

# Beschleunigung der Verdichterkennfeldberechnung mithilfe von Methoden des maschinellen Lernens

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektro- und Energiesysteme  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Ingenieurwissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Dmitrij Ivanov**

geboren am 10.11.1983 in Moskau (Russland)

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Klaus Höschler
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) Dieter Bestle
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Marius Swoboda
Tag der mündlichen Prüfung:	1.10.2020

<https://doi.org/10.26127/BTUOpen-5395>

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist das Resultat meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg von Anfang 2016 bis Ende 2018. Die gewonnenen Erkenntnisse wurden im Rahmen des vom Land Brandenburg mit EU-Mitteln geförderten Forschungsvorhabens **Virtuelle Interdisziplinäre Triebwerksauslegung mit Integrativen Verfahren (VITIV)** in enger Zusammenarbeit mit der Firma Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG (RRD) entwickelt.

Maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit hat mein Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) Dieter Bestle beigetragen. Ich möchte ihm für seinen unermüdlichen Einsatz für die Forschung danken, welcher in mir stets den Ansporn weckte über mich hinauszuwachsen. Ich danke ihm ebenfalls für die vielen anregenden Diskussionen, die hervorragende Betreuung und die Zeit, die er in die Korrektur meiner Veröffentlichungen und Vorträge investiert hat. Außerdem möchte ich Prof. Dr.-Ing. Marius Swoboda für die Übernahme des Zweitgutachtens danken. Als Initiator der VIT-Projekte hat er großen Anteil daran, dass junge Wissenschaftler vor und nach mir die Möglichkeit erhalten, ihre Forschung als Brücke zwischen Universität und Industrie akademisch wertvoll und praxisnah zu gestalten. Ich danke weiterhin Prof. Dr.-Ing. Klaus Höschler für die unkomplizierte Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Ein großer Dank gebührt darüber hinaus allen Mitarbeitern des Lehrstuhls, insbesondere Dipl.-Ing. Lutz Anklam für die technische Unterstützung meiner Arbeit auch jenseits der IT und Peggy Fobo für die Hilfestellungen bei den komplexen universitären Verwaltungsvorgängen. Die vergangenen Jahre haben mir gezeigt, wie wertvoll die Gesellschaft meiner Lehrstuhlkollegen war. Ich erinnere mich gerne an lebhafte, fachliche und nicht-fachliche Diskussionen mit Dr.-Ing. Michael Lockan, Dr.-Ing. Ivo Martin und Msc.-Ing. Simon Extra, welche mir oftmals hilfreiche Denkanstöße lieferten und mir neue Motivation verliehen. Ich danke auch meinen Mitstreitern M.Sc. Marco Hendler, M.Sc. Lennard Hartwig, M.Sc. Timo Bielitz und Dipl.-Ing. Christian Boblenz. Besonders danke ich meinem Betreuer Dr.-Ing. Christian Janke von RRD. Als ehemaliger Studienkollege motivierte er mich nach Cottbus zu gehen und war in dieser Zeit nicht nur als guter Betreuer sondern auch als guter Freund für mich da.

Der Weg zur Dissertation hat viel Kraft, Willen und natürlich auch viel Zeit gekostet. Ich danke zuallererst meiner Familie, die mir die Grundlagen meiner akademischen und kulturellen Ausbildung gelegt und mich bedingungslos unterstützt hat. Ich danke ebenfalls meiner Freundin Tina, die mich all die Jahre, welche wir oftmals in unterschiedlichen Städten verbrachten, stets liebevoll unterstützte und mit mir Höhen und Tiefen meisterte. Ich danke auch meinen Freunden, welche mich auf meinem bisherigen Weg, egal ob in Regensburg, Braunschweig, Cottbus, Berlin oder Moskau, begleitet haben. Während meiner Dissertation hat mir euer Zuspruch und die eine oder andere Wander-/Kanutour

geholfen, den Kopf frei zu bekommen.

Ich freue mich auf die kommende Zeit und blicke optimistisch und wohlwollend auf die Zukunft. Um es mit den Worten des Weltraumpioniers Juri Alexejewitsch Gagarin kurz vor dem Aufbruch ins Weltall zu sagen:

„Поехали!“  
(„Los gehts!“)

Berlin, Winter 2020/21

Dmitrij Ivanov



# Kurzfassung

## Beschleunigung der Verdichterkennefeldberechnung mithilfe von Methoden des maschinellen Lernens

**Schlüsselwörter:** Verdichterkennefeld, Aerodynamik, 3D-CFD, Pumpgrenze, Maschinelles Lernen, Support-Vector-Machine, Antwortflächen, Strömungsfeld-Initialisierung, POD

In der heutigen Triebwerksentwicklung ist die Verwendung komplexer und zeitaufwändiger numerischer Strömungssimulationsverfahren (3D-CFD) unerlässlich. Dies gilt auch und insbesondere für den Bereich der Verdichterkennefeldberechnung, welcher viele zeitintensive 3D-CFD Berechnungen benötigt. Dabei sind zur qualitativen Beurteilung eines Verdichtenterwurfs sowohl Betriebspunkte wie, Reiseflug, Start und Landung, hinreichend genau abzubilden, als auch die kritischen, den Verdichterarbeitsbereich limitierenden Betriebsgrenzen Pumpen und Sperren zu detektieren. Bisherige Arbeiten zur automatisierten Verdichterkennefeldberechnung basieren auf strukturierten Berechnungen von verschiedenen Drehzahllinien, auf welchen jeweils isoliert Pump- und Sperrgrenze gesucht werden. Durch die Beschränkung auf einzelne Drehzahlen wird jedoch nicht der gesamte Charakter des Kennefeldes erfasst, so dass unbekannte Betriebsbereiche aus linearer Interpolation abgeleitet werden müssen. Ein zusätzlicher Nachteil solcher auf einzelne Drehzahllinien fixierten Methoden ist ihre geringe Parallelisierbarkeit.

Der Fokus dieser Arbeit liegt daher auf der Entwicklung eines effizienten Verfahrens zur Erfassung des gesamten Verdichterkennefeldes. Die zwei wesentlichen Anforderungen an das Verfahren sind erstens die Reduktion der Anzahl der notwendigen CFD-Berechnungen zur hinreichend genauen Beschreibung des Verdichterkennefeldes sowie zweitens die Beschleunigung jeder einzelnen 3D-CFD-Berechnung. Zu diesem Zweck wird zur Kennefeldberechnung eine Strategie vorgeschlagen, welche sich von der üblichen strukturierten Berechnung einzelner Drehzahllinien löst und stattdessen mit unstrukturierten, zufällig bestimmten Stützstellen arbeitet. Dabei wird ein zweiphasiges Verfahren entwickelt, bei dem zunächst die Pump- und Sperrlinien in ihrer Gesamtheit mit einer iterativen, hoch parallelisierbaren, auf Support-Vector-Machine beruhenden Strategie bestimmt werden. Als nächster Schritt wird mit Methoden der statistischen Versuchsplanung eine ausreichende Dichte von Stützstellen innerhalb der Betriebsgrenzen des Verdichters generiert. Abschließend werden auf Basis aller verwendeten Stützstellen Antwortflächen für Verdichterdruckverhältnis, Wirkungsgrad und Eintrittsmassenstrom aufgebaut.

Zur Reduktion der Rechenzeit jeder einzelnen 3D-CFD Rechnung werden unterschiedliche Methoden zur Erzeugung von Startlösungen betrachtet. In diesem Rahmen werden Initialisierungsansätze aus reduzierten Strömungsmodellen und aus der Superposition von bereits bekannten Strömungslösungen auf Basis der Methode der Proper-Orthogonal-Decomposition (POD) untersucht.

Als Validierung wird abschließend das entwickelte Verfahren zur Kennefeldberechnung in Kombination mit dem POD-Initialisierungsansatz erfolgreich auf die Analyse eines 4.5-stufigen Forschungsverdichters angewendet.

# Abstract

## Acceleration of compressor map computation by utilizing machine learning techniques

**Keywords:** compressor map, aerodynamic, 3D-CFD, surgetine, machine learning, support-vector-machine, response-surface, flowfield-initialization, POD

In modern-day turbo engine development, the usage of complex and time consuming numerical flow simulation methods (3D-CFD) is essential. This especially applies to compressor map computation which require many time-consuming 3D-CFD calculations. For a qualitative assessment of a compressor design, not only the operating points, such as cruise, take-off and landing, must be depicted precisely, but the critical operating limits called surge and choke must be detected. Previous investigations on the automated compressor map computation were based on structured calculations of several speed-lines, for which, each line choke and surge limits are traced separately. Due to the restriction to single speed-lines, however, the entire characteristic of the compressor map is unknown, hence unknown operation points must be derived from linear interpolation. An additional disadvantage of these speed-line based methods is their infeasibility for parallel computing.

The focus of this work is on the development of an efficient process for the acquisition of the entire compressor map. The two main requirements therefore are firstly a reduction of the number of necessary CFD calculations for a sufficiently precise description of the compressor map and secondly, an acceleration of every single 3D-CFD calculation. For this purpose a compressor map computation strategy is proposed, which differs from the standard structured single speed-line approach using instead an unstructured randomly determined samples approach. Hence a two-step process is being developed. In the first step, the entire surge- and choke-line is approximated with an iterative, highly parallelizable strategy based on support-vector-machine. In the second step, statistical Design of Experiments (DoE) methods are used to achieve sufficient density of samples within the operating limits of the compressor. Finally a response-surface method is used to approximate compressor map features like pressure ratio, efficiency and inlet mass flow. To reduce the computation time of each 3D-CFD calculation, different methods of flowfield-initialization are considered. In this context, initialization approaches with reduced-order flow models and superposition of already known flow solutions based on the Proper-Orthogonal-Decomposition (POD) method are investigated.

Finally for validation purposes the developed compressor map computation process combined with the POD-initialization approach is applied to a 4.5-stage research compressor model.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungen und Symbole</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Anforderungen an moderne Triebwerke und ihre Komponenten . . . . .	2
1.2 Historische Entwicklung der Methoden in der Verdichterberechnung . . . .	4
1.3 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Grundlagen und strömungsmechanische Phänomene eines Axialverdichters</b>	<b>11</b>
2.1 Aero-thermodynamische Funktionsweise eines Axialverdichters . . . . .	11
2.2 Strömungsablösung und Verdichtungsstöße an Verdichterschaufeln . . . . .	13
2.3 Betriebsgrenzen eines Axialverdichters . . . . .	15
2.4 Verdichterkennfelder . . . . .	16
<b>3 Numerische Simulation von Turbomaschinenströmungen</b>	<b>21</b>
3.1 Bilanzgleichungen zur Strömungsbeschreibung für Turbomaschinen . . . . .	21
3.1.1 Massenbilanz . . . . .	22
3.1.2 Impulsbilanz . . . . .	24
3.1.3 Energiebilanz . . . . .	28
3.1.4 Strömungsmodellierung und numerische Lösungsverfahren . . . . .	31
3.2 Eine Auswahl verschiedener Strömungslöser . . . . .	35
3.2.1 Korrelationsbasierte Strömungsmodellierung . . . . .	36
3.2.2 Simulationsbasierter zweidimensionaler Euler-Ansatz . . . . .	38
3.2.3 Simulationsbasierte dreidimensionale Strömungsanalyse . . . . .	39
3.3 Versuchsträger für die Methodenentwicklung . . . . .	41
<b>4 Methoden zur iterativen Bestimmung von Verdichterbetriebsgrenzen</b>	<b>43</b>
4.1 Klassifizierung von Betriebszuständen . . . . .	44
4.2 Methoden zur topologischen Trennung zweier Klassen . . . . .	45
4.2.1 Lineare Support Vector Machine Klassifizierung . . . . .	47
4.2.2 Nichtlineare Klassifizierung mit dem Kernel-Trick . . . . .	50
4.3 Approximation der Entscheidungsfront . . . . .	52
4.4 Iterative Bestimmung von Betriebsgrenzen . . . . .	53
4.4.1 Sequentieller Ansatz . . . . .	54
4.4.2 Paralleler linienbasierter Ansatz . . . . .	55

4.4.3	Paralleler flächenbasierter Ansatz . . . . .	57
4.5	Vergleich der Klassifizierungsstrategien . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Approximation von Verdichterkennfeldern mithilfe von Antwortflächen</b>	<b>67</b>
5.1	Grundlagen von Antwortflächenverfahren . . . . .	67
5.1.1	Lineare Regressionsverfahren . . . . .	68
5.1.2	Radiale Basisfunktionen (RBF) . . . . .	70
5.2	Stichprobenergänzung innerhalb der Kennfeldgrenzen . . . . .	72
5.3	Vergleich der Antwortflächengüte anhand einer Kennfeldberechnung mit Meanline . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Beschleunigung der Strömungsanalyse durch geeignete Initialisierungsmethoden</b>	<b>81</b>
6.1	Schätzung der Strömungslösung mit reduzierten Modellen . . . . .	81
6.1.1	Lineare Feldinterpolation mit abgeschätzten Ein- und Austrittsbedingungen . . . . .	82
6.1.2	Feldinterpolation mit zweidimensionalen Strömungsmodellen . . . . .	83
6.2	Schätzung der Startlösung mittels bereits bekannter Strömungslösungen . . . . .	84
6.2.1	Initialisierung mit der Nachbarlösung . . . . .	85
6.2.2	Superposition von Hauptströmungsmoden . . . . .	87
6.3	Bewertung der vorgestellten Strategien . . . . .	92
6.3.1	Initialisierung mit reduzierten Methoden . . . . .	92
6.3.2	Initialisierung mit dem nächsten Nachbarn . . . . .	99
6.3.3	Initialisierung von Strömungen mittels Superposition von Strömungsmoden . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Kennfeldberechnung eines Forschungsverdichters auf der Grundlage von 3D-CFD-Strömungssimulationen</b>	<b>111</b>
7.1	Berechnungsprozess . . . . .	111
7.2	Umsetzung von 3D-CFD-Berechnungen in einer industriellen Analyseumgebung . . . . .	115
7.2.1	Preprocessing . . . . .	116
7.2.2	Processing . . . . .	116
7.2.3	Postprocessing . . . . .	118
7.2.4	Ganzheitliche Umsetzung der Analysekette . . . . .	118
7.3	Diskussion der Ergebnisse der Betriebsgrenzenbestimmung . . . . .	120
7.3.1	Auswertung der Sperrgrenzenbestimmung . . . . .	120
7.3.2	Diskussion der Pumpgrenzenbestimmung . . . . .	122
7.4	Rechenzeiten . . . . .	125
7.5	Strömungsbetrachtungen für ausgewählte Betriebspunkte . . . . .	129
7.6	Gesamtfeldapproximation und Validierung . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>139</b>

<b>Anhang A</b>	<b>Reduzierte Kennfeldgrößen</b>	<b>143</b>
<b>Anhang B</b>	<b>Herleitung der Support Vector Maschine</b>	<b>145</b>
<b>Anhang C</b>	<b>Programme zur Verdichteranalyse</b>	<b>147</b>
C.1	Meanline . . . . .	147
C.2	Throughflow . . . . .	150
C.3	MISES . . . . .	153
C.4	HYDRA . . . . .	155
<b>Anhang D</b>	<b>Ergänzende Bilder</b>	<b>157</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>163</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>171</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>173</b>



# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

1D	eindimensional
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
BTU	Brandenburgische Technische Universität
CAD	Computer-Aided Design (rechnergestütztes Konstruieren)
CFD	Computational Fluid Dynamics (numerische Strömungsberechnung)
CPU	Central Processing Unit (Rechenprozessor eines Computers)
DNS	Direct Numerical Simulation
DoE	Design of Experiments (Versuchsplanung)
DP	Designpunkt bzw. Auslegungspunkt
EV	Eigenvektor
EW	Eigenwert
FEM	Finite-Elemente-Methode
FVM	Finite-Volumen-Methode
GPDS	Gas-Path-Design-System
KV	Kontrollvolumen
ML	Maschinelles Lernen
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NASA	National Aeronautics and Space Administration
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes Equations (Reynolds gemittelte Navier-



	Stokes-Gleichungen)
RBF	Radiale Basisfunktionen
RSM	Response Surface Methode
SVD	Singular Value Decomposition (Singularwertzerlegung)
SVM	Support Vector Machine
TF	Throughflow
TMF	Institut für Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
VSV	Variable Stator Vane (verstellbare Statorschaufel)
XML	Extensible Markup Language

## Mathematische Symbole

$\perp$	Orthogonalität zweier Vektoren
$\hat{\bullet}$	Approximation
$\tilde{\bullet}$	Abbildung einer Größe
$\dot{\bullet}$	Flüsse von Transportgrößen
$\bar{\bullet}$	Mittelwert
$\nabla\bullet$	Nabla-Operator einer skalaren Größe mit $\nabla\bullet = \left[ \frac{\partial\bullet}{\partial x}, \frac{\partial\bullet}{\partial y}, \frac{\partial\bullet}{\partial z} \right]^T$
$\bullet^*$	Optimum
$\partial\bullet$	partielle Änderung von $\bullet$
$\bullet'$	Schwankungsgröße
$D\bullet$	Totales Differential $D\bullet = (\partial\bullet/\partial t) dt + (\partial\bullet/\partial x) dx + (\partial\bullet/\partial y) dy + (\partial\bullet/\partial z) dz$
$\in$	Element eine Menge
$\subset$	Teilmenge
$\cup$	Vereinigung zweier Mengen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{P}$	zulässiger Entwurfsraum für Optimierung
$\forall$	für alle

$\Delta$	Differenz zwischen zwei Größen, Laplace-Operator $\Delta \bullet = \sum_i \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_i^2}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse einer Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Transponierte einer Matrix $\mathbf{A}$

## Lateinische Symbole

$a$	Koeffizient, lokale Schallgeschwindigkeit
$b$	Koeffizient, Offsetwert
$C$	Menge von Kandidatenpunkten
$d$	Abstand
$e, E$	Energie
$f$	analytische Entscheidungsfront
$H$	Hyperebene
$h$	Enthalpie, relative Häufigkeit
$K$	Kernel
$L$	Operator
$M$	Machzahl
$m$	Masse
$N$	Anzahl der Elemente einer Stichprobe
$n$	Drehzahl
$N_{cfd}$	Anzahl der CFD-Iterationen
$N_C$	Anzahl von Kandidatenpunkten
$N_F$	Anzahl von fill-up Punkten
$N_G$	Anzahl der Punkte eines CFD-Gitters, Anzahl der Punkte einer Gesamtmenge
$P$	Leistung
$p$	Druck
$Q$	Wärmefluss
$q$	Wärmestromdichte
$R$	universelle Gaskonstante ( $R=287.058 \text{ J}/(\text{kg K})$ )

$r$	Radius
$S$	Ablösebereich
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$u$	absolute Geschwindigkeitskomponente
$V$	Volumen
$v$	relative Geschwindigkeitskomponente
$w$	Arbeit, Geschwindigkeitskomponenten des rotierenden Bezugssystems
$X$	Stichprobe
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$Y$	Menge von Klassen
$y$	Klasse
$y^+$	normierter Wandabstand
$Z$	Menge von Zustands- bzw. Kenngrößenvektoren

## Griechische Symbole

$\alpha$	Anström- oder Abströmwinkel im Absolutsystem
$\beta$	Anström- oder Abströmwinkel im Relativsystem
$\eta$	Effizienz, Wirkungsgrad, dynamische Zähigkeit
$\gamma$	Verstellwinkel für Schaufeln
$\kappa$	Isentropenexponent für Luft ( $\kappa = 1.4$ )
$\lambda$	Lagrange-Multiplikator, Wärmeleitfähigkeit, Eigenwert
$\mu$	Zählvariable für innere SVM-Iterationen
$\nu$	Zählvariable für äußere SVM-Iterationen, Spalart Variable
$\omega$	Drehzahl, Verlust, Frequenz turbulenter Schwankungsgrößen
$\Phi$	Menge der Feldvektoren
$\pi$	Druckverhältnis
$\psi$	Basisfunktion
$\rho$	Dichte, Breite des Grenzstreifens

X

$\sigma$	Varianz
$\tau$	Schub- bzw. Scherspannung
$\varepsilon$	relativer Fehler
$\varepsilon_K$	Konvergenzscharanke
$\varphi$	Winkel, Strömungsgröße
$\vartheta$	Rotationswinkel im Verdichterkoordinatensystem

## Vektoren und Matrizen

$\varphi$	Schnappschussvektor
$\Psi$	Schnappschussmatrix
$\Sigma$	Diagonalmatrix mit Singulärwerten
$\mathbf{c}$	Kandidatenpunkt, absoluter Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{d}$	Mittelwertvektor aller Schnappschüsse der POD
$\mathbf{L}$	linksseitige orthogonale Basisvektormatrix
$\mathbf{l}$	linksseitiger orthogonaler Basisvektor
$\mathbf{R}$	rechtsseitige orthogonale Basisvektormatrix
$\mathbf{r}$	rechtsseitiger orthogonaler Basisvektor
$\mathbf{u}$	absoluter Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{v}$	relativer Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{w}$	Geschwindigkeitsvektor des rotierenden Koordinatensystems, Normalenvektor
$\mathbf{x}$	Betriebspunkt
$\mathbf{z}$	Zustands- bzw. Kenngrößenvektor

## Indizes

$a, A$	Austritt
$DP$	Design- bzw. Auslegungspunkt
$e, E$	Eintritt

$G$	Gesamt, Gehäuse
$i, j, k, l, m, n$	Zählindizes
$N$	Nabe
$P$	Pumpen
$r$	reduzierte Größen, relativ
$S$	Sperren
$t$	totale Größe
$x, r, \vartheta$	Zylinderkoordinaten im Verdichtersystem
$x, y, z$	kartesische Koordinaten

# 1 Einleitung

Unser Zeitalter ist geprägt von unbegrenzter Individualmobilität für beinahe jede Gesellschaftsschicht in Industrie und Schwellenländern. Einer der Hauptzweige dieser Entwicklung ist der zunehmende Flugverkehr. Diese Zunahme wirkt sich negativ auf die Umwelt aus. Durch den Ausstoß von Schadstoffen wie z.B. Stickstoffoxide werden bestehende Probleme in Form von globaler Erwärmung, Klimazonenverlagerungen, Umweltkatastrophen und Klimamigration verstärkt. Definierte Klimaziele können daher nur erreicht werden, wenn der Ausstoß von Schadstoffen reduziert wird. Da es zur Zeit keine serienreife Alternative zu kerosinbetriebenen Triebwerken in der zivilen Luftfahrt gibt, ist eine der wenigen Stellschrauben die Optimierung der Leistung von Triebwerken unter dem Gesichtspunkt der Reduktion des Schadstoffausstoßes bei gleichbleibender oder höherer Leistung.

Der Entwicklungsprozess von Triebwerken ist heutzutage dominiert von hochmoderner Computertechnologie sowie immer komplexer werdenden Algorithmen und dadurch steigender Anforderungen an Mensch und Maschine. Zum Erreichen höherer Wirkungsgrade müssen immer komplexere Strömungs-, Verbrennungs-, Steuerungs- und Materialmodelle analysiert werden, welche numerisch sehr zeitaufwändig sind, so dass Berechnungen sogar auf großen Computer-Clustern Tage dauern können. Gleichzeitig befindet sich die Forschung in der Industrie unter ständigem Druck, getrieben von chronischem Zeitmangel und Konkurrenz, so dass lange Berechnungszeiten sich negativ auf die Wettbewerbsfähigkeit auswirken können. Aus diesem Grund müssen Ideen formuliert werden, welche innerhalb tolerierbarer Zeitfenster hinreichend detailreiche Analysen und zielführende Optimierungen ermöglichen. Parallel zum Anstieg der Komplexität der Systeme fallen durch die Digitalisierung aller Dinge große Mengen von Daten an, welche zum Teil nicht mehr für den Menschen analysierbar sind, jedoch zur effektiven Verbesserung von Systemen genutzt werden können.

Die Verwendung großer Informationsmengen und Extraktion von Schlussfolgerungen resultierte in einem neuen wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Gravitationspunkt mit neuen Forschungsrichtungen, welche sich innerhalb der letzten Jahre zu facettenreichen und beliebten Themen entwickelt haben: Das maschinelle Lernen (ML). Diese Bezeichnung, welche heutzutage im gleichen Atemzug mit künstlicher Intelligenz und Industrie 4.0 genannt wird, kann vereinfacht als ein Oberbegriff für die «künstliche» Generierung von Wissen aus Erfahrungen verstanden werden, wobei es sich bei Erfahrungen gewöhnlich um Systemdaten und bei Wissen um Möglichkeiten der Interpolation oder Vorhersage handelt. Somit beinhaltet maschinelles Lernen viele bereits etablierte Methoden wie Regression, Interpolation, Hauptkomponentenanalyse und weitere.

In dieser Arbeit soll der industriellen Forderung nach schnellen und hinreichend exakten Berechnungsmethoden mit den Werkzeugen des maschinellen Lernens Rechnung getragen werden. Zu diesem Zweck werden insbesondere zwei Teilbereiche des ML genauer beleuchtet, die Regression und die Klassifikation. Der erste Teilbereich erscheint in Anwendungen der Luft- und Raumfahrt oftmals als eine Art datenbasiertes Regressionsmodell bzw. Antwortflächenmodell, welches in diesem Bereich auch als Ersatzmodell (engl. surrogate modelling) bekannt ist. Ersatzmodelle finden eine populäre Verwendung in der Optimierung von komplexen Systemen, da diese basierend auf einigen wenigen kostspieligen bekannten Datensätzen eine Approximation der physikalischen Größen unbekannter Datensätze erlaubt. Dieser Ansatz wird hier aufgegriffen, um numerisch aufwändige Strömungssimulationen zu verarbeiten und mit den generierten Ersatzmodellen neue Simulationen zu vereinfachen.

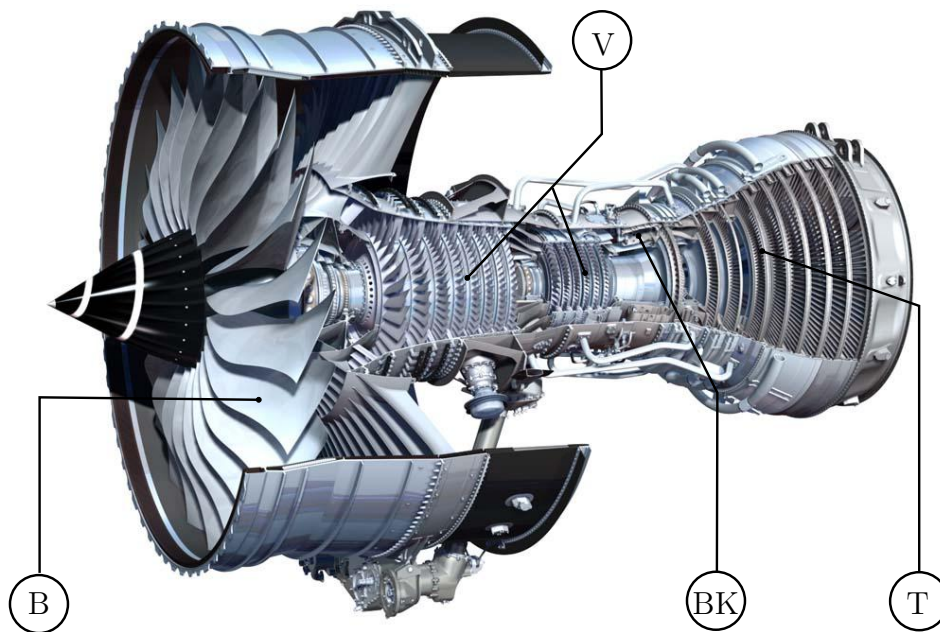
Ein weiteres Teilgebiet des maschinellen Lernens ist die Klassifizierung. Hierbei werden Datensätze mit bestimmten Attributen versehen, welche eine Zuordnung zu einer bestimmten Klasse ermöglichen. Mit Methoden der Klassifizierung können anschließend unbekannte Datensätze einer bekannten Klasse zugeordnet werden. Die dazu notwendigen Werkzeuge des maschinellen Lernens sind u.a. Neuronale Netzwerke, Support Vector Machines, Entscheidungsbäume und weitere. Der an ML interessierte Leser sei an dieser Stelle auf einschlägige Literatur von SCHOELKOPF UND SMOLA (2001), DUDA U. A. (2004), VAPNIK (1995) verwiesen. Die Stärke der Methode des ML besteht hauptsächlich darin, aus großen Datenmengen Schlussfolgerungen für hochkomplexe, nichtlineare Zusammenhänge zu ziehen. Ein Nachteil dieser Methoden ist der Bedarf von immensen Datenmengen, welche zum einen generiert werden und außerdem sinnvoll sein müssen<sup>1</sup>. In vielen industriellen Anwendungen sind nur wenige Datensätze vorhanden, weil die Generierung dieser Daten sehr teuer und zeitaufwändig ist, so dass die Wahl von neuen zu bestimmenden Daten sinnvoll getroffen werden muss. Daher liegt der Fokus dieser Arbeit auch auf der Entwicklung von ML-Methoden, welche, basierend auf Wissen aus kleinen Datensätzen, eine sinnvolle Erschließung neuer Datensätze ermöglichen.

## 1.1 Anforderungen an moderne Triebwerke und ihre Komponenten

Das in der zivilen Luftfahrt hauptsächlich eingesetzte Triebwerk ist das Turbofan-Triebwerk. Im deutschen Sprachgebrauch wird dieses auch als Bläser- bzw. Bypasstriebwerk bezeichnet. Der Turbofan ist eine Wärmekraftmaschine und gehört zur Gattung der Turbomaschinen. Im Gegensatz zu den Kolbenhub-Motoren, bei welchen der typische Kreisprozess aus Verdichtung, Verbrennung und Expansion zyklisch in einem abgeschlossenen System durchgeführt und die aus diesem Prozess entnommene Arbeit hubweise abgegeben

---

<sup>1</sup>Aus der Analyse von großen Datenmengen und der Extraktion von gehaltvollen Informationen ist ein eigener Forschungsschwerpunkt, das Data-Mining, entstanden



**Abb.1.1:** Schnittdarstellung eines modernen Rolls-Royce Turbofan-Triebwerks der Familie TRENT mit Bläser (B), Mitteldruckverdichter, Hochdruckverdichter (V), Brennkammer (BK) sowie Hoch- und Mitteldruckturbine (T) (Quelle: Rolls-Royce-Webseite)

wird, leisten Turbomaschinen (lat. turbare = drehen) eine kontinuierliche Arbeit durch kontinuierlich rotierende Schaufeln.

Zu den Kernkomponenten eines Turbofan-Triebwerks zählen Bläser (Fan), Verdichter<sup>2</sup>, Rohr- oder Ringbrennkammer und Turbine<sup>3</sup>, siehe Abb. 1.1. Die Einheit aus Verdichter, Brennkammer und Turbine wird als Kerntriebwerk bezeichnet.

Im Betrieb wird die durch das Triebwerk eingesaugte Luft in zwei Ströme aufgeteilt, den Mantelstrom und den Kernstrom. Der Großteil (>80%) geht durch den Bläser in den Mantelstrom und der Rest strömt in das Kerntriebwerk. Die großen Luftmengen im Mantelstrom werden durch den Fan beschleunigt und sorgen für den größten Teil des Vortriebs. Im Kerntriebwerk findet der tatsächliche Wärmekraftmaschinenprozess statt, wobei die im Verdichter komprimierte Luft unter Zugabe von Kerosin in der Brennkammer verbrannt und anschließend in der Turbine entspannt wird. Die so angetriebene Turbine ist durch koaxiale Wellen mit dem Verdichter und dem Bläser verbunden und treibt diese an.

Im Laufe der Entwicklung der Luftfahrtindustrie fand eine ständige Weiterentwicklung aller technischen Komponenten statt, um einerseits die Leistung der Triebwerke zu erhöhen und andererseits aus zunächst kommerziellen und seit den 90er Jahren auch umwelttechnischen Gründen den Treibstoffverbrauch zu senken. Jede Triebwerkskomponente ist technisch komplex und bildet ihrerseits eigene Forschungs- und Untersuchungsschwerpunkte. Die Optimierung und der Entwurf verlangt multidisziplinäre Ansätze zur Lösung

<sup>2</sup>In modernen Turbofan-Triebwerken besteht der Verdichter aus voneinander mechanisch entkoppelten Hoch-, Mittel- und Niederdruckverdichtersegmenten

<sup>3</sup>Analog zum Verdichter besitzen auch Turbinen Hoch-, Mittel- und Niederdrucksegmente

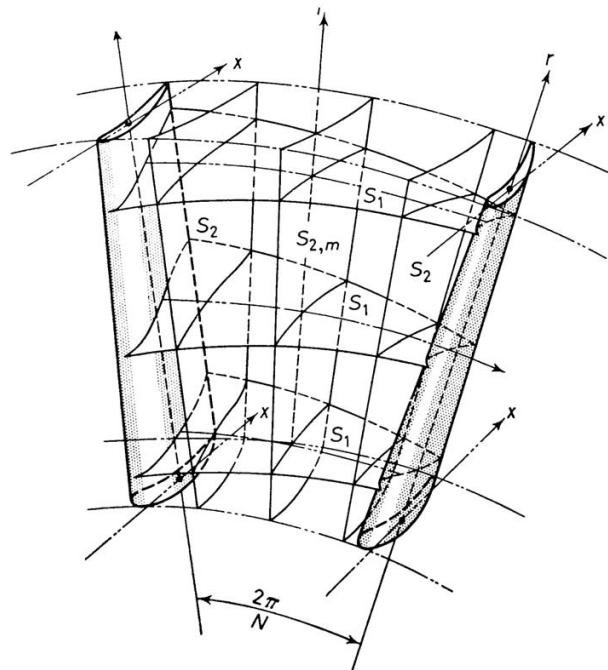


von Strömungs-, Struktur- und Materialproblemen, welche maßgeblich die Leistung und Lebensdauer beeinflussen und limitieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das Segment Hochdruckverdichter betrachtet, wobei die Aerodynamik der Verdichterströmung im Fokus der Analysen steht. Folglich werden Funktionsweise und Besonderheiten dieses Teilgebiets ausführlich erläutert.

Speziell in der Verdichterentwicklung ist das Garantieren eines stabilen Betriebs unerlässlich, da ein Axialverdichter in einem offenen System gegen einen hohen Gegendruck in der Brennkammer arbeiten muss und eine Fehlfunktion zum Zusammenbruch der gesamten Kerntriebwerksfunktion führen kann. Zu diesem Zweck muss die dreidimensionale, drallbehaftete Strömungsstruktur und die Interaktion mit den Verdichterschaufeln verstanden und realistisch abgebildet werden, um die Leistung bzw. auch die Stabilität eines Entwurfs im späteren Betrieb zu gewährleisten. Die Abbildung strömungsmechanischer Prozesse findet mittels numerischer Methoden statt, welche numerische Strömungsanalyse (engl. Computational Fluid Dynamics, CFD) genannt wird. Durch die Lösung des diskretisierten physikalischen Strömungsmodells, auch Navier-Stokes-Gleichungen genannt, können stationäre oder instationäre dreidimensionale Geschwindigkeits-, Druck- und Dichtefelder bestimmt werden, welche die tatsächlichen Felder hinreichend detailliert approximieren. Wie in der Einleitung bereits erwähnt, müssen diese Auswertungen möglichst schnell und effizient durchgeführt werden.

## 1.2 Historische Entwicklung der Methoden in der Verdichterberechnung

Obwohl die Fundamente der theoretischen Beschreibung von Turbinen bereits im 18. Jahrhundert durch Leonard Euler durch die allgemeine Eulersche Turbinenhauptgleichung gelegt worden sind, beginnt die historische Entwicklung der Auseinandersetzung mit Turbomaschinen erst etwa 1904 mit der Betrachtung von Dampfturbinen, siehe CUMPSTY UND GREITZER (2004). Grundlegend ist die Beschreibung der ein- und austretenden Fluidströmung in rotierenden Bezugssystemen durch Geschwindigkeitsdreiecke, welche durch die Galileo-Transformation gebildet werden. Dabei galt anfänglich die Annahme, dass die Geschwindigkeiten unabhängig von der Spannweite der Schaufeln sind. Die ersten Impulse in der Luftfahrt zur Entwicklung von luftatmenden Triebwerken wurden ab 1921 durch die experimentellen Arbeiten von Hans von Ohain und Frank Whittle gesetzt. Diese Ära gilt als Geburtsstunde der Triebwerksanalyse. In diesem Stadium wurden von HOWEL (1945) sowie von OL'SHTEIN UND PROTSEROV (1948) Zusammenhänge über Leistung, Effizienz und die Bestimmung von kritischen Zuständen aus der eindimensionalen Energiebilanz und der Eulerschen Turbinenhauptgleichung ermittelt. Es verging wenig Zeit und analytische Betrachtungen reichten nicht mehr aus, so dass die entwickelten Formeln um Korrekturfaktoren bzw. Korrelationen erweitert wurden, welche aus experimentellen Untersuchungen gewonnen wurden. Durch diese Erweiterung stieg die Qualität der Verdichteranalyse beträchtlich.



**Abb. 1.2:** Einteilung der Verdichterströmung nach WU (1952) in zwei orthogonale Ebenen, die Radialebene  $S_1$  (engl. blade-to-blade) und die Meridionalebene  $S_2$

Durch Zunahme der Betrachtung von Geschwindigkeits- und Druckgradienten in Spannweitenrichtung der rotierenden Schaufeln und des verstärkten Entwicklungsfortschritts in der Numerik entwickelten sich zunächst zweidimensionale Ansätze in den 50er-Jahren, welche Schaufeldesign nicht nur im Schaufelprofil, sondern auch Variationen in Spannweitenrichtung erlaubten. Auch hier fußten die dazu verwendeten empirischen Korrelationen auf Experimenten. Ein richtungsweisender Schritt zur Modellierung und zum Verständnis der Strömung in Turbomaschinen wurde durch die revolutionäre Betrachtungsweise von WU (1952) getan. In dieser Betrachtungsweise wurde die Strömung in zwei orthogonale Ebenen unterteilt, die Meridionalebene  $S_2$  und die Radialebene  $S_1$  (auch Gitterebene genannt), siehe Abb. 1.2. Diese Unterteilung manifestiert sich bis in die heutige Zeit, wobei im Allgemeinen Vereinfachungen dieser Theorie getroffen werden. Zu den bekanntesten daraus resultierenden Ansätzen gehört die Throughflow-Methode, welche auf der  $S_2$ -Ebene angewendet wird. Derivate von Throughflow sind das Stromlinienkrümmungsverfahren nach NOVAK (1967) und andere Verfahren von FROST (1972) oder DIXON (2004).

Alternative Ansätze zur Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes in einer Verdichterkaskade entstanden aus der Potenzialtheorie: Durch räumliche Abbildung des analytischen Geschwindigkeitspotenzialfeldes eines umströmten rotierenden Zylinders auf ein Flügelprofil konnten Geschwindigkeiten für die gesamte Verdichterkaskade approximiert werden. Während in der Tragflügelentwicklung diese Methode erfolgreich Anwendung fand, gab es in der Turbomaschinenentwicklung nur wenige bekannte Anwendungen, wie die Arbeit von MÜFTUOGLU (1966). Bedingt durch die komplexen, geometrischen Formen der Schaufeln und die Limitierung der Gültigkeit auf langsame Strömungen konnte sich diese

Methode nicht durchsetzen.

In den 90er Jahren folgte die nächste Stufe der Verdichteranalyse basierend auf dreidimensionaler Strömungsberechnung und der Berücksichtigung bzw. Modellierung von Übergängen von rotierenden zu nicht rotierenden Schaufeln. Für die dreidimensionale Strömungsberechnung, auch 3D-CFD genannt, wird das untersuchte Kontrollvolumen mit sehr feinen Rechengittern modelliert, auf welchen Energie-, Impuls- und Massenerhaltungsgleichungen sowie zusätzliche Betrachtungen der Turbulenzgrößen räumlich und zeitlich diskretisiert werden. Für die Übergänge zwischen rotierenden und nicht rotierenden Systemen wurde das Konzept der Mischebenen (engl. mixing planes) eingeführt. Dabei werden alle Feldgrößen am Austritt aus einem rotierenden System über den Umfang gemittelt und an das stromabliegende System weitergegeben, siehe DENTON (1978). Eine Weiterentwicklung dieses Ansatzes fand durch die Modellierung von Schubspannungen statt, welche sich bei der stationären Betrachtung der instationären Vermischung ergeben, siehe ADAMCZYK (1985), sowie durch die Erweiterung um aus experimentellen Daten gewonnener Korrelationen. Somit konnte die Genauigkeit der stationären Berechnung immer mehr an die instationäre Realität angepasst werden. Weitere Methoden zur Auslegung eines mehrstufigen Verdichters mit Verwendung von 3D-CFD-Rechnungen einzelner Verdichterstufen und deren anschließende axiale Auffädung (engl. stage-stacking) wurden von ALDI U. A. (2014) und BURGUBURU (2011) entwickelt.

Durch immer schnellere Computer und größere Speicherkapazitäten können heutzutage mit 3D-CFD zahlreiche dreidimensionale Erscheinungen in Turbomaschinen wie Sekundärströmungen, Kompressibilitätseffekte und millimetergroße Spaltströmungen zwischen Schaufeln und Wänden untersucht werden. An dieser Stelle ist zu betonen, dass trotz der leistungsfähigen Rechenkerne (engl. CPU) 3D-CFD-Berechnungen noch immer sehr zeitaufwändig und teuer sind, so dass je nach Komplexität des angenommenen Strömungsmodells Rechenzeiten von Stunden bis Wochen anfallen können. Dieser Umstand zwingt die Entwickler zur Verwendung von weniger detaillierten Modellen für den Vorentwurf neuer Triebwerke. Zu diesem Zweck kommen sowohl eindimensionale Methoden als auch die S1- und S2-Methoden zum Einsatz, welche durch ständige Erweiterungen bis zum heutigen Tag das Rückgrat der Verdichterentwicklung in der Triebwerksindustrie bilden. Zur Entwicklung neuer Triebwerkkomponenten wie Verdichter sind Variationen und Festlegungen verschiedener Entwurfparameter der Schaufel- und Strömungskanalgeometrie notwendig, wobei bis vor einigen Jahren viele Designs händisch ausgewertet werden mussten. Durch die Verwendung der Optimierungstheorie und der eindimensionalen Mittelschnittsrechnung konnten Verdichter erstmalig automatisch auf geforderte Leistungskriterien optimiert werden, siehe KESKIN (2007). Dieser Entwicklung folgte die Optimierung mit zweidimensionalen Methoden zur quasi-dreidimensionalen Schaufelauslegung durch DUTTA (2011), HINZ (2012). Weitere Ansätze zur Verdichterauslegung mit ein- und zweidimensionalen Methoden sowie der Bildung und Bestimmung von notwendigen Korrelationen sind in Arbeiten von DU UND LÉONARD (2011) und MIKHAILOVA U. A. (2016) zu finden. In der Arbeit von PÖHLMAN (2015) wurden Ansätze zur Kopplung von Methoden verschiedener Genauigkeit und der Interpolation und Regression von unbekanntem Betriebspunkten auf Basis von bereits bekannten Daten untersucht.

Trotz der bis dahin erreichten bahnbrechenden Ergebnisse ist der Nachteil der erweiterten reduzierten Strömungsmodelle die Abhängigkeit von notwendigen Korrelationen, welche mühsam aus zusätzlichen einzelnen Untersuchungen ermittelt und anschließend mit Kennzahlen verallgemeinert werden müssen. Ein alternativer Ansatz rückte Anfang der 2000er in den wissenschaftlichen Fokus, die Verwendung von Ersatzmodellen (engl. Reduced Order Models bzw. Surrogate Models). Es wurden anhand bestehender aerodynamischer Datensätze Antwortflächen erstellt, welche in der Lage waren, unbekannte Strömungszustände hinreichend genau zu approximieren. Eine in der Tragflügeloptimierung intensiv untersuchte Methode ist die Singulärwertzerlegung (SVD) oder auch POD (engl. Proper Orthogonal Decomposition). Diese ursprünglich aus der Bildanalyse bekannte Methode, siehe SIROVICH (1985), verwendet im Entwurfsraum verteilte Datensätze, welche auch Snapshots genannt werden. Jeder Datensatz ist dabei ein in einem Vektor zusammengefasstes Strömungsfeld. Anhand einer Matrix, bestehend aus der Menge aller betrachteten Snapshots, wird dann eine Singulärwertzerlegung durchgeführt, so dass dominante Strömungsmoden identifiziert werden können, vgl. ZIMMERMANN UND GÖRTZ (2010). Die entstandenen Moden können dann superponiert werden, um neue Strömungsformen zu approximieren. Die Wichtungsfaktoren sind wiederum analytische Funktionen von Entwurfparametern. Während im Bereich der Außenaerodynamik von Flugzeugen viele Arbeiten zu diesem Thema veröffentlicht wurden, sind in der Anwendung auf die Verdichteranalyse nur wenige Arbeiten erschienen, z.B. JANKE (2017).

Ein weiterer Forschungszweig, welcher ebenfalls in den vergangenen Jahren Popularität in der technischen Anwendung gewonnen hatte, war die Methode des maschinellen Lernens. Obwohl die theoretischen Grundlagen in den 1950er- 60er gelegt wurden, erlebte das maschinelle Lernen mit zunehmenden Digitalisierung unserer Gesellschaft eine Renaissance. Besondere Bedeutung spielten hier neuronale Netzwerke und Support Vector Machines. Künstliche neuronale Netzwerke mimen in vereinfachter Weise die Funktionalität der Neuronen im menschlichen Gehirn nach. Neuronen besitzen mehrere Eingänge und einen Ausgang. Wird der innerhalb des Neurons festgelegte Schwellenwert durch die Summe der Eingangssignale erreicht, so «feuert» das Neuron und gibt einen Impuls als Ausgangswert heraus. Ein Verbund aus miteinander verbundenen Neuronen kann dann mithilfe von bekannten Ein- und Ausgangssignalen trainiert werden, so dass als Resultat unbekanntem Eingangssignalen plausible bzw. folgerichtige Ausgangssignale zugeordnet werden können. Im Laufe der Zeit wurden mehrschichtige Neuronenkonstrukte entwickelt, welche komplexe, nichtlineare Probleme lösen konnten. Im Bereich der Berechnung von Turbomaschinen, insbesondere des Verdichters, konnten neuronale Netzwerke verwendet werden, um anhand einer Reihe von experimentellen Versuchsdaten die Verdichterleistung für unbekannte Drehzahlen vorherzusagen, siehe GHORBANIAN UND GHOLAMREZAEI (2016) oder FEI U. A. (2016).

Eine weitere Methode des maschinellen Lernens ist die Methode der Support Vector Machines (SVM), welche aus den 1960er-Jahren durch Vladimir Naumowitsch Vapnik bekannt ist (vgl. VAPNIK (1995)). Vereinfacht gesprochen können mithilfe von SVM in einem vorgegebenen Parameterraum auftretende Ereignisse an bestimmten Positionen in topologische Klassen unterteilt werden. Auf Basis dieser Unterteilung können Ereignisse

an neuen unbekanntenen Positionen richtig vorhergesagt werden. Im technischen Bereich eignet sich diese Methode, um Betriebsgrenzen von mechanischen Systemen zu approximieren. Eine Anwendung der SVM im Bereich der Radialverdichter zur Bestimmung von Pumpgrenzen<sup>4</sup> wird in Arbeiten von SODEMANN U. A. (2006) vorgestellt.

Das große Potenzial der Anwendung des maschinellen Lernens, insbesondere des «Deep Learning», wurde früh in der Kommunikations- und IT-Branche erkannt und bildet heutzutage einen neuen mächtigen Industriezweig. Es wird von Unternehmen wie Google, Apple, IBM, Facebook u.v.m. zur Entwicklung von künstlicher Intelligenz oder Bild- und Spracherkennung verwendet. In technischen Anwendungen findet künstliche Intelligenz ebenfalls bereits Verwendung. So werden beispielsweise neuronale Netzwerke verwendet, um Materialparameter für komplexe Werkstoffe zu schätzen, vgl. GUBERNATIS UND LOOKMAN (2018), oder um Auftriebsverteilungen auf Tragflügeln zu berechnen, THUE-REY U. A. (2020). Die Möglichkeiten auf diesen Gebieten sind noch längst nicht ausgeschöpft, so dass aktuell zahlreiche neue Forschungsgebiete zur Anwendung von künstlicher Intelligenz auf technische Problemstellungen entstehen.

### 1.3 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt dargelegt, bieten Methoden des maschinellen Lernens neue Möglichkeiten, komplexe Problemstellungen zu lösen. In dieser Arbeit werden daher Konzepte von ML auf das Problem der Verdichterkennfeldberechnung angewendet. Zur Erfassung eines Kennfeldes müssen einerseits Betriebsgrenzen aufgespürt und andererseits der von ihnen eingeschlossene Betriebsbereich hinreichend genau aufgelöst werden. Zur Bestimmung der Betriebsgrenzen eines Verdichters sind numerisch sehr zeitaufwändige dreidimensionale Strömungsanalysen notwendig, so dass die Reduktion der Anzahl der benötigten Rechnungen bei der Betriebsgrenzensuche und die Reduktion der benötigten Rechenzeit die maßgebende Zielstellung dieser Arbeit sind. Die Arbeit lässt sich thematisch in vier Teile untergliedern: In Kapitel 2 werden dem Leser zunächst Grundlagen von Axialverdichtern sowie deren Betriebsgrenzen bedingt durch Strömungsphänomene wie Pumpen und Sperren vermittelt. Dem folgt eine ausführliche Einführung in die numerische Strömungsmechanik mit dem Fokus auf die Besonderheiten der Verdichterströmung in Kapitel 3.

Zur Reduktion der Anzahl der Rechnungen für die Betriebsgrenzensuche werden die Methoden der Support Vector Machine (SVM) und der Antwortflächen (AF) verwendet. Das Prinzip von SVM wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt und es wird ausführlich auf die Anpassung des SVM-Prozesses auf das zu lösende Problem der Verdichterkennfelderfassung eingegangen. Erläuterungen zu der Methode der Antwortflächen erfolgen in Kapitel 5. Der aus diesen Bausteinen entwickelte Prozess zur Verdichterkennfeldapproximation mit dem Akronym S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R (**S**trategy for **C**ompressor **M**ap **C**omputation with

---

<sup>4</sup>Pumpen ist ein strömungsmechanisches Phänomen in Turbomaschinen, welches den Druckaufbau zusammenbrechen lässt. Für eine ausführliche Erklärung dieses Phänomens siehe Kapitel 2.

Automatized **L**imit **L**ine **E**xploration and **T**opology **R**econstruction) wird anhand von eindimensionalen Verdichtermodellen validiert. Es wird gezeigt, dass diese Anwendung hohes Parallelisierungspotenzial aufweist und daher mit vielen gleichzeitigen Strömungsanalysen nur einige wenige iterative Schritte zur Bestimmung von Betriebsgrenzen und zur Approximation des gesamten Verdichterkennfelds notwendig sind.

Zur Reduktion der Rechenzeiten der einzelnen Strömungsanalysen werden in Kapitel 6 zwei grundsätzliche Ansätze betrachtet. Im ersten Ansatz werden vereinfachte ein- und zweidimensionale Strömungsmodelle verwendet und dann zur Initialisierung der komplexen dreidimensionalen Strömungsanalyse verwendet. In diesem Rahmen wird kurz auf die Grundlagen der einfachen Strömungsmodelle sowie die Initialisierungsansätze eingegangen. Im zweiten Ansatz werden aus bereits bekannten Strömungslösungen mithilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) neue Lösungen rekombiniert. Die vorgeschlagenen Ansätze werden an einem dreidimensionalen 4.5-stufigen Verdichtermodell getestet und die Ergebnisse miteinander verglichen.

In Kapitel 7 wird von S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R und SVD-Initialisierung mit einem industriellen CFD Prozess gekoppelt und zur Kennfeldberechnung eines Forschungsverdichters mit 3D-CFD verwendet. Es wird gezeigt, dass der vorgestellte Ansatz eine effektive, ganzheitliche und genaue Approximation des Kennfeldes erlaubt.



# 2 Grundlagen und strömungsmechanische Phänomene eines Axialverdichters

Zum Verständnis der in dieser Arbeit formulierten Zielstellung, der Bestimmung von Verdichter kennfeldern, bedarf es zunächst einem Verständnis für die Funktionsweise und der Besonderheiten von Axialverdichtern in Turbofan-Triebwerken, weshalb zunächst die Funktionsweise skizziert wird. Im Weiteren werden die strömungsmechanischen Vorgänge innerhalb eines Verdichters erklärt, wobei der besondere Fokus auf den Phänomenen der Strömungsablösung und Verdichtungsstöße liegt. Das Auftreten dieser Strömungsphänomene hat einen dominanten Einfluss auf Stabilität und Leistung sowie auf die Betriebsgrenzen des Verdichters. Anschließend werden ein physikalischer Zusammenhang zwischen Verdichter kennfeld und Betriebsgrenzen hergestellt und Kenngrößen eingeführt, welche das Verdichter kennfeld charakterisieren. In diesem Rahmen wird eine neuartige, vom Standard abweichende dreidimensionale Darstellungsweise von Verdichter kennfeldern vorgestellt, welche als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen in dieser Arbeit dient.

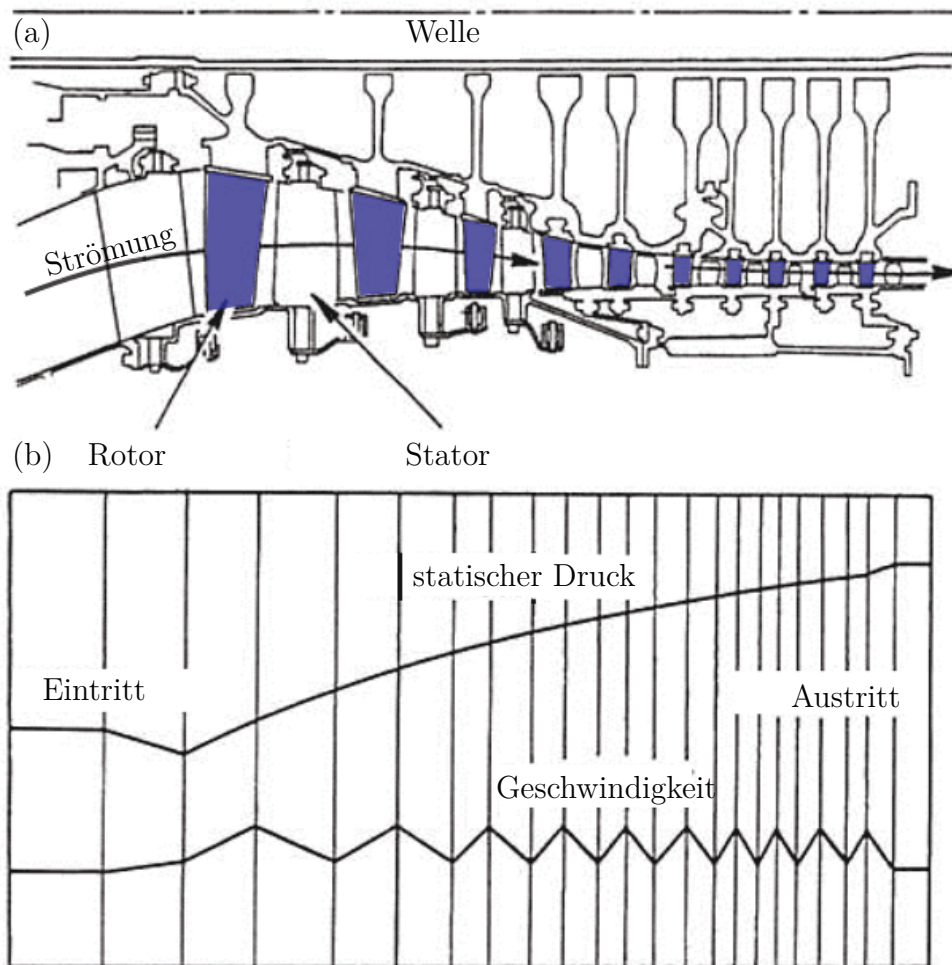
## 2.1 Aero-thermodynamische Funktionsweise eines Axialverdichters

Der axiale Turboverdichter ist ein offenes System, in dem ein Teil der vom Triebwerk angesaugten Luft verdichtet und der Brennkammer zugeführt wird. Ein Axialverdichter besteht in der Regel aus einer oder mehreren koaxialen Wellen, welche mehrere mit Schaufeln bestückte Scheiben (Rotorscheiben) tragen, und fest montierten, ebenfalls mit Schaufeln bestückten Scheiben (Statorscheiben). Im Allgemeinen werden Rotor- und Statorscheiben paarweise hintereinander angeordnet. Eine Einheit aus Rotor und Stator wird auch Verdichterstufe genannt. Die Schaufeln auf den jeweiligen Scheiben haben tragflügelähnliche Formen, wobei der zwischen zwei Schaufeln eingeschlossene Raum, auch Schaufelpassage genannt, eine diffusorförmige Kontur bildet.

Die Verdichtung innerhalb eines Axialverdichters findet durch Erhöhung des Totaldrucks durch Übertragung von Wellenarbeit über die Rotorschaukeln auf das Arbeitsfluid statt.



Die stark drallbehaftete Strömung am Rotoraustritt wird durch den stromab liegenden Stator wieder axial ausrichtet, wobei durch die diffusorartigen Schaufelpassagen eine Erhöhung des statischen Drucks verursacht wird. Das maximale Verdichtungsverhältnis von statischem Austritts- zu Eintrittsdruck ist bei einer Axialstufe auf  $p_A/p_E \leq 2$  limitiert, weshalb mehrere Stufen in Reihe geschaltet werden müssen, um die üblichen Verdichtungsverhältnisse von 40 bis 60 zu erreichen. Der prinzipielle Aufbau eines Verdichters ist in Abb. 2.1a skizziert und der Verlauf der stufenweisen Druckerhöhung durch einen mehrstufigen Verdichter in Abb. 2.1b dargestellt.



**Abb. 2.1:** Prinzipieller Aufbau eines Axialverdichters (a) sowie Anteile jeder Verdichterstufe an der Druckerhöhung (b) in axiale Richtung, nach ROLLS-ROYCE (1996)

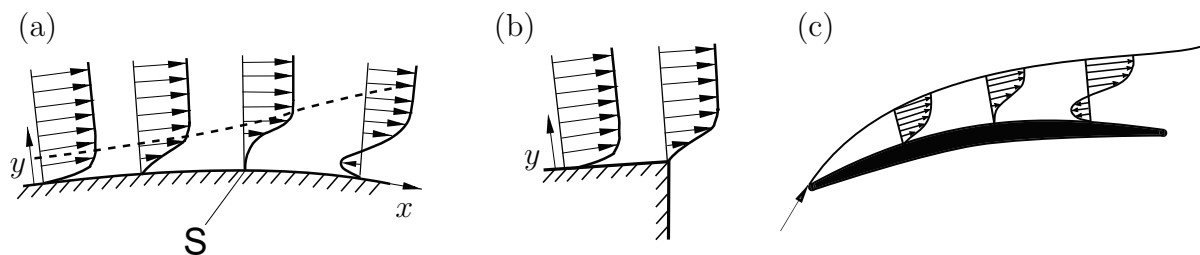
Die Übertragung der Wellenarbeit auf das Fluid ist maßgeblich durch verschiedene Strömungsphänomene beeinträchtigt. Die Strömung innerhalb der Schaufelpassagen ist dominiert sowohl von Grenzschicht- und Wirbeleinflüssen als auch von Kompressibilitätseffekten und besitzt einen komplexen dreidimensionalen Charakter. Das Verständnis und die Vorhersage dieser ist für einen sicheren und effektiven Verdichterbetrieb unerlässlich. Ein detailliertes Eingehen auf alle vorherrschenden Strömungsphänomene würde den Rahmen

dieser Arbeit sprengen, weshalb auf umfangreiche Darstellungen von CUMPSTY (2004), BRÄUNLING (2014) sowie GBADEBO U. A. (2005) verwiesen wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf zwei der dominantesten Effekte eingegangen, die der Strömungsablösung und der Verdichtungsstöße.

## 2.2 Strömungsablösung und Verdichtungsstöße an Verdichterschaufeln

Die Strömungsablösung ist ein Phänomen, welches aus der Tragflügelumströmung bekannt ist. Es handelt sich um ein Grenzschichtphänomen, welches vorrangig bei Verzögerung von Strömungen entlang von diffusorartigen Konturen oder der Existenz eines in Strömungsrichtung positiven Druckgradienten auftritt. Das Strömungsfeld um einen über- und durchströmten Körper lässt sich nach Ludwig Prandtl in zwei Bereiche unterteilen, den wirbelfreien Außenbereich und den sehr schmalen wirbelbehafteten Grenzschichtbereich. Der Druck im Grenzschichtbereich wird dabei von der Außenströmung aufgeprägt. Wird eine Strömung entlang einer Kontur verzögert, so wandelt sich in der Außenströmung gemäß der Bernoullischen Gleichung, nach z.B. SCHADE UND KUNZ (2007), die kinetische Energie in Druckenergie um, wodurch sich in Strömungsrichtung ein positiver Druckgradient ausbildet. Im Grenzschichtbereich reicht, durch die Wirkung der Zähigkeit, die kinetische Energie nicht aus, um den Druckgradienten zu überwinden. Als unmittelbare Folge kommt es zu einem Stillstand der Fluidteilchen in der Grenzschicht und anschließender Bewegung entgegen der Hauptströmung. Dieses Bewegungsmuster, dargestellt in Abb. 2.2a, führt zu einer Ablösung der Strömung von der Kontur. Der Punkt  $S$ , an dem die Strömung sich von der Kontur ablöst, wird im Zweidimensionalen Ablösepunkt und im Dreidimensionalen Ablöselinie genannt.

Eine weitere Form der Ablösung ist der Strömungsabriss. Dieser kommt dann vor, wenn eine Strömung aufgrund ihrer Trägheit nicht mehr der Kontur folgen kann, z.B. am stumpfen Heck eines LKW oder einer stark angestellten umströmten Platte, vgl. Abb. 2.2b.



**Abb. 2.2:** Strömungsablösung aufgrund eines positiven Druckgradienten (a), Strömungsabrisses an einer Kante (b), sowie einer Kombination beider Phänomene an einer angeströmten Verdichterschaufel (c)

In beiden Fällen bildet sich ein großes Totwassergebiet, in welchem die Strömung ungeordnet ist. Die Unordnung in der Bewegung bewirkt aufgrund der Zähigkeit eine erhöhte

Dissipation<sup>1</sup> innerhalb der Strömung. Weiterhin entspricht der Druck in dem Totwassergebiet ungefähr dem statischen Druck der ungestörten Strömung. Bei Tragflügeln tritt die Ablösung im Allgemeinen auf der gewölbten Saugseite auf, auf welcher gemäß Tragflügeltheorie der statische Druck geringer sein muss als der der ungestörten Anströmung, damit Auftrieb erzeugt werden kann. Folglich verdrängt bei Ablösung die Totwasserblase die Gebiete geringeren Drucks von der Tragfläche, was zur Minderung oder sogar zum Zusammenbruch des Auftriebs führt. Der Zusammenbruch des Auftriebs wird in der Luftfahrt als «Stall» bezeichnet. Die Zusammenhänge aus der Tragflügeltheorie gelten natürlich auch für Turbomaschinen. Eine Strömungsablösung bewirkt bei einer Verdichterschaufel, dass die Arbeit der Welle nicht vollständig oder überhaupt nicht übertragen werden kann und somit die Strömung nicht die notwendige kinetische Energie bzw. Druckerhöhung erfährt. Zur Lokalisierung von Bereichen, an denen die Strömung ablöst oder abreist, wird die Verteilung des Wandschubspannungsvektors

$$\tau_w = \eta \left[ \left. \frac{du_1}{dy} \right|_{Wand}, \left. \frac{du_3}{dy} \right|_{Wand} \right]^T \quad (2.1)$$

verwendet. Löst die Strömung gemäß Abb. 2.2a ab, so bildet sich am Ablösungspunkt im wandnahen Bereich ein Gebiet mit  $du_1/dy = 0$ , bei Rückströmung wird  $du_1/dy$  negativ. An dieser Stelle ist zu sagen, dass bei Turbomaschinenströmungen in Passagen zwischen zwei Schaufeln Ablöseszenarien an Nabe, Gehäuse, Schaufelspitze und Schaufeloberfläche auftreten und komplexe, miteinander interagierende Ablöseblasen und Tütenwirbel bilden. Ein Skizze möglicher Ablöseszenarien in einer Passagenströmung ist im Anhang in Abb. D.1 skizziert.

Ein anderes Phänomen welches, sich dominant auf die Verdichterströmung auswirkt, ist das Auftreten von Verdichtungsstößen. Diese kommen bei überschallschneller Strömung (Machzahl  $M \geq 1$ )<sup>2</sup> in kompressiblen Strömungen vor, d.h. Strömungen, bei welchen die Dichte  $\rho = f(p, T, c)$  als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit, des Drucks und der Temperatur betrachtet werden muss. Bei Luftströmungen können alle Strömungen mit einer Machzahl  $M < 0.2$  als inkompressibel, d.h.  $\rho \neq f(p, T, c)$ , betrachtet werden. Mit steigender Machzahl nehmen die Kompressibilitätseffekte zu, so dass sich die Physik der Strömung ebenfalls ändert. Wird eine kompressible Strömung mit  $M < 1$  durch eine zusammenlaufende Passage (Düse) beschleunigt, so erreicht diese am engsten Querschnitt die kritischen Bedingungen, bei welchen die lokale Geschwindigkeit gleich der lokalen Schallausbreitungsgeschwindigkeit ist und  $M = 1$  gilt. In diesem Fall kommt es zu einem sprungartigen Verdichtungsstoß und die Strömung wird stromab auf  $M < 1$  abgebremst. Folgt einer zusammenlaufenden Passage eine expandierende Passage (Diffusor), kann es zu einer weiteren Beschleunigung der Strömung auf  $M > 1$  kommen, wobei diese dann ebenfalls durch einen Verdichtungsstoß, welcher stromab des engsten Querschnitts liegt, auf  $M < 1$  abgebremst wird. Die Stoßlage ist dabei vom Druckverhältnis vor und hinter

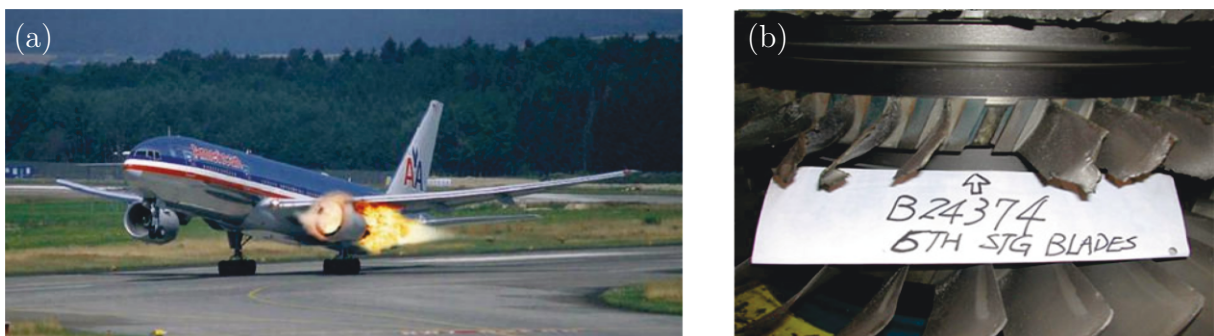
<sup>1</sup>Dissipation bedeutet, dass kinetische Energie der Strömung in Wärme umgewandelt wird und somit nicht mehr in Arbeit umgesetzt werden kann

<sup>2</sup>Mit der Machzahl wird das Verhältnis zwischen lokaler Geschwindigkeit  $c$  und lokaler Schallgeschwindigkeit  $a$  definiert:  $M = c/a$

der Passage abhängig. Charakteristisch für einen Stoß ist der sprunghafte Anstieg des Drucks und der Temperatur sowie eine Erhöhung der Entropie. Stöße sind energetisch ungünstig, da sie durch den Entropieanstieg zu Verlusten führen. Ein weiteres Phänomen, welches im Zusammenhang mit Verdichtungsstößen auftritt, ist die Begrenzung des Durchflusses. Tritt in der gesamten durchströmten Passage ein Verdichtungsstoß auf, so ist der maximale Durchsatz an Arbeitsmedium durch die Passage erreicht und die Passage «sperrt».

## 2.3 Betriebsgrenzen eines Axialverdichters

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Phänomene Ablösung und Verdichtungsstoß können lokal in jeder beliebigen Schaufelpassage im Verdichter stattfinden, weshalb es eine Aufgabe der Entwickler ist, die Schaufeln und somit die Schaufelströmung so anzupassen, dass diese Effekte im Betrieb nicht auftreten oder gemindert werden. Trotzdem können beim Übergang von einem Betriebspunkt zum anderen transiente Vorgänge stattfinden, bei welchen Ablösung und Verdichtungsstöße nicht nur auftreten, sondern auch die Funktionalität des Verdichters beeinflussen. Die zwei wesentlichen Vorgänge sind das Verdichterpumpen und das Verdichtersperren. Beim Verdichterpumpen (engl. surge) kommt es zu einer Strömungsablösung auf mehreren Schaufeln gleichzeitig. Als Folge davon kann die Wellenarbeit nicht mehr auf das Fluid übertragen werden und die Strömung besitzt nicht genügend Energie, um dem hohen Gegendruck stromab in der Brennkammer zu widerstehen. Als Resultat kehrt sich die Strömungsrichtung um und die heißen Gase aus der Brennkammer strömen in den Verdichter zurück, was zu einer Beschädigung bzw. Zerstörung der Schaufeln führen kann. Dieser instationäre Vorgang führt zu einem periodischen Hin- und Herpumpen der heißen Verbrennungsgase durch das gesamte Kerntriebwerk, den so genannten «Pumpstößen». Beispiele von Verdichterpumpen im realen Betrieb sowie die entstehenden Schäden zeigt Abb. 2.3. Das Pumpen kann nur unterbunden werden,



**Abb. 2.3:** Momentaufnahmen von einem Triebwerkspumpen einer Boeing 777 und dem daraus resultierenden oszillierenden Flammenstoß (a), sowie Detailaufnahmen von Schädigungen eines Schaufelsegments nach unkontrolliertem Triebwerkspumpen (b) (Quelle: EL-SAYED (2016))

indem Entlastungsventile geöffnet werden und das Triebwerk entlüftet wird. Das Verdichtersperren (engl. choke) hingegen tritt auf, wenn in der Strömung in den gesamten Schaufelpassagen ein Verdichtungsstoß entsteht. Wie oben bereits erläutert, wird durch einen Verdichtungsstoß der Massendurchsatz limitiert, welcher kurz vor dem Stoß sein Maximum erreicht. Da der Triebwerksschub direkt proportional zum Massendurchsatz ist, wird dieser dadurch ebenfalls limitiert. Als Resultat bewirkt eine Erhöhung der Kraftstoffeinspritzmenge in die Brennkammer keine weitere Schuberrhöhung. Dieser Fall ist dann kritisch, wenn bei einem Flugmanöver in unvorhergesehener Weise mehr Schub benötigt wird, dieser aber durch das Sperren ausbleibt. Zusätzlich kann das Sperren der hinteren Stufen zur Ablösung der Strömung an den vorderen Stufen führen. Bei der Auslegung eines Triebwerks ist es von enormer Bedeutung alle kritischen Sperr- und Pumpbereiche zu kennen, so dass bei allen Betriebspunkten ein Sicherheitsabstand eingehalten werden kann bzw. mit Sensoren ein bereits aufgetretenes Phänomen schnell identifiziert und Gegenmaßnahmen eingeleitet werden können.

## 2.4 Verdichterkennfelder

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Phänomene Verdichterpumpen und Verdichtersperren schließen ein zusammenhängendes Arbeitsgebiet mit den möglichen stabilen Betriebspunkten eines Verdichters ein. Die Darstellung dieser Punkte mit den entsprechenden strömungsmechanischen Kenngrößen wird als Verdichterkennfeld bezeichnet. Wichtige Kenngrößen zur Beschreibung eines Verdichterkennfelds sind das Totaldruckverhältnis

$$\pi = \frac{p_{t,A}}{p_{t,E}} \quad (2.2)$$

zwischen Verdichtereintritt  $p_{t,E}$  und -austritt  $p_{t,A}$ , sowie der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\frac{T_{t,A}}{T_{t,E}} - 1}. \quad (2.3)$$

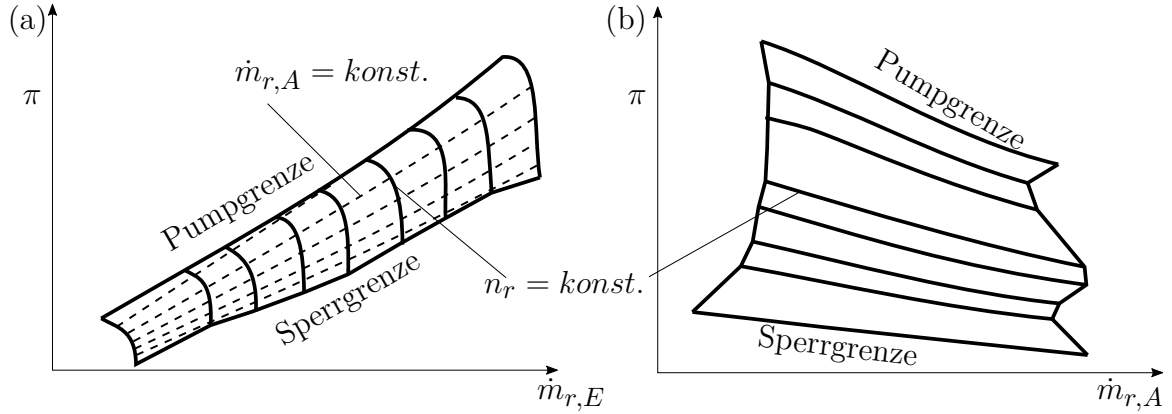
Die Darstellung erfolgt üblicherweise als Funktion von reduziertem Massenstrom am Eintritt

$$\dot{m}_{r,E} = \frac{\dot{m}_E \sqrt{T_{t,E}}}{p_{t,E}} \quad (2.4)$$

und reduzierter Drehzahl

$$n_r = \frac{n}{\sqrt{T_{t,E}}}. \quad (2.5)$$

Dabei sind  $\kappa$  der Isentropenexponent,  $\dot{m}_E$  der Eintrittsmassenstrom,  $n$  die Drehzahl und  $T_{t,E}$  die Totaltemperatur am Eintritt. Alternativ ist statt (2.4) die Verwendung des re-



**Abb. 2.4:** Verdichterkennfeld in (a) klassischer Darstellung mit  $\dot{m}_{r,E}$  als unabhängiger Variable und  $n_r$  als Parameter sowie (b) in Abhängigkeit des Austrittsmassenstroms  $\dot{m}_{r,A}$

duzierten Austrittsmassenstroms

$$\dot{m}_{r,A} = \frac{\dot{m}_A \sqrt{T_{t,A}}}{p_{t,A}} \quad (2.6)$$

als unabhängige Einflussgröße in 3D-CFD-Analysen und in experimentellen Verdichterversuchen üblich. Die Verwendung reduzierter Größen dient zu einem von atmosphärischen Bedingungen unabhängigen Vergleich von Betriebszuständen. Eine detaillierte Erklärung und Herleitung dieser wird im Anhang A durchgeführt.

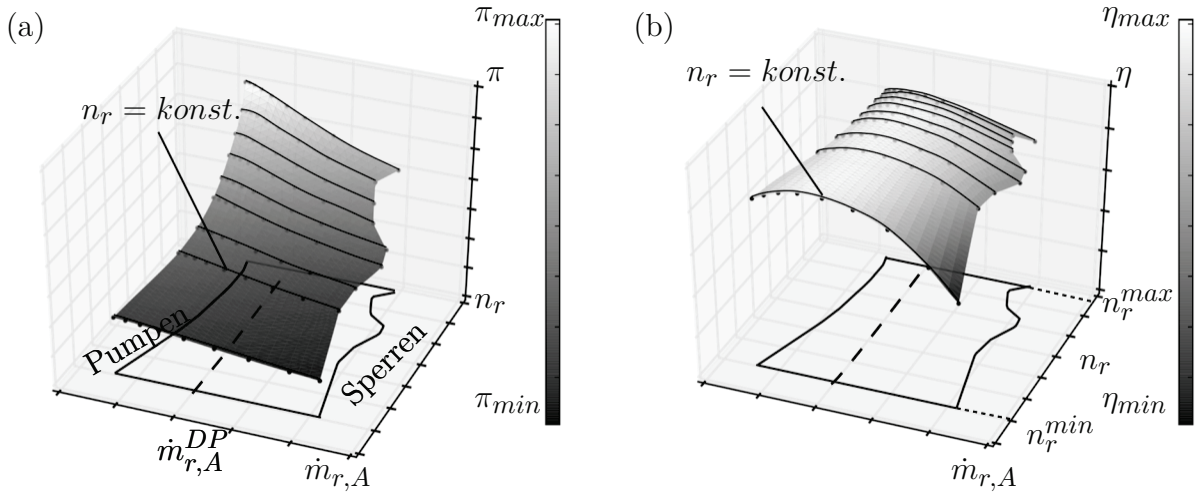
Die weit verbreitete Darstellung eines Verdichterkennfelds ist eine zweidimensionale Darstellung parametrisierter Linien konstanter Drehzahlen, siehe Abb. 2.4a. Jede dieser Linien ist durch die Pump- und Sperrgrenze begrenzt. Im Allgemeinen werden nur einige wenige Drehzahllinien explizit ausgewertet, dazwischen wird linear interpoliert. Folglich hängt die Genauigkeit des Verdichterkennfelds von der Anzahl der ausgewerteten Drehzahllinien ab.

In dieser Arbeit wird alternativ der dreidimensionale Charakter des Verdichterkennfelds erfasst, indem alle Leistungsgrößen als Funktionen des Vektors  $[\dot{m}_{r,A}, n_r]^T$  der unabhängigen Variablen (2.6) und (2.5) interpretiert werden:

$$\pi = \pi([\dot{m}_{r,A}, n_r]^T), \quad \eta = \eta([\dot{m}_{r,A}, n_r]^T), \quad \dot{m}_{r,E} = \dot{m}_{r,E}([\dot{m}_{r,A}, n_r]^T). \quad (2.7)$$

Der letztgenannte Zusammenhang ergibt sich aus der Tatsache, dass  $\dot{m}_{r,A}$  und  $\dot{m}_{r,E}$  sich gegenseitig bedingen und der Zusammenhang durch ein entsprechendes Ersatzmodell hergestellt werden kann.

Die glatte Form der Funktionen (2.7), wie sie in Abb. 2.5a beispielhaft für das Totaldruckverhältnis  $\pi$  gezeigt ist, ist prädestiniert für die Verwendung von Antwortflächen. Ein weiterer Vorteil der Darstellung in  $[\dot{m}_{r,A}, n_r]$ -Koordinaten ist, dass die Bereiche, welche die Pump- und Sperrgrenzen enthalten, sich strikt durch eine Linie  $\dot{m}_{r,A}^{DP} = konst.$  voneinander trennen lassen, siehe Abb. 2.5a. Dabei ist  $\dot{m}_{r,A}^{DP}$  der reduzierte Austrittsmas-



**Abb. 2.5:** Dreidimensionale Darstellung des Verdichterkennfelds für (a) Totaldruckverhältnis  $\pi$  und (b) Wirkungsgrad  $\eta$  als Funktion von  $\dot{m}_{r,A}$  und  $n_r$ . Zusätzlich ist die Linie  $\dot{m}_{r,A}^{DP} = konst.$  gestrichelt dargestellt

senstrom für den Auslegungsfall (DP=Designpunkt). Somit ergeben sich die Suchbereiche für die Pumpgrenzlinie zu

$$\left[ \dot{m}_{r,A}^{min}, \dot{m}_{r,A}^{DP} \right] \times \left[ n_r^{min}, n_r^{max} \right] \quad (2.8)$$

und für die Sperrgrenzlinie zu

$$\left[ \dot{m}_{r,A}^{DP}, \dot{m}_{r,A}^{max} \right] \times \left[ n_r^{min}, n_r^{max} \right], \quad (2.9)$$

wobei  $\dot{m}_{r,A}^{min}$  und  $\dot{m}_{r,A}^{max}$  durch den Benutzer festzulegende Suchgrenzen sind und  $n_r^{min}$ ,  $n_r^{max}$  sich aus den Betriebsanforderungen ergeben.

Für eine vereinfachte Darstellung werden sich die folgenden Betrachtungen auf den Bereich (2.8) beschränken. Dazu wird der normierte Vektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in [0, 1]^2$  mit

$$x_1 = \frac{\dot{m}_{r,A} - \dot{m}_{r,A}^{min}}{\dot{m}_{r,A}^{DP} - \dot{m}_{r,A}^{min}}, \quad x_2 = \frac{n_r - n_r^{min}}{n_r^{max} - n_r^{min}} \quad (2.10)$$

eingeführt und alle für die Verdichteranalyse relevanten Größen (2.7) werden als Funktion der normierten Größen (2.10) dargestellt, d.h.

$$\pi = \pi(\mathbf{x}), \quad \eta = \eta(\mathbf{x}), \quad \dot{m}_{r,E} = \dot{m}_{r,E}(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Der im Folgenden entwickelte Prozess ist einfach auf den Suchbereich (2.9) übertragbar, indem die normierten Variablen

$$x_1 = \frac{\dot{m}_{r,A} - \dot{m}_{r,A}^{DP}}{\dot{m}_{r,A}^{max} - \dot{m}_{r,A}^{DP}}, \quad x_2 = \frac{n_r - n_r^{min}}{n_r^{max} - n_r^{min}} \quad (2.12)$$

verwendet werden. Dieser Ansatz bildet in den späteren Abschnitten die Grundlage zur separaten Bestimmung von Pump- und Sperrlinie sowie der Approximation des gesamten Verdichterkennfeldes.





# 3 Numerische Simulation von Turbomaschinenströmungen

Im Rahmen dieses Kapitels werden dem Leser zunächst die Grundlagen der Strömungsmechanik erläutert. Dabei werden mithilfe der Massen-, Impuls- und Energiebilanzen die Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet und deren Erweiterung auf turbulente Strömungen vorgestellt. Weiterhin werden gängige Vereinfachungen und Annahmen zur Strömungslösung präsentiert. Auf die Theorie der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen, welche deren Diskretisierung, Modellierung und Rechenetzgenerierung beinhaltet, wird wegen des großen Umfangs dieser Themengebiete größtenteils verzichtet.

## 3.1 Bilanzgleichungen zur Strömungsbeschreibung für Turbomaschinen

Zur mathematischen Erfassung der Physik von Fluidbewegungen wird die Kontinuums-hypothese angenommen. Eine wichtige Eigenschaft des Kontinuums ist, dass charakteristische physikalische Größen  $\varphi$  Eigenschaften der Teilchen des Kontinuums und der Zeit sind. Da sich jedem Teilchen zu jedem Zeitpunkt ein Ort zuordnen lässt, können die physikalischen Größen in einem Kontinuum auch als Eigenschaften des Ortes und der Zeit beschrieben werden, d.h.  $\varphi = f(x, y, z, t)$ . Bedingt durch diese unterschiedlichen Betrachtungsweisen kann die Beschreibung des Energie, Impuls und Stofftransports innerhalb eines Fluids unterschiedlich formuliert werden, entweder mit der Lagrangeschen und der Eulerschen Beschreibung. Während der Lagrange-Formalismus die physikalischen Größen eines sich bewegenden Strömungsteilchens betrachtet, geht der Eulersche Formalismus von den physikalischen Größen an einem raumfesten Punkt aus. Die Lagrangesche Beschreibung findet vornehmlich in der Strukturmechanik Anwendung statt. In der Strömungsmechanik ist es im Allgemeinen nicht von Interesse, die Eigenschaften einzelner Teilchen in der Strömung zu erfassen, sondern die gesamte Strömung in einem raumfesten durchströmten Volumen zu beschreiben.

Allgemein ergibt sich die Änderung einer Größe, die eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist, aus dem vollständigen bzw. totalen Differential. Dieses bezeichnet die Summe der partiellen Ableitungen multipliziert mit den infinitesimalen Änderungen von Raum-

richtung und Zeit:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz. \quad (3.1)$$

Die Darstellung der Geschwindigkeit an einem raumfesten Punkt ist zunächst nicht möglich, da der Geschwindigkeitsvektor sich als Änderung des Aufenthaltsortes eines Punkts zwischen zwei Zeitpunkten ergibt. Es gilt hier also der Lagrange-Formalismus. Um dieses Problem zu lösen, wird zunächst der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  im kartesischen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  eingeführt. Die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich dann aus den Ortsänderungen

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{dy}{dt} = u_2, \quad \frac{dz}{dt} = u_3. \quad (3.2)$$

Somit gilt auch

$$dx = u_1 dt, \quad dy = u_2 dt, \quad dz = u_3 dt. \quad (3.3)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Lagrange- und Eulerschen Formalismus kann nun hergestellt werden, indem (3.3) in (3.1) eingesetzt wird:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x} u_1 dt + \frac{\partial\varphi}{\partial y} u_2 dt + \frac{\partial\varphi}{\partial z} u_3 dt. \quad (3.4)$$

Daraus folgt für die zeitliche Änderung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} u_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z} u_3. \quad (3.5)$$

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird für das totale Differential anstatt  $d$  ein  $D$  verwendet:

$$\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} u_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z} u_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla^T(\varphi)\mathbf{u}. \quad (3.6)$$

Diese Gleichung nennt man das Reynoldssche Transporttheorem. Es ermöglicht, die substantielle Ableitung einer Größe zu berechnen, wenn diese nur in Eulerscher Darstellung gegeben ist.

### 3.1.1 Massenbilanz

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert lassen sich Bilanzen physikalischer Größen sowohl mit dem Lagrangeschen als auch mit dem Eulerschen Formalismus aufstellen. Die Bilanzgleichung für die Masse in der Lagrangeschen Darstellung besagt, dass die Masse eines materiellen Körpers  $dm$  sich zeitlich nicht ändert, was mit der Notation (3.6) und der Beziehung  $dm = \rho dV$  zwischen Dichte  $\rho(t, x, y, z)$  und Volumen  $dV$  die Bilanz auf die Gleichung

$$\frac{Ddm}{Dt} = \frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0 \quad (3.7)$$

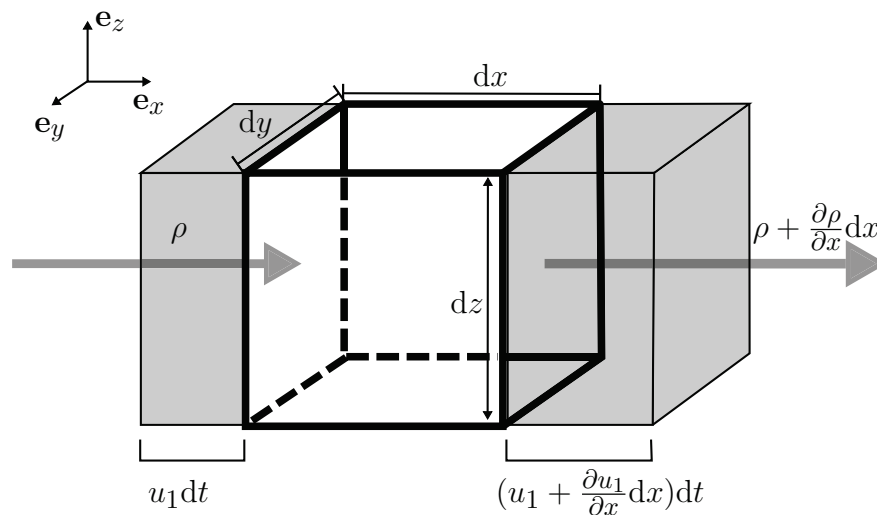
führt.

Zur Entwicklung der Massenbilanz in der Eulerschen Beschreibung wird ein raumfestes, infinitesimales durchströmtes Kontrollvolumen (KV) mit  $dV = dx dy dz$  in Abb. 3.1 herangezogen. Betrachtet man zunächst nur die Strömung in  $x$ -Richtung, fließt in dieses KV in einer Zeitspanne  $dt$  durch die linke Randfläche  $dy dz$  die Masse  $\rho(u_1 dt) dy dz$  hinein. Da Dichte und Geschwindigkeit Ortsfunktionen sind, ergeben sich am rechten Rand nach Gl. (3.1) für die Dichte  $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx)$  und die Geschwindigkeit  $(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx) dt$ , so dass die Masse  $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx)(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx) dt dy dz$  aus dem KV heraus fließt. Analoge Überlegungen zu Massenflüssen in  $y$ - und  $z$ -Richtung und die Aufsummierung führen auf die zeitliche Änderung einer Masse in einem raumfesten KV:

$$\begin{aligned}
 dm(t + dt) - dm(t) = & \rho(u_1 dt) dy dz - (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx)(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx) dt dy dz \\
 & + \rho(u_2 dt) dx dz - (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy)(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} dy) dt dx dz \\
 & + \rho(u_3 dt) dx dy - (\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz)(u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial z} dz) dt dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Der Term auf der linken Seite an einem festen Raumpunkt kann mit  $dm = \rho dV$  als

$$dm(t + dt) - dm(t) = \frac{\partial(dm)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt \tag{3.9}$$



**Abb. 3.1:** Raumfestes Kontrollvolumen mit allen in  $x$ -Richtung fließenden Massenströmen

geschrieben werden. Einsetzen in (3.7) und ausmultiplizieren der rechten Seite führt mit  $dV = dx \, dy \, dz$  zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = & \left[ - \left( \rho \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \left( \rho \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \left( \rho \frac{\partial u_3}{\partial z} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) \right] dV \, dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Auf beiden Seiten lässt sich  $dV \, dt$  eliminieren und die quadratischen Terme fallen im Grenzübergang  $dx, \, dy, \, dz \rightarrow 0$  wegen

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = 0, \quad \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = 0, \quad \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} dz = 0 \quad (3.11)$$

weg. Somit ergibt sich aus Gl. (3.10) mit Anwendung der Produktregel der Differentiation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \underbrace{\left( \rho \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}_{\frac{\partial(u_1 \rho)}{\partial x}} - \underbrace{\left( \rho \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial(u_2 \rho)}{\partial y}} - \underbrace{\left( \rho \frac{\partial u_3}{\partial z} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)}_{\frac{\partial(u_3 \rho)}{\partial z}}. \quad (3.12)$$

Alle Terme auf die linke Seite gebracht und die Verwendung des Nabla-Operators  $\nabla^T = [\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z]$  liefern die differentielle Massenbilanz für ein raumfestes durchströmtes Volumen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(u_3 \rho)}{\partial z} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Impulsbilanz

Der Bilanzgleichung für den Impuls besagt, dass die totale zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Volumens der Summe aller wirkenden Kräfte entspricht. Für ein infinitesimales Massenelement  $dm = \rho dV$  entspricht der infinitesimale Impuls dem Produkt  $d\mathbf{p} = \mathbf{u} dm$  und die substantielle Ableitung des Impulses lautet demnach

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u} dV) = \sum_i \mathbf{f}_i. \quad (3.14)$$

Eine Anwendung der Produktregel auf der linken Seite ergibt

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u} dV) = \mathbf{u} \frac{D}{Dt}(\rho dV) + \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\rho dV). \quad (3.15)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach (3.7) Null, so dass

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u} dV) = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad (3.16)$$

Wird nun das Reynoldssche Transporttheorem (3.6) auf das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  angewendet, ergibt sich

$$\rho \frac{D}{Dt}(\mathbf{u}) dV = \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \rho u_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \rho u_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) dV. \quad (3.17)$$

Im Folgenden wird die Impulsbilanz zunächst stellvertretend für alle Richtungen nur in  $x$ -Richtung entwickelt. Die  $x$ -Komponente von (3.17) lautet dann

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} dV = \left( \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \rho u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) dV. \quad (3.18)$$

Die Summe der auf das Volumen wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}$  lässt sich nach der Kontinuumstheorie in Oberflächen- und Volumenkräfte zerlegen. Im diesem Rahmen wird angenommen, dass nur Oberflächenkräfte wirken, da es sich bei dem Arbeitsmedium um Luft handelt und die Volumenkräfte durch die Gravitation zu vernachlässigen sind. Die Oberflächenkräfte werden in Druck- und Schubkräfte aufgeteilt, so dass

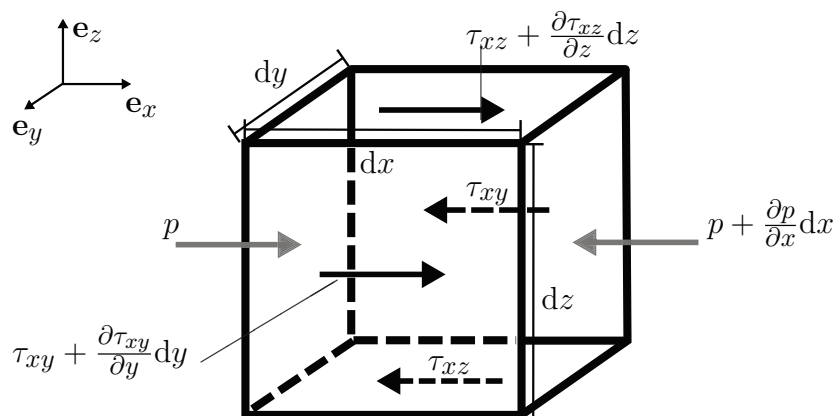
$$\sum \mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_p + \sum \mathbf{f}_\tau. \quad (3.19)$$

Die Druckkräfte  $\mathbf{f}_p$  wirken senkrecht und Scherkräfte  $\mathbf{f}_\tau$  tangential zu den Wänden des KV. In Abb. 3.2 sind alle Druck- und Scherkräfte in  $x$ -Richtung dargestellt. Druckkräfte sind per Definition immer zum Körper gerichtet, so dass sich in  $x$ -Richtung folgende Bilanz ergibt:

$$\sum f_{p,x} = p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dV. \quad (3.20)$$

Analoges gilt für die Anteile in  $y$ - und  $z$ -Richtung.

Die Schubkräfte  $\mathbf{f}_\tau$  liefern mehr Einträge, da in jede Raumrichtung zwei Flächenpaare



**Abb. 3.2:** Darstellung eines mitbewegten, materiellen Kontrollvolumens sowie aller in  $x$ -Richtung wirkenden Spannungen

existieren, an welchen Schubkräfte angreifen können. Zur übersichtlichen Notation wird für jede Schubkraft  $\tau$  folgende Indexbildung verwendet: Der erste Index steht für die Richtung, in welche die Kraft wirkt und der zweite Index für die Richtung der Flächennormalen der Fläche, auf welche  $\tau$  wirkt. So ist z.B.  $\tau_{xz}$  die Schubkraft in  $x$ -Richtung auf die durch  $dx dy$  aufgespannte Fläche mit der Flächennormalen  $\mathbf{e}_z$ . Weiter gilt für die Schubspannungsanteile

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0. \quad (3.21)$$

Für die Summe aller Schubkräfte in  $x$ -Richtung ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum f_{\tau,x} &= \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy \\ &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dx dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Zusammen mit (3.18), (3.20) und (3.22) ergibt sich für die Impulsbilanz (3.14) in  $x$ -Richtung der Term

$$\left( \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \rho u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) dV = - \frac{\partial p}{\partial x} dV + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dV + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dV. \quad (3.23)$$

Nun wird der Newtonsche Schubspannungsansatz angewendet, welcher u.a. postuliert, dass die Schubspannung eine lineare Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist. Im vorliegenden Fall liefert dies für die Komponenten in  $x$ -Richtung

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (3.24)$$

wobei  $\eta$  die dynamische Zähigkeit ist, siehe z.B. SCHADE UND KUNZ (2007).

Durch Einsetzen von (3.24) in (3.23) ergibt sich für ein infinitesimales, materielles KV die differentielle Form der Impulsbilanz in  $x$ -Richtung als

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \rho u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right). \quad (3.25)$$

In der numerischen Strömungsmechanik ist es von Vorteil, alle Terme in Gl. (3.25) als Divergenz einer skalaren oder vektoriellen Größe darzustellen<sup>1</sup>. Zu diesem Zweck wird zunächst die Massenbilanz (3.13) mit  $u_1$  multipliziert:

$$u_1 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (u_2 \rho)}{\partial y} + \frac{\partial (u_3 \rho)}{\partial z} \right] = 0. \quad (3.26)$$

<sup>1</sup>Diese Form wird auch konservative Form genannt

Da dieser Term ebenfalls Null ist, kann er zu der linken Seite von Gl. (3.25) addiert werden, so dass sich ausmultipliziert folgende Gleichung ergibt:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t}} + \underbrace{\rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial(u_1 \rho)}{\partial x}}_{\frac{\partial(\rho u_1 u_1)}{\partial x}} + \underbrace{\rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y}}_{\frac{\partial(\rho u_2 u_1)}{\partial y}} + \underbrace{\rho u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_3 \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial z}}_{\frac{\partial(\rho u_3 u_1)}{\partial z}} \quad (3.27)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \quad (3.28)$$

Somit ergibt sich schließlich in  $x$ -Richtung die Impulsbilanz

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_1)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \quad (3.29)$$

und für die anderen Raumrichtungen entsprechend

$$\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) \quad (3.30)$$

in  $y$ -Richtung und

$$\frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_3)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_3)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_3)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) \quad (3.31)$$

in  $z$ -Richtung. Wird zusätzlich (3.21) mitberücksichtigt, d.h.

$$\left( \underbrace{\eta \frac{\partial u_1}{\partial x}}_{\tau_{xx}} \right) = \left( \underbrace{\eta \frac{\partial u_2}{\partial y}}_{\tau_{yy}} \right) = \left( \underbrace{\eta \frac{\partial u_3}{\partial z}}_{\tau_{zz}} \right) = 0, \quad (3.32)$$

können (3.29), (3.30), (3.31) erweitert werden. Für die Impulsbilanz in  $x$ -Richtung liefert diese Erweiterung

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_1)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}}_0 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right). \quad (3.33)$$



Analog gilt

$$\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}}_0 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) \quad (3.34)$$

für die  $y$ -Richtung und

$$\frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_3)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_3)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3 u_3)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}}_0 \right) \quad (3.35)$$

in  $z$ -Richtung. Für eine kompaktere Darstellung können nun mithilfe der Indexnotation  $a_i b_i := \sum_i a_i b_i$  und  $[x, y, z] = [x_1, x_2, x_3]$  sich die Gleichungen (3.33), (3.34), (3.35), in der kürzeren Form

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1(1)3, \quad j = 1(1)3 \quad (3.36)$$

darstellen lassen.

### 3.1.3 Energiebilanz

Entsprechend der Energiebilanz nach z.B. SCHLICHTING UND GERSTEN (2006) ergibt sich die Änderung der Energie  $dE$  eines materiellen Volumens  $dm$  durch die Leistung der äußeren Kräfte  $P$  und die Wärmezufuhr  $\dot{Q}$ :

$$\frac{D(dE)}{Dt} = P + \dot{Q}. \quad (3.37)$$

Die Energie ist definiert als Summe der inneren Energie ( $e \cdot dm$ ) und der kinetischen Energie  $\frac{1}{2} dm \mathbf{u}^2$  mit  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ , so dass

$$dE = e \cdot dm + \frac{1}{2} dm \mathbf{u}^2 = \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \rho dV. \quad (3.38)$$

Die substantielle Ableitung Gl. (3.6) von  $dE$  liefert auf der linken Seite zusammen mit der Produktregel

$$\frac{D}{Dt} dE = \frac{D}{Dt} \left[ \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \rho dV \right] = \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \frac{D}{Dt} (\rho dV) + \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) (\rho dV). \quad (3.39)$$

Nach Gl. (3.7) ist der erste Term auf der rechten Seite Null, so dass sich mit dem Reynold'schen Transporttheorem (3.6) und der Verwendung des Nabla-Operators der Ausdruck

$$\frac{D}{Dt}dE = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \nabla^T \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \right] \rho dV \quad (3.40)$$

ergibt. Auf der rechten Seite von Gl. (3.37) ergibt sich die am materiellen Volumen verrichtete Leistung aus dem Skalarprodukt der Oberflächenkräfte mit den zugehörigen Geschwindigkeiten. Die Kräfte wiederum ergeben sich aus dem an den KV-Wänden wirkenden Drücken und Schubspannungen multipliziert mit den entsprechenden Flächen. In Abb. 3.3 sind alle in  $x$ -Richtung wirkenden Komponenten dargestellt. Daraus ergibt sich für die Summe der Leistung dieser Kräfte

$$\begin{aligned} P_x = & \left( (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dx dz \right) \left( u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy \right) - (\tau_{xy} dx dz) u_1 \\ & + \left( (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dx dy \right) \left( u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z} dz \right) - (\tau_{xz} dx dy) u_1 \\ & + (p dy dz) u_1 - \left( \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \right) \left( u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ausmultiplizieren und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung analog zu Gl. (3.11) ergibt für die Leistung der Kräfte in  $x$ -Richtung

$$P_x = \left( -\frac{\partial (p u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} u_1)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xz} u_1)}{\partial z} \right) dV. \quad (3.42)$$

Analoge Betrachtung der Komponenten in  $y$ - und  $z$ -Richtung liefert die gesamte Leistung

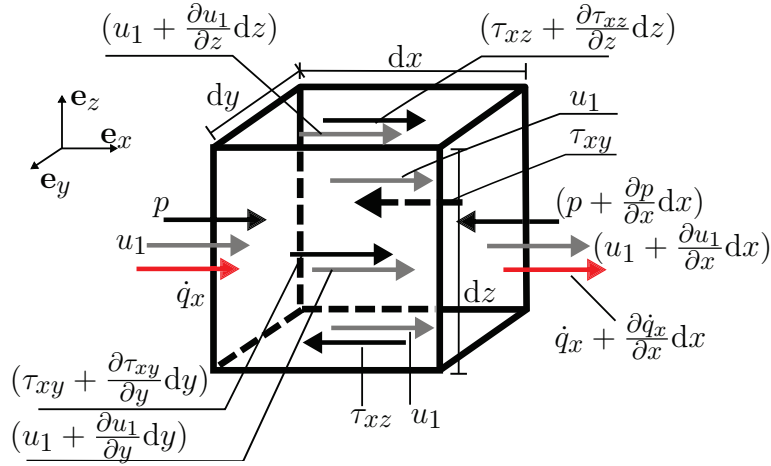
$$\begin{aligned} P = & \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-p u_1 + \tau_{yx} u_2 + \tau_{zx} u_3) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u_1 - p u_2 + \tau_{zy} u_3) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u_1 + \tau_{yz} u_2 - p u_3) \right] dV. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Sortieren der Terme nach Druck und Schubspannungen, Einführung des Schubspannungstensors

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

sowie Verwendung des Nabla-Operators liefert

$$P = \left( -\nabla^T (p \mathbf{u}) + \nabla^T (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) \right) dV. \quad (3.45)$$



**Abb. 3.3:** Mitbewegtes Kontrollvolumen mit in  $x$ -Richtung wirkenden Kräften, Geschwindigkeiten und Wärmeflüssen durch die Volumenwände

Bei der Bilanzierung des Wärmeeintrages  $\dot{Q}$  in Gl. (3.37) wird davon ausgegangen, dass keine inneren chemischen Reaktionen, sondern nur Wärmeflüsse auftreten. Die Bilanz für den Wärmefluss in  $x$ -Richtung durch die KV-Wände ergibt sich aus Abb. 3.3 zu

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x dy dz - \left( \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dV. \quad (3.46)$$

Mit analogen Betrachtungen für die  $y$ - und  $z$ -Richtungen ergibt sich der gesamte Wärmefluss zu

$$\dot{Q} = - \left( \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (3.47)$$

Der allgemeine Wärmefluss besteht aus Wärmeleitung und Wärmestrahlung, wobei hier nur die Wärmeleitung betrachtet wird. Diese ist nach dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz eine Funktion des Temperaturgradienten:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \dot{q}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3.48)$$

Damit ergibt sich für den Wärmefluss (3.47) mit der Verwendung des Laplace-Operators  $\Delta \bullet = \sum_i \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_i^2}$  die Gleichung

$$\dot{Q} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV = \lambda \Delta T dV. \quad (3.49)$$

Werden nun (3.40), (3.43) und (3.49) in (3.37) eingesetzt und  $dV$  eliminiert, ergibt sich die Energiebilanz in differentieller Form zu:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \nabla^T \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} (-u_1 p + u_2 \tau_{yx} + u_3 \tau_{zx}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (u_1 \tau_{xy} - u_2 p + u_3 \tau_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z} (u_1 \tau_{xz} + u_2 \tau_{yz} - u_3 p) \\ &+ \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Mithilfe der Verwendung von mathematischen Operatoren entsteht die kürzere Form

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \nabla^T \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \right) \rho = \nabla^T (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) - \nabla^T (p \mathbf{u}) + \lambda \Delta T. \quad (3.51)$$

### 3.1.4 Strömungsmodellierung und numerische Lösungsverfahren

Die aufgestellten fünf Gleichungen für Massenbilanz (3.13), Impulsbilanz (3.29)-(3.31) und Energiebilanz (3.51) sind gültig für stationäre und instationäre Strömungen kompressibler und inkompressibler, reibungsbehafteter Newtonscher Fluide. Die Modellierung der Strömung ist jedoch noch nicht komplett, denn in der Natur sind zahlreiche messbare Größen mit sehr kleinskaligen chaotischen Schwankungen überlagert. In der Strömungsmechanik werden diese als Turbulenz bzw. turbulente Schwankungen bezeichnet, und obwohl diese um viele Größenordnungen kleiner sind als die Magnituden der Hauptströmung, haben sie erheblichen Einfluss auf den Energie-, Impuls- und Stofftransport innerhalb der Strömung. Zur Erfassung der Turbulenz existieren unterschiedliche Ansätze. Ein Ansatz, der DNS-Ansatz (engl. Direct numerical simulation), resultiert auf der direkten Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen. Zur Erfassung der kleinskaligen turbulenten Strukturen ist jedoch eine sehr hohe zeitliche und räumliche Auflösung des Problems notwendig, so dass trotz fortgeschrittener Computertechnologie nur Umströmungen einfacher Geometrien in akzeptabler Zeit berechnet werden können. Ein anderer Ansatz, welcher in der industriellen Praxis hauptsächlich Anwendung findet, ist die Betrachtung von zeitlich gemittelten Strömungen und die Verwendung von statistischen Turbulenzmodellen. In diesem Fall wird zur Quantifizierung der Turbulenz jede Feldgröße  $\bullet$  als Summe eines zeitlichen Mittelwerts  $\bar{\bullet}$  und einer Schwankungsgröße  $\bullet'$  betrachtet. Dargestellt anhand des Drucks, stellvertretend für alle anderen Größen, lautet der Zusammenhang

$$p = \bar{p} + p' \quad \text{mit} \quad \bar{p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(\mathbf{x}, t) dt. \quad (3.52)$$

Wenn der Ansatz (3.52) in die Gleichungen (3.13), (3.36) und (3.51) eingesetzt und anschließend zeitlich gemittelt wird, entstehen die Reynolds-gemittelten-Navier-Stokes Gleichungen (engl. Reynolds-Averaged-Navier-Stokes-Solution (RANS)). Dieser Vorgang wird

Reynolds-Mittelung genannt und die entsprechende Methode RANS-Methode. Somit ist es möglich, die instationären turbulenten Effekte in einer stationären Betrachtung abzubilden. Weitere Vereinfachungen ergeben sich speziell für die Überschallströmung durch die Favre-Mittelung, welche die Geschwindigkeitsschwankungen als massengemittelt betrachtet.

Um den Charakter eines Übersichtskapitels beizubehalten, wird an dieser Stelle auf das Ausschreiben aller Gleichungen verzichtet und auf einschlägige Literatur verwiesen, z.B. SCHADE UND KUNZ (2007) oder FERZIGER U. A. (2008). Zur weiteren Erklärung werden die Reynolds-gemittelte Massenbilanz (3.13) und Impulsbilanz (3.36) in Indexnotation für kompressible Strömungen verwendet, d.h:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\rho}) = 0, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i \bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{\rho} + \overline{\rho u'_i u'_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}. \quad (3.54)$$

Die auf der linken Seite entstandenen Mischterme aus Schwankungsgrößen  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  werden Reynolds-Spannungen genannt. Diese Unbekannten machen eine geschlossene Lösung der Navier-Stokes-Gleichung unmöglich. Erst die Einführung sogenannter Schließungsansätze, welche die Reynolds-Spannungen als Funktionen der mittleren Strömungsgrößen approximieren, erlaubt Lösungen des Problems. Die Schließungsansätze zur dreidimensionalen Strömungsanalyse werden je nach Komplexität in Null-, Ein-, Zwei-, oder Mehrgleichungsmodelle unterteilt. Die Zahlenwerte geben an, wie viele zusätzliche Gleichungen zur Turbulenzmodellierung gelöst werden müssen. Diese Gleichungen werden auch Transportgleichungen genannt und beschreiben die totalen Änderungen der Korrelationen der Reynolds-Spannungen. Die bekanntesten Vertreter sind die Pradtlische Mischungsweghypothese (Nullgleichungsmodell) in SCHADE UND KUNZ (2007), das Spalart-Allmaras-Modell (Eingleichungsmodell) nach SPALART UND ALLMARAS (1992) sowie das  $k - \varepsilon$ - und  $k - \omega$ -Modell (Zweigliedungsmodell) von WILCOX (1988).

Für eine korrekte Modellierung der Turbulenz im Grenzschichtbereich müssen je nach verwendetem Turbulenzmodell die Werte des normierten Wandabstandes

$$y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\eta}, \quad (3.55)$$

mit  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  durch den Wandabstand  $y$  der ersten CFD-Netzzelle angepasst werden. Diese Anpassung steuert zum einen die Netzgröße und somit auch den numerischen Aufwand der Berechnung und zum anderen die Effizienz bzw. Stabilität des verwendeten Turbulenzmodells. Ist eine detaillierte Berechnung der Turbulenz in der Grenzschicht gefordert, so muss das  $k - \omega$ -Modell der Turbulenz und ein sehr kleiner normierter Wandabstand  $y^+ < 5$  verwendet werden um die starken Gradienten im Wandbereich aufzulösen. Ist eine weniger detailreiche Berechnung mit geringerem numerischen Aufwand erwünscht, so kann das Spalart-Allmaras-Modell und ein  $y^+ > 30$  verwendet werden. Zur Mitberücksichtigung der Grenzschicht in der wandnächsten Zelle werden in diesem Fall

Wandfunktionen herangezogen, welchen ein analytisches Grenzschichtmodell der Schubspannungsverteilung einer ebenen, turbulenten Plattengrenzschicht zugrunde liegt. Da vor der Strömungsberechnung die Verteilung von  $u_\tau$  unbekannt ist, können moderne Strömungslöser je nach dem lokalen Wert von  $y^+$  adaptiv Wandfunktionen zu- oder abschalten, so dass auch bei der Verwendung von Zweigleichungsmodellen in grob aufgelösten Bereichen eine hinreichende Grenzschichtapproximation erfolgt. Für einen detaillierten Einblick in dieses Thema wird auf FERZIGER U. A. (2008) verwiesen.

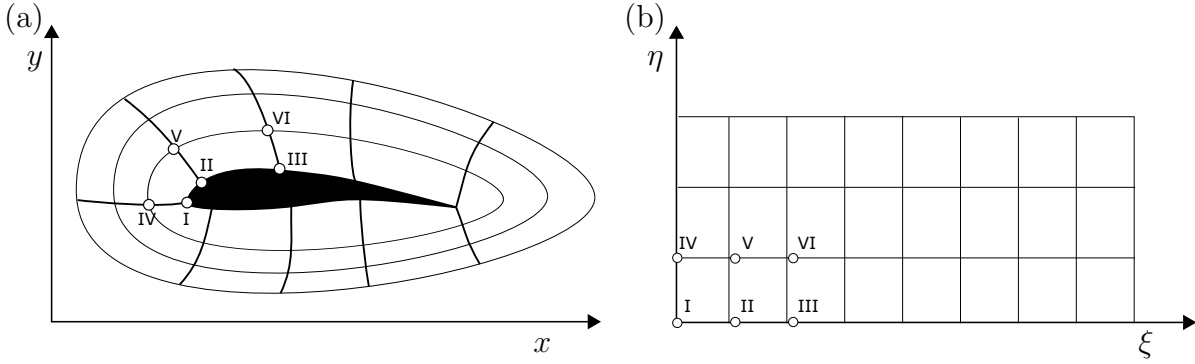
Die bisher genannten Gleichungen gelten für raumfeste KV und können für die Berechnung von Tragflügeln oder anderen umströmten Körpern verwendet werden. An dieser Stelle soll kurz eine Besonderheit der Turbomaschinenströmung erwähnt werden. Eine Turbomaschine besteht aus rotierenden Rotorschaukeln gefolgt von fest montierten Statorschaukeln. Für jede einzelne Schaukel kann mithilfe einer Koordinatentransformation<sup>2</sup> ein raumfestes KV gebildet werden, jedoch ist die Kopplung zwischen den einzelnen KVs komplex und muss durch Mischebenen (engl. mixing-planes) geschaffen werden. Diese miment eine zeitgemittelte Interaktion zwischen Rotor und Stator nach, so dass eine vollständige Durchmischung der stark verwirbelten Rotorabströmung erfolgt. Dieser Ansatz stellt trotz der einfachen Idee eine enorme numerische Schwierigkeit dar, da sowohl Bilanzgleichungen als auch Informationsausbreitung über die Systemgrenzen hinaus gewährleistet werden muss. Bekannte Ansätze zur Modellierung von Mischebenen sind in Arbeiten von ADAMCZYK (1985) und DENTON (1978) dargestellt.

Die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Bilanzgleichungen können nur in sehr wenigen Fällen analytisch gelöst werden. Daher wird bei der Strömungsberechnung auf Näherungslösungen unter Einsatz computergestützter numerischer Verfahren (engl. Computational Fluid Dynamics, CFD) zurückgegriffen. Zu den numerischen Verfahren gehören Methoden der Finiten-Differenzen, der Finiten-Volumen und der Finiten-Elemente. Durch den großen Umfang dieser Themengebiete wird nicht auf die Methodik dieser Verfahren eingegangen, jedoch kurz die Etappen einer CFD-Lösung beschrieben und auf entsprechende tiefergehende Literatur verwiesen.

Zunächst wird das zu untersuchende Strömungsgebiet (in diesem Fall eine oder mehrere Schaukelpassagen) durch ein numerisches dreidimensionales Gitter mit einer endlichen Anzahl diskreter Stützstellen überlagert. Jeder dieser Gitterpunkte ist durch eine Indizierung eindeutig in einer Gittermatrix beschrieben. Die Form und Struktur des Gitters wird oftmals durch das Problem definiert. Wichtige Kriterien für die räumliche Auflösung des Gitters sind z.B. auftretende Gradienten; so muss in Bereichen starker Gradienten (Grenz- und Scherschichten) die Auflösung besonders hoch sein. Im Allgemeinen besteht ein CFD-Netz aus einem oder mehreren an den umströmten Körper angepassten Netzblöcken, welche mit geeigneten geometrischen Transformationsbeziehungen in rechtwinklige Quadernetze überführt werden. Ein Minimalbeispiel einer solchen Transformation ist in Abb. 3.4 dargestellt. Dieser Schritt ist notwendig, da sonst die spätere räumliche Diskretisierung der Bilanzgleichungen sehr aufwändig und kompliziert ist. Zur Theorie der Gittergenerierung wird auf das umfassende Handbuch von THOMPSON U. A. (1985) ver-

---

<sup>2</sup>Für Rotoren wird eine Koordinatentransformation in ein mitbewegtes Koordinatensystem durchgeführt



**Abb. 3.4:** Körperangepasstes Gitter im (a) physikalischen  $(x, y)$ -System und ein (b) transformiertes rechtwinkliges Gitter im numerischen  $(\xi, \eta)$ -System

wiesen. Der Netzgenerierung folgt die Diskretisierung der Bilanzgleichungen, was vereinfacht gesagt einer Transformation des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems in einem kontinuierlichen Raum in eine Summe algebraischer Gleichungssysteme an diskreten Punkten gleichkommt. Dies ist nur möglich, indem in einem Rechengitter zwischen benachbarten Elementen entweder die Differenzialquotienten durch Differenzenquotienten an Gitterpunkten approximiert (Methode der Finiten-Differenzen) oder durch die Elementwände finiter Volumen fließende Energie-, Impuls- und Stoffflüsse bilanziert werden (Methode der Finiten-Volumen). In beiden Fällen ergibt die Anwendung der Diskretisierung über das gesamte CFD-Netz ein System aus linearen Gleichungssystemen (LGS). Besonderheiten der Diskretisierung wie z.B. die Behandlung von Konvektions und Diffusionstermen oder nichtlinearen Terme sind in Lehrbüchern wie dem von FERZIGER U. A. (2008) ausführlich erläutert.

Charakteristische Oberflächen wie Konturwände oder Ein- und Ausströmebenen bilden Randwerte des Gleichungssystems. So sind an Punkten, welche die Wandkontur bilden, alle Geschwindigkeiten aufgrund der Wandhaftbedingung  $\mathbf{u}|_{wand} = \mathbf{0}$  und an allen Punkten von Ein- und Ausströmgebieten Druck und Dichte vorgegeben.

Das entstehende, große LGS der Form

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{b} \quad (3.56)$$

mit Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$ , Lösungsvektor  $\varphi$  und gegebenen Randbedingungen  $\mathbf{b}$  wird im letzten Schritt mit iterativen Relaxationsmethoden gelöst. Einfach ausgedrückt wird dabei ausgehend von ein Anfangsvektor  $\varphi^i$  ein Korrekturvektor  $\varphi'$  bestimmt, so dass für den nächsten  $(i + 1)$ -ten Iterationsschritt der neue Lösungsvektor  $\varphi^{i+1} = \varphi^i + \varphi'$  dichter am tatsächlichen Lösungsvektor  $\varphi$  ist. Da die tatsächliche Lösung  $\varphi$  verständlicherweise im Vorhinein nicht bekannt ist, wird statt dessen ein Residuum der Form

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{b} - \mathbf{A}\varphi^i \quad (3.57)$$

eingeführt. Der Iterationsprozess, auch Konvergenzprozess genannt, wird so lange wiederholt bis für ein  $i = n$  der Residuenvektor  $\mathbf{r}^n$  kleiner als eine vorgegebene Toleranz  $\varepsilon$  ist.

Zur Bestimmung des Korrekturvektors  $\varphi'$  existieren u.a. Einzelschritt-, Gesamtschritt- und Relaxationsverfahren, auf welche hier nicht näher eingegangen und auf das Lehrbuch von PLATO (2004) verwiesen wird.

Die Schwierigkeiten und Herausforderungen der numerischen Strömungsmechanik liegen u.a. in der Gewährleistung der Konvergenz der verwendeten iterativen Verfahren, der Modellierung von Turbulenz und Nichtlinearitäten, sowie der Gewährleistung von konsistenten Lösungen, welche der tatsächlichen und realen Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung entsprechen.

Historisch betrachtet ist die 3D-CFD eine junge Disziplin und daher ist es auch nicht verwunderlich, dass in der Vorentwicklung von Verdichtern zunächst Methoden zur Schätzung von Strömungen mit geringem numerischen Aufwand zum Einsatz kommen, bevor numerische Lösungen komplexer Strömungsformen mit Berücksichtigung von Turbulenzmodellen auf Hochleistungsrechenclustern durchgeführt werden. So können z.B. durch die Vernachlässigung der Reibung und der Betrachtung nur einer Raumrichtung entlang charakteristischer Stromlinien die Navier-Stokes-Gleichungen so weit vereinfacht werden, dass diese analytisch lösbar werden. Erweiterungen solch einfacher Methoden mit zusätzlichen, aus Experimenten bestimmten Korrelationen erlauben eine gute Vorhersagbarkeit einiger aerodynamischer Eigenschaften wie z.B. Auftrieb und Widerstand eines Flügels, ohne im Detail das komplexe Strömungsfeld zu kennen. Diese numerischen Methoden werden auch reduzierte Methoden genannt und spielen in der heutigen praxisorientierten Anwendung eine sehr wichtige Rolle, auf welche in den folgenden Abschnitten näher eingegangen wird.

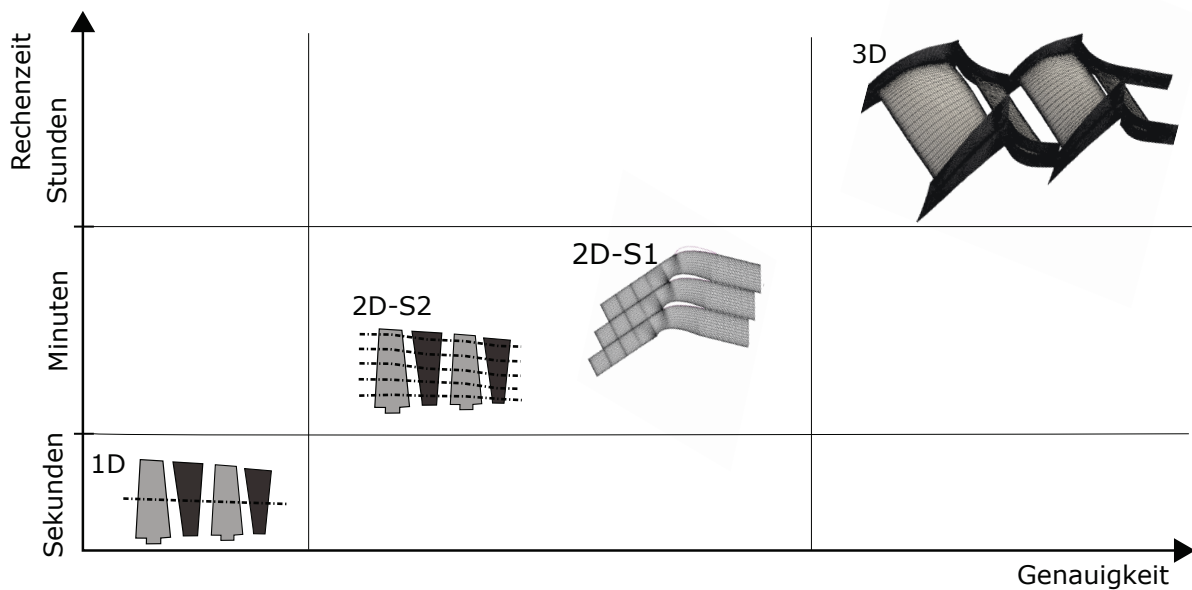
## 3.2 Eine Auswahl verschiedener Strömungslöser

In Abschnitt 1.2 wurde die historische Entwicklung der Verdichteranalysemethoden von eindimensionaler Mittelschnittrechnung bis zur dreidimensionalen vollturbulenten Strömungsanalyse und deren heutige Anwendung vorgestellt. An dieser Stelle sei nochmals explizit darauf hingewiesen, dass in der heutigen Verdichterauslegung alle Etappen von ein- bis dreidimensionalen Methoden durchschritten werden, vgl. Abb. 3.5. Dabei werden die Auslegungen der Annulusgeometrie sowie der Maße und Form der Schaufeln schon mit ein- und zweidimensionalen Methoden durchgeführt und die dreidimensionale Analyse nur für Detailuntersuchungen einzelner Strömungsphänomene verwendet.

In dieser Arbeit werden die Strömungsmodelle in zwei Hauptkategorien unterteilt, in korrelationsbasierte Methoden und simulationsbasierte Methoden. Die Stärke der ein- und zweidimensionalen korrelationsbasierten Methoden liegt zum einen in ihrer numerischen Einfachheit und zum anderen in der ständigen Erweiterung mit Korrelationen aus experimentellen und numerischen Daten. Da eine Vielzahl von Ansätzen zur Bildung dieser Korrelationen existiert und diese zum Teil Firmengeheimnisse sind, wird auf diese nicht eingegangen.

Simulationsbasierte Methoden liefern durch numerische Lösung von Strömungsgleichungen auf Netzgittern von Kontrollvolumen eine detaillierte Einsicht in das gesamte Druck- und Strömungsfeld. Jedoch benötigen diese dazu große Festplattenspeicher und leistungs-





**Abb. 3.5:** Zusammenhang zwischen Genauigkeit der Modellbildung bei der numerischen Strömungssimulation und der dafür benötigten Rechenzeit

fähige Computer.

Im Folgenden werden alle in dieser Arbeit verwendeten Modelle zur Strömungssimulation und der dazu verwendeten Verdichtermodellierung kurz vorgestellt, wobei die fundamentalen Grundlagen und Annahmen zur besseren Übersicht erst im Anhang ausführlich erklärt werden.

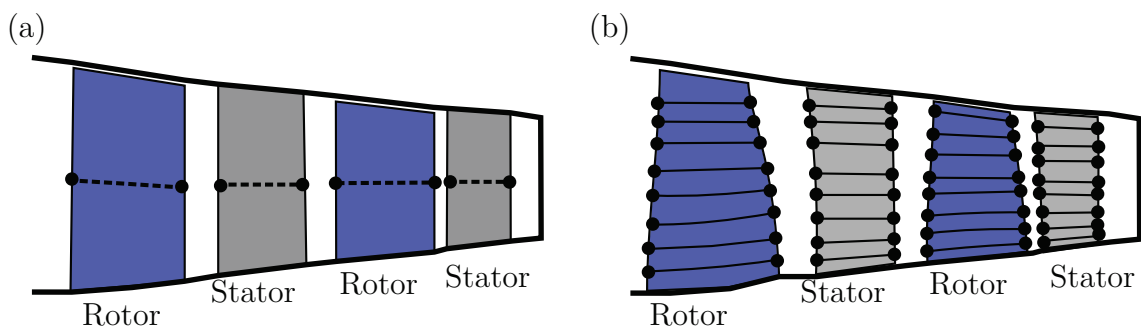
### 3.2.1 Korrelationsbasierte Strömungsmodellierung

Zu den korrelationsbasierten Methoden gehören die ein- und zweidimensionalen Methoden, welche auf den von WU (1952) eingeführten Betrachtungen von S1- und S2-Ebenen beruhen. Die ursprüngliche Theorie wurde stark vereinfacht, so dass einfache Strömungsmodelle die Grundlage bilden. Nachteilig ist, dass eine direkte Anwendung auf die Turbomaschinenströmung recht hohe Abweichungen von der realen Strömung aufweisen würde. Erst durch ständige Erweiterungen um Korrelationen, gewonnen aus Experimenten, Erfahrungswerten und aufwändigen dreidimensionalen numerischen Simulationen, gewannen diese an Genauigkeit und bilden nun das Rückgrat der Verdichterentwicklung in der Triebwerkindustrie. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Methoden vorgestellt: der eindimensionale Mittelschnitt-Strömungslöser (engl. Meanline) und der zweidimensionale Mehrschnitt-Löser (engl. Throughflow).

Meanline bildet im Allgemeinen den ersten Schritt in der Verdichter- bzw. Turbinenauslegung. Mit Meanline werden anhand von globalen Randbedingungen und Spezifikationen grundlegende formgebende Parameter wie z.B. Flächenverhältnis und Schaufelkantenverhältnisse sowie leistungsrelevante Größen wie z.B. Schaufelbelastung und Reaktionsgrad

für den mittleren Radius jeder Schaufel abgeschätzt. Zu diesem Zweck werden die Massenbilanz und die Eulersche Turbomaschinengleichung unter Zuhilfenahme von Korrelationen für Profilverluste, Reibungsverluste durch Grenzschichten an Verdichterswänden, Annulusblockage u.s.w. für den mittleren Radius jeder Schaufel des Verdichters aufgestellt. Durch iteratives Lösen der Strömungsgleichungen der hintereinander geschalteten Schaufeln können dann die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Am Ende resultieren aus der Meanline-Rechnung Geschwindigkeitsdreiecke für Zu- und Abströmvektoren für alle Rotoren und Statoren, Stufendruckverhältnisse und weitere entwurfsrelevante Kenngrößen. An- und Abströmvektoren dienen später dem Schaufeldesign. In dieser Arbeit wird ein Meanline-Modell verwendet, das abstrahiert in Abb. 3.6a dargestellt ist. Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Meanline-Methode sowie eine Auswahl von wichtigen Kenngrößen im Verdichtersentwurf sind im Anhang C.1 erläutert.

Bei Schaufeln geringer Spannweite kann angenommen werden, dass die Geschwindigkeiten und Drücke über den gesamten Radius nahezu konstant bleiben. Mit zunehmender Spannweite der rotierenden Schaufeln gilt dies nicht mehr, da der Einfluss des Radius und der Rotationsgeschwindigkeit auf die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen nicht mehr vernachlässigt werden kann. Zur Lösung dieses Problems wird das zweidimensionale Throughflow-Modell verwendet. In diesem Modell werden für mehrere, radial verteilte Stromlinien Massenbilanz und Eulersche Turbinengleichung mit zusätzlichen Korrelationen aufgestellt. Die Berücksichtigung des Einflusses der Rotation erfolgt durch das Aufstellen der Impulsbilanz in radialer Richtung. Die nun radial gekoppelten Gleichungssysteme für alle Stromlinien können mittels Iteration und numerischer Integration gelöst werden, so dass für jede radiale Position alle Feldgrößen (Druck, Geschwindigkeitsvektoren) auf einer Schaufel bestimmt werden können. Durch individuelle Formgebung jedes zu einer Stromlinie gehörenden radialen Profils einer Schaufel können dann durch ein radiales Auf-fädeln komplexe dreidimensionale Schaufelstrukturen geschaffen werden, hier abstrahiert in Abb. 3.6b dargestellt. Ein Abriss einiger fundamentaler Grundgedanken, mathemati-



**Abb. 3.6:** Schematische Darstellung eines (a) Meanline- und (b) Throughflow-Modells eines zweistufigen Verdichters. Statoren sind grau, Rotoren blau gezeichnet. Die Stromlinien, welche Grundlage der Bilanzgleichungen sind, sind als gestrichelte Linien dargestellt, Punkte, an denen explizit Strömungsgrößen ermittelt werden, sind mit • gekennzeichnet.

scher Gleichungen und Literaturreferenzen zu dieser Methode ist im Anhang C.2 dargestellt.

Trotz der enormen Wichtigkeit dieser Methoden muss an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass diese Methoden nur am Auslegungspunkt eines jeden Verdichters eine hohe Genauigkeit erreichen. Der Auslegungspunkt ist der Punkt, an dem das Triebwerk die meiste Zeit betrieben wird (z.B. Reiseflug). Andere Betriebspunkte im Teillastbereich, bei welchen komplexe transsonische oder Ablösungsphänomene auftreten, können nicht mit dieser Genauigkeit abgebildet werden und können sogar zu falschen unphysikalischen Ergebnissen führen, siehe PETROVIC U. A. (2011). In dieser Arbeit wird daher das Vermögen dieser Methoden zur Approximation von vom Auslegungspunkt weit entfernten Betriebspunkten untersucht.

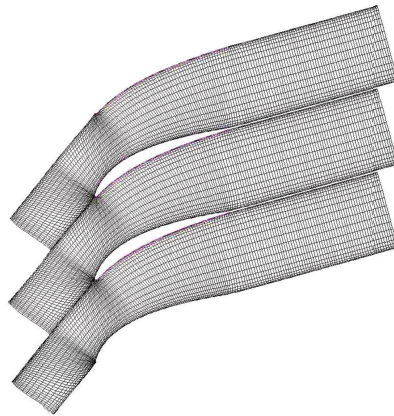
### 3.2.2 Simulationsbasierter zweidimensionaler Euler-Ansatz

Bei den bisher vorgestellten Strömungslösern wurden Bilanzgleichungen an speziellen Punkten (z.B. Stufenein- und austritt oder Vorder- und Hinterkante) auf Stromlinien aufgestellt, so dass zwar eine radiale Verteilung, jedoch kein Bild der Strömung zwischen zwei Schaufeln eines Kranzes (engl. blade-to-blade) möglich ist. Die Darstellung einer Verdichterpassage ermöglicht eine eindeutige Identifikation von Ablösung und Verdichtungsstößen und ist somit notwendig. Zur numerischen Simulation der Strömung in der gesamten Verdichterpassage werden daher Methoden der numerischen Strömungsberechnung verwendet. Zur Berechnung von aufgelösten CFD-Geschwindigkeitsfeldern sind im allgemeinen sehr große räumliche zwei- oder dreidimensionale Netze notwendig, auf denen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls (3.36) und Energie (3.51) diskretisiert und numerisch gelöst werden. Vorgreifend sei hier gesagt, dass diese Berechnungen sehr komplex und zeitaufwändig sind und auch, dass die Computertechnik erst seit weniger als zwei Jahrzehnten in der Lage ist, diese durchzuführen.

Als Pionier der numerischen Strömungsanalyse in der Mitte der 80er Jahre gilt die Verwendung von Euler-Gleichungen, welche auf vereinfachten Strömungsgleichungen basiert. Die Vorteile des Euler-Ansatzes liegen darin, dass unter der Annahme ausreichend hoher Geschwindigkeiten die Reibungseffekte sich ausschließlich auf eine sehr dünne Grenzschicht beschränken und vernachlässigt werden können. Die gesamte Umströmung eines Körpers kann durch die reibungsfreie Strömung im Fernfeld dargestellt werden. Die nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen (3.13), (3.36) und (3.51) vereinfachen sich in diesem Fall wesentlich. Diese Form wird in der Literatur auch oftmals Euler-Form genannt. Die vereinfachten Euler-Gleichungen werden diskretisiert und anschließend numerisch gelöst. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass Kompressions- und Expansionseffekte der kompressiblen Strömung im Fernfeld gut aufgelöst werden können. Vom numerischen Standpunkt ist die Methode günstig, da keine zusätzlichen Gleichungen für Turbulenz gelöst werden müssen und die starke, räumliche Auflösung der Grenzschicht entfällt. Somit können mit einigen hundert Rechengitterzellen hinreichend gute Ergebnisse erzielt werden. Für eine Erhöhung der Genauigkeit der Strömungsapproximation werden zusätzliche integrale Modelle

an das Euler-Modell gekoppelt, um die viskosen Effekte auf die Druck-, Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in der Grenzschicht zu bestimmen.

Während in anderen Luftfahrtbranchen Euler-Netze für Halbmodelle erstellt werden, werden im Rahmen dieser Arbeit die in der Turbomaschinenentwicklung üblichen zweidimensionalen Euler-Netze (blade-to-blade-Schnitt) verwendet. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 3.7 dargestellt. Die in dieser Arbeit verwendete Software MISES von DRELA UND YOUNGREN



**Abb. 3.7:** Darstellung eines zweidimensionalen Euler-Netzes eines Schaufelpassagenssegments

(2008) ist ein Strömungslöser, mit dem ein stationäres Strömungsfeld in der zweidimensionalen Gitterebene berechnet werden kann. Die Software wurde ursprünglich zur Analyse der Charakteristiken einer Schaufelpassagenströmung entwickelt und ist daher nur in der Lage, einen einzelnen Schaufelschnitt zu berechnen. Für die in dieser Arbeit beabsichtigten Zwecke sind mehrere Schaufelschnitte notwendig, weshalb das ursprüngliche Programm so modifiziert wurde, dass mehrere Schnitte gleichzeitig betrachtet werden können. Zur numerischen Berechnung sind Randbedingungen in Form von z.B. Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen am Ein- und Austritt notwendig, so dass vor einer MISES-Analyse einer Schaufelpassage eine Throughflow-Berechnung durchgeführt werden muss.

Einige Details zu den verwendeten Strömungsgleichungen sowie zum Aufbau der MISES-Software sind im Anhang C.3 erläutert.

### 3.2.3 Simulationsbasierte dreidimensionale Strömungsanalyse

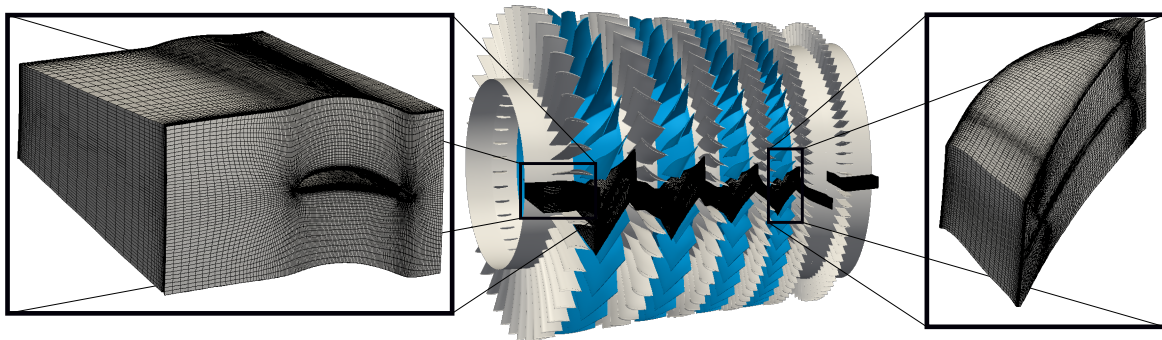
Der nächste zwangsläufige Schritt zur Erhöhung des Detaillierungsgrades einer numerischen Simulation ist die Berücksichtigung der Scher- und Grenzschichten und somit auch der Reibung und Turbulenz, so dass die vollen Navier-Stokes-Gleichungen mit Turbulenzschließungsansätzen numerisch gelöst werden müssen. Analog zum Euler-Ansatz ist zunächst eine Diskretisierung einer CAD-Geometrie sowie eine Generierung von volumetrischen Rechengittern notwendig. Zur hinreichend genauen Auflösung von Grenzschichtbereichen, welche in der Realität Dicken von wenigen Millimetern besitzen, sind sehr viele, sehr kleine Zellen notwendig. Weiterhin sind Bereiche, in denen starke lokale Geometrie-

änderungen auftreten (z.B. Vorder- und Hinterkante) von Interesse, so dass dort ebenfalls eine hohe Gitterauflösung gefordert ist. Daraus ergeben sich Netzgrößen von mehreren Millionen Zellen pro Schaufel, weshalb die Gitterdateien mehrere Gigabyte groß werden können.

Je nach geforderter Analyse werden entweder eine instationäre Berechnung von ganzen, relativ zueinander rotierenden Verdichterkränzen oder eine stationäre Berechnung von Passagen zwischen zwei Schaufeln mit 3D-CFD durchgeführt. Aufgrund des außergewöhnlich hohen Speicherbedarfs der Rechengitter und der langen Rechenzeit von instationären Vorgängen wird in der Regel im Verdichterentwurf auf die stationäre Berechnung einzelner Passagen zurückgegriffen.

In dieser Arbeit wird nur eine Passage zwischen zwei Schaufeln stationär analysiert und alle daraus resultierenden nicht konservativen Größen in Umfangsrichtung interpoliert. Eine Darstellung einer aus einem Verdichter entnommenen Passage sowie Detailansichten von ausgewählten vernetzten Schaufeln sind in Abb. 3.8 dargestellt. Die Berücksichtigung der Wechselwirkungen der einzelnen Schaufeln eines Kranzes werden durch periodische Ränder realisiert. Diese Ränder existieren paarweise gegenüberliegend und leiten alle Massen-, Impuls- und Energieflüsse, welche aus dem Kontrollvolumen fließen, an ihre Partnerfläche weiter, wo diese wieder in das KV hineinfließen.

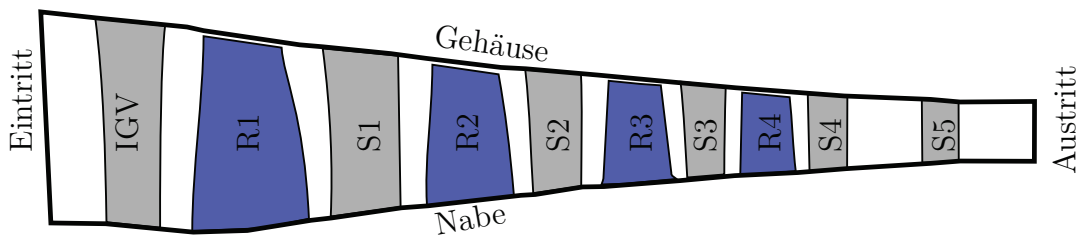
Wie bereits in Abschnitt 3.1.4 beschrieben, sind bei der numerischen Berechnung viele komplexe Zusammenhänge zur Gewährleistung einer stabilen und physikalisch sinnvollen Lösung zu beachten, so dass speziell dafür entwickelte industrielle Strömungslöser verwendet werden. Im Bereich der Turbomaschinenanalyse wird in dieser Arbeit das vom Industriepartner bereitgestellte Softwarepaket HYDRA verwendet. Einige Besonderheiten und Spezifikationen dieses Löser sind im Anhang C.4 dargestellt.



**Abb. 3.8:** Darstellung eines dreidimensionalen CAD-Verdichtermodells mit einer für 3D-CFD vernetzten Passage sowie Detaildarstellungen von Rechengittern der Einlaufschaufel sowie einer Rotorschaufel

### 3.3 Versuchsträger für die Methodenentwicklung

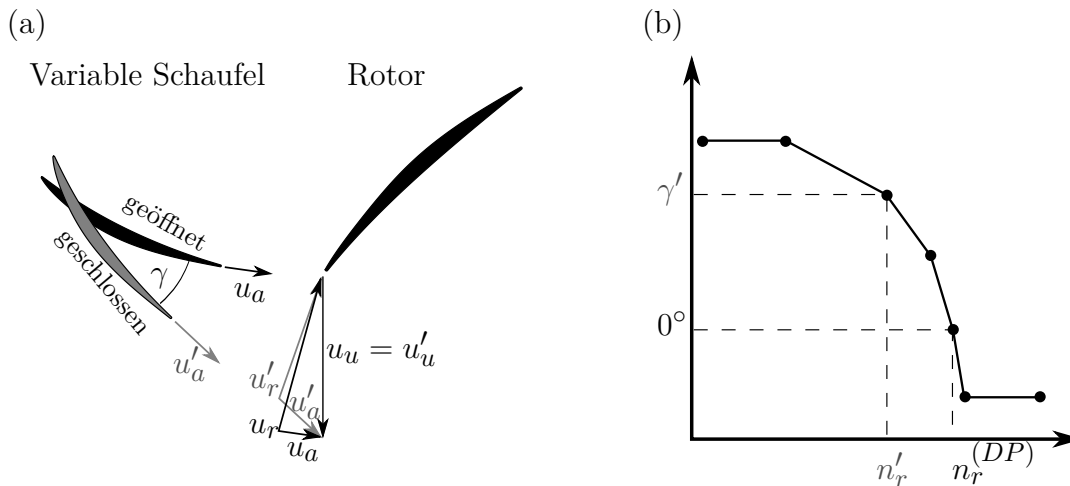
Als Versuchsträger für die Methodenentwicklung dient ein in Abb. 3.9 dargestellter 4.5-stufiger Axialhochdruckverdichter einer Kraftwerksturbine mit der Bezeichnung Rig250, vgl. JOHANN (2009). Dieser Verdichter besteht aus einem variablen Eintrittsleitrad (IGV) und vier Stufen, wobei die ersten beiden Statorn S1 und S2 variabel verstellbar (VSV) sind. Nach der letzten Stufe folgt ein abschließender Stator S5, der die Strömung auf einen Abströmwinkel von  $0^\circ$  in einen abschließenden Diffusor umlenkt. Im Rahmen dieser Arbeit sind vom Industriepartner ein-, zwei-, und dreidimensionale Modelle des Rig250 sowie die notwendigen Strömungslöser zur Analyse bereitgestellt worden. Der Detaillierungsgrad reicht hierbei von Angaben über Querschnittsflächen der Schaufelpassagen bis zu dreidimensionalen CAD-Geometrien und voll vernetzten 3D-Segmenten mit Verrundungsradien an Schaufelfüßen, Schaufelspitzen und Teilspalten an variablen Schaufeln. Ein Vollmodell des Rig250 ist in Abb. 3.8 dargestellt. Zur Verwendung von zwei- und



**Abb. 3.9:** Darstellung eines Schnittmodells des 4.5-stufigen Axialhochdruckverdichters einer Kraftwerksturbine mit der Bezeichnung Rig250. Die Statorn sind grau, die Rotoren blau gezeichnet.

dreidimensionalen Strömungslösern sind Randbedingungen für jede einzelne Schaufelpassage notwendig. Am Verdichtereintritt stellen umfangsgemittelte, radiale Profile für die Totaltemperatur ( $T_{t,E,r}$ ) und -druck ( $p_{t,E,r}$ ), tangentielle ( $\alpha$ ) und radiale Strömungswinkel ( $\beta$ ) sowie relevante Turbulenzgrößen (je nach Strömungsmodell) die Randbedingungen dar. Als Austrittsrandbedingung wird ein radiales Gleichgewicht für den reduzierten Austrittsmassenstrom  $\dot{m}_{r,A}$  vorgegeben. Bei der Berechnung von verschiedenen Betriebszuständen wird ausschließlich die Austrittsrandbedingung verändert, die Eintrittsrandbedingung bleibt unverändert, was dem Vorgehen bei einem Versuch auf einem Triebwerksprüfstand entspricht. Zustandsänderungen, die im Triebwerk durch stromauf liegende Elemente hervorgerufen werden, durch z.B. Streben oder vorgeschaltete Mittel- und Niederdruckverdichter, werden dabei nicht erfasst.

Zusätzlich zu Geometrie und Leistungsdaten werden die für Rig250 gültigen Verstellgesetze für die variablen Schaufeln vorgegeben. Durch diese ist es möglich, den Anströmwinkel des dem VSV folgenden Rotors so zu modifizieren, dass der Inzidenzwinkel (Differenz



**Abb. 3.10:** Interaktion zwischen einer variablen Schaufel (VSV) und dem nachfolgenden Rotor (a) sowie dazugehöriges Verstellgesetz (b). Die grauen apostrophierten Werte resultieren aus der Abströmung der geschlossenen Schaufel, die schwarzen Werte aus der Abströmung der im Auslegungsfall geöffneten Schaufel.

zwischen Anströmwinkel und Schaufelwinkel) reduziert wird und das Risiko einer Ablösung durch Fehlanströmung sinkt. Weiterhin ist die Leistungsausbeute invers an den Inzidenzwinkel gekoppelt, so dass eine optimale Leistung nur mit verschwindendem Inzidenzwinkel erreicht wird. Das Prinzip der VSV-Verstellung ist in Abb. 3.10 dargestellt. Wie bereits erwähnt, besteht das numerische Modell des Rig250 aus einem Verbund von volumetrischen Rechengittern. Das Gesamtgitter besteht am Auslegungspunkt aus etwa 11 Millionen Hexaeder-Zellen und hat etwa die Dateigröße von zwei Gigabyte. Eine Schwierigkeit bei der Vernetzung besteht darin, eine Vielzahl von Netzparametern so zu wählen, dass die Qualität der Netzzellen optimal ist. Während für Rotoren und nicht verstellbare Statoren nur anfänglich ein Netz erstellt werden muss, müssen für alle beweglichen VSVs für jeden Winkel die Netze erneut einzeln modifiziert bzw. angepasst werden. Zur Lösung dieses Problems wurden von JANKE U. A. (2015) mithilfe von monokriterieller Optimierung Parameter für jeden Verdrehwinkel bestimmt. In dieser Arbeit wird ausgenutzt, dass die Netzdimension denen von JANKE U. A. (2015) entsprechen und daher die bereits vorhandenen Ergebnisse für mehr als 20 Verstellwinkel verwendet werden können, um stückweise lineare Funktionen für die Netzparameter in Abhängigkeit von der Drehzahl bzw. des Verstellwinkels zu generieren.



# 4 Methoden zur iterativen Bestimmung von Verdichterbetriebsgrenzen

Wie im zweiten Kapitel beschrieben, ist die Kenntnis des Verdichterkennfeldes essenziell für einen sicheren und effizienten Betrieb. Die zugehörigen Betriebsgrenzen bilden klare topologische Linien zwischen Bereichen, in welchen ein Verdichter stabil betrieben werden kann, und Bereichen, in denen weder Stabilität noch Steuerbarkeit des Verdichterverhaltens gegeben ist. Zur Bestimmung dieser Linien müssen Kriterien für eine eindeutige Klassifizierung einer numerischen Berechnung eines Betriebszustandes definiert und auf dieser Basis Algorithmen zur Linienapproximation entwickelt werden. Zu diesem Zweck werden in diesem Kapitel Methoden des maschinellen Lernens behandelt. Wie anfangs in der Einleitung erwähnt, werden dabei mathematische Maschinen mit bekannten Datensätzen trainiert, so dass im Folgenden auf Eigenschaften neuer Datensätze geschlossen werden kann. Nach DUDA U. A. (2004) liegen die Anfänge der Klassifizierungstheorie in den 50er und 60er Jahren, wobei verschiedene Autoren zu unterschiedlichen Themen Pionierarbeit leisteten, siehe VAPNIK (1995) oder C. (1957).

Zur Klassifizierung sind drei grundlegende Schritte notwendig: Im ersten Schritt müssen zunächst Klassen definiert werden, welche auf Merkmalen der betrachteten Daten basieren. Diese Disziplin wird Merkmalextraktion genannt. Die Bestimmung von Klassen auf das hier behandelte Problem wird in Abschnitt 4.1 beschrieben. Sind die bekannten Daten attribuiert, werden diese mithilfe der Entscheidungstheorie zu Klassen mit gemeinsamen Merkmalen zusammengefasst. Da es sich bei den Datensätzen um diskrete Werte handelt, ist Hauptbestandteil der Entscheidungstheorie eine topologische Generalisierung, so dass Entscheidungsfronten, oder in diesem Fall Betriebsgrenzen, für jede Klasse definiert werden können. Die Entscheidungstheorie bildet den Kern der Klassifizierung. Im Abschnitt 4.2 wird ein kurzer Überblick über vorhandene Methoden gegeben und auf eine selektierte Methode umfangreich eingegangen. Anschließend wird in Abschnitt 4.3 eine Methode zur Extraktion dieser Entscheidungsfront vorgestellt. Während Entscheidungsfronten im Allgemeinen anhand eines umfangreichen Datensatzes gebildet werden, liegen bei der hier behandelten Problemstellung nur einige wenige Datenpunkte vor, so dass die approximierten Betriebsgrenzen höchstwahrscheinlich nicht der tatsächlichen entsprechen. Aus diesem Grund wird in Abschnitt 4.4 eine weitere Methode vorgestellt, welche anhand kleiner Datensätze iterativ einen unbekanntem Designraum erschließt und anhand von



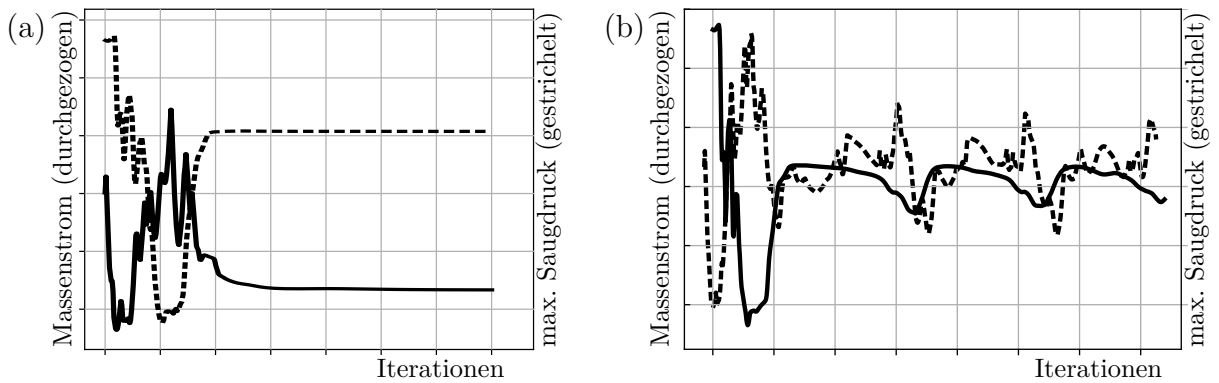
Entscheidungstheorie und intelligenter Stichprobenwahl die Betriebsgrenzen hinreichend genau bestimmt.

## 4.1 Klassifizierung von Betriebszuständen

Zum Vergleich von mehreren Zuständen eines dynamischen Systems müssen Merkmale definiert werden, welche eindeutig den jeweiligen Zustand charakterisieren. Üblicherweise liefern Prozesse zeitaufgelöste Signale, welche zunächst nicht ohne Weiteres miteinander verglichen werden können. Aus der Signaltheorie sind Werkzeuge zur Merkmalsextraktion aus Zeitreihen, z.B. Mittelwert, Schwankungsgrößen oder Fourier-Transformation, bekannt, so dass mehrere Signale miteinander verglichen werden können. Im Rahmen dieser Arbeit fordern wir einen einfachen Bool'schen Vergleich: «Ist eine CFD-Strömungslösung konvergiert oder nicht?». Nach dieser Definition sind Bereiche, in denen numerische Verfahren nicht konvergieren, entweder Pump- oder Sperrbereiche.

Bei Anwendung von ein- und zweidimensionalen Strömungslösern wie Meanline oder Throughflow ist diese Frage nach wenigen Sekunden beantwortet, da die Ausgabe dieser schnellen Löser eindeutig Konvergenz oder Nichtkonvergenz und sogar die Gattung der Ursache, also Pumpen oder Sperren, angibt. Bei Verwendung des 3D-CFD-Lösers HYDRA ist das, zumindest bei Betriebspunkten im Pumpbereich, nicht ohne Weiteres möglich, da intern keine Konvergenzprüfung vorgenommen wird. Aus diesem Grund werden während jeder 3D-CFD-Berechnung iterationsweise integrale Größen wie z.B. Massenstrom  $\dot{m}$  und Verlust  $\omega$  ausgegeben. Beispiele dieser Signale sind in Abb. 4.1 dargestellt. Eine Rechnung gilt als konvergiert, wenn nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen die für jeden CFD-Iterationsschritt berechneten Größen mit weiteren Iterationsschritten asymptotisch auf einen Wert konvergieren und danach unverändert bleiben, vgl. Abb. 4.1a. Dieses Verhalten ist signifikant für eine stabile 3D-CFD-Berechnung und somit auch für einen stabilen Strömungszustand im Verdichter. Zeigen die Beiwerte jedoch große, nicht oder sehr langsam abklingende regelmäßige oder unregelmäßige Schwingungen, vgl. Abb. 4.1b, oder tritt gar chaotisches Verhalten auf, so ist dies ein Anzeichen für eine nicht stabile CFD-Rechnung, was z.B. als Zeichen für Verdichterpumpen interpretiert werden kann. Die Bestimmung des Sperrens erfolgt recht schnell durch HYDRA-interne Massenstromprüfverfahren, so dass sein Auftreten direkt identifiziert und ausgegeben wird. Für diesen Zustand gibt es keine Abbildung, da dieser innerhalb des Strömungslösers detektiert wird und zu einem Rechnungsabbruch führt.

Zur Feststellung von konvergierten Lösungen wird eine von JANKE (2017) entwickelte Methode verwendet, welche aus den diskreten Signalen mittels Rückwärtsdifferenzen den Gradienten und die maximale Standardabweichung bestimmt. Fallen diese Werte unter durch Kalibrierung festgelegte Grenzen, gilt die Lösung als konvergent. Nachteilig ist, dass nur Methoden zur Detektion von konvergierenden Methoden vorhanden sind. Eine nicht-konvergierende Lösung wird daher so lange ausgeführt, bis die maximale, vorher vom Benutzer festgelegte Iterationsanzahl erreicht ist. Erst dann gilt diese als nicht konvergiert. Somit bilden die nicht-konvergierenden Lösungen ein Problem im Zeitmanagement



**Abb. 4.1:** Konvergenzverläufe von 3D-CFD-Rechnungen für Massenstrom und maximalem Saugdruck für eine (a) konvergierte und (b) nichtkonvergierte Strömungslösung

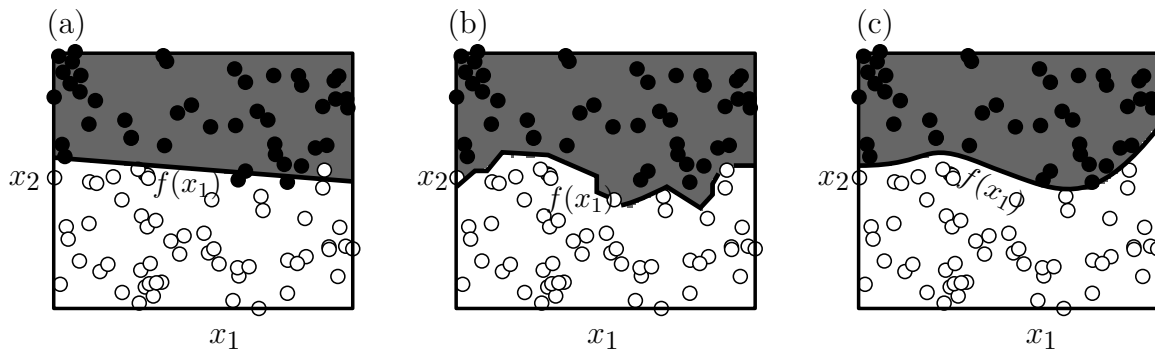
und es müssen Wege gefunden werden, nicht-konvergierende Lösungen frühzeitig zu erkennen, um die Rechnung dann abzubrechen.

Abstrahiert betrachtet bilden alle möglichen Betriebszustände, bei denen die CFD konvergiert, eine topologische Menge, welche eindeutig von den anderen Zuständen abgegrenzt ist. Somit können Pump- und Sperrgrenze als Entscheidungsfront betrachtet werden. Die Klassifizierungstheorie bzw. Mustererkennungstheorie bilden Grundlagen zur mathematischen Beschreibung dieser Front. Im Folgenden werden einige ausgesuchte Teilgebiete der Klassifizierungstheorie zur topologischen Trennung von Klassen erläutert, um im Anschluss die Anwendung dieser auf das geschilderte Problem zu beschreiben.

## 4.2 Methoden zur topologischen Trennung zweier Klassen

Die Entscheidungstheorie bildet einen wichtigen Schwerpunkt der Klassifizierung und besteht aus einer Vielzahl von Ansätzen und Modellen, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht in vollem Umfang beschrieben werden können. Stattdessen wird im Sinne einer kurzen Übersicht auf einige populäre Klassifizierungsansätze der Entscheidungstheorie eingegangen: lineare Diskriminanten, nächste-Nachbarn-Methode (engl. *k*-Nearest-Neighbor (KNN)<sup>1</sup>) und Support Vektor Maschine (SVM), siehe DUDA U. A. (2004) oder SCHOELKOPF UND SMOLA (2001). Als Beispiel zur Erläuterung der Methoden der Entscheidungstheorie dient ein künstlich erzeugter Datensatz bestehend aus 100 Punkten, wobei jeder Punkt eine Eigenschaft der Klasse (1) (○) oder der Klasse (−1) (●) besitzt. Die gegebenen Punkte dienen dem Training der Klassifizierungsalgorithmen und werden daher im Folgenden Trainingspunkte genannt. Der Designraum wird der Anschaulichkeit halber zwei-dimensional gewählt. Abbildung 4.2 zeigt unterschiedliche Lösungsansätze auf die Frage:

<sup>1</sup>Die Zahl *k* bezieht sich dabei auf die Anzahl der miteinbezogenen nächsten Nachbarn



**Abb. 4.2:** Darstellung von drei unterschiedlichen Klassifizierungsmethoden und den daraus resultierenden Entscheidungsfronten  $x_2 = f(x_1)$ : Lineare Regression (a), k-Nearest-Neighbor (b), Support Vector Machine (c).

«Wie kann man anhand der gegebenen Trainingsdaten  $\mathbf{x}_i = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]^T$ ,  $i = 1(1)N = 100$ , mit  $y(\mathbf{x}) \in \{-1, 1\}$  den Parameterraum mit einer Entscheidungsfront  $f(\mathbf{x}) = 0$  so unterteilen, dass ein neuer Punkt  $\mathbf{x}$  mit unbekannter Eigenschaft/Klasse durch  $f$  richtig zugeordnet wird?». An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass  $f(\mathbf{x})$  sowohl die Form einer analytischen Funktion im klassischen Sinne als auch die einer stückweise linearen oder einer beliebigen Abbildung annehmen kann. Im ersten Beispiel, in Abb. 4.2a, wird zur Trennung der Klassen eine Regressionskurve verwendet. In diesem Fall wird eine lineare Funktion  $x_2 = f(x_1)$  gesucht, welche alle Punkte mit einem minimalen Fehler voneinander trennt. Auffällig ist, dass nicht alle Punkte durch diese Gerade fehlerfrei getrennt werden können. Das zweite Beispiel zeigt eine Klassifizierung durch die Verwendung der Methode der nächsten Nachbarn. Hier wird angenommen, dass Punkte, welche zwischen zwei Trainingspunkten unterschiedlicher Klassen liegen, die Entscheidungsfront definieren. Wie in Abb. 4.2b erkennbar ist, bildet sich dabei ein zackentartiger Verlauf der Entscheidungsfront aus. Beim dritten Beispiel in Abb. 4.2c handelt es sich um das Ergebnis einer nichtlinearen Support Vector Machine. Bei dieser Methode entstehen glatte Entscheidungsfronten, welche zumindest optisch eine geeignete Entscheidungsfront für die Unterteilung in zwei Klassen darstellen.

Generell sind Problemstellungen dieser Art nur nichtlinear trennbar, so dass Methoden, welche komplexe Entscheidungsfronten erfassen können, zu bevorzugen sind. Zudem ist es in industriellen Anwendungen ein Vorteil, wenn für Entscheidungsfronten eine analytische Funktion definiert werden kann. Die Methode der nichtlinearen SVM bildet daher einen guten Ausgangspunkt. Zum Verständnis der nichtlinearen SVM wird im Folgenden zunächst die Theorie der linearen SVM erläutert, um anschließend auf die nichtlineare SVM zu schließen und dann die Anwendung auf das Problem der Verdichterbetriebsgrenzen darzustellen.

### 4.2.1 Lineare Support Vector Machine Klassifizierung

Ausgehend von dem im vorherigen Abschnitt vorgestellten Konzept der Entscheidungstheorie werden nun hier die mathematischen Grundlagen der linearen SVM erläutert. Entsprechend dem im Abschnitt 4.1 beschriebenen Charakter zweier Zustände in einem Verdichter lässt sich jeder Zustand  $\mathbf{x}_i$  mathematisch wie folgt klassifizieren:

$$y_i = \begin{cases} +1 & \text{wenn die CFD konvergiert,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Für eine Menge aus  $N$  analysierten Betriebspunkten, z.B. erzeugt durch eine DoE (engl. Design of Experiments) ergibt sich dann die Datenbasis

$$\left\{ (\mathbf{x}_i, y_i), i = 1(1)N, \mathbf{x}_i \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2, y_i \in \{-1, 1\} \right\}. \quad (4.2)$$

Zunächst wird angenommen, dass alle Punkte  $\mathbf{x}_i$  durch eine gerade Linie  $H$  trennbar sind, welche durch einen Normalenvektor  $\mathbf{w} \perp H$  und einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in H$  definiert ist. Für alle Punkte auf  $H$  gilt dann

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \perp \mathbf{w} \quad \text{oder} \quad \mathbf{w}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in H. \quad (4.3)$$

Mit der Substitution  $b := -\mathbf{w}^T \mathbf{x}_0$  ergibt sich die Trennlinie als

$$H : \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

wobei  $\mathbf{w}$  und  $b$  so gewählt werden müssen, dass

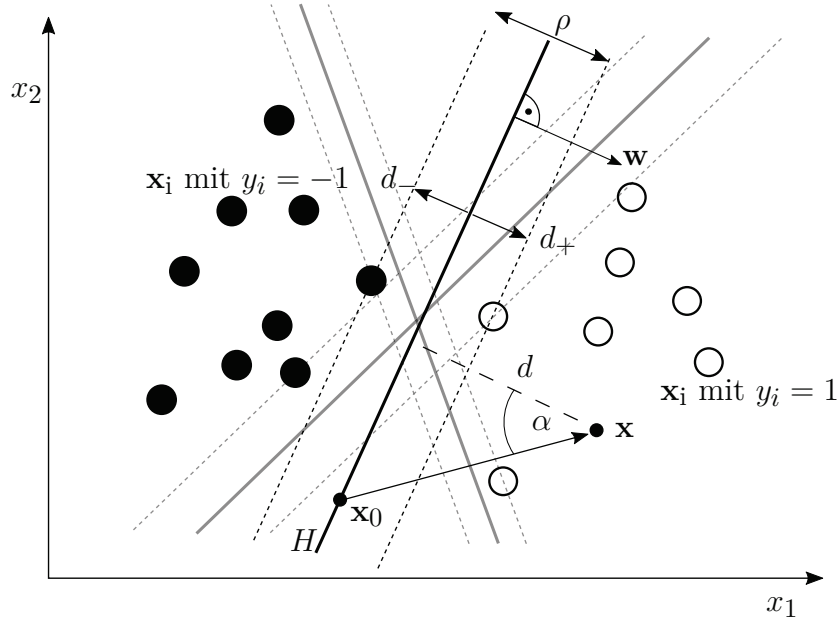
$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \begin{cases} > 0 & \text{für } y_i = +1, \\ < 0 & \text{für } y_i = -1 \end{cases} \quad (4.5)$$

gilt. Im Folgenden werden alle Linien, welche Klassen voneinander trennen, Entscheidungsfronten genannt.

Bei Betrachtung von Abb. 4.3 wird ersichtlich, dass keine eindeutige Lösung für die Entscheidungsfronten existiert. Alle gestrichelten und durchgezogenen Linien in Abb. 4.3 erfüllen die Bedingung (4.5). Die Bestimmung einer optimalen Entscheidungsfront mit bestem  $\mathbf{w}$  und  $b$ , kann jedoch mit dem Konzept der Support Vector Machine realisiert werden.

Zunächst wird die Bedingung (4.5) durch die Multiplikation mit (4.1) als eine Ungleichheitsbedingung

$$y_i \left( \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right) \geq 0, \quad i = 1(1)N, \quad (4.6)$$



**Abb. 4.3:** Lineare Trennung von gültigen (○) und ungültigen (●) Punkten durch eine lineare Entscheidungsfront  $H$

formuliert. Nach Abb. 4.3 ist der Abstand eines beliebigen Punktes  $\mathbf{x}$  zur Entscheidungsfront  $H$

$$\begin{aligned}
 d &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cos(\alpha) \equiv \frac{\|\mathbf{w}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cos(\alpha)}{\|\mathbf{w}\|} \\
 &= \frac{\mathbf{w}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x} - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{w}\|}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mittels der Substitution  $b = -\mathbf{w}^T \mathbf{x}_0$  ergibt sich der Abstand als

$$d = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b}{\|\mathbf{w}\|}, \tag{4.8}$$

wobei  $\|\bullet\|$  für die Euklidische Norm steht. Die Klassifikation eines neuen Punktes  $\mathbf{x} \notin H$  lässt sich dann anhand des Vorzeichens von

$$y = \text{sign}(d) \equiv \text{sign}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b) \in \{-1, 1\} \tag{4.9}$$

durchführen. Mit Gl. (4.8) ergibt sich eine entsprechend Abb. 4.3 sog. Grenzstreifenbreite

$$\rho = \underbrace{\min_{i: y_i=1} \frac{|\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b|}{\|\mathbf{w}\|}}_{d_+} + \underbrace{\min_{i: y_i=-1} \frac{|\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b|}{\|\mathbf{w}\|}}_{d_-}. \tag{4.10}$$

Für eine optimale Trennung sollte der Grenzstreifen möglichst breit sein und die Trennlinie in der Mitte des Streifens liegen. Dazu muss der Wert von  $\rho$  möglichst groß sein und  $b$  so gewählt werden, dass  $d_+ = d_-$  gilt. Zusätzlich findet nach VAPNIK (1995) eine Gewichtung des Normalenvektors  $\mathbf{w}$  so statt, dass

$$\min_{i: y_i=1} \left| \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right| = \min_{i: y_i=-1} \left| \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right| \stackrel{!}{=} 1 \quad (4.11)$$

ist. Damit ergibt sich für die Grenzstreifenbreite in Gl. (4.10)

$$\rho = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|}. \quad (4.12)$$

Weiterhin kann mit Verwendung von Gl. (4.11) die Ungleichheitsbedingung (4.6) so umformuliert werden, dass

$$y_i \left( \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right) \geq 1 \quad \forall \mathbf{x}_i \quad (4.13)$$

gilt.

Die formulierten Forderungen (4.11)-(4.13) liefern noch keine eindeutige Trennungsfrent, wie es an verschiedenen Entscheidungsfronten (durchgezogene Linien) mit den dazugehörigen Grenzstreifen (gestrichelte Linien) in Abb. 4.3 erkennbar ist. Eine Eindeutigkeit lässt sich, durch die Einführung des Optimierungskriteriums erreichen, dass ein Datensatz (4.2) optimal getrennt wird, wenn die Breite  $\rho$  des Grenzstreifens maximal ist:

$$\max \rho = \max \frac{2}{\|\mathbf{w}\|} \hat{=} \min \|\mathbf{w}\| \equiv \min_{\mathbf{w}, b} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \text{ unter der Nebenbedingungen (4.13).} \quad (4.14)$$

Damit lautet das zu lösende Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{w}, b} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \text{ s.t. } \left( 1 - y_i \left( \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right) \right) \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}_i, y_i), \quad i = 1(1)N. \quad (4.15)$$

Dieses restringierte Optimierungsproblem kann mithilfe der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen analytisch gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet z.B. nach BESTLE (1994)

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[ 1 - y_i \left( \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \right) \right] \quad (4.16)$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ ,  $\lambda_i \leq 0$ . Das primale Problem (4.15) kann in das duale Problem

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\lambda}) \quad \text{mit} \quad 0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i \quad (4.17)$$

transformiert werden, wobei entsprechend (B.8) in Anhang B

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (4.18)$$

gilt. Dieses quadratische Problem kann auf viele Arten effizient gelöst werden, wobei im Folgenden nur auf eine Methode von VAPNIK (1995) eingegangen wird. Mit Gl. (B.7) ergibt sich der optimale Normalenvektor

$$\mathbf{w}^* = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i \mathbf{x}_i. \quad (4.19)$$

Werden nun aus der Punktmenge (4.2) zwei beliebige Punkte  $\mathbf{x}^+ \in \{\mathbf{x}_i \mid y_i = +1, \lambda_i^* \neq 0\}$  und  $\mathbf{x}^- \in \{\mathbf{x}_i \mid y_i = -1, \lambda_i^* \neq 0\}$  gewählt, für welche die Nebenbedingungen (4.13) aktiv sind, ergibt sich die Offsetkonstante  $b^*$  aus Gl. (B.10) als

$$b^* = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}^+ + \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}^- \right). \quad (4.20)$$

Die Punkte  $\mathbf{x}^+$  und  $\mathbf{x}^-$  heißen Stützvektoren (support vectors) und geben dem Verfahren den Namen.

Die optimalen Lösungen (4.19) und (4.20) definieren eindeutig die Entscheidungsfront (4.4). Darüber hinaus ergibt sich die Klassifizierung (4.9) für jeden neuen Punkt  $\mathbf{x}$  als

$$\begin{aligned} y(\mathbf{x}) &= \text{sign} \left( \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x} + b^* \right) \\ &= \text{sign} \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}^+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}^- \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

## 4.2.2 Nichtlineare Klassifizierung mit dem Kernel-Trick

Generell sind Entscheidungsfronten realer Probleme keine linearen Mannigfaltigkeiten, so dass obige lineare SVM nicht fehlerfrei durchgeführt werden kann. Zur Lösung dieses Umstands wird die Kernel-SVM benutzt, welche ein linear nicht trennbares Problem aus dem ursprünglichen Raum mittels einer Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^D, \quad (4.22)$$

in einen höherdimensionalen Feature-Raum transformiert, in welchem eine lineare Trennung durch eine Hyperebene  $\tilde{H}$  möglich ist. Exemplarisch ist eine solche Transformation

einer 2D-Menge  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  in den dreidimensionalen Raum  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  in Abb. 4.4 dargestellt. Für einen Punkt  $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{H}$  gilt dann analog zu (4.4)

$$\tilde{H} : \tilde{\mathbf{w}}^{*T} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{b}^* = 0, \quad (4.23)$$

wobei sich Normalenvektor und Offsetkonstante analog zu (4.19) und (4.20) als

$$\tilde{\mathbf{w}}^* = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i \tilde{\mathbf{x}}_i, \quad \tilde{b}^* = -\frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{w}}^{*T} \tilde{\mathbf{x}}^+ + \tilde{\mathbf{w}}^{*T} \tilde{\mathbf{x}}^- \right) \quad (4.24)$$

aus den transformierten Daten  $(\mathbf{x}_i, y_i) \rightarrow (\tilde{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i), y_i)$  ergeben.

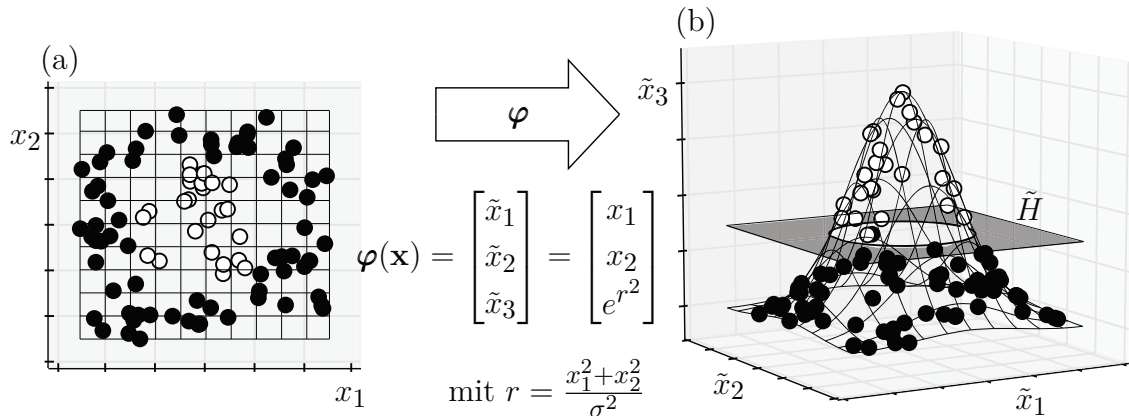
Die Transformationsfunktion  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  und die Dimension  $D$  in Gl. (4.22) sind in der Regel nicht bekannt, weshalb sich aus  $\tilde{H}$  die Entscheidungsfront im Ausgangsraum nicht berechnen lässt. Dazu wird der sog. Kernel-Trick verwendet. Bei näherer Betrachtung von Gl. (4.21) wird deutlich, dass für eine Klassifizierung von neuen Punkten nur Skalarprodukte von Punkten der gegebenen Datenbasis benötigt werden. Somit ist nicht die Transformationsfunktion selbst erforderlich, sondern nur das Skalarprodukt davon. Die Kernelfunktion

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) := \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_j = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j) \quad (4.25)$$

bildet dieses Skalarprodukt ab. Durch geschickte Wahl dieser Funktion und unter Beachtung der Mercer-Bedingungen ist dann eine lineare Trennung im höherdimensionalen Raum möglich. Für einen detaillierten Einblick in diese Thematik wird auf die Literatur von VAPNIK U. A. (1995) und SCHOELKOPF UND SMOLA (2001) verwiesen.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird ein Gauß-Kernel der Form

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.26)$$



**Abb. 4.4:** Kernel-Trick zur Transformation einer (a) im Zweidimensionalen linear nicht trennbaren Menge in eine (b) im Dreidimensionalen linear trennbaren Menge



mit frei wählbarem Parameter  $\sigma$  verwendet. Für eine automatische Wahl wird in der folgenden Anwendung iterativ ein optimales  $\sigma^2$  bestimmt, das die Breite  $\rho$  des Grenzstreifens um  $\tilde{H}$  maximiert. Der Wertebereich wird dafür auf  $\sigma^2 \in [0.3, 3.0]$  begrenzt, da erfahrungsgemäß höhere Werte zu zackenartigen Entscheidungsfronten führen.

Für einen neuen Betriebspunkt  $\mathbf{x}$  lautet die Klassifizierungsfunktion dann analog zu Gl. (4.21) wie folgt:

$$y(\mathbf{x}) = \text{sign} \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^* y_i (K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^+) + K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^-)) \right). \quad (4.27)$$

Zwar kann damit nun jeder neue Punkt klassifiziert werden und die Menge in höherer Dimension linear separiert werden, jedoch ist wie erwähnt weder die Transformationsfunktion noch die Rücktransformation bekannt. Somit kann die Form der Entscheidungsfront noch immer nicht bestimmt werden. Die Lösung dieses Problems bedarf daher weiterer Überlegungen, welche im folgenden Abschnitt erläutert werden.

### 4.3 Approximation der Entscheidungsfront

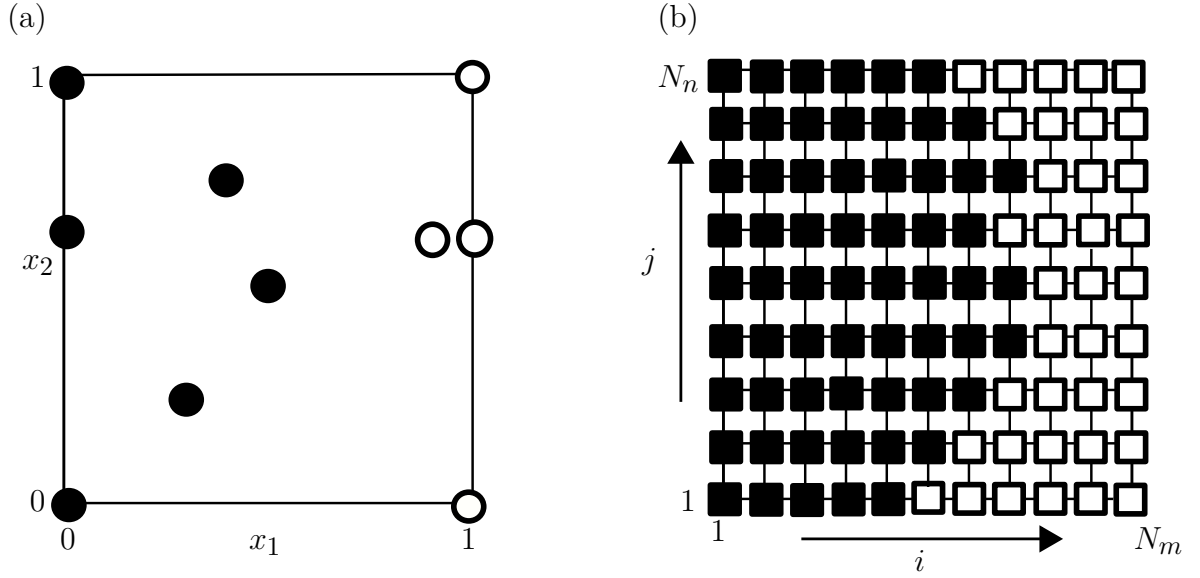
Der nichtlineare SVM-Ansatz kann verwendet werden, um Sperr- und Pumpgrenzen eines Verdichters zu bestimmen. Im Folgenden wird die Bestimmung der Entscheidungsfront direkt anhand der Pumpgrenze dargestellt. Zunächst ist entsprechend der Normierung (2.10) ein Suchfenster  $\mathbf{x} \in [0, 1]^2$  für die Pumpgrenze definiert. In diesem wird eine Stichprobe aus 10 Betriebspunkten erstellt:

$$X := \left\{ \mathbf{x}_i \in [0, 1]^2, \quad i = 1(1)10 \right\}, \quad (4.28)$$

wobei vier die Eckpunkte und einer den Mittelpunkt des Suchfensters repräsentieren. Die übrigen fünf werden zufällig gewählt, siehe Abb. 4.5a. Nach CFD-Analyse und anschließender Klassifizierung entsprechend Gl. (4.1) wird die Kernel-SVM durchgeführt. Um die Trennlinie (4.23) im Ausgangsraum  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  sichtbar zu machen und damit die Pumpgrenze  $x_{P,1} = f(x_{P,2})$  zu approximieren, wird folgender Prozess durchgeführt: Das Analysefenster  $[0, 1]^2$  wird mit einem äquidistanten, orthogonalen Gitter von  $N_m \times N_n$  Punkten

$$\mathbf{x}^{(i,j)} \in \left[ \begin{array}{c} i-1 \\ N_m-1 \\ j-1 \\ N_n-1 \end{array} \right], \quad i = 1(1)N_m, \quad j = 1(1)N_n, \quad (4.29)$$

gerastert. Alle Rasterpunkte werden mithilfe von Gl. (4.27) durch  $y^{(i,j)} \in \{-1, 1\}$  klassifiziert, siehe Abb. 4.5b. Die gesuchte Trennlinie besteht dann aus  $N_n$  Punkten auf dem



**Abb. 4.5:** Initiale Stichprobenverteilung (a) und ausgewertetes Gitter (b) mit als gültig ( $\circ, \square$ ) und ungültig ( $\bullet, \blacksquare$ ) klassifizierten Punkten

Raster mit  $x_{P,1}^{(j)} = \left( f_P(x_{P,2}^{(j)}), x_{P,2}^{(j)} \right)$ , an denen ein Vorzeichenwechsel von  $y^{(i,j)}$  stattfindet:

$$x_{P,2}^{(j)} = x_2^{(k,j)}, \quad f_P(x_{P,2}^{(j)}) = \frac{x_1^{(k,j)} + x_1^{(k+1,j)}}{2} \quad (4.30)$$

mit  $k : y^{(k,j)} y^{(k+1,j)} < 0, j = 1(1)N_n$ .

Die so bestimmten Punkte werden anschließend in einer Datenbasis

$$X_P^{(1)} := \left\{ \mathbf{x}_P^{(j)} = \left[ f(x_{P,2}^{(j)}), x_{P,2}^{(j)} \right]^T, j = 1(1)N_n \right\} \quad (4.31)$$

gespeichert. Die Qualität der so gefundenen Trennlinie hängt einerseits von dem gewählten Raster in Abb. 4.5b ab, andererseits aber noch mehr von der Klassifizierung (4.27), die auf nur wenigen Stichprobenpunkten in Abb. 4.5a basiert. Um diese zu verbessern muss die Datenbasis erweitert werden.

## 4.4 Iterative Bestimmung von Betriebsgrenzen

Da die Güte der Entscheidungsfront auf einer vorher festgelegten Punktmenge basiert, muss der nächste folgerichtige Schritt sein, anhand der gewonnenen Ergebnisse neue Kandidatenpunkte so festzulegen, dass bei weiteren Klassifikationsschritten die Approximation der tatsächlichen Betriebsgrenzen verbessert wird. In den folgenden Abschnitten wird die Entwicklung dynamischer Versuchspläne erläutert, welche mithilfe der durch die SVM gebildeten Entscheidungsfronten sowie der topologischen Lage der Datenmenge neue

Stichproben erstellen und den Parameterraum effektiv erschließen.

Die erste vorgeschlagene Entscheidungsfrent (4.31) entspricht a. Allg. nicht der echten Betriebsgrenze, da diese auf nur zehn Punkten (4.28) basiert. Deshalb ist eine geeignete Erweiterung der Datenbasis notwendig. In Arbeiten von IVANOV U. A. (2018) wird diese Datenbasis (4.28) iterativ erweitert und nach jeder Erweiterung eine neue SVM-Approximation durchgeführt bis  $x_{P,1} = f_P(x_{P,2})$  eine fast vollständige Übereinstimmung mit der echten Pumpgrenze erzielt. Der iterative **Algorithmus A** zur Erweiterung der Datenbasis ist dabei wie folgt:

- A1 Festlegung  $\nu := 1$ , Erstellung einer initialen Datenbasis  $X$  nach Gl. (4.28), Auswertung von CFD-Lösungen für  $\mathbf{x}_i \in X$  und Klassifizierung dieser nach Gl. (4.1).
- A2 Bestimmung der Entscheidungsfunktion mithilfe der Kernel-SVM (4.27).
- A3 Anwendung dieser auf ein Raster (4.29) und Bestimmung die Entscheidungsfrent  $X_P^{(\nu)}$  entsprechend (4.30) und (4.31).
- A4 Für  $\nu < 2$  oder falls nacheinander bestimmte Entscheidungsfrenten die Konvergenzbedingung

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \left( x_{P,1}^{(j)}|_{\in X_P^{(\nu)}} - x_{P,1}^{(j)}|_{\in X_P^{(\nu-1)}} \right)^2} \leq \varepsilon_K \quad (4.32)$$

nicht erfüllen, Bestimmung einer Menge  $C$  von zusätzlichen Betriebspunkten, Klassifizierung dieser entsprechend (4.1) und Erweiterung der Datenbasis auf  $X := X \cup C$ . Erhöhung  $\nu := \nu + 1$  und Fortfahren mit Schritt A2.

Der Wert  $\varepsilon_K$  in (4.32) ist vom Benutzer festzulegen, die Kriterien für die Wahl von  $\varepsilon_K$  werden im Abschnitt 4.5 erläutert. Der Fortschritt der Designraumexploration mit dem **Algorithmus A** ist maßgeblich von der Wahl der Kandidatenpunkte abhängig. In den folgenden Abschnitten werden daher effektive Auswahlverfahren für die Punkte der Kandidatenmenge  $C$  vorgestellt.

#### 4.4.1 Sequentieller Ansatz

Beim sequentiellen Ansatz besteht die Kandidatenmenge  $C$  jeweils nur aus einen Punkt  $\mathbf{c} \in X_P^{(1)}$ , welcher auf der aktuellen Entscheidungsfrent  $f_P^{(\nu)}$  liegt. Intuitiv wird als erfolgversprechende Wahl der Punkt ausgewählt, welcher den größten Abstand zu seinem

nächsten Nachbarn aus der aktuellen Stichprobe  $X$  (4.28) besitzt, d.h.

$$\mathbf{c} := \arg \max_{\mathbf{x}_P^{(i)} \in X_P^{(\nu)}} d(\mathbf{x}_P^{(i)}, X), \quad (4.33)$$

mit  $d(\mathbf{x}_P, X) := \min_{\mathbf{x}_j \in X} \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_j\|$ .

Im **Algorithmus A** ist dann  $C = \{\mathbf{c}\}$ .

Zur Validierung des Algorithmus wird ein Meanline-Modell des Rig 250 verwendet, da alle Betriebspunkte damit innerhalb weniger Sekunden berechnet werden können. Der Ablauf des iterativen Erschließens der Entscheidungsfront mit Meanline ist anhand von ausgewählten Iterationsschritten  $\nu \in \{1, 7, 14, 22, 29, 34\}$  in Abb. 4.6 dargestellt. Nach der ersten Iteration  $\nu = 1$  weicht die approximierte Entscheidungsfront (durchgezogene Linie) noch deutlich von der realen Front (gestrichelte Linie) ab. Schon nach  $\nu = 7$  Iterationen ist erkennbar, dass der verwendete Algorithmus die reale Front durch die Kandidatenpunkte einhüllt. Nach etwa  $\nu = 22$  Iterationen ist, bis auf den Bereich  $x_2 > 0.75$ , eine starke Ähnlichkeit zwischen approximierter und realer Front erkennbar. Nach  $\nu = 34$  Iterationen konvergiert der Algorithmus bezüglich Kriterium (4.32). Das gleiche Verhalten wird auch bei der Sperrgrenzensuche beobachtet. In Untersuchungen von IVANOV U. A. (2018) zeigt dieser Prozess bei 50 Wiederholungen durchweg sehr gute Approximationsergebnisse, wobei im Mittel 36 CFD-Iterationen zur Erschließung der Pump- und Sperrgrenzen notwendig sind.

Da die Zielstellung, eine Anwendung des Algorithmus auf eine 3D-CFD-Berechnung ist, welche ca. 6h bis 48h Berechnungszeit pro Punkt benötigen kann, ist die relativ hohe Iterationsanzahl noch nicht zufriedenstellend. Als Lösung dieses Problems lässt sich eine parallelisierte Auswertung mehrerer Punkte gleichzeitig vornehmen, indem ein CPU-Cluster verwendet wird, auf welchem die CFD-Berechnung mehrerer Punkte zeitgleich erfolgen kann. Damit ist der Zeitaufwand einer einzelnen Iteration des **Algorithmus A** zwar gleich hoch, die Berücksichtigung mehrerer Punkte in der Kandidatenmenge  $C$  lässt aber eine schnellere Konvergenz der Entscheidungsfront erwarten, wodurch die Zahl der Iterationen in **Algorithmus A** reduziert wird. Daher werden im Folgenden Methoden vorgestellt, welche durch parallele Auswertung von geeigneten Kandidatenpunkten mit CFD die Exploration des Designraumes beschleunigen und zu hinreichend genauer Approximation der Betriebsgrenzen innerhalb weniger Iterationen führen.

#### 4.4.2 Paralleler linienbasierter Ansatz

Der linienbasierte Ansatz ähnelt dem sequentiellen Ansatz aus Abschnitt 4.4.1. Auch hier werden Kandidatenpunkte auf der aktuellen approximierten Entscheidungsfront  $f_P^{(\nu)}$  ausgewählt, so dass alle gemeinsam die Kandidatenmenge  $C \in X_P^{(\nu)}$  bilden, es wird jedoch eine vorgegebene Anzahl  $N_c$  von Kandidatenpunkten gewählt. Die Wahl erfolgt rekursiv, dass jeder Kandidat den größten Abstand zu den bereits ausgewerteten Punkten der

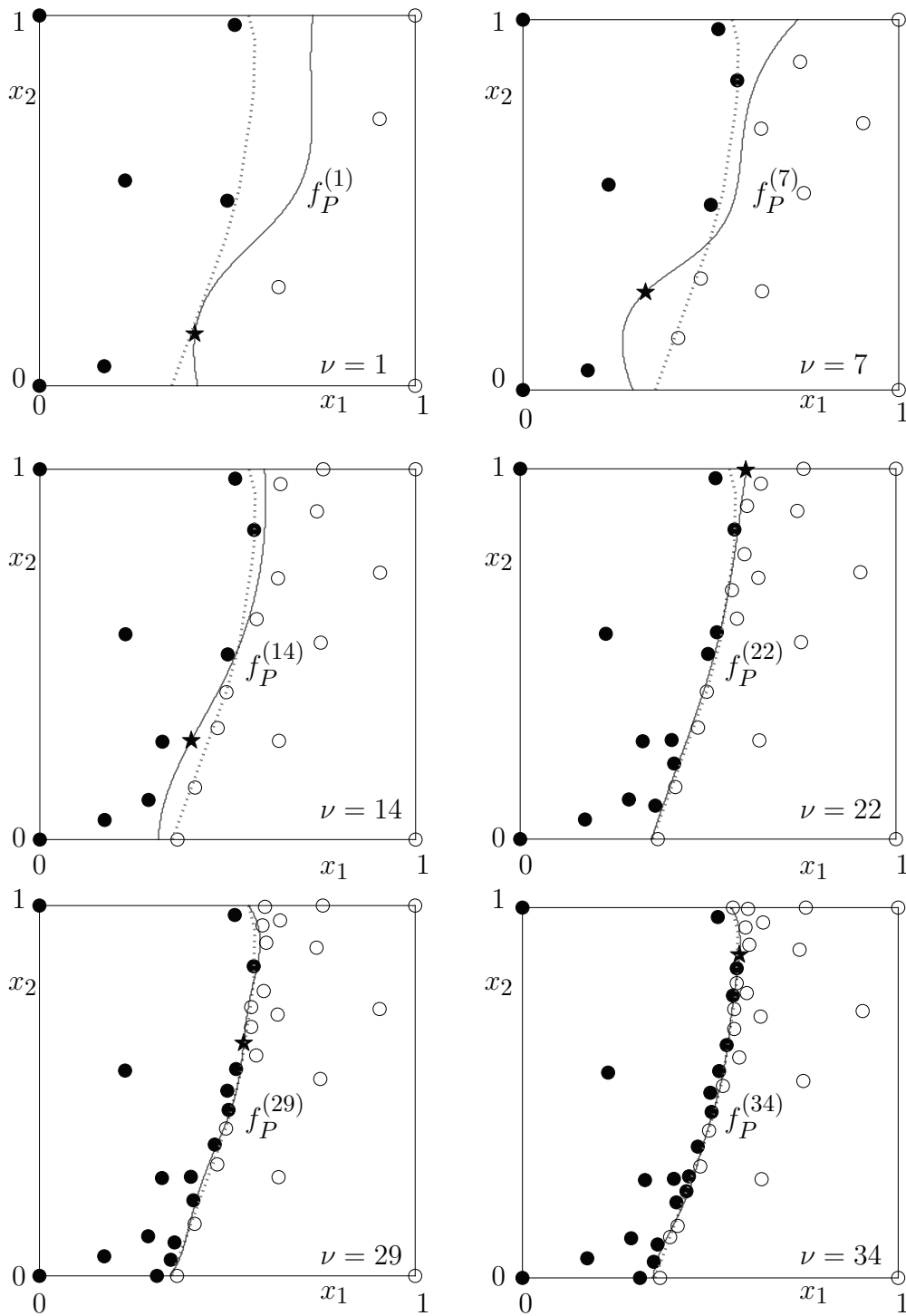


Abb. 4.6: Iterative serielle Exploration des Designraums auf Basis von konvergierten ( $\circ$ ) und divergierten ( $\bullet$ ) CFD-Lösungen mit jeweils einem Kandidatenpunkt ( $\star$ ) je Iterationsschritt. Zusätzlich Darstellung der Entscheidungsfront  $f_P^{(\nu)}$  (durchgezogene Linie) im Vergleich zur echten Pumpgrenze  $f_P$  (gestrichelte Linie)

Menge  $X$  sowie zu bereits selektierten Kandidaten besitzt. Die Festlegung der Kandidaten erfolgt im **Algorithmus B**:

B1 Festlegen  $C := \{\}$ ,  $\mu := 0$ .

B2 Auswählen eines Kandidaten  $\mathbf{c} \in X_P^{(\nu)} \setminus C$  mit dem größten Abstand zu  $X$  und bereits bestimmten Kandidaten, d.h.,

$$\mathbf{c} := \arg \max_{\mathbf{x}_P \in X_P^{(\nu)} \setminus C} d(\mathbf{x}_P, X \cup C)$$

mit  $d$  entsprechend (4.33).

B3 Aktualisieren der Kandidatenmenge  $C := C \cup \{\mathbf{c}\}$ ,  $\mu := \mu + 1$ , und Rückkehr zu Schritt B2 für  $\mu \leq N_c$ . Ansonsten ist  $C$  festgelegt.

Abbildung 4.7 zeigt den Auswahlprozess für vier Kandidatenpunkte. Für jede Wahl  $\mu$  zeigt der Stern einen geeigneten Kandidaten und der gestrichelte Umkreis das Auswahlkriterium B2. Im Hinblick auf zukünftige Arbeiten, könnte eine Untersuchung einer parallelen gleichzeitigen Punkteverteilung durch mehrkriterielle Optimierung durchaus von Interesse sein.

Zur Verdeutlichung der Vorteile dieser Methode zeigt Abb. 4.8 eine Versuchsreihe zum Auffinden der Pumpgrenze durch Annäherung der approximierten Betriebsgrenzen  $x_{P,1} = f_P^{(\nu)}(x_{P,2})$  an die reale Pumpgrenze mittels einer parallelen Auswertung von  $N_c = 12$  Kandidatenpunkten. Auch in diesem Fall wird das Meanline-Modell des Rig250 für die CFD-Berechnungen verwendet. Es ist eindeutig erkennbar, dass bereits nach  $\nu = 3$  Iterationen des **Algorithmus A** die reale Front (gestrichelte Linie) von bereits bestimmten Kandidatenpunkten eng umhüllt ist. In den weiteren Iterationen finden lokale Änderungen statt bis für  $\nu = 6$  eine hinreichend genaue Approximation erreicht ist. Bei Wiederholungen des untersuchten Falls konnte im Durchschnitt nach sechs Iterationen die Pumpgrenze gefunden werden. Der Vergleich mit der sequentiellen Methode mit etwa 36 Iterationen zeigt den immensen Vorteil der parallelen Auswertung von Betriebspunkten, welcher sich in einer Rechenzeitreduktion von 600% zeigt. Ähnliche Beobachtungen werden auch für die Bestimmung der Sperrgrenzen gemacht.

Die Auswertung der Kandidatenpunkte beschränkt sich jedoch auf eine Linienauswertung entlang der aktuellen Entscheidungsfront. Eine zusätzliche Exploration des Umfeldes der Kurve  $f_P^{(\nu)}$  erscheint wünschenswert, da eine weitere Effizienzsteigerung vermutet wird.

### 4.4.3 Paralleler flächenbasierter Ansatz

Die Bestimmung der Kandidatenpunkte des obigen Auswahlverfahrens erfolgt linienhaft entlang der aktuellen Entscheidungsfront. Eine zusätzliche Exploration des Umfeldes der Kurve  $f_P^{(\nu)}$  könnte eine weitere Effizienzsteigerung erzielen. Zur Umsetzung eines flächenbasierten Ansatzes werden die bereits innerhalb des SVM- Prozesses bestimmten Support-

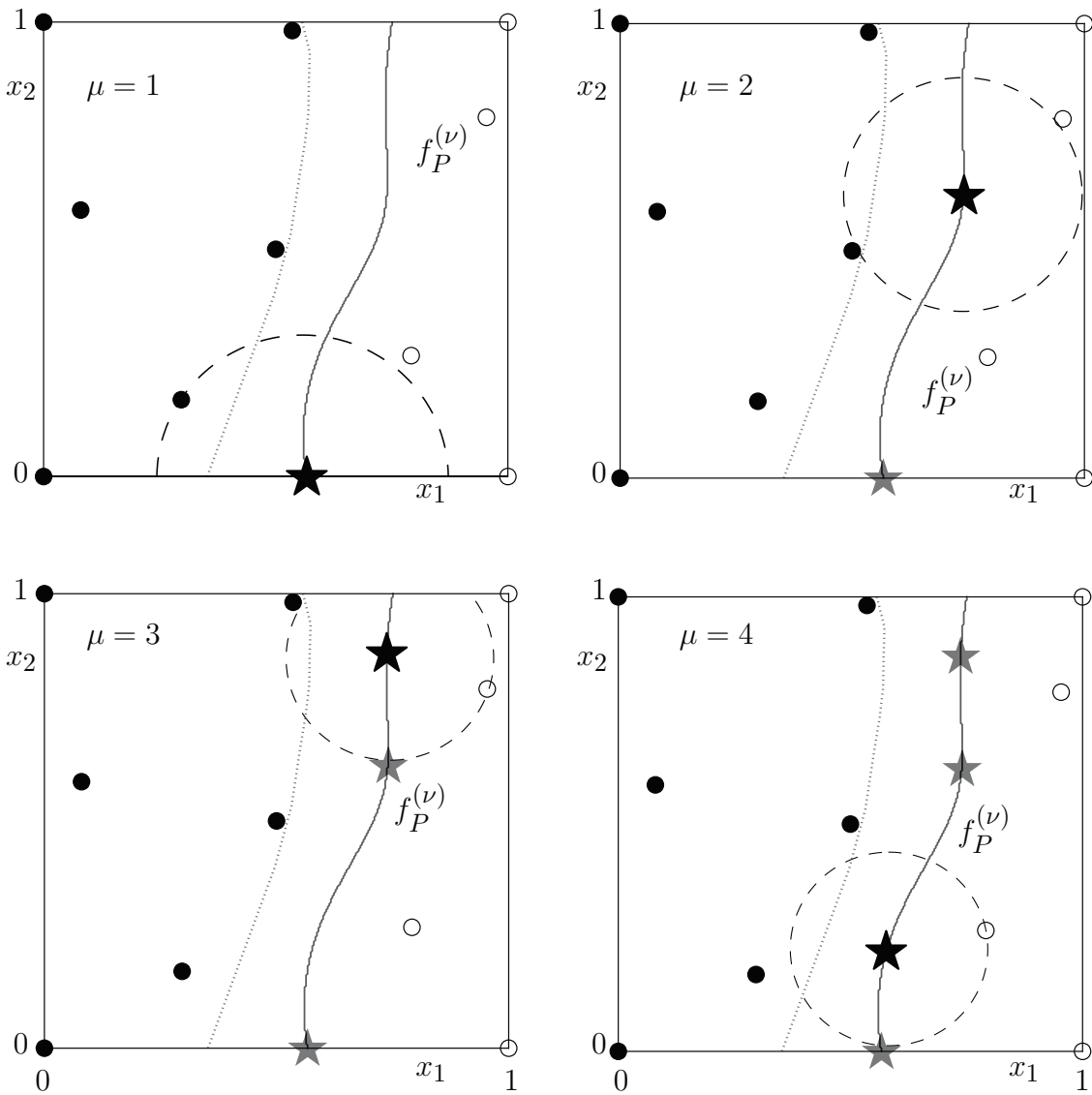


Abb. 4.7: Auswahlverfahren von  $N_c = 4$  Kandidatenpunkten mit dem parallelen linienbasierten Ansatz

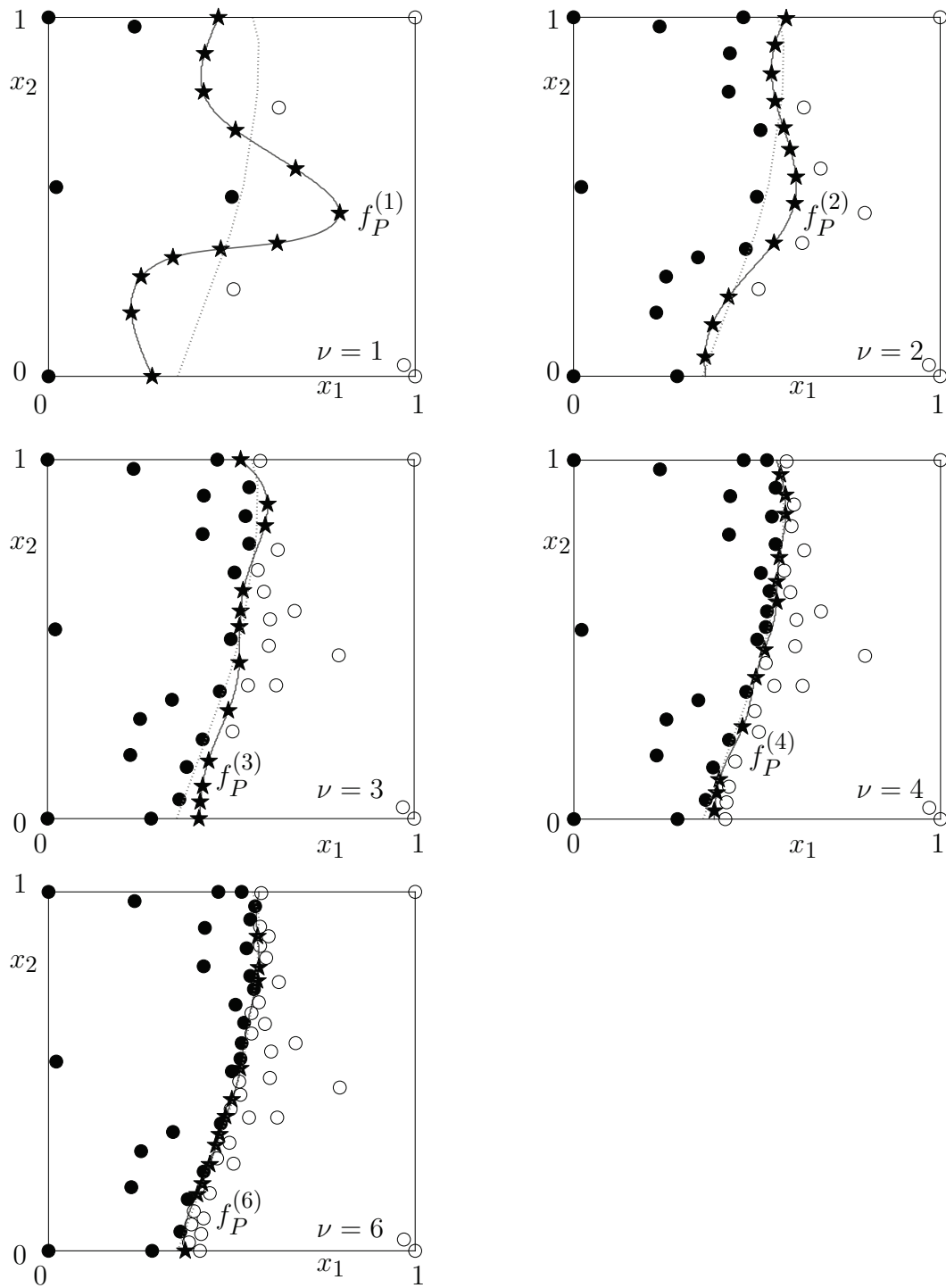


Abb. 4.8: Parallele linienbasierte Exploration des Designraums mit jeweils  $N_c = 12$  Kandidatenpunkten ( $\star$ ) zur iterativen Verbesserung der Entscheidungsfront  $f_P^{(\nu)}$  (durchgezogene Linie) als Näherung der Pumpgrenze  $f_P$  (gestrichelte Linie)



Vektoren verwendet. Nach Abschnitt 4.2.1 charakterisieren diese die Grenzbereiche um die Entscheidungsfronten. Mithilfe dieser wird ein Grenzstreifen um  $x_{P,1} = f_P^{(\nu)}(x_{P,2})$  durch

$$\begin{aligned} f_+^{(\nu)}(x_2) &:= f_P^{(\nu)}(x_2) + \Delta_+, \\ f_-^{(\nu)}(x_2) &:= f_P^{(\nu)}(x_2) - \Delta_- \end{aligned} \tag{4.34}$$

definiert, wobei  $\Delta_+$  der Abstand in  $x_1$ -Richtung zwischen  $f^{(\nu)}$  und dem nächsten positiven Support-Vektor  $\mathbf{x}_i \in X$  mit  $y(\mathbf{x}_i) = +1$  ist. Analog dazu ist  $\Delta_-$  die Distanz zum nächsten negativen Support-Vektor  $\mathbf{x}_i \in X$  mit  $y(\mathbf{x}_i) = -1$ , vgl. Abb. 4.9.

Der so durch die Linien  $x_1 = f_+^{(\nu)}(x_2)$  und  $x_1 = f_-^{(\nu)}(x_2)$  eingeschlossene Grenzstreifen bildet eine Fläche  $A_P$ , innerhalb welcher neue Kandidaten gefunden werden müssen. In den vorherigen Abschnitten erfolgte die Kandidatenbestimmung entlang einer diskreten Punktmenge  $X_P^{(\nu)}$ , so dass ein geeigneter Kandidat durch sukzessive Auswertung von (4.33) für jeden Punkt aus  $X_P^{(\nu)}$  und anschließender Wahl des Maximums gefunden werden konnte. Nun liegt ein zweidimensionales Problem in Form einer Fläche vor, so dass Kandidatenpunkte  $\mathbf{c}$  entweder aus einer Rasterauswertung oder, in einer eleganteren Weise, mithilfe von Optimierungsalgorithmen bestimmt werden müssen. Die zu optimierende Zielfunktion beschreibt den maximalen Abstand eines Kandidaten  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  zu seinem nächsten Nachbarn aus  $X$ , wobei der Suchbereich für  $\mathbf{c}$  von  $f_-^{(\nu)}$  und  $f_+^{(\nu)}$  begrenzt wird. Dieses restringierte Optimierungsproblem lautet somit

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &:= \arg \max_{\mathbf{c} \in \mathcal{P}} \left( \min_{\mathbf{x}_j \in X} \|\mathbf{c} - \mathbf{x}_j\| \right) \\ \text{mit } \mathcal{P} &= \left\{ \mathbf{c} = [c_1, c_2]^T \in \mathbb{R}^2, f_-^{(\nu)}(c_1) \leq c_1 \leq f_+^{(\nu)}(c_1), 0 \leq c_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Zur Lösung des Problems (4.35) wird ein Optimierungsalgorithmus aus der Gattung der «Evolutionären Algorithmen» verwendet, welche von den natürlichen Evolutionsprozessen in der Natur inspiriert sind. Die Evolution aus der Perspektive der Informatik ist hierbei durch folgende Schritte definiert: Ausgehend von einer zufällig verteilten initialen Stichprobe, auch «Eltern»-Population genannt, wird jedem Punkt dieser Population, auch Individuum genannt, ein Fitnesswert zugeordnet. Der Fitnesswert eines Individuums entspricht dabei z.B. dem Wert einer Zielfunktion. Ähnlich dem Verhalten in der Natur werden die Individuen mit dem besten Fitnesswert für die Fortpflanzung (auch Replikation genannt) ausgewählt. Die Fortpflanzung findet durch Variation der Eigenschaften der ausgewählten Individuen statt, wobei zwei Variationsmöglichkeiten zur Verfügung stehen, die Rekombination und die Mutation. Die Rekombination basiert auf der Vertauschung der Merkmale mehrerer Individuen, was bei durch Vektoren beschriebenen Punkten dem Vertauschen von Vektorkomponenten gleichkommt. Die Mutation basiert auf zufallsbasierten Änderungen von Eigenschaften eines Individuums, wobei die Evolution einen stochastischen Charakter bekommt. Mit Variation der ausgewählten «Eltern»-Individuen wird eine

neue «Kinder»-Population erschaffen und auf ihre Fitness überprüft, um ihrerseits neue Nachfolger für eine nächste Generation zu generieren. In der Praxis unterscheiden sich die verschiedenen mathematischen Methoden der Evolutionären Algorithmen durch die Art der Selektion der Individuen und der Variationsstrategien (Rekombination, Mutation, gemischte Ansätze). Einen detaillierten Überblick evolutionsbasierter Methoden geben z.B. SLOSS UND GUSTAFSON (2019). Im Rahmen dieser Arbeit wird der Optimierungsalgorithmus der differentiellen Evolution nach STORN UND PRICE (1997) verwendet. Bei diesem Algorithmus geschieht die Rekombination eines einzelnen Individuums durch Summieren eines gewichteten Differenzvektors von zufällig ausgewählten Individuen. Nach der Festlegung der Methode zum Aufspüren eines geeigneten Kandidaten wird diese in den Algorithmus C implementiert, um rekursiv  $N_c$  Kandidatenpunkte zu generieren:

C1 Festlegen von  $C := \{\}$ ,  $\mu := 0$ .

C2 Bestimmung eines Kandidaten  $\mathbf{c}$  innerhalb der eingeschlossenen Fläche  $A_P$  durch die Lösung des Optimierungsproblems (4.35)

C3 Erweiterung  $C := C \cup \{\mathbf{c}\}$ ,  $\mu := \mu + 1$ , und Wiederholung von Schritt C2 für  $\mu \leq N_c$ .

Die rekursive Bestimmung von vier Kandidatenpunkten mit dem Algorithmus C ist exemplarisch in Abb. 4.9 dargestellt. Das Kriterium (4.35) ist graphisch als gestrichelter Umkreis für jeden neuen Kandidatenpunkt dargestellt. Eine Anwendung dieser Auswahlmethode auf das Meanline-Modell des Rig250 ist in Abb. 4.10 für eine parallele Auswertung von  $N_c = 12$  Kandidatenpunkten dargestellt. Im Vergleich zum linienbasierten Ansatz aus Abschnitt 4.4.2 wird bereits bei der ersten Iteration des Algorithmus A die reale Entscheidungsfront (gestrichelte Linie) durch den Bereich mit den Rändern  $f_-^{(\nu)}$  und  $f_+^{(\nu)}$  (strichpunktierte Linien) eingeschlossen. Mit jeder weiteren Iteration zieht sich der eingeschlossene Bereich weiter zusammen, bis dieser letztendlich zu einer Linie in Form der realen Entscheidungsfront kollabiert.

Eine mehrfache Auswertung dieses Algorithmus ergab, dass die Pumpgrenze im Durchschnitt nach fünf Iterationen  $\nu$  hinreichend genau approximiert wird. Wiederholungen zur Bestimmung der Sperrgrenze zeigen ähnliche Ergebnisse. Somit ist der parallelisierte flächenbasierte Ansatz um etwa 17% schneller als der parallelisierte linienbasierte Ansatz und somit 720% schneller als der sequentielle Ansatz. Untersuchungen von IVANOV U. A. (2018, 211–226) zeigen ähnliche Resultate.

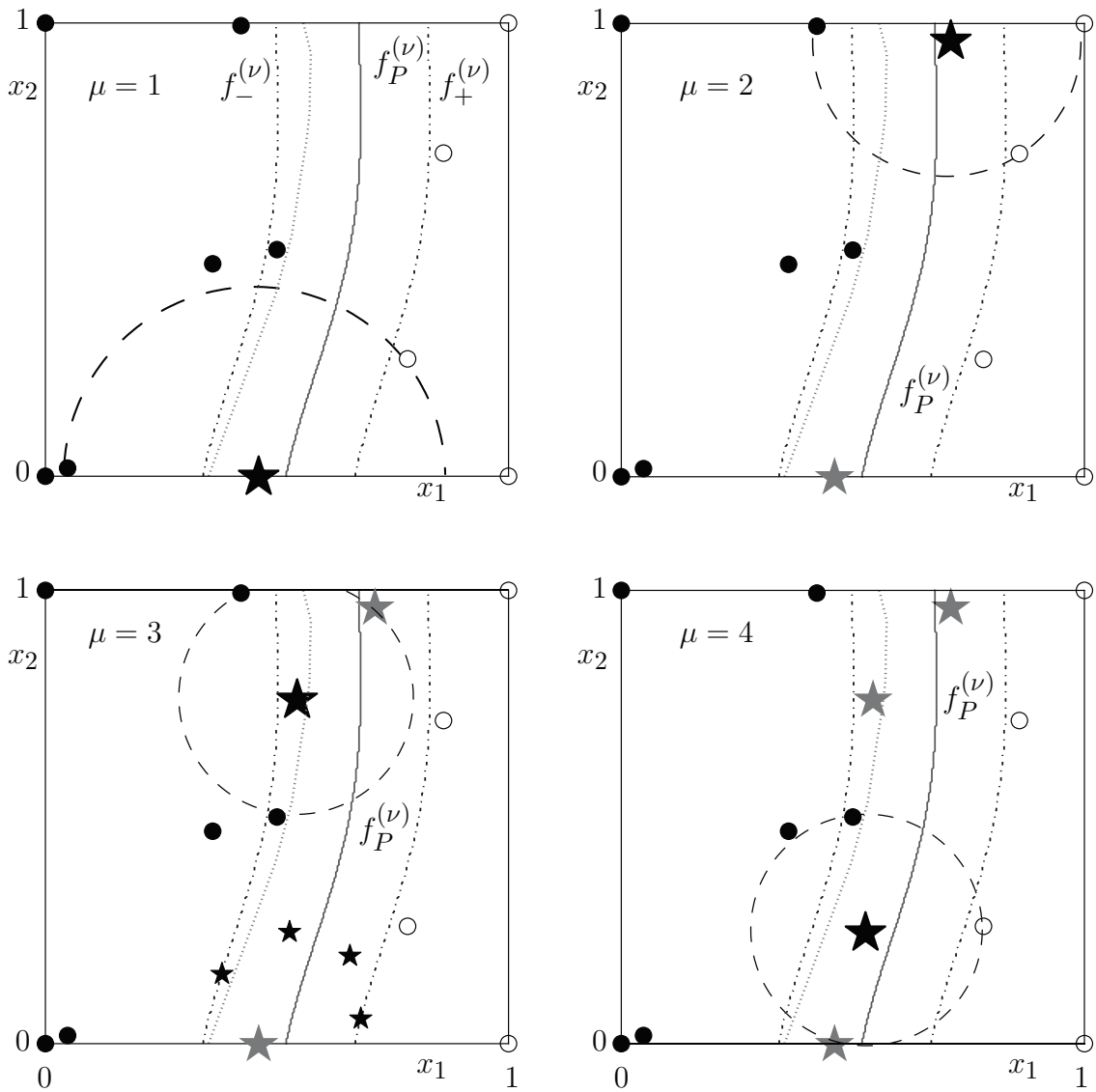


Abb. 4.9: Flächenbasierte Auswahl von Kandidatenpunkten (★) in einem Grenzstreifen zu jeder aktuellen Entscheidungsfront (durchgezogene Linie)

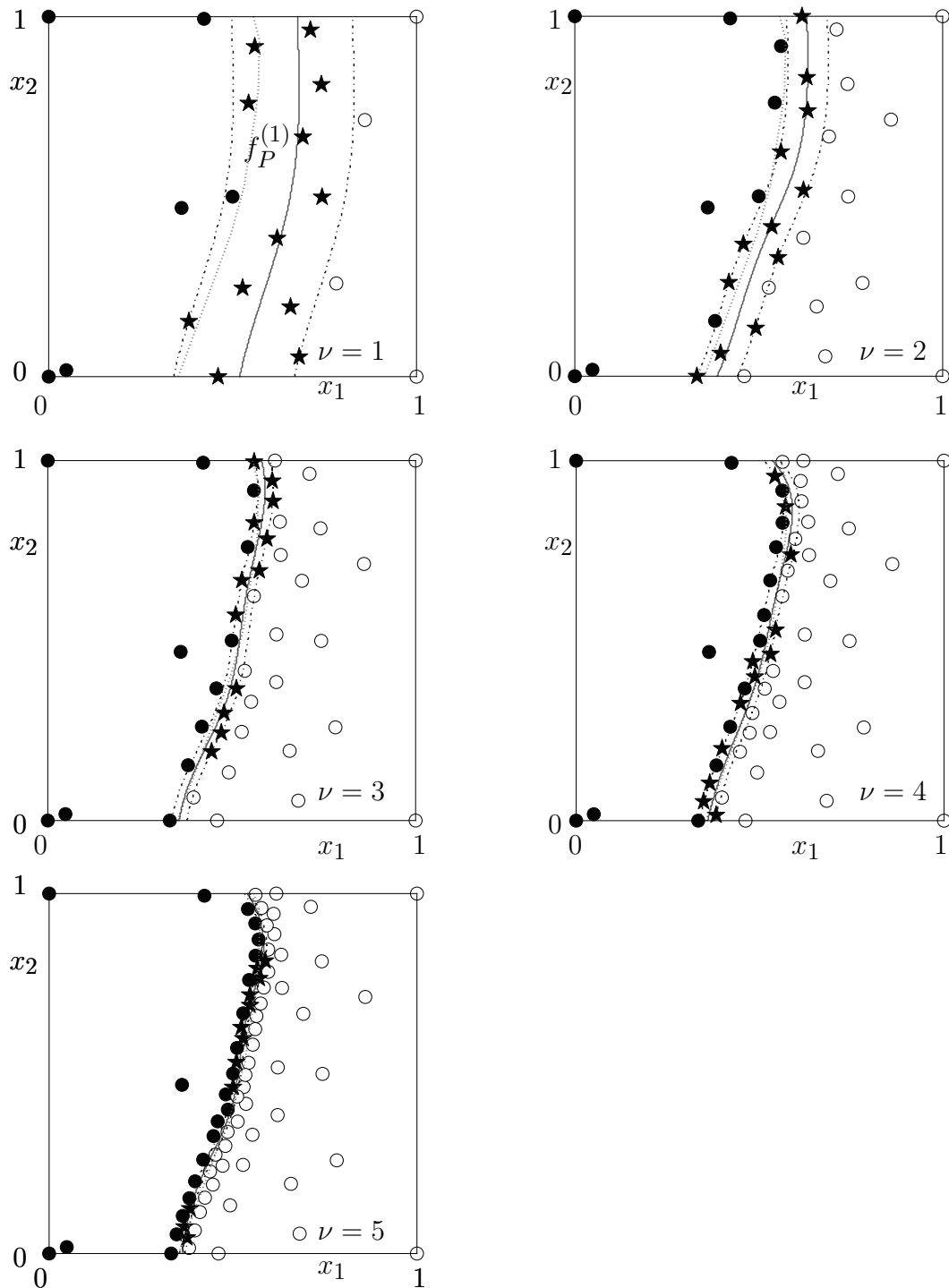


Abb. 4.10: Parallele flächenbasierte Exploration des Suchraums mit  $N_c = 12$  Kandidatenpunkten ( $\star$ ) innerhalb des Grenzstreifens (strichpunktierte Linie) der Entscheidungsfront  $f_P^{(\nu)}$  (durchgezogene Linie) zur Approximation der Pumpgrenze  $f_P$  (punktirierte Linie)

## 4.5 Vergleich der Klassifizierungsstrategien

Nachdem in den vorherigen Abschnitten drei Methoden zur Bestimmung von Betriebsgrenzen vorgestellt wurden, soll nun objektiv beurteilt werden, welches Verfahren bei welchen Ausgangsbedingungen (Grad der Parallelisierung, geforderte Genauigkeit) am schnellsten zum Erfolg führt. Auch für diese Untersuchung wird das Meanline-Model des Rig250 verwendet. Zunächst werden für verschiedene Parallelisierungsgrade

$$N_c \in \{1, 4, 6, 8, 12, 24, 48\} \quad (4.36)$$

und verschiedene Abbruchbedingungen nach (4.32) mit

$$\varepsilon_K \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\} \quad (4.37)$$

die Pumpgrenzen  $x_1 = f_P(x_2)$  bestimmt, wobei für jede Kombination  $N_c$  und  $\varepsilon_K$  je 15 Wiederholungen mit den Methoden aus Abschnitt 4.4.2 und 4.4.3 durchgeführt werden. Anschließend werden die normierten Drehzahlen  $x_2^P \in \{0, 0.134, 0.4, 0.54, 0.67, 0.74, 0.8, 0.94, 1.0\}$  ausgewertet und ein mittlerer Fehler

$$\bar{\varepsilon}_{P,i} = \frac{1}{15} \sum_{j=1}^{15} \|x_{1,i,j}^P - f_P(x_{2,i,j}^P)\| \quad (4.38)$$

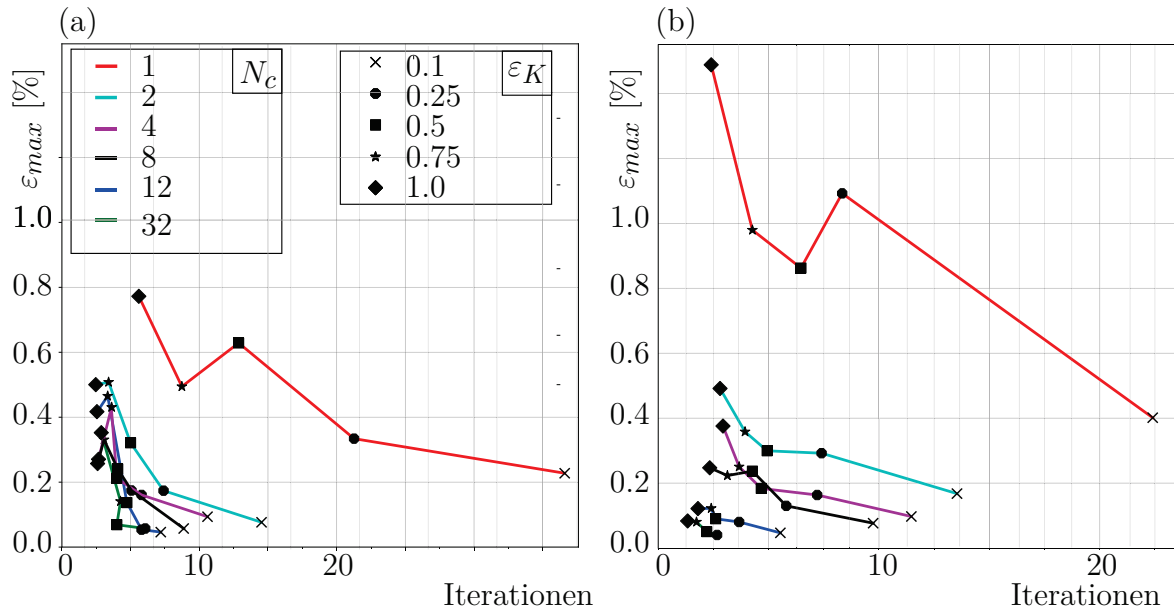
bestimmt. Zum Vergleich der verschiedenen Strategien wird der maximale mittlere Fehler über alle Drehzahllinien gebildet, d.h.:

$$\varepsilon_{max} = \max(\bar{\varepsilon}_{P,i}). \quad (4.39)$$

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Abb. 4.11 dargestellt. Die linienbasierte Auswertung in Abb. 4.11a zeigt, dass bei Abbruchfehlern  $\varepsilon_K$  von 1.0 bis 0.25 mit zunehmendem Parallelisierungsgrad  $N_c > 2$  zwar der Approximationsfehler sinkt, jedoch die Anzahl der Iterationen ungefähr konstant bleibt. Erst bei  $\varepsilon_K = 0.1$  ist eine merkliche Senkung der Iterationen mit zunehmender Parallelisierung zu beobachten. Der Bereich des maximalen Fehlers  $\varepsilon_{max} < 0.1\%$  wird für  $N_c = 2$  nach etwa 15, für  $N_c = 8$  nach etwa 9 und für  $N_c = 32$  nach etwa 6 Iterationen erreicht.

Im Gegensatz dazu ist bei der flächenbasierten Methode in Abb. 4.11b für alle Abbruchfehler  $\varepsilon_K$  durch die Erhöhung des Parallelisierungsgrades  $N_c$  eine gleichzeitige Reduktion von  $\varepsilon_{max}$  und der Anzahl benötigter Iterationen eindeutig erkennbar. Der Vorteil der flächenbasierten Methode zeigt sich deutlich bei hohen Parallelisierungsgraden mit  $N_c \geq 12$ . Der Bereich des maximalen Fehlers  $\varepsilon_{max} < 0.1\%$  wird für  $N_c = 12$  nach etwa 6 und für  $N_c = 32$  nach nur etwa 2 Iterationen erreicht.

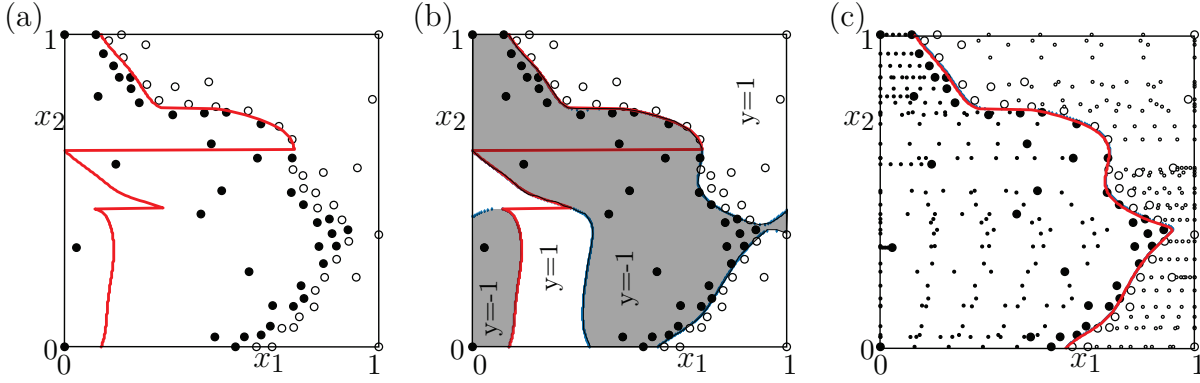
Je nach verfügbarer CPU-Clusterstärke können anhand dieses Diagramms Empfehlungen für den Grad der Parallelisierung und der Methode vorgegeben werden. Kann nur eine serielle Verarbeitung der CFD erfolgen ( $N_c = 1$ ), so ist der linienbasierte Ansatz effektiver für



**Abb. 4.11:** Benötigte Iterationen und Approximationsfehler  $\varepsilon_{max}$  für verschiedene Parallelisierungsgrade  $N_c$  und Abbruchfehler  $\varepsilon_K$  für (a) linienbasierte und (b) flächenbasierte Exploration der Pumpgrenzen anhand eines Meanline-Modells

alle Abbruchfehler  $\varepsilon_K$ , da dieser im Vergleich den geringeren maximalen Approximationsfehler  $\varepsilon_{max}$  besitzt. Zwar benötigt der flächenbasierte Ansatz bei gleichem Abbruchfehler weniger Iterationen, jedoch besitzt dieser bei gleicher Iterationszahl einen fast doppelt so hohen Fehler. Bei Möglichkeit der parallelen Berechnung von mehreren Punkten ist der flächenbasierte Ansatz zu wählen.

Bei dieser Untersuchung treten einige Anomalien in der Approximation der Entscheidungsfrent auf, welche zwar die Stabilität des Prozesses nicht beeinflussen, jedoch zusätzliche Auswertungen von Punkten verursachen. Ein Beispiel einer solchen anomalen Entscheidungsfrent ist in Abb. 4.12a dargestellt. Der Verlauf der Front ändert bei  $x_2 \approx 0.64$  sprunghaft die Richtung und folgt einem, auf den ersten Blick, unerklärlichen Verhalten im Widerspruch von den Trainingspunkten. Die Ursache dieser Anomalie ist bedingt durch Rücktransformation der SVM Entscheidungsfrent aus dem unbekanntem Hochdimensionalen in den Ursprungsraum. Wie im Abschnitt 4.2.2 beschrieben ist beim Kernel-Trick nicht die Kenntnis des hochdimensionalen Kernels, sondern nur die des Skalarprodukts notwendig. Die in Abschnitt 4.3 dargestellte Rücktransformation in den ursprünglichen Parameterraum ist eine Projektion aus einem gänzlich unbekanntem Raum. Es ist somit durchaus möglich, dass eine Projektion einer Hyperebene mehrere Entscheidungsfrenten generiert und den Parameterraum in mehr als zwei topologische Segmente teilt. In Abb. 4.12b ist die Unterteilung in je zwei Bereiche mit dem Argument  $y = -1$  und zwei Bereiche mit dem Argument  $y = +1$  erkennbar. Als Folge entstehen vier Entscheidungsfrenten, welche den in Abschnitt 4.3 beschriebenen Algorithmus auf eine falsche Bahn lenken. An dieser Stelle muss zwischen mathematischer Richtigkeit und physikalischer Richtigkeit des Problems unterscheiden werden. Der SVM-Algorithmus löst das Klassifizierungsproblem anhand der gegebenen Datenmenge und arbeitet somit mathematisch



**Abb. 4.12:** Anomale Entscheidungsfront (rote Linie) auf Basis von der Trainingsmenge  $X$  (a), durch die SVM generierter Entscheidungsraume (b) sowie korrigierte Entscheidungsfront (c) auf Basis einer erweiterten Trainingsmenge  $X \cup X^{Ph}$

korrekt. Bei der Betrachtung dieser Anwendung, der Berechnung eines Verdichterkennfeldes auf Basis von CFD-Daten, ist die Darstellung in Abb. 4.12b jedoch unphysikalisch, da für jede normierte Drehzahl  $x_2$  nur ein Klassenübergang existieren kann, denn es ist nicht zu erwarten, dass ein durch Drosselung des Massenstroms pumpendes Triebwerk bei weiterer Drosselung wieder stabil arbeitet.

Zur Lösung dieser Diskrepanz wird die ursprüngliche, mithilfe von CFD-Rechnungen erzeugte, Trainingsdatenmenge  $X$  in Abb. 4.12a um eine zusätzliche künstliche Trainingspunktmenge  $X^{Ph}$  erweitert, welche ohne zusätzliche CFD-Auswertungen auskommt. Dabei wird ausgenutzt, dass für jeden Betriebspunkt  $\mathbf{x}_i \in X$  mit dem Attribut  $y_i = 1$  allen Punkten  $\mathbf{x}$  mit  $x_1 > x_{i,1}$ ,  $x_2 = x_{i,2}$  ebenfalls das Attribut  $y_i = 1$  zugeschrieben werden kann. Für den Fall  $y_i = -1$  gilt das Gleiche für alle  $x_1 < x_{i,1}$ ,  $x_2 = x_{i,2}$ . Somit ergibt sich die Menge  $X^{Ph}$  der Phantompunkte  $\mathbf{x}^{Ph}$  aus

$$X^{Ph} := \left\{ \mathbf{x}_{i,j}^{Ph} = \begin{bmatrix} x_{i,1} + j d_i y_i \\ x_{i,2} \end{bmatrix}, d_i = \begin{cases} (1-x_{i,1})/N_P & \text{wenn } y_i = 1 \\ x_{i,1}/N_P & \text{wenn } y_i = -1 \end{cases}, \right. \quad (4.40)$$

$$i = 1(1)N, j = 1(1)N_P, \mathbf{x}_i \in X \}.$$

Für die Wahl des Parameters  $N_P$  wurde der Wert vier verwendet. Der neue aufgefüllte Parameterraum ist in Abb. 4.12c durch die kleinen Punkte dargestellt. Wird nun die Gesamtheit aller Punkte in  $X \cup X^{Ph}$  zum Training der SVM verwendet, wird die Entstehung mehrerer Entscheidungskurven vermieden, siehe Abb. 4.12c. Durch die Vermeidung der Anomalie werden unnötige CFD-Rechnungen vermieden, so dass ein bis zwei SVM-Iterationen eingespart werden können.

# 5 Approximation von Verdichterkennfeldern mithilfe von Antwortflächen

In Abschnitt 2.4 wurde eine dreidimensionale, diskrete Flächendarstellung von Verdichterkennfeldern vorgestellt. In diesem Kapitel werden nun Antwortflächen (AF, engl. Response Surfaces) verwendet, um diese Kennfeldflächen hinreichend detailliert zu modellieren. Antwortflächen werden auch als Ersatzmodelle bezeichnet, da sie anhand von wenigen Funktionsauswertungen bzw. Messergebnissen an bekannten Trainingspunkten in der Lage sind, für unbekannte Zustände gute Vorhersagen des Funktionsverhaltens wiederzugeben. Das übergeordnete Ziel bei der Verwendung von Ersatzmodellen ist, eine möglichst hohe Approximationsgüte bei minimalen Funktionsauswertungen, da diese üblicherweise kostspielig oder zeitaufwändig sind. In der gängigen Praxis wird zur Umsetzung zunächst eine geeignete Stichprobe mittels statistischer Versuchsplanung gewählt, um den Zustandsraum möglichst gleichmäßig zu erfassen. Anschließend wird das Ersatzmodell mit den bekannten Zuständen trainiert, wobei die Parameter des Ersatzmodells optimiert werden. Die Qualität des Ersatzmodells kann dann mit neuen Zuständen validiert und verfeinert werden.

In dieser Arbeit liegt ein etwas anderer Umstand vor, da die verwendete Stichprobe sich nicht aus der Versuchsplanung ergibt, sondern aus Punkten, welche während der Betriebsgrenzenexploration in Kapitel 4 benutzt worden sind. Aus diesem Grund wird auf die Theorie der statistischen Versuchsplanung nicht eingegangen, sondern es werden als erstes die verwendeten Antwortflächenverfahren vorgestellt. Im Anschluss wird die Approximationsgüte von AF auf Basis der gegebenen Stichprobe untersucht und auf Methoden der Erweiterung der Stichprobe zur Leistungssteigerung eingegangen. Die Validierung geschieht mit dem eindimensionalen 1D-CFD-Modell.

## 5.1 Grundlagen von Antwortflächenverfahren

Wie erläutert wird die Verwendung von Ersatzmodellen immer dann wichtig, wenn die einzelnen Funktionsauswertungen aufwändig oder teuer sind und mit einigen wenigen Punkten Aussagen über das Funktionsverhalten für den gesamten Parameterraum getroffen



werden müssen. Besonders im Bereich der Systemoptimierung spielen Ersatzmodelle eine besondere Rolle, da bedingt durch die Optimierungsalgorithmen viele Systemauswertungen erfolgen müssen und nur mit Auswertungen von AF eine Optimierung mit geringem numerischen bzw. zeitlichen Aufwand realisierbar ist. Die gewonnenen analytischen Funktionen können zur Bestimmung von Extrempunkten oder schlicht zur parametrisierten Darstellung verwendet werden.

Auch wenn der Erstellung von Antwortflächen verschiedene mathematische Grundlagen zugrunde liegen können, ist das Kriterium, welches sie erfüllen müssen, immer gleich: Seien  $\mathbf{x}_i$  Parameterpunkte einer Stichprobe mit den zugehörigen Funktionswerten  $y_i = f(\mathbf{x}_i)$ , so ist eine Antwortfläche  $\hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{w})$  zu bestimmen, welche den Approximationsfehler

$$\varepsilon = \hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{w}) - y(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

für alle  $\mathbf{x}_i$  minimiert. Dieses Problem lässt sich mathematisch formulieren, indem eine Gütefunktion  $L = \varepsilon^2$  verwendet wird, wobei die Antwortflächenparameter  $\mathbf{w}$  die notwendigen Minimierer sind:

$$\min_{\mathbf{w}} L = \min_{\mathbf{w}} (\varepsilon^2) = \min_{\mathbf{w}} \|\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - y(\mathbf{x})\|^2. \quad (5.2)$$

Im Rahmen dieser Arbeit soll zwischen zwei Ansätzen unterschieden werden: Der erste Ansatz basiert auf der Approximation der Gesamtfunktion  $f(\mathbf{x})$  durch die Ersatzfunktion  $\hat{f}$ , wobei der tatsächliche Funktionswert  $y(\mathbf{x})$  nicht zwangsläufig dem Wert der Ersatzfunktion  $\hat{f}(\mathbf{x})$  gleichen muss. Dabei findet anhand der Trainingsdaten eine bestmögliche Annäherung an diese statt. Zu diesem Typ zählt die Regression. Der zweite Ansatz besitzt interpolierenden Charakter. Das bedeutet, dass für den Trainingsdatensatz  $\mathbf{x}_i$  sowohl Original als auch Ersatzfunktion einander gleichen müssen:  $\hat{f}(\mathbf{x}_i) = y(\mathbf{x}_i) \forall \mathbf{x}_i$ . Der Approximationsfehler des Modells ergibt sich erst durch Zuhilfenahme eines zusätzlichen Testdatensatzes. Zu diesem Typ von Ansätzen zählen u.a. Modelle, welche radiale Basisfunktionen verwenden.

### 5.1.1 Lineare Regressionsverfahren

Bei linearen Regressionsverfahren wird angenommen, dass die gesuchte Ersatzfunktion eine Linearkombination bestehend aus Monomen aufsteigender Ordnung ist. Für einen eindimensionalen Eingang  $x$  ergibt sich die Ersatzfunktion zu

$$\hat{f}(x; \mathbf{w}, p) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots + w_px^p. \quad (5.3)$$

Für eine zweidimensionale Variable der Form  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  erweitert sich die Gleichung um

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{w}, p) = & w_0 + w_1x_1 + w_2x_1^2 + \dots + w_px_1^p + w_{p+1}x_2 \\ & + w_{p+2}x_2^2 + \dots + w_{2p}x_2^p + w_{2p+1}x_2^p, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei an dieser Stelle erwähnt werden muss, dass für eine vollständige Darstellung von  $\hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{w}, p)$  zusätzlich noch Mischterme der Form:  $\sum_{m=1}^{m=p} \sum_{n=1}^{n=p} x_1^n x_2^m$  benötigt werden. Da jedoch zu Anfang gefordert wird, dass eine Linearkombination aus Monomen die Grundlage des verwendeten Verfahrens ist und die Mischterme nichtlinear sind, werden diese vernachlässigt. Schon bei der Betrachtung dieses Falls wird deutlich, dass zur eindeutigen Lösung dieses Problems mindestens  $2p + 1$  bekannte Punkte notwendig sind. In vielen Anwendungen hat sich gezeigt, dass die Verwendung von Polynomen hoher Ordnung nicht zielführend ist, da die Ersatzfunktion zu starker Oszillation in der Lösung neigt und daher in der Regel höchstens Polynome dritter Ordnung verwendet.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die Existenz einer Trainingsstichprobe  $X = \{\mathbf{x}_i | i = 1(1)N\}$  mit den jeweiligen Funktionsauswertungen  $y_i = f(\mathbf{x}_i)$ . Werden alle Punkte in Gl. (5.4) eingesetzt, so ergibt sich ein Gleichungssystem, welches in Matrixform, wie folgt geschrieben werden kann:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (5.5)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{1,1}^2 & \cdots & x_{1,1}^p & \cdots & x_{1,1}^p x_{1,2} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,1}^2 & \cdots & x_{2,1}^p & \cdots & x_{2,1}^p x_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N,1} & x_{N,1}^2 & \cdots & x_{N,1}^p & \cdots & x_{N,1}^p x_{N,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{2p+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Sind genau  $2p + 1$  Stichproben vorhanden, kann das Gleichungssystem sofort gelöst werden und (5.4) bildet den Funktionsverlauf mit allen  $(\mathbf{x}_i, y_i)$  als Stützstellen ab. In der Regel sind mehr als  $2p + 1$  Stichproben vorhanden, so dass das Gleichungssystem überbestimmt ist. In diesem Fall wird eine Regression mit der kleinsten Fehlerquadratmethode verwendet. Dazu wird Gl. (5.1) mit (5.5) umformuliert. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{y}. \quad (5.7)$$

Quadrieren liefert die Gütefunktion

$$L = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{y})^T (\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{y}) \quad (5.8)$$

oder ausgeschrieben

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}. \quad (5.9)$$

Das Minimierungsproblem (5.2) entspricht dann<sup>1</sup>

$$\min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{w}} \left( \mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} \right). \quad (5.10)$$

<sup>1</sup>Die Terme  $\mathbf{w}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{y})$  und  $(\mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{w}$  sind Skalarprodukte und somit identisch

Zum Auffinden des Minimierers  $\mathbf{w}$  muss die erste Ableitung verschwinden und die zweite Ableitung positiv sein, siehe BESTLE (1994):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \left( 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{y} \right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Durch Umstellen nach  $\mathbf{w}$  bestimmt sich der Minimierer  $\mathbf{w}^*$  als

$$\mathbf{w}^* = \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \quad (5.12)$$

Somit wird die Funktion  $f(\mathbf{x})$  durch  $\hat{f}$  aus (5.4) mit dem Koeffizientenvektor  $\mathbf{w}^*$  optimal approximiert.

### 5.1.2 Radiale Basisfunktionen (RBF)

Eine Methode zur Erstellung von interpolierenden Antwortflächen ist die Verwendung einer Summe von radialen Basisfunktionen. Jedem Punkt einer Stichprobe, welcher als Grundlage der Antwortfläche dient, wird eine Basisfunktion zugeordnet, bei der jeweils der Stichprobenpunkt  $\mathbf{x}_i$  das Zentrum bildet. Das bedeutet, dass diese Basisfunktionen radial symmetrische Funktionen sind. Für eine Stichprobe  $X = \{\mathbf{x}_i | i = 1(1)N\}$  mit  $y_i = f(\mathbf{x}_i)$  ist die allgemeine Form der RBF wie folgt definiert:

$$\hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^N w_j \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|). \quad (5.13)$$

Hierbei kann die Basisfunktion  $\psi$  diverse Formen annehmen. Aus der Literatur sind einige gängige Basisfunktionen bekannt und lauten mit der Substitution  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  beispielsweise

- linear:  $\psi = r$ ,
- kubisch:  $\psi = r^3$ ,
- Gaußisch:  $\psi = e^{\left(\frac{-r^2}{\sigma^2}\right)}$ ,
- Thin-Plate Spline:  $\psi = r^2 \ln(r)$ .

Für eine Stichprobe  $X$  ergeben sich die unbekanntenen Koeffizienten  $w_i$  aus den Interpolationsbedingungen

$$\hat{f}(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^N w_j \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \stackrel{!}{=} y(\mathbf{x}_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.14)$$

Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem der Form (5.5), welches in Matrizenform geschrieben folgende Form annimmt:

$$\begin{bmatrix} \psi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \psi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \psi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \neq 0 \quad \forall i \neq j \quad (5.16)$$

ist, hat  $\mathbf{A}$  vollen Rang und besitzt eine Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ . Der unbekannte Koeffizientenvektor  $\mathbf{w}$  kann als

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad (5.17)$$

bestimmt werden.

Eine Erweiterung, welche eine Erhöhung der Flexibilität des RBF-Ansatzes bedingt, ist die Methode von BOUHAMIDI UND MÉHAUTÉ (2004). Diese stellt eine Erweiterung der radialen Basisfunktionen um eine Polynomregression dar, so dass die approximierende Funktion  $\hat{f}$  beispielsweise für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  folgende Form besitzt:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = b_0 + [b_1, b_2] \mathbf{x} + \sum_{j=1}^N w_j \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad N \geq 3. \quad (5.18)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $w_j$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  werden die Interpolationsbedingungen

$$y_i = \hat{f}(\mathbf{x}_i) \quad \forall \mathbf{x}_i \in X \quad (5.19)$$

um die Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^N w_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N w_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

ergänzt. Damit ergibt sich ein eindeutig lösbares Gleichungssystem der Form (5.5) mit

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \psi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \psi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) & 1 & x_{1,1} & x_{1,2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & \psi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) & 1 & x_{N,1} & x_{N,2} \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{1,1} & \cdots & x_{N,1} & 0 & 0 & 0 \\ x_{1,2} & \cdots & x_{N,2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.21)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

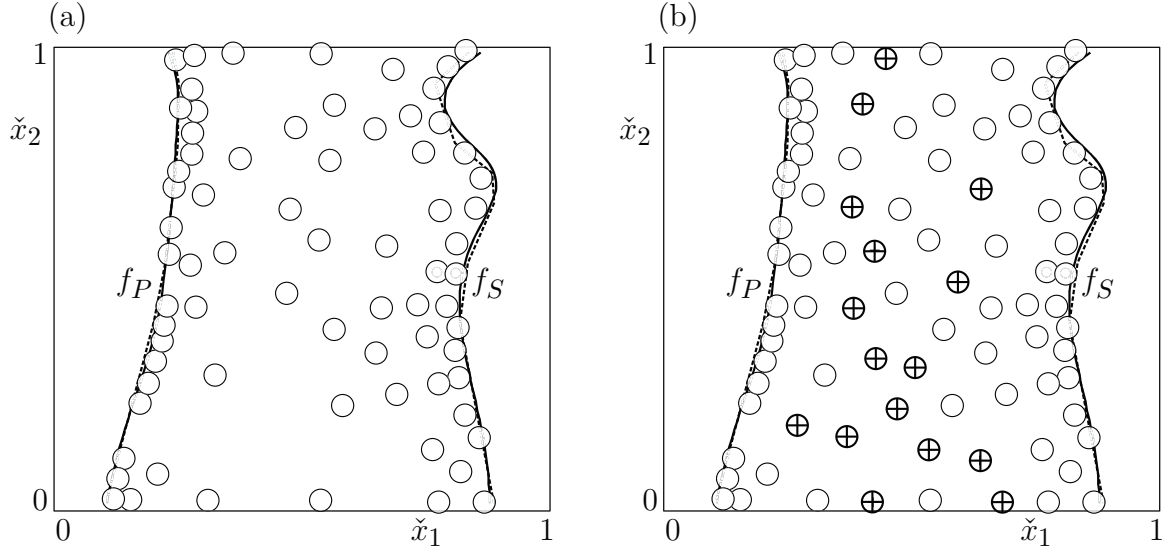
## 5.2 Stichprobenerganzung innerhalb der Kennfeldgrenzen

Wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben, sollen die vorangestellten Methoden der Antwortflächen verwendet werden, um Kenngroenverteilungen (2.11) zur Beurteilung des Verdichterbetriebs zu approximieren. Ausgangspunkt für die Approximation dieser Verdichterkenngroen sind die bereits approximierten Betriebsgrenzen  $x_1 = f_P(x_2)$  und  $x_1 = f_S(x_2)$ , sowie alle konvergierten Betriebspunkte, welche zum Auffinden dieser Betriebsgrenzen bereits analysiert wurden. Die Zusammenfassung beider Punktmengen ist zunächst nicht möglich, da beide nach unterschiedlichen Definition (2.10) und (2.12) jeweils in ihrem Einheitsquadrat vorliegen. Daher müssen beide Punktmengen mit einer Gesamtfeldnormierung vereinheitlicht werden. Zu diesem Zweck werden zunächst alle Punkte in den  $(\dot{m}_{r,E}, n_r)$ -Raum zurücktransformiert und anschließend einheitlich nach der Vorschrift

$$\check{x}_1 = \frac{\dot{m}_{r,E} - \dot{m}_{r,E}^{min}}{\dot{m}_{r,E}^{max} - \dot{m}_{r,E}^{min}}, \quad \check{x}_2 = \frac{n_r - n_r^{min}}{n_r^{max} - n_r^{min}} \quad (5.23)$$

normiert. Die so entstandene Punktmenge  $\check{X}$  ist in Abb. 5.1a dargestellt. Bei genauer Betrachtung sind Gebiete mit einer relativ geringen Punktdichte erkennbar, welche die Qualität der Antwortflächen negativ beeinflussen werden. Daher muss der Parameterraum mit zusätzlichen Stichproben in diesen Regionen «aufgefüllt» werden. Dazu wird eine fill-up DoE bestimmt und mit CFD ausgewertet, siehe Abb. 5.1b. Der Algorithmus D zur Bestimmung dieser zusätzlichen  $N_F$  Stichproben lautet wie folgt:

- D1 Zusammenfassen aller konvergierten Datenpunkte aus der Pump- und Sperrliniensuche in einer Datenbasis  $\check{X}$ , die Kandidatenmenge  $\check{C} = \{\}$  ist zunächst leer.
- D2 Finden eines Kandidaten mit dem größten Abstand zu allen Punkten in  $\check{X}$ , welche sich gleichzeitig zwischen  $\check{x}_1 = f_P(\check{x}_2)$  und  $\check{x}_1 = f_S(\check{x}_2)$



**Abb. 5.1:** Konvergierte Punkte (o) aus a) der Suche nach Betriebsgrenzen und b) mit zusätzlicher fill-up DoE (⊕)

befinden:

$$\mathbf{c} := \arg \max_{\mathbf{c} \in \mathcal{P}} \left( \min_{\check{\mathbf{x}}_j \in X} \|\mathbf{c} - \check{\mathbf{x}}_j\| \right) \quad (5.24)$$

$$\text{mit } \mathcal{P} = \left\{ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f_P(c_1) \leq c_1 \leq f_S(c_1), 0 \leq c_2 \leq 1 \right\}$$

D3 Zufügen von  $\mathbf{c}$  zu  $\check{C}$ , d.h.  $\check{C} := C \cup \{\mathbf{c}\}$ , und Wiederholung von Schritt D2 bis  $|\check{C}| = N_F$ .

D4 Analyse alle Punkte  $\mathbf{c} \in C$  mit CFD.

Für den Schritt D2 muss ein Optimierungsproblem gelöst werden, welches dem Problem (4.35) ähnelt, daher wird als Optimierungsalgorithmus ebenfalls die Methode der differentiellen Evolution verwendet. Die Auswirkung des «Auffüllens» der Stichprobe auf die Qualität der Antwortfläche wird im folgenden Abschnitt untersucht.

### 5.3 Vergleich der Antwortflächengüte anhand einer Kennfeldberechnung mit Meanline

In diesem Abschnitt wird zunächst untersucht, wie sich die Wahl der Antwortflächenverfahren auf die Güte der Approximation auswirkt. Anschließend wird die Güte der Antwortfläche in Abhängigkeit von der Dichte der Stichprobe untersucht. Der Vergleich der Qualität der RBF und Regressionsflächen findet auf Basis der Punktmenge  $\check{X}$  statt, so

wie diese in D1 definiert ist. Zu diesem Zweck werden Datensätze, welche in Abschnitt 4.4 verwendet wurden, herangezogen. Aus dieser Menge von Daten werden repräsentativ die Ergebnisse mit dem Abbruchfehler  $\varepsilon_{max} = 0.25$  nach Gl. (4.39) verwendet, da diese einen guten Kompromiss zwischen hoher Genauigkeit und geringer Anzahl an Auswertungen liefern. Für den Parallelisierungsgrad wird  $N_c = 8$  gewählt, weil dies der Leistung des später für die 3D-CFD verwendeten Clusters entspricht.

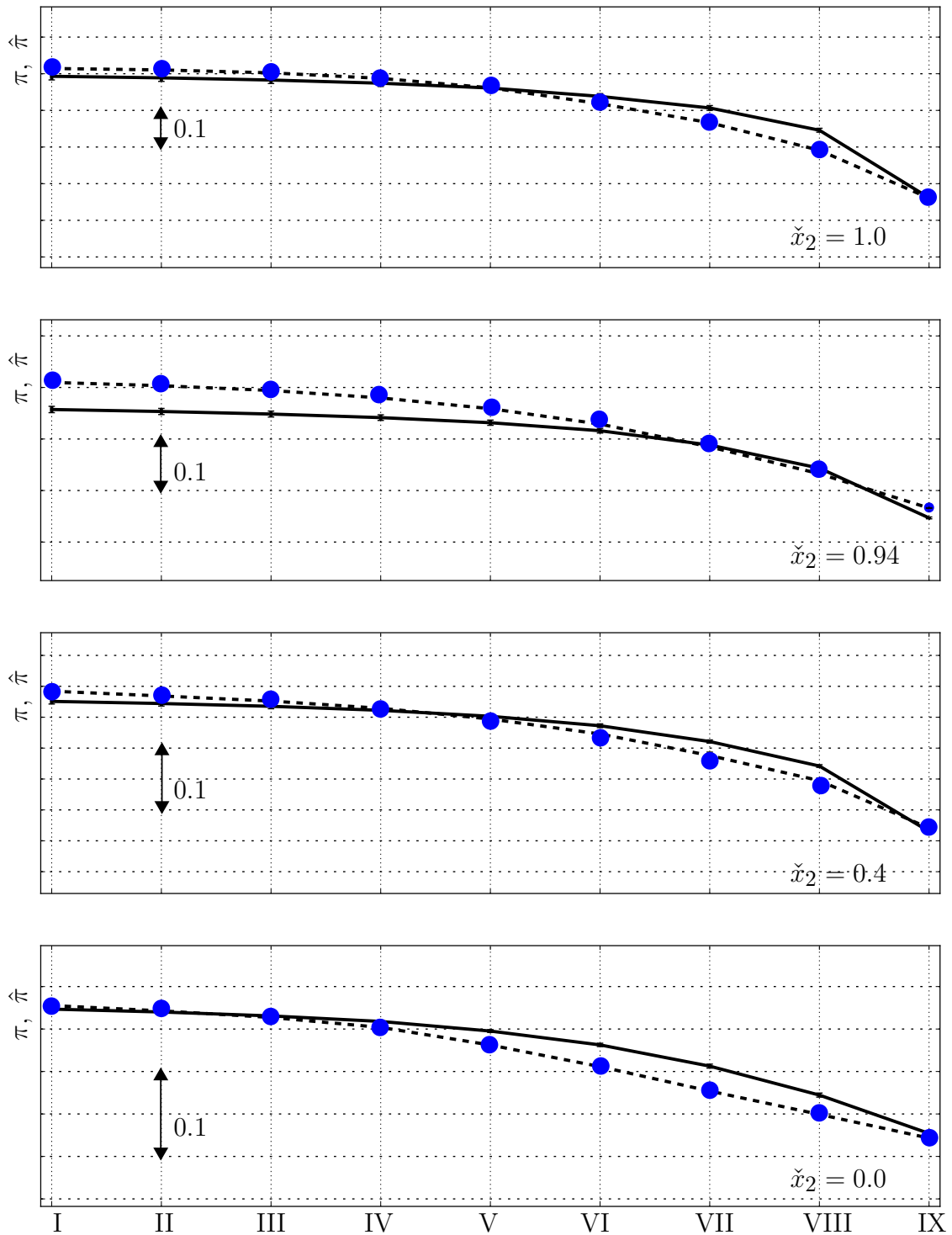
Die Approximation des Verlaufes des Druckverhältnisses  $\hat{\pi}(\check{\mathbf{x}})$  und des reduzierten Massenstroms am Eintritt  $\hat{m}_{r,E}(\check{\mathbf{x}})$  werden einerseits mit radialen Basisfunktionen entsprechen Gl. (5.18) mit dem Thin-Plate-Spline Ansatz und andererseits mit Polynomregression dritter Ordnung (5.4) approximiert. Grundlage für die Antwortflächen sind im Mittel 70 konvergierte Punkte. Zur Beurteilung der Approximationsgüte wird als Vergleich ein Raster aus neun normierten Massenströmen  $\check{x}_1$  für je neun normierte Drehzahlen  $\check{x}_2 \in \{0, 0.134, 0.4, 0.54, 0.67, 0.74, 0.8, 0.94, 1.0\}$  mit Meanline ausgewertet. Diese Punkte werden in der Menge  $\check{X}_{ref}$  zusammengefasst. In Abb. 5.2 ist exemplarisch der Verlauf von  $\hat{\pi}(\check{\mathbf{x}})$  entlang von konstanten normierten Drehzahlen  $\check{x}_2 \in \{0, 0.4, 0.94, 1.0\}$  sowie die neun direkt mit Meanline berechneten Werten von  $\pi$  dargestellt. Analog dazu folgt die Darstellung des reduzierten Massenstroms am Eintritt in Abb. 5.3. Bei einer erster Betrachtung wird bereits offensichtlich, dass sich die Polynomregression nicht für die Approximation eignet. Aus diesem Grund werden im Folgenden nur noch die RBF-Antwortflächen verwendet.

Für den RBF-Ansatz wird eine detaillierte Betrachtung der Approximationsqualität in Abhängigkeit von der Dichte der verwendeten Stichprobe durchgeführt. Zu diesem Zweck wird der relative Approximationsfehler

$$\varepsilon_{r,i}^{\bullet} = \frac{\bullet_i(\check{\mathbf{x}}) - \hat{\bullet}_i(\check{\mathbf{x}})}{\bullet_i} \quad (5.25)$$

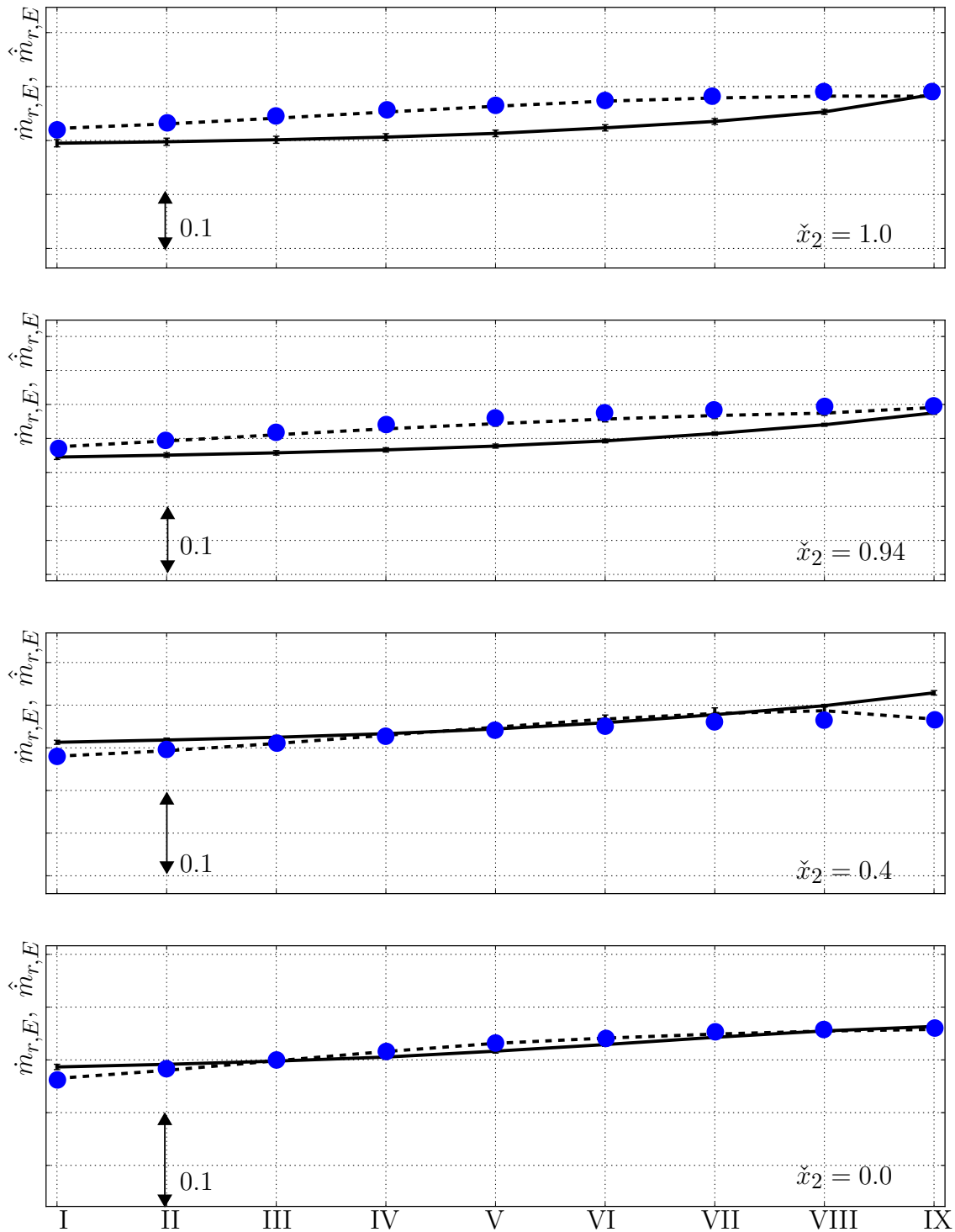
eingeführt und für das Druckverhältnis sowie den reduzierten Massenstrom am Eintritt untersucht. Die Punktverteilung nach einer erfolgreichen Betriebsgrenzensuche, welche auch die Grundlage der RBF-AF bildet, zeigt Abb. 5.4a. Für den Vergleich sind je neun Punkte aus der Vergleichsmenge  $\check{X}_{ref}$  für vier normierte Drehzahlen  $\check{x}_2 \in \{0.4, 0.67, 0.94, 1.0\}$  eingezeichnet. Nun wird für alle Punkte  $\check{\mathbf{x}} \in \check{X}_{ref}$  der relative Approximationsfehler nach (5.25) bestimmt und am Beispiel von  $\varepsilon_{r,i}^m$  in Abb. 5.2b dargestellt. Für eine bessere Darstellung werden nicht je neun  $\check{x}_1$ -Koordinaten für jede Linie mit  $\check{x}_2 = konst.$ , sondern jeweils Positionsnummern I bis IX verwendet.

Nach Abb. 5.4b, sind Positionen IV bis VII aufgrund ihrer entfernten Lage zu den Betriebsgrenzen stärker fehlerbehaftet als der Rest. Besonders an den Positionen VII und VIII liegt die Fehlerspanne von  $\varepsilon_r^m$  bei  $[-1.8\%, 1.1\%]$ . Wird nun von einem Massenstrom von  $\approx 45 \text{ kg/s}$  ausgegangen, so würde dieses Ergebnis einem Fehler von bis zu  $\approx 1.3 \text{ kg/s}$  entsprechen. Die Ursache dieser Abweichungen ist die geringe Punktdichte der Stichprobe in dem in Abb. 5.4a grau gekennzeichneten Bereich. Es ist erkennbar, dass für  $\check{x}_2$  zwischen 0.67 und 0.94 für die Analysepositionen VI und VII nur ein Stützpunkt vorliegt. Daher muss die initiale Stichprobe erweitert werden, wobei nur die Bereiche mit geringer



**Abb. 5.2:** Vergleich der Antwortflächengüte für das Druckverhältnis  $\pi$  für vier normierte Drehzahlen  $\check{x}_2 \in \{0, 0.4, 0.94, 1.0\}$  mit je 9 direkt ausgewerteten reduzierten Massenströmen  $\dot{m}_{r,A}$  ( $\bullet$ ) mit  $\hat{\pi}$  aus RBF (gestrichelte Linie) und  $\hat{\pi}$  aus Polynomregression (durchgezogene Linie)





**Abb. 5.3:** Vergleich der Antwortflächengüte für den reduzierten Massenstrom am Eintritt  $\dot{m}_{r,E}$  für vier normierte Drehzahlen  $x_2 \in \{ 0, 0.4, 0.94, 1.0 \}$  mit je 9 direkt ausgewerteten reduzierten Massenströmen  $\dot{m}_{r,A}$  ( $\bullet$ ) mit  $\hat{m}_i$  aus RBF (gestrichelte Linie) und  $\hat{m}_i$  aus Polynomregression (durchgezogene Linie)

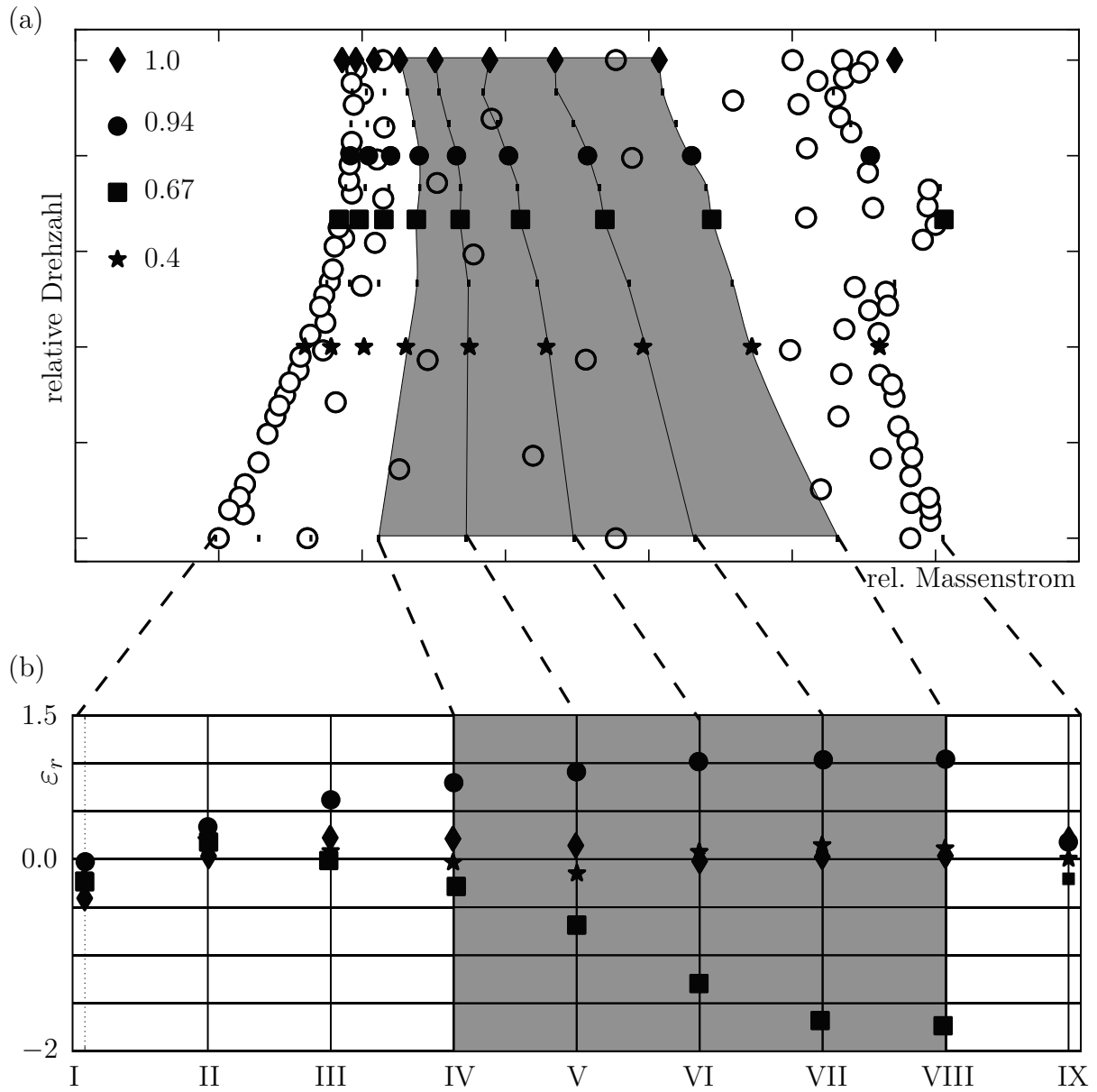
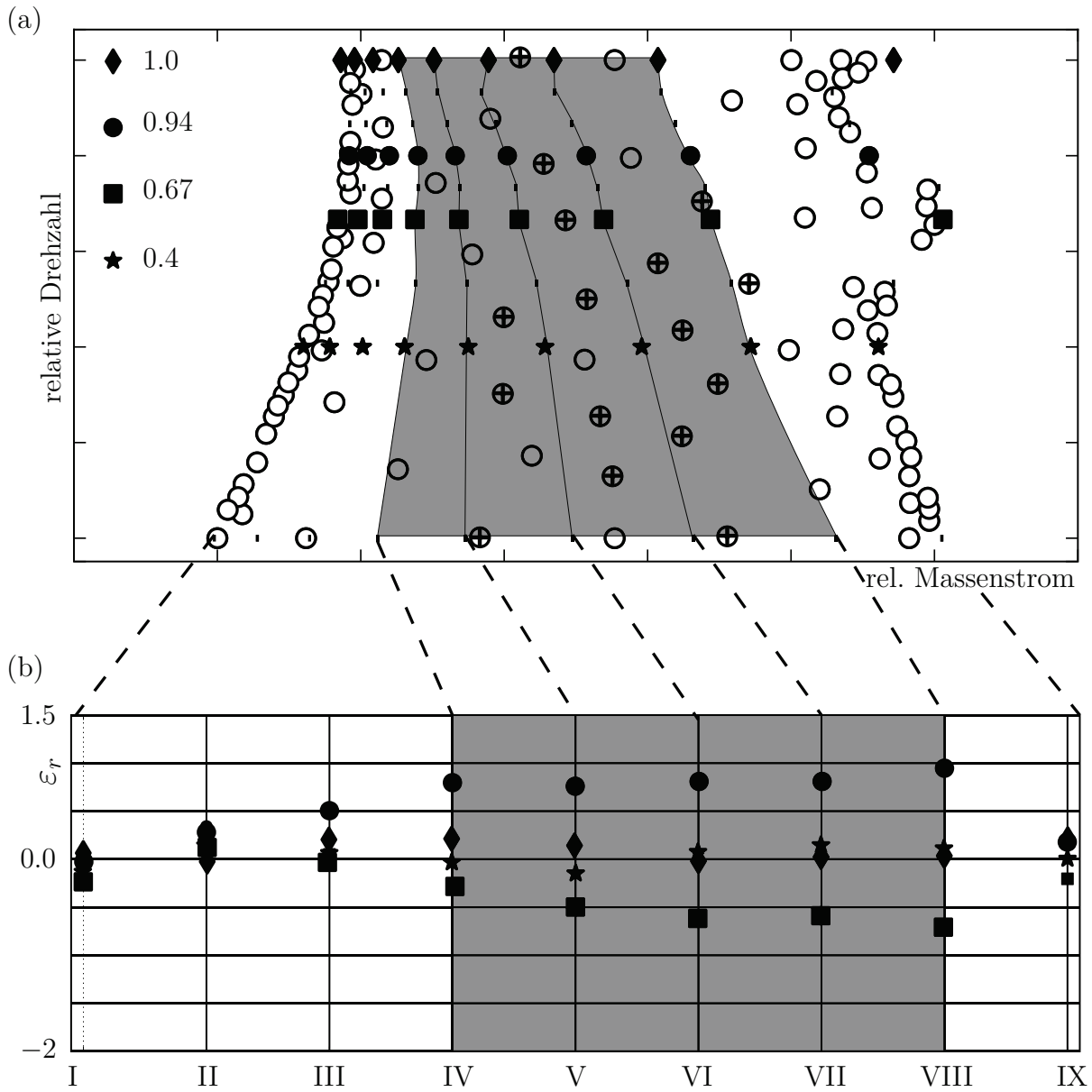


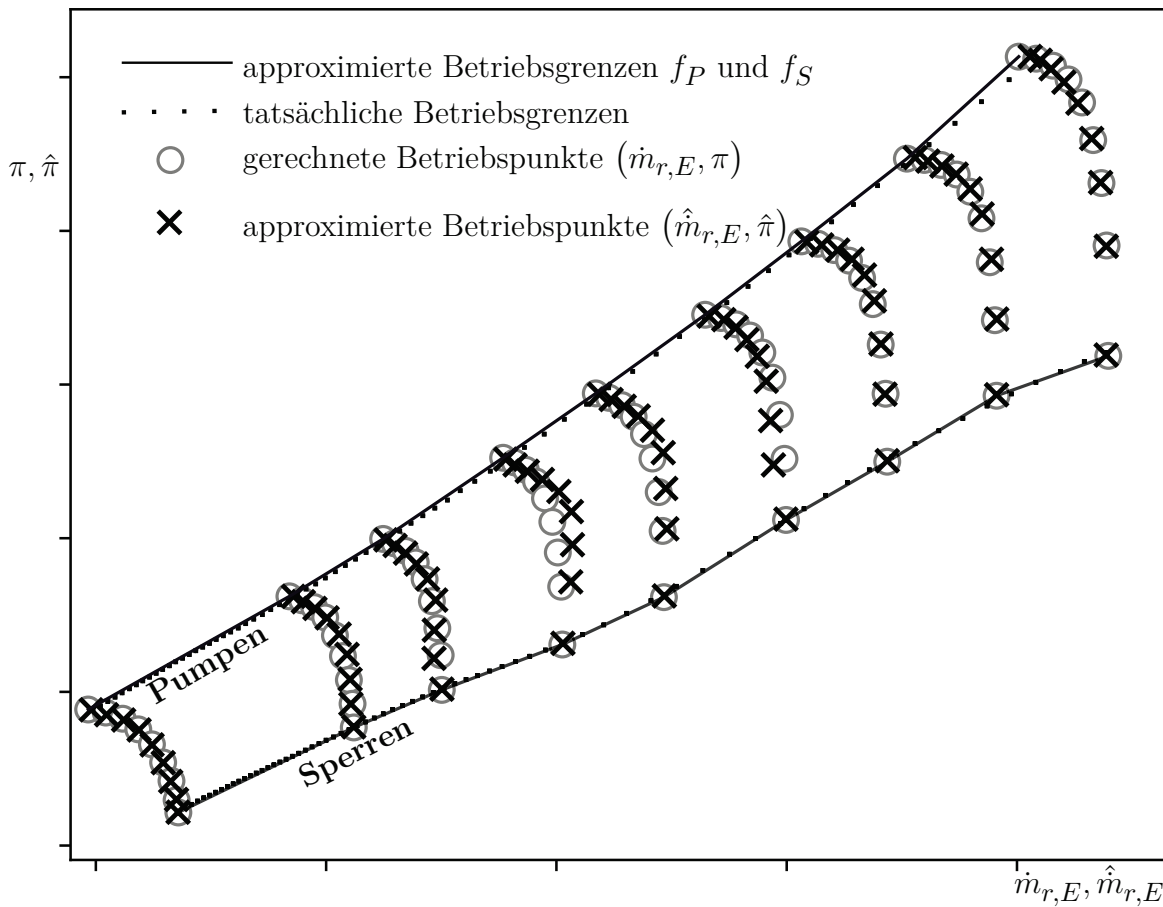
Abb. 5.4: Verteilung der Stichprobe ( $\circ$ ) zur Approximation des Kennfeldes und der tatsächlich vermessenen Betriebspunkte (a), sowie Darstellung des relativen Fehlers  $\varepsilon_r$  in % an diesen Punkten (b)



**Abb. 5.5:** Verteilung der Strichprobe ( $\circ$ ) und der zusätzlichen fillup-DoE ( $\oplus$ ) zur Approximation des Kennfeldes, sowie der tatsächlich vermessenen Betriebspunkten (a). Relativer Fehler  $\varepsilon_r$  in % an diesen Punkten (b)

Informationsdichte angereichert werden sollen. Zu diesem Zweck wird die in Abschnitt 5.2 dargestellte Methode verwendet und die ursprüngliche Stichprobe wird mit 16 zusätzlichen Messpunkten erweitert. Die erweiterte Stichprobe ist in Abb. 5.5a dargestellt. Eine erneute Bestimmung des Approximationsfehlers (5.25) ist in Abb. 5.5b dargestellt. Die neue AF auf Basis der erweiterten Punktmenge zeigt in dem als kritisch befundenen, grau markierten Bereich einen reduzierten Approximationsfehler. Die höchste Reduktion ist für  $\check{x}_2 = 0.67$  zu beobachten, der maximale negative Fehler sinkt auf  $-0.7\%$  und der maximale Fehler auf  $0.9\%$ . Wird wieder ein Referenzmassenstrom von  $45\text{kg/s}$  herangezogen, ergibt dies einen maximalen Fehler von  $0.72\text{kg/s}$ . Ein noch geringerer Fehler ist wünschenswert und ist durch mehr Stützstellen erreichbar, jedoch können die hier erzielten Ergebnisse überzeugen, da die Approximationsfehler in den Bereichen der Pump- und Sperrgrenze zwischen  $-0.25\%$  und  $0.3\%$  liegen (siehe Positionen I, II und IX).

Die in Kapitel 4 entwickelten Methoden zur parallelen flächenbasierten Betriebsgrenzenexploration und das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren zur Approximation des Verdichterkennfeldes bilden den Prozess mit dem Akronym **S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R** (**S**trategy for **C**ompressor map **C**omputation with **A**utomatized **L**imit **L**ine **E**xploration and **T**Opology **R**econstruction), welcher als Analysegrundlage beliebige CFD-Modelle verwenden kann. Dieser liefert u.a. Antwortflächen für Druck und Eintrittsmassenstrom, so dass damit die klassische Darstellung des Verdichterkennfeldes nach Abb. 2.4a rekonstruiert werden kann. Zur Illustration dieser Möglichkeit ist in Abb. 5.6 ein mit 1D-CFD bestimmtes Kennfeld der Rig250 dargestellt. Anhand dieser Abbildung ist erkennbar, dass trotz einiger Abweichungen in der Massenstromapproximation in der Mitte des Kennfeldes die Approximationsgüte für das Druckverhältnis mit einer Fehlerspanne von etwa  $2\%$  sehr gut ist.



**Abb. 5.6:** Klassische Darstellung des Kennfeldes für das Totaldruckverhältnis als Funktion des reduzierten Eintrittsmassenstroms für neun Drehzahlen mit nachgerechneten (durchgezogene Linie) und approximierten (gepunktete Linie) Betriebsgrenzen

# 6 Beschleunigung der Strömungsanalyse durch geeignete Initialisierungsmethoden

In den vorherigen Kapiteln wurden Methoden zur Erschließung von Verdichterkennfeldern unter dem Aspekt der Reduktion der benötigten CFD-Rechnungen vorgestellt und validiert. Nun sollen Konzepte für die Beschleunigung jeder einzelnen benötigten 3D-CFD Rechnung entwickelt und untersucht werden. Dadurch kann Rechenzeit eingespart und somit die Bestimmung eines Verdichterkennfeldes noch effizienter und schneller gestaltet werden. Der Kern zur Beschleunigung einer 3D-CFD-Lösung ist die Erstellung einer guten Initiallösung, welche der tatsächlichen Lösung ähnelt, jedoch mit wesentlich geringerem numerischen Aufwand erzeugt werden kann. Zur Erzeugung solcher Initiallösungen werden zwei Konzepte vorgestellt: Das erste Konzept beinhaltet vereinfachte ein- und zweidimensionale Strömungsmodelle, welche zu einer dreidimensionalen Initiallösung für 3D-CFD zusammengefügt werden. Zu diesem Zweck werden vom Industriepartner bereitgestellte Softwarepakete angepasst und verwendet. Das zweite Konzept beinhaltet die Verwendung von bereits bestimmten Strömungslösungen, welche mithilfe von u.a. Singulärwertzerlegung zu neuen Lösungen bzw. Initiallösungen kombiniert werden. Alle verwendeten Methoden werden auf potenzielle Rechenzeitreduktion und Stabilität untersucht. Zusätzlich wird der Einfluss der Initialisierungsmethoden auf ursprünglich instabile (nichtkonvergierende) Lösungen betrachtet.

## 6.1 Schätzung der Strömungslösung mit reduzierten Modellen

In Abschnitt 3.2 wurden einige grundlegende, korrelations- und simulationsbasierte Strömungsmodelle für die Verdichterströmung vorgestellt. Mit korrelationsbasierten Methoden können an charakteristischen Stellen wie Ein- und Austritt von Schaufelpassagen skalare und vektorielle Größen mit geringem numerischen Aufwand abgeschätzt werden. Die Lage und Anzahl der charakteristischen Stellen ist von der verwendeten Methode abhängig. So wird z.B. beim Mittelschnittverfahren (Meanline) jeweils nur ein Punkt pro Schaufel am Mittelschnitt betrachtet (vgl. Anhang C.1) und beim Stromlinienkrümmungsverfahren

(Throughflow) werden in der Regel mehrere radial verteilte Stellen entlang einer Schaufel verwendet (vgl. Anhang C.2).

Effektiver und informationsreicher sind dagegen reduzierte 2D- oder 3D-CFD-Methoden, da diese das gesamte Strömungsfeld oder viele Schnittebenen abbilden. Pioniere dieser Methoden sind unter der Bezeichnung Euler-Methoden bekannt. Bei diesen Methoden werden Reibungseffekte durch Grenz- und Scherschichten vernachlässigt und nur das dominante Fernfeld der Strömung abgebildet. Bedingt durch die in der Entstehungszeit eingeschränkte Computerkapazität kommen diese Methoden mit vergleichsweise kleinen Rechengittern aus (ca.  $10^3$  Punkte). Im Vergleich zu den derzeit üblichen 3D-CFD-Netzen mit Gittergrößen von mehreren Millionen Punkten sind Euler-Netze daher sehr kompakt. Im Bereich der Verdichterströmungsanalyse wird der Strömungslöser MISES, welcher in Abschnitt 3.2.2 vorgestellt wurde, verwendet.

Wie bereits erwähnt, liefern alle reduzierten Methoden nur Ergebnisse an einigen wenigen diskreten Punkten oder auf groben Netzen. Damit diese Information als Initiallösung für eine 3D-CFD Navier-Stokes-Rechnung verwendet werden kann, muss die verhältnismäßig kleine Punktmenge auf ein sehr großes dreidimensionales Feld projiziert werden. In den folgenden Abschnitten werden alle notwendigen Schritte zur Erstellung von Initiallösungen mit Throughflow und MISES vorgestellt.

### 6.1.1 Lineare Feldinterpolation mit abgeschätzten Ein- und Austrittsbedingungen

In diesem Abschnitt wird ein Throughflow-Strömungslöser verwendet, um für jede Schaufelpassage eines Verdichters Ein- und Austrittsverteilungen von Temperatur, Druck sowie An- und Abströmwinkel zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird eine vom Industriepartner bereitgestellte Software mit der Bezeichnung jc40 verwendet. Damit diese in den Prozess S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R eingefügt werden kann, muss der Berechnungsalgorithmus so gestaltet werden, dass dieser mit der gleichen Eingangsgröße  $\mathbf{x} = [\dot{m}_{r,A}, n_r]^T$  wie im Abschnitt 2.4 auskommt. Zur Berechnung des Betriebspunktes  $\mathbf{x}$  mit Throughflow sind jedoch Zwischenschritte notwendig, da die Eingangsparameter für jc40 sich im Gegensatz zu  $\mathbf{x}$  nicht auf Größen am Verdichteraustritt, sondern auf Größen am Verdichtereintritt beziehen. Die Transformationsfunktionen von  $\bullet_A \rightarrow \bullet_E$  sind unbekannt, da kein analytischer Zusammenhang zwischen Ein- und Austrittsgrößen besteht. Zusätzlich benötigt Throughflow Zielgrößen wie das Zieldruckverhältnis und die Zieltotaltemperatur, welche ebenfalls unbekannt und nicht aus  $\mathbf{x}$  ableitbar sind.

Aus diesem Grund ist ein Zwischenschritt über das eindimensionale Meanline-Modell notwendig. Zunächst wird anhand einer Meanline-Berechnung von je neun Betriebspunkten für neun verschiedene Drehzahlen das gesamte Kennfeld approximiert. Mithilfe dieser  $9 \times 9$  Stützstellen werden anschließend Antwortflächen für Massenstrom, Druck und Temperatur als Funktion von  $\mathbf{x}$  erstellt. Anhand der Ersatzmodelle  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{T}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{m}_{r,E}(\mathbf{x})$  können dann die notwendigen Größen an jeder beliebigen Stelle  $\mathbf{x}$  bestimmt werden. Die Daten werden gemeinsam mit dem Geometriedatensatz des Verdichters an das jc40-Tool wei-

tergegeben. Innerhalb dieses Blackbox-Programms werden auf jeder Austrittsebene einer Schaufelpassage der Winkel und der Verlustkoeffizient so lange iterativ variiert, bis die dem jc40 zugrunde liegenden Gleichungen den geforderten Zieldruck und die geforderte Zieltemperatur bei vorgegebenem Massenstrom und vorgegebener Drehzahl liefern. Als Resultat liegen dann für alle Schaufelsektionen radiale Ein- und Austrittsverteilungen für Druck, Temperatur sowie An- und Abströmwinkel vor. Mithilfe der linearen Interpolation werden aus den jeweiligen Verteilungen dreidimensionale Strömungsfelder für jedes 3D-CFD-Schaufelnetz erzeugt. Zur Durchführung dieses Schrittes wird eine ebenfalls vom Industriepartner bereitgestellte Software mit der Bezeichnung jm52 verwendet. Im abschließenden Schritt werden alle Initiallösungen aller Schaufelnetze zu einer Gesamtfeldlösung zusammengefügt, so dass diese direkt als Startlösung für die 3D-CFD verwendet werden kann. Der gesamte Prozessablauf zur Erstellung von Throughflow-Initialisierungen ist im Anhang in Abb. D.2 dargestellt.

### 6.1.2 Feldinterpolation mit zweidimensionalen Strömungsmodellen

Die Um- oder Durchströmung eines Körpers kann in zwei Bereiche aufgeteilt werden: den sehr kleinen Grenzschichtbereich und das Fernfeld. Weiterhin kann angenommen werden, dass charakteristische Strukturen sich in der Hauptströmungsrichtung ausbilden und dass Strömungsfelder entlang einer oder mehrerer Schnittebenen durch den Verdichter die Charakteristika der Strömung gut abbilden. Es liegt daher nahe, dass wenn mit diesen Schnitten ein dreidimensionales Strömungsfeld interpoliert und als Initiallösung für 3D-CFD verwendet wird, die Berechnungszeit von 3D-CFD wesentlich reduziert werden kann. Arbeiten von JANKE U. A. (2015) stützen diese Vermutung. Die Autoren benutzen dabei drei radial verteilte volumetrische Schnitte mit einer Breite von zwei Zellen, um auf diesen eine turbulente, quasi-dreidimensionale Rechnung mit einem 3D-Strömungslöser durchzuführen. Anschließend werden diese auf einem 3D-CFD-Netz interpoliert.

In dieser Arbeit wird zur Strömungslösung ein weniger detailreiches Euler-Strömungsmodell verwendet. So wie in Abschnitt 3.2 bereits beschrieben, sind Euler-Gleichungen die Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen und der Energiegleichung für den reibungslosen Fall. Bedingt durch die Eigenschaften des verwendeten Strömungslösers MISES können nur einzelne Schnittebenen einzelner Schaufelpassagen berechnet werden. Üblicherweise werden 3 bis 17 radialverteilte zweidimensionale Schnitte durch den Verdichter gelegt, auf welchen für jede Schaufel eine Euler-Rechnung durchgeführt wird. In dieser Arbeit werden 17 Schnitte pro Schaufel berechnet und anschließend ein dreidimensionales Strömungsfeld durch Inter- und Extrapolation erstellt, welches auf das 3D-CFD-Gitter abgebildet wird.

Als Randbedingungen benötigt dieser Löser Ein- und Austrittsbedingungen für jede Schaufelsektion, welche dem Benutzer zunächst unbekannt sind. Aus diesem Grund wird vor der MISES-Rechnung der im vorherigen Abschnitt dargestellte Prozess vorgeschaltet, da dieser in der Lage ist, die Randbedingung für jede einzelne Schaufelpassage zu liefern.



Bereits an dieser Stelle wird klar, dass die kombinierte Verwendung von Modellen verschiedener Genauigkeit Fehler durch den Gesamtprozess transportiert und wahrscheinlich sogar verstärkt. Daher sind die generierten Ergebnisse stets kritisch zu betrachten.

Die Kernelemente dieses Prozesses sind die MISES-Überwachung und die Interpolationsroutinen von 2D auf 3D, welche speziell für diesen Fall entwickelt werden mussten. Die Details dazu sind in der Bachelorarbeit von BIELITZ (2019) nachzulesen. Im Rahmen dieser Machbarkeitsstudie wurden Überwachungsalgorithmen erstellt und mehrere Netzübertragungsverfahren verglichen, um eine möglichst schnelle Netzinterpolation zu erreichen. Der gesamte Prozessablauf zur Erstellung von MISES-Initiallösungen ist im Anhang in Abb. D.3 dargestellt.

## 6.2 Schätzung der Startlösung mittels bereits bekannter Strömungslösungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde von dem Fall ausgegangen, dass noch keine mit 3D-CFD bestimmten Strömungslösungen existieren und nur reduzierte Strömungsmodelle verwendet werden können. Hier wird nun vorausgesetzt, dass bereits einige konvergierte Strömungslösungen vorhanden sind. In diesem Fall existieren für jeden Gitterpunkt des CFD-Netzes einer Strömungslösung mehrere Feldgrößen  $\varphi \in \{\rho, p, u_1, u_2, u_3\}$ , welche ihrerseits Funktionen der Betriebspunkte sind. Ein naheliegender Ansatz wäre, für alle Feldgrößen  $\varphi$  auf jedem  $i$ -ten Punkt eines Gitters mit insgesamt  $N_G$  Punkten eine Ersatzfunktion  $\hat{f}_i^{(\varphi)}$  in Abhängigkeit von den Betriebspunkten  $\mathbf{x}$  zu erstellen, d.h.,

$$\hat{f}_i^{(\varphi)}(\mathbf{x}) \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, N_G\}. \quad (6.1)$$

Mit diesen Ersatzfunktionen können dann für beliebige neue Betriebspunkte  $\mathbf{x}$  für jeden Gitterpunkt alle Feldgrößen bestimmt werden. Wird ein Gitter mit  $N_G = 6 \cdot 10^6$  Punkten und sechs Feldgrößen angenommen, müssten jedoch 36 Millionen Ersatzfunktionen erstellt werden, was tendenziell zu langen Rechenzeiten führen würde. Es gilt daher, effektivere Methoden für die Interpolation von Strömungsgrößen zu finden. In diesem Abschnitt werden zwei Methoden vorgestellt, welche für diese Zwecke genutzt werden können. Die erste Methode basiert auf der Verwendung der zum gesuchten Punkt nächsten bekannten Lösung. Die zweite vorgestellte Methode basiert auf der Bestimmung von sog. Strömungsmoden mithilfe der Singulärwertzerlegung bzw. POD und der anschließenden Superposition dieser zu neuen Lösungen.

Bevor jedoch auf beide Methoden eingegangen wird, muss noch auf ein besonderes Problem bei der Verdichter-CFD aufmerksam gemacht werden. Ein Großteil der Arbeiten, in welchen Strömungslösungen wiederverwendet werden, beziehen sich auf Tragflügel- oder Körperumströmungen mit gleichbleibenden Netzen. Dies bedeutet, dass jeder Gitterpunkt für alle untersuchten Strömungsbedingungen eine feste relative Lage zum umströmten Körper besitzt und für eine neue Untersuchung das gleiche Netz verwendet werden kann.

Für die Verdichterströmung trifft dies im Allgemeinen auf alle Rotoren und alle festen Statoren zu, da davon auszugehen ist, dass alle Betriebspunktberechnungen bei gleicher Netztopologie erfolgen. Probleme treten jedoch bei verstellbaren Statorschaufeln (IGV, VSVs) auf, da für diese für jeden individuellen Verstellwinkel zur Gewährleistung einer optimalen Netzgüte das Netz individuell angepasst werden muss. Die relativen Lagen der Knotenpunkte zur Schaufel ändern sich damit. Weiterhin kann auch nicht gewährleistet werden, dass die Anzahl der Zellen für die CFD-Netze aller Betriebspunkte gleich bleibt. Die unterschiedlichen Netztopologien müssen daher vereinheitlicht werden, um eine weitere Verarbeitung zu gewährleisten. Besonders die Rekombination von bekannten Strömungslösungen zu einer neuen Lösung erfordert gleiche Netzzellenindizierung und gleiche Netzzellenanzahl. Diese Eigenschaft wird im Folgenden als Konsistenz definiert. Netze gleicher Netzzellenanzahl werden demnach als konsistente Netze bezeichnet. In den folgenden Abschnitten werden Lösungsansätze zur Behandlung unterschiedlicher Netztopologien entwickelt. Zunächst wird eine Netzinterpolationsmethode für unterschiedliche Netztopologien vorgestellt und darauf aufbauend eine Methode zur Erzeugung konsistenter Netze.

### 6.2.1 Initialisierung mit der Nachbarlösung

Ausgangspunkt für Initialisierung ist die Existenz von mehreren bereits bekannten 3D-CFD-Lösungen an den Betriebspunkten  $\mathbf{x}_i$  der Menge  $X$  und noch zu analysierenden Betriebspunkten  $\mathbf{c}_j$  der Menge  $C$ , welche mit den Algorithmen aus Abschnitt 4.4 ausgewählt werden. Die zu bestimmenden Punkte werden im Folgenden als Kandidaten bzw. Kandidatenpunkte bezeichnet. Der nächste Nachbar für jeden Punkt  $\mathbf{c}_j$  lässt sich mit

$$\mathbf{x}_j := \arg \min_{\mathbf{x}_i \in X} \|\mathbf{c}_j - \mathbf{x}_i\| \quad (6.2)$$

ermitteln, dessen Strömungsfeld als Initiallösung für die  $\mathbf{c}_j$ -Analyse dient.

Üblicherweise sind die Topologien der 3D-CFD-Netze von  $\mathbf{c}_j$  und  $\mathbf{x}_j$  nicht gleich und können somit nicht direkt aufeinander transferiert werden. Zum Transfer werden hier zwei Möglichkeiten vorgestellt. Zum besseren Verständnis wird eine Lösung von  $\mathbf{x}_j$ , welche bereits bekannt ist als Geberlösung und eine noch unbekannt Lösung (die des Kandidatenpunktes  $\mathbf{c}_j$ ) als Nehmerlösung definiert.

Die erste Möglichkeit beschreibt eine auf Knotenkoordinaten basierende baryzentrische Interpolation der Geberlösung auf die Nehmerlösung für jede einzelne Schaufelpassage. Zur Initialisierung der baryzentrischen Interpolation wird folgender Algorithmus verwendet:

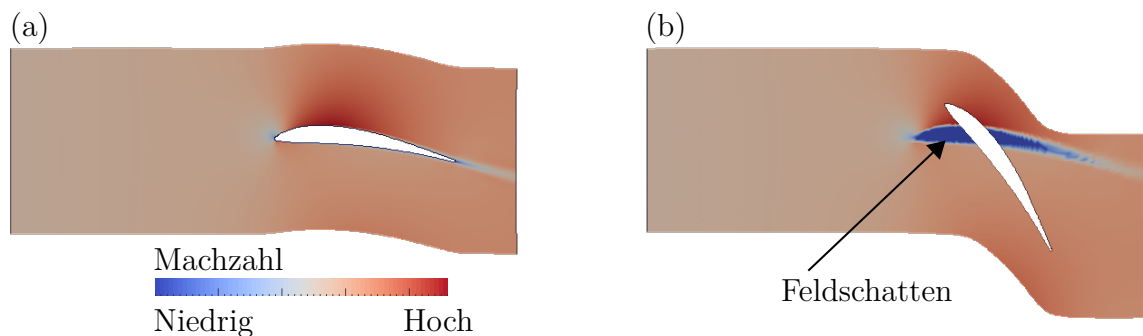
E1 Erstellung eines 3D-CFD-Netzes mit PADRAM für den zu untersuchenden Betriebspunkt

E2 Extraktion jedes einzelnen Schaufelpassagengitters mit dem Programm jm70

- E3 Ermittlung des nächsten bereits berechneten Betriebspunkts zum Kandidaten nach Gl. (6.2)
- E4 Extraktion jedes einzelnen Schaufelpassagengitters mit dem entsprechenden Strömungsfeld des nächsten Nachbarn mit dem Programm jm70
- E5 Passagenweise Interpolation der bekannten Geberlösung auf das Gitter des Kandidatenpunktes mit dem Programm jm52
- E6 Zusammensetzen aller Passagen zu einem Gesamtnetz mit jm70

Wie in der Einleitung beschrieben sind in den Passagen für die variablen Schaufeln die Netze nicht identisch bzgl. der Indizierung und der Position. Wird nun baryzentrisch interpoliert, kommt es zur Ausbildung von «Feldschatten», welche durch die unterschiedliche räumliche Lage der verstellbaren VSVs bedingt sind, siehe Abb. 6.1. Gemäß dieser Abbildung ist dieser Schatten ein zusammenhängendes Gebiet mit geringer Machzahl und hohem Druck inmitten der Strömung. Für das hier verwendete Verstellgesetz entsteht der ungünstigste Fall mit dem größten Feldschatten aus der Differenz der Verstellwinkel mit  $\Delta\gamma = 50^\circ$  für das IGV,  $\Delta\gamma = 25^\circ$  für das VSV1 und  $\Delta\gamma = 12.5^\circ$  für das VSV2.

Die zweite verwendete Möglichkeit der Netzprojektion von Feldgrößen ist eine topologische Interpolation. Dabei wird das Nehmernetz nochmalig mit den Netzparametern des Gebernetzes erstellt. Dadurch sind die Netzknontopologien des Geber- und des neuen Nehmernetzes gleich, so dass Strömungsfelder einfach knotenweise übertragen werden können. Anschließend wird das Strömungsfeld vom modifizierten Nehmernetz auf das ursprüngliche Nehmernetz mittels baryzentrischer Interpolation abgebildet.

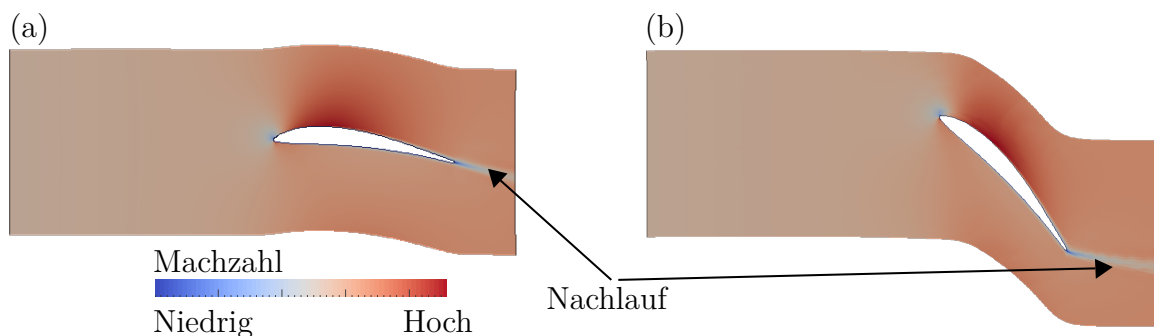


**Abb. 6.1:** Geberlösung der Machzahl für das IGV bei 100% Drehzahl (a) und die baryzentrische Interpolation dieser auf die Nehmerlösung der verstellten IGV bei 65% Drehzahl (b). Durch das Fehlen von Feldgrößen innerhalb der Kontur der Geberlösung entsteht in der Nehmerlösung in diesem Bereich ein «Feldschatten» (bläulich).

Zur Initialisierung mit topologischer Interpolation wird folgender Algorithmus verwendet:

- F1 Erstellung eines temporären PDRAM-Ordners für den zu untersuchenden Betriebspunkt
- F2 Kopieren der PDRAM-Parameter des Gebernetzes in einen temporären PDRAM-Ordner des zu untersuchenden Betriebspunkts
- F3 Erstellung eines temporären Netzes mit jm70 mit Strömungslösung des Geberpunktes
- F4 Erstellung eines PDRAM-Ordners mit echten betriebspunkteigenen Parametern und Erstellung eines 3D-CFD-Netzes für die Nehmerlösung
- F5 Baryzentrische Interpolation der Feldgrößen auf das neue Nehmer-Netz

Durch die knotenweise Übertragung des Strömungsfeldes wird die Bildung eines Feldschattens verhindert, jedoch werden gerichtete Strömungsstrukturen wie z.B. der Nachlauf einer Schaufel in seiner Richtung verfälscht, siehe Abb. 6.2. Die topologische Interpolationsmethode bildet ein Hilfsmittel zur im Folgenden verwendeten Superposition von Strömungsmoden.



**Abb. 6.2:** Geberlösung der Machzahl für das IGV bei 100% Drehzahl (a) und die topologische Interpolation dieser auf die Nehmerlösung mit verstelltem IGV bei 65% Drehzahl (b).

### 6.2.2 Superposition von Hauptströmungsmoden

Eine weitere Methode der Verwertung von bereits bestimmten Strömungs- bzw. Feldlösungen ist aus der Literatur als Proper Orthogonal Decomposition (POD), Karhunen-Loeve-Zerlegung oder Hauptkomponentenanalyse bekannt. Erstmals in den 50er Jahren von K. Karhunen und M. Loeve formuliert ist der Grundgedanke, dass Ereignisse eines stochastischen Prozesses als Linearkombinationen orthogonaler Funktionen formuliert werden können. Die Anwendung auf Strömungsphänomene wurde erstmalig von SIROVICH (1985) durchgeführt. Dabei wurden anhand von vielen zeitlich aufgelösten Strömungsbildern eines instationären Strömungsvorgangs mittels POD einige wenige dominante Strömungsmoden mit kohärenten Strukturen, d.h. räumlich organisierten Ansammlungen dominanter charakteristischer Feldgrößen, extrahiert. Eine etwas abgewandelte Anwendung wurde

bei stationären CFD-Berechnungen von 2D-NACA-Profilen<sup>1</sup> durchgeführt. Dabei wurde die POD-Zerlegung verwendet, um von den Betriebspunkten abhängige Moden zu bestimmen, vgl. LEGRESLEY U. A. (2001). In Arbeiten von ZIMMERMANN UND GÖRTZ (2010) wurde dieses Prinzip aufgegriffen, um Druckverteilungen auf Oberflächen von Flügel- oder Flugzeugkonfigurationen zu bestimmen und durch Interaktion des Strömungslösers mit den POD-Moden die Rechenzeiten massiv zu reduzieren.

Wie anfangs erwähnt, sind als Basis bereits bestimmte Strömungsfelder erforderlich. Jeder Punkt des Strömungsfeldes eines Rechengitters mit  $N_G$  Punkten besitzt Informationen über Strömungsgrößen  $\varphi \in \{\rho, p, u_1, u_2, u_3, \nu\}$ . Die Punkte liegen üblicherweise in einer dreidimensionalen Matrixanordnung, können aber zu einem Vektor transformiert werden, so dass dieser für jede Strömungsgröße einen Feldvektor  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_G}$  bildet. Dementsprechend ergibt sich die Menge  $\Phi$  von Feldvektoren als

$$\Phi := \{\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \boldsymbol{\nu}\}. \quad (6.3)$$

Der im Rahmen dieser Arbeit dargestellte Algorithmus wird auf jeden Feldvektor der Menge  $\Phi$  separat angewendet. Zum besseren Verständnis wird ein beliebiger aus der Menge  $\Phi$  entnommener Vektor  $\boldsymbol{\varphi}$  als Schnappschussvektor bezeichnet. Ausgehend von  $N$  bereits bestimmten Strömungsfeldern werden bei konsistenter Netztopologie alle Schnappschüsse zu einer Schnappschussmatrix

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_N] \in \mathbb{R}^{N_G \times N} \quad (6.4)$$

zusammengefasst. Anschließend wird der Mittelwertvektor

$$\mathbf{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varphi}_i \quad (6.5)$$

gebildet und als Zentrum definiert. Daraus ergibt sich eine zentrierte Schnappschussmatrix

$$\overline{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{\Psi} - \mathbf{d}\mathbf{I}. \quad (6.6)$$

Nach der Theorie der Singulärwertzerlegung lässt sich die Schnappschussmatrix  $\overline{\boldsymbol{\Psi}} \in \mathbb{R}^{N_G \times N}$  als Kombination einer orthogonalen Matrix  $\mathbf{L} = [\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{N_G}] \in \mathbb{R}^{N_G \times N_G}$  (auch linksseitige Eigenvektormatrix), einer Diagonalmatrix  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N_G \times N}$  (auch Singulärwertmatrix) und einer orthogonalen Matrix  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  (auch rechtsseitige Eigenvektormatrix) darstellen, so dass

$$\overline{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T \quad (6.7)$$

---

<sup>1</sup>NACA ist ein Akronym für **N**ational **A**dvisory **C**ommittee for **A**eronautics und steht für eine U.S.-Organisation zur Erforschung der Grundlagen der Luftfahrt (1915 bis 1958)

gilt. Für die orthogonalen Matrizen gilt

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}. \quad (6.8)$$

Die Lösung des Problems (6.7) wird nach SIROVICH (1985) in folgender Form bestimmt: Zunächst wird Gl. (6.7) mit  $\overline{\Psi}^T$  erweitert, so dass der Term

$$\overline{\Psi}^T\overline{\Psi} = (\mathbf{L}\Sigma\mathbf{R}^T)^T\mathbf{L}\Sigma\mathbf{R}^T \quad (6.9)$$

entsteht. Nach Anwendung der Transpositionsgesetze von Matrizen und Berücksichtigung der Eigenschaften (6.8) ergibt sich

$$\overline{\Psi}^T\overline{\Psi} = \mathbf{R}\Sigma^T \underbrace{\mathbf{L}^T\mathbf{L}}_{\mathbf{I}}\Sigma\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\Sigma^T\Sigma\mathbf{R}^T. \quad (6.10)$$

Das Produkt  $\Lambda = \Sigma^T\Sigma$  bildet eine positiv definite Diagonalmatrix. Eine Multiplikation von (6.10) mit  $\mathbf{R}$  ergibt mit (6.8)

$$\overline{\Psi}^T\overline{\Psi}\mathbf{R} = \mathbf{R}\Lambda \underbrace{\mathbf{R}^T\mathbf{R}}_{\mathbf{I}}, \quad (6.11)$$

und damit ein Eigenwertproblem der Form

$$\overline{\Psi}^T\overline{\Psi}\mathbf{R} - \mathbf{R}\Lambda = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

darstellt. Spaltenweise dargestellt ergibt sich

$$\overline{\Psi}^T\overline{\Psi}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i, \quad i = 1(1)N \quad (6.13)$$

und damit die Eigenwertprobleme

$$\left(\overline{\Psi}^T\overline{\Psi} - \lambda_i\mathbf{I}\right)\mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1(1)N. \quad (6.14)$$

Damit ergeben sich die Elemente der Diagonalmatrix  $\Lambda$  als Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  von  $\overline{\Psi}^T\overline{\Psi}$  und die Spalten von  $\mathbf{R}$  als rechtsseitigen Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Unter der Annahme, dass die Matrix  $\overline{\Psi}^T\overline{\Psi}$  den Rang  $p = \min(N, N_G)$  besitzt, ergibt sich folgende Form der

Singulärwertmatrix  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \left. \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_N \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \times p \\ (N_G - p) \times p \end{array} \quad (6.15)$$

Wird nun (6.7) betrachtet, so ergibt das Matrixprodukt  $\mathbf{L}\Sigma$  nur für die ersten  $p = N$ -Spalten von Null verschiedene Einträge, somit kann (6.7) folgendermaßen umformuliert werden

$$\bar{\Psi} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\Sigma}\mathbf{R}^T, \quad \tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{l}_1, \cdots, \mathbf{l}_N], \quad \tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) \quad (6.16)$$

Wird nun (6.16) nach  $\mathbf{l}_i$  umgestellt, ergeben sich mit (6.8)

$$\mathbf{l}_i = \bar{\Psi}\mathbf{r}_i\sigma_i^{-1} \quad (6.17)$$

und mit der Beziehung  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  die linksseitigen Eigenvektoren

$$\mathbf{l}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\bar{\Psi}\mathbf{r}_i. \quad (6.18)$$

Anhand der Quadrate der Singulärwerte definiert man den relativen Informationsgehalt jedes Eigenvektors als

$$RI_i = \frac{\lambda_i^2}{\sum_{j=1}^N \lambda_j^2}. \quad (6.19)$$

Für eine Menge von  $N_r$  Moden kann über die Summe der dazugehörigen  $RI_i$  der akkumulierte relative Informationsgehalt

$$RIC = \sum_{i=1}^{N_r} RI_i \quad (6.20)$$

definiert werden. Mit dieser Größe kann ermittelt werden, wie viele der Eigenvektoren notwendig sind, um das System hinreichend genau zu beschreiben. Unter «hinreichend genau» wird hier der Status verstanden, in dem 98% des relativen Informationsgehalts durch die Moden abgebildet wird.

Eine Strömungslösung an einem beliebigen unbekanntem Betriebspunkt  $\varphi(\mathbf{x})$  wird nun nach (6.6) als Summe des Mittelwertvektors  $\mathbf{d}$  und einer Linearkombination der bekannten Moden  $\mathbf{l}_1, \cdots, \mathbf{l}_N$  gebildet, welche mit vom Betriebspunkt abhängigen Faktoren  $a_i(\mathbf{x})$

gewichtet werden, d.h.

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{x}) \mathbf{l}_i. \quad (6.21)$$

Für dieses Vorhaben müssen die Funktionen  $a_i(\mathbf{x})$  bestimmt werden, welche zunächst unbekannt sind. Es gilt daher einen Zusammenhang zwischen den bekannten Schnappschussvektoren  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , den dazugehörigen Betriebspunkten  $\mathbf{x}_i$  und den Strömungsmoden  $[\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_N]$  herzustellen. Dazu soll die Bedeutung aller Moden in  $\mathbf{L}$  verdeutlicht werden. Hierfür wird in Gl. (6.16) das Matrizenprodukt

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{R}^T =: \tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N] \quad (6.22)$$

zusammengefasst, so dass aus (6.16) die Gleichung

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{A}} \quad (6.23)$$

entsteht. Ausgeschrieben ergibt sich (6.23)

$$[\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \dots, \boldsymbol{\Psi}_N] = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_N] [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]. \quad (6.24)$$

Für die erste Spalte  $\boldsymbol{\Psi}_1$  ergibt sich mit  $\mathbf{a}_i = [a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{N,i}]^T$

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \mathbf{l}_1 a_{1,1} + \mathbf{l}_2 a_{2,1} + \dots + \mathbf{l}_N a_{N,1} \quad (6.25)$$

analog für alle folgenden

$$\boldsymbol{\Psi}_2 = \mathbf{l}_1 a_{1,2} + \mathbf{l}_2 a_{2,2} + \dots + \mathbf{l}_N a_{N,2} \quad (6.26)$$

⋮

$$\boldsymbol{\Psi}_N = \mathbf{l}_1 a_{1,N} + \mathbf{l}_2 a_{2,N} + \dots + \mathbf{l}_N a_{N,N}. \quad (6.27)$$

Das bedeutet, dass jeder Schnappschuss eine Linearkombination aller Linkseigenvektoren ist und die zugehörigen Gewichtungsvektoren jeweils die Spalten der Matrix  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  sind.

Mit bekannten  $\mathbf{R}$  und  $\boldsymbol{\Sigma}$  ist auch  $\tilde{\mathbf{A}}$  bekannt. Zur Lösung des Problems (6.21) können nun anhand der Stützstellen  $a_{i,j} \in \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  für jeden Linkseigenvektor  $\mathbf{l}_i$  betriebspunktabhängige Funktionen  $a_i(\mathbf{x})$  erstellt werden. Zu diesem Zweck wird der RBF-Ansatz aufgegriffen und Funktionen der Form

$$a_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N w_{i,j} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \quad (6.28)$$

erstellt. Die unbekanntenen Koeffizienten  $w_{i,j}$  können gemäß der in Abschnitt 5.1.2 gezeigten Methoden ermittelt werden. Nach dem Einsetzen von (6.28) in (6.21) und anschließendem



Ausschreiben, ergibt sich für einen Schnapsschussvektor an einer beliebigen Stelle

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N w_{i,j} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \right) \mathbf{l}_i. \quad (6.29)$$

## 6.3 Bewertung der vorgestellten Strategien

Im Folgenden werden die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Initialisierungsansätze auf 3D-CFD-Berechnungen eines Forschungsverdichters angewendet und bezüglich der Rechenzeitreduktion untersucht. Als Schließungsansatz für die Turbulenzmodellierung wird das Eingleichungs-Modell von Spalart-Allmaras verwendet. Im Unterschied zur bisherigen separaten Betrachtung vom Pump- und Sperrbereich wird hier der gesamte Parameterbereich herangezogen. Die Verwendung der normierten Parameter  $x_1$ ,  $x_2$  nach (2.10) und (2.12) ist dafür nicht zweckmäßig. Auch die Normierung (5.23) ist hier ungünstig, da die relative Lage zum Designpunkt schlecht erkennbar ist. Aus diesem Grund wird die Normierung

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_1 = \frac{\dot{m}_{r,E}}{\dot{m}_{r,E}^{DP}}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{n_r}{n_r^{DP}} \quad (6.30)$$

verwendet. Für jeden Initialisierungsansatz wird anhand vorher bestimmter nichtinitialisierter 3D-CFD-Lösungen eine Referenzdatenbasis erzeugt und mit initialisierten 3D-CFD-Rechnungen hinsichtlich Rechenzeiterparnis und Approximationsgenauigkeit verglichen.

### 6.3.1 Initialisierung mit reduzierten Methoden

Zur Bewertung des Beschleunigungspotenzials der Initialisierung mit reduzierten Methoden wird auf Basis von durchgeführten Vorarbeiten ein Analysegitter festgelegt, auf dem alle Punkte zunächst ohne zusätzliche Initialisierungsmaßnahmen, dann mit Throughflow-Initialisierung aus Abschnitt 6.1.1 und mit MISES-Initialisierung aus Abschnitt 6.1.2 berechnet werden.

Das  $5 \times 5$ -Analysegitter besteht aus fünf normierten Drehzahlen  $\tilde{x}_2 \in \{0.65, 0.80, 0.90, 1.00, 1.025\}$  und je fünf Berechnungen mit den normierten Massenströmen  $\tilde{x}_1 \in \{0.97, 0.98, 1.00, 1.10, 1.20\}$  für jede Drehzahl, siehe Tab. 6.1. Die Rechenzeiten der 3D-CFD ohne zusätzliche Initialisierungsmaßnahmen bilden die Vergleichsbasis. Bei einer ersten Betrachtung der Tabelle fallen sofort die Markierungen «n.K» auf. Dies bedeutet entweder, dass an diesem Betriebspunkt keine konvergierte Lösung vorliegt und sich der Punkt somit außerhalb der Pumpgrenze befindet, oder dass ein Betriebspunkt durch Verwendung von Initialisierungsmaßnahmen nicht konvergiert. Letzterer Fall liegt vor, wenn die nichtinitialisierte Lösung für diesen Punkt existiert.

Für die Analyse der Approximationsgüte der Ansätze müssen geeignete Kriterien formuliert werden, da Throughflow nur Größen an Rändern von Schaufelpassagen liefert während MISES eine Gesamtfelddarstellung ausgibt. Daher wird zunächst für die Un-

$\tilde{x}_1 \backslash \tilde{x}_2$	0.65	0.80	0.90	1.00	1.025
I: 0.97	n.K	n.K	1000	590	590
TF: 0.97	n.K	n.K	654	390	421
MI: 0.97	n.K	n.K	604	351	355
I: 0.98	932	846	930	540	579
TF: 0.98	n.K	825	634	351	395
MI: 0.98	938	711	591	301	291
I: 1.00	926	825	582	444	351
TF: 1.00	n.K	567	563	439	351
MI: 1.00	577	387	439	332	371
I: 1.10	955	923	596	366	387
TF: 1.10	n.K	399	444	363	300
MI: 1.10	516	438	431	337	230
I: 1.20	620	650	465	380	566
TF: 1.20	n.K	n.K	404	275	262
MI: 1.20	720	525	400	250	222

**Tabelle 6.1:** Rechenzeiten in Minuten für die untersuchten Kennfeldpunkte für fünf verschiedene Drehzahlen  $\tilde{x}_2$  und 5 Massenströme  $\tilde{x}_1$  für CFD-Berechnungen ohne Initialisierung (I), mit Throughflow-Initialisierung (TF) und mit MISES-Initialisierung (MI)

tersuchung der Throughflow-Initialisierung an den Zonenrändern aller Schaufelreihen  $i \in \{I1, R1, S1, R2, S2, R3, S3, R4, S4, S5\}$  (vgl. Abb. 3.9) für alle Größen der Mittelwert  $\bar{\varphi} \in \{\bar{p}_{s,A}, \bar{p}_{t,E}, \bar{\alpha}_E, \bar{\alpha}_A, \bar{T}_{t,E}\}$  gebildet und anschließend der relative Fehler nach

$$\varepsilon_{i,r}^{\varphi} = \frac{\bar{\varphi}_i^{(CFD)} - \bar{\varphi}_i^{(Init)}}{\bar{\varphi}_i^{(CFD)}} \times 100\% \quad (6.31)$$

bestimmt wird.

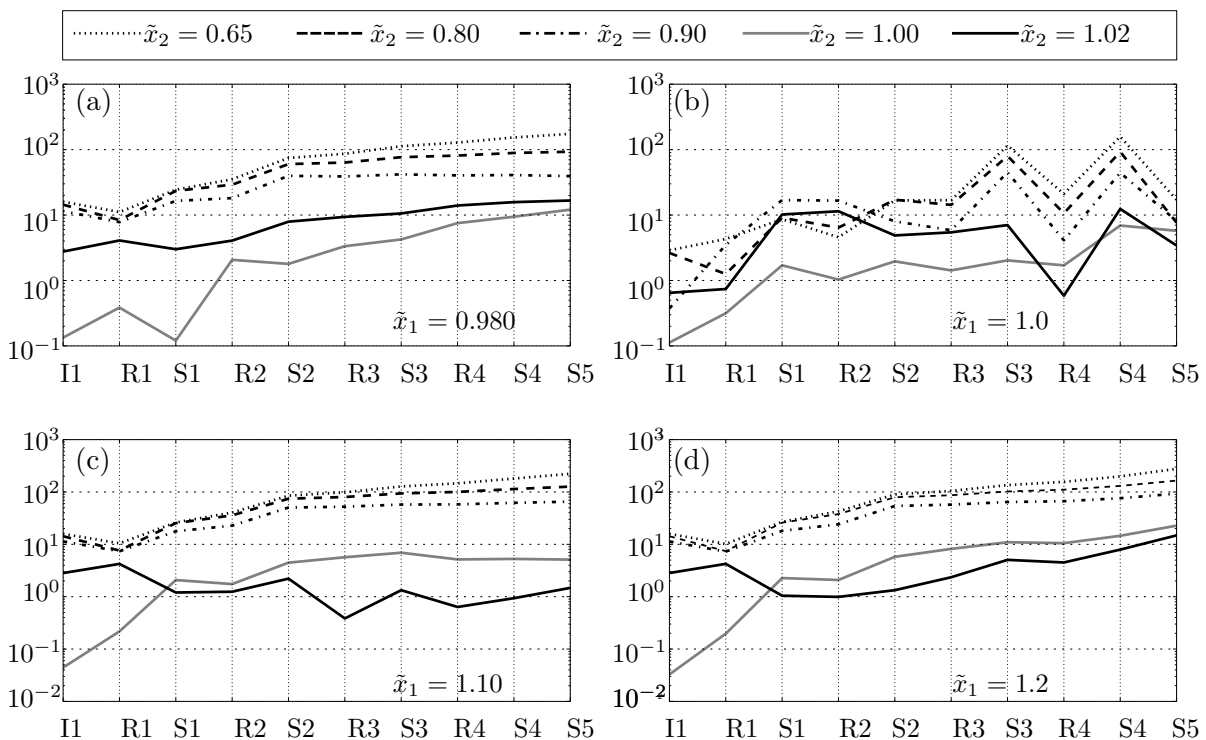
Zunächst wird der Fall ohne Initialisierung betrachtet. Zur Erläuterung muss hier gesagt werden, dass dieser Fall bedeutet, dass allen Rechnungen eine Throughflow-Berechnung des Auslegungspunktes  $\tilde{\mathbf{x}}^{DP} = (1.00, 1.00)$  zugeordnet wird. Diese wird oftmals bei der Bereitstellung der Verdichterdaten mitgeliefert, damit eine 3D-CFD-Rechnung durchgeführt werden kann. Anhand der Ergebnisse in Tab. 6.1 für den Fall ohne Initialisierung ist erkennbar, dass die Rechenzeiten mit abnehmender Drehzahl  $\tilde{x}_2$  tendenziell zunehmen. Weiter ist zu beobachten, dass sowohl eine Drosselung als auch eine Erhöhung von  $\tilde{x}_1$  ebenfalls zu einer Erhöhung der Rechenzeit führen. Dieser Umstand lässt sich dadurch erklären, dass wie bereits erwähnt für alle Rechnungen eine Throughflow-Lösung für den Auslegungspunkt  $\tilde{\mathbf{x}}^{DP}$  verwendet wird und verständlicherweise die Strömungsgrößen mit

zunehmendem Abstand vom Auslegungspunkt abweichen. Die relativen Abweichungen (6.31) zwischen den tatsächlichen und den initialisierten Drücken sind in Abb. 6.3 dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Fehler sowohl von Stufe zu Stufe als auch mit sinkender Drehzahl  $\tilde{x}_2$  zunimmt. Vor allem bei geringen reduzierten Drehzahlen von  $\tilde{x}_2 = 0.65$  bis  $\tilde{x}_2 = 0.90$  erreicht die Fehlerrate  $\varepsilon_r^p$  Werte von über 100%.

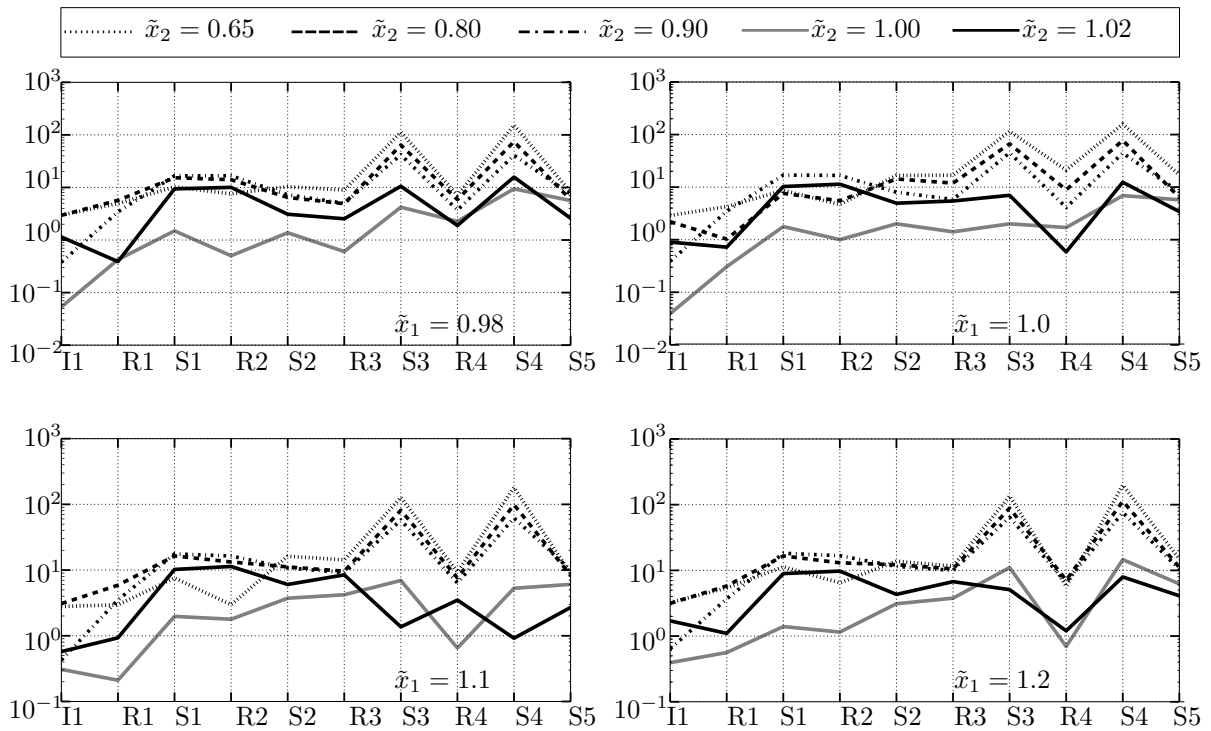
Lange Rechenzeiten für Betriebspunkte fernab vom Auslegungspunkt wurden in allen vorherigen Studien beobachtet. Ursache dafür ist, dass bei den gedrosselten Strömungen komplexe dreidimensionale Ablöse- und Wirbelphänomene aufkommen und deren Berechnung im Allgemeinen zeitaufwändiger ist als die einer ablösungsfreien Strömung am Auslegungspunkt.

Für die Initialisierung mit Throughflow ist zunächst aus Tabelle 6.1 zu erkennen, dass für die Drehzahlen  $\tilde{x}_2 \geq 0.80$  für alle  $\tilde{x}_1$  eine Rechenzeitersparnis erreicht wird. Für den Fall  $\tilde{x}_2 = 0.65$  sind dagegen keine Lösungen möglich und mit einem «n.K.» gekennzeichnet. Grund dafür ist ein interner HYDRA-Massenstromprüfer, welcher eine Verletzung der Massenbilanz angibt. Diese tritt u.a. auf, wenn der Verdichter sperrt und der angeforderte Massenstrom nicht durchfließen kann oder die Druckdifferenz zwischen Eintritt und Austritt keine Strömung in axiale Richtung zulässt.

In Abb. 6.4 ist für alle konvergierten Lösungen in der Druckverteilung eine Fehlerrate unter 11% zu erkennen, außer für die Stationen S3 und S4. Um so verwunderlicher



**Abb. 6.3:** Relativer Fehler (6.31) in % des statischen Austrittsdrucks  $p_{s,A}$  an allen Schaukelreihen für den nichtinitialisierten Fall für vier reduzierte Massenströme (a) bis (d) und je fünf verschiedene Drehzahlen



**Abb. 6.4:** Relativer Fehler in % für den mit Throughflow initialisierten Fall am Beispiel des statischen Drucks  $p_{s,A}$  an allen Schaufelreihen für vier reduzierte Massenströme und je fünf verschiedene Drehzahlen

scheint es, dass bei diesen Statoren der Fehler bis auf etwa 110% ansteigt. Diese große Abweichung führt möglicherweise zu einer Massenstromverletzung, welche schließlich zum Programmabbruch führt. Wiederholungen der Testreihe zeigten ein ähnliches Verhalten, so dass geschlussfolgert werden darf, dass Throughflow nicht in der Lage ist, für geringe Drehzahlen eine durchgehend gute Initialisierung zu gewährleisten. Ein konkreter Grund für diese Abweichung ist dadurch zu erklären, dass die verwendeten Korrelationen aus Rechnungen nahe dem Auslegungspunkt entwickelt wurden und im Teillastbereich ihre Geltung verlieren.

Zusammenfassend beträgt die maximale Rechenzeitreduktion durch Initialisierung mit TF 56% und die minimale Reduktion 3%. Nahezu keine Rechenzeitreduktion ist bei den Betriebspunkten (1.00, 1.00), (1.10, 1.00) und (1.00, 1.025) möglich, was jedoch nicht weiter verwunderlich ist, da die Throughflow-Lösung dort der Lösung im Auslegungspunkt  $\tilde{\mathbf{x}}^{DP}$  ähnelt und somit dem nichtinitialisierten Fall entspricht, welcher als Referenz dient. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass bei der in Abschnitt 4.4 entwickelten Methode zur parallelen Exploration von Betriebsgrenzen mit SVM die Ergebnisse der gesamten Stichprobe benutzt werden und daher die längste Rechenzeit entscheidend ist, da der gesamte Prozess einer SVM-Iteration diese abwarten muss. Wird das Analysegrid als mögliche Stichprobe interpretiert, ergibt sich im nichtinitialisierten Fall eine maximale Rechenzeit von 15.5h und im Throughflow-initialisierten Fall 13.75h, was einer mittleren Reduktion von 12% entspricht. In Anbetracht dessen, dass der Initialisierungsvorgang

nur wenige Minuten dauert, scheint diese Strategie vielversprechend zu sein. Jedoch zeigt die Tatsache, dass die Initialisierung mit Throughflow in Bereichen geringer Drehzahlen ( $\tilde{x}_2 < 0.80$ ) zum Abbruch von HYDRA-Rechnungen führen kann, obwohl mit anderen Initiallösungen eine Konvergenz möglich wäre, dass diese Methode nicht sehr stabil und für eine Berechnung von zufällig gewählten Betriebspunkten eher ungeeignet ist. Was ebenfalls bereits an dieser Stelle klar wird, ist, dass für Bereiche geringer Drehzahlen der 3D-CFD-Löser sensibel auf Startlösungen reagiert und somit die Güte der Startlösung über Konvergenz einer Rechnung entscheiden kann. Trotz dieses negativen Aspekts wird die Throughflow-Initialisierung zunächst weiterverwendet, da die im Folgenden dargestellte Methode Startlösungen benötigt, welche nur mithilfe von Throughflow erzeugt werden können. Es ist anzunehmen, dass die genannten Nachteile auch die folgende Methode beeinträchtigen werden.

Die Initialisierung mit MISES erfolgt, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, durch die Berechnung zweidimensionaler Felder mit reibungsfreier Strömung und anschließender Interpolation auf ein 3D-Netz. Diese Methode liefert durch die zusätzliche Modellierung der Schaufelpassagenströmung detailliertere Initiallösungen als die Throughflow-Initialisierung. In Tab. 6.1 ist für die normierten Drehzahlen für alle  $\tilde{x}_2 \geq 0.8$  eine Rechenzeitreduktion erkennbar. Im Vergleich zur Throughflow-Initialisierung beträgt die maximale Reduktion etwa 32%, im Verhältnis zum nichtinitialisierten Fall etwa 54%.

Wie bereits vermutet, beeinflussen schlechte Randbedingungen die MISES-Rechnung. Sukzessive liefern stark abweichende Throughflow-Lösungen auch stark abweichende MISES-Rechnungen. Dies ist im Bereich geringer normierter Drehzahlen  $\tilde{x}_2 < 80\%$  an den vergleichsweise langen Rechenzeiten zu erkennen, die fast genauso lang sind wie die im nichtinitialisierten Fall und am Punkt (0.65, 1.20) sogar um ca. 17% länger.

Für die Beurteilung der Approximationsgüte des MISES-Ansatzes und zur visuellen Lokalisierung der Fehlerquellen wird für alle Feldgrößen  $\varphi \in \{\rho, p, u_1, u_2, u_3, \nu\}$  an jedem Netzknoten  $i = 1, \dots, N_G$  des 3D-CFD Netzes der relative Fehler

$$\varepsilon_{i,r}^\varphi = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \varphi_i^{(CFD)} \leq 10^{-3} \\ \left| \frac{\varphi_i^{(Init)}}{\varphi_i^{(CFD)}} - 1 \right| & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.32)$$

bestimmt. Zusätzlich werden der mittlere Fehler

$$\bar{\varepsilon}_r^\varphi = \frac{1}{N_G} \sum_{i=1}^{N_G} \varepsilon_{i,r}^\varphi, \quad (6.33)$$

der maximale Fehler

$$\varepsilon_{max}^\varphi = \max_{i \in \{1, \dots, N_G\}} \varepsilon_{i,r}^\varphi \quad (6.34)$$

sowie der Median des sortierten Vektors  $\boldsymbol{\varepsilon}_r^\varphi$  eingeführt<sup>2</sup>:

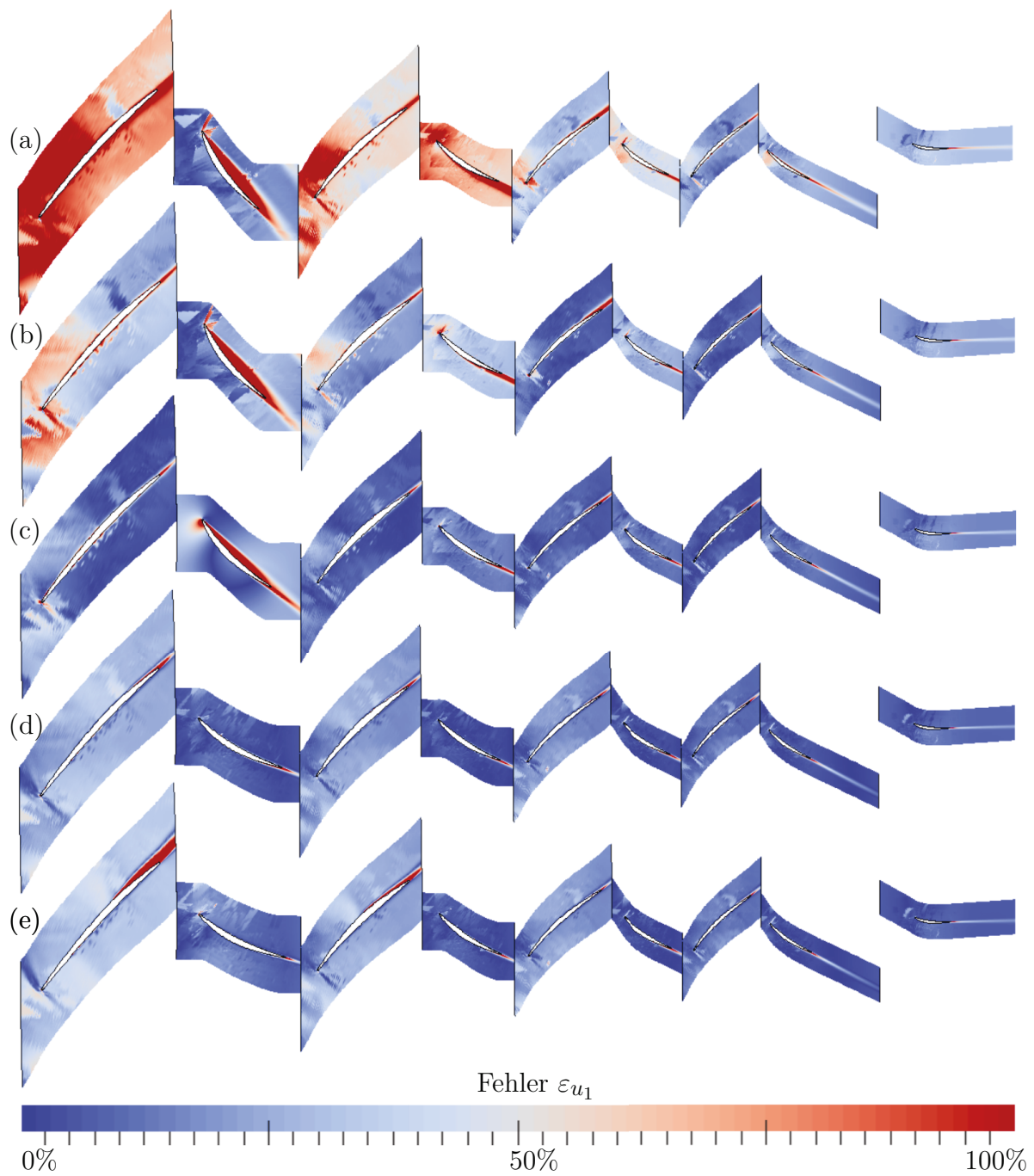
$$\varepsilon_m^\varphi = \text{med}(\boldsymbol{\varepsilon}_r^\varphi) = \begin{cases} \varepsilon_{((N_G+1)/2)}^\varphi & \text{für ungerade } N_G, \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{(N_G/2)}^\varphi + \varepsilon_{(N_G/2+1)}^\varphi) & \text{für gerade } N_G. \end{cases} \quad (6.35)$$

Für den Vergleich wird die Drehzahl entlang der normierten Auslegungsmassenstromlinie  $\tilde{x}_1^{(DP)} = \textit{konst.}$  variiert, so dass die Betriebspunkte  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (1.0, 0.65)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (1.0, 0.8)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.0, 0.9)$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_4 = (1.0, 1.02)$  betrachtet werden. In Tabelle 6.2 fällt zunächst auf, dass die Fehler in den Geschwindigkeiten  $u_i$  sehr groß werden. Dieses lässt sich dadurch erklären, dass die MISES-Lösung keine Grenzschichtanteile besitzt und somit die sehr kleinen Geschwindigkeiten in der Grenzschicht den Quotienten  $(u^{(Init)}/u^{(CFD)})$  im Fehler (6.32) explodieren lassen. Die Stellen, an denen dies vor allem zutrifft, sind Nachläufe und Grenzschichten, wie in Abb. 6.5 für alle Drehzahlen durch rot markierte Bereiche gut erkennbar ist. Aus Tabelle 6.2 wird weiterhin ersichtlich, dass für die Geschwindigkeitsanteile  $u_1$  und  $u_2$  der Mittelwert für alle Drehzahlen wesentlich höher als der Medianwert ist, was ein Indiz für große Ausreißer ist. Der Fehler der turbulenten Größe  $\nu$  kann nicht angegeben werden, da MISES keine Reibung und somit auch keine Turbulenz verwendet. Dieses wird mit dem Kürzel «k.A.» (keine Angabe) gekennzeichnet. Der Einfluss der fehlerhaften Throughflow-Randbedingungen in Bereichen geringer Drehzahlen ist für die Punkte  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  ebenfalls erkennbar, da dies zu großen Fehlern für Druck- und Dichte führt. Die Interpolation der Geschwindigkeitsanteile  $u_3$  führt zu sehr hohen Approxi-

		$\rho$	$p$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\nu$
$\tilde{\mathbf{x}}_1$	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	56	75	170	260	130	k.A.
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	260	370	2049.1	2516.4	832.1	k.A.
	$\varepsilon_m^\varphi$ [%]	57	61	115	68	105	k.A.
$\tilde{\mathbf{x}}_3$	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	41	49	147	210	110	k.A.
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	350	429	1914.5	1634.4	740	k.A.
	$\varepsilon_m^\varphi$ [%]	47	43	90	50	90	k.A.
$\tilde{\mathbf{x}}_2$	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	27	29	110	117	90	k.A.
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	430	360	2025.4	1931.1	799.2	k.A.
	$\varepsilon_m^\varphi$ [%]	30	27	75	36	90	k.A.
$\tilde{\mathbf{x}}_4$	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	10	20	99	93	71	k.A.
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	550	220	1834	1721	838	k.A.
	$\varepsilon_m^\varphi$ [%]	6	15	48	39	83	k.A.

**Tabelle 6.2:** Initialisierungsfehler bei Verwendung des MISES-Ansatzes für vier Betriebspunkte  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  entlang der normierten Arbeitslinie  $\tilde{x}_1^{(DP)} = \textit{konst.}$

<sup>2</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf eine zusätzliche Indizierung eines nach der Größenordnung sortierten Vektors verzichtet



**Abb. 6.5:** Fehlerrate  $\varepsilon_{i,r}^{u_1}$  der Geschwindigkeit für Betriebspunkte (a)  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (1.0, 0.65)$ , (b)  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (1.0, 0.8)$ , (c)  $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.0, 0.9)$ , (d)  $\tilde{\mathbf{x}}_4 = (1.0, 1.0)$  und (e)  $\tilde{\mathbf{x}}_5 = (1.0, 1.025)$  für eine Schnittebene auf 72% der radialen Höhe

Betriebspunkte $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$	(1.0, 0.65)	(1.0, 0.8)	(1.0, 0.9)	(1.0, 1.025)
$1 - (t_{prep} + t_{init})/t_{ref}$ [%]	50	48	61	81

**Tabelle 6.3:** Rechenzeitersparnis im Fall der Initialisierung mit dem Auslegungspunkt im Vergleich zur Rechenzeit im nichtinitialisierten Fall  $t_{ref}$ . Dabei fließt sowohl die Zeit zur Erstellung der Initiaillösung  $t_{prep}$  als auch die anschließende reine Rechenzeit der initialisierten Lösung  $t_{init}$  ein.

mationsfehlern für alle Drehzahlen, was an gleichzeitig hohen Mittel- und Medianwerten erkennbar ist. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da zum einen aus den leicht gekrümmten MISES-Schnittebenen nur sehr grobe Schätzungen von Querströmungen durchgeführt werden können und zum anderen die Geschwindigkeitsfelder in wandnahen Bereichen auf Basis von Schnittebenen extrapoliert werden. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass diese Initialisierungsmethode für  $\tilde{x}_2 > 0.80$  gute Ergebnisse liefert, wobei die Interpolationsgüte für Statoren besser ist als für Rotoren.

Im Gegensatz zur Throughflow-Initialisierung beweist sich die MISES-Initialisierung als stabil für alle untersuchten konvergierten Betriebspunkte. Trotzdem eignet sich diese Methode ebenfalls nicht, um zufällig gewählte unstrukturierte Stichproben auszuwerten, da auch hier bei Betrachtung der Rechenzeiten in Tab. 6.1 der Bereich  $\tilde{x}_2 < 0.80$  keine signifikante Rechenzeitreduktion ausweist und im schlimmsten Fall  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.20, 0.65)$  sogar mehr Rechenzeit als im nichtinitialisierten Fall in Anspruch nimmt.

### 6.3.2 Initialisierung mit dem nächsten Nachbarn

Grundlage der folgenden Erläuterungen ist die in Abschnitt 6.2.1 beschriebene Methode zur Schätzung des Strömungsfelds eines neuen Betriebspunktes mithilfe von bereits berechneten Strömungslösungen einer Stichprobe. Zur Untersuchung dieser Methode wird als Testfall ebenfalls das Analysegitter aus den vorherigen Abschnitten verwendet. Die Übertragung der Feldlösungen von einem Netz auf das andere kann dabei sowohl mit der baryzentrischen Interpolation (Bearbeitungszeit  $t_{prep} \approx 70min$ ) als auch mit der topologischen Interpolation (Bearbeitungszeit  $t_{prep} \approx 45min$ ) erreicht werden. Die baryzentrische Interpolation wird nach Möglichkeit vermieden, da die Interpolationsergebnisse durch den bereits beschriebenen Feldschatten nicht physikalisch sind und daher mit dieser Methode initialisierte CFD-Rechnungen bei vielen Betriebspunkten kein eindeutig konvergierendes Verhalten zeigen. Das bedeutet, dass diese Lösungen zwar im Mittel gegen einen festen Wert konvergieren, aber zeitlich aufgelöst von nicht abklingenden Schwankungen überlagert sind und daher von der HYDRA-Konvergenzkontrolle als nichtkonvergiert eingestuft werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden die topologische Interpolation verwendet. Ergebnisse erster Vorarbeiten zeigen zunächst, dass eine Initialisierung aller Punkte auf der Linie  $\tilde{x}_1^{DP} = konst.$  durch den Auslegungspunkt  $\tilde{\mathbf{x}}^{(DP)}$  zu einer mittleren Rechenzeitreduktion von etwa 61% führt, siehe Tab. 6.3. In weiteren Vorarbeiten wird der kritischste

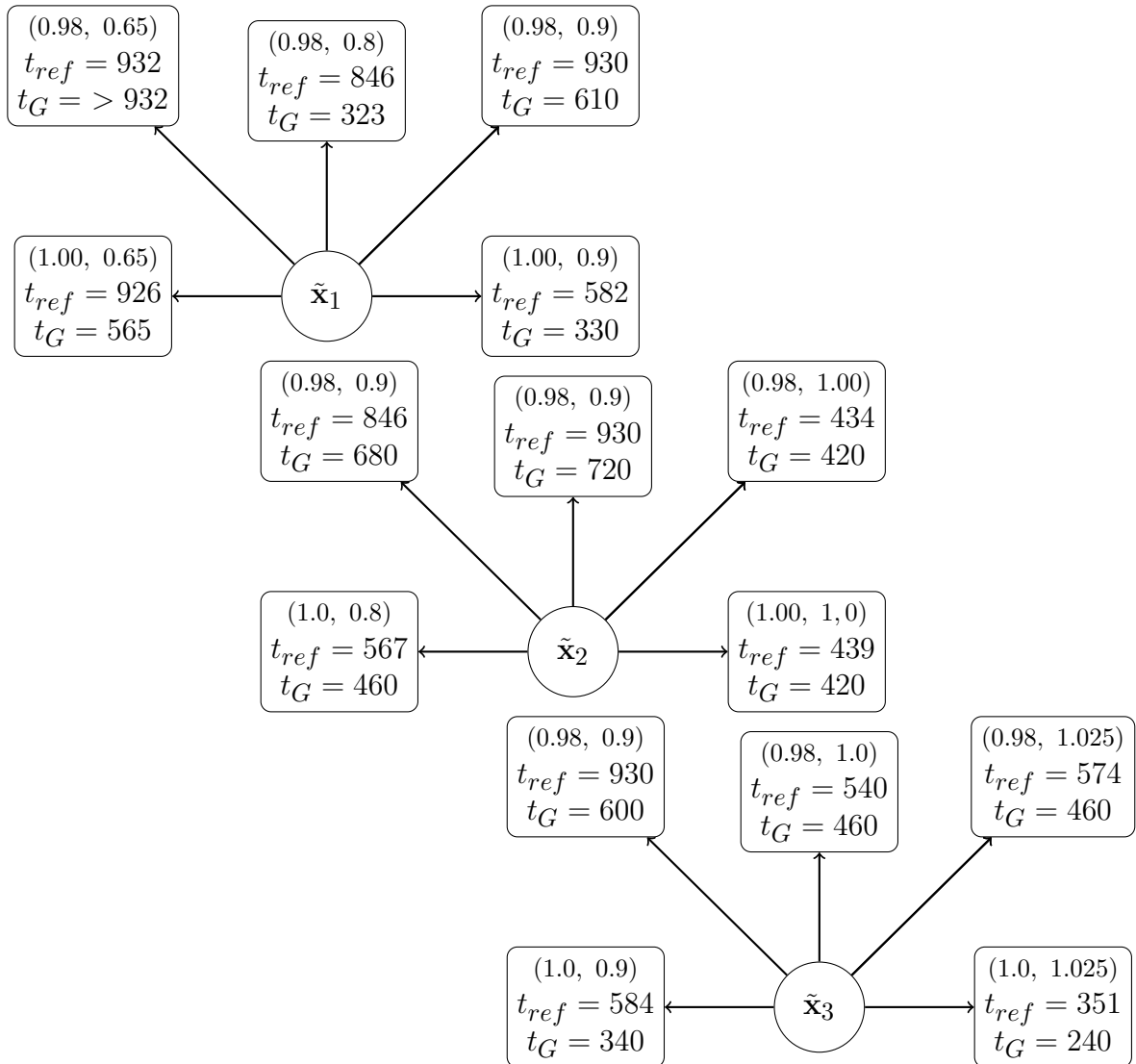


Fall der Initialisierung betrachtet, die Initialisierung eines Punktes  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 0.65)$  nahe der Pumpgrenze mit dem Strömungsfeld des Auslegungspunktes  $\tilde{\mathbf{x}}^{(DP)}$ . Bei dieser Konstellation kann durch kleinskalige Oszillationen um den Zielmassenstrom keine eindeutige Konvergenz erzielt werden. Auch für diese Art der Initialisierung stellen Betriebspunkte mit geringen Massenströmen und Drehzahlen ein Problem dar. Als möglicher Ausweg werden im Rahmen dieser Arbeit nicht nur der Auslegungspunkt als Geber für Initiallösungen, sondern auch andere konvergierte Punkte als Initiallösung für ihren direkten Nachbarn herangezogen. Hierzu wird ebenfalls das Analysegitter aus Abschnitt 6.3.1 verwendet. Eine Untersuchung aller Kombinationen, aus  $5 \times 5$  Punkten jeweils zwei nächste Nachbarn auszuwählen, würde 361 CFD-Auswertungen benötigen, was auch bei voller Parallelisierung des Clusters mehrere Wochen dauern würde. Aus diesem Grund werden nur die Betriebspunkte  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (1.00, 0.8)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (1.00, 0.9)$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.00, 1.0)$  als Geberpunkte verwendet, um als Initiallösung für deren Nachbarn zu dienen. Die Zuordnung der Nachbarn ist in Abb. 6.6 dargestellt. Anhand aller Ergebnisse kann zunächst verallgemeinert gesagt werden, dass die Initialisierung mit dem nächsten Nachbarn sich mit Ausnahme von Punkt  $(0.98, 0.65)$  positiv auf die Rechenzeit auswirkt. Besonders starke Reduktionen ergeben sich bei enger Nachbarschaft (direkter horizontaler und vertikaler Abstand) in der Größenordnung von etwa 50%. Auch in diesem Kontext wird nicht die Beschleunigungsleistung einzelner Rechnungen als Maß für die Verbesserung, sondern die Beschleunigung im Verbund betrachtet, so dass in dem betrachteten Fall die minimale Rechenzeitreduktion, als schwächstes Glied, mit 23% ausschlaggebend ist. Der Konvergenzverlauf des kritischen Punktes  $(0.98, 0.65)$  in Abb. 6.7 zeigt auch hier divergentes Verhalten, wobei die Lösung um den Zielmassenstrom oszilliert und innerhalb der eingestellten maximalen Iterationsanzahl nicht konvergiert.

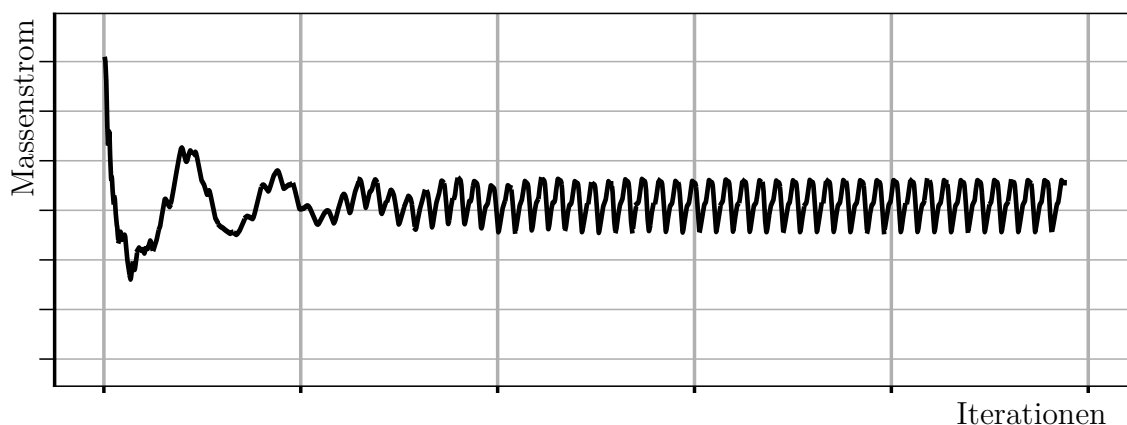
Weiterhin wurde im Rahmen dieser Untersuchungen festgestellt, dass es bei der topologischen Interpolation zu Fehlern kommen kann, welche dadurch verursacht werden, dass zwei Netze mit gleichen Vernetzungsparametern, aber unterschiedlicher VSV-Stellung nicht die gleiche Anzahl von Zellen haben. In den hier entwickelten Steuerskripten wird dieser Fehler jedoch detektiert und anstatt der topologischen Interpolation die baryzentrische vorgenommen.

### 6.3.3 Initialisierung von Strömungen mittels Superposition von Strömungsmoden

Inspiziert von der Arbeit von JANKE (2017) wird die Methode der POD verwendet, im Rahmen welcher gewichtete Kombinationen aus Strömungsmoden verwendet werden, um eine unbekannte Lösung zu approximieren. Wie in Abschnitt 6.2.2 beschrieben, werden aus bereits vorhandenen Strömungslösungen Moden und deren räumliche Gewichtungen extrahiert. Unter Zuhilfenahme von Antwortflächenmethoden können dann neue Gewichtungen für einen neuen unbekanntem Betriebspunkt bestimmt werden, mit denen anschließend die Strömungslösung nach (6.29) approximiert wird. Zur Untersuchung der Wirksamkeit dieser Methode werden zwei Anordnungen von bereits bestimmten Lösungen



**Abb. 6.6:** Rechenzeiten  $t_G$  bei Initialisierung mit dem nächsten Nachbarn im Vergleich zur Rechenzeit  $t_{ref}$  der nichtinitialisierten 3D-CFD. Die Gesamtrechenzeit  $t_G$  ist die Summe der reinen Rechenzeit der initialisierten Lösung  $t_{init}$  und der Zeit zur Erstellung der Initiallösung  $t_{prep}$ .



**Abb. 6.7:** Ausschnitt eines Konvergenzverlaufes einer oszillierenden Strömungslösung

betrachtet: Eine Gitteranordnung ähnlich zu den vorherigen Testfällen und eine zufällige unstrukturierte Anordnung von konvergierten Lösungen. Während der erste Testfall zum Abgleich mit der Literatur dient, zielt der zweite Testfall auf die spätere Anwendung auf den in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Prozess  $S C^2 A L^2 E T O R$ . Eine unstrukturierte Anordnung ist nach dem Kenntnis des Autors zuvor noch nicht untersucht worden. In den dem Autor bekannten Arbeiten von ZIMMERMANN UND GÖRTZ (2010), ALONSO U. A. (2012), MALOUIN U. A. (2013), JANKE (2017) wurden als Basis für die POD-Moden strukturierte Gitter mit verschiedenen Knotenverteilungen verwendet, wobei bis auf Ausnahme der Arbeiten von ZIMMERMANN UND GÖRTZ (2012) nur Punkte innerhalb des Gitters rekombiniert wurden. Weiterhin wurden, mit Ausnahme der Arbeiten von JANKE U. A. (2015), nur Flügelmodelle mit/ohne Auftriebshilfen bzw. Einzelkörpermodelle (z.B. Halbmodell Flugzeugrumpf) untersucht, welche in ein unstrukturiertes Netz eingebunden wurden. Dieses Setup ermöglicht eine Variation des Anströmwinkels und der Geschwindigkeit, ohne eine Modifikation des Netzes vorzunehmen.

In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall wird, nach den Ausführungen in Abschnitt 3.3, für jede Drehzahl ein individueller Verdrehwinkel für die Schaufeln des IGV, VSV1 und VSV2 eingestellt, was zu einer Netzdeformation führt. Durch diese Deformation ändern sich die relativen Positionen der Knoten zu den Schaufeln, so dass bei der POD-Zerlegung ein und derselben Schaufel für diese Punkte Feldänderungen an unterschiedlichen Stellen betrachtet werden und deshalb kein physikalischer Zusammenhang besteht. Da die Menge der Punkte, auf welche dies zutrifft, relativ gering ist und die Verschiebungen relativ klein sind, wird angenommen, dass der Einfluss auf die POD-Moden ebenfalls klein ist. Ein Vorteil der POD-Methode ist eine Reduktion der Datenmenge zur Beschreibung des Zustands eines Systems. Ein System, welches zunächst durch viele Zustandsgrößen beschrieben wird, kann mittels POD durch einige wenige dominante Moden mit hinreichender Genauigkeit beschrieben werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst untersucht, welche Auswirkung die Stichprobenverteilung (strukturiert oder unstrukturiert) auf die Anzahl der dominanten Strömungsmoden hat.

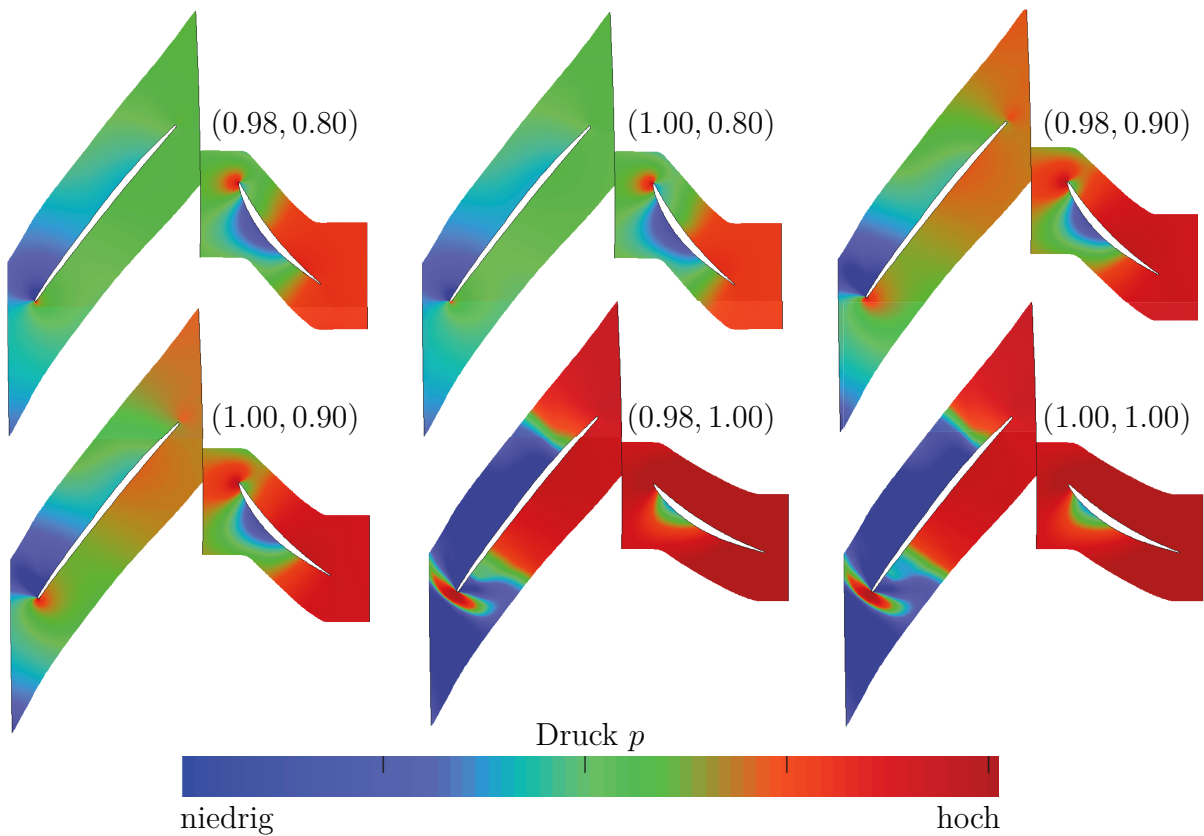
Die Feldvektoren der jeweiligen Stichproben werden zur Schnappschussmatrix nach (6.6), zusammengefasst. Anschließend werden mittels der Gleichungen (6.7) bis (6.18) sowohl die Singulärwerte als auch die Eigenmoden ermittelt. Die Dominanz der betrachteten Mode kann mit dem akkumulierten Informationsgehalt (6.20) charakterisiert werden.

Anhand der Darstellung des RIC einer strukturierten und unstrukturierten Stichprobe im Anhang in Abb. D.4 ist erkennbar, dass in beiden Fällen für eine hinreichend genaue Darstellung der Druck- und Dichtefelder nur zwei bis drei Moden notwendig sind. Diese Ergebnisse der strukturierten Stichprobe ähneln denen von JANKE (2017). Der wohl auffälligste Unterschied zwischen strukturierter und unstrukturierter Stichprobe ist, dass für den unstrukturierten Fall fast alle Geschwindigkeitsmoden benötigt werden, um einen  $\text{RIC} > 98\%$  zu erreichen. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da die strukturierte Probe nur vier Drehzahlen beinhaltet und die unstrukturierte acht. Dies ist ein Indiz dafür, dass die skalaren Feldgrößen Dichte und Druck variationsarm sind, während sowohl die vektoriellen Geschwindigkeitsfelder als auch die turbulenten Größen vielfältig sind.

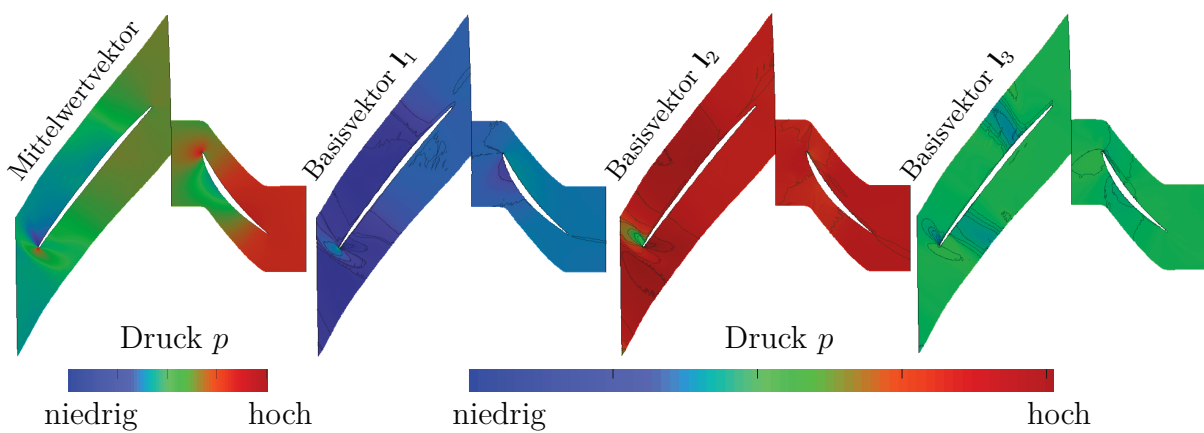
Ziel der ersten Untersuchung ist die Rekombination eines Punktes innerhalb und außerhalb der strukturierten Trainingsstichprobe. Unter der Berücksichtigung der Erkenntnisse aus den vorherigen Abschnitten, welche die Betriebspunkte für geringe Drehzahlen als schwierig initialisierbar identifizierten, werden für das POD-Trainingsgitter alle normierten Drehzahlen mit Ausnahme von  $\tilde{x}_2 = 0.65$  und  $1.025$  verwendet. Somit ist die POD-Trainingsmenge  $\tilde{X}_T = \{(1, 0.8), (0.98, 0.8), (1, 0.9), (0.98, 0.9), (1, 1.0), (0.98, 1.0)\}$ . Exemplarisch sind in Abb. 6.8 Schaufelschnitte des statischen Drucks für den ersten Rotor und Stator für diese Trainingspunkte dargestellt. In den Abbildungen sind einige charakteristische Strukturen wie lokale blasenförmige Beschleunigungsgebiete, Staupunkte, abgelöste Kopfwellen, Verdichtungsstöße und Expansionsfächer erkennbar. Nach der POD-Zerlegung werden die Strömungsfelder der Moden in Dateien geschrieben. Exemplarisch sind in Abb. 6.9 der Mittelwertvektor  $\mathbf{d}$  sowie die ersten drei Moden  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$  des statischen Drucks  $p$  dargestellt. Im Mittelwertvektor sind alle in den Trainingspunkten vorhandenen Strukturen erkennbar, wobei deren Intensität relativ gering ist. Dagegen scheinen Mode 1 und 2 das Gesamtfeld zu skalieren, während Mode 3 nur die Bereiche der Verdichtungsstöße abbildet.

Zur Untersuchung der Initialisierungsgüte von Betriebspunkten innerhalb der durch die Menge  $\tilde{X}_T$  gebildeten konvexen Hülle wird ein zufälliger Punkt generiert. Da ein einzelner Punkt wenig aussagekräftig ist, werden fünf solche Punkte erstellt und anschließend die statistischen Momente dieser Stichprobe betrachtet. Zur Untersuchung der Extrapolationsfähigkeit werden zusätzlich fünf Punkte außerhalb der Menge  $X_T$  generiert und analog zur vorherigen Stichprobe verarbeitet, siehe Anhang D.5a.

Für die Berechnung des relativen Fehlers der Feldgrößen  $\varphi \in \{p, \rho, u_1, u_2, u_3, \nu\}$  werden die Gleichungen (6.32)-(6.35) verwendet. Zusätzlich wird die relative Häufigkeit  $h_{5\%}$  bestimmt, welche angibt, wie viel Prozent der Fehler unterhalb von 5% liegen. Bei den integralen Größen  $\{\dot{m}_{r,E}, \pi, \eta\}$  werden ebenfalls die Gleichungen (6.32)-(6.35) angewendet.



**Abb. 6.8:** Statischer Druck auf einer Schaufelhöhe von 75% der Schaufeln R1 und S1 für die Betriebspunkte der POD-Trainingsmenge



**Abb. 6.9:** Mittelwertvektor  $\mathbf{d}$  sowie erste drei Basisvektoren  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_3$  der Druckverteilung  $p$  für Rotor R1 und Stator S1 resultierend aus der POD-Zerlegung der strukturierten Stichprobe.

Abschließend wird über alle fünf Betriebspunkte der mittlere Interpolationsfehler

$$\bar{\varepsilon}^\varphi = \sum_{i=1}^5 \bar{\varepsilon}_{i,r}^\varphi \quad (6.36)$$

und der Mittelwert des Medians

$$\bar{\varepsilon}_m^\varphi = \sum_{i=1}^5 \varepsilon_{m,i}^\varphi \quad (6.37)$$

ermittelt.

Der relative Approximationsfehler der inneren Stichprobe der Betriebspunkte ist in Tabelle 6.4a dargestellt. Auffällig sind die unterschiedlichen Fehlerraten für skalare Größen wie Druck, Dichte und die turbulente Größe von  $< 1.4\%$  und für die Geschwindigkeitskomponenten von  $> 40\%$ . Der letztgenannte relativ hohe Fehler ist ein weiteres Indiz für die Komplexität des Geschwindigkeitsfeldes (Grenz- und Scherschichten). Auffällig sind hierbei die Unterschiede zwischen Median und Mittelwert, was auf die Existenz von einzelnen großen Ausreißern hindeutet. Die Fehler der Kenngrößen  $\dot{m}_{r,E}$ ,  $\dot{m}_{r,E}$ ,  $\pi$  und  $\eta$  liegen alle unter  $1\%$ .

Die Auswertung der relativen Approximationsfehler der äußeren Stichprobe der Betriebspunkte ist in Tabelle 6.4b dargestellt. Wieder sind die Fehlerraten für Druck, Dichte und die turbulente Größe um ein Vielfaches kleiner als die der Geschwindigkeitskomponenten, wobei auch hier die Unterschiede zwischen Median und Mittelwert auffällig sind. Die Fehler der Kenngrößen sind hier jedoch unterschiedlich ausgeprägt. So ist der Fehler für  $\dot{m}_{r,E}$  etwa  $0.25\%$ , für  $\pi$  etwa  $0.6\%$  und für  $\eta$  etwa  $24\%$ . Die Bestimmung des Median von  $\eta$  liefert  $7.8\%$ , was ebenfalls auf einzelne Ausreißer hindeutet. Der Vergleich von Tabelle 6.4a und 6.4b zeigt eindeutig, dass die Extrapolation mit der POD-Methode wesentlich schlechtere Ergebnisse erzielt als die Interpolation.

Zur Überprüfung der Approximationsgüte der Superposition von Moden aus der unstrukturierten Stichprobe werden zwei weitere unstrukturierte Stichproben mit je  $N = 10$  Punkten erstellt und mithilfe von 3D-CFD berechnet. Die Punkte der ersten Stichprobe dienen als Trainingspunkte für die POD-Zerlegung und die Punkte der zweiten als Testdatensatz, bei dem jeder Punkt mithilfe der POD-Moden rekombiniert wird. Auch hier wird untersucht, wie die rekombinierte Initiallösung von der tatsächlichen Lösung abweicht und wie sich diese auf die CFD-Berechnungszeit auswirkt.

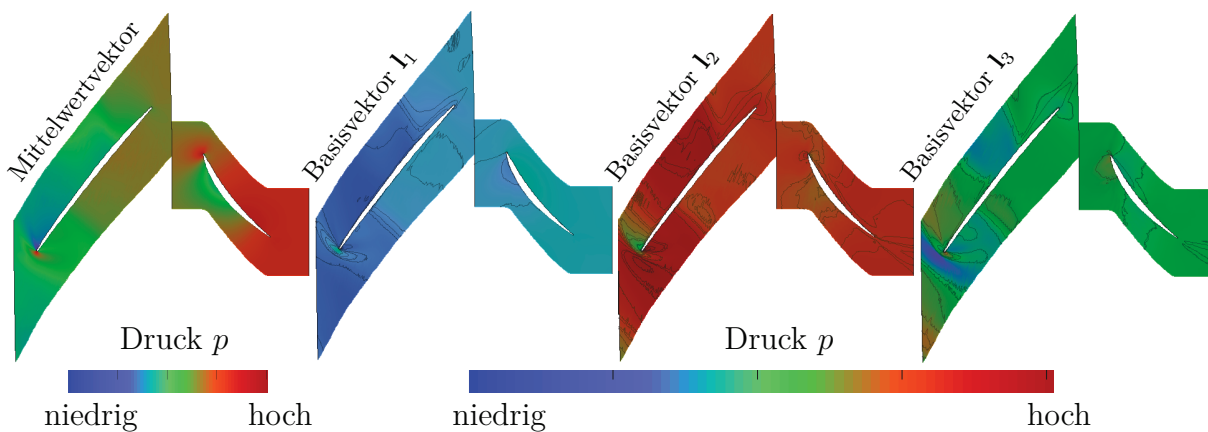
Der Mittelwertvektor  $\mathbf{d}$  sowie die ersten drei Moden  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$ ,  $\mathbf{l}_3$  für den statischen Druck  $p$  aus der POD-Zerlegung sind in Abb. 6.10 dargestellt. Der Mittelwertvektor ähnelt in der Topologie dem der strukturierten Analysereihe. Die Moden 1 und 2 zeigen ebenfalls Ähnlichkeiten zum strukturierten Fall, die dritte Mode zeigt jedoch einige Unterschiede zum strukturierten Fall im Bereich der Vorderkante. Der Verdichtungsstoß an der Druckseite ist hier weniger und der abgelöste Stoß an der Vorderkante hingegen mehr ausgeprägt.

Analog zum strukturierten Fall werden wieder zehn zufällig verteilte Betriebspunkte verwendet und in eine innere und äußere Stichprobe unterteilt, siehe Anhang D.5b. Die Ergebnisse sind in Tab. 6.5 dargestellt. Auch hier ist der große Unterschied der Fehlerrate

(a)		$\rho$	$p$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\nu$
Stichprobe	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	1.3	0.95	44.2	41.4	40.4	2.2
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	86	89	5666.04	7064.48	1622.67	25
	$\bar{\varepsilon}_m^\varphi$ [%]	0.9	1.2	1.2	1.4	4.0	1.1
	$h_{5\%}^\varphi$ [%]	96.3	98.7	78.0	77.8	61.6	92.0

(b)		$\rho$	$p$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\nu$
Stichprobe	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	6.5	10.2	116	91	85	5.0
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	73.8	78.5	88918.7	59851.3	26223.3	568
	$\bar{\varepsilon}_m^\varphi$ [%]	5.4	9.1	5.3	4.5	9.1	9.5
	$h_{5\%}^\varphi$ [%]	63	56	56	42	50	82

**Tabelle 6.4:** Mittlerer Fehler von Feldgrößen einer (a) inneren und (b) äußeren Stichprobe bei Rekonstruktion aus POD-Moden



**Abb. 6.10:** Mittelwertvektor  $\mathbf{d}$  sowie erste drei Basisvektoren  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$ ,  $\mathbf{l}_3$  der Druckverteilung  $p$  für Rotor R1 und Stator S1 resultierend aus der POD-Zerlegung der unstrukturierten Stichprobe.

(a)		$\rho$	$p$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\nu$
Stichprobe	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	2.1	2.1	55.4	51.5	46.8	2.3
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	57.4	60.4	46415	52299	17019	497
	$\bar{\varepsilon}_m^\varphi$ [%]	2.0	2.0	2.0	1.9	3.7	1.5
	$h_{5\%}^\varphi$ [%]	95.6	96.2	73.8	75.2	62.0	91.3

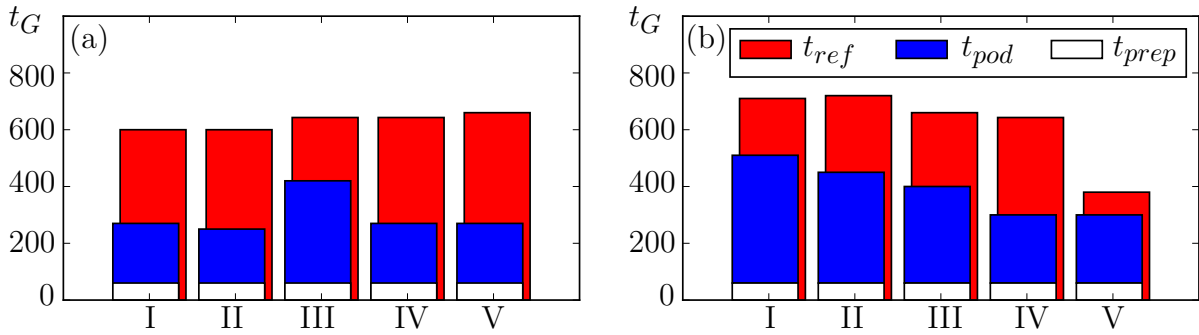
(b)		$\rho$	$p$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\nu$
Stichprobe	$\bar{\varepsilon}^\varphi$ [%]	8.1	13.5	229.2	271.5	245.7	7.0
	$\varepsilon_{max}^\varphi$ [%]	186.9	183.6	153566	124934	70384	205
	$\bar{\varepsilon}_m^\varphi$ [%]	7.4	13.5	13.3	12.9	19.9	7.7
	$h_{5\%}^\varphi$ [%]	48.3	36.0	46.0	46.6	35.3	82.0

**Tabelle 6.5:** Mittlerer Fehler von Feldgrößen bei der Rekonstruktion von zufällig gewählten Punkten einer (a) inneren und (b) äußeren Stichprobe aus POD-Moden, welche auf Basis von unstrukturiert verteilten Trainingspunkten generiert wurden

zwischen skalaren und vektoriellen Größen erkennbar. In der inneren Stichprobe sind die Fehler der skalaren Größen um einen Prozentpunkt und die Fehler der Geschwindigkeitskomponenten 10 Prozentpunkte höher als die Fehler der strukturierten Versuchsreihe. Die Fehler der Extrapolation fallen, wie erwartet, höher als die Interpolationsfehler aus und sind auch höher als die der strukturierten Versuchsreihe. Somit schneidet die Extrapolation generell schlechter ab. Trotzdem besitzt die POD-Methode im Vergleich zu den anderen Methoden die höchste Approximationsgenauigkeit. Zur Validierung dieser Ergebnisse wurden die Versuchsreihen einige Male wiederholt und die Beobachtungen konnten reproduziert werden.

Im nächsten Schritt wird der Einfluss der mit POD generierten Startlösung auf die Rechenzeiten untersucht. Als Gesamtrechenzeit  $t_G$  wird wieder die Summe aus der Bearbeitungszeit durch die Netzinterpolation  $t_{prep}$  und der reinen Rechenzeit der POD-initialisierten CFD  $t_{pod}$  gebildet. Das Balkendiagramm in Abb. 6.11 zeigt exemplarisch die unterschiedlichen Rechenzeiten der inneren und der äußeren Stichprobe für den Fall einer POD auf Basis einer strukturierten DoE. Auf den ersten Blick ist zu sehen, dass in der Summe die POD-initialisierten inneren Punkte wesentlich weniger Rechenzeit zur Konvergenz benötigen als die äußeren Punkte. Für den Fall in Abb. 6.11a wird im Vergleich zum nichtinitialisierten Fall eine Rechenzeitreduktion von 28% bis 50% erreicht. Wird die längste Rechenzeit einer Rechnung einer Betriebspunktmenge als Maß für die Beschleunigung des Prozesses verwendet, so muss die maximale Rechenzeit der nichtinitialisierten Stichprobe mit der maximalen Rechenzeit der initialisierten Stichprobe verglichen werden. In diesen Fällen reduziert sich die maximale Rechenzeit  $t_{max} = 660$  min auf  $t_{max} = 480$  min, was einer Rechenzeitreduktion von knapp 27.3% entspricht. Die Netto-Rechenzeit dieser Stichprobe würde demnach 480 min betragen. Wiederholungen der Testreihe mit ande-



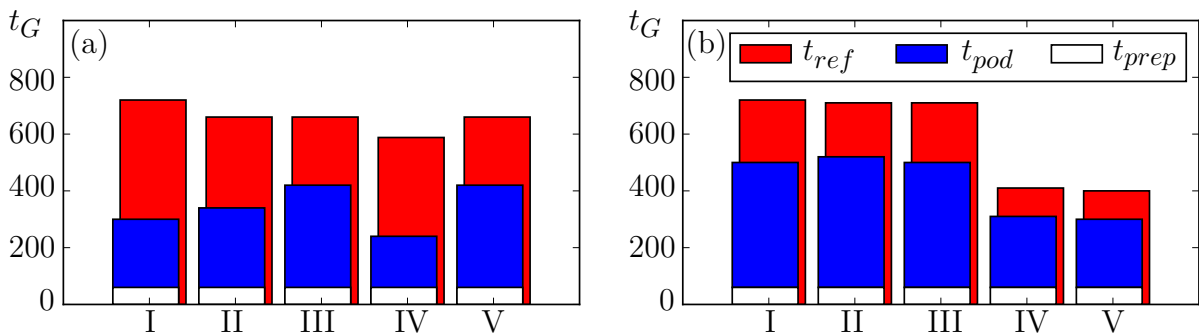


**Abb. 6.11:** Rechenzeiten einer inneren (a) und äußeren (b) Stichprobe aus fünf Punkten (I bis V) für den nichtinitialisierten Fall  $t_{ref}$  (rot) und den POD-initialisierten Fall  $t_{pod}$  (blau), wobei die POD-Moden auf einem strukturierten Sampling basieren. Die Gesamtrechenzeit  $t_G$  ist die Summe aus CFD-Rechenzeit  $t_{pod}$  und Bearbeitungszeit für Netztransformation und Projektion  $t_{prep}$  (weiß).

ren Trainings und Testpunkten zeigten ähnliche Tendenzen mit Netto-Rechenzeiten von 430 min bis 540 min.

Im Fall von Abb. 6.11b liefert die Initialisierung im Vergleich zum nichtinitialisierten Fall eine Rechenzeitreduktion von 21% bis 45%. Die tatsächliche Rechenzeitreduktion dieser Stichprobe beträgt 21%, so dass die Netto-Rechenzeit etwa 510 min beträgt.

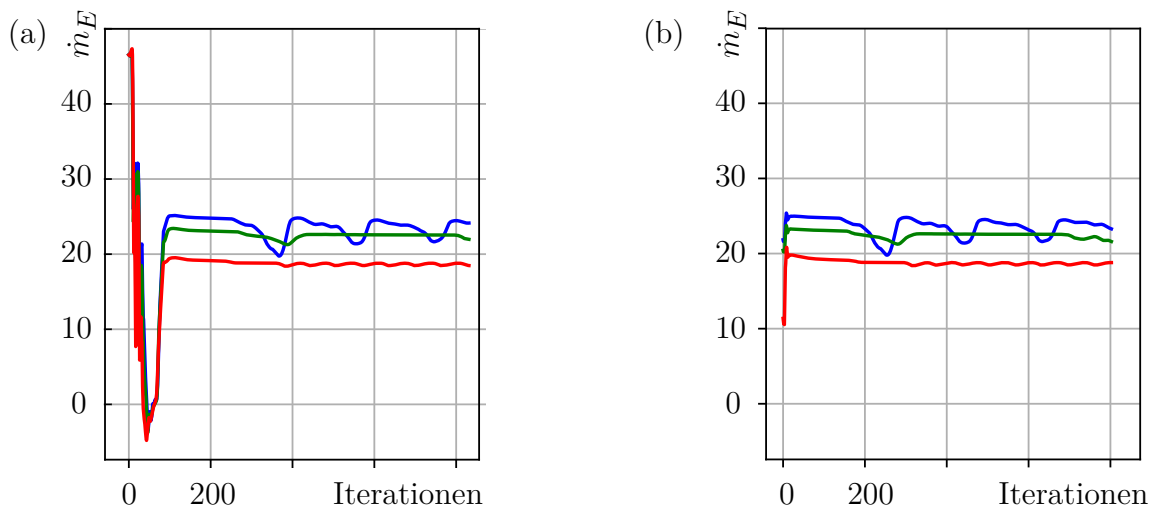
Das Balkendiagramm in Abb. 6.12 zeigt die unterschiedlichen Rechenzeiten der inneren und der äußeren Stichprobe für den Fall einer POD auf Basis einer unstrukturierten DoE. Ähnlich dem strukturierten Fall schneiden die inneren Punkte besser ab als die äußeren. Auch hier ist eine starke rechenzeitmindernde Wirkung auf Betriebspunkte mit kleinen Drehzahlen erkennbar. Die minimalen und maximalen Reduktionen sind mit dem strukturierten Fall vergleichbar. Die Nettoreduktion der inneren Probe beträgt etwa 33%, die der äußeren 30%. Die Netto-Rechenzeiten liegen dann etwa zwischen 480 min und 500 min. Abschließend stellt sich die Frage, ob die Initialisierung eine Auswirkung auf nichtkon-



**Abb. 6.12:** Rechenzeiten einer inneren (a) und äußeren (b) Stichprobe aus fünf Punkten (I bis V) analog zu Abb.6.11, wobei die POD-Moden auf einem unstrukturierten Sampling basieren.

vergiere Lösungen hat. Um einen möglichen Einfluss zu prüfen, werden nichtkonvergierte Lösungen mit schwachen und starken Oszillationen im Konvergenzverlauf (siehe Abb. 6.13a) mittels POD-Moden initialisiert und neu berechnet. Ein Vergleich der Feldgrößen wird nicht durchgeführt, da die von HYDRA herausgeschriebenen Größen einer nicht konvergierenden Lösung unphysikalisch sind. Daher ist als einziges Indiz für einen Einfluss oder eine Änderung nur der Konvergenzverlauf verwendbar.

Bei ersten Versuchen der Rekombination dieser Betriebspunkte wurde festgestellt, dass die Extrapolation von Punkten fern der Basis erwartungsgemäß zu nicht physikalisch gestützten Antwortflächenverläufen führt und somit negative Druck- und Dichteinträge im Strömungsfeld verursacht werden. Eine Existenz von negativen konservativen Größen bewirkt bei HYDRA einen sofortigen Abbruch. Um diesen Fall zu vermeiden wurde eine Kontrollroutine erstellt, die bei Detektion eines negativen Drucks oder Dichte an einem Netzpunkt diesen durch einen vom Benutzer definierten Wert  $p_{min}$  bzw.  $\rho_{min}$  ersetzt. Als Ergebnis konnten im Anschluss alle HYDRA-Rechnungen erfolgreich gestartet werden. Die Verläufe der POD-initialisierten Lösungen sind in Abb. 6.13b dargestellt. Trotz des Ausbleibens des großen anfänglichen «Aufschwings» durch eine bessere Abschätzung des Massenstroms ist eindeutig zu erkennen, dass bei keinem Betriebspunkt die POD-Initialisierung die Konvergenz erzwingt. Die Magnituden der Oszillationen sind unverändert. Diese Erkenntnis ist positiv zu bewerten, da es durch die Initialisierung zu keiner Verfälschung der Lage von konvergenten und nichtkonvergenten Punkten kommt. Die Anwendung der POD-Initialisierung erweist sich unabhängig von der Stichprobe, aus welcher diese gebildet wurde, als ein zuverlässiges Werkzeug zur Reduktion der Rechenzeit und zur Stabilisierung von Rechnungen. Weiterhin ist diese robust und hat, gemäß



**Abb. 6.13:** Konvergenzverlauf des Massenstroms  $\dot{m}_E$  als Funktion der 3D-CFD-Iterationen im (a) nichtinitialisierten und (b) POD-initialisierten Fall für drei, farblich gekennzeichnete, nichtkonvergierte Rechnungen

der durchgeführten Untersuchungen, keinen parasitären Einfluss auf die Konvergenz von 3D-CFD. Alle Algorithmen zur Anwendung von POD werden daher im folgenden Gesamtprozess zur Verdichterkennfeldbestimmung verankert.

# 7 Kennfeldberechnung eines Forschungsverdichters auf der Grundlage von 3D-CFD-Strömungssimulationen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden sowohl Methoden zur Strömungsanalyse von Verdichterströmungen und deren Beschleunigung als auch Methoden zur effizienten Erschließung von Kennfeldern thematisch vorgestellt. Nun gilt es, diese in die industrielle Praxis umzusetzen und auf die Kennfeldberechnung des in Abschnitt 3.3 vorgestellten 4.5 stufigen realen Hochdruckverdichters anzuwenden. Für die technische Anwendung müssen die entwickelten Prozesse mit industriellen Werkzeugen der 3D-CFD-Analyse zu einem Gesamtprozess verknüpft werden.

Für einen besseren Gesamtüberblick wird zunächst in Abschnitt 7.1 nochmal die Problemstellung der Verdichterkennfeldberechnung und der in dieser Arbeit entwickelte Berechnungsprozess S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R zusammenfassend dargestellt. Dem folgend werden in Abschnitt 7.2 eine vom Industriepartner verwendete Analyseketten für eine 3D-CFD basierte Betriebspunktberechnung vorgestellt und alle Teilschritte sowie auf die Steuerung des gesamten Analysemoduls eingegangen. Abschließend wird der entwickelte Gesamtprozess auf das Problem eines realen 4.5-stufigen Hochdruckverdichters mit 3D-CFD angewendet. In diesem Rahmen werden alle Teilschritte des Prozesses zur Kennfelderfassung separat diskutiert und die erzielten Ergebnisse validiert.

## 7.1 Berechnungsprozess

Wie bereits am Anfang dieser Arbeit motiviert müssen zur Beurteilung der Funktionalität und Zuverlässigkeit eines Verdichters Kennfelder relevanter leistungsspezifischer Größen erstellt werden. Nach den Ausführungen in Kapitel 2 ist ein Verdichterkennfeld eine zusammenhängende topologische Menge aller stabilen, durch Massendurchsatz und Drehzahl definierten Betriebspunkte, welche durch die Betriebsgrenzen Pump- und Sperrgrenze eingeschlossen wird. Zur Erfassung des gesamten Kennfeldbereichs müssen daher zum einen die Lage der drehzahlabhängigen Betriebsgrenzen gefunden und zum anderen der von ih-

nen eingeschlossene Arbeitsbereich hinreichend genau erfasst werden. Die dazu benötigten strömungsmechanischen Analysen jedes Betriebspunktes mit 3D-CFD sind numerisch sehr aufwändig und zeitintensiv, so dass ein Kompromiss zwischen Aufwand (Anzahl durchgeführter 3D-CFD-Rechnungen) und Ergebnisqualität (räumliche Auflösung des Betriebsverhaltens) gefunden werden muss. Derzeit werden Kennfelder üblicherweise von einzelnen nachgerechneten diskreten Drehzahllinien gebildet, auf welchen Pump- und Sperrgrenzen iterativ gesucht werden, z.B. JANKE (2017). Das Betriebsverhalten des Verdichters wird im gesamten Arbeitsbereich anhand dieser Drehzahllinien linear interpoliert. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass eine Gesamtdarstellung der Betriebsgrenzen die Berechnungen vieler Drehzahllinien erfordert und daher mit einem enormen numerischen Aufwand verbunden ist. Eine Approximation des Kennfeldes durch ein Ensemble weniger Drehzahlen birgt zudem die Gefahr, ungünstige oder fehlerbehaftete Bereiche zu «übersehen».

Als alternativer Ansatz der gesamtheitlichen Kennfelderfassung unter dem Aspekt der Reduzierung von numerischem Aufwand wird in dieser Arbeit ein unstrukturiertes, rekursives Vorgehen empfohlen, das in der Prozesskette **S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R** (**S**trategy for **C**ompressormap **C**omputation with **A**utomatized **L**imit **L**ine **E**xploration and **T**Opology **R**econstruction) vorgestellt wurde. Diese wird in der Anwendung mit einem Auswertungsmodul gekoppelt und verarbeitet die CFD-Ergebnisse der angeforderten Betriebspunkte. Der Gesamtprozess ist als Flussdiagramm in Abb. 7.1 dargestellt. Er beginnt damit, dass der durch die Betriebsparameter  $\dot{m}_{r,A}$  und  $n_r$  aufgespannte Parameterraum gemäß den Definitionen im Abschnitt 2.4 in Suchräume

$$\left[ \dot{m}_{r,A}^{min}, \dot{m}_{r,A}^{DP} \right] \times \left[ n_r^{min}, n_r^{max} \right] \quad (7.1)$$

für die Pumpgrenze und

$$\left[ \dot{m}_{r,A}^{DP}, \dot{m}_{r,A}^{max} \right] \times \left[ n_r^{min}, n_r^{max} \right] \quad (7.2)$$

für die Sperrgrenze unterteilt wird. Für den Drehzahlbereich  $\left[ n_r^{min}, n_r^{max} \right]$  wird im Allgemeinen ein Bereich zwischen dem Auslegungspunkt und einem Punkt geringer Teillast, z.B. dem Leerlauf, verwendet. Die Grenzen des reduzierten Massenstroms  $\dot{m}_{r,A}^{min}$ ,  $\dot{m}_{r,A}^{max}$  müssen so gewählt werden, dass einerseits die unbekannte Betriebsgrenze eingeschlossen wird und andererseits der Bereich klein genug ist, um die Anzahl unnötiger Rechnungen in Bereichen fern der Grenzen des Kennfelds möglichst gering zu halten. Zu diesem Zweck kann ein mit Meanline berechnetes Kennfeld des untersuchten Verdichters und dessen minimale und maximale Ausdehnung in  $\dot{m}_{r,A}$ -Richtung herangezogen werden, da Beobachtungen von JANKE (2017) gezeigt haben, dass Drehzahllinien mit Meanline wesentlich stärker gedrosselt werden können als es mit 3D-CFD-Ansätzen möglich ist.

Als nächster Schritt werden für jedes Suchfenster gemäß (2.10) oder (2.12) die normierten Parametrisierungen  $\mathbf{x}^P$  und  $\mathbf{x}^S$  eingeführt und parallel die Pump- und Sperrgrenzen gesucht. Der Suchalgorithmus ist separat in dem Flussdiagramm Abb. 7.2 dargestellt. Dieser benötigt als Festlegung die Größe  $N$  der initialen Stichprobe, die Anzahl  $N_S$  der Kandidatenpunkte pro SVM-Iteration, die Größe  $N_F$  der fill-up DoE und die Abbruchschranke

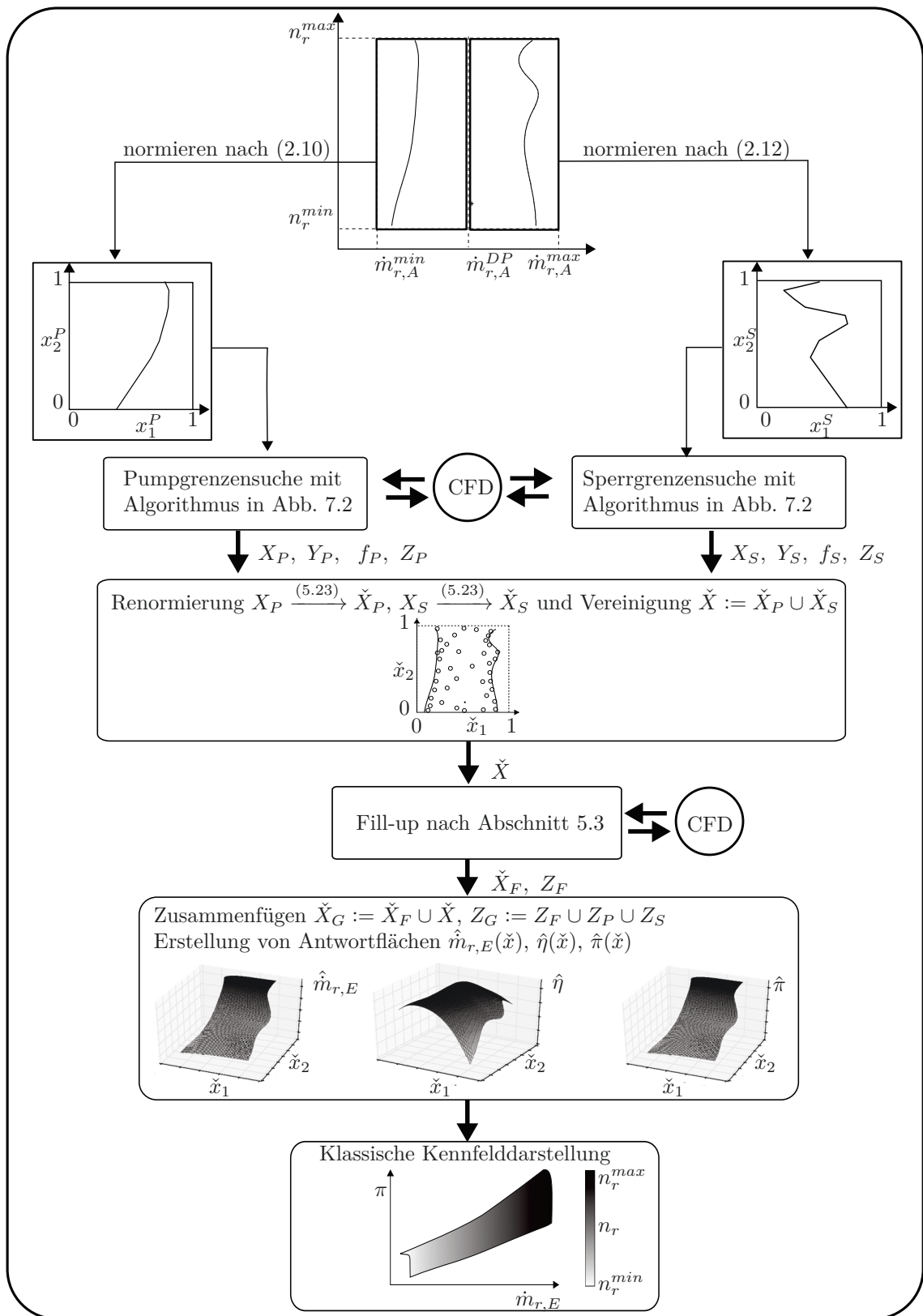
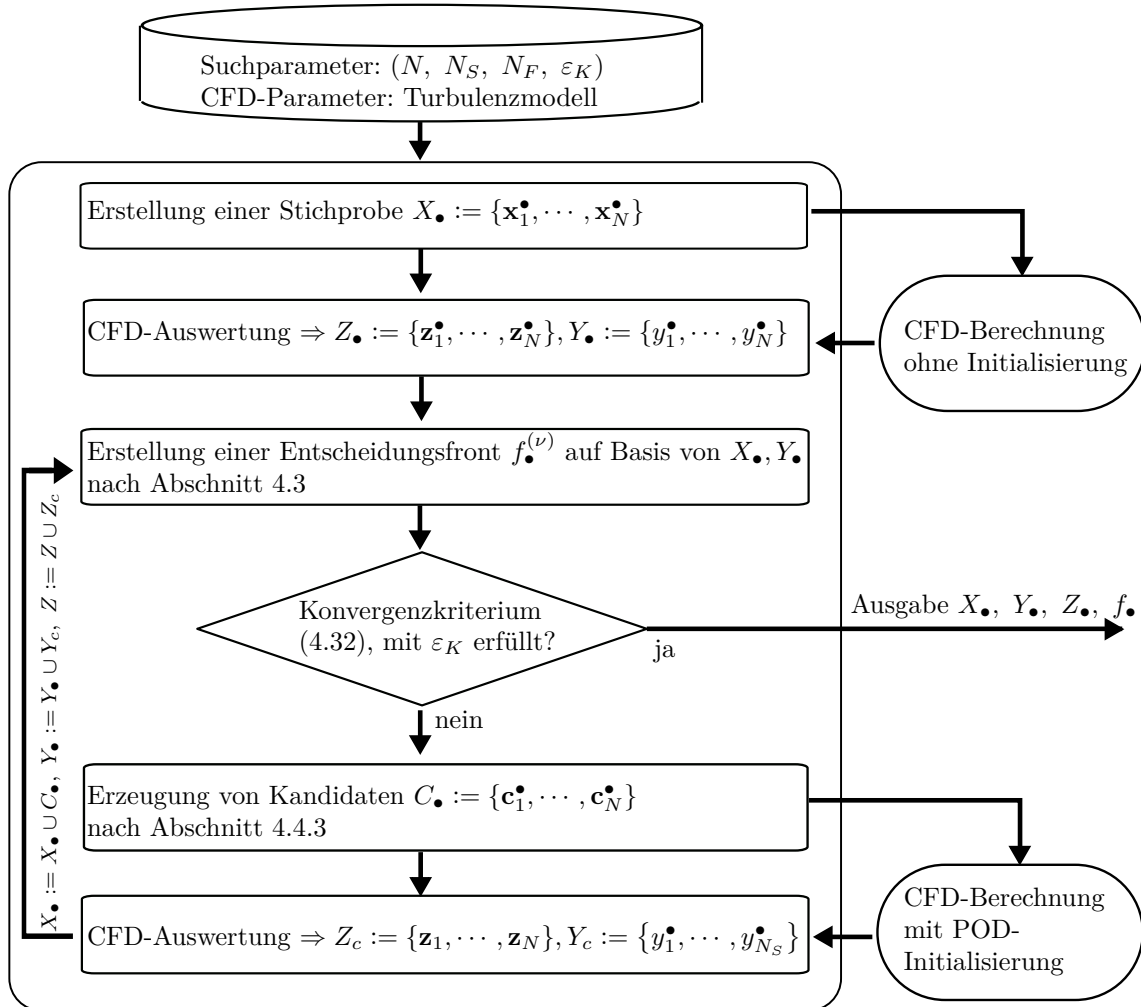


Abb. 7.1: Flussdiagramm des Gesamtprozesses S C<sup>2</sup> A L<sup>2</sup> E T O R zur Bestimmung eines Verdichterkennfelds mit 3D-CFD

$\varepsilon_K$  der Konvergenzbedingung (4.32). Zusätzlich muss der Anwender das CFD-Modell für die Strömungssimulation wählen.

Zur Beschreibung der gleichartigen, parallel durchlaufenden Arbeitsschritte zur Betriebsgrenzenapproximation in den Suchräumen für Pumpen und Sperren wird in Abb. 7.2 der generische Index  $\bullet$  verwendet. Als erstes wird eine unstrukturiert verteilte Stichprobe  $X_\bullet = \{\mathbf{x}_1^\bullet, \mathbf{x}_2^\bullet, \dots, \mathbf{x}_N^\bullet\}$  erstellt und an das kooperierende CFD-Modul zur Auswertung weitergeleitet. Innerhalb des CFD-Moduls wird für jeden Betriebspunkt zunächst eine 3D-CFD Berechnung ohne besondere Initialisierungsmaßnahmen durchgeführt. Als Resultat liegt dann jeweils das Strömungsfeld und ein Verdichterzustandsvektor  $\mathbf{z}_i^\bullet = [\pi, \eta, \dot{m}_{r,E}]^T$  vor. Zusätzlich wird anhand des Konvergenzverhaltens der CFD-Rechnung jedem Punkt der Stichprobe eine Klasse «konvergiert» ( $y_i^\bullet = 1$ ) oder «nichtkonvergiert» ( $y_i^\bullet = -1$ ) zugeteilt. Die Stichprobe  $X_\bullet$  wird anhand der Attributmenge  $Y_\bullet := \{y_1^\bullet, \dots, y_N^\bullet\}$  mithilfe der im Abschnitt 4.3 eingeführten nichtlinearen SVM-Strategie topologisch durch ei-



**Abb. 7.2:** Flussdiagramm des Teilprozesses zur Bestimmung von Betriebsgrenzen

ne Entscheidungsfront  $f_{\bullet}^{(\nu=0)}$  separiert, welche den Parametertraum des Suchbereichs in zwei Gebiete der jeweiligen Klassen trennt. Diese erste vorgeschlagene Entscheidungsfront entspricht im Allgemeinen nicht der echten Betriebsgrenze, da diese auf nur sehr wenigen Punkten der ersten Stichprobe basiert. Zur Verbesserung der Approximationsgüte der Entscheidungsfront werden entsprechend Abschnitt 4.4.3 dynamische Versuchspläne generiert, welche basierend auf Optimierungsalgorithmen  $N_G$  neue Betriebspunkte im Grenzstreifen der aktuellen Entscheidungsfront auswählen. Alle Punkte dieser Kandidatenmenge  $C_{\bullet}$  werden ebenfalls mit 3D-CFD analysiert, wobei hier die in Abschnitt 6.2.2 beschriebene POD-Initialisierung auf Basis der bisher berechneten Punkte  $X_{\bullet}$  erfolgt. Die Ergebnisse werden ebenfalls klassifiziert und mit der initialen Stichprobe  $X_{\bullet}$  vereinigt. Aufbauend auf der neuen Punktmenge  $X_{\bullet}$  wird wieder mit SVM eine neue Entscheidungsfront  $f_{\bullet}^{(\nu=1)}$  approximiert. Dieser Zyklus aus SVM und dynamischer Stichprobenerweiterung, welcher als eine SVM-Iteration bezeichnet wird, wird so lange iterativ wiederholt, bis zwischen zwei Entscheidungsfronten  $f_{\bullet}^{(\nu-1)}$  und  $f_{\bullet}^{(\nu)}$  die Konvergenzschranke  $\varepsilon_K$  nach (4.32) erreicht ist. Die so entstandene Entscheidungsfront wird als Approximation der jeweiligen Betriebsgrenze verwendet.<sup>1</sup>

Nach erfolgreicher Approximation der Pump- und Sperrgrenze wird im Gesamtprozess (Abb. 7.1) der nächste Schritt eingeleitet. Die lokalen Datenbasen  $X_P$ ,  $X_G$  sowie die gefundenen Betriebsgrenzen  $f_P$ ,  $f_G$  werden in einen gemeinsamen Parameterraum  $\check{x}$  nach (5.23) transformiert und zusammengefügt. Zum «Auffüllen» von Bereichen geringer Punktdichte zwischen  $\check{f}_P$  und  $\check{f}_G$  wird die in Abschnitt 5.2 beschriebene fill-up DoE mit  $N_F$  Betriebspunkten erstellt und mit 3D-CFD ausgewertet.

Als letzter Schritt werden alle konvergierten Betriebspunkte mit den zugehörigen Verdichterkenngrößen zu den Gesamt Mengen  $\check{X}_G$  und  $Z_G$  zusammengefasst und auf Grundlage dieser RBF-Antwortflächen für das Totaldruckverhältnis  $\hat{\pi}$ , den Wirkungsgrad  $\hat{\eta}$  und den reduzierten Eintrittsmassenstrom  $\hat{m}_{r,E}$  erstellt. Nach Abschluss aller Schritte liegt eine parametrisierte Gesamtkennfeldapproximation des untersuchten Verdichters vor, anhand der das Kennfeld auch in der klassischen Ansicht im  $(\dot{m}_{r,E}, \pi)$ -Raum dargestellt werden kann.

## 7.2 Umsetzung von 3D-CFD-Berechnungen in einer industriellen Analyseumgebung

In diesem Abschnitt werden zunächst die vom Industriepartner verwendeten Werkzeuge zur Modellierung der Verdichtergeometrie und strömungsmechanischen Untersuchung vorgestellt. Dabei wird kurz auf die wesentlichen Schritte der Geometrie- und Netzgenerierung (*preprocessing*), der Strömungsanalyse (*processing*) und der Datenauswertung (*postprocessing*) eingegangen. Dem folgend wird die Umsetzung der gesamten, an eine

<sup>1</sup>Bei einer nichtkonvergierten Lösung wird ein Ergebnis der Form:  $\mathbf{z}_i = [\text{NaN}, \text{NaN}, \text{NaN}]^T$  ausgegeben, wobei NaN für Not-a-Number steht.



Kopplung mit der Kennfeldexplorationsmethode  $S^2A^2L^2E^2T^2O^2R$  angepassten Analysekette beschrieben.

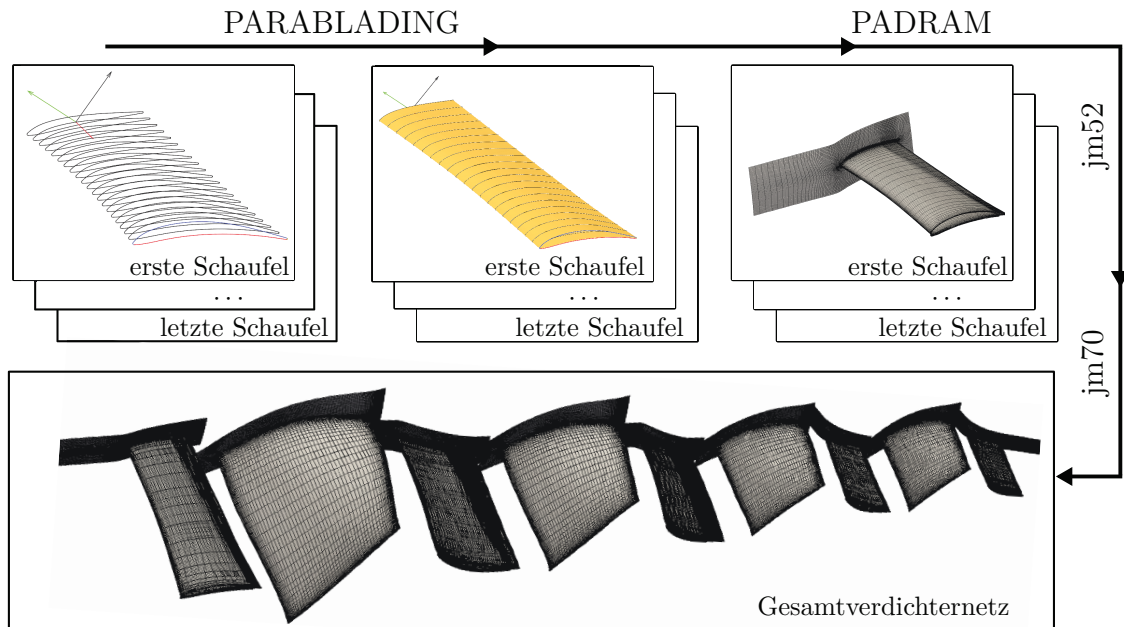
### 7.2.1 Preprocessing

Ausgehend vom Initialdatensatz, welcher die Geometrie des Verdichters und die Form jeder einzelnen Schaufel beschreibt, werden zunächst mit dem Programm PARABLA-DING, siehe GRÄSEL U. A. (2004), dreidimensionale, parametrisierte Schaufelgeometrien im CAD-Format erstellt. Im Falle verstellbarer Statorschaufeln (VSV) werden die notwendigen Geometrien um den geforderten Winkel entsprechend einem wirkenden Verstellgesetz verdreht und mit dem ursprünglichen Kontrollvolumen verschnitten. Die aufbereiteten CAD-Daten werden dann Schaufel für Schaufel mit dem Vernetzungsprogramm PADRAM, siehe SHAHPAR UND LAPWORTH (2003), in strukturierte volumetrische Netze umgewandelt. Alle notwendigen Parameter zur Steuerung der Netzgüte der H-O-H-Netze wie Zellgrößen, Abstandsfunktionen und Netzanschlusspositionen können entweder mithilfe von eigenem Programmcode automatisiert berechnet oder manuell vorgegeben werden. Für die noch anstehende Strömungsberechnung muss im Weiteren aus dem strukturierten Netz ein unstrukturiertes Netz erstellt werden. Dieser Schritt wird für jedes Schaufelnetz vom Programm jm52 durchgeführt. In der gängigen Praxis wird eine Strömungsberechnung nicht mit dem fein aufgelösten Ursprungsnetz gestartet, da diese oftmals instabil wäre und gleich am Anfang numerische Fehler auftreten würden. Daher werden zunächst, aufbauend auf dem gegebenen Netz grobe Netze erzeugt, welche vergleichsweise wenig Zellen beinhalten. Dazu werden im Originalnetz Knoten entfernt, so dass die angrenzenden Zellen zu größeren Zellen zusammengeschlossen werden. Dieses Verfahren wird Mehrgitter-Verfahren (engl. multigrid-method) genannt. Durch die verhältnismäßig grobe Auflösung ergibt sich eine vereinfachte Strömung, welche anfangs numerisch stabiler ist. Für eine ausführliche Erläuterung des Prinzips müsste ein tiefer Einblick in die iterative numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit großen Matrizen gegeben werden, welche den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Daher wird der interessierte Leser auf einschlägige Literatur von FERZIGER U. A. (2008) verwiesen.

Als letzter Schritt müssen die Teilnetze und die zugehörigen Randbedingungen zu einem Gesamtnetz verbunden werden. Bei diesem aufwändigen Schritt werden Randpunkte eliminiert, Randbedingungen angepasst und Matrizen, welche den Zusammenhang zwischen Zellen und Netzpunkten herstellen, zu einer Gesamtmatrix zusammengefügt. Diese Aufgaben werden vom Programm jm70 erledigt. Erst nach der Durchführung der genannten Schritte liegt ein für eine 3D-CFD-Rechnung geeignetes Netz des gesamten Verdichters vor. Der gesamte Ablauf für das *preprocessing* ist in Abb. 7.3 dargestellt.

### 7.2.2 Processing

Die Strömungsberechnung wird von der vom Industriepartner bereitgestellten Software HYDRA durchgeführt, siehe Anhang C.4. Im Rahmen dieser Arbeit wird HYDRA par-



**Abb. 7.3:** Schematische Darstellung der Arbeitskette für das *preprocessing*.

allel auf maximal sieben Rechenknoten des Lehrstuhl -Clusters VIETA des Lehrstuhls Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg durchgeführt, wobei jeder Knoten über 64 Prozessorkerne vom Typ AMD Opteron 6376 mit 2.3 GHz Taktung und 256 GB Arbeitsspeicher verfügt. Die Knoten sind untereinander mit einem 1 Gbit/s Ethernet verbunden. Aus einer im Vorfeld durchgeführten Studie der Rechenleistung leitet sich die beste Leistung bei Benutzung der maximalen Anzahl von 64 Prozessorkernen auf einem Knoten für eine einzelne 3D-CFD-Berechnung ab. Die Verwendung mehrerer Knoten für eine Rechnung erwies sich als nicht effektiv, da die Datenkommunikation zwischen den Kernen über das Ethernet den Prozess stark verlangsamt<sup>2</sup>.

Der Strömungslöser selbst besitzt keine interne Konvergenzkontrolle, weshalb ein parallel zu den Rechnungen laufendes PYTHON-Skript die Ausgaben jeder HYDRA-Iteration während der Laufzeit überwacht. Dabei wird als Konvergenzkriterium nach JANKE (2017) die Oszillation und der Gradient von integralen Größen wie z.B. dem Massenstrom ausgewertet und bei Unterschreitung von vordefinierten Werten eine Lösung als konvergiert identifiziert. Bei detektierter Konvergenz wird die Rechnung abgebrochen, um Rechenzeit einzusparen, eine Erkennung von nicht konvergierenden Lösungen steht nicht zur Verfügung.

<sup>2</sup>Zur massiven Parallelisierung auf mehreren Knoten wird daher im Nachfolger-Cluster das InfiniBand-Konzept verwendet, welches Datenraten von 25 bis 300 Gbit/s erlaubt.

### 7.2.3 Postprocessing

Nach erfolgreicher Berechnung liegen als Resultat der CFD Geschwindigkeits-, Druck- und Dichtefelder für die gesamte Verdichterpassage vor. Diese mehrere Gigabyte großen Daten sind zwar für eine Detailanalyse nützlich, für die Erstellung des Kennfeldes jedoch sind integrale Kenngrößen aus den umfangsgemittelten Strömungsgrößen am Verdichterein- und austritt notwendig. Zu diesem Zweck wird die Feldvisualisierungssoftware PARAVIEW mit der Visualisierungs-Bibliothek (PARAVIEWVTK (2004)), welche über eine PYTHON-Schnittstelle verfügt, verwendet. Mithilfe der Schnittstellen können mit eigenen PYTHON-Modulen aus dem Strömungsfeld beliebige Schnittebenen entnommen werden, aus denen dann skalare, integrale Größen wie das Totaldruckverhältnis  $\pi$ , Wirkungsgrad  $\eta$  und reduzierter Massenstrom am Verdichtereintritt  $\dot{m}_{r,E}$  bestimmbar sind.

### 7.2.4 Ganzheitliche Umsetzung der Analyseketten

Die Strömungsberechnung innerhalb eines Verdichters erfolgt in dieser Arbeit mit einer neuartigen, in Zusammenarbeit mit dem Industriepartner Rolls-Royce entwickelten Design- und Analyseumgebung GPDS (engl. **Gas Path Design Systems**). Diese in der Programmiersprache PYTHON geschriebene Umgebung erlaubt das Ansteuern aller für die Verdichterauslegung und -berechnung notwendigen Softwarepakete im Batch-Modus sowie das Einbinden von eigenem PYTHON-Code. Im Rahmen dieser Arbeit wurde GPDS für die Kooperation mit dem in Abschnitt 7.1 vorgestellten Prozess S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R modifiziert und als Zusatzmodul eine Routine zur Strömungsinitialisierung mit POD eingebunden. Der Ablauf der Strömungsberechnung eines durch  $(\dot{m}_{r,A}, n_r)$  beschriebenen Betriebspunktes ist in Abb. 7.4 dargestellt. Als Eingangsparameter müssen zunächst Verdichtergeometrie und VSV-Verstellgesetz vorgegeben werden. Zur Verwendung der Strömungsinitialisierung müssen berechnete Betriebspunkte und die dazugehörigen Strömungsfelder als Initialisierungsdatensatz bereitgestellt werden. Zum Start werden alle Anweisungen in eine XML-Steuerdatei geschrieben und die GPDS-Umgebung im Batch-Modus ausgeführt. Als erster Schritt wird das im Abschnitt 7.2.1 beschriebene *preprocessing* durchgeführt, um Geometrie und Rechennetz zu erstellen. Für den Fall von bereits bestimmten Punkten  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  wird anhand der Strömungslösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  gemäß den Ausführungen in Abschnitt 6.2.2 eine POD-Zerlegung in Strömungsmoden und Superposition dieser zu einer Approximationslösung für den gesuchten Betriebspunkt durchgeführt. Liegen keine bekannten Punkte vor, d.h.  $X = \emptyset$ , so wird keine Initialisierungslösung erstellt. Im Anschluss wird die Strömung mit HYDRA mit zusätzlicher Konvergenzkontrolle berechnet. Nach Beendigung der Rechnung wird durch einen Klassifizierer der Status «konvergiert» mit  $y = 1$  und «nichtkonvergiert» mit  $y = -1$  attribuiert. Im Fall einer konvergierten Rechnung wird das Strömungsfeld verarbeitet und der Kenngrößen- bzw. Zustandsvektor  $\mathbf{z} = [\pi, \eta, \dot{m}_{r,E}]^T$  bestimmt. Nach Beendigung des Berechnungsprozesses steht ein Datensatz für den gesuchten Betriebspunkt  $(\dot{m}_{r,A}, n_r)$  bereit.

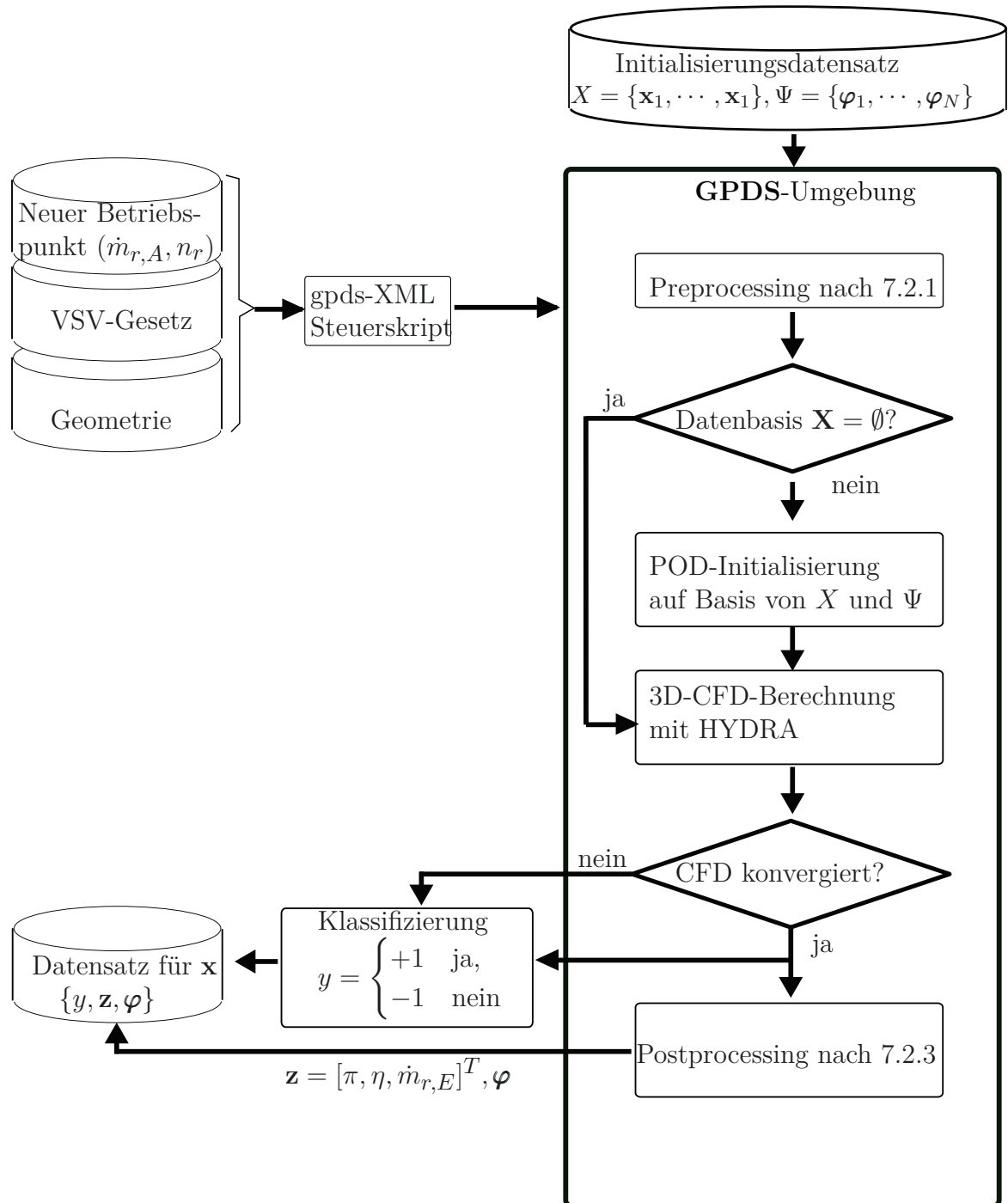


Abb. 7.4: Ablauf der Berechnung eines Betriebspunktes mit der GPDS-Umgebung

## 7.3 Diskussion der Ergebnisse der Betriebsgrenzenbestimmung

Der gekoppelte Prozess aus S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R mit der CFD-Analys wird auf das konkrete Problem der 3D-CFD-Kennfeldberechnung des 4.5-stufigen Hochdruckverdichters aus Abschnitt 3.3 angewendet. Zur Beurteilung der Teilschritte wird zunächst separat auf Pump- und Sperrgrenzensuche eingegangen. Bevor S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R gestartet wird, müssen vom Benutzer Such-, Normierungs- und CFD-Paramter vorgegeben werden. Für diese Untersuchung wird der in Tab. 7.1 dargestellte Parametersatz verwendet.

Parameter	$\dot{m}_{r,A}^{min}$	$\dot{m}_{r,A}^{max}$	$n_r^{min}$	$n_r^{max}$	$N$	$N_S$	$N_F$	$\varepsilon_K$	Turbulenzmodell
Wert	$0.9\dot{m}_{r,A}^{DP}$	$1.5\dot{m}_{r,A}^{DP}$	$0.65n_r^{DP}$	$1.0n_r^{DP}$	14	7	14	0.25	SA

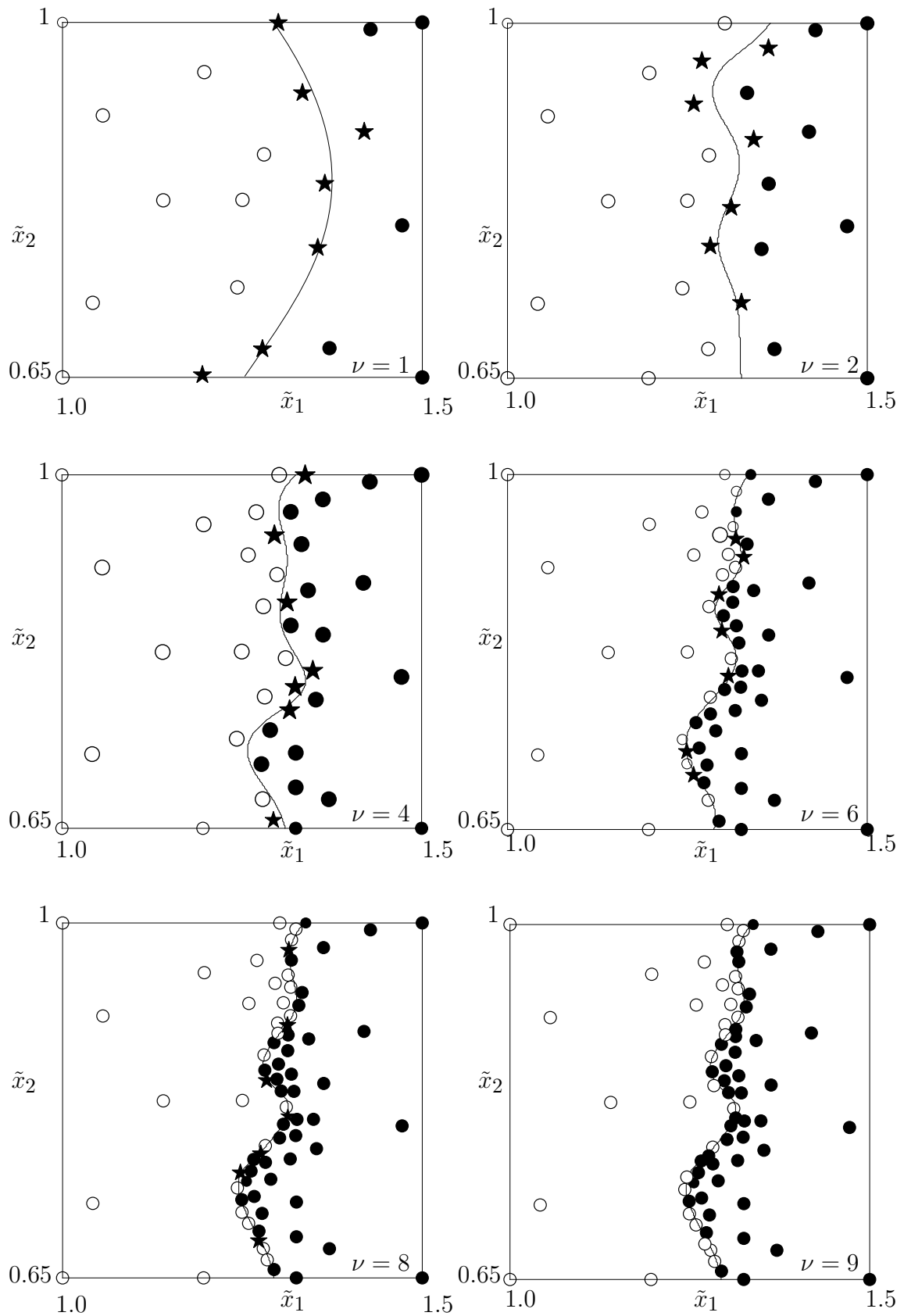
**Tabelle 7.1:** Parameterfestlegung für die Verdichter kennfeldapproximation

### 7.3.1 Auswertung der Sperrgrenzenbestimmung

Das Suchfenster (7.1) für die Sperrgrenzenapproximation wird durch den in Tab. 7.1 vorgegebenen Auslegungs- und maximalen Massenstrom festgelegt. Daraus ergibt sich nach (7.2) und (2.12) der normierte Arbeitsbereich:

$$x_{1,S} = \frac{\dot{m}_{r,A}^{max} - \dot{m}_{r,A}}{\dot{m}_{r,A}^{max} - \dot{m}_{r,A}^{DP}} = \frac{1.5 - \dot{m}_{r,A}/\dot{m}_{r,E}^{DP}}{0.5}, \quad x_{2,S} = \frac{n_r - n_r^{min}}{n_r^{max} - n_r^{min}} = \frac{n_r/n_r^{DP} - 0.65}{0.35}. \quad (7.3)$$

Die Exploration der Sperrgrenze erfolgt in dem durch  $\mathbf{x}_S = [x_{1,S}, x_{2,S}]$  definierten Einheitsraum. Davon abweichend wird für die Präsentation der Ergebnisse die in (6.30) eingeführte globale normierte Form  $\tilde{\mathbf{x}}$  verwendet. Ausgehend von einer initialen Stichprobe von  $N = 14$  Betriebspunkten wird zur Sperrgrenzenapproximation die dynamische Stichprobenerweiterung nach Abschnitt 4.4.3 mit  $N_S = 7$  Kandidatenpunkten durchgeführt. Der Suchverlauf mit der Entwicklung der Entscheidungsfront sowie der Verteilung der dazu verwendeten Kandidatenpunkte ist in Abb. 7.5 dargestellt. Nach  $\nu = 9$  Iterationen wird die Konvergenzschranke  $\varepsilon_K$  erreicht. Die Lage der Sperrlinie wird bereits nach vier SVM-Iterationen eng eingegrenzt und die folgenden Iterationen nur zur lokalen Verbesserungen verwendet. Der maximale Massendurchsatz von etwa  $\tilde{x}_1 = 1.33$  wird für die Auslegungsdrehzahl  $\tilde{x}_2 = 1.0$  erreicht, bei Reduktion der Drehzahl ist der Durchsatz bis  $\tilde{x}_2 = 0.9$  in etwa gleichbleibend, bevor mit weiterer Senkung von  $\tilde{x}_2$  zwei hintereinander folgende «Beulen» auftreten und den maximalen Massendurchsatz auf den jeweiligen Scheitelpunkten  $\tilde{x}_1 = 1.27$  für  $\tilde{x}_2 = 0.86$  und  $\tilde{x}_1 = 1.24$  für  $\tilde{x}_2 = 0.73$  reduzieren. Eine weitere Senkung von  $\tilde{x}_2 = 0.65$  führt zur Erhöhung des Massendurchsatzes auf etwa  $\tilde{x}_1 = 1.3$ .



**Abb. 7.5:** Iterative flächenbasierte Exploration des Suchraums mit  $N_c = 7$  Kandidatenpunkten ( $\star$ ) und der jeweiligen Entscheidungsfront  $f_S^{(\nu)}$  (durchgezogene Linie) für die Sperrgrenze

### 7.3.2 Diskussion der Pumpgrenzenbestimmung

Das Suchfenster (7.1) für die Pumpgrenzenapproximation wird durch den in Tab. 7.1 festgelegten Auslegungs- und minimalen Massenstrom definiert. Nach (2.10) ergibt sich der normierte Suchbereich:

$$x_{1,P} = \frac{\dot{m}_{r,A} - \dot{m}_{r,A}^{min}}{\dot{m}_{r,A}^{DP} - \dot{m}_{r,A}^{min}} = \frac{\dot{m}_{r,A}/\dot{m}_{r,A}^{DP} - 0.9}{0.1}, \quad x_{2,P} = \frac{n_r - n_r^{min}}{n_r^{max} - n_r^{min}} = \frac{n_r/n_r^{DP} - 0.65}{0.35}. \quad (7.4)$$

Die Exploration der Pumpgrenze erfolgt in dem durch  $\mathbf{x}_P = [x_{1,P}, x_{2,P}]$  definierten Einheitsraum, ausgehend von einer initialen Stichprobe mit  $N = 14$  Betriebspunkten durch dynamische Stichprobenerweiterung nach Abschnitt 4.4.3 mit  $N_S = 7$  Kandidatenpunkten. Auch hier wird analog zum vorherigen Abschnitt die Gesamtfeldnormierung (6.30) zur Darstellung der Ergebnisse verwendet.

Der Suchverlauf mit der Entwicklung der Entscheidungsfront sowie der Verteilung der dazu verwendeten Kandidatenpunkte ist in Abb. 7.6 dargestellt, wobei nach  $\nu = 10$  Iterationen die Konvergenzschranke  $\varepsilon_K$  erreicht wird. Bei der Entwicklung der Pumpgrenzenapproximation ist erkennbar, dass bereits nach zwei Iterationen der Parameterraum in einen Bereich geringer Drosselung  $\tilde{x}_1 \geq 0.91$  und mittlerer Drosselung  $\tilde{x}_1 \leq 0.91$  unterteilt wird und sich diese Tendenz mit weiteren Iterationen manifestiert. Eine detaillierte Betrachtung des Verlaufs der approximierten Betriebsgrenze in Abb. 7.6 ( $\nu = 10$ ) zeigt, dass die Strömung für die normierte Auslegungsdrehzahl  $\tilde{x}_2 = 1$  am stärksten gedrosselt werden kann. Der minimale limitierende Massenstrom, welcher im folgenden Pumpmassenstrom  $\tilde{x}_{1,P}$  genannt wird, liegt dabei bei 0.917. Mit Senkung der Drehzahl nimmt das Drosselungsvermögen ab, wobei der Bereich  $0.917 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.926$  mit einer sprunghaften Steigerung von  $\tilde{x}_{1,P}$  auf 0.965 auffällig ist. Wird die Drehzahl weiter abgesenkt, bildet sich im Bereich  $0.725 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.8$  eine «Beule», welche mit dem maximalen Pumpmassenstrom von  $\tilde{x}_{1,P} = 0.985$  sehr dicht am Auslegungsmassenstrom liegt. Diese Ausprägungen scheinen zunächst physikalisch nicht sinnvoll zu sein.

Zur Klärung dieses Verhaltens wird zunächst untersucht, ob die Wahl der POD-Basis einen signifikanten Einfluss auf die Konvergenz von Betriebspunkten hat. Als Untersuchungsgegenstand wird das Konvergenzverhalten der in Abb. 7.6 für  $\nu = 1$  dargestellten Kandidatenpunkte  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  betrachtet, da diese am dichtesten an der Linie konstanten reduzierten Auslegungsmassenstroms  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1^{DP} = 1$  liegen und bei Nichtkonvergenz die potenzielle Pumpgrenze in Richtung des Auslegungsmassenstroms verschieben. Wird zunächst die Stichprobenverteilung des ersten SVM-Iterationschritts in Abb. 7.6 ( $\nu = 1$ ) betrachtet, ist zu erkennen, dass der Bereich  $0.679 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.942$  nur einen konvergierten Punkt enthält. Wird nun anhand dieser Stichproben eine POD-Initialisierung der Kandidatenpunkte durchgeführt, so konvergieren die Kandidatenpunkte  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  aufgrund der schlechten Initialisierung nicht und verschieben die Entscheidungsfront für  $\nu = 2$  nach rechts, siehe Abb. 7.6 für  $\nu = 2$ . Werden nun die Rechnungen wiederholt, jedoch vorher die POD-Basis in dem Bereich  $0.675 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.91$  mit 7 zusätzlichen Punkten angereichert, siehe Abb. 7.7a, so konvergiert der Punkt  $\mathbf{c}_2$  und verhindert die Beule im Bereich

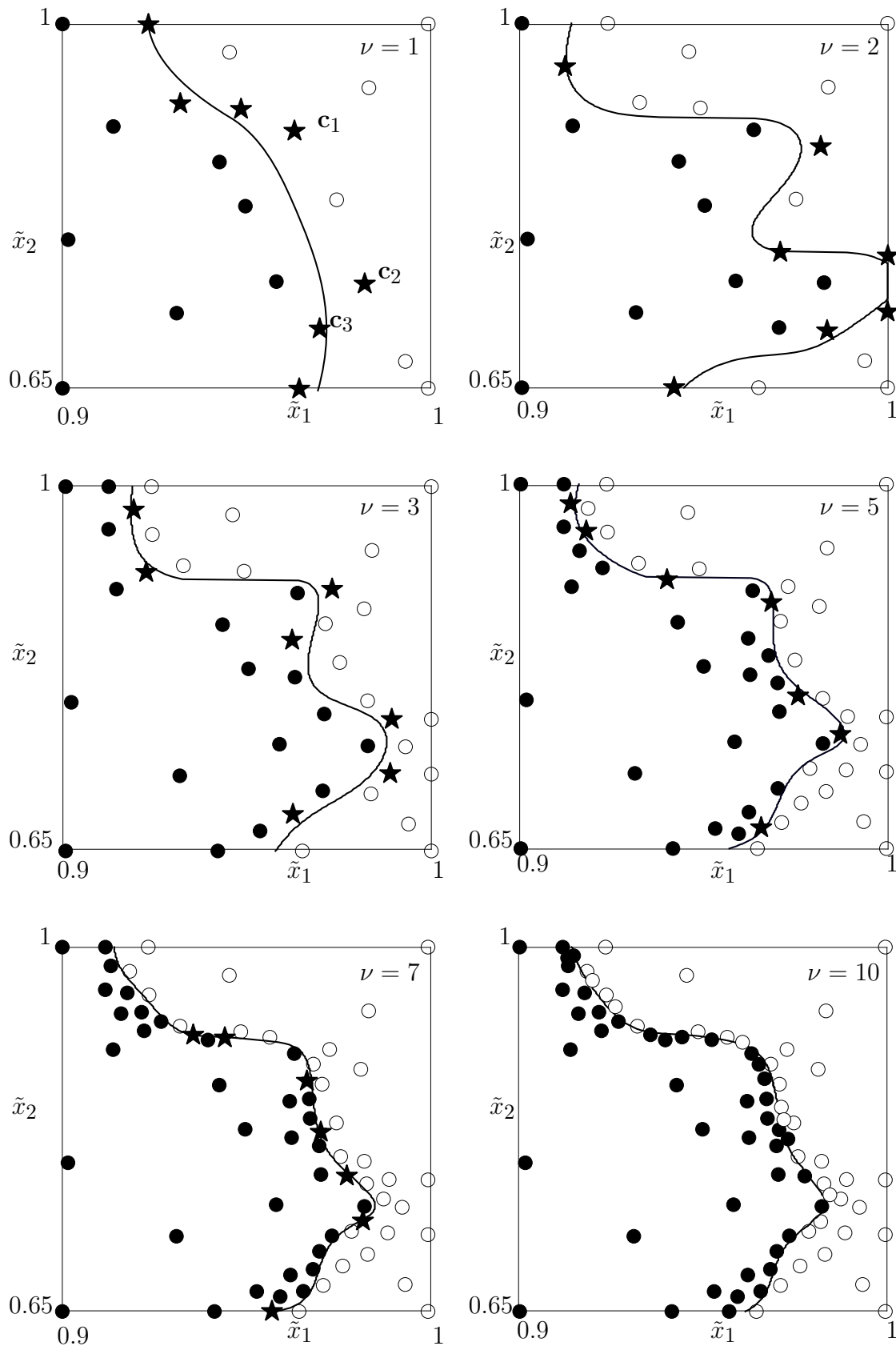
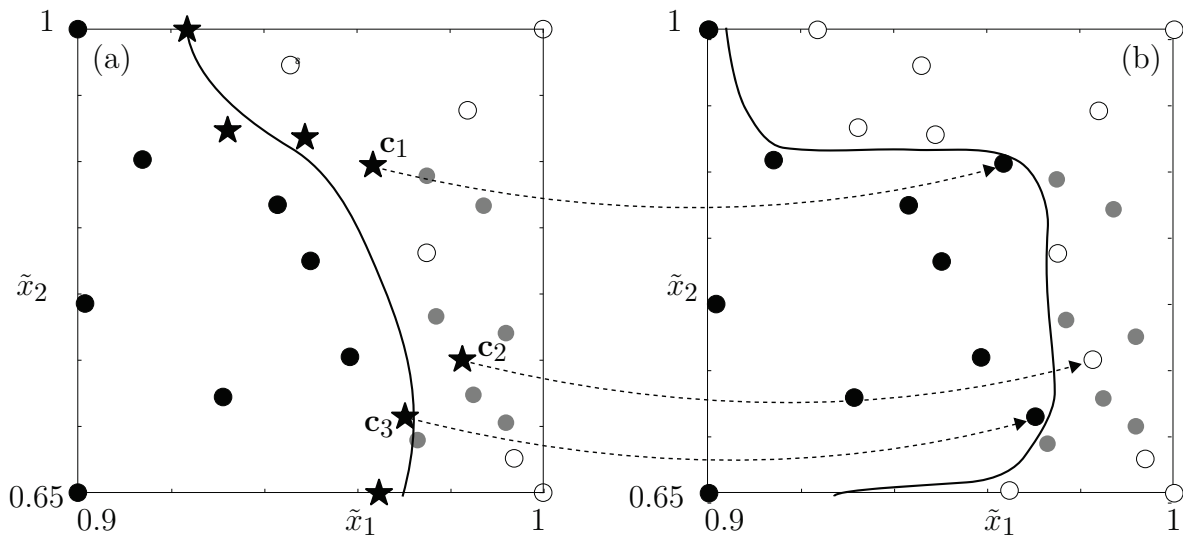


Abb. 7.6: Iterative flächenbasierte Exploration des Suchraums mit  $N_c = 7$  Kandidatenpunkten ( $\star$ ) und die jeweilige Entscheidungsfront  $f_P^{(\nu)}$  (durchgezogene Linie) für die Pumpgrenze

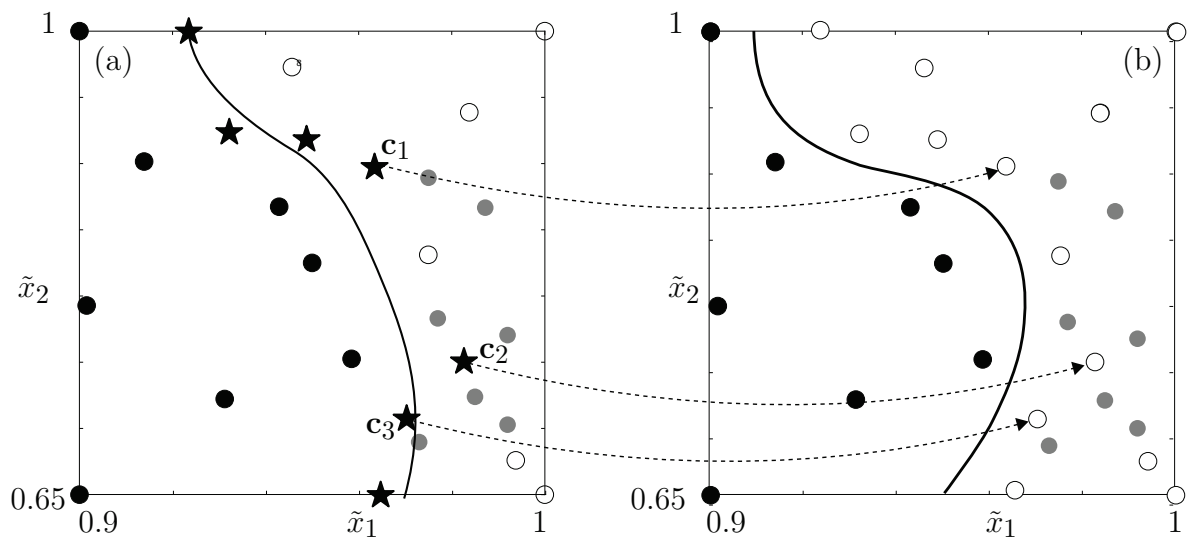




**Abb. 7.7:** Initialen Stichprobe (a) mit daraus resultierender Entscheidungsfront  $f_P^{1()}$  (durchgezogene Linie) und 7 Kandidatenpunkten  $\star$  sowie Erweiterung der Stichprobe um 7 konvergierte Punkte ( $\bullet$ ) und die daraus resultierende Entscheidungsfront (b).

$0.725 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.8$ , siehe Abb.7.7b. Wiederholungen mit Variation der Stichprobe der zusätzlichen Punkte zeigen ähnliche Ergebnisse. Daher kann geschlussfolgert werden, dass die initiale Stichprobe groß genug gewählt werden muss, damit die konvergierten Punkte für die erste POD-Basis möglichst homogen im Analysebereich verteilt sind. Nur so kann eine Konvergenz von CFD-Lösungen unterstützt werden, was wiederum zeigt, wie sensibel 3D-CFD-Rechnungen auf die Startlösungen sind.

Da der Sprung von  $\tilde{x}_{1,P}$  im Bereich  $0.917 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.926$  mit einer Erweiterung der Stichprobe nicht vermieden werden konnte, wird in diesem Rahmen weiterhin untersucht, welchen Einfluss die Wahl des Turbulenzmodells auf die Konvergenz der 3D-CFD-Rechnungen und somit auch auf die Lage der Pumpgrenze hat. Unter der Annahme, dass eine erweiterte POD-Basis sich stabilisierend auf das Konvergenzverhalten auswirkt, werden alle Punkte der angereicherten initialen Stichprobe und der Kandidaten der ersten SVM-Iteration neu berechnet, wobei nun das Zweigleichungsmodell  $k - \omega$  verwendet wird, vgl. Abb. 7.8a. Wird eine POD-Initialisierung der Kandidatenpunkte durchgeführt, so zeigt Abb. 7.8b nun, dass alle drei Kandidatenpunkte  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  und  $\mathbf{c}_3$  konvergieren und damit im Vergleich zu Abb. 7.7b eine signifikante Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung geringerer Massenströme bewirkt. Die zuvor in den Untersuchungen beobachtete Sprungstelle für  $0.917 \leq \tilde{x}_2 \leq 0.926$  wird dadurch geglättet. Offensichtlich lässt die Wahl von Mehrgleichungsturbulenzmodellen eine Simulation von stärker gedrosselten Strömungen zu, wodurch sich somit der Abstand zwischen approximierter Pumplinie und Betriebslinie  $x_1 = 1$  vergrößert. Als Ursache dafür wird angenommen, dass durch eine detaillierte Auflösung der turbulenten Strukturen der Transport von Masse und Impuls zwischen Grenzschicht und Fernfeld besser abgebildet wird gleichzeitig auch stärker ausfällt. Ein



**Abb. 7.8:** Punktverteilungen der (a) initialen Stichprobe mit daraus resultierender Entscheidungsfront  $f_P$  (durchgezogene Linie), 7 Kandidatenpunkten  $\star$  und der zusätzlichen Erweiterung um 7 konvergierte Punkte ( $\bullet$ ). Neue Entscheidungsfront nach 3D-CFD-Auswertung der Kandidaten (b) mit dem  $k - \omega$ -Turbulenzmodell.

verstärkter Impulstransport zwischen Grenzschicht und Fernfeld wirkt einer Ablösung entgegen und somit auch dem Pumpen.

Diese unterschiedlichen Ergebnisse verdeutlichen, dass es sich bei einer mit 3D-CFD berechneten Betriebsgrenze stets um eine «numerische» Grenze handelt, welche auch durch die verwendete Modellkomplexität definiert ist. Neben den eben genannten Vorteilen des  $k - \omega$ -Turbulenzmodells muss allerdings mitberücksichtigt werden, dass der numerische Aufwand für diese Berechnungen wesentlich höher ist als für Spalart-Allmaras-Rechnungen, was sich in einer etwa doppelt so langen Berechnungsdauer manifestiert. Trotz dieser offensichtlichen Abhängigkeit der Lage der Betriebsgrenzen vom numerischen Modell wird zur Validierung der in dieser Arbeit entwickelten Methoden im Folgenden weiter das Spalart-Allmaras-Modell verwendet, da der Fokus hauptsächlich auf der Verarbeitung der 3D-CFD-Daten und nicht auf der Untersuchung der Turbulenzmodellierung liegt.

## 7.4 Rechenzeiten

Zur Beschleunigung der CFD-Analyse jeder Suchiteration wird nur die Initialisierung der Startlösung durch die Superposition der Hauptströmungsmoden (POD) nach Abschnitt 6.2.2 verwendet, da sich im Rahmen der Voruntersuchungen in Kapitel 6 gezeigt hat, dass reduzierte Methoden für Betriebspunkte im Teillastbereich keine zuverlässigen Ergebnisse generieren. Aus diesem Grund wird folgendermaßen verfahren: Zunächst werden

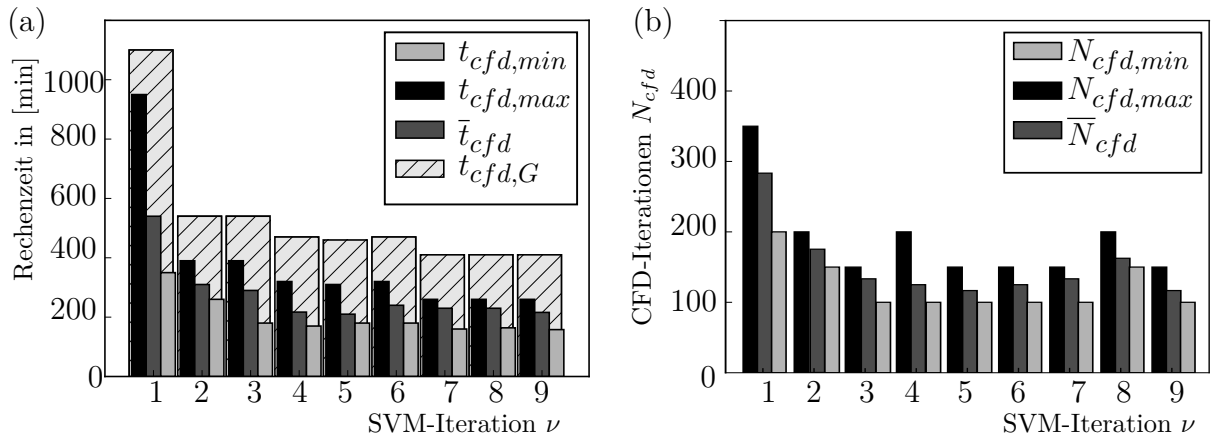
alle Betriebspunkte der initialen Stichprobe  $X$  ohne Initialisierung berechnet; die Rechenzeiten und die Anzahl der notwendigen CFD-Iterationen  $N_{cf}$  dient als Referenz. Für jede weitere SVM-Iteration der Betriebsgrenzensuche wird auf Grundlage aller bereits berechneten konvergierten Punkte eine POD-Basis erstellt, mit welcher eine Approximationslösung der Betriebspunkte der Kandidatenmenge  $C$  durchgeführt wird. Dabei drängt sich die Frage nach einer adaptiven Anpassung von  $N_{cf}$  auf, weil die Wahl dieses Parameters sich massiv auf die Geschwindigkeit eines in Abschnitt 7.1 definierten SVM-Iterationsschrittes auswirkt. Dazu folgendes Gedankenexperiment: Angenommen innerhalb einer SVM-Suchiteration wird eine Stichprobe mit  $N$  Betriebspunkten mit 3D-CFD berechnet. Der Parameter  $N_{cf}$  wird dabei groß gewählt, damit sich die Konvergenz aller Rechnungen einstellen kann und diese nicht vorzeitig abgebrochen werden. Weiter sei angenommen, dass von dieser Menge nur ein Punkt nicht konvergiert. Die konvergierten Punkte werden durch die HYDRA-Konvergenzkontrolle nach JANKE (2017) erkannt und die CFD-Berechnung vorzeitig nach einer Iterationsanzahl kleiner  $N_{cf}$  abgebrochen. Die nichtkonvergierende Rechnung kann dagegen nach aktuellem Stand nicht detektiert werden und wird demnach die maximale vom Benutzer gewählte Anzahl  $N_{cf}$  von CFD-Iterationen durchlaufen bis diese als nichtkonvergiert eingestuft werden kann. Für der SVM-Suchiterationsschritt bedeutet dies, dass sie erst die Beendigung der nichtkonvergierten Rechnung abwarten muss, bevor die nächste Suchiteration gestartet werden kann. Dadurch wird deutlich, dass der Vorteil einer geschickten Initialisierung und Beschleunigung der übrigen konvergierten CFD-Lösungen verloren geht.

Aus dieser Überlegung wird ersichtlich, dass die CFD-Iterationszahlen für jede Suchiteration angepasst und reduziert werden sollten, so dass bei Nichtkonvergenz die CFD-Iterationszahl möglichst gering gehalten wird. Die Anpassung kann im Rahmen dieser Arbeit nur heuristisch aus Beobachtungen von Testläufen abgeleitet werden und ist bei Pump- und Sperrgrenzensuche unterschiedlich. Erklärungen zur Wahl von  $N_{cf}$  werden daher im Folgenden während der Detailanalyse der jeweiligen Betriebsgrenzenexploration angeführt.

Als erstes werden die Rechenzeiten der SVM-Suchiteration für die Sperrgrenze betrachtet. Die POD-Initialisierung zeigt in Abb. 7.9a ein sehr hohes Beschleunigungspotenzial. Die maximale reine CFD-Rechenzeit  $t_{cf,max} = 980$  min der ersten nichtinitialisierten, Suchiteration reduziert sich bereits nach der ersten SVM-Iteration mit POD-Initialisierung um 63% auf etwa  $t_{cf,max} = 400$  min und fällt im Laufe weiterer Iterationen um nochmal 35% auf etwa 260 min. Für einen ehrlichen Vergleich muss bei der POD-Initialisierung zur maximalen reinen Rechenzeit  $t_{cf,max}$  die zusätzliche Bearbeitungszeit zur Erstellung der Initiallösungen  $t_{prep}$  addiert werden, so dass die Gesamtzeit

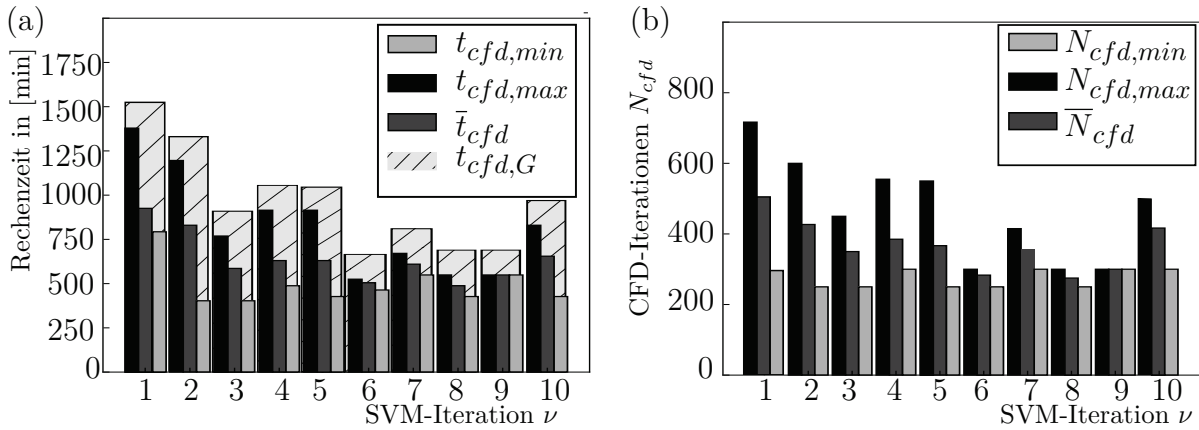
$$t_{cf,G} = t_{cf,max} + t_{prep} \quad (7.5)$$

als Maß verwendet wird. Somit fällt die Gesamtrechenzeit bereits nach zwei Iterationen auf  $t_{cf,G} = 550$  min und beträgt nach der siebenten Iteration nur noch etwa 410 min. Somit ergibt sich eine Rechenzeitreduktion im Vergleich zu  $t_{cf,max} = 980$  von 58.2%. Wie bereits am Anfang dieses Abschnitts motiviert muss eine geeignete Vorschrift für



**Abb. 7.9:** Balkendiagramm für (a) minimale, maximale, mittlere CFD-Rechenzeit und der Gesamtbearbeitungszeit, sowie (b) minimale, maximale und mittlere CFD-Iterationszahl für alle SVM-Iterationen  $\nu$  der Sperrgrenzenbestimmung

die erlaubten CFD-Iterationschritte  $N_{cf,d}^{(\nu)}$  vorgegeben werden, da die verwendete Konvergenzkontrolle nur konvergierte Lösungen identifiziert und nichtkonvergierende Lösungen die Gesamtrechenzeit einer SVM-Iteration bestimmen. Im Fall der Sperrgrenzenbestimmung zeigt sich, dass Kandidatenpunkte, welche sich im Bereich des Sperrens befinden, durch die HYDRA-interne Massenstromkontrolle als sperrende Betriebszustände erkannt werden, was zu einem frühzeitigen Abbruch der Rechnung führt. Somit bestimmen hier, bis auf einige Ausnahmen, die Rechenzeiten der konvergierten Lösungen die maximale Gesamtrechenzeit einer SVM-Iteration. Jede Maßnahme zur Rechenzeitreduktion senkt dadurch direkt die Bearbeitungszeit einer SVM-Suchiteration und ist somit sehr zeiteffektiv. Auf Basis dieser Beobachtung wird zunächst eine maximale CFD-Iterationschrittanzahl von  $N_{cf,d} = 750$  vorgegeben, da erfahrungsgemäß alle stabilen Rechnungen innerhalb dieses Intervalls konvergieren. Bei der Betrachtung der maximalen CFD-Iterationen  $N_{cf,d}$  in Abb. 7.9b zeigt sich, dass ab der zweiten SVM-Iteration alle Rechnungen bereits innerhalb von maximal 200 CFD-Iterationen konvergieren. Mit Berücksichtigung von *preprocessing*-Maßnahmen und dem zusätzlichen Aufwand zur Erstellung und Verarbeitung von POD-Moden beträgt die Gesamtzeit zur Bestimmung der Sperrgrenze etwa 3.5 Tage. Nun werden die Rechenzeiten der SVM-Suchiterationen für die Pumpgrenze betrachtet. Auch hier zeigt sich die rechenzeitreduzierende Wirkung der POD-Initialisierung in Abb. 7.10a. Ausgehend von der Rechenzeit der ersten nichtinitialisierten Stichprobe mit einer maximalen Rechenzeit von etwa  $t_{cf,d,max} = 1379$  min sinkt durch POD-Initialisierung die Rechenzeit der zweiten SVM-Iteration auf  $t_{cf,d,max} = 1200$  min und überschreitet für alle folgenden Iterationen nicht die Grenze von 915 min. Die mittlere Bearbeitungszeit fällt hierbei ab der dritten SVM-Iteration auf etwa  $\bar{t}_{cf,d,G} = 600$  min. Die gesamte Berechnungszeit beträgt nach der zweiten SVM-Iteration etwa  $t_{cf,d,G} = 1300$  min und schwankt für weitere Iterationen zwischen 600 min und 1000 min. Somit ergibt sich eine maximale Reduktion von 56.5% und eine minimale Reduktion von 27.5% im Vergleich zu



**Abb. 7.10:** Balkendiagramm für (a) minimale, maximale, mittlere CFD-Rechenzeit und Gesamtbearbeitungszeit, sowie (b) minimale, maximale und mittlere CFD-Iterationszahl für alle SVM-Iterationen  $\nu$  der Pumpgrenzenbestimmung

der Referenzzeit der ersten Suchiteration.

Im Gegensatz zur Sperrgrenzensuche tritt hier das zum Anfang des Abschnitts diskutierte ungünstige Verhalten der Konvergenzkontrolle ein, dass nichtkonvergierende Betriebspunkte alle vorgegebenen CFD-Iterationen durchlaufen müssen, um eine SVM-Iteration zu beenden. Daher muss so eine geeignete Vorschrift für die CFD-Iterationschrittmenge von  $N_{cfd}^{(\nu)}$  vorgegeben werden. Eine mögliche Strategie zur Behebung dieses Problems ist die Reduktion von  $N_{cfd}^{(\nu)}$  auf den Maximalwert  $N_{cfd}^{(\nu-1)}$  aller vorhergehenden konvergierten Rechnungen. In Voruntersuchungen hat sich jedoch gezeigt, dass eine kontinuierliche Absenkung von CFD-Iterationen nicht wirksam ist, da Iterationszahlen der konvergierten Lösungen nicht monoton fallend sind. Dieses Verhalten ist auch für die durchgeführte Pumpgrenzensuche in Abb. 7.10b erkennbar. Im Vergleich zur nichtinitialisierten ersten SVM-Iteration reduziert sich die benötigte Iterationszahl für konvergierende Strömungen zwar von  $N_{cfd,max} = 750$  über 600 ( $\nu = 2$ ) auf 500 ( $\nu = 3$ ), steigt dann aber wieder auf 600 und zeigt im Weiteren keine Monotonie. Aus diesem Grund wurde für diesen Versuchslauf die maximale Iterationszeit ab der zweiten Iteration auf  $N_{cfd}^{(\nu)} = 650 \forall \nu \geq 3$  limitiert und konstant gehalten. Dieses ungünstige Verhalten setzt für jede Suchiteration eine Berechnungszeit von etwa 1000 min fest. Im Vergleich zur Referenzzeit der ersten SVM-Iteration  $t_{cfd,max} = 1379$  min liefert das POD-Verfahren damit eine Netto-Beschleunigung von 27.5%. Zur Erschließung der Pumpgrenze in 10 SVM-Iterationen mit Berücksichtigung von *preprocessing*-Maßnahmen sind insgesamt etwa 7.4 Tage Rechenzeit notwendig.

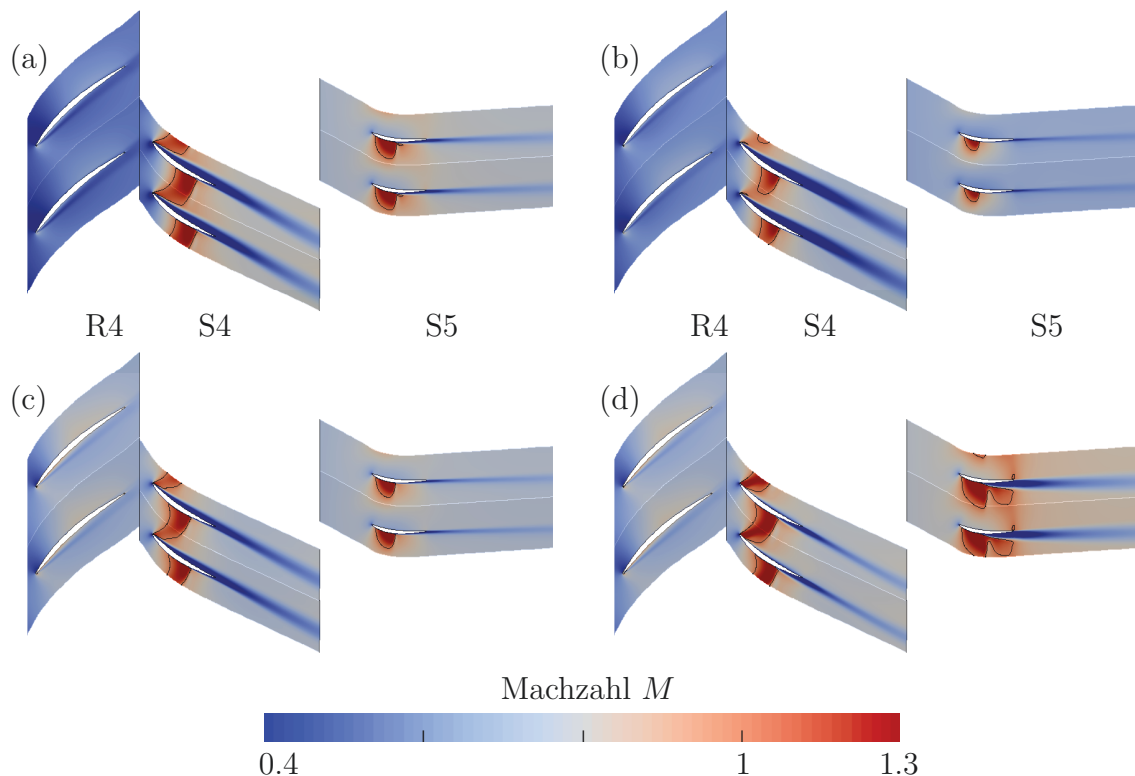
## 7.5 Strömungsbetrachtungen für ausgewählte Betriebspunkte

Im Folgenden werden Strömungsfelder von ausgewählten Betriebspunkten nahe der Betriebsgrenzen untersucht. Es gilt zu überprüfen, ob diese charakteristische Strömungsstrukturen aufweisen, welche zu Sperren oder Pumpen führen können. Analog zur Gliederung der vorherigen Abschnitte wird zunächst die Sperrgrenze und dann die Pumpgrenze betrachtet.

Zur Untersuchung der Sperrlinie wird das Strömungsfeld von vier konvergierten Betriebspunkten  $\tilde{\mathbf{x}} \in \{(1.33, 1.00), (1.3, 0.9), (1.24, 0.75), (1.29, 0.65)\}$  in unmittelbarer Grenznähe betrachtet. Als Untersuchungsgegenstand wird die Machzahlverteilung in den letzten Stufen herangezogen, da z.B. nach BRÄUNLING (2014) für Drehzahllinien  $n_r < n_r^{DP}$  das Sperren in den letzten Stufen des Verdichters auftritt, wobei sich ein senkrechter Verdichtungsstoß in den Schaufelpassagen ausbildet. Die Charakteristik eines Verdichtungsstoßes in einer Düse äußert sich dadurch, dass zunächst die Strömung mit der Machzahl  $M < 1$  durch die Kanalkontur auf Schallgeschwindigkeit  $M = 1$  im engsten Querschnitt beschleunigt wird und dann abrupt durch einen quer zur Hauptströmungsrichtung orientierten Stoß wieder auf  $M < 1$  abgebremst wird. Über den Stoß kommt es zu einer Erhöhung des Drucks und der Temperatur. Durch das Erreichen von  $M = 1$  in der gesamten Passage wird der maximale Massendurchsatz festgelegt, die Passage «sperrt». Liegt ein Strömungskanal vor, welcher zunächst verengt (Düse) und anschließend erweitert (Diffusor), kann die Strömung im Diffusor über Expansion auf  $M > 1$  beschleunigt werden, jedoch wird sich je nach Gegendruck am Kanalaustritt ebenfalls ein senkrechter Verdichtungsstoß im Diffusor ausbilden und die Strömung auf  $M < 1$  abbremsen. Da die betrachteten Schaufelpassagen eine größtenteils diffusorförmige Kontur besitzen, ist diese Stoßkonfiguration zu erwarten.

Zur Visualisierung der Stoßkonfigurationen für die ausgewählten Betriebspunkte wird in Abb. 7.11 die Machzahlverteilung auf dem Mittelschnitt der Schaufelpassagen der letzten Stufe (R4-S4) und der Nachleitschaufel (S5) dargestellt. Für alle Betriebspunkte ist zu erkennen, dass am Stator S4 zunächst die Strömung entlang der Saugseite lokal beschleunigt wird und die Machzahl  $M = 1$  erreicht. Die Aufweitung des Querschnitts der Passage bewirkt durch Expansionswellen eine weitere Beschleunigung der Strömung auf  $M > 1$ . Im letzten Drittel der Schaufel setzt von der Saugseite aus ein Verdichtungsstoß ein. Weiterhin ist in Abb. 7.11(a-b) zu sehen, dass für diese niedrigen Drehzahlen die druckseitige Ablösung der Grenzschicht am Stator S4 den effektive Strömungsquerschnitt vermindert was zu einer Verblockung der Passage führt. Für den Auslegungsmassenstrom in Abb. 7.11d zeigt sich auch auf der Hinterkante der Nachleitschaufel S5 eine Tendenz eines senkrechten Verdichtungsstoßes. Ausgehend von diesen Beobachtungen kann angenommen werden, dass es sich bei der gefundenen Grenze um eine Sperrgrenze handelt.

Die strömungsmechanische Untersuchung der Pumpgrenze ist im Vergleich zur Sperrgrenze komplizierter, da wie bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben das Pumpen ein instationärer Prozess ist, welcher einen Zusammenbruch der Strömung beschreibt. Bedingt durch die



**Abb. 7.11:** Machzahlverteilung in Mittelschnitt der letzten Verdichterstufe R4-S4 und der Nachleitschaufel S5 für Betriebspunkte in der Nähe der Sperrgrenze: a)  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.29, 0.65)$ , b)  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.24, 0.75)$ , c)  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.30, 0.9)$  und d)  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.33, 1.0)$ . Zusätzlich ist die Kontur  $M = 1$  eingezeichnet.

hier durchgeführte stationäre Berechnung nur einer Verdichterpassage ist es nicht möglich, den labilen Punkt zwischen Stabilität und Zusammenbrechen der Strömung genau zu bestimmen. Eine Pumpgrenze eines Verdichters markiert den kleinstmöglichen Massenstrom bei gleichzeitiger Druckerhöhung. Daher werden in diesem Rahmen Ablösestrukturen in grenznahen stabilen Betriebspunkten betrachtet, welche zur aerodynamischen Verengung der Strömungspassage und zur Reduktion des Druckaufbaus durch Druckverluste führen und bei weiterer Drosselung das Pumpen einleiten können.

Zur visuellen Darstellung dieser Ablösungsstrukturen werden Stromlinien in der Nähe der Nabe sowie Wandschubspannungsverteilung  $\tau_{w,x}$  nach (2.1) in axialer Richtung auf Schaufel, Nabe und Gehäuse verwendet. Anhand der Stromlinien können im Fernfeld Strömungsbereiche geringer Geschwindigkeit und Verwirbelungen sowie anhand sehr kleiner oder negativer  $\tau_w$ -Werte Ablösungen und Rückströmungen identifiziert werden. Als Untersuchungsgegenstand wird die Strömung auf den letzten drei Rotoren betrachtet, da abgelöste Rotoren die Kraftübertragung von Welle auf das Fluid reduzieren, was zu Verlusten im Druckaufbau führt. Nach BRÄUNLING (2014) sind Ablösungen in den letzten Stufen pumpauslösend. Zur Lokalisierung von Bereichen hoher Druckverluste entlang der

Spannweite einer Schaufel wird zusätzlich die radiale Verteilung des Totaldruckverlustes

$$\omega(\tilde{r}) = \frac{p_{t,A}^{isen} - \bar{p}_{t,A}}{p_{t,E} - p_{s,E}}, \quad (7.6)$$

herangezogen. Der Wert  $p_{t,A}^{isen}$  ist dabei der Druck, der bei verlustfreier Kompression vorliegen würde, und

$$\tilde{r} = \frac{r - r_N}{r_G - r_N} \quad (7.7)$$

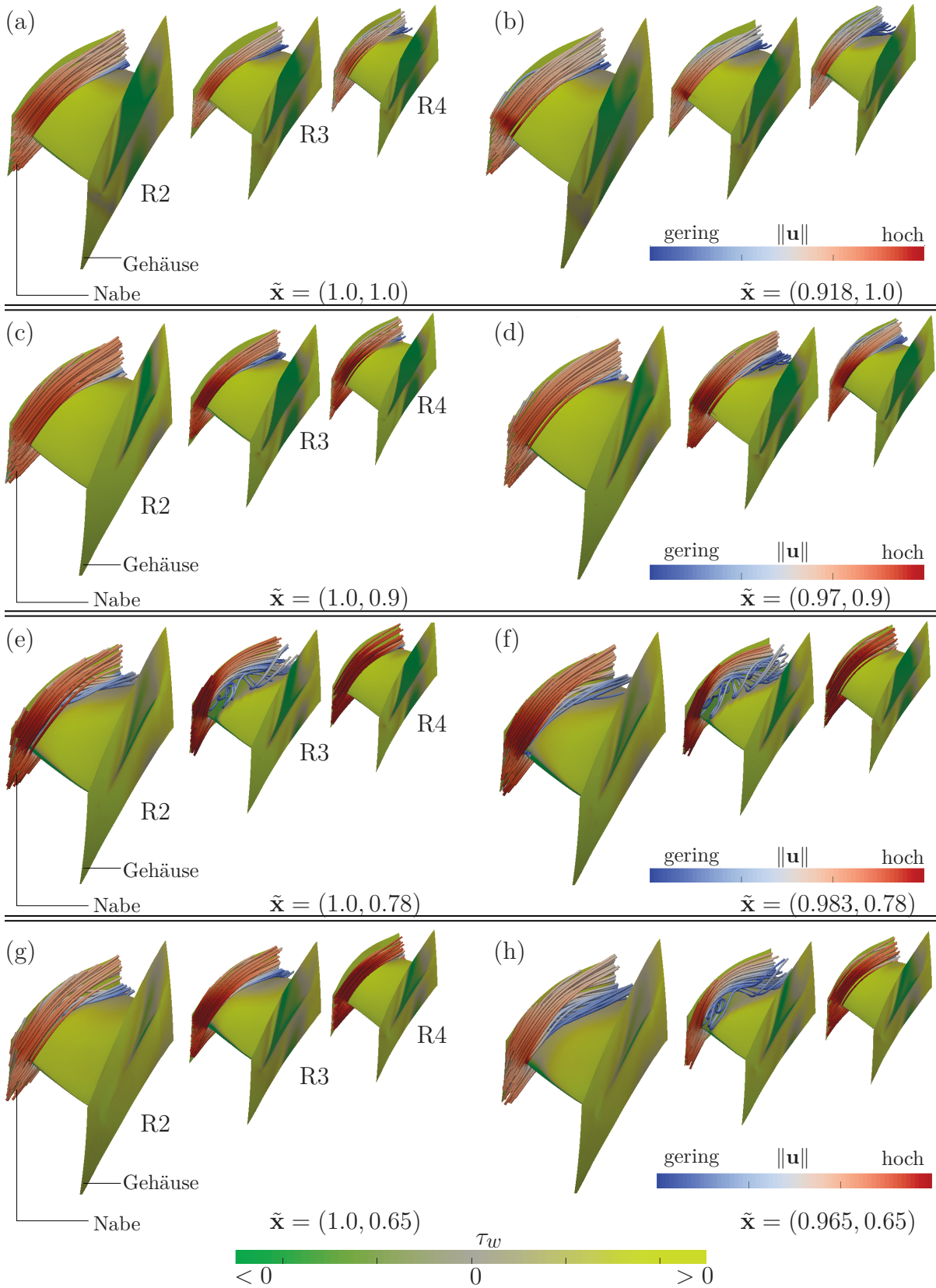
die jeweilige zwischen Nabenradius  $r_N$  und Gehäuseradius  $r_G$  normierte Schaufelhöhe Rotoren, bei welchen  $\omega$  bei Drosselung zunimmt, werden als pumpauslösend angenommen, da diese bei weiterer Drosselung nicht zu der notwendigen Druckerhöhung beitragen können.

Als erstes wird die Rotorströmung für den Auslegungspunkt  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.0, 1.0)$  in Abb. 7.12a betrachtet. Anhand der an der Nabe eingezeichneten Stromlinien ist erkennbar, dass die Strömung weitgehend ungestört ist und sich nur kleine Bereiche geringerer Geschwindigkeiten in der Nähe der Hinterkante befinden. Bezüglich des Wandschubspannungsverlaufes  $\tau_w$  sind am Gehäuse Gebiete geringer und sogar negativer  $\tau_w$  zu erkennen, was als Abdruck eines Blattspitzenwirbels interpretiert werden kann. Wird nun die Strömung auf den Betriebspunkt  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.918, 1.0)$  verzögert, weiten sich, wie anhand der Stromlinien in Abb. 7.12b erkennbar ist, die Gebiete geringerer Geschwindigkeiten aus, wobei die stärkste Verzögerung am letzten Rotor R4 auftritt. Anhand des radialen Verlaufs der normierten Verluste für Rotor R3 und R4 in Abb. 7.13a zeigen sich die Verzögerungsgebiete durch einen von der Nabe ausgehenden erhöhten Druckverlust. Weiterhin ist auch zu erkennen, dass die Blattspitzenwirbel für alle Rotoren zwischen  $0.9 \leq \tilde{r} \leq 1.0$  sehr große Verluste produzieren, jedoch durch Verzögerung der Strömung fast unbeeinträchtigt bleiben. Es ist anzunehmen, dass bei weiterer Drosselung die Verluste auf den letzten beiden Stufen zunehmen werden, bis die Strömung zusammenbricht und es zum Pumpen kommt.

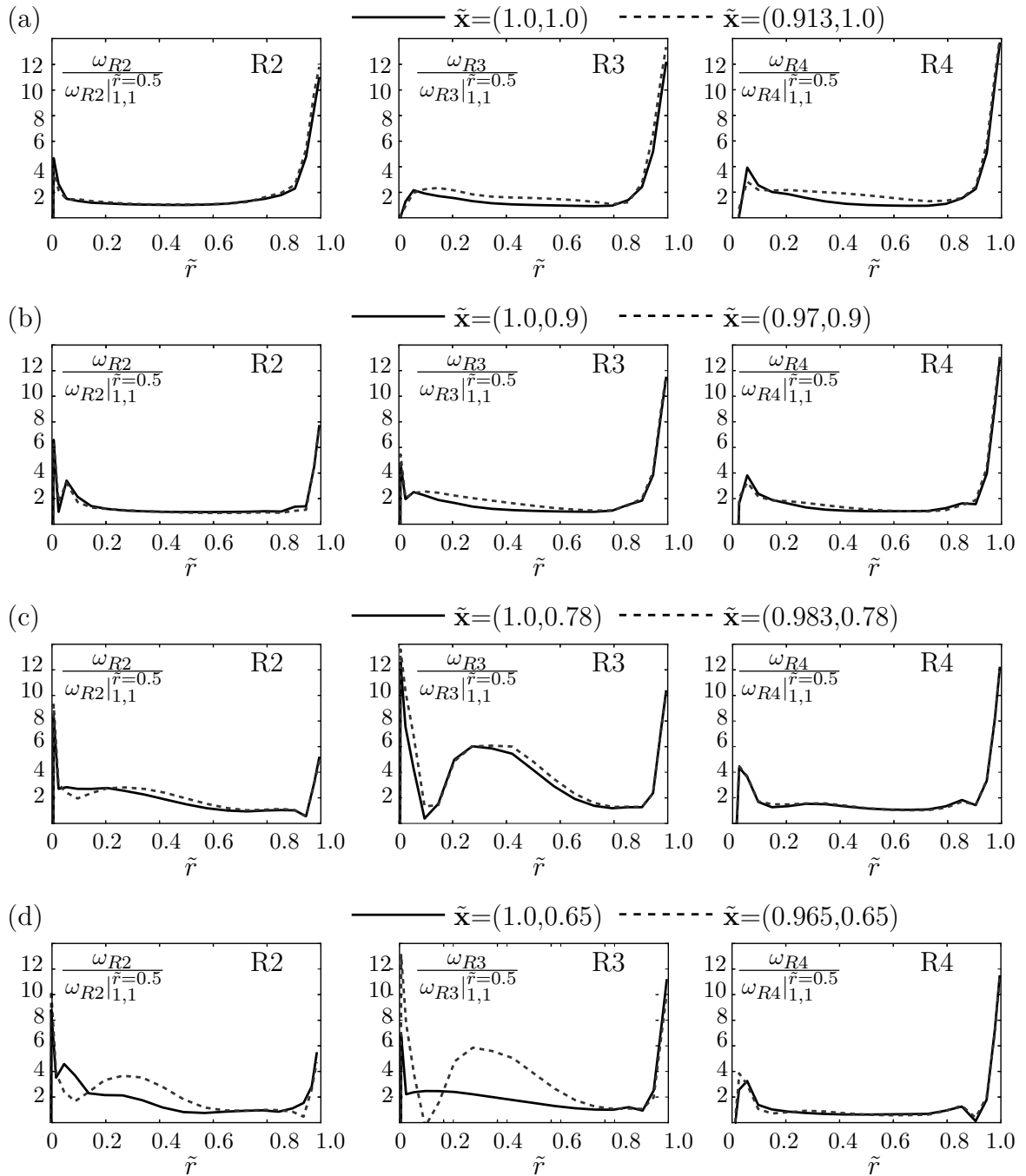
Wird nun entlang des normierten Arbeitmassenstroms  $\tilde{x}_1 = 1$  die Drehzahl reduziert, zeigt sich in Abb. 7.12c für  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.0, 0.9)$  ein ähnliches Strömungsverhalten wie für den Auslegungspunkt  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.0, 1.0)$ . Wird nun auf den Punkt  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.97, 0.9)$  gedrosselt, findet die stärkste Verzögerung auf dem Rotor R3 statt und bildet ein großes, durch Stromlinien und Bereiche geringer Wandschubspannung angedeutetes Ablösegebiet, siehe Abb. 7.12d. Die dadurch entstehenden Verluste breiten sich auf Rotor R3, ebenfalls ausgehend von der Nabe, bis auf etwa 60% der Schaufellänge aus, Abb. 7.13b.

Wird die Drehzahl weiter abgesenkt, durchfährt der Verdichter einen Bereich, in dem bereits auf der Arbeitslinie  $\tilde{\mathbf{x}} = (1.0, 0.78)$  auf Rotor R3 die Strömung an der Vorderkante ablöst, was in Abb. 7.12e an einem von der Nabe ausgehenden Band sehr kleiner  $\tau_w$ -Werte zu sehen ist. Die abgelöste Strömung, anhand der Stromlinien gut erkennbar, rollt sich dabei zu einem Wirbel zusammen. Weitere Drosselung auf  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.983, 0.78)$  verstärkt diesen Vorgang. Zusätzlich weitet sich das Ablösegebiet auf Rotor R2 aus. Anhand der Verlustverteilung auf R3 in Abb. 7.13c ist anzunehmen, dass der Druckaufbau auf dem bereits stark verlustbehafteten Rotor R3 bei weiterer Drosselung zusammenbrechen wird.





**Abb. 7.12:** Vergleich der Strömung an Betriebspunkten entlang der Arbeitslinie (a,c,e,f) mit pumpgrenznahen Betriebspunkten (b, d, f, h) anhand von Stromlinien und axialer Wandschubspannung  $\tau_w$



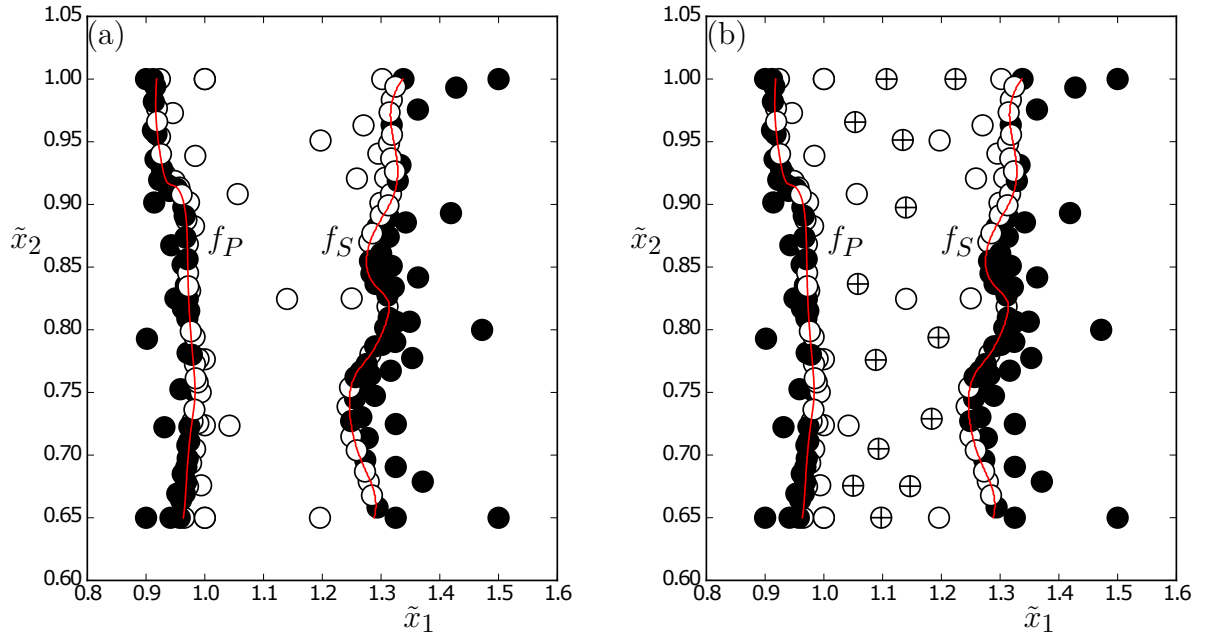
**Abb. 7.13:** Radiale Verlustverteilungen für ausgewählte Betriebspunkte bezogen auf die Mittelschnittverluste  $\omega_{R_i}|_{\tilde{r}=0.5}$  am Analysepunkt

Bei weiterem Absenken der normierten Drehzahl auf das Minimum des Analysebereichs entlang des Arbeitsmassenstroms zeigt sich in Abb. 7.12g, dass die ungünstigen Wirbelstrukturen am Rotor R3 verschwinden. Anhand der Stromlinien sind auf R2 und R3 Ablösegebiete ausgehend von der Nabe ab 50% der Schaufellaufänge zu sehen. Mit zunehmender Drosselung auf  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.965, 0.65)$  kommt es auf R2 und R3 bereits an der Vorderkante zur Ablösung, wobei es auf Rotor R3 zu einem kompletten Abriss an der Nabe kommt und sich ähnlich dem zuvor betrachteten Fall dadurch bedingt ein Wirbel bildet, siehe Abb. 7.12h. Sowohl der Wirbel als auch die das Ablösegebiet führen zu starken Verlusten, wie es in der Verteilung des Totaldruckverlusts eindeutig für R2 und R3 in Abb. 7.13d zu erkennen ist. Vor allem auf Rotor R3 steigt der Verlust an der Nabe um etwa das doppelte der Referenz und bildet, trotz Reduktion im Bereich  $0.1 \leq \tilde{r} \leq 0.2$ , ein bis 80% des Schaufelradius reichendes Gebiet hoher Verluste. Die Verlustzunahme über die gesamte Schaufelspannweite beträgt auf R2 etwa 23% und auf R3 etwa 65%. Somit ist anzunehmen, dass R2 und R3 bei weiterer Drosselung versagen, die dadurch stark belastete letzte Stufe abreißt und es zum Pumpen kommt.

## 7.6 Gesamtfeldapproximation und Validierung

Nachdem Pump- und Sperrgrenze separat approximiert wurden, werden die Mengen der konvergierten Betriebspunkte  $X_P$  und  $X_S$  zunächst in eine Gesamtfelddarstellung nach (5.23) transformiert und zu einer Gesamtmenge  $\tilde{X}$  zusammengefasst. Auch in diesem Abschnitt wird abweichend die Normierung (6.30) zur Darstellung der Ergebnisse verwendet. Die Punktverteilung von  $\tilde{X}$  in Abb. 7.14a zeigt einen dünn besetzten Bereich zwischen der Pump- und Sperrlinie weshalb anzunehmen ist, dass die Kennfeldapproximation durch Antwortflächen dort nicht sehr gut wäre. Zur Behebung dieses Problems wird, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben eine fill-up DoE  $\tilde{X}_F$  mit 14 Punkten erstellt, Abb. 7.14b. Für die 3D-CFD-Berechnung dieser fill-up Punkte werden die für die Pump- und Sperrliniensuche generierten konvergierten Punkte als POD-Basis für die Initialisierung verwendet. Dies liefert, analog zu den Ausführungen in Abschnitt 6.3.3, sehr gute, rechenzeitreduzierende Ergebnisse, so dass jede Rechnung im Mittel innerhalb von 200 Iterationen in 350 min konvergiert. Zum Vergleich werden fünf beliebige Punkte aus der fill-up Menge  $\tilde{X}_F$  ohne Initialisierung nachgerechnet. Diese Rechnungen benötigten im Mittel 471 Iterationen und etwa 770 min, so dass die POD-Initialisierung der fill-up DoE eine mittlere Rechenzeitreduktion von 54.4% erbringt.

Ausgehend von der vereinigten Betriebspunktmenge  $\tilde{X}_G = \tilde{X} \cup \tilde{X}_F$  sowie der gesamten Menge der Verdichterzustandsvektoren  $Z_G = Z_P \cup Z_S \cup Z_F$  werden Antwortflächen für den reduzierten Massenstrom am Eintritt  $\hat{m}_{r,E}(\tilde{\mathbf{x}})$ , das Druckverhältnis  $\hat{\pi}(\tilde{\mathbf{x}})$  und den Wirkungsgrad  $\hat{\eta}(\tilde{\mathbf{x}})$  erstellt. Mithilfe dieser kann das Verdichterkennfeld in der zweidimensionalen Form aus Abb. 2.4a rekonstruiert werden, wie sie in der klassischen industriellen Praxis üblich ist. In Abb. 7.15 sind die Pump- und Sperrlinie sowie die mit Antwortflächen approximierten Drehzahllinien für  $\tilde{x}_2 \in \{0.65, 0.8, 0.9, 0.95, 1.0\}$  dargestellt. Zur Validie-



**Abb. 7.14:** Gemeinsame Menge aller (a) zur Approximation der Betriebsgrenzen verwendeten Stichproben ( $\circ$ ,  $\bullet$ ), der (b) zusätzlichen fill-up DoE ( $\oplus$ ) sowie die approximierten Betriebsgrenzen  $f_P$ ,  $f_S$  (rote durchgezogene Linien)

ung werden für jede Drehzahllinie je 6 Punkte mit 3D-CFD nachgerechnet und ebenfalls in Abb. 7.15 eingetragen. Zur Quantifizierung der relativen Approximationsfehler

$$\varepsilon_{i,r}^{\varphi} = \frac{\hat{\varphi}_i(\tilde{\mathbf{x}}) - \varphi_i^{(CFD)}(\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi_i^{(CFD)}(\tilde{\mathbf{x}})} \quad (7.8)$$

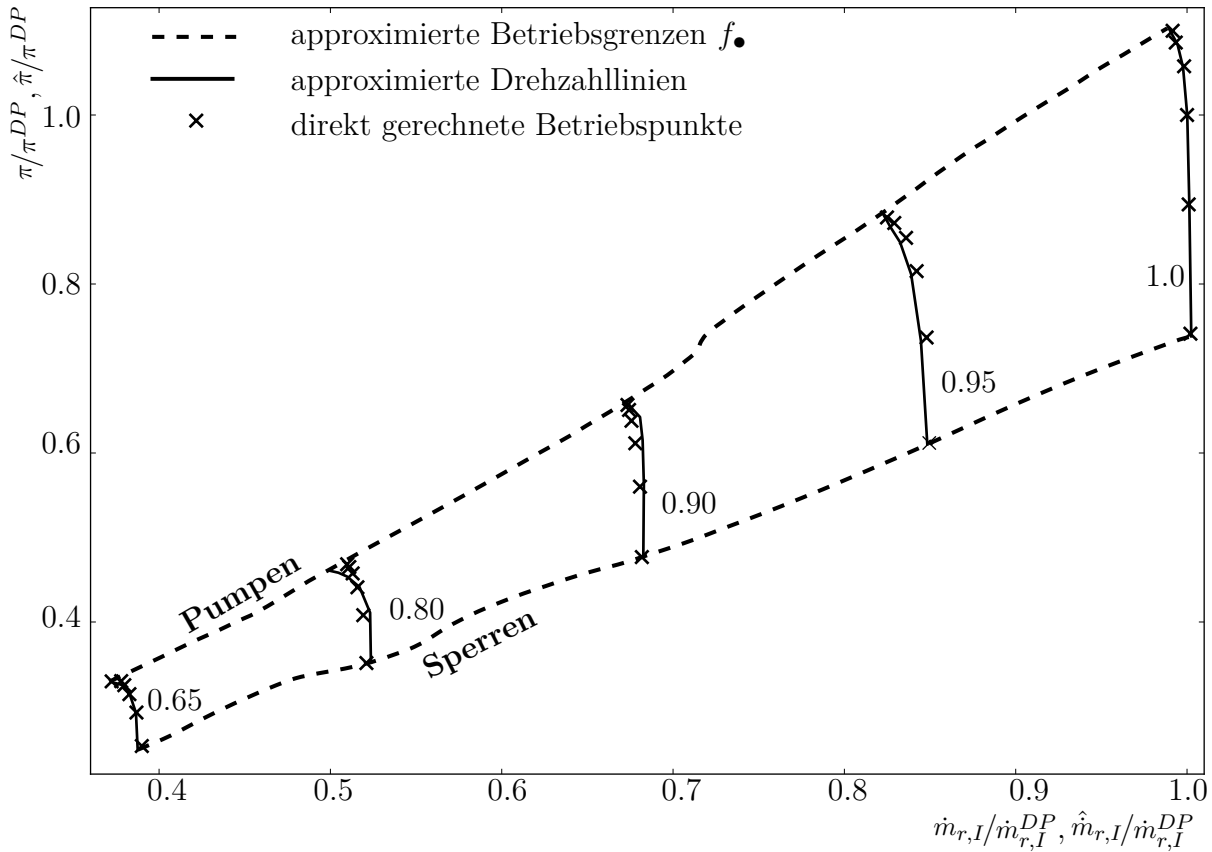
der Kenn- bzw. Zustandsgrößen  $\varphi_i \in \{\pi, \eta, \dot{m}_{r,E}\}$  werden zusätzlich die globalen Extremwerte

$$\varepsilon_{min}^{\varphi} = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} (\varepsilon_{i,r}^{\varphi}), \quad \varepsilon_{max}^{\varphi} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (\varepsilon_{i,r}^{\varphi}) \quad (7.9)$$

und die Mittel- und Meridianwerte

$$\bar{\varepsilon}_r^{\varphi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{i,r}^{\varphi}), \quad \varepsilon_m^{\varphi} = \text{med} (\varepsilon_{i,r}^{\varphi}) \quad (7.10)$$

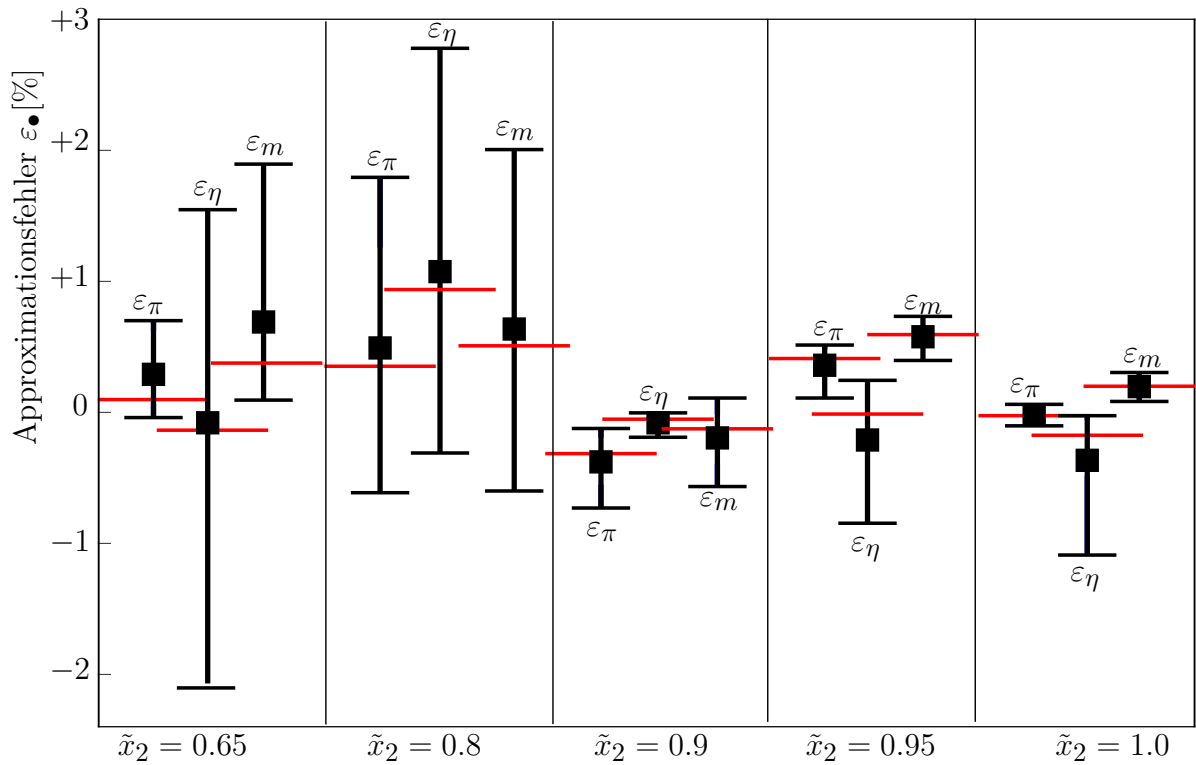
nach Gl. (6.35) berechnet. In Abb. 7.16 ist zu erkennen, dass die größten Approximationsfehler bei der Rekonstruktion der Antwortfläche für  $\eta$  auftreten. Für  $\tilde{x}_2 = 0.65$  ist die Fehlerspanne  $[-2.2\%, 1.7\%]$  und liegt für  $\tilde{x}_2 = 0.8$  bei  $[-0.5\%, 2.7\%]$ . Die Approximation von  $\dot{m}_{r,E}$  liefert einen etwas geringeren größten Fehlerbereich bei  $\tilde{x}_2 = 0.8$  von  $[-0.7\%, 2.1\%]$ . Die Approximation von  $\pi$  liefert den geringsten maximalen Fehlerbereich bei  $\tilde{x}_2 = 0.8$  von  $[-0.7\%, 1.7\%]$ . Alle anderen Drehzahlen weisen für alle Zustandsgrößen eine geringere Fehlerspanne von unter 2% auf. Vergleicht man nun die Verteilung der fill-up DoE in Abb. 7.14b mit der Lage der Drehzahllinie  $\tilde{x}_2 = 0.8$ , so ist erkennbar, dass



**Abb. 7.15:** (a) Approximiertes Kennfeld des Totaldruckverhältnisses  $\pi$  als Funktion von  $\dot{m}_{r,E}/\dot{m}_{r,E}^{DP}$  mit (gepunktete Linie) Betriebsgrenzen, fünf Drehzahlen (durchgezogene Linie) und je sechs Betriebspunkten pro Drehzahl aus Rechnungen ( $\times$ )

trotz der fill-up DoE nur wenige Punkte in diesem Bereich existieren und dies zu den vergleichsweise hohen Approximationsfehlern führt.

Die Bearbeitungszeit zur Approximation des gesamten Verdichter kennfelds beträgt bei sequentieller Pump- und Sperrgrenzenbestimmung und anschließender fill-up DoE insgesamt etwa 11.4 Tage. Im Vergleich zu Arbeiten von JANKE U. A. (2015), in welchen das Kennfeld desselben Verdichters auf einem CPU-Cluster vergleichbarer Leistung anhand von fünf Drehzahllinien innerhalb von 10.4 Tagen bestimmt wird, ist S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R zwar 9.6% langsamer, jedoch ist nur der Vergleich der reinen Rechenzeit nicht gerechtfertigt. Eine Kennfeldapproximation durch fünf Drehzahlen ist nur an diesen genau, das restliche Kennfeld wird über eine vergleichsweise ungenaue lineare Interpolation geschätzt und kritische, ungünstige oder anomale Drehzahlbereiche werden nicht erfasst. Der in dieser Arbeit entwickelte Prozess erfasst den gesamten Betriebsgrenzenverlauf im Parameterraum und spürt somit kritische Bereiche auf, welche sowohl durch die Verdichterströmung selbst als auch durch numerische Fehler oder ungünstige Wahl von Auslegungsparametern wie z.B. VSV-Verstellgesetze auftreten können. Durch die Darstellung der Betriebsgrenzen als Kurven im  $\mathbf{x}$ - bzw.  $\tilde{\mathbf{x}}$ -Parameterraum können diese kritischen Bereiche und de-



**Abb. 7.16:** Approximationsfehler für  $\pi$ ,  $\eta$  und  $\dot{m}_{r,E}$  für die untersuchten Drehzahlen

ren Umgebung schnell optisch lokalisiert werden. Weiterhin ist durch die unstrukturierte Stichprobenverteilung der fill-up DoE eine homogene Abtastung des gesamten, durch die Betriebsgrenzen eingeschlossenen Parameterraums gewährleistet, welche bei Verwendung der Antwortflächen ein insgesamt genaueres und umfassenderes Gesamtbild des Kennfelds liefert.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden neuartige Strategien zum effizienten Berechnen eines Kennfelds für Axialverdichter auf Grundlage von 3D-CFD-Methoden entwickelt und diskutiert. Ein Verdichterkennfeld ist eine topologische Menge von stabilen Betriebszuständen, welche zum einen durch die Leerlauf- und maximale Drehzahllinie und zum anderen durch Verdichterpump- und Sperrlinien begrenzt werden. Während die Drehzahllinien vom Entwickler vorgegeben werden, haben Pump- und Sperrlinie physikalische Ursachen und müssen daher für jede neue Verdichterkonfiguration mit numerisch komplexen, aufwändigen und zeitintensiven 3D-CFD Analysen gefunden werden. In der bisherigen Praxis werden dazu strukturierte Berechnungen entlang ausgewählter Drehzahllinien durchgeführt und isoliert einzelne Punkte der Pump- und Sperrgrenze iterativ gefunden. Dieser Ansatz benötigt viele CFD-Auswertungen, welche ihrerseits mehrere Tage Rechenzeit beanspruchen. Durch die Beschränkung auf einzelne Drehzahlen wird der gesamte Charakter des Kennfeld nicht erfasst, so dass unbekannte Betriebsbereiche aus linearer Interpolation abgeleitet werden. Der in dieser Arbeit dargestellte Ansatz setzt sich von den bisherigen Vorgehensweisen ab, indem dieser eine gesamtheitliche Darstellung des Parameterraums eines Kennfeldes erlaubt und gleichzeitig sowohl die Anzahl der erforderlichen Rechnungen als auch die Rechenzeit jeder einzelnen 3D-CFD-Auswertung reduziert.

Als Lösungsstrategien zur Reduktion von CFD-Auswertungen werden zwei Methoden des maschinellen Lernens, präziser der Klassifizierung und der Ersatzmodellbildung verwendet. In der Einheit bilden diese den zweistufigen Prozess **S C<sup>2</sup>A L<sup>2</sup>E T O R** (**S**trategy for **C**ompressor map **C**omputation with **A**utomatized **L**imit **L**ine **E**xploration and **T**Opology **R**econstruction).

In der ersten Stufe des Prozesses werden separat und ggf. parallel die Betriebsgrenzen einer Verdichterkonfiguration aufgespürt. Dazu wird zunächst der durch die reduzierte Drehzahl und reduzierten Massenstrom aufgespannte Parameterraum in zwei Suchfenster für die Pump- und Sperrgrenzensuche unterteilt. In jedem Suchfenster wird dann eine initiale unstrukturiert verteilte Stichprobe von Betriebspunkten erstellt, mit CFD ausgewertet und anhand des Konvergenzverhaltens der CFD-Rechnung als «konvergiert» oder «nichtkonvergiert» klassifiziert. Diese Attributierung erlaubt dann die Anwendung der Klassifizierungsmethode der Support-Vector-Machine (SVM), mit welcher es möglich ist, auf eine Entscheidungsfront zu schließen, welche eindeutig die Bereiche «konvergiert» und «nichtkonvergiert» voneinander trennt. Da diese Entscheidungsfront nur auf Grundlage weniger Daten gebildet wird, ist nicht davon auszugehen, dass diese der echten numerischen Betriebsgrenze entspricht. Daher wird zur Verbesserung der Approximation ein



Grenzstreifen um die Entscheidungsfront gelegt und in diesem mithilfe von Optimierungsalgorithmen eine neue dynamische Stichprobe zur optimalen Raumerschließung generiert. Nach Berechnung mit CFD und anschließender Klassifizierung entsteht durch erneute Anwendung von SVM eine verbesserte Entscheidungsfront. Durch iterative SVM- und Stichprobenauswertung nähert sich die Entscheidungsfront immer mehr der tatsächlichen numerischen Betriebsgrenze an. Untersuchungen mit eindimensionalen Verdichter-CFD-Modellen haben gezeigt, dass eine solche Erschließung von Betriebsgrenzen mit SVM massiv parallelisierbar ist und die Anzahl der notwendigen SVM-Iterationen zur hinreichenden Erschließung der Betriebsgrenzen umgekehrt proportional zur Größe einer Stichprobe ist. So sind bei paralleler Auswertung einer Stichprobe mit acht Betriebspunkten etwa neun SVM-Iterationen notwendig und bei einer Stichprobe mit 32 Betriebspunkten bereits zwei SVM-Iterationen ausreichend.

Alle zur Betriebsgrenzenapproximation generierten Betriebspunkte konzentrieren sich auf die Bereiche in unmittelbarer Nähe der Betriebsgrenzen, so dass ein Großteil der durch die Pump- und Sperrgrenzen eingeschlossenen Fläche nur eine geringe Dichte von konvergierten Punkten aufweist. Dies ist für eine Erstellung von Antwortflächen in diesen Bereichen ungünstig, weshalb zur Lösung dieses Problems in der zweiten Stufe des Gesamtprozesses eine fill-up DoE erstellt wird, welche ebenfalls mithilfe von Optimierungsalgorithmen den punktleeren Raum auffüllt. Die mit CFD ausgewerteten fill-up Punkte sowie die für die Betriebsgrenzenexploration benötigten konvergierten Punkte bilden die Grundlage zur Erstellung von Antwortflächen für Kenn- bzw. Zustandsgrößen der Verdichteranalyse wie Druckverhältnis, Wirkungsgrad und reduzierte Größen für das gesamte Kennfeld. Durch die verwendete unstrukturierte Erschließung des Parameterraums ergibt sich eine gesamtheitliches Bild des Verdichterkennfeldes.

Als Lösungsstrategien für die Reduktion der Rechenzeit jeder einzelnen 3D-CFD Rechnung werden unterschiedliche Methoden zur Erzeugung von Startlösungen untersucht. Durch eine geeignete Initiallösung, welche den tatsächlichen Feldgrößen wie Druck, Dichte und Geschwindigkeit ähnlich ist, kann zum einen iterative Lösungsaufwand reduziert und zum anderen der CFD-Berechnungsalgorithmus stabilisiert werden. In diesem Rahmen werden Initialisierungsansätze aus reduzierten Strömungsmodellen und aus bereits bekannten Strömungslösungen untersucht. Als reduzierte Modelle werden vom Industriepartner bereitgestellte korrelationsbasierte Throughflow- und simulationsbasierte zweidimensionale MISES-Modelle verwendet. Sowohl Throughflow als auch MISES zeigen in der Nähe der Auslegungsdrehzahl ein hohes Potenzial zur Reduktion der Rechenzeit, so dass eine maximale Reduktion von  $\approx 50\%$  erreicht werden kann. Zeitgleich wird jedoch beobachtet, dass beide Modelle Schwierigkeiten haben, Strömungen in geringen Drehzahlbereichen von  $65\% - 80\%$  der Auslegungsdrehzahl abzubilden oder überhaupt zu berechnen. Bei der Verwendung von bereits bekannten Strömungslösungen wurde die Methode des nächsten Nachbarn und der Rekombination von POD-Moden verwendet. Bei der Methode des nächsten Nachbarn wird für einen zu berechnenden Betriebspunkt der nächste schon bestimmte Betriebspunkt als Initiallösung verwendet. Damit konnte eine maximale Rechenzeitreduktion von etwa  $50\%$  erreicht werden, jedoch stellte sich ebenfalls heraus, dass für geringe Drehzahlen und Massenströme dieses Verfahren zu Instabilitäten in der

Strömungslösung neigt.

Bei der Verwendung von POD werden zunächst bereits bestimmte Feldgrößenverteilungen für eine Stichprobe von konvergierten Betriebspunkten zu Vektoren transformiert, welche in ihrer Gesamtheit als eine Systemmatrix interpretiert werden können. Mittels Singulärwertzerlegung kann diese Systemmatrix als ein Produkt von gewichteten Strömungsmoden dargestellt werden. Aus den skalaren Gewichtungen und der Lage der Betriebspunkte der Stichprobe werden dann mit Antwortflächen Gewichtungsfaktoren als Funktion der Betriebspunktlage erstellt. Damit können Feldgrößen neuer unbekannter Betriebspunkte als Superposition von gewichteten Strömungsmoden approximiert werden. Untersuchungen an Teststichproben zeigen, dass eine Initialisierung mit POD approximierten Strömungsfeldern im Durchschnitt eine Rechenzeitreduktion von 35% erreicht werden kann und dass diese Methode stabil für alle Drehzahlen ist.

Im letzten Teil der Arbeit werden die entwickelte POD-Methode gemeinsam mit der Kennfeldexplorationsumgebung `S C2A L2E T O R` für die Kennfeldberechnung eines 4.5-stufigen Forschungsverdichters verwendet. Dabei wird beobachtet, dass bei der Pumpgrenzenbestimmung ein wesentlich höherer numerischer Aufwand als bei der Sperrgrenzenbestimmung erforderlich ist. Dieser ist der Berechnung der komplexen dreidimensionalen Ablösungsstrukturen auf den Verdichterschaufeln geschuldet. Zusätzlich wird beobachtet, dass die erste Stichprobe zur Erstellung einer ersten Entscheidungsfront so groß gewählt werden muss, dass genügend Punkte in den Bereichen geringer Drehzahlen  $< 90\%$  vorhanden sind, damit die POD-approximierten Initiaillösungen der pumpgrenzenahen Punkte zu eindeutig konvergierten CFD-Rechnungen führen. Weiterhin wird beobachtet, dass die Lage der Betriebsgrenzen maßgeblich von der Verwendung des Turbulenzmodells abhängt und eine Verwendung von komplexeren Mehrgleichungsansätzen (z.B.  $k-\omega$ -Ansatz) zwar die Pumplinie weiter in Richtung geringerer Massenströme verschiebt, jedoch numerisch wesentlich aufwändiger als Eingleichungsmodelle (Spalart-Allmaras) ist. Es zeigt sich somit, dass es sich bei allen mit 3D-CFD bestimmten Betriebsgrenzen um numerische Betriebsgrenzen handelt, welche von der Stabilität der jeweils verwendeten Methoden und Modellen abhängig sind. Eine Verifikation dieser kann nur ein Vergleich mit realen experimentellen Werten bringen.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Verdichterkennfeldexploration des 4.5-stufigen Forschungsverdichters mit dem SA-Turbulenzmodell konnte innerhalb von 11.4 Tagen durchgeführt werden. Validierungen mit nachträglich durchgeführten Vergleichsrechnungen entlang ausgewählter Drehzahlen zeigen einen maximalen Approximationsfehler von unter 2% für das Totaldruckverhältnis, unter 3.8% für den Wirkungsgrad und unter 2.5% für die Schätzung des reduzierten Eintrittsmassenstroms.

Im Gegensatz zu den bis jetzt in der industriellen Praxis verwendeten, auf der Auswertung einzelner Drehzahllinien basierenden Kennfeldapproximationsmethoden erfasst `S C2A L2E T O R` den gesamten Betriebsgrenzenverlauf im Parameterraum und spürt somit kritische Bereiche auf, welche sowohl durch die Verdichterströmung selbst als auch durch numerische Fehler oder ungünstige Wahl von Auslegungsparametern auftreten können. Durch die Darstellung der Betriebsgrenzen als Kurven im Parameterraum können diese kritischen Bereiche und deren Umgebung schnell optisch lokalisiert werden. Wei-

terhin ist durch die unstrukturierte Stichprobenverteilung der fill-up DoE eine homogene Abtastung des gesamten durch die Betriebsgrenzen eingeschlossenen Parameterraums gewährleistet, welche bei Verwendung von Antwortflächenverfahren ein umfassendes Gesamtbild des Kennfelds liefert.

Im Hinblick auf zukünftige Forschung kann durch Verwendung von schnelleren CPU-Clustern, einer intelligenten 3D-CFD-Konvergenzkontrolle und einer Einbindung des POD-Verfahrens in den aktiven Prozess der Strömungsberechnung die Verdichterkennfeldberechnung noch weiter beschleunigt werden, so dass eine Verdichteranalyse mit 3D-CFD innerhalb von wenigen Tagen möglich wird. Eine weitere Möglichkeit ist die Erweiterung auf Strömungs-Struktur gekoppelte Berechnungen, da durch die Gesamtkennfelddarstellung lokale Phänomene wie das «flutter-bite» gefunden werden können.

# Anhang A: Reduzierte Kennfeldgrößen

Bei der Darstellung von Kennfeldern werden reduzierte Größen verwendet. Diese Größen werden anhand von Ähnlichkeitsgesetzen abgeleitet, so dass ein Vergleich von Betriebszuständen eines Verdichters bei z.B. abweichenden atmosphärischen Bedingungen möglich ist. In der Strömungsmechanik bzw. Messtechnik existieren im Allgemeinen viele Ähnlichkeitsgesetze, welche physikalische Ähnlichkeiten (Reynolds Ähnlichkeit) oder geometrische Ähnlichkeiten (Machsche-Ähnlichkeit) der Strömung fordern. In der Verdichter kennfeldanalyse wird hauptsächlich die Machsche-Ähnlichkeit verwendet. Das bedeutet, dass die Machzahlen zweier Zustände  $I$  und  $II$  gleich sein müssen, d.h.

$$M_I = M_{II}. \quad (\text{A.1})$$

Wird beispielsweise Machsche-Ähnlichkeit für die axiale Machzahl gefordert, gilt

$$M_{ax,I} = M_{ax,II} \quad \text{oder} \quad \frac{c_{ax,I}}{a_1} = \frac{c_{ax,II}}{a_2}, \quad (\text{A.2})$$

wobei die axiale Machzahl als Verhältnis von axialer Strömungsgeschwindigkeit  $c_{ax}$  zu lokaler Schallgeschwindigkeit  $a$  definiert ist, d.h. als

$$M_{ax} = \frac{c_{ax}}{a}. \quad (\text{A.3})$$

Mit Verwendung der Definition des Massenstroms  $\dot{m} = c_{ax}\rho A$ , der idealen Gasgleichung  $\rho = p/RT$  und der lokalen Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\kappa RT}$  ergibt sich für die Machzahl für Zustand  $I$  (A.3)

$$M_{ax,I} = \frac{\dot{m}_I RT_I}{A_I p_I \sqrt{\kappa RT_I}} = \frac{\dot{m}_I \sqrt{\kappa RT_I}}{A_I p_I \kappa}. \quad (\text{A.4})$$

und für Gl. (A.2) somit

$$\frac{\dot{m}_I \sqrt{\kappa RT_I}}{A_I p_I \kappa} = \frac{\dot{m}_{II} \sqrt{\kappa RT_{II}}}{A_{II} p_{II} \kappa}. \quad (\text{A.5})$$

Mit der Forderung der Gleichheit beider Verdichter  $A_1 = A_2$  lässt sich dies weiter vereinfachen zu

$$\frac{\dot{m}_I \sqrt{\kappa RT_1}}{p_I} = \frac{\dot{m}_{II} \sqrt{\kappa RT_{II}}}{p_{II}}. \quad (\text{A.6})$$

In der Thermodynamik ist die Verwendung von totalen Größen oft vorteilhafter als die der statischen Größen, weshalb Gl. (A.6) auf totale Größen umgestellt wird. Dazu werden die Isentropenbeziehungen

$$\frac{T}{T_T} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax}^2} \rightarrow T = T_T \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax}^2} \quad (\text{A.7})$$

und

$$\frac{p}{p_T} = \left( \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \rightarrow p = p_T \left( \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (\text{A.8})$$

verwendet und in Gl. (A.6) eingesetzt. Dann gilt

$$\frac{\dot{m}_I \sqrt{\kappa R T_{T,I}}}{p_{T,I}} = \frac{\dot{m}_{II} \sqrt{\kappa R T_{T,I}}}{p_{T,II}} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax,II}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ax,I}^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}}. \quad (\text{A.9})$$

oder mit (A.2)

$$\frac{\dot{m}_{II} \sqrt{\kappa R T_{T,I}}}{p_{T,I}} = \frac{\dot{m}_{II} \sqrt{\kappa R T_{T,I}}}{p_{T,II}}. \quad (\text{A.10})$$

Der entwickelte Term

$$\dot{m}_r = \frac{\dot{m} \sqrt{\kappa R T_T}}{p_T} \quad (\text{A.11})$$

wird «reduzierter Massenstrom» genannt.

Wird nun die Machsche-Ähnlichkeit für die Umfangskomponente betrachtet, d.h.

$$M_{u,I} = M_{u,II} \quad \text{oder} \quad \frac{u_I}{a_I} = \frac{u_{II}}{a_{II}}, \quad (\text{A.12})$$

kann mit der Definition der Rotationsgeschwindigkeit  $u = r\omega$  und der Transformation  $\omega = 2\pi n$  folgender Ausdruck geschrieben werden:

$$\frac{2\pi r n_I}{\sqrt{\kappa R T_I}} = \frac{2\pi r n_{II}}{\sqrt{\kappa R T_{II}}}. \quad (\text{A.13})$$

Wird analog zu (A.9) nach den Totalgrößen umgestellt ergibt sich

$$\frac{2\pi r n_I}{\sqrt{\kappa R T_{T,I}}} = \frac{2\pi r n_{II}}{\sqrt{\kappa R T_{T,II}}} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{u,II}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{u,I}^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.14})$$

Daraus resultiert mit (A.12) der Ausdruck

$$n_r = \frac{n_I}{\sqrt{T_{T,I}}} = \frac{n_{II}}{\sqrt{T_{T,II}}}, \quad (\text{A.15})$$

welcher als «reduzierte Drehzahl» bezeichnet wird.

# Anhang B: Herleitung der Support Vector Maschine

Zur Lösung des Optimierungsproblems (4.15), werden die Matrizen

$$\mathbf{y} = [y_1 \dots y_N]^T, \mathbf{1} = [1 \dots 1]^T, \mathbf{X} = [y_1 \mathbf{x}_1 \dots y_N \mathbf{x}_N] \quad (\text{B.1})$$

eingeführt. Die Lagrange-Funktion (4.16) lässt sich damit folgendermaßen umformulieren:

$$L = \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{1} - \mathbf{X}^T \mathbf{w} - b \mathbf{y}). \quad (\text{B.2})$$

Die dazugehörigen Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen des Problems (4.15) entsprechen nach z.B. BESTLE (1994)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{w} + \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{y} = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{1} - \mathbf{X}^T \mathbf{w} - b \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{B.5})$$

$$\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}, \lambda_i [1 - y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{w} - b y_i] = 0 \quad \forall i. \quad (\text{B.6})$$

Aus Gl. (B.3) folgt

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{2} \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{B.7})$$

Durch Einsetzen in Gl. (B.2) und Mitberücksichtigung von Gl. (B.4), nach welcher  $b \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$  ist, ergibt sich die Lagrange-Funktion (B.2) zu

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{4} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} \equiv -\frac{1}{4} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}. \quad (\text{B.8})$$

Das primale Optimierungsproblem (4.15) kann mit (B.8) in das duale Problem 4.17 umgewandelt werden. Dies beinhaltet die Maximierung der Lagrange-Funktion durch den Maximierer  $\boldsymbol{\lambda}$ , sowie der Randbedingungen  $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$  aus Gl. (B.6) der Konstante (B.4).

Durch Substitution der optimalen Lösung (4.17) in (B.7) ergibt sich der optimale Normalenvektor (4.19). Der optimale offset-Wert kann aus jeder aktiven Randbedingung (B.6)

bestimmt werden auf welcher  $\lambda_i < 0$  ist, denn für  $\lambda_i \neq 0$  folgt aus (B.6) die optimale Lösung

$$b^* = \frac{1}{y_i} - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}^* \equiv y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}^*, \quad (\text{B.9})$$

da wegen  $y_i = \pm 1$   $y_1 \equiv 1/y_i$  ist. Aufgrund numerischer Ungenauigkeiten liefert jede Gleichung einen etwas anderen Wert. Der Mittelwert aller  $N_{i_a}$  aktiven Randbedingungen beträgt dann

$$b^* = \frac{1}{N_{i_a}} \left( \sum_{i=1}^{N_{i_a}} y_{i_a} - \sum_{i_a=1}^{N_{i_a}} \mathbf{x}_a^T \mathbf{w}^* \right). \quad (\text{B.10})$$

Alternativ dazu können auch nur  $N_{i_a} = 2$  Trainingspunkte mit aktiven Randbedingungen  $\mathbf{x}^+$ ,  $\mathbf{x}^-$  auf gegenüberliegenden Seiten der Trennlinie mit  $y^+ = +1$  und  $y^- = -1$  verwendet werden. Die erste Summe in (B.10) hebt sich dann auf, so dass Gl. (4.20) entsteht.

# Anhang C: Programme zur Verdichteranalyse

## C.1 Meanline

Diese Methode wird in der Regel als erster Schritt der Vorauslegung eines Verdichters verwendet. In dieser Phase werden die Annulusgeometrie, die Anzahl der Stufen sowie die aerodynamische Leistung und die Belastung der einzelnen Stufen festgelegt. Der Meanline-Ansatz basiert auf der Annahme, dass alle Strömungsgrößen nur am mittleren Radius bzw. dem Mittelschnitt (Meanline) betrachtet werden dürfen und repräsentativ für die gesamte Strömung entlang des Schaufelradius sind. Diese Methode wird auch als eindimensionale CFD-Methode bezeichnet, bei der sich strömungs- und geometrierelevante Größen wie z.B. Druck, Temperatur, Geschwindigkeitskomponenten und Radien nur in axialer Richtung verändern. Im Folgenden werden die grundlegenden Gleichungen dieser Methode erläutert und anhand eines Minimalbeispiels des einstufigen Verdichters in Abb. C.1 dargestellt. An dieser Stelle sei erwähnt, dass Gleichungen nur das Grundgerüst dieser Methode bilden und die Mächtigkeit in der Verwendung der Korrekturfaktoren und Korrelationen liegt. Einige sind Gegenstand von interner Forschung eines jeden Triebwerksherstellers und werden daher hier nicht konkretisiert.

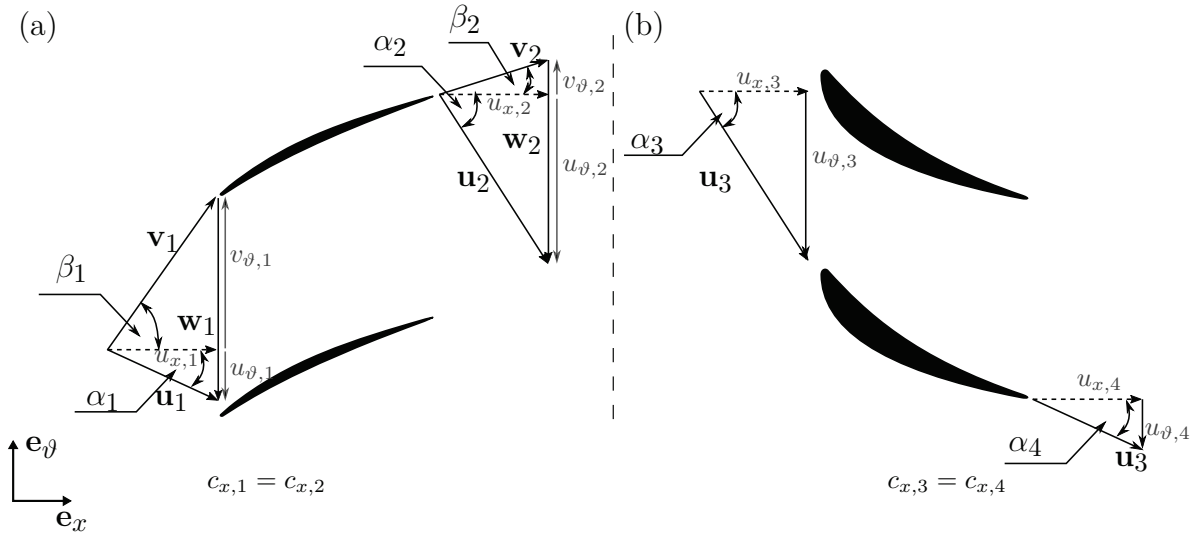
Trotz der Eindimensionalität der Betrachtung in axiale Richtung bilden zweidimensionale Geschwindigkeitsdreiecke eine der wichtigsten Grundlagen. In Abb. C.1 ist eine Stufe bestehend aus Rotor und Stator mit den zugehörigen relativen und absoluten Geschwindigkeitskomponenten dargestellt. Der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}$  entspricht der absoluten Geschwindigkeit, der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  der relativen Geschwindigkeit in einem mitbewegten Koordinatensystem, welches sich mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{w}$  bewegt. Weiterhin entspricht der Winkel  $\alpha$  dem absoluten An- oder Abströmwinkel, der Winkel  $\beta$  dem relativen An- oder Abströmwinkel. Es gilt

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}. \quad (\text{C.1})$$

Die einzelnen Komponenten in Umfangs-Richtung  $\vartheta$  ergeben sich zu

$$u_{\vartheta} = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha) \quad v_{\vartheta} = \|\mathbf{v}\| \sin(\beta). \quad (\text{C.2})$$





**Abb. C.1:** Geschwindigkeitsdreiecke im Relativ- und Absolutsystem einer rotierenden Rotorschaukel (a) sowie im Absolutsystem einer Statorschaukel (b)

Aus den Geschwindigkeitsdreiecken ist zudem der Zusammenhang

$$v_{\vartheta} = w - u_{\vartheta} \quad (\text{C.3})$$

mit  $w = \|\mathbf{w}\| = \omega r$  ersichtlich. Mithilfe dieser Beziehung lassen sich ohne Probleme Geschwindigkeiten aus dem bewegten Rotorsystem in das absolute Statorsystem umrechnen und andersrum. Weiterhin wird die Eulersche Turbomaschinengleichung verwendet, nach welcher die in einem Rotor umgesetzte Arbeit

$$W = \|\mathbf{w}_1\|u_{\vartheta,1} - \|\mathbf{w}_2\|u_{\vartheta,2} \quad (\text{C.4})$$

beträgt. Mit der Annahme, dass die Rotordrehzahl über die Schaufellänge konstant ist ( $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ ) und der Tatsache, dass  $\mathbf{w}$  nur eine Komponente in Umfangsrichtung besitzt, gilt

$$W = w(u_{\vartheta,1} - u_{\vartheta,2}). \quad (\text{C.5})$$

Aus der Energiebilanz  $q+W = h_{02}-h_{01}$ , wobei  $h_0$  die totale Enthalpie mit  $h_0 = h + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2$  und  $q$  die zu- bzw. abgeführte Wärmestromdichte sind, ergibt sich

$$q + W = w(u_{\vartheta,1} - u_{\vartheta,2}) = h_2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_2\|^2 - h_1 - \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_1\|^2. \quad (\text{C.6})$$

Mit der Annahme eines adiabaten Prozesses ( $q = 0$ ) und durch Zerlegung von  $\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_{\vartheta}^2$  ergibt sich

$$w(u_{\vartheta,1} - u_{\vartheta,2}) = (h_2 + \frac{1}{2}u_{x,2}^2 + \frac{1}{2}u_{\vartheta,2}^2) - (h_1 + \frac{1}{2}u_{x,1}^2 + \frac{1}{2}u_{\vartheta,1}^2). \quad (\text{C.7})$$

Bedingt durch die Massenerhaltung in axialer Richtung und damit  $u_{x,2} = u_{x,1}$  ergibt sich weiter

$$w(u_{\vartheta,1} - u_{\vartheta,2}) = (h_2 + \frac{1}{2}u_{\vartheta,2}^2) - (h_1 + \frac{1}{2}u_{\vartheta,1}^2) \quad (\text{C.8})$$

bzw.

$$h_2 - h_1 = (\frac{1}{2}u_{\vartheta,1}^2 - \frac{1}{2}u_{\vartheta,2}^2) + w(u_{\vartheta,1} - u_{\vartheta,2}). \quad (\text{C.9})$$

Aus den Geschwindigkeitsdreiecken in Abb. C.1 ist abzulesen, dass  $w + v_{\vartheta} = u_{\vartheta}$ . Wird dies eingesetzt und alle Quadrate ausgeschrieben, ergibt sich

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}v_{\vartheta,1}^2 - \frac{1}{2}v_{\vartheta,2}^2 + w(\underbrace{v_{\vartheta,1} + u_{\vartheta,1}}_w - \underbrace{(v_{\vartheta,2} + u_{\vartheta,2})}_w) = \frac{1}{2}v_{\vartheta,1}^2 - \frac{1}{2}v_{\vartheta,2}^2. \quad (\text{C.10})$$

Um eine Betrachtungsweise proportional zu den relativen An- und Abströmvektoren zu schaffen, wird die Beziehung  $\|\mathbf{v}\| = v_x^2 + v_{\vartheta}^2$  bzw.  $v_{\vartheta}^2 = \|\mathbf{v}\| - v_x^2$  und die Massenerhaltung  $v_{x,1} = u_{x,1} = v_{x,2} = u_{x,2}$  in Gl. (C.10) eingesetzt. Es entsteht eine Gleichung für das Relativsystem des Rotors:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_1\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_2\|^2. \quad (\text{C.11})$$

Wird nun bei der spezifischen Enthalpie  $h = e + p/\rho$  die innere Energie  $e$  vernachlässigt und die Dichte  $\rho$  als konstant angenommen, ergibt sich die Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}_2\|^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}_1\|^2 + p_1 \quad (\text{C.12})$$

Diese sieht noch keine Druckverluste innerhalb des Systems vor. Da jedoch Verluste auftreten, werden diese in der erweiterten Formel mitberücksichtigt, so dass der Druck am Austritt aus der Schaufelpassage wie folgt bestimmt werden kann:

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}_1\|^2 - \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}_2\|^2 + p_1 - \Delta p_{V,(1-2)}. \quad (\text{C.13})$$

Dabei bezeichnet der Ausdruck  $\Delta p_{V,(1-2)}$  Druckverluste, welche durch Verdichtungsstöße, Grenzschichteffekte, Profil- und Reibungsverluste sowie Verluste durch Interaktionen mit den Annuluswänden beim Durchfluss zwischen den Positionen 1 und 2 entstehen. Da diese mit den hier verwendeten Modellannahmen nicht abgebildet werden können, werden diese über empirische Korrelationen ermittelt. Eine umfängliche Darstellung der Arten und Quantifizierung verschiedener Verluste findet sich in CUMPSTY (2004).

Aus Gleichung (C.13) ist erkennbar, dass bei einem gewünschten Zieldruck  $p_2$  der Abströmvektor  $\mathbf{v}_2$ , genauer gesagt die Strömungsumlenkung  $v_{\vartheta}$ , definiert werden muss. In der Praxis der Verdichterauslegung wird dieser durch die Schaufelform bestimmt, welche mithilfe einer parametrisierten 2D-Schaufelgeometrie z.B. durch Metallwinkel am Ein- und Austritt, Sehnenlänge und Dicke definiert ist. Bei hintereinander angeordneten Schaufeln ist dieses Verfahren ebenfalls gültig, da Abströmbedingungen der stromauf liegenden Schaufel als Anströmbedingungen der stromab liegenden Schaufeln dienen.

## C.2 Throughflow

Die Throughflow-Methode kann als eine radiale Erweiterung der Meanline-Methode interpretiert werden. Die Strömung kann auf einer Vielzahl von Stromlinien betrachtet werden, welche zwischen Rotornabe und Gehäuse liegen. Die somit aufgespannte Ebene wird Meridionalebene genannt, und entspricht nach WU (1952) der S1-Ebene. Somit ist ein Schaufeldesign mit radial variierenden Geometrien möglich, welche ihrerseits zur Erfüllung der Erhaltungsgleichung in radialer Richtung beitragen müssen. Die von der Schaufel geleistete Arbeit ist dann eine Summe von miteinander interagierenden Schaufelprofilen. Durch dieses Verfahren ist eine radiale Auffädung von optimierten Schaufelprofilen zu einer dreidimensionalen Schaufelform möglich.

Besonders in Axialverdichtern ist die radiale Druckverteilung dominiert von der Zentripetalbeschleunigung  $u_{\vartheta}^2/r$ , so dass nach CUMPSTY (2004) die radiale Druckverteilung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_{\vartheta}^2}{r} \quad (\text{C.14})$$

entspricht. Für die radiale Änderung der Enthalpie  $h_0 = h + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_{\vartheta}^2)$  ergibt sich

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_{\vartheta} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r}. \quad (\text{C.15})$$

Wird nun auch noch die Gibbsche-Fundamentalgleichung

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp \quad (\text{C.16})$$

radial abgeleitet, erhält man  $\rho = \text{konst.}$

$$T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (\text{C.17})$$

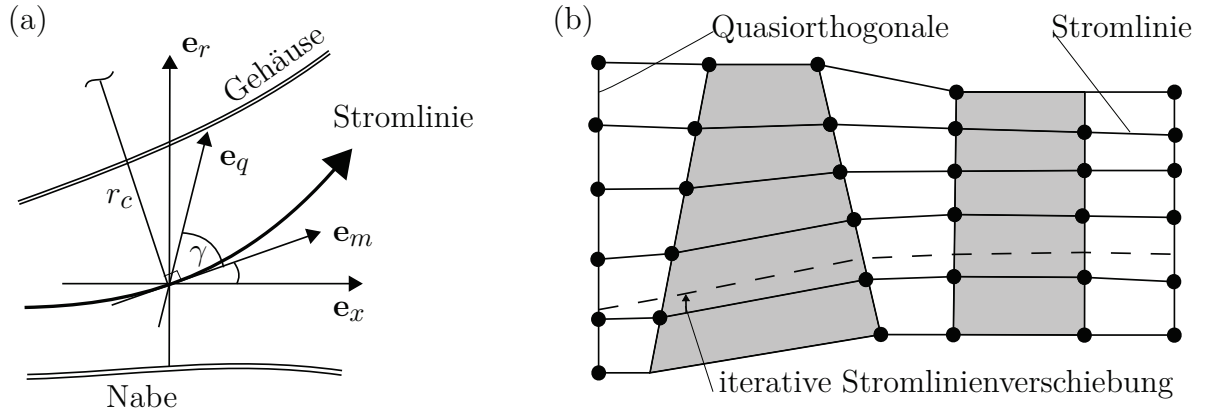
Der letzte Term wird durch (C.14) und der vorletzte Term durch (C.15) substituiert. Dadurch ergibt sich

$$T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial h_0}{\partial r} - u_x \frac{\partial u_x}{\partial r} - u_{\vartheta} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{u_{\vartheta}^2}{r} \quad (\text{C.18})$$

oder

$$T \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial h_0}{\partial r} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - \frac{u_{\vartheta}^2}{r}. \quad (\text{C.19})$$

Diese Formulierung wird auch als «radiales Gleichgewicht» bezeichnet. Der Umgang mit dieser Gleichung wird durch den Verwendungszweck bestimmt. Dabei existieren zwei Zwecke: Die Schaufelberechnung (direktes Problem) und der Schaufelentwurf (indirektes Problem). Beim direkten Problem ist die Verteilung des An- und Abströmwinkels durch die Schaufelgeometrie bekannt. Ziel dieser Methode ist die Bestimmung der Schaufelarbeit bei Auslegungskonditionen, aber auch an Betriebspunkten, für welche die Schaufel nicht



**Abb. C.2:** (a) Stromlinienbetrachtung nach DENTON (1978) und (b) Prinzipdarstellung eines numerischen Gitters zur Durchführung des Stromlinienkrümmungsverfahrens

ausgelegt wurde. Beim indirekten Problem wird durch Variation der Abströmgeschwindigkeiten  $u_\vartheta(r)$  und Axialgeschwindigkeiten  $u_x(r)$  eine Schaufelgeometrie entworfen, welche eine vorgegebene Arbeit über den gesamten Radius leistet.

Anfängliche Lösungsmethoden basierten auf Annahmen über einen adiabaten und reversiblen Prozess  $dS = 0$  bei konstanter Arbeitsumsetzung über den gesamten Radius, d.h.  $\partial h_0 / \partial r = 0$ . Dadurch vereinfacht sich Gl. (C.18) zu

$$\mathbf{u}_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = -\frac{u_\vartheta^2}{r}, \quad (\text{C.20})$$

so dass analytisch lösbare Methoden des «free-vortex» und «forced-vortex» angewendet werden können, siehe DIXON (2004). Der größte Nachteil dieser Betrachtungsweise ist, dass keine Geschwindigkeitskomponenten in radiale Richtung existieren, was natürlich in der Realität nicht der Fall ist. Zur Berücksichtigung dieses Effekts wurde das Verfahren von DENTON (1978) weiterentwickelt und die Strömung entlang von Stromlinien betrachtet. Per Definition lässt sich ein Strömungsfeld zu einem festen Zeitpunkt durch eine Schar von Kurven im Raum darstellen, welche in jedem Punkt den Geschwindigkeitsvektor tangieren. Die Gleichung (C.18) wird in Stromlinienkoordinaten bestehend aus Meridian- und Quasi-orthogonalenrichtung  $\mathbf{e}_m$  und  $\mathbf{e}_q$  aufgestellt, vgl. Abb. C.2a, und entspricht

$$T \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\partial h_0}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m^2}{\partial q} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial r^2 u_\vartheta^2}{\partial q} + \frac{u_m^2}{r_c} \sin \gamma + u_m \frac{\partial u_m}{\partial m} \cos \gamma, \quad (\text{C.21})$$

wobei  $r_c$  der lokale Krümmungsradius der Stromlinie ist. Diese Betrachtung bildet die Grundlage des Stromlinienkrümmungsverfahrens. Dieser Ansatz gehört zu den meist verbreiteten Throughflow-Methoden zur Bestimmung der Strömung in der Meridionalebene. Die Lösung der nichtlinearen Gleichung (C.21) wird numerisch durchgeführt. Zu diesem

Zweck wird in der Meridionalebene ein Rechengitter aus Stromlinien und den Quasiorthogonalen gebildet, siehe Abb. C.2b. Da die Lage der Stromlinien zunächst unbekannt ist, werden diese durch die Lage der Gitterpunkte iterativ geschätzt. Nach jeder Recheniteration wird die Lage der Knotenpunkte des Gitters, und somit auch der Stromlinien, entlang der Richtung der Quasiorthogonalen verschoben, bis Gleichung (C.21) erfüllt ist. Dieser Vorgang ist vereinfacht in Abb. C.2b dargestellt. Die numerische Lösung erfolgt mit der Methode der finiten Differenzen oder finiten Volumen. Durch Diskretisierung der das Problem beschreibenden Differentialgleichung (C.21) und Aufstellung von finiten Differenzen für das Rechengitter mit einigen hundert Punkten kann eine Feldgrößenverteilung innerhalb weniger Minuten berechnet werden.

Bis zum heutigen Tag werden Throughflow-Verfahren um Korrelationen und Ansätze erweitert, mit welchen Turbulenz- und Reibungseffekte, Sekundärströmungen, Profilverluste sowie Strömungen mehrstufiger Verdichter abgebildet werden können, siehe DENTON (1978), CUMPSTY UND GREITZER (2004) und AUS DER WIESCHE UND JOOS (2018). Wie anfangs erwähnt wird Throughflow auch zur Auslegung von Verdichtern verwendet. In diesem Kontext wird auf die Arbeiten zur Gesamtverdichterauslegung mit komplexen Schaufelformen von KESKIN (2007) und RÜHLE (2013) verwiesen.

Der Vollständigkeit halber muss hier gesagt werden, dass der Throughflow-Ansatz auch zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung angewendet werden kann. Eine sehr detaillierte Arbeit zu den Besonderheiten und der numerischen Lösung von Navier-Stokes-Throughflow-Gleichungen wurde von SIMON (2007) erstellt.

### C.3 MISES

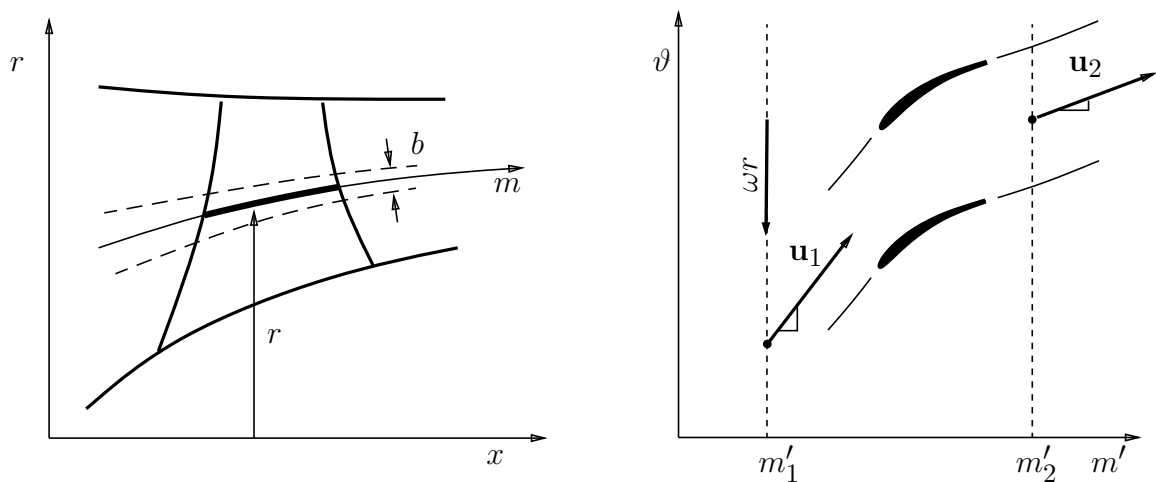
MISES ist ein am Massachusetts Institute of Technology von DRELA (1991) entwickeltes Programmpaket zur Analyse von Strömungen innerhalb einer Schaufelpassage von Turbomaschinen. Es handelt sich um eine Weiterentwicklung des durch GILES (1985) entwickelten Finite-Volumen-Ansatzes zur quasi-3D Berechnung der Strömung in der Radialebene. In diesem Verfahren werden Strömungsgleichungen auf einer zweidimensionalen Ebene der Dicke  $b$  gebildet, welche durch die Stromlinienkoordinate  $m$  und den Radius  $r$  aufgespannt werden, siehe Abb. C.3a. Der Verlauf von  $m$  wird dabei abhängig vom lokalen Radius  $r$  und der Lauflänge  $x$  mit der Stromlinienkoordinate  $m'$

$$m' := \int \frac{dm}{r} = \int \frac{\sqrt{dr^2 + dx^2}}{r} \quad (\text{C.22})$$

gebildet, wobei die  $x$ -Achse die Maschinenachse ist. Die rekursive Abbildungsvorschrift für  $m'$ ,  $\vartheta$  und  $r$  ausgehend von einem kartesischen Koordinatensystem lautet nach DRELA UND YOUNGREN (2008):

$$\begin{aligned} \vartheta_k &= \arctan\left(\frac{y_k}{x_k}\right), \\ r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \\ m'_k &= m'_{k-1} + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 + (x_k - x_{k-1})^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Als Resultat liegt eine zweidimensionale Darstellung eines Schaufelschnitts in der  $(m', \vartheta)$ -



**Abb. C.3:** Definition des Standard-Stromflächenkoordinatensystems nach DRELA UND YOUNGREN (2008)

Ebene vor, siehe Abb. C.3b.

Zur Beschreibung der Strömung wird eine stationäre, reibungsfreie Strömung betrachtet, womit sich die Navier-Stokes-Gleichungen (3.13), (3.36) und (3.51) vereinfachen. Wird in der  $(m', \vartheta)$ -Ebene der Geschwindigkeitsvektor  $\tilde{\mathbf{u}} = [u_m, u_\vartheta]^T$  eingeführt, ergeben sich die vereinfachten, auch Euler-Gleichungen genannten, Ausdrücke der Form

$$\frac{\partial(\rho u_m)}{\partial m'} + \frac{\partial(\rho u_\vartheta)}{\partial \vartheta} = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$\rho \left( u_m \frac{\partial u_m}{\partial m'} + u_\vartheta \frac{\partial u_m}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial m'}, \quad (\text{C.25})$$

$$\rho \left( u_m \frac{\partial u_\vartheta}{\partial m'} + u_\vartheta \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \vartheta}, \quad (\text{C.26})$$

$$\nabla^T \left[ \rho \left( e + \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2}{2} \right) \tilde{\mathbf{u}} \right] = -\nabla^T (p \tilde{\mathbf{u}}). \quad (\text{C.27})$$

Diese immer noch nichtlinearen Gleichungen werden mit der Verwendung des numerischen Verfahrens der Finiten-Volumen gelöst. Dazu werden, wie in Abschnitt 3.1.4 motiviert, die  $(m', \vartheta)$ -Ebene mit einem Rechengitter vernetzt, siehe Abb. 3.7, die beschreibenden Gleichungen (C.24)-(C.27) diskretisiert und anschließend iterativ gelöst. Als Resultat erhält man eine Feldverteilung von Druck, Geschwindigkeit und Temperatur im Fernfeld einer Schaufelpassage.

Zur Berücksichtigung viskoser Effekte in der Grenzschicht können zusätzliche integrale Grenzschichtgleichungen modelliert werden, auf deren Beschreibung im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen wird. Anstatt dessen wird auf das Ursprungswerk von DRELA (1991) verwiesen. Technische Details zur industriellen Anwendung von MISES sind zusätzlich in BESTLE UND DUTTA (2006) dargestellt. Der Vorteil der Anwendung von MISES ist, dass innerhalb von wenigen Minuten eine zweidimensionale Betrachtung der Strömungsanalyse möglich ist.

## C.4 HYDRA

HYDRA ist ein von Rolls-Royce und dessen Partnern entwickelter industrieller 3D-CFD Strömungslöser zur Berechnung von komplexen dreidimensionalen Turbomaschinenströmungen, LAPWORTH (2004). Zur Strömungsmodellierung werden die kompletten Navier-Stokes-Gleichungen (3.36), (3.13) und (3.51) verwendet. In der Software sind verschiedene Strömungslöser implementiert: ein nichtlinearer, ein linearer und ein adjungierter. Zur Modellierung der Turbulenz d.h. zum Schließen der RANS-Gleichungen, stehen verschiedene Turbulenzmodelle wie Spalart-Allmaras-Modell von SPALART UND ALLMARAS (1992), das  $k - \varepsilon$ - und  $k - \omega$ -Modell von WILCOX (1988) und gemischte Ansätze zur Verfügung. Der Lösungsalgorithmus basiert auf der Anwendung der Finite-Volumen-Methode auf einem unstrukturierten, hybriden, volumetrische Rechengitter. Die Diskretisierung der Strömungsgleichungen wird mit der Methode höherer Ordnung MUSCL von VAN LEER (1997) durchgeführt. Zur Lösung der entstandenen großen linearen Gleichungssysteme mit dünn besetzter Koeffizientenmatrix werden diese mit einer Block-Jacobi-Zerlegung vorkonditioniert, um die numerischen Lösungsverfahren zu stabilisieren und den Aufwand zu reduzieren. Zur Bestimmung der Strömungslösung wird ein explizites Zeitschrittverfahren verwendet, wobei ein Runge-Kutta Verfahren 5. Ordnung zum Einsatz kommt. Die CFD-Iterationen werden zusätzlich durch den Einsatz des Mehrgitter-Verfahrens nach MOINIER U. A. (1999) beschleunigt. Bei diesem Verfahren werden mehrere kleine Gitterelemente zu einem neuen großen Element zusammengefasst, so dass das Gitter gröber wird. Eine vergleichsweise einfache Strömungslösung auf dem groben Gitter dient dann als Ausgangslösung für eine Berechnung auf dem ursprünglichen, feinen Gitter. Eine weitere Beschleunigung der CFD-Iteration wird durch die parallele Berechnung mithilfe der Oplus Bibliothek erreicht, siehe HILL (2007).

HYDRA kann für sowohl für Verdichter- als auch für Turbinenanalyse verwendet werden. Zusätzliche, auf eine detaillierte Nachbildung der Turbomaschinenströmung spezialisierte Features sind Modelle zur Simulation von Leckage-Strömungen in Dichtungen und Zapfventilen sowie Effekten der Filmkühlung und komplexe Modelle zur Kopplung von Schaufelsegmenten durch Mischebenen.





## Anhang D: Ergänzende Bilder

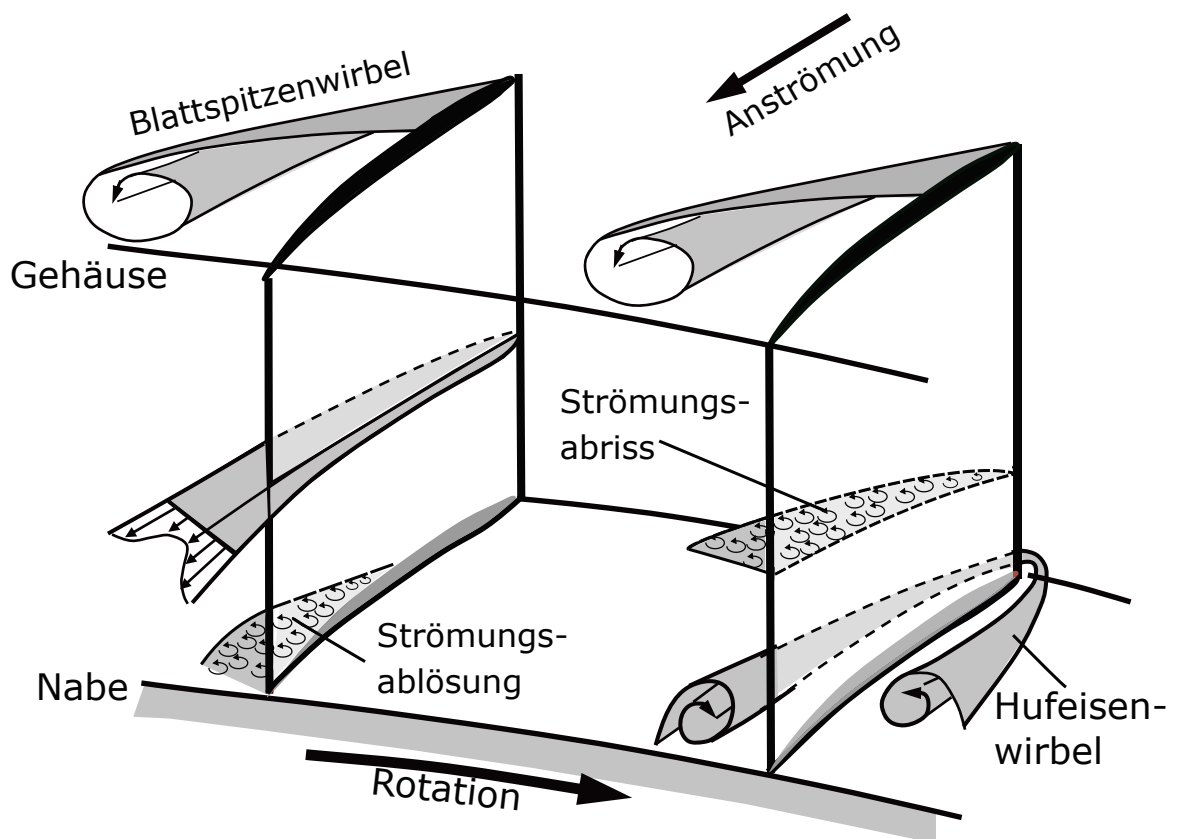


Abb. D.1: Strömungsphänomene in Turbomaschinenströmung nach RICK (2014) (modifiziert)

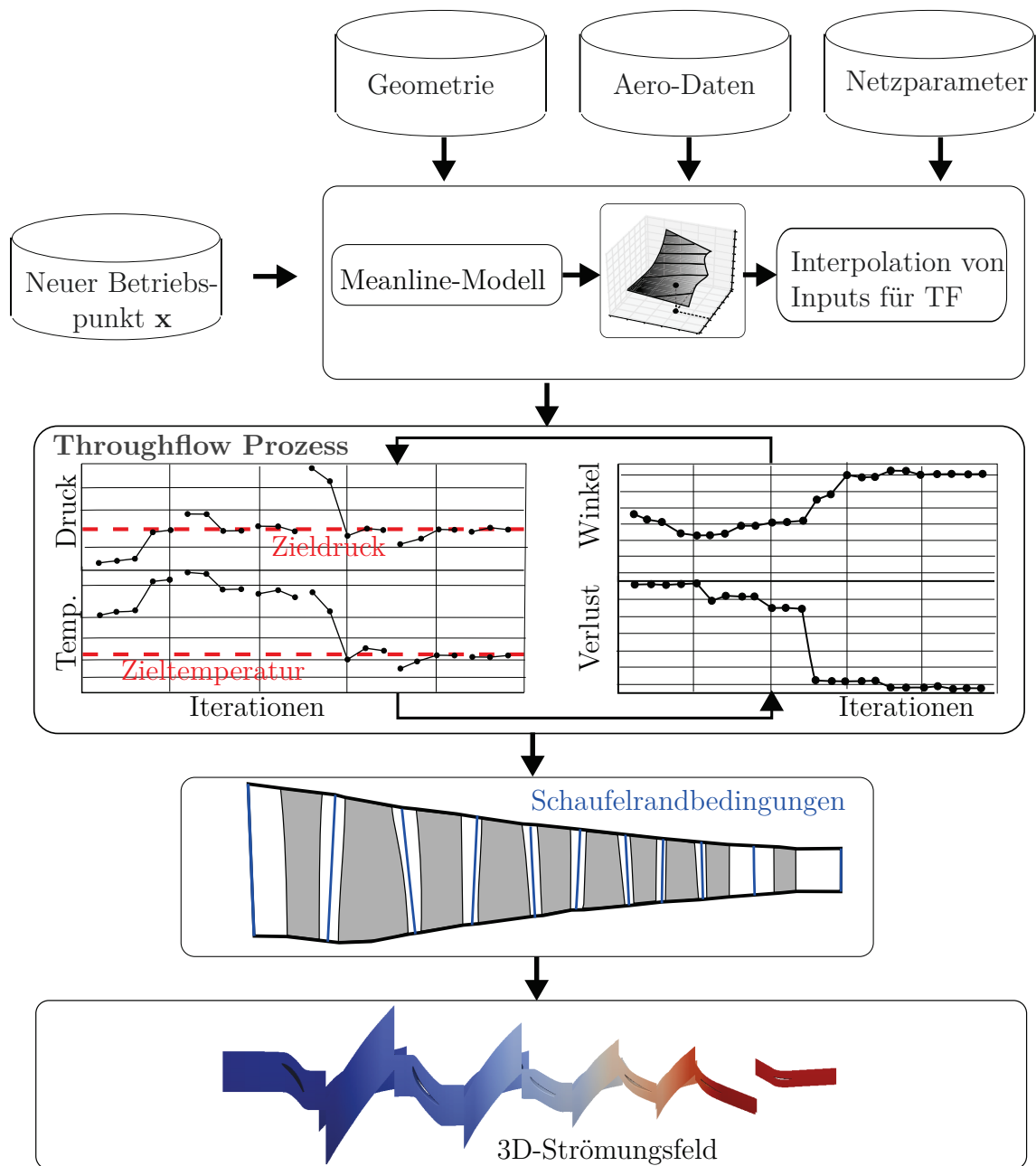


Abb. D.2: Prozess zur Initialisierung einer 3D-CFD-Startlösung mittels Meanline und Throughflow

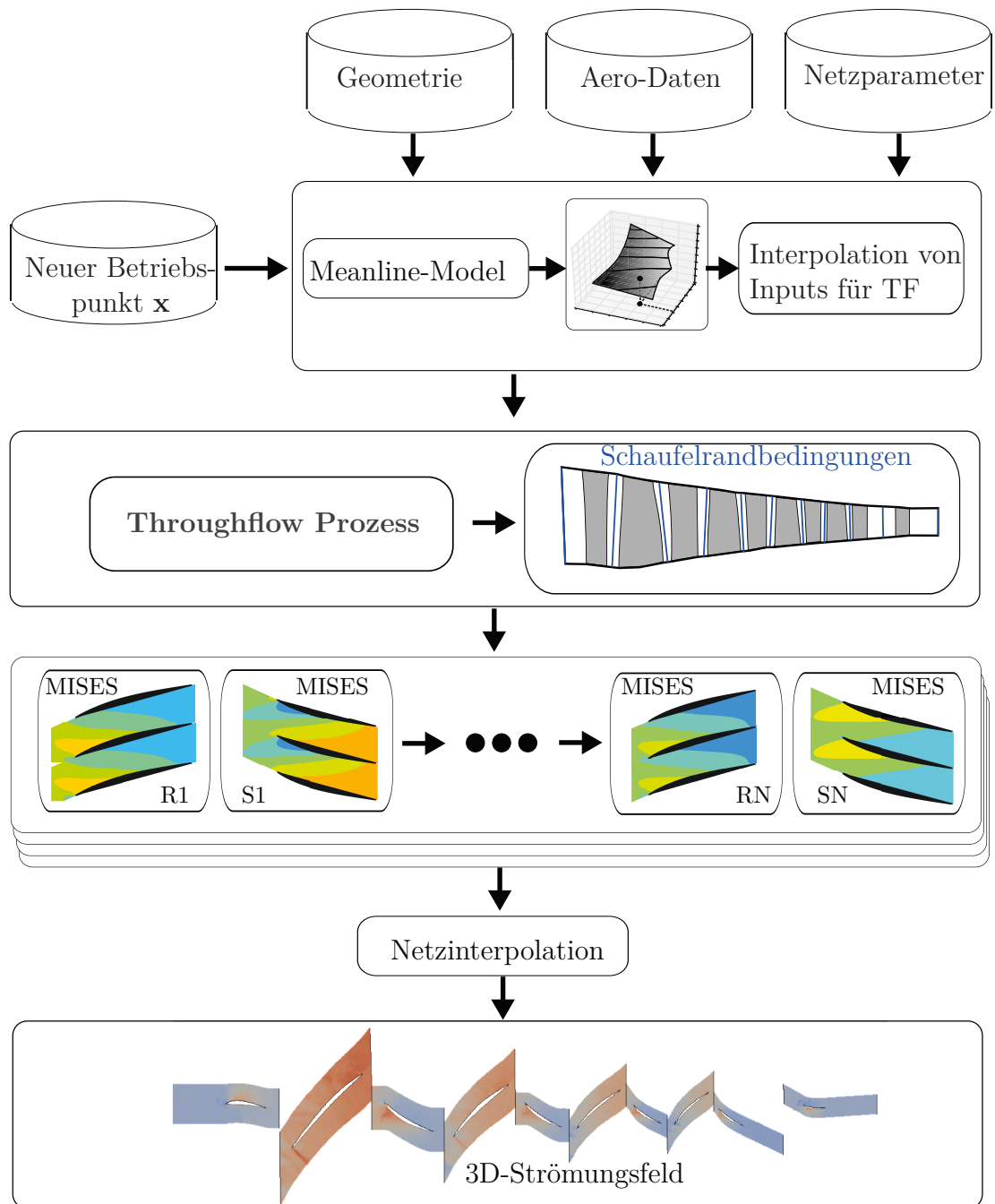
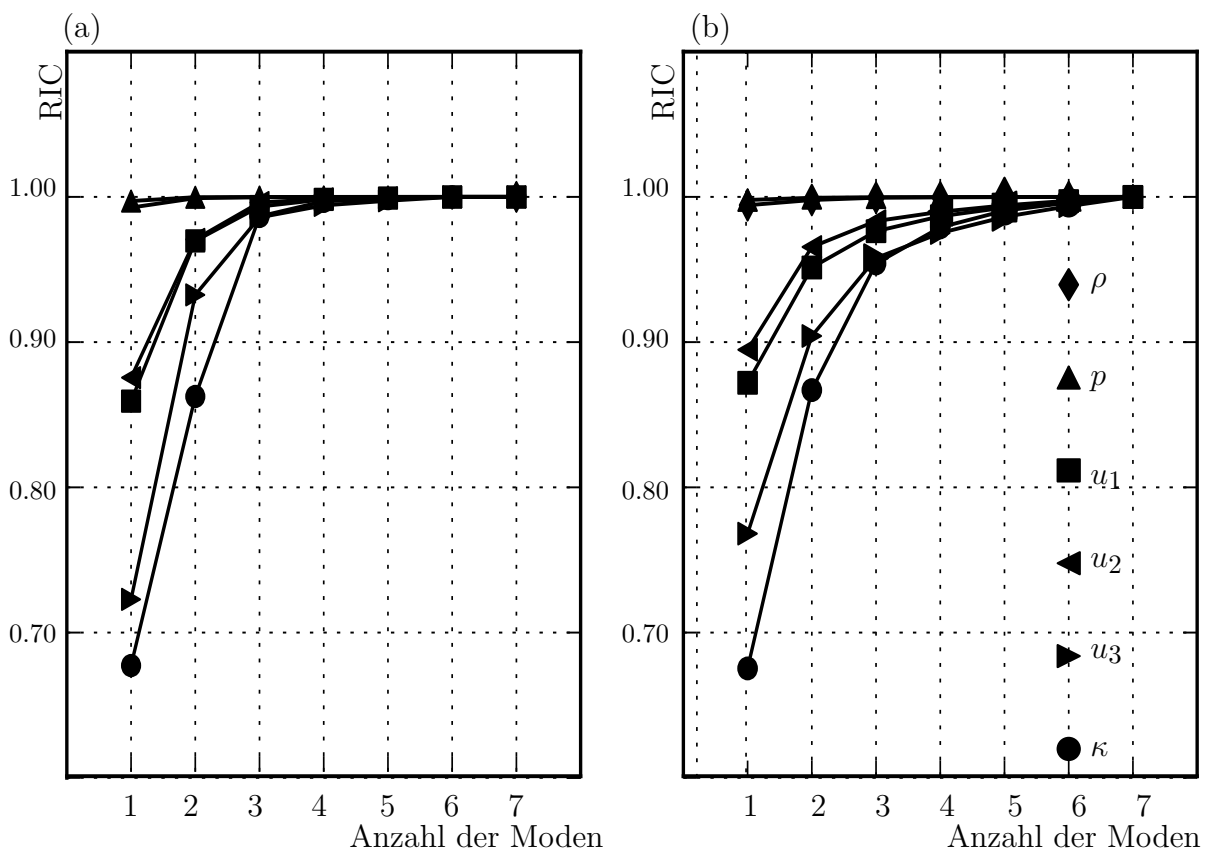
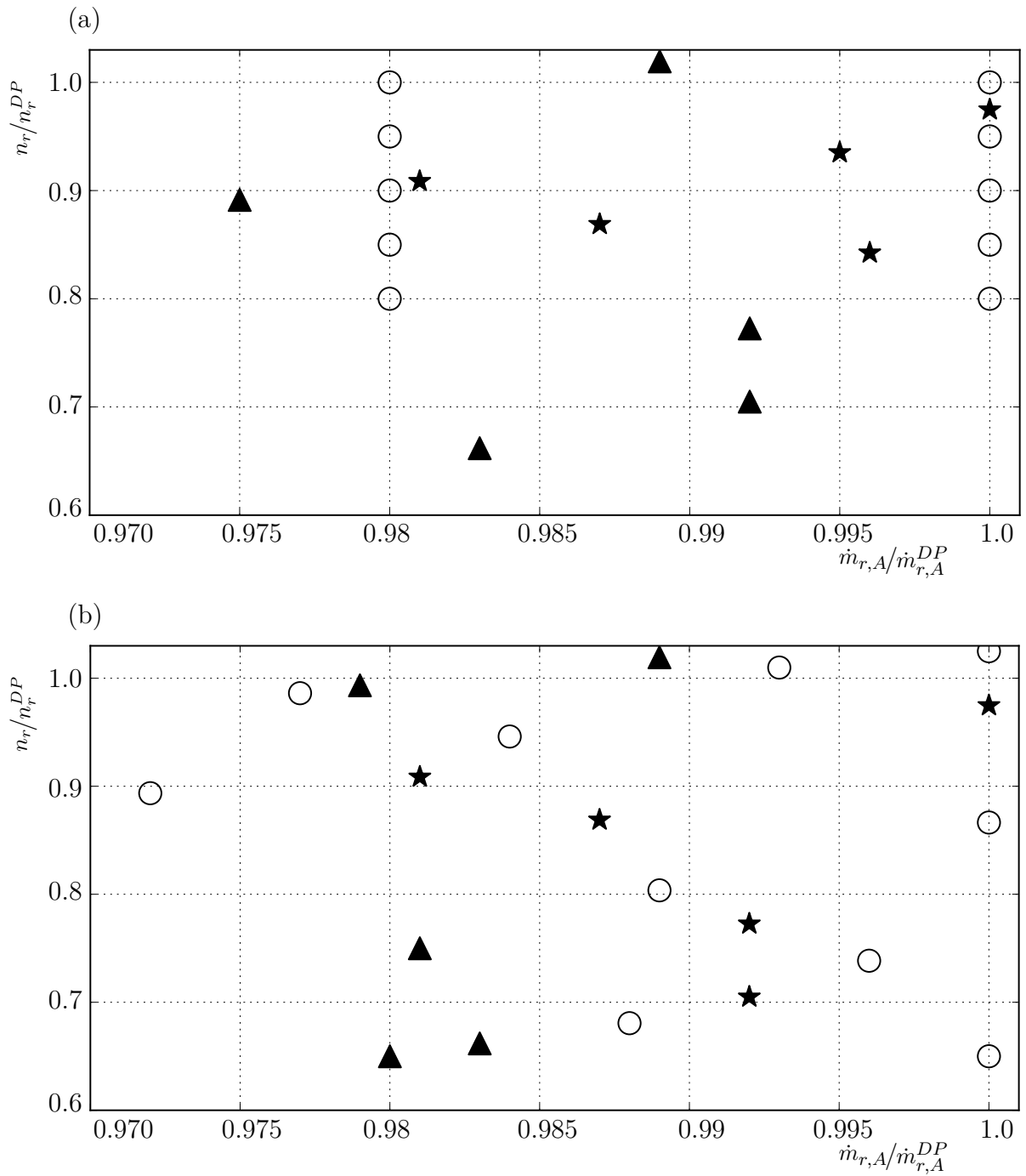


Abb. D.3: Prozess zur Initialisierung einer 3D-CFD Startlösung mittels Euler-MISES.



**Abb. D.4:** Akkumulierter relativer Informationsgehalt  $RIC$  einer (a) strukturierten und einer (b) unstrukturierten Anordnung der Stichprobe mit  $N = 8$  Punkten.



**Abb. D.5:** Strukturierte (a) und unstrukturierte (b) Trainingsstichprobe (○) sowie zufällige Teststichprobe für innere (★) und äußere Punkte (▲)



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schnittdarstellung eines modernen Rolls-Royce Turbofan-Triebwerks der Familie TRENT mit Bläser (B), Mitteldruckverdichter, Hochdruckverdichter (V), Brennkammer (BK) sowie Hoch- und Mitteldruckturbine (T) (Quelle: Rolls-Royce-Webseite) . . . . .	3
1.2	Einteilung der Verdichterströmung nach WU (1952) in zwei orthogonale Ebenen, die Radialebene S1 (engl. blade-to-blade) und die Meridionalebene S2 . . . . .	5
2.1	Prinzipieller Aufbau eines Axialverdichters (a) sowie Anteile jeder Verdichterstufe an der Druckerhöhung (b) in axiale Richtung, nach ROLLS-ROYCE (1996) . . . . .	12
2.2	Strömungsablösung aufgrund eines positiven Druckgradienten (a), Strömungsabrisses an einer Kante (b), sowie einer Kombination beider Phänomene an einer angeströmten Verdichterschaufel (c) . . . . .	13
2.3	Momentaufnahmen von einem Triebwerkspumpen einer Boeing 777 und dem daraus resultierenden oszillierenden Flammenstoß (a), sowie Detailaufnahmen von Schädigungen eines Schaufelsegments nach unkontrolliertem Triebwerkspumpen (b) (Quelle: EL-SAYED (2016)) . . . . .	15
2.4	Verdichterkennfeld in (a) klassischer Darstellung mit $\dot{m}_{r,E}$ als unabhängiger Variable und $n_r$ als Parameter sowie (b) in Abhängigkeit des Austrittsmassenstroms $\dot{m}_{r,A}$ . . . . .	17
2.5	Dreidimensionale Darstellung des Verdichterkennfelds für (a) Totaldruckverhältnis $\pi$ und (b) Wirkungsgrad $\eta$ als Funktion von $\dot{m}_{r,A}$ und $n_r$ . Zusätzlich ist die Linie $\dot{m}_{r,A}^{DP} = konst.$ gestrichelt dargestellt . . . . .	18
3.1	Raumfestes Kontrollvolumen mit allen in $x$ -Richtung fließenden Massenströmen . . . . .	23
3.2	Darstellung eines mitbewegten, materiellen Kontrollvolumens sowie aller in $x$ -Richtung wirkenden Spannungen . . . . .	25



3.3	Mitbewegtes Kontrollvolumen mit in $x$ -Richtung wirkenden Kräften, Geschwindigkeiten und Wärmeflüssen durch die Volumenwände . . . . .	30
3.4	Körperangepasstes Gitter im (a) physikalischen $(x, y)$ -System und ein (b) transformiertes rechtwinkliges Gitter im numerischen $(\xi, \eta)$ -System . . . . .	34
3.5	Zusammenhang zwischen Genauigkeit der Modellbildung bei der numerischen Strömungssimulation und der dafür benötigten Rechenzeit . . . . .	36
3.6	Schematische Darstellung eines (a) Meanline- und (b) Throughflow-Modells eines zweistufigen Verdichters. Statoren sind grau, Rotoren blau gezeichnet. Die Stromlinien, welche Grundlage der Bilanzgleichungen sind, sind als gestrichelte Linien dargestellt, Punkte, an denen explizit Strömungsgrößen ermittelt werden, sind mit $\bullet$ gekennzeichnet. . . . .	37
3.7	Darstellung eines zweidimensionalen Euler-Netzes eines Schaufelpassagen-segments . . . . .	39
3.8	Darstellung eines dreidimensionalen CAD-Verdichtermodells mit einer für 3D-CFD vernetzten Passage sowie Detaildarstellungen von Rechengittern der Einlaufschaufel sowie einer Rotorschaufel . . . . .	40
3.9	Darstellung eines Schnittmodells des 4.5-stufigen Axialhochdruckverdichters einer Kraftwerksturbine mit der Bezeichnung Rig250. Die Statoren sind grau, die Rotoren blau gezeichnet. . . . .	41
3.10	Interaktion zwischen einer variablen Schaufel (VSV) und dem nachfolgenden Rotor (a) sowie dazugehöriges Verstellgesetz (b). Die grauen apostrophierten Werte resultieren aus der Abströmung der geschlossenen Schaufel, die schwarzen Werte aus der Abströmung der im Auslegungsfall geöffneten Schaufel. . . . .	42
4.1	Konvergenzverläufe von 3D-CFD-Rechnungen für Massenstrom und maximalem Saugdruck für eine (a) konvergierte und (b) nichtkonvergierte Strömungslösung . . . . .	45
4.2	Darstellung von drei unterschiedlichen Klassifizierungsmethoden und den daraus resultierenden Entscheidungsfronten $x_2 = f(x_1)$ : Lineare Regression (a), k-Nearest-Neighbor (b), Support Vector Machine (c). . . . .	46
4.3	Lineare Trennung von gültigen ( $\circ$ ) und ungültigen ( $\bullet$ ) Punkten durch eine lineare Entscheidungsfront $H$ . . . . .	48
4.4	Kernel-Trick zur Transformation einer (a) im Zweidimensionalen linear nicht trennbaren Menge in eine (b) im Dreidimensionalen linear trennbaren Menge . . . . .	51
4.5	Initiale Stichprobenverteilung (a) und ausgewertetes Gitter (b) mit als gültig ( $\circ, \square$ ) und ungültig ( $\bullet, \blacksquare$ ) klassifizierten Punkten . . . . .	53

4.6	Iterative serielle Exploration des Designraums auf Basis von konvergierten (○) und divergierten (●) CFD-Lösungen mit jeweils einem Kandidatenpunkt (★) je Iterationsschritt. Zusätzlich Darstellung der Entscheidungsfront $f_P^{(\nu)}$ (durchgezogene Linie) im Vergleich zur echten Pumpgrenze $f_P$ (gestrichelte Linie) . . . . .	56
4.7	Auswahlverfahren von $N_c = 4$ Kandidatenpunkten mit dem parallelen linienbasierten Ansatz . . . . .	58
4.8	Parallele linienbasierte Exploration des Designraums mit jeweils $N_c = 12$ Kandidatenpunkten (★) zur iterativen Verbesserung der Entscheidungsfront $f_P^{(\nu)}$ (durchgezogene Linie) als Näherung der Pumpgrenze $f_P$ (gestrichelte Linie) . . . . .	59
4.9	Flächenbasierte Auswahl von Kandidatenpunkten (★) in einem Grenzstreifen zu jeder aktuellen Entscheidungsfront (durchgezogene Linie) . . . . .	62
4.10	Parallele flächenbasierte Exploration des Suchraums mit $N_c = 12$ Kandidatenpunkten (★) innerhalb des Grenzstreifens (strichpunktierte Linie) der Entscheidungsfront $f_P^{(\nu)}$ (durchgezogene Linie) zur Approximation der Pumpgrenze $f_P$ (punktierte Linie) . . . . .	63
4.11	Benötigte Iterationen und Approximationsfehler $\varepsilon_{max}$ für verschiedene Parallelisierungsgrade $N_c$ und Abbruchfehler $\varepsilon_K$ für (a) linienbasierte und (b) flächenbasierte Exploration der Pumpgrenzen anhand eines Meanline-Modells	65
4.12	Anomale Entscheidungsfront (rote Linie) auf Basis von der Trainingsmenge $X$ (a), durch die SVM generierter Entscheidungsraume (b) sowie korrigierte Entscheidungsfront (c) auf Basis einer erweiterten Trainingsmenge $X \cup X^{Ph}$	66
5.1	Konvergierte Punkte (○) aus a) der Suche nach Betriebsgrenzen und b) mit zusätzlicher fill-up DoE (⊕) . . . . .	73
5.2	Vergleich der Antwortflächengüte für das Druckverhältnis $\pi$ für vier normierte Drehzahlen $\check{x}_2 \in \{0, 0.4, 0.94, 1.0\}$ mit je 9 direkt ausgewerteten reduzierten Massenströmen $\dot{m}_{r,A}$ (●) mit $\hat{\pi}$ aus RBF (gestrichelte Linie) und $\hat{\pi}$ aus Polynomregression (durchgezogene Linie) . . . . .	75
5.3	Vergleich der Antwortflächengüte für den reduzierten Massenstrom am Eintritt $\dot{m}_{r,E}$ für vier normierte Drehzahlen $x_2 \in \{0, 0.4, 0.94, 1.0\}$ mit je 9 direkt ausgewerteten reduzierten Massenströmen $\dot{m}_{r,A}$ (●) mit $\hat{m}_i$ aus RBF (gestrichelte Linie) und $\hat{m}_i$ aus Polynomregression (durchgezogene Linie) .	76
5.4	Verteilung der Strichprobe (○) zur Approximation des Kennfeldes und der tatsächlich vermessenen Betriebspunkte (a), sowie Darstellung des relativen Fehlers $\varepsilon_r$ in % an diesen Punkten (b) . . . . .	77

5.5	Verteilung der Strichprobe ( $\bullet$ ) und der zusätzlichen fillup-DoE ( $\oplus$ ) zur Approximation des Kennfeldes, sowie der tatsächlich vermessenen Betriebspunkten (a). Relativer Fehler $\varepsilon_r$ in % an diesen Punkten (b) . . . . .	78
5.6	Klassische Darstellung des Kennfeldes für das Totaldruckverhältnis als Funktion des reduzierten Eintrittsmassenstroms für neun Drehzahlen mit nachgerechneten (durchgezogene Linie) und approximierten (gepunktete Linie) Betriebsgrenzen . . . . .	80
6.1	Geberlösung der Machzahl für das IGV bei 100% Drehzahl (a) und die baryzentrische Interpolation dieser auf die Nehmerlösung der verstellten IGV bei 65% Drehzahl (b). Durch das Fehlen von Feldgrößen innerhalb der Kontur der Geberlösung entsteht in der Nehmerlösung in diesem Bereich ein «Feldschatten» (bläulich). . . . .	86
6.2	Geberlösung der Machzahl für das IGV bei 100% Drehzahl (a) und die topologische Interpolation dieser auf die Nehmerlösung mit verstelltem IGV bei 65% Drehzahl (b). . . . .	87
6.3	Relativer Fehler (6.31) in % des statischen Austrittsdrucks $p_{s,A}$ an allen Schaufelreihen für den nichtinitialisierten Fall für vier reduzierte Massenströme (a) bis (d) und je fünf verschiedene Drehzahlen . . . . .	94
6.4	Relativer Fehler in % für den mit Throughflow initialisierten Fall am Beispiel des statischen Drucks $p_{s,A}$ an allen Schaufelreihen für vier reduzierte Massenströme und je fünf verschiedene Drehzahlen . . . . .	95
6.5	Fehlerrate $\varepsilon_{i,r}^{u1}$ der Geschwindigkeit für Betriebspunkte (a) $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (1.0, 0.65)$ , (b) $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (1.0, 0.8)$ , (c) $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.0, 0.9)$ , (d) $\tilde{\mathbf{x}}_4 = (1.0, 1.0)$ und (e) $\tilde{\mathbf{x}}_5 = (1.0, 1.025)$ für eine Schnittebene auf 72% der radialen Höhe . . . . .	98
6.6	Rechenzeiten $t_G$ bei Initialisierung mit dem nächsten Nachbarn im Vergleich zur Rechenzeit $t_{ref}$ der nichtinitialisierten 3D-CFD. Die Gesamtrechenzeit $t_G$ ist die Summe der reinen Rechenzeit der initialisierten Lösung $t_{init}$ und der Zeit zur Erstellung der Initiallösung $t_{prep}$ . . . . .	101
6.7	Ausschnitt eines Konvergenzverlaufes einer oszillierenden Strömungslösung	102
6.8	Statischer Druck auf einer Schaufelhöhe von 75% der Schaufeln R1 und S1 für die Betriebspunkte der POD-Trainingsmenge . . . . .	104
6.9	Mittelwertvektor $\mathbf{d}$ sowie erste drei Basisvektoren $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ der Druckverteilung $p$ für Rotor R1 und Stator S1 resultierend aus der POD-Zerlegung der strukturierten Stichprobe. . . . .	104
6.10	Mittelwertvektor $\mathbf{d}$ sowie erste drei Basisvektoren $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ der Druckverteilung $p$ für Rotor R1 und Stator S1 resultierend aus der POD-Zerlegung der unstrukturierten Stichprobe. . . . .	106

6.11	Rechenzeiten einer inneren (a) und äußeren (b) Stichprobe aus fünf Punkten (I bis V) für den nichtinitialisierten Fall $t_{ref}$ (rot) und den POD-initialisierten Fall $t_{pod}$ (blau), wobei die POD-Moden auf einem strukturierten Sampling basieren. Die Gesamtrechenzeit $t_G$ ist die Summe aus CFD-Rechenzeit $t_{pod}$ und Bearbeitungszeit für Netztransformation und Projektion $t_{prep}$ (weiß). . . . .	108
6.12	Rechenzeiten einer inneren (a) und äußeren (b) Stichprobe aus fünf Punkten (I bis V) analog zu Abb.6.11, wobei die POD-Moden auf einem unstrukturierten Sampling basieren. . . . .	108
6.13	Konvergenzverlauf des Massenstroms $\dot{m}_E$ als Funktion der 3D-CFD-Iterationen im (a) nichtinitialisierten und (b) POD-initialisierten Fall für drei, farblich gekennzeichnete, nichtkonvergierte Rechnungen . . . . .	109
7.1	Flussdiagramm des Gesamtprozesses S C <sup>2</sup> A L <sup>2</sup> E T O R zur Bestimmung eines Verdichter kennfelds mit 3D-CFD . . . . .	113
7.2	Flussdiagramm des Teilprozesses zur Bestimmung von Betriebsgrenzen . . . . .	114
7.3	Schematische Darstellung der Arbeitskette für das <i>preprocessing</i> . . . . .	117
7.4	Ablauf der Berechnung eines Betriebspunktes mit der GPDS-Umgebung . . . . .	119
7.5	Iterative flächenbasierte Exploration des Suchraums mit $N_c = 7$ Kandidatenpunkten (★) und der jeweiligen Entscheidungsfront $f_S^{(\nu)}$ (durchgezogene Linie) für die Sperrgrenze . . . . .	121
7.6	Iterative flächenbasierte Exploration des Suchraums mit $N_c = 7$ Kandidatenpunkten (★) und die jeweilige Entscheidungsfront $f_P^{(\nu)}$ (durchgezogene Linie) für die Pumpgrenze . . . . .	123
7.7	Initialen Stichprobe (a) mit daraus resultierender Entscheidungsfront $f_P^{1(0)}$ (durchgezogene Linie) und 7 Kandidatenpunkten ★ sowie Erweiterung der Stichprobe um 7 konvergierte Punkte (●) und die daraus resultierende Entscheidungsfront (b). . . . .	124
7.8	Punktverteilungen der (a) initialen Stichprobe mit daraus resultierender Entscheidungsfront $f_P$ (durchgezogene Linie), 7 Kandidatenpunkten ★ und der zusätzlichen Erweiterung um 7 konvergierte Punkte (●). Neue Entscheidungsfront nach 3D-CFD-Auswertung der Kandidaten (b) mit dem $k - \omega$ -Turbulenzmodell. . . . .	125
7.9	Balkendiagramm für (a) minimale, maximale, mittlere CFD-Rechenzeit und der Gesamtbearbeitungszeit, sowie (b) minimale, maximale und mittlere CFD-Iterationszahl für alle SVM-Iterationen $\nu$ der Sperrgrenzenbestimmung . . . . .	127

7.10	Balkendiagramm für (a) minimale, maximale, mittlere CFD-Rechenzeit und Gesamtbearbeitungszeit, sowie (b) minimale, maximale und mittlere CFD-Iterationszahl für alle SVM-Iterationen $\nu$ der Pumpgrenzenbestimmung . . . . .	128
7.11	Machzahlverteilung in Mittelschnitt der letzten Verdichterstufe R4-S4 und der Nachleitschaufel S5 für Betriebspunkte in der Nähe der Sperrgrenze: a) $\tilde{\mathbf{x}} = (1.29, 0.65)$ , b) $\tilde{\mathbf{x}} = (1.24, 0.75)$ , c) $\tilde{\mathbf{x}} = (1.30, 0.9)$ und d) $\tilde{\mathbf{x}} = (1.33, 1.0)$ . Zusätzlich ist die Kontur $M = 1$ eingezeichnet. . . . .	130
7.12	Vergleich der Strömung an Betriebspunkten entlang der Arbeitslinie (a,c,e,f) mit pumpgrenzennahen Betriebspunkten (b, d, f, h) anhand von Stromlinien und axialer Wandschubspannung $\tau_w$ . . . . .	132
7.13	Radiale Verlustverteilungen für ausgewählte Betriebspunkte bezogen auf die Mittelschnittverluste $\omega_{R_i} _{1,1}^{\tilde{r}=0.5}$ am Analysepunkt . . . . .	133
7.14	Gemeinsame Menge aller (a) zur Approximation der Betriebsgrenzen verwendeten Stichproben ( $\circ, \bullet$ ), der (b) zusätzlichen fill-up DoE ( $\oplus$ ) sowie die approximierten Betriebsgrenzen $f_P, f_S$ (rote durchgezogene Linien) . . . .	135
7.15	(a) Approximiertes Kennfeld des Totaldruckverhältnisses $\pi$ als Funktion von $\dot{m}_{r,E}/\dot{m}_{r,E}^{DP}$ mit (gepunktete Linie) Betriebsgrenzen, fünf Drehzahlen (durchgezogene Linie) und je sechs Betriebspunkten pro Drehzahl aus Rechnungen ( $\times$ ) . . . . .	136
7.16	Approximationsfehler für $\pi, \eta$ und $\dot{m}_{r,E}$ für die untersuchten Drehzahlen .	137
C.1	Geschwindigkeitsdreiecke im Relativ- und Absolutsystem einer rotierenden Rotorschaufel (a) sowie im Absolutsystem einer Statorschaufel (b) . . . . .	148
C.2	(a) Stromlinienbetrachtung nach DENTON (1978) und (b) Prinzipdarstellung eines numerischen Gitters zur Durchführung des Stromlinienkrümmungsverfahrens . . . . .	151
C.3	Definition des Standard-Stromflächenkoordinatensystems nach DRELA UND YOUNGREN (2008) . . . . .	153
D.1	Strömungsphänomene in Turbomaschinenströmung nach RICK (2014) (modifiziert) . . . . .	157
D.2	Prozess zur Initialisierung einer 3D-CFD-Startlösung mittels Meanline und Throughflow . . . . .	158
D.3	Prozess zur Initialisierung einer 3D-CFD Startlösung mittels Euler-MISES.	159
D.4	Akkumulierter relativer Informationsgehalt $RIC$ einer (a) strukturierten und einer (b) unstrukturierten Anordnung der Stichprobe mit $N = 8$ Punkten. . . . .	160

D.5 Strukturierte (a) und unstrukturierte (b) Trainingsstichprobe (○) sowie zufällige Teststichprobe für innere (★) und äußere Punkte (▲) . . . . . 161



# Tabellenverzeichnis

6.1	Rechenzeiten in Minuten für die untersuchten Kennfeldpunkte für fünf verschiedene Drehzahlen $\tilde{x}_2$ und 5 Massenströme $\tilde{x}_1$ für CFD-Berechnungen ohne Initialisierung (I), mit Throughflow-Initialisierung (TF) und mit MISES-Initialisierung (MI) . . . . .	93
6.2	Initialisierungsfehler bei Verwendung des MISES-Ansatzes für vier Betriebspunkte $\tilde{\mathbf{x}}_i$ entlang der normierten Arbeitslinie $\tilde{x}_1^{(DP)} = konst.$ . . . . .	97
6.3	Rechenzeiterparnis im Fall der Initialisierung mit dem Auslegungspunkt im Vergleich zur Rechenzeit im nichtinitialisierten Fall $t_{ref}$ . Dabei fließt sowohl die Zeit zur Erstellung der Initiaillösung $t_{prep}$ als auch die anschließende reine Rechenzeit der initialisierten Lösung $t_{init}$ ein. . . . .	99
6.4	Mittlerer Fehler von Feldgrößen einer (a) inneren und (b) äußeren Stichprobe bei Rekonstruktion aus POD-Moden . . . . .	106
6.5	Mittlerer Fehler von Feldgrößen bei der Rekonstruktion von zufällig gewählten Punkten einer (a) inneren und (b) äußeren Stichprobe aus POD-Moden, welche auf Basis von unstrukturiert verteilten Trainingspunkten generiert wurden . . . . .	107
7.1	Parameterfestlegung für die Verdichter kennfeldapproximation . . . . .	120





# Literaturverzeichnis

- [Adamczyk 1985] ADAMCZYK, J. J.: Model Equation for Simulating Flows in Compressor Blade Rows Using a Tangential Blade Force Multistage Turbomachinery. *ASME paper 85-GT-226* (1985), 1–37
- [Aldi u. a. 2014] ALDI, N. ; MORINI, M. ; PINELLI, M. ; SPINA, P. R. ; SUMAN, A.: Cross-Validation of Multistage Compressor Map Generation by Means of Computational Fluid Dynamics and Stage-Stacking Techniques. *Proceedings of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Düsseldorf, Germany* (2014)
- [Alonso u. a. 2012] ALONSO, D. ; VEGA, J. ; VELAZQUEZ, A. ; PABLO, V.: Reduced-Order Modeling of Three-Dimensional External Aerodynamic Flows. *Journal of Aerospace Engineering* 25 (2012), 588–599
- [Bestle 1994] BESTLE, D.: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer Verlag, Berlin, 1994
- [Bestle und Dutta 2006] BESTLE, D. ; DUTTA, A. K.: *2D-Schaufelprofilanalyse mit MISES*. Forschungsbericht FB-11, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik, Cottbus, 2006
- [Bielitz 2019] BIELITZ, T.: *Untersuchung geeigneter Initialisierungsstrategien zur Beschleunigung der 3D-CFD Analyse von Verdichterströmungen*. Bachelorarbeit BSc-10, BTU Cottbus-Senftenberg, 2019
- [Bouhamidi und Méhauté 2004] BOUHAMIDI, A. ; MÉHAUTÉ, A. L.: Radial Basis Functions Under Tension. *Journal of Approximation Theory* 127 (2004), 135–154
- [Bräunling 2014] BRÄUNLING, W. J.: *Flugzeugtriebwerke*. Springer Vieweg, Hamburg, 2014
- [Burguburu 2011] BURGUBURU, S.: Compressor Characteristics Generation with CFD and their Use for a Fast Multistage Axial Compressor Design. *Proceedings of ETC 2011, Istanbul, Turkey* (2011)
- [C. 1957] C., Chao K.: An Optimum Character Recognition System Using Decision Functions. *IRE Transactions EC-6* (1957), 247–254

- [Cumpsty 2004] CUMPSTY, N. A.: *Compressor Aerodynamics*. Krieger Publishing Company, Florida, 2004
- [Cumpsty und Greitzer 2004] CUMPSTY, N. A. ; GREITZER, E. M.: Ideas and Methods of Turbomachinery Aerodynamics: A Historical View. *Journal of Propulsion and Power* 20 (2004), 15–26
- [Denton 1978] DENTON, J. D.: Throughflow Calculations for Transonic Axial Flow Turbines. *Journal of Engineering for Power* 100 (1978), 212–218
- [Dixon 2004] DIXON, S. L.: *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. Elsevier, Boston, 2004
- [Drela 1991] DRELA, M.: *Viscous Design and Analysis Methods for Transonic Compressor Blading*. Final Technical Report, Inst. of Tech., Cambridge. Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1991
- [Drela und Youngren 2008] DRELA, M. ; YOUNGREN, H.: *A User's Guide to MISES 2.63*. MIT Aerospace Computational Design Laboratory, 2008
- [Du und Léonard 2011] DU, W. ; LÉONARD, O.: A Quasi-1D Model for Transonic Multistage Axial Compressors. *Proceedings of ETC 2011, Istanbul, Turkey* (2011)
- [Duda u. a. 2004] DUDA, R. O. ; HART, P. E. ; STORK, D. G.: *Pattern Recognition*. Wiley, New York, 2004
- [Dutta 2011] DUTTA, A.: *An Automated Multi-Objective Optimization Approach for Aerodynamic 3D Compressor Blade Design, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2011
- [El-Sayed 2016] EL-SAYED, A.: *Fundamentals of Aircraft and Rocket Propulsion*. Springer-Verlag, London, 2016
- [Fei u. a. 2016] FEI, J. ; ZHAO, N. ; SHI, Y. ; FENG, Y. ; WANG, Z.: Compressor Performance Prediction Using a Novel Feed-Forward Neural Network Based on Gaussian Kernel Function. *Advances in Mechanical Engineering* 8 (2016), 1–14
- [Ferziger u. a. 2008] FERZIGER, H ; PERIC, M. ; STREET, L: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 2008
- [Frost 1972] FROST, D. H.: *A Streamline Curvature Through-Flow Computer Program for Analysing the Flow through Axial-Flow Turbomachines*. Aeronautical Research Council; reports and memoranda, Her Majesty's stationery Office, 1972
- [Gbadebo u. a. 2005] GBADEBO, S. A. ; CUMPSTY, N. A. ; HYNES, T. P.: Three-Dimensional Separations in Axial Compressors. *ASME Journal of Turbomachinery* 127 (2005), 331–339

- [Ghorbanian und Gholamrezaei 2016] GHORBANIAN, K. ; GHOLAMREZAEI, M.: An Artificial Neural Network Approach to Compressor Performance Prediction. *Applied Energy* 86 (2016), 1210–1221
- [Giles 1985] GILES, M. B.: *Newton Solution of Steady Two-Dimensional Transonic Flow, PhD-Thesis*. Gas Turbine Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts Institute of Technology, 1985
- [Gräsel u. a. 2004] GRÄSEL, J. ; KESKIN, A. ; SWOBODA, M. ; PRZEWOZNY, H. ; SAXER, A.: A Full Parametric Model for Turbomachinery Blade Design and Optimisation. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 1* (2004), 907–914
- [Gubernatis und Lookman 2018] GUBERNATIS, J. E. ; LOOKMAN, T.: Machine Learning in Material Design and Discovery: Examples from the present and suggestions for the future. *Physics Review Materials* 2 (2018), 120301–120316
- [Hill 2007] HILL, N.: Achieving High Parallel Performance for an Unstructured Unsteady Turbomachinery CFD Code. *Aeronautical Journal* 111 (2007), 185–193
- [Hinz 2012] HINZ, M.: *Neue Parametrisierungsstrategien und Methoden der Prozessbeschleunigung für die Verdichteroptimierung, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2012
- [Howel 1945] HOWEL, A. R.: Design of Axial Flow Compressors. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 153 (1945), 452–462
- [Ivanov u. a. 2018] IVANOV, D. ; BESTLE, D. ; JANKE, C.: Fast Compressor Map Computation by Utilizing Support Vector Machine and Response Surface Approximation. *Proceedings of WCCI 2018, Rio de Janeiro, Brazil* (2018), 3059–3066
- [Ivanov u. a. 2018, 211–226] IVANOV, D. ; BESTLE, D. ; JANKE, C.: *A Response Surface Based Strategy for Accelerated Compressor Map Computation*. In: *Evolutionary and Deterministic Methods for Design Optimization and Control With Applications to Industrial and Societal Problems*, Springer, New York, 2018, 211–226
- [Janke 2017] JANKE, C.: *Ein Beitrag zur automatischen Berechnung von Kennfeldern für Axialverdichter auf Grundlage von dreidimensionaler Strömungssimulation, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2017
- [Janke u. a. 2015] JANKE, C. ; BESTLE, D. ; BECKER, B.: Compressor Map Computation Based on 3D CFD Analysis. *CEAS Aeronautical Journal* 6 (2015), 515–527
- [Johann 2009] JOHANN, E.: *Aerodynamische Auslegung einer Gehäusestrukturierung für einen hochbelasteten 4-Stufen-Hochdruckverdichter*. Abschlussbericht, Rolls-Royce Deutschland GmbH, 2009

- [Keskin 2007] KESKIN, A.: *Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2007
- [Lapworth 2004] LAPWORTH, B.L.: HYDRA-CFD: A Framework for Collaborative CFD Development. *Proceedings of International Conference on Scientific & Engineering Computation, Singapore* (2004)
- [van Leer 1997] LEER, Bram van: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-order Sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics* 135 (1997), 229–248
- [Legresley u. a. 2001] LEGRESLEY, P. ; ALONSO, J. ; ALONSO, P.: Investigation of Non-Linear Projection for POD Based Reduced Order Models for Aerodynamics. *Journal of AIAA 96* (2001), 1–15
- [Malouin u. a. 2013] MALOUIN, B. ; TRÉPANIÉ, J.-Y. ; GARIEPY, M.: Interpolation of Transonic Flows Using a Proper Orthogonal Decomposition Method. *International Journal of Aerospace Engineering 2013* (2013), 1–11
- [Müftuoglu 1966] MÜFTUOĞLU, S.: Eine neue Abbildungsfunktion zur konformen Abbildung von Schaufelgittern. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 18* (1966)
- [Mikhailova u. a. 2016] MIKHAILOVA, A.E. ; MIKHAILOVA, A.B. ; AKHMEDZYANOVAD, D.A.: New 1-D Method for the Prediction of Axial-Flow Compressors Off-Design Performance. *Proceedings of 2nd International Conference on Industrial Engineering 150, Amman, Jordan* (2016), 155–160
- [Moinier u. a. 1999] MOINIER, P. ; MÜLLER, J.-D. ; GILES, M. B.: Edge-based Multigrid and Preconditioning for Hybrid Grids. *Proceedings of 14th Computational Fluid Dynamics Conference, Norfolk, England* (1999)
- [Novak 1967] NOVAK, R. A.: Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems. *Journal of Engineering for Power 89* (1967), 478–490
- [Ol'shtein und Protserov 1948] OL'SHTEIN, L. E. ; PROTSEROV, V. G.: A Technique for Axial-Flow Compressor Performance Prediction Based on Compressor Cascade Data. *Trudy TsIAM (Tsentralniy Institut Aviatsionnogo Motorostroeniya, Moskau) 150* (1948)
- [ParaViewVtk 2004] PARAVIEWVTK: ParaView/Python Scripting. (2004). – URL [https://vtk.org/Wiki/ParaView/Python\\_Scripting](https://vtk.org/Wiki/ParaView/Python_Scripting)
- [Petrovic u. a. 2011] PETROVIC, M.V. ; BANJAC, M.B. ; WIEDERMANN, A: Entwicklung eines neuen Meridionalverfahrens für mehrstufige kompakte Axialverdichter und Validierung durch Experimente und CFD-Berechnungen. *Forschung im Ingenieurwesen* 75 (2011), 45–60

- [Pöhlman 2015] PÖHLMAN, F.: *Optimization and Coupling Strategies for Codes of Different Fidelity to Automate an Aerodynamic Compressor Design Process, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2015
- [Plato 2004] PLATO, R.: *Numerische Mathematik kompakt*. Springer, Berlin, 2004
- [Rühle 2013] RÜHLE, T.: *Ein Beitrag zur optimalen mehrkriteriellen Axialverdichterauslegung auf Basis der Meridianströmungsberechnung, Dissertation*. Shaker, Aachen, 2013
- [Rick 2014] RICK, H.: *Gasturbinen und Flugantriebe*. Springer, Berlin, 2014
- [Rolls-Royce 1996] ROLLS-ROYCE: *Rolls Royce - The Jet Engine*. Renault Printing Co Ltd, Birmingham, England, B44 8BS, 1996
- [Schade und Kunz 2007] SCHADE, H. ; KUNZ, E.: *Strömungslehre*. De Gruyter Lehrbuch, Berlin, 2007
- [Schlichting und Gersten 2006] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin, 2006
- [Schoelkopf und Smola 2001] SCHOELKOPF, B. ; SMOLA, A.J.: *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. Cambridge, MIT Press, MA, USA, 2001
- [Shahpar und Lapworth 2003] SHAHPAR, S. ; LAPWORTH, B. L.: PADRAM: Parametric Design and Rapid Meshing System for Turbomachinery Optimisation. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, Copenhagen, Denmark* (2003)
- [Simon 2007] SIMON, J. F.: *Contribution to Throughflow Modelling, Thèse de doctorat*. Université de Liège Faculté de Sciences Appliquées Département d'Aérospatiale et Mécanique Groupe Turbomachines et Propulsion, Lüttich, Belgium, 2007
- [Sirovich 1985] SIROVICH, L.: Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. *Quarterly of Applied Mathematics* 45 (1985), 561–590
- [Sloss und Gustafson 2019] SLOSS, A. N. ; GUSTAFSON, S.: *2019 Evolutionary Algorithms Review. Genetic Programming Theory & Practice*, 2019
- [Sodemann u. a. 2006] SODEMANN, A. ; LI, Y. ; LEE, J. ; LANCASTER, R.: Data-Driven Surge Map Modeling for Centrifugal Air Compressors. *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Chicago* (2006)
- [Spalart und Allmaras 1992] SPALART, P. ; ALLMARAS, S.: A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *Journal of AIAA* 439 (1992), 5–21
- [Storn und Price 1997] STORN, R. ; PRICE, K.: Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization* 11 (1997), 341–359

- [Thompson u. a. 1985] THOMPSON, J. F. ; WARSI, Z. U. A. ; MASTIN, C. W.: *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. Elsevier Science, New York, 1985
- [Thuerey u. a. 2020] THUREY, N. ; WEISSENOW, K. ; PRANTL, L. ; HU, Xiangyu: Deep Learning Methods for Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations of Airfoil Flows. *Journal of AIAA* 58 (2020), 25–36
- [Vapnik 1995] VAPNIK, V.: *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer, New York, 1995
- [Vapnik u. a. 1995] VAPNIK, V. ; CORTES, C. ; SAITTA, L.: Support-Vector Networks. *Machine Learning* 20 (1995), 273–297
- [aus der Wiesche und Joos 2018] WIESCHE, S. aus der ; JOOS, F.: *Handbuch der Dampfturbinen*. Springer, Berlin, 2018
- [Wilcox 1988] WILCOX, D. C.: Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. *Journal of AIAA* 26 (1988), 1299–1310
- [Wu 1952] WU, C.-H.: *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types*. NACA Technical Report, Washington, USA, 1952
- [Zimmermann und Görtz 2012] ZIMMERMANN, R. ; GÖRTZ, S.: Improved Extrapolation of Steady Turbulent Aerodynamics Using a Non-Linear POD-based Reduced Order Model. *The Aeronautical Journal* 116 (2012), 1079–1100
- [Zimmermann und Görtz 2010] ZIMMERMANN, R. ; GÖRTZ, S.: Non-Linear POD-based Reduced Order Models for Steady Turbulent Aerodynamics. *Proceedings of Conference of Applied Aerodynamics, Bristol* (2010)