

---

# Notwendige Optimalitätskriterien für eine Klasse von Steuerungsaufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont

---

Von der Fakultät 1 - MINT - Mathematik, Informatik, Physik, Elektro-  
und Informationstechnik der Brandenburgischen Technischen  
Universität Cottbus-Senftenberg

genehmigte Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Master of Science Torsten Ziemann  
geboren am 09.02.1991 in Bad Saarow, Deutschland

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny  
Gutachterin: Prof. Dr. rer. nat. habil. Sabine Pickenhain  
Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Gerd Wachsmuth  
Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Walter Alt

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juli 2019



# Abstract

In der vorliegenden Dissertation wird ein Beitrag zur Theorie der Steuerungsaufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont geleistet. Diese Aufgabenklasse entsteht im Kontext der Quantenmechanik und der Theorie der Stabilisierung dynamischer Systeme, wo eine Divergenz des zu optimierenden Zielfunktional ausgeschlossen werden muss. Es wird das Lebesgue-Integral zugrunde gelegt. Die Optimierung erfolgt in gewichteten Hilberträumen. Konkret werden Aufgaben betrachtet, deren Zustände Elemente des gewichteten Sobolev-Raumes  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  sind. Die Steuerungen gehören dem Raum  $L_2^m((0, \infty), \mu)$  an. Die Gewichtsfunktion  $\mu$  mit  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$  ist dabei geeignet zu wählen. Hierzu wird der Parameter  $\rho > 0$  aus der Dynamik bestimmt. Die Steuerungsaufgabe bettet sich so in eine konvexe Hilbertraumtheorie ein. Die zulässigen Prozesse lassen sich uniform in der Norm des Hilbertraumes majorisieren. Fast überall punktweise konvergente Folgen zulässiger Zustandstrajektorien konvergieren dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz gemäß auch in der Topologie des Hilbertraumes selbst. Dies erlaubt es, die Aufgabe zum einen mit Methoden der Funktionalanalysis zu studieren, zum anderen punktweise Argumente zu verwenden. Konkret wird die Dynamik im Sinn eines Anfangswertproblems nach Carathéodory studiert. Die lokal absolut stetige Lösung lässt sich in den gewichteten Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  einbetten. Es genügen lokale, punktweise Argumente auf Seiten der Dynamik, um die Aufgabe in den Kontext einer Hilbertraumtheorie zu setzen.

In diesem Kontext befasst sich die vorliegende Arbeit mit der Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien. Es werden zwei Maximumprinzipien vom Pontryagin-Typus bewiesen. Die Kernidee zum Beweis dieser Resultate bildet die Trennung konvexer Mengen. Konkret untersuchen wir einen konvexen und abgeschlossenen Variationskegel, welcher nicht den gesamten Hilbertraum aufspannt. Der Trennungssatz von Hahn-Banach liefert neben den Kernbedingungen des Maximumprinzips – *kanonische Gleichung*, *Maximumbedingung* – auch die explizite Existenz einer Adjungierten, welche der natürlichen Transversalitätsbedingung genügt. Zur Konstruktion des Variationskegels werden entsprechend der beiden studierten Optimalitätskriterien zwei unterschiedliche Arten der Variation verwendet. Zum einen wird eine auf Euler zurückgehende Variationsidee benutzt, zum anderen ein Ansatz, der auf Weierstraß zurückzuführen ist.

Ein Vergleich der hergeleiteten Maximumprinzipien mündet in einer geeigneten Formulierung einer Variation im gewichteten Hilbertraum. Gleichzeitig zeigen sich natürliche Barrieren der konvexen Analysis auf. So können mit der in dieser Arbeit präsentierten Beweistechnik lediglich Aufgaben untersucht werden, welche eine bezüglich der Steuerung affin-lineare Dynamik besitzen.

Die Anwendbarkeit der bewiesenen, notwendigen Optimalitätskriterien wird anhand eines Modells zur Analyse einer optimalen Strategie zur Terrorbekämpfung demonstriert, und es wird ein Vergleich zu den in der Literatur bekannten Most-Rapid und Turnpike Ansätzen hergestellt.



# Abstract

In the dissertation „Necessary optimality criteria for a class of control problems with an a priori given infinite time horizon“ a contribution is made to the theory of control problems with an a priori given infinite time horizon. This class of problems arises in the context of quantum mechanics and the theory of stabilization of dynamical systems, where a divergence of the target function to be optimized has to be excluded. The work is based on the Lebesgue integral. The optimization takes place in weighted Hilbert spaces. Specifically, problems whose states are elements of the weighted Sobolev space  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  are considered. The controls belong to the space  $L_2^m((0, \infty), \mu)$ . The weight function  $\mu$  with  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$  is a suitable choice. The parameter  $\rho > 0$  is determined from the dynamics. The optimal control problem thus embeds itself in a convex Hilbert space theory. The admissible processes can be bounded uniformly. Almost everywhere point-wise convergent sequences of valid state trajectories converge in the topology of the Hilbert space as well, due to the Lebesgue dominated convergence theorem. This allows one to study the problem with methods of functional analysis and, on the other hand, to use point-wise arguments. Specifically, the dynamics is studied in the sense of an initial value problem after Carathéodory. The locally absolutely continuous solution can be embedded in the weighted space  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ . Local point-wise arguments on the side of the dynamics suffice, to place the problem in the context of a uniform theory with respect to the Hilbert space norm.

In this context, the present work deals with the derivation of necessary optimality criteria. Two maximum principles of the Pontryagin type are proved. The core idea to prove these results is the separation of convex sets. Specifically, we examine a convex and closed variation cone, which does not span the entire Hilbert space. The separation theorem of Hahn-Banach provides besides the core conditions of the maximum principle, *canonical equation*, *maximum condition*, also the explicit existence of an adjoint, which satisfies the natural transversality condition. For the construction of the variation cone two different types of variation are used according to the two studied optimality criteria. On the one hand, a variation idea based on Euler is used. On the other hand, an approach that can be traced back to Weierstraß is used.

A comparison of the derived maximum principles leads to a suitable formulation of a variation in the weighted Hilbert space setting. At the same time, natural barriers of convex analysis emerge. Thus, with the proof technique presented in this work, only problems can be investigated which have affine linear dynamics with respect to the control.

The applicability of the proven necessary optimality criteria is demonstrated by a model for analyzing an optimal strategy for combating terrorism, and a comparison is made with the Most-Rapid and Turnpike approaches well known in the literature.



*„Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft  
nicht ohne Beweis geglaubt werden.“*

Richard Dedekind





## Danksagung

An dieser Stelle nutze ich die Gelegenheit, um mich bei all denjenigen zu bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Einen besonderen Dank spreche ich meiner Betreuerin Prof. Dr. rer. nat. habil. Sabine Pickenhain aus, die mir bei Fragen und Problemen stets hilfreich zur Verfügung stand und mich während meiner Promotionszeit hervorragend betreute. Gleichmaßen dankbar bin ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny, der mir überhaupt erst die Chance zur Promotion ermöglichte, indem er mich an seinem Lehrstuhl anstellte und so finanziell unterstützte. Außerdem bedanke ich mich bei dem Lehrstuhl Optimierung, vertreten durch meine Kolleginnen, Angie Burtchen, Diana Wenzke, Katharina Kolo, und Valeria Lykina, sowie dem Sekretariat, vertreten durch Henriette Dräger. Besonders sind hierbei Frau Henriette Dräger und Frau Angie Burtchen hervorzuheben, die mir in dieser Zeit immer hilfreich zur Seite standen und mich bei Rückschlägen stets motivierten. Mein Dank gilt auch meinen Kollegen vom Lehrstuhl Analysis, Andreas Künnemann und Sören Tschierse, welche mich allzeit mit inspirierenden Gesprächen unterstützten. Ich bedanke mich für den wissenschaftlichen sowie privaten Austausch.

Weiterhin bedanke ich mich bei all jenen, die mir während dieser Phase meines Lebens mit hilfreichen Ratschlägen bei Seite standen. Namentlich sind hier besonders meine Freunde – Wei-Hshin Tsao, Josefine Leyh und Andreas Künnemann – und meine Familie – Frau Carola Ziemann, Herr Stefan Ziemann und Frau Sigrid Oswald – hervorzuheben.

Abschließend möchte ich mich auch bei all jenen bedanken, die mich in diesem Abschnitt meines Lebens begleitet und geprägt haben, die ich hier jedoch nicht vollständig erwähnen konnte. Danke.

Torsten Ziemann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Vorwort . . . . .	1
1.2 Motivation und Ziele der Arbeit . . . . .	4
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2 Grundlegende analytische Hilfsmittel</b>	<b>9</b>
2.1 Vorbetrachtungen . . . . .	9
2.2 Absolut stetige Funktionen und das Lebesgue-Integral . . . . .	13
2.3 Klassische Lebesgue- und Sobolev-Räume . . . . .	20
2.3.1 Die Räume $L_p(\Omega)$ und $W_p^k(\Omega)$ . . . . .	20
2.3.2 Die Räume $L_p^n(\Omega)$ , $W_p^{n,k}(\Omega)$ und der Raum $L_\infty^{n \times m}(\Omega)$ . . . . .	26
2.4 Gewichtete Lebesgue- und Sobolev-Räume . . . . .	34
2.4.1 Die Räume $L_p(\Omega, \omega)$ und $W_p^k(\Omega, \omega)$ . . . . .	35
2.4.2 Die Räume $L_p^n(\Omega, \omega)$ , $W_p^{n,k}(\Omega, \omega)$ . . . . .	43
2.5 Ergebnisse der konvexen Analysis und der Funktionalanalysis . . . . .	44
2.6 Differenzialgleichungen . . . . .	53
2.6.1 Motivation aus Sicht der optimalen Steuerung . . . . .	53
2.6.2 Differenzialgleichungen mit unstetiger rechter Seite . . . . .	54
2.6.3 Differenzialgleichungen in gewichteten Sobolev-Räumen . . . . .	59
<b>3 Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont</b>	<b>63</b>
3.1 Motivation . . . . .	63
3.2 Die Aufgabe $(P_\infty)$ . . . . .	64
3.3 Probleme und Phänomene auf einem unendlichen Zeithorizont . . . . .	65
3.4 Klassifikation von Steuerungsaufgaben . . . . .	68
3.5 Geeignete Wahl des Suchraumes . . . . .	69
3.6 Grundlegende Begriffe und Definitionen . . . . .	71
3.6.1 Die Menge der zulässigen Prozesse . . . . .	71
3.6.2 Diskussion verschiedener Optimalitätsbegriffe . . . . .	72
3.7 Bekannte Ergebnisse . . . . .	81
3.7.1 Existenz optimaler Steuerungen . . . . .	81
3.7.2 Notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung . . . . .	83
<b>4 Notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung für Steuerungsaufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont</b>	<b>89</b>
4.1 Formulierung einer Steuerungsaufgabe im Hilbertraum . . . . .	89
4.2 Die Variationen im Sinn von Euler und Weierstraß . . . . .	90

4.3	Untersuchung des Steuerungsproblems mit einer Euler-Variation . . . .	92
4.3.1	Formulierung des Maximumprinzips . . . . .	92
4.3.2	Beweis des Maximumprinzips . . . . .	95
4.4	Untersuchung der Steuerungsaufgabe mit einer Weierstraß-Variation . .	120
4.4.1	Formulierung des Maximumprinzips . . . . .	121
4.4.2	Beweis des Maximumprinzips . . . . .	123
4.5	Abgrenzung der Optimalitätskriterien voneinander . . . . .	146
4.6	Abgrenzung der Optimalitätskriterien von der bestehenden Literatur .	148
<b>5</b>	<b>Anwendung der notwendigen Optimalitätskriterien auf ein Modell zur Untersuchung einer optimalen Terrorbekämpfungsstrategie</b>	<b>151</b>
<b>6</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>163</b>
	<b>Literatur</b>	<b>167</b>

# Notationen

$\mathbb{N}$ , Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{R}$ , Menge der reellen Zahlen

$e$ , Eulersche Zahl

$\operatorname{Re} x$ , Realteil einer komplexen Zahl  $x$

$\operatorname{Im} x$ , Imaginärteil einer komplexen Zahl  $x$

$\mathbf{e}_i$ ,  $i$ -ter Einheitsvektor aus der kanonischen Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$

$C^k(\Omega, \Theta)$ , Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen von  $\Omega$  nach  $\Theta$

$C(\Omega, \Theta) := C^0(\Omega, \Theta)$ , Raum der stetigen Funktionen von  $\Omega$  nach  $\Theta$

$X^*$ , topologischer Dualraum zu dem normierten Raum  $X$

$\|\cdot\|_X$ , Norm auf dem Funktionenraum  $X$

$|\cdot|_p$ ,  $p$ -Norm auf  $\mathbb{R}^n$

$|\cdot|$ , euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ ; Im Spezialfall  $n = 1$ : Absolutbetrag einer reellen Zahl

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , Zahlenfolge  $x_1, x_2, x_3, \dots$

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$ , schwache Konvergenz der Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  im Raum  $X$  gegen  $x_0 \in X$

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$ , starke Konvergenz der Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  im Raum  $X$  gegen  $x_0 \in X$

Weiter definieren wir den Nabla-Operator  $\nabla$  durch

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

für eine Funktion der Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$ . Für eine Funktion  $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$  setzen wir

$$\nabla_{\mathbf{y}} F := \left( \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_m} \right)^T.$$

In Erweiterung zum Nabla-Operator definieren wir für eine Funktion  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  der Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  die Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}[\varphi]$  durch  $\mathcal{J}[\varphi] := (\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_m)^T$ . Für eine Funktion  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)^T$  setzen wir entsprechend  $\mathcal{J}_{\mathbf{y}}[\varphi] := (\nabla_{\mathbf{y}} \varphi_1, \dots, \nabla_{\mathbf{y}} \varphi_m)^T$ .



# 1 Einleitung

## 1.1 Vorwort

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit Steuerungsaufgaben auf einem unendlichen Zeithorizont. Das Ziel dieser Problemstellung besteht in dem Auffinden einer optimalen Steuerung  $u$ , in der Ökonomie auch Strategie genannt, welche das Zielfunktional  $J_\infty$ ,

$$J_\infty(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} r(t, x(t), u(t)) dt,$$

minimiert. Die Minimierung erfolge hierbei bezüglich aller  $x, u$ , die den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \\ u(t) &\in \mathcal{U}\end{aligned}$$

genügen. Die auftretende Differenzialgleichung bezeichnen wir auch als Systemdynamik oder kurz Dynamik der Steuerungsaufgabe. Die Steuerung  $u$  unterliegt hierbei einer gewissen, durch den Kontext der Anwendung gegebenen Restriktion, welche wir in der Form  $u(t) \in \mathcal{U}$  ausdrücken. Das so definierte Problem ( $P_\infty$ ) scheint zunächst nur theoretischer Natur zu sein. Die Lebensdauer ökonomischer, biologischer und technischer Systeme ist begrenzt. Es scheint intuitiv die Minimierung von  $J_T$ ,

$$J_T(x, u) = \int_{t_0}^T r(t, x(t), u(t)) dt,$$

auf dem Zeithorizont  $[0, T]$  ausreichend zu sein. Doch bereits Arrow und Kurz merkten in *Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy*, [5], die Nützlichkeit der Betrachtung einer Aufgabenklasse mit einem unendlichen Zeithorizont an:

*„The infinite horizon is an idealization of the fundamental point that the consequences of investment are very long-lived; any short horizon requires some methods of evaluating end-of-period capital stocks, and the only proper evaluation is their value in use in the subsequent future.“<sup>1</sup>*

---

<sup>1</sup>Zitat aus [5], Seite XVIII.

Es folgten zahlreiche Auseinandersetzungen mit Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont. (vgl. [7–13, 16, 22, 24, 26, 27, 40–45, 48, 52, 60, 64, 74]).

Die Aufgaben vom Typ  $(P_\infty)$  lassen sich auf verschiedenen Wegen einführen. Zum einen entstehen sie als Grenzfall (Idealisierung) von Steuerungsaufgaben mit einem beliebig großen, endlichen Zeithorizont (siehe unter anderem [5, 22, 26]). Dieses Vorgehen finden wir vor allem in den ökonomischen Modellen wieder und es kann als der historische Zugang zu den Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont angesehen werden. Die Intuition hinter dieser Vorgehensweise steckt, wie das obige Zitat belegt, in der Beobachtung, dass momentane Entscheidungen einen weitreichenden Einfluss auf die Zukunft haben. Würden wir dieses Entscheidungs-Konsequenz-Schema zu einem festen Zeitpunkt  $T > 0$  abrechnen, das heißt Steuerungsaufgaben mit einem endlichen Horizont  $[0, T]$  betrachten, so ergäbe sich unmittelbar die Problematik, die Konsequenzen der letzten Entscheidungen zu berücksichtigen (vgl. [5]). In diesem Hintergrund scheint es nur sinnvoll, die Aufgabe mit einem endlichen, beliebig großen Endzeitpunkt zu versehen. Wir haben es gedanklich mit einem Fortsetzungsprozess auf den unendlichen Zeithorizont zu tun, bei dem der Endzeitpunkt  $T > 0$  des Planungszeitraumes der klassischen Steuerungsaufgabe gegen unendlich herausgeschoben wird. Das im Zielfunktional  $J_\infty$  auftretende Integral ist im uneigentlichen Sinn zu interpretieren. In einigen Modellen, insbesondere ökonomischer Natur, ist es hierbei erlaubt, dass bei diesem Fortsetzungsprozess der Zielfunktionalwert divergiert. Es gilt dann Prozesse mit möglicherweise unendlich großem beziehungsweise divergentem Zielfunktionalwert zu vergleichen, und unter diesen einen optimalen Prozess auszuwählen. Hierfür müssen geeignete Optimalitätsbegriffe definiert werden.

Diesen zuvor beschriebenen Aufgaben stehen jene Steuerungsprobleme gegenüber, in denen der unendliche Zeithorizont a priori in der Aufgabenstellung auftritt. Dieses Phänomen finden wir insbesondere in technischen und physikalischen Anwendungen.

### Beispiel 1.1.1 ([56, Abschnitt §1])

*Nach dem Hamiltonschen Prinzip nehmen bestimmte physikalische Größen von Teilchen und Feldern einen stationären, auch extremalen Wert genannt, an. Diesen Sachverhalt modellierte Erwin Schrödinger in Form einer Variationsaufgabe in einem komplexen Hilbertraum (vgl. [38]).*

*Wir betrachten hierzu den quantenmechanischen Oszillator in seiner ersten Quantisierung in einer Dimension, dessen dynamisches Verhalten sich durch die Variationsaufgabe beschreiben lässt, bei der es die kritischen Punkte des Zielfunktional*

$$J(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hbar^2 \psi'(x)^2}{4m} + \frac{1}{4} (m\omega^2 x^2 - E) \psi^2(x) \right\} dx$$

*zu bestimmen gilt. Hierbei ist  $\omega$  die Kreis- oder auch Winkelfrequenz,  $E$  die Gesamtenergie des Systems und  $m$  die Masse des betrachteten Teilchens. Die Lösungen  $\psi$  dieser Variationsaufgabe sind die sogenannten Wellenfunktionen. Das im Zielfunktional auftretende, unbeschränkte Integrationsgebiet wird hier durch den Ort repräsentiert. Aus physikalischer Sicht, im Kontext der Wellenfunktionen, ergibt ein Abschneiden dieses unendlichen „Orthorizontes“ keinen Sinn. Wir haben entsprechend eine Variationsaufgabe mit einem a priori gegebenen Zeithorizont vorliegen.*



Wie das vorherige Beispiel deutlich macht, muss in dieser Klasse der Aufgaben dem Zielfunktional eine sinnvolle Interpretation auf dem unendlichen Zeithorizont zugeordnet werden. Im Zielfunktional auftretende Integrale müssen geeignet interpretiert werden und der Forderung der Existenz und Endlichkeit entlang des optimalen Prozesses genügen. Ein uneigentlicher Integraltyp, wie er im zuvor beschriebenen Zugang verwendet wurde, ist nun nicht mehr adäquat. Anstelle dessen wird das Lebesgue-Integral verwendet (vgl. [44]). Um diesen Sachverhalt deutlicher zu gestalten, sprechen wir in der vorliegenden Arbeit in diesem Fall auch von einem „eentlichen“ Integral.

In einer gewissen Weise – ebenfalls zur zweiten Klasse zählende Probleme – sind die Aufgaben asymptotischer Stabilisierung dynamischer Systeme. So führten Hall und Wiener in den 1940er-Jahren bereits erstmalig ein asymptotisches Stabilisierungsproblem ein, bei welchem ein unendlicher Zeithorizont auftritt (siehe [28, 71]). Hier ist eine Konvergenz des Zielfunktional zwingend, um den asymptotisch stabilisierenden Charakter des Systems sicherzustellen. Eine Divergenz des Zielfunktional im Sinn eines uneentlichen Integrals wäre hier einem nicht mehr asymptotisch stabilen System gleichzusetzen (siehe [56]).

Ein recht neuer Zugang zur Problemklasse der Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont, bei dem der unendliche Horizont ebenfalls a priori auftritt, geschieht mittels geeigneter Transformation einer klassischen Aufgabe mit endlichem Zeithorizont. So wurde beispielsweise in [55] das Brachistochrone Problem bewusst auf einen unendlichen Zeithorizont transformiert, um eine Singularität in der Aufgabenstellung zu umgehen. Auch hier möchte man einen endlichen Zielfunktionalwert entlang des optimalen Prozesses fordern und so die getätigte Transformation rechtfertigen.

Zusammenfassend beobachten wir, dass es über dem unendlichen Zeithorizont im wesentlichen zwei Klassen von Steuerungsaufgaben gibt, zum einen jene Probleme, bei denen sich der unendliche Horizont als eine Idealisierung endlicher Steuerungsprobleme ergibt. Hier scheint die Verwendung eines uneentlichen Integrals sinnvoll. Zum anderen gibt es Steuerungsaufgaben, bei denen der unendliche Zeithorizont a priori Bestandteil der Aufgabe ist. Es ist die Verwendung des (eentlichen) Lebesgue-Integrals angebracht.

**Bemerkung 1.1.1** (vgl. [43, 44]))

*Diese strikte Trennung der Steuerungsaufgaben muss im Kontext der Anwendung etwas relativiert werden. Es lässt sich für eine Vielzahl von Aufgaben feststellen, dass sie in der Schnittmenge beider Aufgabenklassen angesiedelt sind, so auch das in der vorliegenden Arbeit diskutierte Anwendungsbeispiel (vgl. Kapitel 5).*

*Unterstellt man die absolute Integrierbarkeit des Integranden im Zielfunktional, so fallen die Begriffe des uneentlichen und des eentlichen Integrals zusammen. Eine Behandlung der Aufgabe mittels Hilbertraum-Methoden scheint uns auch dann adäquat. So können die in der vorliegenden Arbeit hergeleiteten notwendigen Optimalitätskriterien auch für eine Vielzahl von Steuerungsaufgaben, die der Interpretation eines beliebig großen, endlichen Zeithorizontes unterliegen, verwendet werden.*

Während die erste der angesprochenen Problemklassen – Aufgaben mit der Interpretation eines beliebig großen, endlichen Zeithorizontes – zum Zeitpunkt des Entstehens

dieser Arbeit sehr gut studiert ist, lassen sich zur zweiten Aufgabenstellung nur wenige Resultate finden. Ziel dieser Arbeit ist das Studium der Steuerungsprobleme mit a priori auftretendem unendlichen Zeithorizont hinsichtlich notwendiger Optimalitätskriterien. Hierzu formulieren wir zwei Maximumprinzipien vom Pontryagin-Typus unter Bezugnahme auf die klassischen Variationsmethoden von Euler und Weierstraß. Wir stellen diese im Kontext der gestellten Aufgabe gegenüber. Ein Vergleich mit der bestehenden Literatur wird noch einmal die Unterschiede der zuvor beschriebenen beiden Arten von Steuerungsproblemen herausstellen.

## 1.2 Motivation und Ziele der Arbeit

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Frage der Einbettung nicht-linearer Steuerungsaufgaben über einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont in eine Theorie der konvexen, linearen Funktionalanalysis. Speziell interessiert uns das Studium notwendiger Optimalitätskriterien unter Verwendung eines globalen Optimalitätsbegriffes im gewichteten Hilbertraum.

Für linear-quadratische Steuerungsaufgaben ist bekannt, dass die Behandlung dieser Aufgaben im Rahmen einer gewichteten Hilbertraumtheorie geeignet ist (vgl. [43]). So finden wir zum Zeitpunkt der Anfertigung dieser Arbeit sowohl Publikationen zur Existenz von optimalen Steuerungen [40–42], als auch zum Thema notwendiger Optimalitätskriterien [51, 54]. Hierbei wurde jeweils ein globaler, im gewichteten Hilbertraum wirkender, Optimalitätsbegriff zugrunde gelegt.

In den Arbeiten zu notwendigen Optimalitätskriterien werden jedoch lediglich Steuerungsaufgaben mit einer linearen Dynamik der Form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0$$

studiert. In diesem Fall lassen sich die zulässigen Richtungen der Variationen, bezeichnet mit  $(\zeta, \omega)$ , ebenfalls linear darstellen. Konkret wird in den Arbeiten [51, 54]  $\zeta = x - x_*$ ,  $\omega = u - u_*$  angesetzt. Hierbei ist  $(x_*, u_*)$  der optimale Prozess und  $(x, u)$  Element der Menge der zulässigen Prozesse. Diese lineare Variation erfüllt die Dynamik der Steuerungsaufgabe zu dem modifizierten Anfangswert  $\zeta(0) = 0$ . Es gilt

$$\dot{\zeta}(t) = A(t)\zeta(t) + B(t)\omega(t), \quad \zeta(0) = 0. \tag{1.1}$$

Mittels dieses Anfangswertproblems lässt sich der Kegel zulässiger Variationen charakterisieren, aus welchem anschließend unter Anwendung eines Trennungssatzes die notwendigen Optimalitätskriterien abgeleitet werden. Es resultiert ein Maximumprinzip vom Pontryagin-Typus, welches neben den Kernbedingungen, *kanonische Gleichung*, *Maximumbedingung* auch die Existenz einer Adjungierten liefert, die der natürlichen Transversalitätsbedingung genügt.

Mit der vorliegenden Arbeit möchten wir dieses Studium fortsetzen und die Theorie notwendiger Optimalitätsbedingungen, im Kontext einer gewichteten Hilbertraumtheorie, auf die Betrachtung nicht-linearer Aufgaben erweitern. Insbesondere ist uns hierbei

wichtig, die Grenzen der in [51, 54] aufgezeigten Beweismethodik auszuloten und diese mit den klassischen Methoden aus [9, 10] zu vergleichen, welche bisher vorrangig zur Behandlung von Aufgaben, bei denen die Divergenz des Zielfunktionals erlaubt ist, verwendet wurden.

Im Fall einer allgemeinen, nicht-linearen Differenzialgleichung lässt sich der Variationskegel zunächst nicht mehr durch den linearen Ansatz  $\zeta = x - x_*$ ,  $\omega = u - u_*$  charakterisieren. Es muss eine zu dem Anfangswertproblem (1.1) äquivalente Gleichung formuliert werden, mit welcher sich der Variationskegel aufspannen lässt. Hierzu ist eine geeignete Variation zu formulieren. In der vorliegenden Arbeit werden wir hierzu zwei Ansätze verfolgen. Zum einen werden wir eine auf Euler zurückgehende Variationsidee nutzen. Zum anderen verwenden wir die auf Weierstraß zurückzuführende Nadelvariation. Im Fall der Euler-Variation stellen wir das Hilfsproblem

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) \\ \zeta(0) &= 0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

mit geeignet zu wählenden, zulässigen Variationsrichtungen  $(\zeta, \omega)$ , als ein zum Anfangswertproblem (1.1) adäquates Pendant heraus. Die Ausdrücke  $\mathcal{J}_v[\varphi]$ ,  $\mathcal{J}_\xi[\varphi]$  stehen hierbei für die Jacobi-Matrizen von  $\varphi$  bezüglich Steuerung und Zustand. Formal handelt es sich bei dieser Differenzialgleichung um eine Art Linearisierung der Dynamik entlang des optimalen Prozesses.

Für die auf Weierstraß zurückgehende Nadelvariation werden wir das Hilfsproblem

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\end{aligned}\tag{1.3}$$

herleiten. Hierbei ist  $\tau > 0$  ein Lebesgue-Punkt der optimalen Steuerung. Die Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  geht in diesem Fall nicht in die Charakterisierung des Variationskegels ein.

Aufbauend auf den zuvor beschriebenen Variationsideen, respektive den zuvor formulierten Hilfsproblemen zur Charakterisierung des Variationskegels, beweisen wir zwei notwendige Optimalitätskriterien in Form von Maximumprinzipien vom Pontryagin-Typus.

Die unterschiedliche Struktur der Hilfsprobleme (1.2), (1.3) wirft unmittelbar die Frage auf, welcher der beiden Variationstypen geeigneter ist. Hierzu stellen wir die zum Beweis des jeweiligen Maximumprinzips benötigten Voraussetzungen den jeweiligen Aussagen des Satzes gegenüber. Wir werden sehen, dass sich im Fall der Nadelvariation die notwendigen Optimalitätskriterien unter schwächeren Voraussetzungen formulieren lassen, wir dann jedoch nicht die Fortsetzbarkeit der Adjungierten auf den gesamten unendlichen Zeithorizont erhalten.<sup>2</sup> Unter geringfügig stärkeren Voraussetzungen zeigen wir mittels der auf Euler zurückgehenden Variation ein Maximumprinzip, bei dem sich die Adjungierte stetig auf dem gesamten Zeithorizont fortsetzen lässt. Insbesondere existieren die Adjungierten im Anfangszeitpunkt des Planungshorizontes, ein für

<sup>2</sup>Konkret erhalten wir die Adjungierte  $p$  lediglich auf dem Gebiet  $(\tau, \infty)$ ,  $\tau > 0$ . Eine eindeutige Fortsetzung der Funktion in den Nullpunkt kann ebenso wenig gesichert werden, wie die Existenz des Ausdrucks  $p(0)$  selbst.

das numerische Studium von Steuerungsaufgaben mittels indirekter Methoden unerlässliches Resultat (vgl. [52]).

Wir schließen die Diskussion der Variationstypen ab, indem wir die in der vorliegenden Arbeit deduzierten Resultate mit den bekannten Ergebnissen der Literatur vergleichen. Hierbei betonen wir nochmals die Eignung der Euler-Variation im Kontext der Steuerungsaufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont. Gleichzeitig stellen wir jedoch fest, dass die Euler-Variation, in Kombination mit der hier eingesetzten Beweistechnik, nicht gleichermaßen gut zur Behandlung von Steuerungsaufgaben mit endlichem, beliebig großem Zeithorizont geeignet ist. Hier empfiehlt sich das Studium der Steuerungsaufgabe weiterhin mit einer Nadelvariation in einem lokalen, punktwweisen Kontext. Der Raum der lokal absolut stetigen Funktionen in Kombination mit dem Begriff der Überholungsoptimalität ist adäquat (vgl. [8–12]).

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Nach diesem einleitenden Kapitel präsentieren wir mit Kapitel 2 die grundlegenden, zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen, analytischen Hilfsmittel. Wir führen den gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Raum ein. Anschließend zeigen wir den Zusammenhang zwischen dem gewichteten Sobolev-Raum und dem Raum der lokal absolut stetigen Funktionen. Abrundend präsentieren wir einige Sätze der konvexen Analysis sowie der Funktionalanalysis, die für das Verständnis der Arbeit notwendig sind. Ein besonderes Augenmerk legen wir hierbei auf die Behandlung von Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite. Entsprechend haben wir dieser Thematik ihr eigenes Unterkapitel gewidmet.

Im Kapitel 3 führen wir nach kurzer Motivation die Grundaufgabe der optimalen Steuerung über einem unendlichen Zeithorizont ein. Wir diskutieren neben auftretenden Phänomenen, welche sich aus dem unbeschränkten Zeithorizont ergeben, bereits bekannte Resultate zu Existenzfragen optimaler Steuerungen, sowie notwendige Optimalitätskriterien. Wichtig hierfür ist die Diskussion von Optimalitätsbegriffen und grundlegenden Definitionen, wie Zulässigkeit, sowie die Frage nach einer geeigneten Wahl eines Raumes, in dem wir die Aufgabe studieren. Mit der Präsentation bekannter Ergebnisse bereiten wir den Leser bereits auf die Hauptthematik dieser Arbeit vor und präsentieren drei notwendige Optimalitätskriterien. Hierbei wurde eines der Resultate mit einer Variation im Sinn von Euler hergeleitet, die anderen beiden mit einer Nadelvariation nach Weierstraß. Wir stellen die wesentlichen Unterschiede der beiden Variationstypen heraus, indem wir die vorgestellten Resultate vergleichen.

Im Hauptteil dieser Arbeit, Kapitel 4, vertiefen wir die zuvor geführte Diskussion. Wir gehen noch einmal genauer auf die Variationstypen von Euler und Weierstraß ein. Die Argumentation endet schließlich mit den Unterkapiteln 4.3 und 4.4 in zwei notwendigen Optimalitätskriterien für nicht-lineare Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont. Konkret betrachten wir Aufgaben, deren zugrunde liegende Dynamik affin-linear bezüglich der Steuerung und nicht-linear bezüglich des Zustandes ist. Dem Konsens dieser Arbeit folgend, werden wir die Untersuchungen in Kapitel 4.3

mit einer Variation der Steuerung im Sinn von Euler durchführen, während wir in Kapitel 4.4 eine Nadelvariation zugrunde legen werden. Anschließend gilt es, die beiden gewonnenen Resultate zu vergleichen und insbesondere die Grenzen, sowie Vor- und Nachteile der einzelnen Variationstypen gegenüberzustellen. Dies ist Gegenstand von Kapitel 4.5. Insbesondere nehmen wir hierbei mit Kapitel 4.6 noch einmal Bezug zu den in Kapitel 3.7 vorgestellten Resultaten und werden diese von den in der vorliegenden Arbeit hergeleiteten notwendigen Optimalitätskriterien abgrenzen.

In Kapitel 5 wenden wir die in Kapitel 4 hergeleiteten notwendigen Optimalitätskriterien auf den Anwendungsfall einer Feuer-Strategie zur Terrorbekämpfung an. Hierbei konzentrieren wir uns auf die Herausstellung der Vorteile unseres Maximumprinzips, insbesondere der Adjungierten. Wir ziehen exemplarisch Vergleich zu anderen Methoden, die der Berechnung von optimalen Kandidaten dienen.

Abschließend diskutieren wir in Kapitel 6 die erzielten Resultate. Hierbei konzentrieren wir uns insbesondere auf mögliche, zukünftige Forschungsschwerpunkte und Fragen, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.



## 2 Grundlegende analytische Hilfsmittel

In die Thematik einleitend, bereiten wir den Leser mit der Vorstellung grundlegender analytischer Hilfsmittel, die zum Verstehen der Arbeit notwendig sind, auf das Studium optimaler Steuerungsaufgaben über einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont vor. Hierzu benötigen wir im wesentlichen drei große Themenkomplexe der modernen Mathematik. Diese sind die Theorie der gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räume, die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite, sowie Methoden der konvexen Analysis und der Funktionalanalysis. Bei der Aufarbeitung dieser Hilfsmittel stützen wir uns auf eine Zusammenarbeit mit Angie Burtchen, *Analytische Hilfsmittel der Steuerungstheorie* [75]. In dieser Veröffentlichung haben wir bereits zuvor die Theorie der gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räume als ein wichtiges Hilfsmittel zur mathematischen Analyse von Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont herausgestellt, und über diese Räume bekannte Ergebnisse zusammengetragen. In dem vorliegenden Kapitel werden wir diese Zusammenfassung dahingehend erweitern, dass wir mit Kapitel 2.6 Differentialgleichungen im Kontext von Steuerungsaufgaben studieren. Außerdem ergänzen wir in Kapitel 2.5 unsere Sammlung analytischer Hilfsmittel um weitere Resultate der konvexen Analysis, als auch der Funktionalanalysis. In dem vorliegenden Einleitungskapitel können wir hierbei selbstverständlich nur auf die grundlegenden, für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Resultate eingehen. Ausführliche Literatur zu analytischen Themen finden wir in Grundlagenbüchern, wie *Analysis I* [4], *Analysis II* [3], *Funktionalanalysis, 7. Auflage* [70], sowie *Sobolev Spaces* [1] und *Weighted Sobolev spaces* [35]. Zum Studium der Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite verweisen wir auch auf die Literatur *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems* [6] und *Inequalities for Differential and Integral Equations* [50]. Grundlagen zur klassischen Theorie der Differentialgleichungen finden wir beispielsweise in *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung* [68].

### 2.1 Vorbetrachtungen

Ziel dieses Kapitels ist es, den Leser mit den grundlegenden analytischen Hilfsmitteln zum Studium der Steuerungsaufgabe — minimiere

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t)) \hat{\mu}(t) dt$$

bezüglich aller Prozesse  $\mathbb{X} \times \mathbb{U}$ , die den fast überall geltenden Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, \quad u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$$

genügen — vertraut zu machen. Zur Interpretation einer solchen Optimierungsaufgabe sind die folgenden Begrifflichkeiten zu klären.

1. Das Integralsymbol muss mit einer entsprechenden Interpretation versehen werden.
2. Die Räume  $\mathbb{X}, \mathbb{U}$  sind geeignet festzulegen.<sup>1</sup>
3. Eng in Zusammenhang mit der Frage der Räume steht die Frage der Interpretation der zugrunde liegenden Anfangswertaufgabe. Für sie muss eine geeignete Differenziations- und Lösungstheorie in  $\mathbb{X}, \mathbb{U}$  formuliert werden.

Die Frage eines geeigneten Integrationsbegriffes für das Zielfunktional wird uns in dieser Arbeit immer wieder beschäftigen, insbesondere in Kapitel 3.6.2, wo wir den Einfluss des Integrals auf die Wahl eines geeigneten Optimalitätsbegriffes diskutieren. Für den Moment sei jedoch schon einmal erwähnt, dass wir aufgrund der hier auftretenden Steuerungsprobleme mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont von einem (eigentlichen) Lebesgue-Integral ausgehen werden. Wir rechtfertigen diese Annahme im Laufe der Arbeit noch detaillierter.

Im weiteren Studium befassen wir uns zunächst mit der Anfangswertaufgabe, Punkt 3. Aus dieser wird sich in natürlicher Weise eine geeignete Wahl der Räume  $\mathbb{X}, \mathbb{U}$  ergeben. Hierbei werden sich weitere Ungleichungen, sowie Konvergenz- und Kompaktheitsresultate als hilfreiche mathematische Werkzeuge herausstellen, die es ebenfalls in den folgenden Kapiteln zu diskutieren gilt.

### Bemerkung 2.1.1

*In der vorliegenden Arbeit ermitteln wir zunächst Räume  $\tilde{\mathbb{X}}, \tilde{\mathbb{U}}$ , in denen das Anfangswertproblem sinnvoll studiert werden kann. Für die Optimierungsaufgabe kommen anschließend alle Teilräume  $\mathbb{X} \subseteq \tilde{\mathbb{X}}, \mathbb{U} \subseteq \tilde{\mathbb{U}}$  in Frage. Mit anderen Worten, wir gehen von einem gegebenen Anfangswertproblem (Dynamik) aus und ermitteln geeignete Räume für das Studium der korrespondierenden Steuerungsaufgabe. Ein alternativer Weg wäre es, die Räume  $\mathbb{X}, \mathbb{U}$  zunächst festzulegen<sup>2</sup> und anschließend die Dynamik in diesen Räumen geeignet zu interpretieren. Wir haben es hier also mit der philosophischen Frage, „Was war zuerst da, die Dynamik oder das Optimierungsproblem (Zielfunktional)?“, zu tun. Aus unserer Motivation heraus, dass wir ein gegebenes physikalisches, oder auch ökonomisches System steuern beziehungsweise stabilisieren möchten, erscheint es uns nur sinnvoll unsere Diskussion, wie bereits zuvor erwähnt, mit der Frage der Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu beginnen.*

---

<sup>1</sup>Ebenfalls eng im Zusammenhang mit der Wahl der Räume  $\mathbb{X}, \mathbb{U}$  steht die Interpretation des Integraltyps im Zielfunktional  $J(x, u)$ . Siehe hierzu Punkt 1

<sup>2</sup>Dieser Weg scheint uns insbesondere dann geeignet, wenn wir den Optimierungsprozess in den Vordergrund der Betrachtungen stellen und die Dynamik lediglich als eine „Nebenbedingung“ verstehen.



In dem einleitenden Text hatten wir bereits angedeutet, dass eine wichtige Eigenschaft der Räume  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{U}$  die Wohldefiniertheit des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) && \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

ist. Klassisch wurden Differentialgleichungen im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen eingeführt und betrachtet. Mit dem „Satz von Peano“, [68, Seite 74ff], und dem „Satz von Picard-Lindelöf“, [68, Seite 74ff], kann die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen beantwortet werden. Hierzu geht man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Riemann-Integral, [4, Seite 33, Theorem 4.13], zu der äquivalenten Integralformulierung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

über. Der so entstehende Integraloperator  $T: C^0(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Omega, \mathbb{R})$ ,

$$Tx := x_0 + \int_0^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

wird anschließend als eine Kontraktion in einem geeigneten Banachraum herausgestellt.

Aus Sicht der optimalen Steuerung stellt sich der Raum der stetigen Funktionen jedoch als zu einschränkend heraus. Im Studium relevanter Steuerungsaufgaben bemerkt man, dass die Funktion  $u$  nicht notwendigerweise stetig sein muss. Oft wird sie lediglich als Lebesgue-messbar vorausgesetzt. Es folgt eine mögliche Unstetigkeit der Funktion  $\varphi$  bezüglich der Zeit  $t$ . Wir können  $\varphi$  nur noch als Lebesgue-messbar annehmen. Die klassischen Methoden sind nicht ohne weiteres übertragbar. Insbesondere können wir bei dem Übergang von dem Anfangswertproblem zur äquivalenten Integralgleichung nicht mehr das Riemann-Integral verwenden. Wir müssen zum Begriff des Lebesgue-Integrals übergehen und eine zum „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ äquivalente Aussage für das Lebesgue-Integral formulieren.

### Bemerkung 2.1.2

*Ein „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ für das Lebesgue-Integral, das heißt naiv gesprochen, die Rekonstruierbarkeit der Funktion aus ihrer Ableitung mittels des Lebesgueschen Integrationsprozesses, ist gerade für die Klasse der absolut stetigen Funktionen gegeben. Wir betonen an dieser Stelle, dass die Eigenschaft der fast überall existierenden und integrierbaren klassischen Ableitung nicht für den Rekonstruktionsprozess ausreichend ist. Obgleich diese Vermutung zunächst intuitiv erschiene, da das Lebesgue-Integral Nullmengen-invariant ist. Dieses Phänomen lässt sich durch die stärkere Glättungswirkung des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral erklären. So ist das unbestimmte Integral  $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$  der Lebesgue-integrierbaren Funktion  $f$  nicht nur stetig, sondern sogar absolut stetig. (vgl. [29, Seite 113ff, Bemerkungen nach Satz 131.2] und Satz 2.2.1 in der vorliegenden Arbeit)*

Wir können die folgenden Forderungen an unseren Zustandsraum notieren.

1. Elemente  $x$  des Raumes  $\mathbb{X}$  müssen punktweise wohl definiert sein und insbesondere muss  $x(0)$  einer sinnvollen Interpretation unterliegen.
2. Die Elemente des Raumes  $\mathbb{X}$  müssen bezüglich eines geeigneten Ableitungsbegriffes differenzierbar sein.
3. Zur Herleitung einer Lösungstheorie des Anfangswertproblems benötigen wir außerdem die Rekonstruierbarkeit der Elemente aus ihren Ableitungen. Wir benötigen ein Äquivalent zum „Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung“.

Bei Betrachtung eines endlichen Lösungshorizontes  $[t_0, t_f]$  werden diese Bedingungen gerade durch den Raum der absolut stetigen Funktionen erfüllt. Als Ableitungsbegriff verwenden wir den klassischen Differenziationsbegriff. Absolut stetige Funktionen lassen sich jedoch nur fast überall differenzieren, so dass wir ein Anfangswertproblem gemäß Carathéodory erhalten, welches es nur fast überall auf dem Integrationsgebiet zu erfüllen gilt.

Im Fall der in dieser Arbeit diskutierten Steuerungsprobleme über einem unendlichen Zeithorizont  $[0, \infty)$  ist die Klasse der absolut stetigen Funktionen geeignet zu lokalisieren und auf das unbeschränkte Zeitintervall zu erweitern. Es entsteht die Klasse der nur noch lokal absolut stetigen Funktionen  $AC_{\text{loc}}$ . Obgleich sich der Raum  $AC_{\text{loc}}([0, \infty))$  zur Lösung des Anfangswertproblems (vgl. [6]) und zur Diskussion von Existenzfragen optimaler Steuerungen (siehe beispielsweise [17, Seite 182, Theorem 7.15]) eignen würde, ist er aus unserer Sicht nicht für die Untersuchung notwendiger Optimalitätskriterien zu empfehlen.<sup>3</sup> Versteht man notwendige Optimalitätsbedingungen, also insbesondere das Maximumprinzip nach Pontryagin, als ein Trennungsargument in Funktionenräumen, so erzwingt die entstehende Beweistechnik die Betrachtung des zum Raum der Trajektorien topologisch dualen Raumes. Es ergibt sich unmittelbar die Schwierigkeit der Charakterisierung des zu  $AC_{\text{loc}}$  topologisch dualen Raumes. Zusätzlich handelt es sich bei dem Raum  $AC_{\text{loc}}$  um keinen Banachraum. Die bei der Setzung  $\mathbb{X} = AC_{\text{loc}}([0, \infty))$  entstehenden Schwierigkeiten können jedoch umgangen werden, indem wir für den Zustandsraum einen geeigneten Hilbertraum verwenden. So erhalten wir für die Trajektorien einen vollständigen und reflexiven Raum. Aufgrund der Reflexivität ist der Zustandsraum zu seinem topologisch dualen Raum isomorph. Die Charakterisierung des topologisch dualen Raumes wird entsprechend trivial. Es wird sich herausstellen, dass gewichtete Sobolev-Räume adäquate Zustandsräume sind, welche den obigen Anforderungen genügen und die wünschenswerte Eigenschaft der Reflexivität aufweisen (vgl. [40, 51, 54, 73]). Entsprechend führen wir aufbauend auf den absolut stetigen Funktionen die sogenannten gewichteten Sobolev-Räume ein, welche sich über dem Intervall  $(0, \infty)$  in natürlicher Weise in die Theorie der lokal absolut stetigen Funktionen einbetten lassen (siehe [36]; Mit Bezug zu Steuerungsaufgaben siehe [18]). Diese Räume

---

<sup>3</sup>Wir merken an, dass es in der Literatur zahlreiche Untersuchungen zu notwendigen Optimalitätskriterien im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen gibt, wie zum Beispiel [9, 10, 17, 23]. Die notwendigen Bedingungen in diesen Arbeiten weisen jedoch entweder keine Transversalitätsbedingungen auf, oder gleichnamige wurden explizit mit einer gesonderten Beweistechnik verifiziert. So wird in [9] beispielsweise die Adjungierte explizit mittels einer Art Cauchy-Formel konstruiert und anschließend das Verhalten der so konstruierten Adjungierten im Unendlichen studiert.

erfüllen, wie bereits erwähnt, zum einen unsere Anforderungen an  $\mathbb{X}$ , zum anderen sind sie Hilberträume, also insbesondere reflexiv. Entsprechend kann die Behandlung der eingangs gestellten Steuerungsaufgabe in den abstrakten Kontext der Hilbertraumtheorie eingebettet werden und wir erhalten ein einfaches, mathematisches Instrumentarium zum Studium dieser Aufgabe.

## 2.2 Absolut stetige Funktionen und das Lebesgue-Integral

In diesem Kapitel gehen wir kurz auf den Raum der absolut stetigen Funktionen ein. Wir setzen hierbei voraus, dass der Leser bereits mit der Lebesgue-Theorie vertraut ist. Insbesondere gehen wir nicht weiter auf den Begriff des Lebesgue-Integrals ein. Ziel dieses Kapitels ist es, nach Einführung des Raumes der absolut stetigen Funktionen, den Zusammenhang zwischen dieser Funktionenklasse und dem Lebesgue-Integral herauszuarbeiten. Eine ausführliche Herleitung des Lebesgue-Integrals, sowie der Theorie messbarer Funktionen als auch absolut stetiger Funktionen, kann in Maßtheorie-Büchern wie Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, [21], nachgelesen werden.

Wir beginnen mit der Definition einer absolut stetigen Funktion auf einem beschränkten Intervall.

**Definition 2.2.1** ([21, Seite 300, Definition 4.11])

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  heißt *absolut stetig*, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle Folgen von Intervallen  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1, \dots, k}$  mit  $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$  und  $\sum_{l=1}^k (\beta_l - \alpha_l) < \delta$

$$\sum_{l=1}^k |f(\beta_l) - f(\alpha_l)| < \varepsilon$$

gilt. Der Raum dieser Funktionen wird mit  $AC([a, b])$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.2.1**

Absolut stetige Funktionen können zunächst auch nur auf offenen und beschränkten Intervallen der Form  $(a, b)$  eingeführt werden. Man kann dann zeigen, dass Elemente dieser Klasse stetig bis auf den Rand fortsetzbar sind. Für eine derartige Einführung der absolut stetigen Funktionen siehe man zum Beispiel [18].

**Bemerkung 2.2.2**

Setzen wir in Definition 2.2.1  $k = 1$ , so folgt unmittelbar, dass jede absolut stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Eine wesentliche Eigenschaft absolut stetiger Funktionen ist, dass sie fast überall differenzierbar sind. Es gilt der *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral*.

**Satz 2.2.1** ([21, Seite 301, Satz 4.14])

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar, so ist

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

absolut stetig und es gilt fast überall  $F' = f$ . Ist  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut stetig und setzt man  $F'(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , in denen  $F$  nicht differenzierbar ist, so ist  $F'$  Lebesgue-integrierbar über  $[a, b]$  und es gilt

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

In Erweiterung des Begriffes der absolut stetigen Funktionen bezeichnen wir eine vektorwertige Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n)$  mit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  als absolut stetig, genau dann, wenn alle ihre Komponenten  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  absolut stetig sind. Es gilt die nachstehende Folgerung.

**Folgerung 2.2.1**

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  absolut stetig gemäß Definition 2.2.1, dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$  mit  $\sum_{l=1}^k (\beta_l - \alpha_l) < \delta$

$$\sum_{l=1}^k |f(\beta_l) - f(\alpha_l)|_2 < \varepsilon$$

gilt.

**Bemerkung 2.2.3**

Nimmt man das Resultat von Folgerung 2.2.1 zur Definition einer vektorwertigen absolut stetigen Funktion, so lässt sich ebenfalls zeigen, dass dann alle ihre Komponenten absolut stetig im Sinn von Definition 2.2.1 sind. So erlaubt uns Folgerung 2.2.1 die Definition 2.2.1 in natürlicherweise auf vektorwertige Funktionen zu erweitern.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wegen der absoluten Stetigkeit der Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gibt es zu  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{mn}$  ein  $\delta_i = \delta_i(\tilde{\varepsilon}) > 0$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle Folgen von Intervallen  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1, \dots, k}$  mit  $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$  und  $\sum_{l=1}^k (\beta_l - \alpha_l) < \delta_i$

$$\sum_{l=1}^k |f_i(\beta_l) - f_i(\alpha_l)| < \tilde{\varepsilon}$$

gilt. Hierbei sei  $m \in \mathbb{N}$  jene Konstante aus der Normäquivalenz von der euklidischen Norm zur Summennorm, das heißt  $|\cdot|_2 \leq m|\cdot|_1$ .

Wir setzen  $\bar{\delta} := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  und es gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle Folgen von Intervallen  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1, \dots, k}$  mit  $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$  und  $\sum_{l=1}^k (\beta_l - \alpha_l) < \bar{\delta}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k |f(\beta_l) - f(\alpha_l)|_2 &\leq m \sum_{l=1}^k |f(\beta_l) - f(\alpha_l)|_1 = m \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^n |f_i(\beta_l) - f_i(\alpha_l)| \\ &= m \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^k |f_i(\beta_l) - f_i(\alpha_l)| < m \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon} = mn\tilde{\varepsilon} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Die Einführung des Raumes der absolut stetigen Funktionen abschließend, erweitern wir unsere Betrachtungen auf offene, möglicherweise unbeschränkte Intervalle  $(a, b)$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Mittels einer geeigneten Lokalisierung definiert man den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen.

**Definition 2.2.2** ([21, Seite 304, Definition 4.18])

Eine Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt absolut stetig im Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , wenn  $F|_{[a,b]}$  für alle  $[a, b] \subset I$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  absolut stetig ist.

Wir bezeichnen die durch Definition 2.2.2 induzierte Funktionenklasse als den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen und versehen ihn mit der Notation  $AC_{loc}(I)$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein möglicherweise unbeschränktes Intervall sei. Ganz natürlich führen wir für Funktionen  $f = (f_1, \dots, f_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  den Raum  $AC_{loc}^n(I)$  über die lokale absolute Stetigkeit der Komponenten  $f_i, i = 1, \dots, n$  ein.

**Bemerkung 2.2.4**

Ist das Intervall  $I$  in Definition 2.2.2 abgeschlossen und beschränkt, so fallen die Räume  $AC_{loc}(I)$  und  $AC(I)$  zusammen. Auf die Abgeschlossenheit kann hierbei nicht verzichtet werden, wie das Beispiel  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1)$  zeigt.

Bereits in Satz 2.2.1 haben wir den engen Zusammenhang zwischen dem Lebesgue-Integral und der Klasse der (lokal) absolut stetigen Funktionen feststellen können. Wir vertiefen diesen Zusammenhang mit der Einführung des Begriffes der Summierbarkeit und den sogenannten Lebesgue-Punkten in Anlehnung an das Buch *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, [49], von Natanson.

**Definition 2.2.3** ([49, Seite 150 Definition 1, Seite 160, Satz 1])

Eine messbare Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt summierbar auf  $E \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ , falls ihr Lebesgue-Integral

$$\int_E |f(x)| dx$$

endlich ist.

**Bemerkung 2.2.5**

Der Begriff der Summierbarkeit wird auch oft synonym mit dem Begriff der Integrierbarkeit verwendet. Sprechen wir im Folgenden von integrierbaren Funktionen, so meinen wir die Existenz eines endlichen Integralwertes über dem Integrationsgebiet. Etwas

verallgemeinernd gibt es noch den Begriff der Quasiintegrierbarkeit. Wir betrachten hierzu das Integral der Funktion  $f$  über  $E$ , gegeben durch

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx,$$

mit  $f^+ := \max\{0, f\}$  und  $f^- := -\min\{0, f\}$ . Die Funktion  $f$  heißt quasi-integrierbar über  $E$ , genau dann, wenn  $f$  auf  $E$  messbar ist und mindestens eines der Integrale

$$\int_E f^+(x)dx, \quad \int_E f^-(x)dx$$

einen endlichen Wert annimmt (vgl. [21, Seite 128, Definition 3.2]).

**Bemerkung 2.2.6**

Ganz natürlich erweitern wir den Begriff der Summierbarkeit auf vektorwertige Funktionen  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , indem wir die Summierbarkeit von  $f$  über die Summierbarkeit der Komponentenfunktionen  $f_i$  definieren.

Wir rechtfertigen vorherige Bemerkung mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 2.2.1**

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  summierbar auf  $E \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ , so ist das Lebesgue-Integral

$$\int_E |f(x)|_2 dx \tag{2.1}$$

endlich. Ist umgekehrt das Integral (2.1) endlich, so ist jede der Komponentenfunktionen  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  summierbar auf  $E$ .

*Beweis.* Seien die Funktionen  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  summierbar auf  $E$ . Wir betrachten das Integral der vektorwertigen Funktion über dem Integrationsgebiet  $E$ . Mit der Äquivalenz der euklidischen Norm und der Summennorm schließen wir

$$\int_E |f(x)|_2 dx \leq m \int_E |f(x)|_1 dx = \int_E \sum_{i=1}^n |f_i(x)| dx = \sum_{i=1}^n \int_E |f_i(x)| dx < \infty.$$

Die Konstante  $m > 0$  sei hierbei durch die Normäquivalenz  $|\cdot|_2 \leq m|\cdot|_1$  gegeben.

Sei jetzt umgekehrt das Integral der vektorwertigen Funktion über dem Integrationsgebiet  $E$  endlich. Gemäß der Abschätzung

$$\int_E |f_i(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_E |f_i(x)| dx = \int_E \sum_{i=1}^n |f_i(x)| dx = \int_E |f(x)|_1 dx \leq M \int_E |f(x)|_2 dx < \infty$$

erhalten wir für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Summierbarkeit von  $f_i$  auf  $E$ . Die Konstante  $M > 0$  sei hierbei durch die Normäquivalenz  $|\cdot|_1 \leq M|\cdot|_2$  gegeben. □

**Bemerkung 2.2.7**

Jede absolut stetige Funktion  $f \in AC([a, b])$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  ist insbesondere summierbar. Dies folgt unter Anwendung des Satzes von Weierstraß unmittelbar aus der Kompaktheit des Intervalls  $[a, b]$  und der Stetigkeit von  $f$ .

**Bemerkung 2.2.8**

Jede (lokal) absolut stetige Funktion ist messbar, so dass wir Definition 2.2.3 auch auf Funktionen der Klasse  $AC$  beziehungsweise  $AC_{loc}$  anwenden können.

Weiterhin führen wir den Begriff des Lebesgue-Punktes ein. Im Anschluss werden wir sehen, dass eine wesentliche Eigenschaft summierbarer Funktionen ist, dass fast all ihre Definitionsstellen Lebesgue-Punkte sind.

**Definition 2.2.4 ([49, Seite 283])**

Ein Punkt  $x_0 \in (0, \infty)$  heißt *Lebesgue-Punkt* der messbaren Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)| dx = 0$$

gilt.

**Bemerkung 2.2.9**

Für den Fall einer vektorwertigen Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n)$  mit  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  haben wir die Norm in Definition 2.2.4 entsprechend anzupassen.

Wir spezifizieren die Aussage von Bemerkung 2.2.9 mit dem nachstehenden Lemma.

**Lemma 2.2.2**

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)$  mit  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $x_0 \in (0, \infty)$  Lebesgue-Punkt von jeder messbaren Komponentenfunktion  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|_2 dx = 0 \tag{2.2}$$

für die vektorwertige Funktion  $f$ . Wir nennen  $x_0$  *Lebesgue-Punkt* der vektorwertigen Funktion  $f$ . Ist in Umkehrung Gleichung (2.2) erfüllt, so ist  $x_0$  Lebesgue-Punkt jeder Komponentenfunktion  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Sei zunächst angenommen, dass  $x_0 \in (0, \infty)$  Lebesgue-Punkt von jeder Komponentenfunktion  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist. Mit der Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|_2 dx &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} C |f(x) - f(x_0)|_1 dx \\ &= C \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f_i(x) - f_i(x_0)| dx \end{aligned}$$

schließen wir unmittelbar unter Anwendung der Definition 2.2.4 den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|_2 dx = 0.$$

Die Konstante  $C > 0$  entnehmen wir hierbei der Normäquivalenz  $c|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2 \leq C|\cdot|_1$ . Ganz analog folgern wir mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f_i(x) - f_i(x_0)| dx &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f_i(x) - f_i(x_0)| dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|_1 dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} C |f(x) - f(x_0)|_2 dx \end{aligned}$$

die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f_i(x) - f_i(x_0)| dx = 0$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Entsprechend ist  $x_0$  Lebesgue-Punkt jeder Komponentenfunktion  $f_i$  mit Index  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

Es erweist sich die folgende Formulierung von Definition 2.2.4 als nützlich. Hierzu versehen wir das Integral einer vektorwertigen Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit der komponentenweisen Interpretation

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \left( \int_{\Omega} f_1(x) dx, \dots, \int_{\Omega} f_n(x) dx \right)^T.$$

**Folgerung 2.2.2**

Sei  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  messbar und  $x_0 \in (0, \infty)$  Lebesgue-Punkt von  $f$  im Sinn von Definition 2.2.4. Dann gilt

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} f(x) dx.$$

*Beweis.* Die elementare Abschätzung<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} f(x) dx - f(x_0) \right|_2 &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} f(x_0) dx \right|_2 \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x) - f(x_0)] dx \right|_2 \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|_2 dx \end{aligned}$$

liefert im Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  nach Definition 2.2.4 die geforderte Behauptung.  $\square$

---

<sup>4</sup>Nähere Details zu dieser Ungleichung entnehme man Kapitel 2.5, Lemma 2.5.2.



Das im Folgenden zitierte Resultat ist auch als das Lebesguesche Differenziationstheorem bekannt und stellt den Zusammenhang zwischen der Klasse der summierbaren Funktionen und den Lebesgue-Punkten her.

**Satz 2.2.2** ([49, Seite 284, Satz 5])

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  eine in  $[a, b]$  summierbare Funktion, dann gilt: Die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte von  $f$  auf  $[a, b]$  ist eine Menge vom Lebesgue-Maß Null.

**Bemerkung 2.2.10**

Im Fall einer vektorwertigen Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n)$  in Satz 2.2.2 bleibt die Aussage des Satzes aufgrund von Bemerkung 2.2.1 und Lemma 2.2.2 erhalten. Die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte ergibt sich in diesem Fall als die Vereinigung der Mengen der Nicht-Lebesgue-Punkte der Komponentenfunktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Hierbei bleibt das Maß der vereinigten Menge aufgrund der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes Null.

Bei der Betrachtung von Lebesgue-Punkten stellt die Klasse der stetigen Funktionen einen besonderen Fall dar. So ist jeder Punkt des Definitionsbereiches einer stetigen Funktion ein Lebesgue-Punkt. Wir untermauern diese Behauptung mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 2.2.3** (vgl. [49, Seite 285, Satz 6])

Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem möglicherweise unbeschränkten Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  stetig, so sind alle Punkte aus  $I$  Lebesgue-Punkte der Funktion  $f$ .

*Beweis.* Für ein beliebiges  $x_0 \in I$  betrachten wir gemäß der Definition eines Lebesgue-Punktes den Ausdruck

$$\frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)| dx.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $h > 0$  mit der Eigenschaft  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < h$ . Insgesamt folgt

$$\frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)| dx < \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0} \varepsilon dx \leq \frac{x_0 - (x_0 - h)}{h} \varepsilon = \varepsilon.$$

Der Punkt  $x_0$  ist ein Lebesgue-Punkt. □

Insbesondere folgt aus Lemma 2.2.3 das folgende Resultat.

**Folgerung 2.2.3**

Ist  $f$  aus Satz 2.2.2 absolut stetig auf  $[a, b]$ , so sind alle Punkte aus  $[a, b]$  Lebesgue-Punkte der Funktion  $f$ .

*Beweis.* Die Aussage der Folgerung ist eine direkte Implikation von Bemerkung 2.2.2 und Lemma 2.2.3. □

Weitaus interessanter wird das Resultat von Folgerung 2.2.3, wenn wir es auf einem unbeschränkten Intervall, das heißt für eine nur noch lokal absolut stetige Funktion studieren. Wir beweisen die zwei nachstehenden Folgerungen.

**Folgerung 2.2.4**

Sei  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf jedem Kompaktum  $[0, n] \subset (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , summierbare Funktion, so ist fast jeder Punkt aus  $(0, \infty)$  Lebesgue-Punkt von  $f$ .

**Bemerkung 2.2.11**

Wir werden die Klasse der lokal auf jedem Kompaktum summierbaren Funktionen in Kapitel 2.3 noch ausführlicher diskutieren und diese mit der Bezeichnung  $L_{1,loc}$  versehen.

*Beweis zu Folgerung 2.2.4.* Wir partitionieren die nicht negative reelle Halbachse unter Ausnutzung der  $\sigma$ -Kompaktheit in kompakter Intervalle der Form  $I_n := [0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $[0, \infty) = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ . Aufgrund der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes genügt es zu zeigen, dass die Menge der nicht Lebesgue-Punkte in jedem Intervall  $I_n$  vom Maß Null ist. Auf den Intervallen  $I_n$  ist die Funktion  $f$  nach Voraussetzung summierbar. Anwendung von Satz 2.2.2 impliziert, dass die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte von  $f$  auf  $I_n$  vom Lebesgue-Maß Null ist, was den Beweis komplettiert.  $\square$

In Analogie zu Folgerung 2.2.3 formulieren wir:

**Folgerung 2.2.5**

Für jede Funktion  $f \in AC_{loc}^n(I)$  mit möglicherweise unbeschränkten  $I \subseteq \mathbb{R}$  gilt, dass jeder Punkt ihres Definitionsbereiches Lebesgue-Punkt ist.

*Beweis.* Sei  $x_0 \in I$  ein beliebiger Punkt des Definitionsbereichs  $I$  von  $f$ . Gemäß der Definition der absoluten Stetigkeit existiert ein Kompaktum  $[a, b] \subseteq I$  mit  $x_0 \in [a, b]$  auf dem die Funktion  $f$  absolut stetig ist. Folgerung 2.2.3 impliziert, dass jeder Punkt in  $[a, b]$  ein Lebesgue-Punkt ist. Insbesondere handelt es sich bei  $x_0$  selbst um einen Lebesgue-Punkt. Diese Argumentation lässt sich für jedes  $x_0 \in I$  führen, so dass die Behauptung der Folgerung bewiesen ist.  $\square$

## 2.3 Klassische Lebesgue- und Sobolev-Räume

### 2.3.1 Die Räume $L_p(\Omega)$ und $W_p^k(\Omega)$

Bevor wir uns im nächsten Kapitel der Einführung gewichteter Lebesgue- und Sobolev-Räume widmen, werden wir in diesem Abschnitt die klassische Theorie der Lebesgue- und Sobolev-Räume aufarbeiten. Nach einer kurzen Einführung der Räume werden wir uns allem voran der wichtigen Einbettung in den Raum der stetigen Funktionen widmen. Im folgenden Kapitel werden wir darauf aufbauend, die hier gewonnenen Resultate auf die gewichteten Räume erweitern.

Wir betrachten die Menge  $\mathcal{M}(\Omega)$  aller Lebesgue-messbaren Funktionen, die die offene Menge  $\Omega$  in die reellen Zahlen abbilden.

$$\mathcal{M}(\Omega) := \left\{ x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ Lebesgue-messbar} \right\}$$

Die Menge  $\Omega$  setzen wir dabei als  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$  mit  $s \in \mathbb{N}$  an. Auf  $\mathcal{M}(\Omega)$  führen wir den nachfolgenden Teilraum ein, welchen wir als Raum der  $p$ -fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnen werden.

**Definition 2.3.1** ([1, Seite 23, Definition 2.1])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet<sup>5</sup> und  $1 \leq p < \infty$ . Der Raum

$$L_p(\Omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \int_{\Omega} |x(t)|^p dt < \infty \right\}$$

wird als Lebesgue-Raum der Ordnung  $p$  bezeichnet.

Für den Fall  $p = \infty$  erweitern wir Definition 2.3.1 gemäß der nachstehenden Vereinbarung.

**Definition 2.3.2** ([1, Seite 27, Definition 2.10])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Der Raum

$$L_{\infty}(\Omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty \right\}$$

mit

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| := \inf_{\substack{N \subseteq \Omega \\ l(N)=0}} \sup_{t \in \Omega \setminus N} |x(t)|$$

heißt Raum der wesentlich beschränkten Funktionen und wird mit  $L_{\infty}(\Omega)$  bezeichnet.

Für den Fall  $p = 1$  erweitern wir Definition 2.3.1 nochmals und führen den Raum der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen ein.

**Definition 2.3.3** ([1, Seite 20, Definition 1.58])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  eine offene Menge. Wir nennen die fast überall auf  $\Omega$  definierte Funktion  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\Omega$  lokal Lebesgue-integrierbar, falls für jede offene, relativ kompakte Menge  $\Omega_0 \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$  die Inklusion  $x \in L_1(\Omega_0)$  gilt. Wir bezeichnen die Klasse dieser Funktionen mit  $L_{1,loc}(\Omega)$ .

**Bemerkung 2.3.1**

Elemente des Raumes  $L_{1,loc}$  sind per Definition auf jedem Kompaktum summierbar im Sinn von Definition 2.2.3. Mit Folgerung 2.2.4 sehen wir sofort ein, dass die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte einer solchen Funktion vom Maß Null sein muss. Dies erlaubt es uns, den Elementen des Raumes  $L_{1,loc}$  eine fast überall punktweise Interpretation im Sinn der Lebesgue-Punkte zuzuordnen.

<sup>5</sup>Unter einem Gebiet verstehen wir eine offene, nicht-leere Menge. (vgl. [1, Seite 1])

**Satz 2.3.1** ([1, Theorem 2.16])

Für  $1 \leq p < \infty$  wird der in Definition 2.3.1 eingeführte Raum mittels der Norm

$$\|x\|_{L_p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

zu einem Banachraum<sup>6</sup>. Im Fall  $p = \infty$  wird der in Definition 2.3.2 eingeführte Raum mit der Norm

$$\|x\|_{L_{\infty}(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)|$$

zu einem Banachraum.

In Erweiterung zu Satz 2.3.1 lässt sich zeigen, dass es sich bei den eben definierten Lebesgue-Räumen um separable Räume handelt.<sup>7</sup> Wir zitieren das folgende Resultat.

**Satz 2.3.2** ([1, Seite 32, Satz 2.21])

Für  $1 \leq p < \infty$  ist der in Definition 2.3.1 eingeführte Raum  $L_p(\Omega)$  separabel.

Schließt man den Fall  $p = 1$  aus der Diskussion aus, so lässt sich sogar die Reflexivität<sup>8</sup> der Lebesgue-Räume nachweisen.

**Satz 2.3.3** ([1, Seite 49, Theorem 2.46])

Für  $1 < p < \infty$  ist der in Definition 2.3.1 eingeführte Raum  $L_p(\Omega)$  reflexiv.

Im Spezialfall  $p = 2$  erhalten wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} x(t)y(t)dt \quad x, y \in L_2(\Omega)$$

einen Hilbertraum<sup>9</sup> (vgl. [1, Seite 31, Folgerung 2.18]).

Wir fassen weitere bekannte Ergebnisse zusammen.

**Lemma 2.3.1** ([1, Seite 29, Folgerung 2.15])

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein beliebiges Gebiet gilt  $L_p(\Omega) \subset L_{1,loc}(\Omega)$ .

---

<sup>6</sup>Ein normierter Raum  $X$  heißt vollständig beziehungsweise wird als Banachraum bezeichnet, wenn jede Cauchyfolge aus  $X$  in der Norm des Raumes  $X$  konvergiert und der Grenzwert in  $X$  liegt.

<sup>7</sup>Ein normierter Raum  $X$  heißt separabel, falls es eine abzählbare Menge  $M$  in  $X$  gibt, die dicht in  $X$  liegt. Die Menge  $M$  heißt dicht in  $X$ , falls jedes Element  $x \in X$  Grenzwert einer Folge von Elementen aus  $M$  ist.

<sup>8</sup>Der Raum  $X^*$  bestehend aus den linearen stetigen Funktionalen  $x^*: X \rightarrow \mathbb{K}$  heißt topologischer Dualraum des normierten Raumes  $X$ . Mit  $X^{**} := (X^*)^*$  bezeichnen wir den Bidualraum von  $X$  (topologischer Dualraum zu  $X^*$ ). Wir definieren für  $x \in X$  die Abbildung  $i_x: X^* \rightarrow \mathbb{K}$  vermöge  $i_x(x^*) = x^*(x)$ .  $i_x$  ist für jedes  $x \in X$  Element des Bidualraumes  $X^{**}$ . Die lineare Isometrie  $i_X: X \rightarrow X^{**}$  vermöge  $x \mapsto i_x$  heißt kanonische Abbildung. Ist diese lineare, injektive Isometrie zusätzlich surjektiv, so bezeichnen wir den Raum  $X$  als reflexiv (vgl. [70, Seite 105, Satz III.3.1, Definition III.3.3.]).

<sup>9</sup>Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt Prähilbertraum, falls es ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  gibt, welches gemäß  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  die Norm  $\|\cdot\|$  induziert. Ist  $X$  bezüglich der induzierten Norm vollständig, so heißt  $(X, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbertraum (vgl. [70, Seite 221, Definition V.1.4]).

**Bemerkung 2.3.2**

Lemma 2.3.1 impliziert, dass die Elemente aus  $L_p(\Omega)$  auf jedem Kompaktum von  $\Omega$  summierbar sind. Folglich ist nach Lemma 2.2.4 die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte für jedes Element aus  $L_p(\Omega)$  vom Maß Null. Entsprechend können wir die Theorie der Lebesgue-Punkte von der Klasse der (lokal) absolut stetigen Funktionen auf den Raum der  $p$ -fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen übertragen und diesen Funktionen so eine fast überall punktweise Interpretation gemäß Definition 2.2.4 beziehungsweise Folgerung 2.2.2 zuordnen.

**Lemma 2.3.2 ([1, Seite 38, Folgerung 2.30])**

Für  $1 \leq p < \infty$  liegt der Raum  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ , der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, dicht im Raum  $L_p(\Omega)$ .

Elemente des Lebesgue-Raumes  $L_p(\Omega)$  sind zunächst nicht differenzierbar und entsprechend ungeeignet für die Untersuchung von Anfangswertproblemen. Wir werden den Lebesgue-Raum daher im Folgenden geeignet einschränken, so dass ein Raum entsteht, welcher ähnlich gute Kompaktheits- und Konvergenzeigenschaften wie  $L_p(\Omega)$  selbst hat, in dem wir jedoch zusätzlich noch geeignet differenzieren können. Wir führen hierzu zunächst in Anlehnung an *Sobolev Spaces*, [1], den Begriff der schwachen Ableitung ein. Aufbauend auf der schwachen Ableitung können wir anschließend den Sobolev-Raum einführen.

**Definition 2.3.4 ([1, Seite 22, Definition 1.62])**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet.

1. Wir definieren den Träger einer Funktion  $x$  als die abgeschlossene Hülle der nicht Nullstellenmenge, das heißt

$$\text{supp}(x) := \overline{\{t \in \Omega \mid x(t) \neq 0\}}.$$

2. Die Menge der Funktionen

$$C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ x \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(x) \subseteq \Omega \text{ ist kompakt} \right\}$$

heißt Menge der Testfunktionen mit kompaktem Träger.

3. Wir bezeichnen  $y \in L_{1,loc}(\Omega)$  als die verallgemeinerte (schwache) partielle Ableitung  $\partial^{|\alpha|}/(\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_s^{\alpha_s})$  von  $x \in L_{1,loc}(\Omega)$ , falls jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} x(\mathbf{t}) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_s^{\alpha_s}} \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{\Omega} y(\mathbf{t}) \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{t} := (t_1, \dots, t_s)^T \in \Omega$$

erfüllt. Wobei  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}_0^s$  als Multiindex der Länge  $|\alpha| = \sum_{l=1}^s \alpha_l$  zu verstehen ist. Wir bezeichnen die verallgemeinerte Ableitung mit  $\mathcal{D}^\alpha x(\mathbf{t}) := y(\mathbf{t})$ .

Zur schwachen Ableitung lässt sich folgendes anmerken:

**Bemerkung 2.3.3**

Nicht jede Funktion  $x \in L_{1,loc}(\Omega)$  besitzt eine schwache Ableitung. Besitzt die Funktion  $x$  jedoch eine schwache Ableitung, so kann diese eine „beliebig gute Regularität“ besitzen, mindestens ist sie jedoch aus  $L_{1,loc}(\Omega)$ .

**Bemerkung 2.3.4**

Die schwache Ableitung fällt im Falle der starken Differenzierbarkeit mit der gewöhnlichen Ableitung zusammen. Dies sieht man unmittelbar durch partielle Integration ein.

**Bemerkung 2.3.5**

Für vektorwertige Funktionen definieren wir in Anlehnung an die klassische Vektoranalysis (siehe beispielsweise [31]) die schwache Ableitung komponentenweise. Wir setzen  $\mathcal{D}^\alpha x = (\mathcal{D}^\alpha x_1, \dots, \mathcal{D}^\alpha x_n)^\top$ .

Mittels dem Begriff der schwachen Ableitung definieren wir den Sobolev-Raum gemäß der nachstehenden Definition.

**Definition 2.3.5 ([1, Seite 59, Definition 3.2])**

Sei  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Der Raum

$$W_p^k(\Omega) := \left\{ u \in L_p(\Omega) \mid \mathcal{D}^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

heißt Sobolev-Raum.

**Bemerkung 2.3.6 ([1, Seite 59, Definition 3.2])**

Der Raum

$$H_p^k(\Omega) := \overline{\left\{ u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) : \|u\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty \right\}},$$

als Abschluss bezüglich der Norm

$$\|x\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \|x\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird ebenfalls als Sobolev-Raum bezeichnet. Obgleich diese Definition zunächst scheinbar zu einem anderen Raum führt, so konnten Meyers und Serrin in „ $H = W$ “, [47], zeigen, dass für  $1 \leq p < \infty$  die Identität  $H_p^k(\Omega) = W_p^k(\Omega)$  gilt (siehe [47]).

**Satz 2.3.4 ([1, Seite 60, Theorem 3.3])**

Der in Definition 2.3.5 eingeführte Raum wird für  $1 \leq p < \infty$  mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \|x\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

zu einem Banachraum.

Schließen wir die Fälle  $p = 1$ ,  $p = \infty$  aus, so erhalten wir mit Definition 2.3.5 reflexive und separable Räume.

**Satz 2.3.5 ([1, Seite 61, Theorem 3.6])**

Für  $1 < p < \infty$  ist der Raum  $W_p^k(\Omega)$  separabel und reflexiv.

**Bemerkung 2.3.7**

Verschärfend lässt sich zeigen, dass  $W_p^k(\Omega)$  sogar im Fall  $p = 1$  noch ein separabler Raum ist (vgl. [1, Seite 61, Theorem 3.6]).

Im Spezialfall  $p = 2$  erhalten wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{W_2^k(\Omega)} := \langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha f, \mathcal{D}^\alpha g \rangle_{L_2(\Omega)}$$

einen separablen und reflexiven Hilbertraum [1, Seite 61, Theorem 3.6]. Abschließend geben wir das Einbettungstheorem von Rellich und Kondrachov an. Wir werden dieses nur für beschränkte Gebiete verwenden. In diesem Fall ergeben sich wesentliche Vereinfachungen an die Forderungen des betrachteten Gebietes. So genügt jedes beschränkte Lipschitz-Gebiet auch der starken, lokalen Lipschitz-Bedingung, wie sie im Rellich-Kondrachov-Theorem gefordert wird (vgl. [1, Seite 82, Definition 4.5]). Wir werden im Folgenden nur diesen Fall betrachten. Für eine ausführliche Diskussion des Theorems verweisen wir auf Adams und Fournier, *Sobolev Spaces*, [1] Kapitel VI.

**Satz 2.3.6 (Rellich-Kondrachov [1, Seite 85, Theorem 4.12])**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , ein Lipschitz-Gebiet<sup>10</sup> und  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  ein beschränktes Teilgebiet. Zusätzlich seien  $j \geq 0$ ,  $l \geq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$  und  $lp > s > (l - 1)p$ . Dann ist die Einbettung

$$W_p^{j+l}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R})$$

kompakt.

**Bemerkung 2.3.8**

Ist das Gebiet  $\Omega$  in Satz 2.3.6 beschränkt, so können wir ohne Einschränkung  $\Omega_0 = \Omega$  setzen [1, Seite 169, 6.4 Remarks].

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns stets nur mit Gebieten, die Teilmenge der nicht-negativen reellen Achse sind. Bei diesen beschränkten Intervallen der Form  $[a, b]$ ,  $0 \leq a < b < +\infty$  handelt es sich um triviale Lipschitz-Gebiete, da der Rand des Gebietes  $\Gamma = \{a, b\}$  nur aus isolierten Punkten besteht. Folglich gilt das nachstehende Korollar.

**Folgerung 2.3.1**

Die Einbettung

$$W_2^1((a, b)) \hookrightarrow C^0([a, b], \mathbb{R})$$

ist für  $0 \leq a < b < +\infty$  kompakt.

Folgerung 2.3.1 impliziert unmittelbar die Existenz eines stetigen Repräsentanten für jedes Element des Raumes  $W_2^1((a, b))$ . Mehr noch können wir einen Bezug zwischen der schwachen Konvergenz in  $W_2^1((a, b))$  und der starken Konvergenz in  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  herstellen.

**Lemma 2.3.3**

Sei  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_2^1((a, b))$ ,  $0 \leq a < b < +\infty$  im Raum  $W_2^1((a, b))$  schwach konvergent gegen das Grenzelement  $x_0 \in W_2^1((a, b))$ , dann konvergiert die Folge auch stark in der Topologie des Raumes  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  gegen  $x_0$ .<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Unter einem Lipschitz-Gebiet verstehen wir ein Gebiet, dessen Rand sich mittels einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt.

<sup>11</sup>Die starke Konvergenz in  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  meint hierbei die bezüglich aller Argumente gleichmäßige Konvergenz. Hinzukommend sind die Repräsentanten der Folgenglieder geeignet zu wählen, so dass sie insbesondere stetig sind.

*Beweis.* Nach Folgerung 2.3.1 ist die Einbettung  $i: W_2^1((a, b)) \hookrightarrow C^0([a, b], \mathbb{R})$  kompakt. Insbesondere ist der Einbettungsoperator  $i$  vollstetig und das Bild von  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unter  $i$  ist in der  $C^0$ -Topologie kompakt. Folglich konvergiert jede Teilfolge  $\{x_{n^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $(a, b)$  gleichmäßig gegen ein  $\bar{x} \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Insbesondere konvergiert die Teilfolge  $\{x_{n^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  immer noch schwach gegen  $x_0$ . Der stetige Operator  $i$  erhält die schwache Konvergenz, so dass  $i(x_{n^k})$  auch in  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  schwach gegen  $x_0$  konvergiert. Entsprechend konvergiert  $\{x_{n^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  einerseits stark bezüglich der  $C^0$ -Topologie gegen  $\bar{x}$  und andererseits schwach in der selbigen Topologie gegen  $x_0$ . Die Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes impliziert  $\bar{x} = x_0$  und es folgt  $x_{n^k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0$  in  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  für jede Teilfolge  $\{x_{n^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Wir zeigen noch, dass die ursprüngliche Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  selbst in  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  stark konvergiert. Wäre dem nicht so, so gäbe es eine entsprechende Teilfolge, die unserer Annahme der gleichmäßigen Konvergenz nicht genügen würde. Wir wählen genau diese aus und erhalten mit der obigen Argumentation einen Widerspruch zur Kompaktheit der Bildmenge von  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unter  $i$ .  $\square$

### 2.3.2 Die Räume $L_p^n(\Omega)$ , $W_p^{n,k}(\Omega)$ und der Raum $L_\infty^{n \times m}(\Omega)$

In der vorliegenden Arbeit werden wir vorrangig mit Funktionenräumen arbeiten, bei denen die Elemente durch vektorwertige beziehungsweise matrixwertige Funktionen gegeben sind.

#### Definition 2.3.6

Eine Funktion  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit Komponentenfunktionen  $x_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  nennen wir Vektorfunktion (vektorwertige Funktion).

#### Definition 2.3.7

Eine Funktion  $M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  mit Komponentenfunktionen  $M_{i,j}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  nennen wir Matrixfunktion (matrixwertige Funktion).

Verstehen wir die Klasse der Matrizen  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  als Operatoren  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto Mx$ , so lässt sich gemäß der Definition der Operatornorm (vgl. [70, Seite 47, Satz II.1.4]) eine Normierung auf  $\mathbb{R}^{n \times m}$  einführen. Wir bezeichnen die so entstehende Norm,

$$|M|_p := \max_{x \in \mathbb{R}^n, |x|_p=1} |Mx|_p,$$

als die durch die Vektornorm  $|\cdot|_p$  induzierte Matrixnorm. Von besonderem Interesse ist uns hierbei die durch die euklidische Norm induzierte Matrixnorm, die sogenannte Spektralnorm  $|\cdot|_2$ .

Mit der Menge  $\mathcal{M}^{n \times m}(\Omega)$  bezeichnen wir im Folgenden die Teilmenge aller matrixwertigen Abbildungen  $M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , die in jeder Komponentenfunktion  $M_{i,j}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  messbar sind.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup>Im Fall  $m = 1$  schreiben wir anstelle von  $\mathcal{M}^{n \times 1}(\Omega)$  verkürzend  $\mathcal{M}^n(\Omega)$  und beschreiben so die Teilmenge aller vektorwertigen Funktionen, die in jeder Komponentenfunktion messbar sind.



Die elementarste Klasse von messbaren, matrixwertigen Funktionen sind die konstanten Abbildungen  $M(t) = M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sie gehören offenbar dem Raum  $\mathcal{M}^{n \times m}(\Omega)$  an. Diese werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen. Eine weitaus interessantere Klasse von Matrixfunktionen ist jene, bei der die Komponentenfunktionen alle wesentlich beschränkt sind. Es lässt sich dann zeigen, dass die Matrix bezüglich jeder Matrixnorm wesentlich beschränkt ist (vgl. [2, Seite 27]). Dies motiviert zu der folgenden Definition des Raumes  $L_\infty^{n \times m}(\Omega)$ .

**Definition 2.3.8 (vgl. [2, Seite 27])**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Der Raum

$$L_\infty^{n \times m}(\Omega) := \left\{ M \in \mathcal{M}^{n \times m}(\Omega) \mid \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |M(t)|_2 < \infty \right\}$$

heißt Raum der wesentlich beschränkten Matrixfunktionen und wird mit  $L_\infty^{n \times m}(\Omega)$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.3.9**

Setzen wir in Definition 2.3.8 die Dimension  $m = 1$ , so erhalten wir den Spezialfall der wesentlich beschränkten Vektorfunktionen  $L_\infty^n(\Omega)$ .

Definition 2.3.8 lässt sich hierbei insofern rechtfertigen, dass wir mit  $\alpha(t) := |M(t)|_2$  eine Funktion  $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten. Für die Funktion  $\alpha$  ist der Raum  $L_\infty(\Omega)$  wohl definiert. Wir schreiben im Folgenden  $M \in L_\infty^{n \times m}(\Omega)$  und meinen  $\alpha \in L_\infty(\Omega)$ . Ganz natürlich ergibt sich

$$\|M\|_{L_\infty^{n \times m}(\Omega)} := \|\alpha\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Würden wir diesem Schemata der Einführung von Lebesgue- und Sobolev-Räumen für vektorwertige Funktionen folgen, so wäre die Definition

$$L_p^n(\Omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}^n(\Omega) \mid \int_\Omega |x(t)|_2^p dt < \infty \right\}$$

intuitiv. Mit anderen Worten würden wir eine Funktion  $x = (x_1, \dots, x_n)$  als Element des Raumes  $L_p^n(\Omega)$  identifizieren, wenn die Funktion  $\alpha(t) = |x(t)|_2$ ,  $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Element des Raumes  $L_p(\Omega)$  ist. Ganz analog würden wir

$$\|x\|_{L_p^n(\Omega)} := \|\alpha\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |x(t)|_2^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

für die Norm schließen. Tatsächlich lässt sich im maß-theoretischen Zugang über das Bochnerintegral<sup>13</sup> der Raum  $L_p^n(\Omega)$  analog zum klassischen Lebesgue-Raum konstruieren. Eine aus unserer Sicht gute Ausarbeitung zu dieser Thematik ist hier die Masterarbeit [34]. In der vorliegenden Arbeit werden wir jedoch einen anderen Weg einschlagen, welcher intuitiver mit der späteren Interpretation der Elemente des Raumes  $L_p^n(\Omega)$  beziehungsweise  $W_p^{n,k}(\Omega)$  einhergeht. Hierzu nutzen wir die im vorangegangenen

<sup>13</sup>Das Bochnerintegral ist eine Erweiterung des Lebesgue-Integrals auf banachwertige Abbildungen.

Kapitel bereits zusammengetragene Theorie zu den Lebesgue- und Sobolev-Räumen reellwertiger Funktionen und konstruieren mittels dieser die Räume  $L_p^n(\Omega)$ ,  $W_p^{n,k}(\Omega)$  als kartesisches Produkt. Wir leiten die Theorie also aus der Sicht der Komponentenfunktionen her. Dieses Vorgehen finden wir beispielsweise auch in Adams und Fournier, *Sobolev Spaces*, [1]. Anschließend gilt es die Äquivalenz dieses Zugangs zu jenem über das Bochnerintegral zu verifizieren.

Wir beginnen die Konstruktion des Produktraumes mit dem folgenden Satz über die Charakterisierung von kartesischen Produkträumen.

**Satz 2.3.7 ([1, Seite 8, Theorem 1.23])**

Seien  $(X_j, \|\cdot\|_j)$  für  $j = 1, \dots, n$  Banachräume und  $X := \sum_{j=1}^n X_j = X_1 \times \dots \times X_n$  der kartesische Produktraum, bestehend aus allen Tupeln  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X_i$ . Mit den Verknüpfungsoperationen

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, \dots, cx_n)$$

wird  $X$  zu einem Vektorraum. Mit der Norm

$$\|x\|_{(p)} = \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_j^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{(\infty)} = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_j$$

wird  $X$  zu einem Banachraum. Zusätzlich gelten die folgenden Aussagen:

1. Falls  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  separabel ist, so ist auch  $X$  separabel.
2. Falls  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  reflexiv ist, so ist auch  $X$  reflexiv.

Mit Satz 2.3.7 lassen sich jetzt die im vorangegangenen Kapitel eingeführten Räume  $L_p(\Omega)$ ,  $W_p^k(\Omega)$  auf den Fall vektorwertiger Funktionen übertragen. Wir erhalten entsprechend für das kartesische Produkt auf dem Raum  $L_p(\Omega)$

$$[L_p(\Omega)]^n = \underbrace{L_p(\Omega) \times \dots \times L_p(\Omega)}_{n \text{ mal}},$$

mit den punktweisen Verknüpfungen wie in Satz 2.3.7. Mit der Norm

$$\|x\|_{[L_p(\Omega)]^n} := \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [L_p(\Omega)]^n$$

wird der Raum für  $1 \leq p < \infty$  gemäß Satz 2.3.7 zu einem separablen Banachraum. Für  $1 < p < \infty$  ist dieser sogar reflexiv (vgl. Satz 2.3.3). Im Fall  $p = 2$  erhalten wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{[L_2(\Omega)]^n} := \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} x^T(t)y(t)dt$$

einen Hilbertraum. Die Norm ergibt sich in diesem Fall zu

$$\|x\|_{[L_2(\Omega)]^n} = \left( \int_{\Omega} |x(t)|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei hierbei unter dem Integral die euklidische Norm auftritt. Für ein allgemeines  $1 \leq p < \infty$  lassen sich zumindest noch äquivalente Normen im Sinn des folgenden Lemmas formulieren.

**Lemma 2.3.4**

Sei  $1 \leq p < \infty$ . Die Norm

$$\|x\|_{L_p^n(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |x(t)|_2^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist äquivalent zur Norm  $\|x\|_{[L_p(\Omega)]^n}$  des Raumes  $[L_p(\Omega)]^n$ .

*Beweis.* Aufgrund der Äquivalenz der Normen im euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  existieren Konstanten  $c, C > 0$  mit der Eigenschaft

$$c \cdot |\cdot|_p \leq |\cdot|_2 \leq C |\cdot|_p.$$

Dies impliziert für die Normen im Funktionenraum

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{c} \|x\|_{[L_p^n(\Omega)]^n} &= \sqrt[p]{c} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\Omega} c |x(t)|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |x(t)|_2^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{L_p^n(\Omega)} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} C |x(t)|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{C} \|x\|_{[L_p(\Omega)]^n}. \end{aligned}$$

Folglich sind die Normen  $\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^n}$  und  $\|\cdot\|_{L_p^n(\Omega)}$  äquivalent. □

Auf der zuvor eingeführten äquivalenten Norm  $\|\cdot\|_{L_p^n(\Omega)}$  aufbauend, definieren wir jetzt den Raum  $L_p^n(\Omega)$  gemäß der folgenden Definition.

**Definition 2.3.9**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $1 \leq p < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Der Raum

$$L_p^n(\Omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}^n(\Omega) \mid \int_{\Omega} |x(t)|_2^p dt < \infty \right\}$$

wird als vektorwertiger Lebesgue-Raum der Ordnung  $p$  bezeichnet.

**Lemma 2.3.5**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $1 \leq p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Der Raum  $L_p^n(\Omega)$  versehen mit der Norm

$$\|x\|_{L_p^n(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |x(t)|_2^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

genügt den folgenden Eigenschaften.

1.  $L_p^n(\Omega)$  ist für  $1 \leq p < \infty$  ein separabler Banachraum.
2.  $L_p^n(\Omega)$  ist für  $1 < p < \infty$  ein reflexiver Raum.
3.  $L_2^n(\Omega)$  wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y, \rangle_{L_2^n(\Omega)} = \int_{\Omega} x^T(t)y(t)dt$$

ein Hilbertraum.

4. Für  $1 \leq p < \infty$  liegt der Raum  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, dicht im Raum  $L_p^n(\Omega)$ .
5. Es gilt die Inklusion  $L_p^n(\Omega) \subseteq L_{1,loc}^n(\Omega)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $L_p^n(\Omega) = [L_p(\Omega)]^n$ . Sei  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $x \in L_p^n(\Omega)$  gegeben. Aus der Messbarkeit der Funktion  $x$ ,  $x \in \mathcal{M}^n(\Omega)$ , folgt die Messbarkeit der Komponenten  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Mit Lemma 2.3.4 folgt

$$\|x_i\|_{L_p(\Omega)} \leq \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} = \|x\|_{[L_p(\Omega)]^n} \leq \frac{1}{\sqrt[p]{C}} \|x\|_{L_p^n(\Omega)} < \infty$$

für jede Komponente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Folglich gilt  $x_i \in L_p(\Omega)$  und per Definition  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [L_p(\Omega)]^n$ .

In Umkehrung erhalten wir für  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x \in [L_p(\Omega)]^n$  die folgende Implikationskette. Zunächst folgt aus der Messbarkeit aller Komponenten  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Messbarkeit der vektorwertigen Funktion  $x$  gemäß der Definition von  $\mathcal{M}^n(\Omega)$ .

Mit Lemma 2.3.4 folgt schließlich

$$\|x\|_{L_p^n(\Omega)} \leq \sqrt[p]{C} \|x\|_{[L_p(\Omega)]^n} = \sqrt[p]{C} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} < \infty,$$

wobei die Normen  $\|x_i\|_{L_p(\Omega)}$  hierbei nach Konstruktion des Produktraumes  $[L_p(\Omega)]^n$  wegen  $x_i \in L_p(\Omega)$  endlich sind. Folglich gehört  $x$  dem Raum  $L_p^n(\Omega)$  an und die Äquivalenz der Räume ist bewiesen.

Die Behauptungen des Lemmas folgen jetzt aus der Äquivalenz der Räume zusammen mit der Normäquivalenz und den Eigenschaften der Grundräume  $L_p(\Omega)$ . Man beachte Satz 2.3.7 in Zusammenhang mit den Sätzen 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 und den Lemmata 2.3.1 und 2.3.2.  $\square$

Im Spezialfall  $p = 1$  erweitern wir unsere Definition des Lebesgue-Raumes vektorwertiger Funktionen um den folgenden Teilraum.

**Definition 2.3.10** (vgl. [1, Seite 20, Definition 1.58])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  eine offene Menge. Wir nennen die fast überall auf  $\Omega$  definierte Funktion  $x = (x_1, \dots, x_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  auf  $\Omega$  lokal Lebesgue-integrierbar, falls für jede offene, relativ kompakte Menge  $\Omega_0 \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$  die Inklusion  $x \in L_1^n(\Omega_0)$  gilt. Wir bezeichnen die Klasse dieser Funktionen mit  $L_{1,loc}^n(\Omega)$ .

**Bemerkung 2.3.10**

Definition 2.3.10 lässt sich auch über die Komponentenfunktionen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  formulieren. Wir nennen die vektorwertige Funktion  $x = (x_1, \dots, x_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  dann und nur dann lokal Lebesgue-integrierbar, wenn jede Komponentenfunktionen lokal Lebesgue-integrierbar ist.

Letztere Bemerkung untermauern wir mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 2.3.6**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  eine offene Menge und  $x = (x_1, \dots, x_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Die Funktion  $x$  ist genau dann im Sinn von Definition 2.3.10 lokal Lebesgue-integrierbar, wenn jede der Komponentenfunktionen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  lokal Lebesgue-integrierbar ist.

*Beweis.* Sei  $x = (x_1, \dots, x_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lebesgue-integrierbar im Sinn von Definition 2.3.10. Wir zeigen  $x_i$  ist lokal Lebesgue-integrierbar. Sei hierzu  $\Omega_0 \subset \Omega$  eine offene, relativ kompakte Menge mit  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ . Es folgt  $x \in L_1^n(\Omega_0)$ . Gemäß der vorherigen Überlegungen<sup>14</sup> gilt für jede Komponente  $x_i \in L_1(\Omega_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Komponenten sind lokal Lebesgue-integrierbar.

Sind umgekehrt alle Komponentenfunktionen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  lokal Lebesgue-integrierbar, sprich erfüllen die Inklusion  $x_i \in L_1(\Omega_0)$ . So folgt mit den vorherigen Überlegungen  $x \in L_1^n(\Omega_0)$ . Die vektorwertige Funktion  $x$  ist lokal Lebesgue-integrierbar.  $\square$

Wir widmen uns in diesem Kapitel abschließend noch der Einführung der Sobolev-Räume für vektorwertige Funktionen. Zunächst führen wir wieder den Produktraum

$$\left[ W_p^k(\Omega) \right]^n := \underbrace{W_p^k(\Omega) \times \dots \times W_p^k(\Omega)}_{n \text{ mal}}$$

mit den punktweisen Verknüpfungen wie in Satz 2.3.7 ein. Gemäß Satz 2.3.7 erhalten wir mit der Norm

$$\|x\|_{[W_p^k(\Omega)]^n} = \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{W_p^k(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [W_p^k(\Omega)]^n$$

<sup>14</sup>Mit den vorherigen Überlegungen meinen wir die Abschätzung der Normen auf  $[L_1(\Omega_0)]^n$  und  $L_1^n(\Omega_0)$ , sowie den Beweis zu Lemma 2.3.5.

für  $1 \leq p < \infty$  einen separablen Banachraum. Im Fall  $1 < p < \infty$  wird der Raum sogar reflexiv. Im Fall  $p = 2$  erhalten wir mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{[W_2^k(\Omega)]^n} &= \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j \rangle_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{j=1}^n \left( \langle x_j, y_j \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha x_j, D^\alpha y_j \rangle_{L_2(\Omega)} \right) \\ &= \langle x, y \rangle_{[L_2(\Omega)]^n} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha x, D^\alpha y \rangle_{[L_2(\Omega)]^n} \\ &= \langle x, y \rangle_{L_2^2(\Omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha x, D^\alpha y \rangle_{L_2^2(\Omega)} \end{aligned}$$

einen Hilbertraum. Die Norm reduziert sich in diesem Fall zu

$$\|x\|_{[W_2^k(\Omega)]^n} := \left( \|x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für ein allgemeines  $1 \leq p < \infty$  zeigen wir die folgende Normäquivalenz.

**Lemma 2.3.7**

Sei  $\|\cdot\|_{L_p^n(\Omega)}$  die in Lemma 2.3.4 definierte Norm. Weiter sei  $1 \leq p < \infty$ . Die Norm

$$\|x\|_{W_p^{n,k}(\Omega)} := \left( [\|x\|_{L_p^n(\Omega)}]^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} [\|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p^m(\Omega)}]^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist äquivalent zur Norm  $\|x\|_{[W_p^k(\Omega)]^n}$  des Raumes  $[W_p^k(\Omega)]^n$ .

*Beweis.* Aufgrund der Äquivalenz der Normen  $\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^n}$  und  $\|\cdot\|_{L_p^n(\Omega)}$ , die wir in Lemma 2.3.4 gezeigt haben, existieren Konstanten  $c, C > 0$  mit der Eigenschaft

$$c\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^n} \leq \|\cdot\|_{L_p^n(\Omega)} \leq C\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^n}.$$

Dies impliziert für die Norm im Sobolev-Raum

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{c} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{W_p^k(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sqrt[p]{c} \left( \sum_{j=1}^n \left[ \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \left[ c\|x\|_{[L_p(\Omega)]^n}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} c\|\mathcal{D}^\alpha x\|_{[L_p(\Omega)]^n}^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \left[ \|x\|_{L_p^n(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p^m(\Omega)}^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \left[ C\|x\|_{[L_p(\Omega)]^n}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} C\|\mathcal{D}^\alpha x\|_{[L_p(\Omega)]^n}^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sqrt[p]{C} \left( \sum_{j=1}^n \left[ \|x_j\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x_j\|_{L_p(\Omega)}^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sqrt[p]{C} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{W_p^k(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Folglich sind die Normen  $\|\cdot\|_{[W_p^k(\Omega)]^n}$  und  $\|\cdot\|_{W_p^{n,k}(\Omega)}$  äquivalent. □

Aufbauend auf der Normäquivalenz führen wir jetzt den Sobolev-Raum  $W_p^{n,k}(\Omega)$  ein.

**Definition 2.3.11**

Sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Der Raum

$$W_p^{n,k}(\Omega) := \left\{ u \in L_p^n(\Omega) \mid \mathcal{D}^\alpha u \in L_p^n(\Omega), |\alpha| \leq k \right\}$$

heißt Sobolev-Raum der vektorwertigen Funktionen.

Wir zeigen abschließend noch einige wichtige Eigenschaften dieses Raumes.

**Lemma 2.3.8**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $1 \leq p < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Der Raum  $W_p^{n,k}(\Omega)$  versehen mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^{n,k}(\Omega)} := \left( \|x\|_{L_p^n(\Omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p^n(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist

1. für  $1 \leq p < \infty$  ein separabler Banachraum.
2. für  $1 < p < \infty$  ein reflexiver Raum.
3. für  $p = 2$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{W_2^{n,k}(\Omega)} := \langle f, g \rangle_{L_2^n(\Omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha f, \mathcal{D}^\alpha g \rangle_{L_2^n(\Omega)}$$

ein Hilbertraum.

4. Falls ein  $\Omega$  Lipschitz-Gebiet und  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  ein beschränktes Teilgebiet ist, so ist die Einbettung

$$W_p^{n,j+r}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}_0, \mathbb{R}^n)$$

für  $j \geq 0$ ,  $r \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$  und  $rp > s > (r - 1)p$  kompakt.

**Bemerkung 2.3.11** (vgl. [1, Seite 169, 6.4 Remarks])

Wie bereits in Bemerkung 2.3.8 erwähnt, können wir falls  $\Omega$  beschränkt ist, ohne Einschränkung  $\Omega_0 = \Omega$  in Lemma 2.3.8 Punkt 4 setzen.

*Beweis zu Lemma 2.3.8.* Wir zeigen zunächst wieder  $W_p^{n,k}(\Omega) = [W_p^k(\Omega)]^n$ . Sei hierzu  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $x \in W_p^{n,k}(\Omega)$  gegeben. Gemäß Definition folgt unmittelbar  $x \in L_p^n(\Omega)$  und  $\mathcal{D}^\alpha x \in L_p^n(\Omega)$  für  $|\alpha| \leq k$ . Aus dem Beweis von Lemma 2.3.5 folgt jetzt  $x_i \in L_p(\Omega)$  und  $\mathcal{D}^\alpha x_i \in L_p(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$  für jede Komponente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Insgesamt erhalten wir  $x_i \in W_p^k(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nach Konstruktion gehört jetzt  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dem kartesischen Produktraum  $[W_p^k(\Omega)]^n$  an.

In Umkehrung erhalten wir für  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x \in [W_p^k(\Omega)]^n$  die folgende Schlussfolgerung. Zunächst ist per Definition jede Komponente  $x_i \in W_p^k(\Omega)$ , so dass  $x_i \in L_p(\Omega)$  und  $\mathcal{D}^\alpha x_i \in L_p(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$  gilt. Gemäß dem Beweis von Lemma 2.3.5 folgt  $x \in L_p^n(\Omega)$  und  $\mathcal{D}^\alpha x = (\mathcal{D}^\alpha x_1, \dots, \mathcal{D}^\alpha x_n) \in L_p^n(\Omega)$ . Folglich gilt  $x \in W_p^{n,k}(\Omega)$  und die Räume  $W_p^{n,k}(\Omega)$ ,  $[W_p^k(\Omega)]^n$  sind äquivalent.

Die Behauptungen des Lemmas folgen jetzt unter Beachtung der Raum- beziehungsweise Normäquivalenz aus den Eigenschaften des Grundraumes  $W_p^k(\Omega)$ . Wir verweisen hierzu auf die Sätze 2.3.4, 2.3.5 und 2.3.6 unter Beachtung von Satz 2.3.7.  $\square$

## 2.4 Gewichtete Lebesgue- und Sobolev-Räume

In diesem Kapitel werden wir die zuvor diskutierten Ergebnisse der Lebesgue- und Sobolev-Räume auf den Fall eines gewichteten Lebesgue-Integrals übertragen. Wir führen die gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räume ein. Hierzu gehen wir zunächst wieder von reellwertigen, messbaren Funktionen  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  aus und erweitern anschließend unsere Diskussion auf den Fall der Vektor- beziehungsweise Matrixfunktionen.

Bevor wir mit der Definition gewichteter Räume beginnen können, benötigen wir zunächst den Begriff *Gewicht*.

### Definition 2.4.1 ([37, Definition 1.1])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  eine offene Menge. Eine messbare Funktion  $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die fast überall positiv und endlich ist, heißt *Gewicht*.

### Bemerkung 2.4.1

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , eine offene Menge und  $\omega$  ein Gewicht im Sinn von Definition 2.4.1. Die auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  gegebene Mengenfunktion  $\omega^*: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ , definiert durch

$$\omega^*(A) := \int_A \omega(x) dx, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ offen},$$

induziert ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ . Dies erlaubt es uns die Theorie der gewichteten Räume im Sinn des Gewichts begriffes 2.4.1 in den Kontext allgemeiner messbarer Räume (Maßräume) einzubetten. Entsprechend können wir Resultate aus beispielsweise Maß- und Integrationstheorie [21] oder Linear Operators Part I: General theory [20] zitieren, welche zunächst nur für Maßräume definiert sind. Wir werden dieses Vorgehen im Folgenden ohne weitere Erwähnung vollziehen.

### Bemerkung 2.4.2

Eine spezielle Klasse von Gewichten ist die Klasse der stetigen, auf  $\Omega$  endlich integrierbaren Gewichte. Diese werden auch mit dem Begriff *Dichte* beziehungsweise *Dichtefunktion* assoziiert (vgl. [45, 54]). Wir werden die Nützlichkeit dieser speziellen Gewichte in den folgenden Kapiteln herausstellen. So gelten einige nützliche Eigenschaften der gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räume nur unter Annahme eines endlich integrierbaren Gewichtes. In der vorliegenden Arbeit werden wir an diesen Stellen exponentielle Gewichte der Form  $\omega(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$  verwenden.



Bereits mit dieser wenig restriktiven Definition des Begriffes *Gewicht* lassen sich, wie wir im kommenden Kapitel sehen werden, gewichtete Lebesgue-Räume einführen, von denen gezeigt werden kann, dass sie bei geeigneter Normierung Banachräume sind.

### 2.4.1 Die Räume $L_p(\Omega, \omega)$ und $W_p^k(\Omega, \omega)$

Wir betrachten die Menge  $\mathcal{M}(\Omega)$  aller Lebesgue-messbaren Funktionen  $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die die offene Menge  $\Omega$  in die reellen Zahlen abbilden. Die Menge  $\Omega$  setzen wir dabei als  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$  mit  $s \in \mathbb{N}$  an. Auf  $\mathcal{M}(\Omega)$  führen wir den nachfolgenden Teilraum ein, welchen wir als Raum der gewichteten,  $p$ -fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnen wollen.

**Definition 2.4.2** ([37, Definition 1.2])

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet,  $1 \leq p < \infty$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Der Raum

$$L_p(\Omega, \omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \int_{\Omega} |x(t)|^p \omega(t) dt < +\infty \right\}$$

wird als gewichteter Lebesgue-Raum der Ordnung  $p$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.4.3**

Der Fall  $p = \infty$  wird in Definition 2.4.2 zunächst ausgeschlossen. Wir werden ihn im Anschluss separat einführen.

Wir formulieren eine hinreichende Bedingung für eine messbare Funktion unter der sie  $p$ -fach Lebesgue-integrierbar ist.

**Lemma 2.4.1**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Ist  $1 \leq p < +\infty$  und  $f \in L_p(\Omega, \omega)$  und  $g$  eine Lebesgue-messbare Funktion mit  $|g| \leq |f|$  fast überall auf  $\Omega$ , dann ist  $g$  ebenfalls Element des Raumes  $L_p(\Omega, \omega)$ .

*Beweis.* Für beliebige Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $1 \leq p < \infty$  gilt  $|x| \leq |y| \Rightarrow |x|^p \leq |y|^p$ . Entsprechend erhalten wir

$$\int_0^{\infty} |g(t)|^p \omega(t) dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)|^p \omega(t) dt < \infty.$$

Letztere Ungleichung impliziert nach Definition der Lebesgue-Räume die Aussage des Lemmas. □

Im Folgenden werden wir wesentliche Eigenschaften der eingeführten Lebesgue-Räume herausstellen. Besonders wichtig sind uns hierbei die Vollständigkeit und die Reflexivität des Raumes. Diese Eigenschaften werden es uns erlauben, in diesen Räumen mit den Methoden der konvexen Funktionalanalysis zu operieren.

**Satz 2.4.1 ([37, Theorem 1.3])**

*Mittels der Norm*

$$\|x\|_{L_p(\Omega, \omega)} := \left( \int_{\Omega} |x(t)|^p \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird der in Definition 2.4.2 eingeführte Raum mit  $1 \leq p < \infty$  zu einem Banachraum.

Ein Beweis dieses Resultats findet man in dem Buch *Linear Operators Part I: General theory* (siehe [20, Seite 146, Theorem 6]), auf welches ebenfalls in [37, Theorem 1.3] verwiesen wird.

In Erweiterung zu Satz 2.4.1 lässt sich zeigen, dass es sich bei  $L_p(\Omega, \omega)$  für  $1 < p < \infty$  um einen reflexiven Raum handelt.

**Satz 2.4.2 ([20, Seite 288, Folgerung 2])**

*Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Der über der offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  definierte Raum  $L_p(\Omega, \omega)$  ist für  $1 < p < \infty$  reflexiv.*

**Bemerkung 2.4.4**

*Zur Frage, für welche Parameter  $1 \leq p < \infty$  und Gewichte  $\omega$  der über der offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$  definierte Raum  $L_p(\Omega, \omega)$  ein separabler Raum wird, konnten wir zum Zeitpunkt dieser Ausarbeitung keine Literatur finden. Wir nehmen jedoch an, dass die Separabilität des Raumes für eine gewisse Klasse von Gewichtsfunktionen bewiesen werden kann. Ein guter Ansatzpunkt scheint [15, Seite 49, Theorem 2]. Gleichzeitig glauben wir, dass die Separabilität nicht bei beliebiger Gewichtung erhalten bleibt. Dieses Verhalten legt das Beispiel [59, Seite 85] nahe, in dem gezeigt wird, dass die Menge der Polynome nicht dicht im Raum  $L_2((0, \infty), \omega)$ ,  $\omega(t) = e^{-\lg x^2}$  liegt.*

Im Fall  $p = 2$  können wir auf dem in Definition 2.4.2 eingeführten Raum ein Skalarprodukt einführen und folgendes Resultat zeigen.

**Satz 2.4.3 ([20, Seite 243])**

*Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  eine offene Menge und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega, \omega)} := \int_{\Omega} f(x)g(x)\omega(x)dx$$

wird der Raum  $L_2(\Omega, \omega)$  zu einem Hilbertraum.

Für den Spezialfall  $p = \infty$  findet sich in der Literatur oft die nachstehende Definition, wie wir sie gemäß *Linear Operators Part I: General theory*, [20], zitieren.

**Definition 2.4.3 ([20, Seite 101, Definition 11, Seite 241, Definition 19])**

*Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Weiter sei  $p = \infty$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Der Raum*

$$L_{\infty}(\Omega, \omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \omega - \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty \right\}$$

heißt Raum der  $\omega$ -wesentlich beschränkten Funktionen und wird mit  $L_\infty(\Omega, \omega)$  bezeichnet. Hierbei sei

$$\omega - \text{ess sup}_{t \in \Omega} |x(t)| := \inf_{N \subseteq \Omega, \omega^*(N)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus N} |x(t)|.$$

**Bemerkung 2.4.5**

In der vorliegenden Arbeit werden wir mit Gewichten der Form  $\omega(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$  arbeiten. Es lässt sich zeigen, dass die Nullmengen des durch  $\omega$  induzierten Maßes mit den Nullmengen des Lebesgue-Maßes übereinstimmen. Folglich fällt das  $\omega$ -wesentliche Supremum mit dem gewöhnlichen, wesentlichen Supremum zusammen. Wir benötigen entsprechend in dieser Arbeit nur den ungewichteten Raum  $L_\infty(\Omega)$  und können auf ein näheres Studium des Raumes  $L_\infty(\Omega, \omega)$  verzichten.

In späteren Kapiteln dieser Ausarbeitung werden wir die Theorie der Lebesgue-Punkte für den Funktionenraum der gewichteten Lebesgue-Funktionen benötigen. Ad hoc haben wir diese Theorie zunächst nur für die summierbaren Funktionen aus Kapitel 2.2. Mit Bemerkung 2.3.1 folgt die Gültigkeit der Theorie der Lebesgue-Punkte für den Raum  $L_{1,loc}$ . Mit dem nachfolgenden Lemma gehen wir einen Schritt weiter und spannen den Bogen zu den zuvor definierten gewichteten Lebesgue-Räumen.

**Lemma 2.4.2 ([37, Theorem 1.5])**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Weiter sei  $1 < p < \infty$  und  $\omega$  ein Gewicht mit der Eigenschaft  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , dann gilt für jede kompakte Menge  $\Omega_0$  mit  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  die Inklusion  $L_p(\Omega_0, \omega) \subseteq L_1(\Omega_0)$ .

**Folgerung 2.4.1**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Weiter sei  $1 < p < \infty$  und  $\omega$  ein Gewicht mit der Eigenschaft  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , dann gilt die Inklusion  $L_p(\Omega, \omega) \subseteq L_{1,loc}(\Omega)$ .

*Beweis.* Nach Lemma 2.4.2 gilt  $L_p(\Omega_0, \omega) \subseteq L_1(\Omega_0)$  für jedes Kompaktum  $\Omega_0$  mit  $\Omega_0 \subset \Omega$ . Folglich ist jedes Element des Raumes  $L_p(\Omega, \omega)$  auf jedem Kompaktum lokal Lebesgue-integrierbar und die Aussage der Folgerung gilt per Definition.  $\square$

**Bemerkung 2.4.6**

Folgerung 2.4.1 impliziert, dass die Elemente aus  $L_p(\Omega, \omega)$  auf jedem Kompaktum von  $\Omega$  summierbar sind. Folglich ist nach Folgerung 2.2.4 die Menge der Nicht-Lebesgue-Punkte für jedes Element aus  $L_p(\Omega, \omega)$  vom Maß Null. Entsprechend können wir die Theorie der Lebesgue-Punkte auch auf die Funktionen gewichteter Lebesgue-Räume anwenden und diesen Funktionen so eine fast überall punktweise Interpretation gemäß Definition 2.2.4 beziehungsweise Folgerung 2.2.2 zuordnen, wie wir es bereits in dem ungewichteten Fall getan haben.

Die Theorie der gewichteten Lebesgue-Räume abschließend, zeigen wir, dass die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eine dichte Untermenge des  $L_p(\Omega, \omega)$  bilden. Hierzu ist es wichtig, von einem auf dem Gebiet  $\Omega$  endlich integrierbaren Gewicht auszugehen.

**Lemma 2.4.3**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $\omega$  ein Gewicht mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\int_{\Omega} \omega(x) dx < \infty,$$

und  $1 \leq p < \infty$ . Der Raum  $C_c^0(\Omega)$ , der stetigen Funktionen mit kompakten Träger, liegt dicht im Raum  $L_p(\Omega, \omega)$ .

Zum Beweis dieses Lemmas nutzen wir Methoden aus [19, Seite 74, Kapitel 4.3]. Der Unterschied bei uns besteht in der Verwendung gewichteter Räume.

*Beweis.* Wir betrachten ein beliebiges  $u \in L_p(\Omega, \omega)$ . Mit der Setzung  $u_R := \chi_{B_R} u$ , wobei  $\chi_{B_R}$  die Indikator-Funktion auf der Kugel  $B_R$  vom Radius  $R > 0$  mit Mittelpunkt  $x_0 = 0$  bezeichne, berechnen wir

$$\begin{aligned} \|u - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)}^p &= \int_{\Omega} |u(x) - u_R(x)|^p \omega(x) dx \\ &= \int_{B_R} |u(x) - u_R(x)|^p \omega(x) dx + \int_{\Omega \setminus B_R} |u(x) - u_R(x)|^p \omega(x) dx \\ &= \int_{\Omega \setminus B_R} |u(x)|^p \omega(x) dx. \end{aligned}$$

Mit  $\Omega \setminus B_R = \{x \in \Omega : |x| > R\}$  folgt

$$\|u - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)}^p = \int_{\Omega \setminus B_R} |u(x)|^p \omega(x) dx = \int_{\Omega} |\chi_{\{|x| > R\}}(x) u(x)|^p \omega(x) dx.$$

Unter Beachtung von  $|\chi_{\{|x| > R\}}(x) u(x)|^p \leq |u(x)|^p$  und  $u \in L_p(\Omega, \omega)$  impliziert der Satz von Lebesgue über die majorisierende Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \|u - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)}^p &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\chi_{\{|x| > R\}}(x) u(x)|^p \omega(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \lim_{R \rightarrow \infty} |\chi_{\{|x| > R\}}(x) u(x)|^p \omega(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Nach den bisherigen Überlegungen existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Radius  $R > 0$ , so dass

$$\|u - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

seine Richtigkeit behält. Im nächsten Schritt approximieren wir die Funktion  $u_R$  mittels der Sequenz  $\{u_R^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$$u_R^{(k)}(x) := \begin{cases} u_R(x) & \text{falls } |u_R(x)| \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Folge  $\{u_R^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion  $u_R$ . Wir zeigen dies, indem wir für jedes beliebige  $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ , wobei  $\mathcal{N}$  gerade jene Nullmenge der nicht-Lebesgue-Punkte der Funktion  $u_R$  sei, die Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_R(x) - u_R^{(k)}(x)| = 0$$

verifizieren. Diese folgt aus der Existenz eines Indizes  $k_0(x, R) := |u_R(x)|$ , sodass für alle  $k \geq k_0(x, R)$  die Identität

$$|u_R(x) - u_R^{(k)}(x)| = 0$$

gilt. Zusätzlich sind alle Folgenglieder  $u_R^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  durch die Majorante  $u_R \in L_p(\Omega, \omega)$  gleichmäßig beschränkt. Der Satz von Lebesgue über die majorierte Konvergenz liefert schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_R - u_R^{(k)}\|_{L_p(\Omega, \omega)}^p &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_R(x) - u_R^{(k)}(x)|^p \omega(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |u_R(x) - u_R^{(k)}(x)|^p \omega(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Entsprechend existiert ein Index  $k_0 = k_0(R)$ , so dass für alle  $k \geq k_0$  die Bedingung  $\|u_R^{(k)} - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$  richtig ist.

Wir bezeichnen das durch das Gewicht  $\omega$  induzierte Maß,

$$\omega^*(A) := \int_A \omega(x) dx$$

mit  $\omega^*$ . Die bezüglich  $\omega^*$  messbare Funktion  $u_R^{(k)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $u_R^{(k)} \equiv 0$  auf  $\Omega \setminus B_R$  und  $u_R^{(k)} \leq k$  auf  $B_R$ . Weiterhin gilt  $\omega^*(B_R) < \infty$  aufgrund der endlichen Integrierbarkeit des Gewichtes  $\omega$ . Nach dem Satz von Lusin [66, Seite 200ff] existiert für  $\tilde{\varepsilon} := \left(\frac{\varepsilon}{6k}\right)^p$  eine auf  $\Omega$  stetige Funktion  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

1.  $\text{supp}(\Phi)$  ist kompakt,
2.  $\omega^*\left(\left\{x \in \Omega : u_R^{(k)}(x) \neq \Phi(x)\right\}\right) < \tilde{\varepsilon}$ ,
3.  $\sup_{x \in \Omega} |\Phi(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |u_R^{(k)}(x)| \leq k$ .

Wir bezeichnen die Menge  $\left\{x \in \Omega : u_R^{(k)}(x) \neq \Phi(x)\right\}$  mit  $M_R^k$ .

Abschließend vervollständigen wir den Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$  und  $R = R(\varepsilon)$ ,  $k = k(R)$  hinreichend groß gewählt, so existiert nach den bisherigen Überlegungen eine stetige Funktion  $\Phi$  mit kompaktem Träger, welche nur von  $R$ ,  $k$  abhängt, so dass

$$\begin{aligned} \|u - \Phi\|_{L_p(\Omega, \omega)} &\leq \|u - u_R\|_{L_p(\Omega, \omega)} + \|u_R - u_R^{(k)}\|_{L_p(\Omega, \omega)} + \|u_R^{(k)} - \Phi\|_{L_p(\Omega, \omega)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_R^{(k)} - \Phi\|_{L^\infty(M_R^k)} \cdot \left[\omega^*(M_R^k)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + 2k \frac{\varepsilon}{6k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

gilt. Folglich liegt  $C_c^0(\Omega)$  dicht in  $L_p(\Omega, \omega)$ . □

In dieser Arbeit werden wir Steuerungsprobleme mit Differentialgleichungsnebenbedingungen betrachten. Für die Behandlung von Differentialgleichungen sind die bisher eingeführten Räume ungeeignet, da wir in ihnen nicht differenzieren können. Ziel des zweiten Teils dieses Kapitels ist es, einen geeigneten Teilraum der gewichteten Lebesgue-Räume einzuführen, in dem wir zumindest schwach differenzieren können. Es werden sich auf natürliche Weise die gewichteten Sobolev-Räume ergeben.

Mit dem Begriff der schwachen Ableitung, Definition 2.3.4 aus Kapitel 2.3 lassen sich in Anlehnung an die gewöhnlichen Sobolev-Räume die gewichteten Sobolev-Räume nach Kufner und Opic, [37], einführen.

**Definition 2.4.4 ([37, Definition 1.9])**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Weiter sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Der Raum

$$W_p^k(\Omega, \omega) := \left\{ u \in L_p(\Omega, \omega) \cap L_{1,loc}(\Omega) \mid \mathcal{D}^\alpha u \in L_p(\Omega, \omega) \cap L_{1,loc}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

heißt gewichteter Sobolev-Raum.

**Bemerkung 2.4.7**

Im Unterschied zu der zitierten Quelle [37, Definition 1.9] haben wir vereinfachend die Definition angepasst, so dass wir bezüglich des Ableitungsgrades  $\alpha$  uniforme Gewichte verwenden.

**Bemerkung 2.4.8**

Erfüllt das Gewicht in Definition 2.4.4 die Bedingung  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , so gilt nach Folgerung 2.4.1 für  $1 < p < \infty$  die Inklusion  $L_p(\Omega, \omega) \subset L_{1,loc}(\Omega)$  und wir können vereinfachend

$$W_p^k(\Omega, \omega) := \left\{ u \in L_p(\Omega, \omega) \mid \mathcal{D}^\alpha u \in L_p(\Omega, \omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

in Definition 2.4.4 schreiben.

**Bemerkung 2.4.9**

Im Fall  $\omega \equiv 1$  fällt Definition 2.4.4 mit den klassischen Sobolev-Räumen, Definition 2.3.5, zusammen.

**Satz 2.4.4 ([37, Theorem 1.11])**

Sei  $\omega$  ein Gewicht mit  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , dann wird der in Definition 2.4.4 eingeführte Raum für  $1 < p < \infty$  mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^k(\Omega, \omega)} := \left( \|x\|_{L_p(\Omega, \omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p(\Omega, \omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

zu einem Banachraum.

**Satz 2.4.5**

Sei  $\omega$  ein Gewicht mit  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , dann wird der in Definition 2.4.4 eingeführte Raum  $W_2^k(\Omega, \omega)$  ( $p = 2$ ) mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{W_2^k(\Omega, \omega)} := \langle x, y \rangle_{L_2(\Omega, \omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha x, \mathcal{D}^\alpha y \rangle_{L_2(\Omega, \omega)}$$

zu einem Hilbertraum.

**Bemerkung 2.4.10**

Ist bei dem Ausdruck  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^k(\Omega, \omega)}$  beziehungsweise  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega, \omega)}$ , aus dem Kontext heraus klar, um welches Skalarprodukt es sich handelt, so unterdrücken wir den Subscript und schreiben kurz  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Beweis.* Nach Satz 2.4.3 handelt es sich bei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega, \omega)}$  um ein Skalarprodukt. Die Definition von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^k(\Omega, \omega)}$  erhält die Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit. Folglich handelt es sich bei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^m(\Omega, \omega)}$  um ein Skalarprodukt. Setzen wir

$$\|x\|_{W_2^k(\Omega, \omega)} := \sqrt{\langle x, x \rangle_{W_2^k(\Omega, \omega)}},$$

so erhalten wir mit  $\|\cdot\|_{W_2^k(\Omega, \omega)}$  gerade die Norm aus Satz 2.4.4, bezüglich welcher der Raum vollständig ist. Entsprechend ist  $(W_2^k(\Omega, \omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^k(\Omega, \omega)}, \|\cdot\|_{W_2^m(\Omega, \omega)})$  ein Hilbertraum.  $\square$

Satz 2.4.5 impliziert gemäß dem folgenden Resultat, dass es sich bei  $W_2^k(\Omega, \omega)$  um einen reflexiven Raum handelt.

**Satz 2.4.6 ([70, Seite 226, Folgerung V.3.7])**

*Jeder Hilbertraum  $H$  ist ein reflexiver Raum.*

Im Fall  $p \neq 2$  sind uns keine Ergebnisse zur Separabilität und/oder Reflexivität der gewichteten Räume bekannt. Wir verweisen erneut auf [15, Seite 49, Theorem 2] und Bemerkung 2.4.4 für eine mögliche Beweisidee.

Nach dieser kurzen Einführung der Sobolev-Räume ist es jetzt unser Ziel, einen Zusammenhang zwischen diesen und den lokal absolut stetigen Funktionen herzustellen. Dieser Zusammenhang lässt sich nur für eine eingeschränkte Wahl von Gebieten  $\Omega$  und Gewichten  $\omega$  herstellen. Speziell gehen wir im Folgenden von eindimensionalen Gebieten  $\Omega = I \subset \mathbb{R}$  aus.

**Satz 2.4.7 ([36, Seite 274, Theorem 5.6.3])**

*Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes, möglicherweise unbeschränktes Intervall und  $x \in W_{1,loc}^1(I)$ , so existiert eine Funktion  $\tilde{x} \in AC_{loc}(I)$  mit*

1.  $x = \tilde{x}$  fast überall auf  $I$ ;
2.  $\mathcal{D}x = \tilde{x}'$  fast überall auf  $I$ .

**Bemerkung 2.4.11**

*Gemäß Satz 2.4.7 lässt sich für jedes Element  $x \in W_{1,loc}^1(I)$  ein absolut stetiger Repräsentant auswählen. Von diesem Repräsentanten ausgehend, können wir fortan  $\mathcal{D}x = x'$ , fast überall auf  $I$ , identifizieren und die auftretenden schwachen Ableitungen fast überall im klassischen Sinn interpretieren.*

**Bemerkung 2.4.12**

*Satz 2.4.7 besagt, dass wir zu jedem Element  $x \in W_{1,loc}^1(I)$  einen lokal absolut stetigen Repräsentanten finden können. Betrachtet man anstelle des offenen Intervalls  $I$  ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , so kann zumindest noch für jede Richtungsableitung ein*

lokal absolut stetiger Repräsentant gefunden werden. Dieses Phänomen ist in der Literatur unter dem Namen „absolutely continuous on lines“ bekannt (siehe [36, Seite 274, Theorem 5.6.3]).

Mit Folgerung 2.4.1 führen wir unsere Überlegungen fort und erhalten nachstehende Folgerung.

**Folgerung 2.4.2**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes, möglicherweise unbeschränktes Intervall,  $\omega$  ein Gewicht mit der Eigenschaft  $\omega^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$  und  $x \in W_2^1(I, \omega)$ , so existiert eine Funktion  $\tilde{x} \in AC_{loc}(I)$  mit den Eigenschaften aus Satz 2.4.7.

*Beweis.* Nach Folgerung 2.4.1 gilt  $W_2^1(I, \omega) \subseteq W_{1,loc}^1(I)$ . Anwendung von Satz 2.4.7 liefert die Existenz des geforderten  $AC_{loc}$ -Repräsentanten.  $\square$

**Folgerung 2.4.3**

Für jede Funktion  $x \in W_2^1((0, \infty), \omega)$  mit einem Gewicht  $\omega$ , welches der Eigenschaft  $\omega^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$  genügt, existiert ein eindeutiger, absolut stetiger Repräsentant  $\tilde{x}$ . Für diesen gilt:

1.  $x \sim_{(0,\infty)} \tilde{x}$ , das heißt  $x$  und  $\tilde{x}$  stimmen fast überall auf  $(0, \infty)$  überein.
2. Die Funktion  $\tilde{x}$  ist in  $(0, \infty)$  lokal absolut stetig und genügt für jedes  $t_0 \in (0, \infty)$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau \quad \text{für fast alle } t \text{ aus } [t_0, \infty).$$

3.  $\tilde{x}$  lässt sich eindeutig und stetig bis  $t_0 > 0$  fortsetzen.

*Beweis.* Sei  $x \in W_2^1((0, \infty), \omega)$ . Nach Folgerung 2.4.1 und Definition 2.4.4 erhalten wir die Inklusion  $W_2^1((0, \infty), \omega) \subset W_{1,loc}^1((0, \infty))$ . Folglich ist  $x$  Element des Raumes  $W_{1,loc}^1((0, \infty))$  und Folgerung 2.4.2 liefert einen Repräsentanten  $\tilde{x} \in AC_{loc}((0, \infty))$  mit  $x = \tilde{x}$  fast überall auf  $(0, \infty)$ . Die weiteren Aussagen folgen unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 2.2.1, sowie Definition 2.2.1 unter Beachtung von Bemerkung 2.2.1.  $\square$

In Umkehrung zu den Überlegungen aus Satz 2.4.7 beziehungsweise Folgerung 2.4.3, formulieren wir folgendes Resultat.

**Satz 2.4.8 ([46, Seite 9, Theorem 2])**

Sei  $I$  ein möglicherweise unbeschränktes Intervall. Ist  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine (lokal) absolut stetige Funktion, deren fast überall existierende klassische Ableitung Element des Raumes  $L_p(I)$  ist, so fällt die klassische Ableitung mit der schwachen Ableitung zusammen.

Folgerung 2.4.3 und Satz 2.4.8 werden es uns später erlauben, Steuerungsaufgaben in dem reflexiven Hilbertraum  $W_2^1((0, \infty), \omega)$  zu untersuchen, ohne dabei zu einer schwachen Formulierung der Aufgabe übergehen zu müssen. Dies ist insofern nützlich, dass wir die „schönen“ Eigenschaften des Hilbertraumes ausnutzen können, ohne dabei auf die punktweise Auswertung beziehungsweise fast überall punktweise Differenzierbarkeit



der Zustandstrajektorien verzichten zu müssen. Letztere Eigenschaft erlaubt uns die Behandlung des Anfangswertproblems im Sinn von Carathéodory. Wir erhalten eine wohldefinierte Aufgabe, einbettbar in eine Hilbertraumtheorie. Die Einbettung erhalten wir hierbei, indem wir die zunächst im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen studierten Lösungen des Anfangswertproblems mittels einer geeigneten Wachstumsbeschränkung als Elemente gewichteter Lebesgue-Räume identifizieren. Satz 2.4.8 liefert dann die Äquivalenz der klassischen Ableitung mit der schwachen Ableitung, so dass wir ohne Einschränkungen im gewichteten Sobolev-Raum weiter argumentieren können.

### 2.4.2 Die Räume $L_p^n(\Omega, \omega)$ , $W_p^{n,k}(\Omega, \omega)$

In Analogie zu Kapitel 2.3.2 definieren wir aufbauend auf Satz 2.3.7 die zu den gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räumen korrespondierenden Produkträume.

Hierbei können die Überlegungen aus Kapitel 2.3.2 Eins-zu-eins übernommen werden, so dass wir im Folgenden die resultierenden Ergebnisse nur in einem zusammenfassenden Charakter präsentieren werden.

Für die gewichteten Lebesgue-Räume notieren wir die folgenden Aussagen.

#### Definition 2.4.5

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Weiterhin sei  $1 \leq p < \infty$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Der Raum

$$L_p^n(\Omega, \omega) := \left\{ x \in \mathcal{M}^n(\Omega) \mid \int_{\Omega} |x(t)|_2^p \omega(t) dt < \infty \right\}$$

wird als gewichteter Lebesgue-Raum der Ordnung  $p$  bezeichnet.

#### Lemma 2.4.4

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet,  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1 und  $1 \leq p < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Der Raum  $L_p^n(\Omega, \omega)$  versehen mit der Norm

$$\|x\|_{L_p^n(\Omega, \omega)} = \left( \int_{\Omega} |x(t)|_2^p \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

genügt den folgenden Eigenschaften.

1.  $L_p^n(\Omega, \omega)$  ist für  $1 \leq p < \infty$  ein Banachraum.
2.  $L_p^n(\Omega, \omega)$  ist für  $1 < p < \infty$  ein reflexiver Raum.
3.  $L_2^n(\Omega, \omega)$  wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y, \rangle_{L_2^n(\Omega, \omega)} = \int_{\Omega} x^T(t)y(t)\omega(t)dt$$

ein Hilbertraum.

4. Gilt  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ , so folgt für jede kompakte Teilmenge  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  die Inklusion  $L_p^n(\Omega_0, \omega) \subseteq L_1^n(\Omega_0)$ . Es gilt die Inklusion  $L_p^n(\Omega, \omega) \subseteq L_{1,loc}^n(\Omega)$ .

Für die gewichteten Sobolev-Räume ergibt sich entsprechend die folgende Definition.

**Definition 2.4.6**

Sei  $1 < p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet. Weiter sei  $\omega$  ein Gewicht mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ . Der Raum

$$W_p^{n,k}(\Omega, \omega) := \left\{ u \in L_p^n(\Omega, \omega) \mid \mathcal{D}^\alpha u \in L_p^n(\Omega, \omega), |\alpha| \leq k \right\}$$

heißt Sobolev-Raum.

**Lemma 2.4.5**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$  ein Gebiet und  $1 < p < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Weiter sei  $\omega$  ein Gewicht mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{1,loc}(\Omega)$ . Der Raum  $W_p^{n,k}(\Omega, \omega)$  versehen mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^{n,k}(\Omega, \omega)} := \left( \|x\|_{L_p^n(\Omega, \omega)}^p + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha x\|_{L_p^n(\Omega, \omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist

1. für  $1 < p < \infty$  ein Banachraum.
2. für  $p = 2$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{W_2^{n,k}(\Omega, \omega)} := \langle x, y \rangle_{L_2^n(\Omega, \omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha x, \mathcal{D}^\alpha y \rangle_{L_2^n(\Omega, \omega)}$$

ein Hilbertraum.

Ist  $s = 1$ , so existiert zu  $x \in W_p^{n,k}(\Omega, \omega)$  ein lokal absolut stetiger Repräsentant, das heißt, es existiert ein  $\tilde{x} \in AC_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $x = \tilde{x}$  fast überall auf  $\Omega$ .<sup>15</sup>

## 2.5 Ergebnisse der konvexen Analysis und der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel werden wir wesentliche Werkzeuge der Analysis, insbesondere der konvexen Funktionalanalysis bereitstellen. Ziel ist es, den Leser für das weitere Verständnis unserer Arbeit vorzubereiten. Nachdem wir einleitend einige wichtige Ungleichungen vorstellen, diskutieren wir anschließend wesentliche Konvergenz- und Kompaktheitsaussagen. Die Trennung konvexer Mengen, welche im Folgenden studiert wird, stellt ebenfalls einen Grundpfeiler der späteren Beweiskette dar. Dieses Kapitel versteht sich hierbei als eine Zusammenfassung bekannter Ergebnisse und verzichtet entsprechend, sofern nicht anders angegeben, auf die Beweise der präsentierten Ergebnisse.

Wir beginnen mit einem bekannten Resultat der Lebesgue- und Maßtheorie, welches wir in dieser Form aus Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, [21], entnehmen.

---

<sup>15</sup>Für  $s > 1$  kann unter dem Begriff „absolute continuous on lines“ eine ähnliche Aussage gefunden werden (vgl.[36, Seite 274, Theorem 5.6.3]).

**Lemma 2.5.1** ([21, Seite 131, Satz 3.8])

Sei  $f \in L_1(\Omega, \omega)$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Es gilt die Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)|\omega(x)dx.$$

Wir erweitern diese bekannte Ungleichung, so dass sie auch für den Fall vektorwertiger Funktionen anwendbar wird.

**Lemma 2.5.2**

Sei  $f \in L_1^n(\Omega, \omega)$  und  $\omega$  ein Gewicht gemäß Definition 2.4.1. Es gilt die Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx \right|_2 \leq \int_{\Omega} |f(x)|_2\omega(x)dx.$$

**Bemerkung 2.5.1**

In dem folgenden Beweis folgen wir den Ideen von [61]. Zur Sicherstellung der Korrektheit des Beweises werden wir diesen hier noch einmal Schritt für Schritt durchführen und die Argumentationskette prüfen.

*Beweis zu Lemma 2.5.2.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir

$$\int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx \neq 0$$

an. Wir definieren einen Vektor  $v$  gemäß

$$v = \int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx$$

und ergänzen diesen zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Sei diese  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  mit  $v_1 = v/|v|$ . Seien nun  $f_1, \dots, f_n$  die Koordinatenfunktionen von  $f$  bezüglich  $B$ . Es gilt

$$v = \int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n f_k(x)v_k\omega(x)dx = \sum_{k=1}^n \left( \int_{\Omega} f_k(x)\omega(x)dx \right) v_k.$$

Aus der Orthogonalität der Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  folgt unmittelbar

$$\int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx = \left( \int_{\Omega} f_1(x)\omega(x)dx \right) v_1.$$

Mit diesen Vorüberlegungen schätzen wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)\omega(x)dx \right|_2 &= \left| \int_{\Omega} f_1(x)\omega(x)dx \right| \cdot |v_1|_2 \\ &\leq \int_{\Omega} |f_1(x)|\omega(x)dx \\ &\leq \int_{\Omega} \sqrt{f_1^2(x) + \dots + f_n^2(x)}\omega(x)dx \\ &= \int_{\Omega} |f(x)|_2\omega(x)dx \end{aligned}$$

ab. Hierbei haben wir die bereits für den skalaren Fall bewiesene Ungleichung verwendet und die Invarianz der Norm unter Basistransformation ausgenutzt.  $\square$

Eine weitere wesentliche Ungleichung, die in dieser Ausarbeitung häufig Anwendung findet, ist die sogenannte Bellmann-Gronwall Ungleichung. Wir formulieren sie im Folgenden in zwei aufeinander aufbauenden Varianten. Bei den Beweisideen dieser Ungleichungen orientieren wir uns an Pachpatte, *Inequalities for Differential and Integral Equations*, [50], betten die Ungleichungen jedoch in eine Lebesgue-Theorie ein.

**Lemma 2.5.3 (Bellmann-Gronwall Ungleichung, Variante 1)**

Gegeben sei  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi \in L_1(I)$  mit  $I = (a, b)$ ,  $0 = a < b < \infty$ . Weiter gelte mit  $\alpha > 0$  und  $h \in L_1(I)$ ,  $h \geq 0$  fast überall auf  $I$  die Ungleichung

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_0^t h(\tau)\phi(\tau)d\tau.$$

Dann gilt für fast alle  $t \in I$

$$\phi(t) \leq \alpha \exp \left\{ \int_0^t h(\tau)d\tau \right\}.$$

**Bemerkung 2.5.2**

Lemma 2.5.3 wurde in der hier zitierten Form für das Lebesgue-Integral bereits in Gronwall inequalities, [14], von Beesack bewiesen. Wir führen den Beweis der Vollständigkeit halber hier noch einmal vor.

*Beweis.* Wir definieren die Hilfsfunktion

$$z(t) := \alpha + \int_0^t h(\tau)\phi(\tau)d\tau.$$

Es gilt  $\phi(t) \leq z(t)$  und  $z(0) = \alpha$ . Die Funktion  $z$  ist nach Satz 2.2.1 auf dem Intervall  $I$  absolut stetig. Folglich existiert fast überall die Ableitung  $\dot{z}(t) = h(t)\phi(t)$  und es gilt fast überall

$$\dot{z}(t) = h(t)\phi(t) \leq h(t)z(t). \tag{2.3}$$

Wegen  $h \in L_1(I)$  existiert für  $0 \leq t \leq b$  das Lebesgue-Integral  $\int_0^t h(\tau)d\tau$  und die Multiplikation von (2.3) mit  $\exp\{-\int_0^t h(\tau)d\tau\}$  ist wohl definiert. Wir erhalten

$$\dot{z}(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau)d\tau \right\} - h(t)z(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau)d\tau \right\} \leq 0.$$

Mit der Produktregel der Differenziation schließen wir aus der letzten Ungleichung fast überall auf  $I$

$$\frac{d}{dt} \left[ z(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau)d\tau \right\} \right] \leq 0.$$

Lebesgue-Integration von 0 bis  $t$  liefert

$$z(t) \exp \left\{ - \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} - z(0) \leq 0 \quad \text{f.ü. auf } I.$$

Beachtung von  $\phi \leq z$  und  $z(0) = \alpha$  liefert schließlich

$$\phi(t) \leq \alpha \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \quad \text{f.ü. auf } I.$$

□

In der zweiten Variante erweitern wir die Aussage der Ungleichung, indem wir die Konstante  $\alpha$  gegen eine monoton nicht fallende Funktion austauschen.

**Lemma 2.5.4 (Bellmann-Gronwall Ungleichung, Variante 2)**

Gegeben sei  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi \in L_1(I)$  mit  $I = (a, b)$ ,  $0 = a < b < \infty$ . Weiter gelte mit  $\alpha \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$  positiv, nicht fallend und  $h \in L_1(I)$ ,  $h \geq 0$  fast überall die Ungleichung

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t h(\tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Dann gilt für fast alle  $t \in I$

$$\phi(t) \leq \alpha(t) \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\}.$$

In Anlehnung an [50, Seite 12, Theorem 1.3.1] führen wir den Beweis dieses Lemmas durch Reduktion der Problemstellung auf eine Ungleichung der Form, wie sie in Lemma 2.5.3 bereits untersucht wurde.

*Beweis.* Wir betrachten eine Funktion  $w$  derart, dass punktweise fast überall auf  $I$  die Identität  $\phi(t) = \alpha(t)w(t)$  gilt. Die Funktion  $w$  ist hierbei wegen  $\alpha > 0$  auf  $I$  wohldefiniert und im Lebesgueschen Sinn eindeutig. Folglich geht die untersuchte Integralungleichung in

$$w(t) \leq 1 + \int_0^t h(\tau) \frac{\alpha(\tau)w(\tau)}{\alpha(t)} d\tau$$

über. Aufgrund der Monotonie von  $\alpha$  folgt  $\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)} \leq 1$  für fast alle  $t \geq \tau$  und wir erhalten

$$w(t) \leq 1 + \int_0^t h(\tau) w(\tau) d\tau.$$

Die Funktion  $w = \frac{\phi}{\alpha}$  ist hierbei wegen der Stetigkeit von  $\alpha$  Element des Raumes  $L_1(I)$ . Anwendung von Lemma 2.5.3 liefert schließlich

$$w(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \quad \text{f.ü. auf } I.$$

Rücksubstitution ergibt

$$\phi(t) \leq \alpha(t) \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \quad \text{f.ü. auf } I,$$

womit das Lemma vollständig bewiesen ist. □

In der vorliegenden Arbeit werden wir oft auf eine Integralungleichung vom Typ

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t h(\tau) \phi(\tau) d\tau$$

mit einer Funktion

$$\alpha(t) \leq \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\}$$

stoßen. Wenden wir auf diese Integralungleichung die Bellmann-Gronwall Ungleichung Typ 2 an, so folgt

$$\phi(t) \leq \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t 2h(\tau) d\tau \right\}.$$

Wir werden jedoch in dem folgenden Lemma sehen, dass sich für diesen speziellen Typ der Setzung der Funktion  $\alpha$  eine, je nach Wahl der Funktion  $h$ , deutlich bessere Schranke verifizieren lässt.

**Lemma 2.5.5 (Bellmann-Gronwall Ungleichung, Spezialfall)**

Gegeben sei  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi \in L_1(I)$  mit  $I = (a, b)$ ,  $0 = a < b < \infty$ . Weiter gelte mit  $\alpha_0 > 0$  und  $h \in L_1(I)$ ,  $h \geq 0$  fast überall auf  $I$  die Ungleichung

$$\phi(t) \leq \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} + \int_0^t h(\tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\phi(t) \leq \alpha_0 \left( 1 + \int_0^t h(\tau) d\tau \right) \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\}$$

für fast alle  $t \in I$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 2.5.3 definieren wir die Hilfsfunktion

$$z(t) := \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} + \int_0^t h(\tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Es gilt fast überall  $\phi(t) \leq z(t)$  und  $z(0) = \alpha_0$ . Die Funktion  $z$  ist nach Satz 2.2.1 auf dem Intervall  $I$  absolut stetig. Folglich existiert fast überall die Ableitung  $\dot{z}$  und es gilt fast überall

$$\dot{z}(t) = \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} h(t) + h(t) \phi(t) \leq \alpha_0 \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} h(t) + h(t) z(t).$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit  $\exp\{-\int_0^t h(\tau) d\tau\}$  liefert fast überall

$$\dot{z}(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau) d\tau \right\} - h(t) z(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \leq \alpha_0 h(t).$$

Mit der Produktregel der Differenziation schließen wir aus der letzten Ungleichung fast überall auf  $I$

$$\frac{d}{dt} \left[ z(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \right] \leq \alpha_0 h(t).$$

Lebesgue-Integration von 0 bis  $t$  liefert schließlich

$$z(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(\tau) d\tau \right\} - z(0) \leq \alpha_0 \int_0^t h(\tau) d\tau \quad \text{f.ü. auf } I.$$

Beachtung von  $\phi \leq z$  und  $z(0) = \alpha_0$  liefert

$$\phi(t) \leq \alpha_0 \left( 1 + \int_0^t h(\tau) d\tau \right) \exp \left\{ \int_0^t h(\tau) d\tau \right\} \quad \text{f.ü. auf } I.$$

□

Neben den Ungleichungen spielen im Kontext einer Hilbertraumtheorie Aussagen über Konvergenz und Kompaktheit eine zentrale Rolle. Wir erweitern unser Repertoire um den Satz von Eberlein und Schmuljan, welcher uns ein Kriterium für die schwache Kompaktheit der Einheitskugel gibt.

**Satz 2.5.1 (Eberlein-Schmuljan [25, Seite 94], [20, Seite 430, Theorem 1])**

*Die Einheitskugel  $E$  in  $B$  ist genau dann schwach kompakt, wenn  $B$  reflexiv ist.*

Für die Arbeit mit Funktionalen in Hilberträumen sowie der schwachen Konvergenz ist zusätzlich das folgende Resultat, welches auf Riesz und Fischer zurück geht, nützlich.

**Satz 2.5.2 ([70, Seite 226, Theorem V3.6.]**

*Sei  $H$  ein Hilbertraum, dann ist die Abbildung  $\Phi: H \rightarrow H, y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$  bijektiv, isometrisch und konjugiert linear. Das heißt, zu  $x' \in H^*$  existiert ein eindeutiges  $y \in H$  mit  $x'(x) = \langle x, y \rangle$  für  $x \in H$ . Zusätzlich gilt  $\|x'\|_{H^*} = \|y\|_H$ .*

Im gewichteten Hilbertraum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \omega)$  lässt sich eine weitere Beziehung zwischen den Elementen des Hilbertraumes und den Elementen des mit  $\omega^{-1}$  gewichteten Hilbertraumes herstellen.

**Lemma 2.5.6**

Sei  $\omega$  eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 2.4.1 mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\int_0^\infty \omega(t) dt < \infty, \quad \omega > 0.$$

Weiter sei  $y \in W_2^{1,n}((0, \infty), \omega^{-1})$ . Dann gilt für jedes Element  $x \in W_2^{1,n}((0, \infty), \omega)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x^T(t)y(t)| = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)| = 0.$$

**Bemerkung 2.5.3**

Ein ähnliches Ergebnis findet sich bereits in „Pricing infinite horizon programs.“, [45], von 1982 (vgl. [45, Seite 403, Lemma 3.1]). Für den in dieser Arbeit betrachteten Kontext finden wir die Aussage von Lemma 2.5.6 in den Arbeiten [51, 54, 64]. Wir führen den folgenden Beweis in Anlehnung an diese Arbeiten.

*Beweis von Lemma 2.5.6.* Für alle  $x \in W_2^{1,n}((0, \infty), \omega)$  und  $y \in W_2^{1,n}((0, \infty), \omega^{-1})$  gilt gemäß der Ungleichung von Cauchy und Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x^T(t)y(t)| dt &= \int_0^\infty \left| x^T(t)y(t) \sqrt{\omega(t)} \sqrt{\omega^{-1}(t)} \right| dt \\ &\leq \|x\|_{L_2^n((0, \infty), \omega)} \cdot \|y\|_{L_2^n((0, \infty), \omega^{-1})} < \infty \end{aligned} \tag{2.4}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} x^T(t)y(t) \right| dt &= \int_0^\infty \left| \dot{x}^T(t)y(t) + x^T(t)\dot{y}(t) \right| \sqrt{\omega(t)} \sqrt{\omega^{-1}(t)} dt \\ &\leq \|\dot{x}\|_{L_2^n((0, \infty), \omega)} \cdot \|y\|_{L_2^n((0, \infty), \omega^{-1})} \\ &\quad + \|x\|_{L_2^n((0, \infty), \omega)} \cdot \|\dot{y}\|_{L_2^n((0, \infty), \omega^{-1})} < \infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aufgrund der Bedingungen (2.4), (2.5) schließen wir  $x^T y \in W_1^{1,1}((0, \infty))$ . Der Einbettungssatz Theorem 4 Aussage 3 aus [15] impliziert, dass die  $W_1^{1,1}$ -Funktion  $x^T y$  im Unendlichen verschwindet. Es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |(x^T y)(T)| = 0.$$

Mit den Setzungen  $x = \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  folgt insbesondere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)| = 0.$$

Dies impliziert direkt die Konvergenz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|_2 = 0.$$

□



Wir zitieren den Trennungssatz von Hahn-Banach (Trennungsversion II) aus *Funktionalanalysis*, 7. Auflage, [70], von Werner.

**Satz 2.5.3 ([70, Seite 104, Theorem III.2.5])**

Sei  $X$  ein normierter Raum und  $V \subset X$  eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Weiter sei  $x \notin V$ . Dann existiert ein  $x' \in X^*$  mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf \left\{ \operatorname{Re} x'(v) \mid v \in V \right\}.$$

Das heißt, es existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v) \quad \forall v \in V.$$

**Bemerkung 2.5.4**

Das Theorem 2.5.3 ist zunächst über dem Grundkörper der komplexen Zahlen formuliert. In dieser Arbeit werden wir jedoch nur den Spezialfall über den reellen Zahlen verwenden. In der nachstehenden Folgerung spezialisieren wir dies, indem wir den Trennungssatz für den Fall  $X = \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \omega)$  notieren.

Mit dem Darstellungssatz von Riesz-Fischer, Satz 2.5.2, und der Reflexivität von Hilberträumen folgern wir:

**Folgerung 2.5.1**

Sei  $X = \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \omega)$  und  $V \subset X$  konvex und abgeschlossen, und das Element  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  gehöre nicht zu  $V$ . Dann existiert ein  $q^* \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \omega)$ , so dass mit zwei Konstanten  $\gamma_1, \gamma_2$  für beliebige Tupel  $(x, y) \in V$  die Ungleichung

$$\langle q^*, (\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle q^*, (x, y) \rangle$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Gemäß Kapitel 2.4 ist  $X$  ein normierter Raum. Wir wenden den Trennungssatz von Hahn-Banach an. Es existiert ein  $q^* \in X^*$ , so dass mit einem  $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Re} q^*((\tilde{x}, \tilde{y})) < \operatorname{Re} q^*((\tilde{x}, \tilde{y})) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} q^*((x, y)) \quad \forall (x, y) \in V$$

richtig ist. Aufgrund der Reflexivität des Hilbertraumes gilt  $q^* \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \omega)$ . Wegen  $\varepsilon > 0$  finden wir zwei Konstanten  $\gamma_1 < \gamma_2$ , so dass

$$\operatorname{Re} q^*((\tilde{x}, \tilde{y})) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} q^*((x, y)) \quad \forall (x, y) \in V$$

richtig ist. Mit dem Darstellungssatz von Riesz-Fischer, Satz 2.5.2, erhalten wir

$$\langle q^*, (\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle q^*, (x, y) \rangle$$

für alle Tupel  $(x, y) \in V$ . Die auftretenden Funktionale sind hierbei reellwertig.  $\square$

Fortfahrend zitieren wir den äußerst nützlichen Satz von Lebesgue über die majorisierende Konvergenz.

**Satz 2.5.4** ([21, Seite 144, Satz 5.2])

Die Funktionen  $x, x_n: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  seien messbar und es gelte  $\omega$ -f.ü.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Ferner gebe es eine integrierbare Majorante  $m \in L_1(\Omega, \omega)$ , so dass  $|x_n| \leq m$   $\omega$ -f.ü. für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dann sind  $x$  und alle  $x_n$  integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} x_n d\omega = \int_{\Omega} x d\omega$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |x_n - x| d\omega = 0.$$

**Bemerkung 2.5.5**

Man beachte, dass die wesentliche Aussage von Satz 2.5.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |x_n - x| d\omega = 0$$

ist. Der zweite Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} x_n d\omega = \int_{\Omega} x d\omega$$

ist eine unmittelbare Folgerung, welche wir unter Anwendung der Ungleichung Lemma 2.5.2 schließen können.

Als nächstes stellen wir den Zusammenhang zwischen der lokal gleichmäßigen Konvergenz und der punktweisen Konvergenz her. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

**Lemma 2.5.7**

Die auf jedem Kompaktum gleichmäßige Konvergenz der Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit Folgengliedern  $x_k \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  gegen die Grenzfunktion  $x_0 \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  impliziert die punktweise Konvergenz  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$  in  $C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ .

Bei dem Beweis des Lemmas bedienen wir uns den Ideen aus [41], welche wir hier der Vollständigkeit halber noch einmal aufarbeiten werden.

*Beweis.* Wir wählen nacheinander die kompakten Mengen  $K_i = [0, i]$ ,  $i \in \mathbb{N}$  und zugehörige Teilfolgen  $\{x_{k_i^1}\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass die Folgen  $\{x_{k_i^1}\}_{i \in \mathbb{N}}$  auf den Mengen  $K_i$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $x_0$  konvergieren. Mit einem Diagonalverfahren konstruieren wir jetzt eine weitere Teilfolge. Aus  $\{x_{k_i^1}\}_{i \in \mathbb{N}}$  wählen wir das erste Element  $x_{k_{l_1}^1}$  aus, welches

$$\|x_{k_{l_1}^1} - x_0\|_{C^0(K_1, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}$$

erfüllt. Aus  $\{x_{k_i^1}\}_{i \in \mathbb{N}}$  wählen wir das erste Element  $x_{k_{l_2}^2}$  mit  $l_1 < l_2$  und

$$\|x_{k_{l_2}^2} - x_0\|_{C^0(K_2, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^2}.$$

Diese Methode fortführend erhalten wir Elemente  $x_{k_{l_j}^j}$  mit  $l_{j-1} < l_j$  und

$$\|x_{k_{l_j}^j} - x_0\|_{C^0(K_j, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^j}.$$

Wir zeigen jetzt, dass die so konstruierte Diagonalfolge  $\{x_{k_{l_j}^j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  für  $t \geq 0$  punktweise gegen  $x_0$  konvergiert. Hierzu wählen wir  $t \geq 0$  beliebig, dann existiert ein  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j = j(t)$ , so dass  $t \in K_j$  richtig ist. Für jedes beliebig kleine  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $l_0 = l_0(j(t), \varepsilon)$ , so dass

$$|x_{l_j}^j(t) - x_0(t)| \leq \max_{t \in K_j} |x_{l_j}^j(t) - x_0(t)| = \|x_{k_{l_j}^j} - x_0\|_{C^0(K_j, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^j} < \varepsilon$$

für alle  $l_j \geq l_0$  erfüllt ist. Die konstruierte Teilfolge konvergiert punktweise. □

Auf dem vorherigen Resultat aufbauend formulieren wir das folgende Lemma.

**Lemma 2.5.8**

*Sei  $\omega(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$ . Die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiere schwach gegen  $x_0$  im Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \omega)$ . Dann existiert eine Teilfolge  $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von stetigen Repräsentanten  $x_{k_j}$ , die sich auf die gesamte positive reelle Halbachse stetig fortsetzen lassen. Weiter gilt punktweise für jedes  $t \geq 0$  die Grenzrelation*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}(t) = x_0(t).$$

*Ferner ist diese Konvergenzeigenschaft für jedes feste  $T > 0$  auf dem Kompaktum  $[0, T]$  sogar gleichmäßig.*

*Beweis.* Auf jedem beschränkten Intervall der Gestalt  $I = (a, b)$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  gilt aufgrund der Stetigkeit von  $\omega$  offenbar  $W_2^{n,1}(I, \omega) = W_2^{n,1}(I)$ . Mit Folgerung 2.3.3 folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  auf dem Kompaktum  $\bar{I}$ . Entsprechend ist die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  lokal auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergent. Anwendung von Lemma 2.5.7 liefert schließlich eine punktweise konvergente Teilfolge. Insbesondere erhalten wir gemäß Folgerung 2.3.1 für jedes Folgenglied einen stetigen Repräsentanten. □

## 2.6 Differenzialgleichungen

### 2.6.1 Motivation aus Sicht der optimalen Steuerung

Im Bereich der optimalen Steuerung mit gewöhnlichen Differenzialgleichungsnebenbedingungen stoßen wir stets auf ein Anfangswertproblem der Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) && \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Hierbei wird über eine physikalische, oder auch ökonomische Gesetzmäßigkeit mittels der Funktion  $\varphi$  das zeitliche Änderungsverhalten eines Zustandes  $x$  modelliert. Im Unterschied zur klassischen Theorie der Differenzialgleichungen unterliegt die Funktion  $\varphi$  der weiteren Einflussgröße  $u$ , einer sogenannten Steuerung. Es handelt sich entsprechend um ein parameterabhängiges Anfangswertproblem, wobei wir die Parameterfunktion  $u$  als fest und gegeben annehmen können.

Die Steuerung  $u$  wird hierbei als eine messbare Funktion vorausgesetzt. Entsprechend ergibt sich, abweichend von der klassischen Theorie der Differenzialgleichungen, eine rechte Seite  $\varphi(\cdot, \xi, u(\cdot))$ , die nicht mehr notwendig stetig sein muss. Wir erhalten ein Anfangswertproblem mit unstetiger rechter Seite. In einer solchen Aufgabe lässt sich die Gleichung

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

auf dem betrachteten Gebiet nur noch fast überall erfüllen.

Zur Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien interessiert man sich für das Verhalten des Zustandes  $x$  unter einer geeigneten Variation  $u_\lambda$  der Steuerung  $u$ . Es gilt das von dem Variationsparameter  $\lambda \in \Lambda$  abhängige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t, \lambda) &= \varphi(t, x(t, \lambda), u(t, \lambda)) \\ x(0, \lambda) &= x_0\end{aligned}$$

zu studieren, wobei, wie zuvor erwähnt, die rechte Seite der Differenzialgleichung unstetig sein kann. Der Parameterbereich  $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ ,  $l \geq 1$  kann jedoch ohne Einschränkung als kompakt angenommen werden.

Zum Studium dieser Aufgabenstellung gehen wir in den folgenden Schritten vor. Zunächst müssen wir die Frage eines geeigneten Lösungsraumes beantworten. Anschließend formulieren wir eine Existenztheorie. Wir schließen dieses Kapitel mit der Beantwortung gewisser Regularitätsfragen der Lösung ab.

## 2.6.2 Differenzialgleichungen mit unstetiger rechter Seite

Aufbauend auf *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, [6], von Arscott und Filippov führen wir unserer Motivation des vorangegangenen Kapitels folgend, Differenzialgleichungen mit unstetigen rechten Seiten ein.

Klassisch wurden Differenzialgleichungen im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen eingeführt und betrachtet. Entsprechend bezeichnet man eine Funktion  $x$  als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{in } (t_0, t_1) \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}$$

falls sie eine stetige Ableitung besitzt, welche der Gleichung  $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t))$  für alle  $t \in (t_0, t_1)$  genügt und an der Stelle  $t_0$  den Wert  $x_0$  annimmt. Studiert man jetzt Aufgaben, bei denen in der rechten Seite  $\varphi$  bezüglich der Zeit  $t$  Unstetigkeiten auftreten können, so ist diese Definition nicht länger gültig.

**Beispiel 2.6.1** ([6, Seite 1, Beispiel 1])

Sei  $\dot{x}(t) = \text{sign } t$ . Im Fall  $t < 0$  erhalten wir mit  $\dot{x} = -1$  die Lösung  $x(t) = -t + c_1$ . Für  $t > 0$  muss gemäß  $\dot{x} = 1$  die Lösung  $x(t) = t + c_2$  lauten. Aus der Kontinuitätsanforderung

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0-0} (-t + c_1) = \lim_{t \rightarrow 0+0} (t + c_2)$$

folgt  $c_1 = c_2$  und wir erhalten mit  $x(t) = |t| + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung. Widersprüchlich zum klassischen Lösungsbegriff existiert die Ableitung  $\dot{x}$  nicht im Punkt  $t = 0$ .

Es muss ein Lösungsbegriff definiert werden, welcher ohne die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit der Lösung auskommt, der im Falle der Existenz einer stetigen Ableitung jedoch mit der klassischen Theorie zusammenfällt. Eine solche Definition lässt sich wie folgt abbilden.

**Definition 2.6.1** ([6, Seite 3ff, §1])

Die Funktion  $\varphi: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , mit Argumenten  $t, \xi$ , sei in  $t$  unstetig und bezüglich  $\xi$  stetig. Die messbare Funktion  $x$  heißt für  $t_0 \in I$  genau dann Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. in } I \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

wenn

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d\tau$$

gilt.

**Bemerkung 2.6.1**

Jede klassische Lösung eines Anfangswertproblems mit stetiger rechter Seite genügt aufgrund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ([4, Seite 33, Theorem 4.13]) auch Definition 2.6.1.

Aufbauend auf dieser Definition führen wir eine Existenz- und Eindeigkeitstheorie für die Lösung von Anfangswertaufgaben unstetiger rechter Seiten ein.

Zum weiteren Studium benötigen wir die sogenannten *Carathéodory Bedingungen*.

**Definition 2.6.2** ([6, Seite 3])

Die Funktion  $\varphi: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , mit Argumenten  $t, \xi$ , erfüllt die Carathéodory Bedingungen im Gebiet  $D = D_t \times D_\xi \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ , falls:

1. Die Funktion  $\varphi(t, \xi)$  sei für fast alle  $t \in D_t$  stetig bezüglich  $\xi$ .
2. Die Funktion  $\varphi(t, \xi)$  sei für jedes  $\xi \in D_\xi$  messbar in  $t$ .
3. Es gelte für alle  $(t, \xi) \in D$  die Eigenschaft  $|\varphi(t, \xi)| \leq m(t)$  mit einer Funktion  $m \in L_{1,loc}(D_t)$ .

Wir zeigen den Zusammenhang der absolut stetigen Funktionen zu den Lösungen der hier behandelten Anfangswertaufgabe.

**Folgerung 2.6.1**

Erfülle die Funktion  $\varphi$  die Carathéodory Bedingungen, Definition 2.6.2, und sei die Funktion  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. in } I \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

gemäß Definition 2.6.1, so ist  $x$  absolut stetig auf  $I$ .

*Beweis.* Gemäß Definition 2.6.1 ist die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d\tau$$

erfüllt. Die (lokale) Integrierbarkeit von  $\varphi(\cdot, x(\cdot))$  impliziert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 2.2.1, die absolute Stetigkeit von  $x$ .  $\square$

**Folgerung 2.6.2**

Erfülle die Funktion  $\varphi$  die erste und zweite Carathéodory Bedingung, Definition 2.6.2. Weiterhin erfülle  $x \in AC(I)$ ,  $I = [t_0, t_1]$  mit  $x(t_0) = x_0$  fast überall auf  $I$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t)),$$

so ist  $x$  Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. in } I \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

im Sinn von Definition 2.6.1.

*Beweis.* Aufgrund der absoluten Stetigkeit von  $x$  gilt für alle  $t \leq t_1$  nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 2.2.1, die Integralgleichung

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau.$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt insbesondere

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d\tau$$

und  $x$  ist Lösung gemäß Definition 2.6.1.  $\square$

Der Raum der absolut stetigen Funktionen ist demnach ein adäquater Raum zur Behandlung von Differenzialgleichungen mit unstetiger rechter Seite auf beschränkten Intervallen.

**Bemerkung 2.6.2**

Bei Betrachtung eines unbeschränkten Intervalls  $I$  ist der Lösungsbegriff entsprechend zu lokalisieren. Wir nennen  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Anfangswertproblems, falls für jedes Kompaktum  $[a, b] \subset I$  gilt, dass  $x|_{[a, b]}$  eine Lösung gemäß Definition 2.6.1 ist. Ganz natürlich ergibt sich mit Folgerung 2.6.1 und Folgerung 2.6.2 der Raum der lokal absolut stetigen Funktionen  $AC_{loc}$  als geeigneter Lösungsraum.

Die Carathéodory Bedingungen, Definition 2.6.2, sind entsprechend auch nur lokal auf jedem Kompaktum zu fordern.

Wir verbleiben zunächst bei der Voraussetzung  $I \subset \mathbb{R}$  beschränkt und zitieren als wesentliches Resultat den Existenzsatz aus *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, [6].

**Satz 2.6.1 ([6, Seite 4, Theorem 1])**

Die Funktion  $\varphi(t, \xi)$  erfülle auf dem Quader

$$Q(t_0, x_0) := \left\{ (t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, |\xi - x_0| \leq b \right\}$$

der Längen  $a, b < \infty$  die Carathéodory Bedingungen, Definition 2.6.2. Dann existiert ein  $d > 0$  mit

$$0 < d \leq a, \quad \psi(t_0 + d) \leq b, \quad \psi(t) := \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau,$$

so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

auf dem abgeschlossenen Intervall  $[t_0, t_0 + d]$  eine Lösung besitzt.

Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle. Viel wichtiger scheint uns die Fortsetzung der Lösung von dem Intervall  $[t_0, t_0 + d]$  auf den gesamten Kegel  $t \geq t_0$ . Dieser Fortsetzungsprozess ist Gegenstand des nachstehenden Korollars.

**Folgerung 2.6.3**

Sei  $\varphi(t, \xi): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Unter den Voraussetzungen

1.  $\varphi(t, \xi)$  sei für fast alle  $t \in [0, \infty)$  stetig bezüglich  $\xi$ ,
2.  $\varphi(t, \xi)$  sei für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  messbar bezüglich  $t$ ,
3. es gelte  $|\varphi(t, \xi)| \leq c(t)(1 + |\xi|)$  mit  $c \in L_{1,loc}((0, \infty))$ ,

besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. in } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

eine Lösung im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen.

**Bemerkung 2.6.3**

Die Forderung  $|\varphi(t, \xi)| \leq c(t)(1 + |\xi|)$  ist, wie wir sehen werden, eine im Gebiet der optimalen Steuerung über einem unendlichen Zeithorizont häufig anzutreffende Bedingung (siehe beispielsweise [23]).

*Beweis von Folgerung 2.6.3.* Sei  $0 \leq t_i < a < \infty$ ,  $0 < b < \infty$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  und

$$Q_i := Q(t_i, x_i) := \left\{ (t, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid t_i \leq t \leq t_i + a, |\xi - x_i| \leq b \right\}.$$

Wegen

$$|\varphi(t, \xi)| \leq c(t)(1 + |\xi|) \leq c(t)(1 + b + |x_i|) =: m_i(t) \in L_{1,\text{loc}}((t_i, a))$$

erfüllt die Funktion  $\varphi$  auf jedem Quader  $Q_i$  die *Carathéodory Bedingungen*, Definition 2.6.2. Wir wenden Satz 2.6.1 in  $Q_0$  mit  $t_0 = 0$  an. Es existiert ein  $d_0 > 0$ , so dass das Anfangswertproblem eine Lösung  $x_0$  in  $AC([t_0, t_0 + d_0])$  besitzt. Wir setzen  $t_1 := t_0 + d_0$ ,  $x_1 := x_0(t_1)$  und studieren das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. in } (t_1, \infty) \\ x(t_1) &= x_1. \end{aligned}$$

Anwendung von Satz 2.6.1 in  $Q_1$  liefert jetzt eine Lösung  $x_1$  in  $AC([t_1, t_1 + d_1])$  für ein  $d_1 > 0$ . Wir setzen  $t_2 := t_1 + d_1$ ,  $x_2 := x_1(t_2)$  und studieren das Anfangswertproblem auf dem verbleibenden Intervall  $(t_2, \infty)$  mit Anfangswert  $x(t_2) = x_2$ . Diesem Fortsetzungsargument folgend, erhalten wir eine lokal absolut stetige Lösung  $x$ , welche auf dem gesamten Intervall  $[0, \infty)$  wohl definiert ist.  $\square$

In Verschärfung zu Satz 2.6.1 zitieren wir ein Eindeutigkeitsresultat aus *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, [6].

**Satz 2.6.2 ([6, Seite 5, Theorem 2])**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  mit  $(t_0, x_0) \in D$  und eine Funktion  $l \in L_{1,\text{loc}}(D)$  gegeben, so dass für alle  $(t, \xi_1), (t, \xi_2) \in D$

$$\langle \varphi(t, \xi_1) - \varphi(t, \xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle \leq l(t)|\xi_1 - \xi_2|^2 \tag{2.6}$$

gilt. Dann gibt es maximal eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

in  $D' := \{(t, \xi) \in D \mid t \geq t_0\}$ . Fordert man anstelle von Gleichung (2.6)

$$|\varphi(t, \xi_1) - \varphi(t, \xi_2)| \leq l(t)|\xi_1 - \xi_2|,$$

so gilt die Aussage sogar auf dem gesamten Gebiet  $D$ .

Zusammen mit Satz 2.6.1 garantiert uns Satz 2.6.2 die Existenz einer eindeutigen Lösung. Mit den Ideen von Folgerung 2.6.3 lässt sich diese eindeutig auf dem gesamten Zeithorizont fortsetzen. Wir fassen dieses Ergebnis in der nachstehenden Folgerung zusammen.



**Folgerung 2.6.4**

Sei  $\varphi(t, \xi): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Unter den Voraussetzungen

1.  $\varphi(t, \xi)$  sei für fast alle  $t \in [0, \infty)$  stetig bezüglich  $\xi$ ,
2.  $\varphi(t, \xi)$  sei für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  messbar bezüglich  $t$ ,
3. es gelte  $|\varphi(t, \xi)| \leq c(t)(1 + |\xi|)$  mit  $c \in L_{1,loc}((0, \infty))$ ,
4. für alle  $(t, \xi_1), (t, \xi_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  sei mit  $l \in L_{1,loc}(0, \infty)$

$$\langle \varphi(t, \xi_1) - \varphi(t, \xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle \leq l(t)|\xi_1 - \xi_2|^2$$

erfüllt,

besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \quad \text{f.ü. in } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen.

**Bemerkung 2.6.4**

Folgerung 2.6.4 behält seine Gültigkeit bei Austausch der Voraussetzung

$$\langle \varphi(t, \xi_1) - \varphi(t, \xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle \leq l(t)|\xi_1 - \xi_2|^2$$

gegen die Lipschitz-Bedingung

$$|\varphi(t, \xi_1) - \varphi(t, \xi_2)| \leq l(t)|\xi_1 - \xi_2|.$$

Im folgenden Kapitel erweitern wir die Überlegungen von Folgerung 2.6.4 und stellen fest, dass die Lösung des Anfangswertproblems auch in einem geeignet gewichteten Sobolev-Raum liegt. Dies wird es uns später erlauben, im Kontext der Theorie der optimalen Steuerung, die Differenzialgleichungen im Sobolev-Raum zu diskutieren.

### 2.6.3 Differenzialgleichungen in gewichteten Sobolev-Räumen

Wir betrachten zu gegebenem  $\varphi: (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$|\varphi(t, \xi)|_2 \leq c(1 + |\xi|_2) \quad \forall (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}x(\cdot) &= \varphi(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit der schwachen Ableitung  $\mathcal{D}x$  im gewichteten Raum  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$ ,  $\omega(t) = e^{-\rho t}$  mit  $\rho > pc$  und  $p > 1$ . Aufgrund von Folgerung 2.4.1 gilt für  $p > 1$  die Inklusion  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega) \subseteq W_{1,loc}^{n,1}((0, \infty))$ . Gemäß Satz 2.4.7 existiert im Raum  $W_{1,loc}^{n,1}((0, \infty))$

zu jedem Element  $x$  ein lokal absolut stetiger Repräsentant  $\tilde{x}$  mit  $x = \tilde{x}$  und  $\mathcal{D}x = \tilde{x}'$ , fast überall auf  $(0, \infty)$ . Wir identifizieren  $x$  mit dem Repräsentanten  $\tilde{x}$  und erhalten mit  $\mathcal{D}x = x'$ , fast überall auf  $(0, \infty)$ , und der Anfangswertbedingung  $x(0) = x_0$  ein wohl definiertes, sinnvoll gestelltes Anfangswertproblem. Die Auswertung der Anfangswertbedingung lässt sich hierbei durch Folgerung 2.3.1 rechtfertigen.

Wir zeigen im Folgenden die Äquivalenz dieses schwachen Anfangswertproblems mit der fast überall geltenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} x'(t) &= \varphi(t, x(t)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sei  $x \in W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$  Lösung der Aufgabe (2.7), das heißt,  $x$  genügt insbesondere für alle Testfunktionen  $\Phi \in C_c^\infty((0, \infty), \mathbb{R}^n)$  der Variationsgleichung

$$\int_0^\infty x(t) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) dt + \int_0^\infty \varphi(t, x(t)) \Phi(t) dt = 0. \tag{2.9}$$

Die Lösung  $x$  ist lokal Element des Raumes  $W_1^{n,1}((0, \infty))$ , so dass gemäß Satz 2.4.7 ein lokal absolut stetiger Repräsentant  $\tilde{x}$  existiert, der fast überall auf  $(0, \infty)$  den Bedingungen  $x = \tilde{x}$  und  $\mathcal{D}x = x'$  genügt. Wir identifizieren  $x$  mit diesem Repräsentanten.

Mit der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(t) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) dt &= [x(t) \Phi(t)]_0^\infty - \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) \Phi(t) dt \\ &= - \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) \Phi(t) dt \end{aligned}$$

schreiben wir die Variationsungleichung (2.9) in der Form

$$\int_0^\infty [x'(t) - \varphi(t, x(t))] \Phi(t) dt = 0 \quad \forall \Phi \in C_c^\infty((0, \infty), \mathbb{R}^n).$$

Aus letzterer Gleichung folgt für fast alle  $t \in (0, \infty)$  die Identität

$$x'(t) = \varphi(t, x(t)).$$

Die Lösung  $x$  von (2.7) ist folglich auch eine Lösung des fast überall formulierten Anfangswertproblems (2.8).

Sei nun umgekehrt  $x$  eine lokal absolut stetige Lösung von Aufgabe (2.8), das heißt gelte für fast alle  $t \in (0, \infty)$  die Identität  $x'(t) = \varphi(t, x(t))$ . Multiplikation dieser Identität mit einer beliebigen Testfunktion  $\Phi \in C_c^\infty((0, \infty), \mathbb{R}^n)$  sowie Integration über die positive reelle Halbachse führt uns zu

$$\int_0^\infty [x'(t) - \varphi(t, x(t))] \Phi(t) dt = 0.$$

Nach einmaliger partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^{\infty} x'(t)\Phi(t)dt = [x(t)\Phi(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)dt,$$

so dass wir

$$\int_0^{\infty} x(t)\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)dt + \int_0^{\infty} \varphi(t, x(t))\Phi(t)dt = 0$$

schließen können. Letztere Variationsgleichung lässt sich gerade mit der Definition der schwachen Ableitung identifizieren.  $\varphi(\cdot, x(\cdot))$  ist die schwache Ableitung von  $x$ . Es gilt  $\mathcal{D}x(\cdot) = \varphi(\cdot, x(\cdot))$ . Aufgrund der Messbarkeit der Funktionen  $x, x'$  folgt insbesondere  $x \in W_{1,\text{loc}}^{n,1}((0, \infty))$ . Die Inklusion  $x \in W_{1,p}^{n,1}((0, \infty), \omega)$  ergibt sich unter Beachtung der Wachstumsbeschränkung von  $\varphi$  unmittelbar aus der im Folgenden formulierten Folgerung.

Wir haben die Äquivalenz der beiden Anfangswertprobleme, genauer gesagt der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}x(\cdot) &= \varphi(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{auf } (0, \infty), \\ x'(\cdot) &= \varphi(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \end{aligned}$$

verifiziert.

### Bemerkung 2.6.5

*Die vorherigen Überlegungen erlauben uns die Identifikation der beiden Anfangswertprobleme. So können wir zur Diskussion der Aufgabe zum einen die „schönen“ Eigenschaften des gewichteten Sobolev-Raumes (im Spezialfall  $p = 2$  – Hilbertraum) verwenden, uns zum anderen auf die bekannte Theorie der Differenzialgleichungen mit unstetigen rechten Seiten (Carathéodory Differenzialgleichungen) stützen. Dies erlaubt die komfortable Behandlung der Steuerungsaufgabe im Hilbertraum bei gleichzeitiger Ausnutzung punktwieser Argumente für die zugrunde liegende Differenzialgleichung.*

Wir fassen die bisherigen Ideen in dem nachstehenden Lemma zusammen.

### Folgerung 2.6.5

*Seien die Voraussetzungen von Folgerung 2.6.4 mit der konstanten Funktion  $c(t) = c$ ,  $c > 0$  erfüllt und*

$$\omega(t) = e^{-\rho t}, \quad \rho > pc.$$

*Die nach Folgerung 2.6.4 eindeutige Lösung ist Element des Raumes  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$ . Jede weitere Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Raum  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$  fällt mit dieser zusammen.*

*Beweis.* Wir bezeichnen die nach Folgerung 2.6.4 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems mit  $x$ . Gemäß Definition 2.6.1 erfüllt die absolut stetige Lösung  $x$  die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau.$$

Übergang zur Norm liefert die Integralungleichung

$$|x(t)|_2 \leq |x_0|_2 + \int_0^t |\varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))|_2 d\tau.$$

Hierbei haben wir die Ungleichung Lemma 2.5.2 verwendet. Aus den Carathéodory Bedingungen folgt im Spezialfall  $c(t) = c > 0$

$$|x(t)|_2 \leq |x_0|_2 + \int_0^t c(1 + |x(\tau)|_2) d\tau.$$

Wir wenden die Bellmann-Gronwall Ungleichung, Lemma 2.5.4 an und erhalten

$$|x(t)|_2 \leq (|x_0|_2 + ct)e^{ct}.$$

Es folgt  $x \in L_p^n((0, \infty), \omega)$ . Für die fast überall existierende klassische Ableitung schätzen wir

$$|\dot{x}(t)|_2 = |\varphi(t, x(t), u(t))|_2 \leq c(1 + |x(t)|_2) \leq c(1 + (|x_0|_2 + ct)e^{ct})$$

ab. Entsprechend wird auch  $\dot{x}$  zu einem Element des Raumes  $L_p^n((0, \infty), \omega)$ . Man beachte hierbei die Messbarkeit von  $\dot{x}$  aufgrund der Carathéodory-Bedingungen. Gemäß Satz 2.4.8 fallen die schwache und klassische Ableitung zusammen und wir können  $x$  als Element des Raumes  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$  identifizieren. Gäbe es eine weitere Lösung im Raum  $W_p^{n,1}((0, \infty), \omega)$ , so würde diese gemäß Folgerung 2.4.3 einen lokal absolut stetigen Repräsentanten besitzen. Wir hätten einen Widerspruch zur eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen.  $\square$

# 3 Steuerungsfragen über einem unendlichen Zeithorizont

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Steuerungsfragen über einem unendlichen Zeithorizont. Neben dieser Aufgabenklasse gibt es noch Steuerungsfragen mit einem endlichen Zeit- oder Planungshorizont. Letztere Klasse werden wir in dieser Arbeit nicht näher studieren. Ausführliche Untersuchungen zur Lösungstheorie sowie Optimalitätskriterien finden sich in der einschlägigen Literatur, wie [22, 23, 26] und [30].

Zur Einführung der Klasse der Steuerungsfragen über einem unendlichen Zeithorizont gehen wir wie folgt vor. Zunächst motivieren wir die Nützlichkeit oder auch Notwendigkeit der Untersuchung von Aufgaben mit einem unendlichen Zeithorizont. Direkt im Anschluss diskutieren wir, welche Probleme sich aus dem unbeschränkten Planungszeitraum ergeben. Wir studieren auftretende Phänomene, welche sich ausschließlich über dem unendlichen Zeithorizont ergeben.

Über die Einführung wesentlicher Begriffe, wie Zulässigkeit und Optimalität, gelangen wir nach einer kurzen Diskussion über den betrachteten Suchraum, zu einer Übersicht bereits vorhandener Ergebnisse. Bei dieser Zusammenfassung bestehender Resultate werden wir uns insbesondere auf die Theorie notwendiger Optimalitätskriterien fokussieren, da diese den Kern der vorliegenden Arbeit bilden werden.

## 3.1 Motivation

Der Ursprung der optimalen Steuerung findet sich in der Variationsrechnung, welche ihren Anfang bereits in dem isoperimetrischen Problem im alten Griechenland findet. Einen wesentlichen Fortschritt erfuhr das Gebiet der Variationsrechnung im Wirkungszeitraum von Bernoulli, Euler und Lagrange. Hamilton, Jacobi und Weierstraß entwickelten im 19. Jahrhundert die Theorie weiter.

Der Übergang von der Variationsrechnung zu den Aufgaben optimaler Steuerung wurde von den Amerikanern Valentine, McShane und Hestenes bewältigt, indem erstmalig Ungleichungsbeschränkungen in ein Variationsproblem einbezogen wurden.

Der Begriff der optimalen Steuerung wurde erstmalig in den 1950er-Jahren in der Schule um L.S. Pontryagin explizit genannt. Es konnten jetzt mit dem Pontryaginschen Maximumprinzip notwendige Bedingungen für eine Teilklasse von Aufgaben optimaler Steuerung bewiesen werden. Pontryagin gilt deshalb als Begründer der modernen Steuerungstheorie. Parallel dazu prägte R. Bellmann die dynamische Programmierung, mit der es möglich wurde, weitere Problemklassen zu erschließen.

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit Steuerungsaufgaben auf einem unendlichen Zeithorizont. Diese Klasse der Aufgaben entsteht auf verschiedenen Wegen. Zum einen ergibt sich der unendliche Zeithorizont in ökonomischen Modellen als die Idealisierung eines beliebig groß werdenden Zeithorizontes (siehe unter anderem [22, 26]). Zum anderen kann der unendliche Zeithorizont Bestandteil des Modells an sich sein. So zum Beispiel im quantenmechanischen Oszillator, welchen wir im Vorwort (Kapitel 1.1) präsentiert haben. Aufgaben mit einem unendlichen Zeithorizont können jedoch auch aus Aufgaben mit einem endlichen Horizont durch eine geeignete Transformation konstruiert werden. So wurde beispielsweise in [55] das Brachistochrone-Problem bewusst auf einem unendlichen Zeithorizont transformiert, um eine Singularität in der Aufgabenstellung zu umgehen. All diesen verschiedenen Zugängen ist jedoch eines gemeinsam. Sie erfordern das Studium von Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont. So ist es nicht verwunderlich, dass sich der Bereich der Steuerungstheorie über einem unendlichen Zeithorizont mittlerweile zu einem eigenständigen und bedeutenden Themengebiet der Mathematik entwickelt hat und durch eine Vielzahl von Forschungsgruppen und Wissenschaftlern, wie Aseev und Veliov, Carlson und Haurie, Lykina, Pickenhain, Tauchnitz und andere vertreten wird.

## 3.2 Die Aufgabe $(P_\infty)$

Im Folgenden betrachten wir die Grundaufgabe der optimalen Steuerung über einem unendlichen Zeithorizont. Wir bezeichnen diese mit  $(P_\infty)$ . Es gilt das Funktional

$$J_\infty(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} r(t, x(t), u(t)) \hat{\mu}(t) dt$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$  unter den fast überall auf dem betrachteten Zeithorizont  $[t_0, \infty)$  geltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \\ u(t) &\in \mathcal{U} \end{aligned}$$

zu minimieren. Wir bezeichnen  $\mathbb{X}$  als den Zustandsraum und  $\mathbb{U}$  als den Raum der Steuerungen. Wie wir später sehen werden, entscheidet die Wahl dieser Räume über die Auswahl möglicher Beweismethodiken zur Herleitung von Existenzsätzen sowie notwendigen Optimalitätskriterien. Das im Zielfunktional auftretende Integral kann hierbei je nach Art des Steuerungsproblems entweder als uneigentliches Integral, oder im Sinn des (eigentlichen) Lebesgue-Integrals verstanden werden. Wir erläutern dies in den folgenden Kapiteln detaillierter.

Im Folgenden gehen wir auf die einzelnen Bestandteile dieser abstrakten Optimierungsaufgabe genauer ein. Wir betrachten zunächst das fast überall auf der positiven reellen Halbachse gestellte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

welches wir auch als Systemdynamik, oder kurz Dynamik, bezeichnen. Sie beschreibt die erlaubte Zustandsänderung in Abhängigkeit der Steuerung  $u$  und des aktuellen Systemzustandes  $x$ . Die Steuerung  $u$  unterliege bei diesem dynamischen Prozess einer sogenannten Steuerbeschränkung. Wir formulieren diese in der Form  $u(t) \in \mathcal{U}$  für fast alle  $t \in (0, \infty)$ .

Ist ein Tupel  $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$  fixiert, so lässt sich dessen Güte im Sinn der Optimierungsaufgabe mittels des Zielfunktional  $J_\infty(x, u)$ , auch Performance-Index genannt, messen. Hierbei soll zunächst der Fall  $J_\infty(x, u) = \infty$  nicht ausgeschlossen sein. Folglich muss über einen geeigneten Optimalitätsbegriff nachgedacht werden, der es erlaubt, die möglicherweise unendlich groß werdenden Zielfunktionalwerte untereinander zu vergleichen, oder der Fall  $J_\infty(x, u) = \infty$  muss ausgeschlossen werden. Wir werden dies im Kapitel 3.6.2 mit der Diskussion bekannter Optimalitätsbegriffe genauer thematisieren.

Ziel der optimalen Steuerung ist es jetzt, in dem Suchraum  $\mathbb{X} \times \mathbb{U}$  ein Tupel  $(x_*, u_*)$  mit minimalem Performance-Index  $J_\infty(x_*, u_*)$  zu finden, welches den Nebenbedingungen genügt. Das heißt, jedes andere Tupel  $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$ , welches die Nebenbedingungen ebenfalls erfüllt, liefere einen größeren Wert des Performance-Indexes.<sup>1</sup> Genauer formalisieren wir diese naive Beschreibung in Kapitel 3.6 mittels der Begriffe *Zulässigkeit* und *Optimalität*.

### 3.3 Probleme und Phänomene auf einem unendlichen Zeithorizont

Nachdem wir mit dem vorangegangenen Kapitel den unendlichen Zeithorizont motiviert haben, möchten wir jetzt im Anschluss diskutieren, welche Phänomene sich aus diesem, unendlichen Zeithorizont ergeben. Bevor wir mit der eigentlichen Diskussion beginnen, merken wir jedoch an, dass hier mit „Weighted functional spaces approach in infinite horizon optimal control problems: A systematic analysis of hidden opportunities and advantages“, [43], bereits eine umfassende Ausarbeitung zur Thematik vorliegt. Wir werden unter Verwendung dieser, hier jedoch der Vollständigkeit halber, noch einmal die wesentlichen Probleme und Phänomene herausstellen.

Wir beginnen mit der Betrachtung der Abhängigkeit der Lösung der Steuerungsaufgabe vom gewählten Integraltyp im Zielfunktional. Obgleich es im Bereich der mathematischen Analysis viele verschiedene Integralbegriffe gibt, haben sich im Bereich der Steuerungstheorie insbesondere der Begriff des Riemann- und des Lebesgue-Integrals durchgesetzt. Zur Verdeutlichung der Unterschiede dieser beiden Integralbegriffe schauen wir uns zunächst folgendes Beispiel an.

**Beispiel 3.3.1** ([21, Seite 152, Beispiel 6.4])

Wir betrachten das klassische Beispiel  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge  $f(x) = x^{-1} \sin(x)$ .

---

<sup>1</sup>In der Literatur, insbesondere in der Ökonomie, treffen wir oft auch auf Maximierungsaufgaben. Hier ist entsprechend ein Tupel  $(x_*, u_*)$  mit maximalem Performance-Index zu finden.

Unter dem Namen Integralsinus ist der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^{-1} \sin(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad (3.1)$$

weitgehend bekannt. Das auftretende Integral sei hierbei im Sinn von Riemann zu verstehen. Bei (3.1) handelt es sich entsprechend um das uneigentliche Riemannsche Integral  $\int_0^\infty x^{-1} \sin(x) dx$ . Aufgrund von

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} |x^{-1} \sin(x) dx| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

ist  $f$  jedoch nicht auf  $(0, \infty)$  Lebesgue-integrierbar.

Beispiel 3.3.1 verdeutlicht bereits die Bedeutsamkeit des gewählten Integralbegriffs. Beim Studium einer fiktiven Steuerungsaufgabe mit dem im Performance-Index  $J_\infty$  auftretenden Integranden  $f$ , aus Beispiel 3.3.1, würde bei Verwendung des Riemann-Integrals eine wohldefinierte Aufgabe vorliegen. Betrachtet man jedoch selbige Aufgabe und legt das Lebesgue-Integral als Integrationstheorie zugrunde, so wäre die Aufgabe nicht einmal wohl definiert und eine weitere Diskussion entfällt. Mehr sogar noch wurde in [40] gezeigt, dass der verwendete Integraltyp eine wesentliche Auswirkung auf die Existenz einer Lösung haben kann. Die Arbeit [44] erweitert diese Überlegungen dahingehend, dass gezeigt werden konnte, dass trotz gesicherter Existenz einer Lösung sogar noch unterschiedliche Lösungen entstehen können. Wir haben also den Integralbegriff sorgfältig zu wählen.

Auf einen ersten Blick scheint es zweckmäßig sich für einen der beiden Integralbegriffe zu entscheiden – die Problematik ist jedoch weitaus facettenreicher. Beim theoretischen Studium der Steuerungsaufgaben, das heißt der Herleitung von Existenzaussagen, Eindeutigkeitsaussagen und einer Lösungstheorie, möchte man sich gern auf das Lebesgue-Integral berufen. Hier ist mit den Konvergenzsätzen der Maß- und Integrationstheorie ein breites Spektrum an mathematischen Werkzeugen vorhanden. In diesem Kontext sind auch die meisten theoretischen Ergebnisse, wie [9, 41, 51, 54], zu interpretieren. Betrachten wir jetzt jedoch numerische Verfahren zur Lösung von Steuerungsproblemen, so stellen wir fest, dass diese meist den Begriff des uneigentlichen Riemann-Integrals ausnutzen. Dies liegt vor allem in den einfacheren Methoden der numerischen Integration nach Riemann begründet. Es entsteht eine Diskrepanz zwischen Theorie und Anwendung, welche in möglichen Misskalkulationen enden könnte.

Aus Sicht der Theorie scheint uns diese angesprochene Diskrepanz zunächst nicht zu stören. Wir verwenden fortan den Begriff des Lebesgue-Integrals, wie es auch in den bereits existierenden Arbeiten [9, 41, 51, 54] zuvor getan wurde und haben mit der Maßtheorie ein breites Spektrum mathematischer Sätze zu Konvergenz und Kompaktheit zur Verfügung. Bei näherer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, dass der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen zu klein ist. Wir betrachten hierfür folgendes Beispiel.



**Beispiel 3.3.2**

Sei  $\dot{x}(t) = u(t)x(t)$ ,  $x(0) = 1$  die Dynamik einer fiktiven Steuerungsaufgabe. Wir legen weiterhin die Steuerbeschränkung  $u(t) \in [0, 1]$  zugrunde. Die Trajektorien der zugehörigen optimalen Prozesse  $(x, u)$  genügen offenbar

$$1 \leq x(t) = \exp \left\{ \int_0^t u(\tau) d\tau \right\} \leq e^t.$$

Insbesondere ist keine zulässige Trajektorie einer solchen Steuerungsaufgabe von endlichem Lebesgue-Integral auf dem betrachteten Zeithorizont.

Um das Problem der Raumgröße zu umgehen, wurden in den letzten Jahrzehnten verschiedene Vorschläge erbracht (siehe unter anderem [9, 13, 54, 63]), welche jedoch alle auf eine Gemeinsamkeit hinführen: Die Einführung eines neuen Maßes durch eine geeignete Gewichtsfunktion im Integral. Dies kann zum einen durch explizite Diskontierungsfaktoren in der Modellierung (vgl. [9, 13]), oder durch die Einführung spezieller gewichteter Zustandsräume (vgl. [54, 63]) realisiert werden. Wir schlagen in der vorliegenden Arbeit den zweiten Weg ein. Näheres zu dieser Thematik werden wir in Kapitel 3.5 noch einmal ausführlicher diskutieren, wo wir die geeignete Wahl eines Suchraumes für die Optimierungsaufgabe besprechen werden.

Eng verwandt mit der Problematik der Raumgröße ist die Frage der Kompaktheit der zulässigen Prozessmenge. Diese ist vor allem zur Beantwortung von Existenzfragen relevant. A priori ist bei Steuerungsaufgaben mit unendlichem Zeithorizont die zeitliche Entwicklung naturgemäß unbeschränkt. Es liegt keine Kompaktheit vor. Eine mögliche Lösung dieses Problems ist es, die Kompaktheit durch eine geeignete Raumwahl zu erzwingen. Dies wurde bereits in [41] gemacht, um die Existenz optimaler Steuerungen für eine gegebene Problemklasse in gewichteten Hilberträumen nachzuweisen. Wir werden im Folgenden nicht weiter auf dieses Phänomen eingehen und uns stattdessen auf die Frage notwendiger Optimalitätskriterien fokussieren. Wir merken jedoch an, dass auch hier die Frage der Kompaktheit eine wesentliche Rolle spielt, wie der in dieser Arbeit geführte Beweis zum Maximumprinzip zeigen wird.

Ein letzter Punkt der anzusprechen bleibt, ist die Frage nach den sogenannten Transversalitätsbedingungen in den notwendigen Optimalitätskriterien. Im Fall der klassischen Steuerungstheorie auf beschränkten Zeithorizonten  $[t_0, t_1]$  erhält man, im Rahmen notwendiger Optimalitätsbedingungen, eine zusätzliche Randbedingung an die Adjungierte  $y$ . Das sogenannte Pontryaginsche Maximumprinzip impliziert unter geeigneten Rahmenbedingungen (freier Endzeitpunkt)  $y(t_1) = 0$ . Im Falle eines unendlichen Zeithorizontes lässt sich diese Bedingung nicht ohne weiteres übertragen. Halkin erbrachte als einer der ersten ein Beispiel, siehe [27], in dem die natürlich scheinende Transversalitätsbedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  verletzt ist. Es folgten zahlreiche wissenschaftliche Ausarbeitungen, in denen man untersuchte, unter welchen Bedingungen diese natürlichen Transversalitätsbedingungen dennoch erhalten bleiben. Hierzu zählen unter anderen die Veröffentlichungen [33, 48, 60]. Neben diesen Bemühungen war man versucht, eine allgemeine Form der Transversalität für Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont zu finden. Eine erste allgemeine Transversalitätsbedingung findet sich bereits in „Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control

Problems“, 1979, [13], wo die Transversalität über eine Integrierbarkeitsbedingung charakterisiert wird. Fortgeführt wurde diese Idee in der Arbeitsgruppe um Pickenhain durch die Einführung gewichteter Funktionenräume (vgl. [18, 40, 41, 51, 54, 55, 73]). In diesen Arbeiten wurde die Transversalität durch die Zugehörigkeit der Adjungierten zu einem gewichteten Funktionenraum realisiert. Wir werden später sehen, dass das in dieser Arbeit präsentierte Maximumprinzip ebenfalls Transversalitätsbedingungen in dieser Form aufweist. Die Autoren in [9, 10] gehen einen anderen Weg. Sie konstruieren unter Verwendung einer Cauchy-Formel eine explizite Darstellung der Adjungierten. So ist kein explizites Lösen des kanonischen Systems bezüglich der Adjungierten mehr nötig. In einer späteren Arbeit konnte zusätzlich noch gezeigt werden, dass die so konstruierte Adjungierte unter geeigneten Voraussetzungen der natürlichen Transversalitätsbedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  genügt (siehe [12]).

Wir weisen abschließend darauf hin, dass zum Zeitpunkt dieser Arbeit die Frage der Transversalität immer noch sehr aktuell ist und insbesondere für die Numerik von großem Interesse ist (siehe unter anderem [52]). Hier kann sie als zusätzliche Randbedingung zur Integration des kanonischen Systems behilflich sein. Erst so wird das Studium indirekter numerischer Methoden zur Behandlung von Steuerungsaufgaben möglich (vgl. [52, 56]).

### 3.4 Klassifikation von Steuerungsaufgaben

Aus unserer Sicht gibt es im Bereich der Steuerungstheorie über einem unendlichen Zeithorizont zwei grundlegend zu unterscheidende Aufgabentypen. Wir haben dies in den vorherigen Kapiteln bereits des öfteren angedeutet.

Zum einen ist dies die Problemklasse der Aufgaben, die als Fortsetzung von Problemen mit einem endlichen, aber unbeschränkten Zeithorizont verstanden werden kann (siehe unter anderem [22, 26]). Bei diesen vorrangig in der Ökonomie auftretenden Modellen ist eine Divergenz des Zielfunktional erlaubt. Entsprechend müssen Methoden, insbesondere Optimalitätsbegriffe bereit gestellt werden, die es erlauben, die möglicherweise unendlich groß werdenden Zielfunktionalwerte miteinander zu vergleichen (siehe beispielsweise [17]).

Diesem Verhalten fast schon entgegengesetzt, stehen die Aufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont. Hier gehört der unendliche Horizont explizit zur Aufgabe und hat eine modellperspektivische Bedeutung. So zum Beispiel beim quantenmechanischen Oszillator (siehe Vorwort, Beispiel 1.1.1), in dem der unendliche Horizont mit der Interpretation des Ortes des betrachteten Teilchens versehen ist. Eine Interpretation im Sinn eines endlichen, beliebig großen Zeithorizontes ergibt hier keinen Sinn. Der oft in der Numerik durchgeführte Ansatz, den Zeithorizont ab einem hinreichend großen Zeitpunkt  $T > 0$  abzuschneiden, zerstört in diesem Beispiel die physikalische Grundlage. Ein sogenannter „Receding Horizon“ Ansatz kann entsprechend nicht verwendet werden. Außerdem muss aus physikalischer Sicht eine mögliche Divergenz des Zielfunktional ausgeschlossen werden. Entsprechend benötigen wir auf dieser

Seite der Aufgabenklasse geeignete Methoden, um die Integrierbarkeit der auftretenden Funktionen über dem unendlichen Horizont sicherzustellen.

Eine dritte Art von Steuerungsaufgaben entsteht bei der asymptotischen Stabilisierung dynamischer Systeme. So führten Hall und Wiener ([28, 71]) in den 1940er-Jahren bereits erstmalig ein asymptotisches Stabilisierungsproblem ein, bei welchem ein unendlicher Zeithorizont auftritt.<sup>2</sup> Aus unserer Sicht gehört diese Art von Aufgaben jedoch in die zweite Kategorie der zuvor beschriebenen Aufgabenklassen. Eine Divergenz des Zielfunktional würde hier schließlich bedeuten, dass der gefundene Prozess das dynamische System nicht stabilisiert. Anders formuliert, eine stabilisierende Steuerung sollte auch einen endlichen Zielfunktionalwert liefern. Nur Sinnvoll erscheint es aus dieser Sichtweise, die Probleme der asymptotischen Stabilisierung in die zweite Problemklasse einzuordnen.

Ein recht neuer Zugang zur Problemklasse der Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont geschieht mittels geeigneter Transformation einer klassischen Aufgabe mit endlichem Zeithorizont (siehe beispielsweise [55]). Hier entsteht der unendliche Horizont bei der Transformation und kann so als integraler Bestandteil der Aufgabenstellung angesehen werden. Aus unserer Sicht lassen sich auch derartige Probleme sinnvoll im Kontext der Steuerungsaufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont interpretieren.

Wir sehen also, dass sich viele Aufgabenstellungen in der Form eines a priori gegebenen Zeithorizontes formulieren lassen. Die so eigenständig entstehende Teilklasse von Steuerungsproblemen erhält so ihre Bedeutung und sollte aus unserer Sicht in den Schwerpunkt zukünftiger Forschungen im Bereich der Steuerungstheorie Einzug halten und parallel zu den Aufgaben mit einem uneigentlichen Integral im Zielfunktional untersucht werden.

### 3.5 Geeignete Wahl des Suchraumes

Ein Blick in die Anwendungsliteratur offenbart eine Menge wirtschaftlich, technisch oder biologisch relevanter Aufgaben (siehe unter anderem [22, 26]). Obgleich deren Modellierung aus Sicht des Anwenders gut durchdacht ist, fehlt aus mathematischer Sicht ein wesentlicher Bestandteil der Problembeschreibung. Oft lässt sich keine Angabe des Suchraumes finden, in welchem die optimale Lösung aufgesucht werden soll. Zur Vervollständigung der Aufgabenstellung ist die Frage nach einem geeigneten Grundraum für die Optimierung unvermeidbar.

Betrachtung der Dynamik,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}$$

allein, gibt uns bereits eine intuitive Vorstellung der zu wählenden Räume. Aus Sicht der Anwendung eignet sich der Raum der messbaren Funktionen für die Steuerung. So

<sup>2</sup>Weitere Forschungen in diesem Bereich folgten durch Kalman, [32], und Letov, [39].

wird der Steuervariablen erlaubt, auch auf unstetige Art und Weise, abrupt auf das dynamische System einzuwirken. Wir gehen im Folgenden diesem intuitiven Gedanken nach. Die Konkatenation  $\varphi(\cdot, \cdot, u(\cdot))$  kann jetzt, aufgrund der Wahl des Raumes der Steuerung, ebenfalls Unstetigkeiten aufweisen. Entsprechend lässt sich die Dynamik nur fast überall lösen. Eine Lösungstrajektorie müsste also nur fast überall differenzierbar sein und der obigen Differenzialgleichung genügen. Auf der anderen Seite muss sie dem Anfangswert genügen, also punktweise auswertbar sein. Ein geeigneter Raum, der diesen Bedingungen genügt, ist der Raum der lokal absolut stetigen Funktionen. Wir haben dessen Eignung für die Theorie der Differenzialgleichungen bereits in Kapitel 2.6 herausgestellt. Die Kombination aus dem Raum der messbaren Funktionen für die Steuerung und dem Raum der lokal absolut stetigen Funktionen für den Zustandsraum, lässt sich in zahlreichen Publikationen, beispielsweise [9, 10, 17], und Anwendungen, beispielsweise [22, 26], finden. Diese Wahl der Räume kann als die historische beziehungsweise klassische Setzung angesehen werden.

Bereits Halkin stellte jedoch schon fest, dass dieser Raum mögliche Schwierigkeiten in Form fehlender Transversalitätsbedingungen (siehe [27]) mit sich bringt. Die Ideen von Halkin wurden später unter anderem durch Pickenhain in „On Adequate Transversality Conditions for Infinite Horizon Optimal Control Problems—A Famous Example of Halkin“, [53], weiter diskutiert und mündeten in einer, aus unserer Sicht für die Aufgabenstellung adäquaten Raumwahl.

Wir betrachten das Anfangswertproblem aus Beispiel 3.3.2 erneut. Die Trajektorien waren gemäß

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \int_0^t u(\tau) d\tau \right\}$$

gegeben. Offenbar sind sie Elemente des Raumes  $C^\infty(\mathbb{R}_+)$  und damit insbesondere im Einklang mit der eben diskutierten Raumwahl. Aufgrund der zuvor getroffenen Abschätzung,

$$1 \leq x_0 e^{0t} \leq x(t) \leq x_0 e^t,$$

divergiert jedoch jegliches (ungewichtetes) Integral über dem unendlichen Zeithorizont. Eine Minimierung im Sinn der Steuerungsaufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont wird aussichtslos – schlimmer gar noch, weist die Menge der zulässigen Prozesse nicht die wünschenswerten Eigenschaften der Beschränktheit beziehungsweise Kompaktheit auf. Es divergieren für den Existenznachweis optimaler Steuerungen wesentliche Integralterme. Es gehen wichtige Kompaktheitsargumente verloren. Ein erster Ansatz, diesem Problem entgegen zu wirken, war die Betrachtung von Problemen mit sogenanntem dominated Discount. Hier wird dieses exponentielle Wachstum durch eine entsprechende Diskontierung im Zielfunktional abgefangen (vgl. [9, 10]). Das Problem divergierender Integralterme außerhalb des Zielfunktional bleibt jedoch bestehen. Dieses lässt sich mit der Einführung eines neuen Maßes für den Suchraum lösen, wie es in „Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control Problems“, [13], bereits angedeutet wurde und in „Hilbert Space Treatment of Optimal Control Problems with Infinite Horizon“, [54], fortgeführt wurde. In unserem Beispiel wäre

$d\mu = e^{-(2+\varepsilon)t} dt$  mit einem  $\varepsilon > 0$  angebracht. Die Funktion  $x$  wird so Element des gewichteten Sobolev-Raumes  $W_2^1((0, \infty), e^{-(2+\varepsilon)t})$ . Ein zusätzlicher Vorteil der Verwendung gewichteter Räume ist die Möglichkeit der Einbettung der Aufgabenstellung in eine (gewichtete) Hilbertraumtheorie. Im Sinn dieses abstrakteren Kontextes lassen sich Existenzbeweise, als auch die Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien, mittels funktional-analytischer Mittel einfacher führen (vgl. [41, 51, 54]). Die Reflexivität des Hilbertraumes führt schließlich zu einer natürlichen Erweiterung des Begriffes der Transversalitätsbedingung, welcher den Ideen von Halkin, [27] folgt.

## 3.6 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Neben den bereits eingeführten Termini Zielfunktional, Dynamik und Suchraum, spielen die Begriffe der zulässigen und optimalen Prozesse eine wesentliche Rolle. In diesem Abschnitt werden wir kurz definieren, was wir unter einem zulässigen Prozess zu verstehen haben. Anschließend diskutieren wir für diese Prozesse verschiedene Optimalitätsbegriffe. Der im Zielfunktional verwendete Integrationsbegriff sowie der zugrunde liegende Suchraum werden hierbei eine wesentliche Rolle spielen.

### 3.6.1 Die Menge der zulässigen Prozesse

Wir führen zunächst die Menge der zulässigen Steuerungen und zugehörigen Trajektorien ein. Sie bildet die Grundlage für die weitere Diskussion.

#### Definition 3.6.1

*Wir bezeichnen den Zustandsraum mit  $\mathbb{X}$  und den Raum der Steuerungen mit  $\mathbb{U}$ . Ein Tupel  $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$  heißt zulässig, falls es*

1. dem Anfangswertproblem (Dynamik)  $\dot{x}(\cdot) = \varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ ,  $x(0) = x_0$ ,
2. der Steuerbeschränkung  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$

*fast überall auf dem Zeithorizont genügt, und das Integral im Zielfunktional im Falle des uneigentlichen Integrals bestimmt divergiert beziehungsweise im Falle des (eigentlichen) Lebesgue-Integral existiert.<sup>3</sup>*

#### Bemerkung 3.6.1

*Man beachte, dass wir an dieser Stelle keinerlei Aussage über die Endlichkeit beziehungsweise Konvergenz des im Zielfunktional auftretenden Integrals treffen. Diese spielt erst bei der Einführung des Begriffes „Optimalität“ eine Rolle.*

<sup>3</sup>Unter der Existenz des Lebesgue-Integrals verstehen wir die Quasi-Integrierbarkeit der zugrunde gelegten Funktion. Man vergleiche hierzu auch Bemerkung 2.2.5

### 3.6.2 Diskussion verschiedener Optimalitätsbegriffe

#### Aufarbeitung bekannter Optimalitätsbegriffe

Im Unterschied zur optimalen Steuerung über einem endlichen Zeithorizont ergeben sich im Fall der Diskussion von Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont verschiedene Definitionen von Optimalität. Eng in Zusammenhang mit dieser Thematik steht die Frage des im Zielfunktional verwendeten Integralbegriffs. Wir haben hier zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral zu unterscheiden. Auf Seiten der Integrationstheorie nach Riemann kommt hier nur der Begriff des uneigentlichen Riemann-Integrals in Frage.<sup>4</sup> Auf der Seite des Lebesgue-Integrals sind eine Interpretation als eigentliches, als auch als uneigentliches Integral möglich. Historisch gesehen wurden die Optimalitätsbegriffe für den unendlichen Zeithorizont aus den klassischen Steuerungsaufgaben übertragen. So wurde zunächst versucht, die Frage der Optimalität als Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  des Steuerungsproblems auf dem Zeithorizont  $[0, T]$  einzuführen. Ganz natürlich, diesem Grenzprozessgedanken folgend, legten die anfangs durch Weizsäcker, Gale und Halkin eingeführten Optimalitätsbegriffe ein uneigentliches Integral zugrunde. Die Verwendung des uneigentlichen Integrals ist hierbei in zweierlei Hinsicht sinnvoll. Zum einen spiegelt es den in ökonomischen Steuerungsaufgaben idealisierten unendlichen Zeithorizont wieder, zum anderen lässt sich so Optimalität auch für Aufgaben definieren, in denen das Zielfunktional nicht notwendigerweise einen endlichen Wert annimmt, das uneigentliche Integral also bestimmt divergiert. Diesem Vorgehen gegenüber stehen Anwendungsprobleme aus Technik und Physik, in denen der unendliche Zeithorizont explizit in der Aufgabe auftritt. Wir hatten diese Klasse von Aufgaben bereits in Kapitel 3.4 klassifiziert. Hier muss eine Divergenz des Zielfunktionals ausgeschlossen werden. Dieser Sachverhalt lässt sich deutlich besser mit einem bestimmten Lebesgue-Integral widerspiegeln. Wir erhalten dann Optimalitätsbegriffe, welche ad hoc auf dem unendlichen Zeithorizont definiert sind.

In diesem Kapitel werden wir die zuvor genannten Szenarien mit ihren entsprechend relevanten Optimalitätsbegriffen versehen. Wir werden hierbei der Historie folgend vorgehen und zunächst die auf einem uneigentlichen Integral basierenden Optimalitätsbegriffe einführen. Daran anschließend definieren wir die globale Optimalität im Sinn des eigentlichen Lebesgue-Integrals im Zielfunktional, welches wir auch in dieser Arbeit verwenden werden. Bevor wir jedoch mit der Diskussion der Optimalitätsbegriffe beginnen, resümieren wir einleitend noch einmal die zuvor erwähnten Integrationsbegriffe. Eine ausführliche Diskussion dieser, mit Bezug auf die Theorie optimaler Steuerung, findet man in der Arbeit „Different interpretations of the improper integral objective in an infinite horizon control problem“, [44].

#### Bemerkung 3.6.2

*Jede auf einem kompakten Gebiet Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar und die Werte beider Integrale stimmen überein. Dies impliziert unmittelbar, dass jede uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion auch uneigentlich Lebesgue-*

---

<sup>4</sup>Wir werden auf den Integrationsbegriff nach Riemann in Zusammenhang mit der Steuerungstheorie nicht weiter eingehen. Für einen Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral mit Bezug auf Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont siehe man beispielsweise [44].

integrierbar ist und die Grenzwerte übereinstimmen. Die Lebesgue-Integrierbarkeit (im eigentlichen) Sinn folgt jedoch nicht, wie Beispiel 3.3.1 lehrt. Insbesondere existiert also eine Funktion, welche uneigentlich Lebesgue-integrierbar ist, das Lebesgue-Integral aber nicht auf dem unbeschränkten Gebiet existiert. Umgekehrt ist jedoch jede auf einem unbeschränkten Gebiet Lebesgue-integrierbare Funktion uneigentlich Lebesgue-integrierbar. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz und der Eigenschaft, dass mit  $f$  auch stets  $|f|$  Lebesgue-integrierbar ist.

**Globale Optimalitätsbegriffe** Auch in diesem Abschnitt teilen wir gemäß Kapitel 3.4 die Frage nach einem geeigneten Optimalitätsbegriff in die zwei Klassen von Steuerungsproblemen über einem unendlichen Zeithorizont auf. Wir beginnen mit der Aufarbeitung bekannter Optimalitätskriterien, welche sich als unmittelbare Erweiterung des Begriffes Optimalität im Falle von Problemen mit endlichem Zeithorizont entwickelt haben. Hierbei gehen wir zunächst nicht zwingend von der Konvergenz des uneigentlichen Integrals im Zielfunktional aus. Es gilt geeignete Optimalitätsbegriffe zu formulieren, die in der Lage sind, dieses Phänomen zu erfassen und es ermöglichen, die möglicherweise nicht über dem gesamten Zeithorizont existierenden Integrale zu vergleichen.

Basierend auf dem Lebesgue-Integral führen wir den Performance-Index  $J_T(x, u)$  gemäß

$$J_T(x, u) = \int_0^T r(t, x(t), u(t)) dt$$

ein. Wir führen jetzt mittels diesem die verschiedenen Optimalitätsbegriffe ein.<sup>56</sup>

**Definition 3.6.2** ([17, Seite 10, Definition 1.2], [22, Seite 186, Definition 7.2])  
*Eine zulässige Trajektorie  $x_*$ , mit  $x_*(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u_*$ , heißt:*

1. Überholungsoptimal nach Weizsäcker (overtaking optimal, von Weizsäcker, 1965), falls es ein  $T_0 > 0$  gibt, so dass für alle Zeiten  $T > T_0$  und alle zulässigen Prozesse  $(x, u)$  die Ungleichung

$$J_T(x, u) \geq J_T(x_*, u_*)$$

erfüllt ist.

<sup>5</sup>Aus der Quelle [17, Seite 10, Definition 1.2] geht zunächst nicht hervor, welcher Integralbegriff für den Performance-Index zugrunde gelegt wurde. Die Arbeit [16], vom gleichen Autor, stellt jedoch klar, dass wir den Performance-Index als (uneigentliches) Lebesgue-Integral zu verstehen haben.

<sup>6</sup>Die im Folgenden definierten Begriffe „overtaking optimal“, „catching up optimal“, sowie „sporadically catching up optimal“ werden in der deutschsprachigen Literatur teils mit dem gleichen Begriff der Überholungsoptimalität übersetzt. Um im Folgenden diese Begriffe eindeutig voneinander unterscheiden zu können, erweitern wir den Namen des Optimalitätsbegriffs jeweils um den Namen der Person, die diesen Begriff unseres Wissens nach zuerst eingeführt hat.

2. Stark optimal, falls sie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x_*, u_*) > -\infty$$

genügt, und für jede andere zulässige Trajektorie  $x$  mit  $x(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x_*, u_*) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u)$$

erfüllt.

3. Überholungsoptimal nach Gale (catching up optimal, von Gale, 1967), falls für jede andere zulässige Trajektorie  $x$  mit  $x(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x, u) - J_T(x_*, u_*)\} \geq 0$$

erfüllt ist.

4. Schwach überholungsoptimal nach Halkin (sporadically catching up optimal, von Halkin, 1974), falls für jede andere zulässige Trajektorie  $x$  mit  $x(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x, u) - J_T(x_*, u_*)\} \geq 0$$

erfüllt ist.

5. Endlich optimal, falls für jedes  $T > 0$  und jede zulässige Trajektorie  $x$  mit den Randbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $x(T) = x_*(T)$ , generiert durch die auf  $[0, T]$  zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$J_T(x_*, u_*) \leq J_T(x, u)$$

erfüllt ist.

**Bemerkung 3.6.3** (vgl. [17, Seite 10ff], [22, Seite 186ff])

Die Optimalitätsbegriffe in Definition 3.6.2 lassen sich in ihrer implikativen Stärke wie folgt anordnen:

$$\begin{aligned} \text{Überholungsoptimalität nach Weizsäcker} &\Rightarrow \text{Starke Optimalität} \Rightarrow \\ \text{Überholungsoptimalität nach Gale} &\Rightarrow \text{Schwache Überholungsoptimalität nach Halkin} \\ &\Rightarrow \text{Endliche Optimalität} \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.6.4**

Im Falle einer Aufgabenstellung über einem endlichen Zeithorizont fallen die Begrifflichkeiten aus Definition 3.6.2 zusammen und eine Unterscheidung dieser ist nicht mehr nötig.

Definition 3.6.2 abschließend interpretieren wir mit der nachstehenden Bemerkung noch einmal die zuvor abstrakt eingeführten Optimalitätsbegriffe.



**Bemerkung 3.6.5**

Die Überholungsoptimalität nach Weizsäcker besagt *naiv* gesprochen, dass es einen endlichen Zeitpunkt  $T_0 > 0$  gibt, welcher von dem jeweilig betrachteten Prozessen unabhängig ist, so dass ab diesem Zeitpunkt, für alle Zeiten an der Performance-Index des optimalen Prozesses einen kleineren Wert als der jedes anderen zulässigen Prozesses liefert.

Der Begriff der starken Optimalität ergibt nur für Aufgaben mit einem uniform über die Prozessmenge beschränkten Performance-Index Sinn.

Die Begriffe der Überholungsoptimalität nach Gale und der schwachen Überholungsoptimalität nach Halkin stehen in der folgenden Relation: Der Optimalitätsbegriff nach Gale bedeutet anschaulich, dass der Performance-Index des optimalen Prozesses den Performance-Index jedes anderen zulässigen Prozesses  $x$  zu einem Zeitpunkt  $T = T(x)$  überholt. Hierbei darf der Zeitpunkt  $T$  vom Prozess abhängig sein. Im Begriff von Halkin muss dies nicht mehr geschehen. Hier verlangt man lediglich, dass kein anderer zulässiger Prozess den optimalen Prozess überholt.

Carlson und Haurie behaupten in [17], dass die endliche Optimalität ein Kriterium ist, welches von jedem sinnvoll definierten optimalen Prozess erfüllt sein sollte. Die endliche Optimalität besagt hierbei *naiv* gesprochen, dass der optimale Prozess auf jedem Zeitabschnitt  $[0, T]$  des unendlichen Zeithorizontes  $[0, \infty)$  optimal sein muss, sofern nur die zum Vergleich herangezogenen Prozesse dem gleichen Terminalwert  $x_*(T)$  genügen.

Setzen wir bereits voraus, dass das Zielfunktional für jeden Prozess im Sinn des uneigentlichen Integrals einen endlichen Wert annimmt, dass heißt, das

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(x, u) < \infty$$

existiert und endlich ist,<sup>7</sup> so ergeben sich die folgenden Reduktionen der in Definition 3.6.2 formulierten Begriffe.

**Definition 3.6.3**

Eine zulässige Trajektorie  $x_*$ , mit  $x_*(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u_*$ , heißt:

1. Überholungsoptimal nach Weizsäcker (overtaking optimal, Weizsäcker, 1965)<sup>8</sup>, falls es ein  $T_0 > 0$  gibt, so dass für alle Zeiten  $T > T_0$  und alle zulässigen Prozesse  $(x, u)$  die Ungleichung

$$J_T(x, u) \geq J_T(x_*, u_*)$$

erfüllt ist.

<sup>7</sup>Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals kann beispielsweise durch geeignete Wachstumsbedingungen gesichert werden. Sie garantiert aber noch nicht die (eigentliche) Lebesgue-Integrierbarkeit (vgl. Bemerkung 3.6.2).

<sup>8</sup>Der Begriff der Überholungsoptimalität wurde erstmals von Weizsäcker in der Arbeit [69] eingeführt. In der Arbeit [57] findet man diesen Optimalitätsbegriff auch unter dem Namen *criterion L2*.

2. Optimal im gewöhnlichen Sinn<sup>9</sup>, falls für jede andere zulässige Trajektorie  $x$  mit  $x(0) = x_0$ , generiert durch die zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \{J_T(x, u) - J_T(x_*, u_*)\} \geq 0$$

erfüllt ist.

3. Endlich optimal, falls für jedes  $T > 0$  und jede zulässige Trajektorie  $x$  mit Randwerten  $x(0) = x_0$  und  $x(T) = x_*(T)$ , generiert durch die auf  $[0, T]$  zulässige Steuerung  $u$ , die Ungleichung

$$J_T(x_*, u_*) \leq J_T(x, u)$$

erfüllt ist.

Wir erhalten in diesem Fall die nachstehende implikative Relation zwischen den genannten Optimalitätsbegriffen.

Überholungsoptimal nach Weizsäcker  $\Rightarrow$  Optimalität im gewöhnlichen Sinn  
 $\Rightarrow$  Endliche Optimalität

Den zuvor eingeführten Optimalitätsbegriffen mit einem uneigentlichen Integral im Zielfunktional stehen die Optimalitätsbegriffe, welche sich Steuerungsaufgaben widmen, bei denen der unendliche Zeithorizont a priori in der Aufgabe auftritt, gegenüber. Hier muss aus der Aufgabenstellung heraus ein eigentliches Integral verwendet werden. Die Verwendung des eigentlichen Lebesgue-Integrals wird zwingend. Wir definieren hierzu den Performance-Index

$$J_\infty(x, u) := \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) d\mu(t)$$

mit einem zunächst nicht näher spezifizierten Maß  $\mu$ . Aufbauend auf dem Begriff der gewöhnlichen Optimalität definieren wir so die globale Optimalität gemäß der nachstehenden Definition.

**Definition 3.6.4 ([54, §5, Definition 1])**

Bezeichne  $\mathbb{X}$  den Zustandsraum und  $\mathbb{U}$  den Raum der Steuerungen. Ein zulässiger Prozess  $(x_*, u_*) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$  heißt global optimal, falls für alle anderen zulässigen Prozesse  $(x, u) \in \mathbb{X} \times \mathbb{U}$  die Ungleichung

$$J_\infty(x_*, u_*) \leq J_\infty(x, u)$$

erfüllt ist und  $J_\infty(x_*, u_*) < \infty$  gilt.

---

<sup>9</sup>Im Fall, dass das Lebesgue-Integral existiert und einen endlichen Wert annimmt beziehungsweise im Falle der Konvergenz des uneigentlichen Integrals, fallen die Begriffe der Überholungsoptimalität und schwachen Überholungsoptimalität zusammen und werden auch als Optimalität im gewöhnlichen Sinn bezeichnet (vgl. [40]). In [57] wird dieser Optimalitätsbegriff auch mit *criterion L1* bezeichnet.

**Bemerkung 3.6.6**

Die Bezeichnung „global“ in Definition 3.6.4 bezieht sich hierbei sowohl auf die Verwendung des (eigentlichen) Lebesgue-Integrals, als auch auf die Globalität im Sinn des Umgebungsbegriffes. Den Zielfunktionswert  $J_\infty(x_*, u_*) = -\infty$  schließt Definition 3.6.4 hierbei zunächst nicht aus. Im Rahmen der Definition der in Kapitel 4.1 gestellten Optimierungsaufgabe werden wir jedoch Voraussetzungen zugrunde legen, die diesen Fall ausschließen werden.

**Bemerkung 3.6.7**

Optimalitätsbegriff 3.6.4 legt die Behandlung der Steuerungsaufgabe in einem gewichteten Funktionenraum nahe, indem die Existenz des eigentlichen Lebesgue-Integrals in  $J_\infty(x_*, u_*)$  gesichert werden kann. Hierzu ist die Gewichtsfunktion  $\mu$  geeignet zu wählen.

**Lokale Optimalitätsbegriffe** Insbesondere auf Seiten der Überholungsoptimalität wurden weitere Bemühungen unternommen, den Optimalitätsbegriff abzuschwächen. So lokalisieren Aseev und Veliov in „Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions“, [11], den Begriff der schwachen Überholungsoptimalität durch die Einführung eines geeigneten Umgebungsbegriffes. Hierzu betrachten sie nur jene zulässigen Steuerungen  $u$  mit

$$\text{meas}\{t \in [0, \infty) \mid u(t) \neq u_*(t)\} < \delta,$$

für einen Lokalisierungsparameter  $\delta > 0$ , wobei  $\text{meas}$  das Lebesgue-Maß bezeichne. Ebenfalls einen lokalen Optimalitätsbegriff, welcher auf dem Begriff der Optimalität im gewöhnlichen Sinn aufbaut, verwendet Tauchnitz in „The Pontryagin Maximum Principle for Nonlinear Optimal Control Problems with Infinite Horizon“, [64], wo notwendige Optimalitätskriterien für stark, lokale Minima bezüglich der Supremum-Norm studiert werden.

Wir möchten an dieser Stelle kurz erwähnen, dass obgleich diese Lokalisierungen eine schwächere Formulierung des Maximumprinzips erlauben würde, wir uns in der vorliegenden Arbeit nur mit einem globalen Optimalitätsbegriff befassen werden. Eine entsprechende Lokalisierung der hier vorgestellten Resultate, beziehungsweise Beweistechniken, behalten wir uns für eine zukünftige Arbeit vor.

**Wahl eines geeigneten Optimalitätsbegriffs**

Bei einer Gegenüberstellung der Optimalitätsbegriffe aus Definition 3.6.2 und 3.6.4 lässt sich Folgendes bezüglich ihrer Verwendung in Anwendung und wissenschaftlichen Publikationen feststellen.

1. Die meisten der aktuelleren Arbeiten im Bereich der notwendigen Optimalitätskriterien (als auch der Existenztheorie, vgl. [41, 42]) legen das Lebesgue-Integral zugrunde (siehe [9–12, 51, 52, 54, 55, 73]).

2. Insbesondere im Kontext ökonomischer Beispiele (vgl. [22, 26]) hat sich die Verwendung eines uneigentlichen Integraltyps im Zielfunktional durchgesetzt, um den idealisierten unendlichen Zeithorizont zu modellieren.
3. Bei Verwendung eines uneigentlichen Integrals hat sich der Begriff der (schwachen) Überholungsoptimalität (vgl. [9–12]) durchgesetzt. Dieser wurde teils auch lokalisiert (siehe [11]).
4. Die Verwendung des eigentlichen Lebesgue-Integrals finden wir zunächst nur in theoretischen Arbeiten (vgl. [40, 51, 54, 55, 73]) und physikalischen Anwendungen (siehe [56]).
5. Auf Seiten des eigentlichen Lebesgue-Integrals hat sich in der Literatur der Begriff der globalen Optimalität durchgesetzt (vgl. [40, 51, 52, 54, 55, 73]).

In anderen Worten ausgedrückt lässt sich die bestehende Literatur in zwei Sparten einteilen. Die wissenschaftlichen Publikationen, die a priori von der Existenz und Endlichkeit des Lebesgue-Integrals ausgehen (eigentliches Lebesgue-Integral, *Begriff der globalen Optimalität*, [40, 51, 52, 54–56, 73]) und jene, die das Lebesgue-Integral im uneigentlichen Sinn interpretieren (*Begriff der (schwachen) Überholungsoptimalität*, [9–12, 17, 22, 26]). Diese Unterteilung der Ergebnisse spiegelt sich auch in der von uns in Kapitel 3.4 beschriebenen Klassifizierung wider.

In der vorliegenden Arbeit werden wir dem ersten Weg folgend, durch die Annahme geeigneter Wachstumsbedingungen sowie der Wahl gewichteter Lebesgue- und Sobolev-Räume für den Raum der Steuerungen und des Zustandes, von einem endlichen Zielfunktionalwert im Sinn des eigentlichen Lebesgue-Integrals ausgehen. Dies wird es uns erlauben, die mathematische Behandlung der Steuerungsaufgabe in den Kontext der (konvexen) Funktionalanalysis zu setzen. Wir erhalten den Vorteil einer *schöneren* Theorie, in der sich Beweise mittels allgemeiner analytischer Sätze führen lassen.

Wir gehen dennoch kurz auf die wichtigsten Punkte ein, die ein Optimalitätsbegriff erfüllen sollte und zeigen, dass der Begriff der globalen Optimalität diesen Eigenschaften gerecht wird. Hierbei interessieren wir uns insbesondere für den Einfluss des Optimalitätsbegriffs auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen. Wir stellen zunächst fest, dass ein geeigneter Optimalitätsbegriff zum Studium notwendiger Optimalitätskriterien die folgenden beiden Bedingungen erfüllen sollte.

1. Der Begriff sollte zum einen möglichst *schwach* im Sinn einer implikativen Relation, Bemerkung 3.6.3, sein. (z.B. endliche Optimalität)
2. Der Optimalitätsbegriff sollte zum anderen auch für eine Theorie hinreichender Optimalitätskriterien geeignet sein. Insbesondere möchte man hierbei das Verhalten der klassischen Optimierung abbilden, so dass für konvexe Aufgabenstellungen notwendige Optimalitätskriterien auch hinreichend sind.

Das erste Kriterium soll uns hierbei eine breite Klasse von Aufgaben liefern, für die die formulierte Theorie notwendig ist. So würden zum Beispiel, im Falle notwendiger Optimalitätsbedingungen für endlich optimale Prozesse, die folgenden Implikationen gelten:

Überholungsoptimalität nach Weizsäcker  $\Rightarrow$  Starke Optimalität  $\Rightarrow$   
 Überholungsoptimalität nach Gale  $\Rightarrow$  Schwache Überholungsoptimalität nach Halkin  
 $\Rightarrow$  Endliche Optimalität  
 $\Rightarrow$  *Notwendige Optimalitätskriterien (PMP)*

Aufgrund der Transitivität wäre ein Maximumprinzip (PMP) für endlich optimale Prozesse auch für jeden der anderen in Definition 3.6.2 aufgeführten Optimalitätsbegriffe geeignet. Dieses Vorgehen finden wir beispielsweise in *Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications*, [17], wo ein Maximumprinzip (siehe [17, Seite 24, Theorem 2.3]) formuliert wurde, welches für jeden der in Definition 3.6.2 eingeführten Optimalitätsbegriffe gültig ist.<sup>10</sup> Der Vorteil einer solchen Theorie liegt unmittelbar auf der Hand. Ein solches Maximumprinzip ist notwendig für stark optimale Prozesse, als auch für (schwach) überholungsoptimale Prozesse sowie natürlich endlich optimale Prozesse. Auf der anderen Seite können wir jedoch nicht für einen aus dem Maximumprinzip berechneten Kandidaten die starke oder (schwache) Überholungsoptimalität schließen. Wir können lediglich festhalten, dass es sich bei dem Kandidaten um einen Kandidaten für einen endlich optimalen Prozess handelt. Ob dieser auch optimal im Sinn der (schwachen) Überholungsoptimalität, oder gar starken Optimalität ist, bleibt jedoch offen. Es ergibt sich entsprechend unmittelbar eine enge Verknüpfung zu den hinreichenden Optimalitätsbedingungen.

Wir betrachten das Resultat [17, Seite 24, Theorem 2.3] noch einmal genauer. Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass dieses Maximumprinzip keine Transversalitätsbedingung enthält. Insbesondere mit Hinblick auf die bereits erwähnten Beispiele von Halkin entsteht unweigerlich die Frage, unter welchen Zusatzbedingungen eine Transversalitätsbedingung im Maximumprinzip Einzug erhält. Anders ließ sich diese Frage auch in der Form, „Was ist ein geeigneter Optimalitätsbegriff, welcher zum einen noch hinreichend schwach ist und zum anderen Transversalität im Maximumprinzip realisiert?“, formulieren. Zu letzterer Fragestellung entstanden verschiedene Ansätze. Zum einen sind hier die Arbeiten von Aseev und Veliov zu erwähnen (vgl. [9–12]), in denen der Begriff der schwachen Überholungsoptimalität zugrunde gelegt wurde, zum anderen sind die Publikationen von Pickenhain hervorzuheben (vgl. [51, 53, 54]), in denen mit dem Begriff der globalen Optimalität gearbeitet wird. Für unsere Betrachtung ist der Begriff der Überholungsoptimalität, wie er in [9] verwendet wird, jedoch ungeeignet. Dieser lässt die Divergenz des Zielfunktional zu, was der Motivation unserer Aufgabenklasse mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont widerspräche. Wir werden entsprechend auf den Begriff der globalen Optimalität zurückgreifen. Dieser ist nach unserem Kenntnisstand der einzige Begriff, der explizit per Definition die Divergenz des Zielfunktional ausschließt.

Wir widmen uns jetzt dem zweiten Kriterium, unter welchen Voraussetzungen die notwendigen Bedingungen auch hinreichend werden. Ziel ist es hier, wie bereits zuvor erwähnt, das Verhalten der klassischen Optimierung abzubilden. Auf Seiten der Überholungsoptimalität finden wir hier bereits erste Resultate im Jahr 1970, wo in [5] mit den sogenannten „Arrow-Bedingungen“ hinreichende Optimalitätsbedingungen

<sup>10</sup>Im Grunde genommen wird in [17, Seite 24, Theorem 2.3] ein Maximumprinzip für endlich optimale Prozesse bewiesen.

für Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont formuliert wurden. Diese hinreichenden Bedingungen wurden in der Literatur mehrfach aufgegriffen, so finden wir beispielsweise in [17, 22] und [12] Zitate zur Ursprungsarbeit von Arrow und Kurz. Die Arrow-Bedingungen bilden insofern die klassische Theorie der Optimierung reeller Funktionen ab, dass im Falle eines kompakten Steuerbereiches und einer in  $\xi$  konkaven Hamiltonfunktion<sup>11</sup> das Maximumprinzip auch hinreichend für eine überholungsoptimale Lösung wird. Auf der Seite der gewöhnlichen Optimalität konnte für die Klasse der Aufgaben mit linearer Dynamik gezeigt werden, dass die in Pickenhain hergeleiteten notwendigen Optimalitätsbedingungen auch hinreichend sind, sofern das Zielfunktional konvex in Steuerung und Zustand ist (vgl. [57]). Eine solche Analogie zur klassischen Optimierung lässt sich auch für nicht-lineare Aufgaben hoffen, obgleich die Untersuchungen von Pickenhain zunächst nur lineare Probleme erfassen. Aus Sicht des zweiten Kriteriums scheinen also die Begriffe der Überholungsoptimalität, als auch der globalen Optimalität, gleichermaßen für die Diskussion notwendiger Optimalitätsbegriffe geeignet.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass

1. beide Optimalitätsbegriffe das Verhalten der klassischen Optimierung abbilden.
2. der Begriff der globalen Optimalität die (schwache) Überholungsoptimalität impliziert.
3. die Überholungsoptimalität die Divergenz des uneigentlichen Integrals im Zielfunktional explizit erlaubt.
4. die globale Optimalität die (eigentliche) Lebesgue-Integrabilität erzwingt. Der Zielfunktionalwert entlang des optimalen Prozesses ist endlich.

Folglich scheint uns der Begriff der schwachen Überholungsoptimalität die geeignetere Wahl zur Behandlung von Steuerungsaufgaben, in denen der unendliche Zeithorizont nicht a priori auftritt. Sprich, insbesondere in ökonomischen Modellen ist aus unserer Sicht diesem Optimalitätsbegriff der Vorzug zu geben. Hinzukommend können durch eine geeignete Lokalisierung, hingehend zum Begriff der lokal schwach überholungsoptimalen Lösung, die Voraussetzungen des Maximumprinzips noch weiter abgeschwächt werden. Dieses Vorgehen finden wir bereits in der Arbeit „Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions“, [11]. Es muss an dieser Stelle jedoch betont werden, dass dieser lokalisierte Begriff nicht mehr länger die endliche Optimalität impliziert, so dass eventuelle Kandidaten nicht gefunden werden können (vgl. [12]). Auf der anderen Seite ist der Begriff der schwachen Überholungsoptimalität gleichermaßen ungeeignet für Aufgaben, in denen aufgrund des a priori gegebenen unendlichen Horizontes die Divergenz des Zielfunktionals ausgeschlossen werden muss.

In der vorliegenden Arbeit werden wir deshalb, wie bereits zuvor erwähnt, den Begriff der globalen Optimalität verwenden. Wir möchten jedoch auch noch einmal betonen, dass die Wahl eines geeigneten Optimalitätsbegriffs von der jeweiligen Aufgabenklasse

---

<sup>11</sup>Hamiltonfunktion ist die Bezeichnung für die über den Steuerbereich maximierte Pontryagin-Funktion.

abhängt und in einem anderen Kontext möglicherweise ein anderer Begriff vorzuziehen ist.

## 3.7 Bekannte Ergebnisse

In den letzten Jahrzehnten kam es zur vermehrten Untersuchung von Steuerungsproblemen über einem unendlichen Zeithorizont. Im Laufe dieser Forschungsarbeit konnten unter geeigneten Voraussetzungen sowohl Existenzaussagen für optimale Steuerungen, als auch notwendige Bedingung für Optimierer herausgestellt werden. In diesem Unterkapitel werden wir einige Resultate herausstellen.

### 3.7.1 Existenz optimaler Steuerungen

Die Theorie der Existenz optimaler Steuerungen und die Frage der Steuerbarkeit ist für die Betrachtung von Steuerungsaufgaben eine wesentliche Voraussetzung. Wir werden an dieser Stelle jedoch nicht zu ausführlich in die Existenztheorie einsteigen. Wir präsentieren nur kurz ein Existenzresultat, welches auf die später betrachtete Aufgabenklasse passen wird. Die Passfähigkeit ist insofern gegeben, dass der im Folgenden präsentierte Existenzsatz, so wie wir es später auch machen werden, im gewichteten Raum  $W_p^{n,1}((0, \infty), \nu) \times L_p^m((0, \infty), \nu)$  formuliert ist. Mehr sogar noch wird sich zeigen, dass die zur Sicherung der Existenz notwendigen Bedingungen denen, die wir für die Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien benötigen, gleichen werden. So erhalten wir zusammen ein Framework, welches nicht nur die Frage der notwendigen Bedingungen klärt, sondern auch die Fragestellung der Existenz einer optimalen Steuerung beantwortet.

Wir beziehen uns hierzu auf die Arbeit „An existence theorem for a class of infinite horizon optimal control problems“, [41]. In dieser wird die folgende Aufgabenstellung betrachtet. Minimiere

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \tilde{\nu}(t) dt$$

bezüglich aller Prozesse  $(x, u)$  der Räume  $W_p^{n,1}((0, \infty), \nu) \times L_p^m((0, \infty), \nu)$ , welche den fast überall geltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)), \\ u(t) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \\ |x(t)| &\leq \beta(t), \beta \in L_p((0, \infty)) \end{aligned}$$

genügen, sowie die Anfangswertbedingung  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  erfüllen.

Für diese eben formulierte Optimierungsaufgabe lässt sich jetzt ein Existenzresultat in der folgenden Form angeben.

**Satz 3.7.1 (Existenzsatz, Lykina, [41, Theorem 4.1])**

Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:

- (E1) Die Menge der zulässigen Prozesse sei nicht-leer;
- (E2) Die Menge  $\mathcal{U}$  sei kompakt und konvex;
- (E3)  $\nu, \tilde{\nu}$  seien stetige Gewichtsfunktionen, wobei  $\tilde{\nu}$  auf  $[0, \infty)$  endlich integrierbar sei;
- (E4) Die Funktion  $r(t, \xi, v): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig bezüglich  $t, \xi$  und  $v$ , sowie stetig differenzierbar bezüglich  $\xi, v$ ;
- (E5) Die Funktion  $r(t, \xi, v)$  sei auf  $\mathcal{U}$  konvex bezüglich der Variablen  $v$ ;
- (E6) Die Funktion  $r(t, \xi, v)$  genüge der Wachstumsbedingung

$$|r(t, \xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m)| \leq \frac{A_1(t)}{\tilde{\nu}(t)} + B_1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i|^p}{\tilde{\nu}(t)} \nu(t) + \sum_{k=1}^m \frac{|v_k|^p}{\tilde{\nu}(t)} \nu(t) \right)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Hierbei sei  $A_1 \in L_1((0, \infty))$  und  $B_1 \in \mathbb{R}$ ,  $B_1 > 0$ ;

- (E7) Der Gradient  $\nabla_v r(t, \xi, v)$  genüge der Wachstumsbedingung

$$\left| \nabla_v r(t, \xi_1, \dots, \xi_n, v_1, \dots, v_m) \frac{\tilde{\nu}(t)}{\nu(t)} \right| \leq A_2 \nu^{-1/q}(t) + B_2 \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q} + \sum_{k=1}^m |v_k|^{p/q} \right)$$

für alle  $(t, \xi, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Hierbei sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < p < \infty$  sowie  $A_2 \in L_q((0, \infty))$  und  $B_2 \in \mathbb{R}$ ,  $B_2 > 0$ ;

- (E8) Die Dynamik  $\varphi(t, \xi, v): (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei durch

$$\varphi(t, \xi, v) := A(t, \xi) + B(t, \xi)v$$

definiert, wobei

$$|B_{i,j}(t, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq A_{3;i,j}(t) \nu^{-1/q}(t) + B_{3;i,j} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p/q}$$

für alle  $(t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  und alle  $i, j: i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$  gelte. Hierbei sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $A_{3;i,j} \in L_q((0, \infty))$  und  $B_{3;i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $B_{3;i,j} > 0$ ;

- (E9) Die Dynamik  $\varphi(t, \xi, v)$  genüge für alle  $(t, \xi, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  der Wachstumsbedingung

$$|\varphi(t, \xi, v)| \leq C_1 + C_2 |\xi| + C_3 |\xi| \cdot |v| + C_4 |v|$$

mit nicht-negativen Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ;

- (E10) Weiterhin seien die Funktionen  $A(t, \xi), B(t, \xi)$  (aus der Dynamik) bezüglich  $\xi$  uniform Lipschitz-stetig;

Dann hat die obige Optimierungsaufgabe mindestens eine Lösung im Sinn von „criterion L1“.



**Bemerkung 3.7.1**

Criterion  $L1$  entspricht der globalen Optimalität, siehe Definition 3.6.3, mit  $\mathbb{X} \times \mathbb{U}$  gemäß  $W_p^{n,1}((0, \infty), \nu) \times L_p^m((0, \infty), \nu)$  gewählt.

**Bemerkung 3.7.2**

Enthält das Problem noch zusätzliche Zustandsbeschränkungen in Form isoperimetrischer Bedingungen, so findet man mit „Existence Theorem for Infinite Horizon Optimal Control Problems with Mixed Control-State Isoperimetrical Constraint“, [42], eine Erweiterung von Satz 3.7.1, welche auch diese abdeckt.

Weitere Existenzresultate zur optimalen Steuerung über einem unendlichen Zeithorizont findet man unter anderem in den Arbeiten [7], [17] sowie [40, 41].

**3.7.2 Notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung**

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich vorrangig mit der Frage notwendiger Optimalitätskriterien, das heißt die Existenz einer optimalen Steuerung muss bereits vorausgesetzt werden. Diese Voraussetzung kann zum Teil aus einem physikalischen oder ökonomischen Hintergrund motiviert werden. Zum anderen gibt es wie im vorangegangenen Abschnitt angerissen, Sätze über die Existenz optimaler Steuerungen sowie der Steuerbarkeit an sich.

Im Folgenden gehen wir auf bekannte Resultate der notwendigen Optimalitätsbedingungen für optimale Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont ein. Wir setzen entsprechend die Existenz einer optimalen Steuerung bereits explizit voraus.

Zunächst gehen wir auf die Ergebnisse von Aseev und Veliov ein. Diese stellen eine direkte Übertragung der klassischen Idee der Nadelvariation auf dem unendlichen Zeithorizont dar. In der Arbeit „Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount“, [9], befassen sie sich mit folgender Aufgabe der optimalen Steuerung: Sei  $G \neq \emptyset$  eine offene und konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht-leer. Weiter seien  $f : [0, \infty) \times G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : [0, \infty) \times G \times U \rightarrow \mathbb{R}$  sowie die partiellen Ableitungen  $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $g_x(\cdot, \cdot, \cdot)$  lokal beschränkt und messbar in  $t \in [0, \infty)$  für jedes  $(x, u) \in G \times U$  sowie stetig in  $(x, u)$  für fast jedes  $t \in [0, \infty)$ . Es wird das folgende Steuerungsproblem studiert:

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty g(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \sup$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0 \in G, u(t) \in U$$

Zur Untersuchung dieser Aufgabe legen Aseev und Veliov das Konzept der schwachen lokalen Überholungsoptimalität (LWOO) zugrunde, wie wir sie in der folgenden Definition zitieren.

**Definition 3.7.1 ([9, Seite 4, Definition 1])**

Eine zulässige Steuerung  $u_*$ , für die die korrespondierende Zustandstrajektorie  $x_*$  auf

$[0, \infty)$  existiert, heißt lokal schwach Überholungsoptimal (LWOO), falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass jede zulässige Steuerung  $u$  mit

$$\text{meas}\left(\left\{t \geq 0 \mid u(t) \neq u_*(t)\right\}\right) \leq \delta$$

und für jedes  $\varepsilon > 0$ , sowie jedes  $T > 0$  ein  $T' > T$  existiert, so dass die zu  $u$  korrespondierende Zustandstrajektorie  $x$  entweder nicht auf  $[0, T']$  erweiterbar ist, oder

$$J_{T'}(x_*, u_*) \geq J_{T'}(x, u) - \varepsilon$$

gilt.

Die Verwendung des Begriffes der (lokalen) schwachen Überholungsoptimalität legt bereits nahe, dass es sich bei dem im Folgenden präsentierten Maximumprinzip um eine notwendige Optimalitätsbedingung für Aufgaben handelt, bei denen die Divergenz des Zielfunktional explizit zugelassen wird.

**Satz 3.7.2 (Notwendige Optimalitätsbedingungen, Aseev und Veliov, [9])**

Sei  $u_*$  eine zulässige LWOO-Steuerung und  $x_*$  die zugehörige Zustandstrajektorie. Weiter existiere ein  $\delta > 0$  und eine nicht-negativ integrierbare Funktion  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für jedes  $\xi \in G$  mit  $\|\xi - x_0\| < \delta$  das Anfangswertproblem  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$ ,  $x(0) = \xi$  eine auf  $[0, \infty)$ , in  $G$  liegende Lösung  $x(\xi; \cdot)$  hat, die fast überall

$$\max_{\theta \in [x(\xi; t), x_*(t)]} \left| \langle g_x(t, \theta, u_*(t)), x(\xi; t) - x_*(t) \rangle \right| \leq \|\xi - x_0\| \lambda(t)$$

genügt. Dann ist die Vektorfunktion  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$\varphi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} g_x(s, x_*(s), u_*(s)) ds$$

mit dem Fundamentalsystem  $Z_*$  des adjungierten Systems

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* z(t),$$

lokal absolut stetig und genügt den Bedingungen

1.  $\varphi$  ist Lösung der adjungierten Gleichung

$$\dot{\varphi}(t) = -H_x(t, x_*(t), u_*(t), \varphi(t)),$$

2.  $u_*$  genügt mit  $\varphi$  fast überall der Maximumbedingung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), \varphi(t)) = \sup_{v \in U} H(t, x_*(t), v, \varphi(t)).$$

$H$  ist hierbei die Pontryagin-Funktion  $H(t, x, u, \varphi) = -g(t, x, u) + \langle f(t, x, u), \varphi \rangle$ .

Zu diesem Satz merken wir abschließend folgendes an:

**Bemerkung 3.7.3**

In „Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount“, [9], diskutieren die Autoren noch weitere Spezialfälle, in denen sich die oben gestellten Voraussetzungen reduzieren lassen. Weiterhin werden in der Arbeit hinreichende Bedingungen formuliert, unter denen die Voraussetzungen des Maximumprinzips erfüllt sind, die sich jedoch leichter an konkreten Aufgaben verifizieren lassen. Diese a priori prüfbareren Voraussetzungen sind von besonderem Interesse für den Anwender. Abschließend bleibt zu erwähnen, dass es sich bei dem zitierten Satz um ein Maximumprinzip in Normalform handelt.

Die von Aseev und Veliov entwickelte Theorie scheint uns in der Hinsicht bemerkenswert, dass sie zum einen die klassischen Ideen unmittelbar weiterentwickelt, zum anderen dabei auch eine große Klasse von Steuerungsaufgaben abdeckt. So ist die Behandlung nicht-linearer Steuerungsprobleme möglich. Dies ist ein entscheidender Vorteil gegenüber der später präsentierten „Separationstechnik“, welche bisher nur für lineare Steuerungsprobleme bewiesen wurde. Ebenfalls erlaubt uns das Theorem in „Needle variations in infinite-horizon optimal control“, [10], eine explizite Form der adjungierten anzugeben. Ihr Verhalten im Unendlichen, in Form geeigneter Transversalitätsbedingungen, muss jedoch separat diskutiert werden (vgl. [7]). Die Frage der Eindeutigkeit der Adjungierten bleibt auch zunächst offen.

Ein weiterer Ansatz zur Behandlung notwendiger Optimalitätskriterien für Aufgaben über einem unendlichen Zeithorizont wird von Pickenhain in den Arbeiten „Hilbert Space Treatment of Optimal Control Problems with Infinite Horizon“, [54], und „Infinite Horizon Optimal Control Problems in the Light of Convex Analysis in Hilbert Spaces“, [51], gegeben. Hier werden linear-quadratische Steuerungsprobleme mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont studiert. In diesen Arbeiten wird entsprechend der Optimalitätsbegriff von Definition 3.6.4 zugrunde gelegt. Es wird das folgende optimale Steuerungsproblem behandelt: Sei  $U \neq \emptyset$  eine konvexe und kompakte Teilmenge der reellen Zahlen. Weiter seien  $W, R \in L_\infty((0, \infty))$  nicht-negativ und  $w, r \in L_2((0, \infty), \mu)$ . Zusätzlich seien Funktionen  $A, B, C \in L_\infty((0, \infty)) \cap C^0([0, \infty))$  gegeben. Das Gewicht  $\mu(t) = e^{\rho t}$  genüge  $\rho < -2\hat{A} < 0$  mit  $\hat{A} = \max\{\sup_{t \in [0, \infty)} |A(t)|, 0\}$ . So wird das folgende linear-quadratische Steuerungsproblem betrachtet. Minimiere

$$J(x, u) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} (W(t)x^2(t) + R(t)u^2(t)) + w(t)x(t) + r(t)u(t) \right\} \mu(t) dt$$

bezüglich aller Prozesse der analytischen Güte  $(x, u) \in W_2^{1,1}((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu)$  unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t) && \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0, \\ u(t) &\in U && \text{f.ü. auf } (0, \infty). \end{aligned}$$

Wir zitieren das folgende Maximumprinzip aus „Infinite Horizon Optimal Control Problems in the Light of Convex Analysis in Hilbert Spaces“, [51].

**Satz 3.7.3 (Maximumprinzip in Normalform, Pickenhain, [51])**

Sei  $(x_*, u_*) \in W_2^{1,1}((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu)$  optimal. Weiter sei die Menge der zulässigen Prozesse, in denen das Zielfunktional  $J$  endlich wird, nicht leer und ungleich der Menge  $\{(x_*, u_*)\}$ . Zusätzlich mögen die Inklusionen  $Wx_*, Ru_* \in L_2((0, \infty), \mu)$  gelten. Dann existieren Multiplikatoren  $(\lambda_0, y)$  mit  $\lambda_0 = 1$ ,  $y \in W_2^{1,1}((0, \infty), \mu^{-1})$ , so dass

$$\begin{aligned} H(t, x_*(t), u_*(t), y(t), \lambda_0) &= \max_{v \in U} H(t, x_*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty), \\ \dot{y}(t) &= -H_\xi(t, x_*, u_*, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \end{aligned}$$

gilt. Die Funktion

$$\begin{aligned} H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) &= -\lambda_0 \left\{ \frac{1}{2} (W(t)x^2(t) + R(t)u^2(t)) + w(t)x(t) + r(t)u(t) \right\} \mu(t) \\ &\quad + \eta(A(t)\xi + B(t)v + C(t)) \end{aligned}$$

heißt Pontryagin-Funktion.

Wir runden den zitierten Satz mit einigen anschließenden Bemerkungen ab.

**Bemerkung 3.7.4**

In „Infinite Horizon Optimal Control Problems in the Light of Convex Analysis in Hilbert Spaces“, [51], findet sich eine weitere Formulierung des Satzes, die eine deutlich schwächere Forderung an die Funktion  $\mu$  stellt. Es kann in dieser Formulierung (unter geeigneten Voraussetzungen) ein echtes Gewicht, das heißt  $\rho > 0$ , verwendet werden. In „First-order necessary optimality conditions for infinite horizon optimal control problems with linear dynamics and convex objective“, [74], wurden die Überlegungen des zitierten Satzes auf vektorwertige Zustände und Steuerungen erweitert. In den bisherigen Arbeiten wurden jedoch nur linear-quadratische Steuerungsaufgaben untersucht.

Wie bereits an dem zitierten Satz erkannt werden kann, werden in den Arbeiten von Pickenhain Steuerungsaufgaben in eine konvexe Hilbertraumtheorie eingebettet. Die Behandlung der konvexen Aufgabe in gewichteten Lebesgue- und Sobolev-Räumen erlaubt es, das Steuerungsproblem auf ein Trennungsproblem von konvexen Mengen zu reduzieren. Bei diesem Vorgehen ergeben sich in natürlicher Weise Transversalitätsbedingungen aus der Raumzugehörigkeit der trennenden Hyperebene. Dies ist insbesondere bei der numerischen Behandlung von Steuerungsaufgaben, wie es in „An indirect pseudospectral method for the solution of linear-quadratic optimal control problems with infinite horizon.“, [52], vorgeschlagen wird, von Bedeutung. In diesem Zusammenhang scheint uns diese Perspektive auf Steuerungsaufgaben sehr geeignet. Das von Pickenhain vorgeschlagene Vorgehen stützt sich jedoch stark auf die lineare Funktionalanalysis und scheint zunächst für die Behandlung nicht-linearer Steuerungsprobleme ungeeignet. Es bleibt offen, ob sich eine solche Trennung in gewichteten Räumen für nicht-lineare Aufgaben realisieren lässt. Wir werden im Laufe dieser Arbeit auf diese Fragestellung eingehen und versuchen, die Beweisideen von Pickenhain in geeigneter Weise auf nicht-lineare Steuerungsaufgaben zu übertragen. Zuvor betrachten wir jedoch noch ein letztes Resultat, welches auf Tauchnitz zurückgeht, in dem notwendige Bedingungen für stark lokale Minima bezüglich der Supremumsnorm studiert werden.

In [64] wird mit einem  $\rho > 0$  die Aufgabe

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} r(t, x(t), u(t))e^{-\rho t} dt \rightarrow \inf$$

bezüglich der fast überall geltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0, \\ u(t) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathcal{U} \neq \emptyset \end{aligned}$$

betrachtet. Versehen mit dem Begriff des stark lokalen Minimierers untersucht Tauchnitz notwendige Optimalitätsbedingungen in der folgenden Form.

**Definition 3.7.2 ([64, Seite 33, §4])**

Ein zulässiger Prozess  $(x_*, u_*) \in \mathcal{A}_{adm}$  heißt stark lokaler Minimierer, genau dann, wenn eine Zahl  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$J(x, u) \geq J(x_*, u_*)$$

für alle zulässigen Paare  $(x, u)$  mit  $\|x - x_*\|_{\infty} < \varepsilon$  gilt.

Wir zitieren die bewiesenen notwendigen Optimalitätsbedingungen in Form des Pontryaginschen Maximumprinzips.

**Satz 3.7.4 ([64, Theorem 4.1])**

Sei  $\nu$  ein Gewicht der Form  $\nu(t) = e^{-at}$ ,  $0 < a < 2\rho$ . Weiter sei  $\mathcal{A}_{Lip} \subseteq W_2^{n,1}((0, \infty), \nu)$  die Menge aller  $x \in W_2^{n,1}((0, \infty), \nu)$  welche für ein beliebiges  $u \in \mathbb{U}$ ,

$$\mathbb{U} := \left\{ u \in L_{\infty}^m \mid u(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty) \right\},$$

in einer uniformen Umgebung um  $x$  eine Lipschitz-Bedingung erfüllen. Die Menge  $\mathcal{X}_{Lip} \subseteq W_2^{n,1}((0, \infty), \nu)$  sei die Menge aller  $x \in W_2^1((0, \infty), \nu)$ , für die ein  $\delta > 0$  existiert, so dass mit

$$V_{\delta} := \left\{ (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid \|\xi - x_*(t)\| \leq \delta \right\}$$

die Voraussetzungen

1. Die Funktionen  $r(t, \xi, v)$ ,  $\varphi(t, \xi, v)$  sowie deren Ableitungen  $r_{\xi}(t, \xi, v)$ ,  $\varphi_{\xi}(t, \xi, v)$  seien messbar in  $t$  und für jedes feste  $t \in (0, \infty)$  stetig in  $(\xi, v)$  auf  $V_{\delta} \times \mathcal{U}$ ;
2. Für jede Funktion  $u \in \mathbb{U}$  existiere eine Zahl  $C_0 > 0$ , so dass für alle  $\xi \in V_{\delta}$

$$\begin{aligned} \|(r(t, \xi, u(t)), \varphi(t, \xi, u(t)))\| &\leq C_0(1 + \|\xi\|), \\ \|(r_{\xi}(t, \xi, u(t)), \varphi_{\xi}(t, \xi, u(t)))\| &\leq C_0 \end{aligned}$$

für fast alle  $t \in (0, \infty)$  gilt;

erfüllt seien. Die Menge  $\mathcal{A}_{Lip}$  sei die Menge aller  $(x, u) \in W_2^{n,1}((0, \infty), \nu) \times \mathbb{U}$  mit  $x \in \mathcal{X}_{Lip}$ . Es gilt: Ist  $(x_*, u_*) \in \mathcal{A}_{adm} \cap \mathcal{A}_{Lip}$  ein stark lokaler Minimierer, dann existieren nicht beide gleichzeitig verschwindende Multiplikatoren  $\lambda_0 \geq 0$  und  $p$ , so dass

$$p \in W_2^{n,1}((0, \infty), \nu^{-1}) \quad (\text{T})$$

gilt und die Bedingungen

$$\dot{p}(t) = -\varphi_\xi(t, x_*(t), u_*(t))p(t) + \lambda_0 r_\xi(t, x_*(t), u_*(t)) \quad (\text{K})$$

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0) \quad (\text{M})$$

fast überall auf  $(0, \infty)$  erfüllt sind.

### Bemerkung 3.7.5

Das Maximumprinzip in [64] liegt zunächst nicht in Normalform vor. Der anormale Fall  $\lambda_0 = 0$  kann entsprechend auftreten, wie es im Fall des berühmten Halkin-Beispiels auch passiert. Tauchnitz gibt in [64] zusätzliche Bedingungen an, unter denen die Normalform garantiert werden kann. Für entsprechende Details verweisen wir auf die Publikation „The Pontryagin Maximum Principle for Nonlinear Optimal Control Problems with Infinite Horizon“, [64].

### Bemerkung 3.7.6

In [64] wird neben der Transversalitätsbedingung in Form einer Raumzugehörigkeit noch eine explizite Darstellung der Adjungierten bewiesen. Diese Darstellung ist formal mit den Ergebnissen von Aseev und Veliov deckungsgleich. Die Frage der Eindeutigkeit der Adjungierten bleibt hierbei jedoch offen.

Weitere Diskussionen von optimalen Steuerungsaufgaben, auf die wir hier jedoch nicht weiter eingehen konnten, können in Standardwerken, wie beispielsweise [17], [23] und [30] nachgelesen werden.

# 4 Notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung für Steuerungsaufgaben mit einem a priori gegebenen unendlichen Zeithorizont

## 4.1 Formulierung einer Steuerungsaufgabe im Hilbertraum

Wir betrachten die im Folgenden mit  $(P_\infty)$  bezeichnete Aufgabe der Optimalsteuerung.

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty r(t, x(t), u(t)) \hat{\mu}(t) dt \rightarrow \inf!$$
$$(x, u) \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu), \mu(t) = e^{-\rho t}, \rho > 0$$
$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty)$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty)$$

Das Integral im Zielfunktional wollen wir als (eigentliches) Lebesgue-Integral verstehen. Für die rechte Seite der Differenzialgleichung  $\varphi$  nehmen wir zunächst keine weitere Einschränkung vor. Die Minimierung erfolgt in dem mit  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 0$  gewichteten Hilbertraum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu)$ . Mit  $d\hat{\mu} = \hat{\mu}(t)dt$  haben wir im Zielfunktional ein neues Maß eingeführt. Das Gewicht  $\mu$  muss später so gewählt werden, dass es zu dem Maß  $d\hat{\mu}$  passt. Wir werden in der vorliegenden Arbeit für die beiden Gewichte  $\mu$ ,  $\hat{\mu}$  nur den Fall exponentieller Gewichtsfunktionen studieren.

Zur Aufgabenstellung muss angemerkt werden, dass Steuerung und Zustand zunächst nur auf der offenen Menge  $(0, \infty)$  definiert sind. Eine explizite Auswertung des Zustandes im Zeitpunkt  $t = 0$  muss entsprechend gesondert gerechtfertigt werden. Hierzu bedienen wir uns der Folgerung 2.4.3, welches uns zur stetigen Auswertung der Funktion  $x$  im Nullpunkt berechtigt. Hinzukommend muss die Interpretation der Differenzialgleichung erklärt werden, um die Wohldefiniertheit der Aufgabe sicherzustellen. Zunächst

erhalten wir im Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu)$  nur eine schwache Differenzialgleichung. Insbesondere gestaltet sich die Auswertung der rechten Seite  $\varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$  als schwierig. Hierbei geht die Steuerung  $u$  ein, welche gemäß des Raumes  $L_2^m((0, \infty), \mu)$  nicht punktweise auswertbar ist. Es muss eine entsprechende Interpretation von  $u(t)$  angegeben werden. Für jeden Lebesgue-Punkt  $t \geq 0$  der Steuerung  $u$  verstehen wir  $u(t)$  mit der Interpretation

$$u(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t-h}^t u(\tau) d\tau.$$

Hierbei ist die punktweise Setzung von  $u$  aufgrund von Folgerung 2.2.4 im Zusammenhang mit Bemerkung 2.4.6 fast überall auf der positiven reellen Halbachse möglich. Wir schließen jene Nullmenge aus der Betrachtung unserer Aufgabenstellung aus, wo  $u(t)$  nicht wohl definiert ist. Auf dem verbleibenden Zeithorizont ist der Ausdruck  $\varphi(t, x(t), u(t))$  jetzt gerechtfertigt. Wir erhalten ein fast überall definiertes Anfangswertproblem. Auf der linken Seite der Differenzialgleichung steht, wie bereits angesprochen, zunächst die schwache Ableitung von  $x$ . Folgerung 2.4.3 liefert uns jedoch die Existenz eines lokal absolut stetigen Repräsentanten, welcher fast überall im klassischen Sinn differenzierbar ist. Wir verstehen die Interpretation der Differenzialgleichung mit diesem fast überall differenzierbaren Repräsentanten und erhalten eine wohldefinierte Aufgabe. Es handelt sich um ein Anfangswertproblem im Sinn von Carathéodory (siehe Kapitel 2.6.2).

## 4.2 Die Variationen im Sinn von Euler und Weierstraß

Im Laufe der Entwicklung der Variationsrechnung, aus welcher die Steuerungstheorie hervorgegangen ist, haben sich zwei wesentliche Arten der Variation etabliert. Dies sind zum einen die Nadelvariation nach Weierstraß, und zum anderen die Variation mittels einer Linearkombination im zugrunde liegenden Raum nach Euler. In diesem Kapitel vergleichen wir die beiden Variationstypen nach ihrer kurzen Vorstellung.

Wir betrachten zunächst die Variation nach Euler. Hierzu studieren wir exemplarisch folgendes Variationsproblem

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf!$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

mit stetig differenzierbarem  $r(t, \xi, p) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen. Die auf Euler zurückgehende Idee zur Variation

$$x_\lambda = x + \lambda y, y \in C_0^1([t_0, t_f])$$

führt zu den bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen. Hierbei ist es wichtig zu bemerken, dass die variierte Lösung  $x_\lambda$  den für die Aufgabenstellung zulässigen Bereich nicht



verlässt. In unserem Fall heißt dies,  $x_\lambda$  muss stetig differenzierbar sein und den Randbedingungen  $x_\lambda(t_0) = x_0$ ,  $x_\lambda(t_f) = x_f$  genügen. In dem obigen Variationsansatz wird dies durch die Nullrandwerte der Funktion  $y$  realisiert. In einem allgemeineren Kontext muss dieser Ansatz dem Raum entsprechend angepasst werden, so dass die variierte Funktion die Menge der zulässigen Prozesse nicht verlässt.

Beim zweiten Typ der Variation, im Sinn von Weierstraß, erfolgt die Konstruktion der Variation ein wenig komplexer. Die Idee der sogenannten Nadelvariation von Weierstraß ist ihrer Konstruktion nach, dem Funktionenraum der stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen angepasst. Wir illustrieren die Nadelvariation an der folgenden Aufgabe der optimalen Steuerung. Minimiere

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} r(t, x(t), u(t)) dt$$

unter den fast überall geltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u(t)), \\ h(x(t_0), x(t_f)) &= 0, \\ g(x(t_0), x(t_f)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Die Minimierung erfolge hierbei im Raum der stückweise stetigen beziehungsweise stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Die auf Weierstraß zurückgehende Idee der Nadelvariation besteht jetzt darin, die ohnehin nur stückweise stetig gegebene Steuerung  $u$  auf einem Intervall  $(\tau - \lambda, \tau]$  in der Form

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t) & \text{falls } t \notin (\tau - \lambda, \tau] \\ v & \text{falls } t \in (\tau - \lambda, \tau] \end{cases}$$

abzuändern. Hierbei sei  $v \in \mathcal{U}$  beliebig gewählt. Offenbar ist die variierte Steuerung  $u_\lambda$  wieder stückweise stetig und wegen  $v \in \mathcal{U}$  insbesondere zulässig im Sinn unserer Aufgabenstellung. Der Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  führt zur ursprünglichen Steuerung. Interessant ist das Verhalten auf Seiten des Zustandes. Um dies zu verstehen, setzen wir  $u_\lambda$  in unsere Dynamik ein. Bis zum Zeitpunkt  $\tau - \lambda$  erhalten wir die ursprüngliche Trajektorie. Auf dem Intervall  $(\tau - \lambda, \tau]$  wirkt die Variation und beeinflusst die Ableitung unserer Trajektorie, es kommt zu einer unstetigen Änderung dieser. Es entsteht im Grenzfall  $\lambda \rightarrow 0$  bildlich eine Art Nadel, welche namensgebend für diese Art der Variation ist. Ziel dieser Methode ist es jetzt, die Auswirkung dieser Störung auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$ , im Vergleich zur Ausgangstrajektorie, zu untersuchen.

Vergleichend lässt sich aus der Vorstellung der erwähnten Methoden folgendes Fazit ziehen. Die Variation im Sinn von Euler kann man als eine Variation im zugrunde liegenden Raum verstehen. Die Nadelvariation ist ein speziell auf den Raum der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen angepasstes Spezialinstrument. Sie stellt die Frage der Auswirkungen einer Störung in einem beliebigen Zeitpunkt  $\tau$ . Entsprechend handelt es sich um ein punktweises oder auch lokales Argument. Die Variation im Sinn von Euler hingegen, untersucht die Auswirkung in dem betrachteten Zustandsraum

(Funktionsraum) selbst und wirkt sich entsprechend auf den gesamten Zeithorizont aus. Welche Art der Variation schließlich die geeignetere ist, muss von Aufgabe zu Aufgabe verschieden festgelegt werden. Ziel der folgenden Kapitel ist die mathematische Vorstellung beider Variations- beziehungsweise Beweismethoden anhand notwendiger Optimalitätskriterien für Steuerungsaufgaben, welche affin-linear bezüglich der Steuerung und nicht-linear bezüglich des Zustandes sind. Es gilt die Frage der geeigneten Variation in diesem Kontext zu beantworten. Wir werden hierbei sehen, dass die Nadelvariation konstruktionsbedingt nur eine Fortsetzung der Adjungierten  $y$  auf die offene Menge  $(0, \infty)$  erlaubt. Wir können keine Aussage über  $y(0)$  tätigen. Bei der Euler-Variation hingegen verbleiben wir mit dem variierten Prozess im Raum. Einbettungssätze erlauben uns so, die Adjungierte  $y$  in den Nullpunkt fortzusetzen. Es wird sich jedoch herausstellen, dass diese Methodik nur für eine eingeschränkte Klasse nicht-linearer Aufgaben geeignet ist.

## 4.3 Untersuchung des Steuerungsproblems mit einer Euler-Variation

### 4.3.1 Formulierung des Maximumprinzips

Wir formulieren die nachstehenden Voraussetzungen, auf die wir uns im Laufe dieses Kapitels immer wieder beziehen werden. Sie stellen die Grundvoraussetzungen unserer notwendigen Optimalitätskriterien dar.

(V1) Die Funktion  $\varphi$  genüge der uniformen Lipschitz-Bedingung

$$\forall t \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n : |\varphi(t, \xi_1, v) - \varphi(t, \xi_2, v)|_2 \leq L \cdot |\xi_1 - \xi_2|_2$$

mit der Konstanten  $L > 0$ .

(V2) Die Funktion  $\varphi$  genüge für alle  $(t, \xi, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$  der Wachstumsbedingung

$$|\varphi(t, \xi, v)|_2 \leq c(1 + |\xi|_2)$$

mit  $c > 0$ .

(V3) Die Funktion  $\varphi$ , mit Argumenten  $t, \xi, v$ , sei stetig und stetig differenzierbar bezüglich  $\xi$  und  $v$ .

(V4) Die Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_v[\varphi]$  genüge der Gestalt

$$\mathcal{J}_v[\varphi](t, \xi, v) = \psi_1(t, \xi).$$

Mit anderen Worten,  $\varphi$  besitzt die formale Gestalt  $\varphi(t, \xi, v) = \psi_1(t, \xi)v + \psi_2(t, \xi)$ .

(V5) Die Jacoemerkung 4.3.3bi-Matrix von  $\varphi$  bezüglich  $\xi$  genüge entlang des optimalen Prozesses  $(x_*, u_*)$  der Inklusion

$$\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in L_\infty^{n \times n}((0, \infty)).$$

Bezüglich  $v$  erfülle die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  auf  $[0, \infty)$  die Wachstumsbeschränkung

$$\left| \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 = \left| \psi_1(t, x_*(t)) \right|_2 \leq c_0 e^{\sigma t}.$$

Hierbei sei  $\sigma := \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2$  und  $c_0 > 0$ .

(V6) Das Gewicht  $\mu$  sei gemäß  $\mu(t) = e^{-\rho t}$  gewählt, wobei  $\rho > 2 \max\{L, c, \sigma\}$  gelte. Die Konstanten  $L, c, \sigma$  seien hierbei gemäß der Voraussetzungen (V1), (V2) und (V5) gewählt.

(V7) Die Funktion  $r$ , mit Argumenten  $t, \xi, v$ , sei auf der konvexen Menge  $\mathcal{U}$  konvex bezüglich  $v$ .

(V8)  $r$  sei stetig und stetig differenzierbar bezüglich  $\xi$  und  $v$ .

(V9) Der Integrand  $r$  genüge für alle  $(t, \xi, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$  der Wachstumsbedingung

$$\left| r(t, \xi, v) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2 \leq A_1(t) + B \left( |\xi|_2^2 + |v|_2^2 \right),$$

mit  $A_1 \in L_1((0, \infty), \mu)$  und  $B > 0$ .

(V10) Die Gradienten von  $r$  bezüglich  $\xi$  und  $v$  genügen den Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} \left| \nabla_\xi r(t, \xi, v) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2 &\leq A_1(t) + B_1(t) |\xi|_2 + C_1(t) |v|_2, \\ \left| \nabla_v r(t, \xi, v) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2 &\leq A_2(t) + B_2(t) |\xi|_2 + C_2(t) |v|_2 \end{aligned}$$

mit  $A_i \in L_2((0, \infty), \mu)$  und  $B_i, C_i \in L_\infty((0, \infty))$ ,  $i = 1, 2$ .

(V11) Die Menge  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  sei konvex und kompakt.

Wir möchten an dieser Stelle kurz auf den Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen (V1) und (V5) eingehen.

**Bemerkung 4.3.1**

Die uniforme Lipschitz-Bedingung (V1) impliziert, dass die Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_\xi[\varphi]$  entlang des optimalen Prozesses  $(x_*, u_*)$  wesentlich beschränkt ist (vgl. Voraussetzung (V5)). Gemäß (V1) gilt für alle  $t > 0$  die Bedingung

$$\left| \varphi_i(t, x_*(t) + h e_j, u_*(t)) - \varphi_i(t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 \leq hL.$$

Hierbei sei  $h > 0$  ein beliebiger Parameter und  $\mathbf{e}_j$  der  $j$ -te kanonische Basisvektor. Aus der letzten Ungleichung schließen wir

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_i(t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(t, x_*(t) + h\mathbf{e}_j, u_*(t)) - \varphi_i(t, x_*(t), u_*(t))}{h} \right|_2 \leq L.$$

Die Komponentenfunktionen der Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_\xi[\varphi]$  sind uniform beschränkt. Insbesondere existiert eine, nur von der Lipschitz-Konstanten  $L$  abhängige Konstante  $c_L$ , so dass

$$\left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 \leq c_L$$

für fast alle  $t \in (0, \infty)$  richtig ist. Die Jacobi-Matrix ist wesentlich beschränkt und es gilt  $\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in L_\infty^{n \times n}((0, \infty))$ . Folglich stellt Voraussetzung (V5) keine weitere Einschränkung an die Aufgabe dar. Die eigentliche Forderung, welche es sorgfältig zu prüfen gilt, ist die uniforme Lipschitz-Bedingung (V1).

**Satz 4.3.1 (Maximumprinzip für  $(P_\infty)$ )**

Mit  $\mathbb{X} \times \mathbb{U} = W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu)$  sei  $(x_*, u_*)$  optimal, gemäß Definition 3.6.4. Weiterhin seien die Voraussetzungen (V1) bis (V11) erfüllt. Dann existieren Multiplikatoren  $(\lambda_0, y) \in \mathbb{R} \times W_2^{n,1}((0, \infty), \mu^{-1})$  mit

$$\lambda_0 = 1 \tag{N}$$

$$y \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu^{-1}) \tag{T}$$

mit denen zusammen  $(x_*, u_*)$  den Bedingungen

$$\dot{y}(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} H(t, x_*(t), u_*(t), y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \tag{K}$$

$$H(t, x_*(t), u_*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x_*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \tag{M}$$

genügt. Dabei heißt

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) \hat{\mu}(t) + \eta^T \varphi(t, \xi, v)$$

Pontryagin Funktion.

**Bemerkung 4.3.2**

Die Eigenschaft (N) heißt Normalform des Maximumprinzips. Der entartete Fall  $\lambda_0 = 0$  kann unter unseren Voraussetzungen ausgeschlossen werden, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\lambda_0 = 1$  setzen können.

Weiterhin besitzt das hier präsentierte Maximumprinzip neben den Kernbedingungen – der Maximumbedingung (M) und der kanonischen Gleichung (K) – noch zusätzlich eine Transversalitätsbedingung (T). Wie wir in der nachstehenden Folgerung sehen werden, kann die Eigenschaft der Transversalität als eine Art Randbedingung zu dem kanonischen System (K) verstanden werden. Die zusätzliche Randbedingung kann so einen entscheidenden Vorteil bei der numerischen Analyse von Steuerungsaufgaben spielen. Man siehe hierzu auch „An indirect pseudospectral method for the solution of linear-quadratic optimal control problems with infinite horizon.“, [52].

Wir formulieren folgende Beobachtung.

**Folgerung 4.3.1**

Sei die Transversalitätsbedingung (T) aus dem Maximumprinzip, Satz 4.3.1, erfüllt, dann gilt für die Adjungierte  $y$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|_2 = 0.$$

Diese Folgerung ist eine unmittelbare Implikation von Lemma 2.5.6, angewandt auf die Adjungierte aus dem Maximumprinzip.

**4.3.2 Beweis des Maximumprinzips**

Wir beweisen das Maximumprinzip in den folgenden Schritten. Zunächst beschreiben wir eine gültige Variation im Sinn von Euler. Anschließend können wir diese variierte Funktion in unser Zielfunktional einsetzen, und so ein Variationslemma beweisen. Die Konstruktion eines geeigneten Kegels, welcher nicht den ganzen Raum aufspannt, liefert in Zusammenhang mit einem Trennungssatz eine weitere Variationsungleichung. Aus dieser Ungleichung können die Kernbedingungen des Maximumprinzips, Satz 4.3.1, abgeleitet werden. Die trennende Hyperebene wird hierbei zur Adjungierten und genügt der Transversalitätsbedingung.

Wir beginnen mit der Variation der Steuerung mittels einer Euler-Variation.

**Variation der Steuerung**

Wir betrachten die Menge aller zulässigen Steuerungen  $\mathbb{U}$ ,

$$\mathbb{U} := \left\{ u \in L_2^m((0, \infty), \mu) \mid u(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty) \right\}.$$

Als eine geeignete Variation der Steuerung im Hilbertraum  $L_2((0, \infty), \mu)$  erweist sich die Setzung

$$u(\cdot, \varepsilon) = u_*(\cdot) + \varepsilon(u(\cdot) - u_*(\cdot)), \quad u(\cdot) \in \mathbb{U}, \varepsilon \in [0, 1].$$

Die Funktion  $u(\cdot, \varepsilon)$  ist die Konvexkombination zwischen einer zulässigen Steuerung  $u$  und der optimalen Steuerung  $u_*$ , und aufgrund der Konvexität von  $\mathcal{U}$ , Voraussetzung (V7), ebenfalls zulässig. Der Ansatz spiegelt die Gedanken von Euler wider. Aus dieser Definition können wir direkt die Aussagen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = u(t, 0) = u_*(t)$$

und

$$\omega(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (u(t, \varepsilon) - u(t, 0)) = u(t) - u_*(t)$$

ablesen. Diese Aussagen charakterisieren die stetige und differenzierbare Abhängigkeit der variierten Steuerung vom Variationsparameter  $\varepsilon$  in der Stelle  $\varepsilon_0 = 0$ . Die Konvergenz interessiert uns hierbei im Sinn der fast überall punktweisen Konvergenz, auch wenn obige Grenzwerte sogar gleichmäßig beziehungsweise bezüglich der Norm angenommen werden.

**Bemerkung 4.3.3**

*Im Sinn einer Hilbertraumtheorie sind wir an Grenzwertausdrücken der Form*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|^2 dx$$

*interessiert. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz dieses Ausdrucks ist die Kombination aus fast überall punktweise geltender Konvergenz der Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und der Existenz einer  $L_2$ -Majorante  $g$ , die fast überall  $|f_n| \leq g$  genügt (vgl. Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, Satz 2.5.4.). Wir werden in den folgenden Schritten des Beweises sehen, dass sowohl die zulässigen Steuerungen als auch die zulässigen Zustände eine solche Majorante besitzen. Entsprechend ist es ausreichend, die im Folgenden auftretenden Grenzwerte nur im Sinn der fast überall punktweise geltenden Konvergenz zu diskutieren.*

Setzen wir den Variationsansatz für die Steuerung in unsere Systemdynamik ein, so ergibt sich das parameterabhängige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \varepsilon) &= \varphi(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) \\ x(0, \varepsilon) &= x_0, \end{aligned}$$

welches es zu studieren gilt.

**Lemma 4.3.1**

*Unter den Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V6) und (V11) hat das Anfangswertproblem,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \varepsilon) &= \varphi(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) \\ x(0, \varepsilon) &= x_0, \end{aligned}$$

*zu der variierten Steuerung  $u(\cdot, \varepsilon) = u_*(\cdot) + \varepsilon(u(\cdot) - u_*(\cdot))$ ,  $u \in \mathbb{U}$ ,  $u_*$  optimal, eine eindeutige Lösung  $x(\cdot, \varepsilon) \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ . Weiterhin wird die Lösung  $x$  bezüglich des Parameters  $\varepsilon$  gleichmäßig durch eine Funktion  $\gamma \in L_2((0, \infty), \mu) \cap C^0([0, \infty), \mathbb{R})$  majorisiert, das heißt es gilt für alle  $t \in [0, \infty)$  die Ungleichung  $|x(t, \varepsilon)| \leq \gamma(t)$ .*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  fixiert. Wir betrachten  $\tilde{\varphi}_\varepsilon(t, \xi) = \varphi(t, \xi, u(t, \varepsilon))$ . Unter den Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) impliziert Folgerung 2.6.4 die Existenz einer eindeutigen Lösung  $x$  im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen. Die Lösung ist auf dem gesamten Zeithorizont fortsetzbar. Gemäß Definition 2.6.1 erfüllt  $x$  insbesondere die Integralgleichung

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon)) d\tau.$$

Mit der Bellmann-Gronwall-Ungleichung, Lemma 2.5.3, schließen wir zusammen mit der Wachstumsbedingung (V2)

$$|x(t, \varepsilon)|_2 \leq |x_0|_2 + \int_0^t c(1 + |x(\tau, \varepsilon)|_2) d\tau \implies |x(t, \varepsilon)|_2 \leq (ct + |x_0|_2)e^{ct}.$$

Folglich ist  $x$ , uniform bezüglich des Parameters  $\varepsilon$ , durch die stetige Funktion

$$\gamma(t) := (ct + |x_0|_2)e^{ct}$$

beschränkt. Mit (V6) sieht man leicht, dass  $\gamma \in L_2((0, \infty), \mu)$  gilt. Wir nutzen diese Majorante und schließen  $x \in L_2^n((0, \infty), \mu)$  nach Satz 2.4.1. Für die Ableitung  $\dot{x}$  schätzen wir

$$|\dot{x}(t, \varepsilon)|_2 = \left| \varphi(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) \right|_2 \leq c(1 + |x(t, \varepsilon)|_2) \leq c(1 + \gamma(t)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty)$$

ab. Es folgt sofort  $\dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2^n((0, \infty), \mu)$ . Die Integrierbarkeit von  $\mu$  auf  $(0, \infty)$  ist hierbei unerlässlich. Insgesamt erhalten wir  $x \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  mit der Gewichtsfunktion  $\mu$ , wie in Voraussetzung (V6) gewählt.  $\square$

Direkt an unsere bisherigen Überlegungen anschließend, zeigen wir, dass die unter Lemma 4.3.1 gewonnene Trajektorie bezüglich des Variationsparameters  $\varepsilon$  an der Stelle  $\varepsilon_0 = 0$  stetig bezüglich der Norm des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$  ist.

**Lemma 4.3.2**

*Unter den Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V6) und (V11) konvergiert die Folge der Lösungen  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  des Anfangswertproblems aus Lemma 4.3.1 gegen die optimale Trajektorie  $x_*$ . Der Konvergenzbegriff beziehe sich auf die Topologie des Raumes  $L_2^n((0, \infty), \mu)$ .*

*Beweis.* Wir betrachten zunächst die Differenz  $|z(t, \varepsilon)|_2 := |x(t, \varepsilon) - x(t, 0)|_2$  und stellen

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon)|_2 &= |x(t, \varepsilon) - x(t, 0)|_2 \\ &\leq \int_0^t \left| \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0)) \right|_2 d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\{ \left| \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon)) \right|_2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0)) \right|_2 \right\} d\tau \end{aligned}$$

fest. Mit der konkreten Gestalt der Funktion  $\varphi(t, \xi, v)$  gemäß Voraussetzung (V4) und der Lipschitz-Bedingung, Voraussetzung (V1), schreiben wir

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon)|_2 &\leq \int_0^t \left\{ \left| \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon), u(\tau, \varepsilon)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon)) \right|_2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \psi_1(\tau, x(\tau, 0)) [u(\tau, \varepsilon) - u(\tau, 0)] \right|_2 \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\{ L|z(\tau, \varepsilon)|_2 + |\psi_1(\tau, x(\tau, 0))\varepsilon\omega(\tau)|_2 \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Mit  $\sigma := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, \infty)} |\mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))|_2$  und  $|\psi_1(t, x(t, 0))|_2 \leq c_0 e^{\sigma t}$  fast überall auf  $(0, \infty)$ , vergleiche Voraussetzung (V5)<sup>1</sup>, schließen wir

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon)|_2 &\leq \int_0^t \left\{ L|z(\tau, \varepsilon)|_2 + \varepsilon |\psi_1(\tau, x(\tau, 0))|_2 \cdot |\omega(\tau)|_2 \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\{ L|z(\tau, \varepsilon)|_2 + c_0 \varepsilon |\omega(\tau)|_2 e^{\sigma \tau} \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t L|z(\tau, \varepsilon)|_2 d\tau + 2c_0 \varepsilon u_{\max} \int_0^t e^{\sigma \tau} d\tau \\ &\leq \int_0^t L|z(\tau, \varepsilon)|_2 d\tau + \varepsilon \frac{2c_0 u_{\max}}{\sigma} e^{\sigma t}. \end{aligned}$$

Mit  $u_{\max} := \max_{v \in \mathcal{U}} |v|_2$  gilt  $|\omega|_2 = |u - u_*|_2 \leq |u|_2 + |u_*|_2 \leq 2u_{\max} < \infty$  aufgrund des kompakten Steuerbereiches (V11). Mit der Notation

$$\alpha_0 := \varepsilon \alpha_1, \quad \alpha_1 := \frac{2c_0 u_{\max}}{\sigma}$$

erhalten wir

$$|z(t, \varepsilon)|_2 \leq \alpha_0 e^{\sigma t} + \int_0^t L|z(\tau, \varepsilon)|_2 d\tau.$$

Setzen wir  $\theta := \max\{L, \sigma\}$ , können wir zu

$$|z(t, \varepsilon)|_2 \leq \alpha_0 e^{\theta t} + \int_0^t \theta |z(\tau, \varepsilon)|_2 d\tau$$

übergehen. Wir erhalten mit Lemma 2.5.5, Spezialfall der Gronwall-Ungleichung,

$$|z(t, \varepsilon)|_2 \leq \alpha_0 (1 + \theta t) e^{\theta t} = \varepsilon \alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t}.$$

In der Norm des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x(\cdot, \varepsilon) - x(\cdot, 0)\|_{L_2((0, \infty), \mu)}^2 &= \int_0^\infty |x(t, \varepsilon) - x(t, 0)|_2^2 e^{-\rho t} dt = \int_0^\infty |z(t, \varepsilon)|_2^2 e^{-\rho t} dt \\ &\leq \varepsilon^2 \int_0^\infty [\alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t}]^2 e^{-\rho t} dt \\ &= \varepsilon^2 \int_0^\infty [\alpha_1 (1 + \theta t)]^2 e^{(2\theta - \rho)t} dt \\ &= \varepsilon^2 \|p_1\|_{L_2((0, \infty), \tilde{\nu})}^2, \quad p_1(t) = \alpha_1 (1 + \theta t) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Ein allgemeinerer Beweis, der ohne die Voraussetzung (V4) auskommt, scheint aus unserer Sicht möglich. Wir werden jedoch sehen, dass das in diesem Kapitel bewiesene Maximumprinzip in seiner Form nur für bezüglich der Steuerung affin-lineare Aufgaben gelten kann. Wir gehen entsprechend vereinfachend in dem vorliegenden Beweis ohne Einschränkung der notwendigen Optimalitätskriterien von (V4) aus.



mit dem Gewicht  $\tilde{\nu} = e^{\eta t}$ ,  $\eta := 2\theta - \rho < 0$  (vgl. Voraussetzung (V6)). Mit der Integrierbarkeit der Polynome im Raum  $L_2((0, \infty), \tilde{\nu})$  folgt unmittelbar

$$\|x(\cdot, \varepsilon) - x(\cdot, 0)\|_{L_2((0, \infty), \mu)}^2 \leq \varepsilon^2 \|p_1\|_{L_2((0, \infty), \tilde{\nu})}^2 \leq \varepsilon^2 c_0, \quad (4.1)$$

mit einer uniformen Konstanten  $c_0 > 0$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt aus Gleichung (4.1) die Konvergenz von  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  gegen die optimale Trajektorie  $x_*$  im Raum  $L_2((0, \infty), \mu)$ .  $\square$

Eine unmittelbare Folgerung von Lemma 4.3.2 ist die bezüglich  $\varepsilon$  stetige Abhängigkeit der Trajektorie im Punkt  $\varepsilon_0 = 0$ .

**Lemma 4.3.3**

*Unter den Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V6) und (V11) ist die Lösung des Anfangswertproblems aus Lemma 4.3.1 für jedes feste  $t \in [0, \infty)$  an der Stelle  $\varepsilon_0 = 0$  stetig bezüglich des Parameters  $\varepsilon$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die in Lemma 4.3.2 hergeleitete Ungleichung

$$|z(t, \varepsilon)|_2 \leq \alpha_0 (1 + \theta t) e^{\theta t} = \varepsilon \alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t}.$$

Wir wählen jetzt ein beliebiges  $\tilde{\varepsilon} > 0$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $|\varepsilon - \varepsilon_0| = |\varepsilon| < \delta(\tilde{\varepsilon}, t)$ ,  $\delta(\tilde{\varepsilon}, t) = [\alpha_1(1 + \theta t)]^{-1} e^{-\theta t} \tilde{\varepsilon}$  gilt

$$|x(t, \varepsilon) - x(t, 0)| = |z(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon \alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t} < \delta(\tilde{\varepsilon}, t) \alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t} = \tilde{\varepsilon}.$$

Dies entspricht gerade der Definition der Stetigkeit der Funktion  $x$  bezüglich des Variationsparameters  $\varepsilon$  in der Stelle  $\varepsilon_0 = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 4.3.4**

*Die in Lemma 4.3.3 angesprochene Stetigkeit entspricht gerade der punktweisen Konvergenz der Folge  $\{x(\cdot, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ . Wir werden diese Eigenschaft später auch unter dieser Bezeichnung verwenden.*

**Bemerkung 4.3.5**

*Ogleich wir die Stetigkeit von  $x$  bezüglich  $\varepsilon$  hier nur im Nullpunkt gezeigt haben, und auch nur hier benötigen werden, möchten wir anmerken, dass sich nach dem gleichen Beweisschema auch die Stetigkeit für beliebige Stellen  $\varepsilon \in [0, 1]$  zeigen lässt.*

Wie wir später sehen werden, ist es zur Herleitung des Variationslemmas unumgänglich, die Folge der Hilfsfunktion  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ,

$$\zeta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} (x(t, \varepsilon) - x(t, 0)),$$

zu studieren. Im Grenzfall,  $\zeta := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_\varepsilon$ , würde es sich bei der Funktion  $\zeta$  offenbar um die Ableitung der variierten Trajektorie bezüglich des Variationsparameters  $\varepsilon$  an der Stelle  $\varepsilon_0 = 0$  handeln, sofern diese existiert. Wir weisen die Existenz dieses Grenzwertes für zumindest eine Teilfolge  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  nach und zeigen, dass  $\zeta$  mit der Lösung eines Anfangswertproblems korrespondiert. Dieses Anfangswertproblem kann als eine Art Linearisierung der Dynamik entlang des optimalen Prozesses verstanden werden.

**Lemma 4.3.4**

Seien die Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), (V6) und (V11) erfüllt. Weiter seien  $(x, u) \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  zulässig und  $(x_*, u_*) \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  optimal. Mit  $x(t, \varepsilon)$  gemäß Lemma 4.3.1 studieren wir die Folge

$$\zeta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} (x(t, \varepsilon) - x(t, 0)).$$

Die Folge  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  besitzt eine punktweise konvergente Teilfolge, deren Grenzwert die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) && \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ \zeta(t) &= 0 \end{aligned}$$

ist.

**Bemerkung 4.3.6**

In Erinnerung an Bemerkung 4.3.3 betonen wir hier erneut, dass uns zur Realisierung einer Hilbertraumtheorie die Konvergenz auf Seiten der Hilfsfunktionen  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  im Sinn der punktweise fast überall geltenden Konvergenz völlig ausreicht. Die hierfür benötigte Majorante konstruieren wir unmittelbar in dem folgenden Lemma.

Den Beweis von Lemma 4.3.4 werden wir in mehreren Schritten durchführen.

1. Wir zeigen, dass die Folge  $\{\zeta_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ ,  $t \geq 0$ , unabhängig von dem Parameter  $\varepsilon$ , beschränkt ist.
2. Wir zeigen, dass jede punktweise konvergente Teilfolge von  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  gegen die eindeutige Lösung des oben erwähnten Anfangswertproblems konvergiert.
3. Wir zeigen, dass mindestens eine punktweise konvergente Teilfolge von  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  existiert.

Diese Schritte vollziehend, schließen wir die Aussage von Lemma 4.3.4.

**Lemma 4.3.5**

Unter den Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), (V6) und (V11) ist die durch

$$\zeta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} (x(t, \varepsilon) - x(t, 0))$$

definierte Folge  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  gleichmäßig, das heißt, unabhängig von dem Parameter  $\varepsilon$ , beschränkt. Es existiert eine Majorante  $\gamma_1 \in C^0([0, \infty)) \cap L_2((0, \infty), \mu)$ , so dass für alle  $t \in [0, \infty)$  die Ungleichung  $|\zeta_\varepsilon(t)|_2 \leq \gamma_1(t)$  korrekt ist. Das Gewicht  $\mu$  sei hierbei gemäß Voraussetzung (V6) gewählt.

*Beweis.* Mit den selbigen Abschätzungen wie im Beweis zu Lemma 4.3.3 erhalten wir

$$|\zeta_\varepsilon(t)|_2 \leq \int_0^t \left\{ L |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 + |\psi_1(\tau, x(\tau, 0))|_2 \cdot |\omega(\tau)|_2 \right\} d\tau.$$

Gemäß Voraussetzung (V5) ist für alle  $t \geq 0$  die Ungleichung  $|\psi_1(t, x(t, 0))|_2 \leq c_0 e^{\sigma t}$  erfüllt, so dass wir wie folgt weiter abschätzen können.

$$\begin{aligned} |\zeta_\varepsilon(t)|_2 &\leq \int_0^t \left\{ L |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 + |\psi_1(\tau, x(\tau, 0))|_2 \cdot |\omega(\tau)|_2 \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\{ L |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 + c_0 |\omega(\tau)|_2 e^{\sigma \tau} \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t L |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 d\tau + 2c_0 u_{\max} \int_0^t e^{\sigma \tau} d\tau \\ &\leq \frac{2c_0 u_{\max}}{\sigma} e^{\sigma t} + \int_0^t L |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 d\tau \end{aligned}$$

Hierbei haben wir  $|\omega|_2 = |u - u_*|_2 \leq |u|_2 + |u_*|_2 \leq 2 \max_{v \in \mathcal{U}} |v|_2 = 2u_{\max}$  ausgenutzt. Mit der Notation

$$\alpha_1 := \frac{2c_0 u_{\max}}{\sigma}, \quad \theta := \max\{\sigma, L\}$$

schreiben wir

$$|\zeta_\varepsilon(t)|_2 \leq \alpha_1 e^{\theta t} + \int_0^t \theta |\zeta_\varepsilon(\tau)|_2 d\tau.$$

Wir erhalten mit Lemma 2.5.5, Spezialfall der Gronwall Ungleichung,

$$|\zeta_\varepsilon(t)|_2 \leq \alpha_1 (1 + \theta t) e^{\theta t}.$$

Somit ist die Folge  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  durch die Majorante  $\gamma_1(t) := \alpha_1(1 + \theta t)e^{\theta t}$  unabhängig von  $\varepsilon$  beschränkt. Es ist leicht einzusehen, dass  $\gamma_1$  Element des Raumes  $C^0([0, \infty), \mathbb{R})$  ist und von dem Parameter  $\varepsilon$  nicht abhängt.

Wir zeigen noch, dass  $\gamma_1$  Element des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$  ist. Mit  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 2 \max\{L, \sigma\} = 2\theta$  (vgl. Voraussetzung (V6)) folgt

$$\|\gamma_1\|_{L_2((0, \infty), \mu)}^2 = \int_0^\infty [\alpha_0(1 + \theta t)]^2 e^{2\theta t} e^{-\rho t} dt = \int_0^\infty [\alpha_0(1 + \theta t)]^2 e^{(2\theta - \rho)t} dt < \infty$$

aufgrund der Integrierbarkeit der Polynome im gewichteten Raum  $L_2((0, \infty), \tilde{\nu})$  mit  $\tilde{\nu}(t) = e^{\eta t}$ ,  $\eta := (2\theta - \rho) < 0$ . Folglich ist  $\gamma_1 \in L_2((0, \infty), \mu)$  und nach Lemma 2.4.1 wird auch  $\zeta_\varepsilon$  Element dieses Raumes.  $\square$

Wir setzen fort und zeigen den Zusammenhang der Grenzfunktion  $\zeta$  zu einem Anfangswertproblem.

**Lemma 4.3.6**

Es seien die Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), (V6) und (V11) erfüllt. Die Folge  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  sei die Folge der Lösungen der Anfangswertprobleme zu den variierten Steuerungen  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ . Wir bezeichnen mit  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  die durch

$$\begin{aligned}\zeta_\varepsilon(t) &:= \frac{1}{\varepsilon} (x(t, \varepsilon) - x(t, 0)), \\ \omega_\varepsilon(t) &:= \frac{1}{\varepsilon} (u(t, \varepsilon) - u(t, 0))\end{aligned}$$

definierten Folgen, und mit  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Indizes-Folge mit den Eigenschaften

1.  $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen die Grenzfunktion  $u_*$ ,
2.  $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen die Grenzfunktion  $x_*$ ,
3.  $\{\omega_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat unabhängig von  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  den Wert  $\omega$ ,
4.  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen eine Grenzfunktion  $\zeta$ .

Dann gehört die Funktion  $\zeta$  zum Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ , mit  $\mu$ , wie in Voraussetzung (V6) gewählt. Weiterhin ist  $\zeta$  die eindeutige Lösung des durch  $\omega$  parametrisierten Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ \zeta(0) &= 0.\end{aligned}$$

*Beweis.* Aus der Definition der Folge  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  ergibt sich unter Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral, Satz 2.2.1,

$$\zeta_{\varepsilon_k}(t) = \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^t [\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0))] d\tau. \quad (4.2)$$

Wir betrachten zunächst zu festem  $\tau \in (0, \infty)$  die im Integranden auftauchende Differenz

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\varepsilon_k} [\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0))] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_k} [\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon_k))] \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon_k} [\varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0))] d\tau.\end{aligned}$$

Einsetzen der Definition von  $\varphi$  gemäß (V4)<sup>2</sup> liefert

$$\frac{\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon_k))}{\varepsilon_k} + \psi_1(\tau, x(\tau, 0))\omega(\tau),$$

---

<sup>2</sup>Ein allgemeinerer Beweis, der ohne die Voraussetzung (V4) auskommt, scheint aus unserer Sicht möglich. Wir werden jedoch, wie zuvor bereits erwähnt, sehen, dass die Annahme von (V4) zu keiner Einschränkung der Problemklasse führt.

und die Lipschitz-Bedingung (V1) impliziert

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon_k))}{\varepsilon_k} \right|_2 &\leq \frac{L}{\varepsilon_k} |x(\tau, \varepsilon_k) - x(\tau, 0)|_2 \\ &= L \cdot |\zeta_{\varepsilon_k}(\tau)|_2. \end{aligned}$$

Aus der Beschränkung von  $|\zeta_{\varepsilon_k}(\cdot)|_2$  (vgl. Lemma 4.3.5) folgt die Beschränkung von

$$\left| \frac{\varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, \varepsilon_k))}{\varepsilon_k} \right|_2 \leq L\gamma_1(\tau),$$

unabhängig von dem Parameter  $\varepsilon$  durch die stetige Funktion  $\gamma_1$ . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_k} \left| \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0)) \right|_2 \\ \leq L\gamma_1(\tau) + |\psi_1(\tau, x(\tau, 0))\omega(\tau)|_2 := M(\tau). \end{aligned}$$

Die Majorante  $M$  ist hierbei messbar<sup>3</sup> und entsprechend lokal auf  $(0, \infty)$  Lebesgue-integrierbar. Mehr sogar noch ist die Majorante  $M$  Element des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$ . Dies folgt unmittelbar aus  $\gamma_1 \in L_2((0, \infty), \mu)$  und  $|\psi_1(t, x(t, 0))|_2 \leq c_0 e^{\sigma t}$  sowie der Wahl der Gewichtsfunktion  $\mu(t) = e^{-\rho t}$  mit  $\rho > 2\sigma$ .

Weiterhin stellen wir für jedes feste  $\tau \in (0, \infty)$  die punktweise Konvergenz des Ausdruckes

$$\frac{1}{\varepsilon_k} \left| \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0)) \right|_2$$

gegen die Grenzfunktion

$$\mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\zeta(\tau) + \mathcal{J}_v[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\omega(\tau)$$

fest. Dies folgt unmittelbar aus der Konvergenz der Folgen  $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Mit den vorherigen Überlegungen können wir beim Grenzübergang in Gleichung (4.2) auf der rechten Seite von

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\varepsilon_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^t \left[ \varphi(\tau, x(\tau, \varepsilon_k), u(\tau, \varepsilon_k)) - \varphi(\tau, x(\tau, 0), u(\tau, 0)) \right] d\tau$$

den Satz von Lebesgue über die majorisierende Konvergenz anwenden, und Grenzübergang und Integrationsprozess vertauschen. Man beachte, dass  $t$  hierbei ein fixierter Parameter ist. Es folgt im Grenzfall  $k \rightarrow \infty$

$$\zeta(t) = \int_0^t \left[ \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\zeta(\tau) + \mathcal{J}_v[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\omega(\tau) \right] d\tau, \quad (4.3)$$

---

<sup>3</sup>Die Majorante  $M$  kann aufgrund des kompakten Steuerbereiches (V11) insbesondere so gewählt werden, dass sie stetig ist.

punktweise für jedes  $t \in (0, \infty)$ . Gemäß Definition 2.6.1 sind die Funktionen  $\zeta$ , welche der Integralgleichung genügen, gerade die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ \zeta(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass die Grenzfunktion  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  fast überall punktweise gegen eine Lösung des postulierten Anfangswertproblems konvergiert. Aufgrund der Eindeutigkeit dessen, korrespondiert auch jede Lösung dieses Anfangswertproblems mit unserer Grenzfunktion  $\zeta$ . Insbesondere ist  $\zeta$  als Lösung der Anfangswertaufgabe eine absolut stetige Funktion. Wir zeigen jetzt, dass  $\zeta$  Element des Raumes  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  ist. Hierzu betrachten wir noch einmal Gleichung (4.3) und schätzen diese mit (V5) zu

$$\begin{aligned} |\zeta(t)|_2 &\leq \int_0^t \left\{ \left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right|_2 \cdot |\zeta(\tau)|_2 + \left| \mathcal{J}_v[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right|_2 \cdot |\omega(\tau)|_2 \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\{ \sigma |\zeta(\tau)|_2 + c_0 |\omega(\tau)|_2 e^{\sigma\tau} \right\} d\tau \end{aligned}$$

ab. Hierbei ist  $\sigma = \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2$ . Mit der Notation

$$\alpha_1 := \frac{2c_0 u_{\max}}{\sigma}$$

schreiben wir vorherige Ungleichung in der Form

$$|\zeta(t)|_2 \leq \alpha_1 e^{\sigma t} + \int_0^t \sigma |\zeta(\tau)|_2 d\tau. \quad (4.4)$$

Hierbei ist  $u_{\max} := \max_{v \in U} |v|_2$  und  $|\omega|_2 = |u - u_*|_2 \leq |u - u_*|_2 \leq |u|_2 + |u_*|_2 \leq 2u_{\max}$ . Die Endlichkeit von  $u_{\max}$  ist aufgrund der Steuerbeschränkung (V11) gegeben.

Auf Ungleichung (4.4) wenden wir Lemma 2.5.5, Spezialfall der Bellmann-Gronwall Ungleichung, an und erhalten

$$|\zeta(t)|_2 \leq \alpha_1 (1 + \sigma t) e^{\sigma t}.$$

Die stetige Majorante  $\gamma_2(t) := \alpha_1 (1 + \sigma t) e^{\sigma t}$  ist Element des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$ . Mit Lemma 2.4.1 folgt  $\zeta \in L_2((0, \infty), \mu)$  und es gilt  $\|\zeta\|_{L_2((0, \infty), \mu)} \leq \|\gamma_2\|_{L_2((0, \infty), \mu)} =: K_1$ .

Mit  $\|\omega\|_{L_\infty((0, \infty))} \leq \|u\|_{L_\infty((0, \infty))} + \|u_*\|_{L_\infty((0, \infty))} \leq 2u_{\max} = 2 \max_{v \in U} |v|_2$  schließen wir für die Ableitung

$$\begin{aligned} \|\zeta'\|_{L_2((0, \infty), \mu)} &\leq \left\| \mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\|_{L_\infty((0, \infty))} \cdot \|\zeta\|_{L_2((0, \infty), \mu)} \\ &\quad + \|\omega\|_{L_\infty((0, \infty))} \cdot \left\| \mathcal{J}_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\|_{L_2((0, \infty), \mu)} \\ &= \sigma \|\gamma_2\|_{L_2((0, \infty), \mu)} + 2u_{\max} \|c_0 e^{\sigma \cdot}\|_{L_2((0, \infty), \mu)} =: K_2 < \infty. \end{aligned}$$

Hierbei beachte man  $|\mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))|_2 \leq c_0 e^{\sigma t}$ , so dass  $\mathcal{J}_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  aufgrund der Wahl des Gewichtes  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 2\sigma$  Element des Raumes  $L_2((0, \infty), \mu)$  wird. Es folgt  $\zeta' \in L_2^n((0, \infty), \mu)$ .

Insbesondere wird  $\zeta$  zu einem Element des Raumes  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ , was den Beweis dieses Lemmas komplettiert. Gleichzeitig erhalten wir die uniforme Beschränkung

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0,\infty),\mu)} &= \left( \|\zeta\|_{L_2((0,\infty),\mu)} + \|\zeta'\|_{L_2((0,\infty),\mu)} \right)^{1/p} \\ &\leq \sqrt[p]{K_1 + K_2} =: K < \infty. \end{aligned}$$

□

Wir zeigen, dass mindestens eine konvergente Teilfolge mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

**Lemma 4.3.7**

Seien die Voraussetzungen (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), (V6) und (V11) erfüllt. Weiterhin bezeichne  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  die Folge der Lösungen des Anfangswertproblems auf  $(0, \infty)$  zu der variierten Steuerung  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq \mathbb{U}$ . Dann existiert mindestens eine Indexfolge  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass

1.  $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen die Grenzfunktion  $u_*$  konvergiert,
2.  $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen die Grenzfunktion  $x_*$  konvergiert,
3.  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise f.ü. auf  $(0, \infty)$  gegen eine Grenzfunktion  $\zeta$  konvergiert.

*Beweis.* Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Konstruktion der Variation  $u_\varepsilon$ , die Folge  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  selbst bereits gegen  $u_*$  konvergiert. Wir wählen eine Indizes-Teilfolge  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  derart aus, dass  $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise fast überall gegen  $x_*$  konvergiert. Gemäß Lemma 4.3.2 leistet die Indizes-Folge  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bereits diese Eigenschaft. Folglich haben wir aus ihr eine Teilfolge auszuwählen, so dass  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise fast überall konvergiert. Gemäß Lemma 4.3.5 wird  $|\zeta_\varepsilon(t)|_2$  durch die Funktion  $\gamma_1(t) := \alpha_0(1 + \theta t)e^{\theta t}$  unabhängig von dem Parameter  $\varepsilon$  im Raum  $L_2((0, \infty), \mu)$  majorisiert. Für die Ableitung  $|\zeta'_\varepsilon(t)|_2$  stellen wir

$$\begin{aligned} |\zeta'_\varepsilon(t)|_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left| \varphi(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \varphi(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) - \varphi(t, x(t, 0), u(t, \varepsilon)) \right|_2 \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left| \varphi(t, x(t, 0), u(t, \varepsilon)) - \varphi(t, x(t, 0), u(t, 0)) \right|_2 \\ &\leq L \frac{|x(t, \varepsilon) - x(t, 0)|_2}{\varepsilon} + |\psi_1(t, x(t, 0))|_2 \cdot \frac{|u(t, \varepsilon) - u(t, 0)|_2}{\varepsilon} \\ &= L |\zeta_\varepsilon(t)|_2 + |\psi_1(t, x(t, 0))|_2 \cdot |\omega(t)|_2 \\ &\leq L \gamma_1(t) + c_0 |\omega(t)|_2 e^{\sigma t} \end{aligned}$$

fest. Die Majorante  $\gamma_2 := L|\gamma_1(t)|_2 + c_0|\omega(t)|_2 e^{\sigma t}$  liegt wegen  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 2\sigma$  im Raum  $L_2((0, \infty), \mu)$ . Insbesondere gilt auf  $[0, \infty)$  die Ungleichung  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \|\zeta_\varepsilon\|_{W_2^{n,1}((0,\infty),\mu)} &= \|\zeta_\varepsilon\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} + \|\zeta'_\varepsilon\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} \\ &\leq \|\gamma_1\|_{L_2((0,\infty),\mu)} + \|\gamma_2\|_{L_2((0,\infty),\mu)} \leq 2\|\gamma_2\|_{L_2((0,\infty),\mu)}. \end{aligned}$$

Die Folge  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  ist im Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  unabhängig von  $\varepsilon$  beschränkt.

Nach dem Satz von Eberlein-Schmuljan, Satz 2.5.1, ist die Einheitskugel im reflexiven Raum  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  schwach kompakt und es existiert folglich eine schwach konvergente Teilfolge  $\{\zeta_{\varepsilon_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Nach Lemma 2.5.8 existiert eine fast überall auf  $(0, \infty)$  punktweise konvergierende Teilfolge. Insbesondere konvergieren die zugehörigen Folgen der variierten Steuerungen und Trajektorien.  $\square$

*Beweis von Lemma 4.3.4.* Nach Lemma 4.3.7 existiert eine fast überall auf  $(0, \infty)$  punktweise konvergente Teilfolge  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ . Gemäß Lemma 4.3.6 konvergiert diese Teilfolge gegen die eindeutige Lösung der Integralgleichung respektive dem korrespondierenden Anfangswertproblem

$$\zeta(t) = \int_0^t \left[ \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\zeta(\tau) + \mathcal{J}_v[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\omega(\tau) \right] d\tau. \quad (4.5)$$

Wir bezeichnen diese Lösung mit  $\zeta_*$ . Die Funktion  $\zeta_*$  ist gemäß Lemma 4.3.6 als Lösung von (4.5) Element des Raumes  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ . Es sind entsprechend alle Behauptungen von Lemma 4.3.4 bewiesen.  $\square$

Unter Verwendung der Hilfsfunktionen  $\zeta$  und  $\omega$  beziehungsweise der korrespondierenden Folgen  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , formulieren wir jetzt eine Art Variationslemma.

**Lemma 4.3.8**

*Seien die Voraussetzungen (V1) – (V11) erfüllt. Weiterhin sei  $(x, u)$  ein beliebiges zulässiges Paar und  $(x_*, u_*)$  der optimale Prozess zu  $(P_\infty)$ . Weiterhin sei  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  mit  $u_\varepsilon = u + \varepsilon(u - u_*)$  die Folge der variierten Steuerungen und  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  die Folge der zu  $u_\varepsilon$  gehörigen Trajektorien. Zusätzlich sei  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  gemäß  $\zeta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon - x_*)$  definiert. Sei  $\{(x_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k}, \zeta_{\varepsilon_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge, derart, dass  $\{\zeta_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) \quad f.\ddot{u}. \text{ auf } (0, \infty) \\ \zeta(0) &= 0. \end{aligned}$$

*konvergiert. Dann gilt*

$$0 \leq \delta^+ J_\infty((x_*, u_*), (\zeta, \omega)) := \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{J_\infty(x_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k}) - J_\infty(x_*, u_*)}{\varepsilon_k} \right\}$$

*mit*

$$\begin{aligned} \zeta(t) &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_k} (x(t, \varepsilon_k) - x(t, 0)), \quad x_{\varepsilon_k}(t) := x(t, \varepsilon_k), \\ \omega(t) &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_k} (u(t, \varepsilon_k) - u(t, 0)) = u(t) - u_*(t), \quad u_{\varepsilon_k}(t) := u(t, \varepsilon_k). \end{aligned}$$



Weiterhin gilt

$$\delta^+ J_\infty((x_*, u_*)(\zeta, \omega)) = \int_0^\infty \left[ \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) + \nabla_v^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \omega(t) \right] \hat{\mu}(t) dt.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen vereinfachend die konvergente Teilfolge  $\{(x_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  selbst wieder mit  $\{(x_\varepsilon, u_\varepsilon)\}$ , so dass wir im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden von punktwiser Konvergenz der Folgen  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ,  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  und  $\{\zeta_\varepsilon\}_\varepsilon$  ausgehen können.

Aufgrund der Wachstumsbedingung (V9) sowie der Steuerbeschränkung (V11) und der uniformen Beschränkung der variierten Trajektorien (vgl. Lemma 4.3.1) folgt die Endlichkeit von  $J_\infty(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$  für hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$ . Wir berechnen den Grenzwert

$$\begin{aligned} \delta^+ J_\infty((x_*, u_*)(\zeta, \omega)) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left\{ \frac{J_\infty(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J_\infty(x_*, u_*)}{\varepsilon} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} \left\{ r(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right\} \hat{\mu}(t) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Hierzu zeigen wir die Existenz einer uniformen Majorante  $M$ , welche den Integranden von (4.6) beschränkt. Wir erhalten unter Anwendung des Satzes von Lebesgue über die majorisierende Konvergenz

$$\begin{aligned} \delta^+ J_\infty((x_*, u_*)(\zeta, \omega)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} \left\{ r(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right\} \hat{\mu}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ r(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right\} \hat{\mu}(t) dt. \end{aligned}$$

Hierbei ist wichtig, dass  $r$  stetig differenzierbar ist und die punktwisen Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_\varepsilon(t), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(t)$$

existieren. Dies ist nach Voraussetzung der konvergenten Teilfolgen gegeben. Folglich gilt

$$\delta^+ J_\infty((x_*, u_*)(\zeta, \omega)) = \int_0^\infty \left[ \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) + \nabla_v^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \omega(t) \right] \hat{\mu}(t) dt.$$

Gemäß der Optimalität von  $(x_*, u_*)$  ist  $\delta^+ J_\infty((x_*, u_*)(\zeta, \omega))$  nicht negativ.

Um den Beweis zu schließen, konstruieren wir die zuvor erwähnte Majorante. Hierfür notieren wir den Term

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\{ r(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right\} \hat{\mu}(t)$$

in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t) + s(x(t, \varepsilon) - x_*(t)), u_*(t) + s(u(t, \varepsilon) - u_*(t))) (x(t, \varepsilon) - x_*(t)) \right. \\ & \quad \left. + \nabla_v^T r(t, x_*(t) + s(x(t, \varepsilon) - x_*(t)), u_*(t) + s(u(t, \varepsilon) - u_*(t))) (u(t, \varepsilon) - u_*(t)) \right\} \hat{\mu}(t) ds. \end{aligned}$$

Wir betrachten die zwei Terme im Integranden separat. Für den ersten Term schätzen wir unter Ausnutzung von (V10) und Beachtung von  $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t) + s(x(t, \varepsilon) - x_*(t)), u_*(t) + s(u(t, \varepsilon) - u_*(t))) (x(t, \varepsilon) - x_*(t)) \hat{\mu}(t) \right|_2 \\ & \leq A_1(t) |\zeta_{\varepsilon}(t)|_2 \mu(t) + B_1(t) |x_*(t)|_2 \cdot |\zeta_{\varepsilon}(t)|_2 \mu(t) + B_1(t) |\zeta_{\varepsilon}^2(t)|_2 \mu(t) \\ & \quad + C_1(t) |u_*(t)|_2 \cdot |\zeta_{\varepsilon}(t)|_2 \mu(t) + C_1 |u(t, \varepsilon) - u_*(t)|_2 \cdot |\zeta_{\varepsilon}(t)|_2 \mu(t) \end{aligned}$$

ab. Hierbei sei  $\zeta_{\varepsilon}$  gemäß  $\zeta_{\varepsilon}(t) := \frac{x(t, \varepsilon) - x_*(t)}{\varepsilon}$  gesetzt. Anwendung von Lemma 4.3.5 impliziert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t) + s(x(t, \varepsilon) - x_*(t)), u_*(t) + s(u(t, \varepsilon) - u_*(t))) (x(t, \varepsilon) - x_*(t)) \hat{\mu}(t) \right|_2 \\ & \leq A_1(t) \gamma_1(t) \mu(t) + B_1(t) |x_*(t)|_2 \cdot \gamma_1(t) \mu(t) + B_1(t) \gamma_1^2(t) \mu(t) \\ & \quad + C_1(t) |u_*(t)|_2 \cdot \gamma_1(t) \mu(t) + C_1 |u(t, \varepsilon) - u_*(t)|_2 \gamma_1(t) \mu(t) =: M_1(t). \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften von  $A_1, B_1, C_1$  und  $\gamma_1$  sowie der Steuerbeschränkung schließen wir, dass die Majorante  $M_1$  Lebesgue-integrierbar ist. Auf dem selben Weg konstruieren wir eine Majorante  $M_2$ , die den Ausdruck

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t) + s(x(t, \varepsilon) - x_*(t)), u_*(t) + s(u(t, \varepsilon) - u_*(t))) (u(t, \varepsilon) - u_*(t)) \hat{\mu}(t) \right|_2$$

majorisiert. Die Setzung  $M := M_1 + M_2$  liefert die gesuchte Majorante.  $\square$

### Bemerkung 4.3.7

Bei Lemma 4.3.8 handelt es sich bei  $\delta^+ J_{\infty}((x_*, u_*), (\zeta, \omega))$  um eine Art erste Variation (Gâteaux-Ableitung). Im Unterschied zur klassischen Definition der Gâteaux-Ableitung erlauben wir hier jedoch, dass die Näherung von  $x_{\varepsilon}$  gegen  $x_*$  auch nicht-linear verlaufen darf. Außerdem genügt es uns, wie wir später in Lemma 4.3.12 noch sehen werden, die Konvergenz nur bezüglich einer Teilfolge zu realisieren. Trotz dieser Unterschiede werden wir im Folgenden, das Lemma 4.3.8 als Variationslemma beziehungsweise erste Variation bezeichnen, weil die grundlegende Idee zum klassischen Variationslemma identisch ist.

Unter Ausnutzung der Konvexität von  $r$  bezüglich der Steuerung lässt sich die erste Variation wie folgt weiter abschätzen.

### Folgerung 4.3.2

Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.3.8, sowie (V7) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 & \leq \delta^+ J_{\infty}((x_*, u_*)(\zeta, \omega)) \\ & \leq \int_0^{\infty} \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) + [r(t, x_*(t), u(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t))] \right\} \hat{\mu}(t) dt. \end{aligned}$$

### Die Menge der zulässigen Variationen

Zur weiteren Diskussion führen wir die nachstehenden Notationen ein.

$$\begin{aligned}
 a_1(u) &:= \int_0^\infty [r(t, x_*(t), u(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t))] \hat{\mu}(t) dt \\
 b_1(\zeta) &:= \int_0^\infty \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) \hat{\mu}(t) dt \\
 a_2(\omega(\cdot)) &:= -\mathcal{J}_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \omega(\cdot) \\
 b_2(\zeta(\cdot)) &:= \dot{\zeta}(\cdot) - \mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \zeta(\cdot)
 \end{aligned}$$

Mit diesen Notationen definieren wir die Menge der zulässigen Variationen  $M$ ,

$$\begin{aligned}
 M := \left\{ (z_0, z) \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \mu) \mid z_0 \geq a_1(u) + b_1(\zeta), \right. \\
 z = a_2(\omega) + b_2(\zeta) \\
 \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \zeta(0) = 0, \\
 \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} \leq K, \\
 \omega := u - u_*, u \in L_2^m((0, \infty), \mu), \\
 \left. u(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty) \right\},
 \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $K > 0$ , welche gemäß den im Beweis von Lemma 4.3.6 konstruierten Majoranten gegeben ist.

Ziel dieses Kapitels ist es, die Menge  $M$  näher zu charakterisieren. Zunächst stellen wir mit den folgenden zwei Lemmata fest, dass es sich bei  $M$  um eine konvexe Menge handelt. Anschließend werden wir zeigen, dass  $(-\alpha, \mathbf{0})$ ,  $\alpha > 0$  nicht Element der Menge  $\overline{M}$  ist. Dies wird den Ansatz zur Trennung der Mengen  $\{(-\alpha, \mathbf{0})\}$ ,  $\overline{M}$  geben, aus welcher wir die Kern-Bedingungen des Maximumprinzips ableiten werden. Dieses Vorgehen ist analog den Beweisen zum Maximumprinzip aus den Arbeiten [54, 74]. Wir lehnen uns an diese Beweisstruktur an und zeigen beginnend wesentliche Eigenschaften der Operatoren  $a_1$ ,  $b_1$ .

#### Lemma 4.3.9

Seien die Voraussetzungen (V7), (V8), (V10) und (V11) erfüllt. Dann gelten die beiden Aussagen

1.  $a_1 : L_2^m((0, \infty), \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex und schwach unterhalb stetig auf dem Raum

$$\mathbb{U} := \left\{ u \in L_2^m((0, \infty), \mu) \mid u(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty) \right\}.$$

2.  $b_1 : W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear und stetig.

*Beweis.* Wir beginnen mit der ersten Aussage. Zunächst stellen wir fest, dass  $\mathbb{U}$  eine konvexe Teilmenge des  $L_2^m((0, \infty), \mu)$  ist. Aus der Kompaktheit der Menge  $\mathcal{U}$  folgern wir

$$\|u\|_{L_2^m((0, \infty), \mu)}^2 = \int_0^\infty |u(t)|_2^2 \mu(t) dt \leq \max_{t \in (0, \infty)} |u(t)|_2^2 \int_0^\infty \mu(t) dt < \infty,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass  $\mu$  auf dem unendlichen Zeithorizont endlich integrierbar ist. Die Menge  $\mathbb{U}$  ist beschränkt. Die Konvexität von  $a_1$  folgt aus der Konvexität von  $r$ ,

$$\begin{aligned} a_1(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) &= \int_0^\infty \left[ r(t, x_*(t), \alpha u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty \left[ \alpha r(t, x_*(t), u_1(t)) + (1 - \alpha)r(t, x_*(t), u_2(t)) \right. \\ &\quad \left. - (1 + \alpha - \alpha)r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt \\ &= \alpha a_1(u_1) + (1 - \alpha)a_1(u_2). \end{aligned}$$

Wir untersuchen die schwache Unterhalbstetigkeit. Sei  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n \in \mathbb{U}$  eine schwach gegen  $u_0 \in L_2^m((0, \infty), \mu)$  konvergente Folge. Aus der Konvexität von  $r$  bezüglich  $v$  schließen wir

$$\begin{aligned} a_1(u_n) - a_1(u_0) &= \int_0^\infty \left[ r(t, x_*(t), u_n(t)) - r(t, x_*(t), u_0(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt \\ &\geq \int_0^\infty \nabla_v^T r(t, x_*(t), u_0(t)) (u_n(t) - u_0(t)) \hat{\mu}(t) dt. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (V10) erhalten wir aus  $(x_*, u_0) \in L_2^{n+m}((0, \infty), \mu)$  auch die Inklusion

$$\nabla_v^T r(\cdot, x_*(\cdot), u_0(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \in L_2^m((0, \infty), \mu).$$

Mit der Charakterisierung der schwachen Konvergenz folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [a_1(u_n) - a_1(u_0)] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \nabla_v^T r(t, x_*(t), u_0(t)) (u_n(t) - u_0(t)) \hat{\mu}(t) dt = 0.$$

Dies ist gerade die Definition der schwachen Unterhalbstetigkeit von  $a_1$  auf  $\mathbb{U}$ .

Wir beweisen die zweite Aussage. Die Linearität ist offensichtlich. Wir müssen noch die Stetigkeit zeigen. Diese folgt in normierten Räumen aus der Beschränktheit und der Linearität. Wir zeigen diese und komplettieren den Beweis.

$$\begin{aligned} |b_1(\zeta)| &= \left| \int_0^\infty \nabla_\xi^T r(x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) \hat{\mu}(t) dt \right| \leq \int_0^\infty \left| \nabla_\xi^T r(x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) \right| \hat{\mu}(t) dt \\ &\leq \left\| \nabla_\xi^T r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \right\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)} \cdot \|\zeta\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)} \leq c \|\zeta\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\left\| \nabla_{\xi}^T r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \right\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} \leq c < \infty$  unter Beachtung der Raumzugehörigkeit von  $(x_*, u_*)$  gemäß (V10) endlich. Im letzten Schritt ist es essentiell, dass  $\mu$  ein auf dem unendlichen Zeithorizont endlich integrierbares Gewicht ist.  $\square$

**Lemma 4.3.10**

Seien die Voraussetzungen (V5) und (V11) erfüllt. Dann gilt für die Operatoren  $a_2, b_2$ :

1. Der Operator  $a_2 : L_{\infty}^m((0, \infty), \mu) \rightarrow L_2^n((0, \infty), \mu)$  ist linear, stetig und beschränkt.
2. Der Operator  $b_2 : W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \rightarrow L_2^n((0, \infty), \mu)$  ist linear, stetig und beschränkt.

*Beweis.* Die Linearität von  $a_2$  und  $b_2$  ist offensichtlich. Es muss noch die Stetigkeit der Operatoren bewiesen werden. Hierfür zeigen wir, dass diese beschränkt sind, die Stetigkeit impliziert sich in den metrischen Räumen aus der Beschränkung:

$$\begin{aligned} \|a_2(\omega(\cdot))\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)}^2 &= \int_0^{\infty} \left| \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \omega(t) \right|_2^2 \mu(t) dt \\ &\leq \int_0^{\infty} [c_0]^2 e^{2\sigma t} |\omega(t)|_2 \mu(t) dt \\ &\leq [c_0]^2 \|\omega\|_{L_{\infty}^m((0,\infty))}^2 \int_0^{\infty} e^{2\sigma t} \mu(t) dt \\ &= c_1 \|\omega\|_{L_{\infty}^m((0,\infty))}^2 \end{aligned}$$

Die Konstante  $c_1$  ergibt sich aus dem Wert des Integrals  $\int_0^{\infty} e^{2\sigma t} \mu(t) dt$  unter Beachtung von  $\rho > 2\sigma$  bei der Wahl der Gewichtsfunktion  $\mu(t) = e^{-\rho t}$  in (V5).

Die Beschränkung von  $b_2$  folgt in ähnlicher Weise.

$$\begin{aligned} \|b_2\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} &= \left\| \dot{\zeta}(\cdot) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \zeta(\cdot) \right\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} \\ &\leq \|\dot{\zeta}\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} + \left\| \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\|_{L_{\infty}^{n \times n}((0,\infty))} \cdot \|\zeta\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} \\ &\leq c_2 \cdot \left( \|\dot{\zeta}\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} + \|\zeta\|_{L_2^n((0,\infty),\mu)} \right) \\ &\leq c_2 \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0,\infty),\mu)} \end{aligned}$$

Die Konstante  $c_2$  ergibt sich dabei als Schranke an die Funktion  $\mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  in der  $L_{\infty}^{n \times n}$ -Norm sowie der Steuerbeschränkung (vgl. Voraussetzungen (V5), (V11)).  $\square$

Aus den vorherigen beiden Lemmata folgt unmittelbar die Konvexität der Menge  $M$ . Wir formalisieren diese Aussage in dem folgenden Resultat.

**Lemma 4.3.11**

Unter den Voraussetzungen (V5), (V7), (V8), (V10) und (V11) ist die Menge  $M$  konvex.

*Beweis.* Sei  $(z_0, z), (\hat{z}_0, \hat{z}) \in M$ , dann gilt

$$\begin{aligned} z_0 &\geq a_1(u) + b_1(\zeta) & \hat{z}_0 &\geq a_1(\hat{u}) + b_1(\hat{\zeta}) \\ z &= a_2(\omega) + b_2(\zeta) & \hat{z} &= a_2(\hat{\omega}) + b_2(\hat{\zeta}) \end{aligned}$$

mit  $\zeta, \hat{\zeta} \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  und

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 0, & \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} &\leq K \\ \hat{\zeta}(0) &= 0, & \|\hat{\zeta}\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} &\leq K \end{aligned}$$

sowie  $\omega = u - u_*$ ,  $\hat{\omega} = \hat{u} - u_*$  mit  $u, \hat{u} \in L_2^m((0, \infty), \mu)$  und  $u(t), \hat{u}(t) \in \mathcal{U}$  fast überall auf  $(0, \infty)$ .

Wir betrachten mit  $0 \leq \alpha \leq 1$  die Konvexkombination von  $(z_0, z), (\hat{z}_0, \hat{z})$ :

$$\begin{aligned} \alpha z_0 + (1 - \alpha)\hat{z}_0 &\geq \alpha a_1(u) + \alpha b_1(\zeta) + (1 - \alpha)a_2(\hat{u}) + (1 - \alpha)b_2(\hat{\zeta}) \\ &\geq a_1(\alpha u + (1 - \alpha)\hat{u}) + b_1(\alpha \zeta + (1 - \alpha)\hat{\zeta}) \\ \alpha z + (1 - \alpha)\hat{z} &= \alpha a_2(\omega) + \alpha b_2(\zeta) + (1 - \alpha)a_2(\hat{\omega}) + (1 - \alpha)b_2(\hat{\zeta}) \\ &= a_2(\alpha \omega + (1 - \alpha)\hat{\omega}) + b_2(\alpha \zeta + (1 - \alpha)\hat{\zeta}) \end{aligned}$$

Es gelten die Inklusionen

$$\begin{aligned} \alpha \omega + (1 - \alpha)\hat{\omega} &= [\alpha u + (1 - \alpha)\hat{u}] - u_* \in L_2^m((0, \infty), \mu), \\ \alpha \zeta + (1 - \alpha)\hat{\zeta} &\in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu). \end{aligned}$$

Weiterhin genügt die Konvexkombination von  $u$  und  $\hat{u}$  fast überall der Steuerbeschränkung  $(\alpha u + (1 - \alpha)\hat{u})(t) \in \mathcal{U}$ . Die Konvexkombination von  $\zeta$  und  $\hat{\zeta}$  genügt der Anfangswertbedingung  $(\alpha \zeta + (1 - \alpha)\hat{\zeta})(0) = 0$ , sowie der uniformen Beschränkung  $\|\alpha \zeta + (1 - \alpha)\hat{\zeta}\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} \leq K$ . Insgesamt heißt das, dass die Konvexkombination in  $M$  enthalten ist.  $\bar{M}$  ist entsprechend eine konvexe Menge.  $\square$

Wir bezeichnen mit  $\bar{M}$  den Abschluss von  $M$  und stellen fest, dass  $\bar{M}$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \mu)$  ist.

**Lemma 4.3.12**

*Unter den Voraussetzungen (V1) – (V11) ist das Tupel  $(-\alpha, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \mu)$  für jedes  $\alpha > 0$  nicht Element der Menge  $\bar{M}$ .*

*Beweis.* Wir betrachten ein beliebiges  $(\tilde{z}_0, \mathbf{0}) \in \bar{M}$  und zeigen  $\tilde{z}_0 \geq 0$ . Aufgrund der Abgeschlossenheit von  $\bar{M}$  folgt für  $(\tilde{z}_0, \mathbf{0}) \in \bar{M}$  die Existenz einer Folge  $\{(z_0^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $(z_0^k, z^k) \in M$ , welche gegen  $(\tilde{z}_0, \mathbf{0})$  konvergiert. Die Elemente dieser Folge genügen

$$z_0^k \geq a_1(u^k) + b_1(\zeta^k), \tag{4.7}$$

$$z^k = a_2(\omega^k) + b_2(\zeta^k), \tag{4.8}$$

wobei  $\zeta^k(0) = 0$ ,  $\|\zeta^k\|_{W_2^{n,1}((0,\infty),\mu)} \leq K$ ,  $\omega^k = u^k - u_*$  mit

$$\zeta^k \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), u^k \in L_2^m((0, \infty), \mu), u^k(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty)$$

gelte. Die Funktionen  $u^k$  sind aufgrund der Steuerbeschränkung in der Norm des gewichteten Raumes beschränkt. Die Elemente  $\zeta^k$  sind in  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  nach Voraussetzung beschränkt. Die Räume  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  und  $L_2^m((0, \infty), \mu)$  sind reflexiv und das Eberlein-Schmuljan Theorem, Satz 2.5.1, impliziert die schwache Kompaktheit der Einheitskugel in den jeweiligen Räumen. Infolge dessen existiert eine Teilfolge  $\{\zeta^{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}} \subseteq \{\zeta^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , welche schwach gegen ein Grenzelement  $\tilde{\zeta} \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  konvergiert, das heißt es gilt

$$\{\zeta^{k_1}\} \rightharpoonup \tilde{\zeta}. \quad (4.9)$$

Wir betrachten  $\{u^{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}} \subseteq \{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und wählen eine Teilfolge  $\{u^{k_2}\}_{k_2 \in \mathbb{N}} \subseteq \{u^{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}}$ , so dass bezüglich der schwachen Konvergenz im Raum  $L_2^m((0, \infty), \mu)$

$$\{u^{k_2}\} \rightharpoonup \tilde{u}$$

mit einem  $\tilde{u} \in L_2^m((0, \infty), \mu)$  gilt. Dies ist nach der obigen Argumentation stets möglich. Die Indexfolge  $\{k_2\}_{k_2 \in \mathbb{N}}$  genügt ebenfalls der Eigenschaft (4.9). Beachtet man, dass  $\mu$  endlich integrierbar ist, so folgt nach Lemma 2 in [41],  $\tilde{u}(t) \in \mathcal{U}$  fast überall auf der positiven Halbachse. Wir bezeichnen  $\tilde{\omega} = \tilde{u} - u_*$  und stellen

$$\begin{aligned} \{\zeta^{k_2}\} &\rightharpoonup \tilde{\zeta}, \\ \{\omega^{k_2}\} &\rightharpoonup \tilde{\omega} \end{aligned}$$

fest. Zusätzlich garantiert uns Lemma 3 in [41], dass der Anfangswert  $\tilde{\zeta}(0) = 0$  im Grenzprozess erhalten bleibt. Wir erhalten zusammenfassend

$$\begin{aligned} \{\zeta^{k_2}\} &\rightharpoonup \tilde{\zeta}, & \tilde{\zeta}(0) = 0, \|\tilde{\zeta}\|_{W_2^{n,1}((0,\infty),\mu)} &\leq K, \tilde{\zeta} \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \\ \{\omega^{k_2}\} &\rightharpoonup \tilde{\omega}, \tilde{\omega} = \tilde{u} - u_*, & \tilde{u}(t) \in \mathcal{U} \text{ f.ü. auf } (0, \infty), u &\in L_2^m((0, \infty), \mu). \end{aligned}$$

Übergang zur Grenze  $k_2 \rightarrow \infty$  in Gleichung (4.7) (vgl. Lemma 4.3.9) führt zu

$$\lim_{k_2 \rightarrow \infty} z_0^{k_2} = \tilde{z}_0 \geq a_1(\tilde{\omega}) + b_1(\tilde{\zeta}). \quad (4.10)$$

Wir zeigen noch die Zulässigkeit von  $(\tilde{\omega}, \tilde{\zeta})$  im Sinn des Variationslemmas 4.3.8. Hierfür multiplizieren wir Gleichung (4.8) mit einem beliebigen  $\phi \in C_c^\infty([0, \infty), \mathbb{R})$ , sowie dem Gewicht  $\mu$ . Anschließende Integration über  $(0, \infty)$  führt zu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^k(t) \phi(t) \mu(t) dt &= \int_0^\infty \{a_2(\omega^k(t)) + b_2(\zeta^k(t))\} \phi(t) \mu(t) dt \\ &= \int_0^\infty a_2(\omega^k(t)) \phi(t) \mu(t) dt + \int_0^\infty b_2(\zeta^k(t)) \phi(t) \mu(t) dt \\ &= - \int_0^\infty \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \omega^k(t) \phi(t) \mu(t) dt + \int_0^\infty \dot{\zeta}^k(t) \phi(t) \mu(t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \zeta^k(t) \phi(t) \mu(t) dt. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\mathcal{J}_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))\phi(\cdot)$ ,  $\phi(\cdot)$  und  $\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))\phi(\cdot)$  sind aufgrund von  $\phi \in C_c^\infty([0, \infty), \mathbb{R})$  Elemente des Raumes  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  und wir schließen im schwachen Grenzprozess

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty z^k(t) \phi(t) \mu(t) dt \\ &= - \int_0^\infty \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \tilde{\omega}(t) \phi(t) \mu(t) dt + \int_0^\infty \tilde{\zeta}'(t) \phi(t) \mu(t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \tilde{\zeta}(t) \phi(t) dt \\ &= \int_0^\infty \{a_2(\tilde{\omega}(t)) + b_2(\tilde{\zeta}(t))\} \phi(t) \mu(t) dt = \langle a_2(\tilde{\omega}) + b_2(\tilde{\zeta}), \phi \rangle_{L_2^n((0, \infty), \mu)}. \end{aligned}$$

Mit Beachtung von Lemma 2.4.3 impliziert die Variationsgleichung,

$$\langle a_2(\tilde{\omega}) + b_2(\tilde{\zeta}), \phi \rangle_{L_2^n((0, \infty), \mu)} = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty([0, \infty), \mathbb{R}),$$

die Gleichung

$$0 \equiv a_2(\tilde{\omega}) + b_2(\tilde{\zeta}) \tag{4.11}$$

im  $L_2$ -Sinn. Wir setzen jetzt  $u_\varepsilon = u_* + \varepsilon \tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega} = \tilde{u} - u_*$  und erhalten gemäß Lemma 4.3.1 die korrespondierende Folge der Trajektorien  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ . Gemäß Lemma 4.3.7 existiert eine konvergente Teilfolge von  $\{\zeta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ,

$$\zeta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} (x_\varepsilon - x_*).$$

Der Grenzwert dieser Folge, im Folgenden mit  $\hat{\zeta}$  bezeichnet, erfüllt Gleichung (4.11). Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Integralgleichung (4.11) folgt unmittelbar  $\hat{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(t)$  fast überall auf  $(0, \infty)$ . Für die konvergente Teilfolge von  $\{(x_\varepsilon, u_\varepsilon)\}$  wenden wir das Variationslemma 4.3.8 an. Es folgt in der Notation von  $a_1, b_1$

$$a_1(\tilde{u}) + b_1(\hat{\zeta}) \geq 0.$$

Aufgrund der Übereinstimmung  $\hat{\zeta} = \tilde{\zeta}$  folgt insbesondere aus (4.10)

$$\tilde{z}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_0^k \geq a_1(\tilde{u}) + b_1(\tilde{\zeta}) = a_1(\tilde{u}) + b_1(\hat{\zeta}) \geq 0.$$

Mit  $\tilde{z}_0 \geq 0$  ist die Behauptung des Lemmas bewiesen. □

### Herleitung der kanonischen Gleichung und der Transversalitätsbedingung

Bevor wir uns der Herleitung der kanonischen Gleichung und der Transversalitätsbedingung widmen können, benötigen wir zunächst das folgende Hilfsresultat.



**Lemma 4.3.13**

Unter den Voraussetzungen (V1), (V3), (V5) und (V6) liegt die Menge

$$\mathbf{Z} := \left\{ z \in L_2^n((0, \infty), \mu) \mid z = b_2(\zeta), \quad \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \zeta(0) = 0 \right\}$$

dicht im Raum  $L_2^n((0, \infty), \mu)$ .<sup>4</sup>

*Beweis.* Wir definieren  $\mathbf{Z}_1 := \mathbf{Z} \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  und zeigen, dass  $\mathbf{Z}_1$  dicht im Raum  $L_2^n((0, \infty), \mu) \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  liegt. Da der Raum  $L_2^n((0, \infty), \mu) \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  dicht in  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  liegt, folgt aus der Transitivität, dass auch  $\mathbf{Z}$  dicht in  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  liegt.

Sei  $z \in L_2^n((0, \infty), \mu) \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  beliebig. Wir betrachten die Gleichung

$$\zeta(t) = \int_0^t \left[ \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\zeta(\tau) + z(\tau) \right] d\tau, \quad t \leq T.$$

Nach Definition 2.6.1 sind die Lösungen dieser Integralgleichung gerade äquivalent zu den Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \zeta'(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + z(t) \quad \text{f.ü. auf } (0, T) \\ \zeta(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die Integralgleichung besitzt nach Folgerung 2.6.4 eine eindeutige Lösung  $\hat{\zeta}$  im Raum  $W_2^{n,1}((0, T))$ . Die Funktion  $\hat{\zeta}$  ist insbesondere Element des Raumes  $W_2^{n,1}((0, T), \mu)$ . Mit dem Anfangswert  $\hat{\zeta}_T := \hat{\zeta}(T)$  setzen wir  $\hat{\zeta}$  stetig auf das Intervall  $(T, +\infty)$  fort. Die Fortsetzung genüge hierbei der Gleichung

$$\zeta(t) = \hat{\zeta}_T + \int_T^t \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\zeta(\tau) d\tau \quad t \geq T.$$

Folgerung 2.6.5 sichert uns die Existenz einer solchen Fortsetzung, das heißt Lösung obiger Gleichung.

Als nächstes zeigen wir, dass die so konstruierte Funktion auf  $[T, \infty)$  integrierbar ist. Dies geschieht unter Verwendung der Bellmann-Gronwall Ungleichung, Lemma 2.5.3. Es ergibt sich

$$|\hat{\zeta}(t)|_2 \leq \hat{\zeta}_T \cdot \exp \left\{ \int_T^t \left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](s, x_*(s), u_*(s)) \right|_2 ds \right\} \quad t \geq T.$$

Nach Voraussetzung (V5) gilt fast überall auf der positiven reellen Halbachse

$$\left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right|_2 \leq \sigma.$$

---

<sup>4</sup>Unter Verwendung der Theorie assoziierter Fredholm-Operatoren im Hilbertraum lässt sich zusätzlich die Äquivalenz der Menge  $\mathbf{Z}$  mit dem Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  beweisen. (vgl. [58])

Dies impliziert für  $|\hat{\zeta}(\cdot)|_2$  die Beschränkung

$$|\hat{\zeta}(t)|_2 \leq \hat{\zeta}_T \cdot \exp\{(t-T)\sigma\} \quad t \geq T.$$

Mit Voraussetzung (V6) folgt schließlich  $\hat{\zeta} \in L_2^n((0, \infty), \mu)$ . Für die Ableitung  $\hat{\zeta}'$  folgern wir  $\|\hat{\zeta}'\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)} \leq \|\hat{\zeta}\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)} \cdot \|\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))\|_{L_\infty^{n \times n}((0, \infty))} < \infty$ . Entsprechend gilt  $\hat{\zeta} \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ . Der Anfangswert  $\hat{\zeta}(0) = 0$  bleibt bei dem Fortsetzungsprozess erhalten.

Wir betrachten die Differenz  $z(t) - b_2(\hat{\zeta}(t))$  auf  $[0, T]$  und  $(T, \infty)$  für feste  $T > 0$ . Im Fall  $t \leq T$  erhalten wir

$$\begin{aligned} z(t) - b_2(\hat{\zeta}(t)) &= z(t) - \hat{\zeta}'(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) \\ &= z(t) - \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) - z(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für  $t > T$  ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) - b_2(\hat{\zeta}(t)) &= z(t) - \hat{\zeta}'(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) \\ &= z(t) - \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{\zeta}(t) \\ &= z(t). \end{aligned}$$

Mit diesen Ideen schließen wir den Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, so existiert für jedes  $z \in L_2^n((0, \infty), \mu) \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$  ein  $\hat{\zeta} \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  mit  $\hat{\zeta}(0) = 0$ , so dass für hinreichend große  $T = T(\varepsilon)$

$$\|z - z_T\|_{L_2^n((0, \infty), \mu)}^2 = \int_0^\infty |z(t) - z_T(t)|^2 \mu(t) dt = \int_T^\infty |z(t)|^2 \mu(t) dt < \varepsilon$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet  $z_T$  den Term  $z_T(\cdot) := b_2(\hat{\zeta}(\cdot))$ . □

Zur Herleitung der kanonischen Gleichung trennen wir das Element  $(-\alpha, \mathbf{0})$  von der konvexen und abgeschlossenen Menge  $\overline{M}$ .

Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach, Folgerung 2.5.1, existiert ein lineares und stetiges Funktional  $q_\alpha^* \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \mu)$ , so dass für beliebige Tupel  $(z_0, z) \in \overline{M}$  die Ungleichung

$$\langle q_\alpha^*, (-\alpha, \mathbf{0}) \rangle \leq \gamma_{1,\alpha} < \gamma_{2,\alpha} \leq \langle q_\alpha^*, (z_0, z) \rangle$$

gilt. Wir unterstellen  $q_\alpha^*$  die Gestalt  $q_\alpha^* = (\lambda_\alpha, y_\alpha)$  mit  $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$  und  $y_\alpha \in L_2^n((0, \infty), \mu)$ . Es folgt

$$-\lambda_\alpha \alpha < \lambda_\alpha z_0 + \langle y_\alpha, z \rangle \quad \forall (z_0, z) \in M. \quad (4.12)$$

Mit  $(0, \mathbf{0}) \in \overline{M}$  und  $\alpha > 0$  folgt  $\lambda_\alpha > 0$ .

Wir halten  $u = u_*$  fest und variieren nur bezüglich des Zustands  $x$ . Weiterhin normieren wir die Ungleichung, indem wir durch  $\lambda_\alpha > 0$  dividieren. Zu jedem  $\zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ ,  $\|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} \leq K$  mit  $\zeta(0) = 0$  finden wir offensichtlich ein  $(z_0, z) \in \mathbb{R} \times L_2^n((0, \infty), \mu)$  mit  $z_0 = b_1(\zeta)$  und  $z(\cdot) = b_2(\zeta(\cdot))$ . Für diese  $(z_0, z) \in \overline{M}$  gilt die Ungleichung (4.12) und wir erhalten

$$-\alpha < b_1(\zeta) + \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle \quad \forall \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \quad \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} \leq K, \quad \zeta(0) = 0.$$

Hierbei ist  $\tilde{y}_\alpha = y_\alpha/\alpha$ . Diese Ungleichung gilt für beliebige  $\alpha > 0$ . Wir bringen die Bedingung  $\|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} \leq K$  implizit in die Ungleichung ein. Es gilt

$$-\alpha K \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} < b_1(\zeta) + \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle \quad \forall \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \quad \zeta(0) = 0.$$

Ein Übergang von  $\zeta$  zu  $-\zeta$  ergibt schließlich

$$-\alpha K \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} < -b_1(\zeta) - \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle.$$

Fassen wir diese beiden Ungleichungen zusammen, so erhalten wir

$$\left| b_1(\zeta) + \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle \right| < \alpha K \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)}. \quad (4.13)$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle| - |b_1(\zeta)| &\leq \left| |\langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle| - |b_1(\zeta)| \right| \\ &\leq |b_1(\zeta) + \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle| \\ &< \alpha K \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\left| \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta) \rangle \right| \leq \alpha K \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)} + |b_1(\zeta)|.$$

Mit dem Darstellungssatz von Riesz, Satz 2.5.2, und der Beschränktheit von  $b_1$  schließen wir

$$\left| \tilde{y}_\alpha(b_2(\zeta(\cdot))) \right| = \left| \langle \tilde{y}_\alpha, b_2(\zeta(\cdot)) \rangle \right| \leq c \|\zeta\|_{W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)}.$$

Die Konstante  $c > 0$  hängt hierbei von  $K$  und  $\alpha$  ab. Wir setzen  $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Die so entstehende Folge  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist auf der Menge

$$\mathbf{Z} := \left\{ z \in L_2^n((0, \infty), \mu) \mid z = b_2(\zeta), \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \zeta(0) = 0 \right\}$$

beschränkt. Nach Lemma 4.3.13 ist die Folge in  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  beschränkt.<sup>5</sup> Aus der beschränkten Folge  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  können wir im reflexiven Hilbertraum eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. Wir bezeichnen diese erneut mit  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

<sup>5</sup>Tatsächlich muss hierzu  $\mathbf{Z} = L_2^n((0, \infty), \mu)$  gezeigt werden, um die Beschränktheit der Folge in dem Raum  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  zu garantieren. Dies ist mittels der Theorie assoziierter Fredholm-Operatoren im Hilbertraum möglich. (vgl. [58])

Unter Beachtung von Lemma 4.3.9 und Lemma 4.3.10 gehen wir mit  $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$  in (4.13) zur Grenze über und schließen

$$0 \leq b_1(\zeta) + \langle \tilde{y}_0, b_2(\zeta) \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu), \zeta(0) = 0. \quad (4.14)$$

Die in (4.14) entstehende Gleichung hat nach Definition von  $b_1, b_2$  die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \left\{ \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) \hat{\mu}(t) + \tilde{y}_0^T \left[ \dot{\zeta}(t) - \varphi_\xi(t, x_*(t), u_*(t)) \zeta(t) \right] \mu(t) \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \left[ \tilde{y}_0^T(t) \mu(t) \right] \dot{\zeta}(t) + \left[ \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - \tilde{y}_0^T(t) \mu(t) \varphi_\xi(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \zeta(t) \right\} dt \end{aligned}$$

für alle  $\zeta \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  mit  $\zeta(0) = 0$ . Wegen  $C_c^\infty([0, \infty), \mathbb{R}) \subseteq W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  gilt letztere Gleichung insbesondere für alle Testfunktionen. Der Vergleich mit der Definition der schwachen Ableitung liefert

$$[\tilde{y}_0(t) \mu(t)]' = \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - \tilde{y}_0^T(t) \mu(t) \varphi_\xi(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Identifikation mit der Pontryagin-Funktion ergibt fast überall die Identität

$$\dot{y}(t) = -\nabla_\xi H(t, x_*(t), u_*(t), y(t), 1), \quad y := \tilde{y}_0 \mu.$$

Wir bezeichnen  $y$  als die Adjungierte und die zugehörige Differentialgleichung als kanonische Gleichung.

### Bemerkung 4.3.8

Man beachte hierbei, dass der Ableitungsbegriff in dem kanonischen Differentialgleichungssystem zunächst nur der Begriff der schwachen Ableitung ist. Mit der zusätzlichen Eigenschaft der Transversalität  $y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu^{-1})$ , wie wir sie im Folgenden zeigen, können wir die Adjungierte in den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen einbetten (siehe Lemma 2.4.5). Wir können entsprechend zur klassischen Ableitung übergehen.

Im Folgenden werden wir nun diese kanonische Gleichung dahingehend erweitern, dass wir eine zusätzliche Randbedingung in Form der sogenannten Transversalitätsbedingung herleiten. Wir stellen  $y \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu^{-1})$  fest.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |y(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt &= \int_0^\infty |\tilde{y}_0(t) \mu(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt = \int_0^\infty |\tilde{y}_0(t)|_2^2 \mu(t) dt < \infty \\ \int_0^\infty |\dot{y}(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt &= \int_0^\infty \left| \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - y_0^T(t) \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \mu(t) \right|_2^2 \mu^{-1}(t) dt \\ &\leq 4 \int_0^\infty \left\{ \left| \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2^2 + \left| y_0^T(t) \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2^2 \right\} \mu(t) dt \\ &\leq 4 \int_0^\infty \left| \nabla_\xi^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2^2 \mu(t) dt \\ &\quad + 4 \left\| \mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\|_{L_\infty^{n \times n}((0, \infty))} \int_0^\infty |y_0(t)|_2^2 \mu(t) dt < \infty \end{aligned}$$

### Herleitung der Maximumbedingung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Maximumbedingung aus Satz 4.3.1 zu verifizieren und so den Beweis dieses Satzes zu komplettieren. Wir betrachten hierzu die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Variationsungleichung (4.12) erneut. Wir halten diesmal  $x = x_*$  optimal fest und variieren nur bezüglich der zulässigen Steuerungen. Die Ungleichung (4.12) geht den obigen Überlegungen entsprechend in

$$-\frac{1}{n} < a_1(u) + \langle \tilde{y}_n, a_2(u) \rangle \quad \forall u \in \mathbb{U}, \forall n \in \mathbb{N}$$

über. Wir haben im vorherigen Abschnitt bereits gezeigt, dass die Folge  $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $\tilde{y}_0$  konvergiert. Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$0 \leq a_1(u) + \langle \tilde{y}_0, a_2(u) \rangle \quad \forall u \in \mathbb{U}.$$

Einsetzen der Definitionen von  $a_1, a_2$  führt zu

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_0^\infty [r(t, x_*(t), u(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t))] \hat{\mu}(t) dt \\ & + \int_0^\infty \tilde{y}_0^T(t) [-\mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t)] \mu(t) dt. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ -r(t, x_*(t), u(t)) \hat{\mu}(t) + [\tilde{y}_0 \mu]^T(t) [\mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))u(t)] \right\} dt \\ & \leq \int_0^\infty \left\{ -r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) + [\tilde{y}_0 \mu]^T(t) [\mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))u_*(t)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ungleichung (4.15) kann nur dann in die Maximumbedingung in integrierter Form übergehen, wenn auf der linken Seite der Ausdruck  $\mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))$  von der optimalen Steuerung  $u_*$  unabhängig ist. Mit anderen Worten haben wir Voraussetzung (V4) zu fordern. Es ergibt sich für die Dynamik zwingend die Gestalt

$$\varphi(t, \xi, v) = \psi_1(t, \xi)v + \psi_2(t, \xi).$$

In diesem Fall bringen wir den Term  $\psi_2(\cdot, x_*(\cdot))$  in Form einer intelligenten Null in Gleichung (4.15) ein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ -r(t, x_*(t), u(t)) \hat{\mu}(t) + [\tilde{y}_0 \mu]^T(t) [\psi_2(t, x_*(t)) + \psi_1(t, x_*(t))u(t)] \right\} dt \\ & \leq \int_0^\infty \left\{ -r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) + [\tilde{y}_0 \mu]^T(t) [\psi_2(t, x_*(t)) + \psi_1(t, x_*(t))u_*(t)] \right\} dt. \end{aligned}$$

Letztere Variationsungleichung kann dem Beweis in [63, Seite 72ff] folgend, welcher auf Argumenten aus [67, Seite 553, Beweis zu Theorem 2.3] aufbaut, in die fast überall punktweise geltende Maximumbedingung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), y(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x_*(t), v, y(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. in } (0, \infty)$$

überführt werden. Entsprechend sind alle Bedingungen des Maximumprinzips verifiziert. Gleichzeitig haben wir die Grenze der hier vorgestellten Beweismethodik herausgestellt. Es lassen sich ad hoc nur Steuerungsaufgaben, welche affin-linear bezüglich der Steuervariablen  $v$  sind, mit dieser Technik erfassen. Wir werden dies später detaillierter ausführen.

## 4.4 Untersuchung der Steuerungsaufgabe mit einer Weierstraß-Variation

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel notwendige Optimalitätskriterien, in Form eines Maximumprinzips vom Pontryagin-Typus, mittels einer Euler-Variation in einem Hilbertraum studiert haben, widmen wir uns jetzt der selbigen Fragestellung unter Verwendung einer Nadelvariation. Zunächst formulieren wir geeignete Voraussetzungen an die in Kapitel 4.1 gestellte Aufgabe und präsentieren notwendige Optimalitätskriterien in Form eines Maximumprinzips vom Pontryagin-Typus. Im Hauptteil dieses Kapitels beweisen wir das Maximumprinzip. Der Beweis des selbst setzt sich aus den folgenden Teilschritten zusammen. Zunächst charakterisieren wir den Begriff Nadelvariation im Sobolev- beziehungsweise Lebesgue-Raum. Mittels der Nadelvariation beschreiben wir anschließend die Menge der zulässigen variierten Prozesse. Wir stellen darauf folgend wesentliche Eigenschaften dieser Menge heraus, welche wir für den Beweis des Maximumprinzips benötigen werden. Im Unterschied zur Euler-Variation lässt sich die Maximumbedingung hier jedoch nicht aus der Trennung konvexer Mengen herleiten. Wir beweisen ihre Gültigkeit unter zu Hilfenahme lokaler, punktwiser Argumente. Lediglich die Herleitung der Adjungierten, mitsamt der Transversalitätsbedingung, erfolgt mittels Trennung konvexer Mengen, wie wir sie bereits zuvor bei der Euler-Variation angewandt haben.

### Bemerkung 4.4.1

*Für den im Folgenden vorgeschlagenen Beweis für das Maximumprinzip verwenden wir ein hybrides Schema. Während wir die Maximumbedingung im wesentlichen mit lokalen Methoden gewinnen, verwenden wir für die Herleitung der Adjungierten ein Trennungsargument in einem gewichteten Hilbertraum. Es ist jedoch auch möglich, die Adjungierte explizit aus lokalen (im Raum der absolut-stetigen Funktionen) Argumenten zu konstruieren. Aseev und Veliov folgen diesem Weg in „Needle variations in infinite-horizon optimal control“, [10], indem sie die Adjungierte über eine Art Cauchy-Formel konstruieren. Wir werden in Kapitel 4.5 beziehungsweise Kapitel 4.6 die sich aus den verschiedenen Beweismethodiken ergebenden Vor- und Nachteile diskutieren.*

### 4.4.1 Formulierung des Maximumprinzips

Wir versehen die zuvor formulierte Aufgabe der optimalen Steuerung mit den folgenden Voraussetzungen.

(W1) Die Funktion  $\varphi(t, \xi, v)$  sei bezüglich aller Argumente stetig und bezüglich  $\xi$  stetig differenzierbar.

(W2) Die Funktion  $\varphi$  genüge bezüglich  $\xi$  der gleichmäßigen Lipschitz-Bedingung

$$\exists L > 0 : \forall t \geq 0 \forall v \in \mathcal{U} \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n : |\varphi(t, \xi_1, v) - \varphi(t, \xi_2, v)|_2 \leq L \cdot |\xi_1 - \xi_2|_2.$$

(W3) Die Funktion  $\varphi$  genüge für alle  $(t, \xi, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$  der Wachstumsbeschränkung

$$|\varphi(t, \xi, v)|_2 \leq c_1(1 + |\xi|_2), \quad c_1 \geq 0.$$

(W4) Die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  entlang des optimalen Prozesses  $(x_*, u_*)$ ,

$$\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)),$$

sei durch die Konstante  $c_2 > 0$  wesentlich beschränkt. Insbesondere ist die Jacobi-Matrix Element des Raumes  $L_\infty^{n \times n}((0, \infty))$ .

(W5) Die Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_v[\varphi]$  genüge der Gestalt

$$\mathcal{J}_v[\varphi](t, \xi, v) = \psi_1(t, \xi).$$

Mit anderen Worten,  $\varphi$  besitzt die formale Gestalt  $\varphi(t, \xi, v) = \psi_1(t, \xi)v + \psi_2(t, \xi)$ .

(W6) Das Gewicht  $\mu(t) = e^{-\rho t}$  sei mit  $\rho > 2 \max\{L, c_1, c_2\}$  gewählt. Hierbei seien  $L, c_1, c_2$  die Konstanten aus Voraussetzung (W2), (W3) beziehungsweise (W4).

(W7) Der Steuerbereich  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  sei abgeschlossen und beschränkt.

(W8) Der Integrand  $r$ , mit Argumenten  $t, \xi, v$ , sei stetig bezüglich  $t, v$  und stetig differenzierbar bezüglich der Variablen  $\xi$ .

(W9) Der Integrand  $r$  genüge für alle  $(t, \xi, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$  der Wachstumsbedingung

$$\left| r(t, \xi, v) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2 \leq A_1(t) + B(|\xi|_2^2 + |v|_2^2)$$

mit  $A_1 \in L_1((0, \infty), \mu)$  und  $B > 0$ .

(W10) Der Integrand  $r$  genüge entlang des optimalen Prozesses  $(x_*, u_*)$  der Inklusion

$$r_\xi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \in L_2^n((0, \infty), \mu).$$

(W11) Der zulässige Steuerbereich  $\mathcal{U}$  sei konvex und der Integrand  $r(t, \xi, v)$  sei konvex auf  $\mathcal{U}$  bezüglich  $v$ .

Zu den obigen Annahmen gilt es Folgendes anzumerken:

**Bemerkung 4.4.2**

*Wir haben in Bemerkung 4.3.1 gezeigt, dass die uniforme Lipschitz-Bedingung (W2) die wesentliche Beschränkung der Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  (Voraussetzung (W4)) impliziert. Folglich stellt die Annahme (W4) keine weitere Einschränkung an die Problemklasse dar. Die eigentliche Forderung, welche es sorgfältig zu prüfen gilt, ist die uniforme Lipschitz-Bedingung (W2).*

**Satz 4.4.1 (Maximumprinzip für  $(P_\infty)$ )**

*Mit  $\mathbb{X} \times \mathbb{U} = W_2^{n,1}((0, \infty), \mu) \times L_2^m((0, \infty), \mu)$  sei  $(x_*, u_*)$  optimal, gemäß Definition 3.6.4. Weiterhin seien die Voraussetzungen (W1) – (W11) erfüllt. Dann existieren zu beliebigem  $t_0 > 0$  Multiplikatoren  $(\lambda_0, p) \in \mathbb{R} \times W_2^{n,1}((t_0, \infty), \mu^{-1})$  mit*

$$\lambda_0 = 1, \tag{N}$$

$$p \in W_2^{n,1}((t_0, \infty), \mu^{-1}), \tag{T}$$

so dass  $(x_*, u_*)$  fast überall auf  $(t_0, \infty)$  den Bedingungen

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0), \tag{K}$$

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0) \tag{M}$$

genügt. Dabei heißt

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) = -\lambda_0 r(t, \xi, v) \hat{\mu}(t) + \eta^T \varphi(t, \xi, v)$$

*Pontryagin Funktion.*

Wir formulieren folgende Beobachtung.

**Folgerung 4.4.1**

*Sei die Transversalitätsbedingung (T) aus dem Maximumprinzip, Satz 4.4.1, erfüllt, dann gilt für die Adjungierte  $y$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|_2 = 0.$$

Diese Folgerung ist eine unmittelbare Implikation von Lemma 2.5.6, angewandt auf die Adjungierte aus dem Maximumprinzip, Satz 4.4.1.



### 4.4.2 Beweis des Maximumprinzips

Ziel dieses Kapitels ist es, das im vorangegangenen Abschnitt formulierte Maximumprinzip zu beweisen. Wir kombinieren hierfür zwei Beweistechniken. Zum einen ist dies die klassische Nadelvariation, zum anderen ein Separationsansatz in Hilberträumen, wie wir ihn in dem vorangegangenen Kapitel bereits kennengelernt haben. Die Nadelvariation scheint hierbei ein adäquates Mittel zu sein, um die punktweise Maximumbedingung zu deduzieren (vgl. [9–12, 30]). Sie kann über dem unendlichen Zeithorizont jedoch keine Transversalitätsbedingung erfassen. Diese müsste gesondert gezeigt werden, wie es beispielsweise in [12] durch eine Grenzwertanalyse, der durch eine Art Cauchy-Formel konstruierten Adjungierten, gemacht worden ist. Die Transversalität über dem unendlichen Zeithorizont kann jedoch auch als eine Eigenschaft der Raumzugehörigkeit in gewichteten Banach- beziehungsweise Hilberträumen interpretiert werden (vgl. [51, 54]). Entsprechend völlig natürlich ergibt sich so die kanonische Gleichung mit ihrer Transversalität aus einer Trennung konvexer Mengen im Hilbertraum. Im Folgenden werden wir diese Methode zur Herleitung der Adjungierten mitsamt ihrer Transversalitätsbedingung verwenden. Die Maximumbedingung werden wir jedoch, wie in der klassischen Idee nach Weierstraß, lokal punktweise fast überall aus der Nadelvariation ableiten.

#### Nadelvariation der Steuerung und das Variationslemma

Wir definieren zunächst die Menge  $\Omega(v)$ ,  $v \in \mathcal{U}$ , aller Lebesgue-Punkte  $\tau \geq 0$  von  $r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ,  $r(\cdot, x_*(\cdot), v)$ ,  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  und  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$ . Nähere Betrachtung offenbart, dass die Eigenschaft ein Lebesgue-Punkt der Funktion  $r(\cdot, x_*(\cdot), v)$  beziehungsweise  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$  zu sein, von der konkreten Wahl des Parameters  $v \in \mathcal{U}$  unabhängig ist. Dies liegt in der Stetigkeit der optimalen Trajektorie, und damit einhergehend mit der Stetigkeit der verketteten Funktionen, begründet. Die Stetigkeit impliziert nach Lemma 2.2.3, dass jedes  $\tau \in [0, \infty)$  Lebesgue-Punkt von  $r(\cdot, x_*(\cdot), v)$ ,  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$  ist. Folglich gilt  $\Omega(v_1) = \Omega(v_2)$  für alle  $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ , und wir sind zur Notation

$$\Omega = \left\{ \tau \in [0, \infty) \mid \tau \text{ ist Lebesgue-Punkt von } \varphi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)), r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\}$$

berechtigt. Die Menge  $[0, \infty) \setminus \Omega$  ist hierbei vom Lebesgue-Maß Null. Wir können dies gemäß Folgerung 2.2.4 einsehen, da die Mengen der nicht-Lebesgue-Punkte für jede der Funktionen  $r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ,  $r(\cdot, x_*(\cdot), v)$ ,  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  und  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$  vom Maß Null sind.

Mit einem zulässigen Steuerungswert  $v \in \mathcal{U}$  und einem beliebigen  $\tau \in \Omega$  formulieren wir für  $\lambda > 0$ ,  $\tau - \lambda > 0$  die Nadelvariation  $u_\lambda$  gemäß

$$u_\lambda(t) := u(t, \lambda) := \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin (\tau - \lambda, \tau] \\ v & \text{für } t \in (\tau - \lambda, \tau] \end{cases}.$$

Mit Hilfe der Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_{(\tau-\lambda, \tau]}$  lässt sich die nadelvariierte Steuerung in der Form

$$u_\lambda(t) = u_*(t) + \mathbb{1}_{(\tau-\lambda, \tau]}(t) (v - u_*(t)) = u_*(t) + \mathbb{1}_{(\tau-\lambda, \tau]}(t) \omega(t), \quad \omega(t) := v - u_*(t)$$

schreiben. Strukturell ist unmittelbar die Parallelität zur Euler-Variation zu erkennen.

Wir stellen zunächst fest, dass es sich bei der Nadelvariation  $u_\lambda$  um eine zulässige Steuerung handelt. Es gilt  $u_\lambda \in L_2((0, \infty), \mu)$  und  $u_\lambda(t) \in \mathcal{U}$  fast überall auf  $(0, \infty)$ . Mit dem folgenden Lemma verifizieren wir die Existenz einer zu  $u_\lambda$  gehörige Trajektorie.

**Lemma 4.4.1**

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Weiter seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3) (W6) und (W7) erfüllt. Wir betrachten das zur Nadelvariation  $u_\lambda$  gestellte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t), u_\lambda(t)) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Es existiert eine eindeutige Lösung  $x \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$ . Weiterhin existiert eine gleichmäßige, von  $\lambda$  unabhängige Majorante  $\gamma \in W_2^1((0, \infty), \mu) \cap C^0([0, \infty), \mathbb{R})$  derart, dass  $|x(t)|_2 \leq \gamma(t)$  auf der positiven reellen Halbachse erfüllt ist.

*Beweis.* Wir führen für feste  $\lambda$  die Notation  $\varphi_\lambda(t, \xi) = \varphi(t, \xi, u_\lambda(t))$  ein. Wir untersuchen die Eigenschaften von  $\varphi_\lambda$  und zeigen, dass sie den Voraussetzungen von Folgerung 2.6.5 genügt. Aufgrund der Steuerbeschränkung (W7) ist  $\varphi_\lambda(t, \xi)$  bezüglich des Argumentes  $t$  für jedes feste  $\xi \in \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar. Gemäß (W1) folgt, dass  $\varphi_\lambda$  für fast alle  $t \in [0, \infty)$  bezüglich der Variablen  $\xi$  stetig ist. Mit (W3) sind schließlich alle Voraussetzungen von Folgerung 2.6.5 erfüllt. Es folgt die Existenz einer Lösung  $x \in AC_{\text{loc}}([0, \infty))$ . Weiterhin ist diese Lösung für jedes  $\rho > 2c$  Element des Raumes  $W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  mit  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ . Insbesondere ist  $x \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  mit  $\mu$ , wie in Voraussetzung (W6) gewählt. Mit Voraussetzung (W2) folgt schließlich die Eindeutigkeit der Lösung.  $\square$

Die nach Lemma 4.4.1 existierende Trajektorie, welche  $\dot{x}(t, \lambda) = \varphi(t, x(t, \lambda), u(t, \lambda))$  genügt, bezeichnen wir fortan mit  $x(\cdot, \lambda)$ , oder auch verkürzend  $x_\lambda$ . Wir wollen mit den folgenden drei Lemmata einen wesentlichen Zusammenhang zwischen dieser Trajektorie und der optimalen Trajektorie  $x_*$  herausstellen. Zunächst zeigen wir, dass die variierte Trajektorie für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen die optimale Trajektorie konvergiert.

**Lemma 4.4.2**

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Zusätzlich seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Weiter sei  $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$  die Folge der Lösungen der Dynamik zu der Folge der variierten Steuerungen  $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ , welche nach Lemma 4.4.1 existiert. Es folgt punktweise auf  $[0, \infty)$  die Identität

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} x(t, \lambda) = x(t, 0) = x_*(t).$$

*Beweis.* Wir betrachten die Differenz  $|x(t, \lambda) - x(t, 0)|$  und schätzen

$$\begin{aligned}
 |x(t, \lambda) - x(t, 0)|_2 &\leq \int_0^t \left| \varphi(s, x(s, \lambda), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, 0)) \right|_2 ds \\
 &\leq \int_0^t \left| \varphi(s, x(s, \lambda), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, \lambda)) \right|_2 ds \\
 &\quad + \int_0^t \left| \varphi(s, x(s, 0), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, 0)) \right|_2 ds \\
 &\leq \int_0^t L |x(s, \lambda) - x(s, 0)|_2 ds \\
 &\quad + \int_0^t \left| \varphi(s, x(s, 0), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, 0)) \right|_2 ds
 \end{aligned}$$

ab. Anwendung der Gronwall Ungleichung, Lemma 2.5.4 liefert

$$|x(t, \lambda) - x(t, 0)|_2 \leq \int_0^t \left| \varphi(s, x(s, 0), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, 0)) \right|_2 ds \cdot e^{Lt}.$$

Unter Beachtung der Definition der Nadelvariation schätzen wir

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \left| \varphi(s, x(s, 0), u(s, \lambda)) - \varphi(s, x(s, 0), u(s, 0)) \right|_2 ds \\
 &\leq \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \left| \varphi(s, x(s, 0), v) - \varphi(s, x(s, 0), u_*(s)) \right|_2 ds \\
 &\leq \lambda \max_{s \in [0, \tau]} \left| \varphi(s, x(s, 0), v) - \varphi(s, x(s, 0), u_*(s)) \right|_2
 \end{aligned}$$

ab. Mit der Setzung

$$c_0(\tau, v) := \max_{s \in [0, \tau]} \left| \varphi(s, x(s, 0), v) - \varphi(s, x(s, 0), u_*(s)) \right|_2$$

notieren wir die bisherigen Überlegungen in Form der Ungleichung

$$|x(t, \lambda) - x(t, 0)|_2 \leq \lambda c_0(\tau, v) e^{Lt}. \tag{4.16}$$

Die Konstante  $c_0(\tau, v) > 0$  ist hierbei wegen der Steuerbeschränkung, der Stetigkeit der Funktionen  $\varphi, x_*$ , sowie der Kompaktheit des Intervalls  $[0, \tau]$  endlich. Man beachte, dass  $\tau, v$  hierbei fixierte Parameter sind.

Mit der Ungleichung (4.16) sind wir jetzt in der Lage, die Stetigkeit der Trajektorie  $x$  bezüglich  $\lambda$  in der Stelle  $\lambda_0 = 0$  zu zeigen. Sei hierfür  $t \in [0, \infty)$  fixiert und ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es gilt mit  $\delta(\varepsilon, t, \tau, v) = \frac{\varepsilon}{c_0(\tau, v)e^{Lt}}$

$$|x(t, \lambda) - x(t, 0)|_2 \leq \lambda c_0(\tau, v) e^{Lt} < \delta(\varepsilon, t, \tau, v) c_0(\tau, v) e^{Lt} = \varepsilon$$

für alle  $\lambda$  mit  $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon, t, \tau, v)$ . Mit anderen Worten,  $x(t, \cdot)$  ist stetig in  $\lambda_0 = 0$ . Insbesondere folgt punktweise für jedes feste  $t \in [0, \infty)$  die Grenzwertrelation

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |x(t, \lambda) - x(t, 0)|_2 = 0,$$

welche die Behauptung des Lemmas beweist.  $\square$

Die Aussage von Lemma 4.4.2 kann als eine Art Stetigkeit der variierten Trajektorie bezüglich des Variationsparameters  $\lambda$  verstanden werden. Wir setzen diese Überlegung fort und werden im Folgenden zeigen, dass auch eine Art Differenzierbarkeit bezüglich  $\lambda$  vorliegt. Hierzu betrachten wir jedoch zunächst das folgende Hilfslemma.

**Lemma 4.4.3**

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Zusätzlich seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Weiter sei  $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$  die Folge der Lösungen der Dynamik zu der Folge der variierten Steuerungen  $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ , welche nach Lemma 4.4.1 existiert. Es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_\lambda(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ & = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir notieren zunächst

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_\lambda(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ & = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_\lambda(s), v) - \varphi(s, x_*(s), v)] ds \\ & \quad + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_*(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds. \end{aligned}$$

Bei  $\tau > 0$  handelt es sich um einen Lebesgue-Punkt der Funktionen  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  und  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$ , so dass wir für den zweiten Ausdruck

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_*(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ & = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \end{aligned}$$

schließen können. Wir zeigen noch, dass der erste Grenzwert Null ist. Hierzu verwenden

wir Ungleichung (4.16) aus Lemma 4.4.2. Mit dieser schätzen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} |\varphi(s, x_{\lambda}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), v)|_2 ds &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} L|x(s, \lambda) - x(s, 0)|_2 ds \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} L\lambda c_0(\tau, v)e^{Ls} ds \\ &= c_0(\tau, v)L \int_{\tau-\lambda}^{\tau} e^{Ls} ds = (1 - e^{-\lambda}) c_0(\tau, v)e^{L\tau} \end{aligned}$$

ab. Es folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_{\lambda}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), v)] ds = 0.$$

Insgesamt erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_{\lambda}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)), \end{aligned}$$

womit die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.  $\square$

### Bemerkung 4.4.3

Auf den ersten Blick sieht die Aussage von Lemma 4.4.3 trivial aus. Es scheint sich bei dieser lediglich um die Aussage zu handeln, dass  $\tau$  Lebesgue-Punkt der Funktion  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  beziehungsweise  $\varphi(\cdot, x_*(\cdot), v)$  ist. Eine genauere Betrachtung offenbart jedoch, im Unterschied zur Definition des Lebesgue-Punktes, dass die im Integranden auftretenden Funktionen zusätzlich von  $\lambda$  abhängen.

Unter Verwendung von Lemma 4.4.3 zeigen wir jetzt das folgende Resultat.

### Lemma 4.4.4

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Zusätzlich seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Weiter sei  $\{x_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  die Folge der Lösungen der Dynamik zu der Folge der variierten Steuerungen  $\{u_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ , welche nach Lemma 4.4.1 existiert. Dann existiert eine Teilfolge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ ,

$$y_{\lambda}(t) := \frac{1}{\lambda} (x_{\lambda}(t) - x_*(t)),$$

so dass der punktweise Grenzwert

$$y(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_{\lambda_k}(t) - x_*(t))$$

existiert und die hierdurch definierte Funktion  $y$  Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  ist. Das Gewicht  $\mu$  sei hierbei gemäß Voraussetzung (W6) gewählt. Weiterhin ist  $y$  die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.4.4**

Analog zum Fall der Euler-Variation genügt es uns hier, lediglich Grenzwerte im Sinn der punktweise fast überall geltenden Konvergenz zu diskutieren. Der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, Satz 2.5.4, liefert schließlich, zusammen mit der Existenz einer uniformen Majorante, die Konvergenz im Kontext einer Hilbertraumtheorie. Man vergleiche hierzu auch Bemerkung 4.3.3.

Zum Beweis von Lemma 4.4.4 gehen wir in mehreren Teilschritten vor.

1. Wir zeigen, dass die Sequenz  $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$  gleichmäßig, unabhängig von dem Variationsparameter  $\lambda$ , beschränkt ist.
2. Wir verifizieren, dass jede punktweise konvergente Teilfolge von  $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$  gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \end{aligned}$$

konvergiert.

3. Wir beweisen, dass  $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$  mindestens eine punktweise konvergente Teilfolge besitzt.

Zusammenfassend schließen wir die Existenz der Grenzfunktion  $y$  mit den in Lemma 4.4.4 geforderten Eigenschaften.

Wir zeigen, dass die Folge  $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$  in der Norm des Raumes  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  gleichmäßig beschränkt ist.

**Lemma 4.4.5**

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Weiterhin seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Die Folge  $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$  sei die Folge der Lösungen der gestörten Anfangswertprobleme zu den zugrunde liegenden variierten Steuerungen  $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ . Dann ist die durch

$$y_\lambda := \frac{1}{\lambda} (x_\lambda(t) - x_*(t))$$

definierte Folge  $\{y_\lambda\}_{\lambda>0}$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  ab einem gewissen  $\lambda_0 > 0$  gleichmäßig in der Norm des Raumes  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  beschränkt. Das Gewicht  $\mu$  sei hierbei wie in Voraussetzung (W6) gewählt.

*Beweis.* Aus der Definition der nadelvariierten Steuerung folgt unmittelbar  $y_\lambda(t) = 0$  für alle  $t \in [0, \tau - \lambda]$  und  $\lambda > 0$ . Mit diesem Wissen schließen wir für  $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} y_\lambda(t) &= \frac{1}{\lambda} (x_\lambda(t) - x_*(t)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_\lambda(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^t [\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen wir den von  $t$  unabhängigen Teil mit

$$\hat{y}(\tau, \lambda) := \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [\varphi(s, x_{\lambda}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds.$$

Für das zweite Integral folgt unter Ausnutzung der Lipschitz-Bedingung (W2) die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^t [\varphi(s, x_{\lambda}(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \right|_2 \leq \int_{\tau}^t L \left| \frac{x_{\lambda}(s) - x_*(s)}{\lambda} \right|_2 ds.$$

Zusammenfassend erhalten wir die Integralungleichung

$$|y_{\lambda}(t)|_2 \leq |\hat{y}(\tau; \lambda)|_2 + \int_{\tau}^t L |y_{\lambda}(s)|_2 ds.$$

Anwendung der Bellmann-Gronwall Ungleichung, Lemma 2.5.3, führt zu

$$|y_{\lambda}(t)|_2 \leq |\hat{y}(\tau; \lambda)|_2 e^{(t-\tau)L}, \quad t \geq \tau.$$

Wir widmen uns noch einmal dem Ausdruck  $|\hat{y}(\tau; \lambda)|_2$ . Lemma 4.4.3 impliziert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\hat{y}_{\lambda}(\tau; \lambda)|_2 = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)).$$

Insbesondere existiert ein  $\lambda_0 > 0$ , so dass sich der Ausdruck  $|\hat{y}_{\lambda}(\tau; \lambda)|_2$  für alle  $\lambda \leq \lambda_0$  durch eine Konstante  $c_1 > 0$  unabhängig von  $\lambda$  majorisieren lässt.

Wir erhalten insgesamt, für  $t \geq \tau$ ,

$$|y_{\lambda}(t)|_2 \leq c_1 e^{(t-\tau)L} =: \alpha(t).$$

Die Folge  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  ist gleichmäßig beschränkt bezüglich des Variationsparameters  $\lambda$ . Insbesondere folgt mit Voraussetzung (W6) die Beschränkung der Folge  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$ .  $\square$

Im nächsten Schritt stellen wir die Korrespondenz der Folge  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  mit dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \end{aligned}$$

her. Hierzu gehen wir zunächst von der Konvergenz der Folge  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  aus.

**Lemma 4.4.6**

Sei  $\tau \in \Omega$  und  $v \in \mathcal{U}$ ,  $\lambda > 0$ . Zusätzlich seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Die Folge  $\{x_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  sei die Folge der Lösungen des Anfangswertproblems zu der Folge der variierten Steuerungen  $\{u_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ . Wir betrachten jetzt eine punktweise konvergente Teilfolge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  mit Grenzfunktion

$$\tilde{y}(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)).$$

Dann ist die Grenzfunktion  $\tilde{y}$  Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  mit dem Gewicht  $\mu$  gemäß Voraussetzung (W6). Weiterhin ist  $\tilde{y}$  die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\tilde{y}(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ \tilde{y}(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)).\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir berechnen für fixiertes  $t \in [\tau, \infty)$  den Grenzwert

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_{\lambda_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau - \lambda_k}^{\tau} [\varphi(s, x_{\lambda_k}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau}^t [\varphi(s, x_{\lambda_k}(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds.\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.4.3 erhalten wir die Identität

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau - \lambda_k}^{\tau} [\varphi(s, x_{\lambda_k}(s), v) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)).\end{aligned}$$

Unter Anwendung von Lemma 4.4.5 schließen wir, dass die Folge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  insbesondere auf  $[\tau, \infty)$  punktweise durch die stetige Funktion  $\alpha(t) = c_1 e^{(t-\tau)L}$  beschränkt ist. Ausnutzung der Lipschitz-Bedingung (W2) liefert für  $s \geq \tau$

$$\frac{1}{\lambda} |\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))|_2 \leq \frac{L}{\lambda} |x_\lambda(s) - x_*(s)|_2 = L \cdot |y_\lambda(s)|_2.$$

Folglich ist auch die Folge

$$\left\{ \frac{1}{\lambda} [\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] \right\}_{\lambda > 0}$$

beschränkt. Anwendung des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^t [\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ = \int_{\tau}^t \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [\varphi(s, x_\lambda(s), u_*(s)) - \varphi(s, x_*(s), u_*(s))] ds \\ = \int_{\tau}^t \mathcal{J}_\xi[\varphi](s, x_*(s), u_*(s)) \tilde{y}(s) ds, \quad t \geq \tau.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir beim vorherigen Grenzübergang die punktweise fast überall geltende Konvergenz  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} x_\lambda(t) = x_*(t)$  ausgenutzt. Diese ist nach Lemma 4.4.2 gegeben.



Zusammenfassend gilt

$$\tilde{y}(t) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) + \int_{\tau}^t \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](s, x_*(s), u_*(s)) \tilde{y}(s) ds, \quad t \geq \tau.$$

Letztere Integralgleichung ist äquivalent zu dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) &= \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \tilde{y}(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ \tilde{y}(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

Abschließend ergibt sich aus Folgerung 2.6.4 die Existenz einer eindeutigen Lösung dieses Anfangswertproblems. Die wesentlich beschränkte Funktion  $\mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$  (vgl. Voraussetzung (W4)) fungiert hierbei als Lipschitz-Konstante. Die weiteren Bedingungen von Folgerung 2.6.4 sind aufgrund der Linearität des Anfangswertproblems unmittelbar gegeben. Mit den Ideen aus dem Beweis zu Lemma 4.4.5 schließen wir, dass die Lösung Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  mit dem Gewicht  $\mu$  gemäß Voraussetzung (W6) ist.  $\square$

Um den Beweis von Lemma 4.4.4 abzuschließen, zeigen wir, dass noch mindestens eine punktweise konvergente Teilfolge von  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$  existiert.

**Lemma 4.4.7**

Sei  $\tau \in \Omega$ ,  $v \in \mathcal{U}$  und die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt. Weiter sei  $\{x_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  die Folge von Lösungen des Anfangswertproblems zu der Folge der variierten Steuerungen  $\{u_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ . Dann existiert mindestens eine Teilfolge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ , welche auf  $[\tau, \infty)$  punktweise fast überall konvergiert.

*Beweis.* Lemma 4.4.5 impliziert, dass die Folge  $\{y_{\lambda_k}\}$  im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  ab einem gewissen  $\lambda_0 > 0$  gleichmäßig beschränkt ist. Wir betrachten die Ableitungen  $\dot{y}_{\lambda_k}$ . Auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  gilt fast überall

$$|\dot{y}_{\lambda_k}(t)|_2 = \frac{1}{\lambda} \left| \varphi(t, x_{\lambda}(t), u_*(t)) - \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) \right|_2 \leq \frac{L}{\lambda} |x_{\lambda}(t) - x_*(t)|_2 = L \cdot |y_{\lambda}(t)|_2.$$

Folglich sind die Ableitungen  $\dot{y}_{\lambda_k}$  ebenfalls im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  beschränkt und die Funktion  $y_{\lambda_k}$  wird zu einem beschränkten Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$ . Der Raum  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  ist ein reflexiver Raum. Nach dem Eberlein-Schmuljan Theorem, Satz 2.5.1, existiert eine schwach konvergente Teilfolge von  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Anwendung von Lemma 2.5.8 liefert schließlich die Existenz einer punktweise konvergenten Teilfolge.  $\square$

Abschließend sind wir jetzt in der Lage, die Aussage von Lemma 4.4.4 zu beweisen.

*Beweis zu Lemma 4.4.4.* Nach Lemma 4.4.7 existiert eine fast überall auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  punktweise konvergente Teilfolge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{y_{\lambda}\}_{\lambda>0}$ . Gemäß Lemma 4.4.6 konvergiert diese Teilfolge gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Lösung mit  $y_*$ . Zusätzlich gilt  $y_* \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  gemäß Lemma 4.4.6. Es sind entsprechend alle Behauptungen von Lemma 4.4.4 nachgewiesen.  $\square$

Mit Lemma 4.4.4 können wir jetzt die Trajektorie zur Nadelvariation  $u_\lambda$  in gewisser Weise mit der eindeutigen Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) && \text{f.ü. auf } (\tau, \infty) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \end{aligned}$$

identifizieren. Wir werden später den Nutzen dieser Überlegung hervorheben.

Wir kommen jetzt zum Hauptteil dieses Unterkapitels, dem Variationslemma. Auf diesem Lemma aufbauend werden wir in den folgenden Schritten die Bedingungen des Maximumprinzips ableiten. Zuvor merken wir jedoch an:

**Bemerkung 4.4.5**

*Bei dem nachfolgenden Lemma, Lemma 4.4.8, handelt es sich korrekterweise nicht exakt um ein klassisches Variationslemma im Sinn der Nadelvariation. Ebenfalls weicht der Ausdruck  $\delta^+$  von der Definition der Gâteaux-Ableitung ab. Obgleich wir uns dieses Sachverhaltes bewusst sind, möchten wir Lemma 4.4.8 dennoch als Variationslemma bezeichnen, da es im wesentlichen den Ideen des Variationslemmas der klassischen Nadelvariation folgt. Im Unterschied zum klassischen Fall benötigen wir jedoch nur die Konvergenz im Sinn einer Teilfolge.*

**Lemma 4.4.8**

*Sei  $\tau \in \Omega$ ,  $v \in \mathcal{U}$ . Weiterhin seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W6), (W7), (W8) und (W9) erfüllt. Weiter sei  $x_\lambda$  Lösung zur Nadelvariation  $u_\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Wir bezeichnen mit  $y$  den nach Lemma 4.4.4 existierenden Grenzwert*

$$y(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)),$$

*der nach Lemma 4.4.7 existierenden Teilfolge  $\{y_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{y_\lambda\}_{\lambda > 0}$ . Dann gilt die Variationsungleichung*

$$0 \leq [r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))] \hat{\mu}(\tau) + \int_\tau^\infty \nabla_\xi^t r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt.$$

*Beweis.* In einem ersten Schritt zeigen wir  $J(x_\lambda, u_\lambda) < \infty$  für hinreichend kleine  $\lambda > 0$ .

Hierzu schätzen wir zunächst unter Beachtung von (W9)

$$\begin{aligned}
 J_\infty(x_\lambda, u_\lambda) &\leq \int_0^\infty |r(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))|_2 \hat{\mu}(t) dt \\
 &\leq \int_0^\infty \left[ A_1(t) + B (|x_\lambda(t)|_2^2 + |u_\lambda(t)|_2^2) \right] \mu(t) dt \\
 &\leq \int_0^\infty \left[ A_1(t) + B \left( \gamma^2(t) + \left\{ \max_{v \in U} |v|_2 \right\}^2 \right) \right] \mu(t) dt \\
 &\leq \|A_1\|_{L_1((0, \infty), \mu)} + B \left( \|\gamma\|_{L_2^2((0, \infty), \mu)}^2 + \left\{ \max_{v \in U} |v|_2 \right\}^2 \int_0^\infty \mu(t) dt \right) \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

ab. Hierbei ist  $\gamma \in W_2^1((0, \infty), \mu)$  die nach Lemma 4.4.1 existierende uniforme Majorante.

Wir berechnen jetzt den Grenzwert

$$0 \leq \delta^+ J_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \left( J(x_{\lambda_k}, u_{\lambda_k}) - J(x_*, u_*) \right).$$

Mit Beachtung der Endlichkeit der Ausdrücke  $J_\infty(x_\lambda, u_\lambda)$ ,  $J_\infty(x_*, u_*)$  schreiben wir

$$\begin{aligned}
 \delta^+ J_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\infty \left[ r(t, x_{\lambda_k}(t), u_{\lambda_k}(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{\tau-\lambda}^\tau \left[ r(t, x_{\lambda_k}(t), v) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt \\
 &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_\tau^\infty \left[ r(t, x_{\lambda_k}(t), u_{\lambda_k}(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von  $\tau$  als Lebesgue-Punkt ergibt sich nach Folgerung 2.2.2 unmittelbar

$$\begin{aligned}
 \delta^+ J_\infty &= \left[ r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \hat{\mu}(\tau) \\
 &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_\tau^\infty \left[ r(t, x_{\lambda_k}(t), u_{\lambda_k}(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t)) \right] \hat{\mu}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Erneut nutzen wir Voraussetzung (W9), um eine Majorante an den Integranden zu konstruieren. Anwendung des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz liefert anschließend

$$\begin{aligned}
 \delta^+ J_\infty &= \left[ r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \hat{\mu}(\tau) \\
 &\quad + \int_\tau^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{r(t, x_{\lambda_k}(t), u_{\lambda_k}(t)) - r(t, x_*(t), u_*(t))}{x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)} \cdot \frac{x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)}{\lambda_k} \right] \hat{\mu}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Hierbei können wir aufgrund der fast überall punktweise geltenden Konvergenz der Folge  $\{x_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  (vgl. Lemma 4.4.2) und der Stetigkeit von  $r$  im Integranden zur Grenze übergehen. Der Vollzug des Grenzüberganges und Identifikation mit der Hilfsfunktion  $y$  liefert schließlich die gesuchte Variationsungleichung

$$0 \leq \left[ r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \hat{\mu}(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt.$$

□

### Die Menge der zulässigen Variationen

Zur Beschreibung der Menge der zulässigen Variationen führen wir zunächst folgende Notationen ein.

$$\begin{aligned} a_1(v) &:= r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ b_1(y) &:= \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi} r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt \\ b_2(y(\cdot)) &:= \dot{y}(\cdot) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) y(\cdot) \end{aligned}$$

#### Bemerkung 4.4.6

*Auffallend im Vergleich zu der nach Euler hergeleiteten Theorie ist die Absenz des Operators  $a_2(\omega)$ . Dieser zunächst klein erscheinende Unterschied bringt, wie wir in den folgenden Beweisschritten sehen werden, erhebliche Unterschiede in der Beweisstruktur. Es lässt sich die Maximumbedingung jetzt nicht mehr aus dem Trennungssatz generieren. Der Trennungssatz liefert lediglich die kanonische Gleichung mitsamt Transversalitätsbedingung. Die Maximumbedingung werden wir gesondert aus einem punktweisen Argument herleiten.*

Wir stellen fest, dass es sich bei  $a_1$  um eine stetige und konvexe Abbildung handelt.

#### Lemma 4.4.9

*Die Funktion  $a_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ist unter den Voraussetzungen (W8) und (W11) stetig und konvex.*

*Beweis.* Die Behauptung des Lemmas folgt unmittelbar aus (W8), (W11). □

Das Funktional  $b_1$  ist linear, beschränkt und stetig.

#### Lemma 4.4.10

*Unter der Voraussetzung (W10) ist das Funktional  $b_1 : W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu) \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear, stetig und beschränkt.*

*Beweis.* Die Linearität von  $b_1$  ist unmittelbar einzusehen. Wir zeigen, dass es sich bei  $b_1$  um ein beschränktes Funktional handelt, dies impliziert schließlich die Stetigkeit. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und Voraussetzung (W10) schließen wir

$$\begin{aligned} |b_1(y)| &= \left| \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi} r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt \right| \leq \int_{\tau}^{\infty} \left| \nabla_{\xi} r(t, x_*(t), u_*(t)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} y(t) \right| \mu(t) dt \\ &\leq \left\| \nabla_{\xi} r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \right\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \cdot \|y\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \\ &\leq c_1 \|y\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} + \|\dot{y}\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \leq c_2 \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)}, \end{aligned}$$

mit  $c_1 = \left\| \nabla_{\xi} r(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \frac{\hat{\mu}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \right\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)}$  und  $c_2 = \max\{1, c_1\}$ .  $\square$

Bei dem Operator  $b_2$  handelt es sich um einen linearen, stetigen und beschränkten Operator, wie das folgende Lemma beweist.

**Lemma 4.4.11**

Der Operator  $b_2 : W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu) \rightarrow L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  ist unter den Voraussetzungen (W1) und (W4) linear, stetig und beschränkt.

*Beweis.* In Analogie zu Lemma 4.4.10 genügt es zu zeigen, dass es sich bei  $b_2$  um einen beschränkten Operator handelt. Wir schätzen mit  $c_2 > 0$  aus Voraussetzung (W4)

$$\begin{aligned} \|b_2(y)\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} &= \left\| \dot{y}(\cdot) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) y(\cdot) \right\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \\ &\leq \|\dot{y}\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} + \left\| \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right\|_{L_{\infty}^{n \times n}((\tau, \infty))} \cdot \|y\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \\ &\leq \|\dot{y}\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} + c_2 \|y\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \\ &\leq c \left( \|\dot{y}\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} + \|y\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \right) = c \|y\|_{W_2^1((\tau, \infty), \mu)} \end{aligned}$$

ab. Hierbei ist  $c = \max\{1, c_2\}$ .  $\square$

Wir definieren die Menge der zulässigen Variationen  $M_{\tau}$ ,  $\tau \in \Omega$  gemäß

$$\begin{aligned} M_{\tau} := \left\{ (z_0, z) \in \mathbb{R} \times L_2((\tau, \infty), \mu) \mid \right. & z_0 \geq a_1(v) + b_1(y), \\ & z = b_2(y) \\ & y(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ & y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1, \\ & \left. v \in \mathcal{U} \right\}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.4.7**

Wir weisen den Leser darauf hin, dass wir hier ohne Einschränkungen annehmen, dass  $\|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1$  gilt. Die Annahme ist aufgrund der Majorante aus Lemma 4.4.5 gerechtfertigt.

Wir bilden den Abschluss  $\overline{M}_\tau$  und stellen fest, dass dieser aufgrund der Eigenschaften der Operatoren  $a_1, b_1, b_2$  konvex, beschränkt und abgeschlossen ist.

**Lemma 4.4.12**

Für jedes  $\tau \in \Omega$  ist die Menge  $M_\tau$  unter den Voraussetzungen (W1), (W4), (W8), (W10) und (W11) konvex.

*Beweis.* Sei  $\tau \in \Omega$  und  $(z_0, z), (\hat{z}_0, \hat{z}) \in M_\tau$ , dann gilt

$$\begin{aligned} z_0 &\geq a_1(v) + b_1(y) & \hat{z}_0 &\geq a_1(\hat{v}) + b_1(\hat{y}) \\ z &= b_2(y) & \hat{z} &= b_2(\hat{y}) \end{aligned}$$

mit  $y, \hat{y} \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$ ,  $\|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1$ ,  $\|\hat{y}\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1$  und

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)), \\ \hat{y}(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), \hat{v}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)), \end{aligned}$$

sowie  $v, \hat{v} \in \mathcal{U}$ .

Wir betrachten die Konvexkombination von  $(z_0, z), (\hat{z}_0, \hat{z})$  mit  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \alpha z_0 + (1 - \alpha)\hat{z}_0 &\geq \alpha a_1(v) + \alpha b_1(y) + (1 - \alpha)a_2(\hat{v}) + (1 - \alpha)b_2(\hat{y}) \\ &\geq a_1(\alpha v + (1 - \alpha)\hat{v}) + b_1(\alpha y + (1 - \alpha)\hat{y}) \\ \alpha z + (1 - \alpha)\hat{z} &= \alpha b_2(y) + (1 - \alpha)b_2(\hat{y}) \\ &= b_2(\alpha y + (1 - \alpha)\hat{y}) \end{aligned}$$

Es gelten die Inklusionen  $\alpha v + (1 - \alpha)\hat{v} \in \mathcal{U}$  und  $\alpha y + (1 - \alpha)\hat{y} \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$ . Die Konvexkombination von  $y$  und  $\hat{y}$  genügt  $\|\alpha y + (1 - \alpha)\hat{y}\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1$ . Für die Anfangswertbedingung in  $\tau$  schließen wir unter Ausnutzung der affin-linearen Struktur der Dynamik, Voraussetzung (W5),

$$\begin{aligned} (\alpha y + (1 - \alpha)\hat{y})(\tau) &= \alpha \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \alpha \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ &\quad + (1 - \alpha) \varphi(\tau, x_*(\tau), \hat{v}) - (1 - \alpha) \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ &= \alpha \varphi(\tau, x_*(\tau), v) + (1 - \alpha) \varphi(\tau, x_*(\tau), \hat{v}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \\ &= \varphi(\tau, x_*(\tau), \alpha v + (1 - \alpha)\hat{v}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)). \end{aligned}$$

Die Konvexkombination ist in  $M_\tau$  enthalten und  $M_\tau$  ist eine konvexe Menge. □

**Bemerkung 4.4.8**

Lemma 4.4.12 zeigt unmittelbar auf, dass wir für die Konvexität der Menge  $M_\tau$  unabhängig eine affin-lineare Struktur der Dynamik bezüglich der Steuervariablen  $v$  voraussetzen müssen. Dies scheint insofern logisch, da der hier vorgestellte Beweis auf den Methoden der konvexen Analysis beruht.

Möchten wir Steuerungsaufgaben mit einer Dynamik, welche nicht mehr notwendigerweise affin-linear bezüglich der Steuerung ist, diskutieren, so ergeben sich die folgenden beiden Alternativen. Zum einen könnten wir versuchen, den Beweis des Maximumprinzips auf einem allgemeineren Trennungssatz aufzubauen. Dies steht jedoch

nicht im Einklang mit den in dieser Arbeit diskutierten Methoden. Zum anderen könnten wir zur konvexen Hülle  $\text{conv}(M_\tau)$  des Variationskegels  $M_\tau$  übergehen. In diesem Fall scheinen zunächst wieder die Methoden der konvexen Analysis anwendbar zu sein. Es zeigt sich jedoch, dass  $\text{conv}(M_\tau)$  Elemente  $(z_0, z)$  enthält, induziert durch  $(y, v) \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu) \times \mathcal{U}$ , mit

$$y(\tau) \neq \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)).$$

Wir können in der Herleitung der kanonischen Gleichung, nach Fixierung von

$$v = u_*(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} u_*(s) ds,$$

nicht mehr von  $y(\tau) = 0$  ausgehen. Dies ist jedoch entscheidend für die Identifikation der variierten Gleichung mit der schwachen Ableitung des kanonischen Systems. Entsprechend ist der Übergang zu  $\text{conv}(M_\tau)$  nicht ohne weiteres möglich.

Außerdem lässt sich verifizieren, dass Elemente der Form  $(-\alpha, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times L_2^n((\tau, \infty), \mu)$ ,  $\alpha > 0$  nicht in  $\overline{M}_\tau$  liegen. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

**Lemma 4.4.13**

Für jedes  $\tau \in \Omega$  gilt: Seien die Voraussetzungen (W1), (W2), (W3), (W6) und (W7) erfüllt und  $\alpha > 0$ . Das Element  $(-\alpha, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  ist nicht Element der Menge  $\overline{M}_\tau$ .

*Beweis.* Wir betrachten ein beliebiges  $(\tilde{z}_0, \mathbf{0}) \in \overline{M}_\tau$  und zeigen  $\tilde{z}_0 \geq 0$ . Aus der Abgeschlossenheit von  $\overline{M}_\tau$  folgt die Existenz einer Folge  $\{(z_0^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , mit  $(z_0^k, z^k) \in M_\tau$ , die gegen  $(\tilde{z}_0, \mathbf{0})$  konvergiert. Die Elemente dieser Folge genügen

$$z_0^k \geq a_1(v_k) + b_1(y_k), \quad z^k = b_2(y_k)$$

mit

$$y_k \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), \quad \|y_k\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1, \\ y_k(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v_k) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)), \quad v_k \in \mathcal{U}.$$

Die Elemente  $y_k, v_k$  sind in der Norm des zugrunde liegenden Raumes beschränkt. Der Raum  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  ist reflexiv und nach dem Satz von Eberlein-Schmuljan, Satz 2.5.1, ist die Einheitskugel schwach kompakt. Entsprechend existiert eine Teilfolge  $\{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , die schwach gegen ein  $\tilde{y} \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  konvergiert. Es gilt

$$y_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \tilde{y}, \quad \|\tilde{y}\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1.$$

Für die  $v_k \in \mathcal{U}$  können wir aufgrund der nach Voraussetzung (W7) geforderten Kompaktheit des Steuerbereiches ebenfalls eine konvergente Teilfolge auswählen. Wir wählen die Teilfolge  $\{u_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  derart aus, dass für die Indexfolgen  $\{k_l\} \subseteq \{k_j\}$

gilt. Ihren Grenzwert bezeichnen wir mit  $\tilde{v}$ . Ebenfalls mit der Kompaktheit von  $\mathcal{U}$  schließen wir  $\tilde{v} \in \mathcal{U}$ . Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} y_{k_l} &\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \tilde{y}, & \|\tilde{y}\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} &\leq 1, \\ v_{k_l} &\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \tilde{v}, & \tilde{v} &\in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Weiter stellen wir, unter Ausnutzung von Lemma 2.5.8, die auf  $[\tau, \infty)$  fast überall punktweise Konvergenz  $y_{k_l}(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$ ,  $t \in [\tau, \infty)$  fest. Insbesondere konvergiert  $\{y_{k_l}(\tau)\}_{l \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{y}(\tau)$ .

Mit den Konvergenzeigenschaften von  $y_{k_l}(\tau)$ ,  $v_{k_l}(\tau)$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ y_{k_l}(\tau) - \left[ \varphi(\tau, x_*(\tau), v_{k_l}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \right\} \\ &= \tilde{y}(\tau) - \left[ \varphi(\tau, x_*(\tau), \tilde{v}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right], \end{aligned}$$

das heißt, der Anfangswert  $\tilde{y}(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), \tilde{v}) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))$  bleibt beim Grenzübergang erhalten.

Wir zeigen weiterhin, dass  $b_2(\tilde{y}) = 0$  gilt. Hierfür multiplizieren wir die Gleichung  $z^{k_l} = b_2(y_{k_l})$  mit einer Testfunktion  $\phi \in C_c^0([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  und integrieren über  $(\tau, \infty)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} \langle z_{k_l}(t), \phi(t) \rangle \mu(t) dt &= \int_{\tau}^{\infty} \langle b_2(y_{k_l}(t)), \phi(t) \rangle \mu(t) dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} \langle \dot{y}_{k_l}(t), \phi(t) \rangle \mu(t) dt - \int_{\tau}^{\infty} \langle \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y_{k_l}(t), \phi(t) \rangle \mu(t) dt. \end{aligned}$$

Übergang zum schwachen Grenzwert liefert mit  $\mathcal{J}_{\xi}[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in L_{\infty}^{n \times n}((\tau, \infty))$  schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\infty} z_{k_l}(t) \phi(t) \mu(t) dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} \tilde{y}'(t) \phi(t) \mu(t) dt - \int_{\tau}^{\infty} \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \tilde{y}(t) \phi(t) dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} b_2(\tilde{y}(t)) \phi(t) \mu(t) dt = \langle b_2(\tilde{y}), \phi \rangle_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)}. \end{aligned}$$

Die gewählten Testfunktionen liegen gemäß Lemma 2.4.3 im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  dicht, entsprechend folgt

$$b_2(\tilde{y}) = 0 \tag{4.17}$$

im  $L_2$ -Sinn. Insgesamt folgt in der Grenze

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_0^k \geq a_1(\tilde{v}) + b_1(\tilde{y}), \quad b_2(\tilde{y}) = 0, \quad \tilde{v} \in \mathcal{U}.$$



Wir setzen jetzt  $\hat{u}_\lambda$  gemäß der Nadelvariation

$$\hat{u}_\lambda(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{für } t \notin (\tau - \lambda, \tau] \\ \tilde{v} & \text{für } t \in (\tau - \lambda, \tau] \end{cases}$$

und erhalten mit Lemma 4.3.1 die korrespondierende Folge der Trajektorien  $\{\hat{x}_\lambda\}_{\lambda>0}$ . Nach Lemma 4.4.7 existiert eine konvergente Teilfolge  $\{\hat{y}_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\{\hat{y}_\lambda\}_{\lambda>0}$ ,

$$\hat{y}_\lambda := \frac{1}{\lambda}(\hat{x}_\lambda - x_*).$$

Der Grenzwert dieser Folge, im Folgenden mit  $\hat{y}$  bezeichnet, erfüllt gemäß Lemma 4.4.6 die Gleichung (4.17). Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Integralgleichung (4.17) folgt unmittelbar  $\hat{y}(t) = \tilde{y}(t)$  auf  $(\tau, \infty)$ . Wir wenden das Variationslemma 4.4.8 auf die Teilfolge  $\{(\hat{x}_{\lambda_k}, \hat{u}_{\lambda_k}, \hat{y}_{\lambda_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  an. Es folgt

$$a_1(\tilde{v}) + b_1(\hat{y}) \geq 0. \quad (4.18)$$

Aufgrund der Übereinstimmung  $\hat{y} = \tilde{y}$  folgt insbesondere aus (4.18)

$$\tilde{z}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_0^k \geq a_1(\tilde{v}) + b_1(\tilde{y}) = a_1(\tilde{v}) + b_1(\hat{y}) \geq 0.$$

Mit  $\tilde{z}_0 \geq 0$  folgt die Behauptung des Lemmas. □

### Herleitung der kanonischen Gleichung und der Transversalitätsbedingung

In diesem Unterkapitel konstruieren wir eine Lösung der kanonischen Gleichung mittels geschickter Trennung konvexer Mengen. Aus der Trennung resultiert unmittelbar eine Transversalitätsbedingung.

Für die spätere Argumentation wird folgender Hilfssatz unerlässlich sein.

#### Lemma 4.4.14

Unter den Voraussetzungen (W1), (W2) und (W6) liegt die Menge

$$\mathbf{Z} := \left\{ z \in L_2^n((\tau, \infty), \mu) \mid z = b_2(y), \quad y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0 \right\}$$

für beliebige  $\tau > 0$  dicht im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$ .<sup>6</sup>

*Beweis.* Wir definieren  $\mathbf{Z}_1 := \mathbf{Z} \cap C([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  und zeigen, dass  $\mathbf{Z}_1$  dicht im Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu) \cap C([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  liegt. Da der Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu) \cap C([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  dicht in  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  liegt, folgt aus der Transitivität, dass auch  $\mathbf{Z}$  dicht in  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  liegt.

Sei  $z \in L_2^n((\tau, \infty), \mu) \cap C([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  beliebig. Wir betrachten die Gleichung

$$y(t) = \int_{\tau}^t \left[ \mathcal{J}_\xi[\varphi](s, x_*(s), u_*(s))y(s) + z(s) \right] ds, \quad \tau \leq t \leq T.$$

---

<sup>6</sup>Unter Verwendung der Theorie assoziierter Fredholm-Operatoren im Hilbertraum lässt sich zusätzlich die Äquivalenz der Menge  $\mathbf{Z}$  mit dem Raum  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  beweisen. (vgl. [58])

Nach Definition 2.6.1 sind die Lösungen dieser Integralgleichung gerade äquivalent zu den Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) + z(t) \quad \text{f.ü. auf } (\tau, T) \\ y(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Folglich besitzt die Integralgleichung gemäß Folgerung 2.6.4 eine eindeutige Lösung  $\hat{y}$  mit  $\hat{y} \in W_2^{n,1}((\tau, T))$ . Insbesondere ist  $\hat{y}$  Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, T), \mu)$ . Wir setzen  $\hat{y}_T := \hat{y}(T)$  und setzen  $\hat{y}$  stetig auf das Intervall  $(T, +\infty)$  fort. Die Fortsetzung genüge hierbei der Gleichung

$$y(t) = \hat{y}_T + \int_T^t \mathcal{J}_\xi[\varphi](\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))y(\tau)d\tau \quad t \geq T \geq \tau.$$

Folgerung 2.6.4 sichert uns die Existenz einer solchen Fortsetzung, das heißt die Lösbarkeit obiger Gleichung.

Als nächstes zeigen wir, dass die so konstruierte Funktion auf  $[T, \infty)$  integrierbar ist. Dies geschieht unter Verwendung der Bellmann-Gronwall Ungleichung, Lemma 2.5.3. Es ergibt sich

$$|\hat{y}(t)|_2 \leq \hat{y}_T \cdot \exp \left\{ \int_T^t \left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](s, x_*(s), u_*(s)) \right|_2 ds \right\} \quad t \geq T \geq \tau.$$

Nach Voraussetzung (W4) gilt  $\left| \mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \right|_2 \leq c_2$  fast überall auf der positiven reellen Halbachse. Dies impliziert für  $|\hat{y}(\cdot)|_2$  die Beschränkung

$$|\hat{y}(t)|_2 \leq \hat{y}_T \cdot \exp \left\{ (t - T)c_2 \right\} \quad t \geq T \geq \tau.$$

Mit Voraussetzung (W6) folgt schließlich  $\hat{y} \in L_2^n((\tau, \infty), \mu)$ . Für die Ableitung  $\hat{y}'$  folgern wir  $\|\hat{y}'\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \leq \|\hat{y}\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)} \cdot \|\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))\|_{L_\infty^{n \times n}((\tau, \infty))} < \infty$ . Entsprechend gilt  $\hat{y} \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$ . Der Anfangswert  $\hat{y}(\tau) = 0$  bleibt hierbei erhalten.

Wir betrachten die Differenz  $z(t) - b_2(\hat{y}(t))$  auf  $[\tau, T]$  und  $(T, \infty)$  für feste  $T > 0$ . Im Fall  $\tau \leq t \leq T$  erhalten wir

$$\begin{aligned} z(t) - b_2(\hat{y}(t)) &= z(t) - \hat{y}'(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) \\ &= z(t) - \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) - z(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für  $t > T$  ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) - b_2(\hat{y}(t)) &= z(t) - \hat{y}'(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) \\ &= z(t) - \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) + \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\hat{y}(t) \\ &= z(t). \end{aligned}$$

Mit diesen Ideen schließen wir den Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so existiert für jedes  $z \in L_2^n((\tau, \infty), \mu) \cap C([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$  ein  $\hat{y} \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  mit  $\hat{y}(\tau) = 0$ , so dass für hinreichend große  $T = T(\varepsilon) > \tau$

$$\|z - z_T\|_{L_2^n((\tau, \infty), \mu)}^2 = \int_{\tau}^{\infty} |z(t) - z_T(t)|_2^2 \mu(t) dt \leq \int_T^{\infty} |z(t)|_2^2 \mu(t) dt < \varepsilon$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet  $z_T$  den Term  $z_T(\cdot) := b_2(\hat{y}(\cdot))$ . □

Wir sind mit den Überlegungen der vorangegangenen Unterkapitel jetzt in der Lage, die kanonische Gleichung herzuleiten. Für die Deduktion der Gleichung trennen wir das Element  $(-\alpha, \mathbf{0})$ ,  $\alpha > 0$  von der konvexen und abgeschlossenen Menge  $\overline{M}_\tau$ . Dieses Vorgehen wird durch Lemma 4.4.13 und Lemma 4.4.12 legitimiert. Aus der Trennungsgleichung leiten wir schließlich die kanonische Gleichung her. Die Transversalitätsbedingung wird sich in natürlicher Weise ergeben.

Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach, Folgerung 2.5.1, existiert ein lineares und stetiges Funktional  $q_{\tau, \alpha}^* \in \mathbb{R} \times L_2^n((\tau, \infty), \mu)$ , so dass für beliebige Tupel  $(z_0, z) \in \overline{M}_\tau$  die Ungleichung

$$\langle q_{\tau, \alpha}^*, (-\alpha, \mathbf{0}) \rangle \leq \gamma_{1, \alpha} < \gamma_{2, \alpha} \leq \langle q_{\tau, \alpha}^*, (z_0, z) \rangle$$

gilt. Wir unterstellen  $q_{\tau, \alpha}^*$  die Gestalt  $q_{\tau, \alpha}^* = (\lambda_{\tau, \alpha}, p_{\tau, \alpha})$  mit einem  $p_{\tau, \alpha} \in L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  und einem  $\lambda_{\tau, \alpha} \in \mathbb{R}$ . Es folgt speziell

$$-\lambda_{\tau, \alpha} \alpha < \lambda_{\tau, \alpha} z_0 + \langle p_{\tau, \alpha}, z \rangle \quad \forall (z_0, z) \in \overline{M}_\tau.$$

Mit  $(0, \mathbf{0}) \in \overline{M}_\tau$  und  $\alpha > 0$  folgt  $\lambda_{\tau, \alpha} > 0$ . Normierung der Ungleichung mittels  $\lambda_{\tau, \alpha}$  liefert

$$-\alpha < z_0 + \langle \tilde{p}_{\tau, \alpha}, z \rangle, \quad \tilde{p}_{\tau, \alpha} := \frac{p_{\tau, \alpha}}{\lambda_{\tau, \alpha}} \quad \forall (z_0, z) \in \overline{M}_\tau. \quad (4.19)$$

Für die folgende Argumentation fixieren wir  $v \in \mathcal{U}$  gemäß

$$v = u_*(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} u_*(s) ds.$$

Der Grenzwert existiert, da es sich bei  $\tau$  um einen Lebesgue-Punkt handelt. Die Funktion  $y$  lassen wir, bis auf den Randwert  $y(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) = 0$ , variierbar.

Zu jedem  $y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  mit  $y(\tau) = 0$  und  $\|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1$  finden wir ein  $(z_0, z) \in \mathbb{R} \times L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  mit  $z_0 = b_1(y)$  und  $z(\cdot) = b_2(y(\cdot))$ . Für diese  $(z_0, z) \in \overline{M}_\tau$  können wir Ungleichung (4.19) verwenden und erhalten

$$-\alpha < b_1(y) + \langle \tilde{p}_{\tau, \alpha}, b_2(y) \rangle \quad \forall y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)} \leq 1, y(\tau) = 0.$$

Diese Ungleichung gilt für beliebige  $\alpha > 0$ , speziell auch für die Setzung  $\alpha = \alpha_k = 1/k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir bringen die Bedingung  $\|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} \leq 1$  implizit in die Ungleichung ein.

$$-\alpha_k \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} < b_1(y) + \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \quad \forall y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0$$

Da diese Ungleichung für beliebige  $y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  gilt, können wir von  $y$  zu  $-y$  übergehen. Es folgt

$$-\alpha_k \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} < -b_1(y) - \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \quad \forall y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0.$$

Fassen wir die letzten beiden Ungleichungen zusammen, so erhalten wir

$$\left| b_1(y) + \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \right| < \alpha_k \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} \quad \forall y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0.$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt weiter

$$\begin{aligned} \left| \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \right| - |b_1(y)| &\leq \left| \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle - |b_1(y)| \right| \\ &\leq \left| b_1(y) + \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \right| \\ &< \alpha_k \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} \end{aligned}$$

und insbesondere

$$\left| \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y) \rangle \right| \leq \alpha_k \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)} + |b_1(y)|.$$

Aus dem Darstellungssatz von Riesz-Fischer, Satz 2.5.2, und der Beschränktheit von  $b_1$  (vgl. Lemma 4.4.10) erhalten wir

$$\left| \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y(\cdot)) \rangle \right| = \left| \langle \tilde{p}_{\tau,\alpha_k}, b_2(y(\cdot)) \rangle \right| \leq c \|y\|_{W_2^{n,1}((\tau,\infty),\mu)}.$$

Die Folge  $\{\tilde{p}_{\tau,\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist auf der Menge

$$\mathbf{Z} := \left\{ z \in L_2^n((\tau, \infty), \mu) \mid z = b_2(y), \quad y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0 \right\}$$

beschränkt. Aus Lemma 4.4.14 schließen wir, dass die Folge im gesamten  $L_2^n((\tau, \infty), \mu)$  beschränkt ist.<sup>7</sup> Aus der beschränkten Folge  $\{\tilde{p}_{\tau,\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  können wir im reflexiven Hilbertraum  $L_2((\tau, \infty), \mu)$  eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. Wir bezeichnen diese mit  $\{\tilde{p}_{\tau,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und ihr Grenzelement mit  $\tilde{p}_{\tau,0}$ .

Unter Beachtung von Lemma 4.4.10 und Lemma 4.4.11 gehen wir zur Grenze über und folgern

$$0 \leq b_1(y) + \langle \tilde{p}_{\tau,0}, b_2(y) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu), y(\tau) = 0.$$

---

<sup>7</sup>Tatsächlich muss hierzu  $\mathbf{Z} = L_2^n((0, \infty), \mu)$  gezeigt werden, um die Beschränktheit der Folge in dem Raum  $L_2^n((0, \infty), \mu)$  zu garantieren. Dies ist mittels der Theorie assoziierter Fredholm-Operatoren im Hilbertraum möglich. (vgl. [58])

Letztere Gleichung hat nach Definition von  $b_1, b_2$  die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau}^{\infty} \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) + \tilde{p}_{\tau,0}^T [\dot{y}(t) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t)] \mu(t) \right\} dt \quad (4.20) \\ &= \int_{\tau}^{\infty} \left\{ [\tilde{p}_{\tau,0}^T(t) \mu(t)] \dot{y}(t) + [\nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - \tilde{p}_{\tau,0}^T(t) \mu(t) \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))] y(t) \right\} dt \end{aligned}$$

für alle  $y \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$  mit  $y(\tau) = 0$ . Aufgrund der Inklusion

$$C_c^{\infty}([\tau, \infty)) \subseteq W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu)$$

gilt die Aussage insbesondere für alle Testfunktionen. Der Vergleich mit der Definition der schwachen Ableitung liefert

$$[\tilde{p}_{\tau,0}(t) \mu(t)]' = \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - \tilde{p}_{\tau,0}^T(t) \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \quad \text{f.ü. auf } (\tau, \infty).$$

Identifikation mit der Pontryagin-Funktion liefert auf  $(\tau, \infty)$  fast überall die Identität

$$\dot{p}_{\tau}(t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} H(t, x_*(t), u_*(t), p_{\tau}(t), 1), \quad p_{\tau} := \tilde{p}_{\tau,0} \mu.$$

Die Funktion  $p_{\tau}$  bezeichnen wir im Folgenden als Adjungierte.

#### Bemerkung 4.4.9

Wir erwähnen auch hier, dass es sich bei dem Ableitungsbegriff für das kanonische System zunächst um den Begriff der schwachen Ableitung im gewichteten Sobolev-Raum handelt. Mit der zusätzlichen Eigenschaft der Transversalität  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu^{-1})$ , wie wir sie im Folgenden zeigen, können wir die Adjungierte in den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen einbetten (siehe Lemma 2.4.5). Wir können entsprechend zur klassischen Ableitung übergehen. Wir gehen fortan ohne Einschränkung von der klassischen Differenziationstheorie aus.

Wir zeigen, dass die Adjungierte Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu^{-1})$  ist, sprich, der Transversalitätsbedingung genügt. Mit Voraussetzung (W4) schätzen wir

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} |p_{\tau}(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt &= \int_{\tau}^{\infty} |\tilde{p}_{\tau,0}(t) \mu(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt = \int_{\tau}^{\infty} |\tilde{p}_{\tau,0}(t)|_2^2 \mu(t) dt < \infty \\ \int_{\tau}^{\infty} |\dot{p}_{\tau}(t)|_2^2 \mu^{-1}(t) dt &= \int_{\tau}^{\infty} \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - p_{\tau,0}^T(t) \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \mu(t) \right|_2^2 \mu^{-1}(t) dt \\ &\leq 4 \int_{\tau}^{\infty} \left\{ \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2^2 + |p_{\tau,0}^T(t) \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))|_2^2 \right\} \mu(t) dt \\ &\leq 4 \int_{\tau}^{\infty} \left| \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \frac{\hat{\mu}(t)}{\mu(t)} \right|_2^2 \mu(t) dt + 4c_2^2 \int_{\tau}^{\infty} |p_{\tau,0}(t)|_2^2 \mu(t) dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

ab. Es folgt  $p_\tau \in W_2^{n,1}((\tau, \infty), \mu^{-1})$ . Wir haben entsprechend die Transversalitätsbedingung als auch die kanonischen Gleichung auf dem Intervall  $(\tau, \infty)$  verifiziert. Es gilt jedoch hierbei zu beachten, dass die Adjungierte von dem Parameter  $\tau$  abhängig ist. Es verbleibt, die bewiesene Aussage auf die positive reelle Halbachse zu expandieren. Hierzu zeigen wir im Folgenden, dass  $p_{\tau_1} \equiv p_{\tau_2} |_{(\tau_1, \infty)}$  für zwei Adjungierte  $p_{\tau_1}$  auf  $(\tau_1, \infty)$  und  $p_{\tau_2}$  auf  $(\tau_2, \infty)$  mit  $\tau_1 \geq \tau_2$  gilt. Ist dies verifiziert, können wir mit  $\tau \rightarrow 0$  die Adjungierte  $p_\tau$  eindeutig auf  $(0, \infty)$  fortsetzen und erhalten die Gültigkeit der kanonischen Gleichung und der Transversalitätsbedingung fast überall auf der positiven Halbachse. Es wäre entsprechend das Ziel dieses Unterkapitels erreicht.

Zur Verifikation der Inklusionseigenschaft betrachten wir zunächst beliebige Elemente  $y \in W_2^{n,1}((\tau_1, \infty), \mu)$  mit  $y(\tau_1) = 0$ . Wir setzen diese Funktionen stetig, vermöge

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [\tau_2, \tau_1] \\ y(t) & \text{falls } t \in (\tau_1, \infty) \end{cases}$$

auf  $(\tau_2, \infty)$ , fort. Die Fortsetzung  $\hat{y}$  ist Element des Raumes  $W_2^{n,1}((\tau_2, \infty), \mu)$  und genügt der Bedingung  $\hat{y}(\tau_2) = 0$ . Insbesondere folgt aus (4.20) für  $p_{\tau_2,0}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau_2}^{\infty} \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{y}(t) \hat{\mu}(t) + \tilde{p}_{\tau_2,0}^T [\dot{y}'(t) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) \hat{y}(t)] \mu(t) \right\} dt \\ &= \int_{\tau_1}^{\infty} \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) + \tilde{p}_{\tau_2,0}^T [\dot{y}(t) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t)] \mu(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite genügt  $y$  zusammen mit  $p_{\tau_1,0}$  der Gleichung

$$0 = \int_{\tau_1}^{\infty} \left\{ \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) + \tilde{p}_{\tau_1,0}^T [\dot{y}(t) - \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t)] \mu(t) \right\} dt.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt  $p_{\tau_1,0} \equiv p_{\tau_2,0} |_{(\tau_1, \infty)}$  im Lebesgueschen Sinn. Dies impliziert, unter Beachtung der entsprechenden Setzungen,  $p_{\tau_1} \equiv p_{\tau_2} |_{(\tau_1, \infty)}$ . Es ist die geforderte Inklusionseigenschaft hergestellt und die Expansion des kanonischen Systems auf die reelle positive Halbachse abgeschlossen.

#### Bemerkung 4.4.10

*Ob eine stetige Fortsetzung der Adjungierten bis in den Rand  $t_0 = 0$  möglich ist, bleibt bei diesem Vorgehen genauso offen, wie die Frage, ob  $p(0)$  überhaupt einen wohldefinierten Wert annimmt. Wir können uns mit  $\tau \rightarrow 0$  lediglich beliebig annähern.*

### Herleitung der Maximumbedingung

Als letzte Bedingung des Pontryaginschen Maximumprinzips, die wir zu zeigen haben, verbleibt die sogenannte Maximumbedingung. Diese punktweise Bedingung lässt sich direkt aus dem Variationslemma 4.4.8 ableiten. Das Wissen um die Existenz einer Adjungierten, die der Transversalitätsbedingung genügt, ist jedoch für unser Beweisprinzip unerlässlich.

**Lemma 4.4.15**

Sei  $p$  Lösung der kanonischen Gleichung

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial}{\partial \xi} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty)$$

zur Transversalitätsbedingung  $p \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu^{-1})$ . Weiter sei  $y \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu)$  der nach Lemma 4.4.4 existierende punktweise Grenzwert

$$y(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_{\lambda_k}(t) - x_*(t)),$$

wobei  $x_{\lambda_k}$  die zur Nadelvariation  $u_{\lambda_k}$  gehörigen Trajektorien seien. Dann gilt die Relation

$$\langle p(\tau), y(\tau) \rangle = - \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi}^T(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt$$

für jeden Lebesgue-Punkt  $\tau \in \Omega$ .

*Beweis.* Sei im Folgenden  $t \geq \tau$ . Mit der Produktregel<sup>8</sup> erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \langle p(t), y(t) \rangle = \langle \dot{p}(t), y(t) \rangle + \langle p(t), \dot{y}(t) \rangle$$

und es folgt mit der Gültigkeit der kanonischen Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p(t), y(t) \rangle &= \left\langle - \frac{\partial}{\partial \xi} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0), y(t) \right\rangle \\ &\quad + \langle p(t), \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \rangle \\ &= \left\langle \lambda_0 \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t) - p(t) \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)), y(t) \right\rangle \\ &\quad + \langle p(t), \mathcal{J}_{\xi}[\varphi](t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \rangle \\ &= \left\langle \lambda_0 \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) \hat{\mu}(t), y(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Integration von  $\tau$  bis  $\infty$  führt unter Beachtung der Transversalitätsbedingung (vgl. Folgerung 4.4.1) zu

$$\langle p(\tau), y(\tau) \rangle = - \lambda_0 \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt.$$

Unter Beachtung von  $\lambda_0 = 1$  zeigt sich, dass wir die Behauptung des Lemmas bewiesen haben. □

<sup>8</sup>Gemäß Bemerkung 4.4.9 und Lemma 2.4.5 können wir hier ohne Einschränkung von dem klassischen Differenziationsbegriff ausgehen.

Aus dem vorherigen Lemma folgt zusammen mit dem Variationslemma 4.4.8 die Maximumbedingung. Die Variationsungleichung

$$0 \leq \left[ r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \hat{\mu}(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \nabla_{\xi}^T r(t, x_*(t), u_*(t)) y(t) \hat{\mu}(t) dt$$

geht durch Anwendung von Lemma 4.4.15 in

$$0 \leq \left[ r(\tau, x_*(\tau), v) - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right] \hat{\mu}(\tau) - \langle p(\tau), y(\tau) \rangle$$

über. Nach Lemma 4.4.4 ist der Anfangswert  $y(\tau)$  gerade durch

$$y(\tau) = \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))$$

gegeben. Einsetzen dieses Wertes liefert nach geschickter Umsortierung der auftretenden Terme

$$\begin{aligned} & - r(\tau, x_*(\tau), v) \hat{\mu}(\tau) + \langle p(\tau), \varphi(\tau, x_*(\tau), v) \rangle \\ & \leq - r(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \hat{\mu}(\tau) + \langle p(\tau), \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \rangle. \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade der Maximumbedingung im Punkt  $\tau$ . Aufgrund dessen, dass wir  $\tau$  als einen beliebigen Lebesgue-Punkt aus  $\Omega$  vorausgesetzt haben und die Menge  $[0, \infty) \setminus \Omega$  vom Maß Null ist, folgt die Gültigkeit obiger Ungleichung fast überall auf der positiven Halbachse. Nach Identifikation mit der Pontryagin-Funktion  $H$  lässt sich die letzte Ungleichung in der Form

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x_*(t), v, p(t), \lambda_0) \quad \text{f.ü. auf } (0, \infty)$$

notieren.

## 4.5 Abgrenzung der Optimalitätskriterien voneinander

In diesem Abschnitt werden wir kurz die in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten notwendigen Optimalitätskriterien gegenüberstellen. Ziel ist es hierbei, eine geeignetere Form der Variation für die hier betrachtete Klasse von Steuerungsaufgaben herauszustellen.

Wir beginnen zunächst mit der Gegenüberstellung der Voraussetzungen. Auffallend ist, dass diese sehr ähnlich sind. So benötigen wir in beiden Maximumprinzipien die uniforme Lipschitz-Stetigkeit der Dynamik (vgl. (V1), (W2)) sowie die Wachstumsbedingungen (V2), (W3). Auch sind wir im Beweis der beiden Resultate gleichermaßen von einer kompakten und konvexen Steuerbeschränkung ausgegangen (vgl. (V11), (W7)), auf der der Integrand des Zielfunktional als konvex angenommen wurde (vgl. (V7), (W11)). Die Stetigkeit des Integranden sowie die Differenzierbarkeit bezüglich der Zustandsvariablen  $\xi$ , siehe (V8), (W8), war ebenfalls gleichermaßen im Beweis beider Resultate erforderlich.



Eine Unterscheidung der Voraussetzungen erhalten wir erst bei Betrachtung der notwendigen Güte der Daten der Optimierungsaufgabe bezüglich der Steuervariablen  $v$ . So reichte uns im Falle der Nadelvariation die Stetigkeit des Integranden  $r$  bezüglich  $\xi$  aus, während wir im Fall der Variation nach Euler zusätzlich die stetige Differenzierbarkeit bezüglich der Steuervariablen  $v$  forderten, (V8). Auch müssen wir für die beiden Resultate unterschiedliche Wachstumsbedingungen für den Integranden des Zielfunktional formulieren. So benötigen wir für den Beweis mittels Euler-Variation eine explizite Wachstumsbedingung der Gradienten des Integranden bezüglich Steuer- und Zustandsvariablen (siehe (V10)), während wir bei der Verwendung einer Nadelvariation mit einer Wachstumsrestriktion des Integranden entlang des optimalen Prozesses (siehe (W10)) auskommen.<sup>9</sup>

Ein analoges Verhalten finden wir auf Seiten der Dynamik  $\varphi$ . In beiden Methoden benötigen wir die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  bezüglich  $\xi$  (vgl. (V3), (W1)), als auch eine bezüglich der Steuervariablen  $v$  affin-lineare Struktur der Dynamik (vgl. (V4), (W5)). Im Fall der Euler-Variation benötigen wir zusätzlich noch eine Wachstumsbedingung der Form (V5) an die Jacobi-Matrizen von  $\varphi$  bezüglich  $\xi$  und  $v$ . Im Vergleich hierzu verwenden wir für die Durchführung der Nadelvariation lediglich, dass die Jacobi-Matrix bezüglich  $\xi$ , entlang des optimalen Prozesses, Element des Raumes der wesentlich beschränkten Funktionen ist, (W3). Bezüglich der Steuervariablen  $v$  benötigen wir hingegen keine Wachstumsbeschränkung. Hieraus folgt unmittelbar eine unterschiedliche Gewichtung des zugrunde gelegten Hilbertraumes.<sup>10</sup> Man vergleiche hierzu die beiden Voraussetzungen (V6) und (W6).

Die wohl am stärksten einschränkende Voraussetzung der hier bewiesenen notwendigen Optimalitätskriterien, welche beiden Variationen gemeinsam ist, ist Voraussetzung (V4) beziehungsweise (W5). So sind die hier präsentierten notwendigen Optimalitätskriterien nur für Problemklassen geeignet, in denen die Steuerung affin-linear in die Dynamik eingeht. Diese Einschränkung scheint zunächst sehr stark, ist jedoch im Kontext der konvexen Analysis nicht zu verwunderlich. In beiden Variationsansätzen haben wir für den Beweis des Maximumprinzips die zulässige Menge durch einen konvexen Kegel  $M$  abgebildet, aus welchem wir anschließend die Kernbedingungen des Maximumprinzips ableiteten. Dieser Ansatz kann natürlich nur so lange funktionieren, wie die Aufgabe an sich eine gewisse Konvexität mit sich bringt. In einer formaleren Sprache bedeutet dies die Konvexität des Integranden des Zielfunktional, sowie die affin-lineare Struktur der Dynamik. Letztere sichert uns die Konvexität der Menge  $M$  bezüglich der Steuerung, mit Bezug auf die Nebenbedingungen der gestellten Steuerungsaufgabe. Die Voraussetzung (V4) beziehungsweise (W5) ist entsprechend keine durch die spezifische Variation hervorgerufene Einschränkung, sondern viel mehr eine sich durch die Methodik der konvexen Analysis ergebende Barriere. Diese Behauptung werden wir im folgenden Kapitel noch einmal aufgreifen, wenn wir die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie mit bekannten Ergebnissen aus der Literatur vergleichen. Hierbei werden wir feststellen, dass es notwendige Optimalitätskriterien für (echt) nicht-lineare Aufgaben unter Verwendung einer auf Nadelvariation beruhenden Beweistechnik gibt.

<sup>9</sup>Voraussetzung (W10) ist weniger restriktiv als (V10), sie lässt sich jedoch nicht a priori an der gegebenen Aufgabenstellung verifizieren. Dies kann aus Anwendersicht als negativ bewertet werden.

<sup>10</sup>Im Fall der Eulervariation ist die Wahl der Gewichtsfunktion aufgrund der zusätzlichen Wachstumsbedingung aus (V5) restriktiver.

Fassen wir an dieser Stelle den Vergleich vorläufig zusammen, so sprechen die schwächeren Voraussetzungen zunächst für die Behandlung von Steuerungsaufgaben mittels Nadelvariation. Insbesondere die Möglichkeit der Wahl einer schwächeren Gewichtsfunktion macht Satz 4.4.1 für den Anwender möglicherweise attraktiver als Satz 4.3.1. Dennoch gibt es einige Gründe, die für die Verwendung einer Eulervariation zur Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien sprechen. Wir möchten diese nachfolgend kurz aufzählen. Hierzu betrachten wir die jeweiligen Aussagen des Maximumprinzips. In beiden Varianten erhalten wir die sogenannten Kernbedingungen, *kanonische Gleichung*, *Maximumbedingung*. Auch enthalten beide Maximumprinzipien eine Transversalitätsbedingung und liegen in der sogenannten Normalform (Multiplikator  $\lambda_0 = 1$ ) vor. Ein Unterschied ergibt sich erst bei näherer Betrachtung der adjungierten Variablen. Im Fall der Eulervariation erhalten wir die Existenz der Adjungierten naturgemäß im Dualraum der Zustandsvariablen. Ganz automatisch ist sie auf dem gesamten unendlichen Zeithorizont definiert. Bei Verwendung einer Nadelvariation werden hingegen stets Intervalle  $(\tau, \infty)$ ,  $\tau > 0$  studiert und anschließend der Grenzprozess  $\tau \rightarrow 0$  realisiert. Folglich erhalten wir hier die Adjungierte nur auf der offenen Menge  $(0, \infty)$ . Mit anderen Worten, die Existenz der Adjungierten kann ad hoc nicht auf dem gesamten Zeithorizont gesichert werden. Dieses Verhalten liegt in der Natur der Separationstechnik bei Verwendung einer Nadelvariation und kann je nach gegebener Aufgabenstellung ein Ausschlusskriterium für die Verwendung dieser Variationsart, in Kombination mit der Separationstechnik, sein. Insbesondere in der Numerik kann der möglicherweise nicht existente Randwert  $p(0)$  Probleme bereiten.

Abschließend entsteht unweigerlich die Frage, ob es möglicherweise noch eine weitere Art der Variation gibt, die die Vorteile beziehungsweise Grenzen der hier vorgestellten Variationsansätze nutzt beziehungsweise herauschiebt. Wir werden diese Frage im Abschluss dieser Arbeit ausblickend kurz diskutieren. Dennoch können wir an dieser Stelle die These aufstellen, dass der Ansatz einer auf konvexer Analysis beruhenden Beweistechnik die natürliche Grenze affin-linearer Steuerungsaufgaben mit sich bringt. Die Vorteile dieses in gewichteten Hilberträumen wirkenden Prinzips sind jedoch nicht von der Hand zu weisen. Die implizite Konstruktion der Adjungierten aus der Trennung, sowie die Möglichkeit der Behandlung von Steuerungsaufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont, sprechen gleichermaßen für sich, wie die einfache Beweistechnik an sich.

## 4.6 Abgrenzung der Optimalitätskriterien von der bestehenden Literatur

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel unsere erhaltenen Ergebnisse untereinander verglichen haben, werden wir sie in diesem Abschnitt von der bestehenden Literatur abgrenzen. Hierbei beziehen wir uns nur auf die in dieser Arbeit im Kapitel „Bekanntes Ergebnisse“, Kapitel 3.7, vorgestellten Resultate von Pickenhain, Aseev und Veliov, sowie Tauchnitz.

Die Abgrenzung zu den Arbeiten [51, 54] ist leicht zu vollziehen, so wurden in diesen Publikationen lediglich Aufgaben mit einer linearen Dynamik studiert. Genauer gesagt widmen sich die Veröffentlichungen [51, 54] vornehmlich dem linear-quadratischen Regulator. In der vorliegenden Arbeit setzten wir diese Untersuchungen fort, indem wir Aufgaben mit einer nicht-linearen, genauer gesagt bezüglich dem Zustand nicht-linearen und der Steuerung affin-linearen, Dynamik studierten. Ein direkter Vergleich entfällt folglich. Es sei an dieser Stelle nur erwähnt, dass unser Resultat mit der Euler-Variation im Fall eines linear-quadratischen Steuerungsproblems mit dem Ergebnis aus [54] zusammenfällt.

In Abgrenzung der vorliegenden Arbeit von den Publikationen [10, 64] lässt sich zunächst feststellen, dass genau wie hier, nicht-lineare Aufgaben betrachtet wurden. Während wir in der vorliegenden Arbeit jedoch nur bezüglich der Steuerung affin-lineare Aufgaben diskutieren konnten, erlauben es die Resultate in [10, 64], allgemeinere, nicht-lineare Aufgabenklassen zu behandeln. Aufgrund der ähnlichen Aufgabenstellung ist folglich ein genauerer Vergleich sinnvoll. Wir möchten zunächst unser Ergebnis der Arbeit [10] gegenüberstellen.

In [10] werden notwendige Optimalitätsbedingungen mittels einer Nadelvariation hergeleitet. Dies erlaubt den Autoren die Betrachtung (echt) nicht-linearer Steuerungsaufgaben. Diesen Vorteil der Nadelvariation konnten wir leider in unserem Maximumprinzip nicht wiederfinden. Wie bereits zuvor erwähnt, liegt dies in der Natur der konvexen Analysis. Wir beziehen uns im folgenden Vergleich entsprechend nur auf Steuerungsaufgaben mit einer Dynamik, welche bezüglich der Steuerung affin-linear ist. Als Optimalitätsbegriff legen Aseev und Veliov in [10] den Begriff der lokalen schwachen Überholungsoptimalität zugrunde. Dies erlaubt es den Autoren, ein Maximumprinzip unter sehr schwachen Optimalitätsbedingungen zu beweisen. Vergleichen wir diese Voraussetzung mit unseren, so muss unsere Theorie unweigerlich schlechter abschneiden. Auf der anderen Seite werden mit dem Maximumprinzip aus [10] auch mögliche Optima gefunden, für welche der Wert des Zielfunktional nicht endlich wird beziehungsweise nicht als (eigentliches) Lebesgue-Integral existiert. Dieser unterschiedliche Optimalitätsbegriff, welcher sehr eng mit dem verwendeten Integralbegriff verbunden ist, macht den Hauptunterschied zur vorliegenden Arbeit aus. In [10] wird ein uneigentliches Integral benutzt, während wir hier das Lebesgue-Integral in seinem eigentlichen Sinn zugrunde legen. Folglich ist ein Vergleich der Resultate nur schwer möglich, da sich die beiden Ergebnisse auf unterschiedliche Aufgabenklassen der Steuerungstheorie beziehen (vgl. Kapitel 3.4). Wir verstehen unsere Arbeit vielmehr als eine Theorie-Studie zur Beweismethodik notwendiger Optimalitätskriterien unter verschiedenen Variationsansätzen und Diskussion von Steuerungsaufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont in einem konvexen Hilbertraum. Ein Kontext, welcher insbesondere bei der Stabilisierung dynamischer Systeme und im Rahmen physikalischer Anwendungen auftritt. Zwei Vorteile der hier präsentierten Ergebnisse lassen sich dennoch auch bei Anwendung auf ökonomische Probleme herausheben. So existiert zum einen ein zu den in dieser Arbeit bewiesenen notwendigen Optimalitätskriterien passendes Existenzresultat (siehe [41, 42]), zum anderen lassen sich die Voraussetzungen des Maximumprinzips a priori an den Daten der Aufgabenstellung verifizieren. Außerdem enthält unser Maximumprinzip implizit Adjungierte, welche dem Dualraum des Zustandsrau-

mes angehören. Letztere Tatsache kann entscheidende Vorteile bei der numerischen Behandlung der Aufgabe bringen, wie es in [52] aufgezeigt wird.

Abschließend ziehen wir noch den Vergleich zu der Arbeit [64], in welcher ebenfalls nicht-lineare Aufgaben im Rahmen einer Hilbertraum-Theorie studiert wurden. In einem gewissen Maß, betrachtet von der Wahl des Suchraumes, ist die Publikation mit unseren Ergebnissen am ähnlichsten. Doch auch hier besteht bereits der Unterschied im verwendeten Optimalitätsbegriff. So werden in [64] notwendige Optimalitätskriterien für stark lokale Minima bezüglich der Supremumnorm studiert, während wir hier einen globalen Optimalitätsbegriff zugrunde gelegt haben. Die Lokalisierung des Optimalitätsbegriffes erlaubt es Tauchnitz die Voraussetzungen auf eine lokale Ebene abzuschwächen. So wird in [64] beispielsweise nur eine lokale Lipschitz-Bedingung der Dynamik benötigt. Dies erfasst selbstverständlich eine deutlich größere Klasse von Aufgaben. Jedoch muss auch hier betont werden, dass dies aus den unterschiedlichen Optimalitätsbegriffen resultiert und nicht aus der Beweismethodik an sich. Wir denken aber, dass bei einer geeigneten Lokalisierung der in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse ein Vergleich zu [10, 64] möglich würde und sich so weitere Vor- und Nachteile mit diesen Veröffentlichungen herausstellen ließen.

In all den vorgestellten Resultaten, als auch in unserem, bleibt jedoch die Frage der Eindeutigkeit der Adjungierten offen. Wir vermuten jedoch, dass die Beweismethodik der Trennung konvexer Mengen im Hilbertraum zur Konstruktion der Adjungierten implizit bereits einen Eindeutigkeitsbeweis für die Adjungierte liefert. Es gilt diesen Eindeutigkeitsbeweis nur noch einmal sauber zu extrahieren. Sobald die Eindeutigkeit der trennenden Hyperebene gezeigt wäre, würde die Eindeutigkeit der Adjungierten unmittelbar folgen. Aus Sicht der Anschauung ist diese Eindeutigkeit jedoch unmittelbar klar, denn im Grenzprozess  $\alpha \rightarrow 0$  wird die trennende Hyperebene unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen möglicherweise zu einer Art Tangente an den „Variationskegel“. Wir möchten an dieser Stelle jedoch nicht weiter auf diesen möglichen Eindeutigkeitsbeweis eingehen. Wir behalten uns diesen für zukünftige Forschungsarbeiten offen.

# 5 Anwendung der notwendigen Optimalitätskriterien auf ein Modell zur Untersuchung einer optimalen Terrorbekämpfungsstrategie

In diesem Kapitel betrachten wir eine Implementierung einer sogenannten Feuer-Strategie im Rahmen eines Modells zur Analyse einer optimalen Terrorbekämpfungsstrategie. Bei dem Modell beziehen wir uns auf eine in [26] vorgeschlagene Modellierung.

Eine Terrororganisation sei hierbei durch die Funktion  $S$  modelliert, welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  ein Maß für die Stärke  $S(t)$  der Organisation darstellt. Die durch die Steuerung  $u$  modellierte Anwendung einer Feuer-Strategie bewirkt zum einen eine Schwächung der Terrororganisation, zum anderen aber auch eine Stärkung durch Förderung der Sympathie zu den Terroristen.

Insgesamt lässt sich diese Strategie der Terrorbekämpfung gemäß der Differentialgleichung

$$\dot{S}(t) = \tau + (k + \varepsilon u(t))S^\alpha(t) - \mu S(t) - \eta u(t)S(t)$$

modellieren. Den Gedanken von Grass, Caulkins u. a. folgend, vereinfachen wir dieses Modell durch die Setzung  $\alpha = 1, \tau = 0$  und erhalten

$$\dot{S}(t) = gS(t) + \theta u(t)S(t).$$

Hierbei seien  $g = k - \mu > 0$  und  $\theta = \varepsilon - \eta$ . Es gilt zu beachten, dass  $\varepsilon, \eta$  so gewählt sind, dass  $\theta < 0$  gilt. Im Fall  $\theta \geq 0$  wird die Terrorbekämpfungsstrategie nutzlos, wie wir der zugrunde liegenden Interpretation der Differentialgleichung entnehmen können. Wir nehmen entsprechend  $\theta < 0$  und  $g + \theta u_{\max} \leq 0$  an, wobei  $u(t) \in [0, u_{\max}]$  fast überall auf  $[0, \infty)$  gelte. Mit diesen Überlegungen formulieren wir die folgende Steuerungsaufgabe auf dem unendlichen Zeithorizont.

Minimiere

$$J(S, u) = \int_0^\infty (cS(t) + u(t))e^{-rt} dt$$

bezüglich der fast überall geltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= gS(t) + \theta u(t)S(t) \\ S(0) &= S_0 > 0 \\ u(t) &\in [0, u_{\max}] \end{aligned}$$

unter den Annahmen  $c, r, g, S_0, u_{\max} > 0$ ,  $\theta < 0$  und  $g + \theta u_{\max} \leq 0$ .

Mit den Bezeichnungen

$$A(t, S(t)) = gS(t), \quad B(t, S(t)) = \theta S(t)$$

fällt die obige Steuerungsaufgabe strukturell genau in die Klasse der in dieser Arbeit diskutierten Steuerungsaufgaben mit einer affin-linearen Struktur bezüglich der Steuerung. Eine direkte Integration der Dynamik bezüglich der Zeit liefert

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \int_0^t (g + \theta u(\tau)) d\tau \right\}. \quad (5.1)$$

Folglich genügen alle zulässigen Zustandstrajektorien  $S$  der uniformen Beschränkung

$$|S(t)| \leq S_0 e^{gt}.$$

Die Trajektorien werden entsprechend Elemente des gewichteten Raumes  $W_2^1((0, \infty), \mu)$  mit  $\mu(t) = e^{-\rho t}$ ,  $\rho > 2 \max\{g, |g + \theta u_{\max}|\}$ , und wir können die Aufgabe in die hier vorgestellte Hilbertraumtheorie einbetten. Wir zeigen zunächst, dass das gestellte Optimierungsproblem eine optimale Lösung besitzt, anschließend verwenden wir die in dieser Arbeit hergeleiteten notwendigen Optimalitätskriterien, um mögliche Kandidaten für die optimale Lösung zu berechnen. Zur Verifikation der Existenz einer optimalen Steuerung verwenden wir Satz 3.7.1 mit  $p = 2$ . Es gilt seine Anwendbarkeit zu verifizieren. Offenbar ist aufgrund von (5.1) die Menge der zulässigen Prozesse nicht leer. Der Steuerbereich  $\mathcal{U} = [0, u_{\max}]$  ist kompakt und konvex. Bei dem Integranden des Zielfunktionalis,

$$r(t, \xi, v) \hat{\mu}(t) = (c\xi + v)e^{-rt}, \quad \hat{\mu}(t) = e^{-rt},$$

handelt es sich um eine bezüglich  $t$ ,  $\xi$  und  $v$  stetige, sowie bezüglich  $\xi$ ,  $v$  stetig differenzierbare Funktion. Zusätzlich ist  $r$  in der Steuervariablen  $v$  konvex auf  $\mathcal{U}$ . Zusätzlich sehen wir, dass der Integrand  $r$  den Wachstumsbedingungen (E6), (E7) gemäß

$$|r(t, \xi, v)| \leq c|\xi| + |v| = (c|\xi| + |v|) \frac{e^{-rt}}{e^{-rt}} \leq (c|\xi| + |v|) \frac{e^{-\rho t}}{e^{-rt}}, \quad r \geq \rho$$

und

$$\left| \nabla_v r(t, \xi, v) \frac{\tilde{\mu}(t)}{\mu(t)} \right| = e^{(\rho-r)t}, \quad r \geq \rho$$

genügt. Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass der Diskontierungsfaktor  $r > 0$  nicht beliebig, unabhängig von  $\rho > 0$  gewählt werden kann. Er steht in einem direkten Zusammenhang mit der Wahl der Gewichtsfunktion des Raumes. Hier benötigen wir speziell  $r \geq \rho$ , um die Existenz einer optimalen Steuerung zu sichern.

Die Dynamik des Terrorbekämpfungsmodells ist von der formalen Gestalt (E8) und genügt offenbar den Voraussetzungen (E9) und (E10). Unter der Annahme  $r \geq \rho$  sind entsprechend alle Voraussetzungen des Existenzsatzes, Satz 3.7.1, erfüllt. Anwendung

---

dieses Theorems impliziert die Existenz mindestens eines optimalen Prozesses im gewichteten Hilbertraum  $W_2^1((0, \infty), \mu) \times L_2((0, \infty), \mu)$ .

Im Folgenden werden wir die notwendigen Optimalitätskriterien auswerten, um mögliche Kandidaten für einen optimalen Prozess zu berechnen. Hierzu prüfen wir zunächst die Anwendbarkeit des Maximumprinzips, Satz 4.3.1. Gemäß den Abschätzungen

$$|A(t, \xi_1) - A(t, \xi_2)| \leq g|\xi_1 - \xi_2|$$

und

$$|B(t, \xi_1) - B(t, \xi_2)| \leq |\theta| \cdot |\xi_1 - \xi_2|$$

erhalten wir mit  $\tilde{L} = g + |\theta|u_{\max} > 0$  die Lipschitz-Stetigkeit der Dynamik. Voraussetzung (V1) ist erfüllt.

Mit der Setzung  $\tilde{c} := g + |\theta|u_{\max} > 0$  ist aufgrund von

$$\begin{aligned} |A(t, \xi)| &\leq g|\xi|, \\ |B(t, \xi)| &\leq |\theta| \cdot |\xi| \end{aligned}$$

die Wachstumsbeschränkung (V2) erfüllt.

Dass es sich bei den gegebenen Abbildungen  $A, B$  um bezüglich der Zeit  $t$  stetige und bezüglich der Zustandsvariablen  $\xi$  stetig differenzierbare Funktionen handelt, können wir hier ohne weitere Diskussion bestätigen. In der Steuervariablen  $v$  ist die Aufgabe affin-linear. Die Dynamik des Terrormodells genügt entsprechend den Voraussetzungen (V3) und (V4). Die Jacobi-Matrix bezüglich der Zustandsvariablen  $\xi$  lautet

$$\mathcal{J}_\xi[\varphi](t, \xi, v) = (g + \theta v) .$$

Ihre Spektralnorm beträgt  $|\mathcal{J}_\xi[\varphi]| = |g + \theta v|$  und liegt gemäß der Steuerbeschränkung  $u(t) \in [0, u_{\max}]$  innerhalb der Schranken

$$|\mathcal{J}_\xi[\varphi](t, \xi, v)| \leq \max \{g, |g + \theta u_{\max}|\} .$$

Insbesondere folgt  $\mathcal{J}_\xi[\varphi](\cdot, S^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in L_\infty(0, \infty)$ . Die Jacobi-Matrix bezüglich der Steuerung lautet

$$\mathcal{J}_v[\varphi](t, \xi, v) = (\theta\xi) = B(t, \xi)$$

und ihre Spektralnorm lässt sich für alle zulässigen  $S \in W_2^{2,1}((0, \infty), \mu)$  gemäß

$$|\mathcal{J}_v[\varphi](t, S(t), u(t))| \leq |\theta S_0|e^{gt}$$

abschätzen. Setzen wir die Parameter  $c_0 := |\theta S_0|$ ,  $\sigma := \max\{g, |g + \theta u_{\max}|\}$  in Voraussetzung (V5), so ist diese offenbar von der konkreten Realisierung des optimalen Prozesses  $(S^*, u^*)$  unabhängig stets erfüllt.

Setzen wir für die Gewichtung des Zielfunktional  $\hat{\mu} = \mu$  an, das heißt  $r = \rho$ , so stellen wir fest, dass die Voraussetzungen (V2) – (V7) erfüllt sind.

**Bemerkung 5.0.1**

Wir hatten bereits zuvor beobachtet, dass die Wahl  $r \geq \rho$  hinreichend für die Existenz einer optimalen Steuerung für die gestellte Steuerungsaufgabe ist. Entsprechend sichern wir mit  $\rho = r$  zum einen die Existenz einer Lösung und schränken zum anderen die Wahl der Parameter nicht unnötig stark ein. Es sei hier auch noch einmal angemerkt, dass wir die Wahl der Parameter  $r, \rho$  ohnehin nicht unabhängig von einander betrachten dürfen.

Die Anforderungen an den Steuerbereich sind mit  $\mathcal{U} = [0, u_{\max}]$ ,  $u_{\max} > 0$  trivialerweise erfüllt, so dass auch (V11) genüge getan ist.

Das Pontryaginsche Maximumprinzip, Satz 4.3.1, ist anwendbar. Wir berechnen kritische Prozesse, welche den notwendigen Bedingungen genügen.

Die Pontryagin Funktion ist durch

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0 = 1) = -\lambda_0(c\xi + v)e^{-rt} + \eta [g\xi + \theta v\xi]$$

gegeben. Wir notieren die Kernbedingungen des Maximumprinzips.

Das kanonische System ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (g + \theta u(t))S(t) \\ \dot{y}(t) &= ce^{-rt} - (g + \theta u(t))y(t), \end{aligned}$$

wobei  $y$  die zu  $S$  adjungierte Variable aus dem Raum  $W_2^{1,1}(0, \infty), \mu^{-1}$  bezeichne. Insbesondere möge  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$  gelten.

Die Maximumbedingung lautet

$$H(t, S^*(t), u^*(t), y(t)) = \max_{v \in [0, u_{\max}]} \left( -(cS^*(t) + v)e^{-rt} + y(t) [gS(t) + \theta vS^*(t)] \right).$$

Betrachten wir die für die Maximierung bezüglich der Variablen  $v$  relevanten Terme,

$$\max_{v \in [0, u_{\max}]} \left( [\theta S^*(t)y(t) - e^{-rt}] v \right),$$

so stellen wir fest, dass das punktweise Ergebnis der Maximierung von dem Vorzeichen des Ausdruckes  $\theta S^*(t)y(t) - e^{-rt}$  abhängig ist. Wir formulieren dies in der Hilfsfunktion  $v = v(t, S^*(t), y(t))$ ,

$$v(t, S^*(t), y(t)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \theta S^*(t)y(t) < e^{-rt} \\ \tilde{u}(t) & \text{falls } \theta S^*(t)y(t) = e^{-rt} \\ u_{\max} & \text{falls } \theta S^*(t)y(t) > e^{-rt} \end{cases}, \quad (5.2)$$

aus welcher wir später die optimale Steuerung ableiten werden. Die Funktion  $\tilde{u}$  sei hierbei ein Platzhalter für ein singuläres Teilstück der Steuerung.

Zur Herleitung eines möglichen Kandidaten für eine optimale Steuerung möchten wir zunächst zeigen, dass es kein  $T > 0$  geben kann, so dass  $u^*|_{[T, \infty)} = 0$  beziehungsweise  $u^*|_{[T, \infty)} = u_{\max}$  gelten kann. Dies würde unmittelbar implizieren, dass wir eine Steuerung mit singulärem Endstück haben.



Wir beginnen mit dem ersten Fall und nehmen  $u^*|_{[T,\infty)} = 0$ ,  $T > 0$  an. Aus dem kanonischen System folgt unmittelbar  $S^*(t) = \tilde{c}e^{gt}$  mit einer noch zu bestimmenden Konstante  $\tilde{c} > 0$ . Der Zustand wächst exponentiell in der Zeit. Setzen wir dies in das Zielfunktional ein, erhalten wir

$$J(S^*, u^*)|_{[T,\infty)} = \int_T^\infty \tilde{c}\tilde{c}e^{(g-r)t} dt.$$

Es lässt sich zeigen, dass ein Prozess  $(\bar{S}, \bar{u})$  mit  $(\bar{S}(t) = \text{const}, \bar{u}(t) = -\frac{g}{\theta})$  auf  $[T, \infty)$  einen kleineren Integralwert für die Performance liefert. Wir werden diesen Prozess später konstruieren und zeigen, dass es sich bei diesem um einen zulässigen handelt. Eine Steuerung mit  $u^*|_{[T,\infty)} = 0$  kann also nicht optimal im Sinn des in dieser Arbeit definierten Optimalitätsbegriffes sein.

Wir fahren fort und diskutieren den Fall  $u^*|_{[T,\infty)} = u_{\max}$ ,  $T > 0$ . Analog zum vorherigen Fall berechnen wir zunächst die Adjungierte und den Zustand auf  $[T, \infty)$ . Wir erhalten mit den noch zu bestimmenden Konstanten  $\tilde{c}, \lambda$

$$\begin{aligned} S^*(t) &= \tilde{c}e^{-(g+\theta u_{\max})t}, \\ y(t) &= \frac{-c}{r-g-\theta u_{\max}} e^{-rt} + \lambda e^{-(g+\theta u_{\max})t}. \end{aligned}$$

Die Transversalitätsbedingung impliziert  $\lambda = 0$ . Für den Parameter  $\tilde{c}$  wissen wir zumindest  $\tilde{c} \geq 0$ . Wäre  $u^*|_{[T,\infty)} = u_{\max}$ , so müssten wir nach Definition von  $v(\cdot, S(\cdot), y(\cdot))$

$$\theta S^*(t)y(t) = \frac{-c\tilde{c}\theta}{r-g-\theta u_{\max}} e^{(g+\theta u_{\max})t} > 1 \quad (5.3)$$

für alle  $t \geq T$  erhalten. Der Bruch

$$\frac{-c\tilde{c}\theta}{r-g-\theta u_{\max}}$$

ist nach Wahl der Modellparameter nicht-negativ. Die Exponentialfunktion  $e^{(g+\theta u_{\max})t}$  ist gegen Null konvergierend monoton fallend. Folglich kann die Bedingung (5.3) nicht für beliebig große  $t \geq T$  gültig bleiben. Wir erhalten einen Widerspruch,  $u^*|_{[T,\infty)} = u_{\max}$  kann nicht optimal sein.

Aus den beiden vorherigen Argumenten folgt unmittelbar, dass das Endstück der Steuerung ein singuläres Teilstück sein muss. Wir setzen entsprechend  $u^*(t)|_{[T,\infty)} = \tilde{u}(t)$  an und entnehmen der Maximumbedingung, Hilfsfunktion (5.2), die Bedingung

$$\theta S^*(t)y(t) = e^{-rt}. \quad (5.4)$$

Das zugehörige kanonische System lautet für  $t \geq T > 0$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (g + \theta \tilde{u}(t))S(t) \\ \dot{y}(t) &= ce^{-rt} - (g + \theta \tilde{u}(t))y(t). \end{aligned}$$

Gleichung (5.4) impliziert unmittelbar  $S^*|_{[T,\infty)} \neq 0$ ,  $y|_{[T,\infty)} \neq 0$ . Dies legitimiert die Multiplikation der Gleichungen des kanonischen Systems mit dem Zustand beziehungsweise der Adjungierten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\dot{S}^*(t)y(t) &= \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) \theta S^*(t)y(t) \\ S^*(t)\dot{y}(t) &= ce^{-rt}S^*(t) - \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) \theta S^*(t)y(t).\end{aligned}$$

Beachtung der Bedingung (5.4) führt zu

$$\begin{aligned}\dot{S}^*(t)y(t) &= \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) e^{-rt} \\ S^*(t)\dot{y}(t) &= ce^{-rt}S^*(t) - \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) e^{-rt}.\end{aligned}$$

Mit Differenziation der Bedingung (5.4) schließen wir außerdem

$$\theta \dot{S}^*(t)y(t) + \theta S^*(t)\dot{y}(t) = -re^{-rt}.$$

Letztere Bedingung erlaubt es uns, das zuvor konstruierte System zu einer Gleichung zusammenzuführen, in der nur noch  $S^*$  und  $\tilde{u}$  unbekannt sind.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}-re^{-rt} &= \theta \dot{S}^*(t)y(t) + \theta S^*(t)\dot{y}(t) \\ &= \theta \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) e^{-rt} + \theta ce^{-rt}S^*(t) - \theta \left(\frac{g}{\theta} + \tilde{u}(t)\right) e^{-rt} \\ &= \theta ce^{-rt}S^*(t)\end{aligned}$$

Der zu der Steuerung  $\tilde{u}$  gehörige Zustand muss entsprechend  $S^*(t) = -\frac{r}{c\theta}$  für alle  $t \in [T, \infty)$  genügen. Wir bezeichnen diesen konstanten Zustand mit  $\hat{S}_T := -\frac{r}{c\theta} > 0$ . Insbesondere muss  $\dot{S}^*|_{[T,\infty)} = 0$  gelten. Es folgt

$$0 = \dot{S}^*(t) = (g + \theta\tilde{u}(t))\hat{S}_T \quad \forall t \geq T.$$

Die singuläre Steuerung ist entsprechend durch  $\tilde{u}(t) = -\frac{g}{\theta}$  gegeben. Aufgrund der Modellannahme  $g + \theta u_{\max} \leq 0$  genügt  $\tilde{u}$  der Steuerbeschränkung. Im Hintergrund einer Terrorbekämpfungsstrategie scheint das Ergebnis  $S^*(t) = \text{const}$  für alle  $t \geq T > 0$  zweckmäßig. Sie besagt, dass ab einem noch zu bestimmenden Zeitpunkt  $T > 0$  die Stärke auf ein vertretbares Level minimiert wurde und fortan auf diesem gehalten wird. In einem mathematischen Kontext gesetzt, entspricht das hier erhaltene Ergebnis genau der sogenannten Turnpike-Eigenschaft. Diese formalisiert die Intuition, dass der Zustand einer Steuerungsaufgabe über einem hinreichend großen Zeithorizont über einen möglichst langen Zeitraum in einem Gleichgewichtszustand verbleibt. Im Fall einer Aufgabe mit einem unendlichen Zeithorizont möge die Trajektorie gegen dieses Gleichgewicht konvergieren (vgl. [65, 72]). In unserem Beispiel hier erhalten wir, im

---

<sup>1</sup>Die Funktion  $S^*$  ist hierbei prinzipiell bis auf den Anfangswert  $S^*(T) = \hat{S}_T$  und die Steuerung  $\tilde{u}$  bekannt. Sie kann durch explizite Integration der Dynamik in geschlossener, analytischer Form angegeben werden.

Gegensatz zu den angegebenen Referenzen, nicht nur die Konvergenz gegen ein Gleichgewicht, sondern sogar die Äquivalenz mit diesem. Es bleibt jedoch zu beachten, dass wir diese stationäre Eigenschaft zunächst nur auf Seiten des Zustandes haben. Wir werden jedoch im Folgenden sehen, dass wir ebenfalls ein Turnpike-Verhalten auf Seiten der Current-Value-Adjungierten erhalten. Dies wurde für den Fall von Steuerungsaufgaben über einem endlichen Horizont bereits in [65] beobachtet.

Wir setzen unsere Diskussion des Maximumprinzips fort und bestimmen die Adjungierte. Für sie erhalten wir

$$y(t) = -\frac{c}{r}e^{-rt}.$$

Die Transversalitätsbedingung ist erfüllt und es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ . Zusammenfassend erhalten wir auf  $[T, \infty)$

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{g}{\theta}, \\ S^*(t) &= \hat{S}_T = -\frac{r}{c\theta}, \\ y(t) &= -\frac{c}{r}e^{-rt}. \end{aligned}$$

Wir setzen diese Funktionen auf  $[0, T)$  fort. Sei hierzu zunächst  $u^*|_{[0, T)} = 0$  angenommen. Auf Seiten des Zustandes erhalten wir so

$$S^*(t) = S_0 e^{gt}.$$

Unter Beachtung der analytischen Güte der Zustandstrajektorie<sup>2</sup> berechnen wir gemäß

$$\lim_{t \rightarrow T} S^*(t) \stackrel{!}{=} \hat{S}_T \implies S_0 e^{gT} \stackrel{!}{=} \hat{S}_T \implies T = \frac{1}{g} \ln \left( \frac{\hat{S}_T}{S_0} \right)$$

den Umschaltzeitpunkt  $T$  der Steuerung. Ein genauerer Blick auf diesen Parameter offenbart, dass er nur dann einen sinnvollen Wert annimmt, sofern  $\hat{S}_T > S_0$  ist. Diese Bedingung wird unmittelbar klar, wenn wir den unter der Steuerung  $u^*|_{[0, T)} = 0$  exponentiell wachsenden Zustand beachten. Ist die Stärke der Terrororganisation zu Beginn des Planungshorizontes bereits zu groß, so kann eine Steuerung im Sinn von  $u^*|_{[0, T)} = 0$  nicht zum Erfolg führen. Diese Intuition gibt uns im Folgenden unmittelbar den Ansatz für den Fall  $\hat{S}_T < S_0$ . Hier erwarten wir, wie wir später auch bestätigen werden,  $u^*|_{[0, T)} = u_{\max}$ . Insgesamt spiegelt sich in dieser Lösungsstruktur der Steuerung der sogenannte Most-Rapid-Approach wider.

Es verbleibt noch die Adjungierte auf das Intervall  $[0, T)$  fortzusetzen. Einsetzen der Steuerung  $u^*|_{[0, T)} = 0$  liefert für das kanonische System

$$\dot{y}(t) = ce^{-rt} - gy(t).$$

<sup>2</sup>Bei den Zustandstrajektorien handelt es sich um Funktionen aus einem gewichteten Sobolev-Raum, welche nach den in dieser Arbeit vorgestellten mathematischen Grundlagen stets einen stetigen Repräsentanten besitzen.

Integration dieser Differenzialgleichung führt zu

$$y(t) = \frac{c}{g-r} e^{-rt} + \lambda e^{-gt},$$

wobei wir noch den freien Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  zu bestimmen haben. Erneut nutzen wir hierzu die analytische Güte der zugrunde liegenden Funktion aus und schließen mit  $\lim_{t \rightarrow T} y(t) \stackrel{!}{=} -\frac{c}{r} e^{-rT}$

$$\lambda = -\frac{cg}{(g-r)r} e^{(g-r)T}.$$

Die Adjungierte lautet entsprechend

$$y(t) = \frac{c}{g-r} e^{-rt} - \frac{cg}{(g-r)r} e^{(g-r)T} e^{-gt}, \quad t < T.$$

Die Maximumbedingung ist hierbei aufgrund der Wahl des Wertes  $\hat{S}_T = -\frac{r}{c\theta} > 0$  automatisch erfüllt. Zur Konstruktion dieses Zustandswertes hatten wir bereits die Maximumbedingung, in der Form  $\theta S^*(t)y(t) = e^{-rt}$ , verwendet.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen in dem folgenden Kandidaten für einen optimalen Prozess für den Fall  $\hat{S}_T > S_0$  zusammen.

$$S^*(t) = \begin{cases} S_0 e^{gt} & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{r}{c\theta} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}, \quad u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{g}{\theta} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}, \quad T = \frac{1}{g} \ln \left( \frac{\hat{S}_T}{S_0} \right)$$

Die zugehörige Adjungierte lautet

$$y(t) = \begin{cases} \frac{c}{g-r} e^{-rt} - \frac{cg}{(g-r)r} e^{(g-r)T} e^{-gt} & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{c}{r} e^{-rt} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}.$$

### Bemerkung 5.0.2

In der Sprache der Modellparameter bedeutet der Fall  $\hat{S}_T > S_0$

$$r > -cS_0\theta.$$

Der Diskontierungsfaktor  $r$  kann also nicht beliebig gewählt werden. Er hängt von den Modellparametern  $S_0$ ,  $c$  und  $\theta$  ab, welche implizit in die Wahl des Gewichtes  $\mu$  eingehen. Wir hatten diesen Zusammenhang zwischen den Gewichtsparametern  $r$ ,  $\rho$  bereits zuvor beobachtet.

Bereits in der Diskussion des zuvor betrachteten Prozesses erwähnten wir, dass es noch einen möglichen weiteren Kandidaten mit  $u^*|_{[0,T)} = u_{\max}$  und  $\hat{S}_T < S_0$  geben könnte. Wir untersuchen diesen im Folgenden. Seien hierzu zunächst unverändert der Prozess und die Adjungierte auf  $[T, \infty)$  festgehalten. Weiterhin sei  $u^*|_{[0,T)} = u_{\max}$  angenommen. Wir berechnen den korrespondierenden Zustand und die zugehörige Adjungierte auf dem Intervall  $[0, T)$ . Auf Seiten des Zustandes erhalten wir nach Einsetzen der vermuteten Steuerung  $u^*|_{[0,T)} = u_{\max}$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (g + \theta u_{\max})S(t), \\ S(0) &= S_0. \end{aligned}$$

Der Zustand ergibt sich zu

$$S^*(t) = S_0 e^{(g+\theta u_{\max})t}.$$

In Analogie zu der vorherigen Diskussion nutzen wir die analytische Güte des Zustandes aus und berechnen den Umschaltzeitpunkt,

$$T = \frac{1}{g + \theta u_{\max}} \ln \left( \frac{\hat{S}_T}{S_0} \right).$$

Es fällt unmittelbar auf, dass  $T > 0$  nur dann gilt, sofern unsere Bedingung  $\hat{S}_T < S_0$  erfüllt ist. Wir gehen entsprechend konform mit der zugrundeliegenden Interpretation des Terrorbekämpfungmodells. Die Diskussion abschließend berechnen wir die Adjungierte. Wir erhalten mit einem noch zu bestimmenden Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{-c}{r - g - \theta u_{\max}} e^{-rt} + \lambda e^{-(g+\theta u_{\max})t}, t \in [0, T].$$

Die Kontinuitätsbedingung an der Stelle  $T$  impliziert für den Parameter  $\lambda$

$$\lambda = \frac{c(g + \theta u_{\max})}{r(r - (g + \theta u_{\max}))} e^{-(r-(g+\theta u_{\max}))T}.$$

Insgesamt erhalten wir für  $-\frac{r}{c\theta} = \hat{S}_T < S_0$ , gleichbedeutend mit der Parameterwahl  $r > -cS_0\theta$ , den Kandidaten

$$S^*(t) = \begin{cases} S_0 e^{(g+\theta u_{\max})t} & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{r}{c\theta} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}, u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{g}{\theta} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}.$$

Die zugehörige Adjungierte lautet

$$y(t) = \begin{cases} \frac{-c}{r-g-\theta u_{\max}} e^{-rt} + \frac{c(g+\theta u_{\max})}{r(r-(g+\theta u_{\max}))} e^{-rT} e^{(g+\theta u_{\max})(T-t)} & \text{falls } t \in [0, T) \\ -\frac{c}{r} e^{-rt} & \text{falls } t \in [T, \infty) \end{cases}.$$

Der Umschaltzeitpunkt  $T$  ist durch

$$T = \frac{1}{g + \theta u_{\max}} \ln \left( \frac{\hat{S}_T}{S_0} \right)$$

gegeben.

An dieser Stelle möchten wir noch einmal hervorheben, dass es sich bei den berechneten Prozessen jeweils nur um Kandidaten für einen optimalen Prozess handelt. Weitere Untersuchungen im Rahmen hinreichender Optimalitätskriterien sind notwendig, um die Untersuchung des gestellten Terrorbekämpfungmodells als abgeschlossen ansehen zu können. Es ist mit der in diesem Kapitel vorgestellten Diskussion auch nicht auszuschließen, dass der berechnete Prozess der einzige Kandidat ist. Die Frage der Eindeutigkeit bleibt entsprechend offen und muss in einer gesonderten Theorie abgehandelt werden.

Bemerkenswert scheint jedoch die Lösungsstruktur der berechneten Kandidaten. So realisiert in beiden Fällen der Zustand eine geeignete Turnpike-Eigenschaft. Wir betrachten die Aufgabe erneut unter Verwendung eines sogenannten Turnpike-Ansatzes.<sup>3</sup> Die Stationaritätsbedingung für das Current-Value kanonische System lautet

$$\begin{aligned} 0 &= (g + \theta\bar{u})\bar{S} \\ 0 &= c - (g + \theta\bar{u} + r)\bar{y}. \end{aligned}$$

Wir erhalten im Gleichgewicht

$$\bar{u} = -\frac{g}{\theta}, \quad \bar{S} = -\frac{r}{c\theta}, \quad \bar{y} = -\frac{c}{r}.$$

Die Present-Value Adjungierte ergibt sich gemäß  $y(t) = \bar{y}e^{-rt}$ . Folglich stimmt das mit diesem Ansatz erhaltene Lösungsteilstück mit unserem singulären Teilstück auf  $[T, \infty)$ ,  $T > 0$  überein. Im Gegensatz zum Turnpike-Ansatz auf einem endlichen Zeithorizont erhalten wir hier jedoch nicht die typisch dreigliedrige Struktur. Unsere Steuerung besteht lediglich aus zwei Teilstücken. Mit dem ersten Teilstück wird zunächst der stationäre Gleichgewichtszustand des Current-Value kanonischen Systems angesteuert. Anschließend wird auf diesem für den gesamten verbleibenden Zeithorizont verblieben. Einen dritten Abschnitt, zur Erfüllung einer Randbedingung, benötigen wir hier im Unterschied zum Turnpike-Ansatz über dem endlichen Zeithorizont nicht. Dies liegt in der nur asymptotisch vorliegenden Transversalitätsbedingung, welche bereits durch den Gleichgewichtszustand realisiert wird. Das Beispiel untermauert den Turnpike-Ansatz und zeigt mehr sogar noch, dass hier nicht nur die Konvergenz gegen das Gleichgewicht gilt, sondern dieses sogar explizit angenommen wird. Außerdem bricht es mit der typischerweise angenommenen dreigliedrigen Struktur der Steuerung. Es muss jedoch an dieser Stelle auch betont werden, dass es für den allgemeinen Turnpike-Ansatz keine auf den hier präsentierten Kontext, in eine Hilbertraumtheorie eingebettete Steuerungsaufgaben über einen unendlichen Zeithorizont, passende mathematische Theorie gibt. Das Beispiel motiviert entsprechend zu weiteren Nachforschungen. Insbesondere stellt sich die Frage, ob auf einem unendlichen Zeithorizont stets das letzte Teilstück der Steuerung singulär ist und sich als Gleichgewichtslösung des kanonischen Systems ermitteln lässt. Wäre dies der Fall, ergäben sich neue Möglichkeiten zur Berechnung von Lösungen optimaler Steuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont. Diese könnten deutlich effizienter als die Bestimmung der Kandidaten mittels Auswertung des Maximumprinzips sein.

Ebenfalls interessant zu bemerken ist die Güte der errechneten Adjungierten. Sie ist für jeden Kandidaten aus Steuerung und Zustand eindeutig auf dem gesamten Zeithorizont  $[0, \infty)$  bestimmt. Insbesondere können wir den Anfangswert explizit angeben. Dies ist gerade für die numerische Untersuchung der Steuerungsaufgabe im Kontext einer indirekten Pseudospektralmethode von großer Bedeutung. Ob diese explizite Angabe der Anfangswerte der Adjungierten im allgemeinen möglich ist, bleibt jedoch eine offene Frage.

---

<sup>3</sup>Die Turnpike-Methode besteht in der Intuition, in möglichst kurzer Zeit auf ein stationäres Gleichgewicht des kanonischen Systems hinzusteuern, anschließend möglichst lange in diesem Gleichgewicht zu verweilen, um abschließend den stationären Punkt verlassend, eine mögliche Endbedingung (Transversalität) zu erfüllen (siehe [65, 72]).

---

Im Rahmen der Interpretation des Hintergrundes der Terrorbekämpfung scheint uns die Lösung ebenfalls vertretbar zu sein. Zum einen haben wir die Existenz einer optimalen Steuerung gesichert, zum anderen scheinen die berechneten Prozesse intuitiv. Möchte man den Terror in optimaler Weise bekämpfen, so wird man versuchen ihn zu einem stationären Zustand  $\hat{S}_T$  zu steuern und ihn auf diesem Niveau zu halten. Eine weitere Senkung der Stärke der Terrorzelle würde nur zusätzliche Kosten verursachen und ist aus mathematischer Sicht aufgrund der exponentiellen Struktur der Funktion  $S$  nicht zu empfehlen. Eine Senkung auf  $S = 0$  ist aufgrund des exponentiellen Verhaltens ohnehin nicht möglich. Würde man andererseits die Investitionskosten in die Feuerstrategie  $u$  senken, so würde sich unweigerlich die Größe der Terrororganisation erneut erhöhen. Dies kann intuitiv zu keiner optimalen Lösung führen. Die einzige intuitiv vorstellbare Lösung scheint die durch die zuvor diskutierten Kandidaten vorgeschlagene Strategie. Es sei jedoch hier betont, dass diese Argumentation sich auf keinerlei mathematisches Fundament bezieht und lediglich als Interpretation der Auswertung des Maximumprinzips im Rahmen des Anwendungsszenarios dienen kann.

Für eine alternative Diskussion dieser Aufgabe unter Verwendung eines sogenannten Most-Rapid-Approaches verweisen wir auf die Literatur *Optimal Control of Nonlinear Processes with Applications in Drugs, Corruption, and Terror*, [26], in der ebenfalls eine umfangreiche Diskussion weiterer Möglichkeiten zur Terrorbekämpfung gegeben wird.





## 6 Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit widmeten wir uns einer speziellen Klasse von Steuerungsaufgaben mit einem unendlichen Zeithorizont, bei denen der unendliche Zeithorizont a priori Bestandteil der Aufgabenstellung ist. Wir haben diese Klasse der Aufgaben von den Steuerungsproblemen mit beliebig großem, endlichem Zeithorizont, wo die Divergenz des Zielfunktional oft zugelassen wird, abgegrenzt. Nach einer kurzen Motivation studierten wir notwendige Optimalitätskriterien für diese Aufgabenklasse. Hierbei griffen wir die in [51, 54] verwendete Beweistechnik zur Herleitung notwendiger Optimalitätskriterien auf und übertrugen sie auf Steuerungsprobleme mit bezüglich der Steuerung affin-linearen Dynamiken. Wir zeigten, dass sich der zum Beweis des Maximumprinzips notwendige Variationskegel durch das Hilfsproblem

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\zeta(t) + \mathcal{J}_v[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))\omega(t) \\ \zeta(0) &= 0\end{aligned}\tag{6.1}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \mathcal{J}_\xi[\varphi](t, x_*(t), u_*(t))y(t) \\ y(\tau) &= \varphi(\tau, x_*(\tau), v) - \varphi(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\end{aligned}\tag{6.2}$$

geeignet charakterisieren lässt. Die formulierten Anfangswertprobleme entsprechen formal einer Art Linearisierung der Dynamik entlang des optimalen Prozesses. Im Fall einer linearen Dynamik stimmen sie mit den in [51, 54] zur Charakterisierung des Variationskegels verwendeten Gleichungen überein. So erweitern die in der vorliegenden Arbeit studierten notwendigen Optimalitätskriterien die Ergebnisse aus [51, 54], sowohl beweistechnisch als auch aus Sicht der Komplexität der betrachtbaren Aufgaben. Neben dieser Erweiterung steckt der Beitrag dieser Arbeit auch in der Auslotung gewisser Grenzen der in [51, 54] verwendeten Separationstechnik. Hierzu leiteten wir zwei notwendige Optimalitätskriterien in Form von zwei Maximumprinzipien vom Pontryagin-Typus her. In Kapitel 4.3 haben wir zunächst in Analogie zu [51, 54] eine Variation nach Euler verwendet. Es ergab sich das zur Charakterisierung des Variationskegels verwendete Anfangswertproblem (6.1). In dem darauffolgenden Kapitel 4.4 wurde die Gültigkeit des Maximumprinzips unter Verwendung einer Nadelvariation bewiesen. Das Anfangswertproblem (6.2) charakterisierte den zugehörigen Kegel zulässiger Variationen.

Fasst man vergleichend diese beiden Variationstypen zusammen, so stellt man ein gemeinsames Strukturmerkmal fest. Beide Typen der Variation sind von der formalen Gestalt

$$u_\lambda(t) = u_*(t) + g(\lambda, t) \cdot (u(t) - u_*(t)) .$$

Hierbei ist im Sinn der konvexen Analysis entscheidend, dass  $g \in [0, 1]$  gilt und die Steuerung  $u$  für unsere Aufgabenstellung zulässig ist. Dies sichert uns die Zulässigkeit der variierten Steuerung  $u_\lambda$ . Bei der Nadelvariation haben wir für  $g$  die Indikatorfunktion angesetzt, sprich eine unstetige Variationsfunktion. Die zulässigen Richtungen der Variation haben wir jedoch mit  $v \in \mathcal{U}$ ,  $v = \text{const}$  fest gehalten. Die Eulervariation hingegen nutzt für  $g$  eine im Variationsparameter  $\lambda$  lineare Funktion, sie ist insbesondere stetig. Die Richtungen zulässiger Variationen haben wir jedoch weitgehend freigelassen und fordern lediglich die Zulässigkeit von  $u$ .

Das zur Charakterisierung des Variationskegels verwendete Hilfsproblem ändert sich strukturell je nach verwendeter Variation. Bei der Nadelvariation, Hilfsproblem (6.2), geht die Jacobi-Matrix der Dynamik bezüglich der Steuerung,  $J_v[\varphi](\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ , nicht in die Charakterisierung des Variationskegels ein. Die Maximumbedingung kann dann nicht länger mehr aus dem Trennungssatz gewonnen werden. Sie muss gesondert unter Verwendung punktweiser Argumente hergeleitet werden. Gleichzeitig ließen sich die zum Beweis der notwendigen Optimalitätskriterien getroffenen Voraussetzungen abschwächen. Es entstand ein Maximumprinzip, bei dem die Adjungierten jedoch nicht mehr notwendigerweise im Anfangszeitpunkt des Zeithorizontes definiert sein mussten. Entgegengesetzt verhielt es sich bei der Verwendung einer Euler-Variation, Hilfsproblem (6.1). Hier konnten wir die Existenz und Stetigkeit der Adjungierten auf dem gesamten Zeithorizont sichern. Sowohl die kanonische Gleichung als auch die Maximumbedingung ergaben sich aus der Trennung des Variationskegels. Wir sehen unmittelbar, wie sich die verwendete Art der Variation in den notwendigen Optimalitätskriterien niederschlägt. Ganz natürlich stellt sich die Frage, welche Ergebnisse sich noch durch die verschiedene Wahl der Variationsfunktion  $g$  und der zulässigen Richtungen  $u$  realisieren lassen. Es gilt in den zukünftigen Arbeiten diese beiden Freiheitsgrade genauestens auszuloten, um weitere Optimalitätskriterien zu studieren.

Neben der Diskussion verschiedener Variationstypen spielte die Verwendung konvexer Analysis in einem gewichteten Hilbertraum eine zentrale Rolle. Wir haben die Grenze dieser Argumentation ausgelotet, indem wir feststellten, dass die Dynamik einer bezüglich der Steuerung affin-linearen Struktur genügen muss. Begründung hierfür lieferte unmittelbar die Konstruktion des Variationskegels. Dieser kann nur dann konvex sein, wenn die zugrunde liegende Dynamik bezüglich der Steuerung einer Form von Konvexität genügt. Nur dann implizieren die durch die Variation entstehenden Anfangswertaufgaben (6.1),(6.2) die Konvexität des Variationskegels. Hieraus folgt, dass für den Beweis einer allgemeineren Theorie eine alternative Beweistechnik zu wählen ist. Es sind verschiedene Ansätze denkbar. Zum einen ist es möglich, unter Verwendung der Nadelvariation eine punktweise Argumentation im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen zu vollführen. Eine solche Beweistechnik wurde in [8–12] verwendet. Zum anderen ließe sich ein Beweis mit einem allgemeineren Trennungssatz vorstellen. Dies würde einer natürlichen Erweiterung der in dieser Arbeit verfolgten Philosophie entsprechen. Natürlich kann in diesem Fall nicht mehr auf die Schönheit der konvexen Funktionalanalysis zurückgegriffen werden. Restringieren wir uns jedoch auf die Mittel der konvexen Analysis, so muss auch unweigerlich die gestellte Aufgabe diese Konvexität mit sich bringen. Wir erhalten eine zu der hier gestellten Aufgabenstellung äquivalente Problemklasse.

---

Nachdem die Beweistechniken zur Euler- und Nadelvariation an sich miteinander verglichen wurden, haben wir in Kapitel 4.6 eine Abgrenzung zur bestehenden Literatur vorgenommen. In diesem Vergleich wurde festgestellt, dass der Separationsansatz zur Herleitung der adjungierten Gleichungen beim Studium von Aufgaben mit a priori gegebenem unendlichen Zeithorizont einige Vorteile mit sich bringt. Zum einen liefert er die Adjungierten implizit als Elemente des zum Zustandsraum dualen Raumes. Die Adjungierten genügen automatisch einer natürlichen, durch die Raumzugehörigkeit gegebenen, Transversalitätsbedingung. Zum anderen liefert die Trennungsgleichung eine Idee für einen möglichen Eindeutigkeitsbeweis. Für die Numerik sind dies zwei bedeutende Punkte. In [52] wird so eine Numerik in Form einer indirekten Pseudospektralmethode vorgeschlagen, welche diese Eigenschaften der Adjungierten ausnutzt. In [56] wird die Idee dieses numerischen Schemas auf die zum gestellten Steuerungsproblem duale Aufgabe angewandt. Die Bedingung  $y \in W_2^{n,1}((0, \infty), \mu^{-1})$ , welche ebenfalls in dem hier präsentierten Maximumprinzip enthalten ist, spielt dabei eine zentrale Rolle. Die Maximumprinzipien, Satz 4.3.1 und Satz 4.4.1, ermöglichen es zukünftig, die Ergebnisse aus [52, 56] auf die Klasse der Steuerungsaufgaben mit einer bezüglich der Steuerung affin-linearen Dynamik zu übertragen. Wie wir in Kapitel 5 exemplarisch vorführen konnten, spielt diese Klasse eine entscheidende Rolle in den Anwendungen.<sup>1</sup>

Auf der anderen Seite konnten wir auch feststellen, dass die Verwendung der Separationstechnik nur dann einen Mehrwert bringt, wenn wir die Divergenz des Zielfunktional explizit in der Aufgabenbeschreibung ausschließen und nur konvexe Aufgaben betrachten. Diese Struktur der Dynamik finden wir bei Stabilisierungsproblemen, in denen die stabilisierende Steuerung a posteriori der Dynamik hinzugefügt wird. Die Notwendigkeit eines konvergenten Zielfunktional hatten wir bereits in der Einleitung festgestellt. Im Unterschied zur vorliegenden Arbeit benötigen wir im Fall eines Stabilisierungsproblems jedoch ein exponentiell wachsendes Gewicht, um die stabilisierende Wirkung zu erzielen. Die hier gestellte Aufgabe muss entsprechend transformiert werden, so dass das Zielfunktional unter dem transformierten Integranden exponentiell fallend gewichtet ist (vgl. [56]). Beachtet man diese Transformation, so scheint uns die in der vorliegenden Arbeit formulierte Theorie ebenfalls zur Diskussion und Stabilisierung dynamischer Systeme geeignet, wie wir sie heutzutage vielfach in Physik und Technik finden. Im Gegenzug hat der Vergleich mit der bestehenden Literatur auch gezeigt, dass für die ökonomischen Modelle, in denen die Divergenz des Zielfunktional aus modelltechnischen Gründen explizit berücksichtigt werden muss, der Begriff der schwachen Überholungsoptimalität, verbunden mit einer Diskussion der Steuerungsaufgabe im Raum der lokal absolut stetigen Funktionen, geeigneter ist. Zusammenfassend muss gesagt werden, dass die angewandte Methode stets in Abhängigkeit der konkreten Aufgabenstellung zu wählen ist.

---

<sup>1</sup>Weitere Steuerungsaufgaben mit einer bezüglich der Steuerung affin-linearen Dynamik finden sich in [22, 26, 62].



# Literatur

- [1] R. Adams und J. Fournier. *Sobolev Spaces*. Second. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- [2] W. Alt, C. Schneider und M. Seydenschwanz. *EAGLE-STARTHILFE Optimale Steuerung: Theorie und numerische Verfahren*. Edition am Gutenbergplatz Leipzig, 2013.
- [3] H. Amann und J. Escher. *Analysis I*. Grundstudium Mathematik. Springer Verlag, 2006.
- [4] H. Amann und J. Escher. *Analysis II*. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, 2006.
- [5] K. Arrow und M. Kurz. *Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy*. RFF Press. Johns Hopkins Press, 1970.
- [6] F. Arscott und A. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 2013.
- [7] S. M. Aseev. *Existence of an optimal control in infinite-horizon problems with unbounded set of control constraints*. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 297.1 (07/2017), S. 1–10.
- [8] S. M. Aseev und A. V. Kryazhinskii. *The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems*. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 257.1 (07/2007), S. 1–255.
- [9] S. M. Aseev und V. M. Veliov. *Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount*. In: *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. B, Appl. Algorithms* 19.1-2 (2012), S. 43–63.
- [10] S. M. Aseev und V. M. Veliov. *Needle variations in infinite-horizon optimal control*. In: *Variational and optimal control problems on unbounded domains. A workshop in memory of Arie Leizarowitz, Haifa, Israel, January 9–12, 2012. Proceedings*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Ramat Gan: Bar-Ilan University, 2014, S. 1–17.
- [11] S. M. Aseev und V. M. Veliov. *Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions*. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 291.1 (12/2015), S. 22–39.
- [12] S. M. Aseev und V. M. Veliov. *Another View of the Maximum Principle for Infinite-Horizon Optimal Control Problems in Economics*. 05/2017.
- [13] J. P. Aubin und F. H. Clarke. *Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control Problems*. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 17.5 (1979), S. 567–586.
- [14] P. Beesack. *Gronwall inequalities*. Carleton mathematical lecture notes. Carleton University, Dept. of Mathematics, 1975.
- [15] V. Burenkov. *Sobolev Spaces on Domains*. Teubner-Texte zur Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2013.
- [16] D. Carlson. *Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: When optimal solutions are agreeable*. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 64.1 (01/1990), S. 55–69.

- [17] D. Carlson und A. Haurie. *Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [18] Dikariev, I. *Ein Beitrag zur Existenz optimaler Lösungen bei Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont*. Master Thesis. Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 2016.
- [19] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis: Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. Masterclass. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [20] N. Dunford und J. Schwartz. *Linear Operators Part I: General theory*. Pure and applied mathematics. Interscience Publishers, 1958.
- [21] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [22] G. Feichtinger und R. Hartl. *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften*. Walter de Gruyter, 1986.
- [23] R. Gamkrelidze. *Principles of Optimal Control Theory*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering. Springer US, 1978.
- [24] D. Garg, W. W. Hager und A. V. Rao. *Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems*. In: *Automatica* 47.4 (2011), S. 829–837.
- [25] A. Göpfert. *Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen*. Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek. Teubner, BSB, 1973.
- [26] D. Grass, J. Caulkins u. a. *Optimal Control of Nonlinear Processes with Applications in Drugs, Corruption, and Terror*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [27] H. Halkin. *Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons*. In: *Econometrica* 42 (1974), S. 267–272.
- [28] A. Hall. *The Analysis and Synthesis of Linear Servomechanisms*. Massachusetts Institute of Technology, 1947.
- [29] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Mathematische Leitfäden Teil 2. Vieweg+Teubner Verlag, 2013.
- [30] A. Ioffe und V. Tichomirov. *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973.
- [31] K. Jänich. *Vektoranalysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [32] R. Kalman. *Contributions to the theory of optimal control*. Bol. Soc. Mat. Mex., II. Ser. 5, 102-119 (1960); erratum. Ibid. 5, 299 (1960). 1960.
- [33] T. Kamihigashi. *Necessity of the transversality condition for stochastic models with bounded or CRRA utility*. In: *J. Econ. Dyn. Control* 29.8 (2005), S. 1313–1329.
- [34] Kreuter, M. *Sobolev Spaces of Vector-Valued Functions*. Master Thesis. Ulm University, Faculty of Mathematics und Economics, 2015.
- [35] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. Teubner-Texte zur Mathematik. Teubner, 1981.
- [36] A. Kufner, O. John und S. Fucik. *Function Spaces*. Czechoslovak Academy of Science, 1977.
- [37] A. Kufner und B. Opic. *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*. In: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 025.3 (1984), S. 537–554.
- [38] L. D. Landau und J. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik III, Quantenmechanik*. Akademie-Verlag Berlin, 1966.
- [39] A. Letov. *Analytical controller design. I*. In: *Autom. Remote Control* 21 (1960), S. 303–306.

- 
- [40] V. Lykina. *Beiträge zur Theorie der Optimalsteuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont. PhD Thesis*. Diss. Technische Universität Cottbus, 2010.
- [41] V. Lykina. *An existence theorem for a class of infinite horizon optimal control problems*. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* (2014), S. 1–24.
- [42] V. Lykina. *Existence Theorem for Infinite Horizon Optimal Control Problems with Mixed Control-State Isoperimetrical Constraint*. In: *Large-Scale Scientific Computing*. Hrsg. von I. Lirkov und S. Margenov. Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 228–236.
- [43] V. Lykina und S. Pickenhain. *Weighted functional spaces approach in infinite horizon optimal control problems: A systematic analysis of hidden opportunities and advantages*. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 454.1 (2017), S. 195–218.
- [44] V. Lykina, S. Pickenhain und M. Wagner. *Different interpretations of the improper integral objective in an infinite horizon control problem*. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 340.1 (2008), S. 498–510.
- [45] M. J. Magill. *Pricing infinite horizon programs*. In: *J. Math. Anal. Appl.* 88 (1982), S. 398–421.
- [46] V. G. Maz'ja. *Sobolev Spaces*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- [47] N. G. Meyers und J. Serrin.  *$H = W$* . In: *Proceedings of the National Academy of Science* 51 (06/1964), S. 1055–1056.
- [48] P. Michel. *On the transversality condition in infinite horizon optimal problems*. In: *Econometrica* 50 (1982), S. 975–985.
- [49] I. Natanson. *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Hrsg. von Prof. Dr. Karl Bögel (dt. Übersetzung). Harri Deutsch Thun Verlag, Frankfurt/Main, 1981.
- [50] B. Pachpatte. *Inequalities for Differential and Integral Equations*. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1998.
- [51] S. Pickenhain. *Infinite Horizon Optimal Control Problems in the Light of Convex Analysis in Hilbert Spaces*. In: *Set-Valued and Variational Analysis* 23.Issue 1 (2015), S. 169–189.
- [52] S. Pickenhain, A. Burtchen u. a. *An indirect pseudospectral method for the solution of linear-quadratic optimal control problems with infinite horizon*. In: *Optimization* 65.3 (2016), S. 609–633.
- [53] S. Pickenhain. *On Adequate Transversality Conditions for Infinite Horizon Optimal Control Problems—A Famous Example of Halkin*. In: *Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment*. Hrsg. von J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas und A. Tarasyev. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, S. 3–22.
- [54] S. Pickenhain. *Hilbert Space Treatment of Optimal Control Problems with Infinite Horizon*. In: *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes - HPSC 2012*. Hrsg. von H. Bock, X. Hoang u. a. Springer International Publishing, 2014, S. 169–182.
- [55] S. Pickenhain. *Infinite Horizon Problems in the Calculus of Variations*. In: *Set-Valued and Variational Analysis* (04/2018).
- [56] S. Pickenhain und A. Burtchen. *Regulator Problems on Unbounded Domains*. In: *Vietnam Journal of Mathematics* 46.4 (12/2018), S. 837–861.
- [57] S. Pickenhain und V. Lykina. *Sufficiency Conditions for Infinite Horizon Optimal Control Problems*. In: *Recent Advances in Optimization*. Hrsg. von A. Seeger. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 217–232.
- [58] F. Sauvigny. *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 2*. Springer-Lehrbuch Masterclass Series Bd. 2. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

- [59] A. Schönhage. *Approximationstheorie*. Walter de Gruyter & Co, 1971.
- [60] G. Smirnov. *Transversality condition for infinite-horizon problems*. In: *J. Optim. Theory Appl.* 88.3 (1996), S. 671–688.
- [61] *Stetige Kurve/Euklidisch/Integralabschätzung/Fakt/Beweis*. URL: [https://de.wikiversity.org/wiki/Stetige\\_Kurve/Euklidisch/Integralabsch%C3%A4tzung/Fakt/Beweis](https://de.wikiversity.org/wiki/Stetige_Kurve/Euklidisch/Integralabsch%C3%A4tzung/Fakt/Beweis) (besucht am 15.07.2019).
- [62] K. Sydsæter, P. Hammond u. a. *Further Mathematics for Economic Analysis*. Financial Times Prentice Hall, 2008.
- [63] N. Tauchnitz. *Das Pontrjaginsche Maximumprinzip für eine Klasse hybrider Steuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkungen und seine Anwendung*. Dissertation. Technische Universität Cottbus, 2010.
- [64] N. Tauchnitz. *The Pontryagin Maximum Principle for Nonlinear Optimal Control Problems with Infinite Horizon*. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 167.1 (10/2015), S. 27–48.
- [65] E. Trélat und E. Zuazua. *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control*. In: *Journal of Differential Equations* 258.1 (2015), S. 81–114.
- [66] E. Vestrup. *The Theory of Measures and Integration*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2009.
- [67] M. Wagner. *Pontryagin’s Maximum Principle for Multidimensional Control Problems in Image Processing*. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 140.3 (03/2009), S. 543–576.
- [68] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*. Springer- Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [69] C. C. von Weizsäcker. *Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon*. In: *The Review of Economic Studies* 32.2 (1965), S. 85–104.
- [70] D. Werner. *Funktionalanalysis, 7. Auflage*. Springer Verlag, 2011.
- [71] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*. MIT Press, 1949.
- [72] A. Zaslavski. *Turnpike Phenomenon and Infinite Horizon Optimal Control*. Springer Optimization and Its Applications. Springer International Publishing, 2014.
- [73] T. Ziemann. *Ein Maximumprinzip für eine Klasse von Optimalsteuerungsaufgaben über einem unendlichen Zeithorizont mit vektorialen Zuständen und Steuerungen*. Master Thesis. Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 2015.
- [74] T. Ziemann und S. Pickenhain. *First-order necessary optimality conditions for infinite horizon optimal control problems with linear dynamics and convex objective*. In: *Optimization* 67.6 (2018), S. 757–782.
- [75] T. Ziemann und A. Burtchen. *Analytische Hilfsmittel der Steuerungstheorie*. Techn. Ber. FG Optimierung, 2018.