

# Optimale Portfolios für partiell informierte Investoren in einem Finanzmarkt mit Gaußscher Drift und Expertenmeinungen

Von der Fakultät für MINT – Mathematik, Informatik, Physik,  
Elektro- und Informationstechnik

der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doctor rerum naturalium**  
(Dr. rer. nat)

genehmigte

**Dissertation**

vorgelegt von

**Master of Science**  
**Hakam Kondakji**

geboren am 08.01.1985 in Syrien

Gutachter: Prof. Dr. Ralf Wunderlich

Gutachter: Prof. Dr. Jörn Saß

Gutachter: Prof. Dr. Abdelali Gabih

Tag der mündlichen Prüfung: 24.01.2019



---

## Danksagung

---

Für das Gelingen meiner Doktorarbeit schulde ich sehr vielen Menschen einen herzlichen Dank.

An erster Stelle möchte ich ein besonderes Wort des Dankes an meinen Doktorvater Herrn Professor Ralf Wunderlich richten, ohne dessen unerschütterlichen Glauben in dieses Thema es diese Dissertation nie gegeben hätte. Er hat mir sehr viel Geduld entgegengebracht, mich im Laufe meiner Forschungsarbeit an meinem Dissertationsvorhaben allseitig betreut und mit umfangreichen Verbesserungsvorschlägen unterstützt. Nicht nur in fachspezifischen, sondern auch in privaten Gesprächen hat er immer dafür gesorgt, dass ich meinen Geist anstrengte.

Ein ganz besonderer Dank gebührt Herrn Professor Wolfgang Freudenberg, der dafür gesorgt hat, dass ich einen Studienplatz an der BTU Cottbus-Senftenberg bekam und mich während meiner Forschungsarbeit stets motiviert hat. Vor allem aber sein moralischer Beistand und der menschliche Halt haben mir Kraft und Mut zur Anfertigung und Vollendung meiner Dissertation gegeben.

Speziellen Dank schulde ich ebenfalls Herrn Professor Hamid Al-Oklah, ohne dessen wertvollen Rat ich nicht zur BTU Cottbus-Senftenberg gekommen wäre. Er hat mir während meiner Forschungsarbeit immer wieder Mut zugesprochen und stand mir in vielerlei Hinsicht mit Rat und Tat zur Seite.

Ferner möchte ich ein großes Dankeschön an Herrn Professor Jörn Saß für die freundliche Übernahme eines Gutachtens richten.

Des Weiteren möchte ich Herrn Professor Abdelali Gabih für die tolle Unterstützung und die kritischen Ratschläge sowie für die freundliche Übernahme eines Gutachtens danken.

Herr Professor Friedrich Sauvigny hat immer wieder nette und freundliche Gespräche mit mir geführt, an mich geglaubt und mir Mut zugesprochen. Ihm gilt mein aufrichtiger Dank.

Herr Dr. Omar Kebiri hat mich mit bereichernden Tipps und Diskussionsbeiträgen wiederholt in fruchtbare thematische Bahnen gelenkt. Ihm gilt mein besonderer Dank.

Für viele fruchtbare Gespräche und Anregungen bin ich allen Teilnehmern des Forschungsseminars Stochastik dankbar, in dem ich die Möglichkeit hatte, den Stand meiner Forschung zu präsentieren. Hierbei möchte ich zusätzlich dem Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik, an dem die Arbeit an der Promotion durchgeführt wurde, sowie dem Lehrstuhl für Wahrscheinlich-

keitstheorie und Statistik für die Bereitstellung einer Stelle zu Beginn meiner Promotionszeit, danken.

Ebenso möchte ich meinen ehemaligen Kommilitonen und Kollegen danken, die nicht nur an der BTU Cottbus-Senftenberg zu einer angenehmen Atmosphäre und guten Zusammenarbeit beigetragen haben, sondern auch darüber hinaus.

Tief verbunden und dankbar bin ich meiner Familie, für ihre unglaublich hilfreiche Unterstützung und ihr Verständnis bei der Anfertigung dieser Doktorarbeit.

## Kurzfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir optimale Portfoliostrategien für nutzenmaximierende Investoren in einem zeitstetigen Finanzmarktmodell, bei dem die Drift durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert wird, welcher nicht direkt beobachtbar und vom Investor aus den ihm zur Verfügung stehenden Informationen zu schätzen ist.

Da optimalen Handelsstrategien sehr sensibel auf die Driftparameter reagieren, benötigen Investoren möglichst genaue Driftschätzungen auf der Basis der ihnen zur Verfügung stehenden Informationen. Die Konstruktion solcher Schätzungen allein aus der Kenntnis von historischen Marktdaten liefert allerdings in der Praxis nur unbefriedigende Ergebnisse, da Drifteffekte in den Daten durch eine starke Volatilität überlagert werden. Aus diesen Gründen beziehen Investoren für die Bestimmung ihrer Anlagestrategien auch andere externe Informationsquellen ein, um die Einschätzung der unbekanntenen Drift zu verbessern. Dabei handelt es sich z.B. um Wirtschaftsnachrichten, Unternehmensberichte, Ratings, Empfehlungen von Finanzanalysten oder die eigene individuelle Sicht auf die zukünftige Preisentwicklung. Solche externen Informationen werden in der Literatur Expertenmeinungen genannt.

Die Arbeit klassifiziert die Experten in drei Kategorien: Expertenmeinungen zu vorab bekannten Zeitpunkten, zu zufälligen Zeitpunkten und in stetiger Zeit. Für Vergleichszwecke betrachten wir weiterhin das Modell ohne Expertenmeinungen und ein Modell mit vollständig beobachtbarer Drift. Darauf aufbauend behandeln wir dynamische Nutzenmaximierungsprobleme für den Potenz-Nutzen. Diese überführen wir unter Verwendung von Filter- und Maßwechseltechniken in risikosensitive stochastische optimale Steuerungsprobleme. Bei den Modellen ohne Expertenmeinungen bzw. mit einem zeitstetigen Experten ist der gesteuerte Zustand ein Diffusionsprozess und es gelingt, geschlossene Lösungen für die Kontrollprobleme anzugeben. Für das Modell mit Expertenmeinungen zu bekannten Zeitpunkten erfolgt die Lösung des Optimierungsproblems durch eine Rückwärtsrekursion.

Im Modell mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten ist die zugehörige DPE eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE), welche im Diffusionsteil des Differentialoperators degeneriert ist. Dies verhindert die Anwendung klassischer Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für die Lösung der PIDE und von entsprechenden Verifikationssätzen für das Kontrollproblem. Mit Hilfe einer Regularisierungstechnik definieren wir durch die Hinzufügung eines Diffusionstermes eine Familie von Kontrollproblemen und zeigen, dass die zugehörigen Wertfunktionen gegen die Wertfunktion des ursprünglichen Kontrollproblems konvergiert, wenn der Diffusionsterm gegen Null geht. Da eine analytische Lösung der PIDE nicht zu erwarten ist, kommen in der Arbeit numerische Lösungsverfahren zum Einsatz. Diese diskretisieren die PIDE mit Hilfe von Differenzenschemata und numerischen Integrationsmethoden.

Die theoretischen Resultate der Arbeit werden durch Ergebnisse umfangreicher numerischer Experimente illustriert.



## Abstract

This thesis investigates optimal portfolio strategies for utility maximizing investors in a continuous-time financial market. The drift is modelled by an Ornstein-Uhlenbeck process, which is not directly observable and has to be estimated from observable quantities.

Because optimal strategies are very sensitive to the drift parameters, investors need accurate drift estimates based on the information available to them. However, the construction of such estimates solely from past market data yields unsatisfactory results in practice since drift effects are overshadowed by a high volatility. For those reasons, when determining their investment strategy, investors also include external sources of information to obtain a better estimate of the drift. Among those sources are: business news, corporate reports, credit ratings, recommendations from financial analysts and their personal view of future price developments. Such external information is called expert opinion in the literature.

This thesis classifies the experts into three categories: expert opinions at previously known times, at random times and in continuous time. For the purpose of comparison we also examine the model without expert opinions as well as a model with fully observable drift. Building up on this we consider dynamic utility maximization problems for power utility. They are transformed into risk-sensitive stochastic optimal control problems using filters and changes of measure techniques. For the models without expert opinions and the one with continuous time expert opinions, the controlled state is a diffusion process and closed-form solutions to the control problems can be found. For the model with expert opinions at known times, the optimization problem is solved by a backward recursion.

In the model with expert opinions arriving at random times, the state process is a jump-diffusion process and the associated dynamic programming equation is a partial integro-differential equation (PIDE) that is degenerated in the diffusion part of the differential operator. This precludes the application of classical existence and uniqueness results for the solution of the PIDE as well as corresponding verification theorems for the control problem. Using a regularization technique employing an additional diffusion term we construct a family of control problems and show that the associated value functions converge to the value function of the original control problem as the error term used for the regularisation goes to zero. Since an analytical solution to the PIDE cannot be expected, we use numerical solution methods. They discretize the PIDE using difference schemes and numerical integration methods.

The theoretical results of the work are illustrated by results of extensive numerical experiments.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Finanzmarktmodell</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Filter</b>	<b>21</b>
3.1	Filter für den Driftprozess . . . . .	21
3.2	Eigenschaften der bedingten Kovarianz . . . . .	29
3.3	Asymptotische Filtereigenschaften hochfrequenter Experten . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Nutzenmaximierungsproblem</b>	<b>39</b>
4.1	Problemdarstellung . . . . .	40
4.2	Wohlgestelltheit des Kontrollproblems . . . . .	41
4.3	Monetärer Wert der Information . . . . .	49
4.4	Logarithmischer Nutzen . . . . .	50
4.5	Potenz-Nutzen . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Potenz-Nutzenmaximierung für Diffusionsmodelle</b>	<b>61</b>
5.1	Kontrollproblem unter voller Informationen $H = F$ . . . . .	62
5.2	Kontrollproblem unter partieller Information $H = R, D$ . . . . .	67
5.3	Monetärer Wert der Information . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten</b>	<b>75</b>
6.1	Dynamic Programming Gleichung . . . . .	75
6.2	Optimale Strategien . . . . .	80
6.3	Monetärer Wert der Information . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten</b>	<b>81</b>
7.1	Dynamic Programming Gleichung . . . . .	81
7.2	Regularisiertes Optimierungsproblem . . . . .	84
7.3	Numerische Lösung der Dynamic Programming Gleichung . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>105</b>
8.1	Modellparameter . . . . .	105
8.2	Filter . . . . .	109
8.3	Wertfunktion . . . . .	119

8.4	Monetärer Wert der Information . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Lösung ausgewählter Differentialgleichungen</b>	<b>141</b>
A.1	Lösung der Riccati-Gleichung . . . . .	141
A.2	Lösung der Differentialgleichungen (5.6) und (5.7) . . . . .	145
<b>B</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>149</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>

In der Finanzwirtschaft gehören Anlageentscheidungen zur Aufteilung von Kapital auf verschiedene Investitionsmöglichkeiten zu den typischen Aufgaben von privaten und institutionellen Investoren. Dabei handelt es sich um Entscheidungsprobleme unter Unsicherheit, da die zukünftigen Wertverläufe üblicherweise durch nicht beziehungsweise nur eingeschränkt vorhersehbare Schwankungen gekennzeichnet sind. Mathematisch lassen sich solche Unsicherheiten durch die Verwendung von stochastischen Prozessen für die Wertverläufe erfassen. Aufgaben wie die Maximierung von Gewinnen oder die Minimierung von Risiken durch Auswahl einer geeigneten Anlagestrategie führen in solchen Finanzmarktmodellen zu stochastischen optimalen Steuerungsproblemen. Da die beiden oben genannten Ziele in der Regel nicht gleichzeitig erreicht werden können, arbeiten Ökonomen mit Nutzenfunktionen, um die Risikoaversion von Investoren zu berücksichtigen. An die Stelle der Gewinnmaximierung tritt dann die Maximierung des Nutzens des Gewinns. Derartige Optimierungsprobleme wurden in den letzten Jahren von Mathematikern und Ökonomen intensiv untersucht und stehen auch im Mittelpunkt dieser Arbeit. Dabei betrachten wir die Investition von Kapital in risikolose und riskante Wertpapiere wie z.B. Aktien.

Ein Schwerpunkt der Arbeit ist ein gegenüber den klassischen mathematischen Finanzmarktmodellen realistischeres Modell. In diesem ist der Driftparameter abhängig von Faktorprozessen, welche den aktuellen Marktzustand beschreiben, allerdings für den Investor nicht beobachtbar sind. Da optimale Handelsstrategien sehr sensibel auf die Driftparameter reagieren, benötigen Investoren möglichst genaue Driftschätzungen auf der Basis der ihnen zur Verfügung stehenden Informationen. Die Konstruktion solcher Schätzungen allein aus der Kenntnis von historischen Marktdaten ist allerdings in der Praxis extrem schwierig. Dies liegt daran, dass die Driftprozesse zufälligen zeitlichen Schwankungen unterworfen sind und Drifteffekte in den Daten durch starke Volatilität ‚überschattet‘ werden. Selbst in Modellen mit einer konstanten aber unbekanntem Drift werden für einen angemessenen Grad an Genauigkeit der Driftschätzung Marktdaten über

ungewöhnlich lange Zeiträume benötigt, siehe Rogers [64, Abschnitt 4.2].

Aus diesen Gründen beziehen Investoren in der Praxis für die Bestimmung ihrer Anlagestrategien auch andere externe Informationsquellen ein, um die Einschätzung der unbekannt Drift zu verbessern. Dabei handelt es sich z.B. um Wirtschaftsnachrichten, Unternehmensberichte, Ratings, Empfehlungen von Finanzanalysten oder die eigene individuelle Sicht auf die zukünftige Preisentwicklung. Solche externen Informationen werden in der Literatur Expertenmeinungen genannt. Diese Idee wurde erstmals im sogenannten Black-Litterman-Modell, einer Erweiterung des statischen Einperiodenmodells von Markowitz, verwendet, siehe Black und Litterman [9]. In dieser Arbeit soll dieser Ansatz in das oben beschriebene Driftmodell in einen zeitstetigen Finanzmarkt eingebettet werden. Darauf aufbauend behandeln wir dynamische Nutzenmaximierungsprobleme, welche auf stochastische optimale Steuerungsprobleme unter partieller Information führen. Letztere stellen ein in jüngster Vergangenheit aktiv bearbeitetes Forschungsgebiet in der Finanzmathematik dar.

**Driftmodelle.** Bereits im Jahr 1900 hat sich Louis Bachelier, der heute als Begründer der Finanzmathematik gilt, in seiner Dissertation (siehe Bachelier [2] oder Schachermayer und Teichman [69]) unter anderem mit Aktienkursbewegungen auseinander gesetzt und für die Modellierung des Preisprozesses  $S_t$  die Bownsche Bewegung  $S_t = S_0 + \sigma W_t$ ,  $t \geq 0$ ,  $S_0 = s_0 > 0$  und  $\sigma > 0$  vorgeschlagen, wobei  $W_t$  ein Standard-Wiener-Prozesses ist. Dieses Modell wurde jedoch kritisch gesehen, da es nicht ausgeschlossen ist, dass der Preisprozess negative Werte annimmt. Im Jahr 1973 publizierten Black und Scholes ihre Arbeit [10], in der sie ein alternatives Modell für die Wertpapierpreise verwendeten. An der Ausarbeitung dieses Modells war Merton ebenfalls beteiligt, jedoch publizierte er einen separaten Artikel (siehe Merton [56]). Für die Ausarbeitung des Modells und die darauf aufbauende Bewertung von Derivaten wurde Merton zusammen mit Scholes 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften geehrt, Black war zwei Jahre zuvor verstorben. Das unter dem Namen Black-Scholes-Modell bekannte Modell geht davon aus, dass für einen Preisprozess  $(S_t)_{t \geq 0}$  durch  $dR_t = \frac{dS_t}{S_t}$  definierte Renditeprozess durch eine Brownsche Bewegung mit Drift in Form

$$dR_t = \mu dt + \sigma_R dW_t^R$$

beschrieben wird. Dabei ist  $(W_t^R)_{t \geq 0}$  ein Wiener-Prozess und die Drift  $\mu \in \mathbb{R}$  sowie die Volatilität  $\sigma_R > 0$  werden als konstant und bekannt vorausgesetzt. Der Preisprozess selbst folgt dann einer geometrischen Brownschen Bewegung. Von diesem Modell ausgehend hat Merton 1971 in seiner Arbeit [55] das Nutzenmaximierungsproblem für einen endlichen Zeithorizont gelöst. Inzwischen zählt das Merton-Problem zu den klassischen Problemen der Finanzmathematik und wegen der Voraussetzung, dass die Drift  $\mu$  und die Volatilität  $\sigma_R$  bekannt sind, zählen Modelle solcher Art zu den Modellen unter vollständiger Information. In der Literatur wurde in den letzten Jahren eine ganze Reihe von Weiterentwicklungen der Merton-Probleme untersucht, bei denen die Drift und die Volatilität nicht bekannt sind. Hierbei spricht man von Modellen mit unvollständiger bzw. partieller Information. Da die Drift  $\mu$  die entscheidende Rolle bei Portfoliooptimierungsproblemen spielt, sind realistischere Modelle für die Drift besonders wichtig. So haben im Jahr 1991 Karatzas und Xu in ihrer Arbeit [33] die Drift als eine unbeobachtbare Zufallsgröße angesetzt, welche zum Bayes-Modell führt. Im Jahr 1995 haben Elliott,

---

Aggoun und Moore in ihrer Arbeit [21] eine weitere Verallgemeinerung des Merton-Problems eingebracht, in der die Drift von einem nicht direkt beobachtbaren Faktorprozess  $Y_t$  abhängt. Der Faktorprozess  $Y_t$  ist dabei eine zeitstetige homogene Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , wobei  $e_1, e_2, \dots, e_m$  die Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^m$  sind, welche die Zustände des Marktes beschreiben. Die Anfangsverteilung der Markov-Kette sowie die Generatormatrix werden in diesem Modell als bekannt vorausgesetzt.  $\mu^i, i = 1, \dots, m$  ist die erwartete Aktienrendite, wenn sich der Markt im  $i$ -ten Zustand befindet, das heißt, wenn  $Y_t(\omega) = e_i$  ist. Die Abhängigkeit der Drift von dem unbeobachtbaren Prozess erfolgt über den Ansatz

$$\mu_t = \sum_{i=1}^m \mu^i \mathbf{1}_{\{Y_t=e_i\}}.$$

Dieses Modell ist in der Literatur unter dem Namen Hidden Markov Model (HMM) bekannt und wurde von etlichen anderen Autoren wie etwa Sass und Haussmann [66], Rieder und Bäuerle [5], [62], sowie Elliott, Siu und Badescu [22] untersucht. Neben dem HMM findet man in der Arbeit von Kim und Omberg [36] aus dem Jahr 1996 einen weiteren Ansatz für die Drift. Dieser Ansatz ist unter dem Namen Linear Gaussian Modell bzw. Hidden Gaussian Model (HGM) bekannt und beruht auf der Annahme, dass die Drift ein Gaußscher Prozess ist. Dort wurde die Drift als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit der folgenden Dynamik eingesetzt

$$d\mu_t = \kappa(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_\mu dW_t^\mu, \quad \mu_0 = m_0,$$

wobei  $\kappa, \sigma_\mu > 0$  und  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$  Konstanten sind und  $(W_t^\mu)_{t \geq 0}$  ein Wiener-Prozess ist. Andere Autoren, die dieses Modell eingesetzt haben, sind Lakner [45], Brendle [12] und Davis und Leo [19].

Die vorliegende Arbeit wird sich mit diesem Modell beschäftigen.

**Partielle Information und Expertenmeinungen.** Sowohl im Hidden Markov Model als auch im Hidden Gaussian Model sind die Filter für den Drift-Prozess basierend auf den Renditebeobachtungen aus der Literatur unter den Namen Wonham-Filter bzw. Kalman-Filter bekannt (siehe auch Elliott, Aggoun und Moore [21] bzw. Liptser und Shiryaev [50]).

Um diese Driftschätzungen zu verbessern, können die Renditebeobachtungen mit den oben beschriebenen Expertenmeinungen kombiniert werden. Die Expertenmeinungen werden dabei als verrauschte Schätzungen des aktuellen Werts des Drift-Prozesses modelliert. Für unverzerrte Schätzungen verringert dies die Varianz des Filters. Die bessere Schätzung verbessert dann die Portfolio-Performance. Dies kann als eine zeitkontinuierliche Version des statischen Black-Litterman-Ansatzes angesehen werden, der für die Schätzung der unbekannt Drift die Information aus dem Aktienkurs mit Expertenmeinungen kombiniert, siehe Black und Litterman [9] und für einen Vergleich mit anderen Bayesschen Methoden siehe Schöttle, Werner und Zagst [70]. Abgesehen von Fouque, Papanicolaou und Sircar [24], die zum Zeitpunkt Null ein Modell mit einer einzigen Expertenmeinung verwenden, unterscheiden andere Autoren zwischen drei Arten von Expertenmeinungen.

- **Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten:** In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass der Investor zu deterministischen und zu Investitionsbeginn festgelegten Zeitpunkten verrauschte Signale über den aktuellen Zustand der unbeobachtbaren

Drift  $\mu$  erhält. Diese Signale werden als Expertenmeinungen interpretiert und durch Zufallsvariablen  $Z_k$  modelliert, deren Verteilung vom aktuellen Zustand der Drift  $\mu$  abhängt. Für das Filter-Problem ist es hilfreich, mit normalverteilten Zufallsgrößen in der Gestalt  $Z_k = \mu_{t_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k$  zu arbeiten. Dabei ist  $(\varepsilon_k)$  eine Folge von iid.  $\mathcal{N}(0, 1)$  Zufallsvariablen, die vom Wiener-Prozess  $W^R$  aus dem Preis-Prozess und dem Wiener-Prozess  $W^\mu$  aus der Drift unabhängig sind. Durch diesen Ansatz sind die Expertenmeinungen erwartungstreu bzw. stimmen im Mittel mit dem aktuellen Wert der Drift überein. Die Varianz  $\Gamma$  ist ein Maß für die Zuverlässigkeit des Experten. Je größer  $\Gamma$  ist, desto weniger zuverlässig ist der Experte. Gabih, Kondakji, Sass, und Wunderlich haben in ihrer Arbeit [27] dieses Modell untersucht und die Drift als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angenommen. Basierend auf dieser Arbeit haben Sass, Westphal und Wunderlich [67] den multivariaten Fall für mehrere Aktien untersucht. In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung von Sass, Westphal und Wunderlich [68] wurde ebenfalls dieses Modell verwendet.

- **Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten:** Im Gegensatz zum vorherigen Modell werden in diesem Modell die Ankunftszeitpunkte  $T_1, T_2, \dots$  der Expertenmeinungen zufällig vorausgesetzt und als Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses  $N_t$  mit Intensität  $\lambda > 0$  angenommen, der von der Drift  $\mu$  und allen weiteren Prozessen unabhängig ist. Frey, Gabih und Wunderlich haben in ihren Arbeiten [25, 26] dieses Modell untersucht und die Drift als eine zeitstetige homogene Markov-Kette angenommen. Weitere neue Veröffentlichungen zu diesem Modell sind Sass, Westphal und Wunderlich [67, 68] sowie Gabih, Kondakji und Wunderlich [28].
- **Expertenmeinungen in stetiger Zeit:** Davis und Lleo haben in ihrer Arbeit [17] eine Form von Expertenmeinungen eingebracht, in der die Experten ihre Meinungen über die kontinuierliche Entwicklung der mittleren Aktienrenditen formulieren. Die Dynamik der Expertenmeinungen wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben und zur Konstruktion eines dynamischen Konfidenzintervalls wird zusätzlich weißes Rauschen hinzugefügt

$$d\zeta_t = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0,$$

wobei der Wiener-Prozess  $W_t^\zeta$  von allen anderen Prozessen unabhängig ist. Weitere Veröffentlichungen, die dieses Modell verwenden, sind die neu erschienenen Artikel von Davis und Lleo [20] sowie von Sass, Westphal und Wunderlich [68]. Letztere betrachten den stetigen Experten als Grenzfall hochfrequenter Experten der letzten beiden Modelle, wenn die Anzahl bzw. die Intensität der Expertenmeinungen wächst und gleichzeitig deren durch die Varianz ausgedrückte Ungenauigkeit linear mit wächst.

**Portfoliooptimierung.** Den Grundstein für die moderne Portfoliotheorie legte Markowitz in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts, als er in einem entsprechenden Artikel [51] den ersten Ansatz zur Lösung des Portfoliooptimierungsproblems in einer mathematischen Formulierung einführte. Der Grundgedanke des sogenannten Erwartungswert-Varianz-Ansatzes besteht darin, nach einem Gleichgewicht zwischen dem Risiko eines Portfolios (gemessen an seiner Varianz) und seiner erwarteten Rendite (Erwartungswert) zu suchen. Die Bedeutung die-

---

ser finanztheoretischen Arbeit wird auch durch den 1990 an Markowitz verliehenen Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften unterstrichen. Im Jahr 1969 hat Merton mit seiner Arbeit [54] den nächsten großen Schritt in der Theorie der Portfoliooptimierung gemacht. Zwei Jahre später hat er in seiner Arbeit [55], wie bereits vorhin erwähnt, auf der Grundlage des Black-Scholes-Modells das Nutzenmaximierungsproblem für einen endlichen Zeithorizont gelöst. Darauf basierend ist in der Literatur eine ganze Reihe von Weiterentwicklungen dieser Arbeit entstanden, welche die Drift als eine stetige homogene Markov-Kette oder einen Gaußschen Prozess annehmen. Für Leser, die an Optimierungsproblemen ohne Expertenmeinungen interessiert sind, bieten sich die Arbeiten von Sass und Haussmann [66] und Rieder und Bäuerle [62] an. Dort wurde die Drift als eine zeitstetige homogene Markov-Kette gesetzt, während Lakner [45] und Brendle [12] die Drift als einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angenommen haben. Optimierungsprobleme mit Expertenmeinungen in stetiger Zeit wurden in den Arbeiten von Davis und Lleo [17, 20] und Sass, Westphal und Wunderlich [68] behandelt. In der Dissertation von Schütze [71], welche sich an den Arbeiten von Frey, Gabih und Wunderlich [25, 26] orientiert, finden sich Optimierungsprobleme mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten, bei denen die Drift eine stetige homogene Markov-Kette ist. Optimierungsprobleme mit Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten wurden in der Arbeit von Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27] sowie in der Arbeit von Sass, Westphal und Wunderlich [67, 68] untersucht. Dort wurde die Drift als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angenommen und die Maximierung des erwarteten logarithmischen Nutzen des Endvermögens behandelt. Vor diesem Hintergrund entstand die vorliegende Arbeit als Erweiterung der letzten drei Arbeiten und konzentriert sich in erster Linie auf den Potenz-Nutzen.

**Lösungsverfahren.** Während Merton in seiner Arbeit [55], in der er den Vermögensprozess als einen von der Handelsstrategie und der Konsumption gesteuerten Prozess dargestellt hat, das Nutzenmaximierungsproblem mit Hilfe des Itô-Kalküls und der Dynamic Programming Methode gelöst hat, hat Bismut [7] zwei Jahre später eine andere Technik zur Lösung des Portfoliooptimierungsproblems eingesetzt, nämlich die stochastische Dualitätstheorie, die auch von weiteren Autoren verwendet wurde, wie zum Beispiel Cvitanić und Karatzas [16] und Xu [80]. Neben der Dynamic Programming Methode, die von etlichen Autoren z.B. Fleming und Soner [23], Shreve und Soner [75] und Pham [60] verwendet wird, und der stochastischen Dualitätstheorie finden sich in der Literatur weitere Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems, so wurde in den 1980er Jahren die Martingalmethode entwickelt und kam zum Einsatz in den Arbeiten von Cox und Huang [15], Karatzas, Lehoczky und Shreve [32] und Pliska [61]. Ein weiteres Verfahren ist das Malliavin Kalkül, welches von Ocone und Karatzas [57], Kuwana [43], Kuwana [42], Lakner [44] und Karatzas [31] verwendet wurde.

In der Arbeit von Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27] aus dem Jahr 2014 sowie der darauf basierenden Arbeit von Sass, Westphal, und Wunderlich [67] aus dem Jahr 2017, bei denen Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten über die unbeobachtbare und als einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angenommene Drift eintreffen, wurde das Optimierungsproblem für den Fall der logarithmischen Nutzenfunktion auf eine ganz andere Art und Weise gelöst. Dort gelingt eine vergleichsweise einfache und weitgehend geschlossene Lösung des Nutzenmaximierungsproblems.

2012 und 2014 haben Frey, Gabih und Wunderlich [25, 26] Optimierungsprobleme im Fall der Potenz-Nutzenfunktion unter partieller Information untersucht. Dabei haben sie die Drift als eine Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen angenommen und das Modell mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten gesetzt. Eine geschlossene Lösung für die Dynamic Programming Gleichung (DPE) in diesem Modell ist nicht zu erwarten. Auf Grund der fehlenden gleichmäßigen Elliptizität der DPE untersuchen sie in ihrem zweiten Paper Viskositätslösungen und zusätzlich dazu arbeiten sie mit Regularisierungstechniken, indem sie eine Familie von regularisierten Optimierungsproblemen durch die Hinzufügung eines Störtermes in die SDE des Zustandsprozesses definieren und dann die Konvergenz der zugehörigen Wertfunktionen gegen die Wertfunktion des ursprünglichen Optimierungsproblems zeigen, wenn der Störterm gegen Null geht. Weitere Autoren, die Viskositätslösungen untersuchten sind Lions [47, 48], Fleming und Soner [23], Pham [60, 59], Touzi [77] sowie Bouchard und Touzi [11].

Kim und Omberg [36] haben in ihrem Paper die Drift als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert und den Fall Potenz-Nutzenfunktion unter voller Information betrachtet und präsentieren eine geschlossene Lösung für die resultierende DPE. Andere Autoren, die diesen Ansatz verwenden, sind z.B. Kuroda und Nagai [39], Davis und Lleo [19] und Brendle [12]. Letzterer hat auch den Ansatz für die DPE unter partieller Information ohne Expertenmeinungen ausgearbeitet.

Geschlossene Lösungen für Optimierungsprobleme unter partieller Information mit Expertenmeinungen zu diskreten Zeitpunkten sind in der Literatur selten, dagegen findet man eine ganze Reihe von numerischen Verfahren zur Lösung der DPE. Hierbei bieten sich Methoden zur Lösung von Vorwärts-Rückwärts stochastische Differentialgleichung (siehe z.B. Kebiri, Neureither und Hartmann von [34, 35]) an, sowie die Finite-Differenzen-Methode (siehe z.B. Menaldi [53], Lions [46], Kushner [40], Kushner und Dupuis [41], Camilli und Falcone [13], Krylov [38] und Barles und Jakobsen [3]).

Nachfolgend stellen wir einige neue Beiträge der vorliegenden Dissertation zur bestehenden Literatur zum Thema der Arbeit zusammen.

### **Neue Beiträge zur Literatur.**

- Die Arbeit baut auf den Ergebnissen der Arbeiten Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27] und Sass, Westphal und Wunderlich [67, 68] zur Maximierung des logarithmischen Nutzens in Finanzmärkten mit Gaußscher Drift und Expertenmeinungen auf. Allerdings wird der Schwerpunkt auf das mathematisch wesentlich anspruchsvollere Problem der Maximierung des erwarteten Potenz-Nutzens  $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{\theta}x^\theta$ ,  $x > 0$  und  $\theta \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  gesetzt. Dabei wird insbesondere auch der in der Literatur wie z.B. Brendle [12] häufig vernachlässigte Fall eines Parameters  $\theta \in (0, 1)$  eingeschlossen. In der Arbeit werden detailliert die dabei auftretenden Probleme mit der Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems sowohl unter voller als auch unter partieller Information analysiert. Diese führen zu Einschränkungen bei der Wahl der Modellparameter. Die Struktur der Menge der zulässigen Modellparameter wird in Abschnitt 8.1 durch numerische Beispiele illustriert.
- Für die Lösung der Nutzenmaximierungsprobleme unter voller Information und in Modellen ohne Expertenmeinungen konnte auf Ergebnisse aus den Arbeiten von Kim und



---

Omberg [36] und Brendle [12] zurückgegriffen werden. Diese Methoden wurden auf das Modell mit stetigen Expertenmeinungen übertragen.

- Die Modelle mit zeitdiskreten Expertenmeinungen erforderten dagegen neue und aufwändigere Lösungsansätze. Dies führt im Falle bekannter Informationszeitpunkte zu einem auf dem Dynamic Programming Principle beruhenden Verfahren, bei dem die Wertfunktion und die optimale Entscheidungsregel mit Hilfe einer Rückwärtsrekursion bestimmt werden. Im Falle zufälliger Informationszeitpunkte wurde die in Frey, Gabih und Wunderlich [25, 26] und Schütze [71] für einen Finanzmarkt mit Markov-modulierter Drift vorgeschlagene Lösungsmethode auf das Modell mit Gaußschen Drift übertragen. Für die dabei entstehende Dynamic Programming Gleichung für die Wertfunktion in Form einer PIDE wurden sowohl Fragen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung mit Hilfe von Regularisierungstechniken behandelt als auch Näherungslösungen mit Hilfe numerische Verfahren konstruiert.
- Die angesprochene numerische Lösung der PIDE wurde detailliert für den Fall eines Finanzmarktes mit einem riskanten Wertpapier untersucht, für den die PIDE eine Gleichung mit einer Zeit- und bereits zwei Zustandsvariablen ist. Das Verfahren basiert auf einer Kombination von Differenzenschemata zur Diskretisierung der Differentialoperatoren und numerischen Integrationsmethoden zur Approximation des Integraloperators. Dabei wurden eine Vielzahl von Detailproblemen gelöst, wie etwa das Abschneiden des unbeschränkten Zustandsraumes auf eine geeignetes endliches Gebiet und die Konstruktion passender Randbedingungen an den neu entstandenen Rändern mit Hilfe der in Kapitel 3 behandelten Diffusionsapproximationen. Letztere kamen auch bei der Approximation des Integraloperators und dem dabei erforderlichen Abschneiden des unbeschränkten auf ein geeignetes endliches Integrationsgebietes zum Einsatz.
- Die im letzten Punkt beschriebene numerische Lösung der PIDE mit einer angemessenen Genauigkeit ist mit der derzeit verfügbaren Rechentechnik machbar, erfordert aber bereits im Modell mit einer Aktie mitunter erhebliche Rechenzeiten. Für Modelle mit mehreren Aktien kommt es zu einer quadratisch wachsenden Zahl von Zustandsvariablen. Damit scheitern die numerischen Verfahren am „Fluch der Dimension“. Hier können allerdings mit Hilfe der bereits erwähnten Diffusionsapproximationen im Falle hochfrequenter Experten vergleichsweise einfach zu berechnende Näherungslösungen für die Wertfunktion und die optimalen Entscheidungsregeln konstruiert werden. Die Diffusionsapproximationen für die Filter sind theoretisch fundiert und beruhen auf entsprechenden Grenzwertsätzen. Dagegen steht ein Beweis für die entsprechende Konvergenz der Wertfunktionen noch aus. Die präsentierten Ergebnisse numerischer Experimente bestätigen aber sehr überzeugend die in der Arbeit formulierten Vermutungen zur Konvergenz der Wertfunktionen und liefern sehr genaue Näherungslösungen.
- Im Unterschied zu den Modellen mit Markov-modulierter Drift ergibt sich für die in dieser Arbeit eingesetzten Modelle mit Gaußscher Drift einige interessante Eigenschaften für die optimalen Entscheidungsregeln der Investoren. Sie besagen, dass die verschieden

informierten Investoren zu einem bestimmten Zeitpunkt die gleichen optimalen Strategien verwenden, wenn deren Driftschätzungen zu diesem Zeitpunkt übereinstimmen. Unterschiede in der Dynamik der zukünftigen Driftschätzungen wirken sich dagegen nicht auf die momentane Strategie aus. Die Arbeit liefert einen formalen Beweis dieser Eigenschaft mit Ausnahme des Modells mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten. Die durchgeführten numerischen Experimente bestätigen allerdings die Vermutung, dass diese Eigenschaft auch in diesem Fall gilt.

- Die Arbeit enthält zur Illustration der theoretischen Resultate Ergebnisse umfangreicher numerischer Fallstudien zur Berechnung der Filterprozesse und deren asymptotisches Verhalten für hochfrequente Experten, zu den Wertfunktionen und optimalen Entscheidungsregeln für die unterschiedlichen Portfoliooptimierungsprobleme, deren asymptotisches Verhalten für hochfrequente Experten, sowie zum monetären Wert der Expertenmeinungen. Dabei wurde für die jeweiligen Lösungsverfahren, einschließlich der numerischen Lösung der PIDE, in MATLAB implementiert.

**Aufbau der Arbeit.** Die vorliegende Arbeit besteht aus neun Kapiteln. Nach der *Einleitung* wird *im zweiten Kapitel* das zugrunde liegende Finanzmarktmodell mathematisch beschrieben, welches mehrere Wertpapiere beinhaltet. Die Preisprozesse werden durch verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegungen modelliert, in welchen die Volatilität konstant und bekannt und die Drift ein unbeobachtbarer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist. Über die unbekannte Drift fließen Expertenmeinungen ein, die wir in drei Modelle klassifizieren: Expertenmeinungen zu vorab bekannten (deterministischen) Zeitpunkten, zu zufälligen Zeitpunkten und Expertenmeinungen in stetiger Zeit.

*Das dritte Kapitel* widmet sich der Berechnung einer Schätzung für die unbekannte Drift bzw. des Filters aus den dem Investor zur Verfügung stehenden Informationen und anschließend werden einige Eigenschaften für die Filter präsentiert.

*Im vierten Kapitel* wird zunächst das Optimierungsproblem sowohl unter voller als auch unter partieller Information vorgestellt und dann untersucht, ob und wann das Problem wohlgestellt ist. Dafür definieren wir den Parameterraum und versuchen herauszufinden, für welche Teilmengen aus diesem Raum das Problem wohlgestellt ist. Anschließend beschäftigen wir uns mit dem monetären Wert der Informationen bei den verschiedenen Informations-Regimes und präsentieren Größen, welche einen Vergleich der partiell informierten Investoren gegenüber dem voll informierten Investor und eine Bewertung der Zusatzinformationen aus den Expertenmeinungen ermöglichen. Im darauffolgenden Abschnitt wird das Optimierungsproblem für den Fall der logarithmischen Nutzenfunktion sowohl unter voller als auch unter partieller Information mit einer einfachen Technik gelöst. Allerdings versagt diese Technik beim Informations-Regime mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten. Im letzten Abschnitt des vierten Kapitels beschäftigen wir uns mit dem Optimierungsproblem für den Fall der Potenz-Nutzenfunktion und leiten die zugehörige Dynamic Programming Gleichung (DPE) her.

*Das fünfte Kapitel* befasst sich mit der Lösung der aus dem letzten Kapitel hergeleiteten DPE beim Informations-Regimes unter voller Information und es wird eine Lösung in geschlossener Form für die DPE unter Verwendung eines geeigneten Trennungsansatzes präsentiert. Dabei entsteht ein System von ODEs, welches im eindimensionalen Fall eine geschlossene Lösung

---

besitzt. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird ein ähnlicher Trennungsansatz zur Lösung der DPE beim Informations-Regime unter partieller sowohl ohne als auch mit Expertenmeinungen in stetiger Zeit verwendet, welcher zu einem System von ODEs führt, zu dessen Lösung wir eine Transformation verwenden, die es in das System des Informations-Regimes unter voller Information überführt.

*Das sechste Kapitel* befasst sich mit der Potenz-Nutzenmaximierung eines Investors, der für die Driftschätzung Beobachtungen der Preisprozesse mit Expertenmeinungen zu festen und bekannten Zeitpunkten kombiniert. Mit Hilfe des Dynamic Programming Principle werden wir eine Rückwärtsrekursion zur Berechnung der Wertfunktion und der optimalen Strategie entwickeln, welche die gewonnenen Informationen aus den Expertenmeinungen zu deren Ankunftszeitpunkten durch eine Update-Formel in die Wertfunktion bzw. die Entscheidungsregel berücksichtigt.

Im Unterschied zum sechsten Kapitel widmet sich *das siebte Kapitel* dem Fall von Expertenmeinungen zu zufälligen Informationszeitpunkten, welche Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses sind. Der Zustandsprozess des risikosensitiven Kontrollproblems ist dann ein Poissonischer Sprung-Diffusionsprozess. Für die zugehörige DPE ergibt sich eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE), deren Differentialteil nicht gleichmäßig elliptisch ist. Mit Hilfe einer Regularisierungstechnik definieren wir eine Familie von Optimierungsproblemen und untersuchen die Konvergenz der zugehörigen Wertfunktion gegen die Wertfunktion des ursprünglichen Optimierungsproblems, wenn der durch die Regularisierung in die SDE des Zustandsprozesses hinzugefügte Störterm gegen Null geht. Des Weiteren zeigen wir, dass die aus dem regularisierten Kontrollproblem gewonnene optimale Strategie näherungsweise optimal für das ursprüngliche Kontrollproblem ist. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels präsentieren wir ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung der PIDE. Dieses beruht auf der Diskretisierung der Gleichung mit Hilfe von Differenzenverfahren und numerischen Integrationsmethoden.

*Im achten Kapitel* werden Ergebnisse numerischer Experimente zur Illustration der theoretischen Ergebnisse der vergangenen Kapitel zusammengestellt. Zunächst zeigen wir Ergebnisse zur Struktur der Menge der zulässigen Parameter und zur Wohlgestelltheit des Problems. Dann präsentieren wir einige numerische Ergebnisse zum Filter bei den verschiedenen Informations-Regimes sowie zu den Eigenschaften der Filter. Anschließend zeigen wir numerische Ergebnisse zur Wertfunktion und der optimalen Entscheidungsregel, sowie zum monetären Wert der Zusatzinformationen aus den Expertenmeinungen.

*Das neunte Kapitel* enthält eine Zusammenfassung dieser Arbeit und einen Ausblick.



Für die in dieser Arbeit betrachteten Nutzenmaximierungsprobleme unterstellen wir ein idealisierten stochastischen Finanzmarkt, welcher über einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}, P]$  mit  $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}$  definiert wird. Ausgangspunkt ist das klassische Black-Scholes-Modell mit einem risikolosen Bond und  $d \in \mathbb{N}$  Aktien. Für den Preis  $S^0$  des Bonds nehmen wir der Einfachheit halber  $S_t^0 = 1, \quad \forall t \in [0, T]$  an. Die Dynamik der Aktienpreise  $S = (S^1, \dots, S^d)'$  beschreiben wir über die Renditeprozesse  $R^i$  mit  $dR_t^i = dS_t^i/S_t^i, \quad i = 1, \dots, d$ . Der Renditeprozess  $R = (R^1, \dots, R^d)'$  genügt der folgenden SDE

$$dR_t = \mu dt + \sigma_R dW_t^R, \quad R_0 = 0, \quad (2.1)$$

welche eine arithmetische Brownschen Bewegung beschreibt. Dabei ist  $W^R = (W_t^R)_{t \in [0, T]}$  ein  $d_1$ -dimensionaler Wiener-Prozess mit  $d_1 \geq d$ ,  $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^d)' \in \mathbb{R}^d$  bezeichnet die Drift beziehungsweise die mittlere Aktienrendite und die Matrix  $\sigma_R \in \mathbb{R}^{d \times d_1}$  die Volatilität. Wir nehmen an, dass die Matrix  $\sigma_R$  vollen Rang  $d$  besitzt, d.h.  $\Sigma_R := \sigma_R \sigma_R'$  ist positiv definit. Die Aktienpreise  $S = (S^1, \dots, S^d)'$  genügen dann der folgenden geometrischen Brownschen Bewegung

$$\begin{aligned} dS_t &= \text{diag}(S_t) dR_t \\ &= \text{diag}(S_t) (\mu dt + \sigma_R dW_t^R), \quad S_0 = s_0 \quad \text{und} \quad s_0 \in \mathbb{R}_+^d. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Annahme konstanter und bekannter Modellparameter  $\mu$  und  $\sigma_R$  ist in der Praxis nur schwer zu halten. In der Optionspreistheorie werden daher verfeinerte Modelle für die Volatilität  $\sigma_R$  verwendet, bei denen die Volatilität als stochastischer Prozess  $\sigma_R = (\sigma_t^R)_{t \in [0, T]}$  modelliert wird. Dagegen ist in der Portfoliooptimierung die Drift  $\mu$  der entscheidende Parameter, für den ein möglichst realistisches Modell benötigt wird. Diese Modelle müssen einerseits berücksichtigen, dass die Drift nur sehr schwer und ungenau aus Marktdaten geschätzt werden kann und andererseits von der Zeit und dem Zustand der Ökonomie abhängt. Daher betrachtet

man Modelle, bei denen die Drift ein stochastischer Prozess  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$  ist, der im Gegensatz zum Aktienpreis  $S = (S_t)_{[0, T]}$  nicht direkt beobachtbar ist.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass die Drift  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$  der als Langevin-Gleichung bezeichneten Differentialgleichung

$$d\mu_t = \kappa(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_\mu dW_t^\mu, \quad \text{mit Anfangswert } \mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0), \quad (2.3)$$

genügt, wobei  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^d$  das Gleichgewichtsniveau,  $\kappa \in \mathbb{R}^{d \times d}$  die Mean-Reversion-Geschwindigkeit und  $\sigma_\mu \in \mathbb{R}^{d \times d_2}$  die Volatilität des Driftprozesses bezeichnen.  $W^\mu = (W_t^\mu)_{t \in [0, T]}$  ist ein  $d_2$ -dimensionaler Wiener Prozess, der vom Wiener Prozess  $W^R = (W_t^R)_{t \in [0, T]}$  unabhängig ist. Wir nehmen an, dass  $\Sigma_\mu := \sigma_\mu \sigma_\mu'$  positiv definit und der Anfangswert  $\mu_0$  ein normalverteilter Zufallsvektor  $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0)$  sind. Dabei bezeichnen  $\bar{m}_0 \in \mathbb{R}^d$  den Mittelwert und die symmetrische positiv semidefinite Matrix  $\bar{q}_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$  die Kovarianzmatrix von  $\mu_0$ . Weiterhin wird angenommen, dass der Anfangswert  $\mu_0$  von den beiden Wiener Prozessen  $W^R$  und  $W^\mu$  unabhängig ist.

Die Langevin-SDE (2.3) besitzt die eindeutige Lösung

$$\mu_t = \bar{\mu} + e^{-\kappa t} \left( \mu_0 - \bar{\mu} + \int_0^t e^{\kappa s} \sigma_\mu dW_s^\mu \right), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

welche als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OU-Prozess) bekannt ist.

**Lemma 2.1.1.** *Der OU-Prozess  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$  ist ein Gaußscher Prozess und es gilt für  $s, t \geq 0$*

$$\mathbb{E}[\mu_t] = \bar{\mu} + e^{-\kappa t}(\bar{m}_0 - \bar{\mu}), \quad (2.5)$$

$$\text{cov}[\mu_s, \mu_t] = e^{-\kappa s} \left( \bar{q}_0 + \int_0^{\min\{s, t\}} e^{\kappa u} \Sigma_\mu e^{\kappa' u} du \right) e^{-\kappa' t}. \quad (2.6)$$

*Beweis.* Siehe Sass, Westphal, und Wunderlich [67]. □

**Bemerkung 2.1.2.** Im eindimensionalen Fall ( $d = 1$ , und  $\kappa > 0$ ) nähern sich der Mittelwert  $\mathbb{E}[\mu_t]$  und die Varianz  $\text{Var}(\mu_t)$  exponentiell den Grenzwerten  $\bar{\mu}$  bzw.  $\frac{\Sigma_\mu}{2\kappa}$  an. Das heißt, für den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  hat die Drift  $\mu_t$  eine  $\mathcal{N}(\bar{\mu}, \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa})$ -Verteilung, welche als stationäre Verteilung bezeichnet wird. Startet die Drift  $\mu_t$  mit der stationären Verteilung, so ist die Drift ein stationärer Prozess mit Mittelwert  $\bar{\mu}$  und Korrelationsfunktion  $\text{cov}[\mu_t, \mu_{t+\tau}] = \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} e^{-\kappa|\tau|}$  für  $t, t + \tau \geq 0$ . Außerdem sind der Erwartungswert und die Varianz der Drift  $\mu_t$  beschränkt und es gilt

$$\min\{\bar{\mu}, \bar{m}_0\} \leq \mathbb{E}[\mu_t] = \bar{\mu} + e^{-\kappa t}(\bar{m}_0 - \bar{\mu}) \leq \max\{\bar{\mu}, \bar{m}_0\}, \quad (2.7)$$

$$\text{Var}(\mu_t) = \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} + \left( \text{Var}(\mu_0) - \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} \right) e^{-2\kappa t} \leq \max\left\{ \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa}, \text{Var}(\mu_0) \right\} =: D_m. \quad (2.8)$$

Mit diesem verallgemeinerten Driftmodell genügt der Renditeprozess der SDE

$$dR_t = \mu_t dt + \sigma_R dW_t^R, \quad R_0 = 0, \quad (2.9)$$

und der Aktienpreis der SDE

$$\begin{aligned} dS_t &= \text{diag}(S_t) dR_t \\ &= \text{diag}(S_t) (\mu_t dt + \sigma_R dW_t^R), \quad S_0 = s_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die Lösung von (2.10) ist eine verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegung mit einer durch den OU-Prozess  $\mu_t$  modellierten Drift und der  $i$ -te Aktienpreis ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S_t^i &= s_0^i \exp \left( \int_0^t \mu_s^i ds + \sum_{j=1}^{d_1} \left( \sigma_R^{ij} W_t^{R,j} - \frac{1}{2} (\sigma_R^{ij})^2 t \right) \right) \\ &= s_0^i \exp \left( R_t^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d_1} (\sigma_R^{ij})^2 t \right), \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aus (2.11) folgt, dass die quadratischen Variationen von den beiden stochastischen Prozessen  $(R_t^i)_{t \in [0, T]}$  und  $(\log S_t^i)_{t \in [0, T]}$ ,  $i = 1, \dots, d$  übereinstimmen, somit stimmen auch die beiden Filtrationen

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^R &= (\mathcal{F}_t^R)_{t \in [0, T]}, \quad \mathcal{F}_t^R = \sigma(R_u; \quad 0 \leq u \leq t) \quad \text{und} \\ \mathbb{F}^S &= (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}, \quad \mathcal{F}_t^S = \sigma(S_u; \quad 0 \leq u \leq t) \end{aligned}$$

überein, daher konzentriert sich die Arbeit auf die Renditen als Beobachtungen.

Über die Beobachtungen bzw. die daraus resultierten Informationen aus den Aktienrenditen hinaus können zu diskreten Zeitpunkten verrauschte Signale über die unbekannt Drift vorliegen, die als Expertenmeinungen interpretiert werden. In diese Einschätzungen über den Zustand der Ökonomie fließen beispielsweise Unternehmensberichte, Ratings, Nachrichten, Meinungen von Analysten oder die persönlichen Erwartungen des Investors über die Entwicklung der Aktienkurse ein.

Dieser Ansatz ist in der Portfoliooptimierung im Fall des statischen Einperiodenmodells beziehungsweise Markowitz-Modells unter dem Namen Black-Litterman-Modell bekannt (siehe Black and Litterman [9]). Dort werden die aus historischen Marktpreisen erhaltenen statistischen Schätzungen der Aktienrenditen mit Expertenmeinungen kombiniert, um verlässlichere Aussagen über den Driftparameter des Aktienkursmodells zu erhalten.

In dieser Arbeit werden die folgenden drei Modelle zur Modellierung der Expertenmeinungen betrachtet.

**Diskrete Experten zu deterministischen Zeitpunkten:** Der Investor erhält zu  $n \in \mathbb{N}$  diskreten und deterministischen Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_{n-1}$  mit  $0 \leq t_0 < \dots < t_{n-1} < T$  verrauschte Signale über die Drift  $\mu$ . Die Expertenmeinungen  $Z_k$  zur Zeit  $t_k$  sind vom aktuellen Zustand der

Drift abhängig und werden als normalverteilte Zufallsvektoren  $Z_k = (Z_k^1, \dots, Z_k^d)'$  modelliert mit

$$Z_k = \mu_{t_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.12)$$

wobei die Matrix  $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  symmetrisch positiv definit und die  $\varepsilon_k = (\varepsilon_k^1, \dots, \varepsilon_k^d)'$  unabhängige  $d$ -dimensionale standardnormalverteilte Zufallsvektoren, die sowohl vom Anfangswert  $\mu_0$ , als auch von den beiden Wiener Prozessen  $W^R$  und  $W^\mu$  unabhängig sind. Mit der Modellierung der Expertenmeinungen wie in (2.12) folgt, dass zu einem Informationszeitpunkt  $t_k$  die bedingte Verteilung der Expertenmeinung  $Z_k$  gegeben  $\mu_{t_k}$  eine multivariate Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu_{t_k}, \Gamma)$  ist und eine erwartungstreue Schätzung für den aktuellen Zustand der Drift  $\mu_{t_k}$  darstellt. Die Matrix  $\Gamma$  dient als Maß für die Zuverlässigkeit der Experten. Im eindimensionalen Fall  $d = 1$  lassen sich kleinere Varianzen  $\Gamma = \text{var}(Z_k)$  als genauere Expertenmeinungen interpretieren.

**Diskrete Experten zu zufälligen Zeitpunkten:** Bei diesem Modell betrachten wir die Modellierung der Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten  $T_1, T_2, \dots$ . Dafür wird angenommen, dass die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität  $\lambda > 0$  sind, die von der Drift unabhängig sind. Diese Annahme ist äquivalent dazu, dass die Wartezeiten zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Expertenmeinungen unanständig und identisch exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda > 0$  sind. Die Anzahl von im Intervall  $[0, t]$ ,  $\forall t$  eintreffenden Expertenmeinungen ist dann eine Poisson-verteilte Zufallsgröße mit dem Parameter  $\lambda t$ .

Ähnlich wie in (2.12) werden wir auch zu zufälligen Zeitpunkten die Expertenmeinungen  $Z_k = (Z_k^1, \dots, Z_k^d)'$  modellieren, durch

$$Z_k = \mu_{T_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Die Modellierung der Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten unterscheidet sich von der Modellierung der Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten mittels eines homogenen Poisson-Prozesses im Wesentlichen dadurch, dass der Investor beim zweiten Modell im Voraus nicht weiß, wann die Expertenmeinungen eintreffen. Er weiß lediglich, dass es innerhalb des Investitionszeitraums  $[0, T]$  im Mittel  $\lambda T$  Expertenmeinungen sind. Dem Investor im ersten Modell dagegen sind sowohl Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen als auch deren Anzahl schon zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt.

In den zwei oben erwähnten Modellen geht man davon aus, dass zu jedem Ankunftszeitpunkt einer Expertenmeinung einzelne Wertpapiere nicht isoliert, sondern eine Aussage für alle Renditen bzw. deren unbekannte Drift und zwar aufgrund ihrer Wirkung auf das Portfolio getroffen werden muss. Im Black-Litterman-Modell dagegen, das als Ausgangspunkt dieser Arbeit ist, hat der Experte diesbezüglich mehr Freiheit und sieht sich nicht gezwungen, eine Aussage für alle Renditen zu machen. Er kann auch seine Einschätzung für einzelne oder beliebig viele Wertpapiere machen. In diesem Sinne können wir die Expertenmeinung zu jedem Ankunftszeitpunkt als Erweiterung der Formel (2.12) und (2.13) interpretieren, indem wir die Expertenmeinung als eine Linearkombination der Drift aller  $d$ -betrachteten Wertpapiere modellieren. Beispiele zu



solchen Überlegungen kann man in Schöttle, Werner und Zagst [70] oder Werner [79] finden. Dort werden die Koeffizienten der Linearkombination in eine  $\underline{d} \times d$  Matrix  $\mathbf{P}$  vom vollen Rang zusammengestellt und es gilt dann im Modell mit Expertenmeinungen zu deterministischen Zeitpunkten

$$Z_k = \mathbf{P}\mu_{t_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}}\varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots, d-1$$

und im Modell mit Expertenmeinungen zu zufälligen Ankunftszeitpunkten

$$Z_k = \mathbf{P}\mu_{T_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}}\varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

In dieser Arbeit werden wir die Pick-Matrix  $\mathbf{P}$  gleich der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_d$  setzen. Dies bedeutet, dass wir mit den Formeln aus (2.12) und (2.13) weiterarbeiten werden.

**Stetige Experten:** Im kommenden Kapitel beschäftigen wir uns mit der Schätzung für die unbeobachtbare Drift aus den bisher erwähnten beobachtbaren Größen. Dabei befassen wir uns unter anderem mit der Frage, wie sich solche Schätzungen verhalten, wenn die Expertenmeinungen immer häufiger kommen, aber unpräziser werden. Für bestimmte Folgen von diskreten Expertenmeinungen werden wir bei wachsender Anzahl bzw. Intensität von Expertenmeinungen zeigen, dass die daraus gewonnenen Informationen im Wesentlichen die gleichen sind, wie die die durch die Beobachtung eines anderen Diffusionsprozess erhalten werden können. Dieser Diffusionsprozess kann als ein Experte gesehen werden, der dem Investor in stetiger Zeit Information über die unbeobachtbare Drift liefert und ist in der Form einer Brownschen Bewegung mit Drift  $\mu_t$  durch die folgende SDE gegeben (vgl. Davis and Lleo [17])

$$d\zeta_t = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0, \quad (2.14)$$

wobei  $W^\zeta = (W_t^\zeta)_{t \in [0, T]}$  ein  $d_3$ -dimensionaler Wiener Prozess ist, der von den beiden Wiener-Prozessen  $W^R$  und  $W^\mu$  unabhängig ist.  $\sigma_\zeta \in \mathbb{R}^{d \times d_3}$  bezeichnet die Volatilität. Im Spezialfall, wenn  $\sigma_\zeta$  eine Diagonalmatrix ist, dann würde das bedeuten, dass die  $d$  Expertenmeinungen unabhängig voneinander sind. Des Weiteren nehmen wir an, dass  $\Sigma_\zeta := \sigma_\zeta \sigma_\zeta'$  positiv definit ist.

**Investor-Filtration:** Die dem Investor zur Verfügung stehenden Informationen werden durch die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^H = (\mathcal{F}_t^H)_{t \in [0, T]}$  beschrieben. Dabei bezeichnet  $H$  das Informations-Regime, für welches wir die folgenden Fälle betrachten.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^R &= (\mathcal{F}_t^R)_{t \in [0, T]} && \text{mit } \mathcal{F}_t^R \text{ erzeugt durch } \{R_s, s \leq t\}, \\ \mathbb{F}^{C_n} &= (\mathcal{F}_t^{C_n})_{t \in [0, T]} && \text{mit } \mathcal{F}_t^{C_n} \text{ erzeugt durch } \{R_s, (t_k, Z_k), s, t_k \leq t\}, \\ \mathbb{F}^{C_\lambda} &= (\mathcal{F}_t^{C_\lambda})_{t \in [0, T]} && \text{mit } \mathcal{F}_t^{C_\lambda} \text{ erzeugt durch } \{R_s, (T_k, Z_k), s, T_k \leq t\}, \\ \mathbb{F}^D &= (\mathcal{F}_t^D)_{t \in [0, T]} && \text{mit } \mathcal{F}_t^D \text{ erzeugt durch } \{R_s, \zeta_s, s \leq t\}, \\ \mathbb{F}^F &= (\mathcal{F}_t^F)_{t \in [0, T]} && \text{mit } \mathcal{F}_t^F \text{ erzeugt durch } \{R_s, \mu_s, s \leq t\}. \end{aligned}$$

Mit  $\mathbb{F}^R$  wird die Investor-Filtration im klassischen Fall bezeichnet, dem die zu schätzende Drift  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$  als Signalprozess und der beobachtbare Renditeprozess  $R = (R_t)_{[0, T]}$  als einzige Informationsquelle zugrunde liegen. Erhält der Investor zusätzlich Informationen von Experten zu diskreten Zeitpunkten, so kombiniert er sie mit den Informationen aus den Renditen, dies führt zur Filtration  $\mathbb{F}^{C_n}$  im Fall deterministischer Zeitpunkte beziehungsweise  $\mathbb{F}^{C_\lambda}$  im Fall zufälliger Zeitpunkte. Für den Investor, der seine Informationen aus den stetigen Renditen mit den stetigen Experten kombiniert, wird die Investor-Filtration mit  $\mathbb{F}^D$  bezeichnet. Schließlich bezeichnet  $\mathbb{F}^F$  den Investor, der volle Informationen über die unbekannte Drift  $\mu$  hat. Dieser Fall ist eher unrealistisch, wird jedoch als Referenzfall angesehen.

Zu Investitionsbeginn  $t = 0$  nehmen wir an, dass die partiell informierten Investoren die gleichen Anfangsinformation besitzen, die durch die  $\sigma$ -Algebra  $\overline{\mathcal{F}}_0$  gegeben sind, d.h. es gilt  $\mathcal{F}_0^H = \overline{\mathcal{F}}_0 \subseteq \mathcal{F}_0^F$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$ . Diese Anfangsinformationen  $\overline{\mathcal{F}}_0$  beinhaltet das Vorwissen über den Driftprozess zum Zeitpunkt  $t = 0$ , z. B. durch Beobachtung von Renditen oder Expertenmeinungen in der Vergangenheit. Des Weiteren nehmen wir an, dass die bedingte Verteilung des Anfangswertes  $\mu_0$  gegeben  $\mathcal{F}_0^H$  die Normalverteilung ist, mit Mittelwert  $m_0 \in \mathbb{R}^d$  und einer symmetrischen und positiv definiten Kovarianzmatrix  $q_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Übliche Ansätze hierfür sind:

- (i) Der partiell informierte Investor hat keine Informationen über den Anfangswert der Drift  $\mu_0$ . Er kennt jedoch die Modellparameter, insbesondere die Verteilung  $\mathcal{N}(\overline{m}_0, \overline{q}_0)$  von  $\mu_0$  mit den gegebenen Parametern  $\overline{m}_0$  und  $\overline{q}_0$ . Dies entspricht  $\overline{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  und  $m_0 = \overline{m}_0$ ,  $q_0 = \overline{q}_0$ .
- (ii) Der partiell informierte Investor hat volle Information über den Anfangswert  $\mu_0$ . Dies entspricht  $\overline{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0^F$  und  $m_0 = \mu_0(\omega)$ ,  $q_0 = 0$ .
- (iii) Zwischen den oben genannten Grenzfällen betrachten wir einen partiell informierte Investor, der einige, aber keine volle Information über den Anfangswert  $\mu_0$  besitzt. Hierfür gilt also  $\{\emptyset, \Omega\} \subset \overline{\mathcal{F}}_0 \subset \mathcal{F}_0^F$ .

**Portfolio:** Der Investor startet zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einem bekannten Anfangskapital  $x_0 > 0$  und möchte dieses in den risikolosen Bond beziehungsweise in die  $d$  risikobehafteten Wertpapiere investieren. Dabei kann er sein Vermögen laufend in einem Handelszeitraum  $[0, T]$  mit einem endlichen Zeithorizont  $T > 0$  zwischen den  $d + 1$  Anlagemöglichkeiten umschichten. In dieser Arbeit wird angenommen, dass Umschichtungen keine Transaktionskosten verursachen, die Preise durch die Käufe und Verkäufe des betrachteten Investors nicht beeinflusst werden und Handelsgewinne nicht versteuert werden müssen. Weiterhin wird mit dem stochastischen Prozess  $\psi_t = (\psi_t^1, \dots, \psi_t^d)'$  die selbstfinanzierende Handelsstrategie des Investors modelliert (vgl. Björk [8]), dessen  $i$ -te Komponente für  $i = 1, \dots, d$  die Anzahl der Wertpapiere zum Preisprozess  $S_t^i$  angibt. Im Fall  $i = 0$  wird die Anzahl des Bonds  $S_t^0$  mit  $\psi_t^0$  bezeichnet. Das Vermögen des Investors zu einem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  wird mit  $X_t$  bezeichnet und der Vermögensprozess  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  genügt unter der Selbstfinanzierungsbedingung der

---

Differentialgleichung

$$dX_t = \psi_t^0 dS_t^0 + \psi_t^i dS_t, \quad X_0 = x_0. \quad (2.15)$$

Die Schwankungen des zugehörigen Vermögensprozesses  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  resultieren ausschließlich aus den Preisveränderungen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere. Externe Kapitalentnahme oder -zuführung werden somit ausgeschlossen.

Die relativen Anteile des in die Wertpapiere  $S_t^1, \dots, S_t^d$  und den Bond  $S_t^0$  investierten Vermögens  $X_t$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnen wir mit  $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)'$  bzw.  $\pi_t^0$  und unter der Voraussetzung  $X_t > 0$  f.s. gilt

$$\pi_t^i = \frac{1}{X_t} \psi_t^i S_t^i, \quad i = 1, \dots, d \quad \text{und} \quad \pi_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^d \pi_t^i.$$

Die Handelsstrategie  $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$  verwenden wir als Steuerung des Vermögensprozesses, daher wird er mit  $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \in [0, T]}$  bezeichnet und aus der Differentialgleichung (2.15) folgt, dass die Dynamik des Vermögensprozesses  $X^\pi$  durch folgende SDE beschrieben werden kann

$$dX_t^\pi = \alpha_X^F(X_t^\pi, \mu_t, \pi_t) dt + \beta_X^F(X_t^\pi, \pi_t) dW_t^R, \quad X_0^\pi = x_0 > 0, \quad (2.16)$$

mit  $\alpha_X^F(x, m, p) := xp'm$  und  $\beta_X^F(x, p) := xp'\sigma_R$ .

**Bemerkung 2.1.3.** Manche Autoren (siehe z.B. Rogers [63], Taksar und Zeng [76] und Bäuerle, Urban und Veraart [4]) betrachten in einem Finanzmarkt ohne Transaktionskosten den „relaxed Investor“, welcher gezwungen ist, sein Portfolio nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten umzuschichten. Der Verlust für den Investor, der dadurch verursacht wird, dass er nicht kontinuierlich handeln kann, ist oft vernachlässigbar, sofern die Handelsfrequenz nicht zu klein ist. Diese Art von Investoren ist kein Gegenstand dieser Arbeit und wird in dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen.

**Optimierungsproblem:** Hat der Investor eine Präferenz für eine der zwei Investitionsmöglichkeiten  $X_1$  und  $X_2$ , so steht ihm eine Nutzenfunktion  $\mathcal{U}$  zur Verfügung, so dass die Ungleichung  $E[\mathcal{U}(X_1)] > E[\mathcal{U}(X_2)]$  genau dann gilt, wenn er die Investitionsanlage  $X_1$  gegenüber  $X_2$  bevorzugt.

**Definition 2.1.4.** Eine strikt konkave, streng monoton wachsende und zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\mathcal{U} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  mit den Eigenschaften

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{U}'(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}'(x) = 0$$

nennen wir eine Nutzenfunktion.

Das strenge monoton Wachstum entspricht dem Grundsatz „mehr ist besser als weniger“ und kann als Eigenschaft des rationalen Investors interpretiert werden. Die Konkavität beschreibt einen „abnehmenden Grenznutzen“, das heißt, der zusätzliche Nutzen des Investors aus einer

weiteren Geldeinheit bzw. der Zugewinn einer fixen Geldmenge wird für den Investor umso weniger Wert, je höher das bereits vorhandene Vermögen ist.

Diese Arbeit wird sich auf die Power-Nutzenfunktion konzentrieren

$$\mathcal{U}_\theta(x) := \frac{x^\theta}{\theta}, \quad \theta \in (-\infty, 0) \cup (0, 1). \quad (2.17)$$

Als Grenzfall für  $\theta \rightarrow 0$  für die Power-Nutzenfunktion ergibt sich die logarithmische Nutzenfunktion  $\mathcal{U}_0(x) := \ln x$ , denn es gilt

$$\mathcal{U}_\theta(x) - \frac{1}{\theta} = \frac{x^\theta - 1}{\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \ln x. \quad (2.18)$$

Unter vollständiger Information ( $H = F$ ) besteht das Nutzenmaximierungsproblem darin, eine Handelsstrategie  $\pi^*$  aus der Menge der zulässigen Strategien

$$\mathcal{A}_0^F := \left\{ \pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}, \pi_t \in \mathbb{R}^d, \pi \text{ selbstfinanzierend und } \mathbb{F}^F \text{ - adaptiert,} \right. \\ \left. X_t^\pi > 0 \forall t \text{ f.s.}, \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|\pi_t\|^2 dt \right] < \infty, \text{ f.s.} \right\}, \quad (2.19)$$

so auszuwählen, dass der erwartete Nutzen des Endvermögens über alle zulässigen Strategien maximiert wird, damit lässt sich das stochastische Kontrollproblem wie folgt darstellen

$$\mathcal{V}_0^F := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0^F} \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^F \right]. \quad (2.20)$$

Der  $F$ -Investor hat die Besonderheit, dass er sowohl die Renditeprozesse  $R = (R_t)_{t \in [0, T]}$ , als auch deren Drift  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  beobachten kann. Mit anderen Worten sind alle untersuchten Prozesse an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^F$  adaptiert. Für das untersuchte Optimierungsproblem (2.20) bedeutet das, dass alle Komponenten der durch die Drift  $\mu$  getriebene Renditeprozessgleichung (2.9)

$$dR_t = \mu_t dt + \sigma_R dW_t^R, \quad R_0 = 0,$$

sowie die Komponenten der Vermögensgleichung (2.16)

$$dX_t^\pi = \alpha_X^F(X_t^\pi, \mu, \pi_t) dt + \beta_X^F(X_t^\pi, \pi_t) dW_t^R, \quad X_0^\pi = x_0 > 0,$$

an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^F$  adaptiert sind. Damit haben wir beim Informations-Regime  $H = F$  ein Steuerungsproblem unter vollständiger Information. Doch die restlichen Investoren, die wir als „partiell informierte Investoren“ bezeichnen, haben diese Besonderheit nicht, da sie die Drift  $\mu$  nicht beobachten können. Sie beobachten nur die Renditen und können über weitere Informationen in diskreter oder stetiger Zeit von den Experten über die Drift verfügen. Anders ausgedrückt ist die Drift  $\mu$  bei den partiellen Informations-Regimes  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  nicht an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^H$  adaptiert und damit ist das Optimierungsproblem (2.20) zunächst kein

Optimierungsproblem unter vollständiger Information. Um dies umgehen zu können, müssen wir zuerst eine Schätzung für die unbeobachtbare Drift finden, nach deren Aufstellung wir das Steuerungsproblem in ein Steuerungsproblem unter vollständiger Information transformieren. Analog zum voll informierten Investor definieren wir die Menge der zulässigen Strategien  $\mathcal{A}_0^H$  für den partiell informierten Investor wie folgt

$$\mathcal{A}_0^H := \left\{ \pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}, \pi_t \in \mathbb{R}^d, \pi \text{ selbstfinanzierend und } \mathbb{F}^H \text{ - adaptiert,} \right. \\ \left. X_t^\pi > 0 \forall t \text{ f.s.}, \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|\pi_t\|^2 dt \right] < \infty, \text{ f.s.} \right\}, \quad (2.21)$$

und das zugehörige Kontrollproblem ist gegeben durch

$$\mathcal{V}_0^H := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0^H} \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_t^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right], \quad H = R, D, C_n, C_\lambda. \quad (2.22)$$

Für die Lösung des Kontrollproblems für den Potenz-Nutzen bei allen Informations-Regimes  $F, R, D, C_n, C_\lambda$  wird dieses in Kapitel 5 mit Hilfe einer Maßwechseltechnik in ein anderes stochastisches Kontrollproblem transformiert. Diese Transformation ist wohldefiniert, falls alle zulässigen Strategien  $\pi$  die folgende Novikov-Bedingung erfüllen

$$\mathcal{J}_{NB}^H(\pi) := \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta \pi_t' \sigma_X\|^2 dt \right\} \right] < \infty, \quad (2.23)$$

mit

$$\sigma_X = \sigma_X^H := \begin{cases} \Sigma_R^{\frac{1}{2}}; & H = F, R, C_n, C_\lambda, \\ \left( \Sigma_R^{\frac{1}{2}} \quad O_{d \times d} \right); & H = D. \end{cases} \quad (2.24)$$

Aus diesem Grund definieren wir für den Potenz-Nutzen die Menge der zulässigen Strategien neu, indem wir die quadratische Integrierbarkeit der Strategien in (2.19) und (2.21) durch die verschärfte Novikov Bedingung ersetzen und erhalten für alle Informations-Regimes  $H$  mit  $H = F, R, D, C_n, C_\lambda$

$$\mathcal{A}^H := \left\{ \pi, \pi \in \mathcal{A}_0^H, \mathcal{J}_{NB}^H(\pi) < \infty \right\}. \quad (2.25)$$



In diesem Kapitel präsentieren wir die für die Driftschätzungen der partiell informierten Investoren benötigten Filtergleichungen. Wegen der verwendeten Modellierung des Signal- bzw. Driftprozesses als Gaußscher Prozess, der zeitstetigen Beobachtungsprozesse als Brownsche Bewegung mit Drift und der zeitdiskreten Expertenmeinungen als Gaußsche Zufallsgrößen ergeben sich Filtergleichungen, die mit dem zeitstetigen Kalman-Filter übereinstimmen bzw. aus diesem durch entsprechende Bayessche Updates zu den Informationszeitpunkten der Experten abgeleitet werden können. In Abschnitt 3.1 präsentieren wir die entsprechenden Differentialgleichungen für die Filterprozesse bei den einzelnen Informations-Regimes. Dort wird weiterhin eine Semimartingal-Darstellung der Filterprozesse für die Regimes  $H = R, D, C_\lambda$  eingeführt. In Abschnitt 3.2 werden einige typische Eigenschaften der bedingten Varianz zusammengestellt. Anschließend behandelt Abschnitt 3.3.1 asymptotische Eigenschaften der Filterprozesse für hochfrequente Experten.

### 3.1 Filter für den Driftprozess

Das Filterproblem besteht zunächst aus einem beobachtbaren Prozess gegeben durch

$$dR_t = \mu_t dt + \sigma_R dW_t^R, \quad R_0 = 0,$$

und einem Signalprozess  $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$ , dessen Dynamik der folgenden linearen SDE genügt

$$d\mu_t = \kappa(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_\mu dW_t^\mu, \quad \mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0).$$

Wir gehen davon aus, dass der partiell informierte Investor bei allen Informations-Regimes die Modellparameter  $\kappa, \bar{\mu}, \sigma_\mu, \sigma_R$ , sowie die Verteilungsparameter für den Anfangswert der Drift kennt, d.h. der partiell informierte Investor kennt  $\bar{m}_0, \bar{q}_0$ . Der voll informierte Investor dagegen kennt den tatsächlichen Wert von  $\mu_0$ .

Des Weiteren können wie bereits im letzten Kapitel erwähnt zusätzlich Informationen von Experten über die unbeobachtbare Drift vorliegen. Dabei betrachten wir Expertenmeinungen

1. zu deterministischen Zeitpunkten  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit der Modellierung aus (2.12)

$$Z_k = \mu_{t_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

2. zu zufälligen Zeitpunkten  $T_1, T_2, \dots$ , die als Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses angenommen werden, mit der Modellierung aus (2.13)

$$Z_k = \mu_{T_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

3. in stetiger Zeit gegeben durch die SDE in (2.14)

$$d\zeta_t = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0.$$

Aus den dem Investor zur Verfügung stehenden Informationen beschrieben durch  $\mathbb{F}^H$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  soll die unbekannte Drift geschätzt werden. Der Filter ist die Projektion der  $\mathcal{G}_t$ -meßbaren Zufallsgröße  $\mu_t$  auf die  $\mathcal{F}_t^H$ -meßbaren Zufallsgrößen. Dabei betrachten wir die bedingte Erwartung

$$M_t^H := \mathbb{E} [\mu_t | \mathcal{F}_t^H],$$

die den besten Schätzer für die unbeobachtbare Drift  $\mu_t$  im Sinne des quadratischen Mittels liefert, sowie die bedingten Kovarianzmatrix

$$Q_t^H := \mathbb{E} [(\mu_t - M_t^H)(\mu_t - M_t^H)' | \mathcal{F}_t^H],$$

welche die Güte der Schätzung beschreibt.

Im Folgenden werden wir die Dynamik der Filter in den partiellen Informations-Regimes  $H = R, C_n, C_\lambda, D$  präsentieren. Erwähnenswert dabei ist, dass die Informationen in den beiden Regimes  $H = R$  und  $H = D$  nur aus den stetigen Renditeprozessen bzw. kombiniert aus den stetigen Renditeprozessen und den stetigen Expertenprozessen bestehen. Diese Eigenschaft ermöglicht es uns, den Filter in den beiden Regimes  $H = R, D$  einheitlich zu präsentieren. Auf der anderen Seite haben wir bei den Regimes  $H = C_n$  und  $H = C_\lambda$  zusätzlich zu den stetigen Informationen aus den Renditen Expertenmeinungen, die zu deterministischen bzw. zufälligen Zeitpunkten eintreffen und mit den Informationen aus den Renditen kombiniert werden. Hierbei werden wir den Filter in den jeweiligen Regimes separat darstellen.

**Filter beim Informations-Regime  $H = R, D$ .** Für die beiden Fälle ist der Filter in der Literatur unter dem Namen Kalman-Filter bekannt. Die Dynamik des Filters ist dem folgenden Lemma zu entnehmen (siehe Theorem 10.3 von Lipster und Shiryaev [49] oder Davis und Lleo [17]).

**Lemma 3.1.1.** *Die bedingte Verteilung der Drift  $\mu_t$  unter der Investor-Filtration  $\mathcal{F}_t^H$ ,  $H = R, D$  ist die Normalverteilung  $\mathcal{N}(M_t^H, Q_t^H)$  mit*



- $M_t^H$  ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$dM_t^H = \underline{\alpha}_M^H(M_t^H) dt + \beta_M^H(Q_t^H) d\widetilde{W}_t^H, \quad M_0^H = m_0, \quad (3.1)$$

$$\text{mit } \underline{\alpha}_M^H(m) = \kappa(\bar{\mu} - m), \quad \beta_M^R(q) = q\Sigma_R^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \beta_M^D(q) = q \left( \Sigma_R^{-\frac{1}{2}}, \Sigma_\zeta^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Dabei ist  $\widetilde{W}^H := (\widetilde{W}_t^H)_{t \in [0, T]}$  ein  $\mathbb{F}^H$ -adaptierter Wiener Prozess, für den gilt

$$d\widetilde{W}_t^R = \Sigma_R^{-\frac{1}{2}} (dR_t - M_t^R dt), \quad \widetilde{W}_0^R = 0, \quad (3.2)$$

$$d\widetilde{W}_t^D = \begin{pmatrix} \Sigma_R & 0 \\ 0 & \Sigma_\zeta \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} dR_t - M_t^D dt \\ d\zeta_t - M_t^D dt \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_0^D = 0. \quad (3.3)$$

- $Q_t^H$  ist die eindeutige Lösung der folgenden Riccati-Differentialgleichung

$$dQ_t^H = \underline{\alpha}_Q^H(Q_t^H) dt, \quad Q_0^H = q_0, \quad (3.4)$$

$$\text{mit } \underline{\alpha}_Q^H(q) = \Sigma_\mu - \kappa q - q\kappa' - q\Sigma_H^{-1}q' \quad \text{und} \quad \Sigma_D := \left[ \Sigma_R^{-1} + \Sigma_\zeta^{-1} \right]^{-1}.$$

Der Prozess  $M_t^H$  genügt einer SDE, die von einem stochastischen Prozess  $\widetilde{W}_t^H$  getrieben wird, die bedingte Kovarianzmatrix  $Q_t^H$  dagegen folgt einer deterministischen Differentialgleichung.

**Definition 3.1.2.** Der stochastische Prozess  $(\widetilde{W}_t^H)_{t \in [0, T]}$  aus (3.2) bzw. (3.3) wird Innovationsprozess genannt.

**Bemerkung 3.1.3.** Da wir die Matrizen  $\Sigma_R \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $\Sigma_\zeta \in \mathbb{R}^{d \times d}$  als symmetrisch, positiv definite Matrizen vorausgesetzt hatten, können wir sie eindeutig in der Form

$$\Sigma_R = L_R A_R L_R' \quad \text{und} \quad \Sigma_\zeta = L_\zeta A_\zeta L_\zeta'$$

schreiben, wobei  $A_R, A_\zeta$  Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen und  $L_R, L_\zeta$  untere Dreiecksmatrizen sind, deren Diagonaleinträge gleich 1 sind. Nun können wir die Quadratwurzel von  $\Sigma_R$  beziehungsweise von  $\Sigma_\zeta$  definieren durch

$$\Sigma_R^{\frac{1}{2}} := L_R A_R^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \Sigma_\zeta^{\frac{1}{2}} := L_\zeta A_\zeta^{\frac{1}{2}}.$$

**Lemma 3.1.4.** Im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ ) hat die Riccati-Gleichung eine geschlossene Lösung

$$Q_t^H = -\kappa\Sigma_H + \delta_Q\Sigma_H \cdot \frac{\sinh(\delta_Q t) + \frac{\kappa}{\delta_Q} \left(1 + \frac{q_0}{\kappa\Sigma_H}\right) \cosh(\delta_Q t)}{\cosh(\delta_Q t) + \frac{\kappa}{\delta_Q} \left(1 + \frac{q_0}{\kappa\Sigma_H}\right) \sinh(\delta_Q t)}, \quad (3.5)$$

wobei die Diskriminante  $\delta_Q := \kappa\sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2\Sigma_H}} > 0$  ist.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Lemma A.1.1 mit  $a_y = \Sigma_H^{-1}$ ,  $b_y = -2\kappa$  und  $c_y = \Sigma_\mu$  sowie einer Zeitumkehr  $t' = T - t$ .  $\square$

Im mehrdimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d > 1$ ) haben wir im Allgemeinen keine geschlossene, sondern nur eine numerische Lösung für die Riccati-Differentialgleichung (3.4).

**Filter beim Informations-Regime  $H = C_n$ .** Angenommen, der Investor kann die Renditen der  $d$  Aktien laufend beobachten und zusätzlich erhält er zu  $n \in \mathbb{N}$  deterministischen Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_{n-1}$  mit  $0 = t_0 < \dots < t_{n-1} < T$  erwartungstreue normalverteilte Expertenmeinungen  $Z_0, \dots, Z_{n-1}$  über die unbeobachtbare Drift  $\mu$ , deren Modellierung in (2.12) gegeben war. Ein rationaler Investor wird die Informationen aus den Aktienpreisen bzw. deren Renditen und den Experten miteinander kombinieren, um einen besseren Schätzer für die Drift zu bekommen.

Die Dynamik der bedingten Erwartung  $M_t^{C_n}$  bzw. der bedingten Kovarianzmatrix  $Q_t^{C_n}$  ist dem folgenden Lemma zu entnehmen. Dabei setzen wir aus Gründen der Einfachheit die Bezeichnung  $t_n := T$ .

**Lemma 3.1.5.** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt folgendes:*

1. Zwischen zwei Informationszeitpunkten  $t_k$  und  $t_{k+1}$  gilt für alle  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , dass die bedingte Verteilung der unbeobachtbaren Drift  $\mu_t$  unter der Investor-Filtration  $\mathbb{F}_t^{C_n}$  die Normalverteilung  $\mathcal{N}(M_t^{C_n}, Q_t^{C_n})$  ist mit

- $M^{C_n}$  ist die eindeutige Lösung der SDE

$$dM_t^{C_n} = \underline{\alpha}_M^{C_n}(M_t^{C_n}) dt + \beta_M^{C_n}(Q_t^{C_n}) d\widetilde{W}_t^{C_n} \quad (3.6)$$

mit  $\underline{\alpha}_M^{C_n}(m) = \kappa(\bar{\mu} - m)$ ,  $\beta_M^{C_n}(q) = q\Sigma_R^{-\frac{1}{2}}$ . Dabei ist  $\widetilde{W}^{C_n} := (\widetilde{W}_t^{C_n})_{t \in [0, T]}$  ein  $\mathbb{F}^{C_n}$ -adaptierter Wiener-Prozess (Innovationsprozess) gegeben durch

$$d\widetilde{W}_t^{C_n} = \Sigma_R^{-\frac{1}{2}} (dR_t - M_t^{C_n} dt), \quad \widetilde{W}_0^{C_n} = 0. \quad (3.7)$$

- $Q_t^{C_n}$  ist die eindeutige Lösung der folgenden Riccati-Differentialgleichung

$$dQ_t^{C_n} = \underline{\alpha}_Q^{C_n}(Q_t^{C_n}) dt \quad (3.8)$$

mit  $\underline{\alpha}_Q^{C_n}(q) = \Sigma_\mu - \kappa q - q\kappa' - q\Sigma_R^{-1}q'$ .

Dabei sind zum Zeitpunkt  $t_k$  Anfangswerte  $M_{t_k}^{C_n}$  bzw.  $Q_{t_k}^{C_n}$  gegeben.

2. Zu einem Informationszeitpunkt  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  ist die bedingte Verteilung der Drift  $\mu_t$  unter der Investor-Filtration  $\mathbb{F}_{t_k}^{C_n}$  die Normalverteilung  $\mathcal{N}(M_{t_k}^{C_n}, Q_{t_k}^{C_n})$  und man kann die bedingte Erwartung  $M_{t_k}^{C_n}$  und die bedingte Kovarianzmatrix  $Q_{t_k}^{C_n}$  in Abhängigkeit vom Wert vor dem Informationszeitpunkt durch die folgenden Update-Formeln darstellen

$$M_{t_k}^{C_n} = \rho_k M_{t_{k-}}^{C_n} + (I_d - \rho_k) Z_k, \quad (3.9)$$

$$Q_{t_k}^{C_n} = \rho_k Q_{t_{k-}}^{C_n}, \quad (3.10)$$

wobei der Updatesfaktor  $\rho_k := I_d - Q_{t_{k-}}^{C_n} (\Gamma + Q_{t_{k-}}^{C_n})^{-1} = \Gamma (\Gamma + Q_{t_{k-}}^{C_n})^{-1}$  ist.

Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  setzen wir  $M_{0-}^{C_n} = m_0$  und  $Q_{0-}^{C_n} = q_0$ .

*Beweis.* Für  $d = 1$  siehe Lemma 3.3 in Gabih, Kondakji, Sass, und Wunderlich [27] und für  $d > 1$  siehe Lemma 2.5 in Sass, Westphal und Wunderlich [67].  $\square$

Im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ ) zeigt die Update-Formel (3.9) für die bedingte Erwartung, dass  $M_{t_k}^{C_n}$  nach dem Eintreffen der  $k$ -ten Expertenmeinung ein gewichtetes Mittel der Expertenmeinung  $Z_k$  und der bedingten Erwartung  $M_{t_k^-}^{C_n}$  vor dem Update ist. Aus der Update-Formel für die bedingte Varianz in (3.10) folgt  $Q_{t_k}^{C_n} \leq \min\{\Gamma, Q_{t_k^-}^{C_n}\}$ , das heißt, die bedingte Varianz nach dem Update kann nicht einen größeren Wert als vor dem Update annehmen. Die Gewichtung  $\rho_k \in [0, 1]$  wächst, wenn die Varianz des Experten  $\Gamma$  und demzufolge dessen Unzuverlässigkeit wachsen. Für den Grenzfall  $\Gamma = 0$  (der Experte kennt die Drift und ist absolut zuverlässig,  $Z_k = \mu_{t_k}$ ) haben wir  $\rho_k = 0$  und  $M_{t_k}^{C_n} = Z_k = \mu_{t_k}$ , dies bedeutet, dass die bedingte Erwartung nach dem Eintreffen der Expertenmeinung gleich dem wahren Wert der Drift ist. Gleichzeitig führt dieser Grenzfall zu einer maximalen Varianzreduktion  $Q_{t_k} = 0$ . Für den anderen Grenzfall  $\Gamma = \infty$  (der Experte besitzt keinerlei Wissen über die Drift) ist der Updatesfaktor  $\rho_k = 1$  und somit gilt  $M_{t_k}^{C_n} = M_{t_k^-}^{C_n}$  und  $Q_{t_k}^{C_n} = Q_{t_k^-}^{C_n}$ , was wiederum bedeutet, dass die Expertenmeinung keine nützliche Information für den Filter gebracht hat.

Im Folgenden werden wir eine einheitliche Darstellung des Filters  $M^{C_n}$  bzw.  $Q^{C_n}$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  aufstellen, in dem wir die Update-Formel aus Lemma 3.1.5 in die Differentialgleichung für den Filter  $M^{C_n}$  bzw.  $Q^{C_n}$  einbetten. Diese Einbettung geschieht durch das Hinzufügen eines Sprungterms, für dessen Herleitung die bedingte Verteilung der Expertenmeinungen  $Z_k$  gegeben die dem Investor zur Verfügung stehenden Informationen nötig ist.

**Lemma 3.1.6.** *Die bedingte Verteilung der Expertenmeinungen  $Z_k$  gegeben  $\mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}$  ist die multivariate Normalverteilung mit  $\mathcal{N}\left(M_{t_k^-}^{C_n}, \Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)$ .*

*Beweis.* Bei der Modellierung der Expertenmeinungen  $Z_k = \mu_{t_k} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  in (2.12) haben wir angenommen, dass die Zufallsgrößen  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  iid.  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind. Insbesondere sind diese Zufallsgrößen von der Drift unabhängig. Ferner besitzen die Expertenmeinungen  $Z_k$  und die bedingte Erwartung  $M_{t_k^-}^{C_n}$  eine gemeinsame Normalverteilung und somit ist die bedingte Verteilung von  $Z_k$  gegeben  $M_{t_k^-}^{C_n}$  wieder eine Normalverteilung mit Mittelwert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z_k | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] &= \mathbb{E}\left[\mu_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] + \Gamma^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\varepsilon_k | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mu_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] + \Gamma^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\varepsilon_k\right] \\ &= M_{t_k^-}^{C_n}, \end{aligned}$$

denn  $\varepsilon_k$  ist multivariat standardnormalverteilt und unabhängig von der Investor-Filtration  $\mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}$ . Aus demselben Grund und weil  $\varepsilon_k$  unabhängig von  $\mu_{t_k}$  ist, gilt für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{var}\left[Z_k | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] &= \text{var}\left[\mu_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] + \Gamma^{\frac{1}{2}} \text{var}\left[\varepsilon_k | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] \Gamma^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{var}\left[\mu_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}\right] + \Gamma^{\frac{1}{2}} \text{var}\left[\varepsilon_k\right] \Gamma^{\frac{1}{2}} \\ &= Q_{t_k^-}^{C_n} + \Gamma. \end{aligned}$$

□

Sei  $(U_k)_{k=1}^n$  eine Folge i.i.d. multivariaten standardnormalverteilten Zufallsvektoren, die von  $\mathcal{F}_T^{C_n}$  unabhängig sind, dann können wir hinsichtlich Lemma 3.1.6 die Expertenmeinungen aus (2.12) gegeben  $\mathcal{F}_{t_k^-}^{C_n}$  wie folgt darstellen

$$Z_k = M_{t_k^-}^{C_n} + \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{\frac{1}{2}} U_k. \quad (3.11)$$

Diese Darstellung ermöglicht es uns, die Update-Formel aus (3.9) wie folgt auszudrücken

$$\begin{aligned} M_{t_k}^{C_n} &= \rho_k M_{t_k^-}^{C_n} + (I_d - \rho_k) \left[ M_{t_k^-}^{C_n} + \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{\frac{1}{2}} U_k \right] \\ &= M_{t_k^-}^{C_n} + (I_d - \rho_k) \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{\frac{1}{2}} U_k \\ &= M_{t_k^-}^{C_n} + Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-1} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{\frac{1}{2}} U_k \\ &= M_{t_k^-}^{C_n} + Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-\frac{1}{2}} U_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für die Update-Formel der Kovarianz aus (3.10) gilt

$$\begin{aligned} Q_{t_k}^{C_n} &= \rho_k Q_{t_k^-}^{C_n} \\ &= \left[ I_d - Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-1} \right] Q_{t_k^-}^{C_n} \\ &= Q_{t_k^-}^{C_n} - Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-1} Q_{t_k^-}^{C_n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mit Hinblick auf die letzten beiden Formeln (3.12) und (3.13) führen wir die Sprungprozesse  $(K_t^\mu)_{t \in [0, T]}$  und  $(K_t^Q)_{t \in [0, T]}$  folgendermaßen ein

$$K_t^\mu := \sum_{0 \leq t_k \leq t} \Delta M_{t_k}^{C_n} = \sum_{0 \leq t_k \leq t} \left( M_{t_k}^{C_n} - M_{t_k^-}^{C_n} \right) = \sum_{0 \leq t_k \leq t} Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-\frac{1}{2}} U_k, \quad (3.14)$$

$$K_t^Q := \sum_{0 \leq t_k \leq t} \Delta Q_{t_k}^{C_n} = \sum_{0 \leq t_k \leq t} \left( Q_{t_k}^{C_n} - Q_{t_k^-}^{C_n} \right) = - \sum_{0 \leq t_k \leq t} Q_{t_k^-}^{C_n} \left(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n}\right)^{-1} Q_{t_k^-}^{C_n}. \quad (3.15)$$

Des Weiteren wollen wir die deterministischen Sprungzeitpunkte  $t_k$  mit den zufälligen Sprunghöhen  $\Delta M_{t_k}^{C_n}$  beziehungsweise den deterministischen Sprunghöhen  $\Delta Q_{t_k}^{C_n}$  für  $k = 0, \dots, n-1$  verknüpfen, in dem wir ein zufälliges Maß  $I^{C_n}(\cdot, \cdot) = I^{C_n}(\cdot, \cdot, \omega)$  wie folgt definieren

$$I^{C_n}([a, b], B) = \sum_{t_k \in [a, b]} \mathbf{1}_{\{U_k \in B\}}, \quad 0 \leq a < b \quad \text{und} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (3.16)$$

Dieses Maß gibt die Anzahl der Sprünge im Intervall  $[a, b]$  an, die in der Borel-Menge  $B$  liegen. Mit Hilfe dieses Maßes können wir für eine Funktion  $g$  definiert auf  $\mathbb{R}^d$  die folgende Integral-Darstellung verwenden

$$\sum_{t_k \in [0, t]} g(U_k) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(u) I^{C_n}(ds, du).$$

Vor diesem Hintergrund können wir die soeben eingeführten Prozesse  $K^\mu$  und  $K^Q$  aus (3.14) bzw. (3.15) nun in Integral-Form darstellen

$$K_t^\mu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_n}(Q_{s^-}^{C_n}, u) I^{C_n}(ds, du), \quad \gamma_M^{C_n}(q, u) := q(\Gamma + q)^{-\frac{1}{2}} u,$$

$$K_t^Q = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_n}(Q_{s^-}^{C_n}) I^{C_n}(ds, du), \quad \gamma_Q^{C_n}(q) := -q(\Gamma + q)^{-1} q.$$

Nachdem wir die Sprünge des Filters  $M^{C_n}$  bzw.  $Q$  in Integral-Form darstellen konnten, können wir auch deren Dynamik aus Lemma 3.1.5 für alle  $t \in [0, T]$  wie folgt darstellen

$$dM_t^{C_n} = \underline{\alpha}_M^{C_n}(M_t^{C_n})dt + \beta_M^{C_n}(Q_t^{C_n})d\widetilde{W}_t^{C_n} + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_n}(Q_{s^-}^{C_n}, u) I^{C_n}(dt, du), \quad (3.17)$$

$$dQ_t^{C_n} = \underline{\alpha}_Q^{C_n}(Q_t^{C_n})dt + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_n}(Q_{s^-}^{C_n}) I^{C_n}(dt, du) \quad (3.18)$$

mit dem Anfangswert  $M_0^{C_n} = m_0$  bzw.  $Q_0^{C_n} = q_0$ .

**Filter beim Informations-Regime  $H = C_\lambda$ .** Im Gegensatz zum letzten Regime  $H = C_n$  kennt der Investor hier weder die Anzahl der Expertenmeinungen noch deren Ankunftszeiten. Wir haben angenommen, dass die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  mit Intensität  $\lambda > 0$  sind. Unter dieser Annahme sind die Wartezeiten zwischen je zwei Expertenmeinungen unabhängig.

Da wir im Modell  $H = C_\lambda$  angenommen haben, dass die Ankunftszeitpunkte  $T_1, T_2, \dots$  von allen anderen Größen und insbesondere von der Drift  $\mu$  unabhängig sind, erhalten wir den Filter in diesem Modell analog zum Fall  $H = C_n$ . Wir werden hier anstelle des Sprungmaßes  $I^{C_n}(\cdot, \cdot)$  aus (3.16), welches die deterministischen Sprungzeitpunkte  $t_k$  mit den zufälligen Sprunghöhen  $\Delta M_{t_k}^{C_n}$  bzw. den deterministischen Sprunghöhen  $\Delta Q_{t_k}^{C_n}$  für  $k = 0, \dots, n-1$  verknüpft, mit einem zufälligen Poisson-Maß  $I^{C_\lambda}(\cdot, \cdot)$  arbeiten, welches die Intensität  $\lambda > 0$  hat und die zufälligen Sprungzeitpunkte  $T_k$  mit den beiden Sprunghöhen  $\Delta M_{T_k}^{C_\lambda}$  bzw.  $\Delta Q_{T_k}^{C_\lambda}$  für  $k = 1, 2, \dots$  verbindet (vgl. mit Sass, Westphal und Wunderlich [68]).

Auf dieselbe Art und Weise wie im Fall  $H = C_n$  erhalten wir im Fall  $H = C_\lambda$  die Dynamik für

den Filter  $M_t^{C_\lambda}$  bzw.  $Q_t^{C_\lambda}$  gegeben durch die folgenden SDE.

$$dM_t^{C_\lambda} = \underline{\alpha}_M^{C_\lambda}(M_t^{C_\lambda})dt + \beta_M^{C_\lambda}(Q_t^{C_\lambda})d\widetilde{W}_t^{C_\lambda} + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}, u) I^{C_\lambda}(dt, du), \quad M_0^{C_\lambda} = m_0, \quad (3.19)$$

$$dQ_t^{C_\lambda} = \underline{\alpha}_Q^{C_\lambda}(Q_t^{C_\lambda})dt + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{s-}^{C_\lambda}) I^{C_\lambda}(dt, du), \quad Q_0^{C_\lambda} = q_0. \quad (3.20)$$

Dabei sind die Koeffizienten  $\underline{\alpha}_M^{C_\lambda} \equiv \underline{\alpha}_M^{C_n}$ ,  $\beta_M^{C_\lambda} \equiv \beta_M^{C_n}$ ,  $\gamma_M^{C_\lambda} \equiv \gamma_M^{C_n}$ ,  $\underline{\alpha}_Q^{C_\lambda} \equiv \underline{\alpha}_Q^{C_n}$  und  $\gamma_Q^{C_\lambda} \equiv \gamma_Q^{C_n}$ .

Um die Dynamik der Prozesse in einer Semimartingal-Darstellung zu präsentieren, stellen wir nun die Sprungterme in (3.19) und (3.20) mittels des kompensierten Poisson-Maßes  $\widetilde{I}^{C_\lambda}$  dar, den wir wie folgt definieren

$$\widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du) = I^{C_\lambda}(dt, du) - \eta^\lambda(dt, du). \quad (3.21)$$

Dabei bezeichnet  $\eta^\lambda(\cdot, \cdot)$  den Kompensator gegeben durch

$$\eta^\lambda(dt, du) = \mathbb{E} \left[ I^{C_\lambda}(dt, du) | \mathcal{F}_{t-}^{C_\lambda} \right] = \lambda dt \varphi(u) du,$$

wobei  $\varphi(u)$  die Dichtefunktion der multivariaten Standardnormalverteilung ist und aus der Tatsache  $\int_{\mathbb{R}^d} u \varphi(u) du = 0$  erhalten wir für das Integral in (3.19)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}, u) I^{C_\lambda}(dt, du) &= \int_{\mathbb{R}^d} Q_{t-}^{C_\lambda} \left( \Gamma + Q_{t-}^{C_\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} u I^{C_\lambda}(dt, du) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} Q_{t-}^{C_\lambda} \left( \Gamma + Q_{t-}^{C_\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} u \left[ \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du) + \lambda dt \varphi(u) du \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}, u) \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analog dazu können wir das Integral aus (3.20) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}) I^{C_\lambda}(dt, du) &= \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}) \left[ \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du) + \lambda dt \varphi(u) du \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}) \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du) + \lambda \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei wir hier die Eigenschaft  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u) du = 1$  verwendet haben.

Die Umstellung der Integrale in (3.22) und (3.23) ermöglicht uns nun die angestrebte Martingaldarstellung für die Filter-Gleichung in (3.19) bzw. (3.20) und wir erhalten dafür die folgende Dynamik

$$dM_t^{C_\lambda} = \underline{\alpha}_M^{C_\lambda}(M_t^{C_\lambda})dt + \beta_M^{C_\lambda}(Q_t^{C_\lambda})d\widetilde{W}_t^{C_\lambda} + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}, u) \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du), \quad M_0^{C_\lambda} = m_0, \quad (3.24)$$

$$dQ_t^{C_\lambda} = \alpha_Q^{C_\lambda}(Q_t^{C_\lambda})dt + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C_\lambda}(Q_{t-}^{C_\lambda}) \widetilde{I}^{C_\lambda}(dt, du), \quad Q_0^{C_\lambda} = q_0. \quad (3.25)$$

Durch die neue Darstellung ändert sich die Drift bei der Dynamik der bedingten Kovarianzmatrix und hängt damit von der Intensität des Poisson-Prozesses durch  $\alpha_Q^{C_\lambda}(q) = \underline{\alpha}_Q^{C_\lambda}(q) + \lambda \gamma_Q^{C_\lambda}(q)$  ab, während die anderen Koeffizienten unverändert bleiben.

Nachdem wir die Dynamik vom Filter  $M_t^H$  bzw.  $Q_t^H$  in allen partiellen Regimes  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  präsentiert haben, wollen wir eine einheitliche Darstellung in allen verschiedenen Informations-Regimes einführen.

$$dM_t^H = \underline{\alpha}_M^H(M_t^H) dt + \beta_M^H(Q_t^H) d\widetilde{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^H(Q_{t-}^H, u) \widetilde{I}^H(dt, du), \quad M_0^H = m_0, \quad (3.26)$$

$$dQ_t^H = \alpha_Q^H(Q_t^H) dt + \beta_Q^H(Q_t^H) d\widetilde{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^H(Q_{t-}^H) \widetilde{I}^H(dt, du), \quad Q_0^H = q_0. \quad (3.27)$$

Dabei sind die Sprungkoeffizienten  $\gamma_M^R(q, u) = \gamma_M^D(q, u) = \gamma_Q^R(q) = \gamma_Q^D(q) = 0$ . Für den Diffusionsterm der bedingten Kovarianzmatrix setzen wir  $\beta_Q^H(q) \equiv 0$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$ . Weiterhin setzen wir bei den Regimes  $H = R, C_n, D$  den Drift-Term der bedingten Kovarianzmatrix  $\alpha_Q^H(q) = \underline{\alpha}_Q^H(q)$ . Für das zufällige Maß  $\widetilde{I}^H$  setzen wir  $\widetilde{I}^{C_n} = I^{C_n}$  und  $\widetilde{I}^R = \widetilde{I}^D = 0$ .

**Informations-Regime  $H = F$ .** Der Fall voller Informationen, bei dem die Drift beobachtbar bzw. an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^F$  adaptiert ist, verwenden wir als Referenzfall und setzen  $M_t^F = \mathbb{E}[\mu_t | \mathcal{F}_t^F] = \mu_t$  und somit  $Q_t^F = \text{cov}[\mu_t, \mu_t | \mathcal{F}_t^F] = 0$ .

## 3.2 Eigenschaften der bedingten Kovarianz

Nachdem wir den Filter bei den verschiedenen Informations-Regimes präsentiert haben, wollen wir einen Zusammenhang zwischen den Filtern herstellen, der in erster Linie den Wert der gewonnenen Informationen aus den Experten zeigt.

**Lemma 3.2.1.** Für den Filter  $M_t^H$  bzw.  $Q_t^H$  mit  $H = R, C_n, C_\lambda, D, F$  gilt für alle  $t \in [0, T]$  die folgende Varianzzerlegung

$$\text{cov}(M_t^H, M_t^H) = \text{cov}(\mu_t, \mu_t) - E[Q_t^H]. \quad (3.28)$$

*Beweis.* Wir bilden einerseits die Varianz für  $M_t^H = E[\mu_t | \mathcal{F}_t^H]$  und erhalten dafür

$$\begin{aligned} \text{cov}(M_t^H, M_t^H) &= E[M_t^H (M_t^H)'] - E[M_t^H] E[M_t^H]' \\ &= E[M_t^H (\mu_t)'] - E[\mu_t] E[\mu_t]'. \end{aligned}$$

Andererseits bilden wir den Erwartungswert für  $Q_t^H = E[\mu_t \mu_t' | \mathcal{F}_t^H] - M_t^H (M_t^H)'$  und erhalten

$$E[Q_t^H] = E[\mu_t \mu_t'] - E[M_t^H (M_t^H)'].$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt die Behauptung.  $\square$

Bei den Informations-Regimes  $H = R, D, C_n, F$  ist die bedingte Kovarianzmatrix  $Q^H$  deterministisch und damit gilt  $E[Q_t^H] = Q_t^H$ , dagegen ist bei dem Informations-Regime  $H = C_\lambda$  die bedingte Kovarianzmatrix  $Q^{C_\lambda}$  stückweise deterministisch mit zufälligen Sprungzeitpunkten  $T_1, T_2, \dots$

Ein rationaler Investor stellt sich die Frage, ob er eine bessere Einschätzung für die unbekannte Drift bekommt, wenn er neben den verfügbaren Informationen aus den Renditen mit Informationen von den Experten ausgestattet wird. Dieser Frage wollen wir jetzt nachgehen, indem wir die bedingte Kovarianzmatrix des  $R$ -Investors mit der der Investoren  $H = C_n, C_\lambda, D$  vergleichen. Bei solchen Vergleichen symmetrischer Matrizen verwenden wir die Schreibweise  $A \succeq B$  oder  $B \preceq A$ , wenn die Differenz  $A - B$  eine positiv semidefinite Matrix ist.

**Lemma 3.2.2.** Für alle  $t \in [0, T]$  gelten folgende Aussagen

1.  $Q_t^D \preceq Q_t^R$ ,
2.  $Q_t^{C_n} \preceq Q_t^R$ ,
3.  $Q_t^{C_\lambda}(\omega) \preceq Q_t^R, \quad \forall \omega \in \Omega$ .

*Beweis.* Siehe Proposition 4.2 in Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27] oder Proposition 3.2. bzw. Lemma 2.4 in Sass, Westphal, und Wunderlich [67, 68].  $\square$

Numerische Beispiele zur theoretischen Aussage in Lemma 3.2.2 sind in Abbildung 8.2, 8.3 und 8.4 zu sehen.



### Asymptotische Ergebnisse für unendlichen Zeithorizont

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass der Investitionshorizont  $T$  unendlich ist und wollen untersuchen, wie sich die bedingte Kovarianzmatrix  $Q_t^H$  in den Informations-Regimes  $H = R, D, C_n$  verhält, wenn  $t$  gegen  $\infty$  geht.

Das folgende Theorem bezieht sich auf die beiden Regimes  $H = R, D$  und zeigt die Konvergenz der bedingten Kovarianzmatrix  $Q_t^H$ , die als Lösung der Riccati-Gleichung (3.4) definiert ist, wenn  $t$  gegen  $\infty$  geht.

**Theorem 3.2.3.** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für die Kovarianzmatrix  $Q_t^H$  mit  $H = R, D$  folgendes*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t^H = Q_\infty^H$$

für eine positiv semidefinite Matrix  $Q_\infty^H$ . Außerdem ist  $Q_\infty^H$  die eindeutige Lösung der folgenden quadratische algebraische Riccati-Gleichung

$$\Sigma_\mu - \kappa q - q \kappa' - q \Sigma_H^{-1} q' = 0_d.$$

Insbesondere folgt aus (3.5) im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ )

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t^H &= Q_\infty^H = \kappa \Sigma_H \left[ -1 + \frac{1}{\kappa} \delta_Q \right] \\ &= \kappa \Sigma_H \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_H}} \right]. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für den mehrdimensionalen Fall siehe Theorem 4.2 in Sass, Westphal, und Wunderlich [67] und für den eindimensionalen Fall siehe Proposition 4.6 in Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27].  $\square$

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage des letzten Theorems sind in Abbildung 8.4 zu sehen.

Das letzte Theorem bezog sich nur auf die beiden Regimes  $H = R, D$ , bei denen die Investor-Information nur aus den stetigen Renditen bzw. kombiniert aus den stetigen Renditen mit den stetigen Experten gebildet war und die bedingte Kovarianz  $Q_t^H$  auf  $[0, T]$  stetig ist. Nun wollen wir das asymptotische Verhalten der bedingten Kovarianz beim Regime  $H = C_n$  betrachten, bei dem  $Q_t^{C_n}$  zu den deterministischen Ankunftszeiten  $0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1} < T$  Sprünge hat. Diese Untersuchung beschränkt sich nur auf den Fall, dass die Ankunftszeiten der Experten äquidistant sind.

**Lemma 3.2.4.** *Seien  $T = \infty$  und die Ankunftszeiten der Experten beim Informations-Regime  $H = C_n$  äquidistant, dann gelten folgende Aussagen:*

- i) Ist  $Q_{t_0-}^{C_n} \preceq Q_{t_1-}^{C_n}$ , so sind die Folgen  $\left(Q_{t_k-}^{C_n}\right)_{k \geq 0}$  und  $\left(Q_{t_k}^{C_n}\right)_{k \geq 0}$  monoton wachsend.
- ii) Ist  $Q_{t_0-}^{C_n} \succeq Q_{t_1-}^{C_n}$ , so sind die Folgen  $\left(Q_{t_k-}^{C_n}\right)_{k \geq 0}$  und  $\left(Q_{t_k}^{C_n}\right)_{k \geq 0}$  monoton fallend.

*Beweis.* Siehe Lemma 4.3 in Sass, Westphal, und Wunderlich [67].  $\square$

Ein weitere Interessante Frage ist, wie sich die Folgen  $(Q_{t_k}^{C_n})_{k \geq 0}$  und  $(Q_{t_k}^{C_n})_{k \geq 0}$  verhalten, wenn  $k$  gegen unendlich geht. Die Antwort auf diese Frage bietet das folgende Theorem.

**Theorem 3.2.5.** *Seien  $T = \infty$  und die Ankunftszeiten der Experten beim Informations-Regime  $H = C_n$  äquidistant, dann existieren endliche Matrizen  $\bar{Q}$  und  $\underline{Q}$  in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ , sodass Folgendes gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{t_n}^{C_n} = \bar{Q} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{t_n}^{C_n} = \underline{Q}.$$

*Insbesondere gilt im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ ) Folgendes*

$$\bar{Q} = \frac{1}{2a_0} \left[ -b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0} \right] \quad \text{und} \quad \underline{Q} = \frac{\Gamma \cdot \bar{Q}}{\Gamma + \bar{Q}}.$$

*Dabei sind die Konstanten  $a_0, b_0, c_0$  und  $d_0$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\kappa\Sigma_R} \left[ (1 - d_0)(\Gamma + \kappa\Sigma_R) + (1 + d_0)\kappa\Sigma_R \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa\Sigma_R}} \right], \\ b_0 &= -(1 - d_0) \left( \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} - \Gamma \right), \\ c_0 &= -(1 - d_0) \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} \cdot \Gamma, \\ d_0 &= \exp \left\{ -2\Delta_n \kappa \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa\Sigma_R}} \right\} \quad \text{mit} \quad \Delta_n := t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für den mehrdimensionalen Fall siehe Proposition 4.4 in Sass, Westphal, und Wunderlich [67] und für den eindimensionalen Fall siehe Proposition 4.6 in Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27].  $\square$

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage des letzten Theorems sind in Abbildung 8.2 zu sehen.

### 3.3 Asymptotische Filtereigenschaften hochfrequenter Experten

In diesem Abschnitt untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Filter für die Regimes  $C_n$  und  $C_\lambda$  für eine wachsende und gegen unendlich strebende Anzahl  $n$  bzw. Intensität  $\lambda$  der Expertenmeinungen. Dabei unterscheiden wir zwei unterschiedliche Situationen. Zum einen gehen wir davon aus, dass mehr Expertenmeinungen nur zum Preis einer höheren Ungenauigkeit, d.h. einer geringeren Verlässlichkeit, verfügbar sind. Dies wird durch eine linear in der Anzahl  $n$  bzw. Intensität  $\lambda$  wachsenden Kovarianz der Expertenmeinungen ausgedrückt. Mit dieser Annahme kommt zum Ausdruck, dass Investoren in einem bestimmten Zeitraum nicht

beliebig viel Zusatzinformation über die unbekannt Drift erhalten können. Wir zitieren Grenzwertsätze aus Sass, Westphal und Wunderlich [68], welche besagen, dass die Informationen des  $C_n$ - bzw.  $C_\lambda$ -Investors asymptotisch gleich der Informationen des  $D$ -Investors sind, welcher zeitstetige Expertenmeinungen mit einer geeignet gewählten Volatilität  $\sigma_\zeta$  beobachtet. Diese Grenzwertsätze ermöglichen die Konstruktion sogenannter Diffusionsapproximation für die Filter für hochfrequente Experten. Außerdem sind sie die Grundlage für einfach zu berechnende Näherungslösungen für die in den nachfolgenden Kapiteln untersuchten Nutzenmaximierungsprobleme.

Das zweite asymptotische Regime ist durch eine konstante und von der wachsenden Anzahl  $n$  bzw. Intensität  $\lambda$  unabhängigen Kovarianz der Expertenmeinungen gekennzeichnet. Der Investor erhält dann mehr und mehr verrauschte Signale gleichbleibender Genauigkeit über den momentanen Wert des Driftprozesses. Eine naheliegende Vermutung ist, dass der Investor im Grenzfall für  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $\lambda \rightarrow \infty$  über volle information über den Driftprozess verfügt, d.h. die durch den Filter ausgedrückte Driftschätzung ist ein konsistenter Schätzer. Für diese Vermutung formulieren und beweisen wir in der Arbeit Gabih, Kondakji und Wunderlich [28] entsprechende Grenzwertsätze, welche nachfolgend zitiert werden.

### 3.3.1 Diffusion-Approximation für Experten mit linear wachsender Kovarianz

#### Deterministische Informationszeitpunkte

Die folgende Annahme stellt einer Folge von zeitdiskreten Expertenmeinungen den stetigen Expertenmeinungsprozess  $\zeta = (\zeta_t)_{t \in [0, T]}$  aus (2.14)

$$d\zeta = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0$$

gegenüber.

**Annahme 3.3.1.** Seien  $(\tau^n)_{n=1}^\infty$  mit  $\tau^n := \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_{n-1}^n\}$  eine Folge von äquidistanten Zerlegungen des Zeitintervalls  $[0, T]$  gegeben durch

$$t_k^n = k \cdot \Delta_n, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad \text{mit} \quad \Delta_n := T/n$$

und  $(Z^n)_{n=1}^\infty$  mit  $Z^n := \{Z_0^n, Z_1^n, \dots, Z_{n-1}^n\}$  eine Folge von Expertenmeinungen definiert wie in (2.12) durch

$$Z_k^n = \mu_{t_k^n} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^n, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Die standardnormalverteilten Zufallsgrößen  $(\varepsilon_k^n)$  sind wie folgt an den Wiener-Prozess  $W^\zeta$  gekoppelt, welcher den stetigen Expertenprozess antreibt:

$$\varepsilon_k^n = \Gamma^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta_n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \sigma_\zeta dW_s^\zeta, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Hierzu wird die Volatilität des stetigen Experten  $\sigma_\zeta$  fixiert und die Kovarianz  $\Gamma$  der diskreten Experten in Abhängigkeit von der Anzahl der Expertenmeinungen  $n$  über die Beziehung

$$\Gamma = \Gamma(n) := \frac{1}{\Delta_n} \Sigma_\zeta = \frac{1}{\Delta_n} \sigma_\zeta \sigma_\zeta'$$

gewählt.

Unter dieser Annahme werden die Experten bei wachsender Anzahl der Expertenmeinungen immer ungenauer und damit unzuverlässiger. Des Weiteren stehen die diskreten Experten  $Z_k^n$  in Relation mit dem stetigen Expertenprozess  $\zeta$  und es gilt

$$\begin{aligned} Z_k^n &= \mu_{t_k^n} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^n \\ &= \mu_{t_k^n} + \frac{1}{\Delta_n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \sigma_\zeta dW_s^\zeta \\ &\approx \frac{1}{\Delta_n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (\mu_s ds + \sigma_\zeta dW_s^\zeta) \\ &= \frac{1}{\Delta_n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} d\zeta_s = \frac{1}{\Delta_n} (\zeta_{t_{k+1}^n} - \zeta_{t_k^n}), \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Das nächste Theorem gibt die Geschwindigkeit der Konvergenz des Filters vom Regime  $H = C_n$  gegen den vom Regime  $H = D$ , aus der die Quadratmittel-Konvergenz des Filters folgt.

**Theorem 3.3.2.** *Unter der Annahme 3.3.1 gilt folgendes:*

- 1) *Es existiert eine Konstante  $c_0 > 0$  mit*

$$\|Q_t^{C_n} - Q_t^D\| \leq c_0 \cdot \Delta_n \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|Q_t^{C_n} - Q_t^D\| = 0.$$

- 2) *Es existiert eine Konstante  $c'_0 > 0$  mit*

$$\mathbb{E} \left[ \|M_t^{C_n} - M_t^D\|^2 \right] \leq c'_0 \cdot \Delta_n \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[ \|M_t^{C_n} - M_t^D\|^2 \right] = 0.$$

*Beweis.* Siehe Theorem 3.2 und Theorem 3.3 in Sass, Westphal und Wunderlich [68]. □

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage des letzten Theorems sind in Abbildung 8.5 zu sehen.

### Zufällige Informationszeitpunkte

Angenommen, die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen  $T_1, T_2, \dots$  sind zufällig und die Wartezeiten  $T_{k+1} - T_k$  zwischen je zwei aufeinander folgenden Informationszeitpunkten unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Auf dieselbe Art und Weise wie im letzten Abschnitt wollen wir hier das Verhältnis vom Filter im Regime  $H = C_\lambda$  zu dem vom Regime  $H = D$  untersuchen, wenn die Intensität der Expertenmeinungen  $\lambda$  immer größer wird. Dies entspricht dem Fall, dass die Wartezeiten  $T_{k+1} - T_k$  immer kleiner werden.

Die angestrebte Untersuchung der Filter-Konvergenz geschieht unter der folgenden Annahme, welche eine Relation zwischen den diskreten und stetigen Experten herstellt.

**Annahme 3.3.3.** Sei  $((N_t^\lambda)_{t \in [0, T]})_{\lambda > 0}$  eine Familie von von homogenen Poisson-Prozessen, zu der eine Familie von zufälligen Sprungzeitpunkten  $(\mathcal{T}^\lambda)_{\lambda > 0}$  gehört mit  $\mathcal{T}^\lambda := \{0 < T_1^\lambda, T_2^\lambda, \dots, T_{N_T^\lambda}^\lambda \leq T\}$ . Die Poisson-Prozesse sind von allen anderen stochastischen Prozessen unabhängig. Sei weiterhin  $(Z^\lambda)_{\lambda > 0}$  mit  $Z^\lambda := \{Z_1^\lambda, Z_2^\lambda, \dots, Z_{N_T^\lambda}^\lambda\}$  eine Folge von Expertenmeinungen definiert wie in (2.12) durch

$$Z_k^\lambda = \mu_{T_k^\lambda} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, N_T^\lambda.$$

Die standardnormalverteilten Zufallsgrößen  $(\varepsilon_k^\lambda)$  sind wie folgt an den Wiener-Prozess  $W^\zeta$  gekoppelt, welcher den stetigen Expertenprozess antreibt:

$$\varepsilon_k^\lambda = \Gamma^{-\frac{1}{2}} \lambda \int_{\frac{k-1}{\lambda}}^{\frac{k}{\lambda}} \sigma_\zeta dW_s^\zeta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Hierzu wird die Volatilität des stetigen Experten  $\sigma_\zeta$  fixiert und die Kovarianz  $\Gamma$  der diskreten Experten in Abhängigkeit von der Intensität der Expertenmeinungen  $\lambda$  über die Beziehung

$$\Gamma = \Gamma(\lambda) := \lambda \Sigma_\zeta = \lambda \sigma_\zeta \sigma_\zeta'$$

gewählt.

Unter dieser Annahme werden die Experten bei wachsender Intensität der Expertenmeinungen immer ungenauer und somit deren Zuverlässigkeit immer geringer.

Eine der wichtigen Aspekte dieser Annahme ist die Konstruktion bzw. Koppelung der standardnormalverteilten Fehler  $(\varepsilon_k^\lambda)$  an den Wiener-Prozess  $W^\zeta$ , um am Ende die angestrebte Konvergenz zeigen zu können. Die Idee zur Konstruktion der standardnormalverteilten Zufallsgrößen  $\varepsilon_k^\lambda$  in der der obigen Annahme stammt aus Sass, Westphal und Wunderlich [68] und besteht darin, dass man zunächst davon ausgeht, dass der Wiener-Prozess  $W^\zeta$  nicht nur auf  $[0, T]$ , sondern auch auf  $[0, \infty)$  definiert ist. Dann greifen wir bei der Konstruktion dieser Fehler nicht mehr auf die zufälligen Zeitpunkte aus der Familie  $(\tau^\lambda)_{\lambda > 0}$ , sondern auf die deterministischen Zeitpunkte  $\{\frac{0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \dots, \frac{N_T^\lambda}{\lambda}\}$ . Mit diesem Ansatz sind die Zufallsgrößen  $\varepsilon_k^\lambda$  unabhängig von den zufälligen Ankunftszeitpunkten  $T_k^\lambda$ . Des Weiteren erklären die Autoren in Remark 4.2 in der zuletzt erwähnten Referenz, warum die Konstruktion von  $(\varepsilon_k^\lambda)$  durch den folgenden Ansatz

$$\varepsilon_k^\lambda = \Gamma^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{T_k^\lambda - T_{k-1}^\lambda}} \int_{T_{k-1}^\lambda}^{T_k^\lambda} \sigma_\zeta dW_s^\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, N_T^\lambda,$$

welcher mit Hinblick auf die Konstruktion der Fehler in Annahme 3.3.1 in Frage kommt, nicht zum erhofften Ergebnis führt.

Das nächste Theorem gibt die Geschwindigkeit der Konvergenz des Filters vom Regime  $H = C_\lambda$  gegen den vom Regime  $H = D$ , aus der die gleichmässige Konvergenz folgt.

**Theorem 3.3.4.** *Unter Annahme 3.3.3 gilt folgendes:*

1) *Es existieren eine Konstante  $c_1 > 0$  und ein  $\lambda_1 > 0$  mit*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} \|Q_t^{C_\lambda} - Q_t^D\|^2 \right] \leq c_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \text{für alle } \lambda \geq \lambda_1. \quad (3.29)$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} \|Q_t^{C_\lambda} - Q_t^D\|^2 \right] = 0.$$

2) *Es existieren eine Konstante  $c'_1 > 0$  und ein  $\lambda'_1 > 0$  mit*

$$\mathbb{E} \left[ \|M_t^{C_\lambda} - M_t^D\|^2 \right] \leq c'_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad \text{und} \quad \lambda \geq \lambda'_1. \quad (3.30)$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[ \|M_t^{C_\lambda} - M_t^D\|^2 \right] = 0.$$

*Beweis.* Siehe Theorem 4.6 und Theorem 4.7 in Sass, Westphal und Wunderlich [68]. □

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage in Theorem 3.3.4 sind in Abbildung 8.6 zu sehen.

Aus Abschnitt 3.3.1 kann man schlussfolgern, dass die gewonnenen Informationen aus den diskreten Experten sowohl zu deterministischen als auch zu zufälligen Zeitpunkten bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Experten den gleichen Wert haben, den der stetiger Experte liefert. Allerdings muss bei dieser Überlegung gelten, dass die Kovarianz der Experten  $\Gamma$  linear in die Anzahl  $n$  bzw. die Intensität  $\lambda$  der Expertenmeinungen wächst.

### 3.3.2 Experten mit konstanter Kovarianz

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem asymptotischen Verhalten der  $C_n$ - und  $C_\lambda$ -Filter bei wachsender Anzahl  $n$  bzw. Intensität  $\lambda$  beschäftigen, wenn die Genauigkeit der Experten konstant bleibt.

#### Deterministische Informationszeitpunkte

Ähnlich wie in Abschnitt 3.3.1 nehmen wir an, dass während des Investitionszeitraums  $[0, T]$  der  $C_n$ -Investor  $n \in \mathbb{N}$  Expertenmeinungen erhält, die aber nicht unbedingt zu äquidistanten Informationszeitpunkten eintreffen. Sei nun  $(\mathcal{T}^n)_{n=1}^\infty$  mit  $\mathcal{T}^n := \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\}$  eine Folge

### 3.3. ASYMPTOTISCHE FILTEREIGENSCHAFTEN HOCHFREQUENTER EXPERTEN

von Zerlegungen des Intervalls  $[0, T]$  in  $n$  Teilintervalle mit der Norm  $\Delta_n := \max_{k=1, \dots, n} t_k^n - t_{k-1}^n$  und sodass die Informationszeitpunkte erhalten bleiben, das heißt  $\mathcal{T}^n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\} \subseteq \{t_0^{n'}, t_1^{n'}, \dots, t_{n'}^{n'}\} = \mathcal{T}^{n'}$  für  $n' \geq n$ .

Die Modellierung der diskreten Expertenmeinungen  $Z_k^n$  bei dieser Untersuchung ist aus dem Ansatz (2.12) zu entnehmen, das heißt

$$Z_k^n = \mu_{t_k^n} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^n, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Das folgende Theorem gibt die gleichmäßige Konvergenz des Filters  $M^{C_n}$  und  $Q^{C_n}$  bei wachsender Anzahl von Expertenmeinungen und konstanter Expertenvarianz gegen die Drift  $\mu$  bzw.  $Q^F \equiv 0$ .

**Theorem 3.3.5.** *Unter den oben erwähnten Voraussetzungen gilt folgendes:*

- Für die bedingte Kovarianzmatrix

$$\lim_{\substack{\Delta_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \|Q_t^{C_n}\| = 0, \quad \text{für alle } t \in (0, T].$$

- Für die bedingte Erwartung

$$\lim_{\substack{\Delta_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \mathbb{E} \left[ \|M_t^{C_n} - \mu_t\|^2 \right] = 0, \quad \text{für alle } t \in (0, T].$$

*Beweis.* Für den eindimensionalen Fall siehe Proposition 4.3 in Gabih, Kondakji, Sass, und Wunderlich [27] und für den mehrdimensionalen Fall siehe Theorem 3.4. in Sass, Westphal und Wunderlich [67].  $\square$

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage des letzten Theorems sind in Abbildung 8.7 zu sehen.

#### Zufällige Informationszeitpunkte

Wie im Abschnitt 3.3.1 definieren wir hier auch eine Familie von homogenen Poisson-Prozessen  $((N_t^\lambda)_{t \in [0, T]})_{\lambda > 0}$ , zu der eine Familie von zufälligen Sprungzeitpunkten  $(\mathcal{T}^\lambda)_{\lambda > 0}$  mit  $\mathcal{T}^\lambda := \{0 < T_1^\lambda, T_2^\lambda, \dots, T_{N_T^\lambda}^\lambda \leq T\}$  gehört. Wir nehmen an, dass die Poisson-Prozesse von allen anderen stochastischen Prozessen unabhängig sind.

Der Familie der Informationszeitpunkte  $(\mathcal{T}^\lambda)_{\lambda > 0}$  steht eine Familie von Expertenmeinungen  $(\mathcal{Z}^\lambda)_{\lambda > 0}$  mit  $\mathcal{Z}^\lambda := \{Z_1^\lambda, Z_2^\lambda, \dots, Z_{N_T^\lambda}^\lambda\}$  gegenüber. Die Expertenmeinungen sind aus (2.13) zu entnehmen

$$Z_k^\lambda = \mu_{t_k^\lambda} + \Gamma^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^\lambda, \quad k = 1, \dots, N_T^\lambda.$$

Bei dieser Untersuchung sind die standardnormalverteilten Zufallsgrößen  $\varepsilon_k^\lambda$  von allen anderen weiteren Zufallsgrößen bzw. stochastischen Prozessen unabhängig.

Das folgende Theorem zeigt die Konvergenz des Filters  $M^{C_\lambda}$  und  $Q^{C_\lambda}$  bei wachsender Anzahl von Expertenmeinungen und konstanter Expertenvarianz gegen die Drift  $\mu$  bzw.  $Q^F \equiv 0$ .

**Theorem 3.3.6.** *Unter den obigen Voraussetzungen und für jedes  $\bar{t} \in (0, T]$  gilt folgendes:*

1) *Es existieren eine Konstante  $k_0 > 0$  und ein  $\lambda_0 > 0$  mit*

$$E\left[\|Q_t^{C\lambda}\|\right] \leq \frac{k_0}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{für } \lambda \geq \lambda_0, \quad t \geq \bar{t}. \quad (3.31)$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E\left[\|Q_t^{C\lambda}\|\right] = 0 \quad \text{für } t \geq \bar{t}.$$

2) *Es existieren eine Konstante  $k'_0 > 0$  und ein  $\lambda'_0 > 0$  mit*

$$E\left[\|M_t^{C\lambda} - \mu_t\|^2\right] \leq \frac{k'_0}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{für } \lambda \geq \lambda'_0, \quad t \geq \bar{t}. \quad (3.32)$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E\left[\|M_t^{C\lambda} - \mu_t\|^2\right] = 0, \quad \text{für } t \geq \bar{t}.$$

*Beweis.* Siehe Gabih, Kondakji und Wunderlich [28]. □

Numerische Ergebnisse zur theoretischen Aussage des letzten Theorems sind in Abbildung 8.8 zu sehen.

Aus Abschnitt 3.3.2 kann man schlussfolgern, dass die gewonnenen Informationen aus den diskreten Experten sowohl zu deterministischen als auch zu zufälligen Zeitpunkten bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Experten den gleichen Wert für die Schätzung der Drift haben, den der voll informierte Investor hat. Allerdings muss hierfür gelten, dass die Kovarianz der Experten  $\Gamma$  konstant ist.



---

### Nutzenmaximierungsproblem

---

Dieses Kapitel widmet sich dem Nutzenmaximierungsproblem für die verschiedenen Informations-Regimes. Es werden sowohl der voll informierte Investor als auch die partiell informierten Investoren betrachtet, für welche Kapitel 3 die zugehörigen Filter für die Drift bereitgestellt hat. Nach der Problemdarstellung in Abschnitt 4.1 werden in Abschnitt 4.2 die Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems untersucht und Bedingungen an die Modellparameter gestellt, unter denen die Zielfunktion beschränkt ist. Dies führt für den Potenz-Nutzen mit einer gegenüber der logarithmischen Nutzenfunktion größeren Risikoaversion, d.h. für Werte des Parameters der Nutzenfunktion  $\theta$  aus  $(0, 1)$ , zu einer Einschränkung an die Menge der zulässigen Modellparameter. Anderenfalls können sogenannte Nirvana-Strategien nicht ausgeschlossen werden. Abschnitt 4.3 widmet sich dem Vergleich der verschiedenen Informations-Regimes und der Bewertung der den Investoren zur Verfügung stehenden Informationen in monetären Einheiten. Dieser Vergleich beruht auf der Betrachtung des notwendigen Anfangskapitals zur Erzielung eines vorgegebenen erwarteten Nutzen. Es werden Maße zur Bewertung des Informationsverlustes eines partiell informierten Investors gegenüber dem voll informierten Investor sowie zur Bestimmung des Preises der zusätzlichen Expertenmeinungen konstruiert.

Für den Fall der logarithmischen Nutzenfunktion gelingt eine vergleichsweise einfache und weitgehend geschlossene Lösung des Nutzenmaximierungsproblems, welche in Abschnitt 4.4 präsentiert wird. Diese Lösungstechniken versagen dagegen für den Fall des Potenz-Nutzens. Hierfür werden in Abschnitt 4.5 Methoden des Dynamic Programming eingesetzt, um eine notwendige Optimalitätsbedingung in Form der Dynamic Programming Gleichung für die Wertfunktion abzuleiten. Dabei wird mit Hilfe einer Maßwechseltechnik das ursprüngliche Optimierungsproblem in ein risikosensitives stochastisches Steuerungsproblem überführt, dessen gesteuerter Zustand lediglich aus dem Filter für die Drift besteht.

## 4.1 Problemdarstellung

In diesem Abschnitt wollen wir das Optimierungsproblem für die verschiedenen Informations-Regimes präsentieren, dabei unterscheiden wir im Wesentlichen zwischen zwei Aspekten. Zum Einen ist das Optimierungsproblem aus (2.20)

$$\mathcal{V}_0^F := \sup_{\pi \in \mathcal{A}^F} \mathcal{J}_0^F(\pi), \quad (4.1)$$

$$\text{mit } \mathcal{J}_0^F(\pi) := \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^F \right], \quad \pi \in \mathcal{A}^F \quad (4.2)$$

ein Optimierungsproblem unter voller Informationen, bei dem alle Komponenten der Vermögensgleichung aus (2.16)

$$dX_t^\pi = \alpha_X^F(X_t^\pi, \mu, \pi_t) dt + \beta_X^F(X_t^\pi, \pi_t) dW_t^R, \quad X_0^\pi = x_0 > 0,$$

mit  $\alpha_X^F(x, m, p) := xp'm$  und  $\beta_X^F(x, p) := xp'\sigma_R$ , sowie die Drift aus (2.3)

$$d\mu_t = \kappa(\bar{\mu} - \mu_t)dt + \sigma_\mu dW_t^\mu, \quad \mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0),$$

an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^F$  adaptiert sind. Zum anderen ist das Optimierungsproblem (2.22)

$$\mathcal{V}_0^H := \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathcal{J}_0^H(\pi), \quad H = R, D, C_n, C_\lambda, \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \mathcal{J}_0^H(\pi) := \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right], \quad \pi \in \mathcal{A}^H, \quad (4.4)$$

ein Optimierungsproblem unter partieller Information, bei dem der Drift-Koeffizient  $\alpha_X^F$  in der Vermögensgleichung (2.16) vom unbeobachtbaren Driftprozess  $\mu$  abhängt, der nicht an die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^H = (\mathcal{F}_t^H)_{t \in [0, T]}$  adaptiert ist. Da wir das Optimierungsproblem mit der Dynamic-Programming-Methode lösen wollen, müssen wir es in ein Optimierungsproblem unter voller Information überführen (siehe Abschnitt 3 in Rieder und Bäuerle [62] oder Abschnitt 2.4 in Frey, Gabih und Wunderlich [26]). Die Transformation des Optimierungsproblems unter partieller Information in eines unter voller Information geschieht, in dem wir den Drift-Koeffizient  $\alpha_X^F$  in der Vermögensgleichung (2.16) mit Hilfe des aus Kapitel 3 erhaltenen Filters und des Innovationsprozess wie folgt ausdrücken

$$dX_t^\pi = \underline{\alpha}_X^H(X_t^\pi, M_t^H, \pi_t) ds + \beta_X^H(X_t^\pi, \pi_t) d\widetilde{W}_t^H, \quad X_0^\pi = x_0 > 0, \quad (4.5)$$

mit  $\underline{\alpha}_X^H(x, m, p) = xp'm$ ,  $\beta_X^H(x, p) = xp'\sigma_x$  und  $\sigma_X$  aus (2.24)

$$\sigma_X = \sigma_X^H := \begin{cases} \Sigma_R^{\frac{1}{2}}; & H = R, C_n, C_\lambda, \\ \left( \Sigma_R^{\frac{1}{2}} \quad O_{d \times d} \right); & H = D. \end{cases}$$

Mit dieser Transformation wurde der Zustandsprozess um den Filter bzw. die zwei Kenngrößen  $(M^H, Q^H)$  erweitert, deren Dynamik in (3.26) und (3.27) durch

$$\begin{aligned} dM_t^H &= \underline{\alpha}_M^H(M_t^H) dt + \beta_M^H(Q_t^H) d\widetilde{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^H(Q_{t-}^H, u) \widetilde{I}^H(dt, du), & M_0^H &= m_0, \\ dQ_t^H &= \alpha_Q^H(Q_t^H) dt + \beta_Q^H(Q_t^H) d\widetilde{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^H(Q_{t-}^H) \widetilde{I}^H(dt, du), & Q_0^H &= q_0 \end{aligned}$$

gegeben war.

## 4.2 Wohlgestelltheit des Kontrollproblems

Bevor wir zur Lösung des Optimierungsproblems sowohl für den voll informierten Investor  $H = F$  als auch für den partiell informierten Investor  $H$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  kommen, müssen wir sicherstellen, dass das untersuchte Kontrollproblem wohlgestellt ist. Wir beschreiben das Modell des Finanzmarktes durch den Parameter

$$p := \{T, \theta, \sigma_R, \sigma_\mu, \kappa, \bar{\mu}, x_0, \bar{m}_0, \bar{q}_0, m_0, q_0\} \quad (4.6)$$

mit Werten in einem **Parameterraum**  $\mathcal{P}$  und suchen Bedingungen an den Parameter  $p$ , unter denen das Nutzenmaximierungsproblem wohlgestellt ist. Der Wertebereich der Parameter in (4.6) ist in den früheren Kapiteln eingeführt.

An dieser Stelle ist es darauf hinzuweisen, dass der  $F$ -Investor die Drift zu jedem Zeitpunkt, insbesondere zum Zeitpunkt  $t = 0$  beobachten kann, somit gilt für ihn  $m_0 = \mu_0(\omega)$  und  $q_0 = 0$ , während der partiell informierte Investor nur die bedingte Verteilung der Drift gegeben die Investor-Filtration  $\mathcal{F}_0^H$  kennt. Diese ist die Normalverteilung mit Mittelwert  $M_0^H = m_0$  und Kovarianz  $Q_0^H = q_0$ .

Aus Gründen der Einfachheit werden wir in folgenden Untersuchungen die Menge der zulässigen Strategien nur mit  $\mathcal{A}^H$  bezeichnen. Dabei meinen wir die Menge der zulässigen Strategien in (2.21) für den logarithmischen Nutzen und die Menge der zulässigen Strategien in (2.25) für den Potenz-Nutzen.

**Definition 4.2.1.** Für ein gegebenes Finanzmarktmodell mit Parameter  $p$  aus dem Parameterraum  $\mathcal{P}$  heißt das Nutzenmaximierungsproblem (4.1) für den voll informierten Investor bzw. das Nutzenmaximierungsproblem (4.3) für den partiell informierten Investor **wohlgestellt**, wenn eine Konstante  $C_{\mathcal{J}}^H \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $\mathcal{J}_0^H(\pi) \leq C_{\mathcal{J}}^H$  für alle Strategien  $\pi \in \mathcal{A}^H$  gilt.

Aus der Wohlgestelltheit folgt, dass auch für die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^H \leq C_{\mathcal{J}}^H$  gilt. Falls es keine solche Konstante  $C_{\mathcal{J}}^H$  gibt, dann existieren sogenannte **Nirvana-Strategien**. Dies sind zulässige Strategien  $\pi^N \in \mathcal{A}^H$ , welche (in endlicher Zeit  $T$ ) ein Endvermögen  $X_T^{\pi^N}$  generieren, das eine Verteilung besitzt, für die der erwartete Nutzen  $E[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi^N}) | \mathcal{F}_0^H]$  unendlich ist bzw. größer als jede vorgegebene Schranke gemacht werden kann. Dabei muss das Endvermögen  $X_T^{\pi^N}$  selbst

nicht unendlich sein.  
Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{P}_0^H := \{p \in \mathcal{P}; \quad \mathcal{V}_0^H \leq C_{\mathcal{J}}^H\} \quad (4.7)$$

die Menge der Parameter des Finanzmarktmodells, für die das Nutzenmaximierungsproblem (NMP) wohlgestellt ist. Wird nun das NMP nur für ein Finanzmarktmodell mit Parametern  $p$  aus dem Parameterraum  $\mathcal{P}_0^H$  betrachtet, dann ist sichergestellt, dass das NMP wohlgestellt ist.

Wir suchen nun geeignete Bedingungen an die Modellparameter, die die Wohlgestelltheit sichern. Für diese Untersuchung führen wir in diesem Abschnitt einen weiteren Investor ein, den wir den  $G$ -Investor nennen werden. Während die Filtration  $\mathbb{F}^F$  aus dem Rendite- und dem Drift-Prozess erzeugt wird, setzen wir die Filtration  $\mathbb{F}^G$  gleich der Hauptfiltration  $\mathbb{G}$ , an die all Prozesse des Finanzmarkts adaptiert sind. Weiterhin definieren wir die Menge der zulässigen Strategien  $\mathcal{A}^G$ , die Koeffizienten der Vermögensgleichung, die Zielfunktion  $\mathcal{J}_0^G$  und die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^G$  analog zu den entsprechenden Definitionen im Fall  $H = F$ . Danach werden wir Abschätzungen der Zielfunktion  $\mathcal{J}_0^H$  des  $H$ -Investors mit  $H = F, R, D, C_n, C_\lambda$  durch die Zielfunktion  $\mathcal{J}_0^H$  des  $G$ -Investors untersuchen. Dafür wählen wir eine Strategie  $\pi \in \mathcal{A}^H$  und aus der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung mit  $\mathcal{F}_0^H \subseteq \mathcal{F}_0^G$  erhalten wir

$$\mathcal{J}_0^H(\pi) = \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^G \right] \middle| \mathcal{F}_0^H \right] = \mathbb{E} \left[ \mathcal{J}_0^G(\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right]. \quad (4.8)$$

Aus Eigenschaften des Supremums und der Tatsache  $\mathcal{A}^H \subseteq \mathcal{A}^G$  bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^H &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathcal{J}_0^H(\pi) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \mathcal{J}_0^G(\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathcal{J}_0^G(\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{\pi \in \mathcal{A}^G} \mathcal{J}_0^G(\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right] = \mathbb{E} \left[ \mathcal{V}_0^G \middle| \mathcal{F}_0^H \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Im Folgenden werden wir untersuchen, unter welcher Voraussetzung die Funktion  $\mathcal{V}_0^G$  beschränkt ist. Dafür präsentieren wir zunächst das folgende Hilfslemma, in dem wir mit  $\mu_u^{t,m}$  die Drift zum Zeitpunkt  $u \in [t, T]$  bezeichnen, die zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  den Anfangswert  $m$  hat.

**Lemma 4.2.2.** Seien  $c_\Psi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , der stochastischen Prozess  $(\Psi_s^{t,z,m})_{0 \leq t \leq s \leq T}$  gegeben durch

$$\Psi_s^{t,z,m} := z \exp \left\{ c_\Psi \int_t^s (\mu_u^{t,m})' \Sigma_R^{-1} \mu_u^{t,m} du \right\} \quad (4.10)$$

und die Funktion  $g_b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  gegeben durch  $g_b(t, m) := \mathbb{E} \left[ \Psi_T^{t,1,m} \right]$ , für  $t \in [0, T]$  und  $m \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt

$$g_b(t, m) = \exp \left\{ m' A_b(t) m + B_b'(t) m + C_b(t) \right\}. \quad (4.11)$$

Dabei sind  $A_b(t)$ ,  $B_b(t)$  und  $C_b(t)$  Funktionen in  $t \in [0, T]$ , die Werte in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}$

annehmen und der folgenden Dynamik genügen

$$\frac{dA_b(t)}{dt} = -2A_b(t)\Sigma_\mu A_b(t) + \kappa' A_b(t) + A_b(t)\kappa - c_\Psi \Sigma_R^{-1}; \quad A_b(T) = 0_{d \times d}, \quad (4.12)$$

$$\frac{dB_b(t)}{dt} = -2A_b(t)\kappa\bar{\mu} + [\kappa' - 2A_b(t)\Sigma_\mu] B_b(t); \quad B_b(T) = 0_{d \times 1}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dC_b(t)}{dt} = -\frac{1}{2}B_b'(t)\Sigma_\mu B_b(t) - B_b'(t)\kappa\bar{\mu} - \text{tr}\{\Sigma_\mu A_b(t)\}; \quad C_b(T) = 0. \quad (4.14)$$

*Beweis.* Sei zunächst die Funktion  $G_b \in C^{1,2}$  wie folgt definiert

$$G_b : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+; \quad G_b(t, z, m) := \mathbb{E} \left[ \Psi_T^{t,z,m} \right]. \quad (4.15)$$

Dann gilt  $G_b(T, z, m) = \mathbb{E} \left[ \xi_T^{T,z,m} \right] = \mathbb{E} [z] = z$ .

Die Dynamik der Drift  $\mu$  bzw. des Prozesses  $\Psi$  für  $s \in [t, T]$  ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} d\mu_s^{t,m} \\ d\Psi_s^{t,z,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(\bar{\mu} - \mu_s^{t,m}) \\ c_\Psi \Psi_s^{t,z,m} (\mu_s^{t,m})' \Sigma_R^{-1} \mu_s^{t,m} \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_s^\mu \\ dW_s^\Psi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mu_t^{t,m} \\ \Psi_t^{t,z,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ z \end{pmatrix},$$

wobei  $W^\Psi = (W_t^\Psi)_{t \in [0, T]}$  ein eindimensionaler Wiener-Prozess ist. Die Drift- und Diffusionskoeffizienten der letzten Gleichung genügen der Lipschitz- und Wachstumsbedingung und die Feynman-Kac-Formel für die Erwartung aus (4.15) liefert folgende lineare Differentialgleichung für  $G_b$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} G_b(t, z, m) + \nabla'_m G_b(t, z, m) \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \nabla_{mm} G_b(t, z, m) \Sigma_\mu \} + c_\Psi z m' \Sigma_R^{-1} m \frac{\partial G_b(t, z, m)}{\partial z} \quad (4.16)$$

mit der Endbedingung  $G_b(T, z, m) = z$ .

Für die Lösung von (4.16) machen wir jetzt den folgenden Separationsansatz

$$G_b(t, z, m) = z g_b(t, m), \quad g_b(T, m) = 1. \quad (4.17)$$

Zum Zeitpunkt  $t$  mit den Anfangswerten  $\mu_t^{t,m} = m$  und  $\Psi_t^{t,1,m} = 1$  erhalten wir dann

$$\mathbb{E} \left[ \Psi_T^{t,1,m} \right] = G_b(t, 1, m) = g_b(t, m),$$

das heißt, die im Lemma definierte Funktion  $g_b$ . Das Einsetzen von (4.17) in (4.16) liefert die folgende lineare parabolische PDE für  $g_b$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} g_b(t, m) + \nabla'_m g_b(t, m) \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \nabla_{mm} g_b(t, m) \Sigma_\mu \} + c_\Psi m' \Sigma_R^{-1} m g_b(t, m) \quad (4.18)$$

mit der Endbedingung  $g_b(T, m) = 1$ . Für die Lösung von (4.18) machen wir den folgenden Ansatz

$$g_b(t, m) = \exp \left\{ m' A_b(t) m + B_b'(t) m + C_b(t) \right\}. \quad (4.19)$$

Das Einsetzen von (4.19) in (4.18) liefert das System von ODEs für  $A_b$ ,  $B_b$  und  $C_b$ , welches in (4.12), (4.13) und (4.14) gegeben ist.  $\square$

**Lemma 4.2.3.** *Die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^G$  besitzt folgende Eigenschaft:*

- Für den logarithmischen Nutzen ist die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^G$  immer beschränkt.
- Für den Potenz-Nutzen mit  $\theta \in (-\infty, 0)$  gilt für die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^G \leq 0$ .
- Für den Potenz-Nutzen mit  $\theta \in (0, 1)$  gilt für die Wertfunktion  $\mathcal{V}_0^G$  die Abschätzung

$$\mathcal{V}_0^G \leq \frac{1}{\theta} x_0^\theta \left( g_b(0, \mu_0) \right)^{1-\theta}. \quad (4.20)$$

Dabei ist die Funktion  $g_b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  in (4.11) gegeben und  $\mu_0$  ist der dem  $F$ -Investor bekannte Anfangswert der Drift. Die auf  $[0, T]$  definierten Funktionen  $A_b(t)$ ,  $B_b(t)$  und  $C_b(t)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}$  genügen den Differentialgleichungen (4.12), (4.13) und (4.14) für  $c_\Psi = \frac{\theta}{2(1-\theta)^2}$ .

*Beweis.* Für die zweite Aussage in diesem Lemma ist der Beweis trivial, da für  $\theta \in (-\infty, 0)$  die Potenz-Nutzenfunktion  $\mathcal{U}_\theta(x) < 0$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$  gilt. Für die erste und dritte Aussagen orientieren wir uns der Arbeit von Angoshtari [1].

Sei  $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$  ein stochastischer Prozess, der durch die folgende SDE gegeben ist

$$d\xi_t = \xi_t \mu_t' \Sigma_R^{-1} \sigma_R dW_t^R, \quad \xi_0 = 1, \quad \mu_0 = \bar{m}_0, \quad (4.21)$$

oder in explizierter Form wie folgt

$$\xi_t = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \left\| \mu_s' \Sigma_R^{-1} \sigma_R \right\|^2 ds - \int_0^t \mu_s' \Sigma_R^{-1} \sigma_R dW_s^R \right\}. \quad (4.22)$$

Wir bezeichnen wir zum Zeitpunkt  $t_0 \in [0, T]$  mit  $\mu_t^{t_0, \bar{m}}$  die Lösung der Drift-Gleichung (2.3) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswert  $\bar{m}$ , mit  $X_t^{\pi, t_0, x, \bar{m}}$  die Lösung der Vermögensgleichung (2.16) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswerten  $(x, \bar{m})$  und mit  $\xi_t^{t_0, \bar{m}}$  die Lösung von (4.21) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswerten  $(\bar{m})$ . Die Itô-Produktregel liefert

$$\begin{aligned} d(X^{\pi, 0, x, \bar{m}_0} \xi^{0, 1, \bar{m}_0})_t &= X_t^{\pi, 0, x, \bar{m}_0} d\xi_t^{0, 1, \bar{m}_0} + \xi_t^{0, 1, \bar{m}_0} dX_t^{\pi, 0, x, \bar{m}_0} + d\langle X^{\pi, 0, x, \bar{m}_0}, \xi^{0, 1, \bar{m}_0} \rangle_t \\ &= \xi_t^{0, 1, \bar{m}_0} X_t^{\pi, 0, x, \bar{m}_0} [\pi_t' \sigma_R - \mu_t^{0, \bar{m}_0} \Sigma_R^{-1} \sigma_R] dW_t^R. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aus Fatou's Lemma folgt, dass der nicht-negative Prozess  $(X^\pi \xi)_t$  ein Supermartingal ist, deshalb gilt

$$x - \mathbb{E}[X_T^{\pi, 0, x, \bar{m}_0} \xi_T^{0, 1, \bar{m}_0}] \geq 0. \quad (4.24)$$

Auf der anderen Seite sei  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  die zugehörige Legendre-Fenchel-Transformation der Nutzen-Function  $\mathcal{U}_\theta(x)$  definiert für jedes  $w > 0$  durch

$$f(w) := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{\mathcal{U}_\theta(x) - xw\} = \begin{cases} -1 - \ln w, & \mathcal{U}_\theta(x) = \ln x, \\ \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) w^{-\frac{\theta}{1-\theta}}, & \mathcal{U}_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta. \end{cases} \quad (4.25)$$

Da  $\xi_T^{0,1,\bar{m}_0} > 0$  ist, gilt für jedes  $w > 0$

$$f(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \{\mathcal{U}_\theta(x) - x \xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w\} \geq \mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0}) - X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0} \xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w. \quad (4.26)$$

Mit Hilfe von (4.24) erhalten wir für jedes  $w > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0})] &\leq \mathbb{E}[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0})] + w \left( x - \mathbb{E}[X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0} \xi_T^{0,1,\bar{m}_0}] \right) \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0}) - X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0} \xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w] + xw \\ &\leq \mathbb{E}[f(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w)] + xw, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (4.26) folgt.

Wir verwenden jetzt (4.25) für den Term  $f(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0} w)$  und erhalten

$$\mathbb{E}[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0})] \leq \begin{cases} -1 - \ln w - \mathbb{E}[\ln \xi_T^{0,1,\bar{m}_0}] + xw, & \mathcal{U}_\theta(x) = \ln x, \\ \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) w^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \mathbb{E}\left[\left(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0}\right)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\right] + xw, & \mathcal{U}_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta. \end{cases} \quad (4.27)$$

Da die letzte Ungleichung für alle zulässigen Strategien  $\pi \in \mathcal{A}^G$  und für jedes  $w > 0$  gilt, können wir auf der linken Seite das Supremum über alle Strategien  $\pi \in \mathcal{A}^G$  und auf der rechten Seite das Infimum über alle  $w > 0$  bilden und wir erhalten dann

$$\mathcal{V}_0^G = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^G} \mathbb{E}[\mathcal{U}_\theta(X_T^{\pi,0,x,\bar{m}_0})] \leq \begin{cases} \ln x - \mathbb{E}[\ln \xi_T^{0,1,\bar{m}_0}], & \mathcal{U}_\theta(x) = \ln x, \\ \frac{1}{\theta} x^\theta \left( \mathbb{E}\left[\left(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0}\right)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\right] \right)^{1-\theta}, & \mathcal{U}_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^\theta. \end{cases} \quad (4.28)$$

Es bleibt nur noch zu untersuchen, wann  $\mathbb{E}[\ln \xi_T^{0,1,\bar{m}_0}]$  bzw.  $\mathbb{E}\left[\left(\xi_T^{0,1,\bar{m}_0}\right)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\right]$  beschränkt sind. Für den logarithmischen Nutzen folgt aus (4.22) und auf Grund der quadratischen Integrierbar-

keit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses sowie der positiven Definitheit der Matrix  $\Sigma_R$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\ln \xi_T^{0,1,\bar{m}_0}] &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|(\mu_s^{0,\bar{m}_0})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R\|^2 ds \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\mu_s^{0,\bar{m}_0})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R dW_s^R \right] \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|(\mu_s^{0,\bar{m}_0})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R\|^2 ds \right] + 0 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \mathbb{E} \left[ (\mu_s^{0,\bar{m}_0})' \Sigma_R^{-1} \mu_s^{0,\bar{m}_0} \right] ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Sigma_R^{-1}) \int_0^T \mathbb{E} \left[ (\mu_s^{0,\bar{m}_0})' \mu_s^{0,\bar{m}_0} \right] ds < \infty.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dabei bezeichnet  $\lambda_{\max}(\Sigma_R^{-1})$  den größten Eigenwert der Matrix  $\Sigma_R^{-1}$ , für den die Relation  $\lambda_{\max}(\Sigma_R^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma_R)} < \infty$  gilt.  $\lambda_{\min}(\Sigma_R) > 0$  bezeichnet den kleinsten Eigenwert der positiv definiten Matrix  $\Sigma_R$ .

Für den Potenz-Nutzen in (4.28) können wir  $(\xi_T^{0,1,m})^{\frac{-\theta}{1-\theta}}$  wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}
 (\xi_T^{0,1,m})^{\frac{-\theta}{1-\theta}} &:= \exp \left\{ \frac{\theta}{1-\theta} \left( \frac{1}{2} \int_0^T \|(\mu_s^{0,m})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R\|^2 ds + \int_0^T (\mu_s^{0,m})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R dW_s^R \right) \right\} \\
 &= \Lambda_T \cdot \Psi_T^{0,1,m},
 \end{aligned}$$

wobei  $\Psi_T^{0,1,m}$  aus (4.10) mit  $c_\Psi = \frac{\theta}{2(1-\theta)^2}$  folgt und der Term  $\Lambda_T$  wie folgt gegeben ist

$$\Lambda_T := \exp \left\{ \int_0^T \frac{\theta}{1-\theta} (\mu_s^{0,m})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R dW_s^R - \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \frac{\theta}{1-\theta} (\mu_s^{0,m})' \Sigma_R^{-1} \sigma_R \right\|^2 ds \right\}.$$

Nach dieser Darstellung können wir ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^*$  durch die Beziehung  $\frac{dP^*}{dP} = \Lambda_T$  einführen und den gesuchten Erwartungswert aus (4.28) folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ (\xi_T^{0,1,m})^{\frac{-\theta}{1-\theta}} \right] &= \mathbb{E} \left[ \Lambda_T \cdot \Psi_T^{0,1,m} \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[ \Psi_T^{0,1,m} \right].
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\mathbb{E}^*$  den Erwartungswert bezüglich des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes, welcher nach Lemma 4.2.2 durch (4.11) ausgedrückt werden kann.  $\square$

Mit Hinblick auf das letzte Lemma können wir die Menge der zulässigen Parameter für den voll informierten Investor  $H = G$  wie folgt definieren

$$\mathcal{P}^G := \begin{cases} \mathcal{P}, & \text{für den logarithmischen Nutzen,} \\ \mathcal{P}, & \text{für den Potenz-Nutzen mit } \theta < 0, \\ \{p \in \mathcal{P}, \quad ; g_b(0, \mu_0) \text{ aus (4.11) beschränkt}\}, & \text{für den Potenz-Nutzen mit } \theta \in (0, 1). \end{cases} \tag{4.30}$$



Die Differentialgleichung (4.12) ist eine Riccati-Gleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung  $A_b$  nur unter bestimmten Bedingungen beschränkt ist. Diese Bedingungen werden wir im folgenden Lemma im eindimensionalen Fall  $d = 1$  formulieren. Dafür definieren wir die Diskriminante

$$\Delta_{c_\Psi} := 4\kappa^2 \left( 1 - 2c_\Psi \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_R} \right), \quad \delta_{c_\Psi} := \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_{c_\Psi}|}. \quad (4.31)$$

**Lemma 4.2.4.** *Sei  $d = 1$ , dann gelten folgende Aussagen:*

- *Ist die Diskriminante  $\Delta_{c_\Psi} \geq 0$ , so besitzt die Differentialgleichung (4.12) in  $t \in [0, T]$  eine beschränkte Lösung für alle  $T > 0$ .*
- *Ist die Diskriminante  $\Delta_{c_\Psi} < 0$ , so besitzt die Differentialgleichung (4.12) eine beschränkte Lösung nur für  $t \in (\max\{0, T_{c_\Psi}^E\}, T]$  mit*

$$T_{c_\Psi}^E := T - \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\kappa}{\delta_{c_\Psi}}}{\delta_{c_\Psi}}. \quad (4.32)$$

*Beweis.* Der Beweis ist im Anhang gegeben. Für die erste Aussage siehe Lemma A.1.3 bzw. Lemma A.2.2 und für die zweite Aussage siehe Lemma A.2.3.  $\square$

Damit muss laut Lemma 4.2.4 für  $\theta \in (0, 1)$  die Diskriminante  $\Delta_{c_\Psi} \geq 0$  sein, um auf dem Investitionszeitraum  $[0, T]$  für einen beliebigen Investitionszeitraum  $T > 0$  eine beschränkte Lösung für die Differentialgleichung (4.12) zu garantieren. Ist die Diskriminante  $\Delta_{c_\Psi} < 0$ , so können wir nur auf dem Intervall  $(\max\{0, T_{c_\Psi}^E\}, T]$  eine beschränkte Lösung für die Differentialgleichung (4.12) sichern. Doch damit das Optimierungsproblem wohlgestellt wird, muss in diesem Fall der Explosionszeitpunkt  $T_{c_\Psi}^E$  kleiner als Null sein, was mit Hinblick auf (4.32) bedeutet, dass der Investitionszeitraum  $T < T^{up}$  sein muss, mit

$$T^{up} := \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\kappa}{\delta_{c_\Psi}}}{\delta_{c_\Psi}}.$$

In Abbildung 8.1 finden sich einige Ergebnisse zur graphischen Darstellung der Menge der zulässigen Parameter.

Hat (4.12) eine beschränkte Lösung, so kann man zeigen, dass die lineare Differentialgleichung (4.13) sowie (4.14) auch beschränkte Lösungen besitzen. Im mehrdimensionalen Fall  $d > 1$  haben wir keine geschlossene Lösung für die Riccati-Gleichung, daher ist es schwierig, explizite Bedingungen für die Beschränktheit der Lösung  $A_b$  von (4.12) wie im letzten Lemma zu erhalten.

Von (4.30) ausgehend wollen wir nun die Bedingung an den  $H$ -Investor bzw. die Menge der zulässigen Parameter  $\mathcal{P}^H$  mit  $H = F, R, D, C_n, C_\lambda$  herausfinden. Dafür setzen wir die Abschätzung aus (4.20) in (4.9) ein und erhalten

$$\mathcal{J}_0^H(\pi) \leq \mathcal{V}_0^H \leq \frac{1}{\theta} x_0^\theta \mathbb{E} \left[ \left( g_b(0, \mu_0) \right)^{1-\theta} \middle| \mathcal{F}_0^H \right], \quad \text{für alle } \pi \in \mathcal{A}^H.$$

Für den  $F$ -Investor ist die Drift bekannt und deshalb erhalten wir aus der letzten Ungleichung

$$\mathcal{V}_0^F \leq \frac{1}{\theta} x_0^\theta \mathbb{E} \left[ \left( g_b(0, \mu_0) \right)^{1-\theta} \middle| \mathcal{F}_0^F \right] = \frac{1}{\theta} x_0^\theta \left( g_b(0, \mu_0) \right)^{1-\theta}.$$

Dies bedeutet, dass die Menge der zulässigen Parameter für den  $F$ -Investor mit der für den  $G$ -Investor in (4.30) übereinstimmt, mit anderen Worten gilt

$$\mathcal{P}^F = \mathcal{P}^G. \quad (4.33)$$

Für die restlichen Investoren ist der Anfangswert der Drift  $\mu_0$  unter  $\mathcal{F}_0^H$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  normalverteilt mit Mittelwert  $M_0^H$  und bedingter Kovarianz  $Q_0^H$  d.h., die bedingte Verteilung von  $\mu_0$  gegeben  $\mathcal{F}_0^H$  ist  $\mathcal{N}(M_0^H, Q_0^H)$ . Bei gegebenem Anfangswert  $M_0^H = m_0$  und  $Q_0^H = q_0$  können wir  $\mu_0$  darstellen als  $\mu_0 = m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon$  mit  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ , welche von der Investor-Filtration  $\mathcal{F}_0^H$  unabhängig sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^H &\leq \frac{1}{\theta} x_0^\theta \mathbb{E} \left[ \left( g_b(0, \mu_0) \right)^{1-\theta} \middle| \mathcal{F}_0^H \right] = \frac{1}{\theta} x_0^\theta \mathbb{E} \left[ g_b(0, m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon) \right]^{1-\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} x_0^\theta \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon)' A_b(0) (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon) + B_b'(0) (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon) + C_b(0) \right\} \right]^{1-\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} x_0^\theta (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x' x \right\} \left[ \exp \left\{ (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} x)' A_b(0) (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_b'(0) (m_0 + q_0^{\frac{1}{2}} x) + C_b(0) \right\} \right]^{1-\theta} dx \\ &= \frac{1}{\theta} x_0^\theta \left( g_b(0, m_0) \right)^{1-\theta} \cdot e^{m_g' \Sigma_g m_g} \cdot (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_g)' \Sigma_g^{-1} (x - m_g) \right\} dx \end{aligned}$$

mit  $\Sigma_g := \left( I_d - 2(1 - \theta) A_b(0) q_0 \right)^{-1}$ ,  $m_g := (1 - \theta) \Sigma_g q_0^{\frac{1}{2}} \left( 2A_b(0) m_0 + B_b(0) \right)$ .

Das Integral  $(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_g)' \Sigma_g^{-1} (x - m_g) \right\} dx$  ist gleich  $\det(\Sigma_g)^{\frac{1}{2}}$  und damit

beschränkt, wenn die Matrix  $\Sigma_g = \left( I_d - 2(1 - \theta) A_b(0) q_0 \right)^{-1}$  positiv definit ist, anderenfalls existiert es nicht. Dies liefert

$$\mathcal{V}_0^H \leq \frac{1}{\theta} x_0^\theta \left( g_b(0, m_0) \right)^{1-\theta} \cdot e^{m_g' \Sigma_g^{-1} m_g} \cdot \det(\Sigma_g)^{-\frac{1}{2}} =: C_{\mathcal{F}}^H.$$

Dies zeigt, dass für das Nutzenmaximierungsprobleme unter partieller Information die zulässigen Parameter des Finanzmarktmodells eine zusätzliche Bedingung an die bedingte Kovarianzmatrix  $q_0^H$  für den Anfangswert des Filters erfüllen müssen, also

$$\mathcal{P}^H := \mathcal{P}^G \cap \left\{ p \in \mathcal{P}, \quad \text{sodass } \left( I_d - 2(1 - \theta) A_b(0) q_0 \right)^{-1} \text{ positiv definit ist.} \right\}. \quad (4.34)$$

Für das Informations-Regime  $H = F$  wurde  $q_0 = 0$  gesetzt und wegen  $\left( I_d - 2A_b(0) q_0 \right) = I_d$  ist die zusätzliche Bedingung stets erfüllt. Somit gilt (4.34) auch für  $H = F$  und liefert  $\mathcal{P}^F = \mathcal{P}^G$  wie in (4.33).

### 4.3 Monetärer Wert der Information

Um den monetären Wert der Informationen aus den Beobachtungen der Rendite und den Expertenmeinungen zu bestimmen, vergleichen wir den voll informierten  $F$ -Investor, dem die Drift bekannt ist, mit den anderen partiell informierten  $H$ -Investoren mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$ , die den Drift-Prozess  $\mu$  nicht beobachten können. Dabei verfolgen alle betrachteten Investoren das gleiche Ziel, den Erwartungswert vom Nutzen des Endvermögens zu maximieren. Während der klassische  $R$ -Investor über den Investitionsraum hinweg seine Informationen lediglich aus den Beobachtungen der Renditen sammelt, sehen sich die restlichen partiell informierten  $D$ -,  $C_n$ - und  $C_\lambda$ -Investoren, sowie der voll informierte  $F$ -Investor im Vorteil, da sie über Zusatzinformationen verfügen. Nun beschäftigen wir uns mit der Frage: Wie viel Anfangskapital  $x_0^{H/F}$  der voll informierte  $F$ -Investor braucht, um den gleichen maximalen erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt  $T$  wie der  $H$ -Investor zu erreichen, der zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit Anfangskapital  $x_0^H = 1$  startet. Hierzu bezeichnen wir bei allen Informations-Regimes  $H = F, R, D, C_n, C_\lambda$  mit  $\mathcal{V}_0^H = \mathcal{V}_0^H(x_0)$  den maximalen erwarteten Nutzen des  $H$ -Investors mit Anfangsvermögens  $x_0$ . Dann ergibt sich  $x_0^{H/F}$  als Lösung der Gleichung

$$\mathcal{V}_0^H(1) = \mathbb{E} \left[ \mathcal{V}_0^F(x_0^{H/F}) | \mathcal{F}_0^H \right]. \quad (4.35)$$

Die Differenz  $1 - x_0^{H/F} > 0$  beschreibt den monetären Wert des Informationsverlustes des partiell informierten  $H$ -Investors gegenüber dem voll informierten  $F$ -Investor und

$$\mathcal{E}^H := \frac{x_0^{H/F}}{x_0^H} = x_0^{H/F} \quad (4.36)$$

ist ein Maß für die Effektivität des  $H$ -Investors gegenüber dem  $F$ -Investor.

Möchte man den monetären Wert der Zusatzinformation durch die Expertenmeinungen beziffern, so kann das aus dem Vergleich der maximalen erwarteten Nutzen des  $R$ -Investors, welcher keine Informationen außer aus den Preisprozessen erhält, und der  $H$ -Investoren mit  $H = D, C_n, C_\lambda$ , welche neben den Informationen aus den Renditen zusätzliche Informationen aus den Experten erhalten, abgeleitet werden. Hierzu betrachten wir einen  $R$ -Investor mit Anfangskapital  $x_0^R = 1$  und bestimmen das Anfangskapital  $x_0^{R/H}$  für den  $H$ -Investor so, dass dieser den gleichen maximalen erwarteten Nutzen erzielt. D.h.  $x_0^{R/H}$  ist Lösung der Gleichung

$$\mathcal{V}_0^R(1) = \mathbb{E} \left[ \mathcal{V}_0^H(x_0^{R/H}) | \mathcal{F}_0^R \right].$$

Da wir in dieser Arbeit annehmen, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  alle partiell informierten Investoren über die gleiche Information über die Drift verfügen, gilt  $\mathcal{F}_0^R = \mathcal{F}_0^H = \overline{\mathcal{F}}_0$  und somit

$$\mathcal{V}_0^R(1) = \mathcal{V}_0^H(x_0^{R/H}). \quad (4.37)$$

Die Differenz  $P_{Exp}^H := 1 - x_0^{R/H}$  beschreibt den monetären Wert der Expertenmeinungen für den  $R$ -Investor. Von seinem Anfangskapital  $x_0^R = 1$  kann er diesen Betrag für den Kauf von Expertenmeinungen bereitstellen und das Restkapital  $x_0^{R/H}$  dann in ein durch den  $H$ -Investor aufgestelltes Portfolio investieren, welches den gleichen erwarteten Nutzen erzielt wie das durch den  $R$ -Investor aufgestellte Portfolio mit Anfangskapital 1.

## 4.4 Logarithmischer Nutzen

In diesem Abschnitt werden wir eine Lösung für das vorliegende Optimierungsproblem für den logarithmischen Nutzen finden. Dabei verzichten wir auf eine detaillierte und ausführliche Herleitung, stattdessen zitieren wir die Ergebnisse von Gabih, Kondakji, Sass, und Wunderlich [27] im eindimensionalen Fall und Sass, Westphal und Wunderlich [67] bzw. [68] im mehrdimensionalen Fall. Dort konnten zunächst die optimalen Strategien auf eine einfache Weise bestimmt werden. Damit ergeben sich dann Darstellungen der Wertfunktion durch Integration über die bedingte Kovarianz des Filters. In den obigen Arbeiten wurde das Optimierungsproblem für den logarithmischen Nutzen bei den Regimes  $H = F, R, D, C_n$  untersucht. Für das Optimierungsproblem beim Regime  $H = C_\lambda$ , bei dem Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten eintreffen, haben Sass, Westphal und Wunderlich in ihrer Arbeit [68] eine interessante Lösung präsentiert, indem sie die Wertfunktion durch Simulation bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird zur Lösung des Optimierungsproblems beim Regime  $H = C_\lambda$  andere Technik verwendet, die wir in Kapitel 7 präsentieren.

Aus der Vermögensgleichung der partiellen Investoren (4.5) erhält man mit Hilfe der Itô-Formel die folgende Darstellung für das Vermögen

$$X_T^\pi = x_0 \exp \left\{ \int_0^T \left( \pi'_s M_s^H - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right) ds + \int_0^T \pi'_s \sigma_X d\widetilde{W}_s^H \right\}, \quad H = R, D, C_n, C_\lambda. \quad (4.38)$$

Für den logarithmischen Nutzen  $\mathcal{U}_0(x) = \log x$  gilt dann für das Endvermögen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0(X_T^\pi) &= \log X_T^\pi \\ &= \log x_0 + \int_0^T \left( \pi'_s M_s^H - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right) ds + \int_0^T \pi'_s \sigma_X d\widetilde{W}_s^H. \end{aligned}$$

Wir bilden den Erwartungswert auf beiden Seiten in der letzten Gleichung und erhalten mittels des Satzes von Fubini den mittleren Nutzen des Endvermögens bzw. die Zielfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0^H &= \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_0(X_T^\pi) | \mathcal{F}_0^H \right] \\ &= \log x_0 + \int_0^T \mathbb{E} \left[ \pi'_s M_s^H - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right] ds, \end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei der Erwartungswert des stochastischen Integrals  $\int_0^T \pi'_s \sigma_X d\widetilde{W}_s^H$  für  $\pi$  aus der Menge der zulässigen Strategien in (2.21) verschwindet. Aus (4.39) erhalten wir dann die Wertfunktion durch das Bilden des Supremums auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^H &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathcal{J}_0^H \\ &= \log x_0 + \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \int_0^T \mathbb{E} \left[ \pi'_s M_s^H - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (4.40)$$

**Lemma 4.4.1.** Die optimale Strategie  $\pi^{*,H} = (\pi_t^{*,H})_{t \in [0,T]}$  für das Optimierungsproblem in (4.40) ist gegeben durch

$$\pi_t^{*,H} := \Sigma_R^{-1} M_t^H. \quad (4.41)$$

*Beweis.* Da die Matrix  $\sigma_X \sigma_X' = \Sigma_R$  nach Voraussetzungen positiv definit ist, können wir den Integranden in (4.40) punktweise maximieren und erhalten die optimale Strategie  $\pi^{*,H} = (\pi_t^{*,H})_{t \in [0,T]}$  mit  $\pi_t^{*,H} := \frac{1}{(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} M_t^H$ .

Mit Hinblick auf die Menge der zulässigen Strategien in (2.21) überprüfen wir nun, ob sie zulässig ist und erhalten mittels des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left\| (\pi_t^*)' \sigma_X^H \right\|^2 dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\pi_t^*)' \Sigma_R \pi_t^* dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (M_t^H)' \Sigma_R^{-1} M_t^H dt \right] \\ &= \int_0^T \mathbb{E} \left[ (M_t^H)' \Sigma_R^{-1} M_t^H \right] dt \\ &= \int_0^T \text{tr} \left\{ \Sigma_R^{-1} \mathbb{E} \left[ (M_t^H)' M_t^H \right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist beschränkt und dessen Berechnung wird in (4.42) erläutert.  $\square$

In der Literatur wird die optimale Strategie (4.41) die myopische Strategie genannt, deren Einsetzen die Gleichung (4.40) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^H &= \log x_0 + \int_0^T \mathbb{E} \left[ (\pi_s^*)' M_s^H - \frac{1}{2} \left\| (\pi_s^*)' \sigma_X \right\|^2 \right] ds, \quad H = R, D, C_n, C_\lambda \\ &= \log x_0 + \int_0^T \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ (M_s^H)' \Sigma_R^{-1} M_s^H \right] ds \\ &= \log x_0 + \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma_R^{-1} \mathbb{E} \left[ M_s^H (M_s^H)' \right] \right\} ds \\ &= \log x_0 + \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma_R^{-1} \left( \text{cov} \left( M_s^H, M_s^H \right) + \mathbb{E}[\mu_s] \mathbb{E}[\mu_s'] \right) \right\} ds \\ &= \log x_0 + \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma_R^{-1} \left( \text{cov}(\mu_s, \mu_s) + \mathbb{E}[\mu_s] \mathbb{E}[\mu_s'] - \mathbb{E}[Q_s^H] \right) \right\} ds. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Eigenschaft des Filters  $\text{cov} \left( M_s^H, M_s^H \right) = \text{cov}(\mu_s, \mu_s) - \mathbb{E} \left[ Q_s^H \right]$  aus (3.28) verwendet.

Aus Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses in (2.5) und (2.6) erhalten wir  $\mathbb{E}[\mu_s]$  bzw.  $\text{cov}(\mu_s, \mu_s)$ . Bei den Regimes  $H = R, D, C_n$  ist die bedingte Kovarianzmatrix  $Q^H$  deterministisch und es gilt  $\mathbb{E}[Q_s^H] = Q_s^H$ . Beim Regime  $H = C_\lambda$  gilt diese Besonderheit nicht, da die Kovarianzmatrix  $Q^{C_\lambda}$  nicht deterministisch und keine geschlossene Darstellung für den

Erwartungswert  $E[Q_s^{C_\lambda}]$  und damit auch nicht für das Integral  $\int_0^T E[Q_s^{C_\lambda}] ds$  verfügbar ist. Aus diesem Grund wird das Optimierungsproblem bei Regime  $H = C_\lambda$  wie schon erwähnt erst in Kapitel 7 betrachtet.

**Bemerkung 4.4.2.** Auf die gleichen Art und Weise wie vorhin kann man für das Nutzenmaximierungsproblem unter voller Information die Wertfunktion wie in (4.40) darstellen und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^F &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^F} \mathcal{J}_0^F \\ &= \log x_0 + \sup_{\pi \in \mathcal{A}^F} \int_0^T E \left[ \pi'_s \mu_s - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die optimale Strategie für den voll informierten Investor  $H = F$  ist ebenso die myopische Strategie  $\pi^{*,F} = (\pi_t^{*,F})_{t \in [0, T]}$  mit

$$\pi_t^{*,F} := \Sigma_R^{-1} \mu_t, \quad (4.44)$$

deren Einsetzen in (4.43) die gleiche Darstellung für die Wertfunktion wie in (4.42)

$$\mathcal{V}_0^F = \log x_0 + \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma_R^{-1} \left( \text{cov}(\mu_s, \mu_s) + E[\mu_s] E[\mu'_s] \right) \right\} ds.$$

Damit ist die Darstellung der Wertfunktion in (4.42) auch für voll informierten Investor gültig, wenn man  $Q_t^F = 0$  beachtet.

Das folgende Theorem präsentiert eine geschlossene Darstellung für die Wertfunktion (4.42) im eindimensionalen Fall ( $d = 1$ ) für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  aus  $[0, T]$ , wenn der Investor zu diesem Zeitpunkt mit Anfangskapital  $X_t^\pi = x > 0$  startet und die Drift  $\mu_t = m$  bzw. die bedingte Varianz  $Q_t^H = q$  sind. Dafür definieren die Wertfunktion  $\tilde{V}^H$  wie folgt

$$\tilde{V}^H(t, x, m, q) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} E \left[ \log X_T^\pi \mid X_t^\pi = x, M_t^H = m, Q_t^H = q \right],$$

welche im Zusammenhang zu  $\mathcal{V}_0^H$  durch die Beziehung  $\mathcal{V}_0^H = \tilde{V}^H(0, x_0, m_0, q_0)$  steht.

**Theorem 4.4.3.** Für die Wertfunktion des Optimierungsproblems für den logarithmischen Nutzen gilt im eindimensionalen Fall mit  $H = F, R, D, C_n$

$$\begin{aligned} \tilde{V}^H(t, x, m, q) &= \log x \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \Sigma_R^{-1} \left( \text{var}(\mu_s^{t,m}) + E([\mu_s^{t,m}])^2 - (Q_s^{t,q})^H \right) ds \\ &= \log x + A_0(t) m^2 + B_0 m + C_0^H(t), \end{aligned} \quad (4.45)$$

wobei  $A_0$ ,  $B_0$  und  $C_0^H$  Funktionen von  $t \in [0, T]$  und gegeben durch

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \frac{1}{2} \Sigma_R^{-1} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right), \\ B_0(t) &= \frac{1}{2} \Sigma_R^{-1} \frac{\bar{\mu}}{\kappa} \left( 1 - e^{-\kappa(T-t)} \right)^2, \\ C_0^H(t) &= \frac{1}{2} \Sigma_R^{-1} \left[ \bar{\mu}^2 + \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} \right] (T-t) - 2\bar{\mu} B_0(t) \left( 1 - e^{-\kappa(T-t)} \right)^{-1} + \bar{\mu}^2 A_0(t) \\ &\quad - \left[ \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa} - \text{Var}(\mu_t) \right] A_0(t) - \frac{1}{2} \Sigma_R^{-1} \int_t^T Q_s^H ds. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int_t^T Q_s^R ds &= (C_{R0} - \kappa \Sigma_R)(T-t) + \Sigma_R \log \frac{C_{R1} - C_{R2} \exp\{-2C_{R0} \Sigma_R^{-1} T\}}{C_{R1} - C_{R2} \exp\{-2C_{R0} \Sigma_R^{-1} t\}}, \\ \int_t^T Q_s^D ds &= (C_{D0} - \kappa \Sigma_D)(T-t) + \Sigma_D \log \frac{C_{D1} - C_{D2} \exp\{-2C_{D0} \Sigma_D^{-1} T\}}{C_{D1} - C_{D2} \exp\{-2C_{D0} \Sigma_D^{-1} t\}}, \\ \int_t^T Q_s^{C_n} ds &= \int_t^{t_i} Q_s^{C_n} ds + \sum_{k=i}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} Q_s^{C_n} ds, \\ \int_u^{t_k} Q_s^{C_n} ds &= (C_{R0} - \kappa \sigma^2)(t_k - u) + \Sigma_R \log \frac{C_{k1} - C_{k2} \exp\{-2C_{R0} \Sigma_R^{-1} (t_k - t_{k-1})\}}{C_{k1} - C_{k2} \exp\{-2C_{R0} \Sigma_R^{-1} (u - t_{k-1})\}}, \end{aligned}$$

wobei  $t_k$  der erste Informationszeitpunkt in  $[t, T]$  mit  $t_k \geq u$  ist und

$$\begin{aligned} C_{R0} &:= \kappa \Sigma_R \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_R}}, & C_{R1} &:= \bar{q}_0 + \kappa \Sigma_R + C_{R0}, & C_{R2} &:= \bar{q}_0 + \kappa \Sigma_R - C_{R0}, \\ C_{D0} &:= \kappa \Sigma_D \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_D}}, & C_{D1} &:= \bar{q}_0 + \kappa \Sigma_R + C_{D0}, & C_{D2} &:= \bar{q}_0 + \kappa \Sigma_R - C_{D0}, \\ & & C_{k1} &:= Q_{t_k}^C + \kappa \Sigma_R + C_{R0}, & C_{k2} &:= Q_{t_k}^C + \kappa \Sigma_R - C_{R0}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses aus (2.5) und (2.6) bestimmen wir die Integrale für  $E[\mu_s]$  bzw.  $\text{var}(\mu_s)$  und mit Hilfe von (3.5) bestimmen wir das Integral für die bedingte Varianz  $Q^H$ , welche wir in (4.42) einsetzen, um die Darstellung in (4.45) zu erhalten.

Für mehr Details siehe Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27].  $\square$

## 4.5 Potenz-Nutzen

Aus der Gleichung (4.38) des Vermögensprozesses für den partiell informierten Investor  $H$  mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$

$$X_T^\pi = x_0 \exp \left\{ \int_0^T \left( \pi'_s M_s^H - \frac{1}{2} \|\pi'_s \sigma_X\|^2 \right) ds + \int_0^T \pi'_s \sigma_X d\widetilde{W}_s^H \right\}$$

erhalten wir gemäß der Potenz-Nutzen-Funktion  $U_\theta(x) = \frac{1}{\theta}x^\theta$  für den Nutzen des Endvermögens

$$U_\theta(X_T^\pi) = \frac{1}{\theta} \left( X_T^\pi \right)^\theta = \frac{x_0^\theta}{\theta} \Lambda_T^H \exp \left\{ \int_0^T -b(M_s^H, \pi_s) ds \right\}, \quad (4.46)$$

mit der Funktion

$$b(m, p) := -\theta \left( p'm - \frac{1-\theta}{2} \|p'\sigma_X\|^2 \right) \quad (4.47)$$

und  $\Lambda_T^H$  definiert durch

$$\Lambda_T^H = \exp \left\{ \theta \int_0^T \pi'_s \sigma_X d\widetilde{W}_s^H - \frac{1}{2} \theta^2 \int_0^T \|\pi'_s \sigma_X\|^2 ds \right\}. \quad (4.48)$$

Der Wert  $\Lambda_T^H$  aus (4.48) ist der Endwert eines Prozesses  $\Lambda^H := (\Lambda_t^H)_{t \in [0, T]}$ , welcher der folgenden SDE genügt

$$\frac{d\Lambda_t^H}{\Lambda_t^H} = \theta \pi'_t \sigma_X d\widetilde{W}_t^H, \quad \Lambda_0^H = 1, \quad (4.49)$$

und ein  $(\mathbb{F}^H, P)$ - nichtnegatives lokales Martingal und somit ein Supermartingal ist.

Im nächsten Schritt soll ein Maßwechsel zu einem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\overline{P}^H$  durchgeführt werden, so dass für die Radon-Nikodym-Dichte  $\frac{d\overline{P}^H}{dP} = \Lambda_T^H$  gilt. Hierbei ist die Eigenschaft  $E[\Lambda_T^H] = 1$  sicherzustellen, unter der der Prozess  $\Lambda^H$  ein echtes Martingal ist. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist die Novikov-Bedingung (2.23)

$$\mathcal{J}_{NB}^H(\pi) := E \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta \pi'_t \sigma_X\|^2 dt \right\} \right] < \infty,$$

Da wir die Novikov-Bedingung in die Menge der zulässigen Strategien in (2.25) aufgenommen haben, erfüllt jede zulässige Strategie diese Bedingung und somit ist der Maßwechsel wohldefiniert.

Vor diesem Hintergrund können wir nun unser ursprünglich stochastisches Kontrollproblem (2.22) zu einem sogenannten risk-sensitiven Optimierungsproblem transformieren, indem wir das vorhin erwähnte Wahrscheinlichkeitsmaß  $\overline{P}^H$  mit Hilfe der Martingal-Dichte  $\Lambda_T^H = \frac{d\overline{P}^H}{dP}$  wie folgt definieren

$$\overline{P}^H(A) = \int_A \frac{d\overline{P}^H}{dP} dP = \int_A \Lambda_T^H dP \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_T^H.$$

Das Girsanov-Theorem liefert uns, dass der Prozess  $\overline{W}^H := (\overline{W}_t^H)_{t \in [0, T]}$  mit

$$\overline{W}_t^H := \widetilde{W}_t^H - \theta \int_0^t \sigma'_X \pi_s ds, \quad t \in [0, T],$$



ein  $(\mathbb{F}^H, \overline{P}^H)$ –Wiener-Prozess ist.

Infolge dessen lässt sich der zu maximierende Erwartungswert aus (2.22) folgendermaßen darstellen

$$\mathbb{E}\left[U_\theta\left(X_T^{\pi,0,x_0,m_0,q_0}\right)\right] = \frac{x_0^\theta}{\theta} \mathbb{E}\left[\Lambda_T^H \cdot \exp\left\{-\int_0^T b\left(M_s^{0,m_0,q_0}, \pi_s\right) ds\right\}\right].$$

Dabei bezeichnen wir zum Zeitpunkt  $t_0 \in [0, T]$  mit  $M_t^{t_0,m,q}$  die Lösung der Filter-Gleichung (3.26) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswert  $M_{t_0} = m$  bzw.  $Q_{t_0} = q$ . Ebenso bezeichnen wir zum Zeitpunkt  $t_0 \in [0, T]$  mit  $X_t^{\pi,t_0,x,m,q}$  die Lösung der Vermögensgleichung (4.5) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswert  $X_{t_0}^\pi = x$ ,  $M_{t_0} = m$  bzw.  $Q_{t_0} = q$ .

Da  $\mathbb{E}[\Lambda_T^H] = 1$  ist, können wir den Erwartungswert des Produkts auf der rechten Seite in der letzten Gleichung mit Hilfe der Kallianpur-Striebel-Formel vereinfachen und erhalten

$$\mathbb{E}\left[U_\theta\left(X_T^{\pi,0,x_0,m_0,q_0}\right)\right] = \frac{x_0^\theta}{\theta} \overline{\mathbb{E}}^H\left[\exp\left\{-\int_0^T b\left(M_s^{0,m_0,q_0}, \pi_s\right) ds\right\}\right]. \quad (4.50)$$

Dabei bezeichnet  $\overline{\mathbb{E}}^H$  den Erwartungswert bezüglich des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\overline{P}^H$ , unter dem der Vermögensprozess der folgenden Dynamik erfolgt

$$dX_t^\pi = \alpha_X^H(X_t^\pi, M_t^H, \pi_t) dt + \beta_X^H(X_t^\pi, \pi_t) d\overline{W}_t^H, \quad X_0^\pi = x_0 > 0. \quad (4.51)$$

mit  $\alpha_X^H(x, m, p) = \underline{\alpha}_X^H(x, m, p) + \beta_X^H(x, p)\theta\sigma'_X p$ .

Die Dynamik der Filter-Prozesse  $M^H$  bzw.  $Q^H$  aus (3.26) und (3.27) unter  $\overline{P}^H$  hat die Darstellung

$$dM_t^H = \alpha_M^H(M_t^H, \pi_t) dt + \beta_M^H(Q_t^H) d\overline{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^H(Q_{t-}^H, u) \tilde{I}^H(dt, du), \quad (4.52)$$

$$dQ_t^H = \alpha_Q^H(Q_t^H) dt + \beta_Q^H(Q_t^H) d\overline{W}_t^H + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^H(Q_{t-}^H) \tilde{I}^H(dt, du) \quad (4.53)$$

mit dem Anfangswert  $M_0^H = m_0$  bzw.  $Q_0^H = q_0$ . Unter dem neu eingeführten Maß  $\overline{P}^H$  hängt die Drift von  $M^H$  von der Handelsstrategie  $\pi$  durch  $\alpha_M^H(m, p) := \underline{\alpha}_M^H(m) + \beta_M^H(q)\theta\sigma'_X p$  ab, während die anderen Koeffizienten unverändert bleiben und in (3.26) und (3.27) gegeben sind. Hinsichtlich des Maßwechsels können wir das Optimierungsproblem aus (4.50) getrennt vom Anfangswert  $x_0$  betrachten und die Aufgabe besteht dann darin, den Erwartungswert

$$\overline{\mathbb{E}}^H\left[\exp\left\{-\int_0^T b\left(M_s^{0,m_0,q_0}, \pi_s\right) ds\right\}\right], \quad (4.54)$$

über alle zulässigen Strategien  $\pi \in \mathcal{A}^H$  für  $0 < \theta < 1$  zu maximieren bzw. für  $\theta < 0$  zu minimieren. Mit der Trennung des Optimierungsproblems vom Anfangswert  $x_0$  reduziert sich der

Zustand auf den Filter bzw. die zwei Prozesse  $M^H$  und  $Q^H$ .

Wenn wir die Dynamik vom Zustandsprozess aus (4.52) und (4.53) in Abhängigkeit von einem generischen  $P$ -Wiener-Prozess  $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$  darstellen

$$dM_t^H = \alpha_M^H(M_t^H, \pi_t) dt + \beta_M^H(Q_t^H) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^H(Q_{t-}^H, u) \tilde{I}^H(dt, du), \quad (4.55)$$

$$dQ_t^H = \alpha_Q^H(Q_t^H) dt + \beta_Q^H(Q_t^H) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^H(Q_{t-}^H) \tilde{I}^H(dt, du), \quad (4.56)$$

mit  $M_0^H = m_0$  und  $Q_0^H = q_0$ , dann können wir Ausdrücke wie in (4.54) bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  bestimmen, das heißt

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T b(M_s^0, m_0, q_0, \pi_s) ds \right\} \right], \quad \pi \in \mathcal{A}^H.$$

Dieses Optimierungsproblem wollen wir mit der Dynamic Programming Methode lösen. Bei den Regimes  $H = R, D, C_n$  ist bedingte Kovarianz  $Q_t^H$  die Lösung einer deterministischen Differentialgleichung, daher kann der Zustandsprozess auf den Prozess der bedingten Erwartung  $M^H$  reduziert werden. Wir führen jetzt den Zustandsprozess  $Y = Y^{\pi, H}$  für die verschiedenen Regimes wie folgt ein

$$Y_t = M_t^H, \quad H = R, D, C_n. \quad (4.57)$$

Mit Hinblick auf (4.55) können wir die Dynamik vom Zustandsprozess  $Y$  wie folgt darstellen

$$dY_t = \alpha_Y^H(Y_t, \pi_t) dt + \beta_Y^H(Y_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Y^H(Y_{t-}, u) \tilde{I}^H(dt, du), \quad Y_0 = y_0, \quad (4.58)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_Y^H$ ,  $\beta_Y^H$  und  $\gamma_Y^H$  folgendermaßen gegeben sind

$$\alpha_Y^H(m, p) = \alpha_M^H(m, p), \quad \beta_Y^H(q) = \beta_M^H(q), \quad \text{und} \quad \gamma_Y^H(q, u) = \gamma_M^H(q, u).$$

Beim Informations-Regime  $H = C_\lambda$  ist die bedingte Kovarianz  $Q_t^{C_\lambda}$  die Lösung einer SDE und somit besteht der Zustandsprozess im Fall  $H = C_\lambda$  sowohl aus der bedingten Erwartung  $M_t^{C_\lambda} \in \mathbb{R}^d$  als auch aus der symmetrischen bedingten Kovarianzmatrix  $Q_t^{C_\lambda} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Wir definieren eine Restriktion bzw. eine Transformation  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{d_Z}$  mit  $d_Z := \frac{d(d+1)}{2}$ , welche die Elemente unterhalb und auf der Diagonale der symmetrischen Matrix  $Q_t^{C_\lambda} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  in einen Vektor  $Z_t \in \mathbb{R}^{d_Z}$  abbildet. Dies definieren wir wie folgt

$$Z_t := \mathcal{R}(Q_t) = \left( Q_t^{11}, Q_t^{21}, Q_t^{22}, Q_t^{31}, \dots, Q_t^{dd} \right)', \quad (4.59)$$

das heißt, wir setzen den Matrixeintrag  $Q_t^{ij}$  mit  $i \geq j$  im Vektor  $Z_t$  an die Stelle  $k = K(i, j) = \frac{i(i-1)}{2} + j$ .

Umgekehrt können wir anhand der Rücktransformation  $\mathcal{R}^{-1} : \mathbb{R}^{dz} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  aus dem gegebenen Vektor  $Z_t \in \mathbb{R}^{dz}$  die symmetrische Matrix  $Q_t$  durch

$$Q_t = \mathcal{R}^{-1}(Z_t) \quad (4.60)$$

erhalten, indem wir zu gegebener Position  $k$ ;  $k = 1, \dots, d + \frac{d(d+1)}{2}$  im Vektor  $Z_t$  die Indizes  $(i, j)$  des Elementes  $Q_t^{ij}$  der Matrix folgendermaßen bestimmen

$$i = \max \left\{ l \in \{1, \dots, d\}; \quad K(l, 1) \leq k \right\} = \left\lceil \sqrt{2(k-d) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil,$$

$$j = k - K(i, 1) + 1.$$

Den Zustandsprozess  $Y = Y^{C_\lambda}$  definieren wir nun wie folgt

$$Y_t := \begin{pmatrix} M_t \\ Z_t \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

**Bemerkung 4.5.1.** Das in diesem Kapitel verwendete Symbol  $Z_t$  ist nicht zu verwechseln mit dem Symbol  $Z_k$  aus den früheren Kapiteln, welches die diskreten Expertenmeinungen bezeichnete.

Mit der Transformation der Matrix  $Q_t^{C_\lambda}$  in den Vektor  $Z_t$  müssen wir die Koeffizienten der zugehörigen SDE entsprechend transformieren. Zu jedem Vektor  $z \in \mathbb{R}^{dz}$  bestimmen wir die Matrix  $q = \mathcal{R}^{-1}(z)$  und definieren die Koeffizienten der SDE des Prozesses  $Z$  wie folgt

$$\alpha_Z(z) := \mathcal{R}\left(\alpha_Q^{C_\lambda}(q)\right), \quad \gamma_Z(z) := \mathcal{R}\left(\gamma_Q^{C_\lambda}(q)\right), \quad \beta_Z(z) = 0. \quad (4.62)$$

Zusätzlich definieren wir

$$\underline{\alpha}_Z(z) := \mathcal{R}\left(\underline{\alpha}_Q^{C_\lambda}(q)\right) \quad (4.63)$$

Vor diesem Hintergrund können wir die Dynamik für den Zustandsprozess  $Y = Y^{C_\lambda}$  ähnlich wie in (4.58) darstellen

$$dY_t = \alpha_Y^{C_\lambda}(Y_t, \pi_t) dt + \beta_Y^{C_\lambda}(Y_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Y^{C_\lambda}(Y_{t-}, u) \tilde{I}^{C_\lambda}(dt, du), \quad Y_0 = y_0, \quad (4.64)$$

wobei wir mit  $y = (m, z) \in \mathbb{R}^{d+dz}$  die Koeffizienten  $\alpha_Y^{C_\lambda}$ ,  $\beta_Y^{C_\lambda}$  und  $\gamma_Y^{C_\lambda}$  wie folgt definieren

$$\alpha_Y^{C_\lambda}(y, p) := \begin{pmatrix} \alpha_M^{C_\lambda}(m, q, p) \\ \alpha_Z(z) \end{pmatrix}, \quad \beta_Y^{C_\lambda}(y) := \begin{pmatrix} \beta_M^{C_\lambda}(q) \\ \beta_Z(z) \end{pmatrix}, \quad \gamma_Y^{C_\lambda}(y, u) := \begin{pmatrix} \gamma_M^{C_\lambda}(q, u) \\ \gamma_Z(z) \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Des Weiteren definieren wir für die Vereinfachung mancher Darstellung den Tem

$$\underline{\alpha}_Y^{C_\lambda}(y) := \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_M^{C_\lambda}(m) \\ \underline{\alpha}_Z(z) \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Damit die Verwendung mancher Symbole nicht zu Irritationen führt, bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}_M = \mathbb{R}^d$  den Zustandsraum für den Prozess  $M^{C_\lambda}$ , mit  $\mathcal{S}_Q = \mathbb{R}^{d \times d}$  den Zustandsraum für den Prozess  $Q^{C_\lambda}$ , mit  $\mathcal{S}_Z = \mathbb{R}^{d_Z}$  den Zustandsraum für den Vektor  $Z$  und mit  $\mathcal{S}_Y = \mathbb{R}^{d+d_Z}$  den Zustandsraum für den Zustandsprozess  $Y^{C_\lambda}$ .

Später werden wir die Ergebnisse der Portfoliooptimierung für die partiell informierten Investoren  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  miteinander vergleichen. Dabei bietet sich der voll informierte Investor  $H = F$  als Referenzfall an. Deshalb werden wir das Kontrollproblem auch für das Regime  $H = F$  betrachten. Das Problem ist schon bei Kim und Omberg [36] bzw. Brendle, [12] behandelt worden. Dieser Fall führt zu einem unkontrollierten Zustandsprozess  $Y = Y^F$ , der nur aus der Drift  $\mu$  besteht, deren Dynamik unter dem generischen Maß sich analog zu (4.58) darstellen lässt

$$dY_t = \alpha_Y^F(Y_t) dt + \beta_Y^F(Y_t) dW_t, \quad Y_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0), \quad (4.67)$$

mit den Koeffizienten  $\alpha_Y^F(y) = \kappa(\bar{\mu} - y)$  und  $\beta_Y^F(y) = \sigma_\mu$ .

Für den mit  $\mathcal{S}_Y = \mathcal{S}_Y^H$  bezeichnete Wertebereich der Zufallsvariable  $Y$  gilt

$$\mathcal{S}_Y := \begin{cases} \mathbb{R}^d, & H = F, R, D, C_n, \\ \mathbb{R}^{d+d_Z}, & H = C_\lambda. \end{cases} \quad (4.68)$$

Wir bezeichnen zum Zeitpunkt  $t_0 \in [0, T]$  mit  $Y_t^{\pi, t_0, y}$  die Lösung der Zustandsgleichung (4.58) bzw. (4.64) zum Zeitpunkt  $t$  mit Anfangswert  $y$ . Die Zielfunktion  $J^H(t, y; \pi)$  für das untersuchte Kontrollproblem ist bei allen Informations-Regimes  $H = F, R, D, C_\lambda, C_n$  definiert durch

$$J^H(t, y; \pi) := \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T b(Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) ds \right\} \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{und} \quad \forall \pi \in \mathcal{A}^H \quad (4.69)$$

mit der Endwert  $J^H(T, y; \pi) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_T^T b(Y_s^{\pi, T, y}, \pi_s) ds \right\} \right] = 1$ .

Dementsprechend definieren wir die Wertfunktion wie folgt

$$V^H(t, y) := \begin{cases} \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} J^H(t, y; \pi), & \theta \in (0, 1), \\ \inf_{\pi \in \mathcal{A}^H} J^H(t, y; \pi), & \theta \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (4.70)$$

Zum Endzeitpunkt  $t = T$  gilt  $V^H(T, y) = J^H(T, y; \pi) = 1$ .

Ab dieser Stelle konzentrieren wir uns hauptsächlich auf den Fall  $\theta \in (0, 1)$ , der Fall  $\theta \in (-\infty, 0)$  erfolgt dann analog.

**Lemma 4.5.2.** (*Dynamic-Programming-Principle*). Für jedes  $t \in [0, T]$ ,  $y \in \mathcal{S}_Y$  und für jede Stoppzeit  $\tau$  mit  $t \leq \tau \leq T$  gilt

$$V^H(t, y) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_t^\tau -b(Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) ds \right\} V^H(\tau, Y_\tau^{\pi, t, y}) \right]. \quad (4.71)$$

*Beweis.* Wir weisen wir auf Proposition 6.2 in der Arbeit von Frey, Gabih und Wunderlich [26] und auf Proposition 3.1 in Pham [59] sowie auf Bouchard und Touzi [11] hin.  $\square$

Wir werden nun eine notwendige Optimalitätsbedingung herleiten, aus der sich die Dynamic Programming Gleichung für die Wertfunktion ergibt. wir fixieren  $t \in [0, T]$ ,  $y \in \mathcal{S}_Y$  wähle eine Stoppzeit  $\tau \in [t, T]$  und eine beliebige zulässige Markov-Steuerung  $\pi \in \mathcal{A}^H$  mit  $\pi_t = \Pi(t, Y_t)$ . Weiterhin definieren wir die Steuerung  $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t)_{t \in [0, T]}$  durch

$$\hat{\pi}_s = \hat{\Pi}(s, y) = \begin{cases} \Pi(s, y), & s \in [t, \tau], \\ \Pi^*(s, y), & s \in (\tau, T] \end{cases}.$$

Dies bedeutet, dass wir einer beliebigen Strategie  $\pi$  in  $[t, \tau]$  folgen, jedoch der optimalen Strategie  $\pi^*$  in  $(\tau, T]$ . Daraus folgt

$$J^H(t, y; \hat{\pi}) \leq V^H(t, y), \quad (4.72)$$

die Gleichheit gilt, falls  $\hat{\pi}_s = \pi_s^*$  für  $s \in [t, \tau]$ .

Aus (4.69) lässt sich die Zielfunktion folgendermaßen darstellen

$$J^H(t, y; \hat{\pi}) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^\tau b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \cdot \exp \left\{ - \int_\tau^T b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \right]. \quad (4.73)$$

Da der gesteuerte Zustandsprozess  $Y = Y^\pi$  ein Markov-Prozess ist, können wir (4.73) mit Hilfe von Eigenschaften der bedingten Erwartung wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} J^H(t, y; \hat{\pi}) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^\tau b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_\tau^T b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \middle| Y_\tau^{\hat{\pi}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^\tau b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \cdot \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_\tau^T b(Y_s^{\hat{\pi}, \tau, Y_\tau^{\hat{\pi}}}, \hat{\pi}_s) ds \right\} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Nach Definition von  $\hat{\pi}$  können wir (4.74) wie folgt darstellen

$$J^H(t, y; \hat{\pi}) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^\tau b(Y_s^{\hat{\pi}, t, y}, \hat{\pi}_s) ds \right\} V^H(\tau, Y_\tau^{\hat{\pi}, t, y}) \right]. \quad (4.75)$$

Bildet man das Supremum auf beiden Seiten über alle zulässigen Strategien, so folgt die Behauptung.

Wir definieren den Prozess  $\beta_t := \exp\{-\int_0^t b(Y_s^{\hat{\pi}}, \hat{\pi}_s) ds\}$ , so können wir (4.75) wie folgt darstellen

$$J^H(t, y; \hat{\pi}) = \frac{1}{\beta_t} \mathbb{E} \left[ \beta_\tau \cdot V^H(\tau, Y_\tau^{\hat{\pi}, t, y}) \right]. \quad (4.76)$$

Wir setzen (4.76) in (4.72) ein und erhalten

$$\beta_t V^H(t, y) \geq \mathbb{E} \left[ \beta_\tau \cdot V^H(\tau, Y_\tau^{\hat{\pi}, t, y}) \right]. \quad (4.77)$$

Damit definiert der Prozess  $G^{\hat{\pi}} := (G_t^{\hat{\pi}})_{t \in [0, T]}$  mit  $G_t^{\hat{\pi}} = \beta_t V^H(t, Y_t^{\hat{\pi}, t, y})$  für eine beliebige Steuerung aus  $\mathcal{A}^H$  ein Supermartingal. Die Drift dieses Prozesses ist kleiner gleich Null und nimmt nur im Falle der optimalen Strategie  $\hat{\pi}_t = \pi_t^*$  ihr Maximum bei Null an. Die Itô-Produktregel liefert

$$\begin{aligned} dG_t^{\pi^*} &= V^H(t, Y_t^{\pi^*, t, y}) d\beta_t + \beta_t dV^H(t, Y_t^{\pi^*, t, y}) \\ &= \beta_t \left( \frac{\partial}{\partial t} V^H(t, Y_t^{\pi^*, t, y}) - b(y, \pi_t^*) + \mathcal{L}^{\pi^*} V^H(t, Y_t^{\pi^*, t, y}) \right) dt + \sigma_G dW_t, \end{aligned} \quad (4.78)$$

wobei  $\sigma_G$  den Diffusionsterm bezeichnet. Da  $G^{\pi^*} = (G_t^{\pi^*})_{t \in [0, T]}$  ein Martingal ist, muss der Driftterm in (4.78) verschwinden

$$\frac{\partial}{\partial t} V^H(t, y) + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ -b(y, p) V^H(t, y) + \mathcal{L}^p V^H(t, y) \right\} = 0, \quad V^H(T, y) = 1. \quad (4.79)$$

Dies ist die Dynamic-Programming-Gleichung bei den Informations-Regimes  $H = F, R, D, C_\lambda$ . Beim Informations-Regime  $H = C_n$  wird deren Herleitung erst in Kapitel 6 erläutert.

---

Potenz-Nutzenmaximierung für Diffusionsmodelle

---

In Kapitel 4 haben wir das Nutzenmaximierungsproblem auf ein risikosensitives Steuerungsproblem zurückgeführt und die zugehörige DPE für die Wertfunktion aufgestellt. Dieses Kapitel widmet sich der Lösung der DPE für die Informations-Regimes, bei denen der Zustandsprozess  $Y = Y^H$  ein Diffusionsprozess ist. Dies ist für die Regimes  $H = F, R, D$  der Fall. Für den voll informierten Investor ist  $Y^F = \mu$ , d.h. der Zustand ist gleich dem Driftprozess. Dagegen ist für die partiell informierten Investoren für  $H = R, D$  der Zustandsprozess  $Y^H$  gleich dem Prozess der bedingten Erwartung  $M^H$ . Da in diesen beiden Fällen keine zeitdiskreten Expertenmeinungen in den Filter einfließen, ist  $M^H$  ein vom Innovationsprozess  $\widetilde{W}^H$  getriebener Diffusionsprozess.

Es zeigt sich, dass die DPE sowohl beim Regime unter voller Information  $H = F$  als auch bei den beiden Regimes unter partieller Information  $H = R, D$  mit Hilfe eines Ansatzes der Form

$$V^H(t, m) = \exp \left\{ m' A^H(t) m + (B^H(t))' m + C^H(t) \right\}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall m \in \mathcal{S}_M,$$

gelöst werden kann. Dabei sind die Funktionen  $A^H$ ,  $B^H$  und  $C^H$  Lösungen gewisser Endwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen. Diese können für Modelle mit  $d = 1$  Wertpapiere sogar geschlossen gelöst werden. Für  $d > 1$  ist die Riccati-Gleichung für  $A^H$  im Allgemeinen nur numerisch lösbar, während  $B^H$  und  $C^H$  weiterhin geschlossen in Abhängigkeit von  $A^H$  darstellbar sind. Der obige Ansatz wurde bereits in Kuroda und Nagai [39] sowie in Brendle [12] vorgeschlagen und zur Lösung der Nutzenmaximierungsprobleme für  $H = F, R$  mit Potenz-Nutzen-Parameter  $\theta < 0$  eingesetzt. Wir erweitern das Verfahren für  $H = D$  und berücksichtigen auch Potenz-Nutzen mit  $\theta > 0$ . Für solche Parameter sind zusätzlich Fragen der Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems und die daraus resultierenden Einschränkungen an die zulässigen Modellparameter zu beachten.

## 5.1 Kontrollproblem unter voller Informationen $H = F$

Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt führt dieses Informations-Regime zu einem unkontrollierten Zustandsprozess, der nur aus der Drift  $Y = \mu$  besteht und dessen Dynamik in (4.67) gegeben war

$$dY_t = \alpha_Y^F(Y_t) dt + \beta_Y^F dW_t, \quad Y_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0),$$

mit  $\alpha_Y^F(y) = \kappa(\bar{\mu} - y)$  und  $\beta_Y^F = \sigma_\mu$ .

Da der Zustandsprozess  $Y$  bei diesem Regime unkontrolliert ist, ist der Generator  $\mathcal{L}^F = \mathcal{L}^{F,p}$  in (4.79) angewandt auf eine Funktion  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$  gegeben durch (siehe Theorem 1.22 des Buches von Øksendal and Sulem [58] )

$$\mathcal{L}^F g(y) = \nabla'_y g(y) \alpha_Y^F(y) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \nabla_{yy} g(y) \beta_Y^F (\beta_Y^F)' \right] \quad (5.1)$$

von der Strategie unabhängig. Somit ergibt sich die DPE für das Informations-Regime  $H = F$  aus (4.79)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} V^F(t, y) + \nabla'_y V^F(t, y) \alpha_Y^H(y) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \nabla_{yy} V^F(t, y) \beta_Y^F (\beta_Y^F)' \right] + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \{-b(y, p) V^F(t, y)\} \quad (5.2)$$

mit der Endbedingung  $V^F(T, y) = 1$ . Da die Wertfunktion  $V^F(t, y) > 0$  müssen wir nur noch das Infimum der Funktion  $b(y, p) := -\theta \left( p'y - \frac{1-\theta}{2} p' \Sigma_R p \right)$  aus (5.2) bestimmen. Dies wird an der Stelle

$$p^F \equiv p^F(t, y) = \frac{1}{(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} y \quad (5.3)$$

angenommen. Nun können wir die optimale Strategie aus (5.3) in die Gleichung (5.2) einsetzen und erhalten die DPE

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} V^F(t, y) + \nabla'_y V^F(t, y) \kappa(y - \bar{\mu}) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \nabla_{yy} V^F(t, y) \Sigma_\mu \right] + \frac{\theta}{2(1-\theta)} y' \Sigma_R^{-1} y V^F(t, y) \quad (5.4)$$

mit der Endbedingung  $V^F(T, y) = 1$ . Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung und für deren Lösung machen wir den folgenden Ansatz (vgl. Kim and Omberg [36] oder Brendle [12])

$$V^F(t, y) = \exp \left\{ y' A^F(t) y + \left( B^F(t) \right)' y + C^F(t) \right\}, \quad (5.5)$$

wobei  $A^F$ ,  $B^F$  und  $C^F$  Funktionen von  $t \in [0, T]$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{R}$  sind, außerdem ist  $A^F(t)$  für jedes  $t \in [0, T]$  symmetrisch. Nun können wir diesen Ansatz aus (5.5) in die Gleichung (5.4) einsetzen und erhalten wir für die Funktionen  $A^F(t)$ ,  $B^F(t)$  und  $C^F(t)$  die



Differentialgleichungen (4.12), (4.13) und (4.14) für  $c_\Psi = \frac{1}{2} \frac{\theta}{1-\theta}$ . Das bedeutet, wir erhalten das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dA^F(t)}{dt} = -2A^F(t)\Sigma_\mu A^F(t) + \kappa' A^F(t) + A^F(t)\kappa - \frac{1}{2} \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}, \quad A^F(T) = 0_{d \times d}, \quad (5.6)$$

$$\frac{dB^F(t)}{dt} = -2A^F(t)\kappa\bar{\mu} + [\kappa' - 2A^F(t)\Sigma_\mu] B^F(t), \quad B^F(T) = 0_{d \times 1}, \quad (5.7)$$

$$\frac{dC^F(t)}{dt} = -\frac{1}{2} B^{F'}(t)\Sigma_\mu B^F(t) - B^{F'}(t)\kappa\bar{\mu} - \text{tr}\{\Sigma_\mu A^F(t)\}, \quad C^F(T) = 0. \quad (5.8)$$

Im eindimensionalen Fall ( $d = 1$ ) können wir die Differentialgleichungen (5.6), (5.7) und (5.8) geschlossen lösen. Hierzu bestimmen wir zunächst die Lösung von (5.6). Durch Trennung der Variablen ergibt sich

$$\int_{A(t)}^{A(T)} \frac{1}{-2\Sigma_\mu A^2(s) + 2\kappa' A(s) - \frac{1}{2} \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}} dA(s) = \int_t^T ds. \quad (5.9)$$

Für das Integral auf der linken Seite von (5.9) ergeben sich in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta_A := 4\kappa^2 \left[ 1 - \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_R} \right] \quad (5.10)$$

drei verschiedene Fälle, welche zu den im nachfolgendem Lemma angegebenen Lösungen für das System von ODE für (5.6), (5.7) und (5.8) führen. Wir setzen dabei  $\delta_A := \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_A|}$ .

**Lemma 5.1.1.** *Für jedes  $t \in [0, T]$  gilt folgendes:*

- *normale Lösung für  $\Delta_A > 0$*

$$A^F(t) = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{1}{2\Sigma_R\delta_A} \cdot \frac{\sinh(\delta_A(T-t))}{a^F(t)},$$

$$B^F(t) = \frac{2\kappa\bar{\mu}}{\delta_A} \cdot \frac{\sinh(\delta_A(T-t))}{1 + \cosh(\delta_A(T-t))} A^F(t),$$

$$C^F(t) = \frac{\kappa}{2} \left( 1 + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\kappa\bar{\mu}^2}{\delta_A^2 \Sigma_R} \right) (T-t) - \frac{\kappa^2 \bar{\mu}}{\delta_A^2} (B^F(t) + \bar{\mu} A^F(t)) - \frac{1}{2} \log a^F(t),$$

$$\text{mit } a^F(t) := \cosh(\delta_A(T-t)) + \frac{\kappa}{\delta_A} \sinh(\delta_A(T-t)).$$

- *hyperbolische Lösung für  $\Delta_A = 0$*

$$A^F(t) = \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} - \frac{\frac{\kappa}{2\Sigma_\mu}}{\kappa(T-t) + 1},$$

$$B^F(t) = \kappa^2\bar{\mu} \left( \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} - A^F(t) \right) (T-t)^2,$$

$$C^F(t) = -\frac{\kappa}{2}(T-t) + \log \left| \frac{-\kappa}{2}(T-t) - 1 \right| + \frac{1}{12} \frac{\kappa^4\bar{\mu}^2 \left( T-t + \frac{4}{\kappa} \right) (T-t)^3}{2\Sigma_\mu(T-t) + 2\frac{\Sigma_\mu}{\kappa}}.$$

- *Tangens-Lösung für  $\Delta_A < 0$*

$$A^F(t) = \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} + \frac{\delta_A}{2\Sigma_\mu} \tan \left( \delta_A(T-t) + \bar{A} \right), \quad \bar{A} := -\arctan \frac{\kappa}{\delta_A},$$

$$B^F(t) = 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{\kappa}{2\delta_A\Sigma_\mu} \cos \left( \delta_A(T-t) + \bar{A} \right) \ln \left| \frac{\tan \left( \frac{\delta_A}{2}(T-t) + \frac{\bar{A}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left( \frac{\bar{A}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right),$$

$$+ 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{-1}{2\Sigma_\mu} \left[ \frac{\cos \left( \delta_A(T-t) + \bar{A} \right)}{\cos \left( \bar{A} \right)} - 1 \right] \right)$$

$$C^F(t) = -\frac{\kappa^3\bar{\mu}^2\sqrt{\kappa^2 + \delta_A^2}}{\delta_A\Sigma_\mu} \left[ \frac{1}{\cos(\bar{A})} - \frac{1}{\cos \left( \delta_A(T-t) + \bar{A} \right)} \right]$$

$$+ \frac{\kappa^2\bar{\mu}^2(\delta_A^2 - 2\kappa)}{\delta_A^4} A^F(t)$$

$$- \frac{\kappa\delta_A^2\Sigma_\mu + \kappa^2\bar{\mu}^2(\kappa^2 + \delta_A^2)}{2\delta_A^2\Sigma_\mu} (T-t) + \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \left( \delta_A(T-t) + \bar{A} \right)}{\cos(\bar{A})}.$$

*Beweis.* Für die normale Lösung siehe Appendix Lemma A.2.1, für die hyperbolische Lösung siehe Lemma A.2.2 und für die Tangens-Lösung siehe Lemma A.2.3. Des Weiteren verweisen wir zur Berechnung von  $C^F(t)$  auf Yu [81].  $\square$

Für die Bestimmung des monetären Wertes der Information in Abschnitt 4.3 bestimmen wir nachfolgend eine Formel zur Berechnung des Erwartungswertes in (4.35). Hierfür gilt folgendes

$$\mathbb{E} \left[ \mathcal{V}_0^F(x_0^{H/F}) | \mathcal{F}_0^H \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{(x_0^{H/F})^\theta}{\theta} V^F(0, \mu_0) | \mathcal{F}_0^H \right] = \frac{(x_0^{H/F})^\theta}{\theta} \mathbb{E} \left[ V^F(0, \mu_0) | M_0^H, Q_0^H \right].$$

Für  $M_0^H = m$  und  $Q_0^H = q$  ist die bedingte Verteilung von  $\mu_0$  gegeben  $\mathcal{F}_0^H$  die Normalverteilung  $\mathcal{N}(m, q)$ , d.h.  $\mu_0 = m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon$  mit  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{1}_d)$ , welches von  $\mathcal{F}_0^H$  unabhängig ist. Somit

ist

$$\mathbb{E}\left[V^F(0, \mu_0) | M_0^H = m, Q_0^H = q\right] = \mathbb{E}\left[V^F(0, m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon)\right].$$

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun für beliebige Zeitpunkte  $t \in [0, T]$  mit  $M_t^H = m$  und  $Q_t^H = q$  und definieren

$$\bar{V}^F(t, m, q) := \mathbb{E}\left[V^F(t, m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon)\right].$$

Lemma 5.1.3 gibt eine explizite Form zur Berechnung von  $\bar{V}^F(t, m, q)$ , für dessen Beweis wir das folgende Hilfslemma brauchen.

**Lemma 5.1.2.** *Sei  $X$  ein  $d$ -dimensionaler normalverteilter Vektor mit  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ . Weiterhin seien  $\alpha$  eine  $d \times d$  symmetrische und invertierbare Matrix und  $\beta$  ein Vektor aus  $\mathbb{R}^d$ , dann gilt unter der Annahme, dass die Matrix  $(\mathbf{I}_d - 2\alpha\Sigma_X)$  positiv definit ist, folgendes*

$$\mathbb{E}\left[e^{(X+\beta)'\alpha(X+\beta)}\right] = \det(\mathbf{I}_d - 2\alpha\Sigma_X)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{(\mu_X + \beta)'(\mathbf{I}_d - 2\alpha\Sigma_X)^{-1}\alpha(\mu_X + \beta)\right\}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{(X + \beta)'\alpha(X + \beta)\right\}\right] = \frac{\det(\Sigma_X^{-\frac{1}{2}})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{f_X(x)\right\} dx \quad (5.11)$$

mit dem Exponenten  $f_X(x) := -\frac{1}{2}(x - \mu_X)'(x - \mu_X) + (x + \beta)'(x + \beta)$ .

Für diesen Exponenten liefert die quadratische Ergänzung nach  $x$  für  $\Sigma_Z := (\Sigma_X^{-1} - 2\alpha)^{-1}$  und  $\mu_Z := \Sigma_Z(2\alpha\beta + \Sigma_X^{-1}\mu_X)$  folgendes

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{-1}{2}(x - \mu_Z)'\Sigma_Z^{-1}(x - \mu_Z) + \frac{1}{2}\mu_Z'\Sigma_Z^{-1}\mu_Z + \beta'\alpha\beta - \frac{1}{2}\mu_X'\Sigma_X^{-1}\mu_X \\ &= \frac{-1}{2}(x - \mu_Z)'\Sigma_Z^{-1}(x - \mu_Z) + (\mu_X + \beta)'(\mathbf{I}_d - 2\alpha\Sigma_X)^{-1}\alpha(\mu_X + \beta). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Setzt man (5.12) in die rechte Seite von (5.11), dann folgt mit der Einführung von  $Z$  mit  $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \Sigma_Z)$  unmittelbar die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.1.3.** *Unter der Annahme, dass die Matrix  $(\mathbf{I}_d - 2A^F(t)q)$  positiv definit ist, gilt*

$$\bar{V}^F(t, m, q) = \exp\left\{m'\bar{A}^F(t, q)m + (\bar{B}^F(t, q))'m + \bar{C}^F(t, q)\right\}, \quad (5.13)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{A}^F(t, q) &= (1 - 2A^F(t)q)^{-1}A^F(t), \\ \bar{B}^F(t, q) &= (1 - 2A^F(t)q)^{-1}B^F(t), \\ \bar{C}^F(t, q) &= C^F(t) + \frac{1}{2}(B^F(t))'(1 - 2qA^F(t))^{-1}qB^F(t) - \frac{1}{2}\log \det(1 - 2qA^F(t)). \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\bar{V}^F(t, m, q) &= \mathbb{E}\left[V^F(t, m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{(m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon)'A^F(t)(m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon) + (B^F(t))'(m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon) + C^F(t)\right\}\right] \\ &= V^F(t, m)\mathbb{E}\left[\exp\left\{\varepsilon'q^{\frac{1}{2}}A^F(t)q^{\frac{1}{2}}\varepsilon + 2\eta'(t)A^F(t)q^{\frac{1}{2}}\varepsilon\right\}\right],\end{aligned}$$

mit  $\eta(t) := [m + \frac{1}{2}(A^F(t))^{-1}B^F(t)]$ . Die quadratische Ergänzung nach  $\varepsilon$  für den Exponenten liefert

$$\begin{aligned}\bar{V}^F(t, m, q) &= V^F(t, m) \exp\left\{-\eta'(t)A^F(t)\eta(t)\right\}\mathbb{E}[\xi] \\ &= \exp\left\{C^F(t) - \frac{1}{4}(B^F(t))'(A^F(t))^{-1}B^F(t)\right\}\mathbb{E}[\xi],\end{aligned}\quad (5.14)$$

wobei  $\xi := \exp\left\{\left(\varepsilon + q^{-\frac{1}{2}}\eta(t)\right)'A^F(t)q\left(\varepsilon + q^{-\frac{1}{2}}\eta(t)\right)\right\}$  ist. Zur Berechnung des Erwartungswertes in der Gleichung (5.14) gilt nach Lemma 5.1.2 Folgendes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\left(\varepsilon + q^{-\frac{1}{2}}\eta(t)\right)'A^F(t)q\left(\varepsilon + q^{-\frac{1}{2}}\eta(t)\right)\right\}\right] \\ &= \det(1 - 2qA^F(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\eta'(t)(\mathbf{1}_d - 2A^F(t)q)^{-1}A^F(t)\eta(t)\right\}\end{aligned}\quad (5.15)$$

Wir setzen (5.15) in (5.14) ein und erhalten die Behauptung.  $\square$

Das folgende Lemma fasst die Ergebnisse aus Abschnitt 5.1 zur Lösung der DPE des Optimierungsproblems unter voller Information und zum Kandidaten für die optimale Strategie zusammen.

**Lemma 5.1.4.** *Für den Kandidaten der optimalen Strategie  $\pi^F$  gilt  $\pi_t^F = p^F(t, \mu_t)$  mit der optimalen Entscheidungsregel aus (5.3)*

$$p^H(t, m) = \frac{1}{1 - \theta} \Sigma_R^{-1} m.$$

Dabei ist  $V^F$  die Lösung der DPE (5.4), für die gilt

$$V^H(t, m) = \exp\left\{m'A^F(t)m + (B^F(t))'m + C^F(t)\right\},$$

wobei  $A^F, B^F, C^F$  in (5.6), (5.7) bzw. (5.8) gegeben sind.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\bar{V}^F(t, m, q) &= \mathbb{E}\left[V^F(t, m + q^{\frac{1}{2}}\varepsilon)\right] \\ &= \exp\left\{m'\bar{A}^F(t, q)m + (\bar{B}^F(t, q))'m + \bar{C}^F(t, q)\right\},\end{aligned}$$

wobei  $\bar{A}^F, \bar{B}^F$  und  $\bar{C}^F$  in Lemma 5.1.3 gegeben sind.

## 5.2 Kontrollproblem unter partieller Information $H = R, D$

### 5.2.1 Dynamic Programming Gleichung

Bei den Informations-Regimes  $H = R, D$  ist die bedingte Kovarianzmatrix  $Q^H$  deterministisch, deshalb besteht der gesteuerte Zustandsprozess  $Y = Y^{H,\pi}$  nur aus der bedingten Erwartung  $M^H$  und ist nach (4.55) gegeben durch

$$dY_t = \alpha_Y^H(Y_t, \pi_t) dt + \beta_Y^H(q_t^H) dW_t^H, \quad Y_0 = m_0.$$

Für diesen diesen Zustandsprozess definieren wir den Generator  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{H,p}$  angewandt auf eine Funktion  $g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_Y)$  wie folgt

$$\mathcal{L}g(y) = \nabla'_y g(y) \alpha_Y^H(y, p) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \nabla_{yy} g(y) \beta_Y^H \left( \beta_Y^H \right)' \right]. \quad (5.16)$$

Damit ergibt sich für die DPE aus (4.79) für das untersuchte Optimierungsproblem im Fall  $H = R, D$ :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} V^H(t, y) + \nabla'_y V^H(t, y) \kappa(\bar{\mu} - y) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{yy} V^H(t, y) Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H \right\} \\ & + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ \nabla'_y V^H(t, y) \theta Q_t^H p + \theta \left( p'y - \frac{1-\theta}{2} p' \Sigma_{Rp} \right) V^H(t, y) \right\}, \quad V^H(T, y) = 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Angenommen, die Differentialgleichung (5.17) hat eine klassische Lösung. Das Argument  $g(p) := \nabla'_y V^H(t, y) \theta Q_t^H p + \theta \left( p'y - \frac{1-\theta}{2} p' \Sigma_{Rp} \right) V^H(t, y)$  vom Supremum in der letzten Zeile von (5.17) ist quadratisch und streng konkav in  $p$  (denn  $\Sigma_R = \sigma_R \sigma_R'$  positiv definit und  $1 - \theta > 0$ ), deshalb hat die Funktion  $g(p)$  eine eindeutige Maximumstelle  $p^*$ , nämlich durch die Lösung der folgenden linearen Gleichung

$$\nabla'_y V^H(t, y) Q_t^H + \left( y - (1 - \theta) \Sigma_{Rp} \right) V^H(t, y) = 0.$$

Dies liefert den folgenden Maximierer

$$\begin{aligned} p^H = p^H(t, y) &= \frac{1}{1 - \theta} \Sigma_R^{-1} \left( y + Q_t^H \frac{\nabla_y V^H(t, y)}{V^H(t, y)} \right) \\ &= p^F(t, y) + \frac{1}{1 - \theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H \frac{\nabla_y V^H(t, y)}{V^H(t, y)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Wir setzen den Maximierer (5.18) in die Gleichung (5.17) ein und erhalten für den partiellen informierten Investor  $H = R, D$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} V^H(t, y) + \nabla'_y V^H(t, y) \left( \kappa(\bar{\mu} - y) + \frac{\theta}{(1 - \theta)} \Sigma_R^{-1} Q_t^H y \right) \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{yy} V^H(t, y) \left( Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H \right) \right\} + \frac{\theta}{2(1 - \theta)} y' \Sigma_R^{-1} y V^H(t, y) \\ & + \frac{\theta}{2(1 - \theta)} \frac{1}{V^H(t, y)} \nabla'_y V^H(t, y) \left( Q_t^H \Sigma_R^{-1} Q_t^H \right) \nabla_y V^H(t, y), \quad V^H(T, y) = 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Differentialgleichung (5.19) ist keine lineare partielle Differentialgleichung wie beim Regime  $H = F$ , sondern semilinear. Für deren Lösung machen wir den ähnlichen Ansatz wie beim Informations-Regime  $H = F$  im letzten Abschnitt (siehe Brendle [12])

$$V^H(t, y) = \exp \left\{ y' A^H(t) y + (B^H(t))' y + C^H(t) \right\} \quad (5.20)$$

für deterministische Funktionen  $A^H(t)$ ,  $B^H(t)$  und  $C^H(t)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}$ , weiterhin sei  $A^H(t)$  eine symmetrische Matrix. Das Einsetzen von (5.20) in die Gleichung (5.19) liefert das folgende System von ODEs

$$\begin{aligned} \frac{dA^H(t)}{dt} &= -2A^H(t)Q_t^H \left( \Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \right) Q_t^H A^H(t) + \kappa' A^H(t) + A^H(t) \kappa \\ &\quad - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} - 2 \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H A^H(t), \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\frac{dB^H(t)}{dt} = \left[ \kappa' - 2A^H(t)Q_t^H \left( \Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \right) Q_t^H - \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H \right] B^H(t) - 2A^H(t) \kappa \bar{\mu}, \quad (5.22)$$

$$\frac{dC^H(t)}{dt} = -(B^H(t))' \left[ \kappa \bar{\mu} + \frac{1}{2} Q_t^H \left( \Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \right) Q_t^H B^H(t) \right] - \text{tr} \{ Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H A^H(t) \} \quad (5.23)$$

mit Endbedingungen  $A^H(T) = 0_{d \times d}$ ,  $B^H(T) = 0_{d \times 1}$  und  $C^H(T) = 0$ .

Die Differentialgleichung (5.21) ist eine Riccati Gleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten, wohingegen (5.22) eine lineare Differentialgleichung ist, deren Koeffizienten von der Lösung der Riccati-Differentialgleichung abhängen. Somit ist eine Lösung für das ODE-System anspruchsvoller als beim Informations-Regime  $H = F$ .

Das folgende Lemma liefert eine Darstellung der Lösung für das oben dargestellte System von ODEs in Abhängigkeit der Lösung des Systems von ODEs (5.6), (5.7) und (5.8) für das Regime  $H = F$ . Das Ergebnis für  $H = R$  ist bereits in Brendle [12] enthalten, allerdings wird dort das Regime  $H = D$  nicht thematisiert. Daher geben wir nachfolgend den vollständigen Beweis für die beiden Regimes  $H = R, D$  an.

**Lemma 5.2.1.** *Für die Lösung des System von ODEs aus (5.21), (5.22) und (5.23) gilt für alle  $t \in [0, T]$  folgendes:*

$$A^H(t) = \bar{A}^F(t, Q_t^H), \quad (5.24)$$

$$B^H(t) = \bar{B}^F(t, Q_t^H), \quad (5.25)$$

$$C^H(t) = \bar{C}^F(t, Q_t^H) - \theta \Delta_X^H(t). \quad (5.26)$$

Dabei ist die Funktion  $\Delta_X^H$  gegeben durch

$$\Delta_X^H(t) := \frac{1}{2} \log \frac{\det(I_d - 2Q_t^H L^H(t))}{\det(I_d - 2Q_t^H A^F(t))} + \underline{K}^H(t) - \bar{K}^H(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.27)$$

Die Funktion  $L^H(t)$  genügt der Riccati-Differentialgleichung

$$\frac{dL^H(t)}{dt} = -2L^H(t)\Sigma_\mu L(t) + \kappa' L^H(t) + L^H(t)\kappa + \frac{1}{2}\Sigma_H^{-1}, \quad L^H(T) = 0, \quad (5.28)$$

die Funktion  $\underline{K}^H(t)$  ist gegeben durch

$$\underline{K}^H(t) = \int_t^T \text{tr} \left\{ \Sigma_\mu (A^F(u) - L^H(u)) \right\} du, \quad (5.29)$$

und die Funktion  $\overline{K}^H(t)$  wie folgt

$$\overline{K}^H(t) = \frac{1}{2} \mathbf{I}_H \int_t^T \text{tr} \left\{ Q_u^H \Sigma_\zeta^{-1} (I_d - 2Q_u^H A^F(u)) \right\}, \quad (5.30)$$

sodass  $\mathbf{I}_H := \begin{cases} 0; & H = R, \\ 1; & H = D \end{cases}$  ist.

*Beweis.* Für den Beweis von (5.24) definieren wir die Funktion  $\tilde{A}^H$  wie folgt

$$\tilde{A}^H(t) = (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} A^F(t). \quad (5.31)$$

Die Kettenregel liefert

$$\frac{d\tilde{A}^H(t)}{dt} = (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \left( \frac{dA^F(t)}{dt} + 2A^F(t) \frac{dQ_t^H}{dt} A^F(t) \right) (I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} \quad (5.32)$$

Andererseits bekommen wir für  $\frac{dA^F(t)}{dt}$  aus (5.6) und  $\frac{dQ_t^H}{dt}$  aus (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{dA^F(t)}{dt} + 2A^F(t) \frac{dQ_t^H}{dt} A^F(t) &= (I_d - 2A^F(t)Q_t^H) \kappa' A^F(t) \\ &\quad + A^F(t) \kappa (I_d - 2Q_t^H A^F(t)) - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} - 2A^F Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H A^F(t). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Das Einsetzen von (5.33) in (5.32) liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}^H(t)}{dt} &= \kappa' (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} A^F(t) + (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} A^F(t) \kappa \\ &\quad - 2(I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} A^F(t) Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H \\ &\quad - \frac{\theta}{2(1-\theta)} (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \Sigma_R (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Transformation aus (5.35) und erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}^H(t)}{dt} &= \kappa' \tilde{A}^H(t) + \tilde{A}^H(t) \kappa - 2\tilde{A}^H(t) Q_t^H \left( \Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \right) Q_t^H \tilde{A}^H(t) \\ &\quad - 2 \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H \tilde{A}^H(t) - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Sigma_R^{-1}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Nun ist es ersichtlich, dass  $\tilde{A}^H(t)$  derselben Gleichung wie  $A^H(t)$  in (5.21) genügt. Des Weiteren haben beide Lösungen denselben Endwert  $A^H(T) = \tilde{A}^H(T) = 0$ . Damit gilt  $A^H(t) = \tilde{A}^H(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ .

Für den Beweis von (5.25) definieren wir die Funktion  $\tilde{B}^H$  wie folgt

$$\tilde{B}^H(t) = (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1}B^F(t). \quad (5.35)$$

Durch Verwendung der Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{B}^H(t)}{dt} &= (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \frac{dB^F(t)}{dt} \\ &+ (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \left( 2 \frac{dA^F(t)}{dt} Q_t^H + 2A^F(t) \frac{dQ_t^H}{dt} \right) (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} B^F(t). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Einsetzen der Ableitungen  $\frac{dA^F(t)}{dt}$  aus (5.6) und  $\frac{dQ_t^H}{dt}$  aus (3.4) liefert

$$\begin{aligned} \left( 2 \frac{dA^F(t)}{dt} Q_t^H + 2A^F(t) \frac{dQ_t^H}{dt} \right) &= -2A^F(t)Q_t^H (\Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}) Q_t^H \\ &- \frac{\theta}{1-\theta} (I_d - 2A^F(t)Q_t^H) \Sigma_R^{-1} Q_t^H + 2A^F(t) \Sigma_\mu (I_d - 2A^F(t)Q_t^H). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \left( 2 \frac{dA^F(t)}{dt} Q_t^H + 2A^F(t) \frac{dQ_t^H}{dt} \right) (I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} B^F(t) &= \\ -2A^H(t)Q_t^H (\Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}) Q_t^H B^H(t) - \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H B^H(t) &+ \\ + 2A^H(t) \Sigma_\mu B^F(t). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$(I_d - 2A^F(t)Q_t^H)^{-1} \frac{dB^F(t)}{dt} = -2A^H(t) \Sigma_\mu B^F(t) - 2A^H(t) \kappa \bar{\mu} + \kappa' B^H(t). \quad (5.39)$$

Das Einsetzen von (5.38) und (5.39) in (5.36) liefert

$$\frac{d\tilde{B}^H(t)}{dt} = \left[ \kappa' - 2A^H(t)Q_t^H \left( \Sigma_H^{-1} + \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \right) Q_t^H - \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H \right] \tilde{B}^H(t) - 2A^H(t) \kappa \bar{\mu} \quad (5.40)$$

Nun ist es ersichtlich, dass  $\tilde{B}^H(t)$  derselben Gleichung wie  $B^H(t)$  in (5.22) genügt. Des Weiteren haben beide Lösungen denselben Endwert  $B^H(T) = \tilde{B}^H(T) = 0$ . Damit gilt  $B^H(t) = \tilde{B}^H(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ .



Für den Beweis von (5.26) definieren wir die Funktion  $K^H(t) := \underline{K}(t) - \overline{K}^H(t)$  und die Funktion  $\tilde{C}^H$  wie folgt

$$\begin{aligned} \tilde{C}^H(t) &= C^F(t) + \frac{1}{2}(B^F(t))'(I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1}Q_t^H B^F(t) \\ &\quad - \frac{1-\theta}{2} \log \det(I_d - 2Q_t^H A^F(t)) - \frac{\theta}{2} \log \det(I_d - 2Q_t^H L(t)) - \theta K^H(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Für die erste Zeile aus der letzten Gleichung haben wir

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[ C^F(t) + \frac{1}{2}(B^F(t))'(I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1}Q_t^H B^F(t) \right] \\ &= \frac{dC^F(t)}{dt} + (B^F(t))'(I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1}Q_t^H \frac{dB^F(t)}{dt} \\ &\quad + (B^F(t))'(I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} \left( Q_t^H \frac{dA^F(t)}{dt} Q_t^H + \frac{1}{2} \frac{dQ_t^H}{dt} \right) (I_d - 2A^F Q_t^H)^{-1} B^F(t) \\ &= -\frac{1}{2}(B^F(t))^\top (I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} Q_t^H (\Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}) Q_t^H (I_d - 2A^F Q_t^H)^{-1} B^F(t) \\ &\quad - (B^F(t))'(I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} \kappa \bar{\mu} - \text{tr} \left\{ \Sigma_\mu A^F(t) \right\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Die Herleitung der zweiten Zeile aus (5.41) ist in (5.44) in Lemma (5.2.2) unten angegeben. Nun addieren wir (5.42) und (5.44), dann verwenden wir die Transformationen (5.24) und (5.25)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{C}^H(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}(B^H(t))' Q_t^H (\Sigma_H^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}) Q_t^H B^H(t) - (B^H(t))' \kappa \bar{\mu} \\ &\quad - \text{tr} \left\{ Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H A^H(t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nun ist es ersichtlich, dass  $\tilde{C}^H(t)$  derselbe Gleichung wie  $C^H(t)$  in (5.23) genügt. Des Weiteren haben beide Lösungen denselben Endwert  $C^H(T) = \tilde{C}^H(T) = 0$ . damit gilt  $C^H(t) = \tilde{C}^H(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ .  $\square$

Das folgende Lemma erläutert die im letzten Beweis erwähnten Nebenrechnung in der zweiten Zeile aus (5.41).

**Lemma 5.2.2.** Für alle  $t \in [0, T]$  gilt

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[ -\frac{1-\theta}{2} \log \det(I_d - 2A^F(t)Q_t^H) - \frac{\theta}{2} \log \det(I_d - 2L^H(t)Q_t^H) - \theta K^H(t) \right] \\ &= \text{tr} \left\{ \Sigma_\mu A^F(t) \right\} - \text{tr} \left\{ Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H A^H(t) \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

*Beweis.* Einerseits haben wir

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \log \det(I_d - 2Q_t^H A^F(t)) &= -2tr \left[ (I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} \cdot \frac{d}{dt} (Q_t^H A^F(t)) \right] \\
 &= \frac{1}{1-\theta} tr \left\{ (I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} Q_t^H \Sigma_R^{-1} \right\} \\
 &\quad + 2tr \left\{ (I_d - 2Q_t^H A^F(t))^{-1} Q_t^H \Sigma_\zeta^{-1} Q_t^H A^F(t) \right\} \\
 &\quad - 2tr \left\{ \Sigma_\mu A^F(t) \right\} - tr \left\{ Q_t^H \Sigma_R^{-1} \right\}. \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \log \det(I_d - 2Q_t^H L^H(t)) &= -2tr \left[ (I_d - 2Q_t^H L(t))^{-1} \cdot \frac{d}{dt} (Q_t^H L^H(t)) \right] \\
 &= -2tr \left\{ \Sigma_\mu L^H(t) \right\} - tr \left\{ Q_t^H \Sigma_H^{-1} \right\} \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die rechte Seite von (5.44) durch Addieren von (5.45) mit (5.46) und der Ableitung von  $K^H(t)$  aus (5.28).  $\square$

## 5.2.2 Optimale Strategien

Das folgende Lemma fasst die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.1 zur Lösung der DPE bei den Regimes  $H = R, D$  und zum Kandidaten für die optimale Strategie zusammen.

**Lemma 5.2.3.** *Für den Kandidaten der optimalen Strategie  $\pi^H$  gilt  $\pi_t^H = p^H(t, M_t^H; Q_t^H)$  mit der optimalen Entscheidungsregel aus (5.18)*

$$\begin{aligned}
 p^H(t, m; q) &= \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q \frac{\nabla_y V^H(t, m)}{V^H(t, m)} \right) \\
 &= \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q [2A^H(t)m + B^H(t)] \right).
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $V^H$  die Lösung der DPE (5.19), für die gilt

$$V^H(t, m) = \exp \left\{ m' A^H(t) m + (B^H(t))' m + C^H(t) \right\},$$

wobei  $A^H, B^H, C^H$  in Lemma 5.2.1 gegeben sind.

Vergleicht man die optimalen Entscheidungsregeln für den  $R$ -,  $D$ - und  $F$ -Investor für übereinstimmende Werte des Filters, so ergeben sich einige interessante Eigenschaften, die in den folgenden zwei Lemmata formuliert sind. Sie besagen, dass die obigen Investoren in einem Modell mit Gaußscher Drift bei übereinstimmenden Driftschätzungen auch die gleichen optimalen Strategien verwenden. Diese Eigenschaft ist insofern überraschend, da sie für Modelle mit Markov-modulierter Drift nicht bekannt ist, siehe Schütze [71].

**Lemma 5.2.4.** *Sind  $M_t^R = M_t^D = m$  und  $Q_t^R = Q_t^D = q$ , dann gilt*

$$p^R(t, m; q) = p^D(t, m; q).$$

*Beweis.* Bei den beiden Regimes  $H = R, D$  haben wir aus (5.18)

$$p^H(t, m; q) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q \frac{\nabla_m V^H(t, m)}{V^H(t, m)} \right).$$

Aus dem Ansatz für die Wertfunktion in (5.20) und den Transformationen (6.7) und (6.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_m V^H(t, m)}{V^H(t, m)} &= \left[ 2A^H(t)m + B^H(t) \right] \\ &= (I - 2A^F(t)q)^{-1} \left[ 2A^F(t)m + B^F(t) \right]. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$p^R(t, m; q) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q(I - 2A^F(t)q)^{-1} \left[ 2A^F(t)m + B^F(t) \right] \right) = p^D(t, m; q).$$

□

**Lemma 5.2.5.** Sind  $M_t^H = \mu_t = m$  und  $Q_t^H = q = 0$  mit  $H = R, D$ , dann gilt

$$p^F(t, m) = p^H(t, m; 0).$$

*Beweis.* Bei den beiden Regimes  $H = R, D$  haben wir aus (5.18)

$$p^H(t, m; 0) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} m,$$

welches mit der myopischen Strategie  $p^F(t, m)$  aus (5.3) übereinstimmt. □

Bevor wir das Kapitel abschließen weisen wir darauf hin, dass man das Optimierungsproblem für den logarithmischen Nutzen auch mit Hilfe der Dynamic Programming Methode lösen kann und die Ergebnisse werden in der folgenden Bemerkung dargestellt.

**Bemerkung 5.2.6.** Das Optimierungsproblem für den logarithmischen Nutzen mit Hilfe der Dynamic Programming Methode liefert die gleiche Aussage erhalten wie in Theorem 4.4.3. Hierbei erhält man das folgende Gleichungssystem von ODEs

$$\begin{aligned} \frac{dA_0(t)}{dt} &= \kappa' A_0(t) + A_0(t) \kappa - \frac{1}{2} \Sigma_R^{-1}, & A_0(T) &= 0_{d \times d}, \\ \frac{dB_0(t)}{dt} &= \kappa' B_0(t) - 2A_0(t) \kappa \bar{\mu}, & B_0(T) &= 0_{d \times 1}, \\ \frac{dC_0^H(t)}{dt} &= -B_0'(t) \kappa \bar{\mu} - \text{tr}\{l^H(t)\}, & C_0^H(T) &= 0, \\ l^H(t) &= \begin{cases} \Sigma_\mu A_0(t), & H = F, \\ Q_t^H \Sigma_H^{-1} Q_t^H A_0(t), & H = R, D, C_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Im eindimensionalen Fall hat dieses System eine geschlossen Lösung, die in Theorem 4.4.3 gegeben war.

### 5.3 Monetärer Wert der Information

Für die in Abschnitt 4.3 eingeführten Größen  $x_0^{H/F}$ ,  $\mathcal{E}^H$  und  $x_0^{R/H}$  zur Beschreibung des monetären Werts der den partiell informierten Investoren vorliegenden Informationen gibt es für den  $H$ -Investor mit  $H = R, D$  die folgenden geschlossenen Ausdrücke.

**Lemma 5.3.1.** *Für die in (4.35) und (4.37) definierten Anfangsvermögens  $x_0^{H/F}$  und  $x_0^{R/H}$  sowie die in (4.36) definierte Effektivität  $\mathcal{E}^H$  gilt folgendes*

$$\mathcal{E}^H = x_0^{H/F} = \exp\{-\Delta_X^H(0)\}, \quad \text{für } H = R, D, \quad (5.47)$$

sowie

$$P_{Exp}^D = 1 - x_0^{R/D}, \quad \text{mit } x_0^{R/D} = \exp\{\Delta_X^R(0) - \Delta_X^D(0)\}. \quad (5.48)$$

Dabei sind die Größen  $\Delta_X^R(0)$  und  $\Delta_X^D(0)$  in (5.27) gegeben.

*Beweis.*  $x_0^{H/F}$  ist definiert als Lösung der Gleichung (4.35)

$$\mathcal{V}_0^H(1) = \mathbb{E}\left[\mathcal{V}_0^F(x_0^{H/F}) \mid \mathcal{F}_0^H\right], \quad H = R, D,$$

bzw. der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} V^H(0, m; q) &= \frac{(x_0^{H/F})^\theta}{\theta} \mathbb{E}\left[V^F(0, \mu_0) \mid M_0^H = m, Q_0^H = q\right] \\ &= \frac{(x_0^{H/F})^\theta}{\theta} \bar{V}^F(0, m, q). \end{aligned}$$

Substituiert man die Darstellung für  $V^H$  aus Lemma 5.2.3 und für  $\bar{V}^F$  aus Lemma 5.1.3 ergibt sich die Behauptung in (5.47).

Für die Behauptung in (5.48) gehen wir von der Definition des Anfangsvermögens  $x_0^{R/D}$  aus, welches als Lösung der Gleichung (4.37) der folgenden Gleichung ist

$$\mathcal{V}_0^R(1) = \mathcal{V}_0^D(x_0^{R/D}),$$

bzw. der Gleichung

$$\frac{1}{\theta} V^R(0, m; q) = \frac{(x_0^{R/D})^\theta}{\theta} V^D(0, m; q).$$

Aus der Darstellung für  $V^R$  und  $V^D$  in Lemma 5.2.3 folgt

$$x_0^{R/D} = \exp\{\Delta_X^D(0) - \Delta_X^R(0)\}.$$

□

---

Kontrollproblem mit Expertenmeinungen zu deterministischen  
Zeitpunkten

---

In diesem Kapitel behandeln wir das Nutzenmaximierungsproblem für das Informations-Regime  $H = C_n$ , bei dem eine vorgegebene Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  von Expertenmeinungen über die unbekannte Drift zu deterministischen und festgelegten Zeitpunkten  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$  eintreffen. Nachdem wir das Problem für den logarithmischen Nutzen bereits in Abschnitt 4.4 behandelt haben, werden wir uns in diesem Kapitel auf das Optimierungsproblem für den Potenz-Nutzen konzentrieren. Dieses wollen wir mit der Dynamic Programming Methode lösen, allerdings stoßen wir auf das Problem, dass der zugrunde liegende Zustandsprozess  $M^{C_n}$  Sprünge durch die Update-Formel zu den deterministischen Ankunftszeitpunkten der Expertenmeinungen aufweist. Ausgehend vom Dynamic Programming Principle entwickeln wir eine Rückwärtsrekursion zur Berechnung der Wertfunktion und der optimalen Strategie. Dabei wird beginnend mit dem Endzeitpunkt  $t = T$  jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgenden Informationszeitpunkten eine DPE wie beim Informations-Regime  $H = R$  mit der in Abschnitt 5.2 vorgestellten Ansatzmethode gelöst. Zu den Informationszeitpunkten erfolgt ein Update der Wertfunktion, welches die Endbedingung der DPE auf dem nächsten Teilintervall liefert. In Abschnitt 6.2 untersuchen wir einige Eigenschaften der optimalen Strategie. Abschnitt 6.3 liefert einige Ergebnisse zum monetären Wert der Information für das Regime  $H = C_n$ .

## 6.1 Dynamic Programming Gleichung

Der Zustandsprozess  $Y$  besteht nur aus dem Prozess der bedingten Erwartung  $M^{C_n}$ , dessen Dynamik in (4.58) durch

$$dY_t = \alpha_Y^{C_n}(Y_t, \pi_t) dt + \beta_Y^{C_n}(Y_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Y^{C_n}(Y_{t-}, u) \tilde{I}^{C_n}(dt, du), \quad Y_0 = y_0,$$

gegeben war.

Da der markierte Punktprozess  $\tilde{I}$  deterministisch bezüglich der Zeit ist, können wir das Optimierungsproblem (2.20) nicht mit der üblichen Vorgehensweise auf  $[0, T]$  wie bei  $H = R, D$  lösen. Die Idee besteht darin, dass zwischen je zwei Informationszeitpunkten  $t_{k-1}$  und  $t_k$  mit  $k = 1, \dots, n$  und  $t_n := T$  der Zustandsprozess  $Y^{C_n} = M^{C_n}$  ein Diffusionsprozess ist und keine Sprünge besitzt. Deshalb können wir das Optimierungsproblem (2.20) auf den Teilintervallen  $[t_{k-1}, t_k]$  ähnlich wie im klassischen Fall  $H = R$  lösen. Zu den Sprungzeitpunkten  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ , in denen das Update in den Filter einfließt, werden wir mit Hilfe vom Dynamic Programming Principle die Endbedingung  $V^{C_n}(t_k, y)$  bestimmen.

Zusammenfassend konstruieren wir eine Rückwärts-Rekursion für die Wertfunktion  $V_k(t, y) := V^{C_n}(t, y)$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  wie folgt: Im ersten Schritt nehmen wir  $\tau > t$  und  $t$  ein festen Zeitpunkt aus  $[t_{k-1}, t_k]$  und wir betrachten gemäß Lemma 4.5.2 den folgenden Grenzwert

$$V_k(t, y) = \lim_{\tau \searrow t} \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_t^\tau -b(Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) ds \right\} V_k(\tau, Y_\tau^{\pi, t, y}) \right]. \quad (6.1)$$

Für die Herleitung der Dynamic Programming Gleichung definieren wir den Generator  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{C_n, p}$  für den Zustandsprozess  $Y = M^{C_n}$  angewandt auf eine Funktion  $g \in C^2(\mathcal{S}_Y)$  durch

$$\mathcal{L}g(y) = \nabla'_y g(y) \alpha_M^{C_n}(y, p) + \frac{1}{2} tr \left\{ \nabla_{mm} g(y) \beta_M^{C_n} \left( \beta_M^{C_n} \right)' \right\} \quad (6.2)$$

und erhalten dann aus (6.1) die folgende DPE

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} V_k(t, y) + \nabla'_y V_k(t, y) \kappa(\bar{\mu} - y) + \frac{1}{2} tr \left\{ \nabla_{yy} V_k(t, y) Q_t^{C_n} \Sigma_R^{-1} Q_t^{C_n} \right\} \\ & + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ \nabla'_y V_k(t, y) \theta Q_t^{C_n} p + \theta \left( p'y - \frac{1-\theta}{2} p' \Sigma_{RP} \right) V_k(t, y) \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

mit der Endbedingung  $V_n(t_n, y) =: h_n(y) = 1$  zum Zeitpunkt  $t_n = T$  und einer noch zu bestimmenden Endbedingung  $V_k(t_k, y) =: h_k(y)$  zu den Informationszeitpunkten  $t_k$ , mit  $k = n-1, \dots, 0$ .

Ein Maximierer für das Supremum aus (6.3) bzw. ein Kandidat für die optimale Strategie ist

$$p^{C_n} = p^{C_n}(t, y) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( y + Q_t^{C_n} \frac{\nabla_y V_k(t, y)}{V_k(t, y)} \right). \quad (6.4)$$

Wir setzen den Maximierer aus (6.4) in die DPE (6.3) ein, dann bekommen wir die folgende Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} V_k(t, y) + \nabla'_y V_k(t, y) \left( \kappa(\bar{\mu} - y) + \frac{\theta}{(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} Q_t^{C_n} y \right) \\ & + \frac{1}{2} tr \left\{ \nabla_{yy} V_k(t, y) \left( Q_t^{C_n} \Sigma_R^{-1} Q_t^{C_n} \right) \right\} + \frac{\theta}{2(1-\theta)} y' \Sigma_R^{-1} y V_k(t, y) \\ & + \frac{\theta}{2(1-\theta)} \frac{1}{V_k(t, y)} \nabla'_y V_k(t, y) \left( Q_t^{C_n} \Sigma_R^{-1} Q_t^{C_n} \right) \nabla_y V_k(t, y), \quad V_k(t_k, y) = h_k(y). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Für die Lösung von (6.5) machen den gleichen Ansatz wie im klassischen Fall  $H = R, D$

$$V_k(t, y) = \exp\{y' A_k(t) y + B'_k(t) y + C_k(t)\} \quad (6.6)$$

für deterministische Functions  $A_k(t), B_k(t)$  und  $C_k(t)$  definiert auf  $[t_{k-1}, t_k]$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}$ , weiterhin sei  $A_k(t)$  eine symmetrische und invertierbare definite Matrix. Das Einsetzen von (6.6) in (6.5) liefert die Differentialgleichungen (5.21), (5.22) und (5.23) im Fall  $H = R$  und mit Endbedingungen  $A_n(t_n) = 0_{d \times d}, B_n(t_n) = 0_{d \times 1}$  und  $C_n(t_n) = 0$  zum Endzeitpunkt  $t_n = T$  und noch zu bestimmenden Endbedingungen zu den Informationszeitpunkten  $t_k$  mit  $k = n - 1, \dots, 0$ .

Das folgende Lemma liefert eine Darstellung der Lösung für das zugehörige System von ODEs in Abhängigkeit der Lösung des Systems von ODEs (5.6), (5.7) und (5.8) für das Regime  $H = F$ .

**Lemma 6.1.1.** *Für die Funktionen  $A_k(t), B_k(t)$  und  $C_k(t)$  gilt für alle  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  folgendes:*

$$A_k(t) = \bar{A}^F(t, Q_t^{C_n}), \quad (6.7)$$

$$B_k(t) = \bar{B}^F(t, Q_t^{C_n}), \quad (6.8)$$

$$C_k(t) = \bar{C}^F(t, Q_t^{C_n}) - \theta \Delta_X^{C_n}(t). \quad (6.9)$$

Dabei ist die Funktion  $\Delta_X^{C_n}$  gegeben durch

$$\Delta_X^{C_n}(t) := \Delta_X^{C_n}(t) := \frac{1}{2} \log \frac{\det(\mathbf{I}_d - 2Q_t^{C_n} L^R(t))}{\det(\mathbf{I}_d - 2Q_t^{C_n} A^F(t))} + \underline{K}^R(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.10)$$

Die Funktionen  $L^R(t)$  und  $\underline{K}^R(t)$  sind für alle  $t \in [0, T]$  wie in Lemma 5.2.1 definiert.

*Beweis.* Es folgt analog zum Beweis von Lemma 5.2.1 □

Im zweiten Schritt nehmen wir einen Informationszeitpunkt  $t_k$  mit  $k = n - 1, \dots, 0$  und werden mit Hilfe des Dynamic Programming Principle aus Lemma 4.5.2 die gesuchte Endbedingung für die Differentialgleichung (6.5) bestimmen. Dafür setzen wir  $\tau = t_k$  und wir betrachten den folgenden Grenzwert

$$\begin{aligned} h_k(y) &= V_k(t_k^-, y) \\ &= \lim_{t \nearrow t_k} \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_t^{t_k} -b(Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) ds \right\} V_{k+1}(t_k, Y_{t_k}^{\pi, t, y}) \right] \\ &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ V_{k+1}(t_k, Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y}) \right]. \end{aligned}$$

Die Strategie taucht nur im Driftterm  $\alpha_Y^{C_n}(y, p)$  auf, jedoch nicht im Diffusionsterm  $\beta_Y^{C_n}(y)$  und insbesondere nicht im Sprungterm  $\gamma_Y^{C_n}(y, u)$ , daher hat sie keine Auswirkungen auf den Zuwachs des Zustandsprozesses  $Y$  zum Zeitpunkt  $t_k$  und somit können wir das Supremum in der letzten Gleichung weglassen und erhalten dann

$$h_k(y) = \mathbb{E} \left[ V_{k+1}(t_k, Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y}) \right]. \quad (6.11)$$

Die Berechnung vom Erwartungswert auf der rechten Seite von (6.11) wird im nächsten Lemma angegeben.

**Lemma 6.1.2.** *Zu einem Informationszeitpunkt  $t_k$  mit  $k = n - 1, \dots, 0$ , lässt sich die Endbedingung  $h_k(y)$  für die Differentialgleichung (6.5) wie folgt bestimmen*

$$h_k(y) = \exp \left\{ y' \Lambda_k A_{k+1}(t_k) y + B'_{k+1}(t_k) \Lambda_k y + C_{k+1}(t_k) + \frac{1}{2} B'_{k+1}(t_k) \Lambda_k \Sigma_k B_{k+1}(t_k) + \frac{1}{2} \log \det \Lambda_k \right\}, \quad (6.12)$$

wobei die Update-Matrix gilt  $\Lambda_k := (\mathbf{I}_d - 2A_{k+1}(t_k)\Sigma_k)^{-1}$  mit  $\Sigma_k := Q_{t_k^-}^{C_n}(\Gamma + Q_{t_k^-}^{C_n})^{-1}Q_{t_k^-}^{C_n}$ .

*Beweis.* Zur Vereinfachung führen wir in diesem Beweis die folgenden Bezeichnungen ein:

$$A(t_k) := A_{k+1}(t_k), \quad B(t_k) := B_{k+1}(t_k), \quad C(t_k) := C_{k+1}(t_k).$$

Es gilt nach (6.11) folgendes

$$\begin{aligned} h_k(y) &= \mathbb{E} \left[ V_{k+1}(t_k, Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ (Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y})' A(t_k) Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y} + B'(t_k) Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y} + C(t_k) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Die quadratische Ergänzung nach  $Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y}$  für den Exponenten liefert

$$\begin{aligned} h_k(y) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \left( Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y} + \frac{1}{2} A^{-1}(t_k) B(t_k) \right)' A(t_k) \left( Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y} + \frac{1}{2} A^{-1}(t_k) B(t_k) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} B'(t_k) A^{-1}(t_k) B(t_k) + C(t_k) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Da nach der Update-Formel (3.12) gilt  $Y_{t_k}^{\pi, t_k^-, y} \sim \mathcal{N}(y, \Sigma_k)$ , folgt nach Lemma 5.1.2 mit  $\alpha = A(t_k)$  und  $\beta = \frac{1}{2} A^{-1}(t_k) B(t_k)$  folgendes:

$$\begin{aligned} h_k(y) &= \exp \left\{ \left( y + \frac{1}{2} A^{-1}(t_k) B(t_k) \right)' \Lambda_k A(t_k) \left( y + \frac{1}{2} A^{-1}(t_k) B(t_k) \right) \right\} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{4} B'(t_k) A^{-1}(t_k) B(t_k) + C(t_k) + \frac{1}{2} \log \det \Lambda_k \right\}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar nach dem Ausklammern der Terme im Exponenten.  $\square$

**Lemma 6.1.3.** *Die Endbedingungen für die zugehörigen Differentialgleichungen der Funktionen  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  und  $C_k(t)$  sind*

$$A_k(t_k^-) = (\mathbf{I}_d - 2A_{k+1}(t_k)\Sigma_k)^{-1} A_{k+1}(t_k) \quad (6.13)$$

$$B_k(t_k^-) = (\mathbf{I}_d - 2A_{k+1}(t_k)\Sigma_k)^{-1} B_{k+1}(t_k) \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} C_k(t_k^-) &= C_{k+1}(t_k) + \frac{1}{2} B'_{k+1}(t_k) (\mathbf{I}_d - 2A_{k+1}(t_k)\Sigma_k)^{-1} \Sigma_k B_{k+1}(t_k) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log \det (\mathbf{I}_d - 2A_{k+1}(t_k)\Sigma_k) \quad (6.15) \end{aligned}$$



*Beweis.* Aus dem letzten Lemma gilt

$$h_k(y) = \exp \left\{ y' \Lambda_k A_{k+1}(t_k) y + B'_{k+1}(t_k) \Lambda_k y + C_{k+1}(t_k) + \frac{1}{2} B'_{k+1}(t_k) \Sigma_k \Lambda_k B_{k+1}(t_k) + \frac{1}{2} \log \det \Lambda_k \right\}. \quad (6.16)$$

Auf der anderen Seite gilt

$$h_k(y) = V_k(t_k-, y) = \exp \left\{ y' A_k(t_k) - y + B'_k(t_k-) y + C_k(t_k-) \right\} \quad (6.17)$$

Der Koeffizientenvergleich von (6.16) und (6.17) liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.1.4.** Im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ ) lassen sich die Update-Formel (6.13), (6.14) und (6.15) gut interpretieren. Nämlich, bei ungenauen Expertenmeinungen gilt für den Grenzfall  $\Gamma \rightarrow \infty$ , dass der Grenzwert von  $\Sigma_k$  gleich 0 bzw. der Grenzwert des Update-Faktors  $\Lambda_k$  gleich 1 sind. Dementsprechend sind die Funktionen  $A_k$ ,  $B_k$  und  $C_k$  gemäß der Update-Formel glatte Funktionen. Wohingegen für den anderen Grenzfall bei sehr genauen Expertenmeinungen mit  $\Gamma \rightarrow 0$  folgt, dass der Grenzfall von  $\Sigma_k$  gleich 1 ist und somit geht der Sprung zu einem Informationszeitpunkt zum Grenzfall in Richtung  $A^F$ ,  $B^F$  bzw.  $C^F$

**Bemerkung 6.1.5.** In Abschnitt 3.3.1 haben wir uns für die Frage interessiert, wie sich der Filter bei dem Informations-Regime  $H = C_n$  verhält, wenn die Anzahl der Experten wächst und gleichzeitig deren Ungenauigkeit linear mitwächst. Theorem 3.3.2 hat gezeigt, dass der  $C_n$ -Filter unter bestimmten Voraussetzungen gegen den  $D$ -Filter konvergiert. Wir vermuten, dass sich diese Überlegung unter weiteren technischen Bedingungen auf die Wertfunktionen übertragen lässt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |V^{C_n}(t, m) - V^D(t, m)| = 0, \quad \forall m \in \mathcal{S}_M. \quad (6.18)$$

Numerische Ergebnisse wie in Abbildung 8.13 für ein positives  $\theta$  und in Abbildung 8.14 für ein negatives  $\theta$  bestätigen diese Vermutung. Der formale Beweis bleibt jedoch aus und soll in einer zukünftigen Arbeit erscheinen.

Außerdem haben wir in Kapitel 3.3.2 angenommen, dass die Ungenauigkeit der Experten konstant und unabhängig von deren Anzahl bleibt. Theorem 3.3.5 hat gezeigt, dass der  $C_n$ -Filter unter bestimmten Voraussetzungen gegen die Drift konvergiert. Wir vermuten, dass sich diese Überlegung unter weiteren technischen Bedingungen auf die Wertfunktionen übertragen lässt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |V^{C_n}(t, m) - \bar{V}^F(t, m, Q_t^{C_n})| = 0, \quad \forall m \in \mathcal{S}_M. \quad (6.19)$$

Numerische Ergebnisse wie in Abbildung 8.15 für ein positives  $\theta$  und in Abbildung 8.16 für ein negatives  $\theta$  bestätigen diese Vermutung. Ebenso bleibt der formale Beweis aus und soll in einer zukünftigen Arbeit erscheinen.

## 6.2 Optimale Strategien

Das folgende Lemma fasst die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 zur Lösung der DPE bei den Regimes  $H = C_n$  und zum Kandidaten für die optimale Strategie zusammen.

**Lemma 6.2.1.** *Sei  $t \in [t_{k-1}, t_k)$  und  $k = 1, 2, \dots, n$ , dann gilt für den Kandidaten der optimalen Strategie  $\pi^{C_n}$  die Beziehung  $\pi_t^{C_n} = p^{C_n}(t, M_t^{C_n}; Q_t^{C_n})$  mit der optimalen Entscheidungsregel aus (6.4)*

$$p^{C_n}(t, m; q) = \frac{1}{1 - \theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q \frac{\nabla_m V_k(t, m)}{V_k(t, m)} \right).$$

Dabei ist  $V_k$  die Lösung der DPE (6.5), für die gilt

$$V_k(t, m) = \exp \{ m' A_k(t) m + B_k'(t) m + C_k(t) \},$$

mit  $A_k, B_k$  und  $C_k$  aus Lemma 6.1.1.

**Lemma 6.2.2.** *Sind  $M_t^{C_n} = M_t^H = m$  und  $Q_t^{C_n} = Q_t^H = q$  mit  $H = R$  oder  $H = D$ , dann gilt*

$$p^{C_n}(t, m; q) = p^H(t, m; q).$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 5.2.4. □

**Lemma 6.2.3.** *Sind  $M_t^{C_n} = \mu_t = m$  und  $Q_t^{C_n} = q = 0$ , dann gilt*

$$p^{C_n}(t, m; 0) = p^F(t, m).$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 5.2.5. □

## 6.3 Monetärer Wert der Information

Ähnlich wie in Abschnitt 5.3 können wir für die in Abschnitt 4.3 eingeführten Größen  $x_0^{C_n/F}$ ,  $\mathcal{E}^{C_n}$  und  $x_0^{R/C_n}$  zur Beschreibung des monetären Werts der den partiell informierten Investoren vorliegenden Informationen die folgenden geschlossenen Ausdrücke aufstellen.

**Lemma 6.3.1.** *Für die in (4.35) und (4.37) definierten Anfangsvermögens  $x_0^{C_n/F}$  und  $x_0^{R/C_n}$  sowie die in (4.36) definierte Effektivität  $\mathcal{E}^{C_n}$  gilt folgendes*

$$\mathcal{E}^{C_n} = x_0^{C_n/F} = \exp \{ -\Delta_X^{C_n}(0) \}, \quad (6.20)$$

sowie

$$P_{Exp}^{C_n} = 1 - x_0^{R/C_n}, \quad \text{mit} \quad x_0^{R/C_n} = \exp \{ -\Delta_X^{C_n}(0) + \Delta_X^R(0) \}. \quad (6.21)$$

Dabei sind die Größen  $\Delta_X^R(0)$  und  $\Delta_X^{C_n}(0)$  in (5.27) bzw (6.10) gegeben.

---

## Kontrollproblem mit Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten

---

In diesem Kapitel untersuchen wir das Optimierungsproblem für das Informations-Regime  $H = C_\lambda$ . Der  $C_\lambda$ -Investor verwendet für die Driftschätzung wie der in Kapitel 6 behandelte  $C_n$ -Investor neben den Beobachtungen aus den Renditen zusätzlich zeitdiskrete Expertenmeinungen. Allerdings treffen diese nun nicht mehr zu bekannten und fixierten Zeitpunkten ein, sondern zu zufälligen Zeitpunkten. Diese sind Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses. In diesem Fall ist der Prozess der bedingten Kovarianz  $Q^{C_\lambda}$  nicht mehr deterministisch, sondern ein stochastischer Prozess mit stückweise deterministischen Pfaden und Sprüngen in den Informationszeitpunkten. Der Prozess der bedingten Erwartung  $M^{C_\lambda}$  ist nun ein Sprung-Diffusionsprozess. Im Gegensatz zu den bisher behandelten Informations-Regimes enthält der Zustand des risikosensitiven Kontrollproblems neben  $M^{C_\lambda}$  auch die bedingte Kovarianz  $Q^{C_\lambda}$ . Die in Abschnitt 7.1 untersuchte DPE für die Wertfunktion  $V^{C_\lambda}$  ist nun keine PDE, sondern eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE). Da für diese Gleichung keine geschlossene Lösung zu erwarten ist, konstruieren wir in Abschnitt 7.3 Näherungslösungen mit Hilfe von Differenzenverfahren, bei denen der Integralterm der PIDE durch geeignete Quadraturformeln erfasst wird. Zuvor wird allerdings in Abschnitt 7.2 eine Regularisierungsmethode eingesetzt, mit der es gelingt, die für das vorliegende risikosensitiven Kontrollproblem offenen Fragen zur Verifikation zu lösen.

### 7.1 Dynamic Programming Gleichung

Bei diesem Informations-Regime ist der gesteuerte Zustandsprozess  $Y = Y^{C_\lambda}$ , der sowohl aus dem Filter  $M^{C_\lambda}$  als auch aus der bedingten Kovarianz  $Q^{C_\lambda}$  besteht, ein Sprungdiffusionsprozess, dessen Dynamik aus (4.64) zu entnehmen ist

$$dY_t = \alpha_Y^{C_\lambda}(Y_t, \pi_t) dt + \beta_Y^{C_\lambda}(Y_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Y^{C_\lambda}(Y_{t-}, u) \tilde{I}^{C_\lambda}(dt, du), \quad Y_0 = y_0.$$

Wie im Abschnitt 4.5 bereits erwähnt wurde, betrachten wir bei der symmetrischen Kovarianzmatrix  $Q_t^{C_\lambda}$  nur die Einträge auf und unterhalb der Diagonale, welche wir in einen Vektor  $Z_t \in \mathbb{R}^{dz}$  nach der Transformation in (4.59) überführt haben.

**Lemma 7.1.1.** *Der Generator  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^p$  für den Zustandsprozess  $Y = Y^{C_\lambda}$  angewandt auf eine Funktion  $g \in C^2(\mathcal{S}_Y)$  ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g(y) &= \nabla'_m g(y) \alpha_M^{C_\lambda}(m, q, p) + \nabla'_z g(y) \alpha_Z(z) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} g(y) \beta_M^{C_\lambda}(q) \left( \beta_M^{C_\lambda}(q) \right)' \right\} \\ &\quad + \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g \left( m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), z + \gamma_Z(z) \right) \varphi(u) du - g(y) \right\}, \quad \forall y = (m, z) \in \mathcal{S}_Y. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Dabei sind die Koeffizienten  $\gamma_Z$  in (4.62) und  $\alpha_Z$  in (4.63) gegeben und die Matrix  $q$  ist aus der Rücktransformation  $q = \mathcal{R}^{-1}(z)$  in (4.60) zu entnehmen.

*Beweis.* Der Zustandsprozess  $Y = (M', Z)'$  mit Werten im Zustandsraum  $\mathcal{S}_Y = \mathbb{R}^{d+dz}$  gegeben in (4.64) ist ein Markov-Prozess mit dem Generator  $\mathcal{L}$  angewandt auf  $g \in C^2(\mathcal{S}_Y)$  wie folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g(y) &= \nabla'_m g(y) \alpha_M^{C_\lambda}(m, q, p) + \nabla'_z g(y) \alpha_Z(z) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} g(y) \beta_M^{C_\lambda}(q) \left( \beta_M^{C_\lambda}(q) \right)' \right\} \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ g \left( m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), z + \gamma_Z(z) \right) - g(y) - \nabla'_y g(y) \gamma_Y^{C_\lambda}(y, u) \right\} \varphi(u) du. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Für den zweiten Term aus dem Integral in (7.2) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \varphi(u) du = g(y). \quad (7.3)$$

Für den letzten Term aus dem Integral in (7.2) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla'_y g(y) \gamma_Y^{C_\lambda}(z, u) \varphi(u) du &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \nabla'_m g(y) \gamma_M^{C_\lambda}(q, u) + \nabla'_z g(y) \gamma_Z(z) \right) \varphi(u) du \\ &= \nabla'_z g(y) \gamma_Z(z). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Wir setzen (7.3) und (7.4) in (7.2) ein und erhalten die Behauptung aus (7.1).  $\square$

Nun können wir den Generator aus (7.1) und  $b(m, p)$  aus (4.47) in die DPE (4.79) einsetzen und erhalten für  $V^{C_\lambda} = V^{C_\lambda}(t, y)$  mit  $y = (m, z) \in \mathcal{S}_Y$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} V^{C_\lambda} + \nabla'_m V^{C_\lambda} \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} V^{C_\lambda} q \Sigma_R^{-1} q \right\} + \nabla'_z V^{C_\lambda} \alpha_Z(z) \\ &\quad + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ \nabla'_m V^{C_\lambda} \theta q p + \theta \left( p' m - \frac{1-\theta}{2} p' \Sigma_R p \right) V^{C_\lambda} \right\} \\ &\quad + \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} V^{C_\lambda} \left( t, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), z + \gamma_Z(z) \right) \varphi(u) du - V^{C_\lambda} \right\}, \quad t \in [0, T), \end{aligned} \quad (7.5)$$

mit der Endbedingung  $V^{C\lambda}(T, m, q) = 1$ . Der Maximierer für das punktweise Optimierungsproblem aus (7.5) liefert als Kandidat für die optimale Strategie

$$\begin{aligned} p^{C\lambda} &= p^{C\lambda}(t, m, q) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} \left( m + q \frac{\nabla_m V^{C\lambda}}{V^{C\lambda}} \right) \\ &= p^F(t, m) + \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} q \frac{\nabla_m V^{C\lambda}}{V^{C\lambda}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Wir setzen den Maximierer aus (7.6) in die DPE aus (7.5) ein, dann bekommen wir die folgende Integro-Differential-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} V^{C\lambda} + \nabla'_m V^{C\lambda} \left( \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{\theta}{(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} q m \right) + \nabla'_z V^{C\lambda} \underline{\alpha}_Z(z) \\ &\quad + \frac{\theta}{2(1-\theta)} m' \Sigma_R^{-1} m V^{C\lambda} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} V^{C\lambda} q \Sigma_R^{-1} q \right\} \\ &\quad + \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} V^{C\lambda} \left( t, m + \gamma_M^{C\lambda}(q, u), z + \gamma_Z(z) \right) \varphi(u) du - V^{C\lambda} \right\} \\ &\quad + \frac{\theta}{2(1-\theta)} \frac{1}{V^{C\lambda}} \nabla'_m V^{C\lambda} \left( q \Sigma_R^{-1} q \right) \nabla_m V^{C\lambda}, \quad y = (m, z) \mathcal{S}_Y, \quad t \in [0, T) \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit der Endbedingung  $V^{C\lambda}(T, y) = 1$ .

**Bemerkung 7.1.2.** Für den logarithmischen Nutzen ist zur Herleitung der DPE kein Maßwechsel nötig und die Dynamik der Prozesse für die bedingte Erwartung und die bedingte Kovarianzmatrix auf  $[t, T]$  sind aus (3.26) bzw. (3.27) zu entnehmen

$$\begin{aligned} dM_s^{C\lambda} &= \underline{\alpha}_M(M_s^{C\lambda}) ds + \beta_M^{C\lambda}(Q_s^{C\lambda}) d\widetilde{W}_s^{C\lambda} + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_M^{C\lambda}(Q_s^{C\lambda}, u) \widetilde{I}^{C\lambda}(ds, du), \quad M_t^{C\lambda} = m, \\ dQ_s^{C\lambda} &= \alpha_Q(Q_s^{C\lambda}) ds + \beta_Q^{C\lambda}(Q_s^{C\lambda}) d\widetilde{W}_s^{C\lambda} + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_Q^{C\lambda}(Q_s^{C\lambda}) \widetilde{I}^{C\lambda}(ds, du), \quad Q_t^{C\lambda} = q. \end{aligned}$$

Für jede Strategie  $\pi$  aus der Menge der zulässigen Strategien  $\mathcal{A}_0^{C\lambda}$  in (2.21) ist die Zielfunktion gegeben durch

$$J^{C\lambda}(t, m, q; \pi) := \mathbb{E} \left[ \int_t^T -b(M_s^{C\lambda}, \pi_s) ds \right], \quad b(m, p) := \left( p'm - \frac{1}{2} \|p'\sigma_R\|^2 \right),$$

mit der Endbedingung  $J^{C\lambda}(T, m, q; \pi) = 0$  und die Wertfunktion ist dann gegeben durch

$$V^{C\lambda}(t, m, q) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_0^{C\lambda}} J^{C\lambda}(t, m, q; \pi), \quad V^{C\lambda}(T, m, q) = 0.$$

Die Dynamic Programming Methode liefert für die Wertfunktion  $V^{C\lambda} := V^{C\lambda}(t, m, q)$  die folgende Integro-Differential-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} V^{C\lambda} + \nabla'_m V^{C\lambda} \kappa(\bar{\mu} - m) + \nabla'_q V^{C\lambda} (\Sigma_\mu - \kappa q - q\kappa - q \Sigma_R^{-1} q) \\ &\quad + \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} V^{C\lambda} \left( t, m + \gamma_M^{C\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C\lambda}(q) \right) \varphi(u) du - V^{C\lambda} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} m' \Sigma_R^{-1} m + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} V^{C\lambda} q \Sigma_R^{-1} q \right\}, \quad t \in [0, T), \quad m \in \mathcal{S}_M, \quad q \in \mathcal{S}_Q \end{aligned} \quad (7.8)$$

mit der Endbedingung  $V^{C_\lambda}(T, m, q) = 0$ .

Da die Integro-Differential-Gleichung für den logarithmischen Nutzen in vielerlei Hinsicht der Integro-Differential-Gleichung für den Potenz-Nutzen ähnelt, konzentriert sich die vorliegende Arbeit in erster Linie auf den Potenz-Nutzen.

## 7.2 Regularisiertes Optimierungsproblem

Wir blicken auf die Dynamik des Zustandsprozesses  $Y = Y^{C_\lambda}$  in (4.64) zurück, welche auf der Basis der Dynamik der bedingten Erwartung  $M^{C_\lambda}$  in (4.55) und der bedingten Kovarianz  $Q^{C_\lambda}$  in (4.56) definiert ist. Aus der Definition der Koeffizienten der Gleichungen für  $M^{C_\lambda}$  und  $Q^{C_\lambda}$  ist zu sehen, dass der Diffusionsterm der zweiten Gleichung verschwindet. Die Gleichung für den Zustandsprozess wird also nur vom generischen Wiener-Prozess  $W$  angetrieben, der die Gleichung der bedingten Erwartung antreibt. Weiterhin ist der Diffusionskoeffizient  $\beta_M^{C_\lambda}$  in der SDE für den Prozess der bedingten Erwartung eine lineare Funktion der bedingten Kovarianz und verschwindet somit für  $Q_t^{C_\lambda} = 0$ . Auf Grund der fehlenden gleichmäßigen Elliptizität des Differentialoperators in (7.1) bleibt die Frage nach der Existenz einer klassischen Lösung der DPE (7.7) unbeantwortet. Wäre die DPE (7.7) gleichmäßig elliptisch, d.h.

$$z' \beta_Y^{C_\lambda}(y) (\beta_Y^{C_\lambda}(y))' z > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{d+d_Z} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \forall y \in \mathcal{S}_Y$$

dann können wir die Existenz einer klassischen Lösung mit einem Resultat von Davis und Lleo [18] sichern. Die Voraussetzung zur Anwendung von Verifikationssätzen ist also nicht erfüllt, denn in der Literatur (siehe z.B. Theorem IV.3.1 in Abschnitt IV.3 des Buches von Fleming und Soner [23] oder Abschnitt 3.5 des Buches von Pham [60]) ist es für deren Anwendung notwendig, dass die DPE in (7.7) eine klassische Lösung  $V^{C_\lambda} \in \mathcal{C}^{1,2}$  besitzt. Dabei besagen die Verifikationssätze, dass die Lösung der DPE die Wertfunktion des stochastischen optimalen Steuerungsproblems ist und die optimale Steuerung als Markov-Steuerung gewählt werden kann.

Eine Möglichkeit dieses Problems zu umgehen, ist die Untersuchung von Viskositätslösungen und der Verzicht auf die Forderung nach der Existenz der klassischen Lösung der DPE. Diese Untersuchung wird z.B. in Zariphopoulou [82] und in Frey, Gabih, und Wunderlich in ihrer Arbeit [25] durchgeführt. Letztere haben sich an den Argumenten der Ausarbeitung von Fleming und Soner [23] in Kapitel V und Pham [60] Kapitel 4 bzw. Pham [59] orientiert. Schwachpunkt bzw. Kritik an dieser Vorgehensweise ist, dass man dabei keine explizite Form der optimalen Strategien erhält. Diese Möglichkeit wird in dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen.

In der Literatur (siehe z.B. Lemma IV.6.3 in Abschnitt IV.6 des Buches von Fleming und Soner [23], Frey, Gabih, und Wunderlich [25] oder Abschnitt 4.6 des Buches von Krylov [37]) findet sich eine weitere Möglichkeit dieses Problems zu umgehen, in dem man das zugrunde liegende Optimierungsproblem durch ein regularisiertes Optimierungsproblem ersetzt. Dabei wird ein von  $W$  unabhängiger Wiener-Prozess  $W^*$  eingeführt, der die Dimension  $d_Y := d + d_Z$  hat, um die Elliptizität in (4.55) und (4.56) bzw. in (4.64) herzustellen. Als Konsequenz der Hinzufügung eines Diffusionsterms in die Gleichung der bedingten Erwartung und der bedingten Kovarianz sichern wir die gleichmäßige Elliptizität des Differentialoperators und damit die Existenz einer klassischen Lösung der DPE und können die klassischen Resultate der stochastischen

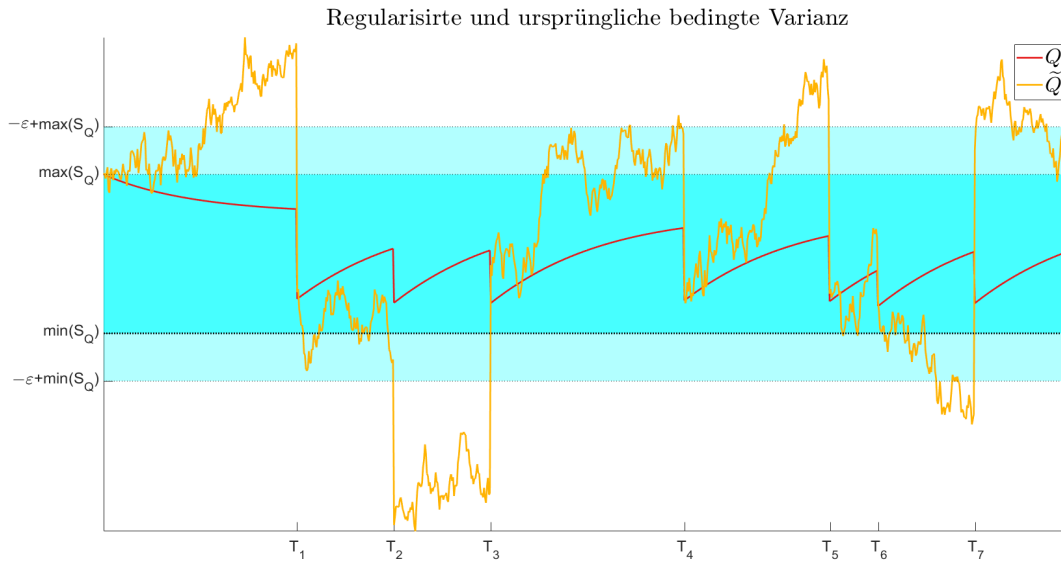


Abbildung 7.1: Nicht-regularisierte und regularisierte Varianz mit Level  $k = 10$  und  $\Gamma = 0.05$ .  
 Dunkel gefärbt:  $\mathcal{S}_Q$  ist der Zustandsraum der ursprünglichen bedingten Varianz.  
 Hell gefärbt: Bereich, in dem der kleinste Abstand zwischen  $S_Q$  und  $\tilde{Q}$  kleiner als  $\varepsilon$  ist.  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

Optimalsteuerungstheorie anwenden. Doch die aus dem regularisierten Optimierungsproblem gewonnene optimale Strategie ist nicht mehr optimal für das ursprüngliche Optimierungsproblem. Wir orientieren uns an der Arbeit von Frey, Gabih und Wunderlich [26] und zeigen dass es möglich ist, eine  $\varepsilon$ -optimale Strategie zu konstruieren. Im Unterschied zur erwähnten Referenz, bei der die Drift der Wertpapiere eine unbeobachtete Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen ist, ist die Drift in dieser Arbeit ein unbeobachteter Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

### 7.2.1 Regularisierte Zustandsgleichung

Der zugrunde liegende Finanzmarkt besteht aus  $d$  risikobehafteten Wertpapieren, deren SDE von  $d$  Wiener-Prozessen getrieben wird. Dagegen hat der Zustandsprozess  $Y^{C_\lambda}$  die Dimension  $d_Y = d + d_Z$ . Die Idee der Regularisierung besteht darin, einen Diffusionsterm bzw. einen Wiener Prozess  $W^{*,Q}$  der Dimension  $d_Z = \frac{d(d+1)}{2}$  in die SDE der bedingten Kovarianz (4.56) bzw. in die SDE des Zustandsprozesses in (4.64) einzufügen, mit anderen Worten betten wir den Diffusionsterm  $\frac{1}{\sqrt{k}}dW_t^{*,Q}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  in (4.64) ein. Doch allein dieser Schritt reicht in unserem Modell nicht, denn es ist nicht ausgeschlossen, dass der Diffusionsterm in der Gleichung der bedingten Erwartung gleich Null wird. Um die gleichmäßige Elliptizität hierbei auch zu sichern, betten wir den Diffusionsterm  $\frac{1}{\sqrt{k}}dW_t^{*,M}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  in die Gleichung für die bedingte Erwartung ein, wobei  $W_t^{*,M}$  ein  $d$ -dimensionaler Wiener-Prozess ist.

Durch die Hinzufügung dieser Störterme verlässt der Prozess  $Q^{C_\lambda}$  den ursprünglichen Wertebereich  $\mathcal{S}_Q$  und die einzelnen Elemente der bedingten Kovarianzmatrix können beliebige Wer-

te aus  $\mathbb{R}$  annehmen. Dies ist in Abbildung 7.1 zu sehen, welche die bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$  im eindimensionalen Fall, sowie die regularisierte Varianz durch die Einbettung des Störterms  $\frac{1}{\sqrt{k}}dW_t^{*,Q}$  mit dem Regularisierungslevel  $k = 10$  in die SDE der bedingten Varianz zeigt. Mit  $\tilde{\mathcal{S}}_Q := \mathbb{R}^{d \times d}$  bezeichnen wir den Zustandsraum des regularisierten Prozess  $\tilde{Q}^{C_\lambda}$ , mit  $\tilde{\mathcal{S}}_Z := \mathbb{R}^{dz}$  bezeichnen wir den Zustandsraum des Vektors  $Z_t$ , der aus der Transformation der Matrix  $\tilde{Q}_t^{C_\lambda}$  gemäß (4.59) erfolgt, und mit  $\tilde{\mathcal{S}}_Y := \mathbb{R}^{d_Y}$  bezeichnen wir den Zustandsraum des regularisierten Zustandsprozesses. Außerdem führt diese Hinzufügung dazu, dass wir die Definition der Koeffizienten  $\alpha_Y^{C_\lambda}$ ,  $\beta_Y^{C_\lambda}$  und  $\gamma_Y^{C_\lambda}$  modifizieren müssen. Sei nun  $\mathcal{S}_Z$  der alte Zustandsraum des Vektors  $Z$ , dann definieren wir ein Distanzmaß  $\text{dist}(z, \mathcal{S}_Z)$  wie folgt

$$\text{dist}(z, \mathcal{S}_Z) := \inf\{\|z - \mathfrak{z}\|_\infty; \mathfrak{z} \in \mathcal{S}_Z\}, \quad z \in \tilde{\mathcal{S}}_Z.$$

Dieses Maß gibt den kleinsten Abstand zwischen  $z \in \tilde{\mathcal{S}}_Z$  und dem alten Zustandsraum  $\mathcal{S}_Z$  an. Für  $z \in \tilde{\mathcal{S}}_Z$  und die positiv definite Matrix  $\Gamma$  existiert stets ein  $\varepsilon > 0$ , sodass die Matrix  $q + \Gamma$  positiv definit bleibt, falls  $\text{dist}(z, \mathcal{S}_Z) < \varepsilon$  ist. Dabei ist die Matrix  $q$  gemäß der Rücktransformation  $q = \mathcal{R}^{-1}(z)$  in (4.60) zu erhalten. Den Drift-Term für den regularisierten Zustandsprozess definieren wir für jedes  $y = (m, z) \in \tilde{\mathcal{S}}_Y$  wie folgt

$$\tilde{\alpha}_Y^{C_\lambda}(m, z, p) := \begin{cases} \alpha_Y^{C_\lambda}(m, z, p)(1 - \frac{1}{\varepsilon}\text{dist}(z, \mathcal{S}_Z)), & \text{für } \text{dist}(z, \mathcal{S}_Z) < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog definieren wir  $\tilde{\beta}_Y^{C_\lambda}(y)$  und  $\tilde{\gamma}_Y^{C_\lambda}(y, u)$  sowie  $\tilde{\alpha}_Y$  als Erweiterung für den Diffusion-Term  $\beta_Y^{C_\lambda}(Y)$ , den Sprung-Term  $\gamma_Y^{C_\lambda}(y, u)$  bzw. für den Term  $\alpha_Z(z)$  aus (4.66).

**Annahme 7.2.1** (Lipschitz und Wachstumsbedingung). *Es existieren eine Konstante  $C_L$  und eine Funktion  $\bar{\rho} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}^2(u)\varphi(u)du < \infty$ , so dass für alle  $y, \mathfrak{z} \in \mathcal{S}_Y$  folgendes gilt:*

$$\|\tilde{\alpha}_Y^{C_\lambda}(y) - \tilde{\alpha}_Y^{C_\lambda}(\mathfrak{z})\|_\infty + \|\tilde{\beta}_Y^{C_\lambda}(y) - \tilde{\beta}_Y^{C_\lambda}(\mathfrak{z})\|_\infty \leq C_L\|y - \mathfrak{z}\|_\infty, \quad (7.9)$$

$$\|\tilde{\alpha}_Y^{C_\lambda}(y)\|_\infty + \|\tilde{\beta}_Y^{C_\lambda}(y)\|_\infty \leq C_L(1 + \|y\|_\infty), \quad (7.10)$$

$$\|\tilde{\gamma}_Y^{C_\lambda}(y, u) - \tilde{\gamma}_Y^{C_\lambda}(\mathfrak{z}, u)\|_\infty \leq \bar{\rho}(u)\|y - \mathfrak{z}\|_\infty, \quad (7.11)$$

$$\|\tilde{\gamma}_Y^{C_\lambda}(y, u)\|_\infty \leq \bar{\rho}(u)(1 + \|y\|_\infty). \quad (7.12)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis für die Koeffizienten des ursprünglichen Zustandsprozesses durch, denn bei Multiplikation dieser Funktionen mit der beschränkten und Lipschitz-stetigen Funktion  $1 - \frac{1}{\varepsilon}\text{dist}(z, \mathcal{S}_Z)$  bleiben die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen weiter erhalten, was die Aussage dieser Annahme dann zeigt. Außerdem kann man immer mit der Transformation in (4.59) und der Rücktransformation in (4.60) die Elemente des Zustandsprozesses in einen Vektor bzw. in eine Matrix überführen.

Die Behauptungen von (7.9) und (7.10) sind klar, da die bedingte Kovarianz  $Q^H$  Werte  $q$  in einem beschränkten Gebiet  $\mathcal{S}_Q$  annimmt und der Koeffizient  $\alpha_Q^{C_\lambda}$  quadratisch in  $q$  ist. Außerdem



sind  $\beta_Q^{C_\lambda} = 0$ ,  $\alpha_M^{C_\lambda}$  und  $\beta_M^{C_\lambda}$  linear in  $m$  bzw.  $q$ .

Der Sprungterm  $\gamma_Q^{C_\lambda}$  hängt nur von  $q$  ab, während der Sprungterm  $\gamma_M^{C_\lambda}$  zusätzlich von  $u$  abhängt. Die Ableitungen dieser Funktionen bezüglich  $q$  sind beschränkt und damit gelten die Aussagen (7.11) und (7.12). Des Weiteren kann man zeigen, dass  $\bar{\rho}(u) = c_u \max \left\{ \|\Gamma^{-\frac{1}{2}}\| \cdot \|u\|_\infty, 1 \right\}$  ist, wobei  $c_u$  eine positive Konstante ist.  $\square$

Zur Vereinfachung der Darstellung benutzen wir in diesem Abschnitt für die Koeffizienten des regularisierten Zustandsprozesses die folgenden Bezeichnungen  $\tilde{\alpha}_Y$ ,  $\tilde{\beta}_Y$  und  $\tilde{\gamma}_Y$  statt  $\tilde{\alpha}_Y^{C_\lambda}$ ,  $\tilde{\beta}_Y^{C_\lambda}$  bzw.  $\tilde{\gamma}_Y^{C_\lambda}$ .

Nun können wir mit Hinblick auf die Dynamik vom Zustandsprozess  $Y$  in (4.64) die Dynamik des regularisierten Zustandsprozesses  ${}^k Y = ({}^k M, {}^k Q)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  wie folgt definieren

$$d{}^k Y_t = \tilde{\alpha}_Y({}^k Y_t, \pi_t) dt + \tilde{\beta}_Y({}^k Y_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\gamma}_Y({}^k Y_{t-}, u) \tilde{I}^{C_\lambda}(dt, du) + \frac{1}{\sqrt{k}} dW_t^*. \quad (7.13)$$

Dieser neu definierte Zustandsprozess wird neben dem  $d$ -dimensionalen Wiener-Prozessen  $W$  zusätzlich vom Wiener-Prozess  $W^* = (W^{*,M}, W^{*,Q})'$ , der die Dimension  $d_Y = d + d_Z$  hat, getrieben. Außerdem genügt der neu entstandene Diffusion-Term  $(\tilde{\beta}_Y({}^k Y_t), \frac{1}{\sqrt{k}} I_{d_Y})'$  den Lipschitz- und Wachstumsbedingungen (7.9) und (7.10) aus Annahme 7.2.1, denn wie erwähnt genügt  $\tilde{\beta}_Y({}^k Y_t)$  der Bedingungen und  $\frac{1}{\sqrt{k}} I_{d_Y}$  hängt nicht vom Zustand  ${}^k Y_t$  ab.

Für die folgenden Aussagen brauchen wir die folgende Annahme.

**Annahme 7.2.2.** Seien  $Y_t := (M'_t, Z'_t)'$  und  ${}^k Y_t := ({}^k M'_t, {}^k Z'_t)'$  der Zustandsprozess bzw. der regularisierte Zustandsprozess gegeben wie in (4.61) und (7.13). Weiterhin seien  $Q_t = \mathcal{R}^{-1}(Z_t)$  und  ${}^k Q_t = \mathcal{R}^{-1}({}^k Z_t)$  gemäß der Rücktransformation in (4.60).

1. Für alle  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$  existiert eine Konstante  $C_\pi^Q > 0$ , sodass gilt

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \|({}^k Q_u - Q_u) \pi_u\|_\infty^2 du \right] \leq C_\pi^Q \cdot \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|{}^k Z_u - Z_u\|_\infty^2 du \right]. \quad (7.14)$$

2. Für alle  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$  existiert eine Konstante  $C_\pi^M > 0$ , sodass gilt

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\pi'_u({}^k M_u - M_u)|^2 du \right] \leq C_\pi^M \cdot \mathbb{E} \left[ \int_0^T \|{}^k M_u - M_u\|_\infty^2 du \right]. \quad (7.15)$$

3. Für alle  $0 \leq t \leq s \leq T$  und alle  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$  existiert für die Zufallsgrößen

$$\eta_s^{\pi, t, y} := \int_t^s -b(Y_u^{\pi, t, y}, \pi_u) du \quad \text{und} \quad {}^k \eta_s^{\pi, t, y} := \int_t^s -b({}^k Y_u^{\pi, t, y}, \pi_u) du$$

eine Konstante  $C_\eta$ , so dass gilt

$$\mathbb{E} \left[ \exp\{2 \eta_T^{\pi, t, y}\} \right] \leq C_\eta \quad \text{und} \quad \mathbb{E} \left[ \exp\{2 {}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} \right] \leq C_\eta. \quad (7.16)$$

**7.2.2  $\mathcal{L}_2$ -Konvergenz  ${}^k Y_t \rightarrow Y_t$** 

Wir vergleichen die Lösung  ${}^k Y_t$  der regularisierten Zustandsgleichung (7.13) mit der Lösung  $Y_t$  der nicht-regularisierten Zustandsgleichung (4.64) und untersuchen die asymptotischen Eigenschaften für  $k \rightarrow \infty$ . Dies ist ein wichtiger Aspekt für die Untersuchung der Konvergenz der Zielfunktion des regularisierten Problems gegen die Zielfunktion für das ursprüngliche Optimierungsproblem.

Wir nehmen an, dass sowohl der regularisierte als auch der nicht-regularisierte Zustandsprozess zum Zeitpunkt  $t_0 \in [0, T]$  mit demselben Anfangswert  $y \in \mathcal{S}_Y$  starten, das heißt  ${}^k Y_{t_0} = Y_{t_0} = y$  und wir verwenden die Schreibweise  ${}^k Y_t^{\pi, t_0, y}$  und  $Y_t^{\pi, t_0, y}$ .

**Lemma 7.2.3** (gleichmäßige  $\mathcal{L}_2$ -Konvergenz bezüglich  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$ ). *Unter den Annahmen 7.2.1 und 7.2.2 gilt auf dem Intervall  $[t_0, T]$  gleichmäßig für  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left\| {}^k Y_t^{\pi, t_0, y} - Y_t^{\pi, t_0, y} \right\|_\infty^2 \right) = 0.$$

*Beweis.* Zur Vereinfachung der Darstellung in diesem Beweis schreiben wir  $Y_t$  und  ${}^k Y_t$  statt  $Y_t^{\pi, t_0, y}$  bzw.  ${}^k Y_t^{\pi, t_0, y}$ . Weiterhin sei  $C$  eine generische Konstante.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $t_0 = 0$  und mit Hilfe der Integralschreibweise der regularisierten und nicht-regularisierten Zustandsgleichung erhalten wir

$${}^k Y_t - Y_t = {}^k \Phi_t + {}^k \Psi_t$$

mit

$$\begin{aligned} {}^k \Phi_t &:= \int_0^t (\tilde{\alpha}_Y({}^k Y_s, \pi_s) - \tilde{\alpha}_Y(Y_s, \pi_s)) ds \quad \text{und} \\ {}^k \Psi_t &= \int_0^t (\tilde{\beta}_Y({}^k Y_s) - \tilde{\beta}_Y(Y_s)) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{\gamma}_Y({}^k Y_s, u) - \tilde{\gamma}_Y(Y_s, u)) \tilde{I}^{C_\lambda}(ds, du) + \frac{1}{\sqrt{k}} dW_t^*. \end{aligned}$$

Sei nun  ${}^k D_t := \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \left\| {}^k Y_s - Y_s \right\|_\infty^2 \right]$ , dann gilt

$$\begin{aligned} {}^k D_t &= \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \left\| {}^k Y_s - Y_s \right\|_\infty^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \left\| {}^k \Phi_s + {}^k \Psi_s \right\|_\infty^2 \right] \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \left\| {}^k \Phi_s \right\|_\infty^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \left\| {}^k \Psi_s \right\|_\infty^2 \right]. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \sup_{s \leq t} \|\Phi_s\|_\infty^2 &= \sup_{s \leq t} \left\| \int_0^s (\tilde{\alpha}_Y({}^k Y_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u)) du \right\|_\infty^2 \\
 &\leq \sup_{s \leq t} s \cdot \int_0^s \|\tilde{\alpha}_Y({}^k Y_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u)\|_\infty^2 du \\
 &\leq t \cdot \int_0^t \|\tilde{\alpha}_Y({}^k Y_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u)\|_\infty^2 du.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Aus Eigenschaften der Maximumsnorm und der Konstruktion der Koeffizienten  $\tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u) = (\tilde{\alpha}_M(M_u, \pi_u), \tilde{\alpha}_Q(Z_u))'$  erhalten wir

$$\left\| \tilde{\alpha}_Y({}^k Y_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u) \right\|_\infty^2 = \max\{X_M, X_Q\}, \tag{7.19}$$

wobei  $X_M := \|\tilde{\alpha}_M({}^k M_u, {}^k Q_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_M(M_u, Q_u, \pi_u)\|_\infty^2$  und  $X_Q := \|\tilde{\alpha}_Q({}^k Z_u) - \tilde{\alpha}_Q(Z_u)\|_\infty^2$  sind. Auf Grund der Tatsache  $\alpha_M(m, q, p) = \underline{\alpha}_M(m) - \theta qp$  gilt

$$\begin{aligned}
 X_M &= \|\tilde{\alpha}_M({}^k M_u) - \tilde{\alpha}_M(M_u) + \theta({}^k Q_u - Q_u)\pi_u\|_\infty^2 \\
 &\leq 2\|\tilde{\alpha}_M({}^k M_u) - \tilde{\alpha}_M(M_u)\|_\infty^2 + 2|\theta|^2 \|({}^k Q_u - Q_u)\pi_u\|_\infty^2 \\
 &\leq 2C_L^2 \|{}^k M_u - M_u\|_\infty^2 + 2|\theta|^2 \|({}^k Q_u - Q_u)\pi_u\|_\infty^2,
 \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung die Lipschitz-Bedingung (7.9) verwendet haben. Letztere liefert weiterhin für  $X_Q$  folgendes

$$X_Q = \|\tilde{\alpha}_Q({}^k Z_u) - \tilde{\alpha}_Q(Z_u)\|_\infty^2 \leq C_L^2 \|{}^k Z_u - Z_u\|_\infty^2.$$

Wir setzen die letzten beiden Abschätzungen zu  $X_M$  und  $X_Q$  in (7.19) ein und erhalten

$$\left\| \tilde{\alpha}_Y({}^k Y_u, \pi_u) - \tilde{\alpha}_Y(Y_u, \pi_u) \right\|_\infty^2 \leq C_0 \|{}^k Y_u - Y_u\|_\infty^2 + 2|\theta|^2 \|({}^k Q_u - Q_u)\pi_u\|_\infty^2,$$

wobei  $C_0 > 0$  eine generische Konstante ist. Die letzte Ungleichung setzen wir in (7.18) ein und erhalten

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \|\Phi_s\|_\infty^2 \right] \leq t C_0 \mathbb{E} \left[ \int_0^t \|{}^k Y_u - Y_u\|_\infty^2 du \right] + 2|\theta|^2 t \mathbb{E} \left[ \int_0^t \|({}^k Q_u - Q_u)\pi_u\|_\infty^2 du \right].$$

Unter der Annahme in (7.14) können wir die letzte Ungleichung für eine generische Konstante

$C_1 > 0$  wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}
 E \left[ \sup_{s \leq t} \|\mathbf{k}\Phi_s\|_\infty^2 \right] &\leq C_1 \int_0^t E \left[ \|\mathbf{k}Y_u - Y_u\|_\infty^2 \right] du \\
 &\leq C_1 \int_0^t E \left[ \sup_{v \leq u} \|\mathbf{k}Y_v - Y_v\|_\infty^2 \right] du \\
 &= C_1 \int_0^t {}^k D_u du.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (7.17) liefert die Doob-Ungleichung für Martingale Folgendes

$$\begin{aligned}
 E \left[ \sup_{s \leq t} \|\mathbf{k}\Psi_s\|_\infty^2 \right] &\leq 4E \left[ \|\mathbf{k}\Psi_t\|_\infty^2 \right] \\
 &= 4 \left( \int_0^t E \left[ \text{tr} \left\{ \left( \tilde{\beta}_Y(\mathbf{k}Y_s) - \tilde{\beta}_Y(Y_s) \right)' \left( \tilde{\beta}_Y(\mathbf{k}Y_s) - \tilde{\beta}_Y(Y_s) \right) \right\} \right] ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} E \left[ \|\tilde{\gamma}_Y(\mathbf{k}Y_s, u) - \tilde{\gamma}_Y(Y_s, u)\|_\infty^2 \right] \varphi(u) du ds + \frac{d_Y t}{k} \right).
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Mit Hilfe von Lipschitz-Bedingungen (7.9) und (7.11) für den Koeffizienten  $\tilde{\beta}_M$  folgt

$$\begin{aligned}
 E \left[ \text{tr} \left\{ \left( \tilde{\beta}_Y(\mathbf{k}Y_s) - \tilde{\beta}_Y(Y_s) \right)' \left( \tilde{\beta}_Y(\mathbf{k}Y_s) - \tilde{\beta}_Y(Y_s) \right) \right\} \right] &\leq C_L^2 E \left[ \|\mathbf{k}Y_s - Y_s\|_\infty^2 \right] \\
 &\leq C_L^2 E \left[ \sup_{v \leq s} \|\mathbf{k}Y_v - Y_v\|_\infty^2 \right] \\
 &= C_L^2 {}^k D_s
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

und für  $\tilde{\gamma}_Y$  folgt

$$\begin{aligned}
 E \left[ \|\tilde{\gamma}_Y(\mathbf{k}Y_s, u) - \tilde{\gamma}_Y(Y_s, u)\|_\infty^2 \right] &\leq \bar{\rho}^2(u) E \left[ \|\mathbf{k}Y_s - Y_s\|_\infty^2 \right] \\
 &\leq \bar{\rho}^2(u) E \left[ \sup_{v \leq s} \|\mathbf{k}Y_v - Y_v\|_\infty^2 \right] \\
 &\leq \bar{\rho}^2(u) {}^k D_s.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Wir setzen nun (7.22) und (7.23) in (7.21) ein und erhalten für eine generische Konstant  $C_2 > 0$

$$\begin{aligned}
 E \left[ \sup_{s \leq t} \|\mathbf{k}\Psi_s\|_\infty^2 \right] &\leq 4 \left( \int_0^t C_L^2 {}^k D_s ds + \int_0^t {}^k D_s ds \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}^2(u) \varphi(u) du + \frac{d_Y t}{k} \right) \\
 &\leq C_2 \int_0^t {}^k D_s ds + \frac{4d_Y t}{k}.
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Das Einsetzen von (7.20) und (7.24) in (7.17) liefert

$${}^k D_t \leq \frac{4d_Y T}{k} + C \int_0^t {}^k D_s ds.$$

Nun können wir das Gronwall-Lemma anwenden und erhalten folgende Abschätzung

$${}^k D_T \leq \frac{4d_Y T}{k} e^{CT} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

welche die Behauptung zeigt.  $\square$

Ähnlich wie bei der Einführung der Zielfunktion in (4.69) bzw. der Wertfunktion in (4.70) für das ursprüngliche Optimierungsproblem definieren wir die Ziel- bzw. die Wertfunktion für das zugehörige regularisierte Optimierungsproblem wie folgt

$$\begin{aligned} {}^k J(t, y, \pi) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_t^T -b({}^k Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) ds \right\} \right] \quad \text{für } \pi \in \mathcal{A}^H, \\ {}^k V(t, y) &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} {}^k J(t, y, \pi), \end{aligned}$$

mit dem Endwert  ${}^k J(T, y, \pi) = {}^k V(T, y, \pi) = 1$ .

**Lemma 7.2.4.** *Der Generator  ${}^k \mathcal{L} = {}^k \mathcal{L}^p$  für den regularisierten Zustandsprozess  ${}^k Y$ , dessen Dynamik in (7.13) gegeben ist, ist für eine Funktion  $g \in C^2(\tilde{\mathcal{S}}_Y)$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} {}^k \mathcal{L}^p g(y) &= \nabla'_m g(y) \tilde{\alpha}_M(y, p) + \nabla'_z g(y) \tilde{\alpha}_Q(y) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} g(y) \tilde{\beta}_M \tilde{\beta}_M' \right\} \\ &\quad + \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g(y + \tilde{\gamma}_Y(y, u)) \varphi(u) du - g(y) \right\} + \frac{1}{2k} \text{tr} \left\{ \nabla_{yy} g(y) \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 7.1.1  $\square$

Die zugehörige DPE des regularisierten Optimierungsproblems lässt sich wie folgt darstellen

$${}^k V(t, y) + \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ {}^k \mathcal{L}^p {}^k V(t, y) - b(y, p) {}^k V(t, y) \right\} = 0, \quad (t, y) \in [0, T) \times \tilde{\mathcal{S}}_Y, \quad (7.26)$$

mit der Endbedingung  ${}^k V(T, y) = 1$ . Bei dem Generator  ${}^k \mathcal{L}^p$  ist die Elliptizitätsbedingung für den Koeffizienten der zweiten Ableitung erfüllt, denn es gilt für alle  $z \in \mathbb{R}^{d_Y} \setminus \{0\}$  und alle  $y \in \tilde{\mathcal{S}}_Y$

$$z' \left( \tilde{\beta}_Y(y) \tilde{\beta}_Y'(y) + \frac{1}{2k} I_{d_Y} \right) z = z' \tilde{\beta}_Y(y) \tilde{\beta}_Y'(y) z + \frac{1}{2k} z' z = \|\tilde{\beta}_Y(y) z\|^2 + \frac{1}{2k} \|z\|^2 > 0.$$

Damit sind die Ergebnisse von Davis und Lleo [18] für das entstandene, regularisierte Steuerungsproblem anwendbar. Nach Theorem 3.8 der erwähnten Referenz existiert eine Lösung  ${}^k V$  für (7.26). Außerdem existiert für jedes  $(t, \pi)$  ein eindeutiger Maximierer  ${}^k p^*$  für das Problem

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^d} \left\{ {}^k \mathcal{L}^p {}^k V(t, Y) - b(y, p) {}^k V(t, y) \right\}.$$

Der Maximierer  ${}^k p^*$  kann als eine Borel-messbare Funktion von  $t$  und  $y$  gewählt werden und die optimale Strategie ist analog zur Diskussion beim Regime  $H = C_\lambda$  gegeben durch  ${}^k \pi_t^* = {}^k p^*(t, {}^k Y_t)$ .

### 7.2.3 Konvergenz der Ziel- und Wertfunktionen

Das nächste Theorem der gleichmäßigen Konvergenz der Zielfunktionen ist der Kern dieser Untersuchung, die Konvergenz der Wertfunktionen und  $\varepsilon$ -Optimalität der  ${}^k p^*$  folgt einfach aus diesem Theorem.

**Theorem 7.2.5** (Gleichmäßige Konvergenz der Zielfunktionen). *Unter den Annahmen 7.2.1 und 7.2.2 gilt folgendes*

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \quad t \in [0, T], y \in \mathcal{S}_Y.$$

*Beweis.* Die Zielfunktionen lassen sich wie folgt darstellen  $J(t, y, \pi) = \mathbb{E} \left[ \exp\{\eta_T^{\pi, t, y}\} \right]$  und  ${}^k J(t, y, \pi) = \mathbb{E} \left[ \exp\{{}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} \right]$  und es gilt

$$\begin{aligned} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)| &= \left| \mathbb{E} \left[ \exp\{{}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} - \exp\{\eta_T^{\pi, t, y}\} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left| \exp\{{}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} - \exp\{\eta_T^{\pi, t, y}\} \right|. \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft  $|e^x - e^y| \leq (e^x + e^y) |x - y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)| &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \exp\{{}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} + \exp\{\eta_T^{\pi, t, y}\} \right) \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right| \right] \\ &= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] \end{aligned} \tag{7.27}$$

wobei  $X_1 := \exp\{{}^k \eta_T^{\pi, t, y}\} \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right|$  und  $X_2 := \exp\{\eta_T^{\pi, t, y}\} \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right|$  sind. Mit Hilfe von der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und mit Berücksichtigung von (7.16) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &\leq \left( \mathbb{E}[\exp\{2 {}^k \eta_T^{\pi, t, y}\}] \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \mathbb{E} \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_\eta^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \mathbb{E} \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Für den Erwartungswert auf der rechten Seite gilt unter Verwendung der Annahme (7.15)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left| {}^k \eta_T^{\pi, t, y} - \eta_T^{\pi, t, y} \right|^2 &= \mathbb{E} \left| - \int_t^T [b(Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s) - b({}^k Y_s^{\pi, t, y}, \pi_s)] ds \right|^2 \\
 &= \theta^2 \mathbb{E} \left[ \int_t^T \left| \pi'_s ({}^k M_s^{\pi, t, m} - M_s^{\pi, t, m}) \right|^2 ds \right] \\
 &\leq \theta^2 C_\pi^M \cdot \mathbb{E} \left[ \int_t^T \| {}^k M_s^{\pi, t, m} - M_s^{\pi, t, m} \|_\infty^2 ds \right] \\
 &\leq \theta^2 C_\pi^M \cdot \mathbb{E} \left[ \int_t^T \sup_{t \leq u \leq T} \| {}^k M_u^{\pi, t, m} - M_u^{\pi, t, m} \|_\infty^2 ds \right] \\
 &= \theta^2 C_\pi^M (T - t) \mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq u \leq T} \| {}^k M_s^{\pi, t, y} - M_s^{\pi, t, y} \|_\infty^2 \right] \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$  und gleichmäßig bezüglich  $\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}$ , was aus Lemma 7.2.3 folgt. Die letzte Ungleichung setzen wir in (7.28) und erhalten

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} \mathbb{E}[X_1] \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Analog gilt auch

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} \mathbb{E}[X_2] \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

und somit wegen (7.27) gilt dann

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

□

**Folgerung 7.2.6** (Konvergenz der Wertfunktionen). *Unter den Annahmen 7.2.1 und 7.2.2 gilt folgendes*

$${}^k V(t, y) \rightarrow V(t, y) \quad \text{for } k \rightarrow \infty, \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathcal{S}_Y.$$

*Beweis.* Für  $\theta \in (0, 1)$  folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
 |{}^k V(t, y) - V(t, y)| &= \left| \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} {}^k J(t, y, \pi) - \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} J(t, y, \pi) \right| \\
 &\leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)|
 \end{aligned}$$

und Lemma 7.2.5. Analog für  $\theta < 0$  gilt

$$\begin{aligned}
 |{}^k V(t, y) - V(t, y)| &= \left| \inf_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} {}^k J(t, y, \pi) - \inf_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} J(t, y, \pi) \right| \\
 &= \left| \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} (-{}^k J(t, y, \pi)) - \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} (-J(t, y, \pi)) \right| \\
 &\leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{C_\lambda}} |{}^k J(t, y, \pi) - J(t, y, \pi)|.
 \end{aligned}$$

□

### 7.2.4 $\varepsilon$ -optimale Strategie

Schließlich zeigen wir, dass die optimale Strategie  ${}^k\pi^*$  für das regularisierte Optimierungsproblem  $\varepsilon$ -optimal für das ursprüngliche Problem ist. Dies liefert eine Methode zur Berechnung optimaler Strategien.

**Folgerung 7.2.7** ( $\varepsilon$ -Optimalität). *Unter den Annahmen 7.2.1 und 7.2.2 existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein gewisses  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass*

$$|V(t, y) - J(t, y, {}^k\pi^*)| \leq \varepsilon \quad \text{for } k \geq k_0,$$

das heißt,  ${}^k\pi^*$  ist eine  $\varepsilon$ -optimale Strategie für das ursprüngliche Kontrollproblem.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} |V(t, y) - J(t, y, {}^k\pi^*)| &\leq |V(t, y) - {}^kV(t, y)| + |{}^kV(t, y) - J(t, y, {}^k\pi^*)| \\ &= |V(t, y) - {}^kV(t, y)| + |{}^kJ(t, y, {}^k\pi^*) - J(t, y, {}^k\pi^*)| \end{aligned} \quad (7.29)$$

wobei wir für den ersten Term auf der rechten Seite  ${}^kJ(t, y, {}^k\pi^*) = V^k(t, y)$  benutzt haben. Mit Hilfe von der Konvergenz-Eigenschaften aus Lemma 7.2.5 und für die Wertfunktion aus Folgerung 7.2.6 erhalten wir für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für  $k \geq k_0$  Folgendes gilt

$$|V(t, y) - {}^kV(t, y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |{}^kJ(t, y, {}^k\pi^*) - J(t, y, {}^k\pi^*)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das Einsetzen des letzten Resultates in (7.29) liefert für  $k \geq k_0$

$$|V(t, y) - J(t, y, {}^k\pi^*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

## 7.3 Numerische Lösung der Dynamic Programming Gleichung

Der Einfachheit halber werden wir bei der numerischen Lösung ab dieser Stelle annehmen, dass die Anzahl der gehandelten Wertpapiere  $d = 1$  ist.

Der Differential-Teil der Differentialgleichung (7.7) ist nicht linear, kann jedoch durch geeignete Transformation linearisiert werden. Deshalb definieren wir die Funktion  $\tilde{G}$  durch die folgende Transformation  $V^C(t, m, q) = \tilde{G}^{1-\theta}(t, m, q)$ , siehe Benth und Karlsen [6]. Demnach hat die Differentialgleichung (7.7) für die Funktion  $\tilde{G} = \tilde{G}(t, m, q)$  die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G} + \nabla'_m \tilde{G} \left( \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{\theta}{(1-\theta)} \Sigma_R^{-1} q m \right) + \nabla'_q \tilde{G} \left( \Sigma_\mu - \kappa q - q \kappa' - q \Sigma_R^{-1} q \right) \\ & + \frac{\theta}{2(1-\theta)^2} m' \Sigma_R^{-1} m \tilde{G} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} \tilde{G} q \Sigma_R^{-1} q \right\} \\ & + \frac{\lambda}{1-\theta} \left\{ \tilde{G}^\theta \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{G}^{1-\theta} \left( t, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q) \right) \varphi(u) du - \tilde{G} \right\}, \quad t \in [0, T), \quad y \in \mathcal{S}_Y \end{aligned} \quad (7.30)$$



mit der Endbedingung  $\tilde{G}(T, m, q) = 1$ . Durch diese Transformation ist der Integral-Term zwar nicht mehr linear, aber das ist für die numerischen Lösung von (7.30) kein Hindernis.

Wir gehen davon aus, dass die entsprechenden Annahmen für die Verifikationssätze der DPE beim Regime  $H = C_\lambda$  erfüllt sind, dann liefert die Differentialgleichung (7.30) die angestrebte Wertfunktion.

Aufgrund des Integral-Terms in (7.30) ist eine analytische Lösung nicht zu erwarten, daher beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit einer auf Differenzenverfahren aufbauende numerische Methoden zur Lösung der Gleichung (7.30).

Für die numerische Lösung des Endwertproblems (7.30) ist es zweckmäßig, dieses durch eine Zeitumkehr und Verwendung der Restlaufzeit  $\tau = T - t \in [0, T]$  in ein Anfangswertproblem für die Funktion  $G(\tau, m, q) = \tilde{G}(T - t, m, q)$  zu transformieren. Diese Transformation liefert das folgende Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, m, q) = \mathcal{L}_m G(\tau, m, q) + \mathcal{L}_q G(\tau, m, q) + \frac{\lambda}{1 - \theta} I(\tau, m, q), \quad G(0, m, q) = 1. \quad (7.31)$$

Dabei sind der elliptische Differentialoperator  $\mathcal{L}_m$  und der Differentialoperator  $\mathcal{L}_q$  gegeben durch

$$\mathcal{L}_m G(\tau, m, q) := \nabla'_m G(\tau, m, q) a_m(m, q) + \text{tr} \left\{ \nabla_{mm} G(\tau, m, q) b_m(q) \right\} + c_m(m) G(\tau, m, q) \quad (7.32)$$

$$\mathcal{L}_q G(\tau, m, q) := \nabla'_q G(\tau, m, q) a_q(q). \quad (7.33)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_m(m, q) &:= \kappa(\bar{\mu} - m) + \frac{\theta}{(1 - \theta)} \Sigma_R^{-1} q m \\ b_m(q) &:= \frac{1}{2} q \Sigma_R^{-1} q \\ c_m(m) &:= \frac{\theta}{2(1 - \theta)^2} m' \Sigma_R^{-1} m \\ a_q(q) &:= \Sigma_\mu - \kappa q - q \kappa' - q \Sigma_R^{-1} q. \end{aligned}$$

Des Weiteren ist der letzte Term in (7.31) wie folgt definiert

$$I(\tau, m, q) := G^\theta(\tau, m, q) \left\{ J(\tau, m, q) - G^{1-\theta}(\tau, m, q) \right\}, \quad (7.34)$$

mit

$$J(\tau, m, q) := \int_{\mathbb{R}^d} G^{1-\theta} \left( \tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q) \right) \varphi(u) du. \quad (7.35)$$

Für die Entwicklung des Differenzenschemas zur numerischen Lösung der Differentialgleichung (7.31) werden wir zunächst den unbeschränkten Zustandsraum auf ein beschränktes Berechnungsgebiet abschneiden.

Die Zustandsvariable  $M_t^{C_\lambda}$  ist eine normalverteilte Zufallsgröße und somit nimmt sie Werte in ganz  $\mathbb{R}$  an. Für die Momente von  $M_t^{C_\lambda}$  bekommen wir einerseits aus der Varianzzerlegung und aus (2.8)

$$\text{Var}[M_t^{C_\lambda}] = \text{Var}[\mu_t] - \mathbb{E}[\text{Var}[Q_t^{C_\lambda}]] \leq \text{Var}[\mu_t] \leq D_m, \quad \forall t \in [0, T],$$

und andererseits gilt nach (2.7) für den Erwartungswert

$$\min\{\bar{m}_0, \bar{\mu}\} \leq \mathbb{E}[M_t^{C_\lambda}] = \mathbb{E}[\mu_t] \leq \max\{\bar{m}_0, \bar{\mu}\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Wir nehmen an, dass die Werte der normalverteilten Zufallsvariable  $M_t^{C_\lambda}$ ,  $\forall t \in [0, T]$  mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit im abgeschlossenen Intervall  $[\underline{m}, \bar{m}]$  liegen und versuchen, die Grenze dieses Intervalls zu bestimmen. Die  $k$ -Sigma-Regel für  $k = \alpha_m \in (0, \infty)$  garantiert uns eine genügend große Wahrscheinlichkeit, wenn wir dabei  $\underline{m} := \min\{\bar{m}_0, \bar{\mu}\} - \alpha_m \sqrt{D_m}$  und  $\bar{m} := \max\{\bar{m}_0, \bar{\mu}\} + \alpha_m \sqrt{D_m}$  setzen. Somit ist die Zerlegung in Richtung  $m$  gegeben durch

$$\bar{\chi}_m = \left\{ m_i ; \quad i = 0, \dots, N_m, \quad N_m \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \underline{m} = m_0 < m_1 < \dots < m_{N_m} = \bar{m} \right\} \quad (7.36)$$

und setzen  $\Delta_m := \max_{k=1, \dots, N_m} (m_k - m_{k-1})$ .

Auch für die standardnormalverteilte Zufallsgröße  $U$  nehmen wir an, dass deren Werte mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit im abgeschlossenen Intervall  $[\underline{u}, \bar{u}]$  liegen und mit Hilfe der  $k$ -Sigma-Regel für  $k = \alpha_u \in (0, \infty)$  erhalten wir die Grenze des abgeschlossenen Intervalls  $\underline{u} = -\alpha_u$ ,  $\bar{u} = \alpha_u$ . Die Zerlegung in Richtung  $U$  definieren wir dann wie folgt

$$\bar{\chi}_u = \left\{ u_k = \underline{u} + k \cdot \Delta_u \quad \text{mit} \quad k = 0, \dots, N_u, \quad N_u \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Delta_u := \frac{\bar{u} - \underline{u}}{N_u} \right\}. \quad (7.37)$$

Bei der Implementierung des Integrales (7.35) hat sich herausgestellt, dass allein die  $k$ -sigma-Regel nicht ausreichend zur Bestimmung der Abschnidepunkte  $\underline{u}$  und  $\bar{u}$  ist. Dabei wollten wir sicherstellen, dass der numerische Fehler, der bei der Berechnung des Integrals durch die Vernachlässigung der Werte auf den Intervallen  $(-\infty, \underline{u})$  und  $(\bar{u}, \infty)$  unter einem vorgegebenen Niveau liegt. Da das Integral nicht exakt berechnet werden kann, gibt die folgende Proposition eine Abschätzung für den Fehler für den Fall, dass der Integrand bzw. die Wertfunktion des  $C_\lambda$ -Investors durch ihre der Diffusionsapproximation ersetzt wird. Dabei nutzen wir eine modifizierte Wertfunktion Funktion  $\widehat{V}^D$ , die wir wie folgt definieren

$$\widehat{V}^D(t, m, q) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^D} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T b(s, Y_s^{t, m, q}) \right\} \right], \quad (7.38)$$

wobei  $Y_s^{t, m, q}$  den Zustandsprozess (d.h. die bedingte Erwartung  $M^D$ ) bezeichnet, welcher zur Zeit  $t$  mit den vorgegebenen Anfangswerten  $m$  und  $q$  startet. Die zugehörige optimale Entscheidungsregel bezeichnen wir mit  $\widehat{p}^D(t, m, q)$  und es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} V^D(t, m) &= \widehat{V}^D(t, m, Q_t^D), \\ p^D(t, m) &= \widehat{p}^D(t, m, Q_t^D). \end{aligned}$$

Im Unterschied zum ursprünglich untersuchten Kontrollproblem ist  $q$  im Allgemeinen nicht der Wert von  $Q_t^D$ . Der Wert von  $\widehat{V}^D(t, m, q)$  stimmt überein mit der Wertfunktion des ursprünglichen Kontrollproblems  $V_{T-t}^D(0, m)$  für den verkürzten Zeitraum  $T - t$  zur Zeit 0 und Anfangswerten  $m_0 = m$  und  $q_0 = q$ , d.h.

$$\widehat{V}^D(t, m, q) = V_{T-t}^D(0, m) = V_{T-t}^D(0, m; q).$$

**Proposition 7.3.1.** *Bei einem vorgegebenen Niveau  $\varepsilon_I > 0$  und durch die Wahl der unteren Grenze  $\underline{u}$  aus dem Intervall  $(-\infty, a\Phi^{-1}(z_1) + b)$  und der oberen Grenze  $\bar{u} = -\underline{u}$  wird sichergestellt, dass*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\underline{u}} \widehat{V}^D(\tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q)) \varphi(u) du < \varepsilon_I \quad \text{und} \\ \int_{\bar{u}}^{\infty} \widehat{V}^D(\tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q)) \varphi(u) du < \varepsilon_I. \end{aligned}$$

Dabei sind  $a := \left(1 - 2\frac{A^D(\tau)q^2}{\Gamma+q}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $b := 2a^2(mA^D(\tau) + \frac{1}{2}B^D(\tau))\frac{q}{\sqrt{\Gamma+q}}$  und  $z_1 := \frac{\widehat{V}^D(\tau, m, q)}{a} \cdot e^{-\frac{b^2}{2a^2}} \cdot \varepsilon_I$ .

*Beweis.* Aus Lemma 5.2.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{V}^D(\tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q)) \varphi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \exp \left\{ A^D(\tau)(m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u))^2 + B^D(\tau)(m + \gamma_M^H(q, u)) + C^D(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{V}^D(\tau, m, q) \exp \left\{ \left( \frac{A^D(\tau)q^2}{\Gamma+q} - \frac{1}{2} \right) u^2 + \frac{q}{\sqrt{\Gamma+q}} (2A^D(\tau)m + B^D(\tau))u \right\} \end{aligned}$$

Die quadratische Ergänzung nach  $u$  liefert folgendes

$$\begin{aligned} \widehat{V}^D(\tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q)) \varphi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{V}^D(\tau, m, q) e^{\frac{b^2}{2a^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u-b}{a} \right)^2} \\ &= a \widehat{V}^D(\tau, m, q) e^{\frac{b^2}{2a^2}} \cdot \varphi\left(\frac{u-b}{a}\right), \end{aligned}$$

wobei  $\varphi$  die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Wir integrieren beide Seiten auf  $(-\infty, \underline{u}]$  und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\underline{u}} \widehat{V}^D(\tau, m + \gamma_M^{C_\lambda}(q, u), q + \gamma_Q^{C_\lambda}(q)) \varphi(u) du = a \widehat{V}^D(\tau, m, q) e^{\frac{b^2}{2a^2}} \Phi\left(\frac{\underline{u}-b}{a}\right),$$

woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt analog.  $\square$

Die zeitliche Variable  $\tau$  dagegen nimmt Werte im abgeschlossenen Intervall  $[0, T]$  und wir können eine äquidistante Zerlegung in Richtung  $\tau$  wie folgt definieren

$$\overline{\chi}_\tau = \left\{ \tau_n = n \cdot \Delta\tau \quad \text{mit} \quad n = 0, \dots, N_\tau, \quad N_\tau \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Delta\tau := \frac{T}{N_\tau} \right\}. \quad (7.39)$$

Für die bedingte Varianz  $Q_t^{C_\lambda}$  gilt nach Lemma 3.2.2 die Abschätzung  $Q_t^{C_\lambda}(\omega) \leq Q_t^R(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ . Andererseits ist  $Q_t^R$  die Lösung einer Riccati-Differentialgleichung und nimmt Werte im abgeschlossenen Intervall  $[0, \bar{q}]$ ;  $\bar{q} := \max\{Q_0^R, Q_\infty^R\}$  an, wobei  $Q_\infty^R$  in Theorem 3.2.3 gegeben war (vgl. mit Lemma 4.5 in Gabih, Kondakji, Sass und Wunderlich [27]). Daher können wir die Gitterpunkte für die bedingte Varianz wie folgt definieren

$$\overline{\chi}_q = \left\{ q_j = j \cdot \Delta q \quad \text{mit} \quad j = 0, \dots, N_q, \quad N_q \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Delta q := \frac{\bar{q}}{N_q} \right\}. \quad (7.40)$$

Nun definieren wir das gesamte Gitter  $\overline{\chi}$  für das untersuchte Anfangsproblem (7.31) wie folgt

$$\begin{aligned} \overline{\chi} &:= \overline{\chi}_\tau \times \overline{\chi}_m \times \overline{\chi}_q \\ &= [\tau_0, \dots, \tau_{N_\tau}] \times [m_0, \dots, m_{N_m}] \times [q_0, \dots, q_{N_q}]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Auf diesem eingeführten äquidistanten Gitter  $\overline{\chi}$  definieren wir die Gitterfunktion

$$G_\Delta(\tau_n, m_i, q_j) = g_{i,j}^n, \quad (\tau_n, m_i, q_j) \in \overline{\chi}, \quad (7.42)$$

die ein diskretes Analog für die kontinuierliche Wertfunktion  $G(\tau, m, q)$  mit  $(\tau, m, q) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times [q, \bar{q}]$  ist.

Weiterhin benötigen wir für das Differenzenschema zur numerischen Lösung der Differentialgleichung (7.31) Bedingungen an den neu definierten Rändern  $q = 0, \bar{q}$  und insbesondere für die als endlich angenommenen Grenzen  $m = \underline{m}, \overline{m}$ , da der Filter  $M^{C_\lambda}$  Werte auf ganz  $\mathbb{R}$  annehmen kann.

Ein häufiger Ansatz in der Literatur ist, dass die Ableitungen zweiter Ordnung am Rand verschwinden. Das heißt, es gelte folgendes:

- am Rand von  $m$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} G(\tau, \underline{m}, q) = \frac{\partial^2}{\partial m^2} G(\tau, \overline{m}, q) = 0, \quad (\tau, q) \in (0, T] \times [q, \bar{q}], \quad (7.43)$$

- und am Rand von  $q$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} G(\tau, m, \underline{q}) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} G(\tau, m, \bar{q}) = 0, \quad (\tau, m) \in (0, T] \times [\underline{m}, \overline{m}]. \quad (7.44)$$

Mit diesem Ansatz müssen keine Forderungen an die Werte oder Ableitungen erster Ordnung gestellt werden und parallel dazu wird dann angenommen, dass sich die Lösungsfunktion am Rand linear verhält. Da die zweite Ableitung nach  $q$  in der ursprünglichen Differentialgleichung (7.31) nicht vorhanden ist, scheint die Annahme (7.44) plausibel. Doch bei der Annahme

(7.43) kann die Auswirkung von Fehlern auf die Lösung der Differentialgleichung unplausible Ergebnisse liefern, zumal wir in den Regimes  $H = F, R, D$  die Lösungsfunktion nicht linear in  $m$  angesetzt hatten, von daher scheint eine Dirichlet-Randbedingung geeigneter. Dabei gilt am Rand für  $m$  und  $q$  hinsichtlich der Diffusionsapproximation (siehe die erste Aussage in Bemerkung 7.3.4)

$$G(\tau, m, q) = \left( V^{C\lambda}(\tau, m, q) \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \approx \left( \widehat{V}^D(\tau, m, q) \right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Daraus lassen sich unsere Randbedingungen für alle  $n \in \{1, \dots, N_\tau\}$  wie folgt darstellen

- am Rand von  $m$

$$g_{i,j}^{n+1} = \left( \widehat{V}^D(t_{n+1}, m, q_j) \right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{für } m = \underline{m}, \overline{m}, \quad \forall j \in \{0, \dots, N_q\} \quad (7.45)$$

- und am Rand von  $q$

$$g_{i,j}^{n+1} = \left( \widehat{V}^D(t_{n+1}, m_i, q) \right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{für } q = 0, \bar{q}, \quad \forall i \in \{0, \dots, N_m\}. \quad (7.46)$$

Nachdem wir das Gitter definiert und die Randbedingungen aufgestellt haben, müssen wir nun die Differenzgleichungen in den inneren Gitterpunkten für die Integro-Differential-Gleichung (7.31) aufstellen.

Für  $\tau \in \{\tau_1, \dots, \tau_{N_\tau}\}$  und  $q \in \{q_1, \dots, q_{N_q-1}\}$  stellen wir dem Differentialoperator  $\mathcal{L}_m$  aus (7.32) den folgenden Differenzenoperator  $\Lambda_m$  angewandt auf die Gitterfunktion  $G_\Delta$  aus (7.42) wie folgt gegenüber

$$\begin{aligned} \Lambda_m \left( G_\Delta(\tau, m_i, q) \right)_m &:= a_m(m_i, q) \left( G_\Delta(\tau, m_i, q) \right)_m + b_m(q) \left( G_\Delta(\tau, m_i, q) \right)_{mm} \\ &+ c_m(m_i) G_\Delta(\tau, m_i, q), \quad \forall m_i \in \{m_1, \dots, m_{N_m-1}\}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Dabei verwenden wir die bekannten Rück- und Vorwärtsdifferenzenquotienten für die erste und den Differenzenquotienten zweiter Ordnung für die zweite Ableitung, die im Allgemeinen auch für nicht äquidistantes Gitter gelten:

$$\begin{aligned} \left( a_m(m_i, q) G_\Delta(\tau, m_i, q) \right)_m &= \frac{a_m(m_i, q) + |a_m(m_i, q)|}{2} \cdot \frac{G_\Delta(\tau, m_{i+1}, q) - G_\Delta(\tau, m_i, q)}{m_{i+1} - m_i} \\ &+ \frac{a_m(m_i, q) - |a_m(m_i, q)|}{2} \cdot \frac{G_\Delta(\tau, m_i, q) - G_\Delta(\tau, m_{i-1}, q)}{m_i - m_{i-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( b_m(q) G_\Delta(\tau, m_i, q) \right)_{mm} &= \frac{2b_m(q)}{m_{i+1} - m_{i-1}} \left( \frac{G_\Delta(\tau, m_{i+1}, q) - G_\Delta(\tau, m_i, q)}{m_{i+1} - m_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{G_\Delta(\tau, m_i, q) - G_\Delta(\tau, m_{i-1}, q)}{m_i - m_{i-1}} \right) \end{aligned}$$

und

$$c_m(m_i) = \frac{\theta}{2(1-\theta)^2 \Sigma_R} m_i^2 \mathbf{1}_{\{\theta < 0\}}. \quad (7.48)$$

Auch für  $\tau \in \{\tau_0, \dots, \tau_{N_\tau-1}\}$  und  $m \in \{m_1, \dots, m_{N_m-1}\}$  stellen wir dem Differentialoperator  $\mathcal{L}_q$  aus (7.33) den folgenden Differenzenoperator  $\Lambda_q$  angewandt auf die Gitterfunktion  $G_\Delta$  aus (7.42) wie folgt gegenüber

$$\begin{aligned} \Lambda_q \left( G_\Delta(\tau, m, q_j) \right)_q &:= \left( a_q(q) G_\Delta(\tau, m, q_j) \right)_q + \frac{\theta}{2(1-\theta)^2 \Sigma_R} m^2 \mathbf{1}_{\{\theta \geq 0\}} G_\Delta(\tau, m, q_j) \\ &= \frac{a_q(q_j) + |a_q(q_j)|}{2} \cdot \frac{G_\Delta(\tau, m, q_{j+1}) - G_\Delta(\tau, m, q_j)}{q_{j+1} - q_j} \\ &\quad + \frac{a_q(q_j) - |a_q(q_j)|}{2} \cdot \frac{G_\Delta(\tau, m, q_j) - G_\Delta(\tau, m, q_{j-1})}{q_j - q_{j-1}} \\ &\quad + \frac{\theta}{2(1-\theta)^2 \Sigma_R} m^2 \mathbf{1}_{\{\theta \geq 0\}} G_\Delta(\tau, m, q_j). \end{aligned} \quad (7.49)$$

**Bemerkung 7.3.2.** Mit der Fallunterscheidung bei negativem und positivem  $\theta$  in (7.48) bzw. (7.49) wird die Bedingung in (7.55) sichergestellt.

Es bleibt noch zu zeigen, wie wir das Integral in (7.34) numerisch bestimmen. Dies erfolgt durch die Quadraturformel

$$J_{ij}^n := \int_{-u}^{\bar{u}} f(u) du \approx \sum_{k=0}^{N_u} c_k f(u_k); \quad f(u) := G^{1-\theta} \left( \tau_n, m_i + \frac{q_j}{\sqrt{\Gamma + q_j}} u, q_j - \frac{q_j^2}{\Gamma + q_j} \right) \varphi(u).$$

Hier erscheint ein Problem, nämlich die Punkte  $m_{ijk}^*$  und  $q_i^*$  mit

$$\begin{aligned} m_{ijk}^* &:= m_i + \frac{q_j}{\sqrt{\Gamma + q_j}} u_k, \quad i = 1, \dots, N_m - 1, \quad j = 1, \dots, N_q - 1, \quad k = 0, \dots, N_u, \\ q_j^* &:= q_j - \frac{q_j^2}{\Gamma + q_j} \end{aligned}$$

sind im Allgemeinen keine Gitterpunkte, deshalb wenden wir die lineare Interpolation an.

Ein weiterer Aspekt ist, dass die neu entstehenden Punkte  $m_{ijk}^*$  außerhalb des Berechnungsgebietes  $[\underline{m}, \bar{m}]$  liegen können. Deshalb erfolgt eine Erweiterung auf das größere Intervall  $[\underline{\bar{m}}, \bar{\bar{m}}] \supset [\underline{m}, \bar{m}]$ . Wir definieren die erweiterte Zerlegung in Richtung  $m$  durch  $\overline{\overline{\chi}}_m := \{\overline{\chi}_m^l, \overline{\chi}_m, \overline{\chi}_m^h\}$  mit

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\chi}}_m^l &:= \{m_i^l, \quad i = 0, \dots, r, \quad r \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \underline{\bar{m}} = m_0^l < \dots < m_r^l \quad \}, \quad m_r^l < \underline{m}, \\ \overline{\overline{\chi}}_m^h &:= \{m_i^h, \quad i = 0, \dots, r, \quad r \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad m_0^h < \dots < m_r^h = \bar{\bar{m}} \}, \quad m_0^h > \bar{m}. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung

$$\frac{q_j}{\sqrt{q_j + \Gamma}} |u_k| \leq \sqrt{q} |u_k| \leq \sqrt{q} |\bar{u}|, \quad \forall j \in \{0, \dots, N_q\}, \quad \forall k \in \{0, \dots, N_u\} \quad (7.50)$$

und mit  $\underline{u} = -\bar{u}$  erhalten wir  $m_0^l = \underline{m} + \underline{u} \sqrt{q}$  und  $m_r^h = \bar{m} + \bar{u} \sqrt{q}$ .

Mit der Erweiterung der Gitterpunkte in Richtung  $m$  stoßen wir auf das Problem, dass die Lösungsfunktion auf diesen erweiterten Punkten nicht bekannt ist und damit ist die Berechnung des Integrals nicht möglich. Wir umgehen dieses Problem, indem wir die Werte in den erweiterten Gitterpunkten durch die Werte der Diffusionsapproximation mit  $\Sigma_\zeta = \frac{1}{\lambda} \Gamma$ , siehe Bemerkung 7.3.4, ersetzen.

Für den erzielten Integral-Term aus (7.34) setzen wir dann

$$I_{ij}^n := \left(g_{ij}^n\right)^\theta \cdot J_{ij}^n - g_{ij}^n.$$

Mit Hinblick auf (7.47) und (7.49) wollen wir das Anfangswertproblem (7.31) in Richtung  $m$  implizit und in Richtung  $q$  zusammen mit dem Integral-Term explizit diskretisieren. Mit anderen Worten erhalten wir

$$\frac{g_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^n}{\Delta_\tau} = \Lambda_m g_{i,j}^{n+1} + \Lambda_q g_{i,j}^n + \frac{\lambda}{1 - \theta} I_{i,j}^n.$$

Die Umstellung des letzten Ausdruckes liefert

$$-\left(\Lambda_m - \frac{1}{\Delta_\tau}\right) g_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta_\tau} + \Lambda_q\right) g_{i,j}^n + \frac{\lambda}{1 - \theta} I_{i,j}^n. \quad (7.51)$$

Aus (7.51) können wir die Differenzgleichungen in den inneren Gitterpunkten für die Differentialgleichung (7.31) wie folgt formulieren

$$-\mathcal{A}_{ij} g_{i-1,j}^{n+1} + \mathcal{C}_{ij} g_{i,j}^{n+1} - \mathcal{B}_{ij} g_{i+1,j}^{n+1} = \mathcal{A}_j^q g_{i,j-1}^n + \mathcal{C}_{ij}^q g_{i,j}^n + \mathcal{B}_j^q g_{i,j+1}^n + \frac{\lambda}{1 - \theta} I_{i,j}^n. \quad (7.52)$$

Dabei sind die Indizes

$$n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad i = 1, \dots, N_m - 1, \quad j = 1, \dots, N_q - 1.$$

Die Koeffizienten auf der linken Seite sind gegeben durch

$$\mathcal{A}_{ij} := \frac{2b_m(q_j)}{(m_i - m_{i-1})(m_{i+1} - m_{i-1})} - \frac{a_m(m_i, q_j) - |a_m(m_i, q_j)|}{2(m_i - m_{i-1})} \geq 0, \quad (7.53)$$

$$\mathcal{B}_{ij} := \frac{2b_m(q_j)}{(m_{i+1} - m_i)(m_{i+1} - m_{i-1})} + \frac{a_m(m_i, q_j) + |a_m(m_i, q_j)|}{2(m_{i+1} - m_i)} \geq 0, \quad (7.54)$$

$$\mathcal{C}_{ij} := \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{B}_{ij} - c_m(m_i) + \frac{1}{\Delta_\tau} > 0 \quad (7.55)$$

und die Koeffizienten auf der rechten Seite sind gegeben durch

$$\mathcal{A}_j^q := -\frac{a_q(q_j) - |a_q(q_j)|}{2(q_j - q_{j-1})} \geq 0, \quad (7.56)$$

$$\mathcal{B}_j^q := \frac{a_q(q_j) + |a_q(q_j)|}{2(q_{j+1} - q_j)} \geq 0, \quad (7.57)$$

$$\mathcal{C}_{ij}^q := \frac{1}{\Delta_\tau} - (\mathcal{A}_j^q + \mathcal{B}_j^q) + \frac{\theta}{2(1-\theta)^2 \Sigma_R} m_i^2 \mathbf{1}_{\{\theta \geq 0\}}. \quad (7.58)$$

Zusammenfassend lässt sich unser numerisches Verfahren zu jedem  $j = 1, \dots, N_q - 1$  als eine Folge von linearen Gleichungssystemen wie folgt darstellen

$$A_j X_j^{n+1} = b_j^n, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1 \quad (7.59)$$

mit der tridiagonalen Koeffizientenmatrix der Größe  $(N_{m+1} \times N_{m+1})$

$$A_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{A}_{1,j} & \mathcal{C}_{1,j} & -\mathcal{B}_{1,j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}_{2,j} & \mathcal{C}_{2,j} & -\mathcal{B}_{2,j} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathcal{A}_{N_m-1,j} & \mathcal{C}_{N_m-1,j} & -\mathcal{B}_{N_m-1,j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit

$$X_j^{n+1} := \begin{pmatrix} g_{0,j}^{n+1} \\ g_{1,j}^{n+1} \\ g_{2,j}^{n+1} \\ \vdots \\ g_{N_m-1,j}^{n+1} \\ g_{N_m,j}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad b_j^n := \begin{pmatrix} g_{0,j}^{n+1} \\ \mathcal{A}_j^q g_{1,j-1}^n + \mathcal{C}_j^q g_{1,j}^n + \mathcal{B}_j^q g_{1,j+1}^n \\ \mathcal{A}_j^q g_{2,j-1}^n + \mathcal{C}_j^q g_{2,j}^n + \mathcal{B}_j^q g_{2,j+1}^n \\ \vdots \\ \mathcal{A}_j^q g_{N_m-1,j-1}^n + \mathcal{C}_j^q g_{N_m-1,j}^n + \mathcal{B}_j^q g_{N_m-1,j+1}^n \\ g_{N_m,j}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 7.3.3.** Das numerische Verfahren kann auch in Richtung  $q$  implizit entwickelt werden, hierbei folgt ein lineares Gleichungssystem der Dimension  $N_m + N_q + 2$  statt einer Folge von den Gleichungssystemen der Dimension  $N_m + 1$ , was mehr Aufwand kostet. Darüberhinaus kann auf Grund der Dirichlet-Randbedingung die Dimension des linearen Gleichungssystems in (7.59) um 2 reduziert werden.



Unter der Annahme, dass  $g_{ij}^n$  nicht negativ ist, folgt auch, dass das Integral-Term  $J_{ij}^n$  nicht negativ ist. Weiterhin müssen wir noch überprüfen, ob der Koeffizient  $C_{ij}^q$  aus (7.58) für alle  $i \in \{1, \dots, N_m - 1\}$  und für alle  $j \in \{1, \dots, N_q - 1\}$  streng positiv ist. Für äquidistantes Gitter lässt sich die Bedingung wie folgt darstellen

$$\frac{1}{\Delta_\tau} + \frac{\theta}{2(1-\theta)^2 \Sigma_R} m_i^2 \mathbf{1}_{\{\theta \geq 0\}} - \frac{|a_q(q_j)|}{\Delta_q} \geq 0.$$

Dies ist die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung für den Koeffizienten  $C_{ij}^q$  (siehe Courant, Friedrichs und Lewy [14]) und lässt sich durch eine geeignete Abschätzung wie folgt darstellen

$$\frac{1}{\Delta_\tau} - \frac{|a_q(q_j)|}{\Delta_q} \geq 0.$$

Die Koeffizienten  $\mathcal{A}_{ij}$  in (7.53) und  $\mathcal{B}_{ij}$  in (7.54), die in der tridiagonalen Koeffizientenmatrix auftauchen, sind nicht negativ und  $C_{ij}$  (7.55) auf der der Hauptdiagonale in der Koeffizientenmatrix ist streng positiv. Außerdem gilt  $C_{ij} > \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{B}_{ij}$  für alle  $i = 1, \dots, N_m - 1$  und alle  $j = 1, \dots, N_q - 1$ . Daraus folgt, dass die tridiagonalen Koeffizientenmatrix  $A_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, N_q - 1\}$  und für alle  $\tau \in \{0, \dots, N_\tau - 1\}$  eine M-Matrix (siehe 8.3.P15 und Definition Definition 6.1.9 in Horn und Johnson [30]) und damit besitzt sie eine Inverse, deren Elemente positiv und Diagonalelemente streng positiv sind (siehe Varga [78]). Vor diesem Hintergrund besitzt das Gleichungssystem (7.59) eine eindeutige (und positive) Lösung  $X_j^{n+1} = A_j^{-1} b_j^n$  für alle  $j = 1, \dots, N_q$  und alle  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$ , die beispielsweise mit Hilfe von Gaußschen Eliminationsverfahren bestimmt werden kann (siehe Kapitel 2 in Samarskii u. Nikolaev [65]).

**Bemerkung 7.3.4.** In Abschnitt 3.3.1 haben wir uns für die Frage interessiert, wie sich der Filter bei dem Informations-Regime  $H = C_\lambda$  verhält, wenn die Intensität der Experten wächst und gleichzeitig deren Ungenauigkeit linear mitwächst. Theorem 3.3.4 hat gezeigt, dass der  $C_\lambda$ -Filter unter bestimmten Voraussetzungen gegen den  $D$ -Filter konvergiert. Wir vermuten, dass sich diese Überlegung unter weiteren technischen Bedingungen auf die Wertfunktionen übertragen lässt und es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |V^{C_\lambda}(t, m, q) - \widehat{V}^D(t, m, q)| = 0, \quad \forall m \in \mathcal{S}_M, \quad q \in \mathcal{S}_Q, \quad (7.60)$$

wobei  $\widehat{V}^D(t, m, q)$  die modifizierte Funktion von der Wertfunktion  $V^D(t, m)$  und in (8.2) bzw. (8.3) gegeben ist.

Numerische Ergebnisse wie in Abbildung 8.17 für ein positives  $\theta$  und in Abbildung 8.18 für ein negatives  $\theta$  bestätigen diese Vermutung. Der formale Beweis bleibt jedoch aus und soll in einer zukünftigen Arbeit erscheinen.

Außerdem sind wir in Kapitel 3.3.2 dieser Frage anderes eingegangen, in dem wir angenommen haben, dass die Ungenauigkeit der Experten konstant und unabhängig von deren Anzahl bleibt. Theorem 3.3.6 hat gezeigt, dass der  $C_\lambda$ -Filter unter bestimmten Voraussetzungen gegen die Drift konvergiert. Wir vermuten, dass sich diese Überlegung unter weiteren technischen Bedingungen auf die Wertfunktionen übertragen lässt und es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |V^{C_\lambda}(t, m, q) - \overline{V}^F(t, m, q)| = 0, \quad \forall m \in \mathcal{S}_M, \quad q \in \mathcal{S}_Q. \quad (7.61)$$

Numerische Ergebnisse wie in Abbildung 8.19 für ein positives  $\theta$  und in Abbildung 8.20 für ein negatives  $\theta$  bestätigen diese Vermutung. Ebenso bleibt der formale Beweis aus und soll in einer zukünftigen Arbeit erscheinen.

**Bemerkung 7.3.5.** Ähnliche Aussagen über die Strategien wie in Lemma 6.2.2 und Lemma 6.2.3 können wir bei diesem Informations-Regime nicht treffen, da eine geschlossene Formel für die Wertfunktion nicht vorhanden ist. Allerdings lassen die numerischen Ergebnisse wie in Abbildung 8.11 für  $\theta = +0.3$  und Abbildung 8.12 für  $\theta = -0.3$  vermuten, dass folgendes gilt:

- Sind  $M_t^{C_\lambda} = M_t^H = m$  und  $Q_t^{C_\lambda} = Q_t^H = q$  mit  $H = R$  oder  $H = D$ , dann gilt die Vermutung

$$p^{*,C_\lambda}(t, m, q) = p^{*,H}(t, m, q).$$

- Sind  $M_t^{C_\lambda} = \mu_t = m$  und  $Q_t^{C_\lambda} = q = 0$ , dann gilt

$$p^{*,C_\lambda}(t, m) = p^{*,F}(t, m, 0).$$

**Bemerkung 7.3.6.** Da wir die DPE beim Regime  $H = C_\lambda$  nicht geschlossen, sondern nur numerisch lösen konnten, können wir keinen geschlossenen Ausdruck für die Effektivität  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  aus (4.36) aufstellen.

In diesem Abschnitt präsentieren wir einige numerische Ergebnisse zur Illustration der theoretischen Resultate der vorherigen Kapitel.

## 8.1 Modellparameter

Der Preis des Wertpapiers  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  ist die verallgemeinerte geometrischen Brownschen Bewegung genügend der SDE (2.10), deren un beobachtbare Drift  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess und deren Volatilität  $\sigma_R > 0$  konstant ist. Zur Vereinfachung werden wir in diesem Abschnitt alle Prozesse im eindimensionalen Fall betrachten. Weiterhin betrachten wir fünf verschiedene Investoren, die sich in den Informationsquellen unterscheiden und das gleiche Ziel verfolgen, nämlich den erwarteten Nutzen des Endvermögens zu maximieren.

- **Der  $R$ -Investor** ist derjenige Investor, der nur den Preisprozess  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  bzw. dessen Rendite  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  beobachtet und daraus seine Investor-Filtration  $\mathbb{F}^R = (\mathcal{F}_t^R)_{t \in [0, T]}$  erzeugt.
- **Der  $C_n$ -Investor** ist derjenige Investor, der den Preisprozess  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  bzw. dessen Rendite  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  beobachtet und zusätzlich dazu eine bekannte Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  zufälliger Einschätzungen über die Drift im Investitionszeitraum  $[0, T]$  erhält. Die Expertenmeinungen sind normalverteilt mit  $Z_k \sim \mathcal{N}(\mu_{t_k}, \Gamma)$  und treffen an zu Investitionsbeginn festgelegten äquidistanten Zeitpunkten  $t_k = k\Delta_t$  mit  $\Delta_t := \frac{T}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein. Die Informationen aus der Rendite werden mit den Informationen aus den Expertenmeinungen kombiniert und erzeugen die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^{C_n} = (\mathcal{F}_t^{C_n})_{t \in [0, T]}$ .
- **Der  $C_\lambda$ -Investor** ist derjenige Investor, der den Renditeprozess  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  beobachtet und zusätzlich dazu eine zufällige Anzahl zufälliger Einschätzungen über die unbekannte

Drift im Investitionszeitraum  $[0, T]$  erhält. Die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen  $T_1, T_2, \dots$  sind zufällig und werden als Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  mit Intensität  $\lambda > 0$  angenommen. Unter dieser Annahme erhält der Investor während des Investitionszeitraums  $[0, T]$  im Mittel  $\lambda T$  Einschätzungen über die unbekannte Drift  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$ . Die Expertenmeinungen  $Z_k$  sind normalverteilte Zufallsgrößen mit  $Z_k \sim \mathcal{N}(\mu_{T_k}, \Gamma)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , deren Kombination mit der Rendite die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^{C\lambda} = (\mathcal{F}_t^{C\lambda})_{t \in [0, T]}$  erzeugt.

- **Der  $D$ -Investor** ist derjenige Investor, der den Renditeprozess  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  und zusätzlich dazu einen weiteren stetigen Prozess  $\zeta = (\zeta_t)_{t \in [0, T]}$  in der Form einer Brownschen Bewegung mit Drift  $\mu_t$  beobachtet, mit

$$d\zeta_t = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0,$$

wobei  $\sigma_\zeta > 0$  und  $W^\zeta$  ein von  $W^R$  und  $W^\mu$  unabhängiger Wiener-Prozess sind. Der Prozess  $\zeta$  wird als stetiger Experten interpretiert, der zusammen mit der Rendite die Investor-Filtration  $\mathbb{F}^D = (\mathcal{F}_t^D)_{t \in [0, T]}$  erzeugt.

- **Der  $F$ -Investor** ist der Investor, der sowohl den Renditeprozess  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  als auch den Drift-Prozess  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  beobachtet und gilt als Referenz für die anderen Investoren.

Für die nachfolgenden numerischen Experimente werden die in Tabelle 8.1 gegebenen Modellparameter verwendet. Abweichungen davon sind im Text ausdrücklich vermerkt.

Mean-Reversion-Level	$\bar{\mu}$	0	Investitionshorizont	$T$	1 Jahr
Steifigkeit des OUPs	$\kappa$	3	Nutzen-Parameter	$\theta$	0.3
Volatilität des OUPs	$\sigma_\mu$	1	Aktienvolatilität	$\sigma_R$	0.25
Mittelwert von $\mu_0$	$\bar{m}_0$	$\bar{\mu} = 0$	Experten-Volatilität	$\sigma_\zeta$	0.15
Varianz von $\mu_0$	$\bar{q}_0$	$\frac{\sigma_\mu^2}{2\kappa} = 0.1\bar{6}$	Expertenvarianz	$\Gamma$	1
Anfangswert von $M_0^H$	$m_0 = \bar{m}_0$	0	Anzahl der Signale	$n$	6
Anfangswert von $Q_0^H$	$q_0 = \bar{q}_0$	0.1 $\bar{6}$	Intensität von $N_t$	$\lambda$	6

Tabelle 8.1: Modellparameter

Wie schon im Abschnitt 4.2 erwähnt wurde, müssen für die Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems die Modellparameter aus der Menge der zulässigen Parameter gewählt werden. Abbildung 8.1 zeigt verschiedene Bilder für die Menge der zulässigen Parameter einerseits in Abhängigkeit vom Investitionshorizont  $T$  und andererseits in Abhängigkeit vom Parameter  $\theta$  der Potenz-Nutzenfunktion, der Volatilität des OUPs  $\sigma_\mu$  bzw. der Volatilität des Aktienprozesses  $\sigma_R$ .

In den oberen zwei Bildern wird die Menge der zulässigen Parameter  $\mathcal{P}^F$  in Abhängigkeit von  $\theta$  dargestellt. Daran ist zu erkennen, dass das Optimierungsproblem für negative Werte für den

Parameter  $\theta$  immer wohlgestellt ist. Außerdem ist im Bild oben links zu sehen, dass das Optimierungsproblem für die gewählten Parameter für alle  $T > 0$  wohlgestellt ist, wenn der Parameter  $\theta$  im Intervall  $(-\infty, \theta^E]$  mit  $\theta^E \approx 0.36$  liegt. Überschreitet  $\theta$  den kritischen Wert  $\theta^E$ , dies entspricht weniger Risikoaversion, so ist das Optimierungsproblem nicht mehr für alle beliebigen Investitionshorizonte  $T$  wohlgestellt, sondern nur bis zu einem von  $\theta$  abhängigen Investitionshorizont  $T^E = T^E(\theta)$ . Je größer  $\theta$  ist, umso kleiner wird dieser Investitionshorizont  $T(\theta)$ . Für den Grenzfall  $\theta \rightarrow 1$ , das heißt für verschwindende Risikoaversion  $1 - \theta$ , gilt  $T^E(\theta) \rightarrow 0$ . Im Bild oben rechts wird der Investitionshorizont  $T = 1$  gesetzt und das Verhältnis von  $\theta$  zur Volatilität des Preisprozesses  $\sigma_R$  betrachtet. Daran ist zu erkennen, dass größere Werte für die Volatilität es uns ermöglichen größere Werte für  $\theta$  zu wählen.

In den zwei Bildern in der Mitte wird der Einfluss der Volatilität  $\sigma_\mu$  auf die Menge der zulässigen Parameter untersucht. Hierbei ist auf dem Bild links zu erkennen, dass das Optimierungsproblem für alle  $T > 0$  wohlgestellt ist, solange die Volatilität des OUPs  $\sigma_\mu \in (0, \sigma_\mu^E]$  mit  $\sigma_\mu^E \approx 1.15$  ist. Sollte die Volatilität des OUPs diesen kritischen Wert überschreiten, so ist das Optimierungsproblem nur für einen von  $\sigma_\mu$  abhängigen Investitionshorizont  $T^E = T^E(\sigma_\mu)$  wohlgestellt. Auf dem Bild rechts daneben wird der Investitionshorizont  $T = 1$  gesetzt und das Verhältnis von  $\sigma_\mu$  zu  $\theta$  untersucht. Während für  $\theta < 0$  keine Einschränkung auf die Parameter ist, ist das für  $\theta \in (0, 1)$  nicht mehr der Fall. Je größer die Volatilität  $\sigma_\mu$  wird, umso kleiner muss  $\theta$  gewählt werden.

Im den unteren zwei Bildern wird der Einfluss der Volatilität  $\sigma_R$  auf die Menge der zulässigen Parameter veranschaulicht. Im Gegensatz zur Volatilität des OUPs  $\sigma_\mu$  sorgen kleinere Werte für die Volatilität des Aktienprozesses  $\sigma_R$ , wie im Bild unten links zu sehen ist, dafür, dass Optimierungsproblem nur für kleinere  $T$  wohlgestellt wird. Liegt die Volatilität im Intervall  $(0, \sigma_R^E]$  mit dem kritischen Wert  $\sigma_R^E \approx 0.22$ , so ist das Optimierungsproblem nur bis zu einem von  $\sigma_R$  abhängigen Investitionshorizont  $T^E = T^E(\sigma_R)$  wohldefiniert. Je größer die Aktienvolatilität  $\sigma_R$  ist, umso größer kann der Horizont gesetzt werden. Solange aber diese den kritischen Wert  $\sigma_R^E$  überschreitet, ist das Kontrollproblem für alle  $T > 0$  wohldefiniert. Das Bild rechts zeigt das Verhältnis der beiden Volatilitäten  $\sigma_R$  zu  $\sigma_\mu$ , welches man anhand der anderen Bilder erahnen kann.

Die Bedingung in der Menge der zulässigen Parameter des partiell informierten  $H$ -Investors aus (4.34)

$$\mathcal{P}^H = \mathcal{P}^G \cap \left\{ p \in \mathcal{P}, \quad \text{sodass } \left( I_d - 2(1 - \theta)A_b(0)q_0 \right)^{-1} \text{ positiv definit ist.} \right\}$$

ist für die Parameter aus Tabelle 8.1 erfüllt, denn es gilt

$$q_0 = 0.1\bar{6} < 0.964 = \frac{1}{7}0.675 = \frac{1}{(1 - \theta)} \frac{1}{2A^F(0)}.$$

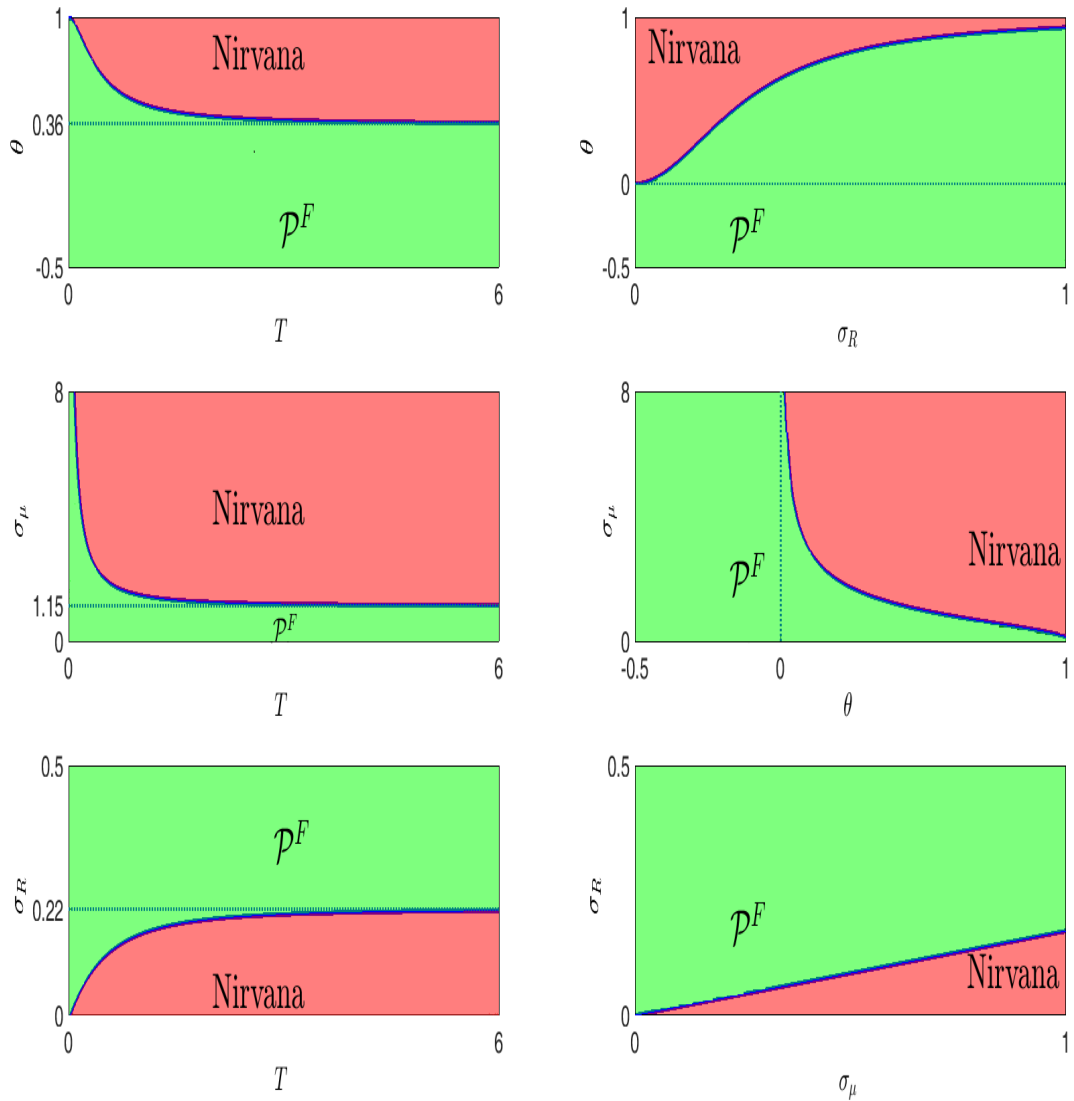


Abbildung 8.1: Menge der zulässigen Parameter  $\mathcal{P}^F$   
 Oben: in Abhängigkeit von  $\theta$  und  $T$  (links) bzw.  $\theta$  und  $\sigma_R$  (rechts).  
 Mitte: in Abhängigkeit von  $\sigma_\mu$  und  $T$  (links) bzw.  $\sigma_\mu$  und  $\theta$  (rechts).  
 Unten: in Abhängigkeit von  $\sigma_R$  und  $T$  (links) bzw.  $\sigma_R$  und  $\sigma_\mu$  (rechts).  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

## 8.2 Filter

Wir simulieren zunächst in diesem Experiment einen Pfad für den unbeobachtbaren Driftprozess  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  nach der Langevin-DGL in (2.3)

$$d\mu_t = \kappa(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_\mu dW_t^\mu, \quad \mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{m}_0, \bar{q}_0).$$

Weiterhin simulieren wir eine Trajektorie für den Renditeprozess  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  in der Form der Brownschen Bewegung aus (2.9)

$$dR_t = \mu_t dt + \sigma_R dW_t^R, \quad R_0 = 0.$$

Für die Simulation der diskreten Experten unterscheiden wir zwischen den zwei Modellen. Im ersten Modell bestimmen wir zunächst durch Vorgabe bzw. Annahme die Anzahl der während der Investition ankommenden Expertenmeinungen  $n$  und dann können wir die deterministischen Ankunftszeitpunkte festlegen. Für die numerischen Ergebnisse in diesem Abschnitt sind diese Zeitpunkte äquidistant und durch die Formel  $t_k = k \frac{T}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  gegeben. Nach der Festlegung der Informationszeitpunkte bestimmen wir, wie zuverlässig der Experte zu den eben erwähnten Zeitpunkten ist, mit anderen Worten, wir bestimmen die Varianz der Expertenmeinung  $\Gamma$ . Nun können wir Expertenmeinungen  $Z_k$  simulieren, indem wir zu jedem Informationszeitpunkt  $t_k$  den aktuellen Wert der Drift  $\mu_{t_k}$  mit einem unsystematischen Fehler wie in (2.12) versehen, das heißt

$$Z_k = \mu_{t_k} + \sqrt{\Gamma} \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Im zweiten Modell dagegen wissen wir nicht genau, wie viele Expertenmeinungen während der Investition ankommen werden, jedoch wissen wir, dass im Mittel  $\lambda t$  Expertenmeinungen bis zum Zeitpunkt  $t$  ankommen. Wir nehmen an, dass die zufälligen Ankunftszeitpunkte  $T_1, T_2, \dots$  Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses sind, dessen Intensität  $\lambda$  ist. Für die Simulation der Expertenmeinungen in diesem Modell gehen wir hier dann nach der Formel (2.13) wie im Modell vorhin vor

$$Z_k = \mu_{T_k} + \sqrt{\Gamma} \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Im Marktmodell mit einem stetigen Experten simulieren wir zunächst einen Wiener-Prozess  $(W_t^\zeta)_{t \in [0, T]}$ , der von den beiden Wiener-Prozessen  $(W_t^R)_{t \in [0, T]}$  aus dem Renditeprozess und  $(W_t^\mu)_{t \in [0, T]}$  aus dem Driftprozess unabhängig ist. Der stetige Experte  $(\zeta)_{t \in [0, T]}$  hat die Gestalt des Renditeprozesses bzw. einer Brownschen Bewegung wie in (2.14)

$$d\zeta_t = \mu_t dt + \sigma_\zeta dW_t^\zeta, \quad \zeta_0 = 0,$$

mit einer gegebenen Volatilität  $\sigma_\zeta > 0$ .

Nach der Simulation des Driftprozesses, des Renditeprozesses und der diskreten sowie der stetigen Expertenmeinungen können wir den Filter in den verschiedenen Informations-Regimes  $H \in \{R, C_n, C_\lambda, D\}$  bestimmen.

**Filter für den  $R$ - bzw.  $C_n$ -Investor.** Das obere Bild in Abbildung 8.2 zeigt den simulierten Pfad für den Renditeprozess  $R$ , aus dem der  $R$ -Filter bestehend aus den zwei Kenngrößen  $M^R$  und  $Q^R$  berechnet wird. Außerdem ist der Pfad von  $\int_0^t \mu_s ds$  zu sehen, der als Renditeprozess für  $\sigma_R = 0$  betrachtet werden kann. Das zweite Bild zeigt den simulierten Pfad für die unbekannte Drift  $\mu$  sowie die erste Kenngröße des  $R$ -Filters bzw. die bedingte Erwartung  $M^R$ , deren Berechnung nur auf Informationen aus dem Renditeprozess basiert. Außerdem wird hier die bedingte Erwartung  $M^{C_n}$  gezeigt, die sich auf Basis der Rendite und der Expertenmeinungen, die als rot markierte Kreuze zu sehen sind, ergibt. Um den Effekt der diskreten Expertenmeinungen hervorzuheben, haben wir zuverlässige Experten mit einer kleinen Varianz  $\Gamma = 0.05$  gewählt. Zur vollständigen Interpretation des zweiten Bildes gehört auch die Analyse des letzten Bildes unten links, auf dem die zweite Kenngröße des Filters bzw. die bedingte Varianz  $Q^H$  mit  $H = R, C_n$  zu sehen ist. Die bedingte Varianz startet mit der stationären Varianz  $Q_{0-} = \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa}$  und gleich nach dem ersten Update, welches zum Zeitpunkt  $t = 0$  eintrifft, reduziert sich die bedingte Varianz und es gilt  $Q_{0-}^{C_n} < Q_{0-}^R$ . Außerdem reduziert sich die bedingte Varianz  $Q_t^{C_n}$  zu den Updateszeitpunkten  $t_0, \dots, t_n$  und springt nach unten. Die bedingte Erwartung  $M_t^{C_n}$  ist auf Grund der niedrigen Varianz der Experten sehr nah an dem tatsächlichen Wert der Drift  $\mu_t$ . Zwischen zwei Informationszeitpunkten wächst die bedingte Varianz  $Q_t$  und der Filter  $M_t^{C_n}$  nähert sich nach und nach dem Filter  $M_t^R$  an.

Das dritte Bild, zu dem das letzte Bild unten rechts gehört, unterscheidet sich vom zweiten lediglich durch den Anfangswert der Drift. Im zweiten Bild wird davon ausgegangen, dass der Anfangswert des OU-Prozesses  $\mu_0$  unbekannt und dessen Verteilung die stationäre Verteilung  $\mathcal{N}(\bar{\mu}, \frac{\sigma_\mu^2}{2\kappa})$  ist, dabei ist der Anfangswert des Filters  $M_{0-}^H = E[\mu] = \bar{\mu}$  und  $Q_{0-}^H = \frac{\sigma_\mu^2}{2\kappa}$ . Im dritten Bild dagegen nehmen wir an, dass die partiell informierten Investoren den Anfangswert der Drift vollständig beobachten können, dann ist  $Q_0^H = q_0 = 0$  und  $M_0^H \mu_0(\omega) = m_0$  für  $H = R, C_n$ . Sowohl auf dem linken als auch auf dem rechten Bild ganz unten ist die Aussage von Theorem 3.2.3 klar zu erkennen, dass  $Q^R$  schnell die Asymptote  $Q_\infty^R = \kappa \Sigma_R \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_R}} \right]$  erreicht. Die asymptotisch obere und untere Schranke  $\bar{Q}$  bzw.  $\underline{Q}$  für  $Q^{C_n}$  aus Theorem 3.2.5 sind auch zu erkennen.

**Filter für den  $R$ - bzw.  $C_\lambda$ -Investor.** Ähnlich wie in Abbildung 8.2 zeigt uns Abbildung 8.3 entsprechende Bilder für den  $C_\lambda$ -Filter bzw. die bedingte Erwartung  $M^{C_\lambda}$  und die bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$ . Der Unterschied zur Abbildung 8.2 besteht darin, dass die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen zufällig sind und Sprungzeitpunkte eines Poisson-Prozesses mit Intensität  $\lambda = n = 6$ . Das heißt, im Regime  $H = C_\lambda$  kommen im Mittel genauso viele Expertenmeinungen wie im Regime  $H = C_n$  an. In diesem Modell kann der Effekt auftreten, dass die Wartezeiten zwischen je zwei aufeinander folgenden Informationszeitpunkten groß sind. In diesem Fall nähern sich die bedingte Erwartung  $M^{C_\lambda}$  und die bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$  der bedingten Erwartung  $M^R$  bzw. der bedingten Varianz  $M^R$  an, da zwischen zwei Informationszeitpunkten außer aus dem Renditeprozess keine zusätzlichen Informationen einfließen. Darüber hinaus machen die zwei unteren Bilder für die bedingte Varianz klar, dass eine Aussage über asymptotischen obere und untere Schranken für  $Q^{C_\lambda}$  wie in Theorem 3.2.5 beim Informations-Regime



$H = C_n$  unrealistisch ist.

**Filter für den  $R$ - bzw.  $D$ -Investor.** Im Gegensatz zum Filter in den beiden Informations-Regimes  $H = C_n, C_\lambda$ , bei denen Expertenmeinungen über die Drift zu diskreten Zeitpunkten eintreffen, sind die Expertenmeinungen hier durch einen stetigen Prozess  $\zeta_t$  modelliert, welcher in Form einer Brownschen Bewegung mit Drift  $\mu_t$  ist. Für dieselbe simulierte Drift in den letzten zwei Abbildungen können wir hier auch die gewonnenen Informationen aus dem stetigen Renditeprozess mit denen aus dem stetigen Expertenprozess kombinieren und erhalten den Filter für das Regime  $H = D$  bzw. die bedingte Erwartung  $M^D$  und die bedingte Varianz  $Q^D$ . Diese werden in Abbildung 8.4 dargestellt. Die bedingte Erwartung  $M^D$  liefert im Mittel eine bessere Schätzung für die unbekannte Drift  $\mu$  als  $M^R$ . Dies ist bei den unteren zwei Bildern deutlich zu erkennen, da die bedingte Varianz als Maß für die Güte des Schätzers gesehen werden kann. Die beiden Varianzen  $Q^R$  und  $Q^D$  genügen der Riccati-Gleichung

$$\frac{dQ_t^H}{dt} = f(Q_t^H, \Sigma_H), \quad Q_0^H = q_0, \quad \text{mit } f(q, \Sigma_H) := \Sigma_\mu - 2\kappa q - \Sigma_H^{-1} q^2, \quad H = R, D.$$

Für den Grenzfall  $\Sigma_\zeta \rightarrow \infty$ , welcher bedeutet, dass der stetige Experte sehr unzuverlässig ist, geht  $\Sigma_D = [\Sigma_R^{-1} + \Sigma_\zeta^{-1}]^{-1}$  gegen  $\Sigma_R$ . In diesem Fall stimmt  $Q^D$  mit  $Q^R$  überein und der stetige Experte hat damit keine nützlichen Informationen zur Verbesserung der Schätzung geliefert. Für den anderen Grenzfall  $\Sigma_\zeta \rightarrow 0$ , welcher bedeutet, dass der stetige Experte sehr zuverlässig ist, geht  $\Sigma_D$  gegen Null und in diesem Fall fällt die bedingte Varianz  $Q^D$  exponentiell gegen Null.

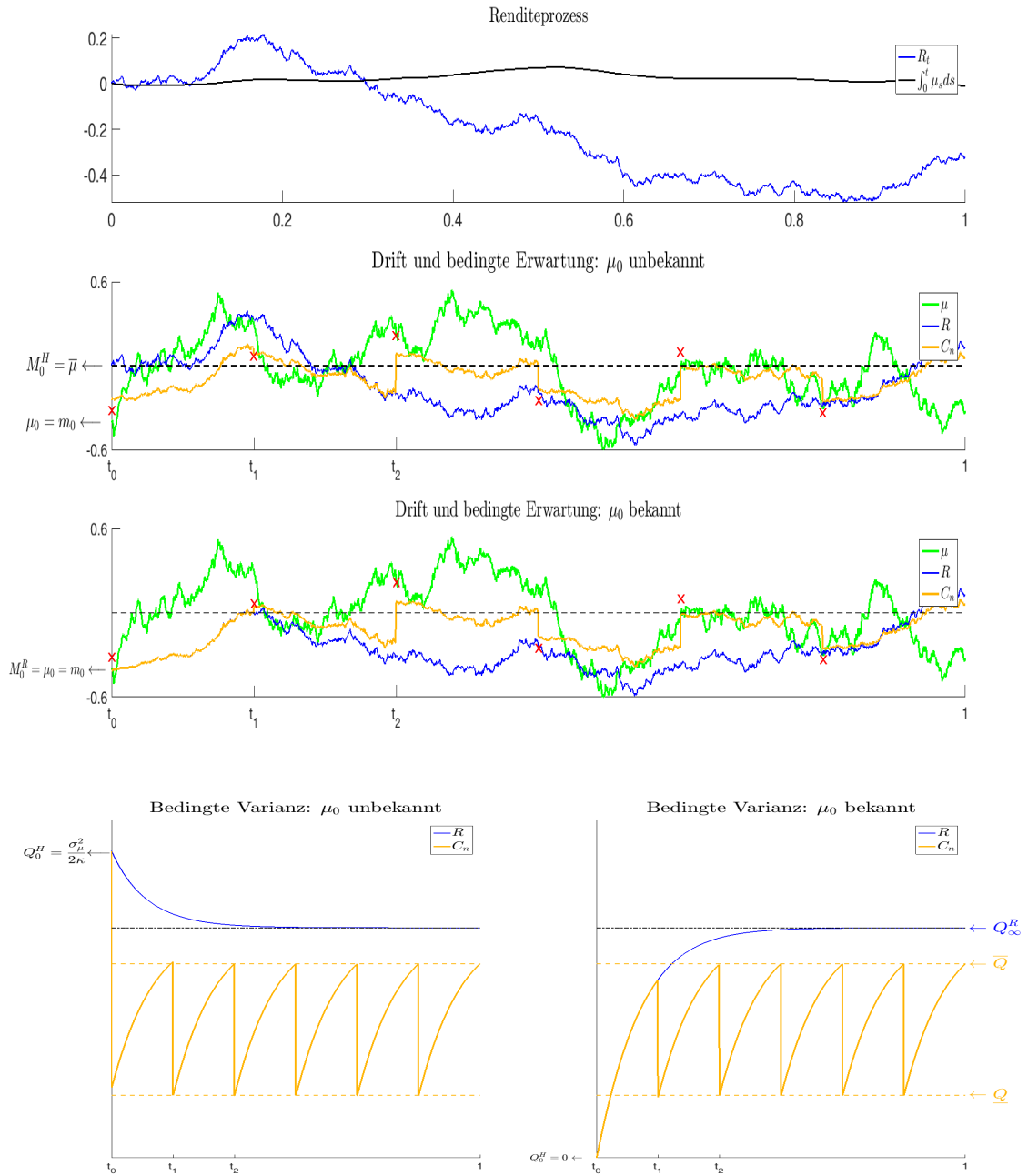


Abbildung 8.2: Filter für  $H = R, C_n$ , mit  $\Gamma = 0.05$ .

1. Bild: Rendite  $R$  und  $\int_0^t \mu_s ds$  (Rendite für  $\sigma_R = 0$ ).

2. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für unbekanntem Anfangswert  $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa})$ .

3. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für bekanntem Anfangswert  $\mu_0 = m_0, q_0 = 0$ .

4. Bild: Bedingte Varianz  $Q^H$  für unbekanntem/bekanntem Anfangswert  $\mu_0$  (links/rechts).

Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

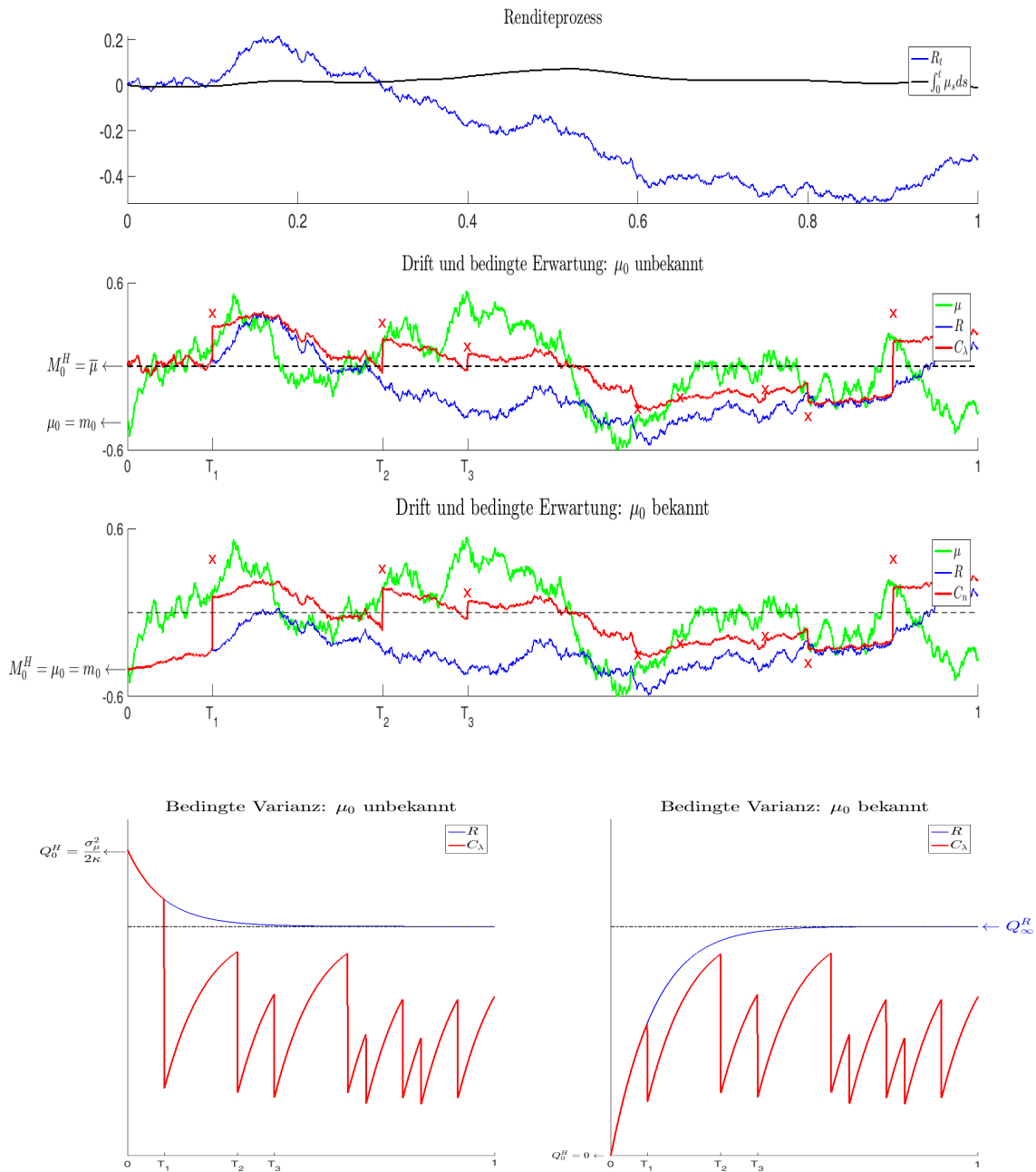


Abbildung 8.3: Filter für  $H = R, C_\lambda$ , mit  $\Gamma = 0.05$ .

1. Bild: Rendite  $R$  und  $\int_0^t \mu_s ds$  (Rendite für  $\sigma_R = 0$ ).

2. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für unbekanntem Anfangswert  $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa})$ .

3. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für bekanntem Anfangswert  $\mu_0 = m_0, q_0 = 0$ .

4. Bild: Bedingte Varianz  $Q^H$  für unbekanntem/bekanntem Anfangswert  $\mu_0$  (links/rechts).

Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

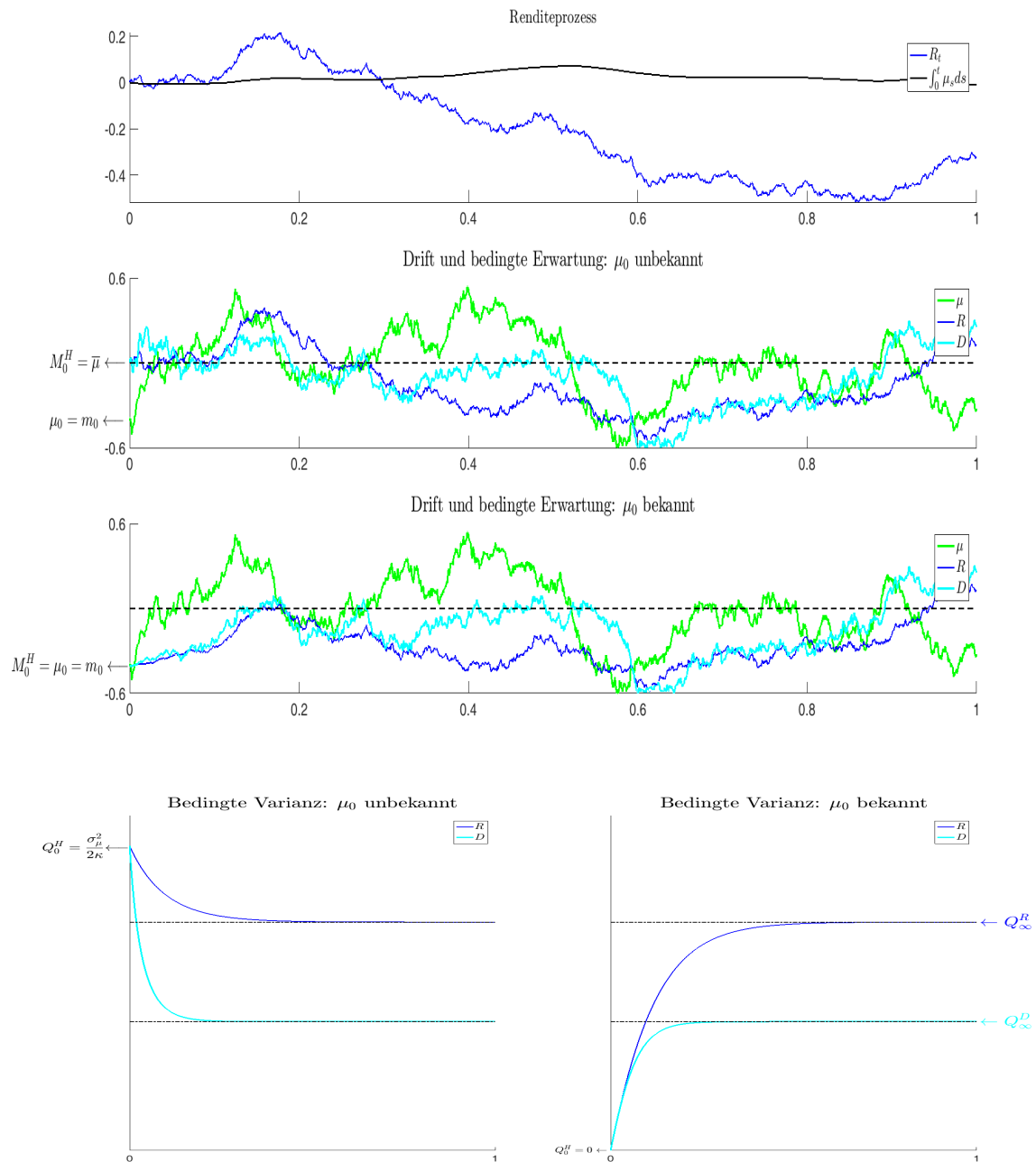


Abbildung 8.4: Filter für  $H = R, D$ .

1. Bild: Rendite  $R$  und  $\int_0^t \mu_s ds$ .
  2. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für unbekanntem Anfangswert  $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \frac{\Sigma_\mu}{2\kappa})$ .
  3. Bild: Drift  $\mu$  und bedingte Erwartung  $M^H$  für bekanntem Anfangswert  $\mu_0 = m_0, q_0 = 0$ .
  4. Bild: Bedingte Varianz  $Q^H$  für unbekanntem/bekanntem Anfangswert  $\mu_0$  (links/rechts).
- Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

### Diffusion-Approximation für hochfrequente Experten mit linear wachsender Varianz

In diesem Abschnitt wollen wir für die getroffenen theoretischen Aussagen zur Diffusionsapproximation und Konvergenz des Filters bzw. der bedingten Erwartung  $M^H$  und der bedingten Varianz  $Q^H$  mit  $H = C_n, C_\lambda$  gegen die bedingte Erwartung  $M^D$  bzw. die bedingte Varianz  $Q^D$  aus Kapitel 3.3.1 einige numerische Beispiele zeigen. Für die Simulation der diskreten Expertenmeinungen gehen wir von dem Ansatz (2.12) bzw. (2.13) aus, das heißt

$$Z_k = \begin{cases} \mu_{t_k} + \sqrt{\Gamma} \varepsilon_k, & k = 0, \dots, n-1, \quad \text{für } H = C_n, \\ \mu_{T_k} + \sqrt{\Gamma} \varepsilon_k, & k = 1, 2, \dots, \quad \text{für } H = C_\lambda. \end{cases} \quad (8.1)$$

Um diese Effekte in den Darstellungen von Pfaden der Filter sichtbar zu machen, werden die standardnormalverteilten Zufallsgrößen  $(\varepsilon_k)$  wie folgt an den Wiener-prozess  $W^\zeta$  gekoppelt, welcher den stetigen Expertenprozess antreibt:

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{n}{T} \frac{\sigma_\zeta}{\sqrt{\Gamma}} \int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} dW_s^\zeta, & k = 0, \dots, n-1, \quad \text{für } H = C_n, \\ \lambda \frac{\sigma_\zeta}{\sqrt{\Gamma}} \int_{\frac{k}{\lambda}}^{\frac{k+1}{\lambda}} dW_s^\zeta, & k = 1, 2, \dots, \quad \text{für } H = C_\lambda. \end{cases}$$

Mit dieser Konstruktion sind die Zufallsgrößen  $\varepsilon_k$  iid und standardnormalverteilt sowie unabhängig von den exponential-verteilten Wartezeiten der Informationszeitpunkten beim Regime  $H = C_\lambda$ .

Abbildung 8.5 zeigt die Diffusionsapproximation für die Filter  $M^H$  und die bedingte Varianz  $Q^H$ . Hierzu wird die Volatilität des stetigen Experten  $\sigma_\zeta$  fixiert und die Varianz  $\Gamma$  der diskreten Experten in Abhängigkeit von der Anzahl der Expertenmeinungen  $n$  bzw. von der Intensität  $\lambda$  über die Beziehung

$$\Gamma := \begin{cases} \frac{n}{T} \Sigma_\zeta, & \text{für } H = C_n, \\ \lambda \Sigma_\zeta, & \text{für } H = C_\lambda, \end{cases}$$

gewählt. Das heißt, mit wachsender Anzahl bzw. Intensität der Expertenmeinungen wird deren Varianz immer größer und somit deren Zuverlässigkeit immer geringer.

### Approximation für hochfrequente Experten mit konstanter Varianz

In diesem Abschnitt wollen wir für die getroffenen theoretischen Aussagen zur Approximation des Filters bzw. der bedingten Erwartung  $M^H$  und der bedingten Varianz  $Q^H$  mit  $H = C_n, C_\lambda$  gegen die Drift  $\mu$  aus Kapitel 3.3.2 einige numerische Beispiele zeigen. Für die Simulation der diskreten Expertenmeinungen gehen wir von Ansatz (8.1) aus, jedoch werden die standardnormalverteilten Fehler  $\varepsilon$  hier nicht an einen Wiener-Prozess verknüpft, anders als zuvor. Des Weiteren wird die Varianz der Experten unabhängig von der Anzahl bzw. der Intensität der Experten

vorausgesetzt und aus der Tabelle 8.1 gewählt. Abbildung 8.7 zeigt die Drift und den  $C_n$ -Filter für  $n = 10, 50$  und  $2000$ , während Abbildung 8.6 die Drift und den  $C_\lambda$ -Filter für  $\lambda = 10, 50$  und  $2000$  zeigt. In den beiden zuletzt erwähnten Abbildungen erkennt man, dass die Geschwindigkeit der Konvergenz deutlich langsamer als bei der Konvergenz des  $C_n$ - und. des  $C_\lambda$ -Filters gegen den  $D$ -Filter in Abbildung 8.5 bzw. in Abbildung 8.6 ist.

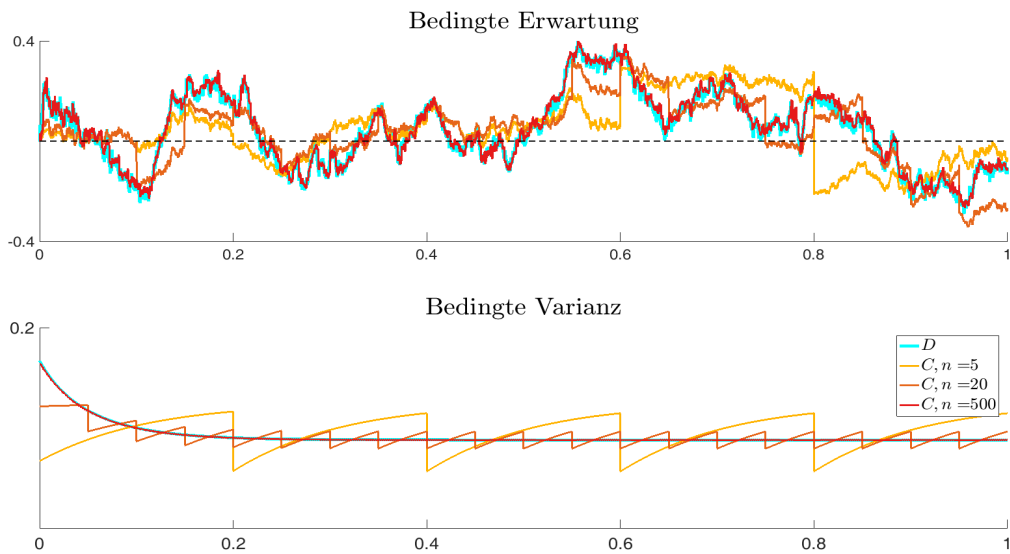


Abbildung 8.5:  $C_n$ -Filter für wachsendes  $n$  und  $\Gamma = \frac{n}{T}\Sigma_\zeta$ .  
 Oben: Bedingte Erwartung  $M^{C_n}$ , mit  $n = 5, 20, 500$ .  
 Unten: Bedingte Varianz  $Q^{C_n}$ , mit  $n = 5, 20, 500$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

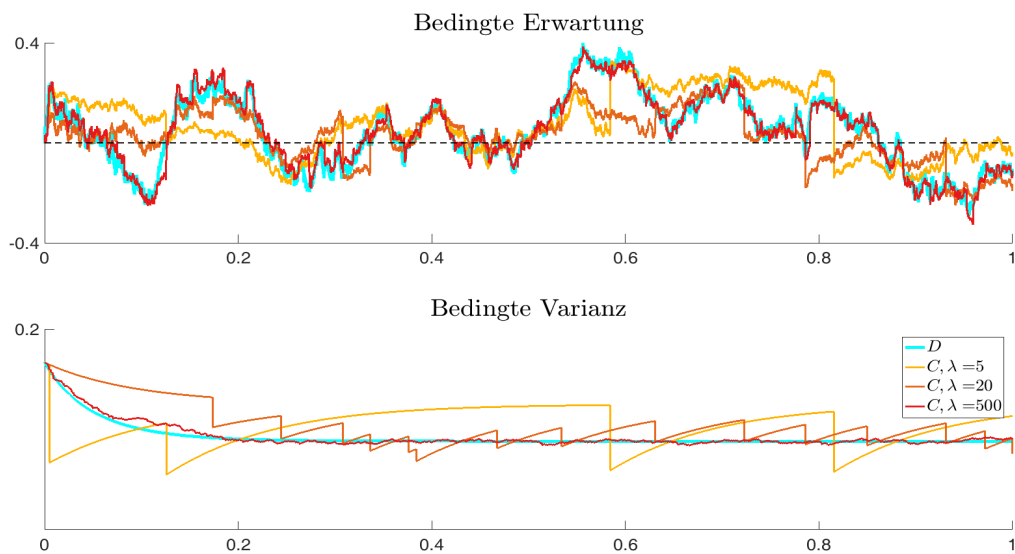


Abbildung 8.6:  $C_\lambda$ -Filter für wachsendes  $\lambda$  und  $\Gamma = \lambda\Sigma_\zeta$ .  
 Oben: Bedingte Erwartung  $M^{C_\lambda}$ , mit  $\lambda = 5, 20, 500$ .  
 Unten: Bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$ , mit  $\lambda = 5, 20, 500$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

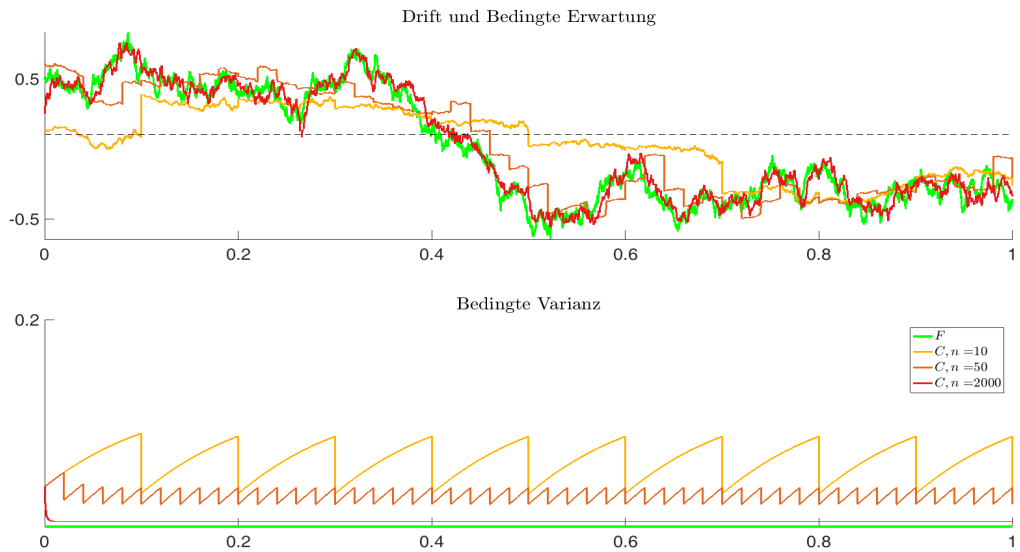


Abbildung 8.7:  $C_n$ -Filter für wachsendes  $n$  und  $\Gamma = 0.05$  (fest).

Oben: Bedingte Erwartung  $M^{C_n}$ , mit  $n = 10, 50, 2000$ .

Unten: Bedingte Varianz  $Q^{C_n}$ , mit  $n = 10, 50, 2000$ .

Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

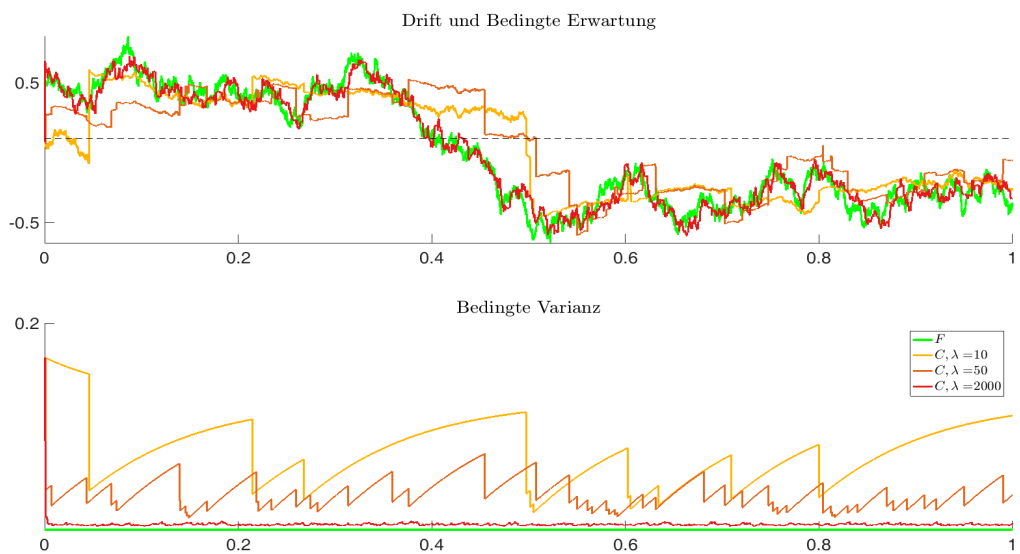


Abbildung 8.8:  $C_\lambda$ -Filter für wachsendes  $\lambda$  und  $\Gamma = 0.05$  (fest).

Oben: Bedingte Erwartung  $M^{C_\lambda}$ , mit  $\lambda = 10, 50, 2000$ .

Unten: Bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$ , mit  $\lambda = 10, 50, 2000$ .

Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.



### 8.3 Wertfunktion

Nachdem wir einige numerische Beispiele zur Simulation des Driftprozesses, des Renditeprozesses, der Expertenmeinungen und der Berechnung von Filtern sowie deren Eigenschaften etwa bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Expertenmeinungen präsentiert haben, werden wir uns nun mit dem ursprünglichen Kontrollproblem in (2.20)

$$\mathcal{V}_0^H = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathcal{J}_0^H(\pi), \quad \text{mit} \quad \mathcal{J}_0^H(\pi) = \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \middle| \mathcal{F}_0^H \right]$$

befassen. Dabei betrachten wir sowohl beim Optimierungsproblem unter voller Information  $H = F$  als auch beim Optimierungsproblem unter partieller Information  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  einen Investor, der zur Zeit  $t = 0$  mit einem Anfangskapital  $x_0^H$  startet und bis zum vorgegebenen Investitionshorizont  $T$  sein Portfolio beliebig umschichten kann. Da die Parameter in Tabelle 8.1 aus der Menge der zulässigen Parameter sind, ist das untersuchte Kontrollproblem wohlgestellt. Nach dem Maßwechsel transformieren wir das Optimierungsproblem in ein risikosensitives Optimierungsproblem, dessen zugehörige Zielfunktion aus (4.69)

$$J^H(t, y; \pi) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T b(Y_s^{t,y}, \pi_s) ds \right\} \right], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall y \in \mathcal{S}_Y \quad \text{und} \quad \forall \pi \in \mathcal{A}^H$$

und Wertfunktion aus (4.70)

$$V^H(t, y) = \begin{cases} \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} J^H(t, y; \pi), & \theta \in (0, 1), \\ \inf_{\pi \in \mathcal{A}^H} J^H(t, y; \pi), & \theta \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sind. Zur Zeit  $t = T$  gilt  $J^H(T, y; \pi) = V^H(T, y) = 1$ . Dabei ist der Zustandsprozess  $Y$  für den voll informierten Investor gleich der Drift  $\mu$ , für den partiell informierten  $H$ -Investor mit  $H = R, D, C_n$  gleich dem Prozess der bedingten Erwartung  $M^H$  und für den  $C_\lambda$ -Investor besteht der Zustand aus der bedingten Erwartung  $M^{C_\lambda}$  und der bedingten Varianz  $Q^{C_\lambda}$ . Mit diesem Schritt sind die neu entstandenen Zielfunktion  $J^H(t, y; \pi)$  und Wertfunktion  $V^H(t, y)$  vom Anfangswert  $x_0$  getrennt und es gilt der Zusammenhang

$$\mathcal{V}_0^H = \frac{(x_0^H)^\theta}{\theta} V^H(0, y_0), \quad \text{mit} \quad y_0 = \begin{cases} \mu_0, & H = F, \\ m_0, & H = R, D, C_n, \\ (m_0, q_0), & H = C_\lambda. \end{cases}$$

Die Lösung der entstandene Dynamic Programming Equation (4.79) für die Wertfunktionen ist für den  $F$ -Investor in Lemma 5.1.4 und für den  $R$ - sowie den  $D$ -Investor in Lemma 5.2.3 in der Form

$$V^H(t, y) = \exp \left\{ y' A^H(t) y + (B^H(t))' y + C^H(t) \right\}.$$

Für den  $C_n$ -Investor wurde die Lösung mit Hilfe einer Rückwärtsrekursion erhalten und ist in Lemma 6.2.1 dargestellt.

Im Modell  $H = C_\lambda$  unterscheiden wir zunächst zwischen dem ursprünglichen und dem regularisierten Kontrollproblem. Doch numerische Experimente haben ergeben, je kleiner der Regularisierungsparameter ist, umso kleiner sind solche Unterschiede (siehe Kapitel 3 in Shardin [73] oder Shardin und Wunderlich [74]). Deshalb konzentrieren wir uns bei den numerischen Ergebnissen grundsätzlich auf das ursprüngliche Kontrollproblem ohne Regularisierung.

Bei der Auswertung und dem Vergleich der Wertfunktionen  $V^H(t, y)$  ist zu beachten, dass für die verschiedenen Informations-Regimes  $H$  der Zustandsprozess des Kontrollproblems unterschiedlich definiert ist. Während für  $H = F, R, D, C_n$  der Prozess  $Y$  lediglich aus dem Prozess der bedingten Erwartung  $M^H$  (unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\bar{P}$ ) besteht, werden für  $H = C_\lambda$  zusätzlich die Komponenten der bedingten Kovarianzmatrix  $Q^H$  (auf und unterhalb der Diagonale) mit in den Zustand aufgenommen.

Für den hier betrachteten Fall von  $d = 1$  Aktie ist dann der Zustand  $Y = (M^{C_\lambda}, Q^{C_\lambda})$  ein zweidimensionaler Prozess.

Für die Informations-Regimes mit  $Y = M^H$  ist  $V^H(t, y) = V^H(t, m)$  die Wertfunktion zur Zeit  $t$ , falls die bedingte Erwartung  $M_t^H$  den Wert  $m$  annimmt. Da die bedingte Varianz für diese Regimes deterministisch ist, ist  $Q_t^H$  für alle  $t \in [0, T]$  bereits bekannt und kann aus dem Anfangswert  $q_0$  und den Modellparametern bestimmt werden. Für das Informations-Regime  $H = C_\lambda$  ist die bedingte Varianz  $Q^{C_\lambda}$  dagegen ein stochastischer Prozess und  $V^{C_\lambda}(t, y) = V^{C_\lambda}(t, m, q)$  ist die Wertfunktion zur Zeit  $t$ , falls  $M_t^{C_\lambda} = m$  und  $Q_t^{C_\lambda} = q$  gilt.

Dies erschwert den Vergleich von  $V^{C_\lambda}$  mit den Wertfunktionen der anderen partiell informierten  $H$ -Investoren mit  $H = R, D, C_n$ , da deren deterministische Varianz  $Q_t^H$  im Allgemeinen nicht mit dem für  $V^{C_\lambda}$  vorgegebenen Wert  $q$  übereinstimmt. Um diese zu ermöglichen, definieren wir für  $H = R, C_n$  eine modifizierte Wertfunktionen wie folgt

$$\widehat{V}^H(t, m, q) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T b(s, Y_s^{t, m, q}) \right\} \right], \quad (8.2)$$

wobei  $Y_s^{t, m, q}$  den Zustandsprozess (d.h. die bedingte Erwartung  $M^H$ ) bezeichnet, welcher zur Zeit  $t$  mit den vorgegebenen Anfangswerten  $m$  und  $q$  startet. Die zugehörige optimale Entscheidungsregel bezeichnen wir mit  $\widehat{p}^H(t, m, q)$  und es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} V^H(t, m) &= \widehat{V}^H(t, m, Q_t^H), \\ p^H(t, m) &= \widehat{p}^H(t, m, Q_t^H). \end{aligned}$$

Für das Informations-Regime  $H = D$  ist die modifizierte Wertfunktion  $\widehat{V}(t, m, q)$  bereits in (7.38) eingeführt und somit stimmt für alle  $H = R, D, C_n$  der Wert von  $\widehat{V}^H(t, m, q)$  überein mit der Wertfunktion des ursprünglichen Kontrollproblems  $V_{T-t}^H(0, m)$  für den verkürzten Zeitraum  $T - t$  zur Zeit 0 und Anfangswerten  $m_0 = m$  und  $q_0 = q$ , d.h.

$$\widehat{V}^H(t, m, q) = V_{T-t}^H(0, m) = V_{T-t}^H(0, m; q).$$

Dies führt zu folgendem Verfahren.

**Berechnung von  $\widehat{V}^H(t, m, q)$  mit  $H = R, D$ :**

1. Wähle ein festes  $t \in [0, T]$ .
2. Bestimme  $Q_s^H$  auf dem Intervall  $[0, T - t]$  und wähle dabei als Anfangswert  $Q_0^H = q$ .
3. Mit Hilfe des letzten Schrittes bestimme auf dem Intervall  $[0, T - t]$  die Hilfsfunktionen  $A^H, B^H$  und  $C^H$  mit Endwerten  $A^H(T - t) = B^H(T - t) = C^H(T - t) = 0$ .
4. Bestimme mit Hilfe des letzten Schrittes die Wertfunktion zum festgesetzten Zeitpunkt  $t$  und zur festgesetzten Varianz  $q$  durch die den Ansatz

$$\widehat{V}^H(t, m, q) = \exp\{m' A^H(0)m + (B^H(0))' m + C^H(0)\}, \quad \forall m \in \mathcal{S}_M. \quad (8.3)$$

Abbildung 8.9 besteht aus vier Bildern, welche die Wertfunktionen und die optimale Entscheidungsregel der partiell informierten  $H$ -Investoren mit  $H = R, D, C_n$  und des voll informierten  $F$ -Investors zeigen. Da die bedingte Varianz  $Q_t^H$  deterministisch bzw. gleich Null für den  $F$ -Investor ist, ist sie nicht in den Zustandsprozess aufgenommen worden und das Bild zeigt daher die Wertfunktionen in der Form  $\widehat{V}(t, m, Q_t^H)$  und die optimalen Entscheidungsregeln  $\widehat{p}(t, m, Q_t^H)$ . Das obere Bild links zeigt die Wertfunktionen in Abhängigkeit der Zeit bei einem festgehaltenen Wert für die Drift  $m^* = 0.05$ . Dabei gilt, dass die Wertfunktion des  $F$ -Investors im Mittel größer ist als die des partiell informierten  $H$ -Investors. Die Wertfunktion des  $R$ -Investors, der seine Informationen während des Investitionszeitraum  $[0, T]$  nur aus dem Aktienkurs erhält und keine weiteren nützlichen Informationen aus Experten erhält, ist im Mittel kleiner als alle anderen Wertfunktionen. Denn analog zur Diskussion zur Wohlgestelltheit in Abschnitt 4.2 erhalten wir wegen  $\mathcal{F}_t^R \subseteq \mathcal{F}_t^H$  und wegen  $\mathcal{A}^R \subseteq \mathcal{A}^H$  für  $H = F, D, C_n, C_\lambda$

$$\begin{aligned} \frac{x^\theta}{\theta} V^R(t, y) &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}^R} \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \mid \mathcal{F}_t^R \right] = \sup_{\pi \in \mathcal{A}^R} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \mid \mathcal{F}_t^H \right] \mid \mathcal{F}_t^R \right] \\ &\leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \mid \mathcal{F}_t^H \right] \mid \mathcal{F}_t^R \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sup_{\pi \in \mathcal{A}^H} \mathbb{E} \left[ \mathcal{U}_\theta(X_T^\pi) \mid \mathcal{F}_t^H \right] \mid \mathcal{F}_t^R \right] \\ &= \frac{x^\theta}{\theta} \mathbb{E} \left[ V^H(t, Y_t^H) \mid \mathcal{F}_t^R \right]. \end{aligned}$$

Aus der oberen Ungleichung erhalten wir für  $H = F, D, C_n, C_\lambda$  folgende Abschätzungen

$$V^R(t, y) \leq \mathbb{E} \left[ V^H(t, Y_t^H) \mid \mathcal{F}_t^R \right], \quad \text{für } \theta \in (0, 1), \quad (8.4)$$

$$V^R(t, y) \geq \mathbb{E} \left[ V^H(t, Y_t^H) \mid \mathcal{F}_t^R \right], \quad \text{für } \theta \in (-\infty, 0). \quad (8.5)$$

Einen ähnlichen Vergleich für den  $F$ -Investor gegenüber dem partiell informierten  $H$ -Investoren mit  $H = R, D, C_n, C_\lambda$  können wir wie folgt darstellen

$$V^H(t, y) \leq \mathbb{E} \left[ V^F(t, \mu_t) \mid \mathcal{F}_t^H \right], \quad \text{für } \theta \in (0, 1), \quad (8.6)$$

$$V^H(t, y) \geq \mathbb{E} \left[ V^F(t, \mu_t) \mid \mathcal{F}_t^H \right], \quad \text{für } \theta \in (-\infty, 0). \quad (8.7)$$

Zwischen den beiden Wertfunktionen des  $F$ - und  $R$ -Investors liegen die Wertfunktionen des partiell informierten  $H$ -Investors mit  $H = D, C_n$ , der die Informationen aus dem Aktienkurs mit den Expertenmeinungen kombiniert. Diese Relation kann so interpretiert werden, dass die kombinierten Investoren  $D, C_n$  sowohl über die Informationen des  $R$ -Investors als auch über zusätzliche Informationen aus den Expertenmeinungen verfügen und zusätzliche Informationen aus den Experten erhalten, deren Wert nie negativ sein kann.

Darüberhinaus sind die Wertfunktionen in den Regimes  $H = F, R, D$  auf dem linken Bild stetige Funktionen in der Zeit, während diese beim Regime  $H = C_n$  auf Grund der Updates Sprünge zu den Informationszeitpunkten aufweist.

Das obere Bild rechts zeigt dieselben Wertfunktionen, jedoch in Abhängigkeit des Filters  $m$  zu einem festgehaltenen Zeitpunkt  $t = 0.15$ . Dabei ist zu erkennen, dass die Wertfunktionen symmetrisch bezüglich des Mean-Reversion-Niveaus  $\bar{\mu}$  des OUPs sind. Außerdem hat die Wertfunktion an dieser Stelle den kleinstmöglichen Wert. Sobald sich die Drift über oder unter den Mean-Level  $\bar{\mu}$  bewegt, hat der Investor mehr Möglichkeiten, Gewinne aus dem Kauf bzw. dem Verkauf der Aktie zu erzielen.

Parallel zu den oben erwähnten zwei Bildern kann man die zu den optimalen Handelsstrategien gehörenden Entscheidungsregeln untersuchen, welche in den unteren zwei Bildern zu sehen sind. Dabei wird die myopische Entscheidungsregel  $p^F(m) = \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} m$  gegenüber der des partiell  $H$ -Investors mit  $H = R, D, C_n$  gezeigt. Die optimale Entscheidungsregel  $p^H(t, m)$  des partiellen  $H$ -Investors setzt sich aus der myopischen Strategie und einem zusätzlichen Term zusammen, der als Korrekturterm angesehen werden kann, genauer gesagt gilt

$$p^H(t, m) = p^F(m) + \frac{1}{1-\theta} \Sigma_R^{-1} Q_t^H \frac{1}{V^H(t, m)} \frac{\partial}{\partial m} V^H(t, m).$$

Auf dem unteren Bild links werden die optimalen Entscheidungsregeln in Abhängigkeit der Zeit gezeichnet. Dabei schaut der  $F$ -Investor zum Zeitpunkt  $t$  auf den aktuellen Wert der Drift und wählt seine Strategie anhand dieses Wertes, künftige Änderungen der Drift werden also nicht ins Entscheidungskalkül einbezogen. Dagegen sieht man, dass sich die Strategie des  $H$ -Investors im Laufe der Zeit um den Korrekturterm ändert. Während der  $R$ -Investor am meisten in das Wertpapier investiert, verlaufen die optimalen Entscheidungsregeln des  $D$ - und  $C_n$ -Investoren zwischen der myopischen und der  $R$ -Entscheidungsregeln. Außerdem sieht man, dass die  $C_n$ -Strategie Sprünge zu den Informationszeitpunkten hat. Dabei korrigiert sich die Entscheidungsregel zu jedem Informationszeitpunkt in Richtung der myopischen Strategie.

Das letzte Bild rechts zeigt die Strategien in Abhängigkeit des Filters. Ist der Filter positiv, so muss der partiell informierte  $H$ -Investor mehr Wertpapiere kaufen als der  $F$ -Investor und im anderen Fall, wenn der Filter negativ ist, dann muss der partiell informierte  $H$ -Investor mehr Wertpapiere verkaufen als der  $F$ -Investor.

Entsprechende Ergebnisse wie in Abbildung 8.9 mit der Änderung des Parameters  $\theta$  von  $+0.3$  auf  $-0.3$  sind in Abbildung 8.10 zu sehen. Dass die Ordnung der Kurven umgekehrt ist, liegt daran, dass wir das ursprüngliche Optimierungsproblem in ein risikosensitives umwandelt und vom Anfangswert  $x$  bzw.  $\frac{x^\theta}{\theta}$  getrennt haben, sodass wir die Wertfunktion gemäß der Definition in (4.70) zeichnen. Eine Multiplikation mit dem negativen Wert  $\frac{x^\theta}{\theta}$  ergibt die umgekehrte Reihenfolge der jeweiligen Graphen.

Numerische Ergebnisse zum Vergleich der Wertfunktion  $\widehat{V}^{C_\lambda}(t, m, q) := V^{C_\lambda}(t, m, q)$  mit der gemittelten Wertfunktion des voll informierten Investors  $\overline{V}^F(t, m, q)$  und der Wertfunktion des partiell informierten Investors  $\widehat{V}^R(t, m, q)$  bzw.  $\widehat{V}^D(t, m, q)$  sind in Abbildung 8.11 zu sehen. Das obere Bild links zeigt die Wertfunktionen der Regimes  $F, R, D, C_\lambda$  in Abhängigkeit der Zeit und für denselben festgesetzten Wert des Filters wie in Abbildung 8.9, nämlich  $m^* = 0.05$ . Zusätzlich dazu werden die Kurven hier für einen festgesetzten Wert der Varianz  $q^* = 0.16 \approx \bar{q}_0$  gezeigt. Im Gegensatz zur Abbildung 8.9 bzw. zur Abbildung 8.10, wo die Wertfunktion zu den deterministischen Zeitpunkten auf Grund der Updates Sprünge aufweist, tritt dieser Effekt beim Informations-Regime  $H = C_\lambda$  nicht auf.

Das zweite Bild oben zeigt die Wertfunktionen in Abhängigkeit von  $m$  zum festgesetzten Zeitpunkt  $t = 0.15$  und zum festgesetzten Wert der Varianz  $q^* = 0.16$ . Diese sind symmetrisch um den Mean-Reversion-Level  $\bar{\mu}$ .

Parallel zu den oberen zwei Bildern kann man die unteren zwei Bilder betrachten, die die optimale Entscheidungsregel zeigen. Dabei wird die myopische Strategie gegenüber der Strategien des  $H$ -Investors mit  $H = R, D, C_\lambda$  für einen festgesetzten Wert der Varianz  $q^* = 0.16$  gezeigt. Während das Bild links die Strategie in Abhängigkeit der Zeit zeigt, zeigt das Bild rechts die Strategien in Abhängigkeit von  $m$ . Des Weiteren sind die Aussagen von Lemma 5.2.4 und 5.2.5 bzw. die formulierten Vermutungen in Bemerkung 7.3.5 deutlich zu erkennen, welche besagen, dass die Strategien der partiell informierten  $H$ -Investoren mit  $H = R, D, C_\lambda$  übereinstimmen, wenn zum gewählten Zeitpunkt  $M_t^H = m$  und  $Q_t^H = q$  sind.

Weitere numerische Ergebnisse sind in Abbildung 8.12. Der Unterschied zu Abbildung 8.11 ist die Änderung des Parameters  $\theta$  von  $+0.3$  auf  $-0.3$ , wobei hier Reihenfolge der Wertfunktionen umgekehrt ist.

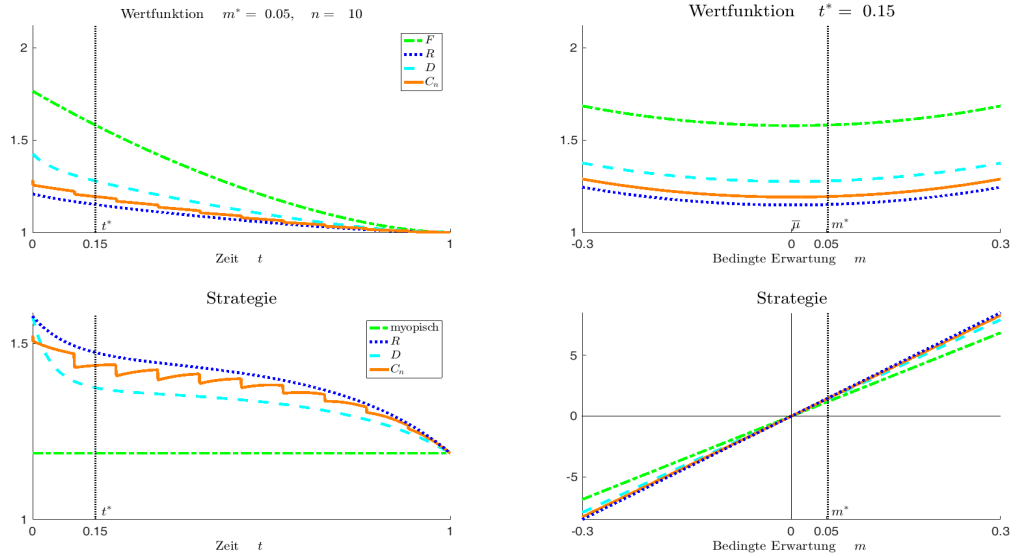


Abbildung 8.9: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für  $n = 10$  und  $\theta = +0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $V^F(t, m)$  und  $V^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $p^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, D, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

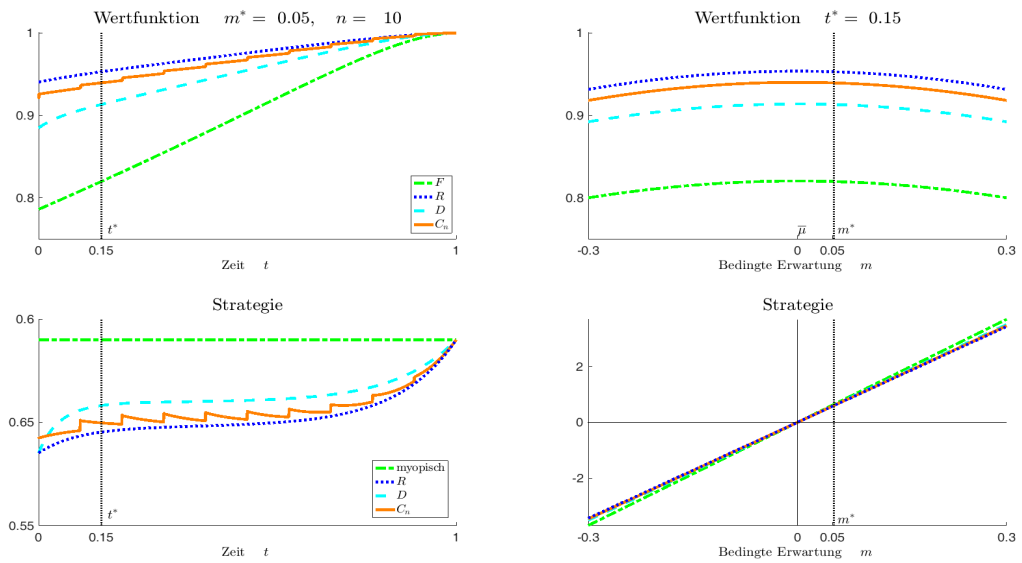


Abbildung 8.10: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für  $n = 10$  und  $\theta = -0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $V^F(t, m)$  und  $V^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $p^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, D, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

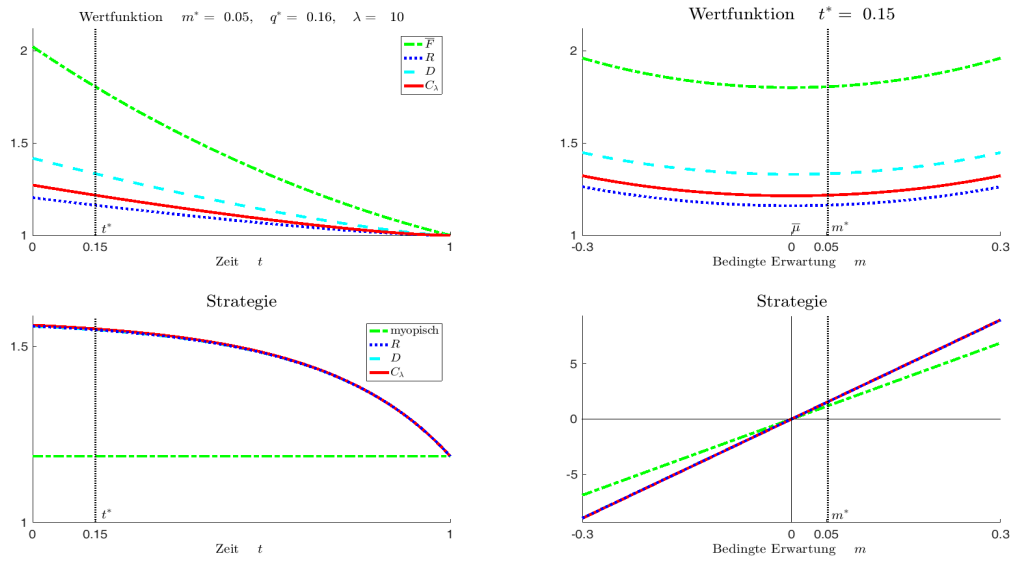


Abbildung 8.11: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für fixiertes  $q$ ,  $\lambda = 10$  und  $\theta = +0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, q)$  und  $\hat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, D, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

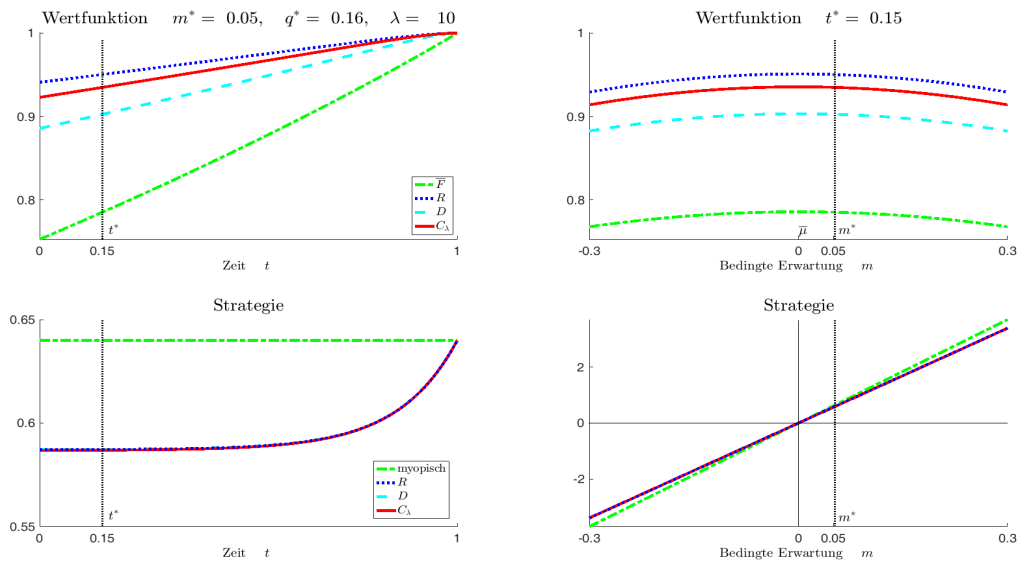


Abbildung 8.12: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für fixiertes  $q$ ,  $\lambda = 10$  und  $\theta = -0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, q)$  und  $\hat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, D, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

### Wertfunktion für hochfrequente Experten

In Abschnitt 3.3.1 haben wir uns mit der Frage beschäftigt, wie sich der Filter bei den Informations-Regimes  $H = C_n, C_\lambda$  verhält, wenn die Anzahl bzw. die Intensität der Expertenmeinungen wächst. Dort haben wir angenommen, dass bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Experten deren Ungenauigkeit ausgedrückt durch die Varianz  $\Gamma$  linear wächst, was dazu führt, dass der  $C_n$ - bzw. der  $C_\lambda$ -Filter gegen den  $D$ -Filter konvergiert. Numerische Ergebnisse zu den dort getroffenen Aussagen hinsichtlich dieser Untersuchung sind in Abbildung 8.5 und Abbildung 8.6 zu sehen. Zum anderen haben wir den Fall betrachtet, dass die Ungenauigkeit bzw. Varianz  $\Gamma$  unabhängig von der Anzahl bzw. Intensität der Experten ist und konstant bleibt. Unter dieser Annahme erhalten wir die Konvergenz des  $C_n$ - bzw. des  $C_\lambda$ -Filters gegen die Drift. Numerische Ergebnisse zu diesen theoretischen Aussagen sind in Abbildung 8.7 bzw. in Abbildung 8.8 zu sehen.

Die aus Grenzwertsätzen für die Filterprozesse resultierenden Approximationen für hochfrequente Experten führen nicht nur zu einfacher zu berechnenden Filterprozessen, sondern erlauben es auch effektiv zu bestimmende Näherungslösungen des Nutzenmaximierungsproblems zu finden. Das Nutzenmaximierungsproblem für den  $C_n$ -Investor wurde in Kapitel 6 durch Anwendung des Dynamic Programming Principle mit Hilfe einer Rückwärtsrekursion für die Wertfunktion gelöst. Da die Anzahl der Rekursionschritte gleich der Anzahl  $n$  von Expertenmeinungen ist, steigt der numerische Aufwand mit  $n$  und führt zu Problemen bei hochfrequenten Experten. Für diesen Fall liefern die asymptotischen Eigenschaften der Filterprozesse eine Möglichkeit der Näherungen von  $V^{C_n}$  durch  $V^D$  bzw.  $\bar{V}^F$ . Die so erhaltenen numerischen Experimente bestätigen die in Bemerkung 6.1.5 formulierten Vermutungen zur Konvergenz der Wertfunktion für  $n \rightarrow \infty$ .

Abbildung 8.13 zeigt die Wertfunktion  $V^{C_n}(t, m) = \hat{V}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  und die optimale Entscheidungsregel  $p^{C_n}(t, m) = \hat{p}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  für die unterschiedlichen Anzahlen der Expertenmeinungen  $n = 5, 10, 100$  und mit der Annahme, dass die Ungenauigkeit der Expertenmeinungen linear in deren Anzahl durch die Beziehung  $\Gamma = \frac{n}{T} \Sigma_\zeta$  gegeben ist. Dabei werden die Sprünge der Wertfunktion sowie der Entscheidungsregel für wachsendes Anzahl  $n$  immer kleiner und stimmen immer besser mit der Wertfunktion bzw. der Entscheidungsregel des Informations-Regimes  $H = D$  überein, in dem die Expertenmeinungen durch einen stetigen Expertenprozess modelliert werden. Weitere numerische Ergebnisse zu dieser Untersuchung sind in Abbildung 8.14 für einen negativen Parameter der Nutzenfunktion zu sehen.

In Abbildung 8.15 dagegen haben wir die Ungenauigkeit der Experten  $\Gamma = 1$  fest gesetzt und die Wertfunktion  $V^{C_n}(t, m) = \hat{V}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  sowie die Entscheidungsregel  $p^{C_n}(t, m) = \hat{p}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  für die Anzahl der Expertenmeinungen  $n = 5, 100, 1000$  berechnet und dargestellt. Hierbei vermuten wir, dass die Wertfunktion  $\hat{V}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  gegen die gemittelte Wertfunktion des voll informierten Investors  $\bar{V}^F(t, m, Q_t^{C_n})$  konvergiert. Außerdem kann man deutlich erkennen, dass die Konvergenz bei Abbildung 8.15 langsamer ist, als die in Abbildung 8.13. Dies könnte daran liegen, dass die Geschwindigkeit der Konvergenz des  $C_n$ -Filters gegen die Drift bei konstanter Ungenauigkeit der Experten langsamer ist als die Geschwindigkeit der Konvergenz des  $C_n$ -Filters gegen den  $D$ -Filter bei wachsender Ungenauigkeit der Experten. Weitere numerische Ergebnisse zur Bestätigung der Vermutung der Konvergenz  $\hat{V}^{C_n}(t, m, Q_t^{C_n})$  gegen



$\bar{V}^F(t, m, Q_t^{C_n})$  sind in Abbildung 8.16 für ein negatives  $\theta$  zu sehen.

In Kapitel 7 haben wir uns unter anderem mit der Lösung des Optimierungsproblems beim Informations-Regime  $H = C_\lambda$  befasst, bei dem Expertenmeinungen zu zufälligen Zeitpunkten eintreffen. Außerdem haben wir angenommen, dass die Ankunftszeitpunkte der Expertenmeinungen Sprünge eines homogenen Poisson-Prozesses sind. Diese Annahme ermöglicht es uns, die Update-Formeln für den  $C_\lambda$ -Filter in die Differentialgleichung des  $C_\lambda$ -Filters einzubetten. Diese Einbettung hat dazu geführt, dass der Zustandsprozess  $Y^{C_\lambda}$  ein Sprungdiffusionsprozess ist, dessen Sprünge durch einen markierten Poisson-Prozess modelliert werden. Zur Lösung des entstandenen Optimierungsproblems haben wir die Dynamic Programming Gleichung in Form einer partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE) erhalten. Da eine geschlossene Lösung dieser Gleichung nicht verfügbar und auch nicht zu erwarten ist, haben wir numerische Näherungslösungen mit Hilfe einer Differenzenverfahren konstruiert. Verlässliche Näherungen erfordern eine feine Diskretisierung der Zeit und der Bereiche für die beiden Zustandsvariablen  $m$  und  $q$  und führen zu erheblichen Rechenzeiten. Außerdem ist für verlässliche Ergebnisse eine feine Diskretisierung des Bereiches für das Integral nötig. Für hochfrequente Experten, d.h. für hohe Intensitäten  $\lambda$ , liefern die aus den Grenzwertsätzen für die Filterprozesse resultierenden Näherungen von  $\hat{V}^{C_\lambda}(t, m, q)$  durch  $\hat{V}^D(t, m, q)$  bzw.  $\bar{V}^F(t, m, q)$  alternative und deutlich effektivere zu berechnende Näherungen. Numerische Ergebnisse zu den theoretischen Aussagen in Bemerkung 7.3.4 für die Konvergenz der Wertfunktion  $\hat{V}^{C_\lambda}$  gegen  $\hat{V}^D$  für positives und negatives  $\theta$  sind in Abbildung 8.17 bzw. in Abbildung 8.18 zu sehen. Numerische Ergebnisse zur Konvergenz der Wertfunktion  $\hat{V}^{C_\lambda}$  gegen  $\bar{V}^F$  für positives und negatives  $\theta$  sind in Abbildung 8.19 bzw. in Abbildung 8.20 zu sehen. Hierbei weisen die Kurven für  $\lambda = 1000$  eine kleine Abweichung auf, welche auf den numerischen Fehler zurückzuführen ist.

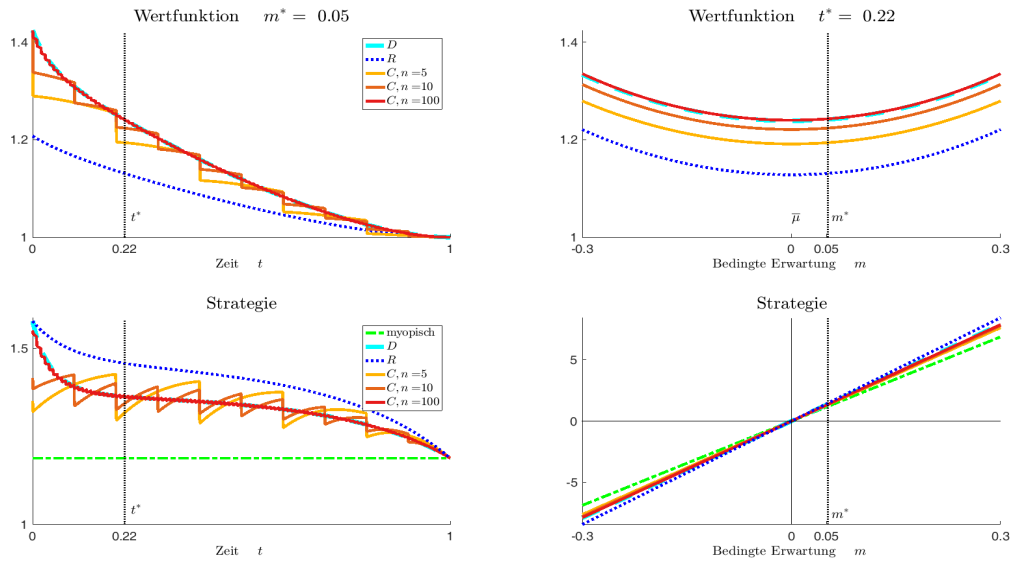


Abbildung 8.13: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für wachsendes  $n$  und  $\Gamma = \frac{n}{T}\sigma_\zeta^2$  und für  $\theta = +0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $V^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $p^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts). Dabei sind  $H = R, D, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

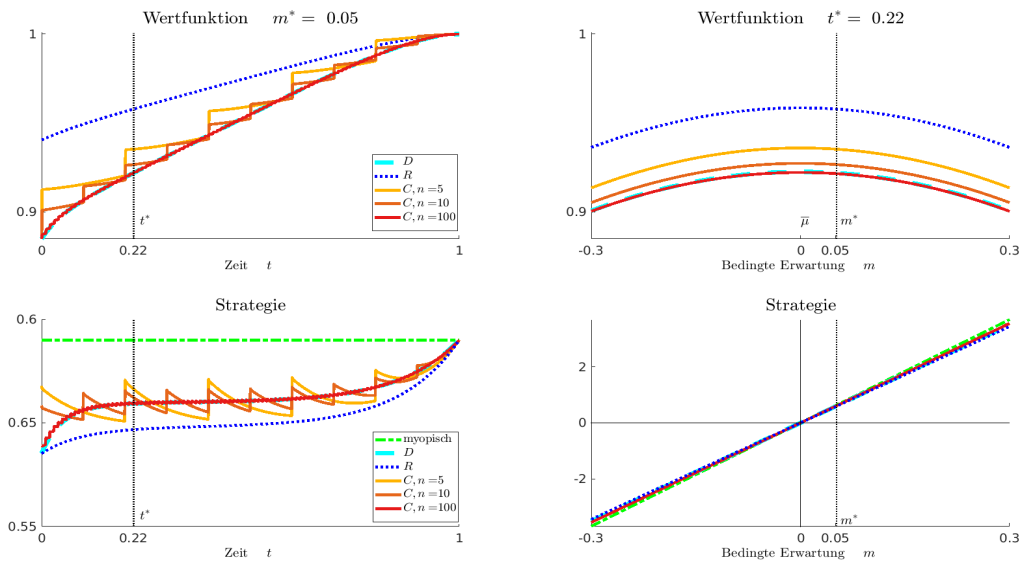


Abbildung 8.14: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für wachsendes  $n$  und  $\Gamma = \frac{n}{T}\sigma_\zeta^2$  und für  $\theta = -0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $V^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $p^H(t, m)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts). Dabei sind  $H = R, D, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

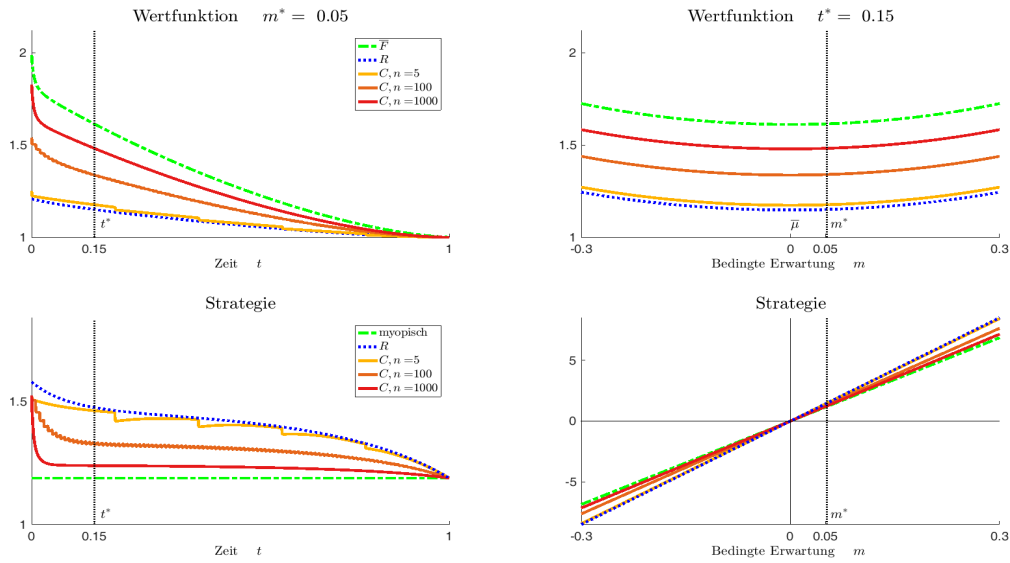


Abbildung 8.15: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für wachsendes  $n$ ,  $\Gamma = 1$  (fest) und für  $\theta = +0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, Q_t^{C_{1000}})$  und  $\hat{V}^H(t, m, Q_t^H)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, Q_t)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

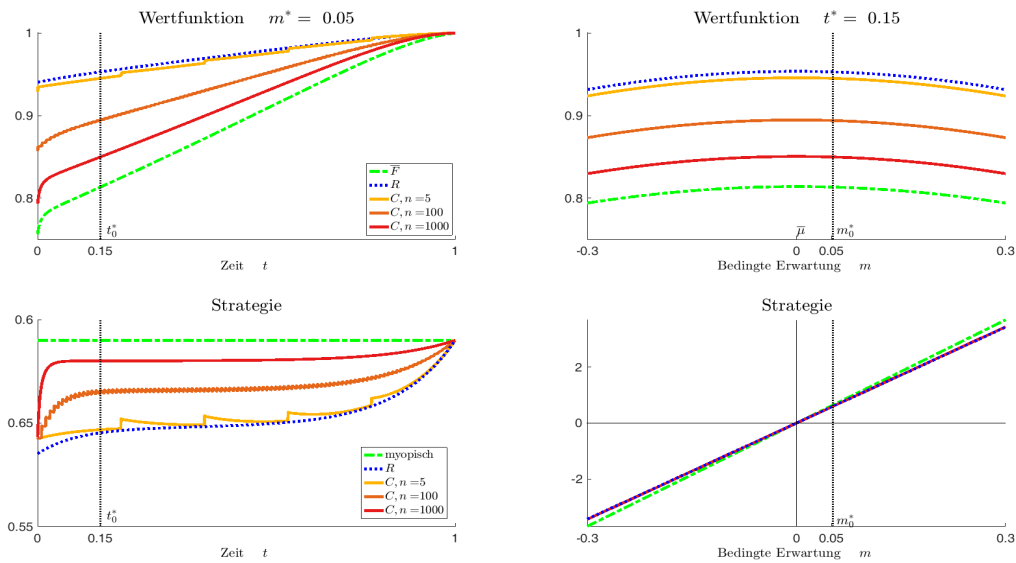


Abbildung 8.16: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für wachsendes  $n$ ,  $\Gamma = 1$  (fest) und für  $\theta = -0.3$ .  
 Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, Q_t^{C_{1000}})$  und  $\hat{V}^H(t, m, Q_t^H)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, Q_t)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).  
 Dabei sind  $H = R, C_n$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

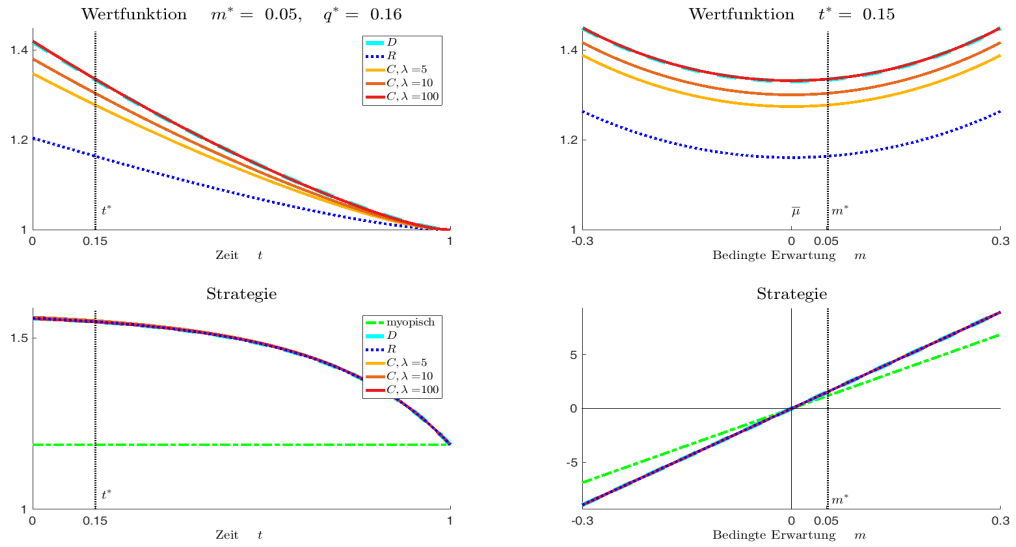


Abbildung 8.17: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für fixiertes  $q$ , wachsendes  $\lambda$  mit  $\Gamma = \lambda\sigma_\zeta^2$  und für  $\theta = +0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $\widehat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\widehat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Dabei sind  $H = R, D, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

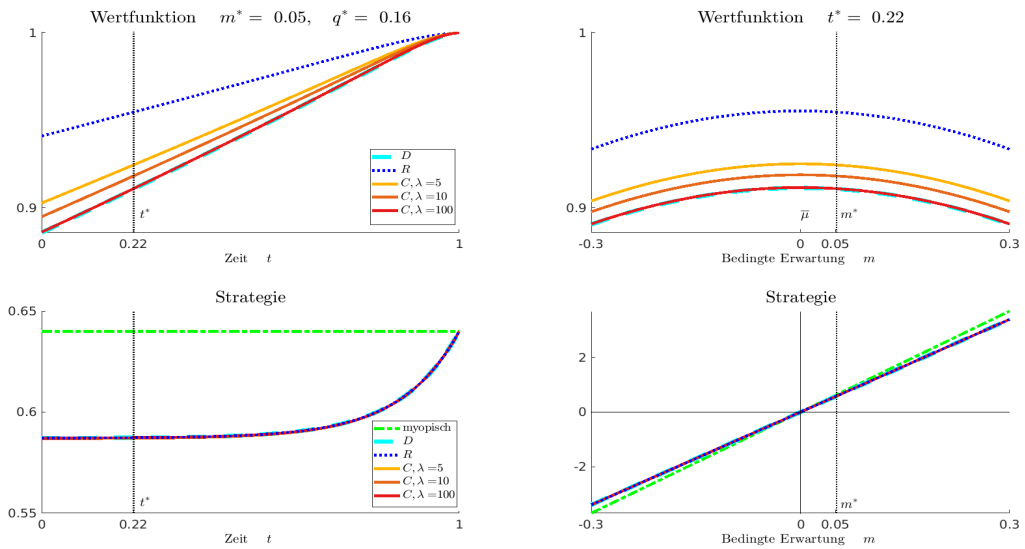


Abbildung 8.18: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für fixiertes  $q$ , wachsendes  $\lambda$  mit  $\Gamma = \lambda\sigma_\zeta^2$  und für  $\theta = -0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $\widehat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\widehat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Dabei sind  $H = R, D, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

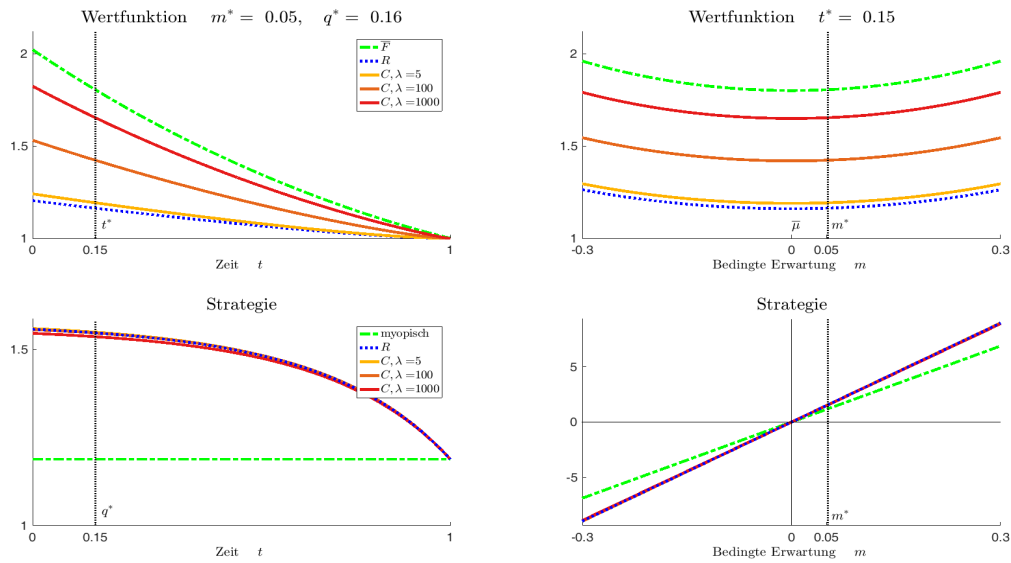


Abbildung 8.19: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für festes  $q$ , wachsendes  $\lambda$  mit  $\Gamma = 1$  (fest) und für  $\theta = +0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, q)$  und  $\hat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts). Dabei sind  $H = R, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

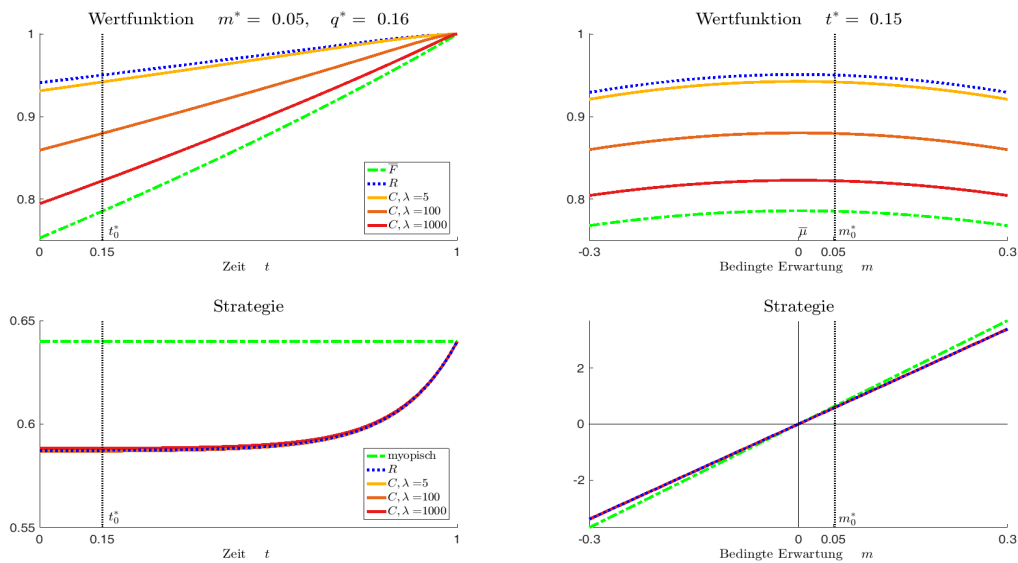


Abbildung 8.20: Wertfunktion und optimale Entscheidungsregel für festes  $q$ , wachsendes  $\lambda$  mit  $\Gamma = 1$  (fest) und für  $\theta = -0.3$ .

Oben: Wertfunktion  $\bar{V}^F(t, m, q)$  und  $\hat{V}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts).

Unten: Optimale Entscheidungsregel  $p^F(t, m)$  und  $\hat{p}^H(t, m, q)$  in Abhängigkeit von  $t/m$  (links/rechts). Dabei sind  $H = R, C_\lambda$  und die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

## 8.4 Monetärer Wert der Information

**Effektivität.** Wir blicken auf die Definition der Effektivität  $\mathcal{E}^H$  in (4.36) zurück

$$\mathcal{E}^H = \frac{x_0^{H/F}}{x_0^H} = \frac{x_0^{H/F}}{1} = x_0^{H/F}, \quad H = R, D_n, C_n, C_\lambda.$$

Dabei ist das Anfangskapital  $x_0^{H/F}$  in (4.35) als Lösung der Gleichung (4.35)

$$\mathcal{V}_0^H(1) = \mathbb{E} \left[ \mathcal{V}_0^F(x_0^{H/F}) | \mathcal{F}_0^H \right],$$

die als Antwort auf die Frage entstand, wie viel Anfangskapital  $x_0^{H/F}$  der  $F$ -Investor zum Zeitpunkt  $t = 0$  in die risikobehafteten Wertpapiere investieren muss, um den gleichen erwarteten Nutzen des Endvermögens zu erreichen wie der partiell informierte  $H$ -Investor, der mit einem Anfangskapital  $x_0^H = 1$  startet. Als Konsequenz dieser Logik können wir die Definition der Effektivität für den voll informierten Investor erweitern und erhalten

$$\mathcal{E}^F = x_0^{F/F} = 1.$$

Um den Wert der Zusatzinformationen aus den diskreten Experten für die  $C_n$ - und  $C_\lambda$ -Investoren grafisch zu veranschaulichen, betrachten wir bei einer fixierten Ungenauigkeit der Experten die Effektivität als eine Funktion der Anzahl  $n$  bzw. der Intensität  $\lambda$  der Expertenmeinungen.

Um den Wert der Zusatzinformationen aus dem stetigen Experten in derselben Grafik zu betrachten, definieren wir eine Folge von  $D$ -Investoren, welche zu gegebenen  $n = \lambda T$  die zugehörige  $C_n$ - bzw.  $C_\lambda$ -Investoren approximieren, indem in der SDE für den stetigen Expertenmeinungsprozess der Volatilitätsparameter gleich  $\sigma_\zeta^n := \sqrt{\frac{T}{n}}\Gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}\Gamma$  gesetzt wird. Dann ist

$$d\zeta_t^n = \mu_t dt + \sigma_\zeta^n dW_t^\zeta, \quad \zeta_0^n = 0. \quad (8.8)$$

Diese Informations-Regime wird nachfolgend mit  $H = D_n$  bezeichnet.

Das linke Bild in Abbildung 8.21 zeigt die Effektivität  $\mathcal{E}^H$  als eine Funktion der Anzahl  $n$  bzw. der Intensität  $\lambda$  der Expertenmeinungen, sowie als eine Funktion der Volatilität  $\sigma_\zeta^n$  des stetigen Experten. Dabei gilt für den "Grenzfall", dass der Investor volle Information über die Drift hat,  $\mathcal{E}^F = 1$ . Für den anderen "Grenzfall", dass der Investor seine Informationen über den ganzen Investitionszeitraum  $[0, T]$  nur aus der Beobachtung der Rendite bezieht und keine zusätzlichen Informationen aus Experten erhält, ist die Effektivität  $\mathcal{E}^R$  bezüglich  $n$  bzw.  $\lambda$  konstant. Zwischen den beiden Grenzfällen verlaufen die Effektivitäten  $\mathcal{E}^{C_n}$ ,  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  und  $\mathcal{E}^{D_n}$ . Diese sind wachsende Funktionen in der Anzahl  $n$  bzw. der Intensität  $\lambda$  und es gilt folgendes

$$\mathcal{E}^R \leq \min\{\mathcal{E}^{C_n}, \mathcal{E}^{C_\lambda}, \mathcal{E}^{D_n}\} \quad \text{und} \quad \max\{\mathcal{E}^{C_n}, \mathcal{E}^{C_\lambda}, \mathcal{E}^{D_n}\} \leq \mathcal{E}^F.$$

Für die Interpretation einer ausgewählten Anzahl von Expertenmeinungen nehmen wir an, dass für  $T = 1$  Jahr die Ankunftszeitpunkte jedes Jahr, jeden Monat, jede Woche, jeden Tag, jede Stunde bzw. jede Minute sind. Dies entspricht  $n = 1, 12, 52, 365, 8.760$ , bzw.  $525.600$ .

Im Unterschied zum linken Bild, in dem der Potenz-Parameter  $\theta = 0.3$  ist, zeigt das rechte Bild in Abbildung 8.21 die Effektivitäten für Investoren mit dem Potenz-Parameter  $\theta = -0.3$ , d.h. die Investoren auf dem rechten Bild sind risikoscheuer. Betrachtet man die Effektivität als Funktion des Parameters  $\theta$ , so stellt man fest, dass risikoscheue Investoren eine größere Effektivität aufweisen als risikofreudige Investoren.

Wie bereits in Abschnitt 8.3 erwähnt ist auf Grund der Updates zu den Informationszeitpunkten der Aufwand der Implementierung zur Berechnung der Wertfunktion  $V^{C_n}$  und damit die  $C_n$ -Effektivität größer als der Aufwand zur Implementierung  $V^R$  oder  $V^D$ . Nichtsdestotrotz hält sich dieser Aufwand unter Umständen in Grenzen. Erheblich wird er bei der Implementierung von  $V^{C_\lambda}$ , aus der wir die  $C_\lambda$ -Effektivität gerne mit der Effektivität der anderen Regimes vergleichen möchten. Auf Grund des hohen Aufwandes haben wir die  $C_\lambda$ -Effektivität nur für wenige ausgewählte Werte  $\lambda$  berechnet und in Abbildung 8.21 dargestellt.

Auf der anderen Seite können wir bei einer fixierten Anzahl bzw. Intensität der Expertenmeinungen die Effektivitäten  $\mathcal{E}^H$  als Funktion der Expertenvarianz  $\Gamma$  betrachten. Diese sind dann fallende Funktionen, wie in Abbildung 8.22 zu sehen ist. Auf Grund der hohen Rechenzeit wird die Effektivität  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  nicht gezeigt. Des Weiteren unterscheidet sich das linke vom rechten Bild durch den Parameter  $\theta$  der Nutzenfunktion  $\mathcal{U}_\theta$ .

Wie in Bemerkung 6.1.5 bzw. Bemerkung 7.3.4 erwähnt, gilt die Vermutung zur Konvergenz der Wertfunktionen des  $C_n$ - und  $C_\lambda$ -Investors gegen die Wertfunktion des  $D$ -Investors erst bei hinreichend großer Anzahl  $n$  bzw. Intensität  $\lambda$  der Experten. Bereits für kleine  $n$  bzw.  $\lambda \approx 50$  ergeben sich erstaunlich gute Approximation. Dies ist in Abbildung 8.23 zu erkennen, die die Effektivitäten als Funktion der Anzahl  $n$  bzw. der Intensität  $\lambda$  darstellt, jedoch im Gegensatz zu den vorherigen Abbildungen die Varianz der Experten nicht konstant sondern  $\Gamma = \frac{n}{T}\sigma_\zeta^2 = \lambda\sigma_\zeta^2$  setzt. Die in Abbildung 8.23 sichtbaren Abweichungen zwischen  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  und  $\mathcal{E}^{C_n}$  sind auf numerische Fehler bei der Berechnung von  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  und die in den hohen Rechenzeiten begründete Verwendung einer vergleichsweise geringen Zahl von Stützstellen für die Kurve für  $\mathcal{E}^{C_\lambda}$  zurückzuführen.

**Preis der Experten.** Neben den Grafiken für die Effektivität können wir den Preis der Experten  $P_{Exp}^H = 1 - x_0^{R/H}$  aus (4.37) grafisch veranschaulichen. Abbildung 8.24 zeigt den Preis der Experten  $P_{Exp}^H$  als Funktion der Anzahl bzw. Intensität Expertenmeinungen. Dabei ist zu erkennen, wie viel der  $R$ -Investor für die Bereitstellung der Expertenmeinungen zum Zeitpunkt  $t = 0$  zahlen kann, um mit dem verbleibenden Anfangskapital  $x_0^{R/H} = 1 - P_{Exp}^H$  den gleichen maximalen erwarteten Nutzen des Endvermögens zum Zeitpunkt  $T$  zu erzielen. Wegen der vermuteten Konvergenz der Wertfunktionen des Kontrollproblems  $C_n$  und  $C_\lambda$  in Bemerkung 6.1.5 bzw. 7.3.4 bei einer fixierten Expertenvarianz  $\Gamma$  gegen die Wertfunktion des Kontrollproblems  $H = F$  gilt  $x_0^{R/C_n} \rightarrow x_0^{R/F}$  bzw.  $x_0^{R/C_\lambda} \rightarrow x_0^{R/F}$ . Daraus folgt die Konvergenz  $P_{Exp}^{C_n} \rightarrow P_{Exp}^F$  und  $P_{Exp}^{C_\lambda} \rightarrow P_{Exp}^F$ , die in Abbildung 8.24 zu sehen ist. Des Weiteren zeigt diese Abbildung den Preis  $P_{Exp}^{D_n} = 1 - x_0^{R/D_n}$  des  $D_n$ -Experten, der wie in (8.8) definiert ist.

Für den Grenzfall  $n$  bzw.  $\lambda$  geht gegen  $\infty$ , ist der Preis der Experten gleich  $P_{Exp}^F$ . Letzterer ist immer kleiner als 1 und beschreibt den Betrag, den der  $R$ -Investor für die Bereitstellung der Expertenmeinungen bezahlt. Der Betrag  $1 - P_{Exp}^F = x_0^F$  beschreibt das Anfangskapital des  $F$ -Investor. Ferner zeigt Abbildung 8.25 den Preis  $P_{Exp}^H$  als Funktion der Expertenvarianz.

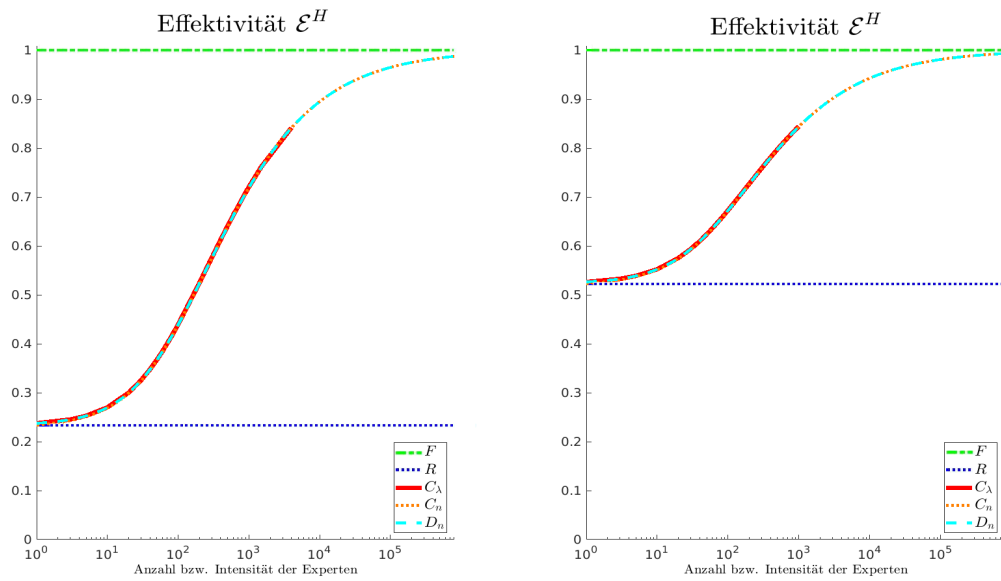


Abbildung 8.21: Effektivität partiell informierter Investoren mit  $\Gamma$  =fest und  $\sigma_\zeta^n = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \Gamma} = \sqrt{\frac{T}{n} \Gamma}$ .  
 Links: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = +0.3$ .  
 Rechts: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = -0.3$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

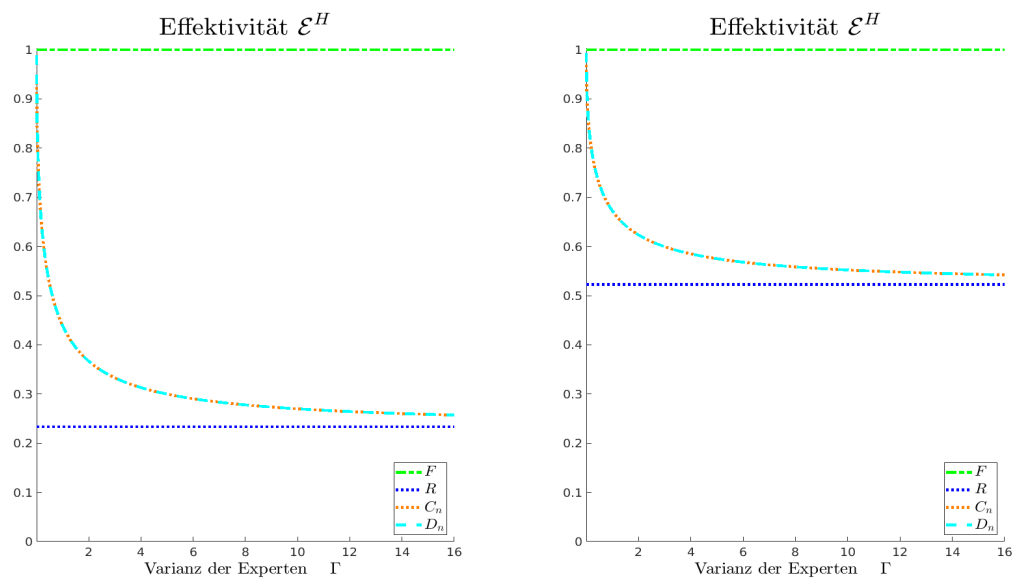


Abbildung 8.22: Effektivität partiell informierter Investoren mit  $n = 100$ ,  $\Gamma$  =fest und  $\sigma_\zeta^n = \sqrt{\frac{T}{n} \Gamma}$ .  
 Links: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = +0.3$ .  
 Rechts: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = -0.3$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.



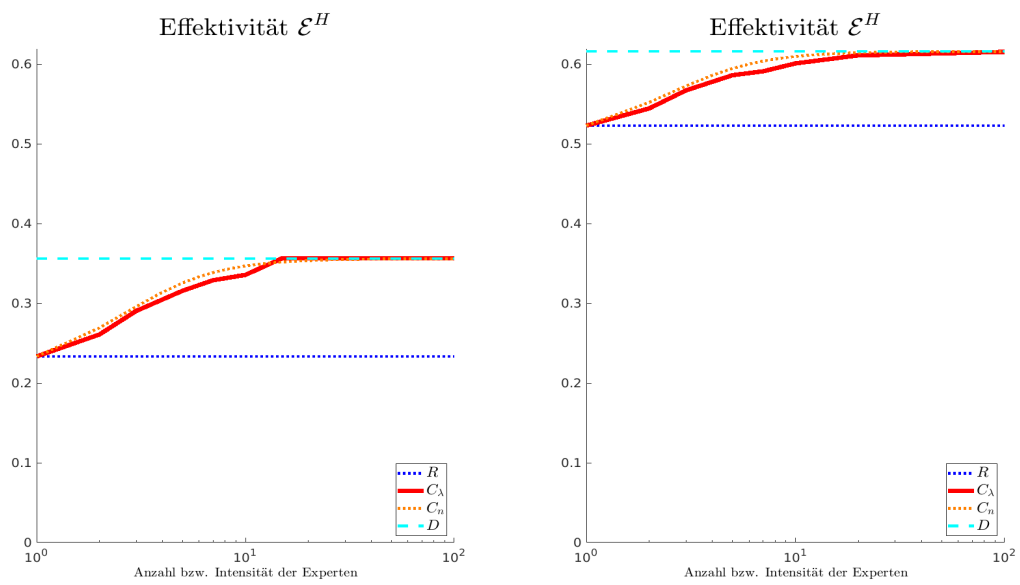


Abbildung 8.23: Effektivität partiell informierter Investoren mit  $\sigma_\zeta = 0.15$  und  $\Gamma = \frac{n}{T} \sigma_\zeta^2 = \lambda \sigma_\zeta^2$ .  
 Links: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = +0.3$ .  
 Rechts: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = -0.3$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

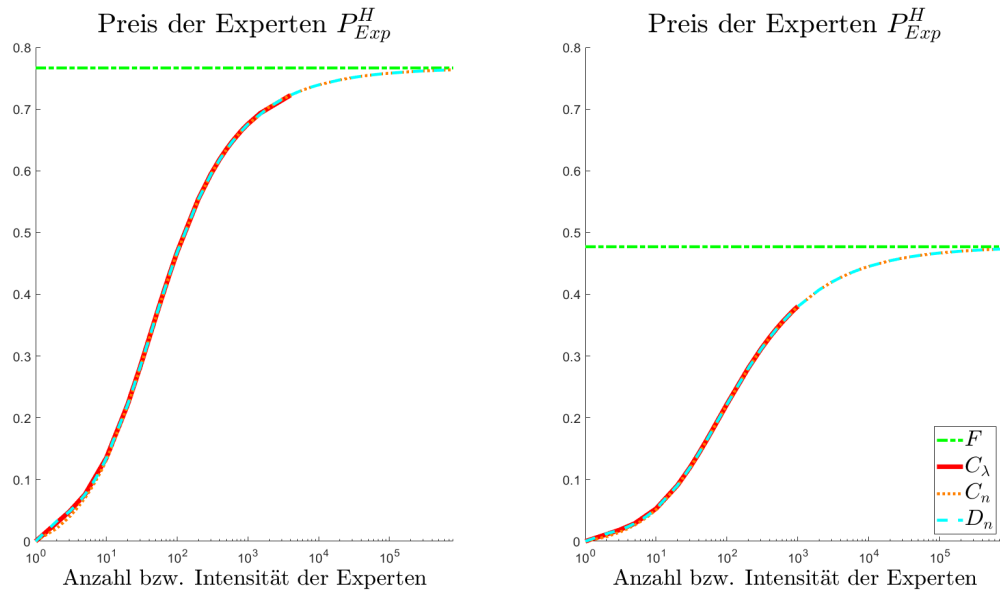


Abbildung 8.24: Wert der Expertenmeinungen mit  $\Gamma = \text{fest}$  und  $\sigma_\zeta^n = \sqrt{\frac{T}{n}} \Gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \Gamma$ .

Links: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = +0.3$ .  
 Rechts: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = -0.3$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

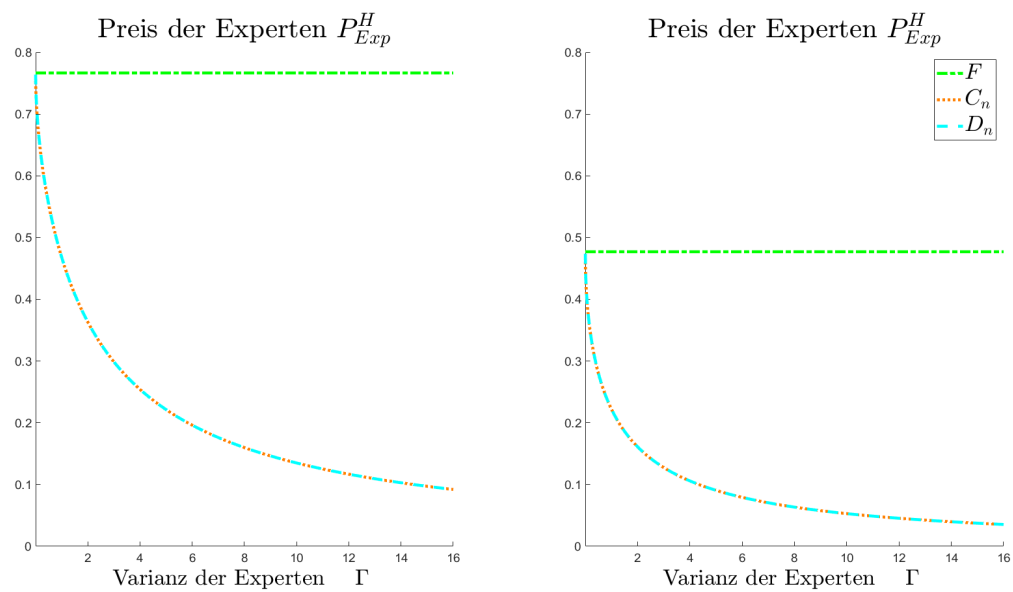


Abbildung 8.25: Wert der Expertenmeinungen mit  $n = 100$  und  $\sigma_\zeta^n = \sqrt{\frac{T}{n}} \Gamma$ .

Links: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = +0.3$ .  
 Rechts: Parameter der Potenz-Nutzenfunktion  $\theta = -0.3$ .  
 Die übrigen Parameter sind in Tabelle 8.1 gegeben.

---

### Zusammenfassung und Ausblick

---

Der Grundgedanke dieser Arbeit ist es, den erwarteten Nutzen des Endvermögens eines Investors zu maximieren, welcher am Finanzmarkt mit einem gewissen Anfangskapital startet und sein Vermögen laufend zwischen einer risikolosen Anlage und mehreren Wertpapieren umschichten kann. Die Parameter der die Preise beschreibenden stochastischen Prozesse sind im Unterschied zum klassischen Black-Scholes-Modell keine Konstanten, sondern selbst wieder stochastische Prozesse, die von sogenannten Faktorprozessen abhängen, welche nicht beobachtet werden können und von der Zeit und dem Zustand der Ökonomie abhängen.

Für den Investor ist jegliche Information über die ihm unbekannt Drift äußerst wichtig, um daraus möglichst genaue Driftschätzung zu erzielen. Die möglichst gute Schätzung braucht er für die Aufstellung seines Portfolios, denn optimale Strategien reagieren sehr sensitiv auf die Driftparameter bzw. deren Schätzung. Aus diesem Grund lässt die vorliegende Arbeit die Möglichkeit zu, dass der Investor zu weiteren Informationsquellen greift als die frei zugänglichen Kursdaten. Diese zusätzliche Information(-quellen) über die dem Investor unbekannt Drift werden als Expertenmeinungen modelliert, welche in drei Kategorien klassifiziert werden. Zum einen betrachten wir Experten, die sich zu diskreten Zeitpunkten äußern, wie z.B. amtliche Statistiken, regelmäßige Zeitschriften, Nachrichtenanalysen oder gar Selbstschätzungen. Dabei unterscheiden wir, ob die Ankunftszeitpunkte deterministisch und schon zu Investitionsbeginn festgelegt sind oder zufällig. Zum anderen betrachten wir einen Experten, der sich in stetiger Zeit über die unbekannt Drift äußert. Je nachdem über welche Informationen der Investor verfügt, gestaltet sich sein (End-)Vermögen, dessen erwarteten Nutzen wir mittels der Dynamic Programming Methode maximieren wollen. Da die Drift in dieser Arbeit ein Gaußscher Prozess ist, findet man in der Literatur eine geschlossene Lösung für die resultierende Dynamic Programming Gleichung im klassischen Fall, wenn der Investor seine Informationen allein aus den Kursdaten und gar keine Expertenmeinungen bezieht. Diesen Ansatz erweitern wir für den Investor, der neben den Informationen aus den Kursdaten zusätzliche Expertenmeinungen in stetiger Zeit erhält.

Für Investoren, die den Kurs beobachten und Expertenmeinungen zu diskreten Zeitpunk-

ten beziehen, findet man in der Literatur keine geschlossenen Formeln. Im Fall deterministischer Zeitpunkte entwickeln wir einen Algorithmus, welcher zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Expertenmeinungen den gleichen Ansatz liefert, wie der Investor ohne Experten. Die Idee hier besteht darin, dass zwischen den Ankunftszeitpunkten beider Expertenmeinungen keine zusätzlichen Informationen zu den Kursdaten kommen. Zu jedem Ankunftszeitpunkt einer Expertenmeinung erfolgt ein Update, aus dem sich die Endbedingung auf dem nächsten Teilintervall ergibt. Im Fall zufälliger Zeitpunkte, welche in dieser Arbeit als Sprungzeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses angenommen wurden, erhalten wir eine partielle Integro-Differentialgleichung, für die wir ein explizit-implizites Differenzschema entwickeln. Um verlässliche Ergebnisse zu erhalten, muss eine feine Diskretisierung der Zeit und des Zustandsraumes gesichert werden, wobei im eindimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d = 1$ ) der Zustandsprozess die Dimension 2 hat. Allein eine feine Diskretisierung der zeitlichen und der örtlichen Variablen reicht jedoch für verlässliche Ergebnisse nicht, denn aus dem Integral-Term müssen mögliche Fehler ausgeschlossen werden. Die Berechnung des Integrales zu jedem Gitterpunkt erfolgt durch Interpolation der resultierenden Werte des letzten zeitlichen Schritts, was zu erheblichen Aufwand führt. Im mehrdimensionalen Fall (Anzahl der Aktien  $d > 1$ ) hat der Zustandsprozess die Dimension  $d + \frac{d(d+1)}{2}$  und der Integrand nimmt Werte aus  $\mathbb{R}^d$  und damit scheitern die numerischen Verfahren am „Fluch der Dimension“. Daher haben wir uns mit der Frage auseinandergesetzt, wie sich die Wertfunktion für den Investor mit Expertenmeinungen zu diskreten Zeitpunkten verhält, wenn die Intensität der Experten immer größer wird. Diese Untersuchung haben wir für den Investor mit Expertenmeinungen sowohl zu deterministischen als auch zu zufälligen Zeitpunkten unter zwei wesentlichen Annahmen durchgeführt und sind zum Ergebnis gekommen, dass die Wertfunktion bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Experten gegen die Wertfunktion für den stetigen Investor konvergiert, wenn die Ungenauigkeit der Experten linear in deren Anzahl bzw. Intensität wächst. Auf der anderen Seite konvergieren die Wertfunktionen der Investoren mit Expertenmeinungen zu diskreten Zeitpunkten gegen die Wertfunktion des Kontrollproblems unter voller Information, wenn bei wachsender Anzahl bzw. Intensität der Experten deren Ungenauigkeit konstant bleibt. Der mathematische Beweis dieser Aussagen bleibt in dieser Arbeit aus und soll in einer künftigen Arbeit erscheinen.

Über die erhebliche Rechenzeit einer numerischen Lösung hinaus besteht der Grundgedanke solcher Untersuchungen in der Tatsache, dass zum einen optimale Kontrollprobleme der Portfoliooptimierung in zeitkontinuierlichen Finanzmarktmodellen sehr beliebt und zum anderen Diffusionsapproximationen in der Versicherungsmathematik und der Risikotheorie bekannt sind. Mit Hinblick auf das Resultat aus der schwachen Konvergenz der zusammengesetzten Poisson-Prozesse zu einer Brownschen Bewegung, wenn die Intensität gegen unendlich geht (siehe Section 1.2 in Grandell [29]), können bei einer hohen Intensität und kleinen Sprunghöhen die Schäden durch eine Brownsche Bewegung mit Drift approximiert werden. Dabei beziehen wir uns auf das klassischen Cramer-Lundberg-Modell, bei dem die kumulierten Schadengrößen und schließlich der Überschuss einer Versicherungsgesellschaft durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess modelliert werden.

Mit diesen Ergebnissen zur Konvergenz der Wertfunktionen kann man auf die aufwändigen numerischen Näherungslösungen verzichten und eine einfache Formel zur Berechnung der Wertfunktionen benutzen, die auch im mehrdimensionalen Fall gilt. Doch bleibt die Frage unbeant-

---

wortet, ob es realistisch ist, unendlich viele Expertenmeinungen zu beziehen, zumal die Experten nicht umsonst ihre Beratung bzw. Informationen anbieten. Anders gefragt, welcher Investor ist bereit, unendlich viele Expertenmeinungen zu kaufen? Damit bietet diese Betrachtung für Investoren mit wenigen Expertenmeinungen keine Hilfe, weshalb wir in einer künftigen Arbeit nach einem anderen Ansatz zur Lösung der partiellen Integro-Differentialgleichung suchen werden. Hier bieten sich Methoden zur Lösung von Vorwärts-Rückwärts-Stochastischen-Differentialgleichungen, deren Implementierung bzw. Ausführung im mehrdimensionalen Fall nicht viel Zeit in Anspruch nimmt und z.B. in Kebiri, Neureither und Hartmann [34, 35] behandelt werden.

Eine weitere offene Frage dieser Arbeit besteht darin, ob die Kandidaten für die optimalen Strategien wirklich die optimalen Strategien sind. Denn die klassischen Resultate in der Literatur fordern eine kompakte Menge, was im Fall eines Hidden-Markov-Modells gesichert ist und im Fall eines Gaußschen Prozesses und damit dieser Arbeit nicht vorhanden ist. Zu dieser Untersuchung können die Ideen der Arbeit Zariphopoulou [82] sowie der Arbeit Benth und Karlsen [6] nützlich sein. Letztere gehen vom Schwartz-Modell (siehe auch Schwartz [72]) aus, das den Preisprozess als exponential Ornstein-Uhlenbeck Prozess annimmt und die Drift zwar einen arithmetischen Ornstein-Uhlenbeck Prozess, jedoch kein Faktorprozess (siehe auch Mejia Vega [52]). Des Weiteren kann man die Zulässigkeit der optimalen Strategien testen, ob sie der Novikov-Bedingung erfüllen. Über die Überprüfung der Zulässigkeit der Strategien hinaus, kann man untersuchen, unter welchen Bedingungen die Annahmen 7.2.1 und 7.2.2 erhalten bleiben.

Manche Wertpapiere reagieren sehr sensibel auf Unruhen oder politische Ereignisse wie etwa auf die Preisentwicklung des Erdöls oder auf Naturkatastrophen. Realistischer wird das Modell, wenn man in den Preisprozessen einen zusammengesetzten Poisson-Prozesses hinzufügt, welcher Crashes am Finanzmarkt modellieren kann. Diese Erweiterung führt zu einer partiellen Integro-Differentialgleichung für alle betrachteten Investoren.



---

Lösung ausgewählter Differentialgleichungen

---

### A.1 Lösung der Riccati-Gleichung

Sei  $y : [\underline{t}, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \underline{t} < \bar{t} < \infty$  eine stetig differenzierbare Funktion, welche der folgenden Riccati-Gleichung genügt

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y, \quad \text{mit der Endbedingung} \quad y(\bar{t}) = \bar{y}; \quad \bar{y} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

und konstanten Koeffizienten  $a_y, b_y, c_y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Die Größe  $\Delta_y := b_y^2 - 4a_y c_y \in \mathbb{R}$  heißt die Diskriminante für dieses Problem und wir setzen  $\delta_y := \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_y|}$ .

**Lemma A.1.1.** (Normale Lösung der Riccati-Gleichung)

Das Endwertproblem für die Riccati-Gleichung (A.1) hat für  $\Delta_y > 0$  folgende Lösung

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} + \frac{\delta_y}{a_y} \cdot \frac{\sinh(\delta_y(\bar{t} - t)) + e_y \cosh(\delta_y(\bar{t} - t))}{\cosh(\delta_y(\bar{t} - t)) + e_y \sinh(\delta_y(\bar{t} - t))}, \quad \forall t \in [\underline{t}, \bar{t}], \quad (\text{A.2})$$

wobei  $e_y := \frac{b_y}{2\delta_y} + \frac{a_y \bar{y}}{\delta_y}$  ist.

*Beweis.* Die Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dy(t)}{a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y} = dt, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Da die Diskriminante positiv vorausgesetzt ist, erhalten wir die folgende Partialbruchzerlegung

$$\left( \frac{\frac{1}{2\delta_y}}{y(t) - \left(\frac{-b_y}{2a_y} + \frac{\delta_y}{a_y}\right)} - \frac{\frac{1}{2\delta_y}}{y(t) - \left(\frac{-b_y}{2a_y} - \frac{\delta_y}{a_y}\right)} \right) dy = dt, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Das Integrieren über  $[\bar{y}, y(t)]$  auf der linken bzw. über  $[\bar{t}, t]$  auf der rechten Seite liefert

$$\ln \left( \frac{1 + \frac{2\delta_y}{a} \cdot \frac{1}{\bar{y} - d_y}}{1 + \frac{2\delta_y}{a} \cdot \frac{1}{y(t) - d_y}} \right) = -2\delta_y(\bar{t} - t)$$

mit  $d_y := \frac{-b_y}{2a_y} + \frac{\delta_y}{a_y}$ . Wir stellen die linke Seite nach  $y$  um und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= d_y - \frac{2\delta_y}{a_y} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\delta_y}{a_y} \frac{1}{\bar{y} - d_y} \right) \exp\{2\delta_y(\bar{t} - t)\} \right]^{-1} \\ &= -\frac{b_y}{2a_y} + \frac{\delta_y}{a_y} \cdot \frac{(e_y - 1) + (e_y + 1) \exp\{2\delta_y(\bar{t} - t)\}}{-(e_y - 1) + (e_y + 1) \exp\{2\delta_y(\bar{t} - t)\}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Darstellung

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} + \frac{\delta_y}{a_y} \cdot \frac{\sinh(\delta_y(\bar{t} - t)) + e_y \cosh(\delta_y(\bar{t} - t))}{\cosh(\delta_y(\bar{t} - t)) + e_y \sinh(\delta_y(\bar{t} - t))}.$$

□

**Lemma A.1.2.** (Hyperbolische Lösung der Riccati-Gleichung)

Das Endwertproblem für die Riccati-Gleichung (A.1) hat für  $\Delta_y = 0$  folgende Lösung

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} + \frac{\frac{b_y}{2a_y} + \bar{y}}{1 + a_y(\frac{b_y}{2a_y} + \bar{y})(\bar{t} - t)}, \quad \forall t \in [\bar{t}; \bar{t}]. \quad (\text{A.3})$$

*Beweis.* Die Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dy(t)}{a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y} = dt, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erhalten wir

$$\frac{1}{a_y \left( y(t) + \frac{b_y}{2a_y} \right)^2} dy(t) = dt, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Das Integrieren über  $[\bar{y}, y(t)]$  auf der linken bzw. über  $[\bar{t}, t]$  auf der rechten Seite liefert

$$\frac{-1}{a_y \left( \bar{y} + \frac{b_y}{2a_y} \right)} - \frac{-1}{a_y \left( y(t) + \frac{b_y}{2a_y} \right)} = (\bar{t} - t).$$

Die Umstellung nach  $y(t)$  ergibt

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} + \frac{\frac{b_y}{2a_y} + \bar{y}}{1 + a_y(\frac{b_y}{2a_y} + \bar{y})(\bar{t} - t)}.$$

□



**Lemma A.1.3.** (Tangens-Lösung der Riccati-Gleichung)

Das Endwertproblem für die Riccati-Gleichung (A.1) hat für  $\Delta_y < 0$  folgende Lösung

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} - \frac{\delta_y}{a_y} \tan \left( \delta_y(\bar{t} - t) - \arctan \left( \frac{b_y + 2a_y\bar{y}}{2\delta_y} \right) \right), \quad \forall t \in [\max\{t, t^E\}, \bar{t}], \quad (\text{A.4})$$

wobei  $t^E < \bar{t}$  die Explosionszeit bezeichnet und ist gegeben durch

$$t^E = \bar{t} - \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{b_y + 2a_y\bar{y}}{2\delta_y} \right)}{\delta_y} \quad (\text{A.5})$$

*Beweis.* Die Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dy(t)}{a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y} = dt, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}. \quad (\text{A.6})$$

Wir führen die Substitution  $z(t) := \frac{2a_y y(t) + b_y}{2\delta_y}$  ein. Diese Substitution liefert

$$\frac{1}{a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y} = \frac{a_y}{\delta_y^2} \frac{1}{1 + z^2(t)},$$

deren Stammfunktion ist

$$\int \frac{1}{a_y y^2(t) + b_y y(t) + c_y} dy(t) = \frac{1}{\delta_y} \arctan \frac{2a_y y(t) + b_y}{2\delta_y} + c_0; \quad c_0 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

Mit Hilfe von (A.7) erhält man für (A.6)

$$\frac{1}{\delta_y} \arctan \frac{2a_y\bar{y} + b_y}{2\delta_y} - \frac{1}{\delta_y} \arctan \frac{2a_y y(t) + b_y}{2\delta_y} = (\bar{t} - t).$$

Unter der Annahme

$$g(t, \delta_y) := \delta_y(\bar{t} - t) - \arctan \left( \frac{b_y + 2a_y\bar{y}}{2\delta_y} \right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

erhalten wir die folgende Umstellung nach  $y(t)$

$$y(t) = -\frac{b_y}{2a_y} - \frac{\delta_y}{a_y} \tan \left( \delta_y(\bar{t} - t) - \arctan \left( \frac{b_y + 2a_y\bar{y}}{2\delta_y} \right) \right).$$

Nun wollen wir wissen, wann die Tangens-Funktion definiert ist, dafür schauen wir uns deren Argument bzw. die Größe  $g(t, \delta_y)$  an. Es gilt für jedes festes  $t$

- (a)  $g(t, 0) = -\frac{\pi}{2}$
- (b)  $g(t, \infty) = \infty$

(c)  $\frac{\partial}{\partial \delta_y} g(t, \delta_y) > 0$ , falls folgendes gilt:

$$(\bar{t} - t) + \frac{\left(\frac{b_y}{2} + a_y \bar{y}\right)}{\delta_y^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\frac{b_y}{2} + a_y \bar{y}}{\delta_y}\right)^2} > 0.$$

Aus (a), (b) und (c) folgt, dass die Funktion  $g$  von unten immer beschränkt  $g(t, \delta_y) > \frac{-\pi}{2}$ , von oben jedoch nicht. Sei  $\delta_y := \delta_y^E$  die Stelle, wo gilt  $g(t, \delta_y^E) = \frac{\pi}{2}$ . Dann gilt

$$g(t, \delta_y) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{für alle } \delta_y \in (0, \delta_y^E).$$

Somit existiert die Lösung (A.4) nur für Werte  $\delta_y \in (0, \delta_y^E)$ .

Andererseits fixieren wir  $\delta_y$  und definieren  $t := t^E$  die Stelle, wo gilt  $g(t^E, \delta_y) = \frac{\pi}{2}$ . Dann gilt

$$g(t, \delta_y) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{für alle } t \in (t^E, \bar{t}].$$

Somit existiert die Lösung (A.4) nur für Werte  $t \in (\max\{\underline{t}, t^E\}, \bar{t}]$ . Darüber hinaus können wir aus der Gleichung  $g(t^E, \delta_y) = \frac{\pi}{2}$  den Explosionszeitpunkt  $t^E$  bestimmen und erhalten dafür

$$t^E = \bar{t} - \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{b_y + 2a_y \bar{y}}{2\delta_y}\right)}{\delta_y}.$$

□

**Bemerkung A.1.4.** Für Optimierungsprobleme in dieser Arbeit war  $\underline{t} = 0$ . Setzt man dies im letzten Lemma, so kann man aus der Ungleichung  $t^E < \underline{t}$  feststellen, dass die entstehende Riccati-Gleichung und damit die Wertfunktion im Fall der Tangens-Lösung nur für Werte  $T$  des Investitionshorizonts  $T < T^E$  mit

$$T^E := \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{b_y + 2a_y \bar{y}}{2\delta_y}\right)}{\delta_y} \tag{A.8}$$

gelöst werden kann.

**Lemma A.1.5.** Die Stammfunktionen der Lösungen der Riccati-Gleichung (A.1) sind wie folgt zu erhalten:

1. Hat die Riccati-Gleichung die normale Lösung wie in Lemma (A.2), dann ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \int y(t) dt \\ &= -\frac{b_y}{2a_y} t - \frac{1}{a_y} \ln \left| \cosh\left(\delta_y(\bar{t} - t)\right) + e_y \sinh\left(\delta_y(\bar{t} - t)\right) \right| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

2. Hat die Riccati-Gleichung die hyperbolische Lösung wie in Lemma (A.3), dann ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \int y(t) dt \\ &= -\frac{b_y}{2a_y}t - \frac{1}{a_y} \ln \left| 1 + a_y \left( \frac{b_y}{2a_y} + \bar{y} \right) (\bar{t} - t) \right| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

3. Hat die Riccati-Gleichung die Tangens-Lösung wie in Lemma (A.4), dann ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \int y(t) dt \\ &= -\frac{b_y}{2a_y}t + \frac{1}{a_y} \ln \left| \cos \left( \delta_y (\bar{t} - t) - \arctan \left( \frac{b_y + 2a_y \bar{y}}{2\delta_y} \right) \right) \right| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Integration der jeweiligen Lösungsfunktion.  $\square$

## A.2 Lösung der Differentialgleichungen (5.6) und (5.7)

Seien  $y, z : [\underline{t}, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \underline{t} < \bar{t} < \infty$  stetig differenzierbare Funktionen, welche der folgenden Differentialgleichung genügen

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2\Sigma_\mu y^2(t) + 2\kappa y(t) - \frac{1}{2} \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}, \quad \text{mit der Endbedingung} \quad y(\bar{t}) = \bar{y}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -2\kappa \bar{\mu} y(t) - \left[ 2\Sigma_\mu y(t) - \kappa \right] z(t), \quad \text{mit der Endbedingung} \quad z(\bar{t}) = \bar{z} \quad (\text{A.13})$$

und konstanten Koeffizienten  $\Sigma_\mu, \Sigma_R, \kappa \in \mathbb{R}_+, \theta \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ . Die Größe  $\Delta_y := 4\kappa^2 \left[ 1 - \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\Sigma_\mu}{\kappa^2 \Sigma_R} \right]$  heißt die Diskriminante des Problems und wir setzen  $\delta_y := \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_y|}$ .

**Lemma A.2.1.** Die Endwertprobleme (A.12) und (A.13) haben für  $\Delta_y > 0$  folgende Lösungen

$$y(t) = \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} - \frac{\delta_y}{2\Sigma_\mu} \cdot \frac{\alpha(\bar{t}, t)}{\beta(\bar{t}, t)}, \quad (\text{A.14})$$

$$z(t) = \frac{2\kappa \bar{\mu}}{\delta_y} \cdot \frac{\sinh(\delta_y(\bar{t} - t))}{1 + \cosh(\delta_y(\bar{t} - t))} \left[ y(t) + \frac{\bar{y}}{\beta(\bar{t}, t)} \right] + \frac{\bar{z}}{\beta(\bar{t}, t)}, \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{t}, t) &:= \sinh(\delta_y(\bar{t} - t)) + \frac{1}{\delta} (\kappa - 2\Sigma_\mu \bar{y}) \cosh(\delta_y(\bar{t} - t)), \\ \beta(\bar{t}, t) &:= \cosh(\delta_y(\bar{t} - t)) + \frac{1}{\delta} (\kappa - 2\Sigma_\mu \bar{y}) \sinh(\delta_y(\bar{t} - t)). \end{aligned}$$

*Beweis.* Die erste Differentialgleichung ist eine Riccati-Gleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung (A.14) unmittelbar aus Lemma A.1.1 mit  $a_y = -2\Sigma_\mu$ ,  $b_y = 2\kappa$  und  $c_y = -\frac{1}{2}\frac{\theta}{1-\theta}\Sigma_R^{-1}$  erfolgt. Die zweite Differentialgleichung ist vom Typ

$$\frac{dz(t)}{dt} = -f(t) z(t) + g(t), \quad z(T) = \bar{z}.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung durch die folgende Formel zu erhalten ist

$$z(t) = e^{-F(t)} \left[ \bar{z} \cdot e^{F(\bar{t})} - \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \right]; \quad F(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad t \leq \bar{t}.$$

Demnach und mit Hilfe von Lemma A.1.5 erhalten wir  $F(t) = \ln \left| \frac{\beta(t,t)}{\beta(\bar{t},0)} \right|$ . Darauf basierend folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= -e^{-F(t)} \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \\ &= \frac{2\kappa\bar{\mu}}{\delta_y} \frac{\bar{y} \sinh(\delta_y(\bar{t}-t)) + \frac{-2\kappa\bar{y} + \frac{\theta}{1-\theta}\Sigma_R^{-1}}{2\delta_y} \left[ -1 + \cosh(\delta_y(\bar{t}-t)) \right]}{\beta(\bar{t},t)} \\ &= \frac{2\kappa\bar{\mu}}{\delta_y} \frac{\sinh(\delta_y(\bar{t}-t))}{1 + \cosh(\delta_y(\bar{t}-t))} \left[ y(t) + \frac{\bar{y}}{\beta(\bar{t},t)} \right]. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir  $I_2 = \bar{z} e^{-F(t)} \cdot e^{F(\bar{t})} = \frac{\bar{z}}{\beta(\bar{t},t)}$ . Das Einsetzen von  $I_1$  und  $I_2$  in die oben erwähnte Formel liefert die Behauptung.  $\square$

**Lemma A.2.2.** Die Endwertprobleme (A.12) und (A.13) haben für  $\Delta_y = 0$  folgende Lösungen

$$y(t) = \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} - \frac{\left(\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y}\right)}{1 - 2\Sigma_\mu \left(\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y}\right)(\bar{t}-t)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu}}{\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y}} - \kappa\bar{t} - 1 + \frac{\kappa}{2}(\bar{t}+t) \right) \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + y(t) \right) (\bar{t}-t) \\ &\quad + \frac{\bar{z}}{1 - 2\Sigma_\mu \left(\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y}\right)(\bar{t}-t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

*Beweis.* Die erste Differentialgleichung ist eine Riccati-Gleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung (A.16) unmittelbar aus Lemma A.1.2 mit  $a_y = -2\Sigma_\mu$ ,  $b_y = 2\kappa$  und  $c_y = -\frac{1}{2}\frac{\theta}{1-\theta}\Sigma_R^{-1}$  erfolgt. Die zweite Differentialgleichung ist vom Typ

$$\frac{dz(t)}{dt} = -f(t) z(t) + g(t), \quad z(T) = \bar{z}.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung durch die folgende Formel zu erhalten ist

$$z(t) = e^{-F(t)} \left[ \bar{z} \cdot e^{F(\bar{t})} - \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \right]; \quad F(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad t \leq \bar{t}.$$

Demnach und mit Hilfe von Lemma A.1.5 erhalten wir  $F(t) = \ln \left| \frac{1 - 2\Sigma_\mu \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right) (\bar{t} - t)}{1 - 2\Sigma_\mu \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right) T} \right|$ . Darauf basierend folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= -e^{-F(t)} \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \\ &= 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{\frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} (\bar{t} - t)}{1 - 2\Sigma_\mu \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right) (\bar{t} - t)} - \frac{\left( \kappa\bar{t} + 1 - \frac{\kappa}{2} (\bar{t} + t) \right) (\bar{t} - t) \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right)}{1 - 2\Sigma_\mu \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right) (\bar{t} - t)} \right) \\ &= 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} (\bar{t} - t) \frac{\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + y(t)}{\frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y}} - \left( \kappa\bar{t} + 1 - \frac{\kappa}{2} (\bar{t} + t) \right) (\bar{t} - t) \left[ \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + y(t) \right] \right). \end{aligned}$$

Andererseits haben wir  $I_2 = \bar{z} e^{-F(t)} \cdot e^{F(\bar{t})} = \frac{\bar{z}}{1 - 2\Sigma_\mu \left( \frac{-\kappa}{2\Sigma_\mu} + \bar{y} \right) (\bar{t} - t)}$ . Das Einsetzen von  $I_1$  und  $I_2$  in die oben erwähnte Formel liefert die Behauptung.  $\square$

**Lemma A.2.3.** Die Endwertprobleme (A.12) und (A.13) haben für  $\Delta_y > 0$  und alle  $t \in [\max\{t, t^E\}, \bar{t}]$  mit  $t^E = \bar{t} - \frac{\pi + a_0}{\delta_y}$  und  $a_0 := -\arctan\left(\frac{\kappa - \Sigma_\mu \bar{y}}{\delta_y}\right)$  folgende Lösungen

$$y(t) = \frac{\kappa}{2\Sigma_\mu} + \frac{\delta_y}{2\Sigma_\mu} \tan\left(\delta_y(\bar{t} - t) + a_0\right), \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{\kappa}{2\delta_y \Sigma_\mu} \cos\left(\delta_y(\bar{t} - t) + a_0\right) \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\delta_y}{2}(\bar{t} - t) + \frac{a_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{a_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right| \right) \\ &+ 2\kappa\bar{\mu} \left( \frac{-1}{2\Sigma_\mu} \left[ \frac{\cos\left(\delta_y(\bar{t} - t) + a_0\right)}{\cos(a_0)} - 1 \right] \right) + \bar{z} \frac{\cos\left(\delta_y(\bar{t} - t) + a_0\right)}{\cos(a_0)}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

*Beweis.* Die erste Differentialgleichung ist eine Riccati-Gleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung (A.18) unmittelbar aus Lemma A.1.3 mit  $a_y = -2\Sigma_\mu$ ,  $b_y = 2\kappa$  und  $c_y = -\frac{1}{2} \frac{\theta}{1-\theta} \Sigma_R^{-1}$  erfolgt. Die zweite Differentialgleichung ist vom Typ

$$\frac{dz(t)}{dt} = -f(t) z(t) + g(t), \quad z(T) = \bar{z}.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung durch die folgende Formel zu erhalten ist

$$z(t) = e^{-F(t)} \left[ \bar{z} \cdot e^{F(\bar{t})} - \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \right]; \quad F(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad t \leq \bar{t}.$$

Demnach und mit Hilfe von Lemma A.1.5 erhalten wir  $F(t) = -\ln \left| \frac{\cos(\delta_y(\bar{t}-t)+a_0)}{\cos(\delta_y\bar{t}+a_0)} \right|$ . Darauf basierend folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= -e^{-F(t)} \int_t^{\bar{t}} e^{F(s)} g(s) ds \\ &= 2\kappa\bar{\mu} \left[ \cos(\delta_y(\bar{t}-t) + a_0) \right] \left( \frac{\kappa}{2\delta_y\Sigma_\mu} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\delta_y}{2}(\bar{t}-t) + \frac{a_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{a_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right| \right) \\ &= 2\kappa\bar{\mu} \left[ \cos(\delta_y(\bar{t}-t) + a_0) \right] \left( \frac{-1}{2\Sigma_\mu} \left[ \frac{1}{\cos(a_0)} - \frac{1}{\cos(\delta_y(\bar{t}-t) + a_0)} \right] \right). \end{aligned}$$

Andererseits haben wir  $I_2 = \bar{z} e^{-F(t)} \cdot e^{F(\bar{t})} = \bar{z} \frac{\cos(\delta_y(\bar{t}-t)+a_0)}{\cos(a_0)}$ . Das Einsetzen von  $I_1$  und  $I_2$  in die oben erwähnte Formel liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung A.2.4.** Die Differentialgleichung (5.8)

$$\frac{dC^F(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\Sigma_\mu z^2(t) - z(t)\kappa\bar{\mu} - \Sigma_\mu y(t), \quad C^F(T) = \bar{c}.$$

ist grundsätzlich explizit lösbar, allerdings für  $\bar{c} \neq 0$  sehr aufwändig.

---

## Symbolverzeichnis

---

$\mathcal{A}_0^H$	-	Menge der zulässigen Strategien für den logarithmischen Nutzen
$\mathcal{A}^H$	-	Menge der zulässigen Strategien für den Potenz-Nutzen
$A^H$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE
$A_0$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE beim logarithmischen Nutzen
$\bar{A}^F$	-	Hilfsfunktion zur Mittlung der Wertfunktion des $F$ -Investors
$B^H$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE
$\bar{B}^F$	-	Hilfsfunktion zur Mittlung der Wertfunktion des $F$ -Investors
$B_0$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE beim logarithmischen Nutzen
$C^H$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE
$\bar{C}^H$	-	Hilfsfunktion zur Mittlung der Wertfunktion des $F$ -Investors
$C_0^H$	-	Hilfsfunktion zur Lösung der DPE beim logarithmischen Nutzen
$d$	-	Anzahl der Aktien
$d_1$	-	Anzahl der Wiener Prozesse im Renditeprozess
$d_2$	-	Anzahl der Wiener Prozesse im Drift-Prozess
$d_3$	-	Anzahl der Wiener Prozesse im Experten-Prozess
$d_Y$	-	Dimension des Zustandsprozesses
$d_Z$	-	Anzahl der Elemente von $Z$
$\mathcal{E}^H$	-	Effektivität des $H$ -Investors
$\mathbb{F}^H = (\mathcal{F}_t^H)_t$	-	Investor-Filtration beim Regime $H$
$\mathcal{G}$	-	(zugrundeliegende) $\sigma$ -Algebra auf $\Omega$
$\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_t$	-	(zugrundeliegende) Hauptfiltration auf $\Omega$

$H$	- Index für das Informations-Regime
$H = F$	- Information mit beobachtbarer Drift
$H = R$	- Information aus Renditen
$H = C_n$	- Information aus Renditen & Experten zu determinist. Zeiten
$H = C_\lambda$	- Information aus Renditen & Experten zu zufällen Zeiten
$H = D$	- Information aus Renditen & Experten in stetiger Zeit
$I^{C_n}(\cdot, \cdot)$	- markierter Punktprozess zur Modellierung deter. Experten
$I^H(\cdot, \cdot)$	- markierter Punktprozess beim Regime $H$
$I^{C_\lambda}(\cdot, \cdot)$	- markierter Poisson-Prozess bzw. zufälliges Poisson-Maß
$\tilde{I}^{C_\lambda}(\cdot, \cdot)$	- Kompensiertes Poisson-Maß
$J^H$	- Zielfunktion des $H$ -Investors
$\mathcal{J}_0^H$	- Zielfunktion des $H$ -Investors zum Zeitpunkt $t = 0$
$\bar{K}^H$	- Hilfsfunktion zur Lösung der DPE (siehe $A^H$ , $B^H$ und $C^H$ )
$\underline{K}^H$	- Hilfsfunktion zur Lösung der DPE (siehe $A^H$ , $B^H$ und $C^H$ )
$L^H$	- Hilfsfunktion zur Lösung der DPE
$\mathcal{L}^H$	- Generator des Zustand-Prozesses
$M^H$	- Filter bzw. bedingte Erwartung der Drift beim Regime $H$
$\bar{m}_0$	- Erwartungswert von $\mu_0$
$m_0$	- Anfangswert des Prozesses der bedingten Erwartung $M^H$
$n$	- Anzahl der deterministischen Experten
$N_t$	- Poisson-Prozess zur Modellierung zufälliger Experten
$P$	- das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der $\sigma$ -Algebra $\mathcal{G}$
$\mathbf{P}$	- Pickmatrix bei diskreten Experten
$\bar{P}^H$	- risikoneutrales Maß beim Regime $H$
$p^H$	- Entscheidungsregel des $H$ -Investors
$P_{Exp}^H$	- Preis der Expertenmeinung aus Sicht des $R$ -Investors
$Q^H$	- bedingte Kovarianzmatrix beim Regime $H$
$\tilde{Q}$	- regularisierte bedingte Kovarianzmatrix beim Regime $H = C_\lambda$
$\bar{q}_0$	- Varianz von $\mu_0$
$q_0$	- Anfangswert des Prozesses der bedingten Varianz $Q^H$
$R$	- Rendite-Prozess, bestehend aus $R^1, \dots, R^d$
$\mathcal{R}$	- Transformation auf und unterhalb der Diagonale von $Q$ in $Z$
$\mathcal{R}^{-1}$	- (Rück-)Transformation des Vektors $Z$ in die Matrix $Q$
$S^0$	- Bond
$S$	- Aktienpreisprozess, bestehend aus $S^1, \dots, S^d$



---

$\mathcal{S}_M$	- Zustandsraum des Prozesses $M$
$\mathcal{S}_Q$	- Zustandsraum des Prozesses $Q$
$\tilde{\mathcal{S}}_Q$	- Zustandsraum des regularisierten Prozesses $\tilde{Q}$
$\mathcal{S}_Y$	- Zustandsraum des Zustandsprozesses $Y$
$\tilde{\mathcal{S}}_Y$	- Zustandsraum des Zustandsprozesses $\tilde{Y}$
$\mathcal{S}_Z$	- Zustandsraum des Vektors $Z$
$\tilde{\mathcal{S}}_Z$	- Zustandsraum des Vektors $\tilde{Z}$
$T$	- Investitionshorizont
$\mathcal{U}_\theta$	- Nutzenfunktion
$(U_k)_k$	- standardisierte Expertenmeinungen
$V^H$	- Wertfunktion des $H$ -Investors
$\mathcal{V}_0^H$	- Wertfunktion des $H$ -Investors zum Zeitpunkt $t = 0$
$W^R$	- Wiener-Prozess beim Renditeprozess
$W^\mu$	- Wiener-Prozess beim Driftprozess
$W^\zeta$	- Wiener-Prozess beim zeitstetigen Expertenprozess
$W^*$	- Wiener-Prozess der Regularisierung
$\tilde{W}^H$	- Innovationsprozess beim Regime $H$
$\bar{W}^H$	- Wiener-Prozess bzgl. $\bar{P}^H$ (, nach Girsanov-Theorem)
$X^\pi$	- Vermögensprozess des Investors
$Y$	- Zustandsprozess der DPE
$\tilde{Y}$	- regularisierter Zustandsprozess
$Z_k$	- diskrete Expertenmeinungen über die unbeobachtbare Drift $\mu$
$Z$	- Vektor der Einträge unterhalb und auf der Diagonale von $Q^{C,\lambda}$
$\underline{\alpha}_M^H$	- Drift-Koeffizient für den Filter $M^H$
$\alpha_M^H$	- Drift-Koeffizient für $M^H$ bzgl. dem neuen Maß $\bar{P}^H$
$\underline{\alpha}_Q^H$	- Drift-Koeffizient für die bedingte Kovarianzmatrix $Q^H$
$\alpha_Q^H$	- Drift-Koeffizient für $Q^H$ nach dem Kompensieren der Sprünge
$\alpha_X^H$	- Drift-Koeffizient für den Vermögensprozess $X^\pi$
$\alpha_Y^H$	- Drift-Koeffizient für den Zustandsprozess $Y$
$\tilde{\alpha}_Y$	- Drift-Koeffizient für den regularisierten Zustandsprozess $\tilde{Y}$
$\underline{\alpha}_Z$	- Drift-Koeffizient für $Z$
$\alpha_Z$	- Drift-Koeffizient für $Z$ nach dem Kompensieren der Sprünge
$\beta_M^H$	- Diffusionskoeffizient für den Filter $M^H$
$\beta_Q^H$	- Diffusionskoeffizient für die bedingte Kovarianzmatrix $Q^H$
$\beta_X^H$	- Diffusionskoeffizient für den Vermögensprozess $X^\pi$
$\beta_Y^H$	- Diffusionskoeffizient für den Zustandsprozess $Y$

$\tilde{\beta}_Y$	- Diffusionskoeffizient für den regularisierten Zustandsprozess $\tilde{Y}$
$\beta_Z$	- Diffusionskoeffizient für $Z$
$\gamma_M^H$	- Sprungkoeffizient für den Filter $M^H$
$\gamma_Q^H$	- Sprungkoeffizient für die bedingte Kovarianzmatrix $Q^H$
$\gamma_Y^H$	- Sprungkoeffizient für den Zustandsprozess $Y^H$
$\gamma_Z$	- Sprungkoeffizient für $Z$
$\Delta_n$	- größter Abstand zwei aufeinanderfolgender Expertenmeinungen
$\Delta_A$	- Diskriminante der Riccati-DGL für $A$ im eindimensionalen Fall
$\delta_A$	- Hilfsgröße zu $\Delta_A$
$\zeta$	- zeitstetige Expertenmeinungen über die Drift $\mu$
$\zeta$	- zeitstetige Expertenmeinungen über die Drift $\mu$
$\eta^\lambda(\cdot, \cdot)$	- Kompensator vom Poisson-Maß
$\theta$	- Parameter der Nutzenfunktion
$\kappa$	- Mean-Reversion-Geschwindigkeit der Drift $\mu$
$\lambda$	- Intensität des homogenen Poisson-Prozesses
$\Lambda_t^H$	- Radon-Nikodym-Dichte
$\mu$	- Drift-Prozess
$\bar{\mu}$	- Mean-Reversion-Level bei der Drift $\mu$
$\pi^H$	- Handelsstrategie des $H$ -Investors
$p^H$	- Entscheidungsregel des $H$ -Investors
$\sigma_R$	- Volatilität des Rendite-Prozesses
$\sigma_\mu$	- Volatilität des Drift-Prozesses
$\sigma_\zeta$	- Volatilität des zeitstetigen Experten
$\Sigma_R = \sigma_R \sigma_R'$	- lokale Kovarianzmatrix des Rendite-Prozesses
$\Sigma_\mu = \sigma_\mu \sigma_\mu'$	- lokale Kovarianzmatrix des Drift-Prozesses
$\Sigma_\zeta = \sigma_\zeta \sigma_\zeta'$	- lokale Kovarianzmatrix des zeitstetig. Experten-Prozesses
$\varphi$	- Dichte der multivariaten Standardnormalverteilung
$\Omega$	- die Menge aller Elementarereignisse
$\ \cdot\ _\infty$	- Maximumsnorm
$\ \cdot\ $	- Spektralnorm

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] B. Angoshtari. *Stochastic modeling and Methods for Portfolio Managment in Cointegrated Markets*. PhD thesis, University of Oxford, 2013.
- [2] L. Bachelier. Theorie de la speculation. *Annales de l' Ecole Normale Superieure*, 17:21–86, 1900.
- [3] G. Barles and E. R. Jakobsen. On the convergence rate of approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 36(1):33–54, 2002.
- [4] Bäuerle, N. S. P. Urban, and L. A. M. Veraart. The relaxed investor with partial information. *SIAM Journal Financial Mathematics*, 3(1):304–327, 2012.
- [5] N. Bäuerle and U. Rieder. Portfolio Optimization with Markov-Modulated Stock Prices and Interest Rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(3):442–447, 2004.
- [6] F. E. Benth and K. H. Karlsen. A Note on Merton's Portfolio Selection Problem for the Schwartz Mean-Reversion Model. *Stochastic Analysis and Applications*, 23(4):687–704, 2005.
- [7] J. M. Bismut. Conjugate convex functions on optimal stochastic control. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 44:384–404, 1973.
- [8] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [9] F. Black and R. Litterman. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5):28–43, 1992.
- [10] F. Black and S. Sholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, May-June,1973.
- [11] B. Bouchard and N. Touzi. Weak Dynamic Programming Principle for Viscosity Solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 49(3):948–962, 2011.

- [12] S. Brendle. Portfolio Selection under Incomplete Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 116(5):701–723, 2006.
- [13] F. Camilli and M. Falcone. *Approximation of Optimal Control Problems with State Constraints: Estimates and Applications*. In Nonsmooth analysis and geometric methods in deterministic optimal control. Minneapolis, MN, 1993, Springer, New York, 1996.
- [14] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [15] J. Cox and C. F. Huang. Optimal consumption and portfolio choices when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49:33–83, 1989.
- [16] J. Cvitanić and I. Karatzas. Convex Duality In Constrained Portfolio Optimization. *The Annals of Applied Probability*, 2(4):767–818, 1992.
- [17] M. Davis and S. Lleo. Black-Litterman in Continuous Time: The Case for Filtering. *Quantitative Finance Letters*, (2):30–35, 2013.
- [18] M. Davis and S. Lleo. Jump-Diffusion Risk-Sensitive Asset Management II: Jump-Diffusion Factor Model. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1:30–35, 2013.
- [19] M. Davis and S. Lleo. *Risk-Sensitive Investment Management*. Word Scientific, volume 19 of *Word Scientific: Advanced Series on Statistical Sciences & Applied Probability*. 2015.
- [20] M. Davis and S. Lleo. Debaised Expert Opinions in Continuous Time Asset Allocation. 2018. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2663650> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2663650>.
- [21] R. J. Elliott, L. Aggoun, and J. B. Moore. *Hidden Markov Models - Estimation and Control*. Applications of Mathematics. Springer, New York, 1995.
- [22] R. J. Elliott, T. K. Siu, and A. Badescu. On mean-Variance portfolio selection under a hidden Markovian regime-switching model. *Economic Modeling*, 27:678–686, 2010.
- [23] W. Fleming and H. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, New York, 2006.
- [24] J.-P. Fouque, A. Papanicolaou, and R. Sircar. Perturbation Analysis for Investment Portfolios Under Partial Information with Expert Opinions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(3):1534–1566, 2017.
- [25] R. Frey, A. Gabih, and R. Wunderlich. Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15(1):1–18, 2012.
- [26] R. Frey, A. Gabih, and R. Wunderlich. Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions: A Dynamic Programming Approach. *Communications on Stochastic Analysis*, 8(1):49–79, 2014.

- 
- [27] A. Gabih, H. Kondakji, J. Sass, and R. Wunderlich. Expert Opinions and Logarithmic Utility Maximization in a Market with Gaussian Drift. *Communications on Stochastic Analysis*, 8(1):27–47, 2014.
- [28] A. Gabih, H. Kondakji, and R. Wunderlich. Asymptotic Filter Behavior for High-Frequency Expert Opinions in a Market with Gaussian Drift. arXiv:1812.03453 [q-fin.MF].
- [29] J. Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer Series in Statistics. Springer, 1991.
- [30] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [31] I. Karatzas. Adaptive control of a diffusion to a goal, and a parabolic Monge-Ampere equation. *Asian J. math.*, 1(2):295–313, 1997.
- [32] I. Karatzas, J. P. Lehoczky, and S. E. Shreve. A Note On Utility Maximization Under Partial Observations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25:1557–1586, 1987.
- [33] I. Karatzas and G. Xu. A Note On Utility Maximization Under Partial Observations. *Mathematical Finance*, 1(2):57–70, 1991.
- [34] O. Kebiri, L. Neureither, and C. Hartmann. Adaptive importance sampling with forward backward stochastic differential equations. *Proceedings of the IHP Trimester Stochastic Dynamics Out of Equilibrium*, Institute Henri Poincaré (accepted), 2018.
- [35] O. Kebiri, L. Neureither, and C. Hartmann. Singularly perturbed forward-backward stochastic differential equations: Application to the optimal control of bilinear systems. *Computation*, 6(3):41, 2018.
- [36] T. S. Kim and E. Omberg. Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior. *The Review of Financial Studies*, 9(1):141–161, 1996.
- [37] N. V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*. Applications of Mathematics. Springer, New York - Berlin, 1980.
- [38] N. V. Krylov. Control On the rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman’s equations with variable coefficients. *Probability Theory Related Fields*, 117(1):1–16, 2000.
- [39] K. Kuroda and H. Nagai. Risk-sensitive portfolio optimization on infinite time horizon. *Stochastics and Stochastic Reports*, 73(3-4):309–331, 2002.
- [40] H. J. Kushner. *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. Academic Press, New York, 1977.
- [41] H. J. Kushner and P. G. Dupuis. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Applications of Mathematics. Springer-Verlag New York, 1992.

- [42] Y. Kuwana. Certainty-equivalence and logarithmic utilities in consumption/investment problems. *Mathematical Finance*, 5(4):197–309, 1995.
- [43] Y. Kuwana 1993. *Optimal Consumption/Investment Decisions with Partial Observations*. PhD thesis, Stanford University, 1993.
- [44] P. Lakner. Utility Maximization with Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 56(247-273), 1995.
- [45] P. Lakner. Optimal Trading Strategy for an Investor: The Case of Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 76(1):77–97, 1998.
- [46] B. Lions, P. L. Mercier. Approximation numerique des equations de Hamilton-Jacobi-Bellman. *RAIRO Numerical Analysis*, 14:369–393, 1980.
- [47] P. L. Lions. Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations Part I: the Dynamic Programming Principle and Applications. *Communications in Partial Differential Equations*, 8(10):1101–1174, 1983.
- [48] P. L. Lions. Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations Part II: Viscosity Solutions and Uniqueness. *Communications in Partial Differential Equations*, 8(11):1229–1276, 1983.
- [49] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes II - General Theory*. Applications of Mathematics. Springer, New York, 1994.
- [50] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes II - Applications*. Applications of Mathematics. Springer, Berlin, second edition, 2001.
- [51] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [52] C. A. Mejia Vega. Calibration of the exponential Ornstein–Uhlenbeck process when spot prices are visible through the maximum log-likelihood method. Example with gold prices. *Springer International Publishing*, 23(4):687–704, 2018.
- [53] J. L. Menaldi. Some Estimates for Finite Difference Approximations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(3):579–607, 1989.
- [54] C. Merton, R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3):247–257, 1969.
- [55] C. Merton, R. Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373–413, 1971.
- [56] C. Merton, R. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183, 1973.
- [57] D. L. Ocone and I. Karatzas. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, 34:187–220, 1991.

- 
- [58] B. Øksendal and A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Universitext. Springer, Berlin, 2007.
- [59] H. Pham. Optimal Stopping of Controlled Jump Diffusion Processes: A Viscosity Solution Approach. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 8(1):1–27, 1998.
- [60] H. Pham. *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer, Berlin - Heidelberg, 2009.
- [61] S. R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 11:371–382, 1986.
- [62] U. Rieder and N. Bäuerle. Portfolio Optimization with Unobservable Markov-Modulated Drift Processes. *Journal of Applied Probability*, 42:362–378, 2005.
- [63] L. C. G. Rogers. The Relaxed Investor and Parameter Uncertainty. *Finance and Stochastics*, 5(2):131–154, 2001.
- [64] L. C. G. Rogers. *Optimal Investment*. SpringerBriefs in Quantitative Finance. Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.
- [65] A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev. *Numerical Methods for Grid Equations. Volume I – Direct Methods*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.
- [66] J. Sass and U. Haussmann. Optimizing the Terminal Wealth under Partial Information: the Drift Process as a Continuous Time Markov Chain. *Finance and Stochastics*, 8:553–577, 2004.
- [67] J. Sass, D. Westphal, and R. Wunderlich. Expert Opinions and Logarithmic Utility Maximization for Multivariate Stock Returns with Gaussian Drift. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 20(04), 2017.
- [68] J. Sass, D. Westphal, and R. Wunderlich. Diffusion Approximations for Expert Opinions in a Financial Market with Gaussian Drift. 2018. arXiv:1807.00568 [q-fin.PM].
- [69] W. Schachermayer and J. Teichman. How Close Are The Option Pricing Formulas of Bachelier And Black-Merton-Scholes. *Mathematical Finance*, 18(1):155–170, 2008.
- [70] K. Schöttle, R. Werner, and R. Zagst. Comparison and robustification of Bayes and Black-Litterman models. *Mathematical Methods of Operations Research*, 71:453–475, 2010.
- [71] S. Schütze. *Ein Nutzenmaximierungsproblem mit unvollständiger Information und Expertenmeinungen in einem Finanzmarkt mit Markov-modulierter Drift*. PhD thesis, Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg, 2016.
- [72] E. S. Schwartz. The stochastic behaviour of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, LII(3):923–973, 1997.

- [73] A. A. Shardin. *Stochastische optimale Steuerungsprobleme mit partieller Information für einen Energiespeicher*. PhD thesis, Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg, 2017.
- [74] A. A. Shardin and R. Wunderlich. Partially Observable Stochastic Optimal Control Problems for an Energy Storage. *An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 89(1):280–310, 2017.
- [75] S. E. Shreve and H. M. Soner. Optimal Investment And Consumption With Transaction Costs. *The Annals of Applied Probability*, 4(3):609–692, 1994.
- [76] M. Taksar and X. Zeng. Optimal terminal wealth under partial information: Both the drift and the volatility driven by a discrete-time Markov chain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46:1461–1482, 2007.
- [77] N. Touzi. *Stochastic control problems, viscosity solutions and application to finance*. Publications of the Scuola Normale Superiore. Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002.
- [78] R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Springer Verlag, 2000.
- [79] J. Werner. Darstellung und Analyse des Black-Litterman-Verfahrens als Erweiterung der klassischen Portfoliooptimierung nach Markowitz. Diplomarbeit, Technischen Universität Chemnitz, 2010.
- [80] G. L. Xu. *A duality method for optimal consumption and investment under Short-Selling Prohibition*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 1995.
- [81] X. Yu. An Explicit Example Of Optimal Portfolio-Consumption Choices With Habit Formation And Partial Observations. 2014. Available at arXiv:<https://arxiv.org/abs/1112.2939v4> or <https://arxiv.org/abs/1112.2939>.
- [82] T. Zariphopoulou. Optimal Investment and Consumption Models with non-linear Stock Dynamics. *Mathematical Methods of Operations Research*, 50(2):271–296, 1999.