

Konzeptfindung und strukturmechanische Optimierung von Anbindungsstrukturen für Planetengetriebe in Flugtriebwerken

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektro- und Energiesysteme
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

M.Sc. Aris Konstantinidis

geboren am 3. September 1991 in Berlin

Vorsitzender: Dr.-Ing. habil. Markus Kober
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Klaus Höschler
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Marius Swoboda

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Februar 2022

DOI: <https://doi.org/10.26127/BTUOpen-6014>

„Klug ist jener, der Schweres einfach sagt.“

(Albert Einstein)

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an den Lehrstühlen Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen und Flug-Triebwerksdesign der Brandenburgischen Technischen Cottbus-Senftenberg. Mein Dank gilt den Professoren Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn und Prof. Dr.-Ing. Klaus Höschler, die mich mit zahlreichen Diskussionen, Tipps und Anregungen, nicht nur für diese Arbeit, sondern auch für Vorträge, Veröffentlichungen und auch persönlich, unterstützt haben.

Ebenso danke ich dem Gutachter dieser Arbeit, Prof. Dr.-Ing. Marius Swoboda, sowie Dr.-Ing. habil. Markus Kober für die Übernahme des Vorsitzes meines Promotionsverfahrens. Beide sind meiner Bitte sofort und mit Freude nachgekommen - klasse! Für ein erfolgreiches Gelingen jeder Arbeit ist ein unterstützendes und inspirierendes Arbeitsumfeld unerlässlich. Mein aufrichtiger Dank gilt daher auch meinen Kollegen, die mir so oft geholfen haben. Ich freue mich, dass sich so während meiner Zeit als Doktorand auch viele Freundschaften entwickelt haben.

Eine Promotion ist ein langes Vorhaben und ich möchte mich bei meiner Freundin Mia, meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung, Rücksichtnahme und Geduld bedanken. Besonders danken möchte ich auch meinen Eltern, die mir den Weg bis hierher überhaupt erst ermöglicht haben. Vielen Dank, ihr seid die Besten!

Kurzfassung

Konzeptfindung und strukturmechanische Optimierung von Anbindungsstrukturen für Planetengetriebe in Flugtriebwerken

Schlüsselwörter: Strukturoptimierung, geometriebasierte Optimierung, Konzeptfindung, Planetengetriebe, Flugtriebwerke

Kernziel der Arbeit ist es, einen Beitrag zur Konzeptfindung und zur strukturmechanischen Optimierung von Anbindungsstrukturen für Planetengetriebe in Flugtriebwerken zu leisten. Hierzu wurde ein auf CAD-Geometrien basierender Optimierungsprozess geschaffen und auf verschiedene Problemstellungen angewendet. Die Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel, in denen ein Verständnis für die Notwendigkeit und die Problemstellung vermittelt werden soll. Außerdem sollen die nötigen Grundlagen für die Fallbeispiele am Ende der Arbeit erläutert werden.

In der Einleitung werden zunächst die Entwicklungstendenzen für Triebwerke in der zivilen Luftfahrt dargelegt und die Gründe für den Einsatz von Planetengetrieben zur Untersetzung erklärt. Da die hier entwickelten Methoden die Konzeptfindung und somit die Produktentwicklung unterstützen sollen, wird skizziert, an welcher Stelle des Produktentwicklungsprozesses die Methoden am besten einzusetzen sind.

Das zweite und dritte Kapitel sind der Strukturoptimierung gewidmet. Zunächst werden die Grundlagen zur mathematischen Optimierung und einige Ansätze erläutert. Anschließend werden die üblichen Verfahren zur Strukturoptimierung mithilfe von finiten Elemente-Netzen vorgestellt. Am Ende des zweiten Kapitels werden zwei Sonderfälle betrachtet, die Optimierung von flexiblen Bauteilen und von mehreren Bauteilen im Verbund. Beides stellt eine besondere Herausforderung dar und wird in den späteren Fallstudien aufgegriffen. Im dritten Kapitel wird der alternative, auf CAD-Geometrien basierende Ansatz zur Strukturoptimierung vorgestellt. Nach der Erörterung der erforderlichen Parametrisierungsstrategien zur Nachbildung von Verfahren die auf finiten Elementen basieren, werden die Prozesse automatisiert und die Methoden anhand von akademischen Beispielen validiert.

Das vierte Kapitel befasst sich mit Antwortflächenverfahren. Sie sind ein gängiges Mittel, um Optimierungsprozesse zu beschleunigen. Hierzu werden zunächst die wichtigsten Grundlagen zur nötigen Versuchsplanung erläutert und die drei gängigsten Ansätze diskutiert. Auf der Grundlage eines Vergleichs dieser Verfahren wird ein geeigneter Ansatz ausgewählt.

Im fünften Kapitel werden fünf Fallstudien aufgeführt. Jede davon greift eine praxisnahe Problemstellung auf und demonstriert die Herangehensweise und die Möglichkeiten und Grenzen eines auf CAD-Geometrien basierten Ansatzes zur Strukturoptimierung. Das erste, zweite und fünfte Fallbeispiel beziehen sich auf die im zweiten Kapitel genannten Sonderfälle. Im dritten Fallbeispiel wird eine Optimierung der Systemeigenfrequenz durchgeführt, die es nötig macht, eine Brücke von der Einzelkomponente zu einem aus reduzierten Matrizen bestehenden Systemmodell zu schlagen. Im vierten Fallbeispiel werden die im vierten Kapitel beschriebenen Antwortflächenverfahren eingesetzt, um die reduzierte Matrix einer Einzelkomponente für ein Systemmodell auf der Basis der Geometrieparameter vorherzusagen.

Abschließend fasst das sechste Kapitel die Ergebnisse zusammen. Die gezeigten Ansätze sind sehr gut geeignet, um flexible Strukturen zu finden. Die Systemoptimierung und Prozessbeschleunigung konnten erfolgreich durchgeführt werden und haben zu signifikanten Verbesserungen geführt. Außerdem werden offene Punkte angesprochen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr behandelt wurden und in Zukunft Beachtung finden könnten. Abschließend wird das Vorgehen im Vergleich zu anderen Lösungsmöglichkeiten bewertet.

Abstract

Concept development and structural optimization for mounting structures of planetary gear boxes in aero engines

Key words: structural optimization, geometry-based optimization, concept development, planetary gear box, aero engines

The main target of the thesis is to contribute to concept development strategies and structural optimization of mounting structures of planetary gear boxes in aero engines. For this, an optimization process has been created and applied on several different problem constellations, which uses CAD-geometries. The thesis is structured in six chapters. Within these the need for an optimization and the problems connected therewith are discussed. This also includes fundamentals for the case studies at the end of the thesis.

The introduction showcases the major development tendencies for aero engines in civil applications and the reasoning behind the use of planetary gear boxes. Since the evolved methods support concept and therefore also product development, it is explained in which part of the development process they can be used best.

The second and third chapter focus on structural optimization. They explain the fundamentals of mathematical optimization and the most

common approaches. Afterwards the most common approaches of structural optimization, using finite element meshes, are explained. The end of the second chapter addresses two special cases, considering flexible structures and multiple adjacent components, which are particularly challenging and addressed in the case studies later. In the third chapter an alternative approach for structural optimization is shown, which is based on CAD-geometries. After explaining the necessary parametrization strategies to reproduce the previous, on finite element meshes based, approaches, the processes are automated, and the methods are validated using academic examples.

The fourth chapter deals with response surface techniques. They are a common instrument to accelerate optimization processes. Initially the fundamentals of design experiments are explained, and three established response surface techniques are shown and discussed. Based on a performed benchmarking comparison the most promising technique for task has been chosen, which in this case are radial basis functions.

The fifth chapter consists of five case studies. Each of them addresses a practical engineering problem and demonstrates the approach, possibilities and limitations of a CAD-geometry based structural optimization strategy. The first, second and fifth case study follow up on the special problem cases mentioned. In the third case study a system eigenfrequency optimization is performed, which requires creating a bridge from the individual component towards a system model consisting of reduced matrices. The fourth case study applies the response surface techniques to predict the reduced matrices of single components based on geometry parameters. The reduced matrices are then used for a larger system model.

Finally, the sixth chapter summarizes the results. The developed ap-

proaches are well suited for finding flexible structures. The system optimization and process acceleration has been performed successfully and lead to significant improvements. Additionally, some points have been discussed which could not be considered as part of this thesis and may be considered in future works. However, the shown approach has been assessed and compared to alternative solutions.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Symbolverzeichnis	V
Abkürzungsverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Entwicklungstendenzen ziviler Luftfahrt	1
1.2 Planetengetriebe in Flugtriebwerken	9
1.3 Produktentwicklung	14
1.4 Strukturoptimierung im Maschinenbau	21
1.5 Motivation und Zielsetzung	31
2 Strukturoptimierung	35
2.1 Grundlagen und Methoden der Optimierung	35
2.1.1 Grundlagen mathematischer Optimierung	36
2.1.2 Grundlagen der Mehrzieloptimierung	41
2.1.3 Gradientenbasierte Algorithmen	43
2.1.4 Stochastische Algorithmen	46
2.1.5 Weitere Verfahren	50
2.1.6 Vergleich und Auswahl	51
2.2 Strukturoptimierung auf Basis Finiter-Elemente-Netze	58
2.2.1 Dimensionierung	58
2.2.2 Gestaltoptimierung	58
2.2.3 Topologieoptimierung	61
2.2.4 Topografie- und Free-Size-Optimierung	64

2.3	Sonderfälle der Strukturoptimierung	65
2.3.1	Flexible Bauteile	65
2.3.2	Mehrere Komponenten	66
3	CAD und simulationsgetriebene Strukturoptimierung	69
3.1	Optimierungsgerechte CAD-Parametrisierung	72
3.1.1	Dimensionierung	73
3.1.2	Splines	76
3.1.3	Features	79
3.1.4	Baugruppen	82
3.2	Automatisierung von Simulationsprozessen	85
3.2.1	Simulation innerhalb einer CAE-Anwendung	85
3.2.2	Automatisierungssoftware und externe Schnittstellen	88
3.3	Validierung anhand akademischer Beispiele	90
3.3.1	Dimensionierung	90
3.3.2	Gestaltoptimierung	91
3.3.3	Topologieoptimierung	93
4	Antwortflächenverfahren	95
4.1	Versuchsplanung	97
4.1.1	Faktorielle Versuchspläne	98
4.1.2	Quadratische Beschreibungsmodelle	99
4.1.3	Nichtlineare, multivariate Beschreibungsmodelle	101
4.2	Lineare Regression	104
4.3	Radiale Basisfunktion	109
4.4	Kriging	117
4.5	Antwortflächenverfahren im Vergleich	126
5	Fallstudien	133
5.1	Flexibilität unter Nebenbedingungen	135
5.2	Spezifische Verformung unter Flexibilitätsnebenbedingungen	148
5.3	System-Eigenfrequenz	157
5.4	Möglichkeiten der Prozessbeschleunigung	170
5.5	Bauraumgrenzen benachbarter Komponenten	186

6 Zusammenfassung und Ausblick	191
Literatur	195
Abbildungsverzeichnis	225
Tabellenverzeichnis	231

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

a	Ansatzfunktion	
b	Breite	mm
$b(\mathbf{p})$	Abmessung des Bauraums	
Cov	Kovarianz	
CV	Kreuzvalidierung	
EY	Erwartungswert für y	
\hat{f}	Approximationsfunktion	
\tilde{f}	modifizierte Funktion	
F	Kraft	N
f	Eigenfrequenz	Hz
f	Funktion	
f_b	Eigenfrequenz des Basisentwurfs	Hz
h	horizontale Abmessung	mm
i	Übersetzungsverhältnis	
i_0	Standübersetzung	
I_p	polares Flächenträgheitsmoment	mm ⁴
I_x	Flächenträgheitsmoment um die x -Achse	mm ⁴
I_y	Flächenträgheitsmoment um die y -Achse	mm ⁴
J	Anzahl der Modellkoeffizienten	
L	Likelihood-Funktion	
l	Länge	mm
$\ln()$	natürlicher Logarithmus von	
L_{red}	reduzierte Likelihood-Funktion	
\dot{m}	Massenstrom	kg/s

M	Drehmoment	$\text{N} \cdot \text{m}$
m	Masse	kg
M_f	arithmetisches Mittel der Funktion f	
m_b	Masse des Basisentwurfs	kg
m_{max}	maximal zulässige Masse	kg
N	Anzahl	
n	Drehzahl	1/s
n_f	Anzahl der Faktoren	
n_m	Anzahl der Modellkonstanten	
n_r	Anzahl der Versuchsauswertungen	
n_s	Anzahl der Stufen	
$N(u)$	Basisfunktion	
p	(Optimierungs-) Parameter	
$P(\mathbf{x})$	Strafffunktion	
P_F	Schub-Leistung	W
P_N	Nutz-Leistung	W
P_v	Wahrscheinlichkeit zur Verbesserung	
\dot{Q}	Wärmestrom	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
\tilde{r}	kleinster lokaler Radius	mm
R	äußerer Radius	mm
r	Radius	mm
r	normierter radialer Abstand	
R^2	Bestimmtheitsmaß	
R_{kor}^2	korrigiertes Bestimmtheitsmaß	
r_i	Eintrag der Korrelationsmatrix	
RM_x	Reaktionsmoment um die x -Achse	Nm
M_ϵ	Mittelwert der relativen Fehler	
S	Standardabweichung	
s	Wandstärke	mm
S_ϵ	Standardabweichung der relativen Fehler	
T	Temperatur	K
t	Wandstärke	mm

u	Verschiebung	mm
v	Geschwindigkeit	m/s
v	vertikale Abmessung	mm
Var	Varianz	
$t(u)$	vertikale Größe eines Splines	
$v(u)$	horizontale Größe eines Splines	
W	Widerstandsmoment	mm ⁴
Z	Zufallsgröße	

Griechische Buchstaben

α	Winkel	Grad
α_s	Schrittweite	
β	Abstand zur Bauraumgrenze	mm
β_{min}	kleinster Abstand zur Bauraumgrenze	mm
$\bar{\delta}$	durchschnittliche radiale Verschiebung	mm
δ	radiale Verschiebung	mm
ϵ	Approximationsfehler	
ϵ_a	Ausfallrate	
ϕ	Verdrehwinkel	rad
φ	radiale Basisfunktion	
κ	Isentropenexponent	
$\hat{\mu}$	Mittelwert-Schätzer	
μ	Mittelwert oder Erwartungswert	
μ_N	Nebenstromverhältnis	
η_{ges}	Gesamt-Wirkungsgrad	
η_p	Vortriebs-Wirkungsgrad	
η_{th}	thermischer Wirkungsgrad	
ω	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
π	Kreiszahl	
π_V	Verdichterdruckverhältnis	
Ψ_K	Approximierter Steifigkeitseintrag	N/mm
Ψ_M	Approximierter Masseneintrag	kg

ρ_P^{CV}	Pearsonschen Korrelationskoeffizienten	
ρ	Dichtefaktor	
$\rho_{i,j}$	Korrelationswert	
$\hat{\sigma}^2$	Prozessvarianz-Schätzer	
σ	Standardabweichung	
σ	Vergleichsspannung	N/mm ²
σ^2	Prozessvarianz	
$\bar{\sigma}$	maximale Vergleichsspannung im Modell	N/mm ²
τ	Torsionsspannung	N/mm ²
θ	Formparameter	
ζ	Größe für statistische Ausreißer	

Mathematische Symbole

\exists	existiert mindestens ein
\forall	für alle
\in	Element von
∇	Nabla Operator, z.B. $\nabla f(a, b) = (\partial f / \partial a)e_a + (\partial f / \partial b)e_b$
∂x	partiell Differential von x
\subseteq	Teilmenge von
det	Determinante von
$\ \cdot \ $	euklidische Norm
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen

Vektoren, Matrizen und Tensoren

\mathbf{b}	verfahrenspezifische Modellparameter
\mathbf{C}	Matrizelement
\mathbf{c}	Vektorelement
\mathbf{e}_x	Einheitsvektor in x -Richtung
\mathbf{E}	Elastizitätstensor
\mathbf{f}	Vektorkriterium
\mathbf{g}	Ungleichheitsnebenbedingung

H	Hesse-Matrix
h	Gleichheitsnebenbedingung
H_M	Prädiktionsmatrix
I	Einheitsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
k	Steifigkeitsvektor
L	Dämpfungsmatrix
M	Massenmatrix
p	(Optimierungs-) Parameter
R	Korrelationsmatrix
Σ	Kovarianzmatrix
u	Verschiebungsvektor

Tiefgestellte Indizes

B	radiale Basisfunktion
DR	Design Raum / Entwurfsraum
K	Kriging
lim	maximal zulässiger Wert
m	Master
max	Maximalwert
min	Mindestwert
opt	Optimum
R	Regression
s	Slave
tpf	Testpunkte-Fehler

Hochgestellte Indizes

$*$	optimal
0	Größe weit vor dem Triebwerk / Anfangsgröße
3	Größe am Verdichteraustritt
9	Größe am Schubdüsenaustritt
$avgd, -1$	Kehrwert des mittleren Abstands

ϵ	relativer Fehler
H	Hohlrad
LHD	Latin-Hypercube-Design Größe
o	Obergrenze
P	Planetenträger
S	Sonnenrad
T	Transponiert
t	totale Größe
u	Untergrenze
WE	Widerstand des Triebwerkeinlaufs
WG	Widerstand der Triebwerk gondel

Abkürzungsverzeichnis

ACO	Ameisenalgorithmen (<i>Ant Colony Optimization</i>)
AMGA	<i>Archive-based Micro Genetic Algorithm</i>
API	Programmierschnittstelle (<i>Application Programming Interface</i>)
BBD	<i>Box-Behnken-Design</i>
bzw.	beziehungsweise
CAD	computergestützte Konstruktion (<i>Computer-Aided Design</i>)
CAE	computergestützte Entwicklung (<i>Computer-Aided Engineering</i>)
CCD	<i>Central-Composite-Design</i>
CMA-ES	<i>Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy</i>
CMS	Component Mode Synthesis
DACE	Entwurf und Analyse von Computereperimenten (<i>Design and Analysis of Computer Experiments</i>)
DMU	virtueller Prototyp (<i>Digital Mockup</i>)
DoE	Versuchsplanung (<i>Design of Experiment</i>)
ES	Evolutionäre Strategie (<i>evolutionary strategy</i>)
etc.	et cetera

FCCCD	<i>Face-Centered-Central-Composite-Design</i>
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
ggf.	gegebenenfalls
GTF	Getriebefan (<i>Gearred Turbo Fan</i>)
GUI	grafische Benutzeroberfläche (<i>Graphical User Interface</i>)
LHD	<i>Latin-Hypercube-Design</i>
LHS	<i>Latin-Hypercube-Sampling</i>
MCD	<i>Monte-Carlo-Design</i>
MKM	Münchener Produktkonkretisierungsmodell
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MMFD	Methode der zulässigen Richtung (<i>Modified Method of Feasible Direction</i>)
MVM	Münchener Vorgehensmodell
NLPQLP	spezielle Implementierung einer SQP Methode
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II</i>
NURBS	nicht-uniforme rationale B-Splines (<i>Non-Uniform Rational B-Spline</i>)
OMP	<i>Optimal Microstructures Penalization</i>
PSO	Partikelschwarm-Optimierung (<i>Partical Swarm Optimization</i>)
RBF	radiale Basisfunktion
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>

SPEA2	<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2</i>
SQP	sequenzielle quadratische Programmierung (<i>sequential quadratic programming</i>)
u. a.	unter anderem
UDF	benutzerdefiniertes Merkmal (<i>User Defined Feature</i>)
usw.	und so weiter
VDI	Verband Deutscher Ingenieure
z. B.	zum Beispiel

1 Einleitung

Die Globalisierung bringt die Welt näher zusammen. Der Wunsch der Industrie, Güter weltweit zu transportieren und der Wunsch der Menschen, ferne Länder zu bereisen, ist ein Ausdruck dieser Globalisierung. Die Wahl des Transportmittels fällt dabei immer öfter auf das Flugzeug, das durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe zu rund 3% der globalen CO₂-Emissionen beiträgt. Der Flugverkehr trägt daher schon heute eine entscheidende Mitverantwortung für den Klimawandel. Hinzu kommt ein langfristig stetig prognostiziertes Wachstum der Nachfrage und der damit verbundenen Emissionen [82][125]. Dem gegenüber stehen die politischen Zielsetzungen, die eine deutliche Reduktion der Emissionen vorsehen [76][47]. Der auf der einen Seite aus betriebswirtschaftlicher Sicht erfreuliche Anstieg der Nachfrage erschwert auf der anderen Seite das Einhalten dieser Ziele beträchtlich [28][129]. Die bisherige Entwicklung zu immer sparsameren Triebwerken ändert daran nichts [156]. Das Ziel muss daher sein, achtsam mit den eigenen Bedürfnissen umzugehen und die bisherige Entwicklung hin zu emissionsärmeren, leiseren und sichereren zivilen Triebwerken mit aller Kraft voranzutreiben.

1.1 Entwicklungstendenzen ziviler Luftfahrt

Die Entwickler von Technik streben ständig nach Verbesserung. Triebwerke bilden hier keine Ausnahme. Daher werden zunächst die Entwicklungstendenzen der letzten Jahrzehnte dargelegt. Die Hintergründe der

vergangenen Entwicklungen lassen sich auch ohne detaillierte Herleitungen anhand ausgewählter Größen nachvollziehen. Die Gleichungen (1.1) bis (1.4) zeigen einige für das Verständnis wichtige physikalische Zusammenhänge.

$$\eta_{ges} = \eta_{th} \cdot \eta_p = \frac{|P_N|}{\dot{Q}_B} \cdot \frac{P_F}{|P_N|} = \frac{\text{Nutzleistung}}{\text{Brennstoffstrom}} \cdot \frac{\text{Schubleistung}}{\text{Nutzleistung}} \quad (1.1)$$

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\frac{T_{t0}}{T_0} \cdot \pi_V^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 1 - \frac{T_0}{T_{t3}}, \quad p \sim p^\kappa \quad (1.2)$$

$$\eta_p = \frac{F \cdot v_0}{\frac{\dot{m}}{2} \cdot (v_9^2 - v_0^2)} = \frac{2}{\frac{v_9}{v_0} + 1} \quad (1.3)$$

$$F = \dot{m} \cdot (v_9 - v_0) - (F_{WE} + F_{WG}) \quad (1.4)$$

$$|P_N| = \dot{Q}_{zu} - |\dot{Q}_{ab}| \quad (1.5)$$

wobei:

- F – Kraft
- κ – Isentropenexponent
- \dot{m} – Massenstrom durch das Triebwerk
- π_V – Verdichterdruckverhältnis
- T – Temperatur
- v – Geschwindigkeit
- \dot{Q} – Wärmestrom
- t – totale Größe
- $_{WE}$ – Widerstand des Triebwerkeinlaufs
- $_{WG}$ – Widerstand der Triebwerksgondel
- $_0$ – Größe weit vor dem Triebwerk
- $_3$ – Größe am Verdichteraustritt
- $_9$ – Größe am Schubdüsenaustritt

Ein Wirkungsgrad setzt Aufwand und Nutzen in ein Verhältnis. Der Gesamtwirkungsgrad eines Triebwerks besteht wiederum aus dem Produkt des thermischen Wirkungsgrads (η_{th}) und des Vortriebswirkungsgrads (η_P) zusammen, wie aus Gleichung (1.1) hervorgeht. Beide zu verbes-

sein ist daher das offensichtliche Ziel. Bei einem guten thermischen Wirkungsgrad wird viel Nutzleistung für einen gegebenen Brennstoffenergiestrom erzeugt. Der Vortriebswirkungsgrad beschreibt wiederum, wie effizient die erzeugte Nutzleistung in tatsächlichen Schub umgesetzt wird. Die Gleichungen (1.2) und (1.3) zeigen die Einflüsse äußerer und vom Triebwerk bestimmter Größen auf die beiden Wirkungsgrade. Die Gleichung (1.5) ist hier etwas getrennt zu betrachten, da eine höhere Nutzleistung an sich nicht den Wirkungsgrad verbessert. Da jedoch eine hohe Nutzleistung gewünscht ist, muss im Prozess viel Wärme zugeführt werden. In der Praxis bedeutet das hohe Turbineneintrittstemperaturen und somit werden entsprechende Materialien und Kühlungstechniken benötigt. Diese sind bis heute Gegenstand aktueller Forschung. Einen detaillierteren Einblick zu den verwendeten Materialien in Gasturbinen geben unter anderem (u. a.) Glenny, Northwood und Smith [81] und Rao [163]. Rajendran [162] geht auf Beschichtungen für Komponenten in hochbelasteten Bereichen ein. Grundlagen und Einsatzbereiche spezieller Legierungen erläutert Reed [165]. Wang u. a. [211] vergleichen Herstellungsverfahren von Nickelbasislegierungen, die in Turbinen eine besondere Rolle spielen.

Der thermische Wirkungsgrad bestimmt sich aus dem Verhältnis der Umgebungstemperatur und der Temperatur am Verdichteraustritt (1.2). Ziel ist es demnach, ein möglichst hohes Verdichtungsverhältnis zu realisieren. Um den Vortriebswirkungsgrad zu maximieren, muss die Geschwindigkeit, mit der die Luft das Triebwerk verlässt, an die Fluggeschwindigkeit angenähert werden. Aus Gleichung (1.4) folgt, dass für $\eta_P = 1$ kein positiver Schub erzeugt werden würde. In der Praxis muss die Luft daher durch das Triebwerk auf $v_9 > v_0$ beschleunigt werden. Aus Gleichung (1.4) geht außerdem hervor, dass für eine kleine Differenz von v_9 zu v_0 ein entsprechend großer Massenstrom \dot{m} bewegt werden muss. Für einen hohen, im Verhältnis zur Fluggeschwindigkeit langsamen Luftstrom wird daher ein Triebwerk mit großem Durchmesser und kleiner Drehzahl

benötigt. Für ein hohes Verdichtungsverhältnis wird zusätzlich ein langer Verdichter benötigt. Ein langes Triebwerk mit großem Durchmesser erzeugt jedoch größere Luftwiderstände F_{WE} und F_{WG} . Diese einfachen Überlegungen verdeutlichen bereits die Komplexität der technischen Umsetzungen und Abwägungsentscheidungen bei der Entwicklung.

Um immer sparsamere und dennoch leistungsstärkere Antriebe zu entwerfen, versuchen Ingenieure folgende Kenngrößen zu verbessern:

- hohe Turbineneintrittstemperaturen
- hohe Verdichtungsverhältnisse
- hoher Massenstrom
- Triebwerksaustrittsgeschwindigkeit nah an der Fluggeschwindigkeit
- kompaktes, aerodynamisch effizientes Triebwerk

Inzwischen haben Gasturbinen als Flugantriebe eine fast 100-jährige Entwicklungsgeschichte. Erste Anwendungen gehen zurück auf den Entwickler und Testpiloten Frank Whittle in den 1930er Jahren. Whittles *Whittle Unit 3* (WU3)-Triebwerk wurde erstmals 1941 in einem Experimentalflugzeug für militärische Anwendungen getestet. In Deutschland arbeiteten Hans-Joachim Pabst von Ohain und Max Hahn mit Unterstützung der Firma Heinkel-Flugzeugwerke zur selben Zeit an ähnlichen Entwicklungen. Dabei handelte es sich um sogenannte Turbojets, ein Einstromtriebwerk, bei dem die Luft vom Verdichter angesaugt, in der Brennkammer mittels Treibstoff erhitzt und in der Turbine wieder entspannt wird. Der Schub entsteht ausschließlich durch die Luft, die die Turbine verlässt. Schon 1936 beantragte Whittle ein Patent für ein Konzept, das einen Bläser an die Gasturbine koppelt. Der zusätzliche Bläser (englisch: Fan) wird ebenfalls von der Turbine angetrieben und erzeugt zusätzlichen Schub, denn bereits damals war eindeutig, dass die Umsetzung der thermischen Nutzleistung in Vortriebsleistung verbessert werden musste. Whittle gilt daher als Vater der heutigen Bypass-Triebwerke. 1941 wurde erstmals ein zweistrahliges Flugzeug

gebaut, jedoch nicht von Whittle in England, sondern in Deutschland. Als Bypass- oder Nebenstromverhältnis (μ_N) bezeichnet man den Quotienten aus der Luftmenge, die durch den Fan am Kerntriebwerk vorbei bewegt wird, und der Luftmenge, die tatsächlich durch das Kerntriebwerk strömt. Dieses Verhältnis zu steigern, ist ein wichtiger Bestandteil der Triebwerksentwicklung der letzten Jahrzehnte [31].

Die vorangegangenen Überlegungen haben verdeutlicht, dass eine Annäherung der Geschwindigkeit des Luftstroms am Triebwerksaustritt an die Fluggeschwindigkeit wünschenswert ist, um den Vortriebswirkungsgrad zu verbessern. Ein einfaches Bypass-Triebwerk ermöglicht das noch nicht. Die technische Lösung dieser Zielsetzung brachte die erste grundlegende Änderung in der Triebwerksarchitektur hervor: das Zweiwellentriebwerk. Dabei wird die Turbine axial zweigeteilt, wodurch sich beide Teile unabhängig voneinander drehen können. Wie beim einwelligen Triebwerk wird ein Teil der Turbine durch eine Welle mit dem Verdichter verbunden. Der zweite Teil treibt jedoch über eine zweite Welle den Fan an. Somit ist es möglich, ein schnell drehendes, thermodynamisch effizientes inneres System und ein langsam drehendes, vortriebseffizientes äußeres System in einem Triebwerk zu verbinden. Üblicherweise werden die beiden Teile als Hochdruck- und Niederdrucksystem bezeichnet. Oftmals wird die Niederdruckturbine nicht nur an den Fan gekoppelt, sondern treibt zusätzlich einen Niederdruckverdichter an. Diese Idee lässt sich auf ein dreiwelliges Triebwerk mit Hoch-, Mittel- und Niederdrucksystem erweitern. Abbildung 1.1 zeigt den schematischen Aufbau eines Mehrwellentriebwerks zum besseren Verständnis.

In wissenschaftlichen Publikationen wird der Einfluss größerer Nebenstromverhältnisse hinsichtlich verschiedener Aspekte regelmäßig thematisiert. Bereits vor zwanzig Jahren untersuchten Zimbrick und Colehour [224] eine Reihe von Triebwerken mit Nebenstromverhältnissen von $6 < \mu_N < 17.5$. Sie kamen zu dem Schluss, dass die Vorteile höherer Ne-

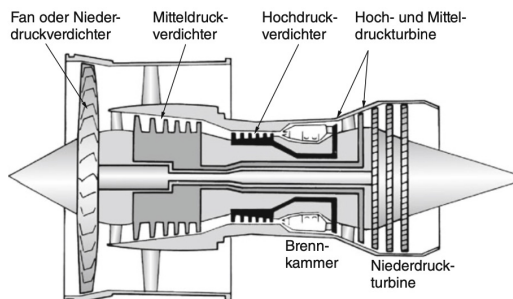


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Mehrwellentriebwerks [31, S. 59]

benstromverhältnisse hinsichtlich des Treibstoffverbrauchs bis $\mu_N = 17.5$ zwar überwiegen, allerdings mit einer höheren Komplexität verbunden sind. In einer aktuelleren Publikation untersuchen Chai, Yu und Wang [39] den Einfluss von Nebenstromverhältnissen von $8 < \mu_N < 14$ hinsichtlich Schadstoffemissionen, Lärm und Kosten. Sie resümieren, dass für $\mu_N = 14$ die geringsten Lärm- und NO_x -Emissionen zu erwarten sind, räumen jedoch ein, dass ein Triebwerk mit einem moderateren Nebenstromverhältnis von 11 die geringsten operativen Kosten erwarten lässt. Außerdem kommen Sorato u. a. [190] zu dem Schluss, dass Triebwerke mit hohen Nebenstromverhältnissen höhere Schadstoffwerte emittieren können, wenn sie außerhalb ihres Auslegungspunkts operieren. Hinsichtlich der Lärm-Emissionen hat das Design des Fans einen wichtigen Einfluss, wie u.a. von Kaplan, Nicke und Voss [97] untersucht wurde. Mit steigenden Nebenstromverhältnissen wachsen auch die Durchmesser der Triebwerke, wodurch die Integration in das Flugzeug zunehmend erschwert wird. Giesecke u. a. [78] und Stankowski u. a. [193] zeigen Herausforderungen und Lösungen der Integration auf. Kestner u. a. [101] untersuchen in ihrer Studie die Auslegung eines modernen Triebwerks und den dazugehörigen Kreisprozess. Dabei vergleichen sie ein thermodynamisch hoch effizientes Triebwerk, mit einem direkt an die Turbine gekoppelten Fan, gegen ein noch effizienteres Triebwerkskonzept – den

Getriebefan.

Bei einem Getriebefan (englisch: *Geared Turbo Fan*, GTF) wird zwischen Niederdruckwelle und Fan ein Untersetzungsgetriebe eingesetzt. Somit ist es möglich, die Fan-Drehzahl von der Drehzahl der Niederdruckturbine zu entkoppeln. Somit kann eine schnell drehende, effiziente Niederdruckturbine und ein langsam drehender Fan eingesetzt werden, um effizientere Triebwerke mit nochmals größeren Nebenstromverhältnissen zu realisieren. Für Triebwerke kleinerer Schubklassen, geeignet für Businessjets, wurde bereits 1972 die neue Triebwerksarchitektur umgesetzt. In den letzten Jahren rückte das Konzept auch für höhere Schubklassen in den Fokus der Entwicklung. Triebwerke höherer Schubklassen mit sehr großen Nebenstromverhältnissen erreichen beachtliche Dimensionen. Dabei wächst die Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitzen des Fans linear mit dem Durchmesser. Es können Überschallgeschwindigkeiten erreicht werden, wodurch Lärm und Verluste entstehen [54][96]. Auch hier schafft ein Untersetzungsgetriebe Abhilfe.

Zahlreiche Publikationen der vergangenen Jahre beschäftigen sich mit Getriebefans. Unter anderem vergleicht Duchstein [59] GTFs mit konventionellen Triebwerken auf Basis der stationären Leistungsrechnung. Kurzke [114] zeigt ebenfalls die Unterschiede auf und erläutert, dass durch die hohen Turbineneintrittstemperaturen von 1900 K bis 2000 K und bei Verdichterdruckverhältnissen von über 40 kaum noch Kraftstoffersparungen durch eine weitere Steigerung dieser Faktoren möglich sind. Er erläutert weiter, dass für Nebenstromverhältnisse über 10 ein Untersetzungsgetriebe attraktiv ist. 2011 veröffentlichte Hughes [91] in Zusammenarbeit mit *Pratt & Whitney* Ziele und Herausforderungen basierend auf ersten stationären Bodentests, die vielversprechende Daten lieferten. Dewanji, Rao und Van Buijtenen [51] untersuchten in ihrer Studie zwei Konzepte: zum einen die Integration eines Getriebes in ein aktuelles Triebwerk, zum anderen die Einbindung eines Zwischenkühlers

und Rekuperators. Sie kommen zu dem Schluss, dass das Getriebe größere Vorteile hinsichtlich Kraftstoffverbrauch und Gewicht liefert. Kyprianidis und Rolt [115] verglichen ebenfalls einen GTF und ein Triebwerk mit Zwischenkühlung, hielten jedoch letzteres aufgrund des verbesserten Kreisprozesses für attraktiv. Der Einsatz eines GTFs wirft auch neue Fragen in anderen Bereichen des Triebwerks auf. Aloyo, Perullo und Mavris [4] untersuchten zwei GTF-Triebwerke, eine konventionelle Umsetzung wie in PW1100G und GENx und ein GTF mit variablem Pitch und am Flugzeug angebundenem Schubumkehrer. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass letzterer treibstoffeffizienter ist. Um die Vorteile gänzlich auszunutzen, gilt es daher, viele Bereiche neu zu gestalten. Dies zeigen auch Zhang u. a. [221] mit ihrer Untersuchung zu Gewichtseinsparungen im Schaufeldesign für sehr langsam rotierende Fans. Auch Kontrollsysteme für einen GTF müssen neu überdacht werden. Wie diese gestaltet werden können, zeigen Chapman und Litt [41].

Neben diesen ganzheitlichen Betrachtungen spielen das Design und die Auslegung des Getriebes selbst eine entscheidende Rolle bei der Realisierung. Ein Beispiel gibt Berlowitz [21] mit einer Untersuchung zu Faktoren wie der Art der Verzahnung, Lager, Kopplungen und Wellen. Die Zahnräder selbst wurden nach dem internationalen Standard ISO 6336 hinsichtlich der zu übertragenden Leistung und Drehzahl ausgewählt. Chao, Bestle und Krüger [40] weisen jedoch darauf hin, dass in den bisherigen Normen die Beanspruchungszyklen in der Verzahnung nicht korrekt berücksichtigt werden und schlagen neue Optimierungsmethoden vor. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Getriebefan ein sehr vielversprechendes Konzept zur Reduktion des Kraftstoffverbrauchs ist. Um das Potenzial voll auszuschöpfen, bedarf es aber einer gesamtheitlichen Betrachtung. Insbesondere für Triebwerke hoher Leistungsklassen werden neue Auslegungs- und Optimierungsmethoden benötigt, da kaum auf Normen zurückgegriffen werden kann und nur wenige Erfahrungswerte existieren.

1.2 Planetengetriebe in Flugtriebwerken

Allgemein dienen Getriebe der Leistungsübertragung und wandeln schlupfflos Drehzahl und Drehmoment von der Eingangs- zur Ausgangsseite um. Das Verhältnis dieser Größen zueinander wird als Übersetzungsverhältnis bezeichnet. Die Umwandlung entsteht durch das Ineinandergreifen mindestens eines Zahnradpaars. Dabei verhalten sich Drehzahl und Drehmoment antiproportional zueinander. Für den Fall eines einzelnen Zahnradpaars gelten die Zusammenhänge aus Gleichung 1.6 [214].

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{M_2}{M_1} \quad (1.6)$$

wobei:

- i – Übersetzungsverhältnis
- ω – Winkelgeschwindigkeit
- r – Wälzkreisradius
- M – Drehmoment
- 1,2 – am Zahnrad 1 bzw. 2

Die vielen unterschiedlichen Getriebearten lassen sich nach der Art des Zahnkontakts, der Art der Verzahnung und der Zahnräder und deren Anordnung unterteilen [57]. Als Sonderbauform von Stirnradgetrieben bestehen Planetengetriebe aus einem in der Mitte befindlichen Sonnenrad, mehreren Planetenrädern, einem innenverzahnten Hohlrad und einem Planetenträger, der die Planeten aufnimmt (vgl. Abbildung 1.2). Einige Vorteile sprechen für den Einsatz von Planetengetrieben in Flugtriebwerken:

- Geringer benötigter Baumraum und geringes Gewicht
- hoher Wirkungsgrad
- geringe Unwucht
- Aufteilung der Last auf mehrere Planeten, dadurch hohe Leistungsdichten

- Realisierung aller Drehbewegungen in einer rotierenden Ebene
- Große Übersetzungsverhältnisse mithilfe weniger Räder
- Wellenlager des Hohlrads, der Planetenträger und der Sonne lastfrei [214][144][64]

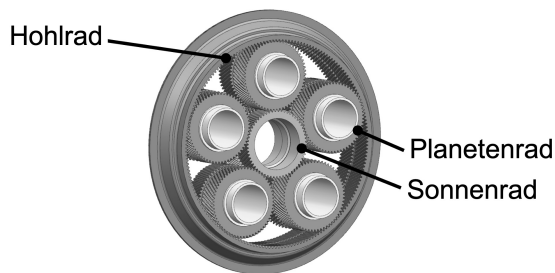


Abbildung 1.2: Planetengetriebe mit fünf Planeten

Bei Standgetrieben rotiert jedes Zahnrad immer lediglich um seine eigene Achse. Planetengetriebe sind jedoch Umlaufgetriebe, bei denen ein weiterer Freiheitsgrad existiert. Auch innerhalb eines definierten Planetengetriebes lassen sich je nach Konstruktionsaufgabe verschiedene Konfigurationen und Betriebsarten realisieren. Dadurch sind sogar unterschiedliche Übersetzungsverhältnisse möglich. Zunächst besteht ein Umlaufgetriebe aus drei Wellen. Rotieren alle drei, handelt es sich um einen Dreiwellenbetrieb. Da üblicherweise jedoch ein Zweiwellenbetrieb eingesetzt wird, bei dem eine Welle stillsteht, soll hier nur auf diese Betriebsart eingegangen werden. Für den Zweiwellenbetrieb lässt sich weiter zwischen Stand- und Umlaufübersetzung unterscheiden. Bei der Standübersetzung steht der Planetenträger still und das Hohl- und Sonnenrad rotieren. Bei der Umlaufübersetzung rotiert nur der Planetenträger. Darüber hinaus kann für jede der drei Kombinationen unterschieden werden, welche der beiden rotierenden Wellen antreibt und welche angetrieben wird. Dadurch ergeben sich sechs mögliche Konfigurationen für das Getriebe [Cleghorn2016][74][113]. Im Kontext einer Anwendung im Flugtriebwerk, sind jedoch nur zwei davon relevant.

In Abschnitt 1.1 wurde erläutert, dass ein Planetengetriebe die Drehzahl der innen- liegenden Niederdruckturbinenwelle zur Drehzahl des Fans untersetzen soll. Konstruktionsbedingt ist es daher sinnvoll, das Sonnenrad als rotierendes, angetriebenes Rad des Getriebes zu wählen. Daher verbleiben die zwei Betriebsarten mit stillstehendem Planetenträger (Standübersetzung) und mit stillstehendem Hohlrads (Umlaufübersetzung). Der Fan wird dabei mit der jeweils rotierenden, getriebenen Welle auf der Ausgangsseite verbunden. Die Drehzahlen in Planetengetrieben werden durch die Willis-Gleichung (1.7) beschrieben, die unabhängig von der gewählten Konfiguration des Planetengetriebes gilt.

$$n_S - i_0 \cdot n_H - (1 - i_0) \cdot n_P = 0 \quad (1.7)$$

$$i_0 = \frac{n_S}{n_H} \quad (1.8)$$

wobei:

- i_0 – Standübersetzung
- n_H – Drehzahl Hohlrads
- n_S – Drehzahl Sonne
- n_P – Drehzahl Planetenträger

Die Gleichung (1.7) lässt sich für jede Konfiguration umstellen. Die resultierenden Übersetzungsverhältnisse können durch die Standübersetzung aus Gleichung (1.8) gut verglichen werden, wie aus Abbildung 1.3 hervorgeht. Dabei ist zu beachten, dass definitionsgemäß die Zähnezahlszahl des Hohlrads negativ ist und damit auch i_0 in diesem Beispiel negativ ist.

Es wird deutlich, dass für die Konfiguration mit stillstehendem Hohlrads die Untersetzung größer ist. Ergibt sich beispielsweise durch die gewählten Zähnezahlen und für eine Konfiguration mit stehendem Planetenträger eine Untersetzung von eins zu drei, erhöht sich die Untersetzung auf eins zu vier, wenn das Hohlrads fixiert wird. *Pratt & Whitney* setzen in ihrem PW1000G-Triebwerk die Standübersetzung um (Abbildung 1.4),

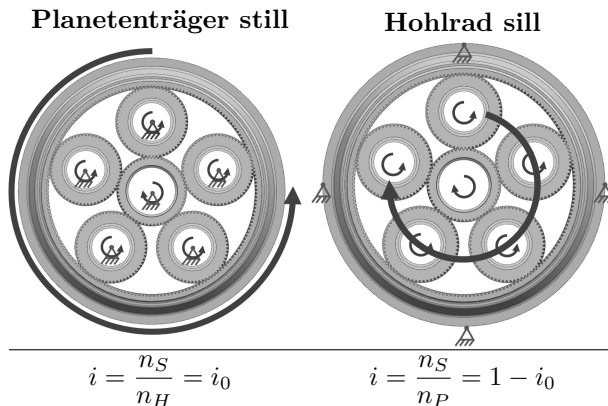


Abbildung 1.3: Vergleich der Betriebsarten von Planetengetrieben

wohingegen *Rolls-Royce* mit dem Ultra-Fan auf die Umlaufübersetzung mit stillstehendem Hohlradsill setzt, um die Vorteile einer größeren Untersetzung zu nutzen. Ein Nachteil bei der Umlaufübersetzung sind die hohen Zentrifugallasten, die durch die rotierenden Planeten entstehen. Sie aufzunehmen, führt zu einem höheren Gewicht des Getriebes und des Triebwerks als Ganzes. Ein schwereres Triebwerk muss bei der Auslegung des Flugzeugs berücksichtigt werden und führt dort ebenfalls zu mehr Gewicht, wodurch sich der Nachteil potenziert.

Neben dem Gewicht, das in der Luftfahrt immer eine Rolle spielt, stellt der zivile Einsatz besondere Anforderungen an die Sicherheit bei Störungen und Ausfällen, an die Lebensdauer, die Zuverlässigkeit und den Wirkungsgrad. Ein Ausfall des Getriebes darf die Sicherheit des Flugzeugs nicht beeinträchtigen [124][65]. Die Lebensdauer hat Einfluss auf die Wartungsintervalle des Triebwerks und kann zusätzliche Kosten verursachen [166]. Die Zuverlässigkeit bei hohen Leistungsdichten sicher zu stellen, ist ebenfalls eine Herausforderung [8][7]. Ein schlechterer Wirkungsgrad mindert nicht nur die Effizienz, sondern führt auch zu viel Wärme, die mit Kühlsystemen und ausreichend Öl abgeführt werden muss, welche wieder das Gewicht erhöhen [171].



Abbildung 1.4: Getriebefan Triebwerk PW1000G [31, S. 290]

Für Getriebe in Flugtriebwerken entstehen komplexere Lasteinflüsse als bei stationären Getrieben, da ein Triebwerk unterschiedlichen statischen und dynamischen Lasten ausgesetzt ist. Die konkreten Lasteinflüsse hängen stark von der Konstruktion des Getriebes und der Integration in das Triebwerk ab. Allgemein lässt sich jedoch festhalten, dass sich die Lasteinflüsse nach dem Ort des Entstehens wie folgt kategorisieren lassen:

- außerhalb des Triebwerks
- innerhalb des Triebwerks
- innerhalb des Getriebes

Lasteinflüsse auf das Getriebe, die außerhalb des Triebwerks entstehen, resultieren u. a. aus Flugmanövern des Flugzeugs und den damit verbundenen g -Kräften, Windböen oder einer harten Landung im Notfall [178]. Sie beeinflussen die Flügel des Flugzeugs und über die Aufhängungen können Lasten und Schwingungen an das Getriebe übertragen werden. Außerdem können Fremdkörper den Fan treffen und diesen zu Schwingungen anregen oder zum Schaufelverlust führen. Die Lasten

aus der resultierenden Unwucht werden ebenfalls direkt in das Getriebe geleitet. Innerhalb des Triebwerks entstehen Lasten durch Unwucht und Rundlaufabweichungen an Scheiben, Wellen und Lagern. Durch die an das Sonnenrad angebundene Niederdruckwelle können ebenfalls Störungen übertragen werden, beispielsweise im Fall eines Verdichterpumpens. Darüber hinaus können innerhalb des Getriebes zusätzliche Lasten durch Fertigungsabweichungen der Getriebeteile entstehen [64].

Die Integration und die Lagerung des Getriebes im Triebwerk spielen bei auftretenden Lasten eine wichtige Rolle. Ein Planetengetriebe ist dann statisch bestimmt gelagert, wenn die Sonne, der Planetenträger, das Hohlräder und ein Planet fest gelagert sind. Jede weitere Lagerung führt zu einem überbestimmten System, was sehr hohe Anforderungen an die Positionierung und Fertigung der Getriebeteile stellt. Bei einer Variante mit drei Planeten und ungelagertem Sonnenrad kann letzteres sich frei einstellen und eine gleichmäßige Lastverteilung auf die Planeten sicherstellen [214]. Bei fünf Planeten müsste eine weitere Komponente, zum Beispiel das Hohlräder oder der Planetenträger, ungelagert bleiben [144][64]. Die bei vielen Getriebeteilen notwendige Anbindung an das restliche Triebwerk sollte möglichst flexibel ausfallen. Diese entkoppelnden Anbindungen haltbar und so leicht wie möglich zu entwerfen, stellt eine neue Herausforderung für die strukturmechanische Gestaltung und die eingesetzten strukturmechanischen Optimierungsmethoden in der Produktentwicklung dar. Sie sind ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit.

1.3 Produktentwicklung

Die Produktentwicklung ist ein wichtiger Teil jedes Unternehmens und die daraus resultierenden Anforderungen sind oft vielfältig und komplex. Der Begriff der Produktentwicklung umfasst nicht nur die Produkte

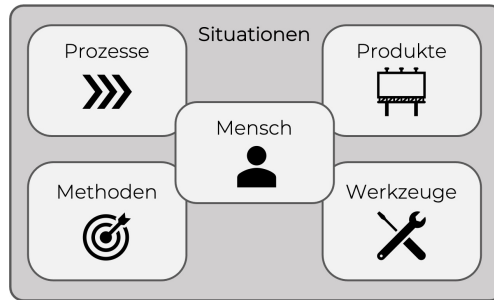


Abbildung 1.5: Wesentliche Aspekte der Produktentwicklung [159, S. 7]

selbst, sondern auch die Entwickler und die verwendeten Prozesse, Methoden und Werkzeuge sowie deren kurz-, mittel- und langfristigen Einflüsse. Allgemein kann die Produktentwicklung als ein Prozess der Problemlösung aufgefasst werden, wobei entscheidend ist, dass die Produkte die Anforderungen und Bedürfnisse der Kunden erfüllen. Dabei kann es sich um den Endkunden handeln oder um Kunden innerhalb der eigenen Unternehmensstruktur, denen das Team zuarbeitet. Abbildung 1.5 visualisiert die Aspekte der Produktentwicklung. Um die Entwicklung effektiv zu gestalten, bedarf es strukturierter und umfassender Prozesse. Die betreffende Aufgabe bestimmt, welche Methoden ausgewählt werden, die Handlungs- und Entscheidungsabläufe leiten. Zur Unterstützung der Methoden werden wiederum Werkzeuge eingesetzt. Auch wenn Prozesse zunehmend rechnergestützt sind, spielen die Produktentwickler immer noch die zentrale Rolle. Ein wichtiger Grund dafür ist, dass die Produktentwicklung von sich ständig verändernden Informationen und einem Wissen geprägt ist, das in den Köpfen der Entwickler wächst.

Um in der Produktentwicklung strukturiert vorgehen zu können, bedarf es eines konkreten Vorgehensplans, eines Navigationsmodells. Ein bekanntes Beschreibungsmodell für die Entwicklungsprozesse findet sich in der VDI-Richtlinie 2221 (siehe [210] und [209]). Ein allgemeiner Ansatz ist der Modellraum des Konstruierens nach Spur (siehe Spur [192]). Dabei

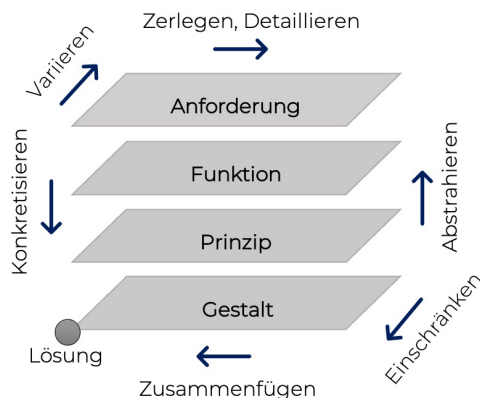


Abbildung 1.6: Modellraum des Konstruierens nach Rude, in Anlehnung an [159, S. 23]

spannen drei Dimensionen – der Konkretisierungs-, der Zerlegungs- und der Variationsgrad – den Modellraum auf. Der Konkretisierungsgrad ordnet die Ergebnisse vom Abstrakten zum Konkreten. Der Zerlegungsgrad beschreibt das Maß, zu dem Tätigkeiten und Ziele noch zusammengefasst oder schon ausdetailliert sind. Der Variationsgrad bezieht sich auf die Größe der Menge an vorhandenen Lösungsalternativen. Abbildung 1.6 illustriert das Zusammenspiel der drei Dimensionen [159].

Jedoch nutzen nicht alle Navigationsmodelle alle drei Dimensionen so konkret. Einige fokussieren sich insbesondere auf den Konkretisierungs- oder den Abstraktionsgrad. Dabei wird jeweils von einem niedrigen zu einem hohen Grad gearbeitet. Beispiele für solche Navigationsmodelle finden sich in Ehrlenspiel und Meerkamm [63], Pahl und Beitz [152] und Haberhauer [84]. Ein sehr intuitiv verständliches Navigationsmodell ist das Münchener Produktkonkretisierungsmodell (MKM), das in Abbildung 1.7 gezeigt ist. Entsprechend des Konkretisierungsgrads ordnet das MKM vier Produktmodelle ein:

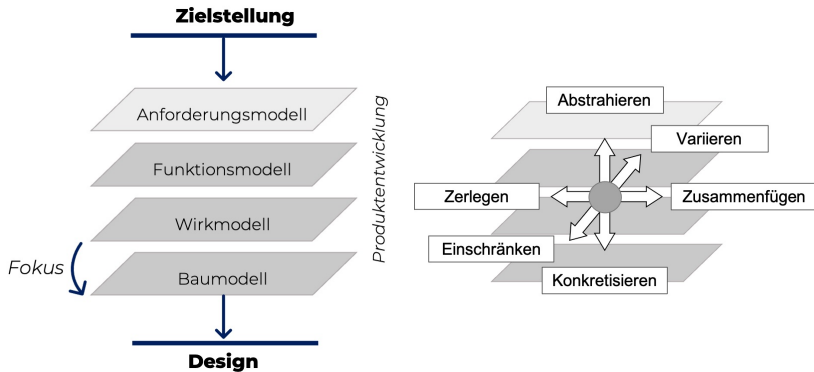


Abbildung 1.7: Münchener Produktkonkretisierungsmodell, in Anlehnung an [159, S. 24]

- Anforderungsmodell
- Funktionsmodell
- Wirkmodell
- Baummodell

Das Anforderungsmodell bildet die Entwicklungsziele und geforderten Produkteigenschaften ab. In der Regel wandelt sich das Anforderungsmodell im Laufe der Entwicklung stetig. Im Funktionsmodell werden die Funktionen und Funktionszusammenhänge dargestellt. Hierbei ist es wichtig, zunächst losgelöst vom Sachverhalt die Funktionen abstrakt zu beschreiben, um innovative Lösungsansätze zu ermöglichen. Das Wirkmodell zeigt bereits die prinzipielle Lösung einer technischen Problemstellung. Alle für die Funktion relevanten Aspekte sind darin berücksichtigt, sodass ein Gesamtkonzept entsteht. Am Ende muss im Baummodell ein Produkt in seiner Gestalt festgelegt werden. Im Baummodell sind alle Bauteile und Baugruppen sowie deren Verknüpfungen in der Baustruktur detailliert enthalten. Die Funktions-, Wirk- und Baummodelle bilden den Lösungsraum ab, während parallel ein Anforderungsraum existiert, in dem Anforderungen ergänzt, ausdifferenziert und konkretisiert werden.

Somit wird das Anforderungsmodell gefüllt [159].

Wie eingangs beschrieben, geht es im Kern der Produktentwicklung um Problemlösung. Ein Navigationsmodell unterstützt die Strukturierung des langen Prozesses, wobei jede Ebene von Teilproblemen charakterisiert ist. Passend zum MKM beschreibt Lindemann [123] das in Abbildung 1.8 gezeigte Münchener Vorgehensmodell (MVM). Probleme zu lösen ist oft ein individueller Prozess und Teilprozesse können sich überlagern. Das übliche Vorgehen kann jedoch in sieben Schritte aufgeteilt werden. Lindemann geht auf jeden Schritt detailliert ein:

- Ziel planen
- Ziel analysieren
- Problem strukturieren
- Lösungsideen ermitteln
- Eigenschaften ermitteln
- Entscheidung herbeiführen
- Zielerreichung absichern. [123, S. 47]

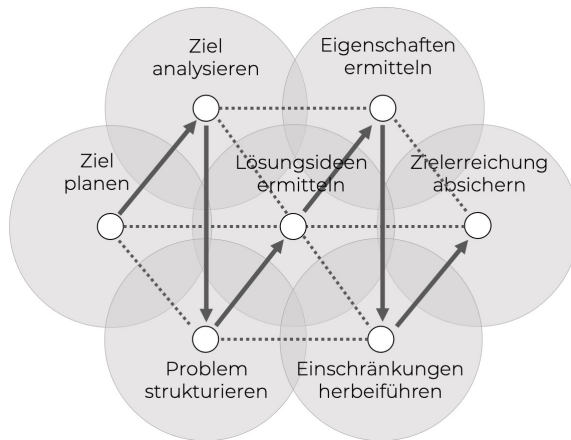


Abbildung 1.8: Standardvorgehen bei der Problemlösung, in Anlehnung an [123, S. 51]

Das MKM-Navigationsmodell betont den Umgang mit Anforderungen, denn sie sind typischerweise vielfältig und voneinander abhängig. Die Aufgabe, übergeordnete Hauptzielsetzungen zu realisieren, ist daher komplex. Die Zielsetzung beschreibt einen gewünschten zukünftigen Zustand im weiteren Sinne und ist weniger spezifisch als der Anforderungsbegriff. Typische Beispiele sind die Reduktion von Gewicht oder Geräuschen oder ein fertigungs-, montage- oder kostengerechter Entwurf. Wie solche Anforderungen realisiert werden können, zeigen Redford und Chal [164], Ehrlenspiel und Meerkamm [63], Molloy, Tilley und Warman [143] und Aston [11]. Allgemein wird dieses Vorgehen als „*Design to X*“ bezeichnet. Neben diesen klassischen Aspekten sind Prozessthemen immer wichtiger geworden. Darunter fallen Maßnahmen, die den Entscheidungsprozess unterstützen sollen und Informationen situationsgerecht zur Verfügung stellen. Innerhalb dieser Prozesse werden Gestaltungsrichtlinien, Methoden und rechnergestützte Werkzeuge eingesetzt, um einen arbeitsprozessgerechten Entwicklungsprozess zu schaffen [137][159].

Diese Arbeit fokussiert sich auf den Teil der Produktentwicklung, in dem ausgehend vom Wirkmodell eine Produktgestalt gefunden und in ein Baumodell überführt werden muss. Ehrlenspiel und Meerkamm [63] beschreiben die Gestalt eines materiellen Produktes als Gesamtheit seiner geometrischen Merkmale und Werkstoffarten. Im Wirkmodell werden bereits erste lösungsneutral gehaltene Wirkprinzipien und -strukturen abstrakt entwickelt. Dieses Grundkonzept definiert erste geometrische, kinematische und stoffliche Eigenschaften, wodurch eine durch die technische Funktion festgelegte Gestalt entsteht. Eine Produkteigenschaft ist nach Lindemann [123] ein Produktmerkmal und seine Ausprägung, die binär (vorhanden, nicht vorhanden), diskret (1 mm, 2 mm, 5 mm, ...) oder kontinuierlich ([0 Nm ; 100 Nm]) sein kann.

Wie kann nun ausgehend von dem eher abstrakten Wirkmodell eine konkrete Gestalt gefunden werden? Es besteht die Möglichkeit, mehrere

Gestaltausprägungen zu erzeugen, von denen dann später eine ausgewählt wird (generierendes Vorgehen). Alternativ können ausgehend von einem einzelnen Entwurf stetige Anpassungen vorgenommen werden (korrigierendes Vorgehen) [62]. Der generierende Ansatz ist oft dann sinnvoll, wenn noch keine ähnliche Lösung bekannt ist und es sich um eine völlige Neuentwicklung handelt. Der korrigierende Ansatz bietet sich an, wenn eine bereits bekannte Lösung noch nicht die gewünschten Eigenschaften aufweist. Lösungsalternativen mit unterschiedlicher Produktgestalt können auf verschiedenen Wegen erarbeitet werden. Denkbare Ziele bei der Suche nach unterschiedlichen Produktgestalten sind – neben der Generierung von Lösungsalternativen – die Verbesserung von konkreten Produkteigenschaften wie Gewicht oder Kosten, das Absichern einer Lösung durch die Erschließung des Lösungsraums und die Ermittlung von Freiheitsgraden einer Lösung. Um systematisch Lösungsalternativen zu finden, empfehlen Ponn und Lindemann ein Vorgehen in fünf Schritten:

1. Ausgangsobjekt bestimmen
2. Variationsziel bestimmen
3. Variationsmerkmale bestimmen
4. neue Ideen durch alternative Merkmalausprägung erzeugen
5. generierte Ideen auf Umsetzbarkeit prüfen, bewerten und auswählen [159, S. 129]

Jeder dieser Schritte kann methodisch unterstützt werden. Lindemann [123] definiert Methoden als Tätigkeiten, die regelbasiertes und planmäßiges Vorgehen verwenden, um ein Ziel zu erreichen. Dabei können intuitive und diskursive Methoden wie die systematische Variation unterschieden werden.

In Bezug auf die Einordnung im Produktentwicklungsprozess versucht die vorliegende Arbeit, für den Übergang vom Wirk- zum Baumodell diskursive und arbeitsprozessgerechte Methoden zu entwickeln. Sie sollen den

Entwickler dabei unterstützen, gezielt eine erste konkrete Produktgestalt und weitere Produktgestaltvariationen zu erarbeiten. Im Besonderen liegt der Fokus auf dem vierten Schritt zur Suche von Lösungsalternativen von Ponn und Lindemann, der Generierung neuer Ideen durch alternative Merkmalausprägungen. Die Methoden sollen in der Lage sein, binäre, diskrete und kontinuierliche Produktmerkmale systematisch zu erzeugen und zu variieren. Dabei soll sowohl ein generierendes als auch ein korrigierendes Vorgehen möglich sein. Um komplexe Sachverhalte und Produkteigenschaften zu untersuchen, werden Werkzeuge wie rechnergestützte Verfahren zur strukturmechanischen Analyse und Optimierung eingesetzt.

1.4 Strukturoptimierung im Maschinenbau

Bei technischen Optimierungsaufgaben geht es in der Regel darum, ein in der Entwicklung befindliches Bauteil oder System „optimal“ auszulegen, sodass eine Effizienzsteigerung erzielt wird. Optimierungsaufgaben lassen sich in nahezu jedem Bereich finden. Einige Beispiele sind die Verbesserung des Fahrkomforts in der Fahrzeugtechnik [13][58][102], die Minimierung von Herstellungskosten in der Produktionsplanung und Fertigungstechnik [35][141][146][188], das Einstellen von Regelparametern in der Regelungstechnik [72], die Optimierung von Schaufelgeometrien oder Strömungswiderständen in der Strömungsmechanik und Thermodynamik [150][175] und viele weitere. Im breiten Aufgabenfeld der technischen Optimierung stellt die Strukturoptimierung ein Teilgebiet dar, dass sich mit der Optimierung mechanischer Strukturen befasst [106].

Die Strukturoptimierung ist daher ein wichtiges Entwicklungswerkzeug im Maschinenbau. Sie hat das Ziel, ein Bauteil hinsichtlich der gestellten mechanischen Anforderungen zu verbessern. Im Prozess der Strukturoptimierung ist die Definition der Anforderungen der erste Schritt. Typische

Ziele sind beispielsweise die Minimierung des Gewichts, das Erhöhen der Traglast oder das Anheben einer Eigenfrequenz über einen kritischen Frequenzbereich (*Frequency Spacing*). In speziellen Anwendungsfällen kann auch eine spezifische Verformung bei einer gegebenen Last gewünscht sein, was gesonderte Ansprüche an die Strukturoptimierung stellt und später in diesem Abschnitt thematisiert wird. In der Regel gilt es im zweiten Schritt, die Bedingungen zu formulieren, unter denen das Ziel erreicht werden soll. Typische Bedingungen sind beispielsweise, eine maximale Verformung oder Spannung im Bauteil nicht zu überschreiten. Im dritten Schritt müssen sogenannte Entwurfvariablen bestimmt werden, mithilfe derer das Bauteil so verändert werden kann, dass sie die Zielgröße beeinflussen. Zum Schluss wird ein Analysemodell benötigt, welches das mechanische Verhalten des Bauteils abbilden kann, und ein Optimierungsalgorithmus, der die Werte der Entwurfvariablen ändert.

Schumacher [185] verwendet zur Veranschaulichung das Beispiel einer Brücke. Eine typische Aufgabenstellung könnte hier lauten:

»Minimiere die Masse der Brücke für eine gegebene Last, sodass die zulässige Verformung und Spannung nicht überschritten wird.«

oder:

»Maximiere die erste Eigenfrequenz, sodass die zulässige Masse der Brücke nicht überschritten wird.«

Abbildung 1.9 zeigt schematisch, wie die Optimierung allgemein verläuft. Ausgehend von einem Startentwurf wird zunächst mithilfe des Analysemodells eine Auswertung vorgenommen. Anschließend wird geprüft, ob

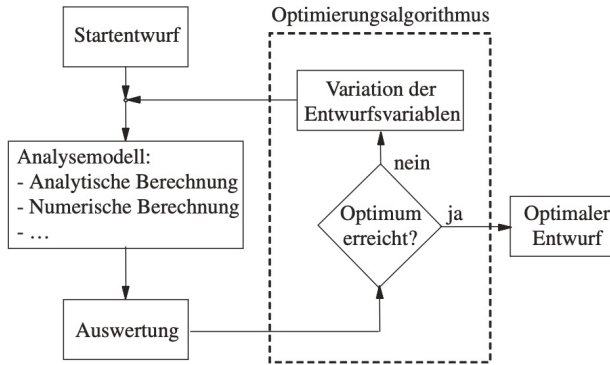


Abbildung 1.9: Optimierungsablauf [185, S. 2]

ein Optimum erreicht wurde. Ist das nicht der Fall, werden die Entwurfsvariablen verändert und eine neue Berechnung und Auswertung werden angestoßen. Teilweise wird dieser Prozess hundert- oder tausendfach durchlaufen. Wie entschieden wird, ob ein Optimum erreicht wurde und wie auf Basis vorheriger Auswertungen die Entwurfsvariablen verändert werden, hängt vom gewählten Optimierungsalgorithmus ab. In Abschnitt 2 werden die Methoden näher beschrieben.

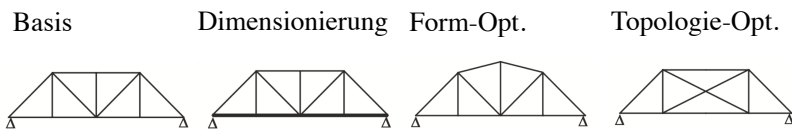


Abbildung 1.10: Klassifizierung in der Strukturoptimierung, in Anlehnung an [185, S. 4]

Abhängig von der Art und Weise, wie die Entwurfsvariablen den Startentwurf verändern können, lassen sich die verschiedenen Ansätze klassifizieren. Oft wird in der Strukturoptimierung unterschieden in:

- Dimensionierung,

- Formoptimierung
- und Topologieoptimierung

Abbildung 1.10 veranschaulicht die Unterschiede wieder am Beispiel der Brücke. Bei der Dimensionierung bleibt die Gestalt der Brücke unverändert. Variiert werden die Querschnitte, Wanddicken etc. Bei der Gestaltoptimierung wird mithilfe der Entwurfsvariablen der Bauteilrand und damit die Gestalt der Brücke verändert. Dabei entstehen oder entfallen jedoch keine neuen Verstrebungen. Dies ist erst bei der Topologieoptimierung der Fall. Topologie ist hier im Sinne der geometrischen Topologie zu verstehen. Vereinfacht lässt sich sagen, dass zwei Körper dieselbe Topologie besitzen, wenn sie sich ineinander umformen lassen, ohne dass vorhandene Löcher geschlossen werden oder neue entstehen. Die ersten drei Brücken in Abbildung 1.10 besitzen daher eine identische Topologie. Ausgehend vom Basisentwurf lässt sich die vierte Brücke jedoch nicht erzeugen, ohne vorhandene Streben zu entfernen und neue hinzuzufügen. Die Topologie ist daher nicht identisch. Darüber hinaus existieren noch weitere Verfahren wie die Topografieoptimierung oder *Free-Size*-Optimierung, die sich für dünnwandige Strukturen und spezielle Anwendungsfälle eignen. In Abschnitt 2 wird hierauf näher eingegangen. Detaillierte Erläuterungen finden sich beispielsweise bei Harzheim [85], Kober [106] oder Schumacher [185].

Die Strukturoptimierung ist eine vergleichsweise junge Disziplin. Eine der ersten Veröffentlichungen zur Topologieoptimierung stammt vom Australier Anthony G. M. Michell, der wichtige Prinzipien optimaler Stabtragwerke beschrieb [139]. Einige Beispiele der heute als Michell-Strukturen bekannten Ergebnisse finden sich u. a. in Alexander [3] oder Save und Prager [176]. Sie werden noch heute als Referenzlösungen zum Testen moderner Topologieoptimierungsprogramme herangezogen. Die Strukturoptimierung, wie sie heute allgemein verstanden wird, basiert in der Regel auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) und verbreitete sich in den 1960er Jahren mit dem Einzug immer leistungsfähigerer

Rechentchnik. Erste Anwendungen bezogen sich auf das Bauwesen zur Optimierung von Stabquerschnitten, die später auf Querschnittsabmessungen von Balkenelementen verallgemeinert wurden. Dieser Ansatz entspricht der zuvor eingeführten Dimensionierung und lässt sich in FEM-Programmen einfach umsetzen, da das eigentliche Modell nicht verändert werden muss, sondern lediglich die Eigenschaften der einzelnen Elemente. Schmit leistete hierzu einen besonderen Beitrag und fasst seine Ansätze in [182] zusammen. Wichtige Arbeiten zur Gestaltoptimierung wurden Anfang der 1990er Jahre von Mattheck geleistet. Er entwickelte Algorithmen, die sich am Wachstum von Bäumen oder Knochen orientierten (siehe [133][134][135][136]). Zur gleichen Zeit arbeiteten Xie und Steven an Optimierungsmethoden auf Basis von Evolutionsstrategien (siehe [218][216][217]). Kurz davor begann die Entwicklung erster praxisrelevanter auf Finite-Elemente basierender Topologieoptimierungen. Die Anfänge waren stark geprägt von M. P. Bendsøe (siehe [15][16][17][18][53][149]). Teils in Kollaboration, teils eigenständig leisteten neben vielen anderen Díaz, Kikuchi, Sigmund oder Olhoff weitere wichtige Beiträge zur Entstehung der modernen Strukturoptimierung [106]. Eine Übersicht zur Entwicklung findet sich in Rozvany [172], Rozvany [173] sowie in Guo und Cheng [83] und in Bezug auf den Einsatz von evolutionsbasierten Algorithmen im speziellen in Munk, Vio und Steven [145].

Eine noch jüngere Disziplin entspringt der Idee, die Optimierung direkt auf Modelle computergestützter Konstruktionen zu stützen, statt FE-Modell zu vernetzen. Dieser Grundgedanken ist im Prinzip nicht neu und wurde so bereits von Díaz und Bendsøe in Ihrer Veröffentlichung [53] angeführt. Durch die Weiterentwicklung der Programme für computergestützte Konstruktion (englisch: *Computer-Aided Design*, CAD) wird dieser Ansatz zunehmend praxistauglicher. Moderne Konstruktionsprogramme enthalten heute Simulationswerkzeuge und Programmierschnittstellen (englisch: *Application Programming Interfaces*,

APIs), die es dem Benutzer erlauben, Prozesse zu automatisieren und Optimierungsalgorithmen anzugliedern. Für eine derartige Optimierung muss der Prozess zur Variation der Geometrie, die Überführung in ein Analysemodell und die Auswertung des Analysemodells automatisiert ablaufen (siehe Abbildung 1.11). Detaillierte Erläuterungen dazu finden sich in Abschnitt 3.2. Bei Strukturoptimierungsmethoden, die direkt auf FE-Modellen basieren, sind die Entwurfsvariablen die Eigenschaften der Elemente (Dimensionierung), die Position der Knoten auf der Oberfläche (Gestaltoptimierung) oder die Dichte der Elemente im gesamten Entwurfsraum (Topologieoptimierung). Die Entwurfsvariablen der auf CAD-Geometrie basierenden Ansätzen sind typischerweise Größen, die der Ingenieur auch bei der Konstruktion der Komponente verwendet, wie Abmessungen, Wandstärken und Koordinaten, oder ganze Merkmale wie Verstrebungen oder Bohrungen.

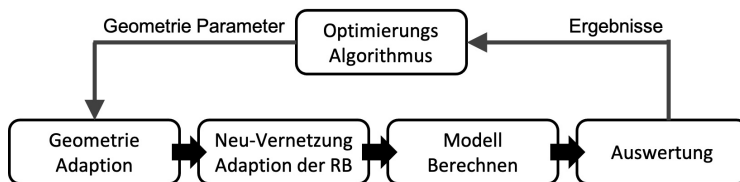


Abbildung 1.11: Prinzipieller Ablauf eines geometriebasierten Optimierungsprozesses

Die entscheidenden Problemstellungen sind dabei:

- die Wahl einer Parametrisierung, die das Modell verlässlich, effizient und mit großer Designfreiheit variiert
- eine stabile Überführung der Geometrie in das Analysemodell
- eine schnelle und umfassende Auswertung der Simulationsergebnisse

Dem gegenüber stehen Vorteile wie:

- Entfallen der Überführung der Optimierungsergebnisse in funktionale CAD Modelle
- geringe Anzahl an Entwurfsvariablen, wodurch ein breiteres Spektrum an Optimierungsalgorithmen eingesetzt werden kann
- ein vielfältiges Anwendungsgebiet

Bei der Optimierung mit CAD-Modellen spielt die vom Anwender gewählte Parametrisierung eine entscheidende Rolle. Sie beeinflusst, in welchem Umfang das Modell verändert werden kann und wie stabil die Variation der Geometrie und die anschließende Überführung in ein Analysemodell ist. Arbeiten zur Wahl der Parametrisierung und zur CAD Konstruktionsmethodik für eine automatisierte Modellgenerierung und zu optimierungs- und simulationsgetriebenen Entwürfen finden sich in [6][37][86][128][201]. Diese Grundsätze gelten nicht nur für die Strukturoptimierung, sondern auch für aerodynamische Optimierungen wie die Arbeiten Sommer [189] und Fudge, Zingg und Haines [75] zeigen. Robinson, Armstrong und Chua [167] legen dar, wie die Effektivität einer Parametrisierung auf das Optimierungsziel bestimmt werden kann und in [168] wie die Hinzufügung und das Entfernen von Bauteilmerkmalen (englisch: *Features*) für eine Optimierung genutzt werden können.

Eine häufig genutzte Parametrisierungsform sind Splines. Ein Spline ist eine Funktion, die sich stückweise aus Polynomen zusammensetzt. Sie ermöglichen die Beschreibung komplexer Geometrien mit wenigen Entwurfsvariablen. Nähere Erläuterungen finden sich in Kapitel 3 und detaillierter bei Koch [107]. In einer kurzen und für eine Einführung geeigneten Arbeit beschreibt Schmitt [183] den Einsatz von Splines zur Optimierung eines Flügelprofils. Er vergleicht unterschiedliche Optimierungsansätze. Wie Splines in einem CAD-Umfeld für Gestalt- und Topologieoptimierungen genutzt werden können, erläutert Weiss detaillierter in seinem Paper [212] und allgemeiner in seiner Dissertation [213]. In einem Vergleich verschiedener Ansätze der Splineformulierung zeigt er Probleme und Lösungen auf. Allgemeiner und außerhalb einer

CAD-Software verweist Martin [130] auf den Einsatz von Splines zur Gestaltoptimierung. Seiler nutzt in seiner Dissertation [186] ebenfalls Splines und Freiformflächen und geht im Speziellen auf den Umgang mit geometrischen Restriktionen ein. I. Marinić-Kragić und D. Vučina befassen sich in ihrem Paper [170] mit Methoden zur Beschreibung komplexer Geometrien mit wenigen Entwurfparametern, um eine Gestaltoptimierung effizienter zu gestalten.

Der nächste wichtige Aspekt ist eine stabile Überführung einer sich ändernden CAD-Geometrie in das Analysemodell. Hier zeigen Armstrong und Tierney Lösungen für das Interfacemanagement in [204] und [205]. Zusammen mit Nolan werden in [148] insbesondere die Probleme bei der Überführung von dünnwandigen Strukturen in Schalenmodelle diskutiert und Lösungen innerhalb der CAD Software aufgezeigt. Ebenfalls im Kontext einer effizienten Vernetzung und stabilen Überführung in das Analysemodell werden Möglichkeiten der Geometriereduktion in [203] erörtert. Weitere Arbeiten zu Interfacemanagement, Datentransfer und Geometrieaufbereitungen finden sich in Cao u. a. [36] und Davison u. a. [48]. Außerdem zeigen Schulz u. a. [184] Methoden, die den Aufwand einer Neuvernetzung bei geänderter Geometrie im Rahmen einer Optimierung reduzieren.

Eine schnelle und umfassende Auswertung der Simulationsergebnisse ist wichtig für eine effiziente und anforderungsgerechte Optimierung. Dazu können, wie bereits für den gesamten Prozess, die APIs der jeweils verwendeten Software genutzt werden. Darauf wird in Abschnitt 3.2 näher eingegangen.

Zu den Vorteilen: Ausgehend von den Erläuterungen der unterschiedlichen Klassifizierungen in der Strukturoptimierung, kann der Eindruck entstehen, dass die FE-basierte Topologieoptimierung immer die beste

Wahl ist, da sie in der Suche nach einer optimalen Geometrie die größte Freiheit bietet und keine aufwändige Parametrisierung benötigt. Die Umsetzung der Ergebnisse gestaltet sich in der Praxis jedoch oft schwierig. Bei der Topologieoptimierung wird der gesamte zur Verfügung stehende Bauraum zunächst in kleine Elemente diskretisiert und mit Material gefüllt. Zu Beginn besitzt jedes Element die volle Dichte. Anschließend werden die Dichten der Elemente schrittweise reduziert oder die Elemente gelöscht, bis sich eine Struktur herausbildet. Ein Beispiel für eine Topologieoptimierung findet sich in Kapitel 2.2.3. Die oft sehr komplexen Ergebnisse sind fertigungstechnisch nicht immer umsetzbar. Um dem entgegenzuwirken, haben die Programmentwickler die Möglichkeit geschaffen, Fertigungsbedingungen zu definieren, um Symmetrien zu fördern oder Hinterschnitte zu vermeiden. Dennoch bleibt die Interpretation der Ergebnisse schwierig und zeitaufwändig. Die Topologieoptimierungsergebnisse teils automatisiert zu interpretieren und in CAD-Modelle zu überführen, ist daher Gegenstand aktueller Forschung. Einige Arbeiten zur Identifikation von Bauteilrändern, zur Aufbereitung der Oberflächen und allgemeinen Überführung in teils parametrisierte Modelle finden sich u. a. in [38][46][90][108][116][220]. Bei der Formoptimierung treten im Prinzip die gleichen Probleme auf, wenn auch in abgeschwächter Form, da sich die Ergebnisse oft nah am Ausgangsentwurf befinden, wie in Kapitel 2.2.2 deutlich wird. Bei einer auf CAD-Geometrien gestützten Optimierung entfällt dieser Aufwand gänzlich.

Die verhältnismäßig wenigen Entwurfsvariablen, die zum Beschreiben und Variieren einer CAD-Geometrie nötig sind, ermöglichen den Einsatz von Optimierungsmethoden, die globale Minima finden und mehrere Zielgrößen gleichzeitig verbessern können (siehe Abschnitt 2.1.1). Im Prinzip kann jeder Optimierungsalgorithmus verwendet werden, der die Simulation nur als „*Black Box*“ betrachtet, Entwurfsvariablen an das Modell gibt und Werte für Ziele und Nebenbedingungen erhält. Ein sehr effizienter globaler Einzel-Optimierungsalgorithmus ist die *Covariance Matrix Ad-*

aptation Evolution Strategy (CMA-ES), näher beschrieben in Auger und Hansen [12]. Ein bewährter globaler Mehrziel-Optimierungsalgorithmus ist der *Archive-based Micro Genetic Algorithm* (AMGA), den Tiwari u. a. [206] näher erläutert. Beide wurden vornehmlich für die Optimierungsprobleme in dieser Arbeit verwendet. Die Möglichkeit, nicht nur das nächste lokale Minimum in einer Strukturoptimierung zu finden, kann zu deutlich verbesserten Designs führen. Dies ist in vielen Fällen bei einer FE-basierten Strukturoptimierung nicht möglich. In Kapitel 2 wird auf die Unterschiede näher eingegangen.

Sofern der in Abbildung 1.11 schematisch dargestellte Prozess automatisiert durchgeführt werden kann, ist die Art der Analyse innerhalb dieses Optimierungsprozesses unerheblich. Wird ein solcher Prozess einmal in einer Anwendung für die computergestützte Entwicklung (englisch: *Computer-Aided Engineering*, CAE) realisiert, lassen sich alle implementierten Analyseverfahren für eine Optimierung nutzen. Mit der gewählten Parametrisierung kann ein Bauteil im Sinne der Dimensionierung, Gestaltoptimierung, Topologieoptimierung etc. variiert werden, um Ziele etwa aus linear elastischen, nichtlinearen, dynamischen oder strömungsmechanischen Simulationen zu optimieren. Wie breit das Anwendungsgebiet ist, wurde in einigen bisher vorgestellten Arbeiten bereits gezeigt. Daneben sind spezielle Methoden zu nennen, die ebenfalls auf CAD-Geometrien basieren, aber keine klassische Parametrisierung nutzen. Sie bestimmen die Sensitivitäten einzelner Bauteilbereiche hinsichtlich der Zielfunktion vielmehr mittels einer adjungierten Funktion. Beispiele sind Armstrong u. a. [10] und Robinson u. a. [169].

Ein weiterer spezieller Fall in der Strukturoptimierung ist das Finden besonders flexibler Strukturen. Wie eine Problemformulierung für diese Anwendungsfälle mit der klassischen *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP)-Methode bearbeitet werden kann, wird in Lima, Teves und Silva [122] erläutert. Solche Strukturen lassen sich unter dem

Begriff *Compliant Mechanisms* zusammenfassen. Zhu u. a. [222] zeigten 2020 eine Übersicht zum aktuellen Forschungsstand mit typischen Designproblemen und Beispielen. Bei der Suche nach flexiblen Strukturen mit einer FE basierten Topologieoptimierung können Problemen wie *De-facto*-Gelenke, unverbundenen Strukturbereichen und Teildichten auftreten (vgl. Deng und Chen [50]). Der Optimierungsalgorithmus schafft die gewünschte Flexibilität dabei nicht durch eine geschickte Bauteilform, sondern durch niedrige Elementdichten, welche in der Praxis nicht nachgebildet werden können. Bei Strukturoptimierungen, die auf einem CAD-Modell basieren und Optimierungsalgorithmen wie die CMA-ES nutzen, entstehen diese Probleme nicht. Wie am Ende des Abschnitts 1.2 beschrieben, werden solche Strukturen für Planetengetriebe in Flugtriebwerken benötigt. Die Optimierung solcher Strukturen stellt einen Teil dieser Arbeit dar (siehe Kapitel 5).

Nach diesem Überblick lässt sich abschließend festhalten, dass die verschiedenen Strukturoptimierungsmethoden Schnittmengen in den Anwendungsgebieten besitzen, jede für sich jedoch ihre Daseinsberechtigung behält. Welche Methode sich im Einzelfall am besten eignet, ist abhängig von der Art des Problems, dem Kenntnisstand zur Problemstellung und von der Phase der Produktentwicklung, in der sich die Komponente zu dem Zeitpunkt befindet.

1.5 Motivation und Zielsetzung

In der Entwicklung neuer Komponenten und Systeme sehen sich Ingenieure immer größeren Anforderungen gegenüber. Dieser Umstand spiegelt sich auch im heutigen strukturmechanischen Entwicklungsprozess wider. Komplexere Aufgabenstellungen und kürzere Entwicklungszeiten erfordern immer bessere Entwicklungsmethoden. Der Einsatz numerischer

Optimierungen spielt daher eine immer wichtigere Rolle. Dabei ist es entscheidend, Komponenten frühzeitig und hinsichtlich ihrer Anforderungen möglichst umfänglich zu optimieren. Idealerweise geschieht dies bereits in der Konzeptphase und durch Methoden, die für die Entwicklungsingenieure leicht zugänglich sind und sich mit geringerem Mehraufwand in den bestehenden Entwicklungsprozess eingliedern lassen.

Dazu wurde im Rahmen dieser Arbeit ein auf parametrischen CAE-Modellen basierender Optimierungs- und Analyseprozess erarbeitet, der die Komponentenentwicklung in der frühen Konzeptphase unterstützen soll. Die Arbeit soll, ähnlich den Zielen von Lokgård und Grandicki [127], einen Beitrag dazu leisten, parametrische Modelle und simulationsgetriebene Optimierung weiter in den Entwicklungsprozess zu integrieren. Die grundlegenden Abläufe und Parametrisierungsstrategien bauen dabei teilweise auf die vorangegangenen Arbeiten von Weiss auf. Er greift zur Realisierung seines Ansatzes tief in die Programmstruktur der genutzten CAE-Software ein und thematisiert am Ende seiner Dissertation die damit verbundenen Probleme der Anwenderfreundlichkeit, Wartbarkeit und Prozessstabilität bei Softwareupdates, insbesondere für praxisnahe Anwendungen in Unternehmen. Der hier entwickelte Prozess soll diese Probleme bei der Programmierung und den verwendeten Parametrisierungsstrategien berücksichtigen, um eine anwenderfreundliche und updatestabile Methode zu entwickeln. Weiss bezieht zudem die Möglichkeit ein, Antwortflächenverfahren zu nutzen, um rechenzeitintensive Simulationen einzusparen. Der Einsatz von Antwortflächenverfahren soll ebenfalls realisiert werden. Seiler [186] thematisierte in seiner Dissertation die Berücksichtigung von geometrischen Restriktionen bei der Optimierung von Freiformgeometrien. Diese werden auch in dieser Arbeit einbezogen, jedoch soll die Umsetzung durch den Einsatz aktueller APIs in der CAD-Software deutlich stabiler und umfänglicher ausfallen. Dienemann [55] befasste sich in seiner Dissertation mit der Gestalt- und Topologieoptimierung von dünnwandigen Strukturen, wie sie häufig in

der Luftfahrtindustrie vorkommen. Im Ausblick seiner Arbeit weist er darauf hin, dass eine automatisierte Überführung der Optimierungsergebnisse als Verbesserung noch aussteht. In Abschnitt 1.4 wurde erläutert, wie ein CAD-basierter Optimierungsansatz dieses Problem umgeht. In Abschnitt 1.2 wurde ausgeführt, dass der Konstruktionsprozess von Planetengetrieben viele flexible Komponenten erfordert. In den Arbeiten [50], [122] und [222] wurden die damit einhergehenden Probleme beschrieben. Anhand einiger Beispiele soll demonstriert werden, wie ein auf parametrischen CAD-Modellen basierender Ansatz diese Probleme umgehen kann.

Im Anschluss an die Einleitung gliedert sich die Arbeit in vier Kapitel. Es folgt ein Überblick zu Methoden der Strukturoptimierung in Kapitel 2, in dem die einzelnen Verfahren näher erläutert werden und auf relevante Sonderfälle eingegangen wird. Anschließend wird die CAD- und simulationsgetriebene Strukturgenerierung und -optimierung in Kapitel 3 thematisiert. In Kapitel 4 stehen Antwortflächenverfahren zur Prozessbeschleunigung von großen Optimierungsproblemen im Fokus. Auf der Basis der zuvor beschriebenen Grundlagen wird in Kapitel 5 eine Reihe von Fallbeispielen erläutert. Um die Effektivität und den Nutzen der gezeigten Methoden zu demonstrieren, orientieren sich die Fallbeispiele an Komponenten und Anforderungsdefinitionen aus einem realen Entwicklungsumfeld eines Planetengetriebes für Flugtriebwerke.

2 Strukturoptimierung

Die Strukturoptimierung von Komponenten und Systemen ist ein sehr breites Feld. Daher kann nur auf die Aspekte eingegangen werden, die für die folgenden Problemstellungen dieser Arbeit entscheidend sind. Zunächst werden die Grundlagen zu Arten und Formulierungen von Optimierungsproblemen erläutert, gefolgt von den wichtigsten Ansätzen und Algorithmen zu deren Lösung. Letztere sollen später dazu genutzt werden, die Parameter zu optimieren, die eine Geometrie in einem CAD-Programm beschreiben. Hierauf wird in Kapitel 3 detailliert eingegangen. In Kapitel 2.2 werden typische Verfahren zur Strukturoptimierung auf Basis finiter Elemente vorgestellt. Auch wenn diese Verfahren in dieser Arbeit nicht eingesetzt werden, spielen die Grundideen, die Zielabsichten und ihre Grenzen eine wichtige Rolle. Abschließend werden einige Sonderfälle der Strukturoptimierung vorgestellt, die bei den Verfahren aus Kapitel 2.2 oft zu Problemen führen und im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelt werden.

2.1 Grundlagen und Methoden der Optimierung

Ein Optimierungsproblem ist zunächst ein mathematisches Problem und bedarf folglich einer einheitlichen und eindeutigen Beschreibung. In den nachfolgenden Abschnitten sollen daher die wichtigsten Begriffe, Schreibweisen und Methoden zur Lösung, die für das Verständnis der späteren Arbeiten wichtig sind, erläutert werden.

2.1.1 Grundlagen mathematischer Optimierung

Mathematisch lässt sich ein Optimierungsproblem wie folgt beschreiben:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Ausformuliert lautet der Term: Minimiere $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{x} \in X$. Es handelt sich somit um ein Minimierungsproblem, $f(\mathbf{x})$ ist die sogenannte Zielfunktion, die es mithilfe der Optimierungsparameter \mathbf{x} zu minimieren gilt. Dabei ist \mathbf{x} in X enthalten und $X \subseteq \mathbb{R}^n$, eine Teilmenge der reellen Zahlen. Ist $X = \mathbb{R}^n$, so handelt es sich um ein unrestringiertes Optimierungsproblem, bei dem die Werte für \mathbf{x} jede reelle Zahl annehmen können. In der Praxis ist es in der Regel jedoch nötig diesen Bereich durch Nebenbedingungen einzuschränken. Sie werden unterschieden in Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, die in Funktionen der Form $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ definiert werden:

$$\text{Gleichheitsnebenbedingung: } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\text{Ungleichheitsnebenbedingung: } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Ein restringiertes Optimierungsproblem, bei dem die Optimierungsparameter einer Wertebeschränkung unterliegen und in den Grenzen \mathbf{x}^u und \mathbf{x}^o variiert werden können, wird wie folgt formuliert:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \text{ mit } X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^u \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^o, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \quad (2.4)$$

Die Gleichheitsnebenbedingungen wurden hier der Vollständigkeit halber erwähnt, spielen in der Praxis jedoch oft keine Rolle. Ebenso werden in der Literatur fast nur Minimierungsprobleme behandelt, obwohl oft auch die Maximierung einer Größe gewünscht ist. Dieses Vorgehen liegt darin begründet, dass jedes Maximierungsproblem durch die Multiplikation

mit (-1) in ein Minimierungsproblem überführt werden kann.

Die Klassifikation kontinuierlicher Optimierungsprobleme ist ein wichtiger Aspekt mathematischer Optimierungsprobleme, die an dieser Stelle nur benannt, aber nicht näher erläutert werden. In der Regel geschieht dies nach der Art der Restriktion, wodurch sich vier Varianten ergeben:

- keine Restriktion
- ausschließlich Gleichheitsrestriktionen
- ausschließlich Ungleichheitsrestriktionen
- Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen

In technischen Problemstellungen sind fast nur restringierte Probleme von Bedeutung. Daher werden diese Optimierungen weiter kategorisiert in:

- Linear: $f, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ sind linear
- Quadratisch: f ist quadratisch, \mathbf{g}, \mathbf{h} sind linear
- Mit Wertebeschr.: f ist beliebig nichtlinear, \mathbf{x} liegt in Grenzen
- Linear restringiert: f ist beliebig nichtlinear, \mathbf{g}, \mathbf{h} sind linear
- Konvex: f ist konvex, \mathbf{g} sind linear, \mathbf{h} sind konvex
- Nichtlinear: $f, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ sind beliebig nichtlinear [106, S. 9]

Die Klassifikation des Problems ist wichtig, da für jede Variante spezielle Verfahren existieren, die das jeweilige Problem besonders effizient lösen. Auch die Frage, wie geprüft werden kann, ob ein Optimum erreicht wurde, ist abhängig von der Art des Optimierungsproblems. Verschiedene Optimalitätsbedingungen werden u. a. bei Jarre und Stoer [92] erläutert.

Zwei wichtige Aspekte sind außerdem die Konvexität und der Unterschied von lokalen und globalen Minima. Allgemein besitzen Funktionen mehrere lokale Minima, von denen nur ein einziges das globale Minimum ist. Dies gilt insbesondere für hochgradig nichtlineare Funktionen. Viele Optimierungsalgorithmen können jedoch nur das nächstliegende lokale Minimum erreichen. Soll mit einem solchen Algorithmus das globale

Minimum gefunden werden, muss sichergestellt werden, dass nur ein einzelnes Minimum existiert – lokales und globales Minimum sind identisch. Dies ist dann der Fall, wenn die Funktion und die Restriktionen konvex sind. Abbildung 2.1 zeigt die Unterschiede von konvexen und nicht konvexen, nicht restringierten, eindimensionalen Funktionen und den Sonderfall einer nicht konvexen Funktion, die dennoch nur ein Minimum besitzt. Die Konvexitätsbedingung ist zu streng, da zwar alle konvexen Funktionen nur ein Minimum aufweisen, jedoch nicht konvexe Funktionen nicht zwingend mehrere Minima haben müssen. Abbildung 2.2 zeigt eine zweidimensionale Funktion mit Restriktionen, die einmal zu einer konvexen und einmal zu einer nicht konvexen Menge führen.

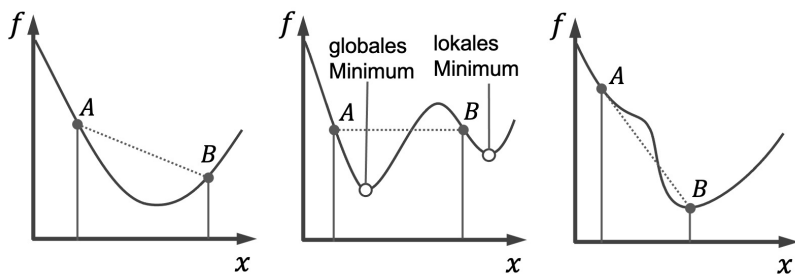


Abbildung 2.1: Vergleich von eindimensionalen, nicht restringierten Funktionen: konvex (links), nicht konvex (Mitte) und nicht konvex mit einem Minimum (rechts), in Anlehnung an [185, S. 49]

Zur Veranschaulichung lässt sich die Konvexität einer Funktion auch bildlich erklären. Eine Funktion oder die Restriktionen sind dann konvex, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte die Funktion oder den Restriktionsrand nicht schneidet. Nähere Erläuterungen zur mathematischen Formulierung finden sich u. a. in Jarre und Stoer [92] und Schumacher [185]. In der Praxis ist es bei komplexen Optimierungsproblemen oft nicht möglich, die Konvexität zu prüfen. Im Allgemeinen muss davon ausgegangen werden, dass die Zielfunktionen und ihre Restriktio-

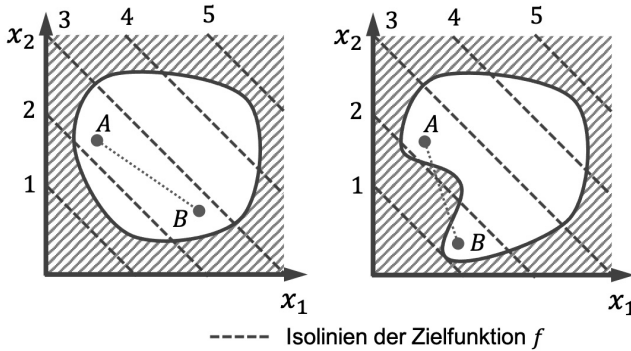


Abbildung 2.2: Vergleich von zweidimensionalen, restringierten Funktionen: konvexe Restriktion (links) und nicht konvexe Restriktion (rechts), in Anlehnung an [185, S. 49]

nen nicht konvex sind. Dennoch kann auch für solche Anwendungen ein Optimierungsalgorithmus eingesetzt werden, der nur lokale Minima findet. Dem Anwender muss lediglich bewusst sein, dass so wahrscheinlich nur eine gute, aber nicht die beste Lösung gefunden werden kann.

Die bereits erwähnten Restriktionen in Optimierungsproblemen können auf unterschiedliche Weisen berücksichtigt werden. Ein gängiger Ansatz ist die Verwendung von Straffunktionen (englisch: *Penalty-Function*), die als intern und extern definiert werden können. Ein Vorteil dieses Ansatzes ist es, dass die Methoden für nicht restringierte Optimierungsprobleme ebenfalls angewendet werden können, da nur die Zielfunktion modifiziert wird. Dies geschieht, indem ein Strafwert zu der Zielfunktion hinzuaddiert wird. Die modifizierte Zielfunktion ergibt sich folglich mit:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + rP(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Der Faktor r ist dabei vom Anwender zu wählen und beschreibt, wie stark der Strafwert um die Restriktion zunimmt. Ob eine Straffunktion $P(\mathbf{x})$ intern oder extern ist, hängt von ihrer Formulierung ab. Für interne

Straffunktionen gilt:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m_g} -\frac{1}{g_j(\mathbf{x})} \tag{2.6}$$

und für externe:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m_h} (h_k(\mathbf{x}))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max(g_j(\mathbf{x}), 0))^2. \tag{2.7}$$

Abbildung 2.3 veranschaulicht den Unterschied nochmals grafisch. Dabei fällt auf, dass sich das ergebende Minimum der modifizierten Zielfunktion \tilde{f} für interne Strafffunktionen leicht außerhalb des zulässigen Bereichs befindet und für externe leicht innerhalb. Ein Optimum exakt an der Grenze ergibt sich für interne nur für $r \rightarrow 0$ und für externe nur für $r \rightarrow \infty$, wobei in der Praxis jedoch beides zu numerischen Problemen führen und somit in der Regel eine geringe Abweichung akzeptiert wird.[185]

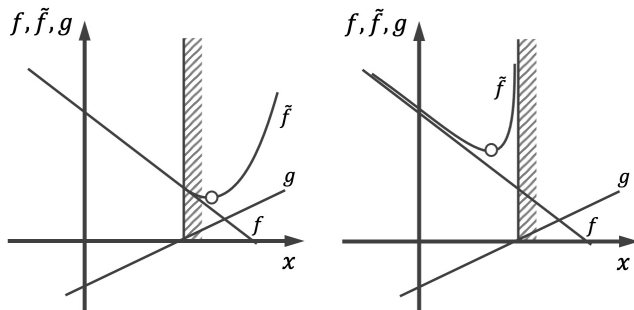


Abbildung 2.3: Vergleich von externen Restriktionen (links) und interne Restriktionen (rechts), in Anlehnung an [185, S. 66]

Neben den Straffunktionen existieren auch direkte Methoden wie die Methode der zulässigen Richtung (englisch: *Modified Method of Feasible Direction*, MMFD), die hier jedoch nicht erläutert werden, da sie für die späteren Optimierungsprobleme dieser Arbeit nicht relevant sind. Detailliertere Beschreibungen finden sich etwa bei Jarre und Stoer [92].

2.1.2 Grundlagen der Mehrzieloptimierung

Eine für diese Arbeit wichtige Variante der Optimierung ist die Mehrzieloptimierung, auch mehrkriterielle oder vektorielle Optimierung genannt. Die Formulierung des Optimierungsproblems ist dabei prinzipiell identisch zu (2.4), jedoch ist hier die Zielfunktion \mathbf{f} ein Vektor:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ mit } X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^u \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^o, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \quad (2.8)$$

Typisch für diese Optimierungsprobleme ist ein Zielkonflikt der einzelnen Zielfunktionen, sodass keine Lösung existiert, für die alle Zielfunktionen minimiert werden (vgl. Abbildung 2.4, links). Es gibt eine Vielzahl von *pareto*-optimalen Entwürfen, die grafisch dargestellt werden können, indem die Funktionswerte der einzelnen Zielfunktionen gegeneinander aufgetragen werden (vgl. Abbildung 2.4, rechts). Eine Lösung $\mathbf{x}^* \in X$ ist *pareto*-optimal, wenn kein Vektor $\mathbf{x} \in X$ existiert, der die Eigenschaften besitzt:

$$f_j(\mathbf{x}) \leq f_j(\mathbf{x}^*), \forall j \in \{1, \dots, m\} \text{ und} \quad (2.9)$$

$$f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*), \exists j \in \{1, \dots, m\} \quad (2.10)$$

Somit ist eine Lösung dann nicht *pareto*-optimal, wenn mindestens eine Zielfunktion gemindert werden kann, ohne dass die restlichen Zielfunktionen erhöht werden [185].

Durch eine Optimierung einen *Pareto*-optimalen Rand auszubilden, ist oft sehr aufwändig. Daher werden häufig Ersatzprobleme formuliert, die eine Kompromisslösung ermöglichen. Übliche Methoden hierzu sind u. a. die Zielgewichtung, die Formulierung einer Abstandsfunktion oder die Min-Max-Formulierung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde jedoch immer ein *pareto*-optimaler Rand angestrebt, sodass auf diese Methoden hier nicht näher eingegangen wird.

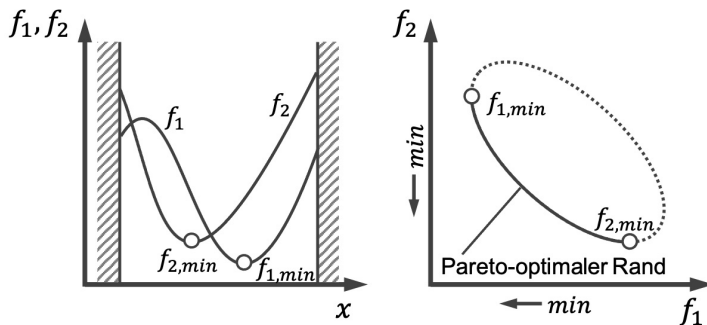


Abbildung 2.4: Optimale Lösung für Mehrzieloptimierungen, in Anlehnung an [185, S. 138 f.]

Eine wichtige und auch in dieser Arbeit verwendete Darstellung des *pareto*-optimalen Rands ist der sogenannte *Ant-Hill-Plot*. Dieser bietet sich besonders an, wenn viele Rechnungen durchgeführt wurden. Jeder Entwurf wird dann durch einen Punkt dargestellt, die äußeren Punkte hin zum Optimierungsziel der Funktionen bilden den *pareto*-optimalen Rand (vgl. Abbildung 2.5).

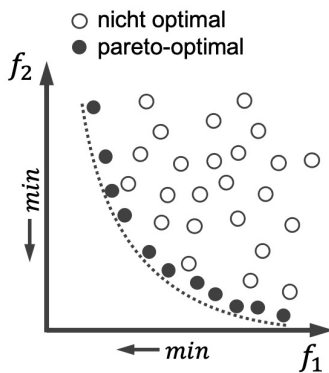


Abbildung 2.5: *Ant-Hill-Plot* und *pareto*-optimale Lösungen

2.1.3 Gradientenbasierte Algorithmen

Nachdem die unterschiedlichen Optimierungsprobleme und deren Formulierung beschrieben wurden, soll in den folgenden Abschnitten auf gängige Algorithmen zur Lösung eingegangen werden. Mithilfe verschiedener Strategien kann das Minimum einer unbekanntes Zielfunktion gesucht und idealerweise auch gefunden werden. Bildlich lässt sich die Aufgabe eines Optimierungsalgorithmus mit der Situation eines Wanderers vergleichen, dessen Aufgabe es ist, den tiefsten Punkt im Gebirge zu finden, ohne dass er einen uneingeschränkten Überblick hat oder eine Karte besitzt. Die einfachste Möglichkeit ist eine eindimensionale Optimierung, auch Liniensuche (englisch: *Line Search*) genannt. Hier wird im k -ten Iterationsschritt, ausgehend von einem Startpunkt \mathbf{x}^k , eine Suchrichtung \mathbf{p}^k festgelegt. Hinzu kommt eine Entwurfsvariable α_s , die die Schrittweite beschreibt, wie weit in die Suchrichtung gelaufen wird. Das Optimierungsproblem kann formuliert werden mit

$$\min_{\alpha_s} f(\mathbf{x}^k + \alpha_s \mathbf{p}^k) \quad (2.11)$$

Die beste Lösung ergibt sich dann für die optimale Schrittweite α_s^* , für die f minimal wird. Außerdem muss ein Abbruchkriterium formuliert werden, das beschreibt, wann die gegebene Lösung als Optimum akzeptiert wird. Um mit möglichst wenigen Versuchen das Optimum zu finden, haben sich im Wesentlichen zwei Ansätze durchgesetzt, die Methode des goldenen Schnitts und die Polynominterpolation.[185] Detaillierte Informationen hierzu finden sich u. a. bei Stein [194].

Für die Praxis relevanter sind jedoch mehrdimensionale Optimierungen, bei denen mehrere Blöcke der Teilschritte zur Bestimmung der Suchrichtung und eindimensionale Optimierungen durchlaufen werden. Hier wird in Verfahren 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung unterschieden, wobei die Verfahren 1-ter Ordnung die wichtigste Gruppe darstellt. Die

Suchrichtung \mathbf{p}^k wird in diesem Fall mithilfe der ersten Ableitungen, mit dem Gradienten der Funktion, gebildet. Daher werden diese Algorithmen auch als gradientenbasiert bezeichnet. Im Beispiel des Wanderers bedeutet dies, dass er seine unmittelbare Umgebung abtastet, um zu ermitteln, in welcher Richtung der Hang nach unten führt.

Die einfachste Umsetzung dieser Idee lautet *Methode des steilsten Abstiegs*. Die Suchrichtung wird ermittelt mit

$$\mathbf{p}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) = - \begin{pmatrix} \partial f(\mathbf{x}^k) / \partial x_1^k \\ \partial f(\mathbf{x}^k) / \partial x_2^k \\ \vdots \\ \partial f(\mathbf{x}^k) / \partial x_n^k \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Der nächste Entwurf ergibt sich dann mit

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_s^{*,k} \mathbf{p}^k \quad (2.13)$$

und am Ende der Liniensuche in der jeweiligen Richtung gilt

$$\mathbf{p}^k \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) = [-\nabla f(\mathbf{x}^k)] \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) = 0. \quad (2.14)$$

Dieser Ansatz führt dazu, dass zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen immer senkrecht zueinander stehen, was in vielen Fällen zu langwierigen Zick-Zack-Kursen führt (siehe Abbildung 2.6). Um diesen Nachteil auszugleichen, ergänzten Fletcher [69] im gleichnamigen Verfahren die Bildung der Suchrichtung mit

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{|\nabla f(\mathbf{x}^k)|^2}{|\nabla f(\mathbf{x}^{k-1})|^2} \cdot \mathbf{p}^k, \quad (2.15)$$

wodurch die Suchrichtung nach dem ersten Schritt immer korrigiert wird und bessere Ergebnisse erzielt werden können (siehe Abbildung 2.6).

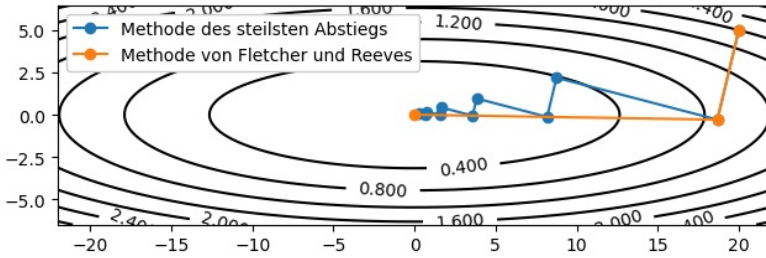


Abbildung 2.6: Methode des steilsten Abstiegs und Methode nach Fletcher und Reeves im Vergleich, in Anlehnung an [185, S. 64 f.]

Ein weiteres Verfahren, das ähnlich gute Ergebnisse wie die Methode von Fletcher liefert, ist das Quasi-Newton-Verfahren. Hier wird die Suchrichtung mithilfe einer approximierten Hesse-Matrix gebildet:

$$\mathbf{p}^k = -\mathbf{H}^k \nabla f(\mathbf{x}^k), \quad (2.16)$$

dabei ist

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{I} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^{k-1} + \alpha^{k-1} \frac{\mathbf{p}^{k-1} (\mathbf{p}^{k-1})^T}{(\mathbf{p}^{k-1})^T \mathbf{y}^{k-1}} - \frac{(\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{y}^{k-1}) (\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{y}^{k-1})^T}{(\mathbf{y}^{k-1})^T \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{y}^{k-1}} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y}^{k-1} = \nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla f(\mathbf{x}^{k-1}) \quad [185]. \quad (2.19)$$

Allgemein ist die Hesse-Matrix eine quadratische Matrix definiert durch

$$\mathbf{H} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad (2.20)$$

und stellt eine Analogie zur zweiten Ableitung dar. Im Kontext der Optimierung beschreibt sie in gewisser Weise die Vergangenheit und trägt die Informationen der zuvor durchlaufenen Schritte.

Anhand der ursprünglichen Analogie zum Wanderer im Gebirge wird klar, weshalb ein rein gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus nur das nächstliegende lokale Minimum finden kann. Der Wanderer läuft den Hang hinunter und erreicht den tiefsten Punkt des Tals, in dem er sich befindet. Es könnte jedoch ein noch tieferes Tal hinter einem anderen Berg geben, das der Wanderer allerdings nicht erreichen kann, da er in diesem Fall immer nur abwärts läuft. Möchte der Wanderer ein anderes, potentiell tieferes, Tal erreichen, müsste er eine andere Strategie anwenden. Diesem Umstand wird in dieser Arbeit Rechnung getragen, indem hauptsächlich andere Algorithmen, die stochastischen Optimierungsalgorithmen, zum Einsatz kommen.

2.1.4 Stochastische Algorithmen

Die zuvor beschriebenen mathematischen Verfahren sind sehr effizient darin, lokale Minima ausfindig zu machen. Stochastische Verfahren benötigen deutlich mehr Iterationen und somit Rechenzeit, können jedoch lokale Minima überspringen und so zu besseren Lösungen bei nicht konvexen Problemen gelangen. Restriktionen können jedoch nicht direkt berücksichtigt werden, weshalb die in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Straffunktionen nötig sind. Es existieren sehr viele Strategien und Abwandlungen von Strategien, die oft an Prozesse aus der Natur angelehnt sind. Drei wichtige grundsätzliche Ideen sind die *Monte-Carlo-Methode*, die *Evolutionalgorithmen* und das *Simulated Annealing*. Streng genommen stellen die stochastischen Algorithmen keine Optimierung im mathematischen Sinne dar. Es handelt sich vielmehr um systematische Suchstrategien. Allen Verfahren gemein ist eine Zufallskomponente, die immer wieder neue Entwürfe zufällig generiert. Dabei wird der Parameterraum, in dem neue Entwürfe entstehen, üblicherweise im Laufe der Optimierung zunehmend eingegrenzt. Abbildung 2.7 zeigt einen

typischen Verlauf für stochastische Optimierungen.

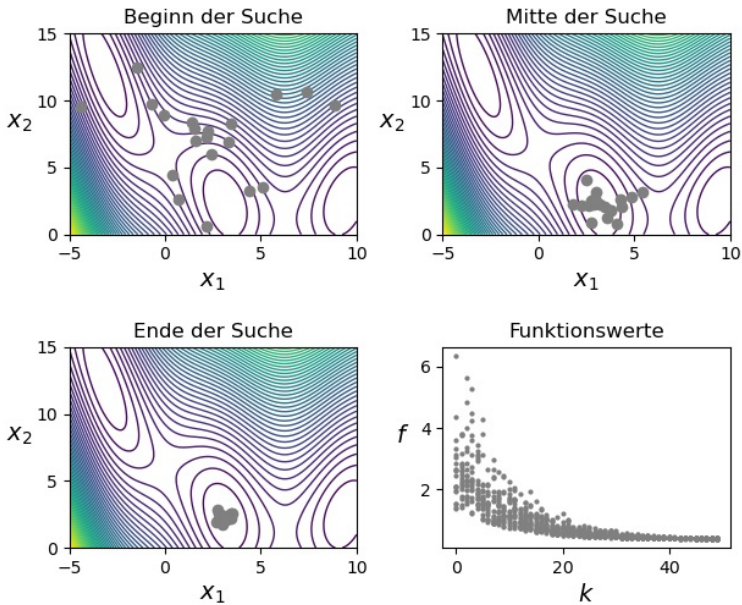


Abbildung 2.7: Typischer Verlauf von stochastischen Optimierungsverfahren

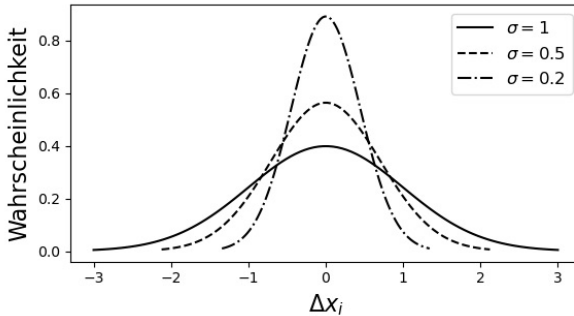
Bei der *Monte-Carlo-Methode* werden in der Umgebung des Startentwurfs zufällig L neue Entwurfsvektoren mit jeweils n Entwurfsvariablen generiert. Anschließend wird der beste Entwurf ausgewählt, in dessen Umgebung wieder zufällig L neue Entwürfe generiert werden. Dieser Prozess wiederholt sich fortlaufend. Hoffmann und Reuter [89] bewerten in ihrem VDI Bericht die Ergebnisse stochastischer Verfahren und empfehlen $L = 15$ Entwürfe pro Iteration. Welche Parameter geeignet sind, hängt jedoch stark vom individuellen Problemfall ab. Allgemein ist die *Monte-Carlo-Methode* sehr robust, jedoch sind viele Entwurfsevaluierungen nötig, bis ein Optimum gefunden wird.

Ein effizienterer Ansatz sind die *Evolutionsalgorithmen*, welche die Prozesse der biologischen Evolution nachbilden. Wie in der Natur entstehen neue Entwürfe durch Mutation und Rekombination bestehender Entwürfe, von denen die besten für weitere Mutation und Rekombination ausgewählt werden. Analog zur Biologie werden vorherige Entwürfe als Elterngeneration und neue als Nachkommen bezeichnet. Für die Rekombination werden einzelne Optimierungsparameter der besten Entwürfe miteinander verbunden. Die Zufallskomponente befindet sich bei diesem Verfahren in der Mutation. Ein neuer Entwurf ergibt sich somit aus den bisherigen Entwürfen und einer zufälligen Variation $\Delta \mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \Delta \mathbf{x} \quad (2.21)$$

Für die Zufallskomponente ist erwünscht, dass viele Entwürfe kleine Änderungen und wenige Entwürfe große Änderungen zeigen, weshalb für die Zufallsverteilung meist eine *Gaußsche* Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ gewählt wird. Der Erwartungswert ist dann immer $\mu = 0$, jedoch weichen die Entwürfe durch $\sigma > 0$ davon ab. Ein großes Sigma führt zu mehr Entwürfen mit größeren Mutationen (vgl. Abbildung 2.8), wodurch lokale Minima leichter überwunden werden können. Allerdings wird es schwieriger, ein Optimum exakt einzugrenzen. In der Regel wird σ im Laufe der Optimierung, abhängig von den Ergebnissen, variiert. So ist es möglich, zu Beginn lokale Minima zu überwinden und später das Minimum genau zu bestimmen. Weitere entscheidende Faktoren für die Optimierung sind die Gesamtanzahl der Generationen, die Anzahl der Eltern nach Selektion und die Anzahl der Nachkommen. Gute Richtwerte sind 0.5 bis 2-mal mehr Eltern und 4- bis 5-mal mehr Nachkommen als Entwurfsvariablen n . Eine Optimierung endet, wenn entweder seit einigen Generationen keine Verbesserung mehr erzielt werden konnte oder die maximale Anzahl an Generationen erreicht wurde.

Beim *Simulated Annealing* wird der Erstarrungsprozess von Schmelzen

Abbildung 2.8: Verteilung von $\Delta \mathbf{x}_i$ für verschiedene σ -Level

nachgeahmt. Hierzu wird eine anfängliche Schmelztemperatur T im Laufe der Optimierung sukzessive reduziert. Zunächst werden jedoch auch hier, ausgehend von einer Menge an Startentwürfen, neue Entwürfe zufällig generiert, die besser oder schlechter ausfallen können als die vorangegangenen. Es gilt somit:

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1}) \leq 0 \quad \text{oder} \quad (2.22)$$

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1}) > 0. \quad (2.23)$$

Außerdem wird eine Wahrscheinlichkeit zur Verbesserung P_v mit

$$P_v (f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})) = \exp\left(\frac{f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})}{T}\right) \quad (2.24)$$

berechnet und mit einer zufälligen Zahl $\mathcal{Z}(0, 1)$ verglichen. Ist die Zufallszahl kleiner oder gleich P_v wird der Entwurf verwendet. Diese Vorgehensweise führt dazu, dass auch schlechtere Entwürfe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aktiv weiterverfolgt werden, wodurch sich lokale Minima überwinden lassen. Da T jedoch zunehmend kleiner wird, sinkt auch die Wahrscheinlichkeit, dass schlechtere Entwürfe akzeptiert werden, wie aus Abbildung 2.9 hervorgeht. Die Suche konvergiert in einer Region.

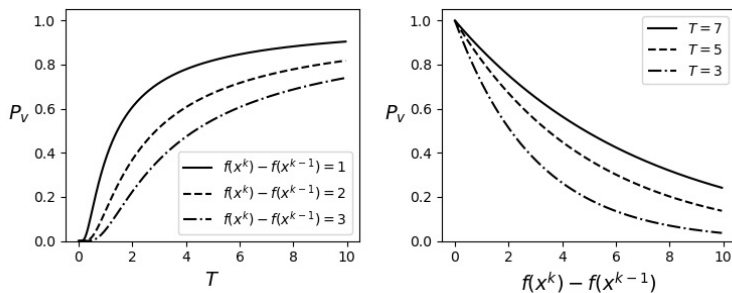


Abbildung 2.9: Verbesserungswahrscheinlichkeit P_v in Abhängigkeit der Temperatur T (links) und der Funktionswertdifferenz $f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})$ (rechts)

Neben der Gesamtanzahl der Auswertungen sind wichtige Parameter für die Suche die Anzahl der Start- und Folgeentwürfe, die Starttemperatur und die Abkühlrate. Interessanterweise kann gezeigt werden, dass für eine Abkühltemperatur unter

$$T^k = \frac{T^0}{\ln(k)} \tag{2.25}$$

das globale Optimum immer gefunden wird [185].

2.1.5 Weitere Verfahren

Die hier beschriebenen Verfahren und Ideen bilden nur einen Bruchteil der bestehenden Ansätze. Eine weitere wichtige Gruppe von Methoden sind die approximationsbasierten Optimierungsalgorithmen, zu denen u. a. der *Langrange-Ansatz*, die *Duale Lösungsmethode (CONLIN)* und die sequenzielle quadratische Programmierung (englisch: *sequential quadratic programming*, SQP) gehören. Sie kommen in dieser Arbeit jedoch nicht zur Anwendung. Eine weitere Gruppe sind Verfahren zur Lösung diskreter Optimierungsprobleme, bei denen die Entwurfsvariablen keine kontinuierlichen Größen sind. Hierfür existieren spezielle Verfahren, ob-

wohl die *Evolutionsalgorithmen*, das *Simulated Annealing* und auch die zuvor genannte *CONLIN*-Methode hierfür eingesetzt werden können. Idealerweise werden diskrete und kontinuierliche Forderungen in gleichem Maße berücksichtigt [109][177]. Weitere bekannte Ansätze sind die Ameisenalgorithmen (englisch: *Ant Colony Optimization*, ACO) und die Partikelschwarm-Optimierung (englisch: *Partical Swarm Optimization*, PSO).

Für reale und komplexe Probleme gibt es kein einzig optimales Verfahren. Prinzipiell sind stochastischen Algorithmen – mit Ausnahme der *Monte-Carlo-Methode* – gut geeignet, um globale Minima von nicht konvexen Problemen zu finden. Besonders effizient sind Verfahren, die unterschiedliche Ansätze kombinieren. In dieser Arbeit werden hauptsächlich der AMGA für Mehrzieloptimierungen und die CMA-ES für die Einzieloptimierung eingesetzt. Beide Verfahren weisen stochastische Elemente auf und haben sich als sehr effizient erwiesen. Nähere Informationen zu beiden Ansätzen finden sich in Tiwari u. a. [206] und Auger und Hansen [12] [185].

2.1.6 Vergleich und Auswahl

Die vorangegangenen Abschnitte haben dargelegt, dass die Wahl des Optimierungsalgorithmus abhängig von der Art des Problems, der Anzahl der Optimierungsparameter und den Zielen des Anwenders ist. In vielen Fällen werden jedoch mehrere Algorithmen in Frage kommen. In der Vergangenheit wurden viele Algorithmen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit untersucht und verglichen. Wichtige Aspekte und Vergleichskennzahlen eines solchen „*performance benchmarkings*“ beschreiben u. a. Beiranvand, Hare und Lucet [14].

Für Optimierungsprobleme mit nur einem Ziel ist zuvor auf den CMA-ES verwiesen worden. Um die Leistungsfähigkeit zu zeigen, wird dieser gegen eine klassische Evolutionäre Strategie (englisch: *evolutionary strategy*, ES) und eine Partikelschwarm-Optimierung (englisch: *Partical Swarm Optimization*, PSO) verglichen. Für den Vergleich werden die Testfunktionen Rosenbrock und Ackley genutzt, siehe Abbildung 2.10. Die Rosenbrock-Funktion ist gegeben durch:

$$f_{Rb}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} -2.048 \leq x_i \leq 2.048, \quad i = 1, \dots, n \\ f_{Rb}(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ bei } \mathbf{x}^* = (1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Ackley-Funktion durch:

$$f_{Ac}(\mathbf{x}) = -a \exp \left[-b \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right] - \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(cx) \right] + a + e \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} a = 20, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = 2\pi \\ -32.768 \leq x_i \leq 32.768, \quad i = 1, \dots, n \\ f_{Ac}(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ bei } \mathbf{x}^* = (0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Rosenbrock-Funktion ist durch einen sehr kleinen Gradienten hin zum Minimum charakterisiert, während die Ackley-Funktion besonders viele lokale Minima aufweist. Beides stellt eine Herausforderung für verschiedene Optimierungsstrategien dar. Beide Funktionen können zu höherdimensionalen Problemen generalisiert werden, sodass jede gewünschte Anzahl von Optimierungsparametern dargestellt werden kann. Exemplarisch wurden an dieser Stelle Optimierungen mit fünf und zehn Optimierungsparametern durchgeführt. Die Abbildung 2.11a und 2.11b

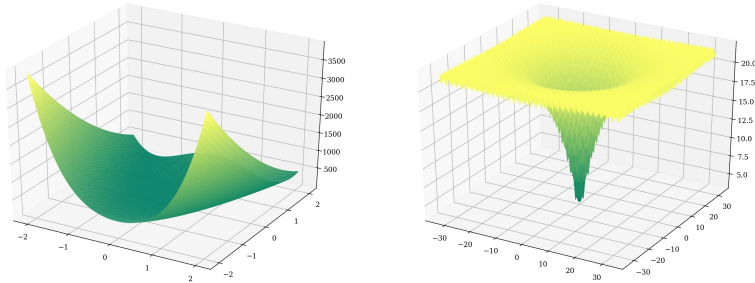


Abbildung 2.10: Testfunktionen Rosenbrock (links) und Ackley (rechts) mit jeweils zwei Optimierungsparametern

zeigen jeweils die Ergebnisse. Dargestellt ist der kleinste gefundene Funktionswert aufgetragen über die Anzahl der Funktionsauswertungen. In beiden Fällen und für beide Funktionen liefert der CMA-ES die besten Ergebnisse.

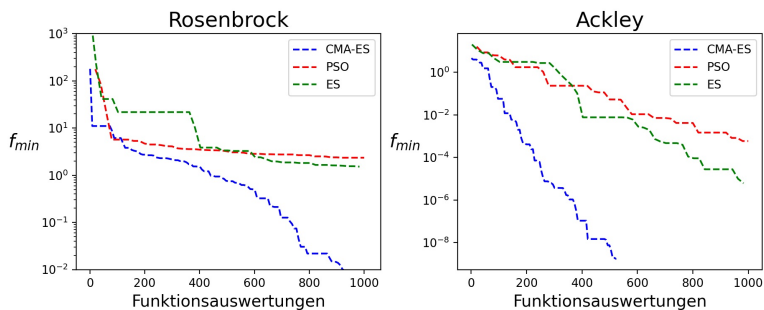
Für eine Mehrzieloptimierung ist zuvor auf den *Archive-based Micro Genetic Algorithm* verwiesen worden. Dieser hat sich für verschiedene reale Probleme als robuste und effiziente Wahl erwiesen. Auch akademische Untersuchungen in der Vergangenheit haben die hohe Leistungsfähigkeit des Algorithmus bestätigt. Beispiele hierfür sind Flassig, Dutta und Bestle [68] und Hinz [88]. Sie vergleichen den AMGA gegen die Optimierungsalgorithmen *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) und *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) anhand des Testproblems ZDT3 nach Deb u. a. [49]:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{mit } X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{18} \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\} \quad (2.30)$$

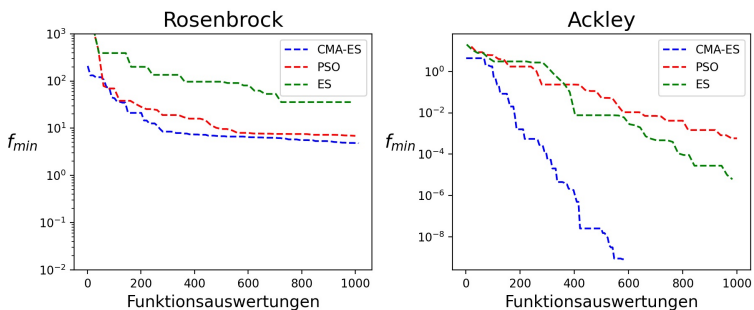
mit den Funktionen und Nebenbedingungen

$$f_1(\mathbf{x}) = p_1 \quad (2.31)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})v(f_1(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})) \quad (2.32)$$



(a) mit fünf Optimierungsparametern



(b) mit zehn Optimierungsparametern

Abbildung 2.11: Kleinste gefundene Funktionswerte der Testfunktionen

$$u(\mathbf{x}) = 1 + \frac{9}{29} \sum_{i=2}^{30} p_i \tag{2.33}$$

$$v(f_1(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(\mathbf{x})}{u(\mathbf{x})}} - \frac{f_1(\mathbf{x})}{u(\mathbf{x})} \sin(10\pi f_1(\mathbf{x})) \tag{2.34}$$

Die sich ergebende Pareto-Front \mathcal{F}^P ist stückweise stetig und erinnert an eine Treppe. Der Parameterraum selbst ist jedoch durchgehend stetig. Die unterbrochene Paretofront gestaltet die Suche besonders anspruchsvoll und charakterisiert das Testproblem.

Um die Lösungsmengen zu formalisieren und somit bewerten zu können,

setzen die Autoren auf drei Kriterien. Ein Kriterium ist das Abstandskriterium

$$d_i := \sqrt{(f_2^{i+1} - f_2^i)^2 + (f_1^{i+1} - f_1^i)^2}, \quad (f_1^i, f_2^i) \in \mathcal{F}^{\mathcal{P}}, \quad i = 1, \dots, l \quad (2.35)$$

wobei hierzu der dazugehörige Mittelwert und die Standardabweichung mittels

$$\mu_d := \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l d_i \quad \text{und} \quad \sigma_d := \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (d_i - \mu_d)^2} \quad (2.36)$$

bestimmt werden. Dabei ist $l = |\mathcal{F}^{\mathcal{P}}| - 1$ und $|\mathcal{F}^{\mathcal{P}}|$ die Anzahl der nicht dominierten Lösungen, oder mit anderen Worten die Anzahl der Punkte auf der Pareto-Front. Das zweite Kriterium ist die relative Breite der Pareto Front, gegeben durch

$$b(\mathcal{F}^{\mathcal{P}}) := \frac{\sqrt{(f_1^1 - f_1^l)^2 + (f_2^1 - f_2^l)^2}}{\sqrt{(f_1^L - f_1^R)^2 + (f_2^L - f_2^R)^2}}. \quad (2.37)$$

Liegen die Randpunkte der gefundenen Pareto-Front f_1^1, f_1^l in der Nähe der tatsächlichen individuellen Minima $\mathbf{f}^L, \mathbf{f}^R$ wird die Front von den Autoren als hinreichend breit eingeschätzt. Der Quotient ist dann nahe 1. Das dritte Kriterium ist die reduzierte Fläche unter der Treppenfunktion

$$T_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{l-1} (f_2^i - f_2^l) (f_1^{(i+1)} - f_1^i), \quad (2.38)$$

die von den Autoren als Konvergenzindikator herangezogen wird. Die Abbildung 2.12 zeigt die drei beschriebenen Kriterien nochmals anschaulich. Die Tabelle 2.1 zeigt die Ergebnisse der Autoren Flassig, Dutta und Bestle.

Die Ergebnisse zeigen, dass der AMGA und der NSGA-II sehr gute Ergebnisse liefern und den SPEA2 schlagen. Der AMGA kann sich bei

	SPEA	AMGA	NSGA-II
Archivgröße	100/200	100/200	–
Anzahl d. Gen.	60/126	100/200	60/126
Populationsgröße	20/50	–/–	20/50
Fkt.-auswertungen	–/–	1200/6300	–
initiale Pop.-größe	–/–	100/200	–
$\bar{\mu}_d$	0.0918/0.0396	0.0125/0.0019	0.0150/0.0020
$\bar{\sigma}_d$	0.0783/0.0413	0.0226/0.0086	0.0258/0.0086
\bar{T}_F/T_F^e	3.2394/1.5275	1.0047/1.0003	1.0381/1.0002
$\bar{b}(\mathcal{F}^P)$	1.1818/1.0259	0.9940/0.9981	0.9757/0.9986
			1.0000 ¹ /1.0000 ¹

Tabelle 2.1: Charakteristiken nicht-dominierter Lösungen der ZDT3 Testfunktion (¹modeFRONTIER 3.2 Implementierung, Ergebnisse nach Hinz [88]) [68, S. 4]

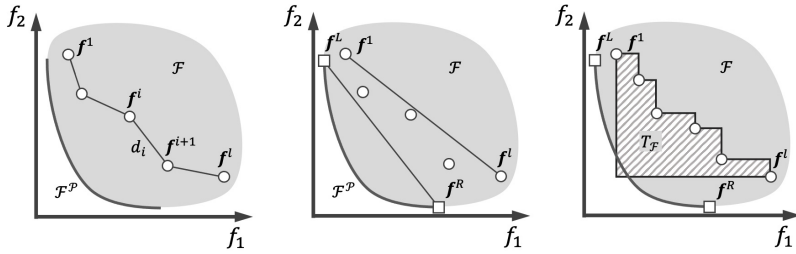


Abbildung 2.12: Abstandskriterium (links), relative Breite (mitte) und reduzierte Treppenfunktion (rechts), in Anlehnung an [68, S. 3]

geringerem Rechenaufwand jedoch vom NSGA-II absetzen. Er liefert mit weniger Funktionsauswertungen deutlich bessere Ergebnisse. Die Untersuchung von Flassig, Dutta und Bestle wurden nochmals nachgebildet und konnten in ihren Ergebnissen bestätigt werden. Die Abbildung 2.13 zeigt exemplarisch den Vergleich zwischen den Verfahren für einen einzelnen Optimierungslauf mit einer geringeren und einer höheren Anzahl an Auswertungen.

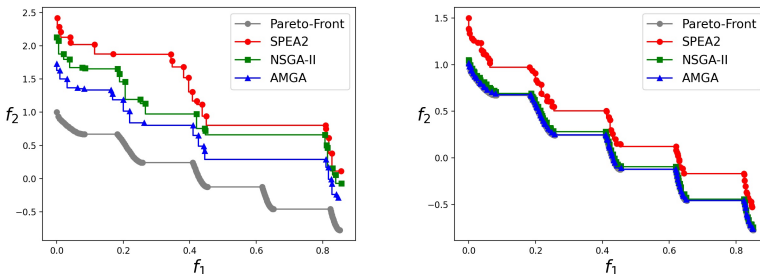


Abbildung 2.13: Exemplarischer Vergleich nicht-dominierter Lösungen der ZDT3-Funktion mit niedrigerem Rechenaufwand (links) und höherem Rechenaufwand (rechts)

2.2 Strukturoptimierung auf Basis Finiter-Elemente-Netze

Allen Methoden zur Strukturoptimierung auf Basis Finiter-Elemente-Netze gemein ist die Idee, dass der Entwurf durch die einzelnen finiten Elemente variiert wird. Dies kann durch die Form der einzelnen Elemente geschehen oder durch deren Eigenschaften.

2.2.1 Dimensionierung

Die Dimensionierung oder Parameteroptimierung ist die älteste Disziplin der Strukturoptimierung [106]. Die Bezeichnung als Parameteroptimierung ist jedoch missverständlich, da in der Optimierung auf Basis von CAD-Geometrien auch Parameter optimiert werden, wobei dies nicht gemeint ist. In der Regel wird darunter verstanden, dass die Eigenschaften der einzelnen finiten Elemente verändert werden, die durch Parameter beschrieben werden können. Im einfachsten Fall sind dies Querschnitte von Stab- oder Balkenelementen, aber auch die Faserrichtung und Lagenstärken von Faser-Verbundmaterialien sind möglich (vgl. Abbildung 2.14). Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, dass nur die Elementeeigenschaften verändert werden. Weder werden die Abmessungen der Elemente geändert noch wird eine Neuvernetzung durchgeführt. Dadurch ist die Methode sehr robust, jedoch bietet sie auch nur eine geringe Entwurfsfreiheit.

2.2.2 Gestaltoptimierung

Die Idee der Gestaltoptimierung besteht darin, die äußere Kontur eines Bauteils so zu verändern, dass sich der Entwurf hinsichtlich der gewählten Zielfunktion verbessert (vgl. Abbildung 2.15). Sie wird auch

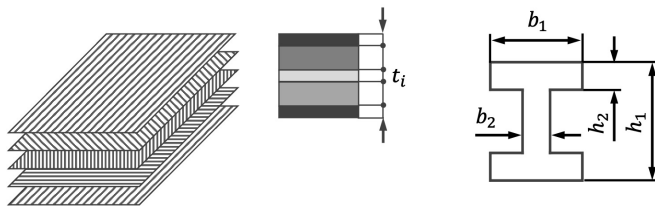


Abbildung 2.14: Schichtdicken und Faserorientierung (links) und Querschnittsabmessungen eines Balkens (rechts), in Anlehnung an [106, S. 36]

oft Formoptimierung (englisch: *Shape Optimization*) genannt. Hierfür existieren im Prinzip zwei wesentliche Ansätze: die parameterbasierte und die parameterfreie Gestaltoptimierung [138]. Beim parameterbasierten Ansatz wird die Form anhand von Entwurfsvariablen verändert, während beim parameterfreien Ansatz die Form unmittelbar durch die Koordinaten der Knotenpunkte variiert wird.

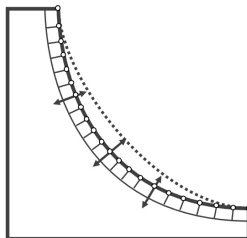


Abbildung 2.15: Exemplarische Gestaltoptimierung einer Kerbe

Bei der parameterbasierten Gestaltoptimierung können die Optimierungsgrößen auch Geometrieparameter eines CAD-Modells sein, wodurch der in Kapitel 3 beschriebene Ansatz entsteht. Typischerweise werden jedoch sogenannte *Basisformen* verwendet und der jeweilige Entwurf wird erzeugt aus einer gewichteten Überlagerung mittels

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^0). \quad (2.39)$$

Das unverformte Ausgangsdesign wird mit \mathbf{x}^0 bezeichnet, in \mathbf{x}_i sind die Knotenkoordinaten der verformten Basisentwürfe enthalten und die Wichtungsfaktoren p_i sind die Optimierungsparameter. Die Netze der Basisformen können durch fiktiv aufgebrachte Lasten oder *Morphing-Tools* erzeugt und gespeichert werden. Ein Vorteil des parameterbasierten Ansatzes ist die geringe Anzahl an Optimierungsparametern. Nachteile sind die zeitaufwändige Erstellung und der Umstand, dass das Ergebnis stark abhängig vom aufgesetzten Modell ist. Die Vor- und Nachteile gelten sowohl für den Basisformen- als auch für den CAD-Geometrie basierten Ansatz.

Da bei der parameterfreien Gestaltoptimierung alle Knoten auf der Oberfläche variiert werden, ist dieser Ansatz deutlich freier in seiner Entwurfsfindung, womit ein Nachteil des parameterbasierten Ansatzes umgangen werden kann. Mit der *mathematischen Optimierung* und der Optimierung durch *Optimalitätskriterien* werden auch hier zwei Ansätze unterschieden. Bei der mathematischen Optimierung werden die Knotenkoordinaten iterativ mit den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren verbessert. Da jeder Knoten mindestens in einer Richtung, typischerweise normal zur Bauteiloberfläche, bewegt werden kann, entsteht eine große Anzahl an Optimierungsparametern, die mit vielen Algorithmen nicht mehr handhabbar sind. Jedoch wurden sehr effiziente Verfahren entwickelt, die dies leisten können. Da die Knoten alle individuell variiert werden können, kann es leicht zu starken Verzerrungen kommen, welche wiederum zu numerischen Schwierigkeiten führen und eine Glättung erforderlich machen.

Die Optimalitätskriterienverfahren wurden durch Mattheck[133][134][135][136] populär und basieren auf dem Gedanken, dass die Eigenschaften einer optimalen Form oft – zumindest in den Grundzügen – bekannt sind. Eine der gängigsten Überlegungen ist es, einen ausgeglichenen Spannungszustand der von Mises-Spannung zu erzielen. Dazu werden Bereiche mit

hoher Spannung aufgedickt und Bereiche mit niedriger Spannung verkleinert. Dies kann beispielsweise durch eine fiktive Temperaturverteilung auf der Oberfläche analog zur von Mises-Spannung geschehen. Somit vergrößern sich „heißere“ und verkleinern sich „kältere“ Bereiche. Eine Alternative ist es, den leeren Raum außerhalb der Oberfläche fein zu vernetzen und sukzessiv Elemente in Bereichen niedriger Spannung zu entfernen [218]. Das Verfahren in Kapitel 2.2.3 basiert im Prinzip auf den gleichen Gedanken [106].

Abschließend bleibt zu erwähnen, dass die Änderungen in der Praxis eher gering sind, obwohl die parameterfreie Gestaltoptimierung im Grunde eine hohe Entwurfsfreiheit bietet. Ein gegebenes Netz kann an der Oberfläche eben nur eingeschränkt verformt werden, auch wenn darunterliegende Ebenen mit verformt werden. Gänzlich neue Entwürfe oder Konzepte können in der Regel so nicht gefunden werden.

2.2.3 Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung ist ein sehr bedeutendes Verfahren, da es die optimale Materialverteilung im gesamten Entwurfsraum sucht und somit zu neuen Entwürfen und Konzepten führen kann. Hierzu werden der gesamte Entwurfsraum und Bereiche darüber hinaus, auf denen Randbedingungen aufgebracht werden, mit finiten Elementen diskretisiert. Anschließend werden iterativ Elemente entfernt, um die Struktur hinsichtlich der Zielfunktion zu optimieren. Die verschiedenen Ansätze zur Topologieoptimierung unterscheiden sich in der Art und Weise, wie Elemente entfernt werden und wie entschieden wird, welche Elemente zu entfernen sind. Dabei spielt die Art der Elemente prinzipiell keine Rolle. Stab-, Balken- oder Schalenelemente sind möglich, jedoch werden meist Volumenelemente eingesetzt. In der Regel resultieren aus der Topologieoptimierung fachwerkartige Strukturen, wie in Abbildung 2.16

dargestellt.

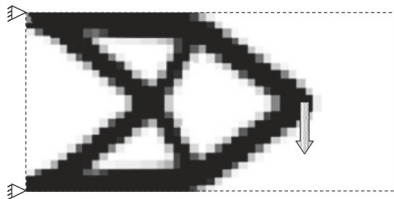


Abbildung 2.16: Exemplarische zweidimensionale Topologieoptimierung [185, S. 222]

Wie zuvor bei der Gestaltoptimierung lassen sich die Ansätze der Topologieoptimierung in *sensitivitätsbasierte* und *sensitivitätsfreie* Verfahren unterscheiden.¹ Gängige Ansätze die mit sensitivitätsbasierten Verfahren realisiert werden, sind die SIMP-Methode und die *Homogenisierungsmethoden*. Wie bei jeder Optimierung bedarf es Optimierungsgrößen die vom Algorithmus variiert werden sollen. Bei der SIMP-Methode handelt es sich um einen dimensionslosen Dichtefaktor ρ , der für jedes Element zu wählen ist. Der Elastizitätstensor ergibt sich dann aus dem ursprünglichen Elastizitätstensor \mathbf{E}^0 , ρ und einem Strafexponenten p mit

$$\mathbf{E} = \rho^p \mathbf{E}^0 \quad (2.40)$$

Da die Optimierungsgröße ρ eine kontinuierliche Größe zwischen 0 und 1 ist, können Zwischendichten entstehen, die jedoch in der Realität nicht nachgebildet werden können. Daher wird typischerweise der Strafexponent im Laufe der Optimierung erhöht, um Zwischendichten zu vermeiden und eine klare 0-1-Verteilung zu erzielen. Die *Homogenisierungsmethode* umgeht dieses Problem, indem sie parametrisierte Mikrostrukturen auf Elementebene einsetzt, die einen Teil jedes Elements mit Material füllen und einen Teil frei lassen. Diese Ansätze werden als *Optimal Microstructures Penalization* (OMP)-Methoden bezeichnet. Abbildung 2.17 zeigt ein

¹In der Literatur werden auch die Begriffe *parameterbasiert* und *parameterfrei* verwendet.

mögliches Beispiel. Eine weitere Schwierigkeit besteht in der sehr großen Anzahl an Optimierungsparametern. Ein Algorithmus, der diese handhaben kann, ist der *Method of Moving Asymptotes* (MMA)-Algorithmus, der von Svanberg [198] näher beschrieben wird. Der Nachteil aller sensitivitätsbasierten Verfahren ist jedoch, dass das Auffinden globaler Minima bei nicht konvexen Problemen nicht garantiert werden kann, und zwar aus den in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Gründen.

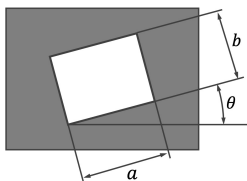


Abbildung 2.17: Exemplarische Mikrostruktur für Homogenisierungsverfahren, in Anlehnung an [106, S. 47]

Die Optimalitätskriterienverfahren basieren auch bei der Topologieoptimierung auf Vorstellungen über eine optimale Struktur, wie beispielsweise der *Fully Stressed Design*-Überlegung. Es werden keine Ableitungen berechnet und somit können auch nicht konvexe, nicht lineare Probleme gelöst werden. Die Bedeutung eines Elements wird anhand des Spannungszustandes oder einer vergleichbaren Größe wie der Verzerungsenergiedichte bestimmt. Elemente mit geringer Spannung werden, je nach Verfahren, gelöscht. Ein Vorteil hierbei ist, dass die Rechenzeit nach jeder Iteration sinkt. Außerdem lässt sich dieser Ansatz leicht in bestehende FE-Programme integrieren. Ein Hauptkritikpunkt ist jedoch, dass die Optimalitätskriterienverfahren zu nicht optimalen Ergebnissen führen können. Für diese Arbeit entscheidender ist jedoch das Problem, dass die Verfahren im Wesentlichen auf die Maximierung der Steifigkeit bei vorgegebenem Volumen beschränkt sind [207]. Die Formulierung von Optimalitätskriterien für andere Anforderungen, zum Beispiel (z. B.) für flexible Strukturen, gestaltet sich oft schwierig [106].

2.2.4 Topografie- und Free-Size-Optimierung

Die Topografieoptimierung, auch Sickenoptimierung genannt, wird für dünnwandige, meist blechartige, Strukturen eingesetzt, um diese mithilfe von Sicken zu versteifen. Die Sicken werden durch das Anheben bestimmter Knoten des Netzes erzeugt (vgl. Abbildung 2.18, links). Auch hier besteht die Möglichkeit, mathematische Optimierungsalgorithmen oder Optimalitätskriterienverfahren zu nutzen. Bei den parameterbasierten Verfahren wird die Knotenverschiebung über Parameter wie Sickenhöhe, Sickenbreite, Sickenanstiegswinkel und Versickungsgrad direkt gesteuert (vgl. Abbildung 2.18, rechts). Die Optimalitätskriterienverfahren nutzen hingegen die Trajektorien der maximalen Biegespannungen [207]. Auch bei der Topografieoptimierung sind die möglichen Zielfunktionen bei den Optimalitätskriterienverfahren stark eingeschränkt und beschränken sich im Grunde auf die Maximierung der Steifigkeit bzw. der Eigenfrequenz. Wird ein mathematischer Optimierungsalgorithmus verwendet, können einfacher weitere Nebenbedingungen berücksichtigt werden, wie beispielsweise die Beulsicherheit, die bei dünnwandigen Strukturen oft eine Rolle spielt.

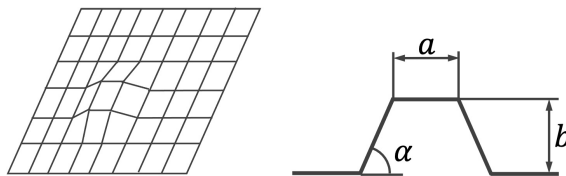


Abbildung 2.18: Beispiel für eine Topografieoptimierung (links) und die Parametrisierung einer Sicke (rechts)

Die *Free-Size*-Optimierung behandelt ebenfalls dünnwandige Strukturen mit Schalenelementen. Hier sind jedoch die Schalendicken der Elemente die Optimierungsgrößen. Sie steht in gewisser Weise in Konkurrenz zur Topologieoptimierung. Abhängig von Problem und Bauraum variiert die Eignung der Ansätze.

2.3 Sonderfälle der Strukturoptimierung

Die typische Aufgabenstellung in der Strukturoptimierung ist die Suche nach einer Struktur, die bei geringer Masse möglichst steif sein soll. Es existieren jedoch einige Sonderfälle. Aus den in Abschnitt 1.2 beschriebenen Gründen werden für Anbindungsstrukturen in Planetengetrieben für Flugtriebwerke häufig „weiche“ oder flexible Strukturen gesucht. Ein weiterer Sonderfall ist die Optimierung von mehreren Komponenten im Verbund.

2.3.1 Flexible Bauteile

Der Begriff „flexible Struktur“ ist zunächst etwas missverständlich, da jede Struktur in dem Sinne flexibel ist, dass sie sich unter einer Last verformt. An dieser Stelle ist jedoch gemeint, dass die Steifigkeit in mindestens einer spezifischen Richtung deutlich kleiner ausfällt als in den anderen Richtungen, sodass z. B. $K_{11} \ll K_{22}$. Ein Beispiel zeigt Abbildung 2.19, wo das gezeigte Blech in x -Richtung deutlich flexibler ist als in y -Richtung.

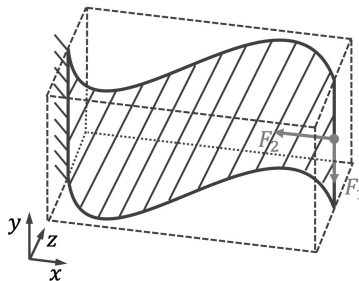


Abbildung 2.19: Beispiel einer „weichen“ oder flexiblen Struktur

Die Schwierigkeit im Auffinden solcher Strukturen liegt darin, dass die

Lösungen oft stark vom Ausgangsentwurf abweichen und die Probleme allgemein nicht konvex sind. Auch die Formulierung eines Optimalitätskriteriums ist nicht allgemeingültig möglich und gestaltet sich schwierig. Die Schwierigkeiten und mögliche Lösungen wurden in Abschnitt 1.4 bereits beschrieben. Ein Kernaspekt dieser Arbeit ist es daher, mit den in Kapitel 3 erläuterten Ansätzen die Anzahl der Optimierungsparameter zu reduzieren, um mithilfe entsprechender Algorithmen Lösungen für solche nicht konvexen Probleme zu finden.

2.3.2 Mehrere Komponenten

Einen weiteren Sonderfall stellt die strukturmechanische Optimierung von mehreren Komponenten im Verbund dar. Diese Art von Optimierungsproblem tritt dann auf, wenn nicht nur ein einzelnes Bauteil, sondern ein größeres System optimiert werden soll. Zwar lässt sich jede Komponente einzeln optimieren, während die umliegenden Bauteile und ihre Eigenschaften als konstant angenommen werden. Meist können jedoch bessere Ergebnisse erzielt werden, wenn eine gesamtheitliche Optimierung durchgeführt wird. Hierdurch entstehen im Wesentlichen zwei Besonderheiten. Zum einen ändern sich die Randbedingungen während der Optimierung, da gewisse Kräfte, die in eine Komponente eingeleitet werden, vom Entwurf einer anderen Komponente abhängen. Noch entscheidender ist jedoch, dass auch der zur Verfügung stehende Bauraum variiert, und zwar abhängig davon, wieviel Bauraum der Entwurf einer benachbarten Komponente einnimmt (vgl. Abbildung 2.20). Verfahren, welche die Dichten initial definierter Elemente variieren, bieten keine Möglichkeiten zur Berücksichtigung von variablen Bauräumen. Jedoch lassen sich beide Umstände mit den in Kapitel 3 beschriebenen Methoden adäquat berücksichtigen und sind Teil der Fallstudien in Kapitel 5 dieser Arbeit.

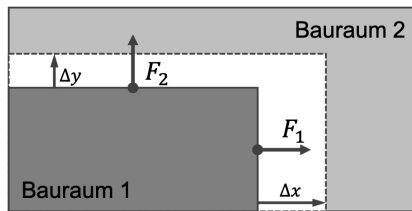


Abbildung 2.20: Einflüsse des Bauraums und der Lasten auf umliegende Komponenten

3 CAD und simulationsgetriebene Strukturoptimierung

Im Entwicklungsprozess werden physische Prototypen und Tests seit geraumer Zeit zunehmend durch virtuelle Prototypen (englisch: *Digital Mockups*, DMUs) und Simulationen ersetzt. Die CAE-Werkzeuge, die hierzu zum Einsatz kommen, werden stetig weiterentwickelt und bieten in Kombination mit immer größerer Rechenleistung mehr und mehr Möglichkeiten. Gesamte Fahrzeuge, Flugzeuge, Triebwerke, etc. werden digital aufgebaut und getestet. Die Simulationen umfassen verschiedene Disziplinen, mit deren Hilfe stetig Änderungen und Verbesserungen an Produkten und Systemen vorgenommen. Heute kommen dazu in allen gängigen CAD-Anwendungen parametrische Modelle zum Einsatz [30][32][60][208]. Die Modelle erlauben es, schnell und einfach Änderungen am Entwurf vorzunehmen, indem einzelne Parameter variiert werden. Zunehmend werden auch gesamte Modelle aus Vorlagen (englisch: *Templates*) teilautomatisiert aufgebaut [77][120][187]. Um das Vorgehen weiter zu verschlanken, wird weitestgehend das *Master Model Concept* angewandt [19][112][158][174]. Idealerweise kommt nur ein einzelnes *Master Model* mit hohem Detailgrad zum Einsatz, wovon alle weiteren Modelle und die entsprechenden FE-Netze abgeleitet werden, die vereinfacht und für Simulationen aus unterschiedlichen Disziplinen vorgesehen sind. Nötige Änderungen, die sich aus den Simulationsergebnissen ergeben, müssen somit nur in einem einzelnen Modell durchgeführt werden. Die Auswirkungen der Änderungen können dann schnell in allen abgeleiteten Simulationsmodellen überprüft werden. Dieser Ansatz ist entscheidend,

um eine effiziente multidisziplinäre Analyse zu ermöglichen und unterschiedliche Prozesse, Methoden und Werkzeuge aus unterschiedlichen Fachbereichen oder Abteilungen zu vermeiden. Somit können sich die CAD- und simulationsgetriebenen Strukturoptimierungen von vielen FE-basierten Ansätzen abheben.

Das manuelle Auswerten der Simulationsergebnisse und Ableiten der nötigen Änderungen im Entwurf ist im Prinzip bereits ein Optimierungsprozess. Dieser ist jedoch zeitaufwändig, ineffizient und stellt nicht sicher, auch nur in die Nähe eines Minimums zu gelangen. Wie viele Iterationsschritte nötig sind, hängt von mehreren Faktoren ab, wie:

- Erfahrung und Wissen des Anwenders
- Ausgangsentwurf (z. B. durch etablierte Konzepte für ähnliche Lastfälle und Anforderungen)
- Grad der Automatisierung der Teilschritte (Modelländerung, Strukturanalyse, Modalanalyse, etc.)

Daher kommt es in der Praxis in vielen Fällen nur zu sehr inkrementellen Änderungen und nur selten zu völlig neuen Entwürfen. Der nächste logische Schritt ist daher, die Prozesskette zu automatisieren und an einen geeigneten Optimierungsalgorithmus zu koppeln, um das vorhandene Potential besser auszuschöpfen.

Die geometriebasierte Strukturoptimierung unterscheidet sich von der FE-basierten in der Art und Weise, wie Änderungen an der zu optimierenden Komponente vorgenommen werden. Während bei den FE-basierten Verfahren in der Regel die Eigenschaften der finiten Elemente (Dimensionierung und Free-Size-Optimierung), die Position der Knoten (Gestalt- und Topografieoptimierung) oder die Dichte der Elemente (Topologieoptimierung) variiert werden, müssen hier alle Änderungen über

CAD-Parameter vorgenommen werden. Eine optimierungsgerechte Parametrisierung der Geometrie ist daher entscheidend für die Ergebnisse. Die geometriebasierte Optimierung ersetzt die FE-basierten Verfahren jedoch nicht. Jeder Ansatz bietet Vor- und Nachteile und kann dementsprechend zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Entwicklungsprozess bestmöglich zum Einsatz kommen. Abbildung 3.1 zeigt eine qualitative Einordnung der Verfahren. Die Topologieoptimierung ist am besten geeignet, um gänzlich neue Strukturen zu finden, liefert jedoch nur sehr grobe Umrisse und kaum Details. Von der Topografieoptimierung hin zur Gestaltop Optimierung verschiebt sich dieses Verhältnis. Wieviel Designfreiheit zur Strukturbildung und wieviel Detailgrad ein geometriebasierter Ansatz abbilden kann, hängt maßgeblich von der gewählten Parametrisierung ab. In jedem Fall bietet sie jedoch den Vorteil, dass die Ergebnisse *ready-to-use* sind, keine weitere Überführung oder Interpretation nötig ist und im Prinzip direkt eine Zeichnung abgeleitet werden kann. Daher eignet sich der Ansatz eher für bereits fortgeschrittene Entwicklungsstadien, in denen ein Grundkonzept bereits etabliert ist, wie in Kapitel 1.3 ausgeführt wurde.

Ein geometriebasierter Ansatz birgt jedoch auch Herausforderungen. Im Hinblick auf das *Master Model Concept*, dem Ausgangspunkt der Optimierung, sind die wichtigsten:

- die zeitliche Verfügbarkeit aller CAD-Daten und das Einfrieren der Anforderungen
- die Aktualität der verwendeten CAD-Modelle, während parallel weiterentwickelt wird
- ein ausreichender Detailgrad
- der Aufwand, für jede Disziplin ein Simulationsmodell mit entsprechender Netzqualität abzuleiten

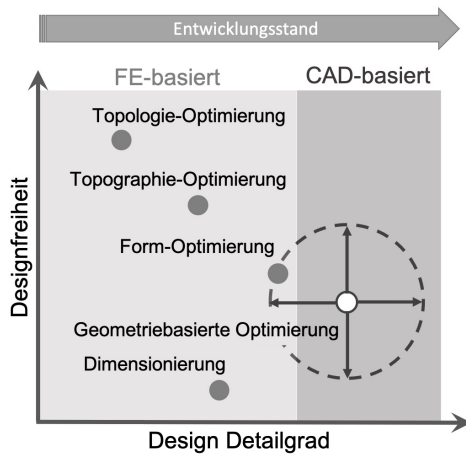


Abbildung 3.1: Einordnung von FE- und CAD-basierten Optimierungsstrategien im Entwicklungsprozess

- und sicherzustellen, dass alle Simulationsmodelle update-stabil sind und für eine Vielzahl von Geometrievariationen gelöst werden können. Ein Augenmerk liegt hier auf der automatisierten Vernetzung (englisch: *batch meshing*) [213].

Hinzu kommen die bereits erwähnten Anforderungen an die Parametrisierung und die Automatisierung des Simulationsprozesses. Daher werden diese beiden Punkte in den folgenden Abschnitten näher erläutert.

3.1 Optimierungsgerechte CAD-Parametrisierung

Was eine geeignete Parametrisierung ist, hängt stark von den Zielen des Anwenders ab. Eine gute Parametrisierung für einen Konstruktionsentwurf kann für eine Optimierung ungeeignet sein und umgekehrt. In diesem Abschnitt liegt der Fokus auf Parametrisierungsstrategien,

die sich als Grundlage für eine CAD-Geometrie getriebene Optimierung eignen. Das Ziel ist es, die Grundsätze geeigneter Parametrisierungen zu zeigen, die Optimierungen ermöglichen, die den zuvor genannten FE-basierten Ansätzen ähnlich sind.

3.1.1 Dimensionierung

Die Dimensionierung (englisch: *Sizing*) ist der einfachste Fall der FE-basierten Strukturoptimierung. Dieser Umstand überträgt sich auch auf den CAD-basierten Ansatz. Querschnitte, Wandstärken usw. werden in einer CAD Skizze erstellt und können über die darin definierten Parameter variiert werden. Eine Parametrisierung, die aus einem Konstruktionsprozess heraus entsteht, ist hier jedoch oft ungeeignet. In der Regel wird die Bemaßung so gewählt, wie sie auch in einer Zeichnungsableitung dargestellt würde. Diese führt jedoch oft dazu, dass bei größeren Änderungen der Parameterwerte das Modell nicht mehr fehlerfrei in der CAD-Anwendung aufgebaut werden kann. Dementsprechend kann auch kein Simulationsmodell abgeleitet werden und der Optimierungsalgorithmus erhält für die Parameterkombination keine Antwort für die Zielfunktion. Zum einen gilt es daher, eine stabile Strukturvariation sicherzustellen, und zum anderen, diese mit möglichst wenigen Optimierungsparametern zu realisieren. Als Maß für die Stabilität der Parametrisierung lässt sich die Ausfallrate $\epsilon_a \in [0, 1]$ für die jeweilige Parametrisierung und Parametergrenzen $\mathbf{p}^u < \mathbf{p} < \mathbf{p}^o$ angeben. Sie beschreibt, wieviel Prozent aller möglichen Parameterkombinationen zu einem nicht korrekt erzeugten Modell führen.

Abbildung 3.2 zeigt exemplarisch drei Parametrisierungsvarianten für die Dimensionierung eines T-Profiles und Tabelle 3.1 die dazugehörigen Parameterdefinitionen und -grenzen. Die Variante 1 legt eine Parametrisierung dar, wie sie auch in einer Zeichnungsableitung zu finden sein

Parametrisierung	Parameterdefinition	Parametergrenzen	Ausfallrate
Variante 1	$h_1 = p_1$	$0 < p_1 < b$	$\epsilon_a = 75\%$
	$h_2 = p_2$	$0 < p_2 < b$	
	$v_1 = p_3$	$0 < p_3 < v_{max}$	
Variante 2	$v_2 = p_4$	$0 < p_4 < v_{max}$	$\epsilon_a = 0\%$
	$h_1 = p_1$	$0 < p_1 < b$	
	$h_2 = p_2$	$0 < p_2 < b$	
Variante 3	$v_1 = p_3$	$0 < p_3 < v_{max}$	$\epsilon_a = 0\%$
	$v_2 = p_4$	$0 < p_4 < v_{max}$	
	$h_1 = b \cdot p_1$	$0 < p_1 < 1$	
	$h_2 = h_1 + (b - h_1) \cdot p_2$	$0 < p_2 < 1$	
	$v_1 = v_{max} \cdot p_3$	$0 < p_3 < 1$	
	$v_2 = v_1 + (v_{max} - v_1) \cdot p_4$	$0 < p_4 < 1$	

Tabelle 3.1: Parameterdefinition und Parametergrenzen für die Parametrisierungen in Abbildung 3.2

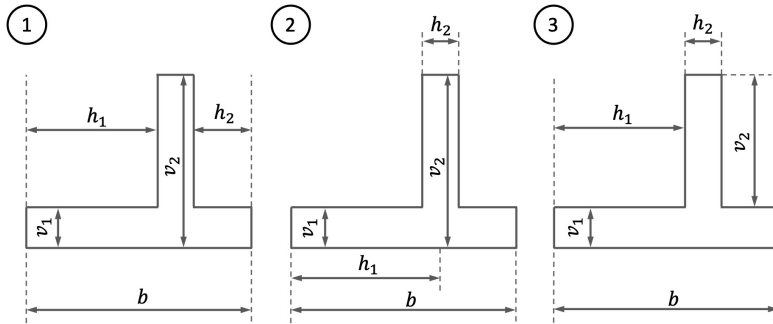


Abbildung 3.2: Drei Parametrisierungsvarianten eines T-Profiles

könnte. Für einen reinen Konstruktionsansatz ist sie eine durchaus sinnvolle Variante. Im Rahmen einer Optimierung in denen die Parameter p_1, \dots, p_4 in den in Tabelle 3.1 gezeigten Grenzen variiert werden, führt sie jedoch zu hohen Ausfallraten. Für alle Fälle, in denen $h_1 + h_2 \geq b$ ist, durchdringen sich die Ränder. Da kein CAD-Modell aufgebaut werden kann, ist die Berechnung einer Antwort für den Optimierungsalgorithmus nicht möglich. Hinzu kommt, dass für alle Fälle, in denen $v_2 < v_1$ ist, kein T-Stück entsteht, sondern ein Block mit einer Nut. Hier kann zwar ein CAD-Modell aufgebaut werden, allerdings entstehen neue Flächen. Für diesen Fall muss sichergestellt werden, dass die Definition von Randbedingungen im FE-Modell weiterhin korrekt aufgebracht werden. Variante 2 umgeht das Problem der sich durchdringenden Flächen. Hier beschreibt h_1 die Position des vertikalen Teils des T-Stücks auf der Grundplatte und h_2 die Wandstärke. Dadurch entstehen neue Flächen für alle Fälle, in denen $h_1 < h_2/2$ beziehungsweise (bzw.) $b - h_1 < h_2/2$ ist, da der vertikale Teil über die Grundplatte hinausragen kann. Es kann zwar ein CAD-Modell aufgebaut werden, jedoch können Probleme im FE-Modell entstehen. Variante 3 löst all diese Probleme, indem die Parameterdefinitionen voneinander abhängig sind. Die Optimierungsparameter p_1 und p_3 beschreiben die Wandstärke der Grundplatte bzw. die Position des vertikalen Stücks gemessen an dem zur Verfügung stehenden Bauraum. Die Parameter p_2 und p_4 definieren die Position im verbliebenen Bau-

raum. Somit ist gewährleistet, dass immer ein T-Stück resultiert und keine Überschneidungen oder neue Flächen entstehen, woraus nicht nur eine Ausfallrate von $\epsilon_a = 0\%$ folgt, sondern auch immer ein korrektes FE-Modell abgeleitet werden kann. So weit wie möglich, sollte dieses prinzipielle Vorgehen bei allen Parametrisierungen umgesetzt werden, die für Optimierungen bestimmt sind.

3.1.2 Splines

Splines entspringen dem mathematischen Aufgabenfeld der numerischen Analyse, werden jedoch auch intensiv in CAD-Anwendungen genutzt, um Kurven und Flächen effizient und eindeutig zu beschreiben. Der Begriff B-Spline (kurz für Basis Spline [105]) geht auf Isaac Jacob Schoenberg und das Jahr 1946 zurück. [161] Ein Spline n -ten Grades setzt sich stückweise aus einzelnen Polynomen zusammen die (höchstens) den Grad n haben. Ein Spline mit Grad $n = 1$ ist linear und entspricht einem Polygonenzug. Entsprechend existieren auch quadratische, kubische und weitere Splines. An den Stellen, an denen die einzelnen Polynome aufeinandertreffen, den sogenannten Knoten, können verschiedene Bedingungen gestellt werden, die wiederum die Form des Splines beeinflussen. Somit gibt es eine Vielzahl von Splinevarianten, wie Cardinal B-Splines, P-Splines, Bézier-Kurven und nicht-uniforme rationale B-Splines (englisch: *Non-Uniform Rational B-Spline*, NURBS), die sich in ihren Definitionen und Eigenschaften unterscheiden. Letztere werden besonders häufig in CAD-Systemen eingesetzt. Detaillierte Ausführungen hierzu finden sich u. a. in Bletzinger [22], Micula und Micula [140] und Piegl und Tiller [157].

Im Kontext einer CAD-Anwendung ist zunächst nur wichtig, dass Splinefunktionen aus einer Linearkombination von B-Splines und einem Satz von Kontrollpunkten definiert werden. Der Spline $[v(u_j), t(u_j)]^T$ setzt sich dabei aus der Summe der Basisfunktionen $N(u_j)$ und $(n + 1)$ Kontrollpunkten zusammen. Dabei ist u eine Laufvariable entlang des Splines.

Ferner können zwei Varianten unterschieden werden: eine *Through-points*-Variante, bei der alle Kontrollpunkte $[X_i, Y_i]^T$, $i = 1(1)n + 1$ zwingend auf dem resultierenden Spline liegen (siehe (3.1)) und einer *By-poles*-Variante, bei der die Kontrollpunkte ein Kontrollpolygon formen (siehe (3.2)). Die beiden Varianten werden auch als *interpolations* und *approximations* Spline bezeichnet [212]. Abbildung 3.3 verdeutlicht die beiden Varianten.

$$\begin{bmatrix} v(u_j) \\ t(j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n N_k(u) \begin{bmatrix} v_k \\ t_k \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix}, \quad r \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} v(u_j) \\ t(j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n N_k(u) \begin{bmatrix} v_k \\ t_k \end{bmatrix}, \quad r \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.2)$$

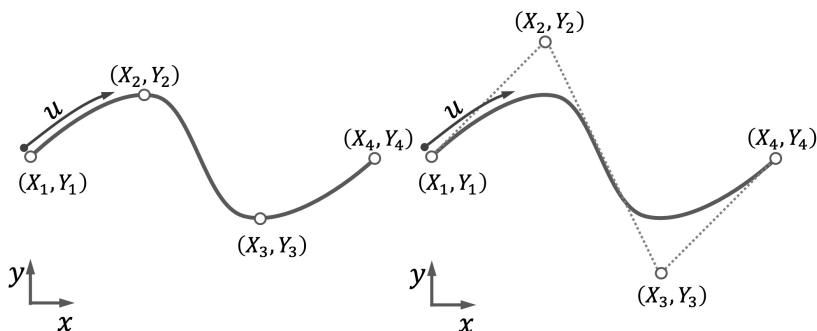


Abbildung 3.3: Splinedefinitionen *through points* (links) und *by poles* (rechts)

Beide Definitionsvarianten bieten Vor- und Nachteile, wodurch sich, abhängig vom Anwendungsfall, die eine oder die andere besser eignet. Ändert sich die Reihenfolge der Kontrollpunkte nicht, ist also $X_i < X_{i+1}$ oder $Y_i < Y_{i+1}$, $i = 1(1)n$, bietet die *Through-points*-Variante mehr Kontrolle über den erzeugten Spline. Die Maximalwerte des resultierenden Splines entsprechen dann im Allgemeinen den Maximalwerten

der Kontrollpunkte (vgl. Abbildung 3.3, links). Bleibt die Reihenfolge nicht identisch, kann es zu Überschwingern kommen. Im Vergleich zur *By-poles*-Variante existieren mehr Parameterkombinationen, in denen sich der Spline selbst durchdringt und in der Regel kann dann kein valides CAD-Modell abgeleitet werden. Eine nähere Betrachtung hierzu findet sich in Abschnitt 5.2. Damit wird der erste Vorteil der *By-poles*-Variante deutlich: Sie liefert in mehr Fällen eine valide Kontur. Hinzu kommt, dass der resultierende Spline im Allgemeinen glatter ist, was in vielen Fällen wünschenswert ist. Bei FE-basierten Verfahren, die die Knotenpunkte individuell auf der Oberfläche verschieben, kann dies nicht immer sichergestellt werden [42]. Es existieren jedoch viele Verfahren zur Vermeidung von scharfen Kanten und zur Glättung der Oberfläche [126]. Ein Nachteil der *By-poles*-Variante besteht darin, dass sich nur der erste und der letzte Kontrollpunkt auf dem Spline befinden und sich die Koordinaten der restlichen Punkte weit von dem Verlauf des Splines entfernen können, wie aus $[X_2, Y_2]^T$ und $[X_3, Y_3]^T$ in Abbildung 3.3 (rechts) hervorgeht. Soll der resultierende Spline einen eingegrenzten Bauraum nicht verlassen, ist es daher schwierig, die Parametergrenzen für die Koordinaten der Kontrollpunkte korrekt zu wählen. Wie dieses Problem in einer CAD-Anwendung berücksichtigt werden kann, wird in den Kapiteln 3.1.4 und 5.2 gezeigt.

Eine weitere Möglichkeit den Splineverlauf zusätzlich zu glätten, ist eine dynamische Parametrisierung, ähnlich dem in Kapitel 3.1.1 vorgestellten Ansatz. Die Parametergrenzen der Koordinaten der Kontrollpunkte sind dann abhängig von der Position der vorherigen Kontrollpunkte, indem eine Limit-Box definiert wird, die sich über einen Bereich um den zuvor definierten Kontrollpunkt erstreckt (siehe Abbildung 3.4) [212].

In jedem Fall bieten Splines jedoch die Möglichkeit, komplexe und organisch geformte Konturen mit wenigen Optimierungsparametern zu beschreiben und zu variieren. Sie eignen sich daher hervorragend, um das Vorgehen der FE-basierten Gestaltoptimierung nachzubilden, wie sie in

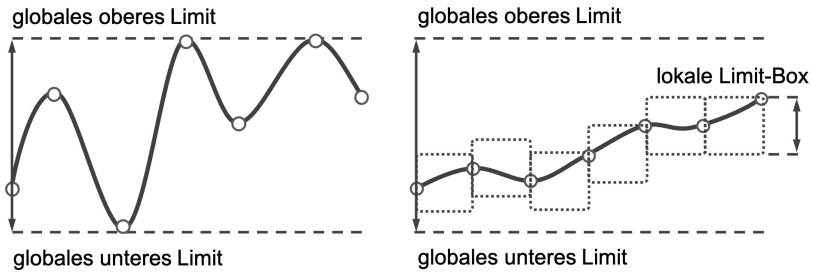


Abbildung 3.4: Globale Parametergrenzen (links) und lokale Parametergrenzen (rechts)

Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde. Da sie ebenfalls in jeder gängigen CAD-Anwendung implementiert sind, können sie leicht genutzt werden um eine CAD-getriebene Gestaltoptimierung durchzuführen [191]. Analog lassen sich auch Flächen mithilfe von Splines beschreiben, wodurch sich weitere Möglichkeiten hinsichtlich der Parametrisierung der zu optimierenden Komponente ergeben.

3.1.3 Features

Sowohl komplexere als auch einfache Bauteile setzen sich aus Merkmalen (englisch: *Features*) zusammen. Die Features können wiederum in ihrer Komplexität variieren. Die Bandbreite reicht von simplen Geometrien wie Balken, Kugeln und Zylindern über Features wie Bohrungen, Nuten oder Taschen, die auf einen bestehenden Grundkörper aufgebracht werden (vgl. Robinson, Armstrong und Chua [168]), bis hin zu komplexeren Geometrien, die der Anwender in Form eines benutzerdefinierten Merkmals (englisch: *User Defined Features*, UDFs) eigenständig definieren, parametrisieren und aufbringen kann. Aber auch das Hinzufügen von zusätzlichen Kontrollpunkten zu einem Spline kann als featurebasierte Änderung aufgefasst werden (vgl. Weiss [212] und Keller [100]).

Wird in einem CAD-basierten Optimierungsprozess die Möglichkeit geschaffen, Features zu einer Geometrie hinzuzufügen, erweitert sich der potentielle Entwurfsraum im Vergleich zu einer reinen Parametervariation mit gegebenen und nicht erweiterbaren Features. Im Zuge der Optimierung kann die Komponente dann nicht nur Formen annehmen, die mit der initialen Feature-Struktur möglich sind. Abbildung 3.5 zeigt drei Beispiele, wie einfache Features zu einem Kragbalken hinzugefügt werden können.

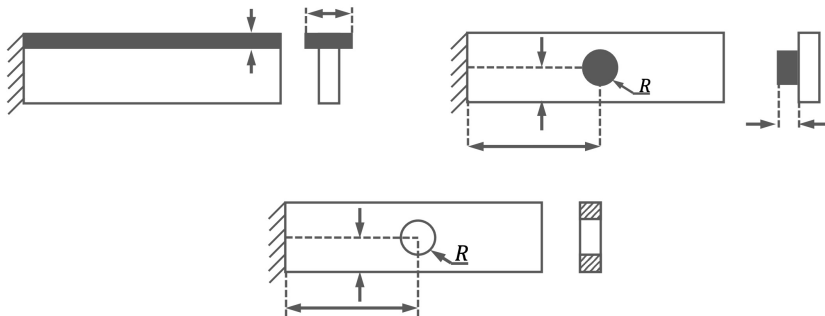


Abbildung 3.5: Beispiele für das Hinzufügen von Features an einen Kragbalken: Versteifungsplatte (links), Bohrung (Mitte), Zapfen (rechts)

Während die Beispiele mit Platte und Zapfen lediglich eine Änderung der Gestalt bedeuten und somit auch durch eine klassische Formoptimierung hätten erreicht werden können, ändert sich im Beispiel mit der Bohrung auch die Topologie des Kragbalkens. Eine featurebasierte Strukturoptimierung ermöglicht es somit, die in Abschnitt 2.2.3 erläuterte Topologieoptimierung nachzuahmen. Über ein UDF können auch Splines hinzugefügt und mithilfe von *booleschen* Operationen dazu genutzt werden komplexere topologische Änderungen vorzunehmen. Ein Beispiel hierfür bieten Kim u. a. [103] und zeigt vereinfacht Abbildung 3.6.

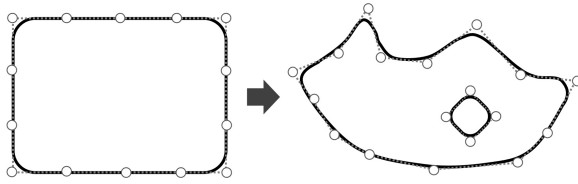


Abbildung 3.6: Beispiel einer Topologieoptimierung mithilfe von Splines

Features in die bestehende Baumstruktur eines Prototypenentwurfs einzufügen, ist eine weitere Möglichkeit, topologische Änderungen an einer CAD-Geometrie vorzunehmen. Nahezu jede kommerzielle CAD-Anwendung baut die Geometrien in Form einer Baumstruktur auf, indem Skizzen, Features und Operationen aufeinander aufbauend aneinandergereiht werden. Weiss [212] verfolgt diesen Ansatz in seiner Dissertation und überführt hierzu die Baumstruktur in einen mathematischen Graphen.² Für jeden Knoten in der Baumstruktur wird eine Kante im Graphen erzeugt. Die Zwischenknoten stellen dabei Features dar und die Endknoten die Geometrieparameter. Der Graph kann anschließend über einen Algorithmus manipuliert und optimiert werden. Dieser Ansatz ermöglicht eine deutlich umfassendere und generischere Strukturgenerierung und ist prinzipiell von der eingesetzten CAD-Anwendung unabhängig. Jedoch ist für die tatsächliche Umsetzung eine sehr enge und programmspezifische Kopplung nötig, die Weiss ebenfalls als Nachteil herausstellt.

Abbildung 3.7: Beispiel für *Single-level-Features* (links) und *Multi-level-Features* (rechts), in Anlehnung an [213, S.34]

Dass so verhältnismäßig einfach Substrukturen erzeugt werden können,

²Für weitere Erläuterungen zu mathematischen Graphen siehe z. B. Diestel [56].

ist ein großer Vorteil dieses Ansatzes. Weiss führt dazu ein *multi-level concept* für variable Features ein. Somit können beispielsweise aufeinander aufbauende Verstrebungen erzeugt werden. Abbildung 3.7 zeigt zwei Beispiele, wie mithilfe der Baumstruktur Modelle auf einer bzw. auf mehreren Ebenen in ihrer Komplexität erweitert werden können. Insbesondere die Verstrebungen auf mehreren Ebenen wie in Abbildung 3.7 (rechts) kommen den Ergebnissen einer Topologieoptimierung sehr nahe. Somit können die gängigsten Ansätze FE-basierter Strukturoptimierung alle durch entsprechende CAD-basierte Parametrisierungsstrategien nachgebildet werden.

3.1.4 Baugruppen

In der Regel steht ein Bauteil nicht allein, sondern existiert als Teil einer Baugruppe (englisch: *Assembly*). Innerhalb der Baugruppe stehen die einzelnen Komponenten in Abhängigkeit zueinander und beeinflussen sich gegenseitig – zum einen durch ihre Abmessungen und den Bauraum, den sie für sich beanspruchen, zum anderen durch ihre mechanischen Eigenschaften. Bei einer FE-basierten Strukturoptimierung können solche Abhängigkeiten im Allgemeinen nicht berücksichtigt werden. Die Topologieoptimierung kommt diesem Anspruch noch am nächsten, da sie große Strukturen entwickeln kann, die sich in der Praxis auch durch mehrere Komponenten zusammensetzen können, sofern keine additive oder integrale Fertigung geplant ist. In allen Verfahren werden die Kräfte an den Schnittstellen der Komponenten zwar berücksichtigt, jedoch sind es unveränderliche Größen, die im Laufe der Optimierung nicht variiert werden. Auch der zur Verfügung gestellte Bauraum wird initial festgelegt und kann im Rahmen der Optimierung nicht verändert werden.

Ein Optimierungsprozess, der auf einer CAD-Software basiert, bietet hinsichtlich des Bauraums deutlich mehr Möglichkeiten, da die Konstruktion

von Baugruppen ein wesentlicher Bestandteil jeder Konstruktionsanwendung ist. Ein variabler Bauraum lässt sich somit leicht umsetzen. Die Bauraumgrenzen können über die Baugruppen assoziativ in die Komponentenebene projiziert werden. Dort wird der Abstand der Komponente zur Bauraumgrenze gemessen und dient als Nebenbedingung in der Optimierung, wie in Abbildung 3.8 ersichtlich ist. Weiter kann über eine mehrkriterielle Optimierung dann eine beliebige Zielgröße gegen den eingenommenen Bauraum mit

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} \begin{bmatrix} f(\mathbf{p}) \\ b(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} -\beta_{min}(\mathbf{p}) \\ \vdots \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\} \quad (3.3)$$

wobei:

- b – Größe des Bauraums,
- f – (beliebige) Zielgröße,
- β_{min} – kleinster Abstand zur Bauraumgrenze

optimiert werden.

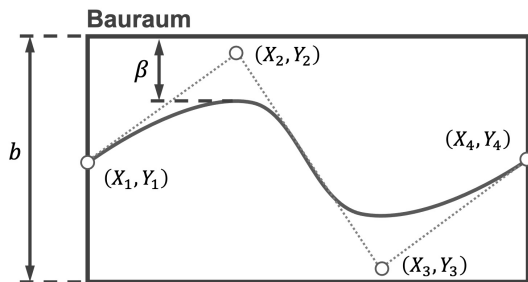


Abbildung 3.8: Variable Bauraumgrenzen in einer Optimierung

Hinsichtlich des zweiten Aspekts, der Einflüsse der mechanischen Eigenschaften der Komponenten untereinander, muss der Analyseprozess erweitert werden, um diese ebenfalls zu berücksichtigen. Hier bestehen prinzipiell drei Möglichkeiten. Die Analysen der Komponenten können

einzelnen und sequenziell durchgeführt werden, wobei die Ergebnisgrößen einer Simulation an die nächste weitergegeben werden. Alternativ wird im Rahmen einer *Assembly-FEM* die gesamte Baugruppe innerhalb der CAE-Anwendung analysiert. Außerdem kann das von der CAD-Geometrie abgeleitete FE-Modell an eine externe Analysesoftware übergeben, dort in die Baugruppe eingebunden und berechnet werden. Die Ergebnisse werden dann an den Optimierungsalgorithmus zurückgegeben.

Beide Ansätze sind praktikabel. Der erste, integralere Ansatz bietet aufgrund der homogenen Softwareumgebung Vorteile beim Daten- und Modellmanagement. In der Praxis sind die Aufgaben der Komponenten- und der Systementwicklung jedoch oft auf separate Abteilungen aufgeteilt, die gegebenenfalls unterschiedliche Analysesoftware nutzen. Das Auslagern der Baugruppenanalyse ist dann nicht nur nötig, sondern auch sinnvoll. Im Rahmen der zur Optimierung nötigen Automatisierung bedeutet dies zwar einen größeren Mehraufwand, dieser lässt sich jedoch bewerkstelligen.

Abschließend bleibt zu erwähnen, dass das Erstellen einer geeigneten Parametrisierung eine sehr problemspezifische Aufgabe ist, die abhängig von den Zielen des Anwenders stark variieren kann. Die Parametrisierung hat maßgeblichen Einfluss auf die Ergebnisse, die im Rahmen der Optimierung erzielt werden können. An dieser Stelle können nur prinzipielle Ansätze gezeigt werden. Es sollte immer das Ziel sein, mit wenigen Optimierungsparametern eine große Variantenvielfalt an möglichen Entwürfen zu schaffen und dabei gleichzeitig geringe Ausfallraten ϵ_a der resultierenden Modelle sicherzustellen. Diese Anforderungen in der Praxis umzusetzen, nimmt oft einen nicht unerheblichen Teil der gesamten Arbeit ein.

3.2 Automatisierung von Simulationsprozessen

Die Automatisierung von Simulationsprozessen ist der entscheidende Schritt, der einen Optimierungsprozess erst ermöglicht. Ein Optimierungsalgorithmus legt zunächst nur die Eingangsparameter fest, erhält eine Antwort hinsichtlich der Zielgröße(n) und Nebenbedingungen und leitet daraus wieder neue Eingangsgrößen ab. Die Optimierung kann nur dann effizient erfolgen, wenn die Ergebnisgrößen automatisiert und ohne manuellen Eingriff des Anwenders berechnet und ausgewertet werden. Wie die Automatisierung realisiert wird, spielt für die Optimierung zunächst keine Rolle. Jedoch bietet die Simulation in einer einzelnen CAE-Anwendung eine Reihe von Vorteilen – hinsichtlich des Aufwands, der für die Automatisierung betrieben werden muss, und hinsichtlich der Robustheit des Prozesses.

3.2.1 Simulation innerhalb einer CAE-Anwendung

Der Begriff der computergestützten Entwicklung (englisch: *Computer-Aided Engineering*, CAE) umfasst alle diesbezüglichen computergestützten Prozesse. Zu Beginn waren die einzelnen Disziplinen klar getrennt und die eingesetzte Software spezifisch auf eine einzelne Disziplin ausgelegt. Die Idee, Konstruktion und Simulation zu koppeln, wurde bereits von Arabshahi, Barton und Shaw [9] im Jahr 1993 vorgebracht. Sie führte dazu, dass immer ganzheitlichere Entwicklungsprozesse angestrebt wurden, in dem Versuch, die einzelnen Disziplinen durch effiziente Schnittstellen aneinander anzugliedern. Dadurch haben sich klassische CAD-Konstruktionsprogramme zu umfangreichen CAE-Anwendungen entwickelt, mit deren Hilfe immer mehr Facetten der Entwicklung berücksichtigt werden können. Die Vorteile dieses Vorgehens zeigen u. a. die Arbeiten von Dias u. a. [52], Li, Ma und Lange [121] und Zhu, Li und

Martin [223]. Die integrale Entwicklung und die Kopplung von Konstruktion und Simulation kommt ebenfalls in der Lehre an Hochschulen zum Tragen. Die Arbeiten von Flynn und Bach [71], Taleyarkhan u. a. [199] und Xie u. a. [215] untersuchen die Vorteile für das Verständnis von Konstruktion und *Design Thinking*. Integrale Entwicklung ist ein sehr breites Feld. An dieser Stelle soll nur auf die Kopplung von CAD-basierten Designentwürfen hin zu strukturmechanischen Analysen eingegangen werden.

Abbildung 3.9 zeigt den Ablauf eines Simulations- und Analyseprozesses in einer CAE-Anwendung schematisch. Ausgehend von einem *Master Model* können ein oder mehrere simplifizierte Modelle (englisch: *defeatured models*) abgeleitet werden, die die Geometrie nach Bedarf und hinsichtlich der durchzuführenden Simulation vereinfachen. Diese werden durch FE-Netze diskretisiert und im Simulationsmodell werden die nötigen Randbedingungen aufgebracht. Entlang des Simulationsprozesses können entsprechende Eingangsparameter eingebracht werden und es fallen verschiedene Ergebnisgrößen ab. Der CAD-Teil der Anwendung erhält die Geometrieparameter und erzeugt den Entwurf, aus dem u. a. die Masse und der eingenommene Bauraum bestimmt werden. Die Parametrisierung muss für die Optimierungsaufgabe zugeschnitten sein. Eine weitere Parametrisierung in den simplifizierten Modellen findet typischerweise nicht statt. Im FEM-Teil können Größen eingebracht werden, die die globale oder lokale Netzfeinheit und die Elementeigenschaften, wie Materialkennzahlen, Schalendicken usw., definieren. Im Simulationsmodell werden Kräfte und Momente variiert und Größen berechnet, die für die strukturmechanischen Eigenschaften entscheidend sind, wie Spannungen, Verformungen, Eigenfrequenzen usw. Auch ein Austausch der Simulationsergebnisse unter den einzelnen Simulationsmodellen ist möglich.

Um einen automatisierten Prozess zu gestalten, stehen in den meisten Anwendungen APIs zur Verfügung, mit deren Hilfe einzelne Handlungs-

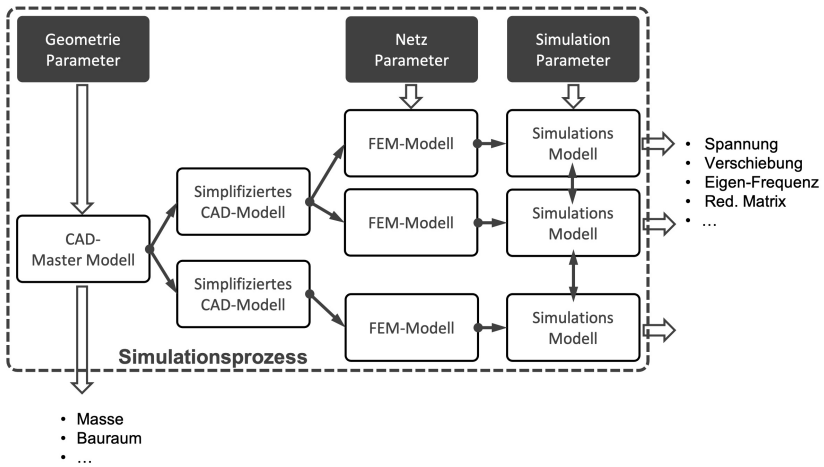


Abbildung 3.9: Schematische Darstellung eines Simulationsprozesses

schritte und Prozesse in der Anwendung programmiert werden können. Dazu zählen u. a. das Laden von Modellparametern, das Anweisen einer Neuvernetzung und das Berechnen eines Simulationsmodells. Die Geometrievaryation und das Erstellen des Analysemodells geschehen somit über die gewählte Parametrisierung bzw. ausschließlich über CAE-interne Schnittstellen und Anweisungen. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 1.5 erwähnten Ansatz von Weiss [213] ist dieses Vorgehen deutlich weniger anfällig gegenüber Updates und zukünftigen Änderungen. Vielmehr profitiert der hier beschriebene Ansatz von verbesserten Funktionen in den CAE-Anwendungen.

Die Analyse in einer einzelnen CAE-Anwendung bietet hinsichtlich der Automatisierung den Vorteil, dass die einzelnen Modelle in der Software bereits assoziativ verknüpft sind. Wird eine Änderung im übergeordneten Modell vorgenommen, überträgt sich diese auf die nachfolgenden Modelle in der Prozesskette. Das *Pre-Processing* für die Analysemodelle ist in den letzten Jahren sehr mächtig geworden, wodurch eine automa-

tisierte Neuvernetzung und das Übertragen der Randbedingungen in vielen Fällen reibungslos funktioniert. Jedoch spielen der Aufbau der Analysemodelle und die Definition der Randbedingung eine wichtige Rolle und müssen vom Anwender entsprechend der Problemstellung und der Geometrievariation gewählt werden. Wichtige Arbeiten hierzu wurden u. a. von Armstrong und seinem Team veröffentlicht. Beispiele zur Parametrisierung sind [2] und [168], für die automatisierte Vernetzung [118], [197] und [196] und für den Modelltransfer und Interface Management [1], [27], [202], [204] und [205].

Neben den hier genannten, eher generalistischen Lösungen besteht auch immer die Möglichkeit, eine individuelle Automatisierung aufzusetzen. Hier können Bedingungen für die Vernetzung und das Berechnungsmodell auf Basis von zuvor gesetzten Markern (englisch: *tags*) aufgebracht werden. Im Einzelfall können spezielle Anforderungen so besser umgesetzt werden. Der Nachteil dieses Vorgehens ist jedoch, dass es unflexibel hinsichtlich zukünftiger Änderungen ist und die Modelle nach genauen Vorgaben vom Anwender bereitgestellt werden müssen, was in der Praxis regelmäßig zu einem hohen Aufwand und Problemen führt.

3.2.2 Automatisierungssoftware und externe Schnittstellen

Kapitel 3.2.1 bezog sich auf die Automatisierung innerhalb einer einzelnen CAE-Anwendung in Kombination mit Skripten und den programminternen APIs. Im Prinzip ist keine weitere Automatisierungssoftware nötig. Allerdings bietet sie in vielen Fällen Vorteile wie die Verwaltung von Eingangs- und Ergebnisparametern, die durch eine grafische Benutzeroberfläche (englisch: *Graphical User Interface*, GUI) erleichtert wird. In der Regel stellt eine Automatisierungssoftware auch viele Algorithmen zur Optimierung, für Designstudien und zur Ergebnisanalyse

zur Verfügung, die ansonsten ausgelagert oder vom Anwender selbst implementiert werden müssten.

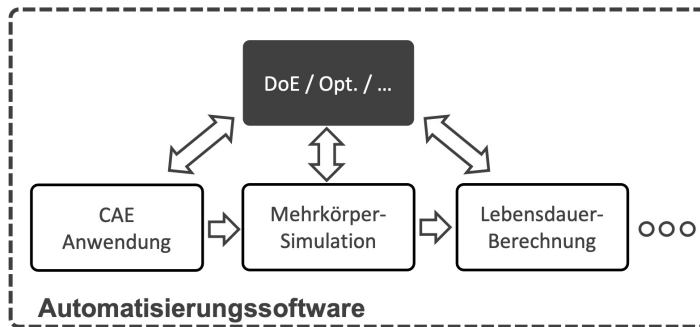


Abbildung 3.10: Schematische Darstellung einer Automatisierung

Auch wenn die Analyse in einer einzelnen CAE-Anwendung viele Vorteile bietet, ist es für eine umfassende Betrachtung teilweise dennoch nötig, weitere Untersuchungen und Auswertungen in externen Programmen durchzuführen. Gründe hierfür können sein, dass Modelle aus weiteren Fachbereichen genutzt werden müssen, die andere Analysesoftwares einsetzen. Auch die Auswertung der Simulationsergebnisse ist in den CAE-Anwendungen oft nur sehr rudimentär möglich. Sollen Analysen durchgeführt werden, die weit über die Auswertungen der maximalen Spannung oder Verformung hinaus gehen, wie beispielsweise komplexe Lebensdauerberechnungen auf Basis der Rohdaten, ist die Eingliederung eines weiteren Analysewerkzeugs meist unumgänglich. Eine Automatisierungssoftware vereinfacht den Zusammenschluss und den Datenaustausch (vgl. Abbildung 3.10).

3.3 Validierung anhand akademischer Beispiele

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln die Grundlagen für eine optimierungsgerechte CAD-Parametrisierung und für die Optimierung nötige Automatisierung von Simulationsprozessen dargelegt wurden, sollen in diesem Abschnitt die beschriebenen Methoden anhand praktischer Beispiele demonstriert werden. Um die Methoden nicht nur zu demonstrieren, sondern auch zu validieren, werden akademische Problemstellungen herangezogen, deren jeweilige optimale Lösung bereits prinzipiell bekannt ist. Somit können die erzielten Ergebnisse der CAD-basierten Optimierungen mit den bekannten Lösungen verglichen werden.

3.3.1 Dimensionierung

Als Beispiel für die Optimierung der Dimensionierung dient ein Balken mit einem Doppel-T-Profil. Der in Abbildung 3.11 dargestellte Balken ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch eine vertikale Kraft F belastet. Ziel der Optimierung (3.4) ist es, die Dimensionierungsparameter mit den in Tabelle 3.2 dargestellten Grenzen so zu optimieren, dass die Masse m minimal wird und die maximale Verschiebung $|u_{max}(\mathbf{p})|$ im Modell einen oberen Grenzwert nicht überschreitet.

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} m(\mathbf{p}) \text{ mit } P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid |u_{max}(\mathbf{p})| \leq 1, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\} \quad (3.4)$$

Die Optimierung wurde mit dem Optimierungsalgorithmus *NLPQLP* durchgeführt, einer Implementierung und Weiterentwicklung der SQP-Methode [180][181]. Es handelt sich dabei um ein gradientenbasiertes

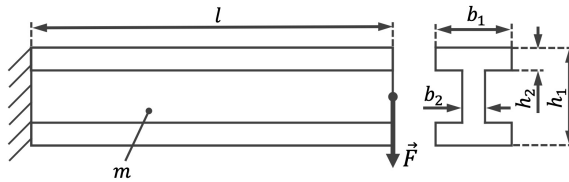


Abbildung 3.11: Optimierungsbeispiel und Parametrisierung einer Dimensionierung

Parameterdefinition	Parameter Grenzen	Optimierungsergebnis
$l = p_0$	$p_0 = 1000 \text{ mm}$	$p_0 = 1000 \text{ mm}$
$h_1 = p_1$	$50 < p_1 < 200$	$p_1 = 139.3$
$h_2 = h_1 \cdot p_2$	$0.05 < p_2 < 0.475$	$p_2 = 0.05$
$b_1 = p_3$	$25 < p_3 < 100$	$p_3 = 25$
$b_2 = b_1 \cdot p_4$	$0.05 < p_4 < 0.475$	$p_4 = 0.05$

Tabelle 3.2: Parameterdefinition, Parametergrenzen und optimierte Werte für die Parametrisierungen in Abbildung 3.11

Verfahren. Abbildung 3.12 zeigt den Ausgangsentwurf und das optimierte Ergebnis. Das Resultat ist ein schmaleres und deutlich höheres Profil mit einem kleinstmöglichen vertikalen Verbindungssteg. Eine Betrachtung der Flächenträgheitsmomente verdeutlicht auch analytisch, dass ein auf Biegung belastetes Doppel-T-Profil so gestaltet sein sollte.

3.3.2 Gestaltoptimierung

Als Beispiel für eine Gestaltoptimierung mithilfe von Splines wird ebenfalls ein Balken am linken Ende fest eingespannt und am rechten Ende durch eine vertikale Kraft F belastet. Der Balken besitzt einen rechteckigen Querschnitt mit $t = 10\text{mm}$. Die obere Kontur des Balkens wird durch einen quadratischen Spline entsprechend Gleichung (3.2) und sechs äquidistant entlang der Länge des Balkens verteilten Kontrollpunkten beschrieben. Die horizontale Position der Kontrollpunkte bleibt hier

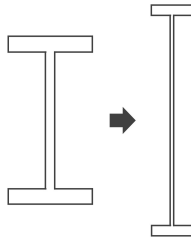


Abbildung 3.12: Ausgangsentwurf der Dimensionierung (links) und optimiertes Ergebnis (rechts)

unverändert. Lediglich die vertikale Position wird durch die Optimierungsparameter p_2, \dots, p_7 , innerhalb der in Tabelle 3.3 dargestellten Grenzen, variiert. Ziel der Optimierung ist es wieder, die Masse m zu minimieren und dabei die maximale Verschiebung $|u_{max}(\mathbf{p})|$ innerhalb des Modells unter dem gesetzten Grenzwert zu halten. Somit ergibt sich das identische Optimierungsproblem zu Gleichung (3.4). Auch hier wurde der gradientenbasierte Optimierungsalgorithmus *NLPQLP* eingesetzt.

Parameterdefinition	Parameter Grenzen	Optimierungsergebnis
$l = p_0$	$p_0 = 1000 \text{ mm}$	$p_0 = 1000 \text{ mm}$
$t = p_1$	$p_1 = 10 \text{ mm}$	$p_1 = 10 \text{ mm}$
		$p_2 = 16.76 \text{ mm}$
		$p_3 = 15.49 \text{ mm}$
$h_i = p_i$	$1 \text{ mm} < p_i < 20 \text{ mm}$	$p_4 = 12.83 \text{ mm}$
		$p_5 = 11.72 \text{ mm}$
		$p_6 = 11.15 \text{ mm}$
		$p_7 = 2.51 \text{ mm}$

Tabelle 3.3: Parameterdefinition, Parametergrenzen und optimierte Werte für die Parametrisierungen in Abbildung 3.13

Abbildung 3.13 stellt sowohl das Ausgangsdesign und die Parametrisierung (oben) als auch das Optimierungsergebnis (unten) dar. Wie zu erwarten war, ist das Ergebnis ein Balken, der sich von der Einspannstel-

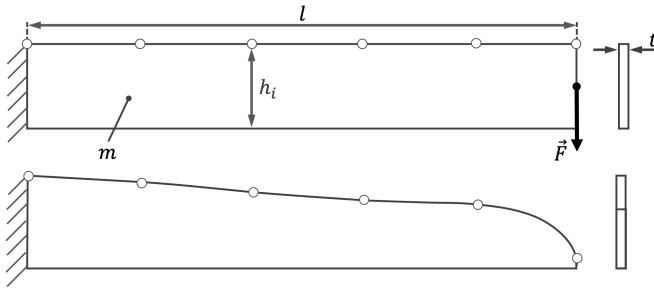


Abbildung 3.13: Optimierungsbeispiel, Parametrisierung (oben) und Ergebnis (unten) einer Gestaltoptimierung mit Splines

le hin zum Kräfteinleitungspunkt verjüngt. Es ergibt sich eine Form, die der optimalen Form eines Balkens gleicher Biegebeanspruchung sehr nahekommt (vgl. Schumacher [185, S. 164]). An diesem Beispiel ließe sich auch die Abweichung zu analytisch exakten Lösungen berechnen, augenscheinlich ist das Ergebnis jedoch gut.

3.3.3 Topologieoptimierung

Schließlich wird für die Topologieoptimierung ein ähnliches Beispiel herangezogen. Eine Platte mit den Abmessungen $l = 200$ mm, $h = 100$ mm und $t = 10$ mm, die am linken Ende fest eingespannt ist und auf die an der Stelle $[180, 0]^T$ eine vertikale Kraft F aufgebracht wird, bildet die Grundlage des Topologieoptimierungsproblems. Im Rahmen der Optimierung können fünf Splines mit jeweils vier Kontrollpunkten hinzugefügt werden, die die Bereiche ausbilden, an denen Material aus der Platte entfernt wird. Auch hier soll eine maximale Verschiebung $|u_{max}(\mathbf{p})|$ nicht überschritten und die Masse m minimiert werden, wodurch sich jetzt das Optimierungsproblem aus (3.5) ergibt. Die Größen l, h, t sind keine Optimierungsparameter.

Abbildung 3.14 zeigt auf der linken Seite die Platte, die den gesamten zur Verfügung stehenden Bauraum darstellt, und rechts das Optimierungsergebnis. Durch die resultierenden Aussparungen entsteht eine, für Topologieoptimierungen typische, Fachwerksstruktur. Prinzipiell kann eine FE-basierte Topologieoptimierung mithilfe von Splines, wie in diesem Beispiel, auf diese Weise nachgebildet werden. Die Entwurfsfreiheit hängt jedoch stark von der Anzahl der Splines und der Anzahl der Kontrollpunkte ab und kommt nicht an die einer FE-basierten Topologieoptimierung heran. Werden diese Faktoren erhöht, wächst auch die Anzahl der Optimierungsparameter und damit die Komplexität des Optimierungsproblems, wodurch der CAD-basierte Ansatz gegenüber dem FE-basierten zunehmend an Effizienz verliert. Weitere typische Varianten einer Topologieoptimierung, wie die Minimierung der Verschiebung bei einem gegebenen Masseneinsatz, können ebenfalls leicht umgesetzt werden, indem das Optimierungsproblem wie folgt umformuliert wird:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} m(\mathbf{p}) \text{ mit } P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid |u(\mathbf{p})| \leq u_{max}, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\} \quad (3.5)$$

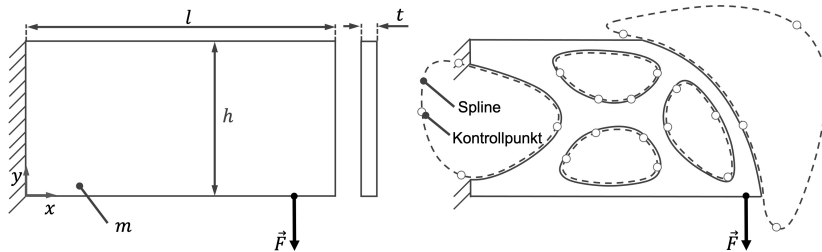


Abbildung 3.14: Optimierungsbeispiel (links) und Ergebnis (rechts) einer Topologieoptimierung mit Splines

4 Antwortflächenverfahren

Mit Antwortflächenverfahren (engl. *Response Surface Methodology*) werden Methoden beschrieben, die den Zusammenhang mehrerer Variablen auf eine oder mehrere Zielgrößen abbilden sollen. Die Grundidee geht auf George E. P. Box und K. B. Wilson zurück, die sie 1951 publizierten [29]. Seitdem finden Antwortflächenverfahren in vielen Bereichen Anwendung und werden auch für technische Problemstellungen, meist im Kontext von Optimierungsproblemen, immer häufiger eingesetzt. In der vorliegenden Arbeit werden Antwortflächenverfahren genutzt, um bestehende Prozesse zu beschleunigen oder Optimierungen durchzuführen, die ansonsten zu viel Rechenzeit in Anspruch nehmen würden. Denn trotz immer besserer Rechenkapazitäten benötigen viele numerische Analysemethoden Tage oder Wochen. Der stetig steigende Anspruch an den Umfang und die Detailgenauigkeit der numerischen Analysemethoden trägt ebenfalls zu den teils langen Berechnungszeiten bei. Das Abbilden der Zielgrößen mithilfe einer Antwortfläche wird oft als Approximation beschrieben.

Um eine beliebige nichtlineare Funktion reeller Zahlen in einem n -dimensionalen Raum abzubilden ($f(\mathbf{p})$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$), wird in fünf Schritten vorgegangen:

1. Geeignetes Verfahren wählen
2. Stützstellen und Trainingsdaten berechnen
3. Verfahrensspezifische Modellparameter berechnen
4. Resultierende Antwortfläche validieren und die Approximationsgüte prüfen

5. Gegebenenfalls Modellparameter und Trainingsdaten anpassen und die Approximation verbessern

Die Approximation einer Funktion lässt sich wie folgt formulieren:

$$f(\mathbf{p}) = \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{b}) + \epsilon(\mathbf{p}) \quad (4.1)$$

wobei:

- \mathbf{b} – verfahrensspezifische Modellparameter ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^j$)
- f – zu beschreibende Funktion
- \hat{f} – Approximationsfunktion / Antwortflächenmodell
- ϵ – Approximationsfehler

Dabei sollen die verfahrensspezifischen Modellparameter so gewählt werden, dass mit möglichst wenigen Trainingsstellen p_i , $i = 1(1)N$ der Approximationsfehler $\epsilon(\mathbf{p})$ zur Funktion $f(\mathbf{p})$ minimiert wird.

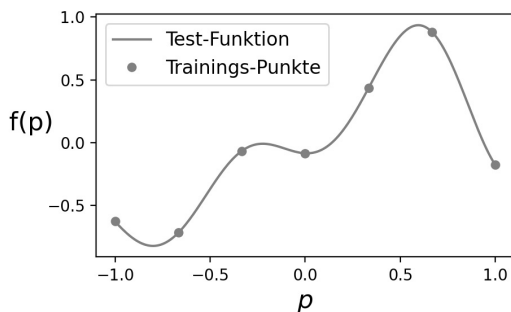


Abbildung 4.1: Eindimensionale Test-Funktion

Es existiert eine Vielzahl von Antwortflächenverfahren mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen. Grundlegend kann in Verfahren mit Regressions- und Interpolationsmodellen unterschieden werden. Bei ersteren folgt die Approximationsfunktion dem Trend der Trainingspunkte, wobei im Allgemeinen nicht alle Trainingspunkte durchlaufen werden. Dies ist hingegen

bei Interpolationsmodellen zwingend der Fall. Ein häufig genutztes Verfahren mit einem Regressionsmodell ist die *lineare Regression*. Übliche interpolierende Verfahren sind *radiale Basisfunktionen* und *Kriging* [67]. Daher sollen diese drei Verfahren kurz beschrieben und anschließend hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile und ihrer Abbildungsgüte für eine Testfunktion verglichen werden. Als Test dient hier zunächst die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{10} + x \cdot \sin(5x - 1)}{1 + x^2 \cdot \sin(x - \frac{1}{2})^2}, \quad p \in [-1, 1]. \quad (4.2)$$

Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf für $p \in [-1, 1]$.

4.1 Versuchsplanung

Zunächst soll auf den zweiten Punkt des Vorgehens, *Stützstellen und Trainingsdaten berechnen*, eingegangen werden. Spezifischer soll erörtert werden, an welchen Stellen im Versuchsraum die Trainingsdaten erfasst werden sollen. Das Vorgehen zur Festlegung dieser Stellen wird allgemein als Versuchsplanung bezeichnet, die anhand zahlreicher Ansätze gestaltet werden kann. Die Wahl ist u. a. abhängig von der Komplexität der abzubildenden Zusammenhänge, dem leistbaren Aufwand und der gewünschten Abbildungsgüte.

Zwei für das Verständnis wichtige Begriffe sind *Faktor* und *Stufen* oder *Level*. Die Summe aller Eingangsgrößen sind die Parameter, wobei diejenigen, die im Versuchsplan berücksichtigt und variiert werden, als Faktoren bezeichnet werden. Stufen oder Level bilden die Anzahl der unterschiedlichen Werte, die ein Faktor im Versuchsplan annimmt. Abbildung 4.2 zeigt links ein Beispiel eines vollfaktoriellen Versuchsplans für zwei Faktoren mit jeweils fünf Leveln. Somit ergeben sich insgesamt 25

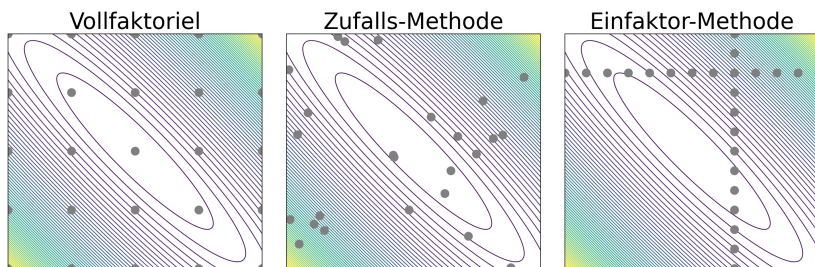


Abbildung 4.2: Versuchsplan mit zwei Faktoren und fünf Leveln (links), Zufalls-Methode (mitte) und Einfaktor-Methode (rechts)

Punkte verteilt auf jeweils fünf Reihen mit fünf Punkten. Weitere einfache Ansätze zur Anlegung eines Versuchsplans sind die Zufalls-Methode, bei der alle Punkte durch eine Zufallsgröße festgelegt werden, und die Einfaktor-Methode, bei der jeweils immer nur ein Faktor über alle Stufen variiert wird, während die restlichen Faktoren konstant bleiben (vgl. Abbildung 4.2). Jedoch wurden deutlich effizientere Verfahren entwickelt, um mit möglichst wenigen Auswertungspunkten viele Informationen über das unbekannte System zu sammeln. An dieser Stelle kann nur ein kurzer Überblick über eine kleine Auswahl der gängigsten Ansätze gegeben werden. Weiterführende Informationen finden sich etwa in Bortz und Schuster [25], Hinkelmann [87] und Schiefer und Schiefer [179].

4.1.1 Faktorielle Versuchspläne

Der naheliegendste Ansatz ist ein *Screening*-Versuchsplan, der auch als faktorieller Versuchsplan bezeichnet wird. Weitere Unterscheidungen sind vollfaktorielle (englisch: *full factorial*) und teilfaktorielle oder fraktionelle faktorielle (englisch: *fractional factorial*) Versuchspläne [179]. Für einen vollfaktoriellen Versuchsplan wird jede Kombination aus allen Faktoren (n_f) und Stufen (n_s) ausgewertet. Somit ist die Anzahl an benötigten Auswertungen $N = n_s^{(n_f)}$, sodass ein solcher Versuchsplan

für größere Modelle nicht mehr durchführbar wird. Daher werden oft nur zweistufige Versuchspläne eingesetzt, wodurch sich jedoch lediglich lineare Abhängigkeiten beschreiben lassen.

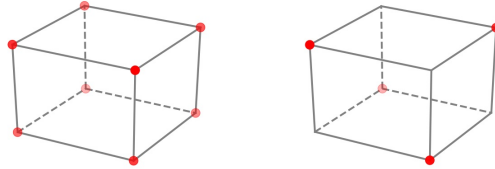


Abbildung 4.3: Vollfaktorieller Versuchsplan (links) und teilfaktorieller Versuchsplan mit 1/2-Fraktion (rechts)

Eine Möglichkeit zur Reduktion der Anzahl der Auswertungen besteht darin, nur einen Teil, eine sogenannte Fraktion, des vollfaktoriellen Plans zu betrachten. Wird nur die Hälfte der Punkte herangezogen, handelt es sich um eine 1/2-Fraktion, wird nur ein Viertel betrachtet, um eine 1/4-Fraktion usw. Abbildung 4.3 zeigt ein Beispiel für einen faktoriellen Versuchsplan mit drei Faktoren und zwei Stufen und einen dazugehörigen fraktionellen faktoriellen Versuchsplan mit einer 1/2-Fraktion. Ein prinzipieller Nachteil teilfaktorieller Versuchsplänen verbleibt jedoch: Die Anzahl der benötigten Auswertungen für eine gegebene Fraktion nimmt mit der Anzahl der Faktoren zu.

4.1.2 Quadratische Beschreibungsmodelle

Für Modelle mit vielen Faktoren kann ein vollfaktorieller Versuchsplan, wenn überhaupt, nur mit zwei Stufen durchgeführt werden. Damit können nur lineare Abhängigkeiten abgebildet werden. Soll jedoch ein quadratisches Beschreibungsmodell verwendet werden, sind drei Stufen

nötig. Für einen vollfaktoriellen Versuchsplan mit acht Faktoren existieren für zwei Stufen $2^8 = 256$ Kombinationen, für drei Stufen bereits $3^8 = 6561$ Kombinationen. Dabei steigt die Anzahl der Modellkonstanten (n_m) nur moderat an, weil für jeden Faktor nur ein weiterer quadratischer Term hinzukommt (vgl. Abbildung 4.4). Somit stünden den 45 Modellkonstanten 6561 Gleichungen gegenüber. Es ist daher möglich, den Aufwand ohne Informationsverlust zu reduzieren.

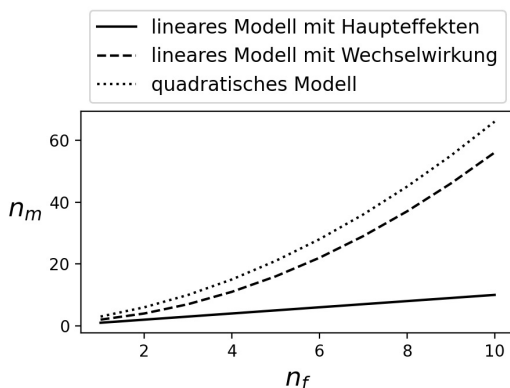


Abbildung 4.4: Vergleich der Anzahl der Modellparameter für ein lineares Modell mit Haupteffekten, ein lineares Modell mit allen Wechselwirkungen und ein quadratisches Modell, in Anlehnung an Schiefer und Schiefer [179, S. 40]

Eine Reihe von Versuchsplänen sind speziell für quadratische Modelle ausgelegt sind. Darunter ist das *Central-Composite-Design* (CCD), das auf einem zweistufigen Versuchsplan aufbaut und in den „Würfel“ einen „Stern“ hineinlegt. Dabei ragen die Spitzen des Sterns über die Grenzen des Würfels hinaus. Ist dies nicht möglich, weil der gegebene Prozess oder das Modell diese Punkte nicht anfahren kann, kann der Versuchsplan auf die Grenzen des Würfels begrenzt werden, sodass sich ein *Face-Centered-Central-Composite-Design* (FCCCD) ergibt. Eine weitere Möglichkeit ist das *Box-Behnken-Design* (BBD). Dabei werden jeweils zwei Faktoren

in allen Kombinationen auf zwei Stufen variiert, während die restlichen Faktoren auf ihren Mittelwerten verbleiben. Dadurch entstehen mehrere „Ringe“ und die Ecken an den Faktorgrenzen werden explizit ausgelassen. Dieses Vorgehen ist immer dann sinnvoll, wenn vermutet wird, dass die Ecken nicht relevant sind oder diese Extreme nicht angesteuert werden können. Das abgeleitete Beschreibungsmodell ist dann in den Ecken jedoch nicht mehr gültig, da es dorthin extrapoliert werden müsste [179]. Abbildung 4.5 zeigt die drei Varianten im Vergleich.

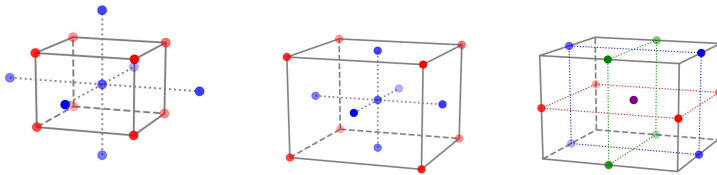


Abbildung 4.5: *Central-Composite-Design* (links), *Face-Centered-Central-Composite-Design* (Mitte) und *Box-Behälter-Design* (rechts)

4.1.3 Nichtlineare, multivariate Beschreibungsmodelle

Um hochgradig nichtlineare Zusammenhänge vieler Faktoren abzubilden, sind per se viele Auswertungen nötig, weshalb solche Ansätze für reale Versuche eher selten eingesetzt werden können. Im Rahmen von CAE-Studien und automatisierten Analyseprozessen können, bei überschaubaren Rechenzeiten jedoch sehr viele Auswertungen durchgeführt werden. In diesen Fällen besteht die Möglichkeit einen Versuchsplan nach dem *Monte-Carlo-Design* (MCD) aufzusetzen. Die Werte werden hier zufällig für jeden Faktor bestimmt, was zu einer schwachen Korrelation führt und ein „*over-fitting*“ ausschließt. Um einen mehrfaktoriellen Entwurfsraum gleichmäßig und umfassend abzubilden, sind jedoch viele

Auswertungen nötig, was den größten Nachteil des MCDs darstellt. Der Erwartungswert des Fehlers geht dabei nur mit $1/\sqrt{n_r} \rightarrow 0$. Für den Fehler auf einem äquidistanten Gitter gilt im Vergleich $1/n_r \rightarrow 0$. Daher existieren *Quasi-Monte-Carlo* Verfahren, die Zwischenräume effizienter füllen, wodurch eine Verbesserung erreicht wird. Eine Variante, den Aufwand um etwa die Hälfte zu reduzieren und die Vorteile beizubehalten, sind *Latin-Hypercube-Designs* (LHDs).[179]

Ein $LHD(n_r, n_f)$ ist zunächst eine Matrix $n_r \times n_f$, bei der jede Spalte eine zufällige Permutation der Zahlen $\{1, 2, 3, \dots, n_r\}$ ist. Dadurch ergibt sich ein Gitter, in dem in jeder „Zeile“ und „Spalte“ genau ein Auswertungspunkt liegt. Basierend auf dieser Matrix kann dann ein *Latin-Hypercube-Sampling* (LHS) erzeugt werden, in dem eine Zufallszahl in dem Bereich $[0, 1)$ von jedem Eintrag abgezogen und durch n_r geteilt wird, wodurch ein normiertes Testfeld entsteht (vgl. (4.3)). Wird die Zufallszahl durch den konstanten Wert 0.5 ersetzt, liegt jeder Punkt in der Mitte des jeweiligen Gitterfelds und es ergibt sich ein *Centered-LHS* (vgl. (4.4)).

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}^{LHD} - rand[0, 1)}{n_r}, \quad x_{ij}^{LHD} \in \{1, 2, 3, \dots, n_r\} \quad (4.3)$$

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}^{LHD} - 0.5}{n_r}, \quad x_{ij}^{LHD} \in \{1, 2, 3, \dots, n_r\} \quad (4.4)$$

Dieses Vorgehen ist sehr effizient, garantiert aber kein gleichmäßiges Abtasten des Entwurfsraums. Es existieren $n_r^{n_f}$ verschiedene LHD-Versuchsfelder, deren Eignung sich unterscheidet. Die Verteilung der Punkte lässt sich daher hinsichtlich verschiedener Kriterien optimieren. Eine Möglichkeit ist der *MinMax*-Ansatz, bei dem der maximale Abstand zwischen den Auswertungspunkten minimiert wird. Weitere Möglichkeiten zur Verbesserung sind *orthogonal array-based Latin Hypercubes* [117][151][200]. Ansätze zur Optimierung speziell für Computer-

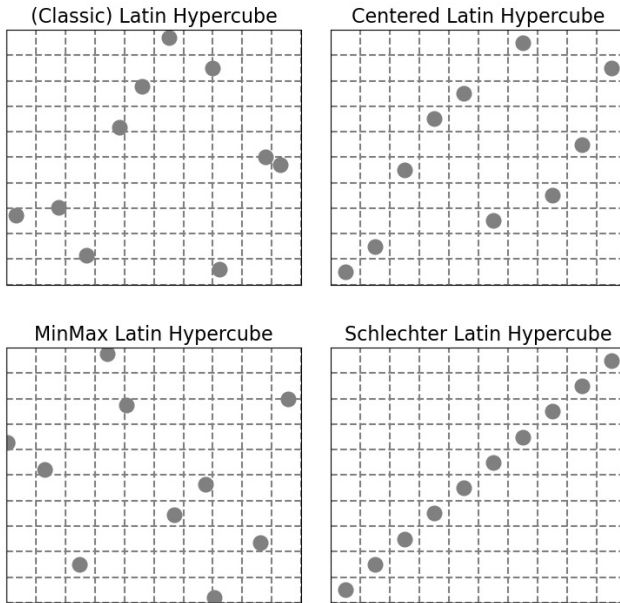


Abbildung 4.6: Beispiele für ein *klassisches*, nach *MinMax* optimiertes, *centered* und *schlechtes* *Latin-Hypercube-Sampling* für $n_f = 2$ und $n_r = 10$

Experimente zeigt Park [153]. Aufgrund der hohen Anzahl an möglichen Entwürfen ist es sehr unwahrscheinlich, ein globales Optimum zu finden, wobei eine Optimierung immer sinnvoll ist. Abbildung 4.6 zeigt einige Beispiele der hier genannten Varianten. Zahlreiche weitere Verfahren erzeugen gleichmäßige und ungleichmäßige, beispielsweise einer Normalverteilung folgende, Versuchsfelder. Sie können abhängig von Ziel und Anwendungsfall eingesetzt werden.

Abschließend bleibt zu erwähnen, dass eine kleinere Anzahl an Auswertungen immer mit einem Verlust an Erkenntnis einhergeht. Dieser Umstand muss dem Anwender bewusst sein. Es gilt die aufgewende-

ten Auswertungen möglichst effizient einzusetzen, um das vorliegende Problem und die darin enthaltenen Zusammenhänge zu beschreiben.

4.2 Lineare Regression

Bei der Regression handelt es sich um statistische Verfahren, deren Hauptziel darin besteht, den Einfluss der Eingangsgrößen auf den Mittelwert der Zielgröße zu beschreiben. Die lineare Regression ist ein Sonderfall. Sie ist dadurch charakterisiert, dass die abhängige Variable durch eine Linearkombination der Regressionskoeffizienten abgebildet wird, und bedeutet nicht, dass nur lineare Funktionen dargestellt werden können. Nichtlineare Funktionen können beispielsweise durch Ansatzfunktionen mit Polynomen n -ten Grades beschrieben werden. Dieses Vorgehen wird als lineare Polynomenregression bezeichnet. Für jede beliebige Ansatzfunktion a gilt jedoch:

$$\hat{f}_R(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^J b_j a_j(\mathbf{p}) \quad (4.5)$$

Zunächst müssen die Regressionskoeffizienten \mathbf{b} des Modells bestimmt werden, wozu verschiedene Verfahren zur Anwendung kommen können. Einer der gängigsten Ansätze ist die *Summe der kleinsten Fehlerquadrate*. Die Gründe hierzu finden sich u. a. in Fahrmeir, Kneib und Lang [66]. Dabei soll \mathbf{b} so gewählt werden, dass $\Delta(\mathbf{b})$ für $\mathbf{b}^* = \arg \min \Delta(\mathbf{b})$ minimal wird. Wobei:

$$\Delta(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i(\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^N \left[f(\mathbf{p}_i) - \hat{f}_R(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) \right]^2 \quad (4.6)$$

Die notwendige Bedingung für die (4.6) minimal wird, lautet:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b_k} \stackrel{!}{=} 0, \quad \forall k = 1(1)J \quad (4.7)$$

Um die Koeffizienten zu berechnen, wird (4.5) in (4.6) eingesetzt, die partielle Ableitung gebildet und durch zwei dividiert. Somit ergibt sich zunächst:

$$\sum_{i=0}^N \left\{ a_k(\mathbf{p}_i) \left[f(\mathbf{p}_i) - \sum_{j=1}^J b_j a_j(\mathbf{p}_i) \right] \right\} = 0. \quad (4.8)$$

Daraus lässt sich mit den Matrizen- bzw. Vektorelementen

$$C_{kj} = \sum_{i=0}^N a_k(\mathbf{p}_i) a_j(\mathbf{p}_i) \quad (4.9)$$

und

$$c_k = \sum_{i=1}^N a_k(\mathbf{p}_i) f(\mathbf{p}_i) \quad (4.10)$$

ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{C}\mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (4.11)$$

bilden, aus dem die unbekanntenen Regressionskoeffizienten \mathbf{b} berechnet werden können [67].

Sind die Regressionskoeffizienten bestimmt, lässt sich die Approximationsfunktion mit der gewählten Ansatzfunktion mittels (4.5) bestimmen. Wie eingangs erwähnt, werden hierzu meist Polynome niedrigen Grades verwendet [80]. Für die einfachsten Fälle eines linearen Polynoms bzw.

eines Polynoms zweiten Grades ergibt sich:

$$\hat{f}_R(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) = b_0 \sum_{j=1}^n b_j p_j \quad (4.12)$$

bzw.

$$\hat{f}_R(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) = b_0 \sum_{j=1}^n b_j p_j + \sum_{j=1}^n b_{j+j} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-j} b_{(2n+l+\sum_{k=1}^{j-1}(n-k))} p_j p_{j+l}. \quad (4.13)$$

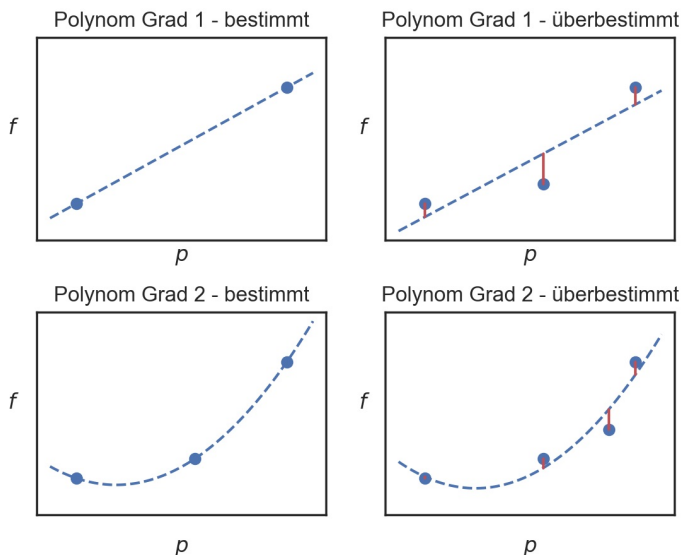


Abbildung 4.7: Vergleich von bestimmten und überbestimmten Regressionen

Um eine Polynomapproximation durchzuführen, müssen für ein lineares Polynom mindestens $N = n_f + 1$ Trainingspunkte und für ein Polynom zweiten Grades mindestens $N = (n_f + 1)(n_f + 2)/2$ Trainingspunkte bekannt sein. Ist nur die Mindestanzahl N an Trainingspunkten gegeben,

interpoliert die Regressionsfunktion \hat{f}_R exakt zwischen den gegebenen Werten $f(\mathbf{p}_i)$. In der Regel ist die Anzahl der Trainingspunkte jedoch größer, sodass mehr Trainingspunkte als Modellkoeffizienten ($J < N$) existieren. Das Gleichungssystem ist somit überbestimmt. Hier zeigt sich der Regressionscharakter des Verfahrens. Die resultierende Approximationsfunktion verläuft im Mittel zwischen bekannten Trainingspunkten. Die Abbildung 4.7 verdeutlicht die Unterschiede und zeigt rot die entstehenden Residuen bei überbestimmten Regressionen.

Zuletzt stellt sich die Frage nach der Approximationsgüte. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 4.8, wie sich die Abbildungsgüte einer Testfunktion für Ansatzfunktionen mit steigendem Polynomgrad verändert. Augenscheinlich wird die Approximation mit höherem Polynomgrad besser. Da in der Praxis eine visuelle Begutachtung in der Regel nicht möglich ist, muss die Güte rechnerisch bewertet werden.

Für Regressionsverfahren ist das Bestimmtheitsmaß R^2 eine Möglichkeit. Es beziffert, wie verlässlich die Schätzung ist und inwieweit die gewählte Ansatzfunktion die gegebenen Trainingspunkte abbildet. Die Werte liegen zwischen $0 < R^2 < 1$, wobei Werte nahe 1 eine sehr gute Approximationsgüte bedeuten. Das Bestimmtheitsmaß berechnet sich mit:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [\hat{f}_R(\mathbf{p}_i) - M_f]^2}{\sum_{i=1}^N [f(\mathbf{p}_i) - M_f]^2} \quad (4.14)$$

wobei

$$M_f = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(\mathbf{p}_i). \quad (4.15)$$

Die Verwendung des Bestimmtheitsmaßes birgt jedoch zwei Probleme. Sind wenige Trainingsdaten vorhanden und somit N nahe J , überschätzt

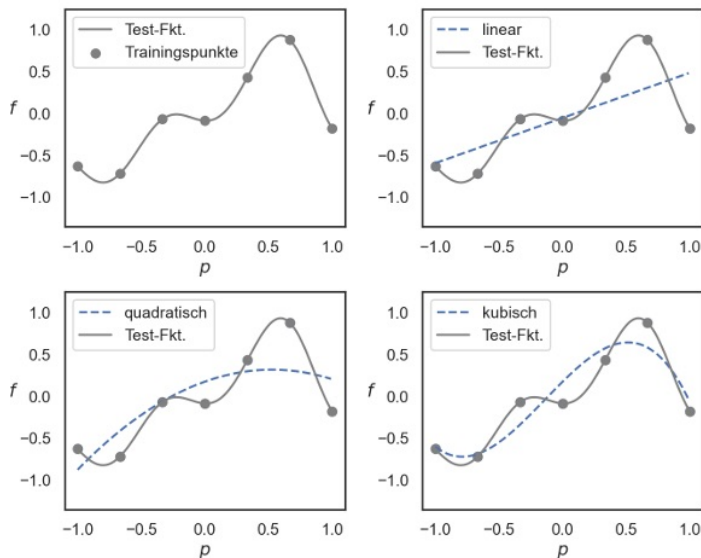


Abbildung 4.8: Lineare Regressionen im Vergleich

das Bestimmtheitsmaß tendenziell die tatsächliche Abbildungsgüte. Ein weiteres Problem entsteht bei dem Vergleich unterschiedlicher Modelle. Durch zusätzliche Kovariablen, das heißt Variablen, die nicht interessant sind und kaum Einfluss auf den abzubildenden Zusammenhang haben, kann das Bestimmtheitsmaß R^2 nur ansteigen. Somit wird das Ergebnis verzerrt. Einer der gängigsten Ansätze, um diesen Effekt zu unterbinden, ist das korrigierte Bestimmtheitsmaß R_{kor}^2 . Es bestraft zusätzliche Regressoren, wodurch das korrigierte Bestimmtheitsmaß auch sinken und negativ werden kann, sofern die zusätzliche Variable nicht ausreichend zu einer besseren Beschreibung der Daten führt. Es berechnet sich mit

$$R_{kor}^2 = R^2 - \frac{J-1}{N-J} (1 - R^2). \quad (4.16)$$

Für die Regressionen in Abbildung 4.8 zeigt Tabelle 4.1 die berechneten Koeffizienten, das Bestimmtheitsmaß und das korrigierte Bestimmtheitsmaß. Dabei wird deutlich, dass beide Bestimmtheitsmaße für Ansatzfunktionen höheren Grades steigen. Die Werte für R^2 suggerieren, dass mit einer linearen Ansatzfunktion etwa 47 % der Daten beschrieben werden; entsprechend 62 % und 86 % mit einer quadratischen bzw. kubischen Ansatzfunktion. Jedoch fällt das korrigierte Bestimmtheitsmaß teilweise deutlich hinter R^2 zurück, insbesondere für die kubische Ansatzfunktion. Dies zeigt, dass auch sie die vorhandenen Daten nicht adäquat erklärt.

Tabelle 4.1: Übersicht: Polynomkoeffizienten, Bestimmtheitsmaß und korrigiertes Bestimmtheitsmaß für Abbildung 4.8

	b_1	b_2	b_3	b_4	R^2	R_{kor}^2
$J = 2$ (linear)	-0.050	0.540			0.479	0.375
$J = 3$ (quadratisch)	0.177	0.540	-0.512		0.623	0.434
$J = 4$ (kubisch)	0.177	1.501	-0.512	-1.235	0.862	0.485

Fahrmeir, Kneib und Lang [66] erkennen den Umstand an, dass das korrigierte Bestimmtheitsmaß eine der meistgewählten Methoden ist, raten davon jedoch ab. Ihrer Auffassung nach ist die „Bestrafung“ neu aufgenommener Kovariablen zu gering. Sie empfehlen stattdessen den *Mallows' Complexity Parameter*, das *Informationskriterium nach Akaike* oder die *Kreuzvalidierung*. Letztere wird im folgenden Abschnitt näher erläutert [67][66].

4.3 Radiale Basisfunktion

Radiale Basisfunktionen sind reelle Funktionen, deren Funktionswert nur vom Abstand zu ihrem Ursprung abhängt, sodass $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ gilt. Die Bezeichnung „radial“ entspringt diesem Umstand, da die Funktionen definitionsgemäß radialsymmetrisch sind. Als Norm $\|\cdot\|$ wird

typischerweise die euklidische Norm genutzt. Im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum ist die euklidische Norm die anschauliche Länge eines Vektors bzw. der Abstand zweier Punkte zueinander. Sie lässt sich über den Satz des Pythagoras berechnen. Die euklidische Norm gilt jedoch allgemeiner, auch für höherdimensionale Räume und nicht orthogonale Vektoren, weshalb sie in diesem Kontext gern verwendet wird. Allgemeiner lässt sich für eine radiale Basisfunktion (RBF) der Abstand zum Zentrum c betrachten, sodass $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|)$ folgt. Um eine unbekannte Funktion zu approximieren, werden mehrere radiale Funktionen übereinandergelegt. Sie bilden somit die Basis der Approximation dar, daher der Begriff der Basisfunktion. Konkret geschieht dies durch

$$f(\mathbf{p}) \approx \hat{f}_B(\mathbf{b}, \mathbf{p}) = \sum_{j=0}^J b_j \varphi(\|\mathbf{p} - \mathbf{c}_j\|). \quad (4.17)$$

Die bekannten Trainingspunkte stellen hier die Zentren \mathbf{c} der radialen Basisfunktionen dar. Als Ansatzfunktionen a für φ werden in der Regel einfache Funktionen verwendet, wie

$$a(x) = x \text{ (linear)}$$

$$a(x) = x^3 \text{ (kubisch)}$$

$$a(x) = \exp(-\theta x^2) \text{ mit } 0 < \theta \text{ (gaußsche)}$$

$$a(x) = \sqrt{1 + \theta x^2} \text{ (multiquadric)}$$

Die Approximation wird, wie zuvor bei der Regression, aus einer Linearkombination von unbekanntem Koeffizienten b_j und der Ansatzfunktion gebildet. Anders als die Regression zuvor sind radiale Basisfunktionen ein interpolierendes Verfahren. Die Anzahl der unbekanntem Koeffizienten J stimmt hier immer mit der Anzahl der Trainingspunkte N überein und die Approximationsfunktion ist an den Trainingsstellen exakt. Als

Interpolationsforderung ergibt sich somit

$$f(\mathbf{p}_i) = \hat{f}_B(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^N b_j a(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}_j\|) \quad , \quad \forall i = 1(1)N \quad . \quad (4.18)$$

Mit den Matrizen- und Vektorelementen

$$C_{ij} = a(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}_j\|) \quad , \quad \forall i, j = 1(1)N \quad (4.19)$$

$$\mathbf{c}_i = f(\mathbf{p}_i) \quad (4.20)$$

lässt sich wieder ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{C}\mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (4.21)$$

aufstellen, aus dem die unbekanntenen Koeffizienten $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_N]^T$ berechnet werden können. Abbildung 4.9 zeigt die resultierende RBF-Approximation für die Testfunktion (4.2) mit $N = 7$ Trainingspunkten und der *multiquadric* Ansatzfunktion. Im unteren Teil sind die einzelnen RBFs abgebildet, aus denen sich die resultierende Approximation zusammensetzt. Da $J = N$ ist, ergeben sich in diesem Fall sieben einzelne RBFs mit den Zentren an den jeweiligen Stellen der Trainingspunkte.

Abbildung 4.10 zeigt einen Vergleich der zuvor erwähnten Ansatzfunktionen für $p \in \mathbb{R}^1$. Mit der linearen Ansatzfunktion ergibt sich ein interpolierender Polygonzug, der die Funktion zumindest im Trend korrekt wiedergibt. Mithilfe der kubischen und multiquadric Ansatzfunktionen wird die Testfunktion bereits deutlich besser abgebildet und es lassen sich nur leichte Unterschiede erkennen. Die gaußsche Ansatzfunktion liefert ebenfalls ein gutes Ergebnis. Sie zeigt jedoch im Bereich $-1.0 < p < -0.7$ eine starke Abweichung in Form eines Überschwingens.

Augenscheinlich liefert die multiquadric Ansatzfunktion hier das beste Ergebnis. Um die Abbildungsgüte rechnerisch zu bewerten, kann hier

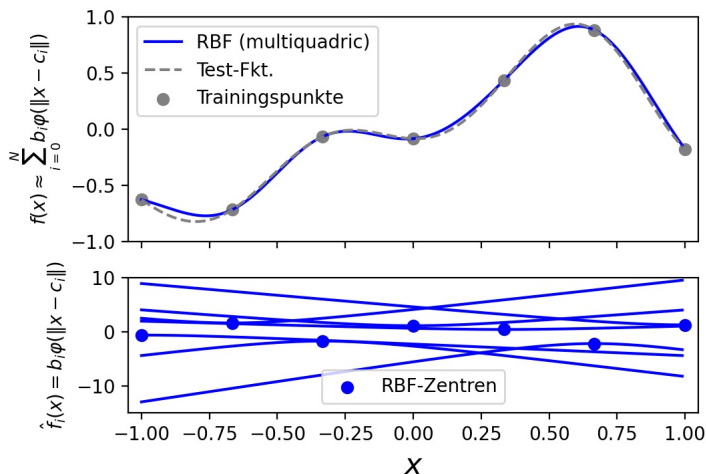


Abbildung 4.9: Radiale Basisfunktionen im Detail

das zuvor eingeführte Bestimmtheitsmaß jedoch nicht verwendet werden. Da die radialen Basisfunktionen ein interpolierendes Verfahren sind und die Approximation somit an den bekannten Trainingsstellen exakt ist, ergibt sich immer $R^2 = 1$. Es wäre denkbar, weitere Punkte zu berechnen und die Approximationsfunktion an diesen Stellen zu vergleichen. Hierfür ist jedoch weiterer Rechenaufwand nötig, was besonders für lange Rechenzeiten unattraktiv erscheint. Alternativ könnten zu Beginn nicht alle Trainingspunkte für die Approximation verwendet werden, um dann die verbliebenen Punkte als Testpunkte zu nutzen. Dieses Vorgehen erscheint jedoch ähnlich ineffizient. Zum anderen ist unklar, inwiefern sich die Approximationsgüte durch die zuvor intuitiv ausgewählten, weggelassenen Testpunkte verschlechtert.

Neben anderen Verfahren empfehlen Fahrmeir, Kneib und Lang [66] die Kreuzvalidierung (engl. *Cross Validation*) als effizientes Vorgehen, um die Approximationsgüte interpolierender Verfahren zu bewerten. Die

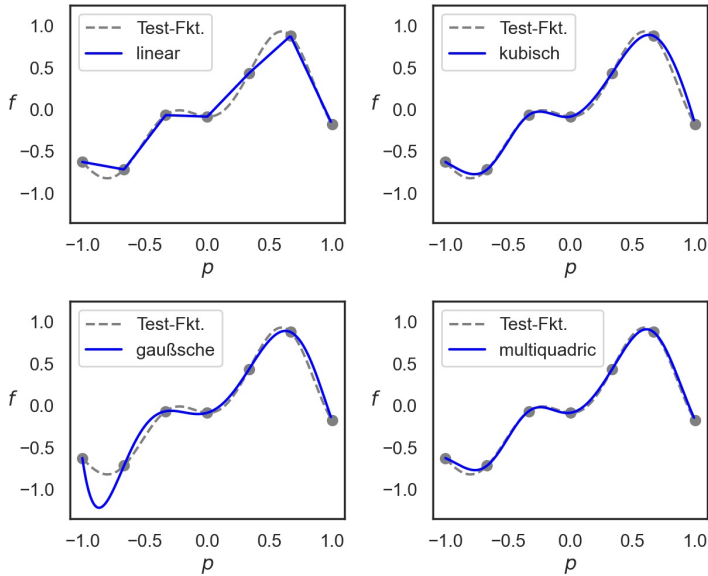


Abbildung 4.10: Radiale Basisfunktionen im Vergleich

allgemeine Vorgehensweise gliedert sich in vier Schritte:

- Zerlegen des Datensatzes in K Teildatensätze $(1, \dots, K)$ etwa gleicher Größe
- Verwenden des ersten Teildatensatzes als Testpunkte und Approximation mittels der verbliebenen $K - 1$ Teildatensätze; anschließend Berechnung und Aufsummierung der quadrierten Prognosefehler
- Wiederholung des vorherigen Schritts für den zweiten, dritten, ... K -ten Teildatensatz
- Verwendung des Modells mit den geringsten quadrierten Fehlern und endgültige Parameterschätzung mit allen vorhandenen Trainingspunkten; das Zerlegen in Test- und Trainingspunkte dient nur dazu, den erwarteten quadrierten Prognosefehler zu schätzen.

Ein wichtiger Spezialfall ist die *Leave-one-out*-Kreuzvalidierung. Dabei wird prinzipiell identisch vorgegangen, jedoch wird in jedem Schritt nur ein einzelner Trainingspunkt entfernt und alle übrigen für die Vorhersage des eben entfernten Punktes verwendet. Mit dem *Leave-one-out*-Schätzer \hat{y}_{iM}^{-i} kann die Kreuzvalidierungsfunktion

$$CV = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (y_i - (\hat{y}_{iM})^{-i})^2 \quad (4.22)$$

gebildet werden. Hierzu muss der kleinste Quadrate-Schätzer N -mal berechnet werden, jeweils einmal für jeden Punkt, der entfernt wurde. Fahrmeir, Kneib und Lang [66] weisen jedoch darauf hin, dass CV unter Zuhilfenahme einer auf allen Punkten basierenden Schätzung \hat{y}_{iM} berechnet werden kann. Es gilt

$$CV = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \hat{y}_{iM}}{1 - h_{iiM}} \right)^2, \quad (4.23)$$

wobei h_{iiM} die Diagonalelemente der Prädiktionsmatrix

$$\mathbf{H}_M = \mathbf{X}_M (\mathbf{X}'_M \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'_M \quad (4.24)$$

sind. Flassig [67] beschreibt in seiner Arbeit ein anderes Verfahren. Er verwendet ebenfalls die *Leave-one-out*-Kreuzvalidierung, nutzt als statistischen Messwert für die mittlere Abweichung jedoch den *Pearsonschen* Korrelationskoeffizienten ρ_P^{CV} bzw. dessen Schätzer mit

$$\rho_{P,ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}} \in [-1, 1] \quad (4.25)$$

$$\rho_P^{CV} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{f}_{B,i}(\mathbf{p}_i) - M_{\hat{f}}) (f(\mathbf{p}_i) - M_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{f}_{B,i}(\mathbf{p}_i) - M_{\hat{f}})^2 (f(\mathbf{p}_i) - M_f)^2}} \quad (4.26)$$

wobei:

$M_{\hat{f}}, M_f$ – arithmetische Mittel von $\hat{f}_{B,i}(\mathbf{p}_i, \theta)$, $f(\mathbf{p}_i)$ nach (4.15).

Je geringer die betragsmäßige Abweichung im Mittel ist, das heißt je besser die Approximation ist, desto größer wird ρ_P^{CV} . Wie eingangs dieses Kapitels erwähnt, kann nach ihrer Bewertung versucht werden, die Approximationsgüte zu steigern, indem etwaige Modellparameter angepasst werden. Ein solcher Parameter ist der zu Beginn dieses Abschnitts erwähnte Formparameter θ . Da dieser auf die gaußsche Ansatzfunktion den größten Einfluss hat, soll er für diese Ansatzfunktion so angepasst werden, dass ρ_P^{CV} maximal wird. Es ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\theta^{opt,\rho} = \arg \max_{\theta^u \leq \theta \leq \theta^o} \rho_P^{CV}(\theta). \quad (4.27)$$

Keine weiteren Punkte für die Bewertung der Abbildungsgüte berechnen zu müssen, stellt zweifellos einen großen Vorteil der Kreuzvalidierung dar. Den Formparameter θ über die Kreuzvalidierung und den *Pearsonschen* Korrelationskoeffizienten zu bestimmen, hat jedoch auch Nachteile. Die Abbildungsgüte wird hier nur indirekt verbessert. Ein hoher Wert für ρ_P^{CV} zeugt nur von einer großen Robustheit gegenüber dem Entfernen von einzelnen Trainingspunkten. Werden zusätzliche Testpunkte \mathbf{p}_t erzeugt, können die Fehlerquadrate direkt minimiert werden. Es gilt dann

$$\epsilon^* = \sum_{i=0}^N \sqrt{\hat{f}_B(\mathbf{p}_{t,i}, \theta)^2 - f(\mathbf{p}_{t,i})^2} \quad (4.28)$$

woraus sich das Optimierungsproblem

$$\theta^{*,tpf} = \arg \min_{\theta^u \leq \theta \leq \theta^o} \epsilon^{tpf} \quad (4.29)$$

ergibt. Abbildung 4.11 zeigt einen Vergleich zwischen drei Approximationsfunktionen: mit einem willkürlich gewählten Formparameter $\theta = 0.5$, mit dem für die Kreuzvalidierung und dem *Pearsonschen* Korrelations-

koeffizienten optimierten Formparameter $\theta^{*,\rho} = 0.7$ und schließlich mit einem für die minimalen Fehlerquadrate optimierten Formparameter $\theta^{*,tpf} = 1.65$. Es wird deutlich, dass $\theta = \theta^{*,\rho}$ zu einer Verbesserung der Abbildungsgüte im Vergleich zum willkürlichen gewählten Formparameter führt. Erwartungsgemäß werden hier auch die besten Kreuzvalidierungsergebnisse erzielt, nicht jedoch der beste Fit. Der beste Fit wurde mit $\theta = \theta^{*,tpf}$ erreicht, obwohl dieser zu den schlechtesten Kreuzvalidierungsergebnissen führt.

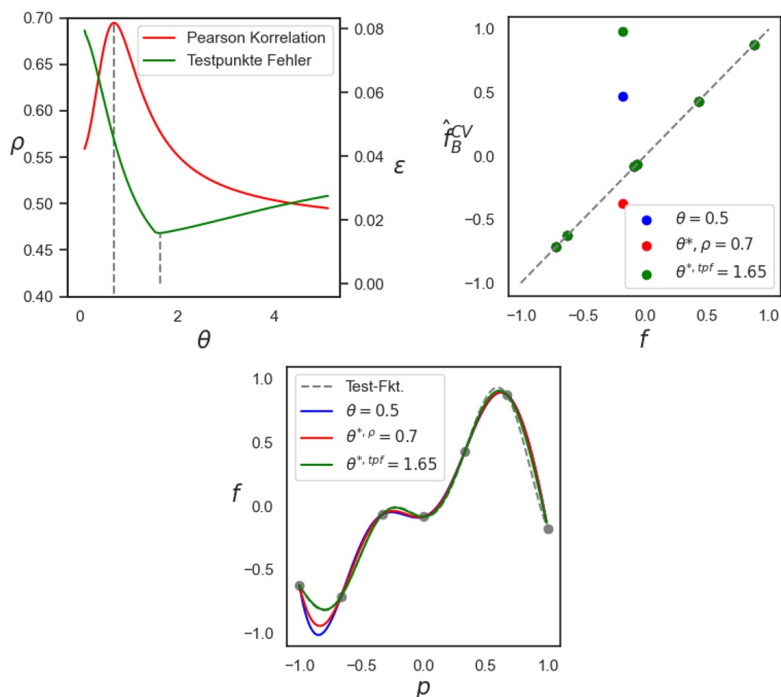


Abbildung 4.11: Optimierung des Formfaktors θ für die *multiquadric* Ansatzfunktion mit: Zielfunktionen für die Optimierungen $\rho_P^{CV}(\theta)$ und $\epsilon^{tpf}(\theta)$ (links), den resultierenden Approximationsfunktionen (Mitte) und den Kreuzvalidierungsergebnissen (rechts)

Neben der Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion und der Optimierung des Formparameters bestehen noch weitere Möglichkeiten zur Verbesserung der Abbildungsgüte. Ein gängiger Ansatz ist die Kombination aus linearer Regression und radialen Basisfunktionen. Hierbei werden zunächst eine lineare Regression entsprechend Abschnitt 4.2 aufgebaut und die Residuen mit

$$\Delta f(\mathbf{p}_i) = f(\mathbf{p}_i) - \hat{f}_R(\mathbf{p}_i) \quad (4.30)$$

berechnet.³ Anschließend wird eine Approximation für Δf mithilfe der radialen Basisfunktionen durchgeführt. Es wird entsprechend (4.21) mit (4.19) und $c_i = \Delta f(\mathbf{p}_i)$ wieder ein lineares Gleichungssystem gelöst, um die Koeffizienten b_i zu bestimmen. Ein weiteres Vorgehen basiert auf der Idee, dass unter der Vorgabe von Nebenbedingungen ein Gesamtgleichungssystem aufgestellt wird, aus dem die Regressionskoeffizienten der linearen Regression und die Wichtungskoeffizienten der radialen Basisfunktionen gleichzeitig berechnet werden können [26][33][67].

4.4 Kriging

Kriging (englisch oft: *Gaussian process* [99]) ist ein statistisches Approximationsverfahren zur Vorhersage unbekannter Funktionen $f(\mathbf{p})$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, das ebenfalls auf Trainingsdaten $f(\mathbf{p}_i)$, $i = 1(1)N$ basiert. Ursprünglich stammt der Ansatz aus dem Gebiet der Geostatistik und wurde dort genutzt, um auf Basis von vorherigen, unregelmäßig verteilten Bohrproben Erzkonzentrationen vorherzusagen [45]. Der zentrale Unterschied der Kriging-Approximation besteht darin, dass, um bei diesem Beispiel zu bleiben, die Differenzen der Erzkonzentration nicht als unabhängig aufgefasst werden, sondern als korrelierte Fehler.

³Anm.: Hierzu wären keine weiteren Testpunkte nötig.

Diese Überlegung erscheint sehr naheliegend, da es sich bei der Erzkonzentration um eine statistische Verteilungsgröße handelt. Es erscheint jedoch widersprüchlich, ein statistisches Verfahren für die Vorhersage von rein deterministischen Größen zu verwenden. Die berechnete Durchbiegung eines Balkens unter einer Last in Abhängigkeit seines Querschnitts unterliegt keiner statistischen Verteilung. Die Ergebnisse sind wiederholbar und identisch, wodurch sich der Fehler $\epsilon(\mathbf{p})$ aus Gleichung (4.1) allein aus der Güte des Antwortflächenmodells ergibt. Ein statistisches Verfahren bietet dennoch einige Vorteile, weil es in der Lage ist, statistische Messgrößen bereitzustellen. Die Unsicherheit kann somit quantifiziert werden und liefert Informationen über die Güte der Vorhersage und ggf. über Stellen im Modell, an denen weitere Trainingsdaten benötigt werden. Das Vorgehen wird dann auch als Entwurf und Analyse von Computerexperimenten (englisch: *Design and Analysis of Computer Experiments*, DACE) bezeichnet [24].

Das Kriging-Verfahren basiert auf folgender Überlegung: Soll an der Stelle \mathbf{p}_i der Funktionswert $f(\mathbf{p}_i)$ vorhergesagt werden und sind keine Trainingsdaten vorhanden, so ist die Vorhersage unsicher. Die Unsicherheit könnte über einen normalverteilten Zufallsprozess mit einem Mittelwert μ und einer Standardabweichung σ beschrieben werden. Somit ist es möglich ein Intervall anzugeben, in dem der tatsächliche Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Die erwähnte Korrelation der Größen zeigt sich dann in folgender Annahme: Soll an einem weiteren Punkt \mathbf{p}_j der Funktionswert $f(\mathbf{p}_j)$ vorhergesagt werden, so liegen die Funktionswerte umso näher beieinander, je näher die beiden Punkte aneinander liegen. Somit ist $f(\mathbf{p}_i) \approx f(\mathbf{p}_j)$ wenn $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$ klein ist. Die Korrelation der Schätzungen ist somit entfernungsabhängig. Sie ist umso größer, je näher die Punkte beieinander sind und nimmt mit wachsender Entfernung ab. Für $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j$ ist sie eins und für $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \rightarrow \infty$ ist sie null. Die Stärke der Korrelation kann dann mit der Gaußschen

Normalverteilung wie folgt definiert werden [94]:

$$\rho_{i,j} = \exp\left(\sum_{k=1}^n -b_k(p_{k,i} - p_{k,j})^2\right), \quad i, j = 1(1)N. \quad (4.31)$$

Die verfahrensspezifischen Modellparameter b_k , $k = 1(1)n$ beschreiben die Stärke der Korrelation in jede Richtung und somit den Einfluss eines Parameters p_k auf die Funktion f . Weitere Korrelationsansätze finden sich etwa bei Keane und Nair [99] und sehr detailliert in Duvenaud [61]. Die Kriging-Verfahren lassen sich in einzelne Spezialfälle kategorisieren. Die meisten unterscheiden sich in der Formulierung des Erwartungswerts μ , wie er im ursprünglichen Beispiel beschrieben wurde. Gängige Varianten sind:

- einfaches (englisch: *simple*) Kriging, wo der Erwartungswert $EY(x) = \mu(x)$ konstant und bekannt ist, sodass $\mu(x) = \mu$
- gewöhnliches (englisch: *ordinary*) Kriging, wo der Erwartungswert $\mu(x)$ konstant aber unbekannt ist und somit geschätzt werden muss
- universelles (englisch: *universal*) Kriging, wo der Erwartungswert $\mu(x)$ nicht konstant ist und über einen linearen Polynomenregressionsansatz (siehe Abschnitt 4.2) variiert wird und die Regressionsparameter ebenfalls geschätzt werden [131]

Für den Fall des gewöhnlichen Krigings mit konstantem μ als Mittelwert eines stochastischen Prozesses und einer der Gaußschen Normalverteilung entsprechenden Zufallsgröße $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ ergibt sich die Approximation mit

$$\hat{f}_K(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mu, \sigma) = \mu + Z(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \sigma) \quad (4.32)$$

und

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{R} \quad (4.33)$$

wobei:

- \hat{f} – Approximationsfunktion / Antwortflächenmodell
- \mathbf{R} – Korrelationsmatrix mit den Einträgen aus (4.31)
- σ^2 – Prozessvarianz
- Σ – Kovarianzmatrix

Wie bei den vorher beschriebenen Verfahren müssen zunächst die unbekanntes modellspezifischen Parameter, hier μ, σ und b_k , $k = 1(1)n$ mithilfe von Trainingsdaten $f(\mathbf{p}_i)$, $i = 1(1)N$ bestimmt werden. Prinzipiell könnte dies wie in Abschnitt 4.3 über eine Kreuzvalidierung und den Korrelationskoeffizienten ρ_P^{CV} oder über zusätzliche Testdatenpunkte und einer Minimierung der Fehlerquadrate geschehen. Diese werden später auch für einen Vergleich herangezogen. Die Annahme, dass die Funktionswerte $f(\mathbf{p}_i)$ die Realisierung eines Gaußschen Prozesses sind, eröffnet jedoch auch die Möglichkeit, statistischen Schätzverfahren zu verwenden. Hierzu wird zunächst eine N -dimensionale, normalverteilte Dichtefunktion formuliert.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\sigma^2 \mathbf{R})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mu \mathbf{1})^T (\sigma^2 \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y} - \mu \mathbf{1}) \right] \quad (4.34)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= [1, \dots, 1]^T, \\ \mathbf{y} &= [f(\mathbf{p}_1), \dots, f(\mathbf{p}_N)]^T. \end{aligned}$$

Die Parameter können dann mit einem universellen statistischen Schätzverfahren wie der *Maximum-Likelihood*-Methode über

$$[\mu, \sigma, \mathbf{b}^T]^T = \arg \max_{\mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma, \mathbf{0} < \mathbf{b}} \ln L(\mu, \sigma, \mathbf{b}) \quad (4.35)$$

und mit der Loglikelihood-Funktion $\ln L(\mu, \sigma, \mathbf{b}) = \ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ bestimmt werden. Werden die *Maximum-Likelihood*-Schätzer

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.36)$$

und

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \hat{\mu} \mathbf{1})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\mu} \mathbf{1})}{N} \quad (4.37)$$

in (4.34) eingesetzt, ergibt sich die reduzierte Loglikelihood-Funktion

$$\ln L_{red}(\mathbf{b}) = -\frac{N}{2} \ln(\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{2} \ln(\det \mathbf{R}), \quad (4.38)$$

die nur noch von der Korrelationsmatrix \mathbf{R} bzw. dem darin enthaltenen Parametervektor \mathbf{b} abhängt. Somit kann ein Optimierungsproblem formuliert werden, das die optimalen Parameter $\hat{\mathbf{b}}$ sucht, für die (4.38) maximal wird. Mit den optimierten Parametern $\hat{\mathbf{b}}$ sind dann auch die Parameter $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ bekannt. Eine detaillierte Herleitung hierzu findet sich u.a. in Flassig [67].

Um den Funktionswert an einem gewünschten Punkt \mathbf{p} nun zu approximieren, wird eine erweiterte Loglikelihood-Funktion aufgestellt, die $f(\mathbf{p})$ als weitere „Pseudo“-Trainingsstelle enthält. Die Funktion

$$\hat{f}_K(\mathbf{p}) = \hat{\mu} + \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\mu} \mathbf{1}) \quad (4.39)$$

hängt nur noch von $f(\mathbf{p})$ ab und wird mit

$$r_i = \exp \sum_{k=1}^n -b_k (p_k^i - p_k)^2, \quad i = 1(1)N \quad (4.40)$$

maximal, wodurch sich für jeden Punkt \mathbf{p} die beste Schätzung $\hat{f}_K(\mathbf{p})$ ergibt. Auch hier bietet Flassig [67] detailliertere Informationen.

Wie im vorherigen Abschnitt soll auch hier der Einfluss der Modellparameter anhand einer eindimensionalen Testfunktion gezeigt werden.

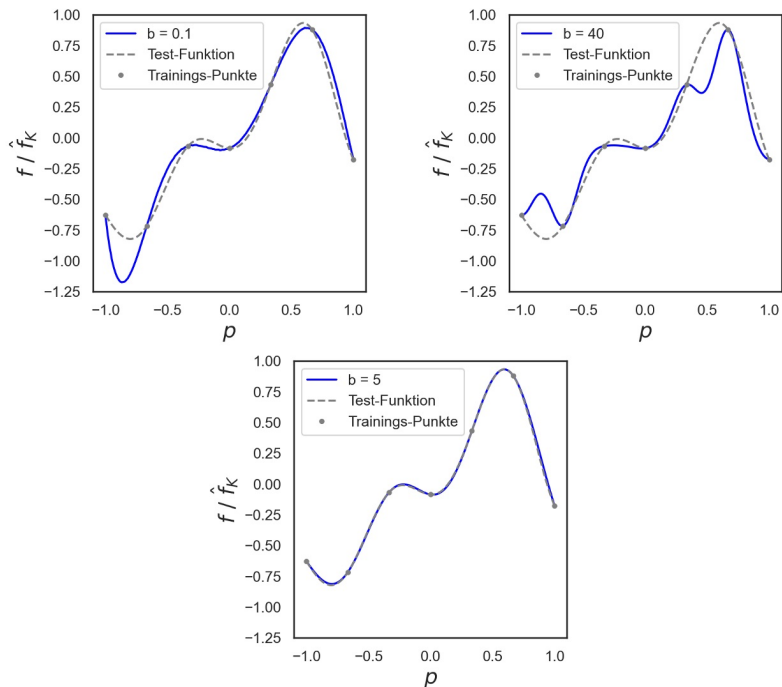


Abbildung 4.12: Kriging-Approximation $\hat{f}_K(p)$ einer eindimensionalen Funktion $f(p)$ auf Basis von sieben Trainingspunkten p_i mit $b = 0.1$ (links), $b = 5$ (Mitte) und $b = 40$ (rechts)

In Abbildung 4.12 werden drei gewöhnliche Kriging-Approximationen anhand von sieben Trainingsstellen der Testfunktion berechnet. Für sehr kleine b klingt die Korrelationsfunktion sehr langsam ab und es kann zu Überschwingern kommen, wie hier zwischen dem ersten und zweiten Trainingspunkt am linken Rand. Für sehr große b klingt die Korrelationsfunktion sehr schnell ab und die Approximation zwischen den Trainingspunkten tendiert sofort gegen den Mittelwert $\hat{\mu}$, wodurch die Funktion stark schwingt. Für $b = 5$ zeigt sich eine sehr gute Vorhersage, da der Korrelationsfaktor hier bereits sehr nah an den optimierten Werten liegt.

Um die Formparameter zu optimieren, kann wie im vorangegangenen Abschnitt eine Kreuzvalidierung mit der Pearsonkorrelation aus (4.26) und dem Optimierungsproblem in (4.27) durchgeführt werden. Die Möglichkeit, weitere Testpunkte zu generieren und die Approximationsgüte über (4.28) zu berechnen und über (4.29) zu optimieren, besteht in jedem Fall. Schließlich verbleibt noch die zuvor beschriebene *Maximum-Likelihood*-Methode mittels (4.38) und (4.35). Abbildung 4.13 zeigt einen Vergleich von allen drei Optimierungsansätzen gegenüber einer Approximation mit einem frei gewählten Wert von $b = 1$ und gegenüber der Testfunktion.

Der frei gewählte Wert von $b = 1$ liefert hier das schlechteste Ergebnis, mit einem deutlichen Überschwingen zwischen dem ersten und zweiten Trainingspunkt. Die Maximierung des *Pearson*-Korrelationskoeffizienten führt zu einem Wert von $b^{\rho_{CV}} = 1.95$ und zu einem geringeren Überschwingen und einer allgemein besseren Approximation. Deutlich besser ist jedoch die Minimierung der Fehlquadrate zu den Testpunkten. Hier ergab sich ein Wert von $b^{t_{PF}} = 7.05$, der zu einer Approximation führt die kaum noch von der Testfunktion zu unterscheiden ist. Über die *Maximum-Likelihood*-Methode ergab sich ein Wert von $b^{LML} = 6.35$, der auch eine hervorragende Approximation bewirkt, ohne dass zusätzliche Testpunkte berechnet werden mussten. Daher ist dieser Ansatz hier zu

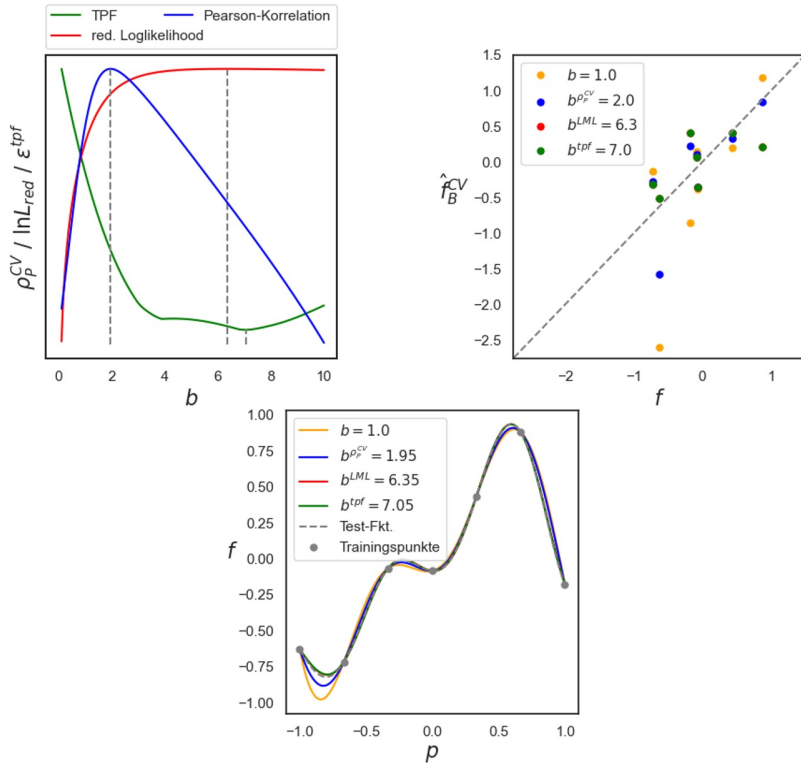


Abbildung 4.13: Optimierung des Modellparameters b mit: Zielfunktionen für die Optimierung $\rho_P^{CV}(b)$, $\epsilon^{tpf}(b)$ und $\ln L_{red}(b)$ (links), den resultierenden Approximationsfunktionen (Mitte) und den Kreuzvalidierungsergebnissen (rechts)

favorisieren. Die *Maximum-Likelihood*-Methode ist nicht nur in diesem Beispiel sehr effektiv, sondern ein allgemein beliebter Ansatz. Martin und Simpson [132] empfehlen ihre Verwendung, da sie global am ehesten zur Schätzung der Modellparameter geeignet ist. Bei monotonen Funktionen mit konstantem Trend kann ihrer Aussage nach jedoch die Kreuzvalidierung von Vorteil sein.

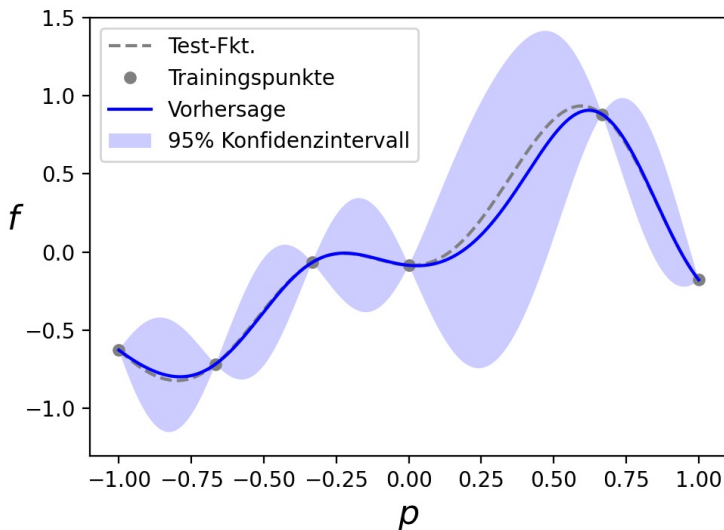


Abbildung 4.14: Kriging-Approximation und die Vorhersageunsicherheit mit einem Konfidenzintervall von 95 %

Wie eingangs erwähnt, besteht ein Vorteil eines statistischen Verfahrens zur Beschreibung eines deterministischen Zusammenhangs darin, spezifische Konfidenzintervalle angeben zu können bzw. eine Vorhersagegenauigkeit in Form einer mittleren quadratischen Abweichung an

der Stelle \mathbf{p} mit

$$\hat{\sigma}_K(\mathbf{p}) = \hat{\sigma} \left[1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r})^2}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}} \right]^{1/2} \quad (4.41)$$

zu quantifizieren [73]. Die entsprechende Herleitung bietet Flassig [67]. In Abbildung 4.14 wird dieser Vorteil illustriert. Sie zeigt eine Kriging-Approximation $\hat{f}_K(\mathbf{p})$ und den Bereich, in dem die Funktion $f(\mathbf{p})$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt. Für das Beispiel wurde eine Trainingsstelle entfernt und das Konfidenzintervall wird in dem Bereich deutlich größer. Im Umkehrschluss zeigt das große Intervall, dass an dieser Stelle weitere Trainingsdaten benötigt werden, um die Vorhersagegenauigkeit zu verbessern [67].

4.5 Antwortflächenverfahren im Vergleich

Nachdem drei Verfahren für die Approximation von nichtlinearen, deterministischen Funktionen aus Simulationsmodellen vorgestellt wurden, sollen diese hinsichtlich ihrer Effizienz und Approximationsgüte verglichen werden, um eine fundierte Entscheidung zur Wahl des richtigen Verfahrens für eine gegebene Anwendung treffen zu können. Der Fehler $\epsilon(\mathbf{p})$ aus Gleichung (4.1) kann prinzipiell durch das Bereitstellen von mehr Trainingsdaten oder durch eine Erhöhung der Modellkomplexität reduziert werden. Die Anzahl der Trainingsdaten zu erhöhen, ist in vielen praktischen Anwendungsfällen jedoch sehr kostenintensiv. Es muss daher eine Abwägungsentscheidung getroffen werden und auf Basis einer realistisch umsetzbaren Trainingsdatenanzahl N ist ein geeignetes Verfahren zu wählen.

Um die Approximationsgüte der unterschiedlichen Verfahren zu quantifizieren, wird, anders zu der bisher verwendeten Testfunktion (4.2), die komplexere, zweidimensionale *Branin*-Funktion verwendet. Sie ist seit

Langem eine beliebige Testfunktion und wird häufig für Untersuchungen von Sampling-Methoden und Antwortflächen verwendet. Einige Beispiele finden sich in [93][95][154].

$$f(\mathbf{p}) = a(p_2 - bp_1^2 + cp_1 - r)^2 + s(1 - t) \cos(p_1) + s \quad (4.42)$$

wobei:

$$a = 1, \quad b = \frac{5.1}{4\pi^2}, \quad c = \frac{5}{\pi}, \quad r = 6, \quad s = 10, \quad t = \frac{1}{8\pi}$$

Betrachtet wird der Bereich $-5 \leq p_1 \leq 10$ und $0 \leq p_2 \leq 15$. Die Abbildung 4.15 zeigt die *Branin*-Testfunktion (oben links) und ihre jeweiligen Approximationen auf Basis von $N = 30$ Trainingspunkten mittels einer linearen Regression und quadratischer Ansatzfunktion (oben rechts), radiale Basisfunktionen mit der *multiquadric* Ansatzfunktion (unten links) und dem Kriging-Verfahren (unten rechts). Die Trainingsdaten wurden zufällig mithilfe eines LHS generiert, dementsprechend sind auch die resultierenden Approximationsmodelle zufällig. Die Abbildung zeigt nur ein Ergebnis für eine einzelne Verteilung von LHS-Trainingspunkten. Augenscheinlich liefert die Polynomenregression hier das schlechteste Ergebnis. Das Kriging-Verfahren bietet bessere Resultate und die Vorhersage der radialen Basisfunktionen lässt die Branin-Funktion bereits gut erkennen.

Um eine allgemeine Aussage über die Eignung eines Verfahrens zur Vorhersage einer Funktion $f(\mathbf{p})$ treffen zu können, sollten zwei Aspekte beachtet werden: Werden die Trainingspunkte mithilfe eines *Latin-Hypercube-Samplings* erstellt und sind somit zufällig, reicht es nicht aus, den Fehler ϵ auf Basis dieser einzelnen Vorhersage zu quantifizieren. Es sollte der mittlere Fehler, der über K LHS-Varianten entsteht, betrachtet werden. Anschließend muss entschieden werden, wo der Fehler in den Blick genommen wird. Abhängig von Problem und Anwendungsfall kann es ausreichend sein, den Fehler in einem kleinen Bereich zu betrachten und dort zu minimieren. In anderen Fällen muss die Vorhersage im ge-

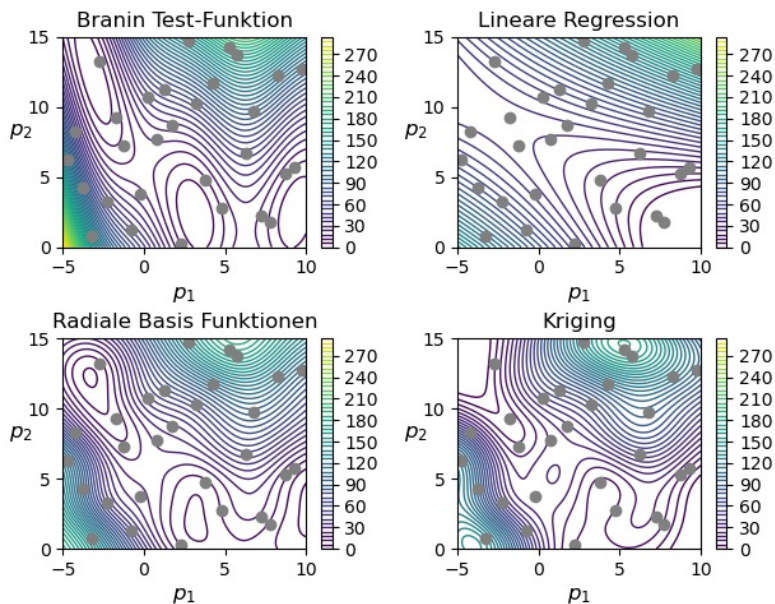


Abbildung 4.15: Approximationen der *Branin*-Test-Funktion (oben links) mit $N = 30$ Trainingspunkten mithilfe einer quadratischen Polynomenregression \hat{f}_R (oben rechts), von radialen Basisfunktionen und der *multiquadric* Ansatzfunktion \hat{f}_B (unten links) und dem Kriging-Verfahren \hat{f}_K (unten rechts)

samten Parameterraum hinreichend gut ausfallen. Für den folgenden Teil dieser Arbeit ist es wichtig, den Fehler im gesamten Parameterraum zu minimieren. Daher wird der relative Fehler hier auf einem äquidistanten Gitter mit $G = 30$ Unterteilungen für jede Iteration mittels

$$\epsilon_k = \frac{1}{G^2} \sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^G \left| \frac{\hat{f}(\mathbf{p}_{i,j}) - f(\mathbf{p}_{i,j})}{f(\mathbf{p}_{i,j})} \right| \quad (4.43)$$

bestimmt. Über $K = 40$ Wiederholungen kann der mittlere relative

Fehler M_ϵ dann mit

$$M_\epsilon = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \epsilon_k \quad (4.44)$$

berechnet werden. Darüber hinaus kann auch die Standardabweichung der relativen Fehler S_ϵ mit

$$S_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\epsilon_k - M)^2} \quad (4.45)$$

ermittelt werden.

Abbildung 4.16 zeigt die Ergebnisse für alle drei Verfahren für eine unterschiedliche Anzahl an Trainingsstellen $N \in [30, 200]$. Die lineare Regression liefert hier deutlich die schlechtesten Ergebnisse, sowohl beim mittleren relativen Fehler als auch bei der Standardabweichung. Die radialen Basisfunktionen und das Kriging führen zu ähnlichen Resultaten für die mittleren relativen Fehler M_ϵ . Jedoch ist das Kriging-Verfahren nochmals besser, was an den kleineren Standardabweichungen für jede Trainingsstellenanzahl zu sehen ist. Es werden die Vorteile des Kriging-Ansatzes deutlich, da für jede Parameterrichtung eine spezifische Korrelationsstärke angegeben werden kann und für jeden Trainingsdatensatz die Modellparameter über die *Maximum-Likelihood*-Methode bestmöglich geschätzt werden. Für die radialen Basisfunktionen kommt, unabhängig von der Anzahl der Raumdimension, nur ein einzelner Modellparameter zum Tragen. Der Modellparameter θ wurde dabei entsprechend der Faustregel gewählt, das Reziproke der mittleren Trainingspunktabstände zu verwenden ($\theta = \theta^{avgd, -1}$) [34]. Allgemein wird auch deutlich, dass $N \rightarrow \infty$ nicht garantiert, dass $\epsilon(\mathbf{p}) \rightarrow 0 \forall \mathbf{p}$. Dies gilt besonders für die lineare Regression. Sie kann nur den Trend im Mittel mithilfe einer, in diesem Fall, quadratischen Funktion abbilden. Lässt sich die Zielfunktion $f(\mathbf{p})$ jedoch schlecht mithilfe einer quadratischen Funktion beschreiben, helfen auch weitere Trainingsdaten nicht weiter.

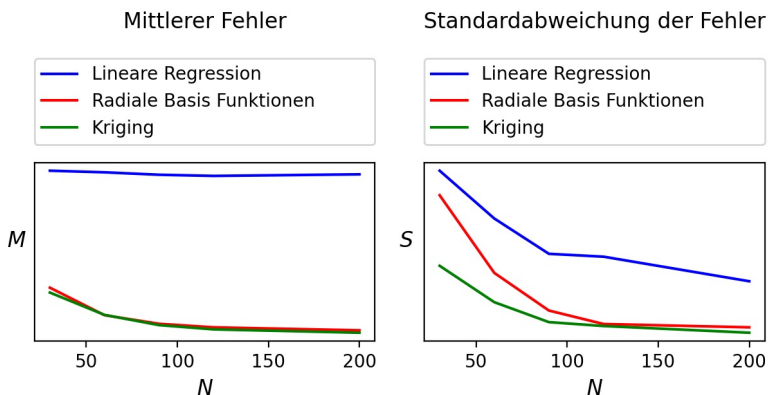


Abbildung 4.16: Statistische Approximationsgüte für eine quadratische Polynomenregression, radiale Basisfunktionen und Kriging-Modelle über der Trainingspunktanzahl N für die *Branin*-Test-Funktion: mittlerer Fehler M (links) und Standardabweichung der Fehler S (rechts)

Die Vorteile des Krigings gehen jedoch mit Nachteilen einher. Für große Datensätze wird die Kriging-Approximation sehr rechenintensiv und der Aufbau des Modells kann ebenso herausfordernd werden wie das Bereitstellen ausreichender Trainingsdaten. Der Grund hierfür ist, dass nicht nur große Matrizen multipliziert und invertiert werden müssen, sondern ebenfalls Minimierungsprobleme für das Fitting der Modellparameter durchgeführt werden müssen. Für die radialen Basisfunktionen muss lediglich ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, wofür effiziente Verfahren weit verbreitet und allgemein zugänglich sind. Eine Optimierung der Modellparameter ist hier prinzipiell möglich, mit $\theta = \theta^{avgd, -1}$ kann aber bereits eine hohe Approximationsgüte ohne weiteren Optimierungsaufwand erreicht werden. Dennoch ist der Einsatz des Kriging-Verfahrens auch für große Datensätze möglich. Ansätze hierzu zeigen u. a. die Arbeiten [44], [142] und [155]. Die Methoden sind jedoch komplex, schwierig zu implementieren, nicht allgemein zugänglich und stellen ein eigenes

Forschungsgebiet dar. Da im späteren Verlauf dieser Arbeit eine hohe Anzahl an Trainingspunkten für eine hinreichend gute globale Approximation genutzt werden soll, kommen radiale Basisfunktionen zum Einsatz. Das Erstellen der RBFs ist sehr effizient und sie liefern unter diesen Umständen in vielen Fällen annähernd so gute Ergebnisse wie das Kriging.

Daher soll für die radialen Basisfunktionen die Fehlerbetrachtung nochmals detaillierter gezeigt und eine weitere Möglichkeit zur Quantifizierung der Approximationsgüte eingeführt werden. In vielen Fällen ergibt sich für die Fehlerverteilung annähernd eine Normalverteilung, was jedoch in jedem Fall zu prüfen ist. Somit kann eine Normalverteilungsfunktion an die Fehlerdaten gefittet werden und es können, ähnlich wie zuvor für das Kriging-Verfahren beschrieben, Konfidenzintervalle angegeben werden. Abbildung 4.17 zeigt eine Normalverteilung und die dazugehörigen Größen. Es können unterschiedliche Niveaus für die

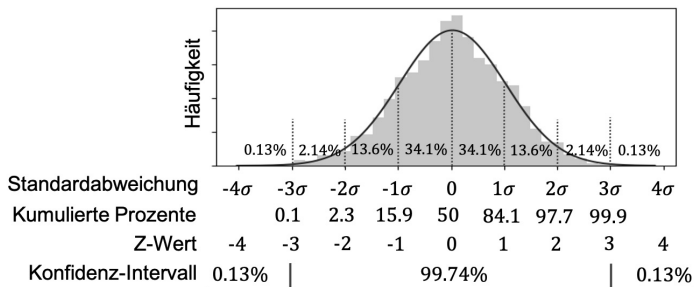


Abbildung 4.17: Normalverteilung und ihre Größen

Konfidenzintervalle verwendet werden. Hier und im späteren Verlauf der Arbeit wird ein 3σ Konfidenzintervall gewählt. Die Grenzen dieses Intervalls geben den Bereich an, in dem 99.7 % aller Fehler erwartet werden. Für die gezeigte Fehlerverteilung in Abbildung 4.18 wurden jeweils 100 LHS-Trainingspunkte bereitgestellt, mit denen die *Branin*-Testfunktion

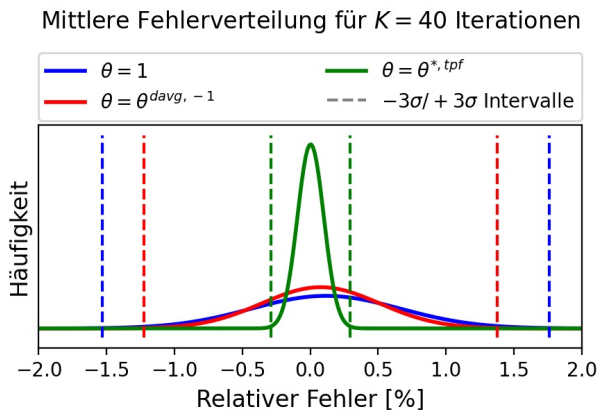


Abbildung 4.18: Gemittelte Fehlerverteilung für die RBF-Approximation der *Branin*-Testfunktion mit verschiedenen Formparametern

(4.42) approximiert wurde. Auch hierfür wurden der Fehler auf einem äquidistanten Gitter mit jeweils $G = 30$ Intervallen berechnet und die Verteilungen über $K = 40$ Iterationen gemittelt, um aussagekräftige Ergebnisse zu generieren. Verglichen werden RBF-Approximationen mit unterschiedlichen Formparametern. Gewählt wurde $\theta = 1$ als Beispiel für eine freie Wahl, $\theta = \theta^{davg, -1}$ für die Faustregel des Reziproken des mittleren Trainingspunktabstands und $\theta = \theta^{*, tpf}$ für den jeweils optimierten Formparameter hinsichtlich der Fehlerquadrate zu den bereitgestellten Testpunkten. Ebenfalls gezeigt werden die dazugehörigen 3σ Konfidenzintervalle. Für alle Varianten liegt der Erwartungswert des Fehlers nahe null. Das Konfidenzintervall ist jedoch für $\theta = 1$ deutlich am größten. Das beste Ergebnis wurde erwartungsgemäß mit $\theta = \theta^{*, tpf}$ erreicht. $\theta = \theta^{davg, -1}$ liefert jedoch auch eine deutliche Verbesserung und ist damit eine valide Option, insbesondere vor dem Hintergrund, dass hierfür keine Optimierung und keine weiteren Test-Datenpunkte zur Verfügung gestellt werden müssen.

5 Fallstudien

In diesem Kapitel sollen die Möglichkeiten und Vorteile CAD-basierter und simulationsgetriebener Optimierungen untersucht werden. Dazu wird eine Reihe praxisnaher Fallbeispiele bearbeitet. In jedem Fallbeispiel wird eine andere Problemstellung untersucht, die im Kontext der Entwicklung eines Planetengetriebes für Flugtriebwerke eine besondere Rolle spielt. Zudem steht jedes Fallbeispiel repräsentativ für eine Gruppe von Optimierungsproblemen. Die hier untersuchten Optimierungsprobleme versuchen Methoden und Komponenten-Designs zu finden, welche folgende Ziele verfolgen bzw. Eigenschaften aufweisen:

- hohe Flexibilität unter Nebenbedingungen
- spezifische Verformung bei hoher Flexibilität und unter strukturmechanischer Nebenbedingungen
- erhöhte System-Eigenfrequenz bei hoher Flexibilität und unter strukturmechanischer Nebenbedingungen
- Prozessbeschleunigung in der System-Optimierung
- Optimierung zweier Komponenten in benachbarten Bauräumen

Dazu werden verschiedene Parametrisierungsstrategien und deren Auswirkung auf das Optimierungsergebnis untersucht und bewertet. Als Nebenbedingungen für die Optimierungsprobleme werden Steifigkeitsanforderungen bzw. spezifische Anforderungen an die Verformung formuliert. Für die Fallbeispiele in den Abschnitten 5.3 und 5.4 wird der automatisierte Analyseprozess, der für die Strukturoptimierung der Komponenten genutzt wird, an eine externe Analysesoftware gekoppelt. Damit soll untersucht werden, inwiefern sich die Methode auf die Systemebene

im Speziellen und in weitere Entwicklungsprozesse im Allgemeinen eingliedern lässt. Insbesondere bei der Optimierung von Systemen spielt der Rechenaufwand eine wichtige Rolle, da die einzelne Auswertung zeitaufwändig sein kann und/oder viele Optimierungsvariablen berücksichtigt werden müssen. Daher wird zur Problemstellung der Systemoptimierung eine auf Antwortflächen basierende Methode untersucht, die die Rechenzeiten reduzieren soll. Die Vorteile eines CAD-basierten Ansatzes, ein Ergebnis unmittelbar als funktionales CAD-Modell zu erhalten, soll auch hierbei bestehen bleiben.

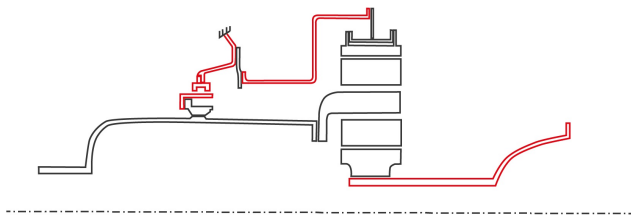
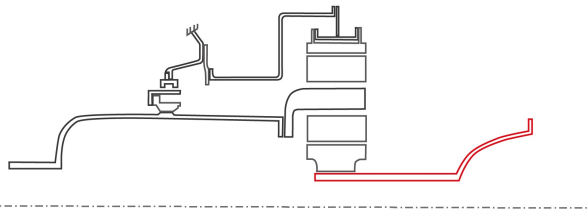


Abbildung 5.1: Schematische Schnittdarstellung eines Planetengetriebes, von links nach rechts: Lageranbindung, Hohlradaufnahme, Sonnenwelle

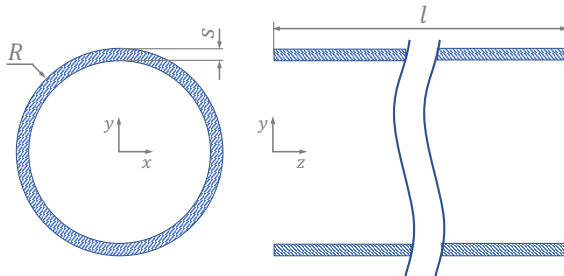
Um die aufgezählten Optimierungsprobleme praxisnah zu demonstrieren, werden nachfolgend fünf Fallstudien untersucht. Die Problemstellungen lassen sich an vielen Stellen in der Entwicklung von Komponenten eines Planetengetriebes für Flugtriebwerke finden. Für diese Arbeit werden drei Komponenten repräsentativ ausgewählt. Dabei handelt es sich um eine Lageranbindung an ein Rollenlager, die Aufnahme des Hohlrads und die Sonnenwelle. Abbildung 5.1 zeigt eine Übersicht, in der die einzelnen Komponenten farblich hervorgehoben sind.

5.1 Flexibilität unter Nebenbedingungen

Wellen in Planetengetrieben für Flugtriebwerke müssen hohe Drehmomente übertragen und entsprechend dimensioniert werden. Gleichzeitig ist es wichtig, die Getriebeverzahnung von äußeren Einflüssen zu entkoppeln und zu schützen. Somit wird eine Welle angestrebt, die ausreichend torsionssteif ist, um das gewünschte Drehmoment zu übertragen, und gleichzeitig biegeweich ist, um die Verzahnung zu schonen. Die Treiber für eine Auslegung lassen sich leicht durch eine Betrachtung des polaren und des axialen Flächenträgheitsmoments eines Kreisringquerschnitts bestimmen. Als Bezugspunkt gilt hier der Koordinatenursprung entsprechend Abbildung 5.2b.



(a) Planetengetriebe – Wellen



(b) Schematische Zeichnung einer einfachen Welle

Abbildung 5.2: Flexible Wellen in einem Planetengetriebe

Maßgebend für die Torsionssteifigkeit ist das polare Flächenträgheitsmo-

ment und es gilt:

$$I_p = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \quad (5.1)$$

Für einen Kreisringquerschnitt im Speziellen gilt:

$$\begin{aligned} I_{p,kr} &= \int_{R-s}^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{R-s}^R r^3 dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R-s}^R = \frac{\pi}{2} (R^4 - (R-s)^4) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aus Gleichung (5.1) und der Axialsymmetrie des Kreisquerschnitts folgt weiter:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_{p,kr} = \frac{\pi}{4} (R^4 - (R-s)^4) \quad (5.3)$$

Somit scheint es zunächst nicht möglich, eine einfache Welle biegeweicher zu gestalten, ohne gleichzeitig die Torsionssteifigkeit aufzugeben, da beide Flächenträgheitsmomente von den identischen Dimensionierungsgrößen abhängen. Eine Möglichkeit, spezielle Steifigkeitseigenschaften in spezifische Richtungen zu erreichen, ist der Einsatz von Faserverbundwerkstoffen. Dieser Ansatz wäre auch an dieser Stelle möglich, bringt jedoch weitere Herausforderung mit sich. Faserverbundmaterialien für Antriebswellen wurden u. a. für Einsatzzwecke im Automobilbereich und für Windanlagen untersucht und zum Teil bereits erfolgreich eingesetzt. Eine Auswahl an Veröffentlichungen zur Analyse und Optimierung von Faserverbundwellen findet sich in [20][79][98][119][23][160][219].

Ein Umstand, der auch in der Auslegung von isotropen Materialien genutzt werden kann, ist die Tatsache, dass die Wandstärke der Welle abhängig vom gewählten Radius ist. Für jedes zu übertragende Drehmoment und für jede maximal zulässige Torsionsspannung ergibt sich die nötige Wandstärke entsprechend Gleichung (5.4):

$$\tau_{max} = \frac{M}{W} = \frac{M \cdot a_{max}}{I_{p,kr}} = \frac{M \cdot R}{\frac{\pi}{2} (R^4 - (R - s)^4)} \quad (5.4)$$

wobei:

- a_{max} – Abstand zur Randfaser
- M – Drehmoment
- W – Widerstandsmoment
- τ_{max} – maximale Torsionsspannung

Aus den Zusammenhängen aus Gleichung (5.3) und (5.4) lässt sich somit ein Optimierungsproblem, dass für ein gegebenes Drehmoment und zulässige Spannung die Biegesteifigkeit minimiert, wie folgt formulieren:

$$\min_{p \in \mathbb{P}} I_y \left(\begin{array}{c} R \\ s \end{array} \right)$$

mit $P := \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid h \left(\begin{array}{c} R \\ s \end{array} \right) = \frac{M \cdot R}{\frac{\pi}{2} (R^4 - (R - s)^4)} - \tau_{lim} \leq 0, \right.$ (5.5)

$$\left. \left(\begin{array}{c} R_{min} \\ s_{min} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} R \\ s \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} R_{max} \\ s_{max} \end{array} \right) \right\}$$

wobei:

- τ_{lim} – zulässige Torsionsspannung,
- max – obere Parametergrenze,
- min – untere Parametergrenze.

Da sich das Optimierungsproblem ausschließlich aus den vorher gezeigten analytischen Gleichungen zusammensetzt, lässt es sich schnell und ohne den Einsatz von Finite-Elemente-Methoden bearbeiten. Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht der Lösungen für verschiedene Momente und zulässige Spannungen.

Hierbei fällt auf, dass die biegeweichste Lösung immer diejenige mit dem geringsten Außendurchmesser ist und sich die Wandstärke aus der

	50kNm	70kNm	90kNm
175MPa	75,0/9,86	75,0/15,48	75,0/23,40
200MPa	75,0/8,37	75,0/12,84	75,0/18,54
225MPa	75,0/7,28	75,0/10,99	75,0/15,48

Tabelle 5.1: Übersicht optimaler Lösungen ($R[\text{mm}]/s[\text{mm}]$) optimiert durch *NLPQLP* für einfache biegeweich Wellen mit $R_{min} = 75,0$

Nebenbedingung für die maximal zulässige Spannung ergibt. Eine Torsionswelle mit kleinem Durchmesser und großer Wandstärke fällt jedoch schwerer aus als eine Torsionswelle mit größerem Durchmesser. Soll ein Design möglichst leicht und dennoch biegeweich gestaltet werden, bedarf es einer anderen Lösung.

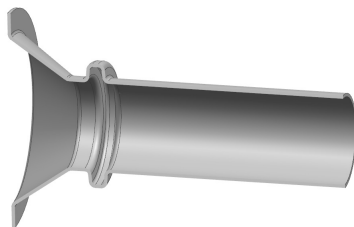


Abbildung 5.3: Welle mit Sicke

Um die Biegesteifigkeit für isotrope Materialien weiter zu reduzieren, muss eine entsprechende Bauteilform gefunden werden, welche die gegenläufige Zielstellung von hoher Torsionssteifigkeit und geringer Biegesteifigkeit bei gleichzeitig geringem Gewicht vereint. Eine Möglichkeit, diese Zielstellung zu erreichen, ist das Einfügen von Sicken, wie aus Abbildung 5.3 hervorgeht. Über die Sicken kann, ähnlich einer Ziehharmonika, die Biegesteifigkeit reduziert werden, ohne die Torsionssteifigkeit negativ zu beeinflussen. Jedoch wird durch die Sicken radial mehr Bauraum benötigt und obwohl die nötige Wandstärke für größere Durchmesser abnimmt, verbleibt ein Gewichtsachteil. Es gilt daher die Sicke(n) so zu formen

und anzuordnen, dass Anzahl und Höhe möglichst geringgehalten werden.

Um die Problemstellung auf Basis einer CAD-Geometrie zu bearbeiten, muss zunächst eine passende Parametrisierungsstrategie entwickelt werden, auf die später näher eingegangen wird. Prinzipiell setzt sich jede Sicke aus den sieben in Abbildung 5.4 gezeigten Parametern zusammen:

- r – Radius der Welle
- R – Radius der Sicke
- s_r – Wandstärke der Welle
- s_R – Wandstärke der Sicke
- w – Breite der Sicke
- z – axiale Position der Sickenmitte
- α – Winkel der Sickenseitenwand

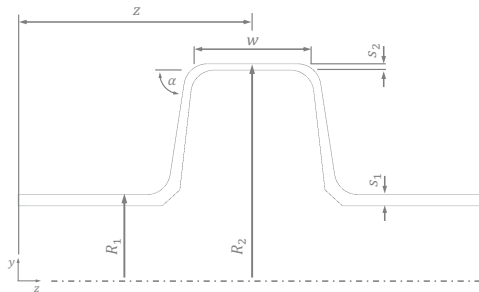


Abbildung 5.4: Parametrisierung einer Sicke

Es sei angemerkt, dass die in Abbildung 5.4 dargestellte Parametrisierung einen linearen Übergang der Wandstärken s_r zu s_R entlang der vertikalen Seitenwand der Sicke ansetzt. Die vertikalen Seitenwände der Sicke ließen sich jedoch auch als Kreisringscheibe betrachten, für die eine konstante Schubspannung erzielt werden soll. Detaillierte Erläuterungen und Herleitungen dazu finden sich u. a. in [5] und [195]. Entscheidend ist lediglich, dass für eine gegebene Torsionsspannung und

ein zu übertragendes Drehmoment die Wandstärke s einer Scheibe in einem Polarkoordinatensystem (r, ϕ) mittels Gleichung (5.6) beschrieben werden kann.

$$s(r, \phi) = \frac{M}{2\pi r^2 \tau} \quad (5.6)$$

Somit führt eine Linearisierung zu unnötig großen Wandstärken entlang des vertikalen Teils der Sicke, wie Abbildung 5.5 verdeutlicht. Für große Radien ist der Fehler jedoch klein und ggf. vernachlässigbar.

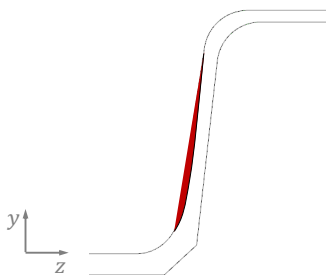


Abbildung 5.5: Parametrisierung einer Sicke

Um ein grundlegendes Verständnis für die Effekte der in Abbildung 5.4 gezeigten Parameter auf die Zielgrößen wie Biegesteifigkeit und Gewicht zu entwickeln, empfiehlt es sich zunächst eine Versuchsplanung (englisch: *Design of Experiment*, DoE) durchzuführen. Für eine erste Betrachtung wurde eine einfache Parameterstudie erstellt, bei der jeweils ein Parameter variiert wird und die restlichen Parameter ihre Basiswerte behalten. Variiert wurden dabei vier der sieben Parameter, entsprechend der Tabelle 5.2. Die Wandstärke ist prinzipiell eine variable Größe, jedoch ergibt sich die erforderliche Mindestwandstärke zwangsweise aus dem Durchmesser ($2R$), dem zu übertragenden Drehmoment (M) und der zulässigen Torsionsspannung (τ) aus Gleichung (5.4). Für den Fall von

$$\begin{aligned}
 M &= 63.321 \text{ Nm} \\
 R &= 100 \text{ mm} \\
 \tau &= 160 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

ergibt sich eine minimale Wandstärke von 7 mm. Die minimale Wandstärke lässt sich nun für verschiedene Radien bestimmen und der Verlauf kann über ein Polynom approximiert werden (siehe Abbildung 5.6). Das Polynom lässt sich anschließend als Funktion $\hat{s}(R)$ in das CAD-Modell einbinden, sodass sich für jeden Radius die korrekte Wandstärke im Modell ergibt. Für die oben genannten Werte kann die Wandstärke nach dem Polynom in (5.7) angenähert werden.

$$\hat{s}(R) = 7.282 \cdot 10^{-8} \cdot R^4 - 5.121 \cdot 10^{-5} \cdot R^3 + 1.358 \cdot 10^{-2} \cdot R^2 - 1.639 \cdot R + 79.023 \quad (5.7)$$

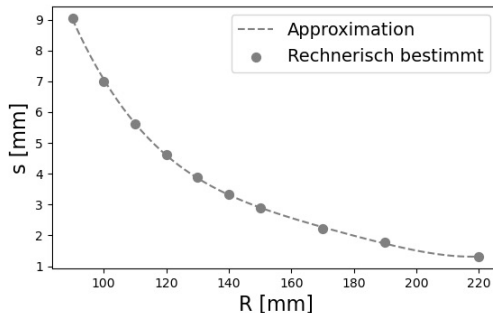


Abbildung 5.6: Approximation der minimalen Wandstärke $\hat{s}(R)$ für $M = 63.321 \text{ Nm}$, $\tau = 160 \text{ MPa}$

Auf Basis des CAD-Modells wird ein FE-Modell abgeleitet, das in Abbildung 5.7 schematisch dargestellt wird. Die Einspannung erfolgt über zwei RBE2-Elemente am linken und rechten Ende, wobei am linken Ende vollständig fest eingespannt wird und am rechten Ende die Freiheitsgrade 1, 2 und 4 frei bleiben. Am rechten Ende wird ebenfalls das Drehmoment und eine Verschiebung von 1mm in die y-Richtung aufgebracht.

Parameter	Min	Basis	Max	Ebenen
R	120	130mm	200	10
w	20	30mm	50	10
z	180	180	600	10
α	60	85°	100	10
r		100mm		0
s_r		7mm		0
s_R		$\hat{s}(R)$		0

Tabelle 5.2: DoE-Parameter für eine Welle mit einer Sicke

Infolge der Verschiebung entsteht an der linken Einspannung ein Reaktionsmoment um die x-Achse, das als Maß für die Biegeweichheit des jeweiligen Entwurfs herangezogen wird. Aus der CAD-Geometrie wird ein Mittelflächenmodell gebildet, das anschließend mit Schalenelementen automatisiert vernetzt wird. Die sich ändernde Wandstärke entlang der Kontur wird automatisch auf die jeweiligen Schalenelemente übertragen.

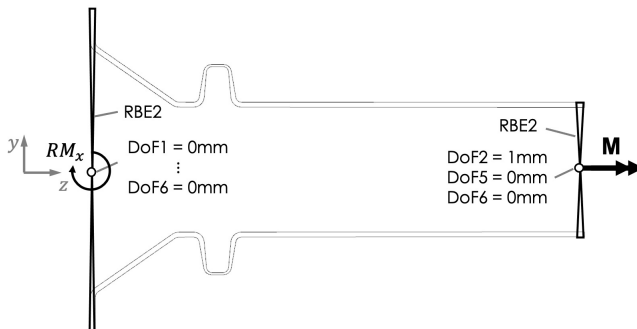


Abbildung 5.7: FEM-Modell zur Berechnung der Biegeweichheit

Abbildung 5.8 zeigt eine Übersicht der Einflüsse der vier Parameter auf die Masse und die Biegeweichheit. Daraus wird ersichtlich, dass nicht nur die Höhe (R), sondern insbesondere die axiale Position (z) der Sicke den stärksten Einfluss auf die Biegeweichheit hat. Während die Höhe der Sicke auch zu einer höheren Masse führt, hat die axiale Position

hier keinen Einfluss. Sie stellt daher den effektivsten Parameter dar. Die Breite der Sicke und die Winkel der Seitenwände haben hingegen einen vergleichsweise geringen Einfluss. Die geringste Biegesteifigkeit konnte bei einem Winkel von 90° erzielt werden. Entsprechend der gewählten Parametrisierung in Abbildung 5.4 beeinflusst die Breite der Sicke ebenfalls die axiale Position der vertikalen Seitenwände. Daher ist auch hier eine Wirkung auf die Biegeweichheit zu erkennen. Infolge der geringeren Wandstärke durch den größeren Außendurchmesser der Sicke führt eine breitere Sicke zu einer leichten Gewichtsreduktion.

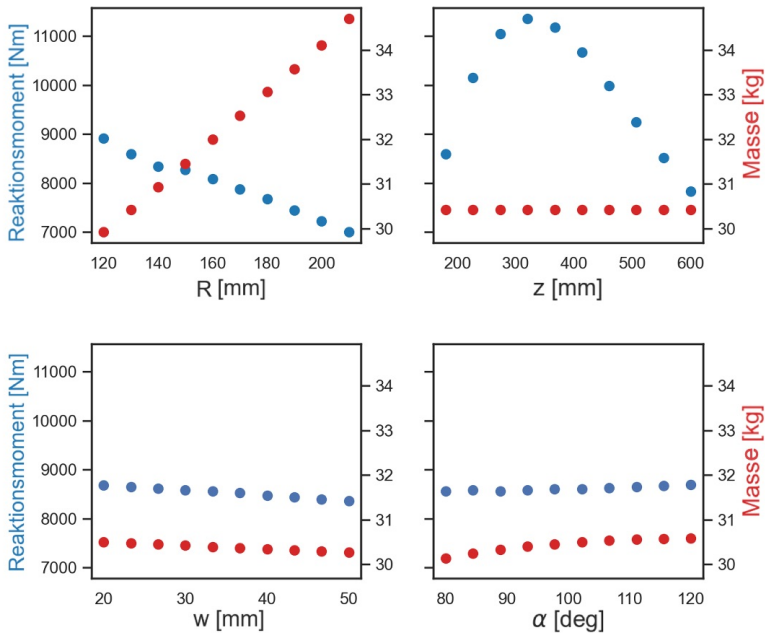


Abbildung 5.8: Auswertung der Sickenparameter auf Biegeweichheit und Masse

Eine variable Sickenanzahl zu realisieren, ist der nächste Schritt in der

Parametrisierung, um eine Optimierung vorzubereiten. Hierzu sind zwei Ansätze denkbar. Eine Möglichkeit besteht darin eine einzelne Sicke als UDF zu erstellen, die im Anschluss automatisiert hinzugefügt oder entfernt werden kann. Alternativ kann mit der maximal gewünschten Sickenanzahl begonnen und ein Grenzwert für die Sicke definiert werden. Für den Fall $R - r < 10mm$, wird $R = r$ gesetzt und die entsprechenden Verrundungen an den Übergängen werden ausgeschaltet, um Fehlermeldungen zu vermeiden. Letztere Variante wurde hier gewählt. In jedem Fall ist bei der Wahl des Optimierungsalgorithmus darauf zu achten, dass dieser nicht stetige Zielfunktionen und ggf. diskrete Eingangsparameter handhaben kann. Daher entfallen hier die meisten gradientenbasierten Verfahren.

Ein wichtiger Aspekt für eine Optimierung ist der stabile Modellaufbau über das gesamte Parameterspektrum, damit jede Parameterkombination eine relevante Information an den Optimierungsalgorithmus zurückliefert. Wenn mehrere Sicken entlang der axialen Länge verschoben werden, besteht zunächst die Gefahr, dass sich diese überlappen und das CAD-Modell nicht erstellt werden kann. Um dies zu verhindern, wurde die Parametrisierung der Sicken für die Optimierung im Vergleich zur DoE-Studie, abgewandelt.

Der Winkel α wird als Variable entfernt und auf einen fixen Wert von $\alpha = 90^\circ$ gesetzt. Der Parameter w für die Breite der Sicke entfällt, stattdessen werden die axialen Positionen der Seitenwände jeder Sicke einzeln definiert. Hierzu werden die Parameter x_i eingeführt, die in den Grenzen $[0, 1]$ verlaufen. Sie beschreiben die Position der Seitenwände z_i entlang des axial verbleibenden Bauraums. Die axiale Position jeder Seitenwand ist dann definiert durch:

$$z_i = z_{i-1} + z_{sep} + (l_{DR} - z_{i-1} - (n - i) \cdot z_{sep}) \cdot x_i \quad (5.8)$$

mit:

$$l_{DR} = 480\text{mm}$$

$$z_0 = -z_{sep}$$

$$z_{sep} = 25\text{mm}$$

$$n = 6$$

$$i = \{1, 2, \dots, n\}$$

Um die Parametrisierung zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 5.9 beispielhaft ein Ergebnis für $x_{1,2} = 0$ und $x_{3,\dots,6} = 0,5$. Durch die gewählte Parametrisierung überschneiden sich die Sicken bei keiner Parameterkombination. Jede Sicke kann dennoch an jeder Stelle entlang des axialen Bauraums platziert werden. Der Ansatz aus Gleichung (5.8) lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Sicken erweitern.

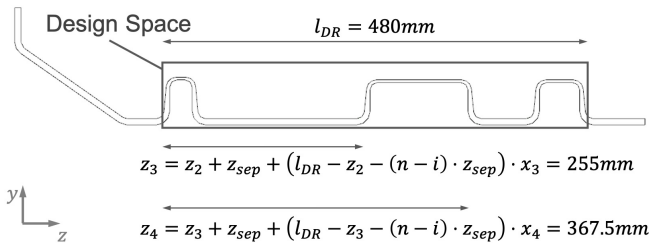


Abbildung 5.9: Sickenparametrisierung für eine Optimierung

Für den Anwendungsfall lassen sich zwei Optimierungsprobleme formulieren: zum einen ein einkriterielles Optimierungsproblem (5.9), indem die Biegesteifigkeit minimiert werden soll, und zum anderen ein mehrkriterielles Optimierungsproblem (5.10), indem sowohl die Biegesteifigkeit als auch die Masse minimiert werden soll. Da die maximal zulässige Spannung bereits in der Funktion $\bar{s}(R)$ für die Wandstärken berücksichtigt ist, kommen beide Optimierungsprobleme ohne weitere Nebenbedingungen

aus. Die maximale Sickenanzahl ist auf drei begrenzt, woraus eine Anzahl der Seitenwände von $n = 6$ folgt.

$$\min_{p \in \mathbb{P}} RM_x \text{ mit } P := \{P \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o\} \quad (5.9)$$

$$\min_{p \in \mathbb{P}} \begin{pmatrix} RM_x \\ m \end{pmatrix} \text{ mit } P := \{P \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o\} \quad (5.10)$$

wobei:

- m – Masse
- RM_x – Reaktionsmoment um die x-Achse
- \mathbf{p}^u – Vektor der unteren Parametergrenzen
- \mathbf{p}^o – Vektor der oberen Parametergrenzen

Abbildung 5.10 zeigt das Optimierungsergebnis für (5.9), das mit dem Optimierungsalgorithmus *CMA-ES* erzielt wurde. Erwartungsgemäß wird die höchste Flexibilität mit der maximalen Sickenanzahl und deren maximaler Ausprägung ($R_1, R_2, R_3 = R_{max}$) erzielt. Entscheidend ist dann die axiale Position der Seitenwände. Die maximale Flexibilität ergibt sich hier mit fünf Seitenwänden auf der linken Seite und einer auf der rechten, wodurch zwei Sicken mit minimaler Breite auf der linken Seite entstehen und eine große gebildet wird, die sich über den restlichen Bauraum erstreckt.

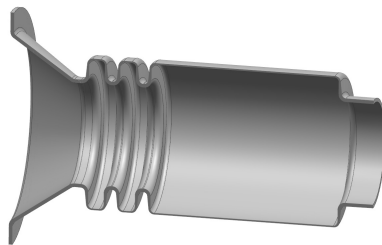


Abbildung 5.10: Optimierungsergebnis 1 – biegeweiche Welle

Abbildung 5.11 zeigt die Paretofront als Ergebnis der mehrkriteriellen Optimierung (5.10). Die Suche wurde durch den Optimierungsalgorith-

mus *AMGA* durchgeführt. Abbildung 5.11 zeigt zum einen die theoretischen Paretofronten, die für Optimierungen mit konstanter Sickenanzahl entstehen würden, und die Paretofront, die sich für die durchgeführte Optimierung mit variabler Sickenanzahl ergibt. Es fällt auf, dass die Paretofronten für eine konstante Sickenanzahl Sprünge aufweisen. Die Sprünge entstehen dadurch, dass die Flexibilität mit einer gegebenen Anordnung der Seitenwände nur bis zu einem gewissen Punkt gesteigert werden kann. Soll die Flexibilität weiter erhöht werden, muss eine andere Anordnung gewählt werden, die gleichzeitig zu einer deutlich höheren Masse führt. Die Paretofront für eine variable Sickenanzahl weist dementsprechend ebenfalls Sprünge auf. Des Weiteren ist zu bemerken, dass sich kein Design mit zwei Sicken auf der Paretofront befindet.

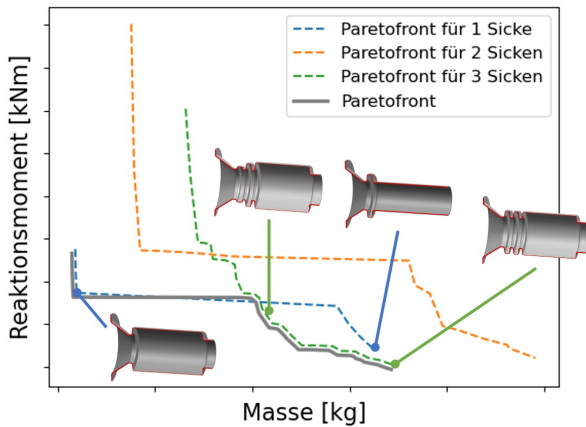


Abbildung 5.11: Optimierungsergebnis 2 – Paretofronten für biegeweiche Wellen

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine Strukturoptimierung auf Basis einer CAD-Geometrie sehr gut geeignet ist, um Wellen hinsichtlich minimaler Biegesteifigkeit zu optimieren. Insbesondere die mehrkriterielle Optimierung und die daraus resultierende Paretofront schafft – durch die zusätzlichen Informationen – einen Mehrwert. Die Abhängigkeiten

zwischen radialem Bauraum, Masse und Biegesteifigkeit können klar herausgearbeitet werden und so die Entscheidungen in den frühen Stadien des Entwurfsprozesses positiv unterstützen[110].

5.2 Spezifische Verformung unter Flexibilitätsnebenbedingungen

In der Entwicklung eines Planetengetriebes für Flugtriebwerke spielen die Art und Position von Lagern eine wichtige Rolle. In diesem Fallbeispiel wird ein Rollenlager betrachtet, welches das nicht rotierende äußere Gehäuse mit der Ausgangswelle verbindet, die den Fan antreibt. Abbildung 5.12a zeigt das entsprechende Lager und die Anbindung in der Baugruppe.

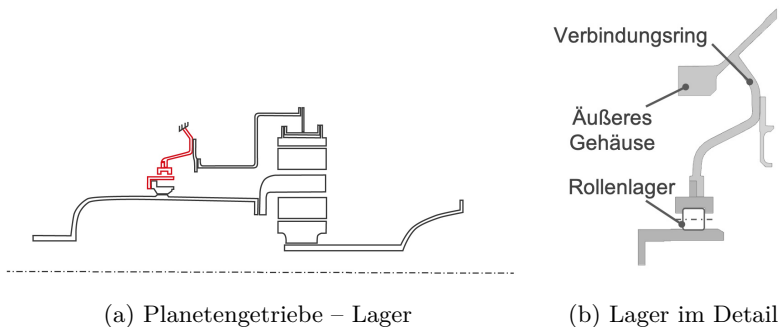


Abbildung 5.12: Lager in einem Planetengetriebe

Oft ist der zur Verfügung stehende Bauraum eingeschränkt und es muss eine Reihe von Randbedingungen bei der Konstruktion einer Lageranbindung berücksichtigt werden. Somit sind die möglichen Entwürfe eingeschränkt. Abbildung 5.12b stellt das Ausgangsdesign für diese Fallstudie dar. Die Abbildung 5.13 illustriert den Lastfall und die daraus

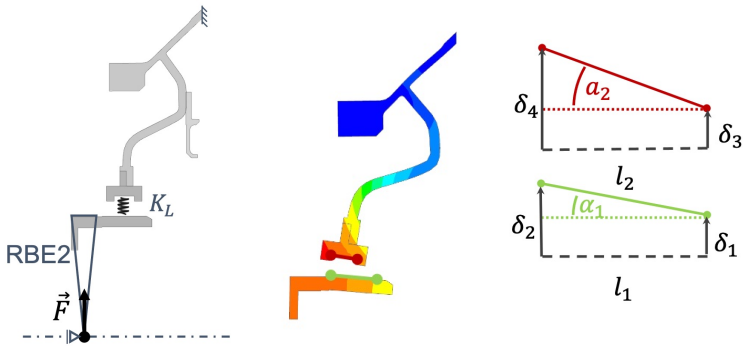


Abbildung 5.13: Verformung eines Lagers unter Last

resultierende Verformung.

Durch die im Betrieb auftretenden Kräfte und infolge der Verformung der Lageranbindung entsteht eine zusätzliche Belastung für das Lager. Entscheidend ist hierbei nicht die Größe der Verformung, sondern die Verdrehung der Lagerunter- und oberseite zueinander. Die Verdrehung ϕ ist dabei keine Größe, die unmittelbar aus den Ergebnisdaten des FE-Modells folgt. Der Verdrehwinkel des Lagers wird aus der Verschiebung von vier Punkten, jeweils zwei an der Ober- und Unterseite des Lagers, wie folgt berechnet:

$$\phi = \alpha_1 - \alpha_2 = \arctan\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{l_1}\right) - \arctan\left(\frac{\delta_4 - \delta_3}{l_2}\right) \quad \text{mit} \quad (5.11)$$

$$\bar{\delta}(\mathbf{p}) = \frac{\delta_3(\mathbf{p}) + \delta_4(\mathbf{p})}{2} \quad (5.12)$$

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} \phi(\mathbf{p}) \quad (5.13)$$

$$\text{mit } P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\mathbf{p}) - \sigma_{lim} \\ -(\bar{\delta}(\mathbf{p}) - \bar{\delta}_{min}) \\ -\beta_{min}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\}$$

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} \begin{bmatrix} \phi \\ -\bar{\delta} \end{bmatrix} (\mathbf{p}) \quad (5.14)$$

$$\text{mit } P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}(\mathbf{p}) - \sigma_{lim} \\ -\beta_{min}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\}$$

wobei:

- p^o, p^u – obere, untere Parametergrenze
- β_{min} – kleinster Abstand zur Bauraumgrenze
- δ_3, δ_4 – Verschiebung der oberen Lagerschale
- $\bar{\delta}, \bar{\delta}_{min}$ – durchschnittliche und Mindestverschiebung
- ϕ – Verdrehwinkel
- $\tilde{\sigma}, \sigma_{lim}$ – maximale und zulässige Vergleichsspannung

Für einen späteren Vergleich wird der Verdrehwinkel des Ausgangsdesigns unter Last als Φ und die durchschnittliche radiale Verformung als $\bar{\Delta}$ definiert. Das primäre Ziel der strukturmeechanischen Optimierung ist es, den Verdrehwinkel auf null zu bringen. Als Erweiterung kann ein mehrkriterielles Optimierungsproblem formuliert werden, indem zusätzlich die radiale Flexibilität maximiert werden soll. Eine hohe radiale Flexibilität hat einen positiven Einfluss auf die Lastverteilung im Getriebe. Somit kann eine Kompromissentscheidung getroffen werden. In beiden Fällen gilt es jedoch die maximal zulässige Vergleichsspannung σ_{lim} nicht zu überschreiten und eine Mindestflexibilität in radialer Richtung zu gewährleisten. Als Maß für die radiale Flexibilität wird die mittlere Verformung der äußeren Rollenlagerschale in radialer Richtung unter einer einheitlichen Last herangezogen entsprechend Gleichung (5.12). Die letzte Randbedingung ist das Einhalten des vorgegebenen Bauraums. Somit lassen sich die beiden Optimierungsprobleme (5.13) und (5.14) formulieren.

Den Verbindungsring durch eine Strukturoptimierung steifer zu gestalten, wäre der naheliegendste Ansatz zur Reduktion des Winkels ϕ . Damit

wäre die klassische Problemstellung von minimaler Verformung (bzw. maximaler Steifigkeit) bei minimalem Gewicht gegeben. Durch die radiale Flexibilitätsnebenbedingung ist ein allgemein steiferer Verbindungsring jedoch nicht zulässig. Bei einer klassischen Topologieoptimierung kommt es hier zu Teildichten und weiteren Problemen, wie in Kapitel 2 beschrieben. Daher muss auf Basis des CAD-Modells eine Parametrisierung gewählt werden, die eine Optimierung der Kontur erlaubt, welche durch ihre Verformung unter Last zu einer parallelen Verschiebung der Lager-schalen radial nach außen führt.

Für die Parametrisierung gilt es zunächst abzuwägen, welche Änderungen am Ausgangsdesign vorgenommen werden sollen, um die Ziele zu erreichen. In diesem Fall soll das grundlegende Design eines einzelnen Verbindungsringes mit seinen ursprünglichen Anbindungspunkten beibehalten werden. Daraus ergibt sich eine Gestaltoptimierung, in der die Mittelkontur und die Wandstärke entlang der Mittelkontur variiert werden kann. Auch hier gilt es, die nötigen Freiheitsgrade mit einer geringeren Anzahl von Optimierungsparametern zu realisieren. Um die Wandstärke entlang der Mittelkontur effizient zu parametrisieren, wird ein permutierender Spline eingesetzt. Die Form des Splines beschreibt die Wandstärke entlang der Mittelkontur. Dazu werden zunächst i Punkte entlang der Mittelkontur erzeugt. Sie dienen als Stützstellen, von denen aus orthogonale Hilfslinien erzeugt werden. Die Länge der Hilfslinien beschreibt die Wandstärke an der jeweiligen Stelle. Entlang der Enden der Stützlinien werden zwei B-Splines konstruiert, die die innere und äußere Kontur des Verbindungsringes bilden (siehe Abbildung 5.14a). Die Länge der Stützlinien wird durch den permutierenden Spline variiert.

Der permutierende Spline wird wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} v(r_j) \\ t(r_j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m N_k(r_j) \begin{bmatrix} v_k \\ t_k \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} k/m \\ p_k \end{bmatrix}, \quad r \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (5.15)$$

$$v_i = \frac{u_i}{u_{max}} \cdot v_{max} \quad (5.16)$$

$$v(r_i) \stackrel{!}{=} v_i \quad (5.17)$$

wobei:

- m – Anzahl der Stützstellen des Splines
- p – Stützstelle des Splines
- t – Wandstärke
- r – Laufvariable des Splines
- u – Laufvariable der Mittelkontur
- v – Definitionsraum des Splines

Die Wandstärken t_i an den Stellen u_i entlang der Mittelkontur werden über die Ordinate des Splines an der Stelle v_i bzw. $v(r_i)$ definiert. Der Verlauf des Splines wird über die Parameter p_1, \dots, p_{m+1} variiert. Sie stellen die Optimierungsparameter für den Wandstärkenverlauf dar. Durch diesen Ansatz ist es möglich, die Anzahl der Optimierungsparameter zu reduzieren. In dem in Abbildung 5.14 gezeigten Beispiel kann somit die Wandstärke an 16 Stellen entlang der Mittelkontur definiert werden. Die Optimierung der Wandstärke erfolgt mit nur $m = 7$ Parametern. Gleichzeitig führt der Einsatz des permutierenden Splines zu einem glatteren Verlauf entlang der Mittelkontur, was an dieser Stelle wünschenswert ist.

Der Verlauf der Mittelkontur kann ebenfalls über einen B-Spline beschrieben und parametrisiert werden. Hier ist keine Hilfskonstruktion wie bei der Wandstärke nötig. Der Spline besteht aus 11 Polen, von denen 4 für die Optimierung variiert werden können. Der Spline wird durch die Gleichung (5.18) definiert. Abbildung 5.15 zeigt die Parametrisierung und den Abstand zur Bauraumgrenze, der in den Gleichungen (5.13) und (5.14) als Nebenbedingung verwendet wird. An der Stelle sei angemerkt, dass die zulässigen Koordinaten der Pole, die den Spline definieren, über die Bauraumgrenze hinaus gehen dürfen, der Spline an sich jedoch nicht.

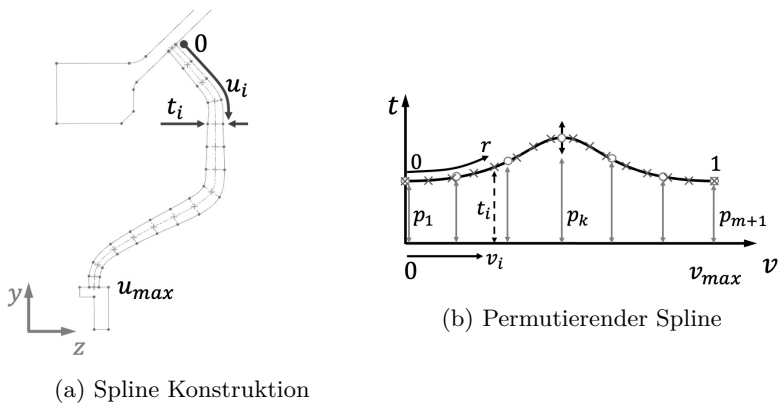


Abbildung 5.14: Parametrisierung der Lageranbindung

Da der Abstand zweier Kurven in der CAD-Software ohne Schwierigkeiten zu berechnen ist, erleichtert dieser Ansatz die Parametrisierung deutlich. Die Parametergrenzen für die Koordinaten der Pole zu definieren, wäre sonst sehr aufwändig. So können die Parametergrenzen nahezu beliebig gewählt werden und die Bauraumgrenzen werden dennoch über die Nebenbedingung der Optimierung berücksichtigt.

$$\begin{bmatrix} z(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n N_k(u) \begin{bmatrix} z_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

In einer ersten Optimierung wurde ausgehend von der Mittelkontur des Ausgangsdesigns und entsprechend dem in (5.13) formulierten Optimierungsproblem die Wandstärkenverteilung optimiert. Die Abbildung 5.16 zeigt das mit dem CMA-ES-Algorithmus gefundene Optimierungsergebnis, das maßgeblich durch die sehr geringe Wandstärke über dem Lager charakterisiert wird. Der äußere Teil des Rings wurde hingegen verstärkt. Durch die neue Gestalt konnte der Verdrehwinkel auf $\phi = 0.155\Phi$ und somit um 84.5 % reduziert werden.

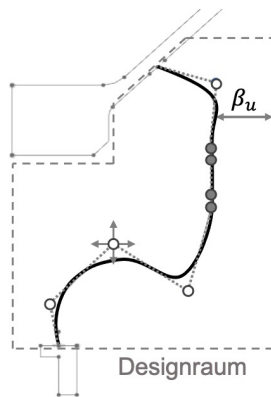


Abbildung 5.15: Parametrisierung der Mittelkontur

In einer zweiten Optimierung wurde das Optimierungsproblem (5.14) bearbeitet. Hierzu wurde sowohl die Wandstärke entlang der Mittelkontur als auch der Verlauf der Mittelkontur selbst optimiert. Ausgangspunkt war wieder das ursprüngliche Design aus Abbildung 5.12b. Abbildung 5.19 zeigt die pareto-optimalen Punkte für das mehrkriterielle Problem, die mithilfe des AMGA-Algorithmus gefunden wurden. Hierbei lässt sich eine nahezu lineare Abhängigkeit der beiden Größen zueinander erkennen. Das Verhältnis beträgt etwa $\phi/\bar{\delta} = 0.684 [kN/mm \cdot rad]$ und kann in die Entscheidungsfindung des Designs einfließen. Eine Nebenbedingung eines einkriteriellen Problems in eine weitere Zielgröße umzuwandeln, kann daher oft sinnvoll sein und liefert weitere Informationen über das Problem. Sollte sich die Anforderung der radialen Steifigkeit im Laufe der Entwicklungsphase ändern, lässt sich ein neues Design sehr schnell wählen. Gleichzeitig ist auch das nötige Zugeständnis hinsichtlich des Verdrehwinkels und der daraus resultierenden Beanspruchung für das Lager bekannt. Durch die zusätzlichen Informationen bietet der CAD-basierte Optimierungsansatz mit den wenigen Optimierungsparametern und der Möglichkeit, mehrkriterielle Optimierungsprobleme zu bearbeiten, deutliche Vorteile gegenüber einer klassischen Gestaltoptimierung.

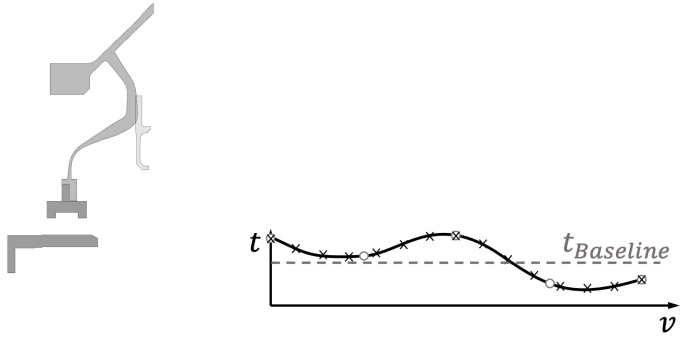


Abbildung 5.16: Lageranbindung: Optimierungsergebnis 1

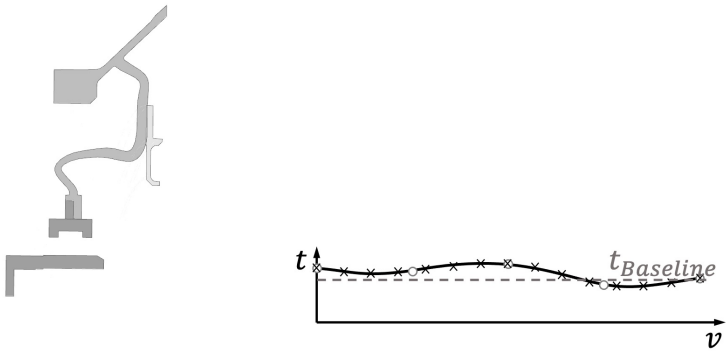


Abbildung 5.17: Lageranbindung: Optimierungsergebnis 2.1

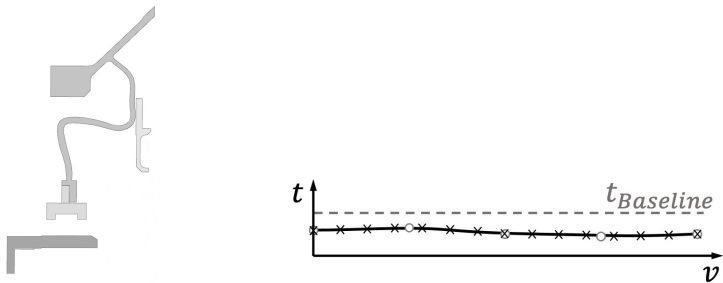


Abbildung 5.18: Lageranbindung: Optimierungsergebnis 2.2

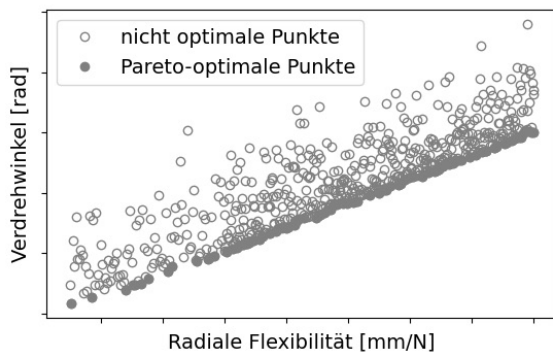


Abbildung 5.19: Pareto-optimale Designpunkte

Die Abbildungen 5.17 und 5.18 stellen exemplarisch zwei pareto-optimale Ergebnisse für (5.14) dar. Erstere zeigt ein Design, das den Verdrehwinkel mit $\phi = 7.29 \cdot 10^{-6} \Phi$ bei einer radialen Flexibilität von $\bar{\delta} = 1.05 \bar{\Delta}$ gänzlich eliminiert. Letztere verweist auf ein Design, das mit $\bar{\delta} = 1.31 \bar{\Delta}$ radial deutlich flexibler ist und zu einem Verdrehwinkel von $\phi = 0.178 \Phi$ führt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass über Splines im CAD-Modell die Formoptimierung der Lageranbindung zum äußeren Gehäuse sehr effizient durchgeführt werden konnte. Sowohl die ein- als auch die mehrkriterielle Suche hat zu guten Ergebnissen geführt. Die komplexe Aufgabenstellung, die sich aus den Zielen von minimalem Verdrehwinkel und hoher radialer Flexibilität ergibt, stellt für den CAD-basierten Ansatz und die Algorithmen CMA-ES und AMGA kein Problem dar. Die Erfahrungswerte aus unterschiedlichen Parametrisierungsansätzen haben gezeigt, dass möglichst wenige Punkte für die Definition der Splines genutzt werden sollten. Hier gilt es zwischen der Komplexität des Designraums und einer ausreichenden Designfreiheit abzuwägen. Für Verbindungsstrukturen wie hier haben sich jeweils drei bis fünf Punkte für

die Mittelkontur und vier bis sieben Punkte für die Wandstärke bewährt.

Eine ähnliche Problemstellung ergibt sich für die Anbindungsstruktur, die das Hohlrad mit der Hohlradaufnahme verbindet. Auch hier muss ein Verdrehwinkel reduziert und gleichzeitig die radiale Flexibilität gesteigert werden. Daher kann ein ähnlicher Parametrisierungs- und Optimierungsansatz gewählt werden. Da die Problemstellung jedoch nahezu identisch ist, wird in dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen.

5.3 System-Eigenfrequenz

In diesem Fallbeispiel sollen die Parametrisierungsansätze aus Abschnitt 5.2 aufgegriffen und in einer erweiterten Aufgabenstellung angewendet werden. Als Beispiel wird die Optimierung der Hohlradaufnahme herangezogen. Die Hohlradaufnahme ist eine dünnwandige zylindrische Struktur, die das Hohlrad des Getriebes mit der umgebenden Triebwerksarchitektur verbindet, wie in Abbildung 5.20b dargestellt. Die Steifigkeitscharakteristik der Hohlradaufnahme hat großen Einfluss auf die Lastverteilung der Verzahnung im Getriebe und gleichzeitig auf das dynamische Verhalten des Systems. Letzteres bildet den Kern der Optimierungsaufgabe in diesem Fallbeispiel.

Das dynamische Verhalten ist ein wichtiger Bestandteil in der Entwicklung technischer Systeme. Kritische Eigenfrequenzen müssen identifiziert werden und es muss sichergestellt sein, dass die Moden im Betrieb nicht angeregt werden. Eine dieser kritischen Moden ist schematisch in Abbildung 5.21 dargestellt. Das Sonnenrad schiebt sich zwischen zwei Planetenrädern und kippt dabei um die Querachse. Gleichzeitig verschieben sich die Planeten in axialer Richtung und die Hohlradaufnahme

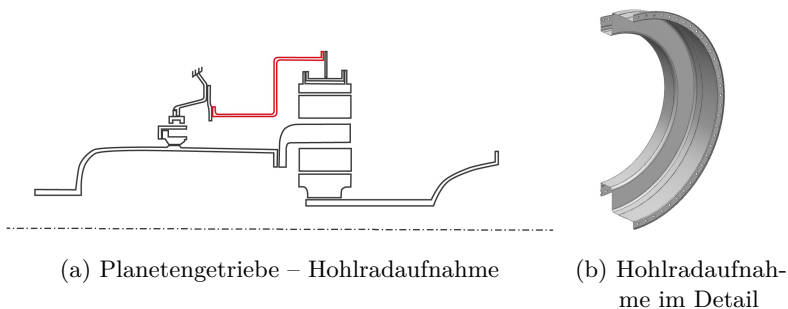


Abbildung 5.20: Hohlradaufnahme im Planetengetriebe

bewegt sich entgegen dem Sonnenrad. Die abgebildete Mode wird maßgeblich vom Design der Hohlradaufnahme getrieben.

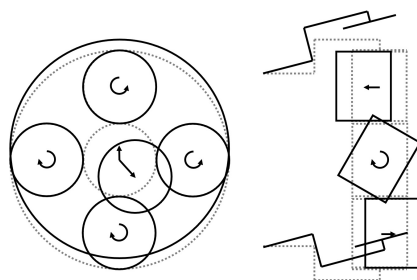


Abbildung 5.21: Kritische Eigenmode des Systems

Im Gegensatz zu dem Beispiel in Abschnitt 5.2 kann die Strukturoptimierung hier nicht auf der Komponentenebene allein stattfinden. Die Steifigkeitscharakteristik wird zwar durch das Design der Komponente bestimmt, die Zielgröße der Optimierung lässt sich jedoch nur auf der Systemebene berechnen. Daher ist es notwendig, die Komponentenoptimierung und die dynamische Analyse des Systems zu koppeln und einen geschlossenen Optimierungsprozess zu schaffen. Dazu wird die Komponente mithilfe eines dynamischen Reduktionsverfahrens auf einige ausgewählte Punkte reduziert. Herleitung und Anwendungen hierzu

finden sich u. a. in [43][70][104][147]. An der Stelle soll nur ein kurzer Einblick in die Grundideen einiger typischer Ansätze gegeben werden.

Eine wichtige Art von Reduktionsverfahren sind die Kondensationsmethoden und hierin wiederum die Substrukturtechnik. Ausgehend von der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.19)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} & - \text{Massenmatrix} \\ \mathbf{L} & - \text{Dämpfungsmatrix} \\ \mathbf{K} & - \text{Steifigkeitsmatrix} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1} & - \text{Verschiebungsvektor} \\ \mathbf{f} = \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1} & - \text{Kraftvektor} \end{aligned}$$

wird der Dämpfungsterm vernachlässigt und die Knoten in zwei Gruppen aufgeteilt. Die Master-Knoten sollen nach der Reduktion erhalten bleiben, wohingegen die Slave-Knoten entfallen sollen. Knoten auf denen Randbedingungen aufgebracht werden, müssen behalten werden und Knoten, die zur Beschreiben des Bauteilverhaltens wichtig sind, sollten behalten werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_m \\ \ddot{\mathbf{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Da auf den Slave-Knoten keine äußeren Kräfte aufgebracht werden, ist $\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$. Ein einfacher Ansatz besteht jetzt darin den Trägheitsterm zu vernachlässigen und die zweite Zeile der Gleichung (5.20) zu betrachten

$$\mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

und nach \mathbf{u}_s umzustellen

$$-\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_s. \quad (5.22)$$

Somit ergibt sich

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \mathbf{T}_{Guy} \mathbf{u}_m, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_{Guy} \mathbf{u}_m = \mathbf{f}. \quad (5.24)$$

Dieser Ansatz wird auch statische Kondensation oder *Guyan*-Verfahren genannt. Mittels der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{Guy} lässt sich das ursprüngliche Gleichungssystem auf die Master-Knoten reduzieren. Da der Trägheitsterm vernachlässigt wurde, liefert das Verfahren nur für die niedrigsten Eigenfrequenzen brauchbare Ergebnisse. Für höhere Eigenfrequenzen trägt der Trägheitsterm stärker zum Bauteilverhalten bei, was zu entsprechend großen Fehlern durch das *Guyan*-Verfahren führt.

Um den Trägheitsterm nicht zu vernachlässigen und somit eine dynamische Reduktion durchzuführen, muss eine andere Annahme getroffen werden. Diese ist z. B. eine harmonische zeitabhängige Last $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} \exp(i\omega t)$, welche wiederum eine harmonische Antwort $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \exp(i\omega t)$ bedingt. Dabei ist $i = \sqrt{-1}$ und ω die Kreisfrequenz. Aus Gleichung (5.20) und dieser Annahme folgt dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mm}(\omega) & \mathbf{D}_{ms}(\omega) \\ \mathbf{D}_{sm}(\omega) & \mathbf{D}_{ss}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_m \\ \hat{\mathbf{u}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_m \\ \hat{\mathbf{f}}_s \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}. \quad (5.26)$$

Wie bereits zuvor wird nun angenommen, dass die äußeren Kräfte auf die Slave-Knoten null sind und die Gleichung wird nach $\hat{\mathbf{u}}_s$ umgestellt:

$$-\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\omega) \mathbf{D}_{sm}(\omega) \hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{u}}_s \quad (5.27)$$

Wieder lässt sich eine Transformationsmatrix bilden:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hat{\mathbf{u}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\omega)\mathbf{D}_{sm}(\omega) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_m = \mathbf{T}_{dyn} \hat{\mathbf{u}}_m \quad (5.28)$$

Besonders ist hierbei, dass die Berechnung von \mathbf{T}_{dyn} die Wahl eines ω erfordert. Für $\omega = 0$ ist das Verfahren identisch zur statischen Kondensation. Für harmonische Anregungsfrequenzen identisch zu ω ist das Verfahren exakt. Der Ansatz liefert somit besonders gute Ergebnisse, wenn die Anregungen in einem engen und bekannten Frequenzband liegen.

Ein weiteres häufig eingesetztes Verfahren ist die Component Mode Synthesis (CMS) oder auch *Craig-Bampton*-Verfahren genannt. Hierfür wird eine Gruppe von generalisierten Koordinaten ξ eingeführt. Die Koordinaten ergeben sich aus den Amplituden der Eigenmoden einer Slave-Struktur, bei der die Master-Knoten festgehalten werden. Es gilt somit nicht nur wie zuvor $\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$, sondern zusätzlich auch $\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$. In Verbindung mit der Annahme einer harmonischen Lösung ergibt sich diesmal aus Gleichung (5.20) zunächst das Eigenwertproblem

$$\mathbf{K}_{ss}\Phi = \lambda\mathbf{M}_{ss}\Phi, \quad (5.29)$$

welches für eine Reihe von Eigenwerte (λ) und Eigenmoden (Φ) gelöst werden kann. Die so erhaltenen Eigenmoden dienen als zusätzliche Basisvektoren. Die Gleichung (5.22) erweitert sich zu

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m + \sum \Phi_i\xi_i = \Psi\mathbf{u}_m + \Phi\xi. \quad (5.30)$$

Die Transformtionmatrix ergibt sich somit zu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \xi \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CMS} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Wie gut das reduzierte Modell die ursprüngliche Struktur wiedergibt, ist abhängig von der Wahl der Master-Knoten und von der Wahl der Eigenmoden. Je mehr Eigenmoden berechnet und „mitgenommen“ werden, umso exakter wird das reduzierte Modell hinsichtlich des ursprünglichen. Mit hinreichend vielen Eigenmoden lässt sich so eine gute Modellgüte für sehr unterschiedliche Lastfälle bestimmen [70].

Für dieses Fallbeispiel wurde eine dynamische Reduktion durchgeführt. Die resultierende Steifigkeits- und Massenmatrix wird anschließend in ein übergeordnetes System-Modell überführt, das wiederum aus einer Reihe von reduzierten Steifigkeits- und Massenmatrizen besteht. Das System-Modell wurde in *MSC Nastran* aufgebaut und berechnet. Abbildung 5.22 verdeutlicht die Kopplung der beiden Ebenen nochmals grafisch.

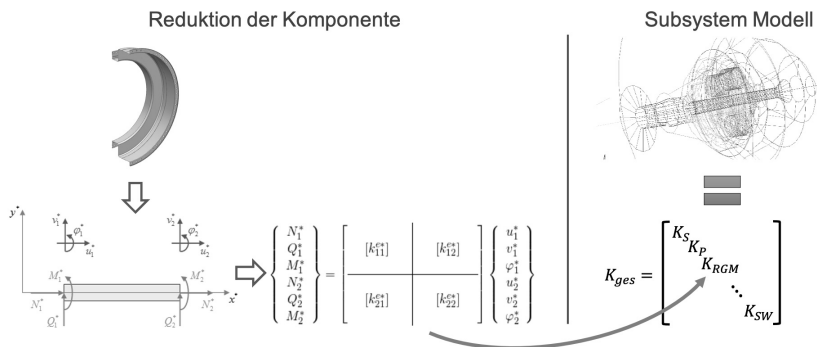


Abbildung 5.22: Kopplung der Analyse von Komponente und System

Auf der Komponenten-Ebene wird jedoch nicht nur das Modell der Hohlradanbindung reduziert. Auf Basis desselben Finite-Elemente-Netzes wird auch eine Beuleigenwertanalyse durchgeführt. Aufgrund des großen Durchmessers sind die Spannungen eher gering und ein Beulen unter Torsion limitiert hier die Auslegung. Wie in den vorangegangenen Beispielen

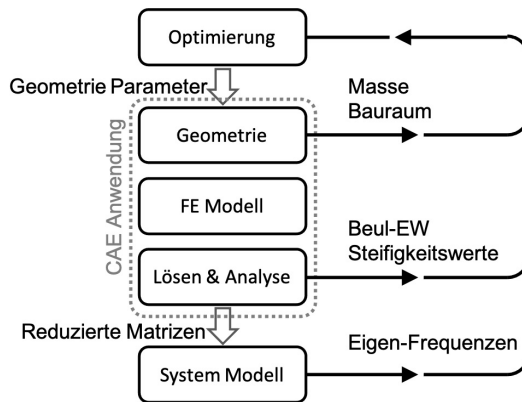


Abbildung 5.23: Gekoppelter Analyse- und Optimierungsprozess

werden anhand des CAD-Modells die Masse und der Abstand zur Baumraumgrenze bestimmt. Abbildung 5.23 zeigt den gesamten Optimierungsprozess nochmals grafisch. Ähnlich zu dem Fallbeispiel im vorherigen Abschnitt lässt sich wieder ein einkriterielles und ein mehrkriterielles Optimierungsproblem formulieren. Das Optimierungsziel besteht darin, die kritische Eigenfrequenz zu maximieren und für das mehrkriterielle Problem soll zusätzlich die Masse minimiert werden. Als Nebenbedingung muss eine Reihe von Steifigkeitskriterien eingehalten werden, die sich aus vorherigen Systemanalysen ergeben haben. Weitere Nebenbedingungen sind ein minimaler Beuleigenwert, der nicht unterschritten werden darf, und das Einhalten der Baumraumgrenzen. Als letzte Nebenbedingung wird ein minimaler Biegeradius als Untergrenze definiert. Aufgrund der hohen Designfreiheit der Parametrisierung können spitze Ecken entlang der Mittelkontur entstehen. Diese führen zum einen zu Problemen in der Fertigung, zum anderen können sie durch Schalenelemente im FE-Modell schlecht abgebildet werden. Daher sollten spitze Ecken, insbesondere für den Einsatz von Schalenmodellen, vermieden werden. Aus den Zielen und Nebenbedingungen ergeben sich die Optimierungsprobleme 5.32 und 5.33. Bei den Steifigkeitsnebenbedingungen handelt es sich wieder um Mindestanforderungen für die Flexibilität. Es ist daher nicht möglich, die

Eigenfrequenz über eine allgemein steifere Hohlradanbindung anzuheben. Zudem ist vorab nicht klar, inwieweit eine höhere Eigenfrequenz bei gleichzeitig hoher Flexibilität erreicht werden kann.

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} -f(\mathbf{p}) \quad (5.32)$$

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}} \begin{bmatrix} -f \\ m \end{bmatrix} (\mathbf{p}) \quad (5.33)$$

$$\text{jeweils mit } P := \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} \tilde{b}(\mathbf{p}) - b_{zul} \\ -(\mathbf{k}(\mathbf{p}) - \mathbf{k}_{min}) \\ -\beta_{min}(\mathbf{p}) \\ -(\tilde{r}(\mathbf{p}) - r_{zul}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \mathbf{p}^u \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}^o \right\}$$

wobei:

- b, b_{zul} – kleinster und zulässiger Beuleigenwert
- f – kritische Eigenfrequenz
- $\mathbf{k}, \mathbf{k}_{min}$ – Steifigkeitsvektor und Untergrenzen für die Steifigkeiten
- m – Masse
- \tilde{r}, r_{zul} – kleinster lokaler und minimal zulässiger Radius
- $\mathbf{p}^o, \mathbf{p}^u$ – obere und untere Parametergrenze
- β_{min} – kleinster Abstand zur Bauraumgrenze

Für die Hohlradanbindung wurden zunächst zwei unterschiedliche Parametrisierungsansätze untersucht. In einem ersten Ansatz wurde die grundlegende Gestalt beibehalten – mit zwei horizontalen und einem vertikalen Verbindungselement. Entsprechend Abbildung 5.24a lässt sich die Geometrie mit vier Parametern variieren. In einem zweiten Ansatz wird die Hohlradaufnahme mithilfe eines Splines parametrisiert. Sieben Punkte und zwölf Parameter beschreiben und variieren die Kontur. Hierzu wurden vorab verschiedene Varianten untersucht. Dabei wurde eine unterschiedliche Anzahl von Stützstellen betrachtet und die Art der Spline-Definition zwischen *through points* und *by poles* variiert (siehe Abschnitt 3.1.2). Sieben Stützstellen lieferten hier den besten Kompromiss aus hoher Designvielfalt und geringer Komplexität. Die

Tabelle 5.3: Ausfallraten

	erzeugte Designs	zulässige Designs	Ausfallrate
<i>through points</i>	200	92	54%
<i>by poles</i>	200	146	27%

By-poles-Definition führte außerdem zu einer geringeren Ausfallrate bei der Geometrieerzeugung. Für die Untersuchung der Ausfallrate wurde jeweils ein Spline mit der *Through-points*- und der *By-poles*-Definition erzeugt und die Koordinaten der Stützstellen in einer DoE nach einem Ansatz entsprechend eines optimierten LHS im Designraum verteilt (siehe hierzu Abschnitt 4.1). Somit werden die Stützstellen für 200 Varianten im Designraum angebracht und für jede Variante wird geprüft, ob die Geometrie erzeugt werden konnte. Eine Geometrie wird immer dann als Ausfall gewertet, wenn sich der Spline selbst schneidet oder an einer Stelle entlang des Splines den minimal zulässigen lokalen Radius unterschreitet. Beide Fälle würden dazu führen, dass die Geometrie nicht fertigbar wäre. Entsprechend Tabelle 5.3 halbiert sich die Ausfallrate bei der Verwendung der *By-poles*-Definition. Daher wurden alle Optimierungen mit dieser Beschreibung durchgeführt.

Für das Optimierungsproblem 5.32 und der Parametrisierung aus Abbildung 5.24a wurde mithilfe des CMA-ES-Algorithmus und des in Abbildung 5.22 und 5.23 gezeigten gekoppelten Analyseprozesses das in Abbildung 5.24b dargestellte Design als beste Lösung bewertet. Darunter, in Abbildung 5.25b, ist das Ergebnis für die Parametrisierung aus Abbildung 5.25a dargestellt. Das Ausgangsdesign ist als Referenz jeweils gestrichelt dargestellt. Für einen Vergleich werden die kritische Eigenfrequenz und die Masse des Ausgangsdesigns mit f_b und m_b definiert. Mittels der ersten Parametrisierung konnte die Eigenfrequenz auf $f = 1.14f_b$ gesteigert werden und mittels der zweiten Parametrisierung auf $f = 1.28f_b$. Beide Varianten führten jedoch zu einer höheren Masse

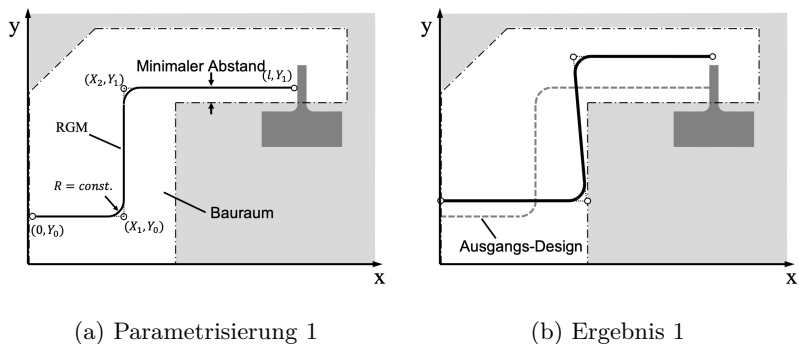


Abbildung 5.24: Optimierung 1

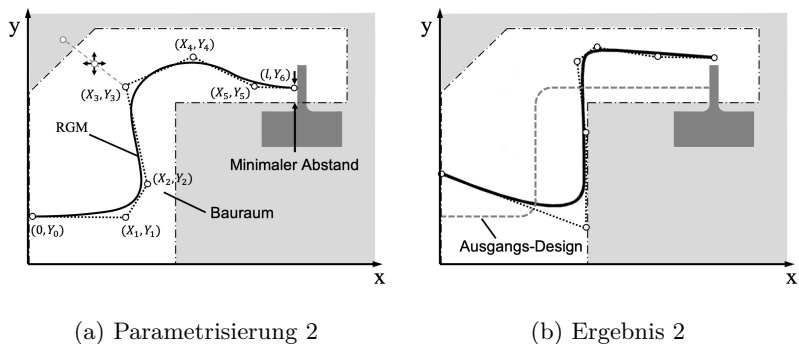
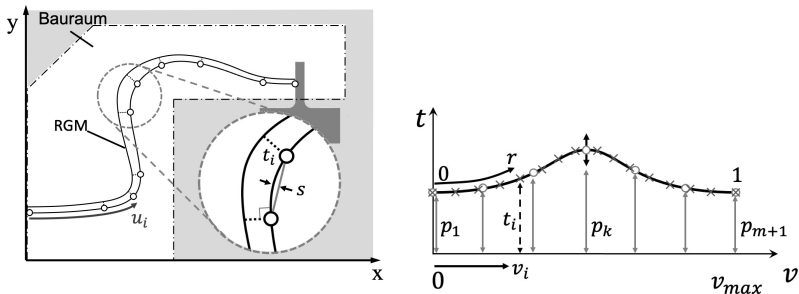


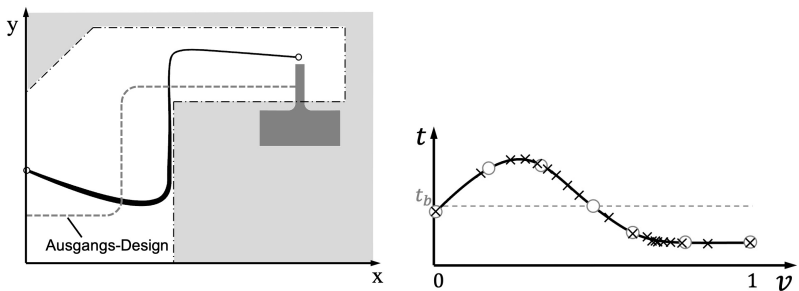
Abbildung 5.25: Optimierung 2

von 6 % bzw. 3 %. Mithilfe einer dritten Parametrisierung soll daher das mehrkriterielle Optimierungsproblem (5.33) bearbeitet werden. Dazu wird die Mittelkontur aus dem in Abbildung 5.25b gezeigten Ergebnis herangezogen und die Wandstärke entlang dieser Kontur variabel parametrisiert. Wie in Kapitel 5.2 wird ein permutierender Spline genutzt. Um dessen Verlauf besser entlang der Mittelkontur zu überführen, wurden die Hilfspunkte diesmal nicht äquidistant verteilt, sondern so angeordnet, dass der maximale Abstand von der Sehne zweier Stützstellen zum Spline die Länge s nicht überschreitet (siehe Abbildung 5.26a). Diese Bedingung führt dazu, dass in Bereichen mit großer Krümmung viele Stützstellen und in Bereichen mit kleiner Krümmung weniger Stützstel-

len angeordnet werden. Die Stellen, an denen der permutierende Spline für die Wandstärke ausgewertet wird, sind in den Abbildungen 5.26a und 5.26b jeweils mit Kreuzen markiert.



(a) Parametrisierung 3



(b) Ergebnis 3*

Abbildung 5.26: Optimierung 3

Für die mehrkriterielle Suche wurde wieder der AMGA-Algorithmus gewählt. Abbildung 5.26b zeigt das Ergebnis des Designs mit der höchsten kritischen Eigenfrequenz auf der Paretofront von $f = 1.31f_b$. Dementsprechend weist das Design die höchste Masse auf der Paretofront aus. Dennoch konnte die Masse gegenüber dem Ausgangsdesign um 4 % reduziert werden. Abbildung 5.27 gibt eine Übersicht aller Ergebnisse der Optimierungen 1-3. Die Skalen sind jeweils auf das Ausgangsdesign normiert. Das graue Fünfeck markiert das in 5.26b abgebildete Design.

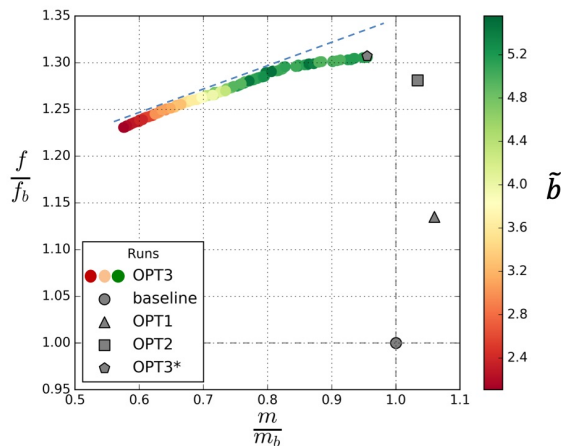
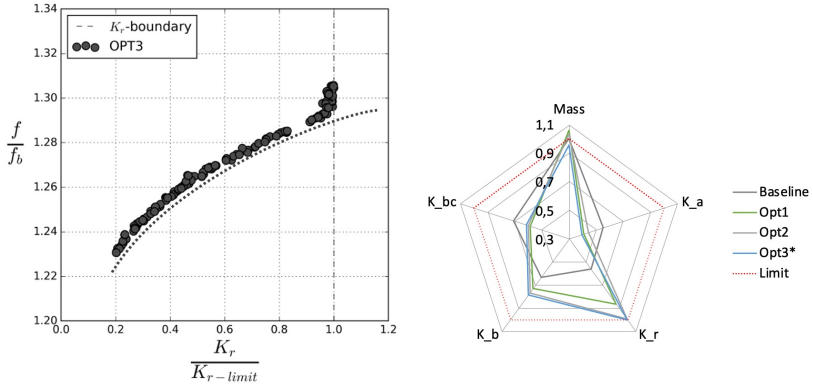


Abbildung 5.27: Ergebnisübersicht

Entlang der Paretofront, hin zu Entwürfen mit geringeren Massen, sinkt ebenfalls der erste Beuleigenwert \tilde{b} . Die geringeren Wandstärken der leichteren Designs führen auch gleichzeitig zu einem kleineren Beuleigenwert. Für die Entwürfe mit einer kritischen Eigenfrequenz zwischen $1.23f_b$ und $1.29f_b$ besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Komponentenmasse und der kritischen Eigenfrequenz. Das Verhältnis beträgt etwa $0.27f/m [Hz/kg]$. Soll die Eigenfrequenz jedoch über $1.29f_b$ hinaus gesteigert werden, fällt der Gradient deutlich schlechter aus.

Die Ursache für den Knick in der Paretofront lässt sich bei einer Betrachtung der Steifigkeitsnebenbedingungen \mathbf{K}_{min} erkennen. Abbildung 5.28a zeigt, dass für Designs mit $f \geq 1.29f_b$ die Nebenbedingung für die maximal zulässige radiale Steifigkeit aktiv wird. Soll die kritische Eigenfrequenz mit der Rate von $0.27f/m$ über diesen Wert hinaus erhöht werden, müssen die radialen Steifigkeitsnebenbedingungen aufgeweicht werden. Aus den Verläufen der Punktwolken in Abbildung 5.27 und 5.28a lässt sich abschätzen, wie weit der Grenzwert hinaufgesetzt werden müsste und welche Steigerung der Eigenfrequenz dabei zu erwarten ist.

Die Übersicht der Steifigkeitsnebenbedingungen zeigt außerdem, dass die restlichen Grenzen für die Flexibilität hier zu keiner Einschränkung führen.

(a) Nebenbedingung K_r

(b) Übersicht der Nebenbedingungen

Abbildung 5.28: Steifigkeitsnebenbedingungen der Optimierung

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das komplexe Optimierungsproblem mithilfe einer CAD-basierten Strukturoptimierung angemessen bearbeitet werden konnte, obwohl die Eigenfrequenz des Systems als Zielgröße gesetzt wurde und das Komponentendesign durch viele Nebenbedingungen stark restringiert ist. Sowohl die Parametrisierung des Ausgangsdesigns als auch die Parametrisierungen durch Splines führten zu verbesserten Designs. Der Parametrisierungsansatz mit zwei Splines, der ebenfalls im Fallbeispiel für die spezifische Verformung genutzt wurde, lieferte auch hier die besten Ergebnisse. Es konnte gezeigt werden, dass sich der Optimierungsansatz gut auf die Systemebene erweitern und an bestehende Analyseprozesse koppeln lässt. Durch den CAD-basierten Ansatz ist nicht nur jedes Einzeloptimierungsergebnis und jeder Punkt auf der Paretofront direkt als funktionales CAD-Modell verfügbar, sondern auch alle Analysedaten der Optimierung. Somit lassen sich Rückschlüsse zu den Randbedingungen ziehen und Informationen

sowohl zu den betrachteten als auch zu benachbarten Komponenten sammeln.

Weitere Vorteile ergeben sich aus einem Vergleich des hier gezeigten Ansatzes zu der Vorgehensweise, wie dynamisches Verhalten von Systemen oftmals untersucht und optimiert wird. Da sich die System-Modelle in der Regel aus reduzierten Komponenten-Modellen zusammensetzen, stehen lediglich die reduzierten Matrizen zur Verfügung. Diese können mit Faktoren versehen werden, um die gesamte Matrix zu skalieren, oder es können einzelne Einträge in den Matrizen variiert werden. Beide Vorgehensweisen sind in der Regel jedoch unphysikalisch, da keine Änderung des Designentwurfs die gesamte Matrix linear skaliert oder nur einen einzelnen Eintrag ändert. Daraus können lediglich Anforderungen entstehen und der Konstrukteur muss anschließend versuchen, einen Designentwurf zu entwickeln, der diesen möglichst umfänglich entspricht. Dabei ist vorab nicht klar, ob überhaupt eine Geometrie existiert, die zu den gewünschten reduzierten Matrizen führt. Der gezeigte Prozess setzt hier an und schlägt eine Brücke zwischen dem Analysemodell des Systems und den tatsächlichen Bauteilgeometrien. Er kann ebenfalls für Parameterstudien genutzt werden, um die Auswirkung unterschiedlicher Komponentenentwürfe auf das Systemverhalten zu untersuchen, Zusammenhänge zu erkennen und Tendenzen abzuleiten[111].

5.4 Möglichkeiten der Prozessbeschleunigung

In Abschnitt 5.3 ist bereits auf die Analyse und Optimierung von Systemen eingegangen worden. Gerade große Systeme führen zu Herausforderungen. Zum einen sind die Abhängigkeiten der enthaltenen Komponenten oft komplex und müssen hinreichend gut abgebildet werden. Zum

anderen bedeuten große Systeme oft lange Rechenzeiten, die sich im Kontext einer strukturmechanischen Analyse aus den großen Modellen und im Kontext der Optimierung aus der großen Anzahl von Optimierungsparametern ergeben. Somit benötigt eine Iteration viel Rechenzeit und es sind viele Iterationen nötig, um ein Optimum zu finden. Daraus ergibt sich die Frage nach Möglichkeiten der Prozessbeschleunigung.

Die Ursachen für die langen Optimierungszeiten zeigen gleichzeitig wichtige Ansatzpunkte für Verbesserungsmöglichkeiten auf. Eine optimierungsgerechte Parametrisierung reduziert die Anzahl der Optimierungsparameter. Sie wurde in Abschnitt 3.1 erläutert und in den Kapiteln 5.1, 5.2 und 5.3 an Fallbeispielen demonstriert. Geschickte Optimierungsalgorithmen zu nutzen, die möglichst wenige Iterationen zum Auffinden eines Optimums benötigen, ist ebenfalls eine Möglichkeit. Reduktionsverfahren sind ein weiterer Ansatz, um die Rechenzeit des strukturmechanischen Analysemodells zu verringern. Im Fallbeispiel in Abschnitt 5.3 wurden reduzierte Modelle bereits eingesetzt. Eine weitere Möglichkeit, die Rechenzeit deutlich zu verkürzen, sind Antwortflächenverfahren. Einmal erzeugt, kann fortan die Antwortfläche „befragt“ werden und die Rechenzeit entfällt nahezu gänzlich. Die Funktionsweise der Methoden wurde in Kapitel 4 erläutert.

Basierend auf der Problemstellung in Kapitel 5.3 wird das Ziel verfolgt, den Prozess der Systemoptimierung mithilfe eines Antwortflächenverfahrens zu beschleunigen. Im vorherigen Fallbeispiel wurden bereits einzelne Komponenten auf ausgewählte Knoten reduziert und anschließend in einem Systemmodell zusammengeführt. Typischerweise werden Antwortflächenverfahren so genutzt, dass sie versuchen, auf Basis bekannter Trainingsstellen das Systemverhalten abzubilden. In einem iterativen Prozess wird dann abwechselnd auf der Antwortfläche des Systems optimiert und neue Trainingsstellen werden hinzugefügt — in Bereichen, in denen das Optimum vermutet wird. Für ein Systemmodell des Planetengetrie-

bes wäre dieser Ansatz ebenfalls möglich. Jedoch ist die Optimierung des strukturemechanischen Verhaltens eines Planetengetriebes für Flugtriebwerke durch zwei Punkte charakterisiert. Durch die Neuartigkeit ist der Entwurfsprozess sehr dynamisch, es kommt daher oft zu großen Designänderungen. Zudem ist der Einfluss vieler Komponenten auf das Systemverhalten stark gekoppelt. Beides in Kombination führt dazu, dass im Fall einer Designänderung die bisherigen Systemanalysen und eventuell bereits erzeugte Antwortflächen für das Systemverhalten an Aussagekraft verlieren. Die Analysen müssten daher neu durchgeführt bzw. die Antwortflächen neu erzeugt werden. Dieser Vorgang ist zeitaufwändig.

Daher sollen die Effektivität und Durchführbarkeit eines alternativen Ansatzes untersucht werden. Statt die Eigenfrequenzen des Systems abzubilden, sollen jeweils Antwortflächen für jede zu optimierende Komponente erzeugt werden. Die Ausgabegröße der Antwortfläche besteht nicht aus den Eigenfrequenzen des Systems, sondern aus dem Eintrag in der reduzierten Steifigkeits- bzw. Massenmatrix. Die approximierten Matrizen können dann in das Systemmodell eingebunden werden. Dort werden anschließend die Eigenfrequenzen des Systems berechnet, welche die eigentlichen Zielgrößen der Optimierung sind. Da zu Beginn nicht klar ist, welche Designvariante der Komponente zu einem Optimum auf der Systemebene führt, ist es entscheidend, die reduzierten Matrizen für ein breites Spektrum von Designvarianten akkurat vorherzusagen. Diese Vorgehensweise bringt den Vorteil, dass im Fall von Designänderungen im System die identische Antwortfläche der Komponente für eine erneute Optimierung des Systems unter den nun neuen Randbedingungen genutzt werden kann. Die Berechnungszeiten des reduzierten Systemmodells sind dann vergleichsweise gering. Sollen mehrere Komponenten für die Optimierung des dynamischen Systemverhaltens variiert werden, kann der Ansatz problemlos erweitert werden, indem die weiteren Komponenten ebenfalls durch Antwortflächen ersetzt werden. Abbildung

5.29 vergleicht die beiden zuvor beschriebenen Ansätze und illustriert die Zeitersparnis schematisch. Für das Erstellen der Antwortfläche soll nicht mehr Rechenzeit verwendet werden, als für eine Optimierung der einzelnen Komponente üblicherweise aufgebracht würde.

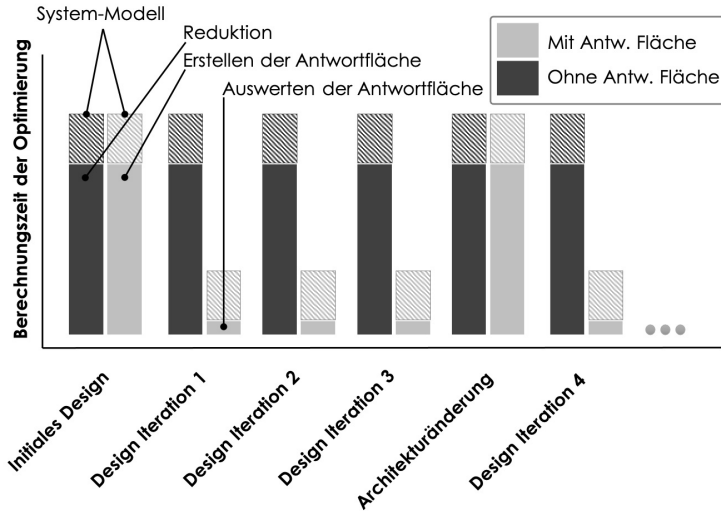


Abbildung 5.29: Zeitersparnis durch Antwortflächenverfahren

Als Fallbeispiele werden die flexible Sonnenwelle und die Hohlradaufnahme herangezogen, mit den jeweils bereits verwendeten Parametrisierungen für die Optimierung. Der methodische Prozess dazu gliedert sich dann wie folgt in fünf Schritte:

1. Erstellen eines automatisierten Berechnungsprozesses, der die Geometrie variiert, ein FE-Modell ableitet und dieses auf die gewünschten Punkte reduziert
2. Erstellung und Durchführung einer DoE-Studie, um die benötigten Trainingspunkte für die Antwortfläche zu generieren
3. Auswahl eines Antwortflächenverfahrens für die Approximation der strukturmechanischen Eigenschaften und Erzeugung der Ant-

wortfläche

4. Bestimmung der Qualität der Antwortfläche
5. Verbesserung der Qualität der Antwortfläche, falls nötig

Kern der Methode ist wieder ein CAD-basierter Analyseprozess, wie er zuvor in Abschnitt 5.3 in Abbildung 5.23 gezeigt wurde. Abbildung 5.30 stellt das Vorgehen zum Erstellen der Antwortfläche grafisch dar. Der CAD-basierte Analyseprozess wird hier nicht von einem Optimierungsalgorithmus eingesetzt, sondern dazu genutzt, vorab definiert Punkte der DoE-Studie zu berechnen. Für jede Parameterkombination wird jeder Eintrag in der berechneten reduzierten Steifigkeits- und Massenmatrix erfasst. Für jeden Eintrag wird eine Approximationsfunktion erzeugt, die auf Basis der Geometrieparameter diesen einzelnen Eintrag in der Matrix vorhersagt. Somit entspricht die Anzahl der Antwortflächen der Anzahl an Einträgen in den Matrizen. Oftmals sind viele Einträge in den reduzierten Matrizen klein oder null. Diese könnten ausgelassen werden, wenn sichergestellt ist, dass der Eintrag für alle betrachteten Designvarianten vernachlässigbar ist. Für komplexe Geometrien und ein großes Variationsspektrum ist dies jedoch schwer zu bestimmen. Im Zweifel empfiehlt es sich daher, alle Einträge in die Betrachtung aufzunehmen.

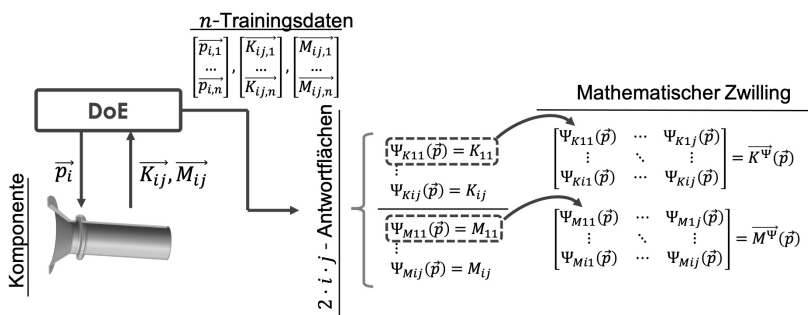


Abbildung 5.30: Prozess für den mathematischen Zwilling mit Antwortflächen

Anzahl und Verteilung der Trainingspunkte im Entwurfsraum sollten abhängig vom Problem und der Komplexität der Parametrisierung gewählt werden. Für ein Modell mit einer komplexen Parametrisierung — mit vielen Abhängigkeiten und einer großen Anzahl an Entwurfsparametern — werden mehr Trainingspunkte für eine akkurate Vorhersage nötig sein als für ein sehr einfaches Modell. Ein Beispiel für eine einfache Parametrisierung ist die flexible Welle, wohingegen der Spline, der die Hohlradaufnahme beschreibt, deutlich komplexer ist. Für die Verteilung der Punkte im Entwurfsraum wird ein LHS verwendet. Die Verteilung der Trainingspunkte kann jedoch noch variiert werden. Ist unklar, wo sich ein Optimum befinden könnte, und/oder soll der gesamte Designraum gleichmäßig abgebildet werden, empfiehlt sich ein optimiertes LHS mit einer Zielgröße, welche die Punkte gleichmäßig im Designraum verteilt. Sollen die strukturmechanischen Eigenschaften besonders gut für Designvarianten ähnlich dem Ausgangsdesign abgebildet werden, kann eine Normalverteilung hinterlegt werden. Hierbei befinden sich mehr Trainingsstellen in den Bereichen um die Basiswerte (\mathbf{p}_b) des Ausgangsdesigns. Abbildung 5.31 zeigt die Unterschiede der beiden Varianten nochmals grafisch. Für die beiden hier gezeigten Fallbeispiele wurde im Sinne eines allgemeinen Ansatzes eine gleichmäßige Verteilung gewählt.

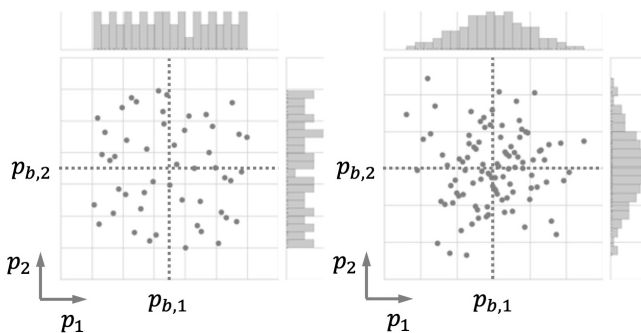


Abbildung 5.31: Latin Hypercubes im Vergleich

Auf Basis der erzeugten Trainingsdaten werden anschließend die Antwortflächen erzeugt. Hier kommen verschiedene Verfahren in Betracht, von denen eine kleine Auswahl in Kapitel 4 bereits erläutert wurde. Da an dieser Stelle viele Antwortflächen erstellt werden müssen und eine große Anzahl von Trainingspunkten zur Verfügung steht, bieten sich RBFs an. Sie lassen sich schnell erstellen und handhaben auch große Trainingsdatensätze effizient. Hierbei können verschiedene Ansatzfunktionen verwendet werden, deren Auswirkung auf die Approximationsqualität später untersucht werden soll.

Wann immer ein Antwortflächenverfahren oder eine Form von Abschätzung eingesetzt wird, stellt sich die Frage nach dem daraus resultierenden Fehler. Nachdem die technische Umsetzung dargelegt wurde, fokussiert sich diese Untersuchung daher auf die Fehlerbetrachtung, um den Nutzen dieses Ansatzes für die praktische Anwendung zu erörtern. Für eine Fehlerbetrachtung muss ein bekannter Wert einer Stelle mit der Vorhersage der Antwortfläche verglichen werden. Eine Möglichkeit ist die *Leave-one-out*-Kreuzvalidierung, wobei ein Trainingspunkt aus dem Satz der Trainingsdaten entfernt, die Antwortfläche mit den verbleibenden Punkten neu gebildet und die Vorhersage der neu gebildeten Antwortfläche mit dem bekannten Wert des zuvor entfernten Trainingspunkts verglichen wird. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die Fehlerbetrachtung mit den bereits berechneten Punkten durchgeführt werden kann und keine weiteren Daten erzeugt werden müssen. Details hierzu wurden in Kapitel 4 erläutert. Da es sich hier jedoch um eine akademische Betrachtung des methodischen Vorgehens handelt, spielt die Wirtschaftlichkeit, im Sinne einer Aufwand zu Nutzen Betrachtung, eine untergeordnete Rolle. Es kann somit mehr Zeit aufgewendet werden. Es wurde daher ein separater Datensatz für die Fehlerbetrachtung erzeugt. Somit wird kein Trainingspunkt entfernt und es kann die tatsächliche Antwortfläche untersucht werden. Abbildung 5.32 zeigt exemplarisch die Verteilung von Test- und Trainingspunkten.

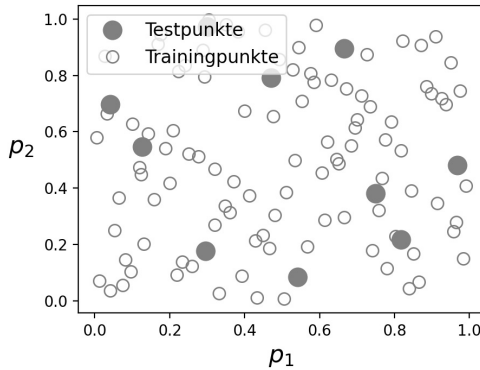


Abbildung 5.32: Verteilung von Test- und Trainingspunkten

Für eine umfassende Fehlerbetrachtung reicht es nicht aus, den Fehler an einigen wenigen Stellen auszuwerten. Daher umfasst der Testdatensatz für beide Komponenten 200 Punkte, die wieder gleichmäßig im Desigraum mittels eines optimierten LHS verteilt werden. Eine Betrachtung der Verteilung von Test- und Trainingspunkten in Abbildung 5.32 zeigt, dass sich in einigen Fällen ein Testpunkt sehr nah an umliegenden Trainingspunkten befindet und in anderen Fällen weit davon entfernt ist. Da es sich bei RBFs um ein interpolierendes Verfahren handelt, ist davon auszugehen, dass der Fehler für Testpunkte nah an Trainingspunkten klein und für Testpunkte weit entfernt von Trainingsdaten groß ausfällt. Im Anschluss muss entschieden werden, welche Größe für die Fehlerbetrachtung herangezogen wird. Die Antwortfläche approximiert die Einträge in der Steifigkeits- und Massenmatrix. Jedoch ist eine Fehlerbetrachtung zu einzelnen Einträgen in den Matrizen wenig aussagekräftig, da das eigentliche Ziel die Vorhersage des dynamischen Systemverhaltens ist. Daher werden für die Fehlerbetrachtung die Eigenfrequenzen des Systems, die aus den reduzierten Matrizen berechnet werden, als Fehlergrößen herangezogen. Der Fehler berechnet sich mit:

$$\epsilon(\mathbf{p}_t) = \frac{\Psi(\mathbf{p}_t) - f(\mathbf{p}_t)}{f(\mathbf{p}_t)} \quad (5.34)$$

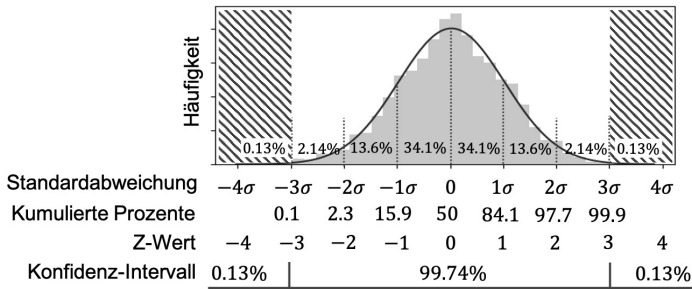
wobei:

- f – Eigenfrequenz ohne Approximation
- \mathbf{p}_t – Stelle des Testpunkts
- ϵ – Fehler
- Ψ – Eigenfrequenz mit Approximation

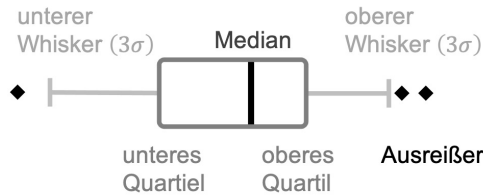
Wird der Fehler für eine Eigenfrequenz des Systems für alle Teststellen berechnet und in ein Histogramm eingetragen, zeigt sich die in Abbildung 5.33a dargestellte Verteilung. Günstigerweise ergibt sich eine Normalverteilung, wodurch sich eine statische Auswertung des Fehlers anbietet. Somit ist es möglich, Konfidenzintervalle für jede Frequenz zu bestimmen. In der nachfolgenden Fehlerbetrachtung werden zwei Konfidenzintervalle in den Blick genommen: ein 50 %-Intervall und ein 3σ -Intervall, was bedeutet, dass jeweils 50 % bzw. 99.74 % aller Fehler innerhalb der angegebenen Intervallgrenzen liegen. Die Auswertung wird anhand eines Box-Plots visualisiert, der jeweils für die Fehlerverteilung bei jeder Eigenfrequenz erstellt wird. Er zeigt den Median des Fehlers, die Grenzen für das untere und obere Quartil, in denen sich 50 % der Daten befinden, und die Breite des 3σ -Intervalls. Einzelne Ausreißer werden durch eine kleine Raute dargestellt (siehe Abbildung 5.33b).

Auf Basis der Parametrisierung, die für die Optimierung einer flexiblen Welle in Abschnitt 5.1 gezeigt wurde, wurden die Trainingsdaten erzeugt und die Antwortflächen mittels einer RBF-Antwortfläche und der *multiquadric* Ansatzfunktion erstellt.

$$\text{multiquadric: } a(r) = \sqrt{1 + (\theta r)^2} \quad (5.35)$$



(a) Normalverteilung als Fehlerverteilung



(b) Boxplot

Abbildung 5.33: Grundlagen der Fehleranalyse

Abbildung 5.34 bietet eine Ergebnisübersicht für die Verteilung der berechneten Fehler für die ersten fünf Eigenfrequenzen. Die ersten drei Eigenfrequenzen werden sehr gut vorhergesagt, die 3σ Intervalle liegen deutlich unter 1 %. Für die vierte und fünfte Eigenfrequenz werden die Fehler größer. Für die fünfte Eigenfrequenz mit den größten Fehlern stellt Abbildung 5.35 die Fehlerverteilung nochmals im Detail dar. Die berechneten Eigenfrequenzen reichen hier von etwa 300Hz bis 1000Hz. Mit einem Fehler von unter 3% ist die Vorhersage der vierten und fünften Eigenfrequenz dennoch gut. Die strukturmechanischen Eigenschaften aller betrachteten Varianten der biegeweichen Welle lassen sich somit angemessen durch den mathematischen Zwilling abbilden. Eine Verbesserung der Antwortflächen ist hier nicht nötig.

Für die Hohlradaufnahme mit der in Abschnitt 5.2 verwendeten Spline-

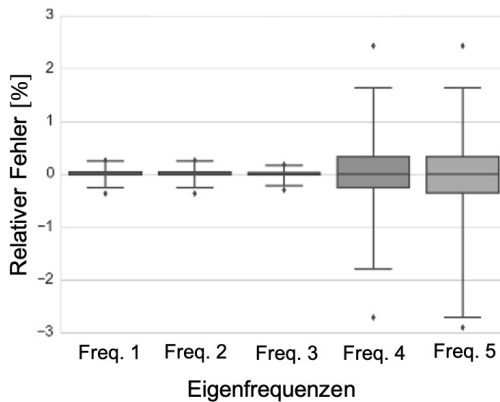


Abbildung 5.34: Sunshaft – Fehlerbetrachtung, Übersicht

Parametrisierung wurde in gleicher Weise verfahren wie für die flexible Welle. Die komplexere Parametrisierung und die umfangreichere Variantenvielfalt der möglichen Designs führten hier teilweise zu größeren Fehlern. Um die Qualität der Antwortfläche zu verbessern, wurden unterschiedliche Ansatzfunktionen für die RBFs untersucht. Ausgangspunkt war wieder die Funktion *multiquadric*, die Funktionen *cubic* und *quintic* führten jeweils zu Verbesserungen.

$$\text{cubic: } a(r) = r^3 \quad (5.36)$$

$$\text{quintic: } a(r) = r^5 \quad (5.37)$$

Als weitere mögliche Ursache für die größeren Fehler wurden mangelhafte Werte in den Trainingsdaten selbst identifiziert. Durch die große Vielfalt an möglichen Designentwürfen, die die Spline-Parametrisierung erlaubt, kann nicht für jeden Fall sichergestellt werden, dass eine hinreichend gute Vernetzung der Geometrie gewährleistet ist. Kommt es an einer Trainingsstelle zu einer fehlerhaften Vernetzung, resultieren daraus gänzlich falsche Werte in den reduzierten Matrizen. Da das RBF-Verfahren

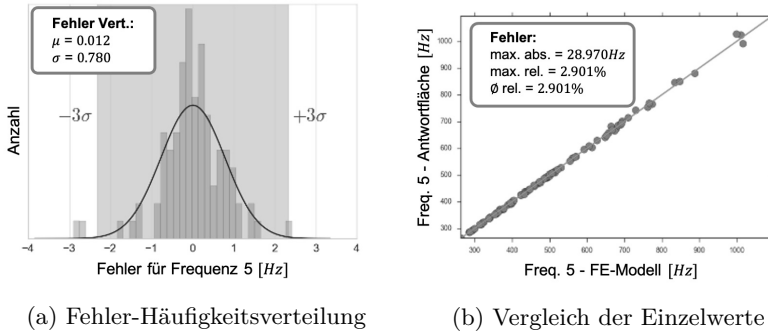


Abbildung 5.35: Fehleranalyse – Sunshaft

interpolierend ist, pflanzt sich dieser Fehler auch in den umliegenden Bereichen fort und führt zu einer lokalen Störung. Dieser Effekt fällt stärker aus, wenn Ansatzfunktionen hohen Grades eingesetzt werden, da diese aus mehreren benachbarten Punkten gebildet werden. Abbildung 5.36 veranschaulicht die Fehlerfortpflanzung an der Testfunktion aus Abschnitt 4. Die grau gestrichelte Kurve zeigt die Testfunktion, die blaue Kurve die Approximation mit allen korrekten Trainingspunkten. Die rote Kurve stellt das Ergebnis der RBF-Approximation dar, wenn ein fehlerhafter Trainingspunkt eingeführt wird. Dabei wird deutlich, dass sich der Fehler in der Abbildung der korrekten Funktion nicht nur um den Bereich des fehlerhaften Trainingspunkts beschränkt. Auch Bereiche, in denen die Trainingsdaten wieder korrekt sind, werden negativ beeinflusst. Wird der fehlerhafte Trainingspunkt entfernt, fällt die Approximation deutlich besser aus, obwohl nun weniger Trainingspunkte zur Verfügung stehen. Die grüne Kurve illustriert das Ergebnis.

In dem tatsächlichen Anwendungsfall besteht die Herausforderung darin, die fehlerhaften Trainingsstellen zu identifizieren. Es ist kaum möglich, kleinere Abweichungen ausfindig zu machen und die entsprechenden Punkte zu entfernen. Eine Betrachtung der Trainingswerte zeigt, dass sich die meisten Werte in einer ähnlichen Größenordnung zu denen des

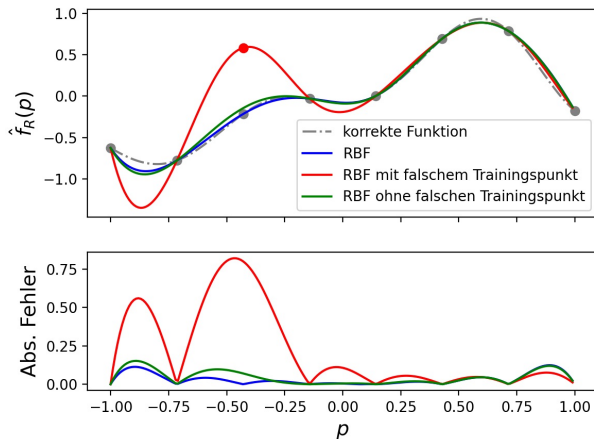


Abbildung 5.36: Fehlerfortpflanzung bei radialen Basisfunktionen

Ausgangsdesigns in Bezug auf die in der Nähe existierenden Werte befinden. Einige wenige Werte sind jedoch mehrere Größenordnungen davon entfernt. Sie sollen entfernt werden, um eine bessere Abbildungsgenauigkeit der Antwortfläche über den gesamten Designraum zu schaffen. Dazu wird für alle Werte eines Matrizeneintrags eine Normalverteilung gefittet. Anschließend wird für jeden Wert der z-Score mittels

$$z = \frac{\Psi_{ij}(\mathbf{p}) - \mu(\Psi_i(\mathbf{p}))}{\sigma(\Psi_i(\mathbf{p}))} \quad (5.38)$$

wobei:

- z – z-Score
- $\mu(\Psi_i(\mathbf{p}))$ – Mittelwert eines Matrizeneintrags
- $\sigma(\Psi_i(\mathbf{p}))$ – Standardabweichung eines Matrizeneintrags
- $\Psi_{ij}(\mathbf{p})$ – Einzelner Wert des Matrizeneintrags eines Designentwurfs

berechnet. Der z-Score eines Werts ist ein Maß dafür, wo sich der Wert in der Verteilung relativ zu den anderen Werten einordnet. Somit ist es möglich, Ausreißer zu identifizieren und aus den Trainingsdaten zu

entfernen. Ein Wert wird als Ausreißer definiert, wenn dessen z-Score über dem frei wählbaren z-Score-Grenzwert (z_{lim}) liegt:

Ausreißer, wenn: $\zeta < 0$

$$\text{mit: } \zeta = z_{lim} - |z| = z_{lim} - \left| \frac{\Psi_{ij}(\mathbf{p}) - \mu(\Psi_i(\mathbf{p}))}{\sigma(\Psi_i(\mathbf{p}))} \right| \quad (5.39)$$

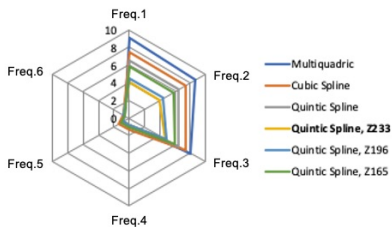
Welche z-Score-Werte sich für verschiedene Stellen in der Normalverteilung ergeben, lässt sich im unteren Abschnitt der Abbildung 5.33a ablesen. Tabelle 5.4 gibt zusätzlich eine Übersicht für verschiedene z-Score-Grenzwerte und zeigt, welcher Prozentsatz daraus als Ausreißer deklariert wird.

z_{lim}	entfernte Punkte
2.33	$\approx 1\%$
1.96	2.5%
1.65	$\approx 5\%$

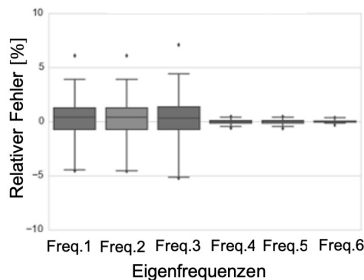
Tabelle 5.4: z-Score-Werte und dazugehörige Prozentsätze

Die Bereinigung der Daten wird für jeden einzelnen Matrizeneintrag durchgeführt. Die Wahl von $z_{lim} = 2.33$ führt dazu, dass etwa 1 % der Trainingsdaten auf Basis des ersten Matrizeneintrags entfernt werden, 1 % auf Grundlage des zweiten usw. Es bedeutet nicht, dass nur 1 % aller Trainingsdaten getilgt werden. Wiederum bedeutet es auch nicht, dass für beispielweise 36 Matrizeneinträge $36 \cdot 1\% = 36\%$ aller Daten eliminiert werden. Zudem ist sehr wahrscheinlich, dass bei einer fehlerhaften Vernetzung nicht nur ein einzelner Eintrag weit von der Norm abfällt. Vielmehr ist davon auszugehen, dass viele, wenn nicht alle, Einträge betroffen sind. Es existieren somit große Schnittmengen unter den entfernten Trainingspunkten auf Basis der jeweiligen Matrizeneinträge.

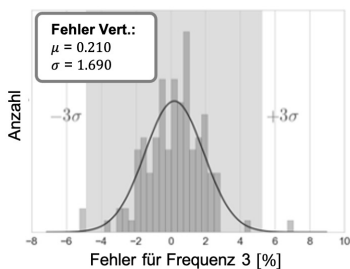
Abbildung 5.37a zeigt eine Übersicht der erzielten Konfidenzintervalle für



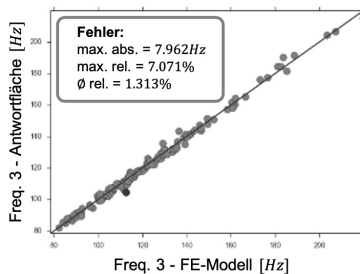
(a) Übersicht aller Ansätze



(b) Übersicht: quintic, $z_{lim} = 2.33$



(c) Fehler-Häufigkeitsverteilung



(d) Vergleich der Einzelwerte

Abbildung 5.37: Fehleranalyse – Hohlradaufnahme

die zuvor benannten Ansatzfunktionen und bereinigte Trainingsdaten. Die vierte, fünfte und sechste Eigenfrequenz wurden mit allen Ansätzen gut vorhergesagt. Die Fehlerbetrachtung konzentriert sich daher auf die ersten drei Eigenfrequenzen. Für die ursprünglich verwendete *multiquadric* Ansatzfunktion mit unbereinigten Trainingsdaten lagen die 3σ -Konfidenzintervalle bei 8 % bis 9.5 %. Durch die Verwendung der *cubic* Ansatzfunktion konnten diese auf etwa 7.5 % und durch die *quintic* Ansatzfunktion nochmals auf etwa 6.5 % verbessert werden. Wenn die Trainingsdaten zusätzlich mit einem z-Score-Grenzwert von $z_{lim} = 2.33$ bereinigt werden, reduzieren sich die 3σ -Konfidenzintervallgrenzen auf 4 % bis 4.5 % und damit auf die besten hier erzielten Werte. Niedrigere Grenzwerte von $z_{lim} = 1.96$ und $z_{lim} = 1.65$ führten ebenfalls zu

Verbesserungen gegenüber den Antwortflächen mit unbereinigten Daten. Verglichen mit dem höheren Grenzwert von 2.33 fallen diese jedoch schlechter aus, da hier auch zunehmend korrekte Trainingsdaten entfernt werden. Abbildung 5.37b bietet die Fehleranalyse für die Ansatzfunktion *quintic* mit $z_{lim} = 2.33$ als Übersicht für alle Frequenzen. Die Abbildungen 5.37c und 5.37d zeigen für die schlechteste Approximation die Fehlerbetrachtung im Detail, in diesem Fall die dritte Eigenfrequenz.

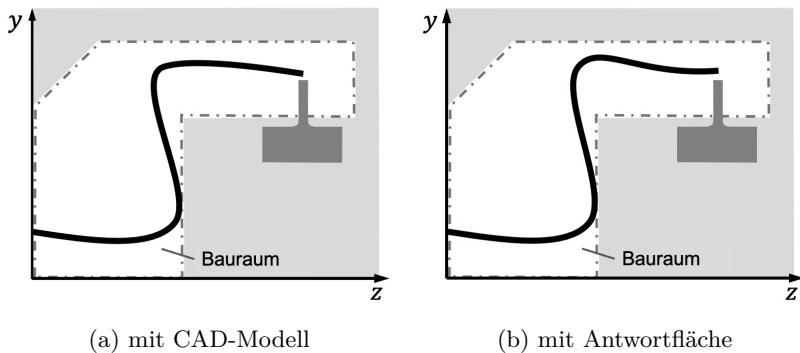


Abbildung 5.38: Optimierungsergebnisse für die Hohlradaufnahme im Vergleich

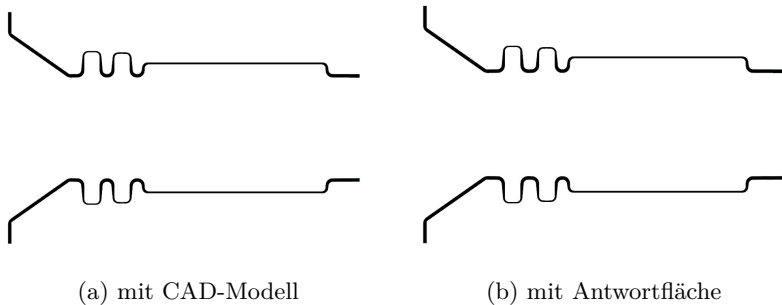


Abbildung 5.39: Optimierungsergebnisse für die Eingangswelle im Vergleich

Im Anschluss an die Fehlerbetrachtung werden die Antwortflächen der

beiden Komponenten in jeweils einer Optimierung genutzt, um den tatsächlichen Einsatzzweck zu demonstrieren. Zum Vergleich wurden dazu für beide Komponenten jeweils zwei Optimierungen durchgeführt: eine mit Nutzung der Antwortfläche und eine Optimierung, bei der die Komponente für jede Iteration reduziert wird. Für die Hohlradaufnahme ist das Ziel der Optimierung, ein Komponentendesign zu finden, das einen Zielwert $f_Z[Hz]$ für die zweite Eigenfrequenz des Systems getroffen wird. Die Abbildung 5.38 zeigt jeweils die erzielten Ergebnisse. Für die Eingangswelle wurde als Randbedingung eine minimale geforderte Biegesteifigkeit definiert, zu der die Masse minimiert werden sollte. Abbildung 5.39 zeigt die Ergebnisse für die Eingangswelle. Im Vergleich zur Referenz führte die Optimierung mit der Antwortfläche in beiden Fällen zu sehr ähnlichen Ergebnissen, wodurch die Praktikabilität dieses Ansatzes nochmals bestätigt wird.

5.5 Bauraumgrenzen benachbarter Komponenten

Die in Kapitel 5.4 beschriebenen Methoden zur Prozessbeschleunigung ermöglichen eine Reduktion der Rechenzeiten für Systemoptimierungen. Der naheliegende Folgeschritt besteht darin, diesen Umstand zu nutzen und im Hinblick auf eine umfängliche Systemoptimierung mehrere Komponenten in die Betrachtung einzubeziehen. Sollen mehrere Komponenten gleichzeitig optimiert werden, steigt jedoch nicht nur die Anzahl der Optimierungsparameter und damit die benötigte Anzahl an Modelliterationen, sondern es entstehen auch weitere Probleme. Grenzen die Bauräume zweier zu optimierender Komponenten aneinander, so beeinflusst das Design einer Komponente den zur Verfügung stehenden Bauraum der anderen. Werden beide Komponenten in einer Optimierung im Verbund betrachtet, kann dieser Umstand genutzt werden, um ein

besseres Gesamtergebnis zu erzielen.

Entgegen der vorangegangenen Betrachtungen muss dazu die Bauraumgrenze entsprechend des Designs variabel verschoben werden. Der resultierende Bauraum wird anschließend durch mindestens eine Variable abgebildet und über die Baugruppe zur benachbarten Komponente weitergegeben. Dabei treibt der Bauraum einer Komponente den Bauraum der anderen, die Zuordnung kann jedoch auch vertauscht werden. Auch eine Aneinanderreihung mehrerer Bauräume ist denkbar. Abbildung 5.40 verdeutlicht den Umstand nochmals schematisch.

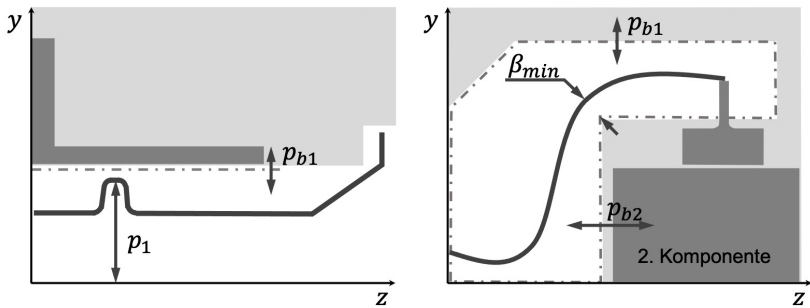


Abbildung 5.40: Beispiele eines variablen Bauraums: Sonnenwelle (links) und Hohlradaufnahme (rechts)

Sollen für die Optimierung des Systems Antwortflächen wie in Abschnitt 5.4 eingesetzt werden, müssen nicht nur die physikalischen Eigenschaften der Komponenten, sondern auch die variablen Bauraumgrenzen abgebildet werden. Um die entsprechende Möglichkeit zu untersuchen, wurde jeweils ein Modell für die Hohlradaufnahme und die Sonnenwelle gewählt, bei welchen die Geometrie der Komponente und die Bauraumgrenzen in einer DoE-Studie variiert werden. Identisch zur Vorgehensweise im vorangegangenen Kapitel 5.4 wird zunächst eine Antwortfläche auf Basis der Trainingsdaten erzeugt und anschließend eine Fehlerbetrachtung

mit einem separaten Satz von Testpunkten durchgeführt. Das Hauptaugenmerk der Fehlerbetrachtung liegt auf der korrekten Abbildung des minimalen Abstands zur Bauraumgrenze bei variierender Geometrie und Bauraumgrenzen. Erschwerend kommt hinzu, dass unstetige Funktionsverläufe kaum zu vermeiden sind. Diese entstehen durch zwei Situationen. Zum einen existiert eine Vielzahl von Geometrieparameterkombinationen, die zwar den Komponentenentwurf ändern, jedoch nicht den minimalen Abstand zur Bauraumgrenze, sodass dieser konstant bleibt. Zum anderen kann das Design variiert werden, nachdem die Bauraumgrenze bereits durchdrungen wurde. All diese Entwürfe liefern als Antwort für den minimalen Abstand zur Bauraumgrenze $\beta_{min} = 0$. Abbildung 5.41 zeigt das Resultat an einem vereinfachten, fiktiven Beispiel mit nur einer Variablen p .

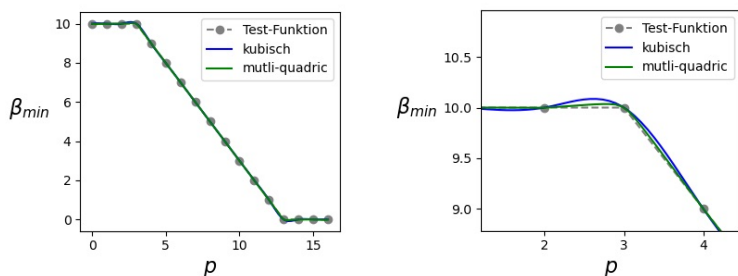


Abbildung 5.41: Approximation von nicht stetigen Funktionen mit RBFs

Nicht stetige Funktionen können durch RBFs nicht abgebildet werden, wodurch um den Bereich der unstetigen Stelle immer ein Fehler entsteht. Abbildung 5.41 (links) lässt jedoch bereits erahnen, dass mit einer hinreichenden Stützstellenanzahl der Fehler klein ist. Erst eine Detailbetrachtung in Abbildung 5.41 (rechts) zeigt die Abweichung der Approximation. Die Ansatzfunktion hat ebenfalls einen Einfluss und die *multiquadric* Funktion liefert hier augenscheinlich bessere Ergebnisse als die kubische Funktion.

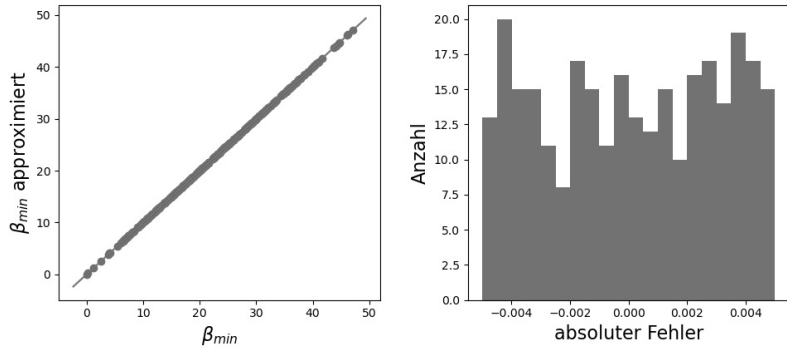


Abbildung 5.42: Fehlerbetrachtung zur Approximation des kleinsten Abstands zur Bauraumgrenze β_{min}

Für den Fall der Sonnenwelle bestehen lineare Abhängigkeiten zwischen der Höhe der Sicke und dem radial zur Verfügung stehenden Bauraum. Der minimale Abstand zur Bauraumgrenze kann hier leicht und exakt durch eine Antwortfläche abgebildet werden, weshalb der Fokus der Fehlerbetrachtung auf dem Fallbeispiel der Hohlradaufnahme liegt. Für die Hohlradaufnahme zeigt Abbildung 5.42 eine Übersicht der Fehlerbetrachtung für den kleinsten Abstand zur Bauraumgrenze β_{min} und vergleicht die tatsächlichen Werte aus den CAD-Modellen mit den approximierten Werten der Antwortflächen. Für das Antwortflächenverfahren wurde eine RBF mit der *multiquadric* Ansatzfunktion verwendet, die Trainingsdaten wurden nicht bereinigt. Es wurden 200 Trainingspunkte und 100 Testpunkte verwendet. Sowohl für den einfacheren Fall der Sonnenwelle als auch für die Hohlradaufnahme, in der die Geometrie durch einen Spline beschrieben wird, konnten gute Ergebnisse erzielt werden. Im Fall der Hohlradaufnahme lag der absolute Fehler für die Approximation von β_{min} für alle Testpunkte unter 0.005 mm und somit vier Größenordnungen unter der abzubildenden Größe (Abbildung 5.42). Somit kann festgehalten werden, dass sich variable Bauraumgrenzen

auch für komplexe geometrische Zusammenhänge mittels einer RBF-Antwortfläche gut abbilden lassen und in einem Optimierungsprozess, der mehrere Komponenten umfasst, eingesetzt werden können.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Produktentwicklung ist zunehmend komplexer geworden. Gleichzeitig erhöht sich das Tempo, in dem Entwicklungen vorangetrieben werden müssen. Neben gänzlich neuen Ansätzen und Denkweisen wächst der Bedarf an effizienten Entwicklungsmethoden, die sich nahtlos in bestehende Entwicklungsprozesse integrieren lassen. Strukturoptimierungsmethoden jeglicher Art leisten hier einen wichtigen Beitrag, da mit ihrer Hilfe Entwürfe und Konzepte hinsichtlich ihrer Anforderungen rasch verbessert werden können. Die zu Beginn der Arbeit beschriebenen Verfahren, die zur Optimierung die FE-Netze variieren, bieten hierfür in vielen Fällen eine gute Möglichkeit. Jedoch bleibt die Schwierigkeit, die Ergebnisse in funktionale CAD-Modelle zu überführen. Dieser Prozess bedarf noch immer manueller Eingriffe des Anwenders, was mit einem erheblichen Zeitaufwand einhergeht. Effizient parametrisierte CAD-Modelle, als Teil eines automatisierten Analyseprozesses, in Kombination mit mathematischen Optimierungs- und Suchalgorithmen umgehen dieses Problem. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode ist in der Lage binäre, diskrete und kontinuierliche Produktmerkmale systematisch zu erzeugen und zu variieren. Insbesondere in Kombination mit den vorgestellten Verfahren zur Versuchsplanung und Optimierung ist so eine umfassende diskursive Methode entstanden, die den Entwickler dabei unterstützt ein konkretes Baumodell zu erarbeiten. Prinzipiell ist sowohl ein generierendes als auch ein korrigierendes Vorgehen möglich. Letztere hat sich in der Praxis als robuster und leichter umzusetzen herausgestellt.

Jedoch hat dieser Ansatz auch Nachteile. Die Wahl einer effizienten

Parametrisierung ist weder trivial noch in kurzer Zeit zu realisieren. Außerdem besteht die Gefahr, dass der Lösungsraum durch die vom Anwender gewählte Parametrisierung zu stark eingeschränkt wird und keine optimale Lösung gefunden werden kann. Gleichzeitig muss eine Einschränkung jedoch nicht nur nachteilig sein, da auch sinnvolle Limitationen gesetzt werden können, um Fertigungs- oder Kostenrandbedingungen zu berücksichtigen.

Ein auf einer CAD-Geometrie basierender Ansatz ist in Kombination mit einem automatisierten Analyseprozess und stochastischen Suchalgorithmen dann besonders empfehlenswert, wenn das Optimierungsziel mit FE-basierten Verfahren nur schlecht oder gar nicht erreicht werden kann. Für flexible und lastentkoppelnde Strukturen ist dies häufig der Fall. Der Umstand, dass bei einem auf CAD-Geometrie basierenden Ansatz Zielgrößen und Nebenbedingungen einfacher und umfangreicher berechnet und berücksichtigt werden können, führt zu einem sehr flexibel einsetzbaren Vorgehen. Hierzu wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei Fallstudien gezeigt, in denen die Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes demonstriert wurde. Entscheidend waren die eingesetzten Parametrisierungsstrategien. Auch die leicht umsetzbare Mehrzieloptimierung bietet viele Vorteile. Der Anwender kann aus einer Reihe parato-optimaler Entwürfe wählen und seine Entscheidung zu einem späteren Zeitpunkt noch zu Gunsten eines anderen Entwurfs verwerfen, sollten sich die Anforderungen im Laufe des Entwicklungsprozesses verändert haben.

Ein weiterer Vorteil ist, dass sich der Optimierungsprozess leicht erweitern lässt. Somit sind nicht nur multidisziplinäre Optimierungen innerhalb der CAE-Anwendung möglich, sondern es können auch weitere externe Analysemodelle eingebunden werden. Hierzu wurde ebenfalls ein Fallbeispiel erörtert. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass auch komplexe Abhängigkeiten mehrerer Komponenten gut abgebildet und berücksichtigt werden können. Da hierdurch sowohl die Anzahl der Optimie-

rungsparameter als auch die Rechendauer einer einzelnen Analyse stark steigt, werden ab einem gewissen Punkt Methoden zur Prozessbeschleunigung unabdingbar. Eine Möglichkeit, wie Antwortflächenverfahren zur Approximation des Systemverhaltens genutzt werden können, wurde ebenfalls in einem Fallbeispiel demonstriert. Die globale Approximation einer Komponente bietet den Vorteil, dass die einmal erzeugte Antwortfläche immer wieder genutzt werden kann, um Optimierungen mit geänderten Randbedingungen schnell und effizient durchzuführen. Somit wurden in dieser Arbeit Möglichkeiten zur Prozessbeschleunigung an allen drei wichtigen Ebenen gezeigt: Reduktion der Optimierungsparameter durch effiziente Parametrisierungsstrategien, Reduktion der benötigten Recheniterationen durch geeignete Versuchspläne und Optimierungsalgorithmen und Reduktion der Rechenzeit durch den Einsatz von Antwortflächenverfahren. In einem dynamischen Entwicklungsumfeld, in dem Anforderungen, Randbedingungen und Zielstellung sich ständig wandeln, Einzelkomponenten in vielen Iterationen Änderungen erfahren und komplexe Abhängigkeiten im System berücksichtigt werden müssen, kommen diese Vorteile besonders zum Tragen.

In dem anspruchsvollen Feld der Strukturoptimierung im Bereich der Produktentwicklung kann diese Arbeit nur einen kleinen Beitrag leisten. Eine auf CAD-Geometrie basierende Optimierung steht nicht in Konkurrenz zu bisherigen FE-basierten Verfahren. Vielmehr ergänzen sich diese Ansätze gegenseitig. Es erscheint zielführend, erste Ideen mithilfe einer Topologieoptimierung zu generieren und die Ergebnisse anschließend in einer CAE-Umgebung weiter zu optimieren. Hierzu bedarf es in Zukunft verbesserter Methoden zur Überführung der Topologieoptimierungsergebnisse. Die Prozessautomatisierung stellt hohe Ansprüche an die automatisierte Netzgenerierung. Durch Verbesserungen in diesem Bereich könnte der Ansatz weiter gestärkt werden. Gleiches gilt für die Parametrisierungsstrategien. Eine Weiterentwicklung, die eine freiere Entwurfsfindung ähnlich der Topologieoptimierung ermöglicht, wäre hier

besonders wünschenswert.

Weitere Arbeiten könnten an die vorliegenden Ergebnisse anknüpfen. Zunächst könnte der Einsatz verbesserter Optimierungsalgorithmen in den Blick genommen werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden eher allgemeine Suchstrategien eingesetzt. Spezifischere Algorithmen, aber auch sogenannte *Omni-Objective*-Optimierungsalgorithmen könnten zu weiteren Verbesserungen führen. Im Rahmen der Antwortflächenverfahren zur Prozessbeschleunigung wurden hier ausschließlich radiale Basisfunktionen eingesetzt. Der Formparameter wurde mit dem Reziprok des mittleren Trainingspunktabstands gewählt. In Kapitel 4 wurde die Möglichkeit zur Optimierung der Formparameter beschrieben, aufgrund der guten Ergebnisse jedoch nicht weiterverfolgt. Somit besteht hier weiteres Verbesserungspotential und die Möglichkeit, Ergebnisse gleicher Güte mit geringerer Trainingspunktezahl zu realisieren. Außerdem könnte der Einsatz weiterer Antwortflächenverfahren untersucht werden, wie beispielsweise eine effiziente Implementierung des Kriging. Da die einzelnen Einträge der Steifigkeitsmatrix approximiert wurden, sind für große Reduktionsmatrizen viele Antwortflächen und ein entsprechender Speicher nötig. Jedoch sind oftmals viele Einträge (nahe) null und bedürfen somit keiner Approximation. Es erscheint daher sinnvoll, diese Einträge ausfindig zu machen und anstelle einer Antwortfläche Nullen einzutragen. Außerdem wurde stets angenommen, dass die Einträge in den Steifigkeitsmatrizen kontinuierliche Größen sind. Dies lässt sich zwar anhand der gewählten Parametrisierung und der strukturmechanischen Zusammenhänge begründen, muss jedoch noch eindeutig gezeigt werden.

Literatur

- [1] D. Agarwal, T. T. Robinson und C. G. Armstrong. „A CAD Based Framework for Optimizing Performance While Ensuring Assembly Fit“. In: *Communications in Computer and Information Science* 923 (2018), S. 73–83. ISSN: 18650929. DOI: 10.1007/978-981-13-2396-6_7.
- [2] D. Agarwal u. a. „Enhancing CAD-based shape optimisation by automatically updating the CAD model’s parameterisation“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 59.5 (Mai 2019), S. 1639–1654. ISSN: 16151488. DOI: 10.1007/s00158-018-2152-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00158-018-2152-7>.
- [3] R. M. Alexander. *Optimum structures*. Oxford: Clarendon Press, 2020, S. 17–44. DOI: 10.2307/j.ctv173f0gj.5.
- [4] K. Aloyo, C. A. Perullo und D. N. Mavris. „An assessment of ultra high bypass engine architecture and installation considerations“. In: *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference 2014*. American Institute of Aeronautics und Astronautics Inc., 2014. ISBN: 9781624103032. DOI: 10.2514/6.2014-3685.
- [5] H. Altenbach, J. Altenbach und K. Naumenko. *Ebene Flächen-tragwerke*. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-662-47229-3. DOI: 10.1007/978-3-662-47230-9.
- [6] K. Amadori. *Geometry Based Design Automation Applied to Aircraft Modelling and Optimization*. Linköping University, 2012. ISBN: 9789175199863.

- [7] N. E. Anderson, L. Nightingale und D. A. Wagner. „Design and test of a propfan gear system“. In: *Journal of Propulsion and Power* 5.1 (1989), S. 95–102. ISSN: 07484658. DOI: 10.2514/3.23120.
- [8] R. D. Anderson u. a. „Advanced single-rotation propfan drive system“. In: *Journal of Propulsion and Power* 1.4 (1985), S. 259–260. ISSN: 07484658. DOI: 10.2514/3.22790.
- [9] S. Arabshahi, D. C. Barton und N. K. Shaw. „Steps towards CAD-FEA integration“. In: *Engineering with Computers* 9.1 (März 1993), S. 17–26. ISSN: 0177-0667. DOI: 10.1007/BF01198250. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF01198250>.
- [10] C. G. Armstrong u. a. *Parametric CAD model based shape optimization using adjoint functions Parametric CAD model based shape optimization using adjoint functions 11th ASMO UK / NOED2016 / ISSMO Conference*. Techn. Ber. 2016.
- [11] W. J. Aston. *Product design and development*. Bd. 7. 2. New York: McGraw- Hill, 1992, S. 85–89. ISBN: 978-0073404776. DOI: 10.1016/0956-5663(92)90013-D.
- [12] A. Auger und N. Hansen. „CMA-ES: Evolution strategies and covariance matrix adaptation“. In: *Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO'11 - Companion Publication*. 2011, S. 991–1010. ISBN: 9781450306904. DOI: 10.1145/2001858.2002123.
- [13] A. Batou u. a. „Robust design in multibody dynamics - application to vehicle ride-comfort optimization“. In: *Procedia IUTAM*. Bd. 13. 2015, S. 90–97. DOI: 10.1016/j.piutam.2015.01.005.
- [14] V. Beiranvand, W. Hare und Y. Lucet. „Best practices for comparing optimization algorithms“. In: *Optimization and Engineering* 18.4 (2017), S. 815–848. ISSN: 15732924. DOI: 10.1007/s11081-017-9366-1. arXiv: 1709.08242.

-
- [15] M. P. Bendsøe. „Optimal shape design as a material distribution problem“. In: *Structural Optimization* 1.4 (Dez. 1989), S. 193–202. ISSN: 09344373. DOI: 10.1007/BF01650949.
- [16] M. P. Bendsøe. *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 978-3-662-03115-5. DOI: 10.1007/978-3-662-03115-5.
- [17] M. P. Bendsøe, A. Díaz und N. Kikuchi. „Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures“. In: *Topology Design of Structures*. 1993, S. 159–205. DOI: 10.1007/978-94-011-1804-0_13.
- [18] M. P. Bendsoe, J. Rasmussen und H. C. Rodrigues. „Topology and boundary shape optimization as an integrated tool for computer aided design“. In: *Lecture Notes in Engineering*. 63. Publ by Springer-Verlag Berlin, 1991, S. 27–34. DOI: 10.1007/978-3-642-84397-6_3.
- [19] A. Bérard, A. Rizzi und A. T. Isikveren. „CADac: A new geometry construction tool for aerospace vehicle pre-design and conceptual design“. In: *Collection of Technical Papers - AIAA Applied Aerodynamics Conference*. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics und Astronautics, Aug. 2008. ISBN: 978-1-60086-987-7. DOI: 10.2514/6.2008-6219. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2008-6219>.
- [20] A. Berghuvud, M. Eng und G. Sanjay Akula Jagadeesh Kumar. „Optimum Design and Analysis of a Composite Drive Shaft for an Automobile“. In: *International Journal Of Engineering Research And Applications Wwww.Ijera.Com* (2007).
- [21] I. Berlowitz. „Aero-engine fan gearbox design“. In: *58th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, IACAS 2018*. Bd. 2018-March. Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, 2018, S. 205–282.

- [22] K.-U. Bletzinger. "Geometric Modeling with Splines", by Cohen, E., Riesenfeld, R.F., Elber, G., A.K. Peters, Ltd., 2001, ISBN 1-56881-137-3. Bd. 24. 6. Dez. 2002, S. 464–465. ISBN: 1-56881-137-3. DOI: 10.1007/s00158-002-0260-9. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00158-002-0260-9>.
- [23] P. Bodake und V. Aher. „Design and Analysis of Composite Drive Shaft“. In: *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology* 6.5 (Mai 2018), S. 1570–1576. ISSN: 23219653. DOI: 10.22214/ijraset.2018.5254. URL: <http://ijraset.com/fileserve.php?FID=17279>.
- [24] A. J. Booker. „Design and analysis of computer experiments“. In: *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization* 4 (1998), S. 118–128. ISSN: 0002-6018. DOI: 10.2514/6.1998-4757.
- [25] J. Bortz und C. Schuster. *Tests zur Überprüfung von Unterschiedshypothesen*. 2010, S. 117–136. ISBN: 9783642127694. DOI: 10.1007/978-3-642-12770-0_8.
- [26] A. Bouhamidi und A. Le Méhauté. „Radial basis functions under tension“. In: *Journal of Approximation Theory* 127.2 (2004), S. 135–154. ISSN: 00219045. DOI: 10.1016/j.jat.2004.03.005.
- [27] F. Boussuge u. a. „Capturing simulation intent in an ontology: CAD and CAE integration application“. In: *Journal of Engineering Design* 30.10-12 (2019), S. 688–725. ISSN: 14661837. DOI: 10.1080/09544828.2019.1630806.
- [28] A. Bows und K. L. Anderson. „Policy clash: Can projected aviation growth be reconciled with the UK Government’s 60% carbon-reduction target?“ In: *Transport Policy* 14.2 (März 2007), S. 103–110. ISSN: 0967070X. DOI: 10.1016/j.tranpol.2006.10.002.
- [29] G. E. P. Box und K. B. Wilson. „On the Experimental Attainment of Optimum Conditions“. In: *Journal of the Royal Statistical*

-
- Society: Series B (Methodological)* 13.1 (1951), S. 1–38. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1951.tb00067.x.
- [30] E. Braß. *Konstruieren mit CATIA V5 Methodik der parametrisch-assoziativen Flächenmodellierung*. Bd. 4., aktual. München, Wien: Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2009, S. 7, 18–20. ISBN: 9783446413788.
- [31] W. J. Bräunling. *Flugzeugtriebwerke*. Springer Berlin Heidelberg, 2015. DOI: 10.1007/978-3-642-34539-5.
- [32] M. Brill. *Parametrische Konstruktion mit CATIA V5. Methoden und Strategien für den Fahrzeugbau. Mit CD [Gebundene Ausgabe]*. München, Wien: Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2009. ISBN: 3446416897.
- [33] C. Bucher. *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. London: Taylor und Francis Group, 2009. DOI: 10.1201/9780203876534.
- [34] M. D. Buhmann und J. Levesley. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Bd. 73. 247. 2004, S. 1578–1581. ISBN: 0521633389.
- [35] G. Campatelli, L. Lorenzini und A. Scippa. „Optimization of process parameters using a Response Surface Method for minimizing power consumption in the milling of carbon steel“. In: *Journal of Cleaner Production* 66 (2014), S. 309–316. ISSN: 09596526. DOI: 10.1016/j.jclepro.2013.10.025.
- [36] B. W. Cao u. a. „CAD/CAE integration framework with layered software architecture“. In: *Proceedings - 2009 11th IEEE International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics, CAD/Graphics 2009*. 2009, S. 410–415. ISBN: 9781424437009. DOI: 10.1109/CADCG.2009.5246866.
- [37] M. Cederfeldt. „SOLID MODELLING WITH DIMENSIONAL AND TOPOLOGICAL Application example“. In: *International Conference on Engineering Design*. Stockholm, 2003, S. 1–10.

- [38] J. M. Chacón, J. C. Bellido und A. Donoso. „Integration of topology optimized designs into CAD/CAM via an IGES translator“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50.6 (2014), S. 1115–1125. ISSN: 16151488. DOI: 10.1007/s00158-014-1099-6.
- [39] X. Chai, X. Q. Yu und Y. Wang. „Effects of bypass ratio on the cost and environmental performance of large civil aircraft“. In: *Hangkong Dongli Xuebao/Journal of Aerospace Power* 32.4 (Apr. 2017), S. 865–873. ISSN: 10008055. DOI: 10.13224/j.cnki.jasp.2017.04.011.
- [40] C. X. Chao, D. Bestle und D. Krüger. „Tooth root shape optimization of thin-rimmed planet gears“. In: *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. Bd. 10. 2019. ISBN: 9780791859308. DOI: 10.1115/DETC2019-97345.
- [41] J. W. Chapman und J. S. Litt. „Control design for an advanced geared turbofan engine“. In: *53rd AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, 2017*. American Institute of Aeronautics und Astronautics Inc, AIAA, 2017. ISBN: 9781624105111. DOI: 10.2514/6.2017-4820.
- [42] K. K. Choi und K. H. Chang. „A study of design velocity field computation for shape optimal design“. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 15.4 (1994), S. 317–341. ISSN: 0168874X. DOI: 10.1016/0168-874X(94)90025-6.
- [43] R. R. Craig und M. C. Bampton. „Coupling of substructures for dynamic analyses“. In: *AIAA Journal* 6.7 (Juli 1968), S. 1313–1319. ISSN: 00011452. DOI: 10.2514/3.4741. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.4741>.
- [44] N. Cressie und E. Kang. „High-Resolution Digital Soil Mapping: Kriging for Very Large Datasets“. In: *Proximal Soil Sensing* (2010), S. 49–63. DOI: 10.1007/978-90-481-8859-8_4.

-
- [45] N. Cressie. „The origins of kriging“. In: *Mathematical Geology* 22.3 (Apr. 1990), S. 239–252. ISSN: 0882-8121. DOI: 10.1007/BF00889887. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00889887>.
- [46] J. C. Cuillière, V. François und A. Nana. „Automatic construction of structural CAD models from 3D topology optimization“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 15.1 (2018), S. 107–121. ISSN: 16864360. DOI: 10.1080/16864360.2017.1353726.
- [47] M. Darecki u. a. *Flightpath 2050*. 2011, S. 28. ISBN: 9789279197246. DOI: 10.2777/50266. URL: <http://ec.europa.eu/transport/modes/air/doc/flightpath2050.pdf>.
- [48] J. B. Davison u. a. „Towards an automated simulation processing combined thermal, flow and stress in turbine blade cooling analyses“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. Bd. 6. PART C. 2008, S. 2641–2648. ISBN: 9780791843161. DOI: 10.1115/GT2008-51287.
- [49] K. Deb u. a. „A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II“. In: *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* 1917 (2000), S. 849–858. ISSN: 16113349. DOI: 10.1007/3-540-45356-3_83.
- [50] J. D. Deng und W. Chen. „Design for structural flexibility using connected morphable components based topology optimization“. In: *Science China Technological Sciences* 59.6 (Juni 2016), S. 839–851. ISSN: 1862281X. DOI: 10.1007/s11431-016-6027-0.
- [51] D. Dewanji, G. A. Rao und J. Van Buijtenen. „Feasibility study of some novel concepts for high bypass ratio turbofan engines“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. Bd. 1. 2009, S. 51–61. ISBN: 9780791848821. DOI: 10.1115/GT2009-59166.

- [52] L. M. Dias u. a. „Layout and process optimisation: Using computer-aided design (CAD) and simulation through an integrated systems design tool“. In: *International Journal of Simulation and Process Modelling* 9.1-2 (2014), S. 46–62. ISSN: 17402131. DOI: 10.1504/IJSPM.2014.061437.
- [53] A. R. Díaz und M. P. Bendsøe. „Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method“. In: *Structural Optimization* 4.1 (März 1992), S. 17–22. ISSN: 09344373. DOI: 10.1007/BF01894077.
- [54] E. Dick. *Fundamentals of Turbomachines*. Bd. 109. 1. 2015, S. 583. ISBN: 9789401796262. DOI: 10.1007/978-94-017-9627-9. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-94-017-9627-9>.
- [55] R. Dienemann. *Entwicklung einer Optimierungsmethodik für die Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen*. Shaker Verlag, 2018. ISBN: 978-3-8440-6196-3.
- [56] R. Diestel. *Graphentheorie*. 5. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-662-53633-9.
- [57] DIN 868:1976-12. *Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder, Zahnradpaare und Zahnradgetriebe*. Techn. Ber. Beute Verlag GmbH.
- [58] T. Drotar u. a. „CAE-Based Driving Comfort Optimization of Passenger Cars“. In: *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems* 8.2 (2015), S. 703–710. ISSN: 19464002. DOI: 10.4271/2015-01-1583.
- [59] P. Duchstein. *Getriebefan und konventioneller Turbofan. Ein Vergleich auf Basis der stationären Leistungsrechnungen*. Hamburg: Diplomica Verlag, 2013. ISBN: 978-3842862005.
- [60] J. Duhovnik, I. Demšar und P. Drešar. *Modelling Physical Models and Parameterization*. Cham: Springer, 2015, S. 335–365. ISBN: 978-3-319-03861-2. DOI: 10.1007/978-3-319-03862-9_12.

-
- [61] D. K. Duvenaud. „Automatic Model Construction with Gaussian Processes“. Diss. 2014, S. 144. URL: <https://www.repository.cam.ac.uk/handle/1810/247281%7B%5C%7D0Ahttps://www.cs.toronto.edu/%7B~%7Dduvenaud/thesis.pdf>.
- [62] Dylla. „Denk- und Handlungsabläufe beim Konstruieren“. Dissertation. München: TU München, 1991. DOI: 9783446163270.
- [63] K. Ehrlenspiel und H. Meerkamm. *Integrierte Produktentwicklung - Denkabläufe, Methodeneinsatz, Zusammenarbeit*. 6. Auflage. München: Hanser Verlag, 2017. ISBN: 978-3-446-44089-0.
- [64] M. Epperlein. „Ein Beitrag zur probabilistischen Vorauslegung von Hochleistungsgetrieben“. Diss. Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 2019.
- [65] European Aviation Safety Agency. *Certification Specification for Large Aeroplanes CS- 25 Amendment 3*. 2007. URL: https://www.easa.europa.eu/system/files/dfu/CS-25%7B%5C_%7DAMdt%203%7B%5C_%7D19.09.07%7B%5C_%7DConsolidated%20version.pdf.
- [66] L. Fahrmeir, T. Kneib und S. Lang. *Regression 123 Statistik und ihre Anwendungen*. 2. Auflage. Heidelberg Dordrecht London New York: Springer, 2009. ISBN: 9783642018367.
- [67] P. Flassig. *Unterstützende Optimierungsstrategien zur robusten aerodynamischen Verdichterschaufelauslegung*. Aachen: Shaker Verlag, 2011, S. 214. ISBN: 978-3-8440-0580-6.
- [68] P. M. Flassig, A. K. Dutta und D. Bestle. *Robustheits- und Zuverlässigkeitsbasierte Mehrkriterien-Optimierung von Verdichterschaufeln*. Techn. Ber. 2008, S. 14.
- [69] R. Fletcher. „Function minimization by conjugate gradients“. In: *The Computer Journal* 7.2 (1964), S. 149–154. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.149.

- [70] O. Flodén, K. Persson und G. Sandberg. „Reduction methods for the dynamic analysis of substructure models of lightweight building structures“. In: *Computers & Structures* 138 (Juli 2014), S. 49–61. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2014.02.011. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794914000662>.
- [71] E. P. Flynn und C. Bach. „Integrating advanced CAD modeling simulation, 3d printing, and manufacturing into higher education STEM courses“. In: *2019 IEEE Technology and Engineering Management Conference, TEMSCON 2019*. Institute of Electrical und Electronics Engineers Inc., Juni 2019. ISBN: 9781728111391. DOI: 10.1109/TEMSCON.2019.8813627.
- [72] O. Föllinger. *Optimale Regelung und Steuerung*. 3. Auflage. München: De Gruyter, 1994. ISBN: 978-3-486-23116-8, 978-3-486-78730-6. DOI: 10.1515/9783486787306.
- [73] A. I. Forrester und A. J. Keane. „Recent advances in surrogate-based optimization“. In: *Progress in Aerospace Sciences* 45.1-3 (Jan. 2009), S. 50–79. ISSN: 03760421. DOI: 10.1016/j.paerosci.2008.11.001. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0376042108000766>.
- [74] A. Fricke, D. Günzel und T. Schaeffer. „Bewegungstechnik“. In: *Bewegungstechnik*. 2019, S. 1–14. DOI: 10.3139/9783446456860.fm.
- [75] D. M. Fudge, D. W. Zingg und R. Haimes. „A CAD-free and a CAD-based geometry control system for aerodynamic shape optimization“. In: *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit - Meeting Papers*. 2005, S. 2083–2097. DOI: 10.2514/6.2005-451.
- [76] K. Gainer. *20/20 Vision for 2020*. Techn. Ber. 2. Belgium: European Commission, 2005, S. 3. DOI: 92-894-0559-7. URL:

- https://www.acare4europe.org/sites/acare4europe.org/files/document/Vision%202020%7B%5C_%7D0.pdf.
- [77] N. Geren, O. O. Akçalı und M. Bayramoğlu. „Parametric design of automotive ball joint based on variable design methodology using knowledge and feature-based computer assisted 3D modelling“. In: *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 66 (Nov. 2017), S. 87–103. ISSN: 09521976. DOI: 10.1016/j.engappai.2017.08.011. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0952197617301963>.
- [78] D. Giesecke u. a. „Evaluation of ultra-high bypass ratio engines for an over-wing aircraft configuration“. In: *Journal of the Global Power and Propulsion Society* 2 (2018), S. 493–515. ISSN: 2515-3080. DOI: 10.22261/jgpps.8shp7k.
- [79] B. Gireesh, S. Shrishail und V. N. Satwik. „Finite Element & Experimental Investigation of Composite Torsion Shaft“. In: *International Journal of Engineering Research and Applications* 3.2 (2013), S. 1510–1517.
- [80] A. A. Giunta und L. T. Watson. „A comparison of approximation modeling techniques: Polynomial versus interpolating models“. In: *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Bd. 98-4758. St. Louis, Missouri, 1998, S. 392–404. DOI: 10.2514/6.1998-4758.
- [81] R. J. E. Glenny, J. E. Northwood und A. B. Smith. „Materials for Gas Turbines“. In: *International Materials Reviews* 20.1 (Jan. 2012), S. 1–28. ISSN: 09506608. DOI: 10.1179/095066075790136925.
- [82] B. Graver, D. Rutherford und S. Zheng. „CO2 Emissions from Commercial Aviation - ICCT“. In: *International Council on Clean Transportation* October (2020), S. 36. URL: <https://theicct.org/sites/default/files/publications/CO2-commercial-aviation-oct2020.pdf>.

- [83] X. Guo und G. D. Cheng. *Recent development in structural design and optimization*. Dez. 2010. DOI: 10.1007/s10409-010-0395-7 .
- [84] H. Haberhauer. *Methodisches Konstruieren*. 2. Auflage. Berlin: Springer Verlag, 2021, S. 349–372. ISBN: 978-3-662-22159-4. DOI: 10.3139/9783446468191.017.
- [85] L. Harzheim. *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendung*. 3. Ausgabe. Verlag Europa-Lehrmittel Nourney, Vollmer GmbH & Company KG, 2019. ISBN: 3808558822, 9783808558829.
- [86] A. J. Herrema u. a. „A framework for parametric design optimization using isogeometric analysis“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 316 (2017), S. 944–965. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2016.10.048.
- [87] K. Hinkelmann. *Design and Analysis of Experiments*. Bd. 3. New York: John Wiley, 2012, S. 1–566. ISBN: 9781118147634. DOI: 10.1002/9781118147634.
- [88] M. Hinz. „Prozessintegration und Optimierung in der Triebwerkstechnik – Ein Algorithmenvergleich“. Diplomarbeit. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2007.
- [89] R. Hoffmann und R. Reuter. *Bewertung von berechnungsergebnissen mittels stochastischer simulationsverfahren*. Techn. Ber. 1559. VDI, 2000, S. 697–719.
- [90] M. H. Hsu und Y. L. Hsu. „Interpreting three-dimensional structural topology optimization results“. In: *Computers and Structures* 83.4-5 (2005), S. 327–337. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.09.005.
- [91] C. Hughes. „The Promise and Challenges of Ultra High Bypass Ratio Engine Technology and Integration“. In: *AIAA Aero Sciences Meeting* (2011), S. 0–11. URL: <http://hdl.handle.net/2060/20110011737>.

-
- [92] F. Jarre und J. Stoer. *Optimierung*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN: 978-3-540-43575-4. DOI: 10.1007/978-3-642-18785-8. URL: <http://library1.nida.ac.th/termpaper6/sd/2554/19755.pdf%20http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-18785-8>.
- [93] C. F. Jekel und R. T. Haftka. „Testing Surrogate-Based Optimization with the Fortified Branin-Hoo Extended to Four Dimensions Charles F. Jekel“. Juli 2021. arXiv: 2107.08035. URL: <http://arxiv.org/abs/2107.08035>.
- [94] D. R. Jones. „A Taxonomy of Global Optimization Methods Based on Response Surfaces“. In: *Journal of Global Optimization* 21.4 (2001), S. 345–383. ISSN: 09255001. DOI: 10.1023/A:1012771025575.
- [95] D. R. Jones, M. Schonlau und W. J. Welch. „Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions“. In: *Journal of Global Optimization* 13.4 (1998), S. 455–492. ISSN: 09255001. DOI: 10.1023/A:1008306431147.
- [96] W. Kalide und H. Sigloch. „Strömungsmaschinen“. In: *Energieumwandlung in Kraft- und Arbeitsmaschinen*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, Sep. 2019, S. 201–330. DOI: 10.3139/9783446461222.004.
- [97] B. Kaplan, E. Nicke und C. Voss. „Design of a highly efficient low-noise fan for ultra-high bypass engines“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. Bd. 6 PART A. 2006, S. 185–194. ISBN: 079184241X. DOI: 10.1115/GT2006-90363.
- [98] P. Karthikeyan u. a. „Design and Analysis of Drive Shaft using Kevlar/Epoxy and Glass/Epoxy as a Composite Material“. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Bd. 197. 1. 2017. DOI: 10.1088/1757-899X/197/1/012048

- [99] A. J. Keane und P. B. Nair. *Computational approaches for aerospace design: The pursuit of excellence*. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2005, S. 1–582. ISBN: 9780470855485. DOI: 10.1002/0470855487.
- [100] D. C. Keller. „Evolutionary Design of Laminated Composite Structures“. Dissertation. ETH Zürich, 2010, S. 1–243. DOI: 10.3929/ethz-a-006082073.
- [101] B. K. Kestner u. a. „Ultra high bypass ratio engine sizing and cycle selection study for a subsonic commercial aircraft in the N+2 timeframe“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. Bd. 1. 2011, S. 127–137. ISBN: 9780791854617. DOI: 10.1115/GT2011-45370.
- [102] M. N. Khajavi, B. Notghi und G. Paygane. „Multi objective optimization approach to optimize vehicle ride and handling characteristics“. In: *World Academy of Science, Engineering and Technology* 62 (2010), S. 580–584. ISSN: 2010376X.
- [103] D. H. Kim u. a. „Smooth boundary topology optimization for electrostatic problems through the combination of shape and topological design sensitivities“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44.6 (2008), S. 1002–1005. ISSN: 00189464. DOI: 10.1109/TMAG.2007.915321.
- [104] B. Klein. „FEM-Ansatz für dynamische Probleme“. In: *Fem.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015, S. 199–240. DOI: 10.1007/978-3-658-06054-1_9. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-06054-1%7B%5C_%7D9.
- [105] G. D. Knott. *Interpolating Cubic Splines*. Bd. 97. 457. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2000, S. 366–366. ISBN: 978-1-4612-7092-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-1320-8. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1320-8>.

-
- [106] M. Kober. *Ein Beitrag zur strukturmechanischen Optimierung realer Bauteile in metallischer und Faserverbundbauweise unter Verwendung von wirkebenenbasierten Bruchkriterien*. Berlin: Mensch und Buch Verlag, 2011, S. 227. ISBN: 978-3-86387-085-0. URL: https://www-docs.b-tu.de/fg-strukturmechanik/public/Dissertation%7B%5C_%7DKober.pdf.
- [107] J. Koch. *Einführung in CAD Teil 2: Darstellung von Kurven und Flächen*. 2015.
- [108] A. Koguchi und N. Kikuchi. „A surface reconstruction algorithm for topology optimization“. In: *Engineering with Computers* 22.1 (2006), S. 1–10. ISSN: 01770667. DOI: 10.1007/s00366-006-0023-0.
- [109] G. Kölsch. „Diskrete Optimierungsverfahren zur Lösung konstruktiver Problemstellungen im Werkzeugmaschinenbau“. In: *VDI-Berichte, Reihe 1, Nr. 213* (1992).
- [110] A. Konstantinidis, K. Höschler und S. Kazula. „Creating Decoupling Component Properties by a Structural Optimization Approach based on CAD Geometries“. In: *NAFEMS European Conference on Simulation- Based Optimisation*. Bd. 34. London, 2019.
- [111] A. Konstantinidis, K. Höschler und P. Hauk. „Geometry-Based Shape Optimization to Improve Dynamical Behavior of Planetary Gear Boxes in Aero Engines“. In: Chania, Sep. 2020. DOI: 10.33737/gpps20-tc-78. URL: http://gpps.global/wp-content/uploads/2021/02/GPPS-GPPS-TC-2020%7B%5C_%7DD0%7B%5C_%7D78.pdf.
- [112] S. Kubicki, J. Mikkavaara und M. Sandberg. „A master model approach for design and analysis of roof trusses“. In: *ISARC 2018 - 35th International Symposium on Automation and Robotics in Construction and International AEC/FM Hackathon: The Future of Building Things*. Juli 2018. DOI: 10.22260/isarc2018/0046

- . URL: http://www.iaarc.org/publications/2018%7B%5C_%7Dproceedings%7B%5C_%7Dof%7B%5C_%7Dthe%7B%5C_%7D35th%7B%5C_%7Disarc/a%7B%5C_%7Dmaster%7B%5C_%7Dmodel%7B%5C_%7Dapproach%7B%5C_%7Dfor%7B%5C_%7Ddesign%7B%5C_%7Dand%7B%5C_%7Danalysis%7B%5C_%7Dof%7B%5C_%7Droof%7B%5C_%7Dtrusses.html.
- [113] B. Künne. *Köhler/Rögnitz Maschinenteile 2*. 2004. DOI: 10.1007/978-3-322-94109-1.
- [114] J. Kurzke. „Fundamental differences between conventional and geared turbofans“. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. Bd. 1. 2009, S. 145–153. ISBN: 9780791848821. DOI: 10.1115/GT2009-59745.
- [115] K. G. Kyprianidis und A. M. Rolt. „On the Optimization of a Geared Fan Intercooled Core Engine Design“. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 137.4 (Apr. 2015). ISSN: 15288919. DOI: 10.1115/1.4028544.
- [116] S. Larsen und C. G. Jensen. „Converting topology optimization results into parametric CAD models“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 6.3 (2009), S. 407–418. ISSN: 16864360. DOI: 10.3722/cadaps.2009.407-418.
- [117] S. Leary, A. Bhaskar und A. Keane. „Optimal orthogonal-array-based latin hypercubes“. In: *Journal of Applied Statistics* 30.5 (2003), S. 585–598. ISSN: 02664763. DOI: 10.1080/0266476032000053691.
- [118] B. Lecallard u. a. „Automatic hexahedral-dominant meshing for decomposed geometries of complex components“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 16.5 (2019), S. 846–863. ISSN: 16864360. DOI: 10.14733/cadaps.2019.846-863.
- [119] D. G. Lee u. a. „Design and manufacture of an automotive hybrid aluminum/composite drive shaft“. In: *Composite Structures* 63.1

- (2004), S. 87–99. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00136-3.
- [120] H. Li. *Haibing Li Generative Design Approach for Robust Solution Development Dissertation*. April. Hannover: TEWISS Verlag, 2020. ISBN: 978-3-95900-461-9.
- [121] L. Li, Y. Ma und C. F. Lange. „Association of Design and Simulation Intent in CAD/CFD Integration“. In: *Procedia CIRP*. Bd. 56. Elsevier B.V., 2016, S. 1–6. DOI: 10.1016/j.procir.2016.10.006.
- [122] C. R. de Lima, A. d. C. Teves und E. C. N. Silva. *A Topology Optimization Formulation Applied to Highly Flexible Structures*. Techn. Ber. Sao Paulo, 2014, S. 78–81. DOI: 10.5151/matsci-mmfgm-170-f. URL: www.proceedings.blucher.com.br/evento/mm-fgm2014.
- [123] U. Lindemann. *Methodische Entwicklung technischer Produkte*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2009. ISBN: 978-3-642-01422-2. DOI: 10.1007/978-3-642-01423-9.
- [124] A. Linke-Diesinger. *Systeme von Turbofan-Triebwerken*. 2014. DOI: 10.1007/978-3-662-44570-9.
- [125] M. Linz. „Scenarios for the aviation industry: A Delphi-based analysis for 2025“. In: *Journal of Air Transport Management* 22 (Juli 2012), S. 28–35. ISSN: 09696997. DOI: 10.1016/j.jairtraman.2012.01.006.
- [126] W. Liu und Y. Yang. „Multi-objective optimization of an auto panel drawing die face design by mesh morphing“. In: *CAD Computer Aided Design* 39.10 (2007), S. 863–869. ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/j.cad.2007.05.009.
- [127] M. Lokgård und A. Grandicki. *PARAMETRIC CAD MODELING TO AID SIMULATION-DRIVEN DESIGN an evaluation and improvement of methods used at Scania*. Techn. Ber. Linköping University, 2017. URL: www.liu.se.

- [128] V. Luu. „Methodology development for parametric CAD modeling in Catia V5 to aid simulation driven design using turbine volute as a case study“. Diss. Linköping University, 2015, S. 3.
- [129] A. Macintosh und L. Wallace. „International aviation emissions to 2025: Can emissions be stabilised without restricting demand?“. In: *Energy Policy* 37.1 (Jan. 2009), S. 264–273. ISSN: 03014215. DOI: 10.1016/j.enpo.2008.08.029.
- [130] F. Martin. „Formoptimierung elastischer Bauteile mit gewichteten B-Splines“. In: *Formoptimierung elastischer Bauteile mit gewichteten B-Splines* (2016). DOI: 10.1007/978-3-658-13294-1.
- [131] J. D. Martin und T. W. Simpson. „A study on the use of kriging models to approximate deterministic computer models“. In: *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. Bd. 2 A. Chicago, Illinois, 2003, S. 567–576. DOI: 10.1115/detc2003/dac-48762.
- [132] J. D. Martin und T. W. Simpson. „Use of kriging models to approximate deterministic computer models“. In: *AIAA Journal* 43.4 (2005), S. 853–863. ISSN: 00011452. DOI: 10.2514/1.8650.
- [133] C. Mattheck. „Design and Growth Rules for Biological Structures and Their Application To Engineering“. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 13.5 (1990), S. 535–550. ISSN: 14602695. DOI: 10.1111/j.1460-2695.1990.tb00623.x.
- [134] C. Mattheck. „Engineering Components grow like trees“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 21.4 (1990), S. 143–168. ISSN: 15214052. DOI: 10.1002/mawe.19900210403.
- [135] C. Mattheck und K. Bethge. „The structural optimization of trees“. In: *Naturwissenschaften* 85.1 (1998), S. 1–10. ISSN: 00281042. DOI: 10.1007/s001140050443.

-
- [136] C. Mattheck und S. Burkhardt. „A new method of structural shape optimization based on biological growth“. In: *International Journal of Fatigue* 12.3 (1990), S. 185–190. ISSN: 01421123. DOI: 10.1016/0142-1123(90)90094-U.
- [137] H. Meerkamm. *17. Symposium "Design for X". Neukirchen, 12.-13.10.2006*. Erlangen, 2006.
- [138] R. Meske, J. Sauter und E. Schnack. „Nonparametric gradient-less shape optimization for real-world applications“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30.3 (2005), S. 201–218. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s00158-005-0518-0.
- [139] A. Michell. „LVIII. The limits of economy of material in frame-structures“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47 (1904), S. 589–597. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786440409463229.
- [140] G. Micula und S. Micula. *Handbook of Splines*. 1999. DOI: 10.1007/978-94-011-5338-6.
- [141] S. M. Mirzapour Al-E-Hashem, H. Malekly und M. B. Aryanezhad. „A multi-objective robust optimization model for multi-product multi-site aggregate production planning in a supply chain under uncertainty“. In: *International Journal of Production Economics* 134.1 (2011), S. 28–42. ISSN: 09255273. DOI: 10.1016/j.ijpe.2011.01.027.
- [142] C. Misra, S. Bhattacharya und S. K. Ghosh. „A fast scalable distributed kriging algorithm using Spark framework“. In: *International Journal of Data Science and Analytics* 10.3 (2020), S. 249–264. ISSN: 23644168. DOI: 10.1007/s41060-020-00215-3.
- [143] O. Molloy, S. Tilley und E. Warman. *Design for Manufacturing and Assembly*. Dordrecht: Springer US, 1998. ISBN: 978-1-4613-7650-7. DOI: 10.1007/978-1-4615-5785-2.

- [144] H. W. Müller. „Die Grundgesetze der Umlaufgetriebe“. In: 1998, S. 33–72. DOI: 10.1007/978-3-642-58725-2_3.
- [145] D. J. Munk, G. A. Vio und G. P. Steven. „Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52.3 (Sep. 2015), S. 613–631. ISSN: 16151488. DOI: 10.1007/s00158-015-1261-9.
- [146] M. A. Naeem u. a. „Production planning optimization for manufacturing and remanufacturing system in stochastic environment“. In: *Journal of Intelligent Manufacturing* 24.4 (2013), S. 717–728. ISSN: 09565515. DOI: 10.1007/s10845-011-0619-0.
- [147] L. Nasdala. „Dynamische Analysen“. In: *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015, S. 47–136. DOI: 10.1007/978-3-658-06630-7_4. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-06630-7?B%5C_%7D4.
- [148] D. C. Nolan u. a. „Automatic dimensional reduction and meshing of stiffened thin-wall structures“. In: *Engineering with Computers* 30.4 (2014), S. 689–701. ISSN: 14355663. DOI: 10.1007/s00366-013-0317-y.
- [149] N. Olhoff, M. P. Bendsøe und J. Rasmussen. „On CAD-integrated structural topology and design optimization“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89.1-3 (1991), S. 259–279. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(91)90044-7.
- [150] C. Othmer. *Black Box , Adjoint and Topology : CFD-Optimization in the Car Development Process*. Stuttgart-Untertürkheim, 2005.
- [151] A. B. Owen. „Orthogonal Arrays for Computer Experiments, Integration and Visualization“. In: *Statistica Sinica* 2.2 (1992), S. 439–452. ISSN: 10170405, 19968507. URL: [http://apps.i siknowledge . com / InboundService . do ? product = WOS % 7B % 5 C & % 7D action = retrieve % 7B % 5 C & % 7D SrcApp = Papers % 7B % 5 C & % 7D DUT = A1992JQ01200007 % 7B % 5 C & % 7D SID = Q2bL1DeDMoNNjgB84J%](http://apps.i siknowledge . com / InboundService . do ? product = WOS % 7B % 5 C & % 7D action = retrieve % 7B % 5 C & % 7D SrcApp = Papers % 7B % 5 C & % 7D DUT = A1992JQ01200007 % 7B % 5 C & % 7D SID = Q2bL1DeDMoNNjgB84J%7D)

- 7B%5C&%7DsrcAuth=mekentosj%7B%5C&%7Dmode=FullRecord%7B%5C&%7DcustomersID=mekentosj%7B%5C&%7DDestFail=http://access.isiprproducts.com/custom%7B%5C_%7Dimages/wok%7B%5C_%7Dfailed%7B%5C_%7Daut.
- [152] Pahl und Beitz. *Pahl/Beitz Konstruktionslehre*. Hrsg. von J. Feldhusen und K.-H. Grote. 8., vollst. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-29568-3. DOI: 10.1007/978-3-642-29569-0. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-29569-0>.
- [153] J. S. Park. „Optimal Latin-hypercube designs for computer experiments“. In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 39.1 (Apr. 1994), S. 95–111. ISSN: 03783758. DOI: 10.1016/0378-3758(94)90115-5. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0378375894901155>.
- [154] J. Parr u. a. „Review of Efficient Surrogate Infill Sampling Criteria with Constraint Handling“. In: *2nd International Conference on Engineering Optimization*. 2010, S. 1–10. URL: <http://eprints.soton.ac.uk/336169/>.
- [155] K. Pazdernik u. a. „Reduced Basis Kriging for Big Spatial Fields“. In: *Sankhya A* 80.2 (Aug. 2018), S. 280–300. ISSN: 0976-836X. DOI: 10.1007/s13171-018-0129-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s13171-018-0129-7>.
- [156] P. Peeters u. a. „Are technology myths stalling aviation climate policy?“. In: *Transportation Research Part D: Transport and Environment* 44 (Mai 2016), S. 30–42. ISSN: 13619209. DOI: 10.1016/j.trd.2016.02.004.
- [157] L. Piegl und W. Tiller. *The NURBS book*. Bd. 35. 02. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997, S. 35–0952–35–0952. ISBN: 978-3-540-61545-3. DOI: 10.5860/choice.35-0952.

- [158] T. Pohl, M. Thürmer und R. Legler. *CAE modelling strategies for the new GM global mid-size class and opel/vauxhall Insignia*. 2031. VDI, 2008, S. 217–233. ISBN: 9783180920313.
- [159] J. Ponn und U. Lindemann. *Konzeptentwicklung und Gestaltung technischer Produkte*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-68562-3. DOI: 10.1007/978-3-540-68563-0. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-68563-0>.
- [160] A. S. Prasad, S. Ramakrishna und M. Madhavi. „Experimental Investigations on Static and Dynamic Parameters of Steel and Composite Propeller Shafts with an Integrated Metallic Joints“. In: *Materials Today: Proceedings*. Bd. 5. 13. 2018, S. 26925–26933. DOI: 10.1016/j.matpr.2018.08.180.
- [161] J. R. und C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Bd. 34. 149. 1980, S. 325. ISBN: 978-3-540-90356-7. DOI: 10.2307/2006241.
- [162] R. Rajendran. „Gas turbine coatings – An overview“. In: *Engineering Failure Analysis* 26 (Dez. 2012), S. 355–369. ISSN: 13506307. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2012.07.007. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1350630712001240>.
- [163] N. Rao. „Materials for Gas Turbines – An Overview“. In: *Advances in Gas Turbine Technology*. InTech, Nov. 2011. DOI: 10.5772/20730. URL: <http://www.intechopen.com/books/advances-in-gas-turbine-technology/materials-for-gas-turbines-an-overview>.
- [164] A. Redford und J. Chal. *Design for assembly*. Bd. 12. 2. Berlin: Springer Verlag, 1996, S. 36. ISBN: 978-0387189291. DOI: 10.1109/MEI.1996.486959.
- [165] R. C. Reed. *The Superalloys fundamentals and applications*. Bd. 9780521859. 2006, S. 1–372. ISBN: 9780511541285. DOI: 10.1017/CB09780511541285.

-
- [166] K. Richter und J. Walther. *Supply chain integration challenges in commercial aerospace: A comprehensive perspective on the aviation value chain*. 2016, S. 1–297. ISBN: 9783319461557. DOI: 10.1007/978-3-319-46155-7.
- [167] T. T. Robinson, C. G. Armstrong und H. S. Chua. „Determining the parametric effectiveness of a CAD model“. In: *Engineering with Computers* 29.1 (Jan. 2013), S. 111–126. ISSN: 01770667. DOI: 10.1007/s00366-011-0248-4.
- [168] T. T. Robinson, C. G. Armstrong und H. S. Chua. „Strategies for adding features to CAD models in order to optimize performance“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 46.3 (Sep. 2012), S. 415–424. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s00158-012-0770-z.
- [169] T. T. Robinson u. a. „Optimizing parameterized CAD geometries using sensitivities based on adjoint functions“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 9.3 (2012), S. 253–268. ISSN: 16864360. DOI: 10.3722/cadaps.2012.253-268.
- [170] H. C. Rodrigues u. a. „EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization“. In: *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization*. 2019, S. 453–465. DOI: 10.1007/978-3-319-97773-7.
- [171] A. Rossmann. *Die Sicherheit von Flugtriebwerken*. Band 5. Karlsruhe: Turbo Consult, 2003, S. 1–22. ISBN: 3000177337.
- [172] G. I. Rozvany. „A critical review of established methods of structural topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37.3 (2009), S. 217–237. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s00158-007-0217-0.
- [173] G. I. Rozvany. „Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*

- 21.2 (2001), S. 90–108. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s001580050174.
- [174] M. Sandberg u. a. „A master-model approach to whole jet engine analysis and design optimization“. In: *Wcsmo-8*. Lisbon: Conference: 8th World Congress on Structural und Multidisciplinary Optimization WCSMO-8, 2009.
- [175] J. Sauter, P. Häußler und I. Weißert. *Topologieoptimierung von CFD Strukturen und Einbindung in den Konstruktionsprozess*. 2006. URL: <https://www.researchgate.net/publication/306381029> %7B%5C_%7DRobuste%7B%5C_%7Dund%7B%5C_%7Dproduktionsgerechte%7B%5C_%7DTopologieoptimierung%7B%5C_%7Dvon%7B%5C_%7DGussbauteilen%7B%5C_%7Dmit%7B%5C_%7DFertigungsrestriktionen%7B%5C_%7Dund%7B%5C_%7Dintegrierter%7B%5C_%7DProzesssimulation.
- [176] M. Save und W. Prager. *Structural Optimization. Volume 1, Optimality Criteria*. New York: Springer US, 1985. ISBN: 9781461579236.
- [177] F. Schäfer. „Interaktive Strategien zur Bauteiloptimierung bei mehrfacher Zielsetzung und Diskretheitsforderungen“. In: *VDI-Berichte, Reihe 1, Nr. 197* (1990).
- [178] J. Scheiderer. *Angewandte Flugleistung: Eine Einführung in die operationelle Flugleistung vom Start bis zur Landung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. ISBN: 9783540727224.
- [179] H. Schiefer und F. Schiefer. *Statistische Versuchsplanung, Design of Experiments (DoE)*. Techn. Ber. 2018, S. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-658-20640-6_1. URL: <http://www.springer.com/series/3482>.
- [180] K. Schittkowski. „NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems“. In: *Annals of Operations Research* 5.1-4 (1986), S. 485–500. ISSN: 02545330. DOI: 10.1007/BF02739235.

-
- [181] K. Schittkowski. *NLPQLP : A Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm with Distributed and Non-Monotone Line Search*. Techn. Ber. 2010, S. 2005–2010. URL: <https://www.schittkowski.de/downloads/numerical/NLPQLP.pdf>.
- [182] L. A. J. Schmit. *Structural Synthesis 1959-1969: A Decade of Progress*. Huntsville: University of Alabama Press, 1971, S. 565–634.
- [183] A. Schmitt. *Methoden in der Formoptimierung*. Techn. Ber. Acom - RWTH Aachen, 2014.
- [184] A. Schulz u. a. „Interactive design space exploration and optimization for CAD models“. In: *ACM Transactions on Graphics*. Bd. 36. 4. Association for Computing Machinery, 2017. DOI: 10.1145/3072959.3073688.
- [185] A. Schumacher. *Optimierung mechanischer Strukturen - Grundlagen und industrielle Anwendungen*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013, S. 314. ISBN: 9783642346996.
- [186] M. S. Seiler. „Geometrische Restriktionen bei der geometriebasierten Strukturoptimierung von Maschinenbauteilen mit Freiformgeometrien“. Diss. RWTH Aachen, 2012.
- [187] T. M. Shahin. „Feature-based design - An overview“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 5.5 (2008), S. 639–653. ISSN: 16864360. DOI: 10.3722/cadaps.2008.639-653.
- [188] F. Shrouf u. a. „Optimizing the production scheduling of a single machine to minimize total energy consumption costs“. In: *Journal of Cleaner Production* 67 (2014), S. 197–207. ISSN: 09596526. DOI: 10.1016/j.jclepro.2013.12.024.
- [189] L. F. Y. Sommer. *Geometrieparametrisierungen für die aerodynamische Optimierung von Verdichterschaufel-sektionen unter besonderer Berücksichtigung der Krümmung*. August. Shaker Verlag, 2011, S. 165. ISBN: 978-3-8440-0743-5.

- [190] S. Sorato u. a. „Investigating the emissions and performance of high bypass ratio aero-engines“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 222.4 (2008), S. 463–471. ISSN: 09544100. DOI: 10.1243/09544100JAERO275.
- [191] J. Sprave u. a. „Optimierung auf der Basis von parametrischen CAD-Modellen unter Berücksichtigung von Betriebsfestigkeitsanforderungen“. In: *DVM (ed) Optimierungspotenziale in der Betriebsfestigkeit* 135 (2008), S. 58–69.
- [192] G. Spur. *Wissensbasiertes Konstruieren*. Bd. 123. 5. Aachen: Shaker Verlag, 1990. ISBN: 978-3826539855. DOI: 10.1515/zwf-1996-917-835.
- [193] T. P. Stankowski u. a. „Aerodynamic effects of propulsion integration for high bypass ratio engines“. In: *Journal of Aircraft* 54.6 (2017), S. 2270–2284. ISSN: 15333868. DOI: 10.2514/1.C034150.
- [194] O. Stein. *Grundzüge der Nichtlinearen Optimierung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-662-55592-7. DOI: 10.1007/978-3-662-55593-4. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-55593-4>.
- [195] P. Steinke. *Finite-Elemente-Methode*. Berlin Heidelberg: Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-3-642-53937-4.
- [196] L. Sun u. a. „An enhanced approach to automatic decomposition of thin-walled components for hexahedral-dominant meshing“. In: *Engineering with Computers* 34.3 (2018), S. 431–447. ISSN: 14355663. DOI: 10.1007/s00366-017-0550-x.
- [197] L. Sun u. a. „Automated mesh deformation for computer-aided design models that exhibit boundary topology changes“. In: *AIAA Journal* 58.9 (2020), S. 4128–4141. ISSN: 00011452. DOI: 10.2514/1.J058760.

-
- [198] K. Svanberg. „The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24.2 (1987), S. 359–373. ISSN: 10970207. DOI: 10.1002/nme.1620240207. URL: <http://www.math.kth.se/%7B~%7Dkrille>.
- [199] M. Taleyarkhan u. a. „Investigating the Impact of Using a CAD Simulation Tool on Students’ Learning of Design Thinking“. In: *Journal of Science Education and Technology* 27.4 (Aug. 2018), S. 334–347. ISSN: 15731839. DOI: 10.1007/s10956-018-9727-3.
- [200] B. Tang. „Orthogonal Array-Based Latin Hypercubes“. In: *Journal of the American Statistical Association* 88.424 (1993), S. 1392. ISSN: 01621459. DOI: 10.2307/2291282.
- [201] M. Tarkian. „Design Automation for Multidisciplinary Optimization A High Level CAD Template Approach“. Diss. Linköping University, 2012, S. 116. ISBN: 9789175197906. URL: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:556208/FULLTEXT03>.
- [202] C. Tierney u. a. „Using Mesh-Geometry Relationships to Transfer Analysis Models between CAE Tools“. In: *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable* (2014), S. 367–384. DOI: 10.1007/978-3-319-02335-9_21. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00366-014-0377-7>.
- [203] C. M. Tierney u. a. „Generating analysis topology using virtual topology operators“. In: *Procedia Engineering*. Bd. 124. Elsevier Ltd, 2015, S. 226–238. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.10.135.
- [204] C. M. Tierney u. a. „Interface Management for Automating Finite Element Analysis Workflows“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 13.3 (Mai 2016), S. 329–339. ISSN: 16864360. DOI: 10.1080/16864360.2015.1114391.
- [205] C. M. Tierney u. a. „Managing Equivalent Representations of Design and Analysis Models“. In: *Computer-Aided Design and*

- Applications* 11.2 (2014), S. 193–205. ISSN: 16864360. DOI: 10.1080/16864360.2014.846091.
- [206] S. Tiwari u. a. „AMGA: An archive-based micro genetic algorithm for multi-objective optimization“. In: *GECCO'08: Proceedings of the 10th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation 2008*. 2008, S. 729–736. ISBN: 9781605581309.
- [207] *TOSCA 6.0 General Documentation*. Techn. Ber. Karlsruhe: FE-Design GmbH, 2006.
- [208] S. Vajna u. a. *CAD-Modellierung und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg: Springer, Vieweg, 2018, S. 205–297. ISBN: 978-3-662-54623-9. DOI: 10.1007/978-3-662-54624-6_5.
- [209] VDI. *Design of technical products and systems Model of product design VDI-Handbuch Produktentwicklung und Konstruktion Blatt 1*. Techn. Ber. 2019. URL: www.vdi.de/richtlinien.
- [210] VDI. *VDI-RICHTLINIEN VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE Entwicklung technischer Produkte und Systeme Gestaltung individueller Produktentwicklungsprozesse Design of technical products and systems Configuration of individual product design processes VDI 2221 Blatt 2 /*. Techn. Ber. 2019. URL: www.vdi.de/2221.
- [211] Z. Y. Wang u. a. „Cryogenic machining of tantalum“. In: *Journal of Manufacturing Processes* 4.2 (2002), S. 122–127. ISSN: 15266125. DOI: 10.1016/S1526-6125(02)70138-2.
- [212] D. Weiss. „Feature-based spline optimization in CAD: A step towards geometry-based structure creation“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.4 (Okt. 2010), S. 619–631. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s00158-010-0521-y.
- [213] D. Weiss. „Geometry-based structural optimization on CAD specification trees“. Dissertation. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2009. DOI: 10.3929/ethz-a-006008710. URL: <https://doi.org/10.3929/ethz-a-006008710>.

- [214] H. Wittel u. a. *Roloff/Matek Maschinenelemente*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. ISBN: 978-3-658-09081-4. DOI: 10.1007/978-3-658-09082-1. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-09082-1>.
- [215] C. Xie u. a. „Learning and teaching engineering design through modeling and simulation on a CAD platform“. In: *Computer Applications in Engineering Education* 26.4 (Juli 2018), S. 824–840. ISSN: 10990542. DOI: 10.1002/cae.21920.
- [216] Y. M. Xie und G. P. Steven. „A simple evolutionary procedure for structural optimization“. In: *Computers and Structures* 49.5 (1993), S. 885–896. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/0045-7949(93)90035-C. URL: https://www.researchgate.net/publication/346046213%7B%5C_%7DShape%7B%5C_%7Dand%7B%5C_%7Dlayout%7B%5C_%7Doptimization%7B%5C_%7Dvia%7B%5C_%7Dan%7B%5C_%7Devolutionary%7B%5C_%7Dprocedure.
- [217] Y. M. Xie und G. P. Steven. „Shape and layout optimization via an evolutionary procedure“. In: *Proceedings of the international conference on computational engineering*. Hong Kong: Hong Kong University of Science und Technology, 1992, S. 421.
- [218] Y. M. Xie u. a. *Evolutionary structural optimization*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 2002, S. 125–146. ISBN: 0784406367. DOI: 10.1007/978-1-4471-0985-3.
- [219] I. V. Yeswanth und A. A. E. Andrews. „Parametric optimization of composite drive shaft using ansys workbench 14.0“. In: *International Journal of Mechanical Engineering and Technology* 8.5 (2017), S. 10–23. ISSN: 09766359. URL: <http://www.iaeme.com/IJMET/issues.asp?JType=IJMET%7B%5C%7DVType=8%7B%5C%7DIType=5>.
- [220] G. Yi und N. H. Kim. „Identifying boundaries of topology optimization results using basic parametric features“. In: *Structural and*

- Multidisciplinary Optimization* 55.5 (2017), S. 1641–1654. ISSN: 16151488. DOI: 10.1007/s00158-016-1597-9.
- [221] J. Zhang u. a. „Aerodynamic design of an ultra-low rotating speed geared fan“. In: *Aerospace Science and Technology* 63 (Apr. 2017), S. 73–81. ISSN: 12709638. DOI: 10.1016/j.ast.2016.12.024. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1270963816313815>.
- [222] B. Zhu u. a. „Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: A review“. In: *Mechanism and Machine Theory* 143 (Jan. 2020), S. 103622. ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103622. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X19315538>.
- [223] L. Zhu, M. Li und R. R. Martin. „Direct simulation for CAD models undergoing parametric modifications“. In: *CAD Computer Aided Design* 78 (Sep. 2016), S. 3–13. ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/j.cad.2016.05.006.
- [224] R. A. Zimbrick und J. L. Colehour. „Investigation of very high bypass ratio engines for subsonic transports“. In: *Journal of Propulsion and Power* 6.4 (1990), S. 490–496. ISSN: 07484658. DOI: 10.2514/3.25461.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung eines Mehrwellentriebwerks . . .	6
1.2	Planetengetriebe mit fünf Planeten	10
1.3	Vergleich der Betriebsarten von Planetengetrieben . . .	12
1.4	Klassifizierung in der Strukturoptimierung	13
1.5	Wesentliche Aspekte der Produktentwicklung	15
1.6	Modellraum des Konstruierens nach Rude	16
1.7	Münchener Produktkonkretisierungsmodell	17
1.8	Standardvorgehen bei der Problemlösung	18
1.9	Optimierungsablauf	23
1.10	Klassifizierung in der Strukturoptimierung	23
1.11	Prinzipieller Ablauf eines geometriebasierten Optimie- rungsprozesses	26
2.1	Vergleich von eindimensionalen, nicht restringierten Funk- tionen: konvex (links) und nicht konvex (rechts)	38
2.2	Vergleich von zweidimensionalen, restringierten Funk- tionen: konvexe Restriktion (links) und nicht konvexe Restriktion (rechts)	39
2.3	Vergleich von externe Restriktionen (links) und interne Restriktionen (rechts)	40
2.4	Optimale Lösungen für Mehrzieloptimierungen	42
2.5	<i>Ant-Hill-Plot</i> und <i>pareto</i> -optimale Lösungen	42
2.6	<i>Methode des steilsten Abstiegs</i> und <i>Methode nach Fletcher und Reeves</i> im Vergleich	45
2.7	Typischer Verlauf von stochastischen Optimierungsverfahren	47
2.8	Verteilung von $\Delta \mathbf{x}_i$ für verschiedene σ -Level	49

2.9	Verbesserungswahrscheinlichkeit P_v in Abhängigkeit der Temperatur T (links) und der Funktionswertdifferenz $f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})$ (rechts)	50
2.10	Testfunktionen Rosenbrock (links) und Ackley (rechts) mit jeweils zwei Optimierungsparametern	53
2.11	Kleinste gefundene Funktionswerte der Testfunktionen .	54
2.12	Abstandskriterium (links), relative Breite (mitte) und reduzierte Treppenfunktion (rechts)	57
2.13	Exemplarischer Vergleich nicht-dominierter Lösungen der ZDT3-Funktion mit niedrigerem Rechenaufwand (links) und höherem Rechenaufwand (rechts)	57
2.14	Schichtdicken und Faserorientierung (links) und Querschnittsabmessungen eines Balkens rechts	59
2.15	Exemplarische Gestaltoptimierung einer Kerbe	59
2.16	Exemplarische zweidimensionale Topologieoptimierung .	62
2.17	Exemplarische Mikrostruktur für Homogenisierungsmethoden	63
2.18	Beispiel für eine Topografieoptimierung (links) und die Parametrisierung einer Sicke (rechts)	64
2.19	Beispiel einer „weichen“ oder flexiblen Struktur	65
2.20	Einflüsse des Bauraums und der Lasten auf umliegende Komponenten	67
3.1	Einordnung von FE- und CAD-basierten Optimierungsstrategien im Entwicklungsprozess	72
3.2	Drei Parametrisierungsvarianten eines T-Profiles	75
3.3	Splinedefinitionen <i>through points</i> (links) und <i>by poles</i> (rechts)	77
3.4	Globale Parametergrenzen (links) und lokale Parametergrenzen (rechts)	79
3.5	Beispiele für das Hinzufügen von Features an einen Kragbalken: Versteifungsplatte (links), Bohrung (Mitte), Zapfen (rechts)	80

3.6	Beispiel einer Topologieoptimierung mithilfe von Splines	81
3.7	Beispiel für <i>Single-level-Features</i> (links) und <i>Multi-level-Features</i> (rechts)	81
3.8	Variable Bauraumgrenzen in einer Optimierung	83
3.9	Schematische Darstellung eines Simulationsprozesses	87
3.10	Schematische Darstellung einer Automatisierung	89
3.11	Optimierungsbeispiel und Parametrisierung einer Dimensionierung	91
3.12	Ausgangsentwurf der Dimensionierung (links) und optimiertes Ergebnis (rechts)	92
3.13	Optimierungsbeispiel, Parametrisierung (oben) und Ergebnis (unten) einer Gestaltoptimierung mit Splines	93
3.14	Optimierungsbeispiel (links) und Ergebnis (rechts) einer Topologieoptimierung mit Splines	94
4.1	Eindimensionale Test-Funktion	96
4.2	Versuchsplan mit zwei Faktoren und fünf Leveln (links), Zufalls-Methode (mitte) und Einfaktor-Methode (rechts)	98
4.3	Vollfaktorieller Versuchsplan (links) und teilfaktorieller Versuchsplan mit 1/2-Fraktion (rechts)	99
4.4	Vergleich der Anzahl der Modellparameter für ein lineares Modell mit Haupteffekten, ein lineares Modell mit allen Wechselwirkungen und ein quadratisches Modell, in Anlehnung an Schiefer und Schiefer [179, S. 40]	100
4.5	<i>Central-Composite-Design</i> (links), <i>Face-Centered-Central-Composite-Design</i> (Mitte) und <i>Box-Behnken-Design</i> (rechts)	101
4.6	Beispiele für ein <i>klassisches</i> , nach <i>MinMax</i> optimiertes, <i>centered</i> und <i>schlechtes Latin-Hypercube-Sampling</i> für $n_f = 2$ und $n_r = 10$	103
4.7	Vergleich von bestimmten und überbestimmten Regressionen	106
4.8	Lineare Regressionen im Vergleich	108
4.9	Radiale Basisfunktionen im Detail	112
4.10	Radiale Basisfunktionen im Vergleich	113

4.11	Optimierung des Formfaktors θ für die <i>multiquadric</i> Ansatzfunktion mit: Zielfunktionen für die Optimierungen $\rho_P^{CV}(\theta)$ und $\epsilon^{tpf}(\theta)$ (links), den resultierenden Approximationsfunktionen (Mitte) und den Kreuzvalidierungsergebnissen (rechts)	116
4.12	Kriging-Approximation $\hat{f}_K(p)$ einer eindimensionalen Funktion $f(p)$ auf Basis von sieben Trainingspunkten p_i mit $b = 0.1$ (links), $b = 5$ (Mitte) und $b = 40$ (rechts)	122
4.13	Optimierung des Modellparameters b mit: Zielfunktionen für die Optimierung $\rho_P^{CV}(b)$, $\epsilon^{tpf}(b)$ und $\ln L_{red}(\mathbf{b})$ (links), den resultierenden Approximationsfunktionen (Mitte) und den Kreuzvalidierungsergebnissen (rechts)	124
4.14	Kriging-Approximation und die Vorhersageunsicherheit mit einem Konfidenzintervall von 95 %	125
4.15	Approximationen der <i>Branin</i> -Test-Funktion (oben links) mit $N = 30$ Trainingspunkten mithilfe einer quadratischen Polynomenregression \hat{f}_R (oben rechts), von radialen Basisfunktionen und der <i>multiquadric</i> Ansatzfunktion \hat{f}_B (unten links) und dem Kriging-Verfahren \hat{f}_K (unten rechts)	128
4.16	Statistische Approximationsgüte für eine quadratische Polynomenregression, radiale Basisfunktionen und Kriging-Modelle über der Trainingspunktanzahl N für die <i>Branin</i> -Test-Funktion: mittlerer Fehler M (links) und Standardabweichung der Fehler S (rechts)	130
4.17	Normalverteilung und ihre Größen	131
4.18	Gemittelte Fehlerverteilung für die RBF-Approximation der <i>Branin</i> -Testfunktion mit verschiedenen Formparametern	132
5.1	Schematische Schnittdarstellung eines Planetengetriebes, von links nach rechts: Lageranbindung, Hohlradaufnahme, Sonnenwelle	134
5.2	Flexible Wellen in einem Planetengetriebe	135
5.3	Welle mit Sicke	138

5.4	Parametrisierung einer Sicke	139
5.5	Parametrisierung einer Sicke	140
5.6	Approximation der minimalen Wandstärke $\hat{s}(R)$ für $M =$ 63.321Nm, $\tau = 160$ MPa	141
5.7	FEM-Modell zur Berechnung der Biegeweichheit	142
5.8	Auswertung der Sickenparameter auf Biegeweichheit und Masse	143
5.9	Sickenparametrisierung für eine Optimierung	145
5.10	Optimierungsergebnis 1 – biegeweiche Welle	146
5.11	Optimierungsergebnis 2 – Paretofronten für biegeweiche Wellen	147
5.12	Lager in einem Planetengetriebe	148
5.13	Verformung eines Lagers unter Last	149
5.14	Parametrisierung der Lageranbindung	153
5.15	Parametrisierung der Mittelkontur	154
5.16	Lageranbindung: Optimierungsergebnis 1	155
5.17	Lageranbindung: Optimierungsergebnis 2.1	155
5.18	Lageranbindung: Optimierungsergebnis 2.2	155
5.19	Pareto-optimale Designpunkte	156
5.20	Hohlradaufnahme im Planetengetriebe	158
5.21	Kritische Eigenmode des Systems	158
5.22	Kopplung der Analyse von Komponente und System	162
5.23	Gekoppelter Analyse- und Optimierungsprozess	163
5.24	Optimierung 1	166
5.25	Optimierung 2	166
5.26	Optimierung 3	167
5.27	Ergebnisübersicht	168
5.28	Steifigkeitsnebenbedingungen der Optimierung	169
5.29	Zeitersparnis durch Antwortflächenverfahren	173
5.30	Prozess für den mathematischen Zwilling mit Antwortflä- chen	174
5.31	Latin Hypercubes im Vergleich	175
5.32	Verteilung von Test- und Trainingspunkten	177

5.33	Grundlagen der Fehleranalyse	179
5.34	Sunshaft – Fehlerbetrachtung, Übersicht	180
5.35	Fehleranalyse – Sunshaft	181
5.36	Fehlerfortpflanzung bei radialen Basisfunktionen	182
5.37	Fehleranalyse – Hohlradaufnahme	184
5.38	Optimierungsergebnisse für die Hohlradaufnahme im Vergleich	185
5.39	Optimierungsergebnisse für die Eingangswelle im Vergleich	185
5.40	Beispiele eines variablen Bauraums: Sonnenwelle (links) und Hohlradaufnahme (rechts)	187
5.41	Approximation von nicht stetigen Funktionen mit RBFs	188
5.42	Fehlerbetrachtung zur Approximation des kleinsten Ab- stands zur Bauraumgrenze β_{min}	189

Tabellenverzeichnis

2.1	Charakteristiken nicht-dominierter Lösungen der ZDT3 Testfunktion (¹ modeFRONTIER 3.2 Implementierung, Ergebnisse nach Hinz [88]) [68, S. 4]	56
3.1	Parameterdefinition und Parametergrenzen für die Parametrisierungen in Abbildung 3.2	74
3.2	Parameterdefinition, Parametergrenzen und optimierte Werte für die Parametrisierungen in Abbildung 3.11	91
3.3	Parameterdefinition, Parametergrenzen und optimierte Werte für die Parametrisierungen in Abbildung 3.13	92
4.1	Übersicht: Polynomkoeffizienten, Bestimmtheitsmaß und korrigiertes Bestimmtheitsmaß für Abbildung 4.8	109
5.1	Übersicht optimaler Lösungen ($R[\text{mm}]/s[\text{mm}]$) optimiert durch <i>NLPQLP</i> für einfache biegeweiche Wellen mit $R_{min} = 75,0$	138
5.2	DoE-Parameter für eine Welle mit einer Sicke	142
5.3	Ausfallraten	165
5.4	z-Score-Werte und dazugehörige Prozentsätze	183