

Marvin Kahra

Maximumprinzipien für harmonische Abbildungen
in Riemann'schen Mannigfaltigkeiten

Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg
Fakultät für Mathematik, Informatik, Physik, Elektro- und
Informationstechnik
Mathematisches Institut
Lehrstuhl Analysis
Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny



Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades Master of Science

Marvin Kahra

20. Januar 2020

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny
2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Michael Breuß

Eidesstattliche Erklärung

Der Verfasser erklärt, dass er die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt hat. Die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos als solche kenntlich gemacht. Wörtlich und inhaltlich verwendete Quellen wurden entsprechend den anerkannten Regeln wissenschaftlichen Arbeitens zitiert. Die Arbeit ist nicht in gleicher oder vergleichbarer Form, auch nicht auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung bei einer anderen Hochschule vorgelegt worden.

Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die Arbeit mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft wird.

Cottbus, den 20. Januar 2020

Vorwort

Der Begriff des Maximumprinzips stellt eine spezielle Eigenschaft von Lösungen gewisser Differentialgleichungen dar. Dabei handelt es sich grundsätzlich um die Eigenschaft, dass das (globale) Maximum am Rand des Definitionsbereiches der Abbildung, welche das Maximumprinzip erfüllt, angenommen wird.

Der physikalische Grundgedanke, der hinter dieser Eigenschaft steht, ist die Orts- und Zeitabhängigkeit der Temperatur in einem Festkörper. Denn bei Erwärmung eines solchen Körpers wird sich die thermische Energie im Laufe der Zeit über den gesamten Körper ausbreiten. Überführt man diesen Gedanken in eine mathematische Behauptung, so erhält man die Aussage: Die maximale Temperatur tritt entweder am Beginn des Zeitintervalls oder am Rande des betrachteten Gebietes des Festkörpers auf.

Eins der ersten Maximumprinzipien stammt von Bernhard Riemann, welcher in seiner Dissertation ein Maximumprinzip für harmonische Funktionen aufstellte. Das heutzutage geläufigste Maximumprinzip stammt von Eberhard Hopf und bezieht sich auf Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zu welchem insbesondere auch unsere in dieser Arbeit betrachteten harmonischen Abbildungen zählen. Daher werden wir hier vom Hopf'schen Maximumprinzip bzw. von Variationen des (schwachen) Maximumprinzips ausgehen.

Die größte Anwendung findet das Maximumprinzip bei der Eindeutigkeit und Stabilität der Lösungen von Dirichlet-Problemen, welcher wir uns in dieser Arbeit auch widmen wollen. Weitere Anwendungen stellen dabei noch die Lösungen von parabolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und nicht-lineare Systeme mit quadratischem Wachstum im Gradienten – auf welche wir später auch nochmal zurückkommen werden – dar.

Wir werden uns, nachdem wir einige grundlegende Annahmen bezüglich zweidimensionaler Riemann'scher Mannigfaltigkeiten und deren Metrik getätigt haben, mit Abschätzungen für Jacobi-Felder auseinandersetzen, wobei wir dafür den von S. Hildebrandt inspirierten Weg von E. Giusti [4] für unsere betrachteten geometrischen Grundannahmen folgen. Dabei werden wir Jacobi-Felder in einen Tangential- und einen Normalanteil aufspalten und insbesondere den Normalanteil sowohl von unten als auch von oben beschränken. Dadurch erhalten wir eine Beschränkung der Riemann'schen Metrik für beliebige zweidimensionale Vektoren in Form der Christoffel-Symbole als auch des metrischen Tensors mittels geeigneter Hilfsfunktionen.

Im darauffolgenden Kapitel nutzen wir diese Abschätzungen um durch die in [6] dargestellte direkte Variationsmethode von Hildebrandt, Kaul und Widman auf unseren Fall einer Kreisscheibe in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit anzuwenden. Dabei zeigen wir zunächst eine schwache Existenzaussage bzgl. des Minimierungsproblems des Energiefunktional, welche ohne weitere Regularitätsannahmen auskommt. Diese

werden wir dann mittels der ersten Variation des Energiefunktional und des Stampacchia'schen Maximumprinzips von Hildebrandt und Widman auf schwachharmonische Abbildungen mit vorgeschriebenen Randwerten ausweiten. Auch wenn wir in dieser Arbeit nur die Existenz schwacher Lösungen beweisen, werden wir in den nachfolgenden Kapiteln in der Regel von einer C^2 -regulären Lösung ausgehen, da man eine solche mit den in [13] von Morrey Jr dargestellten Methode erhält.

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen des Dirichlet-Problems für harmonische Abbildungen in Form des Maximumprinzips von Jäger und Kaul, wobei wir uns dafür nach ihrer Arbeit [8] richten. Eine Kernaussage für den Beweis dieses Maximumprinzips stellt die Abschätzung der Hesse-Matrix der Abstandsfunktion dar, welche wir mittels Methoden von [5] durch Jacobi-Felder abschätzen. Diese Abschätzung werden wir dann nutzen, um so nachzuweisen, dass die dafür aufgestellte Vergleichsfunktion einem schwachen Maximumprinzip genügt und somit das Maximumprinzip von Jäger und Kaul zu erhalten.

Die Themen des letzten Kapitels stellen das Maximumprinzip der konvexen Hülle und die Eineindeutigkeit der Dirichlet-Lösung dar. Unsere Ausführungen dazu basieren auf der Arbeit [16] von Sauvigny. Dieses Kapitel soll eine alternative Herangehensweise zum Maximumprinzip von Jäger und Kaul darstellen. Die wichtigsten Unterschiede bestehen zum einen darin, dass wir hierbei von einem stabilen Riemann'schen Gebiet (im Gegensatz zum vorherigen Gebiet, welches durch die Normalreichweite bestimmt wurde) ausgehen und mittels dessen eine Familie von Geodätischen betrachten, die in Form eines Zentralfeldes eine einfache Überdeckung der Kreisscheibe bilden. Zum anderen verwenden wir anstatt der Abstandsfunktion eine geodätische Winkelfunktion. Mit Hilfe dieser Winkelfunktion werden wir eine nichtlineare Differentialgleichung herleiten durch die wir einsehen werden, dass die Winkelfunktion dem Hopf'schen Maximumprinzip genügt. Dadurch werden wir zeigen, dass die konvexe Hülle der Dirichlet-Randwerte stets die Bildmenge der harmonischen Lösung des Dirichlet-Problems enthält. Des Weiteren können wir mit diesen Methoden die Eineindeutigkeit der Lösung gewährleisten, sofern wir über eine topologische Randfunktion verfügen. Diese Aussage lässt sich sogar in dem Sinne erweitern, dass die Lösung einen $C^{2+\alpha}$ -Diffeomorphismus über das gesamte Gebiet darstellt, falls die Riemann'sche Metrik nicht zu sehr von der Euklidischen abweicht. Zum Abschluss wenden wir die hier dargestellte Theorie sowie die Erkenntnisse von Hildebrandt, Kaul und Widman aus [6] auf die Poincaré'sche Halbebene an, indem wir eine sogenannte hemisphärische Metrik einführen und den Rand der oberen Halbsphäre mittels Geodätischen erzeugen, welche wir durch eine Projektion wieder zu einem zweidimensionalen geodätischen Zentralfeld überführen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Zeit nutzen, um einigen Leuten meinen Dank für ihre Unterstützung auszusprechen. Zuerst danke ich Herrn Prof. Friedrich Sauvigny dafür, dass er bei Problemen und Fragen stets ein offenes Ohr und wohlüberlegte Ratschläge für mich hatte. Zudem gilt mein Dank auch Herrn Andreas Künnemann, welcher mir dabei half mich auf das Grundlegende zu konzentrieren und meine Gedanken wieder auf gerichteten Bahnen zu lenken. Schließlich will ich es nicht missen meinen Eltern zu danken, welche mir immer den Rücken freihielten und mich zu meinen Leistungen motivierten.

Cottbus, den 20. Januar 2020

Marvin Kahra

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Abschätzungen für Jacobi-Felder	5
3	Existenz schwachharmonischer Abbildungen	19
4	Maximumprinzip von Jäger und Kaul	27
5	Maximumprinzip der konvexen Hülle und Eineindeutigkeit	43
	Literatur	69

1 Einführung

Wir erklären zuerst die Gebiete

$$B := \{w = u + iv \in \mathbb{C} : |w| < 1\} \quad \text{und} \quad \Omega_R := \{X = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |X| < R\}$$

für die Koordinaten $u + iv \cong (u, v)$ und (x^1, x^2) mit $0 < R < \infty$. Zudem statten wir B mit der euklidischen Metrik $(\delta_{jk})_{j,k=1,2}$ und Ω_R mit der folgenden Riemann'schen Metrik aus:

$$ds^2 := \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(X) dx^j dx^k, \quad (1.1)$$

wobei die Koeffizienten die Bedingungen

$$g_{jk} = g_{jk}(X) \in \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega_R}, \mathbb{R}), \quad j, k = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$g_{12}(X) = g_{21}(X) \text{ in } \overline{\Omega_R}, \quad (1.3)$$

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(X) \xi^j \xi^k \leq \frac{1}{\lambda} |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \forall X = (x^1, x^2) \in \overline{\Omega_R} \quad (1.4)$$

mit der Hölder-Konstante $\alpha \in (0, 1)$ und der Elliptizitätskonstante $\lambda \in (0, 1]$ erfüllen. Damit kann man auf jede C^1 -Abbildung $X : B \rightarrow \Omega_R$ das Energiefunktional

$$E(X) := \frac{1}{2} \int_B \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(X) (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) du \wedge dv \quad (1.5)$$

anwenden. Eine Abbildung X heißt dann harmonisch, falls sie das nichtlineare elliptische System

$$\Delta x^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) = 0 \quad \text{in } B \text{ für } i = 1, 2 \quad (1.6)$$

erfüllt. Hierbei stellen Γ_{jk}^i die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{il} (g_{kl,j} + g_{lj,k} - g_{jk,l}), \quad j, k, l = 1, 2, \quad (1.7)$$

dar, wobei wir mit $(g^{jk})_{j,k=1,2}$ die inverse Matrix zu $(g_{jk})_{j,k=1,2}$ und mit dem Komma bei $g_{jk,l}$ eine partielle Ableitung in Richtung x^l von g_{jk} bezeichnen.

Unser Ziel besteht darin das Dirichlet-Problem zu lösen, d.h. wir wollen eine harmonische Abbildung X finden, welche $X|_{\partial B} = \Phi$ für eine gegebene Randabbildung $\Phi : \partial B \rightarrow \Omega_R$ erfüllt.

Dazu erklären wir das Gebiet

$$\mathcal{K}_M(P) := \left\{ X = (x^1, x^2) \in \Omega_R : \text{dist}(X, P) \leq M \right\}$$

für einen festen Radius $0 < M < +\infty$ und Mittelpunkt $P \in \Omega_R$. Weiter fordern wir von den Dirichlet-Daten Φ , dass $\Phi(\partial B)$ in diesem Gebiet enthalten und die Riemann'sche Metrik aus (1.1) für den ganzen \mathbb{R}^2 erklärt wird, indem wir sie außerhalb von Ω_R euklidisch werden lassen. Zudem benötigen wir noch den Begriff der Normalreichweite eines Punktes. Dies führen wir folgendermaßen ein: Die Normalreichweite eines Punktes $P \in \Omega_R$ bezeichnen wir als das Komplement des Schnittortes (engl. cut locus) von P in Ω_R . In unserem Fall der Kreisscheibe Ω_R ist der Schnittort eines Punktes P gerade der zu P konjugierte Punkt \bar{P} in Ω_R , d.h. die Normalreichweite von P wird durch die Menge $\{X \in \Omega_R \setminus \{\bar{P}\}\}$ dargestellt. Schließlich fordern wir noch, dass $\mathcal{K}_M(P)$ in Normalreichweite von all seinen Punkten ist.

In den folgenden Kapiteln werden wir den Weg von Hildebrandt, Kaul und Widman [6] beschreiten und mittels direkter Variation eine schwache Lösung X für $E(X) \rightarrow \min$ mit den Nebenbedingungen $X|_{\partial B} = \Phi$ und $X(B) \subset \mathcal{K}_{\tilde{M}}(P)$ konstruieren, wobei

$$M < \tilde{M} < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$$

mit der oberen Schranke κ an die Gauß'sche Krümmung K gelte.

2 Abschätzungen für Jacobi-Felder

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Theorie von Jacobi-Feldern auseinandersetzen. Dazu folgen wir den im Buch [4] von E. Giusti (nach dem Vorbild von S. Hildebrandt) aufgezeigten Weg, welcher darin besteht Jacobi-Felder in einen Tangential- sowie einen Normalanteil aufzuspalten und diese beiden Anteile dann nach oben und unten abzuschätzen. Daraus erhalten wir dann eine Wachstumsbeschränkung für alle Jacobi-Felder.

Zum Einstieg in dieses Kapitel klären wir zunächst einige Definitionen, beginnend mit der in [15] Kapitel VIII, §5 von F. Sauvigny zu findenden Einführung der kovarianten Ableitung.

Definition 2.1

Seien zu den Grenzen $-\infty < a < b < \infty$ die Funktionen $F(t) = (f^1(t), f^2(t)) \in C^1((a, b), \mathcal{O})$ und $J(t) = (j^1(t), j^2(t)) \in C^1((a, b), \mathbb{R}^2)$, welche vom Intervall (a, b) auf eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ bzw. den \mathbb{R}^2 abbilden, gegeben. Dann erklären wir die **kovariante Ableitung des Vektorfeldes J längs der Kurve F** durch das Vektorfeld

$$\frac{\nabla}{dt} J(t) := (z^1(t), z^2(t)), \quad a < t < b, \quad (2.1)$$

mit den Komponentenfunktionen

$$z^m := \frac{dj^m}{dt} + \sum_{k,l=1}^2 \Gamma_{kl}^m j^k \frac{df^l}{dt}, \quad t \in (a, b), \quad m = 1, 2. \quad (2.2)$$

Mit Hilfe dieser Definition erklären wir auch gleich die für dieses Kapitel fundamentale

Definition 2.2

Ein Vektorfeld J entlang einer Geodätischen $Y : [0, \infty) \rightarrow \Omega_R$ mit $\frac{d}{dt} Y(0) = \dot{Y}(0) \neq 0$ nennen wir **Jacobi-Feld entlang Y** , falls es die Gleichung

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R(J, \dot{Y}) \dot{Y} = 0 \quad (2.3)$$

erfüllt, wobei $R(\cdot, \cdot)$ den Riemann'schen Krümmungstensor im Sinne von

$$\left(R(U, V)W \right)^l = \sum_{i,j,k=1}^2 R_{ijk}^l w^i u^j v^k, \quad l = 1, 2,$$

für alle $U = (u^1, u^2), V = (v^1, v^2), W = (w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2$ mit den Komponenten

$$R_{ijk}^l := \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^l + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{km}^l \Gamma_{ij}^m, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

bezeichne. Die Gleichung (2.3) heißt **Jacobi-Gleichung der Geodätischen Y** .

Zudem vereinbaren wir noch die Notation von J_Y als vierdimensionalen linearen Raum, der durch alle Jacobi-Felder entlang einer Geodätischen Y aufgespannt wird.

Für zwei beliebige Elemente J, \tilde{J} aus diesem Raum gilt mit Hilfe der Jacobi-Gleichung (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left\langle \frac{\nabla}{dt} J, \tilde{J} \right\rangle - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} \right\rangle \right] &= \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J, \tilde{J} \right\rangle - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} \right\rangle \\ &= \left\langle R(\tilde{J}, \dot{Y}) \dot{Y}, J \right\rangle - \left\langle R(J, \dot{Y}) \dot{Y}, \tilde{J} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

d.h. es gilt dann sogar

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} J, \tilde{J} \right\rangle - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} \right\rangle = \text{const.} \quad \forall J, \tilde{J} \in J_Y.$$

Wählen wir nun für \tilde{J} gerade \dot{Y} aus, erhalten wir aus der Prämisse, dass Y eine Geodätische ist, die Gleichheit

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} J, \dot{Y} \right\rangle - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} \dot{Y} \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} J, \dot{Y} \right\rangle = \text{const.} \quad \forall J \in J_Y. \quad (2.4)$$

Wir tätigen zunächst die zusätzliche Annahme, dass die Geodätische Y Einheitsgeschwindigkeit besitzt, d.h. $\|\dot{Y}\| = 1$. Auf diese Annahme werden wir allerdings zu einem späteren Zeitpunkt für unsere Abschätzungen der Jacobi-Felder verzichten.

Wenn wir die Setzungen

$$J^T := \alpha \dot{Y}, \quad \alpha := \left\langle J, \dot{Y} \right\rangle, \quad J^\perp := J - J^T$$

verwenden, können wir jedes Jacobi-Feld $J \in J_Y$ aufteilen in eine Tangentialkomponente J^T und eine Normalkomponente J^\perp gemäß

$$J = J^T + J^\perp.$$

Weiter folgt aus (2.4) die Gleichung

$$\ddot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\left\langle \frac{\nabla}{dt} J, \dot{Y} \right\rangle}_{=\text{const.}} + \underbrace{\left\langle J, \frac{\nabla}{dt} \dot{Y} \right\rangle}_{=0} \right] = 0.$$

Folglich erhalten wir daraus

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J^T + R(J^T, \dot{Y}) \dot{Y} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} (\alpha \dot{Y}) + \underbrace{\alpha R(\dot{Y}, \dot{Y}) \dot{Y}}_{=0, \text{ da } R \text{ schief-symmetrisch}} = \frac{\nabla}{dt} (\dot{\alpha} \dot{Y}) = \ddot{\alpha} \dot{Y} = 0.$$

Also erfüllt J^T die Jacobi-Gleichung und stellt somit wieder ein Jacobi-Feld dar. Ebenso ist auch J^\perp – auf Grund seiner Konstruktion und der Linearität der kovarianten Ableitung sowie des Riemann’schen Krümmungstensors – wieder ein Jacobi-Feld. Außerdem folgt aus $\ddot{\alpha} = 0$, dass wir die Tangentialkomponente eines Jacobi-Feldes ausdrücken können als

$$J^T(t) = (at + b)\dot{Y}(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (2.5)$$

E. Giusti gibt die Konstanten zusätzlich mit

$$a = \left\langle \frac{\nabla}{dt} J(0), \dot{Y}(0) \right\rangle, \quad b = \langle J(0), \dot{Y}(0) \rangle \quad (2.6)$$

an. Dadurch ist es uns möglich J^T mit Hilfe der Anfangswerte $J(0)$ und $\frac{\nabla}{dt} J(0)$ zu berechnen.

Somit fehlt uns nur noch eine Abschätzung der Normalkomponente von Jacobi-Feldern, um so das Wachstum von allen Jacobi-Feldern zu kontrollieren. Wir führen deswegen den Raum J_Y^\perp ein, welcher gegeben sei durch

$$J_Y^\perp := \left\{ J \in J_Y : \langle J, \dot{Y} \rangle = 0 \right\}.$$

Die Elemente dieser Menge bezeichnen wir im Folgenden einfachheitshalber als Jacobi-Normalfelder. Unser Ziel wird es dabei sein, dass wir Schranken an diese Jacobi-Normalfelder finden wollen, indem wir uns die Gauß’sche Krümmung von Ω_R zu nutze machen. Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende Anfangswertproblem (AWP)

$$\ddot{s}_\vartheta + \vartheta s_\vartheta = 0, \quad s_\vartheta(0) = 0, \quad \dot{s}_\vartheta(0) = 1. \quad (2.7)$$

Die Lösung dieses AWP’s ist

$$s_\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \sin(\sqrt{\vartheta}t), & \vartheta > 0 \\ t, & \vartheta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\vartheta}} \sinh(\sqrt{-\vartheta}t), & \vartheta < 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Weiter bezeichnen wir mit

$$t_\vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\vartheta}}, & \vartheta > 0 \\ \infty, & \vartheta \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

die erste positive Nullstelle von s_ϑ . Im Folgenden werden wir für ϑ entweder die obere oder untere Schranke der Gauß’schen Krümmung einsetzen. Wir beginnen nun unsere Abschätzungen mit der oberen Schranke κ an die Gauß’sche Krümmung K in Form des

Lemma 2.3

Sei die Geodätische $Y : [0, \infty) \rightarrow \Omega_R$ mit Einheitsgeschwindigkeit $\|\dot{Y}\| = 1$ gegeben und $J \in J_Y^\perp$ ein dazugehöriges Jacobi-Normalfeld, welches $\|J(t)\| > 0$ für $t \in (0, t^*)$ erfülle. Weiter sei κ die obere Schranke an die Gauß’sche Krümmung K von Ω_R auf dem geodätischen Teilstück $\Gamma_{t^*} := \{Y(t) : 0 \leq t \leq t^*\}$. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} \|J(t)\| + \kappa \|J(t)\| \geq 0, \quad t \in (0, t^*). \quad (2.10)$$

Beweis: Wir erhalten die gewünschte Aussage indem wir die folgende Abschätzung mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung durchführen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \|J\| &= \frac{d}{dt} \left[\|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle \right] \\
&= \|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla^2}{dt^2} J \right\rangle + \|J\|^{-1} \left\| \frac{\nabla}{dt} J \right\|^2 - \|J\|^{-3} \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle^2 \\
&= \|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla^2}{dt^2} J \right\rangle + \|J\|^{-3} \left[\|J\|^2 \left\| \frac{\nabla}{dt} J \right\|^2 - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle^2 \right] \\
&\geq \|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla^2}{dt^2} J \right\rangle = -\|J\|^{-1} \left\langle R(J, \dot{Y}) \dot{Y}, J \right\rangle \\
&= -\left\langle R(J, \dot{Y}) \dot{Y}, J \right\rangle \left[\frac{\|J\|^2}{\|J\|} - \frac{\left\langle J, \dot{Y} \right\rangle}{\|J\|} \right]^{-1} = -\frac{\left\langle R(J, \dot{Y}) \dot{Y}, J \right\rangle}{\|J\|^2 - \left\langle J, \dot{Y} \right\rangle} \|J\| \\
&= -K \|J\| \geq -\kappa \|J\|.
\end{aligned}$$

□

Darauf aufbauend zeigen wir

Lemma 2.4

Seien die Annahmen aus Lemma 2.3 erfüllt. Zudem sei $J(0) = 0$ und $t^* \leq t_\kappa$. Dann gilt die Abschätzung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\|J(t)\|}{s_\kappa(t)} \right) \geq 0, \quad t \in (0, t^*). \quad (2.11)$$

Beweis: Wir erklären die Hilfsfunktion

$$Z(t) := \frac{d}{dt} \|J(t)\| s_\kappa(t) - \|J(t)\| \dot{s}_\kappa(t)$$

und erhalten für ihre Ableitung unter Berücksichtigung von Lemma 2.3:

$$\dot{Z} = \frac{d^2}{dt^2} \|J\| s_\kappa - \|J\| \ddot{s}_\kappa \stackrel{(2.7)}{=} s_\kappa \left(\frac{d^2}{dt^2} \|J\| + \kappa \|J\| \right) \geq 0, \quad t \in (0, t^*).$$

Somit ist $Z(t)$ für jedes $t_0 \in (0, t^*)$ eine schwach monoton steigende Funktion auf dem Intervall (t_0, t^*) . Ferner erkennen wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\frac{d}{dt} \|J\| = \|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle \leq \|J\|^{-1} \|J\| \left\| \frac{\nabla}{dt} J \right\| = \left\| \frac{\nabla}{dt} J \right\|$$

und damit

$$|Z| = \left| \frac{d}{dt} \|J\| s_\kappa - \|J\| \dot{s}_\kappa \right| \leq \left| \frac{d}{dt} \|J\| \right| s_\kappa + \|J\| |\dot{s}_\kappa| \leq \left\| \frac{\nabla}{dt} J \right\| s_\kappa + \|J\| |\dot{s}_\kappa|, \quad t \in (0, t^*),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass s_κ auf diesem Intervall positiv ist. Führen wir nun den Grenzübergang $t_0 \rightarrow 0+$ aus, so ergibt sich für s_κ und $\|J\|$:

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} s_\kappa(t_0) = 0, \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \|J(t_0)\| = 0.$$

Folglich erhalten wir für den Grenzübergang bei unserer Hilfsfunktion

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} |Z(t_0)| \leq \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \left(\left\| \frac{\nabla}{dt} J(t_0) \right\|_{s_\kappa(t_0)} + \|J(t_0)\| |\dot{s}_\kappa(t_0)| \right) = 0$$

bzw.

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} Z(t_0) = 0.$$

Somit gilt auf Grund der schwachen Monotonie von Z :

$$Z(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0+} Z(t) \geq \lim_{t_0 \rightarrow 0+} Z(t_0) = 0, \quad t \in (0, t^*).$$

Schließlich kommen wir dadurch auf die gewünschte Aussage mittels

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\|J(t)\|}{s_\kappa(t)} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \|J(t)\|_{s_\kappa(t)} - \|J(t)\| \dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa^2} = \frac{Z(t)}{s_\kappa^2} \geq 0, \quad t \in (0, t^*).$$

□

Wir sind jetzt in der Lage mit Hilfe von Lemma 2.4 das nachfolgende Theorem zu beweisen.

Theorem 2.5

Seien die Geodätische $Y : [0, \infty) \rightarrow \Omega_R$ mit Einheitsgeschwindigkeit und ein dazugehöriges Jacobi-Normalfeld $J \in J_Y^\perp$ mit der Anfangsbedingung $J(0) = 0$ gegeben. Weiter gelte auf dem geodätischen Teilstück Γ_{t_κ} , dass κ eine obere Schranke an die Gauß'sche Krümmung von Ω_R darstelle. Dann gilt die Ungleichung

$$\left\| \frac{\nabla}{dt} J(0) \right\|_{s_\kappa(t)} \leq \|J(t)\| \quad \forall t \in [0, t_\kappa). \quad (2.12)$$

Beweis: Da der Fall $\frac{\nabla}{dt} J(0) = 0$ trivialerweise erfüllt wird, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\left\| \frac{\nabla}{dt} J(0) \right\| > 0$ gilt. D.h. es existiert ein $t^* \in (0, t_\kappa)$, so dass $\|J(t)\| > 0$ für alle $t \in (0, t^*)$ erfüllt ist. Zusammen mit der Aussage von Lemma 2.4 gelangen wir zur Schlussfolgerung, dass $\frac{\|J\|}{s_\kappa}$ schwach monoton steigend auf diesem Intervall ist, d.h. wir haben

$$\frac{\|J\|}{s_\kappa}(t_0) \leq \frac{\|J\|}{s_\kappa}(t), \quad 0 < t_0 \leq t < t^*.$$

Wir führen nun wieder den Grenzübergang $t_0 \rightarrow 0+$ aus und verwenden dazu die Regel von L'Hospital gemäß

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{\|J\|^2}{s_\kappa^2}(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{\frac{d}{dt}\|J\|^2}{\frac{d}{dt}s_\kappa^2}(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{\frac{d^2}{dt^2}\|J\|^2}{\frac{d^2}{dt^2}s_\kappa^2}(t_0).$$

Die Terme dieses Bruchs können wir so problemlos bestimmen und erhalten dafür

$$\frac{d^2}{dt^2}s_\kappa^2 = \frac{d}{dt}(2s_\kappa\dot{s}_\kappa) = 2(\dot{s}_\kappa^2 + s_\kappa\ddot{s}_\kappa) = 2[\cos^2(\sqrt{\kappa}t_0) - \sin^2(\sqrt{\kappa}t_0)]$$

bzw. durch den Grenzübergang $t_0 \rightarrow 0+$

$$\frac{d^2}{dt^2}s_\kappa^2 = 2[\cos^2(\sqrt{\kappa}t_0) - \sin^2(\sqrt{\kappa}t_0)] \rightarrow 2$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\|J\|^2 &= \frac{d}{dt} \left[2\|J\|\|J\|^{-1} \left\langle J, \frac{\nabla}{dt}J \right\rangle \right] = 2 \left[\left\langle J, \frac{\nabla^2}{dt^2}J \right\rangle + \left\| \frac{\nabla}{dt}J \right\|^2 \right] \\ &= 2 \left[\left\| \frac{\nabla}{dt}J \right\|^2 - \left\langle R(J, \dot{Y})\dot{Y}, J \right\rangle \right] \rightarrow 2 \left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|^2 \quad (t_0 \rightarrow 0+). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{\|J\|}{s_\kappa}(t_0) = \left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|,$$

Somit ergibt sich die folgende Abschätzung für $\|J\|$:

$$\|J(t)\| \geq \underbrace{\left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|}_{>0} \underbrace{s_\kappa(t)}_{>0 \text{ für } t \in (0, t_\kappa)} > 0 \quad \forall t \in (0, t^*).$$

Allerdings erkennen wir daraus, dass $\|J\|$ nicht vor t_κ verschwinden kann, also gilt die Abschätzung (2.12). \square

Wir kommen, nachdem wir nun unsere Abschätzung für die obere Schranke der Gauß'schen Krümmung haben, zu Abschätzungen für die untere Schranke ω der Gaußkrümmung.

Hierzu betrachten wir wieder eine Geodätische $Y : [0, \infty) \rightarrow \Omega_R$ mit Einheitsgeschwindigkeit und $X_1(t), X_2(t)$ Vektorfelder entlang Y , welche

$$\frac{\nabla}{dt}X_k = 0, \quad \langle X_k, X_l \rangle = \delta_{kl}, \quad k = 1, 2,$$

erfüllen. Dann wählen wir eine Basis $J_1(t), J_2(t)$ des Unterraums $J_Y^0 \subset J_Y$, welcher definiert sei durch

$$J_Y^0 := \{J \in J_Y : J(0) = 0\},$$

mit

$$\frac{\nabla}{dt} J_k(0) = X_k(0), \quad k = 1, 2.$$

Man kann zeigen, dass diese J_k linear unabhängig für alle $t \in (0, t_\kappa)$ sind. Dazu nutzt man die Darstellung der Tangentialkomponente ((2.5),(2.6)) und die Abschätzung (2.12) für die Normalkomponente aus.

Wir führen als Nächstes eine assoziierte Darstellung von Jacobi-Feldern

$$J = \sum_{k=1}^2 J^k X_k$$

mittels der Vektorfunktion $I = (J^1, J^2)$ ein, welche die Gleichung

$$\frac{\nabla^2}{dt^2} I + R_A I = 0$$

erfüllt. Dabei wollen wir $R_A(t) = (r_{sk}(t))_{s,k=1,2}$ definieren als

$$r_{sk} := \sum_{l,m=1}^2 r_{sklm} \dot{y}^l \dot{y}^m$$

mit

$$\dot{Y} = \sum_{k=1}^2 \dot{y}^k X_k, \quad R(J, \dot{Y}) \dot{Y} = \sum_{s,k,l,m=1}^2 r_{sklm} J^k \dot{y}^l \dot{y}^m X_s.$$

Seien nun J_k , $k = 1, 2$, die Vektorfunktionen bzgl. J_k . Dann ist die Matrix $A := (I_1, I_2)$ invertierbar und erfüllt

$$\frac{\nabla^2}{dt^2} A + R_A A = 0, \quad A(0) = 0, \quad \frac{\nabla}{dt} A(0) = (\delta_{kl})_{k,l=1,2}. \quad (2.13)$$

Wir ermitteln für die folgende Rechnung die kovariante Ableitung der Inversen A^{-1} :

$$0 = \frac{\nabla}{dt} (A^{-1} A) = \frac{\nabla}{dt} A^{-1} A + A^{-1} \frac{\nabla}{dt} A \iff \frac{\nabla}{dt} A^{-1} = -A^{-1} \frac{\nabla}{dt} A A^{-1}.$$

Weiter erklären wir dafür

$$S(t) := -\frac{\nabla}{dt} A(t) A^{-1}(t), \quad t \in (0, t_\kappa).$$

Somit können wir nun S kovariant ableiten und erhalten mit Hilfe von (2.13)

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} S &= -\frac{\nabla^2}{dt^2} A A^{-1} - \frac{\nabla}{dt} A \frac{\nabla}{dt} A^{-1} = -\frac{\nabla^2}{dt^2} A A^{-1} - \frac{\nabla}{dt} A \left(-A^{-1} \frac{\nabla}{dt} A A^{-1} \right) \\ &= -\frac{\nabla^2}{dt^2} A A^{-1} + \left(\frac{\nabla}{dt} A A^{-1} \right)^2 = R_A + S^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Zudem haben wir offensichtlich den Zusammenhang

$$\begin{aligned} S(t) &= -\frac{\nabla}{dt}A(t)A^{-1}(t) \iff \frac{\nabla}{dt}A(t) = -S(t)A(t) \iff \frac{\nabla}{dt}I(t) = -S(t)I(t) \\ &\iff \frac{\nabla}{dt}J(t) = S(t)J(t), \quad t \in (0, t_\kappa). \end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt wählen wir $t_0 \in (0, t_\kappa)$ beliebig und setzen

$$U_0 := \sum_{k=1}^2 u_0^k X_k(t_0) = \frac{J(t_0)}{\|J(t_0)\|}.$$

Weiter erklären wir das Vektorfeld U entlang Y mit $U(t_0) = U_0$ indem wir die Festlegung $U(t) := \sum_{k=1}^2 u_0^k X_k(t)$ treffen. Durch diese Setzungen ergeben sich die Gleichungen

$$\|U\| = 1, \quad \langle U, \dot{Y} \rangle = 0,$$

da diese Gleichungen für $t = t_0$ erfüllt sind und t_0 beliebig gewählt war sowie U und Y parallel zueinander verlaufen. Folglich erhalten wir für unsere Gauß'sche Krümmung:

$$\omega \leq K = \frac{\langle R(U, \dot{Y})\dot{Y}, U \rangle}{\langle U, U \rangle \langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle - \langle U, \dot{Y} \rangle^2} = \langle R(U, \dot{Y})\dot{Y}, U \rangle \leq \kappa. \quad (2.15)$$

Zudem folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\langle SU, U \rangle^2 \leq \|SU\| \|U\| = \langle SU, SU \rangle = \langle S^2U, U \rangle. \quad (2.16)$$

Um die letzte Gleichheit von (2.16) einzusehen, zeigen wir kurz, dass

$$\langle S(t_0)U_0, V_0 \rangle = \langle U_0, S(t_0)V_0 \rangle$$

für alle $t \in (0, t_\kappa)$ und alle $U_0 = u_0^k X_k(t_0)$, $V_0 = v_0^k X_k(t_0) \in T_{Y(t_0)}\Omega_R$ gilt, also S symmetrisch ist auf $T_{Y(t_0)}\Omega_R$. Dazu seien $U(t) = u^k X_k(t)$ und $V(t) = v^k X_k(t)$ mit $u = A^{-1}(t_0)u_0$ bzw. $v = A^{-1}(t_0)v_0$ erklärt. Dann ist die zu zeigende Aussage äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle S(t_0)U_0, V_0 \rangle + \langle U_0, S(t_0)V_0 \rangle = \lim_{t \rightarrow t_0} [-\langle SAU, AV \rangle + \langle AU, SAV \rangle] \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\left\langle \frac{\nabla}{dt}AU, AV \right\rangle - \left\langle AU, \frac{\nabla}{dt}AV \right\rangle \right] =: \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t). \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt für $\beta(t)$ der Grenzübergang:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = \langle U(0), 0 \rangle - \langle 0, V(0) \rangle = 0.$$

Wenn wir nun die Ableitung von β betrachten, fällt uns auf, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\beta &= \left\langle \frac{\nabla^2}{dt^2}AU, AV \right\rangle - \left\langle AU, \frac{\nabla^2}{dt^2}AV \right\rangle = \langle AU, R_A AV \rangle - \langle R_A AU, AV \rangle \\ &= \langle R_A AV, AU \rangle - \langle R_A AU, AV \rangle = 0 \end{aligned}$$

erfüllt wird. Dabei haben wir ausgenutzt, dass die kovariante Ableitung von X_k verschwindet – wodurch nur diejenigen Skalarprodukte ungleich Null sind, die keine Ableitungen von U oder V enthalten – und die letzte Gleichheit aus folgender Symmetrieeigenschaft des Riemann'schen Krümmungstensors folgt:

$$\langle R(U, \dot{Y})\dot{Y}, V \rangle = \langle R(V, \dot{Y})\dot{Y}, U \rangle.$$

Somit wissen wir, dass β konstant und $\beta(0) = 0$ ist, also ist auch $\beta(t_0) = 0$. Dadurch wird unsere gewünschte Aussage schließlich nachgewiesen.

Im Folgenden werden wir unsere gewonnenen Erkenntnisse dafür verwenden eine obere untere Schranke für Jacobi-Felder anzugeben. Hierzu berechnen wir mit Hilfe von (2.14) erstmal

$$\frac{d}{dt} \langle SU, U \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} SU, U \right\rangle = \langle R_A U, U \rangle + \langle S^2 U, U \rangle = \langle R(U, \dot{Y})\dot{Y}, U \rangle + \langle S^2 U, U \rangle$$

und setzen

$$k(t) := \langle SU, U \rangle(t), \quad t \in (0, t_\kappa). \quad (2.17)$$

Dadurch erhalten wir mittels (2.15)-(2.17) die Ungleichung

$$\dot{k}(t) = \frac{d}{dt} \langle SU, U \rangle(t) = \langle R(U, \dot{Y})\dot{Y}, U \rangle(t) + \langle S^2 U, U \rangle(t) \geq \omega + k^2(t) \quad \forall t \in (0, t_\kappa). \quad (2.18)$$

Setzen wir auch noch $h(t) := s_\omega(t)k(t) + \dot{s}_\omega(t)$ und differenzieren wir auch dieses wieder, so ergibt sich dafür mit (2.18):

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \dot{s}_\omega(t)k(t) + s_\omega(t)\dot{k}(t) + \ddot{s}_\omega(t) \geq \dot{s}_\omega(t)k(t) + k^2(t)s_\omega(t) + \underbrace{\ddot{s}_\omega(t) + \omega s_\omega(t)}_{=0 \text{ wegen (2.7)}} \\ &= h(t)k(t) \quad \forall t \in (0, t_\kappa). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wir bestimmen als Nächstes die folgenden Ableitungen für $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[h(t) e^{-\int_\varepsilon^t k(s) ds} \right] &= \left(\dot{h}(t) - h(t)k(t) \right) e^{-\int_\varepsilon^t k(s) ds}, \\ \frac{d}{dt} \left[h(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \left(\dot{h}(s) - h(s)k(s) \right) e^{-\int_\varepsilon^s k(\tau) d\tau} ds \right] &= \left(\dot{h}(t) - h(t)k(t) \right) e^{-\int_\varepsilon^t k(s) ds}, \end{aligned}$$

also ergibt sich

$$h(t) e^{-\int_\varepsilon^t k(s) ds} = h(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \left(\dot{h}(s) - h(s)k(s) \right) e^{-\int_\varepsilon^s k(\tau) d\tau} ds.$$

Weiter sehen wir mit Hilfe von Ungleichung (2.19) die Gültigkeit von

$$\int_{\varepsilon}^t \left(\dot{h}(s) - h(s)k(s) \right) e^{-\int_{\varepsilon}^s k(\tau) d\tau} ds \geq 0,$$

und somit folgt

$$h(t) \geq h(\varepsilon) e^{-\int_{\varepsilon}^t k(s) ds} \quad \forall t \in (\varepsilon, t_{\kappa}).$$

Wir betrachten als Nächstes den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0+$: Es gilt zunächst

$$S(\varepsilon) = -\frac{\nabla}{dt} A(t) A^{-1}(t) \Big|_{t=\varepsilon} \approx -\frac{1}{\varepsilon} (\delta_{jk})_{j,k=1,2} + \dots$$

bzw.

$$k(\varepsilon) = \langle S(\varepsilon)U(\varepsilon), U(\varepsilon) \rangle \approx -\frac{1}{\varepsilon} + O(1)$$

für ε nahe $0+$. Also bedeutet dies, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} k(\varepsilon) = -\infty$ gilt bzw. wenn wir wieder auf die Funktion $h(t)$ zurückkommen

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} h(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (s_{\omega}(\varepsilon)k(\varepsilon) + \dot{s}_{\omega}(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{-\omega}} \frac{\sinh(\varepsilon\sqrt{-\omega})}{\varepsilon} \right)}_{=-1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \dot{s}_{\omega}(\varepsilon)}_{=1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} h(t) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} h(\varepsilon) e^{-\int_{\varepsilon}^t k(s) ds} = 0 \quad \forall t \in (0, t_{\kappa}) \\ \iff -k(t) &\leq \frac{\dot{s}_{\omega}(t)}{s_{\omega}(t)} \quad \forall t \in (0, t_{\kappa}). \end{aligned}$$

Indem wir uns an die Setzung $U(t_0) := \frac{J(t_0)}{\|J(t_0)\|}$ erinnern, sehen wir mittels obiger Ungleichung die Gültigkeit von

$$-\frac{\langle S(t_0)J(t_0), J(t_0) \rangle}{\|J(t_0)\|^2} = -\langle S(t_0)U(t_0), U(t_0) \rangle = -k(t_0) \leq \frac{\dot{s}_{\omega}(t_0)}{s_{\omega}(t_0)}$$

ein. Da $t_0 \in (0, t_{\kappa})$ beliebig gewählt war, gilt diese Ungleichung für alle $t \in (0, t_{\kappa})$. Folglich erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\|J(t)\|}{\|J(t)\|^2} = \frac{\left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle}{\|J(t)\|^2} = -\frac{\langle S(t)J(t), J(t) \rangle}{\|J(t)\|^2} \leq \frac{\dot{s}_{\omega}(t)}{s_{\omega}(t)}, \quad t \in (0, t_{\kappa}).$$

Beachten wir zusätzlich aus dem Beweis von Lemma 2.4, dass

$$\frac{d}{dt} \|J(t)\|_{s_{\kappa}(t)} - \|J(t)\| \dot{s}_{\kappa}(t) \geq 0 \iff \frac{\left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle}{\|J(t)\|^2} \geq \frac{\dot{s}_{\kappa}(t)}{s_{\kappa}(t)} \quad \forall t \in (0, t_{\kappa})$$

gilt, folgt schließlich

$$\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \leq \frac{\left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle}{\|J(t)\|^2} \leq \frac{\dot{s}_\omega(t)}{s_\omega(t)} \quad \forall t \in (0, t_\kappa). \quad (2.20)$$

Jetzt werden wir noch für diese Abschätzungen die Bedingung entfernen, dass die Geodätische Y Einheitsgeschwindigkeit besitzen sollte. Hierzu setzen wir $r := \|\dot{Y}\|$, $\underline{Y}(\tau) := Y(\frac{\tau}{r})$ und $\underline{J}(\tau) := J(\frac{\tau}{r})$. Damit haben wir auch wieder die Einheitsgeschwindigkeit $\|\dot{\underline{Y}}\| = 1$ für \underline{Y} . Diese Notation wenden wir dann auf unsere soeben hergeleiteten Ungleichungen an, wodurch diese die Form

$$\frac{\dot{s}_\kappa(\tau)}{s_\kappa(\tau)} \leq \frac{\left\langle \underline{J}(\tau), \frac{\nabla}{d\tau} \underline{J}(\tau) \right\rangle}{\|\underline{J}(\tau)\|^2} \leq \frac{\dot{s}_\omega(\tau)}{s_\omega(\tau)}$$

annehmen. Mittels der Skalierung $\tau = rt$ ergibt sich

$$\sqrt{\kappa} \cot(rt\sqrt{\kappa}) \leq \frac{1}{r} \frac{\left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle}{\|J(t)\|^2} \leq \sqrt{-\omega} \coth(rt\sqrt{-\omega})$$

bzw.

$$r\sqrt{\kappa} \cot(rt\sqrt{\kappa}) \leq \frac{\left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle}{\|J(t)\|^2} \leq r\sqrt{-\omega} \coth(rt\sqrt{-\omega}).$$

Indem wir noch die Funktionen

$$a_\kappa(t) := t\sqrt{\kappa} \cot(t\sqrt{\kappa}), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right),$$

$$a_\omega(t) := t\sqrt{-\omega} \coth(t\sqrt{-\omega}), \quad t \in (0, \infty),$$

eingeführen und in den Ungleichungen $t = 1$ setzen, erhalten wir

$$a_\kappa(r)\|J(1)\|^2 \leq \left\langle J(1), \frac{\nabla}{dt} J(1) \right\rangle \leq a_\omega(r)\|J(1)\|^2$$

bzw.

$$[a_\kappa(r) - 1]\|J(1)\|^2 \leq \left\langle J(1), \frac{\nabla}{dt} J(1) - J(1) \right\rangle \leq [a_\omega(r) - 1]\|J(1)\|^2, \quad r\sqrt{\kappa} < \pi. \quad (2.21)$$

Wir benötigen im Folgenden noch das

Theorem 2.6

Sei J ein Jacobi-Normalfeld mit $J(0) = 0$ entlang der Geodätischen Y mit Einheitsgeschwindigkeit. Zudem seien $\omega \leq K \leq \kappa$ auf $\{Y(t) : t \in (0, t_\kappa)\}$ die untere bzw. obere Schranke an die Gauß'sche Krümmung K . Dann ist $\frac{\|J(t)\|}{s_\omega(t)}$ schwach monoton fallend auf dem Intervall $(0, t_\kappa)$ und es gilt die Ungleichung

$$\|J(t)\| \leq \left\| \frac{\nabla}{dt} J(0) \right\| s_\omega(t) \quad \forall t \in (0, t_\kappa). \quad (2.22)$$

Beweis: Wir berechnen mit Hilfe von (2.20) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\|J(t)\|}{s_\omega(t)} \right) &= \frac{\frac{d}{dt}\|J(t)\|s_\omega(t) - \|J(t)\|\dot{s}_\omega(t)}{s_\omega^2(t)} = \frac{\|J(t)\|}{s_\omega(t)} \left(\frac{\frac{d}{dt}\|J(t)\|}{\|J(t)\|} - \frac{\dot{s}_\omega(t)}{s_\omega(t)} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\|J(t)\|}{s_\omega(t)}}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{\langle J(t), \frac{\nabla}{dt}J(t) \rangle}{\|J(t)\|^2} - \frac{\dot{s}_\omega(t)}{s_\omega(t)} \right)}_{\leq 0} \leq 0, \quad t \in (0, t_\kappa). \end{aligned}$$

Die gleiche Begründung wie im Beweis von Theorem 2.5 liefert schließlich die gewünschte Behauptung. \square

Durch Kombination der Ungleichungen (2.12) und (2.22) erhalten wir die Abschätzung

$$s_\kappa(t) \leq \frac{\|J(t)\|}{\left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|} \leq s_\omega(t), \quad t \in (0, t_\kappa). \quad (2.23)$$

Nun eliminieren wir auch hierfür wieder die Bedingung der Einheitsgeschwindigkeit für die Geodätische: Dazu verfahren wir analog zum vorherigen Mal und schreiben die Abschätzung in quadrierter Form auf:

$$\left\| \frac{\nabla}{d\tau}J(0) \right\|^2 s_\kappa^2(\tau) \leq \|J(\tau)\|^2 \leq \left\| \frac{\nabla}{d\tau}J(0) \right\|^2 s_\omega^2(\tau).$$

Die Skalierung $\tau = rt$ liefert wieder

$$\left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|^2 r^{-2} s_\kappa^2(rt) \leq \|J(t)\|^2 \leq \left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|^2 r^{-2} s_\omega^2(rt)$$

und mit den Setzungen

$$b_\kappa(t) := \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{t\sqrt{\kappa}}, \quad b_\omega(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-\omega})}{t\sqrt{-\omega}}$$

erhalten wir für $t = 1$:

$$\left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|^2 b_\kappa^2(r) \leq \|J(1)\|^2 \leq \left\| \frac{\nabla}{dt}J(0) \right\|^2 b_\omega^2(r), \quad r\sqrt{\kappa} < \pi. \quad (2.24)$$

Für diese Jacobi-Feldabschätzungen geben wir im Folgenden eine kurze differentialgeometrische Betrachtungsweise nach dem Vorbild von E. Giusti aus [4] an, welche es uns erlauben wird die Jacobi-Felder, die in den Ungleichungen (2.21) und (2.24) auftreten, mit den uns bekannten Christoffel-Symbolen bzw. mit dem metrischen Tensor und beliebigen Vektoren zu identifizieren. Hierzu erklären wir zunächst für einen Punkt $P \in \Omega_R$ die Exponentialabbildung durch

$$\exp_P : T_P\Omega_R \longrightarrow \Omega_R, \quad v \longmapsto Y(1, P, v), \quad v \in T_P\Omega_R,$$

wobei $Y(t, P, v)$, $t \in [0, 1]$, eine Geodätische mit $Y(0, P, v) = P$ und $\dot{Y}(0, P, v) = v$ darstellt. Dabei bezeichnen wir P als das Zentrum der Exponentialabbildung. Eine

Normalkarte (Ψ, U) mit Zentrum $P \in \Omega_R$ wird durch eine offene Menge $U \subset \Omega_R$ mit $P \in U$ und einer Abbildung $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Form $\Psi = \iota \circ \exp_P^{-1}$ gegeben, wobei $\iota : T_P \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Isometrie darstellt.

Seien nun e_1, e_2 die Orthonormalbasis von $T_P \Omega_R$, welche unter ι die Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^2 sind. Dann stellen

$$X_k(Q) = (d \exp_P)_v e_k, \quad Q = \exp_P v, \quad k = 1, 2, \quad (2.25)$$

die Basisvektorfelder der Normalkarte (Ψ, U) dar. Somit erhalten wir die Darstellungen

$$x = \Psi(Q), \quad g_{jk}(x) := g_{jk}(\Psi^{-1}(x)) = \langle X_j(Q), X_k(Q) \rangle.$$

Weiter gilt, da P das Zentrum ist, dass $\Psi(P) = 0$ erfüllt wird sowie die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} (d \exp_P)_0 v &= \frac{d}{dt} (\exp_P(vt)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (Y(1, P, vt)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (Y(t, P, v)) \Big|_{t=0} \\ &= \dot{Y}(0, P, v) = v, \quad v \in T_P \Omega_R, \end{aligned}$$

$$g_{jk}(0) = \langle X_j(P), X_k(P) \rangle = \langle d \exp_P e_j, d \exp_P e_k \rangle = \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}.$$

Sei nun $\Phi = \Phi(t, \alpha) = (\phi^1(t, \alpha), \phi^2(t, \alpha))$ eine Abbildung, welche für jedes $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, $\alpha_0 > 0$, eine Geodätische $Y(t) = \Phi(t, \alpha)$ in Ω_R darstellt. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\nabla d\Phi}{dt d\alpha} \right)^l - \left(\frac{\nabla d\Phi}{d\alpha dt} \right)^l \\ &= \left(\frac{d^2 \phi^l}{dt d\alpha} + \sum_{k,m=1}^2 \Gamma_{km}^l \frac{d\phi^k}{dt} \frac{d\phi^m}{d\alpha} \right) \Big|_{t=1} - \left(\frac{d^2 \phi^l}{d\alpha dt} + \sum_{k,m=1}^2 \Gamma_{km}^l \frac{d\phi^k}{d\alpha} \frac{d\phi^m}{dt} \right) \Big|_{t=1} = 0 \end{aligned}$$

und damit für ein zulässiges Vektorfeld Z entlang Φ :

$$R \left(\frac{d\Phi}{dt}, \frac{d\Phi}{d\alpha} \right) Z = \frac{\nabla \nabla}{dt d\alpha} Z - \frac{\nabla \nabla}{d\alpha dt} Z - \left(\frac{\nabla d}{dt d\alpha} - \frac{\nabla d}{d\alpha dt} \right) Z = \frac{\nabla \nabla}{dt d\alpha} Z - \frac{\nabla \nabla}{d\alpha dt} Z.$$

Wir erhalten aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{\nabla^2 d\Phi}{dt^2 d\alpha} = \frac{\nabla \nabla}{dt d\alpha} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\nabla \nabla}{d\alpha dt} \frac{d\Phi}{dt} + R \left(\frac{d\Phi}{dt}, \frac{d\Phi}{d\alpha} \right) \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\nabla \nabla}{d\alpha} \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{=0} - R(J, \dot{Y}) \dot{Y}$$

$$\iff \frac{\nabla^2}{dt^2} J + R(J, \dot{Y}) \dot{Y} = 0.$$

Somit stellt $\frac{d\Phi}{d\alpha} = J$ ein Jacobi-Feld dar. Wir setzen $Y(t) := \exp_P(tv)$, dann ist

$$\Phi(t, \alpha) = \exp_P(t(v + \alpha\xi)) \quad \forall \xi = \sum_{k=1}^2 \xi^k e_k \in T_P \Omega_R$$

eine Geodätische mit $\Phi(0, \alpha) = P$. Folglich haben wir dadurch das Jacobi-Feld

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{d\Phi}{d\alpha} = (d \exp_P)_{t(v+\alpha\xi)}(t\xi) \Big|_{\alpha=0} = (d \exp_P)_{tv}(t\xi) = \sum_{k=1}^2 t\xi^k (d \exp_P)_{tv} e_k v \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \sum_{k=1}^2 t\xi^k X_k(Y(t)), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt dann für dieses Jacobi-Feld mit $Q = Y(1)$:

$$J(0) = 0, \quad J(1) = \sum_{k=1}^2 \xi^k X_k(Q), \quad \frac{\nabla}{dt} J(0) = \sum_{k=1}^2 \xi^k X_k(P) = \sum_{k=1}^2 \xi^k e_k = \xi,$$

$$\frac{\nabla}{dt} J(1) = \sum_{k=1}^2 \xi^k X_k(Q) + \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jl}^k \xi^j \dot{y}^l(1) X_k(Q).$$

Mit diesen Gleichungen erhalten wir wiederum:

$$\left\| \frac{\nabla}{dt} J(0) \right\|^2 = \sum_{k,l=1}^2 \delta_{kl} \xi^k \xi^l, \quad \|J(1)\|^2 = \sum_{k,l=1}^2 \langle X_k(Q), X_l(Q) \rangle \xi^k \xi^l = \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \xi^k \xi^l, \quad (2.26)$$

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} J(1) - J(1), J(1) \right\rangle = \sum_{j,k,l,m=1}^2 \Gamma_{jl}^k \xi^j \dot{y}^l(1) \xi^m \langle X_k(Q), X_m(Q) \rangle$$

$$= \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{km} \Gamma_{jl}^k \xi^j \dot{y}^l(1) \xi^m = \sum_{j,l,m=1}^2 \Gamma_{mj}^l \xi^m \xi^j \dot{y}^l(1).$$

Unter Verwendung der Notation $v = \sum_{k=1}^2 x^k e_k$ und $\dot{Y}(t) = \sum_{k=1}^2 \dot{y}^k(t) X_k(Y(t))$ folgt

$$\dot{Y}(1) = \frac{d}{dt} (\exp_P(tv)) \Big|_{t=1} = \sum_{k=1}^2 (d \exp_P)_v x^k e_k = \sum_{k=1}^2 x^k X_k(Y(1)) = \sum_{k=1}^2 x^k e_k$$

bzw. $\dot{y}^l(1) = x^l$, $l = 1, 2$. Somit erhält die letzte Gleichung aus (2.26) die Gestalt

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} J(1) - J(1), J(1) \right\rangle = \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jkl} \xi^j \xi^k x^l. \quad (2.27)$$

Ferner können wir uns noch die Eigenschaften von $\mathcal{K}_M(P)$ zunutze machen indem wir $U = \mathcal{K}_M(P)$ setzen. Schließlich fassen wir unsere Überlegungen aus diesem Kapitel zusammen zum

Theorem 2.7

Seien $\omega \leq K \leq \kappa$ mit $-\infty < \omega \leq 0 \leq \kappa < +\infty$ die Schranken an die Gauß'sche Krümmung K auf $\mathcal{K}_M(P)$ und $M\sqrt{\kappa} < \pi$. Dann existiert eine Normalkarte $(\Psi, \mathcal{K}_M(P))$ mit Zentrum P und Riemann'schen Normalkoordinaten $X = \Psi(Q)$ für $Q \in \mathcal{K}_M(P)$, so dass die folgenden Abschätzungen für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ gelten:

$$\sum_{j,k=1}^2 [a_\kappa(|X|) - 1] g_{jk} \xi^j \xi^k \leq \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jkl} x^j \xi^k \xi^l \leq \sum_{j,k=1}^2 [a_\omega(|X|) - 1] g_{jk} \xi^j \xi^k \quad (2.28)$$

$$b_\kappa^2(|X|) |\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} \xi^j \xi^k \leq b_\omega^2(|X|) |\xi|^2. \quad (2.29)$$

Beweis: Die Ungleichungen folgen sofort aus der Kombination von (2.21), (2.24), (2.26) und (2.27). \square

3 Existenz schwachharmonischer Abbildungen

Wir folgen nun der direkten Variationsmethode von Hildebrandt, Kaul und Widman aus ihrer Arbeit [6] um eine schwache Lösung für unser Problem herzuleiten. Dazu betrachten wir den Sobolev-Raum $H_2^1(B, \mathbb{R}^2)$, welcher sich aus den messbaren Abbildungen $X : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $X \circ \chi^{-1} \in H_{2,loc}^1(W, \mathbb{R}^2)$ für jede Karte χ von B mit Reichweite $W \subset \mathbb{R}_+^2 = \{X \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq 0\}$ zusammensetzt. Die Hilbertraumstruktur ist dort durch ein Skalarprodukt mit der assoziierten Norm

$$\|X\|_1^2 = \int_B |X|^2 du \wedge dv + \int_B e(X) du \wedge dv$$

definiert, wobei die Invariante $e(X)$ allgemein in lokalen Koordinaten durch

$$e(X) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} (x^j \circ \chi^{-1}) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} (x^j \circ \chi^{-1}) \right)^2 \right]$$

bzw. für $\chi \equiv \text{Id}$

$$e(X) = \frac{1}{2} (|x_u|^2 + |x_v|^2)$$

gegeben ist.

Falls wir von einem $X \in H_2^1(B, \Omega_R)$ fordern, dass seine Bildmenge innerhalb der Normalreichweite eines Punktes $Q \in \Omega_R$ liegt und seine Darstellung in Normalkoordinaten um den Punkt Q zu $H_2^1(B, \mathbb{R}^2)$ gehört, so können wir $H_2^1(B, \Omega_R)$ eindeutig definieren, da die Verknüpfung einer H_2^1 -Funktion mit einer C^1 -Abbildung wieder eine H_2^1 -Funktion ergibt. Analog folgt dies auch für $\dot{H}_2^1(B, \Omega_R)$ und $H_2^1 \cap L^\infty(B, \Omega_R)$.

Als Nächstes führen wir die Notation $d(Q)$ ein, welche den Abstand von Q zu seinem Schnittort bzw. konjugierten Punkt \bar{Q} misst. Dann erklären wir für beliebiges $Q \in \Omega_R$ und $\tilde{M} < d(Q)$, die Menge

$$\mathcal{D}_{\tilde{M}} = \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q) := \left\{ X \in H_2^1(B, \Omega_R) : \sup_B \text{dist}(X(u, v), Q) \leq \tilde{M} \right\}. \quad (3.1)$$

Wählen wir eine Normalkarte mit Normalkoordinaten $x = (x^1, x^2)$ und Zentrum Q , so dass $Q = (0, 0)$ gilt, folgt daraus die Identität

$$\mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q) \equiv \left\{ x \in H_2^1 \cap L^\infty(B, \Omega_R) : \sup_B |x| \leq \tilde{M} \right\} \subset H_2^1(B, \Omega_R).$$

Wir kommen nun zu einer ersten Existenzaussage für unser Variationsproblem:

Lemma 3.1

Sei $\mathcal{K}_{\tilde{M}}(Q)$ in Normalreichweite seines Zentrums Q und $\tilde{M} < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, wobei $\kappa \geq 0$ eine obere Schranke an die Gauß'sche Krümmung von Ω_R darstelle. Dann existiert zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q)$ eine Lösung zum folgenden Problem

$$E(x) \longrightarrow \min, \quad x \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q) \cap \{x - \varphi \in \dot{H}_2^1(B, \mathbb{R}^2)\}.$$

Beweis: Wir setzen zunächst die Abschätzung (2.29) in (1.5) ein und erhalten für ein $c_0 > 0$:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2} \int_B \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x)(x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \, du \wedge dv \\ &\geq \frac{1}{2} \int_B b_\kappa^2(|x|)(|x_u|^2 + |x_v|^2) \, du \wedge dv \geq \frac{1}{2} \int_B b_\kappa^2(\tilde{M})(|x_u|^2 + |x_v|^2) \, du \wedge dv \\ &\geq c_0 \int_B (|x_u|^2 + |x_v|^2) \, du \wedge dv = c_0 \int_B e(x) \, du \wedge dv \quad \forall x \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q), \end{aligned}$$

da $b_\kappa^2(|x|) \in (0, 1]$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$ eine monoton fallende Funktion darstellt und $\tilde{M} < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ist. Daraus folgt

$$\|x\|_1^2 = \int_B \underbrace{|x|^2}_{\leq \tilde{M}^2, \text{ wegen (3.1)}} \, du \wedge dv + \underbrace{\int_B e(x) \, du \wedge dv}_{\leq c_0^{-1} E(x)} \leq c_1(\tilde{M}^2 + E(x))$$

mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Somit ist eine minimierende Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ in $H_2^1(B, \mathbb{R}^2)$ beschränkt und konvergiert schwach gegen ein $x \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}$. Da B isomorph in den \mathbb{R}^2 eingebettet werden kann, ist E unterhalbstetig und erfüllt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} E(x_k) \geq E(x)$$

(vgl. Theorem 1.8.2 aus [12]). Dann gilt für das Infimum \mathcal{E} von E :

$$\mathcal{E} = \inf E(x) \leq E(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(x_k) = \inf E(x) = \mathcal{E},$$

also die Gleichheit $\mathcal{E} = E(x)$ und somit stellt x das von uns gesuchte minimierende Element dar. \square

Unser nächster Schritt besteht darin, dass wir die erste Variation von E an der Stelle $x \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q)$ in Richtung ψ bestimmen:

$$\delta E(x, \psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [E(x + \varepsilon \psi) - E(x)]. \quad (3.2)$$

Dieser Grenzwert existiert für alle $\psi \in \dot{H}_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2)$, so dass $x + \varepsilon\psi \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q)$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \geq 0$ gilt. Dabei berechnen wir folgendermaßen die erste Variation von E :

$$\begin{aligned}
\delta E(x, \psi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [E(x + \varepsilon\psi) - E(x)] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_B \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x + \varepsilon\psi) \left[(x + \varepsilon\psi)_u^j (x + \varepsilon\psi)_u^k + (x + \varepsilon\psi)_v^j (x + \varepsilon\psi)_v^k \right] \\
&\quad - \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \left[x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k \right] du \wedge dv \\
&= \int_B \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \left[x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k \right] du \wedge dv \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_B \sum_{j,k=1}^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g_{jk}(x + \varepsilon\psi) - g_{jk}(x)}{\varepsilon} \left[x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k \right] du \wedge dv \\
&= \int_B \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \left[x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k \right] du \wedge dv \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_B \sum_{j,k,l=1}^2 g_{jk,l}(x) \left[x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k \right] \psi^l du \wedge dv \\
&=: \int_B \delta e(x, \psi) du \wedge dv.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Diese erste Variation werden wir im Folgenden genauer untersuchen und zeigen, dass sie für die Lösung unseres Variationsproblems verschwindet.

Doch zunächst machen wir uns den Zusammenhang zwischen den Christoffel-Symbolen der ersten und zweiten Art bewusst:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 g_{il} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} \sum_{i,m=1}^2 g_{il} g^{im} (g_{km,j} + g_{mj,k} - g_{jk,m}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \delta_{lm} (g_{km,j} + g_{mj,k} - g_{jk,m}) \\
&= \frac{1}{2} (g_{kl,j} + g_{lj,k} - g_{jk,l}) =: \Gamma_{ljk}, \quad j, k, l = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

und erkennen damit das Additionstheorem für die Christoffelsymbole:

$$\Gamma_{jkl} + \Gamma_{kjl} = \frac{1}{2} (g_{jk,l} + g_{lj,k} - g_{kl,j} + g_{jk,l} + g_{lk,j} - g_{jl,k}) = g_{jk,l}, \quad j, k, l = 1, 2. \tag{3.5}$$

Mithilfe dieser beiden Gleichungen können wir die zweite Summe von $\delta e(x, \psi)$ aus

(3.3) darstellen als

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^2 g_{jk,l}(x) [x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k] \psi^l &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^2 (\Gamma_{jkl} + \Gamma_{kjl}) [x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k] \psi^l \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m=1}^2 (g_{jm} \Gamma_{kl}^m + g_{km} \Gamma_{jl}^m) [x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k] \psi^l \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m=1}^2 (g_{jm} \Gamma_{kl}^m + g_{jm} \Gamma_{kl}^m) [x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k] \psi^l \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jm} \Gamma_{kl}^m [x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k] \psi^l = \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jk} \Gamma_{ml}^k [x_u^j x_u^m + x_v^j x_v^m] \psi^l.
\end{aligned}$$

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen zum

Lemma 3.2

Die minimierende Funktion x aus Lemma 3.1 erfüllt

$$\delta E(x, \psi) = \int_B \delta e(x, \psi) du \wedge dv \geq 0 \quad \forall \psi \in \dot{H}_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2), \quad (3.6)$$

so dass $x + \varepsilon \psi \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}(Q)$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt mit

$$\delta e(x, \psi) = \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jk} \left[x_u^j (\psi_u^k + \Gamma_{ml}^k x_u^m \psi^l) + x_v^j (\psi_v^k + \Gamma_{ml}^k x_v^m \psi^l) \right]. \quad (3.7)$$

Ausgehend davon kommen wir auch gleich auf das folgende

Lemma 3.3

Sei die Funktion φ aus Lemma 3.1 gegeben und erfülle zudem $\varphi \in \mathcal{D}_M$ für ein $M < \tilde{M}$. Dann enthält \mathcal{D}_M auch die Lösung x des Variationsproblems und für diese gilt

$$\delta E(x, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \dot{H}_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $\eta \in C_0^\infty(B, \mathbb{R})$ mit $\eta \geq 0$ und folgern aus der Bedingung $\varepsilon^{-1} > \sup_B \eta$, dass $\varepsilon \eta \in [0, 1)$, weil

$$0 \leq \varepsilon \eta \leq \varepsilon \sup_B \eta < 1.$$

Folglich gilt

$$|x - \varepsilon x \eta| \leq \underbrace{|1 - \varepsilon \eta|}_{\in (0,1]} |x| \leq \tilde{M} \quad \forall x \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}$$

und aus der selben Überlegung sehen wir $x - \varepsilon x \eta - \varphi = x(1 - \varepsilon \eta) - \varphi \in \mathring{H}_2^1(B, \mathbb{R}^2)$ ein. Setzen wir nun $\psi = -x\eta$ als Testfunktion in Lemma 3.2 ein, so erhalten wir

$$\delta E(x, x\eta) \leq 0. \quad (3.8)$$

Unter Verwendung der Gleichheit $g_{jk}(x)x^j = x^k$, $j, k = 1, 2$, aus dem Gauß'schen Lemma und der Ungleichung (2.28) können wir (3.7) mit unserer Testfunktion folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \delta e(x, x\eta) &= \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jk} \left[x_u^j \left((x\eta)_u^k + \Gamma_{ml}^k x_u^m x^l \eta \right) + x_v^j \left((x\eta)_v^k + \Gamma_{ml}^k x_v^m x^l \eta \right) \right] \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jk} \left[x_u^j \left(x^k \eta_u + \eta x_u^k + \Gamma_{ml}^k x_u^m x^l \eta \right) + x_v^j \left(x^k \eta_v + \eta x_v^k + \Gamma_{ml}^k x_v^m x^l \eta \right) \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} x^k (x_u^j \eta_u + x_v^j \eta_v) + \eta \sum_{j,k,l=1}^2 (g_{jk} + \Gamma_{jkl} x^l) (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &= \sum_{j=1}^2 x^j (x_u^j \eta_u + x_v^j \eta_v) + \eta \sum_{j,k,l=1}^2 (g_{jk} + \Gamma_{jkl} x^l) (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |x|^2}{\partial u} \eta_u + \frac{\partial |x|^2}{\partial v} \eta_v \right) + \eta \sum_{j,k,l=1}^2 (g_{jk} + \Gamma_{jkl} x^l) (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |x|^2}{\partial u} \eta_u + \frac{\partial |x|^2}{\partial v} \eta_v \right) + \eta \sum_{j,k=1}^2 (g_{jk} + a_\kappa(|x|) g_{jk} - g_{jk}) (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |x|^2}{\partial u} \eta_u + \frac{\partial |x|^2}{\partial v} \eta_v \right) + \eta a_\kappa(|x|) \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |x|^2}{\partial u} \eta_u + \frac{\partial |x|^2}{\partial v} \eta_v \right) + \eta \underbrace{a_\kappa(\tilde{M})}_{\geq 0} \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |x|^2}{\partial u} \eta_u + \frac{\partial |x|^2}{\partial v} \eta_v \right), \end{aligned}$$

da $a_\kappa(|x|)$ auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right)$ eine monoton fallende Funktion darstellt, $\tilde{M} < \frac{\pi}{\sqrt{2\kappa}}$ und $a_\kappa\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\kappa}}\right) = 0$ ist. Weiter erkennen wir in Bezug auf (3.8) $|x|^2 \in H_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R})$ als eine schwache Unterlösung des Laplace-Beltrami-Operators auf B .

An dieser Stelle wollen wir das Stampacchia'sche Maximumprinzip von S. Hildebrandt und K.-O. Widman [7] (Lemma 2.1) mit $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ und $B = 0$ verwenden und nach dem Vorbild von E. Giusti [4] ausführen: Wir führen zunächst die Hilfsfunktion $h(u, v) := |x(u, v)|^2$ ein und übernehmen aus unseren vorangegangenen Überlegungen die Abschätzung

$$0 \geq \delta E(x, x\eta) = \int_B \delta e(x, x\eta) du \wedge dv \geq \int_B \frac{1}{2} (h_u \eta_u + h_v \eta_v) du \wedge dv. \quad (3.9)$$

Weiter erklären wir noch $k_0 := \sup_{\partial B} h$ und $\eta^{(k)} := \max\{h - k, 0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Mittels dieser Notation erkennen wir sofort, dass die Spur von $\eta^{(k_0)}$ auf ∂B verschwindet, d.h. $\eta^{(k_0)} \in \mathring{H}_2^1(B, \mathbb{R})$. Dies gilt allerdings auch für $\eta^{(k)}$, $k \geq k_0$, da $0 \leq \eta^{(k)} \leq \eta^{(k_0)}$ ist. Also wissen wir dadurch, dass $\eta^{(k)} \in \mathring{H}_2^1(B, \mathbb{R})$, $k \geq k_0$. Als Nächstes führen wir die Mengen

$$B_k^- := B \cap \{(u, v) : h(u, v) < k\}, \quad B_k^+ := B \cap \{(u, v) : h(u, v) > k\}, \\ B_k^0 := B \cap \{(u, v) : h(u, v) = k\}$$

ein. Dann gilt für $\eta^{(k)}$:

$$\eta^{(k)} = 0 \text{ f.ü. auf } B_k^-, \quad \eta^{(k)} = h - k \text{ f.ü. auf } B_k^+, \quad \eta^{(k)} = h - k = 0 \text{ auf } B_k^0.$$

Diese Betrachtung kann man auch nach einem bekannten Ergebnis von Morrey auf die Ableitungen von $\eta^{(k)}$ ausweiten und erhält dann

$$\eta_\alpha^{(k)} = 0 \text{ f.ü. auf } B_k^-, \quad \eta_\alpha^{(k)} = h_\alpha \text{ f.ü. auf } B_k^+, \quad \eta_\alpha^{(k)} = h_\alpha = 0 \text{ f.ü. auf } B_k^0, \quad \alpha = u, v.$$

Da die Ableitungen von $\eta^{(k)}$ bis auf B_k^+ fast überall verschwinden, ergibt sich unter Beachtung von (3.9) und der Setzung $\eta = \eta^{(k)}$ die Abschätzung

$$\int_B |\nabla \eta|^2 du \wedge dv = \int_{B_k^+} \eta_u^2 + \eta_v^2 du \wedge dv = \int_{B_k^+} h_u \eta_u + h_v \eta_v du \wedge dv \\ = \int_B h_u \eta_u + h_v \eta_v du \wedge dv \leq 0.$$

Demnach verschwinden η_u, η_v fast überall auf B . Weiter gilt auf Grund der Poincaré'schen Ungleichung, dass eine Konstante C existiert, welche

$$\|\eta - \eta|_{\partial B}\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla \eta\|_{L^2(B)}$$

erfüllt. Zusammen mit der vorherigen Abschätzung und dem Wissen, dass die Spur von η auf ∂B verschwindet, folgt

$$\|\eta - \eta|_{\partial B}\|_{L^2(B)} = \|\eta\|_{L^2(B)} \leq 0.$$

Folglich gilt $\eta = 0$ fast überall auf B , d.h. $h \leq k_0$ fast überall auf B . Somit erhalten wir das Stampacchia'sche Maximumprinzip:

$$\sup_B |x|^2 = \sup_B h \leq \sup_B k_0 = \sup_B \left(\sup_{\partial B} |x|^2 \right) = \sup_{\partial B} |x|^2.$$

Betrachten wir außerdem φ als Repräsentant von Φ analog zu x als Repräsentant von X , so gilt:

$$\sup_{\partial B} |x|^2 = \sup_{\partial B} |\varphi|^2 \leq M^2.$$

Somit haben wir den ersten Teil des Lemmas bewiesen.

Für den zweiten Teil nutzen wir aus, dass deswegen auch $\sup_B |x| \leq M$ gilt, d.h. wir können von x aus auch ein Stück in Richtung $-\varepsilon\psi$ gehen ohne die Kreisscheibe $\mathcal{D}_{\tilde{M}}$ zu verlassen. Auf diese Weise erhalten wir $x \pm \varepsilon\psi \in \mathcal{D}_{\tilde{M}}$ für alle $\psi \in H_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2)$ und alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Folglich liefert Lemma 3.2 sowohl eine untere als auch eine obere Schranke an $\delta E(x, \psi)$. Dies führt zur gewünschten Gleichheit. \square

Wir wollen als Nächstes den Begriff der schwachen Harmonizität klären und werten dazu das folgende Integral für eine harmonische Abbildung X mit Reichweite innerhalb von $\mathcal{K}_M(Q)$, $M < d(Q)$, mittels partieller Integration aus:

$$\begin{aligned}
& \int_B \sum_{j=1}^2 (x_u^j \varphi_u^j + x_v^j \varphi_v^j) - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \varphi^l \, du \wedge dv \\
&= - \int_B \sum_{j=1}^2 \Delta x^j \varphi^j + \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \varphi^l \, du \wedge dv \\
&= - \int_B \sum_{l=1}^2 \underbrace{\left[\Delta x^l + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \right]}_{=0 \text{ wegen (1.6)}} \varphi^l \, du \wedge dv = 0 \quad \forall \varphi \in \dot{H}_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Somit erfüllt x als Repräsentant von X die Gleichheit

$$\int_B \delta \tilde{e}(x, \varphi) \, du \wedge dv = 0 \quad \forall \varphi \in \dot{H}_2^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^2), \quad (3.10)$$

wobei

$$\delta \tilde{e}(x, \varphi) = \sum_{j=1}^2 (x_u^j \varphi_u^j + x_v^j \varphi_v^j) - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \varphi^l. \quad (3.11)$$

Damit können wir nun die folgende Definition einführen:

Definition 3.4

Eine Abbildung $X \in H_2^1(B, \Omega_R)$ heißt **schwach harmonisch**, falls für einen Punkt $Q \in \Omega_R$ das Bild $X(B)$ innerhalb der Normalreichweite von Q liegt und ihr Repräsentant x in Normalkoordinaten die Gleichung (3.10) um den Punkt Q erfüllt.

Durch Einsetzen von $\varphi^j = \sum_{k=1}^2 g_{jk} \psi^k$ in (3.11) ergibt sich zusammen mit (3.4) und (3.5):

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{e}(x, \varphi) &= \sum_{j=1}^2 (x_u^j \varphi_u^j + x_v^j \varphi_v^j) - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \varphi^l \\
&= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} (x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k) + \sum_{j,k=1}^2 \left(x_u^j \frac{\partial}{\partial u} g_{jk} + x_v^j \frac{\partial}{\partial v} g_{jk} \right) \psi^k \\
&\quad - \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{lm} \Gamma_{jk}^l (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \psi^m \\
&= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} (x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k) + \sum_{j,k,l=1}^2 (x_u^j g_{jk,l} x_u^l + x_v^j g_{jk,l} x_v^l) \psi^k \\
&\quad - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{lj}^k (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \psi^l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k) - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{ljk}(x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \psi^l \\
&\quad + \sum_{j,k,l=1}^2 \left[x_u^j (\Gamma_{jkl} + \Gamma_{kjl}) x_u^l + x_v^j (\Gamma_{jkl} + \Gamma_{kjl}) x_v^l \right] \psi^k \\
&= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k) - \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{ljk}(x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \psi^l \\
&\quad + \sum_{j,k,l=1}^2 \left[x_u^j (\Gamma_{jkl} + \Gamma_{ljk}) x_u^k + x_v^j (\Gamma_{jkl} + \Gamma_{ljk}) x_v^k \right] \psi^l \\
&= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x_u^j \psi_u^k + x_v^j \psi_v^k) + \sum_{j,k,l=1}^2 \Gamma_{jkl}(x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) \psi^l = \delta e(x, \psi).
\end{aligned}$$

Also ist eine Abbildung genau dann schwach harmonisch, wenn sie ein kritischer Punkt des Energiefunktional E ist. Damit sehen wir auch die Koordinateninvarianz in der Definition von schwacher Harmonizität ein: Falls nämlich $X(B)$ innerhalb der Normalreichweite eines anderen Punktes $\tilde{Q} \in \Omega_R$ liegt, dann repräsentiert \tilde{x} in Normalkoordinaten um \tilde{Q} , mutatis mutandis, die Gleichung (3.10).

Zum Abschluss dieses Kapitels fassen wir unsere bisherigen Überlegungen zusammen zum

Theorem 3.5

Sei das Bild $\Phi(B) \subset \mathcal{K}_M(Q)$ der Funktion $\Phi \in H_2^1(B, \Omega_R)$ für $M < \min \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}, d(Q) \right\}$ gegeben, wobei $\kappa \geq 0$ die obere Schranke an die Gauß'sche Krümmung darstelle. Dann existiert eine schwach harmonische Abbildung $X \in H_2^1(B, \Omega_R)$ mit $X(B) \subset \mathcal{K}_M(Q)$, so dass $X(u, v) = \Phi(u, v)$ auf ∂B gilt.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Lemmata 3.1 bis 3.3 für ein \tilde{M} , welches

$$M < \tilde{M} < \min \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}, d(Q) \right\}$$

erfüllt, sowie der oberen Erkenntnis zum Zusammenhang zwischen schwach harmonischen Abbildungen und Extremalen des Energiefunktional E . \square

Bemerkung 1:

In dieser Arbeit haben wir nur den Weg zu einer schwachen Lösung aufgezeigt. Allerdings ist es auch möglich eine C^2 -Regularität in B für die Lösung X im Sinne von

$$X \in C^2(B, \Omega_R) \cap C^0(\bar{B}, \Omega_R)$$

zu erreichen, falls die Randfunktion Φ zusätzlich mindestens eine C^1 -Regularität aufweist und so eine harmonische Lösung zu erhalten. Dies haben Hildebrandt, Kaul und Widman in [6] mittels Theorem 1-4 für Dimensionen $n \geq 3$ gezeigt. Für unseren zweidimensionalen Fall verweisen wir dafür auf die Arbeit [13] von Morrey Jr, wobei man dafür noch eine Abänderung mittels Eigenschaften der Christoffel-Symbole und des Gauß'schen Lemmas von (2.28) durchführen sowie die Abschätzung (2.29) hinzuziehen muss.

4 Maximumprinzip von Jäger und Kaul

In diesem Kapitel werden wir ausgehend von der Existenz einer harmonischen Abbildung eine Theorie zur Eindeutigkeit und Stabilität von harmonischen Abbildungen darstellen. Dazu werden wir auf unsere Überlegungen aus Kapitel 2 zurückgreifen und Abschätzungen für die Hesse-Matrix einer neuen Hilfsfunktion, welche aus der bereits bekannten Funktion s_κ hervorgeht, herleiten. Mit Hilfe dieser wird es uns schließlich möglich sein, ein Maximumprinzip für harmonische Funktionen von W.Jäger und H. Kaul anzugeben. Wir werden uns daher in diesem Kapitel auf ihre Arbeit [8] stützen. Wir beginnen unsere Ausführungen indem wir die C^2 -Abbildungen $\psi_1, \psi_2 : B \rightarrow [0, \frac{1}{\kappa})$ sowie $\phi : [0, \frac{1}{\kappa}) \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und für diese die Funktion

$$\Sigma := \sum_{k=1}^2 \phi \circ \psi_k.$$

Zudem bezeichnen wir mit \mathcal{L} den auf B erklärten selbstadjungierten elliptischen Differentialoperator

$$\mathcal{L}(f) := \nabla \cdot (e^{-\Sigma} \nabla f) \quad \forall f \in C^2(B, \mathbb{R}). \quad (4.1)$$

Damit gelingt es uns die folgenden Lemmata zu beweisen:

Lemma 4.1

Es gelte $\phi'^2 \leq \phi''$. Dann gilt für jedes $\psi \in C^2(B, \mathbb{R}_+)$, welches $\nabla \psi(u, v) = 0$ auf der Nullmenge $\psi^{-1}\{0\} := \{(u, v) \in B : \psi(u, v) = 0\}$ von ψ erfüllt, die Ungleichung

$$\mathcal{L}(e^{\Sigma} \psi) \geq \begin{cases} \Delta \psi & \text{auf } \psi^{-1}\{0\} \\ \Delta \psi - \frac{\|\nabla \psi\|^2}{2\psi} + \psi \sum_{k=1}^2 (\phi' \circ \psi_k) \Delta \psi_k & \text{auf } B \setminus \psi^{-1}\{0\} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Beweis: Wir berechnen zunächst allgemein

$$\mathcal{L}(e^{\Sigma} \psi) = \nabla \cdot (e^{-\Sigma} \nabla (e^{\Sigma} \psi)) = \nabla \cdot (\nabla \psi + \psi \nabla \Sigma) = \Delta \psi + \psi \Delta \Sigma + \langle \nabla \psi, \nabla \Sigma \rangle.$$

Betrachten wir die Gleichung auf den Mengen aus (4.2), so fällt uns bzgl. $\psi^{-1}\{0\}$ auf, dass

$$\mathcal{L}(e^{\Sigma} \psi) = \Delta \psi$$

gilt, da dort $\psi = 0$ und $\nabla\psi = 0$ nach den Voraussetzungen erfüllt werden. Auf der Menge $B \setminus \psi^{-1}\{0\}$ erhalten wir hingegen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^\Sigma\psi) &= \Delta\psi + \psi \sum_{k=1}^2 \Delta(\phi \circ \psi_k) + \sum_{k=1}^2 \langle \nabla\psi, \nabla(\phi \circ \psi_k) \rangle \\ &= \Delta\psi + \psi \sum_{k=1}^2 \left[(\phi'' \circ \psi_k) \|\nabla\psi\|^2 + (\phi' \circ \psi_k) \Delta\psi_k \right] + \sum_{k=1}^2 (\phi' \circ \psi_k) \langle \nabla\psi, \nabla\psi_k \rangle.\end{aligned}$$

Zudem können wir die Young'sche Ungleichung in Kombination mit der Ungleichung von Cauchy und Schwarz folgendermaßen anwenden:

$$\begin{aligned}\|\phi'(\psi_k) \langle \nabla\psi, \nabla\psi_k \rangle\| &\leq \psi \|\phi'(\psi_k)\|^2 \|\nabla\psi_k\|^2 + \frac{\|\langle \nabla\psi, \nabla\psi_k \rangle\|^2}{4\psi \|\nabla\psi_k\|^2} \\ &\leq \psi (\phi'(\psi_k))^2 \|\nabla\psi_k\|^2 + \frac{\|\nabla\psi\|^2}{4\psi},\end{aligned}$$

woraus sich

$$\phi'(\psi_k) \langle \nabla\psi, \nabla\psi_k \rangle \geq -\psi (\phi'(\psi_k))^2 \|\nabla\psi_k\|^2 - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{4\psi}, \quad k = 1, 2,$$

ergibt. Indem wir diese Abschätzung in unsere Gleichung für den elliptischen Differentialoperator einsetzen, folgt unter der Voraussetzung $\phi'^2 \leq \phi''$ die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^\Sigma\psi) &\geq \Delta\psi + \psi \sum_{k=1}^2 \phi'(\psi_k) \Delta\psi_k + \sum_{k=1}^2 \left\{ \psi \left[\phi''(\psi_k) - (\phi'(\psi_k))^2 \right] \|\nabla\psi_k\|^2 - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{4\psi} \right\} \\ &\geq \Delta\psi + \psi \sum_{k=1}^2 \phi'(\psi_k) \Delta\psi_k - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi}.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2

Sei J ein Jacobi-Feld entlang der Geodätischen $Y : [0, \rho] \rightarrow \Omega_R$ mit Einheitsgeschwindigkeit, so dass $J \in J_Y^\perp$. Zudem sei $0 < \rho < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ erfüllt. Dann gilt die Ungleichung

$$\left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle(\rho) - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle(0) \geq \frac{\dot{s}_\kappa(\rho)}{s_\kappa(\rho)} \left(\|J(0)\|^2 + \|J(\rho)\|^2 \right) - \frac{2}{s_\kappa(\rho)} \|J(0)\| \|J(\rho)\|.$$

Beweis: Wir erklären zunächst mit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Randwertproblems

$$\ddot{s}(t) + \kappa s(t) = 0, \quad s(0) = \|J(0)\|, \quad s(\rho) = \|J(\rho)\|$$

und definieren uns analog zum Beweis von Lemma 2.4 eine Hilfsfunktion

$$Z(t) := \frac{d}{dt} \|J(t)\| s(t) - \|J(t)\| \dot{s}(t), \quad t \in [0, \rho],$$

die auf jedem Intervall $(\alpha, \beta) \subset (0, \rho)$, welches keine Nullstellen von J aufweist, differenzierbar ist. Für diese Hilfsfunktion entnehmen wir aus dem angegebenen Beweis die Eigenschaft, dass $\dot{Z}(t) \geq 0$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$ gilt, d.h. Z ist auf dem Intervall (α, β) schwach monoton wachsend und erfüllt somit $Z(\alpha + 0) \leq Z(\beta - 0)$.

Die Funktion s können wir auch explizit darstellen als

$$s(t) = \frac{\|J(0)\|s_\kappa(\rho - t) + \|J(\rho)\|s_\kappa(t)}{s_\kappa(\rho)},$$

woraus wir unmittelbar die Nichtnegativität von s auf dem Intervall $[0, \rho]$ erhalten. Weiter ergeben sich mittels Differentiation bei 0 und ρ die Ableitungen

$$\dot{s}(0) = \frac{-\|J(0)\|\dot{s}_\kappa(\rho) + \|J(\rho)\|}{s_\kappa(\rho)}, \quad \dot{s}(\rho) = \frac{-\|J(0)\| + \|J(\rho)\|\dot{s}_\kappa(\rho)}{s_\kappa(\rho)}.$$

Wir sehen sofort ein, dass für $J = 0$ die Aussage trivialerweise erfüllt wird. Daher gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass $J \neq 0$ gilt. Also besitzt J auch nur endlich viele Nullstellen

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \rho.$$

Weiter geht aus der Taylor-Entwicklung

$$\frac{d}{dt}\|J\|(t_i \pm 0) = \pm \left\| \frac{\nabla}{dt} J(t_i) \right\|, \quad i = 1, \dots, k,$$

bzgl. Z die Abschätzung

$$Z(t_i + 0) - Z(t_i - 0) = 2s(t_i) \left\| \frac{\nabla}{dt} J(t_i) \right\| \geq 0$$

hervor. Also erhalten wir zusammen mit unseren vorherigen Überlegungen zu Z die Ungleichungskette

$$Z(0 + 0) \leq Z(t_1 - 0) \leq Z(t_1 + 0) \leq \dots \leq Z(t_k + 0) \leq Z(\rho - 0).$$

Schließlich folgt daraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq Z(\rho - 0) - Z(0 + 0) \\ &= s(\rho) \frac{d}{dt}\|J\|(\rho - 0) - \dot{s}(\rho)\|J(\rho)\| - s(0) \frac{d}{dt}\|J\|(0 + 0) - \dot{s}(0)\|J(0)\| \\ &= \|J(\rho)\| \frac{d}{dt}\|J\|(\rho - 0) - \frac{\dot{s}_\kappa(\rho)\|J(\rho)\| - \|J(0)\|}{s_\kappa(\rho)} \|J(\rho)\| - \|J(0)\| \frac{d}{dt}\|J\|(0 + 0) \\ &\quad + \frac{\|J(\rho)\| - \dot{s}_\kappa(\rho)\|J(0)\|}{s_\kappa(\rho)} \|J(0)\| \\ &= \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle(\rho) - \left\langle J, \frac{\nabla}{dt} J \right\rangle(0) - \frac{\dot{s}_\kappa(\rho)}{s_\kappa(\rho)} \left(\|J(0)\|^2 + \|J(\rho)\|^2 \right) - \frac{2}{s_\kappa(\rho)} \|J(0)\| \|J(\rho)\|. \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun die Funktion s_κ aus (2.8) mit dem Anfangswertproblem (2.7) dafür nutzen, die Hilfsfunktion

$$q_\kappa(t) := \int_0^t s_\kappa(\tau) d\tau \tag{4.3}$$

einzuführen.

Daraus ergibt sich unter Beachtung von der Definition von s_κ die Darstellung

$$q_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} (1 - \cos(t\sqrt{\kappa})), & \kappa > 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & \kappa = 0 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Ferner erklären wir die Riemann'sche Metrik

$$\langle u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2 \rangle := \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle, \quad u_i, v_i \in T_{y_i}\Omega_R, \quad y_i \in \Omega_R, \quad i = 1, 2.$$

Für den weiteren Verlauf dieses Kapitels wollen wir uns die Eigenschaft der Abstandsfunktion dist zunutze machen, dass $\text{dist} \in C^2$ auf $U_1 \times U_2$ außerhalb der Diagonalen $\{(x, x) : x \in \Omega_R\} \subset \Omega_R \times \Omega_R$ für $U_1, U_2 \subset \Omega_R$ gilt, falls U_1, U_2 offene Mengen sind, welche die folgende Bedingung erfüllen:

Jedes Paar $y_1 \in U_1, y_2 \in U_2$ kann durch genau einen minimierenden geodätischen Bogen auf Ω_R verbunden werden. (4.5)

Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Abbildung mit $\phi'(0) = 0$, wie zum Beispiel $\phi = q_\kappa$, dann ist die Komposition $\phi \circ \text{dist} : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ nach [8] resp. [5](§ 5.1) ebenfalls aus C^2 . Wir führen daher für diese Komposition mit q_κ die Hilfsfunktion

$$Q_\kappa := q_\kappa \circ \text{dist} : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ein. Als Nächstes wollen wir die Hesse-Matrix von Q_κ abschätzen und betrachten zu diesem Zweck das

Lemma 4.3

Seien $U_1, U_2 \subset \Omega_R$ offen und erfüllen die Bedingung (4.5). Zudem gelte

$$\text{dist}(y_1, y_2) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \forall (y_1, y_2) \in U_1 \times U_2.$$

Dann gelten die folgenden Abschätzungen für die Hesse-Matrix von Q_κ :

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] \geq \begin{cases} |\nu|^2, & y_1 = y_2 \\ \frac{\langle \nabla Q_\kappa(y), \nu \rangle^2}{2Q_\kappa(y)} - \kappa Q_\kappa(y) |\nu|^2, & y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

für alle $y = (y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$ und für alle $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2 \in T_{y_1}\Omega_R \oplus T_{y_2}\Omega_R \cong T_y(\Omega_R \times \Omega_R)$. Insbesondere gilt für die Spezialfälle $\nu = 0 \oplus \mu$ und $\nu = \mu \oplus 0$ die Ungleichung

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] \geq (1 - \kappa Q_\kappa(y)) |\mu|^2.$$

Beweis: Wir beginnen diesen Beweis indem wir $\rho := \text{dist}(y_1, y_2)$ setzen. Falls $\rho > 0$, d.h. $y_1 \neq y_2$, gilt, erklären wir mit $e_i(y) \in T_{y_i}\Omega_R$, $i = 1, 2$, den äußeren Einheitsstangentenvektor der eindeutigen minimierenden Geodätischen γ , welche y_1 und y_2 miteinander verbindet. Dann teilen wir die Tangentenvektoren ν_i , $i = 1, 2$, folgendermaßen in einen Tangential- und einen Normalanteil auf:

$$\nu_i^T := \langle \nu_i, e_i(y) \rangle e_i(y), \quad \nu_i^\perp := \nu_i - \nu_i^T.$$

Wir erhalten somit für den Gradienten der Abstandsfunktion die Darstellung

$$\nabla \text{dist}(y) = e_1(y) \oplus e_2(y) \text{ für } \rho > 0 \quad (4.6)$$

und wir folgern daraus unter Beachtung der Kettenregel für den Gradienten und die Hesse-Matrix von Q_κ die Gleichungen

$$\nabla Q_\kappa = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \\ \dot{q}_\kappa(\rho) \cdot \nabla \text{dist}, & \rho > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \\ s_\kappa(\rho)(e_1(y) \oplus e_2(y)), & \rho > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] &= \langle D_\nu \nabla Q_\kappa, \nu \rangle = \langle D_\nu (s_\kappa \circ \text{dist}) \nabla \text{dist} + (s_\kappa \circ \text{dist}) D_\nu \nabla \text{dist}, \nu \rangle \\ &= D_\nu (s_\kappa \circ \text{dist}) \langle \nabla \text{dist}, \nu \rangle + s_\kappa(\rho) \nabla^2 \text{dist}[\nu, \nu]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Hierbei stellt D_ν die kovariante Ableitung bzgl. des Tangentialvektors ν dar. Da die kovariante Ableitung eines Skalarfeldes identisch mit der partiellen Ableitung des Skalarfeldes ist, gilt

$$D_\nu (s_\kappa \circ \text{dist}) = \dot{s}_\kappa(\rho) \sum_{\alpha=1}^2 (\nabla \text{dist})^\alpha \nu^\alpha = \dot{s}_\kappa(\rho) \langle \nabla \text{dist}, \nu \rangle.$$

Wir erhalten also erstmal für (4.8):

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] = \dot{s}_\kappa(\rho) \langle \nabla \text{dist}(y), \nu \rangle^2 + s_\kappa(\rho) \nabla^2 \text{dist}[\nu, \nu], \quad \rho > 0.$$

Weiter folgt für $\rho = 0$ mit $q_\kappa(t) = \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, also mit $Q_\kappa = \frac{1}{2} \text{dist}^2(y_1, y_1) + \dots$, dass

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \text{dist}^2(c(t), y_1) \Big|_{t=0}$$

für einen beliebigen glatten Weg c mit $c(0) = y_1$ und $\dot{c}(0) = \nu$ gilt. Setzen wir nun für c die Geodätische γ ein, so folgt $\text{dist}(\gamma(t), y_1) = |t\nu|$ für t in der Nähe von Null, da γ lokal abstandsminimierend ist. Somit erhalten wir

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \text{dist}^2(\gamma(t), y_1) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} |t\nu|^2 = \frac{d}{dt} (t|\nu|^2) = |\nu|^2, \quad \rho = 0.$$

Zusammengefasst gilt also

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] = \begin{cases} |\nu|^2, & \rho = 0 \\ \dot{s}_\kappa(\rho) \langle \nabla \text{dist}(y), \nu \rangle^2 + s_\kappa(\rho) \nabla^2 \text{dist}[\nu, \nu], & \rho > 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Als Nächstes untersuchen wir die Gleichung für den Fall $\rho > 0$ genauer oder konkret gesagt, wollen wir uns eine Darstellung für $\nabla^2 \text{dist}[\nu, \nu]$ herleiten indem wir die Abstandsfunktion mittels Jacobi-Felder ausdrücken. Hierzu erklären wir für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ den eindeutig bestimmten geodätischen Bogen $\gamma_\varepsilon : [0, \rho] \rightarrow \Omega_R$, welcher die Punkte

$$\gamma_\varepsilon(0) = \exp_{y_1}(\varepsilon\nu_1^\perp), \quad \gamma_\varepsilon(\rho) = \exp_{y_2}(\varepsilon\nu_2^\perp)$$

miteinander verbindet. Mit $\Psi(t, \varepsilon) := \gamma_\varepsilon(t)$, $t \in [0, \rho]$, bezeichnen wir dann die Familie von Variationen des geodätischen Bogens $\gamma = \gamma_0$ und erhalten dadurch das Jacobi-Feld

$$J(t) := \frac{\partial \Psi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad \forall t \in [0, \rho]$$

entlang γ . Für dieses Jacobi-Feld sehen wir, aufgrund der Konstruktion, die Gleichungen

$$J(0) = \nu_1^\perp, \quad J(\rho) = \nu_2^\perp$$

ein und folgern aus der Darstellung der Tangentialkomponente $J^T(t) = (at + b)\dot{\gamma}(t)$ für Jacobi-Felder entlang der Geodätischen γ , dass $J^T = 0$ gelten muss. Also stellt J sogar ein Jacobi-Normalfeld dar.

Wir wollen nun die Hessesche der Abstandsfunktion mittels Methoden aus dem Buch [5] von Gromoll, Klingenberg und Meyer darstellen, indem wir

$$\nabla^2 \text{dist} [\nu, \nu] = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} L(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

berechnen, wobei $L(\varepsilon)$ als die Länge von γ_ε durch

$$L(\varepsilon) = \int_0^\rho \left\| \frac{\partial \Psi(t, \varepsilon)}{\partial t} \right\| dt$$

gegeben ist. Aufgrund der Definition von ρ besitzt die Geodätische γ Einheitsgeschwindigkeit. Demnach können wir den folgenden Satz von Synge (§4.1) anwenden:

Sei $\Psi : [0, \rho] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Omega_R$ eine Variation der Geodätischen $\gamma : [0, \rho] \rightarrow \Omega_R$ mit Einheitsgeschwindigkeit, so dass für $\Psi = \Psi(t, \varepsilon)$ die Gleichungen $\gamma(t) = \Psi(t, 0)$ und $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ gelten. Seien weiter durch Z und Z^\perp folgende Vektorfelder entlang der Geodätischen γ erklärt:

$$Z(t) := \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}, \quad Z^\perp(t) := Z(t) - \langle Z(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t).$$

Dann gilt für die zweite Ableitung des Längenfunctionals die Relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} L(0) &= \int_0^\rho \left(\left\| \frac{\nabla}{dt} Z^\perp(t) \right\|^2 - \langle R(Z(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), Z(t) \rangle \right) dt \\ &\quad + \left\langle \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=\rho}. \end{aligned}$$

Beachten wir zusätzlich, dass

$$\frac{\nabla}{d\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \gamma_\varepsilon(\rho) = 0 = \frac{\nabla}{d\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \gamma_\varepsilon(0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = 0 = \frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}$$

gilt, da wir nur an den festen Anfangs- und Endpunkt der Geodätischenschar differenzieren, so können wir den Satz von Synge mit $Z = J$ anwenden und erhalten

$$\nabla^2 \text{dist} [\nu, \nu] = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} L(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^\rho \left(\left\| \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\|^2 - \langle R(J(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), J(t) \rangle \right) dt.$$

Wenn wir uns an die Jacobi-Gleichung (2.3) erinnern, können wir diese Gleichung umschreiben zu

$$\begin{aligned} \nabla^2 \text{dist} [\nu, \nu] &= \int_0^\rho \left(\left\| \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\|^2 + \left\langle \frac{\nabla^2}{dt^2} J(t), J(t) \right\rangle \right) dt = \int_0^\rho \frac{d}{dt} \left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle dt \\ &= \left\langle J(t), \frac{\nabla}{dt} J(t) \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=\rho} \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Lemma 4.2 folgt

$$\nabla^2 \text{dist} [\nu, \nu] \geq \frac{\dot{s}_\kappa(\rho)}{s_\kappa(\rho)} \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|^2 - \frac{2}{s_\kappa(\rho)} \prod_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|.$$

Setzen wir diese Ungleichung wieder in (4.9) für $\rho > 0$ ein und beachten (4.6), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_\kappa [\nu, \nu] &\geq \dot{s}_\kappa(\rho) \left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 + \dot{s}_\kappa(\rho) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|^2 - 2 \prod_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\| \\ &\geq \dot{s}_\kappa(\rho) \left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 - (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|^2 \\ &= \dot{s}_\kappa(\rho) \left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 - (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i\|^2 + (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^T\|^2. \end{aligned}$$

Des Weiteren benötigen wir an dieser Stelle noch die folgende Ungleichungskette

$$\left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^2 \|\langle e_i(y), \nu_i \rangle e_i(y)\| \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^2 \|\nu_i^T\| \right)^2 \leq 2 \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^T\|^2,$$

welche dazu führt, dass

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_\kappa [\nu, \nu] &\geq \left(\dot{s}_\kappa(\rho) + \frac{1}{2}(1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \right) \left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 - (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i\|^2 \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \frac{1}{2} (\dot{s}_\kappa(\rho) + 1) \left\langle s_\kappa^{-1}(\rho) \nabla Q_\kappa(y), \nu \right\rangle^2 - (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\dot{s}_\kappa(\rho) + 1) s_\kappa^{-2}(\rho) \langle \nabla Q_\kappa(y), \nu \rangle^2 - (1 - \dot{s}_\kappa(\rho)) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i\|^2 \\ &= \frac{\langle \nabla Q_\kappa(y), \nu \rangle^2}{2Q_\kappa(y)} - \kappa Q_\kappa(y) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i\|^2. \end{aligned}$$

Um bei der eben getätigten Rechnung die letzte Gleichheit einzusehen, berechnen wir

$$\kappa Q_\kappa(y) = \kappa q_\kappa(\rho) = \kappa \int_0^\rho s_\kappa(t) dt \stackrel{(2.7)}{=} - \int_0^\rho \dot{s}_\kappa(t) dt = [\dot{s}_\kappa(t)]_{t=0}^{t=\rho} = 1 - \dot{s}_\kappa(\rho)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1 + \dot{s}_\kappa(\rho)}{s_\kappa^2(\rho)} &= \begin{cases} \kappa \frac{1 + \cos(\rho\sqrt{\kappa})}{\sin^2(\rho\sqrt{\kappa})}, & \kappa > 0 \\ \frac{2}{\rho^2}, & \kappa = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\kappa}{1 - \cos(\rho\sqrt{\kappa})} \frac{1 - \cos^2(\rho\sqrt{\kappa})}{\sin^2(\rho\sqrt{\kappa})}, & \kappa > 0 \\ \frac{2}{\rho^2}, & \kappa = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\kappa}{1 - \cos(\rho\sqrt{\kappa})}, & \kappa > 0 \\ \frac{2}{\rho^2}, & \kappa = 0 \end{cases} = \frac{1}{q_\kappa(\rho)} = \frac{1}{Q_\kappa(y)}, \end{aligned}$$

wobei beide Gleichungen offensichtlich für $\kappa > 0$ und $\kappa = 0$ gelten. Somit haben wir die erste Ungleichung bewiesen. Für die zweite Ungleichung gehen wir nochmal auf die Abschätzung

$$\nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] \geq \dot{s}_\kappa(\rho) \left(\sum_{i=1}^2 \langle e_i(y), \nu_i \rangle \right)^2 + \dot{s}_\kappa(\rho) \sum_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|^2 - 2 \prod_{i=1}^2 \|\nu_i^\perp\|$$

ein und setzen $\nu_1 = 0$ sowie $\nu_2 = \mu$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu] &\geq \dot{s}_\kappa(\rho) \langle e_2(y), \mu \rangle^2 + \dot{s}_\kappa(\rho) \|\mu^\perp\|^2 = \dot{s}_\kappa(\rho) \left(\|\mu^\top\|^2 + \|\mu^\perp\|^2 \right) = \dot{s}_\kappa(\rho) \|\mu\|^2 \\ &= (1 - \kappa Q_\kappa(y)) \|\mu\|^2 \end{aligned}$$

für $\rho > 0$. Dass diese Ungleichung auch für den Fall $\rho = 0$ zutrifft, kann mittels (4.9) geprüft werden, da wir auf diese Weise die folgende einfache Gleichung erhalten:

$$(1 - \kappa Q_\kappa(y_1, y_1)) \|\mu\|^2 = (1 - \kappa q_\kappa(0)) \|\mu\|^2 = \|\mu\|^2 = \nabla^2 Q_\kappa[\nu, \nu].$$

□

Unter der Annahme, dass für zwei harmonische Funktionen $X_1, X_2 : B \rightarrow \Omega_R$ ihre Bilder $X_1(B), X_2(B)$ innerhalb des Gebietes $\mathcal{K}_M(a) \subset \Omega_R$ für $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ liegen, erklären wir die Abbildungen $\chi, \chi_1, \chi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\chi(u, v) := q_\kappa \circ \text{dist}(X_1(u, v), X_2(u, v)), \quad (4.10)$$

$$\chi_i(u, v) := q_\kappa \circ \text{dist}(a, X_i(u, v)), \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Da wir anfangs forderten, dass $\mathcal{K}_M(P)$ für alle $P \in \Omega_R$ in Normalreichweite von all seinen Punkten ist, erfüllt $\mathcal{K}_M(a)$ die Schnittortbedingung und χ ist demnach C^2 -differenzierbar. Zudem sind die Funktionen χ_1, χ_2 ebenfalls C^2 -differenzierbar, falls jeder Punkt aus $\mathcal{K}_M(a)$ durch genau einen minimierenden geodätischen Bogen verbunden werden kann (vgl. Bedingung (4.5)). Des Weiteren führen wir noch die Menge

$$G := \{(u, v) \in B : X_1(u, v) = X_2(u, v)\} \quad (4.12)$$

ein, auf welcher die beiden harmonischen Funktionen übereinstimmen.

Als Nächstes wollen wir die Abbildungen $\Delta\chi, \Delta\chi_i$, $i = 1, 2$, nach unten abschätzen. Um dies zu erreichen beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.4

Seien $\chi, \chi_1, \chi_2 \in C^2(B, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\Delta\chi \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 & \text{auf } G \\ \frac{\|\nabla\chi\|^2}{2\chi} - \kappa\chi \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 & \text{auf } B \setminus G \end{cases}, \quad (4.13)$$

$$\nabla\chi = 0 \text{ auf } G \quad (4.14)$$

und

$$\Delta\chi_i \geq (1 - \kappa\chi_i) \|dX_i\|^2, \quad i = 1, 2. \quad (4.15)$$

Hierbei verwenden wir die Notationen

$$\|dX_i\|^2 := \left\| \frac{\partial X_i}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial X_i}{\partial v} \right\|^2, \quad i = 1, 2,$$

und

$$\Delta X := \frac{\nabla}{\partial u} X_u + \frac{\nabla}{\partial v} X_v, \quad X \in \Omega_R.$$

Beweis: Wir legen zunächst die vereinfachende Notationen

$$\tilde{X}(u, v) := (X_1(u, v), X_2(u, v)), \quad \tilde{X}_i(u, v) := (u, X_i(u, v)), \quad i = 1, 2,$$

fest und erhalten entsprechend für (4.10) bzw. (4.11) die Darstellung

$$\chi = Q_\kappa \circ \tilde{X}, \quad \chi_i = Q_\kappa \circ \tilde{X}_i, \quad i = 1, 2.$$

Für χ berechnen wir mit Hilfe der Kettenregel und der Setzung $w := (w^1, w^2) := (u, v)$:

$$\begin{aligned} \|\nabla\chi(u, v)\|^2 &= \|\nabla\chi(w)\|^2 = \left\| \nabla(Q_\kappa \circ \tilde{X}(w)) \right\|^2 = \left\langle \nabla(Q_\kappa \circ \tilde{X}(w)), \nabla(Q_\kappa \circ \tilde{X}(w)) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \delta_{\alpha\beta} \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(w)), \frac{\partial \tilde{X}(w)}{\partial w^\alpha} \right\rangle \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}), \frac{\partial \tilde{X}(w)}{\partial w^\beta} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_u(u, v) \right\rangle^2 + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_v(u, v) \right\rangle^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

und für die χ_i , $i = 1, 2$, erhalten wir analog

$$\|\nabla\chi_i(u, v)\|^2 = \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}_i(u, v)), (\tilde{X}_i)_u(u, v) \right\rangle^2 + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}_i(u, v)), (\tilde{X}_i)_v(u, v) \right\rangle^2.$$

Weiter folgt aus der Konstruktion von $\tilde{X}, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 : B \rightarrow \Omega_R \times \Omega_R$ und da wir mit endlichdimensionalen Räumen arbeiten, dass auch $\tilde{X}, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ harmonisch sind.

Wir werden als Nächstes das Gleichungssystem (1.6) in eine alternative Darstellung überführen. Dazu tätigen wir die Rechnung

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta x^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i (x_u^j x_u^k + x_v^j x_v^k) = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial w^\alpha} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial w^\beta}}_{=: y_\beta^i} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial w^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial w^\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial w^\alpha} y_\beta^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial w^\alpha} y_\beta^k \right) \stackrel{(2.1),(2.2)}{=} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\nabla}{\partial w^\alpha} y_\beta \right)^i \\
&= \left(\frac{\nabla}{\partial u} X_u + \frac{\nabla}{\partial v} X_v \right)^i = (\Delta X)^i, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Harmonizität von \tilde{X} und der eben hergeleiteten Darstellung für die Harmonizitätsgleichung ergibt sich für χ mittels der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\Delta \chi(u, v) &= \Delta(Q_\kappa \circ \tilde{X}(u, v)) = \frac{\partial}{\partial u} (Q_\kappa \circ \tilde{X}(u, v))_u + \frac{\partial}{\partial v} (Q_\kappa \circ \tilde{X}(u, v))_v \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_u(u, v) \rangle + \frac{\partial}{\partial v} \langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_v(u, v) \rangle \\
&= \left\langle \frac{\nabla}{\partial u} \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_u(u, v) \right\rangle + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \frac{\nabla}{\partial u} \tilde{X}_u(u, v) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\nabla}{\partial v} \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_v(u, v) \right\rangle + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \frac{\nabla}{\partial v} \tilde{X}_v(u, v) \right\rangle \\
&= \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_u(u, v)] + \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_v(u, v), \tilde{X}_v(u, v)] \\
&\quad + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \frac{\nabla}{\partial u} \tilde{X}_u(u, v) + \frac{\nabla}{\partial v} \tilde{X}_v(u, v) \right\rangle \\
&= \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_u(u, v)] + \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_v(u, v), \tilde{X}_v(u, v)] \\
&\quad + \left\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \Delta \tilde{X}(u, v) \right\rangle \\
&= \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_u(u, v)] + \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_v(u, v), \tilde{X}_v(u, v)].
\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir bzgl. χ_i , $i = 1, 2$, die Gleichungen

$$\Delta \chi_i(u, v) = \nabla^2 Q_\kappa[(\tilde{X}_i)_u(u, v), (\tilde{X}_i)_u(u, v)] + \nabla^2 Q_\kappa[(\tilde{X}_i)_v(u, v), (\tilde{X}_i)_v(u, v)].$$

Unter Verwendung von Lemma 4.3 folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\Delta \chi(u, v) &= \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_u(u, v)] + \nabla^2 Q_\kappa[\tilde{X}_v(u, v), \tilde{X}_v(u, v)] \\
&\geq \|\tilde{X}_u(u, v)\|^2 + \|\tilde{X}_v(u, v)\|^2 = \|\mathrm{d}\tilde{X}(u, v)\|^2 \quad \forall (u, v) \in G
\end{aligned}$$

und wenn wir zusätzlich zum Lemma die Gleichung (4.16) hinzuziehen

$$\begin{aligned} \Delta\chi(u, v) &\geq \frac{\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_u(u, v) \rangle^2}{2Q_\kappa(\tilde{X}(u, v))} - \kappa Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)) \|\tilde{X}_u(u, v)\|^2 \\ &\quad + \frac{\langle \nabla Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)), \tilde{X}_v(u, v) \rangle^2}{2Q_\kappa(\tilde{X}(u, v))} - \kappa Q_\kappa(\tilde{X}(u, v)) \|\tilde{X}_v(u, v)\|^2 \\ &= \frac{\|\nabla\chi(u, v)\|^2}{2\chi} - \kappa\chi(u, v) \|\mathrm{d}\tilde{X}(u, v)\|^2 \quad \forall (u, v) \in B \setminus G. \end{aligned}$$

Weil $\frac{\partial}{\partial u}a = 0 = \frac{\partial}{\partial v}a$ gilt, können wir auch die zweite Ungleichung aus Lemma 4.3 auf χ_i anwenden:

$$\Delta\chi_i(u, v) \geq (1 - \kappa\chi_i(u, v)) \|\mathrm{d}\tilde{X}_i(u, v)\|^2 = (1 - \kappa\chi_i(u, v)) \|\mathrm{d}\tilde{X}_i(u, v)\|^2, \quad i = 1, 2.$$

Damit haben wir (4.13) und (4.15) bewiesen. Wenn wir (4.16) nochmal auf G betrachten und dafür die Gleichung (4.7) hinzuziehen, folgt schließlich auch (4.14), da dann $\nabla Q_\kappa(\tilde{X})$ auf G verschwindet. \square

Wir kommen nun zur Hauptaussage dieses Kapitels, welche das namensgebende Maximumprinzip von Jäger und Kaul darstellt, in Form von

Theorem 4.5

Es seien die stetigen Abbildungen $X_1, X_2 : \bar{B} \rightarrow \Omega_R$ gegeben und zudem harmonisch in B . Weiter existiere die Umgebung $\mathcal{K}_M(a) \subset \Omega_R$, welche in Normalreichweite von all ihren Punkten sei (bzw. die Schnittortbedingung erfülle) sowie

$$X_1(\bar{B}), X_2(\bar{B}) \subset \mathcal{K}_M(a), \quad M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}},$$

gewährleistet. Dann erfüllt die Funktion $\Theta : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Theta(u, v) := \frac{q_\kappa(\mathrm{dist}(X_1(u, v), X_2(u, v)))}{\cos(\sqrt{\kappa} \mathrm{dist}(a, X_1(u, v))) \cdot \cos(\sqrt{\kappa} \mathrm{dist}(a, X_2(u, v)))} \quad (4.17)$$

das Maximumprinzip

$$\sup_B \Theta \leq \sup_{\partial B} \Theta. \quad (4.18)$$

Insbesondere folgt aus $X_1|_{\partial B} = X_2|_{\partial B}$ die Gleichheit

$$X_1 = X_2.$$

Beweis: Wir beginnen diesen Beweis indem wir die Funktion $\phi : \left[0, \frac{1}{\kappa}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) := -\ln(1 - \kappa t)$$

erklären und diese Funktion in der Definition (4.1) des selbstadjungierten elliptischen Differentialoperators \mathcal{L} zusammen mit $\psi_i = \chi_i$ einsetzen. Dadurch erhalten wir die

Darstellungen

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{\kappa}{1 - \kappa t}, \quad \phi''(t) = \frac{\kappa^2}{(1 - \kappa t)^2} = (\phi'(t))^2, \\
\Sigma(u, v) &= \phi(\chi_1(u, v)) + \phi(\chi_2(u, v)) = -\ln[(1 - \kappa\chi_1(u, v))(1 - \kappa\chi_2(u, v))] \\
&= -\ln \left[1 - \kappa(\chi_1(u, v) + \chi_2(u, v)) + \kappa^2\chi_1(u, v)\chi_2(u, v) \right] \\
&= -\ln \left[1 - \kappa \left(q_\kappa \circ \text{dist}(a, X_1(u, v)) + q_\kappa \circ \text{dist}(a, X_2(u, v)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \kappa^2 \left(q_\kappa \circ \text{dist}(a, X_1(u, v)) \right) \left(q_\kappa \circ \text{dist}(a, X_2(u, v)) \right) \right] \\
&= -\ln \left[1 - \frac{\kappa}{\kappa} \left(1 - \cos(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_1(u, v))) + 1 - \cos(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_2(u, v))) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa^2}{\kappa^2} \left(1 - \cos(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_1(u, v))) \right) \left(1 - \cos(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_2(u, v))) \right) \right] \\
&= -\ln \left[\cos \left(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_1(u, v)) \right) \cdot \cos \left(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_2(u, v)) \right) \right]
\end{aligned}$$

bzw. zusammengesetzt zu Θ :

$$\Theta = \Theta(u, v) = e^{\Sigma(u, v)} \chi(u, v).$$

Aufgrund der Gleichungen $\phi'' = (\phi')^2$ und (4.14) können wir Lemma 4.1 auf unseren Differentialoperator \mathcal{L} anwenden, woraus sich mit (4.13) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Theta) &\geq \begin{cases} \Delta\chi & \text{auf } G \\ \Delta\chi - \frac{\|\nabla\chi\|^2}{2\chi} + \chi \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa}{1 - \kappa\chi_i} \Delta\chi_i & \text{auf } B \setminus G \end{cases} \\
&\geq \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 & \text{auf } G \\ -\kappa\chi \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 + \chi \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa}{1 - \kappa\chi_i} \Delta\chi_i & \text{auf } B \setminus G \end{cases}
\end{aligned}$$

ergibt. Wir sehen dabei, dass $\mathcal{L}(\Theta)$ auf G offensichtlich nichtnegativ ist und auf $B \setminus G$ können wir mit Hilfe von (4.15) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Theta) &\geq -\kappa\chi \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 + \chi \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa}{1 - \kappa\chi_i} \Delta\chi_i \geq \kappa\chi \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1 - \kappa\chi_i}{1 - \kappa\chi_i} \|dX_i\|^2 - \sum_{i=1}^2 \|dX_i\|^2 \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also

$$\mathcal{L}(\Theta) \geq 0 \quad \text{auf } B.$$

Somit stellt $\Theta \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}) \cap C^2(B, \mathbb{R})$ eine Unterlösung des Differentialoperators \mathcal{L} dar. Zudem weist $\mathcal{L}(\Theta)$ keine Terme der Form $\Theta(u, v)b(u, v)$ für eine Koeffizientenfunktion $b: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(\overline{B})$ auf. Daher liefert das schwache Maximumprinzip (vgl. beispielsweise [3], Kapitel 3.1):

$$\sup_B \Theta \leq \sup_{\partial B} \Theta.$$

Dass diese auch für den Fall $\kappa = 0$ gilt, sieht man leicht ein, da dann $\phi = 0 = \Sigma$ und demzufolge $\Theta = \chi$ bzw. $\mathcal{L}(\Theta) = \Delta\chi$ auf B erfüllt ist. Entsprechend ergibt sich auch wieder die Abschätzung $\mathcal{L}(\Theta) \geq 0$ und der letzte Schritt erfolgt analog zum Fall $\kappa > 0$. Für die zweite Behauptung führen wir uns zunächst vor Augen, dass

$$\text{dist}(a, X_i(u, v)) \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}\right) \iff \cos\left(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X_i(u, v))\right) \in [1, 0), \quad i = 1, 2$$

bzw. $\Theta(u, v) \geq 0$ für alle $(u, v) \in \bar{B}$ gilt. Schließlich folgt aus der Bedingung $X_1|_{\partial B} = X_2|_{\partial B}$:

$$0 \leq \sup_{\bar{B}} \Theta \leq \sup_{\partial B} \Theta = 0,$$

d.h. wir haben dann $\Theta \equiv 0$ auf \bar{B} . Dies kann aber nur dann eintreten, wenn $X_1 = X_2$ gilt. \square

In Anlehnung an dieses Maximumprinzip für zwei harmonische Abbildungen geben wir nun noch ein weiteres Maximumprinzip für Jacobi-Felder an:

Theorem 4.6

Sei $X \in C^0(\bar{B}, \Omega_R)$ und harmonisch in B . Weiter existiere die Umgebung $\mathcal{K}_M(a) \subset \Omega_R$, welche in Normalreichweite von all ihren Punkten sei (bzw. die Schnitortbedingung erfülle) sowie

$$X(\bar{B}) \subset \mathcal{K}_M(a), \quad M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$$

gewährleistet. Dann gilt für jedes stetige Vektorfeld J entlang X , welches ein Jacobi-Feld auf B darstellt, dass die Funktion

$$\Theta_X(u, v) := \frac{\|J(u, v)\|^2}{\cos^2(\sqrt{\kappa} \text{dist}(a, X(u, v)))} \tag{4.19}$$

das Maximumprinzip

$$\sup_B \Theta_X \leq \sup_{\partial B} \Theta_X \tag{4.20}$$

erfüllt. Insbesondere ist $J = 0$ das einzige Jacobi-Feld entlang X mit $J|_{\partial B} = 0$.

Beweis: Wir beginnen mit der Hilfsfunktion

$$\psi := \|J\|^2 : \bar{B} \longrightarrow \mathbb{R} \in C^2(B, \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{R})$$

und berechnen für diese unter Verwendung der Jacobi-Gleichung für ein Jacobi-Feld entlang einer harmonischen Abbildung (dazu vergleiche man (2.3) und ersetze die

Geodätische Y mit X und die Zeitableitungen mit Ableitungen nach u und v):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\psi(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v), J(u, v) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\nabla^2}{\partial u^2} J(u, v), J(u, v) \right\rangle + \left\| \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v) \right\|^2 \\
&\quad + \left\langle \frac{\nabla^2}{\partial v^2} J(u, v), J(u, v) \right\rangle + \left\| \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v) \right\|^2 \\
&= \left\| \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v) \right\|^2 - \left\langle R(J(u, v), X_u(u, v)) X_u(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&\quad + \left\| \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v) \right\|^2 - \left\langle R(J(u, v), X_v(u, v)) X_v(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&= \|DJ(u, v)\|^2 - \left\langle R(J(u, v), X_u(u, v)) X_u(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&\quad - \left\langle R(J(u, v), X_v(u, v)) X_v(u, v), J(u, v) \right\rangle, \quad (u, v) \in B,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei wir dabei $\|DJ(u, v)\|^2 := \left\| \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v) \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v) \right\|^2$ gesetzt haben. Als Nächstes schätzen wir die Terme mit dem Riemann'schen Krümmungstensor durch unsere obere Schranke κ der Gauß'schen Krümmung K folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
&\left\langle R(J(u, v), X_u(u, v)) X_u(u, v), J(u, v) \right\rangle + \left\langle R(J(u, v), X_v(u, v)) X_v(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&= K(J, X_u) \left[\|J(u, v)\|^2 \|X_u(u, v)\|^2 - \langle J(u, v), X_u(u, v) \rangle^2 \right] \\
&\quad + K(J, X_v) \left[\|J(u, v)\|^2 \|X_v(u, v)\|^2 - \langle J(u, v), X_v(u, v) \rangle^2 \right] \\
&\leq \kappa \left[\|J(u, v)\|^2 \left(\|X_u(u, v)\|^2 + \|X_v(u, v)\|^2 \right) - \langle J(u, v), X_u(u, v) \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. - \langle J(u, v), X_v(u, v) \rangle^2 \right] \\
&\leq \kappa \|J(u, v)\|^2 \left(\|X_u(u, v)\|^2 + \|X_v(u, v)\|^2 \right) \\
&= \kappa \psi(u, v) \|dX(u, v)\|^2, \quad (u, v) \in B.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Außerdem benötigen wir noch die Gradientenabschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\nabla\psi(u, v)\|^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial\psi(u, v)}{\partial v} \right)^2 \\
&= \left\langle \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v), J(u, v) \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v), J(u, v) \right\rangle \\
&\leq \left\| \frac{\nabla}{\partial u} J(u, v) \right\|^2 \|J(u, v)\|^2 + \left\| \frac{\nabla}{\partial v} J(u, v) \right\|^2 \|J(u, v)\|^2 \\
&= \psi(u, v) \|DJ(u, v)\|^2, \quad (u, v) \in B
\end{aligned} \tag{4.23}$$

welche aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt. Aus den beiden Ungleichungen (4.22), (4.23) und der Gleichung (4.21) erhalten wir durch eine gesonderte Betrachtung

der Nullmenge $\psi^{-1}\{0\}$ von ψ :

$$\|\nabla\psi\|^2 \leq 4\psi\|DJ\|^2 = 0 \quad \text{auf } \psi^{-1}\{0\} \iff \nabla\psi = 0 \quad \text{auf } \psi^{-1}\{0\}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 2 \left(\|DJ\|^2 - \langle R(J, X_u)X_u, J \rangle - \langle R(J, X_v)X_v, J \rangle \right) \\ &\geq 2 \left(\|DJ\|^2 - \kappa\psi\|dX\|^2 \right) = 2\|DJ\|^2 \geq 0 \quad \text{auf } \psi^{-1}\{0\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\Delta\psi \geq 2 \left(\|DJ\|^2 - \kappa\psi\|dX\|^2 \right) \geq \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi} - 2\kappa\psi\|dX\|^2 \quad \text{auf } B \setminus \psi^{-1}\{0\}. \quad (4.26)$$

Für den nächsten Schritt definieren wir

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= q_\kappa \circ \text{dist}(a, X) : \bar{B} \longrightarrow \left[0, \frac{1}{\kappa}\right), \\ \phi &:= -\ln(1 - \kappa t) : \left[0, \frac{1}{\kappa}\right) \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

und erklären damit den Differentialoperator \mathcal{L} aus (4.1), wobei der Exponent Σ hierbei die Form

$$\begin{aligned} \Sigma &:= 2\phi \circ \psi_1 = -2\ln(1 - \kappa\psi_1) = -2\ln\left(1 - q_\kappa(\text{dist}(a, X))\right) \\ &= -2\ln\left(\cos(\sqrt{\kappa}\text{dist}(a, X))\right) = -\ln\left(\cos^2(\sqrt{\kappa}\text{dist}(a, X))\right) \end{aligned}$$

annehme (vgl. nachfolgende Bemerkung 2). Demzufolge haben wir auch für Θ_X die Darstellung

$$\Theta_X(u, v) := \frac{\|J(u, v)\|^2}{\cos^2(\sqrt{\kappa}\text{dist}(a, X(u, v)))} = e^{\Sigma(u, v)}\psi(u, v), \quad (u, v) \in \bar{B}.$$

Als Nächstes wollen wir $\mathcal{L}(\Theta_X)$ von unten mit Null abschätzen. Um dies zu erreichen, können wir mit Hilfe der Gleichung (4.24) das Lemma 4.1 auf \mathcal{L} und $\psi = \|J\|^2$ anwenden und erhalten dadurch

$$\mathcal{L}(\Theta_X) \geq \Delta\psi \stackrel{(4.25)}{\geq} 0 \quad \text{auf } \psi^{-1}\{0\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta_X) &\geq \Delta\psi - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi} + 2\psi \frac{\kappa}{1 - \kappa\psi_1} \Delta\psi_1 \stackrel{(4.15)}{\geq} \Delta\psi - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi} + 2\psi\kappa\|dX\|^2 \\ &\stackrel{(4.26)}{\geq} \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi} - 2\kappa\psi\|dX\|^2 - \frac{\|\nabla\psi\|^2}{2\psi} + 2\psi\kappa\|dX\|^2 = 0 \quad \text{auf } B \setminus \psi^{-1}\{0\} \end{aligned}$$

und somit haben wir wieder $\mathcal{L}(\Theta_X) \geq 0$ auf B . Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Theorem 4.5 kann man auch hier diese Ungleichung für den Fall $\kappa = 0$ nachweisen. Des Weiteren handelt es sich bei Θ_X um eine Unterlösung des elliptischen Differentialoperators \mathcal{L} und eine entsprechende Anwendung des schwachen Maximumprinzips wie im vorherigen Beweis liefert das gewünschte Maximumprinzip. Um die zweite Behauptung einzusehen, nehmen wir an, dass es ein $\tilde{J} \neq 0$ gäbe mit

$$\tilde{J}(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in \partial B.$$

Offensichtlich gilt somit für alle Jacobi-Felder J , welche den Voraussetzungen des Theorems entsprechen die Abschätzung

$$\Theta_X(u, v) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in \partial B.$$

Die Anwendung des eben gezeigten Maximumprinzips auf \tilde{J} liefert schließlich die folgende Ungleichheit

$$0 < \sup_B \Theta_X \leq \sup_{\partial B} \Theta_X = 0,$$

da Θ_X nur dann verschwindet, falls $J = 0$ auf \bar{B} ist. Somit haben wir einen Widerspruch dazu dass es solch ein \tilde{J} gäbe. \square

Bemerkung 2:

Man beachte dabei, dass diese neue Definition von Σ insofern mit der vorherigen Definition kompatibel ist, als dass es sich bei beiden um Spezialfälle der allgemeineren Definition

$$\Sigma := \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \phi \circ \psi_i$$

für $k = 1$ bzw. $k = 2$ handelt. In diesem Sinne kann man ohne Weiteres auch Lemma 4.1 für dieses allgemeinere Σ beweisen.

5 Maximumprinzip der konvexen Hülle und Eineindeutigkeit

In diesem Kapitel wollen wir eine alternative Herangehensweise beleuchten, welche darauf basiert ein sogenanntes stabiles Riemann'sches Gebiet einzuführen. Dieses Gebiet besitzt dann von jedem Randpunkt aus eine Familie von sich nicht-schneidenden geodätischen Strahlen, die das besagte Gebiet einfach überdecken. Hierfür richten wir uns nach der Arbeit "Geometric properties of harmonic mappings in stable Riemannian domains" von F. Sauvigny und leiten eine konvexe Hüllen-Eigenschaft für das stabile Riemann'sche Gebiet her. Mit deren Hilfe wird die Eineindeutigkeit für die Lösung des Dirichlet-Problems gezeigt werden sowie dass es sich dabei sogar um einen Diffeomorphismus handelt, falls die Riemann'sche Metrik nicht zu weit von der euklidischen Metrik abweicht. Abschließend widmen wir uns der harmonischen Einbettung in die obere Hemisphäre und betrachten dies als eine Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse den Fall einer Poincaré'schen Halbebene.

Wir gehen für dieses Kapitel wieder von den in Kapitel 1 erklärten Begriffen aus und führen die bereits erwähnte Begrifflichkeit eines stabilen Riemann'schen Gebietes ein:

Definition 5.1

Wir nennen das Gebiet Ω_R , $0 < R < \infty$, welches mit einer Riemann'schen Metrik (1.1)-(1.4) ausgestattet ist, ein **stabiles Riemann'sches Gebiet**, falls jede Geodätische $Y(t)$, die von einem beliebigen Randpunkt $X_0 \in \partial\Omega_R$ in eine innere Richtung ξ (innerhalb von Ω_R) nach $Y(\tau(X_0, \xi))$ mit Einheitsgeschwindigkeit verläuft, keine konjugierten Punkte besitzt.

Bemerkung 3:

Diese Definition kann man als eine alternative Betrachtungsweise der Eigenschaft aus Kapitel 1 deuten, wo wir forderten, dass wir eine Kreisscheibe $\mathcal{K}_M(P)$ um den Punkt $P \in \Omega_R$ mit Radius M hatten, welche in Normalreichweite aller ihrer Punkte liegt.

Bemerkung 4:

Wie schon in Kapitel 3 können wir die Schranke $\tau(X_0, \xi) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für den Durchmesser einführen, wobei κ die obere Schranke an die Gauß'sche Krümmung darstellt, und so sicherstellen, dass wir über keine konjugierten Punkte gehen. Dies sieht man auch mittels des Geodätischen Vergleichssatzes ([15], Kapitel VII, §7, Satz 3), welcher aus dem Sturm'schen Vergleichssatz unter der Bedingung einer C^3 -Regularität folgt.

Wir zeigen als Nächstes, dass es eine Familie von Geodätischen gibt, die $\overline{\Omega_R}$ mit Ausnahme des Startpunktes einfach überdecken. Dazu betrachten wir das

Lemma 5.2

Sei das stabile Riemann'sche Gebiet Ω_R gemäß Definition 5.1 gegeben und $y_0 \in \partial\Omega_R$ beliebig gewählt. Dann stellt die Familie von Geodätischen

$$Y(t, s) = Y(t, s, y_0), \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

mit dem Anfangspunkt

$$Y(0+, s, y_0) = y_0, \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

und der Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{Y}(0+, s, y_0) = -e^{is} \frac{y_0}{\|y_0\|}, \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

eine einfache Überdeckung von $\Omega_R \setminus \{y_0\}$ dar. Diese Familie von Geodätischen bezeichnen wir als **geodätisches Zentralfeld**.

Beweis: Wir beginnen diesen Beweis indem wir die beiden Geodätischen $Y(t, s_1)$ und $Y(t, s_2)$ für beliebige $s_1, s_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aus unserer Familie von Geodätischen betrachten. Diese wollen wir mittels eines abgeschlossenen Pfades durchlaufen und beschreiben diesen durch die Bögen

$$Y(t, s_1) = Y(t, s_1, y_0), \quad t \in [0, \tau(y_0, s_1)], \quad (5.1)$$

$$Y(t, s_2) = Y(\tau(y_0, s_2) - t, s_2, y_0), \quad t \in [0, \tau(y_0, s_2)], \quad (5.2)$$

welche mittels des Kreisbogens

$$Z(s, y_0) = Y(\tau(y_0, s), s, y_0), \quad s \in [s_1, s_2] \quad (5.3)$$

miteinander verbunden sind. Aufgrund der Voraussetzungen wissen wir, dass die Geodätischen in $\overline{\Omega_R}$ keine konjugierten Punkte beinhalten und da außerdem die Abbildung

$$Z(s, y_0) = Y(\tau(y_0, s), s, y_0), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

streng monoton ist, bilden die Bögen (5.1)-(5.3) eine Jordan-Kurve $\Gamma(s_1, s_2, y_0)$ für beliebige $s_1, s_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Führen wir dann noch die Grenzübergänge $s_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}+$ und $s_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}-$ durch, sehen wir, dass das Innere der Jordan-Kurve $\Gamma(s_1, s_2, y_0)$ das Gebiet Ω_R ausschöpft. Somit überdeckt die Jordan-Kontur $\Gamma(s_1, s_2, y_0)$ für die entsprechenden Grenzwerte $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ den Rand $\partial\Omega_R$ unseres Gebietes für ein festes y_0 . \square

Wir werden an dieser Stelle noch einige weitere aufeinander aufbauende Begrifflichkeiten einführen, welche für die folgenden Betrachtungen bzgl. nichtlinearer Kombinationen von harmonischen Abbildungen essentiell sind.

Zunächst legen wir die Notation

$$\langle Y(t), Z(t) \rangle_{X(t)} := \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(X(t)) y^j(t) z^k(t) \quad (5.4)$$

für zwei planare Vektorfelder $Y(t), Z(t)$ entlang der ebenen Kurve $X(t)$ fest. Diese Darstellung wird auch als das **Riemann'sche innere Produkt** bezeichnet. Zwar haben wir das Riemann'sche innere Produkt bereits vorher verwendet, aber da wir in diesem Kapitel des öfteren zwischen der Darstellung mittels des geodätischen Zentralfeldes $Y(t, s)$ und der unserer Abbildung $X(u, v)$ wechseln werden, dient diese erweiterte Notation zur besseren Differenzierung der beiden Darstellungen.

Da unsere Geodätische Y Einheitsgeschwindigkeit besitzt, erfüllt sie die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \dot{Y}(t, s), \dot{Y}(t, s) \rangle_{Y(t, s)} &= \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(Y(t, s)) \dot{y}^j(t, s) \dot{y}^k(t, s) = \langle \dot{Y}(t, s), \dot{Y}(t, s) \rangle \\ &= \|\dot{Y}(t, s)\|^2 = 1, \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus dem Gauß-Riemann-Lemma (vgl. [15], Kapitel VII, §3, Satz 2) die Identität

$$\langle Y_t(t, s), Y_s(t, s) \rangle_{Y(t, s)} = 0, \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Des Weiteren erhalten wir aus [15], Kapitel VII, §§ 5,6 die Abschätzung

$$G(t, s) := \langle Y_s(t, s), Y_s(t, s) \rangle_{Y(t, s)} > 0, \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$G(t, s)$ bezeichnen wir dabei als den **Gauß'schen Fundamentalkoeffizienten**. Wir fassen diese Relationen nochmal zusammen:

$$\begin{aligned} \langle \dot{Y}(t, s), \dot{Y}(t, s) \rangle_{Y(t, s)} &= 1, \quad G(t, s) := \langle Y_s(t, s), Y_s(t, s) \rangle_{Y(t, s)} > 0, \\ \langle Y_t(t, s), Y_s(t, s) \rangle_{Y(t, s)} &= 0, \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Als Nächstes wollen wir ein positiv-orientiertes Orthonormalsystem von Vektoren erklären, indem wir die folgende Definition einführen:

Definition 5.3

Es seien das stabile Riemann'sche Gebiet Ω_R und das geodätische Zentralfeld aus Lemma 5.2 gegeben. Wir erklären dann für alle $X \in \Omega_R$ mit der eindeutigen Darstellung

$$X = Y(t, s) = Y(t, s, y_0), \quad t \in (0, \tau(y_0, s)), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

die **gelifteten Vektorfelder**

$$\widehat{Y}_t(X, y_0) := Y_t(t, s), \quad \widehat{Y}_s(X, y_0) := Y_s(t, s), \quad X \in \Omega_R, \quad (5.6)$$

und den **gelifteten Gauß'schen Fundamentalkoeffizienten**

$$\widehat{G}(X, y_0) := G(t, s), \quad X \in \Omega_R. \quad (5.7)$$

Somit stellt der **Gauß'sche geodätische Rahmen**

$$\left\{ \widehat{Y}_t(X, y_0), \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\sqrt{\widehat{G}(X, y_0)}} \right\}, \quad X \in \Omega_R, \quad (5.8)$$

unter Beachtung von (5.5) ein orthonormales, positiv-orientiertes Vektorsystem bezüglich des Riemann'schen inneren Produktes (5.4) dar.

Wir führen für die weitere Betrachtung unseres Problems noch einige weitere Begrifflichkeiten in Form der folgenden Definition ein:

Definition 5.4

Es seien das stabile Riemann'sche Gebiet Ω_R und das geodätische Zentralfeld aus Lemma 5.2 gegeben. Dann erklären wir für jedes $X \in \overline{\Omega_R} \setminus \{y_0\}$ mit seiner eindeutigen Darstellung

$$X = Y(t, s) = Y(t, s, y_0), \quad t \in (0, \tau(y_0, s)], \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

die **geodätische Winkelfunktion**

$$\Psi(X, y_0) := s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad X \in \overline{\Omega_R} \setminus \{y_0\}. \quad (5.9)$$

Zudem wollen wir mit

$$\nabla \Psi(X, y_0) := \left(\sum_{j,k=1}^2 g^{jk}(X) \Psi_{x^k}(X, y_0) \right)_{j=1,2} =: \left(h^j(X) \right)_{j=1,2} \quad \forall X \in \Omega_R \quad (5.10)$$

den **Gradienten der Funktion** $\Psi(\cdot, y_0)$ bezeichnen, wobei $g^{jk}(X)$ den inversen Tensor zu $g_{jk}(X)$ darstellt und $y_0 \in \partial\Omega_R$ beliebig gewählt ist.

Von dieser Definition ausgehend ist es uns nunmehr möglich für jede gegebene Abbildung $X \in C^2(B, \Omega_R)$ die Ableitung der entsprechenden Hilfsfunktion

$$\psi(u, v) := \Psi(X(u, v), y_0), \quad (u, v) \in B, \quad (5.11)$$

mittels der kovarianten Kettenregel zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \psi_u(u, v) &= \langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_u(u, v) \rangle_{X(u, v)}, \quad (u, v) \in B, \\ \psi_v(u, v) &= \langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)}, \quad (u, v) \in B. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nochmalige Differentiation nach u bzw. v liefert aufgrund der Produktregel:

$$\begin{aligned}\psi_{uu}(u, v) &= \left\langle \frac{\nabla}{du} \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &\quad + \left\langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), \frac{\nabla}{du} X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &= \nabla^2 \Psi[X_u, X_u] + \left\langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), \frac{\nabla}{du} X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)}, \quad (u, v) \in B,\end{aligned}\tag{5.13}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\psi_{vv}(u, v) &= \left\langle \frac{\nabla}{dv} \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_v(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &\quad + \left\langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), \frac{\nabla}{dv} X_v(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &= \nabla^2 \Psi[X_v, X_v] + \left\langle \nabla \Psi(X(u, v), y_0), \frac{\nabla}{dv} X_v(u, v) \right\rangle_{X(u, v)}, \quad (u, v) \in B,\end{aligned}\tag{5.14}$$

wobei wir hier die Darstellung der Hesseschen aus (4.8) verwendet haben. Unser nächster Schritt besteht darin die Hesseschen in (5.13) bzw. (5.14) auszuwerten. Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \left(h^j(X(u, v)) \right)_{j=1,2} &= \frac{d}{du} \left(\sum_{k=1}^2 g^{jk}(X(u, v)) \Psi_{x^k}(X(u, v), y_0) \right)_{j=1,2} \\ &= \left(\sum_{k,l=1}^2 g^{jk}(X(u, v)) \Psi_{x^k x^l}(X(u, v), y_0) x_u^l \right)_{j=1,2} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^2 \frac{g^{jk}(X(u, v))}{x^l} \Psi_{x^k}(X(u, v), y_0) x_u^l \right)_{j=1,2} \quad \forall (u, v) \in B.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Einsetzen der Gleichung (5.15) in das erste Riemann'sche innere Produkt von (5.13) liefert

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\nabla}{du} \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} &= \left\langle \frac{\nabla}{du} \left(h^j(X(u, v)) \right)_{j=1,2}, X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jm} g^{jk} \Psi_{x^k x^l}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m + \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jm} g^{jk} \Psi_{x^k}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m \\ &\quad + \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jm} \Gamma_{kl}^j h^k(X(u, v)) x_u^l x_u^m \\ &= \sum_{l,m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m + \sum_{j,k,l,m=1}^2 g_{jm} g^{jk} \Psi_{x^k}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m \\ &\quad + \sum_{k,l,m=1}^2 \Gamma_{mkl} h^k(X(u, v)) x_u^l x_u^m.\end{aligned}$$

Beachten wir dabei noch, dass aus

$$\sum_{k=1}^2 g_{jk} g^{kl} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2,$$

mittels Differentiation nach x^m die Gleichung

$$-\sum_{k=1}^2 g_{jk,m} g^{kl} = \sum_{k=1}^2 g_{jk} g^{kl},{}_{,m}, \quad j, l, m = 1, 2,$$

folgt und setzen diese ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\nabla}{du} \nabla \Psi(X(u, v), y_0), X_u(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\ &= \sum_{l, m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m - \sum_{j, k, l, m=1}^2 g_{jm, l} g^{jk} \Psi_{x^k}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m \\ & \quad + \sum_{k, l, m=1}^2 \Gamma_{mkl} h^k(X(u, v)) x_u^l x_u^m \\ &= \sum_{l, m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m - \sum_{j, l, m=1}^2 g_{jm, l} h^j(X(u, v)) x_u^l x_u^m \\ & \quad + \sum_{j, l, m=1}^2 \Gamma_{mjl} h^j(X(u, v)) x_u^l x_u^m \\ &= \sum_{l, m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m + \sum_{j, l, m=1}^2 \tilde{\Gamma}_{mjl} h^j(X(u, v)) x_u^l x_u^m, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung die modifizierten Christoffel-Symbole

$$\tilde{\Gamma}_{mjl} = \tilde{\Gamma}_{mjl}(X) := \Gamma_{mjl}(X) - g_{mj, l}(X), \quad j, l, m = 1, 2, \quad (5.16)$$

verwendet haben. Insbesondere folgt aus (5.16) durch Einsetzen der Christoffel-Symbole:

$$\tilde{\Gamma}_{mjl} = \frac{1}{2}(g_{lm, j} - g_{mj, l} - g_{jl, m}) = -\frac{1}{2}(g_{mj, l} + g_{jl, m} - g_{lm, j}) = -\Gamma_{jlm}, \quad j, l, m = 1, 2.$$

Somit haben wir die Hessesche aus (5.13) wie folgt ausgewertet:

$$\nabla^2 \Psi[X_u, X_u] = \sum_{l, m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_u^l x_u^m - \sum_{j, l, m=1}^2 \Gamma_{jlm} h^j(X(u, v)) x_u^l x_u^m. \quad (5.17)$$

Schließlich erhalten wir analog für die Hessesche aus (5.14) die Darstellung

$$\nabla^2 \Psi[X_v, X_v] = \sum_{l, m=1}^2 \Psi_{x^l x^m}(X(u, v), y_0) x_v^l x_v^m - \sum_{j, l, m=1}^2 \Gamma_{jlm} h^j(X(u, v)) x_v^l x_v^m. \quad (5.18)$$

Wir werden nun untersuchen welche Eigenschaften die kovariante Ableitung und die Hessesche der geodätischen Winkelfunktion Ψ besitzen. Diese Untersuchung fassen wir zusammen zum

Lemma 5.5

Der Gradient der geodätischen Winkelfunktion Ψ aus Definition 5.4 erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_t(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)} &= 0 \\ \langle \nabla \Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_s(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)} &= 1 \end{aligned} \quad \forall t \in (0, \tau(y_0, s)), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.19)$$

und besitzt die Darstellung

$$\nabla \Psi(X, y_0) = \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\widehat{G}(X, y_0)}, \quad X \in \Omega_R. \quad (5.20)$$

Zudem verschwindet die Hessesche von Ψ gemäß

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi[Y_t, Y_t] &= \nabla^2 \Psi(Y(t, s, y_0), y_0)[Y_t(t, s, y_0), Y_t(t, s, y_0)] \\ &= 0 \quad \forall t \in (0, \tau(y_0, s)), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Der Randpunkt $y_0 \in \partial\Omega_R$ ist dabei beliebig gewählt.

Beweis: Wir beginnen diesen Beweis indem wir die Hilfsfunktion ψ aus (5.11) betrachten und ausnutzen, dass jeder Punkt $X \in \Omega_R \setminus \{y_0\}$ eindeutig dargestellt werden kann als

$$X = Y(t, s) = Y(t, s, y_0), \quad t \in (0, \tau(y_0, s)), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

d.h. wir können ψ auch darstellen mittels

$$\psi(t, s) := \Psi(Y(t, s, y_0), y_0) = s, \quad t \in (0, \tau(y_0, s)), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dann berechnen wir mit Hilfe der Kettenregel für alle $t \in (0, \tau(y_0, s))$ und alle $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds}{dt} = \psi_t(t, s) = \langle \nabla \Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_t(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)}, \\ 1 &= \frac{ds}{ds} = \psi_s(t, s) = \langle \nabla \Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_s(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)}. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichungen (5.19) nachgewiesen. Für die Darstellung (5.20) beschreiben wir den Gradienten der geodätischen Winkelfunktion folgendermaßen durch den Gauß'schen geodätischen Rahmen (5.8) unter Verwendung der gelifteten Ausdrücke (5.6),(5.7) und beachten dabei die eben bestimmten Ableitungen von ψ nach

s und t :

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi(X, y_0) &= \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0) \\
&= \langle \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_t(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)} Y_t(t, s, y_0) \\
&\quad + \left\langle \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0), \frac{Y_s(t, s, y_0)}{\sqrt{G(t, s, y_0)}} \right\rangle_{Y(t, s, y_0)} \frac{Y_s(t, s, y_0)}{\sqrt{G(t, s, y_0)}} \\
&= \langle \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_t(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)} Y_t(t, s, y_0) \\
&\quad + \langle \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0), Y_s(t, s, y_0) \rangle_{Y(t, s, y_0)} \frac{Y_s(t, s, y_0)}{G(t, s, y_0)} \\
&= \frac{Y_s(t, s, y_0)}{G(t, s, y_0)} = \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\widehat{G}(X, y_0)}, \quad X \in \Omega_R.
\end{aligned}$$

Für die zweite Aussage differenzieren wir ψ_t nochmal nach t und erhalten dadurch

$$\begin{aligned}
0 = \psi_{tt}(t, s) &\stackrel{(5.14)}{=} \nabla^2\Psi(Y(t, s, y_0), y_0) [Y_t(t, s, y_0), Y_t(t, s, y_0)] \\
&\quad + \underbrace{\left\langle \nabla\Psi(Y(t, s, y_0), y_0), \frac{\nabla}{dt} Y_t(t, s, y_0) \right\rangle_{Y(t, s, y_0)}}_{=0, \text{ weil } Y \text{ eine Geodätische ist}} \\
&= \nabla^2\Psi(Y(t, s, y_0), y_0) [Y_t(t, s, y_0), Y_t(t, s, y_0)]
\end{aligned}$$

für alle $t \in (0, \tau(y_0, s))$ und alle $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. □

Unser nächster Schritt besteht darin, dass wir klären werden was wir unter dem Begriff einer pseudoharmonischen Funktion verstehen wollen und untersuchen in diesem Zusammenhang pseudoharmonische, nichtlineare Kombinationen von harmonischen Abbildungen. Dies geschieht in Form von

Lemma 5.6

Sei die harmonische Abbildung $X(u, v) : B \rightarrow \Omega_R$ aus $C^2(B, \Omega_R)$ gegeben. Dann erfüllt die geodätische Winkelhilfsfunktion $\psi(u, v)$ aus (5.11) mit den beiden Funktionen $a = a(u, v) \in C^0(B, \mathbb{R})$ und $b = b(u, v) \in C^0(B, \mathbb{R})$ die elliptische, quasilineare Differentialgleichung

$$\Delta\psi(u, v) + a(u, v)\psi_u(u, v) + b(u, v)\psi_v(u, v) = 0, \quad (u, v) \in B. \quad (5.22)$$

Bemerkung 5:

Der Gradient $\nabla\psi(u, v)$ besitzt höchstens isolierte Nullstellen in B und erlaubt dort eine asymptotische Entwicklung des Hartman-Wintner-Typs. Dies geht aus der Betrachtung des Satzes 2 aus [18], Kapitel IX, §1 hervor. Da somit ψ einige Eigenschaften mit harmonischen Funktionen gemeinsam hat, bezeichnen wir ψ als **pseudoharmonisch**.

Beweis: Wir machen uns zuerst bewusst, dass die Gleichung

$$\frac{\nabla}{du} X_u(u, v) + \frac{\nabla}{dv} X_v(u, v) = \left(\Delta x^j + \Gamma_{kl}^j (x_u^k x_u^l + x_v^k x_v^l) \right)_{j=1,2} = 0 \quad \forall (u, v) \in B \quad (5.23)$$

erfüllt wird, da die Abbildung X harmonisch ist. Dann berechnen wir mit Hilfe von (5.13), (5.14) und (5.23):

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(u, v) &= \psi_{uu}(u, v) + \psi_{vv}(u, v) \\
&= \nabla^2\Psi(X(u, v), y_0) [X_u(u, v), X_u(u, v)] + \nabla^2\Psi(X(u, v), y_0) [X_v(u, v), X_v(u, v)] \\
&\quad + \left\langle \nabla\Psi(X(u, v), y_0), \frac{\nabla}{du}X_u(u, v) + \frac{\nabla}{dv}X_v(u, v) \right\rangle_{X(u, v)} \\
&= \nabla^2\Psi(X(u, v), y_0) [X_u(u, v), X_u(u, v)] + \nabla^2\Psi(X(u, v), y_0) [X_v(u, v), X_v(u, v)]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

für alle $(u, v) \in B$. Um diese Identität weiter auswerten zu können, überführen wir die Ableitungen der Abbildung X – wie auch schon im Beweis von Lemma 5.5 – mit Hilfe des Gauß'schen geodätischen Rahmens (5.8) und den damit verbundenen gelifteten Ausdrücken in eine geliftete Darstellung, welche wir unter Verwendung von (5.20) in die Form

$$\begin{aligned}
X_u &= \left\langle X_u, \widehat{Y}_t(X, y_0) \right\rangle_X \widehat{Y}_t(X, y_0) + \left\langle X_u, \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\sqrt{\widehat{G}(X, y_0)}} \right\rangle_X \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\sqrt{\widehat{G}(X, y_0)}} \\
&= \left\langle X_u, \widehat{Y}_t(X, y_0) \right\rangle_X \widehat{Y}_t(X, y_0) + \left\langle X_u, \frac{\widehat{Y}_s(X, y_0)}{\widehat{G}(X, y_0)} \right\rangle_X \widehat{Y}_s(X, y_0) \\
&= \left\langle X_u, \widehat{Y}_t(X, y_0) \right\rangle_X \widehat{Y}_t(X, y_0) + \langle X_u, \nabla\Psi(X, y_0) \rangle_X \widehat{Y}_s(X, y_0) \\
&= \left\langle X_u, \widehat{Y}_t(X, y_0) \right\rangle_X \widehat{Y}_t(X, y_0) + \psi_u \widehat{Y}_s(X, y_0)
\end{aligned}$$

bringen. Indem wir das gleiche Verfahren nochmal auf X_v anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
X_u(u, v) &= \left\langle X_u(u, v), \widehat{Y}_t(X(u, v), y_0) \right\rangle_{X(u, v)} \widehat{Y}_t(X(u, v), y_0) + \psi_u(u, v) \widehat{Y}_s(X(u, v), y_0), \\
X_v(u, v) &= \left\langle X_v(u, v), \widehat{Y}_t(X(u, v), y_0) \right\rangle_{X(u, v)} \widehat{Y}_t(X(u, v), y_0) + \psi_v(u, v) \widehat{Y}_s(X(u, v), y_0) \\
\forall (u, v) &\in B.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Setzen wir schließlich die Ableitungen aus (5.25) in (5.24) ein, folgt daraus die gewünschte Aussage, wobei aufgrund von (5.21) die Terme der Form $\nabla^2\Psi[\widehat{Y}_t, \widehat{Y}_t]$ verschwinden. \square

Zur besseren Übersicht fassen wir an dieser Stelle nochmal alle wichtigen Bedingungen zusammen, die wir an eine Lösung des Dirichlet-Problems in diesem Kapitel bisher gestellt haben, in Form von

Definition 5.7

Sei ds^2 eine Riemann'sche Metrik gemäß (1.1)-(1.4) auf dem stabilen Riemann'schen

Gebiet Ω_R , $R \in (0, \infty)$, nach Definition 5.1. Wir bezeichnen die Funktion

$$X = X(u, v) : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^2(B, \mathbb{R}^2) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^2)$$

mit

$$|X(u, v)| \leq R \quad \forall (u, v) \in \bar{B}$$

als eine **Lösung des Dirichlet-Problems** $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ bezüglich einer Randfunktion

$$\Phi = \Phi(u, v) \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^2), \quad |\Phi(u, v)| \leq R \quad \forall (u, v) \in \partial B,$$

wenn X harmonisch ist, d.h. das nichtlineare elliptische System (1.6) mit (1.7) löst, sowie die Randbedingung

$$X(u, v) = \Phi(u, v) \quad \forall (u, v) \in \partial B$$

erfüllt.

Wir kommen nun zu einem fundamentalen Begriff für dieses Kapitel und zwar den der konvexen Hülle. Diesen wollen wir folgendermaßen einführen:

Definition 5.8

Es seien das stabile Riemann'sche Gebiet Ω_R und das geodätische Zentralfeld aus Lemma 5.2 gegeben. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{R}(s_0, y_0) := \left\{ Y(t, s, y_0) \in \Omega_R : t \in (0, \tau(y_0, s)), s \in \left(-\frac{\pi}{2}, s_0\right] \right\} \quad \forall s_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.26)$$

die **Geodätischenregionen**. Für jede kompakte Menge $F \subset \Omega_R$ erklären wir die **konvexe Hülle von F innerhalb des stabilen Riemann'schen Gebietes Ω_R** mit

$$\mathcal{H}(F) := \bigcap \left\{ \mathcal{R}(s_0, y_0) : y_0 \in \partial\Omega_R, s_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ so dass } F \subset \mathcal{R}(s_0, y_0) \right\}. \quad (5.27)$$

Bemerkung 6:

Eine Geodätischenregion aus Definition 5.8 wird durch den geodätischen Bogen

$$Y(\tau(y_0, s_0) - t, s_0) = Y(\tau(y_0, s_0) - t, s_0, y_0), \quad t \in [0, \tau(y_0, s_0)]$$

und den Kreisbogen

$$Z(s, y_0) = Y(\tau(y_0, s), s, y_0), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, s_0\right)$$

begrenzt. Diese Bögen bilden zusammen als $\partial\mathcal{R}(s_0, y_0)$ eine positiv-orientierte Jordan-Kontur.

Bemerkung 7:

Wenn wir den Fall $\Psi(X, y_0) = s_0$, $X \in \Omega_R$, betrachten, fällt uns auf, dass die Geodätische $Y(t, s_0, y_0)$, $t \in (0, \tau(y_0, s_0))$, für alle $s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ durch diese Gleichung beschrieben wird. Dadurch ergibt sich die folgende vereinfachte Notation für die Geodätischenregion in (5.26):

$$\mathcal{R}(s_0, y_0) = \{X \in \Omega_R : \Psi(X, y_0) \leq s_0\}. \quad (5.28)$$

Wir werden im kommenden Theorem eine konvexe Hüllen-Eigenschaft nachweisen, welche besagt, dass eine Lösung des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ gemäß Definition 5.7 in der konvexen Hülle der Randwerte enthalten ist.

Theorem 5.9

Sei die Randfunktion $\Phi \in C^0(\partial B, \Omega_R)$ mit der Menge $F := \Phi(\partial B) \subset \Omega_R$ und ihrer konvexen Hülle $\mathcal{H}(F)$ gemäß Definition 5.8 gegeben. Dann erfüllt jede Lösung $X \in \mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ des Dirichlet-Problems die Bedingung

$$X = X(u, v) \in \mathcal{H}(F) \quad \forall (u, v) \in \bar{B}.$$

Beweis: Da sowohl die Menge F als auch ihre konvexe Hülle $\mathcal{H}(F)$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, sind, existiert eine eindeutige Zahl $\sigma(y_0, F) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so dass

$$\bigcap \left\{ \mathcal{R}(s_0, y_0) : s_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ so dass } F \subset \mathcal{R}(s_0, y_0) \right\} = \mathcal{R}(\sigma(y_0, F), y_0) \quad \forall y_0 \in \Omega_R$$

gilt. Weiter erhalten wir aus (5.28) die Identität

$$\mathcal{R}(\sigma(y_0, F), y_0) = \{X \in \Omega_R : \Psi(X, y_0) \leq \sigma(y_0, F)\} \quad \forall y_0 \in \Omega_R.$$

Dieses Wissen können wir nun verwenden, um die konvexe Hülle als

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(F) &= \bigcap \left\{ \mathcal{R}(s_0, y_0) : y_0 \in \partial\Omega_R, s_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ so dass } F \subset \mathcal{R}(s_0, y_0) \right\} \\ &= \bigcap_{y_0 \in \partial\Omega_R} \mathcal{R}(\sigma(y_0, F), y_0) = \bigcap_{y_0 \in \partial\Omega_R} \{X \in \Omega_R : \Psi(X, y_0) \leq \sigma(y_0, F)\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

zu bestimmen.

Ferner folgt, da X eine Lösung des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ nach Definition 5.7 darstellt und somit insbesondere harmonisch ist sowie durch die Konstante $R \in (0, \infty)$ betragsmäßig beschränkt wird, dass wir das geometrische Maximumprinzip von E. Heinz (vgl. [18], Kapitel XII, §1, Satz 2) hierauf anwenden können. Demzufolge

$$\sup_{(u,v) \in B} |X(u, v)| \leq \sup_{(u,v) \in \partial B} |X(u, v)|$$

bzw. wegen $|\Phi(u, v)| \leq R$ die Ungleichung

$$\sup_{(u,v) \in B} |X(u, v)| \leq \sup_{(u,v) \in \partial B} |X(u, v)| = \sup_{(u,v) \in \partial B} |\Phi(u, v)| \leq R$$

gilt und wir demnach die Inklusion $X(B) \subset \Omega_R$ erhalten.

Als Nächstes betrachten wir für beliebige Randpunkte $y_0 \in \partial\Omega_R$ die geodätische Winkelhilfsfunktion $\psi(u, v)$, $(u, v) \in \overline{B}$, aus (5.11). Dann implizieren die anfangs gezeigten Gleichungen zusammen mit der darin enthaltenen Eigenschaft $F \subset \mathcal{R}(\sigma(y_0, F), y_0)$ für alle $y_0 \in \partial\Omega_R$ die Abschätzung

$$\psi(u, v) \leq \sigma(y_0, F) \quad \forall (u, v) \in \partial B.$$

Zudem haben wir aufgrund von Lemma 5.6 die Gleichung (5.22) zur Verfügung. Somit ist es uns möglich das schwache Maximumprinzip (vgl. beispielsweise [3], Kapitel 3.1) auf ψ anzuwenden, wodurch wir ψ auch für die inneren Punkte von B mittels $\sigma(y_0, F)$ beschränken können. Dies liefert die Ungleichung

$$\psi(u, v) = \Psi(X(u, v), y_0) \leq \sigma(y_0, F) \quad \forall (u, v) \in \overline{B} \text{ und } \forall y_0 \in \partial\Omega_R.$$

Schließlich folgt aus dieser Ungleichung zusammen mit (5.29) die gewünschte Behauptung, dass $X(\overline{B}) \subset \mathcal{H}(F)$ gilt. \square

Bemerkung 8:

Wir wollen in dieser Bemerkung unser bisheriges Vorgehen in Kapitel 5 mit den im Kapitel 4 für das Maximumprinzip von W. Jäger und H. Kaul verglichen und dabei die Ähnlichkeit der beiden Vorgehen aufzeigen:

In diesem Kapitel haben wir statt der Funktion Q_κ bzw. später χ , welche auf der Abstandsfunktion beruhen, die geodätische Winkelfunktion Ψ eingeführt, die auf der eindeutigen Darstellung der Punkte X mittels der Geodätischen $Y(t, s, y_0)$ und den entsprechenden geodätischen Polarkoordinaten aufbaut. Für diese Funktion haben wir dann die Hessesche bestimmt und erkannt dass diese bzgl. X_u, X_v mit $\Delta\psi(u, v)$ übereinstimmt. Dazu vergleiche man die Gleichungen (5.24) und (4.16) miteinander.

Daraufhin konstruierten wir eine Differential(-un-)gleichung, welche wir in Theorem 4.5 von unten mit Null abgeschätzt hatten bzw. in Lemma 5.6 in Form der Gleichheit mit (5.22). Auf diese Differential(-un-)gleichungen haben wir schließlich das schwache Maximumprinzip angewandt und somit ein neues Maximumprinzip bezüglich der Funktion Θ – welche allerdings größtenteils auf χ beruht – bzw. ψ erhalten.

Wir werden zunächst noch einen Spezialfall des Lemmas von Radó (vgl. [2], part II, chapter 4.9, Lemma 2) für die pseudoharmonische Funktion $\psi(u, v)$ nachweisen:

Lemma 5.10

Sei $\psi(u, v)$ gemäß (5.10) für alle $(u, v) \in \overline{B}$ erklärt und $X(u, v)$ eine Lösung des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$. Weiter gelte $\psi(u_0, v_0) = 0$ sowie $\psi_u(u_0, v_0) = 0 = \psi_v(u_0, v_0)$ für einen Punkt $(u_0, v_0) \in B$. Dann wechselt die Hilfsfunktion $\psi(u, v)$ mindestens viermal ihr Vorzeichen auf ∂B .

Beweis: Dem Lemma 5.6 entnehmen wir, dass ψ der partiellen Differentialgleichung (5.22) genügt und pseudoharmonisch ist. Ausgehend von Bemerkung 5 besitzt die Hilfsfunktion dort eine asymptotische Erweiterung des Hartman-Wintner-Typs

$$\psi_w(w_0 + \zeta) = c\zeta^n + o(|\zeta|^n), \quad \zeta \rightarrow 0,$$

für $w = u + iv$, $w_0 = u_0 + iv_0$, $c = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, wobei $o(|\zeta|^n)$ eine Funktion $\alpha = \alpha(\zeta) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta \neq 0}} \frac{|\alpha(\zeta)|}{|\zeta|^n} = 0$$

darstellt. Demnach teilt die Niveaumenge $\psi^{-1}\{0\} := \{w \in B : \psi(w) = 0\}$ die Nachbarschaft von w_0 in $2n$ offene Sektoren S_1, S_2, \dots, S_{2n} in dem Sinne ein, dass $\psi(w)$ in den ungeraden Sektoren $S_1, S_3, \dots, S_{2n-1}$ positiv ist und in den geraden Sektoren S_2, S_4, \dots, S_{2n} negativ.

Da die Menge $B \setminus \psi^{-1}\{0\}$ offen ist, besitzt sie höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, wobei wir mit Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n} diejenigen Komponenten bezeichnen, die die entsprechenden Sektoren beinhalten. Diesbezüglich beweisen wir mittels Widerspruch, dass keine zwei Zusammenhangskomponenten übereinstimmen: Angenommen es existieren $j \neq k$, so dass $Q_{2j} = Q_{2k}$ gilt. Dann finden wir eine (stückweise lineare) geschlossene Jordan-Kurve Γ' , welche in w_0 startet, durch den Sektor S_{2j} geht und schließlich über die gemeinsame Zusammenhangskomponente durch den Sektor S_{2k} wieder den Anfangspunkt erreicht. Wir bezeichnen zudem mit $I(\Gamma')$ die von Γ' eingeschlossene Teilmenge von B . Demnach enthält $I(\Gamma')$ entweder den Sektor S_{2j-1} oder S_{2j+1} . Da wir auf Γ' außerhalb der Nachbarschaft keine weiteren Nullstellen haben, ändert sich das Vorzeichen von ψ entlang Γ' nicht, d.h. $\psi(w) \leq 0$ für alle $w \in \Gamma'$. Andererseits wissen wir über ψ , dass sie sowohl auf S_{2j} als auch auf S_{2k} positiv ist. Zudem gilt analog zu harmonischen Funktionen, dass auch die partiellen Ableitungen von pseudoharmonischen Funktionen wieder pseudoharmonisch sind und wir demnach auch für die Ableitungen das Hopf'sche Maximumprinzip ([17], Kapitel VI, §1) anwenden können. Dies liefert allerdings einen Widerspruch, denn da das Maximum offensichtlich im Inneren $I(\Gamma')$ angenommen wird, müsste dann nämlich ψ überall auf $I(\Gamma')$ konstant sein. Die anderen Fälle kann man auf ähnliche Weise ausschließen.

Wenden wir nun das Hopf'sche Maximumprinzip auf jede Zusammenhangskomponente Q_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$, an, so muss das Maximum an einem Randpunkt $w_j \in \partial Q_j$ – welcher insbesondere auf ∂B liegen muss – angenommen werden, so dass $\psi(w_j)$ für die ungeraden Indizes positiv ist und für die geraden Indizes negativ. Weiter können wir einen Weg γ_j zu jedem Punkt w_j bilden, der in S_j anfängt und vollständig in Q_j verläuft. Dies bedeutet, dass die Punkte w_j das Verhalten der Punkte aus S_j in der Nähe von w_0 übernehmen, da die Wege γ_j sich nicht kreuzen. Also existiert zwischen jeweils zwei dieser Randpunkte eine Nullstelle von ψ . \square

Zudem wenden wir das Monodromieprinzip ([2], Part II, Chapter 4.9, Lemma 1) auf unsere Abbildung $X(u, v)$ an, um so eine Aussage bezüglich der Injektivität der Abbildung zu erhalten:

Lemma 5.11

Sei $X = (x^1, x^2) \in C^1(B, \mathbb{C}) \cap C^0(\bar{B}, \mathbb{C})$ und die Jacobische von X erfülle

$$\frac{\partial(x^1(u, v), x^2(u, v))}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in B.$$

Dann ist die Abbildung X injektiv, falls mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- i) X bildet ∂B auf eine geschlossene Jordan-Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ab.
- ii) X bildet B auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\hat{B} \subset \mathbb{C}$ und ∂B auf $\partial \hat{B}$ ab.

Beweis: Da $X \in C^1(B, \mathbb{C})$ und ihre Jacobische nirgendwo auf B verschwindet, handelt es sich bei X um eine offene Abbildung (vgl. beispielsweise [14], Chapter 1, §5, Theorem 5.6 und das nachfolgende Korollar).

Wir wählen einen beliebigen Randpunkt $x \in \partial X(B)$ und finden dazu eine dagegen konvergierende Punktfolge $x_n \in X(B)$ sowie eine weitere Punktfolge $w_n \in B$, welche $X(w_n) = x_n$ und $w_n \rightarrow w \in \bar{B}$ erfüllt. Aufgrund der Stetigkeit von X auf \bar{B} folgt, dass $X(w) = x$. Da es sich bei X allerdings um eine offene Abbildung handelt, also eine offene Menge aus B auf eine offene Menge abbildet, muss $w \in \partial B$ gelten. Dadurch erhalten wir die Inklusion $\partial X(B) \subset X(\partial B)$.

Angenommen es gelte i). Dann folgt aus dem Jordan'schen Kurvensatz, dass $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in die beschränkte, einfach zusammenhängende innere Komponente $I(\Gamma)$ und die unbeschränkte äußere Komponente $A(\Gamma)$ zerlegt wird. Wegen

$$\partial X(B) \subset X(\partial B) \subset \Gamma = \partial A(\Gamma)$$

ergibt sich

$$\overline{X(B)} \cap A(\Gamma) = X(B) \cap A(\Gamma).$$

Demnach muss entweder $X(B) \cap A(\Gamma) = A(\Gamma)$ oder $X(B) \cap A(\Gamma) = \emptyset$ gelten, aber da X stetig ist, bildet es die beschränkte Menge B auf eine beschränkte Bildmenge $X(B)$ ab, d.h. es bleibt nur die Möglichkeit $X(B) \cap A(\Gamma) = \emptyset$. Daraus ergeben sich wiederum die Inklusionen $X(B) \subset I(\Gamma)$ und $X(\partial B) \subset \Gamma = \partial I(\Gamma)$. Setzen wir nun $\hat{B} := I(\Gamma)$, so erkennen wir darin die Bedingung ii) wieder. Wenn wir die eben geführte Argumentation auf diesen Fall anwenden, erhalten wir $\overline{X(B)} \cap I(\Gamma) = X(B) \cap I(\Gamma)$. Folglich erhalten wir daraus $X(B) = I(\Gamma)$ und somit auch $\partial X(B) = \partial I(\Gamma)$.

Wir werden nun die Injektivität von X mittels Widerspruch nachweisen: Angenommen X wäre nicht injektiv, dann existieren mindestens zwei Punkte $w_1, w_2 \in B$, welche auf den selben Punkt $\tilde{x} \in I(\Gamma)$ abgebildet werden. Insbesondere wird dabei jeder Bogen β in B , welcher w_1 und w_2 miteinander verbindet, durch X auf eine geschlossene Kurve $\gamma \subset I(\Gamma)$ abgebildet, weil $X(w_1) = \tilde{x} = X(w_2)$ gelten muss. Weiter können wir, da $I(\Gamma)$ einfach zusammenhängend ist, eine Homotopie darauf finden, welche γ auf den Punkt \tilde{x} zusammenzieht. Zudem sehen wir mittels des Fundamentalsatzes über die inverse Abbildung ein, dass es sich bei X um einen lokalen Diffeomorphismus in B handelt. Somit stellt jede Kurve in der Homotopie das Bild eines Bogens, welcher w_1 und w_2 verbindet, dar und diese Kurve muss geschlossen sein sofern sich ihr Bild in hinreichender Nähe zu \tilde{x} befindet. Dies liefert einen Widerspruch zur Annahme. \square

In der folgenden Definition wollen wir noch den Begriff der Konvexität für Jordan-Konturen einführen:

Definition 5.12

Wir bezeichnen eine **Jordan-Kontur** $\Gamma \subset \Omega_R$ als **konvex in** Ω_R , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Die Jordan-Kontur Γ stimmt mit dem Rand $\partial\mathcal{H}(\Gamma)$ ihrer konvexen Hülle überein und das Innere $I(\Gamma)$ der Jordan-Kontur entspricht dem offenen Kern der konvexen Hülle $\mathcal{H}(\Gamma)$.
- ii) Die Jordan-Kurve wird durch eine Geodätische $Y(t, s_0, y_0)$, $t \in [0, \tau(y_0, s_0)]$ für den Parameter $s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in die geschlossenen Jordan-Bögen

$$\Gamma^-(y_0, s_0) := \Gamma \cap \mathcal{R}(s_0, y_0), \quad \Gamma^+(y_0, s_0) := \overline{\Gamma \setminus \mathcal{R}(s_0, y_0)}$$

aufgeteilt, so dass $Y(\cdot, s_0, y_0)$ das Innere $I(\Gamma)$ in einem inneren Punkt $Y_0 \in I(\Gamma)$ trifft. Diese Bögen treffen sich dabei an ihren Endpunkten auf der Geodätischen $Y(\cdot, s_0, y_0)$.

Wir haben in Kapitel 4 durch das Maximumprinzip von W. Jäger und H. Kaul eine Eindeutigkeitsaussage für harmonische Abbildungen hergeleitet. Jetzt nutzen wir die Hilfsmittel, welche wir uns in diesem Kapitel geschaffen haben, um ein Kriterium für die Eineindeutigkeit einer Lösung des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ zu bestimmen. Dies geschieht indem wir die Methode von H. Kneser [11] für die euklidische Ebene auf den Fall unserer Riemann'schen Metrik übertragen.

Theorem 5.13

Seien die konvexe Jordan-Kontur $\Gamma \subset \Omega_R$ als auch die topologische Randfunktion $\Phi : \partial B \rightarrow \Gamma \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^2)$ gegeben. Dann liefert jede Lösung $X = X(u, v)$ des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ einen Homöomorphismus von \overline{B} auf $\overline{I(\Gamma)}$ und einen C^2 -Diffeomorphismus von B auf $I(\Gamma)$.

Beweis: Zunächst beachten wir, dass aufgrund von Theorem 5.9 und Definition 5.12 i)

$$X(\overline{B}) \subset \mathcal{H}(\Phi(\partial B)) \subset \mathcal{H}(\Gamma) = \Gamma \cup I(\Gamma)$$

gilt und insbesondere wird auch die Inklusion

$$X(B) \subset I(\Gamma) \tag{5.30}$$

erfüllt, wobei wir die zweite Inklusion mittels Widerspruch prüfen: Angenommen (5.30) gelte nicht, dann existiert ein Punkt $(u_0, v_0) \in B$ mit $Y_0 = X(u_0, v_0) \in \Gamma$. Weiter erhalten wir aus der Definition von $\mathcal{H}(\Gamma)$, dass es ein $y_0 \in \partial\Omega_R$ und ein $s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gibt, so dass $\Gamma \subset \mathcal{R}(s_0, y_0)$ gilt und unter Beachtung von Definition 5.12 Y_0 in $\Gamma \cap \partial\mathcal{R}(s_0, y_0)$ enthalten ist. Wenn wir die entsprechende Winkelhilfsfunktion $\psi(u, v)$ betrachten, welche

$$\psi(u, v) := \Psi(X(u, v), y_0) \leq s_0, \quad (u, v) \in \overline{B}$$

mit

$$\psi(u_0, v_0) = \Psi(Y_0, y_0) = s_0$$

erfüllt, dann haben wir dadurch die Hilfsfunktion ψ für alle $(u, v) \in \overline{B}$ mit s_0 beschränkt. Weiter können wir auch Lemma 5.6 wieder anwenden, um so zu sehen, dass ψ dem Hopf'schen Maximumprinzip ([17], Kapitel VI, §1) unterliegt und wir daher den Widerspruch $\psi(u, v) \equiv s_0$ für alle $(u, v) \in \overline{B}$ erhalten.

Ebenfalls durch Widerspruch wollen wir nachweisen, dass die Jacobische von $X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v))$ nirgendwo auf B verschwindet, d.h.

$$\frac{\partial(x^1(u, v), x^2(u, v))}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u^1(u, v) & x_v^1(u, v) \\ x_u^2(u, v) & x_v^2(u, v) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in B. \quad (5.31)$$

Angenommen es existiert ein Punkt $(u_0, v_0) \in B$ mit $Y_0 := X(u_0, v_0) \in \Omega_R$, so dass $X_u(u_0, v_0)$ und $X_v(u_0, v_0)$ linear abhängig sind. Dann können wir einen Einheitsvektor Z_0 finden, der orthogonal zu ihnen steht. Also erfüllt Z_0 die Eigenschaften

$$\begin{aligned} Z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \langle Z_0, Z_0 \rangle_{X(u_0, v_0)} = 1 \quad \text{und} \\ \langle Z_0, X_u(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)} = 0 = \langle Z_0, X_v(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ferner betrachten wir im festen Punkt Y_0 den Gauß'schen geodätischen Rahmen (5.8) zu einem beliebigem Randpunkt $y_0 \in \partial\Omega_R$:

$$\left\{ \widehat{Y}_t(Y_0, y_0), \frac{\widehat{Y}_s(Y_0, y_0)}{\sqrt{\widehat{G}(X, y_0)}} \right\}.$$

Da die geodätischen Vektorfelder aufgrund ihrer Konstruktion stetig von den Randpunkten abhängen und ihre Ableitungen, wie in (5.5) zu sehen, nicht verschwinden, folgt, dass der geodätische Rahmen bei Y_0 eine positiv-orientierte, stetige Rotation durchführt, wenn y_0 den Rand $\partial\Omega_R$ einmal in positiver Richtung entlangläuft. Wir können also ein $y_0 \in \partial\Omega_R$ wählen, welches

$$\frac{\widehat{Y}_s(Y_0, y_0)}{\sqrt{\widehat{G}(X, y_0)}} = Z_0$$

erfüllt. Durch Kombination dieser Gleichung mit (5.20) erhalten wir

$$\nabla\Psi(Y_0, y_0) = \frac{\widehat{Y}_s(Y_0, y_0)}{\widehat{G}(X, y_0)} = \lambda Z_0, \quad \lambda := \frac{1}{\sqrt{\widehat{G}(Y_0, y_0)}}$$

als Darstellung für den Gradienten der Winkelfunktion Ψ . Mit Hilfe dieser Darstellung für Ψ und (5.32) berechnen wir nun die ersten Ableitungen von $\psi(u, v)$ an der Stelle (u_0, v_0) :

$$\psi_u(u_0, v_0) = \langle \nabla\Psi(Y_0, y_0), X_u(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)} = \lambda \langle Z_0, X_u(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)} = 0,$$

$$\psi_v(u_0, v_0) = \langle \nabla\Psi(Y_0, y_0), X_v(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)} = \lambda \langle Z_0, X_v(u_0, v_0) \rangle_{X(u_0, v_0)} = 0.$$

Daraus folgt für die partielle Differentialgleichung (5.22) aus Lemma 5.6:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\psi(u_0, v_0) \\ &= \nabla^2\Psi(Y_0, y_0) [X_u(u_0, v_0), X_u(u_0, v_0)] + \nabla^2\Psi(Y_0, y_0) [X_v(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)]. \end{aligned}$$

Also ist die Hesse-Matrix der pseudoharmonischen Funktion ψ indefinit und ψ_u, ψ_v verschwinden an der Stelle (u_0, v_0) . Dies bedeutet, dass wir in der Nähe von (u_0, v_0) einen Sattelpunkt haben müssen. Lemma 5.10 liefert uns die Aussage, dass sich dieses Verhalten bis zum Rand fortsetzen lässt und man dort mindestens vier Punkte für ψ erhält, die das Level s_0 besitzen. Dies steht allerdings im Widerspruch zum Randverhalten der Funktion ψ nach Definition 5.12 ii), wonach ψ nur zwei Punkte für das Level s_0 besitzt. Also gilt die Ungleichheit (5.31).

Wir sind nun in der Lage das Monodromieprinzip aus Lemma 5.11 anzuwenden, welches uns zusammen mit der topologischen Randfunktion Φ die Injektivität von $X : \bar{B} \rightarrow \overline{I(\Gamma)}$ liefert. Zudem lässt sich die Vorgehensweise des Beweises von Lemma 5.11 auf die Lösung X des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ übertragen und wir erhalten daher auch hier die Aussage $X(B) = I(\Gamma)$. Somit ist X eine bijektive Abbildung. Ebenso erhalten wir die lokale Diffeomorphie von X aus dem genannten Beweis. Dies führt wiederum zusammen mit der Bijektivität zur Schlussfolgerung, dass X auch einen Diffeomorphismus darstellt. Da es sich bei X um eine stetige, bijektive, offene Abbildung und \bar{B} sowie $\overline{I(\Gamma)} = X(\bar{B})$ um metrische – und daher insbesondere topologische – Räume handelt, ergibt sich schließlich die Aussage bezüglich des Homöomorphismus. \square

Wir wollen im Folgenden noch kurz zeigen, dass man unter der Forderung einer moderaten Abweichung der Riemann'schen Metrik von der euklidischen Metrik und einer $C^{2+\alpha}$ -diffeomorphen Randfunktion Φ für die Hölder-Konstante $\alpha \in (0, 1)$, dieses Resultat sogar zu einem $C^{2+\alpha}$ -Diffeomorphismus auf \bar{B} ausweiten kann. Hierzu erklären wir zunächst die

Definition 5.14

Die Riemann'sche Metrik ds^2 aus (1.1)-(1.4) besitzt eine **moderate Abweichung von der euklidischen Metrik in Ω_R bzgl. der Konstanten $c \in (0, \frac{1}{2R})$** , wenn die Christoffel-Symbole der folgenden Abschätzung genügen:

$$\sqrt{\sum_{l=1}^2 \left(\sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^l(X) \xi^j \xi^k \right)^2} \leq c \|\xi\|^2 \quad \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall X = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.33)$$

Entsprechend dieser Definition erweitern wir den Begriff einer Lösung X des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}(\Omega_R, ds^2, \Phi)$ für Riemann'sche Metriken mit einer moderaten Abweichung von der euklidischen Metrik indem wir dies wie folgt notieren:

Definition 5.15

Sei ds^2 eine Riemann'sche Metrik gemäß (1.1)-(1.4) auf dem stabilen Riemann'schen Gebiet Ω_R , $R \in (0, \infty)$, nach Definition 5.1 mit einer moderaten Abweichung $c \in (0, \frac{1}{2R})$ gemäß Definition 5.14. Wir bezeichnen die Funktion

$$X = X(u, v) : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^{2+\alpha}(\bar{B}, \mathbb{R}^2)$$

mit

$$|X(u, v)| \leq R \quad \forall (u, v) \in \overline{B}$$

als eine **Lösung des Dirichlet-Problems** $\mathcal{P}^\alpha(\Omega_R, ds^2, c, \Phi)$ bezüglich einer Randfunktion

$$\Phi = \Phi(u, v) \in C^{2+\alpha}(\partial B, \mathbb{R}^2), \quad |\Phi(u, v)| \leq R \quad \forall (u, v) \in \partial B,$$

wenn X harmonisch ist, d.h. das nichtlineare elliptische System (1.6) mit (1.7) erfüllt, sowie die Randbedingung

$$X(u, v) = \Phi(u, v) \quad \forall (u, v) \in \partial B$$

erfüllt.

Mit Hilfe dieser Begrifflichkeiten können wir uns nun dem Beweis der vorherigen Aussage bezüglich einer $C^{2+\alpha}$ -diffeomorphen Lösung des Dirichlet-Problems mit einer moderaten Abweichung von der euklidischen Metrik widmen:

Theorem 5.16

Die Riemann'sche Metrik (1.1)-(1.4) besitze eine moderate Abweichung (5.33) durch die Konstante $c \in \left(0, \frac{1}{2R}\right)$ von der euklidischen Metrik. Weiter sei die $C^{2+\alpha}(\partial B, \partial\Omega_R)$ -diffeomorphe Randfunktion $\Phi : \partial B \rightarrow \partial\Omega_R$ gegeben. Dann existiert ein $C^{2+\alpha}(\overline{B}, \overline{\Omega_R})$ -Diffeomorphismus

$$X = X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v)) : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega_R},$$

welcher eine Lösung des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}^\alpha(\Omega_R, ds^2, c, \Phi)$ darstellt.

Beweis: Wir wollen hier davon ausgehen, dass eine Lösung X des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}^\alpha(\Omega_R, ds^2, c, \Phi)$ existiert ([18], Kapitel XII, §4). Dann erklären wir die Hilfsfunktion

$$\eta(u, v) := |X(u, v)|^2, \quad (u, v) \in \overline{B}$$

und berechnen für diese

$$\Delta\eta(u, v) = \nabla(2X(u, v) \cdot \nabla X(u, v)) = 2\left(|\nabla X(u, v)|^2 + X(u, v) \cdot \Delta X(u, v)\right) \geq 0,$$

da X harmonisch ist. Somit erfüllt η zusammen mit dem elliptischen partiellen Differentialoperator Δ das Hopf'sche Randpunktlema ([17], Kapitel VI, §1, Hilfssatz 2) und liefert daher für die Ableitung in Richtung der äußeren Normale ν von B :

$$0 < \frac{d}{d\nu}\eta(u, v) = 2X(u, v) \cdot \frac{d}{d\nu}X(u, v), \quad (u, v) \in \partial B. \quad (5.34)$$

Indem wir zu Polarkoordinaten $w = re^{i\theta}$ übergehen, überführen wir die Ungleichung (5.34) in die Form:

$$0 < \frac{d}{dr}\eta(w) = 2X(w)X_r(w), \quad w \in \partial B. \quad (5.35)$$

Angenommen, es gelte für ein beliebiges $w_0 = e^{i\vartheta_0} \in \partial B$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_r^1(w_0) & x_{\vartheta}^1(w_0) \\ x_r^2(w_0) & x_{\vartheta}^2(w_0) \end{vmatrix} = 0$$

für die Funktionaldeterminante. Dies würde bedeuten, dass $X_r(w_0), X_{\vartheta}(w_0)$ linear abhängig sind. Weiter wissen wir, da es sich bei Ω_R um einen Kreis handelt, dass das Maximum von $\eta(w)$ am Rand angenommen wird. Somit wird es insbesondere am Randpunkt $\eta(w_0) = \eta(\vartheta_0)$ angenommen. Folglich erhalten wir

$$\eta_{\vartheta}(\vartheta_0) = 2X(\vartheta_0)X_{\vartheta}(\vartheta_0) = 0.$$

Zusammengefasst bedeutet dies, dass $X(w_0) \perp X_{\vartheta}(w_0)$ sowie $X(w_0) \not\perp X_r(w_0)$ gilt, allerdings stellt dies einen Widerspruch zur linearen Abhängigkeit von $X_r(w_0)$ und $X_{\vartheta}(w_0)$ dar. Demzufolge muss

$$\begin{vmatrix} x_r^1(w) & x_{\vartheta}^1(w) \\ x_r^2(w) & x_{\vartheta}^2(w) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall w \in \partial B$$

erfüllt sein. Diese Ungleichung überführen wir nun wieder in unsere ursprünglichen Koordinaten (u, v) und erhalten daraus:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_u^1(u, v) & x_v^1(u, v) \\ x_u^2(u, v) & x_v^2(u, v) \end{vmatrix} &= x_u^1(u, v)x_v^2(u, v) - x_v^1(u, v)x_u^2(u, v) \\ &= \left(x_r^1(w) \cos(\vartheta) - x_{\vartheta}^1(w) \sin(\vartheta)\right) \left(x_r^2(w) \sin(\vartheta) + x_{\vartheta}^2(w) \cos(\vartheta)\right) \\ &\quad - \left(x_r^1(w) \sin(\vartheta) + x_{\vartheta}^1(w) \cos(\vartheta)\right) \left(x_r^2(w) \cos(\vartheta) - x_{\vartheta}^2(w) \sin(\vartheta)\right) \\ &= \left(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)\right) \left(x_r^1(w)x_{\vartheta}^2(w) - x_{\vartheta}^1(w)x_r^2(w)\right) \\ &= \begin{vmatrix} x_r^1(w) & x_{\vartheta}^1(w) \\ x_r^2(w) & x_{\vartheta}^2(w) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \partial B. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Als Nächstes weisen wir nach, dass die Jacobische auch in B nicht verschwindet. Dafür wenden wir die Argumente aus dem Beweis von Theorem 5.13 an. Allerdings gilt es dabei zu beachten, dass wir dabei nicht das Zentrum $y_0 \in \partial\Omega_R$ unseres geodätischen Zentralfeldes aus Lemma 5.2 berühren, da die Überdeckung dort eine Singularität aufweist. Daher betrachten wir nur den Teil von Ω_R , welcher für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ außerhalb der ε -Umgebung der Singularität ist:

$$\Omega_R^{\varepsilon}(y_0) := \{X \in \Omega_R : |X - y_0| > \varepsilon\}.$$

Für dieses Gebiet können wir problemlos die Argumente des Beweises von Theorem 5.13 anwenden, wenn wir noch die Hilfsfunktion ψ entsprechend anpassen zu

$$\psi(u, v) := \Psi(X(u, v), y_0), \quad (u, v) \in \overline{B}^{\varepsilon} := \left\{ (u, v) \in \overline{B} : X(u, v) \in \overline{\Omega_R^{\varepsilon}(y_0)} \right\}.$$

Dadurch erhalten wir dann auch, dass die Jacobische nicht in B verschwindet.

Schließlich ergibt sich die gewünschte Aussage aus dem Monodromieprinzip von Lemma 5.11 analog zum letzten Schritt im Beweis von Theorem 5.13. \square

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch die harmonische Einbettung in die obere Hemisphäre S_R^+ mit Radius $R > 0$ untersuchen. Hierzu betrachten wir die obere Hemisphäre S_R^+ bezüglich des stabilen Riemann'schen Gebietes Ω_R für $0 < R < \infty$ mit Hilfe der Darstellung

$$Z(X) = Z(x^1, x^2) := \left(x^1, x^2, \sqrt{R^2 - |X|^2} \right), \quad X \in \Omega_R. \quad (5.37)$$

Die Differentiation nach x^k liefert

$$Z_{x^k}(X) = \left(\delta_{1k}, \delta_{2k}, -\frac{x^k}{\sqrt{R^2 - |X|^2}} \right), \quad X \in \Omega_R, \quad k = 1, 2, \quad (5.38)$$

woraus wir die Koeffizienten unserer Metrik folgendermaßen bestimmen können:

$$g_{jk} = g_{jk}(X) := Z_{x^j}(X) \cdot Z_{x^k}(X) = \delta_{1j}\delta_{1k} + \delta_{2j}\delta_{2k} + \frac{x^j x^k}{R^2 - |X|^2} = \delta_{jk} + \frac{x^j x^k}{R^2 - |X|^2},$$

$$X \in \Omega_R, \quad j, k = 1, 2. \quad (5.39)$$

Die durch (1.1) und (5.39) bestimmte Metrik $ds^2(R)$ bezeichnen wir im Folgenden als **hemisphärische Metrik**. Das Problem bei dieser Metrik besteht darin, dass sie bei $\partial\Omega_R$ singularär wird. Folglich erhalten wir aus Theorem 5.16 keine globale Existenzaussage mehr. Um dieses Problem zu umgehen, wenden wir uns nochmal der Arbeit [6] von Hildebrandt, Kaul und Widman zu, welche wir im Kapitel 3 teilweise genutzt haben, um eine schwache Lösbarkeitsaussage herzuleiten. Wie in Bemerkung 1 bereits für den zweidimensionalen Fall angedeutet, kann man die Existenzaussage von Theorem 3.5 auch auf harmonische Abbildungen übertragen und dabei auch bessere Regularitäten erhalten. Hildebrandt, Kaul und Widman haben in ihrer Arbeit (Theorem 1-4) diese Aussagen auch für den dreidimensionalen Fall einer vollständigen Riemann'schen Mannigfaltigkeit mit einer nichtnegativen oberen Schranke an die Schnittkrümmung nachgewiesen. Da diese Voraussetzungen insbesondere für Hemisphären erfüllt sind, machen wir uns ihre Resultate zunutze, wobei wir auch die $C^{2+\alpha}$ -Regularität für $\alpha \in (0, 1)$ der Lösung X zumindest in B übernehmen können, sofern unsere Mannigfaltigkeiten die hierfür nötige C^3 -Regularität aufweisen (man vergleiche hierzu die Bemerkung zum Theorem 4):

Theorem 5.17

Seien \bar{B} und Ω_R C^3 -Mannigfaltigkeiten. Dann existiert für jede Randfunktion

$$\Phi \in C^0(\partial B, \Omega_R) \text{ mit einer } H_2^1(B, \Omega_R)\text{-Erweiterung} \quad (5.40)$$

eine Lösung

$$X = X(u, v) : \bar{B} \longrightarrow \Omega_R \in C^{2+\alpha}(B, \Omega_R) \cap C^0(\bar{B}, \Omega_R) \quad (5.41)$$

des entsprechenden Dirichlet-Problems $\mathcal{P}^\alpha(\Omega_R, ds^2(R), \Phi)$ bezüglich der hemisphärischen Metrik $ds^2(R)$.

Beweis: Dies folgt aus den Theoremen 1-4 und den dazugehörigen Bemerkungen aus der Arbeit [6] von Hildebrandt, Kaul und Widman. \square

Als Nächstes konstruieren wir eine einfache Überdeckung der Hemisphäre mittels eines Feldes aus Geodätischen, welche von einem beliebigen Äquatorialpunkt

$$Z_{(\vartheta)} := (R \cos(\vartheta), R \sin(\vartheta), 0) \in \partial S_R^+, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad (5.42)$$

ausgehen. Dazu gehen wir vom Großhalbkreis

$$\left(R \cos\left(\frac{t}{R}\right), 0, R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right)^T, \quad t \in (0, R\pi), \quad (5.43)$$

von S_R^+ aus, welcher einen Halbkreis mit Anfangspunkt $Z_0 := (R, 0, 0)$ und Endpunkt $Z_\pi := (-R, 0, 0)$ bildet. Insbesondere stellt dieser eine Geodätische ohne innere konjugierte Punkte dar. Mittels Drehung um die x^1 - und x^3 -Achse erhalten wir den oberen Rand unserer Hemisphäre über Ω_R als ein Feld von Geodätischen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t, s, \vartheta) &:= D_\vartheta^3 \circ D_s^1 \circ \left(R \cos\left(\frac{t}{R}\right), 0, R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right)^T, \quad t \in (0, R\pi), \\ s &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \vartheta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dabei stellt

$$D_s^1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}, \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.45)$$

die Drehung um den Winkel s an der x^1 -Achse und

$$D_\vartheta^3 := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad (5.46)$$

die Rotation um ϑ an der x^3 -Achse dar. Weiter verkörpere

$$\Pi^3(Z) = \Pi^3(x^1, x^2, x^3) := (x^1, x^2) = X \in \mathbb{R}^2 \quad \forall Z = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \quad (5.47)$$

die Projektion auf die Ebene. Aufgrund des Zusammenspiels der eben beschriebenen Konstruktion mit der Projektion Π^3 folgt, dass es sich bei

$$Y(t, s, \vartheta) := \Pi^3 \circ \mathcal{Z}(t, s, \vartheta), \quad t \in (0, R\pi), \quad s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.48)$$

um ein geodätisches Zentralfeld für die hemisphärische Metrik $ds^2(R)$ handelt. Genauer gesagt, überdeckt dieses Zentralfeld Ω_R einfach für beliebige $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und besitzt das Zentrum $y_0 = \Pi^3(Z_{(\vartheta)}) \in \partial\Omega_R$.

Da wir nun wieder ein geodätisches Zentralfeld zur Verfügung haben, können wir mit

diesem erneut die Begriffe der Geodätischenregion, der konvexen Hülle innerhalb eines stabilen Riemann'schen Gebietes und der geodätischen Winkelfunktion gemäß den Definitionen 5.4 sowie 5.8 einführen. Des Weiteren steht uns für die entsprechende geodätische Winkelhilfsfunktion ψ ebenso das Lemma 5.6 bezüglich pseudoharmonischer Funktionen zur Verfügung. Wenn wir noch den Begriff der konvexen Jordan-Kontur aus Definition 5.12 an unsere aktuelle Metrik $ds^2(R)$ anpassen, so liefert dies die folgende Aussage über harmonische Einbettungen innerhalb der Hemisphäre:

Theorem 5.18

Seien die konvexe Jordan-Kontur $\Gamma \subset \Omega_R$ als auch die topologische Randfunktion $\Phi : \partial B \rightarrow \Gamma$ gemäß (5.40) gegeben. Dann stellt jede Lösung X des Dirichlet-Problems $\mathcal{P}^\alpha(\Omega_R, ds^2(R), \Phi)$ bezüglich der hemisphärischen Metrik $ds^2(R)$ mit der in (5.41) erklärten Regularität eine topologische Abbildung von \bar{B} auf $\bar{I}(\Gamma)$ und einen $C^{2+\alpha}$ -Diffeomorphismus von B auf $I(\Gamma)$ dar.

Beweis: Dieser ergibt sich aus der vorangegangenen Argumentation von Theorem 5.9 bis Theorem 5.13. \square

Als abschließendes Beispiel wollen wir nun harmonische Diffeomorphismen in der Poincaré'schen Halbebene $\mathbb{H} := \{X = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 0\}$ untersuchen. Dabei stützen wir uns auf die entsprechenden Betrachtungen aus [10] von Klingenberg sowie [1] von Blaschke und Leichtweiß. Die Riemann'sche Metrik in diesem Raum besitzt die Form

$$ds^2 := \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(x^2)^2}. \quad (5.49)$$

Da es sich um eine orthogonale Parametrisierung ($g_{12} = 0 = g_{21}$) handelt, berechnet sich die Gauß'sche Krümmung auf der gesamten Halbebene durch

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{g_{22,1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{g_{11,2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) = -\frac{(x^2)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(-\frac{2}{x^2} \right) = -1.$$

Zudem erhalten wir wegen (5.49) für die Christoffel-Symbole die Darstellungen

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{x^2}.$$

Als Nächstes wollen wir den Beweis des folgenden Theorems durchführen (vgl. hierzu [10], Satz 5.1.7):

Theorem 5.19

Die Geodätischen von \mathbb{H} stellen Bögen von euklidischen Kreisen oder Geraden dar, welche orthogonal auf die Gerade $x^2 = 0$ treffen.

Beweis: Aus der Geodätischengleichung

$$\ddot{x}^j + \sum_{k,l=1}^2 \Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l = 0, \quad j = 1, 2,$$

erhalten wir die Gleichungen

$$\ddot{x}^1 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{x}^1 \dot{x}^2 = \ddot{x}^1 - 2 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} = 0 \quad (5.50)$$

und

$$\ddot{x}^2 + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \Gamma_{22}^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2 = \ddot{x}^2 + \frac{(\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2}{x^2} = 0, \quad (5.51)$$

wobei wir mit \dot{x}^j wieder die zeitliche Ableitung von x^j bezeichnen. Es können nun die folgenden beiden Fälle eintreten:

Fall 1: $\dot{x}^1 = 0$

Da somit $x^1 = \text{const.}$ gelten muss, trifft diese Gerade dann orthogonal auf $x^2 = 0$.

Fall 2: $\dot{x}^1 \neq 0$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(X, \dot{X}) &:= \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} \right) \right] = \frac{(x^2)^2}{\dot{x}^1} \left(\frac{\ddot{x}^1}{(x^2)^2} - 2 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{(x^2)^3} \right) = \frac{\ddot{x}^1}{\dot{x}^1} - 2 \frac{\dot{x}^2}{x^2} \\ &\iff \dot{x}^1 \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} \right) \right] = \ddot{x}^1 - 2 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Folglich muss $f(X, \dot{X})$ konstant sein und daher

$$\frac{\dot{x}^1}{(x^2)^2} = \text{const.} = c_1 \neq 0$$

gelten. Dies bringen wir dann in die Form

$$\dot{x}^1 = c_1 (x^2)^2. \quad (5.52)$$

Weiter bestimmen wir mit Hilfe von (5.50) - (5.52) die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{(x^2)^2} \right) &= \frac{2(x^2)^2 [\dot{x}^1 \ddot{x}^1 + \dot{x}^2 \ddot{x}^2] - 2x^2 \dot{x}^2 [(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2]}{(x^2)^4} \\ &= 2 \left[c_1 \left(\ddot{x}^1 - \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} \right) + \frac{\dot{x}^2 \ddot{x}^2 - (\dot{x}^2)^3 (x^2)^{-1}}{(x^2)^2} \right] \\ &= 2 \left[c_1 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} + \frac{\dot{x}^2 [(\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^1)^2] - (\dot{x}^2)^3}{(x^2)^3} \right] = 2c_1 \left[\frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} - \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{x^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}{(x^2)^2} = \text{const.} = c_2 > 0$$

bzw. unter Beachtung von (5.52)

$$\frac{c_2}{c_1^2} = (x^2)^2 + \left(\frac{\dot{x}^2}{c_1 x^2} \right)^2 > 0 \quad (5.53)$$

gelten muss. Des Weiteren erhalten wir aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(x^1 + \frac{\dot{x}^2}{c_1 x^2} \right) = \dot{x}^1 + \frac{\ddot{x}^2 x^2 - (\dot{x}^2)^2}{c_1 (x^2)^2} \stackrel{(5.51)}{=} \dot{x}^1 - \frac{(\dot{x}^1)^2}{c_1 (x^2)^2} \stackrel{(5.52)}{=} 0$$

die Aussage

$$x^1 + \frac{\dot{x}^2}{c_1 x^2} = \text{const.} = c_3 \iff \left(\frac{\dot{x}^2}{c_1 x^2} \right)^2 = (x^1 - c_3)^2.$$

Indem wir diese Gleichung in (5.53) einsetzen, gewinnen wir daraus die Kreisgleichung

$$\frac{c_2}{c_1^2} = (x^2)^2 + (x^1 - c_3)^2,$$

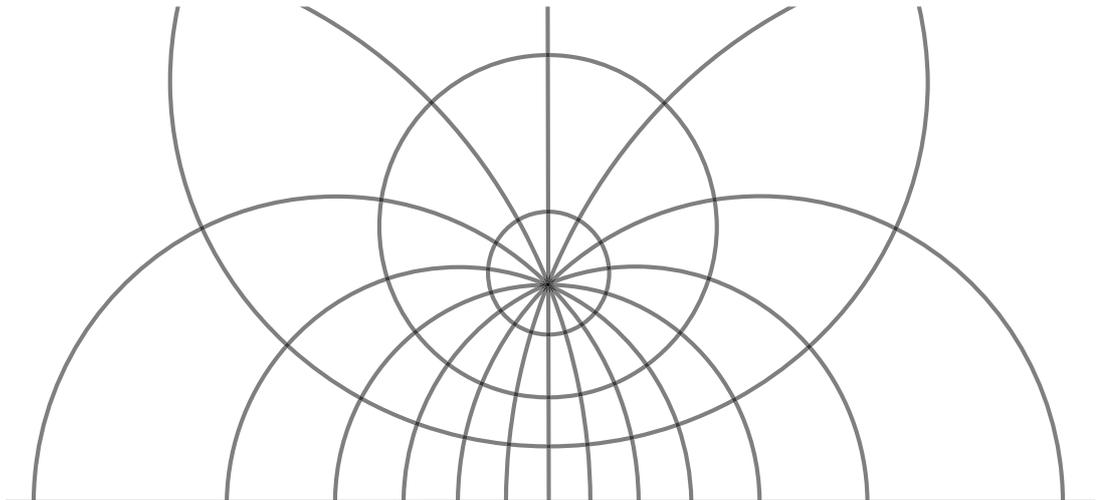
also einen Kreis mit Mittelpunkt $(c_3, 0)$ und Radius $\frac{c_2}{c_1^2}$, welcher orthogonal auf die Gerade $x^2 = 0$ trifft.

□

Aufgrund von Theorem 5.19 bestehen alle Geodätischen der Poincaré'schen Halbebene \mathbb{H} aus Kreisbögen und Strahlen, welche die x^1 -Achse orthogonal treffen. Diese bezeichnen wir als Orthokreise. Zudem erhalten wir aus [1], §§ 81-84, von Blaschke und Leichtweiß, dass die geodätischen Kreisscheiben (nach unserer Beschreibung aus Kapitel 1)

$$\mathcal{K}_R(P) := \{X \in \mathbb{H} : \text{dist}(X, P) \leq R\} \subset \mathbb{H}$$

mit Zentrum $P \in \mathbb{H}$ (im geodätischen Sinne) einen konvexen Rand $\partial\mathcal{K}_R$ besitzen, welcher eine positive geodätische Krümmung aufweist. Weiter wird gezeigt, dass die orthogonalen Trajektorien des Halbkreisbüschels der Orthokreise wieder Kreise sind. Genauer gesagt handelt es sich bei diesen Kreisen um die Berandungen $\partial\mathcal{K}_R$ der geodätischen Kreisscheiben. Führen wir nun den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ aus, so wird die Poincaré'sche Halbebene durch die geodätischen Kreise $\mathcal{K}_R(P)$ ausgeschöpft.



Insbesondere können wir für jeden Randpunkt $y_0 \in \partial\mathcal{K}_R(P)$ ein geodätisches Zentralfeld anlegen, welches von y_0 ausgeht und $\mathcal{K}_R(P)$ einfach überdeckt. Somit besitzt, nach Theorem 1 aus [6], jedes Dirichlet-Problem $\mathcal{P}(\mathbb{H}, ds^2, \Phi)$, dessen Randfunktion Φ in der geodätischen Kreisscheibe $\mathcal{K}_R(P)$ enthalten ist und $R < \frac{\pi}{2\kappa}$ für die obere Schranke $\kappa \geq 0$ an die Gauß'sche Krümmung K von \mathbb{H} erfüllt, eine Lösung $X \in C^2(B, \mathbb{H}) \cap C^0(\overline{B}, \mathbb{H})$, welche in den geodätischen Kreisscheiben $\mathcal{K}_R(P)$ für alle Radien $R > 0$ liegt.

Hiervon ausgehend wenden wir die in Kapitel 5 gezeigten Methoden auf die Lösung X an und erkennen dadurch, dass X die konvexe Hüllen-Eigenschaft aufweist. Dies resultiert schließlich in der Aussage: X stellt einen Diffeomorphismus in B und eine topologische Abbildung auf \overline{B} dar, falls der topologische Rand eine Repräsentation auf eine konvexe Jordan-Kontur Γ darstellt, die im Inneren von $\mathcal{K}_R(P)$ enthalten ist. Diese Aussage kann man als eine Abwandlung von Theorem 5.18 für die Poincaré'sche Halbebene auffassen.

Literatur

- [1] W Blaschke und Kurt Leichtweiß. *Elementare Differentialgeometrie*. Springer, 1973.
- [2] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt und Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*. Springer, 2010.
- [3] David Gilbarg und Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2015.
- [4] Enrico Giusti. *Harmonic Mappings and Minimal Immersion: Lectures given at the 1st Session of Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held at Montecatini, Italy, June 24-July 3, 1984*. Bd. 1161. Springer, 2006.
- [5] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg und Wolfgang Meyer. *Riemannsche Geometrie im Grossen*. Bd. 55. Springer-Verlag, 2006.
- [6] Stefan Hildebrandt, Helmut Kaul und Kjell-Ove Widman. “An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds”. In: *Acta Mathematica* 138.1 (1977), S. 1–16.
- [7] Stefan Hildebrandt und Kjell-Ove Widman. “Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order”. In: *Mathematische Zeitschrift* 142.1 (1975), S. 67–86.
- [8] Willi Jäger und Helmut Kaul. “Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields”. In: *manuscripta mathematica* 28.1-3 (1979), S. 269–291.
- [9] Jürgen Jost. *Harmonic maps between surfaces:(with a special chapter on conformal mappings)*. Bd. 1062. Springer, 2006.
- [10] Wilhelm Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Bd. 107. Springer, 2013.
- [11] Hellmuth Kneser. “Lösung der Aufgabe 41”. In: *Jahresber. Dt. Math.-Vereinigung* 35 (1926), S. 123–124.
- [12] Charles Bradfield Morrey Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer, 1966.
- [13] Charles Bradfield Morrey Jr. “The problem of Plateau on a Riemannian manifold”. In: *Ann. of Math.* 49 (1948), S. 807–851.
- [14] Hukukane Nikaido. *Convex structures and economic theory*. Elsevier, 2016.
- [15] Friedrich Sauvigny. *Analysis: Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden*. Springer-Verlag, 2013.
- [16] Friedrich Sauvigny. “Geometric properties of harmonic mappings in stable Riemannian domains”. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 58.152 (2019).

- [17] Friedrich Sauvigny. *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 1: Grundlagen und Integraldarstellungen*. Springer-Verlag, 2006.
- [18] Friedrich Sauvigny. *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 2: Funktionalanalytische Lösungsmethoden*. Springer-Verlag, 2005.