

Erweiterungen der Vereinfachten Fließzonentheorie hinsichtlich der Anwendung von Mehr-Parameterbelastungen und der Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung

Von der Fakultät für Architektur, Bauingenieurwesen und Stadtplanung
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus–Senftenberg
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

genehmigte Dissertation

von

M.Sc. Bastian Vollrath

aus Dresden

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Dornisch

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Hartwig Hübel

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald

Tag der Disputation: 24.05.2023

SCHRIFTENREIHE STATIK UND DYNAMIK

1/2023

ISSN 1615-3952

DOI: <https://doi.org/10.26127/BTUOpen-6605>

Abstract

The present work deals with the extension of the Simplified Theory of Plastic Zones, which is an efficient method for the estimation of quantities in the shakedown state. The main extensions are described in multi-parameter loading and the use of Second-Order Theory.

The method has already proven successful in the consideration of load cases appearing in pairs (single-parameter loading) and is extended in this work for the consideration of any number of load cases (multi-parameter loading). It is proven in numerical investigations that a pairwise consideration of load cases compared to multi-parameter loading can lead to incorrect estimations of stresses and strains. The consideration of all involved loads by multi-parameter loading in the Simplified Theory of Plastic Zones provides an efficient and detailed insight into elastic-plastic loaded structures in the shakedown state. (DFG project number: 286671283)

Thin-walled structures in which the structural stiffness is influenced by membrane stresses require a calculation according to Second-Order Theory. Significant stiffness effects can be observed in pressurized pipelines and especially in thin-walled pipe bends. If cyclic and over-elastic stresses also occur, geometric nonlinearities and material nonlinearities interact. To overcome the resulting high computational effort, a technique is presented that allows the use of Simplified Theory of Plastic Zones with consideration of Second-Order Theory. Numerical investigations show that this further development of the Simplified Theory of Plastic Zones provides high-quality results with significantly less computational effort. (DFG project number: 416907346)

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Erweiterung der Vereinfachten Fließzonentheorie, welche ein effizientes Verfahren zur Abschätzung von Zustandsgrößen im Einspielzustand ist. Die wesentlichen Erweiterungen werden im Bereich der Mehr-Parameterbelastungen und in der Verwendung von Theorie II. Ordnung beschrieben.

Bei der Berücksichtigung von paarweise auftretenden Lastfällen (Ein-Parameterbelastungen) hat sich das Verfahren bereits bewährt und wird in dieser Arbeit für die Berücksichtigung von beliebig vielen Lastfällen (Mehr-Parameterbelastungen) erweitert. Es wird in numerischen Untersuchungen nachgewiesen, dass eine paarweise Betrachtung von Lastfällen gegenüber der Mehr-Parameterbelastung zu Fehleinschätzungen der Beanspruchungen führen kann. Die Berücksichtigung aller beteiligten Einwirkungen durch Mehr-Parameterbelastungen in der Vereinfachten Fließzonentheorie liefert einen effizienten und detaillierten Einblick in elastisch-plastisch beanspruchte Tragwerke im Einspielzustand. (DFG-Projektnummer: 286671283)

Schlanke Tragwerke, bei denen die Struktursteifigkeit durch Membranspannungen beeinflusst wird, erfordern eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung. Bei unter Druck stehenden Rohrleitungen und insbesondere bei dünnwandigen Rohrbögen können signifikante Steifigkeitseffekte beobachtet werden. Treten zusätzlich zyklische und überelastische Beanspruchungen auf, interagiert die geometrische Nichtlinearität und die Materialnichtlinearität. Um dem daraus entstehenden hohen Berechnungsaufwand entgegenzutreten, wird eine Technik vorgestellt, die es ermöglicht, die Vereinfachte Fließzonentheorie unter Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung zu verwenden. An numerischen Untersuchungen wird gezeigt, dass diese Weiterentwicklung der Vereinfachten Fließzonentheorie eine hohe Qualität der Ergebnisse bei deutlich geringerem Berechnungsaufwand liefert. (DFG-Projektnummer: 416907346)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit an der BTU Cottbus – Senftenberg entstanden. Sie spiegelt wesentliche Entwicklungen und Erkenntnisse wider, die ich durch die Bearbeitung von zwei DFG-Projekten erhalten habe. In meinem ersten DFG-Projekt von 2016 bis 2020 habe ich mich mit einer Reihe an Verbesserungen für die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT) beschäftigt. Die größte Entwicklung aus diesem Projekt sehe ich in der Berücksichtigung von Mehr-Parameterbelastungen in der VFZT. In dem zweiten Projekt, welches von 2020 bis 2022 lief, habe ich mich mit der Interaktion von Strukturnichtlinearität und Materialnichtlinearität beschäftigt.

Mein außerordentlicher Dank gilt meinem fachlichen Betreuer, Doktorvater und Projektleiter Professor Dr.-Ing. Hartwig Hübel, der mich all die Jahre in meiner Ausbildung gefördert hat. Ohne sein Engagement, diese DFG-Projekte einzuwerben, hätte diese Promotionsschrift in dieser Form nicht entstehen können. In vielen fachlichen und auch persönlichen Gesprächen gab er mir immer wieder Hinweise und Wegweiser, die ich gerne annahm, um daran zu wachsen. Ich erinnere mich mit Dankbarkeit an die vielen Stunden der fachlichen Auseinandersetzung, in denen er mir immer mit seiner freundlichen, ruhigen und klaren Art begegnete.

Die formelle Betreuung dieser Arbeit war in den ganzen Jahren ungewiss und deshalb gilt mein Dank Professor Dr.-Ing. Wolfgang Dornisch, der sich für diese Arbeit als erster Betreuer einsetzt. Darüber hinaus gilt mein Dank Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald, den ich als Gutachter für meine Promotionsschrift gewinnen konnte.

Einen herzlichen Dank gilt meiner gesamten Familie, die mir in anstrengenden Zeiten zeigt, worauf es ankommt. Eine Balance zwischen Anspannung und Entspannung zu finden und Ziele klar zu formulieren und diese dann auch proaktiv anzugehen. Durch die regelmäßige Unterstützung meiner Mutter und ihrem Lebensgefährten konnte ich viel Energie tanken und unnötige Anspannung loslassen. Meine Kinder zeigten mir, wie wichtig es ist, mit ihnen im Moment zu leben. All diese Erkenntnisse halfen mir, diese Arbeit zu schreiben und an ihr zu wachsen.

Inhalt

Abstract	2
Kurzfassung	3
Vorwort	4
Inhalt.....	5
Abkürzungsverzeichnis.....	9
Formelzeichen	9
Abkürzungen	12
1. Einleitung und theoretische Voraussetzungen.....	14
1.1. Einleitung.....	15
1.2. Voraussetzungen aus der Plastizitätstheorie.....	18
1.2.1. Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen	19
1.2.2. Elastisches Verhalten.....	19
1.2.3. Deviatorischer Spannungszustand.....	20
1.2.4. Die Fließfläche	21
1.2.5. Die Fließregel	23
1.2.6. Die Verfestigungsfunktion	23
1.2.7. Materialratcheting und Strukturratcheting.....	29
1.3. Vereinfachte Berechnungen und Direkte Methoden	30
1.3.1. Verwendung von Korrekturfaktoren	30
1.3.2. Analyse des Einspiel-Verhaltens	31
1.3.3. Berechnung der Zustandsgrößen im Einspielzustand.....	34
2. Forschungsstand der VFZT	37

2.1.	Die fünf Basisprinzipien der VFZT.....	38
2.1.1.	Spannungsbeziehungen der Restspannungen	39
2.1.2.	Modifiziert-elastisches Werkstoffgesetz	41
2.1.3.	Durchführung einer modifiziert-elastischen Analyse.....	43
2.1.4.	Abschätzung von Y im TIV-Raum	44
2.1.5.	Superposition und Iteration	47
2.2.	Die VFZT bei zyklischer Belastung	49
2.2.1.	Vorgehen bei elastischen Einspielzuständen	50
2.2.2.	Vorgehen bei plastischen Einspielzuständen.....	56
2.3.	Entwicklungen im Kontext der Zarka-Methode.....	64
2.3.1.	Die Anfänge der Methode	64
2.3.2.	Implementierung weiterer Stoffgesetze.....	65
2.3.3.	Belastungen mit mehr als zwei Belastungsextrema	65
2.3.4.	Anwendung in der Geotechnik	67
2.3.5.	Praxistransfer und Softwareimplementierungen	68
2.3.6.	Zarka's weitere Entwicklung.....	68
3.	Das Wesen von Mehr-Parameterbelastung.....	70
3.1.	Die funktionale Beschreibung von Mehr-Parameterbelastungen....	71
3.2.	Tragverhalten bei Mehr-Parameterbelastung	72
3.2.1.	Das Torus-Modell als Idealisierung eines Rohrbogens	72
3.2.2.	Belastungen und Belastungsreihenfolge.....	74
3.2.3.	Stoffgesetz und Modellparameter.....	75
3.2.4.	Ergebnisse der fiktiv-elastischen Berechnungen	76
3.2.5.	Erkenntnisse aus inkrementellen Berechnungen	78
4.	Mehr-Parameterbelastung bei elastischem Einspielen	83
4.1.	Herausforderung von 2-D auf 5-D Projektionen	84
4.2.	Projektionsvorschrift für den 3-D Spannungsraum.....	86
4.2.1.	Die Geometrie von Ω im 3-D TIV-Raum.....	86
4.2.2.	Projektion auf die Kugeloberfläche	89
4.2.3.	Projektion auf die Schnittkreise.....	90

4.2.4.	Projektion auf die Eckpunkte	93
4.2.5.	Ablaufplan zur Berechnung der Projektion	95
4.2.6.	Beispielrechnung	98
4.3.	Ergebnisse mit der VFZT am Rohrbogen	101
5.	Mehr-Parameterbelastung bei plastischem Einspielen	105
5.1.	Annahmen und Voraussetzungen	106
5.2.	Schwingbreitenberechnung ohne konstante Belastungsanteile	108
5.3.	Berechnung des akkumulierten Zustandes	110
5.4.	Berechnungsbeispiel für den akkumulierten Zustand	113
6.	Sukzessive Berechnungen	118
6.1.	Anwendungsmöglichkeiten der sukzessiven Berechnungen.....	119
6.2.	Implementierung und Anwendung	119
6.2.1.	Projektionsvorschrift für monotone Belastungsänderungen.....	121
6.2.2.	Ablauf der sukzessiven Vorgehensweise (ifup)	124
6.2.3.	Anwendung bei ausgeprägter Lastpfadabhängigkeit.....	125
6.3.	Theorie II. Ordnung und Strukturnichtlinearität	128
6.3.1.	Stand der Forschung	129
6.3.2.	Vorgehen bei der ifup-Methode mit Theorie II. Ordnung.....	129
6.3.3.	Beispiel eines Balkens unter einachsiger Beanspruchung.....	134
6.3.4.	Anwendung am 90° Rohrbogen bei monotoner Belastung	136
6.3.5.	Erweiterung auf zyklische Belastungen	139
6.3.6.	Anwendungsbeispiel für zyklische Belastungen am 90° Rohrbogen..	143
7.	Weiterführende Ideen und Zusammenfassung	149
7.1.	Projektionsverfahren zur beschleunigten Konvergenz.....	150
7.1.1.	Tangenten- und Sekanten-Verfahren als Projektionsvorschrift.....	150
7.1.2.	Voruntersuchung mit angepasster Projektionsvorschrift.....	152
7.2.	Die Methode der adaptierten Tangentensteifigkeit	156
7.3.	Zusammenfassung	160

8. Literatur 162

Abkürzungsverzeichnis

Formelzeichen

A	Auflagerreaktion
A^{fel}	Auflagerreaktion bei fiktiv-elastischem Materialverhalten
A^{meA}	Auflagerreaktion des Restzustandes der modifiziert-elastischen Analyse (meA)
C	Verfestigungsmodul
d	Abstand von den neg. dev. Restspannungen zur Schnittkreisebene
E	E-Modul
E_{ij}	Elastizitätsmatrix
E_p	Anzahl der Eckpunkte
E_t	Tangentenmodul
E_{ta}	adaptierte Tangentensteifigkeit
f_y	Streckgrenze
f_{y1}, f_{y2}	erste und zweite Streckgrenze bei bilinearer Verfestigung
F	Kraftvektor
F^{fel}	Kraftvektor bei fiktiv-elastischem Materialverhalten
F^{meA}	Kraftvektor des Restzustandes einer modifiziert-elastischen Analyse
H_i^S	Vektor des Hilfspunktes auf der Schnittkreisebene
Ke	Korrekturfaktor für vereinfachte elastisch-plastische Analyse
k^{el-pl}	elastisch-plastische Steifigkeitsmatrix
k^{fel}	fiktiv-elastische Steifigkeitsmatrix
k^{mod}	modifiziert-elastische Steifigkeitsmatrix

L_{max}	Lastfall des maximalen Belastungszustandes
L_{min}	Lastfall des minimalen Belastungszustandes
$L(t)$	Belastungsfunktion über die Zeit
M_i^S	Vektor der mittleren Spannungen
p_{elgr}	Innendruck bei elastischer Grenzlast
p	Innendruck
Q	plastisches Potential
r^S	Radius des Schnittkreises
s^{el-pl}	elastisch-plastische Struktursteifigkeitsmatrix
s^{fel}	fiktiv-elastische Struktursteifigkeitsmatrix
S_k	Anzahl der Schnittflächen aus zwei Lastfällen
T_e	Temperatur an der Außenoberfläche
T_i	Temperatur an der Innenoberfläche
u	Verformungsvektor
u^{fel}	Verformungsvektor bei fiktiv-elastischem Materialverhalten
u^{meA}	Verformungsvektor des Restzustandes einer meA
$u^{*(n)}$	Verformungsvektor des Restzustandes n-ten meA
$V_{e\Delta}$	plastische Zone mit elastischem Wechsel im Einspielzustand
V_e	elastische Zone
V_p	plastische Zone
$V_{p\Delta}$	plastische Zone mit plastischem Wechsel im Einspielzustand
x_n	Anzahl der Lastfälle
Y_i	Vektor der transformierten internen Variable (TIV)
Y_i^S	Vektor der TIV einer Schnittkreisprojektion
dY_i	Vektor des TIV-Inkrementes

α_t	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Verzerrungskomponenten
ε_1^{to}	elastisch-plastische 1. Hauptdehnungen
ε_{akk}	akkumulierte Dehnung
ε^{el}	elastische Dehnungen
$\varepsilon_{i,0}$	Vektor der Anfangsdehnungen
ε_i^*	Vektor der Restdehnungen
ε^{pl}	plastische Dehnungen
ε^{to}	elastisch-plastische Dehnungen
$d\varepsilon_{i,0}$	Vektor des Anfangsdehnungsincrements
$d\varepsilon_i^{pl}$	Vektor des plastischen Dehnungsincrements
ξ_i	Vektor der Rückspannungen
$d\xi_i$	Vektor des Rückspannungsincrements
ρ_i	Vektor der Restspannungen
ρ'_i	Vektor der deviatorischen Restspannungen
$d\rho_i$	Vektor des Restspannungsincrements
σ_H	hydrostatische Spannung
σ	elastisch-plastische Spannung
σ_i	Vektor der elastisch-plastischen Spannungen
$\sigma_{i,m}$	Vektor der mittleren akkumulierten Spannungen
σ'_i	Vektor der deviatorischen Spannungen
σ_i^{dif}	Vektor der Differenzspannung
σ_i^{fel}	Vektor der fiktiv-elastischen Spannungen
σ_i^{fup}	Vektor der Update-Spannungen
σ_v	von Mises Vergleichsspannung

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Schubspannungen
$\omega_1 - \omega_4$	Zonen im TIV-Raum
Ω	Zone im TIV-Raum, die von allen Fließflächen umschlossen wird
$\Delta\sigma_i$	Vektor der Spannungsschwingbreite
$\Delta\sigma_i^{fel}$	Vektor der fiktiv-elastischen Spannungsschwingbreite
ΔT	Temperaturänderung zwischen Innen- und Außenoberfläche
$\Delta\varepsilon$	Dehnschwingbreite
$d\lambda$	plastischer Multiplikator
γ	Chaboche-Parameter
ν	Querkontraktionszahl
φ	gegenseitige Verdrehung der Endquerschnitte des Rohrbogens

Abkürzungen

ASME	American Society of Mechanical Engineers
DCA	Direct Cyclic Analysis
ECM	Elastic Compensation Method
ES	elastic shakedown
FEM	Finite-Elemente-Methode
GLOSS	Global Stress Strain (Method)
ifup	Incremental Fictitious-elastic Update Procedure
II.O.	Theorie zweiter Ordnung
inkA	inkrementelle Analyse
K	Kollaps
KO	Koordinatensystem
KTA	Kerntechnischer Ausschuss

LATIN	Large Time Increment (Method)
LMM	Linear Matching Method
MASSI	Méthode d'Analyse Simplifiée des Structures Inélastiques
meA	modifiziert-elastische Analyse
PGD	Proper Generalized Decomposition
PS	plastic shakedown
R	Ratcheting
RID	Ratcheting-Interaktions-Diagramm
STPZ	Simplified Theory of Plastic Zones
TIV	transformierte interne Variable
VFZT	Vereinfachte Fließzonentheorie

1. Einleitung und theoretische Voraussetzungen

In diesem Kapitel werden die Herausforderungen vorgestellt, die bei der Bemessung von zyklisch und gleichzeitig überelastisch beanspruchten Tragwerken entstehen. Es werden die numerischen Grundlagen zur Berechnung solcher Tragwerke vorgestellt und Methoden, die Bestandteil der Forschungen der letzten Jahrzehnte waren und bis heute sind. Dazu zählen die Entwicklungen von Stoffgesetzen, welche das Verhalten der verwendeten Werkstoffe möglichst genau abbilden sollen. Außerdem werden die direkten Methoden besprochen, die den hohen Berechnungsaufwand von elastisch-plastischen zyklischen Analysen reduzieren sollen.

1.1. Einleitung

In den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts – mit dem Bau von neuen Kernkraftwerken in Deutschland – entstand das Bedürfnis, diese Anlagen über ihre Betriebsdauer möglichst störungsfrei zu betreiben. Im Gegensatz zu anderen thermischen Kraftwerken, wie bei Kohle- oder Gaskraftwerken, ist der Austausch beschädigter Komponenten bei Kernkraftwerken aufgrund der Strahlungsemissionen und der hohen Sicherheitsanforderungen aufwendiger. Das erhöhte Sicherheitsbedürfnis führte dazu, dass die Betriebsdauer der Tragwerke und Komponenten nun möglichst genau vorhergesagt werden sollte, um diese vor einem Schadensfall warten zu können oder auszutauschen.

Die Wurzeln der Forschungen, welche in dieser Arbeit vorgestellt werden, liegen in der sicheren Entwicklung von kerntechnischen Anlagen. Im Jahr 2011 beschloss der Bundestag das „13. Gesetz zur Änderung des Atomgesetzes“, wodurch viele Forschungen und Weiterentwicklungen im Bereich der Kernkraft-Technik in Deutschland aufgegeben wurden. International betrachtet, gibt es derzeit jedoch einen hohen Bedarf an CO₂-neutraler und partikelfreier Energieerzeugung. So befinden sich in China, Indien und Russland viele neue Kernkraftwerke in Planung [1], wodurch viele Forschungsfragen, international betrachtet, weiterhin große Relevanz haben.

Neben der Sicherheit von Kernkraftwerken lässt sich die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT) eventuell auch auf Herausforderungen der erneuerbaren Energieerzeugung erweitern. Nach wie vor ist es beispielsweise eine Herausforderung, die Schiefstellung von Windenergieanlagen über die geplante Betriebsdauer sicher vorherzusagen. Auch eine Bewertung von bereits bestehenden und wirtschaftlich gut laufenden Windenergieanlagen über die ursprüngliche Nutzungszeit hinaus, wird in Zukunft eine Fragestellung sein, bei der die VFZT einen Beitrag leisten könnte. Darüber hinaus wird es für den Wandel hin zu einer CO₂-neutralen Energieerzeugung Technologien geben, die einer hohen thermo-zyklischen Beanspruchung unterworfen sind. Hierzu könnten Hochtemperatur-Wärmepumpen und Wärmetauscher sowie thermische Speichersysteme gehören. Darüber hinaus ist Ratcheting bei Batteriespeichern durch Be- und Entladevorgänge beobachtet worden, wobei die VFZT bei all diesen Herausforderung einen Beitrag leisten könnte, den sicheren Entwurf und die effiziente Bemessung zu gewährleisten.

Die Vereinfachte Fließzonentheorie zielt darauf ab, Kennwerte, welche zur Abschätzung der Lebensdauer oder Betriebsdauer benötigt werden, bei möglichst geringem Berechnungsaufwand in einer hohen Qualität der Ergebnisse zu liefern. Tragwerke, wie Rohrleitungen oder Druckkessel, werden in thermischen Kraftwerken oder Chemieanlagen häufig durch wechselnde Beanspruchungen belastet, welche die Lebensdauer des Tragwerks beeinträchtigen. Diese wechselnden Beanspruchungen werden durch wiederkehrende Belastungen hervorgerufen, die in der Regel durch eine Belastungs- und eine Entlastungsphase gekennzeichnet sind. Werden diese Be- und

Entlastungen zu einem Lastspiel über die Zeit zusammengefasst, wird dies in dieser Arbeit als zyklische Belastung bezeichnet.

Werden Tragwerke mit einem duktilen Materialverhalten, wie das bei den meisten Stählen der Fall ist, über ihre elastische Grenze hinaus belastet, entstehen plastische Dehnungen. Plastische Dehnungen sind Änderungen der Gefügearordnung im Molekulargitter, welche bei Entlastung irreversibel vorhanden bleiben. Diese irreversiblen Dehnungen führen zu bleibenden Verformungen nach einer vollständigen Entlastung. Treten überelastische Beanspruchungen zyklisch auf, kann es zu einer Akkumulation der plastischen Dehnungen kommen, dies wird in der Fachwelt als Ratcheting bezeichnet.

Ratcheting ist die Zunahme irreversibler kinematischer Zustandsgrößen, welche durch zyklische oder veränderliche Belastungen hervorgerufen werden. [2]

Neben den zyklischen Belastungen, bei denen die maximalen Beanspruchungen in einer Region des Tragwerks bleiben, gibt es noch veränderliche Belastungen. Unter veränderlichen Belastungen sind ortsveränderliche Belastungen gemeint, bei denen sich der Ort der maximalen Beanspruchungen im Tragwerk über die Zeit ändert. Dazu gehören zum Beispiel Wanderlasten und ortsveränderliche Temperaturgradienten.

Die Betriebs- oder Lebensdauer eines Tragwerks wird unter zyklischen Beanspruchungen durch zwei Kennwerte nachgewiesen. Die Dehnschwingbreite $\Delta\varepsilon$, welche die Dehnungsänderung zwischen zwei Belastungsextrema angibt und die akkumulierte Dehnung ε_{akk} , welche die maximal auftretende Dehnung im Tragwerk abbildet. Die Dehnschwingbreite wird für den Ermüdungsnachweis benötigt und die akkumulierte Dehnung für einen Nachweis gegen Ratcheting. Beide Kenngrößen lassen sich vereinfacht durch die VFZT bestimmen.

Prinzipiell werden in Versuchen mit zyklischen Belastungen verschiedene Verläufe der Dehnungsakkumulation beobachtet, wie in Abbildung 1 schematisch dargestellt ist. Auf der einen Seite gibt es Akkumulationsprozesse, welche durch das Material- oder Strukturverhalten begrenzt werden. In solchen Fällen wird das Verhalten als finites Ratcheting bezeichnet. In anderen Fällen nehmen die mittleren Dehnungen über die Belastungszyklen scheinbar konstant zu, dann spricht man von infinitem Ratcheting. Hierbei führen die zyklisch anwachsenden Dehnungen irgendwann zu einem inkrementellen Kollaps und zum Versagen des Tragwerks.

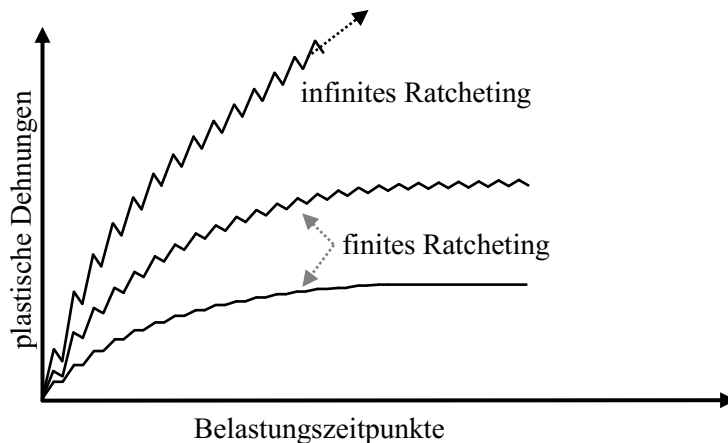


Abbildung 1: Prinzipskizze der möglichen Antworten von plastischer Dehnungsakkumulation aus zyklisch beanspruchten Tragwerken

Detailliertes rechnerisches Nachvollziehen der Beanspruchungsentwicklungen von Tragwerken, welche Ratcheting aufweisen, ist äußerst anspruchsvoll und aufwendig. Hierbei kommen numerische Verfahren wie die Finite-Element-Methode zum Einsatz, welche auch in dieser Arbeit verwendet wird, um strukturmechanische Aufgabenstellungen zu lösen. Insbesondere bei Beanspruchungsniveaus, die zu infinitem Ratcheting führen, ist die Ermittlung der Zustandsgrößen bei vielen Lastwiederholungen rechnerisch sehr aufwendig.

Im Gegensatz zu infinitem Ratcheting kommt es bei finitem Ratcheting nach einer Akkumulationsphase zu keiner weiteren Zunahme der mittleren Dehnungen. Hierbei reagieren die Tragwerke periodisch synchron mit den Zustandsgrößen wie Dehnung und Spannung auf die zyklische Belastung. Dieses Verhalten wird weithin als Einspielzustand (shakedown state) bezeichnet. Hierbei spielt die Zeit nur eine chronologisch ordnende Rolle und zeitabhängiges Verhalten wie Kriechen oder Relaxation bleiben in dieser Arbeit unberücksichtigt.

Einspielzustände lassen sich weiter unterteilen, und zwar in elastisches Einspielen und plastisches Einspielen. Bei elastischen Einspielzuständen sind die plastischen Dehnungen zwischen den Belastungsextrema konstant und nur die elastischen Anteile verhalten sich synchron zur Belastung. Das Verhalten elastischer Einspielzustände ist in Abbildung 1 mit der unteren Kurve schematisch dargestellt. Bei plastischen Einspielzuständen verbleibt die mittlere akkumulierte Dehnung konstant. Was bedeutet, dass sich alle Dehnungen – auch die plastischen – periodisch synchron zu den Belastungen verhalten und es zwischen den Belastungszuständen zu wechselndem Plastizieren kommt. Dieses Verhalten wird durch die mittlere Kurve aus Abbildung 1 beschrieben.

Neben der Herausforderung, die Belastungsgeschichte bis zum Einspielzustand rechnerisch zu durchlaufen, gibt es auch noch die Problemstellung, aus einer thermischen transienten Analyse die Zeitpunkte der höchsten Beanspruchung zu identifizieren. Können keine vereinfachten

Annahmen über die thermischen Dehnungen im Tragwerk getroffen werden, so können auch hier numerische Verfahren verwendet werden, um die Verteilung der thermischen Dehnungen im Tragwerk zu ermitteln. Eine ausreichende Diskretisierung der Zeit ist bei thermisch-transienten Berechnungen notwendig, um geeignete Ergebnisse zu erzielen. Bei nichtlinearen Strukturanalysen werden aufgrund des numerischen zusätzlichen Aufwands häufig nicht alle Belastungszeitpunkte aus der thermischen Analyse berücksichtigt. Es liegt nun an dem Berechnungsingenieur herauszufinden, welche Belastungszeitpunkte maßgebend sind.

Neben der Bestimmung der Belastungszeitpunkte, die zu maximalen Beanspruchungen führen, gibt es noch eine Reihe von weiteren Punkten, die zu Herausforderungen bei Einspieluntersuchungen führen. So gibt es in den Regelwerken eine Reihe an Punkten, bei denen die Auslegung unterschiedlich interpretiert werden könnte, oder es keine klare Empfehlung gibt. Solche Punkte sind zum Beispiel die geeignete Wahl des Stoffgesetzes bei elastisch-plastischen Untersuchungen oder die Vorgehensweise zur Linearisierung der Spannungen. So lassen sich verschiedene numerische Vorgehensweisen wählen, welche gelegentlich in kommerziellen Softwareprodukten angeboten werden. Dort muss vom Ingenieur ein geeigneter Elementtyp gewählt werden, mit dem das geometrische Modell in ein numerisches Modell übertragen wird. Die Diskretisierung des numerischen Modells ist meistens nur eine Annäherung an das geometrische Modell, und auch hier müssen Ingenieure geeignete Abschätzungen treffen. Bei Verwendung von nichtlinearen Stoffgesetzen hat die Diskretisierung des Lastweges auch einen Einfluss auf die Ergebnisse, was in der praktischen Anwendung aufgrund des zusätzlichen Berechnungsaufwandes gelegentlich vernachlässigt wird. Somit gibt es eine Reihe an Punkten, bei denen die Erfahrungen des Ingenieurs in Theorie und Praxis einen großen Einfluss auf die Ergebnisse haben können.

Die Vereinfachte Fließzonentheorie ist entwickelt worden, um den Aufwand zeitintensiver numerischer Berechnung zu minimieren und damit den Prozess des Entwurfs und der Bemessung zu vereinfachen. Der Stand der Forschung befand sich vor dieser Arbeit an einem Punkt, in dem eine Berechnung mit einer zyklischen Belastung aus zwei wechselnden Belastungsextrema bei deutlich geringerem numerischem Aufwand gute Ergebnisse erzielte. Mit dieser Arbeit werden neue Entwicklungen vorgestellt, mit denen mehr als zwei Belastungsextrema für zyklische Belastungen berücksichtigt werden können. Weiterhin wird eine Entwicklung vorgestellt, die es ermöglicht, Strukturnichtlinearität mit der Vereinfachten Fließzonentheorie zu kombinieren.

1.2. Voraussetzungen aus der Plastizitätstheorie

Deformationen in einem Tragwerk können durch die totalen Dehnungen ε^{to} beschrieben werden, welche sich aus elastischen Dehnungen ε^{el} und plastischen Dehnungen ε^{pl} zusammensetzen. Die additive Verknüpfung der elastischen und plastischen Dehnungen, wie sie im Folgenden dargestellt ist, wird für die gesamte Arbeit angenommen.

$$\varepsilon^{to} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad (1)$$

Eine Verwendung von multiplikativer Verknüpfung der elastischen und plastischen Dehnungsanteile ist notwendig, wenn in dem Tragwerk große Dehnungen erwartet werden. Der praktische Anwendungsbereich der Vereinfachten Fließzonentheorie im Kontext der Regelwerke von ASME [3] und dem Kerntechnischen Ausschuss (KTA) [4] überschreitet keine fünf Prozent, aufgrund der vorgegebenen Dehngrenzen.

1.2.1. Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen

Die Verschiebungen in Abhängigkeit ihrer Richtungen werden hier mit u_x, u_y, u_z angegeben. Dem gegenüber steht der Verzerrungstensor, der sich aus drei Dehnungen und drei Schubverzerrungen zusammensetzt. Mit der Grundannahme von linearisierten Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen ergeben sich für die drei Komponenten der Dehnungen folgende Formulierungen.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2)$$

Die Dehnungen ergeben sich somit als Änderung der Länge eines infinitesimalen Elementes in Bezug zu seiner Ausgangslänge. Aus den Gleitungen, welche im Allgemeinen mit $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ bezeichnet werden, ergeben sich die Schubverzerrungen $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$. Die Gleitungen ergeben sich aus der Summe von zwei Winkeländerungen in Bezug zur Ausgangslage.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (3)$$

Der Unterschied zwischen den Gleitungen und den Schubverzerrungen liegt in dem Faktor $\frac{1}{2}$, wodurch das arithmetische Mittel der beiden Winkeländerungen berechnet wird.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}, \quad (4)$$

1.2.2. Elastisches Verhalten

Die elastischen Dehnungen ε^{el} aus Gleichung (1) stehen in einem linearen Zusammenhang mit den auftretenden Spannungen im Tragwerk. Dieser Zusammenhang wird als Hooke'sches Gesetz bezeichnet und beschreibt das denkbar einfachste Stoffgesetz. Die Beziehung zwischen den Komponenten der Spannungen und Dehnungen werden über die lineare Elastizitätsmatrix beschrieben.

$$\sigma_i = E_{ij} \varepsilon_j^{el}; \quad i, j = 1 \dots 6 \quad (5)$$

Hierbei beschreiben die Indizes i und j die Komponenten der Spannungs- und Dehnungsvektoren, welche sich aus drei Normalspannungskomponenten und drei Schubspannungskomponenten zusammensetzen.

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; \varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die Elastizitätsmatrix für isotrope Werkstoffe setzt sich aus dem E-Modul E und der Querkontraktionszahl ν zusammen, welche die beiden einzigen elastischen Werkstoffparameter sind.

$$E_{ij} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die invertierte Elastizitätsmatrix E_{ij}^{-1} zur Berechnung von ε_j^{el} lautet

$$E_{ij}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Die mathematischen Formulierungen von Werkstoffbeziehungen werden als konstitutive Gleichungen bezeichnet. Das zu lösende Gleichungssystem, welches durch die Gleichgewichtsbedingung an einem Finite-Element-Modell aufgestellt wird, kann bei linear-elastischen Stoffgesetzen direkt gelöst werden. Ist das Stoffgesetz nichtlinear, werden numerische Näherungsverfahren verwendet, um die Lösung iterativ zu ermitteln.

1.2.3. Deviatorischer Spannungszustand

Die plastischen Dehnungsanteile aus Gleichung (1) sind Dehnungen, die bei einer Belastung auftreten können und nach der Entlastung noch im Tragwerk vorhanden sind. Plastische Dehnungen treten bei Beanspruchungen auf, die die elastische Grenzbeanspruchung überschreiten. Die elastische Grenze wird durch die Fließbedingung des Materials bestimmt. In dieser Arbeit werden plastische Dehnungen, die ausschließlich durch zeitunabhängige und thermische oder mechanische Beanspruchungen entstanden sind, berücksichtigt.

Die Einteilung in elastische und überelastische Bereiche der Beanspruchungen wird durch die Fließgrenze festgelegt. Die Fließgrenze kann in Abhängigkeit vom Werkstoff durch

unterschiedliche Beanspruchungen überschritten werden. Bei Stahl hat der hydrostatische Anteil einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Entstehung der plastischen Dehnungen. Die hydrostatische Spannung σ_H , welche sich aus den drei Normalspannungskomponenten errechnet, kann somit vom allgemeinen Spannungszustand abgezogen werden.

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (9)$$

$$\sigma_{i,H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_H \quad (10)$$

Durch Subtraktion des hydrostatischen Spannungszustandes $\sigma_{i,H}$ vom allgemeinen Spannungszustand σ_i ergibt sich der deviatorische Spannungszustand σ'_i . Die deviatorischen Spannungen (Deviator – lateinisch für Abweichler) beschreiben somit das Abweichen vom hydrostatischen Spannungszustand, welches ab einem bestimmten Betrag zu überelastischem Verhalten führt. Das Apostroph am Spannungsvektor σ'_i zeigt an, dass es sich bei diesem Vektor um deviatorische Spannungskomponenten handelt.

$$\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_{i,H} = \begin{pmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & -\frac{1}{3}\sigma_y & -\frac{1}{3}\sigma_z \\ -\frac{1}{3}\sigma_x & \frac{2}{3}\sigma_y & -\frac{1}{3}\sigma_z \\ -\frac{1}{3}\sigma_x & -\frac{1}{3}\sigma_y & \frac{2}{3}\sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Für den deviatorischen Spannungszustand gilt die Bedingung, dass die Summe aller Normalspannungskomponenten zu Null wird.

$$(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = 0 \quad (12)$$

Aus dieser zusätzlichen Bedingung ergibt sich, dass von den drei deviatorischen Normalspannungskomponenten nur zwei unabhängig sind. Deshalb lassen sich Hauptspannungszustände mit der Fließbedingung in einer Ebene darstellen, welche als Deviatorebene bezeichnet wird. In der Literatur wird die Deviatorebene gelegentlich auch als π -Ebene bezeichnet.

1.2.4. Die Fließfläche

Die Fließfläche ist eine geometrische Form im Spannungsraum, durch die bestimmt wird, ob sich Spannungen elastisch oder überelastisch verhalten. Liegt eine mehrachsige Spannungsänderung innerhalb der Fließfläche vor, so kommt es zu einer elastischen Änderung der Zustandsgrößen. Berührt der Spannungsvektor die Fließfläche, so ist die Änderung der Zustandsgrößen durch

elastisch-plastisches Verhalten geprägt. Spannungsvektoren außerhalb der Fließfläche sind ungültig.

Nach den Postulaten von Drucker [5] sollten Fließflächen konvex ausgebildet sein. In der praktischen numerischen Anwendung hat sich in den letzten Jahrzehnten für inkompressible Werkstoffe, wie Stahl, die Mises-Fließfläche etabliert, welche in Abbildung 2 dargestellt ist. Im deviatorischen Hauptspannungsraum ist die Mises-Fließfläche in der Deviatorebene ein Kreis und im allgemeinen Hauptspannungsraum ein unendlicher Zylinder, dessen Achse entlang der hydrostatischen Geraden ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$) verläuft.

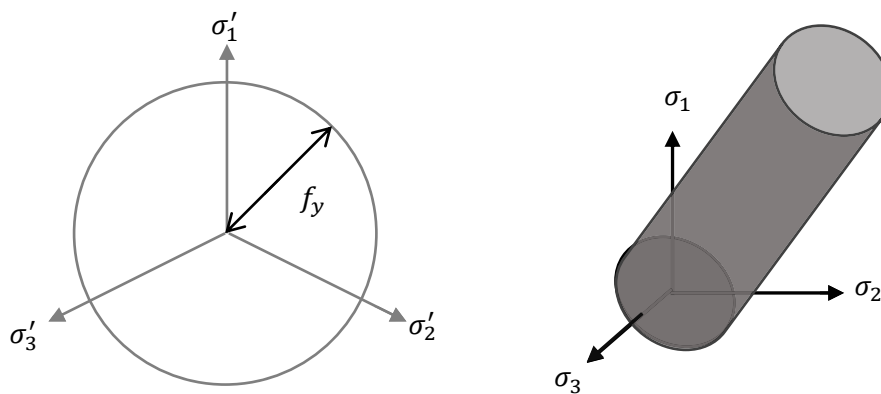


Abbildung 2: Zylinderförmige Mises-Fließbedingung,
links: isometrische Darstellung im deviatorischen Hauptspannungsraum,
rechts: Darstellung im Hauptspannungsraum

Die funktionale Beschreibung der Mises-Fließfläche $g(\sigma'_i)$ kann durch die deviatorischen Hauptspannungen, wie in Gleichung (13) angegeben, berechnet werden. Die Streckgrenze f_y beschreibt damit den Radius der Mises-Fließfunktion.

$$g(\sigma'_i) = f_y = \sqrt{\frac{3}{2}[(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2]} \quad (13)$$

Die Gleichung (13) gilt nur für ein Materialverhalten, welches nicht bereits überelastisch beansprucht wurde oder bei Stoffgesetzen ohne Verfestigung, d.h. dass die Spannungen die Streckgrenze nicht überschreiten können. Eine Formulierung der Fließfunktion mit verfestigendem Verhalten wird in Unterabschnitt 1.2.6 gegeben.

Etablierte Fließflächen wie die von Huber und Tresca sind eher selten in numerischen Software-Programmen enthalten und geraten in der praktischen numerischen Anwendung zunehmend in den Hintergrund. Aktuell gibt es nach wie vor Forschungsbemühungen, die Geometrie der Fließfläche einfach darstellen zu können und gleichzeitig den Materialversuchen möglichst gerecht zu werden [6]. Diese Entwicklungen tragen sicherlich dazu bei, das Materialverhalten im

Übergang von elastisch zu überelastisch besser beschreiben zu können, insofern die Streuung aus den Materialversuchen das zulässt.

1.2.5. Die Fließregel

Die Fließregel oder auch das Fließgesetz beschreibt die Richtung und den Betrag des plastischen Verzerrungssinkrements. Sie dient damit der Beschreibung der Evolution der plastischen Verzerrungen und lautet wie folgt.

$$d\varepsilon_i^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i} \quad (14)$$

Hierbei ist $d\lambda$ ein skalarer Wert, der als plastic multiplier bezeichnet wird und Q wird in der Literatur häufig als plastisches Potential bezeichnet. Entspricht die Funktion des plastischen Potentials der Fließfunktion, spricht man von einem assoziierten Fließgesetz. Das bedeutet, wird neben der Mises-Fließbedingung ein Mises-Potenzial verwendet, befindet sich der Vektor des plastischen Dehnungssinkrements $d\varepsilon_i^{pl}$ orthogonal auf der Fließfunktion. In dieser Arbeit wird von einer assoziierten Fließregel ausgegangen, wie sie in Abbildung 3 zu sehen ist.

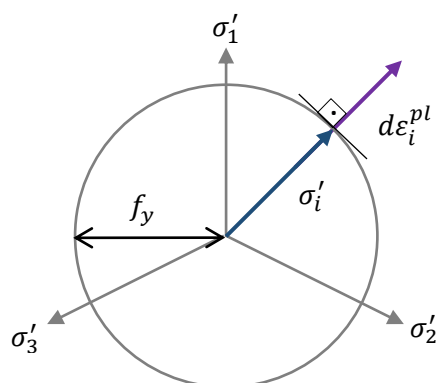


Abbildung 3: Assoziierte Fließregel (Normalenregel), bei der das plastische Dehnungssinkrement orthogonal auf der Fließfläche liegt.

1.2.6. Die Verfestigungsfunktion

Während die Fließfläche und die Fließregel festlegen, wann und in welcher Richtung es zum Plastizieren kommt, bestimmt die Verfestigungsfunktion den Spannungs- und Dehnungsverlauf im überelastischen Bereich. Die wohl einfachste überelastische Spannungs-Dehnungsbeziehung wird durch das elastisch ideal-plastische Stoffgesetz beschrieben. Dieses Stoffgesetz lässt Spannungen oberhalb der Fließgrenze nicht zu und somit kommt es auch zu keiner Änderung in der Fließfläche.

Treten Spannungen oberhalb der Streckgrenze auf, wird von verfestigendem Verhalten gesprochen (englisch: hardening). Weil Spannungen außerhalb der Fließfläche generell nicht erlaubt sind, gibt es zwei grundlegende Möglichkeiten, um Vergleichsspannungen oberhalb der Streckgrenze zuzulassen. Zum einen kann die Fließfläche durch Translation in der deviatorischen Ebene

verändert werden, was als kinematische Verfestigung bezeichnet wird, Abbildung 4. Zum anderen kann die Fließfläche durch eine gleichmäßige Vergrößerung des Radius – also der Streckgrenze – erweitert werden, weshalb diese Verfestigungsart als isotrope Verfestigung bezeichnet wird.

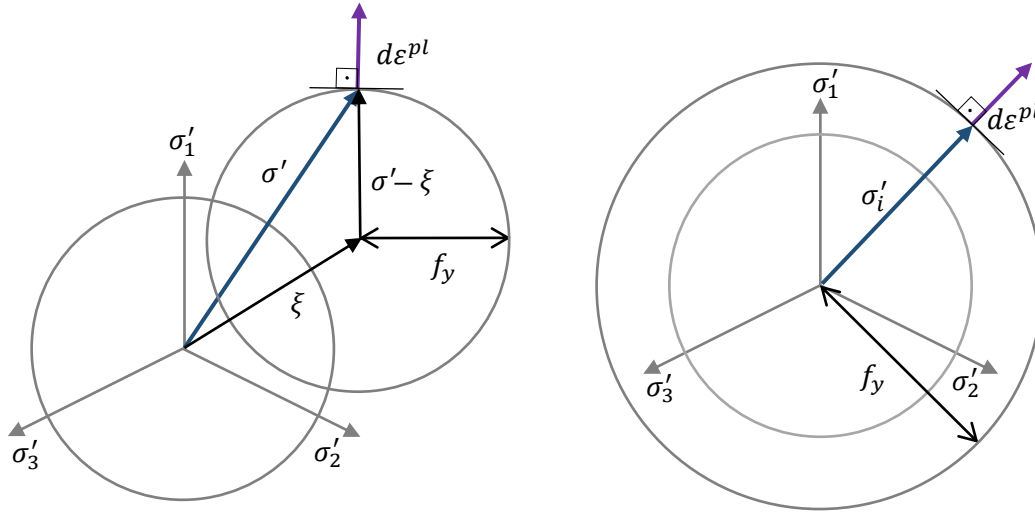


Abbildung 4: Transformation der Fließfläche infolge überelastischer Beanspruchungen,
links: kinematische Verfestigung durch Translation,
rechts: isotrope Verfestigung durch konzentrische Extension.

Bei kinematischer Verfestigung bleibt die Geometrie der Fließfläche unverändert, nur der Mittelpunkt der Fließfläche wird in der Deviatorebene verschoben. Infolge dieser Verschiebung verhält sich die Fließbedingung nun anisotrop. Die Translation der Fließfläche wird durch den Vektor ξ_i , der in der Literatur auch als Rückspannung oder Backstress-Vektor bekannt ist, bestimmt. Das anisotrope Verhalten der Fließbedingung wird nun durch die deviatorischen Spannungen σ'_i und die Rückspannungen ξ_i bestimmt.

$$g(\sigma'_i - \xi_i) = f_y = \sqrt{\frac{3}{2} [(\sigma'_1 - \xi_1)^2 + (\sigma'_2 - \xi_2)^2 + (\sigma'_3 - \xi_3)^2]} \quad (15)$$

Im Gegensatz zur kinematischen Verfestigung bleibt bei isotroper Verfestigung der Mittelpunkt der Fließfläche im Ursprung des Koordinatensystems verankert. Spannungszustände oberhalb der Streckgrenze sind dann nur möglich, wenn die Streckgrenze expandiert wird. Die Isotropie der Fließfunktion bleibt erhalten dadurch, dass aus dem vorher skalaren Wert der Streckgrenze eine Funktion mit dem Verfestigungsparameter κ wird.

$$f_y = f_y(\kappa) \quad (16)$$

κ ist wie ξ_i eine interne Zustandsvariable, die auch als plastische Arbeit bezeichnet wird und mit den plastischen Dehnungen in funktionaler Verbindung steht.

Bei isotroper Verfestigung kommt es somit bei Überschreiten der Streckgrenze durch eine Druckbeanspruchung auch zu einer Erhöhung der Streckgrenze auf der Zugseite. Dieses Verhalten ist für Stahl eher untypisch, da in Materialversuchen bei wechselnden überelastischen Beanspruchungen der Bauschinger-Effekt beobachtet wird [7]. Das bedeutet, dass nach einer überelastischen Beanspruchung die Fließgrenze nach der Lastumkehr bei einem geringeren Niveau der Vergleichsspannung wieder erreicht wird, wie in Abbildung 5 links zu sehen ist. Ausgehend von einer einachsigen Beanspruchung tritt bei Belastungsumkehr und isotroper Verfestigung erst wieder Plastizieren auf, wenn die aktualisierte Streckgrenze f_{y2} erreicht ist.

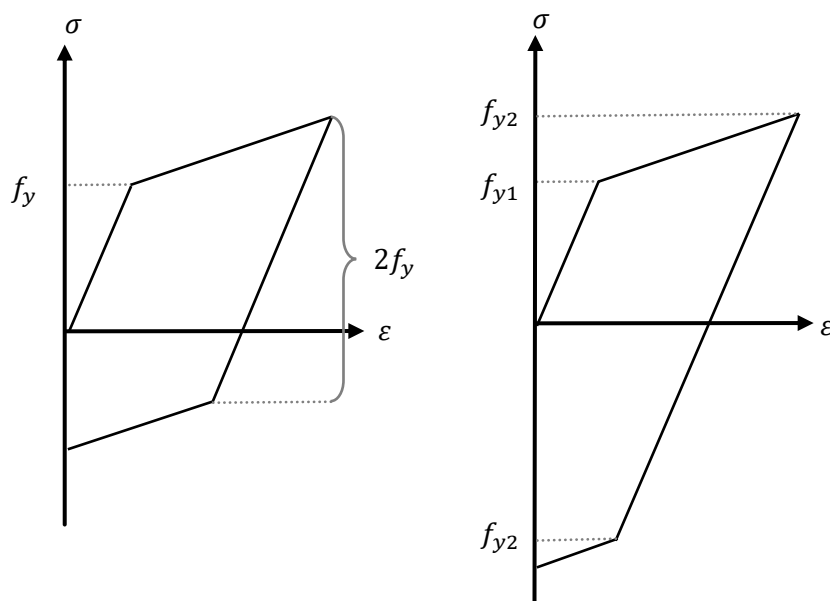


Abbildung 5: Spannungs-Dehnungsbeziehung nach weggesteuerter Be- und Entlastung in Abhängigkeit der Verfestigungsart, **links:** kinematische Verfestigung, **rechts:** isotrope Verfestigung.

In praktischen Untersuchungen von Stahltragwerken mit wechselnden Beanspruchungen wird in der Regel kinematische Verfestigung verwendet, welche das Spannungs-Dehnungsverhalten mit dem Bauschinger-Effekt geeignet wiedergeben kann. Isotrope Verfestigung kommt eher bei monotonen Beanspruchungen und dem Auftreten von großen plastischen Dehnungen, wie bei Umform- oder Walzprozessen in Anwendung [8].

Mittlerweile sind in den bedeutenden Simulationsprogrammen auch die Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung möglich [9]. Beide Verfestigungsarten zu koppeln macht dann Sinn, wenn bei wechselnden Beanspruchungen eine begrenzte isotrope Verfestigung berücksichtigt werden soll, welche bei Stahl in den ersten Zyklen bei Materialversuchen beobachtet werden kann. Nach einigen Zyklen wird das Spannungs-Dehnungsverhalten jedoch von kinematischer Verfestigung dominiert. In der Regel werden die Stoffgesetze anhand der zyklischen

Spannungs-Dehnungsbeziehungen bestimmt, wodurch auf isotrope Verfestigung verzichtet werden kann. In dieser Arbeit wird ausschließlich kinematische Verfestigung verwendet.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungsbeziehung im überelastischen Bereich kann durch unterschiedliche Funktionen beschrieben werden. Das Vernachlässigen der Verfestigung wird als ideal-plastisches Verhalten bezeichnet. Eine weitere einfache Form die Verfestigung zu beschreiben ist durch eine lineare Funktion. Soll die Spannungs-Dehnungsbeziehung in den überelastischen Bereichen etwas detaillierter beschrieben werden, so werden in der Regel multilineare oder nichtlineare Verfestigungsfunktionen verwendet, wie sie in Abbildung 6 dargestellt sind. Grundsätzlich kann zusätzlich noch zwischen den begrenzten und unbegrenzten Verfestigungsfunktionen unterschieden werden. Bei den begrenzten Verfestigungsfunktionen kann ein maximaler Spannungswert nicht überschritten werden. Im Gegensatz zu den begrenzten Verfestigungsfunktionen können die Spannungen bei unbegrenzten multilinearen Verfestigungsfunktionen theoretisch unendlich ansteigen, weshalb auch ein Einspielzustand numerisch gewährleistet ist. Wesentliche Auswirkungen des Stoffgesetzes auf das Einspielverhalten wurde in Das Attachment steht offline nicht zur Verfügung. [10] untersucht.

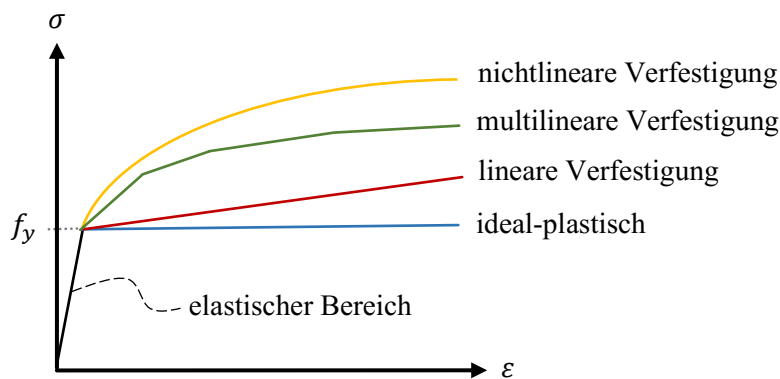


Abbildung 6: Spannungs-Dehnungsbeziehungen in Abhängigkeit von der Verfestigungsfunktion

Lineare Verfestigung

Die Prager-Ziegler Verfestigung [11, 12] beschreibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem aktuellen plastischen Dehnungszinkrement und der inneren Zustandsgröße, welche die Richtung des Dehnungszinkrements festlegt. Auf Grundlage der assoziierten Fließregel gibt das Rückspannungszinkrement $d\xi_i$ die Richtung des plastischen Dehnungszinkrements $d\varepsilon_i^{pl}$ vor.

$$d\xi_i = \frac{2}{3} C d\varepsilon_i^{pl} \quad (17)$$

Der lineare Zusammenhang zwischen $d\xi_i$ und $d\varepsilon_i^{pl}$ wird durch den plastischen Verfestigungsmodul C gegeben. Dieses lässt sich über den E-Modul E und den Tangentenmodul E_t des bilinearen Stoffgesetzes berechnen.

$$C = \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \quad (18)$$

Bei temperaturunabhängiger und bilinearer Spannungs-Dehnungsbeziehung ist der plastische Verfestigungsmodul konstant und kann geschlossen zu

$$\xi_i = \frac{2}{3} C \varepsilon_i^{pl} \quad (19)$$

integriert werden.

Multilineare Verfestigung

Eine multilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung kann durch das Besseling-Modell [13] hergestellt werden. Das Modell von Besseling erzeugt durch das Überlagern von mehreren Layern, mit jeweils einem ideal-plastischem Stoffgesetz, eine multilineare Verfestigungsfunktion. Diese Vorgehensweise ist in [14, 15] für die Verwendung von linearen Verfestigungsfunktionen in den Layern erweitert worden.

Jeder Layer besitzt dabei seinen eigenen E-Modul, die Querkontraktionszahl, eine Streckgrenze und einen Tangentenmodul. Die Überlagerung der Layer führt im Gesamtzustand zu dem gewünschten multilinearen Verhalten, wie es in Abbildung 7 dargestellt ist. Bei der Verwendung eines elastisch ideal-plastischen Stoffgesetzes in den Layern ist die Steigerung des letzten Segments immer null. Das bedeutet, es liegt begrenzte Verfestigung vor. Werden hingegen Layer mit linear kinematischer Verfestigung verwendet, ist die Steigung im letzten Segment ungleich null und es liegt unbegrenzte Verfestigung vor. In diesem Fall kann das Besseling-Modell als eine Erweiterung der Prager-Ziegler Verfestigung angesehen werden.

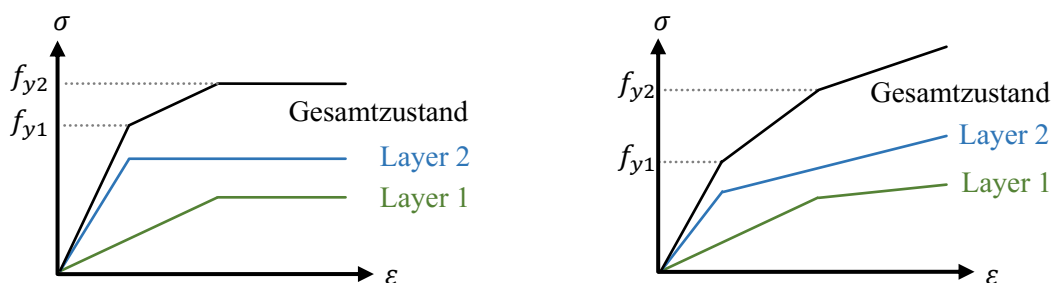


Abbildung 7: Besseling-Modell mit zwei Layern,
links: mit ideal-plastischen Stoffgesetzen,
rechts: mit bilinearen Stoffgesetzen pro Layer.

Nichtlineare Verfestigung

Unter dem Begriff „nichtlineare Verfestigungsfunktionen“ werden hier alle Funktionen verstanden, deren Ableitung eine stetige Funktion ist. Somit gehören die multilinearen Verfestigungsfunktionen, welche im Prinzip auch einen nichtlinearen Verlauf aufweisen, nicht dazu.

Der prominenteste Vertreter der nichtlinearen Verfestigungsfunktionen ist wohl das Chaboche-Modell [16]. Die Prominenz dieses Modells rührt daher, dass es in vielen kommerziellen Softwarepaketen implementiert wurde und deshalb für die Praxis und die Forschung bereits seit Jahren zur Verfügung steht. Häufig ist jedoch die Anwendung, insbesondere die Parameterbestimmung, an einige Herausforderungen und tieferes Verständnis des Modells geknüpft.

Die Grundlagen des Chaboche-Modells bildeten Armstrong und Frederik [17] mit ihrem Vorschlag für eine nichtlineare Verfestigungsfunktion. Sie erweiterten die Prager-Ziegler Verfestigung für isotherme Bedingungen um den Erholungsterm $\gamma \xi_i dp$.

$$d\xi_i = \frac{2}{3} C d\varepsilon_i^{pl} - \gamma \xi_i dp \quad (20)$$

Die Konstanten γ und C beschreiben hier Werkstoffparameter. In dem hinzugekommenen Erholungsterm befindet sich der Wert der plastischen Dehnrate dp , welcher gelegentlich auch als akkumulierte plastische Vergleichsdehnung bezeichnet wird. Häufig werden zur Bestimmung der Materialkonstanten Curve-Fitting-Methoden an monotonen oder zyklischen Spannungs-Dehnungskurven angewandt, welche aus Materialversuchen herrühren [18].

Chaboche erkannte, dass mit den zwei Parametern γ und C das Ratcheting-Verhalten nicht ausreichend beschrieben wurde und erweiterte Gleichung (20) um den Summenterm zu Gleichung (22).

$$(d\xi_i)_j = \frac{2}{3} C_j d\varepsilon_i^{pl} - \gamma_j (\xi_i)_j dp \quad (21)$$

$$\xi_i = \sum_j^k (\xi_i)_j \quad \text{mit } k = 2 \dots 5 \quad (22)$$

In der Literatur gibt es mittlerweile zahlreiche Modifikationen und Erweiterungen des Chaboche-Modells [10, 19, 20]. Wobei es nach wie vor schwierig ist, ein konkretes Stoffgesetz zu finden, welches der hohen Streuung aus den Materialuntersuchungen gerecht wird. Insbesondere bei experimentellen Ratcheting-Untersuchungen an etwas komplexeren Tragwerken können selbst aufwendige Stoffgesetze das Tragverhalten nur begrenzt beschreiben. Ob eine konkrete nichtlineare Stoffgesetzfunktion in der Lage sein kann, das Materialverhalten in Anbetracht der hohen Streuung aus Materialversuchen abzubilden, bleibt fraglich.

1.2.7. Materialratcheting und Strukturratcheting

Die Akkumulation von plastischen Dehnungen und damit Ratcheting kann vielfältige Ursachen haben, die mitunter nicht leicht zu identifizieren sind. Gelegentlich wird in der Literatur der Begriff Ratcheting durch zyklisches Kriechen ungünstig gleichgestellt, obwohl Kriechen ein von der physikalischen Zeit und Ratcheting nur von der chronologisch ordnenden Zeit abhängig ist. Beide Phänomene können jedoch gleichzeitig auftreten und sich dann auch gegenseitig beeinflussen, weshalb es noch bedeutender ist, diesen Begriffen eine klare Definition zu geben. Genau genommen, beschreiben ratenunabhängige Stoffgesetze die Entwicklung der plastischen Dehnungen auch über die Zeit, wohingegen die Zeit nur einen chronologisch ordnenden Charakter aufweist. In dieser Arbeit werden nur ratenunabhängige Stoffgesetze verwendet und der Begriff Zeit ordnet nur die chronologische Reihenfolge der Belastungen.

In [21] ist eine Unterscheidung zwischen Materialratcheting und Strukturratcheting getroffen worden, die die Ursachen von Ratcheting präzisiert.

Materialratcheting

Materialratcheting kann als eine Unterform von Ratcheting angesehen werden, und ist ein Materialverhalten, welches isoliert von jeglichen Struktureffekten beobachtet werden kann. Materialratcheting wird in der Regel im Labor bei Materialuntersuchungen beobachtet. Auf Grundlage dieser zyklischen Materialversuche werden dann leistungsfähige Stoffgesetze entworfen und weiterentwickelt. Obwohl diese Stoffgesetze in der Lage sind, das Akkumulationsverhalten aus den Materialversuchen geeignet abzubilden, liefern Sie jedoch in der Anwendung an komplexen Randwertproblemen nicht die gleiche Qualität [22]. Die Gründe hierfür sind evtl. vielfältig und seit Jahren Bestandteil der Forschung.

In dieser Arbeit werden Stoffgesetze, die Materialratcheting beinhalten, nicht berücksichtigt. Es wird jedoch in Abschnitt 7.2 eine Methode vorgestellt, die es ermöglichen könnte, solche Stoffgesetze in die VFZT zu implementieren. Zur Anwendung der VFZT im Anlagenbau der druckführenden Rohrleitungen und Kessel werden einfache Stoffgesetze mit kinematischer Verfestigung empfohlen [23], wobei an anderen Stellen auch andere Empfehlungen gegeben werden, die stark von der Belastungsart, dem verwendeten Werkstoff, dem Belastungsniveau und der Geometrie des Tragwerks abhängen [7].

Strukturratcheting

Strukturratcheting kann unabhängig von Materialratcheting bei zyklischen überelastischen Beanspruchungen auftreten. Die Ursachen für Strukturratcheting können auf inhomogene Spannungszustände im Tragwerk zurückgeführt werden [21]. Inhomogene Spannungszustände können durch zyklische und ortsfeste Beanspruchungen oder durch Wanderlasten hervorgerufen werden

[24]. Die Anwendung von Stoffgesetzen mit Materialratcheting führt häufig zu einer Überschätzung der plastischen Dehnungen und sind daher für Einspieluntersuchungen eher ungeeignet [22].

Die Ermittlung von Einspielzuständen erfordert ein zyklisches Durchlaufen der Belastungsgeschichte, bis Beanspruchungen synchron zu den Belastungen verlaufen. Dies kann viele berechnungsintensive elastisch-plastische Analysen zur Folge haben. Um Informationen über das Verhalten oder die Zustandsgrößen im Einspielzustand zu erhalten, hat sich das Forschungsfeld der direkten Methoden entwickelt. Direkte Methoden verwenden häufig sehr einfache Stoffgesetze, bei denen Materialratcheting nicht berücksichtigt wird. Diese Werkstoffbeziehungen genügen jedoch, um das Einspielverhalten ausreichend vorherzusagen [7, 22].

1.3. Vereinfachte Berechnungen und Direkte Methoden

Seit vielen Jahrzehnten gibt es zahllose Ansätze und Verfahren, die es ermöglichen sollen, Tragwerke bei zyklischen und überelastischen Beanspruchungen zu bemessen. In einer groben Zusammenfassung lassen sich diese Methoden in drei Gruppen einteilen:

1. Verwendung von Korrekturfaktoren
2. Analyse des Einspiel-Verhaltens
3. Berechnung der Zustandsgrößen im Einspielzustand

Jede dieser Gruppen hat Vor- und Nachteile in Bezug auf Ergebnisqualität, Berechnungsaufwand und allgemeine Anwendbarkeit, welche im Folgenden vorgestellt werden.

1.3.1. Verwendung von Korrekturfaktoren

Bei der Berechnung mit Hilfe von Korrekturfaktoren (K_e) werden fiktiv-elastische Beanspruchungen verwendet, um Dehnschwingbreiten für den Einspielzustand zu berechnen. Obwohl diese Berechnungsmethoden nur für bestimmte Arten von Bauteilgeometrien und Belastungen geeignet angewandt werden können, werden sie aufgrund ihrer Verankerung in Regelwerken wie ASME-Code und KTA-Regeln [3, 4] vielfach verwendet. In [25] wurden diese Korrekturfaktoren kritisch betrachtet. Ein weiterer wesentlicher Kritikpunkt ist, dass die pauschalen Korrekturfaktoren nicht für die akkumulierten Dehnungen anwendbar sind.

Eine andere Methode der Berechnung durch Korrekturfaktoren hat Neuber vorgeschlagen [26]. Hierbei geht es um eine Korrektur von fiktiv-elastischen Spannungskonzentrationen in Kerben. Der Ansatz von Neuber wurde in vielen Variationen erweitert und kürzlich in ein iteratives Verfahren eingebettet [27]. Alle diese Ansätze haben jedoch eines gemein, sie sind auf Grundlage bestimmter Bauteil- und Belastungskonfigurationen hergeleitet und liefern häufig abseits dieser Herleitungsgrundlage nur grobe Näherungen. Die bedeutenden Vorteile dieser Methoden sind der oftmals geringe Berechnungsaufwand und die meist konservative Ergebnisqualität. Da die meist

konservativen Ergebnisse zu wenig fehlerhaften Bemessungen führen, können sich diese Methoden, wie die Ke-Faktoren, auch heute noch in den Regelwerken halten.

Die beiden anderen Gruppen von Verfahren verwenden numerische Methoden, um Informationen über den Einspielzustand zu erhalten. Dabei ist immer das Ziel, die aufwendigen elastisch-plastischen Schritt-für-Schritt-Berechnungen zu umgehen. Im Folgenden werden die beiden Verfahrensweisen und die populärsten Vertreter vorgestellt.

1.3.2. Analyse des Einspiel-Verhaltens

Bei den Analysen zur Betrachtung des Einspielzustandes wird in der Literatur der Begriff *shakedown-theory* verwendet. Es werden letztendlich Aussagen über das Verhalten eines Tragwerks bei bestimmten Belastungsniveaus gemacht. Tragwerke können sich elastisch verhalten, elastisch einspielen, plastisch einspielen oder *infinite Ratcheting* aufweisen, siehe Abbildung 1. Die *Shakedown-Methoden* ermitteln Lastfaktoren, unter denen der Einspielzustand gewährleistet ist und kein *infinite Ratcheting* auftritt. Dafür bedienen sich diese Methoden der Einspieltheoreme von Melan [28] und Koiter [29].

Melan's Theorem, welches als statischer Einspielsatz (*lower bound theorem*) bekannt ist, liefert eine untere Grenze des Lastfaktors. Koiter's Theorem wird als kinematischer Einspielsatz bezeichnet (*upper bound theorem*) und liefert eine obere Grenze für den Lastfaktor.

Bree [30] präsentierte eine vollständige Lösung für ein Geradrohr unter thermischer Beanspruchung, welches das bekannteste Beispiel für *Ratcheting* in der Literatur ist. Das Bree-Rohr bildet die Grundlage für Nachweisführung gegen *Ratcheting* wie den kerntechnischen Anlagen KTA [4]. Bree verwendete ein dünnwandiges Rohr, welches von einem unter Druck stehenden Medium durchströmt wird, das seine Temperatur ändert. Ein Rohr wird im Allgemeinen als dünnwandig angesehen, wenn das Verhältnis aus Wanddicke t und Innendurchmesser R_i kleiner als ein Zehntel ist. Das Rohr wird als unendlich lang angenommen, dadurch bleiben Einflüsse aus Störstellen wie Rohrkrümmungen, Stutzen oder Deckelkräften unberücksichtigt. Hierbei entstehen über die Belastungsgeschichte ein konstant anstehender Innendruck p und ein zyklisch wechselnder radialer Temperaturgradient ΔT , wie in Abbildung 8 dargestellt.

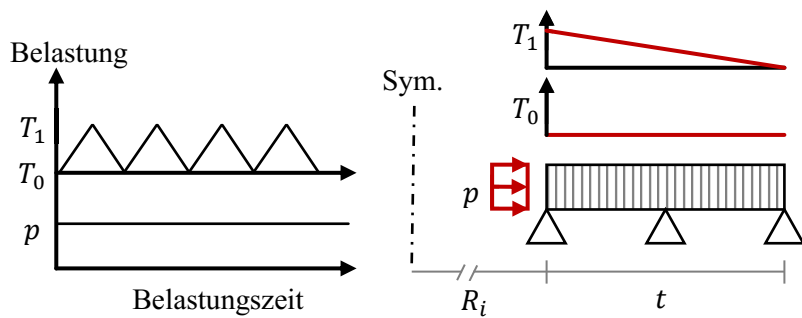


Abbildung 8: Das Bree-Rohr:

links: Belastungshistogramm aus konstantem Innendruck p und zyklischem radialen Temperaturgradienten ΔT ,
rechts: Modell des rotationssymmetrischen Rohrs mit Belastungen.

Für die Auswertung erstellte er ein Diagramm, welches in Abbildung 9 schematisch wiedergegeben wird. Sind die Beanspruchungen niedrig, verhält sich das Tragwerk rein elastisch E . Kommt es zum Plastizieren kann es elastisch einspielen ES , plastisch einspielen PS oder kollabieren K . Bree verwendete ein ideal-plastisches Stoffgesetz, deshalb tritt beim Überschreiten der Ratcheting-Grenze immer infinites Ratcheting auf. Mit diesem Diagramm wurde der Grundstein für die Darstellung der Ergebnisse von Einspieluntersuchungen gelegt, in dem eine genaue Abbildung der Verlaufsgrenze zwischen Einspielen und Ratcheting das Ziel dieser Methoden ist. Die Ratcheting-Interaktions-Diagramme (RID, engl. shakedown maps) sind zu einem elementaren Werkzeug der Ergebnisdarstellung für Methoden der Einspieluntersuchungen geworden.

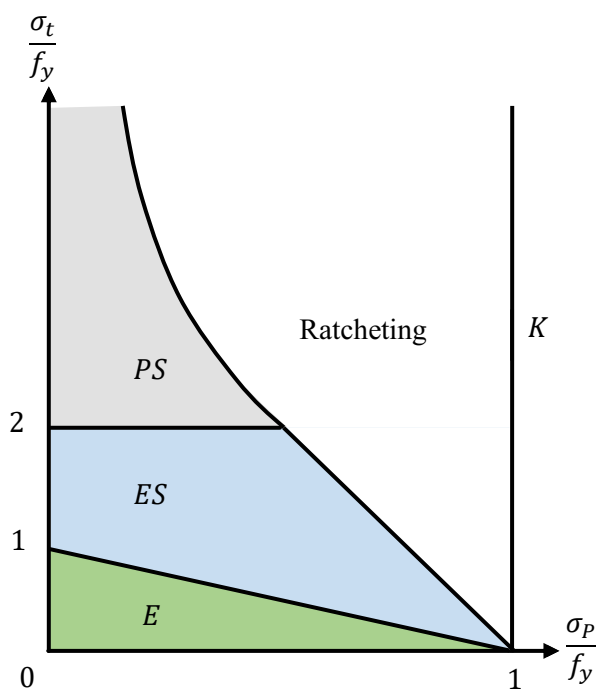


Abbildung 9: Bree-Diagramm für ein Geradrohr mit σ_p infolge konstantem Innendruck und σ_t infolge Temperaturbelastung

Abbildung 9 zeigt das Bree-Diagramm mit der Primärspannung σ_P und der Sekundärspannung σ_t , welche sich aus den fiktiv-elastischen Beanspruchungen der konstanten und zyklischen Belastung ergeben. So ergibt sich bei dem Bree-Rohr σ_P aus dem Innendruck und σ_t aus dem radialen Temperaturgradienten.

Die meisten dieser Shakedown-Methoden berücksichtigen nur linear-elastisches ideal-plastisches Materialverhalten. Es gibt jedoch auch zahlreiche Arbeiten, die verfestigendes Verhalten einbeziehen [31–36]. Darüber hinaus wurde auch über die Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten publiziert [37, 38]. Trotz der hohen Anzahl an Veröffentlichungen in diesem Bereich haben nur wenige Methoden eine nachhaltige Transformation in die industrielle Praxis gefunden.

Eine dieser Methoden ist die Linear-Matching-Method (LMM), welche von Ponter entwickelt wurde [39, 40] und in den kommerziellen FEM-Code von ABAQUS implementiert ist [41–43]. Seit einigen Jahren wird diese Methode von Chen weiterentwickelt und dabei gleichzeitig industrielle Partner einbezogen [44, 45]. Die LMM ist aus Grundgedanken der GLOSS [46] und der elastic compensation method (ECM) [47] entstanden und kann als bedeutendste Methode aus dem Gebiet der Shakedown-Methoden zur Zeit angesehen werden, wenn die Anzahl der Veröffentlichungen mit der LMM betrachtet wird.

Die Grundidee bei dem Vorgehen der LMM ist, eine nichtlineare Materialantwort zu erhalten, die auf einer Reihe von linear-elastischen Analysen beruht. Hierbei werden die Steifigkeiten an den überelastischen Stellen im Tragwerk angepasst. Die Anpassung basiert auf dem Verhältnis der Streckgrenze zu den vorhandenen Dehnungen, wobei das Materialverhalten ideal-plastisch ausgeprägt ist, aber eine Temperaturabhängigkeit aufweisen darf. Mit der angepassten linear-elastischen Steifigkeit wird eine weitere Analyse durchgeführt und es entsteht ein iterativer Prozess, der in Abbildung 10 schematisch dargestellt ist.

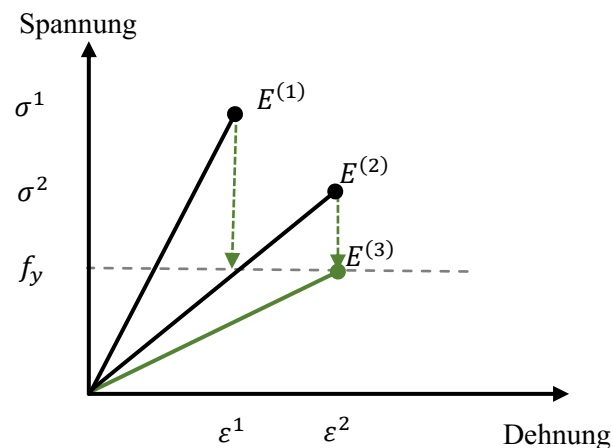


Abbildung 10: Prozedere zur Anpassung des E-Moduls über die Iterationen bei der LMM.

Neben der Anpassung der Steifigkeit wird auch der Lastfaktor auf Grundlage des upper bound theorem von Koiter angepasst. Dabei wird eine Energiebilanz zwischen externer Arbeit durch die aufgebrachten äußeren Lasten und der inneren Verformungsarbeit verwendet. Mit Hilfe des Lastfaktors wird das Belastungsniveau für die nächste Iteration angepasst. Der iterative Vorgang, bei dem die Steifigkeiten und die Belastungen angepasst werden, konvergiert in dem Ergebnis der Einspielgrenze.

Der Lastfaktor kann jedoch nur für eine Belastung verändert werden, was bedeutet, dass alle anderen Belastungen konstant gehalten werden müssen. Um einen repräsentativen Verlauf der Grenzlinie vom Übergang zwischen elastischem Einspielzustand zum Ratcheting zu erhalten, wird eine Reihe an Untersuchungen benötigt.

Aus dem konvergierten Ergebnis bei einem bestimmten Lastniveau lassen sich die elastisch-plastischen Spannungen ermitteln, wie es bei der ECM möglich ist [48]. Dadurch könnten evtl. auch die Dehngrenzen berechnet werden. Im Anwendungsbereich der LMM spielen die Dehngrenzen jedoch eine untergeordnete Rolle, da die Fragestellung bearbeitet wird, ob es unter einem bestimmten Lastniveau zum Einspielen oder zu Ratcheting kommt.

1.3.3. Berechnung der Zustandsgrößen im Einspielzustand

Aufgrund der üblichen Ingenieurspraxis, auf Grundlage von Zustandsgrößen zu entwerfen, und weil in einigen Regelwerken das Einhalten von Dehngrenzen zur Bemessung gefordert wird, haben sich direkte Methoden entwickelt, die diese Zustandsgrößen abschätzen. Der Unterschied zu einer Vorgehensweise mit Korrekturfaktoren liegt in der Anwendung von numerischen Techniken über die fiktiv-elastischen FE-Berechnungen hinaus. Wo bei den Korrekturfaktoren nur an ausgewählten Stellen im Tragwerk die Zustandsgrößen durch einfache Gleichungen berechnet werden, werden bei den direkten Methoden ganze Gleichungssysteme gelöst. Hierfür werden

meistens die Feldgleichungen – wie die Gleichgewichtsbedingungen, die Kompatibilitätsbedingungen – und gleichzeitig die Fließbedingungen berücksichtigt.

In der Regel liefern alle diese Methoden an komplexen Randwertproblemen nur Näherungslösungen, weil sie für die Abschätzungen der Zustandsgrößen im Einspielzustand zusätzliche Bedingungen einführen, die über die Bedingungen der allgemeinen Fließzonentheorie hinaus gehen.

Eine der prominentesten Vertreterin dieser nicht-inkrementellen Methoden ist die Large-Time-Inkrement-Methode (LATIN) [49]. Bei dieser Methode werden drei Prinzipien eingeführt, die es erlauben, die Zustandsgrößen im Einspielzustand abzuschätzen.

Das erste Prinzip beruht darauf, dass das globale nichtlineare Gleichungssystem in ein globales lineares Gleichungssystem und in lokale nichtlineare Gleichungen überführt werden kann. In dem globalen Gleichungssystem werden die Gleichgewichtsbedingungen und die Kompatibilitätsbedingungen gelöst und die Fließbedingungen abgefragt. In den lokalen nichtlinearen Gleichungen stecken die Evolutionsgleichungen, welche durch das Stoffgesetz bestimmt werden.

Das zweite Prinzip besagt, dass das globale lineare Gleichungssystem und die lokalen nichtlinearen Gleichungen in jedem Punkt des Tragwerkes nacheinander durchlaufen werden, bis eine Konvergenz erreicht ist. Zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen auf lokaler Ebene wird ein modifiziertes Newton-Verfahren verwendet.

Das dritte Prinzip ist entscheidend für die Effizienz der Methode. Dabei werden zur Beschreibung der Lösung im Einspielzustand die bisher bekannten Koeffizienten der Formfunktionen verwendet und in einem iterativen Verfahren verbessert [49]. Bei der LATIN-Methode wird hierfür die Proper Generalized Decomposition Method (PGD) [50] verwendet, welche eine Modell-Reduktions-Methode ist.

Dieses Vorgehen ist in Abbildung 11 schematisch veranschaulicht. Nachdem die Systemantwort vom ersten Belastungszyklus nach dem Durchlaufen in „kleinen Zeiteinheiten“ t bekannt ist, wird eine Abschätzung in einem „großen Zeitsprung“ T vorgenommen. Auf Grundlage dieser Abschätzung wird der vollständige Belastungszyklus erneut durchlaufen und mit den neu gewonnenen Informationen eine verbesserte Abschätzung vorgenommen, bis die Konvergenz erreicht ist.

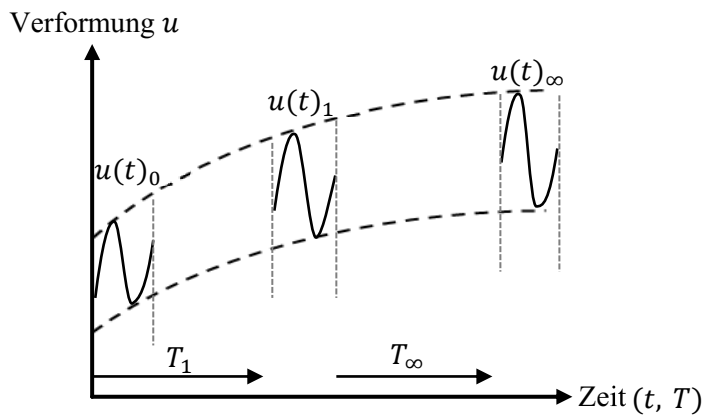


Abbildung 11: Schematische Darstellung der Verwendung von großen Zeitinkrementen T bei der LATIN-Methode

Eine Art Ableger dieser Vorgehensweise ist die Direct Cyclic Method (DCA), welche in dem kommerziellen Softwareprogramm von ABAQUS implementiert ist [51]. Diese Methode bedient sich der gleichen Prinzipien wie die LATIN-Methode, nur dass die Abschätzung des Einspielzustandes auf Grundlage von Fourier-Gleichungen geschieht.

Die DCA durchläuft einmal oder mehrmals den Belastungszyklus mit nichtlinearem Stoffgesetz. Daraufhin wird der Verlauf der Verschiebungen und der Restspannungen an jeder Stelle im Tragwerk entnommen. Auf Grundlage dieser wird eine Reihe an Fourier-Gleichungen für die Verschiebungen und die Restspannungen aufgestellt. Liegt keine geschlossene Hysterese im Verlauf der Restspannungen vor, wird mit Hilfe der Evolutionsgleichungen eine geschlossene Form abgeschätzt. Zur Bestimmung der Restspannungs-Koeffizienten wird ein modifiziertes Newton-Verfahren verwendet. Die abgeschätzten Fourier-Koeffizienten für den Verlauf der Restspannungen im Einspielzustand werden in die Fourier-Gleichungen der Verschiebungen übertragen. Die aktualisierten Verschiebungen werden in einem erneuten Durchlaufen des Belastungszyklus berücksichtigt und dieses Vorgehen wird bis zur Konvergenz wiederholt.

Ein großer Vorteil der DCA ist die Unabhängigkeit vom Stoffgesetz. Damit ist gemeint, dass beliebige Verfestigungsfunktionen verwendet und alle Spielarten der Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden können. Zudem kann die DCA mehrere Belastungszustände in einem Lastzyklus berücksichtigen und liefert nach wenigen Iterationen eine gute Abschätzung der Schwingbreiten zwischen diesen Belastungszuständen. Die akkumulierten Zustandsgrößen sind gelegentlich nur als grobe Näherung bekannt und benötigen einen höheren Aufwand an Iterationen, wenn Ratcheting auftritt.

Die Vereinfachte Fließzonentheorie ist ein weiterer Vertreter der zustandsbasierten direkten Methoden, deren Entwicklungen Bestandteil dieser Arbeit sind und in den folgenden Kapiteln besprochen werden.

2. Forschungsstand der VFZT

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der VFZT dargestellt. Dabei handelt es sich inhaltlich um den Forschungsstand, der von Hübel [14, 15] in seinen Büchern veröffentlicht wurde. Es werden in diesem Kapitel die wichtigsten Kernaussagen, welche als die fünf Basisprinzipien bezeichnet werden, erläutert. Darüber hinaus wird das Vorgehen bei zyklischen Belastungen besprochen. Auf die Verwendung von temperaturabhängigen Stoffgesetzen und das Vorgehen bei multilinearem Materialverhalten wird in diesem Kapitel verzichtet, da diese Themen nur Platz im Ausblick dieser Arbeit finden.

2.1. Die fünf Basisprinzipien der VFZT

Um die VFZT grundsätzlich verstehen zu können, wird das verinnerlichte Wissen zur Plastizitätstheorie aus dem vorangegangenen Abschnitt vorausgesetzt. Vorab wird darauf hingewiesen, dass die Vereinfachung ausschließlich in der Reduktion des numerischen Berechnungsaufwandes liegt und nicht in einer Vereinfachung der theoretischen Zusammenhänge. Um den Berechnungsablauf zu vereinfachen, werden zusätzliche Annahmen über die oben erwähnten Grundlagen hinaus getroffen, wodurch die VFZT ein umfangreicheres theoretisches Gebäude benötigt als die Fließzonentheorie.

Einige dieser hinzugenommenen Vorgehensweisen und Gleichungen werden aus der konventionellen Plastizitätstheorie hergeleitet und andere können als heuristisch angesehen werden. Alle zusätzlichen Annahmen stehen im Einklang mit der konventionellen Plastizitätstheorie und dienen ausschließlich einer präzisen und gleichzeitig effizienten Abschätzung von Zustandsgrößen in Einspielzuständen. Die Vereinfachung kann praktisch auch darin gesehen werden, dass die Gleichgewichtszustände nur für die Zeitpunkte der Einspielzustände hergestellt werden. Bei der konventionellen Vorgehensweise werden hingegen alle Zeitpunkte bis zum Einspielzustand durchlaufen, was mitunter erheblichen Mehraufwand bedeuten kann.

Aufgrund der direkten Abschätzung der Zustandsgrößen im Einspielzustand, kann der detaillierte Belastungsweg nicht berücksichtigt werden. Dies hat zur Folge, dass die VFZT in den meisten Anwendungsfällen eine Näherungslösung liefert. Zusätzlich kann die VFZT keine Informationen über den Verlauf der Belastungsgeschichte vor dem Einspielzustand liefern. Die Qualität der Näherung wird in dieser Arbeit grundsätzlich anhand von Ergebnissen einer vollständigen inkrementellen Schritt-für-Schritt Berechnung validiert.

Das notwendige Wissen zur Plastizitätstheorie und die zunächst ungewöhnliche Vorgehensweise der Methode, machen es Interessenten schwer, sich in diese Thematik einzuarbeiten. Hinzu kommt die Einstiegshürde, dass eine Implementierung in FE-Software arbeitsintensiv und zeitaufwendig ist und somit nicht so leicht Anwendungserfahrungen entstehen können. Aus diesen Gründen wurden, für den erleichterten Einstieg in die Theorie, 5 Basisprinzipien herausgearbeitet, welche in ihrem Zusammenspiel die Funktionsweise der VFZT beschreiben. Zu den Basisprinzipien gehören:

1. Spannungsbeziehungen des Restspannungszustandes
2. Modifiziert-elastisches Werkstoffgesetz
3. Modifiziert-elastische Analysen (meA)
4. Abschätzungen der transformierten internen Variablen (TIV)
5. Superposition und iterative Vorgehensweise

Die Erläuterung der Basisprinzipien geschieht zunächst anhand von monotoner Belastung. Dies ist hilfreich, um die Basisprinzipien im Zusammenhang zu erfassen. Für die Anwendung der gesamten Theorie, z.B. für zyklische Belastungen, temperaturabhängiges und multilineares Materialverhalten sowie Traglastverhalten sind weitere Prinzipien notwendig, die in [14, 15] beschrieben sind. Die folgenden Prinzipien, welche über die 5 Basisprinzipien hinausgehen, werden in dieser Arbeit behandelt:

1. Projektionsvorgänge bei zyklischer Belastung (Abschnitt 2.2)
2. Projektionsvorgänge bei Mehr-Parameterbelastung
 - a. für elastisches Einspielen (Abschnitt 4.2)
 - b. für plastisches Einspielen (Abschnitt 5.2 und 5.3)
3. Interaktion mit Theorie II. Ordnung (Abschnitt 6.3)

Neben den in dieser Arbeit vorgestellten Entwicklungen gibt es noch weitere Anwendungsbereiche, die eine theoretische Erweiterung denkbar machen. Die Möglichkeiten der Weiterentwicklungen werden in Kapitel 7 besprochen.

2.1.1. Spannungsbeziehungen der Restspannungen

Eine häufig verwendete Gleichung bei der Anwendung von direkten Methoden ist die Superposition der fiktiv-elastischen Spannungen σ_i^{fel} mit den Restspannungen ρ_i , um die elastisch-plastischen Spannungen σ_i zu erhalten. Der Index i beschreibt im Folgenden die drei Normalspannungskomponenten und die drei Schubspannungskomponenten des Spannungsvektors.

$$\sigma_i = \sigma_i^{fel} + \rho_i; \quad i = 1 \dots 6 \quad (23)$$

Der fiktiv-elastische Zustand wird ermittelt durch eine Berechnung auf Grundlage des rein elastischen Stoffgesetzes, welcher für gewöhnlich unter geringem Berechnungsaufwand ermittelt werden kann. Um einen bestimmten elastisch-plastischen Zustand zu berechnen, wird der entsprechende Restspannungszustand benötigt. Da die elastisch-plastischen Spannungen für den Einspielzustand gesucht werden, liegt also die Herausforderung darin, das Restspannungsfeld für den Einspielzustand zu bestimmen. Die fiktiv-elastischen Spannungen sind unabhängig von der Anzahl der Lastwiederholungen, deshalb gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen dem Restspannungsfeld und dem elastisch-plastischen Spannungsfeld. Dieser Zusammenhang ist durch das Feld der plastischen Dehnungen gegeben und kann durch die VFZT für den Einspielzustand geeignet abgeschätzt werden.

Die Restspannungen, welche auch als Eigenspannungen bezeichnet werden, sind Beanspruchungen, die im Tragwerk auftreten, nachdem es zu überelastischen Beanspruchungen gekommen ist und das Tragwerk wieder vollständig entlastet wurde. Die entstandenen plastischen Dehnungen verbleiben im Tragwerk und rufen Spannungen hervor. Diese hervorgerufenen

Eigenspannungen stehen mit sich selbst im Gleichgewicht, da im Restzustand keine äußeren Belastungen vorhanden sind.

Die Restspannungen aus Gleichung (23), welche durch die VFZT abgeschätzt werden, müssten als fiktive Restspannung bezeichnet werden. Denn beim Entlasten können die Restspannungen die Fließfläche berühren und somit kommt es zum Rückplastizieren, wie Abbildung 12 rechts zeigt.

Die Superposition aus Gleichung (23) führt nur zum korrekten Ergebnis, wenn Restspannungen verwendet werden, die durch rein elastische Entlastung entstehen, so wie in Abbildung 12 links schematisch dargestellt ist. In anderen Worten: die VFZT verwendet fiktive Restspannungen, sofern es bei vollständiger Entlastung zum Rückplastizieren kommen würde.

Im Folgenden wird auf die Präzisierung „fiktiv“ verzichtet und nur noch die Bezeichnung Restspannung verwendet, da in dieser Arbeit tatsächliche Restspannungen, bei denen es zum Rückplastizieren kommt, nicht gesucht werden. Die VFZT ist jedoch in der Lage auch die tatsächlichen Rückspannungen zu berechnen, insofern es die Aufgabenstellung erfordert.

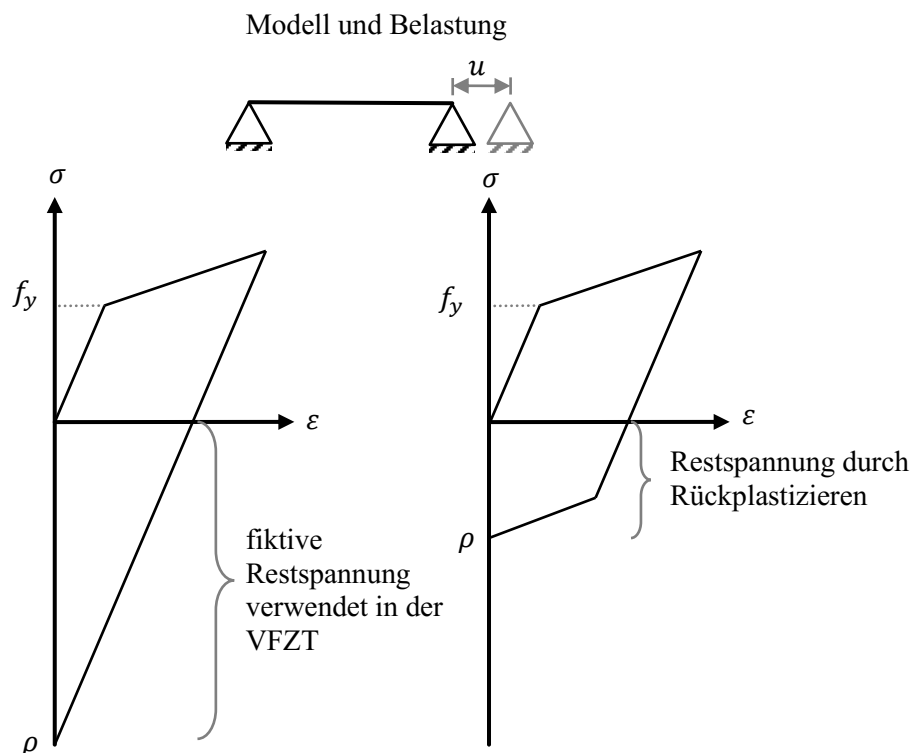


Abbildung 12: Der Unterschied zwischen fiktiven und tatsächlichen Restspannungen bei weggesteuerter Belastung u ,
links: durch die VFZT verwendete fiktive Restspannungen
rechts: tatsächliche Restspannungen infolge von Rückplastizieren

Die zweite grundlegende Spannungsbeziehung in Gleichung (24) beschreibt den Vektor der deviatorischen Restspannungen durch die internen Zustandsvariablen, die Rückspannung ξ_i und

die transformierte interne Variable (TIV) Y_i . Interne Zustandsgrößen wie die deviatorischen Größen ξ_i und Y_i sind nicht messbare Größen, die durch das Stoffgesetz bestimmt werden. Sie sind damit abhängig von den Modellen, die für das Stoffgesetz verwendet werden, wie die Fließfunktion, die Funktion des plastischen Potentials und die Verfestigungsfunktion.

$$\rho'_i = \xi_i - Y_i \quad (24)$$

Der Rückspannungsvektor ξ_i ist, wie bereits in Unterabschnitt 1.2.6 beschrieben, eine Zustandsgröße, welche bei kinematischer Verfestigung und überelastischer Beanspruchung die Translation der Fließfläche im deviatorischen Spannungsraum beschreibt, siehe Abbildung 13. Von Zarka wurde Y_i eingeführt [52], um eine geschlossene Spannungsbeziehung zwischen dem deviatorischen Restspannungsvektor ρ'_i und dem Rückspannungsvektor ξ_i herzustellen. Y_i wird durch den Abzug der deviatorischen Restspannungen ρ'_i von den Rückspannungen ξ_i berechnet und deshalb als transformierte interne Variable (TIV) bezeichnet. Die Abschätzung der transformierten internen Variablen ist das Schlüsselereignis der VFZT, da die Qualität der Abschätzung über die Qualität der Ergebnisse entscheidet.

In Abbildung 13 sind die beiden Spannungsbeziehungen aus Gleichung (23) und (24) im deviatorischen Hauptspannungsraum dargestellt. Aus dieser Darstellungsart lässt sich noch nicht erkennen, wie sich eine TIV geeignet abschätzen lässt. Hierfür wird die Darstellungsweise angepasst. Dazu mehr im Unterabschnitt 2.1.4.

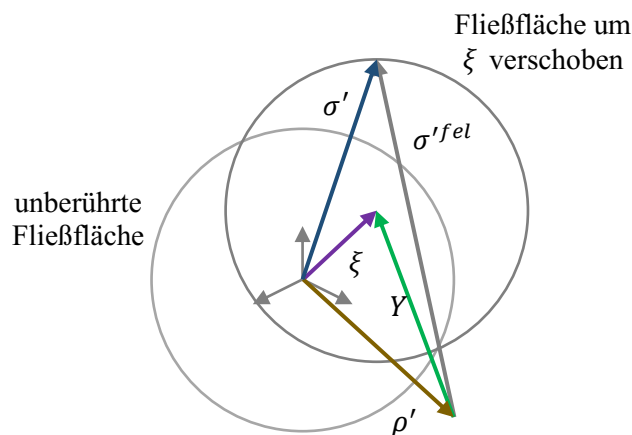


Abbildung 13: Spannungsbeziehungen der Restspannungen aus Gleichung (23) und (24) im deviatorischen Hauptspannungsraum

2.1.2. Modifiziert-elastisches Werkstoffgesetz

Wie bereits oben erwähnt, ist das Ziel der VFZT, den Restspannungszustand effizient zu ermitteln. Dafür könnte eine der beiden internen Zustandsvariablen ξ_i oder Y_i verwendet werden,

insofern sie bekannt sind. Der Restspannungszustand lässt sich dann am Gesamtsystem mit Anfangsdehnungen und einem elastischen Stoffgesetz berechnen.

Ist der Rückspannungsvektor ξ_i bekannt, kann dieser über die Verfestigungsfunktion in plastische Dehnungen ε_i^{pl} umgerechnet werden, wie das beispielsweise für lineare Verfestigung durch Gleichung (17), der Prager-Ziegler Verfestigung, möglich ist. Somit lässt sich der Restzustand am Gesamtsystem durch eine Berechnung mit elastischen Materialparametern (E, ν) , den Randbedingungen des Restzustandes und den plastischen Dehnungen ε_i^{pl} als Anfangsdehnungen berechnen. Das Stoffgesetz für den Restzustand lautet somit

$$\varepsilon_i^* = E_{ij}^{-1} \rho_j + \varepsilon_i^{pl}. \quad (25)$$

Hierbei beschreibt ε_i^* die totalen Dehnungen des Restzustandes und $E_{ij}^{-1} \rho_j$ den elastischen Anteil der Restdehnungen. In der Regel sind jedoch Informationen über die Rückspannungen ξ_i nicht verfügbar. Diese lassen sich erst aus der gesuchten Lösung ableiten.

Im Gegensatz zu den Rückspannungen ξ_i lässt sich der Spannungsvektor der TIV Y_i geeignet abschätzen. Liegt an jeder überelastisch beanspruchten Stelle im Tragwerk eine TIV-Abschätzung vor, kann der Restzustand ermittelt werden. Aus den TIV-Abschätzungen werden dann, wie in Gleichung (26) für linear verfestigenden Werkstoff ($C \neq 0$) dargestellt, die Anfangsdehnungen $\varepsilon_{i,0}$ berechnet.

$$\varepsilon_{i,0} = \frac{3}{2C} Y_i \quad (26)$$

Bei der VFZT bilden die Anfangsdehnungen $\varepsilon_{i,0}$ die einzigen Belastungen, um den Restzustand zu berechnen. Hierfür wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, wobei das lineare Materialverhalten in den Stellen überelastischer Beanspruchungen modifiziert wird. Diese Modifikation ist ein Austausch der elastischen Materialparameter (E, ν) in modifiziert-elastische Materialparameter (E^*, ν^*) . Das Stoffgesetz für den Restzustand lautet dann umformuliert

$$\varepsilon_i^* = (E_{ij}^*)^{-1} \rho_j + \varepsilon_{i,0}. \quad (27)$$

Die formal ähnlich aussehenden Gleichungen (25) und (27) unterscheiden sich in den aufgetragenen Anfangsdehnungen und in den Kennwerten der elastischen Steifigkeitsmatrix. Wobei die modifiziert-elastischen Parameter sich für eine bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung wie folgt ergeben.

$$E^* = E_t \quad (28)$$

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \frac{E_t}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right). \quad (29)$$

Die invertierte modifizierte Elastizitätsmatrix aus Gleichung (27) setzt sich wie folgt zusammen.

$$(E_{ij}^*)^{-1} = \frac{1}{E^*} \begin{pmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* & 0 & 0 & 0 \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* & 0 & 0 & 0 \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu^* \end{pmatrix} \quad (30)$$

Eine ausführliche Herleitung des modifiziert-elastischen Werkstoffgesetzes lässt sich in [14] nachlesen.

2.1.3. Durchführung einer modifiziert-elastischen Analyse

Eine modifiziert-elastische Analyse (meA) ist eine linear-elastische Berechnung mit modifiziert-elastischem Stoffgesetz und Anfangsdehnungen als Belastung. Bevor die erste meA durchgeführt werden kann, werden das Modell des Tragwerkes und die dazugehörigen Randbedingungen aus der fiktiv-elastischen Analyse kopiert. Somit steht für alle meA's das gleiche Finite-Element-Modell zur Verfügung. Der Restspannungszustand ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Belastungen entfernt sind.

Anschließend wird das Tragwerk in elastische V_e und plastische Zonen V_p eingeteilt. Es wird also jede Stelle im Tragwerk auf Grundlage der Vergleichsspannung σ_v und der Streckgrenze f_y einer elastischen oder plastischen Zone zugeordnet. Dies geschieht auf Grundlage von Gleichung (31) und Gleichung (32). In der ersten meA werden hierfür die Vergleichsspannungen der fiktiv-elastischen Analyse verwendet, in den folgenden meA's die Vergleichsspannungen aus den nach Gleichung (23) gebildeten elastisch-plastischen Spannungen. In Gleichung (31) und Gleichung (32) beschreibt \underline{x} den Ortsvektor eines jeden Integrationspunktes im Tragwerk.

$$V_e = \{ \underline{x} | \sigma_v < f_y \} \quad (31)$$

$$V_p = \{ \underline{x} | \sigma_v \geq f_y \} \quad (32)$$

Die elastischen Zonen bleiben unverändert. D. h. die Materialparameter (E, ν) bleiben unverändert und es werden keine Anfangsdehnungen aufgebracht. In den plastischen Zonen hingegen wird das elastische Stoffgesetz mit den modifiziert-elastischen Parametern aus Gleichung (28) und Gleichung (29) modifiziert und die Anfangsdehnungen $\varepsilon_{i,0}$ aus Gleichung (26) als Belastung aufgetragen.

Letztendlich wird das unbelastete Tragwerk in den plastischen Zonen mit Anfangsdehnungen beansprucht und besteht aus zwei unterschiedlichen elastischen Stoffgesetzen, welche entsprechend der Zonenzuordnung verteilt sind. Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert den Restspannungszustand in der Qualität der Abschätzung der plastischen Zone und der Qualität der TIV. In den meisten Fällen kann die TIV in der ersten meA nur grob abgeschätzt werden und liefert dementsprechend auch nur eine grobe Näherungslösung. Auf dieser Grundlage kann jedoch ein Iterationsprozess gestartet werden, der die Ergebnisqualität verbessert. Die Vorgehensweisen zur Abschätzung der TIV und der Iterationsprozess zur Verbesserung der Ergebnisse, sind in den folgenden Abschnitten dargestellt.

2.1.4. Abschätzung von Y im TIV-Raum

Wie schon oben erwähnt, ist die transformierte interne Variable eine deviatorische Zustandsgröße, welche von Zarka eingeführt wurde, da durch sie der Einspielzustand abgeschätzt werden kann. Beide internen Variablen, also die TIV und die Rückspannung, stehen zunächst nicht zur Verfügung. Es besteht jedoch die Möglichkeit, die TIV im Gegensatz zu den Rückspannungen, durch Vektoroperationen in einem transformierten deviatorischen Spannungsraum abzuschätzen. Dieser veränderte Spannungsraum gegenüber dem deviatorischen Spannungsraum, wird im Folgenden als TIV-Raum bezeichnet und kann als Hilfsmittel zur Abschätzung der TIV angesehen werden.

Die Transformation des deviatorischen Spannungsraumes geschieht zum einen durch die Verschiebung des Koordinatensystems und zum anderen durch die Ausrichtung der Fließbedingungen an den fiktiv-elastischen Spannungen. Das Ergebnis dieser Anpassungen ist in Abbildung 14 rechts dargestellt und eine Herleitung für die TIV-Raumdarstellung kann in [14] detailliert nachgelesen werden.

In Abbildung 14 ist zu erkennen, dass die Spannungsbeziehungen untereinander unverändert bleiben, weil der TIV-Raum ebenfalls ein deviatorischer Spannungsraum ist. Die zwei wesentlichen Unterschiede zwischen diesen Spannungsräumen liegen in der Darstellung der Verschiebung des Koordinatenursprungs KO um ρ'_i und die Position der Fließbedingung, welche durch den fiktiv-elastischen Spannungsvektor ausgerichtet ist. Somit bestimmt jedes Belastungsextremum der fiktiv-elastischen Spannungsvektoren den Mittelpunkt eines Mises-Kreises.

Die Darstellung der Mises-Kreise mit ihren Mittelpunkten am Vektor der fiktiv-elastischen Spannungen, bietet die Möglichkeit, die TIV für den Einspielzustand näherungsweise zu bestimmen. Bei überelastischen Beanspruchungen verläuft der TIV-Vektor immer vom Koordinatenursprung auf die Fließfläche. Der Ort auf der Fließfläche wird durch eine Projektion der negativen deviatorischen Restspannungen bestimmt.

Dieses Vorgehen wird in Abbildung 14 rechts schematisch dargestellt. Zusätzlich ist auf der rechten Seite zu erkennen, dass die Projektion (der grüne Vektor) nicht dem exakten Ergebnis der grau dargestellten TIV entspricht. Dieser Unterschied beschreibt den Näherungscharakter der Methode, der durch directionale Spannungsumlagerungen hervorgerufen wird.

Je größer der Winkel zwischen den Rückspannungen ξ_i und den deviatorischen elastisch-plastischen Spannungen σ_i' ist, desto ungenauer wird die Abschätzung von Y_i . In einigen Beispielen, in denen die Spannungen unidirektional auftreten, liefern die Abschätzungen in der ersten meA das korrekte Ergebnis, was jedoch in den meisten Anwendungsbeispielen nicht der Fall ist. Die TIV wird dann über eine Reihe von modifiziert-elastischen Analysen iterativ verbessert.

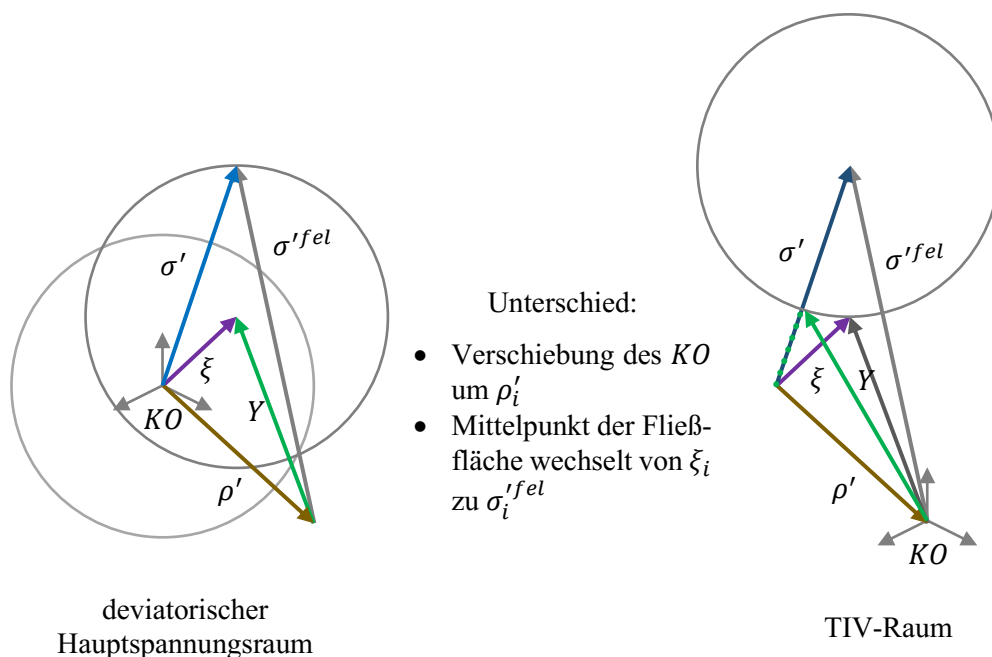


Abbildung 14: Darstellung der deviatorischen Spannungsbeziehungen, **links:** im deviatorischen Hauptspannungsraum, **rechts:** im TIV-Raum, in dem Y_i durch Projektion auf die Fließfläche abgeschätzt werden kann.

In Abbildung 15 wird der Prozess der iterativen Abschätzung bei monotonen Belastungssteigerungen vorgestellt. Die TIV wird in der ersten meA durch eine Projektion vom Koordinatenursprung auf die Fließfläche abgeschätzt, da noch keine Informationen über Restspannungen vorhanden sind. Diese erste Abschätzung ist in der Regel eher grob und liefert dementsprechend eine grobe Näherung der Restspannungen, welche jedoch für eine verbesserte Abschätzung der TIV verwendet werden.

Ab der zweiten meA wird die TIV durch eine Projektion der negativen deviatorischen Restspannungen ρ_i' auf den Mises-Kreis bestimmt. Letztendlich konvergiert die TIV-Abschätzung von Iteration zu Iteration zu einem Ergebnis, das in der Nähe der inkrementellen Lösung liegt. Dieses konvergierte Ergebnis ist bei directionalen Spannungsumlagerungen in der Regel nicht identisch

mit dem Ergebnis einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Berechnung. Die Qualität der Ergebnisse kann jedoch erfahrungsgemäß als gute Näherung bezeichnet werden und wird später in Anwendungsbeispielen vorgestellt.

Die TIV lässt sich somit in jeder modifiziert-elastischen Analyse im Falle monotoner Belastung durch Gleichung (33) bestimmen. Wobei hier n den aktuellen Durchgang einer modifiziert-elastischen Analyse repräsentiert.

$$Y_i^{(n)} = \sigma_i'^{fel} - \sigma_i'^{(n-1)} \left(\frac{f_y}{\sigma_v^{(n-1)}} \right) \quad (33)$$

Bei den meisten Beispielen werden nicht mehr als 7 meA's benötigt für eine gute Abschätzung der Ergebnisse. Bei der Verwendung von sehr kleinen Tangentensteifigkeiten E_t und bei Beanspruchungen mit ausgeprägten direktionalen Umlagerungen werden zur Konvergenz gelegentlich mehr meA's benötigt. Aufgabenstellungen, bei denen E_t gegen Null geht, sind noch Gegenstand aktueller Forschung.

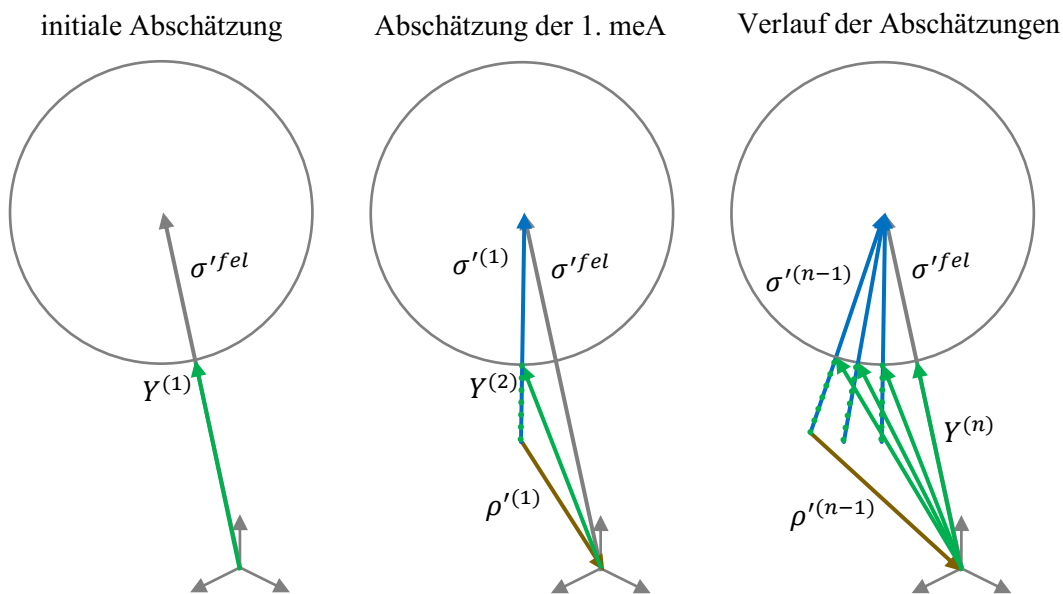


Abbildung 15: Abschätzung und Anpassung der TIV über den Verlauf der meA's für monotone Belastungssteigerung.

links: erste Abschätzung vom Ursprung auf den Mises-Kreis,
mittig: zweite Abschätzung durch eine Projektion von $-\rho'$,
rechts: Verlauf der Abschätzungen für $n = 1$ bis $n = 4$.

Die in Abbildung 15 dargestellten Projektionen beziehen sich auf monotone Belastungssteigerung, wofür die VFZT ursprünglich nicht geschaffen wurde. Die besondere Stärke der VFZT ist es, die TIV für Einspielzustände von zyklischen Belastungen abzuschätzen. Die dafür notwendigen Projektionsvorgänge für zyklische Belastungen werden in Abschnitt 2.2 vorgestellt und sind für Ein-Parameterbelastungen Bestandteil der veröffentlichten Theorie [14, 15].

Ein großer Teil der Forschung für diese Thesis handelte dagegen von der Entwicklung von Projektionsvorgängen bei Mehr-Parameterbelastungen für elastische und plastische Einspielzustände, welche in Kapitel 4 und 5 besprochen werden.

An dieser Stelle wird noch einmal darauf hingewiesen, dass dieser konvergierte Zustand der VFZT häufig nur eine Näherungslösung im Vergleich zu einer inkrementellen Berechnung mit gleichem Stoffgesetz darstellt. Der Hauptgrund ist, dass die VFZT weder den Lastpfad zerlegt, noch die Belastungsgeschichte Schritt für Schritt durchläuft und dadurch die Abschätzung der Einspielergebnisse einer gewissen Unschärfe unterliegt. Die Art und Weise der Abschätzung hat dabei entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisqualität der VFZT.

2.1.5. Superposition und Iteration

Nachdem die Restspannungen $\rho_i^{(n)}$ aus einer modifiziert-elastischen Analyse vorliegen, können die elastisch-plastischen Spannungen nach Gleichung (23) berechnet werden. Äquivalent gilt dieses Vorgehen auch für alle Dehnungskomponenten ε , Verformungen u , Schnittgrößen F , Auflagekräfte A in jeder meA.

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_i^{fel} + \rho_i^{(n)} \quad (34)$$

$$\varepsilon_i^{tot(n)} = \varepsilon_i^{fel} + \varepsilon_i^{*(n)} \quad (35)$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{fel} + u_i^{(n)} \quad (36)$$

$$F_i^{(n)} = F_i^{fel} + F_i^{(n)} \quad (37)$$

$$A_i^{(n)} = A_i^{fel} + A_i^{(n)} \quad (38)$$

Mit Hilfe der ermittelten elastisch-plastischen Spannungen $\sigma_i^{(n)}$ werden die plastischen und elastischen Zonen mit Gleichung (31) und Gleichung (32) neu zugeordnet. In jeder plastischen Zone des Tragwerks wird dann mithilfe der deviatorischen Restspannungen $\rho_i'^{(n)}$ die TIV aktualisiert. Auf Grundlage der aktualisierten Zonenzuordnung und TIV-Abschätzung startet eine neue modifiziert-elastische Analyse. Das prinzipielle Vorgehen dieses iterativen Verlaufs der VFZT wird in Abbildung 16 durch einen schematischen Ablaufplan zusammengefasst.

Wie dort zu sehen ist, beginnt alles mit den fiktiv-elastischen Berechnungen, welche die Ausgangsbasis der VFZT bilden. Aus den fiktiv-elastischen Berechnungen werden das FE-Modell, die Beanspruchungen in Form der fiktiv-elastischen Spannungen und die Randbedingungen kopiert. Daraufhin beginnt ein Pre-Prozess, in dem die Arbeitsschritte aus Abschnitt 2.1.2 bis Abschnitt 2.1.4 abgearbeitet werden.

D. h. es werden alle Belastungen am FE-Modell entfernt und auf Grundlage der Vergleichsspannungen und der Streckgrenze wird die Einteilung in elastische und plastische Zonen vorgenommen. In den plastischen Zonen werden die TIV's abgeschätzt, Anfangsdehnungen berechnet und als einzige Belastung aufgebracht. Mit den modifizierten Materialparametern in den plastischen Zonen und den elastischen Parametern in den elastischen Zonen wird das linear elastische Gleichungssystem gelöst.

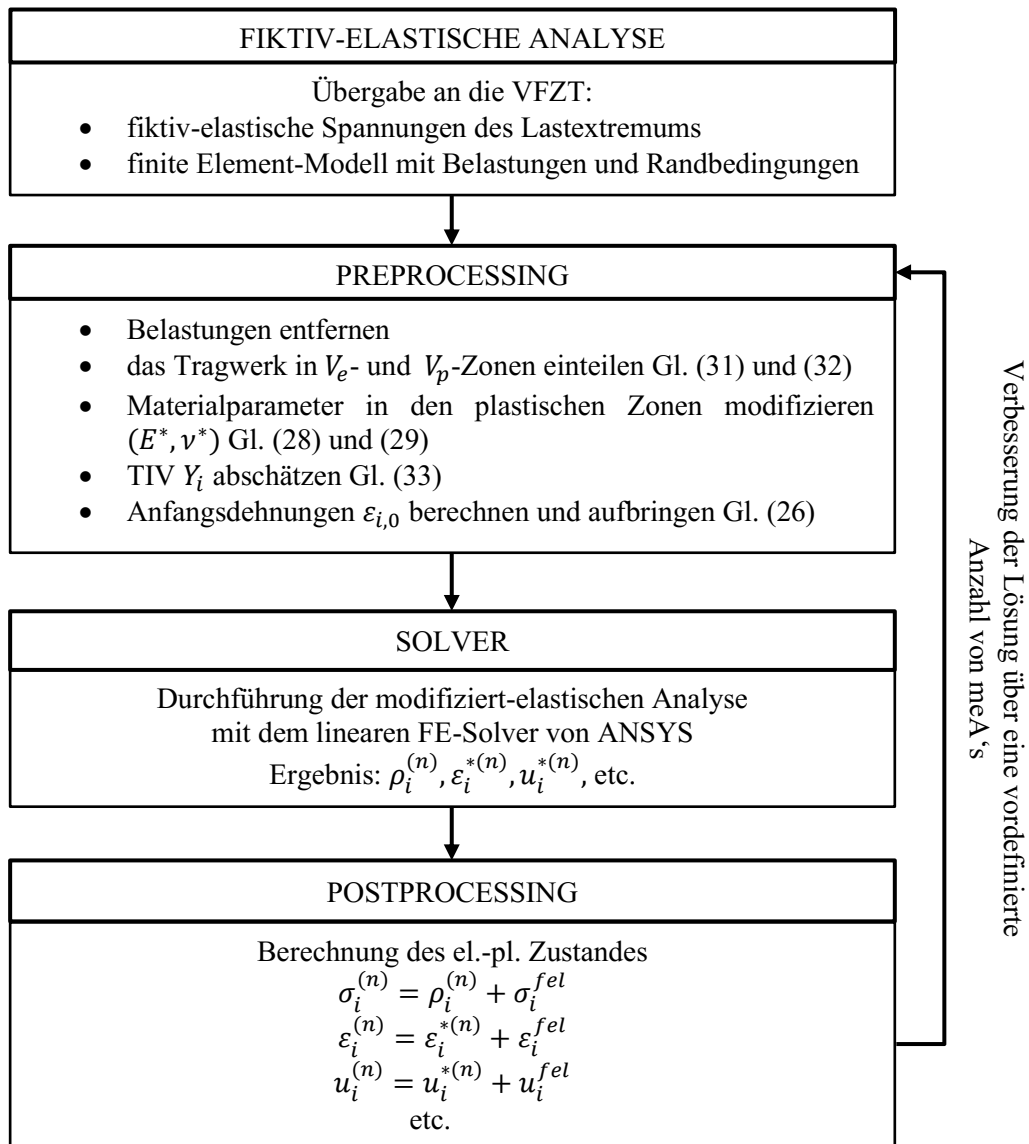


Abbildung 16: Allgemeines Ablaufschema der VFZT bei monotoner Belastungssteigerung

Da die VFZT derzeit über Usersubroutinen in dem kommerziellen Softwareprogramm ANSYS implementiert ist, wird der lineare Solver von ANSYS zur Lösung der modifiziert-elastischen Analysen verwendet. Das Ergebnis wird in dem Post-Prozess superponiert und der nächste Durchlauf einer meA wird gestartet. Bisher sind für die VFZT noch keine geeigneten Abbruchkriterien entwickelt worden, deshalb ist von vornherein eine Anzahl von meA's festzulegen.

Erfahrungen aus der Anwendung der VFZT zeigen, dass die Ergebnisse robust konvergieren, obwohl ein mathematischer Beweis für die Zuverlässigkeit der Konvergenz bisher nicht erbracht wurde, insofern das überhaupt möglich ist. Das konvergierte Ergebnis ist häufig nach 7 meA's nahezu erreicht und weicht allenfalls wenige Prozent von dem einer inkrementellen Vergleichsrechnung ab.

2.2. Die VFZT bei zyklischer Belastung

Von Ein-Parameterbelastungen wird in dieser Arbeit gesprochen, wenn zwei Lastextrema zyklisch durchlaufen werden. Werden mehr als zwei Lastextrema über den Verlauf eines Zyklus berücksichtigt, dann wird von Mehr-Parameterbelastungen gesprochen. Bei zyklischer Ein-Parameterbelastung wird demzufolge nur ein zeitabhängiger Parameter benötigt, um die Belastungshistorie zu beschreiben. Variationen von Ein-Parameterbelastungen sind in Abbildung 17 schematisch dargestellt. Dort wird gezeigt, dass zwar mehrere Lastarten auftreten können – konstante und zyklische – jedoch die Beschreibung der gesamten Belastungshistorie auf einen einzigen Belastungsparameter zurückgeführt werden kann. Die Belastungshistorie wird durch die skalare Funktion von $\lambda(t)$ beschrieben, welche monoton von 0 bis 1 ansteigt und monoton von 1 bis 0 wieder abnimmt, wie Gleichung (39) zeigt.

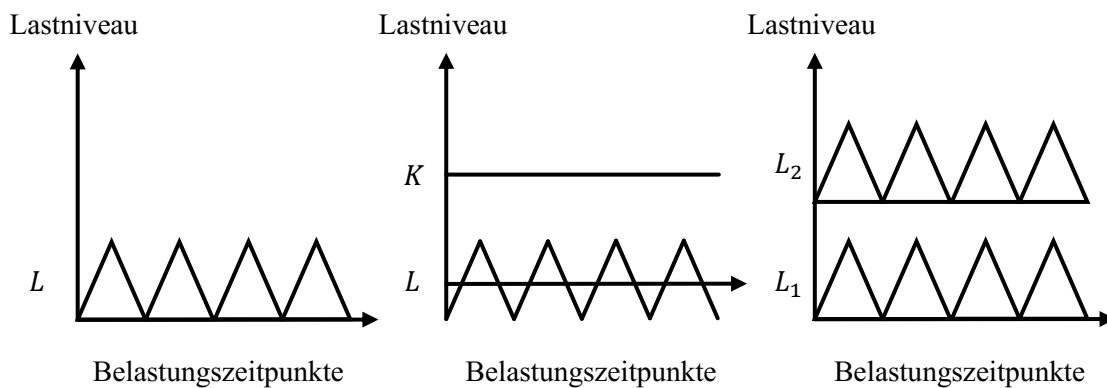


Abbildung 17: Beispiele für zyklische Belastungsverläufe, welche durch einen Parameter gesteuert werden.

Aus Abbildung 17 ist zu erkennen, dass die Änderungen der zyklischen Belastungen periodisch mit der Zeit verlaufen. Die Belastungszeitpunkte beschreiben hier nur die Reihenfolge der Belastungen, denn zeitabhängige Effekte bleiben in dieser Arbeit unbeachtet. Die Zeit als physikalische Größe wird z.B. bei dynamischen Belastungen oder bei Kriech- und Relaxationsprozessen benötigt, welche bei der VFZT noch nicht berücksichtigt werden. Um den Belastungsverlauf zwischen den Belastungsextrema über die Zeit beschreiben zu können, wird in [14] folgende Formulierung verwendet.

$$L(t) = L_{min} + \lambda(t)(L_{max} - L_{min}) \quad (39)$$

Bei mehreren zyklischen gleichzeitig auftretenden Belastungen werden die Belastungsextrema aus den einzelnen zyklischen Belastungen zusammengesetzt, wie es beispielsweise in Abbildung 17 rechts mit L_1 und L_2 dargestellt ist. Ob ein Tragwerk nun elastisch oder plastisch einspielt, hängt von verschiedenen Faktoren wie dem Belastungsniveau und der Belastungsart ab; aber vor allen Dingen spielt das Wesen des Stoffgesetzes eine entscheidende Rolle. D. h. liegt beispielsweise ein Stoffgesetz mit unbegrenzter linearer kinematischer Verfestigung vor, so kommt es nach einer Akkumulationsphase immer zum periodischen Verhalten des Tragwerks [2].

Alle folgenden Gleichungen und Projektionsvorschriften beziehen sich auf temperaturunabhängiges Materialverhalten und auf geometrische Linearität. Die Erweiterung auf temperaturabhängiges Materialverhalten kann in [14, 15] nachgelesen werden.

Eine Unterscheidung zwischen elastischem und plastischem Einspielen kann bei Ein-Parameterbelastungen auf Grundlage der fiktiv-elastischen Spannungen durchgeführt werden. Die folgenden Gleichungen und Aussagen gelten jedoch nur für geometrische Linearität und sind bei Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung nicht mehr gültig.

Ist an jeder Stelle des Tragwerks die Vergleichsspannungsschwingbreite bei temperaturunabhängiger Streckgrenze kleiner als die doppelte Streckgrenze $2f_y$, kommt es zum elastischen Einspielen. Wird an mindestens einer Stelle im Tragwerk die doppelte Streckgrenze überschritten, kommt es zum plastischen Einspielen, wie Gleichung (41) zeigt.

$$\Delta\sigma_{v(\underline{x})}^{fel} \leq 2f_y \quad \forall \underline{x} \in V \quad \rightarrow \quad ES \quad (40)$$

$$\Delta\sigma_{v(\underline{x})}^{fel} > 2f_y \quad \exists \underline{x} \in V \quad \rightarrow \quad PS \quad (41)$$

Bei elastischen Einspielzuständen verhält sich das Tragwerk nur mit den elastischen Dehnungen periodisch synchron. Die plastischen Dehnungen bleiben in diesem Einspielzustand konstant. Da auch die Restspannungen konstant bleiben, muss sich auch die TIV im Einspielzustand konstant verhalten. Das bedeutet, es wird an jeder überelastisch beanspruchten Stelle im Tragwerk nur eine einzige TIV für den Einspielzustand gesucht. Bei plastischem Einspielverhalten hingegen werden zwei TIV's benötigt, um beide Belastungszustände berechnen zu können. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Projektionsvorschriften zwischen elastischen und plastischen Einspielzuständen getrennt betrachtet.

2.2.1. Vorgehen bei elastischen Einspielzuständen

Zur Abschätzung der TIV für elastische Einspielzustände ist in [14] der TIV-Raum in unterschiedliche Bereiche von ω_1 bis ω_4 eingeteilt, wie Abbildung 18 zeigt. Eine Schnittfläche Ω der Mises-Kreise ist definitionsgemäß nach Gleichung (40) an jeder Stelle im Tragwerk vorhanden, weil die fiktiv-elastische Spannungsschwingbreite kleiner als die doppelte Streckgrenze ist.

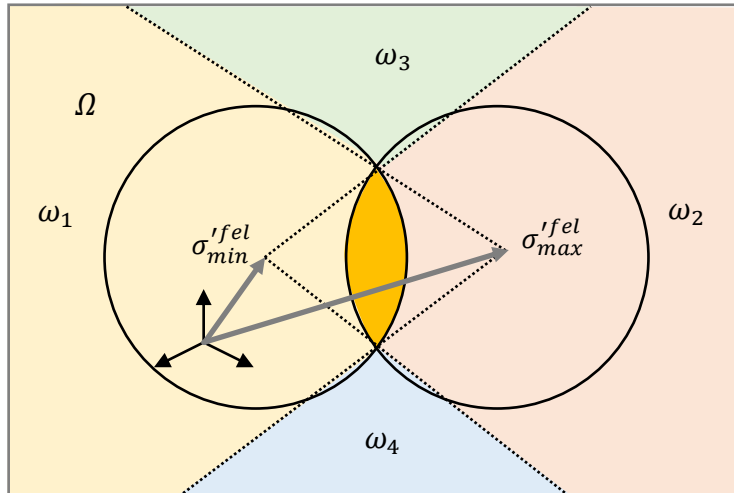


Abbildung 18: Aufteilung des TIV-Raumes in Sektoren zur Bestimmung der Projektionsart

An Stellen, die im Tragwerk überelastisch beansprucht sind, liegen die negativen deviatorischen Restspannungen außerhalb von Ω . Zur Abschätzung der TIV wird in diesem Fall von $-\rho'_i$ auf den Rand der Fläche von Ω projiziert. Liegen die Restspannungen innerhalb von Ω , verbleibt diese Stelle rein elastisch und es wird keine Projektion oder TIV-Abschätzung durchgeführt.

In Abbildung 19 wird die Projektion beispielhaft für jeden Bereich von ω_1 bis ω_4 dargestellt. Dort ist zu erkennen, dass aus den Bereichen ω_1 und ω_2 auf einen Kreis und aus den Bereichen ω_3 und ω_4 auf den Schnittpunkt der Kreise projiziert wird. Die Projektion beschreibt immer den kürzesten Weg von $-\rho'_i$ auf die Schnittfläche Ω .

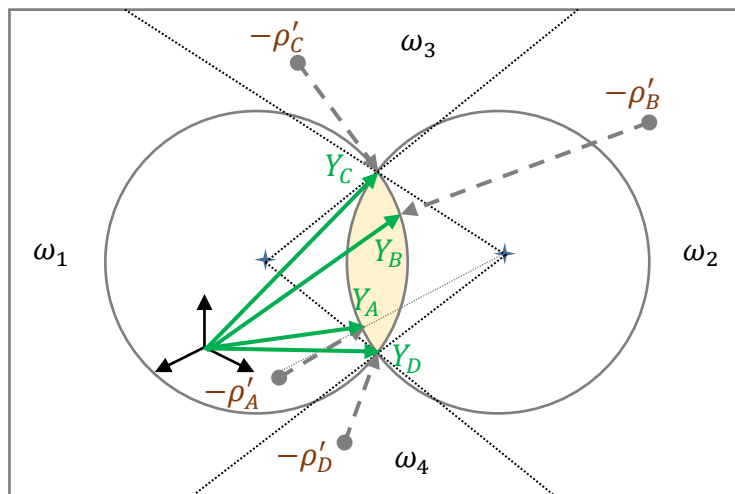


Abbildung 19: Projektionsvorschriften in Abhängigkeit von den Bereichen ω_1 bis ω_4 . In ω_1 und ω_2 wird auf einen Kreis und in ω_3 und ω_4 auf einen Schnittpunkt der Kreise projiziert.

Bevor eine Projektion vorgenommen werden kann, muss bestimmt werden, in welchem der vier Bereiche von ω_1 bis ω_4 sich die negativen deviatorischen Restspannungen befinden. Erst mit der Identifizierung des Bereiches kann mit der eigentlichen Projektionsvorschrift gearbeitet werden, welche im Folgenden erläutert wird.

Projektion für die Bereiche ω_1 und ω_2

In Abbildung 20 sind zwei Projektionsvorgänge dargestellt, welche aus den Bereichen ω_1 und ω_2 auf die Kreisränder der Schnittfläche durchgeführt werden. In dem Beispiel von $-\rho'_{i,A}$ wird auf den Mises-Kreis des maximalen Belastungszustandes projiziert, um $Y_{i,A}$ zu erhalten. Von $-\rho'_{i,B}$ wird auf den Mises-Kreis des minimalen Belastungszustandes projiziert, wodurch $Y_{i,B}$ bestimmt wird.

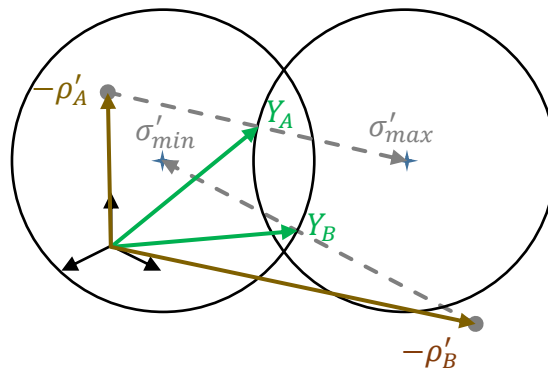


Abbildung 20: Projektionsvorschriften für die Sektoren ω_1 und ω_2 .

Für die Formel zur Berechnung der TIV's von $Y_{i,A}$ und $Y_{i,B}$ gilt die gleiche Funktion, nur die Belastungszustände sind verschieden, wie Gleichung (42) und (43) zeigen.

$$Y_{i,A} = \sigma'_{i,max}{}^{fel} - \sigma'_{i,max} \left(\frac{f_y}{\sigma_{v,max}} \right) \quad (42)$$

$$Y_{i,B} = \sigma'_{i,min}{}^{fel} - \sigma'_{i,min} \left(\frac{f_y}{\sigma_{v,min}} \right) \quad (43)$$

Projektion für die Bereiche ω_3 und ω_4

In den Bereichen von ω_3 und ω_4 wird die TIV immer durch eine Projektion auf den nächstgelegenen Schnittpunkt der Schnittfläche berechnet, wie es in Abbildung 21 grafisch dargestellt ist. Die berechneten TIV's aus diesen Bereichen liefern immer das exakte Ergebnis für diese Stelle im Tragwerk. Eine Verbesserung der Abschätzung ist an dieser Stelle nicht mehr möglich, insofern die Restspannung über die meA's konstant in diesen Bereichen verbleiben. Verlassen die negativen deviatorischen Restspannungen über den Verlauf der meA's die Bereiche ω_3 oder ω_4 , dann greifen wieder die Gleichungen (42) oder (43).

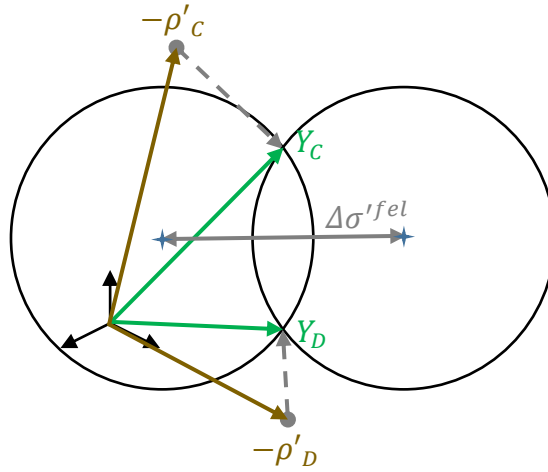


Abbildung 21: Projektionsvorschriften für die Bereiche ω_3 und ω_4 .

Ist $-\rho'_i$ in den Bereichen von ω_3 oder ω_4 identifiziert worden, so können die Schnittpunkte der Kreise mit Hilfe der fiktiv-elastischen Spannungen und der Streckgrenze berechnet werden. Die Projektion auf die Schnittpunkte der Kreise wird unabhängig von $-\rho'_i$ berechnet. Die Berechnung der TIV's $Y_{i,C}$ und $Y_{i,D}$ ergibt sich gemäß [14, 15] aus der Schnittpunktberechnung zweier Kreise wie folgt,

$$Y_{i,C} = \sigma'_{i,min}{}^{fel} + a \cdot \sigma'_{i,min}{}^{fel} + c \cdot \Delta\sigma_i{}^{fel} \quad (44)$$

$$Y_{i,D} = \sigma'_{i,min}{}^{fel} - a \cdot \sigma'_{i,min}{}^{fel} + b \cdot \Delta\sigma_i{}^{fel} \quad (45)$$

wobei die Variablen a , b und c sich zusammensetzen aus

$$a = \frac{f_y}{\sigma_{v,min}{}^{fel}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2\beta}} \quad (46)$$

$$b = \frac{f_y}{\Delta\sigma_v{}^{fel}} \cdot \left(\cos\alpha - \cos\beta \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2\beta}} \right) \quad (47)$$

$$c = \frac{f_y}{\Delta\sigma_v{}^{fel}} \cdot \left(\cos\alpha + \cos\beta \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2\beta}} \right) \quad (48)$$

und die Winkel $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ wie folgt berechnet werden.

$$\cos \alpha = \frac{\Delta \sigma_v^{fel}}{2f_y} \quad (49)$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta \sigma_v^{2fel} + \sigma_{v,min}^{2fel} - \sigma_{v,max}^{2fel}}{2 \cdot \Delta \sigma_v^{fel} \cdot \sigma_{v,min}^{fel}} \quad (50)$$

Zur geometrischen Interpretation der Winkel wird auf [14, 15] verwiesen.

Die hier beschriebenen Projektionsvorschriften können als numerisch robust angesehen werden, vorausgesetzt die numerischen Grenzwerte der Winkelfunktion werden abgefangen. Der Nachteil dieser Methode liegt darin, dass eine Erweiterung auf Mehr-Parameterbelastungen sehr aufwendig ist und unübersichtlich bei der praktischen Umsetzung wird. Eine andere Vorgehensweise die Eckpunkte zu ermitteln, ohne Winkelfunktionen zu verwenden, wird in dieser Arbeit unter Abschnitt 4.2 vorgestellt.

Bei den bisher beschriebenen Projektionsvorschriften ist die Temperaturabhängigkeit der Streckgrenze vernachlässigt worden. Sollte diese jedoch berücksichtigt werden, ergeben sich noch weitere Projektionsvorschriften wie zum Beispiel, dass ein Kreis den anderen umhüllt. Die Projektionsvorschriften können hierfür in [14] nachgelesen werden.

Ablaufschema der Berechnung bei elastischen Einspielzuständen

Eine Gesamtübersicht, die den Berechnungsablauf der VFZT bei elastischen Einspielanalysen darstellt, wird in Abbildung 22 gegeben. Im Wesentlichen ist das Ablaufschema dem von monotonen Analysen sehr ähnlich, wie ein Vergleich mit Abbildung 16 zeigt. Die Unterschiede bestehen zum einen darin, dass bei der Einteilung in plastische und elastische Zonen zwei Lastextrema statt eines Lastextremums berücksichtigt werden. Zum anderen wird die Projektion, wie oben beschrieben, in Abhängigkeit der Zonen ω_1 bis ω_4 durchgeführt. Außerdem werden im Postprozess die Ergebnisse der Zustandsgrößen für zwei Lastextrema berechnet. Bei elastischem Einspielen sind die Restspannungen für den minimalen und maximalen Belastungszustand identisch. Die errechneten elastisch-plastischen Spannungen bilden wieder die Grundlage, um eine verbesserte TIV-Abschätzung vorzunehmen, sofern das möglich ist.

Auch bei elastischen Einspielzuständen werden in der Regel nicht mehr als 7-10 modifiziert-elastische Analysen benötigt, um eine gute Näherung der Ergebnisse im Einspielzustand zu erhalten. An dieser Stelle macht sich die Effizienz der Vereinfachten Fließzonentheorie bemerkbar, da vergleichbare inkrementelle Schritt-für-Schritt-Berechnungen mitunter dutzende Zyklen mit jeweils mehreren Lastinkrementen, für die wiederum jeweils mehrere Gleichgewichtssiterationen erforderlich sind, durchlaufen müssen, bis der Einspielzustand erreicht ist.

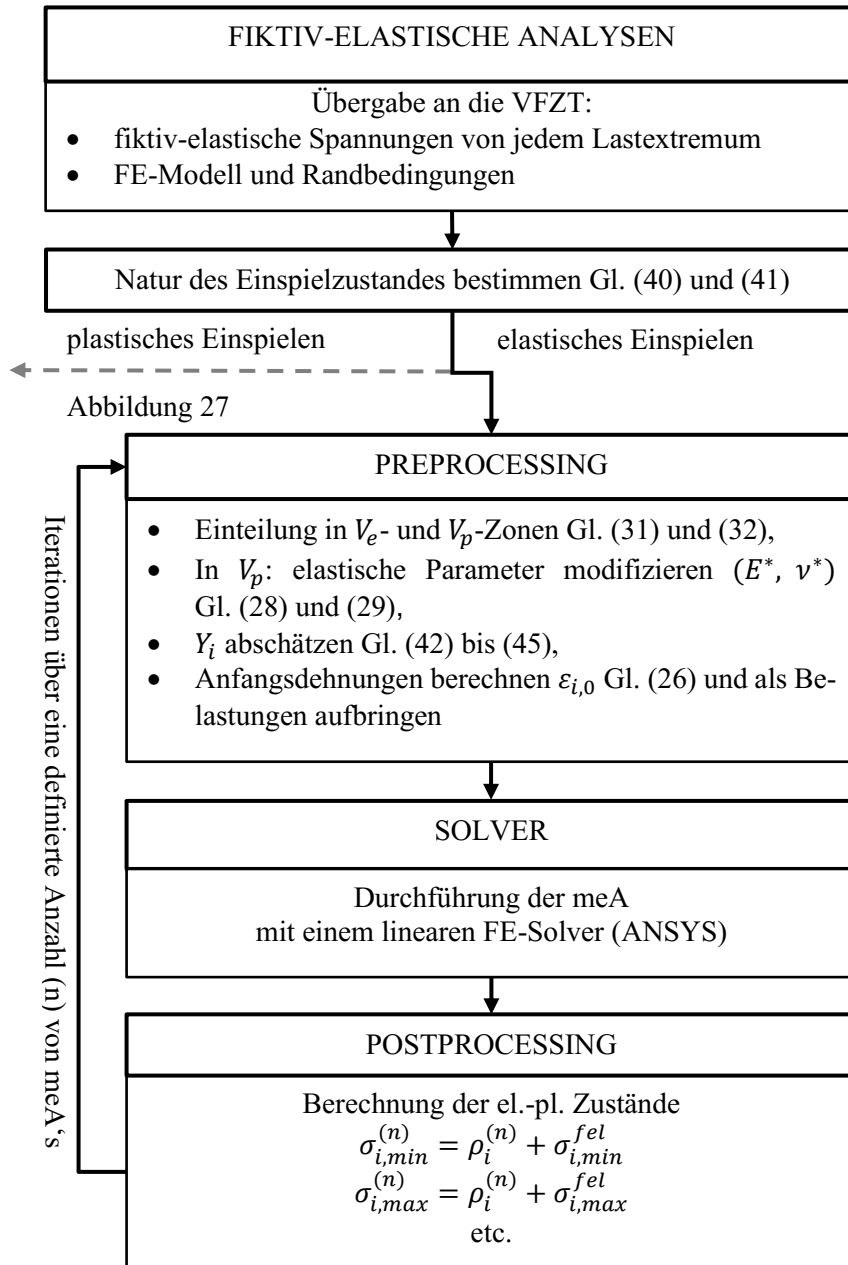


Abbildung 22: Ablaufschema der VFZT bei elastischen Einspielzuständen

2.2.2. Vorgehen bei plastischen Einspielzuständen

Der Berechnungsablauf bei plastischen Einspielzuständen erfordert zwei unterschiedliche Analysen. Als erstes wird die elastisch-plastische Schwingbreite berechnet und danach der mittlere akkumulierte Zustand. Aus den Ergebnissen beider Berechnungen werden zum Schluss die Beanspruchungen in den beiden Belastungsextrema berechnet. Die Gleichungen zur Berechnung der Spannungen in den Belastungsextrema, wie sie in Gleichung (51) und (52) dargestellt sind, lassen sich auch für alle anderen Zustandsgrößen umschreiben.

$$\sigma_{i,min} = \sigma_{i,m} - \frac{1}{2} \Delta\sigma_i \quad (51)$$

$$\sigma_{i,max} = \sigma_{i,m} + \frac{1}{2} \Delta\sigma_i \quad (52)$$

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Schwingbreite in sehr guter Näherung unabhängig von den akkumulierten Zuständen berechnet werden kann. Die Berechnung für die akkumulierten mittleren Zustände setzt die Kenntnisse der Schwingbreiten voraus, aus diesem Grund wird die Schwingbreite zuerst berechnet und erst danach der mittlere akkumulierte Zustand.

Berechnung der Schwingbreiten

Kalnins [53, 54] hat einen Weg vorgeschlagen, der es ermöglicht, die elastisch-plastischen Schwingbreiten durch eine Berechnung mit monotoner Belastungssteigerung direkt zu berechnen. Die als Twice-Yield Methode veröffentlichte Vorgehensweise [55, 56] beruht auf dem Gedanken, dass die Spannungs-Dehnungshysterese im eingespielten Zustand durch eine Berechnung mit doppelter Streckgrenze $2f_y$ und der Belastungsschwingbreite ΔL als monotoner Belastung ermittelt werden kann. Wobei die Belastungsschwingbreite durch die Differenz der Belastungsextrema errechnet wird und somit die konstanten Belastungsanteile vernachlässigt werden.

$$\Delta L = (L_{max} - L_{min}) \quad (53)$$

Durch den Charakter dieser Vorgehensweise zählt die TwY-Methode mit zu den direkten Methoden. Die somit erzielten elastisch-plastischen Beanspruchungsschwingbreiten haben in der Regel einen sehr guten Näherungscharakter, jedoch können durch diese Methode keine Informationen über die akkumulierten Zustände erhalten werden.

Das Ergebnis dieser direkten Berechnung ist ein Halbzyklus der Spannungs-Dehnungshysterese im eingespielten Zustand, wie sie in Abbildung 23 rechts dargestellt ist. Im Vergleich dazu wird links die geschlossene Spannungs-Dehnungshysterese durch eine inkrementelle Berechnung gegenübergestellt. Für das Vorgehen der Twice-Yield Methode werden folgende Grundannahmen getroffen:

1. *Der Wechsel in der Beanspruchungsrichtung an einem Belastungsextremum ist immer zuerst elastisch und später elastisch-plastisch geprägt.*
2. *Die vektorielle Spannungsänderung zwischen den Belastungsextrema ist identisch, nur die Vorzeichen ändern sich bei jedem Lastwechsel.*
3. *Erneutes Plastizieren nach der Entlastung tritt erst auf, wenn die aus der Schwingbreite der Spannungskomponenten gebildete Vergleichsspannung $2f_y$ überschreitet.*
4. *Der Einfluss des mittleren akkumulierten Zustandes auf die Schwingbreite ist vernachlässigbar.*

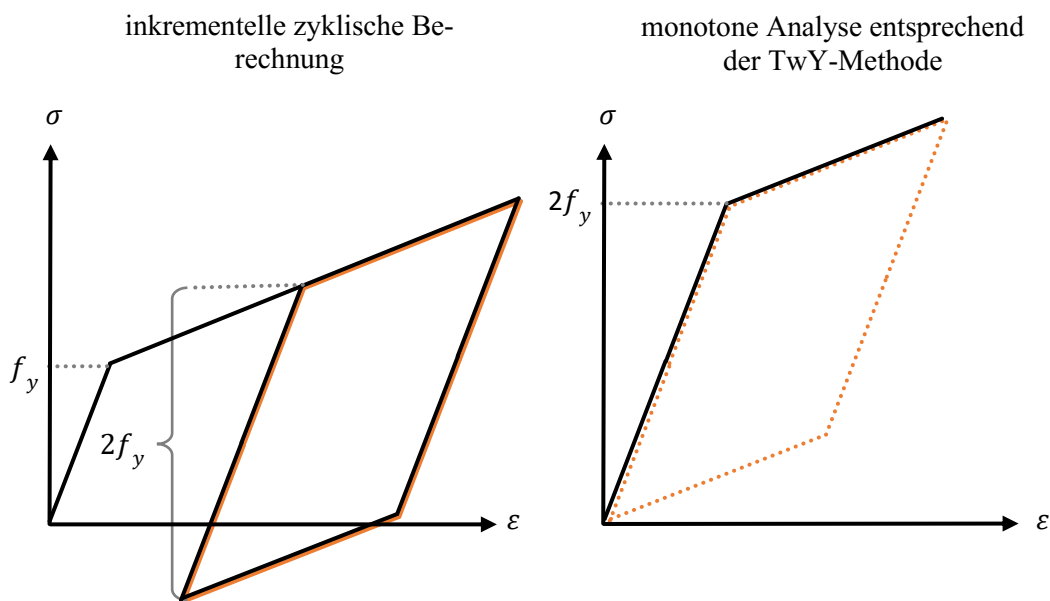


Abbildung 23: Berechnung der Schwingbreite

links: durch eine inkrementelle zyklische Berechnung, bis die Spannungs-Dehnungshysterese geschlossen ist.

rechts: durch eine Berechnung mit monotoner Belastungssteigerung nach dem Prinzip der Twice-Yield Methode.

Ein halber Zyklus der eingespielten Spannungs-Dehnungshysterese lässt sich also, wie in Abbildung 23 dargestellt, durch das Prinzip der TwY-Methode berechnen. Die VFZT folgt dem Ablaufplan für eine monotone Berechnung zur Anwendung der TwY-Methode, wie er bereits in Abschnitt 2.1 beschrieben wurde. Zu berücksichtigen ist nur, dass die Einteilung der elastischen und plastischen Zonen statt nach Gl. (31) und (32) auf Grundlage der doppelten Streckgrenze geschieht.

$$V_e = \{\underline{x} | \sigma_v < 2f_y\} \quad (54)$$

$$V_p = \{\underline{x} | \sigma_v \geq 2f_y\} \quad (55)$$

Mit der Belastungsschwingbreite als Belastung wird die Schwingbreite der TIV ermittelt und für die Berechnung der akkumulierten mittleren Zustände herangezogen. In Abbildung 24 rechts wird das Ergebnis im TIV-Raum dargestellt, welches sich später zur Berechnung der mittleren akkumulierten Zustände einbinden lässt. Die TIV für den mittleren akkumulierten Zustand lässt sich dann bei Betrachtung der ursprünglichen Lastextrema und der unveränderten Streckgrenze f_y ermitteln.

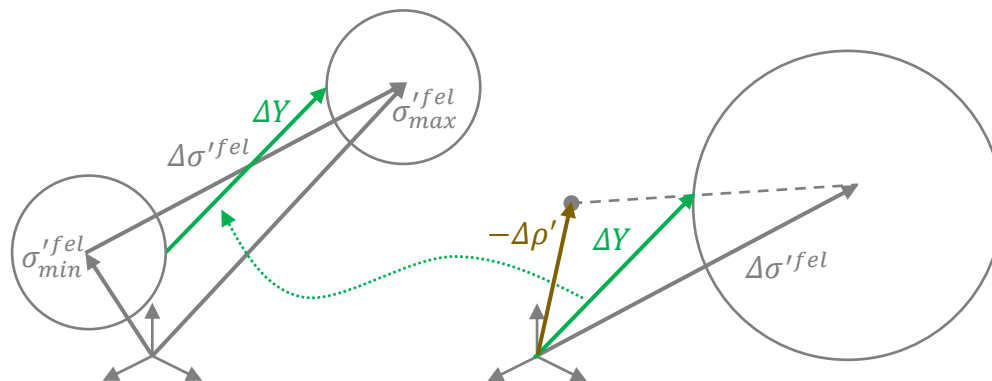


Abbildung 24: TIV-Raumdarstellungen zur Abschätzung von ΔY_i
links: Verwendung von ΔY_i zur Abschätzung der akkumulierten Zustände.
rechts: Abschätzung der TIV-Schwingbreite ΔY_i durch eine monotone Analyse mit der VFZT

In Bezug auf die Rechenzeit gibt es bei der Verwendung der VFZT im Gegensatz zu einer inkrementellen monotonen Berechnung kaum Vorteile. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Schwingbreite durch die VFZT oder durch die TwY-Methode ist vergleichbar.

Berechnung der akkumulierten mittleren Zustände

Nachdem der Zustand der Schwingbreite bekannt ist, wird in einem zweiten Berechnungsdurchlauf der mittlere akkumulierte Zustand ermittelt. Wie bereits in Gleichung (51) und (52) erläutert, setzen sich aus den Ergebnissen der mittleren akkumulierten Zustände und der Schwingbreiten die Ergebnisse der Lastextrema zusammen.

Es ist auch möglich, die TIV für einen der beiden Lastextrema direkt zu bestimmen. Dann würden auf Grundlage dieser TIV's die modifiziert-elastischen Analysen durchgeführt werden und das Ergebnis würde sich direkt auf diese Lastextrema beziehen. Diese Vorgehensweise wird bei der Anwendung mit Theorie II. Ordnung in Unterabschnitt 6.3.5 aufgegriffen.

Das Projektionsverfahren zur Ermittlung der TIV für die mittleren akkumulierten Zustände wird in Abhängigkeit von drei verschiedenen Zonen bestimmt. Die drei Zonen sind als $V_{p\Delta}$, $V_{e\Delta}$ und V_e bezeichnet und werden im Folgenden mit den zugehörigen Projektionsverfahren näher erläutert.

1. $V_{p\Delta}$ – Zonen:

In diesen Zonen kommt es zum Wechsellastieren zwischen den Lastextrema. Diese Zonen können identifiziert werden durch das Auftreten von plastischen Dehnungen bei der Berechnung der Schwingbreite oder durch das Überschreiten der doppelten Streckgrenze $2f_y$ durch die Vergleichsspannungsschwingbreite $\Delta\sigma_v$.

$$V_{p\Delta} = \{ \underline{x} | \Delta\sigma_v \geq 2f_y \} \quad (56)$$

Die Abschätzung der TIV Y_m für den mittleren akkumulierten Zustand ist in diesen Zonen keine Abschätzung, sondern das korrekte Ergebnis innerhalb des Gültigkeitsbereiches der TwY-Methode. Wie Gleichung (57) und Abbildung 25 zeigen, wird die TIV Y_m für den mittleren Zustand in $V_{p\Delta}$ – Zonen auf der Grundlage der fiktiv-elastischen Spannungen berechnet. Das bedeutet, Y_m ist in $V_{p\Delta}$ – Zonen unabhängig von den Restspannungen und kann nicht verbessert werden.

Liegen in einem Tragwerk ausschließlich $V_{p\Delta}$ – Zonen vor, so wird für das Ergebnis der akkumulierten Zustände nur eine einzige meA benötigt und die Qualität der Ergebnisse hängt ausschließlich von der Abschätzung der Schwingbreite ab.

$$Y_{i,m} = \sigma'_{i,min}{}^{fel} + \frac{1}{2} \Delta\sigma'^{fel} \quad (57)$$

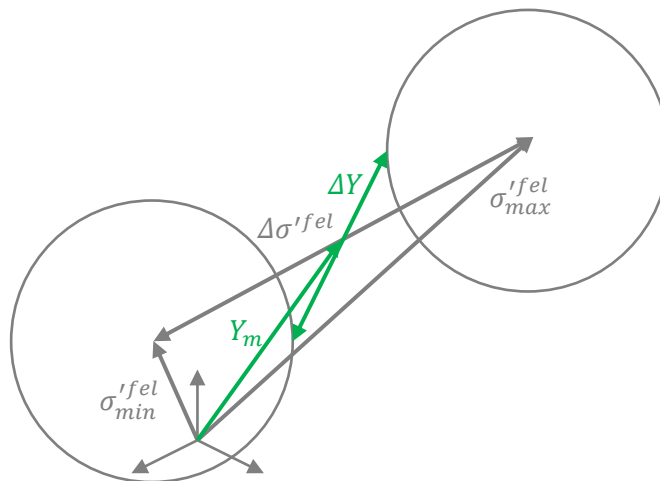


Abbildung 25: Bestimmung der TIV $Y_{i,m}$ für den mittleren akkumulierten Zustand in $V_{p\Delta}$ – Zonen

2. $V_{e\Delta}$ -Zonen:

In diesen Zonen kommt es in den ersten Belastungszyklen zum Plastizieren. Im Einspielzustand verhalten sich die Beanspruchungen jedoch nur noch rein elastisch. Die plastischen Dehnungen können sich hierbei an einem Lastextremum oder an beiden Lastextrema bis zum Einspielzustand entwickeln.

$V_{e\Delta}$ -Zonen verhalten sich bei der Schwingbreitenberechnung rein elastisch und können nur durch ein Überschreiten der Streckgrenze in den akkumulierten Zuständen identifiziert werden. Das Kriterium hierfür lautet.

$$V_{e\Delta} = \{\underline{x}|\Delta\sigma_v < 2f_y \wedge (\sigma_{v,max} \geq f_y \vee \sigma_{v,min} \geq f_y)\} \quad (58)$$

Im Gegensatz zu $V_{p\Delta}$ -Zonen kann bei $V_{e\Delta}$ -Zonen die TIV Y_m nur abgeschätzt werden und liefert nicht immer das exakte Ergebnis. Dies führt dazu, dass ein iterativer Verbesserungsprozess über die meA's erforderlich wird. In Abhängigkeit von $\sigma_{v,min}$ und $\sigma_{v,max}$ werden zwei unterschiedliche Gleichungen für die Abschätzung von Y_m verwendet.

$$\sigma_{v,max} > \sigma_{v,min} \Rightarrow Y_{i,m} = \sigma'_{i,max}{}^{fel} - \sigma'_{i,max} \frac{f_y}{\sigma_{v,max}} - \frac{1}{2}(\Delta Y_i) \quad (59)$$

$$\sigma_{v,max} < \sigma_{v,min} \Rightarrow Y_{i,m} = \sigma'_{i,min}{}^{fel} - \sigma'_{i,min} \frac{f_y}{\sigma_{v,min}} + \frac{1}{2}(\Delta Y_i) \quad (60)$$

Die TIV-Raumdarstellung zur Abschätzung von Y_m ist in Abbildung 26 gegeben. Dort wird der Fall ($\sigma_{v,max} > \sigma_{v,min}$) dargestellt, sodass Gleichung (59) zur Projektion verwendet wird. Y_m ergibt sich damit aus der Projektion der negativen deviatorischen Restspannungen des maximalen Zustandes $-\rho'_{max}$ auf den Mises-Kreis. Von diesem Punkt aus wird noch $-\frac{1}{2}\Delta Y$ aus der Schwingbreitenberechnung hinzuaddiert, um Y_m zu erhalten. Die Qualität der Ergebnisse für die mittleren akkumulierten Zustände hängt allein von den Abschätzungen in den $V_{e\Delta}$ -Zonen ab, da in den $V_{p\Delta}$ -Zonen Y_m exakt berechnet wird.

In der Darstellung von Abbildung 26 sind die Mises-Kreise so angeordnet, dass keine Schnittmenge entsteht. Aufgrund des veränderlichen Restspannungsfeldes zwischen den beiden Belastungsextrema, kann es trotzdem zu einem konstanten Verlauf der plastischen Dehnungen im Einspielzustand kommen. Weil sich jedoch das Restspannungsfeld ändert, sind trotzdem zwei unterschiedliche TIV's in den Belastungsextrema vorhanden. Die Schnittmenge Ω spielt somit in $V_{e\Delta}$ -Zonen bei plastischen Einspielzuständen keine Rolle.

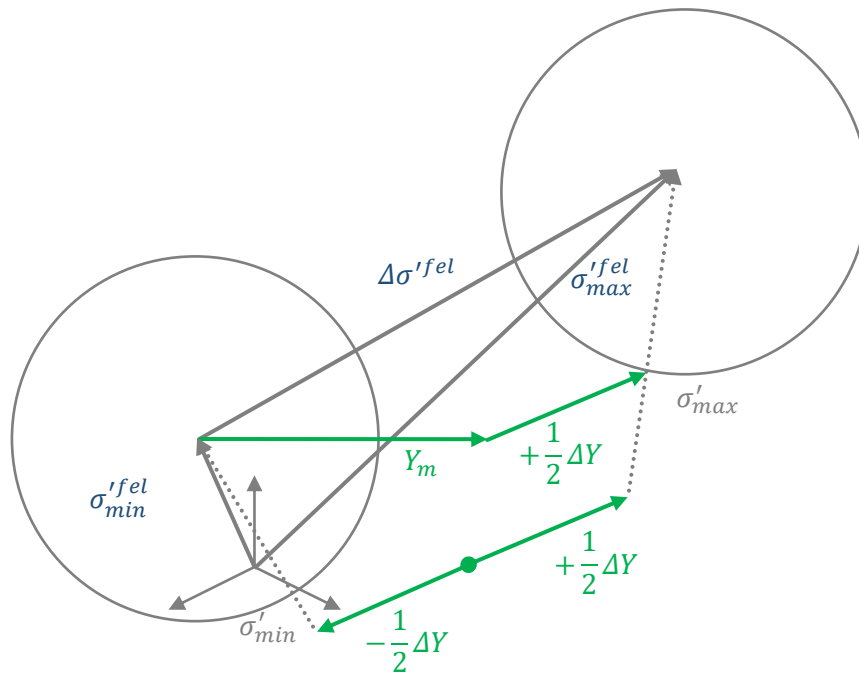


Abbildung 26: Abschätzung der TIV Y_m für den mittleren akkumulierten Zustand in $V_{e\Delta}$ -Zonen (in Anlehnung an Abbildung 4.33 in [11, 12]).

Das wesentliche Merkmal dieser Zonen ist, dass es nicht zum Wechselplastizieren kommt, im Gegensatz zu $V_{p\Delta}$ -Zonen. Das bedeutet, die Schwingbreite der Rückspannungen $\Delta\xi$ ist null und somit ist die Änderung im Restspannungsfeld rein elastisch, wie Gleichung (61) zeigt.

$$\Delta Y = -\Delta\rho' \quad (61)$$

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass in Abbildung 26 zu sehen ist, wie es auch beim minimalen Zustand zu Plastizieren kommt, weil die Streckgrenze auch durch $\sigma_{v,min}$ überschritten wird. Ein Vorschlag, wie die Projektion verbessert werden könnte, sodass das Plastizieren von beiden Belastungszuständen berücksichtigt werden kann, wird in Unterabschnitt 6.3.5 besprochen.

3. V_e -Zonen:

In diesen Zonen kommt es nicht zum Plastizieren und deshalb wird hier keine TIV-Abschätzung benötigt, wie bereits in Abschnitt 2.1 beschrieben. V_e -Zonen sind dadurch gekennzeichnet, dass an jedem Belastungsextremum die Vergleichsspannungen unterhalb der Streckgrenze liegen. Das elastische Werkstoffgesetz bleibt unverändert und es werden auch keine Anfangsdehnungen als Belastungen aufgebracht.

Zustandsgrößen der Lastextrema berechnen

Nachdem die Berechnungen für die Schwingbreiten und die mittleren akkumulierten Zustände abgeschlossen sind, werden die Zustandsgrößen in den entsprechenden Lastextrema berechnet. Dazu werden beispielhaft zur Berechnung der Zustandsgrößen die Spannungen verwendet. Für

die folgenden Gleichungen könnten auch alle anderen Zustandsgrößen wie Dehnungen, Verschiebungen, Kräfte, etc. verwendet werden.

Aus den modifiziert-elastischen Analysen zur Schwingbreite wird die Restspannungsschwingbreite $\Delta\rho_i$ ermittelt. Diese wird mit der Schwingbreite der fiktiv-elastischen Spannungen $\Delta\sigma_i^{fel}$ superponiert. Daraus ergibt sich die elastisch-plastische Schwingbreite $\Delta\sigma_i$, auf deren Grundlage die $V_{p\Delta}$ -Zonen identifiziert werden.

$$\Delta\sigma_i = \Delta\rho_i + \Delta\sigma_i^{fel} \quad (62)$$

Im zweiten Berechnungsdurchgang werden die Restspannungen der mittleren akkumulierten Zustände berechnet. Um die Zustandsgrößen der einzelnen Belastungsextrema zu erhalten, werden die Zustandsgrößen des mittleren akkumulierten Zustandes benötigt. Aus diesem Grund werden die Restspannungen $\rho_{i,m}$ mit den mittleren fiktiv-elastischen Spannungen superponiert.

$$\sigma_{i,m} = \rho_{i,m} + \frac{1}{2}(\sigma_{i,min}^{fel} + \sigma_{i,max}^{fel}) \quad (63)$$

Aus den Schwingbreitenergebnissen und den Ergebnissen der mittleren akkumulierten Zustände lassen sich die Zustandsgrößen der zugehörigen Lastextrema berechnen.

$$\sigma_{i,min/max} = \sigma_{i,m} \mp \frac{1}{2}\Delta\sigma_i \quad (64)$$

Ablaufschema der Berechnung bei plastischen Einspielzuständen

Wie bei allen Anwendungen der VFZT werden zu Beginn die fiktiv-elastischen Beanspruchungen berechnet. Zusätzlich werden die Randbedingungen und das FE-Modell übernommen. Bei zyklischen Belastungen wird zuerst die Natur des Einspielzustandes entsprechend Gleichung (40) und (41) festgestellt. Liegt plastisches Einspielen vor, wird die vorgegebene Anzahl der modifiziert-elastischen Analysen verdoppelt, damit die eine Hälfte für die Schwingbreitenberechnung und die andere Hälfte für die Berechnung der akkumulierten Zustände verwendet wird. Es wird mit der Berechnung der Schwingbreite begonnen, und wenn diese bekannt ist, werden die Informationen der Schwingbreitenberechnung an die Berechnung der akkumulierten Zustände übergeben. Nachdem die meA's für die mittleren akkumulierten Zustände abgeschlossen sind, werden zunächst die Spannungen der mittleren Zustände berechnet, um zum Abschluss die Spannungen der akkumulierten Zustände in den Lastextrema berechnen zu können.

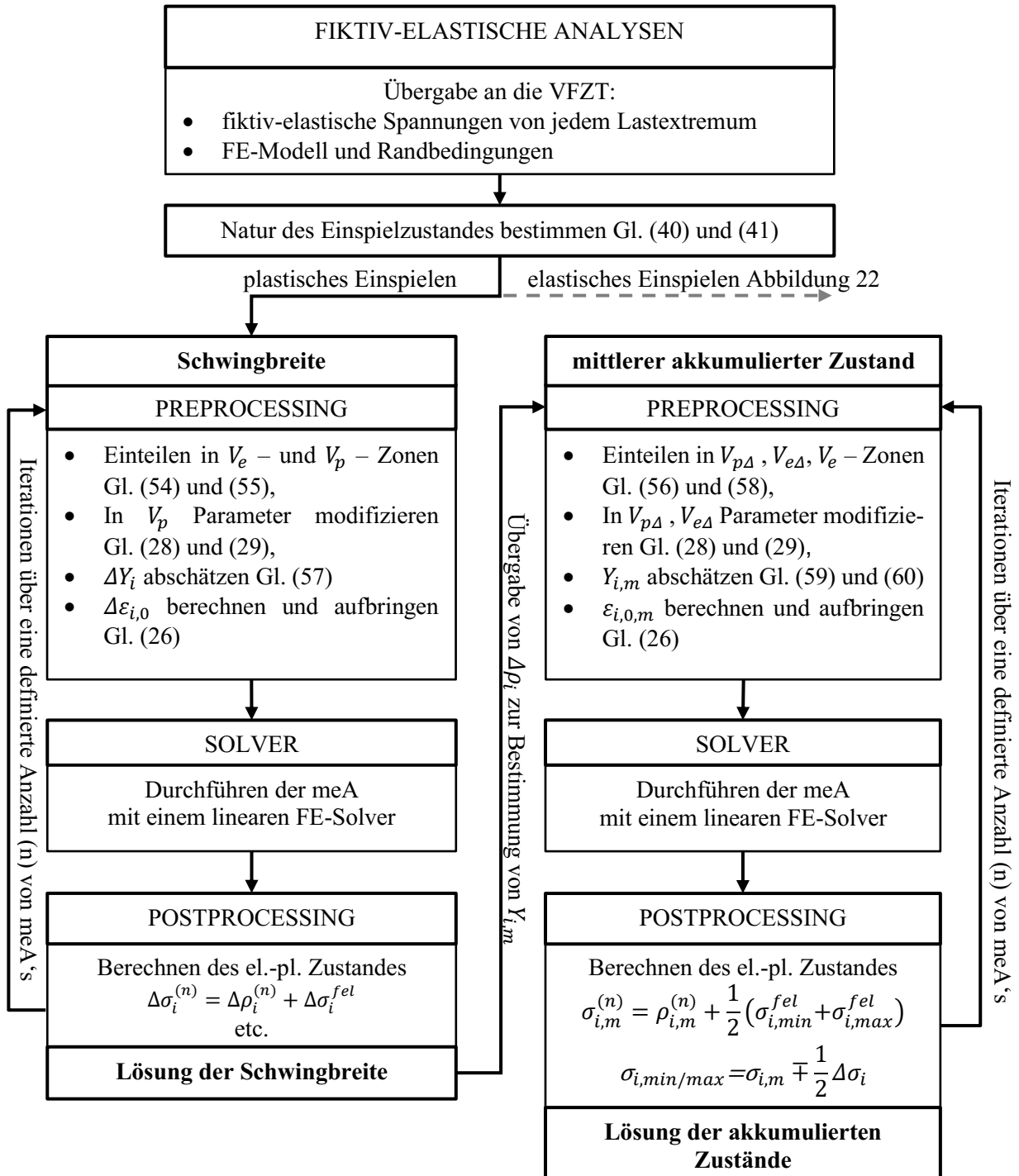


Abbildung 27: Ablaufschema der VFZT bei plastischen Einspielzuständen

Die Anzahl der modifiziert-elastischen Analysen, bis ein gutes Näherungsergebnis erreicht ist, liegt bei der Berechnung der Schwingbreiten etwa bei 7 meA's. Für die Berechnung der mittleren akkumulierten Zustände wird gewöhnlich die gleiche Anzahl an modifiziert-elastischen Analysen benötigt. Somit verdoppelt sich der Berechnungsaufwand bei plastischen Einspielzuständen gegenüber elastischen Einspielzuständen.

2.3. Entwicklungen im Kontext der Zarka-Methode

In den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurde die Entwicklung der Kernkraftwerke deutlich vorangetrieben. Somit entstand ein Bedarf an geeigneten Methoden zur Nachweisführung von thermo-mechanisch beanspruchten Tragwerken. Seit dieser Zeit sind unzählige Forschungsarbeiten zu dieser Thematik veröffentlicht worden, wie direkte Methoden einen Beitrag zur rechnerischen Nachweisführung liefern könnten.

An dieser Stelle wird die Entwicklung der Zarka-Methode vertieft, welche die Grundlage für die Vereinfachte Fließzonentheorie darstellt. Neben der VFZT wurde die Zarka-Methode von verschiedenen Wissenschaftlern an unterschiedlichen Standorten weiterentwickelt und für unterschiedlichste Zielrichtungen angewandt. Die Gemeinsamkeit aller dieser Entwicklungen ist die effiziente Berechnung von zyklisch überelastisch beanspruchten Tragwerken.

Die hier erwähnten Entwicklungen sind durch wissenschaftliche Publikationen veröffentlicht worden. Darüber hinaus gibt es Hinweise auf unveröffentlichte Entwicklungen und Forschungsarbeiten, die von Softwareunternehmen oder Forschungseinrichtungen erstellt wurden, welche nicht immer an Veröffentlichungen eigener Entwicklungen interessiert sind.

Zudem muss darauf hingewiesen werden, dass folgende Zusammenstellung nicht vollständig sein muss, da viele Entwicklungen der Zarka-Methode – welche heute über 40 Jahre alt ist – evtl. unter anderen Namen weitergeführt werden und die Verweise auf ihre Wurzeln ausbleiben. Die folgende Zusammenstellung der Veröffentlichungen soll zeigen, in wie vielen Bereichen die Methode Anwendung gefunden hat und vor allem, welches riesige Potential damit auch noch in der Weiterentwicklung der VFZT steckt.

2.3.1. Die Anfänge der Methode

Der Namensvater Joseph Zarka veröffentlichte mit seinen Mitarbeitern Engel und Inglebert 1980 unter dem Titel „On a simplified inelastic analysis of structures“ [57] zum ersten Mal die Idee der direkten Berechnung. In den darauffolgenden Jahren veröffentlichten Mitarbeiter und Kollegen von Zarka wie Tribout, Inglebert, Casier, Navidi-Kasmaï, Hassine, Legrand, Engel und Frelat weitere Entwicklungen durch Konferenzbeiträge. So entstand in der Zeit von 1980 bis 1995 eine Reihe an Konferenzbeiträgen, deren Titel die Entwicklung der Methode nachvollziehen lassen. Zarka, Frelat und Inglebert [52] fassten diese Arbeit 1990 in „A new approach to inelastic analyses of structures“ zusammen und danach beschäftigte sich Zarka nur noch indirekt mit der Weiterentwicklung der Methode.

Zarka war der Ansicht, dass selbst aufwendige Stoffgesetze das Verhalten von Ratcheting nur begrenzt beschreiben können, da die Dehnungsakkumulation von mehreren schwer zu erfassenden Größen abhängt und diese durch aufwendige Materialuntersuchungen bestimmt werden müssen [58]. Eventuell kann es ein „korrektes“ Stoffgesetz auch nicht geben, da bei

Ratchetingversuchen in der Regel eine hohe Streuung auftritt und ein fester Satz an Parametern dem Materialverhalten nicht gerecht werden kann. Vielleicht war das der Grund, weshalb Zarka sich nicht an der Forschung komplexer Stoffgesetze beteiligte, und einen anderen Weg ging, um zyklische Beanspruchungen vorherzusagen zu können. Zarka's zweiter großer Forschungsschwerpunkt wird kurz in Abschnitt 2.3.6 angerissen.

2.3.2. Implementierung weiterer Stoffgesetze

Tribout, Inglebert und Casier [59] haben 1983 einen Vorschlag gemacht, die Methode mit dem Overlay-Modell zu erweitern, um multilineares Materialverhalten verwenden zu können. Hierbei werden jedoch die einzelnen Layer durch numerisch gekoppelte Elemente simuliert. Zwei identische Elemente am selben Ort, welche mit unterschiedlicher linearer Verfestigung überlagert wurden, verhalten sich in der Ganzheit wie trilineares Materialverhalten.

Diese Arbeit kann als Vorreiter für die spätere Arbeit von Hübel [60] angesehen werden, in der das Overlay-Modell auf theoretischer Ebene für die VFZT formuliert und in ANSYS implementiert wurde. Diese Formulierung zeigte, dass die Zarka-Methode und deren Ableger nicht nur auf lineare Verfestigung begrenzt sind. Neueste Entwicklungen, welche in dieser Arbeit noch behandelt werden, geben Hinweise, wie die Verwendung von nichtlinearer Verfestigung implementiert werden könnte.

Auf einem anderem Fachgebiet – dem Grundbau – gelang es Chazallon et al. [61], die Evolutionsgleichung von Hornyk (eine Extrapolationsfunktion des Materialverhaltens über die Zyklenzahl) mit dem linearen Verfestigungsmodul zu verknüpfen. Erstmals war es möglich, die Zyklenabhängigkeit des Bodenverhaltens für die direkte Methode zu berücksichtigen. Chazallon und seine Kollegen nutzten diese Vorgehensweise, um erfolgreich das Setzungsverhalten von Fahrbahnunterkonstruktionen vorherzusagen.

2.3.3. Belastungen mit mehr als zwei Belastungsextrema

Inglebert und Frelat [62] zeigten 1989, dass die Zarka-Methode auch für Mehr-Parameterbelastungen im Kontext von Kugelstrahlen eingesetzt werden kann. Beim Kugelstrahlen werden ausreichend harte Kugeln auf Oberflächen geschossen, um diese zu härten. Es gelang mit der erweiterten Methode, das Restspannungsverhalten der bearbeiteten Oberflächen gut nachzuempfinden. Die theoretische Erweiterung dieser Arbeit bezog sich ausschließlich auf elastische Einspielzustände und konnte noch nicht für beliebige Tragwerke angewandt werden.

In weiteren Arbeiten von Inglebert und ihren Kollegen wurde die Methode für Mehr-Parameterbelastungen Stück für Stück erweitert [63–65]. Unter dem Namen MASSI [66, 67] (aus dem französischen: „Méthode d'Analyse Simplifiée des Structures Inélastiques“ – Methode zur vereinfachten überelastischen Strukturanalyse) wurde die transformierte interne Variable (TIV) durch das Einbeziehen von numerischen Optimierungsverfahren berechnet, wodurch nun die

Methode erstmals allgemeingültig formuliert wurde. Diese Erweiterung galt jedoch nur für elastische Einspielzustände. Bei plastischen Einspielzuständen ist die MASSI-Methode, nach dem veröffentlichten Entwicklungsstand, nicht allgemein anwendbar. Für spezielle Verfahren wie die mechanische Nachbehandlung durch das Kugelstrahlen, Hämmern und Kaltwalzen lassen sich die entstehenden Restspannungsfelder auch bei plastischem Einspielen geeignet vorhersagen. Die Verwendung des Optimierungsverfahrens in jeder plastischen Stelle im Tragwerk führt jedoch zu einem deutlich höheren Berechnungsaufwand.

Unabhängig von Inglebert und ihren Kollegen schlugen Yu, Moran und Keer eine sukzessive Berechnung vor, die dem Durchlaufen der Belastungsgeschichte einer inkrementellen Berechnung ähnelt [68–70]. Bei dieser Methode lassen sich beliebig viele Belastungszustände sowohl bei elastischem als auch bei plastischem Einspielen berücksichtigen. Allerdings kann diese Vorgehensweise nur geeignete Ergebnisse erzielen, wenn die direktionalen und die örtlichen Umlagerungen gering sind. Dann reicht tatsächlich nur eine elastische Analyse pro Lastschritt für eine geeignete Abschätzung, was zu einer deutlichen Einsparung von Berechnungszeit gegenüber inkrementellen Berechnungen führt. Es gibt tatsächlich nur wenige Anwendungsbeispiele, bei denen dieses Vorgehen zweckmäßig angewendet werden kann.

Khalij, Li, Panier und Hariri [71, 72], aber auch Jabbado und Maitournam [73–75] publizierten den Weg der sukzessiven Projektion. Durch diesen Weg sollten nun auch direktionale und örtliche Umlagerung erfasst werden können, im Gegensatz zur sukzessiven Berechnung von Yu et al. [68–70]. Der wesentliche Vorteil der sukzessiven Projektion gegenüber der sukzessiven Berechnung ist der, dass die transformierten Variablen für den Einspielzustand abgeschätzt werden. Das bedeutet, es werden nicht die Lastextrema sukzessiv durchgerechnet, sondern nur der Projektionsvorgang durchläuft sukzessiv die Lastextrema. Dieses Vorgehen liefert gute Ergebnisse an Stellen im Tragwerk, bei denen eine geeignete Projektion möglich ist. Es kann jedoch auch Stellen im Tragwerk geben, bei denen die Abschätzungen mit diesem Verfahren schwierig sind. Aus diesem Grund wird häufig der Vorschlag gemacht, eine inkrementelle Berechnung von wenigen Zyklen vorzuschalten. Diese liefert bessere Startwerte für den sukzessiven Projektionsvorgang und kann somit die Ergebnisqualität verbessern. Der Preis für dieses Vorgehen ist ein deutlich höherer Berechnungsaufwand, der sich aus den vorgeschalteten inkrementellen Analysen ergibt.

Hübel und Vollrath [76–79] haben ein Projektionsverfahren entwickelt, welches in der Qualität der Ergebnisse unabhängig von der Art der Beanspruchungen oder vorgeschalteten inkrementellen Berechnungen ist. Die Vorgehensweise spielt in der generellen Entwicklung der Methode eine herausragende Rolle, da herausgearbeitet wurde, dass die Qualität der Ergebnisse nur von dem gewählten Projektionsverfahren abhängt und auch ohne Startwertverbesserung durch inkrementelle Vorberechnungen gute Ergebnisse liefern kann. Eine ausführliche Beschreibung dieser Projektionsvorschriften ist Bestandteil dieser Arbeit und wird in Abschnitt 4.2 diskutiert.

Sai [80] veröffentlichte einen innovativen Ansatz in seiner Promotionsschrift, welche die Zarka-Methode verwendet, um den Gesamtzustand des Tragwerks zu ermitteln. Er verzichtet dabei auf eine Projektion zur Berechnung der transformierten internen Variablen, wie es üblicherweise bei der Methode der Fall ist und berechnet diese durch eine Extrapolationsfunktion. Zur Entwicklung der Taylor-Reihen, aus denen die Extrapolationsfunktion gebildet wird, werden zunächst wenige Zyklen einer inkrementellen Berechnung benötigt. Die ermittelten Ergebnisse liefern die ersten Extrapolationsfunktionen der transformierten internen Variablen. Nun kann die TIV zu einem bestimmten Zyklus berechnet werden und der elastisch-plastische Zustand wird entsprechend der Zarka-Methode ermittelt. Auf Grundlage dieser Ergebnisse wird die Extrapolationsfunktion aktualisiert und das Verfahren bis zum gewünschten Zyklus oder dem Einspielzustand fortgesetzt. Das Überspringen von Zyklen verringert deutlich den Berechnungsaufwand gegenüber vollständig inkrementell gerechneten Analysen und gibt ihr den Namen „Cycle Skip Method“. Obwohl diese Methode aufwendig erscheint, wegen der vorgeschalteten inkrementellen Berechnungen, so könnte in ihr jedoch verborgenes Potenzial liegen. Ein möglicher Vorteil dieser Methode könnte die Erweiterbarkeit auf Mehr-Parameterbelastungen sowohl für elastisches als auch für plastisches Einspielen sein. Insbesondere bei plastischen Einspielzuständen ist eine Abschätzung der Schwingbreiten bei Mehr-Parameterbelastungen für den allgemeinen Fall schwierig. Leider gibt es von Sai zu dieser Vorgehensweise keine weiteren Veröffentlichungen, weshalb davon ausgegangen wird, dass die Entwicklung auch nicht weiterverfolgt wurde.

2.3.4. Anwendung in der Geotechnik

Auf der Grundlage von Zarka's Konzept der Einspielanalysen haben Chazallon, Habiballah, Koval, Horny, Allou und Mouhoubi [61, 81–85] die Zarka-Methode für bodenmechanische Aufgaben umformuliert. Die erste grundlegende Modifikation durch Chazallon und seinen Kollegen [84] galt der Fließfläche. So wurde die Theorie von der Verwendung einer Mises-Fließfläche auf eine Drucker-Prager-Fließfläche umformuliert. Damit konnte erstmals der Einfluss des hydrostatischen Druckanteils berücksichtigt werden. In einem weiteren Schritt wurde, wie oben schon erwähnt, die Verfestigungsfunktion durch eine zyklenabhängige Extrapolationsfunktion erweitert [61]. Durch diese Erweiterungen wurde das Setzungsverhalten von Fahrbahnunterkonstruktionen unter zyklischen Belastungen bestimmt.

Die letzten Entwicklungen für die geotechnischen Anwendungen von Li, Nowamooz, Chazallon und Migault [86–92] zielen darauf ab, den Feuchtigkeitsgehalt des Bodens zu berücksichtigen. Dafür wurde eine Umformulierung der Theorie vorgenommen, damit der Feuchtegehalt des Bodens in der Fließfunktion berücksichtigt wird. Dieses Vorgehen lässt sich vergleichen mit der Verwendung einer temperaturabhängigen Streckgrenze bei Stahl, welche bei der VFZT verwendet wird [14]. Ähnlich wie bei Stahl ist bei ungebundenen granularen Böden die Fließgrenze in

den ersten Belastungszyklen durch isotrope Verfestigung gekennzeichnet. Die Formulierung von isotroper Verfestigung wird gegenwärtig durch Li und seine Kollegen entwickelt [92].

2.3.5. Praxistransfer und Softwareimplementierungen

Die meisten der oben genannten Wissenschaftler, welche sich über einen längeren Zeitraum mit der Zarka-Methode beschäftigt haben und die Entwicklung maßgeblich vorangetrieben haben, kommen aus Frankreich. Dort ist die Methode auch in einigen kommerziellen und nichtkommerziellen Softwarepaketen implementiert, wie CAST3M, SYSTUS, ACORD 2D, CADLM, FAT-Pro und weiteren. Viele der französischen Wissenschaftler, die an der Zarka-Methode geforscht haben, haben einen Bezug zur École Polytechnique in Paris, an der Zarka lehrte. Außerhalb von Frankreich haben nur eine Hand voll Wissenschaftler über die Zarka-Methode publiziert. Die wohl umfangreichste Arbeit außerhalb von Frankreich kommt aus Deutschland von Hübel und seinen Mitarbeitern [2, 14, 15, 55, 60, 76–79, 93], welche die einzigen Wissenschaftler sind, die im deutschsprachigen Raum an dieser Methode forschen. Hübel und Vollrath arbeiten mit ANSYS und haben ihre Arbeit über Usersubroutinen implementiert. In Polen hatte Cecot mit seinen Mitarbeitern eine Zeit lang mit der Methode gearbeitet und sie mit h-adaptiver FEM verknüpft [94]. In den USA gab es auch eine Reihe an Veröffentlichungen [68–70, 95], welche keine theoretischen Neuentwicklungen hervorbrachten und im Wesentlichen die Methode nur vorstellten und bewerteten.

2.3.6. Zarka's weitere Entwicklung

Zarka's spätere Arbeiten drehten sich um „Optimal Intelligent Design“ [96–99]. Dabei geht es darum, ein Informationsnetzwerk anzulegen, welches Erkenntnisse aus Experimenten und numerischen Untersuchungen zusammenbringt, um „optimal“ zu entwerfen. Die Grundlage bildet eine stetig anwachsende Datenbank mit Informationen über Ermüdungs- und Ratchetingbeanspruchungen. Diese sind zum Beispiel:

- Ergebnisse aus Laborversuchen – an Materialien und konkreten Tragwerken,
- analytische Lösungen,
- Randbedingungen von Geometrien und Belastungen aus Regelwerken,
- numerische Berechnungsergebnisse – durchgeführt mit der Zarka-Methode.

Das Verfahren kann umso bessere Ergebnisse erzielen, je mehr Informationen bereits über ähnliche Systeme, vergleichbare Materialien und deren Reaktionen auf die verschiedenen Belastungen vorhanden sind. Aufgrund der Effizienz der Zarka-Methode lassen sich damit viele Ergebnisse elastisch-plastischer Analysen generieren, da selbst an komplizierten Randwertproblemen Parameterstudien noch möglich sind, wo inkrementelle Schritt-für-Schritt-Berechnungen unwirtschaftlich werden.

All diese Informationen werden von Werkzeugen des automatischen intelligenten Lernens aufgenommen und in mathematischen Gleichungen oder Regeln ausgewertet, mit denen zum einen optimal entworfen werden kann und zum anderen neue Schadensmechanismen erkannt werden können. Dieses Vorgehen soll durch einen Zuwachs an Informationen einen Zuwachs an zuverlässigen Entwürfen und Nachweisen ermöglichen. Darüber hinaus soll auch der Nachweis von bisher eher unbekannt Strukturen deutlich zuverlässiger durchgeführt werden können. Dabei ist die Zarka-Methode ein integraler Bestandteil des „Optimal Intelligent Design“, welches aktuell in der Bewertung von Schrauben und Bolzen Anwendung findet [100].

3. Das Wesen von Mehr-Parameterbelastung

Um zu verstehen, welches Verhalten der Tragwerke bei der Verwendung von beliebig vielen Belastungen entsteht, wurde eine Reihe an numerischen Untersuchungen durchgeführt [76–79]. Dabei bezieht sich das Verhalten der Tragwerke nicht nur auf den Einspielzustand, sondern vor allem auf die Veränderungen der Beanspruchungen zwischen Ein- und Mehr-Parameterbelastungen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden im folgenden Kapitel vorgestellt und bilden die Grundlage für die theoretischen Entwicklungen in Kapitel 4 und Kapitel 5.

3.1. Die funktionale Beschreibung von Mehr-Parameterbelastungen

Der aktuelle Stand der Forschung berücksichtigt nur einen einzigen zeitabhängigen Belastungsparameter $\lambda(t)$, wie Gleichung (39) zeigt. Somit kann das zyklische Verhalten nur zwischen zwei Belastungsextrema untersucht werden. Diese paarweise Betrachtung steht mit dem Vorgehen der Regelwerke wie ASME-Code [3] und KTA-Regelwerk [4] im Einklang. In [24] wird jedoch gezeigt, dass eine paarweise Betrachtung nicht ausreicht, um gewisse Ratcheting-Mechanismen überhaupt erst zu identifizieren. Die größten Beanspruchungen im Einspielzustand hängen jedoch wesentlich von der Berücksichtigung aller entscheidenden Belastungszustände ab und können nicht immer durch eine paarweise Betrachtung ersetzt werden. Aus diesem Grund wurde die VFZT für die Anwendung von mehr als zwei Belastungsextrema, also von Mehr-Parameterbelastungen erweitert. Die Vorteile der VFZT gegenüber inkrementellen Berechnungen kommen bei Mehr-Parameterberechnungen noch deutlicher zum Vorschein. Wo Schritt-für-Schritt Berechnungen bereits die Grenze der Rechenkapazität überschreiten, kann die VFZT noch effizient Lösungen liefern.

Besonders bei thermo-mechanischen Beanspruchungen mit transienten Temperaturverläufen ist es schwierig, die Zeitpunkte der beiden Belastungsextrema derart zu bestimmen, dass die maximalen Beanspruchungen erfasst werden. In der Regel liegt eine thermische Berechnung mit ausreichender zeitlicher Diskretisierung vor, aus der die Belastungszeitpunkte für eine mechanische Analyse gewählt werden. Berechnungen einer thermischen Simulation sind bei gleichem FE-Netz günstiger als Berechnungen einer mechanischen Analyse mit nichtlinearem Stoffgesetz. Aus dem Grund der numerischen Wirtschaftlichkeit ist also abzuwägen, welche Belastungszeitpunkte berücksichtigt werden und welche vernachlässigt werden.

Die Verwendung von Mehr-Parameterbelastungen für die VFZT setzt voraus, dass die Belastungsgeschichte durch eine Reihe von Belastungsextrema bekannt ist und durch ein Belastungshistogramm veranschaulicht werden kann. Im Folgenden wird eine Funktion vorgestellt, die es ermöglicht, die Belastungsgeschichte von Mehr-Parameterbelastungen zu beschreiben. Durch Gleichung (65) können beliebig viele Belastungszustände L_j durch ihre zeitabhängigen Belastungsparameter $\lambda_j(t)$ beeinflusst werden und somit Belastungshistogramme mit beliebig vielen Lastparametern beschrieben werden.

$$L(t) = \sum_j \lambda_j(t) \cdot (L_j) \quad (65)$$

Bei der Formulierung der Belastungsfunktion sollte berücksichtigt werden, dass Überschneidungen von zyklischen Belastungen, wie sie in Abbildung 28 dargestellt sind, zu neuen Beanspruchungsextrema führen können. Solche Beanspruchungsextrema aus Interaktionen können zu deutlich höheren Beanspruchungen führen und müssen somit berücksichtigt werden. Wie in Abbildung 28 links dargestellt ist, lässt sich häufig nicht vorhersagen, zu welchem Zeitpunkt die

größte Beanspruchung im Tragwerk auftritt. Bei inkrementellen Berechnungen werden durch eine ausreichende Diskretisierung der Belastungshistorie die Zeitpunkte der maximalen Beanspruchung identifiziert. Gleichmaßen kann dieses Verhalten auf die VFZT übertragen werden. D.h. es werden die Zwischenschritte als zusätzliche Belastungsextrema berücksichtigt, wie in Abbildung 28 rechts dargestellt ist. Dieses besondere Phänomen der Mehr-Parameterbelastung soll hier nur kurz erwähnt werden und spielt im weiteren Verlauf der Arbeit keine weitere Rolle, da auf eine zeitlich verschobene Überlagerung von zyklischen Belastungen verzichtet wird.

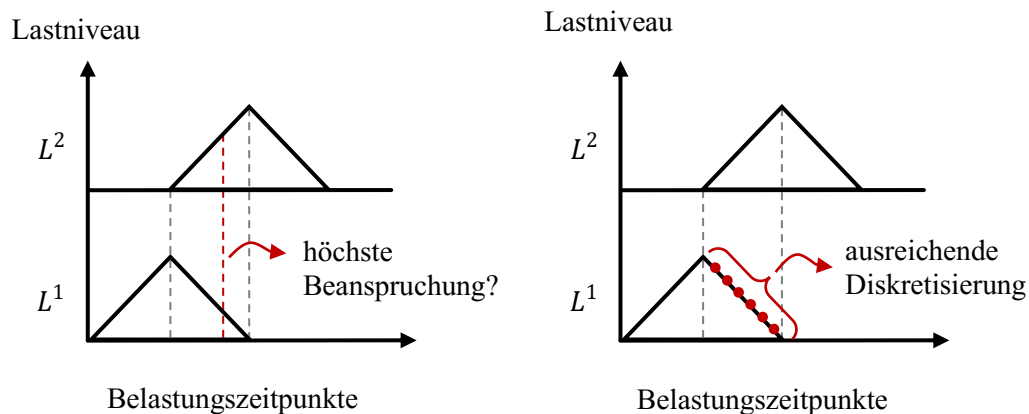


Abbildung 28: **links:** Unbekanntes Beanspruchungsextrem aufgrund unzureichender Lastpfadzerlegung.
rechts: Ausreichende Lastpfadzerlegung kann das Beanspruchungsmaximum zwischen den Belastungsextrema identifizieren.

3.2. Tragverhalten bei Mehr-Parameterbelastung

In diesem Abschnitt werden Besonderheiten in Bezug auf das Tragverhalten bei der Berücksichtigung von Mehr-Parameterbelastungen aufgezeigt. Die numerisch inkrementellen Untersuchungen, welche an verschiedenen Beispielen durchgeführt wurden, führten zu einer Reihe an bisher wenig durch die Fachliteratur besprochenen Phänomenen. Auf Grundlage der beobachteten Phänomene wurden Thesen aufgestellt, die an weiteren inkrementellen Berechnungen untersucht wurden und somit als empirisch hergeleitet angesehen werden können.

3.2.1. Das Torus-Modell als Idealisierung eines Rohrbogens

Die Auswirkungen von Mehr-Parameterbelastungen werden beispielhaft an dem Modell eines dünnwandigen Rohrbogens erläutert. Genau genommen wird ein idealisiertes, rotationssymmetrisches Modell des Rohrbogens verwendet. Die Rotation eines Kreisringquerschnittes führt zu einem Torus-Modell, welches den Berechnungsaufwand gegenüber vollständig modellierten 90°-Rohrbögen deutlich reduziert. Gleichzeitig kann durch diese Modellreduktion eine gute Näherung des höchst beanspruchten Querschnitts bei 45° erzielt werden. Dies gilt nur für rotationssymmetrische Belastungen, wie Innendruck, In-plane Biegung und radiale Temperaturgradienten. Diese Reduktion des Berechnungsaufwandes ist notwendig, weil der Aufwand an vielen numerischen

elastisch-plastischen inkrementellen Untersuchungen an einem mit 3-D Solidelementen modellierten Rohrbogen unter zyklischer Belastung bis zum Erreichen des Einspielzustandes zur Validierung der VFZT mit der verfügbaren Hardware zu aufwendig wäre.

Zur Darstellung der besonderen Phänomene, welche unter Mehr-Parameterbelastungen auftreten, wurde das Torus-Modell gewählt, weil hier alle Phänomene in einem Modell dargestellt werden können. Die Untersuchung der im Folgenden diskutierten Thesen ist auch an vereinfachten Modellen von akademischer Natur durchgeführt worden.

Wie in Abbildung 29 zu erkennen ist, entsteht aus dem rotierten Kreisringquerschnitt ein Torus-Modell, welches durch die Verwendung von 2-D Kontinuumselementen eine deutliche Reduktion von Elementen und somit Berechnungsaufwand gegenüber einem 3-D Modell darstellt.

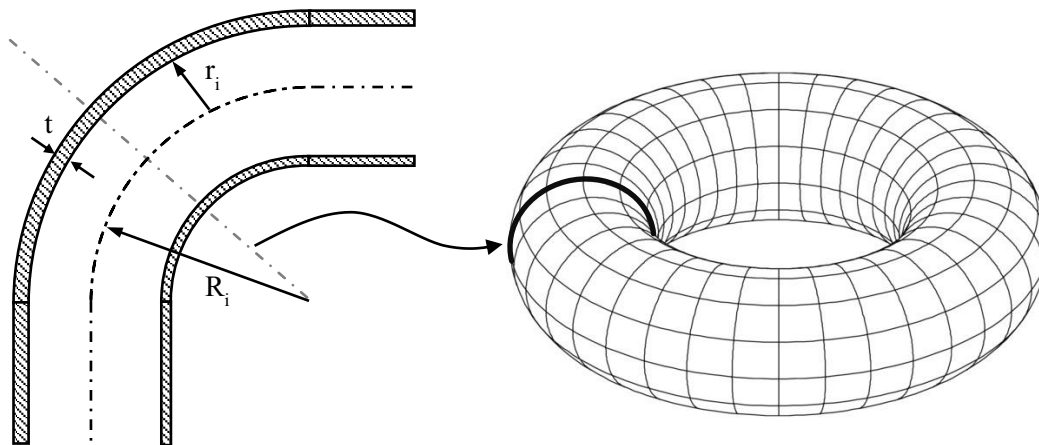


Abbildung 29: Vereinfachung einer 90° Rohrbogengeometrie durch das Ausnutzen von Rotationssymmetrie, wodurch ein Torus entsteht.

Eine Verwendung von shell-Elementen zur Modellierung einer vollständigen Rohrbogengeometrie war zum Zeitpunkt der Projektbearbeitung technisch mit der VFZT noch nicht möglich, weil die Usersubroutinen für die Anwendung von shell- und beam-Elementen sich noch in der Entwicklung befanden.

In [76] wird an fiktiv-elastischen Berechnungen gezeigt, dass die Verwendung der Torus-Scheibe zu guten Ergebnissen im Vergleich zum Querschnitt der maximalen Beanspruchung am Rohrbogen bei 45° führt. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist jedoch, dass die Steifigkeit des angeschlossenen Geradrohrs einen geringen Einfluss auf die maximalen Beanspruchungen im Rohrbogen hat. Weiterhin lassen sich durch die Ausnutzung der Rotationssymmetrie nur rotationssymmetrische Belastungen verwenden, somit hat das Modell des rotationssymmetrischen Torus einige Anwendungsgrenzen.

3.2.2. Belastungen und Belastungsreihenfolge

In Abbildung 30 wird die dünnwandige Querschnittsgeometrie eines Rohrbogens unter Verwendung von Rotations- und Achsensymmetrie mit den Belastungen dargestellt. Bei den Belastungen handelt es sich um den konstant anliegenden Innendruck p und zwei zyklische Belastungen, dem radialen Temperaturgradienten ΔT und der weggesteuerten In-plane Biegung φ . In-plane bezieht sich hierbei auf die durch den Rohrbogen aufgespannte Ebene, in der der Rohrbogen auf- bzw. zugebogen wird. Um die In-plane Biegung in das Modell einzubringen wurde ein linearer Temperaturverlauf von T_i nach T_e in horizontaler Richtung aufgebracht, wie es in Abbildung 30 dargestellt ist.

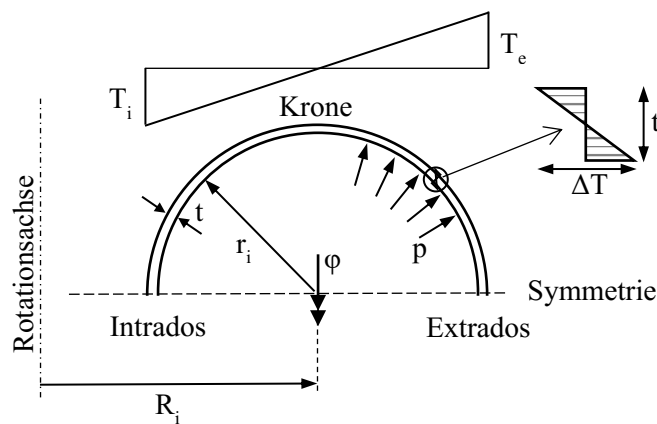


Abbildung 30: Geometrie und Belastungen des vereinfachten Rohrbogenmodells als rotationssymmetrischer Torus.

Die zeitliche Anordnung der zyklischen Belastungen wird in Abbildung 31 zusammengefasst. Es ist zu erkennen, dass die Lastniveaus zwischen 0 und 1 bei den zyklischen Belastungen wechseln. Dabei bedeutet 1, dass 100% des Belastungsniveaus wirken und 0%, dass die Belastung vollständig zurückgenommen wurde. Der Innendruck p wirkt kontinuierlich im Tragwerk und die zyklischen Belastungen wechseln sich ohne Überschneidungen ab. Zuerst wird der radiale Temperaturgradient ΔT aktiviert. Nach seiner Entlastung folgt die Belastung durch die In-plane Biegung φ , und nachdem diese wieder entlastet wurde, beginnt ein neuer Großzyklus.

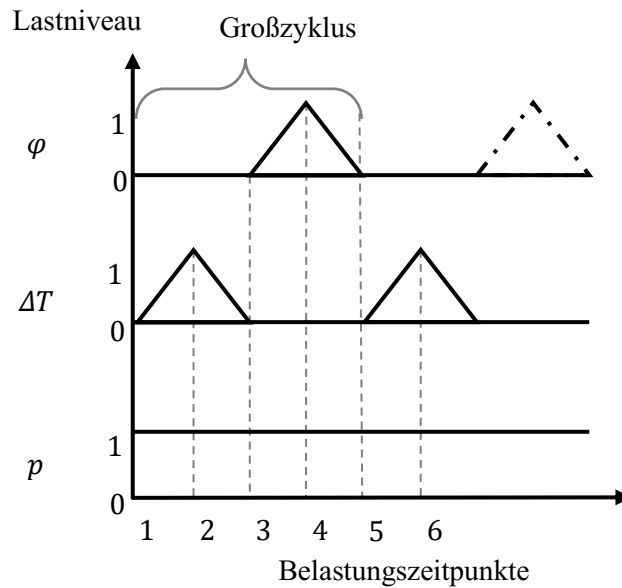


Abbildung 31: Belastungshistogramm mit den Belastungen: Innendruck p (konstant), radialer Temperaturgradient ΔT (zyklisch) und In-plane Biegung φ (zyklisch)

Aus diesem Belastungshistogramm ergeben sich drei unterschiedliche Lastextrema, welche sich an den Belastungszeitpunkten 1, 2 und 4 befinden. Die Belastungen an den Belastungszeitpunkten sind: 1 - Innendruck p , 2 - Innendruck p mit radialem Temperaturgradient ΔT und 4 - Innendruck p mit In-plane Biegung φ .

3.2.3. Stoffgesetz und Modellparameter

Für die Berechnungen am Torus-Modell wurde ein bilineares Stoffgesetz mit kinematischer Verfestigung verwendet. Das bedeutet, bei Überschreiten der Streckgrenze f_y wird eine lineare Verfestigung berücksichtigt, wie sie in Abbildung 32 dargestellt ist. Die VFZT könnte auch für bilineare Verfestigung eingesetzt werden, was einem trilinearen Spannungs-Dehnungsverhalten entspricht. Auch bei späteren Vergleichsrechnungen mit dem Torus-Modell wird ein Stoffgesetz mit linearer Verfestigung verwendet, weil der informative Mehrwert durch Hinzunehmen von weiteren Segmenten und die Auswirkungen auf die folgenden Phänomene bei Mehr-Parameterbelastungen gering sind.

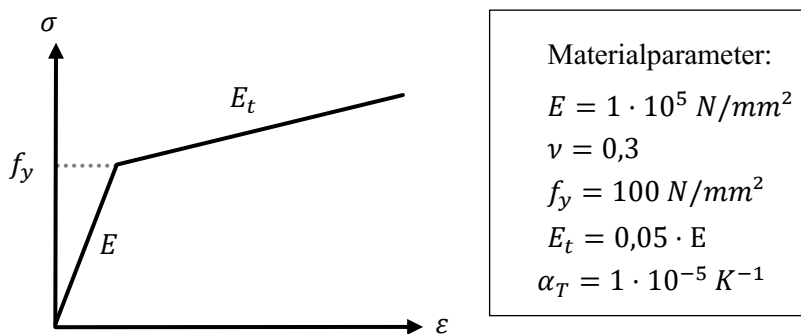


Abbildung 32: Spannungs-Dehnungsbeziehung des Stoffgesetzes mit kinematischer Verfestigung und den zugehörigen Kennwerten.

Die Kennwerte der Geometrie und der Belastungen für das Torus-Modell sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Der Innendruck ist als Überdruck gewählt und das Belastungsniveau so, dass die Beanspruchung bei 80% der elastischen Grenzlast liegt. Der radiale Temperaturgradient wird durch die Temperaturdifferenz von ΔT erzeugt, welche durch ein sich erheizendes Medium im Rohr hervorgerufen wird. Das bedeutet, die Innenseite des Querschnitts ist heißer und dementsprechend werden dort Druckspannungen infolge der Temperaturbelastung hervorgerufen. Die In-plane Biegung wird, wie bereits in Abbildung 30 beschrieben, durch einen horizontalen Temperaturverlauf über den Querschnitt hervorgerufen, der bezogen auf einen 90° -Rohrbogen einer gegenseitigen Verdrehung der beiden Endquerschnitte um maximal $4,2^\circ$ entspricht. Hierbei ist es am Intrados kälter als am Extradados, was zu einem Schließen des Rohrbogens führt.

Tabelle 1: Kennwerte von Geometrie und Belastung für das Torus-Modell

Bogenradius	R_i	300mm
Innenradius des Querschnitts	r_i	100mm
Wanddicke	t	5mm
Innendruck	p	3,46N/mm ²
Temperaturdifferenz	ΔT	0 ... 200K
In-plane-Biegung	φ	0 ... 4,2°

3.2.4. Ergebnisse der fiktiv-elastischen Berechnungen

Üblicherweise werden in der Praxis zunächst die Ergebnisse einer fiktiv-elastischen Analyse betrachtet, da solche Berechnungen den geringsten Berechnungsaufwand benötigen. Zudem können wichtige Informationen, wie der Ort der maximalen Beanspruchung abgeschätzt werden. Häufig werden die Ergebnisse der fiktiv-elastischen Analysen als Grundlage für das Nachweisverfahren zyklisch überelastisch beanspruchter Tragwerke, entsprechend ASME-Code [3] oder KTA-Regelwerk [4], verwendet.

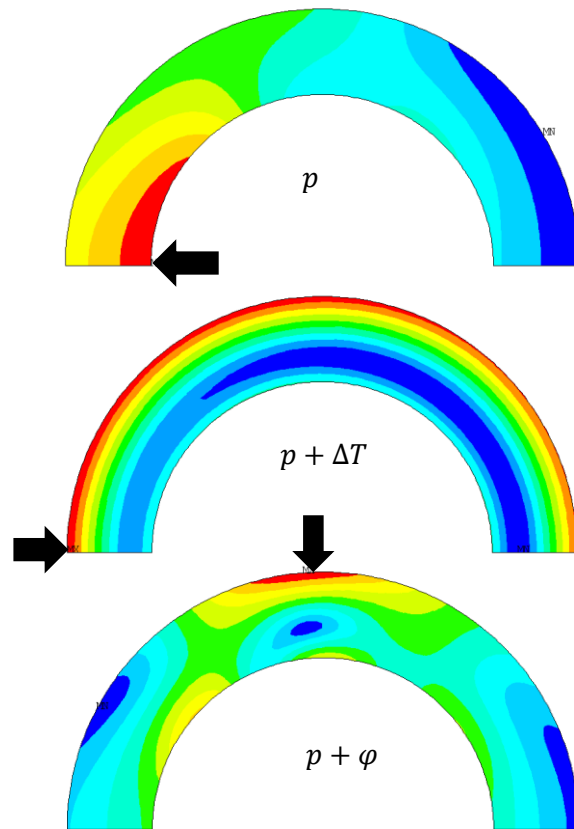


Abbildung 33: Konturplots der Vergleichsspannungen der fiktiv-elastischen Analysen an 8-fach gedehnter Darstellung der Wanddicke.
oben: reiner Innendruck p (Zeitpunkt 1),
mittig: Innendruck und radialer Temperaturgradient $p + \Delta T$ (Zeitpunkt 2),
unten: Innendruck und In-plane Biegung $p + \varphi$ (Zeitpunkt 4);

Die in Abbildung 33 dargestellten Konturplots der Mises-Vergleichsspannungen zeigen die unterschiedlichen Orte der maximalen Beanspruchungen in den entsprechenden Belastungszeitpunkten. In der Abbildung wurde auf eine Skalierung der Kontur verzichtet, da hier nur der Ort der maximalen Beanspruchung von Interesse ist und die Absolutwerte unbeachtet bleiben. So führt der reine Innendruck p zur maximalen Beanspruchung an der Innenseite des Intrados. Der radiale Temperaturgradient ΔT würde, für sich allein betrachtet, eine gleichmäßige maximale Beanspruchung an der Außenoberfläche des Querschnitts erzeugen. In Kombination mit dem Innendruck p liegt die maximale Beanspruchung des Belastungszeitpunktes 2 an der Außenoberfläche des Intrados. Die In-plane Biegung hingegen weist, bedingt durch die infolge der Abtriebskräfte hervorgerufene Ovalisierung, ein Beanspruchungsmaximum an der Außenoberfläche nahe der Krone auf. Entsprechend dieser Erkenntnisse würden nun Nachweise an diesen neuralgischen Punkten geführt werden. Dass ein solches Vorgehen bei einer Ein-Parameterbelastung noch sinnvoll sein mag, jedoch bei Mehr-Parameterbelastung zu einer Fehleinschätzung des Ortes der maximalen Beanspruchung führen kann, stellt sich bei einer inkrementellen Schritt-für-Schritt Berechnung bis zum Einspielzustand dar und wird im Folgenden vorgestellt.

3.2.5. Erkenntnisse aus inkrementellen Berechnungen

Der Ort der maximalen Beanspruchung

Zunächst wird zuerst der Ort der maximalen Beanspruchung untersucht. Dafür wurden inkrementelle Berechnungen sowohl für die Ein-Parameterbelastungen als auch für die Mehr-Parameterbelastung durchgeführt. Um den Verlauf der nichtlinearen Berechnungen ausreichend genau nachzuempfinden, wurde der Belastungsweg durch 20 Zwischenschritte pro Lastschritt diskretisiert. Ein Lastschritt ist die rechnerische Änderung von einem Belastungszeitpunkt zum nächsten, wie in Abbildung 31 dargestellt.

In Abbildung 34 sind Konturplots der Mises-Vergleichsspannungen dargestellt, wobei auch hier auf eine Skalierung der Kontur verzichtet wird, da das Hauptaugenmerk auf dem Ort der maximalen Beanspruchung liegt. Wie bei den Ein-Parameterberechnungen zu erwarten war, stimmt der Ort der maximalen Beanspruchung beim radialen Temperaturgradienten mit Innendruck und bei der In-plane Biegung mit Innendruck mit Ergebnissen der fiktiv-elastischen Voruntersuchungen aus Abbildung 33 annähernd überein. Alle Ergebnisse aus Abbildung 34 sind durch elastisches Einspielen gekennzeichnet.

Bemerkenswert ist jedoch, dass bei Mehr-Parameterbelastung infolge der Interaktion der zyklischen Belastungen der Ort der maximalen Beanspruchung an einer völlig neuen Stelle liegt, wie Abbildung 34 zeigt. Mit anderen Worten: der Ort der maximalen Beanspruchung lässt sich bei Mehr-Parameterbelastungen nicht bestimmt aus einer fiktiv-elastischen Analyse abschätzen, da das Zusammenspiel der unterschiedlichen zyklischen Belastungen schwer vorhergesagt werden kann. Ausführliche elastisch-plastische Berechnungen werden infolge der Berücksichtigung von mehreren zyklischen Lastparametern zwingend notwendig, um den Ort der maximalen Beanspruchungen bestimmen zu können.

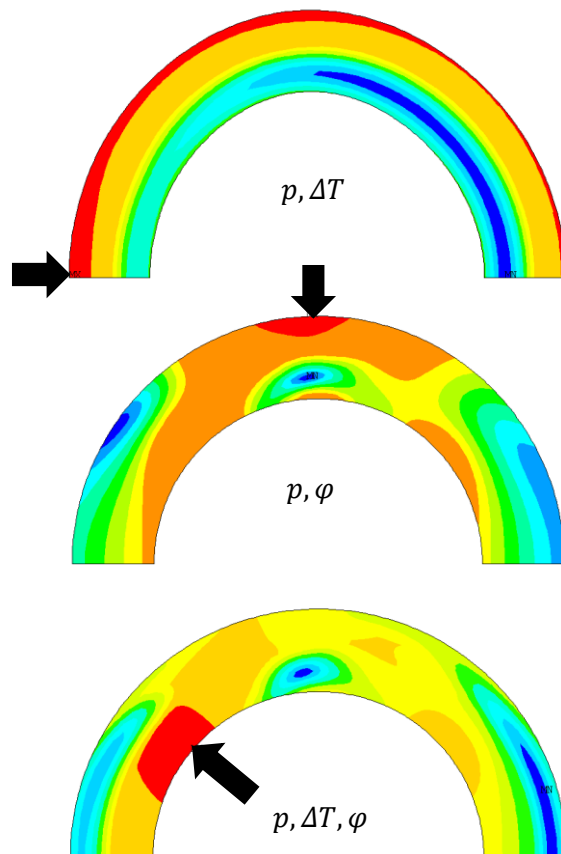


Abbildung 34: Maximale Vergleichsspannungen im Einspielzustand.
oben: zyklische Belastung nur mit ΔT ,
mittig: zyklische Belastung nur mit φ ,
unten: Mehr-Parameterbelastung mit ΔT und φ

Das Verhalten der Beanspruchungen

Neben dem Ort der maximalen Beanspruchung spielt der absolute Wert einer Beanspruchung die Hauptrolle in Nachweisverfahren, da Regelwerke wie ASME-Code [3] und KTA-Regelwerk [4] Dehngrenzen festlegen. Zur Auswertung wird an dieser Stelle auf die plastischen Umfangsdehnungen des Querschnitts zurückgegriffen und diese werden über die Belastungsgeschichte dargestellt. In dem Beanspruchungshistogramm aus Abbildung 35 ist zu erkennen, dass die maximalen Beanspruchungen sich erheblich vergrößern gegenüber den Beanspruchungen an der Krone und am Intrados. Dieser Dehnungsverlauf veranschaulicht, wie die Interaktion von mehreren zyklischen Belastungen zu einer gesteigerten Dehnungsakkumulation führen kann. So befindet sich der Ort der maximalen Beanspruchung infolge Mehr-Parameterbelastung an der Innenseite und es treten deutlich größere plastische akkumulierte Dehnungen auf.

Solche Beanspruchungsverläufe, welche sich aus der Interaktion von zyklischen Belastungen ergeben, lassen sich bisher nicht geeignet durch vereinfachte Verfahren aus Regelwerken wie dem ASME-Code [3] oder den KTA-Regelwerk [4] berücksichtigen. Damit solche Beanspruchungssituationen berücksichtigt werden können, müsste eine inkrementelle Berechnung mit Mehr-

Parameterbelastung durchgeführt werden oder direkte Methoden zum Einsatz kommen, welche Mehr-Parameterbelastungen berücksichtigen können.

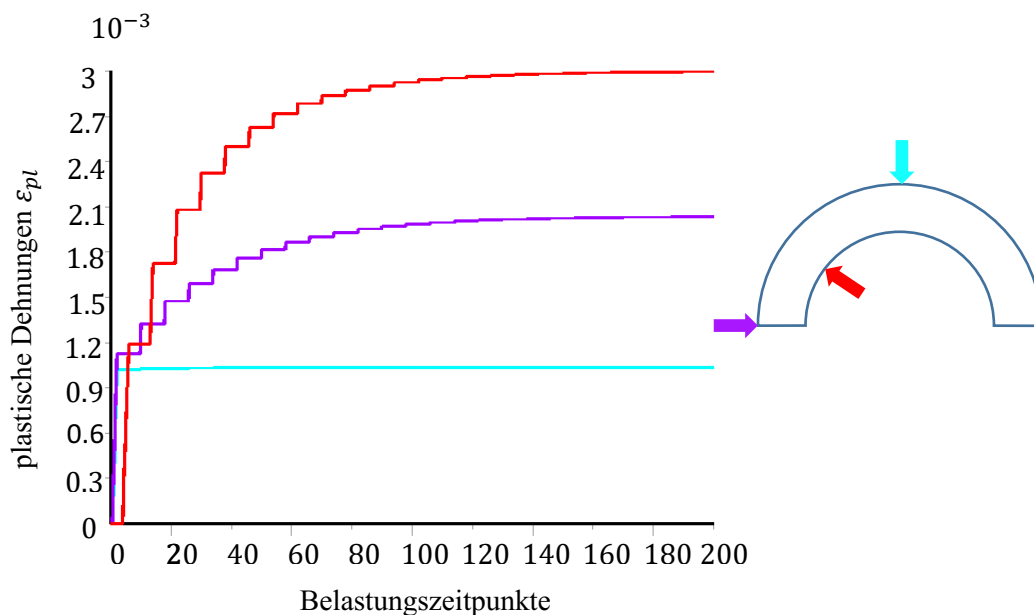


Abbildung 35: Verlauf der plastischen Dehnungen in Umfangsrichtung über die Belastungsgeschichte infolge von Mehr-Parameterbelastung:
cyan: Krone außen,
lila: Intrados außen
rot: Ort der maximalen Beanspruchung

Die Anzahl der notwendigen Belastungszyklen

Ein weiteres Merkmal, welches die Berücksichtigung von mehreren zyklischen Lastfällen erschwert, ist der erhöhte Berechnungsaufwand. Damit ist gemeint, dass es Beispiele gibt, bei denen deutlich mehr Zyklen benötigt werden, um den Einspielzustand zu erreichen. Dies lässt sich im Dehnungshistogramm von Abbildung 35 und dem Spannungs-Dehnungsdiagramm von Abbildung 36 zeigen. In beiden Diagrammen werden die Beanspruchungsverläufe der Ein-Parameterbelastung und der Mehrparameterbelastung bis zum Einspielzustand dargestellt. Der rot dargestellte Verlauf zeigt die Ergebnisse aus der Mehr-Parameterberechnung und die Verläufe in lila und cyan stellen die Ergebnisse der Ein-Parameterberechnungen jeweils an der maximal beanspruchten Stelle dar.

Auch wenn es so aussieht, als ob die Ergebnisse infolge der Ein-Parameterbelastungen gemeinsam zu dem Ergebnis der Mehr-Parameterbelastung führen, muss darauf hingewiesen werden, dass sich alle Ergebnisse an einem anderen Ort im Tragwerk befinden und diese Darstellung zufällig entstanden ist.

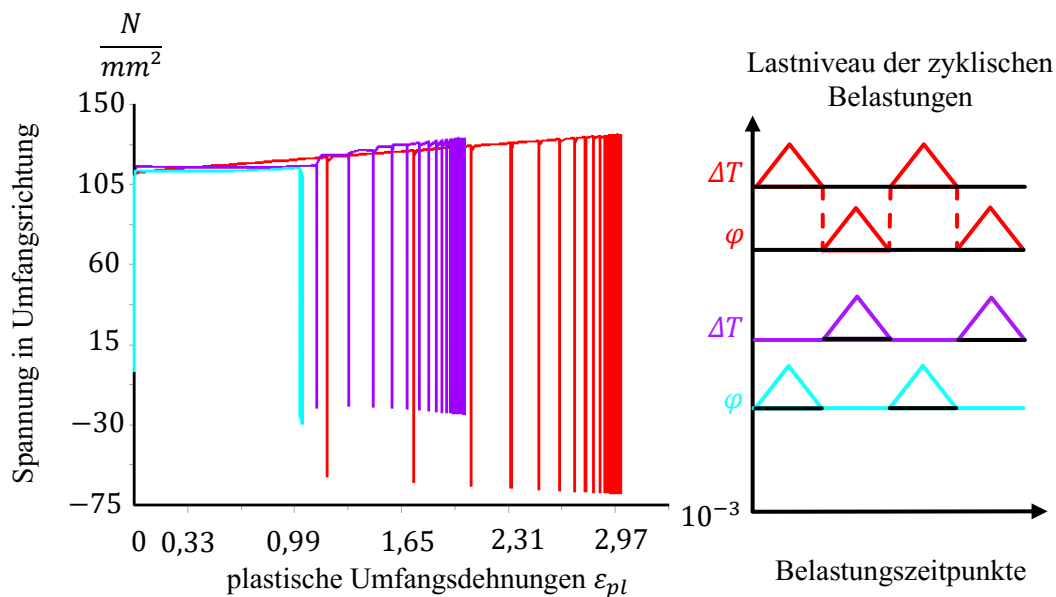


Abbildung 36: Gegenüberstellung der Spannungs-Dehnungsentwicklung an den Stellen höchster Beanspruchung aus zwei Ein-Parameterbelastungen und einer Mehr-Parameterbelastung:
lila: Ein-Parameterbelastung aus ΔT ,
cyan: Ein-Parameterbelastung aus φ ,
rot: Mehr-Parameterbelastung mit den zyklischen Lastfällen ΔT und φ .

Um die Anzahl der Zyklen, welche bis zum Einspielzustand benötigt werden, besser vergleichen zu können, wurde bei den Ein-Parameterberechnungen jeweils ein Belastungszyklus ausgelassen, wie im Belastungshistogramm aus Abbildung 36 dargestellt wird. In dem Dehnungshistogramm aus Abbildung 35 ist zu erkennen, dass für die Mehr-Parameterbelastung etwa 30 Zyklen, also 120 Belastungszeitpunkte, durchlaufen werden müssen, bis der Einspielzustand nahezu erreicht ist.

Im Gegensatz dazu werden bei der Ein-Parameterbelastung der In-plane-Biegung gerade mal zwei Zyklen und bei dem radialen Temperaturgradienten weniger als 30 Zyklen benötigt. In Summe werden 64 Belastungsschritte notwendig, um die Ein-Parameterbelastungen getrennt zu betrachten, was bedeutet, dass für die Mehr-Parameterbelastung fast die doppelte Anzahl an Belastungsschritten durchlaufen werden muss. Letztendlich kann festgehalten werden, dass Mehr-Parameterbelastungen in der Regel einen deutlich höheren Berechnungsaufwand erfordern als die getrennte Betrachtungsweise mehrerer Ein-Parameterbelastungen.

Zusammenfassung der Erkenntnisse

An dieser Stelle werden alle vorangegangenen Erkenntnisse aus den inkrementellen Analysen im Zusammenhang mit Mehr-Parameterbelastungen zusammengefasst. Die hier beschriebenen

Erkenntnisse aus den numerischen Untersuchungen beziehen sich auf elastische und plastische Einspielzustände. In Abschnitt 5.1 wird noch auf die Besonderheiten bei plastischen Einspielzuständen – der vereinfachten Abschätzung der plastischen Dehnschwingbreite – eingegangen.

Inkrementelle elastisch-plastische Berechnungen, bei denen mehr als zwei zyklisch auftretende Lastextrema berücksichtigt werden, führen zu deutlich komplexeren Aufgabenstellungen gegenüber Ein-Parameterbelastungen. Hierbei können schon einfache numerische Modelle wegen der Anzahl der Belastungen und der notwendigen Anzahl an Belastungszyklen bis zum Einspielen, die Ressourcen an Speicher und Rechenleistung überschreiten.

Aus einem historisch gewachsenen Vorgehen in den Regelwerken wurde bisher eine paarweise Betrachtung der Belastungsextrema verwendet. Dass dieses Vorgehen zu einer Unterschätzung der Beanspruchungen führen kann, wurde am Beispiel des Torus-Modells nachgewiesen. Aus den folgenden Argumenten sollten alle notwendigen Belastungsextrema berücksichtigt werden, damit ein realistisches Bild der Beanspruchungen im Tragwerk über die Lebensdauer oder Betriebsdauer entstehen kann. Es wurde weiterhin gezeigt, dass direkte Methoden zur Bestimmung der Zustandsgrößen unabdingbar sind, da inkrementelle Schritt-für-Schritt-Berechnung zu aufwendig werden können.

- 1. Der Ort der maximalen elastisch-plastischen Beanspruchung kann signifikant vom Ort der maximalen fiktiv-elastischen Beanspruchung abweichen.***
- 2. Die akkumulierten Dehnungen bei Berechnungen mit Mehr-Parameterbelastung können signifikant größer sein, gegenüber der Summe der akkumulierten Dehnungen aus getrennten Berechnungen mit Ein-Parameterbelastung.***
- 3. Die Anzahl der erforderlichen Belastungszyklen und somit der Berechnungsaufwand kann unter Mehr-Parameterbelastungen deutlich ansteigen.***

4. Mehr-Parameterbelastung bei elastischem Einspielen

Der Vorteil elastischer Einspielzustände gegenüber plastischen Einspielzuständen liegt in den konstanten plastischen Dehnungen über einen Belastungszyklus. Da sich die Beanspruchungsänderungen rein elastisch verhalten, können durch ein einziges Restspannungsfeld alle elastisch-plastischen Beanspruchungszustände im Einspielzustand ermittelt werden. In diesem Kapitel ist ein Projektionsalgorithmus dargestellt, der es ermöglicht, die TIV und somit das Restspannungsfeld für beliebig viele Belastungszustände unter elastischem Einspielen effizient zu ermitteln.

4.1. Herausforderung von 2-D auf 5-D Projektionen

Bei der Entwicklung einer Projektionsvorschrift von den negativen deviatorischen Restspannungen auf die Schnittmenge Ω bei Mehr-Parameterbelastungen wurde zunächst die Projektionsvorschrift im transformierten Hauptspannungsraum erweitert. Das bedeutet, zu den bisher nur betrachteten zwei Belastungszuständen kommen beliebig viele hinzu. Jedem Belastungszustand ist ein Mises-Kreis zugehörig und diese bilden eine Schnittmenge Ω , wie in Abbildung 37 gezeigt. Eine solche Schnittmenge muss definitionsgemäß an jeder Stelle im Tragwerk auftreten, dann ist das Verhalten des Tragwerks durch elastisches Einspielen geprägt. Elastisches Verhalten im Einspielzustand wird im Folgenden vorausgesetzt und ist im Verhalten der Ergebnisverläufe der inkrementellen Berechnungen bestätigt.

Die Erweiterung der Projektionsvorschrift für deviatorische Hauptspannungen lässt sich entsprechend der ebenen 2-D Darstellung, wie in Abbildung 37 dargestellt, erweitern. Dort werden exemplarisch vier Projektionen von den negativen deviatorischen Restspannungen $-\rho'_i$ auf die Schnittfläche Ω gezeigt.

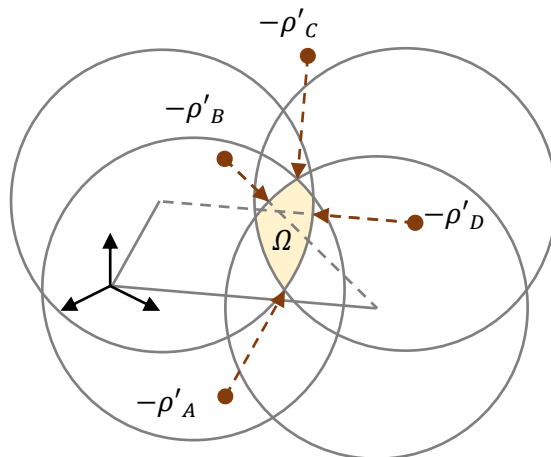


Abbildung 37: Projektion auf Ω im transformierten Hauptspannungsraum bei Mehr-Parameterbelastungen.

Der bedeutende Vorteil bei der Bestimmung der Projektionsvorschrift von Berechnungen mit Ein-Parameterbelastungen gegenüber Berechnungen mit Mehr-Parameterbelastungen ist der, dass bei Ein-Parameterbelastungen alle deviatorischen Spannungsvektoren in einer Ebene liegen. Diese Ebene kann durch drei Stützpunkte definiert werden. Der erste Stützpunkt der Ebene ist der Koordinatenursprung und die beiden weiteren Punkte ergeben sich aus den beiden fiktiv-elastischen deviatorischen Spannungsvektoren. Alle anderen Vektoren wie die Rückspannungen, die TIV's und die elastisch-plastischen Spannungen verteilen sich ebenfalls in dieser Ebene. Liegen in den Lastextrema nur Hauptspannungen vor, so können diese auch grafisch, wie in Abbildung 37, dargestellt werden.

Kommt nun ein weiterer Belastungszustand hinzu, breiten sich alle anderen Spannungen im sechsdimensionalen Raum aus, sofern die hinzugekommenen fiktiv-elastischen Spannungen nicht in der gleichen Ebene liegen. Genau genommen, kann maximal ein 5-dimensionaler Raum entstehen, wenn alle 3 Schubkomponenten und die 2 unabhängigen deviatorischen Normalspannungen beteiligt sind. Eine grafische Darstellung der Projektionsvorgänge ist dann nicht mehr möglich und das Projektionsverfahren kann nur noch durch Hilfestellung von numerischen Verfahren durchgeführt werden.

In diesen 5-D Räumen werden die Kreise der Fließbedingungen zu Hyperkugeln, die ein gemeinsames Schnittvolumen Ω bei elastischen Einspielzuständen bilden. Projektionen auf dieses Schnittvolumen lassen sich bisher nur in 2-D und 3-D Räumen analytisch lösen. In 4-D und 5-D Räumen müssen Näherungsverfahren hinzugezogen werden, um eine geeignete Projektion auf Ω zu erhalten.

Wird nun versucht, eine Projektionsvorschrift zu entwickeln, wie sie in Abbildung 37 dargestellt ist, dann funktioniert dies nur, wenn alle Beanspruchungen die gleiche Hauptspannungsrichtung haben. Die drei Hauptspannungskomponenten können auf die zwei unabhängigen deviatorischen Komponenten reduziert werden und eine ebene Darstellung der Projektion, wie in Abbildung 37, ist möglich. Da jedoch in praktischen Anwendungsfällen die Hauptspannungsrichtungen bei unterschiedlichen Belastungszuständen meist verschieden sind, sind die ebenen Projektionsvorschriften ungültig.

In dieser Arbeit wird die Entwicklung für 3-D Räume vorgestellt. Die Verwendung von 3-D Räumen bedeutet, dass 2-D-Kontinuums-, Balken- und dünnwandige Schalenelemente in der FE-Software verwendet werden können, da dort höchstens drei unabhängige deviatorische Spannungskomponenten auftreten und für diese Anwendungsfälle analytische Lösungen möglich sind. Somit kann Mehr-Parameterbelastung u.a. für folgende Spannungszustände berücksichtigt werden:

- ebene Spannungszustände,
- ebene Dehnungszustände,
- rotations-/achsensymmetrische Spannungszustände,
- Schalenträgerwerke mit drei unabhängigen Spannungszuständen,
- generalisierte ebene Spannungszustände.

Für die Entwicklung von Projektionsvorschriften in 4-D und 5-D Räumen sind keine analytischen Lösungen verfügbar, weshalb numerische Optimierungsverfahren in dem Projektionsalgorithmus eingebunden werden müssen. Aufgrund der aufwendigen Implementierung solcher Verfahren in die VFZT, sind an dieser Stelle noch weitere Forschungsbemühungen notwendig.

4.2. Projektionsvorschrift für den 3-D Spannungsraum

Wie bereits oben erwähnt, werden die vier Spannungskomponenten (z.B. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und τ_{xy}) in drei unabhängige Komponenten umgerechnet, um die Projektionsvorschrift anschaulich darstellen und herleiten zu können. Mit Umrechnung ist hierbei die Übertragung der drei deviatorischen Normalspannungskomponenten $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ in die beiden unabhängigen Komponenten $\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta$ gemeint. Die Schubspannungen τ_{xy} werden mit $\sqrt{3}$ multipliziert, damit die Fließbedingung im transformierten 3-D TIV-Raum eine Kugel ergibt. Die Transformationsgleichungen, mit denen die vier Komponenten auf drei unabhängige Komponenten reduziert werden, setzen sich wie folgt zusammen. Die Winkel $\cos(30^\circ)$ und $\cos(60^\circ)$ ergeben sich aus der Achsenrotation, sodass eine Achse orthogonal zur Deviatorebene steht und eine Normalspannung vernachlässigt werden kann.

$$\sigma'_\alpha = (\sigma'_y - \sigma'_z) \cdot \cos(30^\circ) \quad (66)$$

$$\sigma'_\beta = \sigma'_x - [(\sigma'_y + \sigma'_z) \cdot \cos(60^\circ)] \quad (67)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \sqrt{3} \cdot \tau_{xy} \quad (68)$$

Die Transformation der Spannung auf drei unabhängige Spannungskomponenten ermöglicht es, diese Spannungen in einem 3-D Raum zu betrachten. Dieser Raum wird als 3-D TIV-Raum bezeichnet und er dient im Folgenden als Werkzeug, um die Herleitungen der Projektionsvorschriften zu beschreiben. Der 3-D TIV Raum besteht aus den Achsen $\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta$ und $\tau_{\alpha\beta}$.

In einem ersten Schritt werden die fiktiv-elastischen Spannungskomponenten mit den Gleichungen (66) bis (68) in die drei unabhängigen Komponenten umgerechnet. Die Mittelpunkte der Fließflächen, welche im 3-D TIV Raum die Form einer Kugeloberfläche haben, werden durch die fiktiv-elastischen Spannungen bestimmt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie sich aus den Kugeln die Geometrie der Schnittfläche Ω im 3-D TIV-Raum zusammensetzt.

4.2.1. Die Geometrie von Ω im 3-D TIV-Raum

Zuerst wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Transformation auf Spannungsvektoren mit drei Komponenten und eine kugelförmige Darstellung der Fließflächen im 3-D TIV-Raum mathematisch nicht notwendig ist. Im Folgenden geschieht das nur, um die Herleitung und die Projektionsvorschriften anschaulich darstellen zu können.

Die grundlegende Geometrie von Ω im 3-D TIV-Raum lässt sich am besten durch die Schnittmenge von drei kugelförmigen Fließbedingungen beschreiben, wie sie in Abbildung 38 dargestellt ist. Jeder fiktiv-elastische Spannungsvektor bestimmt die Lage der kugelförmigen Fließbedingungen, deren Radius durch die Streckgrenze definiert wird. Die geometrische Figur, welche sich aus der Schnittmenge der Kugeln zusammensetzt, wird durch folgende Geometrien beschrieben:

- die Kugeloberflächen der kugelförmigen Fließbedingungen,
- die Schnittkreise, zwischen zwei Kugeln (S_{12}, S_{23}, S_{13})
- die Eckpunkte (E_{123}) – treten bei drei Kugeln immer doppelt auf.

Die Schnittfläche wird somit durch die Zusammensetzung verschiedener Kugeloberflächen beschrieben. An der Schnittebene von zwei Kugeln entstehen die Schnittkreise. Treffen sich zwei Schnittkreise, so entsteht ein Schnittpunkt, der im Folgenden als Eckpunkt bezeichnet wird. Die Bezeichnung Eckpunkt wurde gewählt, um eine Abgrenzung zu den Schnittpunkten aus der 2-D Projektion herzustellen.

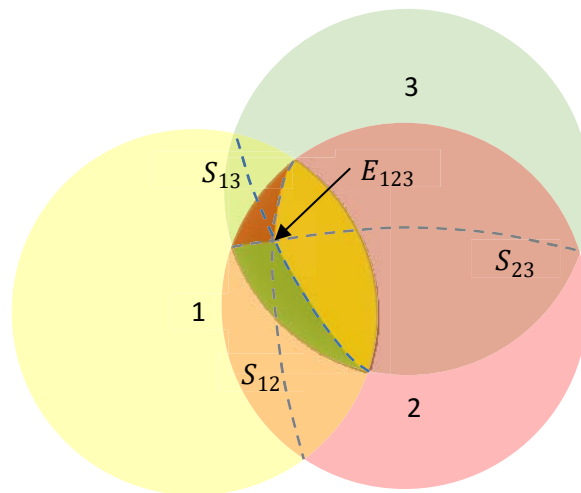


Abbildung 38: Schnittmenge Ω im 3-D TIV-Raum bestehend aus Kugeloberflächen, Schnittkreisen (S_{12}, S_{23}, S_{13}) und Eckpunkt (E_{123})

Sind drei kugelförmige Fließbedingungen an der Schnittmenge Ω beteiligt, entstehen auch immer drei Schnittkreise, welche sich in zwei Eckpunkten schneiden. Im beliebigen Anwendungsfall kann das Schnittvolumen Ω durch beliebig viele Kugeloberflächen begrenzt werden. Somit ergeben sich beliebig viele Schnittflächen und dementsprechend viele Eckpunkte. Genauso kann es sein, dass das Schnittvolumen von beliebig vielen Kugeln umhüllt wird und somit sind die Lastextrema zu den Kugeln nicht an der Formbildung von Ω beteiligt. Es ist also schwierig, die an Ω beteiligten Schnittkreise, Eckpunkte und Kugeloberflächen von vornherein zu identifizieren. Deshalb werden alle Schnittkreise, welche sich aus zwei Kugeln ergeben, und alle Eckpunkte, die sich immer aus drei Kugeln ergeben, berechnet.

Die Anzahl der vorhandenen Schnittflächen entspricht der Anzahl an Lastextrema, also der Kugelanzahl. Ein Schnittkreis wird immer aus zwei Kugeln berechnet. Für zwei Eckpunkte werden immer drei Kugeln benötigt. Daraus ergibt sich, dass alle Kugeln miteinander kombiniert werden, um alle Schnittkreise und Eckpunkte zu berechnen. Hierfür wird von vornherein die maximale Anzahl der Schnittkreise und die maximale Anzahl der Eckpunkte benötigt, um eine

Schleifenfunktion programmieren zu können. Aus der Kombinatorik lässt sich folgende Funktion für die Anzahl der Schnittkreise S_k herleiten.

$$S_k = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_n) \quad (69)$$

Die maximal mögliche Anzahl der Schnittkreise S_k wird somit aus der Anzahl der Lastextrema x_n berechnet. Die Schnittkreisanzahl hat in der Programmierung noch eine weitere Bedeutung, sie ist nämlich gleichzusetzen mit der Anzahl der vorhandenen Schwingbreiten. Da die Schwingbreiten in den Speicher eingelesen werden, muss auch der notwendige Speicherbedarf zu Beginn bekannt sein. Somit wird Gleichung (69) auch zur Ermittlung des Speicherbedarfs verwendet.

Die Anzahl der Eckpunkte E_p wird dann über eine kubische Gleichung mit x_n berechnet und verdoppelt, weil die Eckpunkte immer paarweise auftreten.

$$E_p = 2 \left(\frac{1}{6} x_n^3 - \frac{1}{2} x_n^2 + \frac{1}{3} x_n \right) \quad (70)$$

Wie bereits mit Abbildung 38 gezeigt wurde, kann die TIV entweder auf einen Eckpunkt, einen Schnittkreis oder auf eine Kugeloberfläche von Ω gerichtet sein. In den folgenden Abschnitten wird erklärt, wie die korrekte Projektion auf Ω bestimmt wird. Dafür wird zuerst geprüft, ob eine Projektion auf eine der Kugeloberflächen bereits auf Ω liegt, denn dann ist der Projektionsvorgang bereits korrekt durchgeführt. Weil alle Kugeln naturgemäß konvex sind, kann es nur eine einzige gültige kürzeste Projektion auf eine Kugeloberfläche geben. Als gültige Projektion wird eine Projektion bezeichnet, die auf der Oberfläche von Ω liegt.

Sind alle Projektionen auf die Kugelflächen außerhalb von Ω , werden danach alle Schnittkreisprojektionen berechnet. Daraufhin wird geprüft, ob eine Schnittkreisprojektion auf Ω liegt. In dem Fall ist der korrekte Projektionsvorgang ermittelt. Ist das nicht der Fall, werden die Eckpunktprojektionen berechnet. Die Geometrie von Ω kann mehrere Eckpunkte aufweisen, deshalb werden alle vorkommenden Eckpunkte berechnet und geprüft, ob sie auf Ω liegen. Die korrekte Eckpunktprojektion ergibt sich aus dem kürzesten Abstand der berechneten Eckpunkte zu den negativen deviatorischen Restspannungen. Im Folgenden wird im Detail die Bestimmung der Projektionsvorschrift erläutert.

4.2.2. Projektion auf die Kugeloberfläche

Die Projektionsvorschrift für die Kugeloberflächen entspricht der Projektionsvorschrift für monotone Belastungsänderungen wie Gleichung (71) zeigt.

$$Y_i = \sigma_i'^{fel} - \sigma_i' \left(\frac{f_y}{\sigma_v} \right) \quad (71)$$

Die Projektion kann für jeden Belastungszustand durchgeführt werden, bei dem die negativen deviatorischen Restspannungen außerhalb der Fließfläche liegen. Liegen die deviatorischen Restspannungen innerhalb einer Kugel, bedeutet das, dass es durch diesen Belastungszustand nicht zum Plastizieren kommt. Für das Beispiel von $-\rho'_{i,A}$ in Abbildung 39 ergibt sich damit eine Projektion auf die Belastungszustände 2 (blau) und 3 (gelb) und von $-\rho'_{i,B}$ auf die Belastungszustände 2 (blau) und 1 (lila). Im Beispiel von Abbildung 39 werden drei Kugeln gezeigt, deren Mittelpunkte alle in der Ebene von σ'_α und $\gamma_{\alpha\beta}$ liegen. Dort ist zu erkennen, dass die Projektion von $-\rho'_{i,A}$ auf den Belastungszustand 3 (gelb) ein $Y_{i,A}$ auf Ω ergibt und somit die korrekte Projektionsvorschrift darstellt. Bei der Beispielprojektion von $-\rho'_{i,B}$ ergibt sich keine gültige Projektion auf die Kugeloberflächen der Belastungszustände 1 (lila) und 2 (blau). Die korrekte Projektionsvorschrift für $-\rho'_{i,B}$ ist dann die Schnittkreisprojektion, welche zu $Y_{i,B}$ führt.

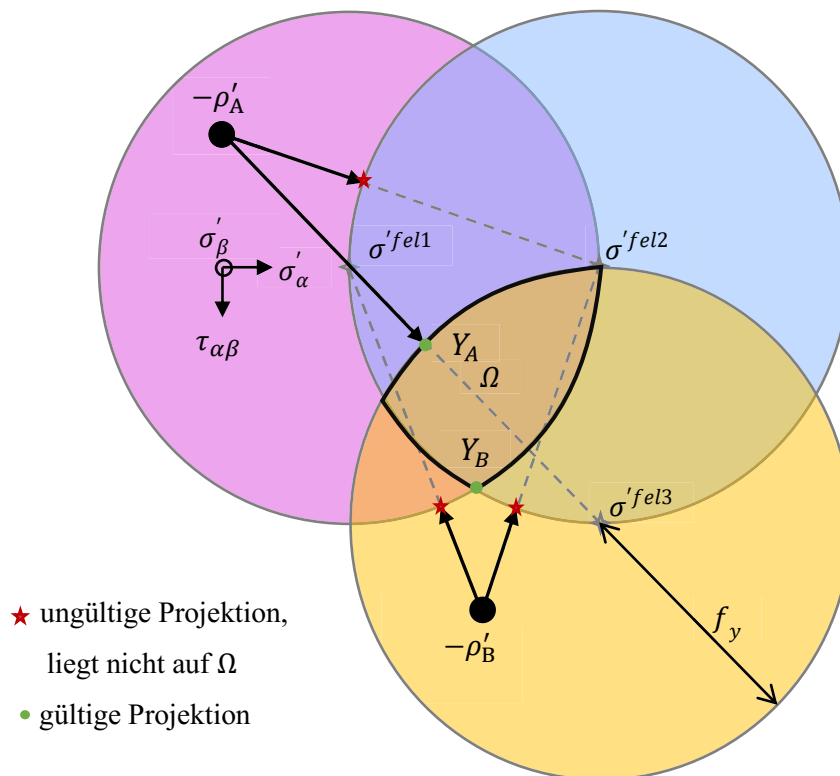


Abbildung 39: Projektionen von $-\rho'_{i,A}$ und $-\rho'_{i,B}$ auf die Kugeloberflächen der Belastungszustände 1,2,3

Um das Verfahren zu beschleunigen, muss nicht auf jede Kugel projiziert werden, sondern ausschließlich auf die Kugel, deren Abstand von $-\rho'_i$ zu den fiktiv-elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel}$ am größten ist. Im Beispiel aus Abbildung 39 ist der größte Abstand von $-\rho'_{i,A}$ zu $\sigma_i'^{fel3}$. Liegt diese Projektion auf Ω , so ist die Kugelprojektion bereits die korrekte Vorschrift, andernfalls muss mit den Schnittkreisprojektionen fortgefahren werden.

Eine gültige Projektion liegt dann vor, wenn die Abstände zwischen Y_i und den fiktiv-elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel(m)}$ aller beteiligten Lastextrema L kleiner gleich der Streckgrenze f_y sind. Ist eine Differenz größer als die Streckgrenze, kann die Projektion nicht auf Ω liegen und diese ist ungültig.

$$\left(\sigma_i'^{fel(m)} - Y_i\right)_v \leq f_y \quad \forall m \in L \quad \rightarrow \quad \text{gültige Projektion} \quad (72)$$

$$\left(\sigma_i'^{fel(m)} - Y_i\right)_v > f_y \quad \exists m \in L \quad \rightarrow \quad \text{ungültige Projektion} \quad (73)$$

4.2.3. Projektion auf die Schnittkreise

Nachdem keine gültige TIV-Projektion auf die Kugelflächen von Ω ermittelt wurde, wie das beispielsweise in Abbildung 39 bei $-\rho'_{i,B}$ der Fall ist, werden nun die Schnittkreisprojektionen durchgeführt. Diesen Vorgang kann man als eine Projektion von einem Hilfspunkt H_i auf den Schnittkreis von zwei Kugeln beschreiben. Der Hilfspunkt wird wiederum als Projektion von den negativen deviatorischen Restspannungen auf die Schnittkreisebene berechnet.

Die Projektion auf die Schnittkreisebene und von dort weiter auf den Schnittkreis wird in Abbildung 40 am Beispiel von $-\rho'_{i,C}$ dargestellt. Für $-\rho'_{i,B}$ ist eine Projektion auf die Schnittkreisebene nicht notwendig, da sich diese Restspannung bereits in der Schnittkreisebene befindet und direkt auf den Schnittkreis projiziert werden kann. Die unterschiedlichen Radien der dargestellten Kugeln aus Abbildung 40 entstehen durch die ebene Darstellung der räumlichen Zusammenhänge. Beide Kugeln haben die gleiche Streckgrenze.

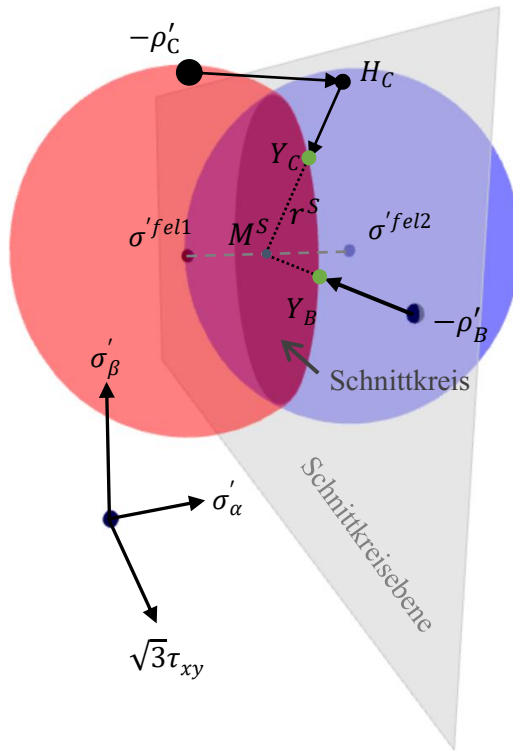


Abbildung 40: Projektionen von $-\rho'_{i,B}$ und $-\rho'_{i,C}$ auf den Schnittkreis

Der Berechnungsalgorithmus benötigt vier Schritte zur Vorbereitung, um die Restspannungen auf den Schnittkreis zu projizieren. Der erste Schritt ist die Berechnung des Schnittkreisradius r^S . Hierfür werden der Betrag zwischen den beiden am Schnittkreis beteiligten Zuständen und die Streckgrenze benötigt.

$$r^S = \sqrt{(f_y)^2 - \left(\frac{|\Delta\sigma_i'^{fel}|}{2}\right)^2} \quad (74)$$

In dem zweiten Schritt wird der Vektor des Schnittkreismittelpunktes M_i^S mit Gleichung (75) berechnet.

$$M_i^S = \sigma_i'^{fel1} + \frac{\Delta\sigma_i'^{fel}}{2} \quad (75)$$

Da $-\rho'_{i,B}$ sich bereits in der Schnittkreisebene befindet, könnte hier direkt Gleichung (78) angewendet werden, um $Y_{i,B}$ zu berechnen. In den meisten Anwendungsfällen liegen die Restspannungen jedoch nicht in der Schnittkreisebene und müssen erst auf diese projiziert werden, wie das in Abbildung 40 mit $-\rho'_C$ gezeigt wird. Um den Hilfspunkt H_i^3 berechnen zu können, wird in einem dritten Schritt mithilfe der Hesseschen Normalform der Abstand d zur Schnittkreisebene ermittelt. Hierbei wird $(\Delta\sigma_i'^{fel})^E$ als normierter Einheitsvektor zur Schnittkreisebene in dem Skalarprodukt verwendet.

$$d = -(\Delta\sigma_i'^{fel})^E * (-\rho_i' - M_i^S) \quad (76)$$

Ist der Abstand d bekannt, kann als vierter Schritt der Hilfspunkt H_i über den normierten Einheitsvektor der fiktiv-elastischen Schwingbreite $(\Delta\sigma_i'^{fel})^E$ mit einer Vektormultiplikation und den deviatorischen Restspannungen $-\rho_i'$ berechnet werden.

$$H_i = -\rho_i' + d(\Delta\sigma_i'^{fel})^E \quad (77)$$

Nun sind alle Informationen vorhanden, um nach Gleichung (78) im letzten Schritt die Schnittkreisprojektion berechnen zu können.

$$Y_i^S = M_i^S + (H_i - M_i^S) \frac{r^S}{|H_i - M_i^S|} \quad (78)$$

Die Projektionsvorschrift für die Schnittkreisprojektion wird in Abbildung 41 grafisch zusammengefasst. Dort ist zu erkennen, dass Gleichung (78) in ihrem Kern vergleichbar mit der Projektionsvorschrift für monotone Belastungsänderungen aus Gleichung (33) ist. Hierbei werden die fiktiv-elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel}$ durch den Vektor der mittleren Spannungen M_i^S , die Streckgrenze f_y durch den Schnittkreisradius r^S und die Restspannungen ρ_i' durch den Hilfspunkt auf der Schnittkreisebene H_i ersetzt.

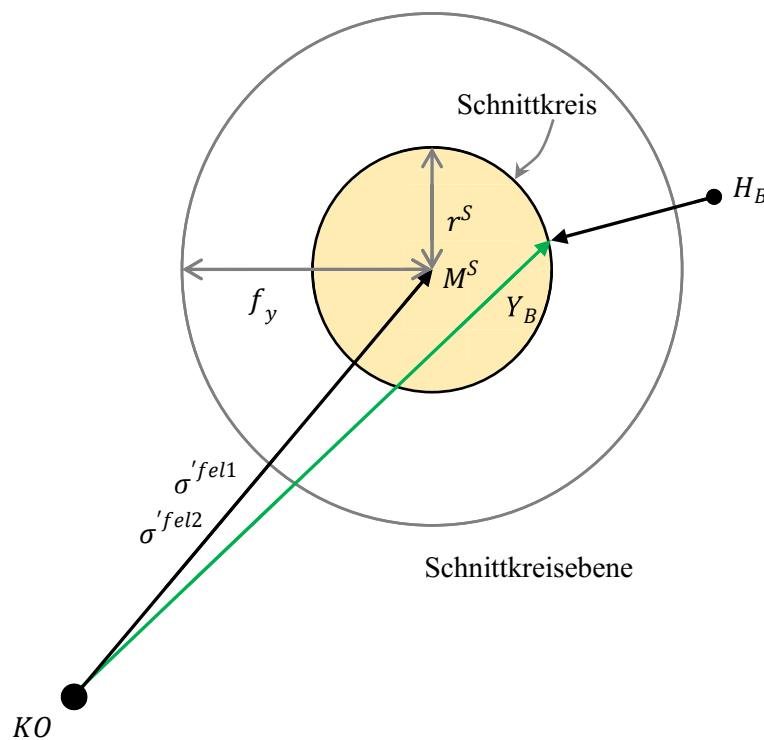


Abbildung 41: Projektionsvorgang zur Berechnung der TIV $Y_{i,B}$ als Projektion vom Hilfspunkt auf der Schnittkreisebene $H_{i,B}$ auf den Schnittkreis

Der hier beschriebene Projektionsalgorithmus wird in der Kombination von allen Kugelpaaren (Belastungszuständen) nacheinander durchgeführt und die so ermittelte TIV auf Gültigkeit entsprechend Gleichung (72) und (73) geprüft. Liegt eine gültige Projektion vor, so ist der korrekte Projektionsvorgang ermittelt. Liegt keine der berechneten Schnittkreisprojektionen auf Ω , so muss mit den Eckpunktprojektionen fortgefahren werden.

4.2.4. Projektion auf die Eckpunkte

Eine Eckprojektion ist nur dann notwendig, wenn die vorangegangenen Kugeloberflächenprojektionen und die Schnittkreisprojektionen keine gültigen TIV's auf Ω hervorgebracht haben. Zur Berechnung der Eckpunkte von Ω wurden verschiedene Vorgehensweisen untersucht, wie z.B.:

- die Kugelgleichungen nach gemeinsamen Schnittpunkten analytisch auflösen,
- über trigonometrische Beziehungen; vergleichbar mit der Vorgehensweise in [14],
- über geometrische Beziehungen.

Letztendlich hat sich die geometrische Lösung wegen der numerischen Stabilität und der hohen Effizienz durchgesetzt. Die Lösung lässt sich auf einfache ebene geometrische Zusammenhänge reduzieren, wobei folgende Überlegungen einbezogen werden:

- drei Kugeln mit einer Schnittmenge bilden immer zwei Eckpunkte,
- die drei fiktiv-elastischen Spannungen spannen gemeinsam eine Ebene auf,
- eine Gerade durch die Eckpunkte steht immer orthogonal auf dieser Ebene,
- der Gerade-Ebene-Schnittpunkt ist der Umkreismittelpunkt des Spannungsdreiecks,
- jeder Punkt auf der Geraden zwischen den Eckpunkten und dem Umkreismittelpunkt hat den gleichen Abstand zu den fiktiv-elastischen Spannungsvektoren.

Mithilfe der hier genannten Überlegungen und Abbildung 42 lässt sich die Vorgehensweise anschaulich nachvollziehen.

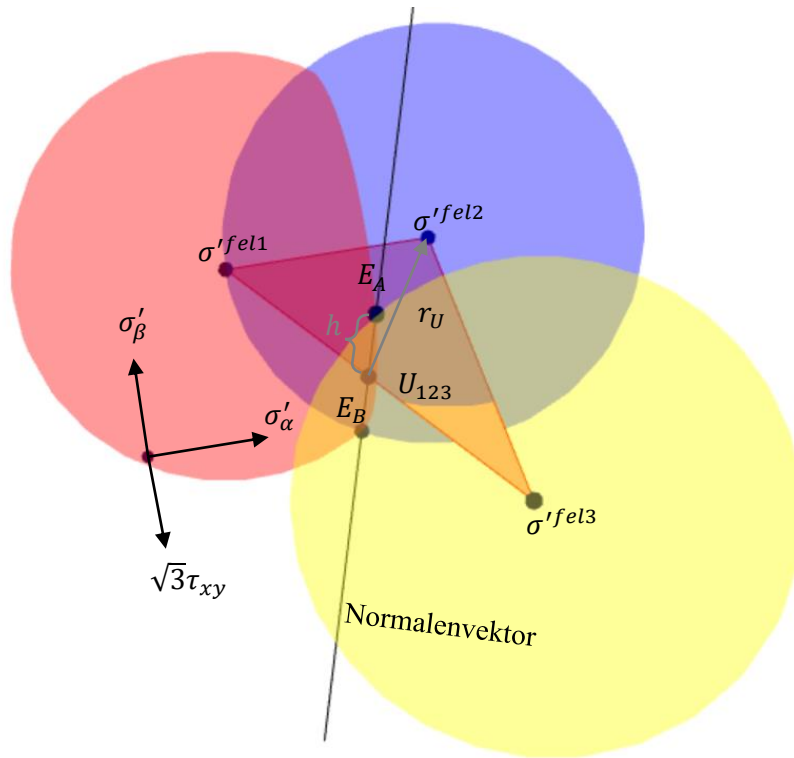


Abbildung 42: Grafischer Zusammenhang zwischen den Eckpunkten E_A und E_B , dem Normalenvektor der Ebene, dem Umkreismittelpunkt U_{123} und den fiktiv-elastischen Spannungen σ_i^{fel1} , σ_i^{fel2} und σ_i^{fel3} .

Als erstes wird der Normalenvektor n_i^{123} der Ebene E^{123} der drei Belastungszustände ermittelt. Dieser setzt sich aus den drei fiktiv-elastischen Spannungsvektoren $(\sigma_i^{fel1}, \sigma_i^{fel2}, \sigma_i^{fel3})$ der jeweiligen Belastungsextrema (1,2,3) zusammen. Somit kann der Normalenvektor dieser Ebene n_i^{123} wie folgt berechnet werden.

$$n_i^{123} = \Delta\sigma_i^{fel12} \times \Delta\sigma_i^{fel13} \quad (79)$$

In einem weiteren Schritt wird der Umkreismittelpunkt U_i^{123} aus dem Dreieck der drei fiktiv-elastischen Spannungsvektoren berechnet. Der Umkreismittelpunkt wird durch das Gleichsetzen zweier Geradengleichungen ermittelt, welche in der Ebene E^{123} liegen und orthogonal zu den Vektoren der fiktiv-elastischen Schwingbreiten $(\Delta\sigma_i^{fel12}, \Delta\sigma_i^{fel13})$ liegen. Somit werden für diese Geradengleichungen zwei Richtungsvektoren benötigt, welche in der Ebene E^{123} liegen und gleichzeitig orthogonal zu den fiktiv-elastischen Spannungsschwingbreiten sind.

$$n_i^{12} = \Delta\sigma_i^{fel12} \times n_i^{123} \quad (80)$$

$$n_i^{13} = \Delta\sigma_i^{fel13} \times n_i^{123} \quad (81)$$

Die Stützpunkte der Geradengleichungen sind die mittleren Spannungen zwischen den beiden Belastungsextrema. Als Schnittpunkt der folgenden Geradengleichungen erhält man den Umkreismittelpunkt.

$$g^{12}: U_i = \left(\sigma_i'^{fel1} + \frac{\Delta\sigma_i'^{fel12}}{2} \right) + (\lambda_1 \cdot n_i^{12}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (82)$$

$$g^{13}: U_i = \left(\sigma_i'^{fel1} + \frac{\Delta\sigma_i'^{fel13}}{2} \right) + (\lambda_2 \cdot n_i^{13}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (83)$$

Ist der Umkreismittelpunkt U_i^{123} bekannt, kann der Radius des Umkreises r_U einfach durch eine Abstandsberechnung zwischen Umkreismittelpunkt und einer beliebigen fiktiv-elastischen Spannung berechnet werden, da alle fiktiv-elastischen Spannungen auf dem Umkreis liegen. Nun sind bereits der Stützvektor U_i^{123} und der Richtungsvektor n_i^{123} der Hilfsgeraden, welche durch beide Eckpunkte E_i^A und E_i^B geht, bekannt. Als letzter Schritt wird der Abstand h vom Umkreismittelpunkt U_i^{123} zum Eckpunkt E_i^A oder E_i^B benötigt. Der Abstand lässt sich durch den Satz des Pythagoras berechnen.

$$h = \sqrt{f_y^2 - r_U^2} \quad (84)$$

Die Berechnung der Eckpunkte E_i^A und E_i^B erfolgt dann durch Einsetzen von h in die Geradengleichung der Hilfsgeraden. Hierbei ist noch zu beachten, dass der Richtungsvektor n_i^{123} normiert zu $n_i^{123,E}$ verwendet werden muss.

$$E_{i,A/B} = U_i^{123} \pm h \cdot n_i^{123,E} \quad (85)$$

Da es auf Ω immer mehr als einen Eckpunkt gibt, sind alle Eckpunktprojektionen, die auf Ω gefunden werden, zu vergleichen. Derjenige Eckpunkt, der den kürzesten Abstand zu den negativen deviatorischen Restspannungen aufweist, ist die korrekte Projektion. Wie bei der Schnittpunktprojektion bei Ein-Parameterbelastung aus Gleichung (44) und (45) ist die Eckpunktprojektion bei Mehr-Parameterbelastung bereits das korrekte Ergebnis der TIV und kann durch weitere meA-Iterationen nicht verbessert werden.

4.2.5. Ablaufplan zur Berechnung der Projektion

In diesem Abschnitt werden die zuvor im Detail erklärten Projektionsmethoden in einem Ablaufschema zusammengefasst. Das Ablaufschema beschreibt die Vorgehensweise für Mehr-Parameterbelastung auf Grundlage von 2-D Kontinuumelementen. Diese Vorgehensweise ist nur für die Verwendung bei elastischen Einspielzuständen gültig. Zunächst mag der gesamte Aufwand von Kugelprojektion, Schnittkreisprojektion und Eckpunktprojektion etwas aufwendig

erscheinen, da dieses Vorgehen an jedem Gaußpunkt angewendet werden muss, der überelastisch beansprucht wird. Dieses Verfahren ist jedoch nach Gesichtspunkten der Effizienz entwickelt worden.

Numerische Untersuchungen an praxisnahen Beispielen haben gezeigt, dass an den meisten Stellen im Tragwerk Kugelprojektionen auftreten, seltener sind Schnittkreisprojektionen vorhanden, und Eckpunktprojektionen kommen in der Regel am wenigsten vor. Diese Feststellung ist abhängig von den Modellen und den Belastungen und kann auch stark variieren. Des Weiteren liefert dieses Verfahren die mathematisch korrekte Projektion auf Ω ohne die Verwendung von aufwändigen numerischen Methoden, welche bei 3-D Kontinuumselementen wahrscheinlich notwendig werden. Der hier vorgeschlagene analytische Lösungsweg wird bisher als der effizienteste angesehen.

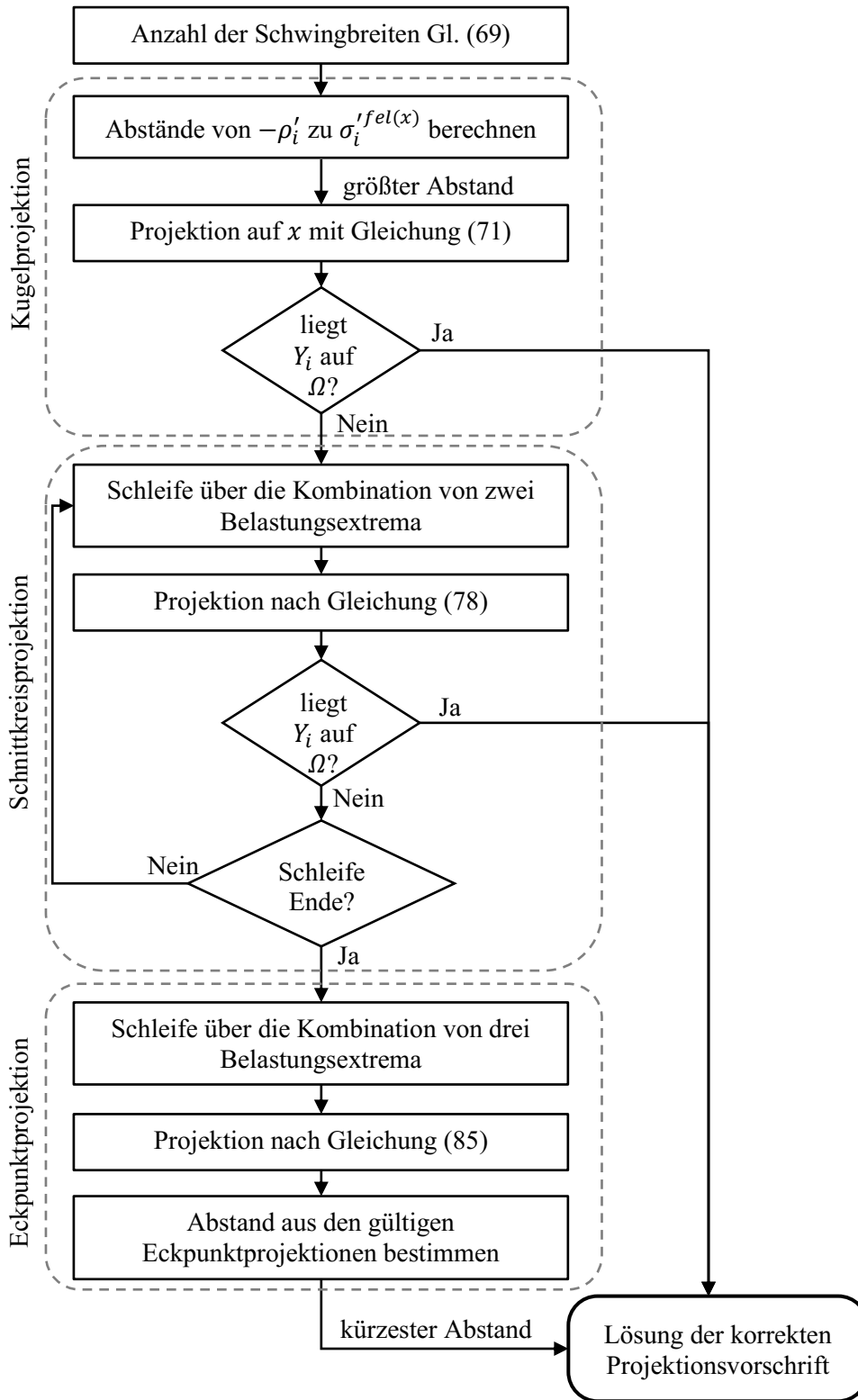


Abbildung 43: Ablaufschema zur Bestimmung der korrekten Projektion auf Ω für Mehr-Parameterbelastungen bei elastischen Einspielzuständen für 3-D-Spannungsräume.

4.2.6. Beispielrechnung

An dieser Stelle wird ein fiktives Beispiel vorgestellt, welches keinen Bezug zu Ergebnissen einer numerischen Berechnung hat und trotzdem den Ablauf des Projektionsalgorithmus nachvollziehbar erläutern soll. D. h. es werden die Spannungen als deviatorische Spannungen des 3-dimensionalen Spannungsraumes vorgegeben und diese müssen nicht entsprechend Gleichung (66) bis (68) umgerechnet werden. Gegeben sind folgende fiktiv-elastische Spannungsvektoren und die Streckgrenze.

$$\text{gegeben: } \sigma^{fel,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^{fel,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^{fel,3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, f_y = 2$$

Gesucht werden drei TIV-Projektionen von folgenden Restspannungen:

$$\text{gesucht: } Y_A \text{ von } -\rho_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, Y_B \text{ von } -\rho_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, Y_C \text{ von } -\rho_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zuerst wird die Anzahl der Schwingbreiten entsprechend Gleichung (69) mit ($x_n = 3$) bestimmt, damit die darauffolgenden Schleifenfunktionen formuliert werden können.

$$S_k = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = 3$$

Im nächsten Schritt wird die Kugelprojektion auf die Kugel mit dem größten Abstand durchgeführt. Dafür wird zunächst der größte Abstand gesucht.

$$|\sigma^{fel,1} + \rho_A| = \sqrt{2}$$

$$|\sigma^{fel,2} + \rho_A| = \sqrt{10}$$

$$|\sigma^{fel,3} + \rho_A| = \sqrt{25} \rightarrow \text{Projektion von } -\rho_A \text{ auf } \sigma^{fel,3}$$

$$|\sigma^{fel,1} + \rho_B| = \sqrt{11,25} \rightarrow \text{Projektion von } -\rho_B \text{ auf } \sigma^{fel,1}$$

$$|\sigma^{fel,2} + \rho_B| = \sqrt{9,25}$$

$$|\sigma^{fel,3} + \rho_B| = \sqrt{0,25}$$

$$|\sigma^{fel,1} + \rho_C| = \sqrt{8}$$

$$|\sigma^{fel,2} + \rho_C| = \sqrt{12} \rightarrow \text{Projektion von } -\rho_C \text{ auf } \sigma^{fel,2}$$

$$|\sigma^{fel,3} + \rho_C| = \sqrt{9}$$

Das Projektionsverfahren kann nun für die Kugelprojektion entsprechend Gleichung (33) durchgeführt werden.

$$Y_A = \sigma^{fel,3} - (\sigma^{fel,3} + \rho_A) * \left(\frac{f_y}{|\sigma^{fel,3} + \rho_A|} \right) = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

$$Y_B = \sigma^{fel,1} - (\sigma^{fel,1} + \rho_B) * \left(\frac{f_y}{|\sigma^{fel,1} + \rho_B|} \right) = \begin{pmatrix} 1,894 \\ 3 \\ 1,789 \end{pmatrix}$$

$$Y_C = \sigma^{fel,2} - (\sigma^{fel,2} + \rho_C) * \left(\frac{f_y}{|\sigma^{fel,2} + \rho_C|} \right) = \begin{pmatrix} 1,845 \\ 4,154 \\ 1,154 \end{pmatrix}$$

Sind die Abstände zwischen der TIV und den fiktiv-elastischen Spannungen kleiner gleich der Streckgrenze, so ist die TIV gültig, wie im Fall von Y^1 nach Gleichung (72). Bei Y^2 und Y^3 wird nach Gleichung (73) mit der Schnittkreisprojektion fortgefahren, da diese TIV nicht auf Ω liegen.

$$|\sigma^{fel,1} - Y_A| = 1,613$$

$$|\sigma^{fel,2} - Y_A| = 1,843$$

$$|\sigma^{fel,3} - Y_A| = 2 \rightarrow \text{Projektion von } Y_A \text{ ist gültig}$$

$$|\sigma^{fel,1} - Y_B| = 2$$

$$|\sigma^{fel,2} - Y_B| = 2,103 > f_y \rightarrow \text{Abbruch und weiter mit Schnittkreisprojektion}$$

$$|\sigma^{fel,1} - Y_C| = 1,838$$

$$|\sigma^{fel,2} - Y_C| = 2$$

$$|\sigma^{fel,3} - Y_C| = 2,46 > f_y \rightarrow \text{Abbruch und weiter mit Schnittkreisprojektion}$$

Die Schnittkreisprojektion wird zuerst zwischen dem ersten und dem zweiten Belastungszustand untersucht. Dafür werden der Schnittkreisradius r^S Gleichung (74) und der Schnittkreismittelpunkt M_i^S Gleichung (75) benötigt. Die folgenden Zwischenergebnisse werden nur für die Berechnungen von $-\rho^2$ gegeben.

$$r^S = \sqrt{f_y^2 - \left(\frac{|\Delta\sigma_i^{fel1-2}|}{2} \right)^2} = \sqrt{3}$$

$$M^S = \sigma^{fel1} + \frac{\Delta\sigma^{fel1-2}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem normierten Einheitsvektor der Spannungsschwingbreite kann nun der Abstand Gleichung (76) von den negativen Restspannungen zur Schnittkreisebene und dadurch der Hilfspunkt Gleichung (77) ermittelt werden.

$$d = -(\Delta\sigma'^{fel1-2})^E * (-\rho_B - M^S) = -0,5$$

$$H = -\rho_B + d \cdot (\Delta\sigma'^{fel1-2})^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun sind alle Informationen bekannt, um nach Gleichung (78) die Schnittkreisprojektion zu berechnen.

Für $-\rho_B$:

$$Y_B^S = M^S + (H - M^S) \frac{r^S}{|H - M^S|} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Für $-\rho_C$:

$$Y_C^S = M^S + (H - M^S) \frac{r^S}{|H - M^S|} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,225 \\ 1,225 \end{pmatrix}$$

Da die Schnittkreisprojektionen $Y_B^{S,2}$ und $Y_B^{S,3}$ auf den Kugeln der Belastungszustände eins und zwei liegen, muss abschließend noch geprüft werden, ob diese Projektionen auch auf dem dritten Belastungszustand liegen, damit ihre Gültigkeit bestimmt werden kann.

$$|\sigma'^{fel,3} - Y_B^S| = \mathbf{1,615} \rightarrow \mathbf{\text{Projektion von } Y_B^S \text{ ist gültig}}$$

$$|\sigma'^{fel,3} - Y_C^S| = \mathbf{2,377} \rightarrow \mathbf{\text{Projektion von } Y_C^S \text{ ist ungültig}}$$

Da Y_C^S für den Schnittkreis aus den Belastungszuständen eins und zwei nicht auf Ω liegen, wird mit dem Schnittkreis aus Belastungszustand 2 und 3 und 1 und 3 fortgesetzt. Für $-\rho_C$ kann keine gültige Schnittkreisprojektion gefunden werden, deshalb muss die Eckprojektion durchgeführt werden. Hierfür wird der Umkreismittelpunkt des Dreiecks aus drei fiktiv-elastischen Spannungen berechnet. Der Umkreismittelpunkt wird durch das Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen (82) und (83) gelöst. Wobei sich die Richtungsvektoren mit dem Normalenvektor der Ebene n_i^{123} aus Gleichung (79) bis (81) wie folgt ergeben.

$$n^{123} = \Delta\sigma'^{fel12} \times \Delta\sigma'^{fel13} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^{12} = \Delta\sigma'^{fel12} \times n^{123} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$n^{13} = \Delta\sigma^{fel13} \times n^{123} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Nach Auflösung des Gleichungssystems lautet der Umkreismittelpunkt:

$$U^{123} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Von diesem Punkt aus werden über den normierten Einheitsvektor der Ebene und dem Abstand h die beiden Eckpunkte berechnet, Gleichung (85). Der Abstand vom Umkreismittelpunkt zu den Eckpunkten ergibt sich aus dem Umkreisradius und der Streckgrenze, Gleichung (84) und der Umkreisradius wird durch den Abstand eines fiktiv-elastischen Spannungspunkt zum Umkreismittelpunkt errechnet.

$$r_U = |U^{123} - \sigma^{fel1}| = \sqrt{3,25}$$

$$h = \sqrt{f_y^2 - r_U^2} = \sqrt{0,75}$$

Die Eckpunkte lauten nach Gleichung (85) wie folgt:

$$E^A = U^{123} + h \cdot n^{123,E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,134 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$E^B = U^{123} - h \cdot n^{123,E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,866 \\ 1,5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Projektion von } -\rho_c \text{ ist } Y_c^S = E^B$$

Beide Eckpunkte liegen definitionsgemäß auf Ω , deshalb muss abschließend noch der Abstand der beiden Eckpunkte zu $-\rho_c$ berechnet werden. Der Eckpunkt mit dem geringsten Abstand ist die gültige Projektion.

4.3. Ergebnisse mit der VFZT am Rohrbogen

Die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Projektionsvorschriften sind über Usersubroutinen in ANSYS für trilineares Materialverhalten implementiert worden. An dem folgenden Beispiel wird die Anwendung dieser Theorie unter Verwendung von bilinearem Materialverhalten vorgestellt. Bei dem Beispiel handelt es sich um den bereits vorgestellten Rohrbogen aus Abschnitt 3.2.

Das Beispiel des Torus-Modells, welches bereits in Abschnitt 3.2 vorgestellt wurde, wird hier mit den Belastungsparametern aus Tabelle 1 für eine Berechnung mit der Vereinfachten Fließzonentheorie angewandt. Dort wurden zwei zyklische Belastungen verwendet, ein radialer Temperaturgradient infolge eines Temperaturanstieges an der Innenoberfläche und eine In-plane Biegung.

Die erste Auswertung in Abbildung 44 zeigt zwei Konturplots der totalen Dehnungen, welche sich aus elastischen und plastischen Dehnungen zusammensetzen. Dort werden auf der einen Seite die Ergebnisse einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Berechnung im Einspielzustand und auf der anderen Seite die Ergebnisse der Vereinfachten Fließzonentheorie gegenübergestellt.

Hierbei ist der Zeitpunkt der maximalen Beanspruchung, wenn die Belastungen Innendruck p und In-plane Biegung φ aktiv sind, also vergleichbar mit dem Belastungszeitpunkt 4 aus Abbildung 31. Beide Konturplots sind mit der gleichen Skalierung versehen und wurden auch hier für eine bessere Darstellung in radialer Richtung gestreckt. Der Vergleich aus Abbildung 44 zeigt, dass die VFZT im gesamten Tragwerk eine gute Abschätzung der Beanspruchungen hervorbringt.

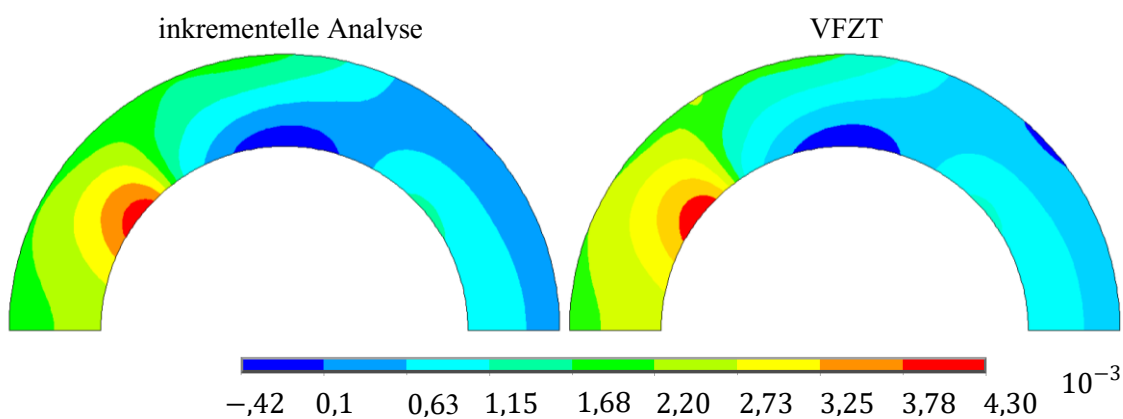


Abbildung 44: Vergleich der Hauptdehnungen zum Belastungszeitpunkt maximaler Beanspruchungen (p und φ) im Einspielzustand

Das zweite Auswertungsformat liefert die Ergebnisse in Form der maximalen Hauptdehnungen und der maximalen Vergleichsspannungen zu den entsprechenden Belastungszeitpunkten. In Tabelle 2 werden die Ergebnisse aus dem Einspielzustand der inkrementellen Analyse mit der Vereinfachten Fließzonentheorie verglichen. Neben den absoluten Werten ist gleichzeitig die Abweichung der VFZT von der inkrementellen Analyse in Prozent angegeben. Die größte Abweichung von 1,4 % tritt zum Zeitpunkt der maximalen Beanspruchung ($p + \varphi$) auf.

Wie bei den meisten Anwendungsbeispielen ist die Abweichung der VFZT gegenüber einer inkrementellen Berechnung durch ein Überschätzen der Ergebnisse geprägt, was prinzipiell als Vorteil gegenüber einer Unterschätzung der Ergebnisse angesehen wird. Die Abweichungen der Vergleichsspannungen liegen deutlich unter einem Prozent. Die einzelnen Spannungs- oder Dehnungskomponenten können größere Abweichungen aufweisen. Die Vektorlänge, welche durch die Vergleichsspannung berechnet wird, unterliegt erfahrungsgemäß einer besseren Abschätzung. Diese Erkenntnis ist bedeutsam für die Einteilung der Struktur in elastische und plastische Zonen, da hierfür die Vergleichsspannung herangezogen wird.

Tabelle 2: Gegenüberstellung der Ergebnisse zwischen inkrementeller Berechnung und Vereinfachter Fließzonentheorie auf Grundlage der maximalen Hauptdehnungen und der größten Vergleichsspannungen im Einspielzustand

$\left[\begin{array}{l} \text{inkA} \mid \text{VFZT} \\ \text{Fehler in \%} \end{array} \right]$	$\varepsilon_{to,1} [10^{-3}]$ max. Hauptdehnung	$\sigma_v [N/mm^2]$ Vergleichsspannung
Belastung		
(p)	$\frac{3,57 \mid 3,63}{1,1 \%}$	$\frac{109,8 \mid 110,2}{0,36 \%}$
(p + ΔT)	$\frac{3,53 \mid 3,58}{1,3 \%}$	$\frac{118,1 \mid 118,3}{0,16 \%}$
(p + φ)	$\frac{4,14 \mid 4,20}{1,4 \%}$	$\frac{118,3 \mid 118,6}{0,25 \%}$

Ein weiteres Auswertungsformat ist der Verlauf der totalen Dehnungen in Tangentialrichtung über die erforderlichen Gleichgewichtssiterationen, die bis zum Einspielzustand benötigt werden. In dem Diagramm aus Abbildung 45 werden etwa 2500 Gleichgewichtssiterationen gelöst, um den Einspielzustand mittels einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Berechnung zu erreichen. Im Gegensatz dazu liefert die VFZT eine gute Näherung der Ergebnisse bei Mehr-Parameterbelastungen bereits nach 7 modifiziert-elastischen Analysen, wo die maximale Fehlerabweichung etwa bei 2 % liegt. Die minimale Fehlerabweichung von 1,4 % wird erst nach 20 meA's erreicht.

Aus dem Gesichtspunkt des numerischen Aufwandes lässt sich das Lösen einer Gleichgewichtssiteration mit dem Lösen einer modifiziert-elastischen Analyse in etwa gleichsetzen. Da in beiden Fällen ein lineares Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl an Gleichungen gelöst wird.

Der Berechnungsaufwand im Pre- und Postprozess lässt sich schwer messen und zwischen VFZT und inkrementeller Berechnung vergleichen. Die Pre- und Postprozesse beanspruchen jedoch deutlich weniger Berechnungsaufwand als das Lösen des Gleichungssystems. Dies liegt auch daran, dass sich die Pre- und Postprozesse parallelisieren lassen. Schätzungsweise dürfte der Aufwand zur Bestimmung der Projektion jedoch nicht viel größer sein als der Aufwand im Preprozess der inkrementellen Berechnung.

Das bedeutet, die VFZT benötigt für die Abschätzung der Einspielergebnisse weniger als 1% des Berechnungsaufwandes. Wird eine Fehlerabweichung der Einspielergebnisse von 2% akzeptiert, kann der Berechnungsaufwand von 20 auf 7 meA's noch einmal deutlich reduziert werden.

Damit zeigt die VFZT beispielhaft, dass sie die Aufgabenstellungen von Mehr-Parameterberechnungen effizient bewerkstelligen kann. Dabei ist die Anzahl der meA's unabhängig von der Anzahl der berücksichtigten Lastfälle bei Mehr-Parameterbelastungen. Das bedeutet, es können beliebig viele Lastfälle hinzugefügt werden, ohne dass die Anzahl der modifiziert-elastischen Analysen für eine bessere Ergebnisqualität erhöht werden muss.

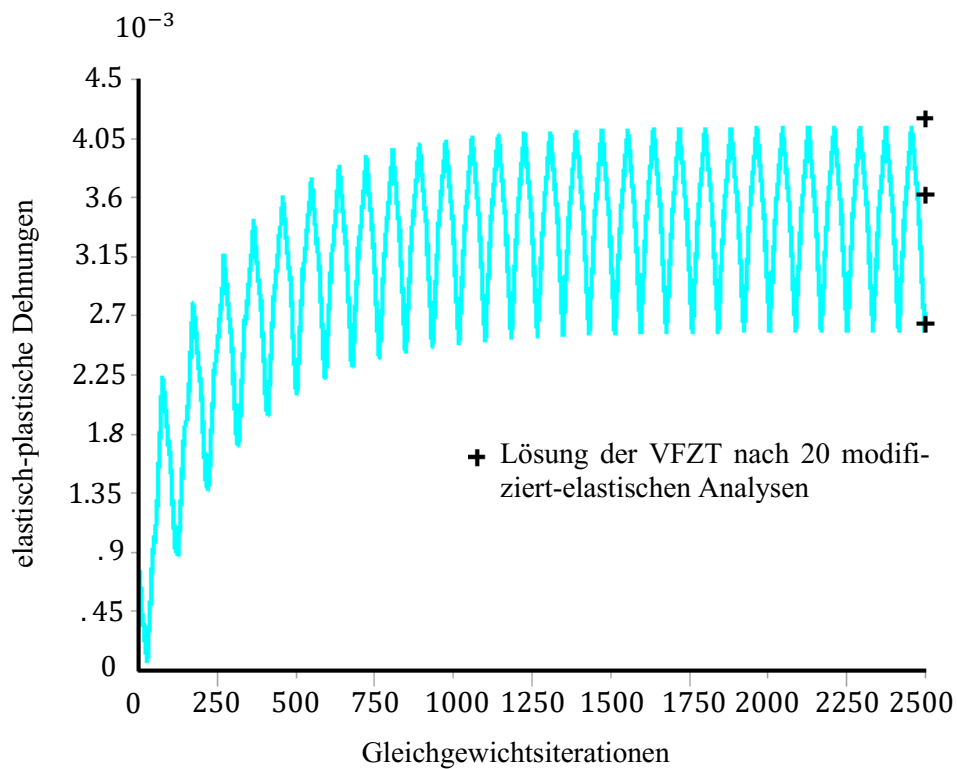


Abbildung 45: Verlauf der maximalen elastisch-plastischen Dehnungen der inkrementellen Berechnung über die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen. Hervorgehoben ist die Lösung der VFZT nach 20 modifiziert-elastischen Analysen.

5. Mehr-Parameterbelastung bei plastischem Einspielen

Die direkte Berechnung von Zustandsgrößen im Einspielzustand unter plastischen Einspielbedingungen mit Mehr-Parameterbelastungen ist eine größere Herausforderung, da mit jedem weiteren Belastungszustand potenziell ein weiterer Restspannungszustand gefunden werden muss. Dabei gibt es die Herausforderung, die Schwingbreiten geeignet zu bestimmen und zusätzlich die akkumulierten Zustände abzuschätzen. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgeschlagen, die sich dieser Herausforderung annähert.

5.1. Annahmen und Voraussetzungen

In Unterabschnitt 2.2.2 wurde die Vorgehensweise der VFZT bei zyklischem Verhalten und plastischen Einspielzuständen für Ein-Parameterbelastungen erläutert. Dort wurde die Zweiteilung der Berechnungen nach der Schwingbreite und nach den akkumulierten Dehnungen vorgestellt. Zuerst werden die Ergebnisse für die Zustände der Schwingbreite ermittelt und danach die akkumulierten Zustände berechnet. Die Schwingbreiten werden dabei immer zuerst berechnet, da zur Abschätzung der TIV für die akkumulierten Zustände die Vergleichsspannungsschwingbreiten benötigt werden. Bei der Erweiterung für Mehr-Parameterbelastungen soll diese Vorgehensweise, da sie sich etabliert hat, übernommen werden. Für die Erweiterung werden jedoch Annahmen verletzt, welche bei Ein-Parameterbelastung gültig sind, aber bei Mehr-Parameterbelastung ihre Gültigkeit verlieren. Im Folgenden werden diese Annahmen vorgestellt und weitere Annahmen und Voraussetzungen für die Erweiterung auf Mehr-Parameterbelastungen eingeführt.

Für die Schwingbreitenberechnung durch die Twice-Yield-Methode wurden in Abschnitt 2.2.2 vier Annahmen getroffen, die es erlauben, diese Methode für Ein-Parameterbelastungen einzusetzen. Diese werden an dieser Stelle erneut aufgegriffen und ihre Gültigkeit für die Erweiterung auf Mehr-Parameterbelastungen diskutiert. Die erste Annahme lautet:

1. Der Wechsel in der Beanspruchungsrichtung an einem Belastungsextremum ist immer zuerst elastisch und später elastisch-plastisch geprägt.

Diese Annahme ist bei Mehr-Parameterbelastung nicht mehr gültig. Die Beanspruchungssituationen zwischen den Lastextrema einer Mehr-Parameterbelastung können bei einem Wechsel zwischen den Belastungsextrema direkt zu elastisch-plastischem Verhalten führen, ohne dass es zunächst zu rein elastischem Verhalten kommt. Wird z.B. eine Belastung zerlegt, damit der Belastungspfad berücksichtigt werden kann, kann es zwischen den Belastungsänderungen direkt zu elastisch-plastischen Änderungen kommen. Solche Beanspruchungssituationen sind auch ohne Zerlegung des Lastpfades nicht auszuschließen.

2. Die vektorielle Spannungsänderung zwischen den Belastungsextrema ist identisch, nur die Vorzeichen ändern sich bei jedem Lastwechsel.

Auch diese Annahme ist ungültig in der Anwendung von Mehr-Parameterbelastungen. Der Wechsel zwischen den Belastungsextrema kann in Betrag und Richtung unterschiedlich ausgeprägt sein. Dies wird schematisch durch Abbildung 46 am Beispiel von ΔY gezeigt. Obwohl es eine Änderung zwischen den gleichen Lastfällen ($A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$ und $A \rightarrow C$, $C \rightarrow A$) gibt, ist die TIV in der Richtung und im Betrag unterschiedlich.

3. Erneutes Plastizieren nach der Entlastung tritt erst auf, wenn die aus der Schwingbreite der Spannungskomponenten gebildete Vergleichsspannung $2f_y$ überschreitet.

Diese Annahme ist ebenfalls nicht mehr gültig, was sich aus der Ungültigkeit der ersten beiden Annahmen ableitet. Die maximale Änderung der Vergleichsspannung beträgt bei ein-Parameterbelastungen $2f_y$ betragen, bevor es zum erneuten Plastizieren kommt. Bei Mehr-Parameterbelastungen kann es vorkommen, dass die Spannungsänderungen zwischen zwei gleichen Belastungszuständen nicht kollinear verlaufen. Dies kann dazu führen, dass die Vergleichsspannungsschwingbreite deutlich niedriger ist als $2f_y$ bis es zum erneuten Plastizieren kommt. Aus diesem Grund lässt sich die Twice-Yield-Methode nicht für Mehr-Parameterbelastungen anwenden, da nicht von vornherein bekannt ist, wann und wie es zum erneuten Plastizieren kommt.

4. Der Einfluss des mittleren akkumulierten Zustandes auf die Schwingbreite ist vernachlässigbar

Diese Annahme ist durch einige numerische Untersuchungen bestätigt worden. Es wird jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es unter Mehr-Parameterbelastungen auch Gegenbeispiele geben könnte, die diese Annahme etwas einschränken.

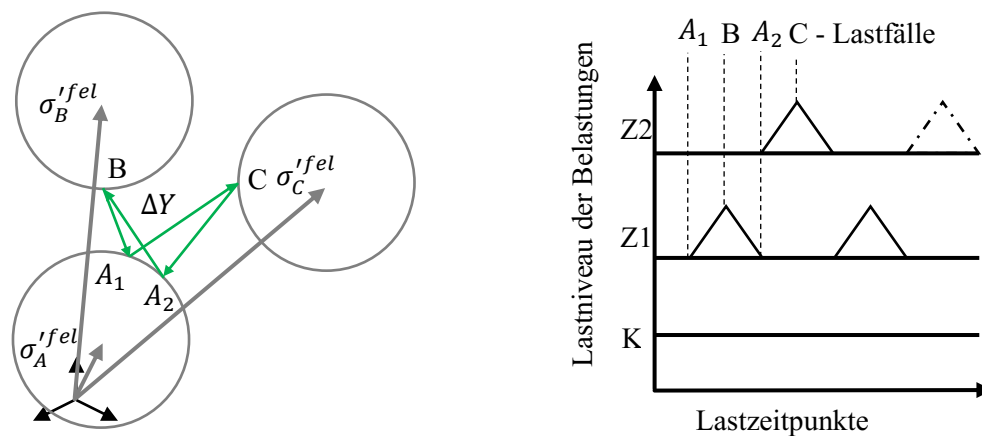


Abbildung 46: **links:** Lastfall A, B und C im TIV-Raum mit dem Verlauf von ΔY im eingespielten Zustand.
rechts: Belastungshistogramm der konstanten Belastung K und der zyklischen Belastungen Z1 und Z2

Auf der linken Seite in Abbildung 46 sind drei unterschiedliche fiktiv-elastische Spannungsvektoren einer beliebigen Stelle eines Tragwerks dargestellt. Die grünen Vektoren zeigen den Verlauf der sich ändernden TIV im eingespielten Zustand. Die Lastfälle A, B und C treten jeweils in der gleichen chronologischen Reihenfolge auf, wie es im Belastungshistogramm dargestellt ist. Es gibt also vier verschiedene Lastwechsel, die sich aus den Belastungsänderungen \overline{AB} , \overline{BA} , \overline{AC} und \overline{CA} zusammensetzen.

Bei einer Ein-Parameterbelastung mit der zyklischen Belastung $Z1$ würde sich in dem Lastwechsel \overline{AB} und \overline{BA} der identische Wechsel der TIV einstellen. Bei diesem Mehr-Parameterbeispiel treten jedoch unterschiedliche Wechsel der TIV auf. Dies führt dazu, dass der Lastfall A zwei unterschiedliche TIV-Abschätzungen für die akkumulierten Zustände benötigt, in Abhängigkeit von dem zuvor auftretenden Lastfall. Durch diese Situation ergeben sich vier unterschiedliche Schwingbreiten, deren Abschätzung einer neuen Vorgehensweise bedarf und die im Folgenden vorgestellt wird.

5.2. Schwingbreitenberechnung ohne konstante Belastungsanteile

Im vorangegangenen Abschnitt wurde erläutert, dass die Twice-Yield-Methode für eine Anwendung bei Mehr-Parameterbelastungen ungeeignet ist. Es wurde weiterhin die Annahme formuliert, dass die Schwingbreite unabhängig vom mittleren Zustand der akkumulierten Dehnungen ist. Diese Annahme konnte weder generell bestätigt noch widerlegt werden, weshalb sie für das weitere Vorgehen übernommen wird. Von diesem Grundsatz ausgehend wurde nach einer Möglichkeit gesucht, die Schwingbreite vereinfacht und getrennt vom akkumulierten Zustand zu ermitteln. Dafür wurde folgende Bedingung formuliert:

Die Schwingbreite ist abhängig von den veränderlichen Belastungsanteilen und unabhängig von den konstanten Belastungsanteilen.

Genau genommen ist diese Annahme auch für die Twice-Yield-Methode gültig. Sie wurde aber von Kalnins [54] und Reinhardt [56] in dieser Form nicht formuliert. Die konstanten Beanspruchungen werden durch die konstanten Belastungen hervorgerufen und haben naturgemäß keinen Anteil an der Schwingbreite.

Auf Grundlage dieser Annahme wird eine inkrementelle zyklische Berechnung durchgeführt, bei der die konstanten Belastungsanteile unberücksichtigt bleiben. Diese Analyse wird im Folgenden als reduzierte Berechnung bezeichnet. Da die konstanten Beanspruchungen in den meisten Fällen nur der treibende Faktor für Ratcheting sind, aber nicht für die Schwingbreite, werden häufig nur zwei Zyklen einer Mehr-Parameterberechnung ohne konstante Belastungen benötigt, um die Beanspruchungen der Schwingbreite gut abzuschätzen. In wenigen Beispielen und bei Wanderlasten kann es vorkommen, dass selbst ohne konstante Belastungsanteile ein signifikantes Ratcheting-Verhalten auftritt [24]. In solchen Fällen müssten die Berechnungen bis zum Einspielzustand durchgeführt werden. Ob sich die reduzierte Berechnung in Vergleich zu einer vollständig inkrementellen Berechnung lohnt, hängt von der Anzahl der notwendigen Belastungszyklen ab, die sich schwer abschätzen lässt.

Eine reduzierte Berechnung ist also eine inkrementelle Analyse ohne konstante Belastungen. Hierfür wird auf das Modell der Torusscheibe zurückgegriffen, welches bereits in Unterabschnitt

3.2.1 verwendet wurde. Im aktuellen Abschnitt werden die Belastungsniveaus des zyklischen Temperaturgradienten auf $\Delta T = 400K$ und der zyklischen In-plane Biegung auf $3,5^\circ$ erhöht.

In Abbildung 47 sind das Modell und die beiden zyklischen Belastungszustände zusammengefasst. Im Belastungshistogramm ist ersichtlich, dass ausschließlich die zyklischen Belastungen berücksichtigt werden. Im zweiten Lastzyklus der reduzierten inkrementellen Berechnung werden die Schwingbreiten aus den gekennzeichneten Lastfällen A1, B, A2, und C im Einspielzustand berechnet. Aus der chronologischen Reihenfolge der Lastfälle ergeben sich die vier unterschiedlichen Schwingbreiten wie folgt: $\overline{A1B}$, $\overline{BA2}$, $\overline{A2C}$ und $\overline{CA1}$.

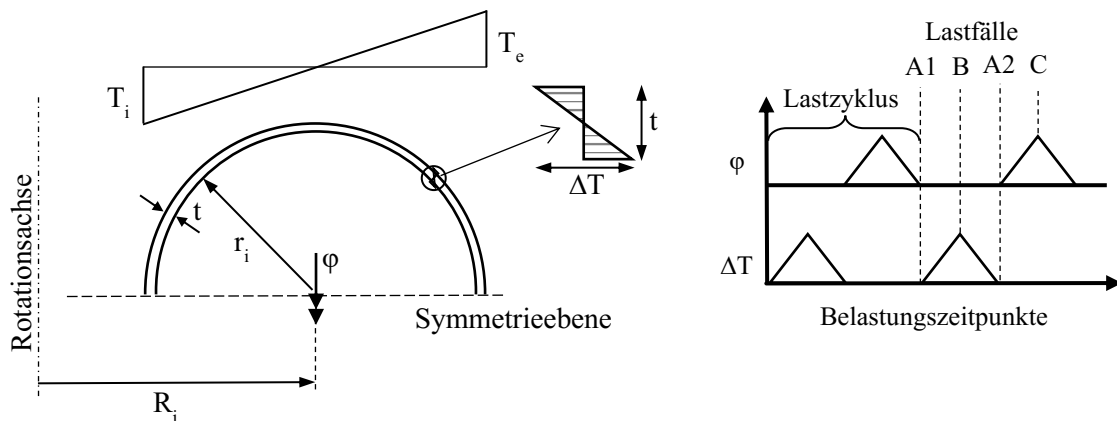


Abbildung 47: **links:** Rotationssymmetrisches Modell der Torusscheibe mit zyklischer In-plane Biegung und zyklischem radialem Temperaturgradienten.
rechts: Belastungshistogramm mit den Lastfällen A1, B, A2 und C, aus denen die Schwingbreite berechnet wird.

Die Ergebnisse der einzelnen Lastfälle in der reduzierten Berechnung sind allein betrachtet wenig aussagekräftig. Erst wenn die Änderungen der Ergebnisse von einem Lastfall zum anderen berechnet werden, stehen die Ergebnisse der abgeschätzten Schwingbreiten zur Verfügung. In Abbildung 48 sind die Verläufe der plastischen Vergleichsdehnungen gegenübergestellt. Dabei werden in Lila die Ergebnisse der vollständig inkrementellen Berechnung und in Cyan die Ergebnisse der reduzierten inkrementellen Berechnung präsentiert.

Der Einspielzustand und damit die Schwingbreite der vollständig inkrementellen Berechnung lässt sich sicher nach 50 Zyklen (mit je 4 Belastungsschritten) ablesen. In Gegensatz dazu liefert die reduzierte Berechnung bereit nach zehn Zyklen die exakt gleichen Ergebnisse für die Schwingbreitenbeanspruchungen. Werden die plastischen Dehnungen des zweiten Zyklus der reduzierten Berechnung verwendet, erhält man eine Abschätzung, die nur 2 % vom Einspielergebnis abweicht.

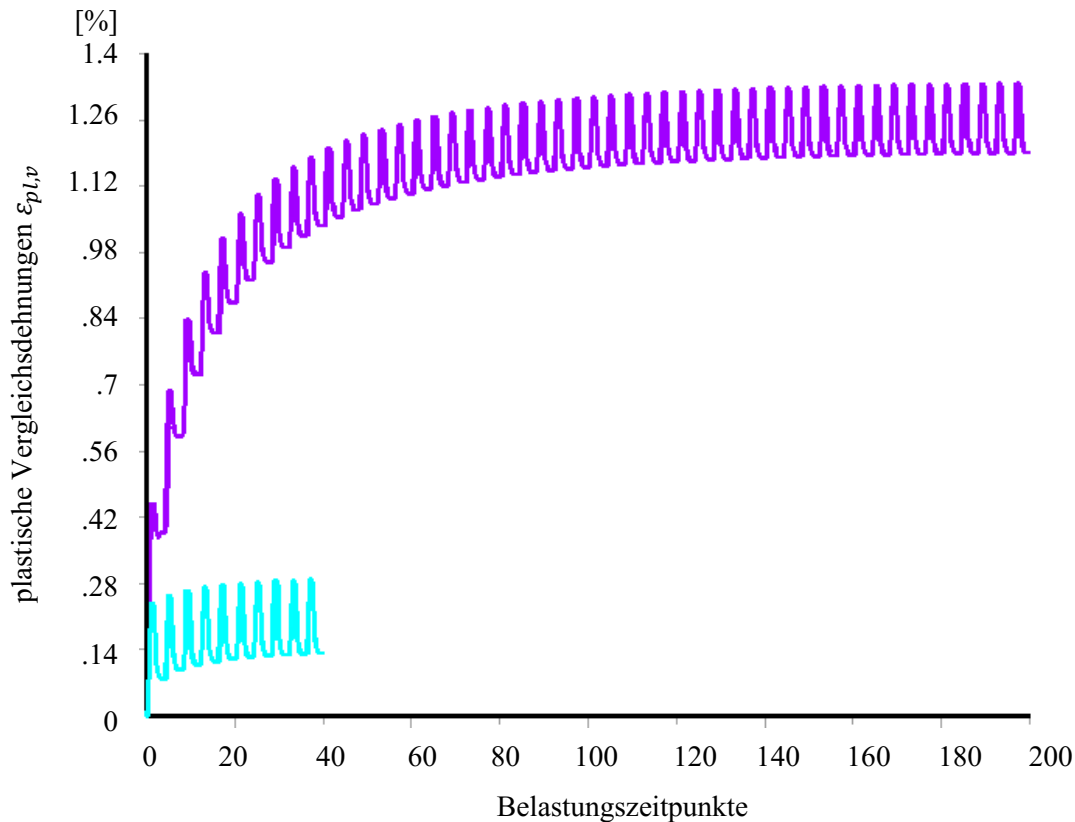


Abbildung 48: Plastische Vergleichsdehnungen $\varepsilon_{pl,v}$ am Ort der maximalen Beanspruchung.
lila: vollständig inkrementelle Berechnung mit 50 Belastungszyklen bis zum Einspielzustand.
cyan: reduzierte inkrementelle Berechnung mit 10 Belastungszyklen bis zum Einspielzustand

Abbildung 48 zeigt anschaulich, dass die Verwendung einer reduzierten Berechnung den rechnerischen Aufwand deutlich reduzieren kann. In diesem Fall wurden nur 20 % der Rechenleistung gegenüber einer vollständig inkrementellen Berechnung benötigt, um die elastisch-plastischen Dehnschwingbreiten zu ermitteln.

Die Informationen einer reduzierten Berechnung kann für die direkte Berechnung der akkumulierten Zustände weiterverwendet werden. Ein Vorschlag zur Berechnung der akkumulierten Zustände wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.3. Berechnung des akkumulierten Zustandes

Vorausgesetzt, die Schwingbreite ist durch die reduzierte Berechnung bestimmt worden, so lässt sich an jeder Stelle im Tragwerk die TIV berechnen. Hierfür werden die plastischen Dehnungen ε_i^{pl} , die elastisch-plastischen Spannungen σ_i' und die fiktiv-elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel}$ an jeder Stelle im Tragwerk benötigt. Stellt man Gleichung (23) nach den Restspannungen um und setzt diese, sowie die Rückspannungen aus Gleichung (19), in Gleichung (24) ein, kann man die TIV an jeder Stelle im Tragwerk berechnen mit

$$Y_i = -\sigma'_i + \sigma_i'^{fel} + \frac{2}{3} C \varepsilon_i^{pl}. \quad (86)$$

Durch die Berechnung der TIV an jeder Stelle im Tragwerk zu jedem Zeitpunkt einer reduzierten Berechnung kann auch die Schwingbreite der TIV ermittelt werden. In Abbildung 49 links sind die Änderungen der TIV schematisch im TIV-Raum dargestellt. Dort sind die drei reduziert-fiktiv-elastischen Lastfälle $\sigma_{Ar}'^{fel}$, $\sigma_{Br}'^{fel}$ und $\sigma_{Cr}'^{fel}$ dargestellt, zwischen denen sich die TIV in einer geschlossenen Trajektorie ändert. Die Spannungshysterese der TIV in einer reduzierten Berechnung ist nahezu identisch mit der in einer vollständig belasteten Berechnung, wie Abbildung 49 schematisch zeigt. In Tabelle 3 wird dies später an einem Beispiel gezeigt.

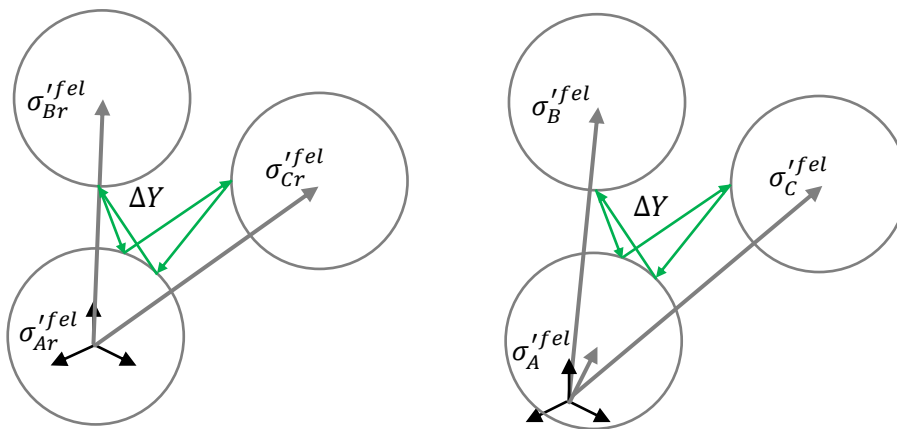


Abbildung 49: **links:** reduzierte Lastfälle A_r , B_r und C_r im TIV-Raum im eingespielten Zustand
rechts: Lastfall A , B und C im TIV-Raum im eingespielten Zustand.

Durch die Linearität der fiktiv-elastischen Berechnungen können im TIV-Raum die fiktiv-elastischen Spannungen beliebig superponiert werden. So ergibt sich, dass die fiktiv-elastischen Spannungsschwingbreiten bei der reduzierten Belastung und bei der vollständigen Belastung identisch sind. Dies führt dazu, dass die Anordnung der Mises-Kreise untereinander im TIV-Raum identisch ist, mit dem Unterschied, dass die fiktiv-elastischen Spannungsvektoren der reduzierten Berechnungen um den Vektor der Beanspruchungen aus den rein konstanten Belastungen verschoben sind.

Dieser Vektor wird als Translationsvektor T_i bezeichnet und ist von Natur aus ein deviatorischer Spannungsvektor. Eine wichtige Voraussetzung des Translationsvektors ist, dass seine Vergleichsspannung an jeder Stelle im Tragwerk unterhalb der Streckgrenze liegt. Führen die konstanten Belastungen zur Überschreitung der Streckgrenze, kann die elastische Translation der TIV-Schwingbreiten nicht durchgeführt werden, um die akkumulierten Zustände zu berechnen.

Häufig lässt sich diese Voraussetzung im Anlagenbereich von druckführenden Rohrleitungen und Druckkesseln einhalten, da eine konstante Belastung wie beispielsweise der Innendruck die

Streckgrenze nicht überschreiten darf, weil sonst ein Nachweis gegen das Überschreiten der Traglast nicht geführt werden kann.

Der Translationsvektor T_i entspricht den fiktiv-elastischen deviatorischen Spannungen, welche aus dem Lastfall mit konstanter Belastung entstehen. Diese konstanten Belastungen bleiben bei der reduzierten Berechnung unberücksichtigt. In dem Beispiel aus Abbildung 49 lässt sich der Translationsvektor wie folgt ausdrücken:

$$T_i = \sigma_{i,A}^{\prime fel}. \quad (87)$$

Aus diesem Zusammenhang ergibt sich, dass die Abschätzungen der TIV's für die akkumulierten Zustände aus den TIV's der reduzierten Zustände und den Translationsvektoren ermittelt werden können. Die TIV's für die einzelnen Belastungspunkte (A1, B, A2, C) der akkumulierten Zustände ergeben sich aus:

$$Y_{i,A1} = Y_{i,Ar1} + T_i \quad (88)$$

$$Y_{i,B} = Y_{i,Br} + T_i \quad (89)$$

$$Y_{i,A2} = Y_{i,Ar2} + T_i \quad (90)$$

$$Y_{i,C} = Y_{i,Cr} + T_i \quad (91)$$

Die in Gleichung (88) bis (91) dargestellten TIV-Berechnungen lassen sich für Stellen im Tragwerk anwenden, bei denen es zum Wechselpplastizieren zwischen mindestens zwei Lastextrema kommt. D.h. sobald es im Einspielzustand Änderungen in den plastischen Dehnungen an einer Stelle im Tragwerk gibt, gehört diese Stelle einer $V_{\Delta p}$ – Stelle an. Stellen im Tragwerk, die sich im Einspielzustand rein elastisch über den gesamten Belastungszyklus ändern, können nicht durch Gleichung (88) bis (91) berücksichtigt werden. Ein Vorgehen an elastisch verbleibenden Stellen ist bisher noch nicht untersucht und entwickelt worden.

Zur Berechnung der akkumulierten Zustände aus dem Translationsvektor und der Schwingbreite wird für jedes Lastextremum eine eigenständige meA durchgeführt. Bei Ein-Parameterbelastungen wurde die Berechnung für die akkumulierten Zustände durch die Berechnung des mittleren akkumulierten Zustandes und der Schwingbreite realisiert, wie es in Gleichung (51) und (52) gezeigt wurde. Dieses Vorgehen funktioniert bei Mehr-Parameterbelastungen nicht mehr, da ein mittlerer Zustand für mehr als zwei Lastextrema sich nicht mehr eindeutig definieren lässt. Aus diesem Grund werden die modifiziert-elastischen Analysen für jedes Lastextremum separat durchgeführt.

An Stellen im Tragwerk, bei denen der Beanspruchungswechsel im Einspielzustand sich elastisch verhält, wird vorgeschlagen, das Projektionsverfahren für elastische Einspielzustände zu verwenden, welches in Abschnitt 4.2 vorgestellt wurde. Diese Vorgehensweise ist jedoch noch nicht entwickelt und kann nicht praktisch angewendet werden.

Das zur Berechnung der Schwingbreite verwendete Beispiel der Torusscheibe kann, wegen der vorhandenen Zonen, bei denen es zum elastischen Wechselplastizieren kommt, nicht für die Berechnung der akkumulierten Zustände verwendet werden. Aus diesem Grund wurde ein Ein-Element-Modell konzipiert, bei dem ein vollständiges Wechselplastizieren zwischen jedem Belastungsextremum auftritt, welches im folgenden Abschnitt besprochen wird.

5.4. Berechnungsbeispiel für den akkumulierten Zustand

Das folgende Berechnungsbeispiel dient zur Veranschaulichung der oben beschriebenen Vorgehensweise. Hierfür wird ein Ein-Element-Modell verwendet, welches aus einem 8-Knoten-Element besteht, dem SOLID185 von ANSYS [9]. Das 3D-Element ist als Würfel erstellt und besitzt somit drei gleiche Kantenlängen. Die Randbedingungen sind derart eingestellt, dass in der xz -Ebene alle Knoten in y -Richtung festgehalten und in der yz -Ebene alle Knoten in die x -Richtung festgehalten werden. Zusätzlich wird der Knoten im Koordinatenursprung gegen eine Verschiebung in z -Richtung blockiert. Es wird lineare kinematische Verfestigung verwendet.

Das Ein-Element-Modell wird durch drei voneinander unabhängige Belastungen beansprucht. In Abbildung 50 sind die konstante Belastung F_x und die beiden zyklischen Belastungen τ_{zx} und u_y dargestellt. Durch die sich zyklisch ändernde weggesteuerte Belastung in y -Richtung, können durch die Randbedingungen und die zusätzlichen plastischen Dehnungen Zwängungen entstehen. Die Normalspannungen in z -Richtung sind immer null. Die Verwendung eines Solid-Elements ist notwendig, um eine unabhängige Belastung, und zwar die Schubspannung τ_{zx} , aufbringen zu können.

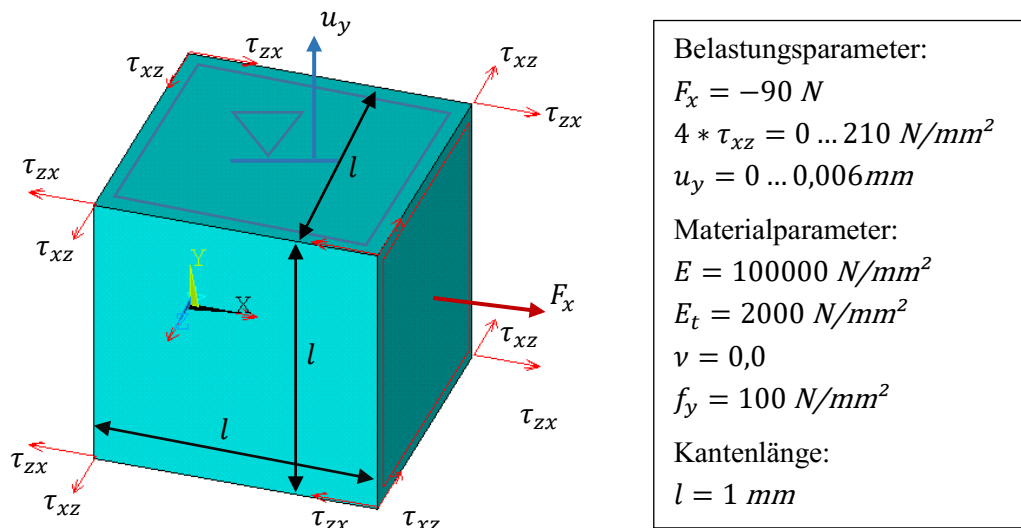


Abbildung 50: **links:** Ein-Element-Modell aus einem SOLID185 mit Lagerbedingungen u_x, u_y und u_z orthogonal zu den nicht sichtbaren Flächen.
rechts: verwendete Parameter.

In Abbildung 51 ist auf der rechten Seite das Belastungshistogramm dargestellt, welches den Belastungsverlauf einer vollständig inkrementellen Berechnung zeigt. Die Verläufe der plastischen Dehnungen werden in x-Richtung und die plastischen Schubverzerrungen in xz-Richtung präsentiert. Für dieses Beispiel werden etwa zehn Belastungszyklen benötigt, bis der Einspielzustand erreicht ist. Betrachtet man die Ergebnisse der weggesteuerten zyklischen Belastung isoliert, also durch eine Ein-Parameterbelastung, so werden viermal so viele Belastungszyklen bis zum Einspielzustand benötigt.

Das Hinzunehmen der zyklischen Schubbelastung führt bei diesem Beispiel zu einem schnelleren Erreichen des Einspielzustandes. Es kann jedoch auch mit jeder zusätzlich berücksichtigten zyklischen Belastung der Aufwand der inkrementellen Einspieluntersuchungen zunehmen, wie bereits in Kapitel 3 nachgewiesen wurde.

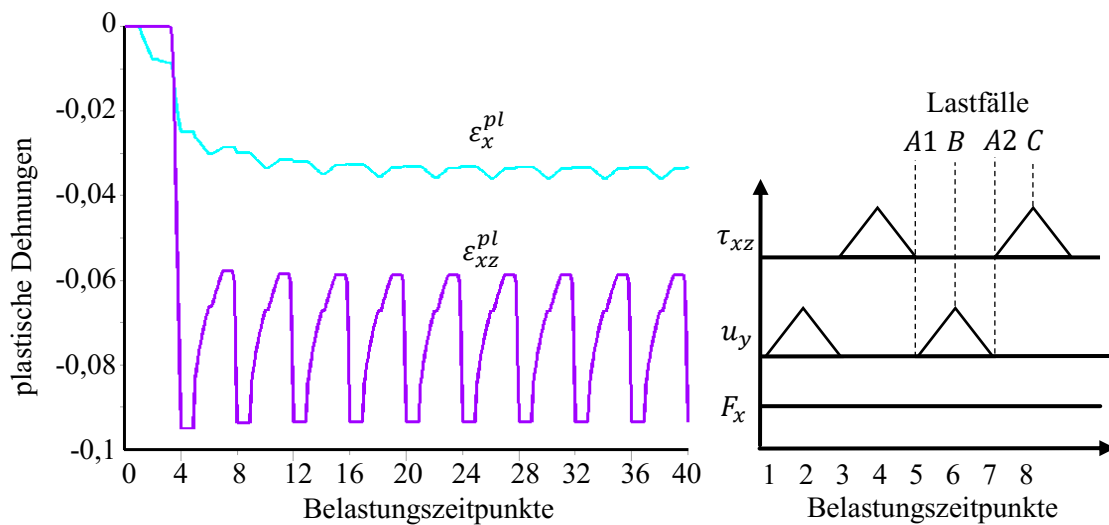


Abbildung 51: **links:** Verlauf der plastischen Dehnungen in x-Richtung (cyan) und in xz-Schubrichtung (magenta).
rechts: Belastungshistogramm

Ziel ist es nun, den Berechnungsaufwand durch das Verwenden einer reduzierten Berechnung und einer anschließenden Anwendung der VFZT deutlich gegenüber einer inkrementellen Berechnung mit allen Belastungen bis zum Einspielzustand zu reduzieren. In einem ersten Schritt wird, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, eine inkrementelle reduzierte Berechnung durchgeführt. Die Änderung der Ergebnisse im zweiten Belastungszyklus sind eine sehr gute Näherung der Ergebnisse einer vollständig belasteten Berechnung im Einspielzustand.

In Tabelle 3 werden die Ergebnisse für die Schwingbreiten der beiden Berechnungen gegenübergestellt. Es werden in x-Richtung die totalen Dehnungen ausgewertet, da die Spannungen infolge der Belastung von vornherein bekannt sind. Das gleiche gilt für die xz-Richtung, in der die totalen Schubverzerrungen ausgewertet werden. In y-Richtung werden jedoch die Spannungen ausgewertet, da die Dehnungen bereits durch die Auflageverschiebung u_y bekannt sind.

Tabelle 3: Spannungs- und Dehnungswechsel zwischen den Lastextrema der reduzierten Berechnung (redu) nach 2 Belastungszyklen und der vollständigen Berechnung (voll) nach 10 Belastungszyklen ($\Delta\sigma_y$ in N/mm²)

		$\overline{A1B}$	$\overline{BA1}$	$\overline{A2C}$	$\overline{CA2}$
$\Delta\epsilon_x^{to}$	redu	2,6406E-03	-2,2862E-03	-3,5400E-04	0
	voll	2,6405E-03	-2,2865E-03	-3,5389E-04	0
$\Delta\sigma_y$	redu	-71,894	142,76	-70,688	0
	voll	-71,883	142,7	-70,667	0
$\Delta\epsilon_{xz}^{to}$	redu	-1,7652E-02	-8,5751E-03	3,7130E-02	-1,0907E-02
	voll	-1,7679E-02	-8,5671E-03	3,7150E-02	-1,0907E-02

Der Vergleich zwischen reduzierter und vollständiger Berechnung zeigt derart gute Übereinstimmungen, dass von nahezu exakten Ergebnissen gesprochen werden kann. Die hohe Qualität der Ergebnisse der Schwingbreite ist eine Voraussetzung, die akkumulierten Zustände möglichst exakt bestimmen zu können. Die Qualität der Schwingbreiten-Ergebnisse einer reduzierten Berechnung können jedoch in Abhängigkeit vom Modell und der Belastung variieren. Das bedeutet, es können mehr als zwei Belastungszyklen notwendig werden, da die plastische Dehnungsakkumulation eventuell noch nicht abgeschlossen ist.

Nachdem die Schwingbreite mit sehr guten Ergebnissen abgeschätzt ist, wird mit Hilfe der fiktiv-elastischen Spannungen, der elastisch-plastischen Spannungen und der plastischen Dehnungen die reduzierte TIV berechnet, wie es in Gleichung (86) zur Berechnung einer TIV aus einer inkrementellen Berechnung vorgeschlagen wurde.

Aus der reduzierten TIV wird nun die TIV für den akkumulierten Zustand durch Superposition mit dem Translationsvektor bestimmt, wie es in Gleichung (88) bis (91) angeführt ist. Der Translationsvektor ergibt sich in diesem Beispiel aus den Spannungen der fiktiv-elastischen Berechnungen bei dem Lastextremum **A1** oder **A2**. Aufgrund der verwendeten Querkontraktion von null lautet der Translationsvektor wie folgt.

$$T_i = \begin{pmatrix} -60 \\ 30 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N/mm}^2 \quad (92)$$

Zur Berechnung der akkumulierten Zustände wird in diesem Beispiel nur eine modifiziert-elastische Analyse pro Belastungsextremum benötigt. Die Ergebnisse können an dieser Stelle nicht verbessert werden, da es in diesem Ein-Element-Modell nicht zu örtlichen Spannungsumlagerungen kommen kann. Die Ergebnisse der Restzustände werden mit den fiktiv-elastischen Zuständen superponiert und die Ergebnisse sind wie gewohnt die elastisch-plastischen Zustände, welche in Tabelle 4 mit den Vergleichsergebnissen der vollständig inkrementellen Berechnung gegenübergestellt sind. Auch bei den Ergebnissen der akkumulierten Zustände sind kaum nennenswerte Differenzen zwischen der Vereinfachten Fließzonentheorie und der inkrementellen Berechnung erkennbar.

Der rechnerische Vorteil der Verwendung einer reduzierten inkrementellen Berechnung mit anschließender VFZT für die akkumulierten Zustände gegenüber einer vollständig inkrementellen Berechnung liegt in diesem Beispiel bei etwas unter 80% Einsparung des Berechnungsaufwandes. Dies kann man aus dem Verhältnis der notwendigen zehn Belastungszyklen der vollständigen Berechnung zu den zwei Belastungszyklen der reduzierten Berechnung plus der vier modifiziert-elastischen Analysen abschätzen.

Tabelle 4: Vergleich der Spannungen und Dehnungen im Einspielzustand an den Punkten der Belastungsextrema (A1, B, A2, C) zwischen Vereinfachter Fließzonentheorie und inkrementeller Analyse

		A1	B	A2	C
$\epsilon_{to,x}$	VFZT	-3,4196E-02	-3,6839E-02	-3,4550E-02	-3,4197E-02
	inkA	-3,4196E-02	-3,6836E-02	-3,4550E-02	-3,4196E-02
σ_y	VFZT	-44,1	27,798	-144,97	-44,336
	inkA	-44,13	27,753	-144,95	-44,281
$\epsilon_{to,xz}$	VFZT	-8,4870E-02	-6,7182E-02	-5,8621E-02	-9,5780E-02
	inkA	-8,4870E-02	-6,7219E-02	-5,8644E-02	-9,5778E-02

Wie oben beschrieben, bietet im Falle einer Mehr-Parameterbelastung bei plastischem Einspielen das Durchführen einer reduzierten inkrementellen Analyse mit anschließender Berechnung der akkumulierten Zustände durch die VFZT einen deutlichen Berechnungsvorteil gegenüber vollständig inkrementellen Berechnungen. Diese Vorgehensweise kann jedoch nicht ohne weiteres auf komplexe Geometrien übertragen werden. Zum einen können die Berechnungen für die Schwingbreiten durch eine reduzierte Berechnung deutlich mehr als zwei Belastungszyklen benötigen, wodurch die Effizienz der Methode schwindet. Eine hohe Qualität der Schwingbreite ist jedoch erforderlich, da die Ergebnisse der Schwingbreite die Ergebnisse der akkumulierten Zustände maßgeblich beeinflussen. Zum anderen ist das Zusammenwirken von Zonen, bei denen es zum Wechselpplastizieren kommt und Zonen, bei denen die plastischen Dehnungen im Einspielzustand unveränderlich bleiben, bisher noch unerforscht. Es ist vorstellbar, dass in Zonen mit konstanten plastischen Dehnungen im Einspielzustand der gleiche Ansatz wie in Kapitel 4 vorgeschlagen, verwendet werden kann. Dies müsste in einer weiteren Arbeit untersucht werden. Gelingt es diesen Ansatz zu implementieren, wäre eine Anwendung an komplexen Randwertproblemen denkbar.

6. Sukzessive Berechnungen

Die sukzessiven Berechnungen sind entwickelt worden, um eine Interaktion von geometrischer Nichtlinearität und Materialnichtlinearität mit der VFZT zu ermöglichen. Bei der Entwicklung sind jedoch weitere Arbeitsbereiche entdeckt worden, die mit Hilfe der sukzessiven Berechnungen erschlossen werden könnten. Somit könnte die in diesem Kapitel vorgestellte Vorgehensweise den Grundstein für weitere Entwicklungen mit der VFZT ermöglichen.

6.1. Anwendungsmöglichkeiten der sukzessiven Berechnungen

Bei der inkrementellen Berechnung von elastisch-plastischen Beanspruchungen infolge monotoner Belastung wird das Belastungsniveau sukzessiv angehoben und dadurch der Belastungspfad nachvollzogen. Bei radialen Belastungen treten Spannungsänderungen stets in der gleichen Richtung auf und die TIV ist bei der VFZT mit den fiktiv-elastischen Analysen bekannt. Treten jedoch nichtradiale Belastungen auf, so kommt es zu direktionalen Spannungsumlagerungen, welche durch eine Zerlegung des Lastpfades geeignet erfasst werden. In ANSYS geschieht dies durch Zerlegen der Lastschritte (Loadsteps) in Zwischenschritte (Substeps) [9]. Da die VFZT als Gleichungslöser für elastisch-plastische Beanspruchungszustände angesehen werden kann, lässt sich das Vorgehen der sukzessiven Laststeigerung auch auf die VFZT übertragen.

Die VFZT – in dem bisherigen Forschungsstand – kann diese sukzessive Abarbeitung von Belastungsschritten nicht berücksichtigen, weil sie den elastisch-plastischen Gleichgewichtszustand am vollständigen Belastungsniveau bestimmt. Es können jedoch plastische Dehnungen mit der VFZT ermittelt werden und bei einem sich ändernden Belastungsniveau diese berücksichtigt und angepasst werden. Im Folgenden wird eine Vorgehensweise vorgestellt, die es ermöglicht, sukzessive Berechnungen durchzuführen. Auf dieser Grundlage ergibt sich eine Reihe an Möglichkeiten, den Anwendungsspielraum für die VFZT zu erweitern.

Die Anwendung von sukzessiven Berechnungen eröffnet die Möglichkeit, die Lastpfade zu zerlegen und somit die Ergebnisqualität zu verbessern. Darüber hinaus können evtl. sukzessive Berechnungen einen Beitrag zur Berechnung von plastischen Einspielzuständen bei Mehr-Parameterbelastungen liefern, da diese Aufgabenstellung für 5-D Spannungszustände noch nicht vollständig gelöst ist. Weitere Anwendungsbereiche für sukzessive Berechnungen sind die Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten und Strukturnichtlinearitäten. Eine Form der geometrischen Nichtlinearität ist die Theorie II. Ordnung, die das Gleichgewicht an der verformten Struktur herstellt. Für die Interaktion zwischen Materialnichtlinearität und Theorie II. Ordnung wird die VFZT durch sukzessive Berechnungen in Abschnitt 6.3 erweitert und angewandt.

6.2. Implementierung und Anwendung

Damit sukzessive Berechnungen möglich sind, wird eine Geschichtsvariable benötigt, die den Verlauf der nichtlinearen Zustandsgrößen über die Belastungsgeschichte beschreiben kann. Hierfür werden die plastischen Dehnungen verwendet, welche auch bei der inkrementellen Berechnung als Geschichtsvariable fungieren. Es kommen hierfür z.B. das Spannungskomplement der plastischen Dehnungen – die Rückspannungen – und die Restspannungen in Frage. Nach verschiedenen Untersuchungen hat sich die Verwendung von plastischen Dehnungen als Geschichtsvariable aufgrund von Vorzügen in der praktischen Umsetzung in ANSYS durchgesetzt.

Die Verwendung der Restspannungen als Geschichtsvariable hat sich als ungeeignet herausgestellt. Im Gegensatz zu den Restspannungen lassen sich die plastischen Dehnungen als Geschichtsvariable verwenden, da sie verhältnismäßig einfach als Eingangsgrößen in der VFZT implementiert werden können. Im Folgenden wird die Vorgehensweise vorgestellt, die plastischen Dehnungen bei den fiktiv-elastischen Berechnungen als zusätzliche Belastungen zu berücksichtigen.

Fiktiv-elastische Berechnungen mit plastischen Anfangsdehnungen sind weiterhin linear-elastische Analysen und werden wegen der Berücksichtigung der plastischen Dehnungen im Folgenden als Update-Berechnungen bezeichnet. In den Update-Berechnungen werden Update-Spannungen ermittelt, die als Eingangsgrößen anstelle der fiktiv-elastischen Spannungen für die VFZT verwendet werden. Die Bezeichnung Update-Spannungen ist aus dem Terminus der inkrementellen Vorgehensweise übernommen worden. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich eine dritte Schreibweise für die elastisch-plastischen Gleichgewichtszustände. Die erste Darstellung ergibt sich aus dem inkrementellen Berechnungsverfahren.

$$[\mathbf{k}^{el-pl}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (93)$$

Beim inkrementellen Berechnungsverfahren werden die plastischen Dehnungen zwar als Geschichtsvariable verwendet, aber der elastisch-plastische Gleichgewichtszustand wird mit einer angepassten Steifigkeitsmatrix berechnet. Es stehen also der Verschiebungsvektor $\{\mathbf{u}\}$ und der Kraftvektor $\{\mathbf{f}\}$ über die elastisch-plastische Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{k}^{el-pl}]$ in Verbindung.

Eine weitere Schreibweise für den elastisch-plastischen Zustand ergibt sich aus der VFZT, bei der die Gleichgewichtszustände für den fiktiv-elastischen Zustand Gleichung (94) und für den Restzustand Gleichung (95) getrennt ermittelt werden.

$$[\mathbf{k}^{fel}] \cdot \{\mathbf{u}^{fel}\} = \{\mathbf{f}^{fel}\} \quad (94)$$

$$[\mathbf{k}^{mod}] \cdot \{\mathbf{u}^{meA}\} = \{\mathbf{f}^{meA}\} \quad (95)$$

Bei der Berechnung des Restzustandes stehen der Verschiebungsvektor $\{\mathbf{u}^{meA}\}$ und der Kraftvektor $\{\mathbf{f}^{meA}\}$ über die modifiziert-elastische Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{k}^{mod}]$ in Verbindung. Bei den modifiziert-elastischen Analysen wirken ausschließlich die Anfangsdehnungen ε_0 als Belastung und da die Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{k}^{mod}]$ bekannt ist, kann das lineare Gleichungssystem direkt gelöst werden. Das elastisch-plastische Ergebnis wird aus der Superposition des Restzustandes und des fiktiv-elastischen Zustandes berechnet.

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}^{fel}\} + \{\mathbf{u}^{meA}\} \quad (96)$$

$$\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}^{fel}\} + \{\mathbf{f}^{meA}\} \quad (97)$$

Die bisher nicht verwendete Schreibweise für die Update-Berechnungen lautet wie folgt.

$$[\mathbf{k}^{fel}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} + \{\mathbf{f}^{pl}\} \quad (98)$$

Hierbei wird die fiktiv-elastische Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{k}^{fel}]$ verwendet, um einen Zusammenhang zwischen dem elastisch-plastischen Verschiebungsvektor $\{\mathbf{u}\}$, dem elastisch-plastischen Kraftvektor $\{\mathbf{f}\}$ und dem plastischen Kraftvektor $\{\mathbf{f}^{pl}\}$ zu bekommen. Der plastische Kraftvektor ergibt sich aus den plastischen Anfangsdehnungen, welche als zusätzliche Belastung im System wirken. Damit Gleichung (93) und Gleichung (98) die gleichen Werte für den elastisch-plastischen Kraft- und Verschiebungsvektor im elastisch-plastischen Zustand abbilden können, obwohl in beiden Gleichungssystemen eine unterschiedliche Steifigkeit verwendet wird, ist der plastische Kraftvektor in Gleichung (98) eingefügt worden. Damit wird das Verwenden der fiktiv-elastischen Steifigkeitsmatrix in Gleichung (98) gegenüber der elastisch-plastischen Steifigkeitsmatrix in Gleichung (93) ausgeglichen. D.h. die Verwendung der fiktiv-elastischen Steifigkeitsmatrix mit dem plastischen Kraftvektor kann als Äquivalent zur elastisch-plastischen Steifigkeitsmatrix angesehen werden, wie folgende Gleichung zeigt.

$$d\varepsilon_i = (E_{ij})^{-1} d\sigma_j + d\varepsilon_{i,pl} \quad (99)$$

In der Regel sind die plastischen Anfangsdehnungen nicht von vornherein bekannt, weshalb Gleichung (98) zur Lösung von elastisch-plastischen Problemstellungen etwas ungewöhnlich erscheint. Diese Formulierung dient dem Ziel, sukzessive Berechnungen im Kontext der VFZT durchführen zu können. Es wäre theoretisch auch möglich, aus dem elastisch-plastischen Zustand der VFZT die elastisch-plastische Steifigkeitsmatrix zu berechnen und für die Update-Berechnungen zu verwenden. Somit könnte für die Update-Berechnungen direkt auf Gleichung (93) zurückgegriffen werden.

Die Vorgehensweise aus Gleichung (98) bietet eine einfache Möglichkeit, plastische Vordehnungen innerhalb der VFZT berücksichtigen zu können. Die plastischen Anfangsdehnungen können aus einem vorherigen Zwischenschritt einer monotonen Belastungssteigerung oder aus einer vorhergehenden Iteration mit Strukturnichtlinearitäten herrühren.

6.2.1. Projektionsvorschrift für monotone Belastungsänderungen

Es gibt grundsätzlich zwei Vorgehensweisen, die Projektionsvorschrift zur Abschätzung der TIV für die Zwischenschritte einer monotonen Belastungssteigerung zu formulieren. Eine Möglichkeit ist, die bisherige Projektionsvorschrift aus Abschnitt 2.1.4 zu verwenden und somit den Projektionsalgorithmus mit den Beanspruchungen des Zwischenschritts durchzuführen. Die dadurch ermittelten Restzustände lassen sich mit den entsprechenden Zuständen der fiktiv-elastischen Berechnungen superponieren.

Eine andere Möglichkeit ist, das Inkrement der TIV abzuschätzen. Das bedeutet, es wird die TIV-Änderung von einem Belastungszustand zum nächsten abgeschätzt. Als Ergebnis werden

dann die Restspannungsänderungen ermittelt, die mit den Restzuständen der vorausgegangenen Lastschritte summiert werden müssen, um den Restzustand des gegenwärtig betrachteten Belastungszustandes zu erhalten.

Verschiedene Versuche haben gezeigt, dass die VFZT bei der direkten Projektion zu immer dem gleichen Ergebnis konvergiert, unabhängig vom Ursprung der Projektion. Das bedeutet, dass eine direkte Projektion für sukzessive Berechnungen bei monotoner Belastungssteigerung nicht verwendet werden kann. Beim Verwenden eines TIV-Inkrementes können plastische Dehnungen aus vorherigen Berechnungen korrekt berücksichtigt werden. Dies führt jedoch zu einer Reihe an Umformulierungen gegenüber den in Kapitel 2 gegebenen Gleichungen und Aussagen.

Zunächst wird die inkrementelle Aktualisierung der Geschichtsvariable – die plastischen Dehnungen – vorgestellt. In Gleichung (100) bezeichnet (n) den Zeitpunkt eines Berechnungsschrittes.

$$\varepsilon^{pl(n+1)} = \varepsilon^{pl(n)} + d\varepsilon^{pl(n)} \quad (100)$$

Es wird bei der Durchführung der VFZT also immer ein Inkrement d berechnet. Somit ist das Ergebnis der modifiziert-elastischen Analysen ein Restspannungsinkrement $d\rho$. Die aktualisierten Restspannungen ergeben sich somit aus:

$$\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} + d\rho^{(n)}. \quad (101)$$

Die modifiziert-elastische Werkstoffbeziehung aus Gleichung (27) für den Restzustand ergibt sich in inkrementeller Schreibweise wie folgt.

$$d\varepsilon_i^* = (E_{ij}^*)^{-1} d\rho_j + d\varepsilon_{i,0} \quad (102)$$

Zur Berechnung der inkrementellen Anfangsdehnungen $d\varepsilon_{i,0}$ wird die inkrementelle TIV benötigt.

$$d\varepsilon_{i,0} = \frac{3}{2C} dY_i \quad (103)$$

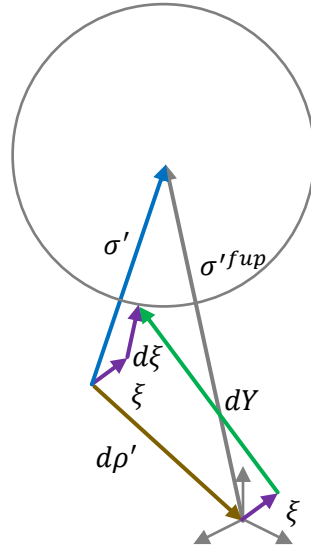


Abbildung 52: Projektionsverfahren zur Abschätzung des TIV-Inkrement im TIV-Raum

Zur Abschätzung der inkrementellen TIV dY_i für monotone Belastungsänderungen müssen die Spannungsbeziehungen im TIV-Raum neu formuliert werden. Durch das inkrementelle Vorgehen ersetzen die fiktiv-elastischen Update-Spannungen $\sigma_i'^{fup}$ die fiktiv-elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel}$ im TIV-Raum. Aus diesem Grund ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den elastisch-plastischen Spannungen σ_i' und den Update-Spannungen $\sigma_i'^{fup}$ über das Inkrement der Restspannungen $d\rho_i'$.

$$\sigma_i' = \sigma_i'^{fup} + d\rho_i' \quad (104)$$

Der Vektor des TIV-Inkrement dY beginnt bei ξ_i im TIV-Raum und wird dann von $(-d\rho_i' + \xi_i)$ auf den Mises-Kreis projiziert. Leider wird die Darstellung im TIV-Raum bei der inkrementellen Vorgehensweise der VFZT etwas unübersichtlich. Deshalb wird folgende Herleitung der Projektionsvorschrift verwendet.

Entsprechend Gleichung (24) kann das TIV-Inkrement auch wie folgt formuliert werden.

$$dY_i = d\xi_i - d\rho_i' \quad (105)$$

Das Rückspannungsincrement $d\xi_i$ ergibt sich aus $(\sigma_i' - \xi_i)$. Wobei $(\sigma_i' - \xi_i)_v$ die Vergleichsspannung der Vektorsubtraktion beschreibt.

$$d\xi_i = (\sigma_i' - \xi_i) \left(1 - \frac{f_y}{(\sigma_i' - \xi_i)_v} \right) \quad (106)$$

Wird Gleichung (106) in Gleichung (105) eingesetzt, ergibt sich die Projektionsgleichung für das TIV-Inkrement.

$$dY_i = (\sigma'_i - \xi_i) \left(1 - \frac{f_y}{(\sigma'_i - \xi_i)_v} \right) - d\rho'_i \quad (107)$$

Mit dem vorhandenen TIV-Inkrement kann das Inkrement der Anfangsdehnungen und mit der entsprechenden meA das Inkrement des Restspannungsfeldes berechnet und iterativ verbessert werden. Lässt sich das TIV-Inkrement nicht mehr besser abschätzen, ist für diesen Lastschritt der konvergente Zustand erreicht.

6.2.2. Ablauf der sukzessiven Vorgehensweise (ifup)

Die inkrementelle Vorgehensweise der sukzessiven Berechnung wird später auch noch für die Berechnung nach Theorie II. Ordnung angewandt. Hierbei wird die Belastung nicht sukzessiv gesteigert, sondern es werden durch ein iteratives Vorgehen bei gleichbleibenden Belastungsniveaus, die sich infolge Theorie II. Ordnung ändernden Beanspruchungen berechnet. Deshalb wird diese Methode präziser als ifup (engl.: iterative fictitious update procedure) bezeichnet.

Das allgemeine Ablaufschema der VFZT für monotone Belastungssteigerungen aus Abbildung 16 ist in Abbildung 53 für Berechnungen mit der ifup-Methode erweitert worden. Neu hinzugekommen sind die Update-Berechnungen, welche die fiktiv-elastischen Berechnungen ersetzen. Die Update-Spannungen sind die Eingangsgrößen der VFZT, welche sich über die gesamten meA's eines Lastschrittes nicht ändern. In der ersten Update-Berechnung sind noch keine plastischen Dehnungen bekannt, weshalb die Update-Spannungen den fiktiv-elastischen Spannungen entsprechen. Die Abläufe innerhalb der VFZT sind entsprechend Unterabschnitt 6.2.1 angepasst.

Die Einteilung in elastische und plastische Zonen auf Grundlage der Vergleichsspannungen und der Streckgrenze bleibt unverändert im Ablauf der ifup-Methode. Ebenfalls unverändert bleibt das Modifizieren der elastischen Materialparameter in den plastischen Zonen und das Entfernen aller Belastungen.

Im Post-Prozessor der VFZT werden in der letzten meA eines Lastschrittes die plastischen Dehnungen entsprechend Gleichung (100) aktualisiert. Die plastischen Dehnungen werden an die Update-Berechnung übertragen und als Anfangsdehnungen berücksichtigt. Die Anzahl der modifiziert-elastischen Berechnungen wird vorgegeben und kann bei moderaten direktionalen Umlagerungen mit 7-10 meA's eingestellt werden.

Eine sukzessive Iteration fasst die Update-Berechnung und eine vordefinierte Anzahl an meA's zusammen. Die Anzahl an sukzessiven Iterationen ist abhängig von der Anzahl der vordefinierten Zwischenschritte. D.h. bei monotoner Belastungssteigerung hängt die Anzahl der sukzessiven Iterationen von der vorgegebenen Anzahl der Lastinkremente ab. Bei

Aufgabenstellungen mit zusätzlicher Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung hängt die Anzahl der Iterationen auch von dem Konvergenzverhalten der Update-Berechnungen ab.

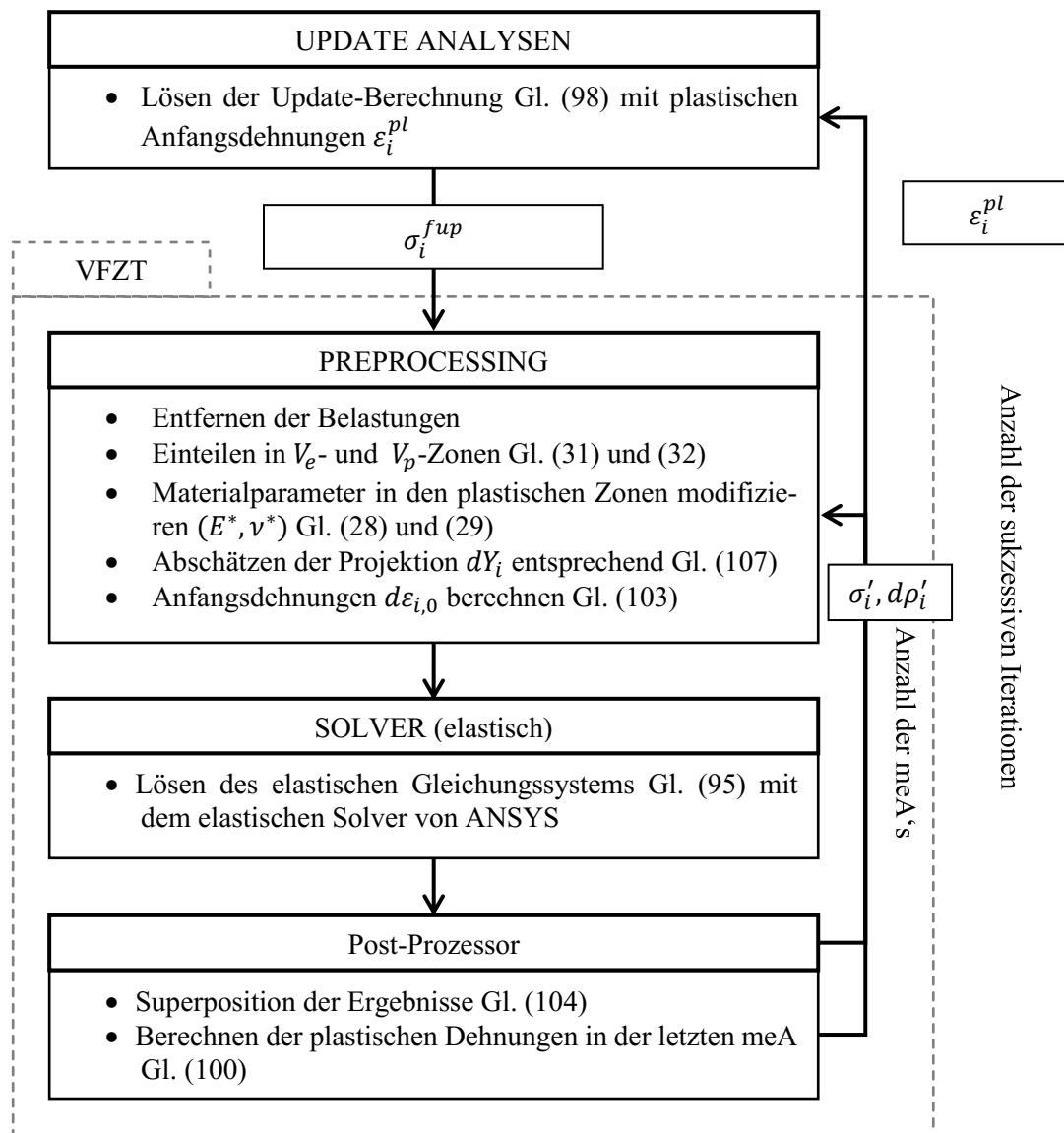


Abbildung 53: Allgemeines Ablaufschema der ifup-Methode bei monotonen Belastungssteigerungen

6.2.3. Anwendung bei ausgeprägter Lastpfadabhängigkeit

Bei elastisch-plastischen Berechnungen kommt es neben den örtlichen auch zu direktionalen Spannungsumlagerungen. Damit sind signifikante Unterschiede in den Richtungen der Vektoren zwischen fiktiv-elastischer Spannung und elastisch-plastischer Spannung gemeint. Dabei kann es auch direktionale Unterschiede zwischen elastisch-plastischer Spannung und der Rückspannung geben, wie in Abbildung 14 schematisch dargestellt wurde. In diesem Fall nimmt die Qualität der Näherungslösung der VFZT ab.

Die Ergebnisse der VFZT sind mit Punkten in Abbildung 55 überlagert. Die Qualität der VFZT-Ergebnisse zeigt, dass der Näherungscharakter der VFZT von der Diskretisierung des Lastpfades abhängt. Für monotone Belastungsänderungen ist die Zerlegung des Lastpfades eindeutig definiert. Das Belastungsniveau aller Belastungen wird entsprechend der Zerteilung angepasst. Bei zyklischen Belastungen liegt noch Forschungsbedarf vor. So ist evtl. am sinnvollsten, dass konstante Belastungen bei vollständigem Belastungsniveau anliegen und nur die zyklischen Belastungen entsprechend der Lastpfadzerlegung sukzessiv angepasst und erhöht werden.

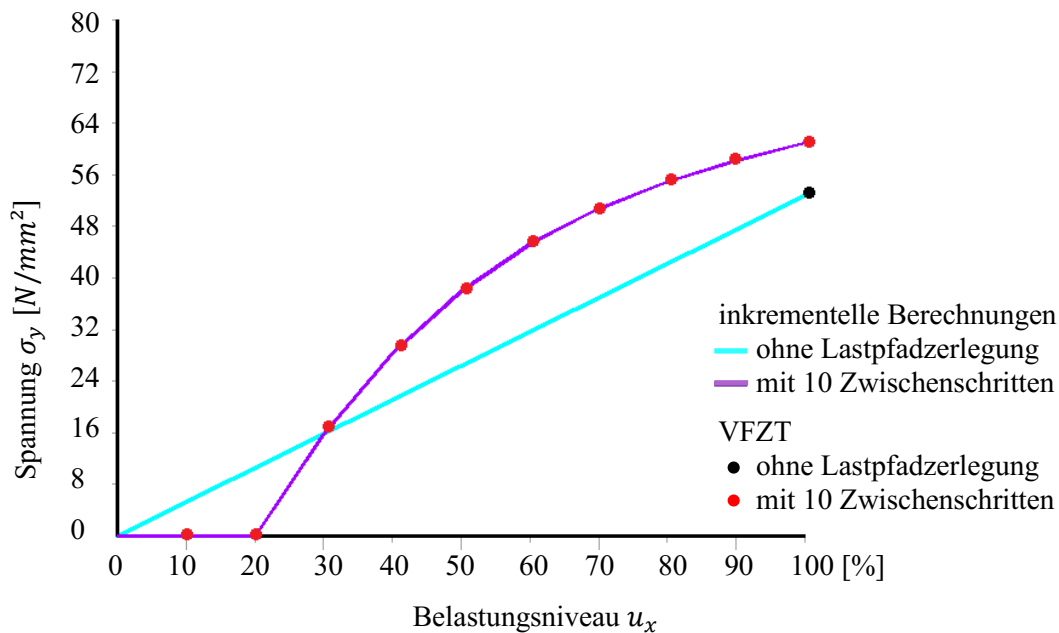


Abbildung 55: Verlauf der Spannungen σ_y bei unterschiedlichen Lastpfadzerlegungen einer monotonen Belastungsänderung

In Tabelle 5 sind die Spannungen in y-Richtung und der Berechnungsaufwand dargestellt. Der Berechnungsaufwand wird in Gleichgewichtssiterationen angegeben. Mit der Anzahl der Gleichgewichtssiterationen lässt sich der Berechnungsaufwand zwischen inkrementeller Berechnung und der VFZT geeignet vergleichen, wobei der Aufwand für Post- und Pre-Prozesse vernachlässigt wird. Die Ergebnisse aus Tabelle 5 beziehen sich auf monotone Belastungsänderungen und zeigen, dass die VFZT in Fällen mit erheblichen direktionalen Umlagerungen deutlich mehr meA's als gewöhnlich benötigt. Desweiterm ist die VFZT bei monotonen Belastungsänderungen in Bezug auf den Berechnungsaufwand nicht konkurrenzfähig gegenüber der inkrementellen Vorgehensweise.

Die inkrementelle Vorgehensweise verwendet eine Reihe an numerischen Verfahren, welche die Effizienz der Methode deutlich verbessert. So wird zur Abschätzung der elastisch-plastischen Steifigkeit üblicherweise das effiziente Newton-Raphson-Verfahren verwendet und bei monotonen Belastungsänderungen kommt das Prädiktor-Verfahren zum Einsatz. In Tabelle 5 werden für

10 Lastschritte nur 16 Gleichgewichtsiterationen benötigt, d.h. in vier Lastschritten ist die Vorhersage des Prädiktors derart gut, dass keine zweite Gleichgewichtsiteration benötigt wird.

Das Ziel ist dabei nicht, die VFZT für monotone Belastungsänderung zu optimieren, sondern den Berechnungsaufwand bei zyklischen Belastungen weiter zu verbessern. Dabei können die oben genannten Techniken bedeutende Impulse geben.

Tabelle 5 zeigt auch, dass die inkrementelle Berechnung ebenfalls 100 Zwischenschritte benötigt, bis die Ergebnisse unverändert bleiben, sodass bei einer weiteren Zerlegung des Lastpfades keine Änderung der Ergebnisse auftritt. Das bedeutet, dass sowohl die VFZT als auch die inkrementelle Vorgehensweise bei ausgeprägten direktionalen Umlagerungen eine ausreichende Zerlegung des Lastpfades benötigen.

Tabelle 5: Spannungen in y-Richtung und Anzahl der verwendeten Gleichgewichtsiterationen am Modell der direktionalen Umlagerungen

Lastschrittanzahl	Methode	σ_y [N/mm²]	Gleichgewichtsbed.
1	VFZT	52,73	100
	inkA	52,76	3
10	VFZT	60,92	1000
	inkA	60,93	16
100	inkA	60,95	100

Bei der Zerlegung des Lastpfades mit 10 Zwischenschritten wurden für die VFZT in jedem Zwischenschritt 100 meA's voreingestellt. Ob tatsächlich für jeden Belastungsschritt derart viele meA's benötigt werden, ist unklar und wurde nicht genau untersucht. Für eine solche Untersuchung müsste ein Konvergenzkriterium zur Verfügung stehen, mit dessen Hilfe ein automatischer Abbruch nach Erreichen des vorgegebenen Konvergenzkriteriums durchgeführt wird. Ein solches Konvergenzkriterium würde die VFZT theoretisch nicht effizienter gestalten, hätte für eine praktische Anwendung jedoch deutliche Vorteile. Die etablierten Konvergenzkriterien der inkrementellen Berechnungsverfahren auf Grundlage der Knotenmomente, Knotenkräfte, Auflagerverschiebungen und Auflagerverdrehungen würden sich auch für die VFZT anbieten.

6.3. Theorie II. Ordnung und Strukturnichtlinearität

Unter Theorie II. Ordnung versteht man, dass die Steifigkeit eines Tragwerks von der Belastung abhängt. Es wird das Gleichgewicht mit den Belastungen an der verformten Struktur hergestellt. Treten zusätzlich überelastische Spannungen auf, interagieren geometrische Nichtlinearität und Materialnichtlinearitäten. Eine kurze Zusammenfassung der Meilensteine und der Forschungsstand zur Interaktion von Strukturnichtlinearität oder geometrischer Nichtlinearität mit

Materialnichtlinearität ist bereits in [101, 102] beschrieben worden und wird im folgenden Unterabschnitt erläutert.

6.3.1. Stand der Forschung

Die erste umfangreichere numerische Untersuchungen von Effekten aus Theorie II. Ordnung in Finite-Element-Umgebungen wurden in [103–108] beschrieben. In diesen Arbeiten wurde der Grundstein für die inkrementellen Berechnungen im Kontext von geometrischer Nichtlinearität gelegt. Erste Veröffentlichungen über elastisch-plastisches Verhalten an komplexeren Tragwerken und deren Auswirkungen auf geometrischen Nichtlinearitäten folgten darauf in [109–111].

Aufgrund des zusätzlichen numerischen Aufwandes ist die Anwendung von direkten Methoden von einigen Wissenschaftlern untersucht worden. So gibt es direkte Methoden für die Traglastanalyse [112–114], die in ihren Lösungsverfahren dem Verfahren von Shakedown-Analysen ähneln und die eine Interaktion von Material- und Strukturnichtlinearität berücksichtigen. Bei den Shakedown-Methoden gibt es Arbeiten, die zeigen, dass eine Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten bei direkten Methoden möglich ist [115–117]. Dem Autor ist jedoch unklar, wieso diese Verfahren in aktuellen Veröffentlichungen keine Rolle mehr spielen. Neuere Arbeiten im Bereich der Shakedown-Methoden sind in [118–120] aufgeführt. Auf dem Gebiet der Knickanalysen gibt es weitere Arbeiten, die den Einfluss der Dehnungsakkumulationen auf Stabilitätsprobleme berücksichtigen [120, 121].

Die Auswirkung geometrischer Nichtlinearitäten auf die Zustandsgrößen im Einspielzustand wurde bisher nur in geringem Maß erörtert. So wurden in [122] durch inkrementelle Berechnungen die Auswirkungen von Theorie II. Ordnung auf die Zustandsgrößen im Einspielzustand an verschiedenen Tragwerken diskutiert. Darüber hinaus ist die Anzahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema gering. Von Ingenieuren im Anlagenbau wird jedoch vorausgesetzt, dass sie eine geeignete Wahl der notwendigen Theoriegebäude treffen, wobei die Auswirkungen schwer abschätzbar sind.

Bislang ist keine direkte Methode bekannt, die den Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf die Zustandsgrößen im Einspielzustand berücksichtigen kann. Dies soll nun mit der Weiterentwicklung der VFZT unter Verwendung von sukzessiven Berechnungen geschehen.

6.3.2. Vorgehen bei der ifup-Methode mit Theorie II. Ordnung

Der Begriff geometrische Nichtlinearität wird an diese Stelle auf die Verwendung von Theorie II. Ordnung begrenzt. Mit Theorie II. Ordnung ist gemeint, dass die Gleichgewichtbedingungen mit den Belastungen am verformten System bestimmt werden. Normalkräfte können im Tragwerk durch exzentrische Verformungen Momente erzeugen, welche die Schnittkräfte wesentlich beeinflussen. Bei Theorie II. Ordnung wird weiterhin von kleinen Verdrehungen und linearisierter Kinematik ausgegangen.

Die Herausforderung der VFZT liegt darin, dass das Gleichgewicht am belasteten System hergestellt wird, die meA das Gleichgewicht jedoch am Restzustand herstellt, wo keine Belastungen außer den Anfangsdehnungen wirken. Aus diesem Grund können die Belastungen auch nicht am verformten System berücksichtigt werden. Außerdem gibt es keine geeignete Möglichkeit, die Steifigkeitsmatrix für den Restzustand geeignet abzuschätzen.

An dieser Stelle kann jedoch eine modifizierte Version der sukzessiven Berechnung verwendet werden, um diese Herausforderung zu lösen. Im Folgenden wird vorgestellt, wie die Update-Berechnungen verwendet werden, um die Änderung der Steifigkeit aus Theorie II. Ordnung zu erfassen. Die VFZT wird dann dafür verwendet, den elastisch-plastischen Zustand unter Berücksichtigung der Struktursteifigkeitsanpassungen zu berechnen. Unter Zuhilfenahme der durch die VFZT gewonnenen plastischen Dehnungen kann eine weitere Update-Berechnung durchgeführt werden, die es erlaubt, die Struktursteifigkeit erneut anzupassen, insofern das notwendig wird.

Die Gleichung für den elastisch-plastischen Zustand mit Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung lautet.

$$[\mathbf{k}^{el-pl} + \mathbf{s}^{el-pl}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (108)$$

In Gleichung (108) ist die elastisch-plastische Struktursteifigkeitsmatrix $[\mathbf{s}^{el-pl}]$ gegenüber Gleichung (93) hinzugekommen. Die Struktursteifigkeitsmatrix ist Teil des iterativen Lösungsverfahrens bei den inkrementellen Berechnungen und wird durch die ANSYS-Routine berechnet.

Bei der Vorgehensweise durch die VFZT wird die Struktursteifigkeitsmatrix ebenfalls durch ANSYS in den Update-Berechnungen ermittelt. Die numerischen Grundlagen zur Bestimmung der Struktursteifigkeit bleiben hier unbeachtet. Die grundlegende Voraussetzung zum Vergleich zwischen inkrementellen Berechnungen und der VFZT ist gegeben, da beide Methoden den gleichen Algorithmus für die Anwendung von Theorie II. Ordnung nutzen.

In der ersten Update-Berechnung sind noch keine plastischen Dehnungen bekannt, weshalb die Ergebnisse der fiktiv-elastischen Analyse entsprechen. Hierbei wird jedoch eine nichtlinear-elastische Berechnung durchgeführt, wobei die elastische Struktursteifigkeitsmatrix $[\mathbf{s}^{fel}]$ durch eine nichtlineare elastische Analyse mit ANSYS ermittelt wird.

$$[\mathbf{k}^{fel} + \mathbf{s}^{fel}] \cdot \{\mathbf{u}^{fel}\} = \{\mathbf{f}^{fel}\} \quad (109)$$

Die fiktiv-elastische Struktursteifigkeitsmatrix $[\mathbf{s}^{fel}]$ aus Gleichung (109) ist eine erste Abschätzung für die elastisch-plastische Struktursteifigkeitsmatrix $[\mathbf{s}^{el-pl}]$ und wird in den modifiziert-elastischen Analysen verwendet, Gleichung (110). Da über die gesamte Anzahl der meA's die Struktursteifigkeitsmatrix unverändert bleibt, können die Restzustände der VFZT über die Gleichungen (96) und (97) mit den Ergebnissen der Update-Berechnung superponiert werden.

$$[\mathbf{k}^{mod} + \mathbf{s}^{el-pl}] \cdot \{\mathbf{u}^{meA}\} = \{\mathbf{f}^{meA}\} \quad (110)$$

An dieser Stelle wird nochmal darauf hingewiesen, dass die Restzustände der VFZT genau genommen fiktive Restzustände sind, die nicht mit den tatsächlichen Restzuständen übereinstimmen müssen. So ist es eher unwahrscheinlich, dass in den tatsächlichen Restzuständen die gleiche Struktursteifigkeitsmatrix vorherrscht, wie in den elastisch-plastischen Zuständen.

Ist ein konvergierter Zustand mit der VFZT aus Gleichung (110) erreicht, werden die plastischen Dehnungen berechnet und es startet eine neue Update-Berechnung, die es erlaubt, die Struktursteifigkeitsmatrix mit den neu berechneten plastischen Dehnungen zu aktualisieren.

$$[\mathbf{k}^{fel} + \mathbf{s}^{el-pl}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} + \{\mathbf{f}^{pl}\} \quad (111)$$

An dieser Stelle beginnt ein iterativer Vorgang, der abwechselnd die Struktursteifigkeit in den Update-Berechnungen und die plastischen Dehnungen in der VFZT aktualisiert, bis die Konvergenz erreicht ist. Das Konvergenzverhalten dieses Vorgehens wird als robust angesehen, wenn nicht die Beul- oder Knicklast überschritten wird.

Effekte aus Theorie II. Ordnung sind abhängig von den Normalkräften im System, aus denen sich die Struktursteifigkeitsmatrix berechnen lässt. Die Normalkräfte können mit positivem Vorzeichen (Zugkräfte) und mit negativem Vorzeichen (Druckkräfte) wirken. Dementsprechend kann es zur Aussteifung (stiffening) oder zu einer Abschwächung (weakening) der Steifigkeit im Tragwerk kommen. Egal ob es zu einer Aussteifung oder zu einer Abschwächung der Steifigkeit infolge Theorie II. Ordnung kommt, eine Abschätzung für den Einfluss auf den Anstieg oder Abfall der plastischen Dehnungen ist an komplexen Tragwerken nicht so ohne weiteres möglich. D.h. es können die plastischen Dehnungen sowohl zunehmen als auch abnehmen unter Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung gegenüber der Verwendung von Theorie I. Ordnung.

Die plastischen Dehnungen können auch über den Verlauf der sukzessiven Iterationen innerhalb der VFZT zu- oder abnehmen. Aus diesem Grund muss die Abschätzung des TIV-Inkrementals dY_i gegenüber Abbildung 55 erweitert werden. Nehmen die plastischen Dehnungen gegenüber der vorherigen Iteration zu, so wird von außen auf den Mises-Kreis projiziert, Abbildung 56 links. Müssen die plastischen Dehnungen reduziert werden, wegen einer Überschätzung, so wird von innen auf den Mises-Kreis projiziert, Abbildung 56 rechts. An dem Projektionsvorgang aus Gleichung (107) ändert sich damit jedoch nichts, da für beide Projektionsvorgänge die gleiche Formel verwendet wird.

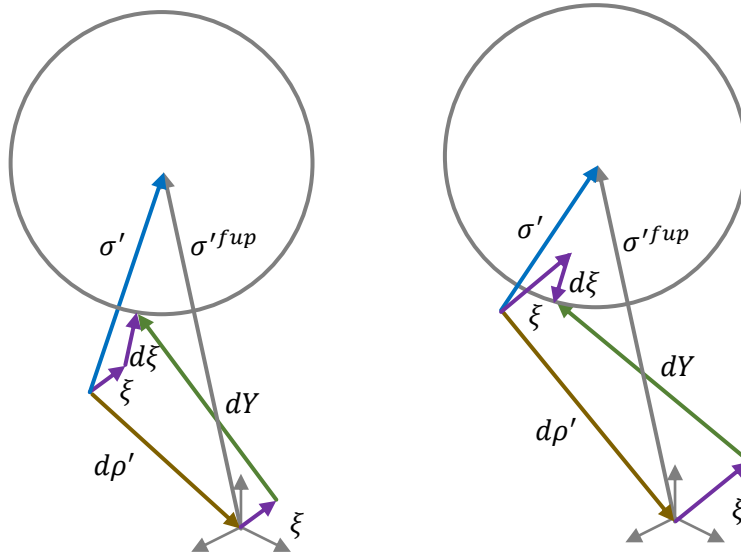


Abbildung 56: Projektionsverfahren für dY im TIV-Raum unter Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung.

links: bei einer Unterschätzung der plastischen Dehnungen,
rechts: bei einer Überschätzung der plastischen Dehnungen

In Abbildung 57 ist das allgemeine Ablaufschema für sukzessive Laststeigerung einer monotonen Belastung aus Abbildung 53 auf die Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung erweitert worden. Der wesentliche Unterschied zum Ablaufschema in Abbildung 53 ist die Verwendung eines nichtlinearen Gleichungslösers für die Update-Berechnungen. Die in den Update-Berechnungen durch ANSYS ermittelte Steifigkeitsmatrix $[s^{el-pl}]$ wird für die modifiziert-elastischen Berechnungen kopiert und in den modifiziert-elastischen Berechnungen berücksichtigt. Die Steifigkeitsmatrix $[s^{el-pl}]$ bleibt über die meA's unverändert und wird der modifizierten Steifigkeitsmatrix $[k^{mod}]$ hinzugefügt. Somit lässt sich jede meA wie ein linear-elastisches Gleichungssystem lösen und es werden keine zusätzlichen Gleichgewichtssiterationen in den meA's benötigt.

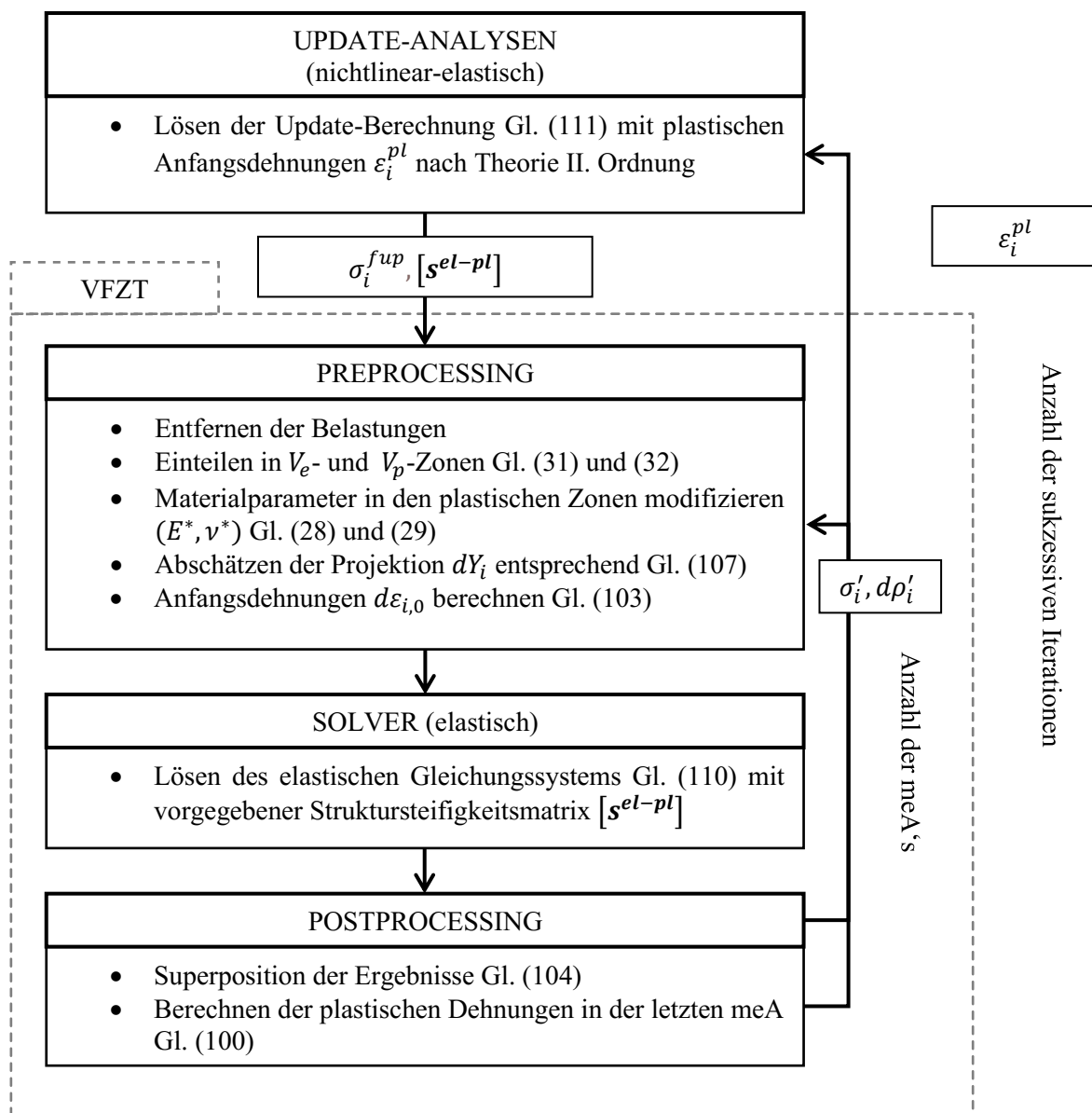


Abbildung 57: Allgemeines Ablaufschema der ifup-Methode bei monotonen Belastungssteigerungen unter Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung

6.3.3. Beispiel eines Balkens unter einachsiger Beanspruchung

Ein Balken wird aus Beam189-Elementen modelliert und durch eine axiale Kraft F_x und eine Auflagerverschiebung u_y belastet. Das linke Auflager des Balkens ist eine vollständige Einspannung. Der Balken wurde mit 100 Elementen in Längsrichtung versehen, die am linken Auflager 1/10 der Länge der Elemente am rechten Auflager betragen. Die Höhe des Querschnitts wurde in 20 Querschnittssektionen eingeteilt, die jeweils über vier Integrationspunkte verfügen. Das Tragwerk wird durch eine monotone Laststeigerung ohne Zwischenschritte einer Kraft- und Verschiebungsbelastung beansprucht.

Materialparameter:	Geometrieparameter:	Belastungsparameter:
$E = 1 * 10^5 \text{ N/mm}^2$	$E_t = 1 * 10^4 \text{ N/mm}^2$	$l = 15 \text{ mm}$
$\nu = 0.3$	$f_y = 100 \text{ N/mm}^2$	$F_x = 90 \text{ N}$
	$b=h=1 \text{ mm}$	$u_y = 0,3 \text{ mm}$

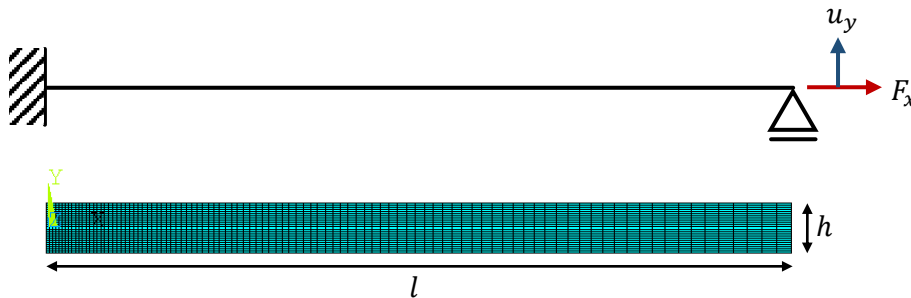


Abbildung 58: Balkenbeispiel unter monotoner Laststeigerung und signifikanten Effekten bei Verwendung von Theorie II. Ordnung

In Tabelle 6 sind die Ergebnisse der inkrementellen Analysen und der VFZT nach I. und II. Ordnung gegenübergestellt. Unter Verwendung von Theorie I. Ordnung liefert die VFZT wie bisher gewohnt das exakte Ergebnis nach drei modifiziert-elastischen Analysen. Die vierte Analyse wird in der VFZT für die fiktiv-elastische Berechnung benötigt. Da es bei diesem Beispiel keine direktionalen Umlagerungen gibt, liefert die VFZT, wenn die plastischen Zonen korrekt ermittelt wurden, das exakte Ergebnis. Zur Ermittlung der örtlichen Spannungsumlagerungen werden bei diesem Beispiel drei meA's benötigt.

Auch unter Verwendung von Theorie II. Ordnung kann die VFZT das exakte Ergebnis der inkrementellen Analyse duplizieren. In diesem Beispiel wird jedoch eine lineare Analyse mehr verwendet als in der inkrementellen Berechnung. Das liegt daran, dass mit dem Ergebnis der VFZT eigentlich noch nicht klar ist, ob die Spannungssteifigkeitsmatrix korrekt ermittelt wurde. Deshalb wird noch eine Update-Berechnung durchgeführt. Bei diesem Beispiel wäre diese jedoch unnötig, da von vornherein klar ist, dass sich die fiktiv-elastische Struktursteifigkeit nicht von der elastisch-plastischen Struktursteifigkeit unterscheidet, weil die Normalspannungen infolge F_x bei

elastischer Beanspruchung und bei elastisch-plastischer Beanspruchung gleichbleiben. Aus diesem Grund bleibt auch die Struktursteifigkeit unverändert.

Tabelle 6: Dehnungen in x-Richtung und Anzahl der verwendeten Gleichgewichtssiterationen am Balkenmodell bei I. und II. Ordnung

Theorie	Methode	$\epsilon_{to,x}$	Gleichgewichtsbed.
I. Ordnung	inkA	.4178E-2	4
	VFZT	.4178E-2	4
II. Ordnung	inkA	.5675E-2	4
	VFZT	.5675E-2	5

In Abbildung 59 sind die Konturplots der totalen Dehnungen in x-Richtung abgebildet. Neben den Maximalwerten werden auch alle anderen Stellen im Tragwerk durch die VFZT bei diesem Beispiel exakt erfasst, wie die Gegenüberstellung zeigt.

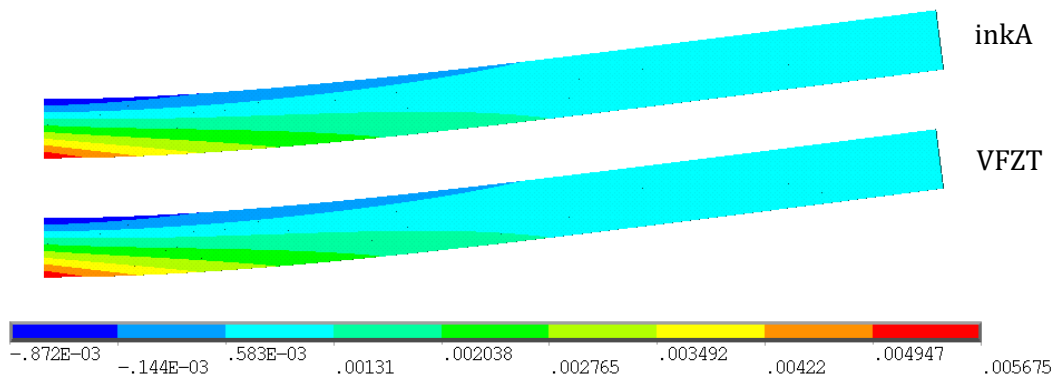


Abbildung 59: Dehnungen $\epsilon_{to,x}$ in x-Richtung im belasteten Zustand bei Zugnormalkraft

In einer zweiten Untersuchung wurde das Vorzeichen der Axialkraft F_x geändert, sodass eine Druckkraft anstelle einer Zugkraft wirkt. Abbildung 60 zeigt anschaulich, wie der Effekt aus Theorie II. Ordnung zu einem Moment infolge der Druckkraft und der Auflagerverschiebung in der Mitte des Balkens führt. Die höchstbeanspruchte Stelle befindet sich nun nicht mehr an der Einspannung, sondern in der Balkenmitte. Auch bei dieser Berechnung kann die VFZT die exakten Ergebnisse in wenigen meA's und zwei Update-Berechnungen liefern.

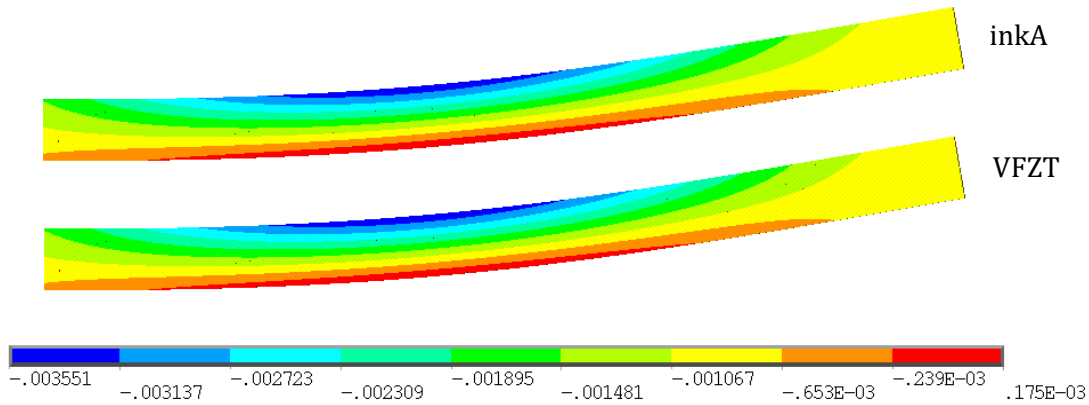


Abbildung 60: Dehnungen $\varepsilon_{to,x}$ in x -Richtung im belasteten Zustand bei Drucknormalkraft

6.3.4. Anwendung am 90° Rohrbogen bei monotoner Belastung

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der sukzessiven Vorgehensweise zur Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung an einem komplexen Randwertproblem vorgestellt. Es handelt sich bei dem Berechnungsbeispiel um einen 90° Rohrbogen. Zur Analyse des Modells kann aufgrund der Belastungen durch Ausnutzung der Symmetrie ein Viertelmodell (Halbrohr) verwendet werden, Abbildung 61.

Das numerische Modell besteht aus 5000 Shell-Elementen des Typs SHELL181 und über die Wanddicke sind 15 Integrationspunkte eingestellt. Das angrenzende Geradrohr wirkt einer Ovalisierung im Rohrbogen entgegen. Dadurch unterscheidet sich dieses Modell wesentlich von dem Modell der Torusscheibe aus Abschnitt 3.2.

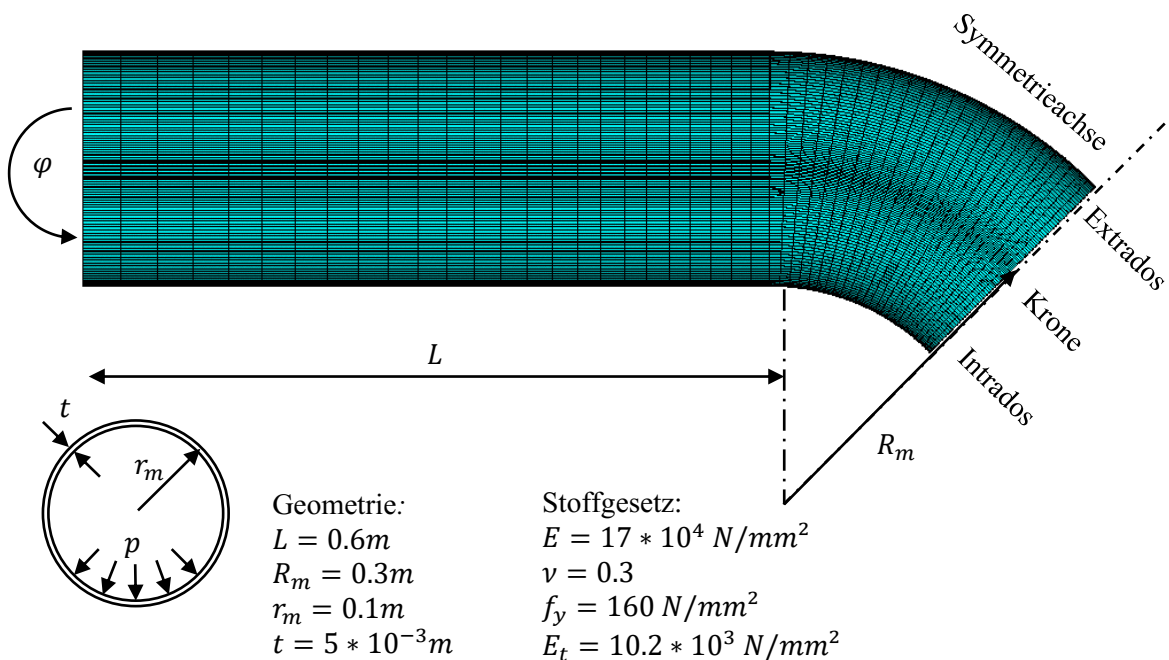


Abbildung 61: Viertel-Modell des 90° Rohrbogens durch Ausnutzung von Symmetrie

Das Viertel-Modell wird an dem freien Ende des Geradrohrs eingespannt und durch zwei Belastungen beansprucht, dem Innendruck p und einer weggesteuerten In-plane-Biegung φ , die zu einer schließenden Bewegung am Rohrbogen führt.

Der Innendruck ist an jeder Fläche des SHELL-Modells aufgebracht. Hierbei lässt sich eine elastische Grenzlast infolge Innendruck von $p_{elgr} = 7,159 \text{ N/mm}^2$ ermitteln. Der Ort der maximalen elastischen Beanspruchung befindet sich an der Innenseite des Intrados. Im Folgenden werden drei verschiedene Innendrucke untersucht, die sich prozentual auf den Innendruck bei elastischer Grenzlast beziehen. Diese Innendrucke werden im weiteren Verlauf als $p_0 = 0\% * p_{elgr}$, $p_{50} = 50\% * p_{elgr}$ und $p_{90} = 90\% * p_{elgr}$ bezeichnet. Durch die Variation der Innendrucke wird deren Einfluss auf die Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung untersucht.

Als zweite Belastung ist eine schließende In-plane-Biegung mit $\varphi = 0.05$ aufgebracht. Die In-plane-Biegung als Belastung allein betrachtet, überschreitet bereits deutlich die elastische Grenzlast. Beide Belastungen werden proportional und als monotone Belastungssteigerung aufgebracht. Für die inkrementellen Berechnungen wurden fünf als untere Grenze der zu verwendenden Substeps und 50 als Obergrenze verwendet, da sonst die inkrementellen Berechnungen nicht konvergieren. Hierbei wurden Konvergenzwerte für die normierten Knotenkräfte und die normierten Knotenverschiebungen von $1 * 10^{-7}$ vorgegeben.

In Tabelle 7 werden die Ergebnisse der Berechnungen mit verschiedenen Innendrucken aber immer gleicher In-plane-Biegung φ gegenübergestellt. Dabei sind sowohl mit der VFZT als auch mit inkrementellen Analysen Berechnungen durchgeführt worden. Zum Vergleich der Auswirkungen von Theorie II. Ordnung sind die inkrementellen Berechnungen nach Theorie I. Ordnung zusätzlich dargestellt. Der Ort der maximalen Beanspruchung der Ergebnisse aus Tabelle 7 liegt an der Innenseite des Intrados.

Tabelle 7: Maximale plastische Vergleichsdehnungen bei unterschiedlichen Innendrucken nach Theorie I. und II. Ordnung

$\epsilon_v^{pl} [10^{-2}]$	p_0	p_{50}	p_{90}
inkA – I.O.	0,8652	0,8521	0,9689
inkA – II.O.	1,033	0,7195	0,6508
VFZT – II.O.	1,023	0,6892	0,6209

Die Ergebnisse nach Theorie I. Ordnung der ersten Zeile aus Tabelle 7 folgen einer intuitiven Vorstellung, dass die Beanspruchungen zunehmen bei Zunahme der Belastungen. Dem gegenüber stehen die Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung, wo bei Vernachlässigung des Innendrucks die größten plastischen Vergleichsdehnungen entstehen. Der Innendruck führt demnach zu einer Aussteifung des Tragwerks und reduziert die plastischen Beanspruchungen signifikant.

Besonders deutlich ergibt sich der Unterschied bei der Betrachtung der Ergebnisse bei p_{90} , wo es zu einer Reduktion der plastischen Beanspruchungen von über 30% infolge der Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung kommt. Wird der Innendruck vernachlässigt, steigen die plastischen Beanspruchungen um nahezu 20% unter Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung gegenüber Theorie I. Ordnung.

Eine weitere bemerkenswerte Beobachtung ist, dass die Werte für p_0 in Tabelle 7 sich an der Innenoberfläche und die Werte für p_{50} und p_{90} an der Außenoberfläche des Rohrbogens befinden. Die in Umfangsrichtung auftretenden Zugspannungen infolge Innendruck wirken den Druckspannungen, welche sich aus der Ovalisierung des Querschnitts an der Innenoberfläche ergeben, entgegen. Dadurch entstehen die maximalen Beanspruchungen bei p_{50} und p_{90} an der Außenoberfläche.

Die Ergebnisse der VFZT aus der dritten Zeile sind nach drei sukzessiven Iterationen und jeweils zehn modifiziert-elastischen Analysen ermittelt. Bei den Ergebnissen der VFZT ist die Spannungssteifigkeitsmatrix nach drei Iterationen derart gut abgeschätzt, dass sich die Ergebnisse in den darauffolgenden Iterationen nur noch unwesentlich ändern. Das p_0 -Ergebnis der VFZT zeigt eine sehr gute Abschätzung und die Abschätzungen der p_{90} - und p_{50} -Ergebnisse haben etwas größere Abweichungen, aber können immer noch als gute Näherung betrachtet werden.

In Abbildung 62 sind die Konturplots der plastischen Vergleichsdehnungen an der Innenoberfläche des Tragwerks abgebildet. Beide Konturplots sind mit der gleichen Skalierung dargestellt und zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse im gesamten Tragwerk.

Auf einen Vergleich des aufgewendeten Berechnungsaufwandes zwischen VFZT und inkrementeller Berechnung wird hier verzichtet, da die VFZT nicht für monotone Belastungsänderungen ausgelegt ist. Viele numerische Techniken, welche die inkrementellen Berechnungen optimieren und deutlich beschleunigen, sind für die VFZT auch denkbar, aber noch nicht untersucht und entwickelt. Die oben dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die sukzessive Vorgehensweise die Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung mit der VFZT gestattet.

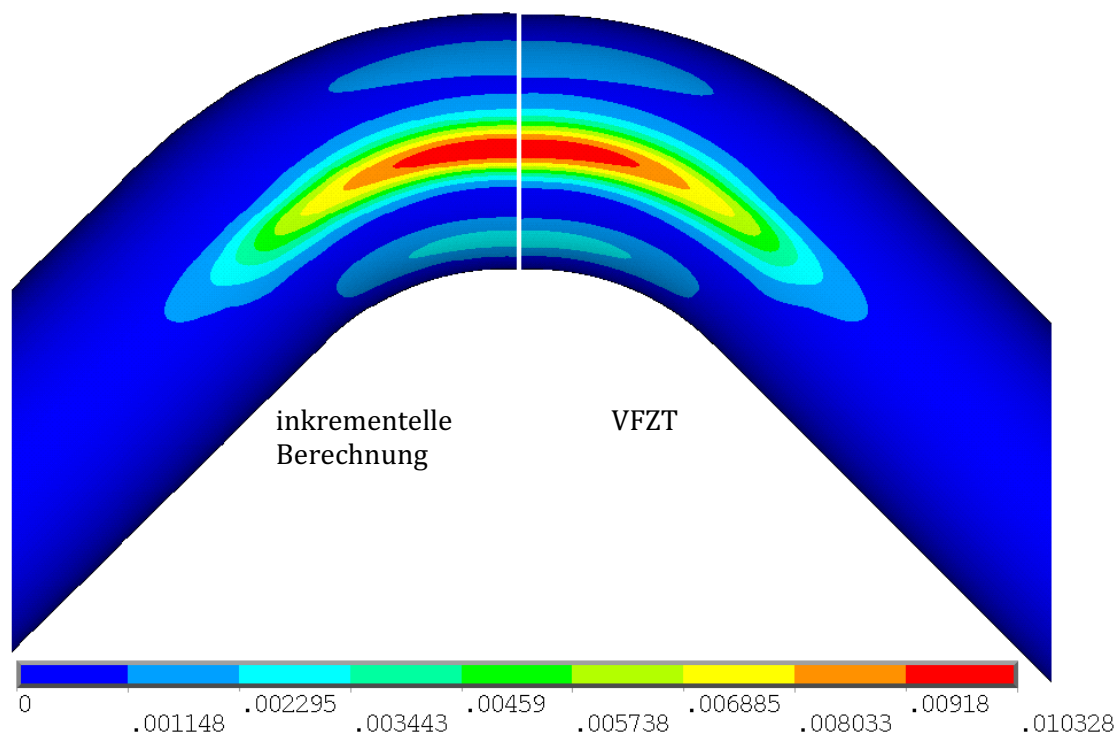


Abbildung 62: Vergleich der maximalen plastischen Vergleichsdehnungen an der Innenoberfläche mit In-plane-Biegung φ und Innendruck $p_0 = 0$ nach Theorie II. Ordnung.

6.3.5. Erweiterung auf zyklische Belastungen

Zur Erweiterung auf zyklische Belastungszustände wird die inkrementelle Projektionsvorschrift aus Unterabschnitt 6.2.1 mit dem sukzessiven Vorgehen der ifup-Methode zusammengeführt. Bei zyklischer Ein-Parameterbelastung werden zwei Belastungszustände in den Update-Berechnungen berechnet, Gleichung (112) und (113). Hier wird wieder die fiktiv-elastische Steifigkeitsmatrix iterativ ermittelt und die plastischen Anfangsdehnungen aus der vorangegangenen meA berücksichtigt.

$$\left[\mathbf{k}_{min}^{fel} + \mathbf{s}_{min}^{el-pl} \right] \cdot \{ \mathbf{u}_{min} \} = \{ \mathbf{f}_{min} \} + \{ \mathbf{f}_{min}^{pl} \} \quad (112)$$

$$\left[\mathbf{k}_{max}^{fel} + \mathbf{s}_{max}^{el-pl} \right] \cdot \{ \mathbf{u}_{max} \} = \{ \mathbf{f}_{max} \} + \{ \mathbf{f}_{max}^{pl} \} \quad (113)$$

Die Spannungssteifigkeit \mathbf{s}_{min}^{fel} und \mathbf{s}_{max}^{fel} wird bei zyklischen Belastungszuständen für den minimalen und den maximalen Belastungszustand getrennt ermittelt. Da in beiden Belastungszuständen unterschiedliche Spannungssteifigkeiten auftreten können, ergeben sich auch unterschiedliche Restspannungsfelder für den minimalen und maximalen Belastungszustand, auch wenn bei elastischen Einspielzuständen die plastischen Dehnungen im Einspielzustand konstant bleiben.

$$\left[\mathbf{k}_{min}^{mod} + \mathbf{s}_{min}^{el-pl} \right] \cdot \{ \mathbf{u}_{min}^{mod} \} = \{ \mathbf{f}_{min}^{mod} \} \quad (114)$$

$$\left[\mathbf{k}_{max}^{mod} + \mathbf{s}_{max}^{el-pl} \right] \cdot \{ \mathbf{u}_{max}^{mod} \} = \{ \mathbf{f}_{max}^{mod} \} \quad (115)$$

Das Projektionsverfahren für zyklische Ein-Parameterbelastungen nach Theorie I. Ordnung aus Abschnitt 2.2 lässt sich nicht für Theorie II. Ordnung anwenden und erfordert eine Anpassung. Die Erweiterung beruht auf Gleichung (24), welche im Folgenden nach der gesuchten TIV umgestellt wurde.

$$Y_i = \xi_i - \rho'_i \quad (116)$$

Da die Restspannungen als Abschätzungen in den meA's gegeben sind, lässt sich die TIV durch eine Abschätzung der Rückspannung ξ_i berechnen. Zur Erweiterung auf die ifup-Vorgehensweise ist zusätzlich die inkrementelle Schreibweise erforderlich.

$$dY_i = d\xi_i - d\rho'_i \quad (117)$$

Bei zyklischer Belastung lässt sich das Projektionsverfahren wie in Abschnitt 2.2 in Zonen mit wechselnden plastischen Dehnungen im Einspielzustand $V_{p\Delta}$ und konstanten plastischen Dehnungen im Einspielzustand $V_{e\Delta}$ einteilen. Die Einteilung dieser Zonen geschieht, wie in Gleichung (56) und (58) beschrieben, auf Grundlage der Vergleichsspannungen und der Streckgrenze.

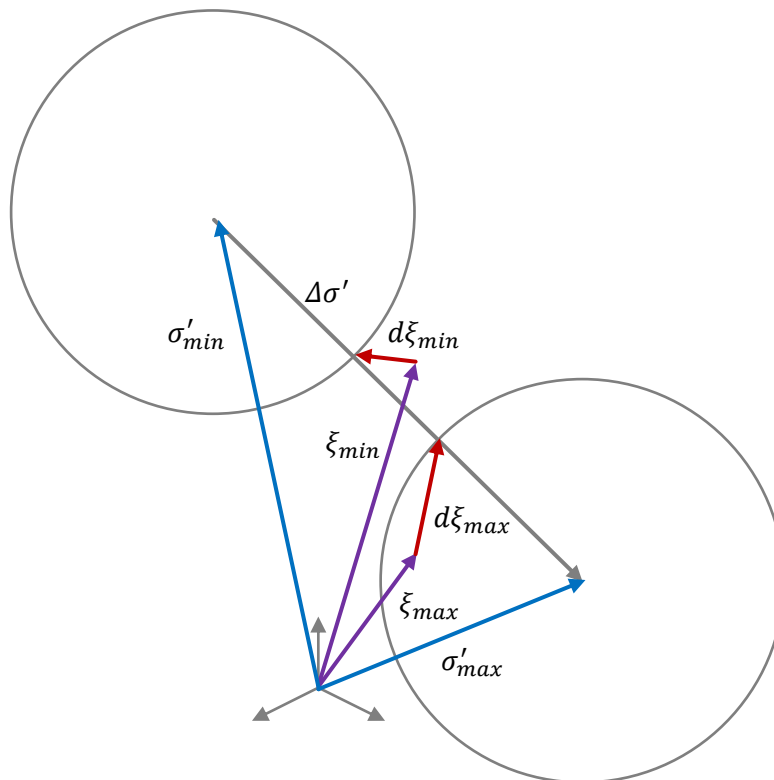


Abbildung 63: Abschätzung von $d\xi_{i,min}$ und $d\xi_{i,max}$ im invertierten Spannungsraum bei $V_{p\Delta}$ -Zonen

Die Abschätzung der TIV in den $V_{p\Delta}$ -Zonen wird bei Verwendung von Theorie II. Ordnung separat für den minimalen und maximalen Zustand aufgrund der unterschiedlich auftretenden Restspannungsfelder durchgeführt. Zur Abschätzung des Rückspannungsinkrements $d\xi_i$ für die Belastungsextrema wird der invertierte Spannungsraum verwendet. Beim invertierten Spannungsraum sind Mises-Fließbedingungen durch die elastisch-plastischen Spannungen der aktuellen meA und nicht an den fiktiv-elastischen Spannungen ausgerichtet, wie Abbildung 63 zeigt.

Zur Abschätzung von $d\xi_i$ in den $V_{p\Delta}$ -Zonen wird von ξ_i ausgehend auf den Schnittpunkt der elastisch-plastischen Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma'$ mit der Fließfläche projiziert. Für den minimalen Belastungszustand gilt bei Berücksichtigung von $\xi_{i,\min}$ aus einer vorangegangenen Berechnung dann:

$$d\xi_{i,\min} = \sigma'_{i,\min} + \Delta\sigma_i'^{fup} \left(\frac{f_y}{\Delta\sigma_v} \right) - \xi_{i,\min} \quad (118)$$

und für den maximalen Belastungszustand:

$$d\xi_{i,\max} = \sigma'_{i,\max} + \Delta\sigma_i'^{fup} \left(\frac{f_y}{\Delta\sigma_v} \right) - \xi_{i,\max} \quad (119)$$

In den $V_{e\Delta}$ -Zonen wird die Abschätzung des Rückspannungsinkrements entsprechend der Sektoren-Zuordnung eingeteilt. Die Sektoren-Einteilung geschieht vergleichbar der Einteilung wie in Abbildung (21) im TIV-Raum mit ω_1 bis ω_4 .

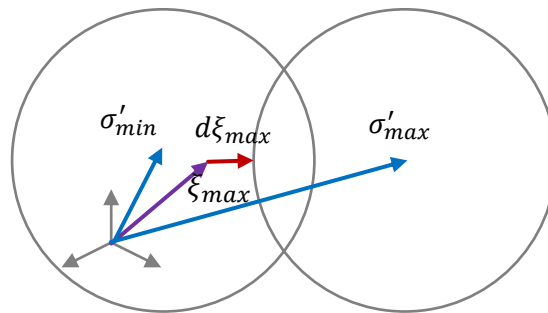


Abbildung 64: Projektion für $d\xi_{i,\max}$ im Sektor von ω_1 unter Berücksichtigung von $\xi_{i,\max}$ aus der vorangegangenen Berechnung

In Abbildung 64 wird eine Abschätzung für $d\xi_{i,\max}$ beispielhaft dargestellt. Weil das Rückspannungsinkrement bei $V_{e\Delta}$ -Zonen im Einspielzustand konstant bleibt, entspricht hier die Abschätzung von $d\xi_{i,\max}$ auch der Abschätzung von $d\xi_{i,\min}$. Die Gleichung zur Abschätzung von $d\xi_i$ für den Sektor von ω_1 , also einer Projektion auf die Fließfläche des maximalen Belastungszustandes lautet:

$$d\xi_i = \xi_i + (\sigma'_{i,max} - \xi_i) \left(1 - \frac{f_y}{(\sigma'_{i,max} - \xi_i)_v} \right) \quad (120)$$

Für die den Sektor ω_2 wird entsprechend auf den minimalen Belastungszustand projiziert.

$$d\xi_i = \xi_i + (\sigma'_{i,min} - \xi_i) \left(1 - \frac{f_y}{(\sigma'_{i,min} - \xi_i)_v} \right) \quad (121)$$

Liegt der Vektor der Rückspannungen im Sektor ω_3 oder ω_4 , werden die Gleichungen (44) bis (50) umformuliert und zur Abschätzung des Rückspannungsinkrements angewandt. Nach Gleichung (117) werden die TIV-Inkremente und nach Gleichung (103) die Inkremente der Anfangsdehnungen für den minimalen und maximalen Zustand berechnet. Das Ergebnis der meA ist, wie bereits in Unterabschnitt 6.3.2 beschrieben, das Feld des Restspannungsinkrements, welches entsprechend Gleichung (104) mit den Update-Spannungen superponiert werden kann. Dieser Ablauf wird in Abbildung 65 zusammengefasst und ermöglicht die Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung in Einspieluntersuchungen mit der VFZT.

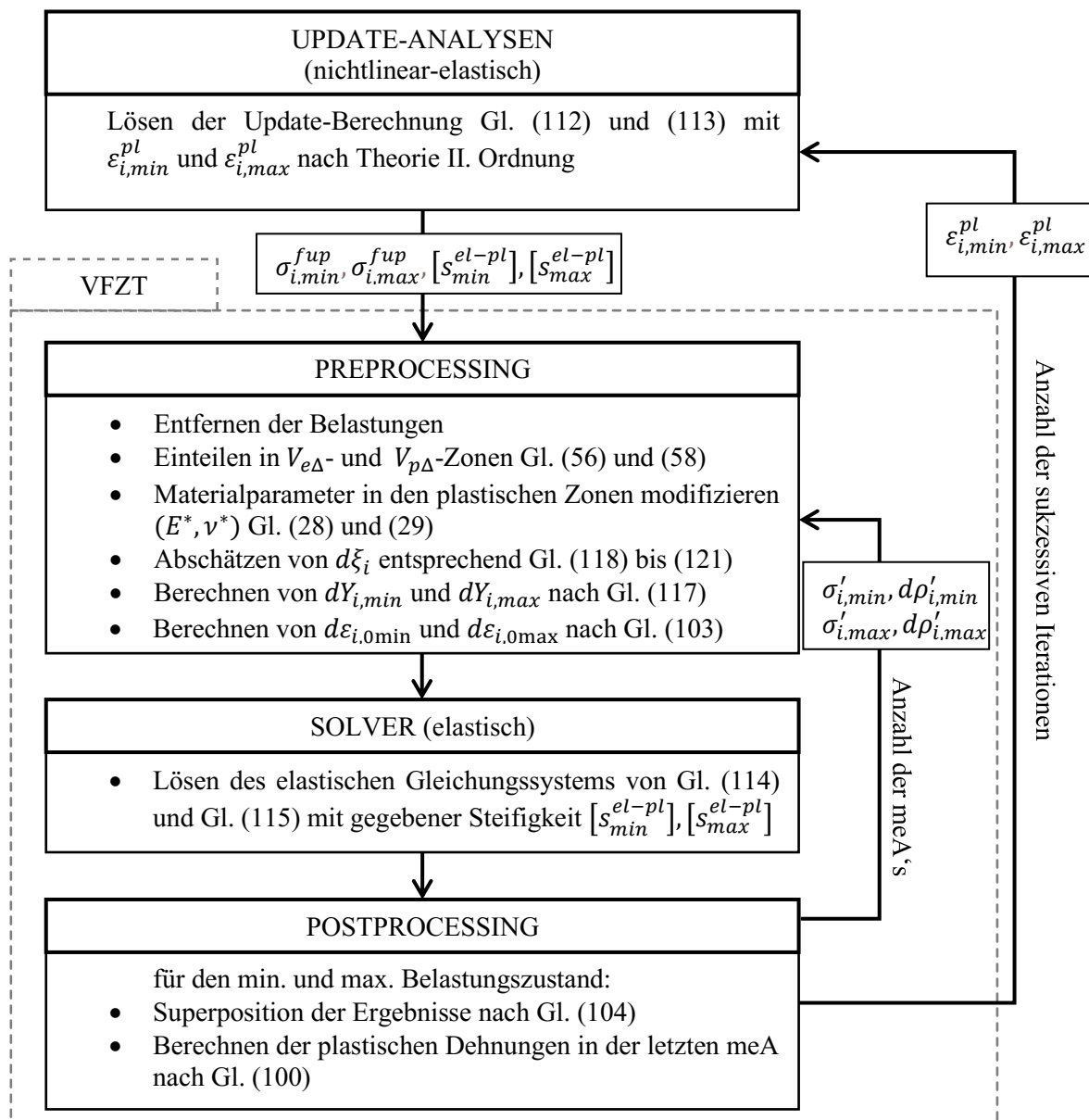


Abbildung 65: Allgemeines Ablaufschema der ifup-Methode bei zyklischen Belastungen zur Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung

6.3.6. Anwendungsbeispiel für zyklische Belastungen am 90° Rohrbogen

Die folgenden Untersuchungen und Ergebnisse wurden auf der Pressure, Vessel and Piping Conference in Las Vegas im Juli 2022 vorgestellt und veröffentlicht [123].

Für die Bewertung der VFZT-Ergebnisse wird das Beispiel des 90° Rohrbogens mit den Geometrie- und Materialparametern aus Abbildung 61 verwendet und auf zyklische Belastungen erweitert. Hierfür werden die Belastungsparameter aus Tabelle 8 verwendet.

Tabelle 8: Belastungsparameter des konstanten Innendrucks bei 50%, 65% oder 80% der elastischen Grenzlast und der zyklischen In-plane Biegung von drei Untersuchungen mit gleicher Belastungsschwingbreite

Untersuchung	1	2	3
Innendruck p_{elgr}	50% 65% 80%	50% 65% 80%	50% 65% 80%
Biegung φ_{min}	-0,02	0	0
Biegung φ_{max}	+0,02	-0,04	+0,04

Die Untersuchung eins aus Tabelle 8 beschreibt eine wechselnde Belastung, bei der die zyklische In-plane Biegung am minimalen und maximalen Belastungszustand betragsmäßig identisch ist. D.h. der Rohrbogen wird durch Öffnen und Schließen zyklisch belastet. Die erste Untersuchung wird zur Validierung der VFZT-Ergebnisse mit 80% der elastischen Grenzlast des Innendrucks verwendet. Mit Untersuchungen zwei und drei werden nur noch die VFZT-Ergebnisse betrachtet, da eine Untersuchung durch eine inkrementelle Berechnung sehr aufwendig ist.

In Abbildung 66 sind die maximalen Vergleichsspannungen als Konturplots dargestellt. Die größten Spannungen treten an der Krone der Innenoberfläche im Einspielzustand auf. Die VFZT-Ergebnisse zeigen eine hervorragende Übereinstimmung der Einspielergebnisse im Vergleich zu der inkrementellen Berechnung. Für die inkrementelle Berechnung sind 1600 Belastungszyklen erforderlich, bis die Akkumulationsphase abgeschlossen ist. Die Ergebnisse der VFZT wurden in der zweiten sukzessiven Iteration ermittelt. Das bedeutet, dass sich die Spannungssteifigkeiten aus den fiktiv-elastischen Berechnungen kaum zu den elastisch-plastischen Spannungssteifigkeiten im Einspielzustand unterscheiden.

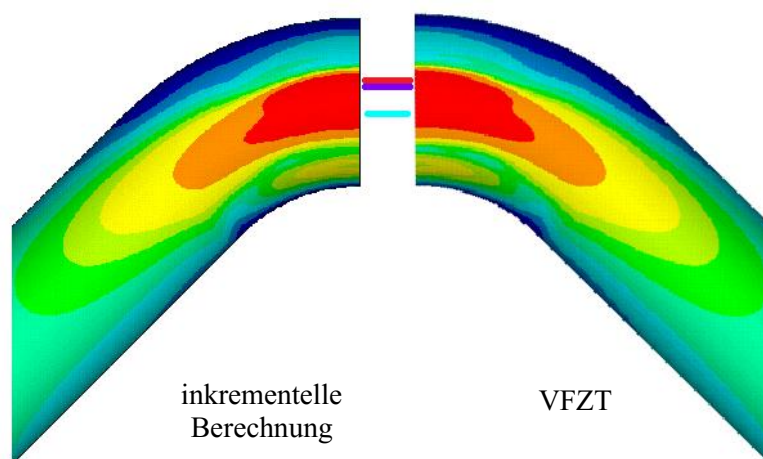


Abbildung 66: Konturplots der Mises-Vergleichsspannungen an der Innenoberfläche bei Belastung φ_{max} und einem Innendruck von 80% p_{elgr} im Einspielzustand mit Markierungen der maximal Beanspruchten Stellen
rot: Ort der maximalen pl. Dehnungen ab 800 Zyklen
lila: Ort der maximalen pl. Dehnungen bis 800 Zyklen
cyan: Ort der maximalen pl. Dehnschwingbreite

Der Verlauf der plastischen Dehnungen der inkrementellen Berechnung ist in Abbildung 67 dargestellt. Dort ist gut zu erkennen, dass die Akkumulationsphase am Ort der maximalen Schwingbreitenbeanspruchung (cyan) bereits nach 50 Zyklen vollständig abgeschlossen ist. Wohingegen die akkumulierten Dehnungen 1600 Zyklen benötigen, bis der Einspielzustand erreicht ist.

Bei einer Betrachtung des Verlaufs der maximalen plastischen Dehnungen am lilafarbenen Verlauf, könnte man zu dem Eindruck kommen, dass die Akkumulationsphase mit 800 Zyklen abgeschlossen ist. Der Verlauf der maximalen plastischen Dehnungen wird jedoch von einer anderen Stelle im Tragwerk überholt. Solche Verläufe sind schwerer zu entdecken und in diesem Fall verdoppelt sich der Berechnungsaufwand auf 1600 Zyklen.

Bei der Betrachtung der Verläufe der akkumulierten Dehnungen wird deutlich, dass ein Berechnen von wenigen Zyklen, und davon ausgehend die Werte für den Einspielzustand durch eine Extrapolationsfunktion zu ermitteln, nicht sinnvoll angewendet werden kann. Es ist schwer vorstellbar, dass eine Funktion sinnvoll als Extrapolationsfunktion für diese unterschiedlichen Verläufe eingesetzt werden kann.

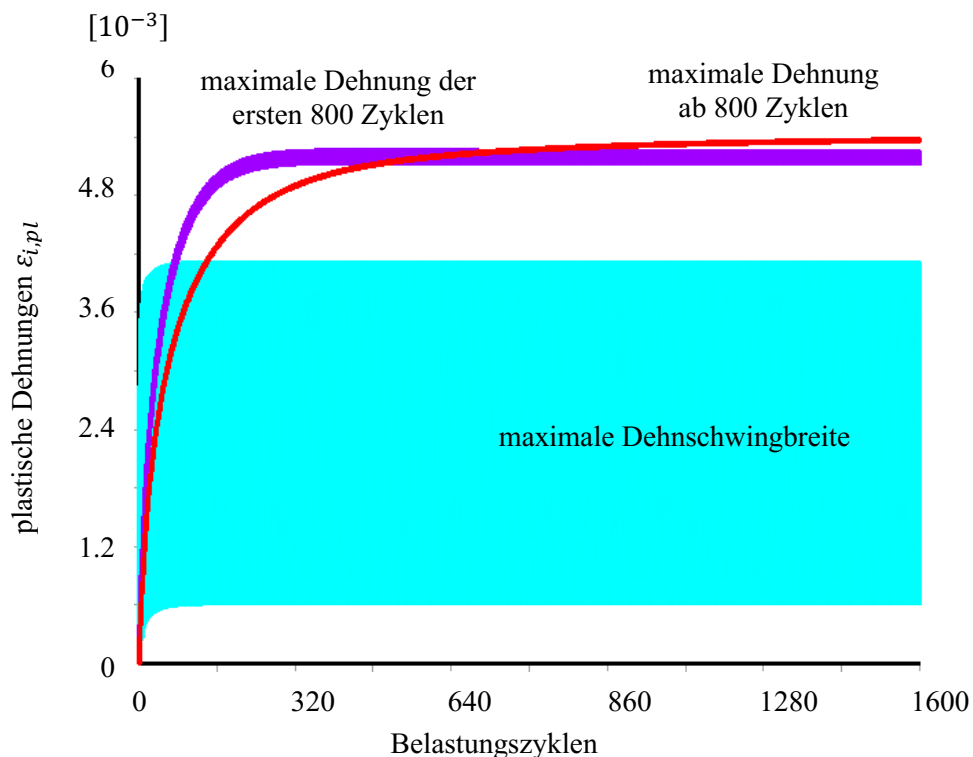


Abbildung 67: Verlauf der plastischen Dehnungen an den Orten der maximalen Beanspruchungen der Innenoberfläche, wie in Abbildung 66 angegeben.

Ein Vergleich der absoluten Werte im Einspielzustand der Vergleichsspannungen, der Vergleichsspannungsschwingbreiten und elastisch-plastischen Hauptdehnungen ist in Tabelle 9 gegenübergestellt. Die Vereinfachte Fließzonentheorie liefert für die Untersuchung eins aus Tabelle 8 auch bei den absoluten Werten hervorragende Übereinstimmungen, wie Tabelle 9 zeigt.

Tabelle 9: Vergleich der maximalen Spannungen und Dehnungen im Einspielzustand

	inkrementelle Berechnung	VFZT
Vergleichsspannung σ_v	211,4	211,2
Schwingbreite $\Delta\sigma_v$	360,7	361,1
el.-pl. Hauptdehnungen ϵ_1^{to}	0,0065	0,0066

Für die Ergebnisse der inkrementellen Berechnung wurden 50 Zwischenschritte (substeps) pro Lastschritt verwendet. Mit 1600 Lastzyklen wurden 3200 Lastschritte benötigt, die zu 173359 Gleichgewichtssiterationen geführt haben. Der Berechnungsaufwand der VFZT beträgt 40 meA's in der ersten und ebenfalls 40 meA's in der zweiten sukzessiven Iteration. Da zwei ifup-Iterationen durchgeführt wurden, müssen zu den 80 modifiziert-elastischen Berechnungen noch vier fiktiv-elastische Update-Berechnungen hinzuaddiert werden. Der Berechnungsaufwand reduziert sich bei diesem Beispiel von mehreren Tagen auf wenige Minuten.

Mit den validen Ergebnissen aus Tabelle 9 und Abbildung 66 wurde nachgewiesen, dass die VFZT hervorragend genutzt werden kann, um Einspielergebnisse nach Theorie II. Ordnung abzuschätzen. Aus diesem Grund wird für die Untersuchungen zwei und drei kein zusätzlicher Vergleich mit der inkrementellen Berechnung durchgeführt. In den drei folgenden Untersuchungen wird der Einfluss der mittleren Belastungsschwingbreite und des Innendrucks untersucht. Alle Untersuchungen haben den gleichen Betrag der Belastungsschwingbreite, diese sind jedoch in ihrem Mittelpunkt verschoben. Bei der ersten Untersuchung wurde bereits das gleichmäßige Öffnen und Schließen untersucht. Hierbei liegt der Mittelpunkt der Belastungsschwingbreite bei null. In der zweiten Untersuchung wird ein reines Schließen und in der dritten Untersuchung ein reines Öffnen des Rohrbogens bei gleicher Schwingbreitenbelastung untersucht. D.h. der Mittelpunkt der Belastung ist dann vom Nullpunkt verschoben. Darüber hinaus wird bei allen Berechnungen der Einfluss des Innendrucks untersucht.

In Tabelle 10 sind die Ergebnisse der elastisch-plastischen Hauptdehnschwingbreiten in einer Matrix dargestellt. Aus Untersuchung 1,2 und 3 mit unterschiedlichen konstanten Innendrücken ergeben sich neun verschiedene Berechnungen, welche mit der VFZT durchgeführt wurden. Diese Untersuchungen hätten mit der inkrementellen Berechnungsmethode mehrere Wochen an Berechnungszeit benötigt, wohingegen die VFZT nur wenige Stunden benötigt.

Die maximalen Dehnschwingbreiten aus Tabelle 10 treten im Rohrbogen bei 45% Grad auf und befinden sich unweit von der Krone. Wie bei den Untersuchungen mit monotonen Belastungsänderungen aus Tabelle 7 zeigt sich, dass ein geringerer Innendruck zu höheren plastischen Dehnungen führt. D.h. die Dehnschwingbreite reduziert sich bei höherem Innendruck. Dies lässt sich auf den Einfluss der Steifigkeitsmatrix zurückführen, welche bei höherem Innendruck zu höheren Zug-Membranspannungen und zur Aussteifung des Tragwerks führt. Diese Untersuchung beweist, dass die Twice-Yield-Methode bei Theorie II. Ordnung nicht mehr gültig ist, weil der Mittelspannungseinfluss die Schwingbreitenbeanspruchung deutlich beeinflusst.

Tabelle 10: VFZT-Ergebnisse der elastisch-plastischen Hauptdehnschwingbreite $\Delta\varepsilon_1^{to}$ [10^{-3}] aus den Untersuchungen 1,2 und 3 nach Theorie II. Ordnung mit unterschiedlichen Innendrücken

Innendruck p_{elgr}	Untersuchung		
	1 ($\varphi_{min}/\varphi_{max}$)	2 ($0/2\varphi_{min}$)	3 ($0/2\varphi_{max}$)
50%	5,65	5,04	5,01
65%	5,36	4,65	4,86
80%	5,15	4,29	4,73

Werden die Ergebnisse der Untersuchungen 1,2 und 3 bei konstantem Innendruck verglichen, wird deutlich, dass die wechselnde Belastung aus Untersuchung 1 ($\varphi_{min}/\varphi_{max}$) zu den größten Schwingbreitenbeanspruchungen führt. Der Unterschied zwischen zyklischem Öffnen ($0/2\varphi_{max}$) und zyklischem Schließen ($0/2\varphi_{min}$) ist relativ gering.

Bei der Betrachtung der akkumulierten Dehnungen in Tabelle 11 stellt sich ein völlig anderes Bild gegenüber der Schwingbreitenbetrachtung dar. Die größten akkumulierten Dehnungen treten bei den größten Innendrücken auf, wie es auch nach Theorie I. Ordnung der Fall ist. Außerdem ist bemerkenswert, dass Untersuchung 3 mit dem zyklischen Schließen zu den größten akkumulierten Dehnungen führt. Beim zyklischen Öffnen treten die geringsten akkumulierten Dehnungen auf und die Ergebnisse der wechselnden Belastung aus Untersuchung 1 liegen dazwischen. Die akkumulierten Dehnungen werden somit größer, je weiter die mittlere Belastungsschwingbreite sich zum Öffnen des Rohrbogens hinbewegt. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass das Öffnen Zug-Membranspannungen in Umfangsrichtung im Querschnitt hervorruft, die zu einer zusätzlichen Aussteifung des Tragwerks und deshalb aufgrund der weggesteuerten Belastung zu höheren plastischen Dehnungen führen.

Tabelle 11: VFZT-Ergebnisse der elastisch-plastischen akkumulierten Hauptdehnungen $\varepsilon_1^{t_0}$ [10^{-3}] aus den Untersuchungen 1,2 und 3 nach Theorie II. Ordnung mit unterschiedlichen Innendrücken

Innendruck p_{elgr}	Untersuchung		
	1 ($\varphi_{min}/\varphi_{max}$)	2 ($0/2\varphi_{min}$)	3 ($0/2\varphi_{max}$)
50%	6,51	6,99	8,84
65%	8,13	7,82	10,31
80%	9,63	8,83	11,77

Mit den oben genannten Erkenntnissen erfordern Berechnungen nach Theorie II. Ordnung einen deutlich höheren Berechnungsaufwand, da unterschiedliche Innendrücke bei unterschiedlichen zyklischen Belastungen für die Kennwerte der Lebensdauerbemessung maßgebend werden. Eine Identifikation der größten Schwingbreiten oder akkumulierten Dehnungen ohne konkrete Untersuchungen ist nicht möglich. Somit liefert die VFZT durch ihre Effizienz eine geeignete Möglichkeit, die maßgebenden Belastungen zu identifizieren und die entsprechenden Kenngrößen bereitzustellen.

7. Weiterführende Ideen und Zusammenfassung

Die Potenziale, den Anwendungsbereich der Vereinfachten Fließzonentheorie zu erweitern, sind noch vielfältig. So könnten weitere Stoffgesetze für zyklisch beanspruchte Werkstoffe berücksichtigt werden. Auf der Ebene der Numerik der VFZT lassen sich Ideen, welche vor Jahrzehnten für die inkrementellen Verfahren entwickelt worden sind, evtl. auch für die VFZT gewinnbringend einsetzen. So wird die Idee des Tangenten- und Sekanten-Return-Verfahrens aufgegriffen, um die Konvergenz über den Verlauf der modifiziert-elastischen Berechnungen bei großen direktionalen Umlagerungen zu beschleunigen. In diesem Kapitel werden diese weiterführenden Gedanken für weitergehende Forschungen formuliert.

7.1. Projektionsverfahren zur beschleunigten Konvergenz

7.1.1. Tangenten- und Sekanten-Verfahren als Projektionsvorschrift

In der Arbeit von R.D. Krieg und D.B. Krieg [124] aus dem Jahr 1977 wurden die Fehlerwerte bei verschiedenen Projektionsalgorithmen untersucht. Damals waren die inkrementellen Berechnungsmethoden noch Bestandteil der Grundlagenforschung und es gab nur wenige kommerzielle Anwendungsprogramme. In [124] wurde der Frage nachgegangen, welche Projektionsmethoden die besten Ergebnisse liefern, bei einmaliger Projektion und in einem iterativen Verfahren. Dabei wurden drei Projektionsmethoden vorgestellt und untersucht, die radial-return-method, die tangential-return-method und die secant-return-method. Alle diese Methoden verwenden einen elastischen Prädiktor, das bedeutet, es werden fiktiv-elastische Berechnungen als Eingabewerte verwendet.

Im Prinzip sind die radial-return-method und das bisher verwendete Projektionsverfahren der VFZT aus Unterabschnitt 2.1.4 in ihrer Vorgehensweise miteinander vergleichbar. Es wird im kürzesten Abstand auf den Mises-Kreis radial projiziert. Es entsteht also die Frage: können auch die anderen genannten Projektionsverfahren für die VFZT verwendet werden und somit die Konvergenzgeschwindigkeit beschleunigen?

Inspiziert aus den in [124] besprochenen Projektionsverfahren, werden an dieser Stelle zwei Projektionsmethoden für die VFZT formuliert. Die folgenden Formulierungen beschränken sich auf die grafische Darstellung, die den Projektionsvorgang im TIV-Raum beschreibt. In Abbildung 68 ist das Konzept für die Verwendung des Sekanten-Verfahrens dargestellt. Auf der linken Seite werden die Projektionen der ersten beiden meA's Y_0 und Y_1 dargestellt. Die erste Projektion wird noch radial auf den Mises-Kreis projiziert, weil noch keine weiteren Informationen vorhanden sind. Bei jeder folgenden meA wird jedoch der Spannungsvektor der vorangegangenen meA für die Richtung der neuen Projektion verwendet. Durch den Schnittpunkt der so entstandenen Sekante mit dem Mises-Kreis entsteht die TIV Y_1 .

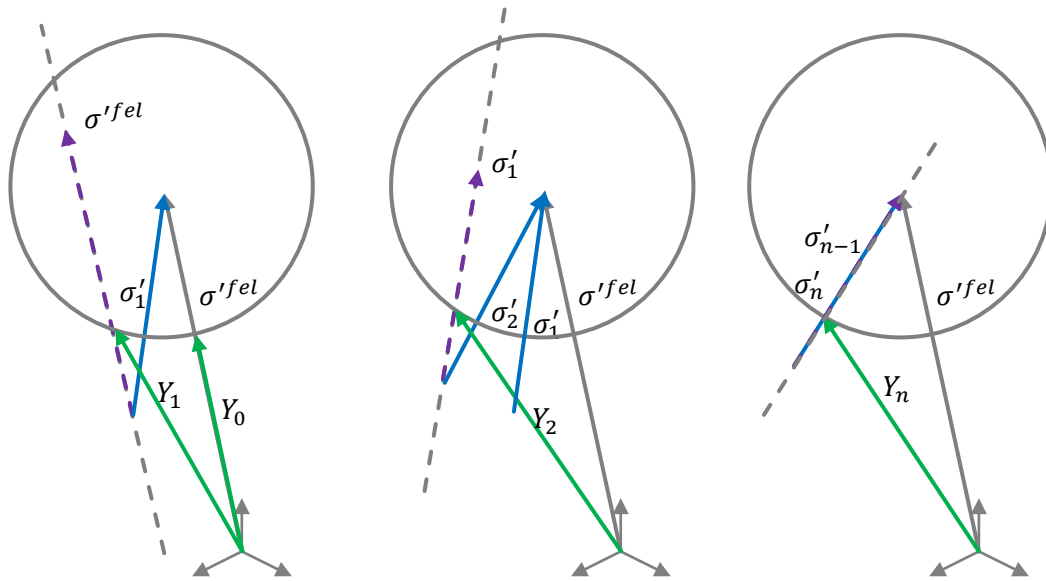


Abbildung 68: Projektionsvorschrift für das Sekanten-Verfahren zur Beschleunigung des Konvergenzverhaltens

In der Mitte von Abbildung 68 wird dieses Vorgehen für die Projektion in jeder meA fortgesetzt. Es wird für das Sekanten-Verfahren immer der Spannungsvektor der vorangegangenen meA als Sekante verwendet. Mit Hilfe des Spannungsvektors und der Kreisgleichung wird der Schnittpunkt auf dem Mises-Kreis bestimmt. Erst wenn die Spannungsvektoren von aufeinander folgenden meA's unverändert bleiben, wie rechts in Abbildung 68 dargestellt, ist die Konvergenz erreicht und es kann keine bessere Projektion bestimmt werden. Die konvergierte TIV im Sekanten-Verfahren entspricht dann der konvergierten TIV mit dem Radial-Verfahren aus Unterabschnitt 2.1.4.

Ein weiteres Verfahren um das Konvergenzverhalten über die meA' zu beschleunigen, könnte das Tangenten-Verfahren sein. Hierbei wird, wie in Abbildung 69 dargestellt, eine Tangente an den Spannungsvektor der vorangegangenen meA gesetzt. Die Tangente geht dabei durch den Punkt, den der Spannungsvektor mit dem Mises-Kreis schneidet. Mit dieser Hilfstangente kann nun von den negativen deviatorischen Restspannungen auf die Hilfstangente und von der Hilfstangente auf den Mises-Kreis projiziert werden. Auch bei dieser Vorgehensweise gilt, dass die Projektion im konvergierten Zustand eine Übereinstimmung mit der radialen Projektion aufweist.

Bei dem Tangenten-Verfahren wird eine etwas konservativere Abweichung gegenüber dem Sekanten-Verfahren von der radialen Projektionsvorschrift gewählt. D.h. es wird erwartet, dass diese Vorgehensweise schneller konvergiert als das Radiale-Verfahren aber langsamer als das Sekanten-Verfahren. Es könnte jedoch sein, dass die numerischen Berechnungen im Sekanten-Verfahren aufwendiger sind und somit das Tangenten-Verfahren daraus einen Vorteil in der Anwendung erfährt.

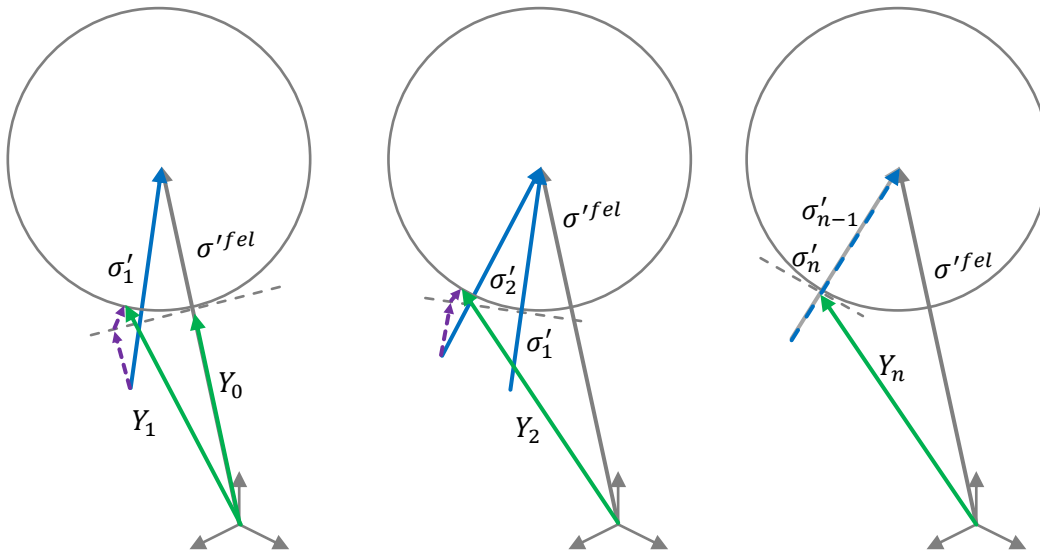


Abbildung 69: Projektionsvorschrift für das Tangenten-Verfahren zur Beschleunigung des Konvergenzverhaltens

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung des Sekanten- und Tangenten-Verfahrens ist, dass die VFZT immer robust zu einer Lösung konvergiert, die auch in der Nähe der inkrementellen Lösung liegt. Mit anderen Worten, die VFZT sollte auch immer zu dem gleichen Ergebnis konvergieren, unabhängig vom Startwert der Projektion. Dies konnte bereits an zahlreichen Beispielen bewiesen werden. Würde eine Projektion mit dem Tangenten- oder Sekanten-Verfahren deutlich am Konvergenzpunkt vorbeilaufen, würde die VFZT es durch das Konvergenzverhalten korrigieren. Diese Annahme wird dem Ansatz zu Grunde gelegt und müsste sorgfältig untersucht werden.

Das Ziel des Sekanten- und Tangenten-Verfahrens ist, die Konvergenzgeschwindigkeit bei direktionalen Umlagerungen zu beschleunigen. So könnte die Anzahl der modifiziert-elastischen Analysen am Beispiel aus Unterabschnitt 6.2.3 deutlich reduziert werden. Eine Verbesserung der Ergebnisqualität wird nicht erwartet, weil der konvergierte Zustand dem Zustand des konventionellen Projektionsverfahrens entspricht und sich nicht ändern sollte.

7.1.2. Voruntersuchung mit angepasster Projektionsvorschrift

Damit sich die These, dass unterschiedliche Projektionsvorschriften zu den gleichen Ergebnissen innerhalb der VFZT führen, untermauern lässt, ist eine Voruntersuchung durchgeführt worden. Für diese Voruntersuchung wird eine Projektionsvorschrift formuliert, die den Nachweis erbringt, die Konvergenz zu beschleunigen und gleichzeitig die Ergebnisqualität beizubehalten.

In Abbildung 70 wird die Projektionsvorschrift im TIV-Raum schematisch vorgestellt. Die Grundlage für die angepasste Projektionsvorschrift ist ein Spannungsvektor, der im Folgenden als Differenzspannung σ_i^{dif} bezeichnet wird. Die Differenzspannung wird aus der Differenz zwischen der elastisch-plastischen Spannung $\sigma_i'^{(n)}$ einer meA und der elastisch-plastischen Spannung

$\sigma_i'^{(n-1)}$ der vorangegangenen meA berechnet, Gleichung (122). Die Differenzspannung ermöglicht es, die vorangegangenen Entwicklungen in den meA's für zukünftige Abschätzungen zu berücksichtigen. In der ersten meA ergibt sich die Differenzspannung aus den elastisch-plastischen Spannungen $\sigma_i'^{(1)}$ und der fiktiv elastischen Spannungen $\sigma_i'^{fel}$, in allen weiteren meA's wird die Differenzspannung wie folgt berechnet.

$$\sigma_i^{dif(n)} = \sigma_i'^{(n-1)} - \sigma_i'^{(n)} \quad (122)$$

Zur Beschleunigung der Konvergenz wird jetzt nicht mehr von $-\rho_i'$ auf den Mises-Kreis projiziert, sondern von $-\rho_i'^{(n)} + \sigma_i^{dif(n)}$, wodurch die angepasste Projektionsvorschrift wie folgt umformuliert wird.

$$Y_i^{(n)} = \sigma_i'^{fel} - \left(\sigma_i'^{(n)} - \sigma_i^{dif(n)} \right) \left(\frac{f_y}{\left(\sigma_i'^{(n)} - \sigma_i^{dif(n)} \right)_v} \right) \quad (123)$$

In Abbildung 70 links wird die vollständige Differenzspannung verwendet. Diese Vorgehensweise ist jedoch eine Überschätzung der TIV-Abschätzung. Wird von der Differenzspannung aus Gleichung (122) ausgegangen, wird die Änderung der TIV zur nächsten meA überschätzt, weil die Änderung aufgrund der Konvergenz von meA zu meA geringer werden muss und nicht mit der gleichen Änderung fortgesetzt werden kann. Aus diesem Grund führt diese Projektionsvorschrift, wie später gezeigt wird, zu oszillierendem Verhalten.

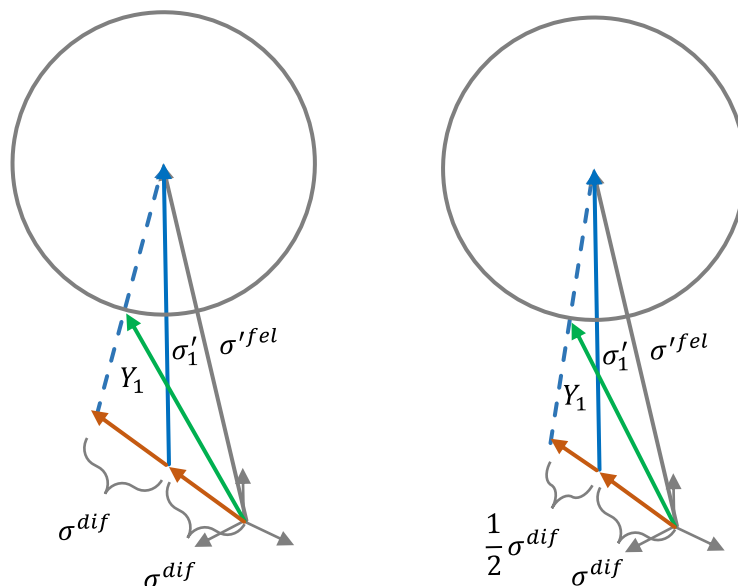


Abbildung 70: Angepasste Projektionsvorschrift mit Differenzspannung σ^{dif} zur Voruntersuchung für die Verwendung des Tangenten- oder Sekanten-Verfahrens

Auf der rechten Seite von Abbildung 70 wird die Differenzspannung mit 0,5 multipliziert.

$$\sigma_i^{dif(n)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_i'^{(n-1)} - \sigma_i'^{(n)} \right) \quad (124)$$

Die Anwendung von Gleichung (124) ist eine ad hoc Lösung zur Abschätzung der Änderung der Differenzspannung von meA zu meA. Die 0,5 bedeuten, dass der Vektor der Differenzspannung sich von meA zu meA halbiert. Dieser Wert ist an keiner Stelle im Tragwerk von vornherein bekannt und wird hier nur verwendet, um zu zeigen, dass eine Unterschätzung zu einem monoton steigenden Konvergenzverlauf führt.

Für die Voruntersuchungen wurde das Beispiel der direktionalen Umlagerung, welches in Unterabschnitt 6.2.3 eingeführt wurde und in Abbildung 54 dargestellt ist, verwendet. Das Lastniveau wurde für dieses Beispiel auf $u_x = 0,015$ herabgesetzt, damit dieses für zyklische Belastungen im weiteren Untersuchungsverlauf verwendet werden kann. Zur Auswertung des Konvergenzverhaltens ist die Spannung in y-Richtung über die modifiziert-elastischen Analysen geeignet, wie es in Abbildung 71 dargestellt ist.

Das Ergebnis der inkrementellen Berechnung nach einem Lastschritt (ohne Lastpfadzerlegung) ist durch den Verlauf der roten Geraden angegeben. Der cyanfarbene Graph beschreibt den Verlauf der VFZT-Ergebnisse mit der bisher verwendeten radialen Projektionsvorschrift. Wie schon in Unterabschnitt 6.2.3 erläutert, konvergiert die VFZT zu dem exakten Ergebnis, wobei die numerische Konvergenz erst nach etwa 70 meA's erreicht ist. Wird die angepasste Projektionsvorschrift aus Abbildung 70 links verwendet, also mit vollständiger Differenzspannung,

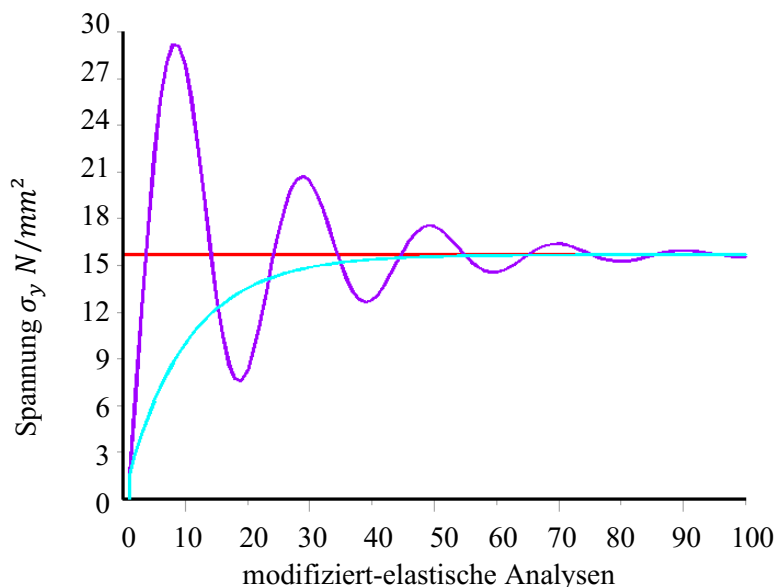


Abbildung 71: Verlauf der Spannungen in y-Richtung:

rot: inkrementelle Berechnung nach einem Lastschritt

lila: VFZT mit angepasster Projektionsvorschrift Gleichung (122) und (123)

cyan: VFZT mit herkömmlicher Projektionsvorschrift

entsteht ausgeprägtes Oszillieren, wie der lila Verlauf zeigt. Nach etwa 150 Zyklen ist das Oszillieren so weit abgeklungen, dass das Ergebnis der inkrementellen Berechnung erreicht ist.

Aus Abbildung 71 lässt sich ablesen, dass eine Überschätzung in der Projektionsvorschrift zu einer Korrektur führt und somit die Qualität der Ergebnisse im konvergierten Zustand nicht beeinträchtigt wurden. Es lässt sich jedoch auch ablesen, dass die Konvergenzgeschwindigkeit durch die angepasste Projektionsvorschrift deutlich beeinträchtigt wird. Aus diesem Grund ist eine weitere Berechnung durchgeführt worden, bei der die Differenzspannung aus Gleichung (124) verwendet und somit eine Überschätzung vermieden wird. Dies entspricht der Projektionsvorschrift aus Abbildung 70 rechts. Der Verlauf der Spannungen in y-Richtung ist in Abbildung 72 mit der blauen Kurve dargestellt und zeigt kein oszillierendes Verhalten.

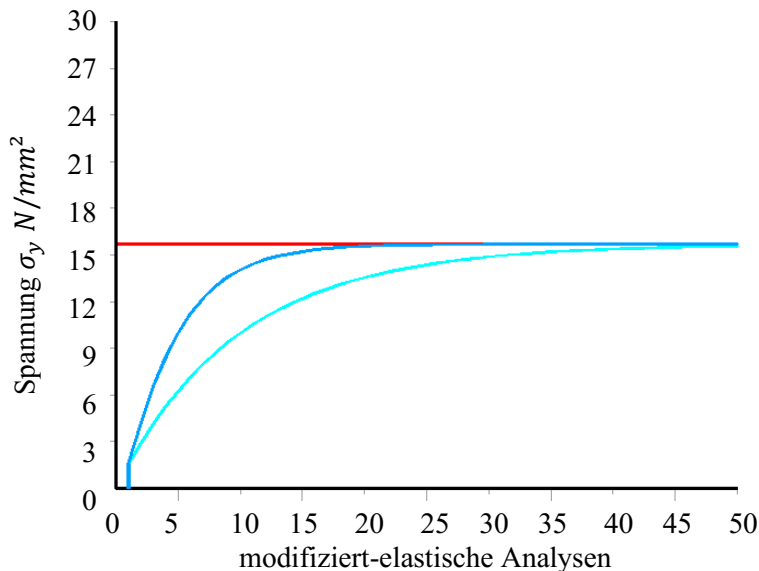


Abbildung 72: Verlauf der Spannungen in y-Richtung:

rot: inkrementelle Berechnung nach einem Lastschritt

cyan: VFZT mit herkömmlicher Projektionsvorschrift

blau: VFZT mit angepasster Projektionsvorschrift Gleichung (124) und (123)

Bei einem augenscheinlichen Vergleich der herkömmlichen Projektionsvorschrift (cyan) und der angepassten Projektionsvorschrift (blau) kann man eine Verdopplung der Konvergenzgeschwindigkeit abschätzen. Damit kann vorläufig festgehalten werden, dass eine Beschleunigung der Konvergenz möglich ist, sofern die TIV-Abschätzung nicht zu stark überschätzt wird und es zum Oszillieren kommt.

Die angepasste Projektionsvorschrift ist nicht auf allgemeine Berechnungsbeispiele übertragbar, da der frei gewählte Faktor von 0,5 zur Reduktion der Differenzspannung sich nicht auf alle Beispiele frei übertragen lässt. Einen geeigneten Reduktionsfaktor für den allgemeinen Anwendungsfall zu finden ist wahrscheinlich unmöglich, da sich dieser Wert nicht abschätzen lässt und an jeder Stelle im Tragwerk unterschiedlich sein kann.

Die Anpassung der Projektionsvorschrift durch die Differenzspannung ist nur ein Hilfsmittel für eine Voruntersuchung zur Verwendung des Tangenten- oder Sekanten-Verfahrens. Es konnte damit anschaulich gezeigt werden, dass eine Beschleunigung der Konvergenz möglich ist, wenn Informationen aus den vorangegangenen meA's berücksichtigt werden. Aus dieser Erkenntnis ist es lohnend, die Verbesserung der Projektionsvorschrift durch das Tangenten- und Sekanten-Verfahren zu untersuchen.

7.2. Die Methode der adaptierten Tangentensteifigkeit

Der Formelapparat der VFZT basiert auf linearem Verfestigungsverhalten. In [60] werden mehrere lineare Verfestigungsfunktionen über Layer zusammengefügt, wodurch im Gesamtzustand ein multilineares Materialverhalten entsteht. Die Grundlage der Multilinearisierung bildet somit eine Summe aus bilinearen Materialfunktionen. Hierbei wird in der VFZT unbegrenzte Verfestigung vorausgesetzt, damit gewährleistet ist, dass ein Einspielzustand berechnet werden kann.

Betrachtet man Materialuntersuchungen und Versuche an komplexen Geometrien, ist die Annahme von unbegrenzter Verfestigung nicht immer korrekt. Häufig ist die Annahme von unbegrenzter Verfestigung jedoch ausreichend, insofern die Steigung des Verfestigungsmoduls nicht zu hoch und eher konservativ angenommen wird. Selbst bei einer sehr geringen Steigung tritt ein Einspielzustand auf, dessen Zustandsgrößen für ein Nachweisverfahren durch Regelwerke verwendet werden kann.

Die Begrenzung der Verfestigung auf einen bestimmten Wert hätte zur Folge, dass der letzte Layer eine Tangentensteigung von Null hätte. Dies führt bei der VFZT zu numerischen Problemen, die das Berechnen der Einspielzustände erschweren. Außerdem hat sich gezeigt, dass die Verwendung von vielen Layern die Konvergenzgeschwindigkeit der VFZT vermindert und somit ihren Nutzen reduziert. Die Verwendung von nichtlinearen Stoffgesetzen, die nicht auf einer Multilinearisierung beruhen, ist bisher nicht möglich.

Aus diesen Gründen wurde ein Konzept entwickelt, welches es ermöglichen soll, komplexere Stoffgesetze bei geringem zusätzlichen Berechnungsaufwand zu verwenden. Das Konzept wird als die Methode der adaptierten Tangentensteifigkeit (MaT) bezeichnet und zielt darauf ab, eine lineare Tangenten-Steifigkeit in einen nichtlinearen Verfestigungsverlauf zu legen. Das Grundkonzept der MaT bedient sich der Gleichungen und der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.1 für lineare Verfestigung. Dabei wird der Tangentenmodul der bilinearen Werkstofffunktion an die nichtlineare Funktion des Stoffgesetzes adaptiert, wie es in Abbildung 73 dargestellt ist. Dadurch verläuft der adaptierte Tangentenmodul $E_{t,a}$ als Sekante durch den nichtlinearen Funktionsverlauf.

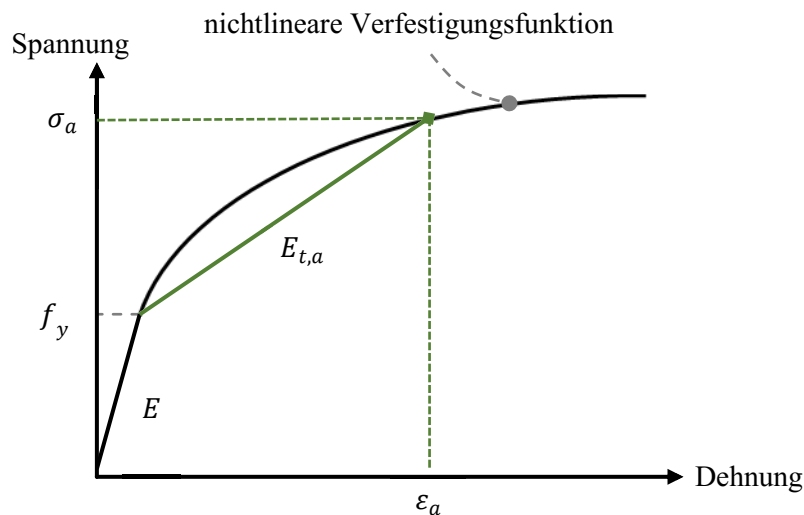


Abbildung 73: Verwendung eines adaptierten Tangentenmoduls $E_{t,a}$ (als Sekante) zur Bestimmung von elastisch-plastischen Zustandsgrößen σ_a, ε_a bei Vorgabe einer nichtlinearen Verfestigungsfunktion

Diese Vorgehensweise ermöglicht es, die Zustandsgrößen σ_a und ε_a im überelastischen Bereich an jeder Stelle der nichtlinearen Materialfunktion durch die Verwendung der adaptierten Tangentensteifigkeit zu berechnen, insofern die exakte Tangentensteifigkeit bekannt ist. Der wesentliche Vorteil bei der Verwendung von linearer Verfestigung ist, dass der Zusammenhang aus plastischem Dehnungszinkrement $d\varepsilon_i^{pl}$ und Rückspannungszinkrement $d\xi_i$ aus Gleichung (17) geschlossen integriert werden kann zu Gleichung (19). Damit wird die Abschätzung der Rückspannungen in den Iterationsprozess der modifiziert-elastischen Analysen verlagert, welche dort indirekt über die TIV-Abschätzungen bestimmt werden.

An dieser Stelle tritt nun die Frage auf: wie kann die Tangentensteifigkeit berechnet oder abgeschätzt werden? Eine direkte und korrekte Abschätzung der Tangentensteifigkeit ist nur in Sonderfällen möglich. Aus diesem Grund werden im Folgenden zwei Verfahren vorgestellt, die bereits untersucht wurden. Da die Tangentensteifigkeit in den meisten Fällen nicht exakt bestimmt werden kann, wird ein iteratives Verfahren verwendet, welches es ermöglicht, sich der exakten Tangentensteifigkeit iterativ zu nähern. Die Verfahren zur Abschätzung der Tangentensteifigkeit werden Prognoseverfahren genannt, um sich von den Projektionsverfahren der VFZT abzugrenzen. In Abbildung 74 sind die schematischen Ergebnisse für das Horizontal- und das Vertikalprognoseverfahren dargestellt.

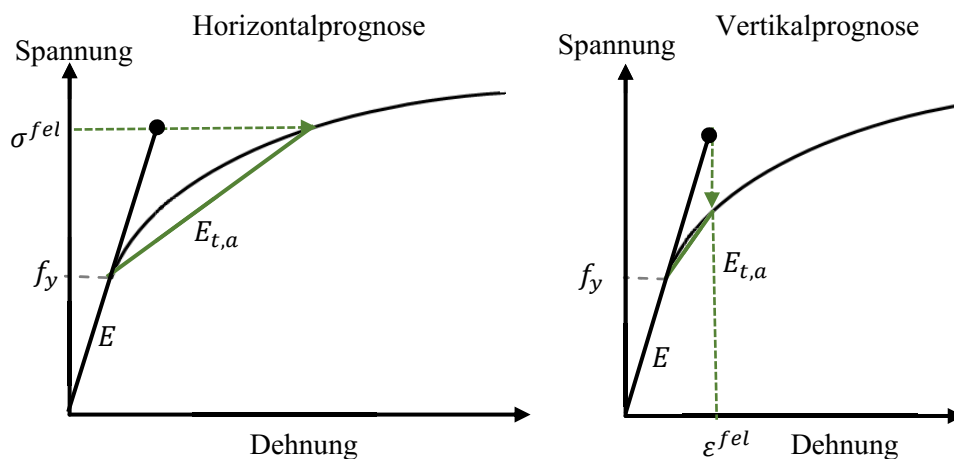


Abbildung 74 Prognoseverfahren zur Bestimmung des adaptierten Tangentenmoduls.
links: $E_{t,a}$ wird horizontal auf Grundlage der Spannungen bestimmt,
rechts: $E_{t,a}$ wird vertikal auf Grundlage der Dehnungen bestimmt.

Beide Prognoseverfahren wurden an einem Stab mit einachsigen Beanspruchungen bei monotoner Belastungssteigerung untersucht. Dabei wurde für das nichtlineare Stoffgesetz das Chaboche-Modell mit einem Armstrong-Frederick-Term verwendet. Als Belastung diente zum einen eine kraftgesteuerte Zugbeanspruchung und zum anderen eine weggesteuerte Zugbeanspruchung.

Bei der kraftgesteuerten Belastung ist die Spannung im gesamten Tragwerk bereits in der fiktiv-elastischen Berechnung bekannt, weil es keine Änderung im elastisch-plastischen Gleichgewichtszustand gibt. Aus diesem Grund führt die Horizontalprognose zu der korrekten Abschätzung des adaptierten Tangentenmoduls. Wird jedoch die Vertikalprognose verwendet, kommt es zunächst zu einer Überschätzung des Tangentenmoduls und deshalb werden die korrekten Zustandsgrößen auf der Stoffgesetzfunktion nicht erreicht. Von diesem Spannungs-Dehnungspunkt kommt es zu einer weiteren Vertikalprognose auf die nichtlineare Funktion und somit beginnt ein iteratives Verfahren, das erst dann endet, wenn die Zustandsgrößen auf der nichtlinearen Verfestigungsfunktion liegen.

Im Falle von weggesteuerter Belastung verhält es sich andersherum, die Vertikalprognose führt bei der ersten Abschätzung zu dem korrekten Tangentenmodul, da der Weg und somit die Dehnungen durch die Belastungen bekannt sind. Die Horizontalprognose korrigiert von einer Unterschätzung des Tangentenmoduls über mehrere Iterationen hin zum korrekten Ergebnis. In den Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass die MaT grundsätzlich in der Lage ist, bei einer Unterschätzung und bei einer Überschätzung zu dem korrekten Ergebnis zu konvergieren. Es wurden jedoch einige Iterationen bei der Vertikalprognose mit kraftgesteuerter Belastung und bei der Horizontalprognose mit weggesteuerter Belastung benötigt, um die korrekten Ergebnisse zu bestimmen.

Bei komplexen Randwertproblemen liegen die Ergebnisse in den überelastischen Bereichen meist zwischen den Extremwerten einer reinen kraftgesteuerten oder einer reinen weggesteuerten Belastung. Aus diesem Grund wird hier ein weiteres Prognoseverfahren vorgeschlagen, welches als die Neuber-Hyperbel bekannt ist [26]. Dieses Prognoseverfahren soll die Konvergenzgeschwindigkeit beschleunigen, mit der die adaptierte Tangentensteifigkeit bestimmt wird.

Die Neuber-Hyperbel wurde als Korrekturfaktor für die elastisch-plastischen Spannungsspitzen im Kerbgrund entwickelt und für verschiedene Funktionen und Anwendungen erweitert [27]. Der Grundgedanke von Neuber ist, im Spannungs-Dehnungsdiagramm der Werkstoffbeziehung eine Rechteckfläche aufzuspannen, die durch den Ursprung und einen Spannungs-Dehnungspunkt definiert wird. Neuber postuliert, dass im Kerbgrund die Fläche des fiktiv-elastischen Zustandes der Fläche des elastisch-plastischen Zustandes als gute Annäherung gleichgesetzt werden kann.

$$\sigma^{fel} * \varepsilon^{fel} = \sigma * \varepsilon^{to} \quad (125)$$

Die Flächenbeziehung wird im Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Abbildung 75 veranschaulicht. Bei der Anwendung dieses Ansatzes als Prognoseverfahren in der VFZT wird ein iteratives Vorgehen benötigt. Es wird der Ansatz so lange wiederholt und der adaptierte Tangentenmodul angepasst, bis die Zustandsgrößen sich auf der Stoffgesetzfunktion befinden.

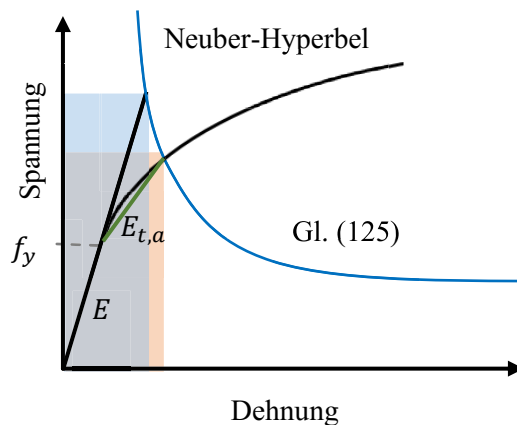


Abbildung 75: Prognose der adaptierten Tangentensteifigkeit $E_{t,a}$ durch Gleichung (125)

Die Voruntersuchungen haben nur den einachsigen Beanspruchungszustand betrachtet. Wesentliche Fragen zur mehrachsigen Vorgehensweise sind dabei noch ungeklärt. Die Idee der MaT kann jedoch ein Wegweiser sein, die VFZT für deutlich anspruchsvollere Stoffgesetze zu befähigen. Es wäre mit der MaT auch denkbar, eine begrenzte Verfestigungsfunktion zu verwenden. Dann würde sich im Einspielzustand immer ein adaptierter Tangentenmodul einstellen, welcher größer als Null ist und somit zu numerisch robusten Lösungen führt. Findet sich dann über die meA's kein konvergentes Ergebnis mit einem adaptierten Tangentenmodul, welches stetig kleiner wird, dann gibt es keinen Einspielzustand und es tritt infinites Ratcheting auf. Dies würde der

VFZT eine völlig neue Analyseform ermöglichen. Bei Einspielanalysen wird nur geprüft, ob ein Tragwerk unter bestimmten Belastungsparametern einspielt oder es zu infinitem Ratcheting kommt. Die VFZT hat den Vorteil, dass sie im Falle von Einspielen gleich noch die Zustandsgrößen für die Bemessung liefert.

7.3. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Vereinfachte Fließzonentheorie als geeignetes Verfahren zur Abschätzung von Zustandsgrößen im Einspielzustand vorgestellt. Hierbei sind die notwendigen Grundlagen der Plastizitätstheorie dargelegt und auf dessen Grundlage die fünf Basisprinzipien der VFZT eingeführt worden. Ausgehend von der Beschreibung bei zyklischen Ein-Parameterbelastungen werden zunächst die Erweiterung für Mehr-Parameterbelastungen und später die Erweiterung für sukzessive Berechnungen vorgestellt.

Anhand von inkrementellen Berechnungen wurde gezeigt, welchen Einfluss die Berücksichtigung einer beliebigen Anzahl von Lastfällen gegenüber Ein-Parameterbelastungen haben kann. So können deutlich höhere Beanspruchungen gegenüber einer reinen paarweisen Betrachtung der Lastfälle auftreten. Zudem können die maximalen Beanspruchungen bei Mehr-Parameterbelastungen an Stellen auftreten, die durch Untersuchungen mit Ein-Parameterbelastungen nicht identifiziert werden können. Für eine realistische Bewertung von zyklischen und überelastisch beanspruchten Tragwerken ist die Berücksichtigung der Besonderheiten von Mehr-Parameterbelastungen von bedeutendem Vorteil.

Die Weiterentwicklung der Vereinfachten Fließzonentheorie hinsichtlich Mehr-Parameterbelastungen ist für 3-D Spannungszustände bei elastischen Einspielzuständen vorgestellt worden. Hierbei ist ein effizientes Verfahren entwickelt worden, welches es ermöglicht, beliebig viele Belastungszustände zu berücksichtigen. Das dreistufige Verfahren beinhaltet die Projektionsvorschriften auf die Kugeloberflächen, auf die Schnittkreise und auf die Eckpunkte. Dieses Verfahren ist mit einer nachvollziehbaren Handrechnung beschrieben worden. Abschließend ist das Verfahren an einem Rohrbogen untersucht und verifiziert worden. Der Vergleich der Ergebnisse aus der inkrementellen Berechnung und der Vereinfachten Fließzonentheorie zeigt, dass die direkte Methode gute Ergebnisse liefert und dabei nur einen Bruchteil des Berechnungsaufwandes benötigt.

Eine weitere Entwicklung ist die Anwendung von sukzessiven Berechnungen, welche zur Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung in der VFZT verwendet werden kann. Es ist gelungen, das ifup-Verfahren zu entwickeln, welches detailliert in Kapitel 6 beschrieben wird. Dieses Verfahren ermöglicht es, die Materialnichtlinearität und die Strukturnichtlinearität getrennt zu analysieren. Dadurch entsteht ein sukzessives Abschätzen dieser beiden Nichtlinearitäten, bis ein konvergenter Zustand erreicht ist. Das ifup-Verfahren ist an einem 90° Rohrbogen untersucht und verifiziert worden. Die Ergebnisse zeigen, dass dieses Verfahren konvergiert und gute Ergebnisse

erzielt bei deutlich geringerem Berechnungsaufwand gegenüber inkrementellen Berechnungsverfahren. Das ifup-Verfahren kann darüber hinaus zur sukzessiven Laststeigerung angewandt werden. Es wurde gezeigt, dass die Qualität der VFZT-Ergebnisse sich den Ergebnissen der inkrementellen Vergleichsrechnungen annähert, wenn die gleiche Lastpfadzerlegung bei monotonen Belastungsänderungen verwendet wird.

8. Literatur

- [1] *Statista*: Geplante Atomreaktoren weltweit nach Ländern 2020 | Statista, 2020, <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/157767/umfrage/anzahl-der-geplanten-atomkraftwerke-in-verschiedenen-laendern/> [Zugriff am: 24.11.2020].
- [2] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Limited Versus Unlimited Strain Accumulation Due to Ratcheting Mechanisms. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 141 (2019), Heft 3, S. 214. <https://doi.org/10.1115/1.4042853>.
- [3] American Society of Mechanical Engineers: Boiler & Pressure Vessel Code – Class 1 Components. New York, NY.
- [4] Kerntechnischer Ausschuss, KTA 3201.2: Komponenten des Primärkreises von Leichtwasserreaktoren – Konstruktion und Berechnung. Salzgitter.
- [5] *Drucker, D.C.*: A Definition of Stable Inelastic Material. *In: Journal of Applied Mechanics* 26 (1959), Heft 1, S. 101-106. <https://doi.org/10.1115/1.4011929>.
- [6] *Bolchoun, A.; Kolupaev, V.A.; Altenbach, H.*: Konvexe und nichtkonvexe Fließflächen. *In: Forschung im Ingenieurwesen* 75 (2011), Heft 2, S. 73-92. <https://doi.org/10.1007/s10010-011-0135-6>.
- [7] *Varvani-Farahani, A.; Nayebi, A.*: Ratcheting in pressurized pipes and equipment: A review on affecting parameters, modelling, safety codes, and challenges. *In: Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 41 (2018), Iss. 3, pp. 503-538. <https://doi.org/10.1111/ffe.12775>.
- [8] *Wagner, M.*: Blechumformsimulation. *In: Lineare und nichtlineare FEM*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2022, S. 283-322.
- [9] Mechanical APDL Version ANSYS Release 19 R1 [Software]. 2020, <https://www.ansys.com/>.
- [10] *Abdel-Karim, M.*: Shakedown of complex structures according to various hardening rules. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 82 (2005), Heft 6, S. 427-458. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2005.01.007>.

- [11] *Prager, W.*: The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements. *In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169 (1955), Heft 1, S. 41-57. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1955_169_015_02.
- [12] *Ziegler, H.*: A modification of Prager's hardening rule. *In: Quarterly of Applied mathematics* 17 (1959), Heft 1, S. 55-65.
- [13] *Besseling, J.F.*: A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery, and secondary creep. Stanford Univ., Calif Ausgabe 1959.
- [14] *Hübel, H.*: Vereinfachte Fließzonentheorie. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2015. ISBN 978-3-658-07921-5.
- [15] *Hübel, H.*: Simplified Theory of Plastic Zones – Based on Zarka's Method, SpringerLink Bücher, Springer, Cham, 2017. ISBN 9783319298757.
- [16] *Chaboche, J.L.*: Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *In: International Journal of Plasticity* 2 (1986), Heft 2, S. 149-188. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(86\)90010-0](https://doi.org/10.1016/0749-6419(86)90010-0).
- [17] *Frederick, C.O.; Armstrong, P.J.*: A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *In: Materials at High Temperatures* 24, **24**, 1-26.
- [18] *Mahmoudi, A.H.; Pezeshki-Najafabadi, S.M.; Badnava, H.*: Parameter determination of Chaboche kinematic hardening model using a multi objective Genetic Algorithm. *In: Computational Materials Science* 50 (2011), Heft 3, S. 1114-1122. <https://doi.org/10.1016/j.com-matsci.2010.11.010>.
- [19] *Abdel-Karim, M.*: Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *In: International Journal of Plasticity* 25 (2009), Heft 8, S. 1560-1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.10.004>.
- [20] *Chaboche, J.-L.; Kanouté, P.; Azzouz, F.*: Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *In: International Journal of Plasticity* 35 (2012), S. 44-66. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.010>.
- [21] *Hübel, H.*: Basic conditions for material and structural ratcheting. *In: Nuclear Engineering and Design* 162 (1996), Heft 1, S. 55-65. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(95\)01136-6](https://doi.org/10.1016/0029-5493(95)01136-6).
- [22] *Chen, X.; Chen, X.; Yu, D. et al.*: Recent progresses in experimental investigation and finite element analysis of ratcheting in pressurized piping. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 101 (2013), pp. 113-142. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2012.10.008>.

- [23] Möller, M.: Robust structural verification of pressurized nuclear components subjected to ratcheting. Report number: 2017:05, <https://www.stralsakerhetsmyndigheten.se/en/publications/reports/safety-at-nuclear-power-plants/2017/201705/> [Zugriff am: 18.08.2022].
- [24] Hübel, H.; Vollrath, B.: Ratcheting caused by moving loads. *In: International Journal of Advanced Structural Engineering* 9 (2017), Heft 2, S. 139-152. <https://doi.org/10.1007/s40091-017-0154-0>.
- [25] Hübel, H.: Plastische Dehnungserhöhungsfaktoren in Regelwerken und Vorschlag zur Etablierung angemessenerer Faktoren. Kassel, Gesamthochschule Kassel. Institut für Mechanik, Dissertation, 1985.
- [26] Neuber, H.: Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law. *In: Journal of Applied Mechanics* 28 (1961), Heft 4, S. 544-550. <https://doi.org/10.1115/1.3641780>.
- [27] Ince, A.; Bang, D.: Deviatoric Neuber method for stress and strain analysis at notches under multiaxial loadings. *In: International Journal of Fatigue* 102 (2017), S. 229-240. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.007>.
- [28] Melan, E.: Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung. *In: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaft Wien* 147 (1938), S. 73-87.
- [29] Koiter, W.T.: General theorems for elastic plastic solids. *In: Progress of Solid Mechanics* (1960), S. 165-221.
- [30] Bree, J.: Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements. *In: Journal of Strain Analysis*, Vol. 2 (1967), Iss. 3, pp. 226-238. <https://doi.org/10.1243/03093247V023226>.
- [31] Nguyen, Q.S.; Pham, D.C.: On shakedown theorems in hardening plasticity. *In: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, Vol. 329 (2001), Iss. 5, pp. 307-314. [https://doi.org/10.1016/s1620-7742\(01\)01321-6](https://doi.org/10.1016/s1620-7742(01)01321-6).
- [32] Simon, J.-W.; Weichert, D.: Shakedown analysis of engineering structures with limited kinematical hardening. *In: International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49 (2012), 15-16, pp. 2177-2186. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.04.039>.
- [33] Bodovillé, G.; Saxcé, G. de: Plasticity with non-linear kinematic hardening: modelling and shakedown analysis by the bipotential approach. *In: European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 20 (2001), Iss. 1, pp. 99-112. [https://doi.org/10.1016/s0997-7538\(00\)01109-8](https://doi.org/10.1016/s0997-7538(00)01109-8).

- [34] *Simon, J.-W.*: Computational lower bound shakedown analysis with limited kinematic hardening is only safe if a specific hardening law is defined. *In: Mechanics Research Communications* 121 (2022), S. 103865. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103865>.
- [35] *Peng, H.; Liu, Y.*: Shakedown and Limit Analysis of Kinematic Hardening Piping Elbows Under Internal Pressure and Bending Moments. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 144 (2022), Heft 2. <https://doi.org/10.1115/1.4051630>.
- [36] *Ma, Z.; Chen, H.; Liu, Y. et al.*: A direct approach to the evaluation of structural shakedown limit considering limited kinematic hardening and non-isothermal effect. *In: European Journal of Mechanics - A/Solids* 79 (2020), S. 103877. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103877>.
- [37] *Maier, G.*: A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects. *In: Problems of Plasticity*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1974, S. 492-495.
- [38] *Maier, G.; Pan, L.G.; Perego, U.*: Geometric effects on shakedown and ratchetting of axisymmetric cylindrical shells subjected to variable thermal loading. *In: Engineering Structures*, Vol. 15 (1993), Iss. 6, pp. 453-465. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90063-a](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90063-a).
- [39] *Ponter, A.R.; Engelhardt, M.*: Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a Von Mises yield condition. *In: European Journal of Mechanics - A/Solids* 19 (2000), Heft 3, S. 423-445. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)00171-6](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00171-6).
- [40] *Ponter, A.R.; Chen, H.*: A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit. *In: European Journal of Mechanics - A/Solids* 20 (2001), Heft 4, S. 539-553. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01161-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01161-5).
- [41] *Chen, H.F.; Ponter, A.; Ainsworth, R.A.*: The linear matching method applied to the high temperature life integrity of structures. Part 1. Assessments involving constant residual stress fields. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 83 (2006), Heft 2, S. 123-135. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2005.11.005>.
- [42] *Chen, H.F.; Ponter, A.; Ainsworth, R.A.*: The linear matching method applied to the high temperature life integrity of structures. Part 2. Assessments beyond shakedown involving changing residual stress fields. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 83 (2006), Heft 2, S. 136-147. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2005.11.006>.
- [43] SIMULIA: Abaqus Analysis User's Manual. 2001, <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?start=pt05ch18s02abm24.html> [Zugriff am: 18.08.2022].

- [44] *Chen, H.*: Linear matching method for design limits in plasticity. *In: Computers, Materials and Continua - Tech Science Press* 20 (2010), Heft 2, S. 159-183.
- [45] *Barbera, D.; Chen, H.; Liu, Y. et al.*: Recent Developments of the Linear Matching Method Framework for Structural Integrity Assessment. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 139 (2017), Heft 5. <https://doi.org/10.1115/1.4036919>.
- [46] *Seshadri, R.*: The Effect of Multiaxiality and Follow-Up on Creep Damage. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 112 (1990), Heft 4, S. 378-385. <https://doi.org/10.1115/1.2929892>.
- [47] *Boyle, J.T.; Hamilton, R.; Shi, J. et al.*: A Simple Method of Calculating Lower-Bound Limit Loads for Axisymmetric Thin Shells. *In: Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 119 (1997), Iss. 2, pp. 236-242. <https://doi.org/10.1115/1.2842291>.
- [48] *Mackenzie, D.; Boyle, J.T.*: A Computational Procedure for Calculating Primary Stress for the ASME B&PV Code. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 116 (1994), Heft 4, S. 339-344. <https://doi.org/10.1115/1.2929599>.
- [49] *Ladevèze, P.*: Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation, Mechanical Engineering Series, Springer, New York, NY, 1999. ISBN 9781461214328.
- [50] *Chinesta, F.; Keunings, R.; Leygue, A. (eds.)*: The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations – A primer, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, Springer, Cham, 2013. ISBN 978-3-319-02864-4.
- [51] *Maitournam, M.; Pommier, B.; Thomas, J.-J.*: Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique. *In: Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 330 (2002), Iss. 10, pp. 703-708. [https://doi.org/10.1016/S1631-0721\(02\)01516-4](https://doi.org/10.1016/S1631-0721(02)01516-4).
- [52] *Zarka, J.; Frelat, J.; Inglebert, G. et al.*: A new approach to inelastic analyses of structures (1990).
- [53] *Kalnins, A.*: Fatigue analysis of pressure vessels with twice-yield plastic FEA. *In: Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference - 2001* 419 (2001), S. 43-52.
- [54] *Kalnins, A.*: Fatigue Analysis in Pressure Vessel Design by Local Strain Approach: Methods and Software Requirements. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 128 (2006), Heft 1, S. 2-7. <https://doi.org/10.1115/1.2137770>.
- [55] *Hübel, H.; Willuweit, A.; Rudolph, J. et al.*: Performance study of the simplified theory of plastic zones and the Twice-Yield method for the fatigue check. *In: International Journal of*

Pressure Vessels and Piping 116 (2014), S. 10-19.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2014.01.003>.

- [56] *Reinhardt, W.*: Assessment of the Twice-Yield Method for Elastic-Plastic Fatigue Analysis. *In: Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference - 2006*, S. 315-323. <https://doi.org/10.1115/PVP2006-ICPVT-11-93004>.
- [57] *Zarka, J.; Engel, J.J.; Inglebert, G.*: On a simplified inelastic analysis of structures. *In: Nuclear Engineering and Design* 57 (1980), Heft 2, S. 333-368. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(80\)90111-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(80)90111-9).
- [58] *Zarka, J.*: "Intelligent" optimal design of materials and structures – What does it mean?, 2000, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00114461> [Zugriff am: 18.08.2022].
- [59] *Tribout, J.; Inglebert, G.; Casier, J.*: A Simplified Method for the Inelastic Analysis of Structures Under Cyclic Loadings. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 105 (1983), Heft 3, S. 222-226. <https://doi.org/10.1115/1.3264268>.
- [60] *Hübel, H.*: Simplified Theory of Plastic Zones for cyclic loading and multilinear hardening. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 129-130 (2015), S. 19-31. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2015.03.002>.
- [61] *Chazallon, C.; Hornych, P.; Mouhoubi, S.*: Elastoplastic Model for the Long-Term Behavior Modeling of Unbound Granular Materials in Flexible Pavements. *In: International Journal of Geomechanics* 6 (2006), Heft 4, S. 279-289. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1532-3641\(2006\)6:4\(279\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1532-3641(2006)6:4(279)).
- [62] *Inglebert, G.; Frelat, J.*: Quick analysis of inelastic structures using a simplified method. *In: Nuclear Engineering and Design* 116 (1989), Heft 3, S. 281-291. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90088-5](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90088-5).
- [63] *Hassine, T.; Legrand, E.; Inglebert, G.*: Direct Estimation of the Stabilised State of a Structure under non Radial Loading for elastic Shakedown Case, 10th Int. Conf. on Mathematical and Computer Modelling and Scientific Computing,, Boston, 1995.
- [64] *Legrand, E.; Hassine, T.; Inglebert, G.*: A new Algorithm to Perform Shakedown Analysis on a Structure under non Radial Loading, 10th Int. Conf. on Mathematical and Computer Modelling and Scientific Computing,, Boston, 1995.
- [65] *Fathallah, R.; Inglebert, G.; Castex, L.*: Prediction of plastic deformation and residual stresses induced in metallic parts by shot peening. *In: Materials Science and Technology* 14 (1998), Heft 7, S. 631-639. <https://doi.org/10.1179/mst.1998.14.7.631>.
- [66] *Inglebert, G.; Caron, I.; Da Silva Botelho, T. et al.*: Mechanical Surface Treatments and Life Improvement. *In: : Limit States of Materials and Structures*, S. 221-232.

- [67] *Hassine, T.; Inglebert, G.; Pons, M.*: Shakedown and Damage Analysis Applied to Rocket Engines. *In: : Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads*. Springer, Dordrecht, 2000, pp. 255-267.
- [68] *Yu, M.; Moran, B.; Keer, L.M.*: A Direct Analysis of Two-Dimensional Elastic-Plastic Rolling Contact. *In: Journal of Tribology* 115 (1993), Heft 2, S. 227-236. <https://doi.org/10.1115/1.2920996>.
- [69] *Yu, C.-C.; Moran, B.; Keer, L.M.*: A Simplified Direct Method for Cyclic Strain Calculation – Repeated Rolling/Sliding Contact on a Case-Hardened Half Plane. *In: Journal of Tribology* 118 (1996), Heft 2, S. 329-334. <https://doi.org/10.1115/1.2831304>.
- [70] *Yu, C.-C.; Keer, L.M.*: Edge effect on elastic-plastic rolling/sliding contacts. *In: Computational Mechanics* 18 (1996), Heft 4, S. 259-268. <https://doi.org/10.1007/BF00364141>.
- [71] *Li, C.; Panier, S.; Hariri, S.*: Application of a simplified method to evaluate the inelastic state due to fretting fatigue. *In: Tribology International* 39 (2006), Heft 10, S. 1092-1099. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2006.02.024>.
- [72] *Khalij, L.; Hariri, S.; Vaucher, R.*: Shakedown of three-dimensional structures under cyclic loading with the simplified analysis. *In: Computational Materials Science* 24 (2002), Heft 3, S. 393-400. [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(01\)00258-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(01)00258-0).
- [73] *Jabbado, M.*: Fatigue polycyclique des structures métalliques – Durée de vie sous charge-ments variables. Paris, Ecole Polytechnique, Dissertation, 2006.
- [74] *MAITOURNAM, M.H.; Krebs, C.; Galtier, A.*: A multiscale fatigue life model for complex cyclic multiaxial loading. *In: International Journal of Fatigue* 33 (2011), Heft 2, S. 232-240. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2010.08.017>.
- [75] *JABBADO, M.; MAITOURNAM, M.H.*: A high-cycle fatigue life model for variable amplitude multiaxial loading. *In: Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 31 (2008), Heft 1, S. 67-75. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2007.01201.x>.
- [76] *Vollrath, B.; Hübel, H.*: Determination of post-shakedown quantities of a pipe bend via the simplified theory of plastic zones compared with load history dependent incremental analysis. *In: : AIP Conference Proceedings*, S. 120004.
- [77] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Simplified Analysis of Strains Accumulated in the State of Elastic Shakedown Considering Multi-Parameter Loadings. *In: , Volume 3B: Design and Analysis*, 2018.
- [78] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Simplified determination of accumulated strains to satisfy design code requirements. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 171 (2019), S. 92-103. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.01.014>.

- [79] Vollrath, B.; Hübel, H.: Direct Analysis of Post-Shakedown Quantities With the STPZ Considering Multi-Parameter Loading. *In:* , Volume 3: Design and Analysis, 2019.
- [80] Sai, K.: Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées, 1993.
- [81] Chazallon, C.; Allou, F.; Hornych, P. et al.: Finite elements modelling of the long-term behaviour of a full-scale flexible pavement with the shakedown theory. *In: International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 33 (2009), Heft 1, S. 45-70. <https://doi.org/10.1002/nag.702>.
- [82] Allou, F.; Chazallon, C.; Hornych, P.: A numerical model for flexible pavements rut depth evolution with time. *In: International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2007), Heft 1, S. 1-22. <https://doi.org/10.1002/nag.521>.
- [83] Habiballah, T.; Chazallon, C.: An elastoplastic model based on the shakedown concept for flexible pavements unbound granular materials. *In: International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 29 (2005), Heft 6, S. 577-596. <https://doi.org/10.1002/nag.426>.
- [84] Chazallon, C.; Habiballah, T.: Finite Elements Modelling of Flexible Pavements with the Shakedown Concept. *In: Road Materials and Pavement Design* 6 (2005), Heft 1, S. 97-117. <https://doi.org/10.3166/rmpd.6.97-117>.
- [85] Allou, F.; Petit, C.; Chazallon, C. et al.: Shakedown Approaches to Rut Depth Prediction in Low-Volume Roads. *In: Journal of Engineering Mechanics* 136 (2010), Heft 11, S. 1422-1434. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000165](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000165).
- [86] Chazallon, C.; Koval, G.; Hornich, P. et al.: Modelling of rutting of two flexible pavements with the shakedown theory and the finite element method. Influence of seasonal water content variations (2009).
- [87] Li, K.; Nowamooz, H.; Chazallon, C. et al.: Modeling of dense expansive soils subjected to wetting and drying cycles based on shakedown theory (2014).
- [88] Nowamooz, H.; Li, K.; Chazallon, C. et al.: Shakedown modeling of unsaturated expansive soils subjected to wetting and drying cycles. *In: E3S Web of Conferences* 9 (2016), Heft 4, S. 8007. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20160908007>.
- [89] Li, K.; Nowamooz, H.; Chazallon, C. et al.: Limit Deformation Analysis of Unsaturated Expansive Soils During Wetting and Drying Cycles. *In: Soil Mechanics and Foundation Engineering* 55 (2018), Heft 1, S. 33-39. <https://doi.org/10.1007/s11204-018-9498-0>.

- [90] Li, K.; Nowamooz, H.; Chazallon, C. et al.: Zarka shakedown modelling of expansive soils subjected to wetting and drying cycles. *In: Geomechanics and Geoengineering* 13 (2018), Heft 2, S. 77-87. <https://doi.org/10.1080/17486025.2017.1393199>.
- [91] Li, K.; Nowamooz, H.; Chazallon, C. et al.: Mechanical behaviour of densely compacted expansive soils during wetting and drying cycles – An analytical model based on shakedown concept. *In: European Journal of Environmental and Civil Engineering* 6 (2019), S. 1-15. <https://doi.org/10.1080/19648189.2019.1568307>.
- [92] Li, K.; Nowamooz, H.; Chazallon, C. et al.: Finite element modelling of the mechanical behaviour of unsaturated expansive soils subjected to wetting and drying cycles with shakedown concept. *In: European Journal of Environmental and Civil Engineering* 24 (2020), Heft 1, S. 17-33. <https://doi.org/10.1080/19648189.2017.1363666>.
- [93] Hübel, H.: Simplified theory of plastic zones. *In: BAUINGENIEUR* 73 (1998), S. 492-502.
- [94] Cecot, W.: Application of h-adaptive FEM and Zarka's approach to analysis of shakedown problems. *In: International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), Heft 12, S. 2139-2158. <https://doi.org/10.1002/nme.1154>.
- [95] Jiang, W.; Leckie, F.A.: A Direct Method for the Shakedown Analysis of Structures Under Sustained and Cyclic Loads. *In: Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), Heft 2, S. 251-260. <https://doi.org/10.1115/1.2899514>.
- [96] Zarka, J.; Karaouni, H.: New Rules to Be Included in Codes and Standards to Represent Multiaxial Variable Amplitudes Loadings on Structures. *In: Proceedings of the 10th International Conference on Nuclear Engineering 2002, ICONE 10 – Presented at 10th International Conference on Nuclear Engineering, Arlington, Virginia, April 14 - 18, 2002. 10th International Conference on Nuclear Engineering. International Conference on Nuclear Engineering; American Society of Mechanical Engineers; Nihon-Kikai-Gakkai; ICONE. American Society of Mechanical Engineers, Arlington, Virginia, USA, 2002, pp. 501-508.*
- [97] Karaouni, H.; Zarka, J.: Optimal fatigue analysis of structures during complex loadings. *In: International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization* 7 (2016), A5. <https://doi.org/10.1051/smdo/2016006>.
- [98] Huang, J.; Nemat-Nasser, S.; Zarka, J.: Prediction of fatigue life of metallic structures with welded joints using automatic learning systems. *In: International Journal of Mechanics and Materials in Design* 1 (2004), Heft 3, S. 255-270. <https://doi.org/10.1007/s10999-005-0166-y>.
- [99] Zarka, J.; Karaouni, H.: Towards an Optimal Reliability of Metallic Structures during Random Loadings.

- [100] *Monville, J.-M.*: Optimal tightening process of bolted joints. *In: International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization* 7 (2016), A4. <https://doi.org/10.1051/smdo/2016005>.
- [101] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Simplified Theory of Plastic Zones in the state of elastic shakedown with stress stiffening. *In: European Journal of Mechanics - A/Solids* 95 (2022), S. 104613. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104613>.
- [102] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Ratcheting and strain ranges in the shakedown state with stress stiffening using the Simplified Theory of Plastic Zones. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 199 (2022), S. 104727. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2022.104727>.
- [103] *Przemieniecki, J.S.*: Theory of Matrix Structural Analysis. Courier Corporation, 1985. ISBN 9780486649481.
- [104] *McGuire, W.; Gallagher, R.H.; Saunders, H.*: Matrix Structural Analysis. *In: Journal of Mechanical Design* 104 (1982), Heft 3, S. 529. <https://doi.org/10.1115/1.3256379>.
- [105] *O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu und J. Z. Zhu*: The Finite Element Method (McGrawHill, London, 1977).
- [106] *Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.*: The finite element method – Its basis and fundamentals. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2005. ISBN 9780080472775.
- [107] *Przemieniecki, J.S.*: Theory of matrix structural analysis. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [108] *TURNER, M.J.; DILL, E.H.; MARTIN, H.C. et al.*: Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads. *In: Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 27 (1960), Iss. 2, pp. 97-106. <https://doi.org/10.2514/8.8412>.
- [109] *Maier, G.*: Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects. *In: International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7 (1971), Iss. 4, pp. 345-372. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90108-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90108-9).
- [110] *Maier, G.; Drucker, D.C.*: Effects of Geometry Change on Essential Features of Inelastic Behavior. *In: Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 99 (1973), Iss. 4, pp. 819-834. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001787>.
- [111] *Yokoo, Y.; Nakamura, T.; Uetani, K.*: The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures. *In: International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10 (1976), Iss. 3, pp. 503-525. <https://doi.org/10.1002/nme.1620100303>.
- [112] *Buckshumiyam, A.; Veerappan, A.R.; Shanmugam, S.*: Plastic collapse loads in shape-imperfect pipe bends under in-plane opening bending moment. *In: International Journal of*

- Pressure Vessels and Piping, 111-112 (2013), pp. 21-26.
<https://doi.org/10.1016/j.ijvpv.2013.04.034>.
- [113] *Li, J.; Zhou, C.-Y.; Zhu, J.-G.*: Limit loads for 180° pipe bends under in-plane bending moment considering geometric nonlinearity. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 183 (2020), p. 104100. <https://doi.org/10.1016/j.ijvpv.2020.104100>.
- [114] *Li, J.; Zhou, C.-Y.; Le Chang et al.*: Limit loads for un-cracked and circumferential through-wall cracked pipe bends under torsion moment considering geometric nonlinearity. *In: Thin-Walled Structures*, Vol. 116 (2017), pp. 37-52. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.024>.
- [115] *Weichert, D.*: On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures. *In: International Journal of Plasticity*, Vol. 2 (1986), Iss. 2, pp. 135-148. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(86\)90009-4](https://doi.org/10.1016/0749-6419(86)90009-4).
- [116] *Weichert, D.; Hachemi, A.*: Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures. *In: International Journal of Plasticity*, Vol. 14 (1998), Iss. 9, pp. 891-907. [https://doi.org/10.1016/s0749-6419\(98\)00035-7](https://doi.org/10.1016/s0749-6419(98)00035-7).
- [117] *Polizzotto, C.; Borino, G.*: Shakedown and steady-state responses of elastic-plastic solids in large displacements. *In: International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33 (1996), Iss. 23, pp. 3415-3437. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00185-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00185-9).
- [118] *Abdalla, H.F.; Megahed, M.M.; Younan, M.Y.A.*: Shakedown Limits of a 90-Degree Pipe Bend Using Small and Large Displacement Formulations. *In: Journal of Pressure Vessel Technology* 129 (2007), Heft 2, S. 287-295. <https://doi.org/10.1115/1.2716433>.
- [119] *Balakrishnan, S.; Veerappan, A.; Shanmugam, S.*: A comparative study of shape imperfection and internal pressure effects on plastic, shakedown and elastic limit loads using large and small strain formulation of 90° pipe bends. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping* 191 (2021), S. 104347. <https://doi.org/10.1016/j.ijvpv.2021.104347>.
- [120] *Liu, F.; Gong, J.-G.; Chen, H. et al.*: A direct approach to progressive buckling design considering ratcheting deformation. *In: Thin-Walled Structures*, Vol. 163 (2021), p. 107656. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107656>.
- [121] *Ahn, K.; Lim, I.-G.; Yoon, J. et al.*: A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *In: International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 17 (2016), Heft 9, S. 1149-1156. <https://doi.org/10.1007/s12541-016-0139-0>.
- [122] *Hübel, H.; Vollrath, B.*: Effect of stress stiffness on elastic-plastic strain range. *In: International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 192 (2021), p. 104421. <https://doi.org/10.1016/j.ijvpv.2021.104421>.

- [123] *Vollrath, B.; Hübel, H.*: Direct Analysis of Elastic-Plastic Strain Ranges and Accumulated Strains Considering Stress Stiffening. *In*: : Proceedings of ASME 2022 Pressure Vessels and Piping Conference (PVP 2022) – July 17-22, 2022, Las Vegas, Nevada. ASME 2022 Pressure Vessels & Piping Conference. American Society of Mechanical Engineers. The American Society of Mechanical Engineers, Las Vegas, Nevada, USA, 2022.
- [124] *Krieg, R.D.; Krieg, D.B.*: Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model. *In*: Journal of Pressure Vessel Technology 99 (1977), Heft 4, S. 510-515. <https://doi.org/10.1115/1.3454568>.