der Lösung von Interesse, weshalb dieser genauer betrachtet wird.

$$\begin{aligned} \gamma^4 &= \omega^2 \frac{\rho A}{EI_{yy}} \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \gamma^4 U &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Für die Lösung einer Differentialgleichung gemäß der Struktur von Gleichung (2.45) wird als Ansatzfunktion eine Überlagerung harmonischer und hyperbolischer Funktionen genutzt.

$$U(x) = a_1 \cos(\gamma x) + a_2 \sin(\gamma x) + a_3 \cosh(\gamma x) + a_4 \sinh(\gamma x) \quad (2.46)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergeben sich folgende Anforderungen an die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 & \frac{\partial U(0)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(l)}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial^3 U(l)}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Durch das Einsetzen der Ansatzfunktion (2.46) in die Differentialgleichung (2.45) und Verwendung der Zusammenhänge aus (2.47) lässt sich folgendes Gleichungssystem

## 2 Allgemeine Grundlagen

bilden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos(\gamma l) & -\sin(\gamma l) & \cosh(\gamma l) & \sinh(\gamma l) \\ \sin(\gamma l) & -\cos(\gamma l) & \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (2.48)$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix singular, d.h.  $\det|\mathbf{A}| = 0$  ist (siehe [95] S.88). Zur Überprüfung der Singularität der Koeffizientenmatrix erfolgt die Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile mittels des Laplace'schen Entwicklungssatzes (siehe [95] S.45). Hieraus resultiert die Forderung

$$\det|\mathbf{A}| = 1 + \cos(\gamma l)\cosh(\gamma l) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.49)$$

welche nicht analytisch lösbar ist. Für alle numerisch ermittelten Werte  $\gamma_i l$ , die Gleichung (2.49) erfüllen, können nach Umformung der Beziehung (2.45) die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  ermittelt werden.

$$\omega_i = (\gamma_i l)^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{\rho A l^4}} \quad (2.50)$$

Da die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  den Rang 3 hat, ist die Lösung des Gleichungssystems (2.48) abhängig von einem frei wählbaren Parameter (siehe [95] S.88). Des Weiteren gilt die Nebenbedingung, dass dieser Parameter ungleich Null ist, um eine triviale Lösung des Gleichungssystems zu vermeiden. Aus der Wahl  $a_1 = a$  und der anschließenden Lösung des Systems (2.48) folgen die Eigenformen der Biegeschwingung des Balkens als

$$U_i(x) = a \left( \cos(\gamma_i x) - \cosh(\gamma_i x) + \frac{\sin(\gamma_i l) - \sinh(\gamma_i l)}{\cos(\gamma_i l) + \cosh(\gamma_i l)} \{ \sin(\gamma_i x) - \sinh(\gamma_i x) \} \right). \quad (2.51)$$

Unter Verwendung des einachsigen Hooke'schen Materialgesetzes [67] und der Beziehungen (2.40) sowie (2.41) ergibt sich für die Spannung in  $x$ -Richtung

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} z = \frac{M_y}{I_{yy}} z. \quad (2.52)$$

Da für den in Abbildung 2.6a dargestellten Kragbalken das Moment im Einspannungs-

punkt  $x = 0$  am Größten ist, befindet sich in diesem Bereich das Spannungsmaxima  $\sigma_{max}$ . Es folgt

$$\sigma_{max} = \frac{M_y(0)}{I_{yy}} z_{max} \quad \text{und somit} \quad -EI_{yy} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}(0) = \frac{\sigma_{max} I_{yy}}{z_{max}}. \quad (2.53)$$

Eine Auswertung des Ausdruckes (2.53) unter Berücksichtigung der Verschiebungsfunktion für die Biegeschwingung (2.51) führt nach Umformung zu

$$af_i = \frac{\sigma_{max_i}}{2\pi z_{max}} \sqrt{\frac{I_{yy}}{E\rho A}}. \quad (2.54)$$

Für die Biegeschwingung ist somit der  $af$ -Parameter proportional zur maximal auftretenden Spannung innerhalb des Balkens. Dadurch wird die Verwendung des Produkts aus der Amplitude  $a$  und der Schwingungsfrequenz  $f$  als Maß für die Belastung innerhalb einer Struktur gerechtfertigt und auf Basis der Arbeit von Armstrong et al. [6] als Kriterium für die strukturelle Belastung von Verdichterbeschaufelungen verwendet.



### 3 Aeroelastische Grundlagen

Alle Darstellungen in Abschnitt 2 beinhalten rein strukturmechanische Phänomene. Innerhalb dieses Kapitels erfolgt nun der Übergang auf die Betrachtung des aeroelastischen Problems und der damit einhergehenden Kopplung der Elastomechanik von Strukturen in einer Luftströmung sowie den daraus resultierenden aerodynamischen Kräften (vgl. [66] S.1). Um die Zusammenhänge der beteiligten Disziplinen besser zu visualisieren, entwickelte Collar 1946 das sogenannte „aeroelastische Kräftradreieck“ (siehe Abbildung 3.1). Als wesentliche Eckpunkte dienen hierbei die auf eine Struktur einwirkenden aerodynamischen, elastischen und Trägheitskräfte. Während zu Beginn der Luftfahrt diese Disziplinen zunächst isoliert betrachtet wurden, zeichnete sich durch umfangreiche Untersuchungen Anfang des 20. Jahrhunderts eine enge Kopplung und gegenseitige Abhängigkeit der wirkenden Kräfte ab. [9, 32, 100]

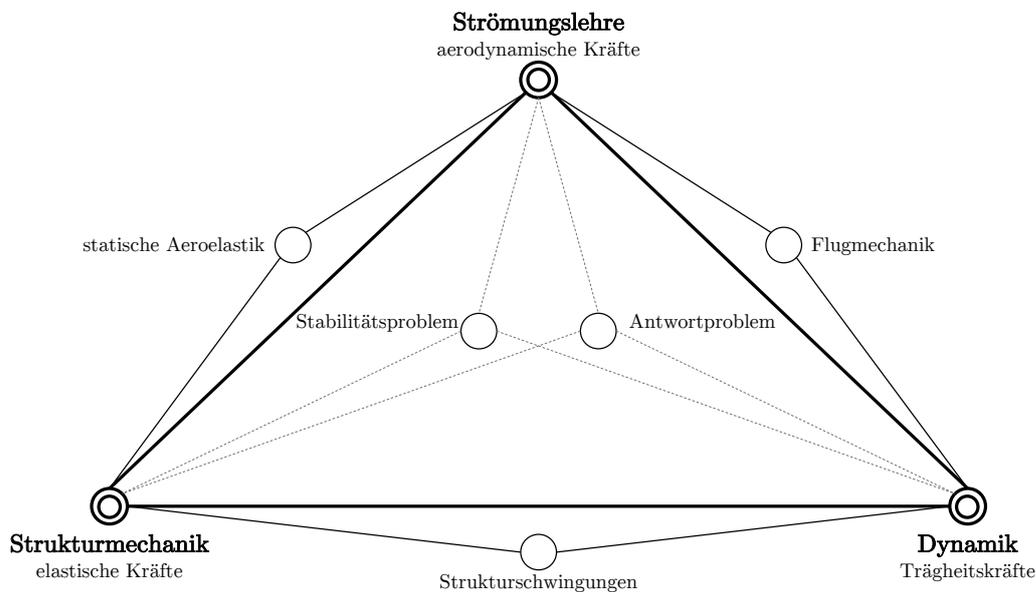


Abbildung 3.1: Aeroelastisches Kräftradreieck in Anlehnung an Collar [32]

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Aus einer Kombination der jeweiligen Eckpunkte des Dreiecks lassen sich unterschiedliche technische Fragestellungen erzeugen. Viele der zunächst aufgekommenen und untersuchten aeroelastischen Probleme beschränkten sich auf eine Wechselwirkung zwischen 2 der 3 beteiligten Kräfte und haben ihren Ursprung in der Auslegung von Flugzeugen. Das Gebiet der statischen Aeroelastik befasst sich beispielsweise mit dem Gleichgewichtszustand der aerodynamischen sowie elastischen Kräfte und deckte vor allem die Fragestellungen der aerodynamischen Divergenz oder der Umkehr der Ruderwirkung ab. Klassischerweise resultiert der Bereich der Flugmechanik aus der Interaktion der aerodynamischen Kräfte und Trägheitskräfte. Im Fokus standen zunächst Untersuchungen bezüglich der Stabilität und Kontrolle von Starrkörpern sowie der Auswirkung von Fehlanströmungen auf das Flugverhalten. Auch die Abschätzung der limitierenden Lastfälle erfolgte unter Vernachlässigung der elastischen Kräfte. Deren Einfluss wurde aber in gewisser Weise durch das Vorhalten von Sicherheitsfaktoren während der Auslegung Rechnung getragen. Aus einer Betrachtung der Wechselwirkung zwischen den elastischen Kräften und den Trägheitskräften resultiert das Feld der Strukturschwingungen. Im Flugzeugbau kam es hierbei zu einer ähnlichen Entwicklung der Problematik, die bereits in Kapitel 1 für den Übergang auf die Blisk Bauweise in Axialverdichtern dargelegt wurde. Die Anpassung der grundlegenden Konstruktion (Übergang von Holztragwerken auf Metall, Einsparung von Fügstellen) führte zu einer deutlichen Reduktion der Dämpfung innerhalb des Gesamtsystems, wodurch die Amplituden der mechanischen Schwingungen anstiegen. Da eine Ermittlung der Anregungskräfte damals in vielen Teilbereichen technisch noch nicht möglich war, beschränkten sich die Analysen auf eine Bestimmung der relevanten Struktureigenfrequenzen mit dem Ziel der Resonanzvermeidung. [32]

Innerhalb des Dreiecks sind jene Probleme erfasst, die aus einer Interaktion aller beteiligten Kräfte resultieren und häufig unter dem übergeordneten Begriff der dynamischen aeroelastischen Probleme zusammengefasst werden. Grundlegend lässt sich diese Klasse von Problemen in dynamische aeroelastische Stabilitätsprobleme und dynamische aeroelastische Antwortprobleme unterteilen (vgl. [50] S.18), welche in den folgenden Ausführungen im Bezug auf die Ausprägung in Axialverdichtern von Flugtriebwerken genauer erläutert werden. Konzeptionell lässt sich jedes dieser Felder als ein Teilbereich der Aeroelastik betrachten, der historische Ursprung des Begriffs bezieht sich jedoch lediglich auf die Wechselwirkung zwischen stationären aerodynamischen und elastischen Kräften (vgl. [42] S.1).

## 3.1 Aeroelastische Phänomene in Axialverdichtern

Die Betriebsumgebung der Beschaukelung innerhalb eines Axialverdichters unterscheidet sich wesentlich von den grundlegenden aeroelastischen Fragestellungen im allgemeinen Flugzeugbau, welche bereits im obigen Absatz dargelegt wurden. Gemäß Bendiksen [13] lässt sich der zeitliche Versatz von etwa 30 Jahren zwischen den ersten aeroelastischen Analysen im allgemeinen Flugzeugbau und der spezifischen Problembearbeitung von aeroelastischen Fragestellungen im Bezug auf die Anwendung in Turbomaschinen vor allem auf die Entwicklungsphilosophie der Triebwerksbauer zurückführen. Die Weiterentwicklung von Triebwerken auf Basis von empirischen Erfahrungswerten inklusive umfangreicher Prüfstands- und Triebwerkstest scheiterte häufig an Ermüdungsbrüchen von Kompressor- oder Turbinenschaufeln und lässt sich bis in die Anfangszeit der Strahltriebwerke zurückverfolgen [98, 114].

Grundsätzlich behält das aeroelastische Kräftedreieck (Abbildung 3.1) auch für die Klassifizierung der spezifischen Phänomene in Axialverdichtern weiterhin seine Gültigkeit. Lediglich die einzelnen Fragestellungen, welche aus Interaktionen der beteiligten Kräfte resultieren, variieren im Vergleich zum allgemeinen Flugzeugbau. Im Folgenden werden die relevanten Themengebiete jeweils in Form einer kurzen Zusammenfassung in Anlehnung an die Definitionen gemäß Marshall und Imregun [86] dargelegt.

**Statische Aeroelastik:** befasst sich mit der Berechnung der Schaufelform in unterschiedlichen Betriebszuständen, basierend auf der Schaufelgeometrie in Ruhelage und des jeweiligen Strömungszustandes. Die Beschaukelung in Turbomaschinen verformt sich elastisch unter Einwirkung von Zentrifugal- und Gaslasten. Diese Verformung erfolgt oft in Art einer Torsionsbewegung, ausgehend von der ursprünglich gefertigten Schaufelgeometrie, woraus auch die häufig genutzte Bezeichnung der Schaufelentwindung - engl. untwist für dieses Phänomen resultiert. Das eigentlich zu lösende Problem ist hierbei ein inverses, denn die Schaufelgeometrie wird derart entworfen, dass der aerodynamische Wirkungsgrad für zuvor definierte Betriebspunkte des Verdichters optimiert ist. Hierdurch muss die „kalte“, zu fertigende Geometrie der Schaufel unter Berücksichtigung der Verformungen, die aus den Zentrifugal- und Gaslasten resultieren, ermittelt werden. Dieser Prozess wird im Allgemeinen mit dem englischen Begriff „unrunning“ bezeichnet. Ungenauigkeiten

### 3 Aeroelastische Grundlagen

hierbei resultieren in einer Abweichung der Schaufelposition von der aerodynamischen Designintention und einem möglichen Stabilitäts- und Wirkungsgradverlust. Trotzdem erfolgen detaillierte Betrachtungen dieses Prozesses häufig nur für den aerodynamischen Auslegungspunkt und nicht im Teillastbereich oder für andere Betriebsbedingungen.

**Flattern - engl. flutter:** ist definiert als eine instabile, selbsterregte Schwingung eines Körpers in einer umgebenden Luftströmung und resultiert aus der ständigen Interaktion zwischen Fluid und Struktur, wobei die jeweiligen Anteile auch in nichtlinearen Ausprägungen vorliegen können. Bei der Beschaufelung von Axialverdichtern ist das Massenverhältnis (Schaufel- zu umgebender Luftmasse) im Vergleich zu Flügelprofilen relativ hoch. Während das Flattern von Flügeln in der Regel als Folge einer Kopplung zwischen den (Biege- und Torsions-) Moden auftritt, ist das Flattern von Verdichterschaufeln tendenziell ein Einzelmodephänomen. Die aerodynamischen Kräfte bleiben hierbei sehr viel kleiner als die Trägheits- und Steifigkeitskräfte und verursachen in der Regel keine modale Kopplung. In jedem Fall ist das Flattern ein besonders schwierig zu beurteilendes Phänomen in modernen Turbomaschinen, da es von vielen zusätzlichen Effekten mit nicht vollständig verstandenen Folgen überlagert wird: Störungen in der Zuströmung durch stromauf- bzw. stromabwärts befindliche Blattreihen, die Kopplung von Systemmoden, den Verlust der örtlichen Periodizität von Schwingungen durch aerodynamische Effekte oder Fertigungsabweichungen von Schaufel zu Schaufel, welche mit dem englischen Begriff „mistuning“ bezeichnet werden. Obwohl auch bekannt ist, dass Turbinenstufen anfällig für Flattern sind, wird die Stabilität des Niederdruckverdichtungssystems in der Regel als kritischer angesehen. Der Grund hierfür ist, dass diese Komponenten Effekten wie Störungen in der Anströmung aufgrund von Böen, Seitenwind und Fremdkörperschäden ausgesetzt sein können. Daher wird bei der Auslegung ein größerer Abstand zur Stabilitätsgrenze - engl. flutter margin angestrebt. Ein qualitatives Verdichterkennfeld mit verschiedenen flattersensitiven Bereichen ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

**Erzwungene Schaufelschwingungen - engl. forced response:** Wenn Strömungsdefekte (beispielsweise durch angrenzende stromauf- und stromabwärts positionierte Stufen verursacht) auf Blattreihen treffen, können die daraus resultierenden instationären aerodynamischen Kräfte hohe Schwingungsamplituden

### 3.1 Aeroelastische Phänomene in Axialverdichtern

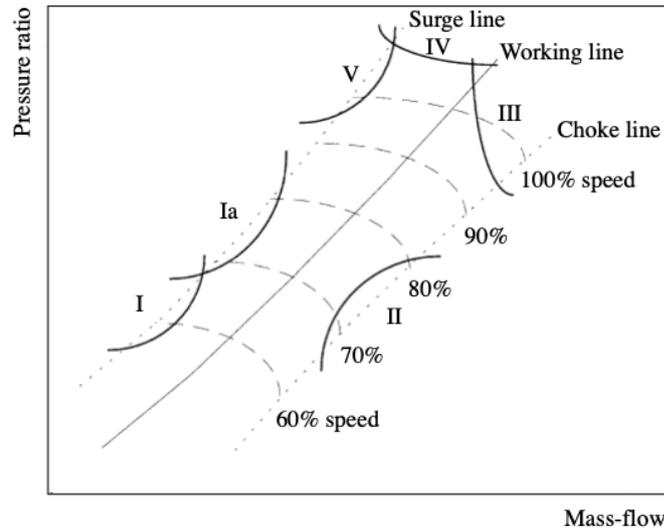


Figure 1. Typical compressor map showing various flutter regimes: I: subsonic/transonic stall flutter; Ia: system mode instability; II: choke stall flutter; III: low incidence supersonic flutter; IV: high incidence supersonic flutter; V: supersonic bending stall flutter.

Abbildung 3.2: Verdichterkennfeld mit flattersensitiven Bereichen [86]

verursachen. Einer der ersten Auslegungsschritte zur Vorhersage möglicher Resonanzstellen ist daher das Campbell-Diagramm (detaillierte Erläuterung zum Aufbau in Abschnitt 3.4). In Luftfahrtanwendungen ist es jedoch gängige Praxis, auch die Messergebnisse von Triebwerkstests in Form eines Campbell-Diagramms darzustellen. Dies dient der Visualisierung von Frequenz- und Amplitudeninformationen der jeweiligen Schwingungen bei einer bestimmten Betriebsdrehzahl. Das entscheidende Kriterium für die Auslegung eines neuen Verdichters ist jedoch die Vorhersage der zu erwartenden Schwingungsamplituden unter Berücksichtigung der instationären aerodynamischen Lasten. Diese Lasten resultieren beispielsweise aus Nachlaufstörungen von stromaufwärts, Potentialeffekten von stromabwärts benachbarten Stufen oder auch Schwankungen im Gegendruck sowie anderen aerodynamischen und geometrischen (ovalisierte Gehäuse) Effekten. Aufgrund weiterer unbekannter Faktoren wie der strukturellen Dämpfung der einzelnen Bauteile und des Rotorgesamtsystems im Betrieb, nichtlinearen Effekten in Kontaktflächen oder auch der Amplituden der instationären aerodynamischen Kräfte beschränkt sich die Simulation von erzwungenen Schwingungsproblemen häufig auf eine Ermittlung der Rangfolge potentieller Entwürfe (delta Betrachtung), anstelle einer genauen Vorhersage der zu erwartenden Amplituden. Trotz der Einschränkungen

### 3 Aeroelastische Grundlagen

ermöglicht diese Vorgehensweise auch die Analyse von Versagensmechanismen und die Bewertung möglicher Abhilfemaßnahmen.

Zur Beurteilung der Bauteilintegrität im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist es im Wesentlichen notwendig, das dynamische aeroelastische Stabilitäts- und Antwortproblem zu lösen. Sowohl die theoretischen Grundlagen als auch die hierfür verwendeten numerischen Methoden sind in den Abschnitten 3.2 - 3.4 detailliert dargelegt.

## 3.2 Aeroelastische Problemformulierung

Um eine fundierte Vorhersage bezüglich des aeroelastischen Verhaltens eines Turbomaschinenrotors treffen zu können, ist eine gekoppelte Problemformulierung notwendig, welche die interagierende Aero- und Strukturmechanik berücksichtigt. Aus Abschnitt 2.1 ist bereits die Bewegungsgleichung des strukturmechanischen Systems bekannt. Es soll weiterhin von einem unverstimmten System ausgegangen werden, wobei das aeroelastische Problem aus einer Kopplung des strukturmechanischen Modells mit den aerodynamischen Kräften resultiert.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}_{aero} = \mathbf{f}^m + \mathbf{f}^d \quad (3.1)$$

Gemäß Crawley [34] sind die aerodynamischen Kräfte  $\mathbf{f}_{aero}$  unter der Voraussetzung kleiner Schwingungsamplituden (amplitudenlineares Luftkraftverhalten) in einen bewegungsinduzierten - engl. motion Anteil  $\mathbf{f}^m$  und einen störungsinduzierten - engl. disturbance Anteil  $\mathbf{f}^d$  zerlegbar. Ersterer erfasst den Einfluss von Schaufelschwingungen innerhalb einer isolierten Blattreihe und die Auswirkungen auf die benachbarten Profile durch die Druckschwankungen im instationären Strömungsfeld. Als störungsinduzierter Anteil lassen sich diejenigen Wechselwirkungen beschreiben, welche durch benachbarte Blattreihen in Form einer Störung der freien Zu- und Abströmung verursacht werden. Dieser Superpositionsansatz hilft bei der Entkopplung unterschiedlicher aeroelastischer Probleme (siehe Abschnitt 3.3 & 3.4) und wird im weiteren Verlauf der Erläuterungen von großer Bedeutung sein.

### 3.2 Aeroelastische Problemformulierung

In ihrer allgemeinsten Form lassen sich die bewegungsinduzierten Luftkräfte als

$$\begin{aligned} f_j^m &= f_j(x_j, \dot{x}_j, \ddot{x}_j, \varphi_j) \\ &+ f_{j+1}(x_{j+1}, \dot{x}_{j+1}, \ddot{x}_{j+1}, \varphi_{j+1}) \\ &+ f_{j-1}(x_{j-1}, \dot{x}_{j-1}, \ddot{x}_{j-1}, \varphi_{j-1}) \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{3.2}$$

darstellen. Hieraus geht hervor, dass die aerodynamische Kraftwirkung auf eine beliebige Schaufel  $j$  nicht nur von der Eigenbewegung der Schaufel, sondern auch von den Bewegungen der Nachbarschaufeln abhängt. Der jeweilige Phasenversatz  $\varphi_j$  zur betrachteten Referenzschaufel berücksichtigt zudem die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen von einer vibrierenden Nachbarschaufel und den damit einhergehenden zeitlichen Versatz bis das hierdurch beeinflusste Strömungsfeld die Referenzschaufel erreicht. Eine Berücksichtigung der bewegungsinduzierten aerodynamischen Kräfte  $\mathbf{f}^m$  führt also zu einer komplexen Kopplung des aeroelastischen Systems. Leider sind die bewegungsinduzierten Luftkräfte nicht in der allgemeinen Form, wie in Gleichung (3.2) angegeben, zugänglich. Ein Überblick hinsichtlich der experimentellen Untersuchungsmöglichkeiten zur Ermittlung der Komponenten  $\mathbf{f}^m$  ist der Arbeit von Vogt (vgl. [137] S.40 ff.) entnehmbar. Dieses Vorgehen beschränkt sich im Allgemeinen auf ein sehr spezifisches zeitliches und örtliches Bewegungsmuster: harmonische Schwingungen mit definierten IBPAs der zu untersuchenden Moden. Für die Anwendung in Turbomaschinen stellen derartige Untersuchungen zur Bestimmung der aerodynamischen Kräfte im Normalfall jedoch keine Einschränkung dar. Sowohl das Schwingungsverhalten zyklischer Systeme (siehe Abschnitt 2.1) als auch die störungsinduzierten Anteile der aerodynamischen Anregung  $\mathbf{f}^d$  (siehe Abschnitt 3.4) im Betrieb entsprechen in ihrer Ausprägung den zuvor erwähnten Mustern. Dass selbst im instabilen Betriebszustand die Schaufelschwingungen in Form von Systemmoden mit dezidiertem IBPA erfolgen, ließ sich bereits 1956 durch Lane [79] nachweisen.

Grundsätzlich ist die Formulierung des aeroelastischen Problems auf verschiedene Arten möglich und Crawley [34] zeigte 1988, dass die Ansätze basierend auf der SWM sowie der TWM Formulierung (vgl. Abschnitt 2.1 für zyklische strukturmechanische Probleme) äquivalent ineinander umformbar sind. Zur kompakteren Beschreibung des gekoppelten aeroelastischen Problems wird im Folgenden der Übergang zur komplexen

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Schreibweise vollzogen. Der kinematische Zusammenhang zwischen der Auslenkung der  $j$ -ten Schaufel in TWM Koordinaten lässt sich gemäß Gleichung (2.26) als Summe über alle umlaufenden Wellen darstellen. Nach einer Modaltransformation (siehe Anhang A.1) folgt hieraus für die generalisierten Koordinaten der Zusammenhang

$$q_j(t) = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \hat{q}_{\beta_n} e^{i(\Omega t + j\beta_n)} \right\} \quad (3.3)$$

mit den Amplituden der umlaufenden Wellen  $\hat{q}_{\beta_n}$ , dem zugehörigen IBPA  $\beta_n$  und der Kreisfrequenz  $\Omega$  der harmonischen Schwingbewegung. Zur einfacheren Identifikation der Anteile einzelner umlaufender Wellen an der modalen Gesamtverschiebung  $\mathbf{q}$  wird zusätzlich die Transformationsmatrix  $\underline{\mathbf{E}}$  eingeführt

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{0,0} & \cdots & \underline{e}_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{e}_{N-1,0} & \cdots & \underline{e}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_{j,n} = e^{i(j\beta_n)} = \underline{e}_{j,\beta_n}, \quad (3.4)$$

worin  $j$  die Schaufelnummer und  $n$  den Index des jeweiligen Knotendurchmesser bezeichnet. Wie bereits im Abschnitt 2.1 dargelegt, beinhaltet die Transformationsmatrix (Fouriermatrix)  $\underline{\mathbf{E}}$  spaltenweise die Eigenvektoren einer zyklischen Struktur in TWM Formulierung. Im Vektor  $\hat{\mathbf{q}}_{\beta}$  verbleiben folgerichtig nur die Amplitudeninformationen der jeweiligen umlaufenden Welle. Gleichung 3.3 lässt sich somit äquivalent umformen zu

$$\mathbf{q}(t) = \Re \left\{ \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{q}}_{\beta} e^{i\Omega t} \right\}. \quad (3.5)$$

Analog zu den Eigenformen einer zyklischen Struktur, welche gemäß Gleichung (2.8) auch als stehende Wellen interpretierbar sind, lässt sich das aeroelastische Problem mittels einer Koordinatentransformation in die SWM Formulierung überführen. Hierzu wird zunächst die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  spaltenweise aus den einzelnen Cosinus- und Sinusmoden (2.13) assembliert.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & s_{0,1} & \cdots & s_{0,\frac{N-1}{2}} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & s_{1,1} & \cdots & s_{1,\frac{N-1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & s_{N-1,1} & \cdots & s_{N-1,\frac{N-1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} c_{j,n} = \cos(j \cdot \beta_n) \\ s_{j,n} = \sin(j \cdot \beta_n) \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2 Aeroelastische Problemformulierung

Auch hier bezeichnet der Index  $j$  die Schaufelnummer und  $n$  den jeweiligen Knotendurchmesser. Der kinematische Zusammenhang zwischen den schaufelindividuellen Auslenkungen und der Formulierung der strukturellen Eigenformen in stehenden Wellen lässt sich somit darstellen als

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{q}}_{SW} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{q}_{c0} & \hat{q}_{c1} & \hat{q}_{s1} & \hat{q}_{c2} & \hat{q}_{s2} & \dots \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

mit dem Vektor der Amplituden der stehenden Wellen  $\hat{\mathbf{q}}_{SW}$ . Strukturseitig sind die Beziehungen zwischen den schaufelindividuellen Auslenkungen für die TWM sowie SWM Formulierung in komplexer Notation somit definiert und an dieser Stelle aufgrund ihrer Wichtigkeit noch einmal kompakt zusammengefasst.

$$\mathbf{q}(t) = \Re \left\{ \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{q}}_{\beta} e^{i\Omega t} \right\} = \Re \left\{ \mathbf{P} \hat{\mathbf{q}}_{SW} e^{i\Omega t} \right\} \text{ und somit } \hat{\mathbf{q}}_{\beta} = \underline{\mathbf{E}}^{-1} \mathbf{P} \hat{\mathbf{q}}_{SW} = \underline{\mathbf{E}}^{-1} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

Zur kompletten Beschreibung der aeroelastischen Problemstellung fehlen nun lediglich die entsprechenden Formulierungen zur Erfassung der aerodynamischen Kraftwirkung  $\mathbf{f}_{aero}$ . Wie in Gleichung (3.1) angedeutet, bildet die Zerlegung der aerodynamischen Kräfte in einen bewegungsinduzierten Anteil  $\mathbf{f}^m$  und einen störungsinduzierten Anteil  $\mathbf{f}^d$  die Grundlage für das weitere Vorgehen. Schmitt [108] konnte beispielsweise in ausführlichen numerischen Untersuchungen mit direkt gekoppelten und entkoppelten Simulationen zeigen, dass dieser Superpositionsansatz gerechtfertigt ist. Zur Ermittlung des bewegungsinduzierten Anteils  $\mathbf{f}^m$  werden hinsichtlich der genutzten numerischen Methoden im Abschnitt 3.3.1 & 3.3.2 unterschiedliche Ansätze dargelegt. Grundlegend ist es hierfür sinnvoll, die aerodynamischen Kräfte in Form einer Koeffizientenmatrix multipliziert mit den Auslenkungen in der jeweiligen Freiheitsgradformulierung des Struktursystems abzubilden. Daraus folgt die Notwendigkeit, auch die bewegungsinduzierten Anteile  $\mathbf{f}^m$  des aerodynamischen Kraftvektors konform zu den bisher genutzten Formulierungen (schaufelindividuell, TWM und SWM) zu definieren.

In Anlehnung an eine Methode für die experimentelle Ermittlung der bewegungsinduzierten Luftkräfte sind zunächst die komplexen Luftkraftkoeffizienten - engl. travelling wave mode coefficients zu definieren

$$c_{\beta_n} = \frac{f_{\beta_n}^m}{q_{\beta_n}}. \quad (3.9)$$

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Die komplexen Luftkraftkoeffizienten  $\underline{c}_{\beta_n}$  setzen für die spezifischen IBPAs  $\beta_n$  der Strukturmoden die bewegungsinduzierten Luftkräfte  $\underline{f}_{\beta_n}^m$  ins Verhältnis zu der Auslenkung  $\underline{q}_{\beta_n}$  der jeweiligen, diese Kraftwirkung erzeugenden, umlaufenden Wellen. Für geringe Amplituden bei gleichzeitiger Annahme eines linearen Systemverhaltens ist von einer zur Anregung gleichartigen Antwort der Strömung auszugehen. Die sich einstellende Kraftantwort besitzt somit den gleichen harmonischen Charakter wie die zugehörige Bewegung (vgl. [54] S.8). Aus der Überlagerung aller umlaufenden Wellen folgt analog zu den Auslenkungen (3.3) der Zusammenhang für die bewegungsinduzierten Luftkräfte in Abhängigkeit von den komplexen Luftkraftkoeffizienten

$$\underline{f}_j^m = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{c}_{\beta_n} \hat{\underline{q}}_{\beta_n} e^{i(\Omega t + j\beta_n)} = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{e}_{j,\beta_n} \underline{c}_{\beta_n} \hat{\underline{q}}_{\beta_n} e^{i(\Omega t)}, \quad (3.10)$$

wobei  $\underline{c}_{\beta_n}$  Informationen über die Amplitude und die Phase des harmonisch schwingenden Teils der Kraftantwort enthält und in Matrixschreibweise eine Diagonalform annimmt. Die Koordinatentransformationsbeziehung (3.8) behält weiterhin ihre Gültigkeit und ermöglicht je nach Modellierungsansatz eine Überführung der bewegungsinduzierten Luftkräfte in alternative Referenzsysteme.

Als einzige Unbekannte des aeroelastischen Systems (3.1) verbleiben somit die störungsinduzierten Anteile der Luftkräfte  $\mathbf{f}^d$ , welche im Abschnitt 3.4 der vorliegenden Arbeit Gegenstand detaillierter Betrachtungen sind. Um die aeroelastische Problemformulierung zunächst abschließen zu können, basieren die folgenden Ausführungen auf einem relativ einfachen Störungsszenario. Es wird eine stromaufwärts positionierte Blattrihe von identischen Statoren angenommen, welche ein über den Umfang periodisches Nachlaufmuster erzeugt. Durch Vernachlässigung nicht resonanter Erregerordnungen - engl. engine orders (EOs), welche unter der Annahme einer gedämpften Schaufelschwingung in einem eingeschwungenen System nur geringe Anteile ihrer Partikulärlösung beitragen, können diese Nachlaufmuster als harmonisch angesetzt werden. Alle Schaufeln des nachfolgenden Rotors erfahren dabei eine identische Luftkraftanregung, wobei die jeweiligen Luftkraftmaxima um den IBPA versetzt auf die Beschaukelung wirken (vgl. [110] S.17). Diese spezielle Art der Anregung ermöglicht es, die störungsinduzierten Luftkräfte in einer strukturell ähnlichen Form wie zuvor schon die bewegungsinduzierten Luftkräfte

### 3.2 Aeroelastische Problemformulierung

zu erfassen

$$\underline{f}_j^d = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{f}_{-\beta_n}^d e^{i(\Omega t + j\beta_n)} = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{e}_{j,\beta_n} \underline{f}_{-\beta_n}^d e^{i(\Omega t)}, \quad (3.11)$$

wobei  $\underline{f}_{-\beta_n}^d$  die wirkende Kraftamplitude auf die Schaufelschwingung des jeweils angeregten Knotendurchmessers  $n$  bezeichnet. Für weitere Details bezüglich der Anregbarkeit von Knotendurchmesserschwingungen durch spezifische Erregerordnungen sei an dieser Stelle auf Abschnitt 3.4 der vorliegenden Arbeit verwiesen.

Basierend auf einer modalen Reduktion (siehe Anhang A.1) der Grundgleichung des aeroelastisch gekoppelten Systems (3.1) in Kombination mit den dargelegten Formulierungen der bewegungsinduzierten (3.10) sowie störungsinduzierten Luftkräfte (3.11) ergibt sich die aeroelastische Bewegungsgleichung in TWM Koordinaten zu

$$\left( -\Omega^2 \underline{\mathbf{I}} \mathbf{E} + \text{diag} \left\{ \omega_{0,\beta}^2 \right\} \underline{\mathbf{E}} \right) \hat{\underline{\mathbf{q}}}_\beta e^{i(\Omega t)} = \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{C}} \hat{\underline{\mathbf{q}}}_\beta e^{i(\Omega t)} + \underline{\mathbf{E}} \hat{\underline{\mathbf{f}}}_\beta^d e^{i(\Omega t)}. \quad (3.12)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  nur im Resonanzfall identisch mit einer der Eigenfrequenzen der umlaufenden Wellen  $\omega_{0,\beta}$  ist. Des Weiteren lässt sich der Ausdruck (3.12) durch Linksmultiplikation mit  $\underline{\mathbf{E}}^{-1}$ , Elimination des zeitabhängigen Terms  $e^{i(\Omega t)}$  und Umordnung gewisser Komponenten in eine Form bringen, die eine einfache physikalische Interpretation der einzelnen Glieder erlaubt.

$$\begin{aligned} \left( \text{diag} \left\{ \omega_{0,\beta}^2 \right\} - \Omega^2 \underline{\mathbf{I}} - \Re \{ \underline{\mathbf{C}} \} + i2\Omega \text{diag} \left\{ \delta_{aero\beta} \right\} \right) \hat{\underline{\mathbf{q}}}_\beta &= \hat{\underline{\mathbf{f}}}_\beta^d \\ \text{mit } \text{diag} \left\{ \delta_{aero\beta} \right\} &= \frac{-\Im \{ \underline{\mathbf{C}} \}}{2\Omega} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bei genauerer Betrachtung der Struktur von Gleichung (3.13) fällt auf, dass die einzelnen Komponenten des Gesamtsystems Diagonalform annehmen und das komplette Gleichungssystem somit entkoppelt ist. Für den Fall eines unverstimmten Systems stellen die umlaufenden Wellen, welche bereits als Eigenformen der Strukturgleichung identifiziert wurden, auch die Eigenformen des aeroelastischen Gesamtsystems dar. Somit lässt sich die Systemantwort für jeden einzelnen Freiheitsgrad isoliert berechnen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit den einzelnen Termen der aufgeteilten Luftkraftkoeffizientenmatrix  $\underline{\mathbf{C}}$  in Anlehnung an die Gleichungsstruktur eines gedämpften Masse-Federsystems physikalische Bedeutungen zuzuordnen. Hierbei ist der Realteil  $\Re \{ \underline{\mathbf{C}} \}$  als eine Eigenfrequenzverschiebung des aeroelastischen Systems gegenüber dem rein

strukturmechanischen Systems interpretierbar. Die Wirkung des Imaginärteils  $\Im \{\underline{\mathbf{C}}\}$  hingegen entspricht einer Dämpfung (in diesem Fall der aerodynamischen Dämpfung).

Das Superpositionsprinzip der aerodynamischen Kraftanteile (3.1), die aeroelastische Problemformulierung in umlaufenden Wellen (3.13) sowie die Koordinatentransformationsbeziehungen (3.8) bilden die fundamentalen Grundlagen, um in den folgenden Abschnitten die Lösungsmethodiken für das dynamische aeroelastische Stabilitäts- und Antwortproblem darzulegen.

### 3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem

Mit dem Voranschreiten der Entwicklung von Axialverdichtern für die Anwendung im Triebwerksbau stießen die Hersteller immer wieder auf aerodynamische Stabilitätsprobleme (siehe Abschnitt 3.1 - Flattern). Im Anfangsstadium wurde zunächst versucht, die gewonnenen Erkenntnisse aus der Forschung an Flügelprofilen auf die Beschaufelung zu übertragen. Zwei grundlegende Parameter, welche in diesem Zusammenhang Relevanz haben, sind die reduzierte Frequenz  $\omega_{red}$  [16] sowie der Massenparameter  $\mu$  [132]. Die reduzierte Frequenz ist definiert als das Verhältnis des Produkts der Schwingungskreisfrequenz  $\omega$  und der Sehnenlänge  $c$  des Profils zur Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$

$$\omega_{red} = \frac{\omega \cdot c}{V_\infty} \quad (3.14)$$

und lässt unterschiedliche physikalische Interpretationen zu.

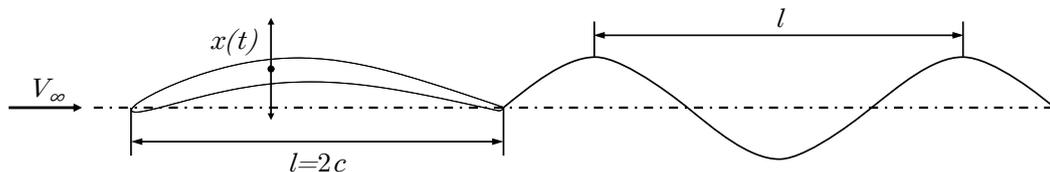


Abbildung 3.3: Reduzierte Frequenz in Anlehnung an [50] S.252

Einerseits kann  $\omega_{red}$  als Verhältnis der Sehnenlänge zur Längenskale der durch die Schaufelschwingung erzeugten Nachlaufstörung interpretiert werden (siehe Abbildung

### 3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem

3.3). Andererseits stellt die reduzierte Frequenz auch das Verhältnis der Zeitdauer, die ein Fluidpartikel benötigt, um eine zur Sehnenlänge der Schaufel äquivalente Strecke zurückzulegen, zur Periodendauer der Schaufelschwingung dar. Somit ist  $\omega_{red}$  ein direktes Maß für den stationären oder instationären Charakter des aktuellen Strömungszustandes. Bei geringen Werten der reduzierten Frequenz in der Größenordnung  $< 0.1$  handelt es sich um eine quasi-stationäre Anströmung der Schaufel. Das heißt, die umgebene Strömung ist im Vergleich zur Schaufelschwingung derart schnell, dass sich zu jedem Zeitpunkt während der Schwingung ein neuer stationärer Strömungszustand einstellen kann. (vgl. [84] S.233 f.) Als verlässliches Bewertungskriterium für die aeroelastische Stabilität eines Schaufelprofils ist die reduzierte Frequenz jedoch wenig aussagekräftig. In zahlreichen experimentellen Untersuchungen wurden abhängig von der betrachteten Eigenform unterschiedliche Stabilitätsgrenzwerte beobachtet. Als Richtwert zur Orientierung kann beispielsweise  $\omega_{red} < 0.2 - 0.4$  für die erste Biegung und  $\omega_{red} < 0.4 - 0.7$  für die erste Torsionsschwingung dienen (vgl. [84] S.234; [124]). Wie aus der Schwankungsbreite der Werte gut erkennbar hervorgeht, sind diese empirischen Grenzen stark fallbezogen und lassen daher keine allgemeine Stabilitätsbewertung eines Schaufelprofils auf alleiniger Basis der reduzierten Frequenz zu.

Auch der Massenparameter  $\mu$ , welcher aus der Herleitung der aeroelastischen Grundgleichungen für das ebene Tragflügelproblem resultiert, besitzt hinsichtlich seiner Anwendung im Axialverdichterkontext eine bedingte Aussagekraft. Grundsätzlich ist

$$\mu = \frac{2m_b}{\rho\pi c^2} \quad (3.15)$$

definiert als das Verhältnis der Schaufelmasse pro Einheitssehnenlänge  $m_b$  zur das Profil umgebenden Fluidmasse  $m_f = \frac{1}{2}\rho\pi c^2$  (siehe Abbildung 3.4). Verglichen mit der Anwendung im allgemeinen Flugzeugbau sind die Massenparameter in der Axialverdichteranwendung sehr viel größer, weshalb die rückkoppelnden Effekte der aerodynamischen Kraftwirkung auf die Struktur sowohl die Eigenformen als auch Eigenfrequenzen der Schaufel wenig beeinflussen (vgl. [84] S.247 f.). Für Massenparameter  $\mu > 200$  konnte beispielsweise Hanamura lediglich einen sehr geringen Effekt auf die zuvor genannten Größen, verglichen mit den rein strukturmechanischen Kennwerten (Vakuumbetrachtung), identifizieren [60].

### 3 Aeroelastische Grundlagen

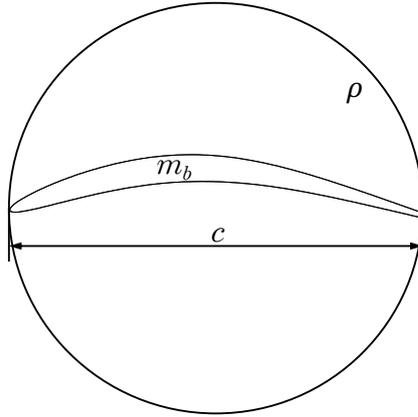


Abbildung 3.4: Massenparameter in Anlehnung an [137] S.26

Während der 1950er Jahre wurden deshalb umfangreiche Untersuchungen durchgeführt, um das aeroelastische Stabilitätsproblem mit dem Fokus auf die Wechselwirkung benachbarter Schaufelprofile in Kaskaden zu analysieren [30, 97, 120]. Ausgehend von diesen grundlegenden Betrachtungen kristallisierte sich heraus, dass neben der Stabilität des Einzelprofils die aeroelastische Kopplung mit benachbarten Schaufeln der Blattreihe einen ebenso großen Einfluss zu der Gesamtstabilität des Systems beiträgt [129]. Bei identischen Anströmbedingungen einer Schaufelkaskade hat der bereits aus Abschnitt 2.1 bekannte IBPA einen deutlich größeren Effekt auf die aeroelastische Stabilität als beispielsweise der aus dem Tragflügelproblem bekannte Parameter  $\omega_{red}$  [29]. Die Komplexität des Problems und die damit einhergehende nicht triviale Abhängigkeit von einer Vielzahl an Parametern erfordert eine Methodik, welche in der Lage ist eine fundierte Vorhersage des aeroelastischen Stabilitätszustandes in den Betriebspunkten von Interesse zu gewährleisten. Heutzutage ist aufgrund der verfügbaren Rechenleistung die Lösung des aeroelastischen Stabilitätsproblems unter Ausnutzung von 3D-CFD Simulationen bereits im Auslegungsprozess der Komponenten möglich. Als Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen dient die Bewegungsgleichung des aeroelastischen Gesamtsystems (3.13) mit der Besonderheit, dass die störungsinduzierten Anteile der Luftkräfte zur Beurteilung des dynamischen Stabilitätsproblems unberücksichtigt bleiben (Sonderfall  $\mathbf{f}^d = 0$ ).

$$\left( \text{diag} \{ \omega_{0,\beta}^2 \} - \Omega^2 \mathbf{I} - \Re \{ \underline{\mathbf{C}} \} + i2\Omega \text{diag} \{ \delta_{aero\beta} \} \right) \hat{\mathbf{q}}_\beta = 0 \quad (3.16)$$

Weiterhin behält die Transformationsvorschrift (3.8) ihre Gültigkeit und ermöglicht die Formulierung der Bewegungsgleichung in den geeigneten Koordinaten für die im

### 3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem

Folgenden dargestellten Simulationsmethoden. Unter der Voraussetzung hinreichend großer Massenparameter  $\mu$  verbleibt nach einer Modalanalyse der betrachteten Struktur lediglich die Matrix der komplexen Luftkraftkoeffizienten  $\underline{\mathbf{C}}$  als Unbekannte im Gleichungssystem.

Dies ermöglicht den Rückschluss, dass das dynamische aeroelastische Stabilitätsproblem unter Berücksichtigung von Gleichung (3.9) grundlegend durch die Abhängigkeit zwischen der Phasenlage der Strukturbewegung und die Anpassung der instationären Strömungszustände an ebendiese bestimmt wird. Während der Schwingungsbewegung der Schaufel verändert sich das instationäre Druckfeld auf ihrer Oberfläche und damit einhergehend die instantane Kraftwirkung des Fluids auf die Struktur. Hieraus folgen im Wesentlichen zwei relevante Möglichkeiten der aeroelastischen Interaktion, welche unterschiedliche Auswirkungen auf die Stabilität des Gesamtsystems haben. Zum einen können die instationären Fluidkräfte der Strukturschwingung entgegenwirken und somit eine dämpfende Wirkung erzeugen, zum anderen können sie jedoch in Abhängigkeit von der Phasenlage zu einer Schwingungsüberhöhung durch Einspeisung von Energie in das gekoppelte System führen. Als Bewertungsmaß für die Stabilität des Gesamtsystems lässt sich daher die vorzeichenbehaftete aerodynamische Dämpfung, wie in Gleichung (3.13) definiert, verwenden. Die folgenden Abschnitte 3.3.1 & 3.3.2 legen unterschiedliche numerische Methoden mit dem Ziel der aerodynamischen Dämpfungsermittlung dar.

#### 3.3.1 Einzelpassagen Flutterrechnung

Ähnlich dem Vorgehen für zyklisch symmetrische strukturmechanische Systeme (siehe Abschnitt 2.1) lassen sich auch bei der aerodynamischen Dämpfungsbestimmung gewisse Symmetrieeigenschaften des aeroelastischen Systems zur Reduktion des Simulationsaufwandes ausnutzen. Grundlage der Einzelpassagen Flutterrechnung - engl. single passage flutter (SPF) sind die bereits bekannten dezidierten Phasenversatzwinkel zwischen benachbarten Schaufeln (IBPA) während der Schwingung in einer bestimmten Eigenform. Auf Basis der Annahme, dass innerhalb einer Blattreihe die resultierenden Druckschwankungen im Strömungsfeld (ausgelöst durch die Schaufelschwingung) umfangsperiodisch und somit durch einen harmonischen Ansatz abbildbar sind, lässt sich die CFD-Simulationsdomäne auf eine einzelne Schaufelpassage reduzieren (siehe

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Abbildung 3.5). Weitere Details bezüglich der Umsetzung der hierfür nötigen phasenversetzten Randbedingungen innerhalb des verwendeten Zeitbereichs CFD Lözers sind [125] entnehmbar.

Zur Bestimmung der aerodynamischen Dämpfung wird die jeweilige Eigenform von Interesse mittels eines Mapping Prozesses vom strukturmechanischen Schaufelmodell auf das CFD Gitter übertragen (siehe Abbildung 3.5). Durch Vorgabe einer harmonischen Schwingungsbewegung des modalen Freiheitsgrades gemäß

$$q_{\beta_n}(t) = -\hat{q}_{\beta_n,im} \sin(\omega_n t) \quad \text{mit} \quad \dot{q}_{\beta_n}(t=0) = \frac{\hat{x}}{\Phi_{max}} \omega \quad (3.17)$$

ist die Kraftwirkung der instationären Oberflächendrücke  $\tilde{p}$  auf die Schaufel ermittelbar. Hierbei erfolgt durch das Skalarprodukt der betrachteten Eigenform  $\Phi$  mit dem Normalenvektor der Schaufeloberfläche  $\mathbf{n}$  eine Projektion der instationären Druckverteilung auf die Eigenform und somit die Berechnung der modalen Kraftwirkung auf die Struktur.

$$f_{\beta_n}^m = \int_A \tilde{p} \Phi^T \mathbf{n} dA \quad (3.18)$$

Anhand der initialen modalen Schwinggeschwindigkeit zum Startzeitpunkt der Simulati-

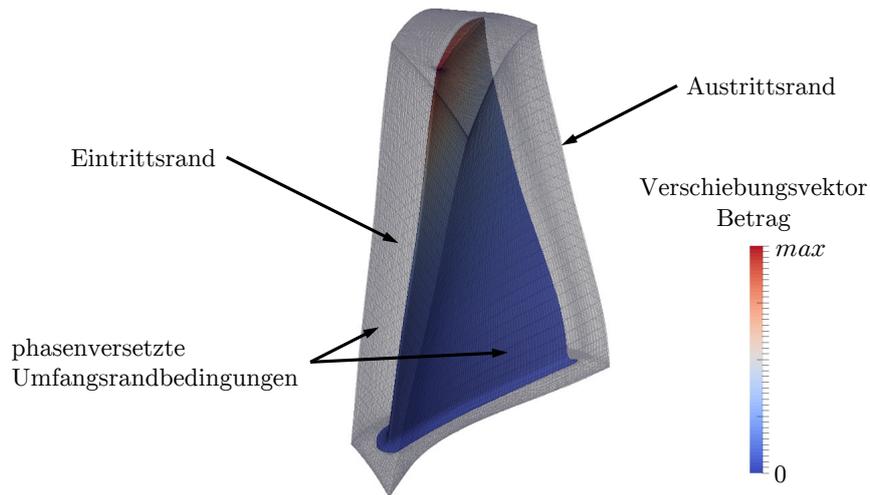


Abbildung 3.5: CFD Simulationsdomäne inklusive Eigenform für SPF Rechnung

### 3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem

on  $\dot{q}_{\beta_n}(t=0)$  lässt sich zudem die gewünschte physikalische Schwingungsamplitude  $\hat{x}$  einstellen und die Annahme eines amplitudenlinearen Luftkraftverhaltens für unterschiedliche Schwingungsniveaus überprüfen.

Grundsätzlich existieren mehrere Ansätze, um aus der vorgegebenen harmonischen Schaufelschwingung sowie dem resultierenden modalen Kraftverlauf die letztendlich für die Stabilitätsbeurteilung relevante Größe der aerodynamischen Dämpfung zu ermitteln. Zwei dieser Methoden, welche im Endresultat äquivalente Ergebnisse generieren, sind zum genaueren Verständnis kurz dargestellt.

Abschnitt 3.2 führte bereits das Konzept der komplexen Luftkraftkoeffizienten  $\underline{c}_{\beta_n}$  ein, welche den Zusammenhang zwischen der Schwingungsamplitude und der resultierenden modalen Kraftwirkung abbilden (3.9). Aus der vorgegebenen harmonischen Schwingungsbewegung des modalen Freiheitsgrades (3.17) lässt sich unmittelbar die komplexe Amplitude  $\hat{q}_{\beta_n} = \hat{q}_{\beta_n, re} + i\hat{q}_{\beta_n, im}$  des analysierten Knotendurchmessers bestimmen. Um die komplexe Kraftamplitude aus dem berechneten modalen Kraftverlauf zu ermitteln, kommt eine geeignete Fitting-Methode (bspw. kleinste Fehlerquadrate) zur Bestimmung der Parameter einer zuvor definierten Ansatzfunktion zum Einsatz. Zur Gewährleistung einer konsistenten Formulierung mit der in Abschnitt 3.2 dargelegten Beschreibung des aeroelastischen Stabilitätsproblems, liegt für die bewegungsinduzierte Luftkraft  $f_{\beta_n}^m$  folgender Ansatz zugrunde:

$$f_{\beta_n}^m = \Re \left\{ \hat{f}_{-\beta_n}^m e^{i(\omega_n t)} \right\} = \Re \left\{ \left( \hat{f}_{\beta_n, re}^m + i\hat{f}_{\beta_n, im}^m \right) e^{i(\omega_n t)} \right\} = \hat{f}_{\beta_n, re}^m \cos(\omega_n t) - \hat{f}_{\beta_n, im}^m \sin(\omega_n t). \quad (3.19)$$

Unter Berücksichtigung der soeben dargelegten Voraussetzungen sowie des Zusammenhangs (3.13) lässt sich abschließend die aerodynamische Dämpfung in Form des Lehr'schen Dämpfungsmaßes  $D_{\beta_n}$  ermitteln.

$$D_{\beta_n} = \frac{\delta_{aero\beta_n}}{\omega_n} = \frac{-\Im \left\{ \underline{c}_{\beta_n} \right\}}{2\omega_n^2} = \frac{\hat{f}_{\beta_n, re}^m}{2\hat{q}_{\beta_n, im} \omega_n^2} \quad (3.20)$$

Ein weiterer physikalischer Ansatz besteht in der Betrachtung der vom Fluid an der Struktur verrichteten Arbeit während eines Schwingungszyklus [28]. Dieses Vorgehen wird häufig als Energiemethode bezeichnet, wobei die Arbeit  $W_{\beta_n}$  mithilfe der modalen

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Schwinggeschwindigkeit  $\dot{q}_{\beta_n}$  folgendermaßen definiert ist.

$$W_{\beta_n} = \int_{t=0}^{2\pi/\omega_n} f_{\beta_n}^m \dot{q}_{\beta_n} dt = \int_{t=0}^{2\pi/\omega_n} \int_A \tilde{p} \Phi^T \mathbf{n} \dot{q}_{\beta_n} dA dt \quad (3.21)$$

Für alle Fälle  $W_{\beta_n} < 0$  wird Energie im aeroelastischen System dissipiert und die resultierende Bewegung der Struktur dementsprechend gedämpft, wohingegen für  $W_{\beta_n} > 0$  Arbeit vom Fluid in die Struktur eingespeist wird und sich das System aufschwingt. Über die Analogie des gedämpften 1-Massen Schwingers lässt sich zeigen, dass die verrichtete Arbeit (3.21) proportional zur aerodynamischen Dämpfung ist [28]. In der Literatur sind unterschiedliche, jedoch äquivalente Angaben hinsichtlich der energetischen Bezugsgröße zur Umrechnung in ein Dämpfungsmaß zu finden. Sowohl die maximale kinetische Energie  $E_{kin,max}$  als auch die mittlere kinetische Energie pro Schwingzyklus  $E_{kin,ave}$  sind hierbei zur Berechnung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  als Proportionalitätsfaktoren denkbar [28, 136].

$$\Lambda_{\beta_n} = \frac{-W_{\beta_n}}{2E_{kin,max}} = \frac{-W_{\beta_n}}{4E_{kin,ave}} = \frac{2\pi D_{\beta_n}}{\sqrt{1 - D_{\beta_n}^2}} \quad \text{mit} \quad D_{\beta_n} \approx \frac{\Lambda_{\beta_n}}{2\pi} \quad (3.22)$$

Die Umrechnung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  in das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $D$ , wie in Gleichung (3.22) rechts dargestellt, basiert auf einer Linearisierung des Zusammenhangs zwischen beiden Größen und ist als Vereinfachung unter der Voraussetzung kleiner Dämpfungen ( $D_{\beta_n} \ll 1$ ) gerechtfertigt.

Beide Vorgehensweisen sind den unidirektionalen Methoden zuzuordnen. Hierbei bleiben Rückkopplungseffekte der aerodynamischen Kräfte auf die Eigenform der Struktur unberücksichtigt. Ein entsprechend großer Massenparameter  $\mu$  ist somit eine notwendige Bedingung für die Anwendung dieser Berechnungsmethoden. Des Weiteren eignet sich die Einzelpassagen Flatterrechnung primär zur Bestimmung der aerodynamischen Dämpfung spezifischer Knotendurchmesser. Ist für eine Eigenform die komplette Dämpfungskurve zu ermitteln, d. h. die aerodynamische Dämpfung für jeden auftretenden Knotendurchmesser, existieren effizientere Vorgehensweisen.

### 3.3.2 Aerodynamische Einflusskoeffizienten

Die Methode der aerodynamischen Einflusskoeffizienten - engl. aerodynamic influence coefficients (AICs) geht in ihren Ursprüngen auf das Ende der 1970er Jahre zurück. Bei den damaligen experimentellen Untersuchungen an oszillierenden Schaufelkaskaden gestaltete sich der Aufbau für Analysen von hochfrequenten Moden schwierig. Daher wurde eine Alternative gesucht, die es ermöglicht auf Basis einer einzelnen schwingenden Schaufel innerhalb der Kaskade eine Vorhersage bezüglich der aeroelastischen Stabilität für die unterschiedlichen Knotendurchmesserschwingungen der betrachteten Eigenform zu treffen. [61]

Im Gegensatz zur bereits vorgestellten SPF Methode bildet nicht die aeroelastische Bewegungsgleichung in TWM Koordinaten (3.12) den Ausgangspunkt der Betrachtungen. Zunächst erfolgt eine Transformation der Bewegungsgleichung unter Ausnutzung des Zusammenhangs (3.8) in die schaufelindividuelle Formulierung ohne Berücksichtigung der störungsinduzierten Luftkräfte ( $\mathbf{f}^d = 0$ ).

$$\left( \text{diag} \{ \omega_{0,j}^2 \} \underline{\mathbf{E}} - \Omega^2 \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{E}} \right) \underline{\mathbf{E}}^{-1} \hat{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{E}}^{-1} \hat{\underline{\mathbf{q}}} \quad (3.23)$$

Durch diese Transformation wird der Einfluss der aerodynamischen Kopplung (zuvor durch die Matrix der komplexen Luftkraftkoeffizienten  $\underline{\mathbf{C}}$  repräsentiert) in die sogenannte Matrix der aerodynamischen Einflusskoeffizienten  $\underline{\mathbf{L}}$  überführt. Hierbei geht die ursprünglich lediglich diagonal besetzte Matrix in eine vollbesetzte, zyklische Matrixstruktur über. Nachteilig hieran ist, dass die einzelnen Bewegungsgleichungen des aeroelastischen Systems nicht mehr voneinander entkoppelt lösbar sind, sondern gegenseitige Abhängigkeiten eine simultane Lösung des kompletten Gleichungssystems erfordern. Im Umkehrschluss stellen die strukturmechanischen Eigenformen in der schaufelindividuellen Formulierung auch keine Lösung des aeroelastischen Gesamtsystems dar, da ebendieses nicht mehr in diagonalisierter Form vorliegt.

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{l}_0 & \underline{l}_{N-1} & \underline{l}_{N-2} & \cdots & \underline{l}_2 & \underline{l}_1 \\ \underline{l}_1 & \underline{l}_0 & \underline{l}_{N-1} & \underline{l}_{N-2} & \cdots & \underline{l}_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \underline{l}_{N-1} & \underline{l}_{N-2} & \cdots & \underline{l}_2 & \underline{l}_1 & \underline{l}_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{l}_j = \frac{\hat{f}_j^m}{\hat{q}_0} \quad (3.24)$$

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Andererseits bringt diese Darstellung auch entscheidende Vorteile mit sich. Nun lässt sich jeder einzelnen Komponente der aerodynamischen Einflusskoeffizientenmatrix  $\underline{l}_j$  explizit eine physikalische Bedeutung zuordnen. Die Hauptdiagonalelemente  $\underline{l}_0$  beschreiben den Einfluss der instationären aerodynamischen Kraftwirkung einer vibrierenden Schaufel auf sich selbst, während die Nebendiagonalelemente  $\underline{l}_{N-1}$  und  $\underline{l}_1$  den Einfluss der schwingenden Schaufeln auf die direkte druck- bzw. saugseitig benachbarte Schaufel abbilden. Der jeweilige Einflusskoeffizient mit dem Index  $j$  beschreibt physikalisch gesehen also die durch Druckschwankungen verursachte, instationäre Kraftwirkung auf eine Schaufel  $j$  durch die Schwingung der Referenzschaufel [34]. Aufgrund der Ausbreitungscharakteristik dieser Druckschwankungen in einer typischen Turbomaschinenkonfiguration nimmt die Kraftwirkung mit steigender Entfernung von der schwingenden Schaufel  $j = 0$  verhältnismäßig schnell ab. Aus experimentellen Messungen geht hervor, dass die Berücksichtigung von jeweils drei druck- und saugseitig benachbarten Schaufeln bereits ausreichend ist, um alle wesentlichen Effekte abzubilden [61, 129, 139]. Je nach untersuchter Konfiguration kann der Eigeneinfluss der schwingenden Referenzschaufel sowie der Kopplungseinfluss der direkten Nachbarschaufeln jedoch eine ähnliche Größenordnung erreichen, wobei alle weiteren Einflusskoeffizienten deutlich geringere Amplituden aufweisen [138].

Abbildung 3.6 zeigt die CFD-Domäne inklusive Eigenform auf der schwingenden Referenzschaufel. Entscheidend für eine physikalisch korrekte Abbildung der sich aus-

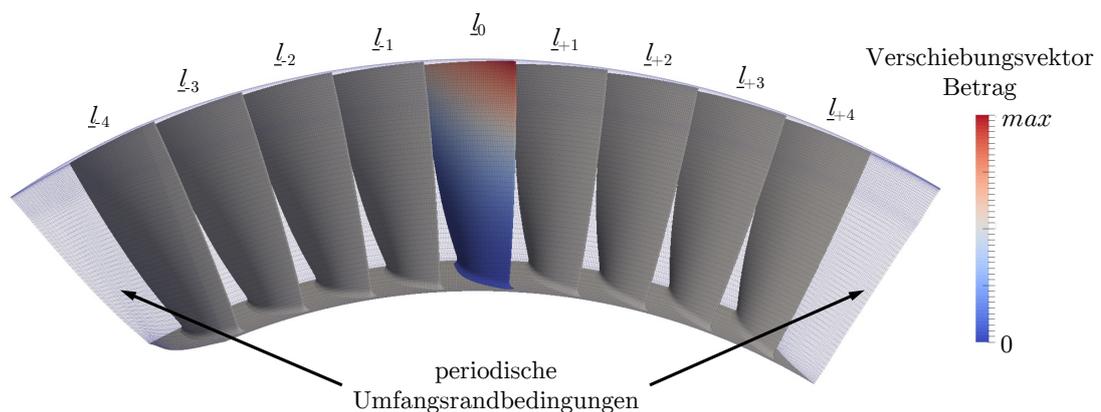


Abbildung 3.6: CFD Simulationsdomäne inklusive Eigenform und Schaufelnummerierung für AIC Rechnung

### 3.3 Lösungsmethodik für das aeroelastische Stabilitätsproblem

breitenden Druckstörungen ist eine ausreichend große Simulationsdomäne, um einen Transport der Druckschwankungen über die symmetrischen Ränder hinaus zu vermeiden. Ein geeignetes Kriterium zur Überprüfung dieses Sachverhalts stellt die Bewertung der Einflusskoeffizienten der Randschaufeln des modellierten Setups dar. Sofern diese deutlich von 0 abweichen, ist eine Erhöhung der Schaufelanzahl in der betrachteten Kaskade ratsam.

Die einzelnen Einflusskoeffizienten lassen sich in einem derartigen Setup unter Vorgabe der Schwingungsamplitude der Referenzschaufel  $\hat{q}_0$  ermitteln. Analog zum dargelegten Vorgehen aus Abschnitt 3.3.1 wird die modale Kraftwirkung auf der Referenzschaufel selbst und auf den restlichen Schaufeln der Kaskade gemäß Gleichung (3.18) berechnet. Ausgehend von den schaufelindividuellen modalen Kraftsignalen erfolgt die Bestimmung der komplexen Kraftamplituden  $\hat{f}_j^m$  entweder per diskreter Fourier Transformation (DFT) oder mittels eines Fitting Verfahrens auf Basis der Ansatzfunktion (3.19). Im Anschluss an die Berechnung der einzelnen aerodynamischen Einflusskoeffizienten  $l_j$  gemäß Gleichung (3.24) existieren mehrere Möglichkeiten, um die aerodynamische Dämpfung als relevantes Stabilitätskriterium aus den ermittelten Größen zu bestimmen.

Aus der Transformationsvorschrift zur Überführung der Matrix der komplexen Luftkraftkoeffizienten  $\underline{\mathbf{C}}$  in die Matrix der aerodynamischen Einflusskoeffizienten  $\underline{\mathbf{L}}$  (3.24) und ihrer Inverse ist der Zusammenhang zwischen den Einzelkomponenten beider Darstellungsformen ableitbar.

$$\begin{aligned} c_{\beta_n} &= \sum_{j=0}^{N-1} l_j e^{-i \frac{2\pi j n}{N}} \\ l_j &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_{\beta_n} e^{i \frac{2\pi j n}{N}} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dies ermöglicht unmittelbar die Auswertung der aerodynamischen Dämpfung auf Basis der rücktransformierten komplexen Luftkraftkoeffizienten analog zur Vorgehensweise der SPF Methode (3.20).

Als Alternative bietet sich die direkte Lösung des aeroelastischen Eigenwertproblems auf Basis der TWM Formulierung (3.12) an. Hierzu erfolgt ebenfalls eine Rücktransformation der aerodynamischen Einflusskoeffizienten in die komplexen Luftkraftkoeffizienten und

### 3 Aeroelastische Grundlagen

zusätzlich die Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion.

$$q_{\beta_n}(t) = \Re \left\{ \hat{q}_{\beta_n} e^{\lambda_{\beta_n} t} \right\} \quad (3.26)$$

$$\text{diag} \left\{ \omega_{0,\beta_n}^2 + \lambda_{\beta_n}^2 - c_{\beta_n} \right\} = 0$$

Aufgrund der Diagonalform des Gleichungssystems lassen sich die Eigenwerte  $\lambda_{\beta_n}$  problemlos entkoppelt voneinander für jeden einzelnen IBPA  $\beta_n$  bestimmen.

$$\lambda_{\beta_n} = \pm \sqrt{c_{\beta_n} - \omega_{0,\beta_n}^2} = -\delta_{\beta_n} \pm j\omega_{\beta_n} \quad \text{mit} \quad \omega_{0,\beta_n}^2 = \delta_{\beta_n}^2 + \omega_{\beta_n}^2 \quad (3.27)$$

Hierbei beschreibt der Realteil des Eigenwerts analog zu einem gedämpften Ein-Massen-Schwinger die Abklingkonstante  $\delta_{\beta_n}$  und der Imaginärteil die gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_{\beta_n}$  des aeroelastischen Gesamtsystems. Daraus resultiert für die aerodynamische Dämpfung im Lehr'schen Dämpfungsmaß folgerichtig der Zusammenhang

$$D_{\beta_n} = \frac{\delta_{\beta_n}}{\omega_{0,\beta_n}} = \frac{-\Re \{ \lambda_{\beta_n} \}}{\sqrt{\Re \{ \lambda_{\beta_n} \}^2 + \Im \{ \lambda_{\beta_n} \}^2}} \approx \frac{-\Re \{ \lambda_{\beta_n} \}}{\Im \{ \lambda_{\beta_n} \}}, \quad (3.28)$$

wobei die dargestellte Vereinfachung nur unter der Voraussetzung  $\omega_{\beta_n} \gg \delta_{\beta_n}$  gilt.

Zudem ermöglicht die Definition der aerodynamischen Einflusskoeffizienten weitere Einblicke zum Verständnisaufbau hinsichtlich des aeroelastischen Gesamtsystems. Inter-

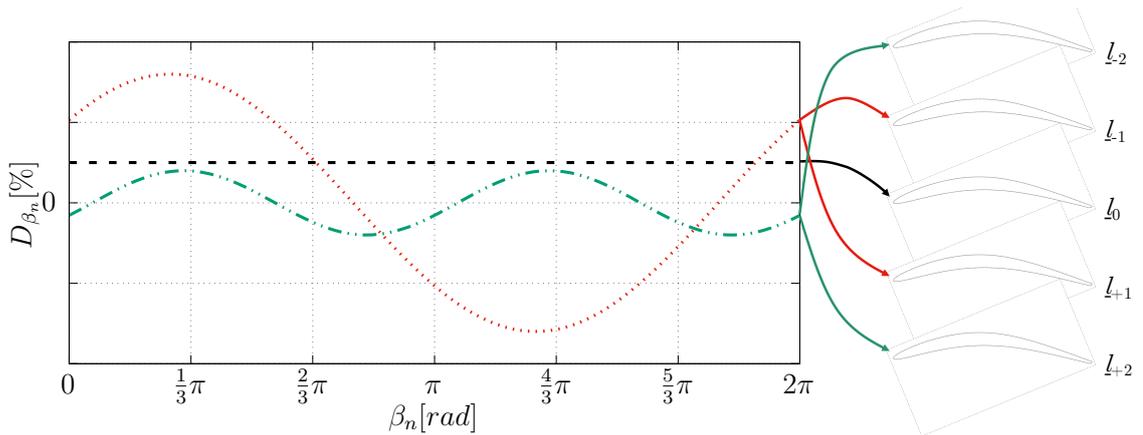


Abbildung 3.7: Beitrag der aerodynamische Einflusskoeffizienten zur aerodynamischen Dämpfung

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

essanterweise ist es durch die Struktur der Transformationsvorschrift (3.25), welche einer Reihenentwicklung entspricht, in Kombination mit der Berechnungsformel (3.20) möglich, direkt den Einfluss der unterschiedlichen Einflusskoeffizienten  $l_j$  auf die Dämpfungskurve der Eigenform von Interesse zu identifizieren. Bestimmt man die Dämpfungskurve beispielsweise nur unter Berücksichtigung des Eigeneinflusses der schwingenden Schaufel  $l_0$  (Abbruch der Reihenentwicklung nach dem 1. Summenglied), so ergibt sich für alle IBPA ein konstanter Wert der dem Mittelwert der eigentlichen Dämpfungskurve entspricht (siehe Abbildung 3.7). Betrachtet man andererseits den Einfluss der direkten Nachbarschaufeln der Referenzschaufel ( $l_1$  und  $l_{N-1}$ ) folgt hieraus ein sinusförmiger Verlauf mit einer Wellenlänge von  $2\pi$ . Diese Analyse lässt sich analog mit allen anderen Schaufelpaaren ( $l_k$  und  $l_{N-k}$ ) wiederholen und führt jeweils zu einem sinusförmigen Dämpfungsbeitrag dessen Wellenlänge  $\frac{2\pi}{k}$  mit der Schaufelentfernung  $k$  von der Referenzschaufel korreliert. Der charakteristisch S-förmige Verlauf einer Dämpfungskurve über alle existierenden IBPA wird also im Wesentlichen durch den Eigeneinfluss der Schaufel sowie den Einfluss der direkten Nachbarschaufeln dominiert.

## 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

Eine korrekte Vorhersage der zu erwartenden Schwingungsamplituden im Betriebsbereich ist elementar für die Integrität der Komponenten und des Gesamttriebwerks. Während das im Abschnitt (3.3) dargelegte Stabilitätsproblem primär von Wechselwirkungen zwischen Schaufeln innerhalb einer Blattreihe bestimmt ist, sind bei der Bewertung des aeroelastischen Antwortproblems die Interaktionen über Blattreihen und ihre unterschiedlichen Bezugssystemen hinweg ausschlaggebend. Abbildung 3.8 dient diesbezüglich als schematische Darstellung, um einen Eindruck von der Komplexität des Strömungszustands innerhalb eines Axialverdichters zu vermitteln.

Potentiell kann jede Ungleichförmigkeit des Strömungsfeldes zu einer Schwingungsanregung der Beschaukelung führen. Es existieren jedoch einige dominierende Mechanismen, welche nachweislich als Treiber für einen Großteil der aerodynamischen Anregung verantwortlich sind. [72]

### 3 Aeroelastische Grundlagen

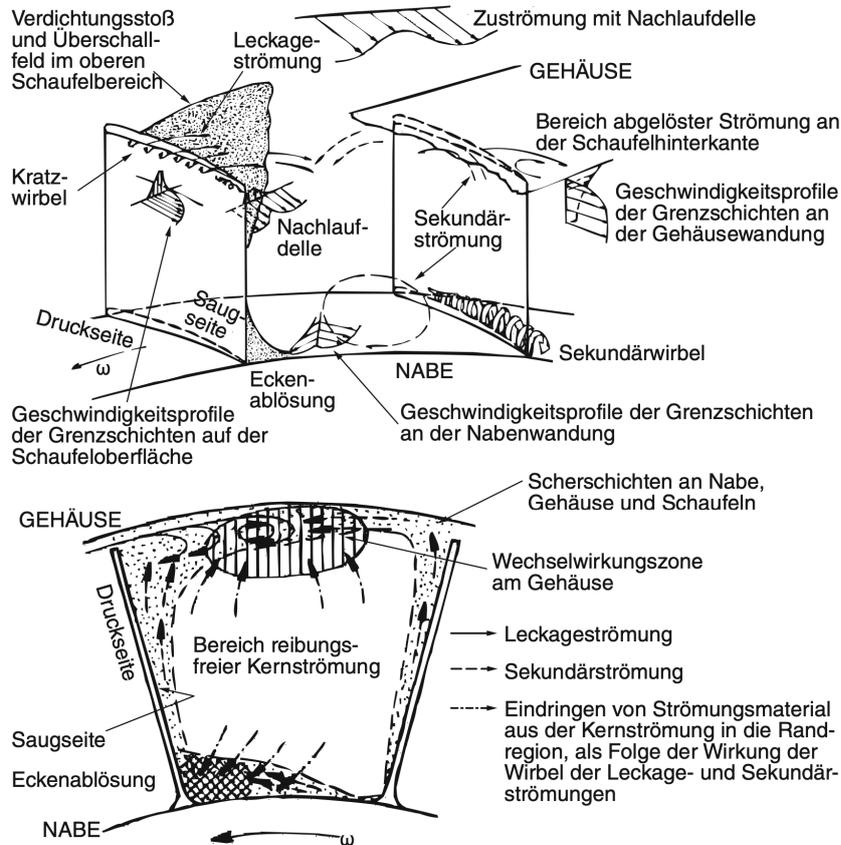


Abbildung 3.8: Dreidimensionales Strömungsfeld inklusive vielfältiger Strömungseffekte innerhalb eines Axialverdichters ([19] S. 1139)

**Nachlaufstörungen - engl. wakes:** werden sowohl von Rotor- als auch Stator-schaufeln im jeweiligen Referenzsystem erzeugt. Totaldruckdefizite, eine verringerte axiale Strömungsgeschwindigkeit und daraus resultierend ein von der freien Strömung abweichender Anströmwinkel sowie variierende statische Druckzustände führen zu einer Kraftwirkung auf die Schaufeln in den stromabwärts befindlichen Blattreihen. Die Durchmischung erfolgt hierbei verhältnismäßig langsam, sodass sich Nachlaufdüellen über mehrere Blattreihen hinweg ausbreiten und zusätzlich bei der Durchquerung nachfolgender Schaufelpassagen deformiert werden [72, 139]. Anregungsmechanismen durch derartige Strömungsdefekte sind bereits seit der Frühphase der Forschung an Axialverdichtern bekannt [71].

**Potentialfelder:** Jegliche Hindernisse in einem Strömungsfeld führen zwangsläu-

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

fig zu einer lokalen Beeinflussung des Druckfeldes und somit inhärent zu einer Druckstörung. In axialen Turbomaschinen tritt dieser Effekt beispielsweise deutlich am Staupunkt der Profilverdichtungen in Erscheinung. Dort bildet sich durch den Aufstau ein nahezu kreisförmiges Druckfeld, welches eine Kraftwirkung auf direkt in der Nähe befindliche Profile verursacht und somit zu einer potentiellen Schwingungsanregung beiträgt. Im Gegensatz zu Nachlaufdüsen sind die Gradienten im Störungsbereich jedoch niedriger und somit ist auch das potentielle Einflussgebiet auf eine geringere Erstreckung beschränkt. In einer subsonischen Umgebung ist die Ausbreitung stromaufwärts sowie stromabwärts möglich, während bei überkritischen Strömungsverhältnissen lediglich eine Ausbreitung stromabwärts erfolgen kann [72]. Das hieraus resultierende Anregungsniveau kann je nach Konstellation für die stromaufwärts [82] bzw. stromabwärts [75] befindliche Blattreihe von Relevanz sein.

**Verdichtungsstöße - engl. shock waves:** existieren unter der Voraussetzung eines transsonischen bzw. supersonischen Strömungsfeldes. Verdichtungsstöße führen zu einer sprunghaften Änderung des Drucks, der Temperatur, Dichte sowie Geschwindigkeit der Strömung und gehen stets mit einem Totaldruckverlust einher (vgl. [19] S.147 ff.). Innerhalb axialer Turbomaschinen gibt es je nach Drosselzustand und betrachteter Komponente eine Vielzahl möglicher Stoßkonfigurationen, welche durch das Auftreffen der Stoßfronten auf benachbarte Blattreihen Schwingungsanregungen verursachen können [55, 88]. Zusätzlich zu diesem direkten Anregungsmechanismus können weitere Interaktionen bspw. mit der Profilverdichtung oder auch stoßinduzierte Ablösungen die instationäre Druckverteilung auf den betroffenen Schaufeln entscheidend beeinflussen [41].

**Sekundärströmungseffekte:** fassen als Oberbegriff eine Vielzahl von Strömungsmerkmalen zusammen, welche etwa in Druckgradienten innerhalb der Passagen, Grenzschichtinflüssen, Wirbelausprägungen und Leckageströmungen ihren Ursprung haben (siehe Abbildung 3.8). Hieraus resultierende Inhomogenitäten im Strömungsfeld können durch die Interaktion mit benachbarten Blattreihen einen schwingungsanregenden Einfluss auf die Struktur haben. Zahlreiche Experimente zeigen den gravierenden Einfluss der Sekundärströmungen auf die Verdichteraerodynamik [77, 118], wobei die Ausbreitungs- und Fortsetzungseigenschaften der Strömungsdefekte vergleichbar mit denen der Nachlaufdüsen sind [52, 141].

### 3 Aeroelastische Grundlagen

Alle zuvor dargelegten Strömungsdefekte können für periodische Anregungsmuster benachbarter Blattreihen im konträren Bezugssystem ursächlich sein. In einer Konfiguration mit  $N_s = 50$  Statorschaufeln und  $N_r = 60$  Rotorschaufeln durchquert beispielsweise jede einzelne Rotorschaufel die Nachlaufdüsen des stromaufwärts befindlichen Stators 50 mal pro Umdrehung. Alle Einzelschaufeln werden mit einem entsprechenden Phasenversatz durch die 50. Harmonische der mechanischen Grunddrehzahl  $N_m$  angeregt. Aufgrund des direkten Zusammenhangs der Anregungsfrequenz mit der Drehfrequenz des Rotors ist diese Art der harmonischen Anregung auch unter der Bezeichnung Maschinenordnung, Erreger-Ordnung bzw. im englischen als „engine order (EO) excitation“ bekannt. Analog kann die Anregung einer Statorblattreihe in einer entsprechenden harmonischen der Wellendrehzahl beispielsweise durch das Potentialfeld der vorbeilaufenden Rotorschaufeln erfolgen.

$$f_{EO} = \frac{EO \cdot N_m}{60} \quad \text{und entsprechend} \quad \Omega_{EO} = 2\pi \cdot f_{EO} \quad (3.29)$$

Neben den hohen Ordnungen die vor allem von den Schaufelzahlen selbst, deren höherharmonischen und Schaufelzahldifferenzen geprägt sind, existieren in jedem realen System durch Imperfektionen auch Anregungsmechanismen für niedrige Erregerordnungen, sogenannte „low engine orders“. Ausschlaggebend sind primär Einflüsse, die die grundlegende Symmetrie der Strömung beeinflussen [20, 135]. Hierzu zählen unter anderem einzelne fehlpositionierte Verstellstatoren, Rotorunwuchten, geometrische Imperfektionen des Gehäuses oder auch Störungen in der Zuströmung vor dem eigentlichen Verdichtereintritt der Luftmasse. Da derartige Effekte in der Realität nicht vermeidbar sind, nutzen Ingenieure in der Auslegungsphase bereits gezielte geometrische Anpassungen der Komponenten zur Resonanzvermeidung mit fundamentalen Erregerordnungen.

Aufgrund der schier unendlichen Anzahl an Anregungsmechanismen sowie des großen Betriebsbereichs von Flugtriebwerken sind Frequenzkoinzidenzen zwischen Erregerfrequenzen und den Komponenteneigenfrequenzen unvermeidbar. Um diese potentiellen Resonanzzustände übersichtlich darzustellen, hat sich das Campbell Diagramm [26] (siehe Abbildung 3.9) als Standardwerkzeug etabliert [121]. Auf der Abzisse wird hierfür die mechanische Wellendrehzahl und auf der Ordinate die Frequenzinformation abgetragen. Zusätzlich verläuft eine Schar linearer Funktionen der einzelnen Erregerordnungen, gemäß Gleichung (3.29), entsprechend der im System vorhandenen Anregungsmechanismen durch den Ursprung. Für die Komponente von Interesse sind nun die Eigenfrequenzverläufe

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

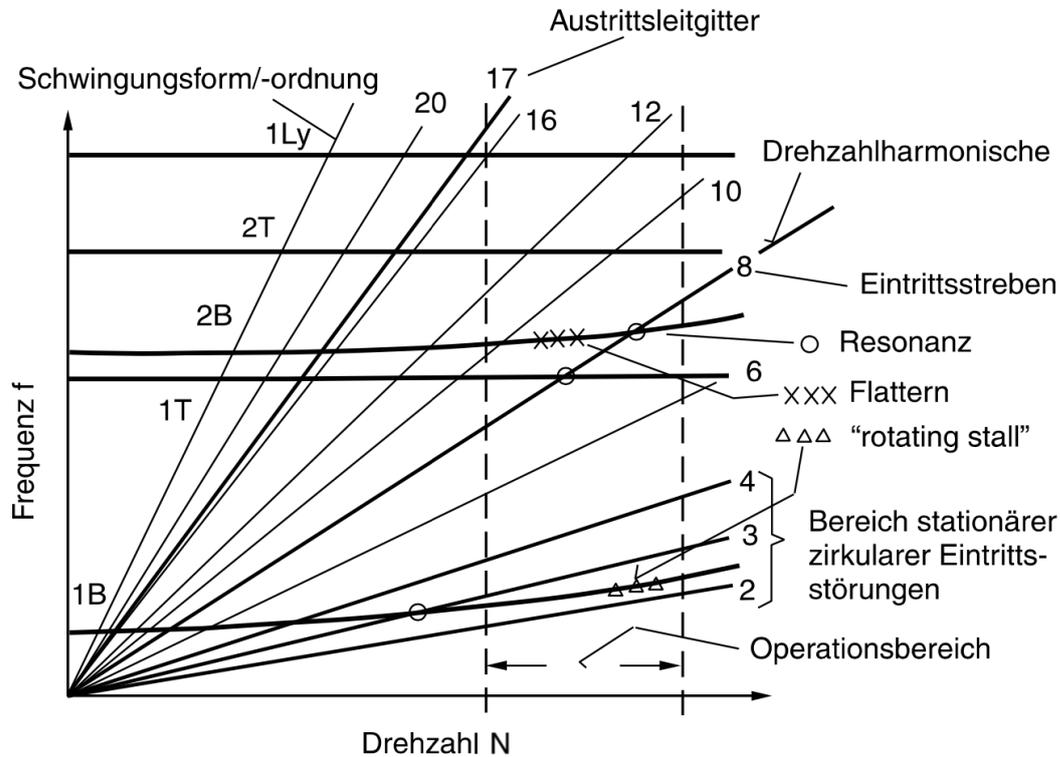


Abbildung 3.9: Schematisches Campbell Diagramm ([57] S.574)

je Mode in Abhängigkeit von der Drehzahl zu ergänzen. Jeder Schnittpunkt zwischen einer Kurve der Schar vorhandener Erregerordnungen und einer Frequenzkurve der Komponentenmode stellt hierbei einen potentiell gefährlichen Resonanzzustand des Systems im jeweiligen Betriebspunkt dar.

Viele grundlegende, jedoch empirische Bewertungskriterien zur Einstufung der Kritikalität von Resonanzen basieren auf der Erfahrung zahlreicher experimenteller Analysen. Mögliche Anpassungen der geometrischen Parameter zur Beeinflussung der Frequenzlage bestimmter Moden oder auch der Erregerordnungen sind hinlänglich bekannt und sollen an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden. [27, 35] Neben den zuvor dargelegten drehzahlsynchronen Resonanzeffekten existiert eine weitere Klasse von Phänomenen, welche sich unter dem Oberbegriff der nichtsynchrone Schwingungen - engl. non-synchronous vibrations (NSV) zusammenfassen lässt [10] und explizit nicht von Interesse für die folgenden Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit ist.

Zusätzlich zur Bedingung der Frequenzgleichheit ist für das Eintreten des Resonanz-

### 3 Aeroelastische Grundlagen

zustandes ein weiteres Kriterium entscheidend. Die Phasenlage der aerodynamischen Anregungskraft und Struktureigenform muss für einen entsprechenden Energietransfer identisch sein [119]. Strukturseitig sind die möglichen Phasenwinkel für Schaufelschwingungen bereits aus Abschnitt 2.1 bekannt. Aus der Periodizität der Anregungsmechanismen lässt sich analog ein Phasenversatz für die aerodynamische Erregerkraft ableiten

$$\beta_{EO} = \frac{2\pi \cdot EO}{N} \quad \text{für Resonanzzustand folgt} \quad EO = ND. \quad (3.30)$$

Es ist jedoch keinesfalls so, dass Erregerordnungen, welche größer als der maximal mögliche Knotendurchmesser der Strukturschwingungen sind, zu keiner Anregung des Systems führen. In dieser Konfiguration kommt es analog zur Theorie der Signalverarbeitung [93, 113] zum sogenannten Alias-Effekt, da das Erregersignal durch die diskrete Schaufelzahl der angeregten Blattreihe unterabgetastet wird. Dieser Zusammenhang macht eine Erweiterung der Forderung (3.30) zur Gewährleistung der Vollständigkeit notwendig.

$$ND = |\pm EO \mp kN| \quad (3.31)$$

Im zuvor erläuterten Campbell Diagramm ist dies jedoch nicht direkt ersichtlich, weshalb für die Bewertung des angeregten Knotendurchmessers der betrachteten Mode das sogenannte „zig-zag shaped excitation in nodal diameters versus frequency (ZZENF)“ Diagramm [140] zum Einsatz kommt. Abbildung 3.10 zeigt beispielhaft zwei überlagerte ZZENF Diagramme für einen Fall mit gerader sowie ungerader Schaufelanzahl einer Blattreihe.

Intervalle mit einem positiven Anstieg entsprechen hierin der Anregung negativer Knotendurchmesser und somit entgegen der Rotationsrichtung des Rotors laufender Wellen et vice versa. Zusätzlich ist die Erstreckung der Abszisse jeweils auf den maximalen Knotendurchmesser der Blattreihe beschränkt. Auch eine dreidimensionale Überlagerung der Informationen aus dem Campbell und ZZENF Diagramm ist möglich, wobei die Projektionen entlang der einzelnen Koordinatenachsen dieses sogenannten SAFE Diagramms [119] auf die entsprechenden Darstellungen 3.9 & 3.10 zurückführen. Anhand der dargelegten Vorgehensweise zur Konstruktion des Campbell sowie ZZENF Diagramms lassen sich alle wesentlichen Resonanzen im Betriebsbereich sowie die angeregten Knotendurchmesser der jeweiligen Moden identifizieren. Um die Integrität

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

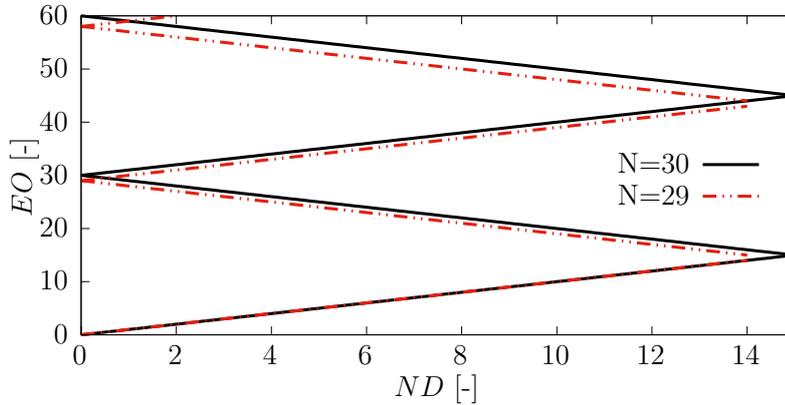


Abbildung 3.10: ZZENF Diagramm

der betroffenen Komponenten gewährleisten zu können, ist eine präzise Vorhersage der Schwingungsniveaus aller relevanten Resonanzzustände notwendig.

Während früher die Schwingungsamplituden der einzelnen Resonanzen im Betriebsbereich ausschließlich in experimentellen Untersuchungen messbar waren [27], genügt die aktuelle Rechenleistung um schon in der Auslegungsphase mittels 3D-CFD Simulationen die zu erwartenden Amplituden vorherzusagen. Als Ausgangsbasis für diese numerischen Analysen dient die Grundgleichung des aeroelastischen Gesamtsystem (3.13). Unter der Voraussetzung, dass die aerodynamische Dämpfung für die zu untersuchenden Moden bereits mit einem geeigneten Verfahren ermittelt wurde (siehe Abschnitt 3.3), verbleibt als einzige Unbekannte im System der störungsinduzierte Anteil des Luftkraftvektors  $\hat{\mathbf{f}}_{\beta}^d$ . Die beiden folgenden Unterkapitel befassen sich daher mit der Erläuterung unterschiedlicher methodischer Ansätze zur Bestimmung der bisher unbekanntenen aerodynamischen Anregung sowie der daraus resultierenden Möglichkeit zur abschließenden Lösung des aeroelastischen Antwortproblems. Analog zum in Abschnitt 3.2 dargelegten Ansatz der Überlagerungsmöglichkeit unterschiedlicher Anteile der aerodynamischen Kraftwirkung basiert die Bestimmung der aerodynamischen Anregung auf der Annahme geringer Schwingungsamplituden des Systems. Wenn zusätzlich keine starke modale Kopplung benachbarter Strukturmoden im Resonanzbereich vorliegt und die Koppelsteifigkeit der Luftmasse im Verhältnis zur untersuchten Struktur vernachlässigbar ist, kann ein unidirektionales Vorgehen zur Ermittlung der Erregerkraft ohne Berücksichtigung der Schaufelbewegung innerhalb der CFD-Domäne erfolgen [21, 135].

### 3.4.1 Vollmodellansatz

Als Ausgangspunkt zur Bestimmung der störungsinduzierten Anteile des Luftkraftvektors  $\hat{\mathbf{f}}_{\beta}^d$  dient ein 360° Modell des Gaskanals der betrachteten Schaufelreihe sowie der potentiellen stromauf- sowie stromabwärts befindlichen Anregungsquellen (Abbildung 3.11).

Durch eine numerische Modalanalyse der betrachteten Blattrihe lassen sich alle Struktureigenformen ermitteln und anhand des Campbell Diagramms die zu untersuchenden Betriebszustände genau definieren. Für jeden potentiellen Resonanzfall erfolgt nun entsprechend des aerodynamischen Betriebspunktes eine stationäre CFD Simulation, um den Startzustand des Strömungsfeldes für die notwendige instationäre Berechnung zu initialisieren.

Zur Bestimmung aller Komponenten der modalen Erregerkraft, d.h. aller Knotendurchmesser der betrachteten Mode, wird auf Basis einer Einzelschaufelrechnung des Strukturmodells die Schaufeleigenform ermittelt und mit Hilfe des Transformationsgesetzes (2.17) auf das Vollmodell expandiert. Hierdurch liegt das betrachtete Problem

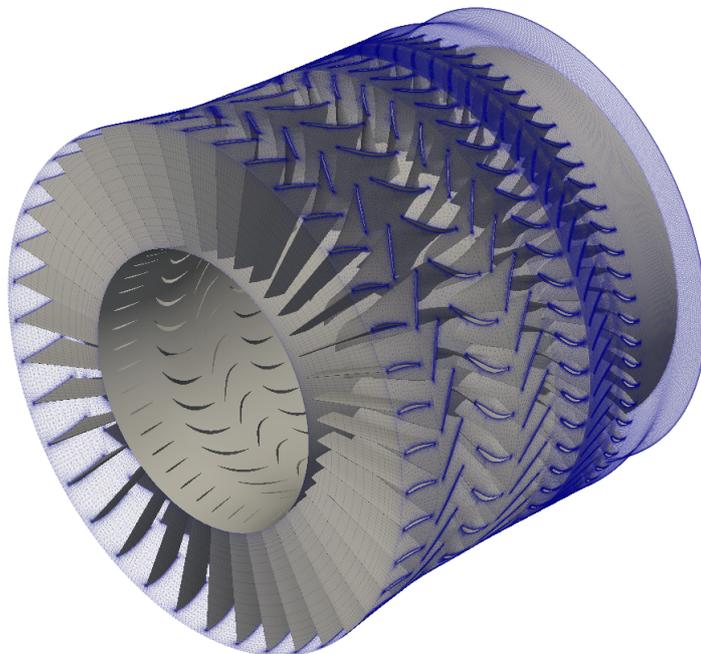


Abbildung 3.11: Beispielhafte CFD-Domäne für Vollmodellsimulation

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

im Gegensatz zum entkoppelten aeroelastischen Gesamtsystem (3.13) in der SWM Formulierung vor. Für die abschließende Vorhersage der erwarteten Schwingungsamplituden  $\hat{\underline{q}}_\beta$  ist somit eine Transformation der ermittelten Signale notwendig. Die aus den instationären Druckschwankungen während der Rotation der Blattreihe resultierenden Kraftwirkungen sind analog zur Gleichung (3.18) durch eine Projektion in Richtung der jeweiligen Eigenform als modale Kraftsignale berechenbar. Ähnlich der dargelegten Vorgehensweise im Abschnitt 3.3.1 lassen sich nun die einzelnen Komponenten der Erregerkraftamplituden des Systems bestimmen. Für die ermittelten Werte gelten in diesem Zusammenhang identische Transformationsvorschriften (3.8) zwischen den Darstellungsformen wie für die Schaufelauslenkungen selbst.

$$\hat{\underline{f}}_\beta^d = \underline{\mathbf{E}}^{-1} \underline{\mathbf{P}} \hat{\underline{f}}_{SW}^d = \underline{\mathbf{E}}^{-1} \hat{\underline{f}}^d \quad (3.32)$$

Nach der Rücktransformation in die TWM Formulierung wird ein inhärenter Vorteil des Vollmodellansatzes sichtbar. Durch die Expansion der Eigenform auf das Vollmodell sowie die physikalische Abbildung der Erregermechanismen berücksichtigt diese Vorgehensweise die Resonanzbedingung der Phasengleichheit automatisch. Hierdurch verbleiben in Summe nur wenige umlaufende Wellen mit einer Erregerkraftamplitude  $\hat{f}_{\beta_n}^d \neq 0$ . Dies sind genau jene Anteile, welche bereits gemäß des ZZENF Diagramms bzw. anhand von Gleichung (3.31) als potentiell anregbare Knotendurchmesser identifizierbar waren.

Durch die Betrachtung des aeroelastischen Problems in der TWM Formulierung sind zudem alle Gleichungen des Systems entkoppelt voneinander lösbar. Unter Vernachlässigung der Beiträge nicht resonanter Systemmoden reduziert sich im Resonanzfall das gesamte Gleichungssystem auf ein äquivalentes 1 Massen-Schwinger Problem der angeregten Schwingungsform und die Resonanzamplitude bestimmt sich zu:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{q}}_\beta &= \left( \text{diag} \{ \omega_{0,\beta}^2 \} - \Omega^2 \underline{\mathbf{I}} - \Re \{ \underline{\mathbf{C}} \} + i2\Omega \text{diag} \{ \delta_{aero\beta} \} \right)^{-1} \hat{\underline{f}}_\beta^d \\ \hat{q}_{\beta_n} &= \frac{\hat{f}_{\beta_n}^d}{2\Omega \delta_{aero\beta_n}} = \frac{\hat{f}_{\beta_n}^d}{2\omega_n^2 D_{\beta_n}} \quad \text{und somit} \quad \hat{x} = \hat{\Phi} \cdot |\hat{q}_{\beta_n}|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aus einer Überlagerung des statischen Spannungszustands im analysierten Betriebspunkt und dem entsprechend der physikalischen Schwingungsamplitude  $\hat{x}$  skalierten

### 3 Aeroelastische Grundlagen

dynamischen Spannungsanteil lässt sich nun der Auslastungsgrad der Komponente berechnen (siehe Abschnitt 2.2).

Grundlegende Vorteile des Vollmodellansatzes bestehen in der Abbildung aller durch die erfassten Geometrien eingebrachten Erregermechanismen ohne zusätzliche Vereinfachungen. Hierdurch ist es möglich, auch zuvor unerwartete Effekte wie bspw. akustische Resonanzen [64, 96] oder schaufelindividuelle Anregungsmuster durch Blattreiheninteraktionen [49] während der Auslegungsphase zu identifizieren und die Risiken für reale Triebwerkstests auf diese Weise zu minimieren. Demgegenüber steht der enorme Simulationsaufwand und entsprechende Ressourcenbedarf, um die Resultate großer Mehrblattreihenmodelle in akzeptablen Zeitskalen für das Produktdesign verfügbar zu machen. Eine mögliche Alternative zur Reduktion des Rechenaufwands ist daher im folgenden Abschnitt dargelegt.

#### 3.4.2 SPMR Ansatz

Im Gegensatz zum Vollmodellansatz bietet die Einzelpassagen Mehrblattreihen - engl. single-passage multi-row (SPMR) Methode die Möglichkeit, Interaktionen über mehrere Stufen hinweg mithilfe von Einzelschaufeln der wechselwirkenden Blattreihen abzubilden [39, 87]. Hierdurch wird die Größe der CFD-Simulationsdomäne drastisch reduziert, was einen beträchtlich geringeren Ressourcenbedarf und somit schnellere Durchlaufzeiten ermöglicht. Ein entsprechendes Setup zur Verdeutlichung ist in Abbildung 3.12 dargestellt.

Die Methode basiert grundlegend auf dem „shape-correction“ Ansatz von He [62, 63] und nutzt phasenversetzte Ränder für die individuellen Blattreihen zur Abbildung der entsprechenden Umfangsperiodizität. Der Informationsaustausch zwischen den einzelnen Schaufelreihen findet über  $360^\circ$  Interpolationsflächen (in Abbildung 3.12 rot dargestellt) statt, da auf diese Weise die Ein- und Austrittsrandbedingungen der benachbarten Blattreihen unabhängig von ihrer Schaufelanzahl leicht aufeinander interpolierbar sind. Hierfür ist es notwendig, nach jedem Zeitschritt die Strömungszustände an den Austritts- und Eintrittsflächen der Blattreihen auf den vollen Umfang zu expandieren. Dies geschieht mittels einer Fouriertransformation der Strömungsgrößen jedes Randknotens der betreffenden Passagen. Auf Basis der hieraus ermittelten Fourierkoeffizienten in

### 3.4 Lösungsmethodik für das aeroelastische Antwortproblem

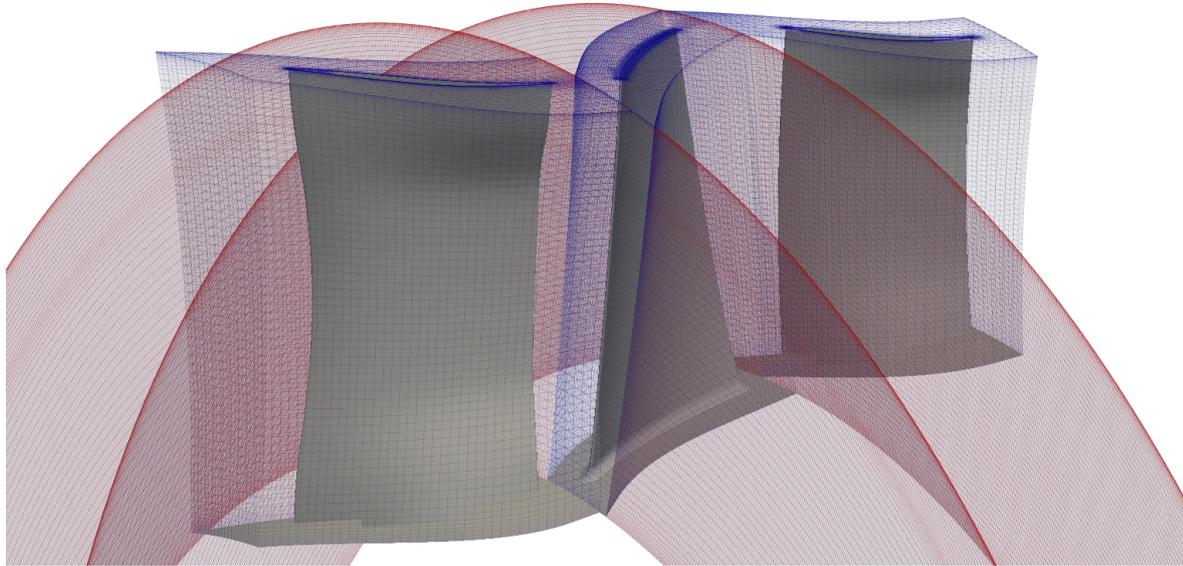


Abbildung 3.12: CFD-Domäne SPMR

den Einzelpassagen sowie der bekannten Schaufelzahlen im System lässt sich das Strömungsfeld für die Interpolationsflächen ohne großen numerischen Zusatzaufwand auf dem vollen Umfang rekonstruieren. Weitere Details bezüglich der Implementierung des SPMR Ansatzes in der genutzten aeroelastischen Simulationsumgebung - engl. *aeroelastic unsteady 3D (AU3D)* sind der Dissertation Stapelfeldts entnehmbar [125].

Eine derartige Reduktion des Kontrollvolumens im Vergleich zum Vollmodellansatz geht jedoch mit einem gewissen Verlust der Allgemeinheit der Methode einher. Da es sich um Fouriertransformationsbasierte Vorgehensweisen im Zeitbereich handelt, besteht eine Grundvoraussetzung in der räumlichen sowie zeitlichen Periodizität der untersuchten Anregungsmechanismen. Zusätzlich müssen die Störungsfrequenzen a priori bekannt sein, um über die einzelnen Stufen hinweg die Frequenzinhalte der Anregungsmechanismen durch eine Anpassung des Referenzsystems (stehend oder rotierend je nach Blattreihe) korrekt berücksichtigen zu können. (vgl. [125] S.96 ff.) Als eindeutiger Vorteil der Methodik ist zu werten, dass weiterhin die vollumfängliche Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen innerhalb der CFD-Domäne und somit eine Abbildung aller nichtlinearen Effekte der zugrundeliegenden physikalischen Vorgänge erfolgt.

Um basierend auf dem SPMR Ansatz die modale Erregerkraft zu bestimmen, wird

### *3 Aeroelastische Grundlagen*

wie zuvor (3.18) eine Projektion der instationären Drücke in Richtung der analysierten Eigenform durchgeführt. Analog zur Vorgehensweise des Vollmodellansatzes lässt sich anhand des ermittelten Erregerkraftsignals die Amplitude durch eine DFT oder die Anwendung einer Least-Squares Approximation auf eine geeignete Ansatzfunktion (3.19) bestimmen. Abschließend kann die resultierende physikalische Schwingungsamplitude der Schaufel anhand der 1-Massen-Schwinger Analogie (3.33) mittels der zuvor berechneten Größen kalkuliert werden.

## 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

In der Literatur sind umfassende Werke zur analytischen Bewertung der Auswirkungen einer Kerbe auf den Spannungszustand eines betroffenen Bauteils zu finden (vgl. beispielsweise [92, 99]). Derartige Bewertungen sind aufgrund der hohen Komplexität lediglich für eine begrenzte Kombination aus Spannungszuständen sowie Schädigungsformen praktikabel. Für die Beurteilung der Auswirkungen eines Schadens auf triebwerksrelevante Geometrien, welche einem mehrachsigen Spannungszustand ausgesetzt sind, stellen daher FEM Simulationen eine sinnvolle und performante Alternative dar. Parameterstudien sollen in diesem Kontext die Übertragbarkeit der Erkenntnisse aus analytischen Herleitungen auf den jeweiligen Anwendungsfall absichern. In den folgenden Abschnitten steht zunächst die Beschreibung einer hierzu implementierten, vollautomatisierten Prozesskette zur Bewertung der strukturmechanischen Folgewirkungen von FODs und Blending Reparaturen im Fokus. Auf Basis dieser Prozesskette erfolgt im weiteren Verlauf eine Validierung der analytisch hergeleiteten Korrelation sowie eine umfangreiche Untersuchung der Auswirkungen von Bauteilschädigungen auf die modalen Parameter und die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit der betroffenen Komponente. Hierbei gewonnene Erkenntnisse bilden die Grundlage für eine reduzierte Methodik zur schnellen Bestimmung der Folgewirkungen eines Schadens auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit des Bauteils. Auf diese Weise lassen sich Schadensfälle im Feld effizient bewerten, um den risikolosen Betrieb der Komponente freizugeben oder gegebenenfalls entsprechende Reparaturmaßnahmen einzuleiten.

## 4.1 Prozesskette

Zur Durchführung umfangreicher Parameterstudien ist eine geeignete vollautomatisierte Prozesskette notwendig, welche alle Einzeloperationen der schematischen Darstellung 4.1 umfasst.

Alle computergestützten Konstruktionsoperationen - engl. computer-aided design (CAD) zur Erstellung der geschädigten/gebblendeten Geometrie sowie die automatische Neuvernetzung der generierten Komponente erfolgen in der Softwareumgebung Siemens NX unter Ausnutzung der zur Verfügung gestellten Programmierschnittstelle - engl. application programming interface (API) [117]. Ausgehend von der Nominalgeometrie der analysierten Komponente erfolgt die Dimensionierung und Positionierung eines parametrisierten Abzugskörpers innerhalb der CAD Umgebung. Um sowohl für die FOD- als auch die spätere Blendbewertung auf die gleichen Bezugsparameter zurückgreifen zu können, fiel die Wahl auf einen zylindrischen Referenzkörper. Dieser deckt je nach Größe und Kombination der genutzten Parameter beide Anwendungsfälle ab. Alle in diesem Zusammenhang verwendeten parametrischen Variationsgrößen sind in Abbildung 4.2 grafisch dargestellt.

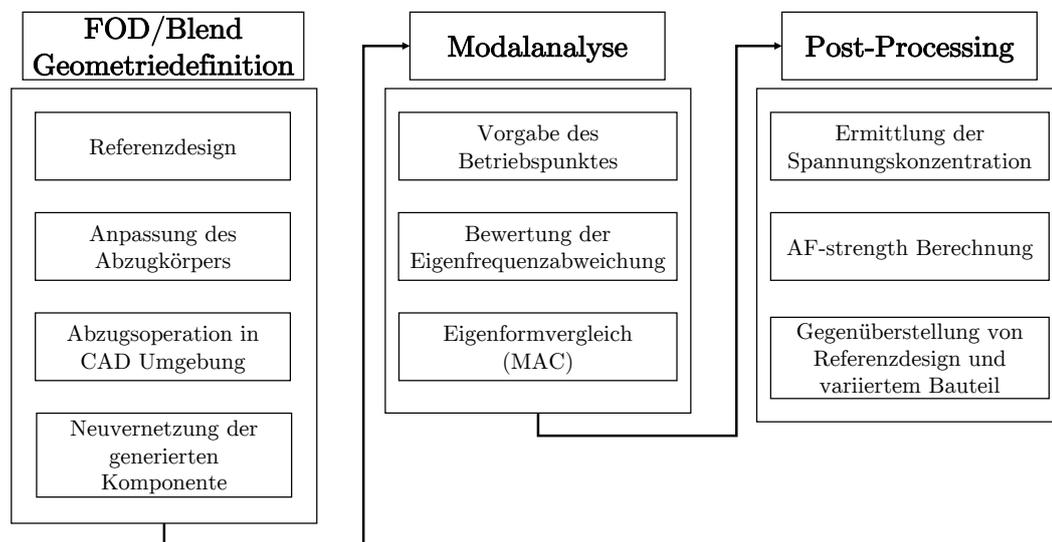


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der implementierten, vollautomatisierten Prozesskette

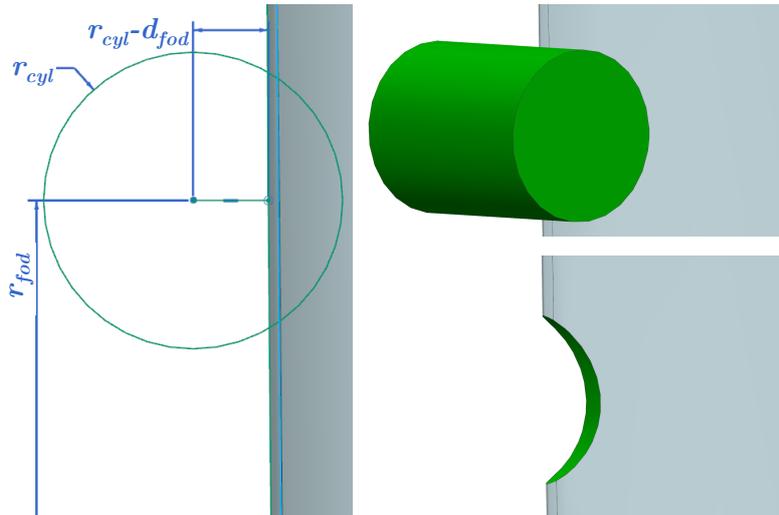


Abbildung 4.2: Parametrik des genutzten Abzugskörpers für strukturelle Analysen

Hierbei steuert der Parameter  $r_{fod}$  die radiale Positionierung an der Schaufelvorderkante,  $r_{cyl}$  definiert den Radius des zylindrischen Abzugskörpers und  $d_{fod}$  die entsprechende Eindringtiefe in die Referenzkonfiguration. Formal sind auch weitere Variationsgrößen in der Prozesskette abbildbar, beispielsweise ein Winkel zur Erfassung der Lage des Abzugskörpers relativ zum Metallwinkel der Schaufelvorderkante. Mit der bewussten Beschränkung auf 3 Parameter erfolgt an dieser Stelle bereits eine Festlegung des später zu untersuchenden Parameterraumes. Der hieraus resultierende dreidimensionale Raum vereinfacht die Vorstellbarkeit der dargestellten Zusammenhänge erheblich.

Als abschließender Prozessschritt der FOD/Blend Geometriedefinition ist die Neuvernetzung der generierten Komponente notwendig. Ausgehend von einem Basisnetz des nominalen Bauteils (unter Ausnutzung einer zuvor festgelegten Namenskonvention für die einzelnen Bauteilflächen) werden alle relevanten Netzinformationen wie die Elementtypen, Elementgröße und zulässige Winkel für die weiterhin bestehenden Bezugsflächen beibehalten. Lediglich die aus der Abzugsoperation resultierende zusätzliche Bauteilfläche erhält neue Netzparameter in Abhängigkeit von der Elementierung der Schaufelvorderkante sowie der Geometrieparameter des Abzugskörpers (für detaillierte Informationen siehe Abschnitt 4.2). Auf diese Weise lässt sich die notwendige Netzgüte für die Auflösung der erwarteten Spannungskonzentration im Schädigungsbereich sicherstellen.

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Um den strukturmechanischen Einfluss der Geometrieänderung auf die untersuchte Komponente zu quantifizieren, ist die Durchführung einer numerischen Modalanalyse unter Berücksichtigung der statischen Vorlast des gewählten Betriebspunktes unerlässlich. Die hieraus resultierende Kombination aus der Drehzahl, den Werkstoffeigenschaften bei der vorliegenden Bauteiltemperatur sowie der anliegenden Gaslast hat einen entscheidenden Einfluss auf die Frequenzlage der Moden sowie die Eigenformen selbst. Während die Frequenzänderung als Delta-Wert zweier skalarer Bezugsgrößen problemlos ermittelbar ist, stellt die Bewertung der Abweichung von strukturellen Schwingungsformen anhand des MAC-Wertes - engl. modal assurance criterion [5] aufgrund der geänderten Netztopologie des variierten Bauteils ein Problem dar. Aus der Definition des MAC-Wertes

$$\text{MAC}_{j,k} = \frac{\left(\Phi_j^T \cdot \Phi_{kvar}\right)^2}{\left(\Phi_j^T \cdot \Phi_j\right) \left(\Phi_{kvar}^T \cdot \Phi_{kvar}\right)} \quad (4.1)$$

folgt unmittelbar, dass die beteiligten Vektoren zur Skalarproduktbildung identische Dimensionen aufweisen müssen. Diese Anforderung ist durch eine Betrachtung der Eigenform des nominalen Bauteils  $\Phi_j$  und der variierten Geometrie  $\Phi_{kvar}$  auf demselben finite Elemente (FE) Netz erfüllbar. Um eine Extrapolation der vorliegenden Daten im Rahmen des notwendigen Mapping Prozesses zu vermeiden, erfolgt der MAC Vergleich stets auf Basis des FE-Netzes der variierten Geometrie. Als Interpolationsverfahren für die nominale Eigenform kommt eine Nearest-Neighbour Suche, welche mittels kd-tree [14] implementiert ist, in Kombination mit einer inversen Distanzwichtung [115] zum Einsatz.

$$\Phi_{jvar}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\sum_{l=1}^N g_l(\mathbf{x}) \Phi_{j,l}}{\sum_{l=1}^N g_l(\mathbf{x})} & \text{wenn } dist(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \neq 0 \quad \forall \quad l \\ \Phi_{j,l} & \text{wenn } dist(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

mit  $g_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{dist(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)^p}$

Aufgrund sehr ähnlicher Netzdichten der nominalen und variierten Komponente erfolgt die Interpolation unter Berücksichtigung der  $N = 2$  nächsten Nachbarn des jeweiligen Knotenpunktes. Alle Abstandsgewichte  $g_l(\mathbf{x})$  werden linear mit der Gewichtungspotenz  $p = 1$  bestimmt und für den Sonderfall von identisch im Raum positionierten Knoten, d.h.  $dist(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = 0$ , erfolgt eine Übernahme des Nominalwertes  $\Phi_{j,l}$  auf den entsprechenden

Knoten der variierten Geometrie  $\Phi_{jvar}(\mathbf{x})$ . Da beide Eigenformen nach Abschluss des Interpolationsprozesses auf identischen FE Netzen vorliegen, lassen sich nun problemlos die MAC-Werte (4.1) ermitteln. Im Turbomaschinenumfeld gilt als Orientierung häufig die Forderung  $MAC_{j,k} > 0.9$ , um zwei miteinander verglichene Eigenformen als ähnlich zu deklarieren.

Nach Abschluss der statischen Lastermittlung für den gewählten Betriebspunkt sowie der numerischen Modalanalyse liegen alle notwendigen Eingangsgrößen für die ausstehenden Post-Processing Schritte der Prozesskette vor. Um die statische Spannungskonzentration  $K_t$  im geometrischen Variationsbereich der Komponente zu ermitteln, ist per Definition ein Vergleich der auftretenden Maximalspannung in diesem Bereich  $\sigma_{maxvar}$  mit der Nominalspannung der Referenzkonfiguration  $\sigma_{ref}$  durchzuführen (vgl. [99] S.4).

$$K_t = \frac{\sigma_{maxvar}}{\sigma_{ref}} \quad (4.3)$$

Als nominaler Vergleichswert zur Ermittlung von  $K_t$  dient hierfür stets der Oberflächenknoten der Referenzkonfiguration mit dem geringsten Abstand zum lokalen Spannungsmaximum. Analog lässt sich auch für die dynamischen Spannungsanteile aus den Ergebnissen der numerischen Modalanalyse die Spannungskonzentration ermitteln.

Grundsätzlich stehen mehrere Möglichkeiten zur Bewertung der Auswirkungen einer Geometrievariation auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit des analysierten Bauteils zur Verfügung. Basierend auf der Spannungsüberhöhung  $K_t$  aus Gleichung (4.3) kann unter Berücksichtigung einer materialabhängigen Kerbempfindlichkeit

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{mit} \quad K_f = \frac{\sigma_A}{\sigma_{Avar}} \quad (4.4)$$

eine Beurteilung der maximal zulässigen Kerbfaktoren  $K_t$  erfolgen. Hierin beschreibt die Kerbwirkungszahl  $K_f$  das Verhältnis der zulässigen alternierenden Spannungsamplituden des ungekerbten Bauteils  $\sigma_A$  zum variierten Bauteil  $\sigma_{Avar}$ . (vgl. [107] S.173 ff.; [17] S.531) Dabei ist jedoch zu beachten, dass eine derartige Vorgehensweise generell auf der Beurteilung zulässiger Spannungsüberhöhungen bezüglich der Referenzkonfiguration des analysierten Bauteils beruht. Somit ist die Methodik empfindlich gegenüber im

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Variationsprozess der Geometrie neu entstehenden lokalen Spannungsmaxima sowie Verschiebungen bereits in der Referenzkonfiguration existierender Spannungslokalisationen. Diese Effekte lassen sich beispielsweise durch die Beurteilung der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit auf Basis des  $af$ -Parameters (siehe Abschnitt 2.2.3) berücksichtigen.

Für die vorliegende Prozesskette erfolgte die Implementierung der entsprechenden Berechnungsvorschrift mittels  $C++$  API des Abaqus ODB Scripting Interface [36]. Als Ausgangspunkt dienen die Resultate der statischen Lastermittlung im Betriebspunkt von Interesse sowie der numerischen Modalanalyse. Um eine äquivalente Übertragung des  $af$ -Parameters auf komplexe geometrische Strukturen zu gewährleisten, ist zunächst die Ermittlung der zulässigen dynamischen Spannungsamplitude  $\sigma_{A_j}$  an jedem Knoten  $j$  des FE-Modells der Komponente notwendig. Diese lässt sich, unter der Voraussetzung bekannter Materialparameter, mithilfe des in Abbildung 4.3 dargestellten Haigh-Diagramms (siehe Abschnitt 2.2) basierend auf der statischen Spannung in jedem Knoten  $\sigma_{m_j}$  bestimmen.

Analog zum einfachen Kragbalken (siehe Abschnitt 2.2.3) soll im Folgenden ein Zusammenhang zwischen der Auslenkungsamplitude der jeweiligen Eigenform und der entsprechenden dynamischen Last auf die Komponente hergestellt werden. Je nach

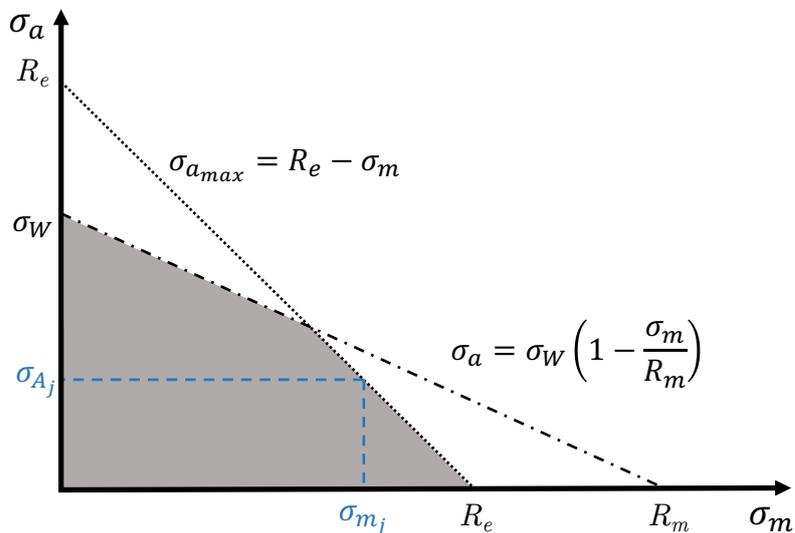


Abbildung 4.3: Haigh Diagramm zur Ermittlung der zulässigen dynamischen Spannungsamplitude

analysiertem Knotendurchmesser der zyklisch symmetrischen Struktur treten hierbei möglicherweise, wie in Abschnitt 2.1 dargelegt, komplexwertige Eigenformen auf. Um sowohl den numerischen Berechnungs- als auch den Implementierungsaufwand zu reduzieren, wird eine gezielte Rotation der komplexwertigen Moden gemäß der Vorschrift (2.17) mit dem Ziel der Minimierung des Imaginärteils vollzogen. Wie in Abbildung 4.4 ersichtlich, erfasst die hieraus resultierende (rein reelwertige) Eigenform die wesentliche modale Charakteristik der Struktur, wobei der verbleibende betragsmäßig gegen 0 tendierende Imaginärteil vernachlässigbar ist.

Eine anschließende Skalierung des modalen Verschiebungsfeldes auf ein Amplitudenniveau von 1 [mHz] ermöglicht durch Anwendung des identischen Skalierungsfaktors auf das modale Spannungsfeld eine Normierung ebendieses auf die resultierende Einheit [MPa]/[mHz]. Der maximal ertragbare Amplituden-Frequenzwert in jedem FE Knoten  $af_{str_j}$  ergibt sich aus dem Quotienten der zulässigen dynamischen Spannungsamplitude  $\sigma_{A_j}$  und der normierten modalen Schwingspannung  $\sigma_{norm_j}$ .

$$af_{str_j} = \frac{\sigma_{A_j}}{\sigma_{norm_j}} \quad (4.5)$$

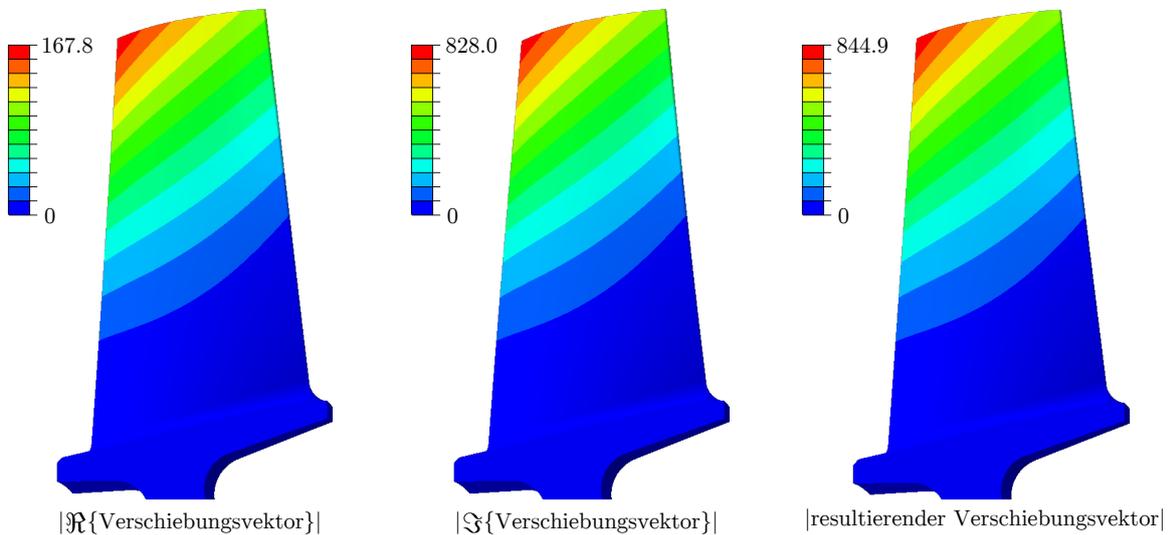


Abbildung 4.4: Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Mode inklusive resultierendem Verschiebungsvektor nach Rotation zur Minimierung des Imaginärteils

Gleichung 4.5 ermöglicht folgerichtig Konturdarstellungen des  $af$ -Parameters zur Visualisierung kritischer Bauteilbereiche sowie der allgemeinen Lastverteilung in der betrachteten Komponente (für detaillierte Analysen siehe Abschnitt 4.3). In diesem Kontext bildet der Knoten  $j$  mit dem geringsten  $af$ -Wert die potentielle Ausfallstelle des Bauteils bei einer Schwingungsanregung der jeweiligen Mode ab. Für einen grundlegenden Vergleich der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit eines Referenzdesigns und einer daraus entstandenen, variierten Geometrie ist somit die Gegenüberstellung der jeweiligen  $af$ -Minima beider Geometrien ausreichend. Bleibt der Minimalwert unverändert, ist kein Einfluss der Geometrievariation auf die potentielle Versagensstelle des Bauteils sowie die zulässige dauerhaft ertragbare Schwingungsamplitude zu erwarten. Verringert sich der Minimalwert, kann neben eines proportionalen Abfalls der zulässigen Schwingungsamplitude zudem eine örtliche Verschiebung der wahrscheinlichsten Ausfallstelle in den Variationsbereich auftreten.

## 4.2 Betrachtung der resultierenden Spannungskonzentration

Nahezu jede lokale geometrische Variation einer Referenzkonfiguration führt zu einer resultierenden Spannungskonzentration in diesem Bereich. Im Falle von Blending Reparaturen lassen sich die geometrischen Abmessungen der entfernten Schaufelbereiche gezielt beeinflussen, um möglichst geringe Spannungsüberhöhungen im Reparaturbereich zu verursachen. FODs hingegen verursachen im Schädigungsbereich primär Geometrieabweichungen in Abhängigkeit von der Form des verursachenden Partikels sowie dessen Oberflächenbeschaffenheit und kinetischer Energie. Um die resultierende Spannungsüberhöhung im Variationsbereich mittels FE-Analyse korrekt abzubilden, ist in beiden Fällen eine Modifikation der Netzdichte verglichen mit der Referenzkonfiguration ratsam. Diese Netzanpassung erfolgt adaptiv in Abhängigkeit von der geometrischen Konstellation des genutzten Abzugskörpers basierend auf einer Konvergenzstudie des Spannungsverhaltens im Schädigungsbereich.

Abbildung 4.5 zeigt für den zuvor definierten Anwendungsfall eines zylindrischen Abzugskörpers den funktionalen Zusammenhang zwischen der resultierende Maximalspannung

## 4.2 Betrachtung der resultierenden Spannungskonzentration

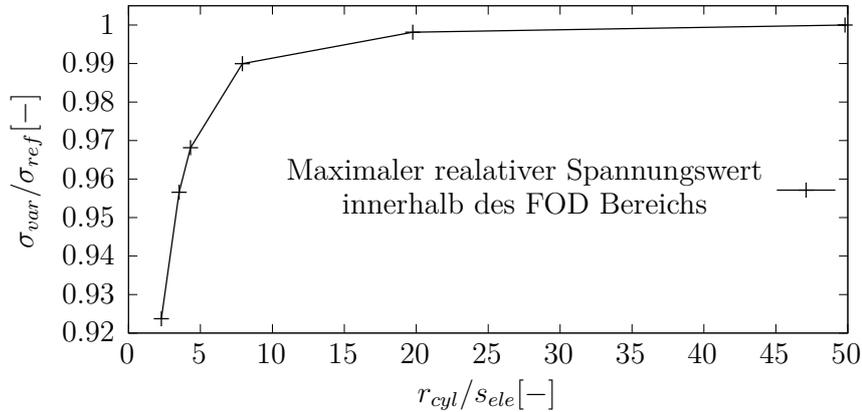


Abbildung 4.5: Konvergenzstudie zur Ermittlung der notwendigen Elementgröße im geometrischen Variationsbereich

im Variationsbereich  $\sigma_{var}$  und dem Verhältnis des Zylinderradius  $r_{cyl}$  zur Kantenlänge der Elemente des Tetraederneztes  $s_{ele}$ . Als Vergleichsspannung  $\sigma_{ref}$  dient hierbei das feinste untersuchte FE-Netz. Bereits für eine Netzdichte  $r_{cyl}/s_{ele} = 8$  ist die Abweichung der Maximalspannung  $< 1\%$  verglichen mit der Referenzlösung. Für die anschließenden Analysen stellt diese Genauigkeit einen guten Kompromiss aus Spannungsauflösung, Elementanzahl und benötigten Ressourcen dar.

Ein geeigneter Parameterbereich für die automatisierte Untersuchung der durch Fremdkörperschädigungen verursachten Spannungsüberhöhungen ist den Daten von Calcaterra [25] entnehmbar und in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Zudem gilt für die randomisiert ermittelten Parameterkombination zur Generierung der Stichproben die Forderung  $r_{cyl} \geq d_{fod}$ . Den schlimmstmöglichen Fall stellt somit ein halbkreisförmiger Schaden dar.

In realitätsnahen Aufprallsituationen tritt eine Vielzahl von komplexen Wechselwirkungen auf. Hierzu zählen beispielsweise die Erzeugung von Druckeigenspannungen im direkten Aufprallbereich des FOD einhergehend mit Zugeigenspannungen in angrenzenden Arealen unterhalb der Oberfläche. Auch Mikrorisse und Materialaufwerfungen im Kerbgrund, deren Entstehung primär durch die geometrische Beschaffenheit und den Aufprallwinkel des Fremdkörpers getrieben ist, können entstehen. [31, 51, 123] Moderne numerische Simulationsverfahren sind durchaus in der Lage einzelne dieser Effekte abzubilden, jedoch ist der Ressourcenaufwand im Rahmen einer Parameterstudie

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Parameter	untere Grenze	obere Grenze
$r_{fod}$ [-]	0.05	1.0
$r_{cyl}$ [mm]	0.2	0.75
$d_{fod}$ [mm]	0.2	0.75

Tabelle 4.1: Parameterbereich des zylindrischen Abzugskörpers zur Ermittlung der resultierenden Spannungskonzentration durch FODs

enorm. Zudem können die Auswirkungen auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit des Bauteils isoliert betrachtet sowohl positiv als auch negativ sein. Für das grundlegende Verständnis der Konsequenzen eines FOD wird daher die in Abschnitt 4.1 dargelegte Vorgehensweise der Geometriegenerierung mittels eines CAD Abzugskörpers, trotz der Vernachlässigung jener komplexer Wechselwirkungen, als ausreichend erachtet.

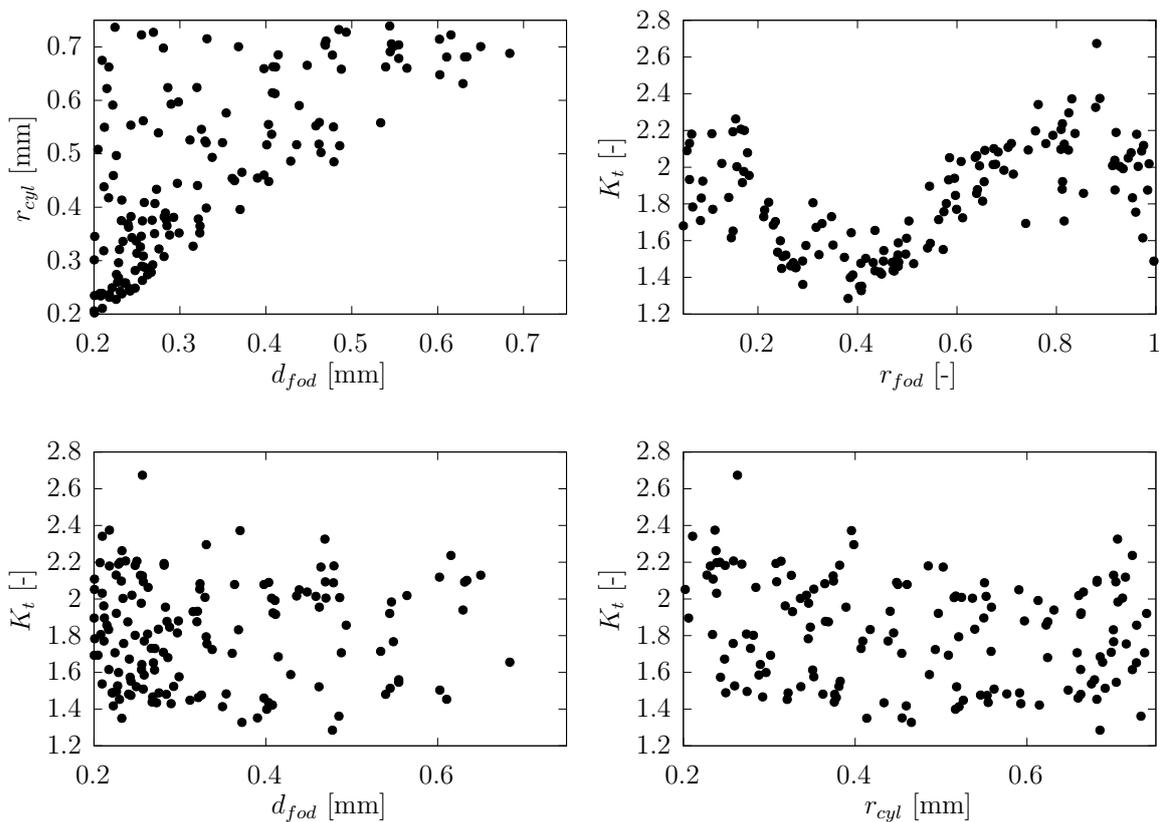


Abbildung 4.6: Streudiagramme zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur zwischen statischer Spannungsüberhöhung  $K_t$  und zylindrischen Schadensparametern

## 4.2 Betrachtung der resultierenden Spannungskonzentration

Anhand einer exemplarischen Verdichterschaufel erfolgt nun eine Korrelationsuntersuchung hinsichtlich der numerischen Ergebnisse der Prozesskette und dem Resultat der analytischen Vorhersage für eine flache einseitige Außenkerbe unter Zug/Biegung (vgl. [92] S.144). Hierfür werden 150 gleichverteilte, zufällig generierte Stichproben im Parameterbereich gemäß Tabelle 4.1 hinsichtlich der verursachten Spannungsüberhöhung  $K_t$  ausgewertet. Abbildung 4.6 zeigt die resultierenden Streudiagramme und mögliche Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Schädigungsparametern. Die Teildarstellung des Zylinderradius  $r_{cyl}$  über der Schadenstiefe  $d_{fod}$  dient hierbei lediglich als Plausibilitätscheck zur Überprüfung der Nebenbedingung  $r_{cyl} \geq d_{fod}$ , welche durch die Gestalt der oberen Dreiecksstruktur bestätigt ist. Allgemein streuen die Überhöhungen der statischen Spannung  $K_t$  im untersuchten Parameterbereich zwischen dem Minimalwert 1.285 und dem Maximalwert 2.674. Auffällig ist, dass für keinen der dargestellten Einzelparameter eine klare Korrelation mit den  $K_t$  Werten besteht. Einzig für die radiale Schadensposition an der Vorderkante  $r_{fod}$  ist eine nahezu sinusförmige Tendenz erkennbar. Ursächlich hierfür ist jedoch kein funktionaler Zusammenhang der Schädigungsparameter, sondern der Einfluss des statischen Spannungsfeldes im FOD-Areal. Dies geht aus dem direkten Vergleich der radialen Spannungsverteilung an der Schaufelvorderkante mit den entsprechenden  $K_t$  Werten in Abbildung 4.7 hervor. Im Bereich zwischen 20 bis 50% radialer Schaufelhöhe treten die geringsten Überhöhungen durch Fremdkörperschädigungen auf, wobei exakt diese Zone in der Referenzkonfiguration die geringste Nominalspannung aufweist.

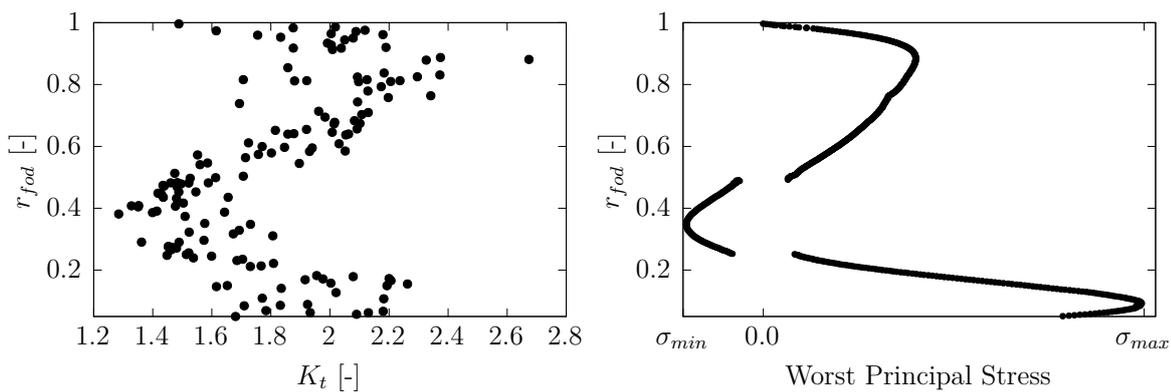


Abbildung 4.7: Statische Spannungsüberhöhung  $K_t$  und betragsmäßig größte Hauptspannung entlang der Schaufelvorderkante

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Für eine isolierte Betrachtung der Korrelation von den zylindrischen Schadensparametern und den daraus folgenden  $K_t$  Werten ist ein derartiger Einfluss jedoch ungeeignet, da sich die Dimension des Stichprobenraums unnötigerweise erhöht. Aufgrund dessen erfolgt zur eindeutigen Separation der überlagerten Einflüsse die Generierung von 50 zusätzlichen Schadensgeometrien auf einem identischen, fest spezifizierten Radius. In Einklang mit der analytischen Annahme eines eindimensionalen Spannungszustandes lässt sich ein zutreffender Schaufelbereich ( $r_{fod} = 0.7$ ) für die Überprüfung des in [92] hergeleiteten Zusammenhangs

$$K_t \sim \sqrt{d_{fod}/r_{cyl}} \quad (4.6)$$

identifizieren. Abbildung 4.8 enthält analog zur vorherigen Auswertung die Streudiagramme zur Korrelationsdarstellung.

Insgesamt streuen die resultierenden Spannungsüberhöhungen der analysierten Stichproben zwischen dem Minimalwert 1.617 und dem Maximalwert 2.204. Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Schädigungstiefe  $d_{fod}$  sowie den resultierenden  $K_t$  Werten ist jedoch auch in diesem Fall nicht ableitbar. Während für geringe Eindringtiefen bereits der Maximalwert der Spannungsüberhöhung auftritt, reduziert sich die Spannbreite der Resultate mit steigender Eindringtiefe. Für den Zylinderradius des Schädigungskörpers  $r_{cyl}$  treten die Maximalwerte ebenfalls im Bereich des unteren Grenzwertes des Parameterraumes auf. Im Gegensatz zur Eindringtiefe führen jedoch höhere  $r_{cyl}$  Werte potentiell zu einer Erhöhung der Spannbreite des damit einhergehenden  $K_t$  Wertes. Die

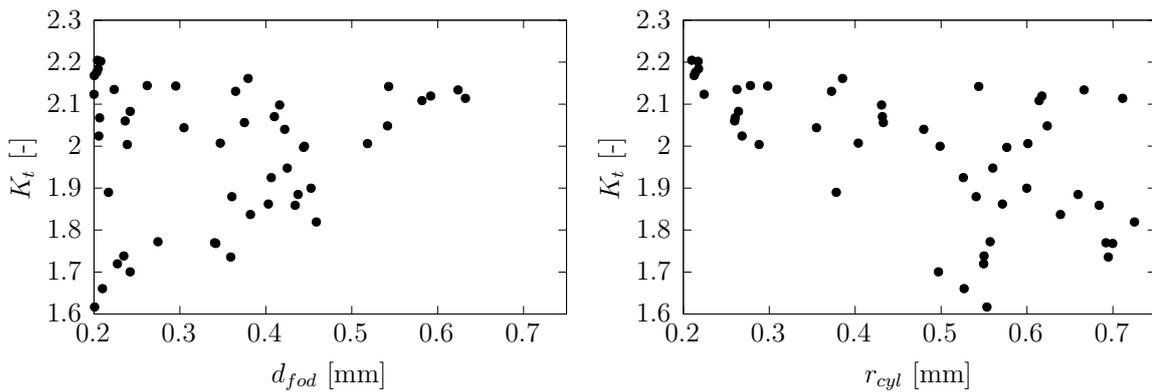


Abbildung 4.8: Streudiagramme zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur zwischen statischer Spannungsüberhöhung  $K_t$  und zylindrischen Schadensparametern für  $r_{fod} = 0.7$

### 4.3 Auswirkung auf modale Parameter und hochzyklische Ermüdungsfestigkeit

minimale resultierende Spannungsüberhöhung tritt für einen mittleren Wert  $r_{cyl} = 0.553$  auf.

Abbildung 4.9 zeigt basierend auf dem analytischen Resultat (4.6) den Zusammenhang zwischen dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cyl}$  und der resultierenden Kerbwirkung  $K_t$  aller 50 Stichproben. Anhand der Darstellung ist eine klare Korrelation beider Parameter ersichtlich, wobei höhere  $d_{fod}/r_{cyl}$  Werte ursächlich für größere Kerbwirkungen sind. Gemäß Gleichung (4.6) dient als Regressionsfunktion ein quadratischer Ansatz, dessen Parameter anhand der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. In der rechten Darstellung sind die relativen Abweichungen der Approximation verglichen mit den berechneten  $K_t$  Werten visualisiert. Alle 50 untersuchten Stichproben bewegen sich in einem engen Band von  $\Delta K_t/K_t = K_{treg}/K_t - 1 < 5\%$ , was die Validität des analytischen Ansatzes im untersuchten Kontext belegt. Für Blending Reparaturen lassen sich äquivalente Untersuchungen anhand einer Anpassung des Wertebereichs von Tabelle 4.1 durchführen, welche zu vergleichbaren Resultaten führen.

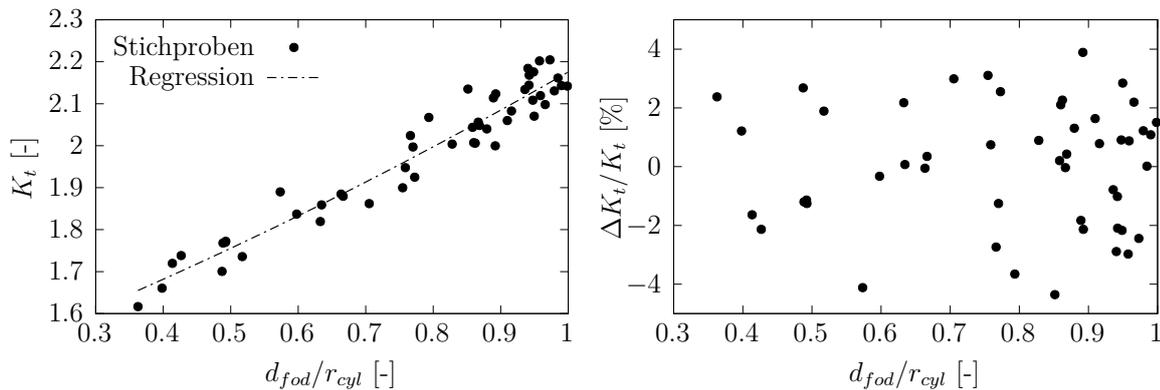


Abbildung 4.9: Quadratische Korrelation zwischen statischer Spannungsüberhöhung  $K_t$  und dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cyl}$  sowie relativer Fehler der Regressionsfunktion  $\Delta K_t/K_t$

## 4.3 Auswirkung auf modale Parameter und hochzyklische Ermüdungsfestigkeit

Neben direkten Auswirkungen der Geometrieänderung auf das statische Spannungsfeld der betrachteten Komponente sind zudem die Folgewirkungen auf modale Parameter

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

sowie die Beeinflussung lokaler Maxima des Schwingungsfeldes von enormer Bedeutung. Basierend auf den 150 Stichproben des vorangegangenen Abschnitts erfolgt zunächst eine Betrachtung der Auswirkungen von FODs auf die Eigenfrequenzen sowie Eigenformen des untersuchten Bauteils.

Abbildung 4.10 zeigt den Mittelwert sowie das Streuband der durch Fremdkörperschäden verursachten relativen Frequenzabweichung für die ersten 20 Eigenformen. Aufgrund der verhältnismäßig geringen geometrischen Dimensionen der eingebrachten FODs, verglichen mit den Abmessungen der Schaufel selbst, ist lediglich ein kleiner Einfluss auf die Eigenfrequenzlage der Struktur feststellbar. Der überwiegende Teil der Schäden verursacht Verschiebungen  $\Delta f/f \leq \pm 0.05\%$  und ist somit in seiner Folgewirkung etwa eine Größenordnung geringer einzustufen, als durch Fertigungsabweichungen im Herstellungsprozess entstehende schaufelindividuelle Frequenzabweichungen (beispielsweise [12], S.29 sowie [109]). Aufbauend auf dieser Erkenntnis gestaltet sich die Detektion derartiger Schäden durch mögliche online-Monitoring Systeme wie Blade-Tip-Timing während des Betriebs als äußerst schwierig. Zusätzlich legen solch geringe Verschiebungen der Eigenfrequenzlage die Vermutung nahe, dass der damit einhergehende Effekt auf die betroffenen Eigenformen vernachlässigbar ist. Diese These lässt sich anhand der in Abbildung 4.10 dargestellten MAC-Matrix bestätigen. Alle Hauptdiagonalelemente weisen MAC-Werte  $\geq 0.99$  auf und belegen somit, dass die Schädigungen keinen relevanten Einfluss auf die betrachteten Eigenformen haben.

Trotz der dargelegten, vernachlässigbar gering erscheinenden, Konsequenzen von FODs

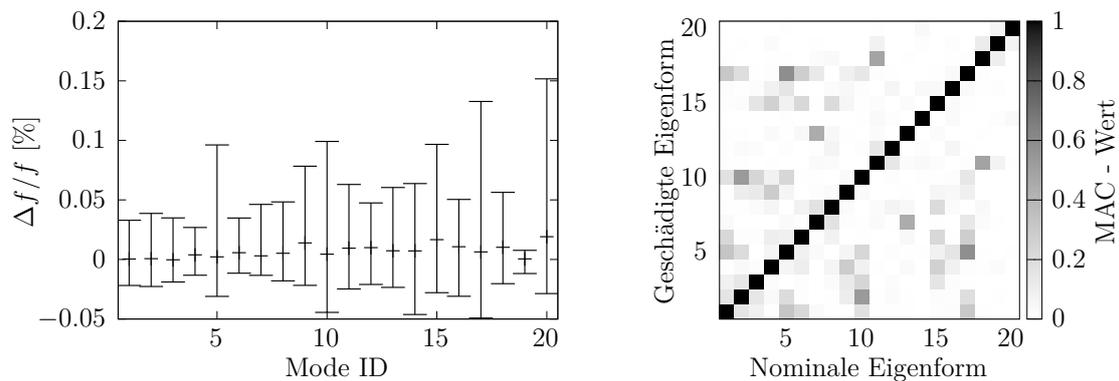


Abbildung 4.10: Relative Frequenzabweichung der ersten 20 Moden sowie MAC Matrix in Folge von FODs

### 4.3 Auswirkung auf modale Parameter und hochzyklische Ermüdungsfestigkeit

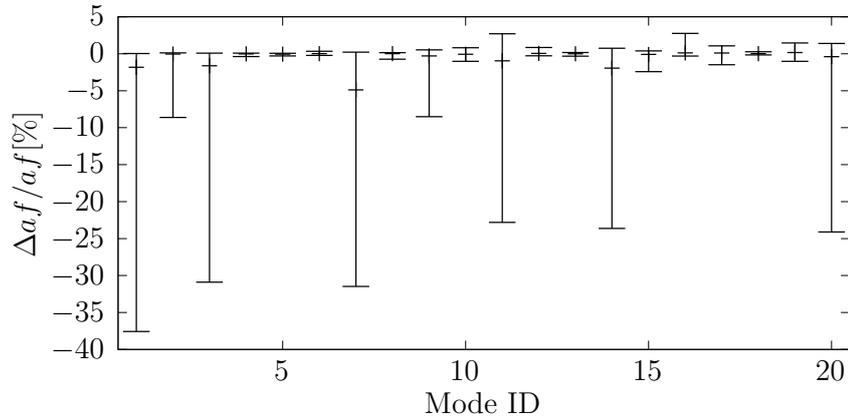


Abbildung 4.11: Relative Abweichung der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit für die ersten 20 Moden der betrachteten Komponente

auf die modalen Parameter der Struktur sind teilweise erhebliche Auswirkungen auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit der betroffenen Komponente zu erwarten. Abbildung 4.11 stellt analog zur Betrachtung der Frequenzverschiebung die Änderung des  $af$ -Wertes über die jeweiligen Moden für alle 150 untersuchten Stichproben dar. Auffällig ist hierbei vor allem die stark modeabhängige Auswirkung der Fremdkörperschäden auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit. Einerseits können die FODs zu drastischen Verlusten der Schwingfestigkeit  $\geq 30\%$  führen, andererseits kann es vergleichbar mit dem Effekt einer Entlastungskerbe zu einer geringfügigen Steigerung des  $af$ -Wertes kommen. Zusätzlich existieren mehrere Moden, welche von dem eingebrachten Schädigungstyp bezüglich ihres Schwingfestigkeitspotentials unbeeinflusst bleiben. Um ein besseres Verständnis für die wirkenden Mechanismen zu entwickeln, folgt eine genauere Betrachtung derjenigen Moden mit dem höchsten Schwingfestigkeitsverlust (1 und 7).

Im linken Teil von Abbildung 4.12 ist der Zusammenhang zwischen der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit aller 150 variierten Geometrien sowie der relativen Schaufelhöhe der eingebrachten Schädigung  $r_{fod}$  dargestellt. Der rechte Teil wiederum zeigt eine Konturdarstellung des  $af$ -Wertes für den betrachteten Mode 1 der Nominalgeometrie. Hierbei kennzeichnet eine rote Einfärbung hoch ausgelastete und eine blaue Einfärbung niedrig ausgelastete Bereiche der Struktur. Zur Beurteilung der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit des Bauteils wird dabei stets der geringste  $af$ -Wert auf der Schaufeloberfläche referenziert, dessen Position zudem einen Rückschluss auf die wahrscheinliche Ausfallstelle der Struktur zulässt. In der dargestellten Nominalkonfiguration befindet

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

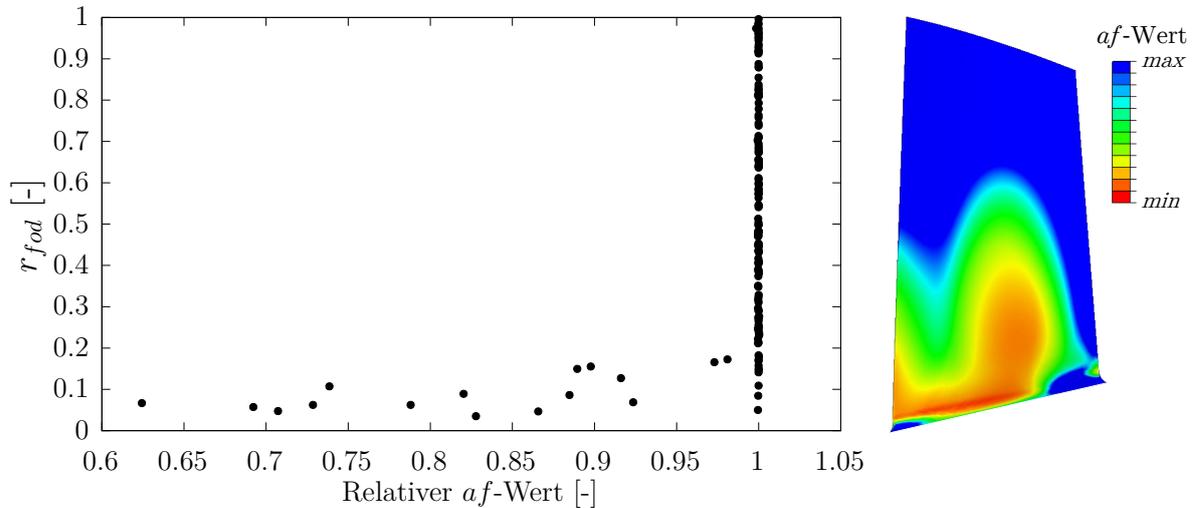


Abbildung 4.12: Streudiagramm des relativen  $af$ -Wert Verlustes sowie nominaler  $af$ -Wert Konturplot der untersuchten Komponente für Mode 1

sich diese beispielsweise im Übergangsbereich des Schaufelprofils zur Scheibe - engl. fillet bei etwa  $1/3$  der Sehnenlänge.

Über alle analysierten Stichproben weist Mode 1 den höchsten Schwingfestigkeitsverlust mit einem Maximalwert von  $-37.6\%$  auf. Lediglich Schäden im Bereich der nominal höher ausgelasteten Vorderkantenregion zwischen  $0.05 \leq r_{fod} \leq 0.17$  können den  $af$ -Wert der Mode potentiell negativ beeinflussen. Dieser Bereich reagiert jedoch nicht sensitiv auf jeden dort eingebrachten Schaden, sondern die Auswirkungen sind neben der relativen Schaufelhöhe auch abhängig von den weiteren Parametern des FOD. Schädigungen in diesem Schaufelbereich können also bei Überschreitung einer kritischen Kombination von Eindringtiefe  $d_{fod}$  sowie Schadensradius  $r_{cyl}$  zu einem  $af$ -Wert Verlust und einer damit einhergehenden Verschiebung der vorhergesagten Ausfallstelle der Struktur in den Vorderkantenbereich führen.

Analog zur vorangegangenen Darstellung beinhaltet Abbildung 4.13 äquivalente Daten für Mode 7. Dieser reagiert mit einem maximalen Schwinfestigkeitsverlust von  $-31.5\%$  ähnlich sensitiv auf die eingebrachten Schädigungen. In der Nominalkonfiguration befindet sich die Ausfallstelle ebenfalls im vorderen Drittel der fillet Region, wobei zwei weitere hoch ausgelastete Bereiche an der Schaufelvorderkante existieren. Im Gegensatz zu Mode 1 führt nahezu jeder Schaden in diesen Bereichen ( $0.22 \leq r_{fod} \leq 0.44$  sowie  $0.65 \leq r_{fod} \leq 0.81$ ) zu einer deutlichen Reduktion des  $af$ -Wertes.

### 4.3 Auswirkung auf modale Parameter und hochzyklische Ermüdungsfestigkeit

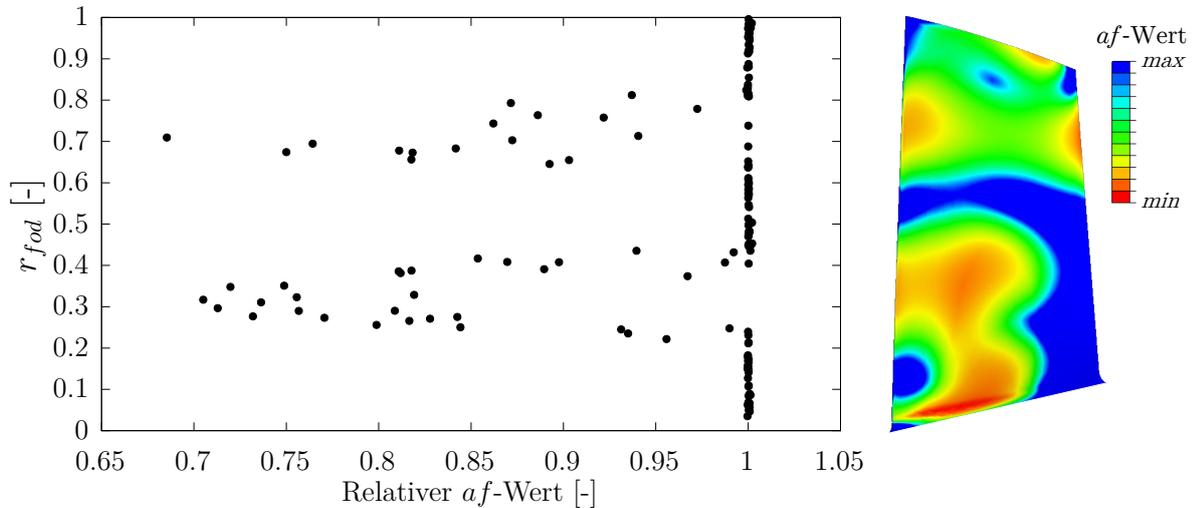


Abbildung 4.13: Streudiagramm des relativen  $af$ -Wert Verlustes sowie nominaler  $af$ -Wert Konturplot der untersuchten Komponente für Mode 7

Ausgehend von seiner Definition in Gleichung (4.5) berücksichtigt der  $af$ -Wert inherent eine Überlagerung der statischen sowie dynamischen Spannungsüberhöhung. Während in Abschnitt 4.2 der vorliegenden Arbeit bereits eine Korrelation der Schädigungsparameter und der damit einhergehenden statischen Spannungsüberhöhung aufgezeigt wurde, stellt Abbildung 4.14 eine Möglichkeit zur Überprüfung der Übertragbarkeit dieser Erkenntnis auf die dynamische Spannungsüberhöhung anhand von Mode 7 dar. Neben

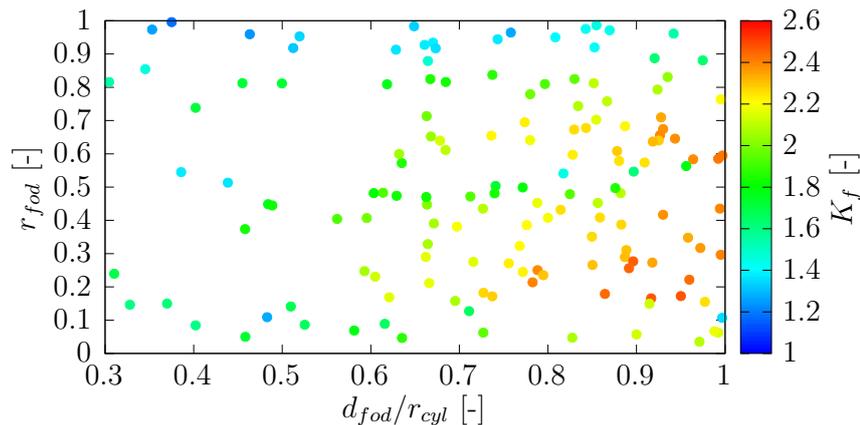


Abbildung 4.14: Streudiagramm zur Überprüfung der Korrelation zwischen den Schadenparametern und der dynamischen Spannungsüberhöhung am Beispiel von Mode 7

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Informationen hinsichtlich der relativen Schaufelhöhe  $r_{fod}$  und des dimensionslosen Schadensparameters  $d_{fod}/r_{cyl}$  ist für jede Stichprobe ebenfalls die korrespondierende dynamische Spannungsüberhöhung  $K_f$  farblich gekennzeichnet. Vergleichbar mit der statischen Spannungsüberhöhung  $K_t$  gehen die Schädigungen mit einem höheren  $d_{fod}/r_{cyl}$  Verhältnis auf identischen relativen Schaufelhöhen jeweils mit einem höheren  $K_f$  Wert einher. Gemäß der festgestellten Korrelationen bietet sich daher die Untersuchung der Möglichkeit zur Erstellung von Sensitivitätsplots sowie geeigneter Ersatzmodelle für die Vorhersage des zu erwartenden  $af$ -Wert Verlustes durch einen FOD an.

### 4.4 Sensitivitätsplots zur Schadensbewertung

Eine mögliche Vorgehensweise zur Generierung von Sensitivitätsplots stellt ein Interpolationsansatz auf Basis der bereits erzeugten Daten aus den 150 analysierten Stichproben dar. Als Ausgangspunkt dient eine Adaption von Abbildung 4.14, wobei dieses mal die farbliche Kennzeichnung der untersuchten Stichproben dem relativen  $af$ -Wert entspricht.

Die Abbildung 4.15 zugrundeliegenden Daten ermöglichen unter Zuhilfenahme eines strukturierten Hintergrundnetzes sowie anschließend distanzgewichteter Interpolation die Erzeugung des in Abbildung 4.16 bereitgestellten Konturplots. Pro Bauteil ist es auf diese

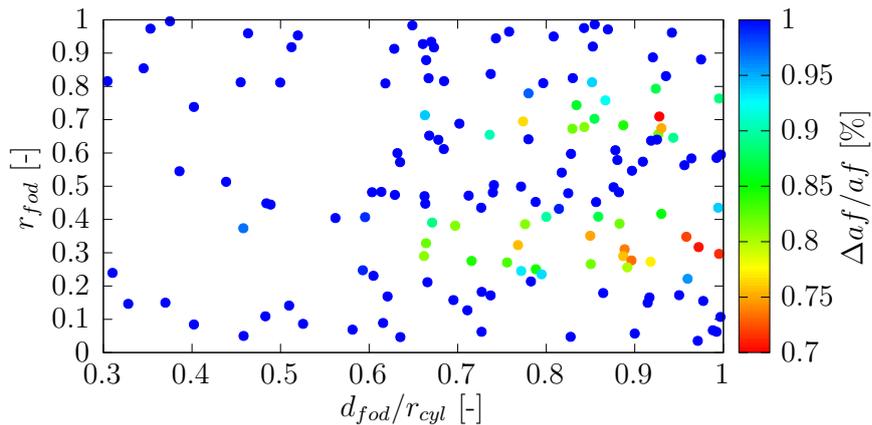


Abbildung 4.15: Streudiagramm zur Überprüfung der Korrelation zwischen den Schadensparametern und der damit einhergehenden Auswirkung auf den  $af$ -Wert am Beispiel von Mode 7

#### 4.4 Sensitivitätsplots zur Schadensbewertung

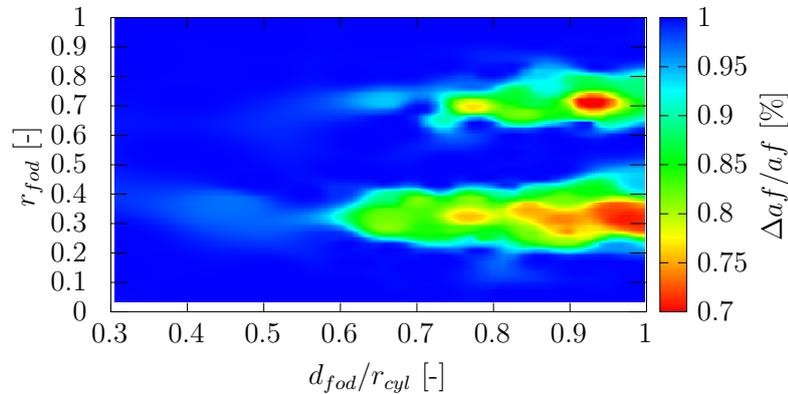


Abbildung 4.16: Konturplot zur Darstellung der  $af$ -Wert Sensitivität bezüglich des dimensionslosen Schadensparameters am Beispiel von Mode 7

Weise möglich, für jede Mode die Sensitivität hinsichtlich eines FOD auf grafischem Wege zu beurteilen. Dieses Vorgehen eignet sich vor allem im Bereich der Flottenbetreuung für eine schnelle Einschätzung der Kritikalität eines aufgetretenen Schadens und kann somit dazu beitragen, im Falle einer Serviceanfrage die Bewertungszeit immens zu reduzieren.

Abbildung 4.15 ist jedoch ebenfalls entnehmbar, dass eine gleichverteilte Zufallsziehung der Schadensparameter nicht zwangsläufig zu einer effizienten Abdeckung des analysierten Parameterraumes führt. Des Weiteren bleibt die zusätzliche Erkenntnis der erarbeiteten Korrelationen zwischen dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cyl}$  sowie der statischen und dynamischen Spannungsüberhöhung  $K_t$  &  $K_f$  auf diese Weise ungenutzt. Analog zu Abbildung 4.9 zeigt Abbildung 4.17 eine Darstellung zur Korrelationsuntersuchung zwischen dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cyl}$  und dem relativen Verlust der hochzyklischen Ermüdungsfestigkeit für  $r_{fod} = 0.7$ . Zusätzlich beinhaltet Abbildung 4.18 Daten zum direkten Vergleich eines quadratischen sowie linearen Regressionsansatzes hinsichtlich ihrer Vorhersagegüte und des funktionalen Zusammenhangs mit dem dimensionslosen Schadensparameter.

Beide Regressionsansätze zeigen im direkten Vergleich Abweichungen von den Stichproben innerhalb eines Streubandes von etwa  $\pm 10\%$  und liefern eine schlechtere Approximation als beispielsweise für die statische Spannungsüberhöhung  $K_t$  (siehe Abbildung 4.9). Basierend auf der Erkenntnis aus Abbildung 4.8, dass höhere Eindringtiefen tendenziell höhere  $K_t$ -Werte zur Folge haben, wird die gewählte Ansatzfunktion für das lineare

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

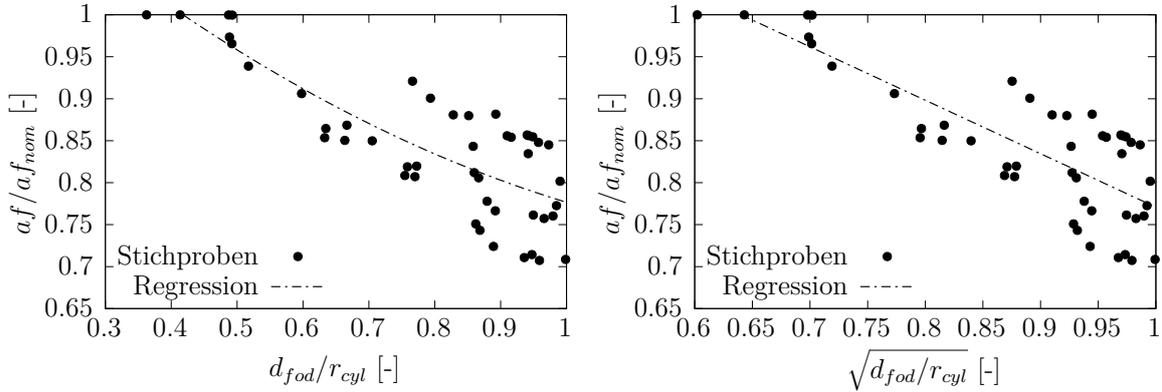


Abbildung 4.17: Korrelationsuntersuchung zwischen hochzyklischer Ermüdungsfestigkeit und dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cylt}$  auf relativer Schaufelhöhe  $r_{fod} = 0.7$

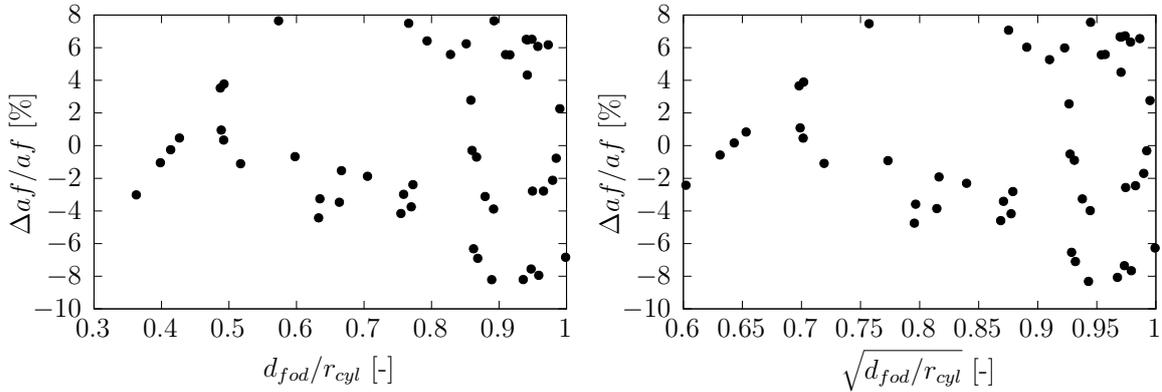


Abbildung 4.18: Relative Abweichung des quadratischen und linearen Regressionsansatzes für die  $a_f$ -Wert Vorhersage

Regressionsmodell zur expliziten Berücksichtigung des Einflusses der Schädigungstiefe erweitert.

$$a_{f_{reg}}(\sqrt{d_{fod}/r_{cylt}}, d_{fod}) = a_{f_{reg}}(x, y) = a_1x + a_2y + a_3 \quad (4.7)$$

Angewandt auf die vorliegenden Daten lässt sich die relative Abweichung des vorhergesagten  $a_f$ -Wert Verlustes auf ein Streuband von etwa  $\pm 5\%$  begrenzen (Abbildung 4.19). Für die reduzierte Modellbildung existieren somit drei freie Parameter pro relativer Schaufelhöhe, welche sich formal durch die Berechnung von drei diskreten Stichproben ermitteln lassen. Abbildung 4.20 zeigt eine schematische Darstellung des prismatischen Parameterraumes und verdeutlicht die zu diesem Zweck genutzte Abtaststrategie.

#### 4.4 Sensitivitätsplots zur Schadensbewertung

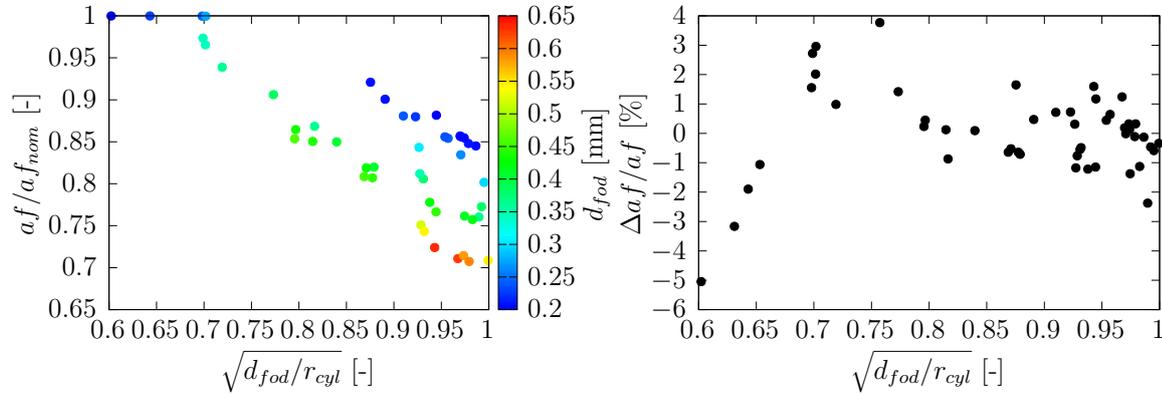


Abbildung 4.19: Korrelationsuntersuchung zwischen hochzyklischer Ermüdungsfestigkeit und dem dimensionslosen Schadensparameter  $d_{fod}/r_{cyl}$  unter expliziter Berücksichtigung der Schädigungstiefe  $d_{fod}$

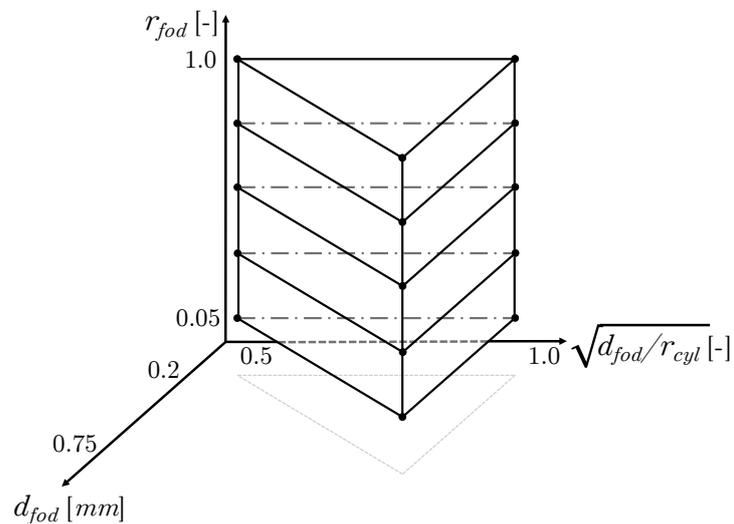


Abbildung 4.20: Schematische Darstellung des prismatischen Parameterraumes und der gewählten Stützstellen zur Ermittlung der linearen Regressionsparameter

#### 4 Strukturmechanische Folgewirkungen von FODs

Um abschließend für die dargelegte Vorgehensweise den Berechnungsaufwand in Form der notwendigen Stichproben zu quantifizieren, verbleibt lediglich die Anzahl der diskret abgetasteten relativen Schaufelhöhen  $r_{fod}$  als Unbekannte. Für einen adäquaten Vergleich mit den 150 zuvor generierten Stichproben, bei einer gleichzeitigen Halbierung der simulativen Aufwände, werden für die reduzierte Vorgehensweise 25 relative Schaufelhöhen und somit insgesamt 75 Datenpunkte zum Aufbau des Regressionsmodells verwendet. Die resultierende Konturdarstellung für eine exemplarische Eindringtiefe  $d_{fod} = 0.5$  ist der linken Darstellung in Abbildung 4.21 entnehmbar.

Über den gesamten Parameterraum weist das so aufgebaute Regressionsmodell verglichen mit den 150 zufällig generierten Stichproben eine Ungenauigkeit der  $af$ -Wert Vorhersage von  $\leq 8.7\%$  auf. Aus dem rechten Teil von Abbildung 4.21 geht außerdem hervor, dass die größten Abweichungen im vorliegenden Anwendungsfall aus einer Überschätzung der  $af$ -Wert Verluste resultieren. Analog zu den Untersuchungen auf der relativen Schaufelhöhe  $r_{fod} = 0.7$  befindet sich für die Gesamtbetrachtung des Parameterraumes der überwiegende Anteil von Stichproben innerhalb eines Streubandes von  $\pm 5\%$  verglichen mit den diskreten ermittelten Referenzwerten.

In Anbetracht der reduzierten numerischen Aufwände sowie der einfachen Ableitung des resultierenden  $af$ -Wert Verlustes bei einer Beschädigung hat die vorgestellte Methodik durchaus das Potential, sich zukünftig als Hilfestellung für Service-Anfragen zu etablieren.

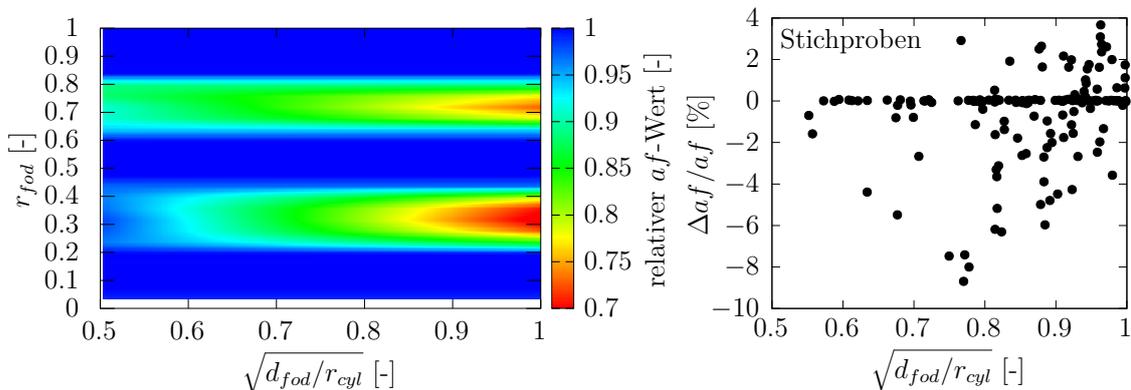


Abbildung 4.21: Konturplot zur Darstellung der  $af$ -Wert Sensitivität basierend auf dem linearen Regressionsansatz für  $d_{fod} = 0.5$

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Während der Fokus des vorangegangenen Kapitels auf der Bewertung von strukturell-mechanischen Folgewirkungen eines Fremdkörperschadens lag, sollen im weiteren Verlauf die aeroelastischen Folgewirkungen von Blending Reparaturen detailliert analysiert werden. Aufgrund der bereits dargelegten, geringen Auswirkungen von FODs auf die modalen Parameter der Struktur erfolgt keine weiterführende Betrachtung derartiger Schäden. In den jeweiligen Handbüchern der Erstausrüster - engl. original equipment manufacturer (OEM) sind jedoch stets Limits für Schadensgrößen definiert, deren Überschreitung zwangsläufig eine Reparatur nach sich zieht. Die integrale Blisk-Bauweise verhindert in diesem Kontext den Austausch einzelner Schaufeln und somit verbleiben sogenannte Blending Reparaturen als nahezu einzige wirtschaftlich sinnvolle Maßnahme zur Wiederherstellung der strukturellen Belastbarkeit von betroffenen Komponenten. Aus diesem Grund ist eine fundierte Vorhersage der zulässigen Blendgeometrien und ihrer aeroelastischen Konsequenzen für den sicheren Flottenbetrieb unerlässlich.

Aufgrund der komplexen aeroelastischen Interaktion ist es hierbei nicht ausreichend, einzelne Einflussgrößen und deren Auswirkungen isoliert zu betrachten. Die vorliegende Arbeit berücksichtigt neben dem Einfluss der Blend Geometrie auf die modalen Parameter der Struktur ebenso die Auswirkungen auf die aeroelastische Dämpfung sowie die modifizierte aerodynamische Anregung der reparierten Komponente. Das Ziel besteht abschließend in der Erarbeitung eines reduzierten Ansatzes zur rechenzeiteffizienten Abschätzung der Folgewirkungen von Blends auf eine beispielhafte Blisk.

Hinsichtlich der Gültigkeit aller abgeleiteten Aussagen ist an dieser Stelle festzuhalten, dass die numerischen Resultate stark abhängig von den verwendeten Analyseprogrammen sind. Die in diesem Zusammenhang präsentierten CFD Ergebnisse basieren auf der Rolls-Royce proprietären Programmlandschaft AU3D, welche einen instationären

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Strömungs- und Aeroelastiklöser umfasst [105, 106]. Gelöst werden die instationären Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen mit Hilfe des Spalart-Allmaras Turbulenzmodells. Das Softwarepaket ist erfolgreich für ein breites Anwendungsspektrum im Turbomaschinenumfeld validiert [134]. Um die geometrischen Merkmale der Struktur effizient abzubilden, kommen für die CFD Domäne semi-unstrukturierte Netze zum Einsatz [126].

Als Untersuchungsobjekt dient eine transsonische Frontstufe eines modernen Hochdruckverdichters. Die folgenden Analysen konzentrieren sich vor allem auf den höchst ausgelasteten Mode (Mode 11) im Betriebsbereich dieser Komponente und gehen von einer Schädigung im kritischsten Schaufelbereich aus. Gemäß der nominalen  $af$ -Konturdarstellung der betrachteten Eigenform in Abbildung 5.1 entspricht dies einem Vorderkantenschaden auf etwa 80% der Schaufelhöhe. Als mögliche Reparaturmaßnahme eines derartigen Schadens ist entsprechend den Herstellervorgaben ein Blend mit einem minimalen Breiten/Tiefe Verhältnis von  $w_b/d_b = 4$  bis zu einer Tiefe entsprechend der relativen Sehnenlänge von 10% der Schaufel zulässig.

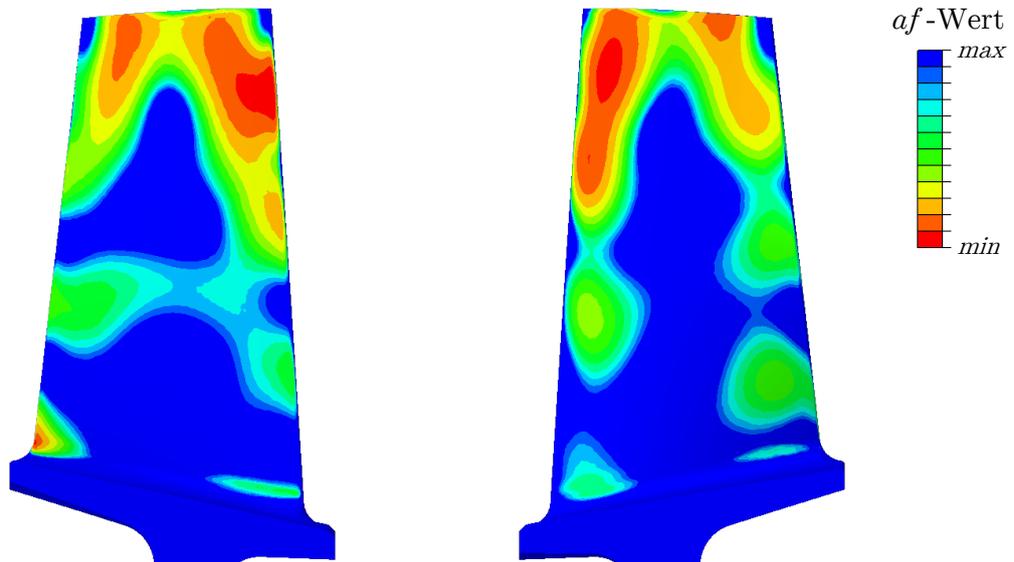


Abbildung 5.1: Nominale  $af$ -Konturdarstellung der analysierten Eigenform (links Saugseite, rechts Druckseite)

## 5.1 Testfalldefinition und Betrachtung wesentlicher Einflussfaktoren

Vor der detaillierten Aufarbeitung der Simulationsergebnisse erfolgt zunächst eine vereinfachte analytische Betrachtung hinsichtlich der zu erwartenden Blend Auswirkungen. Der untersuchte Testfall weist einen Blend mit einem Breite/Tiefe Verhältnis von  $w_b/d_b = 4$  auf, um die resultierende Spannungsüberhöhung im Reparaturbereich zu limitieren. Des Weiteren beschränkt sich die Blend Tiefe auf 5.5% der relativen Sehnenlänge des Profils und entspricht somit den OEM Spezifikationen für zulässige Reparaturen an der angenommenen Schadensposition. Ein zusätzliches Kriterium zur Definition des vorliegenden Testfalls stellt die Beschränkung der Blend Tiefe mit dem Ziel des Erhalts der ursprünglichen Eigenform dar (MAC-Wert  $\geq 0.9$ ). Abbildung 5.2 zeigt den direkten Vergleich beider Eigenformen für die nominale (links) sowie die reparierte Geometrie (rechts). Hierbei ist jeweils der Betrag des Verschiebungsfeldes als Kontur auf der Geometrie dargestellt, wobei die farbliche Skalierung beider Eigenformen den Referenzwerten der Nominalgeometrie entspricht.

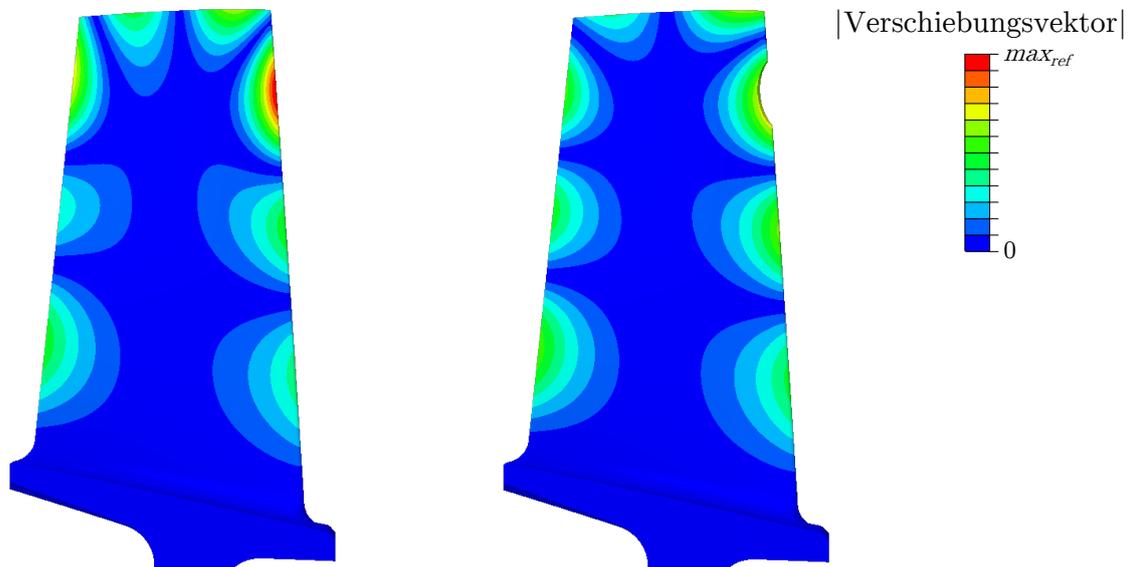


Abbildung 5.2: Gegenüberstellung von Konturplots des Betrages vom Verschiebungsfeld der untersuchten Eigenformen für die nominale und geblendete Geometrie (Saugseite)

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Aus den Konturdarstellungen beider Eigenformen lassen sich bereits wertvolle Erkenntnisse ableiten. Trotz des resultierenden MAC-Wertes von 0.9 und der damit einhergehenden Ähnlichkeit gibt es lokal stärkere Abweichungen. Diese äußern sich vor allem im Schaufelspitzenbereich in unterschiedlichen axialen sowie radialen Ausdehnungen der Schwingungsbäuche. Im Hinterkantenbereich bleibt die Anzahl der lokalen Maxima zwar identisch, aber auch hier gibt es sichtbare Veränderungen in der Ausprägung der Schwingformen. Außerdem weist die reparierte Geometrie ein deutlich geringeres Auslenkungsmaxima auf. Da es sich bei den dargestellten Schwingformen um massennormierte Eigenformen handelt, besteht ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Maximalauslenkung und der modalen Masse der Schwingform. Die Auswirkungen einer reinen modalen Massenänderung auf wesentliche aeroelastische Berechnungsgrößen lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen vereinfacht abschätzen. Für das dimensionslose modale Massenverhältnis  $\mu_m$  gilt

$$\mu_m = \sqrt{\frac{m_b}{m_n}} = \frac{\Phi_{n,j_{max}}}{\Phi_{b,j_{max}}}, \quad (5.1)$$

wobei  $\Phi_{n,j_{max}}$ ,  $\Phi_{b,j_{max}}$  den Eigenformkomponenten der Maximalauslenkung für die nominale und geblendete Schaufel sowie  $m_n$ ,  $m_b$  deren modalen Massen entsprechen. Unter der Annahme eines amplitudenlinearen Luftkraftverhaltens führen identische physikalische Schwingungsamplituden zu identischen Kraftwirkungen des Fluids auf die Schaufel. Diese Annahme gilt jedoch nur für eine isolierte modale Massenänderung der betrachteten Eigenform solange die Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche unverändert bleibt. Aus Gleichung (3.33) und der Forderung nach physikalischer Amplitudengleichheit für solch einen Fall folgt

$$\hat{x}_1 \stackrel{!}{=} \hat{x}_2 \quad \rightarrow \quad \hat{\Phi}_1 \hat{q}_1 \stackrel{!}{=} \hat{\Phi}_2 \hat{q}_2 \quad \text{und somit} \quad \hat{q}_b = \mu_m \hat{q}_n. \quad (5.2)$$

Zudem ergibt die modale Kraftdefinition (3.18) unter Berücksichtigung des Zusammenhangs (5.1) und der Forderung nach einer physikalisch identischen Kraftwirkung

$$\hat{F}_1 \stackrel{!}{=} \hat{F}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{f}_1}{\hat{\Phi}_1} \stackrel{!}{=} \frac{\hat{f}_2}{\hat{\Phi}_2} \quad \text{und somit} \quad \hat{f}_b = \frac{\hat{f}_n}{\mu_m}. \quad (5.3)$$

## 5.1 Testfalldefinition und Betrachtung wesentlicher Einflussfaktoren

Ausgehend von den Basiszusammenhängen (5.2) & (5.3) folgt für die komplexen Luftkraftkoeffizienten gemäß Gleichung (3.9) sowie die aerodynamische Dämpfung (3.13)

$$c_b = \frac{c_n}{\mu_m^2} \quad D_b = \frac{D_n}{\mu_m^2 \nu_f^2}, \quad (5.4)$$

wobei  $\nu_f = \frac{\omega_b}{\omega_n}$  das dimensionslose Frequenzverhältnis beider Moden bezeichnet. Alle auf den zuvor dargelegten Annahmen basierenden Abschätzungen sollen im Rahmen der detaillierten Analyse von Simulationsergebnissen lediglich als Vergleichswerte herangezogen werden.

Im vorliegenden Testfall resultiert der Blend in einem Massenverhältnis von  $\mu_m = 1.424$  und einer leichten Erhöhung der Eigenfrequenz der reparierten Geometrie  $\nu_f = 1.028$ . Gemäß des Zusammenhangs (5.3) ist für eine isolierte modale Massenänderung daher von einer Reduktion der modalen Kraftanregung um  $\approx 30\%$  auszugehen. Entsprechend Gleichung (5.4) geht dies auch mit einer Reduktion der aerodynamischen Dämpfung um  $\approx 53\%$  einher.

Abbildung 5.3 zeigt eine Gegenüberstellung der  $af$ -Konturdarstellungen für die Nominal-

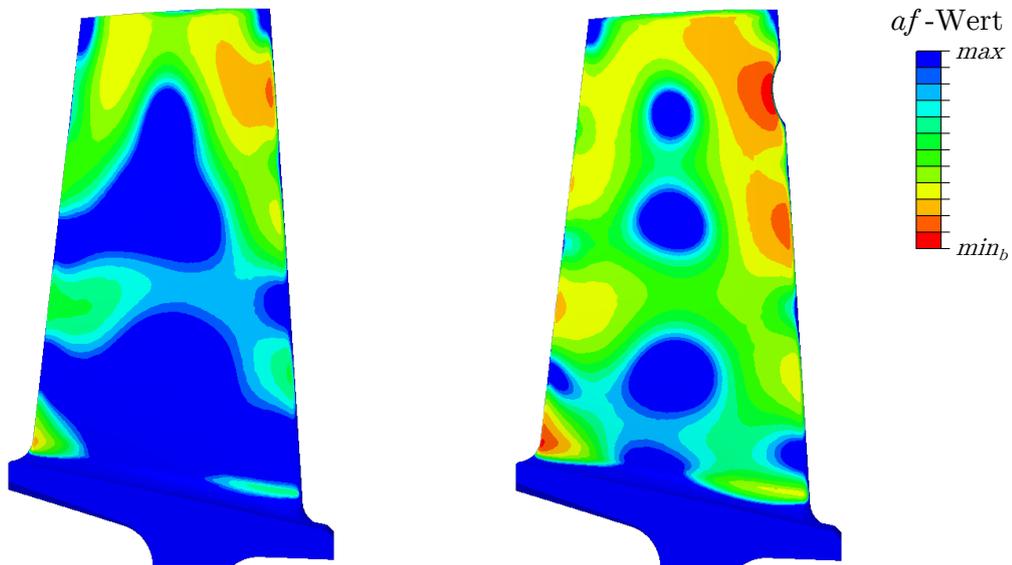


Abbildung 5.3: Gegenüberstellung der  $af$ -Konturdarstellung für nominale und geblen-dete Geometrie (Saugseite)

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

geometrie (links) sowie den zuvor definierten Testfall (rechts). Die farbliche Skalierung der Darstellungen ist hierbei vereinheitlicht und auf den Minimalwert der reparierten Geometrie angepasst. Insgesamt hat das Blending einen erheblichen Einfluss auf das ertragbare Schwingungsniveau der Komponente. Im direkten Vergleich zeigt sich ein  $af$ -Verlust von  $-45.2\%$  als Folge der Spannungskonzentration im Reparaturbereich. Abhängig vom ursprünglichen Lastniveau der Komponente im Betrieb kann diese erhebliche Reduktion des Schwingfestigkeitspotentials bereits den sicheren Betrieb des Triebwerks gefährden.

Neben den rein strukturmechanischen Konsequenzen des Blends sollen auch die aerodynamischen Auswirkungen berücksichtigt werden. Die folgenden Ergebnisse der stationären Strömungsfelder, welche jeweils als Ausgangspunkte für die anschließend durchgeführten instationären Analysen fungieren, basieren auf Einzelpassagen Mehrblattreihenberechnungen mit CFD Domänen gemäß Abbildung 5.4. Die Größe der Domäne des analysierten Testfalls ist derart gewählt, dass die aufgeprägten Strömungsrandbedingungen einen ausreichend großen Abstand zur analysierten Blattreihe aufweisen, um somit den Randbedingungseinfluss zu minimieren. Zusätzlich ist die Drosselstellung auf den Betriebspunkt von Interesse angepasst, um ein repräsentatives Strömungsfeld zu erhalten.

Um die Blend Geometrie ausreichend genau für die CFD Simulationen zu erfassen, erfolgt wie in Abbildung 5.5 dargestellt eine radiale Verfeinerung des Netzes im betroffenen Schaufelbereich. Mit dem Ziel im weiteren Verlauf den Netzeinfluss auf die

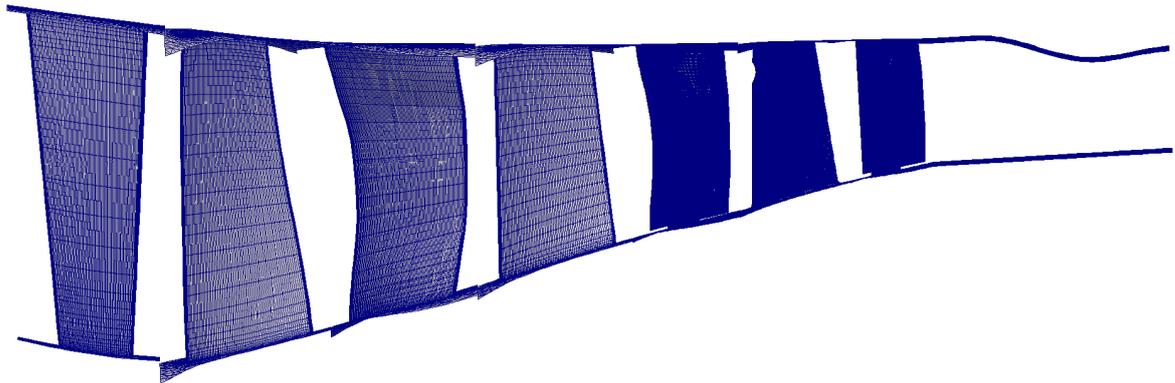


Abbildung 5.4: Einzelpassagen-Mehrblattreihen-Domäne für stationäre CFD Rechnungen

## 5.1 Testfalldefinition und Betrachtung wesentlicher Einflussfaktoren

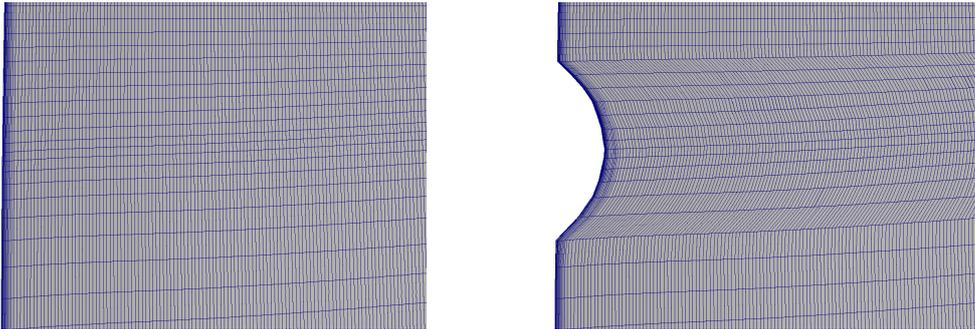


Abbildung 5.5: Gegenüberstellung der CFD Netze für die nominale sowie geblendete Schaufel (Druckseite)

Simulationsergebnisse so gering wie möglich zu halten, berücksichtigt das nominale Vergleichsmodell außerdem eine identische radiale Netzstruktur. Des Weiteren ist zu beachten, dass der Aufbau des Einzelpassagen-Mehrblattreihen Modells inherent eine Umfangsperiodizität der jeweiligen Beschaufelung pro Blattreihe voraussetzt. Daraus folgt, dass im Falle der reparierten Geometrie jede Schaufel des betroffenen Rotors als geblendet angenommen wird. Aufgrund der damit einhergehenden Reduktion der numerischen Simulationsaufwände ist dieser Einfluss jedoch als akzeptabel einzustufen.

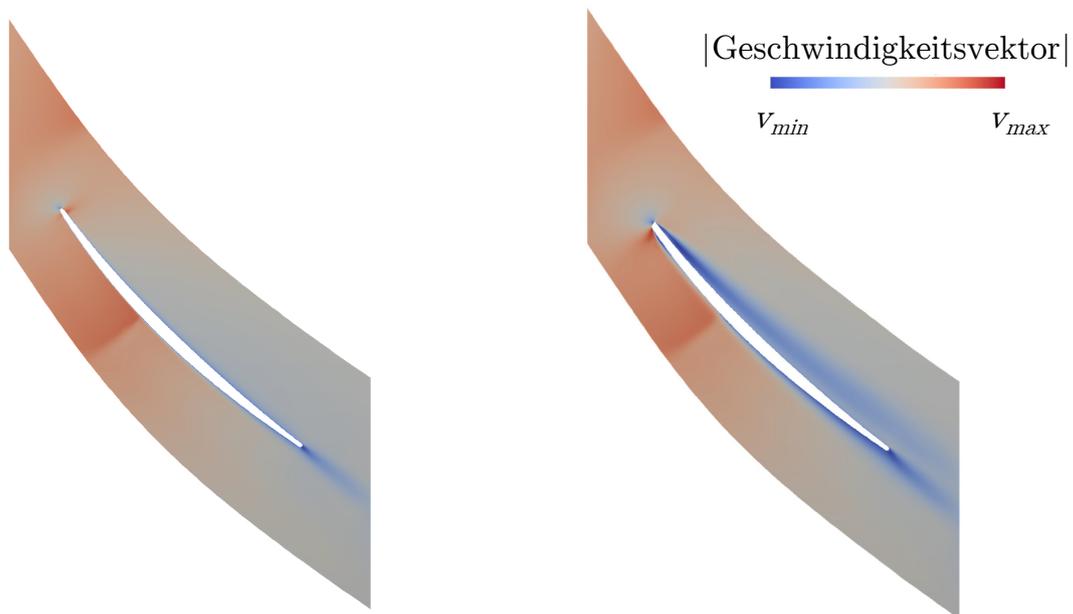


Abbildung 5.6: Vergleich der Strömungsfelder im Blendbereich

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Abbildung 5.6 stellt die Auswirkungen auf das Geschwindigkeitsfeld der Strömung im mittleren Bereich der Blendreparatur dar. Im Falle der Nominalgeometrie (links) liegt die Strömung im betrachteten Betriebspunkt sauber an der Schaufel an und der Abströmwinkel des Fluids folgt nahezu dem Metallwinkel der Profilhinterkante. Im geblendeten Fall ist eindeutig eine Fehlanströmung der zurückgeschnittenen Schaufelvorderkante ersichtlich, welche in einer Fluidregion mit deutlich verringerter Strömungsgeschwindigkeit entlang der Druckseite des Profils resultiert. Dieser unsaubere Strömungsverlauf setzt sich blattabwärts fort und führt in direkter Folge zu einer Minderumlenkung der Strömung an der Schaufelhinterkante. Zusätzlich tritt durch die Fehlanströmung der Vorderkante im Übergangsbereich zur Saugseite eine deutlich höhere Beschleunigung der Strömung entlang des Profils auf. Diese beeinflusst im weiteren Verlauf ebenfalls die saugseitige Ausprägung des Verdichtungsstoßes sowie das Grenzschichtverhalten. Alle dargelegten Einflüsse lassen sich zudem anhand der Grafiken in Abbildung 5.7 bestätigen, wobei diese noch weitere Erkenntnisse hinsichtlich der Blendauswirkungen ermöglichen.

Relevante Abweichungen des Abströmwinkels  $\alpha_2$  verglichen mit der Nominalkonfiguration  $\alpha_{2_{nom}}$  sind lokal auf den Blendbereich begrenzt (Abbildung 5.7 links). Im restlichen Schaufelbereich kommt es lediglich zu geringen Veränderungen der Abströmung, welche im Wesentlichen auf eine Umverteilung des Massenstroms zurückzuführen sind. Zusätzlich ist eine Variation der Anregung auf stromabwärts befindliche Blattreihen durch die veränderte Nachlaufausprägung als wahrscheinlich einzustufen. Ebenso sind negative

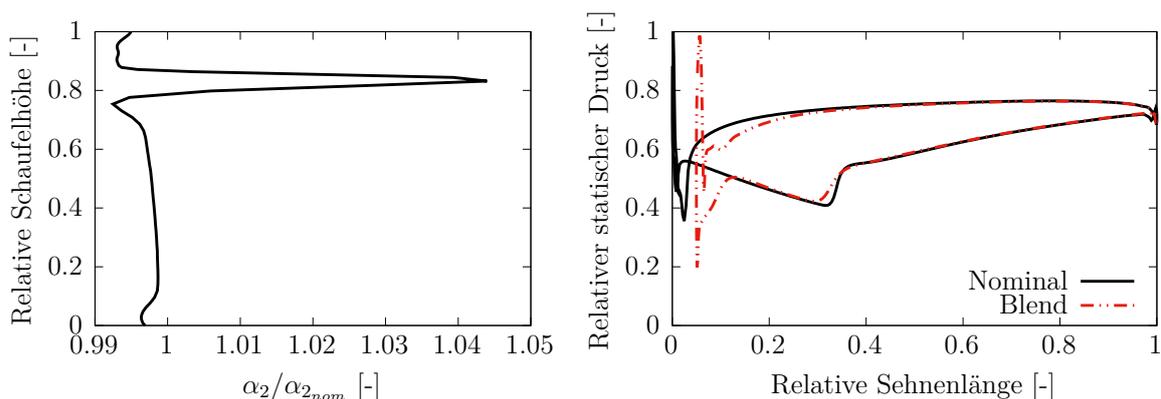


Abbildung 5.7: Gegenüberstellung des Rotorabströmwinkels sowie der statischen Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche im Blendbereich für die nominale und reparierte Schaufel

Effekte der erläuterten Veränderungen im Strömungsfeld auf die Betriebsfähigkeit des Verdichters im Bereich der Stabilitätsgrenzen zu erwarten. Hinsichtlich des Einflusses der Blend Reparatur auf die statische Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche ist festzuhalten, dass die wesentlichen Unterschiede auf den Bereich der relativen Sehnenlänge  $< 40\%$  beschränkt sind. Die Ausprägung des Verdichtungsstoßes variiert leicht, wobei dessen axiale Positionierung jedoch unverändert bleibt. Im hinteren Schaufelbereich nähern sich die statischen Druckfelder beider Profile an und verlaufen nahezu identisch. Alles in allem sind die Auswirkungen des Blends auf das Strömungsfeld radial stark auf den betroffenen Schaufelbereich begrenzt, während im restlichen Blattbereich lediglich geringe Kompensationseffekte auftreten.

## 5.2 Aerodynamische Dämpfung

Basierend auf den unterschiedlichen stationären Startlösungen der verschiedenen Konfigurationen sollen im Folgenden instationäre Simulationen zur Quantifizierung des Reparatureinflusses auf die aerodynamische Dämpfung der analysierten Eigenform betrachtet werden. Hierbei kommen die in Abschnitt 3.3.1 & 3.3.2 erläuterten Ansätze zur Dämpfungsermittlung zum Einsatz. Als Ausgangspunkt dient die aerodynamische Dämpfungskurve der Nominalgeometrie, welche sich mittels der AIC Methode unter Einhaltung aller zugrundeliegenden Annahmen bestimmen lässt. Als Domäne für die CFD

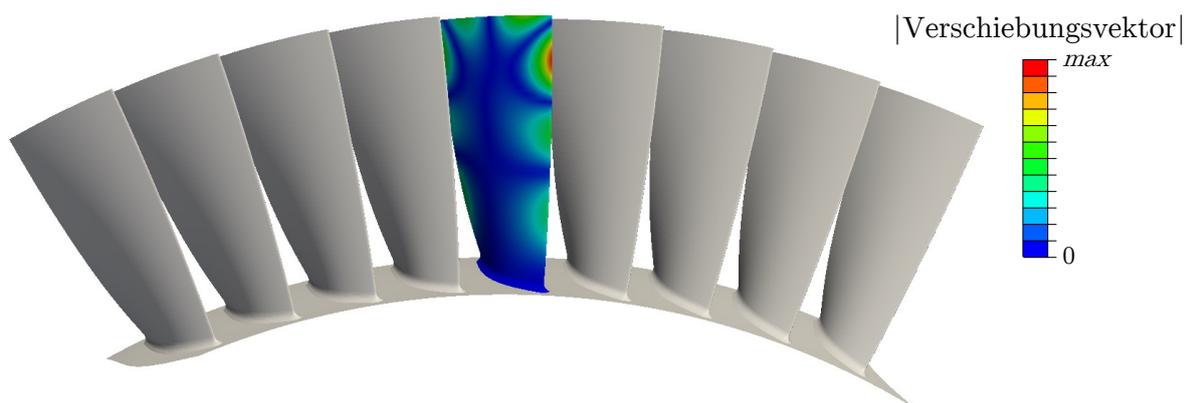


Abbildung 5.8: CFD Simulationsdomäne für nominale AIC Rechnung inklusive interpolierter Eigenform (Mode 11) auf Referenzschaufel

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Simulation kommt eine Einzelblattreihe mit mehreren Schaufeln zum Einsatz, deren Eintritts- und Austrittsrandbedingungen aus der stationären Mehrblattreihenrechnung extrahierbar sind. Abbildung 5.8 beinhaltet zudem eine Darstellung der interpolierten Eigenform auf dem CFD Gitter der Referenzschaufel.

Als Kriterium zur Festlegung der notwendigen Schaufelzahl innerhalb der Strömungsdomäne eignen sich die Einflusskoeffizienten  $l_j$  selbst. In Abbildung 5.9 sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der AICs des Referenzsetups ersichtlich. Gemäß ihrer physikalischen Bedeutung findet ein Abklingen der Einflusskoeffizienten in Richtung der Domänenränder statt. Hierbei sind die Komponenten der Randschaufeln um mehrere Größenordnungen geringer als der dominierende Eigeneinfluss der bewegten Schaufel auf sich selbst ( $l_0$ ). Physikalisch lässt sich dieser Umstand derart interpretieren, dass die von der bewegten Referenzschaufel ausgehenden Druckstörungen an den Randschaufeln sehr geringe Druckamplituden zur Folge haben. Somit ist ebenfalls eine Rückkopplung der sich ausbreitenden Druckstörungen über die periodischen Ränder der Simulationsdomäne hinweg auszuschließen.

Zusätzlich lässt sich das Konvergenzverhalten der Simulation anhand eines Vergleichs der Einflusskoeffizienten über mehrere Schwingzyklen im eingeschwungenen Zustand beurteilen (Abbildung 5.9). Im vorliegenden Beispiel sind keine Abweichungen der aufeinander folgenden Schwingzyklen ersichtlich und die Resultate gelten als auskonvergiert. Somit erfüllt die genutzte Strömungsdomäne zur Simulation des Nominalmodells alle spezifizierten Anforderungen und die im weiteren Verlauf dargestellten Ergebnisse sind

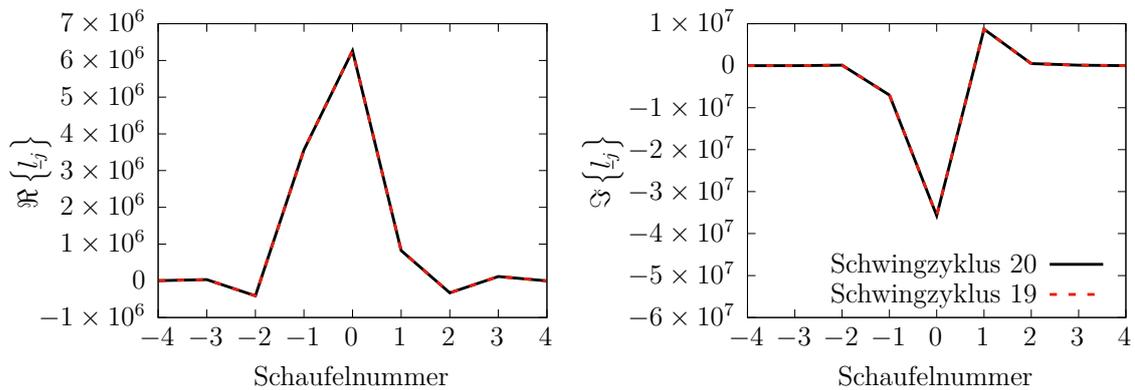


Abbildung 5.9: Real- und Imaginärteil der aerodynamischen Einflusskoeffizienten für die nominale Schaufelgeometrie

aus numerischer Sicht als valide zu erachten. Mittels der in Abschnitt 3.3.2 erörterten Vorgehensweise lässt sich aus den in Abbildung 5.9 gezeigten Einflusskoeffizienten eine Dämpfungskurve über alle möglichen IBPA generieren. Eine analoge Vorgehensweise ist für die geblendete Konfiguration umsetzbar. Hierbei repräsentiert das dargestellte Ergebnis aufgrund des symmetriebasierten Lösungsansatzes zur Ermittlung der aerodynamischen Dämpfung das erwartete Verhalten einer komplett geblendeten Geometrie. Abbildung 5.10 zeigt einen direkten Vergleich der aerodynamischen Dämpfungskurven, wobei die Resultate auf den Maximalwert der Nominalkonfiguration normiert sind.

Bei einer Betrachtung der Dämpfungskurven sind mehrere markante Unterschiede zwischen den beiden Konfigurationen auffällig. Einerseits verschiebt sich das Minimum der aerodynamischen Dämpfung von niedrigen positiven Zwischenphasenwinkeln (vorwärts umlaufende Wanderwellen) zu niedrigen negativen IBPA (rückwärts umlaufende Wanderwellen). Andererseits befindet sich das Maximum der Dämpfungskurve im Fall der nominalen Geometrie im Bereich hoher negativer Knotendurchmesser, während für die reparierte Schaufel eine Verschiebung zu hohen positiven Knotendurchmessern eintritt. Aus der Verschiebung des Maxima sowie Minima lassen sich ebenfalls globalere Tendenzen bezüglich der Blend Auswirkungen ableiten. So weist die geblendete Konfiguration für alle rückwärts laufenden Wanderwellen eine niedrigere aerodynamische Dämpfung verglichen mit der Nominalgeometrie auf. Für positive IBPA hingegen ist ein umgekehrter Effekt ersichtlich. Am stärksten ausgeprägt ist die Abweichung zwischen beiden Konfigurationen für den IBPA von  $-96^\circ$ , bei dem eine Dämpfungsdifferenz von

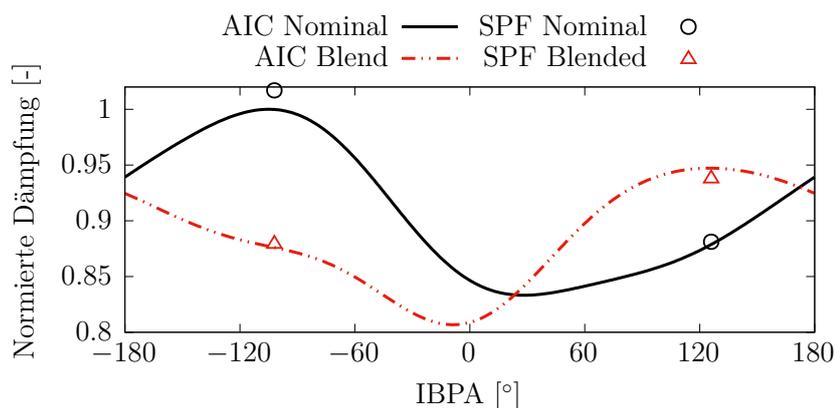


Abbildung 5.10: Aerodynamische Dämpfungskurven der nominalen sowie geblendeten Schaufelkaskade

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

12.49% vorliegt. Mögliche Erklärungsansätze für eine derartige Abweichung lassen sich aus den Darstellungen der lokalen aerodynamischen Arbeitskoeffizienten auf der Druck- (Abbildung 5.11) und Saugseite (Abbildung 5.12) des Profils ableiten.

Hierbei ist der lokale aerodynamische Arbeitskoeffizient  $w^*$  als elementbezogener Arbeitseintrag des Fluids auf die Schaufel normiert mit der jeweiligen Elementoberfläche definiert. Bereiche  $w^* > 0$  repräsentieren schwingungsanregende Regionen während in Gebieten  $w^* < 0$  ein negativer Arbeitseintrag und somit eine dämpfende Wirkung des Fluids auf die Struktur stattfindet. Den Darstellungen der unterschiedlichen Konfigurationen liegt jeweils eine identische Definition der maximalen und minimalen Werte der genutzten Farbskala zugrunde.

Bei der direkten Gegenüberstellung der druckseitigen Arbeitsverteilung in Abbildung 5.11 fällt auf, dass die Blend Geometrie in einem Bereich liegt, in welchem auf dem Nominalprofil ein deutlicher Dämpfungseintrag erfolgt. Die Auswirkungen sind des Weiteren keinesfalls auf den direkten Blendbereich beschränkt. Durch die Beeinflussung der Schaufeleigenform und des Strömungsfeldes sind auch im Schaufelspitzenbereich und entlang der Schaufelvorderkante verminderte Bereiche negativer aerodynamischer Arbeitskoeffizienten ersichtlich. Zusätzlich beeinträchtigt die Blendgeometrie durch ihre Positionierung auch einen ursprünglich stark anfachenden Bereich des Nominalprofils.

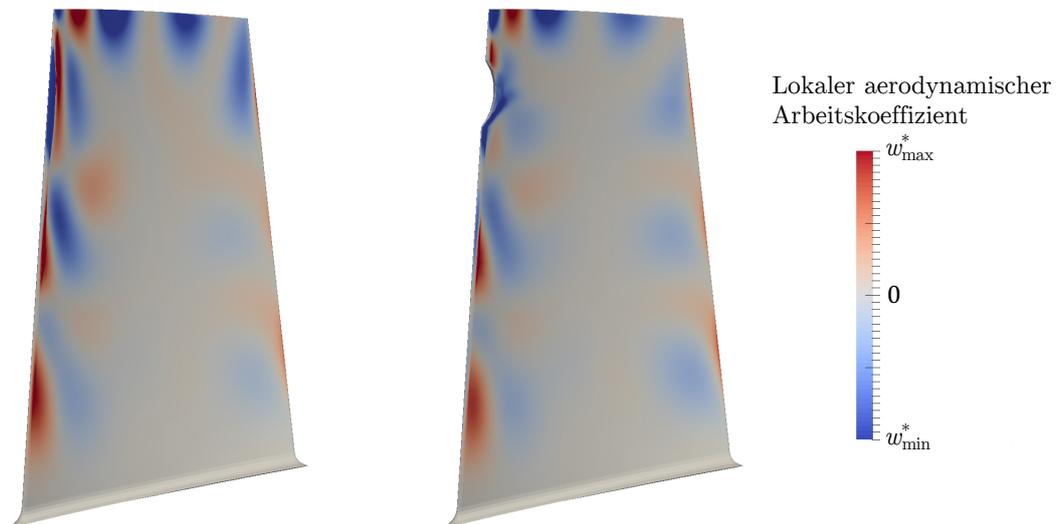


Abbildung 5.11: Vergleich der lokalen aerodynamischen Arbeitskoeffizienten für IBPA von  $-96^\circ$  auf der Druckseite

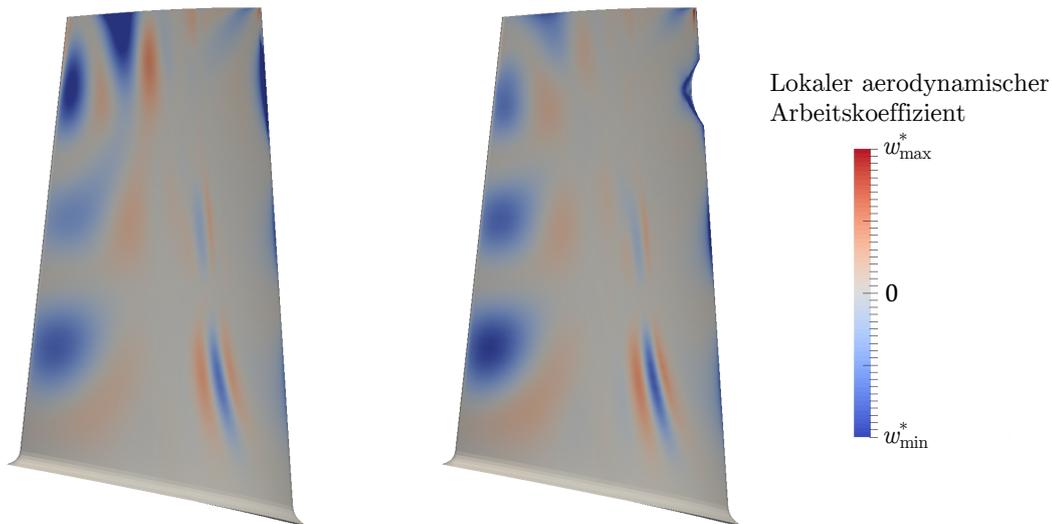


Abbildung 5.12: Vergleich der lokalen aerodynamischen Arbeitskoeffizienten für IBPA von  $-96^\circ$  auf der Saugseite

Integral betrachtet kann dieser Einfluss den verminderten Dämpfungseintrag in den unterschiedlichen Bereichen jedoch nicht ausgleichen. Eine Betrachtung der saugseitigen Arbeitskoeffizienten in Abbildung 5.12 führt zu ähnlichen Erkenntnissen. Bereiche starker Dämpfungseinträge auf der nominalen Schaufelgeometrie an der Vorderkante, entlang des Schaufelspitzenbereichs sowie im oberen Bereich der Schaufelhinterkante sind im Falle der geblendeten Geometrie deutlich reduziert. Die leichte Erhöhung des Dämpfungseintrags im Hinterkantenbereich des unteren Schaufeldrittels und auch eine Reduktion der anfachenden Anteile stromabwärts des Blends können in Summe die dämpfungsmindernden Effekte nicht kompensieren.

Eine Validierung der AIC Resultate erfolgt mittels zusätzlichen SPF Simulationen für die maximal gedämpften IBPA beider Konfigurationen. Im nominalen Setup entspricht dies der rückwärtslaufenden Welle mit dem Knotendurchmesser  $-17$ . Hierbei beträgt die Abweichung der ermittelten Dämpfungswerte  $1.7\%$ . Für die geblendete Geometrie weist die vorwärtslaufende Welle mit dem Knotendurchmesser  $21$  die höchste Dämpfung auf, wobei der SPF Wert lediglich um  $0.9\%$  von der AIC Kurve abweicht (Abbildung 5.10). Somit bestätigen beide Methoden zur Dämpfungsermittlung unabhängig voneinander den deutlichen Einfluss der Blend Reparatur auf das aeroelastische Verhalten der Komponente und zuvor auf Basis der AIC Resultate erarbeitete Schlussfolgerungen werden bekräftigt.

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Auffällig ist, dass die dargelegten Ergebnisse deutliche Abweichungen verglichen mit den theoretischen Überlegungen hinsichtlich einer isolierten modalen Massen Anpassung der Eigenform zeigen. Für den analysierten Testfall prognostiziert Gleichung (5.4) eine Reduktion der aerodynamischen Dämpfung um  $\approx 53\%$  wohingegen gemäß Abbildung 5.10 nur ein geringer Dämpfungsverlust mit der Geometrie Anpassung einhergeht. Ursächlich hierfür ist vor allem die Verletzung der Annahmen die der Herleitung von Gleichung (5.4) zu Grunde liegen. Gemäß den Abbildungen 5.6 & 5.7 hat die Blend Konfiguration einen deutlichen Einfluss auf das Strömungsfeld und somit die instationäre Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche. Des Weiteren geht aus Abbildung 5.2 hervor, dass trotz des hohen MAC-Wertes von 0.9 lokale Abweichungen der Eigenformen beispielsweise im Schaufelspitzenbereich auftreten. In Summe führen diese Effekte zu einem veränderten lokalen aerodynamischen Arbeitseintrag auf der Schaufeloberfläche, welcher integral betrachtet in einem deutlich geringen Dämpfungsverlust, verglichen mit der vereinfachten Abschätzung, resultiert.

Für eine vollumfängliche Betrachtung der Blending Einflüsse auf die aerodynamische Dämpfung der unterschiedlichen Konfigurationen müssen zudem weitere Einflussfaktoren berücksichtigt werden. Zunächst entspricht die vereinfachte symmetriebasierte Analysemethodik, welche virtuell einen geblendeten Vollkranz repräsentiert, nicht der gängigen Vorgehensweise für Blisk Reparaturen. In realen Anwendungsfällen ist lediglich eine geringe Schaufelanzahl derart beschädigt, dass ein Blend als Reparaturmaßnahme zum Einsatz kommt. Selbst wenn dieser Fall eintritt, beschränken sich die geometrischen Abweichungen häufig auf eine Einzelschaukel oder wenige direkt benachbarte Profile. Dennoch eignen sich die durchgeführten Analysen, um qualitative Eindrücke bezüglich der zu erwartenden Dämpfungsveränderung zu ermöglichen. Eine denkbare Herangehensweise zur genaueren Betrachtung der Blendauswirkungen auf die aerodynamische Dämpfung stellen AIC Rechnungen mit einer geblendeten Schaufel in der Umgebung von Nominalprofilen dar. Gemäß Abbildung 5.9 sind hierfür 5 bis 7 AIC Simulationen mit variierender Position der reparierten Geometrie an den Referenzpositionen  $-3$  bis  $+3$  notwendig. Diese Vorgehensweise hätte neben dem deutlich erhöhten numerischen Berechnungsaufwand den wesentlichen Nachteil, die zyklische Struktur der AIC Matrix zu zerstören. Des Weiteren hat eine Blendreparatur und die damit einhergehende Veränderung der modalen Parameter der betroffenen Schaufel direkte Auswirkungen auf die Eigenformen der Gesamtstruktur. Alle zyklisch symmetrischen Systemannahmen der

Abschnitte 2.1, 3.2 sowie 3.3 wären hinfällig und eine Formulierung des aeroelastischen Problems in schaufelindividuellen Koordinaten verbleibt als einzig sinnvolle Alternative. Die hieraus resultierenden Folgewirkungen sind vergleichbar mit Mistuning Einflüssen real gefertigter Blisken. Bei derartigen Konfigurationen, mit größeren Frequenzabweichungen zwischen den einzelnen Schaufeln, ist im Wesentlichen der Mittelwert der aerodynamischen Dämpfungskurve zur Ermittlung der Schwingungsamplituden relevant [48].

Hinsichtlich der Dämpfungsmittelwerte beider untersuchter Konfigurationen ist lediglich eine Abweichung von 2.6% festzustellen. Entsprechend Gleichung (3.33) ist in diesem Zusammenhang daher nicht von einer signifikanten Beeinflussung der erwarteten Schwingungsamplitude auszugehen. Diese mittelwertbezogene Vorgehensweise eignet sich ebenfalls zur Bestimmung der Auswirkungen im Falle von einer deutlichen Frequenzverstimmung einer einzelnen betroffenen Schaufel durch die Blendreparatur. In derartigen Konstellationen prägen sich stark lokalisierte Systemmoden aus, bei denen lediglich eine isolierte Schwingung der geometrisch abweichenden Schaufel stattfindet. Unter Berücksichtigung der physikalischen Bedeutung der einzelnen Einflusskoeffizienten entspricht die Kraftwirkung einer vibrierenden Einzelschaufel auf sich selbst dem Koeffizienten  $\underline{l}_0$ . Für einen lokalisierten Systemmode, mit einer isoliert schwingenden Einzelschaufel, ist folgerichtig der Dämpfungswert relevant, welcher sich aus einer alleinigen Betrachtung des 0-ten AIC ableiten lässt. Eine Analyse der Zusammenhänge (3.20) & (3.25) führt ebenso zu dem Ergebnis, dass eine isolierte Berücksichtigung des Schaufeleinflusses auf sich selbst äquivalent zum Mittelwert der gesamten Dämpfungskurve ist. Somit stellt eine quantitative Bewertung der Dämpfungsänderung des geblendeten Testfalls basierend auf der Mittelwertsverschiebung der aerodynamischen Dämpfungskurve durchaus eine valide Herangehensweise zur vereinfachten Abschätzung von Blendkonsequenzen dar. Verglichen mit dem maximal gedämpften Knotendurchmesser der Nominalkonfiguration liefert die Mittelwertbetrachtung des geblendeten Testfalls einen Dämpfungsverlust von maximal  $\approx 11.5\%$ .

### 5.3 Erzwungenes Schwingungsverhalten

Neben der Dämpfungsermittlung ist zur Vorhersage der erwarteten Schwingungsamplitude im Falle einer Zwangserregung die Bestimmung der aerodynamischen Anregungskraft unumgänglich. Zusätzlich zum bisher betrachteten Blend Testfall aus dem vorangegangenen Abschnitt sollen im Folgenden zwei weitere Blendkonfigurationen berücksichtigt werden.

Die radiale Positionierung und Ausdehnung aller Blends bleibt hierbei identisch, um die Netztopologie unverändert beizubehalten. Als Variationsgrößen dienen die Blend-Tiefen und Radien, um gezielt spezifische Breiten zu Tiefen Verhältnisse ( $w_b/d_b$ ) für die verschiedenen Konfigurationen einstellen zu können. Tabelle 5.1 fasst die grundlegenden Kenngrößen aller Testfälle zusammen. Die angegebenen Frequenzabweichungen  $\Delta f = \frac{f_b}{f_n} - 1$  und Massenparameter  $\mu_m$  beziehen sich hierbei auf die Referenzwerte der Nominalkonfiguration. Des Weiteren zeigt Abbildung 5.13 eine Überlagerung der jeweiligen Konfiguration (grün B1, blau B2, rot B3) mit der Nominalgeometrie (grau) zur Verdeutlichung der geometrischen Abweichungen im Blendbereich.

Ausgehend vom allgemeinsten Fall einer Vollmodellsimulation mit ausreichend großem Abstand zwischen den geblendeten Schaufeln erfolgt zunächst die Ermittlung der aerodynamischen Anregung auf Einzelschaufelbasis. Nachfolgend soll ein möglicher

Konfiguration	$d_b[mm]$	$w_b/d_b[-]$	$\Delta f[\%]$	$\mu_m[-]$
B1	2.0	4.0	2.76	1.42
B2	1.6	5.0	2.35	1.35
B3	1.0	8.0	1.58	1.21

Tabelle 5.1: Überblick der analysierten Blendkonfigurationen



Abbildung 5.13: Darstellung der drei unterschiedlichen Blendkonfigurationen

Rekonstruktionsansatz zur Reduktion der Simulationsaufwände für beliebig angeordnete Blendkonfigurationen untersucht werden, um abschließend einen weiteren Ansatz zur Lastermittlung auf Einzelschaufel-Mehrblattreihen-Basis validieren zu können.

#### 5.3.1 Anregung nominaler und geblendeter Schaufeln

Um die Anzahl der notwendigen Simulationen sowie den numerischen Gesamtaufwand zu minimieren, basiert die Analyse der schaufelindividuellen aerodynamischen Anregung auf einer einzelnen Vollmodellrechnung (Abbildung 5.14). Das Setup umfasst neben der Blattreihe von Interesse sowohl die stromaufwärts als auch stromabwärts benachbarten Stator-Reihen. Den Hauptanregungsmechanismus der betrachteten Eigenform stellt die Ausbreitung der Nachlaufstörung des stromaufwärts positionierten Stators dar. Zudem ist rechts in Abbildung 5.14 die Anordnung der unterschiedlichen Blendkonfigurationen farblich gekennzeichnet. Zwischen den geblendeten Schaufeln verbleiben jeweils 19 nominale Profile, um eine gegenseitige Beeinflussung der modifizierten Strömungsfelder auszuschließen.

Zur Gewährleistung einer ausreichenden Konvergenz der Resultate entspricht die Simulationsdauer zwei kompletten Rotorumdrehungen im resonanten Betriebspunkt (98.5%

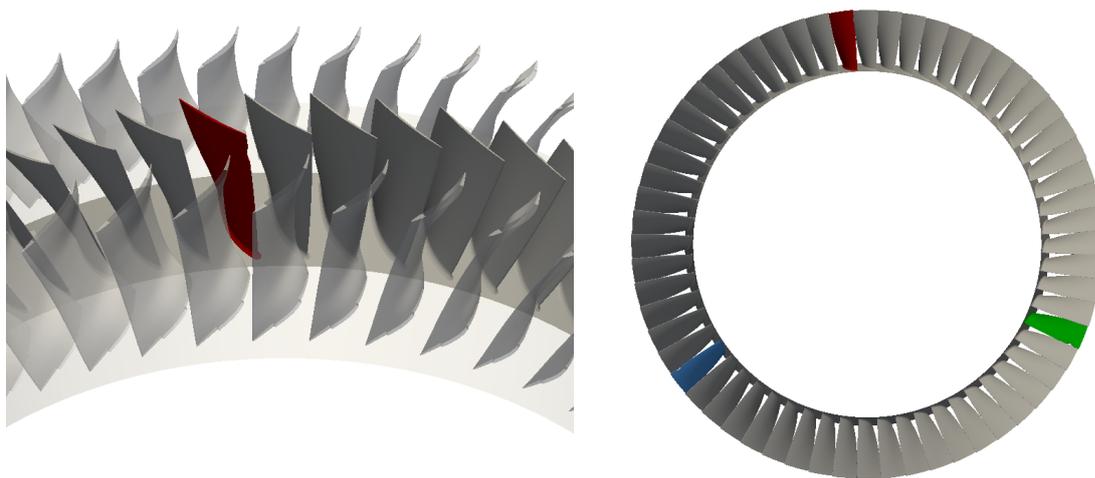


Abbildung 5.14: Partielle Darstellung der CFD Domäne und Anordnung der isolierten Blendkonfigurationen im Vollmodell

mechanische Wellendrehzahl). Eine Rotorumdrehung ist hierbei mit 6400 Zeitschritten aufgelöst, wobei die Abtastung der Blattpassierfrequenzen von den benachbarten Statorreihen mit 100 respektive 128 Zeitschritten erfolgt. Aufgrund der verwendeten Wandfunktionen in Kombination mit dem eingesetzten Spalart-Allmaras Turbulenzmodell sind  $y^+$  Werte in der Größenordnung von 20 als akzeptabler Kompromiss zwischen Netzfeinheit und Ergebnisgüte einzustufen. Zudem beträgt die Reynoldszahl innerhalb der angeregten Rotorblattreihe  $Re \approx 1 \cdot 10^6$ , weshalb von einer verhältnismäßig geringen Grenzschichtdicke auszugehen ist.

Um die instationäre Kraftwirkung auf die Beschaukelung im Nachgang der Simulation für beliebige Eigenformen bestimmen zu können, ist es notwendig für jeden Zeitschritt die Druckverteilung auf den Schaufeloberflächen aufzuzeichnen. Eine Projektion der instationären Druckverläufe auf die zu analysierende Eigenform gemäß Gleichung (3.18) ermöglicht im Anschluss die Berechnung des modalen Kraftsignals für jede Schaufel der Simulationsdomäne. Mittels DFT der auf diese Weise generierten Zeitverläufe im eingeschwungenen Simulationszustand lassen sich abschließend die schaufelindividuellen Anregungsamplituden für unterschiedliche Erregerordnungen ermitteln. Eine Validierung der DFT Implementierung ist anhand eines Vergleichs des modalen Eingangskraftsignals sowie dessen Rekonstruktion möglich und in Abbildung 5.15 links dargestellt.

Resultierend aus der Forderung nach der Frequenzgleichheit des aerodynamischen Erregersignals mit der Eigenfrequenz der Struktur (Definition Resonanzfall) ist für die Vorhersage der Schaufelauslenkung lediglich die Kraftamplitude der im Betriebspunkt

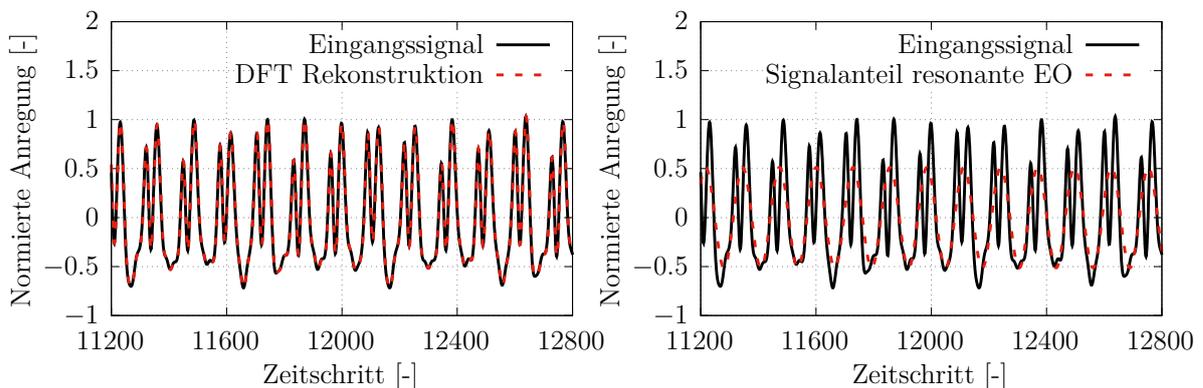


Abbildung 5.15: Validierung der DFT Implementierung sowie Darstellung des Signalanteils der resonanten Erregerordnung am Gesamtsignal

resonanten Erregerordnung von Relevanz. Ein Vergleich dieses Signalanteils mit dem Gesamtsignal ist Abbildung 5.15 rechts entnehmbar.

Mittels der dargelegten Vorgehensweise lassen sich nun die schaufelindividuellen Erregeramplituden der resonanten EO für die untersuchte Eigenform (Mode 11, Abbildung 5.2) ermitteln. Die verwendete Farbkodierung in Abbildung 5.16 entspricht hierbei den zuvor definierten unterschiedlichen Beispielblends. Auffällig beim Vergleich der Resultate ist die deutliche Überhöhung der Erregerkraft auf den geblendeten Schaufeln verglichen mit deren nominalen Nachbarschaufeln. Mit sinkendem  $w_b/d_b$  Verhältnis und damit einhergehend einem stärkeren Einfluss der Blendreparatur auf die Eigenform steigt die aerodynamische Anregung der Schaufel stark an. Für die Konfiguration B1 führt dies zu einer Überhöhung der Erregerkraft um den Faktor 2.23 verglichen mit dem gemittelten Niveau aller Referenzschaufeln. Je nach Blendausprägung hat die Schaufelmodifikation somit potentiell eine starke Auswirkung auf die Lokalisierung der aerodynamischen Anregung im aeroelastischen Gesamtsystem. Die häufig gemachte Annahme kleiner Auswirkungen von geringen Eigenformmodifikationen auf die aerodynamische Anregung der betroffenen Schaufel ist somit für den untersuchten Fall widerlegt. Derartige Einflüsse sind für die korrekte Vorhersage der Schwingungsamplituden in aeroelastischen Systemen keinesfalls vernachlässigbar.

Entscheidend für die Akzeptanz einer Blendreparatur am realen Bauteil ist jedoch die strukturelle Integrität der Komponente. Hierfür ist wiederum die physikalische Schwingungsamplitude und die daraus folgende Bauteilbelastung der reparierten Schaufel

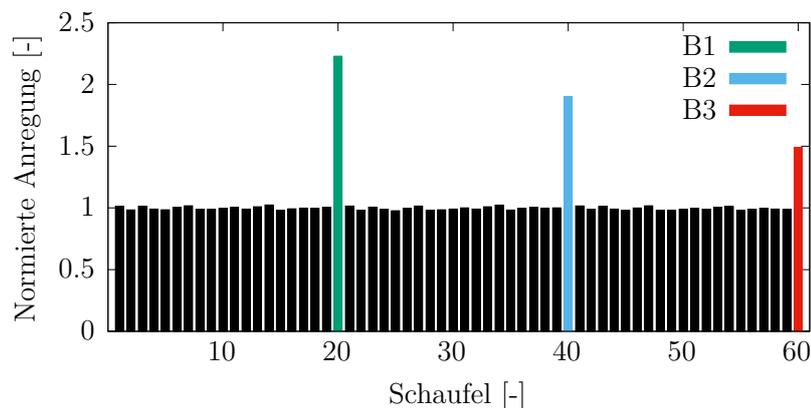


Abbildung 5.16: Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration

ausschlaggebend. Unter Vernachlässigung von strukturellen Verstimmungseffekten lässt sich auf Basis des Zusammenhangs (3.33) und der Erkenntnisse aus Abschnitt 5.2 die Auswirkung der Anregungsüberhöhung auf die Schwingungsamplitude der reparierten Schaufel vereinfacht abschätzen. Es gilt

$$\frac{\hat{x}_b}{\hat{x}_n} = \frac{\hat{\Phi}_b \cdot |\hat{q}_b|}{\hat{\Phi}_n \cdot |\hat{q}_n|} = \frac{1}{\mu_m \nu_f^2} \frac{D_n |\hat{f}_b|}{D_b |\hat{f}_n|}, \quad (5.5)$$

wobei  $\mu_m$ ,  $\nu_f$  weiterhin dem dimensionslosen Massenparameter und dem Eigenfrequenzverhältnis entsprechen. Größen mit dem Index  $b$  referenzieren die geblendete Schaufel, während Nominalwerte mit dem Index  $n$  gekennzeichnet sind. Im Fall der Blendkonfiguration B1 folgt

$$\frac{\hat{x}_b}{\hat{x}_n} = \frac{1}{1.42 \cdot 1.0276^2} \cdot 0.9505 \cdot 2.23 = 1.414, \quad (5.6)$$

also eine 41.4% höhere Schwingungsamplitude der reparierten Schaufel verglichen mit der Nominalkonfiguration. Der eingesetzte Quotient der Dämpfungswerte resultiert aus dem Vergleich des angeregten IBPA im Nominalfall und des Mittelwertes der Dämpfungskurve für die geblendete Schaufel (Argumentation hierzu in Abschnitt 5.2). Neben dieser deutlichen Überhöhung der Schwingungsamplitude darf zudem die durch den Blend verursachte Reduktion des zulässigen  $af$ -Wertes ( $-45.2\%$ , Abbildung 5.3) nicht außer Acht gelassen werden. Eine derartige Kombination zweier negativer Aspekte hinsichtlich des Auslastungsniveaus eines Bauteils darf keinesfalls die Betriebssicherheit der betroffenen Komponente gefährden. Die detaillierte Analyse solcher interdisziplinären Wechselwirkungen während der Limit Definitionen ist somit für einen sicheren Flottenbetrieb unumgänglich.

### 5.3.2 Rekonstruktionsansatz für unterschiedliche Blendanordnungen

Aufgrund des hohen numerischen Aufwands zur Bewertung einzelner Blendkonfigurationen stellt sich die Frage nach einer geeigneten Abschätzung der Blendauswirkungen auf Basis weniger Datenpunkte.

Die Möglichkeit eines derartigen Rekonstruktionsansatzes wird im Folgenden anhand des in Abbildung 5.17 dargestellten Validierungsfalls überprüft. Als Ausgangspunkt dienen erneut die drei zuvor definierten Beispielblends, welche hierzu in einer variablen Anordnung verteilt sind. An den Rändern des modellierten Halbkranzes kommen zudem periodische Randbedingungen zur Reduktion der Simulationsdauer zum Einsatz.

Eine Auswertung der schaufelindividuellen Erregeramplituden analog zu Abschnitt 5.3.1 führt zu der in Abbildung 5.18 dargestellten Verteilung. Aus den in Abbildung 5.16 visualisierten Daten geht zudem hervor, dass die Auswirkungen der Blendreparaturen im betrachteten Fall ausschließlich auf die betroffenen Schaufeln begrenzt sind. Direkte Einflüsse der Blendkonfigurationen auf benachbarte Passagen erscheinen vernachlässigbar gering. Unter diesen Voraussetzungen bietet sich ein Rekonstruktionsansatz auf Basis einer linearen Superposition der Erwartungswerte für die Erregeramplituden

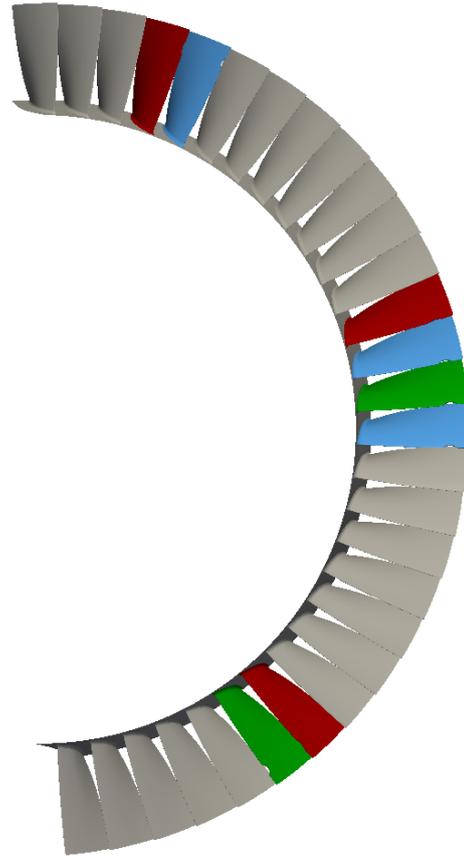


Abbildung 5.17: Simulationsdomäne des Validierungsfalls (variable Blendanordnung)

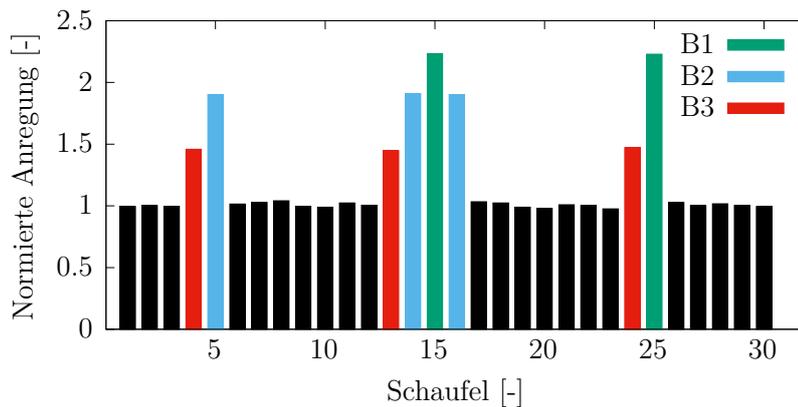


Abbildung 5.18: Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln des Validierungsfalls

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

des unverstimmten Systems  $\hat{f}_{sym}^d$  sowie Delta-Vektoren  $\Delta\hat{f}_{j,B_k}^d$  für die jeweilige Blendkonfiguration  $B_k$  auf der entsprechenden Schaufel  $j$  an.

$$\hat{f}_j^d = \hat{f}_{sym}^d + \Delta\hat{f}_{j,B_k}^d \quad (5.7)$$

Aus Gleichung (5.7) folgt die Berechnungsvorschrift für die Delta-Vektoren der jeweiligen Blendkonfiguration als Differenz der ermittelten schaufelindividuellen Erregeramplitude  $\hat{f}_j^d$  sowie des Erwartungswertes des unverstimmten Systems  $\hat{f}_{sym}^d$ . Bei den dargestellten Ergebnissen wird als Erwartungswert das arithmetische Mittel aller ungeblendeten Schaufeln genutzt. Die resultierenden Delta-Vektoren lassen sich nun auf Basis der CFD-Simulation der isolierten Blendkonfigurationen aus dem vorherigen Abschnitt ermitteln. Sowohl die Delta-Werte als auch das Resultat des linearen Superpositionsansatzes zur Vorhersage der schaufelindividuellen Erregeramplituden sind Abbildung 5.19 entnehmbar.

Gemäß der rekonstruierten Verteilung der Erregeramplituden (Abbildung 5.19 rechts) eignet sich der gewählte Ansatz sehr gut zur Abschätzung der Blendauswirkungen auf die schaufelindividuelle Anregung. Für detaillierte Analysen verstimmter Systeme ist neben den vorliegenden Amplitudeninformationen jedoch ebenfalls die Phasenlage der aerodynamischen Anregung von großer Relevanz. Die in Abschnitt 2.1 & 3.2 für zyklische Systeme beschriebenen Grundlagen ermöglichen hierbei ebenfalls eine Vorhersage der Erwartungswerte für die schaufelindividuelle Phasenlage. Somit ist ein linearer

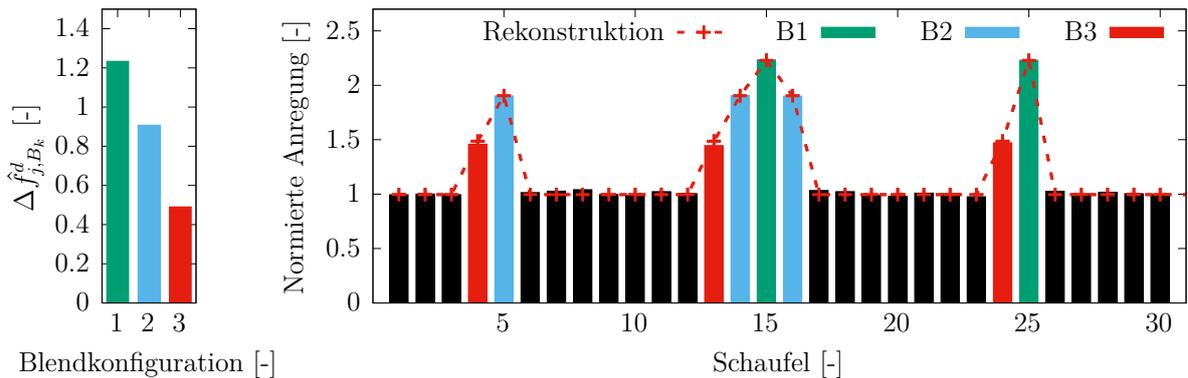


Abbildung 5.19: Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte normierte Amplitudenverteilung

Superpositionsansatz analog zu Gleichung (5.7) auch für die Phasenlage überprüfbar. Basierend auf einer Nominalschaukel mit möglichst großer Entfernung von den einzelnen Blendkonfigurationen sowie der Kenntnis des im symmetrischen System angeregten diskreten Zwischenphasenwinkels  $\beta_n$  lässt sich der Nominalzustand von Schaukel 1 des idealen, zyklisch symmetrischen Systems bestimmen. Anschließend ergeben sich die schaufelindividuellen Phasenlagen  $\beta_j$  als

$$\beta_j = \beta_1 + j\beta_n + \Delta\beta_{j,B_k}, \quad (5.8)$$

wobei die Delta-Vektoren  $\Delta\beta_{j,B_k}$  lediglich für die Blendkonfigurationen relevant sind. Ergänzend zu den Delta-Vektoren sowie dem Resultat des Rekonstruktionsansatzes ist der Erwartungswert des zyklisch symmetrischen Systems  $\beta_j = \beta_1 + j\beta_n$  als gepunktete Referenzlinie in Abbildung 5.20 dargestellt. Auch im Fall der schaufelindividuellen Phasenlage sind die Abweichungen zwischen dem linearen Superpositionsansatz sowie den CFD-Resultaten für die variable Blendkonfiguration sehr gering. Der vorgeschlagene Rekonstruktionsansatz ermöglicht somit auf Basis einer Referenzsimulation von unterschiedlichen isolierten Blends die Rekonstruktion der schaufelindividuellen Erregeramplitude sowie deren Phasenlage für beliebige Permutationen dieser Konfigurationen.

Zusätzlich zu dem real auftretenden Resonanzzustand der betrachteten Mode 11 (Abbildung 5.2) im analysierten Betriebspunkt ermöglichen die vorliegenden Simulationsergebnisse auch die Auswertung „pseudoresonanter“ Zustände anderer Modefamilien. Dieses rein numerische Experiment nutzt die Zeitreihen der instationären Druckdaten auf der

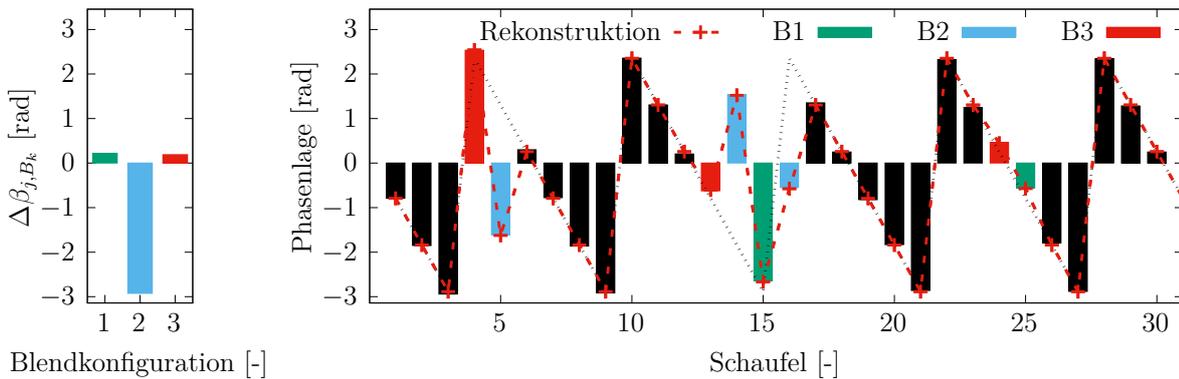


Abbildung 5.20: Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte schaufelindividuelle Phasenlage der aerodynamischen Anregung

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

Schaufeloberfläche und ermöglicht die Auswertung der modalen Kraftsignale für unterschiedliche Eigenformen, deren Eigenfrequenz willkürlich auf die entsprechend angeregte Resonanzfrequenz des aeroelastischen Systems angepasst ist. Auf diese Weise lassen sich, neben der bereits analysierten höheren Mode des Validierungsfalls, numerisch ebenso die potentiellen Auswirkungen der Blendreparaturen auf Fundamentalmoden untersuchen. Für den 1. Biegemode (1F) sowie den 1. Torsionsmode (1T) der Struktur sind die grundlegenden Abweichungen der modalen Parameter von der Nominalgeometrie in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Verglichen mit den Ausgangswerten des Validierungsfalls sind sowohl die Verschiebungen der Eigenfrequenzen als auch die Variationen der modalen Massenparameter äußerst gering. Alle Folgewirkungen bezüglich der modalen Kraftanregung des aeroelastischen Systems sind somit nahezu vollständig dem Einfluss der veränderten instationären Druckverteilung durch die Blendkonfigurationen zuzuschreiben. Analog zum bisherigen Vorgehen dient die Referenzrechnung mit der isolierten Blendkonfiguration als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Delta-Vektoren. Für die beiden ausgewählten Fundamentalmoden sind die korrespondierenden schaufelindividuellen Erregeramplituden in den Abbildungen 5.21 & 5.22 dargestellt.

Auffällig ist hierbei, dass die Abweichungen der geblendeten Schaufeln für die betrachteten Fundamentalmoden deutlich geringer ausfallen (maximal  $-8.5[\%]$ ) als bei der ursprünglichen Mode des Validierungsfalls (maximal  $+123[\%]$ ). Zudem kommt es nicht zu einer Überhöhung der Anregung verglichen mit den Nominalschaufeln, sondern es tritt ein gegenteiliger Effekt auf. Die geblendeten Schaufeln selbst erfahren eine geringere modale Anregung. Des Weiteren sind auch deutliche Einflüsse der veränderten Strömungsfelder auf die benachbarten Schaufelpassagen sichtbar. Im Falle der 1. Biegemode liegt beispielsweise die erste saugseitig benachbarte Schaufel ebenfalls unterhalb des Anregungsniveaus der Nominalschaufeln, während im Falle der 1. Torsionsmode die erste

Konfiguration	$\Delta f_{1F}[\%]$	$\mu_{m_{1F}}[-]$	$\Delta f_{1T}[\%]$	$\mu_{m_{1T}}[-]$
<i>B1</i>	0.37	0.996	0.89	0.978
<i>B2</i>	0.28	0.997	0.69	0.984
<i>B3</i>	0.16	0.998	0.40	0.991

Tabelle 5.2: Zusammenfassung der modalen Parameter der Blendkonfigurationen für Fundamentalmoden

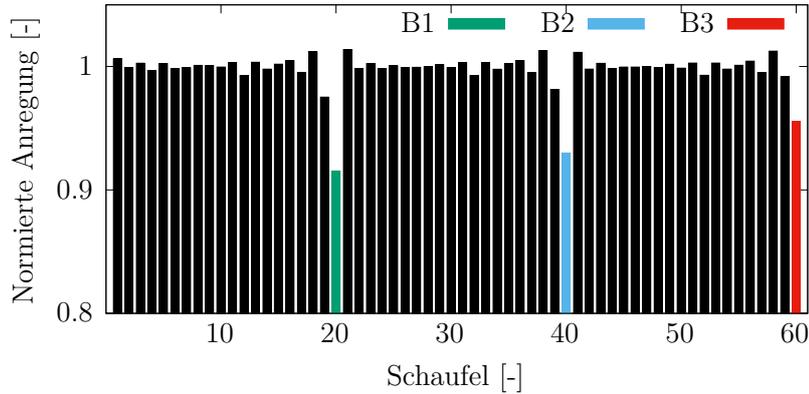


Abbildung 5.21: Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration - 1. Biegemode

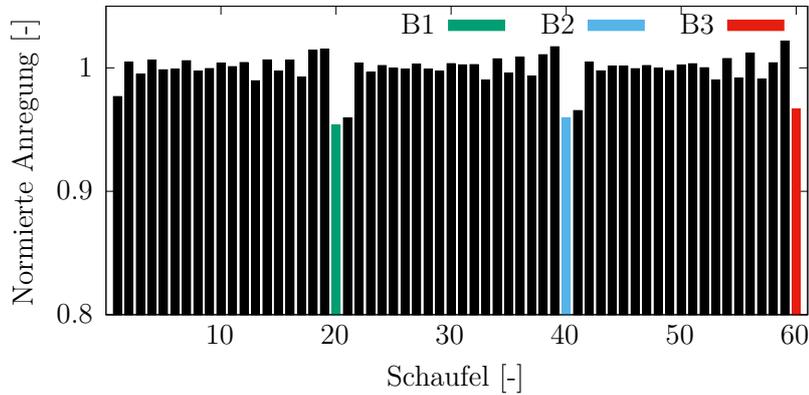


Abbildung 5.22: Schaufelindividuelle Erregeramplitude aller Einzelschaufeln der isolierten Blendkonfiguration - 1. Torsionsmode

druckseitig benachbarte Nominalschaufel ein ähnlich vermindertes Anregungsniveau wie die geblendete Schaufel selbst aufweist. Interessanterweise zeigt für den 1F Mode die 2. saugseitig benachbarte Schaufel (-2) und die erste druckseitig benachbarte Schaufel (+1) eine leichte Überhöhung der aerodynamischen Anregung. Für den 1T Mode wiederum, zeigen die saugseitig benachbarten Nominalprofile (-1 und -2) eine leichte Überhöhung verglichen mit dem zyklisch symmetrischen Erwartungswert des Systems.

Auch die Bestimmung der Delta-Vektoren erfolgt auf Grundlage der Simulationsergebnisse der isolierten Blendkonfiguration. Das darauf aufbauende Resultat des bisher genutzten linearen Superpositionsansatzes für die variable Blendanordnung bezüglich des 1. Biegemodes ist in Abbildung 5.23 visualisiert. Weiterhin deckt die rekonstruierte Am-

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

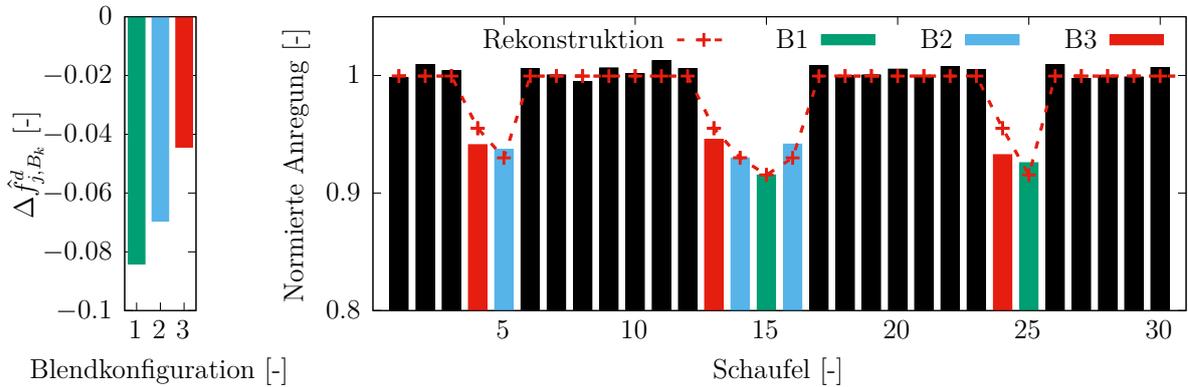


Abbildung 5.23: Delta Vektoren für Blendkonfigurationen sowie rekonstruierte normierte Amplitudenverteilung - 1. Biegemode

plitudenverteilung die grundlegenden Charakteristika des betrachteten Validierungsfalls ab. Bei einer detaillierten Betrachtung zeigen sich jedoch Abweichungen der normierten Anregungsamplituden. Diese treten speziell an äußeren Schaufeln, in Bereichen in denen mehrere geblendete Schaufeln direkt nebeneinander liegen, auf. Hierbei über- bzw. unterschätzt der Rekonstruktionsansatz den Blendeinfluss auf die aerodynamische Anregung der jeweiligen Profile. Die beschriebenen Effekte sind in Abbildung 5.23 auf den Schaufeln 4 und 5, 13 und 16 sowie 24 und 25 gut erkennbar.

Ursächlich für diese deutlichere Abweichung der Rekonstruktionsgüte, verglichen mit dem zuvor betrachteten höheren Mode des Validierungsfalls, sind mehrere Einflussfaktoren. Zum einen sind die relativen Anregungsüberhöhungen für den nun betrachteten 1. Biegemode deutlich geringer als zuvor und somit auch geringere Abweichungen in der gewählten Darstellungsform einfacher zu identifizieren. Zum anderen beschränkt sich der Einflussbereich der Blendreparatur nicht wie in Abbildung 5.16 auf die Passage der geblendeten Schaufel selbst, sondern es existieren deutliche passagenübergreifende Interaktionen der reparierten Profile mit deren Nachbarn (Abbildung 5.21). Um diese geänderten Rahmenbedingungen zu berücksichtigen, lässt sich der bisher auf die geblendete Schaufel selbst beschränkte Delta-Vektor auf mehrere Nachbarprofile erweitern. Die hieraus folgenden Delta-Vektoren unter Berücksichtigung von vier druck- bzw. saugseitig benachbarten Schaufeln sowie das Resultat des erweiterten Superpositionsansatzes sind in Abbildung 5.24 dargestellt.

Verglichen mit der bisherigen Vorgehensweise ist durch die Erweiterung der Delta-

### 5.3 Erzwungenes Schwingungsverhalten

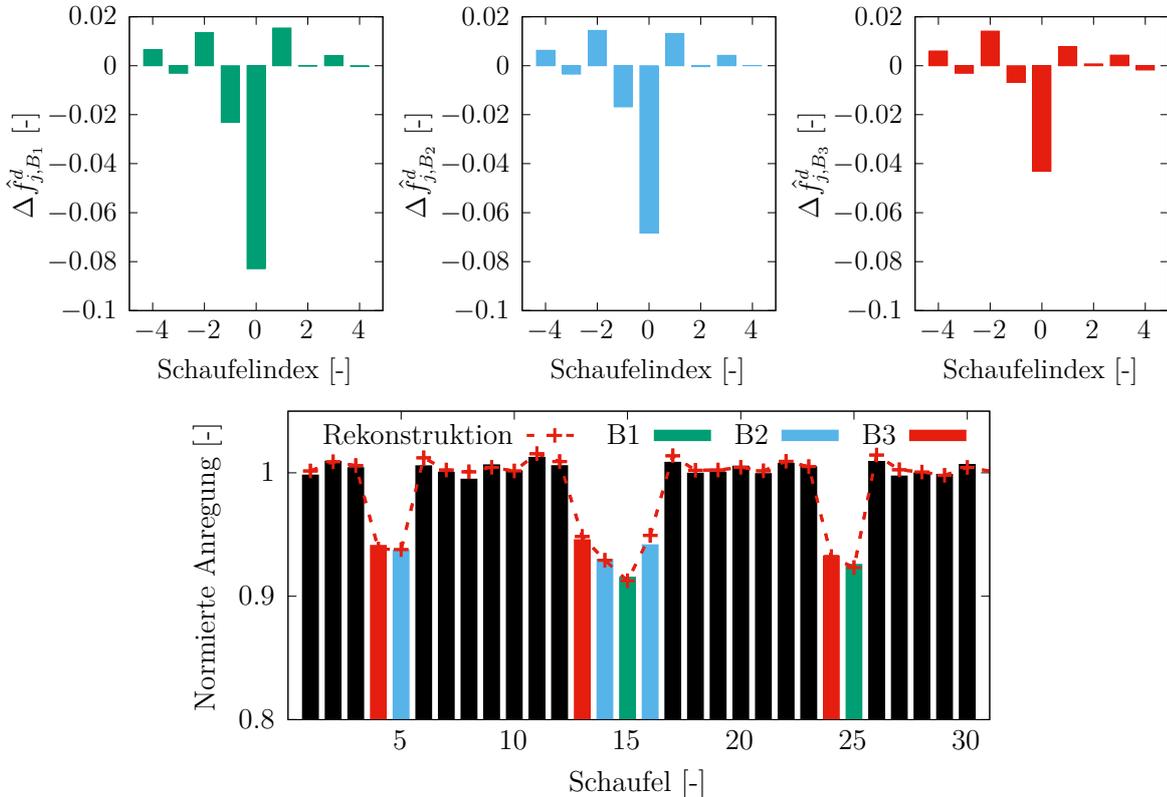


Abbildung 5.24: Delta-Vektoren und Rekonstruktion der schaufelindividuellen Erregeramplituden unter Berücksichtigung von vier druck- und saugseitig benachbarten Profilen - 1. Biegemode

Vektoren eine deutliche Verbesserung der Rekonstruktionsgüte in den zuvor kritischen Bereichen erzielbar. Die verbleibenden Abweichungen, wie beispielsweise auf Schaufel 16, sind hierbei deutlich geringer als im initialen Rekonstruktionsversuch. Eine äquivalente Anwendung auf den pseudoresonanten 1. Torsionsmode führt zu den in Abbildung 5.25 zusammengefassten Resultaten für die Delta-Vektoren und die Rekonstruktion der schaufelindividuellen Amplitudenabwicklung. Auch hierbei treten lediglich lokal sehr geringe Abweichungen verglichen mit dem Validierungsfall für die variable Blendanordnung auf, die in Anbetracht der enormen Ressourcenersparnis als vollkommen akzeptabel einzustufen sind.

Zusammenfassend liefert der vorgestellte Rekonstruktionsansatz auf Basis einer CFD Simulation der isolierten Blendkonfigurationen die Möglichkeit, schaufelindividuelle Erregeramplituden sowie Phasenlagen für beliebige Blendanordnungen vorherzusagen.

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

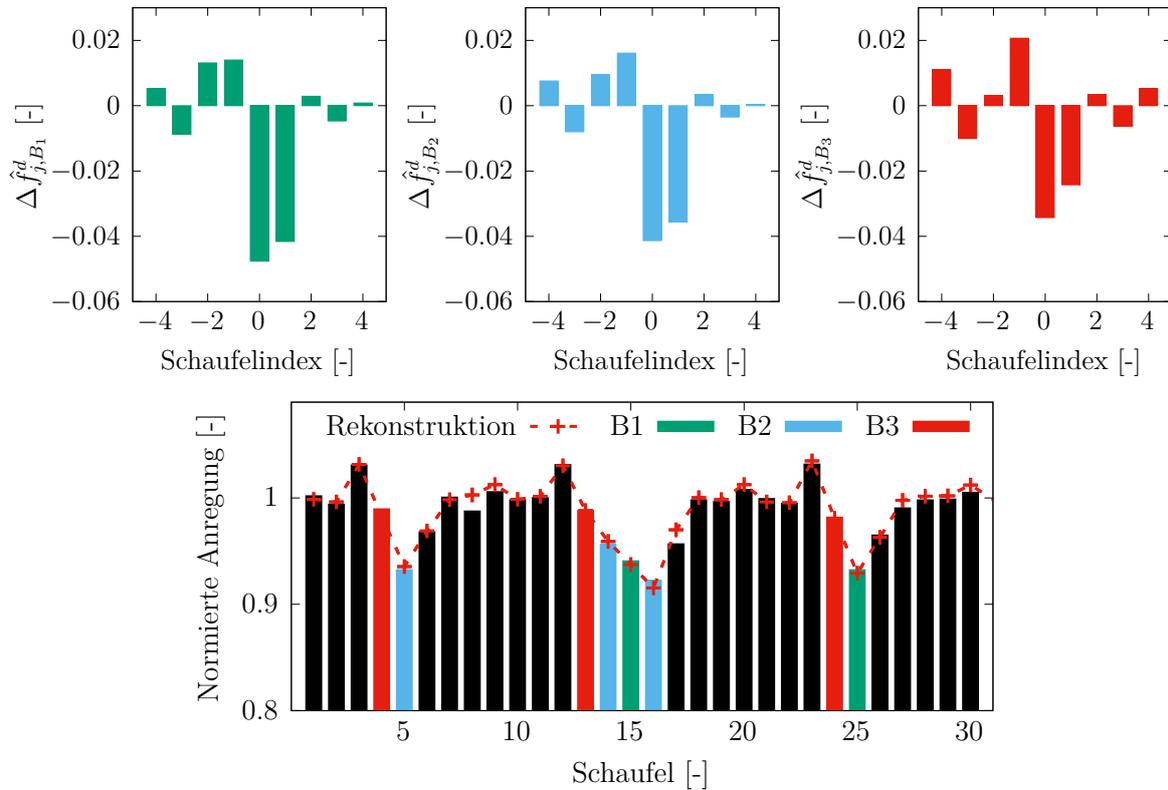


Abbildung 5.25: Delta-Vektoren und Rekonstruktion der schaufelindividuellen Erregeramplituden unter Berücksichtigung von vier druck- und saugseitig benachbarten Profilen - 1. Torsionsmode

Die Methode nutzt hierfür die zyklisch symmetrische Theorie zur Bestimmung von Delta-Vektoren der analysierten Blendkonfigurationen. Hierbei liefert der lineare Superpositionsansatz unter Berücksichtigung einer gewissen Anzahl an saug- und druckseitig benachbarten Profilen überzeugende Ergebnisse (speziell in Bezug auf die Ressourceneffizienz verglichen mit den sonst für die Bewertung notwendigen CFD Simulationen). Diese Vorgehensweise ermöglicht die Abdeckung vieler der im Triebwerksleben auftretenden Reparaturanfragen bereits durch einmalig durchzuführende Simulationen in der Auslegungsphase. Trotz allem ist der initiale numerische Aufwand zur Beurteilung der Blendauswirkungen sehr hoch und es werden stets Fälle auftreten, die nicht durch zuvor simulierte Blendkonfigurationen abgedeckt sind.

### 5.3.3 Vereinfachte Abschätzung (SPMR)

In Abschnitt 5.3.2 gelang es, die Auswirkungen beliebiger Blendanordnungen auf Basis einer zuvor einmalig durchgeführten CFD Simulation der permutierten isolierten Blendkonfigurationen vorherzusagen. Zur Bewertung kurzfristiger Feldanfragen bzw. speziellerer Blendkonfigurationen ist diese Vorgehensweise jedoch zu ressourcen- und zeitaufwändig. Daher wird im Folgenden die Einzelpassagen Mehrblattreihenmethode auf ihre Eignung zur konservativen Abschätzung der Blendauswirkungen analysiert. Da die Methodik, wie in Abschnitt 3.4.2 vorgestellt, auf gewissen Symmetrieanahmen basiert, liegt bei der Bewertung mittels SPMR-Ansatz virtuell stets ein geblendeter Vollkranz der betrachteten Blattreihe vor. Anhand der in Abschnitt 5.3.2 erarbeiteten Resultate für den Validierungsfall mit variabler Blendanordnung lässt sich nun die Frage nach dem Konservatismus des SPMR Ansatzes eindeutig quantifizieren. Als Beispielfall für die detaillierten Analysen dient die zuvor definierte Blendkonfiguration „B1“.

Abbildung 5.26 zeigt die genutzte CFD Domäne inklusive der interpolierten Eigenform von Interesse auf der geblendeten Schaufelreihe. Analog zur in Abschnitt 5.3.1 definierten Vorgehensweise erfolgt die Speicherung der Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche für jeden Zeitschritt der Simulation. Eine anschließende Projektion der instationären Druckverläufe auf die untersuchte Eigenform ermöglicht im Post-Processing die Berechnung des mode-abhängigen modalen Kraftsignals. Mittels DFT der auf diese Weise

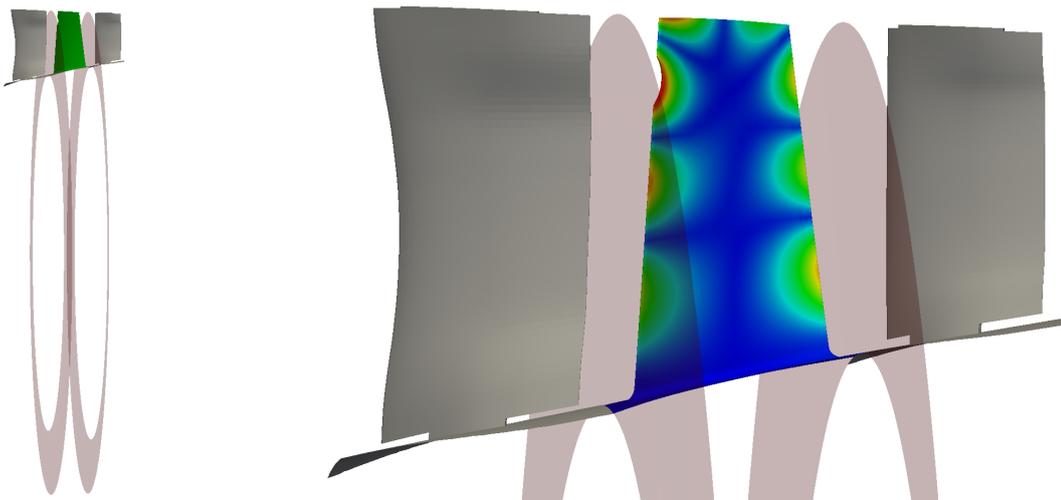


Abbildung 5.26: Darstellung der SPMR CFD Domäne und interpolierter Eigenform

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

generierten Signale lassen sich die schaufelindividuellen Anregungsamplituden relevanter EO im eingeschwungenen Systemzustand ermitteln. Im Gegensatz zu den bisher diskutierten Resultaten liefert die SPMR Methode jedoch keine Varianz der Werte über mehrere Schaufeln einer Blattreihe hinweg, sondern beschränkt sich auf eine einzelne Amplitudeninformation für die geblendete Schaufel (Symmetrieannahme).

Eine Gegenüberstellung der schaufelindividuellen Erregeramplituden des betrachteten Validierungsfalls und der SPMR Vorhersage ist Abbildung 5.27 entnehmbar. Als relevanter Vergleichswert dient lediglich die Amplitudeninformation für die Schaufeln der Konfiguration „B1“. Hierfür liefert der vorgestellte SPMR Ansatz eine Vorhersage, welche sehr gut mit der zuvor durchgeführten CFD Simulation des Halbkranzes der betrachteten Blattreihe korreliert. Im Falle der in Abbildung 5.26 dargestellten Eigenform scheint die SPMR Methode somit eine geeignete Alternative zur Abschätzung der Amplitudenveränderung in Folge der Schaufelreparatur darzustellen.

Auch für die zuvor betrachteten rein numerischen Untersuchungsfälle der „pseudo-resonanten“ Fundamentalmoden lassen sich analoge Vergleiche der normierten Anregungsamplituden durchführen. Die Resultate sind in den Abbildungen 5.28 & 5.29 zusammengefasst. Aus beiden Darstellungen geht hervor, dass die SPMR Methode den qualitativen Trend einer reduzierten Anregung der geblendeten Schaufel korrekt abbildet. Quantitativ gibt es jedoch gewisse Abweichungen verglichen mit dem vorhergesagten Anregungsniveau des CFD Validierungsfalls. Diese Abweichungen sind partiell auf die physikalischen Unterschiede zwischen den Simulationen zurückzuführen. Im Gegensatz

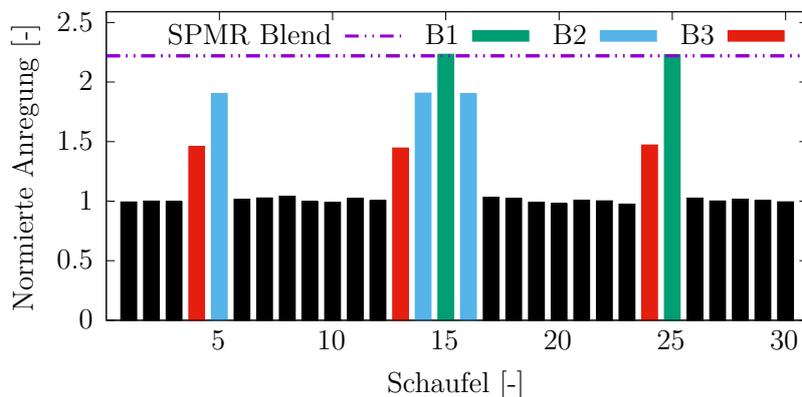


Abbildung 5.27: Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des Validierungsfalls mit der SPMR Vorhersage

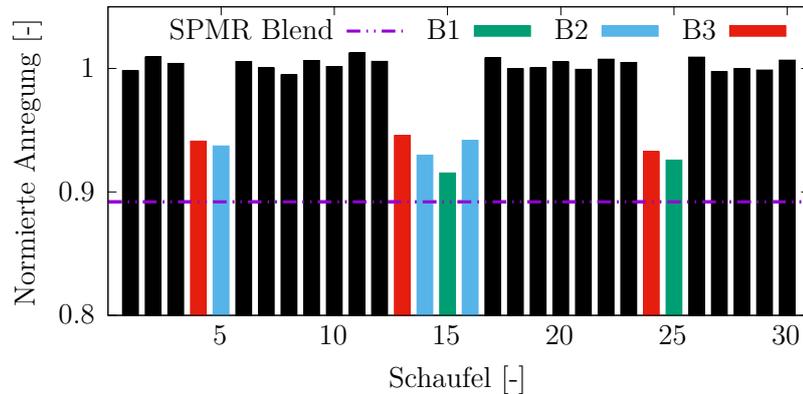


Abbildung 5.28: Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des pseudoresonanten 1. Biegemodes (variable Blendanordnung) mit der SPMR Vorhersage

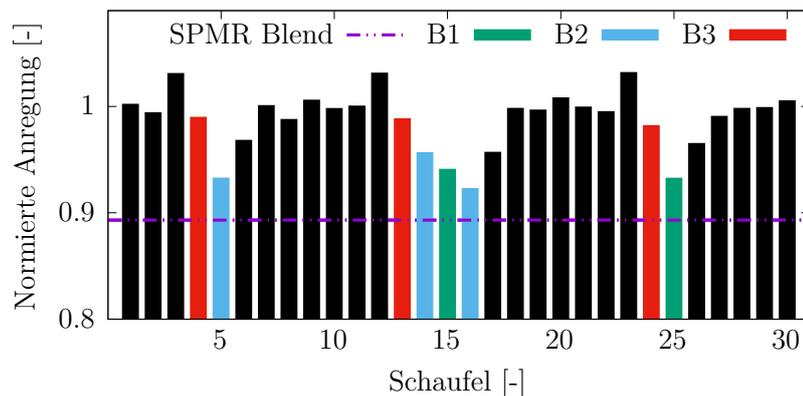


Abbildung 5.29: Vergleich der schaufelindividuellen Erregeramplituden des pseudoresonanten 1. Torsionsmodes (variable Blendanordnung) mit der SPMR Vorhersage

zum SPMR Ansatz berücksichtigt der Fall der variablen Blendanordnung beispielsweise keine komplett geblendete Blattreihe, sondern nur einzelne Schaufeln in der jeweiligen Blendkonfiguration. Wechselwirkungen zwischen unterschiedlichen benachbarten Schaufeln sind jedoch aufgrund des genutzten Modellierungsansatzes mittels der SPMR Methode nicht abbildbar. Ebenso lassen sich Sondereffekte wie die Anregungsüberhöhung der nichtgeblendeten Nachbarschaufeln nur mittels einer größeren Domäne numerisch erfassen. Des Weiteren ist die Vorhersage der Amplitudenreduktion für die untersuchte Blendkonfiguration im Falle der pseudoresonanten Fundamentalmoden nicht

## 5 Aeroelastische Folgewirkungen von Blending Reparaturen

konservativ, d.h. die vereinfachte Modellierungsweise unterschätzt im vorliegenden Fall das Anregungsniveau der reparierten Schaufel im Betrieb.

Trotz dieser Einschränkungen bietet der SPMR Ansatz eine Möglichkeit, um qualitative Tendenzen der Auswirkungen einer Schaufelreparatur vorherzusagen. In Fällen mit deutlichen Auswirkungen des Blends über mehrere Nachbarpassagen hinweg sinkt jedoch die Güte der Vorhersagegenauigkeit. Das Potential zur Einsparung numerischer Ressourcen ist bei einer Domänengrößen von lediglich  $\approx 3\%$  verglichen mit der Knotenanzahl im Vollmodell dennoch nicht zu vernachlässigen. Für Vorhersagen, die primär eine schnelle Bewertung erfordern und bei denen eine gewisse Unschärfe akzeptabel ist, stellt der SPMR Ansatz somit eine vielversprechende Alternative verglichen mit konventionellen Modellierungen dar.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgte eine grundlegende Betrachtung der Folgewirkungen von Fremdkörperschäden und Blendreparaturen auf das Systemverhalten von Hochdruckverdichter Rotoren in Blisk-Bausweise. Hierzu zählt neben der Analyse der strukturmechanischen Effekte wie Spannungsüberhöhungen im Schädigungsbereich ebenso die Berücksichtigung aerodynamischer Auswirkungen beispielhafter Blendreparaturen. Häufig getroffene Annahmen wie kleine Änderungen der aerodynamischen Anregung bei geringen Veränderungen der betroffenen Eigenform wurden gezielt überprüft.

Der Aufbau einer automatisierten Prozesskette zur Erzeugung variiertter Schaufelgeometrien ermöglichte die Korrelationsuntersuchung zwischen einem analytischen Ansatz zur Abschätzung resultierender Spannungsüberhöhungen und den Resultaten von FE-Simulationen der entsprechend modifizierten Beschau felung. Hierfür kam ein parametrisierter zylindrischer Abzugskörper zum Einsatz. Auf diese Weise ist die implementierte Prozesskette ohne Anpassung der Parametrisierung sowohl zur Bewertung kleiner Fremdkörperschäden als auch Blendreparaturen einsetzbar. Um die relevanten Einflussparameter bezüglich der resultierenden Spannungsüberhöhung zu identifizieren, erfolgte auf einem fest spezifizierten Radius zunächst die Analyse von 50 zufällig generierten FODs. Die Auswertung der Simulationsergebnisse zeigte eine sehr gute Korrelation des analytischen Ansatzes mit den berechneten Kerbfaktoren. Der ermittelte funktionale Zusammenhang diente als Grundlage zur Erstellung von Sensitivitätsplots zur Beurteilung der Auswirkungen eines Schadens auf die hochzyklische Ermüdungsfestigkeit des Bauteils. Während die modalen Parameter der Struktur durch die kleinen geometrischen Abmessungen der Schäden nahezu unbeeinflusst waren ( $\Delta f \leq 0.2\%$ ,  $MAC \geq 0.99$ ), zeigten sich modeabhängig gravierende Verluste der Schwingfestigkeit. Da die analysierten Schäden sich auf die Schaufelvorderkante beschränkten, waren Moden mit einem hohen Auslastungsniveau in diesen Bereichen potentiell am stärksten betroffen. Hierbei wies die 1. Biegemode mit  $-37.6\%$  den größten Schwingfestigkeitsverlust auf. Mittels reduzierter

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Modellbildung durch eine gezielte Abtastung des Parameterraumes an ausgewählten Stützstellen konnte die Anzahl der notwendigen Simulationen zur Vorhersage des potentiellen Schwingfestigkeitsverlustes eines Schadens begrenzt werden. Ein Resultat der implementierten Methodik sind Konturplots, welche in Abhängigkeit der Schadensparameter eine schnelle Abschätzung der Konsequenzen ermöglichen. Für das potentielle Anwendungsszenario der Methodik zur Unterstützung bei der Flottenbetreuung ist die Vorhersagegenauigkeit von  $\Delta af/af \leq 8.7\%$  als hinreichend einzuschätzen.

Aufgrund der zuvor identifizierten geringen Einflüsse der FODs auf die modalen Parameter der Struktur beschränkt sich die Analyse der aerodynamischen und aeroelastischen Folgewirkungen auf die Betrachtung von potentiellen Blendreparaturen. Als Kriterium zur Definition der initial bewerteten Blendkonfiguration diene zudem die Forderung  $MAC \geq 0.9$  für den hoch ausgelasteten Mode 11 der Schaufelgeometrie. Ein vereinfachter Ansatz zur analytischen Abschätzung der Blendauswirkungen auf Basis der Annahme einer unveränderten Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche wurde zur Bestimmung von Vergleichswerten für wichtige Kenngrößen wie die aerodynamische Anregung sowie Dämpfung genutzt. Stationäre CFD Analysen zeigten jedoch einen deutlichen Einfluss der Blendgeometrie auf das Strömungsfeld innerhalb der betroffenen Blattrihe. Auch die Anströmung der stromabwärts folgenden Passage wurde durch eine Minderumlenkung im radialen Einflussbereich der Blendreparatur beeinträchtigt. Zur Analyse der Auswirkungen auf die aerodynamische Dämpfung der betrachteten Mode kamen in Form der AIC und SPF Methoden zwei symmetriebasierte Ansätze zum Einsatz. Verglichen mit dem maximal gedämpften Knotendurchmesser der nominalen Geometrie lieferte die Mittelwertsbetrachtung der Dämpfungskurve im Falle der geblendeten Schaufel einen möglichen Dämpfungsverlust von  $\approx 11.5\%$ . Zusätzlich zur Quantifizierung des Dämpfungseinflusses erfolgte eine Studie mit drei unterschiedlichen Blendkonfigurationen, um die Auswirkungen der beeinträchtigten Strömungsfelder auf die schaufelindividuelle aerodynamische Anregung zu bestimmen. Je nach Konfiguration und betrachteter Mode waren Anregungsüberhöhungen bis zu  $+123\%$  (Mode 11, Konfiguration B1) nachweisbar. Für andere Fälle wiederum hatten die Blendreparaturen eine Reduktion der Anregung um bis zu  $-8.5\%$  (Mode 1, Konfiguration B1) zur Folge.

Aufgrund des hohen Ressourcenbedarfs für die durchgeführten CFD Simulationen erfolgte zudem eine Untersuchung eines möglichen Rekonstruktionsansatzes für beliebige Blendanordnungen. Ausgehend von einer Startlösung mit einem möglichst großen Ab-

stand zwischen den geblendeten Einzelschaufeln wurde ein linearer Superpositionsansatz unter Berücksichtigung der Einflüsse auf die direkten Nachbarschaufeln implementiert. Auf diese Weise ließen sich sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gute Ergebnisse, verglichen mit dem Validierungsfall, erzielen. Für beliebige Permutationsmuster bereits bewerteter Blendgeometrien stellt diese Vorgehensweise eine ressourcenschonende Möglichkeit zur Abschätzung von Blendauswirkungen auf die schaufelindividuelle aerodynamische Anregung dar. Für Einzelfallbewertungen der Auswirkung einer Blendreparatur wurde zusätzlich der symmetriebasierte SPMR Ansatz betrachtet. Durch die deutliche Reduktion der Domänengröße verglichen mit Vollmodellansätzen (nur etwa  $\approx 3\%$  der Knotenanzahl) lässt sich die notwendige Rechenzeit erheblich verringern. Aufgrund der inhärenten Symmetrieannahme dieses Ansatzes ist lediglich eine qualitative Aussage bezüglich der Blendauswirkung für die reparierte Schaufel selbst ableitbar. Interaktionseffekte mit den benachbarten Nominalschaufeln sind nicht erfassbar.

Insgesamt liefert die vorliegende Arbeit ausgehend von symmetriebasierten Ansätzen erste Indikationen für die Größenordnung der Variation aeroelastischer Parameter im Falle von Blendreparaturen. Für vertiefende Analysen ist jedoch die Berücksichtigung von Verstimmungseffekten in den strukturmeechanischen und aeroelastischen Bewertungen erstrebenswert. Dies setzt eine Betrachtung des aeroelastischen Gesamtsystems in schaufelindividueller Formulierung voraus und hat weitreichende Folgen hinsichtlich der numerischen Simulationsaufwände. Um eine einzelne Blendgeometrie hinsichtlich ihrer Auswirkung auf die aerodynamische Dämpfung zu evaluieren, wären beispielsweise statt einer AIC Simulation 5-7 Simulationen mit variierender Positionierung der reparierten Schaufel notwendig. Des Weiteren ist eine Vorhersage der erzwungenen Schwingungsamplituden unter diesen Umständen nur mittels Vollmodellrechnungen sinnvoll. An Stelle von zyklisch symmetrischen Eigenformen erfolgt die Analyse der verstimmt Systemmoden des strukturmeechanischen Systems unter Berücksichtigung der deutlich komplexeren aerodynamischen Kopplungsterme. Um zukünftig die Ergebnisgüte der analytischen Vorhersagen besser bewerten zu können, sind zudem umfangreiche experimentelle Untersuchungen klar spezifizierter Referenzkonfigurationen auf Komponentenebene und im mehrstufigen Rigbetrieb wünschenswert.



# A Anhang

## A.1 Modaltransformation

Ausgehend von der gekoppelten Bewegungsgleichung des aeroelastischen Gesamtsystems (3.1) soll die Übertragbarkeit der allgemeinen Herleitung für den konkreten Anwendungsfall auf Basis eines FE-Sektormodells dargelegt werden. Für ein Sektormodell nimmt die Struktur der Massen- und Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems folgende Form an

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{M}_K & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M}_K^T \\ \mathbf{M}_K^T & \mathbf{M}_S & \mathbf{M}_K & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M}_K^T & \mathbf{M}_S & \mathbf{M}_K \\ \mathbf{M}_K & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M}_K^T & \mathbf{M}_S \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die Submatrizen  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_K$  bzw. im Falle der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_S$ ,  $\mathbf{K}_K$  die Sektormassen- und Sektorsteifigkeitsmatrix sowie die Koppelmassen- und Koppelsteifigkeitsmatrix bezeichnen.

Unter der vereinfachenden Annahme einer ideal steifen Scheibengeometrie (d.h. alle Eigenformen einer Schaufelmodelfamilie sind mittels derselben Sektoreigenform  $\Phi_S$  beschreibbar) lässt sich mittels des Ansatzes

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Phi_S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi_S & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi_S \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (\text{A.2})$$

## A Anhang

eine Modaltransformation vollziehen. In Gleichung (A.2) entspricht  $\mathbf{x}$  weiterhin dem Vektor der physikalischen und  $\mathbf{q}$  dem Vektor der modalen, generalisierten oder auch verallgemeinerten Freiheitsgrade. Gleichung (A.2) ist ebenfalls adaptierbar für die unterschiedlichen Formulierungen der Eigenformen eines zyklischen Systems (siehe Abschnitt 2.1), wodurch sich die Gestalt der Modalmatrix  $\Psi$  und damit einhergehend die Bedeutung der Einträge im Vektor  $\mathbf{q}$  verändert.

Das Einsetzen des Ansatzes (A.2) in die Bewegungsgleichung des aeroelastischen Gesamtsystems (3.1) und eine anschließende Linksmultiplikation mit  $\Psi^T$  führt zu

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi \ddot{\mathbf{q}} + \Psi^T \mathbf{K} \Psi \mathbf{q} = \Psi^T \mathbf{f}_{aero}. \quad (\text{A.3})$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{M}_S \Psi &= m_g & \Psi^T \mathbf{M}_K \Psi &= 0 \\ \Psi^T \mathbf{K}_S \Psi &= k_g & \Psi^T \mathbf{K}_K \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

für ein unverstimmtes Modell das modal reduzierte System

$$m_g \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + k_g \mathbf{I} \mathbf{q} = \Psi^T \mathbf{f}_{aero} = \mathbf{f}_{mod}. \quad (\text{A.5})$$

Im Falle einer geschickten Wahl der modalen Basis für die Reduktion des aeroelastischen Gesamtsystems (siehe Abschnitt 3.2) resultiert diese Vorgehensweise in einer vollständigen Entkopplung des ungedämpften, linearen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung. Im Anschluss an die Lösung des Problems im modalen Raum ist eine Rücktransformation der Ergebnisse in physikalische Verschiebungen gemäß Gleichung (A.2) möglich.

# Literaturverzeichnis

- [1] [https://www.schoelly.de/fileadmin/Images/01\\_Expertise/05\\_Technical\\_Endoscopy/Anwendungsbeispiele\\_01.jpg](https://www.schoelly.de/fileadmin/Images/01_Expertise/05_Technical_Endoscopy/Anwendungsbeispiele_01.jpg)
- [2] ADAIR, T. ; OWENS, J. ; GRADY, G. ; WINTER, H. ; GRANT, R. : Blending Borescope Inspection (BBI) Maintenance Service Equates to Cost Savings. In: *IEEE Systems Readiness Technology Conference Test Technology for the 21st Century* (1998), S. 486–493
- [3] ADVISORY COUNCIL FOR AVIATION RESEARCH AND INNOVATION IN EUROPE (ACARE) : *Fly the Green Deal*. ISBN 978-92-76-43368-2, 06 2022
- [4] AIR TRANSPORT ACTION GROUP (ATAG) : *Waypoint 2050*. [https://aviationbenefits.org/media/167417/w2050\\_v2021\\_27sept\\_full.pdf](https://aviationbenefits.org/media/167417/w2050_v2021_27sept_full.pdf), September 2021
- [5] ALLEMANG, R. : The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse. In: *Journal of Sound and Vibration* 37 (2003), Nr. 8, S. 14–23
- [6] ARMSTRONG, E. : Recent Blade Vibration Techniques. In: *Journal of Engineering for Power* (1966), Nr. 66-WA/GT-14
- [7] ARMSTRONG, E. ; WILLIAMS, D. : Some Intake Flow Maldistribution Effects on Compressor Rotor Blade Vibration. In: *Journal of Sound and Vibration* 3 (1966), S. 340 – 354
- [8] ASCHENBRUCK, J. ; R, A. ; SEUME, J. : Recent Progress in Turbine Blade and Compressor Blisk Regeneration. In: *Procedia CIRP* 22 (2014), S. 256–262
- [9] BAIRSTOW, L. ; FAGE, A. : Oscillations of the Tail Plane and Body of an Aeroplane in Flight. In: *Aeronaut. Research Com. R & M* 276 (1916)
- [10] BAUMGARTNER, M. ; KAMEIER, F. ; HOURMOUZADIS, J. : Non-Engine Order Blade Vibration in a High Pressure Compressor. In: *Twelfth International Symposium on Airbreathing Engines* (1995), S. 1–13
- [11] BECK, J. ; BROWN, J. ; RUNYON, B. ; SCOTT-EMUAKPOR, O. : Probabilistic Study of Integrally Bladed Rotor Blends using Geometric Mistuning Models. In: *58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2017)

## Literaturverzeichnis

- [12] BEIROW, B. : *Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise*, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Diss., 2009
- [13] BENDIKSEN, O. : Aeroelastic Problems in Turbomachines. In: *31st structures, structural dynamics and materials conference* (1990), S. 1736–1761
- [14] BENTLEY, J. : Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching. In: *Communications of the Association for Computing Machinery* 18 (1975), Nr. 9, S. 509–517
- [15] BERGER, R. ; HOFMEISTER, B. ; GEBHARD, C. ; ROLFES, R. : A two-Objective Design Optimisation Approach for Blending Repairs of Damaged Compressor Blisks. In: *Aerospace Science and Technology* 105 (2020), Nr. 106022, S. 1–10
- [16] BIRNBAUM, W. : Das ebene Problem des schlagenden Flügels. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 4 (1924), Nr. 4, S. 277–292
- [17] BORESİ, A. ; SCHMİDT, R. : *Advanced Mechanics of Materials*. Bd. 6. ISBN 978-0-471-43881-6 : John Wiley & Sons, 2003
- [18] BRAITHWAITE, F. : On the Fatigue and Consequent Fracture of Metals. In: *Institution of Civil Engineers, Minutes of Proceedings* 13 (1854), S. 463–467
- [19] BRÄUNLING, W. : *Flugzeugtriebwerke*. ISBN 978-3-642-34539-5 : Springer Vieweg, 2015
- [20] BRÉARD, C. ; GREEN, J. ; İMREGUN, M. : Low-Engine-Order Excitation Mechanisms in Axial-Flow Turbomachinery. In: *Journal of Propulsion and Power* 19 (2003), Nr. 4, S. 704–712
- [21] BRÉARD, C. ; VAHDATI, M. ; SAYMA, A. ; İMREGUN, M. : An Integrated Time-Domain Aeroelasticity Model for the Prediction of Fan Forced Response due to Inlet Distortion. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124 (2002), Nr. 1, S. 196–208
- [22] BROWN, J. ; KASZYNSKI, A. ; GİLLAUGH, D. ; CARPER, E. ; BECK, J. : Optimization of Airfoil Blend Limits With As-Manufactured Geometry Finite Element Models. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 144 (2022), Nr. GTP-21-1063, S. 1–9
- [23] BUNDESVERBAND DER DEUTSCHEN LUFTVERKEHRSWIRTSCHAFT : *Climate Protection Report*. <https://www.bdl.aero/wp-content/uploads/2021/07/climate-protection-report-2020-BDL.pdf>, 2020
- [24] BÜRGEİ, R. ; RICHARD, H. ; RIEMER, A. : *Werkstoffmechanik*. ISBN 978-3-658-03934-9 : Springer Vieweg, 2014

- [25] CALCATERRA, J. : Experimental and Numerical Simulation of FOD / NATO. 2004 (TR-AVT-094). – Forschungsbericht
- [26] CAMPBELL, W. : Protection of Steam Turbine Disk Wheels from Axial Vibration / General Electric Company. 1924. – Forschungsbericht
- [27] CARDINALE, V. ; BANKHEAD, H. ; MCKAY, R. : Experimental Verification of Turboblading Aeromechanics. In: *AGARD-AG-293 Turbine Engine Testing* (1981), S. 23–1–23–38
- [28] CARTA, F. : Coupled Blade-Disk-Shroud Flutter Instabilities in Turbojet Engine Rotors. In: *Journal of Engineering for Power* 89 (1967), Nr. 3, S. 419–426
- [29] CARTA, F. ; ST. HILAIRE, A. : An Experimental Study on the Aerodynamic Response of a Subsonic Cascade Oscillating Near Stall / Purdue University Lafayette Project Squid Headquarters. 1976 (ADA029672). – Technical Report
- [30] CARTER, A. ; KILLPATRICK, D. : Self-Excited Vibration of Axial-Flow Compressor Blades. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* Bd. 171, 1957, S. 245 – 281
- [31] CHEN, X. : Foreign Object Damage on the Leading Edge of a Thin Blade. In: *Mechanics of Materials* 37 (2005), Nr. 4, S. 447–457
- [32] COLLAR, A. : The Expanding Domain of Aeroelasticity. In: *The Aeronautical Journal* 50 (1946), Nr. 428, S. 613–636
- [33] CRALL, D. ; LINKO, P. ; ENGLISH, C. ; BUSBEY, B. : Laser Twist Weld Repair of Compressor Blisk Airfoils. In: *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit* (1998)
- [34] CRAWLEY, E. : Aeroelastic Formulation for Tuned and Mistuned Rotors. In: *AGARD-AG-298 Aeroelasticity in Axial Flow Turbomachines 2* (1988), S. 19–1–19–24
- [35] DANFORTH, C. : Designing to Avoid Fatigue in Long Life Engines. In: *SAE Transactions* 75 (1967), S. 248–262
- [36] DASSAULT SYSTÈMES (Hrsg.): *Abaqus Scripting User's Guide*. Dassault Systèmes, 2016
- [37] DAVIS, P. : *Circulant Matrices*. ISBN 0-471-05771-1 : John Wiley & Sons, 1979
- [38] DAY, W. ; FIEBIGER, S. ; HITESH, N. : Parametric Evaluation of Compressor Blade Blending. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo* (2012), Nr. GT2012-68641

## Literaturverzeichnis

- [39] DEWHURST, S. ; HE, L. : Unsteady Flow Calculations Through Turbomachinery Stages Using Single-Passage Domain with Shape-Correction Method. In: *The 9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines* (2000), S. 338–350
- [40] DIN 50100 : *Schwingfestigkeitsversuch - Durchführung und Auswertung von zyklischen Versuchen mit konstanter Lastamplitude für metallische Werkstoffproben und Bauteile*. 2016-12
- [41] DOORLY, D. ; OLDFIELD, M. : Simulation of the Effects of Shock Wave Passing on a Turbine Rotor Blade. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 107 (1985), Oktober, Nr. 4, S. 998–1006
- [42] DOWELL, E. : *A Modern Course in Aeroelasticity*. 5. ISBN 978-3-319-09453-3 : Springer Verlag, 2015
- [43] EASA : Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Engines. CS-E Amendment 4 (2015)
- [44] EBERLEIN, A. : Phases of High-Tech Repair Implementation—Definition, Development, Adaptation, Validation and Qualification, in Case of Patch-Repair on Blisk-Blades. In: *Proceedings of International Symposium on Air Breathing Engines, American Inst. of Aeronautics and Astronautics* (2007), Nr. ISABE-2007-1102
- [45] EKICI, K. ; KIELB, R. ; HALL, C. : Forced Response Analysis of Aerodynamically Asymmetric Cascades. In: *46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit* (2010), Nr. AIAA2010-6535
- [46] EUROPÄISCHE KOMMISSION : *Der europäische Grüne Deal*. COM(2019) 640 final, 2019
- [47] EUROPÄISCHE KOMMISSION : *Reducing Emissions from Aviation*. [https://climate.ec.europa.eu/eu-action/transport-emissions/reducing-emissions-aviation\\_en#{#}aviation-emissions](https://climate.ec.europa.eu/eu-action/transport-emissions/reducing-emissions-aviation_en#{#}aviation-emissions). Version: 2021
- [48] FIGASCHEWSKY, F. ; KÜHHORN, A. ; BEIROW, B. ; GIERSCH, T. ; NIPKAU, J. ; MEINI, F. : Simplified Estimation of Aerodynamic Damping for Bladed Rotors. Part 2: Experimental Validation During Operation. In: *ASME Turbo Expo* (2016), Nr. GT2016-56458, S. 1–12
- [49] FIGASCHEWSKY, F. ; KÜHHORN, A. ; BEIROW, B. ; GIERSCH, T. ; SCHRAPE, S. : Analysis of Mistuned Forced Response in an Axial High-Pressure Compressor Rig with Focus on Tyler–Sofrin Modes. In: *The Aeronautical Journal* 123 (2019), Nr. 1261, S. 356–377

- [50] FÖRSCHING, H. : *Grundlagen der Aeroelastik*. ISBN 978-3-642-48286-1 : Springer Verlag, 1974
- [51] FRANKEL, P. ; WITHERS, P. ; PREUSS, M. ; WANG, H. ; TONG, J. ; RUGG, D. : Residual Stress Fields After FOD Impact on Flat and Aerofoil-Shaped Leading Edges. In: *Mechanics of Materials* 55 (2012), S. 130–145
- [52] GALLIMORE, S. ; CUMPSTY, N. : Spanwise Mixing in Multistage Axial Flow Compressors: Part I—Experimental Investigation. In: *Journal of Turbomachinery* 108 (1986), Juli, Nr. 1, S. 2–9
- [53] GASCH, R. ; KNOTHE, K. ; LIEBICH, R. : *Strukturodynamik*. ISBN 978-3-540-88976-2 : Springer Vieweg, 2012
- [54] GIERSCH, T. : Numerische Analyse des aeroelastischen Verhaltens einer transsonischen Hochdruckverdichterstufe. In: *Diplomarbeit BTU Cottbus* (2009)
- [55] GILES, M. : Stator/Rotor Interaction in a Transonic Turbine. In: *Journal of Propulsion and Power* 6 (1990), Nr. 5, S. 621–627
- [56] GOODMAN, J. : *Mechanics Applied to Engineering*. Bd. 8. Longmans, Green and Co., 1914
- [57] GRIEB, H. : *Verdichter für Turbo-Flugtriebwerke*. ISBN 978-3-540-34373-8 : Springer Verlag, 2009
- [58] HAIBACH, E. : *Betriebsfestigkeit*. ISBN 3-540-29363-9 : Springer Verlag, 2006
- [59] HAIGH, B. : Report on Alternating Stress Tests of a Sample of Mild Steel. In: *Report of the 85th Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1915), S. 163–170
- [60] HANAMURA, Y. : Flutter of Cascading Blade Row / Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo. 1971 (459). – Forschungsbericht
- [61] HANAMURA, Y. ; TANAKA, H. ; YAMAGUCHI, K. : A Simplified Method to Measure Unsteady Forces Acting on the Vibrating Blades in Cascade. In: *Bulletin of JSME* 23 (1980), Nr. 180, S. 880–887
- [62] HE, L. : An Euler Solution for Unsteady Flows Around Oscillating Blades. In: *ASME Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition* 89-GT-279 (1989), S. 1–9
- [63] HE, L. : Method of Simulating Unsteady Turbomachinery Flows with Multiple Perturbations. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Nr. 11, S. 2730–2735
- [64] HELLMICH, B. ; SEUME, J. : Causes of Acoustic Resonance in a High-Speed Axial Compressor. In: *Journal of Turbomachinery* 130 (2008), Nr. 3, S. 1–9

## Literaturverzeichnis

- [65] HENCKY, H. : Zur Theorie plastischer Deformation und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 4 (1924), S. 323–334
- [66] HODGES, D. ; PIERCE, G. : *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. ISBN 978-0-521-19590-4 : Cambridge University Press, 2011
- [67] HOOKE, R. : *Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring. Explaining the Power of Springing Bodies*. Printed for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Paul Church-Yard, 1678
- [68] HUBER, M. : Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Anstrengung eines Materials. In: *Czasopismo Techniczne* 22 (1904)
- [69] KARGER, K. ; BESTLE, D. : Parametric Blending and FE-Optimisation of a Compressor Blisk Test Case. In: *Computational Methods in Applied Sciences* 36 (2014), S. 257–266
- [70] KELLER, C. ; KELLERSMANN, A. ; FRIEDRICHS, J. ; SEUME, J. : Influence of Geometric Imperfections on Aerodynamic and Aeroelastic Behavior of a Compressor Blisk. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo* (2017), Nr. GT2017-63556
- [71] KEMP, N. ; SEARS, W. : The Unsteady Forces due to Viscous Wakes in Turbomachines. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 22 (1955), Nr. 7, S. 478–483
- [72] KIELB, R. ; CHIANG, H. : Recent Advancements in Turbomachinery Forced Response Analyses. In: *30th Aerospace Science Meeting & Exhibit* (1992), S. 1–8
- [73] KNAPKE, C. ; WOLFF, J. ; JOHNSTON, D. : Blended Fan Blade Effects on Aerodynamic Forces. In: *AIAA Scitech 2019 Forum* (2019), Nr. 1182, S. 1–11
- [74] KNAPKE, C. ; WOLFF, J. ; JOHNSTON, D. : Blended Fan Blade Effects on Unsteady Aerodynamics. In: *AIAA Scitech Forum* (2020), Nr. 0130, S. 1–14
- [75] KORAKIANITIS, T. : On the Propagation of Viscous Wakes and Potential Flow in Axial-Turbine Cascades. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), January, Nr. 1, S. 118–127
- [76] KÜHHORN, A. ; SILBER, G. : *Technische Mechanik für Ingenieure*. ISBN 3-7785-2620-0 : Hüthig Verlag Heidelberg, 2000
- [77] LAKSHMINARAYANA, B. ; HORLOCK, J. : Leakage and Secondary Flows in Compressor Cascades / Aeronautical Research Council. 1965 (Reports and Memoranda No. 3483). – Forschungsbericht
- [78] LAMÉ, M. : *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides*. 1852

- [79] LANE, F. : System Mode Shapes in the Flutter of Compressor Blade Rows. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 23 (1956), Nr. 1, S. 54–66
- [80] LÄPPLE, V. : *Einführung in die Festigkeitslehre*. ISBN 978-3-8348-1605-4 : Vieweg+Teubner, 2011
- [81] LEE, D. ; FAHEY, D. ; SKOWRON, A. ; ALLEN, M. ; BURKHARDT, U. : The Contribution of Global Aviation to Anthropogenic Climate Forcing for 2000 to 2018. In: *Journal Atmospheric Environment* (2021), Nr. 244, S. 1–29
- [82] LEFCORT, M. : An Investigation Into Unsteady Blade Forces in Turbomachines. In: *Journal of Engineering for Power* 87 (1965), October, Nr. 4, S. 345–354
- [83] LIU, J. ; ZENNER, H. : Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung - Teil 1. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24 (1993), S. 240–249
- [84] LOGAN JR., E. : *Handbook of Turbomachinery*. ISBN 0-203-91199-7 : CRC Press, 2003
- [85] MAGNUS, K. ; POPP, K. ; SEXTRO, W. : *Schwingungen*. ISBN 978-3-658-13820-2 : Springer Vieweg, 2016
- [86] MARSHALL, J. ; IMREGUN, M. : A Review of Aeroelasticity Methods with Emphasis on Turbomachinery Applications. In: *Journal of Fluids and Structures* 10 (1996), Nr. 3, S. 237–267
- [87] MATA, S. ; DI MARE, L. ; IMREGUN, M. ; GREEN, J. : An Efficient Generalised Single-Passage Method for Turbomachinery Forced Response. In: *ISUAAAT12 I12-S1-3* (2009), S. 1–8
- [88] MILLER, G. ; HARTMANN, M. : Experimental shock configurations and shock Losses in a Transonic-Compressor Rotor at Design Speed / National Advisory Committee for Aeronautics (NACA). 1958 (RM E58A14b). – Forschungsbericht
- [89] MISES, R. von: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1913), S. 582–592
- [90] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA) : *Advancement of Small Core Aircraft Engines*. <https://www.nasa.gov/feature/glenn/2021/nasa-us-industry-accelerate-advancement-of-small-core-aircraft-engines>, Mai 2022
- [91] NATIONS, U. : *Paris Agreement*. [https://unfccc.int/sites/default/files/english\\_paris\\_agreement.pdf](https://unfccc.int/sites/default/files/english_paris_agreement.pdf), Dezember 2015

## Literaturverzeichnis

- [92] NEUBER, H. : *Kerbspannungslehre*. ISBN 978-3-642-63199-3 : Springer Verlag, 2001
- [93] NYQUIST, H. : Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47 (1928), Nr. 2, S. 617–644
- [94] OLSON, B. ; SHAW, S. ; SHI, C. ; PIERRE, C. ; PARKER, R. : Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis. In: *Applied Mechanics Reviews, American Society of Mechanical Engineers* 66 (2014), Nr. 4
- [95] PAPULA, L. : *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*. ISBN 978-3-658-07789-1 : Springer Vieweg, 2015
- [96] PARKER, R. : Acoustic Resonances and Blade Vibration in Axial Flow Compressors. In: *Journal of Sound and Vibration* 92 (1984), Nr. 4, S. 529–539
- [97] PARRY, J. ; PEARSON, H. : Cascade Blade Flutter and Wake Excitation. In: *The Journal of the Royal Aeronautical Society* 58 (1954), Nr. 523, S. 505–508
- [98] PEARSON, H. : The Aerodynamics of Compressor Blade Vibration. In: *Fourth Anglo-American Aeronautical Conference* (1953), S. 127–162
- [99] PILKEY, W. : *Peterson's Stress Concentration Factors*. ISBN 0-471-53849-3 : John Wiley & Sons, 1997
- [100] PUGSLEY, A. : Control Surface and Wing Stability Problems. In: *The Journal of the Royal Aeronautical Society* 41 (1937), Nr. 323, S. 975–996
- [101] RADAJ, D. ; VORMWALD, M. : *Ermüdungsfestigkeit*. ISBN 978-3-540-71458-3 : Springer Verlag, 2007
- [102] RANKINE, W. : On the Causes of the Unexpected Breakage of the Journals of Railway Axles; and on the Means of Preventing Such Accidents by Observing the Law of Continuity in Their Construction. In: *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 2 (1843), S. 105–107
- [103] RANKINE, W. : *A Manual of Applied Mechanics*. Richard Griffin and Company, 1858
- [104] RICHTER, K. ; ORBAN, S. ; NOWOTNY, S. : Laser Cladding of the Titanium Alloy Ti6242 to Restore Damaged Blades. In: *Proceedings of the 23rd International Congress on Applications of Lasers and Electro-Optics* (2004)
- [105] SAYMA, A. ; VAHDATI, M. ; IMREGUN, M. : An Integrated Nonlinear Approach for Turbomachinery Forced Response Prediction. Part I: Formulation. In: *Journal of Fluids and Structures* 14 (2000), S. 87–101

- [106] SAYMA, A. ; VAHDATI, M. ; SBARDELLA, L. ; IMREGUN, M. : Modeling of Three-Dimensional Viscous Compressible Turbomachinery Flows Using Unstructured Hybrid Grids. In: *AIAA Journal* 38 (2000), Nr. 6, S. 945–954
- [107] SCHIJVE, J. : *Fatigue of Structures and Materials*. ISBN 978-1-4020-6807-2 : Springer, 2009
- [108] SCHMITT, S. : *Simulation von Flattern und aerodynamischer Zwangserregung in Turbomaschinenbeschaufelungen*, DLR, Diss., 2003
- [109] SCHÖNENBORN, H. ; RETZE, U. ; ZILLER, G. ; WARNICZEK, P. : Experimental and Analytical Mistuning Analysis of a Blisk at Lab Conditions and Under Rig Conditions Using Tip Timing. In: *ASME Turbo Expo* (2010), Nr. GT2010-22447, S. 1–10
- [110] SCHRAPE, S. : *Zur Simulation von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen schwingender Verdichtergitter mittels kommerzieller Software*, BTU Cottbus, Diss., 2012
- [111] SCHÜTZ, W. : A History of Fatigue. In: *Engineering Fracture Mechanics* 54 (1996), Nr. 2, S. 263–300
- [112] SCHWERDT, L. ; PANNING-VON SCHEIDT, L. ; WALLASCHEK, J. ; BERGER, R. ; ROLFES, R. ; KELLER, C. ; SEUME, J. : Influence of Blade Repairs on Compressor Blisk Vibration Considering Aerodynamic Damping and Mistuning. In: *Proceedings of Global Power and Propulsion Society Conference* (2017), Nr. GPPS-2017-0142
- [113] SHANNON, C. : A Mathematical Theory of Communication. In: *The Bell System Technical Journal* 27.3 (1948): 379-423. 27 (1948), Nr. 3, S. 379–423
- [114] SHANNON, J. : Vibration problems in gas turbines, centrifugal and axial flow compressors. In: *British A.R.C. R&M 2226* (1945)
- [115] SHEPARD, D. : A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced Data. In: *23rd Association for Computing Machinery National Conference* (1968), S. 517–524
- [116] SHI, C. ; PARKER, R. : Vibration Mode Structure and Simplified Modelling of Cyclically Symmetric or Rotationally Periodic Systems. In: *Proceedings of the Royal Society A* 471 (2015), Nr. 20140672
- [117] SIEMENS: *NXOpen Python API Reference*, 2014
- [118] SIEVERDING, C. : Recent Progress in the Understanding of Basic Aspects of Secondary Flows in Turbine Blade Passages. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 107 (1985), April, Nr. 2, S. 248–257

- [119] SINGH, M. ; VARGO, J. ; SCHIFFER, D. ; DELLO, J. : Safe Diagram - A Design And Reliability Tool For Turbine Blading. In: *Proceedings of the 17th Turbomachinery Symposium* (1988), S. 93–101
- [120] SISTO, F. : Stall-Flutter in Cascades. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.9 (1953), S. 598–604
- [121] SISTO, F. : Introduction and Overview. In: *AGARD-AG-298 Aeroelasticity in Axial Flow Turbomachines* 1 (1988), S. 1–1–1–13
- [122] SMITH, J. : Some experiments on fatigue of metals. In: *Journal of the Iron and Steel Institute* 82 (1910), Nr. 2, S. 246–318
- [123] SPANRAD, S. ; TONG, J. : Characterisation of Foreign Object Damage (FOD) and Early Fatigue Crack Growth in Laser Shock Peened Ti-6Al-4V Aerofoil Specimens. In: *Materials Science and Engineering: A* 528 (2011), Nr. 4, S. 2128–2136
- [124] SRINIVASAN, A. : Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades: An IGTI Scholar Paper. In: *Proceedings of the ASME 1997 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition 4: Manufacturing Materials and Metallurgy; Ceramics; Structures and Dynamics; Controls, Diagnostics and Instrumentation; Education* (1997)
- [125] STAPELFELDT, S. : *Advanced methods for multi-row forced response and flutter computations*, Imperial College London, Diss., 2014
- [126] STELLDINGER, M. ; GIERSCH, T. ; FIGASCHEWSKY, F. ; KÜHHORN, A. : A Semi-Unstructured Turbomachinery Meshing Library With Focus on Modeling of Specific Geometrical Features. In: *Proceedings of ECCOMAS Congress 2016 Volume 1* (2016), S. 384–401
- [127] STRANG, G. : *Wissenschaftliches Rechnen*. ISBN 978-3-540-78494-4 : Springer Verlag, 2010
- [128] STREHLAU, U. : *Schaufelschwingungen realer integraler Verdichtertlaufräder bei zusätzlicher Berücksichtigung höherer Moden*. ISBN 978-3-8440-0491-5, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Diss., 2011
- [129] SZÉCHÉNYI, E. : Fan Blade Flutter - Single Blade Instability or Blade to Blade Coupling? In: *American Society of Mechanical Engineers* (1985), Nr. 85-GT-216
- [130] TANAKA, Y. ; NAGAI, S. ; USHIDA, M. ; USUI, T. : Large Engine Maintenance Technique to Support Flight Operation for Commercial Airlines. In: *Mitsubishi Heavy Industries Ltd. Technical Review* 40 (2003), Nr. 2
- [131] TANG, W. ; EPUREANU, B. ; FILIPPI, S. : Models for Blisks with Large Blends and Small Mistuning. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* (2017), Nr. 87, S. 161–179

- [132] THEODORSEN, T. : General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. In: *NACA Technical Report* (1934), Nr. 496, S. 291–311
- [133] THOMAS, D. : Dynamics of Rotationally Periodic Structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), Nr. 1, S. 81–102
- [134] VAHDATI, M. ; SAYMA, A. ; IMREGUN, M. : An Integrated Nonlinear Approach for Turbomachinery Forced Response Prediction. Part II: Case Studies. In: *Journal of Fluids and Structures* 14 (2000), S. 103–125
- [135] VAHDATI, M. ; SAYMA, A. ; IMREGUN, M. ; SIMPSON, G. : Multibladerow Forced Response Modeling in Axial-Flow Core Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 129 (2007), April, Nr. 2, S. 412–420
- [136] VAHDATI, M. ; SAYMA, A. ; MARSHALL, J. ; IMREGUN, M. : Mechanisms and Prediction Methods for Fan Blade Stall Flutter. In: *Journal of Propulsion and Power* 17 (2001), Nr. 5, S. 1100–1108
- [137] VOGT, D. : *Experimental Investigation of Three-Dimensional Mechanism in Low-Pressure Turbine Flutter*, KTH Stockholm, Diss., 2005
- [138] VOGT, D. : Experimental Investigation of Mode Shape Sensitivity of an Oscillating Low-Pressure Turbine Cascade at Design and Off-Design Conditions. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 129 (2007), S. 530–541
- [139] VOGT, D. : Experimental Research on Aeroelasticity / NATO, Structural Design of Aircraft Engines: Key Objectives and Techniques. 2008 (RTO-EN-AVT-207). – Forschungsbericht
- [140] WILDHEIM, J. : Excitation of Rotating Circumferentially Periodic Structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 75 (1981), Nr. 3, S. 397–416
- [141] WISLER, D. ; BAUER, R. ; OKIISHI, T. : Secondary Flow, Turbulent Diffusion, and Mixing in Axial-Flow Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 109 (1987), Oktober, Nr. 4, S. 455–469
- [142] WÖHLER, A. : Bericht über die Versuche, welche auf der Königl. Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen-Achsen während der Fahrt, angestellt wurden. In: *Zeitschrift für Bauwesen* VIII (1858), S. 641–652
- [143] WÖHLER, A. : Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagen-Achsen einwirkenden Kräfte und der Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen. In: *Zeitschrift für Bauwesen* X (1860), S. 583–616

## Literaturverzeichnis

- [144] WÖHLER, A. : Resultate der in der Central-Werkstatt der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a. d. O. angestellten Versuche über die relative Festigkeit von Eisen, Stahl und Kupfer. In: *Zeitschrift für Bauwesen* XVI (1866), S. 67–84
- [145] WÖHLER, A. : Ueber die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. In: *Zeitschrift für Bauwesen* XX (1870), S. 73–106
- [146] ZHOU, B. ; ZHAO, J. ; YE, N. ; BERUTTI, T. : Blisk With Small Geometry Mistuning and Blend Repair: As-Measured Finite Element Model and Experimental Verification. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 144 (2022), Nr. GTP-22-1272, S. 1–10