

Ableitung und Validierung eines FE-Ersatzmodells für strukturierte Bleche

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Ingenieurin

Tina Mahler-de Silva, geb. de Silva

geboren am 28.01.1984 in Berlin

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. habil. Vesselin Michailov
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Bernd Viehweger
Tag der mündlichen Prüfung:	30.04.2015

Vorwort

Die vorgestellte Arbeit ist während meiner Doktorandentätigkeit im Rahmen der internationalen Graduiertenschule (IGS) in der Graduiertenklasse „Fertigungsgerechtes Design mit strukturierten Halbzeugen“ entstanden.

Mein besonderer Dank geht an Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn für die Möglichkeit an seinem Lehrstuhl zu arbeiten, für seine stetige Unterstützung meiner Arbeit und deren Begutachtung. Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Viehweger für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Michailov für die Übernahme der Aufgabe des Prüfungsvorsitzenden.

Ich bedanke mich besonders bei Dipl.-Ing. Mark Golze sowohl für seinen Ratbeistand und seine Unterstützung, als auch für den technischen Support.

Bei allen Kollegen des Lehrstuhls für Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen möchte ich mich für die angenehme Atmosphäre und die freundliche Zusammenarbeit bedanken.

Mein aufrichtiger Dank geht an meine Familie und Freunde für ihre Ermutigung, den hilfreichen Ratbeistand und ihre stetige Geduld in der ganzen Zeit.

Die Arbeit wurde vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kultur (MWKF) des Landes Brandenburg im Rahmen der internationalen Graduiertenschule (IGS) der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus (BTU) unterstützt.

Berlin, Juli 2015

Tina Mahler-de Silva

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines vereinfachten mechanischen Ersatzmodells für strukturierte Bleche. Diese bewirken durch ihre eingebrachten Formen eine Verbesserung der Bauteilsteifigkeit und des Beulverhaltens und versprechen somit hohes Potenzial hinsichtlich industrieller Anwendungen im Leichtbau. Zunächst wird ein Einblick in die theoretischen Grundlagen gegeben, welche essentiell für das Verständnis der Arbeit sind. Anschließend wird ein vereinfachtes Ersatzmodell entwickelt, welches auf Basis von Homogenisierungsprozessen anisotrope Materialparameter beschreibt, um das elastische Verhalten großer Strukturen aus strukturierten Blechen berechnen zu können. Für die Ersatzkennwerte werden Symmetrie- und Randbedingungen an Elementarzellen betrachtet, deren strukturmechanisches Verhalten repräsentativ bestimmend sind. Die Bestimmung eines solchen Repräsentativen Volumenelements (*RVE*) stellt die Basis der Homogenisierungsmethode dar. Mithilfe des Ersatzmodells wird eine effiziente numerische Auslegung gewährleistet. Der anschließende Vergleich mit experimentellen Ergebnissen unterstützt die Validierung des vereinfachten Ersatzkontinuums.

Abstract

The present work describes the development of a simplified mechanical surrogate model for structured sheet metals. Due to their stiffeners these metals effect an improvement of the component stiffness and buckling behaviour and therefore promise high potential with respect to industrial applications in lightweight design. At first an insight is given in the theoretical fundamentals that are significant for understanding the present work. Subsequently, a simplified surrogate model is developed which describes anisotropic material parameters based on homogenization processes, to be able to calculate the elastic behaviour of large structures. The contemplation of both symmetry and boundary conditions on elementary cells, whose structural mechanical behaviour is representative, helps identifying the surrogate parameters. The determination of such a representative volume element (*RVE*) can be regarded as the basis of the homogenization method. With the aid of the surrogate model an efficient numerical designing is ensured. The following comparison with experimental results supports the validation of the simplified surrogate continuum.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
Abkürzungsverzeichnis	x
1. Einleitung	1
1.1. Einführung in den Leichtbau	1
1.2. Strukturierte Halbzeuge im Leichtbau	3
1.2.1. Herstellungsprozess	4
1.2.2. Topologische Beschreibung	6
1.3. Bisherige Untersuchungen und Einbettung der vorliegenden Arbeit	7
2. Theoretische Grundlagen	10
2.1. Kontinuumsmechanische Grundlagen	10
2.1.1. Kinematik	10
2.1.2. Erhaltungssätze	13
2.1.3. Spannung und Verzerrungsenergiedichte	15
2.1.4. Materialgleichung	16
2.1.5. Randwertproblem	17
2.1.6. Flächentragwerke	20
2.2. Homogenisierung periodischer Strukturen	22
2.2.1. Stand der Technik	23
2.2.2. Methode des Repräsentativen Volumenelements	24
2.2.3. Mittelung der Spannungs- und Dehnungsfelder	26
2.2.4. Verzerrungsenergiebasiertes Verfahren	28
2.3. Finite-Elemente-Methode	30
2.3.1. Numerische Modalanalyse	34

2.4.	Grundlagen der experimentellen Modalanalyse	36
2.4.1.	Theoretische Grundlagen	37
2.4.2.	Praktische Grundlagen	43
2.4.2.1.	Systemanregung	43
2.4.2.2.	Signalübertragung	45
2.4.2.3.	Signalanalyse	51
2.4.2.4.	Modellkorrelation	51
3.	Aufbau und Simulation des numerischen Strukturmodells	54
3.1.	Voraussetzungen hinsichtlich des Werkstoffverhaltens	54
3.2.	Simulation der Topologie	56
4.	Entwicklung des Ersatzkontinuums mittels RVE	60
4.1.	Voraussetzungen und Annahmen hinsichtlich betrachteter Struktur	60
4.2.	Überlegungen zum Repräsentativen Volumenelement und dessen Auswahl	61
4.3.	Bestimmung der effektiven Materialparameter	63
4.3.1.	Effektiver Elastizitätstensor	63
4.3.2.	Effektive elastische Plattensteifigkeiten	65
4.3.3.	Einheitsverzerrungszustände	66
5.	Numerische Untersuchungen der <i>FE</i>-Modelle des strukturierten Blechs	77
5.1.	Numerische Eigenschwingungsanalyse	78
5.2.	Numerische statische Untersuchung	80
5.3.	Zwischendiskussion	82
5.4.	Variation der Referenzfläche	82
5.4.1.	Gegenüberstellung der Eigenmoden und -frequenzen	84
5.4.2.	Vergleich der statischen Verschiebungen	86
5.5.	Vergrößerung des <i>RVE</i> -Bereichs	87
5.5.1.	Eigenformen- und Eigenfrequenzvergleich	89
5.5.2.	Gegenüberstellung der statischen Verschiebungen	91
5.6.	Diskussion	92
6.	Experimentelle Untersuchungen strukturierter Bleche	94
6.1.	Experimentelle Modalanalyse	94
6.1.1.	Versuchsaufbau	94

6.1.2. Durchführung	96
6.1.3. Ergebnisse und Diskussion	97
6.2. Statische Untersuchungen	100
6.2.1. Experimenteller Aufbau	100
6.2.2. Versuchsdurchführung	100
6.2.3. Resultate und Diskussion	102
7. Modellvalidierung	104
7.1. Vergleich der Eigenformen und -frequenzen	104
7.2. Vergleich der statischen Verschiebungen	109
7.3. Diskussion	111
8. Zusammenfassung und Ausblick	112
A. Theorie der interferometrischen Geschwindigkeits- und Wegmessung	114
B. Steifigkeitsberechnung für eine einzelne Elementarzelle bzgl. RF1	116
B.1. MembranstEIFigkeiten	116
B.2. BiegestEIFigkeiten	118
B.3. Koppelsteifigkeiten	120
C. Technische Daten und Messparameter (EMA)	124
D. Zuordnungstabelle der Elementknoten	125
E. Ergebnisse der Biegeversuche	127
Literaturverzeichnis	128

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

A	Fläche
a, b	geometrische Abmaße
c_0	Lichtgeschwindigkeit
D	LEHR'sches Dämpfungsmaß, modale Dämpfung
d	Dicke, Dämpfung
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{F}	Erregerkraftvektor
f	Frequenz
\mathbf{f}	Lastvektor
H	Übertragungsfunktion
H_1, H_2	Schätzer
h	Höhe
k	Steifigkeit, Zählvariable
L	Pfaddifferenz
l	Länge
\mathbf{M}	Schnittmomentenvektor
m	Masse
N	Anzahl
\mathbf{N}	Schnittkraftvektor
\mathbf{n}	Flächennormalenvektor
P	Punkt im räumlichen Gebiet Ω
p	Druck
Q	Punkt im räumlichen Gebiet Ω
$\mathbf{Q}(i\Omega)$	FOURIER-Transformierte modale Koordinaten
\mathbf{q}	modale Koordinaten
\mathbf{r}	Abstandsvektor zu einem Bezugspunkt

S_{XX}, S_{FF}	Autoleistungsspektrum
S_{XF}, S_{FX}	Kreuzleistungsspektrum
T	Messzeit
t	Zeit
\mathbf{t}	Spannungsvektor
U	Spannung
u	Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
V	Volumen, Vergrößerungsfunktion
v	Geschwindigkeit
W	Formänderungsenergie
w	Verzerrungsenergiedichte
$\mathbf{X}(i\Omega)$	FOURIER-Transformierte Systemantwort
x	Ortsvektor, Systemantwort
X, Y, Z	Koordinaten im ortsfesten Koordinatensystem

Griechische Symbole

α	Koeffizient für RAYLEIGH-Dämpfung
β	Koeffizient für RAYLEIGH-Dämpfung, Abklingkonstante
γ	Kohärenzfunktion
δ	Kennzeichnung virtueller Größen, Test-, Änderungsgrößen
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
ε	Verzerrung, Dehnung
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol
κ	Dämpfungskonstante, Verkrümmung
κ_F	Korrekturfaktor
λ	Eigenwert, Wellenlänge

ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte des Materials
σ	Spannung
ς	Dämpfung $\varsigma = D$
Φ_k	massennormierte Eigenvektoren
φ	Verdrehung, Winkel, Phasendifferenz
Ψ_k	Eigenvektoren
ω	Eigenkreisfrequenz
Ω	räumliches Gebiet in der Referenzkonfiguration, Erregerkreisfrequenz
$\hat{\Omega}$	räumliches Gebiet in der Momentankonfiguration

Tensoren und Matrizen

A	Membransteifigkeitsmatrix
B	linker CAUCHY-GREEN-Tensor, Koppelsteifigkeitsmatrix, Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
C	Elastizitätstensor
D	rechter CAUCHY-GREEN-Tensor, Biegesteifigkeitsmatrix, Dämpfungsmatrix
F	Deformationsgradient, Transversalsteifigkeitsmatrix
H	Interpolationsmatrix Systemübertragungsmatrix
K	KIRCHHOFF-Spannungstensor, Steifigkeitsmatrix
M	Massenmatrix
P	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor,
R	Rotationstensor, RAYLEIGH-Dämpfungsmatrix,

	Residuenmatrix
U	rechter Strecktensor
V	linker Strecktensor
σ	CAUCHY-Spannungstensor, allgemeiner Spannungstensor
τ	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
Φ	massennormierte Modalmatrix
Ψ	Modalmatrix

Hochgestellte Indizes

i	Zählvariable
(m)	bzgl. m -ten Element
RVE	Kennzeichnung des Repräsentativen Volumenelements
*	Kennzeichnung eines quasi-homogenen Körpers, konjugiert komplex
T	transponiert
t	bzgl. der auf einen Körper wirkenden Spannungen
u	bzgl. der auf einen Körper wirkenden Verschiebungen
V	Volumen
0	bzgl. Bezugspunkt
(0)	bzgl. Mittelfläche

Tiefgestellte Indizes

A	Fläche, Oberfläche
$abtast$	bzgl. Abtastung
C	„concentrated“, konzentriert
D	DOPPLER
$E-RF^2$	numerisches Ersatzmodell bzgl. Referenzfläche 2
$E-RVE$ 3x3	numerisches Ersatzmodell aus vergrößertem RVE -Bereich
$ersatz$	Bezug auf das numerische Ersatzmodell
Exp	experimentell ermittelte Daten
gen	bzgl. generalisierter Größen
$glatt$	Bezug auf das glatte Blech

I	Anfangszustand
i, j, k	Zählvariablen
max	höchstmöglich, maximal
$mess$	gemessen
Nyq	NYQUIST
n	Zählvariable
$plast$	plastisch
q	Zählvariable
str	Bezug auf das strukturierte Blech
$Str-FE$	Bezug auf das strukturierte numerische Modell
T	bzgl. Messzeit
V	Volumen
0	ungedämpftes System

Sonstige Symbole

$-$	Mittelwert
\wedge	Kennzeichnung für Momentankonfiguration
\cdot	Ableitung nach der Zeit
$\ddot{}$	zweifache Ableitung nach der Zeit
\mathcal{F}	FOURIER-Transformation
\circ	Grad
∂	Rand, Oberfläche
∞	unendlich

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
<i>AMS</i>	Automatic Multi-Level Substructuring
<i>DFT</i>	Diskrete FOURIER-Transformation
<i>DOF</i>	Degree of Freedom
<i>E</i>	numerisches Ersatzmodell
<i>E-RF2</i>	numerisches Ersatzmodell bzgl. Referenzfläche 2
<i>E-RVE</i> 3x3	numerisches Ersatzmodell bzgl. vergrößertem <i>RVE</i> -Bereich
<i>EMA</i>	Experimentelle Modalanalyse
<i>E</i> -Modul	Elastizitätsmodul
Exp	Experiment
<i>FE</i>	Finite-Elemente
<i>FEM</i>	Finite-Elemente-Methode
<i>FFT</i>	Fast-FOURIER-Transformation
<i>MAC</i>	Modal Assurance Criterion
<i>MDOF</i>	Multi Degree of Freedom
<i>PdvV</i>	Prinzip der virtuellen Verrückungen
rel.	relativ
<i>RF1</i>	Referenzfläche 1
<i>RF2</i>	Referenzfläche 2
<i>RFP</i>	Rational Fraction Polynomial
<i>RVE</i>	Repräsentatives Volumenelement
<i>SDOF</i>	Single Degree of Freedom
<i>Str-FE</i>	strukturiertes FE-Modell
<i>SW</i>	Schlüsselweite
sym.	symmetrisch

1. Einleitung

1.1. Einführung in den Leichtbau

Der Leichtbau spielt in der heutigen Zeit eine immer stärker gewichtete Rolle. Sowohl im klassischen Maschinen- und Fahrzeugbau als auch in der Luft- und Raumfahrt sind die jeweiligen Branchen an fortschrittlichen Leichtbauweisen interessiert. Dabei soll aus funktionalen oder ökonomischen Gründen das Gewicht von Bauteilen reduziert oder minimiert werden, ohne die Tragfähigkeit oder Steifigkeit zu vermindern.

Laut WIEDEMANN [Wie07] lässt sich der Leichtbau in drei Klassen unterteilen - den Spar-, den Öko- und den Zweck-Leichtbau. Beim Spar-Leichtbau wird eine direkte Kosteneinsparung an Material und in der Herstellung angestrebt. Der Öko-Leichtbau basiert nur indirekt auf dem ökonomischen Prinzip. Der Fokus hierbei liegt auf der Energieeinsparung, welche die hohen Material- und Herstellungskosten rechtfertigt. Im Hinblick auf den Zweck-Leichtbau hingegen kann Massenreduktion notwendig sein, um gewisse Systemfunktionen bei extremen Beanspruchungen zu gewährleisten. Trotz der verschiedenen Gründe sind am Ende die herrschenden Randbedingungen doch übereinstimmend. Das angestrebte Hauptziel ist eine Gewichtsreduzierung, während die unverzichtbare statische und dynamische Sicherheit die essentielle Rahmenbedingung gestaltet.

Die kontinuierliche Weiterentwicklung der Wirtschaftlichkeit und Energieeinsparung sowie die Schonung der Ressourcen ist permanent gefragt. Diese drei Säulen stehen beim Leichtbau stetig im Vordergrund. Hinsichtlich der Anforderung, die Bauteilsteifigkeit bei gleichzeitiger Reduzierung des Gewichts zu verbessern, versprechen strukturierte Halbzeuge hohes Potenzial. Abbildung 1.1.1 zeigt wie sich strukturierte Bleche in die Leichtbauweisen einordnen lassen.

Durch regelmäßig oder unregelmäßig angeordnete Nebenformelemente kann gegenüber glatten, ebenen Blechen eine signifikante Verbesserung der Steifigkeit und des Beulverhaltens erreicht werden. Die Versteifungselemente können entweder eine Reduzierung des Bauteilgewichts oder bei gleichbleibender Dicke eine Erhöhung der Bauteilsteifigkeit erzielen. In Abbildung 1.1.2 sind verschiedene Eigenschaften dargestellt, welche durch solche Nebenformelemente für ein Bauteil erzielt werden können.

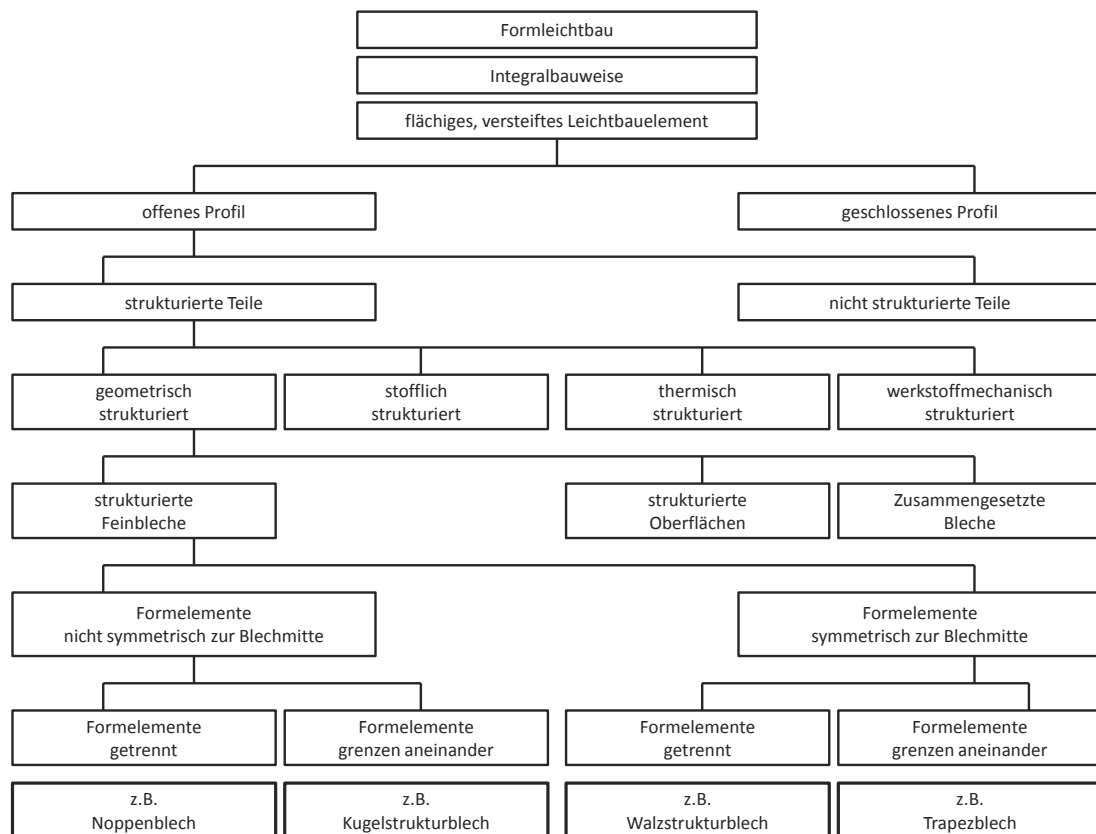


Abbildung 1.1.1.: Möglichkeit der Zuordnung strukturierter Feinbleche in eine ausgewählte Leichtbauweise in Anlehnung an HUFENBACH [Huf96], NEUBAUER [Neu96] und VOLLERTSEN [Vol01]

Für industrielle Anwendungen ist eine simulatorische Modellierung und Berechnung solcher Bauteile unvermeidbar. Jedoch ist selbst bei heutiger leistungsstarker Rechentechnik eine Kalkulation und Modellerstellung des detaillierten Gesamtbauteils in der Regel nicht sinnvoll.

Zur Gewährleistung eines verantwortungsvollen industriellen Einsatzes von strukturierten Blechen mit nachhaltigem Erfolg sind noch zahlreiche Aufgaben zu bearbeiten. In erster Linie betrifft dies die Entwicklung von Berechnungsmodellen mittels der Finite-Elemente-Methode. Diese Methode ist laut KNOTHE und WESSELS [Kno08] „das am häufigsten routinemäßig eingesetzte Verfahren zur Berechnung komplexer Konstruktionen“ und stellt ein notwendiges Hilfsmittel für wirklichkeitsnahe Simulationen zur Erschließung neuer Anwendungsfelder dar.

Desweiteren sind Durchführungen von experimentellen und numerischen Untersuchungen von strukturierten Blechen erforderlich, um dem Klärungsbedarf hinsichtlich des dynami-

schen Verhaltens und Stabilitätsfragen nachzugehen.



Abbildung 1.1.2.: Angestrebte Effekte durch Nebenformelemente [Neu96]

Die bisherigen Arbeiten über und mit strukturierten Blechen beschränken sich weitestgehend auf die Charakterisierung der strukturierten Halbzeuge sowie deren Umformbarkeit. Eines der Hauptziele der vorliegenden Arbeit soll sein, eine simulatorische Grundlage für die Berechnung mit strukturierten Blechen zu schaffen. Es soll mithilfe von Homogenisierungsprozessen ein vereinfachtes "effektives" Ersatzkontinuum entwickelt werden. Das homogenisierte Modell soll bei gleichen Randbedingungen und Belastungen zu gleichen (globalen) Deformationen führen wie ein detailliertes Modell. Damit dient es als Basis für zukünftige numerische Untersuchungen deren Rechenaufwand sich damit erheblich reduzieren soll.

Zur Verifizierung wird das Ersatzmodell mit dem strukturierten numerischen Modell mittels Modalanalyse und statischen Belastungstests verglichen. Darüber hinaus werden experimentelle Ergebnisse herangezogen um die endgültige Validierung zu verwirklichen.

1.2. Strukturierte Halbzeuge im Leichtbau

Strukturierte Halbzeuge erlangen zunehmend Bedeutung im Bereich des Leichtbaus und finden vermehrt Anwendung in der Industrie. Die praktische Nutzung konnte bereits durch verschiedenste auf dem Markt eingeführte Produkte verdeutlicht werden - sei es als Schontrommel für Waschmaschinen, als Reflektor für Hexal-Leuchten oder als leichte, raumsparende Rückwand des Daimler der Klasse *SLK*. Darüber hinaus ist ein weiterer vielfältiger Einsatz überall denkbar, wo z.B. die Gewichtsreduzierung eine große Rolle spielt.

Die Besonderheit der strukturierten Bleche ist, dass sie einem aus einem Stück geformten Bauteil eine globale Versteifung geben und in erster Linie dessen Torsionssteifigkeit und/oder Beulstabilität erhöhen [Hop03]. Die Versteifung entsteht durch einen Umformprozess, bei dem Nebenformelemente in die Struktur eingebracht werden.

1.2.1. Herstellungsprozess

Es gibt diverse Verfahren, mit denen die Strukturen auf eine Platte geprägt werden können. HOPPE [Hop03] fasst einige davon zusammen - die Prozesse mit starrem Werkzeug (das Hohlprägen, das Wellbiegen, die Walz- und Beulstrukturierung) sowie die wirkmedienbasierten Verfahren (die Kugelstrukturierung in Anlehnung an das Fluidzellverfahren und das hydrostatische Streck-Stülp-Umformen). Abbildung 1.2.1 zeigt eine Auswahl verschiedener strukturierter Bleche, wobei a) mithilfe von Beulstrukturierung und b) sowie c) mittels Hydroumformung hergestellt wurde.

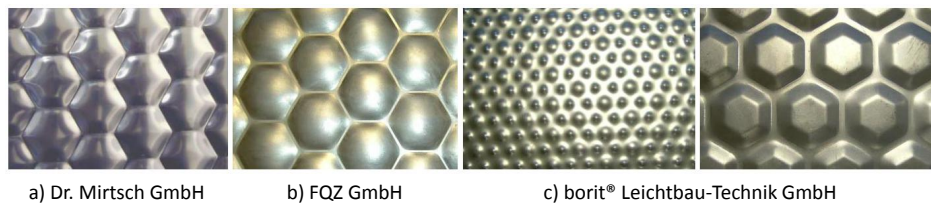


Abbildung 1.2.1.: Beispiele strukturierter Bleche

Das Prinzip der Walzstrukturierung funktioniert beispielsweise mit einem Walzengestell bestehend aus zwei Stachelwalzen. Diese besitzen auf ihrer Oberfläche formgebende Elemente wie z.B. Kegel- oder Pyramidenstümpfe, welche versetzt zueinander angeordnet sind (Abbildung 1.2.2).

Das besondere Merkmal dieser Verfahrensweise besteht in der beidseitigen, zur Blechmitte symmetrisch stattfindenden Strukturausrichtung. Das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Ober- und Unterwalzen sowie die Eingriffstiefe bestimmen hierbei die Qualität und Steifigkeit des walzstrukturierten Blechs. Desweiteren können durch diese Methode auch gelochte Platinen gefertigt werden.

Bei dem patentierten Prozess der Beulstrukturierung finden ebenfalls zwei Walzen Verwendung. Die Unterwalze besteht aus einem Elastomer, während die stählerne Oberwalze die Strukturelemente in das zu bearbeitende Blech prägt. In Abbildung 1.2.3 ist die Verfahrensweise der Beulstrukturierung schematisch dargestellt.

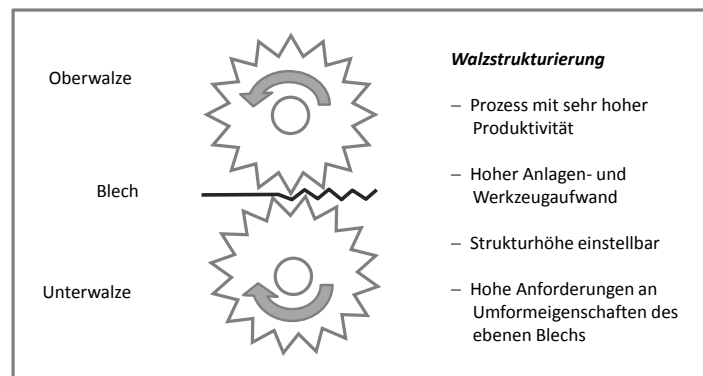


Abbildung 1.2.2.: Prinzip der Walzstrukturierung [Hop03]

Ausschließlich an den Kanten der Beulen verformt sich das Material plastisch aufgrund des Formgebungsprozesses, sodass das Umformverhalten des Ausgangswerkstoffs nahezu gänzlich erhalten bleibt und sich auch die Oberflächenbeanspruchung in Grenzen hält.

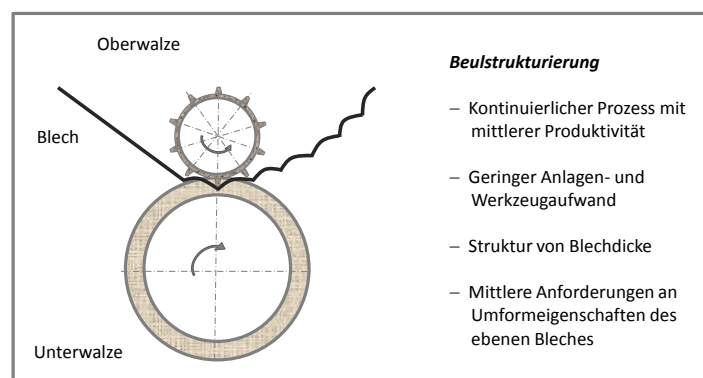


Abbildung 1.2.3.: Prinzip der Beulstrukturierung [Hop03]

In der vorliegenden Arbeit werden strukturierte Bleche untersucht, die am Lehrstuhl für Konstruktion und Fertigung der BTU Cottbus-Senftenberg durch Innenhochdruckumformung, auch Hydroumformung genannt, hergestellt wurden. In der folgenden Abbildung 1.2.4 ist der schematische Aufbau für dieses Verfahren verdeutlicht.

Es handelt sich um einen wirkmedienbasierten Prozess, bei dem mit Hilfe eines Fluids Druck auf das zuvor unverformte Blech ausgeübt wird. Dabei befindet es sich auf einer Matrize mit hexagonalen, wabenförmigen Aussparungen und wird durch einen Niederhalter fest eingespannt. Der Niederhalter soll eine Faltenbildung des Blechs vermeiden sowie den Prozess abdichten. Das Blech ist vom Fluid mittels Membran abgegrenzt und formt

sich unter dem Druck in die Aussparungen der Matrize hinein.

Auf diese Weise entstehen hexagonale, wölbformige Strukturen auf dem Blech, deren Topologie abhängig von der verwendeten Matrize sowie des beaufschlagten Drucks ist.

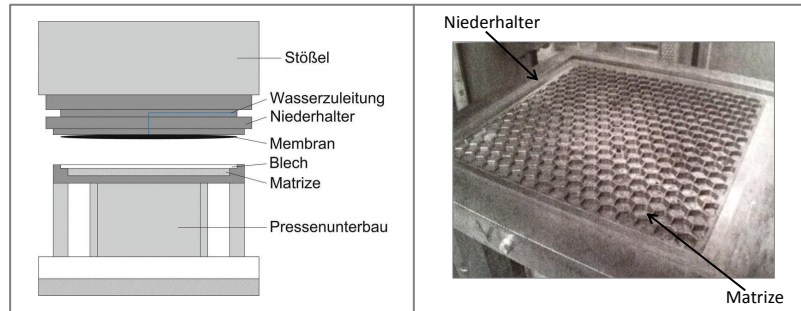


Abbildung 1.2.4.: Schematischer Aufbau der Hydroumformungs-Versuchsanlage mit Membran [Vie12],[Mal13]

1.2.2. Topologische Beschreibung

Die in dieser Arbeit untersuchten strukturierten Bleche besitzen hexagonale Wabenstrukturen. Die Strukturhöhe in der Mitte einer jeden Wabe hängt vom beaufschlagten Druck durch das Fluid und von der Grunddicke des ebenen, unverformten Blechs ab. Je höher der Druck und je dünner das Ausgangsblech ist, desto stärker bildet sich die Wölbung in den Aussparungen [Hop03]. Desweiteren hat auch die Abmessung jeder Wabe, d.h. die Größe der Schlüsselweite SW , einen Einfluss auf die Strukturhöhe. Abbildung 1.2.5 zeigt beispielhaft die genannten Klassifikationen, nach denen am Lehrstuhl für Konstruktion und Fertigung Untersuchungen durchgeführt wurden.

Schlüsselweite	SW 33	SW 43	SW 51
Blehdicke $t = 0,5 \text{ mm}$	50 bar	40 bar	20 bar
	60 bar	50 bar	30 bar
	70 bar	60 bar	40 bar
	50 bar	40 bar	20 bar
Blehdicke $t = 0,7 \text{ mm}$	60 bar	50 bar	30 bar
	70 bar	60 bar	40 bar
	-	-	50 bar

Abbildung 1.2.5.: Systematik der Umformdrücke, die zur Strukturierung der Bleche genutzt werden [Vie12]

Grundlegend für die charakteristische Beschreibung der Topologie der hier untersuchten strukturierten Bleche sind die Schlüsselweite (vgl. Abbildung 1.2.6), die Dicke des Blechs und die Strukturhöhe. Ferner wird im Verlauf der Arbeit zwischen den verschiedenen Strukturlagen unterschieden, welche ebenfalls in Abbildung 1.2.6 aufgezeigt sind.

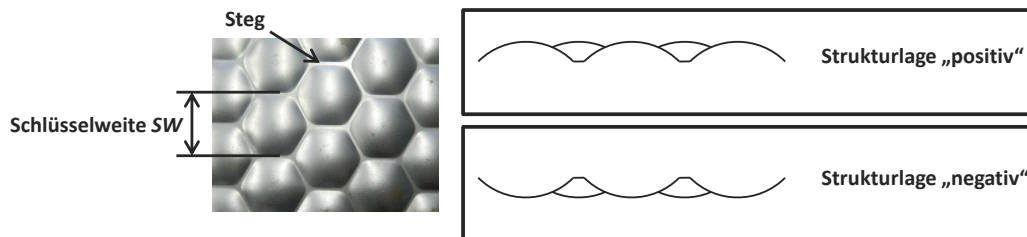


Abbildung 1.2.6.: Schlüsselweite und Strukturlage von strukturierten Blechen

1.3. Bisherige Untersuchungen und Einbettung der vorliegenden Arbeit

Bis zum jetzigen Zeitpunkt existieren in der Literatur eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten, in denen strukturierte Feibleche hinsichtlich ihres Leichtbaupotenzials und Umformverhaltens untersucht worden sind. Resultierend aus ihren Arbeiten ist es nun anhand von Richtlinien möglich, die Steifigkeit eines Blechs mittels geeignetem Werkzeug, angemessenem Bauteil und adäquatem Umformprozess zu maximieren. Die Hauptintention in HOPPE [Hop03] umfasste in erster Linie die Erarbeitung einer geeigneten Definition strukturierter Feibleche - die untersuchten strukturierten Feibleche wurden in die Kategorie der Flächentragwerke aus dem Bereich des Formleichtbaus in die Integralbauweisen eingegliedert. Ferner wurden anhand von Untersuchungen zur Ermittlung der werkstoffmechanischen Festigkeitswerte die Erhöhung/Verringerung der Steifigkeitswerte strukturierter Feibleche bestimmt. Der Einfluss der Geometrie, der Richtung, der Anordnung und der Lage der Struktur sowie des Ausgangswerkstoffes auf die mechanischen Steifigkeiten konnten nachgewiesen und das Strukturverhalten anhand verschiedener ausgewählter Beanspruchungen (Zug, Biegung, Torsion, Druck) dargestellt werden. Die Definition für die Grundlagen zur Gestaltung des Versuchswerkzeuges für Zieh- und Hydroformverfahren stellten einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit dar. Zum einen konnten werkstoffmecha-

nische Festigkeitskennwerte und zum anderen Umformeigenschaften für Strukturbleche ermittelt werden. Die Hauptzielsetzung in STERZING [Ste05] beispielsweise bestand im Nachweis des Leichtbaupotenzials wölbstrukturierter Feinbleche und in der Definition wissenschaftlich abgesicherter Grundlagen für deren umformtechnischen Verarbeitung. Dazu wurden im Wesentlichen die Auswirkungen des Strukturierungs- und des anschließenden Richtprozesses auf den Ausgangszustand des Blechwerkstoffes ermittelt und dargestellt. Das wölbstrukturierte Feinblech erfuhr eine umfassende wissenschaftliche Charakterisierung, wobei unterschiedliche Werkstoffe, Strukturgrößen, -ausbildungen und -geometrien in die Untersuchungen herangezogen wurden.

Die vergangenen und laufenden Forschungsarbeiten hinsichtlich strukturierter Bleche an der BTU Cottbus-Senftenberg (ehemals BTU Cottbus) umfassen bisher hauptsächlich deren Charakterisierung sowie die relevanten Fertigungsprozesse des Schneidens, Umformens und Fügens zur Weiterverarbeitung strukturierter Bleche ([Fri11],[Sch10]). Eine der neusten Arbeiten von MALIKOV [Mal13] beispielsweise beschäftigt sich mit den experimentellen und numerischen Untersuchungen der Umformung von strukturierten Blechen. Das Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung der Prozessparameter und -grenzen für das Tiefziehen, Biegen und Falzen von strukturierten Blechen. Dabei wird insbesondere auf das Werkstoffverhalten von strukturierten Blechen beim Umformen und die experimentelle Ermittlung des Einflusses der Strukturierung auf die Prozessgrenzen eingegangen. Die dort durchgeführten numerischen Untersuchungen legen den Schwerpunkt auf die *FE*-Simulation der Prozesskette für die Herstellung von Bauteilen aus strukturierten Blechen. Der bisherige Einsatz von strukturierten Blechen z.B. bei der Rückwand des Daimler *SLK* oder bei Miele Waschtrommeln sollen nicht die einzigen Anwendungen bleiben. Es sind jedoch noch mannigfaltige Untersuchungen notwendig um den vielseitigen Einsatz zu gewährleisten. Aufgrunddessen wurden im Rahmen der internationalen Graduiertenschule der BTU, speziell in der Fachklasse „Leichtbaudesign mit strukturierten Halbzeugen“, derzeit die notwendigen Untersuchungen jeglicher Merkmale strukturierter Bleche durchgeführt. Dabei sind alle denkbaren physikalischen Aspekte abgedeckt, wie z.B. die Herausarbeitung der strömungsmechanischen und akustischen Vorteile, ihres Potenzials innerhalb eines Tragbalkens sowie zum Beispiel die Charakterisierung ihrer Korrosionsbeständigkeit. Auf Basis dieser Erkenntnisse soll die Weiterverarbeitung der Bleche vereinfacht werden.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Erarbeitung der Grundlagen numerischer

Berechnungen für aus strukturierten Blechen bestehende Bauteile. Hinsichtlich numerischer Techniken zur effektiveren Berechnung von komplexen Bauteilen gibt es verschiedene Methoden zur Vereinfachung detaillierter Strukturen. So gibt es beispielsweise in gängigen *FE*-Softwarepaketen die Vorgehensweise der Submodellierung. In dieser Arbeit wird jedoch auf eine andere Methode zurückgegriffen. Mithilfe von Homogenisierungsprozessen wird ein „effektives“ Ersatzkontinuum entwickelt, welches letztlich die Rechenzeit für Kalkulationen von solchen Bauteilen erheblich reduzieren soll. Das anschließende Abgleichen und die Validierung des Modells ermöglicht eine Verwendung des Ersatzmodells für zukünftige simulatorische Auslegungen sowie die Übertragung der Homogenisierungsvorgehensweise auf andere periodische Strukturen.

2. Theoretische Grundlagen

Zum Verständnis der später angewandten Berechnungsverfahren sind einige theoretische Grundlagen notwendig. Dabei wird im Wesentlichen auf die für diese Arbeit relevanten Zusammenhänge eingegangen.

2.1. Kontinuumsmechanische Grundlagen

Im vorliegenden Abschnitt werden zunächst die Grundlagen der Kontinuumsmechanik in gleicher Weise wie in [Hoh03] erläutert, wobei die bedeutenden Grundsätze nur in kurzer Form aufgeführt werden. Für eine detaillierte Einsicht in die dargestellte Thematik soll hier zusätzlich auf die entsprechende Fachliteratur wie z.B. [Alt94], [Bet01] und [Mar94] verwiesen werden.

2.1.1. Kinematik

Die Kinematik befasst sich mit der Bewegung von Körpern oder Körperpunkten im Raum ohne auf die Ursachen dieser Bewegung einzugehen [Küh00]. Werden über die Kinematik starrer Körper hinaus noch die Bewegungen deformierbarer Körper betrachtet, so erhalten die Verformungen in Form von relativen Lageänderungen der Körperpunkte eine besondere Bedeutung. Im Allgemeinen beschreiben Deformationen alle Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers, während Verzerrungen die Verformungen selbst darstellen, alle Anteile der Starrkörperbewegungen ausgenommen [Alt94].

Es wird ein zusammenhängendes Massekontinuum (vgl. Abbildung 2.1.1) betrachtet, welches zu einer Referenzzeit das räumliche Gebiet Ω einnimmt. Ein Kontinuum bezeichnet “eine Punktmenge, die den Raum oder Teile des Raumes zu jedem Zeitpunkt stetig ausfüllt” (vgl. [Alt94]). Einem solchen Kontinuum, und somit seiner Punktmenge, werden bestimmte Materialeigenschaften zugeordnet. Die genannte Abbildung zur Referenzzeit entspricht der Referenzkonfiguration. Bewegt sich der Körper weiter im Raum, dann be-

findet er sich zum aktuellen Zeitpunkt in der Momentankonfiguration und wird auf das räumliche Gebiet $\hat{\Omega}$ abgebildet. Die Bewegung von einer anfänglichen zu einer aktuellen räumlichen Abbildung wird als stetige, zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen aufgefasst.

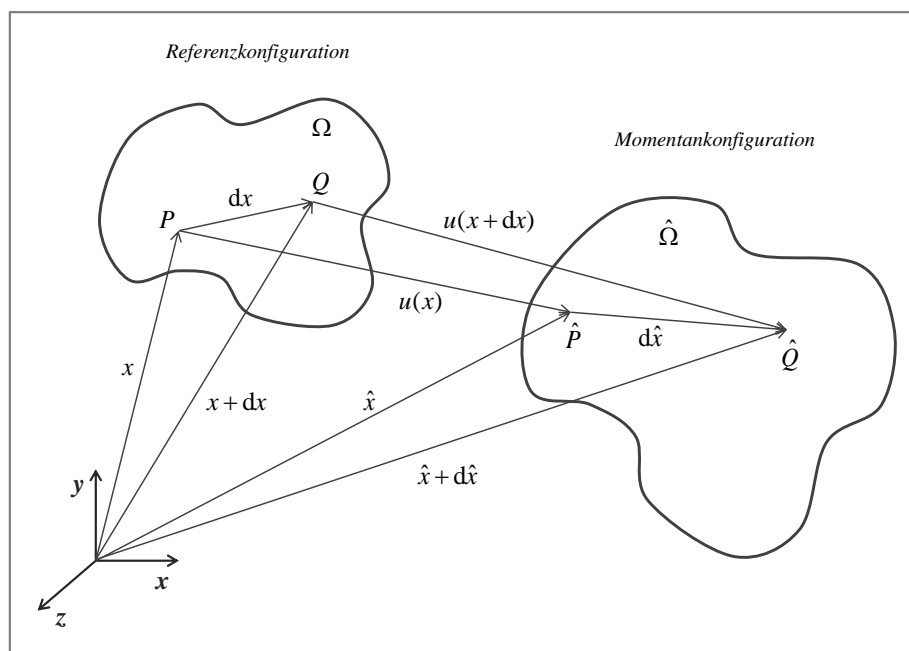


Abbildung 2.1.1.: Deformation eines materiellen Körpers (vgl. [Hoh03])

Die eindeutige Beschreibung eines materiellen Punktes P des Körpers in der Referenzkonfiguration erfolgt durch seinen Ortsvektor \boldsymbol{x} . Dieser materielle Punkt befindet sich in der Momentankonfiguration im räumlichen Punkt \hat{P} und wird dort durch den Ortsvektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ charakterisiert. Die Differenz der Ortsvektoren dieser beiden Konfigurationen wird als Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ des materiellen Punktes P bezeichnet [Hoh03]. Daraus ergeben sich die Komponenten des Vektors zu

$$u_i = \hat{x}_i - x_i . \quad (2.1.1)$$

Analog zur Beschreibung des materiellen Punktes P wird sein benachbarter Punkt Q mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ in der Referenzkonfiguration während der Bewegung auf den räumlichen Punkt \hat{Q} mit dem Ortsvektor $\hat{\boldsymbol{x}} + d\hat{\boldsymbol{x}}$ in der Momentankonfiguration verschoben, sowie das die beiden Punkte verbindende Linienelement $d\boldsymbol{x}$ auf $d\hat{\boldsymbol{x}}$. Die Abbildung dieses Linienelements von der Referenz- in die Momentankonfiguration geschieht mithilfe

des materiellen Deformationsgradiententensors \mathbf{F} :

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} . \quad (2.1.2)$$

Durch Anwendung der EINSTEIN'schen Summationskonvention werden über einem Term doppelt auftretende Indizes summiert. Die Komponenten des Deformationsgradienten lassen sich im kartesischen Koordinatensystem auch ausdrücken gemäß

$$F_{ij} = u_{i,j} + \delta_{ij} , \quad (2.1.3)$$

wobei $u_{i,j}$ die Größe u_i partiell nach x_j ableitet und das KRONECKER-Symbol δ_{ij} für den Einheitstensor steht. [Hoh03]

Die Deformation von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration kann nach

$$F_{ij} = R_{ik}U_{kj} = V_{ik}R_{kj} \quad (2.1.4)$$

polar unterteilt werden in eine Rotation bei konstanter Länge und eine Streckung vor oder nach der Drehung. Dabei wird \mathbf{R} als Rotationstensor, \mathbf{U} als rechter und \mathbf{V} als linker Strecktensor bezeichnet. Abbildung 2.1.2 stellt die Unterteilung eines Deformationsvorgangs dar.

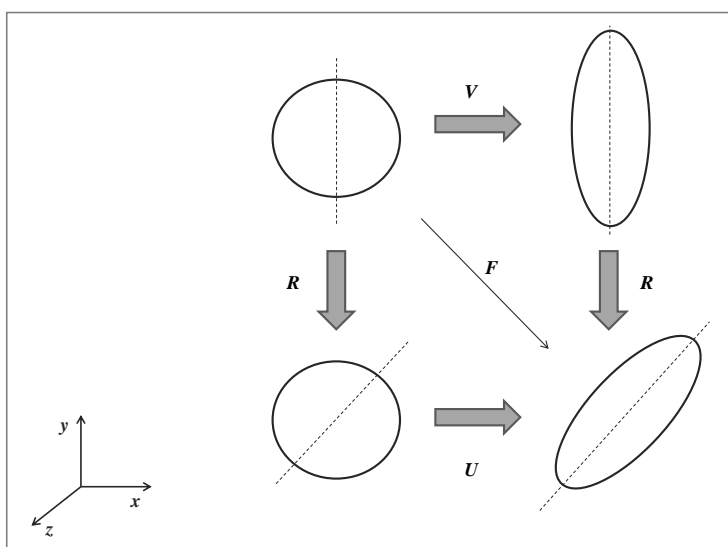


Abbildung 2.1.2.: Deformationsvorgang vom Referenzzustand zum Momentanzustand

Beim Übergang von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration wird die

Änderung des Betrags des Linienelements $d\mathbf{x}$ als Maß für die Deformation eines materiellen Körpers angenommen. [Hoh03] Bei Betrachtung des Quadrats eines jeweiligen Betrags gilt

$$d\hat{x}_k d\hat{x}_k - dx_l dx_l = 2 \gamma_{ij} dx_i dx_j \quad (2.1.5)$$

mit dem GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) . \quad (2.1.6)$$

Da die Komponenten $u_{i,j}$ des Verschiebungsgradienten in vielen technischen Anwendungen klein sind, können die auftretenden Quadrate im Vergleich zu den linearen Elementen vernachlässigt werden. Es ergibt sich der infinitesimale Verzerrungstensor der geometrisch linearen Kontinuumsmechanik

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (2.1.7)$$

Desweiteren gibt es den rechten CAUCHY-GREEN-Tensor \mathbf{D} und den linken CAUCHY-GREEN-Tensor \mathbf{B} , welche ebenso wichtige Verzerrungsmaße in dieser Arbeit darstellen. Auf Nennung weiterer existierender Verzerrungsmaße soll hier verzichtet werden, da sie in der vorliegenden Arbeit nicht von Wichtigkeit sind. Die Komponenten der CAUCHY-GREEN-Tensoren lauten

$$D_{ij} = F_{ki} F_{kj} = U_{ik} U_{kj} \quad \text{und} \quad (2.1.8)$$

$$B_{ij} = F_{ik} F_{jk} = V_{ik} V_{kj} . \quad (2.1.9)$$

2.1.2. Erhaltungssätze

Der Grundstein der Kontinuumsmechanik wird von einer Anzahl allgemein gültiger Bilanzgleichungen gelegt. Die Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und der Energie sind dabei die wichtigsten Bilanzgleichungen für die vorliegende Arbeit. Deren Erläuterung ist an [Hoh03] angelehnt.

Der Impulserhaltungssatz fordert, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers der Summe aller angreifenden Kräfte gleich sein muss. Das erweiterte zweite NEWTON'sche Gesetz der Punktmechanik auf Massekontinua lautet dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{u}_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{f}_i d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \hat{t}_i d\hat{A}. \quad (2.1.10)$$

Dabei beschreibt $\partial\hat{\Omega}$ die Oberfläche vom räumlichen Gebiet $\hat{\Omega}$ in der Momentankonfiguration, auf die der Spannungsvektor mit den Komponenten \hat{t}_i wirkt. Innerhalb von $\hat{\Omega}$, das die Dichte $\hat{\rho}$ besitzt, wirken die Komponenten des Massenkraftvektors \hat{f}_i .

Analog lautet die Aussage des Drehimpulserhaltungssatzes, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses der Summe aller angreifenden Momente gleich sein muss. Mit dem Permutationssymbol ϵ_{ijk} und dem Abstand $\hat{r}_i = \hat{x}_i - \hat{x}_i^0$ zu einem Bezugspunkt mit dem Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}^0$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \epsilon_{ijk} \hat{r}_i \hat{u}_j d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \epsilon_{ijk} \hat{r}_i \hat{f}_j d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \epsilon_{ijk} \hat{r}_i \hat{t}_j d\hat{A}. \quad (2.1.11)$$

Der Energieerhaltungssatz der Mechanik besagt, dass bei einer Bewegung eines materiellen Körpers die Änderung der im Körper gespeicherten inneren Energie und die Änderung der kinetischen Energie der Arbeit der Volumen- und Oberflächenkräfte gleich sein muss. Mit dem Inkrement $d\hat{w}$ der spezifischen inneren Energie gilt

$$\int_{\hat{\Omega}} d\hat{w} d\hat{V} + \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{u}_i d\hat{u}_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{f}_i d\hat{u}_i d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \hat{t}_i d\hat{u}_i d\hat{A}. \quad (2.1.12)$$

Der Massenerhaltungssatz besagt, dass die Änderung der Gesamtmasse eines Körpers während einer Bewegung dem Massenstrom über dessen Grenze gleich sein muss:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} d\hat{V} = \dot{m}. \quad (2.1.13)$$

In vielen Fällen gilt $\dot{m} = 0$.

Ferner existiert die, auch als zweiter Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnete, Entropiegleichung. Dieser Satz betrachtet Vorgänge, die mit einem Umsatz von mechanischer Energie in thermische Energie einhergehen. In der vorliegenden Arbeit werden aber keine solchen dissipativen Prozesse betrachtet, weshalb diese Bilanzgleichung nicht näher erläutert wird.

2.1.3. Spannung und Verzerrungsenergiedichte

Mithilfe der CAUCHY-Spannungsformel lassen sich in Anlehnung an [Hoh03] die Komponenten \hat{t}_i des Spannungsvektors auf der Oberfläche $\partial\hat{\Omega}$ in der Momentankonfiguration aus den Komponenten \hat{n}_i des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors auf $\partial\hat{\Omega}$ mit den Komponenten σ_{ij} des CAUCHY-Spannungstensors abbilden:

$$\hat{t}_i = \sigma_{ij} \hat{n}_j . \quad (2.1.14)$$

In der Referenzkonfiguration gilt analog

$$t_i = P_{ij} n_j , \quad (2.1.15)$$

mit den Komponenten $P_{ij} = \det \mathbf{F} \sigma_{ik} F_{jk}^{-1}$ des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors.

Nach Einsetzen der CAUCHY-Spannungsformel (2.1.14) in den Impulserhaltungssatz (2.1.10) mit anschließender Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumintegral mithilfe des GREEN'schen Satzes folgt mit der Wahl eines einzigen materiellen Punktes als Kontrollvolumen die Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i = \hat{\rho} \hat{\ddot{u}}_i . \quad (2.1.16)$$

Bei hinreichend langsam erfolgender Bewegung können die Trägheitseffekte vernachlässigt werden und es gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i = 0 . \quad (2.1.17)$$

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz (2.1.11) folgt die Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ des CAUCHY-Spannungstensors.

Wird die CAUCHY-Spannungsformel in den Energieerhaltungssatz (2.1.12) eingesetzt, ergibt sich mittels GREEN'schen Satzes und (2.1.16) das Inkrement der Verzerrungsenergiedichte

$$dw = P_{ij} dF_{ij} = \tau_{ij} d\gamma_{ij} \quad (2.1.18)$$

des materiellen Körpers bezogen auf die Referenzkonfiguration. Dabei sind die Komponenten des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors definiert als

$$\tau_{ij} = \det \mathbf{F} F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{jl}^{-1} . \quad (2.1.19)$$

Dieser resultiert aus einer „pull-back-Transformation“ des auf der Momentankonfiguration definierten KIRCHHOFF-Spannungstensors $K_{ij} = \det \mathbf{F} \sigma_{ij}$ in die Referenzkonfiguration [Mar94]. Der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist ebenso wie der CAUCHY-Spannungstensor symmetrisch.

Unter Betrachtung von kleinen Verschiebungsgradienten $u_{i,j}$ im Rahmen der geometrisch linearen Kontinuumsmechanik sind der CAUCHY-Spannungstensor und der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor näherungsweise gleich

$$\sigma_{ij} \approx \tau_{ij} . \quad (2.1.20)$$

Die quadratischen und kubischen Glieder der Komponenten des Verschiebungsgradienten in Gleichung (2.1.18) können gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden. Somit folgt näherungsweise für das Inkrement der Verzerrungsenergiedichte

$$dw \approx \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} . \quad (2.1.21)$$

Die auf die Referenzkonfiguration bezogene Verzerrungsdichte w und die auf die Momentankonfiguration bezogenen Verzerrungsdichte \hat{w} sind in dem Fall ebenfalls gleich.

2.1.4. Materialgleichung

Die bisher getrennt betrachteten Größen des Deformationszustands und des Spannungszustands eines materiellen Körpers sind mittels konstitutiver Gleichungen bzw. Stoffgesetze miteinander gekoppelt. Dadurch wird das Materialverhalten beschrieben.

Es existieren eine Reihe von verfügbaren Materialien mit verschiedensten physikalischen Verhaltensweisen. Folglich gibt es eine Vielzahl von unterschiedlichen Materialgleichungen. In der vorliegenden Arbeit wird fast ausschließlich elastisches Materialverhalten betrachtet, das den Umsatz von mechanischer in nichtmechanische Energie (Dissipation) ausschließt. Somit handelt es sich um einen vollständig reversiblen Vorgang. Desweiteren wird angenommen, dass die Fernwirkungen der Deformationen im Inneren des Materials nur schwach ausgeprägt sind und folglich vernachlässigt werden können. Die Spannungen an einem Punkt des Massekontinuums zu einer bestimmten Zeit lassen sich mithin

als eindeutige, aber nicht zwangsweise reversibel eindeutige Funktion der Verzerrungen an diesem Punkt zu dieser Zeit darstellen. Für detaillierte Beschreibungen sei erneut auf [Hoh03] verwiesen.

Das bedeutungsvollste elastische Stoffgesetz ist das HOOKE'sche Gesetz der linearen Elastizitätstheorie

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1.22)$$

mit den Komponenten des (konstanten) Elastizitätstensors

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} . \quad (2.1.23)$$

Der Elastizitätstensor muss dieselben Symmetrien aufweisen wie der infinitesimale Verzerrungstensor und der CAUCHY-Spannungstensor. Folglich sind von den insgesamt 81 Komponenten maximal 21 unabhängig. Ferner müssen aus energetischen Gründen (vgl. Gleichung (2.1.21)) die ersten beiden und die letzten beiden Indizes paarweise vertauschbar sein. In einem kartesischen Bezugssystem gilt im Ausnahmefall der Isotropie

$$C_{ijkl} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (2.1.24)$$

Hierbei sind das Elastizitätsmodul E und die Querkontraktions- oder POISSON-Zahl ν die einzigen unabhängigen Materialparameter. Das HOOKE'sche Gesetz (2.1.22) wird insbesondere zur Beschreibung des elastischen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei kleinen Deformationen eingesetzt und wird daher in der vorliegenden Arbeit angewandt.

2.1.5. Randwertproblem

Die Formulierung des allgemeinen Rand- und Anfangswertproblems unter isothermen Bedingungen kann wie folgt lauten: Ein gegebener Körper Ω in der Referenzkonfiguration gemäß Abbildung 2.1.3 ist durch $\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^t$ berandet.

Entlang des Teilrandes $\partial\Omega^u$ sind die Verschiebungen u_i und entlang $\partial\Omega^t$ sind die Komponenten t_i des Spannungsvektors vorgegeben. Darüberhinaus belasten die wirkenden Volumenkräfte f_i den Körper Ω . Bekannt ist die Position aller materieller Punkte in der Referenzkonfiguration zur Referenzzeit. Es ist das Verschiebungs- und Spannungsfeld des Körpers unter den wirkenden Lasten zu einem von der Referenzzeit verschiedenen Zeitpunkt gesucht. [Hoh03]

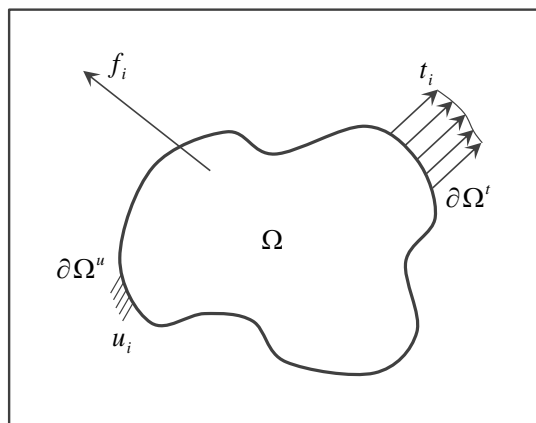


Abbildung 2.1.3.: Randwertproblem (vgl. [Hoh03])

Das mathematische Problem kann mithilfe der kinematischen Beziehungen (2.1.6) oder (2.1.7), den Bewegungsgleichungen (2.1.16) oder den Gleichgewichtsbedingungen (2.1.17) und den gewählten Materialbeziehungen als ein vollständiges Gleichungssystem gelöst werden. Mit den zugehörigen Randbedingungen auf $\partial\Omega^u$ und $\partial\Omega^t$ sowie der Geschwindigkeit \dot{u}_i zur Referenzzeit können die mechanischen Felder in der (zunächst unbekannt) Momentankonfiguration determiniert werden. Es wird zwischen den kinematisch zulässigen realen Verschiebungs- und Deformationsfeldern, welche die kinematischen Beziehungen und die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen, und den statisch zulässigen Spannungsfeldern, welche die Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungsrandbedingungen erfüllen, unterschieden.

Im Allgemeinen muss zur Lösung dieses mathematischen Problems auf numerische Näherungsverfahren zurückgegriffen werden, da eine analytische Lösung lediglich in Sonderfällen unter stark vereinfachenden Annahmen Erfolg bringt. Die Mehrzahl von numerischen Verfahren gründen auf Variationsformulierungen, wobei das Prinzip der virtuellen Arbeit den bedeutungsvollsten Ansatz darstellt. Um diesen herzuleiten bedarf es in erster Linie der skalaren Multiplikation der Bewegungsgleichungen (2.1.16) mit einer vektorwertigen Testfunktion δu_i und der Integration über das Volumen des materiellen Körpers. Bei der daraus resultierenden, nun schwachen Form der Bewegungsgleichung

$$\int_{\hat{\Omega}} \left(\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i^0 \right) \delta u_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \ddot{u}_i \delta u_i d\hat{V} \quad (2.1.25)$$

bzw. der schwachen Form des Gleichgewichts

$$\int_{\hat{\Omega}} \left(\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i^0 \right) \delta u_i \, d\hat{V} = 0 \quad (2.1.26)$$

ist die Erfüllung der jeweiligen Zusammenhänge nur im Integralmittel über den gesamten Körper notwendig und nicht punktweise genau. Entlang des Teilrandes $\partial\Omega^u$ muss die grundsätzlich beliebige Wahl der Testfunktionen verschwinden.

Gleichung (2.1.25) in der Referenzkonfiguration lässt sich ausdrücken als

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} \, dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_{ij} \, dV = \int_{\Omega} \rho f_i^0 \delta u_i \, dV + \int_{\partial\Omega} t_i^0 \delta u_i \, dA \quad (2.1.27)$$

bzw.

$$\delta U - \delta W - \delta T = 0, \quad (2.1.28)$$

wenn die CAUCHY-Spannungsformel (2.1.14) und der GREEN'sche Satz angewendet werden.

Dabei ist δU die Änderung der inneren Energie, δW die Arbeit der äußeren Kräfte und δT die Änderung der kinetischen Energie bei dieser Auslenkung, wenn die Testfunktion δu_i als virtuelle Verschiebung des Körpers aus seiner momentanen, die Bewegungsgleichungen oder Gleichgewichtsbedingungen erfüllenden Lage gewählt wird. Die äußeren Kräfte werden hierbei als Totlasten angenommen.

Dieser genannte Zusammenhang ist auch als HAMILTON-Variationsprinzip bekannt und bei der Lösung mechanischer Randwertprobleme ein bedeutungsvoller Ansatz. Das Prinzip besagt, dass ein Körper unter der Wirkung der äußeren Lasten f_i und t_i genau dann im Gleichgewicht oder in einer die Bewegungsgleichungen (2.1.16) erfüllenden Lage ist, wenn bei einer virtuellen Auslenkung des Körpers aus dieser Lage die Gleichung (2.1.28) erfüllt ist. Ferner kann die Aussage derart interpretiert werden, dass von allen kinematisch zulässigen Deformations- und Verschiebungsfeldern diejenigen die realen Felder sind, bei denen die geleistete Gesamtarbeit einen Stationärwert erreicht. Diese Interpretation führt im Falle von elastischem Materialverhalten auf das Prinzip vom Minimum der Verzerrungsenergie, da die im Körper gespeicherte Verzerrungsenergie dann ein Minimum annimmt. [Hoh03]

Verschiedene numerische Verfahren, insbesondere auch die Methode der Finiten Elemente nutzen das Prinzip der virtuellen Arbeiten. In Abschnitt 2.3 soll näher auf die Methode der Finiten Elemente eingegangen werden, da diese für die vorliegende Arbeit von

Wichtigkeit ist.

2.1.6. Flächentragwerke

Flächentragwerke besitzen das Merkmal, dass deren Ausdehnung in zwei Raumrichtungen vergleichsweise groß zur dritten Raumrichtung ist und sie eben oder gekrümmt sein können. In vielen technischen Anwendungen, speziell im Leichtbau, sind Flächentragwerke von besonderer Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff als übergeordneter Ausdruck verwendet für die Aufteilung in die weiter unten erläuterten Begriffe der Scheibe, Platte und Schale.

Nach [Hoh03] wird ein Flächentragwerk in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem x_i betrachtet. Innerhalb der Mittelfläche liegen die x_1 - und die x_2 -Achse, während die x_3 -Achse in Richtung der Flächennormalen gerichtet ist. Die Entwicklung in Potenzreihen der Komponenten des Verschiebungsfeldes nach der x_3 -Richtung basiert auf der verhältnismäßig kleinen Dicke d des Tragwerks und lautet wie folgt:

$$u_1(x_i) = u_1^{(0)}(x_1, x_2) + \frac{x_3}{d} u_1^{(1)}(x_1, x_2) + \frac{x_3^2}{d^2} u_1^{(2)}(x_1, x_2) + \dots \quad , \quad (2.1.29)$$

$$u_2(x_i) = u_2^{(0)}(x_1, x_2) + \frac{x_3}{d} u_2^{(1)}(x_1, x_2) + \frac{x_3^2}{d^2} u_2^{(2)}(x_1, x_2) + \dots \quad , \quad (2.1.30)$$

$$u_3(x_i) = u_3^{(0)}(x_1, x_2) + \frac{x_3}{d} u_3^{(1)}(x_1, x_2) + \frac{x_3^2}{d^2} u_3^{(2)}(x_1, x_2) + \dots \quad . \quad (2.1.31)$$

Hierbei wird durch die ersten Glieder dieser Gleichungen eine konstante Verschiebung des Querschnitts entsprechend der Verschiebung der Mittelfläche charakterisiert. Weiterhin veranschaulichen die zweiten Glieder eine Verdrehung des Querschnitts, wie sie bei einer Biegung auftritt, während durch die dritten Glieder eine Wölbung beschrieben wird. Im Allgemeinen werden die Reihen bereits nach wenigen Gliedern abgebrochen.

Unter Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit des Bezugssystems mittels kovarianter Ableitung kann der Gradient gebildet werden. Dies führt auf die mit der jeweiligen Näherung für Verschiebungen konsistenten Deformationen, wenn der Potenzreihenansatz in die kinematischen Beziehungen (2.1.6) oder (2.1.7) eingesetzt wird. Da die virtuellen Verschiebungen beliebig sind, müssen die jeweils zugehörigen Faktoren einzeln verschwinden. Mit dieser Tatsache und dem Einsetzen der Verschiebungen und Verzerrungen in das HAMILTON-Variationsprinzip (2.1.28) können die mit der entsprechenden Näherung konsistenten Bewegungsgleichungen erhalten werden.

Es folgen die Schnittlasten

$$N_{ij}(x_1, x_2) = \int_{x_3=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tau_{ij}(x_i) dx_3 \quad (2.1.32)$$

und

$$M_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = \int_{x_3=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tau_{ij}(x_i) x_3^k dx_3. \quad (2.1.33)$$

Indem die Reihenentwicklungen für die Verschiebungen und die Verzerrungen in das dreidimensionale Stoffgesetz und daraufhin die Stoffgleichungen in die Definition der Schnittlasten eingesetzt werden, resultieren Beziehungen zwischen den Schnittlasten und den einzelnen Gliedern der Reihenentwicklung der Verzerrungsmaße. Damit können die dreidimensional formulierten Materialgleichungen auf die Referenzfläche des Tragwerks abgebildet werden. [Hoh03]

Bei exemplarischer Betrachtung einer geometrisch und materiell linearen, schubweichen Biegetheorie werden die Reihenentwicklungen (2.1.29) und (2.1.30) für die Verschiebungen innerhalb der Ebene u_1 und u_2 (in-plane) nach dem linearen Glied und die Reihe (2.1.31) für die transversale Verschiebung u_3 nach dem konstanten Glied abgebrochen. Über das projizierte Stoffgesetz des Flächentragwerks hängen die einzigen, in diesem Fall in Gleichung (2.1.28) verbleibenden Schnittlasten mit den infinitesimalen in-plane Dehnungen $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) der Tragwerksreferenzfläche, den transversalen Dehnungen $\varepsilon_{\alpha 3}^{(0)}$ und den Krümmungen $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta}^{(1)}/d + u_{\beta,\alpha}^{(1)}/d \right)$ zusammen:

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & A_{22} & A_{23} & & B_{22} & B_{23} \\ \text{(sym.)} & & A_{33} & \text{(sym.)} & & B_{33} \\ \hline & & & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & & & & D_{22} & D_{23} \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & D_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(0)} \\ \varepsilon_{22}^{(0)} \\ \gamma_{12}^{(0)} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.1.34)$$

$$\begin{pmatrix} N_{13} \\ N_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ \text{(sym.)} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\varepsilon_{13}^{(0)} \\ 2\varepsilon_{23}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (2.1.35)$$

Indem die entsprechenden Komponenten C_{ijkl} des Elastizitätstensors über die Tragwerksdicke d integriert werden, resultieren die Steifigkeiten A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} und F_{ij} . Diese sind jedoch im Fall von A_{ij} und F_{ij} jeweils mit der nullten Potenz, im Fall von B_{ij} mit der ersten und im Fall von D_{ij} mit der zweiten Potenz des Abstands x_3 zur Referenzfläche zu wichten. [Hoh03]

Wenn das HOOKE'sche Gesetz (2.1.22) als Beziehung zwischen dem GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor und dem zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor aufgefasst wird, ergeben sich die Gleichungen (2.1.34) und (2.1.35) in gleicher Form auch im Fall von geometrischer Nichtlinearität aber materieller Linearität. Ferner sind diese Gleichungen nicht nur für ebene, sondern auch für gekrümmte Flächentragwerke gültig.

Die Koppelkoeffizienten B_{ij} würden im Fall von symmetrisch zur Mittelebene verteilten oder über die Tragwerksdicke konstanten Elastizitätseigenschaften verschwinden, womit das Gesamtproblem für ebene Flächentragwerke in zwei entkoppelte Teilprobleme zerlegt würde. Dabei beschreiben die beiden Teilprobleme zum einen das Scheiben- und zum anderen das Plattenproblem. Bei gekrümmten Flächentragwerken, welche auch als Schalen bezeichnet werden, ist eine solche Entkopplung in der Regel nicht möglich [Hoh03]. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten strukturierten Halbzeuge zählen zu dem Oberbegriff der Schalen und können somit nicht vereinfachend entkoppelt werden.

Zur Lösung der Problemstellungen kann auch im Bereich der Flächentragwerke die Methode der Finiten Elemente angewandt werden. Hierbei soll erneut auf den näher erläuterten Abschnitt 2.3 verwiesen werden.

2.2. Homogenisierung periodischer Strukturen

In der heutigen Zeit bestehen Sandwichtragwerke oder Bauteile zunehmend aus einer ausgeprägten Mikrostruktur. Trotz der heute bestehenden leistungsstarken Rechentechnik ist eine Modellierung und Berechnung des detaillierten, komplexen Bauteils wenig sinnvoll. Stattdessen kann mithilfe von makroskopischen Materialeigenschaften eine Beschreibung des Modells verwirklicht werden. Um die globalen Charakteristiken zu bestimmen, werden verschiedene Homogenisierungsverfahren verwendet. Das Ziel der Verfahrensweise ist es, ein homogenes Ersatzkontinuum zu ermitteln, dessen effektives Materialverhalten nahezu identisch ist mit dem des zu betrachtenden heterogenen Mediums.

2.2.1. Stand der Technik

Bisherige Arbeiten zur Erarbeitung von Homogenisierungsmethoden beziehen sich auf Composite- oder Sandwich-Strukturen. Beispielsweise ist das Ziel von [Hoh00] die Bestimmung der effektiven elastischen Eigenschaften von zweidimensionalen zellulären Materialien am Beispiel von zellulären Sandwichkernen. Ein verzerrungsenergiebasiertes Homogenisierungsvorgehen wird vorgeschlagen, welches Äquivalenz zwischen Mikrostruktur und effektivem Medium annimmt, falls die Verzerrungsenergie eines repräsentativen Volumenelements äquivalent ist. Je nachdem welche Struktur betrachtet wird, folgt, dass in beiden Fällen der mittlere Verzerrungszustand gleich ist. Mithilfe dieses Vorgehens kann die Verzerrungsenergie entweder analytisch oder numerisch abgeschätzt werden. Zwei Beispiele mit kommerziellen Sandwichkern-Geometrien liefern gute Näherungsergebnisse. [Als11] widmet sich der Untersuchung des mechanischen Verhaltens von Composite-Platten, welche periodische Aufteilung aufweisen. Das Modell lässt sich durch zwei wesentliche Parameter bestimmen: die Plattendicke und das periodische Ausmaß. Es wird empfohlen, dass die Dicke kleiner sein sollte im Vergleich zur periodischen Dimension. Die Ergebnisse zeigen, dass die Homogenisierungsmethode in der Lage ist, das Verhalten von periodischen Strukturen vorauszusagen. Die äquivalenten Elastizitätskoeffizienten und Mikro-Zwangsbedingungen konnten zunächst analytisch und anschließend mittels Finite-Elemente-Methode berechnet werden. Es konnte gezeigt werden, dass die Komplexität von numerischer Modellierung durch die Einführung eines ebenen, zweidimensionalen Modells, welches die gleichen Ergebnisse liefert wie ein dreidimensionales Modell, vereinfacht werden kann. [Rab04] beschreibt eine Homogenisierungsmethode für Sandwich-Strukturen, welche aus zwei Platten verflochten mit Balken und Schalen in einer periodischen Verbundstruktur bestehen. Bei der vorgeschlagenen Methode handelt es sich um eine quasi-Kontinuumsannäherung, die eine grundlegende Antwort durch die generalisierten Kräfte der Verbundelemente bewirkt. Der Vergleich des homogenisierten Modells mit dem voll diskreten Modell weist gute Übereinstimmungen auf. In [Pel99] wird eine numerisch entwickelte homogenisierte Relation zur Bestimmung des globalen Verhaltens von periodischen Composite-Strukturen mit elastoplastischen Komponenten abgeleitet. Der dargestellte Algorithmus ist allgemein gültig und kann auf jegliches nichtlineares Materialverhalten, welches das Komplementaritätsgesetz einhält, angewendet werden. Die hier präsentierte Methode ist derzeit begrenzt auf kleine Dehnungen, ebene Probleme und gleichbleibende proportionale Lastbedingungen. Weitere ähnliche Beispiele sind in

[Zoh00], [Xu02], [Tan00], [Gam89] sowie in [Lee96] zu finden.

[Har02] stellt eine wesentliche Arbeit dar. Dort wird das elastische Verhalten großer Hohlkörperflächenstrukturen berechnet, indem die Struktur mit Hilfe einer einfachen Methode, basierend auf der *FEM* mit dem Ziel Kennwerte zu berechnen, mit denen das Verformungsverhalten großer Strukturen bestimmt werden kann, homogenisiert wurde.

In [Bis51] wird der generelle Zusammenhang zwischen Spannung und plastischer Dehnung in einem polykristallinen Aggregat für jedes Metall bestimmt. Dort verformen sich verschiedene Kristalle durch Überschreiten einer kritischen Scherspannung. Volle Aufmerksamkeit gilt der nicht-gleichförmigen Deformation aufgrund von wechselseitigen Zwangsbedingungen zwischen den Körnern und Fasern eines Aggregats. Es wird aufgezeigt, dass plastisches Potenzial existiert welches identisch mit der Fließfunktion ist. Für eine Näherungsrechnung ergeben sich obere und untere Grenzen dieser Funktion für jedes System aus zusammengesetzten Spannungen. [Hil52] betrachtet den Zusammenhang zwischen dem elastischen Verhalten eines Aggregats und einem einzelnen Kristall. Die elastische Grenze unter verschiedenen Spannungssystemen wird ebenfalls untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass die elastische Spannungsgrenze eines flächenzentrierten Aggregats nicht zwei Drittel der Spannung überschreiten kann, bei welcher ausgeprägte plastische Deformation auftritt. Die Arbeit [Hil63] betrifft zwei isotrope Stadien, welche zusammengebunden sind um eine Mischung mit jeglichen Konzentrationen zu bilden. Verschiedene theoretische Ansatzmethoden werden elementar dargestellt sowie darüber hinaus die Ableitung der Ungleichheiten zwischen mehreren Modulen. Die Herangehensweise ist vollkommen allgemein und exakt. Zusätzlich kann das Problem komplett gelöst werden wenn die Stadien gleiche Steifigkeit aber unterschiedliche Kompressibilität besitzen. Die Geometrie kann hierbei willkürlich sein. Weitere Grundlagen werden ebenso in [Hil72] formuliert.

Für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten strukturierten Bleche wird die Herangehensweise des verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsverfahren in Anlehnung an [Hoh03] oder auch [Hoh00] näher betrachtet und ähnlich zum Vorgehen in [Har02] angewendet.

2.2.2. Methode des Repräsentativen Volumenelements

Zur weiteren Betrachtung ist es zunächst notwendig zu wissen, welche Effekte am Bauteil untersucht werden sollen. Um lokale, auf der Mikrostruktur stattfindende Effekte zu untersuchen, muss die reale, detaillierte Struktur herangezogen werden. Handelt es sich,

wie in der vorliegenden Arbeit, um Untersuchungen auf der globalen Ebene, so sind nur die globalen Auswirkungen der Struktur von Wichtigkeit. Die detaillierte Modellierung kann aus Effizienzgründen umgangen werden, da es genügt effektive Materialparameter zu bestimmen und somit die Homogenisierung der Mikrostruktur durchzuführen [Hoh03].

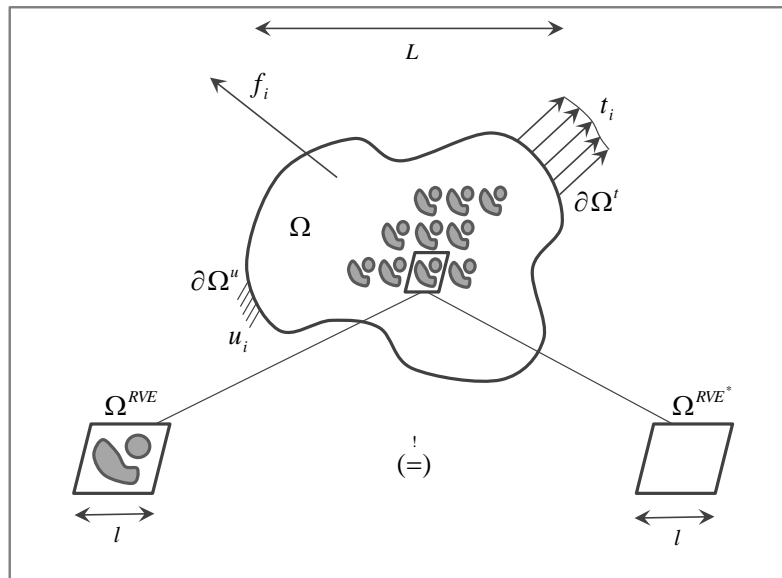


Abbildung 2.2.1.: Homogenisierung (vgl. [Hoh03])

Für ein allgemeines Homogenisierungsproblem wird die Referenzkonfiguration eines heterogenen Körpers Ω betrachtet (vgl. Abbildung 2.2.1), welcher durch den Rand $\partial\Omega = \partial\Omega^t \cup \partial\Omega^u$ begrenzt ist. Der Spannungsvektor $t_i = P_{ij} n_j$ mit den Komponenten P_{ij} des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors und den Komponenten n_j des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors wirkt auf dem Teilrand $\partial\Omega^t$. Desweiteren sind die Verschiebungen u_i auf dem Teilrand $\partial\Omega^u$ vorgegeben. Darüberhinaus herrscht eine Belastung auf den Körper durch die verteilten Volumenkräfte f_i . Als Ersatz für den heterogenen Körper Ω soll ein quasi-homogener Körper Ω^* ermittelt werden. Dieser weist keine Heterogenität auf, ist aber denselben Belastungen und Verschiebungen ausgesetzt und besitzt dieselbe Berandung. Die Bestimmung des vorerst unbekanntes Materialgesetzes und der zugehörigen Materialkonstanten des effektiven Mediums muss nun so erfolgen, dass das globale mechanische Verhalten des Ersatzkontinuums Ω^* mit dem des heterogenen Körpers äquivalent ist. [Hoh03]

Es lassen sich zwei Teilprobleme des Homogenisierungsproblems definieren (vgl. [Hil72]). Zum einen müssen die effektiven mechanischen Größen kontinuumsmechanisch sinnvoll

festgelegt werden. Zum anderen müssen diese Größen mithilfe eines geeignet bestimmten Zusammenhangs zwischen den mechanischen Feldern auf der makroskopischen und der mikroskopischen Ebene determiniert werden.

Da das zu bestimmende Verhalten auf der globalen Ebene bei periodischen Strukturen nicht explizit vom Ort abhängt, wird als Ausgangspunkt der Homogenisierung die Definition eines charakteristischen, repräsentativen Grundelements - einer Einheitszelle - herangezogen anstelle einer Analyse der beiden gesamten Körper Ω bzw. Ω^* . Die elementare Zelle soll die kleinstmögliche, in alle Raumrichtungen wiederkehrende Einheit der periodischen Struktur darstellen und statistisch repräsentativ für das betrachtete Material sein. Das auch als repräsentatives Volumenelement (*RVE*) bekannte charakteristische Grundelement sollte dennoch groß genug gewählt werden, sodass es die Heterogenität der Gesamtstruktur vertreten kann. Es muss folglich deutlich größer abgemessen sein als die charakteristische Länge der Mikrostruktur. Das repräsentative Volumenelement muss das gleichwertige mechanische Verhalten aufweisen wie das entsprechende Volumenelement des effektiven Mediums. Somit werden die erforderlichen lokalen Beanspruchungszustände der komplexen Struktur analysiert, um ein äquivalentes Ersatzkontinuum zu ermitteln, welches die gemittelten Materialeigenschaften der Gesamtstruktur repräsentiert. [Hoh03]

2.2.3. Mittelung der Spannungs- und Dehnungsfelder

Das repräsentative Volumenelement der heterogenen Struktur und das Volumenelement des quasi-homogenen Ersatzmediums müssen mechanisch gleichwertig sein. Dazu existieren eine Reihe von Ansätzen, wozu auch die zumeist verwendeten oberflächenbasierten Kriterien zählen. Dabei werden die Spannungszustände in beiden betrachteten Volumenelementen als äquivalent definiert, wenn die folgende Annahme der Oberflächenmittelung der Spannungsvektoren

$$\int_{\partial\Omega^{RVE}} t_i \, dA = \int_{\partial\Omega^{RVE}} t_i^* \, dA \quad (2.2.1)$$

mit den Komponenten t_i des Spannungsvektors auf einer Teiloberfläche $\partial\Omega^{RVE}$ des repräsentativen Volumenelements erfüllt ist. Nach BISHOP und HILL ([BIS51],[HIL52] und [Hil63]) lässt sich ebenso eine Volumenmittelung der Komponenten des Spannungstensors realisieren:

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \tau_{ij} \, dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \tau_{ij}^* \, dV = \bar{\tau}_{ij}^*. \quad (2.2.2)$$

Dabei bezeichnet V^{RVE} das Volumen des repräsentativen Volumenelements und $\bar{\tau}_{ij}$ die gemittelte Spannung. Beide Gleichungen (2.2.1) und (2.2.2) können sowohl im Rahmen der geometrisch linearen als auch der geometrisch nichtlinearen Kontinuumsmechanik angewandt werden.

Desweiteren bedarf es einer Beziehung zwischen den Dehnungszuständen γ_{ij} und γ_{ij}^* bzw. ε_{ij} und ε_{ij}^* beider repräsentativer Volumenelemente als zusätzliche Äquivalenzbedingung. Mit den Komponenten u_i des Verschiebungsvektors und den Komponenten n_i des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors auf den Oberflächen der Volumenelemente gilt

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\partial\Omega^{RVE}} u_i n_j dA . \quad (2.2.3)$$

Der GREEN'sche Satz ermöglicht eine Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral, sodass

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} u_{i,j} dV . \quad (2.2.4)$$

Es lassen sich die gemittelten Dehnungen bestimmen durch Einsetzen von (2.2.3) oder (2.2.4) in die Definition des GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensors (2.1.6) bzw. die Definition des infinitesimalen Dehnungstensors (2.1.7). Es folgt für finite Dehnungen

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V^{RVE}} \int_{\partial\Omega^{RVE}} (u_i n_j + u_j n_i) dA + \frac{1}{(V^{RVE})^2} \int_{\partial\Omega^{RVE}} u_k n_i dA \int_{\partial\Omega^{RVE}} u_k n_j dA \right) \quad (2.2.5)$$

bzw. für infinitesimale Deformationen

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\partial\Omega^{RVE}} (u_i n_j + u_j n_i) dA . \quad (2.2.6)$$

Entsprechend sehen die Definitionen für das Volumenelement des effektiven Mediums aus. Entlang der äußeren Oberflächen der repräsentativen Volumenelemente ist das Integralmittel der Verschiebungsdifferenzen $u_i n_j$ äquivalent:

$$\bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}^* \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^* . \quad (2.2.7)$$

Ein Homogenisierungsverfahren, welches auf den Gleichungen (2.2.1) bzw. (2.2.2) und (2.2.7) mit (2.2.5) bzw. (2.2.6) basiert, beinhaltet zwei Maßnahmen. Zunächst werden das

repräsentative Volumenelement der heterogenen Struktur und das aus dem Ersatzmedium bestehende Volumenelement in einer Reihe von unabhängigen Referenzdeformationszuständen verformt, sodass Gleichung (2.2.7) erfüllt ist. Die Menge der Referenzdeformationszustände und deren Form resultieren dabei aus der Art der zu bestimmenden Gleichung des effektiven Mediums und der Anzahl der hierin auftretenden Materialkonstanten. Desweiteren müssen die Materialparameter des Ersatzmediums derart determiniert werden, dass Gleichung (2.2.1) für alle Komponenten des Spannungsvektors bzw. Gleichung (2.2.2) für alle Komponenten des Spannungstensors bei allen Referenzdeformationszuständen erfüllt werden. [Hoh03]

Wenn im Rahmen der geometrisch linearen Beschreibung entweder die Spannungen oder die Verschiebungen entlang der äußeren Ränder des repräsentativen Volumenelements homogen verteilt sind, dann ist die über ein repräsentatives Volumenelement gemittelte Verzerrungsenergie äquivalent zu der aus dem Volumenmittel der Dehnungen und dem Volumenmittel der Spannungen berechneten mesoskopischen Verzerrungsenergiedichte ([Bis51] und [Hil52]):

$$\frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \sigma_{ij} dV \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} d\varepsilon_{ij} dV \quad (2.2.8)$$

$$d\bar{w} = \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} . \quad (2.2.9)$$

Die Erfüllung dieser Annahme gewährleistet die präzise Darstellung der Verteilung der Verzerrungsenergiedichte auf der makroskopischen Ebene unter der Verwendung der effektiven mechanischen Feldgrößen. Somit repräsentiert die als Prinzip von HILL bezeichnete Beziehung (2.2.8) bzw. (2.2.9) eine zwingende Anforderung an alle Homogenisierungsverfahren.

2.2.4. Verzerrungsenergiebasiertes Verfahren

Die im vorigen Unterabschnitt beschriebenen Mittelungsverfahren sind nur bedingt anwendbar. HOHE [Hoh03] beschreibt, dass das Auftreten von Momenten auf den äußeren Oberflächen des repräsentativen Volumenelements Einschränkungen hervorbringt. Diese Momente leisten Arbeit, wenn an deren Angriffspunkten in der deformierten Konfiguration Verdrehungen der Querschnitte auftreten. Die oberflächenorientierten Homogenisierungsverfahren können diesen Beitrag zur insgesamt geleisteten Arbeit meist nicht wiedergeben,

weshalb dann durch einen Fehler in der effektiven Verzerrungsenergie das Prinzip von HILL (2.2.9) nicht eingehalten würde.

Es lässt sich mit Hilfe von verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsverfahren (vgl. [Hil52]) Abhilfe verschaffen. Hierbei dient das Prinzip von HILL (2.2.9) direkt als Äquivalenzkriterium und die effektiven Spannungen werden im Nachlauf determiniert, als Energiekomplement zum gewählten Verzerrungsmaß (vgl. [Hoh99],[Hoh00]).

Die Definition des gleichwertigen mechanischen Verhaltens unterliegt hier der Bedingung

$$d\bar{w} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} dw \, dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} dw^* \, dV = d\bar{w}^* . \quad (2.2.10)$$

Bei Aufbringung eines auf der effektiven Ebene äquivalenten Deformationsinkrements resultiert in beiden Volumenelementen das gleiche mittlere Inkrement $d\bar{w}$ der Verzerrungsenergie. Gleichung (2.2.10) kann auch in nichtinkrementeller Form dargestellt werden, wenn bei der Deformation keine Energie dissipiert wird:

$$\bar{w} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} w \, dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} w^* \, dV = \bar{w}^* . \quad (2.2.11)$$

Ebenso lässt sich für den effektiven Deformationsgradienten eine Äquivalenz mittels Volumenmittelung definieren:

$$\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} F_{ij} \, dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} F_{ij}^* \, dV = \bar{F}_{ij}^* . \quad (2.2.12)$$

Nach HOHE [Hoh03] ist es durch die verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsmethode durch ihre kontinuumsmechanische Orientierung möglich, jegliche auftretenden Effekte direkt mechanisch zu interpretieren. Mit der Energieerhaltung gründet das Verfahren auf einem der grundlegenden Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik, weshalb die Beziehung von HILL (2.2.9) zwangsweise eingehalten wird. Sowohl auf lineare als auch auf materiell oder geometrisch nichtlineare elastische Homogenisierungsprobleme ist das Verfahren anwendbar.

Aufgrund der universellen Einsetzbarkeit und den weiteren in [Hoh03] genannten Vorteilen wird die verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsmethode in der vorliegenden Arbeit angewandt.

2.3. Finite-Elemente-Methode

In den letzten Jahren hat sich die Finite-Elemente-Methode (*FEM*) zu einem unverzichtbaren Werkzeug im Ingenieurwesen entwickelt und stellt heute in den verschiedensten Bereichen ein wichtiges Hilfsmittel für den Ingenieur dar. Wegen ihrer Vielfältigkeit und ihrer heutzutage häufigeren Anwendung in vielen Gebieten der Technik wird diese Methode in der vorliegenden Arbeit für die Untersuchung der strukturierten Bleche verwendet. An dieser Stelle soll nur ein kurzer Überblick über die Methode erfolgen. Für detaillierte Beschreibungen wird auf grundlegende Werke wie z.B. [Kno08], [Bat02] oder [Zie00] verwiesen.

Die Finite-Elemente-Methode - ein computerorientiertes Berechnungsverfahren zur näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen - basiert auf einem Variationsprinzip oder einem Prinzip der virtuellen Arbeit. Dabei werden die Integrationsbereiche in Gleichung (2.1.27) in Elemente endlicher Größe aufgeteilt, sodass sich die gesamten Integrale jeweils als Summe der Integrale über die einzelnen Elemente ergeben. Für das Verschiebungsfeld u_i innerhalb eines jeden Elements wird ein kinematisch zulässiger, stückweise definierter Ansatz gemacht [Zie00]. Diese Ansatzfunktionen werden mit den Funktionswerten in den Knoten, welche die Verknüpfungspunkte der Elemente zueinander darstellen, gewichtet. Ihre Verschiebungen sind die zu bestimmenden Freiheitsgrade des diskretisierten Systems. Es gibt verschiedene Elementtypen, die je nach Fall gewählt werden können.

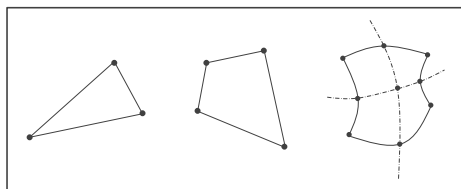


Abbildung 2.3.1.: 2D-Elemente

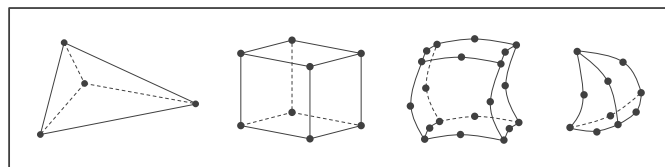


Abbildung 2.3.2.: 3D-Elemente

Dabei können z.B. auf zweidimensionale Schalenelemente (Abbildung 2.3.1) oder dreidimensionale Volumenelemente (Abbildung 2.3.2) zurückgegriffen werden, welche beispiels-

weise drei- oder viereckige bzw. drei- oder mehrflächige Gestalt aufweisen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden überwiegend geometrisch lineare, viereckige 4-Knoten-Schalenelemente für sehr dünne Schalen mit reduzierter Integration und 5 Freiheitsgraden pro Knoten verwendet. Damit können sämtliche Verformungen innerhalb der Ebene beschrieben werden.

Der Ausgangspunkt der *FEM* ist ein der Differentialgleichungsformulierung der Rand- und Anfangswertaufgabe äquivalentes Variationsprinzip wie das der virtuellen Verrückungen (*PdvV*) [Bat02]. Dieses besagt, dass für, auf einen sich im Gleichgewicht befindenden Körper wirkende, virtuelle Verschiebungen die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte gleich der gesamten inneren virtuellen Arbeit ist:

$$\delta W_{\text{innen}} = \delta W_{\text{außen}} . \quad (2.3.1)$$

Betrachtet wird ein dreidimensionaler Körper Ω in einem ortsfesten Koordinatensystem X, Y, Z mit der Oberfläche $\partial\Omega$. Auf die Teilfläche $\partial\Omega^t$ des Körpers wirkt die verteilte Oberflächenlast \mathbf{t} , auf den gesamten Körper die Volumenkraft \mathbf{f}^V und auf eine Anzahl von Kraftangriffspunkten die konzentrierten Einzelkräfte \mathbf{f}_C^i . Auf dem Verschiebungsrand $\partial\Omega^u$ sind die Verschiebungen \mathbf{u} vorgeschrieben.

Mit dem Elastizitätsgesetz für linear-elastische Materialien

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_I , \quad (2.3.2)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ die Spannungen, $\boldsymbol{\sigma}_I$ die Vorspannungen, \mathbf{C} die Elastizitätsmatrix und $\boldsymbol{\varepsilon}$ die Verzerrungen darstellen, folgt für den elastischen Körper mit den virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ und den zugehörigen Verzerrungen $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_I \, dV}_{\text{innere virtuelle Arbeit}} = \underbrace{\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}^V \, dV + \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} \, dA + \sum_i \delta\mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_C^i}_{\text{äußere virtuelle Arbeit}} . \quad (2.3.3)$$

Durch Diskretisierung des Körpers in finite Elemente, die in den Elementknoten miteinander verknüpft sind, lassen sich die benötigten Gleichungen zur *FE*-Berechnung herleiten. Die Verschiebungen innerhalb eines jeden Elements werden in einem lokalen Koordinatensystem x, y, z als Funktion der Verschiebungen in den Elementknoten angenommen. Es ergeben sich n Gleichungen für die insgesamt n unbekanntes diskreten Knotenverschie-

bungskomponenten. Für das m -te Element des Körpers gilt

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \mathbf{u}, \quad (2.3.4)$$

wobei der Vektor \mathbf{u} die globalen Verschiebungskomponenten für alle n Elementknoten beinhaltet und die Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(m)}$ für die Verschiebungen die inneren Elementverschiebungen des Elements m mit den gesamten Knotenverschiebungen verknüpft. Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix $\mathbf{B}^{(m)}$, welche sich aus der Interpolationsmatrix bestimmen lässt, verbindet die Verzerrungen des m -ten Elementes mit den gesamten Knotenverschiebungen laut

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \mathbf{u}. \quad (2.3.5)$$

Nach Aufsummierung der Integrale für eine Gruppe von finiten Elementen bzgl. der Knotenverschiebungen sowie der Übertragung von Gleichungen (2.3.4) und (2.3.5) auf die virtuellen Verschiebungen bzw. Verzerrungen folgt durch Einsetzen in Gleichung (2.3.3)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \left[\sum_m \int_{\Omega^{(m)}} (\mathbf{B}^{(m)})^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \bar{\mathbf{u}} = \\ \delta \mathbf{u}^T \left[\sum_m \int_{\Omega^{(m)}} (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{f}^{V^{(m)}} dV^{(m)} - \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} (\mathbf{B}^{(m)})^T \boldsymbol{\sigma}_I^{(m)} dV^{(m)} + \right. \\ \left. \sum_m \int_{\partial\Omega^{(m)}} (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{t}^{(m)} dA^{(m)} + \sum_i (\mathbf{H}_i^{(m)})^T \mathbf{f}_C^i \right] \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Nach BATHE [Bat02] können aus der Gleichung (2.3.6) die Gleichgewichtsbeziehungen der Elementgruppierungen bezüglich der Knotenverschiebungen

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.3.7)$$

abgeleitet werden, mit der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_m \underbrace{\int_{\Omega^{(m)}} (\mathbf{B}^{(m)})^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}}_{=\mathbf{K}^{(m)}} \quad (2.3.8)$$

und dem Lastvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_V + \mathbf{f}_A - \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_C . \quad (2.3.9)$$

Dieser besteht aus den Element-Volumenkräften

$$\mathbf{f}_V = \sum_m \underbrace{\int_{\Omega^{(m)}} \left(\mathbf{H}^{(m)} \right)^T \mathbf{f}^{V(m)} dV^{(m)}}_{=\mathbf{f}_V^{(m)}} , \quad (2.3.10)$$

den Element-Oberflächenkräften

$$\mathbf{f}_A = \sum_m \underbrace{\int_{\partial\Omega^{(m)}} \left(\mathbf{H}^{(m)} \right)^T \mathbf{t}^{(m)} dA^{(m)}}_{=\mathbf{f}_A^{(m)}} , \quad (2.3.11)$$

den Element-Anfangsspannungen

$$\mathbf{f}_I = \sum_m \underbrace{\int_{\Omega^{(m)}} \left(\mathbf{B}^{(m)} \right)^T \boldsymbol{\sigma}_I^{(m)} dV^{(m)}}_{=\mathbf{f}_I^{(m)}} \quad (2.3.12)$$

und den Knoten-Einzellasten

$$\mathbf{f}_C = \sum_i \left(\mathbf{H}_i^{(m)} \right)^T \mathbf{f}_C^i . \quad (2.3.13)$$

Die Beziehung (2.3.7) spiegelt das statische Gleichgewicht der Elementgruppierung wider. Um nicht nur statische, sondern ebenfalls dynamische Problemstellungen lösen zu können, müssen neben den statischen Kräften ebenso die Trägheitskräfte berücksichtigt werden, womit das D'ALEMBERT'sche Prinzip Anwendung findet. Die auf das Element wirkende Volumenkraft (2.3.10) wird damit um die Trägheitskraft wie folgt erweitert:

$$\mathbf{f}_V = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left[\mathbf{f}^{V(m)} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{u}} \right] dV^{(m)} , \quad (2.3.14)$$

mit der Massendichte $\rho^{(m)}$ des Elementes m und der zweiten Zeitableitung $\ddot{\mathbf{u}}$ der Verschiebung. Die Gleichgewichtsbeziehung (2.3.7) gestaltet sich damit zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} , \quad (2.3.15)$$

wobei

$$\mathbf{M} = \sum_m \underbrace{\int_{\Omega^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{=\mathbf{M}^{(m)}} \quad (2.3.16)$$

die Strukturmassenmatrix repräsentiert.

Sollen darüberhinaus geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskräfte in Gleichung (2.3.15) einbezogen werden, müssen diese ebenfalls bereits in (2.3.14) mittels Dämpfungskonstanten $\kappa^{(m)}$ des m -ten Elementes berücksichtigt werden:

$$\mathbf{f}_V = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left[\mathbf{f}^{V^{(m)}} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{u}} - \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{u}} \right] dV^{(m)}. \quad (2.3.17)$$

Dadurch ergibt sich anstelle von Gleichung (2.3.15)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.3.18)$$

mit der Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D} = \sum_m \underbrace{\int_{\Omega^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{=\mathbf{D}^{(m)}}. \quad (2.3.19)$$

Es existieren verschiedene Ansatzfunktionen um das Verschiebungsfeld innerhalb der einzelnen Elemente zu bestimmen. Häufig jedoch werden polynomiale Ansätze gewählt. Mittels der Ansatzfunktionen lassen sich die Elementsteifigkeitsmatrizen, Dämpfungsmatrizen und Massenmatrizen ermitteln, um durch anschließende Approximation aller Elemente sowie mithilfe von Materialkennwerten eine Näherungslösung des betrachteten Problems zu gewinnen.

2.3.1. Numerische Modalanalyse

Neben der strukturellen Analyse einer Elementgruppierung hinsichtlich auftretender Spannungen und Verzerrungen ist häufig auch das Schwingungsverhalten von Interesse. Dieses wird mithilfe der sogenannten Modalanalyse untersucht, welche die modalen Systemparameter in Form von Eigenwerten und Eigenformen ermittelt. Ein angeregtes und anschließend sich selbst überlassenes System führt freie Schwingungen (Eigenschwingungen) aus.

Im speziellen Fall der numerischen Modalanalyse wird lediglich das Systemverhalten ohne äußere Anregung betrachtet, insbesondere die Eigenschwingungen eines ungedämpften Systems. Die Bewegungsgleichung (2.3.18) vereinfacht sich dadurch zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = 0 . \quad (2.3.20)$$

Durch Einsetzen des allgemeinen Ansatzes

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi} e^{i\omega t} \quad (2.3.21)$$

in Gleichung (2.3.20) resultiert das allgemeine Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{\Phi} = 0 . \quad (2.3.22)$$

Für die nichttriviale Lösung des klassischen Eigenwertproblems muss die Koeffizientenmatrix singulär sein:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 . \quad (2.3.23)$$

Die Berechnung der Determinante ergibt ein Polynom N -ten Grades bzgl. λ , wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems darstellt und die Eigenwerte $\lambda = \omega^2$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms repräsentieren. Für kleine N lässt sich das System durch eine eindeutige Lösung für das charakteristische Polynom der Determinanten bestimmen. Für komplexere Systeme jedoch gibt es diverse Näherungsverfahren, welche am Ende des Unterabschnitts kurz vorgestellt werden.

Die nichttrivialen Paare enthalten die Eigenwerte bzw. Eigenkreisfrequenzen $\lambda_i = \pm i \omega_i$ und die zugehörigen Eigenvektoren ϕ_i . Diese erfüllen das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i = 0 \quad (2.3.24)$$

und charakterisieren das Eigenverhalten eines linearen, mechanischen Systems.

Durch spaltenweise Anordnung der Eigenvektoren in einer Matrix resultiert die Modalmatrix des Systems

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \quad (2.3.25)$$

sowie die Diagonalmatrix der Eigenwerte

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_i] . \quad (2.3.26)$$

Die Eigenvektoren und folglich die Modalmatrix beschreiben lediglich die Schwingformen eines Problems. Somit sind die Amplituden beliebig und die Eigenvektoren bzw. die Modalmatrix damit frei skalierbar. Im proportional gedämpften Fall sind die Eigenvektoren stets reell und erfüllen die Eigenschaft der Massen- bzw. Steifigkeitsproportionalität, so dass

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag} [1] \quad \text{und} \quad (2.3.27)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag} [\lambda_i^2] . \quad (2.3.28)$$

Um symmetrische Eigenwertprobleme numerisch lösen zu können, werden Transformations- oder Iterationsverfahren herangezogen. Die verwendete *FEM*-Software stellt dafür drei Lösungsmöglichkeiten bereit: das LANCZOS-Verfahren, die Subspace-Iteration-Method (Unterraum-Iterationsverfahren) sowie das „Automatic Multi-Level Substructuring“ (*AMS*). Das LANCZOS-Verfahren repräsentiert dabei die Standardmethode sowie das leistungsfähigste Verfahren, weshalb es in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Es genügt die Eingabe des interessierenden Frequenzbereichs oder die gewünschte Anzahl von Eigenmoden, um den LANCZOS-Step auszuführen. Der Algorithmus transformiert die Matrizen des Eigenwertproblems in eine tridiagonale Form, wodurch die Gleichungen schneller numerisch gelöst werden können. Für eine weiterführende Informationen wird auf die Arbeiten von PARLETT [Par80], SIMON [Sim84], BATHE [Bat02] und [Das11] verwiesen.

2.4. Grundlagen der experimentellen Modalanalyse

Der heutzutage stetig wachsende Einfluss des Leichtbaus, die kontinuierlich zunehmende Anforderung an Konstruktionen und auch die Verwendung neuer Werkstoffe bedingen fortlaufend diffizilere Modelle zur Beschreibung der mathematischen Probleme. Für schwingungsfähige Systeme sind die systembeschreibenden Modellparameter Massen, Dämpfungen und Steifigkeiten weitestgehend exakt abzuschätzen. Jedes Modell basiert auf vereinfachenden Annahmen und besitzt folglich unweigerlich ein untrügliches Maß an Unsicherheiten. Mittels experimenteller Untersuchungen eines Systems kann jedoch das praxisnahe

Verhalten ermittelt und durch Vergleiche zu den numerischen Berechnungen die Modellgüte bestimmt werden.

Die Modalanalyse - eines der bekanntesten Verfahren zur experimentellen Systemanalyse - ermöglicht die experimentelle Ermittlung der modalen Parameter Eigenfrequenzen, Dämpfungen sowie Eigenvektoren des Systems. Durch diese Information ist die Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens gewährleistet sowie eine bedeutungsvolle Basis für weitere numerische Untersuchungen geschaffen. Für weiterführende Beschreibungen sei hier auf die Fachliteratur von beispielsweise [Gas12], [Ewi84] und [Sch99] Bezug genommen.

2.4.1. Theoretische Grundlagen

Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem für das auf N Freiheitsgrade diskretisierte System

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.4.1)$$

mit der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sowie dem Vektor der erregenden Kräfte \mathbf{F} und dem Verschiebungsvektor \mathbf{x} . Unter Annahme der sogenannten Proportional- bzw. RAYLEIGH-Dämpfung lässt sich die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} damit als Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix ausdrücken:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} . \quad (2.4.2)$$

Dadurch entkoppelt sich vorteilhaft neben der Massen- und Steifigkeitsmatrix ebenfalls die Dämpfungsmatrix im Rahmen der Modaltransformation. Insbesondere bei geringer Dämpfung und der Abwesenheit starker lokaler Dämpfer ist dieser Ansatz geeignet, weshalb nachfolgend die Bezeichnung \mathbf{R} anstelle von \mathbf{D} tritt.

Die modale Dämpfung D_r des r -ten Modes und die Koeffizienten α und β hängen folgendermaßen zusammen:

$$D_r = \frac{d_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{\alpha m_r + \beta k_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta \omega_r \right] . \quad (2.4.3)$$

Dabei können die Koeffizienten derart ermittelt werden, dass unter der Berücksichtigung von (2.4.3) ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden kann, wenn modale Dämpf-

fungswerte für den r -ten und s -ten Mode bekannt sind:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \frac{\omega_r \omega_s}{\omega_s^2 - \omega_r^2} \begin{bmatrix} \omega_s & -\omega_r \\ -\frac{1}{\omega_s} & \frac{1}{\omega_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r \\ D_s \end{bmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Im Allgemeinen liegen allerdings keine modeabhängigen Informationen zur Dämpfung vor, weshalb in der Praxis meist nur ein strukturabhängiger Dämpfungswert D verwendet wird. Dieser kann aus der Literatur entnommen werden. Unter der Vorgabe eines interessierenden Frequenzbereichs von ω_{min} bis ω_{max} resultieren die Koeffizienten wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2D}{\omega_{max} + \omega_{min}} \begin{bmatrix} \omega_{max} \cdot \omega_{min} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.5)$$

In Abbildung 2.4.1 ist der Einfluss der Koeffizienten in einem Diagramm veranschaulicht.

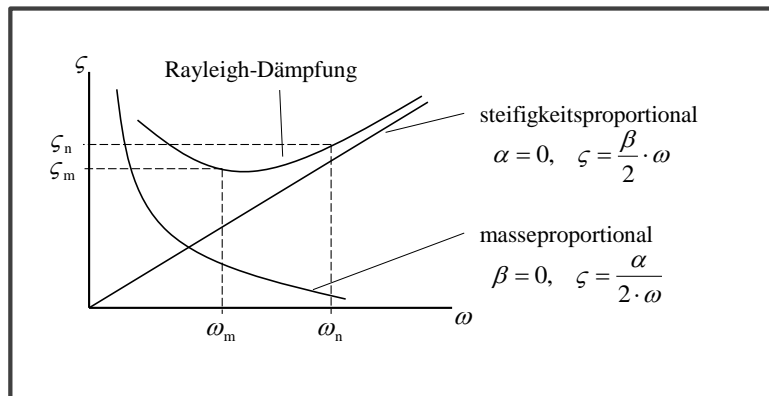


Abbildung 2.4.1.: Einfluss der Koeffizienten α und β ($\zeta = D$)

Wird im Differentialgleichungssystem (2.4.1) die rechte Seite zu Null gesetzt

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = 0, \quad (2.4.6)$$

können nun mit den unter Berücksichtigung von (2.4.4) bzw. (2.4.5) vollständig bekannten Systemmatrizen die modalen Parameter des Systems ermittelt werden.

Es entsteht das Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{R} \lambda + \mathbf{K}] \boldsymbol{\Psi} = 0, \quad (2.4.7)$$

wenn zur Lösung von (2.4.6) der Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi} e^{\lambda t} \quad (2.4.8)$$

eingesetzt wird. Dabei sind nichttriviale Lösungen lediglich möglich, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d.h.

$$\det [\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{R} \lambda + \mathbf{K}] = 0 . \quad (2.4.9)$$

Bei deren Lösung resultieren $2N$ konjugiert komplexe Eigenwerte λ_k gemäß

$$\lambda_k = -\beta_k \pm i \omega_k , \quad (2.4.10)$$

mit den Eigenkreisfrequenzen ω_k des gedämpften Systems und den Abklingkonstanten β_k . Einsetzen der Eigenwerte λ_k in die Gleichung (2.4.7) liefert zusätzlich die Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_k$, in denen jeweils ein Parameter frei zu wählen ist. Im proportional gedämpften Fall sind die Eigenvektoren stets reell und besitzen die Eigenschaft der Massen- und Steifigkeitsproportionalität, wobei m_j die generalisierten Massen und k_j die generalisierten Steifigkeiten bezeichnen:

$$\mathbf{\Psi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_k = \begin{cases} m_j, & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} , \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{\Psi}_j^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}_k = \begin{cases} k_j & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} . \quad (2.4.12)$$

Mittels Modaltransformation von (2.4.1) durch den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi} \mathbf{q}(t) , \quad (2.4.13)$$

mit der Modalmatrix $\mathbf{\Psi}$, welche die Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_k$ spaltenweise enthält, und Linksmultiplikation mit der transponierten Modalmatrix ergibt sich

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \mathbf{q} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{F} \quad (2.4.14)$$

bzw.

$$\mathbf{M}_{gen} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_{gen} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{gen} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{gen} , \quad (2.4.15)$$

mit der generalisierten Massenmatrix \mathbf{M}_{gen} , der generalisierten Dämpfungsmatrix \mathbf{R}_{gen} , der generalisierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{gen} und der generalisierten Erregerkraft \mathbf{F}_{gen} . Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen (2.4.11) und (2.4.12) sind in den Systemmatrizen ausschließlich die Hauptdiagonalen besetzt, wodurch sich das Differentialgleichungssystem (2.4.1) vollständig entkoppelt. Es entstehen k unabhängige Differentialgleichungen für den Einmassenschwinger

$$m_k \ddot{q} + r_k \dot{q} + k_k q = F_k , \quad (2.4.16)$$

die jeweils unabhängig voneinander gelöst werden können. Durch Rücktransformation von \mathbf{q} gemäß Gleichung (2.4.13) resultiert schlussendlich der Antwortvektor \mathbf{x} in physikalischen Koordinaten.

Wird auf das Ausgangsdifferentialgleichungssystem (2.4.1) die FOURIER-Transformation angewendet, so kann ein Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erreicht werden. Aus einem Differentialgleichungssystem entsteht somit ein lineares Gleichungssystem gemäß

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{R} + \mathbf{K}) \mathbf{X}(i\Omega) = \mathbf{F}(i\Omega) . \quad (2.4.17)$$

Umformung von (2.4.17) nach $\mathbf{X}(i\Omega)$ liefert

$$\mathbf{X}(i\Omega) = \underbrace{(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{R} + \mathbf{K})^{-1}}_{=\mathbf{H}(i\Omega)} \mathbf{F}(i\Omega) \quad (2.4.18)$$

mit der symmetrischen Systemübertragungsmatrix $\mathbf{H}(i\Omega)$.

Für ein diskretisiertes Gleichungssystem mit N Freiheitsgraden resultiert ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} H_{11}(i\Omega) & H_{12}(i\Omega) & \dots & H_{1N}(i\Omega) \\ H_{21}(i\Omega) & H_{22}(i\Omega) & \dots & H_{2N}(i\Omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(i\Omega) & H_{N2}(i\Omega) & \dots & H_{NN}(i\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(i\Omega) \\ F_2(i\Omega) \\ \vdots \\ F_N(i\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(i\Omega) \\ X_2(i\Omega) \\ \vdots \\ X_N(i\Omega) \end{bmatrix} . \quad (2.4.19)$$

Nach entsprechender Anwendung der FOURIER-Transformation auf die Gleichung (2.4.15)

ergibt sich

$$(-\Omega^2 \mathbf{M}_{gen} + i\Omega \mathbf{R}_{gen} + \mathbf{K}_{gen}) \mathbf{Q}(i\Omega) = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{F}(i\Omega) . \quad (2.4.20)$$

Wird die Gleichung (2.4.20) nach dem Vektor der FOURIER-transformierten modalen Koordinaten $\mathbf{Q}(i\Omega)$ umgestellt und der Ansatz analog zu (2.4.13) gemäß

$$\mathbf{X}(i\Omega) = \mathbf{\Psi} \mathbf{Q}(i\Omega) \quad (2.4.21)$$

eingesetzt, führt dies auf

$$\mathbf{X}(i\Omega) = \mathbf{\Psi} (-\Omega^2 \mathbf{M}_{gen} + i\Omega \mathbf{R}_{gen} + \mathbf{K}_{gen})^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{F}(i\Omega) . \quad (2.4.22)$$

Bei Systemanregung an einem Punkt j ergibt sich hieraus eine Systemantwort $\mathbf{X}(i\Omega)$. Diese lautet beispielsweise für den Punkt q :

$$X_q(i\Omega) = \sum_{k=1}^N \frac{\Psi_{qk} \Psi_{jk}}{-\Omega^2 m_k + k_k + i\Omega r_k} F_j(i\Omega) . \quad (2.4.23)$$

Dabei ist Ψ_{qk} die Koordinate des k -ten Eigenvektors an der Stelle q und analog Ψ_{jk} die Koordinate des k -ten Eigenvektors an der Stelle j . Die Koordinate der Übertragungsmatrix der j -ten Spalte und q -ten Zeile lässt sich gemäß

$$H_{qj}(i\Omega) = \frac{X_q(i\Omega)}{F_j(i\Omega)} = \sum_{k=1}^N \frac{\Psi_{qk} \Psi_{jk}}{-\Omega^2 m_k + k_k + i\Omega r_k} \quad (2.4.24)$$

bestimmen.

Es werden die Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften Systems

$$\omega_{0k} = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}} \quad (2.4.25)$$

und die Abklingkonstante

$$\beta_k = \frac{r_k}{2m_k} \quad (2.4.26)$$

bzw. das LEHR'sche Dämpfungsmaß

$$D_k = \frac{\beta_k}{\omega_{0k}} \quad (2.4.27)$$

eingeführt. Desweiteren finden die massennormierten Eigenvektoren

$$\Phi_{qk} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \Psi_{qk} \quad \text{bzw.} \quad \Phi_{jk} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \Psi_{jk} \quad (2.4.28)$$

Anwendung, wodurch sich

$$\Psi_k^T \mathbf{M} \Psi_k = m_k \quad \left| \cdot \frac{1}{\sqrt{m_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_k}} \right. \quad (2.4.29)$$

zu

$$\Phi_k^T \mathbf{M} \Phi_k = 1 \quad (2.4.30)$$

ergibt bzw. entsprechend

$$\Phi_k^T \mathbf{K} \Phi_k = \frac{k_k}{m_k} = \omega_k^2. \quad (2.4.31)$$

Dies führt auf

$$H_{qj}(i\Omega) = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_{qk} \Phi_{jk}}{\omega_{0k}^2 - \Omega^2 + i 2 \underbrace{D_k \omega_{0k}}_{=\beta_k} \Omega}. \quad (2.4.32)$$

Die modalen Parameter des Systems können aus den Koordinaten der Übertragungsmatrix (2.4.32) bestimmt werden. In der Praxis reicht es aus, lediglich eine Zeile oder Spalte zu bestimmen, da sämtliche hierfür notwendige Informationen in einer Zeile oder Spalte enthalten sind.

2.4.2. Praktische Grundlagen

Im Allgemeinen unterteilt sich die experimentelle Modalanalyse in drei Teilvorgänge: die Anregung des Systems, die Signalübertragung und die Signalanalyse.

Das System, wie hier z.B. das strukturierte Blech, wird an einem Punkt angeregt (Erreger-signal) und dessen Schwingungsantwort an einem anderen Punkt als Beschleunigung oder Geschwindigkeit gemessen (Antwortsignal). In der vorliegenden Arbeit erfolgt die messtechnische Erfassung und Übertragung von Erreger- und Antwortsignal über ein Frontend-System in Verbindung mit der angebrachten Software. Die modalen Größen lassen sich mit einer geeigneten Modalanalyse-Software mittels *SDOF*- und *MDOF*-Verfahren ermitteln. Anschließend können die berechneten Eigenvektoren graphisch dargestellt und animiert werden. Abbildung 2.4.2 zeigt die Schritte zur Aufnahme von Schwingungssignalen im Falle eines strukturierten Blechs auf.

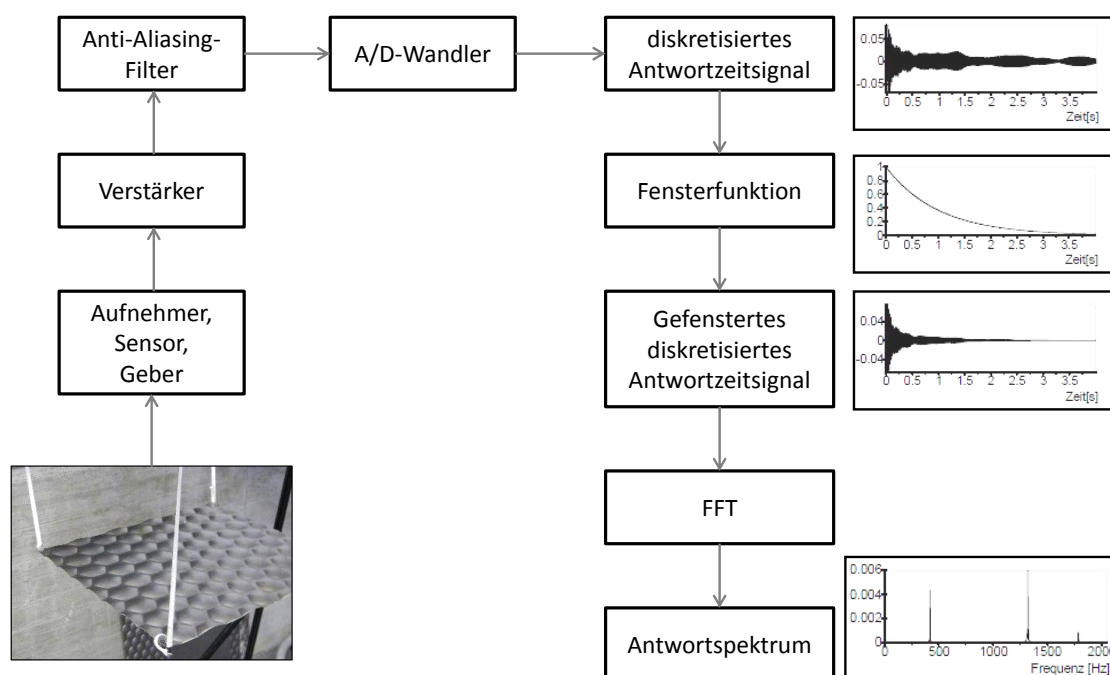


Abbildung 2.4.2.: Messkette zur Aufnahme kontinuierlicher Schwingungssignale im Falle eines strukturierten Blechs

2.4.2.1. Systemanregung

Um ein schwingungsfähiges System anzuregen, gibt es unterschiedliche Erregermöglichkeiten wie z.B. mittels Unwuchterregung oder durch ambiente Erregung. In der vorliegenden

Arbeit wird die Impulsanregung zur Durchführung der experimentellen Modalanalyse herangezogen.

Ein idealer Impuls regt alle Frequenzen gleichermaßen an. Jedoch lässt sich dieser in der Praxis nur näherungsweise umsetzen (vgl. Abbildung 2.4.3), da für die Erzeugung eines exakten Nadelimpulses unendlich viel Energie benötigt würde. Das Anregungsspektrum des realen Hammerschlags nimmt aufgrund des begrenzten Energieeintrags mit zunehmender Frequenz ab.

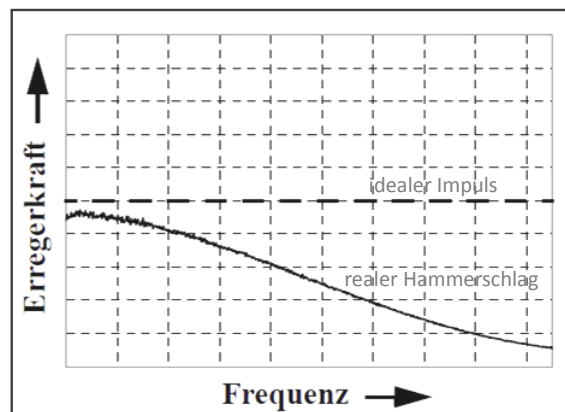


Abbildung 2.4.3.: Kraftspektrum eines idealen Impulses und eines realen Anschlagversuches

Im Allgemeinen findet für eine solche Impulsanregung ein Impulshammer Anwendung. In der vorliegenden Arbeit wurde sich dazu eines Miniaturmodalhammers mit 2 g Kopfmasse bedient, welcher ein Spannungssignal liefert und in Abbildung 2.4.4 dargestellt ist.



Abbildung 2.4.4.: Miniaturmodalhammer

Der gewünschte Frequenzbereich, in dem ein System angeregt werden soll, kann mithilfe der Härte und dem Gewicht der Hammerspitze reguliert werden (vgl. Abbildung 2.4.5). Der nutzbare Frequenzbereich der Systemanregung ist umso größer, je härter die Hammerspitze gewählt wird. Bei einer zu weichen Hammerspitze können gegebenenfalls nicht alle Eigenmoden hinlänglich angeregt werden, wodurch die Messergebnisse nicht zufrieden-

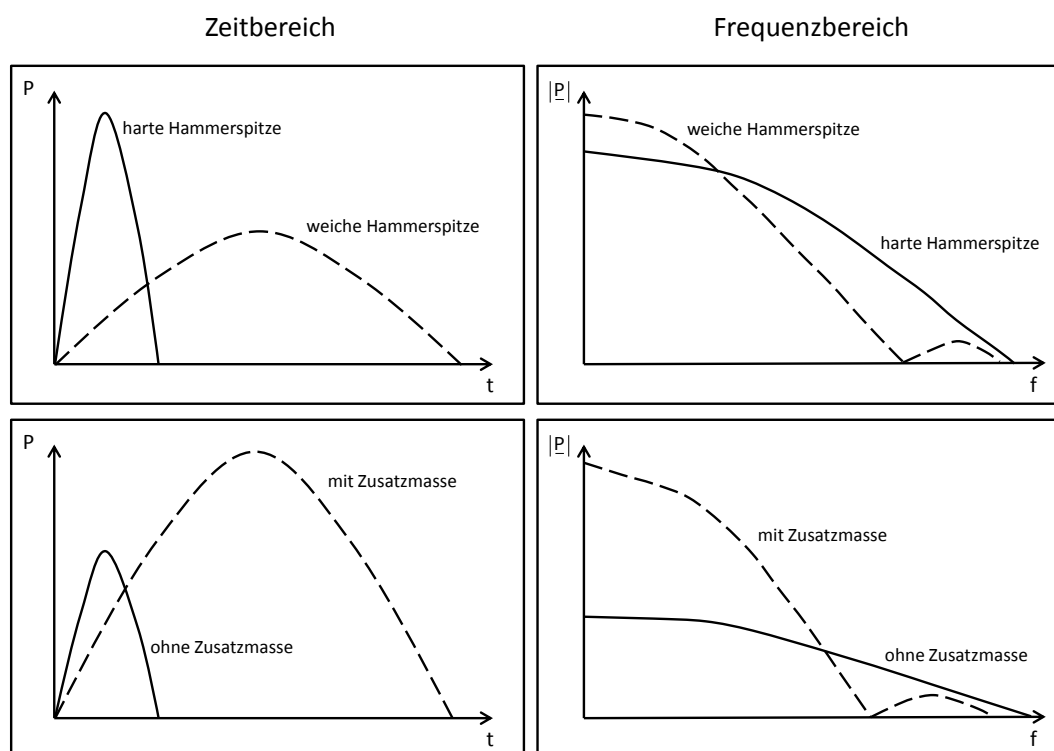


Abbildung 2.4.5.: Kraftimpuls und Erregerspektren für unterschiedliche Hammerhärten und Massen [Agi00]

stellend wären. Somit ist bei der Anregung aller interessierenden Eigenmoden die richtige Wahl der Hammerspitze maßgeblich.

2.4.2.2. Signalübertragung

Im Allgemeinen wird die Systemantwort auf eine Schwingungsanregung in Form von Geschwindigkeit oder Beschleunigung mittels Beschleunigungsaufnehmern oder aber ohne Kontakt mithilfe der Laser-DOPPLER-Vibrometrie gemessen. Für die vorliegende Arbeit wurde dies mit einem Ein-Punkt-Laser-Vibrometer vom Typ Polytec OFV 505 in Verbindung mit einem OFV 2500 Vibrometer-Controller verwirklicht. Dieser bedient sich zur Bestimmung der Schwingschnelle dem DOPPLER-Prinzip und der Interferometrie.

Der DOPPLER-Effekt charakterisiert die Erscheinung, dass die von einer Quelle abgestrahlten Frequenz nicht mit der empfangenen Frequenz übereinstimmt, wenn sich Quelle und Empfänger relativ zueinander bewegen. Der Empfänger erfährt eine höhere Frequenz als die Quelle abstrahlt, wenn sich beide einander nähern, während er bei einer Bewegung der beiden voneinander weg eine niedrigere Frequenz wahrnimmt. [Tip00]

Für elektromagnetische Wellen hängt die beobachtete Frequenzänderung von der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Empfänger ab. Dabei ist für die Höhe der Frequenzänderung unerheblich, ob sich die Quelle, der Beobachter oder beide bewegen. Zuzufolge des Relativitätsprinzips kann jeder Beobachter als ruhend angenommen werden. Dabei muss aber die Zeitdilatation mitberücksichtigt werden. Die beobachtete Frequenz f' für den relativistischen DOPPLER-Effekt lautet dann

$$f' = f \frac{1 + \frac{v}{c_0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = f \sqrt{\frac{c_0 + v}{c_0 - v}}, \quad (2.4.33)$$

mit der Frequenz f der elektromagnetischen Welle, der Geschwindigkeit v der Quelle und der Lichtgeschwindigkeit c_0 . Für kleine Geschwindigkeiten folgt

$$f' = f \left(1 + \frac{v}{c_0} - \frac{v^2}{2c_0^2} + \dots \right). \quad (2.4.34)$$

Hierbei können der quadratische Term und alle folgenden vernachlässigt werden, woraus resultiert:

$$f' \approx f \left(1 \pm \frac{v}{c_0} \right). \quad (2.4.35)$$

Die sogenannte DOPPLER-Frequenz bzw. Frequenzverschiebung ist definiert gemäß

$$f_D = \Delta f = f \frac{v}{c_0}. \quad (2.4.36)$$

Im Falle des Laser-Vibrometers ist das schwingende Objekt simultan als Empfänger und als Sender anzusehen, womit insgesamt die doppelte Frequenzverschiebung

$$f_D = \Delta f = f \frac{2v}{c_0} = \frac{2v}{\lambda}, \quad (2.4.37)$$

mit der Geschwindigkeit v des schwingenden Objektes und der Wellenlänge

$\lambda = c_0/f = 632,8 \text{ nm}$ des verwendeten Lasers, hervorgeht. Unter Zuhilfenahme eines Mach-Zehnder Interferometers wird die Frequenzverschiebung im Laser-DOPPLER-Vibrometer ermittelt, um die Geschwindigkeit des schwingenden Messobjektes zu determinieren (vgl. Anhang A). Der optische Aufbau im verwendeten Messkopf ist in Abbildung 2.4.6 dargestellt.

Im Allgemeinen werden Messsignale als Zeitsignale gemessen, wogegen oftmals, z.B. zur Identifikation kritischer Resonanzen, eher der Frequenzinhalt eines Messsignals von Inter-

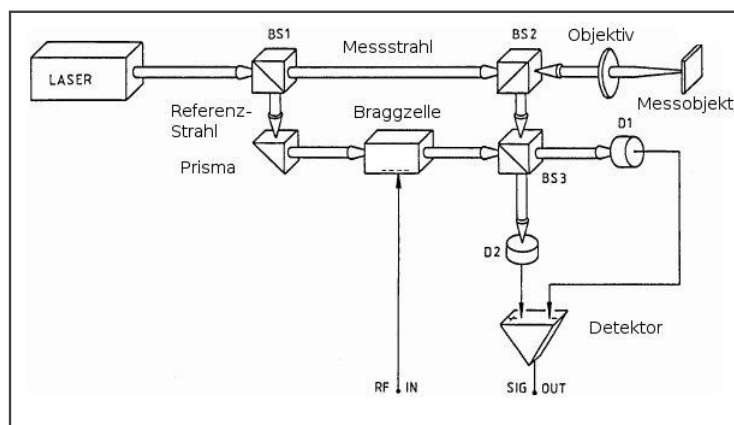


Abbildung 2.4.6.: Optischer Aufbau des Interferometers im Messkopf [Pol12]

esse ist. Somit ist eine Übetragung von der Zeit- in die Frequenzebene notwendig, welche mithilfe geeigneter Algorithmen für die Fouriertransformation, beispielsweise der Fast-FOURIER-Transformation (*FFT*), vorgenommen wird. Hierfür kann ein *FFT*-Analysator verwendet werden, welcher die gemessenen analogen Eingangss- und Ausgangssignale übermittelt bekommt. Die analogen Signale werden anschließend gefiltert, digitalisiert und in den Frequenzbereich überführt. Die schematische Darstellung eines solchen Ablaufs im *FFT*-Analysator ist in Abbildung 2.4.7 aufgeführt.

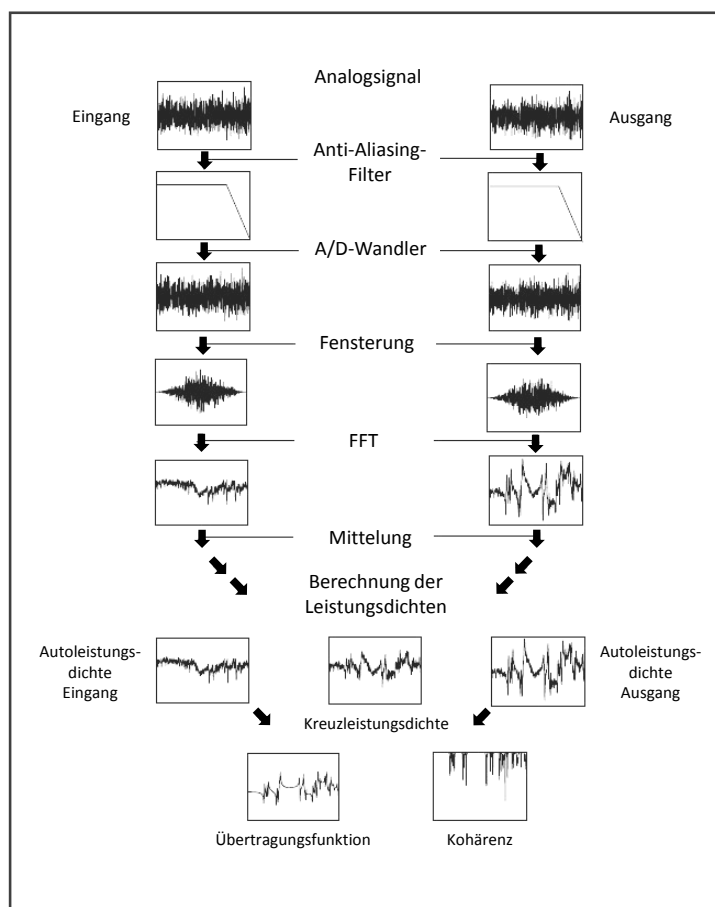
Bei der Signalübertragung können verschiedene Effekte auftreten, für welche vorbeugend Abhilfemaßnahmen vorgenommen werden müssen.

Es kann das sogenannte Aliasing auftreten, welches die Signalverfälschung durch Scheinfrequenzen bezeichnet. Das analoge Signal wird bei der Digitalisierung alle Δt Sekunden abgetastet. Bei zu geringer Abtastrate, auch Sample-Rate genannt, kann die Frequenz in dem abzutastenden Signal größer als die halbe Abtastfrequenz sein, wodurch hohe Frequenzen fälschlicherweise als niedrige erkannt werden.

Das NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem hilft die Problematik zu verhindern:

$$f_{Nyq} = \frac{f_{abtast}}{2} > f_{max} . \quad (2.4.38)$$

Demzufolge kann eine Frequenz nur dann fehlerfrei abgetastet und wiedergegeben werden, wenn sie kleiner als die NYQUIST-Frequenz ist. Somit ergibt sich die minimale Abtastrate f_{abtast} in Abhängigkeit von der maximal zu messenden Frequenz f_{max} . Die eingestellte Messzeit T , die Anzahl N der Abtastungen innerhalb T und die von T abhängige Fre-

Abbildung 2.4.7.: Funktionsschema *FFT*-Analysator [Avi01]

quenzauflösung Δf hängen wie folgt zusammen:

$$f_{\text{abtast}} = \frac{N}{T} = \frac{1}{\Delta t}, \quad (2.4.39)$$

$$\Delta f = \frac{1}{T}, \quad (2.4.40)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N}. \quad (2.4.41)$$

Je länger die Messzeit T gewählt wird, umso kleiner wird die Frequenzauflösung.

Vor jeder Abtastung eines analogen Signals müssen folglich alle Frequenzkomponenten oberhalb der halben Abtastfrequenz mittels analogen Tiefpassfiltern herausgefiltert werden. Es existieren eine Reihe von Tiefpassfiltern für die verschiedenen Abtastfrequenzen auf den Datenerfassungskarten der Analysatoren. Diese sogenannten Anti-Aliasing-Filter entfernen hochfrequente Komponenten aus dem Messsignal und schaffen somit Abhilfe,

um den Aliasing-Effekt zu vermeiden.

Ein weiteres Phänomen, welches auftreten kann, ist der Randbegrenzungseffekt oder auch Leakage genannt. Bei der Weiterverarbeitung eines eigentlich zeitlich begrenzten Signals wird dieses als periodisch fortgesetzt angenommen. Durch das Abschneiden und das vorherige Abbrechen der Messung zur Zeit T entstehen Diskontinuitäten. Solche Unstetigkeiten haben bei der Anwendung der FOURIER-Transformation eine Verbreiterung des ermittelten Frequenzspektrums zur Folge, wodurch Resonanzspitzen nicht mehr stark genug ausgeprägt sind. Mithilfe der Überlagerung von Zeitfenstern kann dieser kaum vermeidbare Leakage-Effekt unterdrückt werden. Die Unstetigkeiten können dadurch reduziert werden, da nun das Zeitsignal durch Zwang an den Enden auf Null absinkt. Schwach gedämpfte Systeme besitzen in der Regel langwierige Vorgänge des Ausschwingens. Jedoch lässt sich die Messzeit aufgrund der benötigten Frequenzauflösung nicht willkürlich verlängern. Aus diesem Grund wird ein Exponentialfenster verwendet, mit dem Erreger- und Antwortsignal im Zeitbereich mit einer abklingenden Exponentialfunktion weitere Dämpfung erfahren. Die folgende Abbildung 2.4.8 veranschaulicht selektierte, unterschiedliche Fensterfunktionen und deren Effekt auf ein Ausgangssignal.

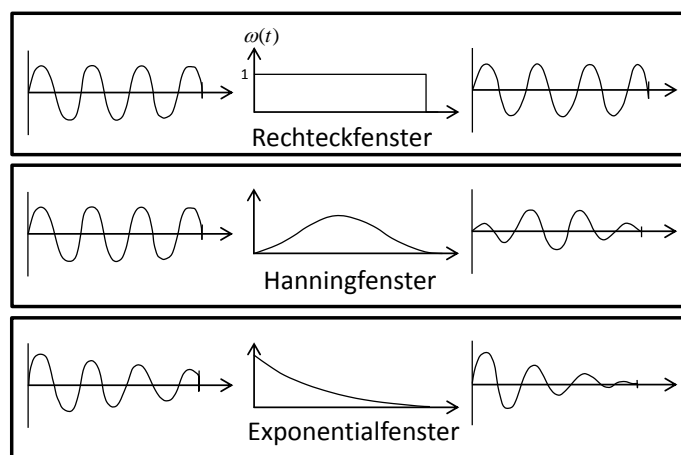


Abbildung 2.4.8.: ausgewählte Fensterfunktionen ([Ewi84])

Um unter Beachtung der genannten Phänomene die Übertragungsfunktion bestimmen zu können, werden die vorhandenen Zeitsignale mittels FOURIER-Transformation in den Frequenzbereich überführt. Mit Hilfe von FOURIER-Reihen ist es möglich periodische Funktionen als Reihe trigonometrischer Polynome darzustellen. Für nichtperiodische Funktionen wiederum resultiert aus der FOURIER-Reihe mittels Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ die FOURIER-Transformation. Zur Überführung diskreter, zeitbegrenzter Messwerte in den

Frequenzraum wird die diskrete FOURIER-Transformation (*DFT*) angewendet:

$$\mathbf{X}(f_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{2N-1} \mathbf{x}(t_n) \cdot e^{-j2\pi f_k t_n} . \quad (2.4.42)$$

In der Praxis findet häufig die weiterentwickelte Fast-FOURIER-Transformation (*FFT*) Anwendung [Nat88], da diese Berechnungsweise effizienter und schneller als die der *DFT* ist.

Gewöhnliches Signalrauschen führt zu Störungen im Anregungs- und Antwortsignal, aufgrund dessen ist die ermittelte Übertragungsfunktion lediglich ein Schätzwert. Es werden die spektralen Leistungsdichten der Erreger- und Antwortsignale herangezogen, welche mithilfe von mehrmaligen Messungen und anschließender Mittelung bestimmt werden:

$$\text{Autoleistungsspektrum :} \quad S_{XX}(\Omega) = \mathbf{X}^*(\Omega) \mathbf{X}(\Omega) , \quad (2.4.43)$$

$$S_{FF}(\Omega) = \mathbf{F}^*(\Omega) \mathbf{F}(\Omega) , \quad (2.4.44)$$

$$\text{Kreuzleistungsspektrum :} \quad S_{XF}(\Omega) = \mathbf{X}^*(\Omega) \mathbf{F}(\Omega) , \quad (2.4.45)$$

$$S_{FX}(\Omega) = \mathbf{F}^*(\Omega) \mathbf{X}(\Omega) . \quad (2.4.46)$$

„*“ steht hierbei für eine konjugiert komplexe Größe.

Die Leistungsspektren führen auf die Übertragungsfunktion durch Anwendung unterschiedlicher Schätzer H_1 und H_2 . Das Rauschen im Ausgangssignal wird mittels H_1 -Schätzer und das im Eingangssignal durch den H_2 -Schätzer unterdrückt, gemäß

$$H_1(\Omega) = \frac{S_{XF}(\Omega)}{S_{FF}(\Omega)} \quad (2.4.47)$$

und

$$H_2(\Omega) = \frac{S_{XX}(\Omega)}{S_{FX}(\Omega)} . \quad (2.4.48)$$

Im Fall der Laser-DOPPLER-Vibrometrie ist der H_1 -Schätzer besser geeignet. Das Verhältnis der beiden Schätzer führt auf ein Maß für die Messqualität, die Kohärenzfunktion:

$$\gamma^2(\Omega) = \frac{H_1(\Omega)}{H_2(\Omega)} , \quad 0 \leq \gamma^2 \leq 1 . \quad (2.4.49)$$

Die Schätzung der Übertragungsfunktion ist umso besser, je mehr sich die Kohärenzfunktion dem Wert 1 nähert. Bei ungünstiger Kohärenz kann auf zufällige Störungen in

den Messsignalen, jedoch auch auf Nichtlinearitäten im System zurückgeschlossen werden. Darüberhinaus besteht die Möglichkeit, dass gewisse Antwortsignale nicht von der gemessenen Erregerquelle verursacht wurden.

2.4.2.3. Signalanalyse

Die gemessenen Frequenzgänge liefern zunächst die Eigenfrequenzen mittels modaler Indikatorfunktionen. Durch ein sogenanntes „Curve-fit“-Verfahren lassen sich die Eigenformen identifizieren, wobei zwischen zwei Methoden unterschieden wird. Zum einen existieren *SDOF*-Verfahren, welche innerhalb einer alleinigen Übertragungsfunktion jeweils die Umgebung einer separaten Resonanzfrequenz gesondert betrachten bei gleichzeitiger Vernachlässigung des Einflusses von benachbarten Eigenfrequenzen. Zum anderen gibt es *MDOF*-Verfahren, bei denen andererseits diverse Resonanzfrequenzen parallel eruiert werden. Beim *SDOF*-Verfahren ergeben sich zusätzlich über die Halbwertsbreiten die zugehörigen Dämpfungsparameter ([Ewi84], [ME'12]).

Die vorliegende Arbeit bedient sich dem Global Polynomial-Curve-Fitting-Verfahren, welches auf dem Rational Fraction Polynomial (*RFP*) Algorithmus basiert ([ME'12],[Ric85]). Die Polynomial-Methode funktioniert optimal in kleinen Frequenzbändern in der Umgebung von Resonanzfrequenzen. Der Curve-Fitting-Prozess gliedert sich in zwei Teilschritte, um mögliche Fehler zu dezimieren. Zunächst werden die Eigenfrequenzen und Dämpfungen ermittelt gefolgt von der Ermittlung der Residuen.

Die Übertragungsfunktionsmatrix lässt sich hierfür in Partialbruchform ausdrücken gemäß

$$[\mathbf{H}(\omega)] = \sum_{k=1}^N \left[\frac{[\mathbf{R}_k]}{j\omega - p_k} + \frac{[\mathbf{R}_k^*]}{j\omega - p_k^*} \right], \quad (2.4.50)$$

mit der Polstelle $p_k = -\varsigma_k + j\omega_k$ der k -ten Mode, der modalen Dämpfung ς_k und modalen Eigenfrequenz ω_k der k -ten Mode, sowie der Residuenmatrix $[\mathbf{R}_k]$ für die k -te Mode.

Mittels Anpassungsrechnung mit der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme können die modalen Parameter aus den Zähler- und Nennerpolynomen aus Gleichung (2.4.50) ermittelt werden.[Ric85],[Ric82]

2.4.2.4. Modellkorrelation

Um die Qualität eines numerischen Modells bewerten zu können, werden in der Regel numerische Ergebnisse mit experimentell ermittelten Daten verglichen. Zur Beurteilung

ist es möglich unterschiedliche Vorgehensweisen heranzuziehen. Zum einen lassen sich die Eigenfrequenzen aus der numerischen und experimentellen Ermittlung einander gegenüberstellen und ihre prozentuale Abweichung bestimmen. Des Weiteren kann ein Abgleich über die Kontrolle der Reihenfolge und Übereinstimmung der Eigenformen mittels Modal Assurance Criterion erfolgen. Ferner ließen sich die messtechnisch ermittelten Übertragungsfunktionen mit den numerisch ermittelten Strukturantworten unter Anwendung der Forced Response Analysis im *FE*-Code gegenüberstellen.

Modal Assurance Criterion (*MAC*)

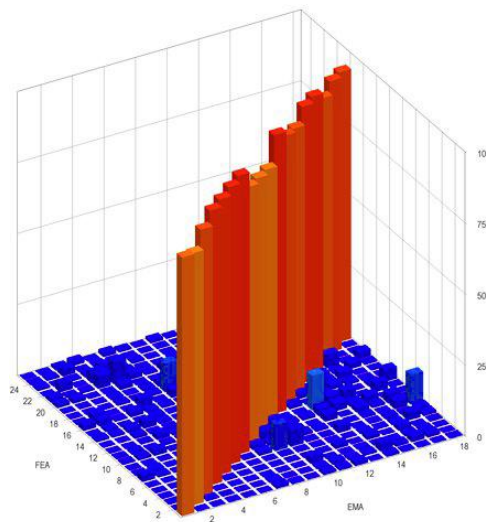


Abbildung 2.4.9.: Beispiel einer *MAC*-Matrix

Das Modal Assurance Criterion gründet auf der Orthogonalitätseigenschaft der Eigenvektoren. Damit ist es möglich, rein rechnerisch ermittelte Eigenformen hinsichtlich ihrer orthogonalen Eigenschaften zu überprüfen. Analog kann das Kriterium zum Vergleich von Eigenformen aus einer numerischen Berechnung mit denen aus einer experimentellen Ermittlung dienen. Dabei wird die sogenannte *MAC*-Matrix verwendet, welche so viele Spalten (*B*) beinhaltet wie gemessene Eigenformen und so viele Zeilen (*A*) wie vorliegende Eigenvektoren.

Die Definition des Modal Assurance Criterion zur Überprüfung zweier Eigenvektoren Φ_A und Φ_B lautet

$$MAC_{AB} = \frac{\{\Phi_A^T \Phi_B\} \{\Phi_B^T \Phi_A\}}{\{\Phi_A^T \Phi_A\} \{\Phi_B^T \Phi_B\}}. \quad (2.4.51)$$

Diese Funktion deckt den Wertebereich zwischen 0 und 1 ab. Werte um 0,8 und höher lassen auf eine lineare Abhängigkeit der verglichenen Eigenvektoren schließen („gleiche Eigenvektoren“). Werte unterhalb von 0,5 weisen auf lineare Unabhängigkeit hin. Entsprechend sollte im Optimalfall die Anwendung von *MAC* auf sämtliche Eigenvektorkombinationen auf die Werte 1 (Hauptdiagonale) bzw. 0 (Nebendiagonalen) führen (vgl. Abbildung 2.4.9).

3. Aufbau und Simulation des numerischen Strukturmodells

Im vorliegenden Kapitel werden die Werkstoff-Voraussetzungen und das Vorgehen zur Entwicklung eines möglichst praxisnahen Geometriemodells eines strukturierten Blechs beschrieben.

3.1. Voraussetzungen hinsichtlich des Werkstoffverhaltens

Zur realitätsnahen Entwicklung eines Ersatzmodells ist es notwendig das Verhalten des vorliegenden Werkstoffs näher zu betrachten. Aus Arbeiten wie beispielsweise [Fri11] liegen experimentell ermittelte Daten vor, auf dessen Grundlage das Plastizitätsmodell erfasst werden kann.

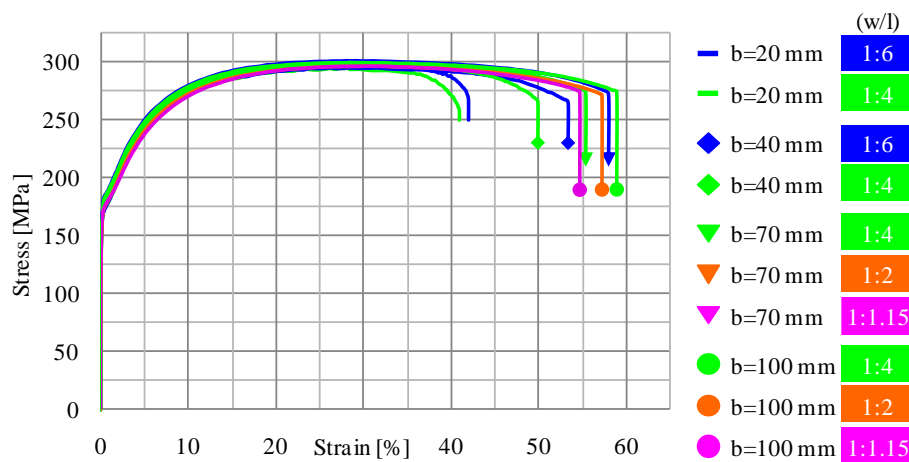


Abbildung 3.1.1.: Spannungs-Dehnungs-Kurven unterschiedlicher Glattblech-Proben aus DC04 [Fri11]

Die Durchführung von Zugversuchen ermöglicht die Ermittlung des Plastizitätsverhaltens des glatten Grundblechs. In Abbildung 3.1.1 sind experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Glattblech-Proben mit der Breite b aus DC04 Stahl beispielhaft dargestellt.

Einige Eckpunkte einer ausgewählten Plastizitätskurve aus einem solchen Zugversuch sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Unter Zuhilfenahme dieser Eckdaten kann eine geometrisch nichtlineare Verformung numerisch durchgeführt werden und damit das annähernde Plastizitätsverhalten eines Glattblechs simuliert werden.

σ [N/mm ²]	ε_{plast} [%]	σ [N/mm ²]	ε_{plast} [%]
172,937	0	278,248	11,364
182,983	0,615	282,375	12,758
192,692	1,252	284,001	13,401
202,341	1,841	287,558	15,027
212,343	2,467	289,281	15,974
222,442	3,318	292,327	18,118
232,862	4,039	293,738	19,404
242,777	5,039	294,871	20,673
252,894	6,272	296,057	22,388
262,550	7,773	296,848	24,389
272,164	9,756	297,207	26,497

Tabelle 3.1.: Eckdaten für plastisches Werkstoffverhalten des beschriebenen glatten Blechs aus DC04

Weitere Materialparameter, die für den zu simulierenden Verformungsvorgang benötigt werden, sind nachfolgend in Tabelle 3.2 aufgeführt. Es wird von den Standard-Materialparametern für Stahl ausgegangen.

Parameter	Daten
Material	Stahl DC04
Elastizitätsmodul E	$2,1 \cdot 10^5$ N/mm ²
Poisson-Zahl ν	0,3
Blechdicke d	0,5 mm

Tabelle 3.2.: Materialparameter des Glattblechs

Basierend auf den bekannten Werkstoffdaten soll im nachfolgenden Abschnitt anschließend die Topologie eines strukturierten Blechs nachempfunden werden, um auf dessen Grundlage das gesuchte Ersatzmodell zu entwickeln. Das Geometriemodell wird durch Simulation des realen Herstellungsprozesses ermittelt, um die entstehenden Verformungen

so praxisnah wie möglich zu erhalten.

3.2. Simulation der Topologie

Um die Homogenisierungsmethode durchführen zu können, ist es zunächst erforderlich die Geometrie des strukturierten Blechs simulatorisch nachzubilden, um dann von diesem numerischen Modell ausgehend ein Ersatzmodell entwickeln zu können. Hierzu wird der reale Herstellungsprozess des Hydroumformens näherungsweise simuliert.

Ein dreidimensionales „Solid“-Modell wird mit entsprechender Lagerung mit einem auf die Ebene wirkenden Druck beaufschlagt, der dem Hydro-Druck des Fluids in der Praxis entspricht. Bei dem zu untersuchenden Blech handelt es sich um eine 0,5 mm dicke Platine aus dem Material Stahl DC04, welche mit einem Druck von 50 bar belastet wird. Dabei liegt das Blech auf einer Negativmatrix mit hexagonalen Aussparungen der Schlüsselweite $SW\ 33$ (vgl. Abbildung 1.2.4 in Unterabschnitt 1.2.1 und Abbildung 1.2.6 in Unterabschnitt 1.2.2).

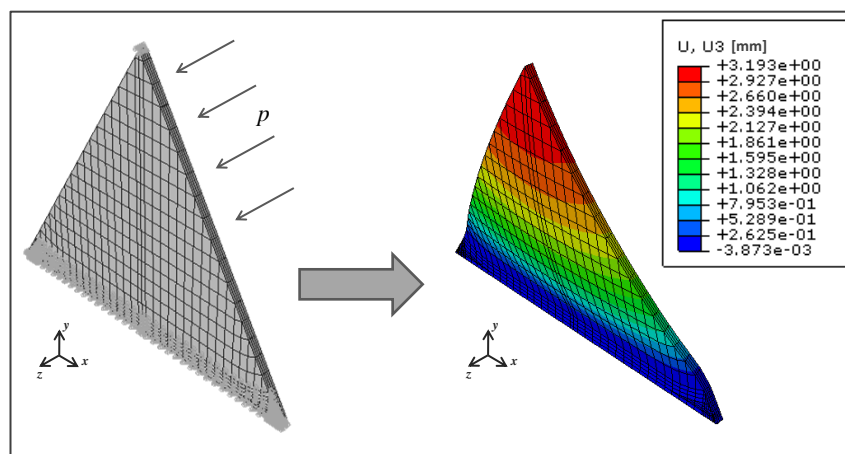


Abbildung 3.2.1.: Verformung eines Sechstels

Aus Symmetrie-Gründen kann in der Numerik zunächst ein Sechstel eines zu verformenden Hexagons als Ausgangspunkt verwendet werden. Die Vernetzung ist hierbei durch Vor-Partitionierung möglichst fein gewählt. Insbesondere im Stegbereich wird ein feineres Netz selektiert. Mit entsprechenden Symmetrie- und Randbedingungen (Stegbereich in u_3 -Richtung fest, sowie u_1 und u_2 an den symmetrierelevanten Knoten fest) kann nun die Verformung simuliert werden (Abbildung 3.2.1), wobei auch die Rückfederung des Prozesses berücksichtigt wird. In der vorliegenden Arbeit wird für die Homogenisierungs-

methode vom zweidimensionalen „Shell“-Modell ausgegangen, sodass aus dem verformten dreidimensionalen Modell anschließend in guter Näherung die Mittelfläche extrahiert und als „Shell“-Modell weiter zusammengefügt wird. Die entstandene Dickenänderung durch den Verformungsprozess wird somit vernachlässigt und anschließend mit einem angenäherten Mittelflächenmodell weiterverfahren.

Im Anschluss lässt sich durch das gewählte FE -Netz die Symmetrie der gesuchten Geometrie abbilden. Es wird somit die Gestaltung eines verformten Hexagons bzw. des Weiteren eines Blechs einer benötigten Größe (Abbildung 3.2.2) oder einer bestimmten Bauteilform zur weiteren Auslegung ermöglicht. Dabei ist zu beachten, dass die Topologie durch die Diskretisierung mittels FE -Netz nur angenähert werden kann. Je feiner das Netz gewählt wird, desto näher liegt das Modell an der Realität. Des Weiteren besteht eine gewisse Randproblematik hinsichtlich der Symmetrieannahme. Die Effekte am Rand eines Blechs erfüllen nicht die Symmetrieanforderungen. Lediglich die Zelle in der Mitte eines hinreichend großen Blechs können die Annahmen einhalten. Diese Randeffekte werden im weiteren Verlauf der Arbeit vernachlässigt.

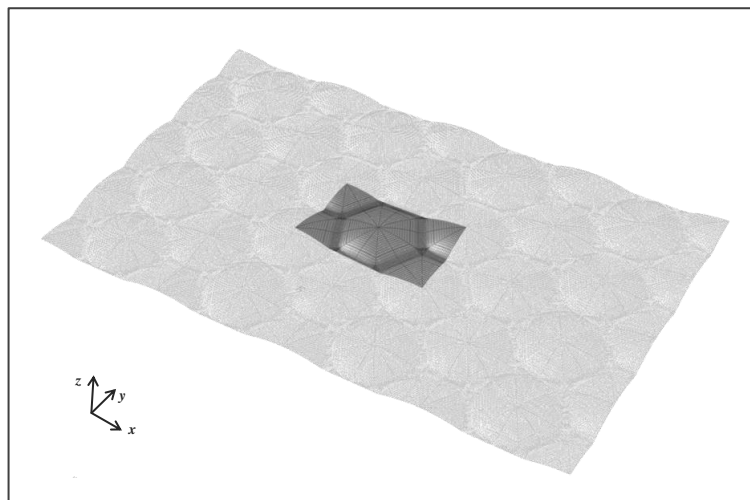


Abbildung 3.2.2.: Elementarzelle innerhalb einer Blechplatte

In der vorliegenden Arbeit wird die Plastifizierung im verformten Modell nicht integriert. Der Fokus liegt vorrangig auf der Entwicklung eines Ersatzmodells, welches dann auf alle beliebigen periodischen Strukturen anwendbar ist. Das Ausgangsmodell kann im Nachhinein noch optimiert werden, um anschließend bessere Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten zu erlangen, falls dafür Notwendigkeit besteht. Der Ausschluss der Plastifizierungsgebiete hat keine Auswirkung auf die Methode der Homogenisierung, wel-

che in dieser Arbeit erarbeitet wird.

An dieser Stelle sollen kurz die Plastifizierungsgebiete und die Eigenspannungen durch die Verformung im Sechstel näher betrachtet werden. Die VON MISES-Spannungsverteilung, die durch den Verformungsprozess entsteht, ist in Abbildung 3.2.3 zu sehen.

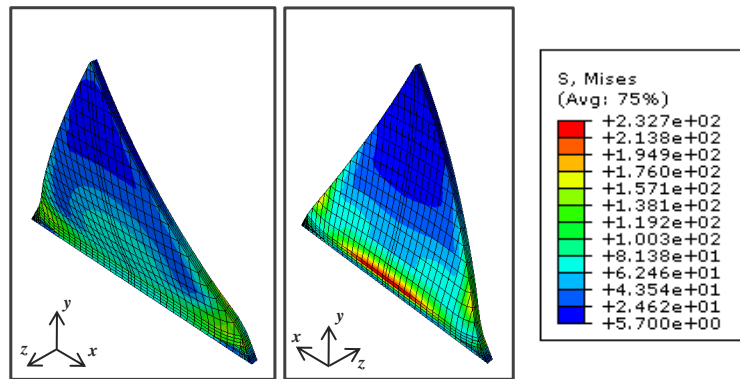


Abbildung 3.2.3.: VON MISES-Spannung im verformten Sechstel

Es lässt sich erkennen, dass die gewölbte Spitze des Hexagon-Sechstels am wenigsten Spannung erfährt. Die vorliegende Spannungsspitze von ca. 232,7 MPa befindet sich im Modell in der Mitte des Stegs an der Kante zur Wölbung. Die rechte Ansicht der Abbildung 3.2.3 bietet entsprechende Einsicht. Das Material dehnt sich dort aufgrund des Fluid-Drucks aus dem Hydroumform-Prozess. Die Spannungsspitze nimmt jedoch in Richtung der Ränder des Modells sowie zum Stegende hin ab und reduziert sich etwa auf die Hälfte und weniger.

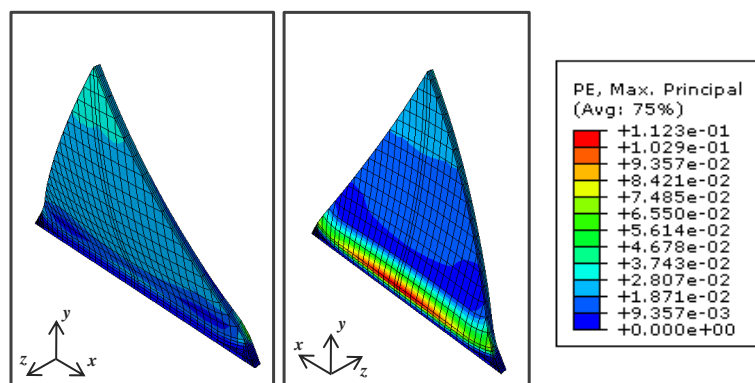


Abbildung 3.2.4.: Plastische Dehnung im verformten Sechstel

Die zugehörige plastische Dehnung ist in Abbildung 3.2.4 dargestellt. Hier ist deutlich zu sehen, dass der Bereich der Spannungsspitze aus Abbildung 3.2.3 auch eine maximale

plastische Dehnung erfährt. Im Durchschnitt liegt die plastische Dehnung im verformten Modell bei 1,5%, während die Höchstdehnung im kritischen Bereich etwa 11% beträgt. Die Veranschaulichung der Spannungen und plastischen Dehnungen erfolgt lediglich an einem Sechstel, da aus Symmetriegründen die Berechnung vereinfacht werden konnte. Vergleichende Berechnungen haben gezeigt, dass es keinen Vorteil bringt, die Plastifizierungen für die weiteren Untersuchungen mitzunehmen. Aus diesem Grund werden nachfolgend diese vernachlässigt und in guter Näherung mit einem Mittelflächenmodell weitergerechnet.

4. Entwicklung des Ersatzkontinuums mittels RVE

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie die verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsmethode auf das zu untersuchende strukturierte Blech angewendet wird.

4.1. Voraussetzungen und Annahmen hinsichtlich betrachteter Struktur

Die betrachtete Struktur verhält sich durch die vorhandenen Symmetrien der Versteifungen orthotrop. Das Material der Struktur ist jedoch wie vor dem Verformungsprozess isotroper Natur. In diesem Fall wird vom HOOKE'schen linearen Elastizitätsgesetz ausgegangen. Damit wird lediglich das E -Modul und die Querkontraktionszahl ν des vorhandenen Materials Stahl DC04 benötigt um statische Berechnungen durchführen zu können. Die anfänglichen Eigenspannungen durch den Verformungsprozess im Material werden bis auf weiteres vernachlässigt, da sich in Abschnitt 3.2 gezeigt hat, dass die Plastifizierung keinen erheblichen Einfluss auf die Ermittlung der effektiven Materialparameter haben sollte.

Wie bereits im vorangehenden Kapitel werden für das betrachtete Material die Standard-Materialdaten von Stahl verwendet:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad (4.1.1)$$

$$\nu = 0,3. \quad (4.1.2)$$

Des Weiteren wurde das Gewicht einer Probe des strukturierten Blechs der Größe $280 \text{ mm} \times 303,109 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ gemessen. Für die im Laufe der vorliegenden Arbeit folgenden Validierungen müssen die Massen des numerischen und strukturierten Modells

übereinstimmen, da dies die Basis der angewandten verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsmethode darstellt. Im verwendeten *FE*-Software-Programm lässt sich die Masse-Eigenschaft durch Angabe der Dichte vorgeben:

$$m_{Str-FE} = 329 \text{ g} = 329 \cdot 10^{-6} \text{ t} , \quad (4.1.3)$$

$$\implies \rho_{Str-FE} = \frac{m_{Str-FE}}{V_{Str-FE}} = 7,532 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 . \quad (4.1.4)$$

Hierbei wurde die strukturierte, gewölbte Fläche mithilfe eines Python-Skriptes innerhalb der genutzten *FEM*-Software ausgegeben:

$$A_{Str-FE} = 87356,5381 \text{ mm}^2 . \quad (4.1.5)$$

Mit einer Dicke von 0,5 mm ergibt sich dann ein Volumen von $V_{Str-FE} = 43678,2691 \text{ mm}^3$, woraus die Dichte ρ_{Str-FE} in Gleichung (4.1.4) resultiert.

4.2. Überlegungen zum Repräsentativen Volumenelement und dessen Auswahl

Die Grundlage für die Anwendung der Homogenisierungsmethode ist die Definition eines repräsentativen Volumenelements (*RVE*) der zu homogenisierenden, komplexen Struktur. Ein solches *RVE* sollte so klein wie möglich als periodisch wiederkehrende Einheit gewählt werden. Sie sollte dennoch groß genug sein, um die Heterogenität der detaillierten Struktur noch ausreichend abbilden zu können (vgl. Unterabschnitt 2.2.2).

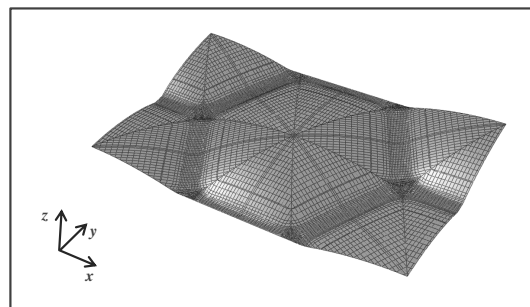


Abbildung 4.2.1.: Elementarzelle als *RVE*

Im Falle eines strukturierten Blechs in rechteckiger Form mit geraden Rändern lässt sich die in Abbildung 4.2.1 dargestellte Elementarzelle als die kleinste, periodisch wiederkehrende Einheit feststellen. Im vorausgehenden Kapitel in Abschnitt 3.2 ist in Abbildung 3.2.2 ihre Einbettung in einer größeren Platine zu sehen.

Sie stellt wie gefordert die kleinste Einheit des zu betrachtenden strukturierten Blechs dar, welche sich beliebig vervielfältigen lässt und die Heterogenität des strukturierten Bleches hinlänglich repräsentieren sollte. Ausgehend von dieser Elementarzelle als gewähltes *RVE* können nun die effektiven Materialparameter der komplexen Struktur determiniert werden, um diese auf das homogenisierte *RVE** zu übertragen (Abbildung 4.2.2).

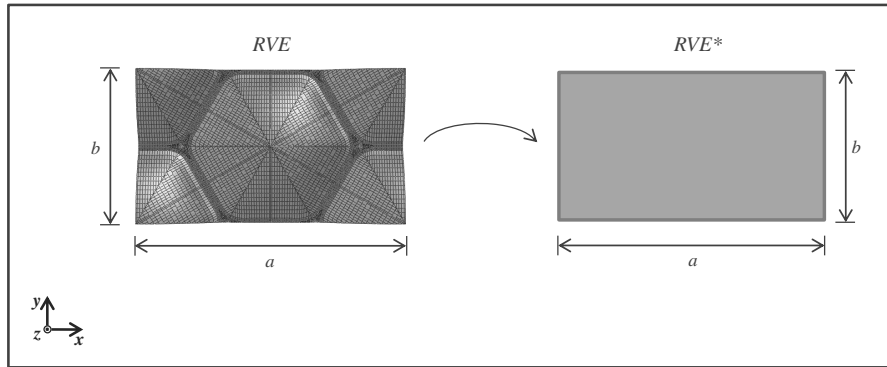


Abbildung 4.2.2.: Repräsentatives Volumenelement für das strukturierte Blech

Bei Verwendung der verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsmethode wird vorausgesetzt, dass die mittleren Verzerrungsenergien beider repräsentativen Volumenelemente *RVE* und *RVE** übereinstimmen:

$$\bar{W}_{Str-FE} = \bar{W}_{ersatz} , \quad (4.2.1)$$

$$\implies \frac{\bar{w}_{A,ersatz}}{\bar{w}_{A,Str-FE}} = \frac{A_{Str-FE}}{A_{ersatz}} = \kappa_F . \quad (4.2.2)$$

Das Ersatzkontinuum soll eine ebene Fläche darstellen, deren Masse bzw. Dichte aufgrund der zuvor ermittelten Masse für eine Probeplatine bestimmt wird. Die projizierte Fläche der gesamten Platine beträgt, aufgrund der übereinstimmenden Außenmaße *a* und *b* der repräsentativen Volumenelemente,

$$A_{ersatz} = 84870,52 \text{ mm}^2 , \quad (4.2.3)$$

wodurch mit der in Abschnitt 4.1 angegebenen strukturierten Fläche A_{Str-FE} folgt, dass

$$\kappa_F = 1,0293 . \quad (4.2.4)$$

Die Massen der beiden FE -Modelle werden als gleich angenommen. Damit ist:

$$\begin{aligned} m_{Str-FE} &= m_{ersatz} , & (4.2.5) \\ \rho_{Str-FE} \cdot V_{Str-FE} &= \rho_{ersatz} \cdot V_{ersatz} , \end{aligned}$$

$$\rho_{ersatz} = \frac{V_{Str-FE}}{V_{ersatz}} \cdot \rho_{Str-FE} . \quad (4.2.6)$$

Mit gleicher Blechdicke d ergibt sich mittels Gleichung (4.2.2) und Gleichung (4.2.4) in Gleichung (4.2.6) die Ersatzdichte zu:

$$\rho_{ersatz} = \kappa_F \cdot \rho_{Str-FE} \quad (4.2.7)$$

$$= 1,0293 \cdot 7,532 \text{ t/mm}^3 \quad (4.2.8)$$

$$\implies \rho_{ersatz} = 7,753 \text{ t/mm}^3 . \quad (4.2.9)$$

4.3. Bestimmung der effektiven Materialparameter

Dieser Abschnitt beschreibt die Herangehensweise zur Ermittlung der benötigten effektiven Materialparameter bei Anwendung der verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsmethode auf die zu untersuchenden strukturierten Bleche. Dabei werden erneut die ausführlichen Beschreibungen von [Hoh03] aufgegriffen, worauf für weiterführende Details verwiesen wird.

4.3.1. Effektiver Elastizitätstensor

Wie bereits in Abschnitt 2.1.4 erläutert, zählt das HOOKE'sche Gesetz gemäß

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (4.3.1)$$

in der linearen Elastizität zu den essentiellen Beschreibungen des Materialverhaltens. Die Spannungen und Dehnungen auf der effektiven Ebene werden dadurch mittels konstantem

effektiven Elastizitätstensor \bar{C}_{ijkl} verknüpft. Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij} \partial \bar{\varepsilon}_{kl}} . \quad (4.3.2)$$

Zur Ermittlung der Komponenten des Elastizitätstensors kann für lineare Elastizität das HOOKE'sche Gesetz (4.3.1) in die Definition der effektiven Verzerrungsenergiedichte

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (4.3.3)$$

eingesetzt und anschließend nach den gesuchten Komponenten umgeformt werden. Der allgemeine Fall führt zu 21 unabhängigen Komponenten, womit 21 unabhängige Referenzdeformationszustände bzw. Einheitsverzerrungszustände erforderlich sind. [Hoh03] beschreibt, dass dafür effektive Zustände bestimmt werden können, bei denen maximal zwei Komponenten $\bar{\varepsilon}_{ij}$ nicht verschwindende Werte annehmen. Es folgt

$$\bar{C}_{ijkl} = \begin{cases} 2 \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \right) \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{(ij)}^{*2}} & \text{für : } i = j \text{ und } k = l \text{ und } i = k , \\ \frac{1}{2} \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \right) \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{(ij)}^{*2}} & \text{für : } i \neq j \text{ und } k \neq l \text{ und } i = k \text{ und } j = l , \\ \left[\bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^*, \bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \right) \right. \\ \quad \left. - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) \right] \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \bar{\varepsilon}_{(kl)}^*} & \text{für : } i = j \text{ und } k = l \text{ und } i \neq k , \\ \frac{1}{4} \left[\bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^*, \bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \right) \right. \\ \quad \left. - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) \right] \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \bar{\varepsilon}_{(kl)}^*} & \text{für : } i \neq j \text{ und } k \neq l \text{ und } (i \neq k \text{ oder } j \neq l) , \\ \frac{1}{2} \left[\bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^*, \bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \right) \right. \\ \quad \left. - \bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right) \right] \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{(ij)}^* \bar{\varepsilon}_{(kl)}^*} & \text{für : } i = j \text{ und } k \neq l . \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Dabei beschreibt $\bar{w} \left(\bar{\varepsilon}_{(ij)}^*, \bar{\varepsilon}_{(kl)}^* \right)$ diejenige Verzerrungsenergie, die entsteht, wenn lediglich die Verzerrungstensor-Komponenten $\bar{\varepsilon}_{(ij)}^*$ und $\bar{\varepsilon}_{(kl)}^*$ nicht verschwindende Beträge annehmen. Die Klammerung der Indizes impliziert, dass keine Summation erfolgt. Die Berechnung für die jeweiligen Verzerrungsenergien der Einheitsverzerrungszustände kann numerisch oder analytisch durchgeführt werden.

4.3.2. Effektive elastische Plattensteifigkeiten

Die zu betrachtenden strukturierten Bleche lassen sich in die Kategorie der Flächen-tragwerke einordnen. Im Falle solcher dünnwandigen Tragwerke wird das Materialverhalten, anstatt mittels dreidimensionaler Kraftgrößen $\bar{\sigma}_{ij}$, mithilfe von Schnittkräften \bar{N}_{ij} , Schnittmomenten \bar{M}_{ij} erster Ordnung (und eventuell höherer Ordnung) analysiert, welche auf die Platten- oder Schalentheorien zurückzuführen sind. Der infinitesimale dreidimensionale Dehnungstensor besteht im vorliegenden Fall aus den Membranverzerrungen $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(0)}$ und den Verkrümmungen $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$. Jegliche transversalen Querschubverzerrungen werden aufgrund von Betrachtung der KIRCHHOFF'schen Plattentheorie vernachlässigt. Die Verknüpfung der Kraftgrößen und Verzerrungsmaße erfolgt entsprechend zum dreidimensionalen Fall durch ein zweidimensionales Platten- oder Schalenstoffgesetz. Die Notation der Kraftgrößen ist in der folgenden Abbildung 4.3.1 dargestellt.

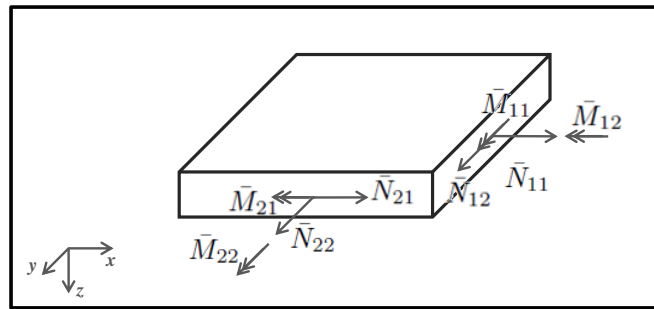


Abbildung 4.3.1.: Schnittbild

Die benötigten effektiven Materialparameter zur Beschreibung der Struktur werden durch die verschiedenen Steifigkeitskomponenten dargestellt. Diese beschreiben das Membran-, Biege- und Koppelverzerrungsverhalten.

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} \\ & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} \\ \text{(sym.)} & & \bar{A}_{33} & \text{(sym.)} & & \bar{B}_{33} \\ \hline & & & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ & & & & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

Die Definition der mittleren flächenbezogenen Verzerrungsenergie auf der effektiven Ebene lautet

$$\bar{w}_A = \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + \bar{M}_{ij} \bar{\kappa}_{ij} \right) . \quad (4.3.6)$$

Hierbei wird auf die weiterführenden Erläuterungen in Unterabschnitt 2.2.4 verwiesen. Durch Einsetzen der Referenzdeformationszustände in Gleichung (4.3.6) können durch Umformen des entstehenden Gleichungssystems die gesuchten Steifigkeitskomponenten ermittelt werden. Nachfolgend soll dies für die gesuchten Komponenten mit dem in Abschnitt 4.2 definierten *RVE* durchgeführt werden. Für detaillierte Ausführungen zu den Berechnungen der Steifigkeiten wird hierbei auf den Anhang B verwiesen.

4.3.3. Einheitsverzerrungszustände

Für die gesuchten Steifigkeitskomponenten ergeben sich 18 elementare Lastfälle. Diese lassen sich in Membran-, Biege- und Koppel-Lastfälle einzeln unterteilen. Die Kurzbeschreibung eines jeden Lastfalls ist in den Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 jeweils unter den entsprechenden Komponenten aufgeführt.

Da die vorgegebene Struktur symmetrisch bezüglich der zwei zueinander rechtwinkligen Membran-Richtungen x und y strukturiert ist (Orthotropie), können die Steifigkeiten \bar{A}_{13} , \bar{A}_{23} , \bar{D}_{13} , \bar{D}_{23} , \bar{B}_{13} und \bar{B}_{23} für den vorliegenden geometrisch orthotropen Fall vernachlässigt werden. Laut WIEDEMANN [Wie07] entfällt bei Orthotropie die Kopplung symmetrischer Ursachen mit antimetrischen Wirkungen.

Folglich reduzieren sich die einzelnen Lastfälle auf eine Anzahl von 12, um die entsprechenden strukturbeschreibenden Steifigkeiten zu ermitteln. Die jeweiligen Vorgehensweisen werden nachfolgend für alle Komponenten erläutert.

Membransteifigkeiten

Die elementaren Lastfälle sehen für die Membrandehnungen wie folgt aus:

\bar{A}_{11} :	Dehnung in die erste ebene Hauptachsenrichtung mit behinderter Querkontraktion
\bar{A}_{22} :	Dehnung in die zweite ebene Hauptachsenrichtung mit behinderter Querkontraktion
\bar{A}_{33} :	Ebene Schubdeformation längs der ebenen Hauptachsen
\bar{A}_{12} :	Gleichzeitige Dehnung in die erste und zweite ebene Hauptachsenrichtung

Tabelle 4.1.: Elementare Membran-Lastfälle

Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird die Ermittlung der strukturbeschreibenden Membransteifigkeiten beschrieben. Im Falle der „in-plane“ Dehnungen in jeweils eine Hauptachsenrichtung müssen die Verzerrungen der Referenzfläche sowie die zugehörigen Verzerrungsenergien der Elementarzelle herangezogen werden, um die Steifigkeiten zu ermitteln:

$$\bar{A}_{11} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right)^2}, \quad (4.3.7)$$

$$\bar{A}_{22} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)^2}. \quad (4.3.8)$$

Zur Veranschaulichung der Lastfälle sind die Vorgaben der Freiheitsgrade für die jeweiligen Belastungen in den Abbildungen 4.3.2 und 4.3.3 dargestellt. Dabei sind die Randbedingungen symmetrisch anzunehmen. Für die Membran-Lastfälle werden entsprechende Verschiebungen an den betreffenden Randknoten vorgegeben. a und b sind hierbei Abbildung 4.2.2 aus Abschnitt 4.2 zu entnehmen.

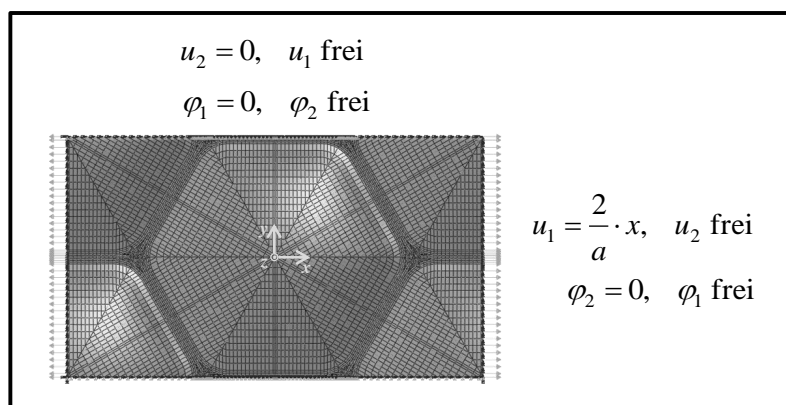


Abbildung 4.3.2.: Dehnung in die erste Hauptachsenrichtung x mit behinderter Querkontraktion

Analog zum Dehnungsfall in die erste Hauptachsenrichtung kann der Fall der Dehnung in die zweite Hauptachsenrichtung, beide mit behinderter Querkontraktion, betrachtet werden.

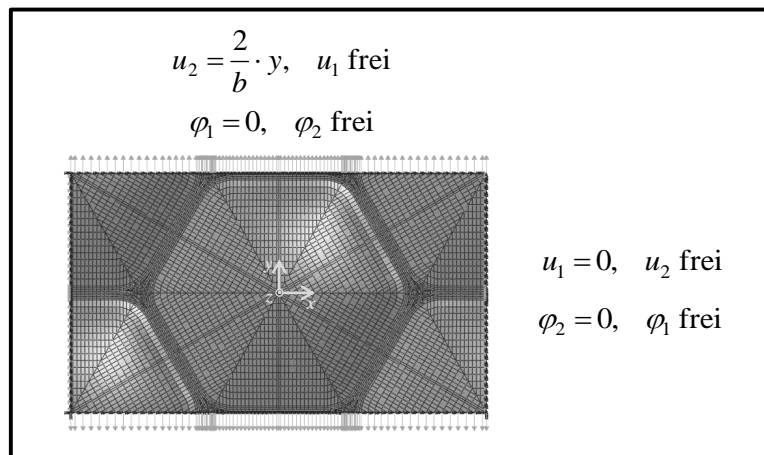


Abbildung 4.3.3.: Dehnung in die zweite Hauptachsenrichtung y mit behinderter Querkontraktion

Für die Kopplung der beiden Einzel-Dehnungsfälle werden die ermittelten Werte der Einzelfälle benötigt und zusätzlich die Verzerrungsenergie des Koppelfalls herangezogen.

$$\bar{A}_{12} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)} \quad (4.3.9)$$

Abbildung 4.3.4 stellt den entsprechenden Lastfall dar. Es werden die beiden Membran-
dehnungen zusammengefügt.

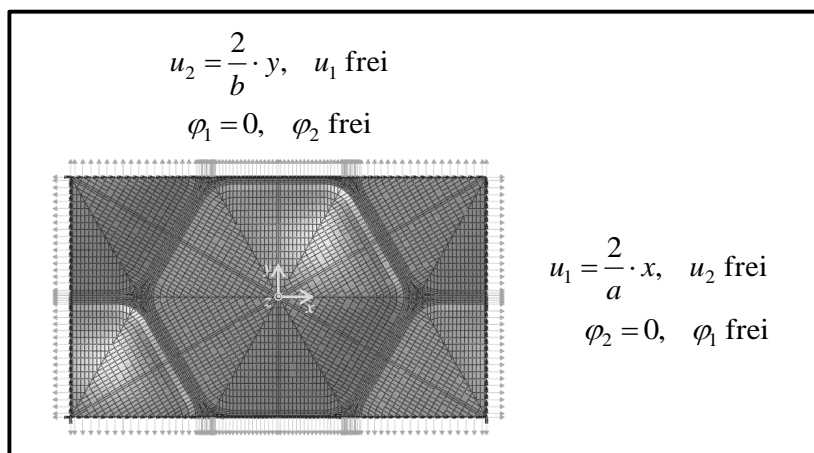


Abbildung 4.3.4.: Gleichzeitige Dehnung in die erste und zweite ebene Hauptachsenrichtung

Der Fall der Scherung wird analog berechnet. Dabei ist in der *FE*-Software stets zu beachten, dass $\bar{\gamma}_{12} = 2 \cdot \bar{\varepsilon}_{12}$.

$$\bar{A}_{33} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \right)}{\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \right)^2} \quad (4.3.10)$$

Die zugehörige Veranschaulichung ist in Abbildung 4.3.5 zu betrachten.

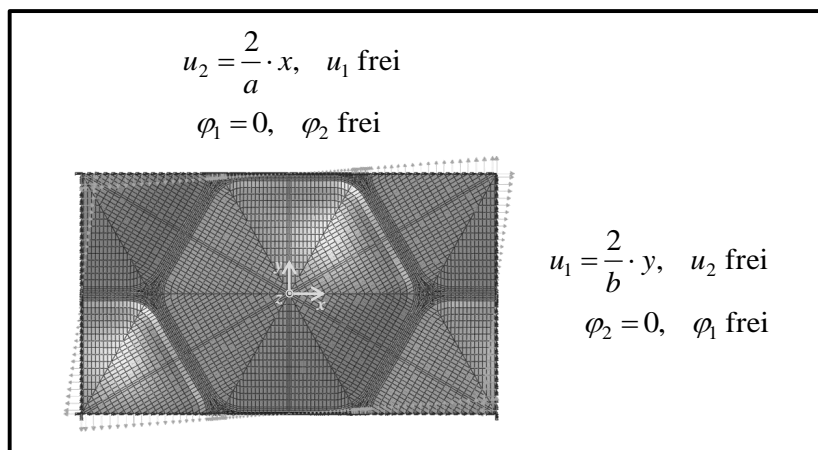


Abbildung 4.3.5.: Ebene Schubdeformation längs der ebenen Hauptachsen

Biegesteifigkeiten

Die elementaren Lastfälle zur Ermittlung der Biegesteifigkeiten sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

\bar{D}_{11} :	Krümmung um die zweite ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion
\bar{D}_{22} :	Krümmung um die erste ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion
\bar{D}_{33} :	Verdrillung um die ebenen Hauptachsen
\bar{D}_{12} :	Gleichzeitige Krümmung um die erste und zweite ebene Hauptachse

Tabelle 4.2.: Elementare Biege-Lastfälle

Bei den Biege-Lastfällen ist es von besonderer Wichtigkeit auf eine zuvor definierte Referenzfläche Bezug zu nehmen. In den vorliegenden Steifigkeitsermittlungen wird die Referenzfläche in die Ebene des Stegs der Elementarzelle gelegt. Somit beziehen sich die Berechnungen auf ein lokales Koordinatensystem, welches in der Mittelfläche der Stegebene der Elementarzelle liegt (vgl. Abbildung 4.3.6).

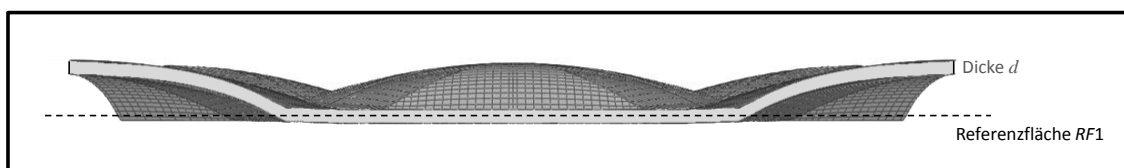


Abbildung 4.3.6.: Referenzfläche in der Stegebene der Elementarzelle ($RF1$)

Die Gleichungen zur Berechnung der Diagonalterme erfolgen analog zu den Membranlastfällen. Die Verzerrungen werden durch Krümmungen ersetzt und die zugehörigen Verzerrungsenergien gesucht, um die Biegesteifigkeiten zu ermitteln.

$$\bar{D}_{11} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11})}{(\bar{\kappa}_{11})^2} \quad (4.3.11)$$

$$\bar{D}_{22} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{22})}{(\bar{\kappa}_{22})^2} \quad (4.3.12)$$

Die nachfolgenden Abbildungen veranschaulichen erneut die Lastvorgaben an der Elementarzelle. Für die Biegefälle werden auf die betreffenden Randknoten der Elementarzelle sowohl Verdrehungen aufgegeben, als auch darauf basierende Verschiebungen, die in der horizontalen Faser durch die aufgebrauchten Verdrehungen entstehen. Abbildung 4.3.7 verdeutlicht dies im Profilbild der Elementarzelle am Beispiel der Krümmung um die zweite Hauptachse.

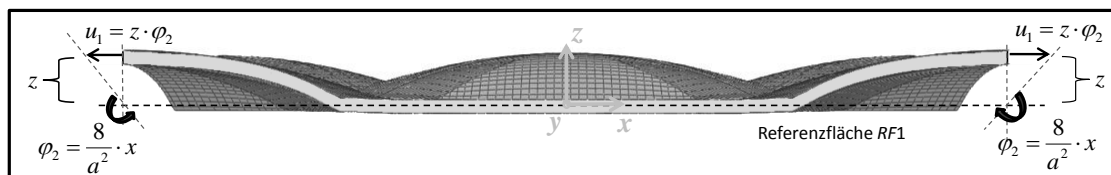


Abbildung 4.3.7.: Krümmung um die zweite ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion im Profil

Abbildungen 4.3.8 und 4.3.9 stellen bildhaft die Randbedingungen der entsprechenden Biegefälle dar.

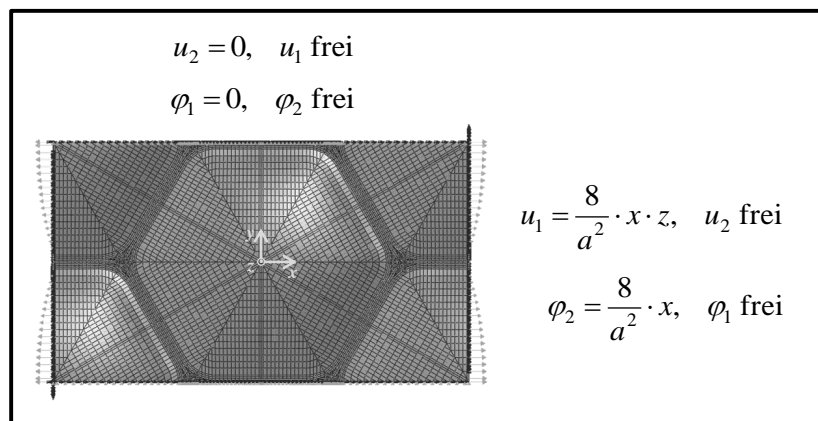


Abbildung 4.3.8.: Krümmung um die zweite ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion

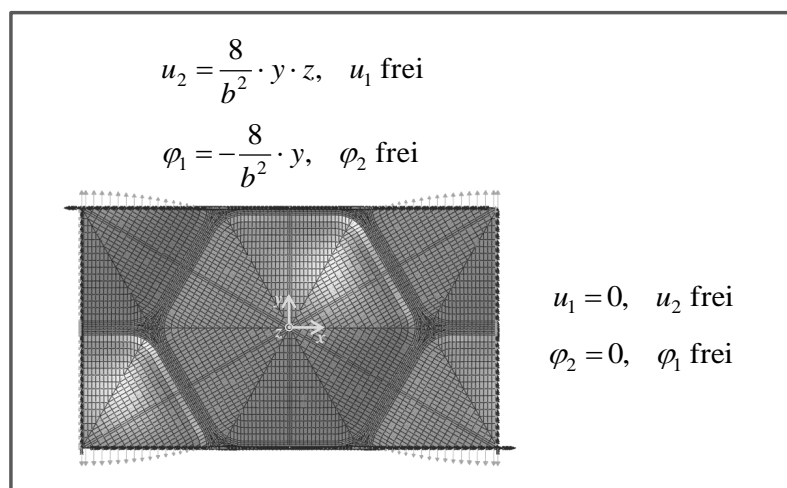


Abbildung 4.3.9.: Krümmung um die erste ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion

Die Koppelsteifigkeit in den Biege-Komponenten ergibt sich entsprechend dem Membran-Lastfall aus der Kombination aus beiden einseitigen Biege-Lastfällen, sodass eine doppel-seitige Last vorherrscht.

$$\bar{D}_{12} = \frac{(\bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}) - \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}) - \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{22}))}{(\bar{\kappa}_{11} \cdot \bar{\kappa}_{22})} \quad (4.3.13)$$

Abbildung 4.3.10 zeigt den gekoppelten Lastfall der Biegung um beide Hauptachsen.

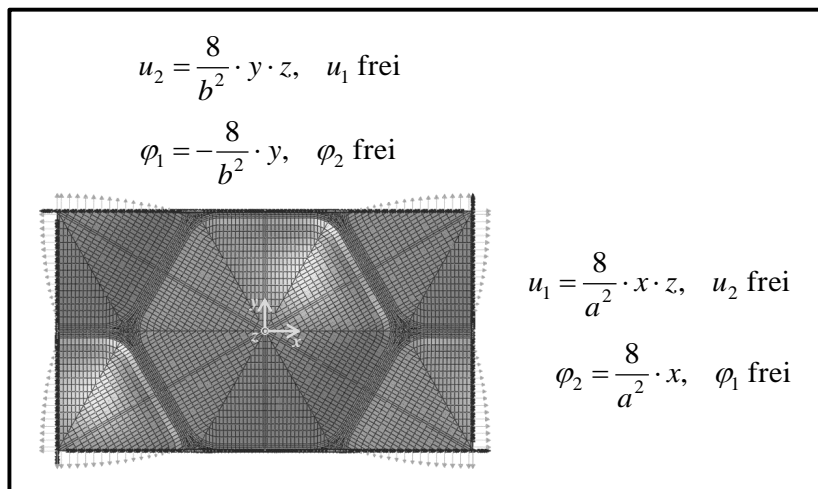


Abbildung 4.3.10.: Gleichzeitige Krümmung um die erste und zweite ebene Hauptachse

Die Steifigkeit bzgl. der Verdrillung/Torsion berechnet sich analog zu den einseitigen Biegefällen.

$$\bar{D}_{33} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A (2\bar{\kappa}_{12})}{(2\bar{\kappa}_{12})^2} \quad (4.3.14)$$

Die graphische Darstellung erfolgt in der folgenden Abbildung 4.3.11.

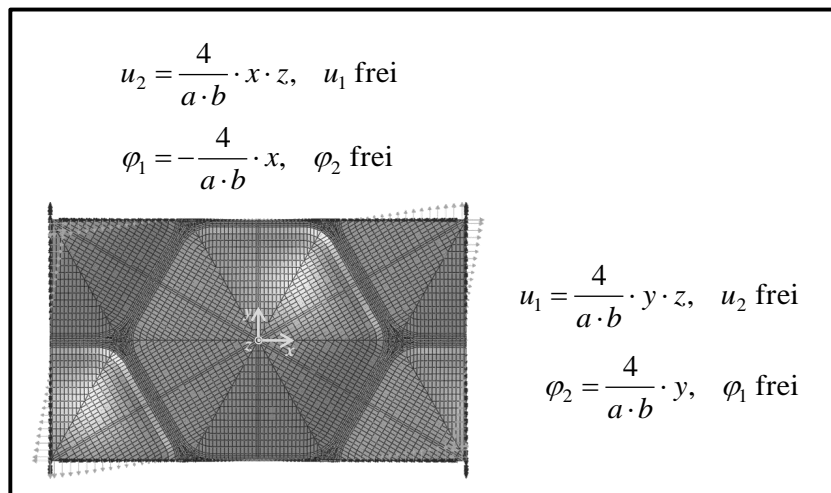


Abbildung 4.3.11.: Verdrillung um die ebenen Hauptachsen

Koppelsteifigkeiten

Um die Koppelsteifigkeiten zu ermitteln, müssen folgende elementare Lastfälle betrachtet werden:

\bar{B}_{11} :	Gleichzeitige Dehnung in die erste ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die zweite ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion
\bar{B}_{22} :	Gleichzeitige Dehnung in die zweite ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die erste ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion
\bar{B}_{33} :	Gleichzeitige ebene Schubdeformation und Verdrillung um die ebenen Hauptachsen
\bar{B}_{12} :	Gleichzeitige Dehnung in die erste und zweite ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die erste und zweite ebene Hauptachse

Tabelle 4.3.: Elementare Koppel-Lastfälle

Die Koppel-Lastfälle charakterisieren Kombinationen aus Dehn- und Biege-Lastfällen und müssen ebenfalls Bezug auf die Referenzfläche nehmen. Sie werden mithilfe der Daten aus den bereits vorhandenen, betroffenen Einzel-Lastfällen sowie mit der Verzerrungsenergie aus dem Koppelfall berechnet.

$$\bar{B}_{11} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{11} \right) \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{11} \right)} \quad (4.3.15)$$

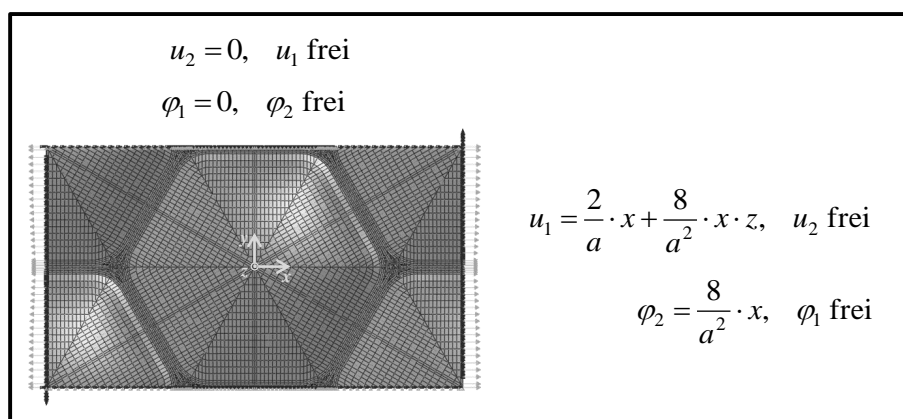


Abbildung 4.3.12.: Gleichzeitige Dehnung in die erste ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die zweite ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion

$$\bar{B}_{22} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{22} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{22} \right) \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{22} \right)} \quad (4.3.16)$$

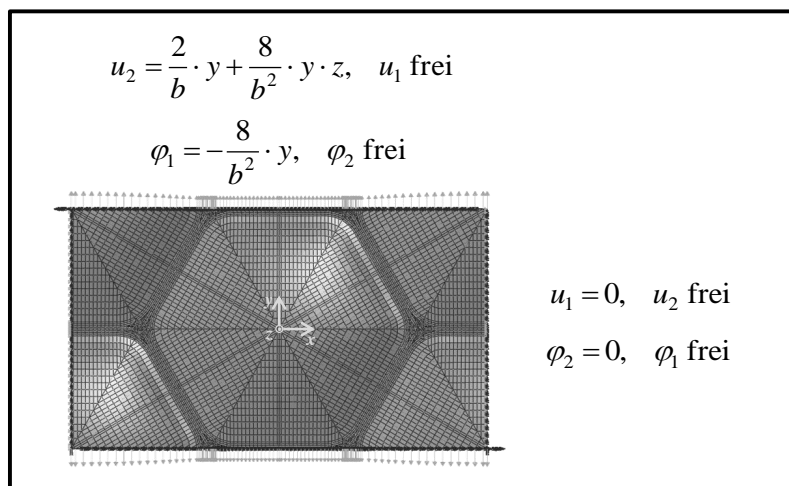


Abbildung 4.3.13.: Gleichzeitige Dehnung in die zweite ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die erste ebene Hauptachse mit behinderter Querkontraktion

Die Abbildungen 4.3.12 und 4.3.13 stellen die zugehörigen Randbedingungen an der Elementarzelle dar.

Eine Besonderheit stellt die Berechnung der Steifigkeit aus dem folgenden Koppel-Lastfall dar. Dieser kombiniert alle Membran- und Biege-Lastfälle, welche oben bereits beschrieben wurden, ausgenommen sind Scherung und Torsion.

$$\bar{B}_{12} = \frac{\left[\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22} \right) - \bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\kappa}_{11} - \bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \bar{\kappa}_{22} \right]}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{22} + \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{11} \right)} \quad (4.3.17)$$

Die nachfolgende Darstellung bildet die zugehörigen Randbedingungen ab und verdeutlicht nochmals die Lastvorgaben für die Ermittlung der entsprechenden Steifigkeitskomponente (Abbildung 4.3.14).

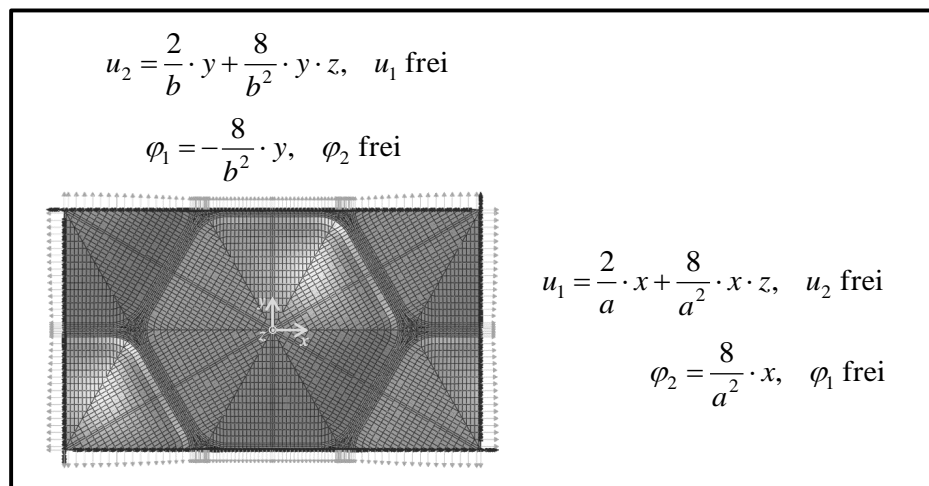


Abbildung 4.3.14.: Gleichzeitige Dehnung in die erste und zweite ebene Hauptachsenrichtung und Krümmung um die erste und zweite ebene Hauptachse

Die Berechnung der Koppelsteifigkeit aus Scherungs- und Torsionsfall erfolgt analog wie bisher beschrieben.

$$\bar{B}_{33} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}, 2\bar{\kappa}_{12} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(2\bar{\kappa}_{12} \right) \right)}{\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \cdot 2\bar{\kappa}_{12} \right)} \quad (4.3.18)$$

Abbildung 4.3.15 veranschaulicht die entsprechenden Randbedingungsvorgaben für den Koppelfall aus Scherung und Torsion.

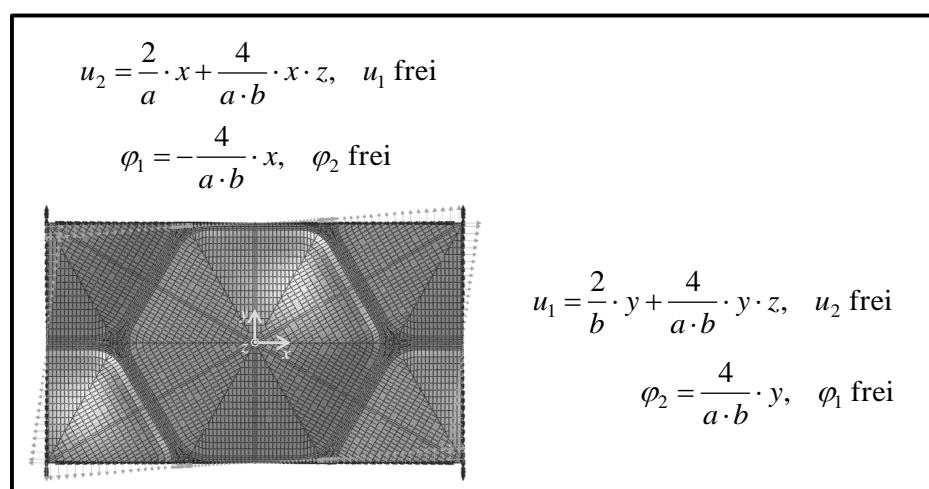


Abbildung 4.3.15.: Gleichzeitige ebene Schubdeformation und Verdrillung um die ebenen Hauptachsen

Zusammenfassend ergeben sich die Koppelsteifigkeiten aus den Kombinationen der oben genannten Membran- und Biegesteifigkeiten. Dabei müssen die jeweiligen Anforderungen an die Freiheitsgrade, d.h. die Randbedingungen, übertragen werden.

Ermittelte effektive Materialparameter für aufgeführtes RVE

In Anhang B werden die detaillierten Berechnungen der benötigten Steifigkeiten dargestellt, die auf Basis der beschriebenen Vorgehensweise durchgeführt worden sind. Gleichung (4.3.19) zeigt das zu erfüllende Schalenstoffgesetz mit den absoluten Werten der auf die Weise ermittelten Membran-, Biege- und Koppelsteifigkeiten für das Beispiel eines RVEs einer einzelnen Elementarzelle zur Referenzfläche $RF1$:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29032 & 770 & 0 & 19859 & -8974 & 0 \\ & 28988 & 0 & & 19864 & 0 \\ \text{(sym.)} & & 873 & \text{(sym.)} & & 2236 \\ \hline & & & 25231 & -11496 & 0 \\ & & & & 25168 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & 10013 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.3.19)$$

Hierbei werden die Einheiten der Membransteifigkeiten in $[\text{N}/\text{mm}]$, der Biegesteifigkeiten in $[\text{N} \cdot \text{mm}]$ und die der Koppelsteifigkeiten $[\text{N}]$ angegeben, für die dimensionslose Dehnung, die Krümmung in $[\text{1}/\text{mm}]$, Kräfte pro Länge in $[\text{N}/\text{mm}]$ und Biegemomente pro Länge in $[\text{N} \cdot \text{mm}/\text{mm}]$.

Auf Basis dieser ermittelten Materialparameter werden im nachfolgenden Kapitel numerische Untersuchungen durchgeführt und das Ersatzmodell mit dem strukturierten FE -Modell verglichen.

5. Numerische Untersuchungen der *FE*-Modelle des strukturierten Blechs

Im vorliegenden Kapitel werden die zu untersuchenden *FE*-Modelle, d.h. sowohl in strukturierter als auch in vereinfachter Ersatzform, einander gegenübergestellt. Zum einen werden die modalen Parameter Eigenfrequenzen und Eigenformen, zum anderen die statischen Verschiebungen unter quasi-statischer Belastung ermittelt und ausgewertet. Ziel dieses Kapitels ist es, die Güte des Ersatzmodells im Vergleich zum strukturierten numerischen Modell bewerten zu können. Im anschließenden Kapitel wird das am besten geeignete Ersatzmodell mit experimentellen Daten validiert.

Die wichtigsten Kenndaten der verwendeten *FE*-Modelle sind in der nachfolgenden Tabelle 5.1 aufgeführt.

	strukturiertes Modell	Ersatzmodell
<i>E</i> -Modul	$2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	$2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
POISSON-Zahl ν	0,3	0,3
äußere Abmaße	280 mm × 303,109 mm	280 mm × 303,109 mm
Fläche <i>A</i>	87356,5381 mm ²	84870,52 mm ²
Flächenverhältnis zur strukturierten Fläche	100 %	97,154 %
Blechdicke <i>d</i>	0,5 mm	0,5 mm
Dichte ρ [Tonne/mm ³]	7,532 To./mm ³	7,753 To./mm ³
Elementanzahl	265920	2560
Elementanzahlverhältnis zum strukturierten Modell	100 %	0,963 %

Tabelle 5.1.: Kenndaten der *FE*-Modelle

5.1. Numerische Eigenschwingungsanalyse

Zur Ermittlung der modalen Parameter der vorliegenden *FE*-Modelle wird mit Hilfe eines gängigen *FE*-Software-Programms eine numerische Modalanalyse durchgeführt. Für die Berechnungen wird die Finite-Elemente-Methode mit dem Algorithmus „Frequency-LANCZOS“ angewendet. Die Dämpfungen sind hierbei sehr gering und werden in der Bewegungsdifferentialgleichung nicht berücksichtigt und somit das System als ein ungedämpftes Schwingungssystem angenähert. Im später folgenden Abschnitt 6.1 ist der zu untersuchende Frequenzbereich auf bis zu 800 Hz eingegrenzt. Um die experimentellen Daten abgleichen zu können, wird auch in den numerischen Berechnungen der genannte Frequenzbereich betrachtet. Durch die begrenzte Auflösung des Messpunktrasters in der experimentellen Modalanalyse des zu untersuchenden Blechs sind Eigenformen oberhalb der genannten Grenze nur schwer zu identifizieren.

In den nachfolgenden Unterabschnitten sind alle ermittelten Eigenfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen der numerischen Modelle mit den Ausgangsmaterialkennwerten dargestellt.

Eigenfrequenzen des strukturierten sowie des Ersatzmodells

Die folgenden Eigenfrequenzen und ihre Eigenformen ergeben sich aus dem vorgegebenen Frequenzlimit bis zu 800 Hz. Aus Gründen der schweren Identifizierbarkeit der Moden bei höheren Frequenzen, wird lediglich die Gegenüberstellung der ersten 12 Eigenformen dargestellt (Abbildungen 5.1.1-5.1.6). Hierbei deutet „*Str-FE*“ unter jeder einzelnen Eigenform-Abbildung auf das strukturierte numerische Modell und „*E*“ auf das in Kapitel 4 entwickelte Ersatzmodell mit dem Elementtyp für dünne Schalen hin. Die Modalanalyse für das strukturierte *FE*-Modell benötigt etwa 6295 Sekunden und die des Ersatzmodells 92 Sekunden.

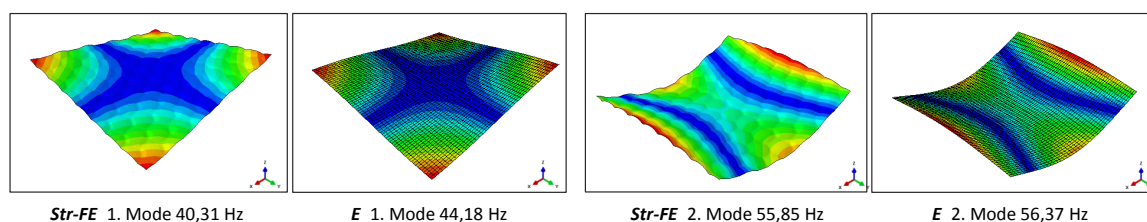


Abbildung 5.1.1.: Numerische Eigenmoden 1-2

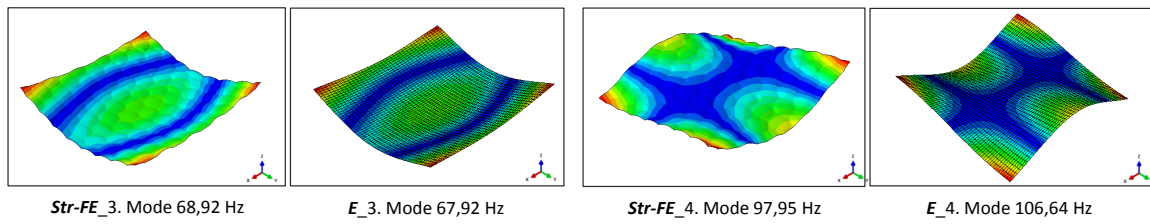


Abbildung 5.1.2.: Numerische Eigenmoden 3-4

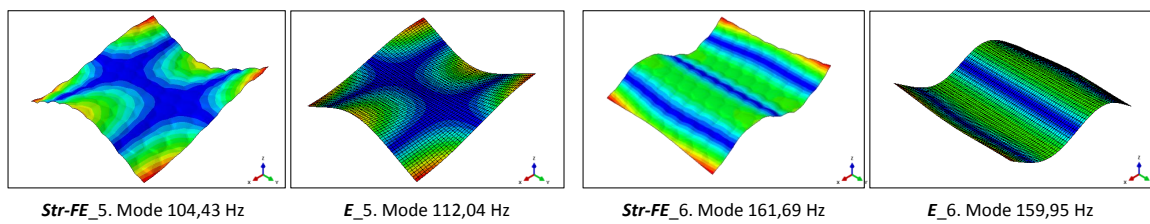


Abbildung 5.1.3.: Numerische Eigenmoden 5-6

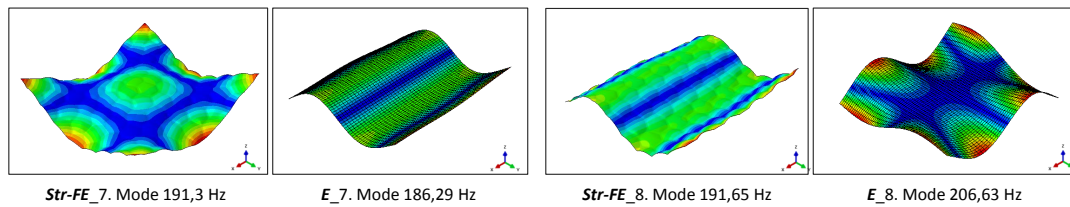


Abbildung 5.1.4.: Numerische Eigenmoden 7-8

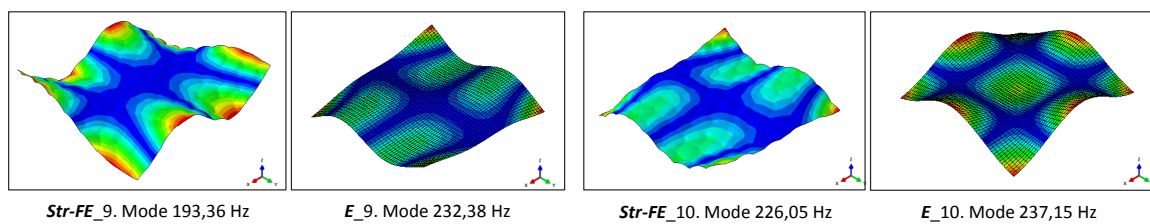


Abbildung 5.1.5.: Numerische Eigenmoden 9-10

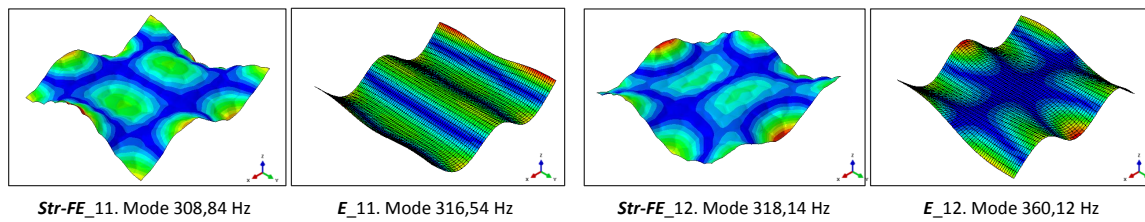


Abbildung 5.1.6.: Numerische Eigenmoden 11-12

Eine erste Betrachtung lässt eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den Modellen erkennen. Die erste Mode weist zum Beispiel einen Frequenzunterschied von etwa 10% auf, was einen maximalen Richtwert für die weiteren Unterschiede darstellt. Es ist festzustellen, dass das strukturierte Modell meist bei den biegeelastigen Moden eine etwas höhere Frequenz vorweist als das Ersatzmodell. Bei den torsionselastigen Formen wiederum besitzt das Ersatzmodell etwas höhere Frequenzen als das strukturierte Modell. Ab der 7. Mode ist jedoch die Reihenfolge der Formen nicht mehr die gleiche bei beiden Modellen. Im weiteren Verlauf der Arbeit soll dies mit Variation des Ersatzmodells verbessert bzw. vermieden werden.

5.2. Numerische statische Untersuchung

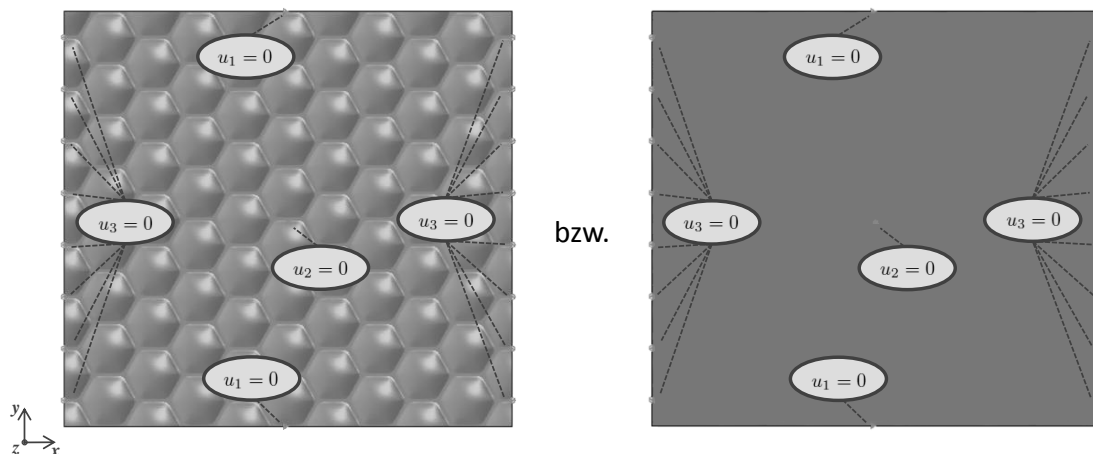


Abbildung 5.2.1.: Randbedingungen an den FE-Modellen beim statischen Belastungstest

Um die statischen Durchbiegungen der FE-Modelle zu ermitteln wird anlehnd an den statischen Belastungstest aus dem später folgenden Abschnitt 6.2 ein entsprechender

quasi-linearer Lastfall in einer *FE*-Software simuliert. Dazu werden die Freiheitsgrade an zwei gegenüberliegenden Randknoten im Stegbereich in *z*-Richtung gesperrt. Zusätzlich wird die Verschiebung am Krafteinleitungspunkt in der Blechmitte in *y*-Richtung und an den jeweiligen Mittelpunktknoten an den freien Rändern in *x*-Richtung verhindert (Abbildung 5.2.1). Ziel dieser Wahl der Randbedingungen ist die Erlangung der statischen Bestimmtheit des Systems und Vermeidung unnötiger Zwängungen.

Die Belastung erfolgt mittels Krafteinleitung am Blechmittelknoten in quasi-linearen Schritten mit einer resultierenden Endbelastung von $F \approx 9,216$ N.

Im folgenden Diagramm (Abbildung 5.2.2) werden die jeweiligen Durchbiegungen der beiden *FE*-Modelle bei quasi-linearer Belastung dargestellt. Die resultierende Verformung findet dabei vollständig im elastischen Bereich statt.

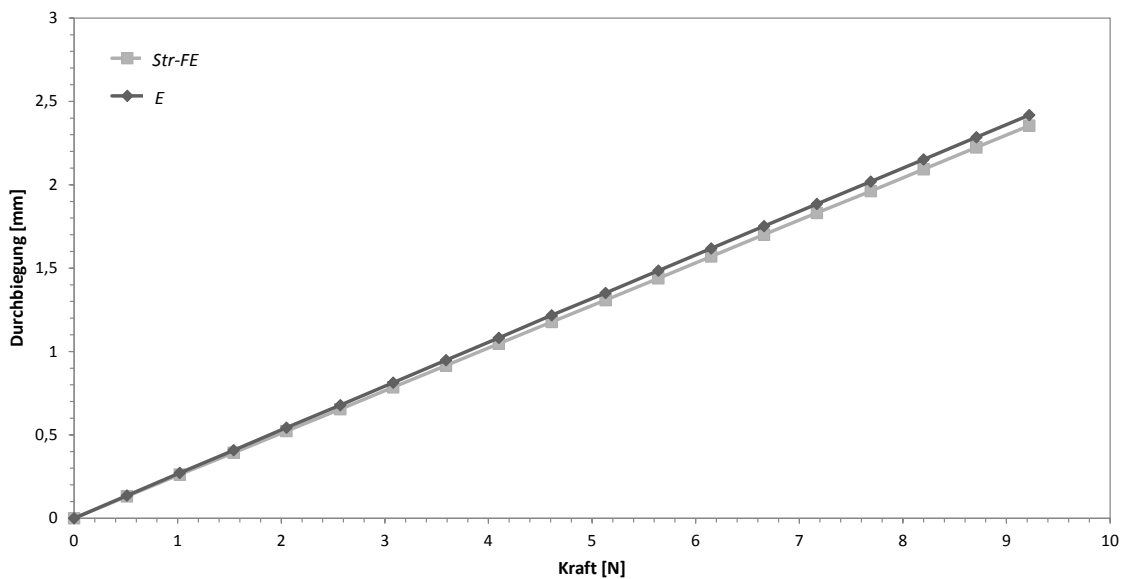


Abbildung 5.2.2.: Weg-Kraft-Verläufe des strukturierten *FE*- und Ersatzmodells

Es ist zu erkennen, dass die beiden linearen Graphen sehr dicht beieinander liegen und insbesondere zu Beginn somit eine gute Übereinstimmung aufweisen. Die Steigung der beiden Graphen differieren leicht um circa 4%. Das Ersatzmodell erfährt eine etwas stärkere Durchbiegung als das strukturierte Modell.

5.3. Zwischendiskussion

Bei der Gegenüberstellung zwischen dem entwickelten Ersatzkontinuum und dem strukturierten *FE*-Modell ist festzustellen, dass die Weg-Kraft-Verläufe bei statischer Belastung lediglich um maximal 4 % voneinander abweichen und somit eine gute Übereinstimmung aufweisen. Jedoch spricht ein solcher Belastungstest lediglich die Biegeterme an und besitzt somit eine eingeschränkte Aussagekraft.

Bedeutender ist hierbei der Vergleich der Eigenfrequenzen und -formen, welcher eine gute Näherung der Frequenzen von bis zu 5 % relativer Abweichung aufweist. Die Eigenformen stimmen größtenteils gut überein. Dennoch ergeben sich Unstimmigkeiten in der Mode-Reihenfolge. Aufgründessen sollen in den folgenden Abschnitten weitere Ersatzmodelle auf Basis anderer *RVEs* untersucht und dem ersten Ersatzmodell gegenübergestellt werden.

5.4. Variation der Referenzfläche

Das in Kapitel 4 entwickelte Ersatzkontinuum bzw. -modell basiert auf dem Bezug zu einer zuvor definierten Referenzfläche für die durchzuführenden Einheitsverzerrungs- und besonders Einheitsbiegeverzerrungszustände. Im vorliegenden Abschnitt sollen die Vergleiche zu einem Ersatzmodell mit neuer Referenzfläche (*RF2*) durchgeführt werden. Die zuvor im Steg der Elementarzelle liegende Bezugsfläche (vgl. *RF1* in Abbildung 4.3.6 auf Seite 70) wird nun auf den Massenmittelpunkt verschoben (Abbildung 5.4.1).

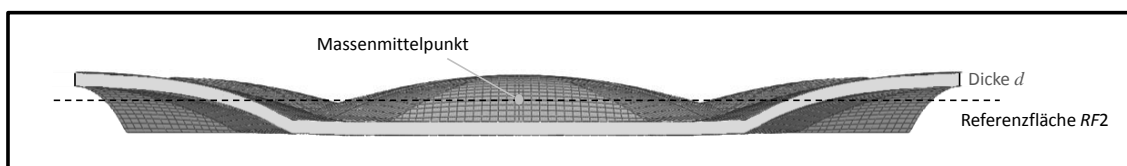


Abbildung 5.4.1.: Referenzfläche 2 im Massenmittelpunkt der Elementarzelle (*RF2*)

Der Massenmittelpunkt ergibt sich aus der Summe der Elementmassenmittelpunkte. Durch die Wahl einer neuen Referenzfläche soll geklärt werden, ob diese möglicherweise eine positive Verbesserung in den Ergebnissen insbesondere bzgl. der Mode-Reihenfolge bewirken kann. Die zur *x-y*-Ebene nicht symmetrische Struktur lässt dies vermuten. Mit dem erläuterten Vorgehen aus Abschnitt 4.3 mit Bezug auf die neue Referenzfläche *RF2* resultieren die zugehörigen Materialparameter, d.h. Steifigkeiten, des neuen Ersatzkontinuums (vgl.

Gleichung (5.4.1)).

Neues Schalenstoffgesetz bzgl. *RF2*:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29032 & 770 & 0 & -19913 & -10029 & 0 \\ & 28988 & 0 & & -19847 & 0 \\ \text{(sym.)} & & 873 & \text{(sym.)} & & 1040 \\ & & & 25306 & 14536 & 0 \\ & & & & 25145 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & 5524 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.4.1)$$

Vergleichsweise das Schalenstoffgesetz bzgl. *RF1* (vgl. Gleichung (4.3.19)):

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29032 & 770 & 0 & 19859 & -8974 & 0 \\ & 28988 & 0 & & 19864 & 0 \\ \text{(sym.)} & & 873 & \text{(sym.)} & & 2236 \\ & & & 25231 & -11496 & 0 \\ & & & & 25168 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & 10013 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix}.$$

Zur Verdeutlichung sei im Folgenden die relative Abweichung der Beträge der Steifigkeitsmatrixeinträge bzgl. *RF2* im Vergleich zu denen bzgl. *RF1* dargestellt:

$$\begin{pmatrix} 0\% & 0\% & 0 & 0,27\% & 11,76\% & 0 \\ & 0\% & 0 & & -0,09\% & 0 \\ \text{(sym.)} & & 0\% & \text{(sym.)} & & -53,49\% \\ & & & 0,3\% & 26,44\% & 0 \\ & & & & -0,09\% & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & -44,83\% \end{pmatrix}. \quad (5.4.2)$$

Im Vergleich zu den Steifigkeiten bzgl. *RF1* ist zu erkennen, dass die MembranstEIFigkeiten bzgl. *RF2* keine Änderung vorweisen, da die variierte Referenzfläche diese nicht beeinflussen. Die jeweils ersten Diagonal-Terme der Biege- und Koppelsteifigkeiten ändern sich im Betrag ebenfalls kaum, lediglich das Vorzeichen der ersten beiden Diagonal-Koppelterme wechselt. Des Weiteren ändert sich das Vorzeichen im Biegeterm \bar{B}_{12} , und zu jeweils fast 50% die Biegesteifigkeit bzgl. Torsion sowie die Koppelsteifigkeit bzgl. Scherung und Tor-

sion. Dieses Ergebnis war durch die symmetrische Geometrie zu vermuten. Lediglich die Biege- und Koppelterme werden durch die neue Referenzfläche beeinflusst, da diese Größen abhängig vom Abstand zur Referenzfläche sind. In den weiteren Unterabschnitten folgt die Untersuchung des neu ermittelten Ersatzmodells und die Gegenüberstellung der einzelnen Eigenmoden, -frequenzen sowie statischen Durchbiegungen zum strukturierten numerischen Modell.

5.4.1. Gegenüberstellung der Eigenmoden und -frequenzen

Die Eigenfrequenzen des strukturierten FE -Modells werden in den folgenden Abbildungen 5.4.2-5.4.7 denen des Ersatzmodells aus neuer Referenzfläche (gekennzeichnet als $RF2$) gegenübergestellt. Hierbei deutet „ $Str-FE$ “ unter jeder einzelnen Eigenform-Abbildung auf das strukturierte numerische Modell und „ $E-RF2$ “ auf das Ersatzmodell bzgl. der neuen Referenzfläche hin.

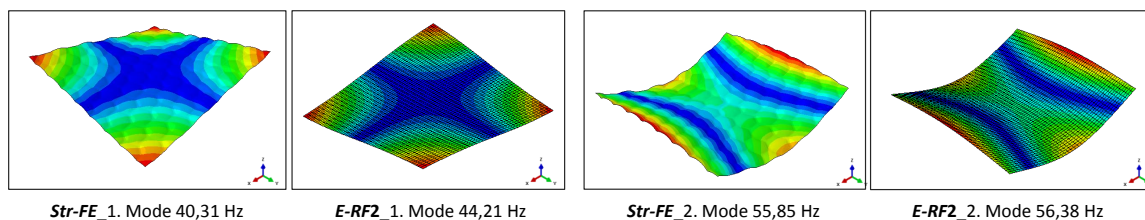


Abbildung 5.4.2.: $RF2$ _Numerische Eigenmoden 1-2

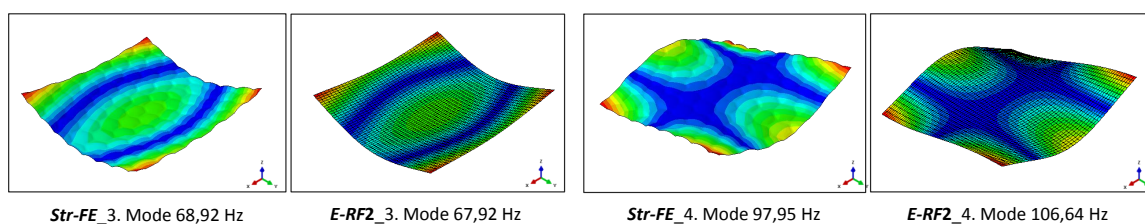
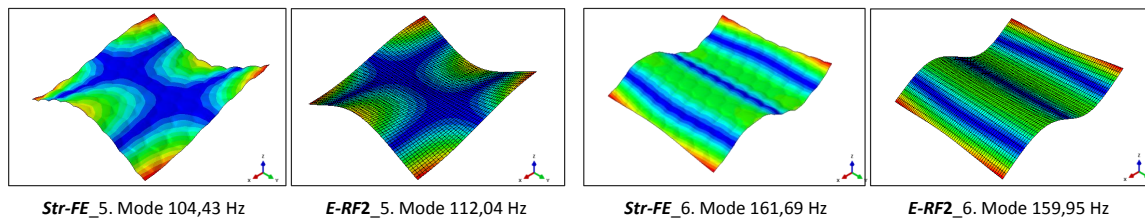
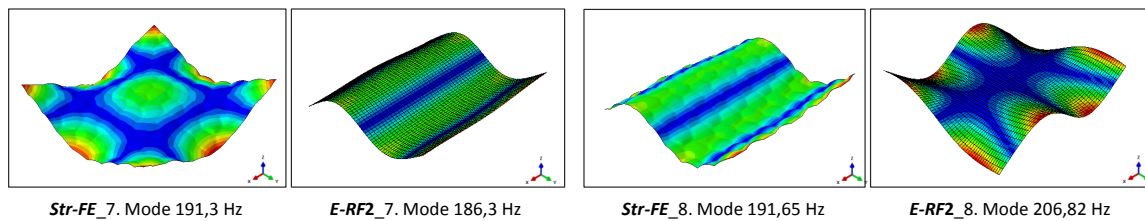
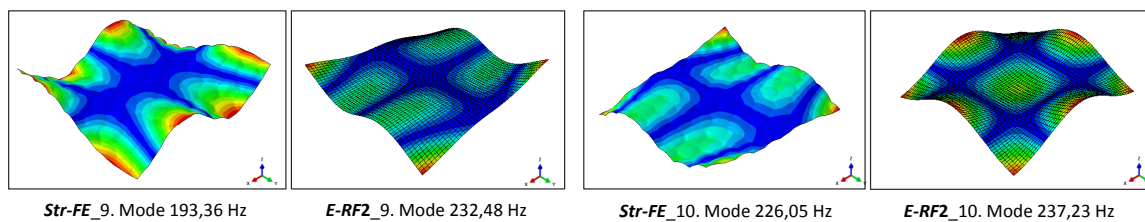
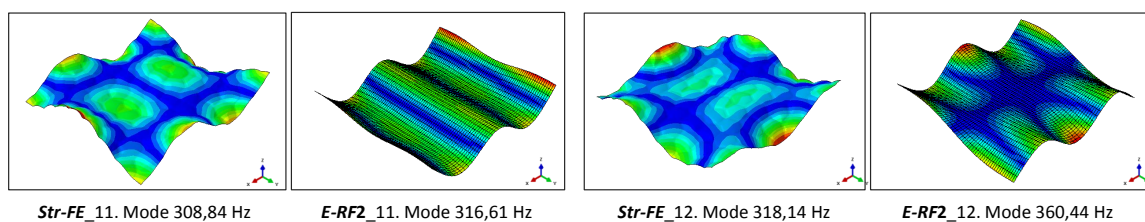


Abbildung 5.4.3.: $RF2$ _Numerische Eigenmoden 3-4

Abbildung 5.4.4.: *RF2*_Numerische Eigenmoden 5-6Abbildung 5.4.5.: *RF2*_Numerische Eigenmoden 7-8Abbildung 5.4.6.: *RF2*_Numerische Eigenmoden 9-10Abbildung 5.4.7.: *RF2*_Numerische Eigenmoden 11-12

Der Vergleich der Eigenmoden verdeutlicht, dass sich durch die veränderte Referenzfläche keine besseren Ergebnisse in der Mode-Reihenfolge einstellen. Somit muss im Bezug auf die Eigenform-Analyse nach einem geeigneteren Ersatzmodell gesucht werden.

5.4.2. Vergleich der statischen Verschiebungen

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.2 werden die statischen Durchbiegungen der beiden numerischen Modelle untersucht und miteinander verglichen. Das nachfolgende Diagramm in Abbildung 5.4.8 stellt die beiden zugehörigen Graphen dar.

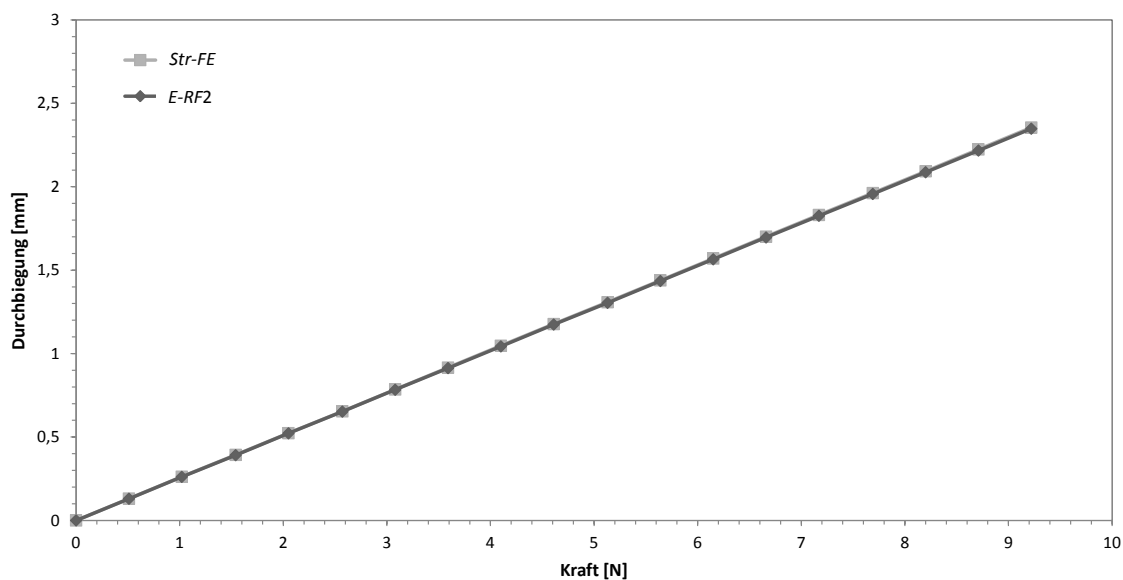


Abbildung 5.4.8.: Weg-Kraft-Verläufe des strukturierten *FE*- und Ersatzmodells bzgl. *RF2*

Im Vergleich zu den statischen Verschiebungen aus Abschnitt 5.2 ist wahrzunehmen, dass die Durchbiegungen des Ersatzmodells bzgl. *RF2* nun wesentlich näher an denen des strukturierten numerischen Modells liegen. Die Steigung der beiden Graphen gleicht sich viel mehr. Somit ist eine grundlegende und gewünschte Verbesserung festzustellen.

5.5. Vergrößerung des *RVE*-Bereichs

Um die Genauigkeit der Ergebnisse zu verbessern, ist eine Vergrößerung des *RVE*-Bereichs in Erwägung zu ziehen und über diesen eine Mittelung vorzunehmen. Es wird angenommen, dass sich die Heterogenität der Struktur in einem größeren repräsentativen Bereich besser durchsetzt und sich somit mit den vorhandenen Randbedingungen ein effektiveres Ersatzmodell entwickeln lässt.

Somit wird zum Vergleich ein größerer Bereich herangezogen. Dieser ist nun so groß, dass ein einzelnes zuvor verwendetes *RVE* eingebettet wird, sodass alle vorigen Ränder einer einzelnen Elementarzelle nun eingeschlossen sind (vgl. Abbildung 5.5.1).

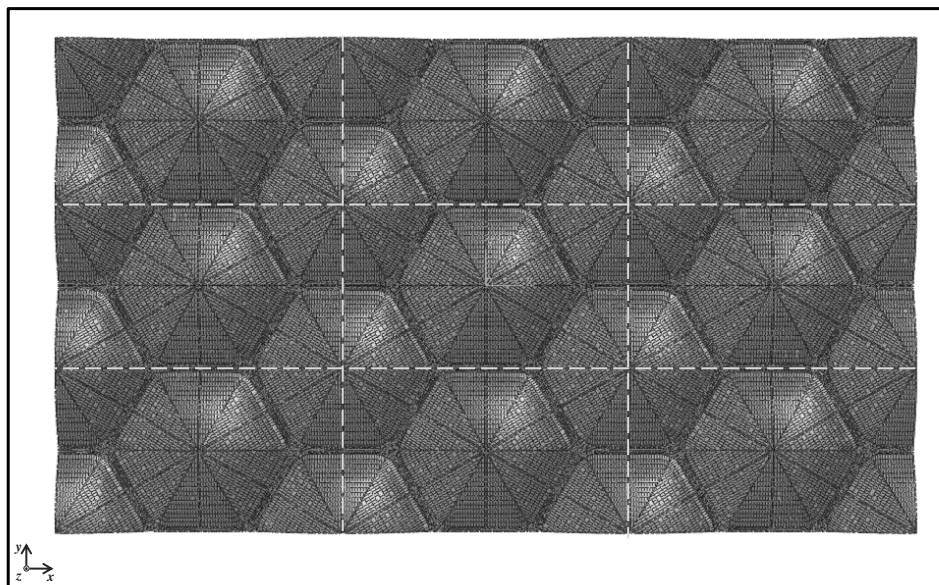


Abbildung 5.5.1.: vergrößerter RVE-Bereich (3x3 Elementarzellen)

Das heißt der neue *RVE*-Bereich ist um ein neunfaches größer als das bisher verwendete Repräsentative Volumenelement einer einzelnen Elementarzelle. Entsprechend müssen die Gleichungen der Einheitsverzerrungs- und Einheitsbiegeverzerrungszustände bzgl. der neuen *RVE*-Länge und -Breite angepasst werden. Die Referenzfläche, auf die in diesem Fall Bezug genommen wird, liegt wieder in der Stegebene (*RF1*). Die daraus ermittelten

Steifigkeiten sind dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29124 & 712 & 0 & 19931 & -9028 & 0 \\ & 29109 & 0 & & 19933 & 0 \\ \text{(sym.)} & & 2658 & \text{(sym.)} & & 2130 \\ \hline & & & 25298 & -11538 & 0 \\ & & & & 25283 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & 5048 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.5.1)$$

zu entnehmen. Zum besseren Vergleich ist hier nochmals das Schalenstoffgesetz Gleichung (4.3.19) des zu Beginn ermittelten Ersatzmodells bzgl. $RF1$ und einer Elementarzelle dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29032 & 770 & 0 & 19859 & -8974 & 0 \\ & 28988 & 0 & & 19864 & 0 \\ \text{(sym.)} & & 873 & \text{(sym.)} & & 2236 \\ \hline & & & 25231 & -11496 & 0 \\ & & & & 25168 & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & 10013 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix}.$$

Im Vergleich lässt sich erkennen, dass sich maßgeblich die Steifigkeiten \bar{A}_{33} und \bar{D}_{33} im Betrag verändert haben. \bar{A}_{33} hat sich fast verdreifacht und \bar{D}_{33} etwa halbiert. Die relative Abweichung der Steifigkeitsmatrixbeträge zu denen der Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (4.3.19) verdeutlicht die Unterschiede:

$$\begin{pmatrix} -0,32\% & 7,53\% & 0 & 0,36\% & 0,6\% & 0 \\ & -0,42\% & 0 & & 0,35\% & 0 \\ \text{(sym.)} & & -204,47\% & \text{(sym.)} & & -4,74\% \\ \hline & & & 0,27\% & 0,37\% & 0 \\ & & & & 0,46\% & 0 \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & -49,59\% \end{pmatrix}. \quad (5.5.2)$$

Ein vergrößerter RVE -Bereich verhält sich bzgl. der Scherung und Torsion anders als eine einzelne Elementarzelle. Es ist anzunehmen, dass die verwendeten Randbedingungen zur Ermittlung der entsprechenden Steifigkeiten (vgl. Unterabschnitt 4.3.3) noch optimiert

werden müssen, sofern die Ergebnisse Verbesserungen liefern.

5.5.1. Eigenformen- und Eigenfrequenzvergleich

Das neu ermittelte Ersatzmodell aus dem größeren *RVE*-Bereich wird erneut mit dem strukturierten *FE*-Modell verglichen. Nachfolgend sind die Eigenformen und -frequenzen in den Abbildungen 5.5.2-5.5.7 dargestellt. Hierbei deutet „*Str-FE*“ unter jeder einzelnen Eigenform-Abbildung auf das strukturierte numerische Modell und „*E-RVE 3x3*“ auf das Ersatzmodell aus größerem *RVE* hin.

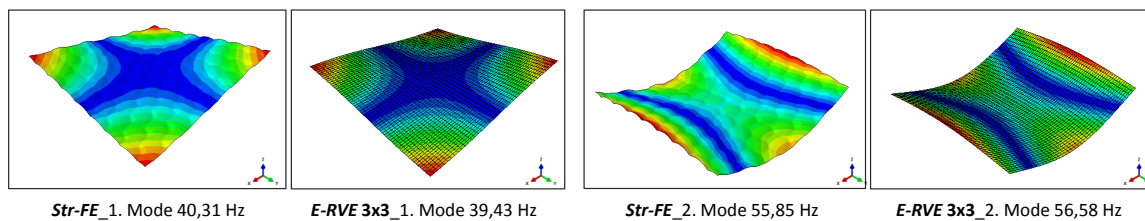


Abbildung 5.5.2.: größeres *RVE*_Numerische Eigenmoden 1-2

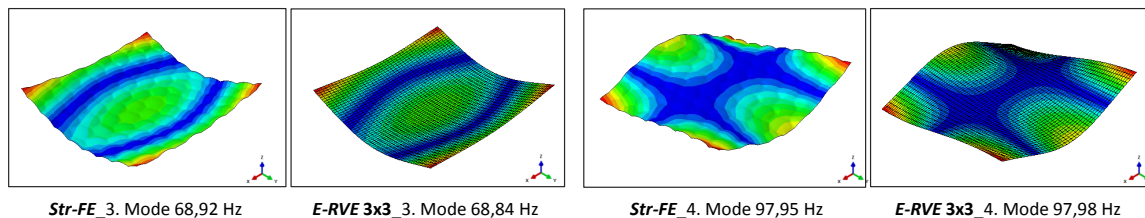


Abbildung 5.5.3.: größeres *RVE*_Numerische Eigenmoden 3-4

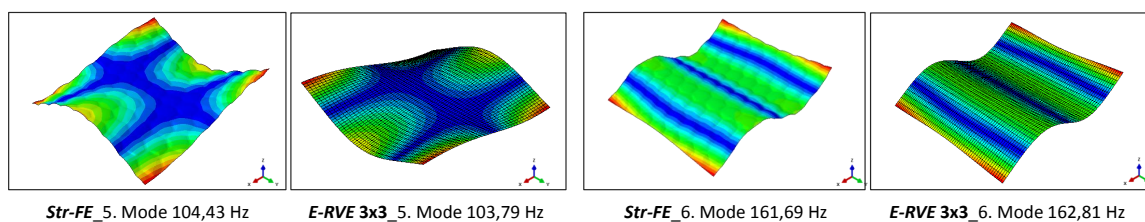
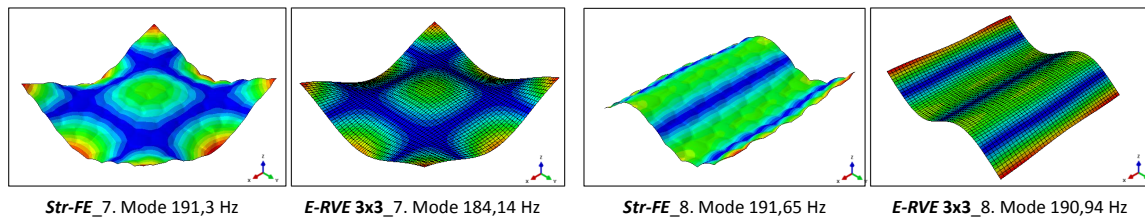
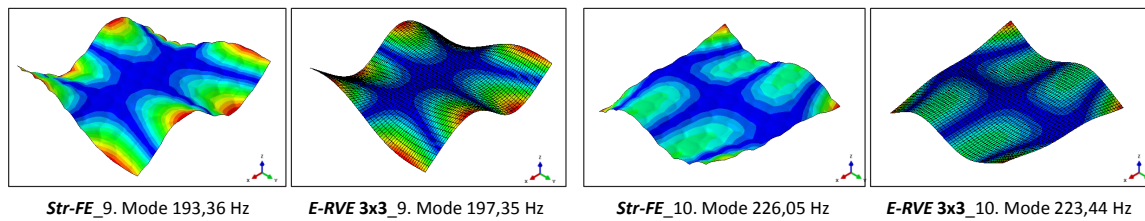
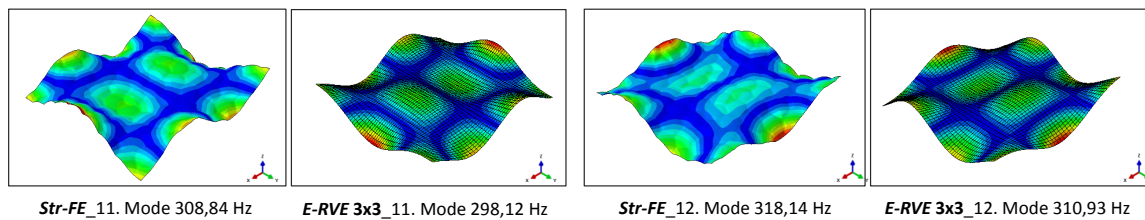


Abbildung 5.5.4.: größeres *RVE*_Numerische Eigenmoden 5-6

Abbildung 5.5.5.: größeres RVE _Numerische Eigenmoden 7-8Abbildung 5.5.6.: größeres RVE _Numerische Eigenmoden 9-10Abbildung 5.5.7.: größeres RVE _Numerische Eigenmoden 11-12

Hier stellt sich eine deutliche Verbesserung in der Mode-Reihenfolge ein. Bis zur 22. Eigenform sind die Moden eindeutig identifizierbar. Zur Verdeutlichung der relativen Abweichung sind die Frequenzen der ersten 22 Moden im Folgenden tabellarisch dargestellt.

Mode Nr.	f_{Str-FE} [Hz]	$f_{E-RVE\ 3x3}$ [Hz]	Abweichung [%]
1	40,31	39,43	-2,18
2	55,85	56,58	1,31
3	68,92	68,84	-0,12
4	97,95	97,98	0,03
5	104,43	103,79	-0,61
6	161,69	162,81	0,69
7	191,3	184,14	-3,74
8	191,65	190,94	-0,37
9	193,36	197,35	2,06

Mode Nr.	f_{Str-FE} [Hz]	$f_{E-RVE\ 3x3}$ [Hz]	Abweichung [%]
10	226,05	223,44	-1,15
11	308,84	298,12	-3,47
12	318,14	310,93	-2,27
13	320,64	325,56	1,53
14	350,3	354,98	1,34
15	387,29	382,67	-1,19
16	405,71	402,95	-0,68
17	460,32	438,54	-4,73
18	468,17	457,5	-2,28
19	516,11	496,76	-3,75
20	531,79	548,8	3,2
21	546,81	566,13	3,53
22	628,97	605,71	-3,7

Tabelle 5.2.: Eigenfrequenzen 1-22 von strukturiertem FE -Modell und Ersatzmodell aus größerem RVE

Im Durchschnitt liegt der Betrag der relativen Abweichung der Eigenfrequenzen bei etwa 2 %, was auf eine gute Übereinstimmung deutet.

5.5.2. Gegenüberstellung der statischen Verschiebungen

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.2 werden die statischen Durchbiegungen der beiden numerischen Modelle untersucht und miteinander verglichen. Das nachfolgende Diagramm in Abbildung 5.5.8 stellt die beiden zugehörigen Graphen dar.

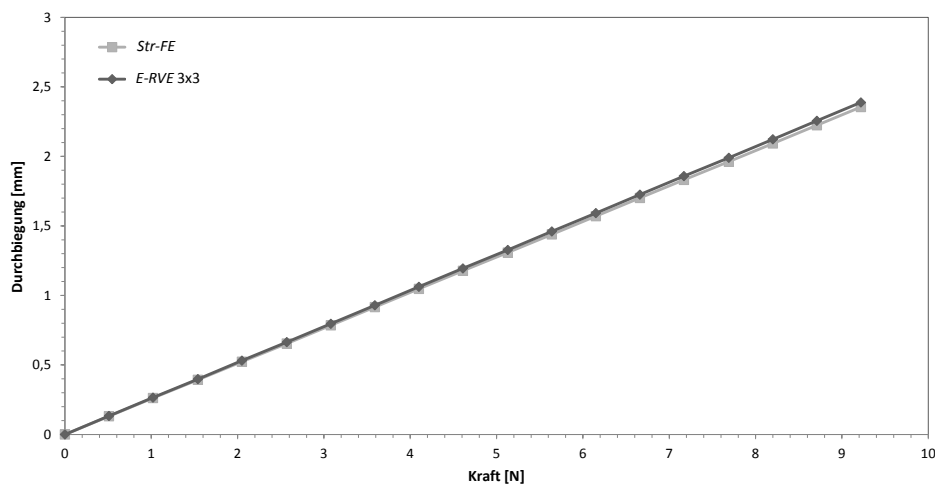


Abbildung 5.5.8.: Weg-Kraft-Verläufe des strukturierten FE - und Ersatzmodells mit größerem RVE -Bereich

Auch hier ist eine leichte Verbesserung zu erkennen hinsichtlich der statischen Durchbiegungen im Vergleich zum strukturierten numerischen Modell. Die Graphen weisen eine bessere Übereinstimmung auf, jedoch im Vergleich zu E - $RF2$ wiederum etwas schlechter.

5.6. Diskussion

Um eine genauere Aussage über die Näherung der statischen Durchbiegungen treffen zu können, ist im Folgenden die relative Abweichung der Durchbiegungen aller Ersatzmodelle zur Durchbiegung des strukturierten FE -Modells dargestellt.

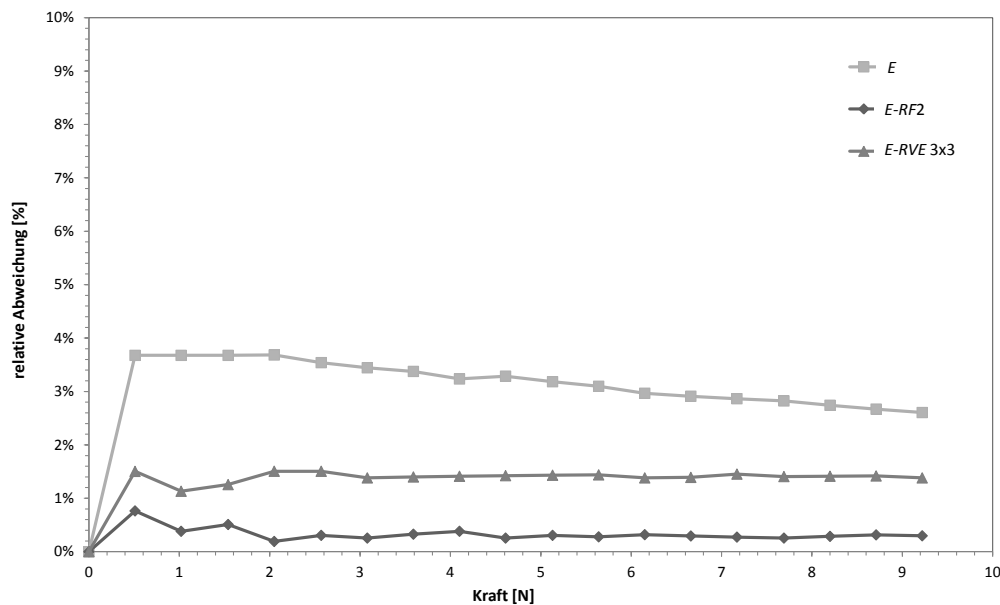


Abbildung 5.6.1.: relative Abweichung der Durchbiegungen von strukturiertem FE -Modell und Ersatzmodellen

Die Abbildung 5.6.1 verdeutlicht zwar, dass die größte Näherung mit durchschnittlich weniger als 0,5 % zum strukturierten FE -Modell durch das E - $RF2$ -Modell erreicht wird. Jedoch ist aus Abschnitt 5.4.1 bekannt, dass mit diesem Ersatzmodell wiederum die Modereihenfolge keine gewünschte Verbesserung aufweist. Diese gewünschte Optimierung wird allerdings durch das Ersatzmodell aus größerem RVE erreicht sowie im Durchschnitt eine relative Abweichung der Eigenfrequenzen von etwa 2 %. Hinzu kommt, dass auch dessen statische Durchbiegungen im Wesentlichen näher am strukturierten numerischen Modell liegen als die des anfänglichen Ersatzmodells aus kleinerem RVE . Dennoch ist die Aussagekraft des statischen Belastungstests eingeschränkt, da nur die Biegeterme angesprochen werden. Bedeutender ist der Vergleich der Eigenfrequenzen und -formen.

Zusammenfassend verknüpft das Ersatzmodell aus größerem *RVE*-Bereich Verbesserungen in den statischen Durchbiegungen mit optimierten modalen Aussagen im Vergleich zum strukturierten *FE*-Modell. Aus diesem Grund wird das besagte Ersatzmodell in Kapitel 7 mit experimentellen Daten validiert, um die Güte des Modells bewerten zu können.

6. Experimentelle Untersuchungen strukturierter Bleche

Im vorliegenden Kapitel sind die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen eines strukturierten Blechs der Abmaße $280\text{ mm} \times 303,109\text{ mm}$ dargestellt, welche in [Bra13] erarbeitet wurden. Die Maße des numerischen Modells sind am Messobjekt orientiert. Diese dienen dazu die numerisch ermittelten Ergebnisse aus Kapitel 5 des Ersatzmodells bewerten zu können. Mittels des Verfahrens der experimentellen Modalanalyse werden die modalen Parameter ermittelt. Des Weiteren sind Ergebnisse eines statischen Belastungstest für das strukturierte Blech dargestellt.

6.1. Experimentelle Modalanalyse

Numerische Modelle basieren üblicherweise auf einigen Annahmen und Idealisierungen, die auf eine gewisse Unsicherheit schließen können. Diese kann auf das Schwingverhalten Auswirkung haben, sodass zur Validierung eines *FE*-Modells ein Vergleich zwischen numerisch simuliertem und experimentell bestimmtem Schwingverhalten erforderlich ist. Zur experimentellen Bestimmung der Modalparameter wird eine auf dem Phasentrennungsverfahren basierende Modalanalyse durchgeführt, deren Ergebnisse anschließend diskutiert werden.

6.1.1. Versuchsaufbau

Der in diesem Experiment verwendete Versuchsaufbau zur experimentellen Modalanalyse ist in Abbildung 6.1.1 dargestellt. Zur möglichst freien Lagerung des Messobjekts ist dieses an den Ecken durch Gummibänder an einem Gestell aufgehängt.

In Form von Geschwindigkeiten wird die Systemantwort an einem festen Punkt auf der Blechoberfläche in dazu senkrechter Richtung mittels Laser-Vibrometer gemessen. Dabei

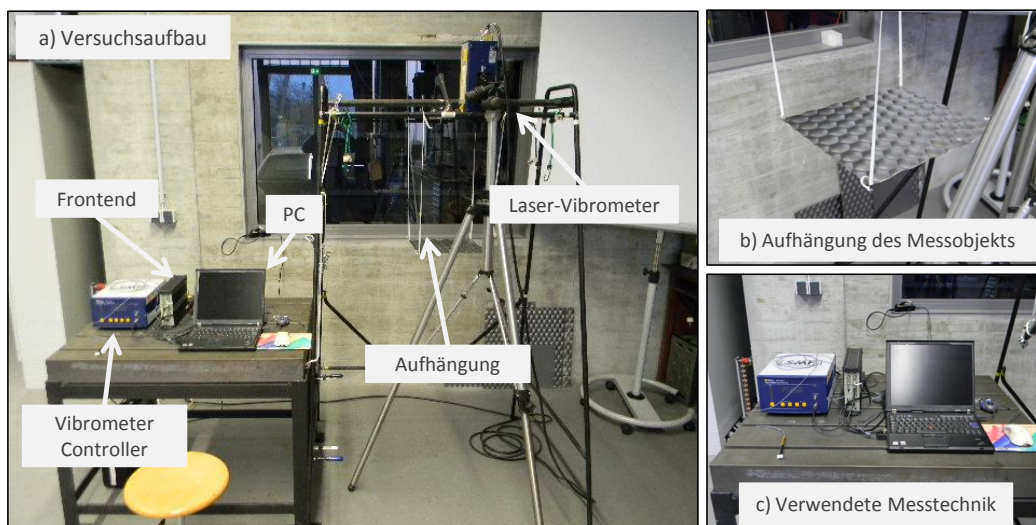


Abbildung 6.1.1.: Versuchsaufbau zur experimentellen Modalanalyse

sollte der Messpunkt möglichst auf keiner Knotenlinie der zu ermittelnden Schwingformen liegen, um alle Eigenfrequenzen im interessierenden Frequenzbereich eindeutig identifizieren zu können. Um dies zu gewährleisten ist durch eine Voruntersuchung des numerischen Modells ein geeigneter Messpunkt, der Antwortmesspunkt 67 (vgl. Abbildung 6.1.2), bestimmt worden.

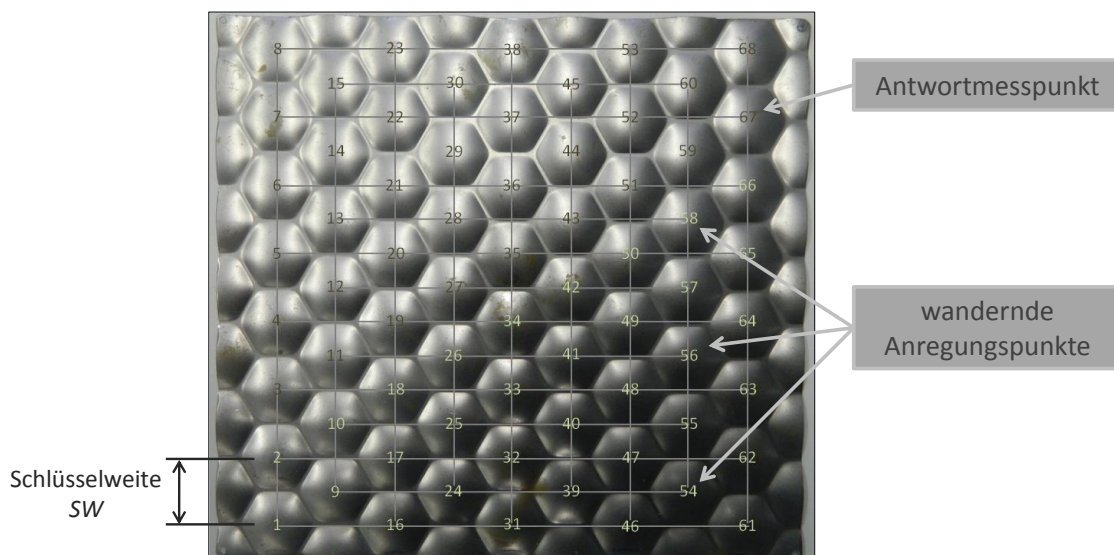


Abbildung 6.1.2.: Messpunktraster

Das Messpunktraster des zu untersuchenden Blechs ist so definiert, dass jeder Strukturwab-

Mittelpunkt einem Messpunkt entspricht. Für die gewählte Größe des Messobjektes ergeben sich damit insgesamt 68 Messpunkte. Der Abstand zwischen zwei Messpunkten innerhalb einer Reihe entspricht einer Schlüsselweite SW und beträgt 35 mm. Zur besseren Visualisierung werden zusätzlich die Daten an den Zwischenpunkten interpoliert. Mittels möglichst feiner Diskretisierung soll gewährleistet werden, dass auch höhere Moden ermittelt werden können.

6.1.2. Durchführung

Mithilfe einer geeigneten Software können zur Ermittlung der modalen Parameter die Übertragungsfunktionen zwischen sämtlichen Messpunkten bestimmt werden. Hierzu ist zunächst die Einstellung der Messparameter notwendig. Zur Gewährleistung von ausreichend hoher Auflösung im Frequenzbereich werden 6400 Messwerte über eine Dauer von $T = 8$ s erfasst. Aus den Zusammenhängen in Unterabschnitt 2.4.2.2 folgt für den vorliegenden Frequenz-Stützstellenabstand $\Delta f = 0,125$ Hz. Für das Erregersignal wird ein sogenanntes Force-Window verwendet, welches speziell für Impulskräfte Anwendung findet. Das Antwortsignal wird mit einer Exponentialfunktion gefenstert, wodurch zum einen die Periodizitätsanforderung an ein Signal in der FFT erfüllt wird und zum anderen Leakage-Effekte oder Rauschen minimiert werden können.

Mit einem Impulshammer (Abb. 2.4.4 in Unterabschnitt 2.4.2.1) erfolgt die Krafteinleitung an allen Messpunkten senkrecht zur Blechoberfläche, wodurch das benötigte Breitband-Anregungsspektrum erzeugt und das Erregersignal erfasst wird. Der im Impulshammer integrierte Kraftsensor misst bei der Anregung das Kraftsignal, welches gleichzeitig als Trigger fungiert. Die Datenerfassung startet, sobald ein Schwellenwert überschritten ist. Mithilfe der Delay-Funktion ist es möglich den Beginn eines Peaks sauber aufzuzeichnen und des Weiteren einige Zeitschritte vor Auslösung des Triggers zu berücksichtigen (Pre-Triggering).

Jeder Messpunkt wird dreimal angeregt und anschließend die Mittelwerte der Erreger- und Antwortsignale gebildet. Die gemittelten Signale ermöglichen die Berechnung der Leistungsspektren, daraus die Frequenzgänge aller Messpunkte im Frequenzbereich sowie die Kohärenzfunktionen, welche für die Beurteilung der Messqualität hilfreich sind (vgl. Unterabschnitt 2.4.2.2).

Durch Importieren der ermittelten Übertragungsfunktionen in das Programmpaket ME' scope lassen sich anschließend mithilfe von Curve-Fitting-Verfahren die Modalparameter

in Form von Eigenfrequenzen, Eigenvektoren und modalen Dämpfungen des Systems bestimmen.

Für das Curve-Fitting findet das Single-Reference *MDOF*-Verfahren Anwendung aufgrund der Modenkopplung des vorliegenden zu untersuchenden Blechs. Die Bestimmung der modalen Parameter erfolgt aus einer einzigen Zeile der Matrix der Übertragungsfunktion. Die ermittelten Eigenmoden können hinterher visuell dargestellt werden.

6.1.3. Ergebnisse und Diskussion

Das soeben beschriebene Vorgehen ermöglicht die Ermittlung der gesuchten Modalparameter (Eigenfrequenzen, Eigenvektoren und modale Dämpfungen) im Frequenzbereich bis 800 Hz. Die Zuordnung der Messpunkte eines Struktur-Files in ME'scope verhilft zu einer grafischen Darstellung der unterschiedlichen Eigenformen. Die abgebildeten Eigenvektoren sind relativ zur größten Auslenkung skaliert.

Im Folgenden sind die ersten 12 der experimentell ermittelten Eigenmoden und die dazugehörigen Eigenfrequenzen abgebildet (Abbildungen 6.1.3-6.1.5). Im Bereich bis zu 155 Hz konnten alle Eigenfrequenzen und -formen eindeutig identifiziert werden. Sie gleichen den an einer Rechteckplatte bekannten Eigenformen.

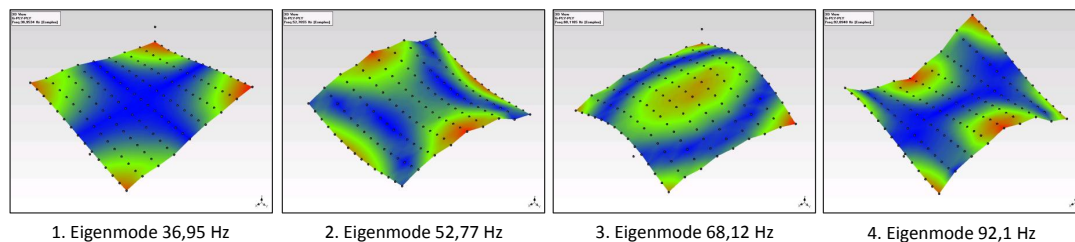


Abbildung 6.1.3.: Gemessene Eigenmoden 1-4

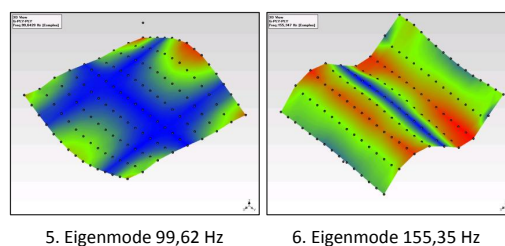


Abbildung 6.1.4.: Gemessene Eigenmoden 5-6

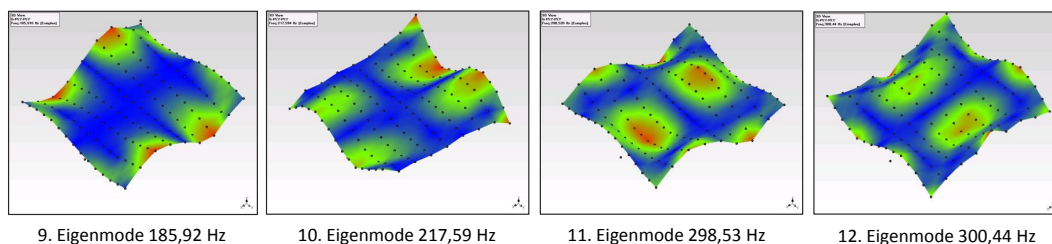


Abbildung 6.1.5.: Gemessene Eigenmoden 9-12

In der folgenden Tabelle 6.1 sind die modalen Dämpfungen zu den zugehörigen Eigenmoden und -frequenzen tabellarisch dargestellt.

Mode Nr.	f_{Exp} [Hz]	ζ [%]	Mode Nr.	f_{Exp} [Hz]	ζ [%]
1	36,95	0,68	16	338,4	0,49
2	52,77	0,80	17	440,08	0,20
3	68,12	0,54	18	455,33	0,21
4	92,09	1,19	19	497,13	0,40
5	99,62	0,88	20	511,27	0,52
6	155,54	1,25	21	526,43	0,50
7	-	-	22	604,83	0,08
8	-	-	23	-	-
9	185,92	0,45	24	626,63	0,26
10	217,59	1,06	25	628,72	0,13
11	298,53	0,28	26	667,71	0,24
12	300,44	0,16	27	739,6	0,13
13	308,86	0,30	28	748,61	0,36
14	336,6	0,69	29	765,27	0,57
15	371,97	0,44			

Tabelle 6.1.: Experimentell ermittelte Eigenfrequenzen und Dämpfungsgrade des strukturierten Blechs

Bei Betrachtung der Ergebnisse der durchgeführten experimentellen Modalanalyse ist zu erkennen, dass alle von einem glatten Rechteckblech bekannten Eigenformen auftreten. Jedoch fällt im Vergleich zu Abschnitt 5.1 auf, dass die numerisch ermittelten Moden 7, 8 und 23 mit der experimentellen Modalanalyse nicht präzise bestimmt werden können. Die Formen 7-9 liegen in einem sehr engen Frequenzband von ca. 2 Hz (183 Hz – 185 Hz) und erschweren deren exakte Ermittlung. Die Überlagerung mehrerer Übertragungsfunktionen mit eng beieinander liegenden Peaks lässt sich nur erschwert entkoppeln (vgl. exemplarisch Abbildung 6.1.6), sodass lediglich die 9. Mode eindeutig extrahiert werden kann (in Abbildung 6.1.5).

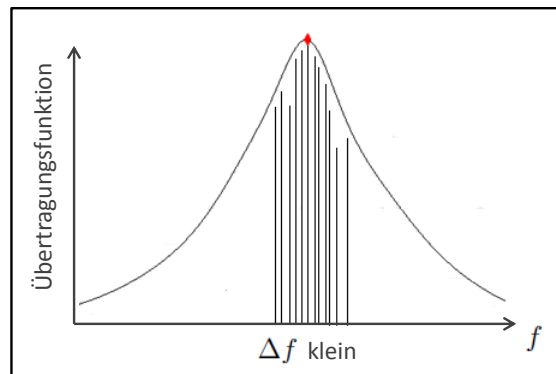


Abbildung 6.1.6.: Überlagerung mehrerer Peaks

Die zu Mode 8 zugehörige Eigenfrequenz im Bereich von 185 Hz kann in einigen Übertragungsfunktionen erkannt werden, jedoch ohne entsprechende Eigenform. In Abbildung 6.1.7 sind die Übertragungsfunktionen im genannten Bereich vergrößert dargestellt. Weder durch das Tool „Zoom-FFT“ noch durch eine Umpositionierung des Antwortmesspunktes können die gesuchten Eigenfrequenzen und ihre zugehörigen -formen eindeutig ausfindig gemacht werden.

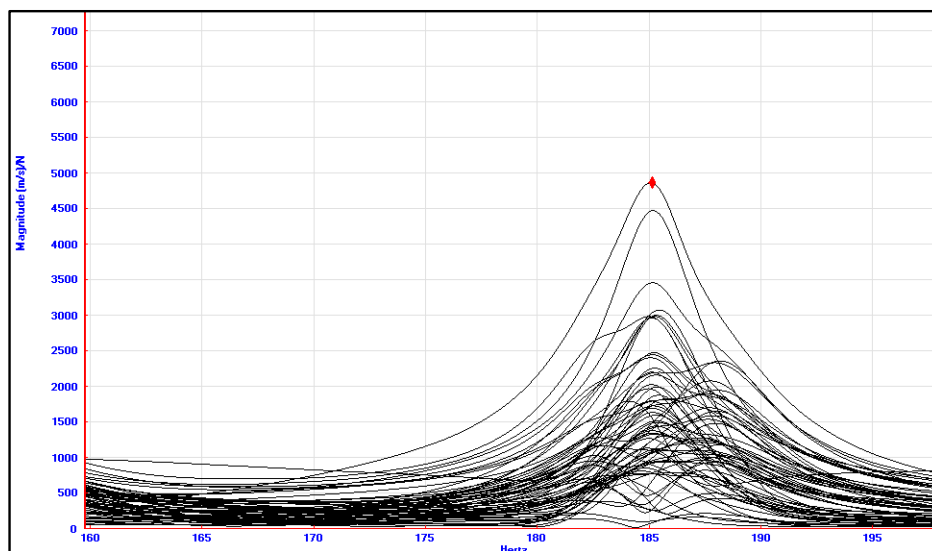


Abbildung 6.1.7.: vergrößerter Ausschnitt der Übertragungsfunktionen bei 185 Hz

Die ansonsten nahezu einwandfreie Bestimmung der Eigenformen im Frequenzbereich bis zu 800 Hz lässt darauf schließen, dass sich die Ungenauigkeiten im Rahmen halten und die Ergebnisse zur Validierung der numerischen Modelle herangezogen werden können.

6.2. Statische Untersuchungen

Zur Ermittlung der statischen Eigenschaften strukturierter Bleche wird ein Belastungstest durchgeführt und die Durchbiegung des Blechs gemessen, welche dann mit den Ergebnissen der entsprechenden numerischen Berechnungen verglichen werden kann.

6.2.1. Experimenteller Aufbau

Zur Durchführung der statischen Untersuchungen wird der Versuchsaufbau so angeordnet, dass das strukturierte Blech sich frei biegen kann. Dazu wird das Blech auf zwei Stützen aufgelegt, sodass die Berührung möglichst weit außen auf der Kante stattfindet (vgl. Abbildung 6.2.1). Im Prinzip soll realisiert werden, dass möglichst die Randknoten aufliegen. Das auf diese Art gelagerte Blech wird anschließend in der Probenmitte mit Hilfe von kleinen Massen belastet und seine Durchbiegung mittels WayCon Abstandslaser des Typs LAS-T-40-A indirekt ermittelt. Die indirekte Ermittlung geschieht durch Messung des Spannungsabfalls des Lasers und Bestimmung des Abstands des Lasers zur Blechoberfläche anhand von einer Zuordnungstabelle. Die Messungenauigkeiten sind hierbei mit einer Toleranz von $\Delta U = 0,01 \text{ V}$ bzw. $\Delta w = 0,04 \text{ mm}$ angenommen.

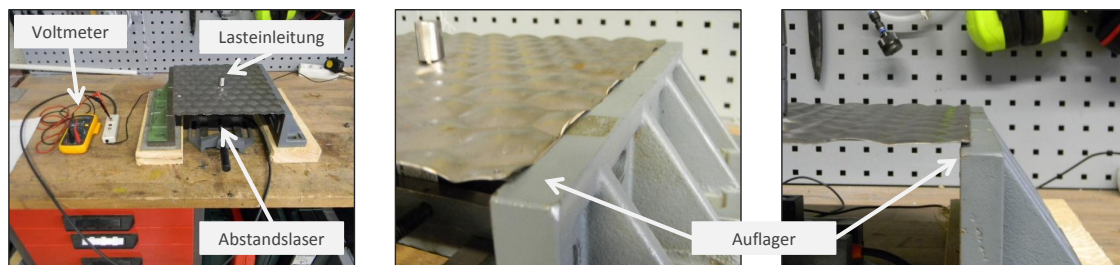


Abbildung 6.2.1.: Versuchsaufbau für den statischen Belastungstest

6.2.2. Versuchsdurchführung

Die Lasteinleitung zur statischen Belastung erfolgt senkrecht zur Oberfläche in der Blechmitte mithilfe von Einzelmassen in diskreten Schritten mit $F_i \approx 0,512 \text{ N}$ (vgl. Abbildung 6.2.2).

Die Durchbiegung findet vollständig im elastischen Verformungsbereich statt. Die Versuche werden mit unterschiedlichen Strukturlagen durchgeführt, sowohl mit „positiver“ und

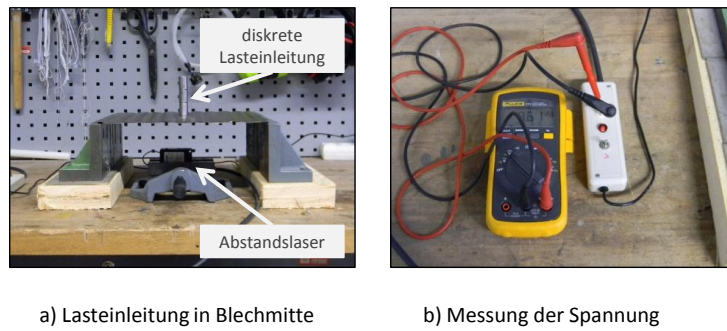


Abbildung 6.2.2.: Indirekte Ermittlung der Durchbiegung

„negativer“ Strukturlage als auch mit der Ausrichtung 0° und 90° zur Hauptachsenrichtung (vgl. Abbildungen 6.2.3 und 6.2.4). Die Weg-Kraft-Verläufe werden jeweils aus mehreren Messungen bestimmt und in Diagrammen dargestellt.

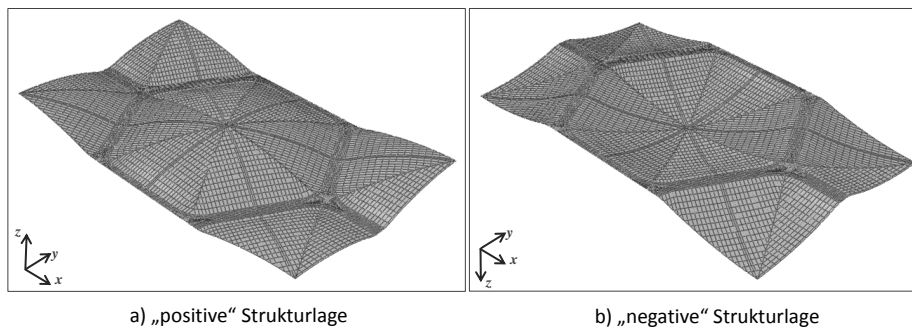


Abbildung 6.2.3.: Strukturlagen

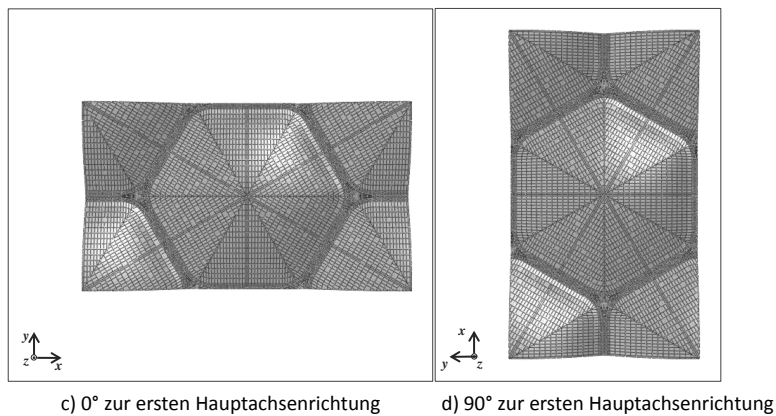


Abbildung 6.2.4.: Ausrichtungen relativ zur ersten Hauptachsenrichtung

6.2.3. Resultate und Diskussion

Im vorliegenden Unterabschnitt sind die Ergebnisse der durchgeführten statischen Belastungstests eines strukturierten Blechs dargestellt. Durch mögliche Messungenauigkeiten weisen die Weg-Kraft-Verläufe trotz quasi-linearer Belastung keine exakte Linearität auf.

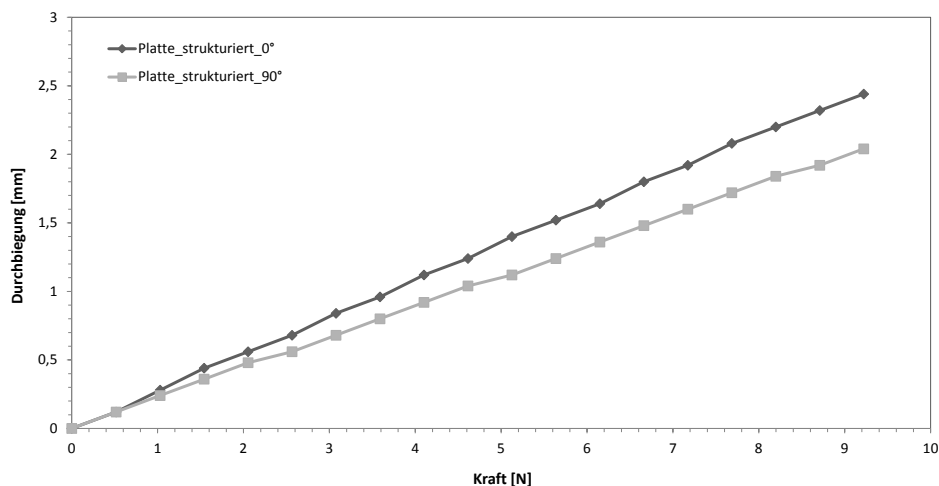


Abbildung 6.2.5.: Weg-Kraft-Verläufe für das strukturierte Blech in 0°- und 90°-Lage

Durch die geometrische Abmaße des Messobjekts (keine quadratische Form) und die Orthotropie der Struktur unterscheidet sich das Biegeverhalten des strukturierten Blechs in 0°-Ausrichtung zu dem in 90°-Lage. In 0°-Ausrichtung ist das Blech länger und somit biegeweicher als in 90°-Lage.

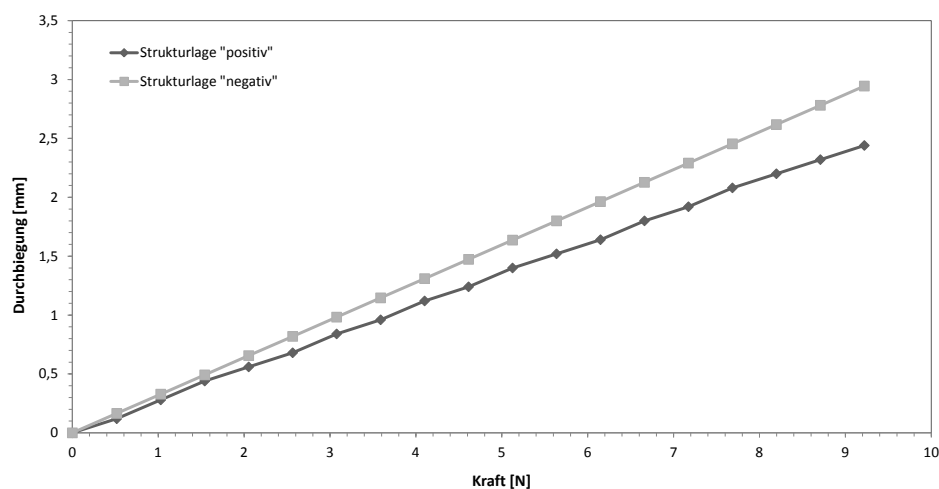


Abbildung 6.2.6.: Weg-Kraft-Verläufe für das strukturierte Blech in „positiver“ und „negativer“ Strukturlage in 0°-Ausrichtung

Anhand verschiedener statischer Belastungsuntersuchungen mit unterschiedlichen Ausrichtungen der Strukturierung lässt sich erkennen, dass diese einen geringen Einfluss auf das Biegeverhalten hat (Abbildung 6.2.5). Die Gegenüberstellung des Biegeverhaltens zwischen „positiver“ und „negativer“ Strukturlage in Abbildung 6.2.6 verdeutlicht, dass es ebenfalls Unterschiede gibt in dieser Durchbiegung. Das strukturierte Blech weist in „positiver“ Strukturlage ein steiferes Verhalten auf als in „negativer“ Strukturlage. Das lässt sich auf die nicht symmetrische Geometrie bzgl. der x - y -Ebene zurückführen. Für die Korrelation zum numerischen Modell werden im folgenden Abschnitt die statischen Verschiebungen bei „positiver“ Strukturlage und 0° -Ausrichtung zum Vergleich herangezogen.

7. Modellvalidierung

Um das entwickelte numerische Ersatzmodell aus einem größeren *RVE* abzugleichen und zu validieren, werden im vorliegenden Kapitel die simulierten Ergebnisse denen der experimentellen Untersuchungen gegenübergestellt. Es werden die Schwingformen und zugehörigen Eigenfrequenzen verglichen, sowie eine *MAC*-Analyse durchgeführt. Des Weiteren folgen Vergleiche zwischen den numerisch und experimentell ermittelten Durchbiegungen aus den statischen Belastungstests.

7.1. Vergleich der Eigenformen und -frequenzen

Der direkte Vergleich der Eigenfrequenzen ist die überschaubarste Möglichkeit der modalen Korrelation. Nach

$$A_r = \frac{(f_{E-RVE\ 3x3,i} - f_{Exp,i})}{f_{Exp,i}}, \quad (7.1.1)$$

mit der experimentell ermittelten Eigenfrequenz $f_{Exp,i}$ und der entsprechenden numerisch ermittelten Eigenfrequenz $f_{E-RVE\ 3x3,i}$, lässt sich die relative Abweichung A_r zwischen den Eigenfrequenzen bestimmen.

Darüber hinaus kann mit Hilfe der *MAC*-Analyse die Orthogonalität zwischen den numerisch bestimmten Eigenvektoren und denen aus der Messung untersucht werden. Die sogenannte *MAC*-Matrix beinhaltet Werte im Bereich von 0 bis 1 (vgl. Unterabschnitt 2.4.2.4), wobei *MAC*-Werte ab 0,8 auf eine lineare Abhängigkeit und damit gute Übereinstimmung hinweisen. Werte unter 0,5 deuten auf eine lineare Unabhängigkeit hin.

Zur Durchführung der *MAC*-Analyse, d.h. zum Vergleich der Eigenvektoren, müssen zunächst die Messpunkte im experimentellen Probekörper den Knotenpunkten im *FE*-Modell zugeordnet werden (Abbildung 7.1.1). Die numerisch ermittelten Eigenschwingformen besitzen durch das feine *FE*-Netz in der Regel eine deutlich höhere Anzahl an Eigenvektorkomponenten. Das Messpunktraster des experimentellen Probekörpers ist gröber gestaltet und wird zur Gegenüberstellung der Eigenvektoren herangezogen. Die jeweiligen

Knotennummern sind entsprechend des Messpunktrasters ermittelt und die zugehörigen Eigenvektoren (Verschiebungen in z -Richtung) für jeden einzelnen Knoten aus der verwendeten FE -Software ausgelesen worden. Eine Zuordnungsliste der Elementknoten ist in Anhang D dargestellt.

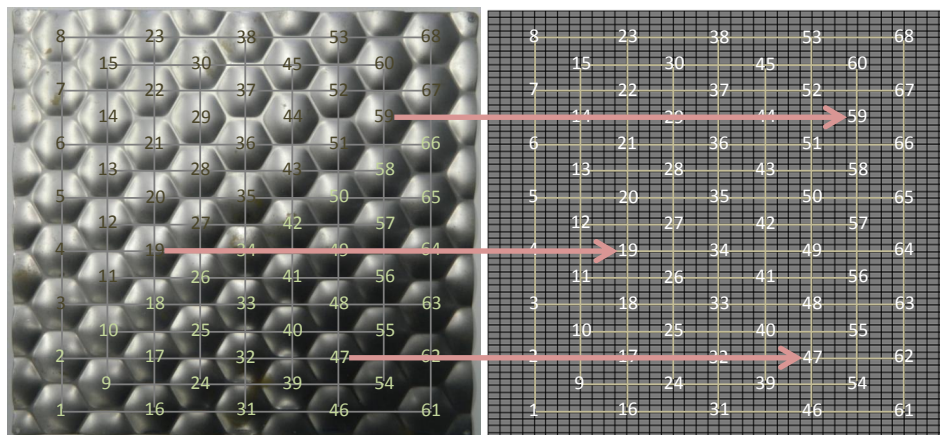


Abbildung 7.1.1.: Geometrische Zuordnung der Freiheitsgrade von FE - und physikalischem Modell

Tabellen 7.1 und 7.2 stellen die Eigenfrequenzen der numerischen und experimentellen Modalanalyse, deren relative Abweichung sowie die zugehörigen MAC -Werte dar.

Mode Nr.	$f_{E-RVE\ 3x3}$ [Hz]	f_{Exp} [Hz]	Abweichung [%]	MAC
1	39,43	36,95	6,71	0,993
2	56,58	52,77	7,22	0,965
3	68,84	68,12	1,06	0,858
4	97,98	92,09	6,40	0,974
5	103,79	99,62	4,19	0,845
6	162,81	155,54	4,67	0,92
7	184,14	-	-	-
8	190,94	-	-	-
9	197,35	185,92	6,15	0,757
10	223,44	217,59	2,69	0,768
11	298,12	298,53	-0,14	0,954
12	310,93	300,44	3,49	0,782
13	325,56	308,86	5,41	0,939
14	354,98	336,6	5,46	0,921

Tabelle 7.1.: Eigenfrequenzen $E-RVE\ 3x3$, Experiment und MAC (1)

Mode Nr.	$f_{E-RVE\ 3x3}$ [Hz]	f_{Exp} [Hz]	Abweichung [%]	MAC
15	382,67	371,97	2,88	0,959
16	402,95	388,4	3,75	0,974
17	438,54	440,08	-0,35	0,824
18	457,5	455,33	0,48	0,925
19	496,76	497,13	-0,07	0,956
20	548,8	511,27	7,34	0,919
21	566,13	526,43	7,54	0,927
22	605,71	604,83	0,15	0,5
23	641,55	-	-	-
24	651,31	626,63	3,94	0,843
25	628,04	628,72	-0,11	0,748
26	673,38	667,71	0,85	0,746
27	744,69	739,6	0,69	0,79

Tabelle 7.2.: Eigenfrequenzen $E-RVE\ 3x3$, Experiment und MAC (2)

Nachfolgend in Abbildung 7.1.2 ist die relative Abweichung der Eigenfrequenzen als Graph im Diagramm dargestellt, um die durchschnittliche Näherung zu verdeutlichen.

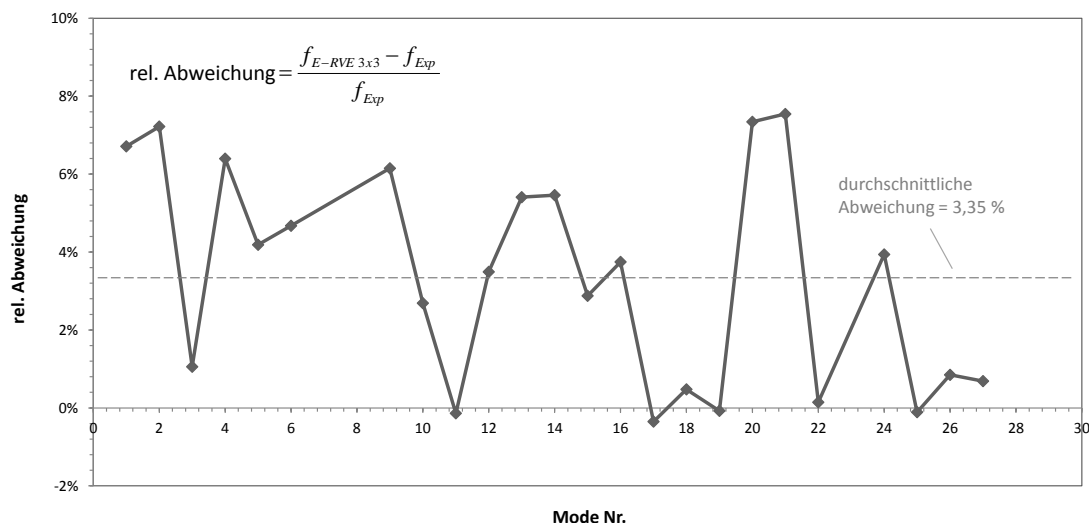
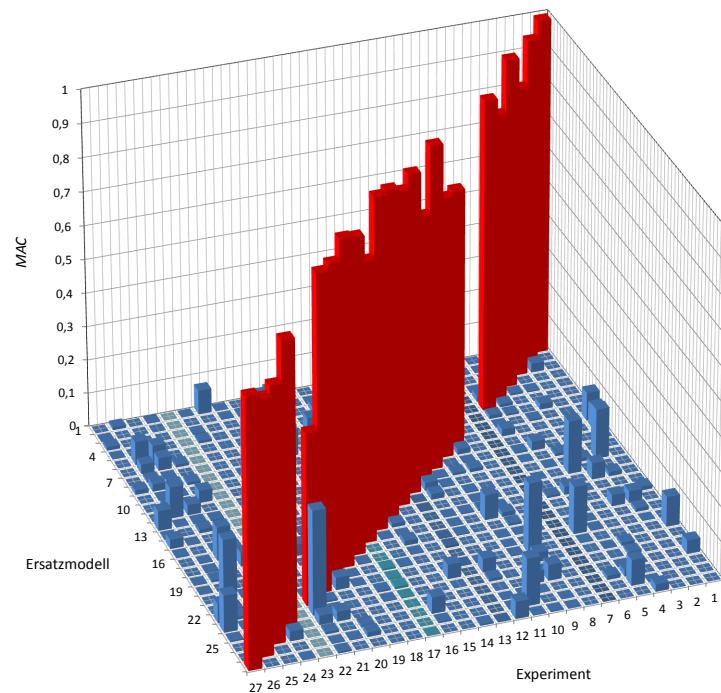


Abbildung 7.1.2.: Frequenzkorrelation

Das in Unterabschnitt 2.4.2.4 vorgestellte MAC -Kriterium verhilft zum Abgleich der Eigenvektoren aus numerischer Berechnung und experimenteller Messung. Für das in dieser Arbeit zu betrachtende strukturierte Blech ist im Folgenden die zugehörige MAC -Matrix abgebildet (Abbildung 7.1.3).

Abbildung 7.1.3.: berechnete *MAC*-Matrix

Zusätzlich zu den bisher unternommenen Vergleichen ist ebenso ein optischer Abgleich der Schwingformen aus numerischer und experimenteller Modalanalyse hilfreich. Hierzu werden beispielhaft die ersten 18 gemeinsamen Eigenformen gegenüber- und dargestellt (Abbildungen 7.1.4-7.1.11). „*E-RVE 3x3*“ bezeichnet hierbei das Ersatzmodell, welches aus dem größeren *RVE* resultiert (vgl. Abschnitt 5.5), und „Exp“ bezieht sich auf die experimentell ermittelten Daten.

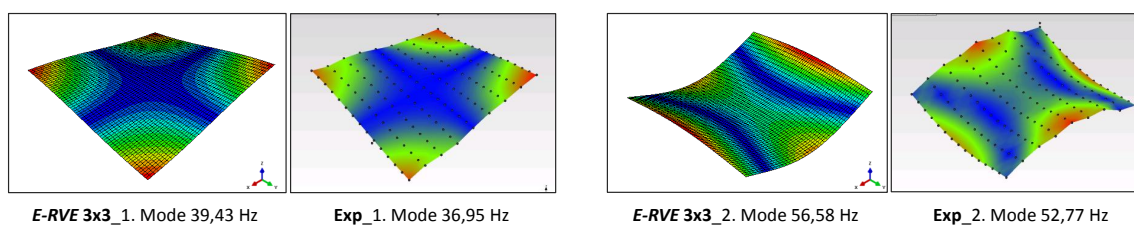


Abbildung 7.1.4.: Mode 1 und 2 von Ersatzmodell und Experiment

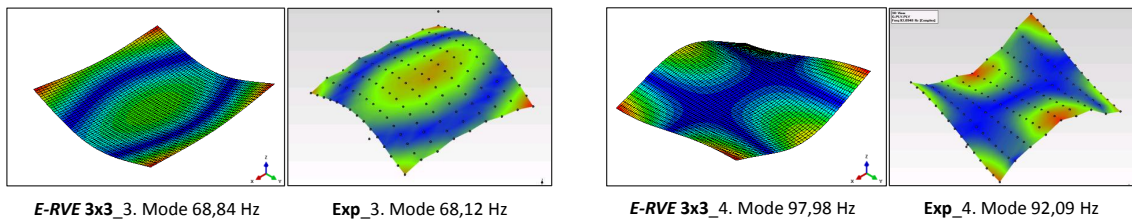


Abbildung 7.1.5.: Mode 3 und 4 von Ersatzmodell und Experiment

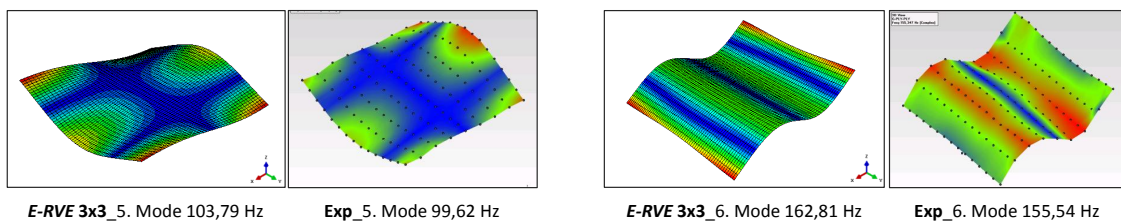


Abbildung 7.1.6.: Mode 5 und 6 von Ersatzmodell und Experiment

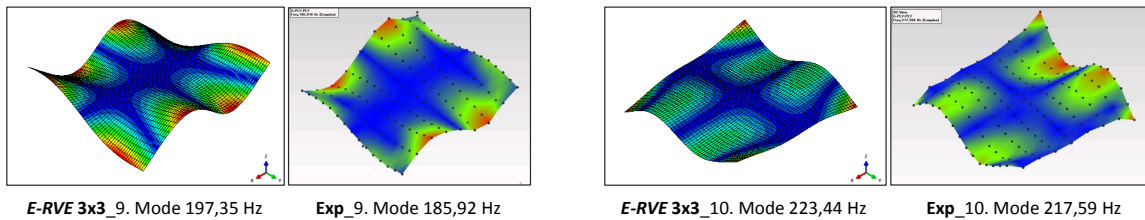


Abbildung 7.1.7.: Mode 9 und 10 von Ersatzmodell und Experiment

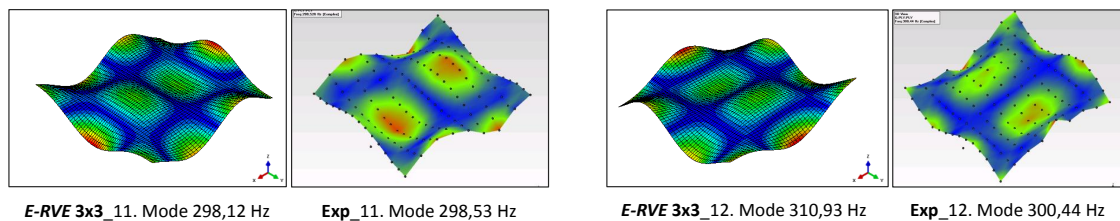


Abbildung 7.1.8.: Mode 11 und 12 von Ersatzmodell und Experiment

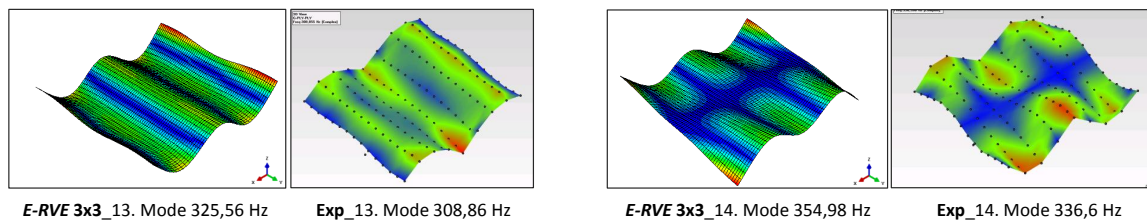


Abbildung 7.1.9.: Mode 13 und 14 von Ersatzmodell und Experiment

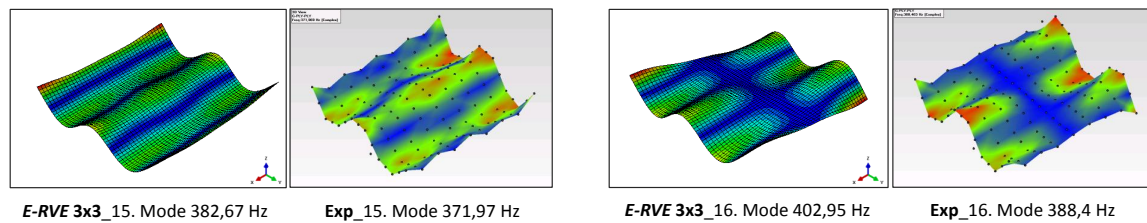


Abbildung 7.1.10.: Mode 15 und 16 von Ersatzmodell und Experiment

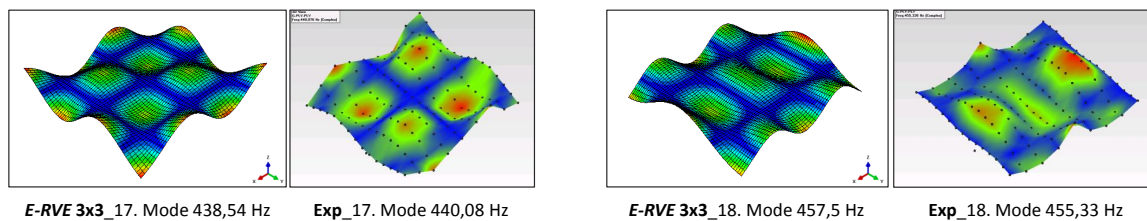


Abbildung 7.1.11.: Mode 17 und 18 von Ersatzmodell und Experiment

Es ist zu sehen, dass die Eigenformen eine sehr gute Übereinstimmung aufweisen. Ebenso liegen die Eigenfrequenzen sehr nahe beieinander mit etwa 3-7%.

7.2. Vergleich der statischen Verschiebungen

In der folgenden Abbildung 7.2.1 sind die Weg-Kraft-Verläufe der statischen Untersuchungen aus Experiment und Numerik einander gegenübergestellt. Hierbei findet der Vergleich erneut zum *FE*-Ersatzmodell statt, welches mittels größerem *RVE* ermittelt wurde.

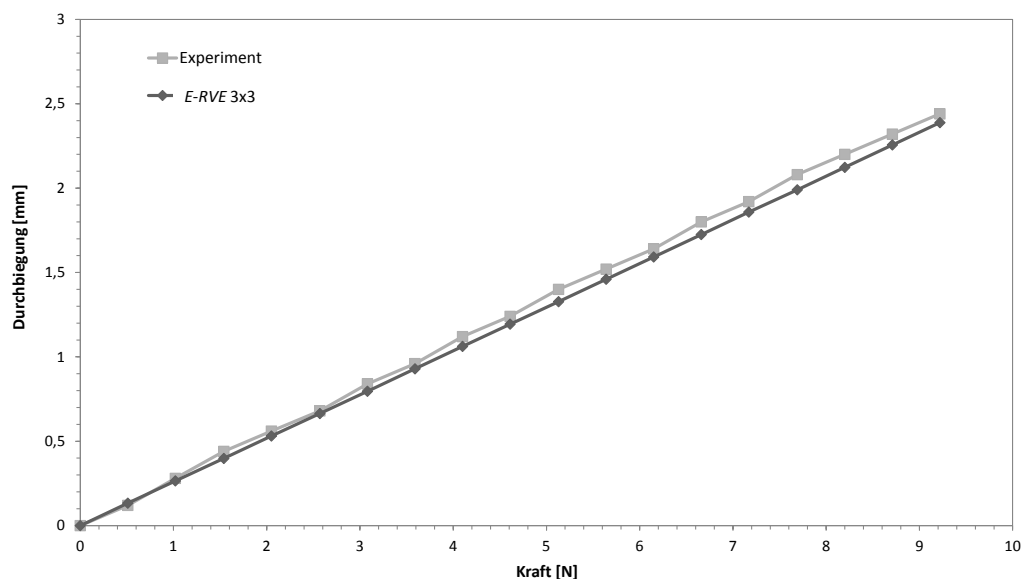


Abbildung 7.2.1.: Weg-Kraft-Verläufe von Experiment und FE -Ersatzmodell mit größerem RVE

Zur genaueren Betrachtung ist in Abbildung 7.2.2 die relative Abweichung der statischen Durchbiegungen des FE -Ersatzmodells im Vergleich zum Experiment dargestellt.

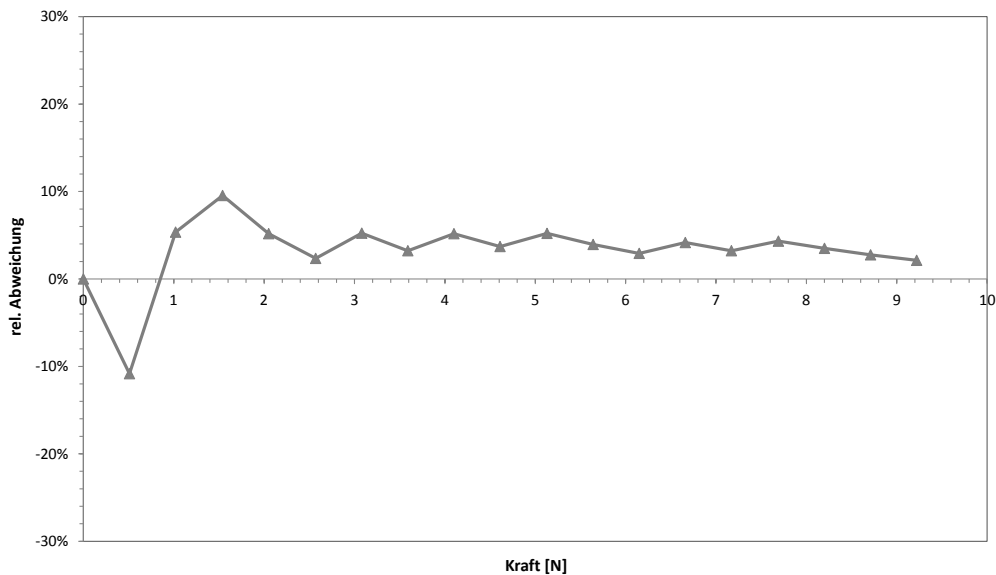


Abbildung 7.2.2.: relative Abweichung der statischen Durchbiegung von Experiment und FE -Ersatzmodell mit größerem RVE

Die relativen Abweichungen pendeln sich um etwa 4-5 % ein und nehmen nach und nach ab mit steigender Belastung. Sie deuten auf eine gute Übereinstimmung hin. Lediglich die erste und dritte Durchbiegung weicht um einen Betrag von circa 10 % ab.

7.3. Diskussion

Der Vergleich zwischen dem *FE*-Ersatzmodell (aus größerem *RVE*-Bereich) und dem realen Probekörper zeigt, dass die Ergebnisse sowohl im Bezug auf die modalen Parameter als auch auf die statischen Verschiebungen gute Übereinstimmung aufweisen. Die relativen Abweichungen der Eigenfrequenzen betragen durchschnittlich etwa 3,35 % und maximal circa 7 %. Eine relative Abweichung von ca. 5% zu erreichen kann als guter Durchschnitt betrachtet werden. Im Falle der statischen Belastungsuntersuchungen entspricht die relative Abweichung von ca. 7 % einer absoluten Abweichung von $0,004 \text{ mm} < A_{abs} < 0,05 \text{ mm}$. Die Abweichungen können auf die Einflüsse zurückgeführt werden, welche bei den experimentellen Versuchen vorherrschen. Gegebenenfalls sind die Toleranzen der Blechfertigung als Grund heranzuziehen. Desweiteren basiert das *FE*-Ersatzmodell auf vereinfachenden Annahmen, wodurch die Ergebnisse letzten Endes ebenfalls an Genauigkeit verlieren können. Grundlegend könnte auch der noch nicht betrachtete Einfluss der Plastifizierungen aus dem Verformungsprozess die Abweichungen noch positiv beeinflussen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das entwickelte Ersatzmodell eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment aufweist. Durch relativ gut übereinstimmende Ergebnisse ist das homogenisierte Ersatzmodell verifiziert und damit die Methode der Homogenisierung und die Herangehensweise bestätigt worden. Es wurde gezeigt, dass die verzerungsenergiebasierte Homogenisierungsmethode eine Variante darstellt, um komplizierte Strukturen, wie strukturierte Bleche, vereinfacht zu berechnen.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Strukturierte Bleche versprechen hohes Potenzial hinsichtlich industrieller Anwendungen im Leichtbau, sowohl im klassischen Maschinen- und Fahrzeugbau als auch in der Luft- und Raumfahrt. Gegenüber glatten, unstrukturierten Blechen kann durch die Strukturierung eine signifikante Verbesserung der Bauteilsteifigkeit und des Beulverhaltens erreicht werden.

Um das elastische Verhalten großer Strukturen aus strukturierten Blechen berechnen zu können, wurde in dieser Arbeit ein mechanisches Ersatzmodell entwickelt, welches auf Basis von Homogenisierungsprozessen anisotrope Materialparameter beschreibt. Die Basis der Homogenisierungsmethode wird durch die Ermittlung eines geeigneten Repräsentativen Volumenelements (*RVE*) dargestellt. Entsprechende Referenzdeformationszustände auf einem *RVE* ermöglichen über einen energetischen Ansatz die Bestimmung der Ersatzkennwerte in Form von Steifigkeiten. Der Vergleich zu weiteren Varianten an gewählten *RVEs* zeigte, dass im Fall des strukturierten Blechs ein größerer *RVE*-Bereich selektiert werden sollte als der einer einzelnen Elementarzelle. Für den größeren *RVE*-Bereich konnte relativ zum strukturierten numerischen Modell eine sehr gute Übereinstimmung in den Eigenformen und ihrer Reihenfolge festgestellt werden. Hinsichtlich der Durchbiegungsvergleiche ließen sich kaum Verbesserungen hinsichtlich der jeweiligen *RVE*-Varianten ermitteln. Jedoch werden dadurch lediglich die Biegeterme angesprochen, wodurch die Aussagekraft des Belastungstests eingeschränkt ist. Der Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen zeigte, dass das entwickelte Ersatzmodell auf Basis eines größeren *RVE*-Bereichs am nächsten an der Realität liegt. Im Fall der Modalanalyse weichen die Eigenfrequenzen im Durchschnitt um etwa 3,35 % voneinander ab. Ziel war es eine maximale Abweichung von ca. 5 % zu erreichen, welches durch das vorliegende Ergebnis sogar übertroffen wurde.

Durch die Homogenisierungsmethode zur Modellvereinfachung kann die Elementanzahl eines komplexen Modells erheblich reduziert und damit enorm an Rechenzeit eingespart

werden. Im vorliegenden Fall konnte beispielsweise die Rechenzeit für eine Modalanalyse einer Blechplatte der zu betrachtenden Größe in dieser Arbeit von 6295 Sekunden auf 92 Sekunden gemindert werden. Das Ersatzmodell benötigte etwa 1,15 % der Rechenzeit des strukturierten *FE*-Modells.

Es ist festzustellen, dass das komplexe *FE*-Modell eines strukturierten Blechs, von dem in dieser Arbeit ausgegangen wird, durchaus noch Verbesserungspotenzial besitzt. Die Diskretisierung durch solch ein *FE*-Modell ansich sorgt lediglich für eine Annäherung an das reale Verhalten in der Praxis. Ferner werden mehrere Vereinfachungen angenommen, wie z.B. die Vernachlässigung der entstehenden Eigenspannungen aus dem Verformungsprozess. Des Weiteren wird die daraus resultierende Dickenänderung umgangen und mit einem Mittelflächenmodell weitergerechnet. Darüber hinaus werden die sich ergebenden Randeffekte der komplexen Struktur nicht beachtet. Ein Ausblick auf weitergehende Untersuchungen stellt somit die stückweise Aufhebung der genannten Vereinfachungen dar, um die komplexe Struktur so genau wie möglich abbilden zu können.

Der Vergleich der Steifigkeiten des Ersatzmodells eines größeren *RVEs* mit denen des ersten Ersatzmodells aus einer Elementarzelle zeigte einen deutlichen Anstieg des Scherungsterms \bar{A}_{33} , sowie die Reduzierung des Torsionsterms \bar{D}_{33} . Ein weiterer Ausblick ist die Ermittlung der Ursache, weshalb sich die Änderungen des *RVEs* in dieser Art auf die besagten Steifigkeitsterme ausgeübt haben. Die Wahl der Symmetrie- und Randbedingungen zur Ermittlung der Materialeigenschaften sollte optimiert werden, um auf die Art ein exakteres Homogenisierungsmodell zu entwickeln und die Änderung der besagten Steifigkeiten bei Vergrößerung des *RVEs* zu vermeiden. Somit könnte ermöglicht werden, dass von einem kleineren *RVE* ausgegangen und so der Rechenaufwand erneut reduziert werden kann.

Abschließend lässt sich sagen, dass sich die entwickelte Homogenisierungsmethode auf beliebige periodische Strukturen anwenden lässt. Das Prinzip der Homogenisierung kann beliebig übertragen werden, sofern abhängig von der vorliegenden Struktur, entsprechende Änderungen vorgenommen werden.

A. Theorie der interferometrischen Geschwindigkeits- und Wegmessung

Die Überlagerung zweier kohärenter Lichtstrahlen liefert optische Interferenz. Laut

$$I(\varphi) = \frac{I_{max}}{2} (1 + \cos \varphi)$$

ändert sich die resultierende Intensitätsschwankung an einem Empfänger mit der Phasendifferenz φ zwischen beiden Strahlen.

Dabei ist die Phasendifferenz φ mit der optischen Pfaddifferenz L zwischen beiden Strahlen und der Laserwellenlänge λ gekoppelt gemäß

$$\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} . \tag{A.0.1}$$

Die Pfaddifferenz wird zeitabhängig $L = L(t)$, sobald einer der beiden Strahlen von einem bewegten Messobjekt zurückgestreut wird (Messstrahl). Durch Wanderung der Interferenzstrahlen am Empfänger kann die Positionsänderung des Messobjektes durch vorzeichenexaktes Zählen der Streifendurchgänge ermittelt werden.

Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Messstrahls hängt mit der zeitabhängigen Pfaddifferenz $L(t)$ zusammen:

$$\frac{dL(t)}{dt} = 2v(t) . \tag{A.0.2}$$

Im Falle einer gleichförmigen Bewegung v gilt

$$\left| \frac{dL(t)}{dt} \right| = \frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = f_D \lambda = 2 |v| , \tag{A.0.3}$$

mit der Frequenzverschiebung

$$f_D = 2 \frac{|v|}{\lambda} . \quad (\text{A.0.4})$$

Diese Frequenzverschiebung beim Messstrahl wird durch eine Bewegung des Messobjektes hervorgerufen und als DOPPLER-Frequenz bezeichnet. Durch Überlagerung des frequenzverschobenen Messstrahls und des internen Referenzstrahls wird am Empfänger eine Schwebung erzeugt, deren Frequenz gleich der DOPPLER-Frequenz ist ([Pol12]).

B. Steifigkeitsberechnung für eine einzelne Elementarzelle bzgl. $RF1$

Im vorliegenden Kapitel werden beispielhaft die Berechnungen der Steifigkeiten bzgl. eines $RVEs$ einer Elementarzelle zur Referenzfläche $RF1$ detailliert dargestellt.

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{11} \\ \bar{N}_{22} \\ \bar{N}_{12} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{22} \\ \bar{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} \\ & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} \\ \text{(sym.)} & & \bar{A}_{33} & \text{(sym.)} & & \bar{B}_{33} \\ \hline & & & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ & & & & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \text{(sym.)} & & & \text{(sym.)} & & \bar{D}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \\ \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

B.1. MembranstEIFigkeiten

\bar{A}_{11} :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) &= \frac{1}{2} \bar{N}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\implies \bar{A}_{11} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right)^2} \quad (\text{B.1.2})$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} &= 3,29914 \cdot 10^{-2} & \implies & w\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}\right) = 15,799885 \\ \implies \bar{A}_{11} &= 29032,3132 \end{aligned}$$

\bar{A}_{22} :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) &= \frac{1}{2} \bar{N}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} & \text{(B.1.3)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\implies \bar{A}_{22} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right)^2} \quad \text{(B.1.4)}$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} &= 5,71429 \cdot 10^{-2} & \implies & w\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) = 47,326982 \\ \implies \bar{A}_{22} &= 28987,7736 \end{aligned}$$

\bar{A}_{33} :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right) &= \frac{1}{2} \bar{N}_{12} \bar{\gamma}_{12}^{(0)} & \text{(B.1.5)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{33} \bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right) \bar{\gamma}_{12}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\implies \bar{A}_{33} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right)}{\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right)^2} \quad \text{(B.1.6)}$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\gamma}_{12} &= 9,01343 \cdot 10^{-2} & \implies & w\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right) = 3,546 \\ \implies \bar{A}_{33} &= 872,9485 \end{aligned}$$

\bar{A}_{12} :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) &= \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{N}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) & (B.1.7) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\bar{A}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{A}_{12} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. \left(\bar{A}_{21} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{A}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \bar{A}_{11} \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{A}_{22} \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)^2 + \bar{A}_{12} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{12} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)} \quad (B.1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} = 3,29914 \cdot 10^{-2} &\quad \Rightarrow \quad w \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \right) = 15,799885 \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} = 5,71429 \cdot 10^{-2} &\quad \Rightarrow \quad w \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) = 47,326982 \\ &\quad \quad \quad \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right) = 64,578308 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{12} = 769,9035$$

B.2. Biegesteifigkeiten

\bar{D}_{11} :

$$\begin{aligned} \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{11} \right) &= \frac{1}{2} \bar{M}_{11} \bar{\kappa}_{11} & (B.2.1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{D}_{11} \bar{\kappa}_{11} \right) \bar{\kappa}_{11} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_{11} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{11} \right)}{\left(\bar{\kappa}_{11} \right)^2} \quad (B.2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\kappa}_{11} = 2,177 \cdot 10^{-3} &\quad \Rightarrow \quad w \left(\bar{\kappa}_{11} \right) = 0,059789 \\ \Rightarrow \bar{D}_{11} = 25230,9979 \end{aligned}$$

\bar{D}_{22} :

$$\begin{aligned}\bar{w}_A(\bar{\kappa}_{22}) &= \frac{1}{2} \bar{M}_{22} \bar{\kappa}_{22} & (\text{B.2.3}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{D}_{22} \bar{\kappa}_{22}) \bar{\kappa}_{22}\end{aligned}$$

$$\implies \bar{D}_{22} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{22})}{(\bar{\kappa}_{22})^2} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\begin{aligned}\text{mit: } \bar{\kappa}_{22} &= 6,531 \cdot 10^{-3} & \implies & w(\bar{\kappa}_{22}) = 0,536752 \\ \implies \bar{D}_{22} &= 25167,7447\end{aligned}$$

 \bar{D}_{33} :

$$\begin{aligned}\bar{w}_A(2\bar{\kappa}_{12}) &= \frac{1}{2} \bar{M}_{12} 2\bar{\kappa}_{12} & (\text{B.2.5}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{D}_{33} 2\bar{\kappa}_{12}) 2\bar{\kappa}_{12}\end{aligned}$$

$$\implies \bar{D}_{33} = \frac{2 \cdot \bar{w}_A(2\bar{\kappa}_{12})}{(2\bar{\kappa}_{12})^2} \quad (\text{B.2.6})$$

$$\begin{aligned}\text{mit: } 2\bar{\kappa}_{12} &= 3,77 \cdot 10^{-3} & \implies & w(2\bar{\kappa}_{12}) = 0,071155 \\ \implies \bar{D}_{33} &= 10012,7349\end{aligned}$$

\bar{D}_{12} :

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}) &= \frac{1}{2} (\bar{M}_{11} \bar{\kappa}_{11} + \bar{M}_{22} \bar{\kappa}_{22}) & (B.2.7) \\
 &= \frac{1}{2} [(\bar{D}_{11} \bar{\kappa}_{11} + \bar{D}_{12} \bar{\kappa}_{22}) \bar{\kappa}_{11} + \\
 &\quad (\bar{D}_{21} \bar{\kappa}_{11} + \bar{D}_{22} \bar{\kappa}_{22}) \bar{\kappa}_{22}] \\
 &= \frac{1}{2} \bar{D}_{11} (\bar{\kappa}_{11})^2 + \frac{1}{2} \bar{D}_{22} (\bar{\kappa}_{22})^2 + \bar{D}_{12} \bar{\kappa}_{11} \bar{\kappa}_{22}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_{12} = \frac{(\bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}) - \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}) - \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{22}))}{(\bar{\kappa}_{11} \cdot \bar{\kappa}_{22})} \quad (B.2.8)$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit: } \bar{\kappa}_{11} &= 2,177 \cdot 10^{-3} & \Rightarrow & w(\bar{\kappa}_{11}) = 0,059789 \\
 \bar{\kappa}_{22} &= 6,531 \cdot 10^{-3} & \Rightarrow & w(\bar{\kappa}_{22}) = 0,536752 \\
 & & & \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}) = 0,433094 \\
 \Rightarrow \bar{D}_{12} &= -11495,7905
 \end{aligned}$$

B.3. Koppelsteifigkeiten

\bar{B}_{11} :

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_A(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}) &= \frac{1}{2} (\bar{N}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{M}_{11} \bar{\kappa}_{11}) & (B.3.1) \\
 &= \frac{1}{2} [(\bar{A}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{B}_{11} \bar{\kappa}_{11}) \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \\
 &\quad (\bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{D}_{11} \bar{\kappa}_{11}) \bar{\kappa}_{11}] \\
 &= \frac{1}{2} \bar{A}_{11} (\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)})^2 + \frac{1}{2} \bar{D}_{11} (\bar{\kappa}_{11})^2 + \bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\kappa}_{11}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_{11} = \frac{(\bar{w}_A(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}) - \bar{w}_A(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}) - \bar{w}_A(\bar{\kappa}_{11}))}{(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{11})} \quad (B.3.2)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit: } \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} = 3,29914 \cdot 10^{-2} &\quad \Longrightarrow \quad w\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}\right) = 15,799885 \\
\bar{\kappa}_{11} = 2,177 \cdot 10^{-3} &\quad \Longrightarrow \quad w\left(\bar{\kappa}_{11}\right) = 0,059789 \\
&\quad \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}\right) = 17,285963 \\
\Longrightarrow \quad \bar{B}_{11} &= 19858,5696
\end{aligned}$$

\bar{B}_{22} :

$$\begin{aligned}
\bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{22}\right) &= \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{M}_{22} \bar{\kappa}_{22} \right) & (B.3.3) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\bar{A}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{B}_{22} \bar{\kappa}_{22} \right) \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. \left(\bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{D}_{22} \bar{\kappa}_{22} \right) \bar{\kappa}_{22} \right] \\
&= \frac{1}{2} \bar{A}_{22} \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{D}_{22} \left(\bar{\kappa}_{22} \right)^2 + \bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \bar{\kappa}_{22}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{B}_{22} = \frac{\left(\bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{22}\right) - \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) - \bar{w}_A\left(\bar{\kappa}_{22}\right) \right)}{\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{22} \right)} \quad (B.3.4)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit: } \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} = 5,71429 \cdot 10^{-2} &\quad \Longrightarrow \quad w\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) = 47,326982 \\
\bar{\kappa}_{22} = 6,531 \cdot 10^{-3} &\quad \Longrightarrow \quad w\left(\bar{\kappa}_{22}\right) = 0,536752 \\
&\quad \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{22}\right) = 55,276881 \\
\Longrightarrow \quad \bar{B}_{22} &= 19863,7369
\end{aligned}$$

\bar{B}_{33} :

$$\begin{aligned}
\bar{w}_A\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}, 2\bar{\kappa}_{12}\right) &= \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{12} \bar{\gamma}_{12}^{(0)} + \bar{M}_{12} 2\bar{\kappa}_{12} \right) & (B.3.5) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\bar{A}_{33} \bar{\gamma}_{12}^{(0)} + \bar{B}_{33} 2\bar{\kappa}_{12} \right) \bar{\gamma}_{12}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. \left(\bar{B}_{33} \bar{\gamma}_{12}^{(0)} + \bar{D}_{33} 2\bar{\kappa}_{12} \right) 2\bar{\kappa}_{12} \right] \\
&= \frac{1}{2} \bar{A}_{33} \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{D}_{33} \left(2\bar{\kappa}_{12} \right)^2 + \bar{B}_{33} \bar{\gamma}_{12}^{(0)} 2\bar{\kappa}_{12}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_{33} = \frac{\left(\bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}, 2\bar{\kappa}_{12}\right) - \bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right) - \bar{w}_A \left(2\bar{\kappa}_{12}\right)\right)}{\left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)} \cdot 2\bar{\kappa}_{12}\right)} \quad (\text{B.3.6})$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\gamma}_{12}^{(0)} &= 9,01343 \cdot 10^{-2} & \Rightarrow & w \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}\right) = 3,546 \\ 2\bar{\kappa}_{12} &= 3,77 \cdot 10^{-3} & \Rightarrow & w \left(2\bar{\kappa}_{12}\right) = 0,071155 \\ & & & \bar{w}_A \left(\bar{\gamma}_{12}^{(0)}, 2\bar{\kappa}_{12}\right) = 4,377006 \\ \Rightarrow & \bar{B}_{33} = 2236,1300 \end{aligned}$$

\bar{B}_{12} :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{N}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{M}_{11} \bar{\kappa}_{11} + \bar{M}_{22} \bar{\kappa}_{22}\right) \quad (\text{B.3.7}) \\ & = \frac{1}{2} \left[\left(\bar{A}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{A}_{12} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{B}_{11} \bar{\kappa}_{11} + \bar{B}_{12} \bar{\kappa}_{22}\right) \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \right. \\ & \quad \left. \left(\bar{A}_{21} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{A}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{B}_{21} \bar{\kappa}_{11} + \bar{B}_{22} \bar{\kappa}_{22}\right) \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \right. \\ & \quad \left. \left(\bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{B}_{12} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{D}_{11} \bar{\kappa}_{11} + \bar{D}_{12} \bar{\kappa}_{22}\right) \bar{\kappa}_{11} + \right. \\ & \quad \left. \left(\bar{B}_{21} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} + \bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \bar{D}_{21} \bar{\kappa}_{11} + \bar{D}_{22} \bar{\kappa}_{22}\right) \bar{\kappa}_{22} \right] \\ & = \frac{1}{2} \bar{A}_{11} \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}\right)^2 + \bar{A}_{12} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} + \frac{1}{2} \bar{A}_{22} \left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right)^2 + \\ & \quad \frac{1}{2} \bar{D}_{11} \left(\bar{\kappa}_{11}\right)^2 + \bar{D}_{12} \bar{\kappa}_{11} \bar{\kappa}_{22} + \frac{1}{2} \bar{D}_{22} \left(\bar{\kappa}_{22}\right)^2 + \\ & \quad \bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\kappa}_{11} + \bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \bar{\kappa}_{22} + \bar{B}_{12} \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{22} + \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \bar{\kappa}_{11}\right) \\ \Rightarrow \bar{B}_{12} & = \left[\bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}\right) - \bar{w}_A \left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) - \right. \\ & \quad \left. \bar{w}_A \left(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}\right) - \bar{B}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \bar{\kappa}_{11} - \bar{B}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \bar{\kappa}_{22} \right] \cdot \quad (\text{B.3.8}) \\ & \quad \frac{1}{\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{22} + \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} \cdot \bar{\kappa}_{11}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \bar{\varepsilon}_{11}^{(0)} &= 3,29914 \cdot 10^{-2} & \implies & w\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}\right) = 15,799885 \\ \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)} &= 5,71429 \cdot 10^{-2} & \implies & w\left(\bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) = 47,326982 \\ \bar{\kappa}_{11} &= 2,177 \cdot 10^{-3} & \implies & w\left(\bar{\kappa}_{11}\right) = 0,059789 \\ \bar{\kappa}_{22} &= 6,531 \cdot 10^{-3} & \implies & w\left(\bar{\kappa}_{22}\right) = 0,536752 \\ & & & \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}\right) = 64,578308 \\ & & & \bar{w}_A\left(\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}\right) = 0,433094 \\ & & & \bar{w}_A\left(\bar{\varepsilon}_{11}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(0)}, \bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}\right) = 70,80071 \\ \implies \bar{B}_{12} &= -8974,4744 \end{aligned}$$

C. Technische Daten und Messparameter (*EMA*)

Eigenschaft/Typ	Impulshammer ENDEVCO Typ 2301	Ein-Punkt-Laser-Vibrometer Polytec OFV 505
Art	Messaufnehmer	Geschwindigkeitsaufnehmer
Seriennummer	3221	
Sensitivität	223,6 mV/N	10/100/1000 $\frac{\text{mm}}{\text{s}}/\text{V}$
Messbereich	-44 ÷ 44 N	

Tabelle C.1.: Technische Daten für Aufnehmer und Geber

Parameter	Einstellungen
Erregung	Hammerschlag
Gemessene Bandbreite	800 Hz
Frequenzauflösung Δf	0,0125 Hz
Mittelungsverfahren	linear
Anzahl der Mittelungen	3
Erregerfensterfunktion	Rechteck-Fenster
Antwortfensterfunktion	Exponential-Fenster

Tabelle C.2.: Einstellungen während der Messung

D. Zuordnungstabelle der Elementknoten

<i>DOF EMA</i>	Node <i>FEM_{Str-FE}</i>	Node <i>FEM_{ersatz}</i>	<i>DOF EMA</i>	Node <i>FEM_{Str-FE}</i>	Node <i>FEM_{ersatz}</i>
1	6971	730	9	1276	130
2	13102	779	10	1332	149
3	19233	828	11	1390	163
4	25364	877	12	1451	177
5	31495	926	13	1492	186
6	37626	975	14	1548	205
7	43757	1024	15	1606	219
8	49888	1073	16	56019	1122

Tabelle D.1.: Zuordnungstabelle Freiheitsgrade *EMA* - *FEM* (1)

<i>DOF EMA</i>	Node <i>FEM_{Str-FE}</i>	Node <i>FEM_{ersatz}</i>	<i>DOF EMA</i>	Node <i>FEM_{Str-FE}</i>	Node <i>FEM_{ersatz}</i>
17	62150	1171	26	2615	283
18	68281	1220	27	2675	297
19	74412	1269	28	2715	307
20	80543	1318	29	2770	325
21	86674	1367	30	2827	339
22	92805	1416	31	105067	1514
23	98936	1465	32	111198	1563
24	2503	251	33	117329	1612
25	2558	269	34	123460	1661

Tabelle D.2.: Zuordnungstabelle Freiheitsgrade *EMA* - *FEM* (2)

$DOF\ EMA$	Node FEM_{Str-FE}	Node FEM_{ersatz}	$DOF\ EMA$	Node FEM_{Str-FE}	Node FEM_{ersatz}
35	129591	1710	43	4042	424
36	135722	1759	44	4097	439
37	141853	1808	45	4154	452
38	147984	1857	46	154115	1906
39	3830	372	47	160246	1955
40	3885	387	48	166377	2004
41	3942	400	49	172508	2053
42	4002	413	50	178639	2102

Tabelle D.3.: Zuordnungstabelle Freiheitsgrade $EMA - FEM$ (3)

$DOF\ EMA$	Node FEM_{Str-FE}	Node FEM_{ersatz}	$DOF\ EMA$	Node FEM_{Str-FE}	Node FEM_{ersatz}
51	184770	2151	60	5380	571
52	190901	2200	61	203163	2298
53	197032	2249	62	209294	2347
54	5050	486	63	215425	2396
55	5106	501	64	221556	2445
56	5164	515	65	227687	2494
57	5225	529	66	233818	2543
58	5266	542	67	239949	2592
59	5322	557	68	246080	2641

Tabelle D.4.: Zuordnungstabelle Freiheitsgrade $EMA - FEM$ (4)

E. Ergebnisse der Biegeversuche

Kraft [N]	Durchbiegung $FEM_{E-RVE_{3x3}}$ [mm]	Durchbiegung Exp [mm]	Abweichung [%]
0	0	0	0
0,51	0,133	0,12	-10,8
1,02	0,265	0,28	5,4
1,54	0,398	0,44	9,5
2,05	0,531	0,56	5,2
2,57	0,664	0,68	2,4
3,08	0,796	0,84	5,2
3,59	0,929	0,96	3,2
4,1	1,062	1,12	5,2
4,61	1,194	1,24	3,7
5,13	1,327	1,4	5,2
5,64	1,46	1,52	3,9
6,15	1,592	1,64	2,9
6,66	1,725	1,8	4,2
7,17	1,858	1,92	3,2
7,69	1,99	2,08	4,3
8,2	2,123	2,2	3,5
8,71	2,256	2,32	2,8
9,22	2,388	2,44	2,1

Tabelle E.1.: Wertetabelle mit numerisch (Ersatzmodell) und experimentell ermittelten Durchbiegungen des strukturierten Blechs

Literaturverzeichnis

- [Agi00] *The Fundamentals of Modal Testing*, Application Note 243-3, Agilent Technologies, 2000.
- [Als11] Alsubari, S. and Chaffoui, H.: *Homogenization of a Composite Periodic Structure in the Case of Composite Plate*, Int. J. Comput. Applic. **34**, pp. 28-33, 2011.
- [Alt94] Altenbach, J. und Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1994.
- [Avi01] Avitabile, P.: *Experimental Modal Analysis*, Sound and Vibration, University of Massachusetts, 2001.
- [Bat02] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin et al. 2002.
- [Bet01] Betten, J.: *Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin et al. 2001.
- [Bis51] Bishop, J. F. W. and Hill, R.: *A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses*, Phil. Mag. ser. 7 **42**, pp. 414-427, 1951.
- [Bra13] Bramer, H.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen an strukturierten Blechen*, Diplomarbeit BTU Cottbus, 2013.
- [Das11] Dassault Systèmes, *Abaqus Online Documentation*, Version 6.11, 2011.
- [Ewi84] Ewins, D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd, Taunton Somerset GB 1984.
- [Fri11] Fritzsche, S., Ossenbrink, R. and Michailov, V.: *Experimental Characterisation of Structured Sheet Metal*, 14th International Conference on Sheet Metal, Katholieke Universiteit Leuven, 2011.

- [Gam89] Gambin, B. and Kröner, E.: *Higher-Order Terms in the Homogenized Stress-Strain Relation of Periodic Media*, Phys. Stat. Sol. **B 151**, pp. 513-519, 1989.
- [Gas12] Gasch, R., Knothe, K. und Liebich, R.: *Strukturodynamik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin et al. 2012.
- [Har02] Hartung, D., Sickinger, C., Herbeck, L. und Kueppers, P.: *Homogenisierung einer Hohlkörperflächenstruktur*, in CD: Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2002, pp. 1-10, DGLR Jahrestagung, Stuttgart 2002.
- [Hil52] Hill, R.: *The elastic behaviour of a cristalline aggregate*, Proc. Phys. Soc. Lond. **A65** (5), pp. 349-354, 1952.
- [Hil63] Hill, R.: *Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles*, J. Mech. Phys. Solids **11**, pp. 357-372, 1963.
- [Hil72] Hill, R.: *On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 326**, pp. 131-147, 1972.
- [Hoh99] Hohe, J. and Becker, W.: *Determination of the elastic tensor of non-orthotropic cellular sandwich cores*, Techn. Mech. **19**, pp. 259-268, 1999.
- [Hoh00] Hohe, J. and Becker, W.: *A mechanical model for two-dimensional cellular sandwich cores with general geometry*, Comput. Mat. Sci. **19**, pp. 108-115, 2000.
- [Hoh03] Hohe, J.: *Elastizitätsverhalten von Sandwich-Zellkernen und zweidimensionalen Modellschäumen*, Habilitation Universität Siegen, Shaker Verlag, Aachen 2003.
- [Hop03] Hoppe, M.: *Umformverhalten strukturierter Feinbleche*, Dissertation BTU Cottbus, dissertation.de - Verlag im Internet GmbH, Berlin 2003.
- [Huf96] Hufenbach, W. und Adam, F.: *Strukturierung und Klassifizierung von Stahl-Mehrschichtverbunden*, Forschung für die Praxis P 307, Studiengesellschaft für Stahlanwendung e.V., Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf 1996.
- [Kno08] Knothe, K. und Wessels, H.: *Finite Elemente*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin et al. 2008.
- [Küh00] Kühhorn, A. und Silber, G.: *Technische Mechanik für Ingenieure*, Hüthig Verlag, Heidelberg 2000.

- [Lee96] Lee, J., Choi, J. B. and Choi, K.: *Application of homogenization FEM analysis to regular re-entrant honeycomb structures*, J. Mat. Sci. **31**, pp. 4105-4110, 1996.
- [Len09] Lenk, O.: *Charakterisierung und Anwendung von flächig periodischen Metall-Ringgeflechten*, Dissertation BTU Cottbus, Der Andere Verlag, Cottbus 2009.
- [Mal13] Malikov, V.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen der Umformung von strukturierten Blechen*, Dissertation BTU Cottbus, dissertation.de - Verlag im Internet GmbH, Berlin 2013.
- [Mar94] Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R.: *Mathematical foundations of Elasticity*, Dover Edition, Dover Publications, Inc., New York 1994.
- [ME'12] ME'scope Software Manual, 2012.
- [Nat88] Natke, H. G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*, 2. Auflage, Vieweg-Verlag, 1988.
- [Neu96] Neubauer, A. und Hellwig, U.: *Neue Möglichkeiten des Umformens von Nebenformelementen für Strukturkomponenten des Leichtbaus*, Tagungsband zur 3. Sächsischen Fachtagung Umformtechnik, S. 295-318, 1996.
- [Par80] Parlett, B. N.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1980.
- [Pel99] Pellegrino, C., Galvanetto, U. and Schrefler, B. A.: *Numerical homogenization of periodic composite materials with non-linear material components*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **46**, pp. 1609-1637, 1999.
- [Pol12] Polytec Scanning Vibrometer - Software Manual, 2012.
- [Rab04] Rabczuk, T., Kim, J. Y., Samaniego, E. and Belytschko, T.: *Homogenization of sandwich structures*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **61**, pp. 1009-1027, 2004.
- [Ric82] Richardson, M. H. and Formenti, D. L.: *Parameter estimation from Frequency Response Measurements using RFP*, 1st IMAC Conference, Orlando 1982.
- [Ric85] Richardson, M. H. and Formenti, D. L.: *Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements using the Rational Fraction Polynomial Method*, 3rd IMAC Conference, Orlando 1985.

- [Sch10] Schleuß, L., Ossenbrink, R. und Michailov, V.: *Widerstandspunktschweißen strukturierter Bleche - Schweißbereiche, Prüfung, Anwendung*, 12. Kolloquium Widerstandsschweißen und alternative Verfahren, Halle (Saale) 2010.
- [Sch99] Schwarz, B. J. and Richardson, M. H.: *Experimental Modal Analysis*, CSI Reliability Week, Orlando 1999.
- [Sim84] Simon, H. D.: *The Lanczos Algorithm with Partial reorthogonalization*. Math. Comp. **42**, pp. 115-142, 1984.
- [Ste05] Sterzing, A.: *Bewertung von Leichtbaupotenzial und Einsatzfähigkeit wölbstrukturierter Feinbleche*, Dissertation BTU Cottbus, Zwickau: Verlag Wiss. Scripten (Berichte aus dem IWU, Band 29), Chemnitz 2005.
- [Tan00] Tanov, R. and Tabiei, A.: *Finite element implementation of a new sandwich homogenization procedure*, Composite Struct. **50**, pp. 49-58, 2000.
- [Tip00] Tipler, P. A.: *Physik*, korrigierter Nachdruck der 1. Auflage 1994, aus dem Amerikanischen übersetzt, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg et al. 2000.
- [Vie12] Viehweger, B., Olbrich, S. und Schölzke, T.: *Prozesssichere Herstellung von FQZ-Wabenstrukturen durch Hydroforming*, Fachzeitschrift Bänder, Bleche, Rohre, 2012.
- [Vol01] Vollertsen, F. und Hollmann, F.: *Umformen strukturierter Platinen mit Mehrfachmembranen im Sinne eines robusten Fertigungsprozesses*, DFG-Vorhaben SPP 1098, Wirkmedienbasierte Fertigungstechniken zur Blechumformung, Internetpräsentation 2001.
- [Wie07] Wiedemann, J.: *Leichtbau*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin et al. 2007.
- [Xu02] Xu, X.F. and Qiao, P.: *Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect*, Int. J. Solids Struct. **39**, pp. 2153-2188, 2002.
- [Zie00] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, fifth edition, Butterworth-Heinemann, Oxford 2000.
- [Zoh00] Zohdi, T. I. und Wriggers, P.: *On the sensitivity of homogenized material responses at infinitesimal and finite strains*, Commun. Num. Meth. Engng. **16**, pp. 657-670, 2000.