

Beiträge zu Problemen der Optimalsteuerung mit unendlichem Zeithorizont

- Transformationseigenschaften -

Von der Fakultät 1 - MINT - Mathematik, Informatik, Physik,
Elektro- und Informationstechnik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg
genehmigte Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

vorgelegt von

Dipl. Math. Diana Wenzke, geb. Sarbak

geboren am 15.02.1979 in Lauchhammer, Deutschland

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny

Gutachterin: Prof. Dr. rer. nat. habil. Sabine Pickenhain

Gutachterin: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ljudmila Bordag

Tag der mündlichen Prüfung: 11.03.2020

DOI: <https://doi.org/10.26127/BTUOpen-5202>

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Steuerungsprobleme sowohl mit endlichem, als auch mit unendlichem Zeithorizont. Auf beide Probleme werden Transformationen des Zustandes, der Steuerung und der Zeit angewendet. Dadurch wird für Aufgaben mit unendlichem Zeithorizont die Klasse der Dynamiken erweitert, für welche notwendige Bedingungen existieren. Bemerkenswert ist, dass diese stets eine explizite Transversalitätsbedingung enthalten. An einem Beispiel wird demonstriert, warum die Verwendung des Riemannschen Integralbegriffes und der Regel der partiellen Integration im Riemannschen Sinne ungeeignet erscheint, wenn man Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont oder Singularitäten im Zielfunktional betrachtet. Stattdessen wird diese Regel für Lebesgue-Integrale formuliert. Hierbei ergeben sich in natürlicher Weise als Voraussetzung an die eingehenden Funktionen, dass sie gewichteten Sobolevräumen angehören. Das erklärt, warum die theoretische Grundlage der Arbeit ein Existenzsatz und notwendige Bedingungen in Form eines Pontrjaginschen Maximumprinzips für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont bilden: Beide Sätze wurden unter Verwendung von Hilbertraum-Techniken bewiesen und nutzen, dass die zugrunde gelegten Funktionenräume $(W_2^1((0, \infty), \mu), L_2((0, \infty), \mu))$ Hilberträume sind. Als Hilfsmittel werden neben der Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale, dem Gronwall-Lemma und der Hölderschen Ungleichung lediglich Grundlagen der gewöhnlichen Differentialrechnung benötigt, um mittels des Beweises der Äquivalenz zweier Aufgabenklassen neue Resultate zu erzielen. So ist es gelungen, neue notwendige Bedingungen und einen neuen Existenzsatz für ein Steuerungsproblem mit fester Zeit zu formulieren. Die besondere Erkenntnis ist, dass es bei erfüllten Voraussetzungen keine Rolle spielt, ob das betrachtete Problem Singularitäten im Zielfunktional, in der Dynamik oder auch in den Zustandfunktionen hat oder nicht. Als geeigneter Funktionenraum für Steuerungsprobleme mit Singularitäten ergibt sich wiederum ein gewichteter Sobolevraum, der stets aus den Daten einer Aufgabe passend bestimmt werden kann. Anhand dieses Raumes lässt sich explizit nachprüfen, welche analytischen Eigenschaften für die Lösung zu erwarten sind.

abstract

The subject of the present work are control problems with both finite and infinite time horizon. Transformations of state, control and time are applied to both. This extends the class of dynamics in problems with an infinite time horizon, for which necessary conditions exist. It is noteworthy that these always contain an explicit transversality condition. An example is demonstrated why the use of Riemann's integral concept and the rule of partial integration in Riemann's sense seems inappropriate, if one considers control problems with infinite time horizon or singularities in the cost functional. Instead, this rule is formulated for Lebesgue integrals. In doing so, the incoming functions belong to weighted Sobolev spaces in a natural way. This explains why the theoretical basis of the thesis is an existence theorem and necessary conditions in the form of a Pontrjagin's maximum principle for control problems with infinite time horizon: Both theorems have been proven by using Hilbert space techniques. They use, that the underestimated function spaces $(W_2^1((0, \infty), \mu), L_2((0, \infty), \mu))$ are Hilbert spaces. In addition to the substitution rule for Lebesgue integrals, the Gronwall lemma and Hölder's inequality, the basics of ordinary differential calculus are used in order to obtain new results by means of the proof of the equivalence of two task classes. Thus, it has been possible to formulate new necessary conditions and a new existence theorem for a control problem with fixed time. The special finding is that under fulfilled conditions it does not matter whether the considered problem has singularities in the cost functional, in the dynamic or even in the state functions or not. As a suitable function space for control problems with singularities, a weighted Sobolev space results again, which can always be suitably determined from the data of a task. On the basis of this space, it is possible to explicitly verify which analytical properties are to be expected for the solution.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich auf meinem langen, steinigen Weg bis zur Fertigstellung dieser Arbeit begleitet haben. Mein Dank gilt meiner Betreuerin Prof. Pickenhain und meinen lieben Kolleginnen Angie, Katharina, Valeriya, Henriette und Inna für ihre fachliche bzw. moralische Unterstützung. Des Weiteren danke ich allen Kolleginnen und Kollegen, die mich während meiner Zeit an der BTU tatkräftig unterstützt haben.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Familie. Ohne Euren Rückhalt und Euer Verständnis hätte „Mama“ das nicht geschafft!

Und dann gibt es da noch Freunde, bei denen die Grenze zwischen Freizeit, Arbeit und Familie in den meisten Fällen verschwimmt, weil es Menschen sind, die auf rein emotionaler Ebene Unterstützung geliefert haben. Es sind die Gespräche und vielen kleinen, schönen Momente, für die ich mich bedanken möchte. Ihr alle habt dazu beigetragen, dass ich nicht aufgegeben habe.

Danke, Diana

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 1 |
| I Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont | 7 |
| 1 Stand der Forschung | 9 |
| 1.1 Funktionalanalytische Grundlagen | 9 |
| 1.2 Das Grundproblem (P_E) | 14 |
| 1.2.1 Optimalitätsbegriffe | 15 |
| 1.2.2 Die Existenz einer Lösung zu (P_E) | 19 |
| 1.2.3 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_E) | 21 |
| 1.3 Das Grundproblem (P) | 25 |
| 1.3.1 Das Maximumprinzip zu (P) | 27 |
| 1.3.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P) | 29 |
| 1.3.3 Die Existenz einer Lösung zu (P) | 34 |
| 1.3.4 Ein Beispiel | 34 |
| 1.4 Quadratische Zielfunktionale | 36 |
| 1.4.1 Das Problem (P_R) | 36 |
| 1.4.2 Der Begriff „dominating discount“ | 38 |
| 1.4.3 Der Quadratische Regulator unter Beachtung der kon- vexen Analysis | 41 |
| 2 Transformation des Zustandes | 43 |
| 2.1 Eliminieren einer Störfunktion | 43 |
| 2.1.1 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_S) | 44 |
| 2.1.2 Die Äquivalenz von (P_S) und (P) | 45 |
| 2.2 Die Verschiebung der Funktionenräume | 47 |
| 2.2.1 Das Problem (P_V) | 49 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.2.2 | Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_V) | 49 |
| 2.2.3 | Die Äquivalenz von (P_V) und (P) | 51 |
| 2.2.4 | Das Maximumprinzip für (P_V) | 53 |
| 2.2.5 | Die Existenz einer Lösung zu (P_V) | 57 |
| 2.2.6 | Vergleich der Probleme (P_V) und (P) | 58 |
| 2.2.7 | Die Transversalitätsbedingung | 68 |
| 3 | Linearisierung der Dynamik | 69 |
| 3.1 | Der Fall getrennter Variablen | 70 |
| 3.1.1 | Die Transformation von (P_N) auf (P) | 71 |
| 3.1.2 | Die Adjungierte des Problems (P_N) | 73 |
| 3.2 | Die logarithmische Transformation | 75 |
| 3.2.1 | Die Transformation von (P_1) auf (P) | 77 |
| 3.2.2 | Die Äquivalenz von (P_1) und (P) | 78 |
| 3.2.3 | Die Adjungierte des Problems (P_1) | 79 |
| 3.3 | Die Bernoullische Transformation | 81 |
| 3.3.1 | Die Transformation von (P_α) auf (P) | 84 |
| 3.3.2 | Die Äquivalenz der Probleme (P_α) und (\tilde{P}_α) | 84 |
| 3.3.3 | Die Adjungierte des Problems (P_α) | 90 |
| 3.3.4 | Die Bernoullische Differentialgleichung | 91 |
| 3.3.5 | Die Transformation von (P_B) auf (P_α) | 93 |
| 3.3.6 | Die Äquivalenz von (P_B) und (P_α) | 94 |
| 4 | Mögliche Erweiterungen | 97 |
| 4.1 | Die zeitabhängige Steuerungsbeschränkung | 97 |
| 4.2 | Konvexifizierung des Zielfunktional | 99 |
| II | Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont | 103 |
| 5 | Allgemeine Formulierung | 105 |
| 6 | Die Transformation der Zeit | 111 |
| 6.1 | Die Transformation auf (P_E) | 111 |
| 6.1.1 | Das Problem $(P_E)_1$ | 111 |
| 6.1.2 | Die natürliche Phasenbeschränkung zu $(P_E)_1$ | 115 |
| 6.1.3 | Die Äquivalenz von $(P_E)_1$ und (P_E) | 119 |
| 6.1.4 | Die Existenz einer Lösung zu $(P_E)_1$ | 121 |

6.2 Die Transformation auf (P_V) 124

 6.2.1 Das Problem $(P_V)_1$ 124

 6.2.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu $(P_V)_1$ 125

 6.2.3 Die Äquivalenz von $(P_V)_1$ und (P_V) 127

 6.2.4 Das Maximumprinzip für $(P_V)_1$ 131

 6.2.5 Die Existenz einer Lösung zu $(P_V)_1$ 135

6.3 Historische Anmerkungen 137

6.4 Auswertung der Resultate 138

6.5 Die Verknüpfung von Transformationen 143

6.6 Die Transformation mittels Verschiebung 148

Zusammenfassung und Ausblick **153**

III Anhang **157**

A.1. Absolut stetige Funktionen 159

A.2. Das Gronwall-Lemma 160

A.3. Die partielle Integration für L-Integrale 162

A.4. Die Substitutionsregel für L-Integrale 166

A.5. Nebenrechnung für das Problem (P_α) 173

A.6. Motivation für die Wahl der Gewichtsfunktionen 176

Einleitung

„Endlich und unendlich miteinander zu vergleichen, auf einander zu beziehen, ist unmöglich. Von dem einen haben wir eine Anschauung, vom anderen nicht. Die beiden sind also schlechterdings unvergleichbar für uns.“ Jakob Bosshart

An den Gedanken von J. Bosshart anknüpfend wird in der vorliegenden Arbeit zwischen diesen Problemen einen Bezug hergestellt und gezeigt, dass man endlich und unendlich zumindest im Zusammenhang von Steuerungsproblemen über endlichem und unendlichem Zeithorizont eben doch in gewisser Weise miteinander vergleichen kann.

Die Idee der Betrachtung eines unendlichen Planungsintervalls in einem makroökonomischen Kapitalwachstumsmodell geht auf die Arbeit von RAMSEY [48] aus dem Jahr 1928 zurück, in welcher der Autor vorschlägt die Gesellschaft als ein Individuum zu betrachten, welches unendlich lange lebt. Diese Idee wird erst Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts von Arrow und Kurz wieder aufgegriffen, was ihnen auch den Nobelpreis für Ökonomie beschert hat. Allerdings nur zehn Jahre später erfolgt die intensive Untersuchung der Steuerungsprobleme über einem unendlichen Zeithorizont auch durch andere Autoren. Es sind zahlreiche Veröffentlichungen zum Thema erschienen, vgl. unter anderem [5], [6], [11], [23], [25]. Die durch ökonomische und biologische Aufgabenstellungen motivierte Erweiterung der Steuerungsprobleme mit festem Planungshorizont auf Aufgaben mit einem unendlichen Planungshorizont warf eine Reihe theoretischer Fragen auf. Erstens stellt sich die Frage nach der Existenz einer optimalen Lösung. Diesbezüglich zeigt das Beispiel des Ressourcen-Allokationsmodells, dass das Betrachten eines hinreichend großen Zeitintervalls mit anschließender Grenzwertbildung nicht immer möglich ist. Obwohl diese Aufgabe, vgl. [34], Kapitel 11, für jedes feste Zeitintervall eine Lösung besitzt, kann man nachweisen, dass auf unendlichem Zeitintervall keine Lösung existiert. Folglich können Existenzsätze für Steuerungsprobleme mit unendlichem Planungshorizont nicht oh-

ne zusätzliche Bedingungen durch Grenzwertbildung adaptiert werden. Es stellte sich ebenfalls die Frage nach gültigen notwendigen Bedingungen in Form eines Pontrjaginschen Maximumprinzips (PMP). Die zweite Besonderheit der Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont ist die Tatsache, dass die bekannte Transversalitätsbedingung nicht mehr notwendigerweise gelten muss. Dies wurde durch das berühmte Beispiel von HALKIN bestätigt, vgl. [25]. Zusätzlich entstand eine Reihe von Arbeiten, die sich ausschließlich mit der Frage beschäftigen, wann die Transversalitätsbedingung gilt beziehungsweise, ob man eine andere Transversalitätsbedingung findet, vgl. [12], [29], [51]. Bereits HALKIN vermutete, dass dieses Phänomen nur bei Aufgaben auftritt, bei denen der Integrand keine von der Zeit abhängige, fallende Exponentialfunktion enthält. Das Auftreten dieser Exponentialfunktion, in der Ökonomie Diskontierungsfaktor genannt, wird durch den Übergang des Zielfunktional mit fester Zeit zu dem Erwartungswert dieses Zielfunktional begründet, vgl. [5]. Die Autoren in [5] führten den Begriff „dominierende Diskontrate“ ein und forderten im Integranden die Präsenz einer Dichtefunktion $e^{-\rho t}$, die das Wachstum der Adjungierten und des Zustandes dominiert.

Ein anderer Ansatz, ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont zu untersuchen, ist die Transformation dessen auf ein Problem mit endlichem Zeithorizont. Ideen und Ansätze hierfür findet man in [23], [5]. Es ist leicht einzusehen, dass die Transformation eines uneigentlichen Integrals 1. Art mit unendlicher Zeit auf uneigentliche Integrale 2. Art mit Singularität in Form einer Polstelle im Integranden führt. Das bedeutet, dass man sich zwar von dem Problem des unendlichen Zeithorizontes lösen kann, jedoch eine Aufgabe erhält, die nicht mit den klassischen Existenzsätzen und dem klassischen Maximumprinzip in Einklang zu bringen ist. ASEEV & KRYAZHIMSKIY [5], S. 8 merken an, dass Probleme mit Singularitäten nicht in die Standardaufgaben der Steuerungstheorie eingepasst werden können. So wurde dieser Ansatz nur von wenigen Autoren, u.a. [23], verfolgt.

Betrachten wir nun Steuerungsprobleme über einem festen endlichen Zeithorizont, so zeigt sich ein weiteres Problem. Klassische Existenzsätze ([8], [10]) arbeiten mit absolut stetigen Funktionen, also Funktionen des Raumes $W_1^1(\Omega)$, wogegen notwendige Bedingungen in Form eines Maximumprinzips in vielen Formulierungen für eine kleinere Klasse von Funktionen bewiesen wurde. Das heißt, dass man die Existenz einer Lösung sichern kann, die Kandidaten jedoch nicht die Voraussetzungen des Maximumprinzips erfüllen. Als Beispiel sei hier das berühmte Beispiel von HILBERT [28], S. 108 genannt. Die betrachtete Aufgabe besitzt zwar nachweislich eine Lösung, diese gehört

jedoch nicht zu der Klasse der stetig differenzierbaren Funktionen. Um diese Diskrepanz der Räume zu beheben, formulieren IOFFE & TICHOMIROV [28], S. 323 daher einen Existenzsatz für Lösungen aus der selben, kleineren Klasse C^2 , für welche auch die notwendigen Bedingungen formuliert wurden. Die Autoren zeigen damit, wie die Existenz einer Lösung eines Problems der klassischen Variationsrechnung gesichert werden kann. Alternativ muss ein Maximumprinzip formuliert werden, welches für eine größere Funktionenklasse gilt, und zwar für die selbe Funktionenklasse, für welche ein Existenzsatz zur Verfügung steht.

Dem Existenzsatz für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont von LYKINA [34] und dem Maximumprinzip von PICKENHAIN [41] liegen für die gesuchten Zustandsfunktionen der selbe Funktionenraum, in diesem Fall ein gewichteter Sobolevraum, zu Grunde. Somit kann nach Überprüfung der Existenz einer Lösung sichergestellt werden, dass sich eben diese Lösung unter den aus den notwendigen Bedingungen gefundenen Kandidaten befindet. Die Verwendung gewichteter Sobolevräume als Raum für den gesuchten Zustand und gewichteter Lebesgueräume für die Steuerung ermöglicht es Hilbertraum-Techniken anzuwenden, denn sowohl die gewichteten Sobolev- wie auch die Lebesgueräume sind im Spezialfall $p = 2$, der hier betrachtet wird, Hilberträume. So wurde das Maximumprinzip im Pontrjaginschen Sinne in [41] als Trennungssatz für konvexe Mengen im Hilbertraum bewiesen. Der in [34] abgeleitete Existenzsatz folgt dem klassischen Beweisprinzip des verallgemeinerten Weierstraßschen Satzes: Im Hilbertraum wird die (schwache) Unterhalbstetigkeit des Zielfunktional auf einer (schwach) kompakten Menge bewiesen.

Aus dem Grund, dass die beiden letztgenannten Sätze die selben Funktionenräume zu Grunde legen, bilden sie den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Das in [41] formulierte Maximumprinzip ist auf Probleme mit Dynamiken anwendbar, die in den gesuchten Größen (x, u) linear ist. Der Existenzsatz in [34] wurde für Dynamiken formuliert, die lediglich bezüglich der Steuergröße u linear sein müssen. Dieser Existenzsatz lässt sich nicht ohne weiteres verwenden, da er explizite Phasenbeschränkungen enthält, die Problemklasse in [41] hingegen nicht. Der erste Schritt der Arbeit ist es, den Existenzsatz für Probleme mit unendlichem Zeithorizont ohne explizite Phasenbeschränkungen zu formulieren. Dies geschieht unter Verwendung der bereits in [57] eingeführten *natürlichen Phasenbeschränkungen*. Es stellt sich heraus, dass explizit gegebene Phasenbeschränkungen für die Gültigkeit des Existenzsatzes nicht notwendig sind. Gleichzeitig sei darauf hingewiesen, dass

Steuerungsprobleme mit expliziten Phasenbeschränkungen in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet werden. Desweiteren gehen wir die Problematik der nichtlinearen Dynamiken, zumindest für gewisse Aufgabenklassen, an. Durch aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Substitutionen der gesuchten Größe wird das gesamte Steuerungsproblem in ein Steuerungsproblem mit linearer Dynamik transformiert. Die Herausarbeitung und Analyse verschiedener Klassen von Transformationen, die ein gegebenes Steuerungsproblem in ein neues, äquivalentes Problem überführen, eröffnet neue Möglichkeiten im Umgang mit Steuerungsproblemen mit nichtlinearer Dynamik. Auf das neue, transformierte Problem wenden wir dann das Maximumprinzip aus [41] an. Notwendige Bedingungen in Form eines Pontrjaginschen Maximumprinzips für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont und Dynamiken, die lediglich bezüglich der Steuerungsgröße u linear sind, findet man beispielsweise in [62]. Aufgrund der leicht zu verifizierenden Voraussetzungen in [41] wurde dieses Maximumprinzips als Grundlage der vorliegenden Arbeit gewählt.

Der Einfluss einer Transformation auf die geltenden Existenzsätze und notwendigen Optimalitätsbedingungen, ist ein wichtiger Schwerpunkt der Arbeit. Zusätzlich ergeben sich interessante Aussagen über die Transversalitätsbedingung. So geben wir beispielsweise für das Problem von HALKIN [25] eine gültige Transversalitätsbedingung an, die sich zwar von der klassischen Bedingung unterscheidet, aber eine zusätzliche Randbedingung liefert. Diese Erkenntnis ist vor allem für die numerische Behandlung von Steuerungsproblemen von Bedeutung. Eine weitere, wichtige, in der vorliegenden Arbeit vorgestellte, Transformationsmethode bewirkt eine Art Verschiebung der verwendeten Funktionenräume. Genauer gesagt verändert man das Gewicht des jeweiligen gewichteten Sobolevraumes. Dies hat zum einen eine Erweiterung des Maximumprinzips aus [41] und des Existenzsatzes aus [34] zur Folge. Zum anderen ist sie für die Transformation des Steuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont auf ein Problem mit endlicher Zeit notwendig. Diese Transformation auf ein Problem mit fester Zeit führt auf neue Erkenntnisse in mehrfacher Hinsicht. Es ist klar, dass das neue, transformierte Problem Singularitäten im Zielfunktional, in der Dynamik und in den gesuchten Größen selbst haben kann. Wir werden aber sehen, dass äquivalente Transformationen von Steuerungsproblemen das Verständnis über den Zusammenhang zwischen endlich und unendlich ermöglichen. Durch die Wahl geeigneter Funktionenräume werden Probleme mit Singularitäten behandelt, ohne das Problem als einfachen Grenzprozess betrachten zu müssen. Mittels dieser

Transformation formulieren wir einen Existenzsatz und notwendige Bedingungen für Steuerungsprobleme mit Singularitäten. Sowohl der Existenzsatz als auch die notwendigen Bedingungen arbeiten im selben Funktionenraum, sodass bei nachgewiesener Existenz einer Lösung diese auch durch Anwenden des Maximumprinzips ermittelt werden kann. Da die Lösungen selbst Singularitäten enthalten können und nicht einmal absolut stetige Funktionen sein müssen, stellen diese Sätze eine Erweiterung der bestehenden Theorie dar. Auch Probleme, wie das bereits erwähnte Problem von Hilbert, können mittels der neuen Sätze untersucht und gelöst werden. Deshalb stellt die Behandlung von Steuerungsproblemen mit endlichem Zeithorizont in gewichteten Räumen prinzipiell einen neuen Zugang gegenüber der klassischen Herangehensweise, in welcher ungewichtete Räume verwendet werden, dar.

Im ersten Teil der Arbeit betrachten wir Steuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont. Die wichtigsten Sätze und Definitionen aus der Analysis, der Maß- und Integrationstheorie sowie die betrachteten Problemklassen formulieren wir im ersten Kapitel. Wir gehen auf die bestehende Literatur ein, formulieren einen Existenzsatz und notwendige Bedingungen und betrachten Beispiele, bei denen diese Sätze auf Grund nicht erfüllter Voraussetzungen nicht anwendbar sind. Im zweiten Kapitel stellen wir die *Verschiebung der Funktionenräume* vor. Sie ist ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit und notwendig für die weiteren Kapitel. Das dritte Kapitel enthält Transformationen, welche darauf basieren, dass man gewisse nichtlineare Differentialgleichungen in lineare überführen kann und somit eine lineare Dynamik erhält. Anhand einiger Problemklassen wird gezeigt, wie sich die Funktionenräume unter den Transformationen verhalten. Gleichzeitig ergibt sich jeweils eine gültige Transversalitätsbedingung, die sich von der klassischen unterscheidet. Das vierte Kapitel enthält weitere Ideen, wie man ein gegebenes Steuerungsproblem anpassen kann, damit die Voraussetzungen für die Gültigkeit bestehender Existenzsätze und notwendiger Bedingungen erfüllt werden können. Im zweiten Teil der Arbeit werden Steuerungsprobleme über einem endlichen Zeitintervall betrachtet, allerdings nicht im klassischen Sinne. Die zu Grunde gelegten Funktionenräume sind auch in diesem Teil der Arbeit gewichtete Sobolev- und Lebesgueräume. Dadurch ist es möglich, Singularitäten im Zielunktional, der Dynamik und des Zustandes zu betrachten. Der Zusammenhang mit den Steuerungsproblemen aus dem ersten Teil der Arbeit wird unter Benutzung der Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale hergestellt. Daraus resultiert ein Existenzsatz und ein Maximumprinzip, welches die klassische Theorie erweitert.

Teil I

Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont

Kapitel 1

Stand der Forschung

1.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Wir führen in diesem Abschnitt gewichtete Funktionenräume ein, welche die theoretische Grundlage der Arbeit bilden. Mit Ω bezeichnen wir den Grundraum. In der gesamten Arbeit ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall. Desweiteren bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen mit $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Den Raum aller Lebesgue-messbaren Funktionen f bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$. Die Räume der stetigen beziehungsweise stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit C^0 beziehungsweise C^1 . Als weiterführende Literatur zur Funktionalanalysis und der Maßtheorie verweisen wir auf [16] und [18].

In dieser Arbeit werden die auftretenden Integrale stets im Sinne von Lebesgue verstanden. Legt man andere Integralbegriffe zugrunde, kann sich das Lösungsverhalten eines Steuerungsproblems unterscheiden, siehe hierzu [36]. Ein Beispiel, welches die Problematik verdeutlicht, findet man im Anhang, Beispiel 20.

Definition 1.1.1. Eine messbare, stetige Funktion $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit positiven Werten nennen wir *Gewichtsfunktion* oder *Gewicht*.

Definition 1.1.2. Gegeben sei eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definieren wir das *Lebesgue-Integral* durch:

$$L\text{-}\int_{\Omega} f(t) dt := L\text{-}\int_{\Omega} f_+(t) dt - L\text{-}\int_{\Omega} f_-(t) dt,$$

hierbei bedeuten $f_- := \max\{-f, 0\}$ und $f_+ := \max\{f, 0\}$.

Definition 1.1.3. Eine messbare Funktion f heißt über Ω *L-integrierbar*, wenn $L\text{-}\int_{\Omega} f_+(t)dt$ und $L\text{-}\int_{\Omega} f_-(t)dt$ existieren. Die integrierbare Funktion f heißt über Ω *L-summierbar*, wenn $L\text{-}\int_{\Omega} f_+(t)dt$ und $L\text{-}\int_{\Omega} f_-(t)dt$ existieren und endliche Werte liefern.

Sei $\Omega = \mathbb{R}_+$. Ist die Lebesgue-integrierbare Funktion f für alle $T > 0$ auf dem Intervall $[0, T]$ Riemann-integrierbar¹, so gilt

$$L\text{-}\int_0^{\infty} f(t)dt = R\text{-}\int_0^{\infty} f(t)dt := \lim_{T \rightarrow \infty} R\text{-}\int_0^T f(t)dt.$$

Definition 1.1.4. Für eine Gewichtsfunktion $\nu \in C^0(\Omega)$ definieren wir für jedes $1 \leq p < \infty$ den *gewichteten Lebesgueraum*

$$L_p(\Omega, \nu) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) : \|x\|_{L_p(\Omega, \nu)} = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

und für $p = \infty$ definieren wir den Raum aller bezüglich ν wesentlich beschränkten Funktionen x :

$$L_{\infty}(\Omega, \nu) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) : \|x\|_{L_{\infty}(\Omega, \nu)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)\nu(t)| < \infty \right\}.$$

Für spätere Untersuchungen der analytischen Güte der Lösungen und den Vergleich der Resultate mit bestehender Literatur benötigen wir

Definition 1.1.5. Der Raum $L_{1,loc}((a, b))$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ist der Raum der auf jeder kompakten Teilmenge von (a, b) summierbaren Funktionen.

Bemerkung 1.1.1. Der Raum $L_{p,loc}((a, b))$ lässt sich für jedes $1 \leq p \leq \infty$ definieren, er bedeutet stets die Einschränkung der Eigenschaft des Raumes $L_p((a, b))$ auf eine kompakte Teilmenge.

Definition 1.1.6. Der Raum $C_0^{\infty}(a, b)$ der Testfunktionen ist der Raum der auf (a, b) beliebig oft differenzierbaren Funktionen h , deren Träger

$$\operatorname{supp} h := \overline{\{t \in (a, b) : h(t) \neq 0\}}$$

beschränkt und in (a, b) enthalten ist.

¹siehe [26]

Definition 1.1.7. Seien $f, g \in L_{1,loc}(a, b)$ und für alle $h \in C_0^\infty(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gelte:

$$\int_a^b f(t)h'(t)dt = - \int_a^b g(t)h(t)dt.$$

Dann heißt g *verallgemeinerte* oder *schwache Ableitung*² von f , im Symbol $Df(t) = g(t)$.

Definition 1.1.8. Es sei ein Gewicht ν gegeben und es gelte $1 \leq p < \infty$. Die Funktion $x \in L_p(\Omega, \nu)$ besitze eine verallgemeinerte Ableitung $Dx \in L_p(\Omega, \nu)$. Dann ist der *gewichtete Sobolevraum* $W_p^1(\Omega, \nu)$ definiert als der Unterraum aller Äquivalenzklassen von Funktionen aus $L_p(\Omega, \nu)$, deren verallgemeinerte Ableitung existiert und ebenfalls dem Raum $L_p(\Omega, \nu)$ angehört:

$$W_p^1(\Omega, \nu) = \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) : x \in L_p(\Omega, \nu), Dx \in L_p(\Omega, \nu) \right\},$$

siehe [31], S. 11.

Bemerkung 1.1.2. Für $\nu(t) \equiv 1$ erhalten wir die gewöhnlichen beziehungsweise ungewichteten Sobolev-Räume.

Es ist bekannt, dass der Raum $W_p^1(\Omega, \nu)$, versehen mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^1(\Omega, \nu)} := \left(\|x\|_{L_p(\Omega, \nu)}^p + \|Dx\|_{L_p(\Omega, \nu)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum ist, vgl. [31], S. 19.

Definition 1.1.9. Es seien zwei Gewichte ν_1 und ν_2 gegeben und es gelte $1 \leq p < \infty$. Die Funktion $x \in L_p(\Omega, \nu_1)$ besitze eine verallgemeinerte Ableitung $Dx \in L_p(\Omega, \nu_2)$. Dann ist der *nicht-uniform gewichtete Sobolevraum* $W_p^1(\Omega, \nu_1, \nu_2)$ definiert als der Unterraum aller Äquivalenzklassen von Funktionen aus $L_p(\Omega, \nu_1)$, deren verallgemeinerte Ableitung existiert und dem Raum $L_p(\Omega, \nu_2)$ angehört:

$$W_p^1(\Omega, \nu_1, \nu_2) = \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) : x \in L_p(\Omega, \nu_1), Dx \in L_p(\Omega, \nu_2) \right\}.$$

²siehe [59], S.49

Wenn die Voraussetzung $\nu_i^{\frac{1}{1-p}} \in L_{1,loc}(\Omega)$ für die Gewichte ν_i , $i = 1, 2$ erfüllt ist, so ist der Raum $W_p^1(\Omega, \nu_1, \nu_2)$, versehen mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^1(\Omega, \nu_1, \nu_2)} := \left(\|x\|_{L_p(\Omega, \nu_1)}^p + \|Dx\|_{L_p(\Omega, \nu_2)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum, vgl. [32], S. 539.

Bemerkung 1.1.3. Für $\nu_1(t) \equiv \nu_2(t)$ erhalten wir die gewichteten Sobolev-Räume $W_p^1(\Omega, \nu_1)$.

Lemma 1.1.1. *Die Funktion $f : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = f(t, \xi)$ sei für jedes ξ messbar in t und für fast alle $t \in (a, b)$ stetig bezüglich ξ . Für jede Funktion $x \in W_1^1((a, b))$ gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Gleichungen*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = x_0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}_+$$

und

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+$$

sind äquivalent.

Beweis: Zum Beweis siehe [38], S.280 und [22], S.3ff. \square

Der Dualraum zu $L_p(\Omega, \nu)$ ist erklärt durch folgendes Lemma:

Lemma 1.1.2 (Darstellungslemma). *Sei ν eine Gewichtsfunktion. Desweiteren sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $1 < p < \infty$. Für $p = 1$ gelte $q = \infty$. Jedes lineare stetige Funktional $g : L_p(\Omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ kann durch eine Funktion $g \in L_q(\Omega, \nu)$ dargestellt werden:*

$$\langle g, x \rangle = \int_{\Omega} g(t) x(t) \nu(t) dt \quad \forall x \in L_p(\Omega, \nu). \quad (1.1)$$

Zum Beweis wenden wir ([18], S. 287) an.

Bemerkung 1.1.4. Für $p = 2$ werden die Räume $L_2(\Omega, \nu)$ und $W_2^1(\Omega, \nu)$ zu separablen Hilberträumen, siehe [31].

Die in Gleichung (1.1) angegebene Bilinearform ist das Skalarprodukt im $L_2(\Omega, \nu)$.

Im Verlauf der Arbeit nutzen wir des öfteren die Höldersche Ungleichung in der folgenden Form:

Satz 1.1.1 (Höldersche Ungleichung). Sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Desweiteren sei $f \in L_p(\Omega, \nu)$ und $g \in L_q(\Omega, \nu)$. Dann ist $(fg) \in L_1(\Omega, \nu)$ und es gilt

$$\| fg \|_{L_1(\Omega, \nu)} \leq \| f \|_{L_p(\Omega, \nu)} \cdot \| g \|_{L_q(\Omega, \nu)}.$$

Beweis: Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung für ungewichtete Lebesgue-Räume:

$$\| fg \|_{L_1(\Omega)} \leq \| f \|_{L_p(\Omega)} \cdot \| g \|_{L_q(\Omega)},$$

deren Beweis man [26], S.475 entnehme, folgt

$$\begin{aligned} \| fg \|_{L_1(\Omega, \nu)} &= \int_{\Omega} |f(t)g(t)|\nu(t)dt = \int_{\Omega} |f(t)\nu^{\frac{1}{p}}(t) \cdot g(t)\nu^{\frac{1}{q}}(t)|dt \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(t)\nu^{\frac{1}{p}}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |g(t)\nu^{\frac{1}{q}}(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \| f \|_{L_p(\Omega, \nu)} \cdot \| g \|_{L_q(\Omega, \nu)}. \end{aligned}$$

Satz 1.1.2 (Rellich-Kondrachov, [1], S.168). Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}$ ein offenes, nicht notwendig beschränktes Intervall und $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilintervall. Ferner sei $1 < p < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}_0) \quad (1.2)$$

kompakt.

Den Beweis des Satzes entnehme man der angegebenen Literatur. Da dieser Satz für beliebige Intervalle Ω_0 gilt, so auch insbesondere für $\Omega = \Omega_0 = (0, T)$. Angenommen, es gelte $x \in W_2^1((0, T))$. So existiert genau eine stetige Funktion $x_s \in C^0([0, T])$, die in der selben Äquivalenzklasse wie $[x] \in W_2^1((0, T))$ liegt. Da $x(0) \cdot e^0 = x_0$ gilt, ist für $x \in W_2^1((0, T))$ auch die Auswertung des Anfangswertes der Funktion $\hat{x}(t) := x(t) \cdot e^{\frac{g}{2}t}$ möglich. Nun gilt aber offensichtlich $\hat{x} \in W_2^1((0, T), \mu)$ mit $\mu(t) = e^{-gt}$ und wir können dadurch die Stetigkeit einer gegebenen Funktion \hat{x} im Randpunkt $t = 0$ sichern.

Bemerkung 1.1.5. Die letzte Argumentation nutzt die Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion. Wir werden aber sehen, dass der Anfangswert unabhängig von dem verwendeten Gewicht des Zustandsraumes stets angenommen wird. Deshalb ist der in der gesamten Arbeit formulierte Anfangswert $x(0) = x_0$ sinnvoll.

Wir werden in den folgenden Abschnitten Funktionen x betrachten, die in gewichteten Sobolev-Räumen liegen und somit auf offenen Mengen definiert sind. Wohlwissend, dass stets unter diesen Funktionen nur diejenigen Funktionen als Lösung in Frage kommen, die die Randbedingung $x(0) = x_0$ erfüllen.

1.2 Das Grundproblem (P_E)

In diesem Abschnitt formulieren wir das Steuerungsproblem (P_E) über unendlichem Zeithorizont und einen passenden Existenzsatz. Diese Aufgabenklasse umfasst alle im ersten Teil der vorliegenden Arbeit betrachteten Probleme. Gegeben sei die folgende Steuerungsaufgabe (P_E). Minimiere

$$J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \mu(t) dt, \quad (1.3)$$

bezüglich aller Paare

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu), \quad u \in L_\infty((0, \infty)), \quad (1.4)$$

die der Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (1.5)$$

der Steuerungsbeschränkung

$$u(t) \in U, \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (1.6)$$

und der Randbedingung

$$x(0) = x_0 > 0 \quad (1.7)$$

genügen.

Man bezeichnet die Funktionen x und u als Zustands- beziehungsweise Steuerungsfunktion. Als Platzhaltervariable für $x(t)$ verwenden wir ξ , für $u(t)$ verwenden wir v . Die Funktion μ sei eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 1.1.1. Die Verwendung des selben Gewichtes μ sowohl im Integranden als auch im Funktionenraum stellt keine Einschränkung an die Aufgabenklasse dar. Andere Autoren (zum Beispiel [5], [34]) betrachten Funktionale der Form

$$\int_0^\infty r_1(x(t), u(t)) \cdot \nu(t) dt$$

und stellen ihre Voraussetzungen in Abhängigkeit der Gewichtsfunktionen μ des Raumes und einer weiteren Gewichtsfunktion ν im Integranden, um die Existenz einer Lösung sichern zu können. Man beachte, dass in der vorliegenden Arbeit die Funktion r von t explizit abhängig sein darf, sodass das Gewicht μ im Integranden erzeugt werden kann.

Wir setzen

$$r(t, \xi, v) := r_1(\xi, v)\nu(t)\mu^{-1}(t)$$

und erhalten stets einen Integranden der Aufgabenklasse (P_E).

Für die Aufgabenklasse (P_E) seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

Voraussetzung 1.2.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich U sei nichtleer und von der Variablen der Zeit t unabhängig.

Voraussetzung 1.2.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in allen Variablen, stetig differenzierbar in der zweiten und dritten Variablen. Desweiteren sei r für alle $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ konvex in v .

Voraussetzung 1.2.3. Die Funktionen $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus der Dynamik (1.5) seien stetig in allen Argumenten, sowie Lipschitzstetig in ξ .

Voraussetzung 1.2.4. Für die Gewichtsfunktion μ gelte $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 0$.

Desweiteren sei die rechte Seite der Dynamik (1.5) wie folgt beschränkt.

Voraussetzung 1.2.5. Es sei die Existenz positiver Konstanten $C_i \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $i = 1..4$ vorausgesetzt, sodass die Ungleichung

$$|A(t, \xi) + B(t, \xi)v| \leq C_1 + C_2|\xi| + C_3|\xi||v| + C_4|v| \quad (1.8)$$

für alle $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erfüllt ist.

1.2.1 Optimalitätsbegriffe

In diesem Abschnitt wird erläutert, was in der vorliegenden Arbeit unter Optimalität verstanden wird. Das Integral in (1.3) ist im Sinne von Lebesgue zu verstehen. Andere Optimalitätskriterien, die uneigentliche Riemann Integrale im Zielfunktional verwenden, werden in [11] detailliert betrachtet. Eine

ausführliche Diskussion über die Unterschiede der Integraltypen in Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont entnehme man [34], [36], [40]. Unsere Betrachtungen basieren auf der folgenden

Definition 1.2.1. Die Menge aller zu der Aufgabe (P_E) zulässigen Paare (x, u) , bezeichnet mit \mathcal{A}_L , enthält alle Prozesse (x, u) , welche den Bedingungen (1.4) - (1.7) genügen und für die das Lebesgue-Integral in (1.3) existiert und einen endlichen Wert annimmt.

Bemerkung 1.2.1. Ein zulässiges Paar (x, u) bezeichnen wir auch als *zulässigen Prozess*.

Im Folgenden werden wir den der Arbeit zugrunde gelegten Optimalitätsbegriff definieren.

Definition 1.2.2 (Kriterium L). Es seien die Prozesse $(x, u), (x^*, u^*) \in \mathcal{A}_L$ gegeben. Dann sagen wir das Paar $(x^*, u^*) \in \mathcal{A}_L$ ist *global optimal* für (P_E) , wenn für jedes Paar $(x, u) \in \mathcal{A}_L$ gilt:

$$\int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\mu(t) dt - \int_0^\infty r(t, x^*(t), u^*(t))\mu(t) dt \geq 0.$$

Definition 1.2.3. Für jeden zu (P_E) zulässigen Prozess definieren wir

$$J_T(x, u) := \int_0^T r(t, x(t), u(t))\mu(t)dt.$$

Dann heißt der Prozess (x^*, u^*) *optimal im gewöhnlichen Sinne*³, falls für jeden zu (P_E) zulässigen Prozess (x, u) die Ungleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x, u) - J_T(x^*, u^*)\} \geq 0$$

gilt.

Lemma 1.2.1. Für Probleme der Klasse (P_E) stimmen die Definitionen 1.2.2 und 1.2.3 überein.

Beweis: Seien (x, u) und (x^*, u^*) zulässige Prozesse. Dann gilt $J(x, u) < \infty$ und $J(x^*, u^*) < \infty$. Per Definition ist für die summierbaren Funktionen $r(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))\mu(\cdot)$ und $r(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot))\mu(\cdot)$

$$J(x, u) := \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u), \quad J(x^*, u^*) := \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x^*, u^*),$$

³siehe [34], S.25

Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} J(x, u) - J(x^*, u^*) &= \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u) - \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x^*, u^*) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(J_T(x, u) - J_T(x^*, u^*) \right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt. Andere Begriffe, wie overtaking optimal (von Weizsäcker, 1965), stark optimal, catching up optimal (Gale, 1967), sporadisch catching up optimal (Halkin, 1974) und endlich optimal werden in [11], S. 9ff, [20], S.186 und [34] ausführlich erläutert. Diese Begriffe sind für die vorliegende Arbeit nicht relevant. Betrachten wir als Beispiel den Begriff:

Definition 1.2.4 (überholungsoptimal). („overtaking optimal“, von Weizsäcker, 1965) Der Prozess (x^*, u^*) heißt *überholungsoptimal*, falls ein $T_0 > 0$ existiert, sodass für alle $T > T_0$ und jeden zulässigen Prozess (x, u) die Ungleichung

$$J_T(x^*, u^*) \leq J_T(x, u)$$

gilt.

Das bedeutet, dass der Prozess (x^*, u^*) nicht für jedes T den kleinsten Integralwert liefern muss, aber ab einem bestimmten Planungszeitraum jeden anderen Prozess überholt. Man betrachtet also an Stelle des Steuerungsproblems über unendlichem Zeithorizont ein Ersatzproblem mit dem Zielfunktional aus Definition 1.2.3. Die Betrachtung des endlichen Ersatzproblems hat den Vorteil, dass bekannte klassische Existenzsätze und notwendige Bedingungen genutzt werden können. Als Literatur verweisen wir auf das bekannte Werk von IOFFE&TICHOMIROV [28].

Bemerkung 1.2.2. Der Begriff „überholen“ ist dadurch erklärbar, dass die Aufgabe bei von Weizsäcker in der Maximierung des Zielfunktionals besteht. In der vorliegenden Arbeit wird das Zielfunktional minimiert. Alle Sätze und Definitionen wurden entsprechend angepasst. Bei einer Minimierungsaufgabe könnte man analog den Begriff „Unterschreitungs-Kriterium“ einführen, darauf soll jedoch verzichtet werden.

An einem Beispiel werden wir sehen, dass die Optimierung bezüglich der Definition 1.2.4 nicht immer von Erfolg gekrönt sein muss. Dieses Beispiel findet man ausführlich in [33].

Beispiel 1 (Resource-Allocation Modell). Gegeben sei folgende Steuerungsaufgabe mit endlichem Zeithorizont:

$$J_T(x, u) = \int_0^T e^{-\rho t} x(t)(u(t) - 1) dt \rightarrow \min!$$

bzgl. aller

$$x \in W_1^1((0, T)), u \in L_1((0, T)),$$

die der Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t) \text{ f.ü. auf } [0, T],$$

der Steuerungsbeschränkung

$$u(t) \in [0, 1]$$

und der Randbedingung

$$x(0) = x_0 > 0$$

genügen.

Der Parameter $\rho \in (0, 1)$ sei beliebig gegeben. Die Autoren zeigen, dass für jedes beliebige, feste T die Lösung durch

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t, & t \in [0, \tau) \\ x_0 e^\tau, & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

und

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau) \\ 0, & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

mit dem Schaltpunkt $\tau = T + \frac{\ln(1-\rho)}{\rho} > 0$ gegeben ist. Das bedeutet, dass die Lösung optimal im Sinne der Definition 1.2.4 ist. Nun könnte man vermuten, dass das durch die Grenzwertbildung $\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u)$ entstandene Steuerungsproblem über unendlichem Zeithorizont die Lösung $x_\infty(t) = x_0 e^t$ und $u_\infty(t) \equiv 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ liefert. Setzt man diese Funktionen in den Integranden ein, so sieht man, dass $J_\infty(x_\infty, u_\infty) = 0$ gilt. Es ist leicht zu sehen, dass das nicht der kleinste Wert ist, den das Funktional annehmen kann, sondern sogar der größte. Wählt man $u_\rho(t) \equiv \rho$, $x_\rho(t) = x_0 e^{\rho t}$ so sieht man leicht

$$J_\infty(x_\rho, u_\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho t} x_0 e^{\rho t} (\rho - 1) dt = -\infty,$$

das heißt, dass dieses Steuerungsproblem überhaupt keine Lösung im Sinne der Definition 1.2.3 oder der Definition 1.2.4 hat.

Da in der vorliegenden Arbeit stets der gesamte Planungszeitraum $[0, \infty)$ betrachtet wird, verwenden wir von den oben genannten Optimalitätsbegriffen lediglich die Definition 1.2.2.

1.2.2 Die Existenz einer Lösung zu (P_E)

Ausgehend von den Existenzresultaten für Probleme auf endlichem Zeithorizont von FILIPPOV [21] und CESARI [14] wurden bereits in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts Existenzsätze für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont formuliert. Hier seien die Arbeiten von BAUM [10] und TAKEKUMA [52] sowie BALDER [8], der die Resultate aus [10] und [52] verallgemeinert hat, genannt. In den zitierten Existenzsätzen für Steuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont wird oft eine messbare Steuerung u^* und eine absolut stetige⁴ Zustandsfunktion x^* gesucht ([28], S.316 ff). Auf einer beschränkten Menge $[0, T]$ gilt⁵ $x \in AC[0, T] \iff x \in W_1^1((0, T))$. Das bedeutet, dass man nach der Existenz einer Lösung aus dem ungewichteten Sobolevraum $W_1^1((0, T))$ fragt. Bei der Betrachtung eines Steuerungsproblems über unendlichem Zeithorizont verwenden beispielsweise BAUM [10] und BALDER [8] messbare Steuerungen u und Zustände x aus dem Raum der lokal absolut stetigen⁶ Funktionen. Die Wahl dieser Räume scheint sinnvoll, da eine Funktion genau dann lokal absolut stetig ist, wenn sie auf jedem beschränkten, abgeschlossenen Intervall absolut stetig ist. Das bedeutet für den stetigen Repräsentanten gilt $x^* \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+) \iff x_T^* \in W_1^1((0, T))$ für alle $T > 0$. Dabei bedeutet x_T^* die Einschränkung der Funktion x^* auf die Menge $[0, T]$. Problematisch ist, dass die Fortsetzung einer auf jeder beschränkten Menge $[0, T]$ absolut stetigen Funktion auf \mathbb{R}_+ keine Funktion des Raumes $W_1^1((0, \infty))$ sein muss. Um sich diesen Sachverhalt zu veranschaulichen, betrachte man eine beliebige Konstante. Das Integral über jede beschränkte Menge existiert, über \mathbb{R}_+ ist die Funktion allerdings nicht summierbar. Als problematisch hat sich außerdem erwiesen, den Dualraum des Raumes $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ zu beschreiben, welcher für die Formulierung eines Maximumprinzips notwendig ist. Aus diesem Grund verwenden wir als theoretische Grundlage für die vorliegende Arbeit den Existenzsatz für zustandsbeschränkte Steuerungsprobleme auf unendlichem Zeithorizont von LYKINA [34] (S.84). Ebenso wie BALDER [8] verfolgt LYKINA [34] das verallgemeinerte

⁴siehe Definition 6.6.1 im Anhang

⁵siehe Satz 6.6.1 und dessen Beweis

⁶siehe Definition 6.6.2 im Anhang

Weierstraßsche Prinzip⁷ und verwendet die schwache Topologie im Hilbertraum $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu)$. Die Autorin beweist einen Existenzsatz für Steuerungsprobleme auf unendlichem Zeithorizont, wobei die zulässigen Funktionen $(x, u) \in W_2^n((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu)$ Elemente aus gewichteten Sobolev- beziehungsweise Lebesgue-Räumen sind. In der angegebenen Literatur findet man den Satz mit Beweis für n Zustandsgrößen und m Steuervariablen. In diesem Beweis wird explizit verwendet, dass nur Funktionen $u \in L_2((0, \infty), \mu)$ zulässig sind, für die aufgrund des als kompakt vorausgesetzten Steuerbereichs auch $u \in L_\infty((0, \infty))$ gilt. Andererseits gilt für $\int_0^\infty \mu(t)dt < \infty$ stets die Inklusion $L_\infty((0, \infty)) \subset L_2((0, \infty), \mu)$. Aus diesem Grund kann die Forderung $u \in L_2((0, \infty), \mu)$ durch $u \in L_\infty((0, \infty))$ ersetzt werden.

Betrachten wir nun das Steuerungsproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2. Für die Formulierung eines Existenzsatzes benötigen wir zusätzlich zu den Voraussetzungen 1.2.1 bis 1.2.5 folgende Wachstumsbedingungen, die jeweils für alle $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gelten sollen.

Voraussetzung 1.2.6. Für den Integranden gelte

$$|r(t, \xi, v)\mu(t)| \leq A_1(t) + B_1\mu(t)(\xi^2 + v^2)$$

mit einer Funktion $A_1 \in L_1((0, \infty))$ und einer Konstanten $B_1 > 0$.

Voraussetzung 1.2.7. Für die partielle Ableitung des Integranden nach v gelte

$$|r_v(t, \xi, v)| \leq A_2(t) + B_2(|\xi| + |v|)$$

mit einer Funktion $A_2 \in L_2((0, \infty), \mu)$ und einer Konstanten $B_2 > 0$.

Voraussetzung 1.2.8. Für die Funktion B aus der rechten Seite der Zustandsgleichung gelte

$$|B(t, \xi)| \leq A_3(t) + B_3|\xi|$$

mit einer Funktion $A_3 \in L_2((0, \infty), \mu)$ und einer Konstanten $B_3 > 0$.

Voraussetzung 1.2.9. Für jeden zulässigen Zustand x gelte $|x(t)| \leq \beta(t)$, $\beta \in L_2((0, \infty), \mu)$.

⁷Es besagt, dass ein schwach unterhalbstetiges Funktional auf einer schwach kompakten Menge sein Minimum annimmt, siehe [34].

Satz 1.2.1. *Gegeben sei das Steuerungsproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2. Der zulässige Bereich zu (P_E) sei nichtleer. Die Voraussetzungen 1.2.1 bis 1.2.5 und 1.2.6 bis 1.2.9 seien erfüllt. Dann besitzt (P_E) eine optimale Lösung.*

Die Formulierung des Satzes und dessen Beweis ist das Hauptresultat der Dissertation von LYKINA [34]. In der angegebenen Literatur wird bewiesen, dass das auf einer schwach kompakten Menge definierte Zielfunktional schwach unterhalbstetig ist und somit mittels des verallgemeinerten Weierstraßschen Satzes sein Minimum annimmt. Für den Beweis des Existenzsatzes war es notwendig, die Zustandsfunktionen durch eine Funktion $\beta \in L_2((0, \infty), \mu)$ mit $\mu(t) = e^{-\rho t}$, $\rho > 0$ zu beschränken. Sie ist eine wichtige Voraussetzung für die Beschränktheit des zulässigen Bereiches und für die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals. Das Problem (P_E) enthält allerdings keine explizite Phasenbeschränkung. Wie wir dieses Problem umgehen können, wird im nächsten Abschnitt erläutert und ist eine der grundlegenden Ideen der vorliegenden Arbeit.

1.2.3 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_E)

Der Begriff *natürliche Phasenbeschränkung* als deutsche Übersetzung von *natural constraints* wurde im Zusammenhang mit Steuerungsproblemen von WENZKE&PICKENHAIN definiert und findet sich erstmals in [57] und wurde in [64], [35], [45] und [42] aufgegriffen, wo er als Instrument zur Bestimmung des passenden Funktionenraumes verwendet wird. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Bedingung $|x(t)| \leq \beta(t)$ durch die Bestimmung einer geeigneten Gewichtsfunktion μ für jede zulässige Funktion x stets erfüllt ist. Daraus werden wir folgern, dass eine explizit gegebene Zustandsbeschränkung für die Sicherung der Existenz einer Lösung zu (P_E) nicht notwendig ist.

Definition 1.2.5. Für die beschränkte, messbare Funktion u sei

$$K := \sup_{v \in U} |v|. \quad (1.9)$$

Für eine Differentialgleichung erster Ordnung mit gegebener Anfangsbedingung beweisen wir folgenden Satz:

Satz 1.2.2. *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(0) = x_0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+. \quad (1.10)$$

Für die messbare Funktion u sei $u \in L_\infty((0, \infty))$ erfüllt. Die Funktionen $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in allen Argumenten. Die Voraussetzungen 1.2.1 und 1.2.5 seien erfüllt. Für jede Funktion x , die der Differentialgleichung (1.10) genügt, gilt

$$|x(t)| \leq \beta(t) \quad (1.11)$$

mit einer Funktion $\beta \in L_2((0, \infty), \mu)$. Dabei ist μ eine Gewichtsfunktion und es gilt

$$\mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3K)$$

mit $C_2, C_3 \in \mathbb{R}_+$ aus der Voraussetzung 1.2.5 und K aus der Definition 1.2.5.

Um diesen Satz beweisen zu können, nutzen wir die Gronwallsche Ungleichung aus Lemma 6.6.1 im Anhang und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Beweis: Da $x \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$, sind Integral und Differentialdarstellung äquivalent und man kann die Gleichung (1.10) in integrierter Form angeben:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(s, x(s)) + B(s, x(s))u(s) ds.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |A(s, x(s)) + B(s, x(s))u(s)| ds \\ &\leq |x_0| + \int_0^t (C_1 + C_2|x(s)| + C_3|x(s)||u(s)| + C_4|u(s)|) ds \\ &= |x_0| + \int_0^t (C_1 + C_4|u(s)|) ds + \int_0^t (C_2 + C_3|u(s)|)|x(s)| ds \\ &\leq |x_0| + (C_1 + C_4K)t + \int_0^t (C_2 + C_3K)|x(s)| ds. \end{aligned}$$

In der Ungleichungskette benutzen wir nacheinander die Voraussetzung (1.2.5), die Dreiecksungleichung und die Beschränkung der Steuerung durch K nach Definition 1.2.5. Definieren wir

$$a(t) := |x_0| + (C_1 + C_4K)t, \quad b(t) := C_2 + C_3K,$$

so sind mit dieser Setzung offensichtlich die Voraussetzungen des Gronwall-Lemmas 6.6.1 erfüllt. Daraus folgt

$$|x(t)| \leq a(t)e^{\int_0^t b(s)ds} =: \beta(t). \quad (1.12)$$

Für diese Funktion β berechnen wir

$$\int_0^\infty |\beta(t)|^2 \mu(t) dt = \int_0^\infty \left| a(t)e^{\int_0^t b(s)ds} \right|^2 \mu(t) dt \quad (1.13)$$

$$= \int_0^\infty \left| (|x_0| + (C_1 + C_4 K)t) e^{(C_2 + C_3 K)t} \right|^2 \mu(t) dt. \quad (1.14)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite ist für $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 2(C_2 + C_3 K)$ endlich.

Das bedeutet, dass wir $\beta \in L_2(\mathbb{R}_+, \mu)$ gefunden haben, sodass für jede Funktion x , die den Voraussetzungen des Satzes 1.2.2 genügt, die Ungleichung $|x(t)| \leq \beta(t)$ gilt. Somit ist der Satz bewiesen. \square

Um den Existenzsatz 1.2.1 umformulieren zu können, muss man noch sicher stellen, dass alle zu Problem (P_E) zulässigen Funktionen x dem Raum $W_2^1((0, \infty), \mu)$ angehören.

Satz 1.2.3. *Für jede Funktion $x \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$, welche den Voraussetzungen des Satzes 1.2.2 genügt, gilt*

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu) \quad \text{mit } \mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3 K)$$

mit den positiven, reellen Konstanten C_2, C_3 aus der Voraussetzung 1.2.5 und K aus der Definition 1.2.5.

Beweis: Aus der Definition der Funktion β durch (1.12) folgt unmittelbar

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 \mu(t) dt \leq \int_0^\infty |\beta(t)|^2 \mu(t) dt < \infty.$$

Für die Ableitung folgt $\dot{x} \in L_2(\mathbb{R}_+, \mu)$ aus der Voraussetzung 1.2.1 und der Ungleichung in Voraussetzung 1.2.5. Das bedeutet, dass alle möglichen Lösungen der Differentialgleichung Funktionen des gewichteten Sobolevraumes $W_2^1((0, \infty), \mu)$ sind. \square

Folglich kann das Steuerungsproblem (P_E) stets auch als phasenbeschränktes Steuerungsproblem betrachtet werden, wenn man die Voraussetzungen 1.2.9 und 1.2.4 durch folgende Voraussetzung ersetzt:

Voraussetzung 1.2.10. μ sei eine Gewichtsfunktion und es gelte

$$\mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3K)$$

mit den Konstanten C_2 und C_3 aus Voraussetzung 1.2.5 und K aus der Definition 1.2.5.

Der Existenzsatz 1.2.1 kann nun auch für Steuerungsprobleme formuliert werden, die keine Phasenbeschränkung enthalten.

Satz 1.2.4. *Gegeben sei das Steuerungsproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2. Der zulässige Bereich zu (P_E) sei nichtleer. Die Voraussetzungen 1.2.1 bis 1.2.3, 1.2.5 und 1.2.6 bis 1.2.8 sowie 1.2.10 seien erfüllt. Dann besitzt (P_E) eine optimale Lösung.*

Durch die Wahl $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > 2(C_2 + C_3K)$ ist stets gesichert, dass für jeden zulässigen Prozess die Ungleichung $|x(t)| \leq \beta(t)$ mit $\beta \in L_2((0, \infty), \mu)$ gilt. Somit muss diese Voraussetzung nicht mehr geprüft werden und der Existenzsatz von LYKINA [34] ist auf Problem (P_E) anwendbar, obwohl die Aufgabe keine Phasenbeschränkungen enthält.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Funktion β aufgrund ihrer Definition niemals die Menge der zulässigen Funktionen schneidet und deshalb keine echte Phasenbeschränkung darstellt. Wir definieren:

Definition 1.2.6. Es sei

$$\mu(t) := e^{-\varrho t}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3K)$$

mit den positiven, reellen Konstanten C_2 , C_3 und K aus der Voraussetzung 1.2.5 und aus (1.2.5). Dann heißt das Gewicht μ ein *natürliches Gewicht der Aufgabe (P_E)* . Mit der Funktion β aus Satz 1.2.2 nennen wir die Ungleichung $|x(t)| \leq \beta(t)$ *natürliche Phasenbeschränkung der Aufgabe (P_E)* .

Bemerkung 1.2.3. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Begriffe *natürliches Gewicht* und *natürliche Phasenbeschränkung* stets an eine Aufgabenklasse gekoppelt sind. Für jede Klasse werden wir sie neu formulieren. Sie sind stets abhängig von der Größe ϱ , die aus der jeweiligen Dynamik bestimmt werden muss.

Die Bestimmung des natürlichen Gewichtes einer Aufgabe ist in der gesamten Arbeit ein Teil der Problemformulierung. Durch die Bestimmung dieses Gewichtes μ ist zusätzlich gesichert, dass die Voraussetzung

$x \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ keine Restriktion darstellt, sondern automatisch erfüllt ist. In den letzten Jahren wurde diese Idee beispielsweise in [35], [42], [45] und [64] aufgegriffen und zur sinnvollen Wahl der Funktionenräume genutzt.

1.3 Das Grundproblem (P)

Mit der Formulierung von notwendigen Optimalitätsbedingungen in Form des Pontrjaginschen Maximumprinzips stellte PONTRJAGIN [46] ein wichtiges Instrument zur Bestimmung von Kandidaten für die Lösung eines Steuerungsproblems auf endlichem Zeithorizont zur Verfügung. Die Auswertung der Maximumbedingung, der Zustandsgleichung, der Kanonischen Gleichung, des Anfangswertproblems und der Transversalitätsbedingung liefern bekanntermaßen Kandidaten für die Lösung des Problems. Ende der 70er Jahre des letzten Jahrhunderts gab HALKIN ein Beispiel ([25], S.271) an, in welchem die Transversalitätsbedingung für ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont nicht galt.

Beispiel 2. Zu minimieren ist das Funktional

$$\int_0^\infty (x(t) - 1)u(t)dt$$

bezüglich aller Paare (x, u) , welche folgende Restriktionen erfüllen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 - x(t))u(t), & x(0) &= 0, \\ u(t) &\in [0, 1] \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Die gesuchten Funktionen x und u seien stückweise stetig differenzierbar beziehungsweise stückweise stetig. Als optimale Steuerung erhält man mittels heuristischer Anwendung des Maximumprinzips

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < t \end{cases}.$$

Als einzig mögliche Multiplikatoren ergeben sich $(\lambda_0, y(t)) = (\lambda_0, -\lambda_0)$ für $t > 1$, was der vermuteten Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ widerspricht.

HALKIN formulierte in Folge dessen ein Maximumprinzip ohne Transversalitätsbedingung. AUBIN&CLARKE [7] bewiesen unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Daten der Aufgabe ein Maximumprinzip mit gültiger Transversalitätsbedingung. Diese Voraussetzung, die auch Bestandteil der Arbeiten von ASEEV&KRYAZHIMSKIY ([4] und spätere Arbeiten) ist, ist unter dem Namen *dominating discount* bekannt. Wir werden am Ende dieses Kapitels noch darauf eingehen und ein Maximumprinzip, wie es von ASEEV&KRYAZHIMSKIY formuliert wurde, vorstellen. Wir stützen uns in der vorliegenden Arbeit auf das Pontrjaginsche Maximumprinzip (PMP) für eine Teilklasse der Probleme (P_E) , formuliert und bewiesen für einen Zustand und eine Steuerung in PICKENHAIN [41], sowie für n Zustände und m Steuerungen in ZIEMANN [61]. Entscheidend für die vorliegende Arbeit ist, dass dieses Maximumprinzip die Transversalitätsbedingung in Form der Raumzugehörigkeit $y \in W_2^1((0, \infty), \mu^{-1})$ enthält, welche $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ nach sich zieht. In den genannten Arbeiten werden notwendige Optimalitätsbedingungen für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont formuliert. Die Funktionen x und u sind aus den gewichteten Räumen $W_2^1((0, \infty), \mu)$ und $L_2((0, \infty), \mu)$ gewählt. Dieses Problem (P) unterscheidet sich von der Problemklasse (P_E) dadurch, dass die rechte Seite der Dynamik sowohl in der Steuerung als auch im Zustand linear ist. Das bedeutet, die Klasse (P) ist in der Klasse (P_E) enthalten. Wir formulieren im Folgenden die Aufgabe (P) , da wir dieses Problem in den weiteren Kapiteln als Grundaufgabe benutzen. Gegeben sei die Steuerungsaufgabe (P) :

$$J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min!, \quad (1.15)$$

bezüglich aller Paare

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu), \quad u \in L_\infty((0, \infty)), \quad (1.16)$$

die der Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (1.17)$$

der Steuerungsbeschränkung

$$u(t) \in U, \quad \text{f. ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (1.18)$$

und der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 > 0 \quad (1.19)$$

genügen.

Voraussetzung 1.3.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich sei nichtleer und von der Variablen der Zeit t unabhängig.

Voraussetzung 1.3.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar in allen Variablen und konvex in v .

Voraussetzung 1.3.3. Die von der Variablen ξ unabhängigen Funktionen $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ seien beschränkt und stetig differenzierbar.

Voraussetzung 1.3.4. Für die Gewichtsfunktion μ gelte $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 0$.

Analog zu Abschnitt 1.2 kann man ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit die Funktion μ im Integranden erzeugen.

1.3.1 Das Maximumprinzip zu (P)

Wir werden in diesem Abschnitt ein Maximumprinzip von PICKENHAIN [41] vorstellen, welches auf das Problem (P) anwendbar ist. Dieses Maximumprinzip bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Gegeben sei das Steuerungsproblem (P). Die auftretenden Funktionen mögen den Voraussetzungen 1.3.1 bis 1.3.4 genügen. Des Weiteren seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

Voraussetzung 1.3.5. Es existiere ein $T > 0$ mit $A(t) < \frac{\varrho}{2} \quad \forall t \geq T$.

Voraussetzung 1.3.6. Für alle $(\zeta, w) \in L_2((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty))$, $(\zeta(t), w(t)) \in W(t)$ mit

$$W(t) := \{(\xi, v) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}_+, |\xi - x^*(t)|\mu(t) < \varepsilon_0, v \in U\}, \quad \varepsilon_0 > 0$$

sei

$$r_\xi(\cdot, \zeta(\cdot), w(\cdot)) \in L_2((0, \infty), \mu) \quad \text{und} \quad r_v(\cdot, \zeta(\cdot), w(\cdot)) \in L_2((0, \infty), \mu)$$

erfüllt.

Dann gilt das Maximumprinzip in folgender Form:

Satz 1.3.1. *Das Paar $(x^*, u^*) \in \mathcal{A}_L$ sei die optimale Lösung zu (P) im Sinne des Kriteriums **L**. Dann existieren Multiplikatoren (λ_0, y) , mit*

$$\lambda_0 = 1 \tag{N}$$

$$y \in W_2^1((0, \infty), \mu^{-1}), \quad \left(\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0 \right), \tag{T}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \tag{M}$$

$$\dot{y}(t) = -H_\xi(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^+, \tag{K}$$

wobei $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Pontrjaginfunktion ist:

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(t, \xi, v) \mu(t) + \eta(A(t)\xi + B(t)v).$$

Man bezeichnet (N) als Normalitätsbedingung, (T) als Transversalitätsbedingung, (M) als Maximumbedingung und (K) als kanonische Gleichung. Letztere spielt bei Steuerungsproblemen über unendlichem Zeithorizont eine besondere Rolle, wir werden später genauer darauf eingehen.

Den Satz 1.3.1 mit Beweis findet man in PICKENHAIN [41]. Die Autorin beweist notwendige Bedingungen für das Steuerungsproblem (P) und Funktionen (x, u) aus den gewichteten Funktionenräumen $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu)$. Man beachte, dass in der angegebenen Literatur an die Steuerung u die Voraussetzung $u \in L_2((0, \infty), \mu)$ gestellt wird. Im gegebenen Problem (P) gilt $u \in L_\infty((0, \infty))$. Somit folgt aufgrund der Definition der Gewichtsfunktion μ , dass $u \in L_2((0, \infty), \mu)$ automatisch erfüllt ist. Andererseits folgt aus $u \in L_2((0, \infty), \mu)$ zusammen mit der Voraussetzung 1.3.1, dass für jede zulässige Funktion u die Inklusion $u \in L_\infty((0, \infty))$ gilt. Somit ist das Maximumprinzip aus Satz 1.3.1 auf (P) anwendbar.

Da die Problemklasse (P) in der Klasse (P_E) enthalten ist, lässt sich der Existenzsatz 1.2.4 auf Problem (P) anwenden. Die Voraussetzung 1.2.5 ist wegen

$$|A(t)\xi + B(t)v| \leq \|A\|_\infty |\xi| + \|B\|_\infty |v| = C_2 |\xi| + C_4 |v|$$

mit $C_1 = C_3 = 0$, also insbesondere für jedes $C_1 > 0$, $C_3 > 0$ und $C_2 := \|A\|_\infty$, $C_4 := \|B\|_\infty$ stets erfüllt. Die Voraussetzung 1.2.8 ist aufgrund der Abschätzung

$$|B(t)| \leq |B(t)| + B_3 |\xi| = A_3(t) + B_3 |\xi|$$

mit $A_3 \in L_2(\mathbb{R}_+, \mu)$ für $A_3(t) := |B(t)|$ und jede beliebige Konstante $B_3 > 0$ ebenfalls erfüllt. Das Bestimmen eines natürlichen Gewichtes erfolgt gemäß Satz 1.2.2. Aus der Dynamik erhalten wir mit $\|A\|_\infty = C_2$:

$$\mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3K) \geq 2C_2 = 2\|A\|_\infty > 0. \quad (1.20)$$

Beispiel 3. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b, \quad x(0) = x_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Bestimmen wir gemäß der Voraussetzung 1.2.10 ein natürliches Gewicht, so erhält man mittels der Abschätzung (1.20):

$$\varrho > 2(C_2 + C_3K) > 2C_2 = 2 \cdot |-a|.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$x(t) = c_1 e^{-at} + c_2$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $c_1 = x_0 - \frac{b}{a}$ und $c_2 = \frac{b}{a}$. Es ist

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-\varrho t} dt \leq \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-2|-a|t} dt = \int_0^\infty |c_1 e^{-at} + c_2|^2 e^{-2|-a|t} dt < \infty.$$

Die Funktion x aus dem Anfangswertproblem liegt allerdings auch in jedem gewichteten Sobolevraum $W_2^1((0, \infty), \nu)$ mit $\nu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > 0$.

Das Problem ist, dass man bei der Abschätzung (1.20) das Vorzeichen der Funktion A aus der Dynamik nicht beachtet. Im Folgenden werden wir die Linearität der Dynamik in Problem (P) nutzen, um eine natürliche Gewichtsfunktion zu Problem (P) zu formulieren.

1.3.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P)

Wie wir bereits wissen, unterliegt jede zu (P) zulässige Funktion x einer natürlichen Zustandsbeschränkung. Wir nennen diese Beschränkung *natürliche Beschränkung*, da sie für jeden zulässigen Prozess erfüllt ist und somit keine echte Zustandsbeschränkung darstellt. Analog zum Abschnitt 1.2.3 bestimmen wir eine Funktion $\beta \in L_2((0, \infty), \mu)$ mit $|x(t)| \leq \beta(t)$ für alle zu Problem (P) zulässigen Funktionen x . Der Unterschied zu dem natürlichen Gewicht der Aufgabe (P_E) liegt in der Wahl des Parameters ϱ .

Lemma 1.3.1. Für jede zu (P) zulässige Funktion x gilt

$$|x(t)| \leq \beta(t) \quad \text{mit } \beta \in L_2((0, \infty), \mu)$$

mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > |M| + M$ und den Konstanten m, M , definiert durch

$$m := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} A(t) \leq A(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t) =: M. \quad (1.21)$$

Beweis: Die Linearität der Zustandsgleichung ermöglicht eine explizite Angabe der Lösung der Differentialgleichung. Setzen wir

$$F(t) := \int_0^t A(\eta) d\eta, \quad (1.22)$$

so ist diese Lösung gegeben durch

$$x(t) = x_0 e^{F(t)} + \left(\int_0^t B(s) u(s) e^{-F(s)} ds \right) e^{F(t)}.$$

Da A als stetig und beschränkt angenommen wird, folgt unter Verwendung der Schranken m und M aus (1.21) unmittelbar $mt \leq F(t) \leq Mt$. Daraus folgt

$$F(t) - F(s) = \int_s^t A(\eta) d\eta \leq \int_s^t M d\eta = M(t - s)$$

und demnach

$$\int_0^t e^{F(t)-F(s)} ds \leq \begin{cases} \int_0^t e^{M(t-s)} ds = \frac{1}{M}(e^{Mt} - 1) & \text{für } M \neq 0 \\ \int_0^t e^0 ds = t & \text{für } M = 0 \end{cases}.$$

Damit können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| e^{F(t)} + \left| \int_0^t B(s) u(s) e^{F(t)-F(s)} ds \right| \\ &\leq |x_0| e^{F(t)} + K \|B\|_\infty \int_0^t e^{F(t)-F(s)} ds \\ &\leq \begin{cases} |x_0| e^{Mt} + K \|B\|_\infty \frac{1}{M} (e^{Mt} - 1) =: \beta_1(t), & M \neq 0, \\ |x_0| + K \|B\|_\infty t =: \beta_2(t), & M = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Definieren wir nun die Funktion β durch

$$\beta(t) := \begin{cases} \beta_1(t), & M \neq 0 \\ \beta_2(t), & M = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

so können wir eine Gewichtsfunktion μ bestimmen, sodass $\beta \in L_2(\mathbb{R}_+, \mu)$ eine Schranke für den Betrag jeder zu (P) zulässigen Zustandstrajektorie x ist. Betrachten wir den Fall $M \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\beta(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty \left(|x_0| e^{Mt} + K \|B\|_\infty \frac{1}{M} (e^{Mt} - 1) \right)^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty 2 \left(|x_0| + K \|B\|_\infty \frac{1}{M} \right)^2 e^{2Mt} \mu(t) dt \\ &\quad + 2K^2 \|B\|_\infty^2 \frac{1}{M^2} \int_0^\infty \mu(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage gilt offensichtlich für jede Gewichtsfunktion

$$\mu(t) = e^{-\varrho t} \quad \text{mit } \varrho > 2 \max(M, 0) = M + |M|. \quad \square \quad (1.24)$$

Bemerkung 1.3.1. Der Fall $M = 0$ liefert $\varrho > 0$, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die Bestimmung des zu (P) gehörigen Wertes ϱ kann also auch in diesem Fall über die Formel (1.24) erfolgen.

Satz 1.3.2. Die Voraussetzungen 1.3.1 und 1.3.3 seien erfüllt. Für jede Funktion $x \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$, welche der Differentialgleichung (1.17) mit dem Anfangswert (1.19) genügt, gilt

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu)$$

mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$ und $M := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t)$.

Beweis: Für den Zustand x gilt nach Definition der Funktion β :

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 \mu(t) dt \leq \int_0^\infty |\beta(t)|^2 \mu(t) dt < \infty.$$

Für die Ableitung gilt unter Verwendung der Linearität der Zustandsgleichung (1.17)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty |A(t)x(t) + B(t)u(t)|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty 2 \|A\|_\infty^2 |x(t)|^2 \mu(t) dt + \int_0^\infty 2K^2 \|B\|_\infty^2 \mu(t) dt \\ &< \infty, \end{aligned}$$

da A und B als beschränkte Funktionen vorausgesetzt wurden. \square

Das bedeutet, dass wir für die Problemklasse (P) definieren können:

Definition 1.3.1. Die Funktion μ mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$, $M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t)$ heißt *natürliches Gewicht der Aufgabe (P)*. Für die Funktion β , definiert durch (1.23) heißt die Ungleichung $|x(t)| \leq \beta(t)$ *natürliche Phasenbeschränkung der Aufgabe (P)*.

Im Folgenden werden wir unter Verwendung der letzten Definition die notwendigen Bedingungen aus Satz 1.3.1 neu formulieren. Gegeben sei das Steuerungsproblem (P), (1.15) bis (1.19).

Voraussetzung 1.3.7. μ sei eine Gewichtsfunktion, $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$, $M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t)$.

Voraussetzung 1.3.8. Für die partiellen Ableitungen der Funktion r gelte

$$|r_\xi(t, \xi, v)| \leq A_{21}(t) + B_{21}(|\xi| + |v|), \quad |r_v(t, \xi, v)| \leq A_{22}(t) + B_{22}(|\xi| + |v|)$$

für alle $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Funktionen $A_{2i} \in L_2((0, \infty), \mu)$ und Konstanten $B_{2i} > 0$, $i = 1, 2$.

Unter den Voraussetzungen 1.3.1 bis 1.3.3, 1.3.7 und 1.3.8 gilt für Steuerungsaufgaben der Klasse (P) das Maximumprinzip in folgender Form:

Satz 1.3.3 (Maximumprinzip für (P)). *Das Paar $(x^*, u^*) \in \mathcal{A}_L$ sei die optimale Lösung zu (P) im Sinne des Kriteriums \mathbf{L} . Dann existieren Multiplikatoren (λ_0, y) mit*

$$\lambda_0 = 1 \tag{N}$$

$$y \in W_2^1((0, \infty), \mu^{-1}), \quad \left(\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0 \right) \tag{T}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+ \tag{M}$$

$$\dot{y}(t) = -H_\xi(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \tag{K}$$

wobei $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Pontrjaginfunktion ist,

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(t, \xi, v) \mu(t) + \eta(A(t)\xi + B(t)v).$$

Beweis: Es muss gezeigt werden, dass die Voraussetzungen 1.3.4 und 1.3.5 erfüllt sind, wenn Voraussetzung 1.3.7 gilt. Sei die Voraussetzung 1.3.7 erfüllt. Dann gilt für jeden zu Problem (P) zulässigen Zustand $x \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ und $\varrho > M + |M|$. Dann sind aufgrund der Definition der Schranke M aus (1.21) in Lemma 1.3.1 die Voraussetzungen

1.3.4 und 1.3.5 erfüllt. Für den Beweis muss weiter gezeigt werden, dass die Voraussetzung 1.3.6 erfüllt ist, wenn die Voraussetzung 1.3.8 gilt. Sei

$$|r_\xi(t, \xi, v)| \leq A_{21}(t) + B_{21}(|\xi| + |v|) \quad \forall (t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

dann gilt für jedes Tupel $(\zeta, \omega) \in L_2((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty))$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |r_\xi(t, \zeta(t), \omega(t))|^2 \mu(t) dt &\leq \int_0^\infty |A_{21}(t) + B_{21}(|\zeta(t)| + |\omega(t)|)|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty 2|A_{21}(t)|^2 \mu(t) dt + \int_0^\infty 2|B_{21}(|\zeta(t)| + |\omega(t)|)|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty 2|A_{21}(t)|^2 \mu(t) dt + \int_0^\infty 4B_{21}^2 |\zeta(t)|^2 \mu(t) dt + \int_0^\infty 4B_{21}^2 |\omega(t)|^2 \mu(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

da A_{21} , ζ und ω Funktionen des Raumes $L_2((0, \infty), \mu)$ sind. Für die Forderung an r_v ist der Beweis analog. Demnach ist die Voraussetzung 1.3.6 erfüllt. Folglich sind die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1 erfüllt, wenn die Voraussetzungen des Satzes 1.3.3 erfüllt sind. \square

Bemerkung 1.3.2. Falls Konstanten \bar{M} und $T \geq 0$ existieren, sodass gilt

$$m \leq A(t) \leq \bar{M} \leq M \quad \forall t > T,$$

so kann in allen Beweisen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Konstante M durch die Konstante \bar{M} ersetzt werden. Um diese Aussage zu verifizieren, zerlegt man die Integrale in jedem Beweisschritt in

$$\int_0^\infty f(t) e^{-\bar{\varrho}t} dt = \int_0^T f(t) e^{-\bar{\varrho}t} dt + \int_T^\infty f(t) e^{-\bar{\varrho}t} dt.$$

Hier symbolisiert die Funktion f den jeweiligen Integranden, der in einem Beweisschritt auftaucht. Der erste Summand auf der rechten Seite ist aufgrund der analytischen Eigenschaften der eingehenden Funktionen stets endlich. Für den zweiten Summanden sehen wir, dass es für den Nachweis der Summierbarkeit ausreicht, die Schranke \bar{M} zu betrachten. Falls diese Konstante \bar{M} existiert, kann man in der Definition der natürlichen Gewichtsfunktion die positive Konstante ϱ durch $\bar{\varrho}$ mit $\bar{\varrho} > \bar{M} + |\bar{M}|$ ersetzen. Der Einfachheit halber werden wir stets $T = 0$ annehmen.

1.3.3 Die Existenz einer Lösung zu (P)

Unter Beachtung der Resultate des letzten Abschnittes können wir einen Existenzsatz für Probleme der Klasse (P) formulieren:

Satz 1.3.4 (Existenzsatz für (P)). *Die natürliche Gewichtsfunktion sei μ mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$. Die Voraussetzungen 1.2.6 und 1.2.7 seien mit dem Gewicht μ erfüllt. Der zulässige Bereich sei nichtleer. Dann besitzt das Steuerungsproblem (P) , gegeben durch (1.15) bis (1.19), eine Lösung.*

Beweis: Die Voraussetzungen 1.2.5 und 1.2.8 sind aufgrund der Linearität der Zustandsgleichung aus Problem (P) und der Beschränktheit der Funktionen A und B stets erfüllt. Das bedeutet, dass der Existenzsatz 1.2.4 auch gilt, wenn man die Voraussetzung 1.2.10 durch die Voraussetzung 1.3.7 ersetzt.

1.3.4 Ein Beispiel

Am folgenden einfachen Beispiel werden wir zeigen, wie die natürliche Gewichtsfunktion bestimmt wird. Der Zustandsraum wird anhand dieses Gewichtes passend gewählt. Wir werden die Existenz einer Lösung prüfen und mittels der notwendigen Bedingungen die optimale Lösung finden.

Beispiel 4.

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} u^2(t) e^{-\alpha t} dt \rightarrow \min!$$

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad u(t) \in [0, 1], \quad x(0) = 1,$$

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu_0), \quad u \in L_\infty((0, \infty)).$$

Die Funktion μ_0 ist dabei die natürliche Gewichtsfunktion der Aufgabe und wird gemäß Lemma 1.3.1 aus der gegebenen Dynamik bestimmt:

$$\mu_0(t) = e^{-\varrho_0 t} \text{ mit } \varrho_0 > M_0 + |M_0|, \quad M_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t).$$

Für das Beispiel bedeutet das

$$\varrho_0 > 2.$$

Formuliert man das Steuerungsproblem in der Form des Problems (P), so erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} u^2(t) e^{(\varrho_0 - \alpha)t} \mu_0(t) dt \rightarrow \min!$$

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad u \in [0, 1], \quad x(0) = 1,$$

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu_0), \quad \varrho_0 > 2, \quad u \in L_\infty((0, \infty)).$$

mit

$$r(t, \xi, v) = \frac{1}{2} v^2 e^{(\varrho_0 - \alpha)t}, \quad A(t) \equiv 1, \quad B(t) \equiv 1.$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen 1.2.6 und 1.2.7: Für jede beliebige positive Funktion $A_1 \in L_1((0, \infty))$ gilt

$$|r(t, \xi, v) \mu_0(t)| = \frac{1}{2} v^2 e^{-\alpha t} \leq A_1(t) + B_1 \mu_0(t) \xi^2 + B_1 \mu_0(t) v^2,$$

falls

$$\frac{1}{2} e^{-\alpha t} \leq B_1 \mu_0(t).$$

Das bedeutet, dass die Voraussetzung 1.2.6 für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, wenn $2 < \varrho_0 \leq \alpha$. Für die partielle Ableitung nach der 3. Variablen gilt:

$$|r_v(t, \xi, v) \mu_0(t)| = |v| e^{-\alpha t} \leq A_3(t) + B_3 \mu_0(|\xi| + |v|),$$

falls $2 < \varrho_0 \leq \alpha$. Die positive Funktion $A_3 \in L_2((0, \infty), \mu_0)$ kann beliebig gewählt werden. Wir merken an, dass beispielsweise $u_\beta(t) = e^{-\beta t}$ für jedes $\beta \in \mathbb{R}_+$ eine zulässige Steuerung ist. Die zugehörige Zustandsfunktion ergibt sich aus der Zustandsgleichung zu $x_\beta(t) = c_1 e^t - \frac{1}{\beta+1} e^{-\beta t}$ mit $c_1 = \frac{\beta+2}{\beta+1}$. Damit ist sichergestellt, dass der zulässige Bereich nichtleer ist. Folglich hat das Problem für $\alpha \geq \varrho_0$ eine Lösung. Da wir für jedes $\alpha > 2$ ein ϱ_0 finden können, welches der Ungleichungskette $2 < \varrho_0 \leq \alpha$ genügt, ist die Existenz einer Lösung für alle $\alpha > 2$ gesichert. Um die notwendigen Bedingungen aus Satz 1.3.3 anwenden zu können, überprüfen wir den 1. Teil der Voraussetzung 1.3.8, der wegen $r_\xi(t, \xi, v) \equiv 0$ stets erfüllt ist. Zur Lösung des Problems bestimmen wir die Pontrjaginfunktion

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0 = 1) = -\frac{1}{2} v^2 e^{-\alpha t} + \eta(\xi + v).$$

Man erhält:

$$\max_{v \in [0,1]} H(t, \xi, v, \eta, 1) = \begin{cases} \eta\xi, & \eta e^{\alpha t} \leq 0 \\ \frac{1}{2}\eta^2 e^{\alpha t} + \eta\xi, & \eta e^{\alpha t} \in (0, 1) \\ -\frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \eta(\xi + 1), & \eta e^{\alpha t} \geq 1 \end{cases}$$

Die Adjungierte ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -H_\xi(t, x(t), u(t), y(t), 1) = -y(t)$$

und lautet offensichtlich $y(t) = c_1 e^{-t}$. Anhand der Funktion y sieht man, dass es keinen Schaltpunkt geben kann. Für $y(t)e^{\alpha t} \leq 0$ lassen sich alle Bedingungen erfüllen. Das heißt, die optimale Lösung lautet $(x^*(t), u^*(t)) = (e^t, 0)$.

Bemerkung 1.3.3. Betrachtet man das Zielfunktional, so hätte man die optimale Lösung auch durch direkte Abschätzung erhalten können. Nichtsdestotrotz sollten die notwendigen Bedingungen komplett diskutiert werden, da wir dieses Beispiel im nächsten Kapitel aufgreifen werden.

1.4 Quadratische Zielfunktionale

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir beliebige, in der Steuerung konvexe Integranden. Geht man davon aus, dass das Steuerungsproblem einen technischen oder ökonomischen Hintergrund besitzt, so gelangt man in zweierlei Hinsicht zur Klasse der linear-quadratischen Steuerungsprobleme. Verwendet man ein SQP-Verfahren, so werden linear-quadratische Probleme gelöst. Viele nichtlineare Probleme lassen sich durch linear-quadratische Probleme hinreichend gut annähern. Deshalb gehören eben diese Probleme des sogenannten *Quadratischen Regulators* zu den wichtigsten der Optimalen Steuerung, siehe [2], S.25ff. Der Begriff *linear-quadratisch* bedeutet in diesem Zusammenhang eine Dynamik, welche bezüglich des Tupels (x, u) linear ist und ein Zielfunktional, welches in beiden Größen quadratisch auftritt. An einer Teilklasse dieser Probleme werden wir das Maximumprinzip aus Satz 1.3.3 überprüfen und die Resultate mit 2 weiteren Maximumprinzipen vergleichen.

1.4.1 Das Problem (P_R)

Wir betrachten folgendes Problem (P_R) . Zu minimieren sei das Funktional

$$J_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ W(t)x^2(t) + R(t)u^2(t) + w(t)x(t) + r(t)u(t) \right\} \mu(t) dt \quad (1.25)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, x(0) = x_0 \quad (1.26)$$

$$u(t) \in U \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (1.27)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu). \quad (1.28)$$

Voraussetzung 1.4.1. Der Steuerbereich U sei eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R} .

Voraussetzung 1.4.2. Die Funktionen W und R seien Elemente des Raumes $L_\infty((0, \infty))$, $W(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Für die Funktionen w und r gelte $w, r \in L_2((0, \infty), \mu)$.

Voraussetzung 1.4.3. Die Funktionen $A, B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ aus der Dynamik seien Elemente des Raumes $L_\infty((0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}_+)$.

Voraussetzung 1.4.4. Die Gewichtsfunktion μ sei gegeben durch $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$ mit $M := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t)$.

Voraussetzung 1.4.5. Die Menge aller Prozesse, welche 1.26 bis 1.28 erfüllen, bezeichnen wir mit \mathcal{B} . Wir definieren

$$\mathcal{B}_e := \{(x, u) \in \mathcal{B} \mid J_R(x, u) < \infty\}$$

und fordern, dass diese Menge nichtleer ist und nicht nur aus einem Punkt besteht.

Dies ist eine Aufgabe der Problemklasse (P) . Wir bestimmen

$$r(t, \xi, v) = \frac{1}{2} \left(W(t)\xi^2 + R(t)v^2 + w(t)\xi + r(t)v \right)$$

und bestimmen die partiellen Ableitungen

$$r_\xi(t, \xi, v) = W(t)\xi + \frac{1}{2}w(t), \quad r_v(t, \xi, v) = R(t)v + \frac{1}{2}r(t).$$

Überprüfen wir hier die Voraussetzungen 1.3.7 und 1.3.8 für die Gültigkeit des Maximumprinzips aus Satz 1.3.3 zu (P) , so ergibt sich leicht, dass das PMP 1.3.3 zu (P) für das Problem (P_R) stets gilt.

Wir betrachten dazu ein Beispiel des klassischen quadratischen Regulators über unendlichem Zeithorizont in folgender Form:

Beispiel 5.

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t)) e^{-\alpha t} dt \rightarrow \min!$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Für die Steuerung u gelte die Steuerungsbeschränkung

$$|u(t)| \leq x_0 \left| \frac{\alpha}{2} - A - \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2} - A\right)^2} \right|$$

mit reellen Konstanten α und A , welche folgender Voraussetzung genügen:

Voraussetzung 1.4.6. Für die reellen Konstanten α und A gelte

$$\alpha \leq 2\lambda, \quad \lambda := \sqrt{1 + \left(A - \frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Dann ist dies eine Aufgabe der Klasse (P_R) mit

$$W(t) = e^{(\varrho - \alpha)t}, \quad R(t) = e^{(\varrho - \alpha)t}, \quad w(t) = r(t) \equiv 0.$$

Damit die Funktionen W und R beschränkt sind, muss $\varrho \leq \alpha$ gelten. Desweiteren muss $\varrho > A + |A|$ gelten, damit die Voraussetzung 1.3.7 erfüllt ist. Also können wir die Gültigkeit des Maximumprinzips aus Satz 1.3.3 sichern, falls zusätzlich zu Voraussetzung 1.4.6

$$A + |A| < \alpha$$

gilt. Die Menge der Tupel (α, A) , die diese Voraussetzung erfüllen, ist in der Abbildung 1.1 schraffiert⁸ dargestellt. Das ist die Menge, für die wir die Existenz einer Lösung und die Gültigkeit notwendiger Bedingungen sichern können.

1.4.2 Der Begriff „dominating discount“

Bereits Ende der 70er Jahre beschrieben AUBIN&CLARKE [7] den Zusammenhang zwischen der Gültigkeit eines regulären Maximumprinzips mit der

⁸Die Schraffierung setzt sich, wie skizziert, unterhalb der x -Achse fort.

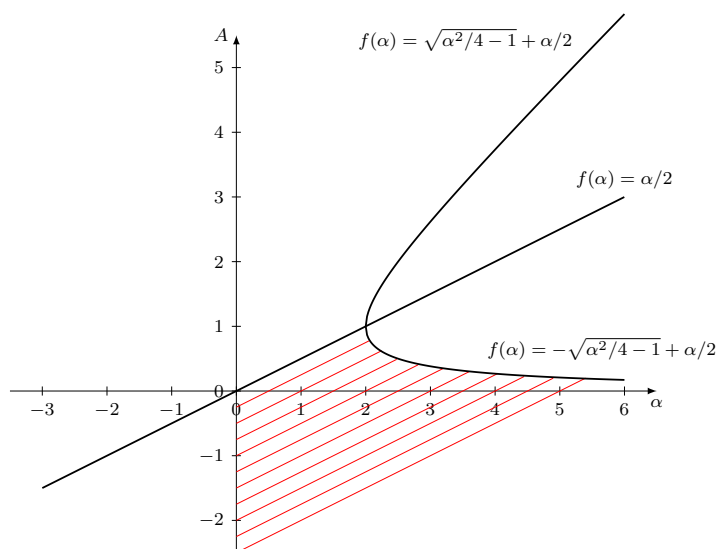


Abbildung 1.1

im Integranden befindlichen Gewichtsfunktion. Sie stellten fest, dass ein hinreichend großer discount-Faktor α das Wachstum der Ableitung r_ξ und das Wachstum der zulässigen Funktionen x beschränkt. ASEEV&KRYAZHIMSKIY [5] formulierten Bedingungen, unter denen die klassische Transversalitätsbedingung $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ gilt und bezeichnen diesen Fall mit *dominating discount*. Die Autoren untersuchen Integranden der Form $r(x, u)e^{-\alpha t}$ mit einer autonomen⁹ Funktion r und einer Konstanten $\alpha \geq 0$. Die gesuchten Funktionen x und u sind Vektoren des \mathbb{R}^n beziehungsweise \mathbb{R}^m . Der Steuerbereich wird als kompakt vorausgesetzt. Ihre Resultate werden in [6] durch ASEEV&VELIOV auf allgemeinere Klassen mit nicht autonomen Funktionen r und nichtlineare Dynamiken erweitert. Wir werden im Folgenden ein Resultat von ASEEV&KRYAZHIMSKIY für den eindimensionalen Fall mit linearer Dynamik vorstellen, auf das Problem (R) des quadratischen Regulators anwenden und mit unseren Resultaten vergleichen.

Gegeben sei folgendes Steuerungsproblem:

$$(A) \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(x(t), u(t))e^{-\alpha t} dt \rightarrow \min!$$

⁹das bedeutet, die Funktion hängt nicht explizit von der Zeit t ab

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t), x(0) = x_0 \\ u(t) &\in U\end{aligned}$$

mit $\alpha > 0$. A sei eine beliebige Konstante. Die Begriffe zulässig und optimal sind wie in Definition 1.2.1 zu verstehen. Die Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ sei eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Für jede zulässige Steuerung u mit $u(t) \in U$ gebe es eine zulässige Zustandsfunktion x mit Werten $x(t) \in G$.

Voraussetzung 1.4.7. Für jedes $\xi \in G$ sei die Menge

$$Q(\xi) := \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^2 : z^0 \leq -r(\xi, v), z = A\xi + v, v \in U\}$$

konvex.

Voraussetzung 1.4.8. Es existieren positive Funktionen δ_1 und δ_2 auf $[0, \infty)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = 0$, $i = 1, 2$ und für jedes zulässige Paar (x, u) gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}e^{-\alpha t} \max_{u \in U} |r(x(t), u)| &\leq \delta_1(t) \quad \forall t \geq 0, \\ \int_T^\infty e^{-\alpha t} |r(x(t), u)| dt &\leq \delta_2(T) \quad \forall T \geq 0.\end{aligned}$$

Voraussetzung 1.4.9. Es existieren Konstanten $\kappa \geq 0$ und $\gamma \geq 0$ sodass $|r_\xi(\xi, v)| \leq \kappa(1 + |\xi|^\gamma)$ für jedes $\xi \in G$ und $v \in U$ gilt.

Voraussetzung 1.4.10. Es sei $\alpha > (\gamma + 1)A$.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so liegt nach [5] der Fall *dominating discount* vor und es gilt folgender Satz:

Satz 1.4.1 (Aseev, Kryazhimskiy, [5]). *Die Voraussetzungen 1.4.7 bis 1.4.10 seien erfüllt. Sei (x^*, u^*) zulässig und optimal zu Problem (A). Dann gilt für das Problem (A) das Maximumprinzip aus Satz 1.3.3.*

Beweis: Den ausführlichen Beweis findet man in [5], S.101ff. \square

Sowohl der Begriff *zulässig*, als auch der Begriff *optimal* wird analog zu den Definitionen 1.2.1 und 1.2.2 der vorliegenden Arbeit verstanden, siehe [5], S.6. Ebenso verhält es sich mit der Wahl des Integralbegriffes. Die Autoren weisen zwar nicht explizit darauf hin, dass das Zielfunktional im Sinne von Lebesgue zu verstehen ist, verwenden dies aber in ihren Beweisen.

Am Beispiel des Regulators (R) kann man einfach zeigen, dass die Voraussetzungen 1.4.7 bis 1.4.10 erfüllt sind, Wenn $\alpha \geq 2A$ und $\alpha > 0$. Dies stimmt genau mit unseren Resultaten überein und entspricht ebenfalls der schraffierten Fläche in Abbildung 1.1. Das bedeutet, dass für das Beispiel 5 die Voraussetzungen sowohl zu Satz 1.3.3 als auch zu Satz 1.4.1 für die gleichen Tupel (α, A) erfüllt sind.

1.4.3 Der Quadratische Regulator unter Beachtung der konvexen Analysis

In diesem Abschnitt werden wir die Aufgabenklasse erneut betrachten. Nutzt man die spezielle Struktur des Integranden, kann die Existenz einer Lösung für einen größeren Parameterbereich gezeigt werden. Außerdem steht für diese Klasse ein Maximumprinzip zur Verfügung. Wir zitieren PICKENHAIN [43] und betrachten erneut das Problem (P_R):

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ W(t)x^2(t) + R(t)u^2(t) + w(t)x(t) + r(t)u(t) \right\} \mu(t) dt \rightarrow \min!$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, x(0) = x_0 \quad (1.29)$$

$$u(t) \in U \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (1.30)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu) \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

Für den Fall des quadratischen Zielfunktional kann man die Gültigkeit eines Maximumprinzips zeigen, wenn man zusätzlich zu den Voraussetzungen 1.4.1 bis 1.4.5 folgende Voraussetzung an die optimale Lösung stellt.

Voraussetzung 1.4.11. *Es sei $Wx^*, Ru^* \in L_2((0, \infty), \mu)$.*

Man beachte, dass unter den getroffenen Voraussetzungen in [43] die Existenz einer Lösung gezeigt werden konnte. Dann gilt folgender Satz:

Satz 1.4.2 (Maximumprinzip für (P_R)). *Die Voraussetzungen 1.4.1 bis 1.4.5 und 1.4.11 seien erfüllt und $(x^*, u^*) \in \mathcal{B}_e$ sei die optimale Lösung im Sinne des Kriteriums **L** aus Definition 1.2.2. Dann existieren Multiplikatoren (λ_0, y) mit*

$$\lambda_0 = 1, \quad y \in W_2^1((0, \infty), \mu^{-1})$$

$$\begin{aligned} H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) &= \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, y(t), \lambda_0) \text{ f. \u00f6. auf } \mathbb{R}_+, \\ \dot{y}(t) &= -H_\xi(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) \text{ f. \u00f6. auf } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Dabei ist $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Pontrjaginfunktion,

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(t, \xi, v) \mu(t) + \eta(A(t)\xi + B(t)v).$$

Beweis: Den Beweis findet man in [43]. \square

Wenden wir nun diesen Satz auf das Beispiel 5 an, so folgt aus der Dynamik $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > A + |A|$. F\u00fcr den Integranden ist

$$W(t) = e^{(\varrho - \alpha)t}, \quad R(t) = e^{(\varrho - \alpha)t}, \quad w(t) \equiv 0, \quad r(t) \equiv 0.$$

Die L\u00f6sung lautet

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x_0 e^{-\lambda t + \frac{\alpha}{2}t}, \quad \lambda := \sqrt{1 + \left(A - \frac{\alpha}{2}\right)^2} \\ u^*(t) &= x_0 \left(-\lambda + \frac{\alpha}{2} - A\right) e^{-\lambda t + \frac{\alpha}{2}t}, \\ y(t) &= x_0 \left(-\lambda + \frac{\alpha}{2} - A\right) e^{-\lambda t - \frac{\alpha}{2}t}. \end{aligned}$$

\u00dcberpr\u00fcft man die Voraussetzung 1.4.11, so ergibt sich die Restriktion

$$2(\varrho - \alpha) - 2\lambda + \alpha - \varrho < 0.$$

Umstellen ergibt $\varrho < 2\lambda + \alpha$. Es gilt $A + |A| < \varrho$, also insgesamt

$$A + |A| < \varrho < 2\lambda + \alpha,$$

was zu der Einschr\u00e4nkung $-\alpha < 2\lambda$ f\u00fchrt. Insgesamt ist es m\u00f6glich, die Existenz einer L\u00f6sung und die G\u00fcltigkeit des Maximumprinzips aus Satz 1.4.2 f\u00fcr das Beispiel 5 f\u00fcr alle Parameter A und α zu sichern, die

$$-2\lambda < \alpha < 2\lambda$$

erf\u00fcllen. Es ist bemerkenswert, dass der Parameter α im Zielfunktional durchaus negative Werte annehmen kann .

In diesem Kapitel wurde der Grundstein f\u00fcr die vorliegende Arbeit gelegt. Ein Maximumprinzip und ein Existenzsatz wurden formuliert. Bemerkenswert ist, dass beide S\u00e4tze \u00fcber dem selben gewichteten Sobolevraum formuliert wurden. Leider kann das Maximumprinzip in der formulierten Version nur auf Steuerungsprobleme angewendet werden, deren Dynamik linear in der Steuerung u und im Zustand x ist. Dem wollen wir im n\u00e4chsten Kapitel Abhilfe verschaffen.

Kapitel 2

Transformation des Zustandes

Wir werden in diesem Kapitel mittels einer einfachen Substitution der Zustandsgröße das Steuerungsproblem (P) aus dem letzten Kapitel transformieren. Es wird sich zeigen, dass die starke Voraussetzung an die Gewichtsfunktion $\varrho > 0$ abgeschwächt werden kann. Die in diesem Kapitel formulierten Resultate werden wir in Kapitel 6 benötigen, um die Transformation der Zeit durchführen zu können.

2.1 Eliminieren einer Störfunktion

Im vorangegangenen Kapitel wurden für das Steuerungsproblem (P) mit der Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

ein Existenzsatz und notwendige Bedingungen formuliert. Wir wollen das Problem (P) erweitern, indem wir die Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)$$

mit einer stetig differenzierbaren, beschränkten Funktion D betrachten. Gegeben sei das Problem

$$(P_S) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\mu(t) dt \rightarrow \min! \quad (2.1)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (2.2)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (2.3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+. \quad (2.5)$$

U sei eine kompakte konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar in allen Variablen und konvex in v .

Die Funktionen A , B und D seien beschränkt und stetig differenzierbar.

Bemerkung 2.1.1. Die Funktion μ aus der Inklusion (2.2) ist durch die Menge der Lösungen der Gleichung (2.3) und den Anfangswert gegeben. Wir erinnern uns, dass diese Funktion in jedem gegebenen Steuerungsproblem durch Multiplikation mit $\mu^{-1}\mu$ erzeugt werden kann, siehe Abschnitt 1.2.

2.1.1 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_S)

Die Gewichtsfunktion μ wird so bestimmt, dass die Bedingung (2.2) keine zusätzliche Bedingung darstellt, sondern für jedes zu Problem (P_S) zulässige Paar (x, u) erfüllt ist. Das bedeutet, μ ist ein natürliches Gewicht¹ der Aufgabe (P_S) .

Lemma 2.1.1. *Für jedes zu Problem (P_S) zulässige Paar (x, u) gilt*

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad \mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > M + |M|$$

mit der Konstanten $M := \sup_{t \in (0, \infty)} A(t)$.

Beweis: Aus der Gleichung (2.3) lässt sich die explizite Lösung bestimmen,

$$x(t) = x_0 e^{F(t)} + \int_0^t \left(B(\eta)u(\eta) + D(\eta) \right) e^{F(t)-F(\eta)} d\eta$$

mit $F(t) := \int_0^t A(s) ds$. Analog zu der Abschätzung für das Gewicht im Abschnitt 1.3.2 erhalten wir für $M \neq 0$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq x_0 e^{Mt} + |B(t)u(t) + D(t)| \int_0^t e^{M(t-\eta)} d\eta \\ &= x_0 e^{Mt} + |B(t)u(t) + D(t)| \frac{1}{M} (e^{Mt} - 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hieraus folgt unmittelbar $x \in L_2((0, \infty), \mu)$, wenn man die Beschränktheit der Funktionen B und D beachtet.

¹siehe Definition 1.2.6

Für die Ableitung der Zustandsgröße bestimmen wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty |A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty 3\|A\|_\infty^2 |x(t)|^2 \mu(t) dt + \int_0^\infty 3K^2 \|B\|_\infty^2 \mu(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty 3\|D\|_\infty^2 \mu(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

da A , B und D als beschränkte Funktionen vorausgesetzt wurden und μ wegen $\varrho > 0$ stets summierbar ist. Der Fall $M = 0$ ist leicht nachzurechnen und führt auf das selbe Resultat. \square

Bemerkung 2.1.2. Die rechte Seite der Abschätzung (2.6) zeigt gleichzeitig, dass der Betrag jeder zulässigen Funktion x punktweise durch eine Funktion des Raumes $L_2((0, \infty), \mu)$ beschränkt werden kann. Folglich existiert eine natürliche Phasenbeschränkung zu (P_S) , gegeben durch (2.6).

2.1.2 Die Äquivalenz von (P_S) und (P)

Wir definieren die Funktion

$$S(t) := \int_0^t D(\eta) e^{F(t)-F(\eta)} d\eta$$

mit der stetig differenzierbaren, beschränkten Funktion D aus der Zustandsgleichung des Problems (P_S) und F , definiert im Beweis des Lemmas 2.1.1 durch $F(t) := \int_0^t A(s) ds$. Die so definierte Funktion $S \in C^1(\mathbb{R}_+)$ nutzen wir für eine, bezüglich der Zustandsvariablen $\xi = x(t)$, lineare Transformation:

$$\tilde{x}(t) := x(t) - S(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Das transformierte Steuerungsproblem hat die Gestalt:

$$\tilde{J}(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min! \quad (2.7)$$

$$(\tilde{x}, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (2.8)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (2.9)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0, \quad (2.10)$$

$$u(t) \in U \quad \text{f. ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (2.11)$$

mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$ und ist ein Problem der Klasse (P) . Um dies zu beweisen, formulieren wir folgenden Satz:

Satz 2.1.1. *Die Probleme (P_S) und (P) sind äquivalent in folgendem Sinne:*

i) *Ein Prozess (x, u) erfüllt genau dann die Zustandsgleichung (2.3) aus (P_S) , wenn der Prozess (\tilde{x}, u) die Zustandsgleichung (1.17) aus (P) erfüllt. Es gilt $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.*

ii) *Für $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > M + |M|$ und $M := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t)$ gilt $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ genau dann, wenn $x \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ gilt.*

iii) *Für die Zielfunktionale aus (P_S) und (P) gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, u)$.*

Beweis: i) Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{S}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t) - A(t)S(t) - D(t) \\ &= A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u(t) \end{aligned}$$

mit beschränkten, stetig differenzierbaren Funktionen A und B . Desweiteren gilt wegen $S(0) = 0$ die Gleichheit der Anfangswerte $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.

ii) Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |S(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty \left| \int_0^t D(\eta) e^{F(t)-F(\eta)} d\eta \right|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \|D\|_\infty^2 \int_0^\infty \left| \int_0^t e^{M(t-\eta)} d\eta \right|^2 \mu(t) dt \\ &= \|D\|_\infty^2 \int_0^\infty \left| \frac{1}{M} (e^{Mt} - 1) \right|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \|D\|_\infty^2 \frac{2}{M^2} \left(\int_0^\infty e^{2Mt} \mu(t) dt + \int_0^\infty \mu(t) dt \right) < \infty, \end{aligned}$$

aufgrund der Definition des Gewichtes μ . Im Fall $M = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |S(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty \left| \int_0^t D(\eta) e^{F(t)-F(\eta)} d\eta \right|^2 \mu(t) dt \\ &\leq \|D\|_\infty^2 \int_0^\infty \left| \int_0^t 1 d\eta \right|^2 \mu(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion S bestimmen wir

$$\int_0^\infty |\dot{S}(t)|^2 \mu(t) dt = \int_0^\infty \left| A(t)S(t) - D(t) \right|^2 \mu(t) dt$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\|A\|_\infty^2 \int_0^\infty |S(t)|^2 \mu(t) dt + 2\|D\|_\infty^2 \int_0^\infty \mu(t) dt \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Also ist $S \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ für $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$. Das bedeutet, dass die Funktion x als Linearkombination von \tilde{x} und S ebenfalls Element dieses Raumes ist. Umgekehrt ist die Funktion \tilde{x} als Linearkombination von x und S darstellbar.

iii) Angenommen, es gilt $J(x, u) < \infty$ im Sinne von Lebesgue für jedes zu Problem (P_S) zulässige Paar (x, u) , so ist

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}, u) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \mu(t) dt = \int_0^\infty r(t, \tilde{x}(t) + S(t), u(t)) \mu(t) dt \\ &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \mu(t) dt = J(x, u) < \infty \end{aligned}$$

mit

$$r(t, x(t), u(t)) = r(t, \tilde{x}(t) + S(t), u(t)) =: \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)).$$

Ist \tilde{r} stetig differenzierbar bezüglich aller Variablen, so besitzt auch r diese Eigenschaft und umgekehrt. Dies sieht man leicht aufgrund der analytischen Eigenschaften der eingehenden Funktionen. Die Konvexität bezüglich v bleibt erhalten. Folglich sind die Probleme äquivalent im Sinne des Satzes 2.1.1. \square

Bemerkung 2.1.3. Wir haben gezeigt, dass ein Steuerungsproblem mit der Dynamik (2.3) stets mittels einer bezüglich x linearen Substitution in ein Steuerungsproblem der Klasse (P) überführt werden kann. Die Gültigkeit des Maximumprinzips 1.3.3 und des Existenzsatzes 1.3.4 kann nach der Transformation von (P_S) auf (P) überprüft werden. Aus diesem Grund behandeln wir ausschließlich Aufgaben, in denen $D(t) \equiv 0$ gilt.

2.2 Die Verschiebung der Funktionenräume

In diesem Abschnitt werden wir die Zustandsfunktion x eines gegebenen Problems (P_V) transformieren. Es wird sich zeigen, dass wir durch eine einfache Transformation auf eine Klasse die Klasse der Aufgaben, für die wir die Existenz einer Lösung untersuchen können, erweitern. Ebenso erhalten wir ein Maximumprinzip für eine größere Klasse von Aufgaben. Besonderes Augenmerk legen wir auf die adjungierte Funktion y , da sich auch die Transversalitätsbedingung unter der Transformation ändert. Wir betrachten das

Steuerungsproblem (P) aus Abschnitt 1.3. Die Zustandsgleichung ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

mit beschränkten, stetigen Funktionen A und B , $m \leq A(t) \leq M$. Die aus den gegebenen Daten bestimmte natürliche Gewichtsfunktion μ ist stets über \mathbb{R}_+ summierbar. Der Beweis des Maximumprinzips aus [41] und des Existenzsatzes in [34] nutzt die Annahme $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 0$. Es stellt sich nun die Frage, ob man auch für eine Funktion μ , die eine Gewichtsfunktion, aber nicht summierbar ist, ein Maximumprinzip beweisen lässt und man einen Existenzsatz formulieren kann. Die Antwort geben wir in diesem Abschnitt. Wir erinnern uns, dass das Gewicht μ im Fall einer sowohl in x als auch in u linearen Dynamik durch $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M + |M|$ bestimmt wurde.

Betrachten wir das folgende einfache Beispiel, welches zeigt, dass die in Abschnitt 1.3.2 getroffenen Voraussetzungen für bestimmte Dynamiken viel zu stark sind. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie man diese Voraussetzungen abschwächen kann.

Beispiel 6. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + be^{-gt}u(t), \quad x(0) = x_0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, g \geq 0$$

mit einer messbaren, beschränkten Funktion u , so bestimmen wir das natürliche Gewicht des Raumes gemäß Abschnitt 1.3.2 durch

$$\varrho > M + |M| = -a + |-a| = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$x(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-gt}$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $c_1 = x_0 - \frac{b}{a-g}$ und $c_2 = \frac{b}{a-g}$. Für $a = g$ erhalten wir $x(t) = (x_0 + bt)e^{-at}$. Für $g = 0$ ist das Gewicht passend gewählt, ist allerdings $g > 0$, so wird das Wachstumsverhalten der Funktion B aus der Dynamik bei der Bestimmung eines natürlichen Gewichtes nicht berücksichtigt. Dieses Problem wollen wir beheben, indem wir das natürliche Gewicht μ der Aufgabe so bestimmen, dass auch $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho \leq 0$ auftreten kann. Weshalb die Möglichkeit der Wahl $\varrho < 0$ sinnvoll ist, wird sich im Laufe der Arbeit klären.

2.2.1 Das Problem (P_V)

Wir betrachten das Steuerungsproblem:

$$(P_V) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min! \quad (2.12)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (2.13)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (2.14)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.15)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+. \quad (2.16)$$

Voraussetzung 2.2.1. U sei eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R} .

Voraussetzung 2.2.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar in allen Variablen und konvex in v .

Voraussetzung 2.2.3. Die Funktion A sei stetig differenzierbar und beschränkt durch $m \leq A(t) \leq M$. Für die stetig differenzierbare Funktion B gelte $|B(t)| \leq C_B e^{-gt}$, $g \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Voraussetzung 2.2.4. μ sei eine Gewichtsfunktion, $\mu = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > M - g + |M + g|$.

Bemerkung 2.2.1. Das gegebene Problem (P_V) unterscheidet sich von Problem (P) durch die Beschränkung der Funktion B und durch die Verallgemeinerung auf eine Gewichtsfunktion μ , die nicht über \mathbb{R}_+ summierbar sein muss.

2.2.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu (P_V)

Für $g \geq 0$ kann das Problem (P_V) mittels des Maximumprinzips aus Satz 1.3.3 behandelt werden. Kann die Funktion B aus der Dynamik der gegebenen Aufgabe allerdings nur durch eine Funktion mit $g < 0$ beschränkt werden, so ist die Voraussetzung 1.3.3 verletzt und Satz 1.3.3 kann nicht angewendet werden. Die Existenz einer Lösung kann in diesem Fall ebenfalls nicht gesichert werden, da die Voraussetzung 1.2.5 nicht gilt. Weshalb die Aufgabenklasse (P_V) formuliert wurde, zeigt folgendes Lemma:

Lemma 2.2.1. *Für jede zu Problem (P_V) zulässige Funktion x gilt*

$$x \in W_2^1((0, \infty), \mu), \quad \mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad \varrho > M - g + |M + g|.$$

Beweis: Wir folgen dem Beweis des Lemmas 1.3.1. Der Fall $M = -g$ und die daraus resultierende Behauptung $\varrho > 2M$ muss gesondert betrachtet werden. Aufgrund der Einfachheit dieses Falles wird darauf hier verzichtet. Für $M \neq -g$ erhält man aus der Zustandsgleichung (2.14):

$$x(t) = x_0 e^{F(t)} + \left(\int_0^t B(s) u(s) e^{-F(s)} ds \right) e^{F(t)}$$

mit $F(t) := \int_0^t A(s) ds$. Daraus lässt sich mit der Definition $K := \sup_{v \in U} |v|$ und der Beschränkung an A und B abschätzen:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| e^{Mt} + KC_B \int_0^t e^{-gs} e^{F(t)-F(s)} ds \\ &\leq |x_0| e^{Mt} + KC_B \int_0^t e^{-gs} e^{M(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man analog zur Abschätzung für den Zustand x aus dem Beweis zu Lemma 1.3.1, dass $x \in L_2((0, \infty), \mu)$ für $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit

$$\varrho > 2 \max(M, -g) = M - g + |M + g|.$$

Für die Ableitung berechnen wir:

$$|\dot{x}(t)| \leq |A(t)||x(t)| + |B(t)||u(t)| \leq \max(|m|, |M|)|x(t)| + KC_B e^{-gt},$$

was durch Einsetzen der Definition von ϱ auf $\dot{x} \in L_2((0, \infty), \mu)$ schließen lässt. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Den vorangegangenen Bezeichnungen folgend, definieren wir:

Definition 2.2.1. Die Funktion μ mit $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > M - g + |M + g|$ ist ein *natürliches Gewicht der Aufgabe* (P_V).

Bemerkung 2.2.2. Die Funktion μ ist eine Gewichtsfunktion, die aber nicht notwendig über \mathbb{R}_+ summierbar sein muss. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu dem Problem (P).

Für Aufgaben, in denen $M < 0$ und $g > 0$ gilt, finden wir ein $\varrho < 0$, sodass Lemma 2.2.1 gilt. Das bedeutet, dass in diesem Fall alle zulässigen Funktionen dem Raum $W_1^1((0, \infty))$, also einem ungewichteten Sobolevraum, angehören. Auf die Zusammenhänge der Räume werden wir später eingehen.

2.2.3 Die Äquivalenz von (P_V) und (P)

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Aufgaben (P) und (P_V) mittels einer einfachen Substitution der Zustandsgröße x ineinander übergehen. Dadurch ist es möglich, notwendige Bedingungen und einen Existenzsatz zu formulieren, ohne die Voraussetzung $\varrho > 0$ zu erfüllen.

Bemerkung 2.2.3. In der Forderung $|B(t)| \leq C_B e^{-gt}$ gilt $g \in \mathbb{R}$, das heißt, die Funktion B aus der Dynamik muss nicht durch eine Konstante beschränkt sein.

Wenden wir für jede zu Problem (P_V) zulässige Funktion x die Transformation

$$\tilde{x}(t) := x(t)e^{gt}, \quad g \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.17)$$

an, so gilt folgender Satz:

Satz 2.2.1. *Problem (P_V) und Problem (P) sind in folgendem Sinne äquivalent:*

(i) *Ein Prozess (\tilde{x}, u) erfüllt genau dann die Zustandsgleichung (1.17) zu Problem (P) aus Abschnitt 1.2, wenn (x, u) die Zustandsgleichung (2.14) zu Problem (P_V) erfüllt.*

(ii) *Für $\tilde{\varrho} = \varrho + 2g$ mit $\tilde{\varrho} > \tilde{M} + |\tilde{M}|$ gehört ein Prozess (\tilde{x}, u) genau dann dem Raum $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}) \times L_\infty(\mathbb{R}_+)$ an, wenn (x, u) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $\varrho > M - g + |M + g|$ angehört. Es gilt $\tilde{M} = M + g$.*

(iii) *Für die Zielfunktionale aus den Aufgaben (P) und (P_V) gilt $\tilde{J}(\tilde{x}, u) = J(x, u)$. Dabei setzen wir $\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) := r(t, \tilde{\xi}e^{-gt}, v)e^{2gt}$.*

Beweis: (i) Wenden wir die Transformation (2.17) auf die Zustandsgleichung (1.17) an, erhalten wir zusammen mit der Setzung $\tilde{A}(t) := A(t) + g$ und $\tilde{B}(t) := B(t)e^{gt}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\tilde{x}}(t)e^{-gt} - g\tilde{x}(t)e^{-gt} \\ &= \tilde{A}(t)\tilde{x}(t)e^{-gt} + \tilde{B}(t)e^{-gt}u(t) - g\tilde{x}(t)e^{-gt} \\ &= A(t)x(t) + B(t)u(t). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass für die Beschränkung an die Funktionen A und \tilde{A} der Zusammenhang $\tilde{M} = M + g$ gilt. Die Voraussetzung 1.3.3 an die Funktion \tilde{B} ist offensichtlich genau dann erfüllt, wenn die Voraussetzung 2.2.3 an die

Funktion B erfüllt ist. Für die Anfangsbedingungen gilt $\tilde{x}(0) = x(0)e^0 = x_0$. Auf die Menge der zulässigen Steuerungen hat die Transformation (2.17) keinen Einfluss. Das bedeutet, dass das Tupel (\tilde{x}, u) die Differentialgleichung (1.17) genau dann erfüllt, wenn das Tupel (x, u) der Gleichung (2.14) genügt. (ii) Sei $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu})$, so besitzt mit \tilde{x} auch x eine verallgemeinerte Ableitung und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 e^{-2gt} e^{-\varrho t} dt \\ &\leq \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 e^{-2gt} e^{(-\tilde{\varrho}+2g)t} dt = \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 e^{-\tilde{\varrho}t} dt < \infty \end{aligned}$$

und für die Ableitung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)e^{-gt} - g\tilde{x}(t)e^{-gt}|^2 e^{-\varrho t} dt \\ &\leq \int_0^\infty 2|\dot{\tilde{x}}(t)|^2 e^{-2gt} e^{-\varrho t} dt + \int_0^\infty 2|g\tilde{x}(t)|^2 e^{-2gt} e^{-\varrho t} dt < \infty, \end{aligned}$$

falls $\tilde{\varrho} \leq \varrho + 2g$.

Sei nun $x \in W_2^1((0, \infty), \mu)$, so besitzt mit x auch \tilde{x} eine verallgemeinerte Ableitung und es gilt:

$$\int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{2gt} e^{-\tilde{\varrho}t} dt \leq \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-\varrho t} dt < \infty$$

und für die Ableitung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt &= \int_0^\infty |\dot{x}(t)e^{gt} + gx(t)e^{gt}|^2 e^{-\tilde{\varrho}t} dt \\ &\leq \int_0^\infty 2|\dot{x}(t)|^2 e^{2gt} e^{-\tilde{\varrho}t} dt + \int_0^\infty 2|gx(t)|^2 e^{2gt} e^{-\tilde{\varrho}t} dt < \infty, \end{aligned}$$

falls $\varrho \leq \tilde{\varrho} - 2g$. Für $\tilde{\varrho} = \varrho + 2g$ gilt somit die Äquivalenz. Also gehört ein zulässiger Prozess (\tilde{x}, u) der Aufgabe (P) genau dann dem Raum $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}) \times L_\infty((0, \infty))$ an, wenn der zulässige Prozess (x, u) der Aufgabe (P_V) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty))$ angehört.

(iii) Ist \tilde{r} stetig differenzierbar bezüglich aller Variablen, so ist r ebenfalls stetig differenzierbar und es gilt:

$$\tilde{J}(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty r(t, \tilde{x}(t)e^{-gt}, u(t)) e^{2gt} \tilde{\mu}(t) dt$$

$$= \int_0^\infty r(t, \tilde{x}(t)e^{-gt}, u(t))e^{2gt}e^{-2gt}\mu(t)dt = J(x, u).$$

Die Konvexität in u bleibt offensichtlich erhalten. Das bedeutet, dass $\tilde{J}(\tilde{x}, u)$ aus dem Problem (P) genau dann einen endlichen Wert annimmt, wenn $J(x, u)$ aus dem Problem (P_V) endlich ist. Ein Prozess (\tilde{x}, u) ist also genau dann zulässig zu (P) , wenn (x, u) zulässig zu (P_V) ist. Folglich sind die Probleme äquivalent im Sinne des Satzes 2.2.1. \square

2.2.4 Das Maximumprinzip für (P_V)

Die Äquivalenz der Aufgaben (P) und (P_V) ermöglicht es, ein Maximumprinzip für (P_V) zu beweisen, indem man die Voraussetzungen des Maximumprinzips für (P) ebenso transformiert wie die Aufgabe selbst. Für das Problem (P_V) , gegeben in Abschnitt 2.2.1, seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

Voraussetzung 2.2.5. Der Integrand r sei stetig differenzierbar bezüglich aller Argumente und konvex in v .

Voraussetzung 2.2.6. Für die partiellen Ableitungen r_ξ und r_v der Funktion r im Zielfunktional gelte für alle $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |r_\xi(t, \xi, v)| &\leq A_{21}(t) + B_{21}(|\xi| + |ve^{-gt}|), \\ |r_v(t, \xi, v)| &\leq e^{-gt} \left(A_{22}(t) + B_{22}(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) \end{aligned}$$

mit Funktionen $A_{2i} \in L_2((0, \infty), \mu)$ und Konstanten $B_{2i} > 0$, $i = 1, 2$.

Voraussetzung 2.2.7. Die Funktion B sei für alle $t \in \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar und es gelte $|B(t)| < C_B e^{-gt}$ mit $g \in \mathbb{R}$ und einer positiven Konstanten $C_B \in \mathbb{R}_+$.

Voraussetzung 2.2.8. Die Funktion A sei stetig differenzierbar und beschränkt. Zusätzlich gelte

$$A(t) \leq M \quad \forall t \geq 0.$$

Bemerkung 2.2.4. Zu gegebenem Steuerungsproblem (P_V) bestimmt man $M < \infty$ und den Wert g . Damit kann ein zur Aufgabe gehörendes natürliches Gewicht μ bestimmt und mit diesen Parametern die Voraussetzungen geprüft werden.

Dann gilt für die Aufgabe (P_V) das Maximumprinzip in folgender Form:

Satz 2.2.2 (Maximumprinzip für (P_V)). *Die Voraussetzungen 2.2.5 bis 2.2.8 seien erfüllt und $(x^*, u^*) \in \mathcal{A}_L$ sei die optimale Lösung zu (P_V) im Sinne des Kriteriums **L**. Dann existieren Multiplikatoren (λ_0, y) , mit $\lambda_0 = 1$,*

$$y \in W_2^1(\mathbb{R}^+, \mu^{-1}), \quad \left(\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} y(T) \cdot e^{-gT} = 0 \right) \quad (T_V),$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^+ \quad (M_V),$$

$$\dot{y}(t) = -H_\xi(t, x^*(t), u^*(t), y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^+, \quad (K_V)$$

wobei $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Pontrjaginfunktion ist,

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(t, \xi, v) \mu(t) + \eta(A(t)\xi + B(t)v).$$

Beweis: Schritt 1. Die Funktion y möge die kanonische Gleichung (K_V) erfüllen. Die Funktion \tilde{H} sei die Pontrjaginfunktion aus Problem (P) . Dann bestimmen wir mit $\tilde{A}(t) = A(t) + g$, $\tilde{B}(t) = B(t)e^{gt}$, $\tilde{\mu}(t) = \mu(t)e^{-2gt}$ und $\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) = r(t, \tilde{\xi}e^{-gt}, v)e^{2gt}$:

$$\begin{aligned} -\tilde{H}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t), \tilde{y}(t), 1) &= \tilde{r}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t)) \tilde{\mu}(t) - \tilde{A}(t) \tilde{y}(t) \\ &= r_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{x}^*(t)e^{-gt}, u^*(t)) e^{2gt} \tilde{\mu}(t) - \tilde{A}(t) \tilde{y}(t) \pm g \tilde{y}(t) \\ &= r_\xi(t, \tilde{x}^*(t)e^{-gt}, u^*(t)) e^{-gt} e^{2gt} \tilde{\mu}(t) - (A(t) + g) \tilde{y}(t) \pm g \tilde{y}(t) \\ &= r_\xi(t, \tilde{x}^*(t)e^{-gt}, u^*(t)) e^{-gt} e^{2gt} \mu(t) e^{-2gt} - (A(t) + g) \tilde{y}(t) \pm g \tilde{y}(t) \\ &= r_\xi(t, \tilde{x}^*(t)e^{-gt}, u^*(t)) \mu(t) e^{-gt} - A(t) \tilde{y}(t) - g \tilde{y}(t) \\ &= -H_\xi(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t), \tilde{y}(t) e^{gt}, 1) e^{-gt} - g \tilde{y}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(e^{-gt} y(t) \right) = \dot{\tilde{y}}(t), \end{aligned}$$

also erfüllt \tilde{y} mit $\tilde{y}(t) = y(t)e^{-gt}$ die kanonische Gleichung (K) , falls die Funktion y die Gleichung (K_V) erfüllt. Dies ist eine Äquivalenzrelation, das bedeutet, dass \tilde{y} die Gleichung (K) genau dann erfüllt, wenn y die Gleichung (K_V) erfüllt.

Schritt 2. Angenommen das Paar $(1, y)$ erfüllt zusammen mit (x^*, u^*) die Maximumbedingung (M_V) aus Problem (P_V) , so ist mit $\tilde{y}(t) = y(t)e^{-gt}$:

$$\max_{v \in U} \tilde{H}(t, \tilde{x}^*(t), v, \tilde{y}(t), 1)$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{v \in U} \left\{ -\tilde{r}(t, \tilde{x}^*(t), v) \tilde{\mu}(t) + \tilde{y}(t) \left(\tilde{A}(t) \tilde{x}^*(t) + \tilde{B}(t)v \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(t, x^*(t), v) \mu(t) \right. \\
&\quad \left. + e^{-gt} y(t) \left(\tilde{A}(t) x^*(t) e^{gt} \pm g x^*(t) e^{gt} + \tilde{B}(t)v \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(t, x^*(t), v) \mu(t) \right. \\
&\quad \left. + e^{-gt} y(t) \left(A(t) x^*(t) e^{gt} + g(t) x^*(t) e^{gt} \pm g x^*(t) e^{gt} + B(t) e^{gt} v \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(t, x^*(t), v) \mu(t) + y(t) \left(A(t) x^*(t) + g x^*(t) + B(t)v \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(t, x^*(t), v) \mu(t) + y(t) \left(A(t) x^*(t) + B(t)v \right) \right\} + g y(t) x^*(t) \\
&= H(t, x^*(t), u^*(t), y(t), 1) + g y(t) x^*(t) \\
&= -r(t, x^*(t), u^*(t)) \mu(t) + y(t) \left(A(t) x^*(t) + B(t) u^*(t) \right) + g y(t) x^*(t) \\
&= -\tilde{r}(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t)) \tilde{\mu}(t) \\
&\quad + \tilde{y}(t) e^{gt} \left(\tilde{A}(t) \tilde{x}^*(t) e^{-gt} - g \tilde{x}^*(t) e^{-gt} + \tilde{B}(t) e^{-gt} u^*(t) \right) + g \tilde{y}(t) \tilde{x}^*(t) \\
&= -\tilde{r}(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t)) \tilde{\mu}(t) + \tilde{y}(t) \left(\tilde{A}(t) \tilde{x}^*(t) - g \tilde{x}^*(t) + \tilde{B}(t) u^*(t) \right) \\
&\quad + g \tilde{y}(t) \tilde{x}^*(t) \\
&= \tilde{H}(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t), \tilde{y}(t), 1),
\end{aligned}$$

also erfüllt $(1, \tilde{y})$ zusammen mit (\tilde{x}^*, u^*) die Maximumbedingung (M) des Satzes 1.3.3 aus dem Problem (P) . Auch hier haben wir nur äquivalente Umformungen vorgenommen, was den Beweis der Rückrichtung erübrigt. Das bedeutet, dass die Maximumbedingung (M_V) genau dann erfüllt ist, wenn (M) erfüllt ist.

Schritt 3. Die Funktion y ist genau dann Element des Raumes $W_2^1((0, \infty), \mu^{-1})$, wenn \tilde{y} Element des Raumes $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}^{-1})$ ist. Nutzen wir $\tilde{y}(t) = y(t) e^{-gt}$ und $\tilde{\mu}(t) = \mu(t) e^{-2gt}$ so rechnet man leicht nach:

$$\int_0^\infty |\tilde{y}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt = \int_0^\infty |y(t)|^2 e^{-2gt} \mu^{-1}(t) e^{2gt} dt < \infty.$$

Mit y besitzt auch \tilde{y} eine verallgemeinerte Ableitung und es gilt:

$$\int_0^\infty |\dot{\tilde{y}}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt = \int_0^\infty \left| \dot{y}(t) e^{-gt} - g y(t) e^{-gt} \right|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty 2|\dot{y}(t)|^2 e^{-2gt} \tilde{\mu}^{-1}(t) dt + \int_0^\infty 2g^2 |y(t)|^2 e^{-2gt} \tilde{\mu}^{-1}(t) dt \\
&= \int_0^\infty 2|\dot{y}(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt + \int_0^\infty 2g^2 |y(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt < \infty.
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt

$$\int_0^\infty |y(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt = \int_0^\infty |\tilde{y}(t)|^2 e^{2gt} \tilde{\mu}^{-1}(t) e^{-2gt} < \infty.$$

Mit \tilde{y} besitzt auch y eine verallgemeinerte Ableitung und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\dot{y}(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt &= \int_0^\infty \left| \dot{\tilde{y}}(t) e^{gt} + g\tilde{y}(t) e^{gt} \right|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) e^{-2gt} dt \\
&\leq \int_0^\infty 2|\dot{\tilde{y}}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt + \int_0^\infty 2g^2 |\tilde{y}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt < \infty.
\end{aligned}$$

Schritt 4. Unter Beachtung der letzten Abschätzungen erhalten wir mittels der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\tilde{y}(t)| dt &\leq \left(\int_0^\infty |\tilde{y}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \tilde{\mu}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \\
\int_0^\infty |y(t) e^{-gt}| dt &= \int_0^\infty |y(t) e^{-gt} \mu^{-\frac{1}{2}}(t) \mu^{\frac{1}{2}}(t)| dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty |y(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-2gt} \mu(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\infty |y(t)|^2 \mu^{-1}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \tilde{\mu}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

Die Endlichkeit der Integrale folgt unmittelbar aus der Raumzugehörigkeit der Funktionen y und \tilde{y} sowie der Definition der natürlichen Gewichte μ und $\tilde{\mu}$. An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass $\tilde{\mu}$ summierbar ist. Für μ muss das nicht gelten. Mittels einer analogen Abschätzung für \dot{y} und $\dot{\tilde{y}}$ erhalten wir die daraus resultierende Transversalitätsbedingung:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) e^{-gT} = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{y}(T) = 0.$$

Schritt 5. Angenommen, die Funktion r erfülle die Voraussetzung 2.2.6. Dann gilt für die Ableitung nach der zweiten Variablen:

$$|\tilde{r}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{\xi}, v)| = |r_{\xi}(t, \tilde{\xi} e^{-gt}, v) e^{2gt}|$$

$$\begin{aligned}
&= |r_\xi(t, \xi, v)e^{-gt}e^{2gt}| \\
&\leq \left(A_{21}(t) + B_{21}(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) e^{gt} \\
&= A_{21}(t)e^{gt} + B_{21}(|\tilde{\xi}| + |v|).
\end{aligned}$$

Für die Ableitung nach der dritten Variablen gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{r}_v(t, \tilde{\xi}, v)| &= |r_v(t, \tilde{\xi}e^{-gt}, v)e^{2gt}| = |r_v(t, \xi, v)e^{2gt}| \\
&\leq e^{-gt} \left(A_{22}(t) + B_{22}(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) e^{2gt} \\
&= A_{22}(t)e^{gt} + B_{22}e^{gt}(|\xi| + |ve^{-gt}|) = A_{22}(t)e^{gt} + B_{22}(|\tilde{\xi}| + |v|).
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\tilde{A}_{2i}(t) := A_{2i}(t)e^{gt}$, $i = 1, 2$, so gilt

$$\int_0^\infty \tilde{A}_{2i}^2(t) \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty \left(A_{2i}(t)e^{gt} \right)^2 e^{-2gt} \mu(t) dt = \int_0^\infty A_{2i}^2(t) \mu(t) dt < \infty.$$

Die Umkehrung der Aussage ist leicht zu zeigen. Das bedeutet, dass die Funktionen r_ξ und r_v genau dann den Ungleichungen in Voraussetzung 2.2.6 genügen, wenn die Funktionen \tilde{r}_ξ und \tilde{r}_v die Ungleichungen aus Voraussetzung 1.3.8 erfüllen.

Damit haben wir bewiesen, dass unter den Voraussetzungen 2.2.5 bis 2.2.8 das Maximumprinzip aus Satz 2.2.2 für Probleme der Klasse (P_V) gültig ist.

□

2.2.5 Die Existenz einer Lösung zu (P_V)

Wir betrachten das Steuerungsproblem (P_V) , gegeben in Abschnitt 2.2.1 und formulieren einen Existenzsatz.

Voraussetzung 2.2.9. Für den Integranden $r\mu$ gelte für alle $(t, \xi, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|r(t, \xi, v)\mu(t)| \leq A_1(t) + B_1\mu(t) \left(\xi^2 + (ve^{-gt})^2 \right)$$

mit einer Funktion $A_1 \in L_1((0, \infty))$ und einer Konstanten $B_1 > 0$.

Satz 2.2.3. Die Voraussetzungen 2.2.1 bis 2.2.4, sowie die Voraussetzung 2.2.9 seien erfüllt. Desweiteren seien die Voraussetzungen 2.2.5 bis 2.2.8 für die Gültigkeit des Maximumprinzips zu (P_V) , formuliert in Satz 2.2.2, erfüllt. Ist der zulässige Bereich nichtleer, so besitzt das Steuerungsproblem (P_V) eine Lösung.

Beweis: Für den Beweis des Satzes nutzen wir den Äquivalenzsatz 2.2.1 und den Beweis des Satzes 2.2.2. Dann bleibt lediglich zu zeigen, dass die Voraussetzung 2.2.9 an den Integranden $r \cdot \mu$ des Problemes (P_V) genau dann erfüllt ist, wenn für den vermöge der Transformation $\tilde{x}(t) = x(t)e^{gt}$ entstandenen Integranden $\tilde{r} \cdot \tilde{\mu}$ des Problemes (P) die Voraussetzung 1.2.6 erfüllt ist. Es sei daran erinnert, dass das natürliche Gewicht der Aufgabe (P) durch Voraussetzung 1.3.7 gegeben ist. Angenommen, der Integrand $r \cdot \mu$ erfüllt die Voraussetzung 2.2.9, dann ist

$$\begin{aligned} |\tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t))\tilde{\mu}(t)| &= |r(t, x(t), u(t))\mu(t)| \leq A_1(t) + B_1\mu(t)\left(\xi^2 + (ve^{-gt})^2\right) \\ &= A_1(t) + B_1\tilde{\mu}(t)e^{2gt}\left(\tilde{\xi}^2 e^{-2gt} + (ve^{-gt})^2\right) = A_1(t) + B_1\tilde{\mu}(t)\left(\tilde{\xi}^2 + v^2\right) \end{aligned}$$

und das ist gerade die Voraussetzung 1.2.6. Die Rückrichtung ist analog. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Zusammenfassend stellt das Problem (P_V) zum einen dahingehend eine Erweiterung der Problemklasse (P) dar, dass die Funktion B aus der Dynamik nicht mehr beschränkt sein muss, um Existenzresultate und ein Maximumprinzip formulieren zu können. Bemerkenswert ist, dass das natürliche Gewicht nicht summierbar sein muss. Auch die sogenannte *klassische Transversalitätsbedingung* $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ muss nicht gelten. Sie wurde allerdings nicht weggelassen, sondern durch die allgemeinere Bedingung $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) \cdot e^{-gT} = 0$ ersetzt. Zum anderen kann die Struktur der Dynamik durch Verwendung des natürlichen Gewichtes der Aufgabe (P_V) , definiert durch Definition 2.2.1, besser genutzt werden.

2.2.6 Vergleich der Probleme (P_V) und (P)

Betrachten wir erneut das Beispiel 4 der Problemklasse (P) mit einem beliebigen, festen $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{2}u^2(t)e^{-\alpha t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= x(t) + u(t), \quad u(t) \in [0, 1], \quad x(0) = 1, \\ x &\in W_2^1((0, \infty), \mu_0), \quad u \in L_\infty((0, \infty)). \end{aligned}$$

Die Funktion μ_0 ist gemäß Lemma 1.3.1

$$\mu_0(t) = e^{-\varrho_0 t} \text{ mit } \varrho_0 > 2.$$

Wir hatten geprüft, dass für $\alpha > 2$ die Existenz einer Lösung im Raum $W_2^1((0, \infty), \mu_0)$ gesichert werden kann, vgl. Abschnitt 1.3.4, Beispiel 4. Für $\alpha \leq 2$ war keine Aussage möglich. Wenden wir nun die Transformation $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-gt}$, $g \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ an, siehe (2.17), und betrachten das Steuerungsproblem der Klasse (P_V) :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{2} u^2(t) e^{-\alpha t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= (1-g)\tilde{x}(t) + u(t)e^{-gt}, \quad u(t) \in [0, 1], \quad \tilde{x}(0) = 1, \\ (\tilde{x}, u) &\in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}_0) \times L_\infty((0, \infty)). \end{aligned}$$

Das natürliche Gewicht $\tilde{\mu}_0$ der Aufgabe bestimmen wir gemäß Definition 2.2.1 zu $\tilde{\mu}_0(t) = e^{-\tilde{\varrho}_0 t}$, $\tilde{\varrho}_0 > M - g + |M + g| = (1 - g - g) + |1 - g + g|$. Für das Beispiel erhält man

$$\tilde{\varrho}_0 > 2 - 2g.$$

Überprüft man nun die Voraussetzungen der Sätze 2.2.2 und 2.2.3, so erhält man selbstredend die gleichen Resultate, die wir schon kennen, da ja die Probleme (P) und (P_V) eins zu eins ineinander übergehen. Unter der Voraussetzung, dass $g \geq 0$ gilt, ist allerdings die Voraussetzung 1.3.3 erfüllt. Das bedeutet, in diesem Fall kann das neue Problem als ein Problem der Klasse (P) aufgefasst werden.

Bemerkung 2.2.5. Zuerst bestimmt man, zu welcher Klasse das Problem gehört, danach bestimmt man aus den gegebenen Daten das natürliche Gewicht und überprüft dann die Voraussetzungen des Maximumprinzips und des Existenzsatzes zu dieser Klasse. Für das transformierte Beispiel kann man nun im Fall $g \geq 0$ sowohl die Klasse (P) als auch die Klasse (P_V) wählen. Der Unterschied liegt in der Bestimmung des natürlichen Gewichtes.

Das zu betrachtende Problem hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{2} u^2(t) e^{-\alpha t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= (1-g)\tilde{x}(t) + u(t)e^{-gt}, \quad u(t) \in [0, 1], \quad \tilde{x}(0) = 1, \\ (\tilde{x}, u) &\in W_2^1((0, \infty), \mu_1) \times L_\infty((0, \infty)), \end{aligned}$$

wobei wir den Parameter g frei wählen können. Es sei $g \geq 0$. Dann betrachten wir die Aufgabe als Problem der Klasse (P) . Das natürliche Gewicht ist

$$\mu_1(t) = e^{-\varrho_1 t}, \quad \varrho_1 > (1 - g) + |1 - g| > 0.$$

Überprüfen wir nun die Voraussetzungen 1.3.8 und 1.2.6. Für jede Funktion $A_1 \in L_1((0, \infty))$ gilt

$$|\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v)\mu_1(t)| = \frac{1}{2}v^2 e^{-\alpha t} \leq A_1(t) + B_1(\tilde{\xi}^2 + v^2)\mu_1(t),$$

falls $e^{-\alpha t} \leq B_1\mu_1(t)$. Für die partiellen Ableitungen des Integranden gilt

$$|\tilde{r}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{\xi}, v)\mu_1(t)| \equiv 0 \text{ und } |\tilde{r}_v(t, \tilde{\xi}, v)\mu_1(t)| = |v|e^{-\alpha t} \leq A_3(t) + B_3\mu_1(t)(|\tilde{\xi}| + |v|)$$

für jede Funktion $A_3 \in L_2((0, \infty), \mu_1)$, falls $e^{-\alpha t} \leq B_3\mu_1(t)$. Das bedeutet, dass mit $g \geq 0$ alle Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt sind, falls

$$-\alpha < -(1 - g) - |1 - g| = \begin{cases} -2(1 - g) & , 0 \leq g \leq 1 \\ 0 & , 1 < g \end{cases}.$$

Die Auswertung dieser Ungleichung liefert die Existenz einer Lösung und die Gültigkeit des Maximumprinzips 1.3.3 für jedes $\alpha > 0$, wenn man $g = 1$ wählt. Das bedeutet, dass wir nach der Transformation mit $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-t}$ die Voraussetzungen 1.3.8 und 1.2.6 zusätzlich zu $\alpha > 2$ auch für $0 < \alpha \leq 2$ erfüllen und somit die Existenz einer Lösung im Raum $W_2^1((0, \infty), \mu_1)$ sichern können. Dieses Beispiel zeigt, dass die Voraussetzungen 1.3.8 und 1.2.6 durch Verwendung der Transformation (2.17) abgeschwächt werden können.

Im Folgenden werden wir untersuchen, wie diese Feststellung verallgemeinert und für Probleme der Klassen (P) und (P_V) genutzt werden kann.

Wir betrachten ein Problem der Klasse (P) in folgender Form:

$$\begin{aligned} (P_\mu) \quad & \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in U, \\ x &\in W_2^1((0, \infty), \mu), \quad u \in L_\infty((0, \infty)). \end{aligned}$$

Desweiteren seien die Voraussetzungen 1.3.1, 1.3.2 und 1.3.3 erfüllt. Das natürliche Gewicht der Aufgabe lautet

$$\mu(t) = e^{-\varrho t} \text{ mit } \varrho > M_0 + |M_0| > 0 \text{ mit } M_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t).$$

Durch die Transformation $\tilde{x}(t) := e^{-gt}x(t)$, diskutiert in Kapitel 2, geht das Problem über in das Problem

$$\begin{aligned} (P_{\tilde{\mu}}) \quad & \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \tilde{\mu}(t) dt \rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(t) \tilde{x}(t) + B(t) e^{-gt} u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ \tilde{x}(0) &= x_0, \quad u(t) \in U, \\ \tilde{x} &\in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}), \quad u \in L_\infty((0, \infty)) \end{aligned}$$

mit $\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) := r(t, \tilde{\xi} e^{gt}, v) \mu(t) \tilde{\mu}^{-1}(t)$ und $\tilde{A} = A - g \leq M_0 - g =: M$. Dieses Problem enthält den Parameter g und die Größe M , anhand derer wir die Wirkung der Transformation untersuchen werden. Betrachtet man das Tupel $(0, M_0)$ der Ausgangsaufgabe (P_μ) , so geht dieses Tupel mittels der Transformation in das Tupel (g, M) mit $M = M_0 - g$ über. Für $g > 0$ kann das Problem $(P_{\tilde{\mu}})$ sowohl der Klasse (P) , als auch der Klasse (P_V) zugeordnet werden. Die Frage ist nun, wie g in Abhängigkeit der gegebenen Größe M_0 gewählt werden sollte, um die Voraussetzungen eines Existenzsatzes und der notwendigen Bedingungen zu erfüllen. Um diese Frage beantworten zu können, formulieren wir zwei Aufgaben, die sich lediglich in der Wahl des gegebenen Zustandsraumes unterscheiden:

$$\begin{aligned} (P_{\mu_1}) \quad & \int_0^\infty r_1(t, x(t), u(t)) \mu_1(t) dt \rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)e^{-gt}u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in U, \\ x &\in W_2^1((0, \infty), \mu_1), \quad u \in L_\infty((0, \infty)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_{\mu_2}) \quad & \int_0^\infty r_2(t, x(t), u(t)) \mu_2(t) dt \rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)e^{-gt}u(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in U, \\ x &\in W_2^1((0, \infty), \mu_2), \quad u \in L_\infty((0, \infty)). \end{aligned}$$

Es sei $r_1(t, x(t), u(t)) \mu_1(t) = r_2(t, x(t), u(t)) \mu_2(t)$. Wählt man die Gewichte $\mu_1(t) = e^{-\varrho_1 t}$, $\varrho_1 > M + |M|$ und $\mu_2(t) = e^{-\varrho_2 t}$, $\varrho_2 > M - g + |M + g|$, so ist für $g > 0$ das Problem (P_{μ_1}) aus der Klasse (P) , das Problem (P_{μ_2}) hingegen aus der Klasse (P_V) . Das bedeutet, dass das Gewicht der Aufgabe

(P_{μ_1}) eine fallende Exponentialfunktion ist, das Gewicht der Aufgabe (P_{μ_2}) hingegen muss nicht mal beschränkt sein. Für $g < 0$ ist die Funktion $B(t)e^{-gt}$ nicht beschränkt und erfüllt somit nicht die Voraussetzung 1.3.3 zu Satz 1.3.3. Folglich müssen wir $g \geq 0$ wählen. Wir werden im Folgenden zeigen, dass sich die beiden Probleme zwar in der Wahl des Zustandsraumes unterscheiden, dieses sich aber weder auf die Menge der zulässigen Funktionen noch auf die optimale Lösung auswirkt, falls eine solche existiert.

Lemma 2.2.2. Die Aufgaben (P_{μ_1}) und (P_{μ_2}) sind äquivalent in folgendem Sinne:

- i) Ein Prozess (x, u) ist genau dann zulässig zu Problem (P_{μ_1}) im Sinne der Definition 1.2.1, wenn er zulässig zu (P_{μ_2}) ist.
- ii) Das Tupel (x^*, u^*) ist genau dann eine Lösung des Problems (P_{μ_1}), wenn es eine Lösung des Problems (P_{μ_2}) ist. Es gilt sowohl $x^* \in W_2^1((0, \infty), \mu_1)$, als auch $x^* \in W_2^1((0, \infty), \mu_2)$.

Beweis: Das Einzige, was hier zu zeigen ist, ist dass jeder zulässige Zustand des einen Problems auch zu dem anderen Problem zulässig ist. Offensichtlich gilt wegen $\varrho_2 > M - g + |M + g|$ und $\varrho_1 > M + |M|$, dass für jeden zu Problem (P_{μ_2}) zulässige Zustand $x \in W_2^1((0, \infty), \mu_2)$ auch die Inklusion $x \in W_2^1((0, \infty), \mu_1)$ gilt. Nun hatten wir aber im Lemma 2.2.1 bewiesen, dass für jede Funktion x , die zusammen mit u gegebener Differentialgleichung genügt, Element des Raumes $W_2^1((0, \infty), \mu_2)$ ist. Das bedeutet, die Menge $(\mathcal{A}_L \cap W_2^1((0, \infty), \mu_1)) \setminus W_2^1((0, \infty), \mu_2)$ ist leer. Folglich sind die erreichbaren Mengen der Probleme (P_{μ_1}) und (P_{μ_2}) identisch. Desweiteren gilt per Definition

$$r_1(t, x(t), u(t))\mu_1(t) = r_2(t, x(t), u(t))\mu_2(t)$$

für jedes zulässige Paar, also stimmen im Falle der Existenz die Lösungen der Aufgaben (P_{μ_1}) und (P_{μ_2}) überein. \square

Kommen wir nun zur eigentlichen Untersuchung. Die Abbildung 2.1 stellt die Tupel (M, g) dar. Die vertikale Achse enthält alle Tupel $(0, M_0)$, für welche die Ausgangsaufgabe (P_μ) formuliert wurde. Der rote Pfeil zeigt an, in welche Richtung sich ein Tupel unter der Transformation verschiebt. Für das neue Tupel (g, M) prüfen wir die Voraussetzungen des Maximumprinzips und des Existenzsatzes zu (P) und zu (P_V) und vergleichen die Resultate. Um während des Vergleiches den Überblick zu behalten, formulieren wir die zu prüfenden Voraussetzungen 1.2.6 und 1.3.8 sowie 2.2.6 und 2.2.9 mit angepassten Indizes an dieser Stelle erneut. Betrachtet man das Problem (P_{μ_1}),

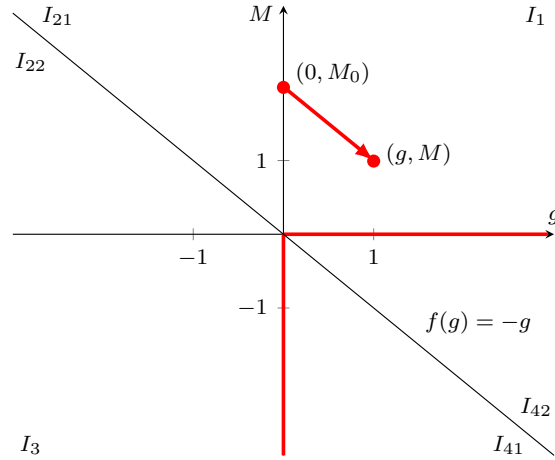


Abbildung 2.1

so müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein, damit der Existenzsatz und das Maximumprinzip zu Problem (P) anwendbar sind:

$$|r_1(t, \xi, v)\mu_1(t)| \leq A_1(t) + B_1\mu_1(t)(\xi^2 + v^2) \quad (2.18)$$

$$|r_{1\xi}(t, \xi, v)\mu_1(t)| \leq A_{12}(t)\mu_1(t) + B_2\mu_1(t)(|\xi| + |v|) \quad (2.19)$$

$$|r_{1v}(t, \xi, v)\mu_1(t)| \leq A_{13}(t)\mu_1(t) + B_3\mu_1(t)(|\xi| + |v|) \quad (2.20)$$

$$A_1 \in L_1((0, \infty)), \quad A_{12} \in L_2((0, \infty), \mu_1), \quad A_{13} \in L_2((0, \infty), \mu_1) \quad (2.21)$$

$$\mu_1(t) = e^{-\varrho_1 t}, \quad \varrho_1 > M + |M| \quad (2.22)$$

und für das Problem (P_{μ_2}) muss gelten:

$$|r_2(t, \xi, v)\mu_2(t)| \leq A_1(t) + B_1\mu_2(t)(\xi^2 + v^2 e^{-2gt}) \quad (2.23)$$

$$|r_{2\xi}(t, \xi, v)\mu_2(t)| \leq A_{22}(t)\mu_2(t) + B_2\mu_2(t)(|\xi| + |v e^{-gt}|) \quad (2.24)$$

$$|r_{2v}(t, \xi, v)\mu_2(t)| \leq \left(A_{23}(t)\mu_2(t) + B_3\mu_2(t)(|\xi| + |v e^{-gt}|) \right) e^{-gt} \quad (2.25)$$

$$A_1 \in L_1((0, \infty)), \quad A_{22} \in L_2((0, \infty), \mu_2), \quad A_{23} \in L_2((0, \infty), \mu_2), \quad (2.26)$$

$$\mu_2(t) = e^{-\varrho_2 t}, \quad \varrho_2 > M - g + |M + g|, \quad (2.27)$$

damit die Existenz einer optimalen Lösung und die Anwendbarkeit des Maximumprinzips zu Problem (P_V) gesichert sind. Alle Konstanten B_i seien positiv. Es gilt $M = M_0 - g$. Um diese Bedingungen miteinander zu vergleichen, müssen wir prüfen, welche der folgenden Ungleichungsketten in Abhängigkeit

von g wahre Aussagen liefern.

$$\begin{aligned}
 1.a. \quad |r_1(t, \xi, v)\mu_1(t)| &= |r_2(t, \xi, v)\mu_2(t)| \\
 &\leq A_1(t) + B_1\mu_2(t)(\xi^2 + v^2e^{-2gt}) \\
 &= A_1(t) + B_1\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t)(\xi^2 + v^2e^{-2gt}) \\
 &\leq A_1(t) + B_1\mu_1(t)(\xi^2 + v^2)
 \end{aligned}$$

Diese Relation ist erfüllt, falls

$$\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq 1, \quad \mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq e^{2gt}.$$

In umgekehrter Richtung erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
 1.b. \quad |r_2(t, \xi, v)\mu_2(t)| &= |r_1(t, \xi, v)\mu_1(t)| \\
 &\leq A_1(t) + B_1\mu_1(t)(\xi^2 + v^2) \\
 &= A_1(t) + B_1\mu_2(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t)(\xi^2 + v^2) \\
 &\leq A_1(t) + B_1\mu_2(t)(\xi^2 + v^2e^{-2gt})
 \end{aligned}$$

eine wahre Aussage, falls

$$\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq 1, \quad \mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq e^{-2gt}.$$

Für die partiellen Ableitungen formulieren wir die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
 2.a. \quad |r_{1\xi}(t, \xi, v)\mu_1(t)| &= |r_{2\xi}(t, \xi, v)\mu_2(t)| \\
 &\leq A_{22}(t)\mu_2(t) + B_2\mu_2(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|) \\
 &= A_{22}(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \\
 &\quad + B_2\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|) \\
 &\leq A_{12}(t)\mu_1(t) + B_2\mu_1(t)(|\xi| + |v|).
 \end{aligned}$$

Diese Aussage ist richtig, falls

$$\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq 1, \quad \mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq e^{gt}.$$

Die umgekehrte Relation gilt, falls

$$\begin{aligned}
 2.b. \quad |r_{2\xi}(t, \xi, v)\mu_2(t)| &= |r_{1\xi}(t, \xi, v)\mu_1(t)| \\
 &\leq A_{12}(t)\mu_1(t) + B_2\mu_1(t)(|\xi| + |v|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{12}(t)\mu_2(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \\
&\quad + B_2\mu_2(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t)(|\xi| + |v|) \\
&\leq A_{22}(t)\mu_2(t) + B_2\mu_2(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|),
\end{aligned}$$

was wiederum

$$\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq 1, \quad \mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq e^{-2gt}$$

fordert. Für die Ableitung nach v formulieren wir schließlich

$$\begin{aligned}
3.a. \quad |r_{1v}(t, \xi, v)\mu_1(t)| &= |r_{2v}(t, \xi, v)\mu_2(t)| \\
&\leq \left(A_{23}(t)\mu_2(t) + B_3\mu_2(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) e^{-gt} \\
&= \left(A_{23}(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \right. \\
&\quad \left. + B_3\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) e^{-gt} \\
&\leq A_{13}(t)\mu_1(t) + B_3\mu_1(t)(|\xi| + |v|),
\end{aligned}$$

was für

$$\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq e^{gt}, \quad \mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq e^{2gt}$$

gilt. Als Letztes bleibt die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
3.b. \quad |r_{2v}(t, \xi, v)\mu_2(t)| &= |r_{1v}(t, \xi, v)\mu_1(t)| \\
&\leq A_{13}(t)\mu_1(t) + B_3\mu_1(t)(|\xi| + |v|) \\
&= A_{13}(t)\mu_2(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \\
&\quad + B_3\mu_2(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t)(|\xi| + |v|) \\
&\leq \left(A_{23}(t)\mu_2(t) + B_3\mu_2(t)(|\xi| + |ve^{-gt}|) \right) e^{-gt},
\end{aligned}$$

falls

$$\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq e^{-gt}, \quad \mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq e^{-2gt}.$$

Zusammenfassend erhalten wir 3 Paare von Bedingungen, von denen jeweils nur a. oder b. gelten kann. Diese lauten

$$\begin{array}{ll}
1.a. & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq 0, & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq 2g \\
1.b. & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq 0, & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq -2g \\
2.a. & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq 0, & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq g \\
2.b. & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq 0, & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq -g
\end{array}$$

$$\begin{aligned} 3.a. \quad & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq g, & -\varrho_2 + \varrho_1 \leq 2g \\ 3.b. \quad & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq -g, & -\varrho_1 + \varrho_2 \leq -2g. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass wir für $g \geq 0$ diese Ungleichungen auf

$$a. \quad \varrho_1 - \varrho_2 \leq 0, \quad b. \quad \varrho_2 - \varrho_1 \leq -2g$$

reduzieren können.

Bemerkung 2.2.6. Für die Funktionen A_{1i} und A_{2i} , $i = 2, 3$ rechnen wir exemplarisch einen Fall aus, der sich auf die anderen Ungleichungsketten übertragen lässt: Wählen wir die Ungleichungskette 2.a. Es wird angenommen, dass $A_{22} \in L_2((0, \infty), \mu_2)$ gilt. Wir setzen o.B.d.A. $A_{22}(t) := A_{12}(t) \cdot \kappa(t)$ mit einer positiven Funktion κ . Dann behält die Ungleichungskette 2.a. ihre Richtigkeit, falls

$$A_{22}(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) = A_{12}(t)\kappa(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq A_{12}(t)$$

gilt. Folglich fordern wir $\kappa(t)\mu_2(t)\mu_1^{-1}(t) \leq 1$. Für die Funktion A_{12} soll nun $A_{12} \in L_2((0, \infty), \mu_1)$ folgen. Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |A_{12}(t)|^2 \mu_1(t) dt &= \int_0^\infty |A_{22}(t)\kappa^{-1}(t)|^2 \mu_1(t) dt \\ &= \int_0^\infty |A_{22}(t)|^2 \kappa^{-2}(t) \mu_1(t) \mu_2^{-1}(t) \mu_2(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty |A_{22}(t)|^2 \mu_2(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

falls $\kappa^{-2}(t)\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq 1$. Zusammenfassend erhält man

$$\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t) \leq \kappa^2(t) \leq \mu_1^2(t)\mu_2^{-2}(t).$$

Das heißt, wir finden stets solch eine Funktion κ , falls $1 \leq \mu_1(t)\mu_2^{-1}(t)$ oder eben $\varrho_1 \leq \varrho_2$. Diese Bedingung ergab sich bereits aus den anderen Abschätzungen.

Für eine übersichtliche Rechnung setzen wir o.B.d.A.

$$\varrho_1(t) = \delta + M + |M|, \quad \varrho_2(t) = \delta + M - g + |M + g|, \quad \delta > 0.$$

Nun können wir in Abhängigkeit von g die Probleme (P_{μ_1}) und (P_{μ_2}) vergleichen. Betrachten wir die Abbildung 2.1.

I_1) Die Menge I_1 lässt sich beschreiben durch $0 \leq g \leq M_0$. Wir bestimmen $\varrho_1 = \delta + 2M$ und $\varrho_2 = \delta + M - g + M + g = \delta + 2M$. Prüfen wir die Ungleichungen mit der Notation a., so soll gelten $\varrho_1 - \varrho_2 = \delta + 2M - \delta - 2M \leq 0$. Das bedeutet, wenn die Voraussetzungen an das Problem (P_{μ_2}) der Klasse (P_V) erfüllt sind, so sind alle Voraussetzungen an das Problem (P_{μ_1}) der Klasse (P) ebenfalls erfüllt. Die Umkehrung gilt wegen $\varrho_2 - \varrho_1 + 2g = \delta + 2M - \delta - 2M + 2g > 0$ nicht. Das heißt, die Gültigkeit der Ungleichungen (2.18) bis (2.22) zieht nicht die Richtigkeit der Ungleichungen (2.23) bis (2.27) nach sich. Je größer g gewählt wird, desto größer wird die Klasse der Aufgaben, für die die Existenz einer Lösung und die Gültigkeit notwendiger Bedingungen gesichert werden kann. Folglich sollte man ein mit $M_0 \geq 0$ gegebenes Steuerungsproblem (P_μ) , für welches die Voraussetzungen für den Existenzsatz 1.3.4 zu Problem (P) oder die notwendigen Bedingungen zu Satz 1.3.3 nicht erfüllt sind, mittels der Transformation $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-gt} = x(t)e^{-M_0t}$ verschieben und danach erneut diese Voraussetzungen prüfen. In der Grafik bedeutet dies eine Verschiebung aller Probleme mit Tupeln (g, M) in der Menge I_1 auf die rot markierte g -Halbachse. Das Beispiel 4 gehört in eben diesen Fall.

I_{21}, I_{22} und I_3) Auf diesen Mengen gilt $g < 0$. Ein Vergleich ist hier nicht möglich, da das Maximumprinzip 1.3.3 $g \geq 0$ fordert.

I_{41}) Auf dieser Menge gilt $M_0 \leq 0$ und $g \geq 0$. Folglich ist auch $M = M_0 - g \leq 0$. Es ist $\varrho_1 = \delta + M - M = \delta$ und $\varrho_2 = \delta + M - g - M - g = \delta - 2g$. Wegen $\varrho_1 - \varrho_2 = 2g > 0$ ist die Ungleichungskette a. nicht erfüllt. Dagegen bestimmen wir $\varrho_2 - \varrho_1 + 2g = 0$ und sehen, dass sich die Ungleichungskette b. stets erfüllen lässt. Das bedeutet, dass unter der Voraussetzung, dass das Maximumprinzip 1.3.3 zu Problem (P) gilt, auch alle Voraussetzungen für das Maximumprinzip 2.2.2 erfüllt sind. Die Umkehrung gilt nicht. Folglich ist es für Steuerungsprobleme mit Parametern (g, M) aus der Menge I_{41} sinnvoll, diese als Problem der Klasse (P_V) zu betrachten. Aufgrund der Äquivalenz des Ausgangsproblems (P_μ) und (P_{μ_2}) liefert eine Transformation keine neuen Resultate.

I_{42}) Diese Menge lässt sich beschreiben durch $0 \leq M_0 \leq g$. Es ist $\varrho_1 = \delta + M + |M| = \delta$ und $\varrho_2 = \delta + M - g + |M + g| = \delta + 2M$. Wir bestimmen $\varrho_1 - \varrho_2 = -2M$, was nur für $M = 0$ die Ungleichung a. erfüllt. Der Ausdruck $\varrho_2 - \varrho_1 + 2g = 2M + 2g$ erfüllt nur für $M = -g$ die Ungleichungskette b. Das bedeutet, man kann nur für $M = M_0 - g = 0$ schließen, dass die Betrachtung des Problems (P_{μ_1}) der Betrachtung des Problems (P_{μ_2}) vorzuziehen ist.

Bemerkung 2.2.7. Es ist klar, dass die Randpunkte der einzelnen Mengen doppelt untersucht wurden.

Fassen wir die Resultate zusammen. Einerseits ist es bei gegebenem Problem (P_μ) für $M_0 > 0$ möglich, dass man nach der Transformation des Tupels $(0, M_0)$ auf das Tupel $(M_0, 0)$ die Voraussetzungen der Sätze 1.3.3 und 1.3.4 erfüllen kann, obwohl dies vor der Transformation nicht ging. Andererseits können wir für ein gegebenes Steuerungsproblem (P_μ) mit einem beliebigen Tupel (g, M) die schwächsten Voraussetzungen dadurch erzeugen, dass die Aufgabe für $M \geq -g$ in das Tupel $(M + g, 0)$ auf der Halbachse $g \geq 0$ und für $M < 0$ in das Tupel $(0, M + g)$ auf der Halbachse $M > 0$ verschoben wird. In der Grafik sind diese Halbachsen rot markiert.

2.2.7 Die Transversalitätsbedingung

Unter der Annahme, dass die Voraussetzungen des Maximumprinzips 2.2.2 für ein Problem (P_V) erfüllt sind, gilt für die Adjungierte $y \in W_2^1((0, \infty), \mu^{-1})$ mit $\mu^{-1}(t) = e^{\varrho t}$, $\varrho > M - g + |M + g|$ und die Transversalitätsbedingung lautet $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T)e^{-gT} = 0$. Das bedeutet, dass für Aufgaben mit Tupeln (g, M) aus den Mengen I_1 , I_{21} , I_{22} und I_3 auch $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ gilt. Für Aufgaben mit Tupeln (g, M) aus den Mengen I_{41} und I_{42} können wir diesen Schluss offensichtlich nicht ziehen. Auf der Menge I_{41} gehen wir mittels Transformation auf eine Aufgabe mit dem Tupel $(0, M + g)$ über, bestimmen das neue Gewicht mittels $\varrho > M + g + |M + g| \geq 0$ und wissen, dass $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ gilt. Auf der Menge I_{42} transformieren wir in das Tupel $(M + g, 0)$ und wissen, dass wir das Maximumprinzip 1.3.3 anwenden können. Nun gilt ebenfalls $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$.

Kapitel 3

Linearisierung der Dynamik

Der in Abschnitt 1.2.2 vorgestellte Existenzsatz bezieht sich auf Steuerungsprobleme mit einer in der Steuerung u linearen Zustandsgleichung. Das Maximumprinzip aus Abschnitt 1.3 kann dagegen nur auf Aufgaben mit einer sowohl im Zustand x als auch in der Steuerung u linearen Dynamik angewendet werden. Zwar formuliert ZIEMANN in seiner Monographie [62] notwendige Bedingungen auch für nichtlineare Dynamiken, allerdings fordert der Autor eine globale Lipschitzstetigkeit der rechten Seite, sodass die notwendigen Bedingungen für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Beispiele nicht gelten. Wir werden in diesem Kapitel mittels bekannter Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen die Klasse der Aufgaben, für die ein Maximumprinzip formuliert werden kann, erweitern. Mittels geeigneter Transformationen des Zustandes werden wir Zustandsgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)$$

auf die Zustandsgleichung

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t)$$

transformieren. In der Literatur findet man Ideen und Ansätze zur Linearisierung von Steuerungsproblemen durch Transformation mittels $\tilde{x} := \ln x$ in [44], [45] und [57], die Transformation $\tilde{x} := \sqrt{x}$ nutzen bereits [30] und [42]. Natürlich ist eine Transformation nicht immer möglich, wie zum Beispiel bei der Riccatischen Differentialgleichung. Zumindest lassen sich eine Reihe von Problemklassen formulieren, für welche das Vorhaben gelingen kann. Im Folgenden gehen wir von einem Spezialfall des Steuerungsproblem (PE) aus.

Da die Dynamik stets linear in der Steuerung u ist, ist der Existenzsatz 1.2.4 anwendbar. In vielen Steuerungsproblemen ist die Dynamik nichtlinear in (x, u) . So lautet beispielsweise die Dynamik im *Resource Allocation Model* ([37], S.567 für ein endliches Zeitintervall und in [33], S.63 für unendlichen Zeithorizont):

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t),$$

im *Ramsey Model* ([20], S.205):

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - \delta x(t) - u(t)$$

mit einer bezüglich x monoton wachsenden, konkaven Produktionsfunktion $f(x)$ und im *Terror Control Model* ([24], S.140ff.):

$$\dot{x}(t) = c_1 + (c_2 + c_3 u(t))x^\alpha(t) - (c_4 + c_5 u(t))x(t)$$

mit reellen Konstanten c_i , $i = 1..5$. Um diese Steuerungsaufgaben zu lösen, wird beispielsweise statt des Ramsey Modells das lineare Ramsey Modell untersucht ([20], S.201ff.) oder im Beispiel des Terror Modells wird $\alpha = 1$ gesetzt ([24], S.140ff.). Dabei gibt es unter diesen Problemen Klassen von Aufgaben, die sich besonders einfach transformieren lassen. Nach der Transformation auf ein Problem der Klasse (P) lassen sich Fragen nach der Wahl der Funktionenräume, der Existenz einer Lösung und der Gültigkeit des Maximumprinzips, insbesondere der Gültigkeit einer Transversalitätsbedingung beantworten und auf das ursprüngliche Problem übertragen.

3.1 Der Fall getrennter Variablen

Gegeben sei folgendes Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont:

$$(P_N) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\nu(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.1)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t))B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.3)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad (3.4)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.5)$$

Voraussetzung 3.1.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich U sei nichtleer und von der Variablen der Zeit unabhängig.

Voraussetzung 3.1.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in der zweiten und dritten Variablen, stetig differenzierbar und konvex in der dritten Variablen v .

Voraussetzung 3.1.3. Die Funktion $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt.

Voraussetzung 3.1.4. Die von der Variablen t unabhängige Funktion f , vermöge $f : X \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Desweiteren gelte $f(\xi) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\xi \in X$.

Die Funktion ν ist eine Gewichtsfunktion. Sie tritt sowohl als Gewicht des Raumes als auch im Integranden auf. Stimmen die Gewichtsfunktionen zu gegebenem Problem nicht überein, so formuliere man das Problem gemäß Beispiel 1.3.4 um. Um ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_N) zu bestimmen, benötigt man natürliche Zustandsbeschränkungen für diese Aufgabe. Gilt die Voraussetzung 1.2.5 aus dem Abschnitt 1.2 für die Klasse (P_E) , so wissen wir, dass sich ein natürliches Gewicht der Aufgabe gemäß $\nu(t) = e^{-\rho t}$, $\rho > 2C_3K$ bestimmen lässt, siehe Satz 1.2.2. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn $|B(t)f(\xi)| \leq C_3|\xi|$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\xi \in X$ gilt. Wir haben schon in Abschnitt 1.3 an dem Beispiel gesehen, dass die Wahl des Gewichtes gemäß 1.2.6 in bestimmten Aufgaben eine zu starke Voraussetzung liefert. Wir werden in den folgenden Abschnitten zeigen, wie man eben diese Voraussetzung abschwächen kann.

3.1.1 Die Transformation von (P_N) auf (P)

Die Zustandsgleichung des Problems (P_N) ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen. Da die Funktion f aufgrund der Voraussetzung 3.1.4 entweder strikt positiv oder strikt negativ ist, können wir das Problem (P_N) mittels der Transformation

$$\tilde{x}(t) := R(x(t)) \quad \text{mit} \quad R(\xi) := \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{f(\eta)} d\eta + x_1, \quad x_1 > 0 \quad (3.6)$$

auf ein Problem der Klasse (P) transformieren. Die Funktion R ist offensichtlich bezüglich ξ streng monoton, stetig differenzierbar und besitzt folglich eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion. Für die Ableitung der Funktion \tilde{x} erhalten wir

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d}{dt}R(x(t)) = R_\xi(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \frac{1}{f(x(t))}f(x(t))B(t)u(t) = B(t)u(t)$$

$$\tilde{x}(0) = R(x(0)) + x_1 = R(x_0) + x_1 = x_1.$$

Das transformierte Problem hat die Gestalt:

$$(\tilde{P}_N) : \quad J(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.7)$$

$$(\tilde{x}, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.8)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.9)$$

$$\tilde{x}(0) = x_1 > 0, \quad (3.10)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.11)$$

wobei $\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) := r(t, R^{-1}(\tilde{\xi}), v) \nu(t) \mu^{-1}(t)$. Ist die Funktion \tilde{r} im Integranden bezüglich aller Variablen stetig differenzierbar, so ist das Problem (\tilde{P}_N) eine Aufgabe der Klasse (P) , für welche die Bedingungen für die Gültigkeit des Pontrjaginschen Maximumprinzips sowie die Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung bereits in Kapitel 1 formuliert und bewiesen wurden. Die Bestimmung des Gewichtes $\mu(t) = e^{-gt}$ erfolgt gemäß Definition 1.3.1 durch $\varrho > M + |M| \geq 0$.

Bemerkung 3.1.1. Ersetzt man die Voraussetzung der Beschränktheit der Funktion B durch die Forderung $|B(t)| \leq C_B e^{-gt}$ mit $C_B > 0, g \in \mathbb{R}$, so führt die Transformation (3.6) auf ein Problem der Klasse (P_V) . Ersetzt man die gegebene Differentialgleichung (3.3) durch die Dynamik

$$\dot{x}(t) = (D(t) + B(t)u(t))f(x(t))$$

mit einer stetigen, beschränkten Funktion D , so führt die Transformation auf ein Problem der Klasse (P_S) aus Abschnitt 2.1.

Will man für die Aufgaben (P_N) und (P) die Äquivalenz zeigen, ist die spezielle Struktur der Funktion f wichtig. Die Kenntnis dieser Struktur ist notwendig, um ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_N) zu erhalten. In den nächsten Abschnitten werden wir für verschiedene Funktionen f die natürliche Gewichtsfunktion bestimmen und die Äquivalenz der Aufgaben beweisen. Wir nutzen hierfür den Zusammenhang der Dichten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen¹. Im Gegensatz zu Kapitel 2 werden wir kein neues Maximumprinzip und auch keinen Existenzsatz formulieren. Wir zeigen lediglich die Äquivalenz der Aufgabenklassen. Damit kann man ein gegebenes Problem

¹siehe Anhang A.6.

(P_N) mittels der geeigneten Transformation auf ein Problem der Klasse (P) überführen und die aus Kapitel 1 bekannten Sätze nutzen. Sicherlich könnte man die Voraussetzungen an das Problem (P_N) , die sich aus der Transformation ergeben, formulieren, diese haben sich aber als unpraktikabel erwiesen.

3.1.2 Die Adjungierte des Problems (P_N)

Unabhängig davon, dass die Äquivalenz der Probleme (P_N) und (P) nicht für beliebige Funktionen f gezeigt wird, kann man doch auf recht einfache Weise zeigen, wie sich die Adjungierte Funktion y unter der Transformation (3.6) verhält. Dadurch erhält man eine genaue Vorstellung davon, welche Transversalitätsbedingung für ein Problem (P_N) gelten wird. Vorausgesetzt wird natürlich, dass nach der Transformation auf ein Problem der Klasse (P) alle Voraussetzungen des Satzes 1.3.3 erfüllt sind. Wir betrachten nun folgende Differentialgleichungen:

$$\dot{p}(t) = r_\xi(t, x(t), u(t))\nu(t) - p(t)B(t)u(t)f_\xi(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.12)$$

$$\dot{\tilde{p}}(t) = \tilde{r}_\xi(t, \tilde{x}(t), u(t))\mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.13)$$

mit den Funktionen r, ν, B, f, x und u aus dem Problem (P_N) . Die Funktion \tilde{x} möge dem Zusammenhang (3.6) genügen. Dann gilt folgender Zusammenhang:

Lemma 3.1.1. Es seien alle Voraussetzungen an die in den Differentialgleichungen auftretenden Funktionen aus dem Problem (P_N) erfüllt. Dann gilt: Die Funktion p erfüllt genau dann die Gleichung (3.12), wenn die Funktion \tilde{p} , $\tilde{p}(t) := p(t)f(x(t))$ die Gleichung (3.13) erfüllt.

Beweis: Angenommen, p erfülle die Gleichung 3.12, dann folgt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}(t) &= \dot{p}(t)f(x(t)) + p(t)\dot{f}(x(t)) \\ &= \dot{p}(t)f(x(t)) + p(t)f_\xi(x(t))\dot{x}(t) \\ &= \dot{p}(t)f(x(t)) + p(t)f_\xi(x(t))B(t)u(t)f(x(t)) \\ &= \left(r_\xi(t, x(t), u(t))\nu(t) - p(t)B(t)u(t)f_\xi(x(t)) \right) f(x(t)) \\ &\quad + p(t)f_\xi(x(t))B(t)u(t)f(x(t)) \\ &= r_\xi(t, x(t), u(t))\nu(t)f(x(t)) \\ &= \tilde{r}_\xi(t, \tilde{x}(t), u(t))\mu(t). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt wegen

$$\begin{aligned} r_\xi(t, \xi, v) &= \tilde{r}_\xi(t, R(\xi), v)\mu(t)\nu^{-1}(t) \\ &= \tilde{r}_\xi(t, R(\xi), v) \cdot R_\xi(\xi)\mu(t)\nu^{-1}(t) \\ &= \tilde{r}_\xi(t, \tilde{\xi}, v) \frac{1}{f(\xi)}\mu(t)\nu^{-1}(t). \end{aligned}$$

Die Umkehrung der Aussage ist aufgrund der Äquivalenz der Umformungen trivial. \square

Betrachten wir nun für $t \in \mathbb{R}_+$ insbesondere das System

$$\dot{y}(t) = r_\xi(t, x^*(t), u^*(t))\nu(t) - y(t)B(t)u^*(t)f_\xi(x^*(t)), \quad (3.14)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \tilde{r}_\xi(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t))\mu(t). \quad (3.15)$$

Für das Problem (P_N) ist

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(t, \xi, v)\nu(t) + \eta(f(\xi)B(t)v) \quad (3.16)$$

die Pontrjaginfunktion. Diese Funktion spielt bekanntermaßen eine entscheidende Rolle bei der Formulierung von notwendigen Bedingungen und der Berechnung der optimalen Lösung eines Steuerungsproblems. Offensichtlich gilt mit (3.16)

$$\dot{y}(t) = -H_\xi(t, x^*(t), u^*(t), y(t), 1).$$

Die Gleichungskette liefert

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \tilde{r}_\xi(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t))\mu(t) = -\tilde{H}_\xi(t, \tilde{x}^*(t), u^*(t), \tilde{y}(t), \lambda_0)$$

für die Funktion \tilde{H} , definiert in Satz 1.3.3. Das bedeutet, sind die Voraussetzungen für das Maximumprinzip 1.3.3 zu (\tilde{P}_N) erfüllt und kann die Existenz einer Lösung gesichert werden, so gilt für die Adjungierte der Aufgabe (P_N) der Zusammenhang $\tilde{y}(t) = y(t)f(x^*(t))$. Die Transversalitätsbedingung für das Problem (P_N) lautet

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{y}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} y(T) \cdot f(x^*(T)) = 0.$$

Zusammenfassend haben wir in diesem Abschnitt eine Motivation gegeben, nichtlineare Steuerungsprobleme zu transformieren. Die Angabe einer expliziten Transversalitätsbedingung kann insbesondere bei der numerischen Bestimmung der optimalen Lösung hilfreich sein. Wir haben eine Möglichkeit

vorge stellt, Transversalitätsbedingungen zu formulieren, die nicht der klassischen Transversalitätsbedingung entsprechen. Offen bleibt hierbei die Frage nach der Raumzugehörigkeit der transformierten Größen. In den folgenden Abschnitten werden wir diese zumindest für Teilklassen der Klasse (P_N) beantworten.

3.2 Die logarithmische Transformation

In diesem Abschnitt betrachten wir ein spezielles Steuerungsproblem der Klasse (P_N) mit nichtlinearer Dynamik. Wir werden das Problem formulieren und mittels einer geeigneten Transformation in ein Steuerungsproblem der Klasse (P) überführen. Eine ausführliche Diskussion dieser Aufgabenklasse findet man in [57]. Gegeben sei folgendes Steuerungsproblem:

$$(P_1) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \nu_1(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.17)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu_1) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.18)$$

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t)x(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.19)$$

$$x(0) = x_0 > 1, \quad (3.20)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+. \quad (3.21)$$

Voraussetzung 3.2.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich U sei nichtleer und von der Variablen t unabhängig.

Voraussetzung 3.2.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in der ersten und dritten Variablen, stetig differenzierbar in der dritten Variablen und konvex in v .

Voraussetzung 3.2.3. Die Funktion $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ aus der Dynamik sei beschränkt und stetig.

Voraussetzung 3.2.4. Die Gewichtsfunktion ν_1 sei ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_1) .

Diese Aufgabe ist insbesondere ein Problem der Klasse (P_E) , für welches wir den Existenzsatz 1.2.4 anwenden können, falls alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Ein natürliches Gewicht bestimmt man mittels Satz 1.2.2

anhand der gegebenen Größen zu $\nu_1(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 2C_3K$. Nutzen wir die Struktur der Differentialgleichung, können wir eine bessere Abschätzung für eine natürliche Phasenbeschränkung angeben. Wir definieren

Definition 3.2.1.

$$m_1 := \inf_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} B(t) \cdot v$$

$$M_1 := \sup_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} B(t) \cdot v$$

und beweisen folgendes Lemma.

Lemma 3.2.1. Für jedes zu Problem (P_1) zulässige Paar (x, u) gelten die natürlichen Zustandsbeschränkungen:

$$x_0 e^{m_1 t} \leq x(t) \leq x_0 e^{M_1 t} \quad (3.22)$$

mit den Konstanten $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$, definiert durch Definition 3.2.1. Es gilt die Inklusion $x \in W_2^1((0, \infty), \nu_1)$ mit $\nu_1(t) = e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t}$, $\varrho > 0$.

Beweis: Jeder zu Problem (P_1) zulässige Zustand x hat die Form

$$x(t) = x_0 e^{F_1(t)} \quad \text{mit} \quad F_1(t) = \int_0^t B(\eta) u(\eta) d\eta.$$

Die Beschränktheit der Funktion B sowie die Kompaktheit der Steuerungsmenge U erlauben es uns zu schliessen, dass die von der Wahl der Funktionen x und u unabhängigen Konstanten m_1 und M_1 existieren und

$$m_1 t \leq F_1(t) \leq M_1 t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.23)$$

gilt. Damit sind die in Lemma 3.2.1 formulierten Zustandsbeschränkungen für jedes zulässige Paar (x, u) erfüllt. Für einen zulässigen Zustand x verifizieren wir:

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t} dt \leq \int_0^\infty |x_0 e^{M_1 t}|^2 e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t} dt < \infty$$

für $\varrho > 0$. Mit der Setzung $K := \sup_{v \in U} |v|$ schätzen wir für die Ableitung ab:

$$\int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2 e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t} dt = \int_0^\infty |B(t)u(t)|^2 |x(t)|^2 e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t} dt$$

$$\leq K^2 \|B\|_\infty^2 \int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t} dt < \infty,$$

was zeigt, dass $\dot{x} \in L_2((0, \infty), \nu_1)$ ebenfalls gilt. \square

Bemerkung 3.2.1. Für die allgemeinere Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)x(t)$$

findet man diese Aufgabe in [57]. Wir werden $A(t) \equiv 0$ setzen. Der Beweis der Äquivalenz zu einer Aufgabe mit $A \neq 0$ kann analog zu den Resultaten aus Kapitel 2 mittels der Transformation $\tilde{x}(t) := x(t)e^{-F(t)}$ mit $F(t) := \int_0^t A(s)ds$ geführt werden. Wir werden auf diese Transformation in Abschnitt 3.3.5 eingehen.

3.2.1 Die Transformation von (P_1) auf (P)

Da jeder zulässige Zustand zu jedem Zeitpunkt strikt positiv ist, können wir das Problem wie folgt transformieren: Wir setzen

$$\tilde{x}(t) := \ln x(t) \tag{3.24}$$

und erhalten mit $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t)x^{-1}(t)$ das transformierte Problem mit linearer Dynamik:

$$(\tilde{P}_1) : \quad \tilde{J}(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \mu(t) dt \rightarrow \min! \tag{3.25}$$

$$(\tilde{x}, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \mu(t) = e^{-\varrho t}, \tag{3.26}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \tag{3.27}$$

$$\tilde{x}(0) = x_1 > 0, \tag{3.28}$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \tag{3.29}$$

wobei $\varrho > 0$, $x_1 := \ln x_0$ und $\tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) := r(t, e^{\tilde{x}(t)}, u(t))\nu_1(t)\mu^{-1}(t)$. Wenn der neue Integrand bezüglich aller Variablen stetig differenzierbar ist, ist diese Aufgabe aus der Klasse (P) . Das bedeutet, wir können das Maximumprinzip 1.3.3 aus Abschnitt 1.3.1 anwenden. Der in dieser Arbeit verwendete Existenzsatz 1.2.4 aus Abschnitt 1.2.3 kann sowohl auf die ursprüngliche Aufgabe (P_1) als auch auf das transformierte Problem (\tilde{P}_1) angewendet werden.

3.2.2 Die Äquivalenz von (P_1) und (P)

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Aufgabe (P_1) genau dann eine Lösung besitzt, wenn das Problem (\tilde{P}_1) eine Lösung hat.

Satz 3.2.1. *Es seien die Probleme (P_1) und (\tilde{P}_1) gegeben. Die Gewichtsfunktion ν_1 sei gewählt als $\nu_1(t) = e^{-2M_1 t} e^{-\varrho t}$ mit $M_1 \in \mathbb{R}$, definiert in 3.2.1 und $\varrho > 0$. Desweiteren sei $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > 0$. Dann sind diese Probleme äquivalent im folgenden Sinne: Für jedes Paar (x, u) , zulässig zu (P_1) erhalten wir durch die Transformation (3.24) ein Paar (\tilde{x}, u) , welches für (\tilde{P}_1) zulässig ist und umgekehrt. Das heißt, es gilt:*

- (i) Ein Prozess (x, u) , erfüllt genau dann die Bedingungen (3.19), (3.20) und (3.21), wenn der Prozess (\tilde{x}, u) die Bedingungen (3.27), (3.28) und (3.29) erfüllt.
- (ii) Ein zu Problem (P_1) zulässiger Prozess (x, u) gehört genau dann dem Raum $W_2^1((0, \infty), \nu_1) \times L_\infty((0, \infty))$ an, wenn ein zu Problem (\tilde{P}_1) zulässiger Prozess (\tilde{x}, u) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty))$ angehört.
- (iii) Für die Zielfunktionale gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, u)$.

Beweis:

- (i) Als Erstes zeigen wir, dass jedes Paar (x, u) zu (P_1) genau dann zulässig ist, wenn (\tilde{x}, u) zu (\tilde{P}_1) zulässig ist. Die Analogie der Zustandsgleichung ist gegeben durch

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d}{dt}(\ln x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{B(t)x(t)u(t)}{x(t)} = B(t)u(t),$$

wobei die Anfangsbedingung $\tilde{x}(0) = \ln x(0) = \ln x_0 = x_1 > 0$ offensichtlich erfüllt ist. In umgekehrter Richtung zeigen wir

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{\tilde{x}(t)}) = e^{\tilde{x}(t)} \dot{\tilde{x}}(t) = x(t)B(t)u(t).$$

Die Anfangsbedingung ist erfüllt, da $x(0) = e^{\tilde{x}(0)} = e^{x_1} = e^{\ln x_0} = x_0$. Die Steuerung u bleibt unter der Transformation unverändert.

- (ii) Die Raumzugehörigkeit folgt aus dem Lemma 3.2.1 und dem Lemma 1.3.2 .

- (iii) Offensichtlich bleibt der Wert des Zielfunktional $J(x, u)$ unter der Transformation unverändert, das bedeutet $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, u)$, wie die nächste Gleichungskette zeigt:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\tilde{x}, u) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t))\mu(t)dt \\ &= \int_0^\infty r(t, e^{\tilde{x}(t)}, u(t))\nu_1(t)\mu^{-1}(t)\mu(t)dt \\ &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\nu_1(t)dt = J(x, u).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir haben gezeigt, dass sich Problem (P_1) auf ein Problem (\tilde{P}_1) der Klasse (P) transformieren lässt, in welchem die rechte Seite der Zustandsgleichung unabhängig vom gesuchten Zustand \tilde{x} ist. Die Äquivalenz der Aufgaben erlaubt die Schlussfolgerung, dass (P_1) genau dann eine Lösung besitzt, wenn (\tilde{P}_1) eine Lösung hat. Bemerkenswert ist, dass sich der Existenzsatz auf (P_1) nur anwenden lässt, wenn ν_1 über \mathbb{R}_+ summierbar ist. Für $-2M_1 \geq \varrho > 0$ ist das nicht der Fall, trotzdem können wir bei Gültigkeit der Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.2.4 für eine Aufgabe der Klasse (\tilde{P}_1) die Existenz einer Lösung zu (P_1) sichern. Unter den in Abschnitt 1.3.1 getroffenen Voraussetzungen ist das Maximumprinzip aus Satz 1.3.3 auf die Aufgabe (\tilde{P}_1) anwendbar. Auf das Problem (P_1) ist dieses Maximumprinzip nicht anwendbar, da die Linearität der Zustandsgleichung bezüglich des Tupels (x, u) nicht gegeben ist.

3.2.3 Die Adjungierte des Problems (P_1)

Unter Verwendung des Lemmas 3.1.1 bestimmen wir den Zusammenhang der Adjungierten zu $\tilde{y}(t) = y(t) \cdot x^*(t)$. Sind die Voraussetzungen des Maximumprinzips 1.3.3 zu Problem (\tilde{P}_1) erfüllt, so gilt $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{y}(T) = 0$. Dann folgt aus dem Lemma 3.1.1, dass für die Funktion y zu Problem (P_1) die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y(T)x^*(T) = 0 \quad (3.30)$$

gilt. Für $m_1 > 0$ sind die Funktionen x nicht beschränkt und es gilt für jeden zulässigen Zustand $\lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T) = \infty$. In diesem Fall wird die klassische Transversalitätsbedingung $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ erzwungen. Ist allerdings

$M_1 < 0$, so sind alle zulässigen Funktionen x fallend mit $\lim_{T \rightarrow \infty} x(T) = 0$. Folglich können wir in diesem Fall lediglich $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T)x^*(T) = 0$ sichern. Für $M_1 < 0$ muss die Gewichtsfunktion keine summierbare Funktion sein, folglich ist in diesem Fall eine Transformation auf ein Problem der Klasse (P) notwendig, wenn man die Existenz einer Lösung nachweisen will. In Abschnitt 1.3 hatten wir bereits ein Beispiel von HALKIN [25] (S.271) vorgestellt. Er zeigte damit, dass die sogenannte *klassische Transversalitätsbedingung* $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ bei Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont keine notwendige Bedingung darstellen muss. Ebenso verhält es sich bei folgendem Problem, welches in [57] ausführlich behandelt wird.

Beispiel 7.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(t) dt &\rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= -x(t)u(t), \quad x(0) = 2 \\ u(t) &\in [\delta, 1], \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Anhand der Definition 3.2.1 bestimmen wir $m_1 = -1$ und $M_1 = -\delta$. Unter Verwendung der expliziten Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems und der Steuerungsbeschränkung ergibt sich

$$x(t) = 2e^{-\int_0^t u(s) ds} \geq 2e^{-\int_0^t 1 ds} = 2e^{-t}$$

und somit offensichtlich $x^*(t) = 2e^{-t}$ und $u^*(t) = 1$. Die Adjungierte des Problems lautet $y(t) = ce^t - 1$. Es gilt die Transversalitätsbedingung (3.30), die klassische Transversalitätsbedingung ist hingegen verletzt.

Die Lösung wurde in diesem Beispiel durch direkte Abschätzung gewonnen, da ein Maximumprinzip für diese Aufgabe nicht vorliegt. Transformieren wir die Aufgabe mittels $\tilde{x}(t) := \ln x(t)$, so erhalten wir das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\tilde{x}(t)} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= -u(t), \quad \tilde{x}(0) = \ln 2 \\ u(t) &\in [\delta, 1], \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Ein natürliches Gewicht der Aufgabe lautet $\mu(t) = e^{-\varrho t}$ mit $\varrho > 0$. Das bedeutet, für jeden zulässigen Zustand gilt $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$. Für $\varrho < 2\delta$ sind alle

Voraussetzungen des Satzes 1.3.3 erfüllt. Die Lösung lautet $\tilde{x}^*(t) = \ln 2 - t$, $u^*(t) \equiv 1$. Die Adjungierte berechnet sich aus der kanonischen Gleichung in Satz 1.3.3 zu $\tilde{y}(t) = -2e^{-t}$ und erfüllt damit die klassische Transversalitätsbedingung. Aufgrund der Äquivalenz der Aufgaben kann nun auch die Lösung der ursprünglichen Aufgabe als optimale Lösung bestätigt werden.

3.3 Die Bernoullische Transformation

In diesem Abschnitt werden wir einen Spezialfall der Bernoullischen Differentialgleichung behandeln. Nachdem diese Aufgabenklasse durch eine geeignete Transformation auf das Problem (P) überführt wurde, werden wir im nächsten Abschnitt den Zusammenhang zur allgemeinen Bernoullischen Differentialgleichung erläutern. Gegeben sei folgendes Steuerungsproblem:

$$(P_\alpha) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\nu(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.31)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.32)$$

$$\dot{x}(t) = x^\alpha(t)B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.33)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad (3.34)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+ \quad (3.35)$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Voraussetzung 3.3.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich sei nichtleer und von der Variablen t unabhängig.

Voraussetzung 3.3.2. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in der ersten und dritten Variablen, stetig differenzierbar und konvex in der dritten Variablen v .

Voraussetzung 3.3.3. Die Funktion B in der Dynamik sei beschränkt und stetig.

Voraussetzung 3.3.4. Die Gewichtsfunktion ν sei ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_α) .

Bemerkung 3.3.1. Ist der Integrand bezüglich aller Variablen stetig differenzierbar, so ist für $\alpha = 0$ diese Aufgabe die Grundaufgabe (P) aus Abschnitt 1.3. Der Fall $\alpha = 1$ liefert die Aufgabe (P_1) aus Abschnitt 3.2.

Es ist wiederum klar, dass das Problem (P_α) ein Spezialfall des Problems (P_N) ist. Um ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_α) angeben zu können, bestimmen wir die *natürlichen Zustandsbeschränkungen* für diese Aufgabe.

Definition 3.3.1. *Es seien*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &:= x_0^{1-\alpha} \\ m_\alpha &:= (1-\alpha) \inf_{t \in \mathbb{R}, v \in U} B(t)v, & M_\alpha &:= (1-\alpha) \sup_{t \in \mathbb{R}, v \in U} B(t)v, \\ n_\alpha &:= \begin{cases} M_\alpha, & \alpha < 0 \\ m_\alpha, & \alpha > 0 \end{cases}, & N_\alpha &:= \begin{cases} m_\alpha, & \alpha < 0 \\ M_\alpha, & \alpha > 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Um die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung (3.33) zu sichern, fordern wir:

Voraussetzung 3.3.5. Die rechte Seite der Dynamik erfülle folgende Voraussetzung:

$$(1-\alpha)B(t)v \geq \delta > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall v \in U.$$

Man beachte, dass die Größen m_α und M_α für jedes feste α durch diese Voraussetzung stets positiv sind.

Lemma 3.3.1. *Für jedes zu Problem (P_α) zulässige Paar (x, u) gilt*

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty)) \text{ mit } \nu(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t}, \quad \rho > 0.$$

Beweis: Aus der Zustandsgleichung (3.33) erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$:

$$x(t) = \left((1-\alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + x_0^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Aufgrund der Voraussetzung 3.3.5 existiert diese Lösung auf \mathbb{R}_+ . Nutzt man die Voraussetzung 3.3.5 zusammen mit den analytischen Eigenschaften von Potenzfunktionen, so ergibt sich die Abschätzung²

$$\left(m_\alpha \cdot t + x_0^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq x(t) \leq \left(M_\alpha \cdot t + x_0^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.36)$$

²siehe Anhang A.5.

und für die Ableitung, gegeben durch (3.33), gilt mit der Definition 3.3.1 und der Definition

$$k := \inf_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} |B(t)v|, \quad K := \sup_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} |B(t)v|$$

folgende Ungleichungskette:

$$k \left(n_\alpha \cdot t + \tilde{x}_0 \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq |\dot{x}(t)| \leq K \left(N_\alpha \cdot t + \tilde{x}_0 \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (3.37)$$

Damit lässt sich abschätzen:

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 \nu(t) dt \leq \int_0^\infty |(M_\alpha t + \tilde{x}_0)|^{\frac{2}{1-\alpha}} (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t} dt < \infty,$$

da M_α und N_α positiv sind. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2 \nu(t) dt &= \int_0^\infty |B(t)u(t)x^\alpha(t)|^2 \nu(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty K^2 (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t} dt < \infty, \end{aligned}$$

woraus die Zugehörigkeit jedes zulässigen Zustandes zum Raum $W_2^1((0, \infty), \nu)$, $\nu(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t}$ mit $\rho > 0$ unmittelbar folgt. \square

Bemerkung 3.3.2. Aus der letzten Abschätzung sieht man sofort, dass jede zulässige Funktion x durch eine Funktion des Raumes $L_2((0, \infty), \nu)$ beschränkt werden kann. Das bedeutet wiederum, dass die Anwendung des Existenzsatzes 1.2.4 zu Problem (P_E) möglich ist. Die Existenz einer Lösung zu dem Problem (P_α) folgt sofort, falls r und r_v die Voraussetzungen 1.2.6 und 1.2.7 erfüllen.

Bemerkung 3.3.3. Jede Exponentialfunktion mit negativem Exponenten ist ein natürliches Gewicht für Funktionen x , die der Gleichung (3.33) genügen. Weshalb wir das Gewicht ν , definiert in Lemma 3.3.1 gewählt haben, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Alle weiteren Abschätzungen bleiben richtig, wenn man in dem Gewicht ν die Konstante N_α durch n_α , m_α oder M_α ersetzt.

3.3.1 Die Transformation von (P_α) auf (P)

Gegeben sei das Steuerungsproblem (P_α) aus dem letzten Abschnitt. Die Voraussetzung 3.3.5 sei erfüllt. Dann können wir die Zustandsgleichung (3.33) aus (P_α) mittels der bekannten Transformation, die auf Jakob I Bernoulli zurückgeht, in eine lineare Differentialgleichung überführen. Das Problem (P_α) geht mittels der Transformation

$$\tilde{x}(t) := x^{1-\alpha}(t) \quad (3.38)$$

über in das Problem

$$(\tilde{P}_\alpha) : \quad \tilde{J}(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t))\mu(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.39)$$

$$(\tilde{x}, u) \in W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty)), \mu(t) = e^{-\varrho t}, \quad (3.40)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (1 - \alpha)B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.41)$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 > 0, \quad (3.42)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.43)$$

wobei $\tilde{x}_0 := x_0^{1-\alpha}$, $\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) := r(t, \tilde{\xi}^{\frac{1}{1-\alpha}}, v)\nu(t)\mu^{-1}(t)$ und $\varrho > 0$. Falls der neue Integrand bezüglich aller Variablen stetig differenzierbar ist, ist dies eine Aufgabe der Klasse (P) mit $A(t) \equiv 0$, für welche die Bedingungen für die Gültigkeit des Pontrjaginschen Maximumprinzips sowie die Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung bereits in Kapitel 1 formuliert und bewiesen wurden. Die Bestimmung einer natürlichen Gewichtsfunktion μ erfolgt gemäß Lemma 1.3.1 durch $\varrho > |M| + M = 0$.

3.3.2 Die Äquivalenz der Probleme (P_α) und (\tilde{P}_α)

Das Problem (P_α) genügt nicht den Voraussetzungen des Maximumprinzips 1.3.3, da die Zustandsgleichung bezüglich des Zustandes x nichtlinear ist. Können wir allerdings die Äquivalenz der Aufgaben (P_α) und des transformierten Problems (\tilde{P}_α) zeigen, so wissen wir, dass unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung für Problem (\tilde{P}_α) das Problem (P_α) ebenfalls eine Lösung besitzt. Falls der Satz 1.3.3 auf das Problem (\tilde{P}_α) anwendbar ist, können wir die Lösung (\tilde{x}^*, u^*) durch Auswerten der notwendigen Bedingungen bestimmen. Die Lösung (x^*, u^*) erhalten wir durch Rücktransformation der Lösung (\tilde{x}^*, u^*) .

Satz 3.3.1. *Es seien die Probleme (P_α) und (\tilde{P}_α) gegeben. Die Gewichtsfunktion ν sei gewählt als $\nu(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t}$ mit $\rho > 0$. Desweiteren sei $\mu(t) = e^{-\rho t}$. Dann sind die Probleme äquivalent in folgendem Sinne: Für jedes Paar (x, u) , zulässig zu (P_α) , erhalten wir durch die Transformation (3.38) ein Paar (\tilde{x}, u) , welches zu (\tilde{P}_α) zulässig ist und umgekehrt. Das heißt, es gilt:*

- (i) *Ein Prozess (x, u) erfüllt genau dann die Zustandsgleichung (3.33) mit der Anfangsbedingung (3.34), wenn das Tupel (\tilde{x}, u) die Zustandsgleichung (3.41) erfüllt und der Anfangsbedingung (3.42) genügt.*
- (ii) *Ein zu Problem (P_α) zulässiger Prozess (x, u) gehört genau dann dem Raum $W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty))$ an, wenn das zu Problem (\tilde{P}_α) zulässige Tupel (\tilde{x}, u) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_\infty((0, \infty))$ angehört.*
- (iii) *Für die Zielfunktionale aus den Aufgaben (P_α) und (\tilde{P}_α) gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, u)$.*

Beweis:

- (i) Bilden wir die 1. Ableitung der Funktion \tilde{x} , gegeben durch (3.38), so erhalten wir unter Verwendung von (3.33)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (1 - \alpha)x^{-\alpha}(t)\dot{x}(t) = (1 - \alpha)B(t)u(t)$$

und für den Anfangswert gilt

$$0 < \tilde{x}(0) = x^{1-\alpha}(0) = x_0^{1-\alpha} =: \tilde{x}_0.$$

Die Menge der zulässigen Steuerungen bleibt unter der Transformation unverändert.

- (ii) Sei $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \mu(t) dt &= \int_0^\infty |x^{1-\alpha}(t)|^2 \mu(t) dt \\ &= \int_0^\infty x^2(t) x^{-2\alpha}(t) e^{-\rho t} dt \\ &\leq \int_0^\infty x^2(t) (n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\rho t} \nu^{-1}(t) \nu(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty x^2(t)(n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\nu(t)dt \\
&\leq c \int_0^\infty |x(t)|^2\nu(t)dt < \infty,
\end{aligned}$$

da der Ausdruck $(n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$ aufgrund der Voraussetzung 3.3.5 für alle $t \in \mathbb{R}_+$ beschränkt ist.

Es gelte nun umgekehrt $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |x(t)|^2\nu(t)dt &= \int_0^\infty |\tilde{x}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)|^2(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}e^{-\alpha t}dt \\
&\leq \int_0^\infty \tilde{x}^2(t)(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}e^{-\alpha t}dt \\
&\leq \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2\mu(t)dt < \infty,
\end{aligned}$$

ebenfalls aufgrund der Voraussetzung 3.3.5. Für die Ableitungen bestimmen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\dot{x}(t)|^2\nu(t)dt &= \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \tilde{x}^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(t)\nu(t)dt \\
&\leq \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\nu(t)\mu^{-1}(t)\mu(t)dt \\
&= \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}\mu(t)dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

In umgekehrter Richtung schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2\mu(t)dt &= \int_0^\infty (1-\alpha)^2|\dot{x}(t)|^2x^{-2\alpha}(t)\mu(t)dt \\
&\leq \int_0^\infty (1-\alpha)^2|\dot{x}(t)|^2(n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}\mu(t)\nu^{-1}(t)\nu(t)dt \\
&= \int_0^\infty (1-\alpha)^2|\dot{x}(t)|^2(n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\nu(t)dt \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

aufgrund der Definition des natürlichen Gewichtes ν und der Beschränktheit des Ausdrucks $(n_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$.

(iii) Wir rechnen leicht nach:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\tilde{x}, u) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t))\mu(t)dt = \int_0^\infty r(t, \tilde{x}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), u(t))\nu(t)dt \\ &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t))\nu(t)dt = J(x, u).\end{aligned}$$

Das Funktional $J(x, u)$ nimmt genau dann einen endlichen Wert an, wenn $\tilde{J}(\tilde{x}, u)$ für die Funktion $\tilde{x}(t) = x^{1-\alpha}(t)$ endlich ist. Ein Prozess (x, u) ist also genau dann zulässig zu (P_α) , wenn (\tilde{x}, u) zulässig zu (\tilde{P}_α) ist. Folglich sind die Probleme äquivalent im Sinne des Satzes 3.3.1. \square

Allerdings schränkt die Voraussetzung 3.3.5 die Klasse der Aufgaben, die wir betrachten können, ein. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Beispiel 8. Zu minimieren sei das Funktional

$$\int_0^\infty (1 - u(t))^2 e^{-t} dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{x}(t) = -u(t)x^2(t), \quad u(t) \in [0, 1]$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$.

Den vorangegangenen Definitionen folgend, lesen wir ab: $\alpha = 2$ und $B(t) = -1$. Daraus folgt $M_\alpha = 0$ und $m_\alpha = 1$. Die Voraussetzung 3.3.5 ist nicht erfüllt. Folglich können wir die Transformation (3.38) nicht anwenden. Betrachten wir aber die erreichbare Menge, bestimmt durch die Gleichung (3.36), so ist

$$\frac{1}{t + x_0^{-1}} \leq x(t) \leq x_0.$$

Folglich existiert für jedes u mit $u(t) \in [0, 1]$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf \mathbb{R}_+ . Das Zielfunktional ist offensichtlich für jede beschränkte, messbare Funktion u mit $u(t) \in U$ endlich und nimmt für $u^*(t) \equiv 1$ sein Minimum an. Die Lösung des gegebenen Steuerungsproblems existiert.

Das bedeutet, wir müssen die Voraussetzung 3.3.5 abschwächen, indem wir zeigen, dass die Voraussetzung 3.3.5 durch eine weitere Transformation der Aufgabe stets erfüllt werden kann.

Lemma 3.3.2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t)x^\alpha(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \quad (3.44)$$

mit einer Funktion B definiert durch Voraussetzung 3.3.3 und einer zu Problem (P_α) zulässigen Steuerungsfunktion u . Es sei $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Desweiteren sei

$$(1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + x_0^{1-\alpha} > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.45)$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- 1) Die Differentialgleichung (3.44) besitzt eine Lösung auf \mathbb{R}_+ .
- 2) Die Lösung \hat{x} des Anfangswertproblems

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(B(t)u(t) + \frac{g}{1-\alpha} \right) \hat{x}^\alpha(t), \quad \hat{x}(0) = x_0$$

genügt dem Zusammenhang

$$\hat{x}^{1-\alpha}(t) := x^{1-\alpha}(t) + gt, \quad g \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

Dabei sei x die Lösung des Anfangswertproblems aus Lemma 3.3.2.

- 3) Es existiert ein $g \in \mathbb{R}$, sodass stets $(1 - \alpha) \left(B(t)u(t) + \frac{g}{1-\alpha} \right) \geq \delta > 0$ gilt.

Das bedeutet, dass sich die Voraussetzung 3.3.5 durch die Transformation (3.38) immer erfüllen lässt, wenn das gegebene Anfangswertproblem der Ungleichung (3.45) genügt.

Beweis: 1) Die explizite Darstellung der Lösung, gegeben im Beweis des Lemmas 3.3.1, beweist die Behauptung.

2) Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}^{1-\alpha}(t) &= (1 - \alpha) \hat{x}^{-\alpha}(t) \cdot \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (1 - \alpha) \hat{x}^{-\alpha}(t) \cdot \left(B(t)u(t) + \frac{g}{1-\alpha} \right) \hat{x}^\alpha(t) \\ &= (1 - \alpha) B(t)u(t) + g = (1 - \alpha) x^{-\alpha}(t) B(t)u(t) x^\alpha(t) + g \\ &= \frac{d}{dt} \left(x^{1-\alpha}(t) + gt + c \right). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingung $\hat{x}(0) = x(0) = x_0$ folgt $c = 0$ und somit die Behauptung.

3) Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen B und u können wir Konstanten k_1 und k_2 finden, sodass für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$k_1(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)B(t)u(t) \leq k_2(1 - \alpha).$$

Dann folgt

$$(1 - \alpha) \left(B(t)u(t) + \frac{g}{1 - \alpha} \right) = (1 - \alpha)B(t)u(t) + g \geq k_1(1 - \alpha) + g > 0,$$

wenn wir $k_1(1 - \alpha) + g = \delta$ setzen und $g > -k_1(1 - \alpha)$ wählen. \square

Bemerkung 3.3.4. Die Transformation (3.46) entsteht durch Hintereinanderausführung der Transformationen

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x^{1-\alpha}(t), \quad x_2(t) := e^{x_1(t)}, \quad x_3(t) := x_2(t) \cdot e^{gt}, \\ x_4(t) &:= \ln x_3(t), \quad \tilde{x}(t) := x_4^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \end{aligned}$$

und ist somit die Verknüpfung der bereits untersuchten Transformationen aus den Problemen (P_1) , (P_α) und (P_V) .

Betrachten wir erneut das Beispiel 8. Die Voraussetzungen für die Anwendung der Transformation von (P_α) auf (P) sind verletzt. Die Tatsache, dass die Differentialgleichung auf \mathbb{R}_+ lösbar ist, kann durch die Transformation (3.46) aus Lemma 3.3.2 ausgenutzt werden.

Beispiel 9. Wir bestimmen mittels

$$\hat{x}(t) := \frac{1}{x^{-1}(t) + gt}$$

die neue Dynamik

$$\dot{\hat{x}}(t) = -(u(t) + g)\hat{x}^2(t), \quad \hat{x}(0) = x_0, \quad u(t) \in [0, 1]. \quad (3.47)$$

Das Zielfunktional bleibt unverändert, da es vom gesuchten Zustand x unabhängig ist. Es ist offensichtlich, dass diese Differentialgleichung nicht die Form $\dot{x}(t) = B(t)u(t)x^\alpha(t)$ hat. Da g eine Konstante ist, definieren wir $\hat{u}(t) := u(t) + g$ und erhalten das Steuerungsproblem

$$\int_0^\infty (1 + g - \hat{u}(t))^2 e^{-t} dt \rightarrow \min! \quad (3.48)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{u}(t)\hat{x}^2(t), \quad \hat{x}(0) = x_0, \quad \hat{u} \in [g, g+1]. \quad (3.49)$$

Für die Differentialgleichung (3.49) gilt

$$(1 - \alpha)B(t)\hat{u}(t) = -B(t)\hat{u}(t) = \hat{u}(t) \geq g \geq \delta > 0$$

für $g \geq \delta$. Das bedeutet, dass die Voraussetzung 3.3.5 erfüllt ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass wir die Voraussetzung 3.3.5 im Falle einer konstanten Funktion B stets erfüllen können.

An dieser Stelle könnte man ein Maximumprinzip für Aufgaben der Klasse (P_α) formulieren, indem man den Äquivalenzsatz 3.3.1 nutzt. Hierfür müssen die Voraussetzungen aus dem Maximumprinzip zu (P) , formuliert in Satz 1.3.3, mittels Anwendung der Transformation (3.38) auf die darin enthaltenen Funktionen umformuliert werden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die neuen Voraussetzungen unübersichtlich und unpraktikabel sind. Stattdessen ist es deutlich leichter, das Problem (P_α) in ein Problem (P) zu transformieren und die einfach zu verifizierenden Voraussetzungen zu Satz 1.3.3 zu prüfen. Das transformierte Problem ist hinsichtlich der Differenzierbarkeit zu untersuchen. Die Rücktransformation liefert im Falle der Existenz einer Lösung (\tilde{x}^*, u^*) des Problems (\tilde{P}_α) die Lösung (x^*, u^*) des Problems (P_α) .

3.3.3 Die Adjungierte des Problems (P_α)

Da die Zustandsgleichung aus Problem (P_α) eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen ist, wissen wir mittels Lemma 3.1.1, dass sich die Adjungierte y aus dem Zusammenhang

$$\tilde{y}(t) = y(t)f(x^*(t))$$

bestimmen lässt. Dabei ist die Funktion f definiert durch die Zustandsgleichung (3.3) und die Voraussetzung 3.1.4. Für die Aufgabenklasse (P_α) bedeutet das

$$\tilde{y}(t) = y(t)(x^*(t))^\alpha.$$

Wenn die Voraussetzungen für das Maximumprinzip 1.3.3 für die Aufgabe (\tilde{P}_α) der Klasse (P) erfüllt sind, gilt die klassische Transversalitätsbedingung $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{y}(T) = 0$. Für die Adjungierte y aus (P_α) können wir lediglich sichern, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y(T)(x^*(T))^\alpha = 0$$

gilt. Aus der Abschätzung in Lemma 6.6.3 aus Anhang A.5. können wir ablesen, dass für $\alpha \in (0, 1)$ und für jeden zulässigen Zustand x gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x^\alpha(T) = \infty,$$

folglich ist die klassische Transversalitätsbedingung $\lim_{T \rightarrow \infty} y(T) = 0$ für $\alpha \in (0, 1)$ erfüllt. Für $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ gilt hingegen $\lim_{T \rightarrow \infty} x^\alpha(T) = 0$, was bedeutet, dass die klassische Transversalitätsbedingung in diesen Fällen nicht gelten muss.

3.3.4 Die Bernoullische Differentialgleichung

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie man von einem Steuerungsproblem mit einer Zustandsgleichung, die durch eine Bernoullische Differentialgleichung gegeben ist, zu dem Problem (P_α) aus dem letzten Abschnitt gelangt. Wir betrachten folgende Aufgabe:

$$(P_B) : \quad J(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \nu(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.50)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.51)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + x^\alpha(t)B(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.52)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad (3.53)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+. \quad (3.54)$$

Wie im letzten Abschnitt sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Die Funktion ν sei ein natürliches Gewicht der Aufgabe (P_B) .

Definition 3.3.2. Analog zu Abschnitt 1.3 setzen wir wie in Lemma 1.3.1 und dessen Beweis

$$m := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} A(t) \leq A(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A(t) =: M,$$

$$F(t) := \int_0^t A(s) ds.$$

Voraussetzung 3.3.6. Die Steuermenge U sei eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Der Steuerbereich sei nichtleer und von der Variablen t unabhängig.

Voraussetzung 3.3.7. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei stetig in der ersten und dritten Variablen, stetig differenzierbar und konvex in der dritten Variablen v .

Voraussetzung 3.3.8. Die Funktion A sei stetig und beschränkt. Die stetige Funktion B genüge der Ungleichung

$$|B(t)| \leq C e^{\int_0^t (1-\alpha)A(s)ds}$$

mit einer positiven Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Voraussetzung 3.3.9. Es gelte $(1-\alpha)B(t)v > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und alle $v \in U$.

Bemerkung 3.3.5. Der Fall $\alpha = 0$ entspricht Problem (P) , für $\alpha = 1$ erhält man das Problem (P_1) , und ist $A(t) \equiv 0$, so erhalten wir das Problem (P_α) .

Lemma 3.3.3. Für jedes Paar (x, u) , zulässig zu Problem (P_B) gilt

$$(x, u) \in W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty)), \quad \text{mit } \nu(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\varrho t} e^{-2F(t)},$$

$$\varrho > 0, \quad \tilde{x}_0 := x_0^{1-\alpha} = x_0^{1-\alpha} \quad \text{und } N_\alpha, \text{ definiert in Definition 3.3.1.}$$

Beweis: Die explizite Lösung der Differentialgleichung (3.52) mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ lautet

$$x(t) = \left(x_0^{1-\alpha} + \int_0^t (1-\alpha)B(s)u(s)e^{-\int_0^s (1-\alpha)A(\eta)d\eta} ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{\int_0^t A(s)ds} dt$$

und existiert auf \mathbb{R}_+ , wenn der Ausdruck $(1-\alpha)B(s)u(s)e^{-\int_0^s (1-\alpha)A(\eta)d\eta}$ nicht-negativ ist. Definieren wir

$$\tilde{B}(s) := B(s)e^{-\int_0^s (1-\alpha)A(\eta)d\eta},$$

so folgt nach Voraussetzung 3.3.8, dass die Funktion \tilde{B} wegen

$$|\tilde{B}(s)| = |B(s)|e^{-\int_0^s (1-\alpha)A(\eta)d\eta} \leq C$$

stetig und beschränkt ist. Damit können wir die Lösung auch schreiben als

$$x(t) = \left(x_0^{1-\alpha} + \int_0^t (1-\alpha)\tilde{B}(s)u(s)ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{F(t)}.$$

Der Vergleich mit Lemma 3.3.1 liefert sofort die Gültigkeit folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2(t)\nu(t)dt &= \int_0^\infty x^2(t)(N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\alpha t} e^{-2F(t)} dt \\ &= \int_0^\infty \left(x_0^{1-\alpha} + \int_0^t (1-\alpha)\tilde{B}(s)u(s)ds \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} e^{2F(t)} e^{-2F(t)} \tilde{\nu}(t) dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

mit $\tilde{\nu}(t) := (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\alpha t}$. Für den Nachweis, dass für die Ableitung \dot{x} die Raumzugehörigkeit $\dot{x} \in L_2((0, \infty), \nu)$ gilt, betrachte man die Abschätzungen aus (P_α) und aus (P_V) und wende sie auf (P_B) an. \square

3.3.5 Die Transformation von (P_B) auf (P_α)

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie man das Steuerungsproblem (P_B) mittels einer Transformation des Zustandes in das Steuerungsproblem (P_α) überführt. Die Äquivalenz des Problems (P_α) zu der Grundaufgabe (P) wurde im letzten Abschnitt gezeigt. Wir erhalten vermöge der Transformation

$$\tilde{x}(t) := x(t)e^{-F(t)}, \quad F(t) := \int_0^t A(s)ds \quad (3.55)$$

mit der Funktion A aus der Dynamik ein Steuerungsproblem der Form:

$$(\tilde{P}_B) \quad \tilde{J}(\tilde{x}, u) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t))\tilde{\nu}(t) dt \rightarrow \min! \quad (3.56)$$

$$(\tilde{x}, u) \in W_2^1((0, \infty), \tilde{\nu}) \times L_\infty((0, \infty)), \quad (3.57)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}^\alpha(t)\tilde{B}(t)u(t) \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.58)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 > 0, \quad (3.59)$$

$$u(t) \in U \text{ f. ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (3.60)$$

mit einer Gewichtsfunktion $\tilde{\nu}$, einer stetigen, beschränkten Funktion \tilde{B} und dem transformierten Integranden \tilde{r} , definiert durch:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(t) &:= (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0 \\ \tilde{B}(t) &:= B(t)e^{-(1-\alpha)F(t)}, \quad \tilde{r}(t, \tilde{\xi}, v) := r(t, \tilde{\xi}e^{-F(t)}, v)\tilde{\nu}^{-1}(t)\nu(t). \end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, dass das ein Problem der Klasse (P_α) ist.

Bemerkung 3.3.6. Mit der Transformation (3.55) haben wir eine Erweiterung der Transformation (2.17) vorgenommen.

3.3.6 Die Äquivalenz von (P_B) und (P_α)

Wir werden lediglich die Äquivalenz der Probleme (P_B) und (P_α) beweisen. Da das Problem (\tilde{P}_B) im Falle einer bezüglich aller Variablen stetig differenzierbaren Funktion \tilde{r} ein Problem der Klasse (P_α) ist, steht uns ein gültiges Maximumprinzip zur Verfügung. Der Existenzsatz 1.2.4 ist auf das Problem (P_B) direkt anwendbar, falls ν eine summierbare Gewichtsfunktion ist. Falls dies nicht zutrifft, liefert die Transformation auf (P_α) ein Problem, auf welches der Satz anwendbar ist, und die Existenz einer Lösung kann überprüft werden.

Satz 3.3.2. *Problem (P_B) und Problem (\tilde{P}_B) sind äquivalent in folgendem Sinne:*

- i) *Ein Prozess (x, u) erfüllt die Zustandsgleichung (3.52) genau dann, wenn (\tilde{x}, u) die Zustandsgleichung (3.58) erfüllt. Es gilt $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.*
- ii) *Für $\tilde{\nu}(t) = \nu(t)e^{2F(t)}$, $\nu(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\varrho t} e^{-2F(t)}$ mit $\varrho > 0$ gehört ein Prozess (x, u) genau dann dem Raum $W_2^1((0, \infty), \nu) \times L_\infty((0, \infty))$ an, wenn der Prozess (\tilde{x}, u) für $\tilde{\nu}(t) = (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\varrho t}$ dem Raum $W_2^1((0, \infty), \tilde{\nu}) \times L_\infty((0, \infty))$ angehört.*
- iii) *Für die Zielfunktionale aus den Aufgaben (P_B) und (\tilde{P}_B) gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, u)$.*

Beweis: i) Wenden wir die Transformation (3.55) auf die Zustandsgleichung (3.52) an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t)e^{-\int_0^t A(s)ds} - A(t)x(t)e^{-\int_0^t A(s)ds} \\
 &= \left(B(t)u(t)x^\alpha(t) + A(t)x(t) - A(t)x(t) \right) e^{-\int_0^t A(s)ds} \\
 &= B(t)u(t)x^\alpha(t)e^{\pm\alpha\int_0^t A(s)ds} e^{-\int_0^t A(s)ds} \\
 &= B(t)u(t)\tilde{x}^\alpha(t)e^{-(1-\alpha)\int_0^t A(s)ds} \\
 &= \tilde{B}(t)u(t)\tilde{x}^\alpha(t)
 \end{aligned}$$

mit $\tilde{B}(t) := B(t)e^{-(1-\alpha)\int_0^t A(s)ds}$. Nach Voraussetzung 3.3.8 ist \tilde{B} stetig und beschränkt. Die Anfangsbedingung $\tilde{x}(0) = x(0)e^0 = x_0$ bleibt ebenso unverändert wie die Menge der zulässigen Steuerungen.

ii) Sei $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$, so besitzt \tilde{x} ebenfalls eine verallgemeinerte Ableitung und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{x}^2(t) \tilde{\nu}(t) dt &= \int_0^\infty x^2(t) e^{-2F(t)} (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\alpha t} dt \\ &= \int_0^\infty x^2(t) \nu(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{\tilde{x}}^2(t) \tilde{\nu}(t) dt &= \int_0^\infty \left(\dot{x}(t) e^{-F(t)} - A(t) x(t) e^{-F(t)} \right)^2 \tilde{\nu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\dot{x}(t) - A(t) x(t) \right)^2 e^{-2F(t)} (N_\alpha t + \tilde{x}_0)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\alpha t} dt \\ &\leq 2 \int_0^\infty \dot{x}^2(t) \nu(t) dt + 2C \int_0^\infty x^2(t) \nu(t) dt < \infty \end{aligned}$$

mit der Konstanten $C = \max\{|m|^2, |M|^2\}$.

Die umgekehrte Richtung kann analog zu dem Beweis der Äquivalenz von (P) zu (P_V) , siehe Satz 2.2.1, gezeigt werden. Folglich gilt $\tilde{\nu}(t) = \nu(t) e^{-2F(t)}$.

iii) Für die Zielfunktionale gilt

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}, u) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt = \int_0^\infty r(t, \tilde{x}(t) e^{F(t)}, u(t)) \nu(t) dt \\ &= \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \nu(t) dt = J(x, u). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $J(x, u)$ genau dann einen endlichen Wert annimmt, wenn $\tilde{J}(\tilde{x}, u)$ für die Funktion $\tilde{x}(t) = x(t) e^{-F(t)}$ endlich ist. Ein Prozess (x, u) ist also genau dann zulässig zu (P_B) , wenn (\tilde{x}, u) zulässig zu (\tilde{P}_B) ist. Also sind die Probleme äquivalent im Sinne des Satzes 3.3.2. \square

Wir haben anhand der Bernoullischen Differentialgleichung gezeigt, wie man Steuerungsprobleme mit nichtlinearer Dynamik in Probleme mit linearer Dynamik transformieren kann. Ein Vorteil der Transformation auf das Problem (P) besteht zum einen in den leicht zu verifizierenden Voraussetzungen. Zum anderen liefert das Maximumprinzip 1.3.3 eine gültige Transversalitätsbedingung.

Kapitel 4

Mögliche Erweiterungen

Dem Grundgedanken der Arbeit folgend, die gegebene Aufgabe in eine Aufgabe zu überführen, für die die Existenz einer Lösung gezeigt werden kann, statt neue Existenzsätze für die gegebene Aufgabe zu beweisen, betrachten wir noch einige einfache Transformationen. So ist der Fall $x_0 \leq 0$ für alle betrachteten Klassen ausgeschlossen worden. Substituiert man in diesem Fall $\tilde{x}(t) := x(t) + c$ mit einer Konstanten $c > -x_0$, so gilt offensichtlich $\tilde{x}(0) = x_0 + c > x_0 - x_0 = 0$. Betrachtet man die allgemeine Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)$$

zu dem Grundproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2, so sieht man leicht, dass sich die Struktur der rechten Seite durch die Verschiebung der Funktion x um die Konstante c nicht ändert. Die Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

aus dem Grundproblem (P) aus Abschnitt 1.3 transformiert sich mittels dieser Verschiebung zu

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u(t) - cA(t)$$

und erfüllt die Voraussetzungen an die Dynamik aus dem Problem (P_S) aus Abschnitt 2.1.

4.1 Die zeitabhängige Steuerungsbeschränkung

In allen in dieser Arbeit betrachteten Aufgabenklassen soll die Steuerungsbeschränkung unabhängig von der Zeit t sein. Für Aufgaben mit zeitabhängigen

Steuerungsbeschränkungen benötigt man einen Existenzsatz und ein Maximumprinzip, welches diese allgemeinere Beschränkungen zulässt. Statt nach den passenden Sätzen zu suchen, kann man den zulässigen Steuerbereich unter folgender Voraussetzung transformieren.

Voraussetzung 4.1.1. Die Steuerungsbeschränkung sei gegeben durch

$$u_1(t) \leq u(t) \leq u_2(t), \quad u_1(t) \neq u_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Vermöge der Transformation

$$\tilde{u}(t) := \frac{u(t) - u_1(t)}{u_2(t) - u_1(t)}, \quad u_1, u_2 \in C^0(\mathbb{R}_+).$$

lässt sich der Steuerbereich $U = [u_1(t), u_2(t)]$ auf den Bereich $\tilde{U} = [0, 1]$ transformieren. Es gilt $0 \leq \tilde{u}(t) \leq 1$. Betrachten wir erneut die Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)$$

zu dem Grundproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2, so erhalten wir durch die Substitution des Steuerbereiches die Dynamik

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t, x(t)) + \tilde{B}(t, x(t))\tilde{u}(t)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, x(t)) &:= A(t, x(t)) + B(t, x(t)) \cdot u_1(t), \\ \tilde{B}(t, x(t)) &:= B(t, x(t)) \cdot (u_2(t) - u_1(t)). \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.2.4 an die Dynamik sind erfüllt, wenn die Funktionen \tilde{A} und \tilde{B} beschränkt sind. Für das Grundproblem (P) aus Abschnitt 1.3 mit der Dynamik

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

ergibt die Substitution der Steuerung

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}(t) + D(t)$$

mit $\tilde{B}(t) := B(t)(u_2(t) - u_1(t))$ und $D(t) := B(t)u_1(t)$. Im einfachsten Fall, dass $B \cdot u_1$ und $B \cdot U_2$ beschränkt sind, können wir nun die Transformation aus Abschnitt 2.1 anwenden. Man kann sich leicht überlegen, dass selbst bei unbeschränkter Funktion D eine solche Transformation möglich ist. Deshalb genügt es, zeitunabhängige Steuerungsbeschränkungen zu betrachten.

4.2 Konvexifizierung des Zielfunktional

In der gesamten Arbeit setzen wir die Konvexität des Integranden in der Steuerung u voraus. Auch die Konvexität in der Zustandsgröße x kann von Vorteil sein, beispielsweise wenn man nach der Eindeutigkeit der Lösung fragt. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die nicht konvex sind. Wir werden zeigen, wie man durch geeignete Transformationen eine nicht konvexe Funktion konvexifizieren kann. Diese Idee findet sich ebenso in [8] und erscheint vielversprechend zu sein. Welche Transformation geeignet ist, hängt von dem gegebenen Steuerungsproblem ab. Deshalb halten wir uns in der Formulierung der Bedingungen sehr allgemein. Gegeben sei eine Funktion $f \in C^2(I_1)$, $f : I_1 \rightarrow I_2$, wobei I_1 und I_2 Intervalle sind. Für Funktionen f , welche nicht zweimal stetig differenzierbar sind, nutze man eine andere Definition der Konvexität, beispielsweise die Jensensche Ungleichung. Der Vorteil der Verwendung einer C^2 -Funktion für nachfolgende Untersuchung liegt ganz klar in der Übersichtlichkeit der Darstellung. Wir wählen eine monoton wachsende, umkehrbare Funktion $g \in C^2(I_0)$, $g : I_0 \rightarrow I_1$ und bilden die Verkettung

$$(f \circ g)(w) = f(g(w)) = f(z).$$

Die für die Konvexität massgebliche 2. Ableitung der resultierenden Funktion lautet

$$\frac{d^2}{dw^2}f(g(w)) = \frac{d}{dw}\left(f_z(g(w)) \cdot g'(w)\right) = f_{zz}(g(w)) \cdot g'^2(w) + f_z(g(w)) \cdot g''(w),$$

wobei

$$f_z(g(w)) := \left. \frac{\partial}{\partial z} f(z) \right|_{z=g(w)} \quad \text{und} \quad g'(w) := \frac{d}{dw}g(w)$$

bedeutet. Gilt $\frac{d^2}{dw^2}f(g(w)) > 0$ für alle $w \in I_0$, so ist die verkettete Funktion $f \circ g$ konvex. Betrachten wir eine streng monoton wachsende Funktion $f : I_1 \rightarrow I_2$ mit $f_{zz} \geq 0$, so sieht man leicht, dass die Verkettung mit einer Funktion $g \in C^2(I_0)$, $g : I_0 \rightarrow I_1$ mit $g''(w) > 0$ für alle $w \in I_0$ eine streng konvexe Funktion liefert,

$$f_{ww}(g(w)) = f_{zz}(g(w))g'^2(w) + f_z(g(w))g''(w) > 0,$$

da der erste Summand nichtnegativ und der zweite Summand echt positiv ist.

Beispiel 10. Man betrachte die Funktion $f_1(z) = z$, $z \in \mathbb{R}_+$. Trivialer Weise ist diese Funktion konvex, aber nicht streng konvex. Gesucht ist eine monotone Funktion $g_1 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wir wählen $g_1(w) = aw^2$, $a > 0$, $w \in \mathbb{R}_+$ und bilden $f_1(g_1(w)) = aw^2$. Die resultierende Funktion $f_1 \circ g_1$ ist für jedes $a > 0$ auf \mathbb{R}_+ streng konvex.

Wählt man $g_2(w) = -\ln w$, so kann man die Funktion $f_2(z) = z$, $z \in \mathbb{R}$ im strengen Sinne konvexifizieren.

Findet man für die Funktion f mit $f_{zz}(z) \geq 0$ eine Funktion g , die selbst konvex ist, so erhält man eine streng konvexe Funktion. Für die Wahl der Funktion g ist zu beachten, dass g die Menge I_1 als Wertebereich haben sollte.

Betrachten wir nun eine streng monoton wachsende Funktion $f \in C^2(I_1)$, $f : I_1 \rightarrow I_2$ mit $f_z(t) > 0$ für alle $t \in I_1$. Wir nehmen an, dass $f_{zz}(t) < 0$ auf einer Teilmenge $M \subset I_1$ oder auf ganz I_1 gilt. Stellen wir die Ungleichung

$$f_{ww}(g(w)) = f_{zz}(g(w))g'^2(w) + f_z(g(w))g''(w) > 0$$

um, so folgt die Forderung

$$-\frac{f_{zz}(g(w))}{f_z(g(w))} < \frac{g''(w)}{g'^2(w)}.$$

Falls es gelingt, eine Konstante $C > 0$ so zu bestimmen, dass

$$-\frac{f_{zz}(g(w))}{f_z(g(w))} < C = \frac{g''(w)}{g'^2(w)}$$

gilt, so können wir die Funktion g aus der letzten Gleichheit bestimmen. Aus der Differentialgleichung $g''(w) = C \cdot g'^2(w)$ folgt $g(w) = a \ln(bw + c)$ mit den Konstanten a , b und c , die von C und der Menge I_1 abhängig sind. Falls wir sogar

$$-\frac{f_{zz}(g(w))}{f_z(g(w))} < Ce^{-w} = \frac{g''(w)}{g'^2(w)}$$

sichern können, führt dies auf die Funktion $g(w) = ae^w$. Hierzu betrachten wir ein Beispiel, welches in ähnlicher Form in [23] vorgestellt und unter Verwendung von Transformationen der Zeit numerisch gelöst wurde. In [44] wurde dieses Beispiel ebenfalls mittels Transformationen behandelt und analytisch gelöst.

Beispiel 11.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty (\ln^2(z(t)) + u^2(t)) dt &\rightarrow \min! \\ \dot{z}(t) &= z(t) \ln z(t) + z(t)u(t), \\ z(0) &= e^2, \quad |u(t)| \leq 6e^{-t}. \end{aligned}$$

Unseren Bezeichnungen folgend ist

$$f(z) = \ln^2(z) + u^2, I_1 = (0, \infty), I_2 = \mathbb{R},$$

wobei u als konstant betrachtet wird. Diese Funktion f ist bezüglich z für $z > e$ nicht konvex. Setzen wir $z = g(x) = e^x$ mit $I_0 = \mathbb{R}$, so ergibt sich das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t)) dt &\rightarrow \min! \\ \dot{x}(t) &= x(t) + u(t), \\ x(0) &= 2, \quad |u(t)| \leq 6e^{-t}. \end{aligned}$$

Das Zielfunktional ist nun konvex in der Variablen x . Verwendet man die Substitution des Steuerbereiches aus Abschnitt 4.1, verzichtet allerdings auf die Normierung auf den Steuerbereich $[0, 1]$, so kann man das Steuerungsproblem unter Verwendung der Transformationen

$$\tilde{x}(t) := x(t)e^t, \quad \tilde{u}(t) := u(t)e^t$$

in das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty (\tilde{x}^2(t) + \tilde{u}^2(t))e^{-2t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= 2\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t), \\ \tilde{x}(0) &= 2, \quad |\tilde{u}(t)| \leq 6 \end{aligned}$$

überführen. Die Aufgabe ist nun der quadratische Regulator und erfüllt alle in Abschnitt 1.4 getroffenen Voraussetzungen¹.

¹Die allgemeine Lösung findet man ebenfalls in Abschnitt 1.4.

Gegeben sei nun eine Funktion $f(z, u)$ in zwei Veränderlichen. Die Funktion sei bezüglich der Variablen u streng konvex. Das heißt, es gilt $f_{uu}(z, u) > 0$. Letztlich stellt sich die Frage, ob die gegebene Konvexität in einer Variablen erhalten bleibt, wenn man eine Konvexifizierung in der anderen Variablen vornimmt. Angenommen, die aus der Betrachtung der Hessematrix resultierende Konvexitätsforderung

$$f_{zz}(z, u) \cdot f_{uu}(z, u) - f_{zu}^2(z, u) > 0$$

ist nicht für jedes Paar (z, u) erfüllt. Substituieren wir wieder $z = g(w)$, so erhalten wir zusätzlich zu der bereits erfüllten Forderung $f_{uu}(g(w), u) > 0$ die Forderung

$$\begin{aligned} & \left(f_{uu}(g(w), u) f_{zz}(g(w), z) - f_{uz}^2(g(w), z) \right) g'^2(w) \\ & + f_{uu}(g(w), z) f_z(g(w), z) g''(w) > 0. \end{aligned}$$

Existiert beispielsweise eine Konstante C , sodass

$$f_{uu}(g(w), u) f_{zz}(g(w), z) - f_{uz}^2(g(w), z) > C = -f_{uu}(g(w), z) f_z(g(w), z) \frac{g''(w)}{g'^2(w)},$$

so kann eine geeignete Funktion g explizit bestimmt werden. Natürlich ist klar, dass sich bei einem gegebenen Steuerungsproblem durch diese Transformation auch die Dynamik ändert.

Teil II

Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont

Kapitel 5

Allgemeine Formulierung

In diesem Kapitel betrachten wir ein Steuerungsproblem über einem endlichen Zeithorizont. Gegeben sei das Steuerungsproblem:

$$\begin{aligned}(P_0) \quad J(x, u) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \rightarrow \min! \\ x'(\tau) &= f_1(\tau, x(\tau), u(\tau)) \quad \text{f.ü. auf } [\tau_0, \tau_1], \\ x(\tau_0) &= x_0, \quad x(\tau_1) \in Z \subset \mathbb{R}^n \quad u(\tau) \in U.\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Problem daraufhin untersuchen, ob eine optimale Lösung existiert. Hier ist nicht klar, welche analytischen Eigenschaften wir von den Funktionen (x^*, u^*) erwarten. Um diese Frage zu beantworten, müssen an die eingehenden Größen Bedingungen gestellt werden. Betrachten wir hierzu kurz die historische Entwicklung. Letztendlich gehen viele Existenzsätze auf FILIPPOV [21] zurück, der im Jahr 1959 einen Existenzsatz für ein Steuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont formuliert hat. Er traf die folgenden Annahmen: Der Steuerbereich U sei abgeschlossen und beschränkt. Die Menge Z besteht aus genau einem Punkt, das bedeutet Anfangs- und Endwert der gesuchten Funktion x^* seien fest vorgegeben. Die Funktion $f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) \equiv 1$ sei gegeben und der Endzeitpunkt τ_1 sei frei. Das heißt, FILIPPOV betrachtete die sogenannte *zeitoptimale Aufgabe*. Gilt nun, dass die Funktion f_1 aus der Dynamik stetig in allen Variablen und stetig differenzierbar in der 2. Variablen ξ ist und ist außerdem die Wachstumsbeschränkung¹

$$|(\xi, f_1(\tau, \xi, u))| \leq C(|\xi|^2 + 1), \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1], \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U$$

¹ (\cdot, \cdot) bezeichnet das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n , $|\cdot|$ sei die Euklidische Norm.

erfüllt, so kann die Existenz einer absolut stetigen Lösung x^* gesichert werden. Betrachten wir die oben genannte Wachstumsbedingung an die rechte Seite der Zustandsgleichung. Sie ist stets eine Lipschitzbedingung an die Funktion f_1 und hat ihren Ursprung in der Theorie zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. IOFFE&TICHOMIROV [28] formulieren diese Bedingung allgemeiner als

$$|(\xi, f_1(\tau, \xi, u))| \leq k|\xi|^2 + r(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1], \xi \in X, u(\tau) \in U$$

mit $k > 0$ und einer summierbaren Funktion r . An den Integranden f_0 und die rechte Seite der Zustandsgleichung f_1 werden² die Bedingungen gestellt, dass sie bezüglich ξ und v stetig und für jedes feste Paar (ξ, v) messbar in τ sind. Das bedeutet, f_0 und f_1 genügen den Caratheodory-Bedingungen (vgl. [22], S.3). Um die Unterhalbstetigkeit des Integralfunktional zu sichern, wird der Steuerbereich U oft als kompakt angenommen. Ist dies nicht der Fall, also U nicht kompakt, behilft man sich mit einer Abschätzung der Form

$$f_1(\tau, \xi, v) \geq \phi(|v|)$$

mit $\frac{\phi(v)}{v} \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow \infty$ und einer nach unten beschränkten Funktion³ $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Durch Verwendung dieser Voraussetzung⁴ kann die Forderung der Beschränktheit der Menge U abgeschwächt werden. Unterhalbstetigkeitssätze, die in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts formuliert wurden, findet man zum Beispiel in [28], [13] und [39] und aus den 80er Jahren stammen die Resultate von BALDER [8]. Für diese Sätze wurde der Grundstein bereits in den 20er Jahren durch TONELLI [54] gelegt, der anhand von Variationsproblemen feststellte, dass die auftretenden Funktionale im Allgemeinen nicht stetig, jedoch unter gewissen Voraussetzungen halbstetig sind. Eine weitere Voraussetzung, die den Nachweis der Existenz von Lösungen erleichtert, ist die Konvexität des Integranden in der Steuerungsvariablen. Ist die Konvexität nicht gegeben, kann man diese durch Relaxierung der Aufgabe erzeugen. Wir verweisen hier auf WARGA [56], ZASLAVSKI [60] und CESARI [13]. Die wichtigste Frage bei allen Formulierungen ist die Frage nach der analytischen Güte der Lösung der Aufgabe. Für Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont sind die Voraussetzungen häufig so gestellt, dass die Lösung ein Tupel (x^*, u^*) mit $x^* \in W_1^1((0, 1))$ und einer messbaren Funktion u^* ist. Hier

²siehe [28]

³siehe zum Beispiel [28], S.319, [15]

⁴auch Tonelli-Nagumo-Bedingung genannt

betrachte man beispielsweise die Resultate von IOFFE&TICHOMIROV [28] und ROCKAFELLAR [50]. In den angegebenen Quellen findet man Existenzresultate, die die Existenz einer absolut stetigen Lösung garantieren. Nun gibt es aber eine Reihe von Beispielen, in denen die Funktion x , die zusammen mit der Steuerung u das Zielfunktional minimiert, nicht stetig differenzierbar, nicht absolut stetig oder nicht einmal stetig ist. In [28], S.108ff findet man die Beispiele⁵ von Hilbert und von Weierstraß, welche zu der Klasse (P_0) gehören. Es sei $\tau_0 = 1$ und $\tau_1 = 0$, der Steuerbereich sei $U = \mathbb{R}$ und für die Funktionen f_0 und f_1 gelte

$$f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) = (1 - \tau)^\alpha u^2(\tau), \quad f_1(\tau, x(\tau), u(\tau)) = -u(\tau), \quad \alpha > 0.$$

Für $\alpha \geq 1$ existiert kein Tupel (x, u) , welches das Funktional minimiert und durch die vorgegebenen Randpunkte verläuft. Für $\alpha \in (0, 1)$ liefert $x(\tau) = (1 - \tau)^{1-\alpha}$ und $u(\tau) = (1 - \alpha)(1 - \tau)^{-\alpha}$ das den Integranden minimierende Tupel. Die Funktion x ist aber nicht auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetig differenzierbar.

Bemerkung 5.0.1. Es ist klar, dass diese Beispiele aufgrund des gegebenen Endpunktes nicht genau in die in dieser Arbeit betrachtete Klasse passen. Hier soll lediglich motiviert werden, dass sich bereits andere Autoren der Problematik bewusst waren, dass durch direkte Abschätzung oder auf anderem Wege gefundene Lösungen nicht die gewünschten analytischen Eigenschaften aufweisen.

Da diese Unstetigkeitsstelle in einem Randpunkt auftaucht, versuchte man, den Beweis der Existenz auf eine größere Funktionenklasse zu erweitern. So legt beispielsweise CESARI [13] den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen zu Grunde. Das heißt, auch Funktionen mit Polstellen, wie beispielsweise $\frac{1}{1-\tau}$ können betrachtet werden. Hier taucht allerdings das nächste Problem auf. Wenn wir nun nachweisen können, dass eine Lösung existiert, so wollen wir diese Kandidaten mittels notwendiger Bedingungen bestimmen. Dafür steht seit Mitte des letzten Jahrhunderts das Pontrjaginsche Maximumprinzip [46] zur Verfügung. Die Voraussetzungen für dessen Gültigkeit sind, wie beispielsweise in [55] aufgeführt, die Stetigkeit der Funktionen f_0 und f_1 in allen Variablen, sowie die Differenzierbarkeit in x . Desweiteren müssen die Funktionen f_0 und f_1 gewissen Wachstumsbeschränkungen genügen. Besitzt ein Steuerungsproblem eine Lösung (x^*, u^*) mit einer Funktion

⁵Die Formulierung wurde an die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen angepasst.

$x^* \in W_1^1([\tau_0, \tau_1])$ und einer messbaren Funktion u^* , so schließt man auf die Existenz einer dualen Funktion y , auch Adjungierte genannt, die die Eigenschaft $y \in W_1^1([\tau_0, \tau_1])$ hat und das Maximumprinzip erfüllt. Hat man nun aber einen Existenzsatz für Funktionen, die lediglich lokal absolut stetig sind, ist ein Maximumprinzip für absolut stetige Funktionen nicht anwendbar. Betrachten wir das Beispiel von Ball-Mizel, untersucht in [55], S.400, mit den Funktionen

$$\begin{aligned} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) &= ru^2(\tau) + (x^3(\tau) - (1 - \tau)^2)^2 u^{14}(\tau) \\ f_1(\tau, x(\tau), u(\tau)) &= -u(\tau) \end{aligned}$$

Für die Randwerte gelte $x(0) = 0$ und $x(1) = k$. Die Konstanten $r > 0$ und $k > 0$ mögen dem Zusammenhang

$$r = \left(\frac{2k}{3}\right)^{12} (1 - k^3)(13k^3 - 7)$$

genügen. Es kann gezeigt werden, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für alle $k \in (1 - \varepsilon, 1)$ die Funktion

$$x^*(\tau) = k(1 - \tau)^{\frac{2}{3}}$$

das Zielfunktional minimiert. Der einzige Kandidat für die Adjungierte lautet

$$y(t) = -\alpha(1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \neq 0$, die von k abhängt. Offensichtlich ist dies keine absolut stetige Funktion. Als Ausweg stellt der Autor fest, dass sich dieses *bad behavior* der Funktion x^* auf eine Menge vom Maß Null beschränkt. Infolgedessen werden Sätze formuliert, die diese Problemstellen aus der Betrachtung ausschließen. Diesen Weg wollen wir in der vorliegenden Arbeit strikt meiden, da das Abschneiden des Intervalles auf dieselbe Problematik führt, wie bereits in Beispiel 1 diskutiert wurde. Wir werden die Diskussion über die analytische Güte der gesuchten Funktionen wie folgt umgehen. Den Überlegungen der letzten Kapitel folgend, werden wir für gegebene Aufgabenklasse natürliche Zustandsbeschränkungen formulieren. Der Existenzsatz und das Maximumprinzip, welches wir formulieren werden, erhalten wir durch Transformation der Aufgaben (P_E) und (P_V) aus den Abschnitten 1.2 und 1.3. Die dort verwendeten verallgemeinerten Funktionenräume über \mathbb{R}_+ werden

durch die Transformation der Zeit zu verallgemeinerten Funktionenräumen über $[0, 1)$. Anschließend kann man anhand der Gewichtsfunktion und unter der Verwendung geeigneter Einbettungssätze die analytische Güte der Lösung untersuchen.

Kapitel 6

Die Transformation der Zeit

In diesem Kapitel werden wir zwei Steuerungsprobleme über endlichem Zeitintervall betrachten. Wir werden einen Existenzsatz beweisen, indem wir das erste Problem durch eine Transformation der Zeit in ein äquivalentes Steuerungsproblem der Klasse (P_E) aus Abschnitt 1.2 überführen. Desweiteren werden wir ein Maximumprinzip formulieren und dessen Gültigkeit beweisen, indem wir das zweite Problem in ein Problem der Klasse (P_V) aus Kapitel 2 transformieren. Es ist wesentlich, dass alle in diesem Kapitel auftretenden Funktionen lediglich auf der halboffenen Menge $[0, 1)$ definiert sind. Das Verhalten im Randpunkt $\tau = 1$ ist Bestandteil der Untersuchungen. Somit schließen die betrachteten Aufgaben Probleme mit Singularitäten im Integranden, in der Zustandsgleichung oder den gesuchten Größen ein.

6.1 Die Transformation auf (P_E)

6.1.1 Das Problem $(P_E)_1$

Als motivierendes Beispiel betrachten wir das Steuerungsproblem mit fester Zeit:

Beispiel 12.

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u(\tau)(1 - \tau)d\tau &\rightarrow \min! \\ x'(\tau) &= x^2(\tau)u(\tau), \\ x(0) &= 1 \text{ und } u(\tau) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Die Funktionen $f_0(\tau, \xi, v) = -v(1 - \tau)$ und $f_1(\tau, \xi, v) = \xi^2 v$ sind stetig differenzierbar bezüglich aller Variablen. Ohne ein gültiges Maximumprinzip zugrunde legen zu müssen, ist offensichtlich, dass das Zielfunktional für die zulässige Steuerungsfunktion $u(\tau) \equiv 1$ sein Minimum annimmt, da

$$\int_0^1 -u(\tau)(1 - \tau)d\tau \geq \int_0^1 -(1 - \tau)d\tau = -\frac{1}{2}.$$

Für $u(\tau) \equiv 1$ erhalten wir die Dynamik $x'(\tau) = x^2(\tau)$, was auf $x(\tau) = \frac{1}{c-\tau}$ führt. Das Auswerten der Anfangsbedingung liefert

$$x(\tau) = \frac{1}{1 - \tau}$$

als zu der Steuerung $u(\tau) \equiv 1$ gehörenden Zustand. Offensichtlich ist dies keine stetige Funktion. Eine auf $[0, 1]$ stetige Lösung, die das Zielfunktional minimiert, kann für diese Aufgabe nicht existieren. Der Wert $-\frac{1}{2}$ kann ausschließlich durch die Funktion $u(\tau) \equiv 1$ angenommen werden. Betrachten wir die Folge $u_n(\tau) := 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, so ergibt sich als Zustand die Folge stetiger Funktionen

$$x_n(\tau) = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{n})\tau}$$

mit dem Endwert $x(1) = n$. Das Zielfunktional lautet

$$\int_0^1 -(1 - \frac{1}{n})(1 - \tau)d\tau = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) > -\frac{1}{2}.$$

Das bedeutet, dass eine Folge stetiger Funktionen existiert, für die das Infimum des Zielfunktional den Wert $-\frac{1}{2}$ hat. Folglich existiert keine stetige Lösung des Problems.

In diesem Beispiel ist die Wachstumsbedingung an die rechte Seite der Dynamik verletzt. Folglich können wir die Aufgabe nicht mit Hilfe der klassischen Existenzsätze untersuchen. Um das Ziel dieses Kapitels zu motivieren, transformieren wir diese Aufgabe vermöge der Transformation

$$\tau = \omega(t) := 1 - e^{-\beta t}, \quad \beta > 0$$

in ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont. Definieren wir

$$\tilde{x}(t) := x(\omega(t)), \quad \tilde{u}(t) := u(\omega(t)),$$

so erhalten wir das Problem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -\tilde{u}(t)\beta e^{-2\beta t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \beta\tilde{x}^2(t)\tilde{u}(t)e^{-\beta t}, \\ \tilde{x}(0) &= 1 \text{ und } \tilde{u}(t) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Dass diese Aufgabe zum ursprünglichen Problem äquivalent ist, werden wir in den nächsten Abschnitten beweisen. Vorerst untersuchen wir das neue Problem ohne diesen Nachweis. Die transformierte Aufgabe ist ein Problem der Klasse (P_α) aus Abschnitt 3.3, welche wir mittels der Transformation (3.38) wie folgt transformieren:

Es sei $\hat{x}(t) = \tilde{x}^{-1}(t)$, dann erhalten wir das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -\tilde{u}(t)\beta e^{-2\beta t} dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\hat{x}}(t) &= -\beta\tilde{u}(t)e^{-\beta t}, \\ \hat{x}(0) &= 1 \text{ und } \tilde{u}(t) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Dies ist ein Steuerungsproblem der Klasse (P) , für welches sich mittels Satz 1.3.4 die Existenz einer Lösung im Raum $W_2^1((0, \infty), \mu)$ zeigen lässt. Überprüfen wir nun die Voraussetzungen 1.3.7 und 1.3.8. Wir lesen ab: $M = 0$, woraus wir $\mu(t) = e^{-\varrho t}$, $\varrho > 0$ als eine natürliche Gewichtsfunktion bestimmen. Die partielle Ableitung des Integranden nach der zweiten Variablen ist identisch Null. Für die partielle Ableitung nach der Steuervariablen gilt

$$| -\beta e^{-2\beta t} e^{\varrho t} | \leq A_{22}(t)$$

mit einer Funktion $A_{22} \in L_2((0, \infty), \mu)$, falls $\varrho < 4\beta$. Da wir $\beta > 0$ frei wählen können, ist das Maximumprinzip aus Satz 1.3.3 gültig. Mittels des Maximumprinzips aus Satz 1.3.3 bestimmen wir

$$\hat{x}^*(t) = e^{-\beta t}, \quad \tilde{u}^*(t) \equiv 1.$$

Für die Adjungierte ergibt sich $\hat{y}(t) \equiv c$, was aufgrund der Transversalitätsbedingung auf $c = 0$ führt. Wir lassen die Konstante vorerst frei, um die Struktur der Adjungierten unter der verwendeten Transformation ablesen zu können. Die Rücktransformation liefert

$$\tilde{x}^*(t) = e^{\beta t}, \quad \tilde{u}^*(t) \equiv 1, \quad \tilde{y}(t) = ce^{-2\beta t}.$$

Die letzte Rücktransformation auf das feste Zeitintervall $[0, 1)$ liefert

$$x^*(\tau) = \frac{1}{1-\tau}, \quad u^*(\tau) \equiv 1, \quad y(\tau) = c(1-\tau)^2.$$

Tatsächlich erhalten wir eine Lösung, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ nicht einmal stetig ist. Wenn es also möglich ist, die Steuerungsaufgaben über festem Zeithorizont mit den Steuerungsaufgaben über unendlichem Zeithorizont aus den vorangegangenen Kapiteln in Verbindung zu bringen, so können wir auch die bereits erzielten Resultate nutzen.

Im Folgenden werden wir der aus dem Beispiel gewonnenen Idee ein theoretisches Gerüst geben. Wir betrachten das Steuerungsproblem über endlichem Zeithorizont:

$$(P_E)_1 \quad J(x, u) = \int_0^1 r(\tau, x(\tau), u(\tau)) \mu_2(\tau) d\tau \rightarrow \min! \quad (6.1)$$

$$x'(\tau) = A(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau) \quad \text{f.ü. auf } [0, 1] \quad (6.2)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad u(\tau) \in U \quad (6.3)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, 1), \mu_1) \times L_\infty((0, 1)). \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.1.1. Ein Steuerungsproblem mit $t \in [t_0, t_1)$ lässt sich stets eindeutig mittels der linearen Substitution $\tau := \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$ in ein Steuerungsproblem über dem Intervall $[0, 1)$ transformieren. Deshalb betrachten wir im Folgenden, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit, stets das Zeitintervall $[0, 1)$.

Desweiteren definieren wir:

Definition 6.1.1. Es sei $\Psi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion. Wir definieren $\Psi(\tau) := \int_0^\tau \psi(s) ds$. Es gelte $\Psi(\tau) \geq 0$, $\psi(\tau) \geq c_0 > 0$ und $\psi'(\tau) > 0$ für alle $\tau \in [0, 1)$.

Unter Verwendung der letzten Definition und der Definition 1.2.5 fordern wir:

Voraussetzung 6.1.1. Die Steuermenge U sei eine kompakte, konvexe Teilmenge der \mathbb{R} . Der Steuerbereich sei nichtleer und von der Variablen der Zeit t unabhängig.

Voraussetzung 6.1.2. Die Funktion $r : [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in allen Variablen, stetig differenzierbar in der zweiten und dritten Variablen und konvex in v .

Voraussetzung 6.1.3. Die Funktionen $A : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in allen Argumenten sowie Lipschitzstetig in ξ .

Voraussetzung 6.1.4. Es sei die Existenz positiver Konstanten C_i , $i = 1..4$ vorausgesetzt, sodass die Ungleichung

$$|A(\tau, \xi) + B(\tau, \xi)v| \leq [C_1 + C_4|v| + (C_2 + C_3|v|)|\xi|] \cdot \psi(\tau)$$

für alle $(\tau, \xi, v) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Voraussetzung 6.1.5. Die Funktionen μ_1 und μ_2 seien Gewichtsfunktionen,

$$\mu_1(\tau) := \psi^{-1}(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}, \quad \mu_2(\tau) := \psi(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}$$

mit $\varrho > 2(C_2 + C_3K)$ und den Konstanten C_2 und C_3 aus Voraussetzung 6.1.4 und der Konstanten K aus der Definition 1.2.5.

6.1.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu $(P_E)_1$

Wie in den vorangegangenen Kapiteln nutzen wir die Struktur des Anfangswertproblems, um dessen Lösungen auf natürliche Weise zu beschränken.

Lemma 6.1.1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(\tau) = A(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau) \quad \text{f.ü. auf } [0, 1), \quad x(0) = x_0 > 0. \quad (6.5)$$

Für die Funktion u sei $u \in L_\infty((0, 1))$ erfüllt. Die Funktionen $A : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig auf der Menge $[0, 1) \times \mathbb{R}$. Die Voraussetzungen 6.1.1 und 6.1.4 seien erfüllt. Für jede Funktion x , die dem Anfangswertproblem (6.5) genügt, gilt

$$|x(\tau)| \leq \beta(\tau)$$

mit einer Funktion $\beta \in L_2((0, 1), \mu_1)$. Dabei ist μ_1 eine Gewichtsfunktion, definiert durch Voraussetzung 6.1.5 und Definition 6.1.1.

Analog zu Satz 1.2.2 aus Abschnitt 1.2.3 nutzen wir für den Beweis die Gronwallsche Ungleichung aus Lemma 6.6.1 im Anhang.

Beweis: Die Lösung der Differentialgleichung in integrierter Form mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$ lautet

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau \left\{ A(s, x(s)) + B(s, x(s))u(s) \right\} ds.$$

Damit schätzen wir den Betrag der Funktion x ab durch:

$$\begin{aligned}
|x(\tau)| &\leq |x_0| + \int_0^\tau |A(s, x(s)) + B(s, x(s))u(s)| ds \\
&\leq |x_0| + \int_0^\tau \left(C_1 + C_4|u(s)| + (C_2 + C_3|u(s)|)|x(s)| \right) \cdot \psi(s) ds \\
&= |x_0| + \int_0^\tau (C_1 + C_4|u(s)|) \cdot \psi(s) ds \\
&\quad + \int_0^\tau (C_2 + C_3|u(s)|)|x(s)| \cdot \psi(s) ds \\
&\leq |x_0| + (C_1 + C_4K) \cdot \Psi(\tau) + \int_0^\tau (C_2 + C_3K)|x(s)| \cdot \psi(s) ds.
\end{aligned}$$

In der Ungleichungskette nutzen wir die Voraussetzung 6.1.4, die Dreiecksungleichung und die Beschränkung der Steuerung u durch K . Definieren wir

$$a(\tau) := |x_0| + (C_1 + C_4K)\Psi(\tau), \quad b(\tau) := (C_2 + C_3K)\psi(\tau),$$

so sind mit dieser Setzung offensichtlich die Voraussetzungen des Gronwall-Lemmas 6.6.1 aus dem Anhang erfüllt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
|x(\tau)| &\leq a(\tau)e^{\int_0^\tau b(s)ds} = \left(|x_0| + (C_1 + C_3K)\Psi(\tau) \right) \cdot e^{\int_0^\tau (C_2 + C_3K)\psi(s)ds} \\
&= \left(|x_0| + (C_1 + C_3K)\Psi(\tau) \right) \cdot e^{(C_2 + C_3K)\Psi(\tau)} =: \beta(\tau).
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.1.2. Für die Bestimmung des Funktionenraumes der Funktion β ist folgende Abschätzung hilfreich: Wegen $c_0 \leq \psi(\tau)$ folgt $c_0^2 \leq \psi^2(\tau)$ und demnach $\psi^{-1}(\tau) \leq c_0^{-2}\psi(\tau) =: c\psi(\tau)$.

Für diese Funktion β bestimmen wir unter Berücksichtigung der Definition 6.1.1 und der letzten Bemerkung:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |\beta(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \leq \int_0^1 |\beta(\tau)|^2 c \mu_2(\tau) d\tau \\
&= \int_0^1 \left(|x_0| + (C_1 + C_3K)\Psi(\tau) \right)^2 \cdot e^{2(C_2 + C_3K)\Psi(\tau)} c \mu_2(\tau) d\tau \\
&= \int_0^1 \left(|x_0| + (C_1 + C_3K)\Psi(\tau) \right)^2 \cdot e^{2(C_2 + C_3K)\Psi(\tau)} c \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist endlich, falls

$$e^{2(C_2+C_3K)\Psi(\tau)}\psi(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}$$

und

$$\Psi^2(\tau) \cdot e^{2(C_2+C_3K)\Psi(\tau)}\psi(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}$$

über dem Intervall $[0, 1]$ summierbar sind. Definieren wir $\alpha := \varrho - 2(C_2 + C_3K)$, so erhalten wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi^2(\tau) \cdot e^{-\alpha\Psi(\tau)}\psi(\tau)d\tau &= \lim_{\tau \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{\alpha} \Psi^2(\tau)e^{-\alpha\Psi(\tau)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 2\Psi(\tau)\psi(\tau) \cdot e^{-\alpha\Psi(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der Funktion Ψ gilt für $\alpha > 0$ und alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{\alpha} \Psi^k(\tau)e^{-\alpha\Psi(\tau)} \right) = 0.$$

Erneute partielle Integration ohne Beachtung der Konstanten liefert

$$\int_0^1 \Psi(\tau) \cdot e^{-\alpha\Psi(\tau)}\psi(\tau)d\tau = \lim_{\tau \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{\alpha} \Psi(\tau)e^{-\alpha\Psi(\tau)} \right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \psi(\tau) \cdot e^{-\alpha\Psi(\tau)} d\tau.$$

Als letzter Schritt folgt die Berechnung des Integralwertes:

$$\int_0^1 e^{-\alpha\Psi(\tau)}\psi(\tau)d\tau = \lim_{\tau \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\Psi(\tau)} \right) + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\Psi(0)} = \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Das bedeutet, dass für $\varrho > 2(C_2 + C_3K)$ die Inklusion $\beta \in L_2((0, 1), \mu_1)$ gilt. Beachtet man die Abschätzung für β , so folgt sogar, dass $\beta \in L_2((0, 1), \mu_2)$ und somit $x \in L_2((0, 1), \mu_2)$ gilt. \square

Das bedeutet, dass wir eine Funktion β gefunden haben, die jeden zu dem Anfangswertproblem (6.2) mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$ und der Beschränkung $u(\tau) \in U$ zulässigen Zustand x beschränkt. Wir nennen die Funktion β wie gehabt *natürliche Phasenbeschränkung für das Problem $(P_E)_1$* .

Um einen Existenzsatz formulieren zu können, müssen wir sicher stellen, dass jede zu Problem $(P_E)_1$ zulässige Funktion x dem Raum $W_2^1((0, 1), \mu_1)$ angehört.

Lemma 6.1.2. Die Voraussetzungen 6.1.1, 6.1.3 und 6.1.4 seien erfüllt. Für jede Funktion $x \in AC_{loc}([0, 1])$, welche die Differentialgleichung (6.2) mit $x(0) = x_0$ erfüllt, gilt

$$x \in W_2^1((0, 1), \mu_1) \quad \text{mit} \quad \mu_1(\tau) = \psi^{-1}(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}, \quad \varrho > 2(C_2 + C_3K)$$

mit K aus der Definition 1.2.5, sowie ψ und Ψ aus der Definition 6.1.1.

Beweis: Aus der Definition der Funktion β aus dem Beweis zu Lemma 6.1.1 folgt unmittelbar

$$\int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \leq \int_0^1 |\beta(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau < \infty.$$

Für die Ableitung folgt aus der Voraussetzung 6.1.1 und der Ungleichung in Voraussetzung 6.1.4, dass

$$\begin{aligned} |x'(\tau)| &= |A(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)| \\ &\leq \left[C_1 + C_4|u(\tau)| + (C_2 + C_3|u(\tau)|)|x(\tau)| \right] \cdot \psi(\tau) \\ &\leq (C_1 + C_4K)\psi(\tau) + (C_2 + C_3K)|x(\tau)|\psi(\tau) \end{aligned}$$

Für die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der letzten Ungleichungskette bestimmen wir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (C_1 + C_4K)^2 \psi^2(\tau) \mu_1(\tau) d\tau &= \int_0^1 (C_1 + C_4K)^2 \psi^2(\tau) \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^1 (C_1 + C_4K)^2 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\ &= (C_1 + C_4K)^2 \frac{1}{\varrho} < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (C_2 + C_3K)^2 \psi^2(\tau) |x(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 (C_2 + C_3K)^2 \psi^2(\tau) |x(\tau)|^2 \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\ &= (C_2 + C_3K)^2 \int_0^1 |x(\tau)|^2 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \end{aligned}$$

$$= \left(C_2 + C_3 K\right)^2 \int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_2(\tau) d\tau < \infty,$$

woraus $x' \in L_2((0, 1), \mu_1)$ folgt. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

6.1.3 Die Äquivalenz von $(P_E)_1$ und (P_E)

Bevor wir den Existenzsatz formulieren und beweisen, werden wir das Problem $(P_E)_1$ auf ein Steuerungsproblem $(\tilde{P}_E)_1$ mit unendlichem Zeithorizont transformieren und zeigen, dass diese Problemklasse $(\tilde{P}_E)_1$ gerade die Klasse (P_E) aus Abschnitt 1.2 ist. Daraus werden wir schließen, dass das Problem $(P_E)_1$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn zu dem Steuerungsproblem (P_E) aus Abschnitt 1.2 eine Lösung existiert.

Wir definieren die Funktion $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ durch $\tau = \omega(t)$ und $t = \Psi(\tau)$ mit der Funktion Ψ , welche der Definition 6.1.1 genügt. Dann gilt

$$\Psi(\omega(t)) = t, \quad \omega(\Psi(\tau)) = \tau, \quad \dot{\omega}(t) \cdot \psi(\omega(t)) = 1.$$

Wir erhalten vermöge

$$\tilde{x}(t) := x(\omega(t)), \quad (6.6)$$

$$\tilde{u}(t) := u(\omega(t)), \quad (6.7)$$

$$\tilde{A}(t, \tilde{x}(t)) := A(\omega(t), x(\omega(t))) \cdot \dot{\omega}(t), \quad (6.8)$$

$$\tilde{B}(t, \tilde{x}(t)) := B(\omega(t), x(\omega(t))) \cdot \dot{\omega}(t), \quad (6.9)$$

$$\tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) := r(\omega(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad (6.10)$$

$$\tilde{\mu}(t) := \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \quad (6.11)$$

das Steuerungsproblem

$$(\tilde{P}_E)_1 \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\mu}(t) dt \rightarrow \min! \quad (6.12)$$

$$\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}), \quad \tilde{u} \in L_\infty(R_+), \quad (6.13)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t, \tilde{x}(t)) + \tilde{B}(t, \tilde{x}(t)) \tilde{u}(t) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \quad (6.14)$$

$$\tilde{u}(t) \in U, \quad (6.15)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 > 0. \quad (6.16)$$

Diese Aufgabe ist für die spezielle Wahl der Transformation eine Aufgabe der Klasse (P_E) und besitzt folglich eine Lösung, wenn alle Voraussetzungen für

den Existenzsatz 1.2.4 zu (P_E) erfüllt sind. Damit lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz 6.1.1. *Die Probleme $(\tilde{P}_E)_1$ und $(P_E)_1$ sind äquivalent in folgendem Sinne:*

- (i) *Ein Prozess (x, u) erfüllt genau dann das Anfangswertproblem (6.2) mit $x(0) = x_0$, wenn (\tilde{x}, \tilde{u}) das Anfangswertproblem (6.14) mit $\tilde{x}(0) = x_0$ erfüllt.*
- (ii) *Für μ_1 , definiert durch $\mu_1(\tau) := \psi^{-1}(\tau) \cdot e^{-\varrho\Psi(\tau)}$, $\varrho > 2(C_2 + C_3K)$ gehört ein zu Problem $(P_E)_1$ zulässiger Prozess (x, u) genau dann dem Raum $W_2^1((0, 1), \mu_1) \times L_\infty((0, 1))$ an, wenn ein zu Problem $(\tilde{P}_E)_1$ zulässiger Prozess (\tilde{x}, \tilde{u}) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}) \times L_\infty((0, \infty))$ mit $\tilde{\mu}(t) = e^{-\varrho t}$ angehört.*
- (iii) *Für die Zielfunktionale aus den Aufgaben $(P_E)_1$ und $(\tilde{P}_E)_1$ gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u})$.*

Beweis:

- (i) Angenommen, das Tupel (x, u) erfülle die Zustandsgleichung (6.2), dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}x(\omega(t)) = \frac{d}{d\tau}x(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) \\ &= \left(A(\omega(t), x(\omega(t))) + B(\omega(t), x(\omega(t)))u(\omega(t)) \right) \dot{\omega}(t) \\ &= \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}(t). \end{aligned}$$

Die Umkehrung ist leicht zu zeigen.

Das bedeutet, dass (x, u) die Zustandsgleichung (6.2) genau dann erfüllt, wenn das Tupel (\tilde{x}, \tilde{u}) , definiert durch (6.6) und (6.7), die Zustandsgleichung (6.14) erfüllt. Für den Anfangswert sieht man leicht, dass $\tilde{x}(0) = x(\omega(0)) = x(0) = x_0$ gilt.

- (ii) Es sei $x \in W_2^1((0, 1), \mu_1)$, dann folgt unter Verwendung der Substitutionsregel aus Satz 6.6.10 im Anhang

$$\int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt$$

$$= \int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_2(\tau) d\tau < \infty.$$

Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt &= \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt \\ &= \int_0^1 |x'(\tau) \frac{1}{\psi(\tau)}|^2 \mu_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 |x'(\tau) \frac{1}{\psi(\tau)}|^2 \mu_1(\tau) \psi^2(\tau) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Die Umkehrung der Aussage folgt unmittelbar durch die Gleichungskette.

(iii) Das Zielfunktional berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\mu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty r(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t))) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) dt \\ &= \int_0^1 r(\tau, x(\tau), u(\tau)) \mu_2(\tau) d\tau = J(x, u). \end{aligned}$$

Damit sind die Probleme $(P_E)_1$ und $(\tilde{P}_E)_1$ äquivalent im Sinne des Satzes 6.1.1. \square

Wir haben gezeigt, dass alle zu Problem $(P_E)_1$ zulässigen Funktionen x dem Banachraum $W_2^1((0, 1), \mu_1)$ angehören. Da zusätzlich $x \in L_2((0, 1), \mu_2)$ gilt, könnte als Funktionenraum auch der nicht-uniform gewichtete Sobolevraum¹ $W_2^1((0, 1), \mu_2, \mu_1)$ gewählt werden, der ebenfalls ein Banachraum ist. Da alle Beweise und Abschätzungen ihre Richtigkeit behalten, verwenden wir in der vorliegenden Arbeit stets Sobolevräume, die mit nur einem Gewicht gewichtet sind.

6.1.4 Die Existenz einer Lösung zu $(P_E)_1$

Wir werden nun einen Existenzsatz formulieren und über den Umweg eines Steuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont beweisen. Dazu formulie-

¹ siehe Definition 1.1.9

ren wir weitere Voraussetzungen, die jeweils für alle $\tau \in [0, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$ gelten sollen.

Voraussetzung 6.1.6. Für die Funktion B aus der Zustandsgleichung (6.2) gelte

$$|B(\tau, \xi)| \leq A_3(\tau) + B_3|\xi|\psi(\tau)$$

mit einer Funktion $A_3 \in L_2((0, 1), \mu_1)$ und einer positiven Konstanten B_3 .

Voraussetzung 6.1.7. Der Integrand $r\mu_2$ möge folgender Abschätzung genügen:

$$|r(\tau, \xi, v)\mu_2(\tau)| \leq A_1(\tau) + B_1\mu_2(\tau)\left(|\xi|^2 + |v|^2\right)$$

mit einer Funktion $A_1 \in L_1((0, 1))$ und einer positiven Konstanten B_1 .

Voraussetzung 6.1.8. Für die Ableitung des Integranden nach der Steuerung v gelte:

$$|r_v(\tau, \xi, v)\mu_2(\tau)| \leq A_2(\tau)\mu_2(\tau) + B_2\mu_2(\tau)(|\xi| + |v|)$$

mit einer Funktion $A_2 \in L_2((0, 1), \mu_2)$ und einer positiven Konstanten B_2 .

Satz 6.1.2. Für das Steuerungsproblem $(P_E)_1$ seien die Voraussetzungen 6.1.3 bis 6.1.8 erfüllt. Der zulässige Bereich sei nichtleer. Dann besitzt das Steuerungsproblem $(P_E)_1$ eine Lösung.

Beweis: i) Sind die Funktionen A und B Lipschitzstetig bezüglich ξ , so sind die Funktionen \tilde{A} und \tilde{B} , definiert durch

$$\tilde{A}(t, \tilde{x}(t)) := A(\omega(t), x(\omega(t))), \quad \tilde{B}(t, \tilde{x}(t)) := B(\omega(t), x(\omega(t)))$$

offensichtlich Lipschitzstetig in $\tilde{\xi}$.

ii) Es sei die Voraussetzung 6.1.7 an den Integranden erfüllt, dann folgt:

$$\begin{aligned} |\tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\tilde{\mu}(t)| &= |r(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t)))\mu_2(\omega(t))\dot{\omega}(t)| \\ &= |r(\tau, x(\tau), u(\tau))\mu_2(\tau)\psi^{-1}(\tau)| \\ &\leq \left[A_1(\tau) + B_1\mu_2(\tau)\left(|x(\tau)|^2 + |u(\tau)|^2\right) \right] \psi^{-1}(\tau) \\ &= \left[A_1(\omega(t)) + B_1\mu_2(\omega(t))\left(|x(\omega(t))|^2 + |u(\omega(t))|^2\right) \right] \dot{\omega}(t) \\ &= \tilde{A}_1(t) + B_1\tilde{\mu}(t)\left(|\tilde{x}(t)|^2 + |\tilde{u}(t)|^2\right) \end{aligned}$$

mit $\tilde{A}_1(t) := A_1(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)$. Es gilt $\tilde{A}_1 \in L_1((0, \infty))$:

$$\int_0^\infty \tilde{A}_1(t) dt = \int_0^\infty A_1(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt = \int_0^1 A_1(\tau) d\tau < \infty.$$

Die Gültigkeit der Umkehrung der Abschätzung zeigt man analog.

Das bedeutet, dass die Voraussetzung 1.2.6 für das Problem $(\tilde{P}_E)_1$ genau dann erfüllt ist, wenn die Voraussetzung 6.1.7 für das Problem $(P_E)_1$ erfüllt ist.

iii) Die Voraussetzung 6.1.8 an die partielle Ableitung des Integranden nach v sei erfüllt, so folgt mit $\tilde{A}_2(t) := A_2(\omega(t))$:

$$\begin{aligned} & |\tilde{r}_v(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\mu}(t)| \\ &= |r_v(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t))) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t)| \\ &= |r_v(\tau, x(\tau), u(\tau)) \mu_2(\tau) \psi^{-1}(\tau)| \\ &\leq \left(A_2(\tau) \mu_2(\tau) + B_2 \mu_2(\tau) (|x(\tau)| + |u(\tau)|) \right) \psi^{-1}(\tau) \\ &= \left(A_2(\omega(t)) \mu_2(\omega(t)) + B_2 \mu_2(\omega(t)) (|x(\omega(t))| + |u(\omega(t))|) \right) \dot{\omega}(t) \\ &= \left(\tilde{A}_2(t) \tilde{\mu}(t) + B_2 \tilde{\mu}(t) (|\tilde{x}(t)| + |\tilde{u}(t)|) \right). \end{aligned}$$

Es gilt $\tilde{A}_2 \in L_2((0, \infty), \tilde{\mu})$:

$$\int_0^\infty \tilde{A}_2^2(t) \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty A_2^2(\omega(t)) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) dt = \int_0^1 A_2^2(\tau) \mu_2(\tau) d\tau < \infty.$$

Das bedeutet, dass die Voraussetzung 1.2.7 für das Problem $(\tilde{P}_E)_1$ erfüllt ist. Diese Abschätzung lässt sich leicht in umgekehrter Richtung zeigen, sodass die Äquivalenz gilt.

iv) Angenommen, die rechte Seite der Dynamik (6.2) genüge der Ungleichung aus Voraussetzung 6.1.4, dann ist

$$\begin{aligned} & |\tilde{A}(t, \tilde{x}(t)) + \tilde{B}(t, \tilde{x}(t)) \tilde{u}(t)| \\ &= \left| A(\omega(t), x(\omega(t))) + B(\omega(t), x(\omega(t))) u(\omega(t)) \right| \dot{\omega}(t) \\ &= \left| A(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau)) u(\tau) \right| \psi^{-1}(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[C_1 + C_4|u(\tau)| + \left(C_2 + C_3|u(\tau)| \right) |x(\tau)| \right] \psi^{-1}(\tau) \cdot \psi(\tau) \\
&= C_1 + C_4|u(\tau)| + \left(C_2 + C_3|u(\tau)| \right) |x(\tau)| \\
&= C_1 + C_4|\tilde{u}(t)| + \left(C_2 + C_3|\tilde{u}(t)| \right) |\tilde{x}(t)|.
\end{aligned}$$

Das ist die Voraussetzung 1.2.5. Die Umkehrung zeigt man analog.

Das bedeutet, dass unter der Bedingung, dass die Voraussetzungen 6.1.3 bis 6.1.8 für Problem $(P_E)_1$ erfüllt sind, alle Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.2.4 für das Problem $(\tilde{P}_E)_1$ erfüllt sind. Die Probleme $(P_E)_1$ und $(\tilde{P}_E)_1$ sind äquivalent im Sinne des Satzes 6.1.1. Folglich besitzt das Problem $(P_E)_1$ eine Lösung, wenn $(\tilde{P}_E)_1$ eine Lösung besitzt. Es ist leicht, alle Abschätzungen aus dem letzten Beweis in umgekehrter Richtung zu zeigen. Also besitzt $(\tilde{P}_E)_1$ genau dann eine Lösung, wenn $(P_E)_1$ eine Lösung besitzt. \square

6.2 Die Transformation auf (P_V)

Wollen wir notwendige Bedingungen in Form eines Maximumprinzips formulieren und dafür die Resultate aus den letzten Kapiteln nutzen, müssen wir uns in der Form der Zustandsgleichung einschränken. Wir betrachten ein Steuerungsproblem über endlichem Zeithorizont mit einer Dynamik, die linear bezüglich des Tupels (x, u) ist.

6.2.1 Das Problem $(P_V)_1$

Gegeben sei folgendes Steuerungsproblem:

$$(P_V)_1 \quad J(x, u) = \int_0^1 r(\tau, x(\tau), u(\tau)) \mu_2(\tau) d\tau \rightarrow \min! \quad (6.17)$$

$$x'(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) \quad \text{f.ü. auf } [0, 1) \quad (6.18)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad u(\tau) \in U \quad (6.19)$$

$$(x, u) \in W_2^1((0, 1), \mu_1) \times L_\infty((0, 1)), \quad (6.20)$$

Für dieses Problem seien folgende Voraussetzungen erfüllt.

Voraussetzung 6.2.1. Der Steuerbereich U sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R} . Er sei nichtleer und von der Variablen τ unabhängig.

Voraussetzung 6.2.2. Die Funktion $r : [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar in allen Variablen und konvex in v .

Voraussetzung 6.2.3. Die Funktionen A und B seien stetig differenzierbar auf dem Intervall $[0, 1)$. Desweiteren gelte für reelle Konstanten m und M sowie für die positive Konstante C_B :

$$m \leq A(\tau)\psi^{-1}(\tau) \leq M \quad \text{und} \quad |B(\tau)|\kappa^{-1}(\tau)\psi^{-1}(\tau) \leq C_B.$$

Die streng monoton wachsende, positive Funktion $\psi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ besitze eine Stammfunktion, welche der Definition 6.1.1 genügt. Für die Funktion κ gelte

$$\kappa(\tau) := e^{-g\Psi(\tau)}, \quad g \in \mathbb{R}.$$

Voraussetzung 6.2.4. Die Funktionen μ_1 und μ_2 seien Gewichtsfunktionen. Es sei für $\varrho > M - g + |M + g|$:

$$\mu_1(\tau) = \psi^{-1}(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}, \quad \mu_2(\tau) = \psi(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}. \quad (6.21)$$

6.2.2 Die natürliche Phasenbeschränkung zu $(P_V)_1$

Analog zu den vorangegangenen Kapiteln werden wir für das Problem $(P_V)_1$ den Funktionenraum bestimmen, dem alle zulässigen Funktionen x angehören. Hierfür bestimmen wir ein natürliches Gewicht der Aufgabe, welches sich aus der natürlichen Phasenbeschränkung β und der Struktur der Dynamik (6.18) ergibt.

Lemma 6.2.1. Die Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4 seien erfüllt. Für jedes zu Problem $(P_V)_1$ zulässige Paar (x, u) gilt

$$|x(\tau)| \leq \beta(\tau) \quad \text{mit} \quad \beta \in L_2((0, 1), \mu_1).$$

Beweis: Genügt ein Tupel (x, u) der Differentialgleichung (6.18), so lässt sich die Lösung explizit darstellen als

$$x(\tau) = x_0 e^{F(\tau)} + \left(\int_0^\tau B(s)u(s)e^{-F(s)} ds \right) e^{F(\tau)}$$

mit $F(\tau) := \int_0^\tau A(\eta) d\eta$. Unter Verwendung der Voraussetzung 6.2.3 und der durch Definition 1.2.5 erklärten Konstanten K schätzen wir ab:

$$|x(\tau)| \leq x_0 e^{F(\tau)} + \left(\int_0^\tau |B(s)u(s)| e^{F(\tau)-F(s)} ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq x_0 e^{M\Psi(\tau)} + \int_0^\tau |B(s)u(s)| e^{M(\Psi(\tau)-\Psi(s))} ds \\
&\leq x_0 e^{M\Psi(\tau)} + K e^{M\Psi(\tau)} \int_0^\tau C_B e^{-g\Psi(s)} \psi(s) e^{-M\Psi(s)} ds \\
&= x_0 e^{M\Psi(\tau)} + K e^{M\Psi(\tau)} \left[C_B \frac{1}{-M-g} e^{-g\Psi(s)} e^{-M\Psi(s)} \right]_0^\tau \\
&= x_0 e^{M\Psi(\tau)} + K C_B \frac{1}{-M-g} e^{-g\Psi(\tau)} - K C_B \frac{1}{-M-g} e^{M\Psi(\tau)} \\
&= c_1 e^{M\Psi(\tau)} + c_2 e^{-g\Psi(\tau)} =: \beta(\tau),
\end{aligned}$$

wobei sich die Konstanten c_1 und c_2 aus der vorletzten Zeile ergeben. Unter Verwendung der Beschränkung β an alle möglichen Lösungen x der Differentialgleichung (6.18) gilt²

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau &\leq \int_0^1 |\beta(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \\
&= \int_0^1 |c_1 e^{M\Psi(\tau)} + c_2 e^{-g\Psi(\tau)}|^2 \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&\leq \int_0^1 2c_1^2 e^{2M\Psi(\tau)} \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau + \int_0^1 2c_2^2 e^{-2g\Psi(\tau)} \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&\leq \int_0^1 2c_1^2 e^{2M\Psi(\tau)} c_5 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau + \int_0^1 2c_2^2 e^{-2g\Psi(\tau)} c_5 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&= \int_0^1 2c_1^2 e^{2M\Psi(\tau)} c_5 \mu_2(\tau) d\tau + \int_0^1 2c_2^2 e^{-2g\Psi(\tau)} c_5 \mu_2(\tau) d\tau \\
&= \left[2c_1^2 \frac{1}{2M-\varrho} e^{2M\Psi(\tau)} e^{-\varrho\Psi(\tau)} \right]_0^1 + \left[2c_2^2 \frac{1}{-2g-\varrho} e^{-2g\Psi(\tau)} e^{-\varrho\Psi(\tau)} \right]_0^1 \\
&= \frac{2c_1^2}{2M-\varrho} e^{(2M-\varrho)\Psi(1)} - \frac{2c_1^2}{2M-\varrho} + \frac{2c_2^2}{-2g-\varrho} e^{(-2g-\varrho)\Psi(1)} - \frac{2c_2^2}{-2g-\varrho} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da $\varrho > \max(2M, -2g)$. Folglich gilt wegen $\beta \in L_2((0, 1), \mu_1)$ die Inklusion $x \in L_2((0, 1), \mu_1)$. Aus der letzten Abschätzung wird ersichtlich, dass $x \in L_2((0, 1), \mu_2)$ ebenfalls gilt. \square

Lemma 6.2.2. Gegeben sei das Problem $(P_V)_1$. Die Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4 seien erfüllt. Desweiteren sei (x, u) eine Lösung der Differential-

²in der Abschätzung wird verwendet, dass $\psi \geq c_0 > 0$. Es gilt $c_5 = \frac{1}{c_0^2}$

gleichung (6.18) mit $u(t) \in U$ und $x(0) = x_0$, dann gilt die Inklusion $x \in W_2^1((0, 1), \mu_1)$.

Beweis: Für die Ableitung der Zustandsfunktion x gilt mit der Setzung $C_A := \max(|M|, |m|)$ und der Konstanten C_B aus der Voraussetzung 6.2.3:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x'(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau &= \int_0^1 |A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \\
&\leq 2 \int_0^1 |A(\tau)x(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau + 2 \int_0^1 |B(\tau)u(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \\
&\leq 2 \int_0^1 |x(\tau)|^2 C_A^2 \psi^2(\tau) \mu_1(\tau) d\tau + 2 \int_0^1 C_B^2 e^{-2g\Psi(\tau)} K^2 \psi^2(\tau) \mu_1(\tau) d\tau \\
&= 2 \int_0^1 |x(\tau)|^2 C_A^2 \psi^2(\tau) \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&\quad + 2 \int_0^1 C_B^2 e^{-2g\Psi(\tau)} K^2 \psi^2(\tau) \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&= 2 \int_0^1 |x(\tau)|^2 C_A^2 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau \\
&\quad + 2 \int_0^1 C_B^2 e^{-2g\Psi(\tau)} K^2 \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau < \infty.
\end{aligned}$$

Dass das 1. Integral stets einen endlichen Wert annimmt, wurde bereits gezeigt. Die Summierbarkeit des 2. Integrals folgt wegen:

$$\int_0^1 e^{-2g\Psi(\tau)} \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} d\tau = \left[\frac{-1}{2g + \varrho} e^{-(2g+\varrho)\Psi(\tau)} \right]_0^1 = \frac{1}{2g + \varrho}.$$

Damit wurde gezeigt, dass $x \in W_2^1((0, 1), \mu_1)$ gilt. \square

Bemerkung 6.2.1. Der Fall $M = -g$ lässt sich analog behandeln. Man zeigt mittels partieller Integration³, dass der Ausdruck $\Psi^2 \psi e^{(2M-\varrho)\Psi}$ über $[0, 1]$ summierbar ist.

6.2.3 Die Äquivalenz von $(P_V)_1$ und (P_V)

Wir wollen nun das Problem $(P_V)_1$ auf ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont transformieren. Wir werden zeigen, dass sich dieses Problem auf ein Problem der Klasse (P_V) transformieren lässt. Dadurch werden

³siehe Anhang A.3.

wir einen Existenzsatz und ein Maximumprinzip zu $(P_V)_1$ formulieren können. Aufgrund der Bijektivität der Funktion Ψ , definiert durch Definition 6.1.1, können wir deren Umkehrfunktion $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ durch den Zusammenhang

$$\Psi(\omega(t)) = t, \quad \omega(\Psi(\tau)) = \tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tau \in [0, 1)$$

definieren und erhalten vermöge

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &:= x(\omega(t)), & \tilde{u}(t) &:= u(\omega(t)), \\ \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) &:= r(\omega(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), & \tilde{\mu}(t) &:= \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t), \end{aligned}$$

das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} (\tilde{P}_V)_1 \quad \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\mu}(t) dt \rightarrow \min! \\ \tilde{x} &\in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}), \quad \tilde{u} \in L_\infty((0, \infty)), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}(t) \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ \tilde{u}(t) &\in U, \\ \tilde{x}(0) &= x_0 > 0. \end{aligned}$$

Dabei sind mit

$$\tilde{A}(t) = A(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t), \quad \tilde{B}(t) = B(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)$$

aufgrund der Voraussetzung 6.2.3 die folgenden Ungleichungen erfüllt:

$$m\psi(\omega(t))\dot{\omega}(t) \leq \tilde{A}(t) \leq M\psi(\omega(t))\dot{\omega}(t), \quad |\tilde{B}(t)| \leq C_B\psi(\omega(t))\kappa(\omega(t))\dot{\omega}(t).$$

Aus der Definition der Funktionen κ , ψ und ω folgt

$$m \leq \tilde{A}(t) \leq M, \quad |\tilde{B}(t)| \leq C_B e^{-gt}.$$

Folglich ist das Problem $(\tilde{P}_V)_1$ ein Problem der Klasse (P_V) aus Abschnitt 2.2.1. Durch Verwendung der speziellen Substitution $\tau = \omega(t)$ und $t = \Psi(\tau)$ lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz 6.2.1. *Problem $(P_V)_1$ und Problem $(\tilde{P}_V)_1$ sind äquivalent in folgendem Sinne:*

- (i) Ein Prozess (x, u) erfüllt die Zustandsgleichung (6.18) genau dann, wenn das Tupel (\tilde{x}, \tilde{u}) die Zustandsgleichung (2.14) erfüllt. Für den Anfangswert gilt $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.
- (ii) Für μ_1 , definiert durch $\mu_1(\tau) := \psi^{-1}(\tau) \cdot e^{-\varrho\Psi(\tau)}$, gehört ein zu $(P_V)_1$ zulässiger Prozess (x, u) genau dann dem Raum $W_2^1((0, 1), \mu_1) \times L_\infty((0, 1))$ an, wenn ein zu $(\tilde{P}_V)_1$ zulässiger Prozess (\tilde{x}, \tilde{u}) dem Raum $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu}) \times L_\infty((0, \infty))$ mit $\tilde{\mu}(t) = e^{-\varrho t}$ angehört. Es gilt $\varrho > M - g + |M + g|$.
- (iii) Für die Zielfunktionale aus den Aufgaben $(P_V)_1$ und $(\tilde{P}_V)_1$ gilt $J(x, u) = \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u})$.

Beweis:

- (i) Angenommen, das Tupel (x, u) erfülle die Zustandsgleichung (6.18), dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}x(\omega(t)) = \frac{d}{d\tau}[x(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)] \\ &= \left(A(\omega(t))x(\omega(t)) + B(\omega(t))u(\omega(t)) \right) \dot{\omega}(t) \\ &= \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}(t). \end{aligned}$$

Die Umkehrung ist leicht zu zeigen. Für den Anfangswert gilt $\tilde{x}(0) = x(\omega(0)) = x(0) = x_0$. Angenommen, die Funktion A genüge punktweise der Ungleichung in Voraussetzung 6.2.3, dann ist mit $\tilde{A}(t) := A(\omega(t))\dot{\omega}(t)$ die Abschätzung

$$m = m\psi(\omega(t))\dot{\omega}(t) \leq A(\omega(t))\dot{\omega}(t) \leq M\psi(\omega(t))\dot{\omega}(t) = M$$

richtig und es gilt $m \leq \tilde{A} \leq M$. Für die Funktion \tilde{B} gilt unter der Annahme, dass die Voraussetzung 6.2.3 erfüllt ist:

$$|\tilde{B}(t)| = |B(\omega(t))\dot{\omega}(t)| \leq C_B\psi(\omega(t))\kappa(\omega(t))\dot{\omega}(t) = C_B e^{-\varrho t}.$$

Das bedeutet, die Funktionen \tilde{A} und \tilde{B} genügen der Voraussetzung 2.2.3 an die Aufgabe (P_V) aus Abschnitt 2.2.1 genau dann, wenn die Funktionen A und B der Voraussetzung 6.2.3 genügen.

- (ii) Es sei $x \in W_2^1((0, 1), \mu_1)$, dann folgt unter Verwendung der Substitutionsregel aus Satz 6.6.10 aus dem Anhang A.4.:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt &= \int_0^\infty |\tilde{x}(t)|^2 \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt \\ &= \int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_2(\tau) d\tau < \infty \end{aligned}$$

und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \tilde{\mu}(t) dt &= \int_0^\infty |\dot{\tilde{x}}(t)|^2 \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt \\ &= \int_0^1 \left| x'(\tau) \frac{1}{\psi(\tau)} \right|^2 \mu_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \left| x'(\tau) \frac{1}{\psi(\tau)} \right|^2 \mu_1(\tau) \psi^2(\tau) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Die Umkehrung der Aussage folgt unmittelbar durch die Gleichungskette. Das die Funktion x genau dann eine verallgemeinerte Ableitung besitzt, wenn die Funktion \tilde{x} eine solche hat, folgt aus dem Satz 6.6.11 aus Anhang A.4..

- (iii) Das Zielfunktional berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \int_0^\infty \tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\mu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty r(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t))) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) dt \\ &= \int_0^1 r(\tau, x(\tau), u(\tau)) \mu_2(\tau) d\tau = J(x, u). \end{aligned}$$

Damit sind die Probleme $(P_V)_1$ und $(\tilde{P}_V)_1$ äquivalent im Sinne des Satzes 6.2.1. \square

Bemerkung 6.2.2. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Probleme $(\tilde{P}_V)_1$ und (P_V) identisch sind. Folglich haben wir das Problem $(P_V)_1$ in das Problem (P_V) überführt. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

6.2.4 Das Maximumprinzip für $(P_V)_1$

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie man ein Maximumprinzip für Steuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont erhalten kann, ohne die absolute Stetigkeit der Lösung vorauszusetzen. Nachdem wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, dass die Probleme $(P_V)_1$ und (P_V) äquivalent im Sinne von Satz 6.2.1 sind, können wir in diesem Abschnitt ein Maximumprinzip für Aufgaben der Klasse $(P_V)_1$ formulieren.

Für ein Problem der Klasse $(P_V)_1$ sei dabei zusätzlich zu den Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4 folgende Voraussetzung erfüllt:

Voraussetzung 6.2.5. Für die partiellen Ableitungen der Funktion r aus dem Integranden des Problems $(P_V)_1$ gelte für alle $(\tau, \xi, v) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |r_\xi(\tau, \xi, v)| &\leq A_{21}(\tau) + B_{21}(|\xi| + |v|e^{-g\Psi(\tau)}), \\ |r_v(\tau, \xi, v)| &\leq e^{-g\Psi(\tau)} \left(A_{22}(\tau) + B_{22}(|\xi| + |v|e^{-g\Psi(\tau)}) \right) \end{aligned}$$

mit Funktionen $A_{2i} \in L_2((0, 1), \mu_2)$, der Funktion μ_2 wie in Voraussetzung 6.2.4 und den positiven Konstanten B_{2i} .

Satz 6.2.2 (Maximumprinzip für $(P_V)_1$). *Die Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4 und 6.2.5 seien erfüllt und es sei (x^*, u^*) die optimale Lösung zu $(P_V)_1$ im Sinne des Kriteriums **L**. Dann existieren Multiplikatoren (λ_0, y) mit*

$$\lambda_0 = 1 \tag{N}_1,$$

$$y \in W_2^1((0, 1), \mu_2^{-1}) \cap L_2((0, 1), \mu_1^{-1}), \quad \left(\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 1} y(T) \cdot e^{-g\Psi(T)} = 0 \right), \tag{T}_1$$

$$H(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), y(\tau), \lambda_0) = \max_{v \in U} H(\tau, x^*(\tau), v, y(\tau), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } [0, 1), \tag{M}_1$$

$$y'(\tau) = -H_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), y(\tau), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } [0, 1), \tag{K}_1$$

wobei $H : [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Pontrjagininfunktion ist,

$$H(\tau, \xi, v, \eta, \lambda_0) := -\lambda_0 r(\tau, \xi, v) \mu_2(\tau) + \eta \left(A(\tau) \xi + B(\tau) v \right).$$

Beweis: Wir nutzen die im letzten Abschnitt bewiesene Äquivalenz der Aufgaben $(P_V)_1$ und $(\tilde{P}_V)_1$ sowie das Maximumprinzip aus Satz 2.2.2, welches sich auf das Problem $(\tilde{P}_V)_1$ anwenden lässt.

1. Die Funktion y möge der kanonischen Gleichung $(K)_1$ aus Satz 6.2.2 genügen. Dann gilt für die Pontrjaginfunktion zu Problem $(\tilde{P}_V)_1$:

$$\begin{aligned}
& -\tilde{H}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{y}(t), 1) \\
&= \tilde{r}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t))\tilde{\mu}(t) - \tilde{y}(t)\tilde{A}(t) \\
&= r_{\xi}(\omega(t), x^*(\omega(t)), u^*(\omega(t)))\mu_2(\omega(t))\dot{\omega}(t) - \tilde{y}(t)A(\omega(t))\dot{\omega}(t) \\
&= r_{\xi}(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))\mu_2(\tau)\psi^{-1}(\tau) - \tilde{y}(\Psi(\tau))A(\tau)\psi^{-1}(\tau) \\
&= \left(r_{\xi}(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))\mu_2(\tau) - y(\tau)A(\tau) \right) \psi^{-1}(\tau) \\
&\quad + A(\tau)\psi^{-1}(\tau) \left(y(\tau) - \tilde{y}(\Psi(\tau)) \right) \\
&= y'(\tau)\psi^{-1}(\tau) + A(\tau)\psi^{-1}(\tau) \left(y(\tau) - \tilde{y}(\Psi(\tau)) \right) \\
&= \frac{d}{dt}y(\omega(t)) + A(\omega(t))\dot{\omega}(t) \left(y(\omega(t)) - \tilde{y}(t) \right) \\
&= \dot{\tilde{y}}(t)
\end{aligned}$$

für $\tilde{y}(t) = y(\omega(t))$. Die Umkehrung lässt sich analog zeigen. Somit erfüllt die Funktion y genau dann die kanonische Gleichung $(K)_1$ aus Problem $(P_V)_1$, wenn die Funktion \tilde{y} mit $\tilde{y}(t) = y(\omega(t))$ die kanonische Gleichung (K_V) aus Problem (P_V) erfüllt.

2. Angenommen, das Paar $(1, y)$ erfüllt zusammen mit (x^*, u^*) die Maximumbedingung $(M)_1$ aus $(P_V)_1$, dann gilt mit $\tilde{y}(t) = y(\omega(t))$:

$$\begin{aligned}
& \max_{\tilde{v} \in U} \tilde{H}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{v}, \tilde{y}(t), 1) \\
&= \max_{\tilde{v} \in U} \left\{ -\tilde{r}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{v})\tilde{\mu}(t) + \tilde{y}(t) \left(\tilde{A}(t)\tilde{x}^*(t) + \tilde{B}(t)\tilde{v} \right) \right\} \\
&= \max_{\tilde{v} \in U} \left\{ -r(\omega(t), x^*(\omega(t)), \tilde{v})\mu_2(\omega(t))\dot{\omega}(t) \right. \\
&\quad \left. + y(\omega(t)) \left(A(\omega(t))\dot{\omega}(t)x^*(\omega(t)) + B(\omega(t))\dot{\omega}(t)\tilde{v} \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(\tau, x^*(\tau), v)\mu_2(\tau)\psi^{-1}(\tau) \right. \\
&\quad \left. + y(\tau) \left(A(\tau)\psi^{-1}(\tau)x^*(\tau) + B(\tau)\psi^{-1}(\tau)v \right) \right\} \\
&= \max_{v \in U} \left\{ -r(\tau, x^*(\tau), v)\mu_2(\tau) + y(\tau) \left(A(\tau)x^*(\tau) + B(\tau)v \right) \right\} \psi^{-1}(\tau) \\
&= \left\{ -r(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))\mu_2(\tau) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y(\tau)\left(A(\tau)x^*(\tau) + B(\tau)u^*(\tau)\right)\Big\}\psi^{-1}(\tau) \\
= & \left\{-r(\omega(t), x^*(\omega(t)), u^*(\omega(t)))\mu_2(\omega(t))\right. \\
& \left.+y(\omega(t))\left(A(\omega(t))x^*(\omega(t)) + B(\omega(t))u^*(\omega(t))\right)\right\}\dot{\omega}(t) \\
= & -\tilde{r}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t))\tilde{\mu}(t) + \tilde{y}(t)\left(\tilde{A}(t)\tilde{x}^*(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}^*(t)\right) \\
= & \tilde{H}(t, \tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{y}(t), 1).
\end{aligned}$$

Folglich erfüllt das Paar $(1, \tilde{y})$ zusammen mit $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$ die Maximumbedingung (M_V) aus (P_V) , falls das Tupel (x^*, u^*) zusammen mit $(1, y)$ die Bedingung $(M)_1$ aus $(P_V)_1$ erfüllt. Dies ist eine Äquivalenzrelation, also gilt die Umkehrung.

3. Angenommen, es gelte $y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-1})$ und $y' \in L_2((0, 1), \mu_2^{-1})$ und die Funktion y genüge der kanonischen Gleichung aus $(P_V)_1$, so folgt aufgrund der Definition der Funktionen ω und ψ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\tilde{y}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt &= \int_0^\infty |y(\omega(t))|^2 \mu_2^{-1}(\omega(t)) \dot{\omega}^{-1}(t) dt \\
&= \int_0^\infty |y(\omega(t))|^2 \dot{\omega}^{-2}(t) \mu_2^{-1}(\omega(t)) \dot{\omega}(t) dt \\
&= \int_0^1 |y(\tau)|^2 \dot{\omega}^{-2}(\Psi(\tau)) \mu_2^{-1}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^1 |y(\tau)|^2 \psi^2(\tau) \mu_2^{-1}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^1 |y(\tau)|^2 \mu_1^{-1}(\tau) d\tau < \infty.
\end{aligned}$$

Da hier nur äquivalente Umformungen gemacht wurden, gilt die Rückrichtung.

Wir nutzen die kanonische Gleichung $(K)_1$ und die Voraussetzungen 6.2.3 und 6.2.5. Es gilt per Definition:

$$y'(\tau) = -H_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), y(\tau), 1) = r_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))\mu_2(\tau) - y(\tau)A(\tau).$$

Mittels der Voraussetzung 6.2.3 setzen wir

$$|A(\tau)| \leq \max(|M|, |m|) \cdot \psi(\tau) =: C_A \psi(\tau)$$

und bestimmen damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y'(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau &= \int_0^1 |r_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \mu_2(\tau) - y(\tau) A(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau \\ &\leq 2 \int_0^1 |r_\xi(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \mu_2(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau + 2 \int_0^1 |y(\tau) A(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite ist aufgrund der Voraussetzung 6.2.5 endlich. Für den zweiten Term schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y(\tau) A(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau &\leq \int_0^1 |y(\tau) \cdot C_A \psi(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau \\ &= C_A \int_0^1 |y(\tau)|^2 \mu_1^{-1}(\tau) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $y' \in L_2((0, 1), \mu_2^{-1})$ gilt, falls $y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-1})$. Sei nun $y' \in L_2((0, 1), \mu_2^{-1})$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{\tilde{y}}(t)|^2 \tilde{\mu}^{-1}(t) dt &= \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} y(\omega(t)) \right|^2 \mu_2^{-1}(\omega(t)) \dot{\omega}^{-1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left| \frac{d}{d\tau} y(\omega(t)) \right|^2 \dot{\omega}^2(t) \mu_2^{-1}(\omega(t)) \dot{\omega}^{-1}(t) dt \\ &= \int_0^1 \left| \frac{d}{d\tau} y(\tau) \cdot \frac{1}{\psi(\tau)} \right|^2 \mu_2^{-1}(\tau) \dot{\omega}^{-1}(\Psi(\tau)) \psi(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 |y'(\tau)|^2 \mu_2^{-1}(\tau) d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Auch hier wurden lediglich äquivalente Umformungen verwendet, weshalb die Rückrichtung ebenfalls gilt. Das bedeutet, dass jede Funktion y mit $y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-1})$ und $y' \in L_2((0, 1), \mu_2^{-1})$ genau dann der kanonischen Gleichung $(K)_1$ genügt, wenn die Funktion $\tilde{y} \in W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu})$ die kanonische Gleichung (K_V) aus Problem (P_V) erfüllt. Betrachten wir die Transversalitätsbedingung, so kann man wegen $\tilde{y}(t)e^{-gt} = y(\omega(t))e^{-gt} = y(\tau)e^{-g\Psi(\tau)}$ auf die Gültigkeit der behaupteten Transversalitätsbedingung schließen.

4. Angenommen, die Funktion r aus dem Problem $(P_V)_1$ erfülle die Voraussetzung 6.2.5, dann gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_{\tilde{\xi}}(t, \tilde{\xi}, \tilde{v})| \tilde{\mu}(t) &= |r_\xi(\omega(t), \xi, v)| \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) = |r_\xi(\tau, \xi, v)| \mu_2(\tau) \psi^{-1}(\tau) \\ &\leq \left(A_{21}(\tau) + B_{21}(|\xi| + |v| e^{-g\Psi(\tau)}) \right) \mu_2(\tau) \psi^{-1}(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(A_{21}(\omega(t)) + B_{21}(|\xi| + |v|e^{-gt}) \right) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) \\
&= \tilde{A}_{21}(t) \tilde{\mu}(t) + B_{21} \tilde{\mu}(t) (|\xi| + |v|e^{-gt}).
\end{aligned}$$

Für den 2. Teil der Voraussetzung bestimmen wir

$$\begin{aligned}
|\tilde{r}_{\tilde{v}}(t, \tilde{\xi}, \tilde{v})| \tilde{\mu}(t) &= |r_v(\omega(t), \xi, v)| \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) = |r_v(\tau, \xi, v)| \mu_2(\tau) \psi^{-1}(\tau) \\
&\leq e^{-g\Psi(\tau)} \left(A_{22}(\tau) + B_{22}(|\xi| + |v|e^{-g\Psi(\tau)}) \right) \mu_2(\tau) \psi^{-1}(\tau) \\
&= e^{-gt} \left(A_{22}(\omega(t)) + B_{22}(|\xi| + |v|e^{-gt}) \right) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) \\
&= e^{-gt} \left(\tilde{A}_{22}(t) \tilde{\mu}(t) + B_{22} \tilde{\mu}(t) (|\xi| + |v|e^{-gt}) \right)
\end{aligned}$$

mit Funktionen $\tilde{A}_{2i} \in L_2((0, \infty), \tilde{\mu})$, $\tilde{A}_{2i} := A_{2i}(\omega(t))$:

$$\int_0^\infty \tilde{A}_{2i}^2(t) \tilde{\mu}(t) dt = \int_0^\infty A_{2i}^2(\omega(t)) \mu_2(\omega(t)) \dot{\omega}(t) dt = \int_0^1 A_{2i}^2(\tau) \mu_2(\tau) d\tau < \infty.$$

Beide Umformungen sind äquivalente Umformungen, deshalb gilt auch die Umkehrung. Damit haben wir bewiesen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes 6.2.2 für das Problem $(P_V)_1$ die Voraussetzungen des Satzes 2.2.2 für das Problem (P_V) erfüllt sind. Die Äquivalenz der Aufgaben und der Voraussetzungen beweist die Gültigkeit des Maximumprinzips 6.2.2 für $(P_V)_1$. \square

Bemerkung 6.2.3. Aufgrund der Definition der Gewichtsfunktionen μ_1 und μ_2 lässt sich leicht $L_2((0, 1), \mu_1^{-1}) \subset L_2((0, 1), \mu_2^{-1})$ und somit

$$y \in W_2^1((0, 1), \mu_2^{-1})$$

zeigen. Für den Beweis der Äquivalenz der Voraussetzungen ist allerdings die explizite Forderung $y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-1})$ notwendig.

6.2.5 Die Existenz einer Lösung zu $(P_V)_1$

Wir haben gezeigt, dass sich Probleme der Klasse $(P_V)_1$ mittels geeigneter Transformation in Aufgaben der Klasse (P_V) überführen lassen. Für Letztere wissen wir mittels Satz 2.2.3, dass wir die Existenz einer Lösung zu Problem (P_V) sichern können, wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen 2.2.5 bis 2.2.8 der Integrand der Ungleichung

$$|\tilde{r}(t, \tilde{\xi}, \tilde{v})| \tilde{\mu}(t) \leq \tilde{A}_1(t) + \tilde{B}_1 \tilde{\mu}(t) (|\tilde{\xi}|^2 + |\tilde{v}e^{-gt}|^2)$$

mit $\tilde{\mu}(t) = e^{-gt}$, $\varrho > M - g + |M + g|$, einer Funktion $\tilde{A}_1 \in L_1((0, \infty))$ und einer positiven Konstanten \tilde{B}_1 genügt.

Unter Verwendung der Transformation aus Abschnitt 6.2.3 folgt aus der bewiesenen Äquivalenz der Aufgaben, dass der Integrand des Problems $(P_V)_1$ zusätzlich zu der Voraussetzung 6.2.5 folgende Voraussetzung erfüllen muss, um die Existenz einer Lösung sichern zu können.

Voraussetzung 6.2.6. Der Integrand $r \cdot \mu_2$ aus dem Problem $(P_V)_1$ genüge für alle $(\tau, \xi, v) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Abschätzung

$$|r(\tau, \xi, v)|\mu_2(\tau) \leq A_1(\tau) + B_1\mu_2(\tau)\left(|\xi|^2 + |v\kappa(\tau)|^2\right)$$

mit einer Funktion $A_1 \in L_1((0, 1))$ und einer positiven Konstanten B_1 .

Satz 6.2.3. Die Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4, der zweite Teil der Voraussetzung 6.2.5 an die Ableitung des Integranden bezüglich v und die Voraussetzung 6.2.6 seien erfüllt. Der zulässige Bereich sei nichtleer. Dann besitzt das Steuerungsproblem $(P_V)_1$ eine Lösung.

Beweis: Die Äquivalenz der Voraussetzungen 6.2.1 bis 6.2.4 und 6.2.5 wurde bereits im letzten Abschnitt gezeigt. Es bleibt zu prüfen, dass die Voraussetzung 6.2.6 genau dann erfüllt ist, wenn die Voraussetzung 2.2.9 erfüllt ist. Angenommen, die Voraussetzung 6.2.6 sei für das Problem $(P_V)_1$ erfüllt. Dann folgt mit $\tilde{A}_1(t) := A_1(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{r}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\tilde{\mu}(t)| &= |r(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t)))\mu_2(\omega(t))\dot{\omega}(t)| \\ &= |r(\tau, x(\tau), u(\tau))\mu_2(\tau)\psi^{-1}(\tau)| \\ &\leq \left[A_1(\tau) + B_1\mu_2(\tau)\left(|x(\tau)|^2 + |u(\tau)\kappa(\tau)|^2\right) \right] \psi^{-1}(\tau) \\ &= \left[A_1(\omega(t)) + B_1\mu_2(\omega(t))\left(|x(\omega(t))|^2 + |u(\omega(t))e^{-gt}|^2\right) \right] \dot{\omega}(t) \\ &= \tilde{A}_1(t) + B_1\tilde{\mu}(t)\left(|\tilde{x}(t)|^2 + |\tilde{u}(t)e^{-gt}|^2\right). \end{aligned}$$

Es gilt $\tilde{A}_1 \in L_1((0, \infty))$:

$$\int_0^\infty \tilde{A}_1(t)dt = \int_0^\infty A_1(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)dt = \int_0^1 A_1(\tau)d\tau < \infty.$$

Das bedeutet, die Voraussetzung 2.2.9 ist für das Problem (P_V) erfüllt, wenn die Voraussetzung 6.2.6 zu dem Problem $(P_V)_1$ erfüllt ist. Die Umkehrung der Abschätzung lässt sich analog zeigen. Folglich hat das Steuerungsproblem $(P_V)_1$ genau dann eine Lösung, wenn das Steuerungsproblem (P_V) eine Lösung besitzt. \square

Über den Umweg über Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont ist es gelungen, auf ziemlich einfache Weise ein Maximumprinzip und einen Existenzsatz zu erhalten, deren Voraussetzungen bei beiden Sätzen leicht zu verifizieren sind. Die Frage nach der Existenz einer absolut stetigen Lösung lässt sich anhand der Daten der Aufgabe leicht beantworten. Desweiteren wurde das Maximumprinzip für genau die gleiche Funktionenklasse definiert, wie der Existenzsatz. Das Problem, zwar die Existenz einer Lösung nachweisen zu können, aber den Kandidaten für die Lösung nicht aus den notwendigen Bedingungen gewinnen zu dürfen, besteht somit nicht.

6.3 Historische Anmerkungen

Die Idee, ein Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont, statt durch Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ eines Steuerungsproblems mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$ mittels einer Transformation der Zeit zu betrachten, ist nicht neu. So bemerken beispielsweise ASEEV&KRYAZHIMSKIY [4], dass man ein Steuerungsproblem transformieren kann, jedoch nicht zwangsläufig bei der klassischen Aufgabenstellung landet. Sie weisen darauf hin, dass eine Transformation der Zeit auf Singularitäten im Integranden und der Zustandsgleichung führen und somit nicht mit Methoden der klassischen Steuerungstheorie (vgl. [28], [47]) behandelt werden können. Vor allem in Arbeiten zum numerischen Umgang mit Steuerungsproblemen auf unendlichem Zeithorizont tauchen mehrere Vorschläge zur Transformation auf endlichen Zeithorizont auf. So nutzen beispielsweise EFFATI&KAMYAD&KAMYABI-GOL [17] die Transformation $t = \tan(\frac{\pi}{2}\tau)$ und WÜRTH [58] nutzt $\frac{\tau}{1-\tau}$, um ein Steuerungsproblem auf endlichen Zeithorizont zu transformieren und anschließend zu diskretisieren. Letztgenannte Transformation nutzen auch FAHROO&ROSS [19] und wenden auf das transformierte Problem eine Pseudospektralmethode an. Die Autoren GARG&HAGER&RAO [23] untersuchen anhand einer Beispielaufgabe die Transformationen⁴ $\frac{\tau}{1-\tau}$, $-\ln(1-\tau)$ und $-2\ln(1-\tau)$ und

⁴In der angegebenen Quelle wird auf das Intervall $[-1, 1)$ transformiert, die Funktionen wurden zur Lesbarkeit an die vorliegende Arbeit angepasst.

deren Wirkung auf die Konvergenz der verwendeten Pseudospektralmethode.

6.4 Auswertung der Resultate

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate des Kapitels zusammenfassen. Als Erstes untersuchen wir zwei Beispiele mit Dynamiken, die bezüglich Variablen τ unstetig sind. Wir erinnern uns an die Beispiele von Hilbert und von Weierstraß am Anfang dieses Kapitels. Diese sind als Variationsprobleme gestellt. Der Steuerbereich ist nicht kompakt und die Beispiele beinhalten sowohl Anfangs- als auch Endwerte. Deshalb können wir die in dieser Arbeit verwendete Theorie nicht anwenden. Wir formulieren aber zwei Beispiele, die das gleiche Problem präsentieren, nämlich die Unstetigkeit der Lösung. Wir werden den Raum, in welchem die Lösung liegen soll, nicht vorgeben, sondern wie in der gesamten Arbeit⁵ natürliche Gewichte der Aufgaben bestimmen.

Beispiel 13. Wir betrachten das Steuerungsproblem

$$(A) \quad \int_0^1 u_A(\tau)(1-\tau)^{\beta_A} d\tau \rightarrow \min!$$

$$x'_A(\tau) = \frac{1}{1-\tau} x_A(\tau) + \frac{1}{1-\tau} u_A(\tau),$$

$$x_A(0) = 1, \quad u_A(\tau) \in [0, 1].$$

Für die Konstante β_A gelte $\beta_A > 0$. Setzen wir $\psi(\tau) = \frac{1}{1-\tau}$, so ist dies ein Problem der Klasse $(P_V)_1$. Dann ist $A(\tau) \leq M\psi(\tau) = 1 \cdot \psi(\tau)$ für $M = 1$ erfüllt. Wir bestimmen $\Psi(\tau) = -\ln(1-\tau)$. Die Voraussetzung $B(\tau) \leq C_B \kappa(\tau) \psi(\tau)$ ist für $C_B = 1$ und mit $\kappa(\tau) = 1$ erfüllt. Daraus folgt $g = 0$. Ein natürliches Gewicht der Aufgabe (A) ergibt sich aus $\varrho > M - g + |M + g| = 2$ zu

$$\mu_1(\tau) = \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho \Psi(\tau)} = (1-\tau)^{1+\varrho}, \quad \varrho > 2.$$

Das bedeutet, dass jeder zu (A) zulässige Zustand x_A dem Raum $W_2^1((0, 1), \mu_1)$ angehört.

Man kann leicht prüfen, dass alle Voraussetzungen des Maximumprinzips zu $(P_V)_1$ und des Existenzsatzes erfüllt sind. Die Auswertung der notwendigen Bedingungen liefert

$$x_A^*(\tau) = \frac{1}{1-\tau}, \quad u_A^*(\tau) \equiv 0, \quad y_A(\tau) = c_1(1-\tau).$$

⁵erstmalig definiert für die Aufgabe (P) in Abschnitt 1.3.2

Wir prüfen nach, dass

$$\int_0^1 |x_A^*(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau = \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau)^2} (1-\tau)^{1+\varrho} d\tau < \infty,$$

für $\varrho > 2$. Für die Ableitung der Funktion x_A^* lässt sich dies ebenso zeigen. Wir sehen, dass die Lösung keine absolut stetige Funktion ist. Sie ist nicht einmal stetig.

Betrachten wir nun ein ähnliches Beispiel:

Beispiel 14.

$$\begin{aligned} (B) \quad & \int_0^1 u_B(\tau)(1-\tau)^{\beta_B} d\tau \rightarrow \min! \\ x_B'(\tau) &= \frac{-1}{1-\tau} x_B(\tau) + (1-\tau)u_B(\tau), \\ x_B(0) &= 1, \quad u_B(\tau) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Für die Konstante β_B gelte $\beta_B > 0$. Setzen wir $\psi(\tau) = \frac{1}{1-\tau}$, so ist dies ebenfalls ein Problem der Klasse $(P_V)_1$. Wir bestimmen $\Psi(\tau) = -\ln(1-\tau)$. Dann ist die Voraussetzung $A(\tau) \leq M\psi(\tau) = -1 \cdot \psi(\tau)$ für $M = -1$ erfüllt. Die Voraussetzung $B(\tau) \leq C_B \kappa(\tau) \psi(\tau)$ ist für $C_B = 1$ und $\kappa(\tau) := e^{-g\Psi(\tau)} = (1-\tau)^2$ erfüllt. Daraus folgt $g = 2$. Ein natürliches Gewicht der Aufgabe (B) ergibt sich aus $\varrho > M - g + |M + g| = -1 - 2 + |-1 + 2| = -2$ zu

$$\mu_1(\tau) = \psi^{-1}(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} = (1-\tau)^{1+\varrho}, \quad \varrho > -2.$$

Das bedeutet, dass jeder zu (B) zulässige Zustand x_B dem Raum $W_2^1((0, 1), \mu_1)$ angehört.

Man prüft leicht nach, dass alle Voraussetzungen des Maximumprinzips zu $(P_V)_1$ und des Existenzsatzes erfüllt sind. Auch in diesem Beispiel kann die Lösung mittels des Maximumprinzips gefunden werden. Es ist

$$x_B^*(\tau) = 1 - \tau, \quad u_B^*(\tau) \equiv 0, \quad y_B(\tau) = c_2(1-\tau)^{-1}.$$

Die Maximumbedingung liefert $c_2 > 1$. Die Lösung x_B^* ist eine absolut stetige Funktion, die Adjungierte hingegen nicht.

Obwohl beide rechten Seiten der Dynamiken nicht auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetig bezüglich der ersten Variablen sind, besitzt die

Aufgabe (B) im Gegensatz zu Aufgabe (A) eine absolut stetige Lösung. Betrachten wir die Transversalitätsbedingung

$$\lim_{T \rightarrow 1} y(T) \cdot e^{-g\Psi(T)} = 0.$$

Für die Aufgaben (A) und (B), welchen unterschiedliche Gewichtsfunktionen zugeordnet sind, bedeutet das

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 1} y_A(T)(1-T)^0 &= y_A(T) = 0, \\ \lim_{T \rightarrow 1} y_B(T)(1-T)^2 &= y_B(T)(1-T)^2 = 0, \end{aligned}$$

wogegen die klassische Transversalitätsbedingung $\lim_{T \rightarrow 1} y(T) = 0$ in der Aufgabe (B) nicht gilt.

Bemerkung 6.4.1. Es ist leicht nachzuprüfen, dass sich durch die Multiplikation einer Funktion Ψ mit einem positiven Faktor wiederum eine Funktion $\tilde{\Psi}$ ergibt, die der Definition 6.1.1 genügt. Das lässt vermuten, dass das AbleSEN der Größen M , g und ψ nicht eindeutig ist. In der Tat kann man für eine gegebene Dynamik

$$x'(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)$$

die Voraussetzung $A(\tau) \leq M\psi(\tau)$ auch als $A(\tau) \leq \tilde{M} \cdot \tilde{\psi}(\tau)$ formulieren, falls wir $\tilde{\psi}(\tau) := \frac{M}{\tilde{M}}\psi(\tau)$ definieren, wobei $\tilde{M} := \text{sign } M$ gilt. Die nun mit einer Funktion $\tilde{\kappa}$ formulierte Voraussetzung an die Funktion B lautet

$$|B(\tau)| \leq \tilde{c}_1 \tilde{\kappa}(\tau) \tilde{\psi}(\tau) = \tilde{c}_1 e^{-\tilde{g}\tilde{\Psi}(\tau)} \tilde{\psi}(\tau) = \tilde{c}_1 e^{-\tilde{g}\frac{M}{\tilde{M}}\Psi(\tau)} \frac{M}{\tilde{M}} \psi(\tau).$$

Falls die Funktion B der Voraussetzung $|B(\tau)| \leq c_1 \kappa(\tau) \psi(\tau)$ genügt, kann man $\tilde{g} = g \frac{\tilde{M}}{M}$ ablesen. Für das natürliche Gewicht $\tilde{\mu}_1$ mit $\tilde{\mu}_1(\tau) = \tilde{\psi}^{-1}(\tau) e^{-\tilde{g}\tilde{\Psi}(\tau)}$ und $\tilde{g} > \tilde{M} - \tilde{g} + |\tilde{M} + \tilde{g}|$ bestimmen wir

$$\begin{aligned} \tilde{M} - \tilde{g} + |\tilde{M} + \tilde{g}| &= \tilde{M} - \frac{\tilde{M}}{M}g + |\tilde{M} + \frac{\tilde{M}}{M}g| \\ &= \tilde{M} - \frac{\tilde{M}}{M}g + \frac{\tilde{M}}{M}|M + g| \\ &= \frac{\tilde{M}}{M} \cdot (M - g + |M + g|). \end{aligned}$$

und schließlich

$$\tilde{\mu}_1(\tau) = \tilde{\psi}^{-1}(\tau)e^{-\tilde{\varrho}\tilde{\Psi}(\tau)} = \frac{\tilde{M}}{M}\psi^{-1}(\tau)e^{-\tilde{\varrho}\frac{M}{M}\Psi(\tau)}.$$

Wegen $\tilde{\varrho} > \frac{\tilde{M}}{M} \cdot (M - g + |M + g|)$ folgt, dass sich die Gewichte μ_1 und $\tilde{\mu}_1$ lediglich um eine Konstante unterscheiden. Führt man diese Überlegung analog für das Gewicht μ_2 durch, erhält man offensichtlich ein ähnliches Resultat. Folglich spielt es keine Rolle, wie die Größen M und ψ gewählt werden. Entscheidend ist nur, dass $A(\tau) \leq M\psi(\tau)$ mit $M \in \mathbb{R}$ und der Funktion ψ aus der Definition 6.1.1 gilt.

Fassen wir noch einmal die Ergebnisse des letzten Kapitels zusammen: Wir betrachten das Steuerungsproblem $(P_V)_1$. Dann gilt für jede zu dem Problem $(P_V)_1$ zulässige Funktion x :

$$x \in L_2((0, 1), \mu_2) \subset L_2((0, 1), \mu_1), \quad x' \in L_2((0, 1), \mu_1).$$

Wir erinnern uns, dass

$$\mu_1(\tau) = \psi^{-1}(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}, \quad \mu_2(\tau) = \psi(\tau)e^{-\varrho\Psi(\tau)}$$

mit $\varrho > M - g + |M + g|$, $\kappa(\tau) := e^{-g\Psi(\tau)}$ und $\Psi(\tau) := \int_0^\tau \psi(s)ds$. Die Funktion ψ genüge nach wie vor der Definition 6.1.1. Im Folgenden werden wir untersuchen, wann alle zulässigen Funktionen x und somit auch, im Falle der Existenz einer Lösung, die Funktion x^* absolut stetig sind. Wir schätzen mittels Hölderscher Ungleichung ab:

$$\int_0^1 |x(\tau)|d\tau \leq \left(\int_0^1 |x(\tau)|^2 \mu_1(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 \mu_1^{-1}(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

falls μ_1^{-1} integrierbar ist. Es ist

$$\int_0^1 \mu_1^{-1}(\tau) d\tau = \int_0^1 \psi(\tau)e^{\varrho\Psi(\tau)} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho} (e^{\varrho(\Psi(1-\varepsilon))} - 1),$$

was offensichtlich für jedes $\varrho < 0$ erfüllt ist.

Für die Ableitung x' der Funktion x ist die Abschätzung offensichtlich gleich. Das bedeutet, dass wir für Aufgaben der Klasse $(P_V)_1$ im Falle der Existenz

einer Lösung sichern können, dass diese Lösung eine absolut stetige Funktion ist, falls $\varrho < 0$. Es gilt

$$x \in W_1^1((0, 1)), \quad \text{für } \varrho < 0,$$

unabhängig von der Wahl der gemäß Definition 6.1.1 verwendeten Funktion ψ . Das Auswerten der Ungleichungskette $0 > \varrho > M - g + |M + g|$ liefert

$$M < 0 \quad \wedge \quad g > 0.$$

Das bedeutet, dass man anhand der gegebenen Größen M und g ablesen kann, ob das Problem eine absolut stetige Lösung besitzt. Für das Beispiel (A) mit $M = 1$ und $g = 0$ können wir dies nicht sichern, für das Beispiel (B) mit $M = -1$ und $g = 2$ hingegen gilt für jede zulässige Funktion $x \in W_1^1((0, 1))$. Für die duale Funktion y zu dem Problem $(P_V)_1$ folgt wegen

$$y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-1}), \quad y \in L_2((0, 1), \mu_1^{-2})$$

durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $y \in W_1^1((0, 1))$ genau dann gilt, wenn $\varrho > 0$. Anhand der Transversalitätsbedingung $y(T) \cdot e^{-g\Psi(T)} = 0$ liest man ab, dass für $g \leq 0$ die klassische Transversalitätsbedingung gilt. Das bedeutet, dass unter den für das Problem $(P_V)_1$ getroffenen Annahmen nicht gesichert werden kann, dass die Funktionen x und y gleichzeitig Elemente des ungewichteten Raumes W_1^1 sind. Nichtsdestotrotz haben wir ein Maximumprinzip und einen Existenzsatz bewiesen, der die Stetigkeit der Funktionen x und y nicht voraussetzt und eine Transversalitätsbedingung enthält. Angenommen, es gelte $\varrho < 0$. Dann gilt $x \in W_1^1((0, 1))$. Betrachten wir das Produkt $y \cdot e^{-g\Psi}$, so erhält man unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung:

$$\int_0^1 |y(\tau) \cdot e^{-g\Psi(\tau)}| d\tau \leq \left(\int_0^1 y^2(\tau) \mu_2^{-1}(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 \mu_2(\tau) \cdot e^{-2g\Psi(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist aufgrund der bewiesenen Raumzugehörigkeit der Funktion y endlich. Der zweite Ausdruck enthält den Integranden

$$\mu_2(\tau) \cdot e^{-2g\Psi(\tau)} = \psi(\tau) e^{-\varrho\Psi(\tau)} \cdot e^{-2g\Psi(\tau)}.$$

Um diesen abzuschätzen, betrachten wir die Ungleichungskette

$$0 > \varrho > M - g + |M + g|.$$

Für $M > -g$ folgt sofort $\varrho > 2M > -2g$, also ist der zweite Ausdruck endlich. Für $M < -g$ folgt $\varrho > -2g$, also ebenfalls die Endlichkeit des 2. Ausdrucks. Zusammenfassend gilt für $\varrho < 0$

$$x \in W_1^1(0,1), \quad y \cdot e^{-g\Psi} \in W_1^1(0,1).$$

Gilt für ein gegebenes Problem $\varrho > 0$, so können wir den letzten Schluss nicht ziehen. Wie dieses Problem behoben werden kann, werden wir im nächsten Abschnitt erläutern.

6.5 Die Verknüpfung von Transformationen

Die Grundlage für die Transformation eines Steuerungsproblems über endlichem Zeithorizont zu einem Problem über unendlichem Zeithorizont bildet die Funktion Ψ . Wiederholend halten wir fest, dass diese Funktion folgende Eigenschaften haben soll⁶: Die Funktion $\Psi : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sei bijektiv. Desweiteren gelte

$$\Psi(\tau) = \int_0^\tau \psi(\eta) d\eta, \quad \psi(\tau) \geq c_0 > 0, \quad \psi'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0,1).$$

Bemerkung 6.5.1. Die Forderung der strengen Konvexität war für das letzte Kapitel nicht notwendig, spielt aber im Folgenden eine wichtige Rolle.

Als Beispiele nennen wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \Psi_A(\tau) &= -\ln(1-\tau), \\ \Psi_B(\tau) &= \frac{\tau}{1-\tau} \\ \Psi_C(\tau) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}\tau\right). \end{aligned}$$

Für ein gegebenes Steuerungsproblem muss man sich in Abhängigkeit der Daten der Aufgabe eine Funktion Ψ sinnvoll wählen. Weitere mögliche Transformationen kann man mit nachfolgenden Lemmata konstruieren.

Lemma 6.5.1. Gegeben sei eine streng konvexe Funktion Ψ_1 , die der Definition 6.1.1 genügt. Dann genügen die Funktionen Ψ_{i+1} , vermöge

$$\Psi_{i+1}(\tau) := \psi_i(\tau) \cdot \tau, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \tau \in [0,1)$$

ebenfalls der Definition 6.1.1.

⁶siehe Definition 6.1.1

Beweis: Der Beweis basiert auf der Methode der vollständigen Induktion. Wir vermerken in jedem Schritt die Eigenschaft der Funktion Ψ_i und notieren die Schlussfolgerung für die Funktion Ψ_{i+1} . Die Existenz einer Funktion Ψ_1 , welche alle geforderten Eigenschaften besitzt, ist offensichtlich.

Wegen $\Psi_i(0) = 0$ gilt $\Psi_{i+1}(0) = \psi_i(0) \cdot 0 = 0$.

Die strenge Monotonie: Für die Ableitung der Funktion Ψ_{i+1} gilt

$$\psi_{i+1}(\tau) = \psi'_i(\tau) \cdot \tau + \psi_i(\tau) > 0 + c_0.$$

Der Grenzwert $\tau \rightarrow 1$: Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung existiert für jedes $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1)$ ein $\eta = \lambda\tau_1 + (1 - \lambda)\tau_2, \lambda \in [0, 1]$ mit

$$\frac{\Psi_i(\tau_2) - \Psi_i(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} = \psi_i(\eta).$$

Setzen wir speziell $\tau_1 = 0$, so erhalten wir

$$\frac{\Psi_i(\tau_2)}{\tau_2} = \psi_i(\tilde{\eta}).$$

Da wir wissen, dass nach Voraussetzung

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 1} \frac{\Psi_i(\tau_2)}{\tau_2} = \infty$$

gilt, folgt unmittelbar

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \psi_i(\tau) = \infty.$$

Nach Definition der Funktion Ψ_{i+1} folgt daraus sofort

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \Psi_{i+1}(\tau) = \infty.$$

Konvexität: Wir müssen zeigen, dass die Funktion ψ_{i+1} streng monoton wachsend ist. Es gilt für $\tau_1 < \tau_2$ beliebig aus dem Intervall $[0, 1)$:

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}(\tau_2) - \psi_{i+1}(\tau_1) &= \Psi'_{i+1}(\tau_2) - \Psi'_{i+1}(\tau_1) \\ &= \psi'_i(\tau_2)\tau_2 + \psi_i(\tau_2) - \psi'_i(\tau_1)\tau_1 - \psi_i(\tau_1) \\ &> \psi'_i(\tau_2)\tau_1 - \psi'_i(\tau_1)\tau_1 + \psi_i(\tau_2) - \psi_i(\tau_1) \\ &> \psi'_i(\tau_2)\tau_1 - \psi'_i(\tau_1)\tau_1 + 0 > 0. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Beispiel 15. Wählt man die Funktion $\Psi_1(\tau) = -\ln(1 - \tau)$, so erhält man $\Psi_2(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau}$ und $\Psi_3(\tau) = \frac{\tau}{(1-\tau)^2}$.

Eine weitere Möglichkeit der Konstruktion liefert folgendes Lemma:

Lemma 6.5.2. Gegeben sei eine Funktion Ψ_1 , die den Voraussetzungen der Definition 6.1.1 genügt. Dann genügen die Funktionen Ψ_{i+1} , vermöge

$$\Psi_{i+1}(\tau) := e^{\Psi_i(\tau)} - 1, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \tau \in [0, 1)$$

ebenfalls der Definition 6.1.1.

Beweis: Wir bestimmen $\Psi_{i+1}(0) = e^{\Psi_i(0)} \cdot 0 = 0$ und $\lim_{\tau \rightarrow 1} \Psi_{i+1}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 1} e^{\Psi_i(\tau)} - 1 = \infty$. Desweiteren gilt

$$\frac{d}{d\tau} \Psi_{i+1}(\tau) = \frac{d}{d\tau} e^{\Psi_i(\tau)} - 1 = \psi_i(\tau) \cdot e^{\Psi_i(\tau)} > c_0 \cdot 1 > 0.$$

Die Konvexität überprüfen wir mittels

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Psi_{i+1}(\tau) = \psi_i'(\tau) \cdot e^{\Psi_i(\tau)} + \psi_i^2(\tau) \cdot e^{\Psi_i(\tau)} > 0 + c_0^2 > 0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Beispiel 16. Wählt man die Funktion $\Psi_1(\tau) = -\ln(1 - \tau)$, so erhält man $\Psi_2(\tau) = \frac{\tau}{(1-\tau)}$ und $\Psi_3(\tau) = e^{\frac{\tau}{1-\tau}} - 1$.

Nachdem wir nun zwei Möglichkeiten vorgestellt haben, Transformationen zu erzeugen, wollen wir diese miteinander verknüpfen. Hierfür benötigen wir folgende Lemmata:

Lemma 6.5.3. Die Folge Ψ_i , definiert durch Lemma 6.5.1, ist monoton wachsend. Das heißt

$$\Psi_i(\tau) \leq \Psi_{i+1}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, 1), i \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und der Monotonie und Konvexität der Funktionen Ψ_i folgt die Existenz eines Mittelwertes $\hat{\tau} \in [0, \tau)$, sodass

$$\Psi_i(\tau) = \int_0^\tau \psi_i(\eta) d\eta = \psi_i(\hat{\tau}) \cdot \tau \leq \psi_i(\tau) \cdot \tau = \Psi_{i+1}(\tau).$$

Lemma 6.5.4. Die Folge Ψ_i , definiert durch Lemma 6.5.2, ist monoton wachsend. Das heißt

$$\Psi_i(\tau) \leq \Psi_{i+1}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, 1], i \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

$$\Psi_{i+1}(\tau) = e^{\Psi_i(\tau)} - 1 \geq \Psi_i(\tau) + 1 - 1 = \Psi_i(\tau).$$

Folglich ist die Folge monoton wachsend. \square

Bemerkung 6.5.2. Die Multiplikation einer konvexen Funktion Ψ_i , die der Definition 6.1.1 genügt, mit einem Faktor $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$ liefert offensichtlich ebenfalls eine Transformation, die der Definition 6.1.1 genügt.

Wir haben nun einerseits Möglichkeiten, Transformationen $\Psi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ gemäß Definition 6.1.1 zu konstruieren, andererseits erhalten wir durch Verknüpfung zweier solcher Transformationen die Möglichkeit, Integranden zu modifizieren. Wir definieren die Funktion $\Phi_{k,i} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ durch

$$\Phi_{k,i}(\tau) := (\Psi_k^{-1} \circ \Psi_i)(\tau) = \Psi_k^{-1}(\Psi_i(\tau)), \quad \Phi'_{k,i}(\tau) = \frac{\psi_i(\tau)}{\psi_k(\Phi_{k,i}(\tau))},$$

mit konvexen Funktionen Ψ_i , die der Definition 6.1.1 genügen.

Beispiel 17. Unter Verwendung der Funktionen

$$\Psi_1(\tau) = -\ln(1 - \tau), \quad \Psi_2(\tau) = \frac{\tau}{1 - \tau}$$

ergeben sich die Funktionen

$$\Phi_{1,2}(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{1-\tau}} \quad \Phi_{2,1}(\tau) = \frac{-\ln(1 - \tau)}{1 - \ln(1 - \tau)}$$

Beispiel 18. Wählen wir $\Psi_\alpha(\tau) := -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \tau)$ und $\Psi_1(\tau) := -\ln(1 - \tau)$, $\alpha > 0$, so ergibt sich

$$\Phi_{\alpha,1}(\tau) := \Psi_\alpha^{-1}(\Psi_1(\tau)) = 1 - (1 - \tau)^\alpha.$$

Betrachten wir nun einen beliebigen Integranden $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, der auf der halboffenen Menge $[0, 1)$ stetig und summierbar ist. Wir nehmen an, f habe an der Stelle $\tau = 1$ eine Singularität. Dann ergibt sich nach Anwenden der Substitutionsregel

$$\int_0^1 f(s) ds = \int_0^1 f(\Phi_{k,i}(\tau)) \Phi'_{k,i}(\tau) d\tau.$$

Der neue Integrand ist offensichtlich durch eine positive Konstante c beschränkt, falls

$$|f(\Phi_{k,i}(\tau))| \leq c \cdot \Phi'_{k,i}(\tau).$$

Unter Verwendung der Definition der eingehenden Größen lässt sich diese Ungleichung leichter formulieren als:

$$|f(s)| \leq c \cdot \Phi'_{i,k}(s).$$

Selbstredend bleibt die Singularität im Allgemeinen erhalten, aber man kann mittels einer für die Funktion f geeigneten Funktion Φ die Singularität in eine hebbare Singularität transformieren, sodass die verkettete Funktion $f \circ \Phi$ auf das Intervall $[0, 1]$ stetig fortgesetzt werden kann.

Beispiel 19. Betrachten wir die Funktion $\Phi_{\alpha,1}(\tau) := \Psi_{\alpha}^{-1}(\Psi_1(\tau)) = 1 - (1 - \tau)^{\alpha}$, so ergibt das die Ungleichung

$$|f(\Phi_{\alpha,1}(\tau))| \leq c \frac{1}{\alpha} (1 - \tau)^{1-\alpha}$$

beziehungsweise unter Verwendung der Umkehrfunktion $\Phi_{1,\alpha}$:

$$|f(s)| \leq c \frac{1}{\alpha} (1 - s)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Ist eine der äquivalenten Ungleichungen erfüllt, liefert die mittels der Funktion $\Phi_{\alpha,1}$ transformierte Funktion einen durch eine positive Konstante beschränkten Integranden.

In diesem Abschnitt wurde motiviert, wie man durch Verknüpfung, der in Kapitel 6 behandelten Transformationen, Funktionen manipulieren kann. Nun könnte man untersuchen, wie sich mittels dieser Manipulation der Funktionenraum einer gegebenen Funktion verändern lässt. Hierauf soll jedoch verzichtet werden. Stattdessen werden wir im nächsten Abschnitt einen praktikableren Weg vorstellen.

6.6 Die Transformation mittels Verschiebung

Erinnern wir uns an die Verschiebung der Funktionenräume aus Abschnitt 2.2.1. Wir hatten untersucht, wie sich der Funktionenraum in Abhängigkeit der aus der Dynamik gegebenen Größen M und g mittels geeigneter Transformation verändert. Desweiteren sehen wir anhand der Grafik 2.1 und der dazugehörigen Untersuchung, dass wir jedes Problem der Klasse (P) in ein Problem (P_V) transformieren können, in welchem $\varrho < 0$ gilt. In der Grafik 2.1 entspricht dies dem 4.Quadranten, also der Menge $I_{4i}, i = 1, 2$. Dadurch ergibt sich folgende Idee: Wir nutzen die Transformation der Zeit, indem wir ein Problem $(P_V)_1$ mit festen Größen (g, M) in ein Steuerungsproblem (P_V) mit (g, M) transformieren. Anschließend verschieben wir mittels der Transformation (2.17) das Problem (P_V) und somit das Tupel (g, M) in ein Problem (\tilde{P}_V) mit den Werten (\tilde{g}, \tilde{M}) und $\tilde{g} > 0$ und $\tilde{M} < 0$. Danach wenden wir die Transformation der Zeit erneut an, um ein Steuerungsproblem auf endlichem Zeitintervall zu erhalten, indem die zulässigen Zustandsfunktionen absolut stetig sind. Folglich können wir jedes Problem der Klasse $(P_V)_1$ in ein Problem der gleichen Klasse mit einer absolut stetigen Lösung transformieren.

Betrachten wir das Problem $(P_V)_1$ aus Abschnitt 6.2.1 und setzen voraus, dass alle Voraussetzungen für die Gültigkeit des Maximumprinzips in Satz 6.2.2 und für die Existenz einer Lösung gemäß Satz 6.2.3 erfüllt sind. Desweiteren gehen wir davon aus, dass die Größe ϱ aus der natürlichen Gewichtsfunktion nichtnegativ ist. Transformiert man das Problem mittels einer Funktion $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ mit

$$\Psi(\omega(t)) = t, \quad \omega(\Psi(\tau)) = \tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tau \in [0, 1)$$

und der Funktion Ψ , definiert in Definition 6.1.1 in ein Problem (P_V) , so erhält man

$$\int_0^\infty r(\omega(t), x(\omega(t)), u(\omega(t))) \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt \rightarrow \min!$$

$$\dot{x}(\omega(t)) = A(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)x(\omega(t)) + B(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)u(\omega(t))$$

f.ü. auf \mathbb{R}_+ ,

$$u(\omega(t)) \in U, \quad x(\omega(0)) = x_0 > 0.$$

Für diese Aufgabe führen wir die Verschiebung der Funktionenräume aus Abschnitt 2.2 durch, indem wir

$$\tilde{x}(t) := e^{-g_0 t} \cdot x(\omega(t))$$

substituieren. Daraus ergibt sich das Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r(\omega(t), \tilde{x}(t) \cdot e^{g_0 t}, u(\omega(t))) \mu_2(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) dt &\rightarrow \min! \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \left(A(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) - g_0 \right) \tilde{x}(t) \\ &\quad + B(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t) e^{-g_0 t} u(\omega(t)) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ u(\omega(t)) &\in U, \quad \tilde{x}(0) = x_0 > 0. \end{aligned}$$

Nun wählen wir im Gegensatz zum letzten Abschnitt dieselbe Funktion Ψ , um das Problem auf ein Problem mit endlichem Zeithorizont zurück zu transformieren. Wir setzen

$$\hat{x}(\tau) := \tilde{x}(\Psi(\tau)) = e^{-g_0 \Psi(\tau)} \cdot x(\tau)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(\tau, \hat{x}(\tau) \cdot e^{g_0 \Psi(\tau)}, u(\tau)) \mu_2(\tau) d\tau &\rightarrow \min! \\ \dot{\hat{x}}(\tau) &= \hat{A}(\tau) \hat{x}(\tau) + \hat{B}(\tau) u(\tau) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ u(\tau) &\in U, \quad \hat{x}(0) = x_0 > 0 \end{aligned}$$

mit den Funktionen $\hat{A} := A - g_0 \psi$ und $\hat{B} := B e^{-g_0 \Psi}$. Wir haben vorausgesetzt, dass das ursprüngliche Problem eine Lösung besitzt und diese mittels des Maximumprinzips gefunden wurde. Das bedeutet, es gilt $A(\tau) \psi^{-1}(\tau) \leq M$. Dann folgt für die Funktion \hat{A} , dass

$$\begin{aligned} \hat{A}(\tau) \psi^{-1}(\tau) &= \left(A(\tau) - g_0 \psi(\tau) \right) \psi^{-1}(\tau) \\ &= A(\tau) \psi^{-1}(\tau) - g_0 \leq M - g_0 =: \hat{M} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Damit das Problem ein Problem der Klasse $(P_V)_1$ ist, muss

$$|\hat{B}(\tau)| \hat{\kappa}^{-1}(\tau) \psi^{-1}(\tau) \leq C_B$$

mit einer Funktion $\hat{\kappa}(\tau) = e^{-\hat{g}\Psi(\tau)}$ gelten. Wir bestimmen unter Verwendung der gültigen Ungleichung $|B(\tau)|e^{g\Psi(\tau)}\psi^{-1}(\tau) \leq C_B$ für die Funktion \hat{B} :

$$\begin{aligned} |\hat{B}(\tau)|\hat{\kappa}^{-1}(\tau)\psi^{-1}(\tau) &= B(\tau) \cdot e^{-g_0\Psi(\tau)}e^{\hat{g}\Psi(\tau)}\psi^{-1}(\tau) \\ &\leq e^{-g\Psi(\tau)}\psi(\tau)C_B \cdot e^{-g_0\Psi(\tau)}e^{\hat{g}\Psi(\tau)}\psi^{-1}(\tau) \\ &= C_B e^{-g\Psi(\tau)} \cdot e^{-g_0\Psi(\tau)}e^{\hat{g}\Psi(\tau)} = C_B \end{aligned}$$

für $\hat{g} = g + g_0$. Nun hatten wir in Abschnitt 6.4 festgestellt, dass die Funktionen \hat{x} absolut stetige Funktionen sind, falls $\hat{\varrho} < 0$ gewählt werden kann. Unter Verwendung der Voraussetzung 6.2.4, in welcher die Gewichte der Aufgabe $(P_V)_1$ definiert wurden, bestimmen wir

$$\hat{\varrho} > \hat{M} - \hat{g} + |\hat{M} + \hat{g}| = M - g_0 - g - g_0 + |M - g_0 + g + g_0| = M - g + |M + g| - 2g_0.$$

Es ist offensichtlich, dass für jedes g_0 mit $2g_0 > M - g + |M + g|$ ein $\hat{\varrho} < 0$ existiert. Den Äquivalenzbeweisen der letzten Kapitel folgend, setzen wir $\hat{\varrho} = \varrho - 2g_0$. Das Steuerungsproblem hat nun, den Notationen der gesamten Arbeit folgend, die Form

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(\tau, \hat{x}(\tau) \cdot e^{g_0\Psi(\tau)}, u(\tau)) e^{-2g_0\Psi(\tau)} \hat{\mu}_2(\tau) d\tau &\rightarrow \min! \\ (\hat{x}, u) &\in W_2^1((0, 1), \hat{\mu}_1) \times L_\infty((0, 1)) \\ \dot{\hat{x}}(\tau) &= \hat{A}(\tau)\hat{x}(\tau) + \hat{B}(\tau)u(\tau) \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}_+, \\ u(\tau) &\in U, \quad \hat{x}(0) = x_0 > 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1(\tau) &= \psi^{-1}(\tau)e^{-\hat{\varrho}\Psi(\tau)} = \mu_1(\tau)e^{2g_0\Psi(\tau)}, \\ \hat{\mu}_2(\tau) &= \psi(\tau)e^{-\hat{\varrho}\Psi(\tau)} = \mu_2(\tau)e^{2g_0\Psi(\tau)}. \end{aligned}$$

Für die Adjungierte bestimmen wir $\hat{y}(\tau) = y(\tau)e^{g_0\Psi(\tau)}$, $\hat{y} \in W_2^1((0, 1), \hat{\mu}_1^{-1})$ und wissen, dass für alle zulässigen Funktionen \hat{x} die Inklusion $\hat{x} \in W_1^1((0, 1))$ gilt.

Zusammenfassend ist es gelungen, ein Maximumprinzip für Steuerungsprobleme mit linearer Dynamik zu formulieren, welches ohne die Forderung der absoluten Stetigkeit auskommt. Desweiteren konnte mittels einer Verschiebung der Funktionenräume gezeigt werden, dass sich Steuerungsprobleme der Klasse $(P_V)_1$ stets geeignet transformieren lassen, sodass ein Steuerungsproblem entsteht, in welchem alle zulässigen Zustandsfunktionen Elemente des

Raumes $W_1^1((0, 1))$ sind. Die Transversalitätsbedingung entspricht nicht der *klassischen Transversalitätsbedingung*, lässt sich jedoch leicht verifizieren. Für Steuerungsprobleme der Klasse $(P_E)_1$ mit einer Dynamik, die im Zustand x nichtlinear sein kann, wurde ein Existenzsatz bewiesen. Um ein passendes Maximumprinzip zu erhalten, transformiert man das Problem $(P_E)_1$ in ein Problem auf unendlichem Zeithorizont und verwendet die in Kapitel 3 vorgestellten Transformationen. Das dadurch entstandene Steuerungsproblem, welches eine Zustandsgleichung enthält, die sowohl in x als auch in u linear ist, transformiert man auf ein Steuerungsproblem über endlichem Zeithorizont zurück. Natürlich kann man hier keine allgemein gültige Transformation angeben. In der vorliegenden Arbeit wurde jedoch eine Vielzahl an Möglichkeiten diskutiert, wie man auf bestehende Resultate mittels einfacher Transformationen zurückgreifen kann.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden eine Reihe verschiedener Transformationen vorgeschlagen, welche einerseits die Bestimmung der Lösung eines Steuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont erleichtern können und andererseits die Suche nach einem passenden Existenzsatz und notwendigen Bedingungen für Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont und Singularitäten im Zielfunktional erleichtern.

Es wurde ein Grundproblem (P) formuliert, für welches notwendige Bedingungen in Form eines Pontrjaginschen Maximumprinzips durch PICKENHAIN [41] bewiesen wurden. Der Existenzsatz von LYKINA [34] wurde in der vorliegenden Arbeit ohne Phasenbeschränkungen formuliert und kann dadurch auf das Problem (P) angewendet werden. Grundlegend für diesen Schritt war die Einführung des Begriffes *natürliche Phasenbeschränkung* ([57]). Gleichzeitig ergibt die Idee der Einführung des *natürlichen Gewichtes* einer Aufgabe eine Möglichkeit, den Funktionenraum so zu wählen, dass er keine zusätzliche Restriktion darstellt. Dadurch kann sicher gestellt werden, dass alle Kandidaten, welche die notwendigen Bedingungen erfüllen, im postulierten Raum liegen. Im nächsten Kapitel wurde die in [44] eingeführte *Verschiebung der Räume* behandelt. Es konnte hier gezeigt werden, wie man mittels einer einfachen Transformation eine Erweiterung des Maximumprinzips und des Existenzsatzes für Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont bewirken kann. An einem Beispiel wurde eine mögliche Anwendung erläutert. Desweiteren wurde eine Anzahl an Transformationen vorgestellt, die den Umgang mit Steuerungsproblemen mit nichtlinearen Dynamiken erleichtern können. Solche Transformationen der Zustandsgröße mit dem Ziel der Linearisierung der Dynamik findet man beispielsweise auch in [45] und [57]. Im Zuge der Transformationen in Kapitel 3 ergaben sich interessante Erkenntnisse über die Transversalitätsbedingung. Diese lässt sich tatsächlich explizit angeben, unterscheidet sich allerdings von der Transversalitätsbedingung im klassischen Sinne. Für eine numerische Behandlung von Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont ist diese Erkenntnis über die Struktur der Adjun-

gierten von besonderem Interesse, da nun eine zusätzliche Randbedingung existiert.

Ein weiteres Problem, welches in der vorliegenden Arbeit untersucht wurde, ist ein Steuerungsproblem mit endlichem Zeitintervall, welches am Rand des vorgegebenen Intervalls Singularitäten im Integranden, der Dynamik oder den gesuchten Zustandsfunktionen enthält. Dabei wurde das sogenannte „Abschneiden des Intervalls“ mit anschließender Grenzwertbildung vermieden. Die zugrunde gelegten Resultate zeigen, dass man Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont durch Verwendung gewichteter Sobolevräume als Zustandsräume als Ganzes betrachten kann. Nun lag es nahe, unter Verwendung der Substitutionsregel ein Steuerungsproblem mit unbeschränktem Zeitintervall in ein Steuerungsproblem mit einem endlichen Zeitintervall, allerdings mit einer Singularität in einem Randpunkt, zu transformieren, um die bestehenden Resultate nutzen zu können. Dies ist tatsächlich gelungen und lieferte notwendige Bedingungen und einen Existenzsatz für Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont mit Singularitäten im Zielfunktional oder der Dynamik. Die auf einem Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont verwendeten Funktionenräume wurden äquivalent auf das Problem mit endlichem Horizont übertragen. Es stellte sich heraus, dass diese Räume in natürlicher Weise gewichtete Sobolevräume sind, im Gegensatz zu den klassischen Steuerungsproblemen, in denen ungewichtete Sobolevräume angenommen werden. Dadurch konnte die Diskrepanz zwischen einer nachgewiesenen Lösung und der Gültigkeit von notwendigen Bedingungen behoben werden. Desweiteren wurde untersucht, ob und wie sich die klassischen Sätze in die neuen Sätze einfügen lassen. Es ist gelungen, für die Zustandsgröße eines Steuerungsproblems mit endlichem Zeithorizont und einer Singularität im rechten Randpunkt, die Zugehörigkeit zum Raum der absolut stetigen Funktionen zu erzeugen.

Letztendlich können offensichtlich alle Resultate des Kapitels 3 auch auf Steuerungsprobleme mit endlichem Zeithorizont angewendet werden, sodass insgesamt eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Verfügung steht, ein Steuerungsproblem an vorhandene Sätze und deren Voraussetzungen anzupassen, ohne das gegebene Steuerungsproblem zu modifizieren.

Eine weitere interessante Frage ist, inwieweit Aufgaben mit nicht kompaktem Steuerbereich behandelt werden können. Auch hier scheint die Verwendung der vorgestellten Methoden vielversprechend zu sein. Für die Transformation von Steuerungsproblemen mit mehr als einer Zustandsgröße muss die entsprechende Substitutionsregel im \mathbb{R}^n formuliert werden, um die Ideen der

vorliegenden Arbeit anwenden zu können. Als bestehende Literatur sei hier ZIEMANN [61] und ZIEMANN&PICKENHAIN [64] genannt, in welchen notwendige Bedingungen für vektorwertige Steuerungsprobleme formuliert werden. So ist es beispielsweise möglich, die Verschiebung der Funktionenräume aus Abschnitt 2.2 auch auf vektorwertige Steuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont anzuwenden. Unter Verwendung der Substitutionsregel kann dieses Problem auf ein Problem mit fester Zeit transformiert werden. Diese Herangehensweise eröffnet ebenso die Möglichkeit der Anwendung von Fourier- bzw. Spektralmethoden zur numerischen Behandlung einer Steuerungsaufgabe mit unendlichem Zeithorizont.

Teil III
Anhang

Absolut stetige Funktionen

Wir werden im Folgenden die Klasse der absolut stetigen Funktionen definieren. Diese Funktionenklasse ist außerordentlich wichtig, um einerseits den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Lebesgue-Integrale formulieren zu können. Andererseits arbeiten klassische Existenzsätze für Steuerungsprobleme mit Funktionen des Raumes $W_1^1(\Omega)$. Wir halten uns bei den folgenden Sätzen und Definitionen an [18], sofern keine andere Literatur angegeben ist. Eine ausführliche Zusammenfassung der analytischen Hilfsmittel der Steuerungstheorie findet man in [63].

Definition 6.6.1 (G. Vitali 1905, [18], S.300). Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ heißt *absolut stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

für alle $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$ mit $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$.

Wir bezeichnen den Funktionenraum der auf $[a, b]$ absolut stetigen Funktionen mit $AC([a, b])$.

Bemerkung 6.6.1 ([3], S.257). Der Satz von Vitali-Banach besagt, dass eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann absolut stetig ist, wenn sie stetig, von beschränkter Variation ist und Nullmengen auf Nullmengen abbildet.

Als Folgerung ergibt sich, dass jede absolut stetige Funktion fast überall differenzierbar ist.

Satz 6.6.1 (Hauptsatz⁷ für das Lebesgue-Integral). *a) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Lebesgue-integrierbar, so ist*

$$F(t) := \int_a^t f(s) ds, \quad a \leq t \leq b$$

absolut stetig und es gilt $F' = f$ f.ü. auf $[a, b]$.

b) Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig und setzt man $F'(t) := 0$ für jedes $t \in [a, b]$, in denen F nicht differenzierbar ist, so ist F' L-integrierbar über $[a, b]$, und es gilt

$$F(t) - F(a) = \int_a^t F'(s) ds, \quad a \leq t \leq b.$$

⁷der Differential- und Integralrechnung

Da eine absolut stetige Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ insbesondere stetig ist und fast überall eine Ableitung besitzt, gilt $F \in W_1^1((a, b))$. Andererseits besitzt jede Funktionenklasse $[G] \in W_1^1((a, b))$ einen eindeutig bestimmten Repräsentanten⁸, der auf $[a, b]$ stetig fortgesetzt werden kann. Er ist gegeben durch

$$G(t) = G(a) + \int_a^t \mathcal{D}G(\tau) d\tau. \quad (6.22)$$

Dabei ist $\mathcal{D}G$ die verallgemeinerte Ableitung der Funktion G und Lebesgue-integrierbar. Folglich gilt für $\mathcal{D}G$ der Satz 6.6.1 und die Funktion G ist absolut stetig. Das heißt, der stetige Repräsentant $G \in W_1^1((a, b))$ kann mit einer absolut stetigen Funktion $F \in AC([a, b])$ identifiziert werden. Betrachten wir nun die Menge \mathbb{R}_+ . Wir definieren:

Definition 6.6.2. Eine Funktion F heißt *lokal absolut stetig auf \mathbb{R}_+* wenn

$$F \in AC([a, b]) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Wir bezeichnen den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen mit $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Anhand der Definitionen wird klar, dass beispielsweise die Funktion $f(t) = e^{st}$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine lokal absolut stetige Funktion ist. Allerdings gilt $f \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ nur, falls $s < 0$. Das bedeutet, man kann den $W_1^1(\mathbb{R}_+)$ nicht mit dem Raum der auf \mathbb{R}_+ lokal absolut stetigen Funktionen identifizieren.

A.2. Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma

Um das Wachstum einer implizit gegebenen Funktion abzuschätzen, verwenden wir in der vorliegenden Arbeit das bekannte Gronwall-Lemma in folgender Form. Gegeben sei eine Funktion $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

Voraussetzung 6.6.1. Für jedes $T_0 < T$ sei die Funktion f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, T_0]$.

Lemma 6.6.1. *Die Voraussetzung 6.6.1 sei erfüllt. Gilt für alle $t \in [0, T_0]$ die Ungleichung*

$$f(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)f(s)ds, \quad (6.23)$$

⁸vgl. [1], S.168

mit einer auf $[0, T_0]$ stetigen und monoton wachsenden Funktion $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ und einer auf $[0, T_0]$ stetigen, nichtnegativen Funktion $b : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$, so gilt

$$f(t) \leq a(t)e^{\int_0^t b(s)ds}.$$

Beweis: Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma findet man in [53], S.42f. Wir definieren

$$\Phi(t) := e^{-B(t)} \quad \text{mit} \quad B(t) := \int_0^t b(s)ds.$$

Die Funktionen Φ und B sind offensichtlich stetig differenzierbar. Wir bestimmen unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\Phi(t) \cdot \int_0^t b(s)f(s)ds \right) &= -b(t)\Phi(t) \int_0^t b(s)f(s)ds + \Phi(t)b(t)f(t) \\ &= \Phi(t)b(t) \cdot \left(f(t) - \int_0^t b(s)f(s)ds \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung $b(t) \geq 0$, der aus der Definition von Φ resultierenden Eigenschaft $\Phi(t) > 0$ und der Ungleichung (6.23) können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} &\Phi(t)b(t) \cdot \left(f(t) - \int_0^t b(s)f(s)ds \right) \\ &\leq \Phi(t)b(t) \cdot \left(a(t) + \int_0^t b(s)f(s)ds - \int_0^t b(s)f(s)ds \right) \\ &= \Phi(t)b(t)a(t). \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke der letzten Ungleichungskette sind messbar. Durch Integration auf beiden Seiten folgt:

$$\int_0^t \frac{d}{d\eta} \left(\Phi(\eta) \cdot \int_0^\eta b(s)f(s)ds \right) d\eta \leq \int_0^t \Phi(\eta)b(\eta)a(\eta)d\eta.$$

Aufgrund der Gültigkeit des Hauptsatzes folgt:

$$\Phi(t) \cdot \int_0^t b(s)f(s)ds - \Phi(0) \cdot 0 \leq \int_0^t \Phi(\eta)b(\eta)a(\eta)d\eta.$$

Division durch $\Phi > 0$ und Addition von a liefert:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq a(t) + \int_0^t b(s)f(s)ds \leq a(t) + \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \Phi(\eta)b(\eta)a(\eta)d\eta \\ &\leq a(t) \left(1 + \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \Phi(\eta)b(\eta)d\eta \right) = a(t) \left(1 - \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \Phi'(\eta)d\eta \right) \\ &= a(t) \left(1 - \frac{1}{\Phi(t)} \cdot \Phi(t) + \frac{1}{\Phi(t)} \right) = a(t)e^{\int_0^t b(s)ds} \end{aligned}$$

und das ist die Behauptung. \square

A.3. Die partielle Integration für L-Integrale

Wir werden in diesem Abschnitt die Regel der partiellen Integration für Lebesgue-Integrale formulieren und beweisen. Dazu werden wir an einem ökonomischen Gegenbeispiel demonstrieren, weshalb die Regel explizit für L-Integrale gezeigt werden muss.⁹

Die folgende Argumentation ist [5], S.11 entnommen. Wir betrachten einen makroökonomischen Wachstumsprozess. Es sei (x, u) ein zulässiges Paar im Sinne der Definition 1.2.1. Der Wert $\tilde{c}(x(t), u(t)) > 0$ beschreibe den Pro-Kopf-Verbrauch zu einem festen Zeitpunkt t . Die Funktion c , definiert durch $c(t) := \tilde{c}(x(t), u(t))$, sei lokal absolut stetig auf \mathbb{R}_+ . Desweiteren gelte

$$c(0) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln(c(T))e^{-\varrho T}) = 0, \quad \varrho > 0. \quad (6.24)$$

Dann lässt sich der durch die Funktion $e^{-\varrho t}$ diskontierte Gesamtwert der Wachstumsrate der Funktion c beschreiben durch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \cdot e^{-\varrho t} dt. \quad (6.25)$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass dieser Ausdruck auf jedem Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}_+$ sowohl im Lebesgueschen, als auch im uneigentlichen Riemannschen Sinne existiert und endlich ist, lässt sich die Regel der partiellen Inte-

⁹Eine ausführliche Diskussion über den Unterschied zwischen einem uneigentlichen R-Funktional und einem L-Funktional findet man in [36].

gration¹⁰ sowohl im Lebesgueschen als auch im Riemannsches Sinne anwenden:

$$\int_0^T \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \cdot e^{-\varrho t} dt = \left[\ln(c(t)) \cdot e^{-\varrho t} \right]_0^T + \int_0^T \ln(c(t)) \cdot \varrho e^{-\varrho t} dt.$$

Betrachtet man nun die auftretenden Integrale im Sinne von Riemann, so kann auf beiden Seiten der Grenzübergang für $T \rightarrow \infty$ gebildet werden:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \cdot e^{-\varrho t} dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left[\ln(c(t)) \cdot e^{-\varrho t} \right]_0^T + \int_0^T \ln(c(t)) \cdot \varrho e^{-\varrho t} dt \right).$$

Zusammen mit den Bedingungen (6.24) an die Funktion c ergibt das:

$$R - \int_0^\infty \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \cdot e^{-\varrho t} dt = R - \int_0^\infty \ln(c(t)) \cdot \varrho e^{-\varrho t} dt, \quad (6.26)$$

falls einer der beiden Ausdrücke im Riemannsches Sinne existiert. Durch Einsetzen der Funktion \tilde{c} in den neuen Integranden erhält man als zu maximierenden Ausdruck das Funktional

$$J(x, u) = R - \int_0^\infty \ln(\tilde{c}(x(t), u(t))) \cdot \varrho e^{-\varrho t} dt \quad (6.27)$$

mit einer logarithmischen Nutzenfunktion.

Das bedeutet, statt des ursprünglichen Zielfunktionals (6.25), welches nach Einsetzen einer Funktion $\tilde{c}(x(\cdot), u(\cdot))$ auf ein Steuerungsproblem mit vier gesuchten Größen führen würde, betrachtet man das Zielfunktional (6.27). Betrachten wir nun die Funktionale (6.25) und (6.27) als Lebesgue-Integrale und untersuchen folgendes Beispiel:

Beispiel 20. Gegeben sei die Funktion

$$\hat{c}(t) = \exp \left(\frac{\sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} \cdot e^{\varrho t} \right), \quad \varrho > 0.$$

Offensichtlich ist \hat{c} lokal absolut stetig, die Randbedingung $\hat{c}(0) = 1$ ist erfüllt und es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left[\ln(\hat{c}(t)) \cdot e^{-\varrho t} \right]_0^T \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{\sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} \right]_0^T \right) = 0.$$

¹⁰man findet diese Regel in jedem Lehrbuch der Analysis, z.B in [26]

Das bedeutet, dass die Funktion \hat{c} allen Voraussetzungen genügt, die zu Beginn dieses Abschnitts an die Funktion c getroffen wurden. Wir setzen die Funktion \hat{c} in die rechte Seite von (6.26) ein, betrachten dieses allerdings als Lebesgue-Integral:

$$L - \int_0^\infty \ln(\hat{c}(t)) \cdot \varrho e^{-\varrho t} dt = L - \int_0^\infty \frac{\sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} \cdot \varrho dt.$$

Dieses Integral existiert wegen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} \cdot \varrho dt &\leq \int_0^\infty \left| \frac{\sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} \cdot \varrho \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty \frac{\varrho}{(t + \sqrt[3]{\pi})^2} dt = \frac{\varrho}{\sqrt[3]{\pi}} \end{aligned}$$

im Lebesgueschen Sinne. Andererseits bestimmen wir für die linke Seite von (6.26):

$$\begin{aligned} &L - \int_0^\infty \frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} \cdot e^{-\varrho t} dt \\ &= L - \int_0^\infty \left(3 \cos(t + \sqrt[3]{\pi})^3 + \frac{(\varrho(t + \sqrt[3]{\pi}) - 2) \cdot \sin(t + \sqrt[3]{\pi})^3}{(t + \sqrt[3]{\pi})^3} \right) dt. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist im Sinne von Lebesgue nicht endlich, liefert aber als uneigentliches Riemann-Integral einen endlichen Wert.

Das bedeutet, dass die Regel der partiellen Integration auf dieses Beispiel nur anwendbar ist, wenn man alle Funktionale als Riemann-Integrale betrachtet. Im Sinne von Lebesgue gilt in diesem Fall die Regel nicht. Verwendet man einen Existenzsatz, der mit der Lebesgueschen Theorie arbeitet, so kann man von der Existenz des Maximums des Funktional (6.27) nicht auf die Existenz des Maximums des ursprünglichen Integrals, gegeben durch (6.25), schließen. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der partiellen Integration im Riemannschen Sinne können folglich nicht ohne Weiteres auf L-Integrale übertragen werden. Deshalb müssen wir die Regel der partiellen Integration für Lebesgue-Integrale formulieren.

Im Folgenden sei μ eine Gewichtsfunktion, definiert in Definition 1.1.1.

Voraussetzung 6.6.2. Es seien die Funktionen $F \in W_p^1((0, \infty), \mu)$ und $G \in W_q^1((0, \infty), \mu^{1-q})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ gegeben.

Voraussetzung 6.6.3. Es sei $p = 1$, und $q = \infty$ und es gelte $F \in W_1^1((0, \infty), \mu)$ und $G \in W_\infty^1((0, \infty), \mu^{-1})$.

Satz 6.6.2. Eine der Voraussetzungen 6.6.2 und 6.6.3 sei erfüllt. Dann sind die Produkte Fg und fG L -summierbar und es gilt

$$\int_0^\infty F(t)g(t)dt + \int_0^\infty f(t)G(t)dt = -F(0)G(0).$$

Dabei bezeichnen f und g die verallgemeinerten Ableitungen von F und G .

Beweis: Sei $p > 1$. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(t)g(t)dt &\leq \int_0^\infty |F(t)g(t)|dt = \int_0^\infty |F(t)\mu^{\frac{1}{p}}(t)\mu^{\frac{1}{q}-1}(t)g(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty |F(t)|^p \mu(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^\infty |g(t)|^q \mu^{q-1}(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|F\|_{L_p((0,\infty),\mu)} \cdot \|g\|_{L_q((0,\infty),\mu^{q-1})} < \infty \end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung gilt für das Produkt fG . Folglich sind die Produkte Fg und fG summierbar. Mit den Funktionen F und G besitzt auch das Produkt FG eine verallgemeinerte Ableitung. Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(t)G(t)dt &\leq \int_0^\infty |F(t)G(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty |F(t)|^p \mu(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^\infty |G(t)|^q \mu^{q-1}(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|F\|_{L_p((0,\infty),\mu)} \cdot \|G\|_{L_q((0,\infty),\mu^{q-1})} < \infty \end{aligned}$$

gilt $FG \in L_1(\mathbb{R}_+)$ und unter Beachtung der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d}{dt}(F(t)G(t))dt &= \int_0^\infty (F(t)g(t) + f(t)G(t))dt \\ &\leq \int_0^\infty |F(t)g(t)|dt + \int_0^\infty |f(t)G(t)|dt < \infty, \end{aligned}$$

folglich gilt $FG \in W_1^1((0, \infty))$. Da das Produkt FG eine auf \mathbb{R}_+ absolut stetige Funktion ist, existiert der Wert $F(0)G(0)$ und ist endlich. Desweitern wissen wir, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)G(t) = 0$ gilt. Betrachten wir die Darstellung

$$F(t)G(t) = F(0)G(0) + \int_0^t \frac{d}{d\eta}(F(\eta)G(\eta))d\eta$$

und bestimmen auf beiden Seiten den Grenzwert $t \rightarrow \infty$, so erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)G(t) = F(0)G(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{d\eta} (F(\eta)G(\eta)) d\eta.$$

Andererseits gilt aufgrund der Summierbarkeit der Produkte Fg und fG :

$$\int_0^\infty (F(t)g(t) + f(t)G(t)) dt = \int_0^\infty F(t)g(t) dt + \int_0^\infty f(t)G(t) dt.$$

Daraus folgt die Behauptung für $p > 1$. Für $p = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(t)g(t) dt &\leq \int_0^\infty |F(t)g(t)| dt = \int_0^\infty |F(t)\mu(t)\mu^{-1}(t)g(t)| dt \\ &\leq \|g\|_{L_\infty((0,\infty),\mu^{-1})} \cdot \int_0^\infty |F(t)|\mu(t) dt \\ &= \|g\|_{L_\infty((0,\infty),\mu^{-1})} \cdot \|F\|_{L_1((0,\infty),\mu)} < \infty. \end{aligned}$$

Analoge Abschätzungen für die Produkte fG und FG beweisen die behauptete Integrierbarkeit sowie die Inklusion $FG \in W_1^1((0, \infty))$. Somit folgt auch für den Fall $p = 1$ die Behauptung des Satzes. \square

A.4. Die Substitutionsregel für L-Integrale

Die Grundidee der vorliegenden Arbeit besteht in der Transformation eines Steuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont, sowohl auf ein äquivalentes Problem über ein unbeschränktes als auch auf ein Problem über ein beschränktes Zeitintervall. Wir werden die Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale für den Fall der Transformation von \mathbb{R}_+ auf das Intervall $[0, 1)$ ausführlich betrachten. Alle anderen Fälle erhält man durch mehrfache Anwendung des Satzes. Alle Sätze und Definitionen sind [9], [18] und [38] entnommen.

Gegeben sei eine Grundmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$. Sei \mathcal{A} die σ -Algebra der Borelmengen über Ω . A und B seien Teilmengen von Ω und gehören zu \mathcal{A} . Sei $\varphi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) \geq 0$, $\varphi'(\tau) \geq c_0 > 0$ für alle $\tau \in [0, 1)$.

Definition 6.6.3. Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Funktion

$$f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

heißt *numerische Funktion*.

Satz 6.6.3 ([9], S.74). *Notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit einer messbaren numerischen Funktion f auf Ω ist jede der folgenden Bedingungen: i) f^+ und f^- sind integrierbar¹¹.*

ii) Es gibt integrierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f(t) = u(t) - v(t)$ für alle $t \in \Omega$.

iii) Es gibt eine integrierbare Funktion g mit $|f(t)| \leq g(t)$ für alle $t \in \Omega$.

iv) $|f|$ ist summierbar.

Definition 6.6.4. Für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ und jede messbare Funktion f bezeichnen wir

$$\int_B f d\mu := \int_B f(t) dt$$

das *Lebesgue-Integral von f über B* . Ist dieses Integral endlich, so nennt man f über B integrierbar.

Definition 6.6.5. Für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ sei $\mu(B) := \int_A \varphi'(\tau) d\tau$ mit $A \in \mathcal{A}$, $\varphi(A) = B$.

Satz 6.6.4. μ ist ein Maß auf \mathcal{A} .

Beweis: Es ist $\mu(\emptyset) = 0$, da $\int_a^a \varphi'(\tau) d\tau = 0 \forall a \in \mathbb{R}$. Wir prüfen die σ -Additivität für $B_i \subset \mathcal{A}$, B_i paarweise disjunkt und $\varphi(A_i) = B_i$:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \varphi'(\tau) d\tau = \int \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i} \varphi'(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \varphi'(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i). \end{aligned}$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichheit, wenn alle B_i endliche Mengen sind, vgl. Definition 6.6.4. Falls $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ eine unbeschränkte Menge ist, ist $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \infty$ und ebenso $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \infty$, d.h. die σ -Additivität gilt auch in diesem Fall. Also ist μ ein Maß auf \mathcal{A} . \square

Satz 6.6.5 ([9], S.109). *Durch $\nu(A) := \int_A \varphi'(\tau) d\tau$ wird für jede messbare, nichtnegative Funktion φ' ein Maß auf \mathcal{A} definiert.*

Satz 6.6.6 (Satz vom Bildmaß, [9], S.43 und S.125). *Sei φ eine nichtnegative, messbare Abbildung. Für jedes Maß ν auf \mathcal{A} wird durch $B \mapsto \nu(\varphi^{-1}(B))$ ein Maß μ auf \mathcal{A} definiert. Es ist $\mu(B) := \nu(\varphi^{-1}(B))$.*

¹¹ siehe Definition 1.1.2

Satz 6.6.7. $\mu = \lambda$ ist das Lebesgue-Maß.

Beweis: Für jede abgeschlossene Menge $[t_i, t_{i+1}]$ und mit $\varphi([\tau_i, \tau_{i+1}]) = [t_i, t_{i+1}]$ berechnen wir

$$\mu([t_i, t_{i+1}]) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varphi'(\tau) d\tau = \varphi(\tau_{i+1}) - \varphi(\tau_i) = t_{i+1} - t_i = \lambda([t_i, t_{i+1}]).$$

Für das halboffene Intervall $[t_i, t_{i+1})$ nutzen wir die Additivität und sehen:

$$\mu([t_i, t_{i+1}]) = \mu([t_i, t_{i+1})) + \mu(\{t_{i+1}\})$$

mit

$$\mu(\{t_{i+1}\}) = \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}} \varphi'(\tau) d\tau = 0.$$

Also stimmt μ auf jedem halboffenen Intervall mit λ überein. Sei nun $B_n := [0, t_n)$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und $\{t_n\} \rightarrow \infty$ eine Mengenfolge in $[0, \infty)$, so gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = [0, \infty)$.

Wir definieren paarweise disjunkte Mengen C_n durch $C_n := B_n - B_{n-1}$, so ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = [0, \infty)$ und $B_n = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Da μ ein Maß ist, gilt

$$\mu([0, \infty)) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Mit $\mu(B_n) = t_n = |B_n|$ folgt letztlich die Gleichheit von μ und λ auch auf dem Intervall $[0, \infty)$. [9], S.13. \square

Satz 6.6.8 ([18], S.108). *Jede Funktion $f \geq 0$ ist genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn eine monoton wachsende Folge $\{f_n\}$ von Treppenfunktionen existiert, die fast überall gegen die Funktion f konvergiert.*

Satz 6.6.9 (Beppo Levi, [38], S.156). *Sei $\{f_n\}$ eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen, $f_n(t) \geq 0$, die fast überall gegen f , $f(t) \geq 0$ konvergiert, so gilt für jede Menge $B \subset \mathcal{A}$:*

$$\int_B f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(t) dt.$$

Den folgenden, grundlegenden Satz findet man in nahezu jedem Buch über Analysis (zum Beispiel [27]). Wir verwenden hier den Satz, wie er in [38] formuliert wurde. Für den Beweis verwenden wir [9], [18] und [38].

Satz 6.6.10 (Substitutionsregel). Sei $\varphi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) \geq 0$ und $\varphi'(\tau) > 0$ für alle $\tau \in [0, 1)$. Die Funktion f mit $f(t) \geq 0$ ist genau dann integrierbar über \mathbb{R}_+ , wenn $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ über $[0, 1)$ integrierbar ist und es gilt

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^1 f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

Beweis: Sei f eine Treppenfunktion¹², so hat f die Gestalt

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i},$$

mit $\alpha_i \geq 0$, B_i paarweise disjunkt, $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = B$. Dann bezeichnen wir mit

$$\int_B f d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i)$$

das μ -Integral von f über B . Hierbei bedeutet

$$\mu(B_i) := \int_{B_i} d\mu = \int_B \mathbb{1}_{B_i} d\mu.$$

Da μ das Lebesguemaß ist, gilt¹³

$$\int_B f d\mu = \int_B f(t)dt.$$

Diesen Zusammenhang nutzen wir zur Berechnung der Integrale, während des Beweises verwenden wir die Kurzschreibweise. Für die Treppenfunktion f bestimmen wir:

$$\begin{aligned} \int_B f d\mu &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} \varphi'(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \int_A \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_A \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \varphi'(\tau) d\tau = \int_A f(\varphi) \varphi' d\mu. \end{aligned}$$

¹²auch Elementarfunktion genannt, siehe [9], S.63

¹³siehe [9], S.104

Dabei haben wir die Definition des Integrals, die Darstellung von μ , die Schreibweise mittels charakteristischer Funktion und die Abbildungseigenschaft der Treppenfunktion¹⁴, die das Vertauschen von Summe und Integral erlaubt, benutzt. Da für jedes $t \in B_i$ und $\tau \in A_i$ die Gleichheit $f(t) = f(\varphi(\tau)) = \alpha_i$ und $\varphi(A_i) = B_i$ gilt, erkennen wir im vorletzten Integranden die Darstellung der Treppenfunktion von $f \circ \varphi$.

Sei nun f eine messbare, nichtnegative Funktion auf der Menge B . A sei die Urbildmenge von B unter der Abbildung φ , so gilt nach dem Satz von Beppo Levi:

$$\int_B f(t)dt = \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Gültigkeit der Substitutionsregel für Treppenfunktionen. Wir betrachten den Ausdruck $f_n(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$. Dieser ist offensichtlich positiv. Desweiteren ist dieser Ausdruck messbar als Produkt einer Treppenfunktion mit einer stetigen Funktion¹⁵. Für die punktweise Konvergenz gegen die verkettete Funktion $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ betrachten wir die Menge E_t aller t , für die $f_n(t)$ nicht gegen $f(t)$ konvergiert:

$$E_t := \{t \in B \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \neq f(t)\}.$$

Für alle $t \in B - E_t$ gilt aufgrund der Eineindeutigkeit der Abbildung φ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) = f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau).$$

Offensichtlich gilt $\mu(E_t) = 0$, da die Grenzwertbeziehung genau fast überall gilt, also bis auf eine Menge E_t vom Maß Null. Konstruieren wir nun eine Folge $\{G_t^n\}$ mit $E_t \subset G_t^n \subset \dots \subset G_t^2 \subset G_t^1 \subset B$ und $E_t = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_t^i$. Weiter sei

$$E_\tau = \{\tau \mid \varphi(\tau) \in E_t\}, \quad G_\tau^i = \{\tau \mid \varphi(\tau) \in G_t^i\} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Wir bilden den Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_\tau^i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\tau \mid \varphi(\tau) \in G_t^i\}$$

und werden zeigen, dass die Menge E_τ eine Nullmenge ist. Da für alle $\tau \in E_\tau$ gilt $\varphi(\tau) \in E_t$, folgt $\varphi(\tau) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_t^i$. Daraus folgt einerseits $E_\tau \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} G_\tau^i$.

¹⁴siehe [9], S.64

¹⁵siehe [9], S.59

Andererseits nehmen wir an, es gibt ein $\hat{\tau} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{\tau}^i$ mit $\hat{\tau} \notin E_{\tau}$. Dann folgt aus $\hat{\tau} \in G_{\tau}^i \forall i$, dass $\varphi(\hat{\tau}) \in G_t^i \forall i$, also $\varphi(\hat{\tau}) \in E_t$. Da aber E_{τ} die Urbildmenge von E_t ist, folgt $\hat{\tau} \in E_{\tau}$, im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt

$$E_{\tau} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{\tau}^i.$$

Also ist E_{τ} als Vereinigung offener, messbarer Mengen offen und messbar. Da $\mu(E_t) = 0$, ist

$$0 = \int_{E_{\tau}} \varphi'(\eta) d\eta.$$

Die Funktion $\varphi'(\tau)$ ist aber überall positiv, das Integral kann also nur den Wert Null annehmen, wenn wir über eine Nullmenge integrieren. Also muss $\mu(E_{\tau}) = 0$ sein. Somit haben wir gesichert, dass $f(\varphi)$ messbar ist. Das Produkt mit $f(\varphi) \cdot \varphi'$ ist ebenfalls messbar¹⁶. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi erfüllt und es ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_A f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

Damit gilt die Substitutionsregel für nichtnegative, messbare Funktionen f .

Sei f eine messbare Funktion. Definieren wir

$$f^+(t) = \max\{f(t), 0\} \quad \text{und} \quad f^-(t) = \max\{-f(t), 0\},$$

so ist für die Integrierbarkeit von f notwendig, dass nicht beide Ausdrücke den Wert ∞ annehmen¹⁷. Das bedeutet, die Substitutionsregel gilt für diese beiden Funktionen. Durch Anwendung der Definition des L-Integrals sieht man:

$$\begin{aligned} \infty > \int_B f(t) dt &= \int_B f^+(t) dt - \int_B f^-(t) dt \\ &= \int_A f^+(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau - \int_A f^-(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_A f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

¹⁶[9], S.59

¹⁷[9], S.74

wenn mindestens eines der Integrale einen endlichen Wert annimmt. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Unter Verwendung des Satzes 6.6.10 werden wir die Wirkung der Transformation der Zeit auf den Zustandsraum einer gegebenen Funktion erläutern.

Satz 6.6.11. *Gegeben sei eine stetige Funktion $f \in W_2^1((0, \infty), \nu)$. ν sei ein Gewicht. Die Abbildung $\varphi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ sei stetig differenzierbar und bijektiv mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) \geq 0$, $\varphi'(\tau) \geq c_0 > 0$ für alle $\tau \in [0, 1)$. Dann gilt für die verkettete Funktion $\tilde{f}(\tau) := f(\varphi(\tau))$ die Inklusion $\tilde{f} \in W_2^1((0, 1), \tilde{\nu})$ mit einer Gewichtsfunktion $\tilde{\nu}$.*

Beweis: Wir zeigen, dass die verkettete Funktion \tilde{f} eine verallgemeinerte Ableitung besitzt. Da $f \in W_2^1((0, \infty), \nu)$, besitzt f eine verallgemeinerte Ableitung g . Das bedeutet, dass für jedes Intervall $[t_0, t_1] \subset (0, \infty)$ und jede Funktion $h \in C_0^\infty(t_0, t_1)$ per Definition die Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h'(t)dt = - \int_{t_0}^{t_1} g(t)h(t)dt \quad (6.28)$$

gilt. Aufgrund der Definition der Funktion φ existiert zu jedem Intervall $[t_0, t_1]$ genau ein Intervall $[\tau_0, \tau_1] \subset (0, 1)$ mit $\varphi(\tau_0) = t_0$ und $\varphi(\tau_1) = t_1$. Wir definieren $\tilde{h}(\tau) := h(\varphi(\tau))$ und $\tilde{f}(\tau) := f(\varphi(\tau))$ und berechnen die Ableitung der Testfunktion \tilde{h} zu

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{h}(\tau) = \frac{d}{dt} h(\varphi(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau} \varphi(\tau).$$

Wenden wir die Substitutionsregel auf beide Seiten der Gleichung (6.28) an, erhält man

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{f}(\tau) \frac{d}{d\tau} \tilde{h}(\tau) d\tau = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} g(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \tilde{h}(\tau) d\tau \quad (6.29)$$

für jede auf $(0, 1)$ stetig differenzierbare Funktion \tilde{h} und jedes Intervall $[\tau_0, \tau_1] \subset (0, 1)$. Dann entspricht der Ausdruck $g(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot)$ in Gleichung (6.29) der Definition der verallgemeinerten Ableitung der Funktion \tilde{f} . Wir bezeichnen diese Funktion mit \tilde{g} .

Den Funktionenraum der Funktion \tilde{f} bestimmen wir unter Verwendung der Substitutionsregel. Sei $f \in L_2((0, \infty), \nu)$, so gilt

$$\infty > \int_0^\infty |f(t)|^2 \nu(t) dt = \int_0^1 |\tilde{f}(\tau)|^2 \nu(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

Sei $g \in L_2((0, \infty), \nu)$, so gilt

$$\infty > \int_0^\infty |g(t)|^2 \nu(t) dt = \int_0^1 |\tilde{g}(\tau)|^2 \nu(\varphi(\tau)) \frac{1}{\varphi'(\tau)} d\tau.$$

Da per Definition $\varphi'(\tau) \geq c_0 > 0$ gilt, folgt unter Verwendung der Abschätzung $\frac{c_0^2}{\varphi'(\tau)} \leq \varphi'(\tau)$ für die Funktion \tilde{f} und der Konstanten $c := \frac{1}{c_0^2}$:

$$\int_0^1 |\tilde{f}(\tau)|^2 \nu(\varphi(\tau)) \frac{1}{\varphi'(\tau)} d\tau \leq c \int_0^1 |\tilde{f}(\tau)|^2 \nu(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau < \infty.$$

Mit der Definition

$$\tilde{\nu}(\tau) := \nu(\varphi(\tau)) \frac{1}{\varphi'(\tau)} \quad (6.30)$$

folgt die Behauptung $\tilde{f} \in W_2^1((0, 1), \tilde{\nu})$. \square

Ersetzt man die in (6.30) eingeführte Definition durch die Definition

$$\tilde{\nu}_1(\tau) := \nu(\varphi(\tau)) \frac{1}{\varphi'(\tau)}, \quad \tilde{\nu}_2(\tau) := \nu(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau),$$

so ist die Funktion \tilde{f} Element des nicht-uniform gewichteten Sobolevraumes¹⁸ $W_2^1((0, 1), \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_1)$.

Bemerkung 6.6.2. Es ist offensichtlich, dass Satz 6.6.11 auch auf eine Funktion $f \in W_2^1((0, 1), \mu)$ mit einem Gewicht μ angewendet werden kann. Man nutzt für die Transformation die Funktion ω , die dem Zusammenhang $\omega(t) = \tau \Leftrightarrow \varphi(\tau) = t$ für alle $\tau \in [0, 1)$ und alle $t \in [0, \infty)$ genügt. Dann ist die transformierte Funktion \tilde{f} Element des Raumes $W_2^1((0, \infty), \tilde{\mu})$. Das neue Gewicht $\tilde{\mu}$ kann stets analog zu (6.30) bestimmt werden.

A.5. Nebenrechnung für das Problem (P_α)

In dem Abschnitt 3.3 wurde das Problem (P_α) formuliert und untersucht. Um nicht von der eigentlichen Problematik, der Transformation der Aufgabe, abzulenken, tragen wir in diesem Anhang die in Abschnitt 3.3 verwendeten

¹⁸siehe Definition 1.1.9

Abschätzungen zusammen. Wir nutzen sie in Lemma 3.3.1 zur Bestimmung der Funktionenräume der zulässigen Zustandsfunktionen x . Gegeben sei das Anfangswertproblem aus der Aufgabe (P_α).

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t)x^\alpha(t), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad (6.31)$$

mit einer stetigen, beschränkten Funktion B und der Steuerung $u \in L_\infty((0, \infty))$ mit $u(t) \in U$. Der Steuerbereich $U \in \mathbb{R}$ sei kompakt und konvex. Desweiteren sei

$$(1 - \alpha)B(t)v \geq \delta > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, v \in U.$$

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 6.6.2. Für jede Funktion x , die dem Anfangswertproblem (6.31) genügt, gilt

$$\left(m_\alpha \cdot t + x_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq x(t) \leq \left(M_\alpha \cdot t + x_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

mit den Konstanten

$$m_\alpha := (1 - \alpha) \inf_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} B(t)v,$$

$$M_\alpha := (1 - \alpha) \sup_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} B(t)v.$$

Beweis: Wir bezeichnen im Folgenden $\tilde{x}_0 := x_0^{1-\alpha}$. Mittels der einfachen Abschätzung für $\alpha < 1$:

$$\begin{aligned} m_\alpha t &= (1 - \alpha) \inf_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} \left\{ B(t)v \right\} \cdot t \leq (1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds \\ &\leq (1 - \alpha) \sup_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} \left\{ B(t)v \right\} \cdot t = M_\alpha t \end{aligned}$$

und für $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} M_\alpha t &= (1 - \alpha) \sup_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} \left\{ B(t)v \right\} \cdot t \leq (1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds \\ &\leq (1 - \alpha) \inf_{t \in \mathbb{R}_+, v \in U} \left\{ B(t)v \right\} \cdot t = m_\alpha t \end{aligned}$$

folgt durch Addition einer positiven Konstanten

$$0 < m_\alpha t + \tilde{x}_0 \leq (1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + \tilde{x}_0 \leq M_\alpha t + \tilde{x}_0, \quad \alpha < 1, \quad (6.32)$$

$$0 < M_\alpha t + \tilde{x}_0 \leq (1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + \tilde{x}_0 \leq m_\alpha t + \tilde{x}_0, \quad \alpha > 1. \quad (6.33)$$

Hieraus lesen wir ab, dass

$$m_\alpha \leq M_\alpha \quad \text{für } \alpha < 1 \quad \text{und} \quad M_\alpha \leq m_\alpha \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f(z) := z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ist für $\alpha < 1$ eine monoton wachsende und für $\alpha > 1$ eine monoton fallende Funktion. Daraus erhalten wir zusammen mit den Ungleichungen (6.32) und (6.33), dass für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &< \left(m_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq \left((1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + \tilde{x}_0\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(M_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned} \quad (6.34)$$

gilt. Da sich die allgemeine Lösung von (6.31) darstellen lässt als

$$x(t) = \left((1 - \alpha) \int_0^t B(s)u(s)ds + x_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

folgt die Behauptung des Lemmas. \square

Lemma 6.6.3. Für jede Lösung x des Anfangswertproblems (6.31) gilt:

$$\left(n_\alpha \cdot t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq x^\alpha(t) \leq \left(N_\alpha \cdot t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

mit den Konstanten

$$n_\alpha := \begin{cases} M_\alpha & \text{für } \alpha < 0 \\ m_\alpha & \text{für } \alpha > 0 \end{cases}, \quad N_\alpha := \begin{cases} m_\alpha & \text{für } \alpha < 0 \\ M_\alpha & \text{für } \alpha > 0 \end{cases}. \quad (6.35)$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $g(z) := z^\alpha$. Für $\alpha < 0$ ist die Funktion g monoton fallend. Die Anwendung der Monotonie auf die Ungleichung (6.35) ergibt

$$0 < \left(M_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq x^\alpha(t) \leq \left(m_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{für } \alpha < 0.$$

Für $0 < \alpha < 1$ ist g eine monoton wachsende Funktion und mittels Ungleichung (6.35) folgt

$$0 < \left(m_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq x^\alpha(t) \leq \left(M_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Sei nun $\alpha > 1$. Dann ist g eine monoton wachsende Funktion und Ungleichung (6.35) liefert

$$0 < \left(m_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq x^\alpha(t) \leq \left(M_\alpha t + \tilde{x}_0\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Daraus folgt die Behauptung des Lemmas. \square

A.6. Motivation für die Wahl der Gewichtsfunktionen

Will man ein Steuerungsproblem mit in dem Zustand x nichtlinearer Dynamik mittels einer geeigneten Transformation in ein Steuerungsproblem mit einer bezüglich des transformierten Zustandes \tilde{x} linearen Dynamik überführen, stellt sich die Frage nach einer Gewichtsfunktion ν , die einerseits die Raumzugehörigkeit $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$ und andererseits den Nachweis der Äquivalenz der Steuerungsprobleme ermöglicht. In der vorliegenden Arbeit haben wir stets auf ein Problem transformiert, in dem $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ mit $\mu = e^{-\rho t}$, $\rho > 0$ gilt.

Wir wollen hier motivieren, wie man mit Hilfe der bekannten Zusammenhänge der Exponentialverteilung mit anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine geeignete Gewichtsfunktion finden kann. Die in dieser Motivation verwendeten L-Integrale werden wir ohne Angabe des Integrationsbereiches verwenden, er ist jeweils der Träger der verwendeten Zufallsgröße. Es sei in jedem Schritt vorausgesetzt, dass die Integrale im Sinne von Lebesgue existieren. Die hier verwendeten Definitionen und Sätze sind [49] entnommen.

Die Weibullverteilung

Definition 6.6.6. Sei z eine Weibullverteilte Zufallsgröße, $z \sim Wei(\lambda, k)$, $k > 0$, dann hat z die Dichtefunktion $f_2(z) = \lambda k (\lambda z)^{k-1} e^{-(\lambda z)^k}$.

Definition 6.6.7. Sei \tilde{z} eine exponentialverteilte Zufallsgröße, $\tilde{z} \sim Exp(\lambda)$, dann hat \tilde{z} die Dichtefunktion $f_1(\tilde{z}) = \lambda e^{-\lambda \tilde{z}}$.

Satz 6.6.12. Sei \tilde{z} eine exponentialverteilte Zufallsgröße, dann ist $z = \tilde{z}^{\frac{1}{k}}$, $k > 0$ eine Weibullverteilte Zufallsgröße. Es gilt

$$\tilde{z} \sim \text{Exp}(\lambda) \implies z \sim \text{Wei}(\lambda^{\frac{1}{k}}, k).$$

Setzen wir $k = 1 - \alpha$ und betrachten die Transformation

$$z = \tilde{z}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

so wissen wir, dass für $\alpha < 1$ die Zufallsgröße z einer Weibullverteilung genügt, falls die Zufallsgröße \tilde{z} exponentialverteilt ist. Bekanntermaßen ist der Erwartungswert von \tilde{z}^2 bzw. das 2. Moment von \tilde{z} :

$$E_{f_1}(\tilde{z}^2) := \int \tilde{z}^2 f_1(\tilde{z}) d\tilde{z}.$$

Der Index am Erwartungswert E bezieht sich auf die verwendete Dichte. Desweiteren gilt nach der Transformation:

$$\begin{aligned} E_{f_1}(\tilde{z}^2) &= \int \tilde{z}^2 \lambda e^{-\lambda \tilde{z}} d\tilde{z} = \int z^{2(1-\alpha)} \lambda e^{-\lambda z^{1-\alpha}} (1-\alpha) z^{-\alpha} dz \\ &= E_{f_2}(z^{2(1-\alpha)}), \end{aligned} \quad (6.36)$$

falls die Integrale im Sinne von Lebesgue existieren. Wir führen die lineare Substitution $\tilde{z} = at + b$ auf beiden Seiten der Gleichung 6.36 durch und erhalten einerseits:

$$\begin{aligned} E_{f_1}(\tilde{z}^2) &= \int \tilde{z}^2 \lambda e^{-\lambda \tilde{z}} d\tilde{z} = \int \tilde{z}^2(t) \lambda e^{-\lambda \tilde{z}(t)} \dot{\tilde{z}}(t) dt \\ &= \int \tilde{z}^2(t) a \lambda e^{-\lambda at} e^{-\lambda b} dt = c_1 \int \tilde{z}^2(t) e^{-\alpha t} dt \end{aligned} \quad (6.37)$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} E_{f_2}(z^{2(1-\alpha)}) &= \int z^{2(1-\alpha)} \lambda e^{-\lambda z^{1-\alpha}} (1-\alpha) z^{-\alpha} dz \\ &= \int z^2(t) z^{-3\alpha}(t) \lambda e^{-\lambda z^{1-\alpha}(t)} (1-\alpha) \dot{z}(t) dt \\ &= \int z^2(t) (at + b)^{\frac{-3\alpha}{1-\alpha}} \lambda e^{-\lambda(at+b)} (1-\alpha) a \frac{1}{1-\alpha} (at + b)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int z^2(t) a \lambda e^{-\lambda b} (at + b)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\lambda at} dt \\
&= c_1 \int z^2(t) (at + b)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\lambda at} dt,
\end{aligned} \tag{6.38}$$

wenn man $a := \frac{\rho}{\lambda}$ definiert und die Konstante $c_1 := a \lambda e^{-\lambda b}$ setzt. Dieses Resultat führte zu der Vermutung, dass wir für eine Zustandsfunktion $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ mit $\mu = e^{-\rho t}$ zu Problem (P) durch die Transformation von (P) zu (P_α) mittels $\tilde{x}(t) = x^{1-\alpha}(t)$ eine Zustandsfunktion $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$ mit $\nu(t) = (at + b)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} e^{-\lambda at}$ zu Problem (P_α) erhalten und umgekehrt.

Die Paretoverteilung

Definition 6.6.8. Sei z eine paretoverteilte Zufallsgröße, $z \sim \text{Par}(k, x_1)$, $k > 0$, $x_1 > 0$, dann hat z die Dichtefunktion $f_3(z) = \frac{k}{x_1} \left(\frac{x_1}{z}\right)^{k+1}$ für $z \geq x_1$. Für $z < x_1$ gilt $f_3(z) = 0$.

Satz 6.6.13. Sei \tilde{z} eine exponentialverteilte Zufallsgröße, dann ist $z = e^{\tilde{z}}$, eine paretoverteilte Zufallsgröße. Es gilt

$$\tilde{z} \sim \text{Exp}(\lambda) \implies z \sim \text{Par}(\lambda, 1).$$

Wir verwenden folgende Substitution:

$$z := e^{\tilde{z}}$$

und berechnen das 2. Moment von \tilde{z} :

$$\begin{aligned}
E_{f_1}(\tilde{z}^2) &= \int \tilde{z}^2 \lambda e^{-\lambda \tilde{z}} d\tilde{z} = \int \ln^2 z \lambda e^{-\lambda \ln z} z^{-1} dz \\
&= \int \ln^2 z \frac{\lambda}{1} \left(\frac{1}{z}\right)^{\lambda+1} dz = E_{f_3}(\ln^2 z),
\end{aligned}$$

Wir substituieren die Größe \tilde{z} durch t mittels

$$\tilde{z}(t) := at + b.$$

Bemerkung 6.6.3. Die Betrachtung der *natürlichen Phasenbeschränkung* zu Problem (P_1) erklärt diese Setzung.

Den Wert $E_{f_1}(\tilde{z}^2)$ haben wir schon im letzten Abschnitt bestimmt. Nun berechnen wir $E_{f_3}(\ln^2 z)$ in Abhängigkeit von t :

$$\begin{aligned}
 E_{f_3}(\ln^2 z) &= \int \ln^2 z \frac{\lambda}{1} \left(\frac{1}{z}\right)^{\lambda+1} dz = \int z^2 \ln^2 z \lambda \left(\frac{1}{z}\right)^{\lambda+3} dz \\
 &= \int z^2(t) \ln^2 z(t) z^{-(\lambda+3)}(t) \lambda a e^{at+b} dt \\
 &= \int z^2(t) (at+b)^2 e^{-(\lambda+3)(at+b)} \lambda a e^{at+b} dt \\
 &= c_2 \int z^2(t) (at+b)^2 e^{-(\lambda+2)(at)} dt \\
 &= c_2 \int z^2(t) (at+b)^2 e^{-at} e^{-\frac{2a}{\lambda} at} dt
 \end{aligned}$$

mit $a := \frac{a}{\lambda}$ und $c_2 := a \lambda e^{-(\lambda+2)b}$. Dieses Resultat führte zu der Vermutung, dass wir für eine Zustandsfunktion $\tilde{x} \in W_2^1((0, \infty), \mu)$ mit $\mu = e^{-at}$ zu Problem (P) durch die Transformation von (P) zu (P_1) mittels $\tilde{x}(t) = \ln x(t)$ eine Zustandsfunktion $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$ mit $\nu(t) = (at+b)^2 e^{-at} e^{-\frac{2a}{\lambda} at}$ zu Problem (P_1) erhalten und umgekehrt. Dass in der Betrachtung des Problems (P_1) das Gewicht $\nu_1(t) = e^{-2M_1 t} e^{-at}$ verwendet wurde, ist der zeitlichen Entstehung¹⁹ der Arbeit geschuldet.

¹⁹siehe [57]

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Academic Press / Elsevier; Amsterdam etc. 2007, 2.Edition.
- [2] Alt, W.; Schneider, C.; Seydenschwanz, M. (2013): *EAGLE-Starthilfe. Optimale Steuerung. Theorie und numerische Verfahren*. Edition am Gutenbergplatz Leipzig, 1. Aufl. 2013, EAGLE 073.
- [3] Appell, J.(2009): *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Aseev S. M.; Kryazhimskiy A. V. (2004): The Pontryagin Maximum Principle and Transversality Conditions for a Class of Optimal Control Problems with Infinite Time Horizons. *SIAM J. Control Optim.* **43** (3), 1094 – 1119.
- [5] Aseev, S. M.; Kryazhimskiy, A. V. (2007): *The Pontryagin Maximum Principle and optimal economic growth problems*. Proc. Steklov Inst. Math. **257**, 1 – 255.
- [6] Aseev S. M.; Veliov, V. M. (2011): Maximum Principle for Infinite-Horizon Optimal Control Problems with Dominating Discount. *Research Report 2011-06*.
- [7] Aubin, J. P.; Clarke, F. H. (1979): Shadow Prices and Duality for a Class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.* **17** (5), 567 – 586.
- [8] Balder, E. J.(1983): An Existence Result for Optimal Economic Growth Problems. *J. Math. Anal. Appl.* **95**, 195 – 213.
- [9] Bauer, H. (1992): *Mass- und Integrationstheorie*. de Gruyter, Berlin, New York.

- [10] Baum, R. F. (1976): Existence theorems for lagrange control problems with unbounded time domain. *J. Opt. Th. Appl.* **19**, No. 1, 89 – 116.
- [11] Carlson, D. A.; Haurie, A. B.; Leizarowitz, A. (1991): *Infinite Horizon Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- [12] Cartigny, P.; Michel, P. (2003): On a sufficient transversality condition for infinite horizon optimal control problems. *Automatica* **39**, 1007 – 1010.
- [13] Cesari, L. (1966): Existence Theorems for weak and usual optimal solutions in lagrange problems with unilateral constraints. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **124**, 413 – 430.
- [14] Cesari, L. (1983): *Optimization- Theory and applications, Problems with ordinary differential equations*. Applications of Mathematics 17, Springer-Verlag, New York.
- [15] Desoer, C.A.; Vidyasagar, M. (1975): *Feedback Systems: Input-output Properties*. ACADEMIC PRESS New York, San Francisco, London.
- [16] Dunford, N.; Schwartz, J. T. (1988): *Linear Operators. Part I: General Theory*. Wiley-Interscience; New York, etc.
- [17] Effati, S.; Kamyad, A.V.; Kamyabi-Gol, R.A. (2000): On Infinite-Horizon Optimal Control Problems. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **19**, No. 1, 269 – 278.
- [18] Elstrodt, J. (1996): *Maß und Integrationstheorie*. Springer, Berlin.
- [19] Fahroo, F.; Ross, I.M. (2008): Pseudospectral Methods for Infinite-Horizon Optimal Control Problems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **31**, no 4 ,july-aug 2008, 927 – 936.
- [20] Feichtinger, G.; Hartl, R. F. (1986). *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*. de Gruyter, Berlin - New York.
- [21] Filippov, A. F. (1962): On certain questions in the theory of optimal control. *SIAM J. Control Optim.* **1**, 76 – 84.
- [22] Filippov, A. F. (1988): *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers.

- [23] Garg, D.; Hager, W. W.; Rao, A. V. (2011): Pseudospectral Methods for Solving Infinite-Horizon Optimal Control Problems. *Automatica* **47**, Issue 4, 829 – 837.
- [24] Grass, D.; Caulkins, J. P.; Feichtinger, G.; Tragler, G.; Behrens, D. A. (2008): *Optimal Control of Nonlinear Processes*. Springer, Berlin.
- [25] Halkin, H. (1979): Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica* **42**, 267 – 272.
- [26] Heuser, H. (1994): *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- [27] Heuser, H. (1991): *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- [28] Ioffe, A. D., Tichomirov, V. M.(1979): *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [29] Kamihigashi, T. (2001): Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems. *Econometrica* **69**, 995 – 1012.
- [30] Kosmol, P. (1984): Bemerkungen zur Brachistochrone. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **54**, 91 – 94.
- [31] Kufner, A. (1985): *Weighted Sobolev Spaces*. John Wiley & Sons; Chichester, etc.
- [32] Kufner, A.; Opic, B. (1984): How to define reasonably weighted Sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **25**, 537 – 554.
- [33] Lykina, V.; Pickenhain, S.; Wagner, M. (2008): On a resource allocation model with infinite horizon. *Applied Mathematics and Computation* **204**, 595 – 601.
- [34] Lykina, V. (2010): *Beiträge zur Theorie der Optimalsteuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont*. Dissertation. BTU Cottbus.

- [35] Lykina, V.; Pickenhain, S. (2017): Weighted functional spaces approach in infinite horizon optimal control problems: A systematic analysis of hidden opportunities and advantages. *J. Math. Anal. and Appl.* **454**, Issue 1, 195 – 218.
- [36] Lykina, V.; Pickenhain, S.; Wagner, M. (2008): Different interpretations of the improper integral objective in an infinite horizon control problem. *Mathematical Analysis and Applications* **340**, 498 – 510.
- [37] Maurer, H.; Osmolovskii, N.P. (2003): Second order optimality conditions for bang-bang control problems. *Control and Cybernetics* **36**, 555 – 585.
- [38] Nathanson, I. P. (1981): *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Verlag Harry Deutsch.
- [39] Olech, C. (1976): Weak lower semicontinuity of integral functionals. *J. Opt. Theory Appl.* **19**, No. 1 (1976), 3 – 16.
- [40] Pickenhain, S.; Lykina, V.; Wagner, M. (2008): On the lower semicontinuity of functionals involving Lebesgue or improper Riemann integrals in infinite horizon optimal control problems. *Control and Cybernetics* **37**, No. 2, 451 – 468.
- [41] Pickenhain, S. (2012): Hilbert Space Treatment of Optimal Control Problems with Infinite Horizon. *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes*, HPSC 2012, 169 – 182.
- [42] Pickenhain, S. (2019): Infinite Horizon Problems in the Calculus of Variations. The Role of Transformations with an Application to the Brachistochrone Problem. *J. Set-Valued Var. Anal.* **27**, Issue 2, 331 – 354.
- [43] Pickenhain, S. (2015): Infinite Horizon Optimal Control Problems in the Light of Convex Analysis in Hilbert Spaces. *Set-Valued and Variational Analysis* **23**, Issue 1, 169 – 189.
- [44] Pickenhain, S.; Wenzke, D. (2012): Transformation of Infinite Horizon Optimal Control Problems. *Preprint Reihe Mathematik*, M-02/2012, BTU Cottbus.

- [45] Pickenhain, S.; Burtchen, A.; Kolo, K.; Lykina, V.(2016): An indirect Pseudospectral Method for the Solution of Infinite Horizon Optimal Control Problems. *J. Optimization* **65**, Issue 3, 609 – 633.
- [46] Pontrjagin, L.S.; Boltjanskij, V.G.; Gamkrelidze, R. V.; Mischenko, Y. F. (1969): *Matematicheskaja teorija optimalnih protsessov*. Nauka, Moskwa.
- [47] Pontrjagin, L.S.; Boltjanskij, V.G.; Gamkrelidze, R. V.; Mischenko, Y. F.(1964): *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. R. Oldenbourg, München, Wien.
- [48] Ramsey, F. P.(1928): A mathematical theory of savings. *The Economic Journal*,**152**, No. 38, 543 – 559.
- [49] Rinne, H. (1997): *Taschenbuch der Statistik*. Verlag Harri Deutsch.
- [50] Rockafellar, R. T. (1975): Existence Theorems for General Control Problems of Bolza and Lagrange. *Advances in Mathematics* **15**, 312 – 333.
- [51] Smirnov, G. V. (1996): Transversality Condition for Infinite-Horizon Problems. *Journal of Optimization Theory and Application* **35**, 283 – 309.
- [52] Takekuma, S.-I. (1980): A sensitivity analysis of optimal economic growth. *J. Math. Econ.* **7**, 193 – 208.
- [53] Teschl, G. (2012): *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics 140, Amer. Math. Soc., Providence.
- [54] Tonelli, L. (1921-23, 2 Bände): *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. Zanichelli, Bologna.
- [55] Vinter R. (2010): *Optimal Control*. Reprint of the 2000 Edition Birkhäuser Boston, Basel, Berlin.
- [56] Warga, J. (1962): Relaxed variational problems. *J. Math. Anal. Appl.* **4**, 111 – 128.

- [57] Wenzke, D.; Lykina, V.; Pickenhain, S. (2014): State and time transformations of infinite horizon optimal control problems. *Contemporary Mathematics Series of the AMS* **619**, 189 – 208.
- [58] Würth, L.; Rawlings, J.B.; Marquardt, W. (2009): Economic Dynamic Real-Time Optimization and Nonlinear Model-Predictive Control on Infinite Horizons. *IFAC Proceedings Volumes* **42**, Issue 11, 219 – 224.
- [59] Yosida, K. (1974): *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [60] Zaslavski, A. J. (2007): Generic existence of Lipschitzian solutions of optimal control problems without convexity assumptions. *J. Math. Anal. Appl.* **335**, Issue 2, 962 – 973.
- [61] Ziemann, T. (2015) : *Ein Maximumprinzip für eine Klasse von Optimalsteuerungsproblemen über einem unendlichen Zeithorizont mit vektoriellen Zuständen und Steuerungen*. Masterarbeit. BTU Cottbus-Senftenberg.
- [62] Ziemann, T. (2019): *Notwendige Optimalitätskriterien für eine Klasse von Steuerungsaufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont*. Dissertation. BTU Cottbus-Senftenberg.
- [63] Ziemann, T.; Burtchen, A. (2018) Analytische Hilfsmittel der Steuerungstheorie. *Preprint Reihe Mathematik M* **01/2018**, BTU Cottbus-Senftenberg.
- [64] Ziemann, T.; Pickenhain, S.(2018): First-order necessary optimality conditions for infinite horizon optimal control problems with linear dynamics and convex objective. *Optimization* **67** , Issue 6, 757 – 782.