

# **Thermomechanische Analyse von inelastischen Deformationsvorgängen bei komplexer Beanspruchung in Modellierung und Experiment**

Von der Fakultät Maschinenbau, Elektro- und Energiesysteme  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von  
Diplom-Ingenieur (Dipl.-Ing.)

Holger Sparr

geboren am 10. August 1973 in Bad Saarow-Pieskow

Vorsitzende: Prof. Dr.-Ing. habil. Sabine Weiß  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Holger Seidlitz  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. mult. Holm Altenbach  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Matthias Ziegenhorn

Tag der mündlichen Prüfung: 07. März 2023

<https://doi.org/10.26127/BTUOpen-6419>

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an einem aus Drittmitteln geförderten Forschungsprojekt am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus–Senftenberg. Das Forschungsprojekt zur thermomechanischen Prüfung und Modellierung metallischer Konstruktionswerkstoffe (THEMECS-Sensor) wurde durch Prof. Dr.-Ing. Matthias Ziegenhorn angeregt und betreut.

Die Schönheit der Mechanik aus dem Blick des Ingenieurs, der die Anwendung mathematischer und physikalischer Prinzipien in ein Gleichungsgebäude überträgt, der am konkreten technischen Problem tragfähige Ergebnisse ableitet und der kreativ und beherzt Anwendungsfelder außerhalb konventioneller Fragestellungen aufschließt, wurde mir durch Herrn Prof. Dr.-Ing. Matthias Ziegenhorn in den vergangenen Jahren beständig nahe gebracht. Ich danke Prof. Dr.-Ing. Matthias Ziegenhorn für seine Unterstützung, den Freiraum bei der Ausgestaltung des Forschungsvorhabens und ebenso für die Gespräche, die bei Weitem nicht nur Fragen der Mechanik berührt haben.

Die fachliche Begutachtung der Arbeit wurde von Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. mult. Holm Altenbach und Prof. Dr.-Ing. Holger Seidlitz vorgenommen. Ich danke beiden Gutachtern herzlich für die konstruktive Begleitung und die Übernahme der Referate.

Mein Dank gilt ebenso meinen Hochschullehrern an der TU Dresden und hier insbesondere Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht für die Vermittlung meiner wesentlichen Grundkenntnisse der Kontinuumsmechanik und die Einbindung in die wissenschaftliche Tätigkeit einer stets kooperativen und kollegialen Arbeitsgruppe. Ich bedanke mich für die vielfältige Unterstützung am Institut für Leichtbau und Wertschöpfungsmanagement, der BTU Cottbus–Senftenberg, und besonders bei den Kolleginnen und Kollegen im Labor- und Werkstattbereich.

Die Zusammenarbeit mit den Partnern des Forschungsprojektes war für die Fokussierung auf wesentliche Fragestellungen besonders hilfreich. Hier bedanke ich mich in erster Linie bei Prof. Dr.-Ing. habil. Rainer Franke und Dr. rer. nat. Fabian Göttfert für die vielen fachlichen Diskussionen und die komplikationslose Lösung vieler organisatorischer Probleme. Die Zeit in den Büro- und Laborräumen des Lehrstuhls wurde stark durch die offene und freundliche Art sowie die organisatorische Klarheit von Frau Dr.-Ing. Daniela Schob, die bindende Herzlichkeit von Herrn Dr.-Ing. Robert Roszak und die zupackende Direktheit von Philipp Maasch, M. Eng., geprägt - danke dafür. Zu besonderem Dank bin ich Lukas Richter, M. Eng., für die Kooperation in der letzten Bearbeitungsphase der Arbeit verpflichtet.

Ohne meine Frau Lysann und meine Familie, wäre die Fertigstellung dieser Schrift nicht möglich gewesen. Der Rückhalt aus der Familie besteht aus der bedingungslosen Unterstützung meiner Eltern, der hilfreichen Bestätigung und Hinterfragung der eigenen Position durch die Familienmitglieder meiner Generation und, nicht zuletzt, aus der einfachen Existenz unserer Kinder. Ich nehme die Liebe, die Geduld und auch die ganz praktische Unterstützung gerne an und hoffe, das Empfangene auf meine Art zurückgeben zu können.

## Kurzfassung

Anwendbare Materialgesetze im Rahmen der phänomenologischen Kontinuumsmechanik sind durch die berücksichtigten Deformationsmechanismen geprägt und sind in der Regel für einen anzugebenden Gültigkeitsbereich einsatzfähig. Die verwendeten mathematischen Werkzeuge geben einen ausreichenden Anpassungsspielraum experimenteller Daten, beziehen jedoch die Physikalität des Materialgesetzes bedingt ein, da der thermodynamische Prozess der Deformation als näherungsweise isotherm behandelt wird.

In dieser Arbeit wird der Deformationsvorgang unter mechanischer Last als vollständiger thermodynamischer Prozess verstanden, der eine Temperaturentwicklung im Werkstoff einbezieht und die kalorischen Zustandsgrößen auswertet. Die Konzepte der Kontinuumsthermomechanik werden in der Beschreibung für thermodynamisch konsistente Materialgesetze genutzt. Die zugehörigen, mikrostrukturell motivierten Entwicklungsgrößen beschreiben das nichtlineare Verhalten für eine große Bandbreite von Materialklassen und in komplexen Belastungspfaden.

Um dies für die Ermittlung geeigneter Materialgesetze nutzbar zu machen wird die Infrarotthermografie für die Ermittlung der Oberflächentemperatur in den Messablauf integriert. Hauptaugenmerk liegt auf dem technisch relevanten Anwendungsbereich der kleinen Deformationsgradienten bei Raumtemperatur. Anhand charakteristischer Belastungspfade für metallische Konstruktionswerkstoffe wird gezeigt, dass die Dynamik der Deformationsmechanismen sich in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik, in der Temperaturentwicklung und bei den kalorischen Zustandsgrößen signifikant widerspiegeln. Dies trifft insbesondere auch dann zu, wenn die Versuchsanforderungen minimiert werden und die gemessenen Temperaturänderungen klein sind.

Die Ergebnisse der Arbeit weisen mit der Erweiterung des veränderlichen Temperaturfeldes einen Zugewinn in der Physikalität der thermodynamisch konsistenten Materialgesetze nach.

## Summary

Applicable material laws within the framework of phenomenological continuum mechanics are characterized by the deformation mechanisms considered and are usually applicable for a range of validity to be specified. The mathematical tools used give a sufficient margin to fit the experimental data. However, they only include the physicality of the material law to a certain extent, since the thermodynamic process of the deformation is treated as approximately isothermal.

In this work, the deformation under mechanical load is understood as a complete thermodynamic process, which includes a temperature evolution in the material and evaluates the caloric state variables. The concepts of continuum thermomechanics are used in the description and the generation of thermodynamically consistent material laws. The associated microstructurally motivated, evolutionary variables describe the nonlinear behaviour of a wide range of material classes and is applicable to complex loading paths.

In order to make this useful for the determination of suitable material laws, the infrared thermography is used and is integrated into the measurement procedure to obtain the surface temperature for the full load path. The main focus is on the technically relevant application range of small deformation gradients at room temperature. On the basis of characteristic load paths for metallic structural materials, it will be shown that the dynamics of the deformation mechanisms are reflected in the stress-strain characteristics, in the temperature evolution and in the characteristics of caloric state variables. This is particularly true even when the test requirements are minimized and the measured temperature changes are small.

With the extension of the evolving temperature field, the results of this work prove a gain in the physicality of thermodynamically consistent material laws.

## Thesen

Die Materialbeschreibung im Rahmen der Kontinuumsthermomechanik werden mit einer universellen Messmethodik kombiniert, die auf moderner, hochauflösender IR-Kameratechnik und zugehöriger leistungsstarker Rechentechnik beruht.

Das Zusammenwirken von experimenteller und numerischer Analyse zeigt:

1. Den Deformationsvorgang als thermodynamischen Prozess zu betrachten, ermöglicht die umfassend physikalische Beurteilung des Materialverhaltens mit der Temperaturentwicklung sowie energetischer Kennlinien als zusätzliche Charakteristiken.
2. Die Verwendung einer hochauflösenden IR-Kamera bei Raumtemperatur ist geeignet, eine ausreichend genaue Messung der Temperaturänderung in räumlicher und zeitlicher Auflösung zu erlangen.
3. Die Eigenschaften der IR-Messdaten ermöglichen die Ermittlung des Verschiebungsfeldes in hinreichender Genauigkeit, so dass kein weiteres Messsystem für das Dehnungsfeld im relevanten Messbereich erforderlich ist.
4. Eine Minimierung des experimentellen Aufwands wird erreicht, wenn auf die Realisierung möglichst idealer thermischer Randbedingungen verzichtet wird.
5. Die Dehnratenabhängigkeit des Materialverhaltens ist für das Versuchskonzept und die Modellierungsstrategie zu berücksichtigen.
6. Die Modellierung erfolgt im Rahmen der Kontinuumsthermomechanik mit den Annahmen:
  - Der Wärmeleitvorgang im metallischen Werkstoff ist unabhängig vom Beanspruchungszustand.
  - Die Identifikation der thermischen Werkstoffparameter erfolgt entkoppelt von der mechanischen Beanspruchung.
  - Die thermischen Werkstoffparameter ( $c_\varepsilon$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ) können im Bereich moderater Temperaturänderungen als konstant vorausgesetzt werden.
  - Die mechanischen Werkstoffparameter können für metallische Werkstoffe im Bereich moderater Temperaturänderungen als konstant vorausgesetzt werden.
7. In die Modellierung des gekoppelten Feldproblems sind die Randeigenschaften, die vornehmlich durch die Spannelemente der Prüftechnik bestimmt werden, einzubeziehen.
8. Die Versuchsführung ist den zu erwartenden thermomechanischen Eigenschaften des Gesamtsystems hinsichtlich der Verschränkung der Zeitskalen dissipativer Vorgänge aus Deformation und Wärmeleitung anzupassen.

Die Komplexität des thermodynamischen Prozesses erfordert die Trennung der Untersuchung von mechanischer und thermischer Systemantwort bzw. deren Entkopplung aufzugeben. Es ist notwendig den Einfluss eines Versuchsparameters im Experiment oder eines Modellparameters in der Simulation auf die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik, die Temperaturentwicklung in Raum und Zeit sowie auf aussagekräftige, energetische Kennlinien parallel zu diskutieren.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>12</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>13</b>
<b>Liste der wesentlichen Symbole und Formelzeichen</b>	<b>14</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>17</b>
1.1 Einordnung . . . . .	17
1.2 Motivation und Zielsetzung . . . . .	19
<b>2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>22</b>
2.1 Kinematik . . . . .	22
2.2 Bilanzgleichungen . . . . .	25
2.3 Thermodynamische Potenziale . . . . .	31
2.3.1 LEGENDRE-Transformation . . . . .	32
2.3.2 Thermodynamische Beschränkungen und deren Konsequenzen	33
2.4 Prinzipien für Materialmodelle . . . . .	35
2.5 Wärmeleitgleichung . . . . .	38
2.5.1 Lineare Thermoelastizität für den isotropen Festkörper . . . .	40
2.6 Allgemeine Erweiterungsmöglichkeiten . . . . .	43
2.6.1 Modellentwicklung mittels rheologischer Methoden . . . . .	43
2.6.2 Konzept innerer Variablen . . . . .	45
2.6.3 Integration phänomenologischer Beobachtungen . . . . .	52
2.6.4 Modellkombination und Modellerweiterungen . . . . .	64
2.7 Formulierung der Anfangsrandbedingungen . . . . .	66
2.8 Modellbeschreibung . . . . .	67
2.8.1 Modell 1 – Rheologisches Netzwerk mit Fließbedingung . . . . .	74
2.8.2 Modell 2 – Bodner/Lindenfeld ohne Fließbedingung . . . . .	78
2.8.3 Modell 3 – Kamlah/Haupt als elastisch-plastisches Material- gesetz . . . . .	81
<b>3 Temperaturfeldermittlung</b>	<b>84</b>
3.1 Thermografie . . . . .	84
3.1.1 Physikalische Grundlagen der Thermografie . . . . .	85
3.2 Bildverarbeitung . . . . .	88
3.2.1 Digitale Bildkorrelation . . . . .	88
3.2.2 Koordinatensysteme . . . . .	91
3.2.3 Emissionsgradkorrektur . . . . .	93
3.3 Umsetzung und Maßnahmen . . . . .	94
3.3.1 Probenvorbereitung . . . . .	95
3.3.2 Auswertung der IR-Daten . . . . .	96

3.3.3	Charakterisierung von Lokalisierungseffekten . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Stand der Forschung</b>	<b>101</b>
4.1	Versuchsführung . . . . .	101
4.1.1	Erste Versuche und Fragestellungen in der thermomechanische Kopplung . . . . .	101
4.1.2	Thermografie als Anwendungsfall in aktuellen Versuchsaufbauten . . . . .	106
4.2	Analytik . . . . .	114
4.2.1	Viskoplastizität . . . . .	117
4.3	Konsequenzen . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>133</b>
5.1	Prüfeinrichtung und Beobachtungseinheiten . . . . .	133
5.2	Probenvorbereitung . . . . .	137
5.3	Experimentelle Methodik . . . . .	138
5.4	Viskoelastizität . . . . .	139
5.5	Viskoplastizität . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Experimentelle und numerische Analyse</b>	<b>142</b>
6.1	Zugversuch Edelstahl XCrNi18.9 . . . . .	142
6.2	Kupferflachproben . . . . .	145
6.2.1	Änderung der Deformationsgeschwindigkeit im Zugversuch . . . . .	145
6.2.2	Multirelaxationstest . . . . .	150
6.2.3	Stufentest . . . . .	152
6.3	Versuche mit Lastgeschichte . . . . .	154
6.3.1	Vorversuche an Kupferflachproben . . . . .	155
6.3.2	Zyklische Versuche an Stahlrundproben . . . . .	158
6.3.3	Zugversuche an Stahlrundproben . . . . .	163
6.4	AM-Flachproben aus Aluminium . . . . .	170
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>175</b>
	<b>Literatur</b>	<b>179</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>193</b>
A.1	Parameter bzgl. Abschnitt 6.1 . . . . .	193
A.2	Parameter und Daten bzgl. Abschnitt 6.2.1 . . . . .	195
A.3	Temperaturentwicklung komplexer Zugversuche mit Vorlast . . . . .	197
A.4	Zugversuche an Stahlrundproben . . . . .	198
A.5	Zugversuche an additiv gefertigten Flachproben aus Aluminium . . . . .	200

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Konfigurationen des dreidimensionalen Körpers $\mathcal{B}$ . . . . .	22
2.2	Thermodynamisches Quadrat mit den spezifischen, thermodynamischen Potenzialen ( <i>rot</i> ) und den zugehörigen Zustandsgrößen für die entsprechende LEGENDRE-Transformation . . . . .	32
2.3	Materialklassen nach Haupt, 2002 . . . . .	44
2.4	Komplexes rheologisches Netzwerk (Bröcker und Matzenmiller, 2013) . . . . .	45
2.5	Generalisiertes MAXWELL-Modell . . . . .	46
2.6	Ausgangs-, Momentan- und Zwischenkonfigurationen ( <i>a</i> ) nach Shutov und Ihlemann, 2011 mit dem Herauslösen der thermischen Deformationsanteile aus den elastischen Deformationen und ( <i>b</i> ) nach der klassischen Herangehensweise . . . . .	52
2.7	Ausgangs-, Momentan- und Zwischenkonfigurationen aus Shutov und Ihlemann, 2011 . . . . .	57
2.8	Mikroschädigung aus Murakami, 2012 . . . . .	65
2.9	Schematische Verdeutlichung der Spannungsanteile mit linearer Verfestigung und viskosem Verhalten . . . . .	73
2.10	Zugehöriges rheologisches Netzwerke: ( <i>a</i> ) originaler Ansatz nach Bröcker und Matzenmiller, 2013), ( <i>b</i> ) Netzwerkerweiterung mit Viskosität im elastischen Deformationsanteil (Sparr u. a., 2020) . . . . .	74
2.11	Rheologische Analogie für das Bodner–Lindenfeld-Modell . . . . .	80
3.1	Spektraler Transmissionsgrad von Luft . . . . .	85
3.2	PLANCKsches Strahlungsgesetz für den schwarzen Strahler . . . . .	86
3.3	Verschiedene Bildbearbeitungszustände von Referenz- und Momentankonfiguration im Auswerteprozess . . . . .	89
3.4	Mögliche Teilflächenverteilung als ein reguläres Gitter auf der Oberfläche . . . . .	89
3.5	Koordinatensysteme zur Deformationsbeschreibung (a) im Ausgangszustand - Referenzkonfiguration und (b) im deformierten Zustand - Momentankonfiguration . . . . .	91
3.6	Voruntersuchungen zur Bestimmung der Emissionseigenschaften bei unterschiedlichen Beschichtungsmustern . . . . .	95
3.7	Zylindrische Proben mit Muster im IR-Bild und erster Schritt in der Quantifizierung der Bilddaten . . . . .	96
3.8	Zugversuch an Kupfer-Flachproben mit lokaler Störung: (a) reguläres Gitter für die DIC im unbelasteten Zustand, (b) originales und (c) transformiertes Thermogramm im belasteten Zustand, (d) Temperaturfeld nach Emissionskorrektur sowie (e) der zeitlicher Verlauf von Dehnung und Temperatur an ausgewählten Positionen. . . . .	98

3.9	Zugversuch an Aluminium-Flachproben: (a) Ausgangsthermogramm im unbelasteten Zustand, (b) Temperatur- und (c) Dehnungsverteilung an zwei Zeitpunkten sowie (d) die Profile der Dehnung in Zugrichtung ( <i>oben</i> ) und der Temperaturänderung ( <i>mitte</i> ) entlang der Probe als auch der Kraftverlauf für einen begrenzten Lastabschnitt ( <i>unten</i> ) . . . . .	99
4.1	Gespeicherte Energie bei unterschiedlicher Versuchsdurchführung und für unterschiedliche Messprinzipien – Angabe in [ $\text{cal mol}^{-1}$ ] (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 46) . . . . .	103
4.2	Energieratenverhältnis (Inkrement der gespeicherten Energie zu Inkrement der plastischen) über der wahren Dehnung (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 52) . . . . .	104
4.3	Gespeicherte Energie über aufgebrachtener Arbeit – (Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 67) . . . . .	104
4.4	Gespeicherte Energie über Ziehgeschwindigkeit – (Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 57) . . . . .	105
4.5	Energieangaben [eV] für die Bewegung von Zwischengitteratomen (Spalte 2) bzw. von Leerstellen (Spalte 3) (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 15) . . . . .	105
4.6	Ableitung einer Definition für die Ermüdungsfestigkeit über die Temperaturentwicklung (aus Montesano, Fawaz und Bougherara, 2013) . . . . .	107
4.7	Dissipation in Abhängigkeit der Beanspruchungsamplitude . . . . .	108
4.8	Versuchsführung und Wärmeanteil $\beta$ für metallische Proben . . . . .	110
4.9	Amplitudenabhängigkeit des Verlustfaktors der inneren Reibung nach Schwarz (1985) für eine Al-Legierung bei 128 K vor (Kurve A) und nach (B) plast. Deformation (aus Blanter u. a., 2007, S.137) . . . . .	115
4.10	Kriterium zur Beurteilung der Fließgesetze durch Krempl, 1987 . . . . .	118
4.11	Hierarchische Modellbildung nach Chaboche, 1989 . . . . .	122
4.12	Zuordnung von Energieanteilen nach Deformationsmechanismus im Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus Chaboche, 1993b . . . . .	123
4.13	ETR (Zuwachsförmig) über der plastischen Dehnung – Proben „O“ ohne Vorlast und vorbelastete Proben „L“ (parallel zur Lastichtung) bzw. „T“ (senkrecht zur Lastichtung) [entnommen aus Oliferuk und Maj, 2004] . . . . .	126
4.14	Energieratenverhältnis $Z$ über der plastischen Arbeit mit der additiven Zerlegung auf der Basis mikrostruktureller Entwicklung ( $Z_1$ nicht homogene und $Z_2$ homogene Deformation) [entnommen aus Oliferuk und Raniecki, 2018] . . . . .	127
5.1	Servohydraulische Prüfmaschine 25 kN von ZWICK&ROELL mit Temperierkammer . . . . .	134
5.2	Flache Spannbacken der Prüfmaschine von ZWICK&ROELL . . . . .	135

5.3	(a) Versuchsaufbau an der <i>Inspekt Table Blue</i> 10 mit Positionierung der IR-Kamera (1) und des Strahlers für die Kontrasterhöhung (2) sowie (b) eingespannter Flachprobe (3) . . . . .	136
6.1	$\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve und Temperaturentwicklung im Zugversuch (XCrNi8.9) . . . . .	142
6.2	ETR über plastischen Dehnung bzw. plastischer Arbeit im numerischen Zugversuch (XCrNi8.9) . . . . .	143
6.3	$\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurven mit zwei Dehnraten und Entlastung (Kupfer) . . . . .	145
6.4	Temperaturentwicklung für Zugversuche mit zwei Dehnraten und Entlastung (Kupfer) . . . . .	147
6.5	ETR $\varphi$ über der plastischen Arbeit mit zwei Dehnraten (Kupfer) . . . . .	148
6.6	Entwicklung des Temperaturänderungsprofils über der Zeit in zugehöriger FE-Simulation . . . . .	148
6.7	Verlauf der Dehnungsgeschwindigkeit über der Versuchszeit gemäß Steuerung der Prüfmaschine für den Multirelaxationstest . . . . .	149
6.8	(a) Spannungs-Dehnungs- und (b) Temperaturänderungs-Charakteristik für Kupferflachproben im Multirelaxationstest . . . . .	150
6.9	ETR $\varphi$ für den Multirelaxationstest der Kupferflachproben . . . . .	151
6.10	Verlauf der Dehnungsgeschwindigkeit über der Versuchszeit gemäß Steuerung der Prüfmaschine für den Stufentest . . . . .	152
6.11	(a) Spannungs-Dehnungs- und (b) Temperaturänderungs-Charakteristik für Kupferflachproben im Stufentest . . . . .	153
6.12	ETR $\varphi$ für den Stufentest der Kupferflachproben . . . . .	153
6.13	Mittlere Temperaturänderung für 300 Zyklen Zugschwellbelastung an einer zuvor vollständig unbelasteten Kupferflachprobe . . . . .	154
6.14	300 Zyklen Zugschwellbelastung mit unterschiedlicher Lastgeschichte – Lastfrequenz von ( <i>links</i> ) 1.995 Hz bzw. ( <i>rechts</i> ) 4.464 Hz . . . . .	156
6.15	Spannungs-Dehnungs-Diagramm – Belastungsregime gemäß Abschn. 6.2.1 an Proben unterschiedlicher Lastgeschichte . . . . .	156
6.16	Temperaturänderungs-Charakteristik – Belastungsregime gemäß Abschnitt 6.2.1 an Proben unterschiedlicher Lastgeschichte . . . . .	157
6.17	Dehnungs- und Temperaturmessung über den Versuchszeitraum in separierten Blockzyklen – Prüffrequenz: 10 Hz . . . . .	158
6.18	ARAMIS-Dehnungsmessung – Auswertung der minimalen und maximalen Dehnung innerhalb eines geschlossenen Kraft-Weg-Zyklus . . . . .	159
6.19	Rekonstruiertes Dehnungssignal aus den beiden bildgebenden Messungen mit ARAMIS und der IR-Kamera . . . . .	160
6.20	Rekonstruiertes Temperaturänderungssignal mit Überlagerung einer linearen Funktion für Proben mit und ohne Lastgeschichte . . . . .	160
6.21	Geschlossene Spannungs-Dehnungs-Kurve hinsichtlich der Lastgeschichte . . . . .	161
6.22	Spannungs-Dehnungs-Kurven – Experimentelle Daten bei Variation der Vorlast und der Dehnrates . . . . .	163

6.23	Temperaturprofile für die Stahlproben (Dehnrates $\dot{\epsilon}_1$ ) . . . . .	164
6.24	Spannungs-Dehnungs-Charakteristik ( <i>links</i> ) und Temperatur-Zeit-Charakteristik ( <i>rechts</i> ) im Zugversuch mit der Dehnrates $\dot{\epsilon}_1$ mit Modellvarianten gemäß Tab. A.6 . . . . .	165
6.25	ETR-Charakteristik $\varphi$ im Zugversuch mit der Dehnrates $\dot{\epsilon}_2$ für die Modellvarianten gemäß Tab. A.6 . . . . .	166
6.26	Spannungs-Dehnungs-Charakteristik ( <i>links</i> ) und Temperatur-Zeit-Charakteristik ( <i>rechts</i> ) im Zugversuch mit der Dehnrates $\dot{\epsilon}_2$ mit Modellvarianten gemäß Tab. 6.2 . . . . .	167
6.27	ETR-Charakteristik $\varphi$ im Zugversuch mit der Dehnrates $\dot{\epsilon}_2$ mit Modellvarianten gemäß Tab. 6.2 . . . . .	167
6.28	Temperaturprofile für die Stahlproben (Dehnrates $\dot{\epsilon}_1$ ) . . . . .	169
6.29	Vergleich des Temperaturänderungsprofil für das Set 2 der Proben mit Lastgeschichte am Ende des Beobachtungszeitraums $t = 1.12$ s . . . . .	170
6.30	Fertigungstoleranzen im Probenradius und zugehörige lokalisierte Dehnungsverteilung bei $t = 1.12$ s . . . . .	170
6.31	Spannungs-Dehnungs-Charakteristik ( <i>links</i> ) und Temperatur-Zeit-Charakteristik ( <i>rechts</i> ) im Zugversuch für additiv gefertigte Aluminiumproben . . . . .	171
6.32	ETR-Charakteristik $\varphi$ im Zugversuch für additiv gefertigte Aluminiumproben . . . . .	171
6.33	Inspektion der Probenoberfläche als Indikation für die Auswertung: (a) geringe Indentierung der Spannflächen; (b) feines, homogenes Speckle-Muster auf geschwärzter Oberfläche . . . . .	172
6.34	Temperaturänderungsprofil für additiv gefertigte Aluminiumproben für ausgewählte Zeiten im Beobachtungszeitraum . . . . .	173
6.35	Musterentwicklung im Thermogramm bei Versagen für additiv gefertigte Aluminiumproben . . . . .	174
A.1	Thermogramm und symmetrisches Temperaturprofil für eine Kupferflachprobe im komplexen Zugversuch . . . . .	196
A.2	Temperaturänderungsverläufe für zyklisch vorbelastete Kupferflachproben mit jeweils 3 Proben bei Variation der Zyklenzahl von $10^3$ bis $10^5$ . . . . .	197
A.3	Geometrie der Stahlrundproben – orientiert an Rundproben nach DIN 50125 - Form A . . . . .	198
A.4	Geometrie der Aluminiumproben – orientiert an Flachproben nach DIN 50125 - Form H (Breite im Messbereich $b = 12.5$ mm, Länge des Messbereichs $L_c = 75$ mm) . . . . .	200

## Tabellenverzeichnis

5.1	Auswahl aus der technische Spezifikation der Kameramodelle . . .	136
5.2	Probenkonditionierung . . . . .	137
5.3	Oberflächenmessung der Temperatur im Vorversuch . . . . .	139
6.1	Numerische Auswertung des viskoelastischen Materialmodells für Proben mit bzw. ohne Vorlast bei einer Frequenz von 5 Hz, einem Kraftmittelwert $F_m = 7.5$ kN und einer Kraftamplitude von $F_a =$ 6.5 kN . . . . .	162
6.2	Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt- Modells für die Dehnrade $\dot{\epsilon}_2$ . . . . .	168
A.1	Parametersatz des Bodner-Lindenfeld-Modells für XCrNi8.9 . . .	193
A.2	Parametersatz des Bröcker-Matzenmiller-Modells für XCrNi8.9 . .	194
A.3	Parametersatz des Bodner-Lindenfeld-Modells für Kupfer . . . .	195
A.4	Parametersatz des Bröcker-Matzenmiller-Modells für Kupfer . . . .	196
A.5	Thermische Parameter für Stahl . . . . .	198
A.6	Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt- Modells für die Dehnrade $\dot{\epsilon}_1$ . . . . .	199
A.7	Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt- Modells für die Dehnrade $\dot{\epsilon}_2$ . . . . .	199
A.8	Thermomechanische Parameter des Kamlah-Haupt-Modells für ad- ditiv gefertigte Flachproben aus Aluminium . . . . .	200

## Liste der wesentlichen Symbole und Formelzeichen

Symbol	Bedeutung	Gleichung
$x, X$	Ortsvektor der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	(2.1)
$u$	Verschiebungsvektor	(2.2)
$F$	Deformationsgradiententensor	(2.3)
$C$	Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor	(2.7-1)
$B$	Links-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor	(2.7-2)
$E$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor	(2.8)
$A$	EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor	(2.9)
$D, \dot{E}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	(2.11) <sub>2</sub> , (2.12)
$H$	Verschiebungsgradiententensor	(2.15)
$\rho, \rho_R$	Massendichte	(2.20)
$m$	Masse	(2.20)
$I$	Impuls eines Körpers	(2.22)
$v$	Geschwindigkeitsfeld	(2.22)
$t$	Spannungsvektor	(2.23)
$f$	Volumenkraftdichte	(2.23)
$\sigma$	CAUCHYScher Spannungstensor	(2.24)
$T$	1. PIOLA-KIRCHHOFFScher Spannungstensor	(2.28)
$D_C$	Drehimpuls eines Körpers bzgl. des Referenzpunktes $C$	(2.29)
$K$	kinetische Energie	(2.32)
$E$	innere Energie	(2.33)
$e$	spezifische innere Energie	(2.33)
$L_a$	Leistung der äußeren Kräfte	(2.34)
$Q$	Wärmezufuhr	(2.35)
$\tilde{T}$	2. PIOLA-KIRCHHOFFScher Spannungstensor	(2.40)
$q, q_R$	Wärmestromvektor	(2.35), (2.41)
$S$	Entropie	(2.42)
$\eta$	spezifische Entropie	(2.42)
$\Gamma$	Entropieproduktion	(2.43)
$\gamma$	spezifische Entropieproduktion	(2.44)
$\theta$	absolute Temperatur	(2.43)
$\delta$	innere Dissipation	(2.46)
$g_\theta, g_{\theta R}$	Temperaturgradient	(2.45), (2.47)
$h$	Enthalpie	(2.49)
$g$	freie Enthalpie	(2.50)
$a, \bar{a}$	innere Variablen	(2.72), (2.73)
$c_\varepsilon, c_\sigma$	spezifische Wärmekapazität	(2.84), (2.85)

$\mathbb{C}$	Steifigkeitstensor	(2.92)
$\mathbf{M}$	Kopplungstensor	(2.92)
$\mathbf{K}$	Wärmeleitfähigkeitstensor	(2.95)
$\lambda, \mu$	Lamé-Konstanten	(2.98)
$k$	Wärmeleitkoeffizient	(2.101)
$\kappa$	isothermer Kompressionsmodul	(2.103)
$\alpha$	thermischer Ausdehnungskoeffizient	(2.104)
$\eta_{ij}$	Viskositätsmatrix bei linearer Viskoelastizität	(2.116)
$e_i$	spezifischer Zuwachs der inelastischen Arbeit	(2.131)
$e_s$	spezifischer Zuwachs der gespeicherten Arbeit	(2.132)
$\varphi$	Verhältnis $e_s/e_i$	(2.133)
$w_i$	spezifischer inelastischen Arbeit	(2.134)
$w_s$	spezifischer gespeicherten Arbeit	(2.135)
$\varphi_{int}$	Verhältnis $w_s/w_i$	(2.136)
$F$	Fließbedingung	(2.137), (2.153)
$\lambda$	plastischer Multiplikator	(2.138)
$\mathbf{F}(\cdot)$	Anteile des Deformationsgradiententensors aus der multiplikativen Zerlegung	(2.141)
$\mathbf{\Gamma}(\cdot)$	konfigurationsspezifische Verzerrungstensoren	(2.140), (2.145)
$\mathbf{X}$	<i>Backstress</i> -Tensor	(2.149), (2.154)
$y$	Fließspannung	(2.149), (2.154)
$s_p$	plastische Bogenlänge	(2.154), (2.155)
$\alpha, \varrho, \tau$	Absorptions-, Reflexions-, Transmissionsgrad	(3.1)
$\lambda$	Wellenlänge	(3.2)
$M_\lambda^0$	spezifische Ausstrahlung	(3.2)
$S^i, S'^i$	Intensitätsprofil, invertiertes Intensitätsprofil	(3.6)
$C^i, S'^i$	Kreuzkorrelation	(3.6)
$\mathbf{p}_{(m,n)}$	Ortsvektor der Teilfläche (m,n)	(3.7)
$\mathbf{d}_{c(m,n)}$	Abstandsvektor zum Zeilenachbarn der Teilfläche (m,n)	(3.7)
$\mathbf{d}_{r(m,n)}$	Abstandsvektor zum Spaltenachbarn der Teilfläche (m,n)	(3.7)
$\mathbf{M}^i$	erweiterte affine Transformationsmatrix	(3.10)
$\beta$	instantaner inelastischer Wärmeanteil	(4.2)
$\beta_{int}$	integraler inelastischer Wärmeanteil	(4.3)

### Zusätzlich verwendete Schreibweisen

- $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren gleicher Stufe, wobei das Ergebnis ein Skalar wird
- $c = \mathbf{a}\mathbf{b}$  Kontext bezogenes, verkürzendes Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren (Z. Bsp. ergibt das Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe wiederum einen Tensor 2. Stufe mit einer einfachen Verkürzung.)



---

# 1 Einleitung und Motivation

## 1.1 Einordnung von Thermografie und thermomechanischen Materialmodellen

Die Qualifizierung und Quantifizierung von Konstruktionswerkstoffen ist ein kontinuierlicher Prozess im Verlauf der Industrialisierung. Dieser Prozess ist ein Zusammenwirken von experimentellen Untersuchungen und der Analyse mittels einer angepassten Modellbildung. Die Modellbildung erfolgt vor dem Hintergrund eines konsistenten theoretischen Ansatzes, der die wesentlichen Phänomene berücksichtigt und die experimentelle Analyse durch Vorhersagen aus den theoretischen Ableitungen befruchtet.

Die materialtheoretischen Erkenntnisse haben sich seit der Mitte des 19. Jahrhunderts durch Beiträge aus den Grundlagen- und den Ingenieurwissenschaften stark erweitert. Mit den heutigen analytischen Werkzeugen, die sowohl im Fertigungs- als auch im Auslegungsprozess ihren Einsatz finden, werden sehr genaue Vorhersagen für Bauteile aus komplexen, heterogenen Werkstoffen getroffen. Es wird ein komplexes Deformations- und Schädigungsverhalten für hohe Beanspruchungen in engen Grenzen beschrieben und die Bauteilauslegung aus neuartigen Konstruktionswerkstoffe hinsichtlich vielfältiger Einsatzbedingungen optimiert.

Experimentelle Analysen aus der Physik, den Ingenieur- und Werkstoffwissenschaften spiegelten sich in einer phänomenologischen Abbildung im Materialmodell wider. Mit fortschreitendem Erkenntnisgewinn wurden die bestehenden Materialmodelle auf physikalischer Basis erweitert oder gegebenenfalls verworfen. Mit der Weiterentwicklung der experimentellen Methoden wurden Beobachtungen außerhalb der Makroskala in die Materialmodelle integriert. Die materialwissenschaftliche Forschung konzentrierte sich vom Anfang bis zur zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts auf metallische Werkstoffe und erweiterte im Verlauf ihren Anwendungsbereich auf andere Materialklassen. Die entdeckten Deformations- und Schädigungsmechanismen auf der Ebene der Mikrostruktur sind vielfältiger Natur und stark durch den Herstellungsprozess geprägt.

Die Diversität der Mikrostruktur und die stochastische Verteilung auf verschiedenen geometrischen Skalen führt auf eine große Anzahl unterschiedlichster Wechselwirkungen, so dass bis heute die phänomenologische Modellbildung auf der Makroebene als zentrale Methode für den ingenieurtechnischen Auslegungsprozess anzusehen ist. Dabei wird jedoch zunehmend auf die mikromechanische Dynamik der wesentlichen Deformationsphänomene Bezug genommen. Es ist generell das Ziel den Übergang eines Materials von einem Gleichgewichtszustand in einen benachbarten Gleichgewichtszustand zu beschreiben. Dabei wirken im Allgemeinen äußere Kräfte auf den zu beschreibenden Festkörper bei veränderlichen Umgebungsbedingungen ein. Diese Zustandsänderung ist als thermodynamischer Prozess aufzufassen und es gelten die Hauptsätze der Thermodynamik. In der Regel ist ein solcher Vorgang zeitabhän-

gig, irreversibel und dissipationsbehaftet. Dissipationsbehaftete Änderungen in der Mikrostruktur des Materials gehen mit einer Umwandlung in Wärme einher und resultieren in einer Änderung des Temperaturfeldes.

Die geplanten Einsatzbedingungen eines Bauteils beschränken in der Regel den Bereich der einwirkenden Kräfte sowie die Variabilität der Umgebungsbedingungen. Damit wird die experimentelle Analyse an die vorliegenden Einsatzbereiche angepasst und reduziert die Anforderungen an die analytische Beschreibung. Diese Vorgehensweise ist im konventionellen Maschinenbau üblich und in den Regelwerken, Vorschriften und Normen verankert. Für Materialversuche führt das auf quasistationäre Versuchsanordnungen mit der zugehörigen Lasteinleitungen und deren Steuerung. Die Versuchsführung wird so gestaltet, dass eine Temperaturentwicklung im Material vernachlässigt werden kann und eine Quantifizierung der dissipativen Vorgänge nicht stattfindet.

Die energetischen Betrachtungen im ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik sind die Grundprinzipien im Rahmen der Kontinuumsthermomechanik. Seit den grundlegenden Publikationen in den 1960ern in diesem Gebiet ist es von maßgebender Relevanz, dass die darin integrierten Materialmodelle den zweiten Hauptsatz nicht verletzen und somit thermodynamisch konsistent sind. Thermodynamische Konsistenz bedeutet praktisch eine Zulässigkeitsprüfung für die zu identifizierenden Materialparameter. Wird die Energiebilanz vollständig berücksichtigt, erhält man daraus die Wärmeleitgleichung. Darin sind die unabhängigen Variablen des mechanischen Deformationsvorgangs mit dem Temperaturfeld gekoppelt. Eine Deformation infolge mechanischer Belastung hat also stets eine Temperaturänderung im Material zur Folge.

Was bedeutet es demnach, wenn man in der experimentellen Analyse neben der Messung von Kraft- und Weggrößen ebenso das Temperaturfeld erfasst? Es ergibt sich die Möglichkeit die Wärmeleitgleichung auszuwerten, den Dissipationsanteil quantitativ zu erfassen und die Energieumwandlung durch Strukturänderungen zu diskutieren. Der mechanische Versuch gibt dann Aufschluss über die Gültigkeit des gewählten Materialmodells hinsichtlich einer zugehörigen Temperaturentwicklung.

Dieser Grundgedanke kann realisiert werden, wenn das Temperaturfeld mit einer ausreichenden Genauigkeit simultan gemessen werden kann. Die Infrarot-Messtechnik als berührungsloses Messverfahren ist in den letzten Jahrzehnten gereift, die erforderliche Genauigkeit zu gewährleisten. Moderne, hoch auflösende Infrarot-Kameras verfügen über eine Temperaturänderungsauflösung von wenigen hundertstel Grad Kelvin. Außerdem ist mit der Vergrößerung des Sensors die räumliche Auflösung so erweitert, dass die gesamte Oberfläche konventioneller Werkstoffproben erfasst wird. Im Einsatzbereich der Raumtemperatur sind die experimentellen Anforderungen auf die Eliminierung der Reflexion auf der Probenoberfläche reduziert. In üblichen Belastungspfaden liegt die maximal gemessene Temperaturänderung zwischen wenigen zehntel Grad Kelvin und einem niedrigen einstelligen Kelvin-Bereich und ist somit bis zu zwei Größenordnungen größer als die minimale Auflösung.

Die berührungslöse Messtechnik hat den Vorteil, die gesamte Probenoberfläche und die Spannzeuge der Prüfmaschine im Messfeld zu erfassen. Ähnlich den optischen Dehnungsmessverfahren werden mit der Thermografie lokale Effekte deutlich sichtbar. Die Zuordnung der Temperaturmesswerte für einen Raumpunkt zu einem materiellen Oberflächenpunkt wird über eine Bewegungskompensation realisiert. Damit steht in der gekoppelten thermomechanischen Modellierung die Temperatur als weitere Feldgröße zur Verfügung.

Zur Beurteilung der Physikalität des entworfenen Materialmodells ist es erforderlich, abgeleitete Zustandsgrößen und/oder deren zeitliche Ableitungen zu untersuchen sowie eine Quantifizierung bezüglich der verwendeten inneren Variablen vorzunehmen. Dadurch werden die Umwandlungsbeiträge spezieller Deformationsmechanismen geprüft und in Relation zueinander gesetzt. Eine Möglichkeit sich hierbei von der Physikalität leiten zu lassen, ist die Definition ausgezeichneter Belastungspfade, die einzelne Phänomene explizit betonen.

Bereits in Versuchen mit rein elastischem Verhalten wird in der thermomechanischen Kopplung für einachsige Zug- bzw. Druckbeanspruchung ein Temperaturabfall bzw. -anstieg beobachtet. Für Belastungen von metallischen Werkstoffen unterhalb der Fließgrenze liegt die maximal zu erwartende Temperaturänderung bei wenigen zehntel Grad Kelvin. Im Falle idealer adiabater Randbedingungen ist eine rein elastische Deformation von Be- und Entlastung ein reversibler Prozess. Der Körper besitzt nach der Entlastung wieder seine Ausgangstemperatur. Ist das Deformationsgeschehen mit innerer Reibung behaftet, wird der zugehörige Dissipationsanteil in Wärme umgesetzt. Für kleine Wärmemengen kann die Erwärmung aufgrund der Akkumulationseigenschaft durch unmittelbare Versuchswiederholung deutlich über den Temperaturlösungsbereich angehoben werden. In diesem Sinn eignet sich die Infrarotthermografie auch für zyklische Versuche.

## 1.2 Motivation und Zielsetzung

Die Kombination von experimenteller Analyse und zugehöriger Modellbildung ist ein Aufgabengebiet, das mit dem aktuellen Stand der Technik durch bewährte Regelwerke eingerahmt wird. Die Messung des Temperaturfeldes als ein Bestandteil zur Bewertung der Deformationsmechanismen bleibt dabei in der Regel unberücksichtigt. Ein standardisiertes Verfahren zur Ermittlung des Materialparametersatzes auf der Basis eines geeigneten Materialgesetzes steht nicht zur Verfügung.

Die beschriebenen Anwendungen der Infrarotthermografie sind zum jetzigen Zeitpunkt partikuläre Lösungen für die jeweiligen Interessensgebiete der beteiligten Institutionen. Die Infrarotthermografie wird in der experimentellen Mechanik zunehmend im Bereich der zerstörungsfreien Prüfung verwendet. Insbesondere die Defekterkennung (z. Bsp. *Debonding* in hybriden Bauweisen) bei mechanischer Anregung zählt zu den verbreiteten Anwendungsfällen.

Daraus folgt, dass eine thermografische Kamera für die Materialcharakterisierung mit einer robusten Methodik in den Versuchsablauf eingebunden werden muss. Das

bildgebende Messverfahren muss einerseits mit der Prüftechnik auf geeignete Weise gekoppelt werden und darf andererseits nicht mit der Messung anderer Feldgrößen interferieren. Das Messprinzip der Infrarotthermografie ist dem Messprinzip der berührungslosen Deformationsmessverfahren im sichtbaren Licht identisch. Mit entsprechender Kalibrierung wird dem einzelnen Pixel in der Thermografie eine Temperatur zugeordnet. Bei den optischen Verfahren erfolgt die Zuordnung einer Wellenlänge. Die aufgenommenen Rohdaten werden in beiden Fällen über eine Farbskalenkodierung in ein zugehöriges Bild überführt und mittels digitaler Bildverarbeitung ausgewertet.

Das erste wesentliche Ziel dieser Arbeit ist daher die Daten des Thermogramms in analoger Weise zu prozessieren. Die Messaufgabe der Infrarotthermografie wird um die Ermittlung der lokalen Deformationsgrößen erweitert ohne die Abbildungsgenauigkeit des Temperaturmessung aufzugeben. Der experimentelle Aufbau und die zugehörige Auswerteprozedur werden mit der Reduktion auf ein System zur berührungslosen Messwerterfassung für die gesamte Probenoberfläche stark vereinfacht. Die Genauigkeitsanforderungen messen sich dabei an den etablierten Verfahren und kommerziell erhältlichen Messsystemen. Zur Entwicklung dieses Verfahrens sind Fragen zur physikalischen Limitierung der Infrarotthermografie, zur Probenvorbereitung, zu den Auswertgorithmen und zur Kontrolle bzw. Steuerung der thermischen Randbedingungen zu beantworten.

Es werden verschiedene Arten von Materialgesetzen anhand von einfachen Zugversuchen verifiziert. Aus eigenen Vorversuchen und der Literaturstudie ist bekannt, dass für konventionelle metallische Konstruktionswerkstoffe ein geschwindigkeitsabhängiges Verhalten zu beobachten ist. Die Versuche werden bei Raumtemperatur durchgeführt. Die erwarteten Temperaturänderungen liegen im moderaten Bereich und deutlich oberhalb der Temporauflösung der verwendeten Infrarot-Kamera. Zur Identifikation der Materialparameter wird die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und die Temperaturänderungscharakteristik herangezogen. Die Parameterbestimmung ist im Allgemeinen ein hochgradig nichtlineares, mathematisches Problem. Die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems ist daher oftmals nur mit einem Satz von Startwerten zu ermitteln, welcher nicht willkürlich gewählt werden kann.

Die aus Kenntnis der vorhandenen Mikrostruktur motivierten Materialgesetze erlauben ein hierarchisches Vorgehen. Bei offensichtlich elastisch dominierten Verformungsvorgängen werden beispielsweise zunächst ausschließlich die thermoelastischen Materialparameter ermittelt und für den weiteren Identifikationsvorgang fixiert. Keines der ursprünglichen Materialmodelle mit Fließgrenze berücksichtigt eine Geschwindigkeitsabhängigkeit während der elastischen Deformation. Es wird dahingehend eine Modellerweiterung im Sinne eines generalisierten MAXWELL-Modells vorgeschlagen und für die numerische Simulation implementiert.

Die behandelten Materialgesetze werden hinsichtlich der Separierungsmöglichkeiten für die Charakteristiken der gemessenen Zustandsgrößen untersucht. Die herangezogenen Materialmodelle werden an komplexeren, eindimensionalen Lastre-

gimen validiert. Eine direkte experimentelle kalorische Auswertung der mechanischen Versuche wird aufgrund des experimentellen Aufwands und der zugehörigen erforderlichen Genauigkeit nicht angestrebt. Die Vergleichbarkeit der Materialmodelle wird indirekt über die Quantifizierung der einzelnen Energieanteile erzielt. Die Berechnung dieser Größen folgt dem Formulierungsgerüst der Kontinuumsthermomechanik und liefert eine dritte Charakteristik in Bezug zu den energetischen Relationen.

Die abgeleitete experimentelle und analytische Methodik wird nachfolgend auf weitere Materialien angewendet. Damit wird die Versuchsführung und die numerische Analyse fortlaufend systematisiert und die Relevanz der Modellparameter kategorisiert. Mit den akkumulierten Erkenntnissen werden hierarchisch strukturierte Versuchsprogramme als ein Weg zur standardisierten Anwendung der thermomechanischen Kopplung mittels Infrarotthermografie definierbar.

Unter diesen Gesichtspunkten ergibt sich eine thematische Dreiteilung der Arbeit. In den Abschnitten 2 und 3 werden die Grundlagen für die Bearbeitung des Themas dargestellt. Der Ableitung des Gleichungssatzes auf Basis der Kontinuumsthermomechanik im Abschnitt 2 wird ein größerer Platz eingeräumt. Die zentralen Punkte der thermodynamischen Potenziale in Verbindung mit dem Konzept der inneren Variablen führen auf die konkrete Formulierung von drei konkreten Materialmodellen, die für die numerische Analyse herangezogen werden. Abschnitt 3 beschreibt anschließend die wesentlichen physikalischen Prinzipien zur berührungslosen Temperaturfeldermittlung mit einer Infrarotkamera. Es werden die Methoden und Algorithmen zur Verarbeitung und Auswertung digitaler Bilder einbezogen und der Nachweis der erforderlichen Funktionalität dargestellt.

Im Abschnitt 4 werden die wesentliche Beiträge der Forschung sowohl aus Sicht der experimentellen Erfassung von Versuchsdaten und der analytischen Beschreibung des thermodynamischen Prozesses zusammengestellt. Die für die Umsetzung wesentlichen Kriterien für eigene Versuche hinsichtlich Aufbau und Durchführung werden besonders herausgestellt. Die Beiträge mit dem Schwerpunkt der analytischen Beschreibung fokussieren sich auf die wesentlichen Phänomene inelastischer Deformation metallischer Werkstoffe.

Anschließend werden im Abschnitt 5 die wesentlichen Punkte zur Handhabung der Materialproben sowie der Prüf- und Messtechnik beschrieben, ehe im Abschnitt 6 die Ergebnisse aus experimenteller und numerischer Analyse für drei verschiedene Werkstoffe unter unterschiedlichen Gesichtspunkten zusammengestellt und diskutiert werden. Der zentrale Punkt für alle Experimente ist die kombinierte Auswertung von Spannungs-Dehnungs-Charakteristik, der Temperaturentwicklung in der Probe und die Entwicklung energetischer Kenngrößen.

## 2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

### 2.1 Kinematik

Als Grundlage für die phänomenologische Beschreibung mittels der Prinzipien der Kontinuumsmechanik wird von einem materiellen Körper  $\mathcal{B} = \{\mathcal{P}\}$  ausgegangen, dessen materielle Punkte  $\mathcal{P}$  mit einer Referenzkonfiguration verknüpft sind. Die Referenzkonfiguration dient der Bewegungsbeschreibung des materiellen Körpers und wird im Sinne einer physikalischen Bedeutung mit der Abbildung in den dreidimensionalen, euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  verbunden. Die Abbildung benachbarter Konfigurationen wird als stetig vorausgesetzt und so die Bewegung eines materiellen Punktes als die stetige Gruppe aller Konfigurationen definiert. Die Zeit  $t$  bildet den zugehörigen Gruppenparameter. Zwei unterschiedliche Zeitpunkte dienen in der mathematischen Beschreibung der Kinematik und Deformation eines Körpers  $\mathcal{B}$  als zeitliche Bezugspunkte. Die Referenzkonfiguration  $\chi_1$  zu einem fixierten Zeitpunkt  $t_1$  beschreibt den Ausgangszustand. Während ein beliebiger Zeitpunkt  $t_2$  (mit  $t_2 > t_1$ ) den aktuellen Deformationszustand festhält und die Momentankonfiguration  $\chi_2$  darstellt (vgl. Abb. 2.1).

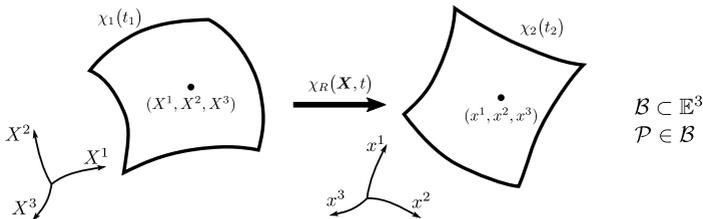


Abb. 2.1: Konfigurationen des dreidimensionalen Körpers  $\mathcal{B}$

Auf die vollständig mathematisch korrekte Darstellung im Sinne der Definition von mathematischen Räumen, der zugehörigen Metrik, zugehöriger Ableitungsbegriffe, Tangentialräume *etc.* und der damit einhergehenden korrekten Notation wird verzichtet und dafür auf die Lehrbücher der Kontinuumsmechanik (hier insbesondere Truesdell und Noll, 1992; Haupt, 2002; Gurtin, Fried und Anand, 2013)<sup>1</sup> verwiesen. Die mathematische Abbildung (*Mapping*) der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration wird mit  $\chi_R$  bezeichnet

$$\mathbf{x} = \chi_R(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Die allgemeinste Form der Darstellung ist die Verwendung krummliniger Koordinaten, wie es in Abb. 2.1 angedeutet ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann ebenso von kartesischen Koordinaten ausgegangen werden. Für Details zu krummlinigen Koordinaten kann auf dieselbe Literatur zurückgegriffen werden.

Durch einfache Vektoraddition wird der Verschiebungsvektor identifiziert.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

Der Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$  wird dann gemäß

$$\mathbf{F} := \text{Grad}_{\chi_R}(\mathbf{X}, t) \quad \text{mit} \quad \text{Grad}(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^K} \mathbf{G}_K \quad (2.3)$$

mit  $\mathbf{G}_K$  als kovariante Basis (Tangentenvektoren) definiert. Der Deformationsgradiententensor ist ein Zweipunktensorfeld und vermittelt zwischen der Momentan- und der Referenzkonfiguration.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

Die Zusammenhänge für das materielle Flächenelement bzw. das materielle Volumenelement in Bezug auf die unterschiedlichen Konfigurationen ergeben sich mit

$$d\mathbf{a} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad \text{und} \quad dv = (\det \mathbf{F}) dV \quad (2.5)$$

Der Deformationsgradiententensor enthält sowohl die Drehung im Raum als auch die Längenänderung eines Linienelements. Für das abzuleitende Verzerrungsmaß werden die Starrkörperdrehungen des Linienelements durch die polare Zerlegung abgespalten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

Der orthogonale Tensor  $\mathbf{R}$  beschreibt ausschließlich die starre Drehung. Der Einheitstensor wird durch das Symbol  $\mathbf{I}$  repräsentiert. Die Tensoren  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  werden als Rechts- bzw. Links-Strecktensor bezeichnet. Der Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$  ist im Allgemeinen ein unsymmetrischer Tensor. Aus ihm werden mittels folgender Produkte der symmetrische rechte und linke CAUCHY-GREEN-Deformationstensor ( $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}$ ) abgeleitet

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (2.7-1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.7-2)$$

Als Verzerrungsmaß sind jedoch diejenigen Tensoren verbreitet und bevorzugt, die bei einer reinen Starrkörperbewegung zum Null-Tensor werden. Als Verzerrungstensor, der mit der Referenzkonfiguration verknüpft ist, ist der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.8)$$

für die Festkörpermechanik von größerer Bedeutung als der EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad , \quad (2.9)$$

der vornehmlich in der Strömungsmechanik Anwendung findet.

Ausgangspunkt für eine Geschwindigkeitsformulierung ist der Geschwindigkeitsgradiententensor gemäß

$$\mathbf{L} = \text{grad}\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T \quad , \quad (2.10)$$

dessen additive Zerlegung in der Momentankonfiguration auf den symmetrischen Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D}$  und den schiefsymmetrischen Drehgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{W}$  führt.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.11)$$

Die materielle Zeitableitung des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  entspricht dann dem Deformationsgeschwindigkeitstensor der Referenzkonfiguration

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}) \quad . \quad (2.12)$$

Über die *push-forward*-Operation kann ein Tensor zweiter Stufe von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration überführt werden. Exemplarisch sei dies für den GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor und seine materielle Zeitableitung gezeigt.

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.13)$$

Die entgegengesetzte Operation, also das Zurückziehen von Größen der Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration, wird dann als *pull-back*-Operation bezeichnet.

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{A}\mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F} \quad (2.14)$$

Über die Definition des Verschiebungsgradiententensors

$$\mathbf{H} := \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.15)$$

kann der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor in folgende Darstellung überführt werden

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}) \quad . \quad (2.16)$$

In vielen praktischen Anwendungen ist die Annahme „kleiner“ Deformationen zutreffend und vereinfacht zunächst die mathematischen Zusammenhänge in den kinematischen Beziehungen, die als Linearisierung bezeichnet wird, da die Terme höherer Ordnung ( $n > 1$ )

$$\Delta = \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| \quad \text{mit } \mathcal{O}(\Delta^n) \text{ als Terme } n\text{-ter Ordnung} \quad (2.17)$$

gegenüber Termen erster Ordnung ( $n = 1$ ) vernachlässigt werden. Die Auswirkungen dieser Vereinfachungen setzen sich in der Formulierung der Bilanzgleichungen, der Formulierung der Randbedingungen und somit auch in der Formulierung der konstitutiven Beziehungen fort.

Grundlegend kann festgehalten werden, dass in der Linearisierung die polare Zerlegung näherungsweise in die additive Zerlegung übergeht. Der linearisierte Verzerrungstensor ist dann identisch mit dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradiententensors  $\mathbf{H}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.18)$$

und wird mit  $\tilde{\mathbf{E}}$  bezeichnet. Die Definition des Geschwindigkeitsgradiententensor  $\mathbf{L}$  führt somit auf den linearisierten Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^T) \quad (2.19)$$

Zugeordnete Größen, wie der GREEN-LAGRANGE und EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor, bzw. Operatoren, wie der Gradienten-Operator  $\text{grad}(\cdot)$  und  $\text{Grad}(\cdot)$ , in räumlicher und materieller Darstellung (Momentan- und Referenzkonfiguration) gehen dadurch ineinander über.

## 2.2 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen werden bezüglich eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  formuliert, dessen zugehörige materielle Punkte  $\mathcal{P}$  den Körper eindeutig im dreidimensionalen, euklidischen Raum von seiner Umgebung abgrenzen. Unter der Voraussetzung kontinuierlicher materieller Körper und der damit einhergehenden Kontinuität der betrachteten physikalischen Größen (Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie) können die Bilanzgleichungen mittels des Schnittprinzips formuliert werden. Über den Rand  $\partial\mathcal{B}$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  erfolgt ein Austausch physikalischer Entitäten (Masse, Energie *etc.*) mit der Umgebung.

Die zugehörige Integration in den Bilanzgleichungen erfolgt somit bei Volumintegralen über das gesamte Volumen des Körpers und über die gesamte Oberfläche bei der Randauswertung zugeführter physikalischer Größen. Kleine Buchstaben ( $dv$  bzw.  $d\mathbf{a}$ ) repräsentieren hierbei die Integration in der Momentankonfiguration und große Buchstaben ( $dV$  bzw.  $d\mathbf{A}$ ) die Integration über die Referenzkonfiguration. Für einige

Größen der Referenzkonfiguration werden soweit zur Unterscheidung notwendig die verwendeten Symbole zusätzlich mit dem Index „R“ versehen.

**Massenbilanz** Die Integration der Massendichte  $\varrho$  über das Volumen des Körpers  $\mathcal{B}$  liefert die Gesamtmasse  $m$  des Körpers. Bei geschlossenen Systemen ohne stattfindenden Massentransport folgt

$$m(\mathcal{B}, t) = \int_v \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \int_V \varrho_R(\mathbf{X}, t) dV \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} m(\mathcal{B}, t) = 0. \quad (2.20)$$

Die lokale Form der Massenbilanz in räumlicher Darstellung lautet dann

$$\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.21)$$

Die lokale Form der Massenbilanz in materieller Darstellung ist trivial. Die Dichte in der Referenzkonfiguration  $\varrho_R$  ist keine Funktion der Zeit  $t$ :  $\varrho_R \neq \varrho_R(t)$ .

**Impulsbilanz** Der Impuls eines Körpers  $\mathcal{B}$  wird über

$$\mathbf{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} dm = \int_v \mathbf{v} \varrho dv \quad (2.22)$$

definiert. Das Geschwindigkeitsfeld des Körpers wird durch das Formelzeichen  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  beschrieben.

Die Impulsänderung über der Zeit ist mit der resultierenden Kraft am betrachteten materiellen Körper  $\mathcal{B}$  gleichzusetzen, wobei die resultierende Kraft als Summe aller Oberflächenkräfte und Volumenkräfte formuliert wird. Die Oberflächenkräfte ergeben sich aus der Oberflächenintegral über dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  und die Volumenkräfte aus dem Volumenintegral über den Vektor der Volumenkraftdichte  $\mathbf{f}$ .

$$\mathbf{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} da + \int_v \varrho \mathbf{f} dv \quad (2.23)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  wird mittels eines Freischnitts an einem Tetraederelement in eine innere Beanspruchungsgröße - den CAUCHYSchen Spannungstensor - überführt.

$$\frac{d}{dt} \int_v \varrho \mathbf{v} dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da + \int_v \varrho \mathbf{f} dv \quad (2.24)$$

Nach Umwandlung des Oberflächenintegrals der obigen Gleichung mit Hilfe des GAUßschen Integralsatzes in ein Volumenintegral kann die lokale Form der

Impulsbilanz in der Momentankonfiguration (räumliche Darstellung) angegeben werden.

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^k} \mathbf{g}^k \quad (2.25)$$

Für die Referenzkonfiguration oder die materielle Darstellung gilt

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_R \mathbf{v} \, dV = \int_V \mathbf{T} \mathbf{n}_R \, dA + \int_V \rho_R \mathbf{f} \, dV \quad (2.26)$$

und die lokale Form lautet

$$\rho_R \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{Div} \mathbf{T} + \rho_R \mathbf{f} \quad . \quad (2.27)$$

In (2.27) wird die materielle Divergenz vom 1. PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensor mit  $\mathbf{T}$  gebildet. Die Bildungsvorschriften lauten

$$\mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{und} \quad \operatorname{Div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial X^K} \mathbf{G}^K \quad (2.28)$$

mit  $\mathbf{G}^K$  als kontravariante Basis (Gradientenvektoren).

**Drehimpulsbilanz** Der Drehimpuls wird als

$$D_C(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{v} \, dm \quad . \quad (2.29)$$

definiert. Der Vektor  $\mathbf{c}$  repräsentiert den Ortsvektor zu einem beliebigen raumfesten Referenzpunkt  $\mathcal{C}$ .

$$\frac{d}{dt} D_C(\mathcal{B}, t) = M_C(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t} \, da + \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f} \rho \, dv \quad (2.30)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses bzgl. eines beliebigen raumfesten Referenzpunktes  $\mathcal{C}$  mit dem zugehörigen Ortsvektor  $\mathbf{c}$  ist gleich dem resultierenden Moment  $M_C$ , das bzgl. desselben Punktes ermittelt werden kann.

Die Konsequenz der Drehimpulsbilanz ist die Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad . \quad (2.31)$$

**Energiebilanz** Grundlage für alle nachfolgenden Betrachtungen ist das Verständnis von äußerer Belastung und der zugehörigen Materialantwort im betrachteten materiellen Körper  $\mathcal{B}$  als vollständiger thermodynamischer Prozess.

Insofern sind alle relevanten Zustandsgrößen in die Energiebilanz aufzunehmen. Aus kontinuumsmechanischer Sicht sind dies klassischerweise<sup>2</sup> die kinetische und die innere Energie des Körpers  $\mathcal{B}$ . Die Änderung dieser Energieanteile wird durch die Energiezufuhr von außen - der zugeführten mechanischen Leistung und einer Wärmezufuhr - bestimmt. Formal sind in dieser Bilanzierungsform alle thermodynamisch möglichen Prozesse eingeschlossen. Für qualitative Diskussionen werden spezielle Vorgänge, wie näherungsweise isotherme oder adiabate Vorgänge, als Sonderfälle behandelt.

Bei alleiniger Zufuhr von mechanischer Leistung bzw. bei alleiniger Wärmezufuhr ändert sich im allgemeinen Fall sowohl die kinetische als auch die innere Energie. Es besteht eine immanente Kopplung der mechanischen und thermischen unabhängigen Variablen. Die Kopplung der unabhängigen Variablen manifestiert sich in den Abschnitten zum thermodynamischen Potenzial (Abschn. 2.3) und zu den zugehörigen Prinzipien zur Aufstellung eines Materialgesetzes (Abschn. 2.4).

Folgende Größen werden definiert und deren Berechnungsgrundlage in räumlicher Darstellung angegeben:

- die kinetische Energie

$$K(\mathcal{B}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{v}^2 \rho \, dv \quad , \quad (2.32)$$

- die innere Energie

$$E(\mathcal{B}, t) = \int_v e \rho \, dv \quad \text{mit } e \text{ als spezifische innere Energie} \quad , \quad (2.33)$$

- die Leistung der äußeren Kräfte

$$L_a(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_v \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rho \, dv \quad \text{sowie} \quad (2.34)$$

- die Wärmezufuhr

$$Q(\mathcal{B}, t) = - \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_v r \rho \, dv \quad . \quad (2.35)$$

---

<sup>2</sup>Auf die Kopplung mit physikalischen Feldern, die durch andere Energieformen eine Änderung erfahren (z. Bsp. des elektrischen Feld), wird in dieser Darstellung verzichtet.

Die Wärmezufuhr besteht aus zwei Anteilen – der von außen zugeführten Wärme über den Wärmestromvektor  $\mathbf{q}$  (gemäß allgemeiner Konvention mit negativem Vorzeichen definiert) sowie der skalaren Wärmestromdichte  $r$ .

Die Energiebilanz ist identisch mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und lautet für den thermomechanischen Prozess

$$\dot{K}(\mathcal{B}, t) + \dot{E}(\mathcal{B}, t) = L_a(\mathcal{B}, t) + Q(\mathcal{B}, t) \quad . \quad (2.36)$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen und der inneren Energie entspricht der Leistung der äußeren Kräfte und der zugeführten Wärme. Durch Einsetzen der Ausdrücke (2.32) – (2.35) erhält man die Integralform (oder globale Form) der Energiebilanz (2.37).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_v e \varrho dv + \int_v \frac{1}{2} v^2 \varrho dv \right) &= \int_a (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} da + \int_v \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{v}} \varrho dv \quad (2.37) \\ &\quad - \int_a \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_v r \varrho dv \end{aligned}$$

Unter Einbeziehung des GAUßSchen Integralsatzes, der Impulsbilanz und der Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors folgt die lokale Form der Energiebilanz in der räumlichen Darstellung

$$\dot{e} = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad . \quad (2.38)$$

Die materielle Darstellung der lokalen Form der Energiebilanz resultiert aus dem Überführen des Spannungstensors und des Wärmestromvektors in die Referenzkonfiguration

$$\dot{e} = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\varrho_R} \operatorname{Div} \mathbf{q}_R + r \quad . \quad (2.39)$$

Die *pull-back*-Operation und die Integration über das Referenzvolumen führen auf den 2. PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensors

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.40)$$

und auf den PIOLA-KIRCHHOFFSchen Wärmeflussvektor

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{F}^{-1} (\det \mathbf{F}) \mathbf{q} \quad . \quad (2.41)$$

Sind die Wärmezufuhr und die zeitliche Änderung der inneren Energie im Deformationsvorgang vernachlässigbar, führt die Leistung äußerer Kräfte auf eine Änderung

des Bewegungszustands des Körpers (zeitliche Änderung der kinetischen Energie) und zu einer Leistung von inneren Kräften (der Spannungsleistung). In diesem Fall ist das Verschiebungsfeld und seine abgeleiteten Größen wie das Geschwindigkeitsfeld oder die Deformationstensoren vom Temperaturfeld entkoppelt und man spricht von der Bilanz der mechanischen Energie.

**Entropiebilanz** Die Entropie  $S$  wird formal als eine skalare, additive, physikalische Größe eingeführt und über das Volumenintegral der spezifischen Entropie  $\eta$  definiert.

$$S(\mathcal{B}, t) = \int_v \eta \varrho \, dv \quad (2.42)$$

In physikalischen Diskussionen ist die Entropiebilanz mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gleichzusetzen und dient der Beurteilung und Quantifizierung eines thermodynamischen Prozesses. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wurde nach den Beobachtungen physikalischer und chemischer Vorgänge als Naturgesetz postuliert. Er besagt, dass die nicht negative zeitliche Änderung der Entropie eines Körpers stets größer bzw. gleich der Entropiezufuhr aus den zu bilanzierenden Wärmeströmen (dem äußeren Wärmestrom und einer Wärmestrahlungsabsorption) ist. Um die Entropie zu quantifizieren, wird der Wärmetransport auf die Absoluttemperatur  $\theta$  bezogen. Daraus folgt für die Entropiebilanz die Formulierung in der CLAUDIUS-DUHEM-Ungleichung<sup>3</sup>

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \left( \int_v \eta \varrho \, dv \right) + \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_v \frac{1}{\theta} r \varrho \, dv \geq 0 \quad . \quad (2.43)$$

Die linke Seite der Ungleichung (2.43) wird als Entropieproduktion  $\Gamma$  bezeichnet. Nur wenn die Entropieproduktion  $\Gamma$  identisch *Null* ist, ist ein thermodynamischer Prozess reversibel – andernfalls irreversibel.

Die lokale Form der Entropiebilanz (2.43) lautet dann

$$\gamma = \dot{\eta}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\varrho} \left( \operatorname{div} \mathbf{q} - \varrho r \right) - \frac{1}{\varrho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad , \quad (2.44)$$

mit  $\gamma$  als der spezifischen Entropieproduktion.

---

<sup>3</sup>Sowohl die absolute Temperatur als auch die Entropie sind als *primitive concepts* Grundlage für die *rational thermodynamics* (vgl. Coleman und Noll, 1963; Germain, Nguyen und Suquet, 1983) und erweitern die traditionelle Formulierung der *Thermodynamics of irreversible processes*. Im Wesentlichen ist dann die Ableitung geeigneter konstitutiver Beziehungen Restriktionen unterworfen (s. 2.3.2).

Die Multiplikation der oberen Gleichung mit der absoluten Temperatur und die Berücksichtigung der Energiebilanz führt zur Elimination der Wärmestromdichte  $r$  und somit auf folgende gebräuchliche Darstellung.

$$\theta\gamma = -\dot{e} + \theta\dot{\eta} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}_\theta \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_\theta := \text{grad}\theta \quad (2.45)$$

Das Produkt  $\theta\gamma$  wird in den folgenden Abschnitten mit dem Symbol  $\delta$  belegt und als innere Dissipation bezeichnet.<sup>4</sup>

$$\delta := \theta\gamma \quad (2.46)$$

Im Falle der materiellen Darstellung kommen wieder die Definitionen wie für die Energiebilanz zum Tragen.

$$\delta = -\dot{e} + \theta\dot{\eta} + \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} - \frac{1}{\rho_R\theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{\theta R} := \text{Grad}\theta \quad (2.47)$$

Der Temperaturgradient wird fortlaufend mit dem Symbol  $\mathbf{g}_\theta$  bzw.  $\mathbf{g}_{\theta R}$  je nach Darstellung abgekürzt.

## 2.3 Thermodynamische Potenziale

Thermodynamisch konsistente Materialgesetze sind unabhängige vom jeweiligen konkreten Anfangsrandwertproblem. Die Konsistenz muss für jeden möglichen, vorstellbaren thermomechanischen Prozess gelten. Daher erfolgt die Argumentation auf der Ebene der thermodynamischen Grundgleichungen. Ein Prozess ist in der Regel irreversible und bei Verschwinden der inneren Dissipation im Körper reversibel. Diese beschränkende Aussage für die Konsistenz befindet sich im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und ist mathematisch durch die Ungleichung (2.45) bzw. (2.47) erfasst.

Die unabhängigen Variablen in dieser Gleichung sind der Dehnungstensor  $\mathbf{E}$ , die spezifische Entropiezufuhr  $\eta$  sowie der Temperaturgradient  $\mathbf{g}_{\theta R}$ . Um alle anderen Größen berechnen zu können, müssen konstitutive Beziehungen eingebracht werden.

Neben der spezifischen inneren Energie sind die spezifische freie Energie<sup>5</sup>  $\psi$ , die spezifische freie Enthalpie<sup>6</sup>  $g$  und die spezifische Enthalpie<sup>7</sup>  $h$  gebräuchliche

<sup>4</sup>Eine Erweiterung der hier beschriebenen Entropiebilanz ist zu diskutieren, wenn die Gültigkeit der alleinigen Entropiezufuhr durch die temperaturbezogene Wärmezufuhr nicht aufrecht erhalten werden kann. Die hier betrachteten Systeme von homogenen Materialproben geben dafür jedoch keinen Anlass.

<sup>5</sup>Die freie Energie wird in der Literatur auch als (freie) HELMHOLTZ-Energie oder HELMHOLTZ-Potenzial bezeichnet.

<sup>6</sup>auch (freie) GIBBS-Energie

<sup>7</sup>auch spezifische komplementäre Energie

$\eta$	$e$	$\mathbf{E}$
$h$		$\psi$
$\tilde{\mathbf{T}}$	$g$	$\theta$

Abb. 2.2: Thermodynamisches Quadrat mit den spezifischen, thermodynamischen Potenzialen (*rot*) und den zugehörigen Zustandsgrößen für die entsprechende LEGENDRE-Transformation

Energiedichten der Thermodynamik. Zwischen diesen Größen bestehen folgende Zusammenhänge

$$\psi = e - \theta\eta \quad (2.48)$$

$$h = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} - e \quad (2.49)$$

$$g = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} - \psi \quad (2.50)$$

Im thermodynamischen Quadrat der Abb. 2.2 sind die thermodynamischen Potenziale rot eingefärbt. Die benachbarten Zustandsgrößen (schwarz) sind die zugehörigen unabhängigen Variablen. Da die Messung der Entropie  $\eta$  indirekt über die Temperatur realisiert wird, ist es aus versuchstechnischer Sicht ungeeignet, sie als unabhängige Variable in den Gleichungssatz zu integrieren. Damit sind die thermodynamischen Potenziale der inneren Energie  $e$  und der Enthalpie  $h$  in der Kontinuumsmechanik der Festkörper ungebräuchlich. Die freie Energie  $\psi$  ist mit der Verankerung im Dehnungsraum und der absoluten Temperatur als unabhängige Variable am weitesten verbreitet. Eine wesentliche Bedeutung besitzt zudem die freie Enthalpie  $g$ , da im Konzept der inneren Variablen die Entwicklungsgleichungen oftmals für Größen mit Spannungscharakter aufgenommen werden (Kamlah, 1994, vgl.).

Mit Hilfe der LEGENDRE-Transformation wird der Übergang von einem auf ein anderes thermodynamisches Potenzial erreicht.

### 2.3.1 Legendre-Transformation

Die LEGENDRE-Transformation ist eine Berührungstransformation und wird in der Physik verwendet, um eine Variablentransformation in den Fundamentalgleichungen wie den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik vorzunehmen.

Den Ausgangspunkt bildet ein (konvexes) Potenzial  $\Phi$  in der Variable  $x$ . Die LEGENDRE-Transformierte  $\Phi_*$  ist dann ebenfalls ein (konvexes) Potenzial in der Variable  $x_*$ , wobei die Ableitung von  $\Phi_*$  invers zur Ableitung von  $\Phi$  ist (Herrmann,

2021). Es gilt

$$\Phi_*(x_*) := x \cdot x_* - \Phi(x) \quad \text{mit} \quad x_* = \Phi'(x) = \frac{d\Phi}{dx} . \quad (2.51)$$

In der Anwendung auf die Fundamentalgleichungen der Thermodynamik wird in der Literatur mehrheitlich auf die Schreibweise der Differentialform zurückgegriffen (Zia, Redish und McKay, 2009).

$$d\Phi = x_* dx \iff d\Phi_* = x dx_* \quad (2.52)$$

Eine anschauliche Definition der LEGENDRE-Transformation ist unter anderem bei Courant und Hilbert, 1993, zu finden, wobei dort auch auf die Verallgemeinerung von Funktionen mit mehreren Variablen hingewiesen wird.

### 2.3.2 Thermodynamische Beschränkungen und deren Konsequenzen

Ausgangspunkt für die weiteren Schritte zur Ableitung geeigneter, thermodynamisch konsistenter Materialgesetze bilden die Fundamentalgleichungen der Thermodynamik (2.39) und (2.47) in ihrer lokalen Form. In der separaten Betrachtung der einzelnen Terme der CLAUDIUS-DUHEM-Ungleichung kann man erkennen, dass in dieser Darstellung der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , die spezifische Entropie  $\eta$  und der Temperaturgradient  $\mathbf{g}_{\theta R}$  als unabhängige Variablen betrachtet werden, wohingegen für die verbleibenden Größen (die innere Energie  $e$ , die Temperatur  $\theta$ , den Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  und den Wärmestromvektor  $\mathbf{q}_R$ ) als Systemantworten konstitutive Beziehungen abgeleitet werden müssen.

Ersetzt man die zeitliche Ableitung der inneren Energie in (2.47) durch die Anwendung der Kettenregel gemäß der festgelegten Abhängigkeiten

$$e = \hat{e}(\mathbf{E}, \eta, \mathbf{g}_{\theta R}) \quad \text{mit} \quad \dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial e}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial e}{\partial \mathbf{g}_{\theta R}} \cdot \dot{\mathbf{g}}_{\theta R} , \quad (2.53)$$

können Restriktionen hinsichtlich der thermodynamischen Zulässigkeit in konstitutive Beziehungen überführt werden, die im Weiteren zu spezifizieren sind. Dieses Vorgehen wird als *COLEMAN-NOLL-Procedure* bezeichnet (Coleman und Noll, 1963). Die CLAUDIUS-DUHEM-Ungleichung lautet dann

$$\left( \theta - \frac{\partial e}{\partial \eta} \right) \dot{\eta} + \left( \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} - \frac{\partial e}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial e}{\partial \mathbf{g}_{\theta R}} \cdot \dot{\mathbf{g}}_{\theta R} - \frac{1}{\varrho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 . \quad (2.54)$$

Da diese Ungleichung für jeden denkbaren thermodynamischen Prozess erfüllt sein muss, so kann gefordert werden, dass jeder Summand für sich und somit die Faktoren vor den zeitlich abgeleiteten Größen verschwinden muss. Es folgt somit

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial \eta} ; \quad \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial e}{\partial \mathbf{g}_{\theta R}} = \mathbf{0} . \quad (2.55)$$

Der Ausdruck (2.55)<sub>3</sub> impliziert die Unabhängigkeit der inneren Energie vom Temperaturgradienten. Setzt man die ersten beiden Konsequenzen in (2.53)<sub>2</sub> ein, so erhält man die GIBBS-Beziehung

$$\dot{e} = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \theta \dot{\eta} \quad \text{oder} \quad de = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{E} + \theta d\eta \quad . \quad (2.56)$$

Die GIBBS-Beziehung bildet die Grundgleichung für die LEGENDRE-Transformation. Hierbei erfolgt eine Transformation von der unabhängigen Variable Entropie ( $x := \eta$ ) auf die nunmehr unabhängige Variable Temperatur ( $x_* := \theta$ ) - vgl. 2.3.1. Die LEGENDRE-Transformierte definiert die freie HELMHOLTZ-Energie. Diese Größe wird zumeist einfach als freie Energie  $\psi$  bezeichnet und gemäß Definition (2.57) mit negativem Vorzeichen eingeführt.

$$\Phi_* = \eta\theta - e =: -\psi \quad \text{mit} \quad \psi = \hat{\psi}(\mathbf{E}, \theta) \quad (2.57)$$

Daraus kann der erste und zweite Hauptsatz, (2.39) und (2.47), anstelle der inneren Energie durch die freie Energie ausgedrückt werden

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - (\eta\dot{\theta}) \cdot - \frac{1}{\varrho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R + r \quad (2.58)$$

$$\delta = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\psi} - \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\varrho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad . \quad (2.59)$$

Mit dem analogen Vorgehen nach COLEMAN-NOLL für thermodynamisch zulässige Prozesse ergibt sich

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.60)$$

sowie der zugehörigen GIBBS-Beziehung

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \eta \dot{\theta} \quad \text{oder} \quad d\psi = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{E} - \eta d\theta \quad . \quad (2.61)$$

Die Ungleichung (2.59) wird damit auch als *Ungleichung der freien Energie* oder *Dissipationsungleichung* bezeichnet (Gurtin, Fried und Anand, 2013).

Neben der freien Energie  $\psi$  eignet sich ebenso die Potenzialformulierung über die freie Enthalpie  $g$  als physikalische Größe, um Materialmodelle abzuleiten. Die unabhängigen Variablen sind der Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  und die Temperatur  $\theta$ , so dass mit einer weiteren LEGENDRE-Transformation der freien Energie (2.62) der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  durch den Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  ersetzt wird. Die Vorgehensweise nach Coleman und Noll liefert einen Gleichungssatz (2.63)–(2.66), der mit der

Struktur von (2.57)–(2.61) vergleichbar ist und entsprechende Vorzeichenunterschiede aufweist.

$$\Phi_* = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} - \psi =: g \quad \text{mit} \quad g = \hat{g}(\tilde{\mathbf{T}}, \theta) \quad (2.62)$$

$$\dot{g} = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + (\eta\dot{\theta}) \cdot + \frac{1}{\rho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R - r \quad (2.63)$$

$$\delta = -\frac{1}{\rho_R} \mathbf{E} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + \dot{g} - \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\rho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad (2.64)$$

$$\eta = \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E} = \frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (2.65)$$

$$\dot{g} = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + \eta\dot{\theta} \quad \text{oder} \quad dg = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E} \cdot d\tilde{\mathbf{T}} + \eta d\theta \quad (2.66)$$

Die freie Enthalpie  $g$  findet man ebenso unter dem Namen freie GIBBS-Energie und sie ist komplementär zur freien Energie  $\psi$  (Haupt, 2002, S. 509 ff.).

$$g + \psi = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.67)$$

Das Produkt vom 2. PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensor mit dem GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor ist invariant gegenüber dem Wechsel des Bezugssystems. Die Tensoren gehören zu einer Familie dualer Variablen (vgl. Haupt, 2002, Kap. 8), die dem Prinzip der Objektivität Rechnung tragen.

Die Verwendung des Referenzsystems in der Darstellung der konstitutiven Restriktionen aus der Dissipationsungleichung unter Berücksichtigung der Energiebilanz bedeutet keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit. Eine Beschränkung auf die Theorie infinitesimaler Deformationen hat bisher nicht stattgefunden.

Gemäß der Ableitungen und Definitionen im Abschnitt 2.1 kann auch der Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$ , der den Deformationsvorgang kinematisch beschreibt, selbst als unabhängige Variable gewählt werden. Die Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit gegenüber dem gewählten Variablensatz der obigen Gleichungen geht dadurch verloren.

Die beiden Gleichungssätze (2.63)–(2.66) und (2.58)–(2.61) dienen gleichermaßen und gleichberechtigt als Fundament für die Ableitung thermodynamisch konsistenter Materialmodelle.

## 2.4 Prinzipien für die Aufstellung eines Materialmodells und das Konzept der inneren Variablen

Die bereitgestellten Gleichungssätze bilden einen Kern des Systems partieller Differentialgleichungen für ein konkretes Anfangsrandwertproblem eines dreidimensionalen Körpers. Mit der Einführung der freien Energie wird jedoch von einem Satz

unabhängiger Zustandsgrößen (dem Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , der Temperatur  $\theta$  und dem Temperaturgradienten  $\mathbf{g}_{\theta R}$ ) ausgegangen, dem ein Satz abhängiger Zustandsgrößen (der freien Energie  $\psi$ , dem Spannungstensor  $\hat{\mathbf{T}}$ , der Entropie  $\eta$  und dem Wärmeflussvektor  $\mathbf{q}_R$ ) gegenüber steht. Eine Verknüpfung dieser Größen erfolgt über konstitutive Beziehungen, so dass die Änderung der unabhängigen Größen eine zugehörige Materialantwort hervorruft. Diese Materialantwort ist dann zulässig, wenn die Dissipationsungleichung nicht verletzt wird.

Beim Aufstellen von Materialgesetzen sind generellen, erfahrungsbasierten Grundsätzen sowie allgemeinen Prinzipien Folge zu leisten. Genannt seien:

- das Prinzip des Determinismus

*Der aktuelle Zustand, also die abhängigen Variablen, sind durch die Geschichte der unabhängigen Variablen eindeutig bestimmt.*

- das Prinzip der lokalen Wirkung

*Die Zustandsgrößen eines materiellen Punktes werden durch die unmittelbare Umgebung bestimmt.*

- das Prinzip der Objektivität und

*Die Beschreibung eines Materials ist unabhängig vom Bezugssystem des Beobachters.*

- das Prinzip der Äquipräsenz.

*Die abhängigen Zustandsgrößen werden von Beginn vom gleichen Satz unabhängiger Variablen formuliert.*

In dieser Arbeit wird die Ableitung von Materialgesetzen für sogenannten *einfachen* Materialien vorgenommen. Das heißt, dass der Deformationsgradiententensor, wie oben bereits definiert, lediglich durch den Gradienten erster Ordnung bestimmt wird. Damit wird dem Prinzip der lokalen Wirkung nachgekommen.

Dem Objektivitätsprinzip wird genüge getan, wenn das Materialgesetz mit objektiven Größen formuliert wird. Die Prüfung der Objektivität erfolgt über den Wechsel des Bezugssystems, der einer Starrkörperrotation entspricht und den zugehörigen Transformationsgleichungen für Tensoren  $n$ -ter Stufe.

Das Prinzip des Determinismus kann einerseits durch die explizite Integration von Funktionalen über den gesamten Prozesszeitraum in die konstitutiven Gleichungen aufgenommen werden. Ein klassisches Beispiel hierfür sind die Materialgleichungen für den viskoelastischen Festkörper. Andererseits wird das Konzept der inneren Variablen von Coleman und Gurtin, 1967, in vielen Fällen erfolgreich angewendet. Es empfiehlt sich durch einfache Handhabung der entstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen, die als Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen

bezeichnet werden. Der Zustand des Materials ist abhängig von der Lastgeschichte und wird über die aktuellen Werte der inneren Variablen bestimmt.

Mit den oben genannten Prinzipien können die abhängigen, objektiven Zustandsgrößen in folgender Form zusammengefasst werden

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \quad (2.68)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \quad (2.69)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \quad (2.70)$$

$$\mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \quad (2.71)$$

Die Unabhängigkeit der inneren Energie  $e$  vom Temperaturgradienten  $\mathbf{g}_{\theta R}$  wurde anhand (2.54) diskutiert und bleibt auch mit der LEGENDRE-Transformation als thermodynamische Konsequenz für die freie Energie  $\psi$  erhalten. Im Sinne des Äquipräsenzprinzips wird die Unabhängigkeit vom Temperaturgradienten auf die Funktionen der abhängigen Zustandsgrößen übertragen.

Die Größe  $\mathbf{a}$  versammelt alle inneren Variablen, die sowohl als skalarwertige als auch tensorwertige Größen eingeführt werden können.

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_l, \mathbf{a}_{l+1}, \dots, \mathbf{a}_{l+m}); \quad \text{Anz. der inn. Variablen } n = l+m \quad (2.72)$$

Die Größen  $a_i$  bzw.  $\mathbf{a}_j$  sind in der Regel mit spezifischen Deformationsmechanismen verknüpft und beschreiben Phänomene auf der Ebene der Mikrostruktur des jeweiligen Materials. Die Entwicklungsgleichungen der inneren Variablen werden als gewöhnliche Differentialgleichungen postuliert. Diese Evolutionsgleichungen der inneren Variablen besitzen formal die gleichen Abhängigkeiten wie die abhängigen Zustandsvariablen (2.68)–(2.71).

$$\dot{\mathbf{a}} = \hat{f}_i(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \quad (2.73)$$

Aus pragmatischen Gründen ist die Anzahl der inneren Variablen gemäß der physikalischen Phänomene, der numerischen Stabilität im zugehörigen Iterationsverfahren sowie der allgemeinen Handhabbarkeit des Modells zu beschränken. In der Regel enthalten die Evolutionsgleichungen Freiwerte, die für ein explizit untersuchtes Material experimentell bestimmt werden müssen.

Mit der Erweiterung bzw. Einführung der inneren Variablen  $\mathbf{a}$  gemäß (2.72) und (2.73) in die Dissipationsungleichung erhält man

$$\left( \frac{1}{\varrho_R} \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \left( \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{\varrho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad (2.74)$$

Die Vorgehensweise nach Coleman und Noll wiederholt die Ergebnisse gemäß (2.60) für die ersten beiden Summanden. Es verbleibt eine Restungleichung der Form

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{\varrho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad (2.75)$$

Mit zusätzlichen konstitutiven Annahmen aus experimentellen Befunden kann die obere Ungleichung spezifiziert werden und führt nachfolgend über die lokale Form der Energiebilanz zur Wärmeleitgleichung. Diese Gleichung dient als Bestimmungsgleichung des sich entwickelnden Temperaturfeldes. Gleichzeitig stellt die Restungleichung Anforderungen an die Formulierung von Entwicklungsgleichungen, da sie so formuliert werden müssen, dass der 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt wird oder das zugehörige Materialmodell thermodynamisch konsistent ist.

Für das Potenzial der freien Enthalpie  $g$  lauten die Funktionen der abhängigen Variablen

$$g = \hat{g}(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) \quad (2.77)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) \quad (2.78)$$

$$\mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) \quad (2.79)$$

Die inneren Variablen  $\bar{\mathbf{a}}$  können einen anderen Charakter als im thermodynamischen Potenzial der freien Energie besitzen und werden durch geeignete experimentelle Befunde motiviert. Für deren Entwicklung müssen erneut gewöhnliche Differentialgleichungen hinsichtlich der Belastungsgeschichte definiert werden. Die Restungleichung ergibt sich zu

$$+ \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}} - \frac{1}{\rho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad (2.80)$$

Formal kann der Wechsel des thermodynamischen Potenzials mit inneren Variablen durch die LEGENDRE-Transformation vollzogen werden. Dadurch werden die ursprünglichen inneren Variablen in den neuen Zustandsraum überführt. Im Sinne des Übergangs von der freien Energie zur freien Enthalpie bedeutet dies ein Übergang vom Dehnungs- in den Spannungsraum (Kamlah, 1994, S. 94 ff.).

## 2.5 Wärmeleitgleichung

Ersetzt man die zeitliche Ableitung der inneren Energie  $\dot{e}$  mit der GIBBS-Beziehung (2.56) in der Energiebilanz (2.39) wird zusätzlich die Spannungsleistung eliminiert.

$$\theta \dot{\eta} = - \frac{1}{\rho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R + r \quad (2.81)$$

Dies liefert den Ausgangspunkt für die Ableitung der Wärmeleitgleichung und wird in der Literatur ebenfalls Entropiebilanz genannt (Gurtin, Fried und Anand, 2013, S.234)<sup>8</sup>. Die zeitliche Ableitung der Entropie kann nun gemäß der Konsequenzen der

<sup>8</sup>Die Autoren definieren die temperaturabhängige, spezifische Wärmekapazität  $c$  über die Ableitung der inneren Energie nach der Temperatur und weisen zudem darauf hin, dass unter der Voraussetzung  $c(\theta) > 0$  die Entropie streng monoton wachsend und die freie Energie streng konkav bzgl. der Temperaturänderung ist.

COLEMAN-NOLL-Procedure auf der Grundlage der freien Energie  $\psi$  (2.60) erfolgen

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) &= \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]^{\cdot} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} .\end{aligned}\quad (2.82)$$

Mit dem Potenzial der freien Enthalpie  $g$  (2.65) gilt

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{a}) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta} \right]^{\cdot} = \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \bar{\mathbf{a}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \bar{\mathbf{a}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}} .\end{aligned}\quad (2.83)$$

An dieser Stelle wird in den meisten Ableitungen der Literatur (z. Bsp. Haupt, 2002, S. 518 ff.) die spezifische Wärmekapazität als Produkt aus partieller Ableitung der Entropie nach der Temperatur  $\partial \eta / \partial \theta$  und der absoluten Temperatur  $\theta$  definiert. Je nach Verwendung des gewählten Potenzials wird die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Verformungs- bzw. Spannungszustand ( $c_\varepsilon$  bzw.  $c_\sigma$ ) unterschieden. Die Formulierung durch die freie Energie  $\psi$  fixiert den Dehnungszustand

$$c_\varepsilon(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) := \theta \frac{\partial \eta(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a})}{\partial \theta} = -\theta \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a})}{\partial \theta^2} ,\quad (2.84)$$

wohingegen die freie Enthalpie den Spannungszustand als unveränderlich betrachtet

$$c_\sigma(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) := \theta \frac{\partial \eta(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial^2 g(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}})}{\partial \theta^2} .\quad (2.85)$$

Korrekterweise muss man unter Berücksichtigung der inneren Variablen  $\mathbf{a}$  bzw.  $\bar{\mathbf{a}}$  deren jeweilige Fixierung hinzufügen. Mit dem Einsetzen von (2.82) unter Einbeziehung von (2.84) in (2.81) folgt die Wärmeleitgleichung:

$$c_\varepsilon(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{a}) \dot{\theta} = \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{\rho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R + r\quad (2.86)$$

auf der Grundlage des Potenzials der freien Energie. Die Komplementarität der beiden betrachteten Potenziale drückt sich erneut durch entgegengesetzte Vorzeichen in den partiellen Ableitungen aus. Für die Wärmeleitgleichung auf der Grundlage der freien Enthalpie  $g$  betrifft dies die ersten beiden Summanden der rechten Seite

$$c_\sigma(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \bar{\mathbf{a}}) \dot{\theta} = -\theta \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} - \theta \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \bar{\mathbf{a}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}} - \frac{1}{\rho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R + r .\quad (2.87)$$

Gleichung (2.87) erhält man durch das Zusammenführen von (2.81), (2.83) und (2.85).

Üblicherweise wird hinsichtlich der Wärmeleitung im zu beschreibenden Festkörper auf das FOURIERSche Gesetz zurückgegriffen (Haupt, 2002; Gurtin, Fried und Anand, 2013, u. v. a. m.). Das lineare FOURIERSche Gesetz dient als weitere konstitutive Beziehung mit dem Wärmeleitfähigkeitstensor als Materialtensor für den allgemeinen dreidimensionalen Körper bzw. dem skalaren Wärmeleitkoeffizienten für den eindimensionalen Fall. Im Anwendungsbereich dieser Arbeit wurde die Gültigkeit dieses Gesetzes bestätigt.

### 2.5.1 Lineare Thermoelastizität für den isotropen Festkörper

Das Ergebnis der geometrischen Linearisierung für den Verzerrungstensor wurde bereits mit Gleichung (2.18) gezeigt. Die wesentlichen Konsequenzen aus den thermodynamischen Restriktionen für das thermodynamische Potenzial der freien HELMHOLTZ-Energie ist mit (2.60) gegeben. Innere Variablen werden für den Fall der linearen Thermoelastizität nicht benötigt. Die abhängigen Zustandsgrößen werden somit durch den linearisierten Verzerrungstensor  $\tilde{\mathbf{E}}$  und die absolute Temperatur beschrieben.

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}, \theta), \quad \tilde{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{E}}, \theta), \quad \eta = \hat{\eta}(\tilde{\mathbf{E}}, \theta) \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{E}}, \theta) \quad (2.88)$$

Die physikalische Linearisierung vom zweiten PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  sowie der Entropie  $\eta$  gelingt mit Hilfe der Reihenentwicklung.

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} (\theta - \theta_0) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.89)$$

$$\eta = \eta \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} (\theta - \theta_0) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.90)$$

Wenn im Zustand „0“ kein Eigenspannungszustand vorliegt und eine Verschiebung des Entropieniveaus die Bilanzgleichungen nicht beeinflusst<sup>9</sup>, verschwindet jeweils der erste Summand in (2.89) und (2.90). Für die Ausdrücke der partiellen Ableitung mit einem fixierten Verzerrungszustand bei konstant gehaltener Temperatur bietet sich nun die Einführung von Materialtensoren an.

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} = \mathbb{C}; \quad - \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} = \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} = \mathbf{M} \quad \text{und} \quad \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} = c_\epsilon \quad (2.91)$$

Der Steifigkeitstensor  $\mathbb{C}$  ist ein Tensor vierter Stufe, die Kopplung von Spannung und Temperatur bildet sich im zweistufigen Tensor  $\mathbf{M}$  ab und die spezifische

<sup>9</sup>Diese Bedingung kann anhand eines Transformationsansatzes gezeigt werden.

Wärmekapazität  $c_\varepsilon$  ist ein Skalar. Wird für das FOURIERSche Gesetz der Wärmeleitfähigkeitstensor mit dem Symbol  $\mathbf{K}$  eingeführt, so lauten die konstitutiven Beziehungen der Thermoelastizität im linearisierten Fall

$$\varrho\psi = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbb{C} \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \varrho\mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2}\varrho c_\varepsilon(\theta - \theta_0)^2, \quad (2.92)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbb{C} \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \varrho\mathbf{M}(\theta - \theta_0), \quad (2.93)$$

$$\eta = \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \frac{c_\varepsilon}{\theta_0}(\theta - \theta_0) \quad \text{und} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \text{ Grad}\theta \quad . \quad (2.95)$$

Das gekoppelte thermomechanische System wird durch die lokale Impulsbilanz (2.27) und die lokale Energiebilanz (2.39) bzw. (2.81) komplettiert

$$\varrho\dot{\mathbf{v}} = \text{Div} [\mathbb{C}\tilde{\mathbf{E}} - \varrho\mathbf{M}(\theta - \theta_0)] + \varrho\mathbf{f} \quad , \quad (2.96)$$

$$c_\varepsilon\dot{\theta} = -\mathbf{M} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} + \frac{1}{\varrho} \text{Div}(\mathbf{K} \text{ Grad}\theta) + r \quad . \quad (2.97)$$

Entsprechend der vorhandenen Symmetriegruppen im Material können die zugehörigen Symmetrien in den Materialtensoren identifiziert werden.<sup>10</sup> Im Folgenden werden die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Materialparametern für den isotropen Fall verdeutlicht werden. Hierfür gilt, dass alle Koordinaten der Materialtensoren invariant gegenüber jeder Symmetrietransformation und somit unendlich viele Symmetrieebenen im Material vorhanden sind. Ein Resultat dieser Betrachtung ist, dass für den Steifigkeitstensor (Tensor 4. Stufe) zwei unabhängige Materialparameter und für die beiden zweistufigen Tensoren genau ein unabhängiger Materialparameter existiert ( $\mathbf{M} = \beta\mathbf{I}$  bzw.  $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ ). Somit lassen sich die Gleichungen (2.92)–(2.95) vereinfacht darstellen

$$\varrho\psi = \mu|\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\tilde{\mathbf{E}})^2 - \varrho\beta(\theta - \theta_0)\text{tr}\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{2}\varrho c_\varepsilon(\theta - \theta_0)^2, \quad (2.98)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu\tilde{\mathbf{E}} + \lambda(\text{tr}\tilde{\mathbf{E}})\mathbf{I} - \varrho\beta(\theta - \theta_0)\mathbf{I}, \quad (2.99)$$

$$\eta = \beta\text{tr}\tilde{\mathbf{E}} + \frac{c_\varepsilon}{\theta_0}(\theta - \theta_0) \quad \text{und} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{q} = -k \text{ Grad}\theta \quad . \quad (2.101)$$

Die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  werden als Elastizitätskonstanten in (2.98) und (2.99) verwendet. Aus der Deviatorarstellung des Verzerrungstensors

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^D + \frac{1}{3}(\text{tr}\tilde{\mathbf{E}})\mathbf{I} \quad (2.102)$$

<sup>10</sup>Typische Symmetriegruppen führen beispielsweise auf orthotropes oder auch transversal isotropes Materialverhalten.

folgt für (2.99)

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu \tilde{\mathbf{E}}^D + \kappa(\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}) \mathbf{I} - \varrho\beta(\theta - \theta_0) \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad , \quad (2.103)$$

wobei  $\kappa$  als isothermer Kompressionsmodul<sup>11</sup> bezeichnet wird. Für den Fall freier thermischer Ausdehnung ist der Spannungstensor gleich dem  $\mathbf{0}$ -Tensor und die Spur des Dehnungstensors proportional zum Dreifachen der Temperaturdifferenz. Der Proportionalitätsfaktor ist der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$ . Es gilt

$$\kappa \, 3\alpha = \varrho\beta \quad . \quad (2.104)$$

Die Differentialgleichungen aus der Impulsbilanz und der Wärmeleitgleichung sind im Wesentlichen über den ersten Summanden von (2.106) gekoppelt. Dieser Term repräsentiert den KELVIN-Effekt oder auch thermoelastischen Effekt. Kann dieser Term aufgrund der betrachteten thermischen und mechanischen Beanspruchungsbereiche vernachlässigt werden, wird die Lösung näherungsweise über ein entkoppeltes System ermittelt.

$$\varrho \dot{\mathbf{v}} = 2\mu \operatorname{Div}(\tilde{\mathbf{E}}) + \lambda \operatorname{Div}[(\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}) \mathbf{I}] - 3\kappa\alpha \operatorname{Grad}\theta + \varrho \mathbf{f} \quad (2.105)$$

$$c_\varepsilon \dot{\theta} = -\frac{3\kappa\alpha}{\varrho} \theta_0 \operatorname{tr} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} + \frac{k}{\varrho} \operatorname{Div} \operatorname{Grad}\theta + r \quad (2.106)$$

Die Gleichungen (2.105) und (2.106) verwenden die freie HELMHOLTZ-Energie als thermodynamisches Potenzial, das über die zu beobachteten Größen Verzerrungstensor und absolute Temperatur ausgedrückt werden. Bei der Verwendung eines anderen thermodynamische Potenziale folgt die Ableitung der zugehörigen Materialtensoren dem gleichen Vorgehen.

In diesem Zusammenhang werden zwei Anmerkungen mit praktischer Relevanz zur linearen Thermoelastizität angefügt.

**Freie Enthalpie** Wird der Spannungstensor als Beobachtungs- bzw. Steuerungsgröße anstatt des Dehnungstensors im zugehörigen physischen Experiment gewählt, wird die Reihenentwicklung bei konstanter Temperatur und konstantem Spannungszustand vorgenommen. Es ergibt sich dann für die spezifische Wärmekapazität  $c_\sigma$  zu

$$\theta \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{\substack{\tilde{\mathbf{T}}=\mathbf{0} \\ \theta=\theta_0}} = c_\sigma \quad . \quad (2.107)$$

---

<sup>11</sup>Der Kompressionsmodul und die Lamé-Konstanten werden gemäß der Ableitung über die freie Energie auch isotherme elastische Module genannt.

Über die Inversion der Spannungs-Dehnungs-Beziehung (2.99), die Entropiebeziehung (2.100) und die entsprechende Entropiebeziehung im Kontext der freien Enthalpie folgt somit<sup>12</sup>

$$c_{\sigma} - c_{\varepsilon} = \theta_0 \frac{9\kappa\alpha^2}{\varrho} . \quad (2.108)$$

Für die meisten Werkstoffe ist dieser Unterschied in der Nähe der Raumtemperatur mit den gegebenen Verhältnissen von Kompressionsmodul und Ausdehnungskoeffizient vernachlässigbar. In speziellen Anwendungsfällen ist dieser quantitative Unterschied zu berücksichtigen.

**Isentrope thermodynamische Prozesse** Als isentrop bezeichnet man diejenigen Vorgänge, in denen der Wärmefluss verschwindet und somit die Entropie während des Vorgangs konstant bleibt. Isentrope Zustandsänderungen sind typisch für Nichtleiter oder sind für kurz ablaufende Prozesse relevant, da dann die Wärmeleitung vernachlässigt werden kann. Unter diesen Umständen ist die Entropie als unabhängige Variable im besonderen Maße geeignet.

Wird neben der Entropie der Verzerrungstensor als unabhängige Variable eingeführt, so ist das zugehörige thermodynamische Potenzial die innere Energie (vgl. Abb. 2.2). Die Kombination der Ableitung aus der freien Energie und der inneren Energie führt dann auf einen quantitativen Unterschied in den zugehörigen Kompressionsmodulen.

$$\kappa_{\text{isen}} - \kappa = \theta_0 \frac{9\kappa\alpha^2}{c} \quad (2.109)$$

Für Isotropie besitzt hier die Differenz der Kompressionsmodule dieselbe Struktur wie die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten in (2.108).<sup>13</sup>

## 2.6 Allgemeine Ansätze und Erweiterungsmöglichkeiten für das Materialgesetz

### 2.6.1 Modellentwicklung mittels rheologischer Methoden

Die rheologischen Modelle dienen dazu das mechanische Verhalten grundlegend zu spezifizieren. Für die Spezifikation der maßgeblichen Effekte dienen in erster Linie einachsige Versuche, deren prinzipielle Antworten in Abb. 2.3 zusammengefasst sind. Die dargestellten Phänomene beziehen sich auf zugehörige experimentelle Beobachtungen und lassen die Frage nach den mikrostrukturellen Ursachen zunächst unbeantwortet. Mit einer Materialklassifizierung nach Abb. 2.3 werden jedoch die

<sup>12</sup>vgl. Haupt, 2002, Abschnitt 13.2

<sup>13</sup>vgl. Gurtin, Fried und Anand, 2013, Abschnitt 57 und 59

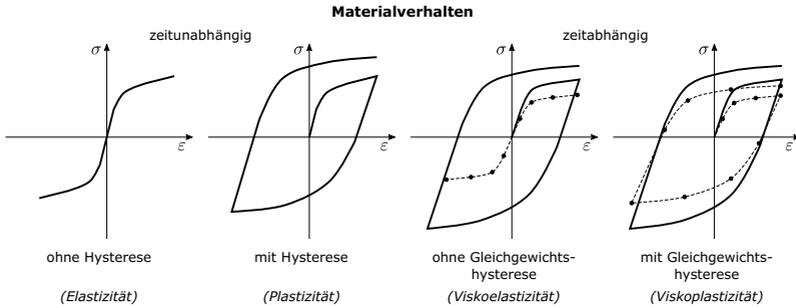


Abb. 2.3: Materialklassen nach Haupt, 2002

wesentlichen Methoden in der analytischen Beschreibung und der numerischen Behandlung festgelegt. Die beiden linken Diagramme der Abbildung umfassen zeitunabhängiges Materialverhalten. Jeder Punkt auf der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik entspricht einer Gleichgewichtslage, wohingegen in den beiden Diagramme auf der rechten Seite die Gleichgewichtslage erst nach einem Relaxationsvorgang erreicht wird. Die gestrichelte Kurve wird als Gleichgewichtskurve bezeichnet. Die Punkte auf der Kurve sind die Gleichgewichtslagen nach erfolgter Relaxation.

Aus historischer Sicht verfügte man für die Bildung rheologischer Netzwerke über drei Grundelemente zur Abbildung linearer Elastizität (HOOKE-Element), idealer Plastizität (SAINT-VENANT-Element) sowie linearer Viskosität (NEWTON-Element). Durch Reihen- und Parallelschaltung dieser Grundelemente lassen sich einfache Modellkörper, wie z. Bsp. der MAXWELL-Körper, ableiten. Werden diese einfachen Modell-Körper verknüpft, entstehen komplexe Modell-Körper, um komplexes Materialverhalten adäquat zu beschreiben. In Reihe geschaltete Körper erfahren die gleiche Spannung, wobei die einzelnen Dehnungskomponenten zur Gesamtdehnung addiert werden. In Analogie erfahren parallel geschaltete Körper die gleiche Dehnung und die Spannungskomponenten werden addiert.

Reales viskoelastisches Materialverhalten lässt sich auf diese Weise sehr genau mit dem generalisierten MAXWELL-Modell beschreiben, wobei  $n$  MAXWELL-Körper<sup>14</sup> einem HOOKE-Element parallel geschaltet werden.

Für komplexeres Materialverhalten ist der Katalog der Grundelemente zu erweitern sowie die ursprüngliche Eigenschaft der Linearität aufzugeben. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 2.4 dokumentiert. Die dort abgebildete thermomechanische Viskoplastizität wurde auf verschiedene Metalllegierungen im Bereich von niedrigzyklischer Beanspruchung mit guter Genauigkeit angewendet (Bröcker und Matzenmiller, 2013). Um die Temperaturentwicklung mit den Grundelementen zu koppeln und die ener-

<sup>14</sup>Die Anzahl der Maxwell-Körper bewegt sich in der Größenordnung von 10.

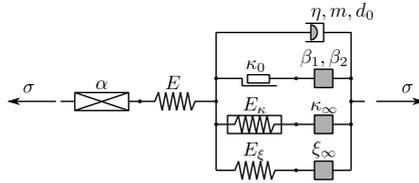


Abb. 2.4: Komplexes rheologisches Netzwerk (Bröcker und Matzenmiller, 2013)

getischen Bilanzgleichungen auszuwerten, wurde jedem Element eine energetische Eigenschaft zugewiesen. Das verwendete Modell der Abbildung zeigt eine klare Zweiteilung. Die einzelnen Elemente tragen entweder zur freien Energie oder zur Dissipation bei. Die qualitative Ausarbeitung der nichtlinearen Anteile in den zusätzlichen Grundelementen ist einerseits an experimentelle Beobachtungen und andererseits an mikrostrukturelle und -mechanische Gegebenheiten<sup>15</sup> geknüpft.

Die Regeln zur analytischen Formulierung aus Reihen- und Parallelschaltung weisen darauf hin, dass dieses Vorgehen lediglich das Konzept der infinitesimalen Deformation einbezieht und anschaulich für den eindimensionalen Fall funktioniert. Die mehrachsige Erweiterung erfolgt in der Regel mit kontinuumsmechanischen Methoden. Die bildliche Darstellung des Materialmodells beinhaltet den Vorteil einer effektiven, sequentiellen Versuchsplanung, da zu jedem Grundelement ein Materialparameterset gehört, das über ein Versuchsprogramm identifiziert werden muss.

### 2.6.2 Konzept innerer Variablen

Konstitutive Beziehungen für Materialien, die in ihrem Beanspruchungspfad eine Hysterese aufweisen, können mathematisch auf unterschiedliche Weise formuliert werden. Die Beanspruchungsgeschichte des Materials beeinflusst die Materialantwort des aktuellen Belastungsregimes. Das Materialgedächtnis kann auf verschiedenen Zeitskalen zum Tragen kommen. Im Falle vergleichsweise kurzer Zeiträume bietet sich die Zeitintegration über die gesamte Beanspruchungszeit an, wie zum Beispiel in der linearen Viskoelastizität spezielle Relaxationsfunktionen in die Materialgleichungen implementiert werden. Für inelastisches Verhalten, das dauerhaft (lange Zeiträume) die Materialantwort beeinflusst, ist die Einführung von inneren Variablen eine numerisch bevorzugte Formulierungsweise (Lubliner, 1972; Lubliner, 1973; Coleman und Noll, 1963; Coleman, 1964; Coleman und Gurtin, 1967). Die zugehörigen Entwicklungsgleichungen gehorchen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

<sup>15</sup>Als Beispiel kann hierfür das Sättigungsverhalten bei der Verfestigung metallischer Werkstoffe genannt werden.

Die Änderungen der inneren Variablen erfolgen simultan zur Änderung des Lastparameters. Die Integration der Entwicklungsgleichungen über den Belastungszeitraum beinhaltet somit die gesamte Geschichte des Deformationsprozesses.

Die Entwicklungsgleichungen sind in der Regel über die Mikrostruktur des jeweiligen Materials oder die phänomenologischen Beobachtungen im Experiment motiviert. Nichtlinearitäten im Materialverhalten werden meistens mit Hilfe mehrerer innerer Variablen beschrieben, die verschiedenen Deformationsmechanismen zuzuordnen sind. Durch das Äquipräsenzprinzip ist das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (oder das System nichtlinearer Entwicklungsgleichungen) ein gekoppeltes System. Beide Eigenschaften führen dazu, dass eine explizite Integration nur in Sonderfällen möglich ist. Formal sind die Entwicklungsgleichungen einer Prüfung der thermodynamischen Konsistenz zu unterziehen. Die numerische Integration dieser Differentialgleichungssysteme ist mit der heutigen Rechentechnik und den zugehörigen Algorithmen in der Regel kein einschränkender Faktor. Die Anzahl der inneren Variablen ist der Anzahl der Deformationsmechanismen und der vorliegenden Nichtlinearität anzupassen.

Die formale Fortführung des Einsatzes innerer Variablen bis zur Wärmeleitgleichung wird im Folgenden für unterschiedliche Zeitskalen in der Belastungsgeschichte gezeigt.

**Viskoelastizität mit inneren Variablen** In einem allgemeinen Materialmodell für Viskoelastizität ist die Anzahl der inneren Variablen wiederum auf eine sinnvolle Zahl zu beschränken und die zugehörigen Entwicklungsgleichungen mathematisch einfach zu gestalten. Im Sinne der Einfachheit wird viskoelastische Materialverhalten oft als lineare Viskoelastizität mit einem generalisierten MAXWELL-Modell repräsentiert, dass in einem rheologischen Netzwerk aus parallel geschalteten MAXWELL-Elementen und einer parallel geschalteten linearen Grundelastizität besteht (Abb. 2.5). Im MAXWELL-Element ist ein lineares Federelement mit einem linearen Dämpferelement sequentiell verknüpft.

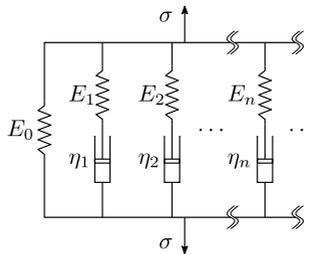


Abb. 2.5: Generalisiertes MAXWELL-Modell als Beispiel für lineare Viskoelastizität im rheologischen Netzwerk

In allgemeiner Form für finite Viskoelastizität werden für die Ableitung konstitutiver Gleichungen die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Abhängigkeiten verwendet

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}_{\theta R}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.110)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}_{\theta R}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.111)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}_{\theta R}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.112)$$

$$\mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}_{\theta R}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.113)$$

Die inneren Variablen werden hier mit  $q_i$  bezeichnet und deren Evolutionsgleichungen lauten:

$$\dot{q}_i = \hat{q}_i(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}_{\theta R}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.114)$$

Es folgen die konstitutiven Konsequenzen aus der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung:

1. Die freie Energie  $\psi$ , der Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$ , die Entropie  $\eta$  und die inneren Variablen  $q_i$  sind unabhängig vom Temperaturgradienten  $\mathbf{g}_{\theta R}$ .
2.  $\frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}, \theta, q_1, \dots, q_n)$
3.  $\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\mathbf{E}, \theta, q_1, \dots, q_n)$

Aus dem 2. Hauptsatz folgt die Restungleichung

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{1}{\rho_R \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad (2.115)$$

Dies bedeutet, dass die Ungleichung für alle möglichen und zulässigen thermodynamischen Prozesse erfüllt ist, wenn die beide Summanden die Bedingung separat erfüllen. Es gelten somit erneut Einschränkungen für die Entwicklungsgleichungen, denen durch den Ansatz

$$\dot{q}_i = -\sum_{j=1}^n \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\mathbf{E}, \theta, q_1, \dots, q_n) \quad (2.116)$$

begegnet wird. Die Matrixkomponenten  $\eta_{ij}$  sind Materialparameter und können eine Abhängigkeit von den Zustandsgrößen aufweisen. Wenn die Viskositätsmatrix  $(\eta)_{ij}$  positiv definit ist, ist die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung stets erfüllt.

$$\sum_{i=1}^n \eta_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \dot{q}_i \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \dot{q}_j \geq 0 \quad (2.117)$$

Die positive Definitheit der Viskositätsmatrix ist durch das generalisierte MAXWELL-Modell automatisch erfüllt, da die Viskositätsmatrix zu einer Diagonalmatrix generiert und die Diagonalelemente jeweils durch die positiven Viskositätswerte eines jeden linearen Dämpferelements gebildet werden.

Mit der Vernachlässigung der spezifischen Wärmezufuhr  $r$  liefert die lokale Form der Energiebilanz die Wärmeleitgleichung gemäß

$$c_e \dot{\theta} = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta \eta)}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{1}{\rho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R \quad (2.118)$$

**Viskoplastizität mit inneren Variablen** Der verallgemeinerten Zusammenstellung des notwendigen Gleichungssatzes der Kontinuumsmechanik für viskoplastisches Materialverhalten wird sich nachfolgend im Rahmen kleiner Deformationsgradienten gewidmet.

Die Beschränkung auf kleine Deformationsgradienten führt auf die additive Zerlegung (2.119) des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  in einen elastischen  $\mathbf{E}_e$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{E}_i$ . Der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  kann näherungsweise über den symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradiententensor  $\mathbf{H}$  nach (2.19) bestimmt werden.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_i \quad (2.119)$$

Das heißt, dass bei von null verschiedener Last stets ein elastischer Deformationsanteil vorhanden ist. Eine mikromechanische Motivation für die Vorgehensweise wird von Kratochvil und Dillon, 1969, für metallische Werkstoffe beschrieben und ist mit der vorliegenden Gitterstruktur und der Versetzungsbewegung im Metallgitter für bleibende Deformationen verbunden. Die veränderte Position der Versetzungen ändert nicht die periodische Gitterstruktur, so dass die Belastungsantwort weiterhin maßgeblich von den Gittereigenschaften bestimmt wird. Dieses Modell gibt den Anlass, den Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  nicht explizit als eine unabhängige Variable in das Antwortverhalten aufzunehmen. Die inelastischen Verzerrungen werden über die additive Zerlegung (2.119) eliminiert und als innere Variable eingebunden.

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad \text{analog für } \tilde{\mathbf{T}} \text{ und } \eta \quad (2.120)$$

$$\mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.121)$$

Im Sinne der Vollständigkeit sind, wie bereits für die Viskoelastizität, die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen als gewöhnliche Differentialgleichungen anzugeben.

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \hat{\mathbf{a}}_i(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.122)$$

Mit unveränderter Vorgehensweise erhält man aus der Dissipationsungleichung (2.74) konstitutive Konsequenzen

$$\frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{E}_e}(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.123)$$

$$\eta = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.124)$$

und die verbleibende Restungleichung

$$\frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}_j} \dot{\mathbf{a}}_j - \frac{1}{\varrho \theta} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{g}_{\theta R} \geq 0 \quad . \quad (2.125)$$

Eine veränderter Satz von unabhängigen Variablen durch eine weitere additive Zerlegung des elastischen Anteils des Verzerrungstensors

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}}_e + \bar{\mathbf{E}}_t + \mathbf{E}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{E}}_t := \alpha(\theta - \theta_0) \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_e = \bar{\mathbf{E}}_e + \bar{\mathbf{E}}_t \quad (2.126)$$

zieht die modifizierte Beziehung zwischen der Entropie und der freien Energie

$$\eta = \frac{\alpha}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{I} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{E}}_e} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \quad (2.127)$$

nach sich. Das Symbol  $\bar{\mathbf{E}}_t$  bezeichnet die rein thermischen Dehnungen. Die freie Energie  $\psi$ , der Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$ , die Entropie  $\eta$  und der Wärmestromvektor  $\mathbf{q}_R$  werden in Abhängigkeit von  $\bar{\mathbf{E}}_e, \theta$  und den inneren Variablen  $\mathbf{a}_i$  dargestellt. Die Unabhängigkeit vom Temperaturgradienten als Konsequenz der thermodynamischen Zulässigkeit bleibt erhalten.

Unabhängig davon, wie die Zerlegung des Verzerrungstensors gewählt wird, können die Anteile für die freie Energie additiv separiert werden. Es gilt

$$\hat{\psi}(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \hat{\psi}_{te}(\mathbf{E}_e, \theta) + \hat{\psi}_i(\theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.128)$$

mit  $\psi_{te}$  für den thermoelastischen bzw.  $\psi_i$  für den inelastischen Anteil.

Trotz zum Teil vorhandener Interdependenzen kann oftmals die freie Energie infolge inelastischer Deformation einzelnen Deformationsmechanismen zugeordnet werden, so dass der Anteil  $\psi_i$  ebenfalls additiv aufgespalten werden kann und einer quantitativen Auswertung zugänglich ist

$$\psi_i = \psi_i^1 + \psi_i^2 + \dots + \psi_i^m \quad . \quad (2.129)$$

Der obere Index entspricht  $m$  der Anzahl der inelastischen Deformationsmechanismen.

In der additiven Zerlegung wird die Wärmeleitgleichung in folgende Darstellung

$$c_\varepsilon \dot{\theta} = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{1}{\varrho_R} \theta \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_e - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta\eta)}{\partial \mathbf{a}_i} \dot{\mathbf{a}}_i - \frac{1}{\varrho_R} \text{Div} \mathbf{q}_R \quad (2.130)$$

überführt. Der erste Summand ist die inelastische Spannungsleistung. Es folgt der thermoelastische Anteil, der mit seinem negativen Vorzeichen zu einer Abkühlung bei rein elastischer Dehnung und zu einer Erwärmung bei rein elastischer Kompression beiträgt. Der dritte Summand beinhaltet die Dissipationszuwachsanteile und die gespeicherten Energiezuwächse aus der inelastischen Deformation, wobei der speicherungsfähige Energieanteil in der Literatur als *rate of stored energy of cold work* bezeichnet wird. Die spezifische Wärmeflussdichte des betrachteten Festkörpers wurde an dieser Stelle wiederum vernachlässigt.

Neben den Zustandsgrößen werden zudem abgeleitete Größen in der Evaluation des thermodynamischen Prozesses untersucht und für eine qualitative und quantitative Einschätzung herangezogen. Hierzu zählt die Berechnung der einzelnen Summanden, die in den beiden folgenden Größen mit dem Index „*i*“ für den inelastischen bzw. „*s*“ für den gespeicherten (*stored*) Anteil gekennzeichnet werden.

$$e_i = \frac{1}{\varrho_R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \quad (2.131)$$

$$e_s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}_j} \dot{\mathbf{a}}_j \quad (2.132)$$

$$\varphi := \frac{e_s}{e_i} \quad (2.133)$$

Die Größe  $\varphi$  setzt beide Energieanteile ins Verhältnis. Eine Auswertung des Zuwachsverhältnisses gibt demnach Aufschluss, in welchem Abschnitt des thermodynamischen Prozesses die im phänomenologischen Modell berücksichtigten Deformationsprozesse dominieren.

Die Akkumulation der einzelnen Zuwachsanteile wird durch die Integration über die Prozesszeit ausgedrückt. Die inelastische Arbeit  $w_i$  dient als Bezugsgröße für die gespeicherte Energie  $w_s$  und führt auf die zugehörige Verhältnisgröße, die im

englischen Sprachgebrauch als *energy transformation ratio (ETR)* benannt wurde.

$$w_i = \int_0^t \frac{1}{\varrho R} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i d\bar{t} \quad (2.134)$$

$$w_s = \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}_j} \dot{\mathbf{a}}_j d\bar{t} \quad (2.135)$$

$$\varphi_{\text{int}} := \frac{w_s}{w_i} \quad (2.136)$$

Kern des thermodynamischen Prozesses ist der inelastische Deformationsvorgang. Notwendig für ein thermomechanisch konsistentes Materialgesetz zu dem umrissenen Gerüst sind die dazu passenden Evolutionsgleichungen der inneren Variablen.

Weit verbreitet für metallische Werkstoffe sind die Materialgesetze, die eine Fließfunktion (Fließfläche) mit zugehörigem Fließkriterium voraussetzen und somit den elastischen Bereich scharf vom Bereich mit viskoplastischen Deformationsanteilen abgrenzen.

$$F = F(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.137)$$

Für  $F > 0$  rufen die inneren Beanspruchungen inelastische Deformationen hervor. In diesem Fall bedarf es einer Fließregel in Form einer Evolutionsgleichung für den inelastischen Verzerrungsanteil (2.138).

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \begin{cases} \lambda G(\tilde{\mathbf{T}}, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) & \text{für } F > 0 \text{ und Lastzunahmebed.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.138)$$

In der Funktion  $F$  sind die bekannten Phänomene wie das kinematische und/oder isotrope Verfestigungsverhalten implizit enthalten. Die Größe  $\lambda$  ist ein Proportionalitätsfaktor in der Fließregel und  $G$  eine tensorwertige Funktion. Es existieren eine Vielzahl von Fließfunktionen und Fließregeln, die dem jeweiligen Material und dem mathematischen Verfahren zur Lösung des zugehörigen Anfangsrandwertproblems angepasst sind. Im Sinne der Metallplastizität wird in vielen Anwendungsfällen mit einer assoziierten Fließregel gearbeitet, die einerseits thermodynamisch konsistent ist und andererseits effektiv in numerische Lösungsverfahren implementiert werden.

Im Gegensatz zur Annahme einer Fließfunktion steht der Zugang, die Entwicklung der inelastischen Deformation direkt von den Zustandsgrößen abhängig zu machen. Einen wesentlichen Beitrag haben Bodner und Partom, 1975 geliefert, in dem die inelastischen Deformationen proportional zum Spannungsdeviator angesetzt werden. Der Proportionalitätsfaktor unterliegt einer Entwicklung im Deformationsvorgang und besteht im Kern aus einer geeigneten nichtlinearen mathematischen Funktion,

deren Freiwerte durch die jeweiligen Materialparameter zu bestimmen sind. Diese Vorgehensweise wurde intensiv bei Metallen bei erhöhten Temperaturen untersucht. Eine Ausdehnung auf andere Materialklassen, deren Mikrostruktur nicht durch ein periodisches Gitter dominiert wird, ist daher naheliegend. Ähnlich wie die getroffenen Annahmen zu einer assoziierten Fließregel, werden zusätzliche konstitutive Annahmen für ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell im Potenzialausdruck der freien Energie integriert (s. Abschnitt 2.8.2 Ansatz (2.219)).

### 2.6.3 Integration phänomenologischer Beobachtungen

**Formalisierung hinsichtlich finiter Deformationen** Der immanente additive Ansatz der rheologischen Modellkonstruktion findet sein Äquivalent in der additiven Zusammensetzung des verwendeten thermodynamischen Potenzials und wird mittels (2.129) diskutiert.

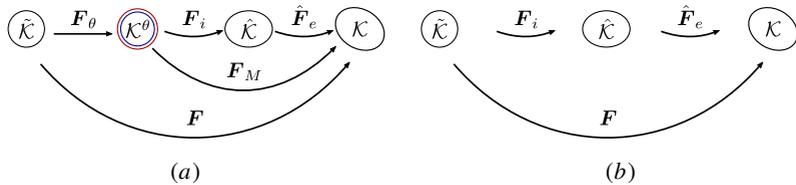


Abb. 2.6: Ausgangs-, Momentan- und Zwischenkonfigurationen (a) nach Shutov und Ihlemann, 2011 mit dem Herauslösen der thermischen Deformationsanteile aus den elastischen Deformationen und (b) nach der klassischen Herangehensweise

Im Sinne von Abb. 2.6 lässt sich exemplarisch die freie Energie für die horizontale Kette ( $\tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}^\theta \rightarrow \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ ) gemäß

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta) = \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{F}}_e) + \hat{\psi}_i(\mathbf{F}_i) + \hat{\psi}_\theta(\theta) \quad (2.139)$$

annehmen. Für jede Konfiguration lässt sich der Anteil der freien Energie separieren. Mit der Darstellung in Abb. 2.6 sind die bestimmenden Deformationsmechanismen fixiert. Für weitere Kopplungen zu anderen physikalischen Feldern, wie z. Bsp. dem elektrischen Feld, werden im Konzept finiter Deformationen weitere Zwischenkonfigurationen möglich bzw. notwendig. Tensoren mit dem Symbol  $\hat{(\cdot)}$  beziehen sich auf die Zwischenkonfigurationen  $\hat{\mathcal{K}}$ .

Im Konzept finiter Deformationen führt die additive Aufspaltung im Weiteren auf physikalisch begründete Ansätze für die Bestandteile der freien HELMHOLTZ-Energie. Die ersten beiden Summanden  $\hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{F}}_e)$  und  $\hat{\psi}_i(\mathbf{F}_i)$  sind isotrope skalare

Funktionen.<sup>16</sup> Der dritte Summand ist eine skalare Funktion mit der Temperatur  $\theta$  als Argument und repräsentiert die freie Energie infolge der Wärmeaufnahmefähigkeit des betrachteten Materials.

Das thermodynamische Potenzial lässt sich nur dann in verschiedene Bestandteile trennen, wenn den identifizierten Verformungsanteilen entsprechende Verzerrungsmaße klar zugeordnet werden können. Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten ist hierfür ein elementarer Ansatz.<sup>17</sup> Sie ist gedanklich mit dem Vorhandensein von fiktiven Zwischenkonfigurationen nach Abb. 2.6 verbunden, wobei individuelle Deformationsgradienten das *Mapping* zwischen benachbarten Konfigurationen vornehmen und sich der gesamte Deformationsvorgang in einer Sequenz abbilden lässt. Unter dieser Voraussetzung sind individuelle Deformationsgradienten die Basis für zugehörige Verzerrungsmaße. Die Abhängigkeiten der freien Energie aus (2.139) gehen dann in

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{\Gamma}, \theta) = \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) + \hat{\psi}_i(\mathbf{\Gamma}_i) + \hat{\psi}_\theta(\theta) \quad (2.140)$$

über. Die Größen  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$  und  $\mathbf{\Gamma}_i$  sind vom Typ eines Verzerrungstensor und werden nachfolgend abgeleitet.

Der Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$  wird multiplikativ in seinen mechanischen und thermischen Anteil zerlegt

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_\theta = \hat{\varphi}(\theta)^{1/3} \mathbf{I} \quad (2.141)$$

Mit dem skalaren Faktor im Ansatz für  $\mathbf{F}_\theta$  wird die thermische Ausdehnung in der weiteren Analyse auf den isotropen Fall beschränkt. Die fortführende Zerlegung teilt den mechanischen Deformationsgradienten in einen elastischen und inelastischen Anteil

$$\mathbf{F}_M = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i \quad (2.142)$$

Typischerweise wird in der Argumentation und Analyse oftmals auf die Zwischenkonfiguration  $\mathcal{K}^\theta$  verzichtet, so dass der Deformationsgradient lediglich mit der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{K}}$  operiert. Dann lautet die Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i \quad (2.143)$$

Wesentlich im Verständnis der Tensoren auf unterschiedlichen Konfigurationen ist der notwendige Konfigurationswechsel und die damit verbundenen *push-forward*- bzw. *pull-back*-Operationen. Die Eigenschaften der Zwischenkonfigurationen und deren Behandlung ist in der Forschung weiterhin Gegenstand der aktuellen Diskussion (O. T. Bruhns, 2020; Casey, 2021), da weitreichende Implikationen für die

<sup>16</sup>Es gilt für dann  $\hat{f}(\mathbf{A}) = \hat{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)$  für alle orthogonalen Tensoren  $\mathbf{Q}$ .

<sup>17</sup>Erstmals vorgeschlagen von Kröner, 1959. Vgl. auch die entsprechenden Verweise in O. T. Bruhns, 2020.

Verwendbarkeit von speziellen Deformationsmaßen in den konstitutiven Beziehungen damit verbunden sind. Eine verbreitete und intuitiv zugängliche Annahme besteht in der Spannungsfreiheit des elastisch entlasteten Materials. Der Spannungstensor ist dann ausschließlich abhängig vom rein elastischen Deformationsanteil. Diese Annahme ist für den einachsigen Fall mit kleinen Deformationen (2.144) leicht nachvollziehbar

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_i \quad \text{und} \quad \sigma = f(\varepsilon_e) \quad . \quad (2.144)$$

In Analogie ist die Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{K}}$  somit eine spannungsfreie Konfiguration.<sup>18</sup> Im Falle komplexer Beanspruchungshistorien für den allgemeinen dreidimensionalen Körper entstehen in der Regel Eigenspannungszustände. Die Zwischenkonfiguration ist dann nicht mehr als euklidischer Raum zu verstehen oder anders ausgedrückt: die geometrische Kompatibilität ist in der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{K}}$  nicht *a priori* erfüllt.

Zur Ableitung der anteiligen Deformationsmaße wird in der spannungsfreien Zwischenkonfiguration ein Dehnungstensor  $\hat{\mathbf{F}}$  (*push-forward* des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$ ) definiert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}_i^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_i^{-T} (\mathbf{F}_i^T \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i - \mathbf{I}) \mathbf{F}_i^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{F}_i^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{I}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{F}_i^{-1}) \\ &= \hat{\mathbf{F}}_e + \mathbf{\Gamma}_i \quad . \end{aligned} \quad (2.145)$$

Als Ergebnis erhält man die additive Separation der Deformationsanteile.

Der Tensor  $\hat{\mathbf{F}}_e$  ist vom Typ des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors (2.8), wohingegen der Tensor  $\mathbf{\Gamma}_i$  die Struktur des EULER-ALMANSISchen Verzerrungstensors gemäß (2.9) besitzt.<sup>19</sup> In Analogie werden die Geschwindigkeitsgrößen wie der Tensor der inelastische Dehnungsgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{D}}_i$  definiert.

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \text{sym}(\hat{\mathbf{L}}_i) \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{L}}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}_i^{-1} \quad (2.146)$$

---

<sup>18</sup>Ein anderer Ansatz infolge einer anderen Interpretation der Zwischenkonfigurationsidee nach Kröner wird beispielsweise in Gurtin, Fried und Anand, 2013 – Kapitel XVI, Abschnitt 97, S. 539 ff – unter Beteiligung des MANDELSchen Spannungstensors gewählt.

<sup>19</sup>Verbleibt man in der Beschreibung in der Referenzkonfiguration, so sind die elastischen und inelastischen Deformationsanteile miteinander verknüpft. Wird ein inelastischer Dehnungstensor  $\check{\mathbf{E}}_i$  vom GREEN-LAGRANGE-Typ definiert

$$\check{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - \mathbf{I}) \quad ,$$

Die inelastischen Deformationen werden in der Regel mit bleibenden, also plastischen, Deformationen gleich gesetzt. Es ist darauf hinzuweisen, dass die multiplikative Zerlegung nicht eindeutig ist, so dass die konstitutiven Gleichungen invariant gegenüber optionaler Rotation der Zwischenkonfiguration sein müssen.<sup>20</sup>

Der freie Energieanteil aus den inelastischen Deformationsvorgängen wird über die Entwicklung der inelastischen Deformationen ermittelt. In der analytischen Formulierung wird diese Größe über die inelastische Dehnungsgeschwindigkeit mit dem Fließgesetz bestimmt.

**Fließregel und Verfestigungsverhalten in der finiten Elastoplastizität** Die Fließbedingung mit einer assoziierten Fließregel für elastisch-plastisches Materialverhalten<sup>21</sup> lautet

$$\hat{D}_i = \hat{D}_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{S}} & \text{für } F = 0 \text{ mit Belastungsbedingung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.147)$$

Die Belastungsbedingung  $L > 0$  wird über (2.148)

$$L = \hat{L}(\hat{S}, \hat{X}, y, \mathbf{F}_p^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}_p^{-1}) \quad \text{mit} \quad L \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{Belastung} \\ = 0 \rightarrow \text{neutral} \\ < 0 \rightarrow \text{Entlastung} \end{cases} \quad (2.148)$$

ausgewertet. Die Fließgrenze teilt die Beschreibung des Deformationsvorgangs scharf in einen rein elastischen und einen elastisch-plastischen Vorgang. Für den aktuellen Beanspruchungszustand ist es erforderlich die Erfüllung der Fließbedingung zu prüfen. Die Größe  $F$  ist eine isotrope, skalare Funktion und wird als Fließfunktion bezeichnet. Sie ist abhängig vom Spannungstensor  $\hat{S}$ , dem Rückspannungstensor oder *Backstress*-Tensor  $\hat{X}$  und der Fließspannung  $y$  formuliert.

$$F = \hat{F}(\hat{S}, \hat{X}, y) \quad (2.149)$$

Der zugehörige (duale) Spannungstensor in der Referenzkonfiguration ist der zweite PIOLA-KIRCHHOFFSche Spannungstensor  $\hat{T}$ . Die *push-forward*-Operation

so sind die elastischen Dehnungen von dem inelastischen Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}_i$  abhängig

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \check{\mathbf{E}}_e - \check{\mathbf{E}}_i \\ \check{\mathbf{E}}_e &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i - \mathbf{I}) - \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_i^T (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{I}) \mathbf{F}_i \quad . \end{aligned}$$

<sup>20</sup>vgl. Haupt, 2002 S. 457ff

<sup>21</sup>Der verallgemeinerte Index  $i$  (*inelastisch*) wird im Folgenden durch  $p$  (*plastisch*) ersetzt.

liefert die Repräsentation in der Zwischenkonfiguration (2.150).

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{F}_p \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}_p^T \quad \text{bzw.} \quad (2.150)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \mathbf{S} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (2.151)$$

Ausgehend von der Momentankonfiguration  $\mathcal{K}$  ist die Größe  $\mathbf{S}$  als der gewichtete CAUCHYSche Spannungstensor bekannt und wird auf die Zwischenkonfiguration zurückgezogen (*pull-back*) (2.151). Es gilt die Dualität

$$(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E}) = (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}) \quad . \quad (2.152)$$

Unter dieser Maßgabe wird klar, dass die Fließgrenze (2.147) mit den Abhängigkeiten nach (2.149) in Bezug auf die Zwischenkonfiguration ausgewertet wird. Die am weitesten verbreitete Fließfunktion ist vom VON-MISES-Typ und wird durch die Differenz der Deviatorgrößen formuliert. Sie betont somit die Gestaltänderung infolge von Schubspannungen.

$$\hat{F}(\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{X}}, y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( (\hat{\mathbf{S}}^D - \hat{\mathbf{X}}^D)^2 \right) - \frac{1}{3} (y)^2 \quad (2.153)$$

Verwendet man in der Fließfunktion die Differenz aus Spannungstensor und *Backstress*-Tensor, so ist die Entwicklung des *Backstress* für die Verschiebung des Mittelpunktes der Fließfläche verantwortlich, und man spricht von der kinematischen Verfestigung. Die Fließspannungsentwicklung bewirkt ein Aufweiten der Fließfläche, was dann als isotropes Verfestigungsverhalten identifiziert wird. Eine grafische Veranschaulichung zum Verfestigungsverhalten findet sich in Abb. 2.9. Im Kontrast zu (2.153) bedarf die Ableitung der Belastungsbedingung für die Zwischenkonfiguration des Hilfsmittels einer speziellen isotropen Tensorfunktion (vgl. Haupt, 2002, Abschnitt 11.3.5, S.463 ff.). Generell ist der Konfigurationswechsel durch *pull-back*- bzw. *push-forward*-Operationen auf Tensor- bzw. Gleichungsebene konsequent umzusetzen.

Die qualitative Unterscheidung der Verfestigungsvorgänge, die mit einer mikrostrukturellen Beobachtung korreliert werden, können fortführend in unterschiedlichem Maß im thermodynamischen Potenzial Berücksichtigung finden. Eine weitere multiplikative Zerlegung des inelastischen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_i$  für den kinematischen und isotropen Verfestigungsanteil generiert eine weitere additive Aufspaltung des freien Energieanteils  $\psi_i$  (vgl. Nebenzweig der Zwischenkonfigurationen  $\check{\mathcal{K}}$  in Abb. 2.7). Die ursprüngliche Idee zusätzlicher Zwischenkonfigurationen geht zurück auf Lion, 2000, und ist aus einem rheologischen Netzwerk motiviert.

Zur Abbildung des Ver- und Entfestigungsverhaltens werden Evolutionsgleichungen für den *Backstress*-Tensor und die Fließspannung benötigt. Da diese in der Elastoplastizität zwangsläufig nicht von der Zeit abhängig sein dürfen, werden abgeleitete Größen auf der Basis der bleibenden Deformationen, wie die plastische

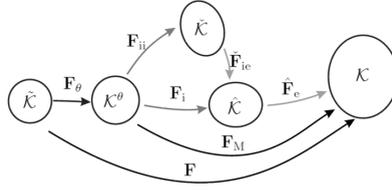


Abb. 2.7: Ausgangs-, Momentan- und Zwischenkonfigurationen aus Shutov und Ihlemann, 2011

Bogenlänge  $s_p$ , verwendet. Eine mögliche Formulierung mit den positiven Materialparametern  $b, c$  bietet die Formulierung vom ARMSTRONG-FREDERICK-Typ<sup>22</sup> für den Backstress-Tensor:

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{X}}} = c\hat{\mathbf{D}}_p - b\dot{s}_p(t)\hat{\mathbf{X}} \quad \text{und} \quad y = y(s_p) \quad . \quad (2.154)$$

Die Rate der plastischen Bogenlänge wird über die Auswertung der Tensornorm<sup>23</sup> der plastischen Deformationsgeschwindigkeit ermittelt:

$$\dot{s}_p(t) = \|\hat{\mathbf{D}}_p\| \quad . \quad (2.155)$$

Im Rahmen finiter Deformationen ist der Konfigurationswechsel in der materiellen Zeitableitung zu beachten, so dass in (2.154) die Schreibweise  $\overset{\nabla}{(\cdot)}$  (Haupt, 2002, Abschnitt 11.3.2) adaptiert wird.

Die Bildungsvorschrift der zeitlichen Ableitung vereinfacht sich im Konzept der infinitesimalen Theorie durch die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung im Linearisierungsverfahren (s. Definition und Verwendung des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  in (2.15) – (2.19)). In Konsequenz vereinfacht sich der multiplikative Split des Deformationsgradiententensors  $\mathbf{F}$  zu einer rein additiven Zerlegung des linearisierten Dehnungstensors  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus (2.18)

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_p \quad \text{mit} \quad \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e + \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p \quad . \quad (2.156)$$

Die konkreten Ausdrücke der Größen in (2.156) folgen einer vereinfachten Berechnungsvorschrift, weil das *Mapping* auf die Zwischenkonfigurationen entfällt und die verwendeten Spannungstensoren ineinander übergehen (2.157).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} + \mathcal{O}(\Delta^2) = \tilde{\mathbf{T}} + \mathcal{O}(\Delta^2) \quad (2.157)$$

<sup>22</sup>vgl. Armstrong und Frederick, 2007

<sup>23</sup>Für die Norm eines Tensors gilt:  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ .

Die Belastungsbedingung (2.148) und die Konsistenzbedingung (2.158) sind im Rahmen der infinitesimalen Theorie kompakt anzugeben und ohne Konfigurationswechsel auszuwerten. Die Konsistenzbedingung beinhaltet das Verschwinden der zeitlichen Ableitung der Fließfunktion und wird mit Hilfe der Kettenregel ermittelt

$$\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{X}(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = 0 \quad . \quad (2.158)$$

Das Fließgesetz mit von-Mises-Fließbedingung lautet dann:

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D) & \text{mit } F = 0 \\ \text{und } L = (\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D) \cdot \dot{\mathbf{E}} > 0 & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.159)$$

Wird im Fließgesetz die Ableitung der Fließfunktion  $F$  nach dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  verwendet, so folgt dies der Normalenregel und man bezeichnet diese als *assoziierte* Fließregel. Anstelle der Fließfunktion können auch andere geeignete, konvexe Funktionen zur Anwendung kommen. Diese, auch als plastische Potentiale bezeichneten Funktionen, sind dann die Grundlage für eine *nicht-assoziierte* Fließregel. Im Rahmen der rationalen Thermodynamik ist sowohl die assoziierte als auch die nicht-assoziierte Fließregel die Konsequenz eines zugehörigen Dissipationspotenzials. Es stellt ebenso wie das thermodynamische Potenzial eine positive, geschlossen konvexe Funktion dar. Die Eigenschaften der Zustandsgleichung ist notwendigerweise bezüglich der Erfüllung bzw. der Verletzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik zu prüfen. Eine generalisierte Normalenregel für das Dissipationspotenzial ist dann äquivalent zum genannten konvexen Potenzial.<sup>24</sup> Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  in der Normalenregel wird über die Konsistenzbedingung (2.158) ermittelt.

Die Entwicklungsgleichung für den *Backstress*-Tensor enthält nur noch die einfache zeitliche Ableitung ( $\overset{\vee}{(\cdot)} \rightarrow (\dot{\cdot})$ ):

$$\dot{\mathbf{X}} = c\dot{\mathbf{E}}_p - b\dot{s}_p(t)\mathbf{X} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{y}(s_p) \stackrel{\text{z.Bsp.}}{=} \dot{s}_p\beta(y_0 - y) \quad . \quad (2.160)$$

Die initiale Fließspannung  $y_0$  und der Parameter  $\beta$  sind positive Materialkonstanten. Dieser Ansatz wurde in komplexerer Form in Kamlah und Haupt, 1998, verfolgt.

Für die Auswertung des gekoppelten thermomechanischen Feldproblems ist die Auswertung der Wärmeleitgleichung (2.130) erforderlich. Hierzu müssen die Anteile des thermodynamischen Potenzials (2.139) mit physikalisch motivierten Ansätzen versehen werden. Für linear elastisches Materialverhalten – als einer Untergruppe der

<sup>24</sup>Die Überlegungen und Ableitung konstitutiver Beziehungen auf der Grundlage der *Thermodynamik irreversibler Prozesse* sind auf die Umgebung eines Gleichgewichtszustands beschränkt. Mit der Erweiterung der mathematischen Werkzeuge sind jedoch hierfür ebenso gültige Materialbeziehungen zu entwickeln.

Hyperelastizität – wurde der Potenzialausdruck bereits im Abschnitt 2.5.1 dargelegt (vgl. (2.92) bzw. (2.98)).

Weiterhin ist es notwendig für jede innere Variable geeignete Potenzialausdrücke abzuleiten. Um die konvexe Eigenschaften des Potenzials zu erhalten, bieten sich in einfachster Form quadratische Ausdrücke an, so dass die freie Energie bei Berücksichtigung von zwei inneren Variablen (*Backstress*-Tensor  $\mathbf{X}$  und Fließspannung  $y$ ) mit den zusätzlichen Parametern  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  folgende Form annimmt

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{X}, y) \\ \varrho\psi &= \varrho\psi_e + \varrho\psi_p \\ &= \varrho\psi_e + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_2} (y - y_0)^2 \quad .\end{aligned}\quad (2.161)$$

Die Wahl der Parameter ist durch die Unverletzlichkeit der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung eingeschränkt.<sup>25</sup>

Kamlah, 1994, weist darauf hin, dass die hier angegebenen inneren Variablen einen Spannungscharakter besitzen, und somit das thermodynamische Potenzial der freien Enthalpie mit dem Spannungstensor als unabhängige Variable die passende und konsistente Ableitungsbasis darstellt. Für die konstitutive Beziehung des elastischen Kerns ist die Inversion der Materialgleichung leicht möglich.

Eine Überführung der phänomenologisch motivierten Fließbedingung und der Entwicklungsgleichungen in den Dehnungsraum kann durch die Proportionalität des *Backstress*-Tensors zu einer inneren Variable  $\chi$  mit Dehnungscharakter erreicht werden.

$$\mathbf{X} \sim \chi \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \bar{c} \chi \quad (2.162)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\bar{c}$  ist mit dem Faktor  $c$  der Evolutionsgleichung (2.160) in Verbindung zu bringen. In Analogie kann ein funktionaler Zusammenhang des isotropen Verfestigungsparameters  $y$  mit einer dehnungstypischen Variable hergestellt werden, so dass

$$y = \hat{y}(\varsigma) \quad (2.163)$$

gilt. Das angegebene thermodynamische Potenzial in (2.161) ist dann eine Funktion der soeben eingeführten inneren Variablen mit Dehnungscharakter.

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{X}, y) \quad \rightarrow \quad \psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \chi, \varsigma) \quad (2.164)$$

<sup>25</sup>Für die angeführten Entwicklungsgleichungen von  $\mathbf{X}$ , also der ARMSTRONG-FREDERICK-Typ, ist  $\gamma_1 = c$  (vgl. Chaboche, 1986), und von  $y$  ist  $\gamma_2$  nur limitiert durch die Materialkonstanten  $\beta$  und  $y_0$  (Kamlah, 1994, Abschnitt 2.4.2), und nur dann konsistent mit der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung.

Der Wechsel zwischen den thermodynamischen Potenzialen wird mathematisch über die LEGENDRE-Transformation vermittelt<sup>26</sup>

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \boldsymbol{\chi}, \varsigma) \quad \xleftrightarrow{\text{LEGENDRE}} \quad g = \hat{g}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \mathbf{X}, y) \quad . \quad (2.165)$$

Die zugehörigen, positiven Materialparameter können in der Regel von der Temperatur abhängig sein. Im gewählten Versuchsaufbau dieser Arbeit sind die Temperaturänderungen klein und die Umgebungstemperatur hinreichend entfernt von der Schmelztemperatur, so dass kein Einfluss auf die Gewichtung der Deformationsmechanismen bzw. auf die Deformationsmechanismen selbst besteht. Die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter wird somit in der analytischen Beschreibung vernachlässigt.

### Viskoplastizität mit elastischem Kern<sup>27</sup>

Die beobachteten Antworten im einachsigen Zugversuchen geben Anlass, dass selbst für konventionelle metallische Konstruktionswerkstoffe die Beschreibung mit elastoplastischen Materialgesetzen Defizite aufweist. Typisch ist zuweilen ein Spannungsabfall bei Erreichen der maximalen Verschiebung für verformungsgesteuerte Versuchsführungen. Dies ist nur durch eine Zeitabhängigkeit im Materialgesetz abbildbar. Es sind daher viskoplastische Deformationsanteile mit geeigneten mathematischen Formulierungen einzubeziehen. Die Elastoplastizität bietet einen weit verbreiteten Ansatzpunkt, in dem die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen ratenabhängig formuliert werden.

Im Folgenden wird sich auf die Theorie infinitesimaler Deformationen beschränkt, so dass für den linearisierten Dehnungstensor  $\tilde{\mathbf{E}}$  und den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_v \quad \text{mit} \quad \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e + \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v \quad (2.166)$$

gelten soll.

Gemäß den allgemeinen Prinzipien für Materialgesetze werden folgende Abhängigkeiten beibehalten

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \\ \eta &= \hat{\eta}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \\ q_R &= \hat{q}_R(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad . \end{aligned}$$

Der elastische Dehnungsanteil  $\tilde{\mathbf{E}}_e$  ist die Differenz aus dem Tensor der totalen Dehnung und dem Tensor der viskoplastischen Dehnungen (2.166). Der Spannungstensor

<sup>26</sup>Die unabhängigen Variablen der freien Energie  $\psi$  und der freien Enthalpie  $g$  werden als komplementär bezeichnet. Eine Vermischung der unabhängigen Variablen, wie in (2.161), kann als *partielle* LEGENDRE-Transformation verstanden werden (s. Germain, Nguyen und Suquet, 1983).

<sup>27</sup>Der verallgemeinerte Index  $i$  (*inelastisch*) wird im Folgenden durch  $v$  (*viskoplastisch*) ersetzt.

und die Entropie sind wiederum über die thermodynamischen Restriktionen mit der freien Energie verbunden

$$\frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\mathbf{E}}_e} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad .$$

Die klassische Herangehensweise im Bereich der Viskoplastizität entspricht den Überlegungen zur Elastoplastizität unter Verwendung einer assoziierten Fließregel. Die Fließbedingung  $F$  korrespondiert mit dem zugehörigen plastischen Potenzial oder Dissipationspotenzial

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}}_v = \frac{1}{\eta_v} \left\langle \frac{F}{d_0} \right\rangle^m \mathbf{N} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)}{\|\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D\|} \quad \text{und} \quad m \geq 1 \quad . \quad (2.167)$$

In (2.167) kommt die übliche Schreibweise der MACAULAY- oder FÖPPL-Klammer  $\langle \cdot \rangle$  zur Anwendung

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad . \quad (2.168)$$

Die Funktion  $F$  wird dann als *statische* Fließfläche<sup>28</sup> identifiziert, so dass für  $F < 0$  keine inelastischen Deformationen generiert werden und das Materialgesetz somit einen reinen elastischen Kern aufweist. Der Exponent  $m$  wurde zuerst von Perzyna, 1963, eingeführt. Die Proportionalität zwischen den inelastischen Deformationen und einer empirischen Überspannungsfunktion (Perzyna, 2005) vermittelt der Faktor  $\eta_v$ , der die viskosen Deformationseffekte skaliert.

Den betrachteten Verfestigungsmechanismen entsprechend sind dem Materialgesetz Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen beizufügen, so dass sich die Fließfunktion im Deformationsprozess entwickelt. Die inneren Variablen beziehen sich auf das Verfestigungsverhalten. Mit dem *Backstress*-Tensor in der Fließbedingung ist eine zentrale Variable in (2.167) genannt.

Der fundamentale Unterschied zur Elastoplastizität besteht in der Aufgabe der Konsistenzbedingung für die Ermittlung des plastischen Multiplikators und resultiert in eine zeitabhängigen Modellantwort.

**Viskoplastizität ohne Fließfunktion** Die Diskontinuität des Deformationsverhaltens durch die Definition einer Fließfläche mit der zugehörigen Belastungsbedingung ist der Elastoplastizität innewohnend und äußert sich unter anderem bereits bei der einachsigen Beanspruchung in dem Problem, den Fließpunkt als einen entscheidenden Materialparameter exakt zu ermitteln. Die mathematischen Ansätze für die

<sup>28</sup>Einen anderen Ansatz verfolgt das Konsistenzmodell der Viskoplastizität mit qualitativen Unterschieden, wenn Entlastungspfade im Belastungsregime relevant sind. (vgl. Heeres, Suiker und de Borst, 2002).

Spannungs-Dehnungs-Charakteristik liefern im Prozess der Parameterbestimmung konkrete Angaben für den Fließpunkt und weisen die Brauchbarkeit der getroffenen Annahmen in einer großen Vielfalt nach. Dennoch muss ebenso betont werden, dass der Übergang von elastischem Deformationsverhalten hin zu einem Verhalten, das inelastische Deformationen beinhaltet, durch die Mikrostruktur des Materials<sup>29</sup> geprägt ist, und somit als ein gradueller Vorgang verstanden werden kann.

Die Diskussionen in den 1960ern hinsichtlich der dynamischen Eigenschaften von inelastischen Deformationsprozessen basieren auf Beobachtungen an Metallen und den damit verbundenen Versetzungsdichten und den zugehörigen Geschwindigkeiten der thermodynamisch aktivierten Versetzungen bei plastischer Deformation. Als ein Diskussionsergebnis kann festgehalten werden, dass Versetzungsbewegungen bereits unterhalb der Fließgrenze stattfinden können.

In diesem Zusammenhang werden im Rahmen der Kontinuumsthermomechanik Theorien entwickelt, die auf die Definition eines scharfen Übergangs vom rein elastischen auf den elastoplastischen Bereich, also der Definition einer Fließfläche, verzichten und plastische Deformationen von Beanspruchungsbeginn explizit zulassen.

Valanis, 1971a; 1971b; 1971c operiert dafür mit der freien HELMHOLTZ-Energie in der Form

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{q}_a) \quad , \quad (2.169)$$

wobei die inneren Variablen  $\mathbf{q}_a$  einen tensoriellen Charakter besitzen.

Die grundlegende Idee für die *endochrone* Theorie der Viskoplastizität ist die Definition einer intrinsischen Zeit  $z$ , so dass für kleine Deformationsgradienten

$$z = \hat{z}(\zeta) \quad \text{mit} \quad \frac{dz}{d\zeta} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{dt} > 0 \quad (2.170)$$

$$\text{sowie} \quad d\zeta^2 = \alpha d\xi^2 + \beta dt^2 \quad \text{mit} \quad d\xi^2 = P_{ijkl} d\tilde{E}_{ij} d\tilde{E}_{kl} \quad (2.171)$$

geschrieben werden kann. Der Anteil  $d\xi$  mit dem vierstufigen Tensor  $\mathbf{P}$  umfasst die (komplexe) Dehnungsgeschichte und der viskose Anteil wird durch die natürliche (extrinsische) Zeit  $t$  erfasst.

Thermodynamisch zulässig sind nur diejenigen Prozesse, für die

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}_a} \cdot \dot{\mathbf{q}}_a \geq 0 \quad \text{und somit} \quad -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}_a} \cdot \frac{d\mathbf{q}_a}{dz} \geq 0 \quad (2.172)$$

gilt. Die tensorielle Darstellung des vollständigen Gleichungssatzes ist in Valanis, 1971c nachzuvollziehen. Der Kern für die abhängigen Zustandsgrößen (Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und Entropie  $\eta$ ) des gewählten thermodynamischen Potentials ist die Integration

<sup>29</sup>Hier wäre beispielsweise die polykristalline Struktur von Metallen zu nennen.

geeigneter Funktionen über den gesamten Deformationsverlauf im intrinsischen Zeitregime. Valanis schlägt dabei zusätzlich eine Aufspaltung des Spannungstensors in Deviator und hydrostatischen Spannungsanteil vor. Die Materialgleichungen haben dann folgende Struktur

$$\boldsymbol{\sigma}^D = 2 \int_{z_0}^z \mu(z - \bar{z}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^D}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad . \quad (2.173)$$

Die untere Grenze des Integrals  $z_0$  bezeichnet den Referenzzustand für das intrinsische Zeitregime. Die Anwendung dieses Modellierungsansatzes beruht auf der Wahl geeigneter Funktionen für  $z$  bzw.  $\mu$ , die in der numerischen Auswertung robust und einfach zu handhaben sind. Die von Valanis für die Funktion  $\mu$  als „einfachste mögliche“ bezeichnete Form ist die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten

$$\mu(z) = \mu_0 G(z) \quad \text{mit} \quad G(z) = \exp(-\alpha z) \quad \text{und} \quad \mu_0, \alpha > 0, \quad (2.174)$$

womit komplexes Verfestigungsverhalten adäquat abgebildet werden kann.

Die Exponentialfunktion spielt eine ebenso herausgehobene Stellung im Viskoplastizitätsmodell von Bodner und Partom, 1975, und in der Erweiterung der thermischen Erholung Chan, Bodner und Lindholm, 1988, sowie in der zugehörigen Einbettung in die Kontinuumsmechanik (Bodner und Lindenfeld, 1995).

Im Kontext kleiner Deformationsgradienten gilt die additive Zerlegung des Verzerrungstensors

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_v + \alpha(\theta - \theta_0) \mathbf{I} \quad . \quad (2.175)$$

Auch in (2.175) wird die Abspaltung der thermischen Dehnungen vorgenommen.

Die unabhängigen Größen in der freien HELMHOLTZ-Energie sind der Verzerrungstensor  $\tilde{\mathbf{E}}$ , die Temperatur  $\theta$  sowie der inelastische Anteil des Verzerrungstensors  $\tilde{\mathbf{E}}_v$  und die Verfestigungsgrößen  $Z^I$  und  $\beta$  als innere Variablen.

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{E}}_v, \theta, Z^I, \beta) \quad . \quad (2.176)$$

Mit der additiven Zerlegung des Verzerrungstensors ergibt sich der Spannungstensor zu

$$\frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D \quad . \quad (2.177)$$

Die Restgleichung aus dem zweiten Hauptsatz lautet unter der Bedingung, dass der inelastische Anteil des Verzerrungstensors ein rein deviatorischer Tensor ist, wie folgt

$$\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v - \frac{\partial \psi}{\partial Z^I} \dot{Z}^I - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} - \frac{1}{\varrho} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}_\theta \geq 0 \quad . \quad (2.178)$$

Dabei wird der erste Term meist als viskoplastische Spannungsleistung bezeichnet. Als weitere Konsequenz ist der inelastische Anteil des Verzerrungstensors lediglich über die Differenz zur Gesamtverzerrung vertreten.<sup>30</sup> Mit dem linear-elastischen Ansatz, wie in Abschnitt 2.5.1, ist die freie Energie somit in zwei Anteile separierbar

$$\psi = \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, Z^I, \beta) = \psi_e + \psi_v \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \psi_e &= \hat{\psi}_e(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta) \\ \psi_v &= \hat{\psi}_v(Z^I, \beta). \end{aligned} \quad (2.179)$$

Es wird eine Potenzialformulierung für die inelastischen Deformationsmechanismen postuliert, die den Konvexitätsanforderungen genügt. Die obigen Zustandsgleichungen sind nun mit einem Fließgesetz und den zugehörigen Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen zu verknüpfen. Die fundamentalen Unterschiede zu den Modellen mit Fließgrenze ist die Richtungsdefinition für die inelastischen Deformationen, die hier mit den Richtungen des Spannungsdeviators einhergehen.<sup>31</sup> Die Dynamik der Versetzungsbewegungen spiegelt sich in einer kinetischen Gleichung für den zum Spannungsdeviator gehörigen Multiplikator. Hier bedienen sich Bodner und Lindenfeld einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten.

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v = \lambda \boldsymbol{\sigma}^D \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{D_2^p}{1/2 \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D} \quad \text{und} \quad D_2^p = D_0^2 \exp(-\bar{Z}^n) \quad (2.180)$$

Die Entwicklung der beiden Verfestigungsparameter, die für die kinetische Gleichung zu einem skalaren Ausdruck zusammengeführt werden, sind im Wesentlichen durch den Zuwachs der inelastischen Arbeit dominiert.

### 2.6.4 Modellkombination und Modellerweiterungen

Die offensichtlichste Modellerweiterung kann durch den Umstand zusätzlicher Verformungsanteile mit der Gleichung:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_v + \tilde{\mathbf{E}}_c + \dots \quad (2.181)$$

im Kontext kleiner Deformationen deutlich gemacht werden.<sup>32</sup> Die weiteren nicht zu vernachlässigenden Deformationsmechanismen sind mit weiteren physikalischen Feldern, wie dem Feuchtfeld für eine bedeutende Anzahl von Polymerwerkstoffen oder wie dem elektrischen Feld für dielektrische Materialien, verbunden.

Auch für diese Werkstoffklassen werden mit den dargelegten Methoden der Kontinuumsthermomechanik die konstitutiven Beschränkungen für thermodynamisch

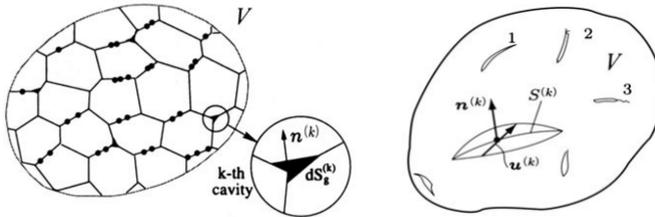
<sup>30</sup>  $\tilde{\mathbf{E}}_e = \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_v - \alpha(\theta - \theta_0)\mathbf{I}$  bzw. die zeitliche Ableitung  $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e = \dot{\tilde{\mathbf{E}}} - \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_v - \alpha\dot{\theta}\mathbf{I}$

<sup>31</sup> Im Spezialfall der Plastizität für die endochrone Theorie werden die inelastischen Deformationen ebenfalls in erster Linie durch den Spannungsdeviator bestimmt, hinzu kann ein Schubanteil kommen, der das *Crosshardening* (bekannt bei Kombinationsbeanspruchung aus Torsions- und Zuglasten) auf geeignete Weise berücksichtigt.

<sup>32</sup> Im Kontext großer Deformationen ist die Aufspaltung multiplikativ auf der Ebene der Deformationsgradienten vorzunehmen und führt auf weitere Zwischenkonfigurationen gemäß 2.6.

zulässige Prozesse (*COLEMAN-NOLL-Procedure*) abgeleitet. Des Weiteren werden geeignete Potenzialausdrücke formuliert, um die erforderliche Eigenschaft einer geschlossenen, konvexen Funktion erfüllen zu können, wobei hier die Dissipationspotenziale mit zugehöriger Fließregel bei diskontinuierlichem Deformationsverhalten eingeschlossen sind. Dieses Vorgehen ist unabhängig davon, ob die Deformationsvorgänge geschwindigkeitsabhängig oder -unabhängig sind.

Mathematisch komplexer und thermomechanisch relevant ist die Berücksichtigung von Phasenumwandlungen im betrachteten Material, zu denen die Formgedächtniswerkstoffe gezählt werden, deren Phasenumwandlung einen diskontinuierlichen Charakter besitzt. In Anbetracht der Konstruktion von assoziierten und nicht assoziierten Fließregeln und den damit verbundenen Prinzipien für die Elastoplastizität deutet dies bereits die gesteigerte Komplexität an. Es ist für alle betrachteten Deformationsvorgänge die thermodynamische Zulässigkeit zu prüfen.<sup>33</sup>



(a) Schädigung durch Porenbildung an den Korngrenzen      (b) Schädigung durch Mikrorissbildung

Abb. 2.8: Mikroschädigung aus Murakami, 2012

Die Charakterisierung des Schädigungsverhaltens in Verbindung mit inelastischen Deformationsmechanismen wurde u.a. durch Perzyna, 2005; Lemaitre und Desmorat, 2005; Murakami, 2012, in die grundlegenden thermodynamischen Zustandbeschreibungen integriert. Im Kontrast zu den Beschreibungen eines materiellen Punktes in einem Kontinuum bildet die Analyse der Mikrostruktur den Ausgangspunkt. Abb. 2.8 zeigt schematisch die Erkenntnisse aus mikroskopischen Beobachtungen für metallische Werkstoffe. Die konventionelle Werkstoffherstellung induziert eine heterogene Mikrostruktur, die sich u.a. infolge von mechanischen Beanspruchungen über den Beanspruchungszeitraum verändert. Typisch für duktile Werkstoffe ist beispielsweise die Entstehung von Poren sowie Porenwachstum und -verschmelzung. Umfangreiche mathematische Beschreibungen gehen z. Bsp. zurück auf Rice und Tracey, 1969; Gurson, 1977; Tvergaard und Needleman, 1984.

<sup>33</sup>Eine ausführliche Darstellung der spannungs- bzw. temperaturinduzierten Martensitumwandlung findet sich in der Arbeit von Helm, 2001.

Die Schädigungsmechanik im Kontinuum beschreibt die Vorgänge nicht an einer singulären Pore, sondern verwendet Verteilungsansätze für die Mikrodefekte, so dass mit integralen Parametern eine Schädigungsentwicklung modelliert wird. Beispiele aus der aktuellen Literatur, die den Konzepten der thermodynamischen Konsistenz von Lemaître und Desmorat; Murakami folgen und die Energiebilanz quantitativ auswerten, finden sich mit Abu Al-Rub und Voyiadjis, 2003; Håkansson, Wallin und Ristinmaa, 2006; Krairi und Doghri, 2014; Guo u. a., 2018.

Entsprechend können die auftretenden Umgebungsbedingungen, die unter Umständen im Herstellungsprozess eine große Spannbreite aufweisen, eine Modelerweiterung nach sich ziehen. Die Umgebungstemperatur ist eine naheliegende Zustandsgröße. Aber auch das *Self-heating* kann unter bestimmten Umständen zu großen Temperaturänderungen im Material führen. Es kann einerseits eine Aktivierungstemperatur erreicht werden, die die Deformationsanteile qualitativ verändert. Andererseits ist für viele Materialparameter eine Temperaturabhängigkeit experimentell nachgewiesen, die über einen großen Temperaturbereich oftmals mit einer glatten, monotonen Funktion beschrieben werden kann. Diese Eigenschaft wird beim JOHNSON-COOK-Ansatz, um Deformationsmechanismen über eine temperaturabhängige Funktion zu skalieren, genutzt (Johnson und Cook, 1985). Konkret wurde beispielsweise das Kontinuumsschädigungsmodell nach Tvergaard und Needleman, 1984 mit dem Ansatz von Johnson und Cook für thermische Entfestigung in Schob, Roszak u. a., 2019; Schob, Sagradov u. a., 2020; Roszak u. a., 2021, effektiv kombiniert.

### 2.7 Formulierung der Anfangsrandbedingungen

Für eine vollständige Formulierung des zu lösenden Problems müssen die Anfangsrandbedingungen gegeben sein, wobei symbolisch eine Unterscheidung in mechanische und thermische Randbedingungen vorzunehmen ist.

#### Mechanische Anfangsrandbedingungen

$$\partial\mathcal{B}_M = \partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_t \quad (2.182)$$

#### Thermische Anfangsrandbedingungen

$$\partial\mathcal{B}_T = \partial\mathcal{B}_\theta \cup \partial\mathcal{B}_q \quad (2.183)$$

Es erfolgt zudem eine Aufteilung in wesentliche und natürliche Randbedingungen. Die wesentlichen Randbedingungen sind die Verschiebungsgrößen und die Temperatur, wohingegen die natürlichen Randbedingungen über den Spannungsvektor und den Wärmestromvektor definiert werden.

Für die Abbildung der physischen Versuche sind prinzipiell alle Arten von Randbedingungen zu berücksichtigen. Je nach Versuchsführung können aus energetischen

Betrachtungen Idealisierungen vorgenommen werden. Die Sonderfälle von isothermen und adiabaten Randbedingungen sind besonders herauszuheben. Im Falle von Isothermie bleiben die Temperaturen auf dem Rand konstant, wohingegen bei adiabaten Randbedingungen kein Wärmestrom in die Umgebung stattfindet.

Aus modellierungstechnischer Sicht ist es deutlich einfacher, die Entwicklung der Zustandsgröße Temperatur auch aufgrund der vorliegenden Probensymmetrie bei idealisierten Randbedingungen zu interpretieren und die Plausibilität im Sinne der Energiebilanz zu prüfen. Die Identifikation der Modellparameter beschränkt sich dann auf die Parameter des Materialmodells. Gibt die Versuchsführung keinen Anlass zu vereinfachenden Annahmen in der Beschreibung der Randbedingungen, sind die im Allgemeinen instationären Randbedingungen Teil des Identifikationsproblems. Eine komplexe Repräsentation der Randeigenschaften kann es daher erforderlich machen, geeignete Vorversuche zu definieren, die das durch den Wärmeübergang an den Einspannungen bedingte instationäre Verhalten in hinreichender Genauigkeit quantifizieren.

Aus versuchstechnischer Sicht ist die Realisierung idealer Randbedingungen mit einem hohen experimentellen Aufwand verbunden. Besonders sichtbar wird dies, wenn man die vollständige thermische Entkopplung (adiabate Randbedingung) bei vollständiger Beobachtbarkeit (Temperatur- und Verschiebungsmessung) anstrebt, da man stets mit den methodenbedingten Limitierungen der Prüfmaschine und den Messeinrichtungen konfrontiert ist.

Für den betrachteten und relevanten Bereich der Temperaturänderung und der numerischen Genauigkeit in der Abbildung des Wärmeleitproblems ist die Verlagerung zur adäquaten Modellerweiterung ein effizienter Weg den experimentellen Aufwand zu minimieren. Nichtsdestotrotz ist die sorgfältige Versuchsplanung, was in erster Linie die Probenform und das zugehörige Belastungsregime betrifft, eine wesentliche Konsequenz aus dem abgeleiteten Formelapparat, um den Umgebungseinfluss qualitativ und quantitativ gut abzuschätzen und somit die erforderliche Modellerweiterung mit einfachen Mitteln zu realisieren.

## 2.8 Modellbeschreibung

Die wesentlichen Gleichungen für die kontinuumsmechanische Behandlung eines thermomechanisch gekoppelten Problems wurden in den vorangegangenen Abschnitten 2.1 – 2.6 bereitgestellt. Die einbezogenen Phänomene beschreiben die Elastizität, die Viskoelastizität, die Plastizität sowie die Viskoplastizität, die in konventionellen Konstruktionswerkstoffen zu beobachten sind. Es sei in diesem Zusammenhang noch einmal auf die vier unterschiedlichen experimentellen Befunde nach Haupt und deren Veranschaulichung in Abb. 2.3 verwiesen, die durch rheologische Schaubilder mit den drei Grundelementen – Feder-, Dämpfer- und Reibelement – mit einer allgemeinen nichtlinearen Kennlinie repräsentiert werden können.

Die reine Elastizität als geschwindigkeitsunabhängige Materialklasse ohne Hysterese wird durch ein einzelnes Federelement abgebildet. Plastische Deformationen werden ausschließlich über ein Reibelement eingeführt. Ein geschwindigkeitsabhängiges Material enthält ein Dämpferelement, das auf unterschiedliche Weise in ein rheologisches Netzwerk integriert werden kann, so dass der geschwindigkeitsabhängige Anteil mit den elastischen oder den elastisch-plastischen Deformationen wechselwirkt.

Die Viskoplastizität als das komplexeste Materialverhalten<sup>34</sup> kann durch Grenzübergänge in weniger komplexes Materialverhalten überführt werden. In Analogie zur Methode der rheologischen Netzwerke wird durch Parameteranpassung die Abschaltung einzelner Subnetzwerke und des dahinterliegenden Deformationsmechanismus bewirkt oder gleichbedeutend das Subnetzwerk in ein starres Element überführt. Die Viskoplastizität bildet somit aufgrund ihrer Generalisierungseigenschaft einen Schwerpunkt in der materialwissenschaftlichen Analytik.

Die Parallelität in der Entwicklung von Materialgesetzen auf dem klassischen Weg, also der qualitativen Integration von experimentellen Beobachtungen in das kontinuumsmechanische Konzept, sowie der Weiterentwicklung und konsequenten Umsetzung der rationalen Thermodynamik über die Definition geeigneter innerer Variablen führt zu einer Vielzahl gleichberechtigter Darstellungen von Materialgesetzen.

Die historisch am längsten untersuchten Konstruktionswerkstoffe im Bereich der Elastoplastizität sind die metallischen Werkstoffe, wobei viele Befunde aus kristallografischen und mechanischen Experimenten vor den grundlegenden Veröffentlichungen zum theoretischen Gerüst der Kontinuumsmechanik publiziert wurden.

Während die elastischen Deformationen die bestehende Grundstruktur des Metallgitters verzerren, werden plastische Deformationen durch die Bewegung von Gitterfehlern, zum Beispiel von Inkompatibilitäten im Kontaktbereich unterschiedlich ausgerichteter Gitter, in gitterspezifischen Gleitsystemen hervorgerufen. Die Behinderung dieser Bewegungen ist nicht konstant über den Deformationszeitraum, so dass Ver- und Entfestigungsaspekte in den Ansatz für den freien Energieanteil  $\psi_i$  eingehen.

Neben der Widerspiegelung der Gittereigenschaften spielen die Temperatur als auch weitere mikrostrukturelle Eigenschaften, wie die Korngröße, eine wesentliche Rolle im Deformationsprozess. Die mikrostrukturellen Eigenschaften werden durch das Herstellungsverfahren (wie Abkühlgeschwindigkeiten oder Ausscheidungsstoffe aus der Schmelze)<sup>35</sup> und die Zwischenbehandlungen des Werkstoffs (wie Glühvorgänge

---

<sup>34</sup>Als Komplexitätsgrad wird in diesem Zusammenhang die Anzahl der zu berücksichtigenden Deformationsphänomene aufgefasst, die wiederum ihre Berechtigung aus den experimentellen Befunden und der zugrunde liegenden Mikrostruktur des Werkstoffs ziehen.

<sup>35</sup>Es sei hier auf die fundamental unterschiedlichen, konventionellen und additiven Fertigungsverfahren hingewiesen.

oder Umformverfahren) beeinflusst, so dass sich diese in der Materialcharakterisierung und somit in den verwendeten Ansätzen selbst niederschlagen.

Die Palette der Konstruktionswerkstoffe hat sich in den letzten Jahrzehnten durch den vermehrten Einsatz von Kunststoffen im Sinne einer Leichtbaustrategie stark erweitert. Doch auch für Polymere, deren Mikrostruktur durch die Anordnung und Vernetzung von Molekülketten geprägt ist, lassen sich phänomenologisch Ver- und Entfestigungsprozesse beobachten, so dass die zugehörigen Ansätze der thermodynamischen Potenziale für Polymerwerkstoffe in ihrer Struktur erhalten bleiben und somit keine fundamentalen Unterschiede aufweisen.

Aus diesen grundlegenden Überlegungen und ersten experimentellen Befunden speist sich die Auswahl der Modellierungsmöglichkeiten, die nachfolgend Verwendung finden. Die Anwendung der Materialmodelle wird sich in den begleitenden Versuchen auf metallische Werkstoffe konzentrieren, so dass die klassischen Verfestigungsmechanismen im Materialmodell verankert sein müssen. Die Kenntnis der werkstoffwissenschaftlichen Phänomene für die jeweilig betrachtete Werkstoffklasse (Metalle, Legierungen, Polymere *etc.*) in den verschiedenen geometrischen Skalen ist eine wichtige Voraussetzung in der Wahl der geeigneten Ansatzfunktionen. Hierfür ist die interdisziplinäre Kooperation und die Überblickswerke zu den spezifischen Werkstoffklassen (Haasen, 1994; Rösler, Harders und Bäker, 2008; Mittemeijer, 2011) besonders hilfreich.

Auf Basis der Literatur und aus eigenen Vorversuchen lässt sich konstatieren, dass durch moderate Änderung der Dehnungsgeschwindigkeiten im Zugversuch in der Materialantwort, also in der Spannungs- und Temperaturentwicklung, signifikante Unterschiede zu erkennen sind. Des weiteren wird in einer zyklischen Versuchsführung mit Maximalbeanspruchungen deutlich unterhalb der Fließgrenze<sup>36</sup> bei klassischen, metallischen Konstruktionswerkstoffen eine Erhöhung der mittleren Ausgangstemperatur gemessen. Für beide Aspekte ist die Handhabung der Fließgrenze als ein zentraler Werkstoffparameter vertiefend zu diskutieren.

Der graduelle Übergang von elastischen Deformationen zu Deformationsvorgängen, in denen die inelastischen Deformationsmechanismen quantitativ dominieren, wird in Metallen durch die heterogene Mikrostruktur, also beispielsweise infolge unterschiedlicher Ausrichtungen benachbarter Körner, begründet. Lokal begrenzte Deformationsdynamiken überlagern sich zu einem elastisch-inelastischen Gesamtverhalten, das abhängig von den Mikrostrukturparametern, wie z. Bsp. Korngröße, ist. Diese Überlegung gab den Anlass für ein Materialmodell, auf eine scharfe Abgrenzung mit einer Fließbedingung von fundamental unterschiedlichen Deformationsphänomenen zu verzichten. Diese Unschärfe spiegelt sich aber auch in der unscharfen Definition des Fließgrenzenparameters für Materialmodelle wider, die diese scharfe Trennung implementieren. Offensichtlich ist die Bewertung des

<sup>36</sup>Die Fließspannungsangaben sind durch Materialtabellen, zugehörigen technischen Datenblättern oder der in Artikeln der wissenschaftlichen Literatur publiziert und dienen als Eckwerte in der Versuchssteuerung.

nichtlinearen Übergangs in der experimentellen Spannungs-Dehnungs-Charakteristik bereits für einfache bilineare Materialmodelle problematisch. Die Ausprägung des Übergangs von einem linearen Verhalten zu Beginn des Zugversuchs zu einem späteren linearen Anstieg, der ein Sättigungsverhalten für Verfestigungsvorgänge einschließt, ist für Metalle und Metalllegierungen vielfältig. In der Auswahl der Materialmodelle für die numerischen Simulationen sind daher beide Ansätze vertreten, um die Variabilität und die Physikalität der Materialmodelle einzuschätzen. Hierbei kommt es darauf an, die Dynamik des gesamten Deformationsvorgangs mit den Mitteln der phänomenologischen Kontinuumsthermomechanik abzubilden. Die Ergebnisse für metallische Werkstoffe geben zudem Aufschluss wie eine etablierte Modellierungsstrategie auf andere Werkstoffklassen übertragen werden kann.

Das erste beschriebene Modell ist ein viskoplastisches Materialmodell mit expliziter Fließgrenze und wird aus einem rheologischen Netzwerk abgeleitet. Das zugehörige assoziierte Fließgesetz ist vom PERZYNA-Typ. In einem zweiten viskoplastischen Materialmodell wird auf eine scharfe Trennung des elastischen und des elastoplastischen Deformationsbereiches durch eine Fließgrenze verzichtet, so dass selbst bei geringen Beanspruchungen inelastische Verformungen initiiert werden. Realisiert wird dies durch eine stetig differenzierbare Funktion, die als eine glatte Sprungfunktion charakterisiert werden kann, so dass die inelastischen Dehnungszuwächse ab einem zugehörigen Beanspruchungsniveau rapide ansteigen können. Das Beanspruchungsniveau ist im Gegensatz zur singulären Fließgrenze als ein ausgedehnter Spannungsbereich zu verstehen, dessen Ausdehnung mit den zugehörigen Funktionsparametern gesteuert bzw. identifiziert wird. Als Fließregel wird die Kollinearität vom Tensor der inelastischen Dehnungen zum Spannungsdeviator angesetzt. Das dritte Modell folgt als plastisches Materialmodell mit einer assoziierten Fließregel der klassischen Herangehensweise und dient einerseits als etabliertes Referenzmodell für die zuvor genannten viskoplastischen Modelle und andererseits aufgrund seiner robusten Handhabbarkeit für die Auswertung thermomechanischer Versuche mit konkreter Probenformen und konkretem Belastungsregime.

Alle drei Modelle sind thermodynamisch konsistent abgeleitet und erfüllen somit stets den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Die Entwicklungsgleichungen der inneren Variablen besitzen in der Regel eine einfache mathematische Struktur und sind durch experimentelle Beobachtungen und/oder mikrostrukturelle Analysen motiviert. Mehrheitlich können die betrachteten Deformationsmechanismen durch gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung<sup>37</sup> ausgedrückt werden. Das viskoplastische Modell ohne Fließgrenze operiert mit schwach nichtlinearen Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen, was sich auf das Konvergenzverhalten im numerischen Lösungsverfahren auswirkt. Das bevorzugte und implementierte Lösungsverfahren des Differentialgleichungssystems der inneren Variablen für alle Modelle ist das EULER-Rückwärts-Verfahren.

---

<sup>37</sup>Ggf. sind diese Differentialgleichungen schwach gekoppelt.

In allen Ableitungen bildet das thermodynamische Potenzial der freien Energie den Ausgangspunkt. Lediglich für das elastisch-plastische Materialmodell (Kamlah und Haupt, 1998) wird eine zusätzliche LEGENDRE-Transformation zur freien Enthalpie vorgenommen, um im Einklang der inneren Variablen vom Spannungstyp mit der unabhängigen Größe des Spannungstensors zu bleiben. Die Ableitung geschieht vollständig im Spannungsraum. In den beiden Materialmodellen (Bröcker und Matzenmiller, 2013; Kamlah und Haupt, 1998) mit Fließgrenze werden die Potenzialanteile, die zur Energiespeicherung infolge von Mikrostrukturumwandlungen beitragen, mehrheitlich in isotroper, quadratischer Form beschrieben. Im Gegensatz dazu sind im fließgrenzenfreien Materialgesetz (Bodner und Lindenfeld, 1995) die zugehörigen Terme isotrope Potenzausdrücke und der jeweilige Exponent wird als zusätzlicher Materialparameter vereinbart.

Die qualitative Unterscheidung einzelner Deformationsmechanismen im Verfestigungsverhalten führt in allen Modellen zu einer additiven Zusammensetzung des thermodynamischen Potenzials und weiterhin in der Berechnungsvorschrift für die innere Dissipation, was bereits durch die Summenausdrücke in (2.190) und (2.192)<sub>2</sub> ersichtlich ist.

Im Folgenden werden die drei angesprochenen Materialmodelle detailliert formuliert. Kern in der Beschreibung ist die mathematische Funktionalität sowie die zugehörigen Freiwerte als sensitive Materialparameter. Die Beschreibung erfolgt im Kontext kleiner Deformationsgradienten, so dass die EULERSchen und LAGRANGESchen Zustandsgrößen ineinander übergehen. Im Gegensatz zu den Ableitungen in Abschnitt 2 wird im Weiteren auf die ingenieurtechnisch üblichen Bezeichnungen  $\sigma$  als Spannungstensor sowie  $\varepsilon$  als Verzerrungstensor zurückgegriffen. Die wesentlichen Gleichungen der Kontinuumsmechanik werden mit dieser Notation und der Beschränkung auf kleine Deformationsgradienten den folgenden Ausführungen vorangestellt.

Die kinematische Beschreibung der Deformation führt auf die bekannte additive Zerlegung des Verzerrungstensors, wobei die Dehnungen durch Temperaturänderung in zwei Modellansätzen separiert werden. Die Bestandteile des Verzerrungstensors  $\varepsilon$  sind dann von reversibler (elastisch bzw. viskoelastisch mit den zugehörigen Indizes  $(\cdot)^e$  bzw.  $(\cdot)^{ve}$ ) und irreversibler (plastisch bzw. viskoplastisch mit den zugehörigen Indizes  $(\cdot)^p$  bzw.  $(\cdot)^{vp}$ ) Natur. Der thermische Anteil infolge Temperaturänderung wird in zwei Modellen separat wie in (2.184) vorgenommen, wobei der thermische Anteil mit einer isotropen Volumendehnung über den thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  und die Differenz von aktueller Temperatur  $\theta$  zur Referenztemperatur  $\theta_0$  beschrieben wird.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \alpha(\theta - \theta_0)\mathbf{I} \quad (2.184)$$

$$\psi = \hat{\psi}(\varepsilon, \varepsilon^p, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \stackrel{!}{=} \hat{\psi}(\varepsilon^e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (2.185)$$

und  $\psi = e - \theta\eta$

Gemäß dem Prinzip der Äquipräsenz sind die spezifische freie Energie  $\psi$  in (2.185), die spezifische innere Energie  $e$ , die spezifische Entropie  $\eta$  und der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  vom gleichen Variablensatz abhängig. Das Symbol  $\mathbf{a}_i$  repräsentiert skalar oder tensorwertige, innere Variablen.

Die Einbeziehung der Energiebilanzen<sup>38</sup> und der Entropiebilanz in den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik führt zur Ungleichung für die innere Dissipation  $\delta$  (CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung) (2.186) mit  $\mathbf{q}$  als Wärmestromvektor,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  als Dehnratentensor,  $\mathbf{g}_\theta$  als Temperaturgradient und  $\varrho$  als Massendichte.

$$\delta = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} + \theta \dot{\eta} - \frac{1}{\varrho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}_\theta \geq 0 \quad (2.186)$$

$$\mathbf{g}_\theta = \nabla \theta \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = -k \mathbf{g}_\theta \quad (2.187)$$

Die Kopplung der unabhängigen Variablen wird durch das FOURIERSche Gesetz in isotroper Form vervollständigt (2.187). Die thermische Leitfähigkeit wird mit  $k$  bezeichnet und ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Wärmefluss  $\mathbf{q}$  und dem Temperaturgradienten  $\mathbf{g}_\theta$ .

Die konstitutiven Konsequenzen für thermodynamisch zulässige Prozesse sind mit (2.188) und (2.189) gegeben

$$\eta = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad n = \alpha \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon^e} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad (2.188)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \varrho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D \quad (2.189)$$

Die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung folgt der Form

$$\delta = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{a}_j} \dot{\mathbf{a}}_j - \frac{1}{\varrho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}_\theta \geq 0 \quad (2.190)$$

Die Wärmeleitgleichung in aktueller Notation unter Vernachlässigung einer Wärmestromdichte lautet

$$c_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \dot{\theta} = \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \theta \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{a}_i} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i - \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (2.191)$$

und dient der Bestimmung des Temperaturfeldes.

Die grundlegenden Verfestigungsmechanismen der isotropen und kinematischen Verfestigung können in allen drei Modellen separat oder in Kombination Berücksichtigung finden. Schematisch wird der Verfestigungseinfluss anhand eines Materialmodells mit Fließgrenze und einem linearen Verfestigungsansatz in Abb. 2.9 dargestellt.

<sup>38</sup>Die Wärmezufuhr pro Masseneinheit wird wie bereits zuvor vernachlässigt.

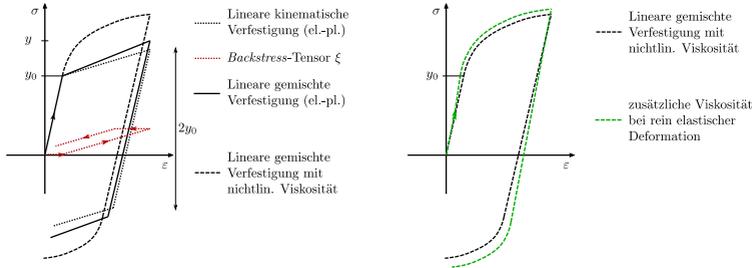


Abb. 2.9: Schematische Verdeutlichung der Spannungsanteile mit linearer Verfestigung und viskosem Verhalten

Der Beanspruchungspfad beginnt jeweils im lastfreien und verformungsfreien Zustand. Der rein elastische Bereich endet mit dem Erreichen der Fließgrenze  $y_0$ . Bei alleiniger kinematischer Verfestigung (*gepunktete Kurve*) setzt erneutes plastisches Fließen ein, wenn die Entlastung und anschließende gegensinnige Beanspruchung einen Bereich von  $2y_0$  überstreicht. Die zugehörige innere Variable – *Backstress* – entwickelt sich gemäß der rot gepunkteten Kurve. Kommt der isotrope Verfestigungsmechanismus hinzu (*durchgezogene Kurve*), setzt das Fließen im zweiten inelastischen Verformungsbereich entsprechend später ein. Viskoplastisches Verhalten (*gestrichelte Kurve*) zeichnet sich meist dadurch aus, dass in der Nähe des elastisch-inelastischen Übergangsbereich ein weiterer Spannungsanteil (*overstress*) – signifikant ansteigt und im weiteren Verlauf wieder abfällt, was sich im Abflachen der Gesamtkurve bemerkbar macht.

Relaxieren erzeugte Überspannungen bei Beanspruchungen unterhalb der Fließgrenze vollständig, so spricht man von viskoelastischem Deformationsverhalten. Im rechten Diagramm wird in der grün gestrichelten Kurve durch vorhandene Viskositäten bereits eine zusätzliche Überspannung in den beiden linearen Bereichen erzeugt. Ein derartiges Materialverhalten kann beispielsweise durch das Modell im Abschnitt 2.8.1 erfasst werden.

Energetische Betrachtungen geben einen Hinweis auf die Physikalität der thermomechanischen Modelle in Bezug auf die dynamischen Änderungen in der Mikrostruktur, wie sie in den Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen abgebildet sind. Hierzu wurden bereits zusätzliche energiebezogene Kenngrößen definiert. (vgl. (2.131)–(2.136)).

In der aktuellen Notation werden die spezifische plastische Spannungsleistung  $e_p$  und der spezifische Zuwachs der gespeicherten Energie (*rate of stored energy of cold*)

work)  $e_s$  gemäß (2.192) berechnet.

$$e_p = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \text{und} \quad e_s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{a}_j} \dot{\mathbf{a}}_j . \quad (2.192)$$

Die Ausdrücke für die arbeitsbezogenen Kenngrößen ergeben sich aus der Integration des betrachteten Zeitintervalls.

Insbesondere Kamlah und Haupt, 1998, haben herausgestellt: „It is common use to plot the ratio  $w_s/w_p$  over the plastic work or the plastic strain. Besides the instantaneous rate of energy storage, [the ratio]  $\varphi := e_s/e_p$  as a function of  $w_p$  is considered, since it **reflects the dynamics of dislocational processes**.“

Die Verhältnissgröße  $\varphi$  wird als (*rate of energy transformation ratio (ETR)*) bezeichnet und erlaubt einen Einblick in die physikalischen Vorgänge des Deformationsprozesses. Gleichlautende oder ähnliche Formulierungen wurden durch Oliferuk und Raniecki, 2018, Håkansson, Wallin und Ristinmaa, 2008 und andere verwendet.

### 2.8.1 Modell 1 – Rheologisches Netzwerk mit Fließbedingung

Ein rheologisches Netzwerk ist eine Zusammenschaltung rheologischer Elemente in verschiedenen parallel oder sequentiell verknüpften Zweigen (vgl. Abb. 2.10).

Die Definition eines Ausdrucks der freien Energie  $\psi_i$  für jeden Elementtyp  $i$  des rheologischen Netzwerks mit zugehörigen inneren Variablen  $\mathbf{a}_i$  führt auf einen Gesamtausdruck als Startpunkt für das Materialmodell. Die grundlegende

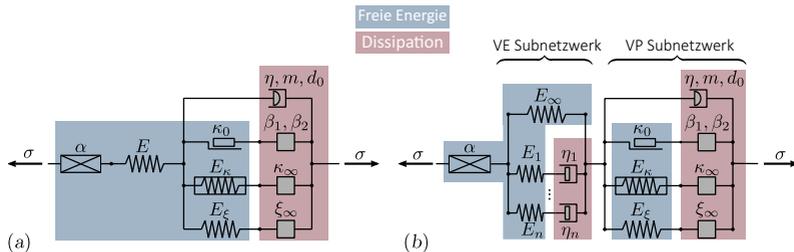


Abb. 2.10: Zugehöriges rheologisches Netzwerke: (a) originaler Ansatz nach Bröcker und Matzenmiller, 2013), (b) Netzwerkerweiterung mit Viskosität im elastischen Deformationsanteil (Sparr u. a., 2020)

Idee der Aufspaltung in Elemente, die ausschließlich entweder zur freien Energie oder zur Dissipation beitragen, wird in Bröcker und Matzenmiller, 2013; Bröcker, 2014; Bröcker und Matzenmiller, 2015 detailliert dargelegt. Dieser Ansatz liegt als

vollständiges, dreidimensionales Materialmodell vor und wird hier in vereinfachter Form für den eindimensionalen Fall dargestellt.

In beiden Netzwerken der Abb. 2.10 sind den jeweiligen Elementen die zugehörigen Materialparameter zugeordnet. Zu verschiedenen Elementen gehören zudem innere Variablen mit ihren Entwicklungsgleichungen. Die Ähnlichkeit beider Netzwerke ist offensichtlich, weshalb zunächst das Zusammenwirken im Ansatz von Bröcker und Matzenmiller, 2013 (Abb. 2.10 (a)) erläutert wird. Die beiden linken Elemente bilden die lineare Thermoelastizität ab. Das folgende verzweigte Subnetzwerk wird aktiviert, wenn die Fließgrenze  $\kappa_0$  überschritten wird, und beschreibt das nichtlineare Verhalten im Bereich der inelastischen Deformationen. Das nichtlineare Dämpferelement im oberen Zweig ist mit der Fließregel vom PERZYNA-Typ verknüpft. Das folgende Reibelement beinhaltet die Fließbedingung vom VON-MISES-Typ. Die beiden unteren Zweige repräsentieren die isotrope bzw. kinematische Verfestigung. Es erfolgt eine Trennung der Elemente bzgl. eines Beitrags zur freien Energie (*blau*) bzw. zur Dissipation (*rot*). Die dominierende innere Variable ist die viskoplastische Dehnung. Sie dominiert die Entwicklung der zugehörigen inneren Variablen  $\varepsilon_\beta$ ,  $\kappa$  und  $\xi$ , die in den dissipativen Elementen der unteren drei Zweige verortet sind. Die Dehnungsentwicklung  $\varepsilon_\beta$  besitzt einen stark monoton fallenden Charakter, während die anderen beiden Dehnungsanteile entsprechend eines Sättigungsverhaltens in der Verfestigung einen monoton steigenden Charakter aufweisen. Als Ansätze in den Entwicklungsgleichungen dienen Bröcker und Matzenmiller die Exponentialfunktion für  $\varepsilon_\beta$  bzw. lineare gewöhnliche Differentialgleichungen für  $\kappa$  und  $\xi$ . Das Modell inkludiert zudem andere Formulierungsansätze zur Viskoplastizität (Helm, 2001; Chaboche, 1993b), so dass für bestimmte Parametersätze die Modelle ineinander übergehen. Es gelten die Rechenregeln für Reihen- und Parallelschaltung hinsichtlich der Dehnungs- und Spannungsanteile (vgl. Abschnitt 2.6.1).

Viskose Dehnungsanteile entstehen somit ausschließlich über die assoziierte Fließregel des PERZYNA-Ansatzes. Elastische Deformationsanteile bei Belastung unterhalb der Fließgrenze und Entlastungsvorgänge weisen keine Geschwindigkeitsabhängigkeit auf und werden mit diesem Modell vernachlässigt.

Die experimentellen Befunde zeigen jedoch signifikant zeitabhängiges Verhalten für zyklische Versuche unterhalb der Fließgrenze und bei Relaxationsvorgängen. Für den Fall der zyklischen Versuche liegen Be- und Entlastungsvorgänge nicht auf einem identischen Beanspruchungspfad. Dies äußert sich u.a. in einer Probenerwärmung bei niedriger Zyklenzahl. Die Relaxationseigenschaft bei Metallen wird deutlich, indem bei integrierten Haltezeiten im Zugversuch ein ausgeprägter Lastabfall beobachtet wird. Beide Vorgänge sind mit dem vorgeschlagenen Modell nicht abbildbar.

Dieses Defizit im Materialmodell wird durch eine Erweiterung des rheologischen Netzwerkes umgangen. Das elastische Verhalten erhält durch die Parallelschaltung von Dämpferelementen eine viskose Komponente. Die hier vorgeschlagene und implementierte Erweiterung bewegt sich weiterhin im Bereich der infinitesimalen Theorie und führt auf die Kombination der linearen Viskoelastizität in Form des gene-

ralisierten MAXWELL-Modells (Abschnitt 2.6.2) und dem Modell nach Bröcker und Matzenmiller, 2013. Die Autoren stellen heraus, dass für  $\kappa_0 = 0$  ein viskoelastisches Modell erreicht wird. Damit wird die Funktionalität der vorgeschlagenen Erweiterung nicht erzielt. Der entscheidende Vorteil mit der Kombination des generalisierten MAXWELL-Modells liegt in der Berücksichtigung viskoser Effekte auf der Ebene zweier voneinander unabhängiger Zeitskalen. Mit der dargestellten Separation können die inneren Variablen klar dem viskoelastischen ( $(\cdot)^{ve}$ ) oder dem viskoplastischen ( $(\cdot)^{vp}$ ) Subnetzwerk zugeordnet werden (vgl. (2.195)).

Mit der Einführung der Differenz  $(\varepsilon - \varepsilon^{vp})$  in die Liste der abhängigen Variablen folgt für die freie Energie

$$\varepsilon = \varepsilon^{ve} + \varepsilon^{vp} + \alpha(\theta - \theta_0) \quad (2.193)$$

$$\psi = \hat{\psi}(\varepsilon^{ve}, \theta, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_l) \quad (2.194)$$

Somit kann die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung für das betrachtete Modell konkretisiert werden

$$\begin{aligned} \delta = & \left( \frac{1}{\rho} \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{ve}} \right) \dot{\varepsilon}^{ve} + \left( \frac{1}{\rho} \sigma \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \eta \right) \dot{\theta} + \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}^{vp} \\ & - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}^{ve}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{ve} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}^{vp}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{vp} - \frac{1}{\rho \theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \quad (2.195) \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\mathbf{a}^{ve}$  (bzw.  $\mathbf{a}^{vp}$ ) umfasst entsprechend die inneren Variablen mit dem Index von 1 bis  $k$  (bzw. von  $k+1$  bis  $l$ ) für das viskoelastische (bzw. viskoplastische) Subnetzwerk.

Die konstitutiven Konsequenzen und die Wärmeleitgleichung erhalten dann die Form wie in (2.196) und (2.197).

$$\begin{aligned} \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{ve}}; \quad \eta = \frac{1}{\rho} \sigma \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{ve}} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{und} \\ \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}^{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}^{ve}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{ve} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}^{vp}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{vp} - \frac{1}{\rho \theta} q \frac{\partial \theta}{\partial x} \geq 0 \quad (2.196) \end{aligned}$$

Die Wärmeleitgleichung ist die direkte Konsequenz aus der lokalen Form der Energiebilanz.

$$\begin{aligned} c_\varepsilon \dot{\theta} = & -\theta \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon^{ve}} \dot{\varepsilon}^{ve} - \frac{\partial(\psi + \theta \eta)}{\partial \mathbf{a}^{ve}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{ve} + \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}^{vp} \\ & - \frac{\partial(\psi + \theta \eta)}{\partial \mathbf{a}^{vp}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{vp} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} q \quad (2.197) \end{aligned}$$

Der erste Summand enthält die thermoviskoelastische Kopplung.

Die folgenden drei Terme sind mit den dissipativen Anteilen infolge mechanischer Deformation  $\delta_M$  gleichzusetzen.

$$\delta_M = \frac{1}{\varrho} \sigma \dot{\varepsilon}^{vp} - \frac{\partial(\psi + \theta\eta)}{\partial \mathbf{a}^{ve}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{ve} - \frac{\partial(\psi + \theta\eta)}{\partial \mathbf{a}^{vp}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^{vp} \quad (2.198)$$

Die plastische Spannungsleistung wird nicht vollständig in Wärme überführt. Es wird ein Energieanteil als freie Energie im viskoelastischen und im viskoplastischen Subnetzwerk gespeichert.

Ohne die konkrete Form der Entwicklungsgleichungen zu diskutieren, fassen (2.199) bis (2.203) das zu lösende Anfangswertproblem zusammen.

$$\begin{aligned} \sigma &= E^* \varepsilon^{ve} && \text{mit } E^* = E^*(t) && (2.199) \\ & && \text{und } \lim_{t \rightarrow -\infty} E^*(t) = E_\infty && \\ &= E^*(\varepsilon - \varepsilon^{vp} - \alpha\theta) && \text{sowie Gln. für } \dot{\varepsilon}_{\eta_i} = \dot{\varepsilon}_{\eta_i}(\dot{\varepsilon}^{ve}) && \\ & && \text{mit } i = 1, \dots, n && \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_\sigma := \left\{ (\sigma, \xi, \kappa) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, \xi, \kappa) \leq 0 \right\} \quad (2.200)$$

mit  $f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa)$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{vp} &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{f}{d_0} \right\rangle^m \text{sgn}(\sigma - \xi) && \text{mit Gln. für } \dot{\varepsilon}_\beta = \dot{\varepsilon}_\beta(\dot{\varepsilon}^{vp}), && (2.201) \\ & && \dot{\xi} = \dot{\xi}(\dot{\varepsilon}^{vp}) \text{ und } \dot{\kappa} = \dot{\kappa}(\dot{\varepsilon}^{vp}) && \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon}^{th} = \alpha \dot{\theta} \quad (2.202)$$

$$c_\varepsilon \dot{\theta} = -\frac{1}{\varrho} E \alpha \theta \dot{\varepsilon}^{ve} + \frac{1}{\varrho} k \nabla \cdot (\nabla \theta) + \delta_M \quad (2.203)$$

Die Dämpfungselemente im viskoelastischen Subnetzwerk werden mit dem Index  $i$  beschrieben, so dass in (2.199)  $n$  Entwicklungsgleichungen für die zugehörigen inneren Variablen zu formulieren sind. Gleiches trifft für die rot markierten Elemente im viskoplastischen Subnetzwerk (Gleichung (2.201) in Verbindung mit Abb. 2.10) zu. Jedem dieser Elemente beider Subnetzwerke wird somit ein Dissipationsterm zugeordnet

$$\begin{aligned} \delta_M &= \underbrace{\frac{1}{\varrho} |\dot{\varepsilon}^{ve}| \sum_{i=1}^n \delta_{\eta_i}^*}_{\text{VE Subnetzwerk}} + \underbrace{\frac{1}{\varrho} (f + \delta_{\kappa_0}^* + \delta_{\kappa}^* + \delta_{\xi}^*)}_{\text{VP Subnetzwerk}} |\dot{\varepsilon}^{vp}| \geq 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_{\eta_i} + (\delta_f + \delta_{\kappa_0} + \delta_{\kappa} + \delta_{\xi}) \geq 0 . \quad (2.204) \end{aligned}$$

Die Entwicklung der viskoplastischen Dehnung folgt dem Ansatz von PERZYNA (2.201), wobei der viskoelastische Bereich durch die Fließbedingung (2.200) abgeschlossen wird. Die inneren Variablen für die Verfestigung  $\xi$  und  $\kappa$  berücksichtigen ein Sättigungsverhalten (vgl. Bröcker und Matzenmiller, 2013). Die Kopplung zwischen Verzerrung und Temperatur wird durch die Wärmeausdehnungsgleichung (2.202) und die vollständige Überführung der Dissipation in Wärme (2.203) hergestellt. In (2.203) wurde zudem für den Wärmestrom das FOURIERSche Gesetz eingefügt. Die Angabe von Anfangswerten komplettiert obigen Gleichungssatz zum Anfangswertproblem.

### 2.8.2 Modell 2 – Bodner/Lindenfeld ohne Fließbedingung

Ein thermomechanisch konsistentes Materialmodell wurde von Bodner und Lindenfeld, 1995, entwickelt und basiert auf dem viskoplastischen Modell nach Bodner und Partom, 1975, und setzt im Rahmen der infinitesimalen Theorie die Aufspaltung des Verzerrungstensor nach

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} + \alpha(\theta - \theta_0)\mathbf{I} \quad (2.205)$$

voraus. Mit der konstitutiven Bedingung (2.189) gilt mit der aktuellen Notation für isotrope lineare Thermoelastizität der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{eD} + \kappa(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)\mathbf{I} - \kappa 3\alpha(\theta - \theta_0)\mathbf{I} \quad (2.206)$$

zwischen Spannungstensor und elastischem Anteil des Verzerrungstensors.

Das Materialgesetz kommt ohne explizite Fließgrenze aus. Die Fließregel besagt, dass die viskoplastische Deformationsgeschwindigkeit proportional zum Spannungsdeviator  $\boldsymbol{\sigma}^D$  ist (2.207). Sobald der Spannungsdeviator ungleich dem Nulltensor ist, werden inelastische Deformationen im Verformungsvorgang induziert. Dieser Ansatz ist intuitiv anschaulich, da bereits durch die vorhandene Mikrostruktur lokal Spannungsüberhöhungen bei kleinen Lasten generiert werden, die durch inelastische Deformationen lokale Lastumlagerungen zur Folge haben. Der maßgebliche Deformationsmechanismus in der Nähe der klassischen Fließgrenze ist damit jedoch nicht angesprochen. Daher ist der Faktor  $\lambda$  mit einer angepassten, gesättigten Exponentialfunktion verbunden.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \lambda \boldsymbol{\sigma}^D \quad (2.207)$$

$$\lambda^2 = D_2^p/J_2 \quad \text{mit} \quad D_2^p = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \quad \text{und} \quad J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \quad (2.208)$$

Die Struktur der Exponentialfunktion ist durch

$$D_2^p = D_2^p(J_2) = D_0^2 \exp \left[ - \left( \frac{J_2}{3J_2} \right)^n \right] \quad (2.209)$$

gegeben, in dem die Größe  $Z$  einen Materialzustand repräsentiert, der die inneren Variablen respektive dem Verfestigungsverhalten zu einem skalaren Wert kondensiert. Dennoch separiert der gewählte Ansatz das isotrope und direktionale<sup>39</sup> Verfestigungsverhalten mit

$$Z = Z^I + Z^D \quad , \quad (2.210)$$

indem unterschiedliche Dynamiken in der Entwicklung zugelassen sind. Beide Verfestigungsparameter werden als proportional zur plastischen Spannungsleistung  $\dot{W}^p$  angesetzt und werden über den Spannungsdeviator ermittelt

$$\dot{W}^{vp} = \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \quad . \quad (2.211)$$

Die mathematisch angereicherten Entwicklungsgleichungen (2.212) und (2.213) wurden erfolgreich für die analytische Beschreibung von metallischen Proben verschiedener Lastregime eingesetzt.

$$\dot{Z}^I = m_1 (Z_1 - Z^I) \dot{W}^{vp} \quad \text{mit} \quad Z^I(0) = Z_0 \quad (2.212)$$

$$Z^D = \beta \cdot \boldsymbol{U} \quad (2.213)$$

$$\dot{\beta} = m_2 (Z_3 \boldsymbol{U} - \beta) \dot{W}^{vp} \quad \text{mit} \quad \beta(0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|} \quad (2.214)$$

In Veröffentlichungen nach 1975 verfeinerte die Arbeitsgruppe die mathematische Beschreibung gemäß neuer experimenteller Ergebnisse (z. Bsp. in Chan, Bodner und Lindholm, 1988). Die Variabilität der Konstante  $m_1$  (2.215) passt das Wachstum der isotropen Verfestigung an.

$$m_1 = m_{11} + m_{12} \exp(-m_{13} Z^I) \quad (2.215)$$

$$m_2 = m_{21} + m_{22} \exp(-m_{23} Z^D) \quad (2.216)$$

Mit (2.216) kann das Modellverhalten bei Lastumkehr für die direktionale Verfestigung besser gesteuert werden. Aufgrund kleiner Temperaturänderungen im Einsatzbereich können die Terme für die thermische Erholung vernachlässigt werden. Die Materialparameter  $Z_0, Z_1, Z_3$  sowie  $m_{11,12,13}$  und  $m_{21,22,23}$  sind konstante, positive Größen.

Als thermodynamisches Potenzial wird die freie Energie  $\psi$  verwendet. Es erfolgt eine additive Trennung in den elastischen und den inelastischen Anteil

$$\psi = \hat{\psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta) + \hat{\psi}_{vp}(Z^I, \beta) \quad . \quad (2.217)$$

Die viskoplastische Deformation ist indirekt über die Differenz der Dehnungsanteile enthalten (vgl. (2.193) und (2.194)).

<sup>39</sup>Bodner und Partom verwenden den Begriff „direktional“ bereits in der Erstveröffentlichung. Der Ansatz beschreibt den Verfestigungsmechanismus, der üblicherweise das Attribut „kinematisch“ erhält. Eine inhaltliche Abgrenzung ist in den Artikeln nicht vorhanden.

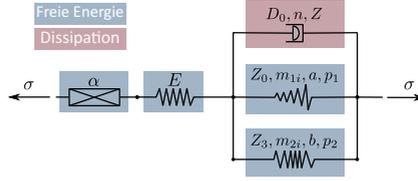


Abb. 2.11: Rheologische Analogie für das Bodner–Lindenfeld-Modell

Der zu (2.206) zugehörige Ausdruck für den Anteil der freien Energie  $\psi_e$  aus elastischer Deformation nimmt nach (2.98) unter Verwendung des Kompressionsmodul  $\kappa$  folgende Form an

$$\varrho\psi_e = \mu (\text{tr}\varepsilon^{eD})^2 + \frac{1}{2}\kappa (\text{tr}\varepsilon^e)^2 - \kappa 3\alpha (\theta - \theta_0) \text{tr}\varepsilon^e - \frac{1}{2}\varrho c_\varepsilon (\theta - \theta_0)^2. \quad (2.218)$$

(2.219) dient als zusätzliche konstitutive Annahme für den Anteil  $\psi_{vp}$  und führt vier neue, positive Materialparameter ( $a$ ,  $b$ ,  $p_1$  und  $p_2$ ) ein.

$$\psi_{vp} = \frac{a}{\varrho} \left( \frac{Z^I}{Z_1} \right)^{p_1} + \frac{b}{\varrho} \left( \frac{\beta \cdot \beta}{Z_3^2} \right)^{p_2} \quad (2.219)$$

Die zeitliche Ableitung des freien Energieanteils  $\psi_{vp}$  (*rate of stored energy of cold work*) mit der Kettenregel

$$\dot{\psi}_{vp} = p_1 \frac{a}{\varrho} \frac{\dot{Z}^I}{Z_1} \left( \frac{Z^I}{Z_1} \right)^{p_1-1} + 2p_2 \frac{b}{\varrho} \frac{\beta \cdot \dot{\beta}}{Z_3^2} \left( \frac{\beta \cdot \beta}{Z_3^2} \right)^{p_2-1} \quad (2.220)$$

und der mechanische Anteil der inneren Dissipation  $\delta_M$

$$\delta_M = \frac{1}{\varrho} \dot{W}^{vp} - p_1 \frac{a}{\varrho} \frac{\dot{Z}^I}{Z_1} \left( \frac{Z^I}{Z_1} \right)^{p_1-1} - 2p_2 \frac{b}{\varrho} \frac{\beta \cdot \dot{\beta}}{Z_3^2} \left( \frac{\beta \cdot \beta}{Z_3^2} \right)^{p_2-1} \geq 0 \quad (2.221)$$

sind damit bestimmt und führen auf eine analog strukturierte Wärmeleitgleichung wie bereits für die eindimensionale Darstellung (2.203) gezeigt. Der Versuch diesen Gleichungssatz in ein rheologisches Netzwerk zu übertragen, führt auf Abb. 2.11, wobei hier die mathematische Vorgehensweise auf Ausdrücke führt, die mit nichtlinearen Federelementen illustriert werden können.

### 2.8.3 Modell 3 – Kamlah/Haupt als elastisch-plastisches Materialgesetz

Das folgende Materialmodell beruht auf einer tiefgreifenden Analyse experimenteller Ergebnisse (Kamlah, 1994; Kamlah und Haupt, 1998). Es soll im Folgenden mit der Beschränkung auf kleine Deformationsgradienten (additive Zerlegung des Verzerrungstensor  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ) und der Voraussetzung von Isotropie im Detail beleuchtet werden.

Der Spannungstensor  $\sigma$  ist eine Funktion des Tensors der elastischen Dehnungen  $\varepsilon^e$

$$\sigma = 2\mu \left( \varepsilon^e + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr}\varepsilon^e) \mathbf{I} \right) , \quad (2.222)$$

wobei  $\nu$  in (2.222) die Poissonzahl bezeichnet. Die Fließbedingung wird als vom von-MISES-Typ angenommen, so dass die Entwicklungsgleichung für den Tensor der plastischen Dehnungen proportional mit der plastischen Bogenlänge  $s_p$  (2.155) zusammenhängt

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma - \mathbf{X})^D \cdot (\sigma - \mathbf{X})^D} - y \quad (2.223)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} \dot{s}_p \frac{\partial F}{\partial \sigma} & \text{für } F = 0 \text{ mit Belastungsbedingung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.224)$$

Die Berechnung der plastischen Bogenlänge  $s_p$  erfolgt über die geschlossene Lösung der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$ . Für die Belastungsbedingung  $L$  gilt die Vorschrift aus (2.159).

Kern des publizierten und erfolgreich angewendeten Materialmodells ist der Ansatz für die Entwicklung des *Backstress*-Tensors und die darin enthaltenen Parameter

$$\dot{\mathbf{X}} = c\dot{\varepsilon}^p - \frac{\dot{s}_p b}{1 + ap} \mathbf{X} . \quad (2.225)$$

Hierin bezeichnen  $a$ ,  $b$  und  $c$  nicht negative Materialparameter und  $p$  eine weitere innere Variable, die der Entwicklungsgleichung

$$\dot{p} = \frac{\dot{s}_p}{s_0} (\|\mathbf{X}\| - p) \quad (2.226)$$

gehört. Die damit beschriebene kinematische Verfestigung folgt dem vorgeschlagenen Ansatz von Armstrong und Frederick in modifizierter Form. Die kinematischen Verfestigungsparameter  $b$  und  $c$  charakterisieren den Anstieg und die Beschränktheit des *Backstress*-Tensors. Die innere Variable  $p$  wird eingeführt, um zyklische Ver- bzw. Entfestigungsvorgänge bei alternierender plastischer Dehnung im Materialgesetz zu berücksichtigen.

Die Entwicklung der Fließspannung  $y$  beschreibt das isotrope Verfestigungsverhalten. Hierfür schlagen Kamlah und Haupt eine weitere Evolutionsgleichung vor, die dieselbe mathematische Struktur besitzt

$$\dot{y} = \dot{s}_p \beta \left( y_0 - \frac{1}{1 + \bar{a} p \Phi} y \right) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad . \quad (2.227)$$

Die Parameter  $s_0, \beta, y_0, \bar{a}$  und  $\Phi$  in den beiden oberen Gleichungen sind weitere nicht negative Materialkonstanten. Für den Fall proportionaler Belastungsbedingungen, was dem betrachteten Fall des einachsigen Zugversuchs entspricht, verschwindet der Einfluss der isotropen Verfestigung in diesem Ansatz und die Fließspannung bleibt als ein zentraler Materialparameter im Versuchszeitraum konstant. Der Parameter  $\Phi$  beschreibt die Abweichung von proportionalen Belastungsbedingungen und liegt im Intervall von 0 (Proportionalität) und 1.

Die Einbettung der vorgeschlagenen Entwicklungsgleichungen aus mikromechanischer Motivation in die thermodynamische Konsistenz erfolgt über das Potenzial der freien Enthalpie

$$g = \hat{g}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \mathbf{X}, p, y) \quad . \quad (2.228)$$

Im Fall kleiner Deformationsgradienten, einer konstanten Fließspannung bei proportionaler Beanspruchung ( $y(t) = y_0$ ) und der konstitutiven Beschränkung, dass die elastischen Deformationsanteile eindeutig einem Beanspruchungszustand zuzuordnen sind<sup>40</sup>, wird die freie Enthalpie  $g$  additiv in zwei Anteile der Form

$$g = \hat{g}_e(\boldsymbol{\sigma}, \theta) + \hat{g}_p(\mathbf{X}, p) \quad (2.229)$$

aufgespalten. Die elastischen Parameter sind damit unabhängig vom Verfestigungsverhalten. Mit der Einführung der linearen Thermoelastizität erhält man für den Anteil der freien Enthalpie infolge elastischer Deformation  $g_e$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \varrho g_e = & \frac{1}{2} \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D + \frac{1}{2} \frac{1}{9\kappa} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 \\ & + \alpha (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) (\theta - \theta_0) + \frac{\varrho}{2} \frac{c_\sigma}{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.230)$$

Analog zu den quadratischen Termen in (2.230) wird für die Anteile der freien Enthalpie infolge plastischer Deformation  $g_p$  dieselbe mathematische Struktur gewählt

$$\varrho g_p = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} + \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma_2} p^2 \quad . \quad (2.231)$$

<sup>40</sup>Diese Aussage ist formal aus dem Vorgehen nach COLEMAN-NOLL und der Anwendung der LEGENDRE-Transformation abzuleiten (vgl. Abschnitt 2.3).

Es werden zwei weitere positive Materialparameter  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  eingeführt. Kamlah und Haupt weisen ausführlich daraufhin, dass die Parameterwahl hinsichtlich der Erfüllung der Restungleichung aus dem zweiten Hauptsatz beschränkt ist. Für  $a = 0$  ist thermodynamische Konsistenz gewährleistet, wenn  $\gamma_1$  gleich dem Parameter  $c$  ist. Dies wurde in Chaboche, 1986, gezeigt und entspricht dem ARMSTRONG-FREDERICK-Ansatz. Die Beschränkung von  $\gamma_2$  durch eine Ungleichung wurde in der Dissertation von Kamlah, 1994, abgeleitet.

Als Konsequenz ergibt sich für die innere Dissipation  $\delta_M$

$$\delta_M = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{1}{c} \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\varrho} \frac{a}{\gamma_2} p \dot{p} \right] \geq 0 \quad . \quad (2.232)$$

Der erste Summand, die plastische Spannungsleistung, in (2.232) wird nicht vollständig in Wärme überführt, da aufgrund der mikrostrukturellen Änderungen der Verfestigungsmechanismen Energie im Material gespeichert wird. Der geklammerte Ausdruck in der obigen Gleichung ist somit dem Zuwachs der gespeicherten Energie gleichzusetzen (vgl. (2.131) – (2.136)).

Die zugehörige Wärmeleitgleichung im Spannungsraum lautet

$$c_\sigma \dot{\theta} = -\theta \frac{\partial^2 \hat{g}_e}{\partial \theta \partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{k}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{g}_\theta + \delta_M \quad . \quad (2.233)$$

Mit der wiederholten Vernachlässigung einer separaten Wärmestromdichte  $r$  wird die Wärmeaufnahme durch drei Terme bestimmt. Die rechte Seite von (2.233) setzt sich aus dem thermoelastischen Effekt, der Wärmeleitung im Material und der dissipierten Energie infolge inelastischer Deformation zusammen. Entgegen den Modellen in Abschnitt 2.8.1 und 2.8.2 kommt hier die Wärmekapazität bei einem fixierten Beanspruchungszustand  $c_\sigma$  zum Tragen.

### 3 Grundlagen zur experimentellen Temperaturfeldermittlung

Die analytische Beschreibung des gekoppelten thermomechanischen Anfangsrandwertproblems und die zugehörigen Lösungsverfahren schließen ein, dass in der experimentellen Analyse die Datenerfassung des Temperaturfeldes mit ausreichender zeitlicher und räumlicher Auflösung erfolgt. Die punktuelle Aufnahme einer Temperaturentwicklung mittels Thermoelementen bietet in dem betrachteten Einsatzbedingungen nicht die erforderlicher Flexibilität. Die Genauigkeitsanforderungen hinsichtlich der Temperaturfeldentwicklung bei gleichzeitiger Ermittlung des lokalen Dehnungsfeldes in Zusammenhang mit dem tatsächlichen Probenmaterial führen zum Einsatz eines thermografischen Messverfahrens.

#### 3.1 Thermografie

Die Infrarot-Thermografie als kontaktloses Messverfahren gelangte ab den 1980er Jahren zu einer Reife, so dass sie zu nichtmilitärischen Forschungszwecken eingesetzt werden konnte. Der Grundstein wurde bereits 1800 durch William Herschel mit der Entdeckung der Wärmestrahlung und in der Folge mit der Entdeckung des thermoelektrischen (T. J. Seebeck um 1822), des pyroelektrischen (D. Brewster um 1824) und des photoelektrischen (A. E. Becquerel um 1839) Effekts gelegt. Eine Systematisierung des Strahlungseinflusses und zugehöriger elektrischer Eigenschaften wurde im späten 19. Jahrhundert von W. Thomson vorgenommen.

Die Umsetzung und Nutzung dieser Effekte als Messprinzip begann 1833 durch L. Nobili mittels eines Thermoelements. Die Verkettung von Thermoelementen durch M. Melloni (1833) führte auf ein erstes eindimensionales Thermogramm. Mit der Erfindung des Bolometers durch S. P. Langley im Jahr 1878 wurde das Absorptionsprinzip zur Ermittlung der elektromagnetischen Strahlungsleistung eingeführt und die Grundlage für spätere thermografische Kameras geschaffen.

Mit diesen Grundlagen ausgestattet wurden für die heutigen Messgeräte wichtige Erkenntnisse im Bereich der Radiometrie und Fotometrie gewonnen. Wesentlich für die Genauigkeit der Messgeräte ist die Spezifikation der räumlichen und zeitlichen Auflösung von Temperaturunterschieden, die Kenntnis möglicher Störgrößen und deren Eliminationsmöglichkeiten. Die zugehörige Datenverarbeitung und Visualisierungsmöglichkeiten auf aktuellen Computersystemen ist ebenso von ausschlaggebender Bedeutung.

Die in dieser Arbeit verwendete Infrarot(IR)-Kamera besitzt einen aktiv gekühlten Quantendetektor, der auf dem photoelektrischen Effekt beruht. Die zugehörigen Halbleitersysteme der Detektoren basieren entweder auf einer Quecksilber-Kadmium-Tellurid(HgCdTe)- bzw. einer Indiumantimonid(InSb)-Mischkristalllegierung (Schuster und Kolobrodov, 2004; Budzier und Gerlach, 2010).

### 3.1.1 Physikalische Grundlagen der Thermografie

Infrarotstrahlung liegt innerhalb eines Wellenlängenbereichs von ca.  $1 \mu\text{m}$  bis  $10^3 \mu\text{m}$  und lässt sich in seinen Eigenschaften in verschiedene Subwellenlängenbereiche unterteilen. Im Wesentlichen, wie auch in den vorliegenden Einsatzbedingungen,

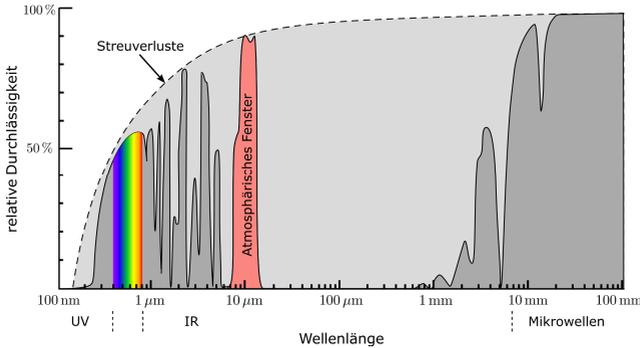


Abb. 3.1: Spektraler Transmissionsgrad von Luft

werden thermografische Messungen mit umgebender Atmosphäre durchgeführt. Die geringsten Wechselwirkungen mit den Bestandteilen der Luft treten in sogenannten atmosphärischen Fenstern auf. In Abb. 3.1 ist das relevante atmosphärische Fenster für die thermografischen Messungen mit dem genannten IR-Kameratyp markiert. Der Wellenlängenbereich von 7 bis  $14 \mu\text{m}$  wird je nach Literatur auch als langwelliges Infrarot (LIR) bezeichnet (Budzier und Gerlach, 2010). Die relative Durchlässigkeit oder der spektrale Transmissionsgrad ist abhängig vom Abstand des betrachteten Objekts und der Kamera. Im Bereich der Materialcharakterisierung ist der Abstand der IR-Kamera zur Materialprobe durch die räumlichen Gegebenheiten der Prüftechnik, der Probengröße und durch die verwendete Optik der Kamera begrenzt. Für standardisierte Probenabmessungen der Materialcharakterisierung ist der Abstand im experimentellen Aufbau in der Regel kleiner als 1 m. Für derartige Abstände können die Transmissionsverluste des LIR in guter Näherung vernachlässigt werden und die gestrichelte Kurve der Abb. 3.1 liegt nahezu bei 100 % (Budzier und Gerlach, 2010, S. 4).

Der eingestrahelte spektrale Strahlungsfluss auf einen Körper kann in drei verschiedene Anteile unterschieden werden. Der Strahlungsfluss wird von realen Körpern teilweise absorbiert, zu einem bestimmten Anteil reflektiert und ein dritter Teil kann ohne Wechselwirkung den Körper durchstrahlen.

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3.1)$$

Die Summe von Absorptionsgrad  $\alpha$ , Reflexionsgrad  $\varrho$  und Transmissionsgrad  $\tau$  ergibt somit *oins*. Diese Größen sind materialabhängig und variieren mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Temperatur  $T$ . Absorbiert ein idealisierter Körper die eintreffende elektromagnetische Strahlung vollständig, wird er schwarzer Strahler genannt. Im thermischen Gleichgewicht wird die absorbierte Strahlungsmenge gleichermaßen emittiert, dass der schwarze Strahler einen Emissionsgrad  $\varepsilon$  von *oins* besitzt.

Die spektrale spezifische Ausstrahlung  $M_\lambda^0$  für den schwarzen Strahler folgt dem PLANCKSchen Strahlungsgesetz und ist gemäß folgender Gleichung abhängig von der Temperatur<sup>41</sup>

$$M_\lambda^0(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} dA d\lambda \quad . \quad (3.2)$$

Die doppelt logarithmische Darstellung für ausgewählte Temperaturen in Abb. 3.2

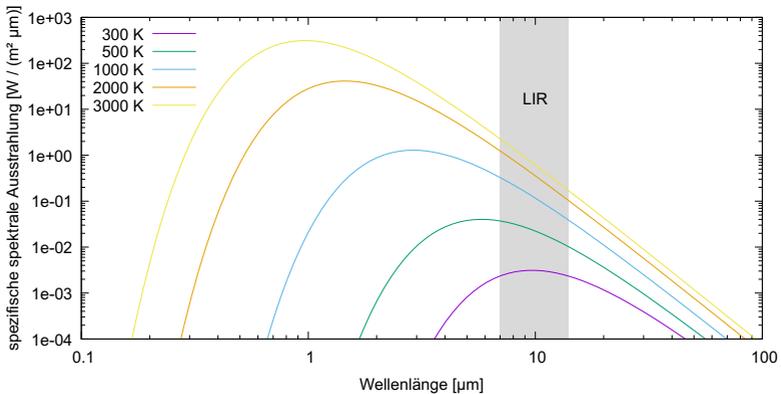


Abb. 3.2: PLANCKSches Strahlungsgesetz für den schwarzen Strahler

zeigt deutlich die Maxima der Ausstrahlung bestimmter Wellenlängen. Der grau hinterlegte Bereich kennzeichnet den Wellenlängenbereich des LIR. Die Lage des Ausstrahlungsmaximum im Wellenlängenbereich ist hinsichtlich der thermografischen Sensitivität ein wesentlicher, charakteristischer Parameter. Es liegt bei Raumtemperatur, also dem Anwendungsbereich für die experimentelle Analyse, im Bereich des LIRs.

Die spezifische Ausstrahlung  $M_{12}$  des schwarzen Strahlers in einem Wellenlängenbereich  $[\lambda_1, \lambda_2]$  ergibt sich über die Auswertung des bestimmten Integrals

<sup>41</sup>Die Strahlungskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  enthalten wiederum die PLANCK- und die BOLTZMANN-Konstante sowie die Lichtgeschwindigkeit.

$$M_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda \quad . \quad (3.3)$$

Der Emissionsgrad  $\varepsilon$  für einen realen Körper wird über das Verhältnis der spezifischen Ausstrahlung zu der des schwarzen Körpers angegeben. Er ist ebenfalls eine materialabhängige Größe und zudem abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit des betrachteten Körpers. Metallische glatte Oberflächen besitzen aufgrund des großen Reflexionsanteils einen geringen Emissionsgrad und werden daher für die strahlungsbasierte Temperaturmessung in aller Regel beschichtet.<sup>42</sup> Die Kennlinie  $M_{\lambda}$  ist für jeden realen Körper experimentell zu ermitteln, wobei die Umgebungsstrahlung in der Messung zu berücksichtigen ist. Die empfangene spezifische Ausstrahlung setzt sich somit aus zwei Teilen zusammen

$$M_{m12} = \varepsilon_{\text{Obj}} M_{\text{Obj}12}(T_{\text{Obj}}) + (1 - \varepsilon_{\text{Obj}}) M_{\text{Amb}12}(T_{\text{Amb}}) \quad , \quad (3.4)$$

einerseits der Ausstrahlung vom Objekt und einem Reflexionsanteil aus der Umgebung (Index „Amb“ – *ambient*).

Eine maximale thermische Auflösung wird erreicht, wenn eine Temperaturänderung des Messobjektes mit einer maximalen Änderung der spezifischen Ausstrahlung  $M_{\text{Obj}12}$  einhergeht. In diesem Zusammenhang sei noch einmal auf die Diagramme der Abb. 3.1 und 3.2 sowie auf den dadurch zu bevorzugenden Temperaturbereich für die Thermografie verwiesen.

Für die Quantifizierung der Messung sind die Eigenschaften der Messoptik, die Ausrichtung des Messobjektes zur Detektorebene der IR-Kamera, die geometrische Form der emittierenden Fläche sowie die Umgebungscharakteristik bzw. die Art der Umgebungsabschirmung bestimmend. Eine vollständige Beschreibung und Definition aller Parameter ist messtechnisch oft nicht zu erreichen. Die einhergehenden systematischen und zufälligen Messfehler besitzen entscheidenden Einfluss auf die Ermittlung der absoluten Temperatur des Messobjektes, werden jedoch in der Relativmessung, also in der Ermittlung der Temperaturänderung, zu großen Teilen eliminiert. Das verbleibende Messrauschen kann zu großen Teilen durch Mittelungsstrategien, sowohl zeitlich als auch räumlich, und der Kenntnis des zugehörigen Messablaufs minimiert werden.

Für die Zuordnung einer Temperaturentwicklung zu einem materiellen Punkt ist es unerlässlich eine Bewegungskompensation in den Thermogrammen zu berücksichtigen. Dies kann unter der Voraussetzung einer homogenen Deformation durch eine Bewegungsverfolgung weniger charakteristischer Punkte auf der Probe in guter Näherung realisiert werden. Beispielsweise reichen im einachsigen Zugversuch einer

<sup>42</sup>Für die Beschichtung kommt eine Berührung oder die Verwendung eines schwarzen Mattlacks in Frage, so dass ein Emissionsgrad von größer als 0.95 erreicht wird.

idealen Werkstoffprobe zwei ausreichend weit entfernte Punkte im Messbereich um eine nachträgliche, extensometrische Auswertung mit den Thermogrammen zu korrelieren.

Die Bewegungskompensation kann durch ein weiteres, zeitsynchronisiertes Deformationsmesssystem erfolgen. Alternativ sind die Thermogramme selbst zur Bewegungskompensation einsetzbar. Für die algorithmisierte Auswertung entsprechender Bilddaten verfügt man über die verallgemeinerten Methoden und Verfahren der digitalen Bildkorrelation (*Digital Image Correlation* – DIC). Grundvoraussetzung hierfür ist eine mit dem Belastungspfad der Prüfmaschine synchronisierte Abfolge kontrastreicher Thermogramme in ausreichender zeitlicher Auflösung. Derartige Thermogramme können nur dann erzeugt werden, wenn die Verteilung des Emissionsgrades auf der Probenoberfläche inhomogen und bevorzugt durch scharfe Übergänge charakterisiert ist. Der Emissionsgrad  $\varepsilon_{\text{Obj}}$  ist somit eine Funktion vom Ort

$$\varepsilon_{\text{Obj}} = \tilde{\varepsilon}_{\text{Obj}}(\mathbf{x}) \quad , \quad (3.5)$$

wobei die Emissionsgradunterschiede beispielsweise durch eine zusätzliche, partielle Beschichtung generiert werden kann.

Der variierende Emissionsgrad besitzt daher eine direkte Auswirkung auf die Auswertung von (3.4) für die Temperatur bzw. Temperaturänderung. Die Bewegungskompensation bietet nicht nur die Möglichkeit der Temperaturzuordnung zu einem materiellen Punkt, sondern wird in einem ergänzenden Auswertungsschritt für die Ermittlung des Verschiebungs- und Dehnungsfeldes auf der Probenoberfläche genutzt. Mit diesem Zugang wird sich auf den Einsatz eines IR-Kamera-Messsystems beschränkt und die im Thermogramm enthaltenen Informationen durch einen dualen Auswerteprozess zugänglich gemacht (vgl. Abb. 3.3).

Voraussetzung für dieses Vorgehen ist die Kenntnis des Temperaturfeldes der unverformten, lastfreien Probe, so dass eine akkurate Emissionskorrektur auf der Basis der vorliegenden Emissionsgradverteilung durchgeführt werden kann.

## 3.2 Bildverarbeitung

### 3.2.1 Digitale Bildkorrelation

Die digitale Bildkorrelation begann im Bereich der experimentellen Festkörpermechanik in den 1950ern mit der Musterauswertung interferometrischer, meist Laser gekoppelter Experimente und ist historisch an die Entwicklung der zugehörigen Rechentechnik für die quantitative Auswertung geknüpft. Ihre Anwendung umfasst üblicherweise sowohl den Wellenlängenbereich im sichtbaren Licht als auch den Bereich der Röntgenstrahlung und erhielt erste praktische Relevanz in der Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren. Die Weiterentwicklung der Methodik und der damit einhergehenden Genauigkeitsverbesserung erweiterte den Anwendungsbereich,

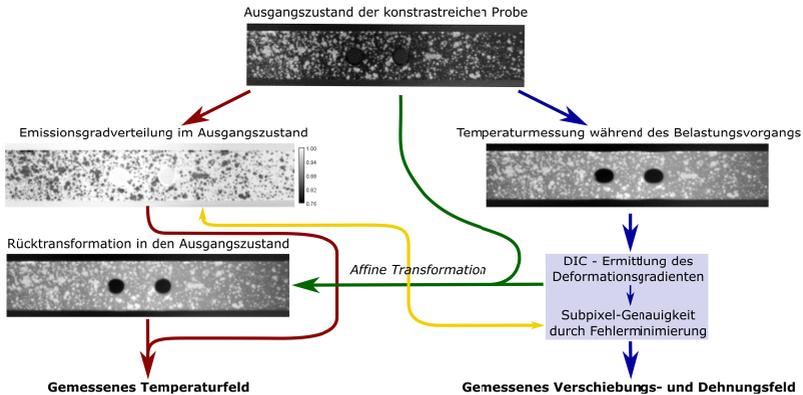


Abb. 3.3: Verschiedene Bildbearbeitungszustände von Referenz- und Momentankonfiguration im Auswertprozess

so dass die DIC ab den 1990ern bereits eine wesentliche Rolle als berührungsloses Messverfahren in der Materialcharakterisierung einnahm.

Die Subpixel-Genauigkeit erreicht Werte bis zu 0.01, so dass mit der zugehörigen Optik im sichtbaren Licht Mikrodeformation von 50 nm aufgelöst werden können. Eine konzeptionelle Erweiterung erfuhr die Methode durch die Hinzunahme einer zweiten Bildquelle. Stereoskopische Aufnahmen erlauben die Auswertung eines dreidimensionalen Verschiebungsfeldes, wobei ein aufwendiger Kalibrierungsprozess vorgenommen werden muss.

Grundlage der digitalen Bildkorrelation ist ein Referenzbild, das ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Regel dem unbeanspruchten Ausgangszustand entspricht. Um Relativbewegungen zwischen materiellen Punkten messen zu können wird die Oberfläche wie in Abb. 3.4 in geeignete Teilflächen unterteilt, wobei die

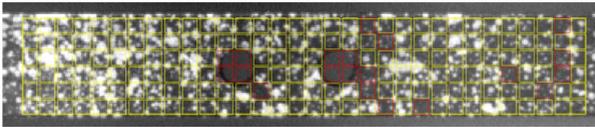


Abb. 3.4: Mögliche Teilflächenverteilung als ein reguläres Gitter auf der Oberfläche

Größe der Teilflächen mit dem applizierten Muster korrespondiert. Eine  $C_0$ -Stetigkeit in der Unterteilung ist nicht erforderlich, so dass Überlappungen oder Zwischenräume benachbarter Teilflächen zulässig sind.

Für jede dieser Teilflächen wird ein Intensitätsprofil  $S^i(x, y)$  für jeden Fra-

me  $i$  mit Hilfe von Splines approximiert, wodurch im Korrelationsverfahren eine Subpixel-Genauigkeit erzielt wird. Dieses Intensitätsprofil ist aufgrund der Temperaturentwicklung der Werkstoffprobe im Belastungsvorgang und der Verzerrung der Teilflächen veränderlich. Ein robustes Korrelationsverfahren, die normierte Kreuzkorrelation, trägt dem Rechnung.

$$C^i(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sum_{x,y} S'^i(x + \Delta x, y + \Delta y) * S'^0(x, y)}{\sqrt{\sum_{x,y} S'^i(x + \Delta x, y + \Delta y)^2 * \sum_{x,y} S'^0(x, y)^2}} \quad (3.6)$$

$$\text{mit } S'^i(x, y) = S^i(x, y) - \frac{1}{\sum_{x',y'} 1} \sum_{x',y'} S^i(x', y')$$

Die Verwendung des invertierten Intensitätsprofil  $S'^i$  ist im vorliegenden Anwendungsbereich sensitiver und somit besser für die Ermittlung des Maximums des Korrelationskoeffizienten als das ursprüngliche Intensitätsprofil  $S^i$  geeignet. Die für den zweidimensionalen Fall durch die Inkremente  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  identifizierten Ortsdifferenzen werden in einem ersten Schritt im Maximum des Korrelationskoeffizienten  $C^i$  für jede Teilfläche ermittelt. Die verbesserte Subpixel-Genauigkeit folgt in einem zweiten Schritt durch eine sequentielle Fehlerquadratminimierung. In (3.6) wird die Bildkorrelation zum Referenzframe „0“ vorgenommen und entspricht demnach einer LAGRANGESchen Betrachtungsweise. Wird der Korrelationsvorgang zwischen benachbarten Konfigurationen durchgeführt, so eignet sich insbesondere die konvektive Betrachtungsweise, die das Koordinatensystems an den materiellen Punkt koppelt. Die Koordinaten des materiellen Punktes bleiben unverändert, so dass die Deformationsbeschreibung über eine veränderliche Basis realisiert wird.

Teilflächen, die durch den Bemusterungsvorgang eine zu geringe Varianz in der Emissionsgradverteilung aufweisen, sind für den Korrelationsalgorithmus ungeeignet und werden aus der Bestimmung der Deformationsgrößen exkludiert (rote markierte Teilflächen in Abb. 3.4) und deren Bewegung stattdessen mit interpolierten Daten aus den Nachbarpartikelflächen beschrieben.

Die normierte Kreuzkorrelation gehört zur Verfahrensklasse des *Template Matching*. Für Probleme, die lediglich kleine Deformationsgradienten berücksichtigen, werden i.d.R. differentielle Verfahren bevorzugt, wobei als ein Hauptvertreter dieser Verfahrensklasse der LUCAS-KANADE-Algorithmus genannt sein soll. Die Verfahren des *Template Matching* und hier insbesondere die normierte Kreuzkorrelation sind in der Auswertung deutlich rechenaufwendiger als der LUCAS-KANADE-Algorithmus.

In der Literatur (u.a. in Sutton, Orteu und Schreier, 2009) werden verschiedene Verfahrenserweiterungen für eine effektive Bildkorrelation vorgeschlagen, deren numerische Umsetzung in *Open-Source* Softwarebibliotheken zur weiteren Verwendung zur Verfügung gestellt werden.<sup>43</sup>

<sup>43</sup>Die technische Realisierung der Thermogramauswertung basiert auf einer Python-Programmierung mit

### 3.2.2 Koordinatensysteme

Aus praktischen Erwägungen ist die Handhabung regulärer Gitter im Hinblick auf die Auswertung am einfachsten zu algorithmieren und stellt zudem keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da ggf. lediglich weitere Transformationsoperationen zwischen zusätzlichen Koordinatensystemen berücksichtigt werden müssen. Innerhalb der folgenden Ausführung ist es somit hinreichend von drei Koordinatensystemen (System  $(x, y)$ ,  $(a, b)$  und  $(m, n)$ ), wie in Abb. 3.5 dargestellt, auszugehen.<sup>44</sup> Die Gitterpunkte liegen in den Flächenschwerpunkten der definierten Teilflächen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden die Teilflächen als Quadrate mit der Seitenabmessung von  $j$  Pixeln vereinbart.

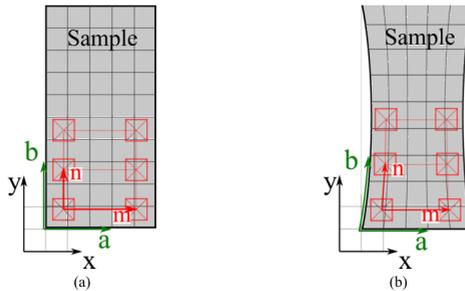


Abb. 3.5: Koordinatensysteme zur Deformationsbeschreibung (a) im Ausgangszustand - Referenzkonfiguration und (b) im deformeden Zustand - Momentankonfiguration

Das System  $(m, n)$  ist ein Pseudokoordinatensystem, da es keine Metrik besitzt, sondern lediglich für die eindeutige Zuordnung der Teilflächen und ihrer Nachbarn genutzt wird. Die Flächenschwerpunkte  $P_{mn}$  können somit über zwei Ordnungszahlen indiziert werden, wobei  $m$  die zugehörige Spalte und  $n$  die zugehörige Zeile identifiziert. Das Materialkoordinatensystem  $(a, b)$  wird über die Abbildung der Referenzkonfiguration des unbelasteten Ausgangszustands (Frame 0) definiert. Das raumfeste kartesische Koordinatensystem  $(x, y)$  wird durch die Bildebene aufgespannt. Da die Definition der Koordinatensysteme über die Bilddaten erfolgt, ist Achsparallelität zwischen den beiden Koordinatensystemen im Ausgangszustand herzustellen, wenn das reguläre Netz der Teilflächen an der  $x$ - und  $y$ -Achse ausgerichtet wird. Im Ausgangszustand unterscheiden sich die Koordinaten der materiellen Punkte lediglich durch die Translation des Koordinatenursprungs.

den zugehörigen Bibliothek Scipy 1.0 (Virtanen u. a., 2020).

<sup>44</sup>Mit Hilfe nicht-regulärer Gitter kann beispielsweise in einem Zwischenschritt auf ein spezifische Muster-Verteilungen eingegangen werden.

Zu jedem Flächenschwerpunkt  $P_{(m,n)}$  einer Teilfläche gehört somit ein Ortsvektor  $\mathbf{p}_{(m,n)}$  und ein Vektorpaar, das den Abstand zu den benachbarten Flächenschwerpunkten beschreibt. Im Ausgangszustand bei Achsparallelität wird der Abstand zum nächsten Nachbarn in  $x$  (bzw.  $y$ )-Richtung mit den Gitterabständen  $\Delta x$  (bzw.  $\Delta y$ ) bezeichnet. In vektorieller Notation folgt die Definition den Ausdrücken

$$\mathbf{p}_{(m,n)}^0 = \begin{pmatrix} x_{(m,n)}^0 \\ y_{(m,n)}^0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{d}_{\mathbf{c}_{(m,n)}}^0 = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{d}_{\mathbf{r}_{(m,n)}}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

wobei dieses reguläre Vektordreieck die vektorielle Ebene vollständig beschreibt. Unter der Annahme, dass alle materiellen Punkte im deformierten Zustand in der Ebene verbleiben und Kontinuität gewährleistet ist, existiert ebenso ein reguläres Vektordreieck  $(\mathbf{p}_{(m,n)}; \mathbf{d}_{\mathbf{c}_{(m,n)}}; \mathbf{d}_{\mathbf{r}_{(m,n)}})$ , das die veränderte Lage des Flächenschwerpunkts und die veränderten Abstände zu den Nachbarn eindeutig erfasst. Die Koordinaten dieser Vektoren werden über das Korrelationsverfahren ermittelt. Das Vektortripel der Momentankonfiguration enthält die Informationen hinsichtlich Translation, Rotation, Streckung und Scherung, so dass die Zusammenführung beider Vektortripel eine lineare Abbildung des einen Zustands in den anderen ermöglicht. Man spricht im mathematischen Sinn von einem Homomorphismus von Vektorräumen oder von einer affinen Abbildung.

Die affine Abbildung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{r}$  mit dem Startpunkt  $P_{(m,n)}$  wird mit folgender Gleichung erfasst

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{b} \quad . \quad (3.8)$$

Die erweiterte Darstellung unter der Verwendung homogener Koordinaten wird dann folgendermaßen geschrieben

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{r}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.9)$$

Die erweiterte affine Transformationsmatrix  $\mathbf{M}^i$  für den Frame  $i$  wird über das Matrixprodukt

$$\mathbf{M}_{(m,n)}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{c}_{(m,n)}}^i & \mathbf{d}_{\mathbf{r}_{(m,n)}}^i & \mathbf{p}_{(m,n)}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{c}_{(m,n)}}^0 & \mathbf{d}_{\mathbf{r}_{(m,n)}}^0 & \mathbf{p}_{(m,n)}^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.10)$$

berechnet. Der zweite Faktor in (3.10) enthält die unveränderlichen Größen des Referenzzustandes, so dass die Invertierung einmalig auszuführen ist. Mit dem Streichen der unteren Zeile und der rechten Spalte in  $\mathbf{M}$  als Rückführung von den homogenen Koordinaten auf die Koordinaten des  $(x, y)$ -Systems verbleibt der diskrete Deformationsgradient in der Bildebene. Über die Vorschriften (2.8) und (2.7-1) liegt der GREEN-LAGRANGESCHE Verzerrungstensor diskret in jedem

Punkt  $P_{(m,n)}$  vor. Die Verzerrungsverteilung kann innerhalb des Gitters nachfolgend beispielsweise über zweidimensionale Spline-Funktionen interpoliert werden.

Über die affine Transformation wird das Intensitätsprofil  $S^0(x, y)$  der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration abgebildet. Die Interpolation im Subpixel-Bereich stellt die Grundlage für die Verbesserung des Korrelationsergebnisses dar. Die Rückkopplung des Intensitätsprofil in die Momentankonfiguration ist durch den gelben Pfad in Abb. 3.3 symbolisiert.

### 3.2.3 Emissionsgradkorrektur

In der Regel findet bei jeder thermografischen Messung eine Emissionsgradkorrektur statt, da bei technisch relevanten Messungen die Emissionsgradverteilung zunächst unbekannt ist. Hierfür ist in einem ersten Schritt eine Eigenkalibrierung der Kamera notwendig, die mit Hilfe standardisierter Umgebungsbedingungen und standardisierter Messobjekte (schwarze Strahler) vorgenommen wird (vgl. Wellenlängenabhängigkeit im PLANCKSchen Strahlungsgesetz in Abb. 3.2), wofür sowohl die spektralen Sensitivitätseigenschaften des Detektors als auch die Eigenschaften der Kameraoptik verantwortlich sind.

Eine inhomogene Emissionsgradverteilung, wie sie für die digitale Bildkorrelation vorausgesetzt wird, bedarf eines zweiten Kalibrierungsschrittes. Dieser Kalibrierungsschritt ist abhängig von der tatsächlichen Emissionsgradverteilung der betrachteten Oberfläche. Die applizierte Bemusterung der geschwärzten Oberfläche durch eine teilweise Beschichtung ist zufällig und somit einzigartig für jedes einzelne Objekt. Der Kalibrierungsschritt ist daher objektzugehörig und Bestandteil jeder Messung. Zur Algorithmierung dieses Vorgangs sind Annahmen erforderlich, da die vollständigen Strahlungseigenschaften der Umgebung nicht bekannt sind.

Ausgangspunkt bildet die additive Zusammensetzung der punktweise gemessenen IR-Intensität  $S_{\text{measured}}(x, y)$ :

$$S_{\text{measured}}(x, y) = \varepsilon(x, y) S_{\text{sample}, \varepsilon=1}(x, y) + (1 - \varepsilon(x, y)) S_{\text{amb}} + S_{\text{offset}} \quad (3.11)$$

in Analogie zur empfangenen spezifischen Ausstrahlung (3.4). Das Intensitätsoffset  $S_{\text{offset}}$  ist kameraspezifisch und durch den ersten Kalibrierungsschritt bekannt. Ist der Emissionsgrad lokal kleiner als 1, wird ein IR-Anteil aus der Umgebungsstrahlung  $S_{\text{amb}}$  über die Oberfläche des Messobjektes über den Proportionalitätsfaktor  $(1 - \varepsilon)$  in die Kamera reflektiert. Der erste Summand in (3.11) spiegelt somit alleinig den Anteil aus der IR-Strahlung des Messobjektes wider.

In (3.11) sind die Emissionsgradverteilung  $\varepsilon(x, y)$ , die IR-Intensität des Messobjektes  $S_{\text{sample}, \varepsilon=1}$  und die Umgebungsstrahlung unbekannte Größen. Die Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in der Probe kann experimentell sehr gut realisiert werden. Die Probenlagerung unterliegt in der Nähe der Prüfeinrichtung im Labor keinen Temperaturschwankungen. Zusätzlich ist die Annahme eines konstanten Temperatursignals aus der Umgebung während eines zeitlich beschränkten

Messvorgangs sehr nah an den realen Verhältnissen. Des Weiteren kann die Breite der Emissionsgradverteilung durch die Eigenschaften der Oberflächenbeschichtung eingegrenzt werden. Die matte Schwarzlackbeschichtung besitzt eine Emissivität  $\varepsilon_{\max}$  von 1.00, wohingegen eine homogene Beschichtung mit dem partikelhaltigen Spray zur Mustererzeugung eine Emissivität  $\varepsilon_{\min}$  von 0.85 aufweist. Mit der Kenntnis des Intervalls  $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$  lassen sich die Umgebungintensität  $S_{\text{amb}}$  und die Emissionsgradverteilung  $\varepsilon(x, y)$  mit Hilfe von (3.11) berechnen.

Mit diesen Annäherungen kann das Temperaturfeld der Probe auf der Basis von

$$S_{\text{sample}, \varepsilon=1}^i(x, y) = \frac{[S_{\text{measured}}^i(x, y) - S_{\text{offset}}] - [1 - \varepsilon(x, y)] S_{\text{amb}}}{\varepsilon(x, y)} \quad (3.12)$$

ermittelt werden. Werden die Annahmen für die Emissionskorrektur nicht vollständig erfüllt, so sind in nachbehandelten Thermogrammen lokal begrenzte Korrekturfaktoren sichtbar, wo im Experiment kontinuierliche Temperaturverläufe erwartet werden. Diese Messfehler in der absoluten Temperatur verschwinden jedoch nahezu vollständig, wenn man sich auf die Temperaturdifferenzen als wesentliche Größe in der Auswertung konzentriert. Auf diesen Effekt wird in der Auswertung konkreter Messungen im Abschnitt 5 detailliert eingegangen.

### 3.3 Praktische Umsetzung und Maßnahmen

Eine homogene, matte Schwarzlackbeschichtung ist ein probates Mittel die reflektierenden Eigenschaften des Probenmaterials nahezu vollständig zu eliminieren und ist daher ein verbreitet eingesetztes Mittel in der Thermografie. Eine simultane Messung des Deformationszustandes auf der gesamten Probenoberfläche ist damit jedoch nicht zu realisieren. Die gleichzeitige Messung des Deformationszustandes auf der Probenrückseite mittels berührungsloser optischer Verfahren führt zu einem aufwendigen, komplexen Versuchsaufbau, wobei sich die Einsatzbedingungen beider Messsysteme aufgrund verschiedener technischer Anforderungen gegenseitig limitieren.

Insbesondere bei großen Deformationsgradienten und/oder dominierenden Lokalisierungseffekten ist die gleichzeitige Erfassung der Temperaturentwicklung und des Deformationszustands auf einem möglichst großen Messfeld mit entsprechender Auflösung für die Charakterisierung des Werkstoffverhaltens essentiell. Die beschriebene Methodik einer Bemusterung zur Kontrasterhöhung im Messfeld mit zugehöriger Emissionskorrektur und das anschließenden Bildkorrelationsverfahren stellen einen möglichen Ansatz dar.

Für den abzuleitenden Versuchsaufbau mit einer geregelten mechanischen Prüfeinrichtung und einem berührungslos agierenden IR-Kamerasystem müssen die Parameter einer geeigneten Probenvorbereitung auf die Probenform abgestimmt werden. Außerdem ist die erforderliche Signalsynchronisation von Prüfeinrichtung und Messsystem sicherzustellen.

Die Probenform und -abmessungen werden im Wesentlichen durch den Kraftbereich der Prüfeinrichtung festgelegt. Das Kamerasystem ist hinsichtlich seiner räumlichen Auflösungsmöglichkeiten zu berücksichtigen, so dass die Anzahl der Messpunkte bzw. der Pixelzuordnungen auf dem Messobjekt maximiert wird.

Das Schwärzen reflektierender Oberflächen durch eine matte Schwarzlackbeschichtung mit den erwähnten Eigenschaften wurde als eine effektive, leicht zu realisierende Beschichtungsvariante als Grundlage für die Temperaturmessung festgelegt. Die Kontrastgenerierung durch ein zufälliges Muster wie in Abb. 3.3 ist bereits ein wesentliches Ergebnis zu den Untersuchungen eines geeigneten Beschichtungssystems.

### 3.3.1 Probenvorbereitung

In der Entwicklung des Messverfahrens wurden umfangreiche Voruntersuchungen zu den Emissionseigenschaften der Messobjekte sowie unterschiedlicher Beschichtungen experimentell ermittelt (Abb. 3.6). Dies geschah auf der Grundlage bisheriger

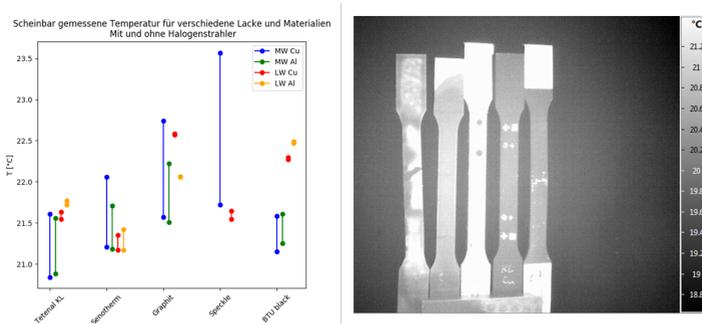


Abb. 3.6: Voruntersuchungen zur Bestimmung der Emissionseigenschaften bei unterschiedlichen Beschichtungsmustern

Erfahrungen, verschiedener technischer Herangehensweisen sowie einer Auswahl kommerziell zur Verfügung stehender Beschichtungen. Die reflektierende Oberfläche der metallischen Messobjekte als Kontrastverstärkung selbst einzusetzen ist ungeeignet. Die partielle Beschichtung mit Schwarzlack führt zu erhöhten Messfehlern. Eine vertiefende Untersuchung, welche Parameter ursächlich für eine Temperaturmessung mit erhöhtem Messfehler waren, wurde nicht durchgeführt. In erster Linie ist jedoch der Beschichtungsanteil an der Gesamtoberfläche zu nennen. Ist der Schwarzanteil zu gering, verfälscht der Reflexionsanteil aus den unbeschichteten Bereichen das Temperatursignal der geschwärzten Probenfläche. Die kommerziell verfügbaren Beschichtungen wurden nach Metallpartikelanteilen ausgewählt, die den Emissionsgrad aufgrund der zunehmenden Reflexion lokal vermindern.

Die beste Kontrastierung wurde mit einer Emulsion mit erhöhtem Anteil von Eisenpartikeln erzielt. Die gewählte Beschichtung ist langzeit- und haftungsbeständig, so dass die Bildkorrelation auch bei großen Deformationsgradienten nicht durch die Beschichtung limitiert wurde.

#### 3.3.2 Auswertung der IR-Daten

Die Auswertung der Bilddaten erfolgt in einem nachlaufenden Prozess. Die Auswertung des Temperatur- und Dehnungsfeldes bedarf eines Rechenaufwandes, der derzeit nicht im *on-the-fly*-Modus implementiert ist. Die erste Aufnahme im Messzeitraum

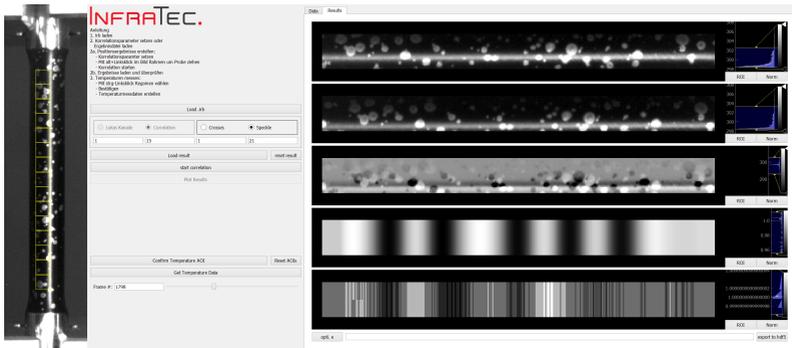


Abb. 3.7: Zylindrische Proben mit Muster im IR-Bild und erster Schritt in der Quantifizierung der Bilddaten

dient im Sinne einer LAGRANGESchen Betrachtungsweise als Referenzkonfiguration. Den dort identifizierten materiellen Punkten der Oberfläche wird durch den gesamten Auswertungsvorgang eine Koordinate, eine Verschiebung, ein Verzerrungszustand und eine Temperatur für jedes Thermogramm im gesamten Zeitbereich der Messung zugeordnet.

Die wesentliche Schritte bestehen in (s.a. Abb. 3.3):

1. der digitalen Bildkorrelation (*Digital Image Correlation – DIC*) für definierte Teilflächen,
2. der Berechnung der Komponenten des Dehnungstensors für den zweidimensionalen Raum (Oberfläche von Flachproben),
3. der Emissionsgradkorrektur (oder der rechnerischen Musterentfernung),
4. der Abbildung der korrigierten Temperaturfeldentwicklung auf die Referenzkonfiguration,

5. der Quantifizierung in zeitlicher und räumlicher Auflösung über definierte *Averaging*-Strategien auf der Ebene von geometrischen Objekten (Linien, Teilflächen oder Kombinationen dieser Objekte).

Speziell für den Korrelationsalgorithmus wurde eine interaktive Messsoftware entwickelt (Abb. 3.7), mit der die Bilddaten zunächst qualitativ und quantitativ eingeschätzt und in ein geeignetes Datenformat für die effektive numerische Auswertung überführt werden.

Die erzielten Temperatur- und Dehnungsverläufe bilden die Grundlage für die Parameterbestimmung in der thermomechanischen Modellfindung. Für den Modellabgleich des gewählten thermomechanischen Materialgesetzes wird der weg- oder kraftgesteuerte Belastungspfad simuliert und werden die Modellparameter identifiziert. Die Charakteristiken von gemessenen und berechneten Zustandsgrößen werden mit einer zugehörigen Methode abgeglichen. Die angewendete Methodik mündet in ein stark nichtlineares Minimierungsproblem. Die Formulierung des Materialgesetzes empfiehlt entsprechend den unterschiedlichen Sensitivitäten der integrierten Deformationsphänomene oftmals eine hierarchische Vorgehensweise. Im Unterschied zur entkoppelten (oder schwach gekoppelten) Formulierungsvariante sind im Identifikationsalgorithmus die Spannungsentwicklung<sup>45</sup> und die Temperaturentwicklung zu berücksichtigen. Das Messverfahren und die zugehörige Auswertung stellen für die numerische Simulation den Belastungspfad bereit, in dem das Verschiebungsfeld bzw. Dehnungsfeld auf der Oberfläche ermittelt wird. Die emissionsgradkorrigierte Temperaturverteilung liefert die zweite Messgröße für die Parameterbestimmung.

Der Rechenaufwand in der Signalverarbeitung ist in erster Linie abhängig von der Bildrate im betrachteten Zeitbereich und der zugehörigen räumlichen Auflösung. Die Signalverarbeitung umfasst zudem eine geeignete Elimination des Messrauschens, die Datenreduktion hinsichtlich des geeigneten Zeitinkrements für die numerische Simulation und die Übertragung in geeignete Formate für die Simulationsumgebung zur Parameteroptimierung.

### 3.3.3 Charakterisierung von Lokalisierungseffekten

Das Verfahren der DIC eignet sich besonders für die Bestimmung des Dehnungszustands auf ebenen und eben bleibenden Oberflächen, da hier eine eindeutige Abbildung für die zweidimensionale Betrachtung erfolgt. Als Beispiel für die Genauigkeit des Verfahrens wurde der einachsige Spannungszustand in Flachproben durch Bohrungen auf der Symmetrieachse gestört (Abb. 3.8). Entsprechend entwickelt sich eine inhomogene Temperaturverteilung aufgrund des thermoelastischen Effekts unterhalb der Fließgrenze. Bei Überschreitung der Fließgrenze wird die Inhomogenität des Temperaturfeldes weiter verstärkt, da die plastischen Deformationen

<sup>45</sup>Im Falle der Kraftsteuerung wäre im Sinne der komplementären Eigenschaft die Dehnung die abhängige Zustandsgröße.

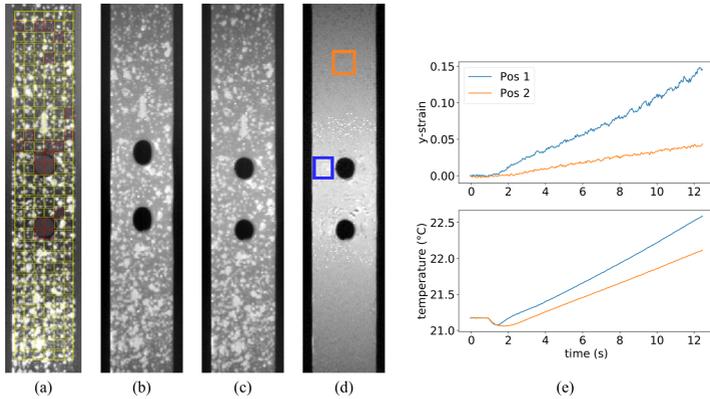


Abb. 3.8: Zugversuch an Kupfer-Flachproben mit lokaler Störung: (a) reguläres Gitter für die DIC im unbelasteten Zustand, (b) originales und (c) transformiertes Thermogramm im belasteten Zustand, (d) Temperaturfeld nach Emissionskorrektur sowie (e) der zeitlicher Verlauf von Dehnung und Temperatur an ausgewählten Positionen.

lokal begrenzt an den Spannungskonzentrationen am Lochrand initiiert werden und somit die Energieumwandlung in Wärme ebenso lokal begrenzt ist. Die inneren Lastumlagerungen infolge fortschreitender Plastifizierung verlagern die plastischen Zonen in Abhängigkeit vom Verfestigungsverhalten. Die Bohrungen sind so angeordnet, dass die größten Dehnungsgradienten in der Umgebung der Bohrungen verbleiben, so dass in Abb. 3.8 (b), den Rohdaten des Thermogramms, bereits eine lokalisierte Querschnittsverringering zu erkennen ist (Göttfert u. a., 2022). Die auf der Basis eines regulären Gitters von quadratischen Teilflächen (Abb. 3.8 (a)) ermittelten Dehnungen übersteigen deutlich das Kriterium kleiner Deformationsgradienten. Die Ansatzfunktionen für die affine Abbildung zwischen Referenz- und Momentankonfiguration erlauben auch für große Deformationsgradienten eine genaue Ermittlung des Dehnungszustands (vgl. Rücktransformation des Thermogramms in den Ausgangszustand in Abb. 3.8 (c)). Mit der rechnerischen Emissionskorrektur wird das aufgebrauchte Muster nahezu vollständig entfernt, so dass ein kontinuierlicher Temperaturverlauf auf der Oberfläche sichtbar wird, wobei die räumliche Auflösung des Dehnungsfeldes abhängig von der Auflösung der Kamera und den Mustereigenschaften ist. Die Diagramme in Abb. 3.8 (e) zeigen die zeitliche Entwicklung der Dehnung in Belastungsrichtung (*oben*) und die Temperatur (*unten*) in der Umgebung der oberen Bohrung (*blau*) sowie im ungestörten Grundmaterial (*orange*).

Eine feinere Musterverteilung gegenüber der Lochprobe ist auf der Aluminium-Flachprobe in Abb. 3.9 (a) zu erkennen. Entscheidender für die Genauigkeit des

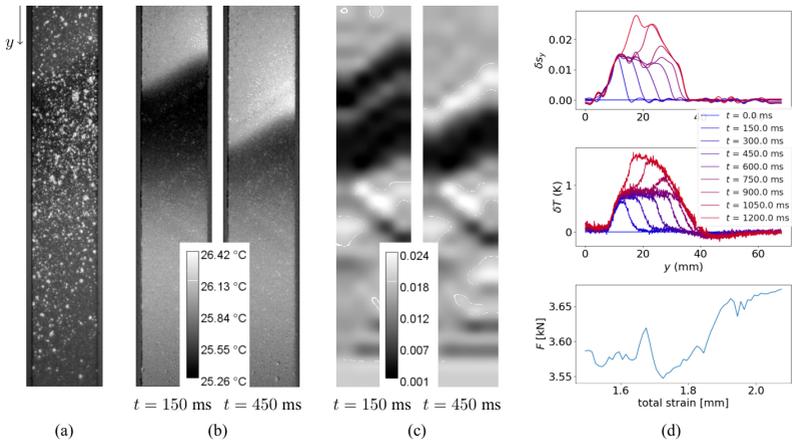


Abb. 3.9: Zugversuch an Aluminium-Flachproben: (a) Ausgangsthermogramm im unbelasteten Zustand, (b) Temperatur- und (c) Dehnungsverteilung an zwei Zeitpunkten sowie (d) die Profile der Dehnung in Zugrichtung (*oben*) und der Temperaturänderung (*mitte*) entlang der Probe als auch der Kraftverlauf für einen begrenzten Lastabschnitt (*unten*)

Messergebnisses ist jedoch die Kameraauflösung, da hier gegenüber der Lochprobe mit einem anderen Kameramodell gemessen wurde.<sup>46</sup> Die mikrostrukturellen Eigenschaften des Aluminiums zeigen eine korrelierende Lokalisierung in der Deformations- und Temperaturentwicklung infolge räumlich eng begrenzter Scherbänder mit dominierender plastischer Deformation, die die Probe entlang der Lastrichtung durchlaufen. Die Bewegungsrichtung kann am Temperaturgradientenverlauf abgelesen werden. Vor der Front des Scherbandes befindet sich ein Bereich momentaner rein elastischer Deformationen, der durch den KELVIN-Effekt eine deutlich geringere Temperatur aufweist (dunklere Bereiche in Abb. 3.9 (b) zu zwei verschiedenen Zeitpunkten).

Ähnlich ist die zeitlich korrespondierende Dehnungskomponente in Lastrichtung (Abb. 3.9 (c)) zu bewerten. In den helleren Bereichen ist die Gesamtdehnung größer als in den dunkleren Zonen. Generell ist die Dehnungsverteilung in der Materialprobe inhomogen, was in der für die quantitative Auswertung geeigneten Profildarstellung ebenso deutlich wird (Abb. 3.9 (d) - *oben*, *mittig*). Sowohl die Entstehung von Scherbändern als auch der beobachtete temporäre Spannungs- bzw. Kraftabfall (vgl. Abb. 3.9 (d) *unten*) sind typisch für Aluminiumlegierungen.<sup>47</sup> Der

<sup>46</sup>Full HD-Wärmebildkamerateerie ImageIR® 10300 – gekühlter Photonendetektor im Format von (1920 × 1536) IR-Pixeln und einer thermischen Auflösung bis zu 0.03 K

<sup>47</sup>Vgl. weitergehende Erläuterungen zu „LÜDERS-Band“ und „PORTEVIN-LE-CHATELIER-Effekt“ in der

tatsächliche Verformungsvorgang ist abhängig von der spezifisch vorherrschenden Mikrostruktur in der Legierung, die hier nicht vertiefend untersucht wurde. Es sei erwähnt, dass bei diesen Phänomenen unter anderem die Kristallart (Mischkristalle, Einlagerungsmischkristalle *etc.*), die Korngröße, die Versetzungsdichte oder Abscheidungsstoffe eine entscheidende Rolle spielen und deren Wechselwirkungen zu diskutieren sind (Haasen, 1994). Die Ausprägung der materiellen Instabilität im Lastabfall ist außerdem abhängig von der Temperatur und der Dehngeschwindigkeit.

Die Initiierung eines Scherbandes hängt mit der Triaxialität des Spannungszustandes und somit auch mit den Oberflächeneigenschaften der Werkstoffprobe zusammen, was durch die höchsten Temperaturen in Bereichen größerer Rauigkeit infolge mechanischer Bearbeitung bestätigt wird. Für die Abbildung eines derartigen Materialverhaltens ist es zwingend erforderlich die Mikrostruktur in den Materialmodellen zu erfassen. Das bedeutet, dass im Sinne der Kontinuumsthermomechanik innere Variable und zugehörige Entwicklungsgleichungen einzuführen sind. Eine Lokalisierung der Deformation erfordert eine inhomogene Verteilung dieser inneren Variablen im Ausgangszustand. Es bedarf einer physikalischen Motivation derartiger Verteilungsunterschiede.

Für die Parameteridentifikation der beschriebenen Materialmodelle in Abschnitt 2.8 wird ein homogener Ausgangszustand vorausgesetzt. Eine Lokalisierung im Verschiebungsfeld wird mit der technisch gegebenen, räumlichen Auflösung nicht beobachtet. Die untersuchten Materialien geben daher keinen Anlass die berücksichtigten Deformationsmechanismen hinsichtlich einer lokalisierenden Wirkung der Mikrostruktur zu erweitern. Sie gehören aufgrund des Herstellungsprozesses zu den feinkörnigen Metallwerkstoffen. Lokale Lastumlagerungen erfolgen in schneller Wechselwirkung mit der angrenzenden Mikrostruktur und liegen unterhalb des Auflösungsgebietes der Messtechnik. Änderungen des Temperaturfeldes auf der geometrischen Skala der Korngröße unterliegen einem schnellen Temperatúrausgleich mit den benachbarten Kristallen. Unter idealen Versuchsbedingungen mit idealen Materialproben wird bei einachsigen Versuchen eine symmetrische, glatte Änderung der Zustandsgrößen zugrunde gelegt. Abweichungen von einer solchen Antwort beruhen daher auf den tatsächlichen Versuchsbedingungen. Hierzu zählen unsymmetrische Randbedingungen oder geometrische Toleranzen bei der Probenfertigung.

---

## 4 Stand der Forschung

### 4.1 Versuchsführung

#### 4.1.1 Erste Versuche und Fragestellungen in der thermomechanische Kopplung

Die ersten Untersuchungen zu einer thermomechanischen Kopplung in einem thermodynamischen Prozess gehen zurück in die Mitte des 19. Jahrhunderts und äußerten sich in den Diskussionen von Universalgelehrten wie Clausius, Helmholtz oder Maxwell. Die Erkenntnis einer Abkühlung bei Expansion bzw. Erwärmung bei Kompression in Bezug auf Fluide (1852; 1853) und auf Festkörper (1855) wird Thomson zugerechnet und ist als thermoelastische Kopplung Bestandteil der Kontinuumsmechanik. Der thermoelastische Effekt wird in vielen Veröffentlichungen auch als KELVIN-Effekt bezeichnet.

In Umformprozessen von Metallen unterhalb der Rekristallisationstemperatur (Kaltumformen – *cold work*) wurde bereits Ende des 19. Jahrhunderts die Erwärmung von diesen Werkstoffen während des Prozesses untersucht und die experimentelle Methodik unter anderem durch Farren und G. I. Taylor, 1925, verfeinert. Die entstehende Differenz zwischen plastischer Arbeit und der entstehenden Wärme bei Torsionsversuchen an Kupfer- und Stahlproben haben G. I. Taylor und Quinney, 1934, quantifiziert und später als gespeicherte Energie in der Kaltumformung (*the stored energy of cold work*) bezeichnet. In jener Arbeit wurde ein konstantes Verhältnis von gespeicherter Energie zu plastischer Arbeit über einen großen Dehnungsbereich postuliert. Die abgeleitete Größe ist der materialabhängige TAYLOR-QUINNEY-Quotient. In einer folgenden Arbeit haben Quinney und G. I. Taylor, 1937, über kalorische Messungen versucht die gespeicherte Energie direkt zu quantifizieren.

Die energetischen Fragestellungen wurden nachfolgend in einer Vielzahl von Arbeiten aufgenommen und erweitert. Es wurden thermisch relevante Materialparameter wie die spezifische Wärmekapazität in die Untersuchungen aufgenommen (Bever, Holt und Titchener, 1973). Die Verallgemeinerungen in der Kontinuumsmechanik und das Konzept der inneren Variablen haben weiter zum grundlegenden Verständnis beigetragen.

Etwas zur gleichen Zeit wie Quinney und G. I. Taylor befasste sich Zener (1937; 1938; 1940) mit Dissipationsvorgängen aufgrund inhomogener Temperaturverteilung mittels einer Schwingungsanregung bei kleinen Amplitude, deren Ursache in der Mikrostruktur von polykristallinen Metallen zu suchen ist. Die Temperaturanalyse fußt auf der Anwendung der Hauptsätze der Thermodynamik, so dass die auftretende Dissipation mit dem Begriff der *inneren Reibung* und somit die Anregung mit einer gedämpften Schwingungsantwort assoziiert wird. Die innere Reibung oder thermoelastische Dämpfung kann ebenso durch eine vorhandene Verteilung von Einschlüssen oder Poren im Grundmaterial hervorgerufen werden.

Einen gänzlich phänomenologischen Ansatz verfolgten in den 1960er Jahren lettische Wissenschaftler im Bereich des Ermüdungsverhaltens von glasfaserverstärkten Polymeren (GFRP – *glass-fibre reinforced plastics*). Die Publikationen Oldyrev, 1967, und Oldyrev und Tamuzh, 1969, korrelieren die mit Thermoelementen gemessene Temperaturentwicklung von hochzyklischen Versuchen an GFRP-Proben mit dem zugehörigen Schädigungszustand, wobei in der Evaluation kein Vorschlag für ein konsistentes Materialmodell vorgelegt wurde.

Allgemein kann festgestellt werden, dass die erzielte Genauigkeit in der Temperaturmessung in den frühen Arbeiten mit der aktuell erzielbaren Messgenauigkeit nicht zu vergleichen ist. Dies mindert jedoch die Klarheit der Ergebnisdarstellung in keiner Weise.

Die sehr breit gefächerte Monographie „*The stored energy of cold work*“ von Bever, Holt und Titchener zur experimentellen Thermomechanik ist 1973 erschienen. Sie klassifizierten und bewerteten die quantitative Bestimmung der gespeicherten Energie in elastisch-plastischen Deformationsvorgängen in Metallen und fassten die Ergebnisse der bis dahin vorliegenden Arbeiten umfänglich zusammen. Die Literaturstudie erstreckt sich über einen Zeitraum von der ersten dokumentierten Messung an Kupfer aus dem Jahr 1900 bis hin zu Arbeiten aus dem Jahr 1971. Exemplarisch sind hierfür die Zusammenführung separat veröffentlichter Ergebnisse für verschiedene physikalische Größen (Abbn. 4.1 und 4.2) sowie Ergebnisse für spezifische Versuchsdurchführungen (Abb. 4.3) an Kupfer anzusehen.

Die analytischen Beschreibungen in Bever, Holt und Titchener, 1973, fassen die wesentlichen Beiträge der Kontinuumsthermomechanik und die Überlegungen zur energetischen Auswertung unter Berücksichtigung mikromechanischer Effekte zusammen. Natürlicherweise bilden die thermodynamischen Grundgleichungen den Ausgangspunkt für die Konzeptionalisierung eines zugehörigen Versuchsaufbaus. Den Kern bildet der Begriff der gespeicherten Energie (oder: *the stored energy of cold work*) und deren Messbarkeit. Als thermodynamische Potentiale dienen die freie HELMHOLTZ-Energie oder die freie GIBBS-Energie. Bever, Holt und Titchener erkannten als sinnvoll, die Entwicklung der Energieumsetzung in Abhängigkeit einer beschreibenden Größe für den Deformationsvorgang darzustellen. Sie ist nützlich um die Verbindung benachbarter mikrostruktureller Zustände herzustellen, was auf Grund der Vielfalt von Kristallstörungen und deren Wechselwirkungen analytisch nicht zu erfassen ist.

Die große Streuung der dokumentierten Ergebnisse in Abb. 4.1 ist auf die nicht standardisierten Versuchskonzepte zurückzuführen. So begann die Lastaufbringung in den 1930er Jahren mit Torsionsversuchen, setzte sich in der damaligen sowjetischen Schule mit Druckversuchen fort, ehe ab den 1950er Jahren vermehrt Zugversuche Anwendung fanden. Für die Messung der gespeicherten Energie<sup>48</sup> wurden Ein-

---

<sup>48</sup>Die gespeicherte Energie wird in den Abbildungen mit  $E_s$  bezeichnet und über der aufgebrauchten Arbeit  $E_w$  aufgetragen.

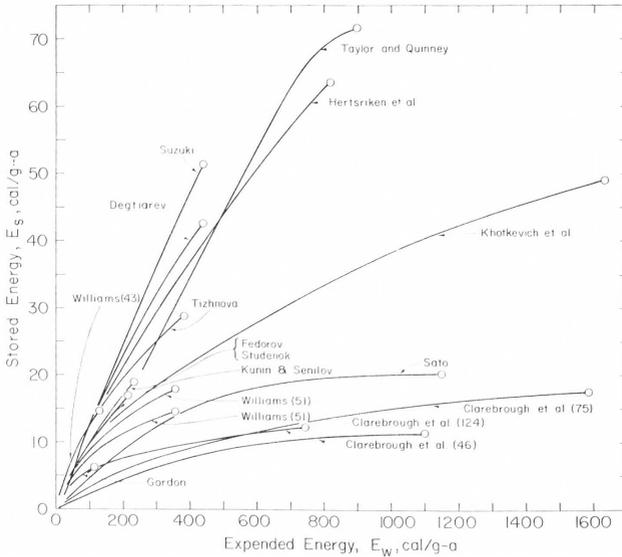


Abb. 4.1: Gespeicherte Energie bei unterschiedlicher Versuchsdurchführung und für unterschiedliche Messprinzipien – Angabe in  $[\text{cal mol}^{-1}]$  (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 46)

Schritt- und Zwei-Schritt-Methoden eingesetzt. Mit Hilfe der Energiebilanz wurde die Differenz der inneren Energie vor und nach dem mechanischen Versuch kalorimetrisch oder durch eine Temperaturmessung an charakteristischen Zeitpunkten während des Versuchsablaufes in *einem* Schritt bestimmt. Mittels Freisetzen innerer Spannungen durch Glühen oder chemische Reaktion in einem nachfolgenden *zweiten* Schritt kann die Differenz der Enthalpie zwischen Ausgangs- und Endzustand gemessen werden.

Gemäß Abb. 4.2 wurde neben der gespeicherten Energie auch das inkrementelle Energieratenverhältnis  $\delta E_s / \delta E_w$  punktuell ausgewertet. Das zugehörige Lastreigebilde bestand aus einer Sequenz von Stoßbelastungen. Die Ein-Schritt-Methode erlaubt eine kontinuierliche Auswertung des Energieratenverhältnisses ( $\delta E_s / \delta E_w \rightarrow dE_s / dE_w$ )<sup>49</sup>. Im Allgemeinen nimmt das Vermögen Energie im Material zu speichern über den kontinuierlichen einsinnigen Belastungspfad ab.

Die Effekte aus der Verformungsgeschichte und insbesondere zyklischer Lasten wurde u. a. durch Clarebrough u. a., 1957, thematisiert und durch Halford (1966) und

<sup>49</sup>Überschlägige Differenzenquotienten für den einachsigen Lastfall wurden von WILLIAMS 1961 vorgeschlagen um den Korngrößeneinfluss bei Kupferlegierungen zu untersuchen.

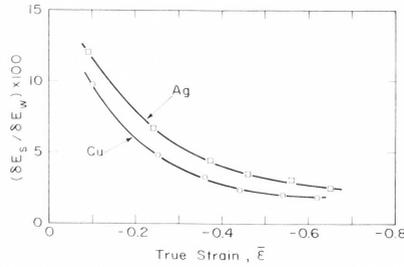


Abb. 4.2: Energieratenverhältnis (Inkrement der gespeicherten Energie zu Inkrement der plastischen) über der wahren Dehnung (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 52)

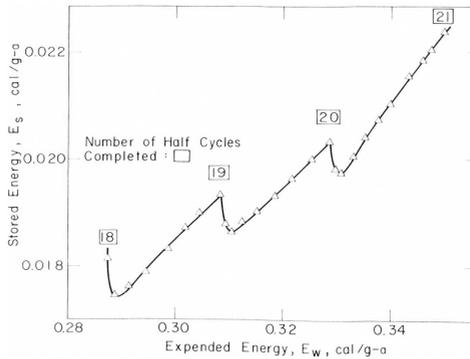


Abb. 4.3: Gespeicherte Energie über aufgebrauchter Arbeit – Angabe in  $[\text{cal mol}^{-1}]$  (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 67)

Dillon (1966)<sup>50</sup> mit zyklischen Torsionsversuchen an zylindrischen Proben fortgeführt. Beide Autoren stellen fest, dass die zyklische Beanspruchung abhängig von der Lastgeschichte (vorangegangene plastische Deformation mit Energiespeicherung) zu einer weiteren Energiespeicherung beiträgt oder aber Energie während der Lastzyklen freigesetzt wird. Abb. 4.3 zeigt die Entwicklung der gespeicherten Energie in einer Folge von drei Halbzyklen mit plastischer Deformation, wobei nach Lastumkehr jeweils eine direkte Energiefreisetzung folgt.

Neben den grundlegenden werkstofftheoretischen Fragestellungen wurde zudem die Methodik für Umformprozesse eingesetzt. Abb. 4.4 zeigt die Abhängigkeit

<sup>50</sup>Halford und Dillon sind lediglich als Sekundärquellen aus Bever, Holt und Titchener, 1973, entnommen und nicht im Literaturverzeichnis vermerkt.

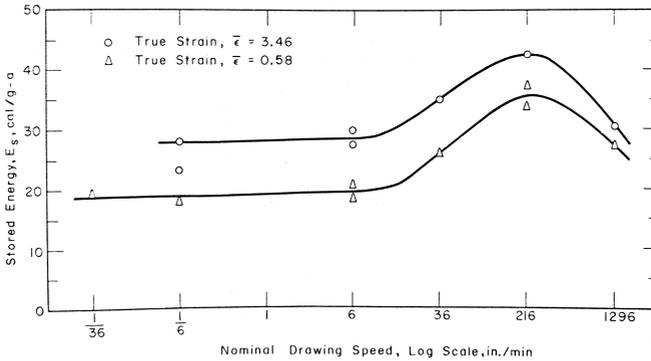


Abb. 4.4: Gespeicherte Energie über Ziehgeschwindigkeit – Angabe in  $[\text{cal mol}^{-1}]$  (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 57)

gespeicherter Energie gegenüber der Geschwindigkeit bei Drahtziehprozessen.

	Interstitials	Vacancies		
	$E_{m,i}$	$E_{m,v}$	$E_{f,v}$	$E_D$
Al	0.1	0.65	0.8	1.45
Ag	0.1	0.9	1.1	1.9
Au	0.08	0.95	1.0	1.8
Cu	0.11	≈ 0.8	1.15	2.0 <sub>s</sub>
$\alpha$ -Fe	0.2	1.2	—	2.8
Mo	—	1.2 <sub>s</sub>	—	4.1
Ni	0.1	1.0 <sub>s</sub>	—	2.8 <sub>s</sub>
Pb	—	—	0.6	1.0 <sub>s</sub>
Sn	—	0.6 <sub>s</sub>	0.5	1.0 <sub>s</sub>
W	0.5	1.7	—	5.2

Abb. 4.5: Energieangaben [eV] für die Bewegung von Zwischengitteratomen (Spalte 2) bzw. von Leerstellen (Spalte 3) (aus Bever, Holt und Titchener, 1973, S. 15)

Die zahlreichen experimentellen und analytischen Betrachtungen von Punktdefekten wie Zwischengitteratome, Substitutionsatome oder Leerstellen spiegeln sich einerseits in quantitativen Angaben in Abb. 4.5 als auch in funktionalen Zusammenhängen wider. Ähnliches gilt für Versetzungen (eindimensionale Gitterdefekte als Schrauben- oder Stufenversetzung), deren Deformationsenergie durch

$$E \approx \frac{\mu b^2}{4\pi K} \ln \frac{R}{r_0} \quad (4.1)$$

angenähert werden kann, wobei  $\mu$  den Schubmodul,  $b$  den BURGERS-Vektor,  $R/r_0$

das Verhältnis von den Radien des äußeren zum inneren Dehnungsfeld,  $K$  den Versetzungstyp (Schraubenversetzung:  $K = 1$ ; Stufenversetzung:  $K = 1 - \nu$ ) und  $\nu$  die Poissonzahl beschreibt. Diese Überlegungen fließen jedoch nicht in die Kontinuumsthermomechanische Analyse ein und werden hier nicht weiter vertieft.

#### 4.1.2 Thermografie als Anwendungsfall in aktuellen Versuchsaufbauten

Die Infrarot(IR)-Thermografie ist ein etabliertes, kontaktloses, bildgebendes Messverfahren zur Bestimmung des Temperaturfeldes auf der Oberfläche. Seit 2004 erscheint ein wissenschaftliches Journal („*Quantitative InfraRed Thermography Journal*“, Taylor & Francis, GB), das sich der Thermografie und deren Anwendungsfeldern widmet. Die Anwendung der Thermografie in der Materialwissenschaft zur Beurteilung elastisch-plastischer Deformationsvorgänge in den späten 1980er ist mit einer wesentlichen Publikation von Chrysochoos, Maisonneuve u. a., 1989, verbunden, die die Mikrokolorimetrie der Thermografie gegenüberstellt. Die erzielte Auflösung von  $128 \times 180$  Pixeln auf einem Messfeld von  $15 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$  ist gegenüber aktuellen IR-Kamerakonfigurationen gering.

Als Hauptproblem der Messung wird das thermische Rauschen identifiziert. Als vereinfachende Annahme wird der Term der Verlustwärme im Gebiet der Auswertung als linear in der Wärmeleitgleichung angenommen. Die Kalibrierung der Messung erfolgt über den thermoelastischen Effekt. Die elastisch-plastischen Zugversuchen für Stahl und Aluminium werden bis zu einer maximalen plastischen Dehnung von ca. 10 % durchgeführt. Chrysochoos, Maisonneuve u. a. etablieren damit die Temperaturänderungscharakteristik in die thermomechanische Materialmodellierung und wurde in Chrysochoos und Belmahjoub, 1992, mit Stufenversuchen an Aluminiumproben fortgesetzt.

Eine Bewegungskompensation wird von Muracciole, Watrresse und Chrysochoos, 2008, beschrieben um inhomogene Temperaturfelder aufgrund einer inhomogenen Dehnungsverteilung exakt verfolgen zu können. Die verwendete Digitalkamera im sichtbaren Licht hat eine Auflösung von  $1317 \times 1035$  Pixeln. Im sichtbaren Licht wird die Bewegungskompensation mit Hilfe der digitalen Bildkorrelation (DIC – *digital image correlation*) erzielt. Im Weiteren werden die Korrelationsalgorithmen im sichtbaren Licht mit den synchronisierten Bildern der IR-Kamera gekoppelt (Muracciole, Watrresse und Chrysochoos, 2008). Effektive Formulierungen zur Minimierung der Messfehler sind im Auswerteprozess implementiert (Watrresse u. a., 2001).

Jiang u. a., 2001, nutzten die IR-Thermografie für die Untersuchung elastisch-viskoplastischer Deformationen und anschließenden Ermüdungsuntersuchungen für legierte Stähle. Die verwendete IR-Kamera hat eine räumliche Auflösung von  $256 \times 256$  Pixeln und eine Temperaturentauflösung für benachbarte Pixel bei Raumtemperatur von  $\approx 15 \text{ mK}$ . Die Bildaufnahme Frequenz (*frame rate*) umfasst einen Bereich von 2 bis 144 Hz. Die Ratenabhängigkeit im verwendeten Materialmodell

von Bodner und Partom, 1975, spielt keine Rolle in der numerischen Ermüdungsanalyse.<sup>51</sup> Die Ermüdungsauswertung folgt dem verbreiteten Vorgehen von typischen WÖHLER-Versuchen in der Betriebsfestigkeit. Die ermittelten Parameter der Exponentialfunktionen für die Beanspruchungen und die Temperaturentwicklung sind physikalisch nicht interpretierbar. Über die experimentelle Realisierung der betrachteten Randbedingungen für die Wärmeleitung (konstante Raumtemperatur in den Einspannungen bei einer Belastungsfrequenz von 20 Hz) wird keine Aussage getroffen. Während für Materialparameterbestimmung für das BODNER-PARTOM-Modell die zeitliche Auflösung im zyklischen Abschnitt des Belastungspfad klein war, wurde für den Ermüdungsversuch nur die mittlere Temperatur in der Probenmitte ausgewertet.

Die Thematik, die Ermüdungsfestigkeit mit Hilfe der IR-Thermografie zu quantifizieren, setzt sich auch im Bereich faserverstärkter Kunststoffe fort. Durch die klare

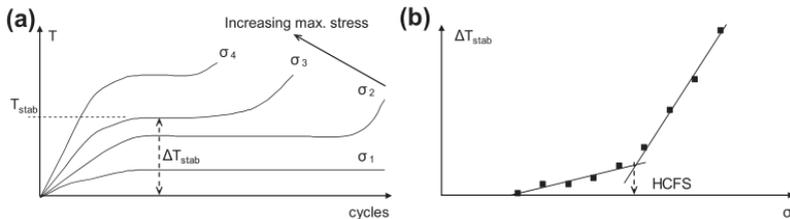


Abb. 4.6: Ableitung einer Definition für die Ermüdungsfestigkeit über die Temperaturentwicklung (aus Montesano, Fawaz und Bougherara, 2013)

Identifikation von zwei linear approximierbaren Bereichen im rechten Diagramm der Abb. 4.6, in dem die Temperaturänderung über der Spannungsamplitude aufgetragen wird, definiert der Bereichsübergang einen Kennwert für das Ermüdungsverhalten. Die idealisierte Darstellung ist in realen Messungen ein unscharfer nichtlinearer Bereich (s. auch Hayabusa u. a., 2017, für Kohlenstoffstähle unter Zug-Druck- bzw. Biege-Torsions-Belastung oder Micone und De Waele, 2017, für hochfeste Stähle). Die Schädigungszunahme mit steigender Zyklenzahl vergrößert die Öffnung der geschlossenen Spannungs-Dehnungs-Kurven, die ein Maß für die dissipierte Energie darstellen, und führt auf eine qualitative Änderung der Temperaturentwicklung in der gesamten Probe.

In der Ermüdungsanalyse von Meyendorf u. a., 2002, wurde die Temperaturmessung bei stark unterschiedlicher Anregung an Titanlegierungen untersucht. Die Idee einer stufenweisen Ermüdungsanalyse wird dargelegt. Die thermoelastische Antwort

<sup>51</sup>Die kontinuumsthermomechanische Analyse wird allgemein nicht für hochzyklische Versuche eingesetzt und ist in der Regel auf niedrigzyklische Anwendungsfälle beschränkt (vgl. z. Bsp. W. Egner und H. Egner, 2016 und näher beschriebene, ähnliche Analysen im Abschnitt 4.2).

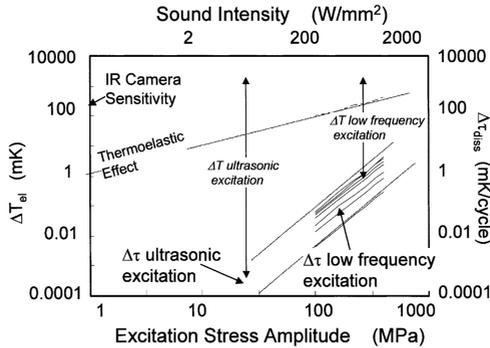


Abb. 4.7: Dissipation in Abhängigkeit der Beanspruchungsamplitude (aus Meyendorf u. a., 2002)

bei niedrigfrequenter Anregung in einer mechanischen Prüfeinrichtung bzw. bei hochfrequenter Anregung im Ultraschallbereich wird nach jeweils einem Belastungsblock von 5 000 Zyklen mit konstanten Lastparametern (Frequenz, Mittelwert und Amplitude) ermittelt. Abb. 4.7 ordnet die unterschiedliche Anregung dem zu erwartenden Dissipationszuwachs zu. Die gemessenen Temperaturänderungen pro Zyklus unterscheiden sich bei den verschiedenen Anregungen um ca. drei Größenordnungen.

Eine Idee für Ermüdungsversuche und Thermografie, die nach derzeitigem Wissensstand keine Weiterentwicklung erfahren hat, wird durch Ummenhofer und Medgenberg, 2006, präsentiert. Die zur Belastungsfrequenz synchronisierte Temperaturmessung wird mittels Lock-In-Thermografie (s. Breitenstein, Warta und Langenkamp, 2010) im Frequenzbereich evaluiert. Da während des Ermüdungsversuches weiterhin plastische Dehnungen akkumuliert werden, ist die Temperaturamplitude nicht konstant, was der ursprünglichen Voraussetzung an die Lock-In-Thermografie widerspricht. Die Ausnutzung dieses Effekts führt jedoch in der Signalanalyse zu signifikanten Charakteristiken im Phasenwinkel und der Amplitude der höheren Harmonischen. Dieser Effekt kann zusätzlich verstärkt werden, wenn speziell gekerbte Probenformen eingesetzt werden. Das gekoppelte Feldproblem für die untersuchten Kohlenstoffstähle wird in erster Näherung vereinfachend als entkoppeltes Problem behandelt.

Eine gänzlich andere Materialklasse ist Gegenstand bei Cruanes u. a., 2019. Die zyklischen Versuche bei hoher Zyklenanzahl (HCF – *high cycle fatigue*) an Elastomerproben bilden einen Datensatz für eine Vielzahl von Amplitudenverhältnissen. Im Vergleich zu metallischen Proben erweist sich hier die um Größenordnungen kleinere Wärmeleitfähigkeit für die Messung des Temperaturfeldes von Vorteil, da die Temperaturänderungen weit entfernt von den Auflösungsöglichkeiten heutiger

Kamerasysteme sind. Eine analytische Betrachtung für ein geeignetes viskoelastisches Materialgesetz wurde vorgeschlagen.

Die Publikationsauswahl von Jegou u. a., 2013; Marco u. a., 2014; Masquelier u. a., 2015, stammen aus einer französischen Forschergruppe und beschäftigen sich ebenfalls mit zyklischen Versuchen an Polymerwerkstoffen. Die erstgenannte Quelle untersucht die Ermüdungsfestigkeit von spritzgegossenen, heterogenen, kurzfaserverstärkten Polymeren (SFRP – *short fibre reinforced plastics*) und dem Ansatz von Abb. 4.6. In Marco u. a., 2014, fokussiert sich die Auswertung auf das Quantifizieren der inneren Dissipation an einer gelochten Materialprobe. Die Temperaturänderung benachbarter Zyklen in der Umgebung der Spannungskonzentration dient der Quantifizierung der inneren Dissipation. Der numerische Abgleich erfolgt über ein viskoplastisches Materialgesetz, das den theoretischen Überlegungen zur Kontinuumsthermomechanik von Germain, Nguyen und Suquet, 1983; Chaboche, 1997, folgt und dem konkret ein rheologisches Netzwerk nach Launay u. a., 2011, zugrunde liegt. Da der Einfluss der Wärmeleitung im Experiment vernachlässigt wird, verzichtet man auf die Lösung des gekoppelten Feldproblems. Ein Abgleich mit der berechneten Temperaturcharakteristik findet demnach nicht statt. Die verwendeten Probenformen für Elastomere in Masquelier u. a., 2015, lassen in den zyklischen Versuchen ein Amplitudenverhältnis von  $R \geq 0$  zu. Die Messung wird auf wenige Zyklen beschränkt, so dass der Berechnungsaufwand im Zeitbereich für die hyperelastischen Materialmodelle limitiert wird. Die Temperaturfeldänderung wird als Eingangsgröße für einen einfachen Ansatz zur Ermittlung der Dissipationsleistung genutzt. Das Vorgehen entspricht entgegen dem vorangegangenen Modellierungsansatz nicht dem Anspruch thermodynamischer Konsistenz. In den genannten Artikeln kamen IR-Kameras mit einer Auflösung bis zu  $512 \times 640$  Pixeln zum Einsatz.

In Pawlak, Rozanski und Galeski, 2013, wird die IR-Thermografie ebenso als reines Messmittel (Auflösung:  $320 \times 240$  Pixel und Temperaturänderungsauflösung von  $\approx 70$  mK) eingesetzt um die Porenbildung in Propylen-Zugproben bei großen Deformationsgradienten einschätzen zu können. Hierfür werden reine Zugversuche unter Variation der Dehnrate und Stufenversuche mit entsprechenden Haltezeiten herangezogen. Die Temperaturentwicklung und die Volumendehnung werden als zentrale Versuchskenngrößen behandelt. Die rein experimentelle Studie registrierte Temperaturänderungen von bis zu 20 K bei technischen Dehnungen von etwas 200 %. Das Einschnürverhalten (*necking*) von Polypropylen im Zusammenhang mit der Temperaturentwicklung in der plastischen Zone wurde in Guseva u. a., 2015, untersucht. Insbesondere die Ausdehnung der Einschnürzone wurde mit Temperaturprofilen entlang der Probenachse bewertet. Eine zugehörige Modellierung des Zugversuches wurde nicht präsentiert.

Ein substantieller Beitrag in der Experimentieranordnung zur Bestimmung des Anteils der plastischen Arbeit, der in Wärme überführt wird, ist in Knysh und Korkolis, 2015 dargelegt. Hierfür werden der instantane und integrale inelastische Wärmeanteile  $\beta$  und  $\beta_{\text{int}}$  (IHF – *integral and instantaneous Inelastic Heat Fraction*)

an der inelastischen Arbeit bzw. Leistung definiert.<sup>52</sup>

$$\beta := \frac{\dot{q}}{e_i} \quad \text{und} \quad \beta_{\text{int}} := \frac{\bar{q}}{w_i} \quad (4.2)$$

$$\beta = \beta_{\text{int}} + \frac{w_i}{e_i} \dot{\beta}_{\text{int}} \quad \text{und} \quad \beta_{\text{int}} = \frac{1}{w_i} \int_0^t \beta e_i d\tau \quad (4.3)$$

Sie dienen somit als abgeleitete Zustandsgröße zur Einschätzung des Deformationsvorgangs. Die möglichst genaue Messung des Temperaturfeldes, und somit der Ableitung des Wärmestromes, wird mit einer zeit- und kostenintensiven Probenvorbereitung erreicht. Die Kombinationsmessung aus Temperatur- und Verschiebungsfeldmessung durch einen umhüllenden, evakuierten, transparenten Zylinder erfordert ein

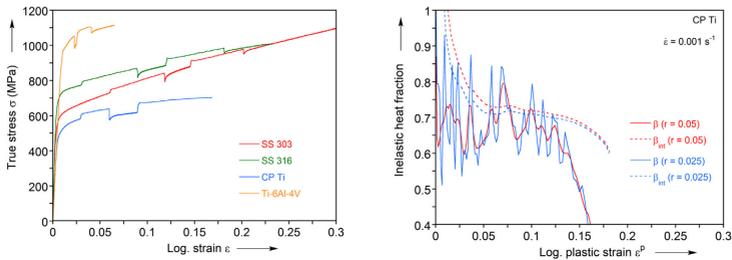


Abb. 4.8: Versuchsführung und Wärmeanteil  $\beta$  für metallische Proben (aus Knysh und Korkolis, 2015)

hohen experimentellen Aufwand. Eine Rückkopplung auf eine Materialmodellierung ist nicht Bestandteil dieser Publikation, doch werden aufgrund der Sprünge der Verschiebungsgeschwindigkeit (s.a. Abb. 4.8 (*links*)) implizit die viskoplastischen Modellierungsansätze für Titanlegierungen adressiert. Es wird im dehnungsgesteuerten Versuch Dehnungsgeschwindigkeiten im Bereich von zwei Größenordnungen überdeckt ( $\dot{\epsilon} \in [10^{-4} \text{ s}^{-1}, 10^{-2} \text{ s}^{-1}]$ ). Der Verlauf von  $\beta_{\text{int}}$  (gestrichelte Kurven im rechten Diagramm) ist deutlich glatter als der Verlauf von  $\beta$  mit den durchgezogenen Linien. Das heißt, dass die instantane Zustandsvariable die Dynamik des Deformationsprozesses deutlich besser abbildet.

Besonders hohe Deformationsgeschwindigkeiten werden in Rittel, 1999, und Guzmán u. a., 2010, untersucht und das zugehörige Temperaturfeld mit einem IR-Kamerasystem (Auflösung  $384 \times 288$  Pixel – Subframe von  $64 \times 16$  Pixeln zur Steigerung der Framerate auf 10 000 Hz) erfasst. In derartigen Versuchsführungen ist

<sup>52</sup>Die Definition erfolgt somit komplementär zum Verhältnis des Zuwachses der gespeicherten Energie zur inelastischen Spannungsleistung  $\varphi$  (instantan) bzw. der gespeicherten Energie zur aufgebrauchten inelastischen Arbeit  $\varphi_{\text{int}}$  (integral) aus (2.133) bzw. (2.136).

die Bildaufnahme­frequenz und das damit verbundene prozessieren der thermografischen Rohdaten sowie das Sicherstellen zeitsynchroner Bildfolgen von entscheidender Bedeutung. Vergleichsmessungen mit Thermoelementen (Regev und Rittel, 2008), bei großen Dehnraten zeigen, dass beide Verfahren in guter Übereinstimmung liegen.

Verfahrenstechnische Untersuchungen in Bezug auf Material- oder Bauteilversuche unter mechanischer Last betreffen in erster Linie die Bewegungskompensation der Probe. Es besteht die Notwendigkeit, das gemessene Temperaturfeld dem jeweiligen materiellen Punkt zuzuordnen, was mathematisch mit dem Abbildungsbegriff verbunden ist. In Fedorova u. a., 2014, wird die DIC auf die thermografischen Rohdaten von benachbarten Zuständen (Mapping von  $\text{Bild}_{\bar{t}-\Delta t}$  auf  $\text{Bild}_{\bar{t}}$ ) angewendet. Ohne die pixelweise Emissionskorrektur ist eine Mustererkennung für einen signifikanten Unterbereich der Probenoberfläche für den gesamten Versuchszeitraum möglich. Konkret genutzt wurde dieses Vorgehen für die Rissausbreitung in Titanlegierungen mit einer Kameraauflösung von  $320 \times 256$  Pixeln und einer thermischen Auflösung von  $\approx 25$  mK. Risswachstum in einem hochlegierten Stahl mit Bewegungskompensation wurde ebenfalls in Bär, Seilnacht und Urbanek, 2019, thematisiert, wobei hier die Verbesserung der Temperaturänderungsauf­lösung durch Lock-In-Thermografie und die Darstellung und Interpretation des Phasenwinkels im Frequenzbereich hervorzuheben ist. Ein Anwendungsfall für die Lock-In-Thermografie zur Detektion von Schäden in GFRP ebenfalls unter Evaluation der Phasenwinkel jedoch ohne Bewegungskompensation ist in Pitarresi, 2015, zu finden.

Eine spezielle Oberflächenvorbereitung wird in Maynadier u. a., 2012, genutzt um ein Speckle-Muster wie für das Verfahren im sichtbaren Licht zu generieren. Die polierte Oberfläche einer metallischen Probe wird nur teilweise mit hochemissivem Schwarzlack überzogen. Die unbedeckte Probenoberfläche fungiert als Spiegel und reflektiert die Temperatur der Umgebung in die IR-Kamera. Eine Kontrasterhöhung wird erzielt, indem vornehmlich ein kalter Strahler als Reflexionsquelle in den Messaufbau integriert wird. Mit der verfügbaren IR-Kamera-Auflösung von  $320 \times 240$  Punkten und dem spezifischen Kalibrierungsverfahren ist der systematische Fehler in der Verschiebungsermittlung im kleinen Subpixel-Bereich und zieht einen systematischen Fehler in der zweidimensionalen Dehnungsberechnung auf der Probenoberfläche von  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  nach sich.

Die Abkürzung TDIC (Thermography Digital Image Correlation) wird in Cholewa u. a., 2016, geprägt. Der vorgeschlagene Aufbau besteht aus einem Zusammenwirken von zwei CCD-Kameras im sichtbaren Licht (Auflösung  $1600 \times 1200$  Punkte) und einer IR-Kamera (Auflösung  $640 \times 480$  Punkte). Das in kommerziellen Systemen für kontaktfreie, optische Dehnungsmessung eingesetzte Kalibrierungsverfahren, wie z. Bsp. ARAMIS der Carl Zeiss GOM Metrology GmbH, wird so modifiziert, dass die einzelnen Temperaturwerte des Thermogramms wieder eindeutig den materiellen Punkten der Oberfläche zugeordnet werden. Mit zusätzlichen Interpolationsalgorithmen wird die geringere Auflösung der IR-Kamera ausgeglichen. Üblicherweise wird hierfür ein Speckle-Muster appliziert. Aus thermografischer Sicht wird in der genann-

ten Publikation gezeigt, dass die geringen Emissivitätsunterschiede vernachlässigt werden können und die unbelastete Probe sich durch ein nahezu homogenes Thermogramm auszeichnet. Die Wirksamkeit dieses Verfahrens wird an der vollständigen Messung des dreidimensionalen Verschiebungsfeldes und der zugehörigen Temperaturabbildung für Sandwich-Proben aus Kompositmaterial nachgewiesen. Klare Einschränkungen bzw. Bedingungen zur Beleuchtungssituation mit möglicherweise zusätzlichem Wärmeeintrag wurden nicht diskutiert.

Das Hauptaugenmerk in der Weiterentwicklung der IR-Kamerasysteme liegt einerseits in der technischen Ausstattung und andererseits in der anwendungsorientierten Einbindung des Systems. Unter technischer Ausstattung sind in erster Linie die oben aufgeführten Kenngrößen der räumlichen, thermischen und zeitlichen Auflösung zu verstehen. Die Einbindung in wissenschaftliche Fragestellungen ist aufgrund der universellen Einsetzbarkeit des Messprinzips weit gefächert. Die Einsatzgebiete reichen von einer industriellen Prozessüberwachung in der Fertigung, über die thermische Optimierung (z. Bsp. im Gebäudebereich) bis hin zur Flugthermografie und der Beobachtung ganzer Biotope. Anwendungsbedingt muss die quantitative Auswertung die physikalischen Eigenschaften des Messprinzips und die Eigenschaften des beobachteten Systems einbeziehen.

Die Laborbedingungen in der Materialprüfung sind in Bezug auf die Probeneigenschaften und die Kopplung zur Umgebung thermografisch herausfordernd. In der Analyse von Materialverhalten spielen jedoch die mathematischen Modellierungsansätze für die erfolgreiche Nutzung der Thermografie ebenfalls eine wesentliche Rolle. Die qualitative und quantitative Kopplung diverser Deformationsmechanismen auf die Temperaturänderung einer Materialprobe umfasst in ihrer Vielfalt und der zugehörigen Dynamik einen großen Bereich. So zeigt die obige Auswahl der wesentlichen Beiträge im Einsatz der IR-Thermografie eine Fokussierung auf unterschiedliche Aspekte im Materialverhalten. Dies reicht von der Anwendung des Kontinuumsmechanischen Konzepts für Zug(Druck-)versuche mit wenigen Lastwechseln im Belastungspfad über die Betrachtung von Schädigungsvorgängen bis zum Ermüdungsverhalten. Wesentlich in den zugrunde liegenden wissenschaftlichen Fragestellungen ist die Konsistenz in den getroffenen Modellannahmen und die Vollständigkeit der wesentlichen Phänomene.

Im Überblicksartikel von Chrysochoos, 2012, werden vorwiegend die Fragestellungen zu thermomechanisch konsistenten Materialmodellen behandelt und anhand der allgemeinen Wärmeleitgleichung (vgl. (2.130)) unter Berücksichtigung inelastischer Deformationen diskutiert. Als Grundannahmen in der Auswertung dieser partiellen Differentialgleichung werden benannt:

1. Die Massendichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_\varepsilon$  sind Materialkonstanten und unabhängig vom thermodynamischen Zustand.
2. Der Wärmeleitensensor im linearen Wärmeleitgesetz nach FOURIER bleibt über den gesamten Versuch konstant.

3. Die externe Wärmezufuhr infolge Wärmestrahlung ist zeitunabhängig. Das heißt, dass für das mechanisch lastfreie Beobachtungsobjekt bei zeitunabhängigen thermischen Randbedingungen ein thermodynamisches Gleichgewicht besteht und das zugehörige Temperaturfeld die Referenztemperatur darstellt.

Die Ausnutzung des gesichert gemessenen Temperaturfeldes geht einher mit einem thermomechanischen Konzept, das phänomenologisch motiviert, mikrostrukturell begründet und im Sinne der Grundgleichungen thermodynamisch konsistent ist. Der Einschätzung des großen Potenzials der IR-Thermografie in der Materialcharakterisierung ist ausdrücklich zuzustimmen, obwohl den angesprochenen Tendenzen zur weiteren Lokalisierung und Identifizierung der Wärmequellen in dieser Arbeit nicht gefolgt, sondern der Makroskala hinsichtlich der Übertragbarkeit auf technische Anwendungsfälle ein größeres Gewicht eingeräumt wird.

Ein Schritt in Richtung einer lokalisierten Temperatur- und Dehnungsermittlung wird in Seghir u. a., 2013, beschrieben. Die einseitige Probenbeobachtung im sichtbaren und infraroten Licht wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel gewährleistet. Die Probe muss zusätzlich mit Marken versehen werden, die mit beiden Kamerasystemen zu identifizieren sind und somit ein Referenzkoordinatensystem definieren, über das die Abbildung der Temperaturwerte auf den materiellen Punkt realisiert wird. Wird das Messareal mit der verfügbaren Auflösung (hier  $320 \times 240$  Punkte) hinreichend klein gewählt, so wird gezeigt, dass die Abbildung der Messgrößen auf einzelne Körner übertragen werden kann, wenn die Korngröße einen definierten Schwellwert übersteigt. Messgegenstand sind polykristalline, metallische Proben bei Beanspruchungen mit kleinen Deformationsgradienten (axiale Dehnung im Zugversuch  $< 2.5\%$ ). Für die Untersuchung von Flachproben ist Beobachtung von beiden Probenseiten mit zwei Kamerasystemen möglich. Dieser Versuchsaufbau wird in den Arbeiten von Pottier u. a., 2013; Wang u. a., 2016; Rose und Menzel, 2020, umgesetzt. Die Flachprobenvorbereitung aus reinem Aluminium durch Wang u. a. ermöglicht eine lokalisierte Auswertung einer inhomogenen Verteilung von Verzerrung und Temperaturänderung auf der Ebene der Körner. Es erfolgt ausschließlich eine Auswertung der experimentellen Daten, die eine zugehörige Modellbildung auf der Ebene der Kristallplastizität motiviert.

Die experimentelle Realisierung thermischer Randbedingungen wird in den zitierten Publikationen generell wenig oder teilweise gar nicht diskutiert. Die Arbeit von Bouache, Pron und Caron, 2016, widmet sich ausschließlich dieser Fragestellung und löst ein inverses Anfangsrandwertproblem auf der Basis thermografischer Messungen. Insbesondere bei Werkstoffen mit hohem Wärmeleitvermögen wie Metallen ist der Wärmeübergang an den meist metallischen Spannelementen der dominierende Wärmeverluststrom. Wärmestrahlung und Konvektion an der Probenoberfläche können demgegenüber meist vernachlässigt werden. Aus den Ergebnissen folgt, dass das Verhalten des konkreten Spannsystems nichtlineare thermische Randbedingungen im Zeitbereich evoziert.

## 4.2 Analytik

Die in Abschnitt 2.8 dargestellten Materialmodelle, einschließlich der Weiterentwicklung des rheologischen Netzwerks im Abschnitt 2.8.1, sind Etappen in der kontinuumsthermomechanischen Beschreibung komplexen Materialverhaltens. Die Einordnung des eigenen Vorgehens erfolgt einerseits über den wissenschaftlichen Fortschritt auf der Basis der wesentlichen Beiträge der letzten Jahrzehnte und andererseits durch die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den gegenwärtigen Publikationen.

In Fortführung der Überlegungen von Zener wurde die thermoelastische Dämpfung in das Konzept der thermodynamischen Zulässigkeit durch die Arbeit von Biot, 1956, überführt. Sie gilt heute als Sonderfall in der Thermomechanik. Das zugehörige gekoppelte Feldproblem eröffnet den Einzug thermodynamischer Überlegungen zur Charakterisierung des Materialverhaltens. Zeitabhängiges, viskoelastisches Materialverhalten äußert sich in einer verzögerten Rückkehr in die Ausgangskonfiguration nach vollständiger Entlastung und wird im Fall zyklischer Beanspruchung als Materialdämpfung bezeichnet. Für diesen Fall wurden die Begriffe der anelastischen Deformation und der inneren Reibung geprägt (Blanter u. a., 2007). Die zugehörige experimentelle Charakterisierung kann mit quasi-statischen oder zyklischen Versuchen erfolgen. In kristallinen, metallischen Werkstoffen sind diese Dämpfungseigenschaften auf die reversible Bewegung von Punktdefekten, Versetzungen oder Korngrenzen zurückzuführen. Diese Mechanismen sind je nach Kristallgitter, Legierungsart etc. in einem bestimmten Temperaturbereich aktiviert und können gegebenenfalls wechselwirken. Die Phasenumwandlung eines Kristalls, eine Wärmebehandlung oder eine irreversible plastische Deformation besitzen einen Einfluss auf die innere Reibung. Dies wurde beispielsweise experimentell bereits 1985 bei zyklischen Versuchen zur Bestimmung des Verlustfaktors nachgewiesen, wobei die Spannungsamplitude variiert wurde (s. Abb. 4.9). Die Relaxation infolge thermoelastischer Dämpfung bzw. innerer Reibung führen zur Entropieproduktion und somit zur Dissipation von mechanischer Energie.

Der dissipative Charakter plastischer Deformationen war bereits Teil der Ableitung der wesentlichen Grundgleichungen. Die plastische Deformation wird in den rheologischen Netzwerken ebenfalls mit einem Reibvorgang im Inneren des Materials verknüpft und durch ein Reibelement symbolisiert. Sie folgt jedoch mit der entstehenden bleibenden Deformation anderen physikalischen Mechanismen, erfordert andere energetische Aktivierungsniveaus und verläuft in einer anderen geometrischen Skala.

Umfassende Idealisierungen und Vereinfachungen in der Materialmodellbildung führten in der numerischen Simulation zu Abweichungen gegenüber den experimentell ermittelten Charakteristiken, die durch beständige Erkenntniszunahme fortlaufend verringert werden. Die Bestrebungen, die kristallografischen und werkstoffwissenschaftlichen Erkenntnisse in die Materialbeschreibung aufzunehmen,

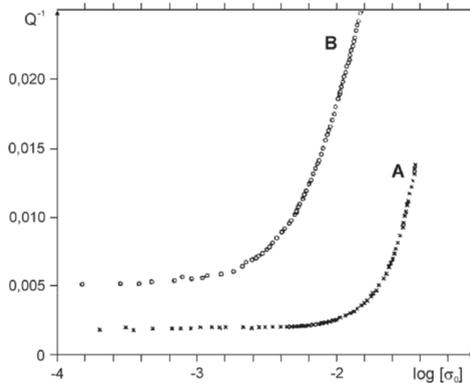


Abb. 4.9: Amplitudenabhängigkeit des Verlustfaktors der inneren Reibung nach Schwarz (1985) für eine Al-Legierung bei 128 K vor (Kurve A) und nach (B) plast. Deformation (aus Blanter u. a., 2007, S.137)

erfordern komplexere Beschreibungen, die oft mit einer erhöhten Anzahl von Materialparametern behaftet ist. Die Universalität der angewendeten Prinzipien bleibt ein Fundament für den Modellierungserfolg und die Physikalität des Modellierungsansatzes der wichtigste Maßstab hinsichtlich des Einsatzbereiches. Diese beiden Kernkriterien setzten sich fort in der Gestaltung des zugehörigen Versuchsprogramm zur Bestimmung der Materialparameter sowie der Interpretation des Parametersatzes an sich.

Zentrale Parameter aus ingenieurtechnische Sicht<sup>53</sup> sind diverse Festigkeitsparameter. Die in einem einachsigen Versuchsprogramm am häufigsten ermittelten Parameter sind die Streckgrenze und Zugfestigkeit mit Spannungscharakter sowie die Gleichmaß- und Bruchdehnung mit Dehnungscharakter. In der aktuellen Literatur finden man insbesondere in der Erstbeschreibung neu entwickelter Herstellungsverfahren häufig eine Charakterisierung, die sich zunächst auf diese Parameter beschränkt. Dieser Parametersatz reicht nicht aus um das nichtlineare, inelastische, irreversible Deformationsverhalten mit der erforderlichen Genauigkeit analytisch zu beschreiben und ein geeignetes Materialgesetz nach den genannten Kriterien auszuwählen.

Überlegungen hinsichtlich des Versagens von Bauteilen und dies in Relation zu der gespeicherten Energie zu bringen, wurden nachfolgend von Interesse. So formulierte Reiner, 1968, eine obere und untere Schranke für die Festigkeitswerte von Metallen, in dem die Oberflächenenergie beim Bruch mit der Dissipation im Deformationsprozess

<sup>53</sup>Dies betrifft in der Regel den Auslegungsprozess eines Bauteils, die Beanspruchungsanalyse bei Überlastung sowie die Überwachung des Herstellungsprozesses.

in Verbindung gebracht wird. Die Beschäftigung mit der Festigkeit (*strength*) steht im engen Zusammenhang mit Überlegung zum Schädigungsverhalten, wie die mikromechanischen Mechanismen zur Porenbildung und die Koaleszenz benachbarter Poren (*cavities*), was im Zuge der Verfahren in der additiven Fertigung eine neue Bedeutung erlangt.

So wurden zu Beginn der 1950er und 1960er Jahre zu vielen Phänomenen gleichzeitig substantielle Beiträge geleistet. Aus dieser Zeit stammende Arbeiten mit großem Erkenntnisgewinn bilden für die heutigen Veröffentlichungen oft eine bedeutende Grundlage, auch wenn sich der Forschungsgegenstand neuartigen Fragestellungen zuwendet bzw. die Anwendungsgrenzen der bestehenden Methodik verschoben werden.

Als Hauptforschungsgebiete im Sinne der ingenieurtechnischen Anwendung der Materialcharakterisierung können daher folgende Teilgebiete genannt werden:

1. Weiterentwicklung der mathematischen Grundlagen der Kontinuumsthermo-  
mechanik
  - Konzept der inneren Variablen
  - Zulässigkeitsprüfung der gewählten Ansätze
2. ratenunabhängige Plastizität
  - Fließflächen und zugehörige Fließgesetze
  - Abbildung des Verfestigungsverhaltens
3. Viskoplastizität
  - Modellierung der kinematischen Verfestigung für zyklische Beanspruchung
  - Formulierung von zulässigen Evolutionsgleichungen
4. Viskoelastizität
  - Anwendungsfall für heterogene Werkstoffe (z. Bsp. faserverstärkte Polymerwerkstoffe)
  - Modellierung von Relaxations- und Kriechversuchen
5. Schädigungsverhalten
  - Integration in das thermodynamische Potenzial
6. Ermüdungsverhalten
  - Verknüpfung der Schädigung für hohe Lastwechselzahlen mit thermodynamischer Konsistenz

Eine starre Einordnung der im Folgenden zitierten Arbeiten in die aufgeführten Themengebiete ist aufgrund der breiten Ausrichtung der damit verbundenen wissenschaftlichen Schulen nicht angestrebt. Im Weiteren liegt der Schwerpunkt

auf den Materialmodellen, die in Zusammenhang mit der thermischen Kopplung untersucht wurden bzw. eine direkte Verbindung aufweisen. Das ist im Wesentlichen die ratenabhängige Plastizität oder Viskoplastizität.

### 4.2.1 Viskoplastizität

Die Modellierung von Materialverhalten folgt nach der intensiven Analyse experimenteller Befunde. Eine Überblicksarbeit über den Stand der Ansätze lieferte bereits Krempl, 1987, in der die wesentlichen Publikationen hinsichtlich der Evidenz der experimentellen Ergebnisse bis zurück auf die Pionierarbeiten am Beginn des 20. Jahrhunderts von Ludwik und von Mises bewertet, eingeordnet und wesentliche Begriffe systematisiert wurden.

Weitere grundlegende Veröffentlichungen zur Plastizität, wie z. Bsp. durch Prager oder Ziegler, und die Fortschritte in der Rechentechnik in Verbindung mit numerischen Lösungsalgorithmen führen zu einem Anstieg der Publikationszahlen zur Viskoplastizität mit Beginn der 1960er Jahre.

Hauptkriterium der Beurteilung zugehöriger Fließgesetze bei Krempl ist die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik eines Torsionsversuch von einer Materialprobe ohne Belastungsgeschichte und einer Materialprobe zyklischer Vorbelastung mit einhergehender Verfestigung (*cyclic hardening*), wobei Art und Weise der Versuchsführung in der Vorlast nicht spezifiziert und daher qualitativ argumentiert wurde (vgl. Abb. 4.10).

Krempl setzt die verschiedenen Ansätze für das Fließgesetz in Verbindung mit den vorherrschenden Deformationsmechanismen in Relation. Chronologisch ist hier die Arbeit von Perzyna, 1963, zuerst zu nennen, in der ursprünglich das beobachtete Relaxationsphänomen die Ableitung einer Fließregel für viskoplastische Deformationsvorgänge motivierte. Die Formulierung von Perzyna beinhaltet die Definition einer Fließfläche, die additive Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen viskoplastischen Anteil sowie die Annahme, dass der viskoplastische Deformationsgeschwindigkeitstensor proportional zum Spannungsdeviator  $\sigma^D$  ist.

Analytisch ist die Verwendungsweise der Invarianten des Spannungstensors von Bedeutung, da die energetischen Anteile der thermodynamischen Potenziale durch Invarianten ausgedrückt werden können. Die Bestimmungsgleichungen der zugehörigen Invarianten lauten<sup>54</sup>

$$J_1^\sigma = \text{tr} \sigma \quad (4.4)$$

$$J_2^\sigma = \frac{1}{2} [(\text{tr} \sigma)^2 - \text{tr}(\sigma^2)] \quad (4.5)$$

$$J_3^\sigma = \det \sigma \quad (4.6)$$

<sup>54</sup>Die drei Invarianten der Tensoren zweiter Stufe werden nachfolgend mit  $J_k^{\langle \bullet \rangle}$  bezeichnet. Der Bezug zum jeweiligen Tensor wird durch das obenstehende Symbol gekennzeichnet.

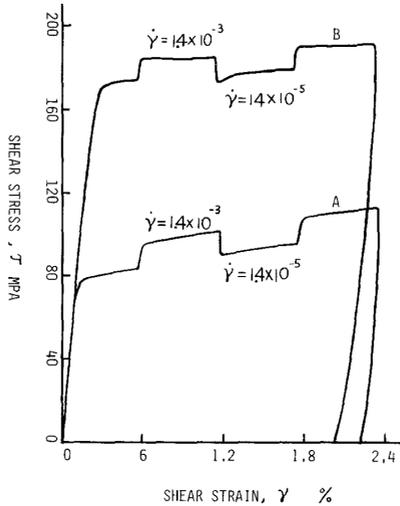


Abb. 4.10: Torsionsversuche an Stahlproben (Typ 304) bei Raumtemperatur mit Variation der Dehnrates (*Engineering strain rates are*  $1.4 \times 10^{-3}$  and  $1.4 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ .) Kurve A - Antwort einer nicht vorbelasteten Probe; Kurve B - zyklische Torsionsvorlast mit Sättigung und anschließend vollständiger Entlastung. (Krempf, 1987)

Die Fließregel nach Perzyna, also die Entwicklungsgleichung für die viskoplastischen Dehnungen, in folgender Form geschrieben werden

$$\dot{\epsilon}^i = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\sqrt{J_2^{\sigma^D}}}{y} - 1 \right) \right\rangle \frac{3}{2} \frac{\sigma^D}{\sqrt{J_2^{\sigma^D}}} \quad , \quad (4.7)$$

mit  $y$  als Fließspannung und unterschiedlichen Ansatzmöglichkeiten für die Funktion  $\Phi$ . Grundlegend in der Theorie von Perzyna ist die Definition einer Fließbedingung (bzw. Fließfläche, die den elastischen Bereich vom elastisch-viskoplastischen Bereich trennt), die additive Zerlegung des Verzerrungstensors in einen elastischen und einen inelastischen Anteil in der infinitesimalen Theorie sowie die Überspannung (*overstress*)  $\sigma_v$  als zentrale Größe für den Antrieb zur inelastischen Deformation. Die Trennung der Deformationsbereiche erfolgt in der mathematischen Notation über die MACAULAY-Klammer (2.168).

Die Verallgemeinerung der Struktur von (4.7)

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{1}{\eta_i} \left\langle \frac{f}{D_0} \right\rangle^m \quad (4.8)$$

wird Fließregel vom PERZYNA-Typ genannt und wird in dieser Form in vielen Veröffentlichungen, die auf einer Fließbedingung beruhen, referenziert. Der Parameter  $D_0$  regularisiert die Funktion der Fließfläche im Spannungsraum  $f$ .

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D \right\| - (y_0 + y) \quad (4.9)$$

Die Gleichung (4.9) als verallgemeinerte Darstellung für die Überspannung enthält die inneren Variablen des *Backstress*-Tensors  $\mathbf{X}$  für die kinematische Verfestigung und der Fließspannung  $y$  für die isotrope Verfestigung. Die konstante (Anfangs-)Fließspannung  $y_0$  ist ein Materialparameter. Die Definition der Überspannung besitzt somit dieselbe Struktur wie die übliche Fließbedingung der geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität, die ebenfalls beide genannten Verfestigungsarten berücksichtigt.

Wie Krempl herausstellt, ist die Theorie von Perzyna keine reine Überspannungstheorie, da für die Ausrichtung der inelastischen Dehnungen die Normalenhypothese der klassischen Fließfläche, also der Spannungsdeviator  $\boldsymbol{\sigma}^D$ , herangezogen wird. Aufgrund der vorgenommenen additiven Zerlegung des Verzerrungstensors kann Perzynas Theorie jedoch bereits den „vereinigten“ (*unified*) Theorien zugeordnet werden, die keine separierten Modellierungsansätze für Relaxation bzw. Kriechen in die konstitutiven Gleichungen integrieren.

Demzufolge ist auch die Publikation von Chaboche, 1986, die sich vornehmlich mit zyklischer Plastizität auseinandersetzt, in diesen Kontext einzuordnen. Die Einführung eines viskoplastischen Potenzials nach

$$\Omega = \frac{D}{n+1} \left\langle \frac{\sqrt{3/2} \left\| \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D \right\| - (y_0 + y)}{D} \right\rangle^{n+1} \quad (4.10)$$

verwendet zudem eine skalare Spannungsgröße  $D$ , die als *drag stress* bezeichnet wird und deren Entwicklung das isotrope Verfestigungsverhalten wie auch die Größe  $y$  beeinflusst. Der Begriff *drag* ist mikromechanisch auf die Bewegung von Versetzungsformationen durch ein viskoses Medium bzw. Grundmaterial zurückzuführen und stammt ursprünglich aus dem Forschungsbereich der Fluidmechanik. Ein Verweis auf die Versetzungsbewegungen in Metallen bei hohen Dehnraten findet sich bereits bei Kumar und Kumble, 1969.

Mit der Normalenhypothese als die Grundlage für eine assoziierte Fließregel wird bei Chaboche die Entwicklungsgleichung für den inelastischen Verzerrungstensor

abgeleitet

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \mathbf{n} \quad (4.11)$$

$$\text{mit } \dot{p} = \left\langle \frac{\sqrt{3/2} \|\sigma^D - \mathbf{X}^D\| - (y_0 + y)}{D} \right\rangle^n \quad (4.12)$$

$$\text{und } \mathbf{n} = \frac{\sigma^D - \mathbf{X}^D}{\|\sigma^D - \mathbf{X}^D\|} . \quad (4.13)$$

Die verwendete Entwicklungsgleichung für den Tensor der Rückspannungen folgen einem nichtlinearen Ansatz, der unabhängig von Chaboche bereits durch Armstrong und Frederick, 2007, (Erstveröffentlichung 1966) veröffentlicht wurde. Die schematischen Darstellung für den einachsigen Lastfall der Abb. 2.9 bzw. 4.12 veranschaulichen die Entwicklung der inneren Variablen  $\mathbf{X}$  und  $y$ .

Die geschwindigkeitsunabhängige Plastizität wird somit als Grenzfall der Viskoelastizität aufgefasst, indem die Größe<sup>55</sup>  $\dot{p}$  in den plastischen Multiplikator  $\lambda$  übergeht und über die Konsistenzbedingungen (oder auch KUHN-TUCKER-Bedingungen) bestimmt wird (siehe hierzu Haupt, 2002; J. C. Simo und Hughes, 1998).

Von den anderen verfolgten Ansätzen, die in Krempl, 1987, qualitativ begutachtet werden, seien noch die Modellierungen von Bodner und Partom, 1975, und Yao und Krempl, 1985, erwähnt, da sie ohne die Formulierung einer Fließbedingung auskommen.

Bei Bodner und Partom wird eine Koaxialität von inelastischer Dehnungsgeschwindigkeit und dem Spannungsdeviator angesetzt

$$\dot{\epsilon}^i = \lambda \sigma^D \quad \text{mit} \quad D_2^p = \lambda^2 J_2^{\sigma^D} . \quad (4.14)$$

Die Entwicklungsgleichung für  $D_2^p$  besitzt einen stark nichtlinearen Charakter

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[ - \left( \frac{Z^2}{3J_2^{\sigma^D}} \right)^n \right] \quad \text{mit} \quad Z = Z(W_p) \quad (4.15)$$

und wurde zunächst lediglich mit einem Ansatz für isotrope Verfestigung versehen und als Funktion der inelastischen Arbeit dargestellt, was in Krempl und Kallianpur, 1984, für unterschiedliche metallische Legierungen auf der Grundlage experimenteller Ergebnisse als ungeeignet eingeschätzt wird. Insbesondere Bodner hält jedoch an dieser Modellierungsmöglichkeit fest und stellt in Chan, Bodner und Lindholm, 1988, Erweiterungen hinsichtlich einer richtungsabhängigen Verfestigung (*directional hardening*) vor. Die kinematische Verfestigung wird somit nicht mit dem

<sup>55</sup>In Chaboche, 1989 wird  $\dot{p}$  als *modulus of the [visco]plastic strain rate* bezeichnet.

Tensor der Rückspannungen abgebildet, so dass die Ausrichtung des inelastischen Verzerrungstensors zum Spannungstensor erhalten bleibt.

Im Unterschied zum obigen Ansatz kommt bei Yao und Krempl, 1985, der Spannungstensor im Gleichgewichtszustand  $\sigma_{eq}$  zum Tragen.<sup>56</sup> Der Kern des Fließgesetzes lautet dann

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D - \sigma_{eq}^D}{\Gamma} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{3}{2} (\sigma^D - \sigma_{eq}^D) (\sigma^D - \sigma_{eq}^D) \quad (4.16)$$

$$\dot{p} = \frac{\Gamma}{Ek(\Gamma)} \quad . \quad (4.17)$$

Die Überspannung als treibende Größe für inelastische Deformationen wird somit über die Differenz vom aktuellen Spannungstensor und dem zugehörigen Spannungstensor im Gleichgewichtszustand definiert. Die Größe  $\sigma_{eq}$  unterliegt einer Entwicklung, die mit weiteren inneren Variablen für die Verfestigung verknüpft ist. Die Sensitivität des Materialmodells hinsichtlich einer Dominanz von plastischer oder viskoser Deformation kann über eine Potenzfunktion adaptiert werden. Im Zuge von Krempl und Khan, 2003, wurde diese Herangehensweise auf die Besonderheiten von Polymerwerkstoffen abgestimmt.

Ein weiterer Überblicksartikel zum Stand der viskoplastischen Modellierungsansätze wurde wenige Jahre später durch Chaboche, 1989, vorgelegt, in dem eine hierarchische Vorgehensweise je nach Anwendungsbereich (Belastungsart, Umgebungstemperatur, etc.) vorgeschlagen wird und weist somit gleichzeitig die Leistungsfähigkeit der verfolgten Konzepte im Sinne einer phänomenologischen Kontinuumsmechanik mit der Verwendung innerer Variablen nach. Das hierarchische Modell umfasst die Forschungstätigkeit von einem Zeitraum von mehr als einem Jahrzehnt und beinhaltet die kinematische und isotrope Verfestigung unter Berücksichtigung von Erholungsvorgängen (*time-recovery*) sowie das Erinnerungsvermögen an maximale plastische Dehnungsbereiche (*strain memory effect*).

Einerseits findet der Modellvergleich qualitativ über die Betrachtung von Grenzfällen statt, indem die Struktur einer Formulierung für bestimmte Parameterkonstellationen in einer andere Formulierung übergeht. Andererseits wird der quantitative Effekt im Vergleich zu ratenunabhängiger Plastizität bzw. gegensätzlich im Bereich großer Dehnraten von  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  bis  $1 \text{ s}^{-1}$  untersucht.

Neben den bereits in Krempl, 1987, beleuchteten Modellen werden zudem ein Zwei-Flächen-Plastizitätsmodell für den Anteil aus der kinematischen Verfestigung, ein Modell ohne rein elastische Deformationsanteile nach Walker (1981) (s. a. dessen

<sup>56</sup>Die Definition dieses Spannungstensors wird in Haupt, 2002, Definition 6.1 auf S.260, gegeben:

During the course of a strain-controlled process of relaxation a temporally constant state of stress is reached asymptotically, representing a *state of equilibrium* in the material. This state of stress is called *equilibrium stress*.

Als Symbol wird nachfolgend  $\sigma_{eq}$  verwendet.

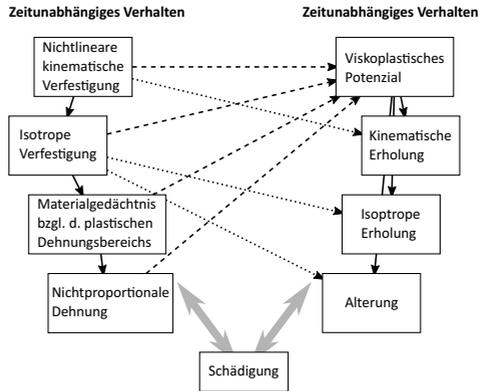


Abb. 4.11: Hierarchische Modellbildung nach Chaboche, 1989

Weiterentwicklung für stationäre Kriechprozesse in Freed und Walker, 1993, als primäre Referenz) sowie die endochrone Theorie für Plastizität und Viskoplastizität, deren Ausgangspunkt die Veröffentlichungen von Valanis, 1971a; Valanis, 1971b, bilden, in die Analyse aufgenommen und in Relation zum hierarchischen Modellaufbau von Chaboche gesetzt. Die benannten Theorien finden in folgenden Publikationen ihre Fortführung, wobei unter anderen eine endochrone Modellierung für Polymerwerkstoffe in Verbindung mit rheologischen Netzwerken in Kästner u. a., 2012, zu nennen ist.

Vervollständigt werden die jeweiligen Modelle durch kompakte (meist lineare) gewöhnliche Differentialgleichungen als Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen. Die thermodynamische Konsistenz der beschriebenen Materialmodelle wurde nur vereinzelt in den bisher aufgeführten Veröffentlichungen nachgewiesen. Auch wenn die Publikationsdaten teilweise bereits länger zurückliegen, so sind die zugehörigen Versuchsbedingungen (und hier insbesondere die Laststeuerung) auch heute noch als wesentlicher Beitrag für die Validierung des Materialmodells anzusehen.

Eine Kopplung mit der Betrachtung des Temperaturfeldes als eine weitere Größe, die zur Prüfung der Physikalität des verwendeten Materialmodells herangezogen wird, findet erst ab den 1980er Jahren statt. Im Abschnitt 4.1.2 wurde bereits Arbeiten genannt, die die Materialmodellierung auf der Basis der Kontinuumsthermomechanik angesprochen haben, deren Schwerpunkt jedoch in der Versuchsdurchführung und in der experimentellen Datenerfassung lag. Die im Folgenden zitierten Arbeiten konzentrieren sich in erster Linie auf die adäquate Materialbeschreibung unter der Maßgabe thermodynamischer Konsistenz und der Auswertung der Wärmeleitgleichung. Sofern begleitende Versuche stattgefunden haben, wurde in den meisten Fällen

die Versuchsführung und Messwerterfassung als etabliertes Verfahren vorausgesetzt.

Bergander und Luther, 1985, beziehen die Auswertung der Wärmeleitgleichung ohne die Durchführung eigener Experimente ein. Der Schwerpunkt liegt auf der numerischen Lösung des Anfangsrandwertproblems bei vereinfachten Ansätzen für das Verfestigungsverhalten im elastisch-plastischen Kontext. Für den Vergleich wurde auf die gemessenen Temperaturänderungen aus Farren und G. I. Taylor, 1925, zurückgegriffen. Ein klarer ursächlicher Zusammenhang für die starken Abweichungen zwischen Versuchs- und Modelldaten wurde nicht gegeben. Es folgte die erwähnte wesentliche Publikation von Chrysochoos, Maisonneuve u. a., 1989, mit einer kalorischen Auswertung der experimentellen Temperaturfelderermittlung durch Thermolemente bzw. IR-Thermografie. Die vorangegangenen Arbeiten von Chrysochoos wurden u.a. durch Chaboche, 1993a; Chaboche, 1993b, referenziert, während Freed, Chaboche und Walker, 1991, auf die Monographie von Bever, Holt und Titchener verweist.

Die Arbeiten von Freed, Chaboche und Walker aus den frühen 1990ern wenden die thermodynamischen Überlegungen zur Konsistenz konsequent auf ihre experimentell motivierten Materialgesetze an. Die energetischen Auswertungen sind modellbasiert und nehmen das Energieratenverhältnis  $\varphi$  (2.133) sowie die additive Zerlegung des thermodynamischen Potentials in die Diskussion auf (vgl. Abb. 4.12).

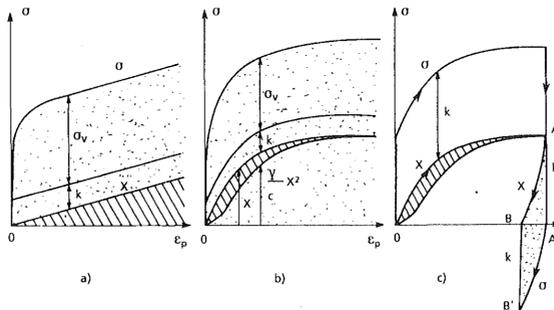


Abb. 4.12: Zuordnung von Energieanteilen nach dem Deformationsmechanismus im Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus Chaboche, 1993b<sup>57</sup>

Die in Chaboche, 1997, favorisierte Formulierung mittels Dissipationspotenzialen zeigt die Verallgemeinerungsfähigkeit der Kontinuumsmechanik für den Fall der quasistatischen und dynamischen Materialerholung. Chaboche spricht hier von Überlagerung<sup>58</sup> und verweist im Formalismus der freien HELMHOLTZ-Energie auf die

<sup>57</sup>Die Fließspannung  $y$  wird in dieser Abbildung mit  $k$  bezeichnet.

<sup>58</sup>„In fact, it is demonstrated that superposing several non-linear kinematic hardening and static recovery rules allows to model a viscoelastic behavior.“(Chaboche, 1997)

notwendige Konvexitätseigenschaft der Potenziale. Dieser generalisierende Ansatz wird sowohl für Metalle als auch glasfaserverstärkte Kunststoffe angewandt. In den präsentierten Modell- und Versuchsdaten findet eine Kopplung mit dem Temperaturfeld nicht statt. Abb. 4.12 zeigt mit den gepunkteten Flächen die Arbeitsanteile auf, die als Wärme dissipiert werden, während die schraffierten Flächen die gespeicherte Energie aus der kinematischen Verfestigung kennzeichnen. Das linke Diagramm entspricht einem linearen Verfestigungsansatz. Die Sättigungseigenschaft des nichtlinearen kinematischen Verfestigungsmodells ist sowohl im ratenabhängigen (*mittig*) als auch für das ratenunabhängige Modell (*rechts*) mit Lastumkehr zu erkennen.

Den Begriff der dynamischen Fließfläche prägen in diesem Zusammenhang Ristinmaa und Ottosen, 2000. Mit der additiven Zerlegung der freien HELMHOLTZ-Energie werden thermodynamische Kräfte und konjugierte Flüsse definiert, die als Produkte in der Dissipationsungleichung auftreten. Die Autoren benennen das Dissipationspotenzial der ratenunabhängigen Plastizität als statische Fließfläche und im Kontrast dazu das Dissipationspotenzial der Viskoplastizität als dynamische Fließfläche. Der assoziierte PERZYNA-Ansatz ist demzufolge als eine mögliche Variante zur Potenzialformulierung zu verstehen. Mögliche nicht-assozierte Potenziale folgen dem Prinzip der maximalen inelastischen Dissipation und enthalten den PERZYNA-Typ als Sonderfall. Eine ausführliche Diskussion zu zugehörigen Annahmen und zur mathematischen Umsetzung wird in Ottosen und Ristinmaa, 2005, gegeben.

In denselben Zeitraum der Veröffentlichungen von Chaboche fallen die Arbeiten von Schapery, 1997; Schapery, 1999, die ausgehend von der freien GIBBS-Energie das analytische Gerüst bereitstellen. Schapery motiviert sein Vorgehen mit Blick auf die überwiegend experimentellen Befunde an Polymerwerkstoffen und betont die Integration von inneren Variablen zur Beschreibung des Schädigungsverhaltens. Die Wärmeleitgleichung und die Erfassung der Temperaturänderung wird auch hier in die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems nicht einbezogen.

Deseri und Mares, 2000, nähern sich der Modellbildung für viskoplastisches Materialverhalten im Rahmen der thermodynamischen Konsistenz mit Mitteln der mathematischen Analysis. Konkret bedeutet dies die Verwendung einer Straffunktion auf das Prinzip der maximalen inelastischen Dissipation. Der weitere Kern des Ansatzes ist die Aufspaltung der Spannungsantwort in einen ratenunabhängigen und einen ratenabhängigen Anteil. Die ratenunabhängige Antwort ist mit der Gleichgewichtshysterese (vgl. Abb. 2.3) verbunden, wohingegen der ratenabhängige Anteil alleinig durch die Überspannung bestimmt wird. Der implizierte Relaxationsvorgang wird über ein einfaches Differentialgleichungssystem in Analogie zum KELVIN-VOIGT-Modell abgebildet und zieht hier Parallelen zum Ansatz von Haupt, 2002, Abschnitt 13.4.4, als auch zu Chaboche, 1997. Die isotherme Relaxation in Verbindung mit der Definition des Gleichgewichtszustands eines Materials wurde bereits in Olszak und Perzyrna, 1969, erwähnt.

In Hodowany u. a., 2000; Rosakis u. a., 2000, wurden Metalllegierungen in Zug- und Druckversuche bei stark variierender Dehnrates experimentell und analytisch

untersucht. Das viskoplastische Materialgesetz beinhaltet den PERZYNA-Ansatz, kinematisches Verfestigungsverhalten und die thermische Entfestigung. Im Konzept der infinitesimalen Theorie werden plastische Dehnraten von bis zu  $3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  untersucht. Die extrem kurzen Messintervalle (*Split-Hopkinson pressure bar*) wurden näherungsweise als adiabate Vorgänge behandelt und die mit IR-Thermografie gemessenen Temperaturänderungen von ca. 30 K für eine Aluminiumlegierung in guter Genauigkeit berechnet. Das verwendete Materialmodell wurde anhand deutlich geringerer Dehnraten validiert und der inelastische Wärmeanteil  $\beta$  nach (4.2) zur Beurteilung der Dynamik des Materialmodells herangezogen.

Die Forschungsgruppe um H. Egner widmet sich seit geraumer Zeit der Analyse von Konstruktionswerkstoffen mittels der Kontinuumsmechanik. Ein grundlegender theoretischer Artikel aus 2012 beschäftigt sich mit der phänomenologischen Beschreibung von Metalllegierungen bei zyklischer Last auf der Basis experimenteller Beobachtungen. Die Entwicklung der stabilisierten Lastzyklen in dehnungsgesteuerten Versuchen wird mit der Temperaturabhängigkeit von Fließkurven in Verbindung gebracht und auf der Ebene mikrostruktureller Veränderungen argumentiert. Die im Konzept infinitesimaler Deformation betrachteten Deformationsmechanismen werden mit einem Schädigungstensor 2. Ordnung (s. Murakami, 2012, Kap. 2) gekoppelt, was einerseits das plastische Verhalten mit dem zugehörigen Verfestigungsverhalten einschließt und andererseits auch für die thermischen Deformationen zu entsprechenden Entwicklungsgleichungen führt. Die vollständige Kopplung aller Effekte führt auf eine komplexe Wärmeleitgleichung, die auch durch die Einbeziehung von richtungsabhängigem Verhalten eine Vielzahl an zu ermittelnden Materialparametern enthält. Für die Dissipationspotenziale wird ausschließlich die nicht-assozierte Form favorisiert.

In Fortführung des beschriebenen Konzeptes wurde in niedrigzyklischen Versuchen die Entwicklung der Hysteresen für einen hochfesten, hitzebeständigen Stahl sowohl experimentell als auch im Modell für einachsige Wechselbeanspruchungen untersucht (W. Egner und H. Egner, 2016).

Detailliertere Untersuchungen an Vergütungs- bzw. Edeltählen (*P91 steel*, *316L stainless steel*) wurden von der Arbeitsgruppe in Sulich u. a., 2017; Ryś und H. Egner, 2019; Mroziński, H. Egner und Piotrowski, 2019, publiziert, wobei im Rahmen des bereitgestellten theoretischen Fundaments unterschiedliche Aspekte wie niedrigzyklische Belastungen und kryogene oder erhöhte Temperaturen betont wurden.

Die Signifikanz des Zuwuchsverhältnisses einzelner Energieanteile in der Materialcharakterisierung beleuchten die Arbeiten von W. Oliferuk *et al.* auf dem Gebiet der experimentellen Analyse und der zugehörigen Modellierung. Erste Arbeiten hierzu erschienen bereits in den 1980er u. a. durch die grundlegenden Erkenntnisse von Bever, Holt und Titchener, 1973, und Chrysochoos, Maisonneuve u. a., 1989, motiviert. Die Entwicklung des Verhältnisses von Energieraten zur plastischen Spannungsleistung über dem Lastpfad erlangt in der Bewertung der Deformationsvorgänge eine zentrale

Bedeutung. Mikroskopische Aufnahmen weisen Versetzungsbewegungen und deren Entwicklung (Oliferuk, Świątnicki und Grabski, 1993) und den Korngrößeneinfluss (Oliferuk, Świątnicki und Grabski, 1995), in einem austenitischen Stahl nach. Die energetische Diskussion wurde durch den Einsatz der IR-Thermografie bereits mit Mróz und Oliferuk, 2002, untersetzt. Im Jahr 2004 wurden zwei Arbeiten zum

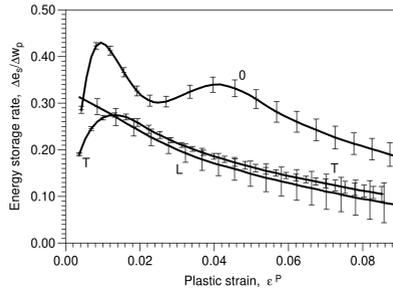


Abb. 4.13: ETR (Zuwuchsform) über der plastischen Dehnung – Proben „O“ ohne Vorlast und vorbelastete Proben „L“ (parallel zur Lastrichtung) bzw. „T“ (senkrecht zur Lastrichtung) [entnommen aus Oliferuk und Maj, 2004]

Einfluss einer Vorverformung von  $\varepsilon^p = 0.068$  im einachsigen Zugversuch bei einer konstanten Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\varepsilon} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  veröffentlicht. Das Verhältnis der Zuwächse aus gespeicherter Energie zur plastischen Spannungsleistung wird über der plastischen Dehnung abgebildet. Es offenbart deutliche Unterschiede hinsichtlich der Vorlast und der Probenausrichtung (vgl. Abb. 4.13). Ähnliche Charakteristiken ziehen in Oliferuk und Maj, 2007, eine Verbindung zur Entwicklung der Mikrostruktur durch die Identifizierung von Scherbändern, Zwillingen u.a. und werden mit Bildern aus der Transmissionselektronenmikroskopie belegt.

In der Folge werden den experimentellen Befunden analytische Methoden der Kontinuumsthermomechanik mit stark vereinfachenden Annahmen an die Seite gestellt (Oliferuk, Maj, Litwinko u. a., 2012). Die Variation der Dehnungsgeschwindigkeit über  $\mathcal{O}(10^{-4} \text{ s}^{-1})$  bis hin zu  $\mathcal{O}(10^{-1} \text{ s}^{-1})$  für Metalle zeigt einen wesentlichen Effekt in der Temperaturentwicklung sowohl unter- als auch oberhalb der Fließgrenze.

Vertieft wird die Anwendung des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Oliferuk und Raniecki, 2018, worin unter den hinzugezogenen Erkenntnissen aus Oliferuk und Maj, 2009, ein Parameter als innere Variablen postuliert wird, der eine Zuordnung zu einer homogenen bzw. nicht homogenen Deformation im einachsigen Zugversuch zulässt. Heterogene Dehnungsfelder resultieren aus der statistischen Gleichverteilung der Ausrichtung der Körner im realen metallischen Gefüge und bilden die Ursache für die Entstehung von Versetzungen im Bereich der

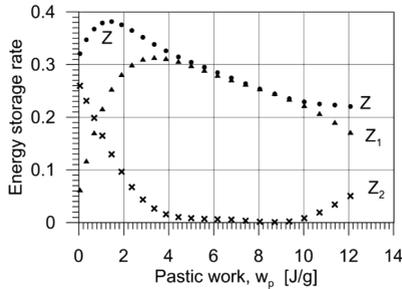


Abb. 4.14: Energieratenverhältnis  $Z$  über der plastischen Arbeit mit der additiven Zerlegung auf der Basis mikrostruktureller Entwicklung ( $Z_1$  nicht homogene und  $Z_2$  homogene Deformation) [entnommen aus Oliferuk und Raniecki, 2018]

Korn Grenzen, um geometrische Inkompatibilitäten auszugleichen. Eine energetische Abschätzung kann hierfür in der klassischen Spannungs-Dehnungs-Charakteristik gefunden werden, deren Anteil kleiner als die gesamte gespeicherte Energie ist. Betrachtet man die zugehörigen, konsistent abgeleiteten Energieraten wird deutlich, dass der ergänzende Anteil aus einer homogenen Deformation gemäß einer statistischen Gleichverteilung von Versetzung im Ausgangszustand angenommen werden kann. Hieraus lassen sich wenigstens zwei (gekoppelte) Parameter definieren, die nicht aus einem angesetzten Materialgesetz entstammen, sondern vielmehr ein zugehöriges Materialgesetz motivieren können.

Die zugehörige Messmethodik verwendet das JOULE-LENZ-Gesetz (auch als *Joule heating* bekannt), um die Wärmemenge infolge Dissipation quantitativ zu ermitteln, und setzt zugleich Infrarotmesstechnik für die Überwachung eines glatten Temperaturverlaufs ein. Im Gegensatz dazu kann die Infrarotmesstechnik ebenso für die Temperaturmessung bei lokalen Dehnungsüberhöhungen Verwendung finden (Oliferuk, Maj und Zembrzycki, 2015). Es wird zudem gezeigt, dass die lokalisierte Auswertung der energetischen Bilanzgleichungen in einem zyklischen Lastregime einen Indikator für das plastische Instabilitätskriterium darstellt. Die Energiespeicherungsfähigkeit kommt an den Orten der plastischen Dehnungslokalisierung zum Erliegen und führt zum Versagen der Probe (Grodzki u. a., 2021).

Wesentliche Beiträge zur rechentechnischen Lösung von Anfangsrandwertproblemen inelastischer Deformationen insbesondere für finite Deformationen sind in den Arbeiten J. Simo, R. Taylor und Pister, 1985; J. C. Simo und Hughes, 1998, zu finden. Betrachtungen zur Dissipation werden in den genannten Publikationen lediglich gestreift und in späteren Artikeln u.a. mit Miehe fortgeführt und umfassend behandelt. Die nachfolgend zitierten Arbeiten basieren auf der multiplikativen Zer-

legung des Deformationsgradiententensors unter der gedanklichen Einführung von Zwischenkonfigurationen (vgl. Abb. 2.6). Die komplexen Simulationsverfahren zur finiten Plastizität und Viskoplastizität als gekoppelte thermomechanische Probleme werden Ende der 1990er auf der Modellebene diskutiert. Eine der ersten quantitativen Analysen der Thermoviskoplastizität ohne Verfestigungsverhalten wird durch Reese, 1998, veröffentlicht und ist durch Umformvorgänge motiviert. Die Modellstudie in Dettmer und Reese, 2004, bezieht die kinematische Verfestigung vom ARMSTRONG-FREDERICK-Typ ein und weist die Erfüllung der Dissipationsungleichung nach. Sowohl Håkansson, Wallin und Ristinmaa, 2005, als auch Ristinmaa, Wallin und Ottosen, 2007, beschäftigen sich mit dem Verfestigungsverhalten bei Eigenerwärmung durch dissipative Vorgänge in der Thermoplastizität. Håkansson, Wallin und Ristinmaa verwenden die freie HELMHOLTZ-Energie und ein nicht-assoziertes Dissipationspotenzial um den Effekt der Eigenerwärmung an zweidimensionalen, akademischen Problemen unter adiabaten thermischen Randbedingungen zu zeigen. Ristinmaa, Wallin und Ottosen greifen auf experimentelle Ergebnisse aus Oliferuk, Świątnicki und Grabski, 1993; Oliferuk, Maj und Raniecki, 2004, zurück und vergleichen zwei Modelle auf der Basis eines assoziierten bzw. nicht-assozierten Dissipationspotenzials. Als charakterisierende Zustandsgrößen dienen die Spannungs-Dehnungs-Kurve und das komplementäre Energietransformationsverhältnis.

Ein flexible numerische Implementationsstrategie für die Thermoplastizität finiter Deformationen ist in Mosler und O. Bruhns, 2010, dargelegt. Die Variationsformulierung erlaubt die effiziente Kombination verschiedener Ansätze hinsichtlich des Dissipationspotenzial und des anisotropen Verfestigungsverhaltens für das vollständige dreidimensionale Kontinuum. Das Konvergenzverhalten wird anhand verschiedener Iterationsverfahren beurteilt. Der energetischen Auswertung im thermomechanisch gekoppelten Problem widmen sich Bartels u. a., 2015. Die Autoren konstatieren eine Überbewertung der Temperaturentwicklung für große Deformationsgradienten. Als Modellansatz wird in die additive Zerlegung der freien HELMHOLTZ-Energie zugehörige Gewichtsfaktoren vom Typ eines QUINNEY-TAYLOR-Faktors eingeführt, die den Umwandlungsanteil in Dissipation kontrollieren. In Konsequenz entspricht dieses Vorgehen der Einführung eines zusätzlichen Materialparameter. Eine physikalische Interpretation dieser Gewichtsfaktoren wird nicht vorgenommen, führt jedoch letztendlich zu einer Möglichkeit das Modell sehr genau an Versuchsergebnisse anzupassen (hier entsprechend an die Versuchsdaten aus Hodowany u. a., 2000). Die Idee derartiger Gewichtsfaktoren wurde bereits in Helm, 2006; Shutov und Ihlemann, 2011, vorgeschlagen. Speziell bei Shutov und Ihlemann wurde eine Verbindung zu mikrostrukturellen Veränderungen im jeweiligen Deformationsmechanismus hergestellt. Diese nicht näher benannten Veränderungen tragen bei inelastischen Deformationen zur Zunahme freier Energie (*stored energy*) bei und verringern somit die Eigenerwärmung.

Die Arbeiten von Rose und Menzel, 2020; Rose und Menzel, 2021, bewegen sich ebenfalls im Kontext finiter Deformationen und zeichnen sich dadurch aus,

dass die Versuchsdaten mit eigenen Versuchen an Aluminiumlegierungen erzeugt wurden. Das verwendete Materialgesetz orientiert sich an Bartels u. a., 2015, mit einem nicht-assoziierten Dissipationspotenzial. Die Parameteridentifikation über einen Optimierungsalgorithmus, dessen Kern das Anfangsrandwertproblem darstellt, wird als ein Schwerpunkt behandelt. Hinsichtlich der thermischen Randbedingungen werden vereinfachende Annahmen getroffen, da die vollständige messtechnische Erfassung experimentell zu aufwändig ist. Auf die kalorische Auswertung mit Hilfe des ETR  $\varphi$  oder einer äquivalenten Größe wird hier verzichtet.

Der Einsatz der Kontinuumsthermomechanik hat universellen Charakter. Dennoch soll auf spezielle Anwendungsfälle im Zusammenhang mit der gekoppelten Modellierung bzw. dem Einsatz einer hoch auflösenden Temperaturfeldmessung hingewiesen werden. In der Dissertationsschrift Helm, 2001, wird die IR-Thermografie zur Identifikation der martensitischen Phasenumwandlung von Formgedächtnislegierungen verwendet.

In Guo u. a., 2018, wird die Temperaturentwicklung in niedrigzyklisch belasteten Elastomerproben gemessen und berechnet. Die Modellbildung erfolgt auf der Grundlage eines rheologischen Netzwerks für finite Deformationen. Aufgrund der reduzierten Wärmeleitung von der Probe zur Prüfeinrichtung sind die leicht zu implementierenden adiabaten Randbedingungen eine sehr gute Näherung in der Simulation. Die Anwendung der IR-Thermografie für Ermüdungsversuche an Elastomerproben wird in Cruanes u. a., 2019, untersucht. Hier fließt die Wärmeleitung in das begleitende Ermüdungsmodell ein, so dass der thermografische Messbereich auf die Einspannelemente der Prüfmaschine ausgedehnt wird.

Die universelle Anwendbarkeit der Kontinuumsthermomechanik zeigen die Untersuchungen an thermoplastischen Kunststoffen in Krairi, Doghri u. a., 2019; Johnsen u. a., 2019; Felder u. a., 2020. Die Belastungsszenarien erstrecken sich von einachsigen Zug- bzw. Druckversuchen und Stufenversuchen, über Relaxationsversuche bis hin zu zyklischen Versuchen mit mehreren tausend Wiederholungen. Die Modellierung erfolgt für viskoplastisches Materialverhalten mit einem assoziierten und nicht-assoziierten Dissipationspotenzial und Berücksichtigung einer Temperaturabhängigkeit der Materialparameter. Die Komplexität der gewählten Modelle ist so gewählt, dass die Materialcharakteristiken sehr genau angepasst werden können. Die Modelle sind teilweise durch die vorliegende Mikrostruktur motiviert. Die zugehörigen Materialparameter lassen in der Regel keine physikalische Interpretation hinsichtlich des Deformationsmechanismus wie bei metallischen Werkstoffen zu. Daher wurde eventuell in allen drei Arbeiten auf die energetische Beurteilung mit einer Zustandsgröße wie dem ETR  $\varphi$  verzichtet.

In diesem Zusammenhang seien Arbeiten erwähnt, die kristallografische Erkenntnisse der Metallkunde in die Kontinuumsthermomechanik integrieren. Neff, 2003, integriert die Korngrenzenrelaxation über eine viskoelastische Rotation von Körnern infolge innerer Reibung an den Korngrenzen. Dazu wird ein Potenzial für innere Reibung postuliert. Die Vereinfachung kleiner Deformationsgradienten für den

elastischen Deformationsanteil unter Beibehaltung finiter Deformationen für die inelastischen Deformationen ist ebenso für oben genannte Modellierungsstrategien von Interesse.

Håkansson, Wallin und Ristinmaa, 2008, begibt sich mit Evolutionsgleichungen für die plastische Dehnrate, die kollinear zum vorliegenden Gleitsystem (bestehend aus Gleitebene und zugehöriger Normale) ist, in die Kristallplastizität. Der Anteil der freien Energie aus plastischer Deformation folgt einem quadratischen Ansatz für die inneren Variablen und zugehörigen Freiwerte als positive Materialparameter. Als Zustandsgrößen werden die Temperaturentwicklung bei adiabaten Randbedingungen und die Texturentwicklung auf der Modellebene ausgewertet.

Adiabate Randbedingungen werden bei Experimenten mit dem *Split-Hopkinson pressure bar* nahezu erreicht. J. Nieto-Fuentes, Rittel und Osovski, 2018; J. C. Nieto-Fuentes u. a., 2019, operieren mit Energieausdrücken für einzelne Versetzung bzw. dem Versetzungswiderstand und nutzen als innere Variable die totale Versetzungsdichte. Die Messwerte und die errechneten Werte für das komplementäre ETR  $\beta$  gemäß (4.2) haben dieselbe Größenordnung und weisen speziell am Beginn der plastischen Deformation große qualitative Unterschiede auf. Die errechneten Dichteverteilungen werden zudem mit Bildern aus der Transmissionselektronenmikroskopie korreliert.

### 4.3 Konsequenzen

Der experimentellen Analyse mit Hilfe der IR-Thermografie substantielle Erkenntnisse hinsichtlich des Materialverhaltens hinzuzufügen, ist mit der Auswahl der wesentlichen Beiträge der letzten Jahrzehnte sowie mit den aktuellen Forschungsgegenständen der letzten Jahre verdeutlicht worden. Außerdem wurde die grundlegenden Prinzipien und Annahmen sowie die Anwendungsbreite in der Modellbildung im Rahmen der Kontinuumsthermomechanik dargelegt.

Die bildgebenden, berührungslosen Messverfahren zeichnen sich durch einen Zugriff auf die gesamte Probenoberfläche und die Einspannelemente aus und treten dabei in geringe Wechselwirkung mit der mechanischen Prüfeinrichtung. Der technische Fortschritt in der IR-Thermografie lässt sich aus Sicht der Anwendung in der Materialcharakterisierung an der Entwicklung der räumlichen und zeitlichen Auflösungsparameter korrelieren.

Die digitale Bildkorrelation ist ein etabliertes und effizientes Verfahren, um aus den akkumulierten Bilddaten das Verschiebungsfeld mit der erforderlichen Genauigkeit für die Modellbildung zu ermitteln. Dieses Verfahren auf die Thermogramme zu überführen, wurde in wenigen Publikation auf Kosten eines hohen Aufwands in der Probenpreparation umgesetzt. Der Versuchsaufbau mit zwei Kamerasystemen im sichtbaren und infraroten Spektralbereich steht dem Anspruch einer möglichst einfachen Handhabung für ingenieurtechnische Fragestellungen entgegen und erhöht den Aufwand in der Auswertung durch große Datenmengen.

Der Überwachung, der Kontrolle und/oder der Regelung der thermischen Randbedingungen wird mit wenigen Ausnahmen im Versuchsaufbau eine geringe Aufmerksamkeit geschenkt. Die Realisierung adiabater Randbedingungen bei moderaten Dehnraten bedarf eines äußerst aufwendigen Versuchskonzepts und einer aufwendigen Probenvorbereitung. Die Versuchskonfigurationen mit sehr hohen Dehnraten können näherungsweise als adiabater Prozess betrachtet werden. Für Versuche mit dominierender Druckbelastung werden jedoch zumeist komplexe Wechselwirkungen der mechanischen Deformationsmechanismen hervorgerufen.

In der Ableitung von geeigneten Materialgesetzen im Rahmen der Kontinuumsmechanik entspricht die Einhaltung bzw. Prüfung der thermodynamischen Konsistenz dem aktuellen Stand der Forschung. Die Anwendungsbreite ist durch das Konzept der inneren Variablen außerordentlich groß. Die Ableitung der zugehörigen Entwicklungsgleichungen auf der Basis phänomenologischer Beobachtungen werden oftmals durch werkstoffwissenschaftliche Erkenntnisse motiviert. Fehlt diese Grundlage, werden geeignete mathematische Funktionen in die Ansätze implementiert.

Die prinzipielle Umsetzung der Modellierungsstrategie bietet viele Freiräume in der konkreten Gestaltung des Gleichungssatzes. Für den Fall der Thermoviskoelastizität müssen die Fragen nach der Verwendung einer Fließbedingung, nach der konkreten Formulierung des Fließgesetzes sowie die Frage nach der Menge der inneren Variablen beantwortet werden. Im Sinne einer Plausibilitätsprüfung des applizierten Materialgesetzes werden einfach strukturierte gewöhnliche Differentialgleichungen mit einer möglichst geringen Anzahl an Freiwerten (Materialparametern) für Sonderfälle des allgemeinen Anfangsrandwertproblems angewendet. Diese Verifikation des Ansatzes ist durch die Prüfung von Modellvorhersagen auf ausgedehnte Anwendungsbereiche zu validieren.

Neben der konventionellen Auswertung der Spannungs-Dehnungs-Kurve einachsiger Versuche existiert des Weiteren die Möglichkeit der energetischen Evaluation hinsichtlich der gespeicherten Energie. Als besonders relevante und anschauliche Größe ist das Verhältnis des spezifischen Energietransfers bzw. die Zuwachsformulierung (ETR  $\varphi$ ) entsprechend identifiziert und zumeist auf Modellebene ausgewertet worden.

Die Messung der gespeicherten Energie erfolgt in den heutigen Publikationen ausschließlich indirekt über die Ermittlung des Temperaturfeldes (Ein-Schritt-Methode nach Bever, Holt und Titchener). Für moderate Dehnungsgeschwindigkeiten vieler Konstruktionswerkstoffe liegt die Zeitskala für die Eigenerwärmung infolge dissipativer Prozesse im Material in derselben Größenordnung wie die Zeitskala für Wärmeausgleichsprozesse (z. Bsp. Wärmeleitungs- und Konvektionsvorgänge). Demzufolge spielt die Wärmeleitgleichung eine entscheidende Rolle in der quantitativen Beurteilung des Deformationsvorgangs. Betrachtet man die Materialprobe als thermodynamisch isoliert (ein geschlossenes thermodynamisches System), so ist der Informationsgehalt von ETR- bzw. Temperatur-Charakteristik identisch.

Der Validierungsprozess kann aufgrund der nichtlinearen Kopplung von mechani-

schen und thermischen Größen bei allgemein instationären Rand- und Umgebungsbedingungen außerordentlich komplex sein, dem mit einem hierarchischen Vorgehen begegnet werden kann. In Publikationen, die die Ableitung eines Materialgesetz zum Schwerpunkt haben, wird diesem Aspekt zum Teil nicht die notwendige Aufmerksamkeit geschenkt. Qualitative und quantitative Diskussionen von Sonderfällen auf der Modellebene geben wichtige Einblicke. Eine Übertragung auf die Versuchsebene zur Ermittlung realer Materialparameter ist damit nicht vorgezeichnet. Insbesondere wird in den Publikationen deutlich, dass die Wärmeleitgleichung numerisch stark vereinfacht ausgewertet wird. Die Abbildung realer Rand- und Umgebungsbedingungen ist in vielen Fällen eine ungeklärte Frage.

Die Untersuchungen bei erhöhten Umgebungstemperaturen ist prinzipiell umsetzbar. Die Beobachtbarkeit der Temperaturfeldentwicklung ist an den Einsatz einer Temperierkammer gekoppelt, die ein Beobachtungsfenster vorsieht, das durchlässig für infrarote Strahlung ist. Die Realisierung des Versuchsaufbaus bei Raumtemperatur erfordert keine zusätzlichen experimentellen Maßnahmen.

Der Kontinuumsmechanische Gleichungssatz ist für die Beschreibung großer Verschiebungen und großer Rotation angelegt. Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und die Definition geeigneter Zwischenkonfigurationen legt Art und Weise der numerischen Umsetzung nahe. Viele Phänomene im Deformationsvorgang sind bereits bei kleinen Deformationsgradienten gut zu beobachten. Aus Sicht der Realisierung des zugehörigen Simulationsalgorithmus vereinfacht sich hierfür die rechen-technische Handhabung und es verbessern sich die Stabilitätseigenschaften der verwendeten Iterationsverfahren. Das nichtlinear gekoppelte Feldproblem stellt bereits erhöhte Anforderungen für die Materialparameteridentifikation, da bei Raumtemperatur eine starke Wechselwirkung von dissipativen Prozessen mit der Wärmeleitproblematik für metallische Werkstoffe zu rechnen ist. Eine zusätzliche Verschränkung mit den Effekten großer Deformationsgradienten verkompliziert die Interpretationsfähigkeit der numerischen Ergebnisse und erhöht zudem den Aufwand in der experimentellen Umsetzung.

---

## 5 Experimentelle Untersuchungen

Das Versuchsprogramm orientiert sich an dem beschriebenen Stand der Forschung und den zugehörigen in der Literatur beschriebenen Versuchsanordnungen sowie den damit verbundenen Belastungspfaden. Die versuchstechnischen Voraussetzungen sind zudem eng an die verfügbaren mechanischen Prüfeinrichtungen gekoppelt, die mit möglichst geringer zusätzlicher technischer Ausrüstung zu versehen sind, um eine industrienaher Umsetzung der gewonnenen Erkenntnisse nicht durch einschränkende Laborbedingungen von vornherein zu behindern.

### 5.1 Prüfeinrichtung und Beobachtungseinheiten

Kern des experimentellen Aufbaus ist die servohydraulische Prüfeinrichtung mit einer Maximalkraft von 25 kN der Firma ZWICK&ROELL, die mit einer Temperierkammer für einen Temperaturbereich von  $-60$  bis  $350^{\circ}\text{C}$  ausgestattet ist. Über den zugehörigen Messrechner werden externe Messwerte, wie die lokalisierte Dehnungsmessung über ein Laserextensometer oder die lokalisierte Temperatur über ein Thermoelement direkt in die Maschinendaten des betrachteten Lastpfades eingekoppelt. Diese Messdaten werden gemäß einer praktikablen und effizienten Auswertung über die vorliegenden I/O-Schnittstellen an die zusätzlich beteiligten Messeinheiten übergeben.

Die Synchronisation der zusammenwirkenden Systeme wird über eine einfache interne Signalerzeugung der Prüfmaschine gewährleistet, indem zu ausgewählten Ereignissen im Lastpfad Markierungssignale (Rechteckpulse) im Zeitverlauf eingeblendet werden. In diesem Fall wird der Lastpfad über die flexible Zusammenschaltung von vorgefertigten Bausteinen zur Definition des Messablaufs in der Software von ZWICK&ROELL definiert. Außerdem kann ein externer Signalgenerator die Lastpfadsteuerung der Prüfmaschine und die verwendeten Messsysteme synchronisieren. Die synchronisierten Signale des Signalgenerators sind Kombinationen aus analogen und digitalen Signalen. Das analoge Signal dient mit einer Relation zu einer Regelgröße (Soll-Wert) zur Lastpfaddefinition für eine proportionale Weg- bzw. Kraftsteuerung. Für die diskrete Bildaufnahme eignet sich ein digitales Signal für die getriggerte Messwerterfassung, indem die Bildauslösung mit der fallenden oder steigenden Flanke eines Rechteckpulses initiiert wird.

Die vorgenommenen Modifikationen der Prüfeinrichtung beschränken sich im Wesentlichen auf drei Maßnahmen. Zum einen wird der Einsatz der Temperierkammer dem aktuellen Vorhaben angepasst. Zum anderen wird mit der Modifikation der Einspannsituation der Proben versucht, die Wärmeleitung mit passiven Elementen zu kontrollieren. Und des Weiteren wird geprüft, ob durch eine aktive Maßnahme die thermischen Randbedingungen nutzbringend beeinflusst werden können.

In der herkömmlichen Ausführung der Temperierkammer kann eine Beobachtung der Materialproben mit einer IR-Kamera nicht erfolgen, da das Glas der Beobachtungs-

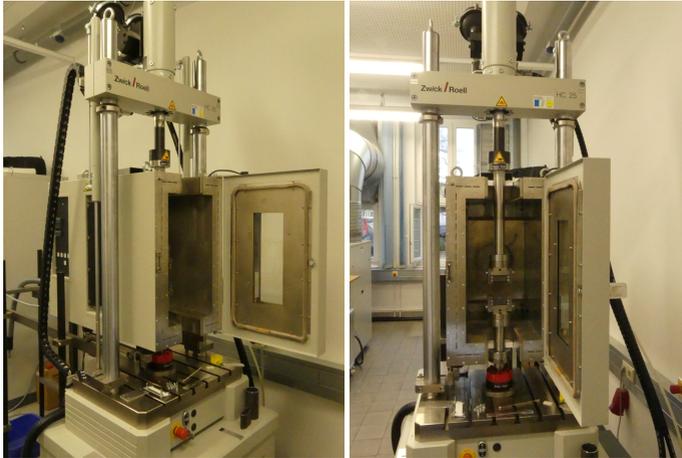


Abb. 5.1: Servohydraulische Prüfmaschine 25 kN von ZWICK&ROELL mit Temperierkammer

fenster eine Durchlässigkeit der IR-Strahlung ausschließt. Die Temperaturregelung der Umgebung ist für die Untersuchungen nicht vorgesehen. Die Kammer wird im Messablauf dennoch verwendet und geöffnet in Position gebracht, um die Konvektion an der Probenoberfläche zu minimieren. Der Konvektionseinfluss durch Luftbewegungen im Labor wird zusätzlich durch einen angepassten Verschluss mit einem Ausschnitt für das Kameraobjektiv eingeschränkt. Hinsichtlich der Verwendung eines Wärmestrahlers für die Kontrasterhöhung (Abb. 5.3 (a)) im Thermogramm wurde dieser Verschluss angepasst. Es erfolgt somit lediglich eine partielle Abschirmung der Umgebungsstrahlung.

Die Spannbackenmodifikation erlaubt eine Beeinflussung der Wärmeleitung von der Probe zu den Spannbacken. Die Verwendung von nichtmetallischen Einlegern im T-Probenhalter (Abb. 5.2) im direkten Kontakt zwischen Werkstoffprobe und Prüfmaschine beeinflusst den Wärmeübergang in Abhängigkeit der Probenform und der thermischen Eigenschaften des zu untersuchenden Materials maßgeblich.<sup>59</sup>

Die Kühlfunktion von Wasser durchströmten Zwischenelementen ober- und unterhalb der Spannelemente ermöglicht eine Kontrolle der Temperaturrandbedingungen, wenn die Temperaturänderungen infolge Eigenerwärmung stark ansteigen. Für den untersuchten Temperaturbereich konnte kein Effekt der Kühlung ermittelt werden. Der Wärmeaustausch zwischen den Kühlelementen und der massiv gestalteten Pro-

---

<sup>59</sup>Vorversuche zur Wirksamkeit beschränkten sich auf Polymerwerkstoffe, da die Festigkeitsparameter der verwendeten Einleger lediglich für kleine Kräfte geeignet sind.



Abb. 5.2: Flache Spannbacken der Prüfmaschine von ZWICK&ROELL (T-Probenhalter)

benahme findet langsamer statt als die zeitlich limitierten Versuche von wenigen Minuten. Die Möglichkeit der Randkühlung sollte für lange Versuchszeiten oder zur Erzeugung eines Temperaturgradienten im Ausgangszustand in der Versuchsplanung erhalten bleiben.

Während der Prüfung werden der Kraftverlauf über eine Kraftmessdose und die Verschiebung der Traverse durch einen Wegaufnehmer gemessen. Der gleiche Aufbau wurde auch für die Universalprüfmaschine *Inspekt Table Blue 10* von Hegewald & Peschke realisiert (Abb. 5.3 (a)), die eine maximale Kraft von 10 kN aufbringt. Eine integrierte Temperierkammer zur Konvektionsbegrenzung ist für diese Prüfmaschine nicht integriert, so dass nur eine begrenzte Einhausung im Probenbereich vorgenommen wurde.

Die flächenhafte Temperaturmessung erfolgt mit IR-Kameras der INFRA TEC GmbH. Es kamen die Modelle ImageIR 8300 und ImageIR 10300 zum Einsatz. Die wesentlichen technischen Kenngrößen sind in Tab. 5.1 zusammengefasst. Die Steuerung und Messwerterfassung werden mit einem separaten Messrechner und einer zugehörigen Firmensoftware (*IRBIS3 professional*) durchgeführt. Je nach Messaufgabe wird die IR-Kamera mit einem externen Trigger-Signal gekoppelt.

Die Ausrichtung der IR-Kamera erfolgt für mechanisch belastete Proben direkt an der Prüfeinrichtung, da die Proben reproduzierbar durch die Spannvorrichtungen fixiert werden. Die inhomogene Einstrahlung der Umgebung wird für einen ausreichenden Raumwinkel im Bereich der optischen Achse durch eine homogene Abschirmung verhindert.

Die Vorbereitung der Probenoberfläche besteht aus einem Schwärzen mittels Lackspray und einer Musterapplikation eines metallhaltigen haftenden Sprays. Das

Merkmal	Einheit	ImageIR 8300	ImageIR 10300
Spektralbereich	$\mu\text{m}$	1.5 ... 5.5	3.6 ... 4.9
Detektorformat	(px) $\times$ (px)	640 $\times$ 512	1920 $\times$ 1536
Temperaturauf $\ddot{u}$ sl $\ddot{o}$ sung bei 30°C	K	$\leq 0.025$	$\leq 0.035$
Messbereich	°C	-40 ... 1500	-40 ... 1200
IR-Bildfrequenz (Vollbild)	Hz	125	113

Tab. 5.1: Auswahl aus der technische Spezifikation der Kameramodelle

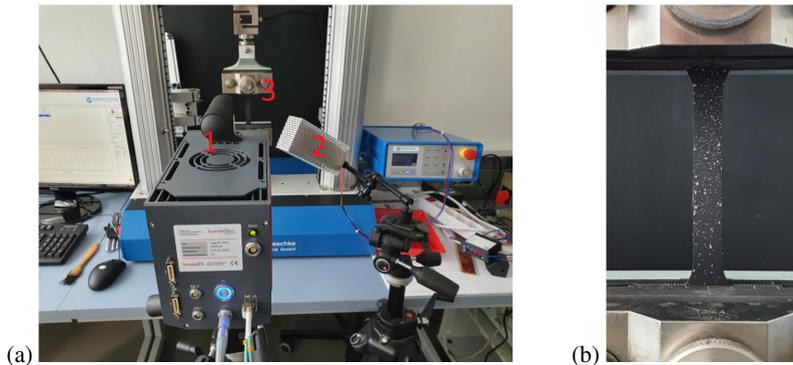


Abb. 5.3: (a) Versuchsaufbau an der *Inspekt Table Blue 10* mit Positionierung der IR-Kamera (1) und des Strahlers für die Kontrasterhöhung (2) sowie (b) eingespannter Flachprobe (3)

Muster kann mittels Schablonen als regelmäßiges Gitter oder über die zufällige Zerstäubung der Düse aufgetragen werden. Die Eigenschaften des zufälligen Musters variieren in Verteilungsdichte sowie in Größe und Form der einzelnen, kreisähnlichen Musterbestandteile. Die Beschaffenheit des Musters ist abhängig von der individuell verwendeten Sprühtechnik (Abb. 5.3 (b)).

Die flächenhafte Messung des Verschiebungs- und Verzerrungsfeldes mit dem System ARAMIS der Carl Zeiss GOM Metrology GmbH wird als Referenz- und Verifikationssystem eingesetzt und operiert im Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts. Eine gleichzeitige Messung von Temperatur und Verzerrung auf der Oberfläche der Probekörper ist aufgrund der räumlichen Anordnung im Messlabor nicht möglich. Eine gegenseitige Beeinflussung durch die aktive Beleuchtung der Probe für das Zwei-Kamera-System ARAMIS und der damit verbundenen Wärmestrahlung ist damit ausgeschlossen.

## 5.2 Probenvorbereitung für nicht-zyklische und niedrig-zyklische Versuche

Im Sinne einer Reproduzierbarkeit der Messergebnisse sind die Materialproben so vorzubereiten, dass zufällige in die Probe induzierte Effekte reduziert und/oder komplett ausgeschlossen werden. Wesentlich ist hierbei der Probenherstellungsprozess an sich. In der Regel kommen spanende Bearbeitungsverfahren zum Einsatz, die die Oberflächenbeschaffenheit der Probe und somit die Messergebnisse in zunächst nicht quantifizierbarer Weise beeinflussen. Randverfestigungen und die erzeugte Oberflächenrauigkeit sind zufällig verteilt und durch eine individuelle Mikrostruktur eines jeden Probekörpers im Ausgangszustand bestimmt.

Der Einfluss der von Probe zu Probe variierenden Eigenschaften kann durch zyklische Vorlasten bei maximalen globalen Beanspruchungen, die deutlich unterhalb der Fließgrenze liegen, beschränkt werden (Tab. 5.2). In der Literatur (z. Bsp. in Kamlah, 1994) findet man im Zusammenhang mit zyklischer Ver- bzw. Entfestigung Zyklenzahlen von 15 bis 20, die zu einer Stabilisierung der geschlossenen Spannungs-Dehnungs-Zyklen führen. Die Randeinflüsse werden zu einem großen Teil in diesen ersten Zyklen auch bei kleineren Belastungsamplituden abgebaut. Lokale Beanspruchungsüberhöhungen rufen lokal begrenzte plastische Deformationen hervor, die das Gesamtverhalten der Probe für kleine Deformationsgradienten nicht ändern. Die Eigenschaften des Randes sind dagegen für die Rissinitiierung beim Versagen der Probe von Bedeutung. Die zyklische Belastung auf niedrigem

#	Bezeichnung	Abk.	Ziel	Proben
1	Konditionierung	C0	Angleichung der Proben <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reduzierung der Effekte des Ausgangszustands</li> <li>• moderate Lastfrequenz (1 bis 10 Hz Funktion: <i>zig-zag</i> oder <i>sinusoidal</i>)</li> <li>• max. Belastungsamplitude 50 bis 80 % bzgl. der erwarteten Fließgrenze</li> </ul>	alle Proben, falls notwendig <ul style="list-style-type: none"> <li>• Flachproben Zug-Schwellbelastung</li> <li>• Rundproben Zug-Druck-Belastung</li> </ul>

Tab. 5.2: Kriterien und Durchführung der Probenkonditionierung

Beanspruchungsniveau regularisiert durch Setzungsvorgänge die Einspannsituation im verwendeten T-Probenhalter.

Um hierfür geeignete Belastungsamplituden festzulegen, kann man sich auf quasistatische Vorversuche mit einer Abschätzung der Fließgrenze abstützen. Für die Untersuchungen von Materialien mit hohen Deformationsanteilen im viskosen Be-

reich sollten diese Vorversuche mit verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten durchgeführt werden. Im Sinne einer nachhaltigen und ressourcenschonenden Versuchsplanung sollten die Dehnungen in den Vorversuchen eine Grenze von 5 % nicht überschreiten, so dass diese Proben für anders geartete Vorversuche weiterhin einsetzbar sind.

### 5.3 Versuche zur experimentellen Methodik für die thermomechanische Analyse

Mit den IR-Kameramodellen der INFRA TEC GmbH kann das Temperaturfeld mit wenigen hundertstel Kelvin aufgelöst werden. Die quantitative Analyse der vorgestellten Messmethodik fügt dem eigentlichen Messverfahren Parameter hinzu, die die Genauigkeit beeinflussen können. Offensichtlich hat die Art und die Qualität der Bemusterung der Oberfläche einen Einfluss auf die erforderliche Emissionskorrektur. Außerdem spielen in der zugehörigen numerischen Analyse weitere Einflussparameter zur vollständigen Erfassung des gekoppelten Wärmeleitproblems eine wesentliche Rolle. Hierzu werden einfache technische Maßnahmen für die Kontrolle der thermischen Randbedingung beleuchtet, die die Dynamik in der Wärmeleitgleichung beeinflussen. Insbesondere wurde mit den methodischen Vorversuchen abgeschätzt, welche quantitative und qualitative Wechselwirkung mit den thermomechanischen Deformationsprozessen in der Werkstoffprobe bestehen. Die Art der Vorversuche ist in Tab. 5.3 zusammengestellt.

Die Markierung der geschwärzten Probenoberfläche mit einem regelmäßigen Raster einfacher Geometrien, wie die typischen Formen für optische Marken, verursacht eine größere Probenvorbereitungszeit gegenüber der zufälligen Verteilung eines Speckle-Musters. Nachteilig bei der Applikation des Speckle-Musters wirkt sich aus, dass keine Reproduzierbarkeit in der Qualität der Bemusterung sichergestellt werden kann. Der wesentliche Einfluss ist die Erfahrung der Person, die diesen Vorgang häufig genug wiederholt hat. Im Verlauf der Methodenverbesserung ist es notwendig, die Einsatzgrenzen des Verfahrens in Bezug auf die Lastgeschwindigkeit und Kontrastveränderungen während des Versuchs auszuloten.

Eine möglichst vollständige Einhausung der Probe behindert die Konvektionswirkung des umgebenden Fluids und ist gegenüber zufälligen Luftbewegungen in der Laborumgebung zu bevorzugen. Eine aktive, dynamische Steuerung der thermischen Randbedingungen wäre mit numerischen Simulationen zu untersuchen und deren praktische Umsetzbarkeit ist zu prüfen. Beides ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Mit der Variante der Einlegelemente wird die Wärmeleitung von der Probe in die Spannzeuge behindert. Die herkömmlichen Stahl-Spannbacken sind als austauschbare Einlegelemente konzipiert. Mit den zu erwartenden Kraftmaxima für unterschiedliche Materialklassen wurden additive gefertigte Spannbacken auf Polymerbasis (PEAK) gefertigt. Die Flächenpressung der Einlegelemente ist limitiert, so dass nur bestimmte Probenformen und Materialklassen mit den Polymer-Einlegelementen geprüft werden

#	Bezeichnung	Abk.	Ziel	Proben
1	Art der Bemusterung	$IP_{ve/vp}$	Themen <ul style="list-style-type: none"> <li>• Emissionskorrektur</li> <li>• Bewegungskompensation</li> </ul>	Flach- und Rundproben
2	(Teil-)Verschluss der Temperierkammer von ZWICK&ROELL	$ZC_{ve/vp}$	Kontrolle der äußeren Einflüsse im Experiment <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kamerahandhabung durch Ausschnitt</li> <li>• Konvektionseinfluss</li> </ul>	Flach- und/oder Rundproben
3	Einleger für die Spannelemente von ZWICK&ROELL	$ZI_{ve}$	Reduktionseffekt des Wärmeflusses <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eignung für zyklische Versuche mit längeren Versuchszeiten → Wärmeakkumulation</li> </ul>	Flach- und/oder Rundproben
4	Kühlelemente oberhalb der Einspannung von ZWICK&ROELL	$ZE_{ve}$	Stationärer Zustand im Eispannbereich <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eignung für zyklische Versuche mit längeren Versuchszeiten</li> <li>• wesentliche Randbedn. für das Wärmeleitproblem</li> </ul>	Flach- und/oder Rundproben

Tab. 5.3: Klassifizierung der Versuche hinsichtlich der Temperaturmessung und der Realisationsmöglichkeiten thermischer Randbedingungen

können. Aufgrund der reduzierten Wärmeleitfähigkeit der Einlegelemente kann ein Versuch mit hinreichend kurzem Ablauf annähernd als Versuch mit adiabaten Randbedingungen angesehen werden. In der Versuchsplanung sind realistische Versuchszeiten anhand von Simulationsdaten zu bestätigen.

Die Variante der gezielten Kühlung der Spannelemente erfolgte über ein einfaches Kühlsystem im Kraftfluss. Die ober- und unterhalb der Spannzeugen integrierten Kühlelemente werden ohne Temperaturregelung von Leitungswasser durchflossen. Es wird von einer konstanten Wassertemperatur über den Versuchszeitraum ausgegangen. Idealerweise bedeutet dies für das gekoppelte Anfangsrandwertproblem, dass stationäre wesentliche Randbedingung für das Wärmeleitproblem vereinbart werden. Die gewünschte Wirkung konnte mit dem offenen Kühlsystem, den zugehörigen Wärmemengen der untersuchten Proben und den weiteren Einflüssen aus der Umgebung nicht erreicht werden.

## 5.4 Viskoelastizität

Das Versuchsdesign zur Ermittlung viskoelastischer Materialparameter zeichnet sich durch die Beanspruchungen der Materialprobe deutlich unterhalb der Fließgrenze

aus. Die zu wählenden Belastungsamplituden sollen in einem Bereich liegen, die zu einer Beanspruchung zwischen 50 % und 80 % der Fließgrenze führen. Je größer die Amplitude, desto größer ist die eingeschlossene Fläche in der stabilisierten geschlossenen Spannungs-Dehnungs-Kurve. Die erwartete Temperaturänderung pro Zyklus liegt in der Größenordnung der Temporaturauflösungsfähigkeit der IR-Kamera. Die akkumulierte Wärmemenge durch  $n$ -fache Wiederholung führt zu einer Temperaturänderung der Probe, die dann erheblich größer als die zugehörige Temporaturauflösungsfähigkeit des eingesetzten Kameramodells ist.

Erste Abschätzungen unterschiedlicher Materialmodelle ergaben eine anzustrebende Zyklenzahl  $\tilde{n}$  für den Viskoelastizitätsbereich von

$$\tilde{n} \approx k 10^3 \quad \text{mit} \quad k \in [1, 2, \dots, 9] \quad .$$

Der tatsächlich gewählte Wert von  $k$  ist abhängig von der untersuchten Materialklasse.

Aus thermografischer Sicht kann die Auflösung des IR-Systems deutlich erhöht werden, weil die Antwortfrequenz identisch der Belastungsfrequenz ist und somit das Messrauschen nahezu vollständig über eine Frequenzanalyse eliminiert werden kann. Die geeignete Frequenz der Belastung liegt im typischen Einsatzbereich des Prüfsystems bei ca. 1 bis 10 Hz. Die Aufnahme der Thermogramme muss nach dem Abtasttheorem größer sein als das Doppelte der Belastungsfrequenz, um das Signal der Systemantwort eindeutig rekonstruieren zu können.

$$n \approx k 10^2 \quad \text{mit} \quad k \in [1, 2, \dots, 9]$$

Die erwartete stationäre Antwort einer konstanten Temperaturänderung bei zyklischer Belastung wird experimentell bereits für metallische Werkstoffe (Kupfer, Aluminium, Stahl) nach wenigen hundert Lastzyklen erreicht. Die weitere Versuchsdefinition greift in der experimentellen Analyse auf diesen Befund zurück.

### 5.5 Viskoplastizität

In der dehnratenabhängigen Versuchsführung werden für den Belastungspfad Dehnratensprünge von zwei Größenordnungen angestrebt. Für die möglichst geringe Abweichung vom Ist- zum Soll-Wert in der verformungsgesteuerten Lastpfaddefinition ist der PID-Regler der servohydraulischen Prüfmaschine entsprechend der Kombination aus Materialeigenschaften und Probengeometrie für den Dehnratenübergang abzustimmen.

Ebenso ist die Bildrate der IR-Kamera dem Lastpfad anzupassen. Für die getriggerte Bildaufnahme in diesem komplexen Belastungsfall spricht der Unterschied von zwei Größenordnungen in der Dehnrate. Die komfortabelste Lösung in der Kopplung von Prüf- und Messeinheit wäre ein flexibel zu programmierender Frequenzgenerator innerhalb der Regelungstechnik der Prüfmaschine. In den Versuchen mit großer

Dehnrate wurden die Daten hochfrequent für den gesamten Versuchszeitraum akquiriert und nachträglich für entsprechende Zeitbereiche ausgedünnt. Limitierende Faktoren sind hier die Speichergeschwindigkeit auf der Festplatte des Messrechners und die erforderlichen Rechenzeiten im Postprocessing der Kameradaten.

Die Bildrate der IR-Kamera kann erhöht werden, wenn nur Ausschnitte der gesamt verfügbaren Bildgröße als relevant definiert werden. Aufgrund einer kleineren Bildgröße des einzelnen Thermogramms wird zudem der Speicherbedarf für die Messung mit mehreren tausend Einzelbildern signifikant reduziert.

## 6 Experimentelle und numerische Analyse

### 6.1 Numerische Simulation zum Zugversuch an Edelstahl XCrNi18.9

Die Qualität der experimentellen Daten sind von verwendeten Messmethoden und -strategien abhängig. Die Gruppe um Chrysochoos verwendet die IR-Thermografie seit Ende des letzten Jahrhunderts für die Materialcharakterisierung. In Veröffentlichungen zur kalorischen Auswertung von Edelstahlproben wurde die Wärmeentwicklung auf zwei unterschiedliche Weisen ermittelt. Die Kalorimetrie und die IR-Thermografie führten zu übereinstimmenden Ergebnissen. Sie dienen und dienen hier als externe Referenz für die Abbildungsfähigkeit der in Abschnitt 2.8 beschriebenen Materialmodelle. Die konkreten Daten der Spannungs-Dehnungs-Kurve und der Temperaturentwicklung für den einfachen Zugversuch wurden in der Literatur u.a. von Chaboche, 1993b, bzw. Kamlah und Haupt, 1998, in der Analyse eines viskoplastischen bzw. elastoplastischen Materialgesetzes herangezogen.

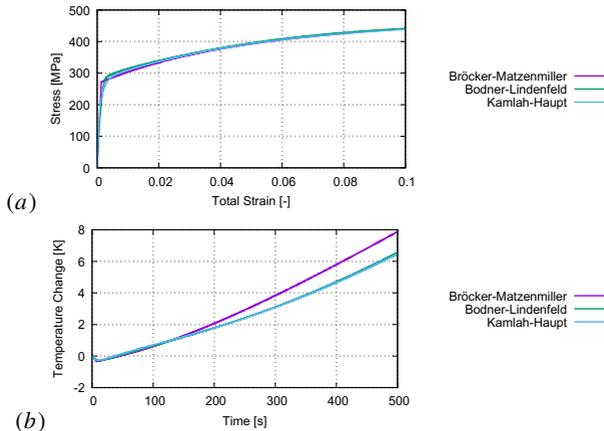


Abb. 6.1: Spannungs-Dehnungs-Kurve (a) und Temperaturentwicklung<sup>60</sup> (b) im Zugversuch (XCrNi18.9 Stahl)

Die Diagramme in Abb. 6.1 und 6.2 des einfachen Zugversuchs beinhalten drei unterschiedliche Modellantworten. Die Parameter für das Bröcker-Matzenmiller-Modell (BM-Modell) ist für geschwindigkeitsunabhängiges Verhalten angepasst ( $\eta = 1.0$  s). Die Modellerweiterung mit dem viskoelastischen Subnetzwerk als geschwindigkeits-

<sup>60</sup>Bei konstanter Dehnungsgeschwindigkeit ist die Zeitskala mit der Dehnrate zu multiplizieren, um die Dehnungsskala zu erhalten.

abhängiges Verhalten unterhalb der Fließgrenze wurde im Modellvergleich nicht berücksichtigt. Hingegen kann man im Bodner-Lindenfeld-Modell (BL-Modell) die viskosen Deformationsanteile nicht entkoppeln, weshalb diese Modellantwort geschwindigkeitsabhängig bleibt. Für das BL-Modell wurde eine quasistationäre Dehnrate ( $\dot{\epsilon} = 0.0002 \text{ s}^{-1}$ ) in der dehnungsgesteuerten Berechnung angenommen.

Als Grundlage für die Parameterbestimmung der viskoplastischen Materialmodelle (BM- und BL-Modell) dienten die numerischen Werte der Spannungs-Dehnungs-Kurve des KH-Modells, da ein vollständiger Parametersatz für dieses Material publiziert wurde (Kamlah und Haupt, 1998). Die verwendeten Parametersätze der viskoplastischen Materialmodelle können die Spannungs-Dehnungs-Kurven hinreichend genau abbilden. Geringere Unterschiede sind im Bereich der Fließgrenze zu erkennen. Der Spannungsanstieg im Verfestigungsbereich wird durch alle Modelle gleichwertig wiedergegeben (Abb. 6.1 (a)).

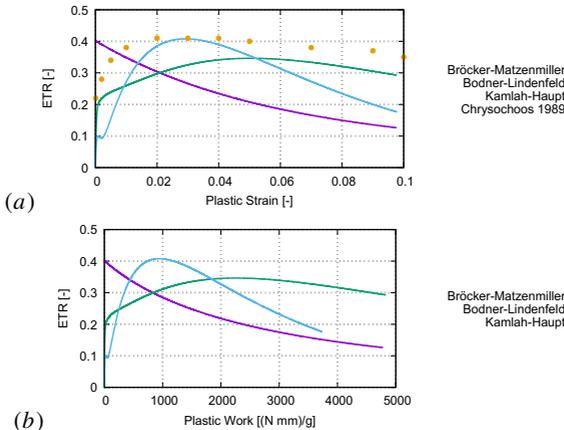


Abb. 6.2: ETR  $\varphi_{\text{int}}$  über der plastischen Dehnung (a) bzw. der spezifischen plastischen Arbeit (b) im Zugversuch (XCrNi18.9 Stahl)

Zur Diskussion stehen im Folgenden die Modellantworten der anderen zentralen Zustandsgrößen – die Temperaturentwicklung und das ETR – zur Beurteilung des thermomechanischen Verhaltens. Eine gravierende Modellabweichung ist in den Kurven für die Temperaturentwicklung deutlich. Für den Vergleich wurden die thermischen Randbedingungen in den Modellrechnungen vereinfachend als adiabatisch angenommen, da keine experimentellen Daten zur Temperaturentwicklung vorliegen. Das BM-Modell weicht um  $\approx 1.7 \text{ K}$  am Lastpfadende von den beiden anderen Modellformulierungen ab, wohingegen der thermoelastische Effekt von allen Modellen genau abgebildet wird (Abb. 6.1 (b)).

Das ETR  $\varphi_{\text{int}}$  in Abb. 6.2 weist sowohl quantitativ als auch qualitativ stärkere Abweichungen auf und ist daher geeigneter für die generelle Modellbewertung. Die experimentellen Daten liegen lediglich in Abhängigkeit der plastischen Dehnung vor, die aufgrund des geringen elastischen Dehnungsanteils als Lastparameter für die Interpretation nutzbar ist. In Abb. 6.2 (a) wird das Maximum von  $\varphi_{\text{int}}$  mit seinem Betrag im Belastungsverlauf am besten durch das KH-Modell repräsentiert. Defizite bestehen dagegen zu Beginn der plastischen Deformation und im Bereich des einsetzenden Sättigungsverhaltens. Das BL-Modell zeigt eine ähnliche Qualität wie der nichtlineare Verlauf des KH-Modell. Es trifft jedoch nicht den Betrag und die Lage im Lastpfad. Das BM-Modell ist ohne den viskosen Deformationsanteil nicht geeignet, das erwartete Verhalten abzubilden. In der Darstellung des ETR über der plastischen Arbeit (Abb. 6.2 (b)) ist herauszustellen, dass der Endwert der plastischen Arbeit im KH-Modell etwa ein Viertel geringer ausfällt als bei den viskoplastischen Materialmodellen.

Die numerische Untersuchung illustriert, dass mit der alleinigen Verwendung der Spannungs-Dehnungs-Kurve die korrekte Abbildung der physikalischen Vorgänge im Sinne eines vollständig gekoppelten thermomechanischen Ansatzes nicht gewährleistet wird. Selbst bei der Übereinstimmung beider Charakteristiken für das KH- und BL-Modell der Abb. 6.1 treten bei der energetischen Betrachtung deutliche Unterschiede zu Tage, die auf getroffene Modellannahmen zurückzuführen sind.

Die Anpassung des BM- und insbesondere des BL-Modells kann möglicherweise im stark nichtlinearen Problem der Parameteridentifikation verbessert werden, da die Temperaturänderungscharakteristik im Anpassungsprozess nicht berücksichtigt wurde. Als Kriterium kann die Lage und die Größe des Maximums im ETR-Verlauf dienen. Der zugehörige Abfall des ETR im Sättigungsbereich wird durch das BL-Modell am besten beschrieben. Die mathematische Struktur des BM-Modells lässt für den Sonderfall des elastoplastischen Verhaltens ( $\eta = 1.0s$ ) das Maximum bei Einsetzen der plastischen Deformation zu.

Im Kontext einer rein experimentellen Arbeit wird das ETR in der Regel gegenüber der aufgebrachten Arbeit aufgetragen. Eine Übertragung auf die plastische Dehnung ist aufgrund der additiven Zerlegung des Dehnungstensors in Verbindung mit dem linear elastischen Deformationsanteil einfach zu realisieren. Zwischen der Skale der plastischen Dehnung und der spezifischen plastischen Arbeit besteht keine lineare Abbildung, da in der Berechnung der spezifischen plastischen Arbeit die Dynamik des Verfestigungsverhaltens enthalten ist. Dies wird unter anderem durch die Verschiebung der Maximallage und die unterschiedliche Lage der Endwerte bei gleichem Dehnungsendwert für alle Modellrechnungen deutlich (vgl. Abb. 6.2 (a) und (b)). Es ist festzustellen, dass die numerische Auswertung für beide Skalen (plastische Dehnung und plastische Arbeit) Modellparameter benötigt und nicht auf reinen Messungen beruht.

## 6.2 Komplexe Zugversuche an Kupferflachproben

Ausgangspunkt für die eigenen experimentellen Untersuchungen waren geschwärtzte Flachzugproben aus Kupfer mit einer Wandstärke von 1.5 mm (Norm: DIN 50125 - Form Type H). Die Zugversuche wurden bei Raumtemperatur ausgeführt. Als IR-Kamerasystem wurde die ImageIR 8300 der INFRA TEC GmbH eingesetzt. Die interaktive Auswertung der Thermografiedaten bestand aus der Mittelwertbildung an einfachen geometrischen Objekten auf der Probenoberfläche. Zusätzlich wurden Temperaturprofile parallel und quer zur Belastungsrichtung ausgewertet.

### 6.2.1 Änderung der Deformationsgeschwindigkeit im Zugversuch

Die Lasteinleitung wurde auf einer servohydraulischen Prüfmaschine der Firma ZWICK&ROELL realisiert. Auf den Einsatz thermischer Entkopplungselemente zu den Spannsystemen wurde in den Basisuntersuchungen verzichtet. Mit der Variation der Dehnrate in einfachen Zugversuchen wurde das geschwindigkeitsabhängige Verhalten des Materials untersucht und nachgewiesen. Für die Parameteridentifikation viskoelastischer Materialmodelle wurde jedoch ein Lastpfad mit veränderlicher Dehnrate gewählt. Das aufgebrachte Lastregime wurde auf der Basis der Versuchsführung

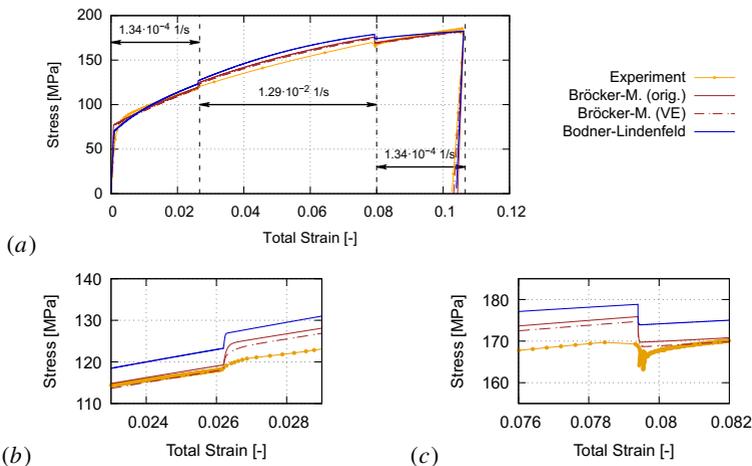


Abb. 6.3: Spannungs-Dehnungs-Kurven für einen Zugversuch mit zwei Dehnraten und anschließender Entlastung (Flachzugproben Kupfer) – (a) voller Lastpfad, (b) Übergang  $\dot{\varepsilon}_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}_2$ , (c) Übergang  $\dot{\varepsilon}_2 \rightarrow \dot{\varepsilon}_1$

von Bodner und Partom, 1975, definiert. Die Änderung in der Deformationsgeschwin-

digkeit umfasst näherungsweise zwei Größenordnungen. Der Versuch beginnt mit einer Dehnrate von  $1.34 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  bis ein Dehnungswert von 0.026 erreicht ist. Anschließend wird die Dehnrate auf  $1.29 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  erhöht bis eine Gesamtdehnung von 0.079 erreicht ist. Es folgt eine weitere Lastzunahme unter erst genannter geringer Dehnrate zu einem Maximum der aufgebrachtten Dehnung von 0.106 und eine sich anschließende Entlastung bei einer Geschwindigkeit von  $-6.80 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  (Abb. 6.3).

Die Daten in den folgenden drei Diagrammen (Abb. 6.3 bis 6.5) zeigen die Messwerte und die berechneten Werte nach dem ursprünglichen BM-Modell, dem erweiterten BM-Modell und dem BL-Modell für Kupferproben. Die Erweiterung des Bröcker-Matzenmiller-Modells enthält zunächst nur ein Maxwell-Element im viskoelastischen Subnetzwerk.

Die Wärmeverluste infolge der Temperaturentwicklung wurden näherungsweise mit einem linearen Glied in der Wärmeleitgleichung beschrieben. Der hierfür notwendige zusätzliche Parameter beschreibt den Wärmeverlust durch Spannzeuge, Konvektion und andere Umgebungseinflüsse in integrativer Weise. Diese Herangehensweise wurde von Chrysochoos, Maisonneuve u. a., 1989, vorgeschlagen und bildet die realen Verhältnisse in einer ersten Approximationsstufe gut ab.

Die Parameterbestimmung für die drei Materialmodelle erfolgte mit Blick auf die Spannungs-Dehnungs- sowie die Temperaturänderungs-Zeit-Charakteristik. Gemäß der separierten Betrachtung thermodynamisch zulässiger Prozesse werden die zum thermoelastischen Effekt zugehörigen Parameter über die Kurvenabschnitte mit dominierender elastischer Deformation angepasst. Hierfür eignet sich insbesondere der Entlastungsvorgang am Versuchsende. Die für die Anpassung beider Charakteristiken sensitivsten Parameter positionieren den Übergang vom Bereich der dominierend elastischen Deformationen zum Bereich mit vorherrschender inelastischer Deformation. Dies gilt gleichermaßen für Materialgesetze mit bzw. ohne Definition einer Fließgrenze. Im Fall des ursprünglichen und des erweiterten BM-Modells ist dies die Fließgrenze, während die Zuordnung im BL-Modell weniger eindeutig ausfällt. Eine besondere Sensitivität im BL-Modell erlangen die Parameter  $D_0$  und der Exponent  $n$  in (2.209). Die gewählten Startwerte für den Optimierungsprozess zur Bestimmung des BL-Parameters  $D_0$  und  $n$  orientieren sich an bestehenden Literaturangaben (Bodner und Lindenfeld, 1995). Das mögliche Änderungsintervall dieser beiden Parameter wird dann für die Anpassung des Verfestigungsverhaltens (vgl. (2.212), (2.213)) sowie für den korrespondierenden Anteil an gespeicherter Energie (vgl. (2.219)) stark eingeschränkt und somit die Positionierung des Übergangs in engen Grenzen fixiert.

Im Ergebnis sind die quantitativen Abweichungen in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (Abb. 6.3 (a)) gering bis moderat. Die Nichtlinearität im Übergang von elastisch dominierter zu viskoplastisch dominierter Deformation ist in den Modellen im Vergleich zu den experimentellen Daten weniger ausgedehnt. Das globale Verfestigungsverhalten wird durch den Anstieg im viskoplastisch dominier-

ten Deformationsbereich von allen drei Modellen gut abgebildet. Die einsetzende Sättigung im BM-Modell ist im letzten Belastungsdrittel geringer ausgeprägt als im BL-Modell. Der Spannungssprung am Anfang und Ende des Bereiches der hohen Dehnrate wird durch alle drei Modelle zu stark betont (vgl. Abb. 6.3 (b) bzw. (c)). Eine Ursache ist die Verwendung idealer Belastungsverläufe anstatt der experimentellen Daten für die deformationsgesteuerte Simulation. Die Auswertung der Maschinendaten bestätigte die konstanten Dehnraten in jedem Abschnitt des Lastpfades. Die Auswertung der experimentellen Daten für die wahre Spannung berücksichtigt eine Querschnittsreduktion, während die numerische Berechnung hier im Spannungs-Dehnungs-Raum verbleibt und somit eine punktuelle Auswertung ohne Berücksichtigung der tatsächlichen Abmessungen der Probe widerspiegelt und den Gesamtdehnungswert bis zu 0.1 rechtfertigt.

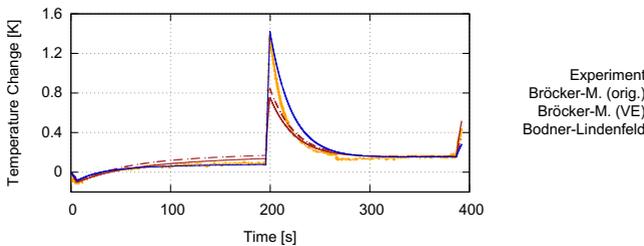


Abb. 6.4: Temperaturentwicklung für einen Zugversuch mit zwei Dehnraten und anschließender Entlastung (Flachzugproben Kupfer)

In Abb. 6.4 wird die Temperaturentwicklung für den gesamten Versuchszeitraum dargestellt. Alle Kurven weisen zu Beginn eine Phase der thermoelastischen Abkühlung auf. Der Wendepunkt bei ca. 10 s lokalisiert näherungsweise das Einsetzen plastischer Deformation, die mit innerer Dissipation verbunden ist. Bis zum Ende der ersten Belastungsphase mit geringer Dehnrate hat sich ein Gleichgewicht zwischen Wärmezufuhr und -abfuhr eingestellt. Die Lastphase mit deutlich erhöhter Dehnrate lässt die Temperaturänderung innerhalb von ca. 4 s auf 1.4 K ansteigen. Es folgt die nächste Lastphase, die durch den Ausgleichsvorgang mit der Umgebung dominiert wird. Der thermoelastische Effekt ist dann wieder am Versuchsende durch den Entlastungsvorgang deutlich sichtbar.

Das allgemeine Verhalten kann durch alle Modelle qualitativ abgebildet werden. Das BL-Modell ist jedoch deutlich besser geeignet sich dem Maximum der Temperaturänderung anzunähern. Aufschluss gibt das ETR  $\varphi$  in Zuwuchsformulierung in Abb. 6.5. Das Maximum des ETR des ursprünglichen BM-Modells ist signifikant größer als das der anderen beiden Modelle und beginnt mit deutlich größeren Zuwüchsen für den gespeicherten Energieanteil. Die viskosen Deformationsanteile

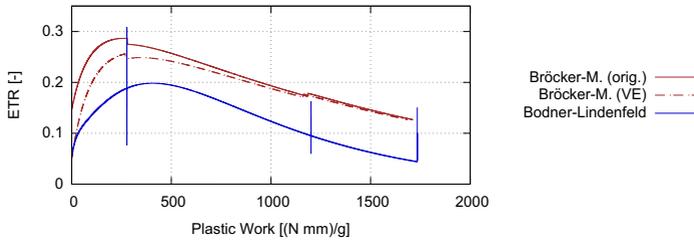


Abb. 6.5: ETR-plastische Arbeit-Kurven für einen Zugversuch mit zwei Dehnraten und anschließender Entlastung (Flachzugproben Kupfer)

werden erst nach dem Erreichen der Fließgrenze generiert und entwickeln bei der kleineren Dehnrates im ersten Drittel des Lastpfades eine geringere Dynamik. Die scharfen Übergänge in den Dehnrates des Belastungspfad es äußern sich für das ursprüngliche und erweiterte BM-Modell (rote Kurven) in Sprüngen im ETR-Verlauf (sprunghafter Abfall bzw. Anstieg bei Steigerung bzw. Minderung der Dehnrates). Die gesteigerte Dehnrates hat für den ETR-Verlauf des ursprünglichen BM-Modells im Vergleich zum erweiterten Modell eine größere Wirkung. Man erkennt einen etwas größeren Sprung in der durchgezogenen roten Kurve gegenüber der roten Strich-Punkt-Kurve im Punkt der Dehnratessteigerung bei ca. 250 (Nmm)/g.

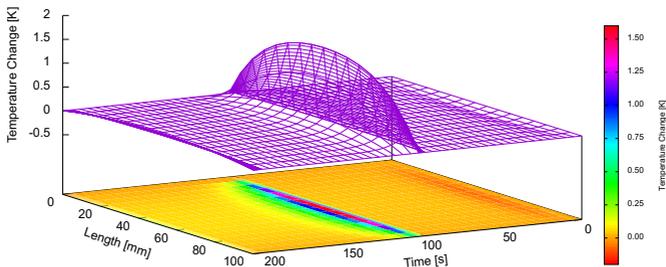


Abb. 6.6: Entwicklung des Temperaturänderungsprofils über der Zeit in zugehöriger FE-Simulation

Im Gegensatz dazu sind die Auswirkungen der Unstetigkeiten im Verlauf des BL-Modells zeitlich stark limitiert. Die entstehende elastische Überspannung bei plötzlichem Dehnratesanstieg wird innerhalb kurzer Zeit durch eine viskoplastische Deformation abgebaut, so dass die Kurve keine Sprünge mit länger anhaltender Wirkung aufweist. Die Unmittelbarkeit in der Modellantwort ist mit der gewählten

mathematischen Struktur der kinetischen Gleichung für  $D_2^p$  (2.209) verknüpft. Der Maximalwert des ETR ist mit ca. 0.2 geringer gegenüber beiden BM-Modellen und wird erst zu einem späteren Zeitpunkt erreicht. Die Endwerte der plastischen Arbeit sind für alle drei Modelle in etwa gleichwertig.

Die numerische Simulation erfolgte mit einem idealisierten Dehnungs-Zeit-Verlauf und nicht mit den Daten der Prüfmaschine, die mit Abweichungen aus den Eigenschaften der Regelung behaftet sind. Insbesondere die starken ETR-Schwankungen für das BL-Modell zu den Zeitpunkten der Dehnratenübergänge würden mit den Maschinendaten gemindert werden.

Dass die blaue Kurve des BL-Modells für den gesamten viskoplastischen Bereich und insbesondere für die erhöhte Dehnrate deutlich unterhalb der BM-Modelle liegt, erklärt zudem die wesentlich bessere Annäherung im Temperaturänderungsverlauf. Die Erweiterung des BM-Modells mit viskoelastischem Subnetzwerk entfaltet ihren Einfluss zu Beginn und schwindet zum Ende des Lastpfades. Die Überspannung am Dämpferelement des viskoelastischen Subnetzwerks ist abgebaut und die damit verbundene Energie dissipiert.

Die hohe Wärmeleitfähigkeit des Kupfers und der gute Wärmeübergang auf die Spannelemente der Prüfmaschine zeigen in der thermografischen Auswertung ein stetiges Temperaturprofil mit einem globalen Minimum in der thermoelastischen Anfangsphase der Belastung. Mit zunehmender Dissipation und einhergehender Probenerwärmung findet der Umschlag zu einem globalen Maximum statt (vgl. Abb. A.1). Für symmetrische Randbedingungen zeigt die Abb. 6.6 die Entwicklung des Temperaturänderungsprofils über der Zeit als Ergebnis einer FE-Simulation mit ABAQUS. Die untersuchten Materialmodelle wurden als UMAT im thermomechanischen Kontext implementiert. Die ermittelten Parametersätze für die drei Modelle sind im Anhang A.2 ausgewiesen.

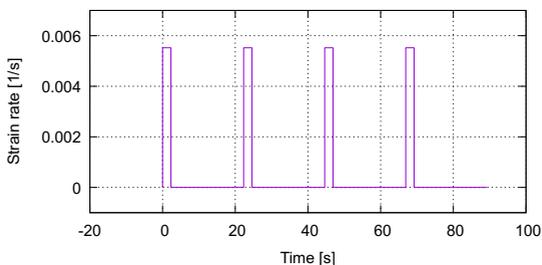


Abb. 6.7: Verlauf der Dehnungsgeschwindigkeit über der Versuchszeit gemäß Steuerung der Prüfmaschine für den Multirelaxationstest

### 6.2.2 Multirelaxationstest

Der Multirelaxationstest an Kupferproben gleicher Konfiguration dient der Validierung der etablierten Materialparameter. Hierzu wurden verformungsgesteuerte Versuche mit Haltezeiten von 20 s entsprechend der Abb. 6.7 durchgeführt. Der reale Zylinderweg der servohydraulischen Prüfmaschine ist leichten Abweichungen aufgrund der Regelungstechnik unterworfen. Das leichte Überschwingen der Verschiebungszielgröße kann in der Auswertung und Simulation vernachlässigt werden.

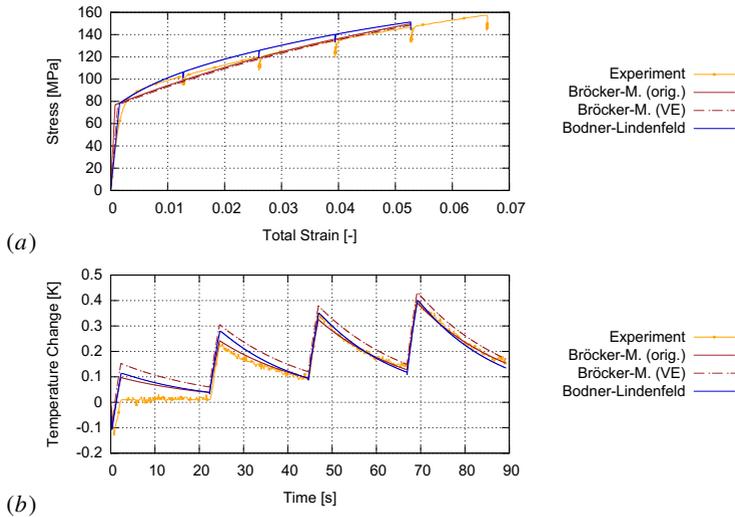


Abb. 6.8: (a) Spannungs-Dehnungs- und (b) Temperaturänderungs-Charakteristik für Kupferflachproben im Multirelaxationstest

Die numerische Simulation dieses Experiments erfolgte mit den ermittelten Materialparametersätzen für das ursprüngliche und erweiterte BM-Modell sowie für das BL-Modell aus Abschnitt 6.2.1. Abb. 6.8 zeigt in beiden Charakteristiken die größten quantitativen Unterschiede in der ersten Belastungsphase. Die Spannungsrelaxation in den Haltephasen wird am besten durch das BL-Modell wiedergegeben, auch wenn ein Spannungsabfall von ca. 8 % wie im Experiment nicht erreicht wird. Eine Zunahme des Spannungsabfalls von aufeinanderfolgenden Haltezeiten wird in der numerischen Analyse nicht beobachtet. Das viskoelastische Subnetzwerk im erweiterten BM-Modell zeigt hinsichtlich des Spannungsabfalls während der Haltezeiten keine Wirkung. Das Dämpfungselement im viskoelastischen Subnetzwerk dominiert

den Relaxationsvorgang des Modells. Die abgeleitete Relaxationszeit  $\tau_1$  aus den Parametern des verwendeten Maxwell-Elements stimmt in seiner Größenordnung nicht mit der relevanten Zeitskala der Haltezeit überein. Die Anpassung der Parameter wurde bzgl. des komplexen Zugversuchs aus Abschnitt 6.2.1 durchgeführt.

Die Abweichung der Temperaturänderung in der ersten Belastungsstufe kann über veränderte thermische Umgebungsbedingungen erklärt werden. Eine umfassende Rekonstruktion vor allem der Konvektionsbedingungen in den ersten Sekunden des Versuchs ist nicht mehr möglich.

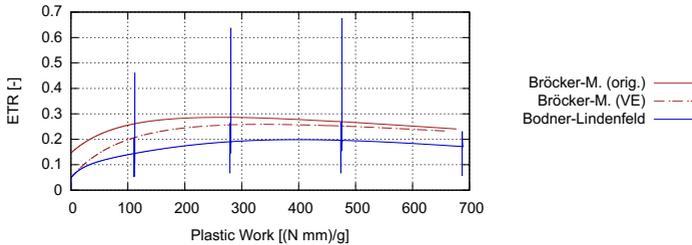


Abb. 6.9: ETR  $\varphi$  für den Multirelaxationstest der Kupferflachproben

Hinsichtlich des Transformationsverhältnisses der Energiezuwächse in Abb. 6.9 sei vermerkt, dass die Unstetigkeiten im BL-Modell wiederholt an den Zeitpunkten der sprunghaften Dehnratenänderung auftreten. Über die Größenordnung der Sprünge der blauen Kurve kann keine qualitative Aussage getroffen werden. In der verformungsgesteuerten numerischen Simulation wurde erneut mit einem idealisierten Dehnungs-Zeit-Verlauf und nicht mit den Maschinendaten gearbeitet. Die Höhe der Sprünge ist zudem von numerischer Natur, da hier das gewählte Zeitinkrement und das Abbruchkriterium des verwendeten Iterationsverfahrens mit dem konvergierten Ergebnis zusammenhängt.

### 6.2.3 Stufentest

Der Stufentest an Kupferproben gleicher Konfiguration dient ebenfalls der Validierung der etablierten Materialparameter. In den verformungsgesteuerten Versuchen

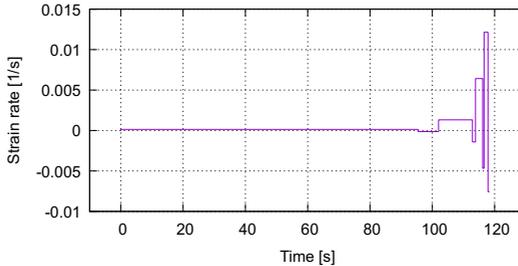


Abb. 6.10: Verlauf der Dehnungsgeschwindigkeit über der Versuchszeit gemäß Steuerung der Prüfmaschine für den Stufentest

entsprechend der Abb. 6.10 wird die Dehnrade von  $1.34 \cdot 10^{-4}$  1/s in der ersten Stufe auf  $1.21 \cdot 10^{-4}$  1/s in vier Schritten gesteigert. Getrennt werden die einzelnen Stufen durch eine teilweise Entlastung. Auch die Entlastung erfolgt verformungsgesteuert, so dass die am Ende des Entlastungsvorgangs eine Restzugbeanspruchung vorliegt. Die realen Abweichungen des Zylinderwegs der servohydraulischen Prüfmaschine vom idealen Lastpfad werden in der Simulation wiederum vernachlässigt.

Die zum Experiment zugehörigen Simulationen wurden wiederum mit den Parametersätzen aus Abschnitt 6.2.1 ausgeführt. Auch hier treten die größten Abweichungen in der ersten Belastungsstufe auf. Hinzuweisen ist auf die Wiederbelastung in den Druckbereich der letzten Entlastungsstufe (Abb. 6.11 (a)). Dies trifft insbesondere auf das erweiterte BM-Modell zu und ist wiederum auf die Reduktion auf ein Maxwell-Element im viskoelastischen Subnetzwerk zurückzuführen. In der Temperaturänderungs-Charakteristik führen die Näherungsannahmen in der Wärmeleitgleichung dazu, dass die Temperaturanstiege in der zeitlich kurzen thermoelastischen Entlastung geringer als in den Messungen ausfallen. Außerdem fällt auf, dass sich dieser Effekt insbesondere in der thermoelastischen Entlastung für das BL-Modell und dem erweiterten BM-Modell bei höheren Dehnraten verstärkt (Abb. 6.11 (b)). Die Kurvenabschnitte des Temperaturanstiegs in der Entlastung und des Temperaturabfalls in der Wiederbelastung liegen für das Messsignal nahezu übereinander. Der Vorzeichenwechsel im Lastinkrement führt in allen Modellen dazu, dass die durchgezogene und die gepunktete Linie nicht übereinander zu liegen kommen. Hier müssen insbesondere die Ansätze hinsichtlich der viskosen Effekte bei Lastumkehr überprüft werden.

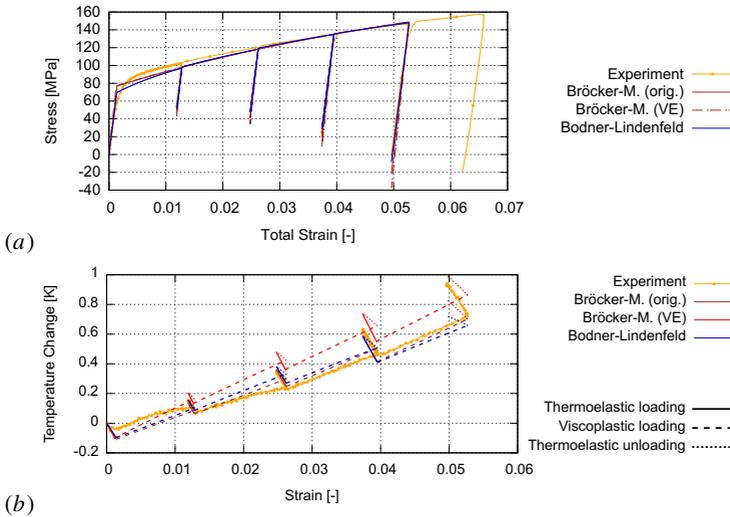


Abb. 6.11: (a) Spannungs-Dehnungs- und (b) Temperaturänderungs-Charakteristik für Kupferflachproben im Stufentest

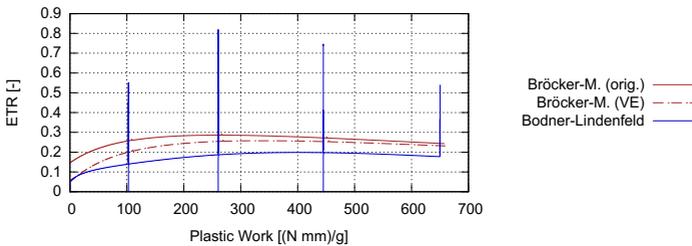


Abb. 6.12: ETR  $\varphi$  für den Stufentest der Kupferflachproben

Der ETR-Verlauf in Abb. 6.12 ähnelt dem des Multirelaxationstests und weist keine weiteren Besonderheiten auf.

Mit beiden Validierungsversuchen kann die Gültigkeit der ermittelten Parameterätze bestätigt werden. Auf bestehende Defizite wurde in der detaillierten Auswertung hingewiesen. Es kann festgehalten werden, dass insbesondere die dynamischen Vorgänge mit dem Modell nach Bodner-Lindenfeld unter dem Zusammenwirken der gemessenen Kennlinien sowie die Bewertung mittels der ETR-Charakteristik am

besten beschrieben werden. Die Dynamik zeigt sich vornehmlich in den verformungs-gesteuerten Versuchen in der sprunghaften Änderung der Dehnungsgeschwindigkeit.

### 6.3 Versuche mit Lastgeschichte

Die Anwendung des Prüfprogramms auf Proben mit Lastgeschichte beinhaltet Belastungspfade, die deutlich unterhalb einer angenommenen Fließgrenze liegen. Rein elastisches Verhalten mit adiabaten Randbedingungen bei einer homogenen Ausgangstemperatur führt zu einer homogenen Abkühlung des Probekörpers. Die anschließende Entlastung erfolgt durch Richtungsumkehr auf dem Belastungspfad und erwärmt die Probe homogen auf das Niveau der Ausgangstemperatur. Die Annahme adiabater Randbedingungen ist nur mit großem experimentellen Aufwand zu realisieren (Knysh und Korkolis, 2015). In der Regel findet keine vollständige thermische Entkopplung von der Prüfmaschine statt, so dass eine teilweise Wärmeleitung in die Probeneinspannung auch für rein elastisches Verhalten zu beobachten ist. In Abhängigkeit von der Frequenz des Lastzyklus stellt sich nach einer gewissen Anzahl von Be- und Entlastungsvorgängen ein stationärer Zustand ein.

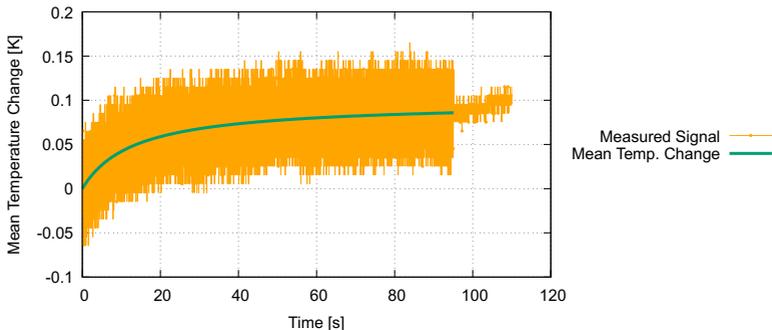


Abb. 6.13: Mittlere Temperaturänderung für 300 Zyklen Zugschwellbelastung an einer zuvor vollständig unbelasteten Kupferflachprobe

Dieses Szenario entspricht jedoch nicht den realen Beobachtungen, wie am Beispiel der Abb. 6.13 zu sehen ist. Es wird ein zyklischer Versuch im Zugschwellbereich durchgeführt, in dem ein sinusoidaler Kraft-Zeit-Verlauf die Regelgröße für die Prüfmaschine darstellt. Im Allgemeinen steigt die mittlere Temperatur im Probekörper bei einer derartigen zyklischen Beanspruchung an, ehe sich ein quasistationärer Zustand einstellt. Abb. 6.13 zeigt eine nichtlineare Änderung der mittleren Temperatur im Probenmittelpunkt (grüne Kurve) zu Beginn des zyklischen Versuchs, der bei ca. 40 s in einen linearen Anstieg übergeht. Der mittleren Temperaturände-

nung ist das rauschbehaftete Messsignal (gelb) hinterlegt. Der Temperaturanstieg resultiert aus nicht-identischen Be- und Entlastungskurven im Kraft-Weg- bzw. Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Bei konstanten Amplitudenwerten für die Kraft- und Weggrößen heißt dies, dass näherungsweise ein viskoelastischer Zustand attestiert werden kann. Mit der Zeit als Kurvenparameter für die Spannung und die Dehnung ergeben sich geschlossene Kurven im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Die messtechnische Aufgabe besteht in der Festlegung eines geeigneten Versuchsablaufs, der die beschriebenen Eigenschaften betont. Über die Analyse der Verlustarbeit in einem Zyklus<sup>61</sup> kann der Temperaturanstieg für ein Subset von Be- und Entlastungszyklen ermittelt werden.

Der Einfluss der Lastgeschichte von Konstruktionswerkstoffen drückt sich üblicherweise über die Lastwechselzahlen bei zugehöriger Beanspruchungshöhe aus. Die lokalen Inhomogenitäten auf der Skala der Mikrostruktur führen zu lokalen Spannungsüberhöhungen, die die Eigenschaften der Mikrostruktur verändern. Die Untersuchung und der einhergehende Vergleich von Proben im unbelasteten Ausgangszustand und vorbelasteten Proben (beispielsweise eine Zugschwellbelastung mit Lastwechselzahlen von  $10^6$  bei einer konstanten Amplitude, so dass  $\sigma_{max}$  ca. 80 % der Fließspannung entspricht) geht davon aus, dass sich die Mikrostruktur signifikant verändert hat und somit auch die thermomechanische Antwort in Charakterisierungsversuchen unterschiedlich ausfällt.

Die Charakterisierungsversuche sind zum einen die zyklischen Versuche mit einer Beanspruchungsamplituden unterhalb der Fließgrenze als auch die bereits beschriebenen komplexen quasistationären Zugversuche.

### 6.3.1 Vorversuche an Kupferflachproben

Die Ergebnisse zyklischer Vorversuche ist durch die mittlere Temperaturentwicklung von vorbelasteten und unbelasteten Proben in Abb. 6.14 repräsentiert. Es werden zwei Proben miteinander verglichen. Die Probe mit dem Index „h“ (*history*) ist mit einer Lastgeschichte von  $10^5$  Lastwechseln im Zugschwellbereich versehen, so dass die maximale Beanspruchung des sinusförmigen Last-Zeit-Verlaufs bei 80 % der Fließgrenze lag. Die Proben ohne Lastgeschichte haben den Index „v“ (*virgin*) erhalten.

Die Temperaturentwicklung wird in 5 Horizonten ausgewertet. Der Horizont L3 liegt in der Probenmitte, L1 am nächsten zur oberen Einspannung, L5 am nächsten zur unteren Einspannung und L2 bzw. L4 sind entsprechend dazwischen positioniert. Der Abstand benachbarter Horizonte ist äquidistant. In der vorbelasteten Probe ist der Temperaturanstieg signifikant höher. Die maximale mittlere Temperaturänderung befindet sich im Horizont L3. Es ist jedoch eine deutliche Asymmetrie im

<sup>61</sup>Über die Integration des Inhalts der eingeschlossenen Fläche im Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird die spezifische Verlustarbeit ermittelt. Diese Integration kann numerisch direkt auf der Basis der experimentellen Daten oder analytisch nach der Approximation der Zeitsignale erfolgen.

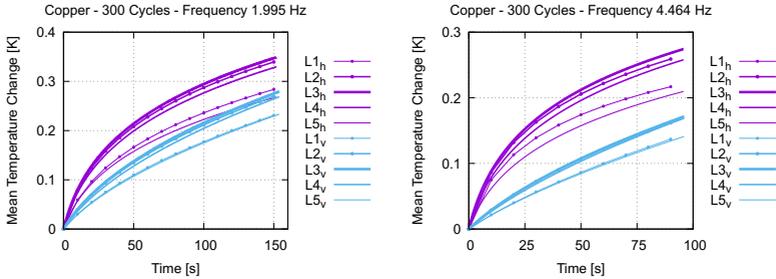


Abb. 6.14: 300 Zyklen Zugschwellbelastung mit unterschiedlicher Lastgeschichte – Lastfrequenz von (links) 1.995 Hz bzw. (rechts) 4.464 Hz

Temperaturprofil zu erkennen ( $\Delta T_{av}(L1) > \Delta T_{av}(L5)$ ). Diese Befunde sind in die Versuchsführung und Auswertestrategie einzubeziehen.

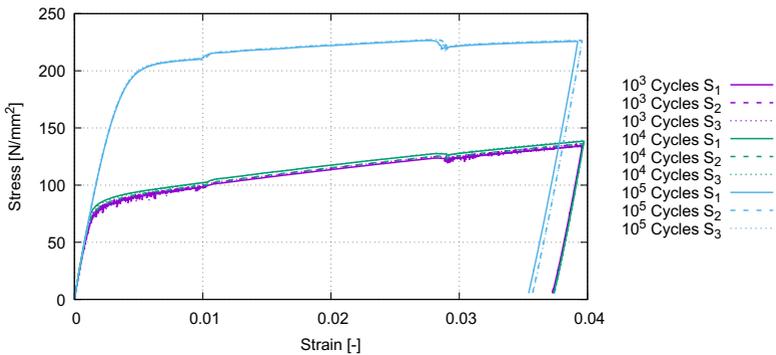


Abb. 6.15: Spannungs-Dehnungs-Diagramm – Belastungsregime gemäß Abschnitt 6.2.1 an Proben unterschiedlicher Lastgeschichte

Ein einfacher Zugversuch ist ebenfalls geeignet, um den Einfluss der Lastgeschichte zu bewerten oder zu klassifizieren. Bezüglich der dargestellten Dehnratenabhängigkeit metallischer Werkstoffe bei Raumtemperatur ist es empfehlenswert mehrere Deformationsmechanismen in einem komplex geführten Zugversuch wie in Abschnitt 6.2.1 anzusprechen. Die maximale Dehnung wurde in den hier dargestellten Versuchen auf ca. 4% reduziert. Für die Untersuchung wurde die Art der beschriebenen Vorbelastung hinsichtlich der Zyklenzahl als Vorlastparameter [ $10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$ ] variiert. Mit jeweils drei Proben pro Vorlastparameter sind die experimentellen

Ergebnisse mit sehr geringer Streuung in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik in Abb. 6.16 dargestellt. Während Lastwechselzahlen bis  $10^4$  größtenteils keinen Einfluss auf das inelastische Deformationsverhalten besitzen, ist die Veränderung in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik für die Zyklenzahl von  $10^5$  sehr prominent.

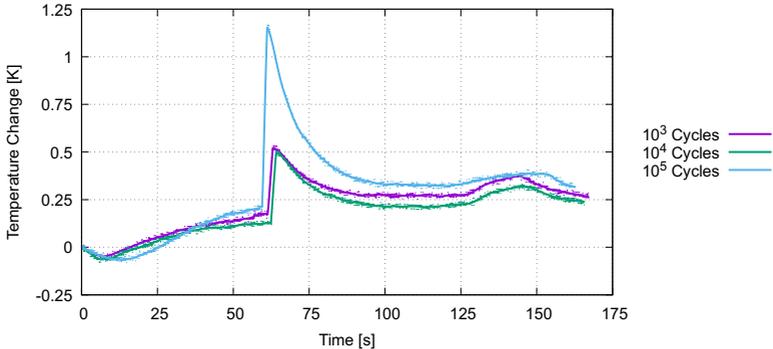


Abb. 6.16: Temperaturänderungs-Charakteristik – Belastungsregime gemäß Abschnitt 6.2.1 an Proben unterschiedlicher Lastgeschichte

Die Temperaturentwicklung ist aufgrund der Varianz der thermischen Randbedingungen einer relativ großen Streuung unterworfen (vgl. Diagramme im Anhang A.3). Auffällig ist insbesondere die maximale Temperaturänderung beim ersten Dehnratensprung. Dieser quantitative Sprung korreliert offensichtlich mit den Spannungs-Dehnungs-Kurven. Zusätzlich sei jedoch auf die qualitative Ausprägung des Übergangs von thermoelastisch dominierten Deformationen zum dissipativen Einfluss der inelastischen Deformationsanteile hingewiesen (vgl. ebenfalls Diagramme der Abb. A.2).

Die zyklischen Versuche unterhalb der Fließgrenze gehören in die Kategorie der zerstörungsfreien Prüfung. Dieses Konzept wird insbesondere für die Bauteilprüfung bzw. Bauteilüberwachung verfolgt. Auf den zugehörigen Belastungshorizonten werden jedoch nicht alle relevanten Deformationsmechanismen angesprochen, die durch ein definiertes Regime an Vorlasten die Mikrostruktur des Materials beeinflussen. Komplexe Belastungspfade mit hohem Beanspruchungsniveau des Materials initiieren in der Regel zusätzliche inelastische Deformation, deren umfangliche thermomechanische Charakterisierung eine größere Datenmenge für die quantitative Analyse generiert.

### 6.3.2 Zyklische Versuche an Stahlrundproben

Komplexe Belastungspfade für den Bereich der einachsigen Materialversuche schließen prinzipiell die Beanspruchungen im Druckbereich ein. Flachproben sind aufgrund der Stabilitätseigenschaften für derartige Versuche ungeeignet. Die Erweiterung der Methodik auf Rundproben trägt diesen Überlegungen Rechnung und zeigt die zugehörigen Anforderungen für den Anwendungsbereich der IR-Thermografie auf. Für die Dehnungsermittlung auf der Oberfläche der Flachproben ist das dargelegte Verfahren über die affine Transformation uneingeschränkt einsetzbar. In der Regel sind Genauigkeitsabstriche in Querrichtung zu verzeichnen, da die Anzahl der Datenpunkte in Querrichtung deutlich geringer als in Lastrichtung ist. Eine Bewertung der Dehnungsberechnung auf gekrümmten Flächen steht noch aus und ist hier nicht Untersuchungsgegenstand. Das bedeutet, dass die Dehnungsauswertung für die Rundproben ausschließlich eindimensional vorgenommen wird.

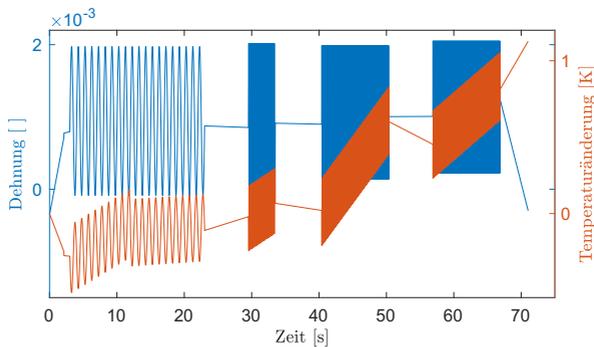


Abb. 6.17: Dehnungs- und Temperaturmessung über den Versuchszeitraum in separierten Blockzyklen – Prüffrequenz: 10 Hz

Der Einfluss der Lastgeschichte wurde an Rundproben aus unlegiertem Baustahl (S355JR)<sup>62</sup> mit einem Durchmesser von 6.0 mm untersucht. Die Proben wurden zyklisch deutlich unterhalb der Fließgrenze bis max. 0.2 % Gesamtdehnung belastet. Die Verschiebung des reflektierenden Musters befindet sich bei dieser Probengröße im Subpixelbereich der IR-Kamera, so dass sich der relative Messfehler für die Dehnungsgrößen auf Basis bildgebender Verfahren (hier insbesondere hinsichtlich der IR-Daten) vergrößert und zudem die Ergebnisse eine größere Streuung aufweisen. Daher wurde die Dehnungsmessung mittels eines kommerziellen berührungslosen Messsystems (ARAMIS, Carl Zeiss GOM Metrology GmbH, Messprinzip: DIC

<sup>62</sup>Die Fließgrenze des Baustahls wird im Datenblatt mit „größer als“ 355 MPa in Abhängigkeit von der Nenndicke angegeben.

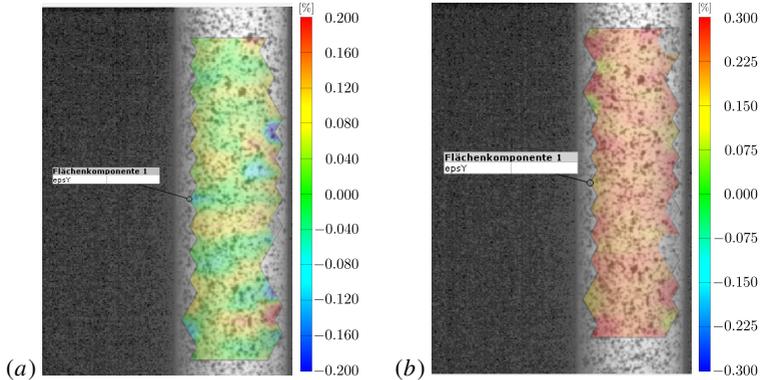


Abb. 6.18: ARAMIS-Dehnungsmessung – Auswertung der (a) minimalen und (b) maximalen Dehnung innerhalb eines geschlossenen Kraft-Weg-Zyklus

- Grauwertkorrelation im sichtbaren Licht) verifiziert. Die Detektoren des Dual-Kamera-Systems im sichtbaren Licht weisen eine deutlich größere Auflösung auf, so dass die Fehlergrenze bei ähnlichem Kameraabstand zur Probe unterhalb der verwendeten IR-Kamera liegen. Die lokale Dehnungsermittlung mit ARAMIS weist bei kleinen Deformationsgradienten erhebliche quantitative Fehler auf (Abb. 6.18). Die zum Belastungssignal synchronisierte Auswertung zeigt einen großen relativen Fehler innerhalb der ausgewerteten Flächenkomponente, der mit Zunahme des erwarteten Dehnungswertes für den gesamten Messbereich abnimmt. Die Farbdominanz in Abb. 6.18 (a) legt einen tatsächlichen Dehnungswert von 0.04 % nahe. Es sind lokale Dehnungskonzentrationen in Lastrichtung von  $\pm 0.2\%$  sichtbar. In Abb. 6.18 (b) bei maximaler Beanspruchung ist der Dehnungsverlauf deutlich homogener. Ist die Größenordnung der Lageänderungen der Teilflächen für die DIC im Subpixelbereich, verursachen lokale Grauwertunterschiede systematische Fehler im Korrelationsalgorithmus. Diese Aussage gilt unabhängig vom genutzten Spektralbereich des Lichtes, der für das digitale Bild genutzt wird. Die Vergleichsmessungen von der IR-Kamera mit ARAMIS wird dementsprechend im Extensometermodus für den gesamten Messbereich ausgeführt.

Es wurden mehrere niedrig zyklische Blöcke definiert (20 Zyklen bei 1 Hz danach bei Prüffrequenz: 20 Zyklen –  $2 \times 100$  Zyklen), die über definierte Haltezeiten der Mittelspannung verbunden sind. Die blaue Kurve der Abb. 6.17 zeigt die Dehnungsauswertung im Probenzentrum für den gesamten Versuchszeitraum. Die rote Kurve zeigt die zugehörige Temperaturentwicklung an demselben Ort. Die Frequenz der Belastung wurde im Bereich von 1 bis 10 Hz variiert.

Für den tatsächlichen Vergleich wird das Messrauschen in den Dehnungssignalen

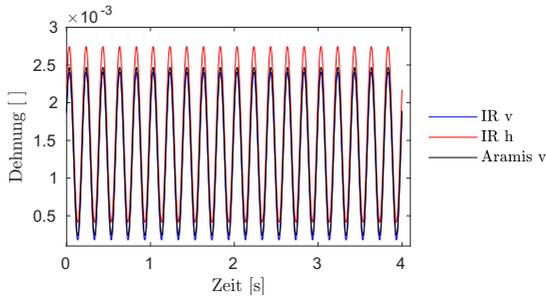


Abb. 6.19: Rekonstruiertes Dehnungssignal aus den beiden bildgebenden Messungen mit ARAMIS und der IR-Kamera

von ARAMIS und IR-Kamera entfernt. Das heißt, der Fehler wird hinsichtlich des rekonstruierten Signals mit konstanter Frequenz ermittelt. Der Amplitudenfehler der Dehnungsmessung über die Bilddaten der IR-Kamera im Vergleich zur ARAMIS-Messung der Abb. 6.19 liegt bei 0.31 % und der Mittelwertfehler bei 4.62 %. Als Referenz dient das ARAMIS-Signal an einer Probe ohne Vorlast (schwarze Kurve). Das zugehörige Signal der IR-Kamera (blaue Kurve) wurde nicht mit derselben Probe aufgezeichnet, was den auffälligen Unterschied im Mittelwert erklären kann.

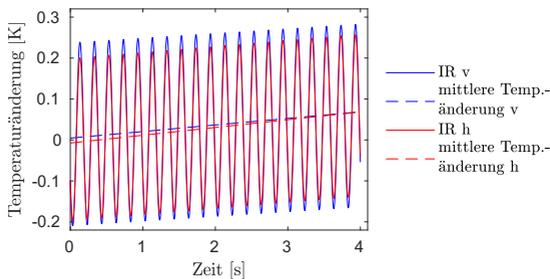


Abb. 6.20: Rekonstruiertes Temperaturänderungssignal mit Überlagerung einer linearen Funktion für Proben mit („h“) und ohne („v“) Lastgeschichte

Die Zeitsignale für die numerische Auswertung beschränken sich auf eine niedrige Zyklenzahl im letzten Drittel des letzten zyklischen Blocks. Der gesamte Datensatz spielt für die Isolierung der Anregungsfrequenz und für die exakte Bestimmung des jeweiligen Phasenwinkels in der Signalsynchronisation eine wichtige Rolle. Da die Anregungsfrequenz mit der Antwortfrequenz identisch ist, wird über die vorhandenen mathematischen Funktionen zur Signalbearbeitung im MATLAB eine Frequenzfilte-

nung (FFT, Filterfunktionen) durchgeführt. Der Algorithmus verbessert das Verhältnis von Signal- zur Rauschamplitude erheblich. Die nachfolgende Funktionsanpassung für die Amplitude, die Phasenverschiebung sowie das Ordinatenoffset einer allgemeinen Sinusfunktion liefert ein idealisiertes Zeitsignal. Dem Temperaturänderungssignal ist für die Rekonstruktion eine lineare Funktion überlagert. Abschließend liegen das Spannungs-, das Dehnungs- (Abb. 6.19) als phasenverschobene Sinusfunktion und das Temperaturänderungssignal (Abb. 6.20) als Sinusfunktion mit linearer Überlagerung vor. Die mittlere Temperaturänderung entspricht den linearen Funktionen in Abb. 6.20. Der Anstieg der mittleren Temperatur für das Zeitsignal beträgt für die Probe ohne Vorlast  $3.2 \cdot 10^{-3}$  K/Zyklus, hingegen für die Probe mit Lastgeschichte  $3.8 \cdot 10^{-3}$  K/Zyklus. Die Amplitude in der Temperaturänderung wird durch die thermoelastischen Parameter bestimmt und ist für die Proben mit Lastgeschichte ca. 9% kleiner gegenüber den Proben ohne Vorlast. Dies korreliert mit der größeren Amplitude und der Mittelwertverschiebung für das Dehnungssignal (rote Kurve) in Abb. 6.19

Die Übertragung in den Spannungs-Dehnungs-Raum erfolgt mit der zeitparametrisierten Darstellung in Abb. 6.21. Die hier mit hoher Spreizung des Dehnungsbereiches sichtbare Aufspaltung von Be- und Entlastungspfad genügt, um in den kurzen Experimenten von wenigen Minuten eine mittlere Temperaturerhöhung von ca. 1 K zu erzeugen. Der Mittelwert und die Amplitude des Dehnungssignals bestimmt die Lage und Neigung der geschlossenen Spannungs-Dehnungs-Kurve. Als Anstieg der Kurven wird der Anstieg der Geraden definiert, die das Minimum und Maximum verbinden. Der optisch schwer erkennbare, geringere Anstieg der Kurve mit Vorlast gegenüber den Messungen an Proben ohne Lastgeschichte ist in der Modellbildung mit einer Verminderung der elastischen Modellparameter verknüpft.

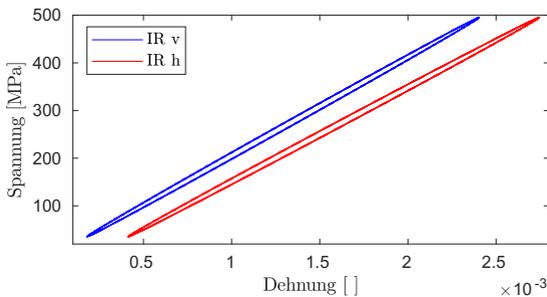


Abb. 6.21: Geschlossene Spannungs-Dehnungs-Kurve hinsichtlich der Lastgeschichte

Für die analytische Beschreibung wurde von adiabaten thermischen Randbedin-

ungen ausgegangen und als Materialgesetz ein verallgemeinertes MAXWELL-Modell mit zunächst zwei MAXWELL-Körpern angesetzt. Die Annahme adiabater Randbedingungen rechtfertigt sich aus der Belastungsfrequenz von 5 Hz. Der Wärmeausgleich zur Umgebung findet deutlich langsamer statt als der Zeitraum von 0.2 s für die Betrachtung eines einzelnen Belastungszyklus. Da die mechanischen Parameter als temperaturunabhängig angenommen werden, findet die Parameteridentifikation des MAXWELL-Modells entkoppelt an der Spannungs-Dehnungs-Kurve statt. Die Modellparameter sind in Tab. 6.1 zusammengefasst.

Parameter	Symbol	Einheit	Probe ohne Vorlast	Probe mit Lastgeschichte
Speichermodul	$E'$	[MPa]	206 940	170 380
Verlustmodul	$E''$	[MPa]	6 500	5 880
MAXWELL-Parameter				
	$E_0$	[MPa]	200 270	177 450
	$E_1$	[MPa]	5 263	6 565
	$E_2$	[MPa]	5 225	3 145
	$\eta_1$	[s]	29.364	20.105
	$\eta_2$	[s]	0.6135	0.1236
<i>Ergebnisse aus der vereinfachten Energiebilanz</i>				
Spez. Wärmemenge	$q$	[N mm/mm <sup>3</sup> ]	0.0252	0.0337
Temperaturänderung				
für einen Zyklus	$\Delta T_1$	[K]	$7.0 \cdot 10^{-3}$	$9.3 \cdot 10^{-3}$
für 100 Zyklen	$\Delta T_{100}$	[K]	0.696	0.930
<i>Ergebnisse aus der Messung</i>				
	$\Delta T_{exp}$	[K/Zyklus]	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$

Tab. 6.1: Numerische Auswertung des viskoelastischen Materialmodells<sup>63</sup> für Proben mit bzw. ohne Vorlast bei einer Frequenz von 5 Hz, einem Kraftmittelwert  $F_m = 7.5$  kN und einer Kraftamplitude von  $F_a = 6.5$  kN

In den vorbelasteten Proben tritt sowohl in der Messung als auch in der numerischen Simulation eine größere Wärmeentwicklung infolge erhöhter Dehnungsamplituden auf. Die numerisch ermittelten Werte beziehen die Wärmeleitung in die Spannsysteme und die Konvektion in die Umgebung nicht mit ein und fallen deshalb deutlich größer aus. Insbesondere die Bewertung der Konvektion bei zyklischen Versuchen stellt ein separates Untersuchungsgebiet dar. Daher wurde auf die Quantifizierung des Wärmeleitproblems an dieser Stelle verzichtet. Als Erklärung für die unterschiedliche Antwort unbelasteter und vorbelasteter Proben liegt die Initiierung einer Mikroschädigung nahe. Der experimentelle Nachweis von einer Zunahme an Mikroschädigungen wurde nicht geführt.

<sup>63</sup>Die Angabe von Speicher- und Verlustmodul dient der Vollständigkeit und folgt aus der komplexen Darstellung harmonischer Funktionen (vgl. Grundgleichungen der dynamisch-mechanische Analyse – DMA).

### 6.3.3 Zugversuche an Stahlrundproben

Der Einfluss der Lastgeschichte wurde ebenfalls anhand von Zugversuchen untersucht. In den Zugversuchen an unbelasteten Proben („v“ – *virgin*) und den Proben mit Lastgeschichte („h“ – *history*,  $3 \cdot 10^5$  Lastwechsel, Mittelspannung  $\sigma_m = 274$  MPa, Spannungsamplitude  $\sigma_a = 256$  MPa) wurde die Dehnrage variiert. Die hohen Beanspruchungen in der zyklischen Vorlast wurden gewählt, um mit hoher Wahrscheinlichkeit eine mikrostrukturelle Veränderung zu induzieren.<sup>64</sup> Die Dehnraten unterscheiden sich um zwei Größenordnungen. Die geringere Dehnrage  $\dot{\epsilon}_1$  liegt bei  $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  und die höhere Dehnrage  $\dot{\epsilon}_2$  bei  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Der starke Temperaturanstieg bei der höheren Dehnrage führte zu einer Kontrastminderung in den Thermogrammen, so dass eine exakte Auswertung der bewegungskompensierten Temperaturänderung und dem zugehörigen Dehnungsprofil lediglich eingeschränkt ausgeführt werden konnte. Im Sinne der Vergleichbarkeit wurde daher die Darstellung für alle Versuche auf eine maximale Dehnung von ca. 1.1 % beschränkt. Das vorgegebene Lastregime enthielt, wie für die komplexen Zugversuche der Kupferflachproben Abb. 6.3, einen Entlastungspfad, der für die Verifikation des Materialmodells soweit als möglich herangezogen wurde. Es standen minimal 3 Proben mit bzw. ohne Lastgeschichte jeweils für die beiden Dehnraten zur Verfügung. Die hohe Reproduzierbarkeit der Versuchsergebnisse bei geringer Streuung erlaubt eine Mittelwertbildung sowohl für das Spannungs-Dehnungs-Diagramm als auch die Temperaturcharakteristik.

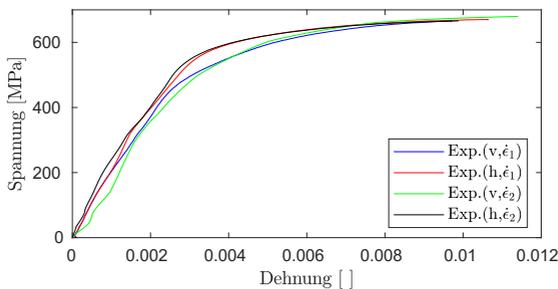


Abb. 6.22: Spannungs-Dehnungs-Kurven – Experimentelle Daten bei Variation der Vorlast und der Dehnrage

Abb. 6.22 fasst zunächst die experimentellen Ergebnisse für die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik zusammen. Eine Verbesserung des Messsignals über Methoden der Analyse periodischer Signale wie bei den zyklischen Versuchen ist nicht anwendbar, so dass hier der Messfehler für kleine Dehnungen im rein elastischen

<sup>64</sup>Für die eigene Ermittlung einer experimentellen Wöhler-Kurve für dieses Material (unlegierter Baustahl – S355JR) stand keine ausreichende Probenanzahl zur Verfügung.

Bereich mit den nicht-glaten Dehnungsverläufen insbesondere für die niedrigere Dehnrate  $\dot{\epsilon}_1$  deutlich stärker ins Gewicht fällt. Für die Fehlerminimierung wurde im Auswertalgorithmus der Thermogramme auf einen möglichst großen Abstand der Teilflächen für die Bildkorrelation geachtet. Im Ergebnis ist die IR-Kamera als berührungsloses Extensometer ohne eine lokalisierte Dehnungsauswertung verwendet worden. Hinsichtlich der Dehnrate ist zwischen den Kurven nur eine gering ausgeprägte Varianz im ersten Abschnitt der Belastung zu erkennen. Signifikant ist der Unterschied im Übergangsbereich zu den inelastischen Deformationsmechanismen bezüglich einer vorhandenen Lastgeschichte.

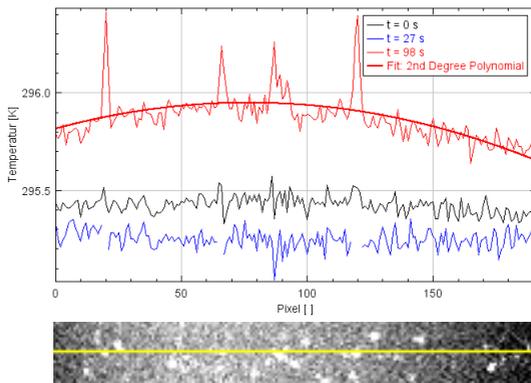


Abb. 6.23: Temperaturprofile für die Stahlproben (Dehnrate  $\dot{\epsilon}_1$ )

Das Temperatursignal kann nach erfolgter Emissionskorrektur weiterhin über die gesamte Messlänge ausgewertet werden (vgl. Abb. 6.23). Bereits in der Ausgangslage (schwarze Kurve –  $t = 0$  s) kann eine leichte Asymmetrie entlang der Probe vermutet werden. Nach ca. 27 s ist die minimale Temperatur während des Versuchszeitraums aufgrund des thermoelastischen Effekts erreicht und die Probe beginnt sich infolge dissipativer Deformationsvorgänge zu erwärmen. Ein Temperaturverlauf gemäß der roten Kurve hat sich nach 98 s eingestellt. Das Temperaturmaximum liegt trotz der Asymmetrie nah zur Probenmitte, so dass von Gleichmaßdehnung im Messbereich ausgegangen wird und unsymmetrische thermische Randbedingungen die Verschiebung des Maximums aus der Probenmitte bewirken.

Die Emissionskorrektur des Specklemusters ist aufgrund von zusätzlichen Reflexionsmustern auf der gekrümmten Oberfläche der Rundproben weniger homogen als bei den untersuchten Flachproben. Im Temperatursignal sind zusätzlich Bemusterungsartefakte einzelner reflektierender Beschichtungspunkte entlang des Auswertepfades durch wenige Pixel umfassende Temperaturerhöhungen zu erkennen. Deren absolute

Größe übersteigt die Amplitude des Messrauschens der IR-Kamera deutlich. Der Profilverlauf ist im zugehörigen Thermogramm für den Zeitpunkt  $t = 98$  s gelb markiert, und die Bemusterungsartefakte erscheinen dort als helle, wenige Pixel umfassende, kreisförmige Gebiete.

Zur Beurteilung des elastisch-inelastischen Verhaltens wird durch einen geringen Einfluss der Dehnungsgeschwindigkeit auf das elastoplastische Materialgesetz nach Kamlah und Haupt, 1998, zurückgegriffen, das konsequent auf der Basis mikrostruktureller Befunde für Stähle abgeleitet wurde und die viskosen Deformationsanteile vernachlässigt. Es ist ein Materialgesetz, das eine eindeutige Fließgrenze verwendet, die den sensitivsten Parameter im Materialmodell darstellt. Mit der Festlegung der Fließspannung umfassen die Freiwerte für das Verfestigungsverhalten weiterhin ein breites Kurvenspektrum. Die Eigenschaften der verwendeten mathematischen Funktionen erlauben eine Wichtung der einzelnen Deformationsmechanismen und deren zugehörige Dynamik, so dass insbesondere der Bereich kleiner plastischer Deformationen sehr variabel angepasst werden kann. Das Materialmodell ist in der numerischen Auswertung zudem robust und der Iterationsprozess hat aufgrund der Ausnutzung der Konsistenzbedingung im assoziierten Fließgesetz gute Konvergenzeigenschaften. Im Folgenden werden die beiden betrachteten Dehnraten separat behandelt und unter Einbeziehung der Spannungs-Dehnungs- sowie der Temperatur-Zeit-Charakteristik jeweils zwei distinktive Materialparametersets ermittelt.

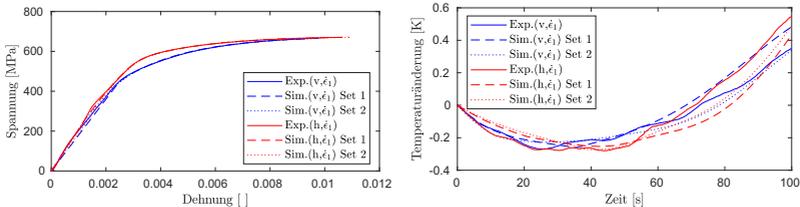


Abb. 6.24: Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (*links*) und Temperatur-Zeit-Charakteristik (*rechts*) im Zugversuch mit der Dehnrates  $\dot{\epsilon}_1$  mit Modellvarianten gemäß Tab. A.6

Die Ermittlung der Modellparameter verläuft zweistufig. Zunächst wird das Wärmeleitproblem durch die Auswertung im Punkt mit adiabaten Randbedingungen ausgeklammert bzw. mit der Näherung nach Chrysochoos, Maisonneuve u. a., 1989, wie in Abschnitt 6.2.1 näherungsweise behandelt. Dadurch wird ein begründeter Startparametersatz für nachfolgende FE-Simulationen ermittelt. In den FE-Berechnungen werden die Näherungen für die thermischen Randbedingungen aufgelöst und die realen Randbedingungen durch Modellierungen der Einspannelemente realisiert. Die Modellierung der Einspannelemente ist durch die tatsächlichen geometrischen Abmessungen und die Temperaturentwicklung der Einspannelemente begründet.

Mit Hilfe der IR-Thermografie wird der Temperaturverlauf auf den geschwärzten Oberflächen der Einspannelemente in Probennähe verfolgt. Die Diagramme zu den Zugversuchen wurden mit den finalen Parametersätzen der FE-Simulationen erzeugt. Die zugehörigen thermischen Materialparameter sind in Tab. A.5 zusammengestellt.

Abb. 6.24 zeigt zunächst die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und die Temperatur-Zeit-Charakteristik für die langsame Versuchsführung in der Probenmitte. Trotz eines deutlichen Unterschieds in der Fließspannung für Set 1 und Set 2 (ca. Faktor 2 für die Proben mit und ohne Lastgeschichte) stimmen die Modelle sehr genau mit jeweiligen experimentellen Spannungs-Dehnungs-Verläufen überein. Die numerischen Werte der Modellparameter für die Dehnrates  $\dot{\epsilon}_1$  sind in Tab. A.6 zu finden.

Die zeitliche Entwicklung der Temperaturänderung für die Proben ohne Vorlast (blaue Kurven) zeigt, dass das Set 2 (gepunktet) eine bessere Approximation als das Set 1 (gestrichelt) erzielt. Insbesondere ab ca. 70 s wachsen die Abweichungen auf der Basis des Sets 1 stetig an. Der zeitliche Abfall der Temperatur zu Versuchsbeginn wird von beiden Sets gleichermaßen genau erfasst.

Die beide Parametersätze für die Proben mit Lastgeschichte weisen wesentliche Defizite im zeitlichen Gradienten am Belastungsbeginn sowie in der Maximaltemperatur zum Zeitpunkt 100 s auf. Der Wert der Temperaturänderung bei  $t = 100$  s liegt mit dem Set 2 näher am Messwert. Das Minimum der Temperaturänderung wird im Betrag und zeitlicher Position durch beide Sets gleichwertig wiedergegeben. Eine Entscheidung zur zu bevorzugenden Modellgüte ist daraus nicht abzuleiten.

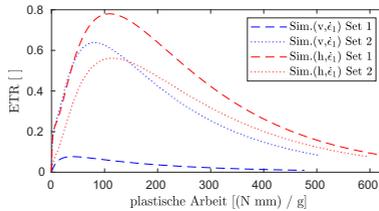


Abb. 6.25: ETR-Charakteristik  $\varphi$  im Zugversuch mit der Dehnrates  $\dot{\epsilon}_2$  für die Modellvarianten gemäß Tab. A.6

Das Zuwachsverhältnis der Energieanteile  $\varphi$  in Abb. 6.25 zeigt gravierende Unterschiede in Lage und Größe des Maximums für die Proben ohne Vorlast (blau), während die Proben mit Lastgeschichte (rot) sich im Wesentlichen durch die Größe des Maximums unterscheiden. Da zu vermuten ist, dass bereits durch die Vorbelastung im Material Energie gespeichert wurde, sollte das ETR-Maximum  $\varphi_{\max}$  der vorbelasteten Proben geringer sein als von den Proben ohne Vorlast. Mit der begrenzten Datenlage kann festgehalten werden, dass dann für beide Probenotypen das jeweilige Set 2 in der Kombination der drei Charakteristiken eine größere Physikalität

besitzt. Dieses Ergebnis sollte durch weitere Versuche höherer Komplexität gestützt werden, was durch die folgende Auswertung für die Dehnrates  $\dot{\epsilon}_2$  belegt wird.

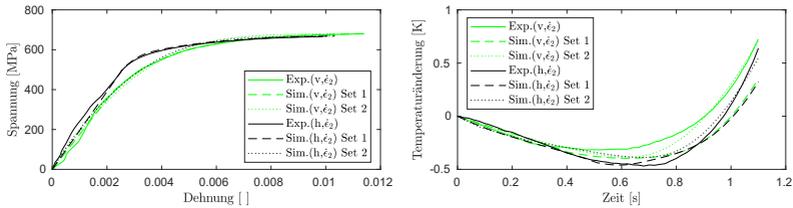


Abb. 6.26: Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (*links*) und Temperatur-Zeit-Charakteristik (*rechts*) im Zugversuch mit der Dehnrates  $\dot{\epsilon}_2$  mit Modellvarianten gemäß Tab. 6.2

Während die Modelle für die unbelasteten Proben (grüne Kurven) der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik in Abb. 6.26 (*links*) nahezu gleichwertig sind, ist die Aufspaltung für die Temperaturentwicklung im Probenmittelpunkt im rechten Diagramm der Abb. 6.26 offenbar. Für die vorbelasteten Proben (schwarze Kurven) ist das Set 1 in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik mit geringen Abweichungen behaftet. Dagegen liegt das Minimum der Temperaturentwicklung zeitlich früher im gemessenen Verlauf und das Maximum am Ende des betrachteten Zeitraums fällt zu gering aus. Die entgegengesetzten Feststellungen können für das Set 2 (gepunkteter Verlauf) getroffen werden. Es besteht hier ein deutliches Defizit in der Abbildung des Übergangsbereiches der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik, während die zeitliche Positionierung des Minimums sowie der Maximalwert und der Anstieg am Ende des betrachteten Zeitintervalls in der Temperaturentwicklung besser mit den Messwerten korrelieren.

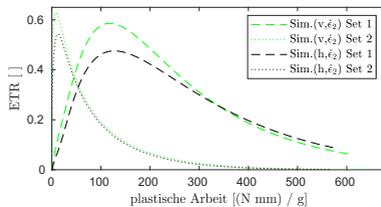


Abb. 6.27: ETR-Charakteristik  $\varphi$  im Zugversuch mit der Dehnrates  $\dot{\epsilon}_2$  mit Modellvarianten gemäß Tab. 6.2

Das Verhältnis der Energieanteile über der plastischen Arbeit wird in Abb. 6.27

dargestellt. Die Maxima der gepunkteten Kurven liegen jeweils leicht über den Maxima der gestrichelten Kurven und treten bei deutlich kleineren Werten für die plastische Arbeit auf. Der starke Abfall des ETRs impliziert, dass für diese Parametersets das Sättigungsverhalten in der Verfestigung zeitlich eher im Lastpfad erreicht wird und somit im Vergleich zu den anderen beiden Modellen (gestrichelte Kurven) auch weniger Energie gespeichert wird.

Dieses Verhalten ist auf die sehr unterschiedlichen Fließgrenzen in den Parametersets zurückzuführen. Hier liegt der Faktor zwischen Set 2 und Set 1 für die Proben ohne Vorlast bei 7.6 bzw. für die Proben mit Lastgeschichte bei 4.9 (vgl. Tab. 6.2). Der Dissipationsanteil ist aufgrund der bereits erreichten Sättigung für die

Parameter	Einheit	Parameterset für numerische Simulationen <sup>65</sup>			
		ohne Vorlast – „v“		mit Lastgeschichte – „h“	
		Set 1	Set 2	Set 1	Set 2
E-Modul $E$	[MPa]	175 000	215 000	195 000	220 000
Fließgrenze $y_0$	[MPa]	380	50	490	100
<i>Verfestigungsparameter</i>					
$a$	[1/MPa]	0.0021	0.0021	0.0070	0.0025
$b$	[-]	1 870	3 860	5 180	4 560
$c$	[MPa]	250 000	780 000	310 000	800 000
$s_0$	[-]	0.001	0.0002	0.001	0.0002

Tab. 6.2: Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt-Modells für die Dehnrate  $\dot{\epsilon}_2$

Verfestigung im letzten Teil des betrachteten Lastpfades jeweils für das Set 2 deutlich höher und trägt damit stärker zum Temperaturanstieg bei. Der zeitliche Gradient am Ende des Lastpfades wird genauer durch die gepunkteten Kurven abgebildet (s. Temperatur-Zeit-Charakteristik der Abb. 6.26).

Die Variation im Modellverhalten wird somit bereits durch den Vergleich unterschiedlicher Parametersätze für ein einziges Materialgesetz offenbar. Die Auswahl, welches der unterschiedlichen Parametersätze zu bevorzugen ist, sollte nach dessen Physikalität entschieden werden. Für diesen Fall sollte die Lage und der Wert des Maximums im ETR-Verlauf herangezogen werden. Eine grundlegende Änderung in der Dynamik der inelastischen Deformationsmechanismen ist aufgrund gleicher mikrostruktureller Eigenschaften nicht plausibel.

Ausgehend von diesem Approximationsergebnis ist trotz des ersten experimentellen Befundes aus Abb. 6.22, dass nur eine geringe Geschwindigkeitsabhängigkeit vorliegt, das Materialmodell mit einem viskosen Deformationsanteil anzureichern. Über diesen Weg kann das thermomechanische Verhalten für die höhere Dehnrate  $\dot{\epsilon}_2$  besser repräsentiert werden.

<sup>65</sup> Linienkodierung der Materialparametersets gemäß den Abbn. 6.26 und 6.27

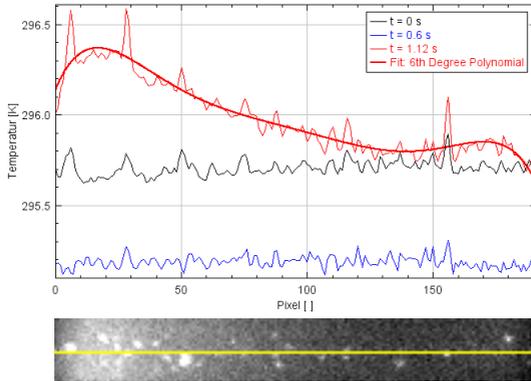


Abb. 6.28: Temperaturprofile für die Stahlproben (Dehnrate  $\dot{\epsilon}_1$ )

Die Auswertung im Punkt wie mit den Abbn. 6.26 und 6.27 ist nur dann zulässig, wenn die Wärmeleitungsgleichung über den gesamten Probenbereich und den gesamten Zeitraum akkurat abgebildet wird. Der Ausgangspunkt für diese Beurteilung ist die Analyse der experimentellen Daten in Abb. 6.28. Die Ausgangstemperatur für  $t = 0$  s ist über dem Profil näherungsweise konstant. Die minimale Temperatur wird nach 0.6 s erreicht. Am Ende des Beobachtungszeitraums ist das Temperaturprofil stark unsymmetrisch. Das Rauschen und die lokalen Ausschläge aus den verbliebenen Artefakten der Emissionskorrektur werden bereits durch eine einfache Polynomapproximation fast vollständig eliminiert. Die mathematische Beschreibung dieser Kurve korrespondiert mit realen physikalischen Parametern, die den Wärmeaustauschvorgang mit der Umgebung bestimmen. Zu nennen sind hierfür der Temperaturgradient an den Rändern, Position und Größe des globalen und lokalen Maximums sowie die Proben temperatur im Zentrum. Diese mathematischen Parameter sind mit der Modellierung der Einspannung, der erzeugten Wärmestromdichte infolge dissipativer Vorgänge und den thermischen Materialparametern gekoppelt.

Die erzielten Simulationsergebnisse werden exemplarisch für das Set 2 der Proben mit Lastgeschichte beschrieben und diskutiert. Schaut man zunächst auf die blaue durchgezogene Linie in Abb. 6.29, so ist klar, dass im Falle vollständiger Symmetrie (Probengeometrie, Belastung und Randbedingungen) das berechnete Temperaturänderungsprofil ebenfalls symmetrisch ist. Im Gegensatz zur langsameren Dehnrate  $\dot{\epsilon}_1$  wird das Profil nicht durch ein globales Maximum, sondern durch zwei lokale Maxima in Randnähe des Messbereiches geprägt. Die Aufgabe der Symmetrie im Rahmen der physikalisch sinnvollen Modifikation der Einspannelemente liefert jedoch nicht den notwendigen Spielraum, um eine Übereinstimmung mit dem Experiment zu

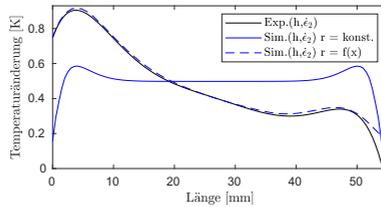


Abb. 6.29: Vergleich des Temperaturänderungsprofils für das Set 2 der Proben mit Lastgeschichte am Ende des Beobachtungszeitraums  $t = 1.12$  s

erreichen.

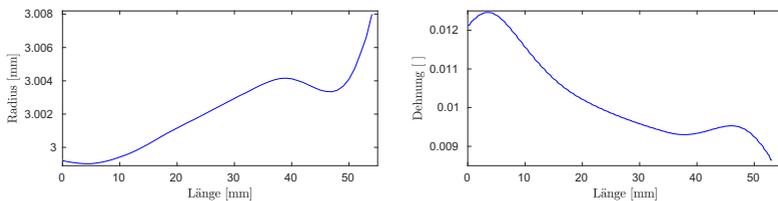


Abb. 6.30: Fertigungstoleranzen im Probenradius und zugehörige lokalisierte Dehnungsverteilung bei  $t = 1.12$  s

Da die Überhöhung des Temperaturanstiegs an einer Probenseite für Dehnrate  $\dot{\epsilon}_2$  für alle getesteten Proben reproduzierbar war, wurde die Symmetrie der Probengeometrie in der FE-Simulation aufgegeben. Die Eigenschaften der Drehmaschine zur Probenherstellung legt eine Varianz des Probenradius entlang der Probenachse gemäß Abb. 6.30 (*links*) nahe. Dementsprechend ist eine Lokalisierung von Beanspruchung und Dehnung, vgl. Abb. 6.30 (*rechts*), entlang der Probenachse zu beobachten. Die Fließbedingung ist dann ebenfalls örtlich begrenzt erfüllt, so dass die Initiierung inelastischer Deformationsmechanismen nicht nur örtlich, sondern auch zeitlich begrenzt erfolgt. Die funktionale Ähnlichkeit der lokalisierten Dehnungsverteilung und des Temperaturänderungsprofils der Abb. 6.29 ist herauszuheben.<sup>66</sup>

#### 6.4 Zugversuche an additiv gefertigten Flachproben aus Aluminium

Die aus den vorangegangenen Versuchen entwickelte Messmethodik und Auswertestrategie wurde auf additiv gefertigte Flachproben aus Aluminium (Legierung

<sup>66</sup>Der experimentelle Abgleich der lokalisierten Dehnungsmessung sowie die exakte Probenmessung mit der erforderlich Genauigkeit steht aus.

AlSi7Mg0.6) übertragen. Die zur Beurteilung herangezogenen drei Charakteristiken – Spannungs-Dehnungs-, Temperaturänderungs- und ETR-Charakteristik – ist erneut in Zusammenhang mit dem gemessenen Temperaturprofil also der korrekten Abbildung des Wärmeleitproblems in der Simulation zu betrachten.

Die Abbn. 6.31 und 6.32 umfassen die drei erwähnten Charakteristiken im Probenzentrum für das final ermittelte Parameterset des Kamlah-Haupt-Modells. Der Zugversuch wurde bei einer Dehnrates von  $7.7 \cdot 10^{-5}$  1/s durchgeführt. Für

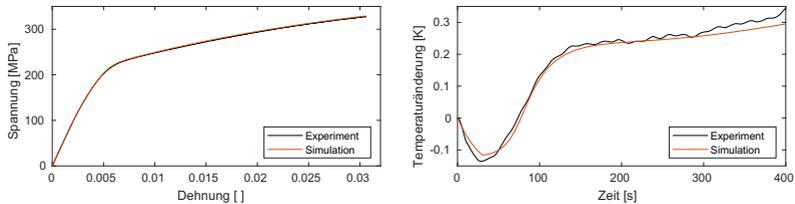


Abb. 6.31: Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (*links*) und Temperatur-Zeit-Charakteristik (*rechts*) im Zugversuch für additiv gefertigte Aluminiumproben

den Bereich bis ca. 0.4%, der durch elastische Deformationen dominiert wird, wurden die Entlastungspfade der Versuche zur Ermittlung der elastischen Parameter herangezogen. Das einsetzende Sättigungsverhalten für die Verfestigung bei 3% ist in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik durch ein Abflachen der Kurve noch nicht ausgeprägt. Das Überschreiten des charakteristischen Maximums in der ETR-Kurve, gleichbedeutend mit der Abnahme der Zuwächse an gespeicherter Energie, weist diesen Umstand auf der Modellebene bereits aus. Das zusätzlich lokale Maximum und

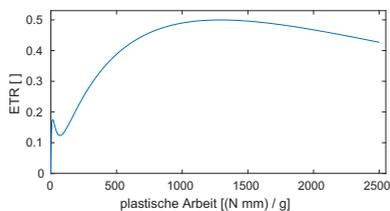


Abb. 6.32: ETR-Charakteristik  $\varphi$  im Zugversuch für additiv gefertigte Aluminiumproben

lokale Minimum im ETR-Verlauf am Beginn der plastischen Deformationen ist mit der qualitativen Formulierung der Entwicklungsgleichungen im KH-Modell verbunden

und wird mit dem vorliegenden Parametersatz betont.<sup>67</sup> Die Modellkurven der Abb. 6.31 zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Kennlinien auf. Es bestand während der Parameteridentifikation jedoch ein deutliches Defizit in der korrekten Wiedergabe der Wärmeleitung in die Umgebung, das mit dem vorliegenden Modell nicht befriedigend abgebildet wurde. Ähnlich wie für die Kupferflachproben stellt sich ein parabelartiges Temperaturprofil entlang der Probenachse ein, wobei das Temperaturmaximum in der Nähe des Probenmittelpunktes erreicht wird. Die numerischen Simulationen wurden mit den Parametern der Tab. A.8 durchgeführt.

Im Gegensatz zu den Kupferproben sind die additiv gefertigten Aluminiumproben weniger duktil und nicht metallisch blank. In der Sichtanalyse der Spannmarken fällt eine geringe Indentierung durch die Riffelung der Spannflächen auf, die die Oxidschicht des Aluminiums an der Oberfläche im geringen Maß aufbricht (vgl. Abb. 6.33 (a)). Dadurch wird der Wärmeübergang von der Probe auf die Spannele-

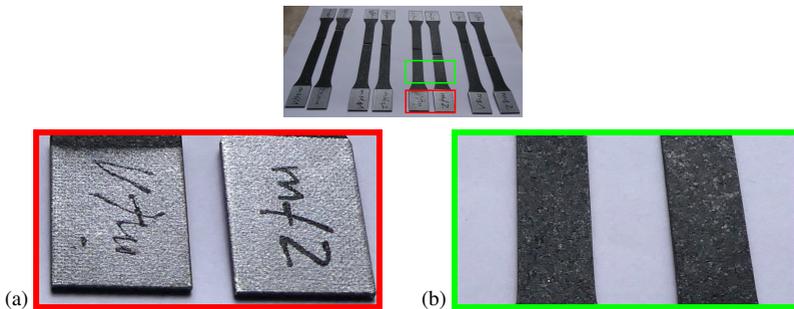


Abb. 6.33: Inspektion der Probenoberfläche als Indikation für die Auswertung: (a) geringe Indentierung der Spannflächen; (b) feines, homogenes Speckle-Muster auf geschwärzter Oberfläche

mente begrenzt. Durch den eingeschränkten Wärmeübergang ist die Wechselwirkung mit dem Strahler zur Kontrasterhöhung (vgl. Abb. 5.3) als eine relevante Wärmequelle in der Wärmeleitgleichung gegeben.

Beide Effekte wurden in das FE-Modell implementiert. Der Wärmeübergangskoeffizient von der Probe auf die Spannelemente ist ein zu validierender Parameter. Die Wärmestrahlung wurde vereinfacht als linear verteilter Wärmestrom entlang der Probenachse appliziert und bedarf ebenfalls der Validierung. Der Strahler befindet sich in der experimentellen Anordnung unterhalb der IR-Kamera, so dass die Strahlungsintensität über der Probenlänge variiert. Mit diesen Modellanteilen

<sup>67</sup>Die Relevanz dieser lokalen Extremwerte kann zunächst mit einer Parameterstudie untersucht und deren mögliche physikalische Bedeutung an konkreten Materialproben, z.Bsp. für Aluminiumlegierungen, experimentell ausgeleuchtet werden.

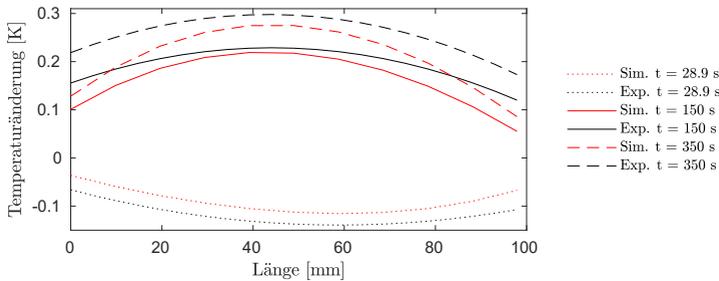


Abb. 6.34: Temperaturänderungsprofil für additiv gefertigte Aluminiumproben für ausgewählte Zeiten im Beobachtungszeitraum

weisen die Simulationsergebnisse eine wesentlich bessere Anpassungsfähigkeit an die experimentellen Daten auf. In Abb. 6.34 verschlechtert sich das Simulationsergebnis speziell für den Temperaturgradienten am Rand des Messbereichs mit zunehmender Versuchszeit.

Das sehr feine Speckle-Muster der kontrastgebenden Beschichtung ist auf der Probenoberfläche hinsichtlich Größe und Verteilungsdichte sehr homogen appliziert (Abb. 6.33 (b)). Konsequenter Weise ist dadurch die Emissionskorrektur sehr arm an Artefakten. Das Messrauschen der IR-Kamera wird für die Temperaturentwicklung sehr verlustarm eliminiert. Zur Dehnungsermittlung sind bereits kleine Teilflächen für einen stabilen Ablauf des Korrelationsalgorithmus geeignet, was die räumliche Auflösung der Dehnungsverteilung erhöht.

Die Lokalisierungseffekte bereits bei kleinen Dehnungen wie bei der Untersuchung von Aluminium aus konventionell hergestelltem Blech wurden für die additiv gefertigten Proben makroskopisch nicht beobachtet. Das ist insbesondere auf stark reduzierte Korngrößen im Druckverfahren zurückzuführen (Pereira u. a., 2020; Smolina u. a., 2022). Die Zugversuche der additiv gefertigten Aluminiumproben wurden bis zum Probenversagen geführt. Die Rissinitiierung am Probenrand ging bereits bei kleinen Risslängen in instabiles Risswachstum über. Im zugehörigen Thermogramm mit hoher Bildrate (Abb. 6.35) sind Muster zu erkennen, die zumindest eine Lokalisierung für die Wärmeleitung vermuten lassen. Eine Periodizität der Mikrostruktur, als Wechsel von wärmeren und weniger warmen Gebieten in Querrichtung zu erkennen, kann durch die Verfahrensparameter im additiven Verfahren hervorgerufen werden.

Diese Bildfolge liefert neben der nicht hinreichenden Genauigkeit des Temperaturgradienten zum Spannsystem ein weiteres Indiz, dass die im Materialgesetz nach Kamlah und Haupt enthaltenen Deformationsmechanismen für konventionell hergestellte Metalle hinsichtlich der additiven Fertigung einer Prüfung unterzogen werden müssen. Veränderte Anteile von gespeicherter und dissipierter Energie wir-

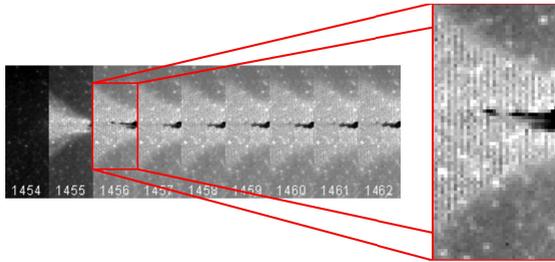


Abb. 6.35: Musterentwicklung im Thermogramm bei Versagen für additiv gefertigte Aluminiumproben

ken sich auf die Entwicklung des Temperaturprofils und somit die Fähigkeit der thermomechanischen Modellanpassung aus.

---

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Grundlage aller Betrachtungen in dieser Arbeit ist die phänomenologische Herangehensweise im Kontext der Kontinuumsmechanik. Die metallischen Konstruktionswerkstoffe sind seit den letzten einhundert Jahren das zentrale Untersuchungsobjekt in den Materialwissenschaften. In diesem Zeitraum wurden die grundsätzlichen Deformationsmechanismen bei mechanischer Beanspruchung unter verschiedensten Fragestellungen erforscht, beschrieben und quantifiziert. Ausschlaggebend für das Verständnis des Deformationsverhalten ist das Verständnis der Mikrostruktur und der damit verbundenen Eigenschaften. Die Herstellungsverfahren der metallischen Werkstoffe erzeugen eine defektbehaftete polykristalline Mikrostruktur, deren charakteristische Abmessungen um mehrere Größenordnungen kleiner als charakteristische Bauteilabmessungen sind, so dass die komplexeren Wechselwirkungen in der Mikroskala nicht als direkte Grundlage für die Analyse des globalen Deformationsverhaltens in der Makroskala herangezogen werden können. Die phänomenologische Beschreibung bietet für die Analyse eine effektive Möglichkeit, in der die wesentlichen Erkenntnisse der Mikrostrukturanalyse integriert werden. Das Hauptziel ist eine physikalisch motiviertes Materialmodell zu entwerfen, das in ein plausibles Theoriegebäude mit dem zugehörigen mathematischen Apparat eingebettet ist.

Für die Beschreibung eines Werkstoffs stehen eine Vielzahl von Materialmodellen zur Verfügung. Aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht ist der wohldefinierte Einsatzbereich des Modells und die robuste Ermittlung der Modellparameter ausschlaggebend, wofür ein aussagekräftiges Experiment mit einer eindeutigen abgeleiteten Charakteristik benötigt wird. Im Sinne der Eindeutigkeit und der Definition der Einsatzgrenzen birgt eine singuläre Spannungs-Dehungs-Charakteristik oder eine Gruppe dieser Charakteristiken nicht die vollständigen Informationen.

Der zugehörige theoretische Rahmen ist die Kontinuumsmechanik, die auf die Bilanzgleichungen eines thermodynamischen Systems fußt. Die Deformationsvorgänge werden als thermodynamischer Prozess behandelt, Zustandsgleichungen formuliert und notwendige Materialgesetze unter Berücksichtigung der mathematisch-physikalischen Prinzipien und den experimentellen Beobachtungen formuliert.

In dieser Arbeit wurde sich auf die technisch relevanten, kleinen Deformationsgradienten und bekannte, konventionelle Konstruktionswerkstoffe beschränkt, so dass die Anforderungen und der Aufwand in der experimentellen Umsetzung und der numerischen Analyse effizient gestaltet werden kann sowie die Anzahl der Einflussfaktoren beschränkt wird. Für die Überführung der thermomechanischen Betrachtung in ein praxisnahes Umfeld ist es von großer Bedeutung die technischen Anforderungen an die Versuchsführung zu minimieren. Dies wird mit einem geringen zusätzlichen Aufwand in der Probenvorbereitung und einer kompakten Messwertaufnahme und -auswertung gelöst. Es wird weiterhin auf eine aufwendige praktische Umsetzung möglichst idealer thermischer Randbedingungen verzichtet und die realen Bedingungen in die Modellierung integriert.

Aus den experimentellen Ergebnissen ist ersichtlich, dass die Temperaturverteilung, als eine wesentliche Feldgröße, im Bereich kleiner Deformationen eine signifikante und sehr genau messbare Änderung erfährt und somit die Kopplung zwischen Verschiebungsfeld und Temperaturfeld quantitativ ausgewertet werden kann. Als Messsystem kam eine zeitlich und räumlich hochauflösende Infrarotkamera für die Temperaturmessung an der Probenoberfläche und der unmittelbaren Probenumgebung, also die Einspannbereiche der Prüfmaschine, zum Einsatz. Die erweiterte Bilddatennutzung über die Methode der digitalen Bildkorrelation ist mit der Zuordnung der Temperaturentwicklung zu materiellen Punkten möglich. Hierzu wurden die Proben mit einem kontrastreichen Muster im infraroten Wellenlängenbereich versehen. Die Bildauswertung kombiniert eine Emissionskorrektur sowie eine Bewegungskompensation für die Temperaturmessung und eine Ermittlung des Verschiebungsfeldes auf der Probenoberfläche für den gesamten Belastungspfad. Der Kontrast in den musterbehafteten Proben wird durch eine zusätzliche Strahlungsquelle verstärkt und stellt damit einen limitierenden Faktor in der Versuchsführung dar. Der Energieeintrag durch die Strahlungsquelle ist bei kleinen Temperaturänderungen vernachlässigbar. Bei größeren Temperaturänderungen ist die Strahlungsintensität zu erhöhen, so dass hier eine Rückkopplung auf die Probe ausgeschlossen werden muss.

Im analytischen Apparat der Kontinuumsthermomechanik werden thermodynamisch konsistente Materialmodelle abgeleitet. Die bestehenden Ansätze in der Literatur wurden bewertet und für die untersuchten Materialien unterschiedliche Modellvarianten diskutiert. In der Quantifizierung kann je nach Versuchsführung die Abbildung insbesondere der thermischen Randbedingungen idealisiert bzw. einige Effekte, wie die zeitliche Abhängigkeit der Randtemperaturen bei kurzen Prozessen, vernachlässigt werden. In allen zur Verfügung stehenden Materialproben kann für die Modellbildung im Kontext einer eindimensionalen Prüfstrategie von isotropem Materialverhalten ausgegangen werden.

Wesentlich für die Charakterisierung des Materials ist die Zuordnung und Ermittlung der Modellparameter. Aufgrund der kleinen Temperaturänderungen kann in guter Näherung davon ausgegangen werden, dass die mechanischen und thermischen Modellparameter keine Abhängigkeit von der Temperatur aufweisen. Die Ermittlung der Modellparameter erfolgt sequentiell und, wenn möglich, separiert. Die thermischen Parameter Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärmekapazität werden unabhängig von der mechanischen Belastung ermittelt und für den thermomechanischen Prozess fixiert, da eine Abhängigkeit vom Beanspruchungszustand ausgeschlossen wurde.

Die Versuchsführung ließ in den betrachteten Fällen eine klare Abgrenzung des thermoelastischen Verhaltens zu. In der Regel eignen sich die Entlastungspfade für die Bestimmung der Parameter im elastischen Kopplungsterm der Wärmeleitgleichung. Die mechanischen Parameter für inelastisches Verhalten können nicht losgelöst über die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik identifiziert werden, sondern sind mit der Temperatur-Lastparameter-Kurve verknüpft. Die Deformationsmechanismen, die durch Mikrostrukturänderungen dem Material zusätzlich freie Energie verschaffen,

---

reduzieren gleichermaßen den dissipativen Anteil, der in Wärme umgewandelt wird und zu einem Temperaturanstieg führt. Die Dynamik dieses Umwandlungsvorganges wird über die Struktur der Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen bestimmt.

Für metallische Werkstoffe ist die Dynamik des Verhaltens mit der Versetzungsdichte und der Versetzungsgeschwindigkeit im Bereich der inelastischen Verformungen korreliert und kann phänomenologisch erfasst werden. Die Eigenschaft der Versetzungsdichte und zugehöriger Versetzungsgeschwindigkeiten kann sich über der Beanspruchungshistorie auch dann verändern, wenn die Beanspruchungsamplituden unterhalb der einer definierten Fließspannung liegen und mit einer entsprechenden Häufigkeit wiederholt werden.

Die verwendeten und adaptierten Materialmodelle sind thermodynamisch konsistent und zudem in der Lage das beobachtete Verhalten in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und in der Temperatur-Lastparameter-Charakteristik abzubilden. Die vorhandenen Unzulänglichkeiten in bestimmten Belastungsszenarien sind dem Modell immanent und eindeutig zuzuordnen, können aber in den meisten Fällen nicht eindeutig in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik erkannt und erklärt werden. Die Erweiterung oder besser die Vervollständigung der Antwortcharakteristiken liefert hier die wesentlichen Hinweise zur Physikalität der getroffenen Modellannahmen und zugehörigen mathematischen Ansätzen.

Mit diesem Befund lässt sich Einsatz der Messmethodik und der analytischen Beschreibung auf Materialien übertragen, deren bestimmende Deformationsmechanismen durch andere Effekte geprägt sind. Verbleibt man bei den metallischen Werkstoffen wird die Deformation infolge vorhandener Schädigung durch Poren, Mikrorisse oder Einschlüsse im Material zugänglich. Voraussetzung ist dann, dass diese Heterogenität in einer ausreichenden Häufigkeit und mit einer Gleichverteilung im betrachteten Volumen vorhanden ist. Die zur Beschreibung notwendigen Schädigungsparameter unterliegen einer Entwicklung und können daher über das Konzept der inneren Variablen in die Potentialformulierungen aufgenommen werden.

Die Implementierung derartiger Ansätze ist in Verbindung mit additiv gefertigten Materialien von besonderem Interesse, da die verfahrensbedingten Parameter die Mikrostruktur signifikant verändern und somit zuvor untergeordnete Deformationsmechanismen ein erhöhtes Gewicht bereits in einfachen Lastpfaden erlangen. Ein Beispiel dafür ist die gesteigerte Porosität für additiv gefertigtes Inconel IN718 am Ende des quasistatischen Zugversuchs (Ziółkowski u. a., 2021).

Die Lokalisierungseffekte hinsichtlich eines Porenwachstums in Kombination mit Porenbildung lässt gleichermaßen an Modellierungsansätze denken, die Größeneffekte bei der Festigkeitssteigerung durch eine Korngrößenvariation (*strain gradient plasticity* nach Gurtin, Fried und Anand, 2013, Part XV) oder die Entwicklung von Texturen (*crystal plasticity*) berücksichtigen. Der Zugriff auf drei komplexe Kennlinien erlaubt eine Verifizierung und eine Beurteilung der Physikalität der jeweiligen Ansätze. Der Einfluss einer Texturentwicklung wie z. Bsp. in der Modellstudie

von Håkansson, Wallin und Ristinmaa, 2008, kann mit experimentellen Befunden gestützt werden und muss sich in der Diskussion nicht auf idealisierte thermische Randbedingungen beschränken.

In anderen Werkstoffklassen mit einer statistischen Gleichverteilung der mikrostrukturellen Heterogenität wird die Dynamik in der Phase inelastischer Deformationen eine andere Ausprägung besitzen. Man denke hier an Polymerwerkstoffe mit einer Mischung aus amorpher Knäuelstruktur und kristalliner Anordnung der langkettigen Moleküle (Yu, Kang und Chen, 2017). Die Komplexität des Deformationsverhaltens ist ebenso bei hybriden Werkstoffen gegeben, da die Wichtung der Interaktion von Deformationsmechanismen und das Verhalten am Phasenübergang zunächst unbekannt ist. Von herausgehobenen Interesse sind beispielsweise funktionalisierte, bikontinuierliche Verbundsysteme (Carolan u. a., 2015; Soyarslan, Pradas und Bargmann, 2019) oder hybride Formgedächtniswerkstoffe (Arndt u. a., 2021). Die experimentellen Befunde können mit der Kontinuumsthermomechanik in physikalisch begründete und leistungsfähige Materialmodelle übersetzt werden.

Datengesteuerte numerische Mechanik ist oftmals mit Datenpunkten im Bereich elastischer Deformationen also zeitunabhängigen Verhalten verbunden, so dass die Verwendung von Materialmodellen komplett aufgegeben wird (z. Bsp. Eggersmann, Stainier u. a., 2021). Ist die Materialantwort von der Lastgeschichte abhängig, so ist thermodynamische Konsistenz weiterhin zu gewährleisten. Hierzu wurden verschiedene Ansätze präsentiert (Eggersmann, Kirchdoerfer u. a., 2019; Gerbaud, Néron und Ladevèze, 2022). Die kompakte kombinierte Methodik mit einer IR-Kamera für die Messung von zwei Feldgrößen kann unter den bestehenden Anwendungsgrenzen für die Generierung umfassender Datenpunkte zukünftig einen wesentlichen Beitrag leisten.

---

## Literatur

- Abu Al-Rub, R. K. und G. Z. Voyiadjis (2003). „On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials“. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (11), S. 2611–2643. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00109-4.
- Anand, L., M. E. Gurtin und B. D. Reddy (2015). „The stored energy of cold work, thermal annealing, and other thermodynamic issues in single crystal plasticity at small length scales“. In: *International Journal of Plasticity* 64, S. 1–25. doi: 10.1016/j.ijplas.2014.07.009.
- Armstrong, P. J. und C. O. Frederick (2007). „A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect“. In: *Materials at High Temperatures* 24 (1), S. 1–26. doi: 10.1179/096034007X207589.
- Arndt, C., M. Hauck, I. Wacker u. a. (2021). „Microengineered Hollow Graphene Tube Systems Generate Conductive Hydrogels with Extremely Low Filler Concentration“. In: *Nano Lett.* 21 (8). PMID: 33724848, S. 3690–3697. doi: 10.1021/acs.nanolett.0c04375.
- Bär, J., L. Seilnacht und R. Urbanek (2019). „Determination of dissipated energies during fatigue tests on Copper and AA7475 with Infrared Thermography“. In: *Procedia Structural Integrity* 17. 3rd International Conference on Structural Integrity, ICSI 2019, 2-5 September 2019, Funchal, Madeira, Portugal, S. 308–315. doi: 10.1016/j.prostr.2019.08.041.
- Bartels, A., T. Bartel, M. Canadija u. a. (2015). „On the thermomechanical coupling in dissipative materials: A variational approach for generalized standard materials“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 82, S. 218–234. doi: 10.1016/j.jmps.2015.04.011.
- Bergander, H. und M. Luther (1985). „Zur Dissipation beim plastischen Fließen“. In: *Technische Mechanik* 6 (2), S. 58–65.
- Bever, M.B., D.L. Holt und A.L. Titchener (1973). „The stored energy of cold work“. In: *Progress in Materials Science* 17, S. 5–177. doi: 10.1016/0079-6425(73)90001-7.
- Biot, M. A. (1956). „Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics“. In: *Journal of Applied Physics* 27 (3), S. 240–253. doi: 10.1063/1.1722351.
- Blanter, M. S., I. S. Golovin, H. Neuhäuser u. a. (2007). *Internal Friction in Metallic Materials: A Handbook*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-68758-0. doi: 10.1007/978-3-540-68758-0.
- Bodner, S. R. und A. Lindendorf (1995). „Constitutive modelling of the stored energy of cold work under cyclic loading“. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 14 (3), S. 333–348.
- Bodner, S. R. und Y. Partom (Juni 1975). „Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials“. In: *Journal of Applied Mechanics* 42 (2), S. 385–389. doi: 10.1115/1.3423586.

- Bouache, T., H. Pron und D. Caron (2016). „Identification of the Heat Losses at the Jaws of a Tensile Testing Machine“. In: *Experimental Mechanics* 56 (2), S. 287–295. doi: 10.1007/s11340-015-0096-z.
- Breitenstein, O., W. Warta und M. Langenkamp (2010). *Lock-in Thermography*. Advanced Microelectronics. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-02417-7.
- Bröcker, C. (2014). „Materialmodellierung für die simultane Kalt-/Warmumformung auf Basis erweiterter rheologischer Modelle“. Diss. Universität Kassel.
- Bröcker, C. und A. Matzenmiller (2013). „An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior“. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 25 (6), S. 749–778. doi: 10.1007/s00161-012-0268-3.
- (2015). „An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior, part 2: spatial generalization for small strains“. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27 (3), S. 325–347. doi: 10.1007/s00161-014-0350-0.
- Bruhns, O. T. (2020). „Large deformation plasticity“. In: *Acta Mechanica Sinica* 36 (2), S. 472–492. doi: 10.1007/s10409-020-00926-7.
- Budzier, H. und G. Gerlach (2010). *Thermische Infrarotsensoren*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag.
- Carolan, D., H.M. Chong, A. Ivankovic u. a. (2015). „Co-continuous polymer systems: A numerical investigation“. In: *Comput. Mater. Sci* 98, S. 24–33. doi: 10.1016/j.commatsci.2014.10.039.
- Casey, J. (2021). „A Discussion of Multiplicative Decompositions and Strain Measures“. In: *Journal of Elasticity*. doi: 10.1007/s10659-021-09867-z.
- Chaboche, J.-L. (1986). „Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity“. In: *International Journal of Plasticity* 2 (2), S. 149–188. doi: 10.1016/0749-6419(86)90010-0.
- (1989). „Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity“. In: *International Journal of Plasticity* 5 (3), S. 247–302. doi: 10.1016/0749-6419(89)90015-6.
- (1993a). „Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, Part I: A Thermodynamically Consistent Formulation“. In: *Journal of Applied Mechanics* 60 (4), S. 813–821. doi: 10.1115/1.2900988.
- (1993b). „Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, Part II: Stored Energy – Comparison Between Models and Experiments“. In: *Journal of Applied Mechanics* 60 (4), S. 822–828. doi: 10.1115/1.2900990.
- (1997). „Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers“. In: *International Journal of Solids and Structures* 34 (18), S. 2239–2254. doi: 10.1016/S0020-7683(96)00162-X.

- 
- Chan, K. S., S. R. Bodner und U. S. Lindholm (Jan. 1988). „Phenomenological Modeling of Hardening and Thermal Recovery in Metals“. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 110 (1), S. 1–8. doi: 10.1115/1.3226003.
- Cholewa, N., P. T. Summers, S. Feih u. a. (2016). „A Technique for Coupled Thermomechanical Response Measurement Using Infrared Thermography and Digital Image Correlation (TDIC)“. In: *Experimental Mechanics* 56 (2), S. 145–164. doi: 10.1007/s11340-015-0086-1.
- Chrysochoos, A. (2012). „Infrared thermography applied to the analysis of material behavior: A brief overview“. In: *Quantitative InfraRed Thermography Journal* 9 (2), S. 193–208. doi: 10.1080/17686733.2012.746069.
- Chrysochoos, A. und F. Belmahjoub (1992). „Thermographic analysis of thermomechanical couplings“. In: *Archives of Mechanics* 44 (1), S. 55–68.
- Chrysochoos, A., O. Maisonneuve, G. Martin u. a. (1989). „Plastic and dissipated work and stored energy“. In: *Nuclear Engineering and Design* 114 (3), S. 323–333. doi: 10.1016/0029-5493(89)90110-6.
- Clarebrough, L. M., M. E. Hargreaves, G. W. West u. a. (1957). „The energy stored in fatigued metals“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 242 (1229), S. 160–166. doi: 10.1098/rspa.1957.0164.
- Coleman, B. D. (1964). „Thermodynamics of materials with memory“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 17 (1), S. 1–46. doi: 10.1007/BF00283864.
- Coleman, B. D. und M. E. Gurtin (1967). „Thermodynamics with Internal State Variables“. In: *The Journal of Chemical Physics* 47 (2), S. 597–613. doi: 10.1063/1.1711937.
- Coleman, B. D. und W. Noll (1963). „The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13 (1), S. 167–178. doi: 10.1007/BF01262690.
- Courant, R. und D. Hilbert (1993). *Methoden der mathematischen Physik*. 4. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-58039-0.
- Cruanes, C., M.-P. Deffarges, F. Lacroix u. a. (2019). „Modeling of the thermomechanical behavior of rubbers during fatigue tests from infrared measurements“. In: *International Journal of Fatigue* 126, S. 231–240. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2019.04.035.
- Deseri, L. und R. Mares (2000). „A class of viscoelastoplastic constitutive models based on the maximum dissipation principle“. In: *Mechanics of Materials* 32 (7), S. 389–403. doi: 10.1016/S0167-6636(00)00011-9.
- Dettmer, W. und S. Reese (2004). „On the theoretical and numerical modelling of Armstrong–Frederick kinematic hardening in the finite strain regime“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (1), S. 87–116. doi: 10.1016/j.cma.2003.09.005.

- Eggersmann, R., T. Kirchdoerfer, S. Reese u. a. (2019). „Model-Free Data-Driven inelasticity“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 350, S. 81–99. doi: 10.1016/j.cma.2019.02.016.
- Eggersmann, R., L. Stainier, M. Ortiz u. a. (2021). „Model-free data-driven computational mechanics enhanced by tensor voting“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 373, S. 113499. doi: 10.1016/j.cma.2020.113499.
- Egner, H. (2012). „On the full coupling between thermo-plasticity and thermo-damage in thermodynamic modeling of dissipative materials“. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2), S. 279–288. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.014.
- Egner, W. und H. Egner (2016). „Thermo-mechanical coupling in constitutive modeling of dissipative materials“. In: *International Journal of Solids and Structures* 91, S. 78–88. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.04.024.
- Farren, W. S. und G. I. Taylor (1925). „The heat developed during plastic extension of metals“. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* 107 (743), S. 422–451. doi: 10.1098/rspa.1925.0034.
- Fedorova, A. Yu., M. V. Bannikov, A. I. Terekhina u. a. (2014). „Heat dissipation energy under fatigue based on infrared data processing“. In: *Quantitative InfraRed Thermography Journal* 11 (1), S. 2–9. doi: 10.1080/17686733.2013.852416.
- Felder, S., N.A. Vu, S. Reese u. a. (2020). „Modeling the effect of temperature and degree of crystallinity on the mechanical response of Polyamide 6“. In: *Mechanics of Materials* 148, S. 103476. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103476.
- Freed, A. D., J.-L. Chaboche und K. P. Walker (1991). „A viscoplastic theory with thermodynamic considerations“. In: *Acta Mechanica* 90 (1), S. 155–174. doi: 10.1007/BF01177406.
- Freed, A. D. und K. P. Walker (1993). „Viscoplasticity with creep and plasticity bounds“. In: *International Journal of Plasticity* 9 (2), S. 213–242. doi: 10.1016/0749-6419(93)90030-T.
- Gerbaud, P.-W., D. Néron und P. Ladevèze (2022). „Data-driven elasto-(visco)plasticity involving hidden state variables“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, S. 115394. doi: 10.1016/j.cma.2022.115394.
- Germain, P., Q. S. Nguyen und P. Suquet (1983). „Continuum Thermodynamics“. In: *Journal of Applied Mechanics* 50, S. 1010–1020. doi: 10.1115/1.3167184.
- Göttfert, F., H. Sparr, M. Ziegenhorn u. a. (2022). „Combining thermography and stress analysis for tensile testing in a single sensor“. In: *Thermosense: Thermal Infrared Applications XLIV*. Hrsg. von A. Mendioroz und N. P. Avdelidis. Bd. 12109. International Society for Optics und Photonics. SPIE, 121090A. doi: 10.1117/12.2618947.
- Grodzki, W., W. Oliferuk, M. Doroszko u. a. (2021). „Prediction of Crack Initiation Based on Energy Storage Rate during Low-Cycle Fatigue of Austenitic Stainless Steel“. In: *Materials* 14 (19). doi: 10.3390/ma14195526.

- 
- Guo, Q., F. Zäiri, C. Ovalle Rodas u. a. (2018). „Constitutive modeling of the cyclic dissipation in thin and thick rubber specimens“. In: *ZAMM* 98 (10), S. 1878–1899. doi: 10.1002/zamm.201800087.
- Gurson, A. L. (1977). „Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth-I. yield criteria and flow rules for porous ductile media“. In: *J. Eng. Mater. Technol. Trans.* 99 (1), S. 2–15.
- Gurtin, M. E., E. Fried und L. Anand (2013). *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge [et al.]: Cambridge University Press.
- Guseva, M.A., V.A. Gerasin, O.K. Garishin u. a. (2015). „Thermal effects under elastic and plastic deformation of polyethylene“. In: *Polymer* 56. Polymer Foams, S. 416–427. doi: 10.1016/j.polymer.2014.11.041.
- Guzmán, R., J. Meléndez, J. Zahr u. a. (2010). „Determination of the Constitutive Relation Parameters of a Metallic Material by Measurement of Temperature Increment in Compressive Dynamic Tests“. In: *Experimental Mechanics* 50 (3), S. 389–397. doi: 10.1007/s11340-009-9223-z.
- Haasen, P. (1994). *Physikalische Metallkunde*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH. doi: 10.1007/978-3-642-87849-7.
- Häkansson, P., M. Wallin und M. Ristinmaa (2005). „Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity“. In: *International Journal of Plasticity* 21 (7), S. 1435–1460. doi: 10.1016/j.ijplas.2004.07.002.
- (2006). „Thermomechanical response of non-local porous material“. In: *International Journal of Plasticity* 22 (11). Damage and Fracture: Modeling and Experiments, S. 2066–2090. doi: 10.1016/j.ijplas.2005.08.003.
- (2008). „Prediction of stored energy in polycrystalline materials during cyclic loading“. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (6), S. 1570–1586. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2007.10.009.
- Haupt, P. (2002). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Englisch. 2nd. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-662-04775-0.
- Hayabusa, K., K. Inaba, H. Ikeda u. a. (2017). „Estimation of Fatigue Limits from Temperature Data Measured by IR Thermography“. In: *Experimental Mechanics* 57 (2), S. 185–194. doi: 10.1007/s11340-016-0221-7.
- Heeres, O. M., A. S.J. Suiker und R. de Borst (2002). „A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the Consistency viscoplastic model“. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21 (1), S. 1–12. doi: 10.1016/S0997-7538(01)01188-3.
- Helm, D. (2001). „Formgedächtnislegierungen – Experimentelle Untersuchung, phänomenologische Modellierung und numerische Simulation der thermomech.“. Diss. Universität Gesamthochschule Kassel.
- (2006). „Stress computation in finite thermoviscoplasticity“. In: *International Journal of Plasticity* 22 (9), S. 1699–1727. doi: 10.1016/j.ijplas.2006.02.007.

- Herrmann, M. (2021). „Diskussion zur Anwendung der Legendre-Transformation“. Persönliche Korrespondenz.
- Hodowany, J., G. Ravichandran, A. J. Rosakis u. a. (2000). „Partition of plastic work into heat and stored energy in metals“. In: *Experimental Mechanics* 40 (2), S. 113–123. DOI: 10.1007/BF02325036.
- Jegou, L., Y. Marco, V. Le Saux u. a. (2013). „Fast prediction of the Wöhler curve from heat build-up measurements on Short Fiber Reinforced Plastic“. In: *International Journal of Fatigue* 47, S. 259–267. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.09.007.
- Jiang, L., H. Wang, P. K. Liaw u. a. (2001). „Characterization of the temperature evolution during high-cycle fatigue of the ULTIMET superalloy: Experiment and theoretical modeling“. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 32 (9), S. 2279–2296. DOI: 10.1007/s11661-001-0203-x.
- Johnsen, J., A. H. Clausen, F. Grytten u. a. (2019). „A thermo-elasto-viscoplastic constitutive model for polymers“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 124, S. 681–701. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.11.018.
- Johnson, G. R. und W. H. Cook (1985). „Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1), S. 31–48. DOI: 10.1016/0013-7944(85)90052-9.
- Kamlah, M. (1994). „Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik“. Diss. Universität Gesamthochschule Kassel.
- Kamlah, M. und P. Haupt (1998). „On the Macroscopic Description of Stored Energy and Self Heating During Plastic Deformation“. In: *International Journal of Plasticity* 13 (10), S. 893–911. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)00063-6.
- Kästner, M., M. Obst, J. Brummund u. a. (2012). „Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model“. In: *Mechanics of Materials* 52, S. 40–57. DOI: 10.1016/j.mechmat.2012.04.011.
- Knysh, P. und Y. P. Korkolis (2015). „Determination of the fraction of plastic work converted into heat in metals“. In: *Mechanics of Materials* 86, S. 71–80. DOI: 10.1016/j.mechmat.2015.03.006.
- Krairi, A. und I. Doghri (2014). „A thermodynamically-based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage“. In: *International Journal of Plasticity* 60, S. 163–181. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.04.010.
- Krairi, A., I. Doghri, J. Schalnau u. a. (2019). „Thermo-mechanical coupling of a viscoelastic-viscoplastic model for thermoplastic polymers: Thermodynamical derivation and experimental assessment“. In: *International Journal of Plasticity* 115, S. 154–177. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.11.016.

- 
- Kratochvil, J. und O. W. Dillon (1969). „Thermodynamics of Elastic-Plastic Materials as a Theory with Internal State Variables“. In: *Journal of Applied Physics* 40 (8), S. 3207–3218. doi: 10.1063/1.1658167.
- Krausz, A. S. und K. Krausz, Hrsg. (1996). *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. San Diego, Calif.: Acad. Press.
- Kreml, E. (1987). „Models of viscoplasticity some comments on equilibrium (back) stress and drag stress“. In: *Acta Mechanica* 69 (1), S. 25–42. doi: 10.1007/BF01175712.
- Kreml, E. und V.V. Kallianpur (1984). „Some critical uniaxial experiments for viscoplasticity at room temperature“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 32 (4), S. 301–314. doi: 10.1016/0022-5096(84)90026-7.
- Kreml, E. und F. Khan (2003). „Rate (time)-dependent deformation behavior: An overview of some properties of metals and solid polymers“. In: *International Journal of Plasticity* 19 (7), S. 1069–1095. doi: 10.1016/S0749-6419(03)00002-0.
- Kröner, E. (1959). „Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen“. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 4, S. 273–334. doi: 10.1007/BF00281393.
- Kumar, A. und R. G. Kumble (1969). „Viscous Drag on Dislocations at High Strain Rates in Copper“. In: *Journal of Applied Physics* 40 (9), S. 3475–3480. doi: 10.1063/1.1658222.
- Launay, A., M.H. Maitournam, Y. Marco u. a. (2011). „Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations“. In: *International Journal of Plasticity* 27 (8), S. 1267–1293. doi: 10.1016/j.ijplas.2011.02.005.
- Lemaître, J. und R. Desmorat (2005). *Engineering damage mechanics: Ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Berlin und New York: Springer.
- Lion, A. (2000). „Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: A physical approach based on nonlinear rheological models“. In: *International Journal of Plasticity* 16 (5), S. 469–494. doi: 10.1016/S0749-6419(99)00038-8.
- Lubliner, J. (1972). „On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics“. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 7 (3), S. 237–254. doi: 10.1016/0020-7462(72)90048-0.
- (1973). „On the structure of the rate equations of materials with internal variables“. In: *Acta Mechanica* 17 (1), S. 109–119. doi: 10.1007/BF01260883.
- Marco, Y., V. Le Saux, L. Jégou u. a. (2014). „Dissipation analysis in SFRP structural samples: Thermomechanical analysis and comparison to numerical simulations“. In: *International Journal of Fatigue* 67. Multiaxial Fatigue 2013, S. 142–150. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2014.02.004.
- Masquelier, I., Y. Marco, V. Le Saux u. a. (2015). „Determination of dissipated energy fields from temperature mappings on a rubber-like structural sample: Experiments and comparison to numerical simulations“. In: *Mechanics of Materials* 80, S. 113–123. doi: 10.1016/j.mechmat.2014.09.010.

- Maynadier, A., M. Poncelet, K. Lavernhe-Taillard u. a. (2012). „One-shot Measurement of Thermal and Kinematic Fields: InfraRed Image Correlation (IRIC)“. In: *Experimental Mechanics* 52 (3), S. 241–255. DOI: 10.1007/s11340-011-9483-2.
- Meyendorf, N. G.H., H. Rösner, V. Kramb u. a. (2002). „Thermo-acoustic fatigue characterization“. In: *Ultrasonics* 40 (1), S. 427–434. DOI: 10.1016/S0041-624X(02)00155-5.
- Micone, N. und W. De Waele (2017). „On the Application of Infrared Thermography and Potential Drop for the Accelerated Determination of an S-N Curve“. In: *Experimental Mechanics* 57 (1), S. 143–153. DOI: 10.1007/s11340-016-0194-6.
- Mitteemeijer, E. J. (2011). *Fundamentals of Materials Science*. Berlin Heidelberg: Springer. ISBN: 978-3-642-10499-2. DOI: 10.1007/978-3-642-10500-5.
- Montesano, J., Z. Fawaz und H. Bougherara (2013). „Use of infrared thermography to investigate the fatigue behavior of a carbon fiber reinforced polymer composite“. In: *Composite Structures* 97, S. 76–83. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.09.046.
- Mosler, J. und O.T. Bruhns (2010). „On the implementation of rate-independent standard dissipative solids at finite strain – Variational constitutive updates“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (9), S. 417–429. DOI: 10.1016/j.cma.2009.07.006.
- Mróz, Z. und W. Oliferuk (2002). „Energy balance and identification of hardening moduli in plastic deformation processes“. In: *International Journal of Plasticity* 18 (3), S. 379–397. DOI: 10.1016/S0749-6419(00)00103-0.
- Mroziński, S., H. Egner und M. Piotrowski (2019). „Effects of fatigue testing on low-cycle properties of P91 steel“. In: *International Journal of Fatigue* 120, S. 65–72. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2018.11.001.
- Muracciole, J.-M., B. Wattrisse und A. Chrysochoos (2008). „Energy Balance of a Semicrystalline Polymer During Local Plastic Deformation“. In: *Strain* 44 (6), S. 468–474. DOI: 10.1111/j.1475-1305.2007.00412.x.
- Murakami, S. (2012). *Continuum Damage Mechanics*. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer. ISBN: 978-94-007-2665-9. DOI: 10.1007/978-94-007-2666-6.
- Neff, P. (2003). „Finite multiplicative plasticity for small elastic strains with linear balance equations and grain boundary relaxation“. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 15 (2), S. 161–195. DOI: 10.1007/s00161-002-0109-x.
- Nieto-Fuentes, J. C., S. Osovski, A. Venkert u. a. (2019). „Reassessment of the Dynamic Thermomechanical Conversion in Metals“. In: *Phys. Rev. Lett.* 123 (25), S. 255502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.255502.
- Nieto-Fuentes, J.C., D. Rittel und S. Osovski (2018). „On a dislocation-based constitutive model and dynamic thermomechanical considerations“. In: *International Journal of Plasticity* 108, S. 55–69. DOI: 10.1016/j.jplplas.2018.04.012.

- 
- Oldyrev, P. P. (1967). „Self-heating and failure of plastics under cyclic loading“. In: *Polymer Mechanics* 3 (3), S. 322–328. doi: 10.1007/BF00858775.
- Oldyrev, P. P. und V. P. Tamuzh (1969). „Energy dissipation in a glass-reinforced plastic during prolonged cyclic deformation“. In: *Strength of Materials* 1 (3), S. 244–248. doi: 10.1007/BF01543209.
- Oliferuk, W. und M. Maj (2004). „Effect of pre-strain direction on energy storage process during tensile deformation of polycrystal“. In: *Materials Science and Engineering: A* 387–389. 13th International Conference on the Strength of Materials, S. 218–221. doi: 10.1016/j.msea.2004.01.058.
- (2007). „Plastic instability criterion based on energy conversion“. In: *Materials Science and Engineering: A* 462 (1). International Symposium on Physics of Materials, 2005, S. 363–366. doi: 10.1016/j.msea.2006.02.465.
- (2009). „Stress–strain curve and stored energy during uniaxial deformation of polycrystals“. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 28 (2), S. 266–272. doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.06.003>.
- Oliferuk, W., M. Maj, R. Litwinko u. a. (2012). „Thermomechanical coupling in the elastic regime and elasto-plastic transition during tension of austenitic steel, titanium and aluminium alloy at strain rates from  $10^{-4}$  to  $10^{-1}$  s $^{-1}$ “. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 35, S. 111–118. doi: 10.1016/j.euromechsol.2011.08.007.
- Oliferuk, W., M. Maj und B. Raniecki (2004). „Experimental analysis of energy storage rate components during tensile deformation of polycrystals“. In: *Materials Science and Engineering: A* 374 (1), S. 77–81. doi: 10.1016/j.msea.2003.12.056.
- Oliferuk, W., M. Maj und K. Zembrzycki (2015). „Determination of the Energy Storage Rate Distribution in the Area of Strain Localization Using Infrared and Visible Imaging“. In: *Experimental Mechanics* 55 (4), S. 753–760. doi: 10.1007/s11340-013-9819-1.
- Oliferuk, W. und B. Raniecki (2018). „Thermodynamic description of the plastic work partition into stored energy and heat during deformation of polycrystalline materials“. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 71, S. 326–334. doi: 10.1016/j.euromechsol.2018.04.002.
- Oliferuk, W., W. A. Świątnicki und M. W. Grabski (1993). „Rate of energy storage and microstructure evolution during the tensile deformation of austenitic steel“. In: *Materials Science and Engineering: A* 161 (1), S. 55–63. doi: 10.1016/0921-5093(93)90475-T.
- (1995). „Effect of the grain size on the rate of energy storage during the tensile deformation of an austenitic steel“. In: *Materials Science and Engineering: A* 197 (1), S. 49–58. doi: 10.1016/0921-5093(94)09766-6.
- Olszak, W. und P. Perzyna (1969). „On thermal effects in viscoplasticity“. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 20 (5), S. 676–680. doi: 10.1007/BF01590623.

- Ottosen, N. S. und M. Ristinmaa (2005). *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Oxford: Elsevier Science Ltd. ISBN: 978-0-08-044606-6. DOI: 10.1016/B978-0-08-044606-6.X5000-0.
- Pawlak, A., A. Rozanski und A. Galeski (2013). „Thermovision studies of plastic deformation and cavitation in polypropylene“. In: *Mechanics of Materials* 67. Nanostructured Materials, S. 104–118. DOI: 10.1016/j.mechmat.2013.07.016.
- Pereira, J. C., E. Gil, L. Solaberrieta u. a. (2020). „Comparison of AlSi7Mg0.6 alloy obtained by selective laser melting and investment casting processes: Microstructure and mechanical properties in as-built/as-cast and heat-treated conditions“. In: *Materials Science and Engineering: A* 778, S. 139124. DOI: 10.1016/j.msea.2020.139124.
- Perzyna, P. (1963). „The constitutive equations for rate sensitive plastic materials“. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 20, S. 321–332. DOI: 10.1090/qam/144536.
- (2005). „The Thermodynamical Theory of Elasto-Viscoplasticity (Review Paper)“. In: *Engineering Transactions* 53 (3), S. 235–316.
- Pitarresi, G. (2015). „Lock-In Signal Post-Processing Techniques in Infra-Red Thermography for Materials Structural Evaluation“. In: *Experimental Mechanics* 55 (4), S. 667–680. DOI: 10.1007/s11340-013-9827-1.
- Pottier, T., F. Toussaint, H. Louche u. a. (2013). „Inelastic heat fraction estimation from two successive mechanical and thermal analyses and full-field measurements“. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 38, S. 1–11. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2012.09.002.
- Quinney, H. und G. I. Taylor (1937). „The emission of the latent energy due to previous cold working when a metal is heated“. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* 163 (913), S. 157–181. DOI: 10.1098/rspa.1937.0217.
- Reese, S. (1998). „Multiplicative Thermo-Viscoplasticity: A Thermodynamic Model and its Finite Element Implementation“. In: *Tech. Mech.* 18 (3), S. 209–216.
- Regev, A. und D. Rittel (2008). „Simultaneous Transient Temperature Sensing of Impacted Polymers Using Infrared Detectors and Thermocouples“. In: *Experimental Mechanics* 48 (5), S. 675–682. DOI: 10.1007/s11340-007-9096-y.
- Reiner, M. (1968). „The Influence of Dissipated Stresswork on the Rupture of Materials“. In: *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids. IUTAM Symposia*. Hrsg. von H. Parkus und L.I. Sedov. Vienna: Springer.
- Rice, J.R. und D.M. Tracey (1969). „On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (3), S. 201–217. DOI: 10.1016/0022-5096(69)90033-7.
- Ristinmaa, M. und N. S. Ottosen (2000). „Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity“. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (33), S. 4601–4622. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00158-4.

- 
- Ristinmaa, M., M. Wallin und N. S. Ottosen (2007). „Thermodynamic format and heat generation of isotropic hardening plasticity“. In: *Acta Mechanica* 194 (1), S. 103–121. doi: 10.1007/s00707-007-0448-6.
- Rittel, D. (1999). „On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers“. In: *Mechanics of Materials* 31 (2), S. 131–139. doi: 10.1016/S0167-6636(98)00063-5.
- Rosakis, P., A.J. Rosakis, G. Ravichandran u. a. (2000). „A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (3), S. 581–607. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00048-4.
- Rose, L. und A. Menzel (2020). „Optimisation based material parameter identification using full field displacement and temperature measurements“. In: *Mechanics of Materials* 145, S. 103292. doi: 10.1016/j.mechmat.2019.103292.
- (2021). „Identification of thermal material parameters for thermo-mechanically coupled material models“. In: *Meccanica* 56 (2), S. 393–416. doi: 10.1007/s11012-020-01267-2.
- Rösler, J., H. Harders und M. Bäker (2008). *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner. doi: 10.1007/978-3-8351-9245-4.
- Roszak, R., D. Schob, I. Sagradov u. a. (2021). „Experimental determination and numerical simulation of temperature dependent material and damage behaviour of additively manufactured polyamide 12“. In: *Mechanics of Materials* 159. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103893.
- Ryś, M. und H. Egnér (2019). „Energy equivalence based constitutive model of austenitic stainless steel at cryogenic temperatures“. In: *International Journal of Solids and Structures* 164, S. 52–65. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.12.028.
- Schapery, R.A. (1997). „Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics“. In: *Mechanics of Time-Dependent Materials* 1 (2), S. 209–240. doi: 10.1023/A:1009767812821.
- (1999). „Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage“. In: *International Journal of Fracture* 97 (1), S. 33–66. doi: 10.1023/A:1018695329398.
- Schob, D., R. Roszak, I. Sagradov u. a. (2019). „Experimental and numerical simulation of material and damage behaviour of 3D printed polyamide 12 under quasi-static loading“. In: *Arch. Mech.* 71 (4-5), S. 507–526. doi: 10.24423/aom.3162.
- Schob, D., I. Sagradov, R. Roszak u. a. (2020). „Experimental determination and numerical simulation of material and damage behaviour of 3D printed polyamide 12 under cyclic loading“. In: *Eng. Fract. Mech.* 229 (106841). doi: 10.1016/j.engfracmech.2019.106841.
- Schuster, N. und V. G. Kolobrodov (2004). *Infrarotthermographie*. Berlin: Wiley-VCH Verlag.

- Seghir, R., J.-F. Witz, L. Bodelot u. a. (2013). „An improved lagrangian thermography procedure for the quantification of the temperature fields within polycrystals“. In: *Quantitative InfraRed Thermography Journal* 10 (1), S. 74–95. doi: 10.1080/17686733.2013.785207.
- Shutov, A. V. und J. Ihlemann (2011). „On the simulation of plastic forming under consideration of thermal effects“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 42 (7), S. 632–638. doi: 10.1002/mawe.201100821.
- Simo, J. C. und T. J. R. Hughes (1998). *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer. doi: 10.1007/b98904.
- Simo, J.C., R.L. Taylor und K.S. Pister (1985). „Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1), S. 177–208. doi: 10.1016/0045-7825(85)90033-7.
- Smolina, I., K. Gruber, A. Pawlak u. a. (2022). „Influence of the AlSi7Mg0.6 Aluminium Alloy Powder Reuse on the Quality and Mechanical Properties of LPBF Samples“. In: *Materials* 15 (14). doi: 10.3390/ma15145019.
- Soyarslan, C., M. Pradas und S. Bargmann (2019). „Effective elastic properties of 3D stochastic bicontinuous composites“. In: *Mech. Mater.* 137, S. 103098. doi: 10.1016/j.mechmat.2019.103098.
- Sparr, H., R. Roszak, I. Sagradov u. a. (2020). „Thermo-Viscoplastic Material Modelling for Self-heating Loads and its Experimental Verification“. In: *Technische Mechanik* 40 (1), S. 66–76. doi: 10.24352/UB.OVGU-2020-015.
- Sulich, P., W. Egner, S. Mroziński u. a. (2017). „Modeling of cyclic thermo-elastic-plastic behaviour of P91 steel“. In: *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 55 (2), S. 595–606. doi: 10.15632/jtam-pl.55.2.595.
- Sutton, M. A., J.-J. Orteu und H. Schreier (2009). *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*. Boston, MA: Springer US. doi: 10.1007/978-0-387-78747-3.
- Taylor, G. I. und H. Quinney (1934). „The latent energy remaining in a metal after cold work“. In: *Prog. Mater. Sci. A* 143, S. 307–326.
- Thomson, W. (1852). „XIV.— On the dynamical theory of heat, with numerical results deduced from Mr. Joule’s equivalent of a thermal unit, and M. Regnault’s observations on steam“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 4 (23), S. 105–117. doi: 10.1080/14786445208647082.
- (1853). „XV.— On the dynamical theory of heat, with numerical results deduced from Mr. Joule’s equivalent of a thermal unit, and M. Regnault’s observations on steam“. In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 20, S. 261–288.
- (1855). „On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter, Part I“. In: *Quarterly Journal of Mathematics*, S. 57–77.
- Truesdell, C. und W. Noll (1992). *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. 3rd. Berlin: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-662-10388-3.

- 
- Tvergaard, V. und A. Needleman (1984). „Analysis of the cup cone fracture in a round tensile bar“. In: *Acta Metall.* 32 (1), S. 157–169. doi: 10.1016/0001-6160(84)90213-X.
- Ummenhofer, T. und J. Medgenberg (2006). „Numerical modelling of thermoelasticity and plasticity in fatigue-loaded low carbon steels“. In: *Quantitative InfraRed Thermography Journal* 3 (1), S. 71–91. doi: 10.3166/qirt.3.71-91.
- Valanis, K. C. (1971a). „A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part I – General theory“. In: *Archives of Mechanics* 23, S. 517–533.
- (1971b). „A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part II – Application to mechanical behavior of metals“. In: *Archives of Mechanics* 23, S. 535–551.
- (1971c). *Irreversible Thermodynamics of Continuous Media: Internal Variable Theory*. International Centre for Mechanical Sciences. Springer Vienna. doi: 10.1007/978-3-7091-2987-6.
- Virtanen, P., R. Gommers, T. E. Oliphant u. a. (2020). „SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python“. Englisch. In: *Nature Methods* 17 (3), S. 261–272. doi: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- Wang, X., J.-F. Witz, A. El Bartali u. a. (2016). „Infrared thermography coupled with digital image correlation in studying plastic deformation on the mesoscale level“. In: *Optics and Lasers in Engineering* 86, S. 264–274. doi: 10.1016/j.optlaseng.2016.06.001.
- Wattrisse, B., A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole u. a. (2001). „Analysis of strain localization during tensile tests by digital image correlation“. In: *Experimental Mechanics* 41 (1), S. 29–39. doi: 10.1007/BF02323101.
- Yao, D. und E. Krempl (1985). „Viscoplasticity theory based on overstress. The prediction of monotonic and cyclic proportional and nonproportional loading paths of an aluminum alloy“. In: *International Journal of Plasticity* 1 (3), S. 259–274. doi: 10.1016/0749-6419(85)90007-5.
- Yu, Ch., G. Kang und K. Chen (2017). „A hygro-thermo-mechanical coupled cyclic constitutive model for polymers with considering glass transition“. In: *International Journal of Plasticity* 89, S. 29–65. doi: 10.1016/j.ijplas.2016.11.001.
- Zener, C. (Aug. 1937). „Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds“. In: *Phys. Rev.* 52 (3), S. 230–235. doi: 10.1103/PhysRev.52.230.
- (Jan. 1938). „Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction“. In: *Phys. Rev.* 53 (1), S. 90–99. doi: 10.1103/PhysRev.53.90.
- (Jan. 1940). „Internal friction in solids“. In: *Proceedings of the Physical Society* 52 (1), S. 152–166. doi: 10.1088/0959-5309/52/1/322.
- Zia, R. K. P., E. F. Redish und S. R. McKay (2009). „Making sense of the Legendre transform“. In: *American Journal of Physics* 77 (7), S. 614–622. doi: 10.1119/1.3119512.

Ziółkowski, G., K. Gruber, E. Tokarczyk u. a. (2021). „X-ray Computed Tomography for the ex-situ mechanical testing and simulation of additively manufactured IN718 samples“. In: *Additive Manufacturing* 45, S. 102070. doi: 10.1016/j.addma.2021.102070.

## A Anhang

### A.1 Parameter bzgl. Abschnitt 6.1

Tab. A.1: Parametersatz des Bodner-Lindenfeld-Modells für Edelstahl XCrNi18.9

<b>Thermoelasticity</b>		
Modulus of Elasticity $E_\infty$	N mm <sup>-2</sup>	200 000
Density $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	7 800.0
Expansion Coefficient $\alpha$	K <sup>-1</sup>	$1.6 \cdot 10^{-5}$
Heat Capacity $c_\varepsilon$	J/(kg K)	480.0
Thermal conductivity $k$	W/(m K)	20.0
Scaling factor $D_0$	s <sup>-1</sup>	10 000
Exponent $n$	[-]	3
<b>Plastic work <i>resp.</i> Free energy parameter</b>		
Factor for isotropic h. $\Psi$ -fraction $a$	MJ m <sup>-3</sup>	0.02
Corr. exponent $p_1$	[-]	4.0
Factor for directional h. $\Psi$ -fraction $b$	MJ m <sup>-3</sup>	1.0
Corr. exponent $p_2$	[-]	14.0

<b>Isotropic Hardening</b>		
$Z_0$	MPa	220
$Z_1$	MPa	500
$m_{11}$	MPa <sup>-1</sup>	0.01
$m_{12}$	MPa <sup>-1</sup>	16.7
$m_{13}$	MPa <sup>-1</sup>	0.007
<b>Directional Hardening</b>		
$Z_3$	MPa	340
$m_{21}$	MPa <sup>-1</sup>	0.055
$m_{22}$	MPa <sup>-1</sup>	0.23
$m_{23}$	MPa <sup>-1</sup>	0.05

Tab. A.2: Parametersatz des Bröcker-Matzenmiller-Modells für Edelstahl XCrNi18.9

<b>Thermoelasticity</b>		
Modulus of Elasticity $E_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	200 000
Density $\rho$	$\text{kg/m}^3$	7 800.0
Expansion Coefficient $\alpha$	$\text{K}^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$
Heat Capacity $c_\varepsilon$	$\text{J}/(\text{kg K})$	480.0
Thermal conductivity $k$	$\text{W}/(\text{m K})$	20.0
<b>Friction Element</b>		
Yield Stress $\kappa_0$	$\text{N mm}^{-2}$	273
Lin. Dissipation Coeff. $\beta_1$	$[-]$	0.4
Non-lin. Dissipation Coeff. $\beta_2$	$[-]$	50
<b>Hardening</b>		
Kin. Hardening Modulus $E_\kappa$	$\text{N mm}^{-2}$	4 000
Kin. Saturation $\kappa_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	155.0
Iso. Hardening Modulus $E_\xi$	$\text{N mm}^{-2}$	4 000
Iso. Saturation $\xi_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	155.0
<b>Viscoplasticity</b>		
Strain rate scaling factor $\eta$	s	1.0
Strain rate exponent $m$	$[-]$	1

## A.2 Parameter und Daten bzgl. Abschnitt 6.2.1

Tab. A.3: Parametersatz des Bodner-Lindenfeld-Modells für Kupfer

<b>Thermoelasticity</b>		
Modulus of Elasticity $E_\infty$	N mm <sup>-2</sup>	80 000
Density $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	8 920
Expansion Coefficient $\alpha$	K <sup>-1</sup>	$16.5 \cdot 10^{-6}$
Heat Capacity $c_\varepsilon$	J/(kg K)	385.0
Thermal conductivity $k$	W/(m K)	400.0
Scaling factor $D_0$	s <sup>-1</sup>	10 000
Exponent $n$	[-]	5
<b>Plastic work <i>resp.</i> Free energy parameter</b>		
Factor for isotropic h. $\Psi$ -fraction $a$	MJ m <sup>-3</sup>	0.08
Corr. exponent $p_1$	[-]	4.0
Factor for directional h. $\Psi$ -fraction $b$	MJ m <sup>-3</sup>	2.2
Corr. exponent $p_2$	[-]	1.0
<b>Isotropic Hardening</b>		
$Z_0$	MPa	100
$Z_1$	MPa	120
$m_{11}$	MPa <sup>-1</sup>	1.0
$m_{12}$	MPa <sup>-1</sup>	2.0
$m_{13}$	MPa <sup>-1</sup>	0.01
<b>Directional Hardening</b>		
$Z_3$	MPa	150
$m_{21}$	MPa <sup>-1</sup>	0.18
$m_{22}$	MPa <sup>-1</sup>	0.1
$m_{23}$	MPa <sup>-1</sup>	0.1

Tab. A.4: Parametersatz des Bröcker-Matzenmiller-Modells für Kupfer

Thermoelasticity		
Modulus of Elasticity $E_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	100 000
Density $\rho$	$\text{kg/m}^3$	8 920
Expansion Coefficient $\alpha$	$\text{K}^{-1}$	$16.5 \cdot 10^{-6}$
Heat Capacity $c_\varepsilon$	$\text{J}/(\text{kg K})$	385.0
Thermal conductivity $k$	$\text{W}/(\text{m K})$	400.0
Friction Element		
Yield Stress $\kappa_0$	$\text{N mm}^{-2}$	75
Lin. Dissipation Coeff. $\beta_1$	$[-]$	0.15
Non-lin. Dissipation Coeff. $\beta_2$	$[-]$	30
Hardening		
Kin. Hardening Modulus $E_\kappa$	$\text{N mm}^{-2}$	2 000
Kin. Saturation $\kappa_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	135.0
Iso. Hardening Modulus $E_\xi$	$\text{N mm}^{-2}$	2 000
Iso. Saturation $\xi_\infty$	$\text{N mm}^{-2}$	135.0
Viscoplasticity		
Strain rate scaling factor $\eta$	s	700
Strain rate exponent $m$	$[-]$	1.0

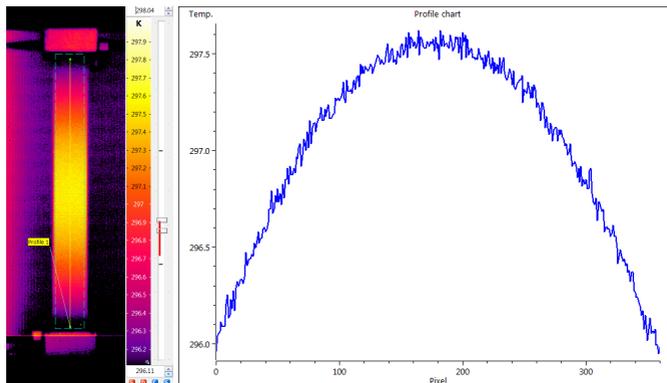


Abb. A.1: Thermogramm und symmetrisches Temperaturprofil für eine Kupferflachprobe im komplexen Zugversuch

### A.3 Temperaturentwicklung komplexer Zugversuche mit Vorlast

Verringerung der Streuung in der Temperaturantwort ist auf eine regularisierende Wirkung des Vorlastregimes zurückzuführen.

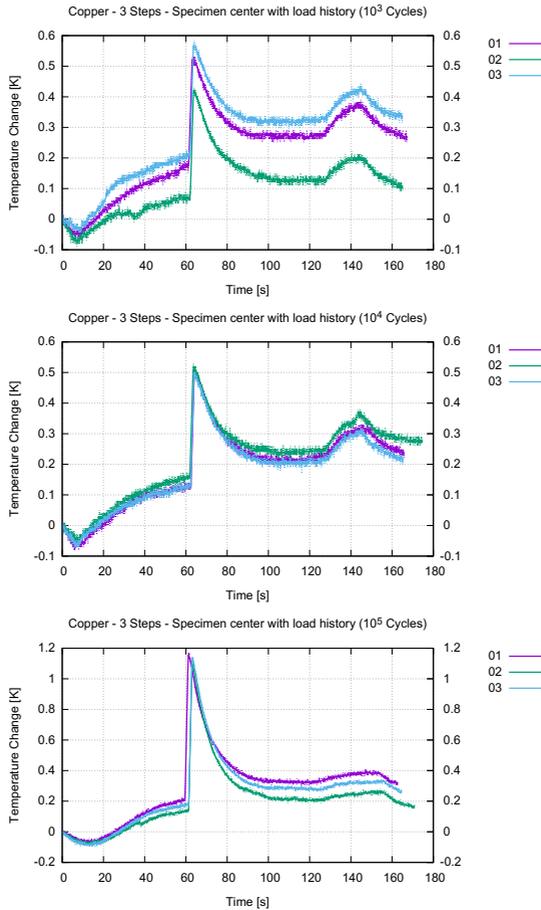


Abb. A.2: Temperaturänderungsverläufe für zyklisch vorbelastete Kupferflachproben mit jeweils 3 Proben bei Variation der Zyklenzahl von  $10^3$  bis  $10^5$

## A.4 Zugversuche an Stahlrundproben

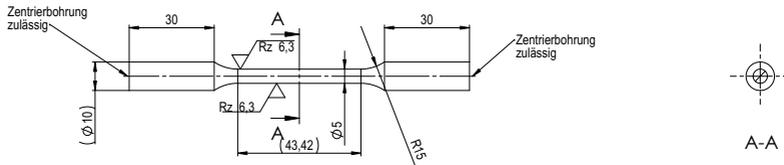


Abb. A.3: Geometrie der Stahlrundproben – orientiert an Rundproben nach DIN 50125 - Form A

Tab. A.5: Thermische Parameter für Stahl

Parameter	Symbol	Einheit	numerischer Wert
Wärmekapazität	$c_\epsilon$	$\text{J (kgK)}^{-1}$	461.0
Massendichte	$\rho$	$\text{g cm}^{-3}$	7.89
Ausdehnungskoeffizient	$\alpha$	$\text{K}^{-1}$	$11.0 \cdot 10^{-6}$
Wärmeleitfähigkeit	$k$	$\text{W (mK)}^{-1}$	60.0

Tab. A.6: Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt-Modells für die Dehnrate  $\dot{\epsilon}_1$

Parameter	Einheit	Parameterset für numerische Simulationen			
		ohne Vorlast – „v“		mit Lastgeschichte–„h“	
		Set 1	Set 2	Set 1	Set 2
E-Modul $E$	MPa	180 000	210 000	210 000	190 000
Fließgrenze $y_0$	MPa	450	235	262	452
<i>Verfestigungsparameter</i>					
$a$	MPa <sup>-1</sup>	0.0062	0.0020	0.0011	0.0042
$b$	[-]	1 840	4 100	4 730	4 750
$c$	MPa	130 000	700 000	950 000	400 000
$s_0$	[-]	$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.001	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$

Tab. A.7: Wesentliche mechanische Modellparameter des Kamlah-Haupt-Modells für die Dehnrate  $\dot{\epsilon}_2$

Parameter	Einheit	Parameterset für numerische Simulationen			
		ohne Vorlast – „v“		mit Lastgeschichte–„h“	
		Set 1	Set 2	Set 1	Set 2
E-Modul $E$	[MPa]	175 000	215 000	195 000	220 000
Fließgrenze $y_0$	[MPa]	380	50	490	100
<i>Verfestigungsparameter</i>					
$a$	[1/MPa]	0.0021	0.0021	0.0070	0.0025
$b$	[-]	1 870	3 860	5 180	4 560
$c$	[MPa]	250 000	780 000	310 000	800 000
$s_0$	[-]	0.001	0.0002	0.001	0.0002

## A.5 Zugversuche an additiv gefertigten Flachproben aus Aluminium

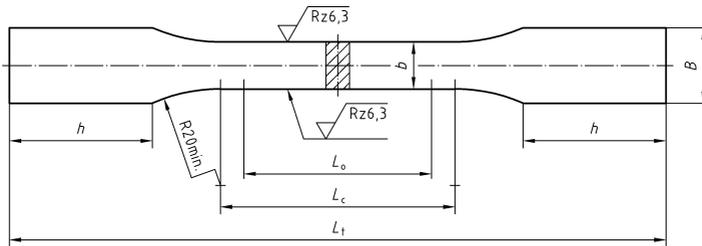


Abb. A.4: Geometrie der Aluminiumproben – orientiert an Flachproben nach DIN 50125 - Form H (Breite im Messbereich  $b = 12.5$  mm, Länge des Messbereichs  $L_c = 75$  mm)

Tab. A.8: Thermomechanische Parameter des Kamlah-Haupt-Modells für additiv gefertigte Flachproben aus Aluminium

Parameter	Symbol	Einheit	numerischer Wert
Wärmekapazität	$c_\varepsilon$	$\text{J (kgK)}^{-1}$	900.0
Massendichte	$\rho$	$\text{g cm}^{-3}$	2.66
Ausdehnungskoeffizient	$\alpha$	$\text{K}^{-1}$	$22.0 \cdot 10^{-6}$
Wärmeleitfähigkeit	$k$	$\text{W (mK)}^{-1}$	150.0
Wärmeübergangskoeffizient	$\lambda$	$\text{W (m}^2\text{K)}^{-1}$	8.0
E-Modul	$E$	MPa	48 000
Fließgrenze	$y_0$	MPa	112
<i>Verfestigungsparameter</i>			
$a$		$\text{MPa}^{-1}$	0.0067
$b$		[-]	2 150
$c$		MPa	160 000
$s_0$		[-]	0.009