

Verallgemeinertes polynomielles Chaos zur Lösung stationärer Diffusionsprobleme mit zufälligen Koeffizienten

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematikerin
Antje Mugler

geboren am 19. November 1984 in Karl-Marx-Stadt

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ralf Wunderlich

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Jörg Starkloff

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Wilfried Grecksch

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	7
2.1	Maß- und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen	7
2.2	Orthogonale Polynome	15
2.2.1	Definitionen	16
2.2.2	Hermite-Polynome	19
2.2.3	Legendre-Polynome	28
2.2.4	Stieltjes-Wigert-Polynome	30
3	Chaosentwicklungen	33
3.1	Verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen	34
3.1.1	Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin	35
3.1.2	Eigenschaften verallgemeinerter polynomieller Chaosentwicklungen .	43
3.2	Eindimensionale polynomielle Chaosentwicklungen	47
3.2.1	Konvergenzeigenschaften	49
3.2.2	Produkte eindimensionaler polynomieller Chaosentwicklungen . . .	57
4	Zufällige Gleichungen	79
4.1	Algebraische Gleichungen mit zufälligen Koeffizienten	80
4.2	Stationäre Diffusionsgleichungen mit zufälligen Koeffizienten	92
4.2.1	Problemformulierung	93
4.2.2	Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung	104
4.2.3	Eigenschaften der schwachen Lösung	109
4.2.4	Stochastische Galerkin-Methode	117
4.2.5	Beispiele	138
A	Berechnung verallgemeinerter polynomieller Chaoskoeffizienten	151
A.1	Berechnung polynomieller Chaoskoeffizienten	151
A.2	Berechnung von Chaoskoeffizienten bei lognormalem Chaos	158
	Zusammenfassung	161
	Symbolverzeichnis	163
	Literatur	164

Kapitel 1

Einleitung

Komplexe Systeme beispielsweise in Natur, Technik oder Wirtschaft möglichst realitätsnah durch mathematische Modelle zu beschreiben bzw. zu simulieren stellt eine große Herausforderung dar. Es müssen nicht nur Gleichungen, z. B. Differentialgleichungen, zur Beschreibung dieser Prozesse gefunden werden, sondern auch die nötigen Eingangsdaten zur Verfügung stehen. So werden zum Beispiel stochastische Differentialgleichungen benutzt, um in der Finanzwirtschaft die Entwicklung von Wertpapieren oder die Bewertung von Optionen zu modellieren oder aber auch um Teilchenbewegungen in der Physik darzustellen. Andererseits gibt es in Natur und Technik auch Prozesse, die eigentlich mit Hilfe deterministischer Differentialgleichungen modelliert werden können, bei denen jedoch die Eingangsdaten, wie z. B. gewisse Stoffparameter oder Materialeigenschaften, nur mit einer gewissen Unsicherheit vorhergesagt werden können, sodass sich diese nicht adäquat durch deterministische Größen, sondern eher durch Einbeziehung einer zufälligen Komponente beschreiben lassen. In diesem Falle spricht man zur Unterscheidung zu stochastischen Differentialgleichungen von zufälligen Differentialgleichungen. Das heißt, zufällige Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen mit zufälligen Koeffizienten und/oder zufälligen Quelltermen aber ohne einen Rauschterm, der die Verwendung des Itô-Kalküls oder Verallgemeinerungen davon nach sich ziehen würde. Aufgrund der praktischen Relevanz solcher zufälligen Differentialgleichungen und der Erfordernis, neue mathematische Ansätze zu ihrer Untersuchung zu entwickeln, wuchs das Forschungsinteresse in den letzten Jahren auf diesem Gebiet stark an. In dieser Arbeit liegt das Augenmerk speziell auf stationären Diffusionsgleichungen mit zufälligen Koeffizienten, die zusammen mit (zufälligen) Randbedingungen zufällige Randwertprobleme liefern. Eine typische Problemstellung dieser Art ist beispielsweise die Modellierung von Grundwasserströmungen bzw. Transportprozessen in porösen Medien, die zum Beispiel bei der Bewertung von atomaren Endlagern von praktischer Bedeutung sein können.

Im Zusammenhang mit der Beschreibung physikalischer oder technischer Prozesse durch zufällige Randwertprobleme ergeben sich verschiedene prinzipielle Aufgaben- bzw. Fragestellungen. Es müssen die Eingangsdaten mittels eines geeigneten Modells dargestellt werden. Man muss untersuchen, ob das resultierende zufällige Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Dabei ist natürlich zu klären, was man unter einer Lösung versteht, weil man wie im rein deterministischen Fall auch hier verschiedene mögliche Lösungsbegriffe betrachten kann. Da die Lösung im Allgemeinen nicht analytisch angegeben werden kann, braucht man außerdem geeignete numerische Methoden, mit denen die Lösung näherungsweise (möglichst effizient) berechnet werden kann. Oft schließt sich daran noch ein Schritt des Postprocessings an, da nicht nur die Lösung selbst, sondern auch Charakteristiken der Lösung wie Erwartungswert, Varianz, Verteilungen oder Ausfallwahrscheinlichkeiten von Interesse sind. In diesem Zusammenhang fällt auch häufig das Stichwort der

Unsicherheitsquantifizierung, die sich noch zusätzlich verkompliziert, wenn für die Lösung sogar reale Beobachtungsdaten zur Verfügung stehen und mit in das Modell einbezogen werden sollen.

Von diesen Aufgabenstellungen werden in der vorliegenden Arbeit die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für Randwertprobleme mit einer zufälligen stationären Diffusionsgleichung und deren näherungsweise Lösung mittels stochastischer Galerkin-Verfahren unter Verwendung von verallgemeinertem polynomiellen Chaos untersucht. Die stochastische Galerkin-Methode wurde von Ghanem und Spanos in ihrem Buch [49] vorgestellt. Sie basiert wie das Galerkin-Verfahren für rein deterministische Probleme auf einer schwachen Formulierung des Problems und generiert eine Folge von endlichdimensionalen Ersatzaufgaben durch geeignete Diskretisierungstechniken. Neben einer Diskretisierung in der räumlichen Dimension wird auch eine Diskretisierung in der stochastischen Dimension benötigt, die mittels polynomiellen Chaos realisiert wird. Das Konzept des polynomiellen Chaos bzw. der polynomiellen Chaosentwicklungen selbst geht bis auf Wiener [103] zurück, der damit auch für die Namensgebung verantwortlich ist. Seit der wegweisenden Arbeit von Ghanem und Spanos gibt es vielfältige Forschungsaktivitäten, um diese Methoden weiterzuentwickeln und zu verfeinern. Als unvollständige Liste sollen stellvertretend beispielsweise die Artikel von Schwab et al. [17, 18, 30, 95] erwähnt werden sowie die Arbeiten von Matthies und Keese [74], Nouy und Le Maître [79, 80] und Wan und Karniadakis [101, 102]. Außerdem sei auf die Bücher von Le Maître und Knio [68] und Xiu [108] und den Acta Numerica Artikel von Schwab und Gittelsohn [87] und die darin aufgeführte Literatur verwiesen. Extra hervorgehoben werden sollen auch die Arbeiten von Xiu und Karniadakis [106, 111, 113], die die Idee des polynomiellen Chaos weiterentwickelten und das verallgemeinerte polynomielle Chaos einführten. Ein Konzept, das auch in dieser Arbeit verwendet wird. Stochastische Galerkin-Verfahren können auch bei zufälligen Gleichungen anderer Art wie z. B. bei zufälligen algebraischen Gleichungen oder Differentialgleichungen anderen Typs (siehe z. B. Le Maître und Knio in [68]) zum Einsatz kommen. So ergibt sich auch ihre breite Anwendbarkeit auf Beispiele aus der Praxis (siehe z. B. die Literaturverweise bei Le Maître und Knio in [68, Section 1.4.2]). Natürlich gibt es neben der stochastischen Galerkin-Methode auch andere Möglichkeiten zufällige Randwertprobleme numerisch zu lösen bzw. Charakteristiken der Lösung näherungsweise zu bestimmen. Sowohl Kollokationsmethoden (siehe z. B. Babuška et al. [6], Bieri [16] oder Xiu et al. [107, 109]) als auch verbesserte Monte-Carlo-Techniken wie Quasi-Monte-Carlo-Verfahren (siehe z. B. Graham et al. [54]) oder Multilevel-Monte-Carlo-Verfahren (siehe z. B. Scheichl et al. [29, 86] oder Schwab et al. [12]) werden verwendet. Vor allem letztere erfahren zur Zeit reges Interesse.

Bisher unerwähnt blieb, was man sich eigentlich unter (verallgemeinertem) polynomiellen Chaos bzw. (verallgemeinerten) polynomiellen Chaosentwicklungen von Zufallsvariablen vorzustellen hat. Grob gesprochen entspricht die Chaosentwicklung einer Zufallsvariable einer abstrakten Fourierreihenentwicklung dieser Zufallsvariable bzgl. orthogonaler Polynome in gewissen (anderen) reellwertigen Zufallsgrößen. Bei polynomiellen Chaosentwicklungen werden speziell multivariate Hermite-Polynome in abzählbar vielen unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsgrößen verwendet. Bei verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen richten sich die orthogonalen Polynome nach der Verteilung der Zufallsgrößen, in denen sie betrachtet werden sollen. Diese Verteilungen müssen jetzt keine Normalverteilungen mehr sein, sondern können (nahezu) beliebig gewählt werden. Der Satz von Cameron und Martin [25] besagt nun, dass jede Zufallsgröße, die gewissen Ei-

genschaften genügt, durch ihre polynomielle Chaosentwicklung dargestellt werden kann. So wie Xiu und Karniadakis [106, 111, 113] die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen einführen, um bessere Approximationseigenschaften zu erzielen, bleibt jedoch unklar, ob auch ein entsprechendes Analogon zum Satz von Cameron und Martin gilt. Eine Fragestellung, die ebenfalls für die stochastische Galerkin-Methode und für die Konvergenz der Folge ihrer stochastischen Galerkin-Lösungen von Relevanz ist.

Wie bereits erwähnt, werden in dieser Arbeit vor allem stationäre Diffusionsgleichungen vom Typ

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f$$

mit zufälligen Koeffizienten κ betrachtet. Wenn damit eine Grundwasserströmung in porösen Medien modelliert wird (siehe z. B. Ghanem [44, 45, 48] oder Xiu und Karniadakis [110, 113]), beschreibt der Koeffizient κ die Permeabilität der unterirdischen Gesteinschicht, die nicht mit absoluter Sicherheit deterministisch vorhersagbar ist und darum als zufällig angenommen wird. Aufgrund des zufälligen Koeffizienten κ wird diese Differentialgleichung in der Literatur als anschauliches Modellproblem angesehen und in Abhängigkeit von κ untersucht. Sowohl Babuška et al. [5, 7, 8, 31] als auch Schwab et al. [17, 18, 30, 38, 95] oder Matthies und Keese [74] und weitere Autoren haben in einer Reihe von Arbeiten diese Gleichung im Zusammenhang mit der stochastischen Galerkin-Methode für Koeffizienten κ analysiert, die sich durch Konstanten von Null und Unendlich fast sicher trennen lassen. In diesem Fall kann man sich für theoretische Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung und zu Konvergenzaussagen für die stochastische Galerkin-Methode auf die Theorie der deterministischen Randwertprobleme zurückziehen. Der stochastische Galerkin-Ansatz, der für diese Ausgangssituation standardmäßig genutzt wird, wird in dieser Arbeit als standardmäßiger stochastischer Galerkin-Ansatz (oder Methode) bezeichnet. In manchen praktischen Fragestellungen wird der Koeffizient κ jedoch als lognormales Zufallsfeld modelliert (siehe z. B. Freeze [39], Ghanem [47, 48], Zhang [116] oder Nowak [81]). Dann existieren keine solchen Konstanten, um κ von der Null und Unendlich fast sicher zu trennen, und damit kann die deterministische Theorie nicht ohne Weiteres auf diesen Fall übertragen werden. Darum haben Gittelsohn in [51] und Galvis und Sarkis in [42] unter Verwendung verschiedener Techniken – aber immer unter Ausnutzung der Eigenschaften lognormaler Zufallsfelder – diese theoretische Lücke gefüllt und sowohl Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung als auch Konvergenzabschätzungen für eine entsprechende stochastische Galerkin-Methode geliefert.

Diese Ergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit auf den Fall verallgemeinert, dass der Koeffizient κ sich fast sicher von Null und Unendlich nur durch reellwertige Zufallsgrößen trennen lässt. Das bedeutet, in praktischen Anwendungen ist man damit nicht wie bisher ausschließlich auf die Verwendung von lognormalen Zufallsfeldern oder Koeffizienten, die sich durch Konstanten fast sicher trennen lassen, eingeschränkt. Es werden somit für eine deutlich größere Klasse von Koeffizienten und dazugehörigen Randwertproblemen die theoretischen Grundlagen zur Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung zur Verfügung gestellt. In Anlehnung an Galvis und Sarkis [42] wird ein entsprechender stochastischer Galerkin-Ansatz präsentiert, der eine Folge von stochastischen Galerkin-Lösungen produziert, die gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergiert. Außerdem werden A-priori-Fehlerabschätzungen für die stochastischen Galerkin-Lösungen unter Benutzung von Eigenschaften der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen hergeleitet. Zusätzlich dazu werden Beispiele analytischer und numerischer Natur angegeben,

um zu zeigen, dass der standardmäßige stochastische Galerkin-Ansatz für Koeffizienten, die nur reellwertige Zufallsgrößen als Schranken besitzen, nicht immer zu verlässlichen Ergebnissen führt. Das heißt, es wird bewiesen, dass die Folge der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Lösungen im Allgemeinen nicht in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergiert.

Die Arbeit ist damit wie folgt organisiert. Im zweiten Kapitel werden zuerst die benötigten Räume und grundlegende Begriffe aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie bereitgestellt. Außerdem wird eine kurze Einführung in orthogonale Polynome gegeben, die die Basis des verallgemeinerten polynomiellen Chaos bilden. Dabei werden drei Familien dieser Polynome, die Hermite-, Legendre- und Stieltjes-Wigert-Polynome, gesondert betrachtet. Die Hermite-Polynome werden zur Bildung des polynomiellen Chaos im Sinne von Wiener [103] verwendet und spielen damit eine besondere Rolle. Sie werden deshalb detaillierter behandelt und es werden spezielle Eigenschaften von ihnen untersucht.

Das dritte Kapitel beinhaltet dann die bereits erwähnten Chaoseswicklungen, unterteilt in einen Abschnitt zu verallgemeinerten polynomiellen Chaoseswicklungen und eindimensionalen polynomiellen Chaoseswicklungen. Im Abschnitt zu verallgemeinerten polynomiellen Chaoseswicklungen werden zunächst Verallgemeinerungen des Satzes von Cameron und Martin [25] diskutiert und allgemeine Eigenschaften dieser verallgemeinerten polynomiellen Chaoseswicklungen besprochen. Der nächste Abschnitt ist dem Spezialfall der eindimensionalen polynomiellen Chaoseswicklungen gewidmet. Es werden in einer Weiterführung zu Field und Grigoriu [37] zusätzliche Konvergenzeigenschaften dieser Entwicklungen ebenso wie Konvergenzgeschwindigkeiten untersucht. Außerdem wird betrachtet, welche Eigenschaften erhalten bleiben und welche verloren gehen, wenn man Produkte von solchen Entwicklungen bildet. Produkte bilden zu können, spielt vielleicht auf den ersten Blick bei der Lösung von zufälligen Gleichungen mittels der stochastischen Galerkin-Methode keine große Rolle. Doch je nachdem, in welcher Form die Eingangsdaten vorliegen oder welche Aufgaben im Postprocessing-Schritt vorgesehen sind, kann es vorkommen, Produkte bilden zu müssen. Auch bei der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen wie z. B. der (stochastischen) Burgersgleichung (siehe z. B. Rozovskii et al. [62]) können derartige Produkte eine Rolle spielen.

Das vierte Kapitel befasst sich dann mit den zufälligen Gleichungen. Dem Hauptabschnitt zu stationären Diffusionsgleichungen mit zufälligen Koeffizienten ist ein kurzer Abschnitt zu algebraischen Gleichungen mit zufälligen Koeffizienten vorangestellt. Er dient vor allem dazu, an einfachsten Beispielen auf die Probleme aufmerksam zu machen, die der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Methode innewohnen, wenn sich der Koeffizient nicht fast sicher von Null und Unendlich durch Konstanten, sondern nur durch Zufallsgrößen trennen lässt. Diese Beispiele sind dabei nicht nur numerischer Art, sondern werden auch analytisch nachvollzogen. Sie lassen sich außerdem eins zu eins auf die stationären Diffusionsgleichungen mit ebensolchen Koeffizienten übertragen. Sie illustrieren damit die Notwendigkeit der Erarbeitung einer entsprechenden Lösungstheorie und Konvergenztheorie im Zusammenhang mit einem geeigneten stochastischen Galerkin-Ansatz. In dem Abschnitt zu stationären Diffusionsgleichungen mit zufälligen Koeffizienten werden nach der Problemdefinition zunächst verschiedene Variationsformulierungen vorgestellt und auf Existenz einer eindeutigen Lösung hin untersucht (auf Grundlage von Gittelsohn [51] und Galvis und Sarkis [42]). Danach werden Eigenschaften der schwachen Lösung in Abhängigkeit von den Eingangsdaten besprochen, die als Indiz für die Konvergenzgeschwindigkeit des gewählten stochastischen Galerkin-Ansatzes gelten können.

Die stochastische Galerkin-Methode selbst wird danach behandelt und ein geeigneter stochastischer Galerkin-Ansatz, ein stochastischer Petrov-Galerkin-Ansatz basierend auf der Idee von Galvis und Sarkis [42], unter Verwendung des verallgemeinerten polynomiellen Chaos vorgestellt. Für diesen Ansatz werden dann sowohl eine Konvergenztheorie entwickelt und A-priori-Fehlerabschätzungen angegeben als auch auf numerische Aspekte der Berechnung der entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösungen eingegangen. Den Abschluss bildet ein Abschnitt zu numerischen und analytischen Beispielen, mit denen die vorgestellte Theorie noch einmal verdeutlicht und illustriert werden soll. Der Anhang enthält benötigte Berechnungen zu verschiedenen speziellen Chaosentwicklungen.

Einige Resultate dieser Arbeit sind bereits in Artikeln mit meinem Betreuer Professor Dr. Hans-Jörg Starkloff [77, 78] und in Zusammenarbeit mit den Kollegen Prof. Dr. Ernst und Dr. Ullmann [34] veröffentlicht worden. So wie diese Artikel gäbe es auch die vorliegende Arbeit ohne die Motivation und fachliche Unterstützung von Professor Dr. Hans-Jörg Starkloff nicht, sodass ihm an allererster Stelle mein Dank gilt. Im Rahmen des Projektes „Stochastische Galerkin-Methoden: Grundlagen und Algorithmen“ von ihm und Prof. Dr. Ernst durfte ich mich Dank der Förderung durch die DFG innerhalb des Schwerpunktprogrammes 1324 mit diesem aktuellen Forschungsgebiet auseinandersetzen. Mein zweiter Dank gilt meinem hiesigen Betreuer Prof. Dr. Ralf Wunderlich, der es mir ermöglichte meine Dissertation in Cottbus fertigzustellen. Mit seiner Hilfs- und Gesprächsbereitschaft zeichnete er sich für mich stets als wertvoller Ansprechpartner aus. Bedanken möchte ich mich auch bei Dr. Ullmann und Prof. Dr. Ernst für die zahlreichen erhellenden Gesprächs- und Diskussionsrunden, bei meinen Zwickauer Kollegen, die mich so freundlich in ihren Reihen aufgenommen haben und natürlich meinen jetzigen Kollegen an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus. Nicht unerwähnt dürfen an dieser Stelle meine Familie, die sehr direkt den Entstehungsprozess dieser Arbeit miterlebt hat, wie auch mein gesamter Freundeskreis bleiben. Für ihren Rückhalt und ihre moralische und tatkräftige Unterstützung bin ich sehr dankbar.

Kapitel 2

Grundlagen

Allen Betrachtungen in den kommenden Kapiteln liegt ein anfänglicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ bestehend aus der Menge Ω aller Elementarereignisse, einer σ -Algebra \mathfrak{A} und einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} auf der σ -Algebra \mathfrak{A} zugrunde. Sowohl die Menge Ω als auch die σ -Algebra \mathfrak{A} sollen hinreichend reichhaltig sein, sodass alle vorkommenden stochastischen Größen (wie z. B. normalverteilte Zufallsgrößen oder auch Hilbert- oder Banachraumwertige Zufallsvariablen) definiert werden können. Außerdem soll der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ vollständig sein. Die entsprechenden Räume, in denen die hier auftretenden Zufallsvariablen enthalten sein sollen, werden im ersten Abschnitt in allgemeiner Form eingeführt. Zusätzlich werden Aussagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholt, die in den späteren Kapiteln benötigt werden. Der zweite Abschnitt hingegen fasst alle nötigen Definitionen und Eigenschaften zu orthogonalen Polynomen zusammen, da diese die Grundlage der Chaosentwicklungen von Zufallsvariablen bilden (siehe nächstes Kapitel).

2.1 Maß- und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Für einen allgemeinen Maßraum (X, Σ_X, μ) mit einer Menge X , einer σ -Algebra Σ_X und einem auf Σ_X definierten Maß μ , werden zunächst folgende Funktionenräume, streng genommen Räume von Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, eingeführt.

Definition 2.1 Sei ein Maßraum (X, Σ_X, μ) gegeben. Dann sind die Funktionenräume $L^p(X, \Sigma_X, \mu)$, $0 < p \leq \infty$, wie folgt definiert

$$L^p(X, \Sigma_X, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \Sigma_X\text{-messbar} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

und

$$L^\infty(X, \Sigma_X, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \Sigma_X\text{-messbar} : \text{ess sup}_\mu |f| < \infty \right\}, \quad p = \infty.$$

Bemerkung 2.2

(a) Um die Messbarkeit einer Abbildung zu definieren, benötigt man auch auf den reellen Zahlen eine σ -Algebra. In diesem Fall wird als σ -Algebra immer die σ -Algebra der

Borel-Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vorausgesetzt. Damit entspricht die Σ_X -Messbarkeit der Borel-Messbarkeit bzgl. Σ_X (siehe dazu z. B. Reed und Simon [84, Appendix to Section IV.5]), d. h.

$$f^{-1}(U) \in \Sigma_X \quad \text{für alle offenen Mengen } U \subseteq \mathbb{R}.$$

- (b) Gilt für Maße μ außerdem $\mu(X) = 1$, d. h., μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann ist (X, Σ_X, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und das Integral entspricht dem Erwartungswert, d. h.

$$\mathbf{E}_\mu f = \int_X f d\mu.$$

- (c) Für $1 \leq p \leq \infty$ wird durch $\|\cdot\|_{L^p(X, \mu)} := (\int_X |\cdot|^p d\mu)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, und mit $\|\cdot\|_{L^\infty(X, \mu)} := \text{ess sup}_\mu |\cdot|$, $p = \infty$, eine Norm auf $L^p(X, \Sigma_X, \mu)$ definiert und $L^p(X, \Sigma_X, \mu)$ ist ein Banachraum. Für $p = 2$ ist mit $(f, g)_{L^2(X, \mu)} := \int_X fg d\mu$ auch ein Skalarprodukt auf $L^2(X, \Sigma_X, \mu)$ gegeben. Damit ist $L^2(X, \Sigma_X, \mu)$ sogar ein Hilbertraum. Diese Resultate können z. B. bei Yosida [115] nachgelesen werden.

Entspricht das Maß μ dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ vom Beginn oder dem Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, so wird in den Bezeichnungen der Normen und beim Skalarprodukt auf die Notation des Maßes verzichtet.

Im Laufe der Arbeit treten verschiedene Maße μ auf. Unter anderem wird zum einen über die Verteilungsfunktion F_ξ einer reellwertigen Zufallsgröße ξ , die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ definiert ist, d. h.

$$F_\xi(x) := \mathbf{P}(\xi \leq x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Maß μ erzeugt (siehe Bemerkung 2.3 (a)). Dieses Maß μ wird dann auch die Verteilung der Zufallsgröße ξ genannt. Zum anderen treten auch Maße auf, die über ihre Radon-Nikodym Ableitung (siehe z. B. Shiryaev [89]) bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} definiert sind (siehe Bemerkung 2.3 (b)).

Bemerkung 2.3

- (a) Sei eine reellwertige, nicht-fallende, nicht konstante, beschränkte, rechtsseitig stetige Funktion F auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Dann definiert

$$\mu(A) := \int_A dF(x) := \int_A F(dx), \quad A \in \mathcal{B}(J),$$

ein Maß auf $(J, \mathcal{B}(J))$. Der entsprechende Maßraum wird dann mit $(J, \mathcal{B}(J), dF)$ bezeichnet. Entspricht F sogar einer Verteilungsfunktion F_ξ einer reellwertigen Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, dann ist $J = \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF_\xi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. (Dies lässt sich analog für Verteilungen von Zufallsvariablen ξ mit Werten in \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, oder mit Werten in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ verallgemeinern.)

- (b) Sei eine reellwertige Zufallsgröße $\xi > 0$ f. s. auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegeben. Dann bezeichnet der Ausdruck $\xi d\mathbf{P}$ ein neues Maß $\tilde{\mathbf{P}}$, das definiert ist durch

$$d\tilde{\mathbf{P}} := \xi d\mathbf{P}, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A \xi(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \quad \text{für alle } A \in \Sigma_X.$$

Das Maß $\tilde{\mathbf{P}}$ ist dann im Allgemeinen weder ein Wahrscheinlichkeitsmaß noch ein endliches Maß. Der dazugehörige Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \tilde{\mathbf{P}})$ wird daraufhin auch entsprechend mit $(\Omega, \mathfrak{A}, \xi d\mathbf{P})$ bezeichnet.

Neben dem Wahrscheinlichkeitsmaß spielt auch die betrachtete σ -Algebra eine wichtige Rolle (siehe z. B. Kapitel 3). Manchmal wird es notwendig sein, anstelle der „großen“ σ -Algebra \mathfrak{A} des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ kleinere σ -Algebren zu betrachten, wie beispielsweise die, die von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ erzeugt werden.

Definition 2.4 Sei eine reellwertige Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegeben. Dann bezeichnet $\sigma(\xi) \subseteq \mathfrak{A}$ die kleinste σ -Algebra bezüglich der ξ messbar ist. (Diese Definition lässt sich auf beliebige Zufallsvariablen ausweiten.)

Neben reellwertigen Zufallsgrößen werden in den folgenden Kapiteln auch Zufallsvariablen mit Werten in abstrakteren Räumen, wie z. B. Banachräumen, von Bedeutung sein. Dabei heißt eine Abbildung/Funktion $f : (X, \Sigma_X) \rightarrow (M, d)$ in einen metrischen Raum (M, d) messbar, wenn sie Borel-messbar bzgl. Σ_X ist. Eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit Werten in (M, d) ist also dann gegeben, wenn sie Borel-messbar bzgl. \mathfrak{A} ist. In diesem Zusammenhang wird für solche Zufallsvariablen außerdem der Begriff der starken Messbarkeit benötigt und in der folgenden Definition nach Hille und Phillips in [61] für eine Abbildung, die auf einem beliebigen Maßraum mit Werten in einem Banachraum definiert ist, eingeführt.

Definition 2.5 Seien ein vollständiger Maßraum (X, Σ_X, μ) mit σ -endlichem Maß μ und ein Banachraum \mathcal{B} gegeben. Dann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathcal{B}$ stark Σ_X -messbar, wenn eine Folge existiert, die aus messbaren Funktionen besteht, die jeweils nur abzählbar viele Werte aus \mathcal{B} annehmen, und diese Folge μ -f. s. in \mathcal{B} gegen f konvergiert.

Bemerkung 2.6

- (a) Ist μ ein endliches Maß, so kann die Folge in obiger Definition durch eine Folge bestehend aus einfachen messbaren Funktionen ersetzt werden (siehe dazu ebenfalls Hille und Phillips [61]). Eine messbare Funktion heißt dabei einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.
- (b) Ist der Banachraum \mathcal{B} separabel, dann ist die starke Σ_X -Messbarkeit äquivalent zur Borel-Messbarkeit bzgl. Σ_X (siehe dazu Reed und Simon [84, Appendix to Section IV.5]).

Analog zur Definition 2.1 lassen sich nun auch die entsprechenden Funktionenräume für Banachraumwertige Abbildungen definieren.

Definition 2.7 Seien ein vollständiger Maßraum (X, Σ_X, μ) mit σ -endlichem Maß μ und ein Banachraum $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ gegeben. Die Räume $L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B})$, $0 < p \leq \infty$, sind dann wie folgt definiert

$$L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{B} \text{ stark } \Sigma_X\text{-messbar} : \int_X \|f\|_{\mathcal{B}}^p d\mu < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

und

$$L^\infty(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{B} \text{ stark } \Sigma_X\text{-messbar} : \text{ess sup}_\mu \|f\|_{\mathcal{B}} < \infty \right\}, \quad p = \infty.$$

Bemerkung 2.8

- (a) Auch in diesem Falle spricht man zwar von der Funktion $f \in L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B})$ mit $0 < p \leq \infty$, meint damit aber natürlich die Äquivalenzklasse, für die f ein Repräsentant ist.
- (b) Für $1 \leq p < \infty$ wird durch $\|\cdot\|_{L^p(X, \mu; \mathcal{B})} := (\int_X \|\cdot\|_{\mathcal{B}}^p d\mu)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, und $\|\cdot\|_{L^\infty(X, \mu; \mathcal{B})} := \text{ess sup}_\mu \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, $p = \infty$, eine Norm auf $L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B})$ definiert und $L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B})$ ist ein Banachraum (siehe Hille und Phillips [61]).
- (c) Ist nicht nur ein Banachraum sondern ein Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$ gegeben, dann definiert $(f, g)_{L^2(X, \mu; \mathcal{H})} := \int_X (f, g)_{\mathcal{H}} d\mu$ ein Skalarprodukt auf $L^2(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{H})$. Damit ist $L^2(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{H})$ sogar ein Hilbertraum (siehe z. B. Hille und Phillips [61] oder Reed und Simon [84]).

Im Folgenden wird ein wichtiges Beispiel einer stark messbaren, Banachraumwertigen Zufallsvariablen angegeben.

Beispiel 2.9 Sei ein lognormales Zufallsfeld $\kappa : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und beschränktem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, der Gestalt

$$\kappa(x, \omega) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \xi_i(\omega)\right)$$

gegeben, wobei die reellwertigen Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ unabhängig und identisch standardnormalverteilt sind und für die deterministischen Funktionen $\psi_i \in L^\infty(D)$, $i \in \mathbb{N}$, die Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} < \infty$ erfüllt ist. Dann gilt $\kappa \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; L^\infty(D))$ für alle $1 \leq p < \infty$. Dies sieht man, indem man sowohl die Beschränktheit des Erwartungswertes $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|\kappa\|_{L^\infty(D)}^p$ als auch die starke Messbarkeit von κ nachweist.

Beginnend mit dem Erwartungswert gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|\kappa\|_{L^\infty(D)}^p &\leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp\left(p \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} |\xi_i|\right) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp\left(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} |\xi_i|\right) = \prod_{i=1}^{\infty} 2 \exp\left(\frac{1}{2} p^2 \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}^2\right) \Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}), \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße ist. Um zu zeigen, dass dieses Produkt endlich ist, logarithmiert man den Ausdruck und untersucht die resultierende Summe, d. h.

$$\begin{aligned} &\ln\left(\prod_{i=1}^{\infty} 2 \exp\left(\frac{1}{2} p^2 \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}^2\right) \Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} p^2 \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}^2 + \ln\left(2\Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)})\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} p^2 \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}^2\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(2\Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)})\right), \end{aligned}$$

da $\Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}) \geq 1/2$. Die erste Summe ist endlich, weil $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} < \infty$ vorausgesetzt worden ist. Die zweite Summe kann weiter abgeschätzt werden mit

$$\Phi(p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{p \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}} \exp(-x^2/2) dx$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{p\|\psi_i\|_{L^\infty(D)}} 1 \, dx = \frac{1}{2} + \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}$$

und unter Verwendung der Ungleichung $\ln(1+x) \leq x$ für $x \geq 0$ durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln(2\Phi(p\|\psi_i\|_{L^\infty(D)})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (2\Phi(p\|\psi_i\|_{L^\infty(D)}) - 1) \leq \frac{2p}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} < \infty$$

für alle $1 \leq p < \infty$, womit die Endlichkeit des Erwartungswertes gezeigt ist.

Für die starke Messbarkeit von κ wird eine Folge $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark messbarer Zufallsvariablen mit Werten in $L^\infty(D)$ konstruiert, die fast sicher gegen κ in $L^\infty(D)$ konvergiert. Die starke Messbarkeit von κ folgt dann nach Hille und Phillips [61, Theorem 3.5.4]. Eine solche Folge von Zufallsvariablen ist beispielsweise durch

$$[\kappa_n(\omega)](x) := \exp\left(\sum_{i=1}^n \psi_i(x)\xi_i(\omega)\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

gegeben. Jedes κ_n ist stark messbar, da die reellwertigen Zufallsgrößen ξ_i durch einfache Zufallsgrößen fast sicher approximiert werden können und es gilt

$$\begin{aligned} & \|\kappa(\cdot, \omega) - \kappa_n(\omega)\|_{L^\infty(D)} \\ & \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) \left| \exp\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) - 1 \right|. \end{aligned}$$

Da für die Zufallsgröße $\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right)$ der Erwartungswert existiert, gilt ebenso $\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) < \infty$ fast sicher, und da $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|$ fast sicher gegen Null konvergiert für $n \rightarrow \infty$, gibt es ein $0 < L(\omega) < \infty$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)| \in [0, L(\omega)]$ für alle $n \geq n_0$. Damit kann für fast alle $\omega \in \Omega$ aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $(-\infty, L(\omega)]$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} \|\kappa(\cdot, \omega) - \kappa_n(\omega)\|_{L^\infty(D)} & \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) \left| \exp\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) - 1 \right| \\ & \leq \exp(L(\omega)) \exp\left(\sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)|\right) \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}|\xi_i(\omega)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ gezeigt werden.

Die Forderung der starken Messbarkeit von Banachraumwertigen Funktionen stellt zudem sicher, dass im Falle eines endlichen Maßes μ für alle $f \in L^p(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{B})$, $1 \leq p \leq \infty$, die sogenannten Bochner-Integrale

$$\int_X f \, d\mu \in \mathcal{B}$$

existieren (siehe z. B. Hille und Phillips [61] oder Yosida [115]). Damit sind auch für Banachraumwertige Zufallsvariablen Erwartungswerte bzw. auch zweite Momente o. ä. entsprechend zu reellwertigen Zufallsgrößen sinnvoll definiert.

Ist nicht nur ein Banachraum sondern sogar ein Hilbertraum \mathcal{H} gegeben, dann kann unter bestimmten Bedingungen der Hilbertraum $L^2(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{H})$ als Tensorprodukt der beiden Hilberträume $L^2(X, \Sigma_X, \mu)$ und \mathcal{H} aufgefasst werden (siehe z. B. Reed und Simon [84]).

Proposition 2.10 *Seien ein vollständiger Maßraum (X, Σ_X, μ) mit σ -endlichem Maß μ und ein separabler Hilbertraum \mathcal{H} gegeben. Ist $L^2(X, \Sigma_X, \mu)$ ebenfalls separabel, dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus, sodass gilt*

$$L^2(X, \Sigma_X, \mu; \mathcal{H}) \simeq L^2(X, \Sigma_X, \mu) \otimes \mathcal{H}.$$

Speziell tauchen als Hilberträume die Sobolev-Räume auf (siehe z. B. Evans [35]). Für ein offenes und beschränktes Gebiet $D \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ist der Sobolev-Raum $H^k(D)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$H^k(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : \partial^\alpha f \in L^2(D) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{H^k(D)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(D)}$$

und der dadurch induzierten Norm $\|\cdot\|_{H^k(D)} := (\cdot, \cdot)_{H^k(D)}^{1/2}$. Die Sobolev-Räume $\mathring{H}^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, bezeichnen den Abschluss von $C_c^\infty(D)$ in $H^k(D)$. Dabei enthält $C_c^\infty(D)$ alle unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Die Räume $(H^k(D), (\cdot, \cdot)_{H^k(D)})$ und $(\mathring{H}^k(D), (\cdot, \cdot)_{H^k(D)})$ sind separable Hilberträume und für Funktionen aus $\mathring{H}^1(D)$ ist die Halbnorm auf $H^1(D)$

$$|\cdot|_{H^1(D)} := \left(\int_D |\nabla \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$$

äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(D)}$. Die Dualräume von $\mathring{H}^k(D)$ werden mit $H^{-k}(D)$ bezeichnet, die ebenfalls Hilberträume sind. Schlussfolgerungen für die Räume $L^2(X, \Sigma_X, \mu; H^k(D))$, $k \in \mathbb{Z}$, und $L^2(X, \Sigma_X, \mu; \mathring{H}^k(D))$, $k \in \mathbb{N}$, ergeben sich dann dementsprechend.

Nach diesen eher maßtheoretischen Grundlagen folgen nun noch einige wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen, die in den kommenden Kapiteln immer wieder eine Rolle spielen werden. Den Anfang macht folgender Satz zur Erzeugung von Zufallsgrößen einer bestimmten Verteilung (siehe z. B. Chung [28]) bzw. von abzählbar vielen unabhängigen Zufallsgrößen (siehe z. B. Kallenberg [65]).

Satz 2.11

- (i) *Seien auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ reellwertige Zufallsgrößen ξ mit Verteilung F_ξ und η mit einer Gleichverteilung auf $(0, 1)$, $\eta \sim \mathcal{U}(0, 1)$, gegeben. Dann besitzt die Zufallsgröße*

$$F_\xi^-(\eta) \quad \text{mit} \quad F_\xi^-(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F_\xi(y) \geq x\}, \quad x \in (0, 1),$$

ebenfalls die Verteilung von ξ .

- (ii) *Sei auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte reellwertige Zufallsgröße η gegeben. Dann existieren messbare Funktionen $t_i : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, sodass die Zufallsgrößen*

$$\eta_i := t_i(\eta), \quad i \in \mathbb{N},$$

alle gleichverteilt auf $(0, 1)$ und untereinander unabhängig sind.

Beweis.

Zu (i): Nach Definition der Funktion F_ξ^- gilt

$$\mathbf{P}(F_\xi^-(\eta) \leq x) = \mathbf{P}(\eta \leq F_\xi(x)) = F_\xi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zu (ii): Die Funktionen

$$g_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [(2k-1)2^{-n}, 2k2^{-n}), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

geben für ein $x \in (0, 1)$ die entsprechende binäre Entwicklung an, d. h.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) 2^{-n},$$

wobei, um die Eindeutigkeit sicherzustellen, die Entwicklung mit unendlich vielen Nullen gewählt wird. Für $\frac{1}{2}$ wird also die Darstellung

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots$$

genommen anstelle von

$$\frac{1}{2} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots.$$

Ordnet man nun die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem zweidimensionalen Feld $(h_{ik})_{i,k \in \mathbb{N}}$ an, so können Funktionen

$$t_i(x) := \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}(x) 2^{-k}, \quad x \in (0, 1), \quad i \in \mathbb{N},$$

definiert werden. Die Zufallsgrößen

$$\eta_i := t_i(\eta), \quad i \in \mathbb{N},$$

sind dann gleichverteilt auf $(0, 1)$ und untereinander unabhängig (siehe Kallenberg [65, Lemma 2.21]). \square

Eine andere Fragestellung zu reellwertigen Zufallsgrößen ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und insbesondere deren Verteilungen F_ξ , die in dieser Arbeit eine Rolle spielt, ist das Momentenproblem. Das Momentenproblem bezeichnet dabei die Aufgabe, aus einer vorgegebenen Folge von Momenten eine Verteilung zu bestimmen, die eben diese Folge als Momente besitzt. Man unterscheidet dabei drei verschiedene Momentenprobleme: das Hamburger Momentenproblem, bei dem die Zufallsgröße ξ Werte in ganz \mathbb{R} annehmen kann, das Momentenproblem von Stieltjes, bei dem die Zufallsgröße ξ in $[0, \infty)$ liegt, und das Momentenproblem von Hausdorff, wo die Zufallsgröße ξ Werte in einem beschränkten Intervall annehmen kann.

Definition 2.12 *Man sagt, das Momentenproblem (im Sinne von Hamburger) ist eindeutig lösbar für die Wahrscheinlichkeitsverteilung F_ξ einer reellwertigen Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, wenn die Verteilungsfunktion eindeutig durch die Folge ihrer Momente*

$$m_k := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_\xi(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

bestimmt ist.

Bemerkung 2.13 *Das Momentenproblem eines Maßes, das keine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, lässt sich analog formulieren.*

Das heißt, wenn das Momentenproblem für F_ξ eindeutig lösbar ist, gibt es keine andere Verteilung, die die selben Momente besitzt wie F_ξ . Im folgenden Satz sind einige hinreichenden Bedingungen zusammengefasst, die die eindeutige Lösbarkeit des Momentenproblems (im Sinne von Hamburger) implizieren (vgl. Freud [40, Section II.5.] oder auch andere Arbeiten wie die von Gut [56], Lin [70] oder Stoyanov [92]).

Satz 2.14 *Gilt eine der folgenden Bedingungen für die Verteilung F_ξ einer reellwertigen Zufallsgröße ξ , dann ist das zugehörige Momentenproblem eindeutig lösbar.*

(i) *Die Verteilung F_ξ besitzt einen kompakten Träger, d. h., es gibt ein kompaktes Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{P}(\xi \in [a, b]) = 1$.*

(ii) *Die Folge der Momente $(m_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Verteilung F_ξ erfüllt*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2k]{m_{2k}}}{2k} < \infty.$$

(iii) *Für die Zufallsgröße ξ gilt für ein $a > 0$*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(a|\xi|) = \int_{\mathbb{R}} \exp(a|x|) dF_\xi(x) < \infty.$$

(iv) *(Carlemans Bedingung) Die Folge der Momente $(m_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Verteilung F_ξ erfüllt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{m_{2k}}} = \infty.$$

(v) *(Lins Bedingung) Die Verteilung F_ξ ist symmetrisch, differenzierbar und es existiert eine strikt positive Dichtefunktion f_ξ , sodass für ein $x_0 > 0$ gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f_\xi(x)}{1+x^2} dx = \infty \quad \text{und} \quad \frac{-x f'_\xi(x)}{f_\xi(x)} \nearrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty, x \geq x_0.$$

Ist innerhalb von Lins Bedingung das Integral für eine Verteilung mit strikt positiver Dichtefunktion endlich, so ist das zugehörige Momentenproblem nicht eindeutig lösbar (Kreins Bedingung).

Die Momentenprobleme zu den klassischen Verteilungen wie Beta-, Gamma- oder Normalverteilung, sind alle eindeutig lösbar. Im Gegensatz dazu ist das wohl bekannteste Beispiel für eine Verteilung, deren Momentenproblem nicht eindeutig lösbar ist, die lognormale Verteilung (siehe Heyde [57] oder Beispiel 2.15). Aber auch die Verteilung gewisser Potenzen von normalverteilten (ξ^k für $k = 3, 5, 6, \dots$) oder gammaverteilten Zufallsgrößen (ξ^k für $k > 2$) liefern Momentenprobleme, die nicht eindeutig lösbar sind (vgl. z. B. Shiryaev [89] oder Stoyanov [92] und die dort zitierte Literatur).

Beispiel 2.15 *Sei eine lognormale Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit der Dichte*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Dann besitzt ξ die Momente

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k = \exp\left(\frac{k^2}{2}\right), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Das zugehörige Momentenproblem ist jedoch nicht eindeutig lösbar, da zum Beispiel für $a \in (0, 1]$ mit

$$f_a(x) := (1 + a \sin(2\pi \ln(x)))f_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

überabzählbar viele von f_ξ verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichten gegeben sind, die ebenfalls die Momentenfolge $(\exp(k^2/2))_{k \in \mathbb{N}}$ besitzen, d. h.

$$\int_{\mathbb{R}} x^k f_a(x) dx = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

gilt. Dies lässt sich durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^k f_a(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_\xi(x) dx + a \int_{\mathbb{R}} x^k \sin(2\pi \ln(x)) f_\xi(x) dx \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ky) \sin(2\pi y) \exp(-y^2/2) dy \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k + \frac{a \exp(k^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi y) \exp(-(y-k)^2/2) dy \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k + \frac{a \exp(k^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi(z+k)) \exp(-z^2/2) dz \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k + \frac{a \exp(k^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi z) \exp(-z^2/2) dz = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^k \end{aligned}$$

nachvollziehen, weil das Integral einer ungeraden Funktion über die reellen Zahlen Null ist.

2.2 Orthogonale Polynome

Orthogonale Polynome und deren Eigenschaften bilden für sich selbst ein eigenes großes Forschungsgebiet. In diesem Abschnitt sollen daher nur die grundlegendsten und in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Eigenschaften eingeführt werden. Für Details und weitergehende Erkenntnisse wird an dieser Stelle auf die bestehende Literatur verwiesen, für die z. B. die Bücher von Szegő [94], Freud [40], Tricomi [96], Chihara [27] oder Gautschi [43] ein Ausgangspunkt sein können. Orthogonale Polynome werden immer bezüglich einer bestimmten Belegungs- oder auch Gewichtsfunktion gebildet, die ebenso eine Verteilungs- oder Dichtefunktion einer gewissen Zufallsgröße sein kann. Drei solcher orthogonaler Polynomensysteme werden in diesem Abschnitt näher vorgestellt. Den Anfang machen die Hermite-Polynome. Da im Zusammenhang zu polynomiellen Chaosentwicklungen die Normalverteilung eine große Rolle spielt, werden als Beispiel für orthogonale Polynome die Hermite-Polynome detaillierter behandelt und speziell deren gemischte Momente untersucht, da diese bei der Analyse der Konvergenzeigenschaften polynomieller Chaosentwicklungen von Belang sind. Neben den Hermite-Polynomen werden, wenn auch

weniger intensiv, die Legendre-Polynome betrachtet, deren Gewichtsfunktion sich mit Hilfe der Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsgröße beschreiben lässt. Eine dieser beiden Polynomensysteme wird üblicherweise in der Praxis bei der stochastischen Galerkin-Methode verwendet. Eine andere Gruppe bilden da die Stieltjes-Wigert-Polynome. Mit Hilfe dieser können orthogonale Polynome bezüglich einer lognormalen Verteilungsfunktion hergeleitet werden, die vor allem zu Beispielszwecken eingeführt werden sollen.

2.2.1 Definitionen

Ausgangspunkt für die Definition orthogonaler bzw. orthonormaler Polynome ist eine reellwertige, nicht-fallende, nicht konstante, beschränkte, rechtsseitig stetige Funktion F auf einem endlichen oder unendlichen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Eine solche Funktion wird bei Freud [40] auch Belegungsfunktion und dF die Belegung genannt.

Satz 2.16 *Nimmt die Funktion F unendlich viele verschiedene Werte an und gilt*

$$\int_J x^n dF(x) < \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Menge an Polynomen

$$\{p_n : J \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

mit

- (i) p_n ist ein Polynom vom exakten Grad n und der Koeffizient vor x^n ist positiv,
- (ii) das System der $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist orthonormal in $L^2(J, \mathcal{B}(J), dF)$, d. h.

$$\int_J p_n(x)p_m(x) dF(x) = \delta_{nm} \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei bezeichnet δ_{nm} , $n, m \in \mathbb{N}_0$, das Kronecker-Delta.

Beweis.

Die Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ lassen sich durch Orthonormalisierung der Monome

$$1, x, x^2, \dots$$

in $L^2(J, \mathcal{B}(J), dF)$ erzeugen. Für den Beweis der Eindeutigkeit wird auf Freud [40, Satz 1.2] und die Bemerkung danach verwiesen. \square

Bemerkung 2.17

- (a) Die Bedingung $\int_J x^n dF(x) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ impliziert, dass die Funktion F ein endliches Maß auf $(J, \mathcal{B}(J))$ definiert.
- (b) Ist F zusätzlich eine Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsgröße ξ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, dann bildet die Menge $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Orthonormalsystem des $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$.

- (c) Ist F eine Funktion, die nur endlich viele verschiedene Werte im Intervall J annimmt, d. h., nur endlich viele Wachstumspunkte besitzt, zum Beispiel $N \in \mathbb{N}$ Stück, dann sind die Polynome $1, x, \dots, x^{N-1}$ linear unabhängig und es existieren durch Orthonormalisierung im Sinne des vorherigen Satzes 2.16 genau N orthonormale Polynome $p_n : J \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, \dots, N-1$, (siehe Szegő [94]).
- (d) Die bezüglich F orthogonalen Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, sodass jedes p_n ein Polynom vom exakten Grad n ist, sind nur bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig bestimmt.

Jedes orthogonale Polynomsystem $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ genügt jedoch einer Drei-Term-Rekursionsformel (vgl. z. B. Tricomi [96])

$$b_{n+1}p_{n+1}(x) = (x - a_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

mit Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $p_{-1} \equiv 0$ per Definition. Wird für das Polynom p_n der Koeffizient vor dem Term x^m mit $k_m^{(n)}$, $m = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, bezeichnet, d. h., gilt $p_n(x) = \sum_{m=0}^n k_m^{(n)} x^m$, dann ergeben sich die Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt

$$a_0 = \frac{-k_0^{(1)}}{k_1^{(1)}}, \quad a_n = \frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)}} - \frac{k_n^{(n+1)}}{k_{n+1}^{(n+1)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{k_{n-1}^{(n-1)}}{k_n^{(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

und

$$c_1 = \frac{-b_2 k_0^{(2)} - a_1 k_0^{(1)}}{k_0^{(0)}}, \quad c_n = \frac{k_{n-2}^{(n)} - b_{n+1} k_{n-1}^{(n+1)} - a_n k_{n-1}^{(n)}}{k_{n-1}^{(n-1)}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Da b_0 und c_0 beliebig gewählt werden können, wird o. B. d. A. $b_0 = c_0 = 0$ gesetzt. Alle anderen Koeffizienten sind eindeutig durch das System der Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ bestimmt. Die Anpassung der Rekursionskoeffizienten an ein andere Skalierung des Polynomsystems $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ erfolgt einfach durch Substitution und Umstellen. In dem Falle, dass $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sogar ein Orthonormalsystem im Sinne von Satz 2.16 bildet, ist $c_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit den Rekursionskoeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ können dann mit $p_{-1} \equiv 0$ und $p_0 \equiv (\int_J dF(x))^{-1/2}$ alle weiteren Polynome rekursiv berechnet werden. Die Drei-Term-Rekursionsformel (2.1) und die Formeln (2.2) und (2.3) für die Rekursionskoeffizienten gelten natürlich auch im Falle eines N -dimensionalen orthonormalen Polynomsystems, dann jedoch nur für die Indizes $n = 0, \dots, N-2$.

Ist F absolut stetig, d. h., es existiert eine nicht-negative messbare Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dF(x) = f(x)dx$, so wird f auch Gewichtsfunktion genannt. Wenn das Intervall J symmetrisch zur Null ist und die Gewichtsfunktion f zudem eine gerade Funktion ist auf J , d. h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in J$, dann sind die orthonormalen Polynome p_n , $n \in \mathbb{N}_0$, gerade oder ungerade Funktionen je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist, d. h.

$$p_n(x) = (-1)^n p_n(-x) \quad \text{für alle } x \in J.$$

Weitere Eigenschaften zu orthogonalen Polynomen können z. B. in den Büchern von Szegő [94], Freud [40], Tricomi [96] oder Chihara [27] nachgelesen werden.

Eine spezielle Klasse von orthogonalen Polynomen bilden die sogenannten klassischen orthogonalen Polynome. Diese Polynome lassen sich z. B. als die gemeinsamen Polynomlösungen einer Differentialgleichung erklären (siehe z. B. Bochner [20]). Zu dieser Klasse gehören die Jacobi-Polynome, die Laguerre-Polynome und die Hermite-Polynome (siehe z. B. Szegő [94] und Freud [40]). Diese Orthogonalpolynome sollen hier deshalb gesondert erwähnt werden, da die entsprechenden Gewichtsfunktionen vom Typ her Dichten einer Beta-Verteilung, Gamma-Verteilung bzw. Standardnormalverteilung sind. Zudem lassen sich diese orthogonalen Polynome in das Askey-Schema (siehe z. B. Askey und Wilson [3]) einordnen, das eine Möglichkeit zur Ordnung der hypergeometrischen orthogonalen Polynome (siehe z. B. Szegő [94] oder Abramowitz/Stegun [1]) darstellt. Auf die Hermite-Polynome und die Legendre-Polynome als Spezialfall der Jacobi-Polynome wird in den folgenden zwei Abschnitten näher eingegangen. All die klassischen orthogonalen Polynome können auch mit Hilfe der Rodrigues-Formel (siehe Freud [40]) hergeleitet werden und besitzen eine explizite Darstellungsformel. Es gibt aber auch andere orthogonale Polynome, die explizit dargestellt werden können. Beispielhaft sollen da nur die Stieltjes-Wigert-Polynome (siehe z. B. bei Szegő [94]) und die verallgemeinerten Hermite-Polynome (siehe z. B. Krall [66]) genannt werden. Ist eine solche explizite Formel jedoch nicht vorhanden, so können zum Beispiel mittels des Algorithmus von Gautschi [43] die Rekursionskoeffizienten für die orthonormalen Polynome im Sinne von Satz 2.16 berechnet werden. Unter Verwendung der entsprechenden Rekursionsformel (2.1) für orthonormale Polynome mit positiven führenden Koeffizienten und mit $p_{-1} \equiv 0$ und $p_0 \equiv (\int_J dF(x))^{-1/2}$ können diese Polynome dann rekursiv berechnet werden.

Bemerkung 2.18 Sei F eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{|I|}$ mit der Indexmenge $I = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, oder $I = \mathbb{N}$, sodass mit $x = (x_i)_{i \in I}$ gilt

$$\int_{\Gamma} x_i^n dF(x) < \infty \quad \text{für alle } i \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Monome sind dann durch $x^\alpha := \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i}$ mit

$$\alpha \in \Lambda := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{|I|} : \alpha \text{ hat nur endlich viele Nicht-Null-Elemente}\}$$

definiert und $|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i$ ist der totale Grad des Polynoms x^α . Aus der Folge der Monome x^α kann analog zu Satz 2.16 ebenfalls eine Menge orthonormaler multivariater Polynome $\{p_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ konstruiert werden. (Das Polynom p_α entspricht dann der Orthonormalisierung von x^α bzgl. der schon ermittelten Orthonormalpolynome in $L^2(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), dF)$ und ist entweder ein Polynom vom totalen Grad $|\alpha|$ und hat einen positiven Koeffizienten vor dem Monom x^α oder entspricht dem Nullpolynom.) Im Gegensatz zum univariaten Fall muss die Menge der Orthonormalpolynome nicht eindeutig bestimmt sein, da sie von der Anordnung der Monome abhängt. Außerdem kann es passieren, dass für ein $\bar{\alpha} \in \Lambda$ sich das Monom $x^{\bar{\alpha}}$ als Linearkombination der bisher schon ermittelten Orthonormalpolynome $p_\alpha(x)$ darstellen lässt. Das hieße, $p_{\bar{\alpha}}$ ergibt sich zum Nullpolynom. (Dies passiert zum Beispiel dann, wenn F die gemeinsame Verteilungsfunktion der beiden Zufallsgrößen $\xi_1 := |\xi|^{1/3}$ und $\xi_2 := |\xi|^{1/2}$ für $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist, weil dann z. B. $\xi_1^3 = \xi_2^2$ gilt.) Ist in so einem Fall aber der totale Grad $|\bar{\alpha}|$ von $x^{\bar{\alpha}}$ kleiner als der totale Grad der Linearkombination, d. h., innerhalb der Linearkombination existiert ein $p_{\alpha'}(x) \not\equiv 0$ mit $|\alpha'| > |\bar{\alpha}|$, dann wird $x^{\bar{\alpha}}$ anstelle des entsprechenden Polynoms $p_{\alpha'}(x)$ in die Menge der Orthonormalpolynome aufgenommen und so orthonormalisiert, dass der totale Grad von $p_{\bar{\alpha}}$ eben $|\bar{\alpha}|$ und der Koeffizient vor $x^{\bar{\alpha}}$ positiv ist, (d. h. $p_{\bar{\alpha}} \not\equiv 0$). Das Orthogonalpolynom $p_{\alpha'}$ wird dann dafür Null

gesetzt, d. h. $p_\alpha \equiv 0$. Das bedeutet, dass in der Menge der Polynome $\{p_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ Nullpolynome auftreten können, die im eigentlichen Sinne keine Orthonormalpolynome sind, da sie Norm Null haben. Da in den in dieser Arbeit betrachteten Beispielen dies jedoch nicht vorkommen wird, und dieser Sachverhalt nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden sollte, wird keine möglicherweise verwirrende, neue Indexmenge für die Nicht-Nullpolynome eingeführt, sondern bei der Bezeichnungsweise der Menge $\{p_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ als Orthonormalsystem verblieben.

2.2.2 Hermite-Polynome

Bei den Hermite-Polynomen unterscheidet man generell zwischen den physikalischen und den stochastischen, je nachdem ob die Gewichtsfunktion $\exp(-x^2)$ oder $\exp(-x^2/2)$ betrachtet wird. Diese beiden können aber natürlich ineinander umgerechnet werden. Da in dieser Arbeit das Augenmerk besonders auf orthogonalen Polynomen bzgl. Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen liegt, d. h., in diesem Fall die Gewichtsfunktion die Dichte einer normalverteilten Zufallsgröße sein wird, werden in dieser Arbeit die stochastischen Hermite-Polynome verwendet und untersucht.

Sei als Gewichtsfunktion die Dichte der Standardnormalverteilung $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ auf \mathbb{R} gegeben. Dann sind die orthogonalen Polynome mit einer Eins als führenden Koeffizienten die Hermite-Polynome $\{\text{He}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, die sich beispielsweise über die Rodrigues-Formel

$$\text{He}_n(x) := (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

definieren lassen und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \text{He}_n(x) \text{He}_m(x) \varphi(x) dx = n! \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Wie sich die entsprechenden Orthogonal- bzw. Orthonormalpolynome zu einer beliebigen Normalverteilung auf $J = \mathbb{R}$ ergeben, zeigt das folgende Korollar.

Korollar 2.19 *Sei auf \mathbb{R} die Gewichtsfunktion*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \mu)^2/(2\sigma^2)), \quad x \in \mathbb{R},$$

für $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben, d. h., f entspricht der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Die im Sinne von Satz 2.16 dazugehörigen orthonormalen Polynome sind dann bestimmt durch

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis.

Dies folgt sofort mit der Variablensubstitution $z = (x - \mu)/\sigma$ aus

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_{\mathbb{R}} \text{He}_n\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \text{He}_m\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \mu)^2/(2\sigma^2)) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_{\mathbb{R}} \text{He}_n(z) \text{He}_m(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

□

Neben der Darstellung (2.4) für die Hermite-Polynome gibt es auch die explizite Formel

$$\text{He}_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j} x^{n-2j} \quad \text{mit } \lfloor y \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq y\}, \quad (2.5)$$

die für konkrete Berechnungen ebenfalls nützlich sein kann. Mit ihrer Hilfe lässt sich zudem die Drei-Term-Rekursionsformel (2.1) für die Hermite-Polynome

$$\text{He}_{n+1}(x) = x \text{He}_n(x) - n \text{He}_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.6)$$

verifizieren. Außerdem entsprechen die Hermite-Polynome den Koeffizienten der Entwicklung von

$$\exp(xt - t^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{He}_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.7)$$

Die Funktion $\exp(xt - t^2/2)$ wird dabei auch die erzeugende Funktion genannt und mit ihr kann die oft verwendete Formel für das Produkt zweier Hermite-Polynome

$$\frac{\text{He}_n(x) \text{He}_m(x)}{\sqrt{n!m!}} = \sum_{l=0}^{n \wedge m} C(n, m, l) \frac{\text{He}_{n+m-2l}(x)}{\sqrt{(n+m-2l)!}}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (2.8)$$

mit $n \wedge m := \min\{m, n\}$ und

$$C(n, m, l) := \sqrt{\binom{n}{l} \binom{m}{l} \binom{n+m-2l}{n-l}} = \frac{\sqrt{n! m! (n+m-2l)!}}{l! (n-l)! (m-l)!}$$

hergeleitet werden. Des Weiteren lassen sich damit ebenso die Formel

$$\text{He}_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \text{He}_k(y), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.9)$$

und für $a \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\text{He}_n(ax) = \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ gerade}}}^n a^k \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^{(n-k)/2} \frac{n!}{k! \binom{n-k}{2}!} \text{He}_k(x) \quad (2.10)$$

ableiten. Eine weitere spezielle Eigenschaft der Hermite-Polynome ist, dass die Ableitung eines Hermite-Polynoms wieder bis auf einen skalaren Faktor ein Hermite-Polynom darstellt, d. h.

$$\text{He}'_n(x) = n \text{He}_{n-1}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Definition (2.4) der Hermite-Polynome und der Drei-Term-Rekursionsformel (2.6) durch die Rechnung

$$\text{He}'_n(x) = (-1)^n \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right) \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= x(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\
&= x \operatorname{He}_n(x) - \operatorname{He}_{n+1}(x) = n \operatorname{He}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

zeigen.

Bevor nun Integrale über Produkte von Hermite-Polynomen näher untersucht werden, fasst die folgende Bemerkung noch zwei Verallgemeinerungen hinsichtlich der hier erwähnten Hermite-Polynome zusammen.

Bemerkung 2.20

- (a) Neben den Hermite-Polynomen gibt es auch die sogenannten verallgemeinerten Hermite-Polynome (siehe z. B. Krall [66]). Diese bilden ein Orthogonalsystem im Raum $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF)$ mit $dF(x) = |x|^{2\mu} e^{-x^2} dx$ für $x \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $\mu \geq 0$. Die verallgemeinerten Hermite-Polynome gerader bzw. ungerader Ordnung bilden zudem jeweils ein Orthogonalsystem im Raum $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), dF)$ mit $dF(x) = x^{2\mu} e^{-x^2} dx$ für $x \in \mathbb{R}^+$ und einer Konstanten $\mu \geq 0$.
- (b) Im multivariaten Fall, d. h., wenn die Gewichtsfunktion die Dichte einer mehrdimensionalen Normalverteilung ist, lassen sich die dazugehörigen multivariaten Hermite-Polynome analog zu den univariaten Hermite-Polynomen (2.4) definieren und bilden ein entsprechendes Orthogonalsystem (siehe z. B. Willink [104]).

Höhere und gemischte Momente. Integrale über Produkte von Hermite-Polynomen lassen sich interpretieren als höhere oder gemischte Momente dieser Hermite-Polynome in einer standardnormalverteilten Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, d. h. $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Das heißt, für $p \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \dots, p$ versteht man unter höheren oder gemischten Momenten die Erwartungswerte

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\operatorname{He}_{m_1}(\xi) \dots \operatorname{He}_{m_p}(\xi)}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{He}_{m_1}(x) \dots \operatorname{He}_{m_p}(x)}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \varphi(x) dx.$$

Solche Ausdrücke treten z. B. bei der Berechnung der Momente von Produkten von polynomiellen Chaosentwicklungen auf, bei Konvergenzabschätzungen oder beim Aufstellen der entsprechenden stochastischen Galerkin-Matrizen.

Für $p = 1, 2$ lassen sich diese Momente sofort aus der Orthogonalitätseigenschaft der Hermite-Polynome berechnen, doch ab $p = 3$ wird dies komplizierter. Dennoch gibt es explizite Formeln für diese Momente und für $p = 3$ ergibt sich beispielsweise (siehe Field [37])

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\operatorname{He}_{m_1}(\xi) \operatorname{He}_{m_2}(\xi) \operatorname{He}_{m_3}(\xi)}{\sqrt{m_1!} \sqrt{m_2!} \sqrt{m_3!}} \right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{m_1! m_2! m_3!}}{(k-m_3)!(k-m_2)!(k-m_1)!}, & m_1 + m_2 + m_3 = 2k, \\ & m_1, m_2, m_3 \leq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Arbeit [24] von Busbridge über Integrale, die Hermite-Polynome beinhalten, kann sogar eine allgemeingültige Formel angegeben werden.

Proposition 2.21 Sei $p \in \mathbb{N}$. Die gemischten Momente der Hermite-Polynome sind nur dann ungleich Null, wenn für $m_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, p$, die Bedingung $m_1 + \dots + m_p = 2k$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann folgt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{m_1}(\xi) \dots \text{He}_{m_p}(\xi)}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \right) = \left(\prod_{i=1}^p \sqrt{m_i!} \right) \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{1}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{1,p}! \lambda_{2,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!},$$

wobei über alle Mengen $\{\lambda_{r,s} \in \mathbb{N}_0, r, s = 1, \dots, p\}$ mit

$$\lambda_{r,s} = \lambda_{s,r}, \lambda_{s,s} = 0 \text{ für alle } s, \sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} = m_j \text{ für alle } j = 1, \dots, p \text{ und } \sum_{r<s} \lambda_{r,s} = k \quad (2.13)$$

summiert wird.

Beweis.

Wie bereits erwähnt, basiert diese Formel auf der in der Arbeit von Busbridge [24] hergeleiteten Formel für Integrale der Form

$$I_{m_1, \dots, m_p}^a := \int_{-\infty}^{\infty} H_{m_1}(x) \dots H_{m_p}(x) \exp(-x^2/a) dx \quad \text{mit } a > 0, p \in \mathbb{N}, p > 1,$$

über die physikalischen Hermite-Polynome $\{H_m, m \in \mathbb{N}_0\}$, die orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\exp(-x^2)$ sind. Wenn $m_1 + \dots + m_p = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist, wird gezeigt

$$I_{m_1, \dots, m_p}^a = a^{1/2} \left(-\frac{1}{2}z\right)^{-k} \Gamma(k+0.5) \sum_{i=0}^k \left(\frac{z^i}{(0.5-k)_i} \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{(-m_1)_{\sum_{q=1}^p \lambda_{1,q}} \dots (-m_p)_{\sum_{q=1}^p \lambda_{p,q}}}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{1,p}! \lambda_{2,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!} \right)$$

mit $z = \frac{1}{2(1-a)}$, dem Pochhammer Symbol

$$(c)_j := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ c(c+1) \dots (c+j-1), & j > 0, \end{cases}$$

und die Summation $\sum_{\lambda_{r,s}}$ erfolgt über alle Mengen $\{\lambda_{r,s} \in \mathbb{N}_0, r, s = 1, \dots, p\}$ mit

$$\lambda_{r,s} = \lambda_{s,r}, \lambda_{s,s} = 0 \text{ für alle } s, \sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} \leq m_j \text{ für alle } j = 1, \dots, p \text{ und } \sum_{r<s} \lambda_{r,s} = i.$$

Im Falle $a = 1$ gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{m_1}(x) \dots H_{m_p}(x) \exp(-x^2) dx = 2^k \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{He}_{m_1}(x) \dots \text{He}_{m_p}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx.$$

Das heißt, man muss in I_{m_1, \dots, m_p}^a die Größe a gegen 1 konvergieren lassen, was $z \rightarrow \infty$ bedeutet, und erhält

$$I_{m_1, \dots, m_p}^1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} \Gamma(k+0.5) \frac{1}{(0.5-k)_k} \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{(-m_1)_{\sum_{q=1}^p \lambda_{1,q}} \dots (-m_p)_{\sum_{q=1}^p \lambda_{p,q}}}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{1,p}! \lambda_{2,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!},$$

wobei nun über alle Mengen $\{\lambda_{r,s} \in \mathbb{N}_0, r, s = 1, \dots, p\}$, die die Bedingung (2.13)

$$\lambda_{r,s} = \lambda_{s,r}, \lambda_{s,s} = 0 \text{ für alle } s, \sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} = m_j \text{ für alle } j = 1, \dots, p \text{ und } \sum_{r<s} \lambda_{r,s} = k,$$

erfüllen, summiert wird. Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{m_1}(\xi) \dots \text{He}_{m_p}(\xi)}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{He}_{m_1}(x) \dots \text{He}_{m_p}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= \left(\prod_{i=1}^p \sqrt{m_i!} \right) \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{1}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{1,p}! \lambda_{2,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!}, \end{aligned}$$

und $\{\lambda_{r,s}, r, s = 1, \dots, p\}$ genügen Bedingung (2.13). \square

Eine andere Art, die Bedingung (2.13) an die $\{\lambda_{r,s} \in \mathbb{N}_0, r, s = 1, \dots, p\}$ zu interpretieren, ist die folgende. Man summiert über alle $\lambda_p = [\lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,p}, \lambda_{2,3}, \dots, \lambda_{p-1,p}]^T \in \mathbb{N}_0^{p(p-1)/2}$, die der Gleichung

$$A_p \lambda_p = b_{p,m_i}$$

genügen, wobei $A_p \in \mathbb{R}^{(p+1) \times p(p-1)/2}$ und $b \in \mathbb{R}^{p+1}$ mit den Einheitsmatrizen $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt angegeben werden können

$$A_p := \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & I_{p-1} & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & I_{p-2} & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ & & & & I_{p-3} & 1 & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ & & & & & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & & & & & & I_1 & & & \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_{p,m_i} := \begin{bmatrix} k \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix}.$$

Ist beispielsweise $p = 3$ und $m_1 + m_2 + m_3 = 2k$, dann ist die einzige Lösung von $A_p \lambda_p = b_{p,m_i}$, d. h. von

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1,2} \\ \lambda_{1,3} \\ \lambda_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix},$$

gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = k - m_3, \quad \lambda_{1,3} = k - m_2 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = k - m_1$$

für $m_1, m_2, m_3 \leq k$, da alle $\lambda_{r,s} \geq 0$ sein sollen. Dies entspricht der Formel (2.12).

Höhere Momente der Hermite-Polynome lassen sich damit ebenso explizit berechnen. Dazu seien für $p \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die Werte $m_1 = \dots = m_p = m$ gesetzt, sodass $mp = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, und dann erhält man

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p = (m!)^{p/2} \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{1}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{1,p}! \lambda_{2,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!},$$

und die $\{\lambda_{r,s}, r, s = 1, \dots, n\}$ erfüllen die Bedingung (2.13) mit $\sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} = m$ für alle $j = 1, \dots, p$. Mit anderen Worten, es muss über alle Lösungen $\lambda_p \in \mathbb{N}_0^{p(p-1)/2}$ (eigentlich sogar nur $\lambda_p \in \{0, 1, \dots, m\}^{p(p-1)/2}$) von

$$A_p \lambda_p = b_{p,m} \quad \text{mit} \quad b_{p,m} := [k, m, \dots, m]^T \quad (2.14)$$

summiert werden.

Im Folgenden sollen nun sowohl obere als auch untere Schranken an die höheren Momente der Hermite-Polynome in ξ gefunden werden.

Korollar 2.22 *Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Abschätzung*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p \geq C \left(m^{-(p-2)/4} (p-1)^{m/2} \right)^p$$

für alle $m \geq m_0$ gilt, für die mp eine gerade Zahl ist.

Beweis.

Um die untere Schranke nachzuweisen, muss zwischen geraden und ungeraden Momenten $p \in \mathbb{N}$ unterschieden werden.

Für gerades p gilt immer $pm = 2k$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, sodass $p-1$ ein Teiler von $m+n$ ist, d. h. $p-1 \mid m+n$. Nun wird eine spezielle Menge $\{\lambda_{r,s}, r, s = 1, \dots, p\}$ definiert, sodass

$$\lambda_{j,j+1} = \lambda_{j+1,j} = \frac{m+n}{p-1} - n, \quad j = 1, 3, \dots, p-1, \quad \lambda_{s,s} = 0, \quad s = 1, \dots, p,$$

und ansonsten

$$\lambda_{r,s} = \frac{m+n}{p-1}$$

gilt. Dies führt zu einer Lösung von $A_p \lambda_p = b_{p,m}$, vorausgesetzt dass m groß genug ist (da sichergestellt sein muss, dass $\lambda_{r,s} \geq 0$ ist für alle $r, s = 1, \dots, p$) aufgrund von

$$\sum_{r < s} \lambda_{r,s} = \frac{p}{2} \left(\frac{m+n}{p-1} - n \right) + \left(\frac{p(p-1)}{2} - \frac{p}{2} \right) \frac{m+n}{p-1} = \frac{p(p-1)(m+n)}{2(p-1)} - \frac{np}{2} = \frac{pm}{2} = k$$

und

$$\sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} = \frac{m+n}{p-1} - n + (p-2) \frac{m+n}{p-1} = (p-1) \frac{m+n}{p-1} - n = m \quad \text{für alle } j = 1, \dots, p.$$

Damit lässt sich das p -te Moment des m -ten Hermite-Polynoms in ξ nach unten abschätzen durch

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p \geq (m!)^{p/2} \frac{1}{\left(\left(\frac{m+n}{p-1} - n \right)! \right)^{p/2} \left(\left(\frac{m+n}{p-1} \right)! \right)^{p(p-2)/2}}$$

und wegen der Stirling-Formel $c_1 \sqrt{x} \left(\frac{x}{e} \right)^x \leq x! \leq c_2 \sqrt{x} \left(\frac{x}{e} \right)^x$ für zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ (siehe z. B. Abramowitz/Stegun [1]) folgt unter Verwendung einer Konstanten $C > 0$, die

sich von Zeile zu Zeile ändern kann, aber nicht von m abhängt, für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p &\geq (m!)^{p/2} \frac{1}{\left(\left(\frac{m+n}{p-1} - n \right)! \right)^{p/2} \left(\left(\frac{m+n}{p-1} \right)! \right)^{p(p-2)/2}} \\
&\geq C \frac{m^{p/4} \left(\frac{m}{e} \right)^{mp/2}}{\left(\frac{m+n}{p-1} - n \right)^{p/4} \left(\frac{\frac{m+n}{p-1} - n}{e} \right)^{p(\frac{m+n}{p-1} - n)/2} \left(\frac{m+n}{p-1} \right)^{p(p-2)/4} \left(\frac{\frac{m+n}{p-1}}{e} \right)^{p(p-2)(\frac{m+n}{p-1})/2}} \\
&\geq C m^{pm/2} \frac{1}{\left(\frac{m+n}{p-1} - n \right)^{p(\frac{m+n}{p-1} - n)/2} m^{p(p-2)/4} \left(\frac{m+n}{p-1} \right)^{p(p-2)(\frac{m+n}{p-1})/2}} \\
&\geq C \frac{(p-1)^{mp/2}}{m^{p(p-2)/4} \left(1 + \frac{n(2-p)}{m} \right)^{p(\frac{m+n}{p-1} - n)/2} \left(1 + \frac{n}{m} \right)^{p(p-2)(\frac{m+n}{p-1})/2}} \\
&\geq C \frac{(p-1)^{mp/2}}{m^{p(p-2)/4}} = C \left(m^{-(p-2)/4} (p-1)^{m/2} \right)^p.
\end{aligned}$$

Ist p ungerade, so ist $mp = 2k$ nur für gerade $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Es existiert aber für jedes dieser hinreichend großen m wieder ein $n \in \{0, 2, \dots, p-3\}$, sodass $p-1$ ein Teiler von $m+n$ ist. Die Menge

$$\begin{aligned}
\lambda_{j,j+1} = \lambda_{j+1,j} &= \frac{m+n}{p-1} - \frac{n}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \lambda_{1,p} = \lambda_{p,1} = \frac{m+n}{p-1} - \frac{n}{2}, \\
\lambda_{s,s} &= 0, \quad s = 1, \dots, p, \quad \text{und ansonsten } \lambda_{r,s} = \frac{m+n}{p-1}
\end{aligned}$$

erfüllt wieder

$$\sum_{r < s} \lambda_{r,s} = p \left(\frac{m+n}{p-1} - \frac{n}{2} \right) + \left(\frac{p(p-1)}{2} - p \right) \frac{m+n}{p-1} = \frac{p(p-1)(m+n)}{2(p-1)} - \frac{np}{2} = \frac{pm}{2} = k$$

und

$$\sum_{q=1}^p \lambda_{j,q} = 2 \left(\frac{m+n}{p-1} - \frac{n}{2} \right) + (p-3) \frac{m+n}{p-1} = (p-1) \frac{m+n}{p-1} - n = m \quad \text{für alle } j = 1, \dots, p.$$

Damit ist für hinreichend großes m wieder eine Lösung von $A_p \lambda_p = b_{p,m}$ gegeben. Analog zu oben erhält man dann die Abschätzung

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p \geq (m!)^{p/2} \frac{1}{\left(\left(\frac{m+n}{p-1} - n \right)! \right)^{p/2} \left(\left(\frac{m+n}{p-1} \right)! \right)^{p(p-2)/2}} \geq C \left(m^{-(p-2)/4} (p-1)^{m/2} \right)^p$$

für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von m ist, und genügend großes und gerades $m \in \mathbb{N}$. \square

Um eine obere Abschätzung zu erhalten, muss die Summe über die $\{\lambda_{r,s}, r, s = 1, \dots, p\}$ nach oben abgeschätzt werden und dazu wird eine Abschätzung für den größten Summanden gesucht. Dies ist aber äquivalent dazu den Kehrwert der Summanden zu minimieren,

das heißt, es wird das dazugehörige Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \prod_{i=1}^{p(p-1)/2} \lambda_i! \\ \text{s. t.} \quad & A_p \lambda = b_{p,m}, \\ & \lambda \in \{0, \dots, m\}^{p(p-1)/2} \end{aligned}$$

betrachtet. Dieses ganzzahlige Problem lässt sich verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} \min \quad & \prod_{i=1}^{p(p-1)/2} \Gamma(m\lambda_i + 1) \\ \text{s. t.} \quad & A_p \lambda = [p/2, 1, \dots, 1]^T, \\ & \lambda \in [0, 1]^{p(p-1)/2} \end{aligned} \tag{P}$$

und das Minimum des zweiten Optimierungsproblems ist höchstens kleiner gleich dem Minimum des ersten.

Lemma 2.23 *Sei $m, p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Das Optimierungsproblem (P) ist konvex und die Lösung ist durch*

$$\lambda = \left[\frac{1}{p-1}, \dots, \frac{1}{p-1} \right]^T$$

gegeben.

Beweis.

Die Nebenbedingungen dieses Optimierungsproblems sind linear und die betrachtete Menge $[0, 1]^{p(p-1)/2} \subset \mathbb{R}^{p(p-1)/2}$ ist konvex. Das heißt, um zu zeigen, dass das Optimierungsproblem konvex ist, muss die Zielfunktion ebenfalls konvex sein. Um diese Eigenschaft für $f(x) := \prod_{i=1}^n \Gamma(mx_i + 1)$, $x \in [0, 1]^n$, mit $n = p(p-1)/2$ nachzuweisen, wird die Hesse-Matrix von f betrachtet.

Die ersten partiellen Ableitungen von f lauten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = m f(x) \Psi(mx_j + 1), \quad j = 1, \dots, n,$$

und für die zweiten partiellen Ableitungen von f erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} &= m^2 \Psi(mx_j + 1) \Psi(mx_k + 1) f(x), & j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k, \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} &= m^2 \Psi'(mx_j + 1) f(x) + (m \Psi(mx_j + 1))^2 f(x), & j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

wobei Ψ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion, die Digammafunktion, ist und Ψ' die Ableitung der Digammafunktion, die Trigammafunktion, bezeichnet (siehe Abramowitz/Stegun [1]). Für die Hesse-Matrix

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right]_{k,j=1}^n$$

gilt dann für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} a^T H(x) a &= \sum_{k,j=1}^n a_k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} a_j \\ &= m^2 f(x) \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 (\Psi'(mx_j + 1) + (\Psi(mx_j + 1))^2) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j \Psi(mx_j + 1) \Psi(mx_k + 1) a_k \right) \\ &= m^2 f(x) \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \Psi'(mx_j + 1) + \left(\sum_{j=1}^n a_j \Psi(mx_j + 1) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Es ist $f(x) > 0$ für $x \in [0, 1]^n$ und da $\Psi'(y) > 0$ für $y \in [0, \infty)$ gilt, ist die Summe

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \Psi'(x_j + 1) > 0$$

echt positiv. Der letzte Term ist aufgrund des Quadrates größer gleich Null. Somit ergibt sich also, dass die Hesse-Matrix $H(x)$ positiv-definit ist für alle $x \in [0, 1]^n$, und damit ist die Zielfunktion f strikt konvex.

Um nachzuweisen, dass $\lambda = \left[\frac{1}{p-1}, \dots, \frac{1}{p-1} \right]^T$ die Lösung des Optimierungsproblems ist, wird zunächst das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j = \frac{p}{2}, \\ & x \in [0, 1]^n \end{aligned} \quad (\tilde{P})$$

betrachtet. Das heißt, die Anzahl der Nebenbedingungen wird verringert. Die zulässige Menge $S := \{x \in [0, 1]^n : \sum_{j=1}^n x_j = \frac{p}{2}\}$ ist konvex und für $x^* = \left[\frac{1}{p-1}, \dots, \frac{1}{p-1} \right]^T$ gilt zum einen wegen $n = p(p-1)/2$ die Nebenbedingung $\sum_{j=1}^n x_j^* = p/2$ und zum anderen

$$\nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) = 0 \quad \text{für alle } x \in S.$$

Die letzte Aussage ergibt sich aufgrund von

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) &= \left[m f(x^*) \Psi(mx_j^* + 1) \right]_{j=1}^n \cdot (x - x^*) \\ &= m \left[f(x^*) \Psi\left(\frac{m}{p-1} + 1\right) \right]_{j=1}^n \cdot (x - x^*) \\ &= m f(x^*) \Psi\left(\frac{m}{p-1} + 1\right) \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*) \\ &= m f(x^*) \Psi\left(\frac{m}{p-1} + 1\right) \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

da $x \in S$. Mit dem auf Theorem 3.4.3 folgenden Corollary 2 aus Bazaraa et al. [13] folgt, dass x^* die Lösung des Problems (\tilde{P}) ist. Da $\lambda := x^* = \left[\frac{1}{p-1}, \dots, \frac{1}{p-1} \right]^T$ aber auch die zusätzlichen Nebenbedingungen des eigentlich interessierenden Optimierungsproblems (P) erfüllt, ist dies ebenfalls die Lösung von (P) . Da f streng konvex ist, ist die Lösung das eindeutige globale Minimum. \square

Die Abschätzung nach oben ergibt sich dann als Folgerung aus diesem Lemma und ist im folgenden Korollar festgehalten.

Korollar 2.24 *Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass die obere Abschätzung*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p \leq C \left(m^{(p-4)/4} (p-1)^{m/2} \right)^p$$

für alle $m \geq m_0$ gilt.

Beweis.

Da unter Verwendung von Lemma 2.23 gerade $\lambda^* = \left[\frac{m}{p-1}, \dots, \frac{m}{p-1} \right]^T$ für jede der Mengen $\{\lambda_{r,s}, r, s = 1, \dots, p\}$, die die Bedingung (2.13) erfüllen, eine obere Schranke für $\frac{1}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!}$ darstellt, ergibt sich für hinreichend großes m nach der Stirling-Formel (siehe z. B. Abramowitz/Stegun [1]) sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right)^p &= (m!)^{p/2} \sum_{\lambda_{r,s}} \frac{1}{\lambda_{1,2}! \lambda_{1,3}! \dots \lambda_{p-1,p}!} \\ &\leq (m+1)^{p(p-3)/2} (m!)^{p/2} \Gamma \left(\frac{m}{p-1} + 1 \right)^{-p(p-1)/2} \\ &\leq C m^{p(p-3)/2} m^{p/4} \left(\frac{m}{e} \right)^{pm/2} \left(\frac{m}{p-1} \right)^{-p(p-1)/4} \left(\frac{m}{(p-1)e} \right)^{-pm/2} \\ &\leq C m^{p(p-4)/4} (p-1)^{nm/2} = C \left(m^{(p-4)/4} (p-1)^{m/2} \right)^p \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$, die von p abhängt, aber nicht von m , und sich von Zeile zu Zeile ändern kann. Die Abschätzung im algebraischen Term ist recht grob, da die Anzahl der möglichen Lösungen λ_p von $A_p \lambda_p = b_{p,m}$ nicht bekannt ist und genutzt werden konnte, sondern als obere Abschätzung mit Hilfe der Theorie für lineare Gleichungssysteme nur der Wert $(m+1)^{p(p-1)/2-p}$ ermittelt werden konnte, der die größtmögliche Anzahl von Lösungen für die Matrix A_p mit Rang p angibt. \square

Bemerkung 2.25 *Sei $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ ungerade und $m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, p$ hinreichend groß, dann kann auf ähnliche Art und Weise gezeigt werden, dass für die gemischten Momente eine obere Abschätzung der Form*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{m_1}(\xi) \dots \text{He}_{m_p}(\xi)}{\sqrt{m_1!} \dots \sqrt{m_p!}} \right) \leq C \prod_{i=1}^p m_i^{p/4-1} (p-1)^{m_i/2}$$

gilt, wenn $\min\{m_i, i = 1, \dots, p\} \geq m_0$ ist für ein gewisses $m_0 \in \mathbb{N}$.

2.2.3 Legendre-Polynome

Neben den Hermite-Polynomen kommen vor allem auch die Legendre-Polynome zur Anwendung bei stochastischen Galerkin-Methoden. Die Legendre-Polynome gehören zur Klasse der Jacobi-Polynome. Sie sind durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in (-1, 1),$$

definiert und bilden auf dem Intervall $J = (-1, 1)$ bezüglich der konstanten Gewichtsfunktion $f \equiv 1$ ein Orthogonalsystem, das heißt

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Das bedeutet, dass die Menge

$$\{\sqrt{2n+1} P_n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein Orthonormalsystem bildet bzgl. der Gewichtsfunktion $f \equiv 1/2$ bzw. ein Orthonormalsystem ist im Raum $L^2((-1, 1), \mathcal{B}((-1, 1)), dF)$ mit $dF(x) = 1/2 dx$. Die entsprechende Drei-Term-Rekursionsformel (2.1) lautet

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ist nicht auf dem Intervall $(-1, 1)$ eine Gleichverteilung gegeben, sondern auf $J = (a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$, dann lassen sich die zugehörigen Orthonormalpolynome aus dem System der $\{P_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ herleiten.

Korollar 2.26 *Sei auf dem Intervall $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ eine Gleichverteilung gegeben, d. h., die Dichte- bzw. Gewichtsfunktion ist $f(x) = 1/(b-a)$ auf J . Dann sind die im Sinne von Satz 2.16 orthonormalen Polynome durch*

$$p_n(x) = \sqrt{2n+1} P_n \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

definiert.

Beweis.

Die Behauptung folgt aus folgender Rechnung mit der Variablensubstitution $y = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$

$$\begin{aligned} \int_a^b p_n(x) p_m(x) \frac{1}{b-a} dx &= \frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}{b-a} \int_a^b P_n \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) P_m \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}{2} \int_{-1}^1 P_n(y) P_m(y) dy = \delta_{nm} \end{aligned}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$. □

Auch für die Legendre-Polynome spielen die gemischten Momente eine Rolle. Insbesondere mit Blick auf die stochastischen Galerkin-Matrizen sind Integrale bzw. Erwartungswerte von Dreifachprodukten von Interesse. Ist ξ also nun eine gleichverteilte Zufallsgröße auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der entsprechenden Orthonormalpolynome auf (a, b) zur Gewichtsfunktion $1/(b-a)$, dann kann z. B. bei Adams [2] die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(p_{m_1}(\xi) p_{m_2}(\xi) p_{m_3}(\xi)) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b p_{m_1}(x) p_{m_2}(x) p_{m_3}(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{(2m_1+1)(2m_2+1)(2m_3+1)}}{2k+1} \frac{k!^2 (2k-2m_1)! (2k-2m_2)! (2k-2m_3)!}{(2k)! (k-m_1)!^2 (k-m_2)!^2 (k-m_3)!^2}, & m_1 + m_2 + m_3 = 2k, k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & m_1, m_2, m_3 \leq k, \\ & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

gefunden werden. Andere Darstellungsformen lassen sich z. B. bei Gillis et al. [50] finden.

2.2.4 Stieltjes-Wigert-Polynome

Die Stieltjes-Wigert-Polynome (siehe Szegő [94]) gehören nicht zu der Gruppe der klassischen orthogonalen Polynome, auch fehlt ihnen die wichtige Eigenschaft der Dichtigkeit, die die Hermite- und Legendre-Polynome besitzen und die im zweiten Kapitel diskutiert werden wird. Aufgrund des Fehlens dieser Eigenschaft eignen sie sich jedoch sehr gut als Beispiel und sollen daher hier ebenfalls aufgeführt werden. Die Stieltjes-Wigert-Polynome sind orthogonal bezüglich einer Gewichtsfunktion der Form

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \sigma > 0.$$

Diese Funktionen definieren keine Wahrscheinlichkeitsdichte, da

$$\int_0^\infty f_\sigma(x) dx = e^{\sigma^2/2}$$

nicht gleich Eins ist. Durch Normierung von f ließe sich aber leicht eine Dichtefunktion einer Zufallsgröße erzeugen. Die Stieltjes-Wigert-Polynome $\{p_n^{(\sigma)}, n \in \mathbb{N}_0\}$ sind auf dem Intervall $J = \mathbb{R}^+$ gegeben durch

$$p_n^{(\sigma)}(x) := (-1)^n a^{(2n+1)/4} [a]_n^{-1/2} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_a a^{j^2} (-a^{1/2}x)^j, \quad n \geq 0, \quad x > 0,$$

wobei die folgende Notation verwendet worden ist

$$a = \exp(-\sigma^2), \quad [a]_0 := 1, \quad [a]_n := \prod_{i=1}^n (1 - a^i), \quad n \geq 1,$$

und das sogenannte Gauß-Symbol

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_a := \frac{[a]_n}{[a]_{n-j}[a]_j}.$$

Tatsächlich sind diese Polynome nicht nur orthogonal sondern auch orthonormal bezüglich f_σ . Des Weiteren lassen sich von diesen Polynomen die orthogonalen bzw. sogar orthonormalen Polynome bezüglich der lognormalen Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

ableiten.

Korollar 2.27 *Sei als Gewichtsfunktion die Funktion f in (2.15), die eine Dichtefunktion einer lognormalen Verteilung beschreibt, gegeben. Dann ist $J = \mathbb{R}^+$ und die bezüglich f im Sinne von Satz 2.16 orthonormalen Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sind durch*

$$p_0(x) \equiv 1, \quad p_n(x) = \frac{(-1)^n e^{n(n-1)/4}}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}} \sum_{j=0}^n (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{e^{-1}} e^{-j^2+j/2} x^j, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0,$$

bestimmt.

Beweis.

Seien die orthonormalen Stieltjes-Wigert-Polynome $\{p_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}_0\}$ zu der (speziellen) Gewichtsfunktion f_1 , d. h. $\sigma = 1$, gegeben. Dann folgt mit einigen Berechnungsschritten, dass

$$p_n(x) = e^{1/4} p_n^{(1)}(ex), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gilt, und die Orthonormalität lässt sich mittels einiger Variablensubstitutionen berechnen durch

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_n(x) p_m(x) f(x) dx &= \int_0^\infty e^{1/4} p_n^{(1)}(ex) e^{1/4} p_m^{(1)}(ex) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{1/2} p_n^{(1)}(e^{z+1}) p_m^{(1)}(e^{z+1}) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{1/2} p_n^{(1)}(e^y) p_m^{(1)}(e^y) \frac{e^{-(y-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty p_n^{(1)}(e^y) p_m^{(1)}(e^y) \frac{e^{-y^2/2} e^y}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \int_0^\infty p_n^{(1)}(x) p_m^{(1)}(x) f_1(x) dx = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

□

Die Drei-Term-Rekursionsformel (2.1) für diese Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ lautet, da sie orthonormal sind,

$$b_{n+1} p_{n+1}(x) = (x - a_n) p_n(x) - b_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und die Rekursionskoeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ergeben sich nach den zwei Formeln (2.2) und (2.3). Das heißt

$$a_0 = \frac{-k_0^{(1)}}{k_1^{(1)}} = e^{1/2}$$

und für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)}} - \frac{k_n^{(n+1)}}{k_{n+1}^{(n+1)}} \\ &= -\frac{e^n - 1}{e - 1} e^{-(3n^2 - 5n + 2)/4} e^{(3n^2 - n)/4} + \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} e^{-(3(n+1)^2 - 5(n+1) + 2)/4} e^{(3(n+1)^2 - n - 1)/4} \\ &= \frac{e^{n-1/2}}{e - 1} (e^{n+2} - e^n - e + 1) = e^{n-1/2} (e^{n+1} + e^n - 1). \end{aligned}$$

Geschlossen können die Rekursionskoeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ also durch

$$a_n = e^{n-1/2} (e^{n+1} + e^n - 1), \quad n \geq 0,$$

angegeben werden. Für $n \geq 1$ lassen sich ebenso die Rekursionskoeffizienten $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ berechnen zu

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{k_{n-1}^{(n-1)}}{k_n^{(n)}} = (e^n - 1)^{1/2} e^{-\frac{(n-1)(3n-4)}{4}} e^{n(3n-1)/4} \\ &= (e^n - 1)^{1/2} e^{(-3n^2+4n+3n-4+3n^2-n)/4} = (e^n - 1)^{1/2} e^{(3n-2)/2} \end{aligned}$$

und für $n = 0$ wird o. B. d. A. wieder $b_0 = 0$ gesetzt. Diese Rekursionsformel lässt sich auch bei Simpson [90] allerdings ohne Beweis finden. Für die Integrale/Erwartungswerte der Dreifachprodukte ist allerdings keine explizite Formel bekannt, sodass diese numerisch berechnet werden müssen.

Kapitel 3

Chaosentwicklungen

Dieses Kapitel ist den Chaosentwicklungen von Zufallsvariablen gewidmet, die eine große Rolle sowohl bei der Simulation von Zufallsvariablen als auch bei der numerischen Lösung zufälliger oder stochastischer (partieller) Differentialgleichungen spielen (siehe z. B. zu zufälligen Differentialgleichungen die Bücher von Ghanem und Spanos [49], Le Maître und Knio [68] oder Xiu [108] und zu stochastischen Differentialgleichungen die Arbeiten von Rozovskii et al. [62, 72, 75]). Unter der Chaosentwicklung einer Zufallsvariable mit endlichem zweiten Moment versteht man eine abstrakte Fourier-Reihe dieser Zufallsvariable bzgl. gewissen orthonormalen Polynomen in einer (anderen) Zufallsgröße oder auch in mehreren (anderen) Zufallsgrößen. Man unterscheidet dabei polynomielle und verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen, für die auch die Begriffe polynomielles und verallgemeinertes polynomielles Chaos verwendet werden. Die Namensgebung sowie das Konzept des polynomiellen Chaos gehen zurück auf das von N. Wiener in seiner Arbeit [103] verwendete „homogeneous chaos“. In diesem Fall bilden abzählbar viele, unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen und die dazugehörigen orthogonalen Polynome, die multivariaten Hermite-Polynome, den Ausgangspunkt. Nach dem Satz von Cameron und Martin in [25] lässt sich dann jede Zufallsvariable, die ein endliches zweites Moment besitzt und messbar ist bzgl. dieser standardnormalverteilten Zufallsgrößen, als eine abstrakte Fourier-Reihe bzgl. den multivariaten Hermite-Polynomen in den standardnormalverteilten Zufallsgrößen entwickeln. Xiu und Karniadakis erweiterten dieses Konzept in [106, 111, 113] und führten das sogenannte verallgemeinerte polynomielle Chaos ein, das darauf beruht, die Verteilung der Anfangszufallsgrößen beliebig zu wählen. Das heißt, sie gingen sowohl von der Unabhängigkeit als auch von der Forderung einer Normalverteilung ab, da sie beobachteten, dass solche verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen für gewisse Zufallsgrößen bessere Approximations- bzw. Konvergenzeigenschaften aufweisen als deren entsprechenden polynomiellen Chaosentwicklungen. Später entwickelten Wan und Karniadakis das „multi-element generalized polynomial chaos“ in [101, 102], bei dem die jeweilige Chaosentwicklung nicht auf dem gesamten Bildbereich der zugrunde liegenden Zufallsgrößen, sondern stückweise auf einer Zerlegung des Bildbereiches gebildet wird. Um ebenfalls bessere Konvergenzeigenschaften zu erhalten, stellten Poëtte und Lucor in [83] einen neuen Ansatz zu iterativen verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen vor, bei dem mit einer gewissen verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximation gestartet wird und die auf dieser Zufallsgröße basierenden orthonormalen Polynome im nächsten Schritt zu einer neuen verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximation genutzt werden.

Dieses Kapitel besteht aus zwei Abschnitten. Im ersten Teil wird zunächst der Formalismus für das verallgemeinerte polynomielle Chaos eingeführt und im zweiten werden spezielle Aspekte des eindimensionalen polynomiellen Chaos untersucht.

3.1 Verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen

Nach einer kurzen Einführung des Konzepts des verallgemeinerten Chaos wird zunächst diskutiert, unter welchen Umständen eine zum Satz von Cameron und Martin für polynomielle Chaosentwicklungen analoge Aussage für die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen getroffen werden kann. Im Anschluss daran wird auf einige Eigenschaften eingegangen, die den verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen innewohnen.

Zur Herleitung der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen seien höchstens abzählbar viele reellwertige Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$, d. h. $I_\xi = \{1, \dots, M\}$, $M \in \mathbb{N}$, oder $I_\xi = \mathbb{N}$, gegeben und mit $\xi := (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ bezeichnet, sodass die folgende Annahme erfüllt ist. Später, in Kapitel 4, werden die Basiszufallsvariablen die Rolle dieser Zufallsgrößen übernehmen.

Annahme 3.1

- (i) Jede der reellwertigen Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, besitzt endliche absolute Momente beliebiger Ordnung, d. h. $\mathbf{E}_\mathbf{P} |\xi_i|^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_\xi$.
- (ii) Die Verteilungsfunktionen $F_{\xi_i}(x) := \mathbf{P}(\xi_i \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, der einzelnen Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, sind stetig.

Um eine Zufallsgröße mit endlichem zweiten Moment durch eine im Quadratmittel konvergierende Reihenentwicklung in Polynome in ξ darstellen zu können, müssen notwendigerweise die zweiten Momente der Polynome in ξ existieren. Das heißt, es müssen die Momente beliebiger Ordnung aller Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, endlich sein. Da es Wahrscheinlichkeitsverteilungen gibt, für die dies nicht der Fall sein muss, sichert Annahme 3.1 (i) diese Grundvoraussetzung (vgl. dazu auch den Abschnitt 2.2 zu orthogonalen Polynomen). Mit der Annahme 3.1 (ii) werden die diskreten Zufallsgrößen zunächst ausgeschlossen, da diese in den hier betrachteten Fragestellungen nicht auftreten werden. Außerdem können so die kommenden Beweise einfach gehalten werden. Man kann allerdings ebenso für diskrete Zufallsgrößen verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen untersuchen. Die oft geforderte Eigenschaft der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ wird hier ebenfalls nicht vorausgesetzt, auch müssen die Zufallsgrößen nicht identisch verteilt sein.

Um im Folgenden die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen einzuführen, wird analog zu der Herangehensweise in Janson [64] für Chaosentwicklungen mit unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsgrößen verfahren. Dazu definiert man zunächst für $n \in \mathbb{N}_0$ und $K \in I_\xi$ die Menge \mathcal{P}_n^K aller Polynome vom (Total-)Grade kleiner gleich n in den Zufallsgrößen ξ_1, \dots, ξ_K , d. h.

$$\mathcal{P}_n^K := \{p(\xi_1, \dots, \xi_K) : p \text{ Polynom vom Grade } \leq n\}.$$

Damit sind alle diese Mengen \mathcal{P}_n^K endlichdimensionale und damit abgeschlossene Unterräume von $L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{P}) \subseteq L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Die Unterräume \mathcal{P}_n der Polynome vom Grade kleiner gleich n in (ξ_1, \dots, ξ_K) für beliebiges $K \in I_\xi$, ergeben sich daraufhin als die Vereinigung

$$\mathcal{P}_n := \bigcup_{K \in I_\xi} \mathcal{P}_n^K \subseteq L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}) \subseteq L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und es gilt $\mathcal{P}_{n-1} \subset \mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mithilfe der Bildung von orthogonalen Komplementen lassen sich dann die Mengen

$$\mathcal{H}_n := \overline{\mathcal{P}_n} \cap \mathcal{P}_{n-1}^\perp \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

definieren. Dabei wird mit $\overline{\mathcal{P}_n}$ der Abschluss der Menge \mathcal{P}_n und mit \mathcal{P}_{n-1}^\perp das orthogonale Komplement von \mathcal{P}_{n-1} jeweils in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ bezeichnet. Die Mengen \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{N}$, zusammen mit der Menge der Konstanten $\mathcal{H}_0 := \mathcal{P}_0 = \overline{\mathcal{P}_0}$ stellen aufgrund ihrer Konstruktion paarweise orthogonale Unterräume von $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ dar und ermöglichen damit eine orthogonale Zerlegung der Polynomräume $\overline{\mathcal{P}_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h.

$$\overline{\mathcal{P}_n} = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{H}_k.$$

Somit erhält man für den $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ -Abschluss von $\mathcal{P}(\xi) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, der Menge aller Polynome in ξ , ebenso eine orthogonale Zerlegung durch

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = \overline{\mathcal{P}(\xi)}.$$

Das heißt, die Frage, ob sich jede beliebige, reellwertige, $\sigma(\xi)$ -messbare Zufallsgröße mit endlichem zweiten Moment als verallgemeinerte polynomielle Chaosreihe darstellen lässt, ist äquivalent zu derjenigen, ob die Polynome $\mathcal{P}(\xi)$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ dicht liegen, d. h., ob

$$\overline{\mathcal{P}(\xi)} = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$$

gilt.

3.1.1 Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin

Im Falle unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ liefert, wie bereits erwähnt, der Satz von Cameron und Martin [25] die Dichtheit der entsprechenden Polynome in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ für $\xi := (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Sind die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ jedoch nicht normalverteilt sondern besitzen eine beliebige andere Verteilung, dann gilt im Allgemeinen die Dichtheit der Polynome nicht. Eine erste Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin ist bei Segal [88, Lemma 2.1, S. 120] zu finden, wobei allerdings die dortigen Voraussetzungen stärker sind als die hier getroffenen (vgl. auch [34]). Im Folgenden wird der Satz von Cameron und Martin für drei verschiedene Ausgangssituationen verallgemeinert, denen allen eine gewisse Besonderheit innewohnt. Zunächst wird der eindimensionale Fall betrachtet, d. h., es ist $|I_\xi| = 1$ und es gibt somit nur eine reellwertige Zufallsgröße $\xi = \xi_1$. Die zweite Verallgemeinerung behandelt den allgemeinen Fall für $|I_\xi| > 1$ und die dritte liefert eine Aussage für den Sonderfall, dass die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ zusätzlich noch unabhängig sind.

Im eindimensionalen Fall, für den $|I_\xi| = 1$ ist und die Polynome nur in einer reellwertigen Zufallsgröße $\xi = \xi_1$ betrachtet werden, ist es möglich, eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Dichtheit der Polynome zu formulieren.

Satz 3.2 (I. Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin)

Sei ξ eine reellwertige Zufallsgröße, die der Annahme 3.1 genügt. Dann liegen die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, d. h., es gilt die orthogonale Zerlegung

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}),$$

genau dann, wenn das Momentenproblem der Verteilung F_ξ von ξ eindeutig lösbar ist. Im Besonderen gilt dann für $\mathfrak{A} = \sigma(\xi)$

$$L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n .$$

Beweis.

Die Dichtheit der Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ist, wenn man in den Bildbereich übergeht, äquivalent zur Dichtheit der Polynome aus $\mathcal{P}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF_\xi)$. M. Riesz zeigt in seiner Arbeit [85], dass für Belegungsfunktionen α (siehe Freud [40] oder auch Abschnitt 2.2) die dazugehörigen orthogonalen Polynome genau dann dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\alpha)$ liegen, wenn das Momentenproblem für $d\alpha(x)/(1+x^2)$ eindeutig lösbar ist. In dem Buch von Freud [40, Theorem 4.3] wird dann der Beweis geliefert, dass für stetige Verteilungen F_ξ dies genau dann der Fall ist, wenn das Momentenproblem für F_ξ selbst eindeutig lösbar ist. Zusammengefasst heißt das also, die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ liegen genau dann dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, wenn das Momentenproblem von F_ξ eine eindeutige Lösung besitzt. \square

Bemerkung 3.3 *Ist ξ eine Zufallsgröße mit diskreter (oder gemischter) Verteilung, so ist die Bedingung, dass das zugehörige Momentenproblem eindeutig lösbar ist, hinreichend (aber nicht notwendig) für die Dichtheit der Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ (siehe z. B. Freud [40]).*

Für die Definition des Momentenproblems und Bedingungen, unter denen es eindeutig lösbar ist, sei auf Kapitel 2.1, Definition 2.12 und Satz 2.14, verwiesen. Verteilungen, für die das Momentenproblem eindeutig lösbar ist, sind zum Beispiel die Normalverteilung, die Betaverteilung, deren Spezialfall die Gleichverteilung, und die Gammaverteilung. Die dazugehörigen orthogonalen Polynome (siehe Tabelle 3.1) liegen damit dicht in den entsprechenden Räumen. Diese Verteilungen bzw. Polynome entsprechen dem von Xiu und Karniadakis in [111] vorgestellten verallgemeinerten polynomiellen Chaos, welches bei ihnen auch Wiener-Askey-Chaos genannt wird, da sich diese orthogonalen Polynome in das Askey-Schema (siehe Askey und Wilson [3] oder auch Abschnitt 2.2) einordnen lassen. Natürlich gibt es aber noch viel mehr Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Verteilung	Chaospolynome
Normalverteilung	Hermite-Polynome
Betaverteilung	Jacobi-Polynome
Gleichverteilung	Legendre-Polynome
Gammaverteilung	Laguerre-Polynome

Tab. 3.1: *Spezielle Verteilungen und ihre entsprechenden orthogonalen Polynome*

deren Momentenproblem eindeutig lösbar ist. Als eine diskrete Verteilung, deren Momentenproblem sich eindeutig lösen lässt, sei beispielhaft die Poissonverteilung genannt mit den Charlier-Polynomen als dazugehörigen orthogonalen Polynomen. Im Gegensatz dazu ist die lognormale Verteilung nicht eindeutig durch ihre Momente bestimmt (vgl. Beispiel 2.15). Das heißt, für eine lognormale Zufallsgröße ξ liegen die dazugehörigen orthogonalen Polynome nicht dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Damit existieren nichttriviale Zufallsgrößen

$\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, für die die jeweilige verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung nicht fast sicher mit der entwickelten Zufallsgröße übereinstimmt (siehe Beispiel 3.9). Weitere Beispiele für Verteilungen, für die das Momentenproblem nicht eindeutig lösbar ist, sind in Abschnitt 2.1 erwähnt worden.

Im mehrdimensionalen Fall, d. h. $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ mit $|I_\xi| > 1$, verkompliziert sich die Charakterisierung der Dichtheit mit Hilfe der eindeutigen Lösbarkeit des Momentenproblems (siehe z. B. Fuglede [41]), denn es gibt Verteilungen, die zwar eindeutig durch ihre Momente bestimmt sind, deren Polynome jedoch nicht dicht liegen im entsprechenden L^2 -Raum. Eine hinreichende Bedingung für die Dichtheit der Polynome erhält man aber beispielsweise dann, wenn die univariaten Polynome in den einzelnen Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, dicht sind in $L^p(\Omega, \sigma(\xi_i), \mathbf{P})$ für ein $p > 2$.

Satz 3.4 (II. Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin)

Sei eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ mit $|I_\xi| > 1$ gegeben, sodass Annahme 3.1 erfüllt ist. Dann liegen die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, d. h., es gilt die orthogonale Zerlegung

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}),$$

wenn für alle $i \in I_\xi$ die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi_i)$ in $L^p(\Omega, \sigma(\xi_i), \mathbf{P})$ für ein $p > 2$ dicht liegen.

Beweis.

Der Beweis wird in zwei Teilen geführt analog zu der Vorgehensweise in [34].

- (i) Sei $|I_\xi| < \infty$. Dann folgt die Aussage direkt aus Berg [14, Theorem 3.4] bzw. Petersen [82].
- (ii) Sei $I_\xi = \mathbb{N}$. Dann folgt nach Voraussetzung und (i), dass für alle $M \in \mathbb{N}$ die Mengen $\mathcal{P}(\xi_1, \dots, \xi_M)$ dicht liegen in $L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_M), \mathbf{P})$.

Angenommen $\mathcal{P}(\xi)$ liegt nun nicht dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, dann existiert eine Zufallsgröße $\eta \in (\overline{\mathcal{P}(\xi)})^\perp \subset L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit $\|\eta\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Des Weiteren lässt sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M_0 \in \mathbb{N}$ und eine Zufallsgröße

$$\eta_{M_0} \in L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_{M_0}), \mathbf{P}) = \overline{\mathcal{P}(\xi_1, \dots, \xi_{M_0})} \subset \overline{\mathcal{P}(\xi)}$$

finden mit

$$\|\eta - \eta_{M_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Andererseits gilt jedoch für genügend kleines $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\eta - \eta_{M_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\eta_{M_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq 1 + \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)} - \|\eta - \eta_{M_0}\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \geq 1 + (1 - \varepsilon)^2, \end{aligned}$$

was zu einem Widerspruch führt. Damit ist die Behauptung $\overline{\mathcal{P}(\xi)} = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gezeigt.

□

Eine mögliche hinreichende Bedingung, für die die Dichtheit der Polynome in den entsprechenden L^p -Räumen für $p > 2$ (eigentlich sogar $p \geq 1$) geschlussfolgert werden kann, ist Eigenschaft (3.1) im folgenden Korollar.

Korollar 3.5 *Sei eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben, die Annahme 3.1 erfüllt. Wenn für jedes $i \in I_\xi$ eine Konstante $a > 0$ existiert, sodass*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(a|\xi_i|) < \infty \quad (3.1)$$

gilt, dann liegen die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, d. h., es gilt die orthogonale Zerlegung

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}).$$

Beweis.

Da für jedes $i \in I_\xi$ eine Konstante $a > 0$ existiert, sodass $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(a|\xi_i|) < \infty$ gilt, folgt nach Berg [15, Theorem 6] die Dichtheit der Polynome aus $\mathcal{P}(\xi_i)$ in $L^p(\Omega, \sigma(\xi_i), \mathbf{P})$ für alle $p \geq 1$. Die Behauptung folgt dann sofort aus Satz 3.4. \square

Setzt man zusätzlich die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ voraus, so lässt sich wie im eindimensionalen Fall wieder eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Dichtheit der Polynome finden.

Satz 3.6 (III. Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin)

Sei eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben, sodass die Annahme 3.1 erfüllt ist, und seien die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ untereinander unabhängig. Dann sind die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi)$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, d. h., es gilt die orthogonale Zerlegung

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}),$$

genau dann, wenn für jedes $i \in I_\xi$ das Momentenproblem der Verteilung F_{ξ_i} von ξ_i eindeutig lösbar ist.

Beweis.

Aufgrund der Unabhängigkeit ergibt sich für jedes $K \in I_\xi$ die Verteilungsfunktion $F_{(\xi_1, \dots, \xi_K)}$ des Zufallsvektors (ξ_1, \dots, ξ_K) als Produkt der Verteilungsfunktionen $F_{\xi_1}, \dots, F_{\xi_K}$, d. h.

$$F_{(\xi_1, \dots, \xi_K)}(x_1, \dots, x_K) = \prod_{i=1}^K F_{\xi_i}(x_i)$$

und damit folgt, dass

$$L^2(\mathbb{R}^K, \mathcal{B}(\mathbb{R}^K), dF_{(\xi_1, \dots, \xi_K)}) = \bigotimes_{i=1}^K L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF_{\xi_i})$$

gilt. Da für jedes $i \in I_\xi$ die Polynome aus $\mathcal{P}(\xi_i)$ genau dann dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi_i), \mathbf{P})$ liegen, wenn das jeweilige Momentenproblem eindeutig lösbar ist (nach Satz 3.2), ergibt sich die Behauptung für $|I_\xi| < \infty$ sofort und für $I_\xi = \mathbb{N}$ analog zum Beweisschritt (ii) von Satz 3.4. \square

Nach der Annahme 3.1 (i) lassen sich demnach die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ orthonormalen Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ konstruieren (siehe dazu auch Satz 2.16 und Bemerkung 2.18). Indiziert werden sie mittels eines Multiindexes α der Menge

$$\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{|I_\xi|} : \alpha \text{ hat nur endlich viele Nicht-Null-Elemente}\}$$

und sie spannen den Raum $\mathcal{P}(\xi)$ auf. Sind die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ zusätzlich unabhängig, dann können die multivariaten, orthonormalen Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ als Tensorprodukte der univariaten orthonormalen Polynome $\{p_n^{(i)}(\xi_i), n \in \mathbb{N}_0\}$ in $\xi_i, i \in I_\xi$, hergeleitet werden. Das heißt, es gilt

$$p_\alpha(\xi) = \prod_{i \in I_\xi} p_{\alpha_i}^{(i)}(\xi_i) \quad \text{für alle } \alpha \in \Lambda,$$

und Satz 3.6 besagt, dass die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ genau dann eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ bilden, wenn die Polynome $\{p_n^{(i)}(\xi_i), n \in \mathbb{N}_0\}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi_i), \mathbf{P})$ für jedes $i \in I_\xi$ dicht liegen.

Die Polynome $p_\alpha(\xi)$ vom totalen Grade kleiner gleich n , d. h. $|\alpha| = \sum_{i \in I_\xi} \alpha_i \leq n$, spannen dann die jeweiligen Unterräume \mathcal{P}_n auf, heißt, sie bilden eine Basis, sodass sich

$$\mathcal{P}_n = \text{span}\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda : |\alpha| \leq n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt. Die orthogonalen Projektionen $\Pi_{\overline{\mathcal{P}}_n} : L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \rightarrow \overline{\mathcal{P}}_n$ einer Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ auf die Räume $\overline{\mathcal{P}}_n, n \in \mathbb{N}_0$, sind durch

$$\Pi_{\overline{\mathcal{P}}_n} \eta := \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha| \leq n}} \beta_\alpha p_\alpha(\xi)$$

mit den verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten

$$\beta_\alpha := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_\alpha(\xi)), \quad \alpha \in \Lambda,$$

gegeben. Die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung von $\eta \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ lässt sich dann definieren durch die Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{\overline{\mathcal{P}}_n} \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} \beta_\alpha p_\alpha(\xi) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \beta_\alpha p_\alpha(\xi),$$

die im quadratischen Mittel, d. h. in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, konvergiert. Ihr Grenzwert ist dabei die orthogonale Projektion von η auf den Raum $\overline{\mathcal{P}}(\xi)$. Wenn also $\overline{\mathcal{P}}(\xi) = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gilt und η messbar ist bzgl. ξ , dann ist dieser Grenzwert, d. h. die eben erwähnte orthogonale Projektion von η auf $\overline{\mathcal{P}}(\xi)$, gerade η selbst. Die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung kann somit ebenso als abstrakte Fourier-Reihenentwicklung bzgl. orthonormaler Polynome in ξ aufgefasst werden.

Korollar 3.7 *Sei eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben, sodass die Annahme 3.1 erfüllt ist, und gelte $\overline{\mathcal{P}}(\xi) = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Dann lässt sich jede Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ durch ihre verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} \beta_\alpha p_\alpha(\xi) \quad \text{mit} \quad \beta_\alpha = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_\alpha(\xi))$$

mittels den orthonormalen Polynomen $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ darstellen. Das heißt, die Folge der Partialsummen $(^{(N)}\eta)_{N \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$^{(N)}\eta := \Pi_{\overline{\mathcal{P}}_N} \eta = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} \beta_\alpha p_\alpha(\xi), \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

konvergiert im quadratischen Mittel gegen η , d. h.

$${}^{(N)}\eta \rightarrow \eta \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}) = \overline{\mathcal{P}(\xi)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$. \square

Bemerkung 3.8 Sei eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben, sodass die Annahme 3.1 erfüllt ist, gelte $\overline{\mathcal{P}(\xi)} = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und seien mit

$$\Pi_{\mathcal{P}_N^K} : L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathcal{P}_N^K, \quad N \in \mathbb{N}_0, \quad K \in I_\xi,$$

die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ orthogonalen Projektionen auf die Räume \mathcal{P}_N^K bezeichnet. Dann konvergieren für $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ebenfalls die orthogonalen Projektionen $\Pi_{\mathcal{P}_N^K}\eta$ im quadratischen Mittel gegen η , d. h.

$${}^{(N,K)}\eta := \Pi_{\mathcal{P}_N^K}\eta = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ \alpha_i=0, \quad i > K, \\ |\alpha|=n}} \beta_\alpha p_\alpha(\xi) \rightarrow \eta \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \quad \text{für } N, K \rightarrow \infty.$$

Die Zufallsgrößen ${}^{(N)}\eta$ bzw. ${}^{(N,K)}\eta$, $K \in I_\xi$, $N \in \mathbb{N}_0$, für $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ werden auch als verallgemeinerte polynomielle Chaosapproximationen bezeichnet und sind die jeweiligen Bestapproximationen von η in den entsprechenden Räumen. Die Chaosapproximation ${}^{(N,K)}\eta$ ist auch für $I_\xi = \mathbb{N}$ immer eine endliche Summe, die Chaosapproximation ${}^{(N)}\eta$ hingegen ist in diesem Fall im Allgemeinen selbst auch eine Reihe.

Ist eine der Bedingungen $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ oder $\overline{\mathcal{P}(\xi)} = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ des obigen Korollars nicht erfüllt, muss im Allgemeinen die Folge der Chaosapproximationen $({}^{(N)}\eta)_N$ nicht im Quadratmittel gegen η konvergieren. Mit anderen Worten, bilden die Polynome eine Orthonormalbasis und besitzt die Zufallsgröße η ein endliches zweites Moment, ist aber nicht $\sigma(\xi)$ -messbar, dann entspricht die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung von η nicht der Zufallsgröße η , sondern ihrer orthogonalen Projektion auf $\overline{\mathcal{P}(\xi)}$, d. h. $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta|\xi)$. Im Falle, dass die zweite Bedingung verletzt ist, d. h., die Polynome nicht dicht liegen, gibt es Zufallsgrößen $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, deren verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen nicht gegen sie selbst im quadratischen Mittel konvergieren, zum Beispiel alle nicht-degenerierten Zufallsgrößen aus dem orthogonalen Komplement von $\overline{\mathcal{P}(\xi)}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Im Falle einer lognormalen Zufallsgröße ξ ist eine solche Zufallsgröße η im Komplement von $\overline{\mathcal{P}(\xi)}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ beispielsweise durch $\eta = \sin(2\pi \ln(\xi))$ gegeben (siehe Beispiel 2.15 oder [34]). Auch der Kehrwert von ξ , $\eta = 1/\xi$, der ebenfalls eine lognormale Zufallsgröße ist, kann nicht im Quadratmittel mittels der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklung in den orthonormalen Polynomen in ξ dargestellt werden (siehe Beispiel 3.9). Anders sieht es aus, wenn man die lognormale Zufallsgröße ξ mit Hilfe einer normalverteilten Zufallsgröße $\tilde{\xi}$ ausdrückt, d. h. $\xi = \exp(\tilde{\xi})$. Dann konvergiert aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Momentenproblems für die Normalverteilung die entsprechende Chaosentwicklung von $\eta = \exp(-\tilde{\xi})$ in den orthonormalen Polynomen (Hermite-Polynomen) in $\tilde{\xi}$ im Quadratmittel gegen η .

Beispiel 3.9 Seien eine lognormale Zufallsgröße ξ mit Dichte

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und eine standardnormalverteilte Zufallsgröße $\tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gegeben mit $\xi = \exp(\tilde{\xi})$ und

$$\eta = \frac{1}{\xi} = \exp(-\tilde{\xi}) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}) = L^2(\Omega, \sigma(\tilde{\xi}), \mathbf{P}).$$

Die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ zu der Zufallsgröße ξ gehörenden orthonormalen Polynome (siehe Abschnitt 2.2.4 zu Stieltjes-Wigert-Polynomen) werden mit $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ bezeichnet und die entsprechenden orthonormalen Polynome in $\tilde{\xi}$ sind die normierten Hermite-Polynome $\{\text{He}_n(\tilde{\xi})/\sqrt{n!}, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung von $\eta = 1/\xi$ bzgl. ξ lautet dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_n(\xi) \quad \text{mit} \quad \beta_n = \begin{cases} e^{1/2}, & n = 0, \\ (-1)^n e^{-(n^2+3n-2)/4} \sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}, & n > 0. \end{cases}$$

Die Berechnung dieser verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten ist im Anhang A.2 zu finden. Die zweiten Momente der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen

$$\sum_{n=0}^N \beta_n p_n(\xi) = e^{1/2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n e^{-(n^2+3n-2)/4} \sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)} p_n(\xi), \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

können wie folgt nach oben abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^N \beta_n p_n(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= e + \sum_{n=1}^N e^{-(n^2+3n-2)/2} \prod_{i=1}^n (e^i - 1) \leq e + \sum_{n=1}^N e^{-(n^2+3n-2)/2} \prod_{i=1}^n e^i \\ &\leq e + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+1} = \frac{e^2}{e-1}. \end{aligned}$$

Da $\|\eta\|_{L^2(\Omega)} = e$, gilt damit

$$\left\| \eta - \sum_{n=0}^N \beta_n p_n(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| \sum_{n=0}^N \beta_n p_n(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq e^2 - \frac{e^2}{e-1} > 0,$$

sodass der Quadratmittelfehler nicht beliebig klein werden kann. Das heißt, die verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen von η bzgl. ξ konvergieren nicht im Raum $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen η .

Dahingegen entspricht aber die polynomielle Chaosentwicklung von $\eta = \exp(-\tilde{\xi})$ bzgl. $\tilde{\xi}$, die durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n \frac{\text{He}_n(\tilde{\xi})}{\sqrt{n!}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\beta}_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{1/2}$$

gegeben ist (siehe Anhang A.1), fast sicher der Zufallsgröße η , d. h., die Folge dieser polynomiellen Chaosapproximationen konvergiert im Quadratmittel gegen η , da die Hermite-Polynome $\{\text{He}_n(\tilde{\xi})/\sqrt{n!}, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht sind in $L^2(\Omega, \sigma(\tilde{\xi}), \mathbf{P})$.

In praktischen Beispielen treten häufig nicht nur reellwertige Zufallsgrößen auf sondern auch Zufallsvariablen mit Werten in abstrakteren Räumen (z. B. in Funktionenräumen), für die man ebenfalls das Konzept der Chaosentwicklungen verwenden möchte. So lässt sich das Prinzip der Chaosentwicklungen für reellwertige Zufallsgrößen $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ohne Weiteres auf $\sigma(\xi)$ -messbare Zufallsvariablen η mit Werten in einem separablen Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$, für die $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|\eta\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ mit $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} := (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ gilt, d. h. nach Definition 2.7 für

$$\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H}),$$

ausdehnen.

Satz 3.10 *Seien ein separabler Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$ und reellwertige Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_{\xi}}$ gegeben, sodass die Annahme 3.1 erfüllt ist. Gelte außerdem für $\xi = (\xi_i)_{i \in I_{\xi}}$ die Beziehung $\overline{\mathcal{P}}(\xi) = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Dann lässt sich mit den Polynomen $\{p_{\alpha}(\xi), \alpha \in \Lambda\}$, die eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ bilden, jedes $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H})$ in eine Chaosreihe*

$$\eta = \sum_{\alpha \in \Lambda} \beta_{\alpha} p_{\alpha}(\xi) \quad \text{in } L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H})$$

entwickeln, wobei die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten jetzt Elemente des Hilbertraumes \mathcal{H} sind, d. h.

$$\beta_{\alpha} := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_{\alpha}(\xi)) \in \mathcal{H}$$

für alle $\alpha \in \Lambda$.

Beweis.

Sei $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis des separablen Hilbertraumes \mathcal{H} . Dann ist die Menge $\{e_i p_{\alpha}(\xi), i \in \mathbb{N}, \alpha \in \Lambda\}$ eine Orthonormalbasis des Tensorproduktraumes

$$\mathcal{H} \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}).$$

Nach Proposition 2.10 ist dieser separable Hilbertraum isometrisch isomorph zu dem Raum $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H})$, sodass $\{e_i p_{\alpha}(\xi), i \in \mathbb{N}, \alpha \in \Lambda\}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H})$ bildet und es gilt

$$\eta = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\alpha, i} e_i p_{\alpha}(\xi) \quad \text{mit} \quad \beta_{\alpha, i} := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}((\eta, e_i)_{\mathcal{H}} p_{\alpha}(\xi))$$

in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}; \mathcal{H})$. Damit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}_0$ und $M_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left\| \eta - \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} \sum_{i=1}^M \beta_{\alpha, i} e_i p_{\alpha}(\xi) \right\|_{\mathcal{H}}^2 < \varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0, M \geq M_0.$$

Die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\alpha, i} e_i \quad \text{mit} \quad \beta_{\alpha, i} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}((\eta, e_i)_{\mathcal{H}} p_{\alpha}(\xi)) = (\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_{\alpha}(\xi)), e_i)_{\mathcal{H}}$$

konvergiert wiederum gegen $\beta_{\alpha} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_{\alpha}(\xi))$ für alle $\alpha \in \Lambda$, womit folgt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left\| \eta - \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} \beta_{\alpha} p_{\alpha}(\xi) \right\|_{\mathcal{H}}^2 < \varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0.$$

□

3.1.2 Eigenschaften verallgemeinerter polynomieller Chaosentwicklungen

Im Weiteren werde nun vorausgesetzt, dass eine Zufallsvariable $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben sei, sodass die Annahme 3.1 erfüllt ist, und die zugehörigen Polynome dicht liegen, d. h., $\overline{\mathcal{P}(\xi)} = L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gilt. Sei außerdem $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gegeben. Alle nun folgenden Aussagen gelten für die beiden Chaosapproximationen $((^{(N)}\eta)_N)$ und $((^{(N,K)}\eta)_{(N,K)})$, auch wenn sie nur für die erstere formuliert werden.

Aufgrund der Quadratmittelkonvergenz der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen $((^{(N)}\eta)_N)$ einer Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gegen η folgt, dass der Erwartungswert von η sich gerade zu

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (^{(N)}\eta) = \beta_0$$

ergibt und die Varianz von η gerade

$$\mathbf{D}_{\mathbf{P}}^2 \eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{D}_{\mathbf{P}}^2 (^{(N)}\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} |\beta_\alpha|^2$$

ist (siehe auch Korollar 3.12 oder Proposition 3.17). Da die Quadratmittelkonvergenz der Chaosapproximationen gegen η vorliegt, lässt sich auch die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen stellen. Das heißt, wie schnell konvergiert die Folge der Chaosapproximationen gegen die entwickelte Zufallsgröße bzw. wie viele Terme, Chaoskoeffizienten, müssen verwendet werden, damit die entsprechende Chaosapproximation eine hinreichend gute Näherung für die entwickelte Zufallsgröße darstellt. Für eine Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ konvergiert der Approximationsfehler

$$\|\eta - (^{(N)}\eta)\|_{L^2(\Omega)}$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen Null, wenn die zugehörigen Polynome $\mathcal{P}(\xi)$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ liegen. Berechnen lässt er sich aufgrund der Orthonormalität der Polynome mittels

$$\|\eta - (^{(N)}\eta)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta - (^{(N)}\eta))^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda, \\ |\alpha|=n}} |\beta_\alpha|^2.$$

Je schneller also die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten abklingen (gegen Null konvergieren), umso schneller konvergiert die Folge der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen gegen η .

Ebenso interessant ist die Frage, ob und wie sich die (unbekannten) verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten einer Zufallsgröße, die sich als Transformation anderer Zufallsgrößen mit bekannten verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen ergibt, bestimmen lassen.

Proposition 3.11

(i) Seien $\eta_1, \eta_2 \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\eta_3 := a\eta_1 + b\eta_2 \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ist, und bezeichnen $(\beta_\alpha^{(1)})_\alpha$, $(\beta_\alpha^{(2)})_\alpha$ und $(\beta_\alpha^{(3)})_\alpha$ die jeweiligen verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten von η_1 , η_2 und η_3 . Dann gilt

$$\beta_\alpha^{(3)} = a\beta_\alpha^{(1)} + b\beta_\alpha^{(2)} \quad \text{für alle } \alpha \in \Lambda.$$

(ii) Sei $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und $(^{(N)}\eta)_N$ die Folge der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen von η . Ist für ein $\gamma \in \Lambda$ das Produkt $\eta p_\gamma(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, dann gelten für die verallgemeinerten polynomiellen Chaokoeffizienten $(\beta_\alpha)_\alpha$ von $\eta p_\gamma(\xi)$

$$\beta_\alpha = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta p_\gamma(\xi) p_\alpha(\xi)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(^{(N)}\eta p_\gamma(\xi) p_\alpha(\xi)), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Beweis.

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Voraussetzungen. \square

Die Berechnung der Chaokoeffizienten eines Produktes $\eta_3 = \eta_1 \eta_2 \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ aus zwei beliebigen Zufallsgrößen $\eta_1, \eta_2 \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit Hilfe der Chaokoeffizienten von η_1 und η_2 erfordert im Allgemeinen jedoch schon weitere Voraussetzungen (siehe hierzu auch die Betrachtungen für eindimensionale polynomielle Chaosentwicklungen in Abschnitt 3.2.2).

Weitere Eigenschaften, die die Quadratmittelkonvergenz der Folge der Chaosapproximationen impliziert, sind im folgenden Korollar zusammengefasst.

Korollar 3.12 Für jede Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit der Folge der zugehörigen verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ gelten folgende Aussagen:

- (i) Die Folge $(^{(N)}\eta)_N$ konvergiert gegen η in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für $0 < p \leq 2$.
- (ii) Die Folge der absoluten p -ten Momente von $(^{(N)}\eta)$ konvergiert gegen das absolute p -te Moment von η für $0 < p \leq 2$, d. h. $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^p \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |\eta|^p$ für $N \rightarrow \infty$.
- (iii) Die Folge $(^{(N)}\eta)_N$ konvergiert gegen η in Wahrscheinlichkeit.
- (iv) Die Folge $(^{(N)}\eta)_N$ konvergiert gegen η in Verteilung, d. h.

$$\mathbf{P} (^{(N)}\eta \leq x) =: F_{(N)\eta}(x) \rightarrow F_\eta(x) := \mathbf{P}(\eta \leq x), \quad N \rightarrow \infty,$$

in allen Stetigkeitspunkten $x \in \mathbb{R}$ der Verteilungsfunktion F_η .

Die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 kann im Allgemeinen nicht aus der Quadratmittelkonvergenz geschlossen werden. Sie kann jedoch ebenfalls von Interesse sein und wird in dem Abschnitt 3.2.1 für das eindimensionale polynomielle Chaos untersucht. Ebenso folgt die Konvergenz in höheren Mitteln, d. h. in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für $p > 2$, nicht automatisch. Obwohl $(^{(N,K)}\eta) \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für alle $K \in I_\xi$, $N \in \mathbb{N}_0$ und $2 < p < \infty$ gilt, müssen die Chaosapproximationen in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ nicht gegen η konvergieren, selbst wenn die entwickelte Zufallsgröße η ein endliches absolutes p -tes Moment besitzt. Die Konvergenz im p -ten Mittel für $2 < p < \infty$ ist aber dennoch wichtig, da sie im Zusammenhang steht mit der Konvergenzgeschwindigkeit der Ränder der Verteilungsfunktionen. Eine erste Charakterisierung der Konvergenz im p -ten Mittel liefert der folgende Satz (vgl. z. B. Chung [28, Theorem 4.5.4]).

Satz 3.13 Für eine Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und die dazugehörige Folge der verallgemeinerten polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ sind für $0 < p < \infty$ folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Folge von Zufallsgrößen $(|^{(N)}\eta|^p)_N$ ist gleichgradig integrierbar bzgl. \mathbf{P} , d. h.

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|^{(N)}\eta|^p \mathbb{1}_{\{|^{(N)}\eta|^p > a\}} \right) \rightarrow 0, \quad \text{wenn } a \rightarrow \infty.$$

- (ii) Die Folge $(^{(N)}\eta)_N$ konvergiert in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen $\eta \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, d. h., es gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |\eta - ^{(N)}\eta|^p = 0$.
- (iii) Die Folge der absoluten p -ten Momente von $^{(N)}\eta$ konvergiert gegen das endliche, absolute p -te Moment von η , d. h. $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^p = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |\eta|^p < \infty$.

Beweis.

Ein Beweis lässt sich z. B. bei Chung [28, Theorem 4.5.4] finden. \square

Die Konvergenz im p -ten Mittel ist also äquivalent zur Konvergenz der absoluten p -ten Momente, die im Allgemeinen einfacher zu überprüfen ist. So zeigen Field und Grigoriu in [37] beispielsweise, dass die vierten absoluten Momente der Chaosapproximationen $(^{(N)}\zeta)_N$ der Zufallsgröße $\zeta = |\xi|$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, in den orthonormalen Polynomen in ξ , nicht gegen das entsprechende vierte absolute Moment von ζ konvergieren. Damit konvergiert die Folge der Chaosapproximationen $(^{(N)}\zeta)_N$ also auch nicht im vierten Mittel gegen ζ . Das bedeutet aber auch, dass die Folge der Quadrate der Chaosapproximationen, $((^{(N)}\zeta)^2)_N$, nicht im quadratischen Mittel gegen $\zeta^2 = \xi^2$ konvergiert, wie die folgende Proposition konstatiert.

Proposition 3.14 Sei $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, $p \geq 2$. Dann konvergiert die Folge der zugehörigen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ genau dann im p -ten Mittel gegen η , d. h. in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, wenn die Folge $(|^{(N)}\eta|^a)_N$ im $\frac{p}{a}$ -ten Mittel gegen $|\eta|^a$ konvergiert für ein $1 < a < p$.

Beweis.

Nach dem Satz 3.13 gilt folgende Äquivalenzkette

$$\| |^{(N)}\eta|^a - |\eta|^a \|_{L^{\frac{p}{a}}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^{ap/a} \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |\eta|^{ap/a} \quad \Leftrightarrow \quad \| ^{(N)}\eta - \eta \|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$, womit die Aussage bewiesen ist. \square

Somit ist die Konvergenz der Chaosapproximationen einer Zufallsgröße $\eta \in L^4(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gegen die selbige in $L^4(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ äquivalent zu der Konvergenz der Folge $((^{(N)}\eta)^2)_N$ gegen η^2 im quadratischen Mittel.

Korollar 3.15 Sei $\eta \in L^4(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Die Quadratmittelkonvergenz von $((^{(N)}\eta)^2)_N$ gegen η^2 ist äquivalent zur Quadratmittelkonvergenz der Doppelfolge $(^{(N)}\eta^{(M)}\eta)_{(N,M)}$ gegen η^2 für (N, M) gegen Unendlich auf beliebige Art.

Beweis.

Es bleibt nur zu zeigen, dass

$$\| ^{(N)}\eta^{(M)}\eta - \eta^2 \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad (N, M) \rightarrow \infty,$$

wenn die Bedingung

$$\| (^{(N)}\eta)^2 - \eta^2 \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|^{(N)}\eta^{(M)}\eta - \eta^2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|^{(N)}\eta(^{(M)}\eta - \eta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta(^{(N)}\eta - \eta)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|^{(N)}\eta\|_{L^4(\Omega)}\|^{(M)}\eta - \eta\|_{L^4(\Omega)} + \|\eta\|_{L^4(\Omega)}\|^{(N)}\eta - \eta\|_{L^4(\Omega)}, \end{aligned}$$

deren rechte Seite gegen Null konvergiert für $(N, M) \rightarrow \infty$, folgt nach Proposition 3.14 die Behauptung. \square

Eine weitere hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Folge der Chaosapproximationen im p -ten Mittel ist in folgender Proposition gegeben.

Proposition 3.16 *Sei $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, $p > 2$, $\left(^{(N)}\eta\right)_N$ die Folge der zugehörigen Chaosapproximationen und gelte $\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^r < \infty$ für ein $r > p$, dann konvergiert die Folge $\left(^{(N)}\eta\right)_N$ im p -ten Mittel gegen $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$.*

Beweis.

Nach Satz 3.13 ist die Konvergenz im p -ten Mittel gegen $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ äquivalent zur gleichgradigen Integrierbarkeit von $\left(|^{(N)}\eta|^p\right)_N$. Unter Verwendung der Ungleichungen von Hölder und Tschebyscheff erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|^{(N)}\eta|^p \mathbb{1}_{\{|^{(N)}\eta|^p > a\}} \right) &\leq \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^{p \frac{r}{p}} \right)^{\frac{p}{r}} \left(\mathbf{P}(|^{(N)}\eta|^p > a) \right)^{1 - \frac{p}{r}} \\ &\leq \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|^{(N)}\eta|^r)}{a^{\frac{r}{p} - 1}}. \end{aligned}$$

Da der Exponent $\frac{r}{p} - 1 > 0$ ist, konvergiert nach Voraussetzung das Supremum

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|^{(N)}\eta|^p \mathbb{1}_{\{|^{(N)}\eta|^p > a\}} \right) \leq \frac{\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta|^r}{a^{\frac{r}{p} - 1}} \rightarrow 0$$

gegen Null für $a \rightarrow \infty$. \square

Ist p eine natürliche Zahl, dann sind auch die p -ten Momente definiert. Doch schon für $|I_\xi| = 1$ müssen, obwohl für alle diese p die Erwartungswerte $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(^{(N)}\eta^p)$ existieren und endlich sind, diese p -ten Momente von $^{(N)}\eta$ im Allgemeinen nicht gegen $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta^p$ konvergieren (siehe auch die Bemerkung bei Rozovskii et al. in [75], der von sogenannten „pseudomoments“ spricht). Liegt jedoch die Konvergenz der Folge der Chaosapproximationen im entsprechenden p -ten Mittel vor, dann konvergieren auch die jeweiligen p -ten Momente.

Proposition 3.17 *Sei $\eta \in L^q(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ für $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Konvergiert die Folge der zugehörigen Chaosapproximationen $\left(^{(N)}\eta\right)_N$ im q -ten Mittel gegen η , dann gilt*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} (^{(N)}\eta)^p \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta^p \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} |^{(N)}\eta^p - \eta^p| \rightarrow 0, \quad \text{wenn } N \rightarrow \infty$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \leq q$.

Beweis.

Nach Voraussetzung existiert die Folge der Chaosapproximationen $\left(^{(N)}\eta\right)_N$ und konvergiert im Quadratmittel gegen η . Da $\left(^{(N)}\eta\right)_N$ damit ebenfalls in Wahrscheinlichkeit

gegen η konvergiert, konvergiert auch $\left(\binom{(N)}{\eta^p}\right)_N$ in Wahrscheinlichkeit gegen η^p für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \leq q$, d. h., für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Die L^q -Konvergenz impliziert die L^p -Konvergenz für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ und da die L^p -Konvergenz äquivalent zur gleichgradigen Integrierbarkeit von $\left(\binom{(N)}{\eta^p}\right)_N$ ist (siehe Satz 3.13), gilt nach einer äquivalenten Formulierung der gleichgradigen Integrierbarkeit (siehe z. B. Chung [28, Theorem 4.5.3])

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Damit folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right) \right| &\leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| \leq \varepsilon \right\}} \right) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) \\ &\leq \varepsilon + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \eta^p \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) \end{aligned}$$

und im Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right) \right| &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| \right) \\ &\leq \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \binom{(N)}{\eta^p} \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left| \eta^p \right| \mathbb{1}_{\left\{ \left| \binom{(N)}{\eta^p} - \eta^p \right| > \varepsilon \right\}} \right) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

weil die beiden Grenzwerte Null sind. Da außerdem $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden konnte, folgt daraus die Aussage der Proposition. \square

3.2 Eindimensionale polynomielle Chaosentwicklungen

Das eindimensionale polynomielle Chaos ist Thema dieses Unterabschnitts. Das bedeutet, es werden nur eine standardnormalverteilte Zufallsgröße $\xi = \xi_1$ vorausgesetzt und die dazu entsprechenden Chaosentwicklungen betrachtet. Für dieses einfache Beispiel des polynomiellen Chaos werden spezielle Eigenschaften untersucht. Zum einen wird noch einmal auf die Frage der Konvergenz bzgl. anderer Konvergenzarten als der Quadratmittelkonvergenz eingegangen. Zum anderen liegt ein besonderes Augenmerk auf der Untersuchung von Produkten von Zufallsgrößen und polynomiellen Chaosapproximationen bzw. von polynomiellen Chaosapproximationen untereinander, deren Darstellungsmöglichkeiten und Konvergenz. Das Produkt ist eine einfache nichtlineare Transformation, die beispielsweise bei der Lösung zufälliger Gleichungen oder beim Postprocessing auftreten kann, und gewisse Schwierigkeiten in sich birgt.

Das eindimensionale polynomielle Chaos ist für eine standardnormalverteilte, reellwertige Zufallsgröße ξ definiert. Die im Sinne von Satz 2.16 dazugehörigen orthonormalen Polynome $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ sind durch die normierten Hermite-Polynome (siehe Abschnitt 2.2.2) gegeben, d. h.

$$p_n(\xi) := \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Da die Bedingung $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(a|\xi|) < \infty$ für alle $a > 0$ erfüllt ist, liegen die Hermite-Polynome dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Die entsprechende polynomielle Chaosentwicklung einer Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ergibt sich also gemäß

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi) \quad \text{mit} \quad \beta_n := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi) \right).$$

Bemerkung 3.18 *Im Falle von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ leiten sich die jeweiligen multivariaten orthonormalen Polynome in $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ von den univariaten orthonormalen Polynomen ab, indem man Tensorprodukte bildet, d. h.*

$$p_\alpha(\xi) := \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \text{He}_\alpha(\xi) := \prod_{i \in I_\xi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i!}} \text{He}_{\alpha_i}(\xi_i), \quad \alpha \in \Lambda,$$

mit $\alpha! := \prod_{i \in I_\xi} \alpha_i!$.

Sind die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gemeinsam normalverteilt aber nicht unabhängig, dann entsprechen die orthonormalen Polynome den normierten multivariaten Hermite-Polynomen (siehe dazu auch Bemerkung 2.20 (b)).

Bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, dann existiert für die Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ nach dem Lemma von Doob-Dynkin (siehe z. B. Kallenberg [65]), da η messbar ist bzgl. $\sigma(\xi)$, eine Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$ mit

$$\eta = u(\xi) \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}).$$

Dementsprechend besitzt die Funktion u (als Funktion von x) eine abstrakte Fourier-Reihenentwicklung in den normierten Hermite-Polynomen $\{\text{He}_n/\sqrt{n!}, n \in \mathbb{N}_0\}$, kurz Hermite-Reihe genannt, d. h.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(x) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi),$$

sowie die dazugehörigen Partialsummen

$${}^{(N)}u(x) := \sum_{n=0}^N u_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(x), \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

mit den Koeffizienten $u_n := \left(u, \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n \right)_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die Koeffizienten u_n entsprechen dabei den Chaoskoeffizienten β_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$, denn es ist

$$u_n = \left(u, \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n \right)_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi) \right) = \beta_n,$$

und es gilt ${}^{(N)}\eta = {}^{(N)}u(\xi)$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Die zwei Darstellungsmöglichkeiten sind also äquivalent zueinander und werden beide, je nachdem welche Variante in der jeweiligen Situation geeigneter erscheint, verwendet.

Bemerkung 3.19 Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$ lässt sich in eine Hermite-Reihe entwickeln, d. h., für

$${}^{(N)}f(x) := \sum_{n=0}^N f_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n := \left(f, \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n \right)_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)}$$

gilt ${}^{(N)}f \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$.

3.2.1 Konvergenzeigenschaften

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt zu verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen erwähnt, lassen sich die Konvergenz im p -ten Mittel für $p > 2$ und die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht aus der Quadratmittelkonvergenz schlussfolgern. In diesem Unterabschnitt werden nun u. a. diese beiden Konvergenzarten gesondert betrachtet. Eine Theorie, die auch für die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen gültig ist, ist schwer anzugeben. Spezielle Eigenschaften der Hermite-Polynome, die nicht allgemein auf beliebige orthogonale Polynomsysteme übertragbar sind, werden im Folgenden verwendet. Zum Abschluss dieses Unterabschnitts wird eine Zusammenfassung für den Zusammenhang zwischen entwickelter Zufallsgröße und dem Abklingverhalten ihrer zugehörigen polynomiellen Chaoskoeffizienten gegeben. Dieser Zusammenhang ermöglicht dann beispielsweise, A-priori-Fehlerabschätzungen und Konvergenzaussagen für die numerische Lösung von zufälligen Gleichungen zu treffen.

Beginnen wird mit der Betrachtung der Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1. Im Falle des polynomiellen Chaos folgt sie aus Ergebnissen von Muckenhoupt in seiner Arbeit [76] über die „equiconvergence“ und die Konvergenz-fast-überall von Hermite-Reihen. Muckenhoupt beweist darin folgenden Satz.

Satz 3.20 Sei f eine Funktion, die eine Hermite-Reihe besitzt, und sei die Funktion $|f(x)|(\log^+ |f(x)|)^2$ integrierbar auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$, wobei $\log^+ |f(x)| := \max\{\log^+ |f(x)|, 0\}$ ist. Gilt zudem

$$\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{|f(-\sqrt{2}x)| + |f(\sqrt{2}x)|}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/4}} \exp(-x^2/2) x^{-1/2} dx \in o(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

und

$$\int_1^{\infty} \frac{|f(-\sqrt{2}x)| + |f(\sqrt{2}x)|}{x} \exp(-x^2/2) dx < \infty, \quad (3.3)$$

dann konvergiert ${}^{(N)}f$ fast überall gegen f im Intervall $[a, b]$.

Die fast-sichere-Konvergenz ist nun eine direkte Folgerung daraus.

Korollar 3.21 Sei $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$. Dann konvergiert die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen $({}^{(N)}\eta)_N$ fast sicher gegen η .

Beweis.

Da $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ ist, existiert ein $u \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$ mit $\eta = u(\xi)$. Sind die Bedingungen (3.2), (3.3) für u erfüllt und die Funktion $|u(x)|(\log^+ |u(x)|)^2$ integrierbar

auf einem beliebigen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so folgt die Konvergenz von $(^{(N)}u(x))_N$ gegen $u(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$.

Zur Überprüfung der Bedingung (3.2) wird eine Konstante $C > 0$, die sich zwar von Zeile zu Zeile ändern kann, aber immer unabhängig von u und m ist, eingeführt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{|u(-\sqrt{2}x)| + |u(\sqrt{2}x)|}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/4}} \exp(-x^2/2) x^{-1/2} dx \\ & \leq \sqrt{\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} (|u(-\sqrt{2}x)| + |u(\sqrt{2}x)|)^2 \exp(-x^2) dx} \sqrt{\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{x^{-1}}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/2}} dx} \\ & \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} \sqrt{\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{x^{-1}}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/2}} dx} \end{aligned}$$

und mit $m^{1/3} \leq m + m^{1/3} - x^2$ für $\sqrt{m}/2 \leq x \leq \sqrt{m}$ folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{x^{-1}}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/2}} dx} & \leq \frac{1}{m^{1/12}} \sqrt{\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{1}{x} dx} \\ & = \frac{1}{m^{1/12}} \sqrt{\ln(\sqrt{m}) - \ln(\sqrt{m}/2)} = \frac{C}{m^{1/12}}. \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\int_{\sqrt{m}/2}^{\sqrt{m}} \frac{|u(-\sqrt{2}x)| + |u(\sqrt{2}x)|}{(m + m^{1/3} - x^2)^{1/4}} \exp(-x^2/2) x^{-1/2} dx \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} \frac{1}{m^{1/12}} \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$.

Analog lässt sich die zweite Bedingung (3.3) nachweisen. In diesem Fall schätzt man das Integral wie folgt ab

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} \frac{|u(-\sqrt{2}x)| + |u(\sqrt{2}x)|}{x} \exp(-x^2/2) dx \\ & \leq \sqrt{\int_1^{\infty} (|u(-\sqrt{2}x)| + |u(\sqrt{2}x)|)^2 \exp(-x^2) dx} \sqrt{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} < \infty. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$ für alle $x \geq 1$ (siehe Abramowitz/Stegun [1]) lässt sich die Integrabilitätsbedingung für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ zeigen, d. h.

$$\begin{aligned} & \int_a^b |u(x)| (\log^+ |u(x)|)^2 dx \\ & = \int_{\{x: |u(x)| \geq 1\}}^b |u(x)| (\log |u(x)|)^2 dx \leq C \int_{\{x: |u(x)| \geq 1\}}^b |u(x)| (\sqrt{|u(x)|} - 1)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \exp(\max(a^2, b^2)/2) \int_a^b (|u(x)|^2 - 2|u(x)|^{3/2} + |u(x)|) \exp(-x^2/2) dx \\
&\leq C \exp(\max(a^2, b^2)/2) \int_{-\infty}^{\infty} (|u(x)|^2 - 2|u(x)|^{3/2} + |u(x)|) \exp(-x^2/2) dx < \infty.
\end{aligned}$$

So folgt nach Satz 3.20, dass $(^{(N)}u(x))_N$ für fast alle $x \in [a, b]$ gegen $u(x)$ konvergiert. Das heißt, es existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $\mathcal{N}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ so, dass $(^{(N)}u)_N$ punktweise gegen u auf $[-n, n] \setminus \mathcal{N}_n$ konvergiert. Die Vereinigung dieser Nullmengen

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n =: \mathcal{N}$$

ist ebenfalls eine Nullmenge und folglich konvergiert $(^{(N)}u)_N$ fast überall in \mathbb{R} gegen u . Da die Menge \mathcal{N} ebenso eine Nullmenge bezüglich des Maßes $d\Phi$ ist, konvergiert $(^{(N)}\eta)_N$ fast sicher gegen η . \square

Neben der Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 lässt sich auch die Konvergenz in höheren Mitteln nicht aus der Quadratmittelkonvergenz folgern. Darum wird im Folgenden jetzt diese Konvergenzart untersucht und der nächste Satz fasst eine notwendige Bedingung für die Konvergenz im p -ten Mittel ($p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) der polynomiellen Chaosentwicklungen $(^{(N)}\eta)_N$ gegen η zusammen.

Satz 3.22 *Sei $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, und konvergiere die Folge der zugehörigen polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen η . Dann muss bei geraden Werten p für die polynomiellen Chaokoeffizienten $(\beta_n)_n$ von η die Beziehung*

$$\beta_n \in o(n^{p/4-1/2}(p-1)^{-n/2}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gelten und bei ungeraden Werten p müssen die geraden polynomiellen Chaokoeffizienten $(\beta_{2n})_n$ von η

$$\beta_{2n} \in o((2n)^{p/4-1/2}(p-1)^{-2n/2}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

erfüllen.

Beweis.

Sei zunächst p gerade. Da die Folge $(^{(N)}\eta)_N$ im p -ten Mittel gegen η konvergiert, ist $(^{(N)}\eta)_N$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, d. h., es gilt

$$\|^{(N)}\eta - ^{(N-1)}\eta\|_{L^p(\Omega)} = \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left| \beta_N \frac{\text{He}_N(\xi)}{\sqrt{N!}} \right|^p \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Des Weiteren gilt

$$\|^{(N)}\eta - ^{(N-1)}\eta\|_{L^p(\Omega)}^p = |\beta_N|^p \frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (|\text{He}_N(\xi)|^p) = |\beta_N|^p \frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\text{He}_N(\xi)^p),$$

da die p -ten Momente aller Hermite-Polynome positiv sind. Unter der Verwendung der Formel von Busbridge in [24] ließ sich in Korollar 2.22 zeigen, dass bei geraden p für eine Konstante $C > 0$ und für ein $N_0 \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\text{He}_N(\xi)^p) \geq C \left(N^{-(p-2)/4} (p-1)^{N/2} \right)^p \quad \text{für alle } N \geq N_0$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left\| \binom{N}{\eta} - \binom{N-1}{\eta} \right\|_{L^p(\Omega)} &= |\beta_N| \left(\frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\text{He}_N(\xi)^p) \right)^{1/p} \\ &\geq C^{1/p} |\beta_N| N^{-(p-2)/4} (p-1)^{N/2} \geq 0. \end{aligned}$$

Da der Term auf der linken Seite nach (3.4) für $N \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, gilt ebenfalls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\beta_N|}{N^{(p-2)/4} (p-1)^{N/2}} = 0,$$

womit die Behauptung folgt für gerade p folgt.

Sei nun p ungerade. Dann lässt sich die Aussage durch analoge Argumentation allerdings nur für gerade polynomielle Chaoskoeffizienten zeigen, da man durch die Abschätzung

$$\left\| \binom{N}{\eta} - \binom{N-1}{\eta} \right\|_{L^p(\Omega)}^p = |\beta_N|^p \frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (|\text{He}_N(\xi)|^p) \geq |\beta_N|^p \frac{1}{(N!)^{p/2}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\text{He}_N(\xi)^p)$$

nur eine untere Schranke ungleich Null an den Erwartungswert für gerade N erhält. Der Erwartungswert $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\text{He}_N(\xi))^p$ ist für ungerade N nämlich gerade Null. \square

Eine hinreichende Bedingung an die polynomiellen Chaoskoeffizienten für die Konvergenz in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit gerader Ordnung p liefert folgender Satz.

Satz 3.23 *Sei $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, $p \in 2\mathbb{N} \setminus \{2\}$, und gebe es ein $\delta > 1$, sodass für die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ von η gilt*

$$\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-(p/4-1+\delta)}(p-1)^{-n/2}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

dann konvergiert die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen $(\binom{N}{\eta})_N$ gegen η im p -ten Mittel, d. h. in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Beweis.

Da $\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-(p/4-1+\delta)}(p-1)^{-n/2})$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, existiert eine Konstante $C > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$|\beta_n| \leq C n^{-(p/4-1+\delta)} (p-1)^{-n/2} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Um die Konvergenz von $(\binom{N}{\eta})_N$ im p -ten Mittel zu zeigen, wird überprüft, ob $(\binom{N}{\eta})_N$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ist.

Sei also ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\delta > 1$ ist, gibt es ein weiteres $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\delta} < \frac{\varepsilon}{C} \quad \text{für alle } n \geq n_1. \quad (3.6)$$

Für alle Werte $N > M \geq \max\{n_0, n_1\}$ ergibt sich dann

$$\left\| \binom{N}{\eta} - \binom{M}{\eta} \right\|_{L^p(\Omega)} = \left\| \sum_{n=M+1}^N \beta_n \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq \sum_{n=M+1}^N \left\| \beta_n \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{n=M+1}^N |\beta_n| \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mittels der Abschätzung der Momente der Hermite-Polynome aus Korollar 2.24 erhält man ferner

$$\|^{(N)}\eta - ^{(M)}\eta\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=M+1}^N |\beta_n| n^{p/4-1} (p-1)^{n/2} = \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n^\delta} |\beta_n| n^{p/4-1+\delta} (p-1)^{n/2}.$$

Durch die obige Bedingung an die polynomiellen Chaoskoeffizienten (3.5) und Beziehung (3.6) kann man die Summe weiter abschätzen zu

$$\|^{(N)}\eta - ^{(M)}\eta\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n^\delta} |\beta_n| n^{p/4-1+\delta} (p-1)^{n/2} \leq C \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n^\delta} < \varepsilon$$

für alle $N > M \geq \max\{n_0, n_1\}$. □

Vergleicht man diese notwendige und hinreichende Bedingung an die Chaoskoeffizienten, so unterscheidet sich zwar der algebraische Term, der exponentielle Term jedoch ist in beiden Bedingungen von der gleichen Größenordnung. Er gibt also den entscheidenden Fingerzeig, ob die Konvergenz in höheren Mitteln vorliegen kann oder nicht. So lässt sich auch leicht schlussfolgern, dass die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen der lognormalen Zufallsgröße $\eta = \exp(\xi)$ gegen η in allen höheren Mitteln konvergiert, d. h. in $L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ für beliebiges $2 < p < \infty$, weil die zugehörigen Chaoskoeffizienten schneller als exponentiell fallen (vgl. Tabelle 3.2 oder Anhang A.1).

Bemerkung 3.24 *Um eine ähnliche Bedingung an die polynomiellen Chaoskoeffizienten für die Konvergenz in ungeraden Ordnungen p (oder sogar für reelle $p > 2$) zu erhalten, müsste man die absoluten p -ten Momente aller Hermite-Polynome kennen und Abschätzungen finden. Basierend auf den Formeln von Busbridge und Bemerkung 2.25 lässt sich aber für $\eta \in L^p(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ nur für die Konvergenz von*

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta - ^{(N)}\eta)^p| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

eine hinreichende Bedingung an die Konvergenzgeschwindigkeit der polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ von η stellen. Diese lautet für ein $\delta > 1$

$$\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-(p/4-1+\delta)}(p-1)^{-n/2}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit ist eine Charakterisierung des Abklingverhaltens der polynomiellen Chaoskoeffizienten in Abhängigkeit der messbaren Funktion u , für die $\eta = u(\xi)$ gilt, vonnöten. Im Falle, dass $u \in H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$ ist, kann Folgendes geschlussfolgert werden.

Satz 3.25 *Sei $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit $\eta = u(\xi)$ für ein $u \in H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ von η*

$$\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-k/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

und für die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}u)_N$

$$\|^{(N)}u - u\|_{H^k(\mathbb{R}, d\Phi)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 3.26 Der Raum $H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist ein sogenannter gewichteter Sobolev-Raum (siehe z. B. Kufner [67] oder Turesson [97]). Er ist analog zu den Sobolev-Räumen $H^k(D)$ definiert, nur dass anstelle des Lebesgue-Maßes das Maß $d\Phi$ verwendet wird, bzw. zusätzlich als Gewichtsfunktion die Dichte φ der Standardnormalverteilung auftritt ($d\Phi(x) = \varphi(x) dx$).

Beweis.

O. B. d. A. wird die Aussage nur für $k = 1$ nachgewiesen. (Der Rest folgt durch Induktion nach k .) Folglich muss man zeigen, dass

$$\|((^N)u)' - u'\|_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Nach Formel (2.11) gilt

$$[(^N)u(x)]' = \sum_{n=0}^N \beta_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}'_n(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n \frac{n}{\sqrt{n!}} \text{He}_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{n+1} \beta_{n+1} \frac{\text{He}_n(x)}{\sqrt{n!}}$$

und andererseits erhält man mittels der Rekursionsformel (2.6) und partieller Integration

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \text{He}_{n+1}(x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \left(x \text{He}_n(x) - \text{He}'_n(x) \right) \varphi(x) dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(n+1)!}} u(x) \text{He}_n(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x) \text{He}_n(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \text{He}'_n(x) \varphi(x) dx - \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \text{He}'_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(u', \frac{\text{He}_n}{\sqrt{n!}} \right)_{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u'(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} (u')_n. \end{aligned}$$

Da also $(u')_n = \sqrt{n+1} \beta_{n+1}$ und $(u')_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgt zum einen

$$\sqrt{n} \beta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

das heißt $\beta_n \in o(n^{-1/2})$ für $n \rightarrow \infty$, und zum anderen

$$[(^N)u]' = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{n+1} \beta_{n+1} \frac{\text{He}_n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=0}^{N-1} (u')_n \frac{\text{He}_n}{\sqrt{n!}} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}, d\Phi)} u', \quad N \rightarrow \infty.$$

□

Aus diesem Beweis lässt sich ebenfalls die Konvergenzrate der polynomiellen Chaoskoeffizienten abschätzen. Besitzt eine zu entwickelnde Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ die Darstellung $\eta = u(\xi)$ für eine Funktion $u \in H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$, $k \in \mathbb{N}$, dann ergeben sich die polynomiellen Chaoskoeffizienten $((u^{(k)})_n)_n$ von $u^{(k)}$ gerade mit

$$(u^{(k)})_n = \sqrt{(n+k) \cdot \dots \cdot (n+1)} \beta_{n+k},$$

wobei $(\beta_n)_n$ die Chaoskoeffizienten von u sind (vgl. voriger Beweis). Der Approximationsfehler lässt sich damit also durch

$$\begin{aligned} \|\eta - {}^{(N)}\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n^2 = \sum_{n=N+1-k}^{\infty} \beta_{n+k}^2 = \sum_{n=N+1-k}^{\infty} \frac{1}{(n+k) \cdots (n+1)} (u_n^{(k)})^2 \\ &\leq CN^{-k} \sum_{n=N+1-k}^{\infty} (u_n^{(k)})^2 = CN^{-k} \|u^{(k)}(\xi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CN^{-k} \|u\|_{H^k(\mathbb{R}, d\Phi)}^2 \end{aligned}$$

beschränken. Diese Abschätzung lässt sich beispielsweise auch in Augustin et al. [4] finden. Eine allgemeine Version dieser Abschätzung für beliebige reellwertige $k \geq 0$ kann bei Guo in [55] nachvollzogen werden.

Proposition 3.27 *Sei $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit $\eta = u(\xi)$ für eine Funktion $u \in H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$, $k \geq 0$. Dann gilt für eine Konstante $c > 0$*

$$\|\eta - {}^{(N)}\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-k/2} \|u\|_{H^k(\mathbb{R}, d\Phi)}.$$

Das heißt, die Konvergenzgeschwindigkeit hängt von der Glattheit der Funktion u ab. Allerdings ist dies nicht der einzige Einflussfaktor. Auch das Verhalten von $u(x)$ bzw. von $\exp(-x^2/2)u(\sqrt{2}x)$ im Unendlichen, d. h. für $|x| \rightarrow \infty$, spielt eine Rolle. In der folgenden Proposition sind dabei die Ergebnisse, basierend auf Boyd [21, 22] und Bain [9] und den darin enthaltenen Verweisen, zusammengefasst.

Proposition 3.28 *Sei eine Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit $\eta = u(\xi)$ für eine Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$ gegeben und definiere f die Funktion $f(x) := \exp(-x^2/2)u(\sqrt{2}x)$.*

- (i) *Ist $u \in C^p(\mathbb{R})$, besitzt die $(p+1)$ -te Ableitung von u nur endlich viele endliche Unstetigkeitsstellen und existieren für*

$$\delta := \sup\{\delta_1 : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\delta_1} f(x) \text{ existieren}\}$$

ebenfalls die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\delta+r} f^{(r)}(x)$$

für alle $r = 1, \dots, p+1$. Dann gilt

$$\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-q/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

für $q := \min\{p + 3/2, \delta + 5/6\}$.

Speziell folgt also, wenn $\delta = \infty$ ist, dass $\beta_n \in \mathcal{O}(n^{-p/2-3/4})$, $n \rightarrow \infty$, gilt. Ist zusätzlich u unendlich oft stetig differenzierbar, konvergieren die polynomiellen Chaoskoeffizienten mit jeder beliebigen algebraischen Ordnung, was bedeutet, dass die Koeffizienten exponentiell schnell abklingen.

- (ii) *Sei $k := \sup\{j > 0 : \text{es existiert ein } p > 0 \text{ mit } f \in \mathcal{O}(\exp(-p|x|^j)), |x| \rightarrow \infty\}$ und f analytisch. Dann erfüllen die polynomiellen Chaoskoeffizienten folgende Eigenschaft*

$$\beta_n \in \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-cn^{k/2})), & k < 2, \\ \mathcal{O}(\exp(-cn)), & k = 2, \\ \mathcal{O}(\exp(-cn^{k/(2k-2)})), & k > 2, \end{cases} \quad n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 3.29

- (a) Sei für eine Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ die Funktion $u \in C^p(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, mit $\eta = u(\xi)$ gegeben. Wird nun angenommen, dass u nicht $(p+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, dann können die zu $u(\xi)$ gehörenden polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ nicht beliebig schnell fallen, sondern es gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $\beta_n \notin \mathcal{O}(n^{-p/2-5/4-\varepsilon})$, $n \rightarrow \infty$, ist. Ansonsten würde die Folge der Chaosapproximationen $((^{(N)}u)_N)$ gleichmäßig gegen eine $(p+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion konvergieren.
- (b) In Boyd [22] finden sich basierend auf Hille [58, 59, 60] Bedingungen, die eine spezielle Art des Abklingens, nämlich das exponentielle Abklingen mit einer exponentiellen Konvergenzrate mit Index $1/2$, d. h. $\beta_n \in \mathcal{O}(\exp(-c(2n+1)^{1/2}))$, liefern. In diesem Falle ist sogar die Konstante $c > 0$ näher spezifiziert. Eine solche Konvergenzrate tritt allerdings bei den hier behandelten Beispielen nicht auf und soll damit nicht näher betrachtet werden.
Eine Charakterisierung für die Konstante c bei der exponentiellen Konvergenzrate mit Index 1 , d. h. in der Situation von Proposition 3.28 (ii) für $k = 2$, ließe sofort Schlussfolgerungen für die Konvergenz der Chaosapproximationen in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für $p > 2$ zu.
- (c) In den Arbeiten von Bain et al. [9, 10, 11] lassen sich auch für die univariaten Jacobi- und Laguerre-Polynome qualitativ ähnliche Aussagen zu (i) finden. Ebenso werden Aussagen für dem multivariaten Fall gemacht.

Die Glattheit von u entscheidet also primär über eine algebraische oder exponentielle Konvergenzrate. Ist eine Funktion u nicht beliebig oft stetig differenzierbar, dann klingen die zugehörigen polynomiellen Chaoskoeffizienten nur algebraisch ab, wohingegen die Chaoskoeffizienten einer unendlich oft stetig differenzierbaren Funktion exponentiell schnell zur Null hin abfallen können.

Die entsprechenden Konvergenzraten lassen sich ebenfalls für einige spezielle Beispiele, die im Anhang A.1 zu finden sind, beobachten. In der folgenden Tabelle 3.2 sind sie zusammengefasst.

Funktion $u(x)$	Glattheit von u	Asymptotik für $n \rightarrow \infty$ ($c > 0$)
$\exp(ax)$	unendlich oft differenzierbar	$cn^{-1/4} \left(\frac{ a ^2 e}{n}\right)^{n/2}$
$\exp(ax^2)$, $a < 1/4$	unendlich oft differenzierbar	$cn^{-1/4} \left(\frac{2 a }{1-2a}\right)^{n/2}$
$\Phi(x)$	unendlich oft differenzierbar	$c2^{-n/2}n^{-3/4}$
$\exp(x)$	stetig und stückweise stetig differenzierbar	$cn^{-5/4}$
$ x ^{2p+1}$, $p \in \mathbb{N}_0$	p -mal stetig differenzierbar mit stückweise stetiger $(p+1)$ -ter Ableitung	$cn^{-(p+5/4)}$
$(x-1)\mathbb{1}_{\{x<0\}} + (x+1)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$	stückweise stetig	$cn^{-3/4}$

Tab. 3.2: Asymptotisches Verhalten der Beträge der polynomiellen Chaoskoeffizienten $\beta_n \neq 0$ für $n \rightarrow \infty$ für ausgewählte Beispiele.

Die Ergebnisse zu den Konvergenzraten lassen auch Rückschlüsse zu, was passieren kann,

wenn man von der Chaosentwicklung einer Zufallsgröße in Polynomen in abzählbar vielen unabhängigen Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ zu einer Chaosentwicklung der gleichen Zufallsgröße in nur einer standardnormalverteilte Zufallsgröße $\tilde{\xi}$ übergeht.

Bemerkung 3.30 Seien unabhängige Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$, $|I_\xi| > 1$, die die Annahme 3.1 erfüllen, und für $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ eine weitere Zufallsgröße $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gegeben. Dann existiert ein $u \in L^2(\mathbb{R}^{|I_\xi|}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|I_\xi|}), dF_\xi)$ mit $\eta = u(\xi) = u((\xi_i)_{i \in I_\xi})$ in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Man kann mit Hilfe einer einzigen standardnormalverteilten Zufallsgröße $\tilde{\xi}$ die einzelnen unabhängigen Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, erzeugen. Da die Zufallsgröße $\Phi(\tilde{\xi})$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsgröße ist, lassen sich nach Satz 2.11 (ii) mittels der dortigen Funktionen t_i , $i \in \mathbb{N}$, durch

$$t_i(\Phi(\tilde{\xi})) := \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}(\Phi(\tilde{\xi}))2^{-k}, \quad i \in \mathbb{N},$$

abzählbar viele, unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsgrößen erzeugen. Mittels der Transformation

$$F_{\xi_i}^-(t_i(\Phi(\tilde{\xi}))), \quad i \in I_\xi,$$

erhält man dann nach Satz 2.11 (i) unabhängige Zufallsgrößen mit der jeweiligen Verteilung F_{ξ_i} von ξ_i , $i \in I_\xi$. Da über die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ nichts außer ihre Unabhängigkeit und ihre Verteilung ausgesagt ist, kann man ohne Weiteres

$$\xi_i := F_{\xi_i}^-(t_i(\Phi(\tilde{\xi}))), \quad i \in I_\xi,$$

setzen. Für die Zufallsgröße η bedeutet dies, dass sie sich durch eine messbare Funktion \tilde{u} in $\tilde{\xi}$ darstellen lässt, d. h.

$$\eta = \tilde{u}(\tilde{\xi}) \quad \text{mit} \quad \tilde{u}(x) := u\left(\left(F_{\xi_i}^-(t_i(\Phi(x)))\right)_{i \in I_\xi}\right).$$

Damit kann η als eine Chaosentwicklung in nur einer Zufallsgröße $\tilde{\xi}$ dargestellt werden. Durch die Funktionen t_i , $i \in I_\xi$, die nicht stetig sind, ist die Abbildung \tilde{u} in der Regel ebenfalls nicht stetig. Das heißt, die entsprechenden Chaoskoeffizienten werden im Allgemeinen schwer zu berechnen sein und fallen sehr langsam ab. Man bezahlt also dafür, dass man keine Chaosentwicklung in vielleicht abzählbar vielen unabhängigen Zufallsgrößen bilden muss, einen Preis, der die Vorteile einer Chaosentwicklung in nur einer Zufallsgröße zunichte machen kann. Insbesondere dann, wenn die Funktion u selber glatt ist und man vielleicht sogar die Chaoskoeffizienten für die Chaosentwicklung in den entsprechenden multivariaten orthonormalen Polynomen explizit berechnen kann.

3.2.2 Produkte eindimensionaler polynomieller Chaosentwicklungen

Beim Lösen von zufälligen Gleichungen tritt oft die Notwendigkeit auf, Produkte von Zufallsgrößen und polynomiellen Chaosapproximationen bzw. Produkte von polynomiellen Chaosapproximationen zu bilden. Von diesen Produkten können wiederum die polynomiellen Chaosentwicklungen berechnet, das heißt, die jeweiligen polynomiellen Chaoskoeffizienten bestimmt werden. Die Schwierigkeiten ergeben sich dann, wenn man die Konvergenz

dieser polynomiellen Chaoskoeffizienten gegen die des Produktes der entwickelten Zufallsgrößen bzw. sogar die entsprechende Quadratmittelkonvergenz betrachtet. Diese folgt im Allgemeinen nicht aus der Quadratmittelkonvergenz für die einzelnen Faktoren. Allein die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und Verteilung wird impliziert.

Man kann folgende drei verschiedene Fälle von Produkten unterscheiden. Seien zwei Zufallsgrößen $\eta, \zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ und $(^{(N)}\zeta)_N$ gegeben. Dann lässt sich

- das Produkt von $(^{(N)}\eta)$ mit einer Zufallsgröße betrachten, die eine endliche polynomielle Chaosentwicklung besitzt. Das bedeutet im Endeffekt, dass man für $\zeta = \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}}$ für beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}$ Produkte der Art $(^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}})$ bildet und deren Eigenschaften für $N \rightarrow \infty$ untersucht.
- das Produkt von $(^{(N)}\eta)$ mit der Zufallsgröße ζ betrachten, die im Allgemeinen keine endliche polynomielle Chaosentwicklung besitzt und ebenfalls die Eigenschaften für $N \rightarrow \infty$ untersuchen.
- das Produkt der beiden polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)^{(M)}\zeta$ und die Eigenschaften für den Grenzwert $(N, M) \rightarrow \infty$ betrachten.

Für den Spezialfall, dass Produkte zwischen Zufallsgrößen mit endlichen Chaosentwicklungen betrachtet werden, sei z. B. auf das Buch von Le Maître und Knio [68] verwiesen, die neben anderen nichtlinearen Transformationen auch das Produkt untersuchen.

Für die Untersuchung der entsprechenden Konvergenzen bietet sich hier der Übersichtlichkeit halber ebenfalls die Verwendung der äquivalenten Darstellungsweise der Zufallsgrößen in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomiellen Chaosentwicklungen an. Das heißt, mittels entsprechender messbarer, reellwertiger Funktionen $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\Phi)$ können die Zufallsgrößen $\eta, \zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ durch

$$\eta = u(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \quad \text{mit} \quad u_n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right)$$

bzw.

$$\zeta = v(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \quad \text{mit} \quad v_n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right)$$

dargestellt werden und die zugehörigen polynomiellen Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)$ bzw. $(^{(M)}\zeta)$ werden analog mit $(^{(N)}u(\xi))$ bzw. $(^{(M)}v(\xi))$, $N, M \in \mathbb{N}_0$, bezeichnet.

Fall a). Es wird für $\eta = u(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ bzw. $(^{(N)}u(\xi))_N$ das Produkt der Form $(^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}})_N$ für festes $k \in \mathbb{N}$ betrachtet und ihre Quadratmittelkonvergenz gegen $\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}}$, falls $\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ist, untersucht. Wie bereits in Proposition 3.11 (ii) formuliert, konvergiert die Folge der polynomiellen Chaoskoeffizienten von $(^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}})_N$ gegen die polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}}$, d. h., für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left((^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}) \right) \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Mit Hilfe der Produktformel (2.8) für die Hermite-Polynome und unter Verwendung der Bezeichnung $C(n, k, l) = \sqrt{\binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{n+k-2l}{n-l}}$ ergeben sich für $(^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}})$ die polynomiellen

Chaoskoeffizienten $(\beta_n^{(N)})_n$ zu

$$\begin{aligned} \beta_n^{(N)} &:= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}\eta \sum_{l=0}^{k \wedge n} C(n, k, l) \frac{\text{He}_{n+k-2l}(\xi)}{\sqrt{(n+k-2l)!}} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{k \wedge n} C(n, k, l) u_{n+k-2l} \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq N\}}(l). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die polynomiellen Chaoskoeffizienten (β_n) von $\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}}$ lauten analog dazu

$$\beta_n := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \sum_{l=0}^{k \wedge n} C(n, k, l) u_{n+k-2l}. \quad (3.8)$$

Das bedeutet also für $N \geq k$

$$\beta_n^{(N)} = \begin{cases} \beta_n, & n = 0, \dots, N - k, \\ \sum_{l=0}^{k \wedge n} C(n, k, l) u_{n+k-2l} \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq N\}}(l), & n = N - k + 1, \dots, N + k, \\ 0, & n > N + k. \end{cases}$$

Satz 3.31 Sei $\eta = u(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und $({}^{(N)}\eta)_N$ mit $({}^{(N)}\eta) = ({}^{(N)}u)(\xi) = \sum_{n=0}^N u_n \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}$ die zugehörige polynomielle Chaosapproximation von η und sei zudem $\eta \xi^k \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left\| {}^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} - \eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

genau dann, wenn für die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(u_n)_n$ von η folgende Bedingung erfüllt ist

$$u_n \in \mathcal{O}(n^{-k/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Die Quadratmittelkonvergenz ist nach Satz 3.13 äquivalent zu der Konvergenz der entsprechenden zweiten Momente und o. B. d. A. wird angenommen, dass $N \geq k$ ist. Das heißt, es reicht die Differenz der zweiten Momente zu betrachten

$$\begin{aligned} \left| \left\| \eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| {}^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 - \sum_{n=0}^{N+k} (\beta_n^{(N)})^2 \right| \\ &= \left| \sum_{n=N-k+1}^{\infty} \beta_n^2 - \sum_{n=N-k+1}^{N+k} (\beta_n^{(N)})^2 \right|, \end{aligned}$$

wobei $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\beta_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ die jeweiligen polynomiellen Chaoskoeffizienten aus den Formeln (3.8) und (3.7) sind. Die betragsmäßige Differenz der zweiten Momente lässt sich dann sowohl nach unten als auch nach oben abschätzen mittels

$$\begin{aligned} \sum_{n=N-k+1}^{N+k} (\beta_n^{(N)})^2 - \sum_{n=N-k+1}^{\infty} \beta_n^2 &\leq \left| \left\| \eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| {}^{(N)}\eta \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \\ &\leq \sum_{n=N-k+1}^{\infty} \beta_n^2 + \sum_{n=N-k+1}^{N+k} (\beta_n^{(N)})^2. \end{aligned}$$

Der Term $\sum_{n=N-k+1}^{\infty} \beta_n^2$ geht nach Voraussetzung gegen Null und damit ist die Quadratmittelkonvergenz äquivalent dazu, dass für alle $n = N - k + 1, \dots, N + k$ die entsprechenden Chaoskoeffizienten $\beta_n^{(N)}$ gegen Null konvergieren, d. h.

$$\beta_n^{(N)} = \sum_{l=0}^{k \wedge n} C(n, k, l) u_{n+k-2l} \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq N\}}(l) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Zunächst wird nun gezeigt, dass aus der Quadratmittelkonvergenz die Konvergenzrate $u_n \in \mathcal{O}(n^{-k/2})$, $n \rightarrow \infty$, für die polynomiellen Chaoskoeffizienten von η folgt. Es gilt nach obiger Diskussion, dass alle $\beta_n^{(N)}$, $n = N - k + 1, \dots, N + k$ gegen Null konvergieren für $N \rightarrow \infty$. Damit gilt dies auch für den Koeffizienten $\beta_{N+k}^{(N)}$. Da

$$\beta_{N+k}^{(N)} = \sum_{l=0}^k C(N+k, k, l) u_{N+2k-2l} \mathbb{1}_{\{N+2k-2l \leq N\}}(l) = C(N+k, k, k) u_N = \sqrt{\frac{(N+k)!}{k!N!}} u_N$$

gilt, folgt die Beziehung

$$\beta_{N+k}^{(N)} = \sqrt{\frac{(N+k)!}{k!N!}} u_N = \frac{1}{\sqrt{k!}} \sqrt{(N+k) \cdots (N+1)} u_N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Da $k \in \mathbb{N}$ fest ist, entspricht dies

$$N^{k/2} u_N \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Für die Rückrichtung wird für jeden Koeffizienten $\beta_n^{(N)}$, $n = N - k + 1, \dots, N + k$ gezeigt, dass für $u_n \in \mathcal{O}(n^{-k/2})$, $n \rightarrow \infty$, dieser gegen Null konvergiert, d. h.

$$\beta_n^{(N)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Nach Voraussetzung existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|u_n| \leq \varepsilon n^{-k/2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Sei nun $N \geq n_0 + 2k$. Dann gilt für alle $n = N - k + 1, \dots, N + k$

$$\begin{aligned} |\beta_n^{(N)}| &= \left| \sum_{l=0}^k C(n, k, l) u_{n+k-2l} \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq N\}}(l) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^k C(n, k, l) |u_{n+k-2l}| \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq N\}}(l) \leq \sum_{l=0}^k C(n, k, l) |u_{n+k-2l}|. \end{aligned}$$

Mit der Indexänderung $n = N - k + j$ für $j = 1, \dots, 2k$ ergibt sich für alle $N \geq n_0 + 2k$

$$\begin{aligned} |\beta_{N-k+j}^{(N)}| &\leq \sum_{l=0}^k C(N-k+j, k, l) |u_{N+j-2l}| \\ &\leq \varepsilon \sum_{l=0}^k \sqrt{\binom{N-k+j}{l} \binom{k}{l} \binom{N+j-2l}{k-l}} (N+j-2l)^{-k/2} \\ &= \varepsilon \sum_{l=0}^k \frac{\sqrt{k!}}{l!(k-l)!} \sqrt{\frac{(N-k+j)!(N+j-2l)!}{(N-k+j-l)!(N-k+j-l)!}} (N+j-2l)^{-k/2}. \end{aligned}$$

In den von N abhängigen Termen $\frac{(N-k+j)!}{(N-k+j-l)!}$ und $\frac{(N+j-2l)!}{(N-k+j-l)!}$ kommt N jeweils mit der höchsten Potenz l und $k-l$ vor, d. h. der Term unter der Wurzel ist ein Polynom in N mit höchster Potenz k . Damit ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \dots, 2k$ die Summe endlich und konvergiert gegen eine Konstante für $N \rightarrow \infty$. Damit existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Summe durch eine Konstante $c > 0$ für alle $j = 1, \dots, 2k$ und alle $N \geq N_0$ abschätzen lässt. Zusammengenommen ergibt sich damit für alle Indizes $n = N - k + 1, \dots, N + k$

$$|\beta_n^{(N)}| \leq \varepsilon c \quad \text{für alle } N \geq \max\{n_0 + 2k, N_0\}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden konnte, folgt die Aussage. \square

Dieser Satz 3.31 zeigt also, dass in Abhängigkeit von der Konvergenzrate der Chaoskoeffizienten von η die Produkte $(^{(N)}\eta\xi^k)_N$ im Quadratmittel konvergieren. Mit der Aussage des Satzes 3.25 über die Abklingrate der polynomiellen Chaoskoeffizienten, lässt sich dann schlussfolgern, dass für alle $\eta = u(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit $u \in H^n(\mathbb{R}, d\Phi)$, $n \in \mathbb{N}$, die Folgen der Produkte $(^{(N)}\eta\xi^k)_N$ für alle $k = 1, \dots, n$ im Quadratmittel gegen $\eta\xi^n$ konvergieren. Das folgende Beispiel gibt eine Zufallsgröße an, für die diese Produkte sogar für alle $k \in \mathbb{N}$ im $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ konvergieren. Es wird aber auch eine Zufallsgröße angeführt, bei der beispielsweise für $k = 2$ die Konvergenz nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.32

- (a) Sei die Zufallsgröße $\eta = \exp(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren zugehörige Chaosapproximation $(^{(N)}\eta)_{N \in \mathbb{N}}$ gegeben. Dann konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach obiger Aussage

$$(^{(N)}\eta\xi^k \rightarrow \eta\xi^k, \quad N \rightarrow \infty,$$

da die zugehörigen polynomiellen Chaoskoeffizienten (vgl. Tabelle 3.2 oder auch Anhang A.1) schneller als exponentiell gegen Null abfallen.

- (b) Eine Zufallsgröße η , für die für $k = 2$ diese Konvergenz der Produkte nicht erfüllt ist, ist gegeben durch

$$\eta := \begin{cases} \xi - 1, & \xi < 0, \\ \xi + 1, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Die Funktion u mit $\eta = u(\xi)$ ist somit nicht stetig, was eine algebraische Konvergenzrate der zugehörigen polynomiellen Chaoskoeffizienten impliziert (siehe Proposition 3.28 und die Bemerkung danach). Da in diesem Falle für $n \in \mathbb{N}_0$ die Chaoskoeffizienten $(u_n)_n$ sogar explizit angegeben werden können (siehe Anhang A.1)

$$u_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & n = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-2)!!, & n > 1, \text{ } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

lässt sich die entsprechende Konvergenzrate für die Beträge der Chaoskoeffizienten $u_n \neq 0$ analytisch bestimmen zu $|u_n| \simeq cn^{-3/4}$, $n \rightarrow \infty$, mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$. Damit konvergiert $(^{(N)}\eta \text{He}_2(\xi))/\sqrt{2}$ nach Satz 3.31 nicht im Quadratmittel gegen $\eta \text{He}_2(\xi)/\sqrt{2}$ für $N \rightarrow \infty$. Dies erkennt man auch daran, dass die

Folge $(^{(N)}\eta \text{He}_2(\xi)/\sqrt{2})_N$ keine Cauchy-Folge ist. Betrachtet man beispielsweise für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| {}^{(2m+1)}\eta \frac{\text{He}_2(\xi)}{\sqrt{2}} - {}^{(2m)}\eta \frac{\text{He}_2(\xi)}{\sqrt{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\| u_{2m+1} \frac{\text{He}_{2m+1}(\xi) \text{He}_2(\xi)}{\sqrt{2(2m+1)!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= u_{2m+1}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{2m+1}^2(\xi) \text{He}_2^2(\xi)}{2(2m+1)!} \right), \end{aligned}$$

dann lässt sich unter Verwendung der Formel (2.8) der Erwartungswert berechnen zu

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{2m+1}^2(\xi) \text{He}_2^2(\xi)}{2(2m+1)!} \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\sum_{l_1=0}^{2m+1} C(2m+1, 2m+1, l_1) \frac{\text{He}_{4m+2-2l_1}(\xi)}{\sqrt{(4m+2-2l_1)!}} \sum_{l_2=0}^2 C(2, 2, l_2) \frac{\text{He}_{4-2l_2}(\xi)}{\sqrt{(4-2l_2)!}} \right) \\ &= \sum_{l_2=0}^2 \sum_{l_1=0}^{2m+1} C(2m+1, 2m+1, l_1) C(2, 2, l_2) \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{4m+2-2l_1}(\xi)}{\sqrt{(4m+2-2l_1)!}} \frac{\text{He}_{4-2l_2}(\xi)}{\sqrt{(4-2l_2)!}} \right). \end{aligned}$$

Nutzt man nun die Orthonormalitätseigenschaft aus, so erhält man die Bedingung, dass außer für $l_1 = 2m - 1 + l_2$ alle Ausdrücke Null sind und die Summe vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{2m+1}^2(\xi) \text{He}_2^2(\xi)}{2(2m+1)!} \right) \\ &= \sum_{l_2=0}^2 C(2m+1, 2m+1, 2m-1+l_2) C(2, 2, l_2) = 3(2m+1)^2 + 2m + 2. \end{aligned}$$

Mit $|u_{2m+1}| \simeq c(2m+1)^{-3/4}$, $n \rightarrow \infty$ ergibt sich so, dass der Fehlerterm

$$\begin{aligned} \left\| {}^{(2m+1)}\eta \frac{\text{He}_2(\xi)}{\sqrt{2}} - {}^{(2m)}\eta \frac{\text{He}_2(\xi)}{\sqrt{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= u_{2m+1}^2 \left(3(2m+1)^2 + 2m + 2 \right) \\ &\simeq C(2m+1)^{-3/2} (2m+1)^2, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

von der Ordnung $C\sqrt{2m+1}$ mit einer Konstanten $C > 0$ ist und somit nicht gegen Null konvergieren kann für $m \rightarrow \infty$.

Damit ist $(^{(N)}\eta \text{He}_2(\xi)/\sqrt{2})_N$ keine Cauchy-Folge und deshalb auch nicht konvergent in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Fall b). Im zweiten Fall seien $\eta = u(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta)_N$ bzw. $(^{(N)}u(\xi))_N$ und die Zufallsgröße $\zeta = v(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ gegeben, sodass $\eta\zeta \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gilt, und es wird das Produkt der Form $(^{(N)}\eta\zeta)_N$ bzw. $(^{(N)}u(\xi)v(\xi))_N$ betrachtet. Für die Konvergenz dieser Folge gegen $\eta\zeta = u(\xi)v(\xi)$ in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ kann folgende Abschätzung mit Hilfe der Hölder-Ungleichung

$$\| (^{(N)}\eta\zeta - \eta\zeta) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| (^{(N)}\eta - \eta) \|_{L^{2p}(\Omega)} \| \zeta \|_{L^{2q}(\Omega)}$$

für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ verwendet werden. Die Quadratmittelkonvergenz lässt sich demnach schlussfolgern, wenn $\|\zeta\|_{L^{2q}(\Omega)} < \infty$ gilt und die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen von η auch in $L^{2p}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen η konvergiert.

Die Konvergenz der polynomiellen Chaoskoeffizienten folgt nicht automatisch wie im Fall a), da für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(({}^{(N)}u(\xi)v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \leq \|{}^{(N)}u(\xi) - u(\xi)\|_{L^2(\Omega)} \left\| v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Der erste Term geht nun zwar nach Voraussetzung gegen Null, jedoch muss der zweite im Allgemeinen nicht beschränkt sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.33 Sei $\zeta := v(\xi)$ mit

$$v(x) := \begin{cases} \frac{\exp(x^2/4)}{x}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $v(\xi) \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, aber $v(\xi)\xi = v(\xi)\text{He}_1(\xi) \notin L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Für die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n^{(N)})_n$ von $({}^{(N)}u(\xi)v(\xi))$ liefert die Produktformel (2.8)

$$\begin{aligned} \beta_n^{(N)} &:= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(({}^{(N)}u(\xi)v(\xi)) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(v(\xi) \sum_{k=0}^N u_k \frac{\text{He}_k(\xi)}{\sqrt{k!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^N u_k \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(v(\xi) \sum_{l=0}^{n \wedge k} C(n, k, l) \frac{\text{He}_{n+k-2l}(\xi)}{\sqrt{(n+k-2l)!}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{n \wedge k} C(n, k, l) u_k v_{n+k-2l}. \end{aligned}$$

Liegt die Konvergenz der polynomiellen Chaoskoeffizienten von $({}^{(N)}u(\xi)v(\xi))$ gegen die von $u(\xi)v(\xi)$ vor, so erhält man für $u(\xi)v(\xi)$ die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ als Grenzwert

$$\beta_n := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u(\xi)v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_n^{(N)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n \wedge k} C(n, k, l) u_k v_{n+k-2l}.$$

Fall c). In diesem Fall seien $\eta = u(\xi), \zeta = v(\xi) \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen $({}^{(N)}\eta)_N$ bzw. $({}^{(N)}u(\xi))_N$ und $({}^{(M)}\zeta)_M$ bzw. $({}^{(M)}v(\xi))_M$ gegeben, sodass $\eta\zeta \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gilt und betrachtet werden soll das Produkt der Form $({}^{(N)}\eta{}^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ bzw. $({}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi))_{(N,M)}$. Für die Quadratmittelkonvergenz dieser Doppelfolge gegen $\eta\zeta = u(\xi)v(\xi)$ in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ liefert z. B. folgende mögliche Abschätzung

$$\begin{aligned} \|({}^{(N)}\eta{}^{(M)}\zeta - \eta\zeta)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|({}^{(N)}\eta{}^{(M)}\zeta - \eta{}^{(M)}\zeta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta{}^{(M)}\zeta - \eta\zeta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|({}^{(N)}\eta - \eta)\|_{L^{2p}(\Omega)} \|({}^{(M)}\zeta)\|_{L^{2q}(\Omega)} + \|({}^{(M)}\zeta - \zeta)\|_{L^{2r}(\Omega)} \|\eta\|_{L^{2s}(\Omega)} \end{aligned}$$

für $1 \leq p, q, r, s \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ ein Argument. Wenn nämlich sowohl

$$\|\eta\|_{L^{2s}(\Omega)} < \infty \quad \text{als auch} \quad \|({}^{(M)}\zeta)\|_{L^{2q}(\Omega)} \leq C < \infty$$

für alle $M \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge der polynomiellen Chaosapproximationen von η in $L^{2p}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen η und die von ζ in $L^{2r}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ gegen ζ konvergiert, lässt sich die Quadratmittelkonvergenz für $(N, M) \rightarrow \infty$ schlussfolgern.

Für die polynomiellen Chaoskoeffizienten gilt wiederum

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)^{(M)v(\xi)} - u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\
& \leq \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)^{(M)v(\xi)} - \binom{(N)u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}}}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\
& \quad + \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)v(\xi) - u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\
& \leq \left\| \binom{(M)v(\xi) - v(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \binom{(N)u(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \binom{(N)u(\xi) - u(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bzw. analog

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)^{(M)v(\xi)} - u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\
& \leq \left\| \binom{(N)u(\xi) - u(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \binom{(M)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \binom{(M)v(\xi) - v(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Bildet man in Formel (3.9) also zunächst den Grenzwert für M bei festem N (bzw. in Ausdruck (3.10) für N bei festem M), geht jeweils der erste Summand gegen Null, da das Produkt aus Hermite-Polynom und einer Zufallsgröße mit endlicher Chaosentwicklung stets ein endliches absolutes zweites Moment besitzt. Problematischer ist der zweite Summand. Dass das Produkt aus Hermite-Polynom und einer beliebigen Zufallsgröße im Allgemeinen nämlich (bis auf den trivialen Fall für $\text{He}_0(\xi)$) nicht in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ enthalten sein muss, ist in dem Beispiel 3.33 gezeigt und muss darum zusätzlich gefordert werden. Die Rollen von N und M können jedoch, wie gesehen, vertauscht werden.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich der n -te polynomielle Chaoskoeffizient von $\binom{(N)\eta^{(M)}\zeta}{\sqrt{n!}}$ zu

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)^{(M)v(\xi)} - u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right).$$

Unter Verwendung der Formel (2.12) für den Erwartungswert dreier Hermite-Polynome oder durch Verwendung der Produktformel (2.8)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(N)u(\xi)^{(M)v(\xi)} - u(\xi)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(M)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^N u_k \frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!} \sqrt{n!}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^N u_k \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\binom{(M)v(\xi)}{\sqrt{n!}} \sum_{l=0}^{n \wedge k} C(n, k, l) \frac{\text{He}_{n+k-2l}(\xi)}{\sqrt{(n+k-2l)!}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{n \wedge k} C(n, k, l) u_k v_{n+k-2l} \mathbb{1}_{\{n+k-2l \leq M\}} \\
&= \sum_{m=0}^M \sum_{l=0}^{n \wedge m} C(n, m, l) v_m u_{n+m-2l} \mathbb{1}_{\{n+m-2l \leq N\}}
\end{aligned}$$

lassen sich die polynomiellen Chaoskoeffizienten von ${}^{(N)}\eta^{(M)}\zeta = {}^{(N)}u(\xi)^{(M)}v(\xi)$ berechnen. Im Folgenden interessiert wieder eine Darstellung der polynomiellen Chaoskoeffizienten

$$\beta_n := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta\zeta \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

des Produktes $\eta\zeta$ in Termen der polynomiellen Chaoskoeffizienten der einzelnen Faktoren.

Proposition 3.34 *Seien $\eta, \zeta, \eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Dann ist der nullte polynomielle Chaoskoeffizient des Produktes $\eta\zeta$ durch*

$$\beta_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N u_k v_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k$$

bestimmt.

Ist für $n \in \mathbb{N}$ zusätzlich die Bedingung

$$\left\| v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty$$

erfüllt, dann gilt für den n -ten polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\eta\zeta$

$$\beta_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^N \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^M u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right) \right] \right]$$

bzw.

$$\beta_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^M \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^N u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right) \right] \right].$$

Beweis.

Dies folgt direkt aus den Ungleichungen (3.9) bzw. (3.10). □

Bemerkung 3.35 *Für die Berechnung der n -ten polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\eta\zeta$ kommt es also auf die Art und Weise der Grenzwertbildung an. So können nach Proposition 3.34 die Größen N und M nicht auf beliebigen Wegen gegen Unendlich gehen.*

In Proposition 3.34 gilt für $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\beta_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{k+n} u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right)$$

bzw.

$$\beta_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{m+n} u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right),$$

da das m -te Hermite-Polynom orthogonal zu $\text{He}_k(\xi) \text{He}_n(\xi)$ für $m > n + k$ ist bzw. das k -te Hermite-Polynom zu $\text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)$ für $k > n + m$.

Die Reihenfolge der Grenzwerte spielt keine Rolle, wenn die Quadratmittelkonvergenz von $({}^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ gegen $\eta\zeta$ vorliegt, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.36 Seien $\eta, \zeta, \eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Konvergiert zudem die Doppelfolge $(^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ für $(N, M) \rightarrow \infty$ im quadratischen Mittel gegen $\eta\zeta$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M u_k v_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right) \rightarrow \beta_n \quad \text{für } (N, M) \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Dies folgt unmittelbar aus der Quadratmittelkonvergenz für $(N, M) \rightarrow \infty$ aus

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left(^{(N)}\eta^{(M)}\zeta - \eta\zeta \right) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \leq \| ^{(N)}\eta^{(M)}\zeta - \eta\zeta \|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

□

Das folgende Beispiel soll diesen Sachverhalt noch einmal veranschaulichen.

Beispiel 3.37 Sei $\eta = \zeta = u(\xi)$ mit $u(x) = |x|$. Dann ist $\eta\zeta = |\xi|^2 = \xi^2 \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und es gilt ebenfalls $|\xi| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich nach Proposition 3.34 und der Bemerkung danach für die polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_n$ von ξ^2 die Beziehung

$$\beta_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^{k+n} u_k u_m \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{k!m!n!}} \right).$$

Andererseits konvergiert $(^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)} = (^{(N)}\eta^{(M)}\eta)_{(N,M)}$ nicht im Quadratmittel gegen $\eta\zeta$, da $(^{(N)}\eta)_N$ nicht im vierten Mittel gegen η konvergiert (siehe Korollar 3.15 und die Berechnungen bei Field und Grigoriu in [37]).

Neben dieser Formel für die Bestimmung der Chaoskoeffizienten gibt es auch noch eine andere – eine zweite – Darstellungsmöglichkeit, die beispielsweise in Arbeiten von Rozovskii et al. [62, 75] oder auch bei Wuan [105, Theorem 2.3] zu finden ist. Dort wird für den n -ten polynomiellen Chaoskoeffizienten β_n des Produktes $\eta\zeta$ der Ausdruck

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{n-j+p} v_{j+p} \tag{3.11}$$

mit $B(n, j, p) := \left(\binom{n}{j} \binom{j+p}{p} \binom{n-j+p}{p} \right)^{1/2}$ verwendet. Allerdings ergibt sich auch hier die Schwierigkeit, dass diese Formel nicht immer die polynomiellen Chaoskoeffizienten des Produktes beschreibt. Das heißt, diese Formel kann nur unter bestimmten Bedingungen angewendet werden. Für die Herleitung der Formel (3.11) wird wieder bei dem Produkt der Chaosapproximationen $(^{(N)}\eta^{(M)}\zeta = ^{(N)}u(\xi)^{(M)}v(\xi))$ begonnen und o. B. d. A. kann angenommen werden, dass $N \geq M$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} ^{(N)}u(\xi)^{(M)}v(\xi) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M u_k v_m \frac{\text{He}_k(\xi) \text{He}_m(\xi)}{\sqrt{k!m!}} = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{k \wedge m} u_k v_m C(k, m, p) \frac{\text{He}_{k+m-2p}(\xi)}{\sqrt{(k+m-2p)!}} \\ &= \sum_{p=0}^M \sum_{k=p}^N \sum_{m=p}^M u_k v_m C(k, m, p) \frac{\text{He}_{k+m-2p}(\xi)}{\sqrt{(k+m-2p)!}} \end{aligned}$$

unter Verwendung der Formel für das Produkt zweier Hermite-Polynome (2.8). Seien nun $j = k - p$ und $i = m - p$, dann erhält man

$${}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^{N-p} \sum_{i=0}^{M-p} u_{j+p}v_{i+p}C(j+p, i+p, p) \frac{\text{He}_{j+i}(\xi)}{\sqrt{(j+i)!}}.$$

Die weitere Transformation $l = j + i$ führt auf

$${}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^{N-p} \sum_{l=j}^{M-p+j} u_{j+p}v_{l-j+p}C(j+p, l-j+p, p) \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}} \quad (3.12)$$

und der Faktor $C(j+p, l-j+p, p)$ entspricht gerade $B(l, j, p)$ aufgrund von

$$C(j+p, l-j+p, p) = \left(\binom{j+p}{p} \binom{l-j+p}{p} \binom{l}{j} \right)^{1/2} = B(l, j, p).$$

Mit dem Vertauschen der Summationsreihenfolge von j und l ergibt sich dann

$$\begin{aligned} {}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi) &= \sum_{p=0}^M \sum_{l=0}^{M-p} \sum_{j=0}^l B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}} \\ &\quad + \sum_{p=0}^M \sum_{l=M-p+1}^{N-p} \sum_{j=l-M+p}^l B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}} \\ &\quad + \sum_{p=0}^M \sum_{l=N-p+1}^{M+N-2p} \sum_{j=l-M+p}^{N-p} B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}}. \end{aligned}$$

Diese drei Summanden werden der Übersichtlichkeit halber einzeln betrachtet und erhalten dafür eine extra Bezeichnung

$$\begin{aligned} S_1(\xi) &:= \sum_{p=0}^M \sum_{l=0}^{M-p} \sum_{j=0}^l B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}} = \sum_{l=0}^M \sum_{p=0}^{M-l} \sum_{j=0}^l B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}}, \\ S_2(\xi) &:= \sum_{p=0}^M \sum_{l=M-p+1}^{N-p} \sum_{j=l-M+p}^l B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}}, \\ S_3(\xi) &:= \sum_{p=0}^M \sum_{l=N-p+1}^{M+N-2p} \sum_{j=l-M+p}^{N-p} B(l, j, p) u_{j+p} v_{l-j+p} \frac{\text{He}_l(\xi)}{\sqrt{l!}}. \end{aligned}$$

Die polynomiellen Chaoskoeffizienten von ${}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi)$ ergeben sich dann durch das Bilden des entsprechenden Erwartungswertes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}u(\xi){}^{(M)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \\ = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_1(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_2(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_3(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O. B. d. A. wird im Weiteren $M \geq n$ angenommen. Betrachtet man die Summanden einzeln dann erhält man die Ausdrücke

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_1(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = \sum_{p=0}^{M-n} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_2(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) &= \sum_{p=0 \vee (M-n+1)}^{M \wedge (N-n)} \sum_{j=n-M+p}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \\
&= \sum_{p=M-n+1}^{M \wedge (N-n)} \sum_{j=n-M+p}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_3(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) &= \sum_{p=0 \vee (N-n+1)}^{M \wedge (\lfloor \frac{M+N-n}{2} \rfloor)} \sum_{j=n-M+p}^{N-p} B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \\
&= \sum_{p=N-n+1}^{M \wedge (\lfloor \frac{M+N-n}{2} \rfloor)} \sum_{j=n-M+p}^{N-p} B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

wobei $0 \vee k := \max\{0, k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, ist. Die Formel (3.11) entspricht also dem ersten Summanden (3.14) für $M \rightarrow \infty$. Das bedeutet, wenn die Formel (3.11) die polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\eta\zeta$ ausdrücken soll, müssen die beiden anderen Terme (3.15) und (3.16) gegen Null gehen für $N, M \rightarrow \infty$. Lediglich für $n = 0$ sind diese beiden Erwartungswerte (3.15) und (3.16) Null. Schon für $n = 1$ verschwindet nur noch der dritte Term (3.15).

Proposition 3.38 *Seien $\eta, \zeta, \eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Dann gilt*

$$\beta_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^0 B(0, j, p) u_{j+p} v_{0-j+p} = \sum_{p=0}^{\infty} u_p v_p.$$

Sind für $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen

$$\left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \left\| v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty$$

und

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| < \infty \tag{3.17}$$

erfüllt, dann gilt ebenfalls

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}.$$

Beweis.

Die erste Aussage für $n = 0$ folgt aus

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi) \right) \right| \\
&\leq \left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| {}^{(N)}u(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| {}^{(N)}u(\xi) - u(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v(\xi)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

und Formel (3.13), da bei den Erwartungswerten (3.15) und (3.16) jeweils über die leere Menge summiert wird.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach Voraussetzung ein $K_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\sum_{p=K}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } K \geq K_0.$$

Des Weiteren existiert ein $M_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}^{-1} \quad \text{für alle } M \geq M_0.$$

O. B. d. A. werde angenommen, dass $N \geq M$ ist, und sei $M_1 := \max\{K_0 + n - 1, M_0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p=0}^{M-n} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right| \\ & \leq \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_1(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Bildet man nun für festes $M \in \mathbb{N}_0$ auf beiden Seiten den Grenzwert für $N \rightarrow \infty$, so ergibt sich zum einen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_1(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_2(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right|,$$

da $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_3(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = 0$ ist, und zum anderen nach Formel (3.10)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \leq \left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Diese beiden Aussagen zusammengenommen liefern unter Verwendung von Formel (3.15)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p=0}^{M-n} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right| \\ & \leq \left| \sum_{p=M-n+1}^M \sum_{j=n-M+p}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| + \left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \sum_{p=M-n+1}^M \sum_{j=n-M+p}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| + \left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \sum_{p=M-n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| + \left\| {}^{(M)}v(\xi) - v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $M \geq M_1$.

Gilt $\left\| v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty$, dann vertauscht man einfach die Rollen von N und M und der Beweis verläuft analog. \square

Die Voraussetzungen in dieser Proposition für die Gültigkeit der Darstellungsformel (3.11) für die polynomiellen Chaoskoeffizienten des Produktes sind wegen der zusätzlichen Bedingung (3.17) stärker als die für die andere Formel in Proposition 3.34. Mit anderen Worten,

man stellt die Umordnung der Reihe für die polynomiellen Chaoskoeffizienten des Produktes sicher, indem man bekanntermaßen fordert, dass die Reihe absolut konvergent ist. Das folgende Beispiel zeigt, was passieren kann, wenn diese zusätzliche Voraussetzung (3.17) nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.39 Seien die Zufallsgrößen $\eta = \zeta = u(\xi) = v(\xi) = |\xi|$ gegeben. Dann ist das Produkt $\eta\zeta = |\xi|^2 = \xi^2 \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ (vgl. Beispiel 3.37). Die polynomiellen Chaoskoeffizienten für $n \in \mathbb{N}_0$ sind der Gestalt (nach Anhang A.1)

$$u_n = v_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} \sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi}(n-1)2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2}\right)!}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad \beta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sqrt{2}, & n = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n < 6$ und alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ entspricht die Formel (3.11) den Chaoskoeffizienten β_n . Betrachtet man jedoch $n = 6$, so ergibt sich nicht

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 B(6, j, p) u_{6-j+p} u_{j+p} = 0.$$

Stattdessen erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 B(6, j, p) u_{6-j+p} u_{j+p} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} 2B(6, 0, 2p) u_{2p+6} u_{2p} + 2B(6, 1, 2p+1) u_{2p+6} u_{2p+2} \\ & \quad + 2B(6, 2, 2p) u_{2p+4} u_{2p+2} + B(6, 3, 2p+1) u_{2p+4} u_{2p+4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \left(\frac{-2(2p+3)(2p+1)}{30(2p-1)} + \frac{2(2p+3)}{5} - (2p+1) + \frac{2(2p+1)}{3} \right) \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{15\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{p-1}{2p-1} > 0, \end{aligned}$$

da für $p = 1$ der Summand Null ist und alle anderen Summanden echt größer Null sind. Es gilt sogar

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 B(6, j, p) u_{6-j+p} u_{j+p} = \infty.$$

Dazu wird für $a_p := \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{p-1}{2p-1}$ der Quotient

$$\frac{a_p}{a_{p+1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{p-1}{2p-1} \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+2)!} \frac{2p+1}{p} = \frac{2p^2-2}{2p^2-p} = 1 + \frac{1}{p} \left(\frac{p-2}{2p-1} \right)$$

betrachtet. Der Grenzwert von

$$\ln(p) \left[p \left(\frac{a_p}{a_{p+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \ln(p) \left[\frac{p-2}{2p-1} - 1 \right]$$

ist dann gerade $-\infty$. Nach dem Bertrandschen Kriterium (siehe z. B. bei Fichtenholz [36]) folgt dann, dass die Reihe bestimmt divergent ist.

Das bedeutet, dass für die polynomiellen Chaoskoeffizienten des Produktes nach Beispiel 3.37 die Formel (3.8) die richtigen Ergebnisse liefert, wohingegen die Formel (3.11) nicht anwendbar ist.

Im Folgenden wird nun noch einmal zur Gleichung (3.13) zurückgegangen. Geht man in dieser Gleichung (3.13) von M zu $M+n$ über und fordert $N \geq M+2n$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left({}^{(N)}u(\xi) {}^{(M+n)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \\ = \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} + \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

da der dritte Summand $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(S_3(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) = 0$ ist für $N-n+1 > M$, d. h. für $N > M+n-1$. Des Weiteren lässt sich nachrechnen, dass mit Formel (2.12)

$$\begin{aligned} B(n, j, p) &= \left(\binom{j+p}{p} \binom{n-j+p}{p} \binom{n}{j} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{(j+p)!(n-j+p)!n!}}{j!p!(n-j)!} \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\text{He}_{j+p}(\xi) \text{He}_{n-j+p}(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{(j+p)!(n-j+p)!n!}} \right) \end{aligned}$$

für $p \geq 0$ und $0 \leq j \leq n$ ist. Damit ergibt sich

$$B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u_{j+p} v_{n-j+p} \frac{\text{He}_{j+p}(\xi) \text{He}_{n-j+p}(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{(j+p)!(n-j+p)!n!}} \right)$$

und ferner gilt

$$\begin{aligned} u_K v_L \frac{\text{He}_K(\xi) \text{He}_L(\xi)}{\sqrt{K!L!}} &= ({}^{(K)}u(\xi) - ({}^{(K-1)}u(\xi)) ({}^{(L)}v(\xi) - ({}^{(L-1)}v(\xi))) \\ &= ({}^{(K)}u(\xi) {}^{(L)}v(\xi) - ({}^{(K-1)}u(\xi) {}^{(L)}v(\xi) \\ &\quad - ({}^{(K)}u(\xi) {}^{(L-1)}v(\xi) + ({}^{(K-1)}u(\xi) {}^{(L-1)}v(\xi))). \end{aligned}$$

Kombiniert man diese beiden Beziehungen, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| \\ &\leq \left\| u_{j+p} v_{n-j+p} \frac{\text{He}_{j+p}(\xi) \text{He}_{n-j+p}(\xi)}{\sqrt{(j+p)!(n-j+p)!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| (j+p)u(\xi) {}^{(n-j+p)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi) {}^{(n-j+p)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| (j+p)u(\xi) {}^{(n-j+p-1)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi) {}^{(n-j+p-1)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Summiert man zusätzlich über diesen Ausdruck, so führt dies auf folgende Abschätzung für

$$\left| \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \leq \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left[\sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n \left\| (j+p)u(\xi)^{(n-j+p)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi)^{(n-j+p)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &+ \left. \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n \left\| (j+p)u(\xi)^{(n-j+p-1)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi)^{(n-j+p-1)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \right]. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt nun, dass im Falle der Quadratmittelkonvergenz der Doppelfolge $((^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)})$ gegen $\eta\zeta$ für $(N, M) \rightarrow \infty$, die Formel (3.11) den polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\eta\zeta$ entspricht.

Satz 3.40 *Seien $\eta = u(\xi), \zeta = v(\xi), \eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Konvergiert zudem die Folge $((^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}) = ((^{(N)}u(\xi)^{(M)}v(\xi))_{(N,M)})$ für $(N, M) \rightarrow \infty$ im quadratischen Mittel gegen das Produkt $\eta\zeta$, dann können dessen polynomielle Chaoskoeffizienten durch*

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit $B(n, j, p) = \binom{j+p}{p} \binom{n-j+p}{p} \binom{n}{j}^{1/2}$ dargestellt werden.

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es $N_0, M_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left\| (^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0, M \geq M_0$$

gilt, und weiter existieren $N_1, M_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left\| (^{(N_a)}u(\xi)^{(M_a)}v(\xi) - (^{(N_b)}u(\xi)^{(M_b)}v(\xi)) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } N_a, N_b \geq N_1, M_a, M_b \geq M_1$$

ist, und es wird

$$M_{max} := \max\{M_0, M_1, N_1\} \quad \text{und} \quad N_{max} := \max\{M_{max} + 2n, N_0\}$$

gesetzt. Mit der Gleichung (3.18) und der hergeleiteten Abschätzung (3.19) erhält man dann für $M \geq M_{max}, N \geq N_{max}$

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right| \\ &= \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left((^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}) - \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right) \right| \\ &\leq \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(((^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}) \right) \right| + \left| \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \\ &\leq \left\| (^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi)) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left[\sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n \left\| (j+p)u(\xi)^{(n-j+p)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi)^{(n-j+p)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n \left\| (j+p)u(\xi)^{(n-j+p-1)}v(\xi) - (j+p-1)u(\xi)^{(n-j+p-1)}v(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Die einzelnen Indizes können damit die Werte annehmen, die in der folgenden Tabelle veranschaulicht sind.

p	j	$j + p$	$n - j + p$
$M + 1$	$1, \dots, n$	$M + 2, \dots, M + n + 1$	$M + n, \dots, M + 1$
$M + 2$	$2, \dots, n$	$M + 4, \dots, M + n + 2$	$M + n, \dots, M + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$M + n$	n	$M + 2n$	$M + n$

Das bedeutet, dass die beiden Indizes $j + p$ und $n - j + p$ innerhalb der Summen größer als M sind, d. h.

$$j + p > M \quad \text{und} \quad n - j + p > M.$$

Dies impliziert dann

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right| &\leq \varepsilon \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} + 2 \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n \varepsilon \\ &= \varepsilon \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} + 2 \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \frac{n(n+1)}{2} \varepsilon \\ &= \left\| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} (1 + n(n+1)) \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $M \geq M_{max}$, $N \geq N_{max}$. □

Bemerkung 3.41 Die Umkehrung des Satzes 3.40 gilt jedoch nicht. Das heißt, seien wieder $\eta = u(\xi)$, $\zeta = v(\xi)$, $\eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Besitzt ζ eine endliche Chaosentwicklung (Fall a)), dann können die Chaoskoeffizienten von $\eta\zeta$ durch

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit $B(n, j, p) = \left(\binom{j+p}{p} \binom{n-j+p}{p} \binom{n}{j} \right)^{1/2}$ dargestellt werden. Dies sieht man wie folgt:

Sei M_{max} gerade der größte Index, für den $v_m = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(v(\xi) \frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right) \neq 0$ gilt, d. h.

$$M_{max} = \max\{m \in \mathbb{N}_0 : v_m \neq 0\}.$$

Dann ist die Summe für $M \geq M_{max}$

$$\sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} = 0,$$

da alle Summanden wegen $n - j + p > M \geq M_{max}$ gleich Null sind. Analog zum Beweis von Satz 3.40 erhält man dann

$$\left| \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left({}^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) - \sum_{p=M+1}^{M+n} \sum_{j=p-M}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} - \beta_n \right| \\
&= \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left({}^{(N)}u(\xi)^{(M+n)}v(\xi) - u(\xi)v(\xi) \right) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \right| \\
&\leq \left\| {}^{(N)}u(\xi) - u(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(\xi) \text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

für $M \geq M_{\max}$ und N hinreichend groß. Damit folgt die Behauptung.

Insbesondere gilt

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{M_{\max}} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Doch wie schon in Beispiel 3.32(b) gesehen, existieren Zufallsgrößen $\eta = u(\xi), \zeta = v(\xi)$, sodass die Folge der Produkte $({}^{(N)}\eta^{(M_{\max})}\zeta)_N = ({}^{(N)}\eta\zeta)_N$ nicht im Quadratmittel gegen $\eta\zeta$ konvergiert.

Eine relativ starke Bedingung an die Formel (3.11) der polynomiellen Chaoskoeffizienten, um umgekehrt die Konvergenz im Quadratmittel zu folgern, liefert der folgende Satz.

Satz 3.42 Seien $\eta = u(\xi), \zeta = v(\xi), \eta\zeta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und deren polynomielle Chaosapproximationen gegeben mit den entsprechenden obigen Bezeichnungen. Ist zudem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| < \infty$$

erfüllt, dann konvergiert $({}^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ im quadratischen Mittel gegen $\eta\zeta$ und es gilt außerdem

$$\sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta\zeta)^2, \quad (N, M) \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Die Quadratmittelkonvergenz von $({}^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ gegen $\eta\zeta$ folgt aus Gleichung (3.12)

$$\begin{aligned}
\| {}^{(N)}u(\xi)^{(M)}v(\xi) \|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^{N-p} \sum_{n=j}^{M-p+j} B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^{N-p} \sum_{n=j}^{M-p+j} \left\| B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^{N-p} \sum_{n=j}^{M-p+j} |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| \\
&\leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| < \infty \quad \text{für alle } N, M \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Damit gilt auch nach Satz 3.40, dass

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die zweite Behauptung sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n^2 \leq \varepsilon \quad \text{für alle } N \geq N_0.$$

Außerdem gibt es ein $M_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt

$$\sum_{n=0}^N \left| \sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } N, M \geq M_0.$$

Damit erhält man diese Abschätzung auch für jeden Summanden

$$\left| \sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } N, M \geq M_0, n = 0, \dots, N$$

und da $\varepsilon < 1$ ist, gilt zudem

$$\left(\sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \leq \left| \sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right|$$

für alle $N, M \geq M_0, n = 0, \dots, N$. Summiert man über $n = 0, \dots, N$ ergibt sich dann ebenso

$$\sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \leq \sum_{n=0}^N \left| \sum_{p=M}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \leq \varepsilon$$

für alle $N, M \geq M_0$. Sei nun $K_0 := \max\{N_0, M_0\}$ dann erhält man

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 - \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 - \sum_{n=0}^N \beta_n^2 \right| + \left| \sum_{n=0}^N \beta_n^2 - \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \right| \\ & \leq \varepsilon + \left| \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 - \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \right| \\ & \leq \varepsilon + \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=M+1}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \\ & \quad + 2 \left| \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=M+1}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right) \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right) \right| \\ & \leq 2\varepsilon + 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| \right) \sum_{n=0}^N \left| \sum_{p=M+1}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right| \end{aligned}$$

$$\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| \right) \quad \text{für alle } N, M \geq K_0.$$

Da $0 < \varepsilon < 1$ beliebig gewählt werden kann und $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p}| < \infty$ beschränkt ist, folgt die Behauptung. \square

Obwohl die Bedingung in diesem Satz schon recht stark ist, kann im Folgenden ein Beispiel betrachtet werden, in dem dieser Satz zur Anwendung kommen kann.

Beispiel 3.43 *Betrachtet man die lognormalverteilten Zufallsgrößen $\eta = u(\xi) = \exp(a\xi)$ und $\zeta = v(\xi) = \exp(b\xi)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist das Produkt $\eta\zeta = u(\xi)v(\xi) = \exp((a+b)\xi)$ ebenfalls lognormalverteilt und in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ enthalten. Die polynomiellen Chaoskoeffizienten für $n \in \mathbb{N}_0$ aller drei Zufallsgrößen sind bekannt (siehe Anhang A.1)*

$$u_n = \exp(a^2/2) \frac{a^n}{\sqrt{n!}}, \quad v_n = \exp(b^2/2) \frac{b^n}{\sqrt{n!}} \quad \text{und} \quad \beta_n = \exp((a+b)^2/2) \frac{(a+b)^n}{\sqrt{n!}}$$

und $(^{(N)}\eta^{(M)}\zeta)_{(N,M)}$ konvergiert im Quadratmittel gegen $\eta\zeta$ für $(N, M) \rightarrow \infty$, da sowohl $(^{(N)}\eta)_N$ als auch $(^{(M)}\zeta)_M$ in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für alle $p \geq 2$ gegen η bzw. ζ konvergieren. Die Quadratmittelkonvergenz folgt auch nach obigem Satz, da

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n |B(n, j, p) u_{n-j+p} v_{j+p}| \\ &= \exp(a^2/2 + b^2/2) \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n |a|^{n-j+p} |b|^{j+p} \frac{n!}{\sqrt{n!} j! p! (n-j)!} \\ &= \exp(a^2/2 + b^2/2) \sum_{n=0}^N \frac{|a|^n}{\sqrt{n!}} \sum_{p=0}^M \frac{|ab|^p}{p!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left| \frac{b}{a} \right|^j \\ &= \exp(a^2/2 + b^2/2) \sum_{n=0}^N \frac{(|a| + |b|)^n}{\sqrt{n!}} \sum_{p=0}^M \frac{|ab|^p}{p!} \\ &\leq \exp(a^2/2 + b^2/2) \exp(|ab|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|a| + |b|)^n}{\sqrt{n!}} < \infty \end{aligned}$$

für alle $(N, M) \in \mathbb{N}_0^2$ gilt, da die verbleibende Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert.

Damit kann Formel (3.11) angewendet werden und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{n-j+p} v_{j+p} &= \exp(a^2/2 + b^2/2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a^{n-j+p} b^{j+p} \frac{n!}{\sqrt{n!} j! p! (n-j)!} \\ &= \frac{a^n \exp(a^2/2 + b^2/2)}{\sqrt{n!}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ab)^p}{p!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{b}{a} \right)^j \\ &= \frac{a^n \exp(a^2/2 + b^2/2)}{\sqrt{n!}} \exp(ab) \left(1 + \frac{b}{a} \right)^n \\ &= \frac{\exp((a+b)^2/2)}{\sqrt{n!}} (a+b)^n = \beta_n. \end{aligned}$$

Ebenso kann das zweite Moment von $\eta\zeta$ berechnet werden

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=0}^M \sum_{j=0}^n B(n, j, p) u_{j+p} v_{n-j+p} \right)^2 \\
&= \exp(a^2 + b^2) \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a^{2n}}{n!} \left(\sum_{p=0}^M \frac{(ab)^p}{p!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{b}{a} \right)^j \right)^2 \\
&= \exp(a^2 + b^2) \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(a+b)^{2n}}{n!} \right) \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^M \frac{(ab)^p}{p!} \right)^2 \\
&= \exp(a^2 + b^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^{2n}}{n!} \right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ab)^p}{p!} \right)^2 \\
&= \exp(a^2 + b^2) \exp((a+b)^2) \exp(2ab) = \exp(2(a+b)^2) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta\zeta)^2.
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Zufällige Gleichungen

Verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklungen gewannen in den letzten Jahren vor allem durch die stochastischen Galerkin-Verfahren zur näherungsweise Lösung zufälliger Gleichungen, wie z. B. zufälliger algebraischer Gleichungen oder zufälliger (partieller) Differentialgleichungen, an Bedeutung. Mit Ghanem und Spanos [49] begann die Entwicklung der stochastischen Galerkin-Methode unter Verwendung von polynomiellen Chaos (siehe Einleitung in Kapitel 1). Xiu und Karniadakis beobachteten dann an vielen Beispielen [73, 110, 111, 112, 113, 114], dass die Approximationsgüte bzw. Konvergenzgeschwindigkeit der mittels der stochastischen Galerkin-Methode berechneten Näherungen verbessert werden konnte, wenn man ein zum gegebenen Problem passendes verallgemeinertes polynomielles Chaos benutzt. Außerdem wurde begonnen, für die zu lösenden zufälligen Gleichungen eine Lösungstheorie zu entwickeln, da insbesondere für Randwertprobleme zufälliger elliptischer partieller Differentialgleichungen mit Koeffizienten, die sich nicht durch Konstanten von der Null und Unendlich fast sicher beschränken lassen, im Allgemeinen nicht auf die bekannten Sätze aus der Theorie der deterministischen partiellen Differentialgleichungen verwiesen werden kann. Daher blieb bisher auch die Frage der Konvergenz der mittels des standardmäßigen stochastischen Galerkin-Ansatzes berechneten Folge von vermeintlichen Näherungen an die schwache Lösung gegen die selbige in der natürlichen Norm unbeantwortet.

Dieses Kapitel nun behandelt in seinen zwei Abschnitten sowohl algebraische Gleichungen mit zufälligen Koeffizienten als auch stationäre Diffusionsprobleme mit zufälligen Koeffizienten, wobei das Hauptaugenmerk auf letzteren liegt. Neben einer ausführlichen Lösungstheorie für Randwertprobleme zufälliger stationärer Diffusionsgleichungen werden im zweiten Abschnitt A-priori-Fehlerabschätzungen angegeben und Bedingungen formuliert, unter denen die Folge der Lösungen eines geeigneten stochastischen Galerkin-Ansatzes gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergiert. Zudem wird der Einfluss des verwendeten verallgemeinerten polynomiellen Chaos auf die Approximationsqualität der stochastischen Galerkin-Lösung untersucht. Diesem Abschnitt vorangestellt ist eine kurze Abhandlung zu algebraischen Gleichungen mit zufälligen Koeffizienten. Er macht durch einfache Beispiele auf die Probleme des standardmäßigen stochastischen Galerkin-Ansatzes bzw. deren stochastischen Galerkin-Lösungen, die eben in der natürlichen Norm nicht immer gegen die schwache Lösung konvergieren, aufmerksam. Die betrachteten Beispiele werden zudem teilweise in dem Abschnitt zu zufälligen stationären Diffusionsgleichungen wieder aufgegriffen. Die Theorie zu den zufälligen algebraischen Problemen wird allerdings nicht im Detail besprochen, da diese analog zu der für zufällige stationäre Diffusionsprobleme formuliert werden kann. Auch wird ein alternativer stochastischer Galerkin-Ansatz, der eine Folge von stochastischen Galerkin-Lösungen liefert, die in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergiert, erst im zweiten Abschnitt präsentiert.

4.1 Algebraische Gleichungen mit zufälligen Koeffizienten

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ werden in diesem Abschnitt die einfachen algebraischen Gleichungen der Form

$$\kappa u = f \quad \text{f. s.} \quad (4.1)$$

betrachtet. Das heißt, für eine reellwertige Zufallsgröße $\kappa \neq 0$ auf Ω als Koeffizienten und eine reellwertige Zufallsgröße f als rechte Seite ist eine Zufallsgröße u gesucht, die die Gleichung (4.1) fast sicher erfüllt. Die pfadweise Lösung ist natürlich durch

$$u(\omega) = \frac{f(\omega)}{\kappa(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

gegeben und besitzt ein endliches zweites Moment, wenn $f/\kappa \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ist. Da im Weiteren nur Lösungen u mit endlichem zweiten Moment betrachtet werden sollen, wird $f/\kappa \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ vorausgesetzt und der Einfachheit halber zusätzlich angenommen, dass sich der Koeffizient κ und die rechte Seite f als messbare Funktionen genau einer reellwertigen Zufallsgröße ξ darstellen lassen, d. h., es existieren messbare Funktionen $\kappa_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\kappa = \kappa_\xi(\xi) \quad \text{und} \quad f = f_\xi(\xi) \quad \text{f. s.}$$

Eine solche Zufallsgröße ξ wird dann auch Basiszufallsvariable genannt. Ihre Wahl selbst ist jedoch nicht eindeutig. O. B. d. A. soll weiterhin die Zufallsgröße ξ eine stetige Verteilungsfunktion F_ξ besitzen, die Momente beliebiger Ordnung sollen existieren und endlich sein und das Momentenproblem ihrer Verteilung F_ξ soll eindeutig lösbar sein.

Für die Lösung u existiert dann ebenso eine messbare Funktion, z. B. $u_\xi := f_\xi/\kappa_\xi$, sodass die Beziehung

$$u = u_\xi(\xi) \quad \text{f. s.}$$

erfüllt ist. Zusammengefasst ist die Lösung u damit im Raum $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ enthalten.

Neben der pfadweisen Formulierung in (4.1) kann auch das dazugehörige schwache Problem unter Nutzung geeigneter Ansatz- und Testfunktionsräume aufgestellt werden. Dazu multipliziert man die Gleichung (4.1) mit einer beliebigen reellwertigen Zufallsgröße v aus dem Testfunktionsraum, bildet anschließend den Erwartungswert bzgl. \mathbf{P} und sucht eine Zufallsgröße u im Ansatzfunktionsraum, sodass

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u v) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f v) \quad (4.2)$$

für alle v aus dem Testfunktionsraum gilt. Diese Zufallsgröße u wird dann auch schwache Lösung genannt. Ist die pfadweise Lösung im Ansatzfunktionsraum enthalten, so löst sie natürlich auch das schwache Problem, wovon einfachheitshalber im Folgenden immer ausgegangen werden soll. Kann ein schwaches Problem nicht analytisch gelöst werden, so bietet u. a. die stochastische Galerkin-Methode (siehe z. B. auch das Buch von Le Maître und Knio [68]) eine Möglichkeit (numerisch) Näherungslösungen an die exakte Lösung zu berechnen. Auch wenn in dem hier betrachteten Fall die Lösung analytisch durch $u = f/\kappa$ gegeben ist, soll die Funktionsweise und das Verhalten der Galerkin-Methode an dieser einfachen Gleichung (4.1) bzw. (4.2) getestet werden.

Die grobe Idee der (stochastischen) Galerkin-Methode besteht darin, für das (unendlichdimensionale) schwache Problem eine endlichdimensionale Ersatzaufgabe bzw. genauer eine Folge von endlichdimensionalen Ersatzaufgaben zu finden, deren Lösungen ermitelt werden können. Dazu wird sowohl der Ansatzfunktionenraum als auch der Testfunktionenraum in geeigneter Weise diskretisiert. Die entsprechenden endlichdimensionalen Ansatz- bzw. Testfunktionenräume werden im Folgenden mit U_N bzw. V_N bezeichnet. In dieser Arbeit wird die Diskretisierung dabei immer unter Verwendung des verallgemeinerten polynomiellen Chaos (siehe Kapitel 3), d. h. zum Beispiel mit Hilfe orthogonaler/orthonormaler Polynome in der Zufallsgröße ξ , realisiert. Die Lösung $u_N \in U_N$ der entsprechenden Ersatzaufgabe, hier

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u_N v) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f v) \quad \text{für alle } v \in V_N, \quad (4.3)$$

wird dann (stochastische) Galerkin-Lösung N -ter Ordnung genannt. Je nachdem in welchem gewünschten Sinne, das heißt bzgl. welcher gewünschten Norm, u_N als Näherung an u verstanden werden soll, muss natürlich sichergestellt werden, dass zum einen die Gleichungen alle eindeutig lösbar sind und zum anderen die Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen $(u_N)_N$ auch in eben dieser gewünschten Norm gegen die exakte Lösung u konvergiert. Üblicherweise ist diese Norm hier die $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ -Norm, die darum auch natürliche Norm genannt werden soll.

Proposition 4.1 *Sei $u = f/\kappa \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ mit der Basiszufallsvariable ξ wie oben beschrieben. Gibt es außerdem für den Koeffizienten κ Konstanten $\underline{\kappa}, \bar{\kappa} > 0$ mit*

$$0 < \underline{\kappa} \leq \kappa \leq \bar{\kappa} < \infty \quad \text{f. s.}$$

und sei $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der orthonormalen Polynome in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dF_\xi)$ im Sinne von Satz 2.16 (siehe Abschnitt 2.2), dann existiert für alle $N \in \mathbb{N}_0$ ein $u_N \in U_N$, sodass

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u_N v) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f v) \quad \text{für alle } v \in V_N$$

erfüllt ist und wobei die endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume der Gestalt

$$U_N = V_N = \text{span}\{p_n(\xi), n = 0, \dots, N\}$$

sind. Zudem konvergiert die Folge $(u_N)_N$ gegen u für $N \rightarrow \infty$ in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Beweis.

Die Existenz einer eindeutigen Lösung u_N für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ kann mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram (siehe z. B. Brenner/Scott [23, Theorem 2.7.7]) bewiesen werden. Da $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa(u_N - u)v) = 0$ ist für alle $v \in V_N = U_N$, folgt die Konvergenz aus der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} &= \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\underline{\kappa}(u - u_N)^2)}{\underline{\kappa}\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa(u - u_N)^2)}{\underline{\kappa}\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa(u - u_N)(u - {}^{(N)}u))}{\underline{\kappa}\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\bar{\kappa}|u - u_N||u - {}^{(N)}u|)}{\underline{\kappa}\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)}} \\ &\leq \frac{\bar{\kappa}}{\underline{\kappa}}\|u - {}^{(N)}u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei $^{(N)}u$ die verallgemeinerte polynomielle Chaosapproximation der Lösung u bzgl. der orthonormalen Polynome $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ ist (vgl. Kapitel 3), d. h.

$$^{(N)}u = \sum_{n=0}^N \beta_n p_n(\xi) \quad \text{mit} \quad \beta_n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(u p_n(\xi)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(u_\xi(\xi) p_n(\xi)).$$

Da aufgrund der Voraussetzungen an ξ die Polynome $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ nach Satz 3.2 dicht liegen in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$, konvergiert die Folge $(^{(N)}u)_N$ im quadratischen Mittel gegen u , d. h.

$$\|u - ^{(N)}u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Bemerkung 4.2 *Das Finden eines $u_N \in U_N$, sodass*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u_N v) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f v) \quad \text{für alle } v \in V_N$$

mit $U_N = V_N = \text{span}\{p_n(\xi), n = 0, \dots, N\}$ erfüllt ist, ist äquivalent zur der Bestimmung der stochastischen Galerkin-Koeffizienten $(u_i^{(N)})_{i=0, \dots, N}$ in $u_N = \sum_{i=0}^N u_i^{(N)} p_i(\xi)$, sodass gilt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u_N p_j(\xi)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f p_j(\xi)) \quad \text{für alle } j = 0, \dots, N.$$

Das heißt, es muss ein lineares Gleichungssystem

$$A \underline{u} = \underline{f}$$

für die stochastischen Galerkin-Koeffizienten $\underline{u} := [u_0^{(N)}, \dots, u_N^{(N)}]^T$ gelöst werden, wobei $A := (a_{ji})_{j,i=0}^N$ die stochastische Galerkin-Matrix ist und die rechte Seite

$$\underline{f} := [\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f p_0(\xi)), \dots, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f p_N(\xi))]^T$$

die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten von f enthält. Unter Verwendung der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklung von κ ,

$$\kappa = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_n(\xi) \quad \text{mit } \beta_n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa p_n(\xi)),$$

sind die Einträge der stochastischen Galerkin-Matrix $A = (a_{ji})_{j,i=0}^N$ gerade

$$a_{ji} = \sum_{n=0}^{2N} \beta_n \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(p_n(\xi) p_i(\xi) p_j(\xi)) \quad \text{für } j, i = 0, \dots, N.$$

Das heißt, es müssen Erwartungswerte von Dreifachprodukten der orthonormalen Polynome gebildet werden.

Kann der Koeffizient $0 < \kappa < \infty$ f. s. nicht durch Konstanten von Null und Unendlich getrennt werden – speziell von der Null nicht – so zeigen die folgenden Beispiele, dass, wenn der gleiche stochastische Galerkin-Ansatz wie in Proposition 4.1 genutzt wird, d. h., wenn die gleichen endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume verwendet werden, die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen nicht immer im quadratischen Mittel gegen die exakte Lösung konvergieren muss. Ein solcher Koeffizient wäre zum Beispiel gegeben, wenn κ lognormal verteilt ist. Verwendet man also den gleichen stochastischen

Galerkin-Ansatz wie in Proposition 4.1 und betrachtet die stochastische Galerkin-Lösung $u_N \in U_N$ näher, so ist

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa u_N v) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(fv) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa(u_N - u)v) = 0$$

für alle $v \in V_N = U_N$, da die stochastische Galerkin-Lösung u_N nach Definition die Gleichung (4.3) erfüllt. Damit ist die stochastische Galerkin-Lösung u_N die Bestapproximation der Lösung u auf U_N in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa d\mathbf{P})$, falls $u \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa d\mathbf{P})$ ist. Für die Definition und Eigenschaften des Raumes $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa d\mathbf{P})$ sei auf Definition 2.1 und die Bemerkung 2.2 verwiesen. Angenommen es existieren Polynome $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$, die eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \kappa d\mathbf{P})$ bilden, dann lässt sich die stochastische Galerkin-Lösung u_N als die N -te verallgemeinerte polynomielle Chaosapproximation bzgl. der Polynome $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ beschreiben, d. h.

$$u_N = \sum_{n=0}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} \tilde{p}_n(\xi), \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Kennt man zusätzlich die Koeffizienten $c_i^{(n)} := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\tilde{p}_n(\xi)p_i(\xi))$, $i = 0, \dots, n$, in den Entwicklungen der Polynome

$$\tilde{p}_n(\xi) = \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} p_i(\xi), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dann kann eine explizite Darstellungsformel für die stochastischen Galerkin-Koeffizienten $u_i^{(N)}$, $i = 0, \dots, N$, der stochastischen Galerkin-Lösung $u_N = \sum_{i=0}^N u_i^{(N)} p_i(\xi)$ angegeben werden. Es gilt

$$\begin{aligned} u_N &= \sum_{n=0}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} \tilde{p}_n(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} p_i(\xi) = \sum_{i=0}^N p_i(\xi) \sum_{n=i}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$u_i^{(N)} = \sum_{n=i}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} \quad \text{für } i = 0, \dots, N.$$

Durch die Annahme der Existenz und Dichtheit der Polynome $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \kappa d\mathbf{P})$ erhält man die Konvergenz der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen $(u_N)_N$ gegen u für $N \rightarrow \infty$ zunächst nur in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa d\mathbf{P})$. In dem Falle, dass der Koeffizient κ durch eine Konstante von Null getrennt werden kann, folgt die Konvergenz auch in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ (siehe Proposition 4.1). Das maßgebliche Argument dafür ist, dass $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa d\mathbf{P})$ stetig in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ eingebettet werden kann. Diese Eigenschaft geht aber verloren, wenn der Koeffizient nicht mehr durch eine Konstante von Null getrennt werden kann. Die Konvergenz in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ folgt somit nicht mehr automatisch. Ist der Koeffizient auch von Unendlich durch eine Konstante getrennt, dann muss die Existenz und Dichtheit der Polynome $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht extra vorausgesetzt werden.

Würde die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen $(u_N)_N$ trotzdem gegen die exakte Lösung u konvergieren, so müsste auch die Folge ihrer zweiten Momente aufgrund von

$$\left| \|u\|_{L^2(\Omega)} - \|u_N\|_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

gegen das zweite Moment der exakten Lösung konvergieren. Das heißt, es müsste gelten

$$\|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (u_N)^2 = \sum_{i=0}^N (u_i^{(N)})^2 \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 < \infty, \quad N \rightarrow \infty.$$

In den nun folgenden zwei Beispielen wird jedoch dieses zweite Moment – trotz endlichem zweiten Moment der exakten Lösung – nicht nur nicht gegen dieses konvergieren, sondern gegen Unendlich streben.

Beispiel 1. In diesem Beispiel sei der Koeffizient κ und die rechte Seite f gegeben mit

$$\kappa(\omega) = \kappa_\xi(\xi(\omega)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2(\omega)\right) \quad \text{und} \quad f(\omega) = f_\xi(\xi(\omega)) = \exp\left(-\frac{7}{4}\xi^2(\omega)\right)$$

für eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ξ , d. h. $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Der Koeffizient κ lässt sich somit nur nach oben f. s. durch eine Konstante beschränken, d. h.

$$0 < \kappa < 1 \quad \text{f. s.}$$

Die exakte Lösung u ergibt sich damit zu

$$u(\omega) = u_\xi(\xi(\omega)) = \exp\left(-\frac{3}{2}\xi^2(\omega)\right)$$

und besitzt ein endliches zweites Moment. Die im Sinne von Satz 2.16 orthonormalen Polynome bzgl. der Standardnormalverteilung sind die normierten Hermite-Polynome (siehe Abschnitt 2.2.2), d. h.

$$p_n(\xi) := \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und sie liegen dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ nach Satz 3.2. Mit deren Hilfe werden nun üblicherweise die endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume

$$U_N = V_N = \text{span} \left\{ \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}, n = 0, \dots, N \right\}$$

definiert und die zugehörige stochastische Galerkin-Lösung $u_N = \sum_{i=0}^N u_i^{(N)} \frac{\text{He}_i(\xi)}{\sqrt{i!}} \in U_N$ gesucht. Die Polynome, die eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \exp(-\frac{1}{4}\xi^2)d\mathbf{P})$ bilden, sind nach Korollar 2.19 ebenfalls Hermite-Polynome jedoch ausgewertet in einem anderen Argument, d. h.

$$\tilde{p}_n(\xi) := \frac{\text{He}_n(\xi/\sigma)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{mit } \sigma = \sqrt{2/3}.$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten $(u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})}$ mit Hilfe der Variablensubstitution $y = x/\sigma$

$$\begin{aligned} (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} &= \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(x) \frac{\text{He}_n(x/\sigma)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n!}} \kappa_\xi(x) \frac{\exp(-\frac{1}{2}x^2)}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(x) \frac{\text{He}_n(x/\sigma)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{n!}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi}(\sigma y) \frac{\text{He}_n(y)}{\sqrt{n!}} \frac{\exp(-\frac{y^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dy = \sqrt{\sigma} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u_{\xi}(\sigma \xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \\
&= \sqrt{\sigma} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(-\xi^2) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right).
\end{aligned}$$

Die polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\exp(-\xi^2)$ werden im Anhang A.1 berechnet und somit gilt

$$(u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} \frac{(-1)^{n/2} \sqrt{n!}}{\left(\frac{n}{2}\right)! 3^{(n+1)/2}}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entwickelt man die Polynome $\tilde{p}_n(\xi)$ in eine polynomielle Chaosreihe, d. h. in die Polynome $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$, dann erhält man für $n \in \mathbb{N}_0$ mittels Formel (2.10)

$$\tilde{p}_n(\xi) = \frac{\text{He}_n(\xi/\sigma)}{\sqrt{\sigma} \sqrt{n!}} = \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} \frac{\text{He}_i(\xi)}{\sqrt{i!}}$$

mit

$$c_i^{(n)} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/4} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{i!} \left(\frac{n-i}{2}\right)!} 2^{-n} 6^{i/2}, & n+i \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad i = 0, \dots, n.$$

Da die Koeffizienten $(u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})}$ nur für gerade n ungleich Null sind, treten auch nur die $c_i^{(n)}$ mit geradem i auf und damit vereinfacht sich die Darstellung der stochastischen Galerkin-Lösung (vgl. Formel (4.4)) zu

$$u_N = \sum_{i=0}^N \frac{\text{He}_i(\xi)}{\sqrt{i!}} \sum_{n=i}^N (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\text{He}_{2i}(\xi)}{\sqrt{(2i)!}} \sum_{n=i}^{\lfloor N/2 \rfloor} (u, \tilde{p}_{2n}(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_{2i}^{(2n)}.$$

Das zweite Moment ergibt sich dann zu

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(u_N)^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left(\sum_{n=i}^{\lfloor N/2 \rfloor} (u, \tilde{p}_{2n}(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_{2i}^{(2n)} \right)^2$$

mit

$$\begin{aligned}
(u, \tilde{p}_{2n}(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_{2i}^{(2n)} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} \frac{(-1)^n \sqrt{(2n)!}}{n! 3^{(2n+1)/2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/4} \frac{\sqrt{(2n)!}}{\sqrt{(2i)!(n-i)!}} 2^{-2n} 6^i \\
&= \frac{(-1)^n (2n)! 12^{-n} 6^i}{\sqrt{3n!} \sqrt{(2i)!(n-i)!}}.
\end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die stochastische Galerkin-Lösung u_N für verschiedene Ordnungen N berechnet worden und der relative Fehler des zweiten Moments

$$\delta_N^{(2)} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (u_N)^2|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2|}$$

mit $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(-3\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{7}}$ abgetragen. Dabei ist zu beobachten, dass der Fehler mitnichten gegen Null konvergiert sondern gegen Unendlich zu streben scheint. Um die auf

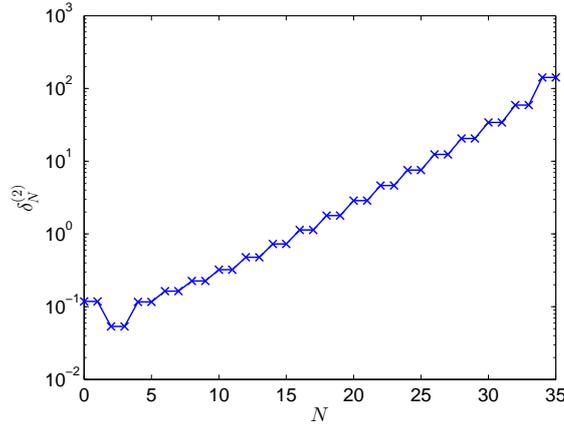


Abb. 4.1: Relativer Fehler $\delta_N^{(2)}$ des zweiten Momentes der stochastischen Galerkin-Lösung zur exakten Lösung.

der numerischen Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung beruhenden Vermutung, dass das zweite Moment dieser stochastischen Galerkin-Lösung gegen Unendlich geht, d. h. für $M = \lfloor N/2 \rfloor$

$$\sum_{i=0}^M \left(\sum_{n=i}^M \frac{(-1)^n (2n)! 12^{-n} 6^i}{\sqrt{3} n! \sqrt{(2i)! (n-i)!}} \right)^2 \rightarrow \infty, \quad M \rightarrow \infty$$

gilt, auch mathematisch exakt zu beweisen, wird ein einzelner Summand dieser Summe betrachtet und zwar der für $i = M - 1$:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=M-1}^M \frac{(-1)^n (2n)! 12^{-n} 6^{M-1}}{\sqrt{3} n! \sqrt{(2(M-1))! (n-(M-1))!}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(-1)^{M-1} (2(M-1))! 12^{-(M-1)} 6^{M-1}}{\sqrt{3} (M-1)! \sqrt{(2(M-1))!}} + \frac{(-1)^M (2M)! 12^{-M} 6^{M-1}}{\sqrt{3} M! \sqrt{(2(M-1))!}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(2M)! 12^{-M} 6^{M-1}}{\sqrt{3} M! \sqrt{(2M-2)!}} \left(\frac{(-1)^{M-1} M 12}{(2M)(2M-1)} + (-1)^M \right) \right)^2 \\ &= \frac{(2M)!^2 2^{-2M}}{108 M!^2 (2M-2)!} \left(\frac{6^2}{(2M-1)^2} - \frac{12}{2M-1} + 1 \right) \\ &= \frac{(2M)!^2 2^{-2M}}{108 M!^2} \left(\frac{6^2 (2M)(2M-1)}{(2M-1)^2} - \frac{24M(2M-1)}{2M-1} + (2M)(2M-1) \right) \\ &= \frac{(2M)!^2 2^{-2M}}{3M!^2} \left(\frac{2M}{2M-1} - \frac{2M}{3} + \frac{M^2}{9} - \frac{M}{18} \right) \\ &= \frac{(2M)!^2 2^{-2M}}{3M!^2} \left(\frac{2M}{2M-1} - \frac{13M}{18} + \frac{M^2}{9} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirling-Formel (siehe z. B. Abramowitz/Stegun [1]) folgt

$$\underbrace{\frac{(2M)!^2 2^{-2M}}{3M!^2}}_{\simeq \frac{c}{\sqrt{M}}} \underbrace{\left(\frac{2M}{2M-1} - \frac{13M}{18} + \frac{M^2}{9} \right)}_{\simeq cM^2} \simeq cM^{3/2}$$

für $M \rightarrow \infty$ mit jeweils geeigneten Konstanten $c > 0$ und damit

$$\sum_{i=0}^M \left(\sum_{n=i}^M \frac{(-1)^n (2n)! 12^{-n} 6^i}{\sqrt{3} n! \sqrt{(2i)! (n-i)!}} \right)^2 \geq \frac{(2M)! 2^{-2M}}{3M!^2} \left(\frac{2M}{2M-1} - \frac{13M}{18} + \frac{M^2}{9} \right) \rightarrow \infty$$

für $M \rightarrow \infty$. ■

Es kann jedoch ebenso ein Beispiel für einen lognormalen Koeffizienten κ gefunden werden, sodass die stochastische Galerkin-Lösung nicht gegen die exakte Lösung konvergiert.

Beispiel 2. Für eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ξ und einen lognormalen Koeffizienten

$$\kappa(\omega) = \kappa_\xi(\xi(\omega)) = \exp(\xi(\omega))$$

ist als rechte Seite

$$f(\omega) = f_\xi(\xi(\omega)) = \exp(\xi(\omega)) |\xi(\omega) - 1|$$

gegeben. Der Koeffizient κ lässt sich im Unterschied zu Beispiel 1 weder von Null noch von Unendlich durch eine Konstante trennen. Die exakte Lösung u ergibt sich dann zu

$$u(\omega) = u_\xi(\xi(\omega)) = |\xi(\omega) - 1| \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P}).$$

Analog zu Beispiel 1 bilden die normierten Hermite-Polynome (siehe Abschnitt 2.2.2)

$$p_n(\xi) := \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n(\xi), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

den Ausgangspunkt zur Definition der endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionsräume

$$U_N = V_N = \text{span} \left\{ \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}, n = 0, \dots, N \right\},$$

in denen die stochastische Galerkin-Lösung berechnet werden soll. Eine Orthonormalbasis des gewichteten Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \exp(\xi) d\mathbf{P})$ ist nach Korollar 2.19 durch die Polynome

$$\tilde{p}_n(\xi) := \frac{e^{-1/4} \text{He}_n(\xi - 1)}{\sqrt{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben. Nach der selben Vorgehensweise wie im Beispiel 1 lassen sich die Koeffizienten mit der Variablensubstitution $y = x - 1$ bestimmen durch

$$\begin{aligned} (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} &= \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(x) \frac{e^{-1/4} \text{He}_n(x-1)}{\sqrt{n!}} \kappa_\xi(x) \frac{\exp(-\frac{1}{2}x^2)}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= e^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(x) \frac{\text{He}_n(x-1)}{\sqrt{n!}} \frac{\exp(-\frac{(x-1)^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= e^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(y+1) \frac{\text{He}_n(y)}{\sqrt{n!}} \frac{\exp(-\frac{y^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dy = e^{1/4} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(u_\xi(\xi+1) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right) \\ &= e^{1/4} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|\xi| \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right). \end{aligned}$$

Die polynomiellen Chaoskoeffizienten von $|\xi|$ sind im Anhang A.1 berechnet, d. h.

$$(u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} = \begin{cases} e^{1/4} \frac{(-1)^{n/2+1} \sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi} 2^{n/2-1} (\frac{n}{2})! (n-1)!}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entwickelt man wiederum die Polynome $\tilde{p}_n(\xi)$ in eine Hermite-Reihe, so erhält man nach Formel (2.9)

$$\tilde{p}_n(\xi) = \frac{e^{-1/4} \text{He}_n(\xi - 1)}{\sqrt{n!}} = \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} \frac{\text{He}_i(\xi)}{\sqrt{i!}}$$

mit

$$c_i^{(n)} = e^{-1/4} \frac{(-1)^{n-i} \sqrt{n!}}{(n-i)! \sqrt{i!}}.$$

Damit ergibt sich

$$(u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} = \begin{cases} e^{1/4} \frac{(-1)^{n/2+1} \sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi} 2^{n/2-1} (\frac{n}{2})! (n-1)!} e^{-1/4} \frac{(-1)^{n-i} \sqrt{n!}}{(n-i)! \sqrt{i!}}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^{3n/2+1-i} n!}{\sqrt{2\pi} 2^{n/2-1} (\frac{n}{2})! (n-1)! (n-i)! \sqrt{i!}}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In Abbildung 4.2 wird wiederum der relative Fehler der N -ten Galerkin-Lösung u_N

$$\delta_N^{(2)} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (u_N)^2|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2|}$$

mit $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\xi - 1)^2 = 2$ dargestellt. Der Fehler strebt erneut nicht gegen Null, sondern lässt abermals eine Divergenz gegen Unendlich vermuten, wenn auch nicht so offensichtlich wie in dem Beispiel zuvor. Um nachzuweisen, dass die Folge der stochastischen

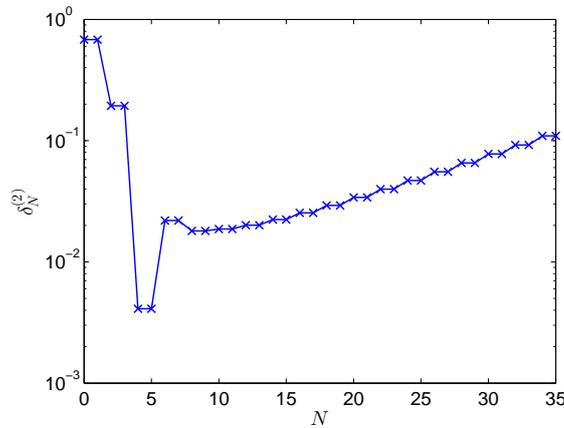


Abb. 4.2: Relativer Fehler $\delta_N^{(2)}$ des zweiten Momentes der stochastischen Galerkin-Lösung zur exakten Lösung.

Galerkin-Lösungen nicht im quadratischen Mittel gegen die exakte Lösung konvergiert,

werden im Folgenden die zweiten Momente der Teilfolge $(u_{2N})_{N \in \mathbb{N}_0}$ unter Verwendung der Darstellungsformel (4.4) betrachtet

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(u_{2N})^2 = \sum_{i=0}^{2N} \left(\sum_{n=i}^{2N} (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} \right)^2.$$

Um zu zeigen, dass für $N \rightarrow \infty$ diese Reihe gegen Unendlich strebt, wird wiederum ein einzelner Summand näher untersucht und zwar der für $i = 2N - 3$:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=2N-3}^{2N} (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} \right)^2 \\ &= \left((u, \tilde{p}_{2N-2}(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_{2N-3}^{(2N-2)} + (u, \tilde{p}_{2N}(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_{2N-3}^{(2N)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(-1)^{N+1}(2N-2)!}{\sqrt{2\pi}2^{N-2}(N-1)!(2N-3)\sqrt{(2N-3)!}} + \frac{(-1)^N(2N)!}{\sqrt{2\pi}2^{N-1}N!(2N-1)3!\sqrt{(2N-3)!}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(2N-2)!}{\sqrt{2\pi}2^{N-1}(N-1)!\sqrt{(2N-3)!}} \left(\frac{(-1)^{N+1}2}{2N-3} + \frac{(-1)^N}{3} \right) \right)^2 \\ &= \frac{(2N-2)!^2}{2\pi 2^{2N-2}(N-1)!^2(2N-3)!} \left(\frac{4}{(2N-3)^2} - \frac{4}{3(2N-3)} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{(2N-2)!2^{-(2N-2)}}{\pi(N-1)!^2} \left(\frac{4(N-1)}{(2N-3)^2} - \frac{4(N-1)}{3(2N-3)} + \frac{N-1}{9} \right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirling-Formel (siehe z. B. Abramowitz/Stegun [1]) folgt

$$\underbrace{\frac{(2N-2)!2^{-(2N-2)}}{\pi(N-1)!^2}}_{\simeq \frac{c}{\sqrt{N}}} \underbrace{\left(\frac{4(N-1)}{(2N-3)^2} - \frac{4(N-1)}{3(2N-3)} + \frac{N-1}{9} \right)}_{\simeq cN} \simeq c\sqrt{N}$$

für $N \rightarrow \infty$ mit jeweils geeigneten Konstanten $c > 0$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(u_{2N})^2 &= \sum_{i=0}^{2N} \left(\sum_{n=i}^{2N} (u, \tilde{p}_n(\xi))_{L^2(\Omega, \kappa d\mathbf{P})} c_i^{(n)} \right)^2 \\ &\geq \frac{(2N-2)!2^{-(2N-2)}}{\pi(N-1)!^2} \left(\frac{4(N-1)}{(2N-3)^2} - \frac{4(N-1)}{3(2N-3)} + \frac{N-1}{9} \right) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für $N \rightarrow \infty$. Da somit eine Teilfolge gefunden wurde, deren zweite Momente nicht gegen das zweite Moment der exakten Lösung konvergieren, kann auch u_N nicht im quadratischen Mittel gegen u konvergieren. ■

Mit diesen Beispielen wird also gezeigt, dass der stochastische Galerkin-Ansatz, wie er standardmäßig verwendet wird, zu falschen Ergebnissen in Bezug auf die exakte Lösung führen kann, falls sich der Koeffizient κ nicht durch eine Konstante von Null (Beispiel 1) oder von Null und Unendlich (Beispiel 2) trennen lässt. Das heißt mit anderen Worten, die so berechnete stochastische Galerkin-Lösung konvergiert in diesem Falle im Allgemeinen nicht im quadratischen Mittel gegen die exakte Lösung und mögliche auf dieser stochastischen Galerkin-Lösung basierende Schlussfolgerungen für die exakte Lösung können damit

falsch sein. Diese Beobachtung bedeutet allerdings nicht, dass man mit Hilfe der stochastischen Galerkin-Methode solche Probleme (wie in den Beispielen behandelt) nicht adäquat lösen kann, sondern nur, dass der gewählte stochastische Galerkin-Ansatz mit den obigen endlichdimensionalen Unterräumen, speziell dem Testfunktionenraum V_N , ungeeignet ist. Ein geeigneter Testfunktionenraum V_N lässt sich jedoch analog zu den Testfunktionenräumen für zufällige Differentialgleichungen im zweiten Abschnitt definieren und die zugehörige stochastische Galerkin-Lösung konvergiert gegen die exakte Lösung im Quadratmittel. Somit kann man dann auf diese Weise auch zufällige algebraische Gleichungen, deren Koeffizient $0 < \kappa < \infty$ nicht durch Konstanten beschränkt werden kann, zufriedenstellend mit der Hilfe der stochastischen Galerkin-Methode lösen.

Im Falle einer gegen die exakte Lösung konvergierenden stochastischen Galerkin-Lösung lässt sich eine weitere Beobachtung (siehe Beispiel 3) machen. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen hängt nicht ausschließlich von der Verteilung der zugrunde liegenden Basiszufallsvariablen ξ ab, sondern die Glattheit von u_ξ hat auch einen entscheidenden Einfluss.

Beispiel 3. In diesem Beispiel soll mittels der stochastischen Galerkin-Methode der Kehrwert einer Zufallsgröße ermittelt werden. Dazu sei für eine auf dem Intervall $(-1, 1)$ gleichverteilte Zufallsgröße η der Koeffizient κ mit

$$\kappa(\omega) = 1 + |\eta(\omega)|, \quad \omega \in \Omega,$$

gegeben und die rechte Seite f konstant Eins, d. h. $f \equiv 1$. Die exakte Lösung u ist dann der Kehrwert des Koeffizienten κ , nämlich

$$u(\omega) = \frac{1}{\kappa(\omega)} = \frac{1}{1 + |\eta(\omega)|}, \quad \omega \in \Omega,$$

mit endlichem zweiten Moment. Außerdem kann der Koeffizient durch Konstanten

$$0 < 1 \leq 1 + |\eta| \leq 2 < \infty \quad \text{f. s.}$$

von Null und Unendlich getrennt werden. Für jede Basiszufallsvariable ξ , die eine stetige Verteilungsfunktion besitzt, deren Momente alle endlich sind und für die das Momentenproblem ihrer Verteilung eindeutig lösbar ist, konvergieren die stochastischen Galerkin-Lösungen im quadratischen Mittel gegen die exakte Lösung, wenn als endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume die entsprechenden Polynome in ξ , d. h.

$$U_N = V_N = \text{span}\{p_n(\xi), n = 0, \dots, N\},$$

gewählt werden (vgl. Proposition 4.1).

Im Falle dieses Koeffizienten sollen nun für vier verschiedene Basiszufallsvariablen, die alle diese Bedingungen erfüllen, deren jeweilige stochastische Galerkin-Lösungen untersucht werden. Sie lauten

$$\begin{array}{ll} \xi_1 \sim \mathcal{U}(-1, 1) & \text{mit } \kappa(\omega) = \kappa_{\xi_1}(\xi_1(\omega)) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\xi_1(\omega), \\ \xi_2 \sim \mathcal{U}(-1, 1) & \text{mit } \kappa(\omega) = \kappa_{\xi_2}(\xi_2(\omega)) = 1 + |\xi_2(\omega)|, \\ \xi_3 \sim \mathcal{N}(0, 1) & \text{mit } \kappa(\omega) = \kappa_{\xi_3}(\xi_3(\omega)) = 1 + \Phi(\xi_3(\omega)), \end{array}$$

$$\xi_4 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{mit} \quad \kappa(\omega) = \kappa_{\xi_4}(\xi_4(\omega)) = 1 + |2\Phi(\xi_4(\omega)) - 1|.$$

Das heißt, zweimal wird eine auf $(-1, 1)$ gleichverteilte und zweimal eine standardnormalverteilte Basiszufallsvariable gewählt. Die jeweiligen Parametrisierungen κ_{ξ_i} , $i = 1, \dots, 4$, unterscheiden sich außerdem in ihrer Glattheit. Sowohl κ_{ξ_1} als auch κ_{ξ_3} sind unendlich oft stetig differenzierbar, wohingegen κ_{ξ_2} und κ_{ξ_4} nur stückweise stetig differenzierbar sind. Als orthonormale Polynome zum Aufspannen der endlichdimensionalen Ansatz- und

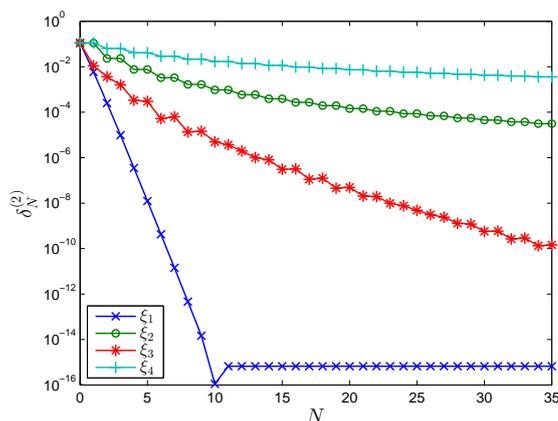


Abb. 4.3: Relativer Fehler des zweiten Momentes der stochastischen Galerkin-Lösung zur exakten Lösung.

Testfunktionenräume werden dann für die Basiszufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 die Legendre-Polynome (siehe Abschnitt 2.2.3) und für ξ_3 und ξ_4 wieder die Hermite-Polynome (siehe Abschnitt 2.2.2) verwendet. Abbildung 4.3 zeigt dann wieder den relativen Fehler

$$\delta_N^{(2)} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2 - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (u_N)^2|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} u^2|}$$

der zweiten Momente für wachsende Ordnung N der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösung. Der beobachtbare konstante Abschnitt der Fehlerkurve $\delta_N^{(2)}$ für ξ_1 lässt sich durch die beschränkte Rechengenauigkeit erklären. Aufgrund der Abschätzung

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\bar{\kappa}}{\underline{\kappa}} \|u - {}^{(N)}u\|_{L^2(\Omega)}$$

aus dem Beweis von Proposition 4.1 lassen sich Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen treffen. Der Quadratmittelfehler der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen wird durch den Quadratmittelfehler der jeweiligen (verallgemeinerten) polynomiellen Chaosapproximationen abgeschätzt. Die Konvergenzrate dieses Fehlers wird jedoch durch das Abklingverhalten der jeweiligen (verallgemeinerten) polynomiellen Chaoskoeffizienten bestimmt, welches selbst wiederum von der Glattheit der jeweiligen Parametrisierung u_{ξ_i} abhängt (siehe Proposition 3.28 und die Bemerkung danach). Da sich die Glattheitseigenschaften von κ_{ξ_i} auf die jeweiligen Parametrisierungen u_{ξ_i} der Lösung übertragen, konvergieren für ξ_1 und ξ_3 die jeweiligen Chaosapproximationen der Lösung exponentiell schnell und für ξ_2 und ξ_4 nur algebraisch. Dementsprechend ergeben sich dann auch die Konvergenzraten für den Quadratmittelfehler der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen und die Konvergenzgeschwindigkeiten der jeweiligen zweiten Momente, die sich in der Abbildung 4.3 beobachten lassen. ■

4.2 Stationäre Diffusionsgleichungen mit zufälligen Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden nun speziell zufällige stationäre Diffusionsprobleme untersucht und als Modellproblem das zufällige Randwertproblem, bestehend aus der stationären Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f$$

mit zufälligem Koeffizienten κ und Quellterm f und homogenen Dirichlet-Randbedingungen, betrachtet. Dieses Randwertproblem dient vielen Arbeiten ebenfalls als Modellproblem und wird sowohl mit verbesserten Monte-Carlo-Methoden und Kollokationsmethoden als auch mit stochastischen Galerkin-Verfahren näherungsweise gelöst. (Für Literaturangaben sei an dieser Stelle auf die Einleitung verwiesen.) In dieser Arbeit wird sich ausschließlich auf die stochastische Galerkin-Methode zur näherungsweisen Lösung obiger zufälliger Randwertprobleme konzentriert, basierend auf einer entsprechenden Lösungs- und Konvergenztheorie, die es zu entwickeln gilt. Setzt man wie zum Beispiel in den Arbeiten von Babuška et al. [5, 7, 8, 31], Schwab et al. [17, 18, 30, 38, 95] oder Matthies und Keese [74] voraus, dass Konstanten $\underline{\kappa}, \bar{\kappa} > 0$ existieren, sodass sich der Koeffizient κ derart

$$0 < \underline{\kappa} \leq \kappa(x, \omega) \leq \bar{\kappa} < \infty \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

beschränken lässt, so kann mit Hilfe der klassischen Sätze aus der Theorie der deterministischen elliptischen partiellen Differentialgleichungen (z. B. dem Lemma von Lax-Milgram) die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung und die Konvergenz der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm geschlussfolgert werden. Der in diesem Fall üblicherweise genutzte stochastische Galerkin-Ansatz wird im Folgenden der standardmäßige stochastische Galerkin-Ansatz genannt. In vielen Anwendungen (siehe z. B. Freeze [39], Ghanem [47, 48], Zhang [116] oder Nowak [81]) wird der Koeffizient κ als lognormales Zufallsfeld modelliert, d. h. $\kappa = \exp(G)$ und G ist ein Gaußsches Zufallsfeld. Dann existieren jedoch keine solchen Konstanten $\underline{\kappa}$ und $\bar{\kappa}$ und sowohl für die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung als auch für die Konvergenz der Folge der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Lösungen können die klassischen Resultate nicht herangezogen werden. Galvis und Sarkis [42] ebenso wie Gittelsohn [51] lösen für diesen Spezialfall eines lognormalen Koeffizienten dieses Problem dennoch – allerdings unter Verwendung anderer Beweistechniken und eines alternativen stochastischen Galerkin-Ansatzes. Außerdem geben beide A-priori-Fehlerabschätzungen für ihre jeweiligen Folgen stochastischer Galerkin-Lösungen an. Im Folgenden werden nun diese Ergebnisse auf beliebige Eingangszufallsvariablen κ verallgemeinert, für die nur angenommen wird, dass reellwertige Zufallsgrößen $\kappa_{min}, \kappa_{max} > 0$ f. s. existieren, sodass

$$0 < \kappa_{min}(\omega) \leq \kappa(x, \omega) \leq \kappa_{max}(\omega) < \infty \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

gilt. Es wird eine entsprechende Lösungstheorie auf zwei verschiedenen Wegen entwickelt, Eigenschaften der schwachen Lösung aufgezeigt und die stochastische Galerkin-Methode auf die Konvergenz ihrer stochastischen Galerkin-Lösung hin analysiert. Wie sich schon in dem Abschnitt über zufällige algebraische Gleichungen herausgestellt hat und sich auch hier wieder zeigen wird, eignet sich der standardmäßige stochastische Galerkin-Ansatz im Allgemeinen nicht zur Approximation der schwachen Lösung in der natürlichen Norm. Deshalb werden in Anlehnung an Galvis und Sarkis [42] ein zum standardmäßigen Ansatz

alternativer stochastischer Galerkin-Ansatz, ein stochastischer Petrov-Galerkin-Ansatz, präsentiert und Bedingungen formuliert, unter denen die Folge dieser entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung konvergiert, und A-priori-Fehlerabschätzungen angegeben. Insbesondere werden aufgrund der Beobachtungen von Xiu und Karniadakis [73, 110, 111, 112, 113, 114], dass sich die Wahl der Basiszufallsvariablen auf die Approximationsqualität der stochastischen Galerkin-Lösung auswirkt, diese A-priori-Fehlerabschätzungen in Hinblick auf unterschiedliche Folgen von Basiszufallsvariablen untersucht. Zum Abschluss werden dann noch einmal einfache Beispiele betrachtet, die die vorher entwickelte Theorie illustrieren und die Probleme verdeutlichen, die entstehen, wenn man sie missachtet.

4.2.1 Problemformulierung

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitzgebiet und wieder $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. Als Modellproblem dient die stationäre Diffusionsgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa(x, \omega) \nabla u(x, \omega)) &= f(x, \omega) & x \in D, \omega \in \Omega \\ u(x, \omega) &= 0 & x \in \partial D, \omega \in \Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

und zufälligem Koeffizienten κ und Quellterm f . Der Koeffizient $\kappa : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird im Folgenden auch als Zufallsvariable mit Werten in einem Raum von Funktionen auf D aufgefasst. Wie oben schon erwähnt, ist nun die zentrale Annahme in diesem Kapitel die folgende.

Annahme 4.3 *Der Koeffizient $\kappa : \Omega \rightarrow L^\infty(D)$ ist eine stark messbare Zufallsvariable mit Werten in $L^\infty(D)$ und es existieren reellwertige Zufallsgrößen κ_{min} und κ_{max} , sodass*

$$0 < \kappa_{min} \leq \kappa \leq \kappa_{max} < \infty \quad f. \ddot{u}. \text{ und } f. s. \quad (4.6)$$

erfüllt ist.

Für die Definition von starker Messbarkeit und weiteren Zusammenhängen dazu sei auf Abschnitt 2.1 und Definition 2.5 verwiesen.

Beispiel 4.4

(a) *Eine stark messbare Zufallsvariable κ mit Werten in $L^\infty(D)$, für die es deterministische Konstanten $\underline{\kappa}, \bar{\kappa}$ gibt, sodass*

$$0 < \underline{\kappa} \leq \kappa \leq \bar{\kappa} < \infty \quad f. \ddot{u}. \text{ und } f. s.$$

gilt, erfüllt Annahme 4.3.

(b) *Sei κ ein lognormales Zufallsfeld der Art*

$$\kappa(x, \omega) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega) \psi_i(x) \right) \quad (4.7)$$

mit reellwertigen Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, die unabhängig und standardnormalverteilt sind, und deterministischen Funktionen $\psi_i \in L^\infty(D)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} < \infty$.

Dann ist κ als Zufallsvariable mit Werten in $L^\infty(D)$ nach Beispiel 2.9 stark messbar und mit

$$\kappa_{min} := \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}\right) \quad \text{und} \quad \kappa_{max} := \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \|\psi_i\|_{L^\infty(D)}\right)$$

lassen sich zwei reellwertige Zufallsgrößen definieren, sodass Annahme 4.3 erfüllt ist (siehe dazu auch Gittelsohn [51]).

Neben diesen beiden Spezialfällen können, basierend auf Annahme 4.3, jedoch auch viele andere Zufallsvariablen $\kappa \in L^\infty(D)$ betrachtet werden. Sobald für eine stark messbare Zufallsgröße $\kappa \in L^\infty(D)$ auch deren Kehrwert $1/\kappa$ eine Zufallsvariable mit Werten in $L^\infty(D)$ ist, ist Annahme 4.3 erfüllt. Darum stellt die hier gewählte Ausgangssituation eine echte Verallgemeinerung z. B. zu den Arbeiten von Babuška et al. [5, 7, 8, 31], Schwab et al. [17, 18, 30, 38, 95] oder Matthies und Keese [74] bzw. Galvis und Sarkis [42] und Gittelsohn [51] dar.

Aus der Theorie für deterministische Randwertprobleme, d. h. die Differentialgleichung und die Randwerte sind rein deterministisch, ist bekannt, dass unterschiedliche Lösungsbegriffe für solche Probleme existieren. Der klassische Lösungsbegriff in der deterministischen Theorie z. B. stellt an die (klassische) Lösung Glattheitsforderungen, sodass alle auftretenden Ableitungen im starken bzw. klassischen Sinne gebildet werden können. Diese Forderung an die Glattheit kann aber beispielsweise in der schwachen Formulierung (Variationsformulierung) abgeschwächt werden. Anstelle klassischer Ableitungen genügt es dort, wenn die (schwache) Lösung Ableitungen im schwachen Sinne besitzt und eine entsprechende Variationsaufgabe löst (siehe z. B. Evans [35]).

Für zufällige Randwertprobleme können ebenso unterschiedliche Lösungsbegriffe definiert werden. Eines ist ihnen jedoch gemeinsam. Da immer eine Zufallsvariable gesucht wird, kann die jeweilige Lösung immer nur bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt sein. Das heißt, man erhält als Lösung eigentlich eine Äquivalenzklasse von Zufallsvariablen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Wenn also im Folgenden der Einfachheit halber immer von einer Zufallsvariablen als Lösung gesprochen wird, ist damit die Äquivalenzklasse gemeint, für die diese Zufallsvariable ein Repräsentant ist. In Analogie zur deterministischen Theorie soll die klassische Lösung eine Zufallsvariable sein, deren Pfade im klassischen Sinne hinreichend glatt sind, d. h. die auftretenden klassischen Ableitungen müssen pfadweise existieren. Um diese sehr restriktive Forderung wieder abzuschwächen, kann man auch hier zu pfadweisen schwachen Ableitungen und entsprechenden Variationsaufgaben übergehen. Aufgrund der Abhängigkeit des Problems (4.5) von $\omega \in \Omega$ lassen sich insbesondere zwei verschiedene Variationsaufgaben formulieren, welche „realisierungsweise Variationsformulierung“ und „stochastische Variationsformulierung“ genannt werden. Beide Bezeichnungen erheben dabei keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit, sondern dienen allein der Benennung und Unterscheidung der beiden Formulierungen in dieser Arbeit, da zum einen in der Literatur noch keine einheitlich Namensgebung zu finden ist, z. B. bezeichnet Gittelsohn in [51] die „realisierungsweise Variationsformulierung“ als „schwache Formulierung in x “ und die „stochastische Variationsformulierung“ – wie sie auch von Le Maître und Knio in [68] genannt wird – einfach als „Variationsproblem“, und weil zum anderen beide Variationsformulierungen stochastische Variationsformulierungen sind und die eigentliche Variationsformulierung in Analogie zu rein deterministischen Randwertproblemen die „stochastische Variationsformulierung“ ist. Nichtsdestotrotz sollen hier diese beiden Bezeichnungen zur Unterscheidung verwendet werden.

Realisierungsweise Variationsformulierung. Für die realisierungsweise Variationsformulierung wird die pfadweise Bilinearform $b(\cdot, \cdot; \omega)$ durch

$$b(\cdot, \cdot; \omega) : H^1(D) \times H^1(D) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b(u, v; \omega) := \int_D \kappa(\omega) \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

für $\omega \in \Omega$ definiert. Für festes $u, v \in H^1(D)$ ist dann $b(u, v; \cdot)$ eine reellwertige Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Die Dualitätsbeziehung zwischen $g \in H^{-1}(D)$ und $v \in \dot{H}^1(D)$ soll mit $\langle g, v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}$ bezeichnet werden. Somit lautet für Zufallsvariablen f mit Werten in $H^{-1}(D)$ die realisierungsweise Variationsformulierung wie folgt.

Problem 4.5 (Realisierungsweise Variationsformulierung)

Gesucht ist eine Zufallsvariable \tilde{u} mit Werten in $\dot{H}^1(D)$, sodass

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D) \quad (4.8)$$

fast sicher erfüllt ist. Mit anderen Worten, gesucht ist eine Abbildung $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \dot{H}^1(D)$, die messbar ist und für die gilt

$$\mathbf{P} \left(b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D) \right) = 1. \quad (4.8a)$$

Bemerkung 4.6 Alternativ lässt sich ein (ebenfalls realisierungsweises) Variationsproblem formulieren, in dem auch eine Zufallsvariable \tilde{u} mit Werten in $\dot{H}^1(D)$ gesucht wird, für die jedoch gilt, dass für alle $v \in \dot{H}^1(D)$

$$\mathbf{P} \left(b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right) = 1 \quad (4.9)$$

erfüllt ist. Das heißt, die Nullmenge der $\omega \in \Omega$, für die

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}$$

nicht erfüllt ist, kann bei der Formulierung (4.9) im Gegensatz zur Formulierung (4.8) bzw. (4.8a) von der Testfunktion $v \in \dot{H}^1(D)$ abhängen. Nichtsdestotrotz lässt sich die Äquivalenz dieser beiden Variationsformulierungen zeigen, die auf der Separabilität des Hilbertraumes $\dot{H}^1(D)$ beruht. Dies lässt sich wie folgt nachweisen. Sei $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\dot{H}^1(D)$, dann gilt nach Formulierung (4.9)

$$\mathbf{P} \left(b(\tilde{u}(\omega), e_k; \omega) = \langle f(\omega), e_k \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right) = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Das heißt, es existiert eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, sodass für alle $\omega \in \Omega \setminus N$

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \text{span}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$$

gilt. Jedes Element $v \in \dot{H}^1(D)$ kann durch eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \in \text{span}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ in $\dot{H}^1(D)$ approximiert werden und die Nullmenge $M \in \mathfrak{A}$ sei so gewählt, dass die Bedingung (4.6) für $\kappa(\omega)$ f. ü. für alle $\omega \in \Omega \setminus M$ gilt und $\tilde{u}(\omega) \in \dot{H}^1(D)$ und $f(\omega) \in H^{-1}(D)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus M$ erfüllt ist. Dann folgt

$$b(\tilde{u}(\omega), v_n; \omega) \rightarrow b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) \quad \text{und} \quad \langle f(\omega), v_n \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \rightarrow \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

für alle $\omega \in \Omega \setminus M$ und damit erhält man für alle $\omega \in \Omega \setminus (N \cup M)$, dass

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D)$$

gilt und $\mathbf{P}(\Omega \setminus (N \cup M)) = 1$ ist.

Aufgrund den Voraussetzungen an den Koeffizienten κ in Annahme 4.3 kann für eine beliebige $H^{-1}(D)$ -wertige Zufallsvariable f die eindeutige Lösbarkeit der realisierungsweisen Variationsformulierung mit dem Lemma von Lax-Milgram (siehe z. B. Brenner/Scott [23, Theorem 2.7.7]) gezeigt werden.

Lemma 4.7 *Sei f eine Zufallsvariable mit Werten in $H^{-1}(D)$ und erfülle der zufällige Koeffizient $\kappa \in L^\infty(D)$ die Annahme 4.3. Dann existiert eine eindeutige Zufallsvariable \tilde{u} mit Werten in $\dot{H}^1(D)$, die die realisierungsweise Variationsformulierung in Problem 4.5 löst. Insbesondere ist \tilde{u} messbar bezüglich der von f und κ erzeugten σ -Algebra $\sigma(f, \kappa)$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|\tilde{u}(\omega)\|_{H^1(D)} \leq C \frac{\|f(\omega)\|_{H^{-1}(D)}}{\kappa_{\min}(\omega)} \quad \text{f. s.}, \quad (4.10)$$

wobei $C > 0$ eine geeignete Konstante unabhängig von $\omega \in \Omega$ ist.

Beweis.

Da nach Annahme 4.3 der Koeffizient κ fast sicher beschränkt und f eine $H^{-1}(D)$ -wertige Zufallsvariable ist, existiert nach dem Lemma von Lax-Milgram (siehe z. B. Brenner/Scott [23, Theorem 2.7.7]) für \mathbf{P} -fast alle $\omega \in \Omega$ eine eindeutige Lösung $\tilde{u}(\omega) \in \dot{H}^1(D)$, die der Gleichung (4.8), d. h.

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D),$$

genügt. Des Weiteren liefert das Lemma von Lax-Milgram die pfadweise Abschätzung

$$\|\tilde{u}(\omega)\|_{H^1(D)} \leq C \frac{\|f(\omega)\|_{H^{-1}(D)}}{\kappa_{\min}(\omega)} \quad \text{f. s.},$$

wobei $C > 0$ eine geeignete Konstante unabhängig von $\omega \in \Omega$ ist.

Zu zeigen bleibt also noch, dass die Abbildung $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \dot{H}^1(D)$ eine Zufallsvariable definiert, d. h. messbar ist. Da die Zufallsvariable $\kappa \in L^\infty(D)$ stark messbar und die Zufallsvariable $f \in H^{-1}(D)$ ist, existieren Folgen $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(D)$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^{-1}(D)$ von $\sigma(f, \kappa)$ -messbaren, einfachen Zufallsvariablen mit

$$\|\kappa - \kappa_n\|_{L^\infty(D)} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|f - f_n\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{f. s.}$$

O. B. d. A. kann angenommen werden, dass $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\kappa_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \kappa_i^{(n)} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(\omega) \quad \text{und} \quad f_n(\omega) = \sum_{i=1}^n f_i^{(n)} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(\omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

mit $A_i^{(n)} \in \sigma(f, \kappa)$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $\bigcup_{i=1}^n A_i^{(n)} = \Omega$ und $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \emptyset$ für $i \neq j$ gegeben sind. Dabei ist $f_i^{(n)} \in H^{-1}(D)$ für alle $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, und aufgrund der Annahme (4.6) an den Koeffizienten κ können die $\kappa_i^{(n)} \in L^\infty(D)$ so gewählt werden, dass

$$0 < \kappa_{\min} \leq \kappa_i^{(n)} \leq \kappa_{\max} < \infty \quad \text{f. ü. und f. s. auf } A_i^{(n)}$$

für alle $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Damit lässt sich eine Folge von Bilinearformen $b_n(\cdot, \cdot; \omega) : H^1(D) \times H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} b_n(u, v; \omega) &:= \int_D \kappa_n(\omega) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(\omega) \int_D \kappa_i^{(n)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in \dot{H}^1(D) \end{aligned}$$

definieren und für die Dualitätsbeziehung ergibt sich

$$\langle f_n(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(\omega) \langle f_i^{(n)}, v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}, \quad v \in \dot{H}^1(D).$$

Das Lemma von Lax-Milgram impliziert dann daraufhin die Existenz und Eindeutigkeit von Funktionen $u_i^{(n)} \in \dot{H}^1(D)$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, die die Gleichung

$$\int_D \kappa_i^{(n)} \nabla u_i^{(n)} \cdot \nabla v \, dx = \langle f_i^{(n)}, v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D)$$

erfüllen. Außerdem folgt die Abschätzung

$$\|u_i^{(n)}\|_{H^1(D)} \leq \frac{C}{\kappa_{\min}(\omega)} \|f_i^{(n)}\|_{H^{-1}(D)} \quad \text{f. s.}$$

Damit genügt die Zufallsvariable $u_n(\omega) := \sum_{i=1}^n u_i^{(n)} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}(\omega)$ mit Werten in $\dot{H}^1(D)$ der Gleichung

$$b_n(u_n(\omega), v; \omega) = \langle f_n(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D)$$

und ist $\sigma(f, \kappa)$ -messbar. Des Weiteren gilt mit $v := u_n - u_m$ und einer geeigneten Konstanten $c > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &c\kappa_{\min}(\omega) \|u_n(\omega) - u_m(\omega)\|_{H^1(D)}^2 \\ &\leq \int_D \kappa_n(\omega) \nabla u_n(\omega) \cdot \nabla v(\omega) \, dx - \int_D \kappa_m(\omega) \nabla u_m(\omega) \cdot \nabla v(\omega) \, dx \\ &\quad + \int_D (\kappa_m(\omega) - \kappa_n(\omega)) \nabla u_m(\omega) \cdot \nabla v(\omega) \, dx \\ &\leq \langle f_n(\omega), v(\omega) \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} - \langle f_m(\omega), v(\omega) \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \\ &\quad + \|\kappa_n(\omega) - \kappa_m(\omega)\|_{L^\infty(D)} \|u_m(\omega)\|_{H^1(D)} \|v(\omega)\|_{H^1(D)} \\ &\leq \left(\|f_n(\omega) - f_m(\omega)\|_{H^{-1}(D)} + \|\kappa_n(\omega) - \kappa_m(\omega)\|_{L^\infty(D)} \|u_m(\omega)\|_{H^1(D)} \right) \|v(\omega)\|_{H^1(D)} \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} &c\kappa_{\min}(\omega) \|u_n(\omega) - u_m(\omega)\|_{H^1(D)} \\ &\leq \|f_n(\omega) - f_m(\omega)\|_{H^{-1}(D)} + \|\kappa_n(\omega) - \kappa_m(\omega)\|_{L^\infty(D)} \|u_m(\omega)\|_{H^1(D)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Da die H^1 -Norm von $u_m(\omega)$ f. s. beschränkt ist aufgrund von

$$\|u_m(\omega)\|_{H^1(D)} \leq \frac{C}{\kappa_{\min}(\omega)} \|f_m(\omega)\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow \frac{C}{\kappa_{\min}(\omega)} \|f(\omega)\|_{H^{-1}(D)},$$

konvergiert die rechte Seite der Ungleichung (4.11) f. s. gegen Null für $n, m \rightarrow \infty$. Damit hat die Folge $(u_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ als Grenzwert eine Zufallsvariable $u \in \dot{H}^1(D)$, die ebenfalls $\sigma(f, \kappa)$ -messbar ist. Weiterhin erfüllt die Zufallsvariable u die Gleichung

$$b(u(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D) \quad \text{f. s.,}$$

weil

$$\begin{aligned} & |b(u(\omega), v; \omega) - \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}| \\ & \leq |b(u(\omega), v; \omega) - b(u_n(\omega), v; \omega)| + |b(u_n(\omega), v; \omega) - b_n(u_n(\omega), v; \omega)| \\ & \quad + |b_n(u_n(\omega), v; \omega) - \langle f_n(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}| \\ & \quad + |\langle f_n(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} - \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}| \\ & \leq \kappa_{\max}(\omega) \|u(\omega) - u_n(\omega)\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} \\ & \quad + \|\kappa(\omega) - \kappa_n(\omega)\|_{L^\infty(D)} \|u_n(\omega)\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} \\ & \quad + \|f(\omega) - f_n(\omega)\|_{H^{-1}(D)} \|v\|_{H^1(D)} \end{aligned}$$

und $\|u_n(\omega)\|_{H^1(D)} \rightarrow \|u(\omega)\|_{H^1(D)} < \infty$, $\|u(\omega) - u_n(\omega)\|_{H^1(D)} \rightarrow 0$, $\|\kappa(\omega) - \kappa_n(\omega)\|_{L^\infty(D)} \rightarrow 0$ und $\|f(\omega) - f_n(\omega)\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow 0$ fast sicher gelten. Da die Abbildung $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \dot{H}^1(D)$ nach dem Lemma von Lax-Milgram eindeutig ist, gilt $u = \tilde{u}$ f. s. und damit ist \tilde{u} eine $\sigma(f, \kappa)$ -messbare Zufallsvariable in $\dot{H}^1(D)$. \square

Auf der realisierungsweisen Variationsaufgabe 4.5 und Lemma 4.7 basiert u. a. die Monte-Carlo-Verfahren zur Approximation der Charakteristiken der Lösung wie zum Beispiel Erwartungswert und Varianz, wenn sie existieren. Dafür wird für eine endliche Anzahl von Realisierungen ω_i , $i = 1, \dots, n$, für die Annahme (4.6) und $f(\omega_i) \in H^{-1}(D)$ erfüllt ist, die Gleichung (4.8) gelöst und mit diesen Lösungen $\tilde{u}(\omega_i)$, $i = 1, \dots, n$, die Kenngrößen wie Erwartungswert und Varianz geschätzt.

Stochastische Variationsformulierung. Um nicht für jedes $\omega \in \Omega$ eine eigene Variationsaufgabe lösen zu müssen, sondern dies gleich für alle zusammen zu tun, wird in Analogie zu den Variationsformulierungen für deterministische Randwertprobleme nun die entsprechende Variationsaufgabe, die stochastische Variationsformulierung, für zufällige Randwertprobleme betrachtet. Eine solche Formulierung erhält man durch die Definition einer geeigneten Bilinearform auf geeigneten Hilberträumen von Zufallsvariablen in $\dot{H}^1(D)$,

$$a(u, v) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} b(u(\cdot), v(\cdot); \cdot) = \int_{\Omega} b(u(\omega), v(\omega); \omega) d\mathbf{P}(\omega), \quad (4.12)$$

und einer entsprechenden Linearform

$$\langle f, v \rangle := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\langle f(\cdot), v(\cdot) \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right) = \int_{\Omega} \langle f(\omega), v(\omega) \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} d\mathbf{P}(\omega). \quad (4.13)$$

Weil jedoch der Koeffizient κ nicht durch Konstanten sondern nur durch Zufallsgrößen beschränkt ist, kann das Lemma von Lax-Milgram nicht direkt angewendet werden, um die Existenz einer eindeutigen Lösung der stochastischen Variationsformulierung zu schlussfolgern. Es geht in diesem Fall sowohl die Koerzivität der Bilinearform a als auch deren

Stetigkeit verloren. Um dennoch die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu sichern, müssen geeignete Lösungs- und Testfunktionenräume gefunden werden.

Da Annahme (4.6) für den Koeffizienten κ erfüllt ist, können neben κ_{min} weitere reellwertige, fast sicher positive Zufallsgrößen μ gefunden werden, für die mit einer entsprechenden Konstanten $c > 0$ die Beziehung

$$0 < c\mu(\omega) \leq \kappa(x, \omega) \quad \text{f. ü. und f. s.} \quad (4.14)$$

gilt. Geeigneterweise wählt man diese Zufallsgröße $\mu > 0$ so, dass sie $\sigma(\kappa)$ -messbar ist. Zum Beispiel ist für das lognormale Zufallsfeld $\kappa(x, \omega) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega)\psi_i(x)\right)$, wie in (4.7) definiert, die Zufallsgröße

$$\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 a_i^{2\theta} \right\|_{L^\infty(D)}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right)$$

für jedes $0 < \varepsilon < a_1$ und Zahlen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-2\theta} < \infty \quad \text{für ein } \theta > 0 \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 a_i^{2\theta} \right\|_{L^\infty(D)} < \infty$$

eine untere Schranke an κ , die fast sicher größer Null ist (siehe auch Galvis und Sarkis [42]). Die Einführung einer solchen Zufallsgröße μ bietet damit neben größerer Flexibilität bei der Lösungstheorie auch mehr Möglichkeiten bei der Berechnung der entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösung (siehe Abschnitt 4.2.2 und 4.2.4).

Eine Idee, wie die zugehörigen Lösungs- und Testfunktionenräume nun zu wählen sind, gibt einem die Ungleichung (4.10) angewandt auf die Zufallsgröße μ , d. h.

$$\|\tilde{u}(\omega)\|_{H^1(D)} \leq \frac{C\|f(\omega)\|_{H^{-1}(D)}}{c\mu(\omega)} \quad \text{f. s.} \quad (4.15)$$

Quadriert man (4.15) und bildet den Erwartungswert $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} , erhält man

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\|\tilde{u}\|_{H^1(D)}^2 \right) \leq \frac{C^2}{c^2} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\|f\|_{H^{-1}(D)}^2}{\mu^2} \right). \quad (4.16)$$

Deshalb besitzt die pfadweise Lösung \tilde{u} ein endliches zweites Moment ihrer H^1 -Norm, wenn das zweite Moment der H^{-1} -Norm von f , gewichtet mit dem Kehrwert der reellwertigen Zufallsgröße μ^2 , endlich ist. Es reicht also für ein endliches zweites Moment der Lösung nicht aus, für die rechte Seite f nur zu fordern, dass sie ein endliches zweites Moment ihrer H^{-1} -Norm besitzt, d. h., $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|f\|_{H^{-1}(D)}^2 < \infty$ gilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.8 Für eine reellwertige Zufallsgröße $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist die Lösung von

$$-(\exp(\xi(\omega))u'(x, \omega))' = \exp(\xi(\omega)^2/4 - |\xi(\omega)|), \quad x \in (0, 1), \quad u(0, \omega) = u(1, \omega) = 0,$$

mit

$$u(x, \omega) = \frac{1}{2} \exp(\xi(\omega)^2/4 - |\xi(\omega)| - \xi(\omega)) (x - x^2)$$

gegeben und es gilt $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|f\|_{H^{-1}(D)}^2 < \infty$, da

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(\xi^2/4 - |\xi|) \right)^2 < \infty.$$

Für die Lösung u erhält man jedoch $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \|u\|_{H^1(D)}^2 = \infty$ aufgrund von

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(\xi^2/4 - |\xi| - \xi) \right)^2 = \infty.$$

Damit besitzt diese Lösung u also kein endliches zweites Moment ihrer \dot{H}^1 -Norm.

Um aber auch für solche Aufgaben wie in diesem Beispiel eine entsprechende Lösungstheorie formulieren zu können, da ja offensichtlich eine Lösung existiert, wird eine weitere reellwertige Zufallsgröße $\vartheta > 0$ f. s. eingeführt und für die Lösungen das mit ϑ gewichtete zweite Moment der \dot{H}^1 -Norm betrachtet. Das heißt, analog zu Formel (4.16) gilt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\|\tilde{u}\|_{H^1(D)}^2 \vartheta \right) \leq \frac{C^2}{c^2} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\vartheta}{\mu^2} \|f\|_{H^{-1}(D)}^2 \right). \quad (4.17)$$

Um Zufallsvariablen mit endlichen, gewichteten zweiten Momenten erfassen und mit ihnen die stochastische Variationsaufgabe formulieren zu können, werden also (verschiedene) gewichtete Funktionenräume benötigt, die zunächst allgemein definiert werden sollen. Für eine gegebene, beliebige reellwertige Zufallsgröße $\varrho > 0$ f. s. werden somit die Hilberträume

$$\begin{aligned} U_{\varrho}^m &:= L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \varrho d\mathbf{P}; H^m(D)), & m \in \mathbb{Z}, & \text{ und} \\ \dot{U}_{\varrho}^m &:= L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \varrho d\mathbf{P}; \dot{H}^m(D)), & m \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

eingeführt, wobei durch $(\cdot, \cdot)_{U_{\varrho}^m} := (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega, \varrho d\mathbf{P}; H^m(D))}$ ein Skalarprodukt auf beiden Räumen gegeben ist. Für die Definition und die Eigenschaften dieser L^2 -Räume sei auf Definition 2.7 und die Bemerkung 2.8 danach im Abschnitt 2.1 verwiesen. Extra erwähnt werden soll, dass die Halbnorm

$$|u|_{U_{\varrho}^1} := \sqrt{\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|u|_{H^1(D)}^2 \varrho \right)}$$

auf \dot{U}_{ϱ}^1 äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{U_{\varrho}^1}$ ist und der Dualraum von \dot{U}_{ϱ}^m mit dem Raum $U_{\varrho^{-1}}^{-m}$ identifiziert werden kann. Aus Übersichtlichkeitsgründen wird mit U^m bzw. \dot{U}^m der ungewichtete Raum $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; H^m(D))$ bzw. $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; \dot{H}^m(D))$ bezeichnet. Wird an entsprechenden Stellen dieser Arbeit in den Räumen U^m und \dot{U}^m das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} durch ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{Q} ersetzt, so werden die Notationen $U_{\mathbf{Q}}^m := L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}; H^m(D))$ und $\dot{U}_{\mathbf{Q}}^m := L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}; \dot{H}^m(D))$ verwendet.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen lässt sich für $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ dann die stochastische Variationsaufgabe wie folgt formulieren.

Problem 4.9 (Stochastische Variationsformulierung)

Gesucht ist $\hat{u} \in \dot{U}_{\vartheta}^1$, sodass

$$a(\hat{u}, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \quad (4.18)$$

gilt, wobei die Bilinearform a wie in (4.12) und die Linearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in (4.13) definiert sind.

Bemerkung 4.10 Kann der Koeffizient κ mittels Konstanten von der Null und Unendlich getrennt werden, so entspricht die stochastische Variationsformulierung in Problem 4.9 für $\vartheta \equiv 1$ dem schwachen Problem, das z. B. in den Arbeiten von Babuška et al. [5, 7, 8, 31], Schwab et al. [17, 18, 30, 38, 95] u. a. betrachtet wird. Für einen beliebigen Koeffizienten κ , der nur Annahme 4.3 genügt, ist im Allgemeinen das gleiche Problem, d. h. für ein $f \in U^{-1}$ eine Lösung $u \in \dot{U}^1$ zu finden, sodass

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in \dot{U}^1$$

erfüllt ist, nicht gut gestellt. Nach Beispiel 4.8 existiert z. B. nicht für jedes $f \in U^{-1}$ eine Lösung $u \in \dot{U}^1$.

Zu beachten ist also, dass im Allgemeinen der Lösungs- und Testfunktionenraum in Problem 4.9 nicht mehr miteinander identisch sind und dass die Bilinearform a nicht auf dem vollen kartesischen Produkt $\dot{U}_{\vartheta}^1 \times \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ definiert und endlich ist (siehe Beispiel 4.11). Das heißt, die stochastische Variationsformulierung impliziert damit indirekt die Forderung, eine solche Lösung $\hat{u} \in \dot{U}_{\vartheta}^1$ zu finden, für die der Ausdruck $a(\hat{u}, v)$ für alle $v \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ definiert und endlich ist.

Beispiel 4.11 Als ein Beispiel dafür, dass die Bilinearform a in (4.12) nicht für jedes Paar $(u, v) \in \dot{U}_{\vartheta}^1 \times \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ definiert und endlich ist, wird die Bilinearform

$$a(u, v) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\int_D \exp(\operatorname{sgn}(x - 0.5) \xi) u'(x) v'(x) dx \right), \quad D = (0, 1),$$

die sich durch den Koeffizienten $\kappa(x, \omega) = \exp(\operatorname{sgn}(x - 0.5) \xi(\omega))$ mit $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ergibt, betrachtet. Der Einfachheit halber wird $\vartheta \equiv 1$ gesetzt und, da für κ die Abschätzung

$$\kappa_{\min} := e^{-\xi} \leq \exp(\operatorname{sgn}(x - 0.5) \xi) \leq e^{\xi} =: \kappa_{\max} \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

gilt, wird $\mu = \kappa_{\min}$ gewählt und gezeigt, dass die Bilinearform a nicht für alle Paare $(u, v) \in \dot{U}^1 \times \dot{U}_{\mu^2}^1 = L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; \dot{H}^1(D)) \times L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \exp(-2\xi)d\mathbf{P}; \dot{H}^1(D))$ endlich bzw. definiert ist.

Sei $u_D \in \dot{H}^1(D) \setminus \{0\}$ und $u_{\Omega}(\omega) := \exp(-|\xi(\omega)| + \xi(\omega)^2/4)$. Dann gilt

$$0 < \|u_D\|_{H^1(D)} < \infty, \quad \text{d. h.} \quad 0 < |u_D|_{H^1(D)} < \infty,$$

und

$$\|u_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(-2|\xi| + \xi^2/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\sqrt{2\pi}} dy < \infty.$$

Wird für die Testfunktion v die Zufallsgröße $v_{\Omega}(\omega) := \exp(\xi(\omega) - |\xi(\omega)| + \xi(\omega)^2/4)$ definiert, dann gilt

$$\|v_{\Omega}\|_{L^2(\Omega, \exp(-2\xi)d\mathbf{P})}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(2\xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \exp(-2\xi) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\sqrt{2\pi}} dy < \infty.$$

Setzt man also

$$u := u_D u_{\Omega} \quad \text{und} \quad v := u_D v_{\Omega},$$

dann ergibt sich

$$u \in \mathring{U}^1 \quad \text{und} \quad v \in \mathring{U}_{\mu^2}^1$$

und man erhält für die Bilinearform a für dieses Paar (u, v)

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\int_D \exp(\operatorname{sgn}(x - 0.5) \xi) u_{\Omega}(\xi) v_{\Omega}(\xi) |u'_D(x)|^2 dx \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(-\xi + \xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \int_0^{0.5} |u'_D(x)|^2 dx \\ &\quad + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(2\xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \int_{0.5}^1 |u'_D(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Alle auftretenden Größen sind endlich bis auf den Erwartungswert

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp(2\xi - 2|\xi| + \xi^2/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(y-|y|)}}{\sqrt{2\pi}} dy = \infty.$$

Damit ist die Bilinearform a für dieses Paar (u, v) zwar definiert aber nicht endlich.

Wählt man nun analog zu oben jedoch

$$u := u_D u_{\Omega} \sin(\xi) \quad \text{und} \quad v := u_D v_{\Omega},$$

dann ergibt sich ebenso

$$u \in \mathring{U}^1 \quad \text{und} \quad v \in \mathring{U}_{\mu^2}^1$$

und für die Bilinearform a , ausgewertet im Paar (u, v) , folgt

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\int_D \exp(\operatorname{sgn}(x - 0.5) \xi) u_{\Omega}(\xi) v_{\Omega}(\xi) \sin(\xi) |u'_D(x)|^2 dx \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(-\xi + \xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \sin(\xi) \right) \int_0^{0.5} |u'_D(x)|^2 dx \\ &\quad + \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(2\xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \sin(\xi) \right) \int_{0.5}^1 |u'_D(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Wieder sind alle auftretenden Ausdrücke endlich bis auf den Erwartungswert

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(2\xi - 2|\xi| + \xi^2/2) \sin(\xi) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(y-|y|)} \sin(y)}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Dieser ist nicht definiert und somit ist auch $a(u, v)$ nicht definiert.

Eine andere mögliche Herangehensweise zur Formulierung der stochastischen Variationsaufgabe ist die folgende. Dividiert man die realisierungsweise Variationsformulierung (4.8) durch die reellwertige Zufallsgröße μ , dann kann der daraus resultierende zufällige Koeffizient $\frac{\xi}{\mu}$ von unten durch eine Konstante, in diesem Fall c , von Null getrennt werden.

Des Weiteren wird die Gleichung auch noch zusätzlich mit der reellwertigen Zufallsgröße ϑ multipliziert. Die sich daraus ergebende stochastische Variationsformulierung mit identischen Lösungs- und Testfunktionenräumen lautet dann für $\frac{\vartheta}{\mu}f \in U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}$:

Gesucht ist $\hat{u} \in \mathring{U}_{\vartheta}^1$, sodass

$$a_{\frac{\vartheta}{\mu}}(\hat{u}, v) = \left\langle \frac{\vartheta}{\mu}f, v \right\rangle_{U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}, \mathring{U}_{\vartheta}^1} \quad \text{für alle } v \in \mathring{U}_{\vartheta}^1 \quad (4.19)$$

erfüllt ist, wobei die Bilinearform $a_{\frac{\vartheta}{\mu}}$ durch

$$a_{\frac{\vartheta}{\mu}}(u, v) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\vartheta}{\mu} \int_D \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right) = \int_{\Omega} \frac{\vartheta(\omega)}{\mu(\omega)} b(u(\omega), v(\omega); \omega) \, d\mathbf{P}(\omega)$$

und die Dualitätsbeziehung zwischen $\frac{\vartheta}{\mu}f \in U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}$ and $v \in \mathring{U}_{\vartheta}^1$ durch

$$\left\langle \frac{\vartheta}{\mu}f, v \right\rangle_{U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}, \mathring{U}_{\vartheta}^1} := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\vartheta}{\mu} \langle f, v \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \right) = \int_{\Omega} \frac{\vartheta(\omega)}{\mu(\omega)} \langle f(\omega), v(\omega) \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \, d\mathbf{P}(\omega)$$

gegeben sind.

Trotz der Andersartigkeit der Variationsformulierung (4.19) gegenüber der Formulierung (4.18) lässt sich zeigen, dass beide Variationsaufgaben äquivalent sind. Um dies zu verifizieren, wird der Raum

$$G := \left\{ w = \frac{\vartheta}{\mu}v : v \in \mathring{U}_{\vartheta}^1 \right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}$ eingeführt, da für alle Elemente $w = \frac{\vartheta}{\mu}v \in G$ die Beziehung $\|w\|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1} = \|v\|_{U_{\vartheta}^1} < \infty$ gilt. Es folgt $G = \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ und weiterhin gilt $\frac{\vartheta}{\mu}f \in U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}$ genau dann, wenn $f \in U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^{-1}$ ist. Damit ist für $f \in U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^{-1}$ die Aufgabenstellung:

$$\text{Gesucht ist } \hat{u} \in \mathring{U}_{\vartheta}^1, \text{ sodass } a_{\frac{\vartheta}{\mu}}(\hat{u}, v) = \left\langle \frac{\vartheta}{\mu}f, v \right\rangle_{U_{\frac{1}{\vartheta}}^{-1}, \mathring{U}_{\vartheta}^1} \quad \text{für alle } v \in \mathring{U}_{\vartheta}^1 \text{ erfüllt ist,}$$

äquivalent zu:

$$\text{Gesucht ist } \hat{u} \in \mathring{U}_{\vartheta}^1, \text{ sodass } a(\hat{u}, w) = \langle f, w \rangle \quad \text{für alle } w \in G = \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \text{ erfüllt ist.}$$

Die Problematik der unterschiedlichen Lösungs- und Testfunktionenräumen in der schwachen Formulierung (4.18) tritt also in der schwachen Formulierung (4.19) durch die gewichtete Bilinearform $a_{\frac{\vartheta}{\mu}}$ auf. Wie die Bilinearform a ist auch die Bilinearform $a_{\frac{\vartheta}{\mu}}$ nicht auf dem gesamten kartesischen Produkt $\mathring{U}_{\vartheta}^1 \times \mathring{U}_{\vartheta}^1$ definiert und endlich. Da die beiden Variationsformulierungen äquivalent sind, wird im Weiteren nur Problem 4.9 betrachtet und dessen Lösung \hat{u} als die schwache Lösung bezeichnet.

Eine dritte Variante eine stochastische Variationsaufgabe zu formulieren, ist die stochastische Variationsgleichung auf dem Energieraum

$$V_{a_{\frac{\varrho}{\mu}}} := \{u : \Omega \rightarrow \dot{H}^1(D) \text{ messbar} : a_{\frac{\varrho}{\mu}}(u, u) < \infty\}$$

zu betrachten wie zum Beispiel bei Babuška [5], Gittelsohn [51] oder in [78]. Damit die Bilinearform $a_{\frac{\varrho}{\mu}}$ aber ein Skalarprodukt auf diesem Raum definieren kann, muss $a_{\frac{\varrho}{\mu}}$ symmetrisch sein. Im Falle des hier betrachteten Modellproblems ist das zwar der Fall, doch soll im nächsten Abschnitt eine Lösungstheorie entwickelt werden, die auch als Grundlage für allgemeinere zufällige (partielle) Differentialgleichungen dienen kann und damit ohne die Symmetrieeigenschaft der entsprechenden Bilinearform auskommen soll. Deswegen wird diese Formulierung an dieser Stelle nur erwähnt, aber nicht näher auf sie eingegangen.

4.2.2 Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung

In diesem Abschnitt wird die Existenz einer eindeutigen Lösung der stochastischen Variationsformulierung in Problem 4.9 auf zwei verschiedenen Wegen, basierend auf den Arbeiten von Galvis und Sarkis [42] und Gittelsohn [51], gezeigt. Beide Ansätze haben dabei zwar sowohl ihre Vor- als auch Nachteile, doch gemeinsam bilden sie eine komfortable Ausgangssituation, um schwache Lösungen, deren Eigenschaften (siehe Abschnitt 4.2.3) und Approximierbarkeit durch eine Folge entsprechender stochastischer Galerkin-Lösungen (siehe Abschnitt 4.2.4) zu untersuchen. Zunächst jedoch wird eine Verallgemeinerung des Lemmas von Lax-Milgram bewiesen, bei der die zugrunde liegende Bilinearform nicht auf dem gesamten kartesischen Produkt definiert ist.

Satz 4.12 *Seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Hilberträume, wobei $X_2 \subset X_1$ und $Y_2 \subset Y_1$ dicht und stetig eingebettet sind. Sei des Weiteren eine Bilinearform $a : X_1 \times Y_1 \supseteq \mathcal{D}_a \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, sodass*

- (i) *die Bilinearform a eingeschränkt auf $X_1 \times Y_2$, d. h. $a|_{X_1 \times Y_2} : X_1 \times Y_2 \rightarrow \mathbb{R}$, und die Bilinearform a eingeschränkt auf $X_2 \times Y_1$, d. h. $a|_{X_2 \times Y_1} : X_2 \times Y_1 \rightarrow \mathbb{R}$, stetig sind,*

- (ii) *die inf-sup-Bedingung*

$$\inf_{u \in X_1 \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y_1 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{X_1} \|v\|_{Y_1}} : |a(u, v)| < \infty \right\} \geq c > 0$$

für eine Konstante $c > 0$ gilt und

- (iii) *für jedes $v \in Y_1 \setminus \{0\}$ ein $u \in X_2$ existiert mit $a(u, v) > 0$.*

Dann existiert für jedes $f \in Y_1^$ ein eindeutiges $u \in X_1$, welches*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in Y_1$$

erfüllt.

Beweis.

Der Operator $T_a : X_1 \rightarrow Y_2^*$, $u \mapsto a(u, \cdot)$, ist linear und stetig wegen Bedingung (i).

Schränkt man diesen Operator auf das Urbild von $Y_1^* \subset Y_2^*$ ein, so ist der eingeschränkte Operator $\hat{T}_a : X_1 \supseteq \mathcal{D}(\hat{T}_a) \rightarrow Y_1^*$ dicht definiert, da $X_2 \subset \mathcal{D}(\hat{T}_a) \subset X_1$ dicht eingebettet ist. Der Operator \hat{T}_a ist linear, injektiv aufgrund

$$\|\hat{T}_a(u)\|_{Y_1^*} = \sup_{v \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{|\langle \hat{T}_a(u), v \rangle|}{\|v\|_{Y_1}} = \sup_{v \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_{Y_1}} \geq c\|u\|_{X_1},$$

und abgeschlossen, weil aus der Stetigkeit von T_a für jede Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\hat{T}_a)$ mit $u_n \rightarrow u$ in X_1 so, dass $\hat{T}_a(u_n) \rightarrow f$ in Y_1^* gilt, folgt, dass $u \in \mathcal{D}(\hat{T}_a)$ und $\hat{T}_a(u) = f$ ist. Nun wird gezeigt, dass das Bild von \hat{T}_a , bezeichnet mit $\mathcal{R}(\hat{T}_a)$, abgeschlossen ist. Angenommen $(\hat{T}_a u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine konvergente Folge in $\mathcal{R}(\hat{T}_a)$ mit Grenzwert $f \in Y_1^*$, dann führt die inf-sup-Bedingung (ii) zu

$$\begin{aligned} c\|u_n - u_m\|_{X_1} &\leq \sup_{v \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{|a(u_n - u_m, v)|}{\|v\|_{Y_1}} \\ &= \sup_{v \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{|\langle \hat{T}_a(u_n - u_m), v \rangle|}{\|v\|_{Y_1}} = \|\hat{T}_a(u_n - u_m)\|_{Y_1^*} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X_1 und besitzt einen Grenzwert $u \in X_1$. Da der Operator \hat{T}_a ein abgeschlossener Operator ist, folgt $\hat{T}_a(u) = f$ und das Bild von \hat{T}_a , $\mathcal{R}(\hat{T}_a)$, ist abgeschlossen. Basierend auf Banachs Satz vom abgeschlossenen Bild (vgl. z. B. Yosida [115, S. 205]) lässt sich schlussfolgern, dass

$$\mathcal{R}(\hat{T}_a) = \mathcal{N}(\hat{T}_a^*)^\perp,$$

wobei $\hat{T}_a^* : Y_1 \supseteq \mathcal{D}(\hat{T}_a^*) \rightarrow X_1^*$ den adjungierten Operator zu \hat{T}_a bezeichnet. Der Kern $\mathcal{N}(\hat{T}_a^*)$ von \hat{T}_a^* ist dabei durch

$$\mathcal{N}(\hat{T}_a^*) = \{v \in \mathcal{D}(\hat{T}_a^*) \subsetneq Y_1 : \langle u, \hat{T}_a^*(v) \rangle = 0 \quad \forall u \in X_1\}$$

definiert. Bedingung (iii) besagt nun, dass für jedes $v \in \mathcal{D}(\hat{T}_a^*) \subsetneq Y_1$, $v \neq 0$, ein $u \in \mathcal{D}(\hat{T}_a)$ existiert, sodass

$$\langle u, \hat{T}_a^*(v) \rangle = \langle \hat{T}_a(u), v \rangle = a(u, v) > 0$$

gilt. Deshalb umfasst der Kern von \hat{T}_a^* nur das Nullelement, d. h. $\mathcal{N}(\hat{T}_a^*) = \{0\}$, und daraufhin folgt nun wiederum $\mathcal{R}(\hat{T}_a) = Y_1^*$, was die Behauptung liefert. \square

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun im folgenden Korollar 4.13 bewiesen werden, dass die stochastische Variationsformulierung in Problem 4.9 für jedes $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Korollar 4.13 Für jedes $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ existiert ein eindeutiges $\hat{u} \in \mathring{U}_{\vartheta}^1$, welches die stochastische Variationsformulierung in Problem 4.9 löst. Weiterhin gilt für die Lösung die Abschätzung

$$\|\hat{u}\|_{U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^1} \leq C\|f\|_{U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}}.$$

Beweis.

Diese Aussage wird gezeigt, indem Satz 4.12 auf die Hilberträume

$$X_1 = \mathring{U}_{\vartheta}^1, \quad X_2 = \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1, \quad Y_1 = \mathring{U}_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^1 \quad \text{und} \quad Y_2 = \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1$$

und die Bilinearform $a : \mathring{U}_\vartheta^1 \times \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \supseteq \mathcal{D}_a \rightarrow \mathbb{R}$, definiert wie in Gleichung (4.12), angewendet wird. Den Beweis von Theorem 3.1 im Artikel [42] von Galvis und Sarkis verallgemeinernd, werden nun alle Bedingungen des Satzes 4.12 nachgewiesen.

Da $c^2 \mu^2 \leq \kappa_{max}^2$ ist, sind der Hilbertraum $\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\kappa_{min}^2}}^1$ in den Hilbertraum \mathring{U}_ϑ^1 und der Hilbertraum $\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1$ in den Hilbertraum $\mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ dicht und stetig eingebettet.

Zu Bedingung (i): Die eingeschränkten Bilinearformen

$$a|_{\mathring{U}_\vartheta^1 \times \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1} : \mathring{U}_\vartheta^1 \times \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a|_{\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1 \times \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1} : \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1 \times \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

sind stetig aufgrund von

$$\left| a|_{\mathring{U}_\vartheta^1 \times \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1}(u, v) \right| \leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max}}{\sqrt{\vartheta}} \sqrt{\vartheta} |u|_{H^1(D)} |v|_{H^1(D)} \right) \leq \|u\|_{\mathring{U}_\vartheta^1} \|v\|_{\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1}$$

und

$$\left| a|_{\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1 \times \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}(u, v) \right| \leq \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max} \sqrt{\vartheta}}{\mu} \frac{\mu}{\sqrt{\vartheta}} |u|_{H^1(D)} |v|_{H^1(D)} \right) \leq \|u\|_{\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1} \|v\|_{\mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}.$$

Zu Bedingung (ii): Für jede Zufallsvariable $u \in \mathring{U}_\vartheta^1$ lässt sich eine Zufallsvariable v_R mit Werten in $\mathring{H}^1(D)$ durch

$$v_R := \begin{cases} \frac{u\vartheta}{\mu}, & \frac{\kappa_{max}}{\mu} \leq R, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren und mit B_R sei die Menge

$$B_R := \left\{ \omega \in \Omega : \frac{\kappa_{max}(\omega)}{\mu(\omega)} \leq R \right\}$$

bezeichnet. Dann gilt $v_R \in \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ aufgrund von

$$|v_R|_{\mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}^2 = \int_{B_R} |u(\omega)|_{H^1(D)}^2 \vartheta(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \leq |u|_{\mathring{U}_\vartheta^1}^2 < \infty.$$

Weiterhin erhält man

$$|a(u, v_R)| = \int_{B_R} \int_D \frac{\kappa(\omega)\vartheta(\omega)}{\mu(\omega)} |\nabla u(\omega)|^2 dx d\mathbf{P}(\omega) \leq R |u|_{\mathring{U}_\vartheta^1}^2 < \infty$$

und wegen Annahme (4.14) an den Koeffizienten κ folgt

$$|a(u, v_R)| = \int_{B_R} \int_D \frac{\kappa(\omega)\vartheta(\omega)}{\mu(\omega)} |\nabla u(\omega)|^2 dx d\mathbf{P}(\omega) \geq c \int_{B_R} |u(\omega)|_{H^1(D)}^2 \vartheta(\omega) d\mathbf{P}(\omega).$$

Da $\mathbf{P}(\Omega \setminus \bigcup_{R>0} B_R) = 0$ ist, existiert für jedes $\delta > 0$ eine Zahl $R > 0$, sodass

$$\int_{B_R} |u(\omega)|_{H^1(D)}^2 \vartheta(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \geq (1 - \delta) |u|_{U_{\vartheta}^1}^2$$

gilt, und womit

$$\sup_{v \in \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \setminus \{0\}} \frac{|a(u, v)|}{|v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \geq \frac{|a(u, v_R)|}{|v_R|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \geq \frac{c(1 - \delta) |u|_{U_{\vartheta}^1}^2}{|u|_{U_{\vartheta}^1}} = c(1 - \delta) |u|_{U_{\vartheta}^1}$$

folgt. Da $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist die inf-sup-Bedingung mit der Konstanten $c > 0$ erfüllt.

Zu Bedingung (iii): Für $v \in \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \setminus \{0\}$ wird die Zufallsvariable u_R mit Werten in $\mathring{H}^1(D)$ durch

$$u_R := \begin{cases} \frac{v\mu}{\vartheta}, & \frac{\kappa_{max}}{\mu} \leq R, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und die Menge } B_R \text{ wie oben}$$

definiert. Dann ist $u_R \in \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1$ aufgrund von

$$\begin{aligned} |u_R|_{U_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1}^2 &= \int_{B_R} |v(\omega)|_{H^1(D)}^2 \frac{\kappa_{max}^2(\omega)}{\vartheta(\omega)} d\mathbf{P}(\omega) \\ &\leq R^2 \int_{B_R} |v(\omega)|_{H^1(D)}^2 \frac{\mu^2(\omega)}{\vartheta(\omega)} d\mathbf{P}(\omega) \leq R^2 |v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}^2 < \infty \end{aligned}$$

und mit der gleichen Argumentation wie oben gilt für genügend großes $R > 0$

$$\begin{aligned} a(u_R, v) &= \int_{B_R} \int_D \kappa(\omega) \frac{\mu(\omega)}{\vartheta(\omega)} |\nabla v(\omega)|^2 dx d\mathbf{P}(\omega) \\ &\geq c \int_{B_R} |v(\omega)|_{H^1(D)}^2 \frac{\mu^2(\omega)}{\vartheta(\omega)} d\mathbf{P}(\omega) \geq c(1 - \delta) |v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}^2 > 0 \end{aligned}$$

für ein $0 < \delta < 1$.

Die Abschätzung $\|\hat{u}\|_{U_{\vartheta}^1} \leq C \|f\|_{U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}}$ folgt unmittelbar aus der inf-sup-Bedingung. \square

Ist man also an einer eindeutigen Lösung $\hat{u} \in \mathring{U}_{\vartheta}$ des Problems 4.9 interessiert, dann ist dies gewährleistet, wenn die rechte Seite f zum Raum $U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ gehört. Für den Spezialfall

$\vartheta \equiv 1$ bedeutet dies, dass man eine eindeutige Lösung $\hat{u} \in \mathring{U}^1$ erhält für alle rechten Seiten $f \in U_{\frac{1}{\mu^2}}^{-1}$. Wird in diesem Falle zusätzlich angenommen, dass μ und f unabhängig sind, so gilt

$$f \in U_{\frac{1}{\mu^2}}^{-1}, \quad \text{wenn} \quad \mu^{-1} \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \quad \text{und} \quad f \in U^{-1}.$$

Dieser Fakt folgt sofort aus

$$\|f\|_{U_{\frac{1}{\mu^2}}^{-1}}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\mu^2} \|f\|_{H^{-1}(D)}^2 \right) = \|\mu^{-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|f\|_{U^{-1}}^2 < \infty.$$

Bemerkung 4.14 *Offensichtlich ist Korollar 4.13 auch für das Modellproblem mit anderen Randbedingungen erfüllt, solange die Halbnorm des $H^1(D)$ eine Norm in den zugehörigen Funktionenräumen auf D ist.*

Eine alternative Methode Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung zu beweisen, gibt Gittelsohn in seinem Artikel [51]. Darin zeigt er im Falle eines lognormalen Zufallsfeldes als Koeffizienten, dass die eindeutige realisierungsweise Lösung \tilde{u} auch die stochastische Variationsaufgabe in Problem 4.9 löst, wenn sie in dem Lösungsraum enthalten ist. Im Folgenden wird dieses Ergebnis für Koeffizienten κ , die der Annahme 4.3 genügen, verallgemeinert.

Satz 4.15 *Für $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ liegt die eindeutige pfadweise Lösung \tilde{u} der realisierungsweisen Variationsformulierung in Problem 4.5 in \dot{U}_{ϑ}^1 und löst ebenso die stochastische Variationsformulierung in Problem 4.9. Des Weiteren ist jede Lösung $\hat{u} \in \dot{U}_{\vartheta}^1$ der stochastischen Variationsaufgabe $\sigma(f, \kappa)$ -messbar und es gilt*

$$\hat{u} = \tilde{u} \quad \text{in } \dot{U}_{\vartheta}^1.$$

Beweis.

Da $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ ist, ergibt sich unter Zuhilfenahme der Abschätzung (4.17)

$$\|\tilde{u}\|_{U_{\vartheta}^1}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\|\tilde{u}\|_{H^1(D)}^2 \vartheta \right) \leq \frac{C^2}{c^2} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\vartheta}{\mu^2} \|f\|_{H^{-1}(D)} \right) = \frac{C^2}{c^2} \|f\|_{U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}}^2 < \infty$$

und da \tilde{u} Problem 4.5 löst, existiert eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so, dass

$$b(\tilde{u}(\omega), v; \omega) = \langle f(\omega), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D) \text{ und } \omega \in \Omega \setminus N$$

erfüllt ist. Dies wiederum impliziert, dass für alle $v \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$ die Gleichung

$$b(\tilde{u}(\omega), v(\omega); \omega) = \langle f(\omega), v(\omega) \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}$$

fast sicher gilt. Bildet man nun den Erwartungswert auf beiden Seiten, erhält man

$$a(\tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$$

und somit löst \tilde{u} das Problem 4.9.

Angenommen die Zufallsvariable $\hat{u} \in \dot{U}_{\vartheta}^1$ erfüllt ebenso

$$a(\hat{u}, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1.$$

Dann wird für $w \in \dot{H}^1(D)$ die Zufallsvariable $[v_{w,A}(\omega)](x) = w(x) \mathbb{1}_A(\omega) \frac{\sqrt{\vartheta(\omega)}}{\mu(\omega)}$ mit $A \in \mathfrak{A}$ definiert und es folgt $v_{w,A} \in \dot{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1$. Damit erhält man für $w \in \dot{H}^1(D)$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\mathbb{1}_A \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu} b(\hat{u}(\cdot), w; \cdot) \right) = a(\hat{u}, v_{w,A}) = \langle f, v_{w,A} \rangle = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\mathbb{1}_A \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu} \langle f(\cdot), w \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right)$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$, womit für jedes $w \in \mathring{H}^1(D)$

$$b(\hat{u}(\omega), w; \omega) = \langle f(\omega), w \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \quad \text{f. s.}$$

gilt. Folglich erfüllt die Zufallsvariable \hat{u} mit Werten in $\mathring{H}^1(D)$ die realisierungsweise Variationsformulierung (4.9), die äquivalent ist zur Formulierung (4.8). Da jedoch die Lösung dieses Problems eindeutig und $\sigma(f, \kappa)$ -messbar ist (siehe Lemma 4.7), gilt für \mathbf{P} -fast alle $\omega \in \Omega$

$$\hat{u}(\omega) = \tilde{u}(\omega) \quad \text{in } \mathring{H}^1(D)$$

und die Zufallsvariable $\hat{u} \in \mathring{H}^1(D)$ ist ebenso messbar bezüglich der σ -Algebra $\sigma(f, \kappa)$. \square

Das heißt, existiert eine schwache Lösung, dann existiert auch die Lösung der realisierungsweisen Variationsformulierung und sie stimmen fast überall und fast sicher überein. Existiert die realisierungsweise Lösung für eine Zufallsvariable f mit Werten in $H^{-1}(D)$, so existiert eine schwache Lösung in $\mathring{U}_{\vartheta}^1$ zu gegebener unterer Schranke μ allerdings nur dann, wenn die Zufallsgröße ϑ derart gewählt worden ist, dass f im Raum $U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ enthalten ist.

4.2.3 Eigenschaften der schwachen Lösung

Die Eingangsdaten eines zufälligen Randwertproblems können üblicherweise mit Hilfe höchstens abzählbar vieler so genannter Basiszufallsvariablen parametrisiert werden, d. h. als Funktion dieser reellwertigen Zufallsgrößen dargestellt werden, und Gleiches lässt sich daraufhin auch für die schwache Lösung schlussfolgern, falls sie existiert. In diesem Abschnitt werden nun die Glattheitseigenschaften der schwachen Lösung als Funktion dieser Basiszufallsvariablen untersucht. Diese Eigenschaften hängen dabei offenkundig von der Art der Parametrisierung, d. h. von der Wahl der Basiszufallsvariablen ab, die natürlich nicht eindeutig ist, und spielen für die Konvergenzgeschwindigkeit der entsprechenden Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen (siehe Abschnitt 4.2.4) eine Rolle.

Im Folgenden wird also angenommen, dass sämtliche zufälligen Eingangsgrößen mit Hilfe reellwertiger Zufallsgrößen, die nicht notwendigerweise unabhängig sein müssen, parametrisiert werden können.

Definition 4.16 *Reellwertige Zufallsgrößen $(\zeta_i)_{i \in I_\zeta}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ heißen Basiszufallsvariablen zu dem zufälligen Randwertproblem (4.5), wenn für $\zeta := (\zeta_i)_{i \in I_\zeta} \in \mathbb{R}^{|I_\zeta|}$ messbare Funktionen $\kappa_\zeta : \mathbb{R}^{|I_\zeta|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\zeta : \mathbb{R}^{|I_\zeta|} \rightarrow H^{-1}(D)$ existieren, sodass*

$$\|\kappa - \kappa_\zeta(\zeta)\|_{L^\infty} = 0 \quad \text{und} \quad \|f - f_\zeta(\zeta)\|_{H^{-1}(D)} = 0 \quad \text{f. s.}$$

erfüllt sind. Die Indexmenge I_ζ ist dabei entweder endlich, d. h. $I_\zeta = \{1, \dots, M\}$, $M \in \mathbb{N}$, oder gleich der Menge der natürlichen Zahlen, d. h. $I_\zeta = \mathbb{N}$.

Seien im Folgenden die Basiszufallsvariablen $\xi := (\xi_i)_{i \in I_\xi} \in \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ gegeben. Eine solche Parametrisierung kann man zum Beispiel mit Hilfe der Karhunen-Loève Entwicklung (siehe z. B. in Loève [71]) oder mittels anderer Reihendarstellungen (wie z. B. in Gittelsohn [52]) erhalten. Die Basiszufallsvariablen selbst sind jedoch nicht eindeutig festgelegt (siehe dazu Beispiel 4.17). Gibt es beispielsweise für eine Folge reellwertiger Zufallsgrößen $\eta := (\eta_i)_{i \in I_\eta}$,

$I_\eta \subseteq \mathbb{N}$, eine messbare Abbildung $T : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ mit $\xi = T(\eta)$, d. h. $\xi_i = T_i(\eta)$ für $i \in I_\xi$, dann ist η ebenfalls eine Folge von Basiszufallsvariablen, da sich durch die Abbildungen $\kappa_\eta : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\eta : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow H^{-1}(D)$ mit

$$\kappa_\eta(y) := \kappa_\xi(T(y)) \quad \text{und} \quad f_\eta(y) := f_\xi(T(y)), \quad y \in \mathbb{R}^{|I_\eta|},$$

messbare Funktionen definieren lassen, für die

$$\|\kappa - \kappa_\eta(\eta)\|_{L^\infty(D)} = \|\kappa - \kappa_\xi(T(\eta))\|_{L^\infty(D)} = \|\kappa - \kappa_\xi(\xi)\|_{L^\infty(D)} = 0 \quad \text{f. s.}$$

und

$$\|f - f_\eta(\eta)\|_{H^{-1}(D)} = \|f - f_\xi(T(\eta))\|_{H^{-1}(D)} = \|f - f_\xi(\xi)\|_{H^{-1}(D)} = 0 \quad \text{f. s.}$$

gelten.

Beispiel 4.17

(a) Ist der Koeffizient κ durch $\kappa(x, \omega) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i(\omega)| \psi_i(x)\right)$ mit reellwertigen Zufallsgrößen η_i und geeigneten deterministischen Funktionen $\psi_i \in L^\infty(D)$, $i \in \mathbb{N}$, gegeben und der Quellterm f eine deterministische Funktion, so können zum Beispiel als Basiszufallsvariablen

$$\xi := (|\eta_i|)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad \eta := (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

gewählt werden.

(b) Im Falle von unabhängigen Basiszufallsvariablen ξ_i , $i \in \mathbb{N}$, kann die Anzahl der Basiszufallsvariablen immer auf eins reduziert werden analog zu Bemerkung 3.30 unter Verwendung von Satz 2.11 (i) und (ii).

Da die σ -Algebra $\sigma(f, \kappa)$ gröber ist als die σ -Algebra $\sigma(\xi)$, d. h. $\sigma(f, \kappa) \subseteq \sigma(\xi)$, und die schwache Lösung \hat{u} nach Lemma 4.7 messbar ist bezüglich der σ -Algebra $\sigma(f, \kappa)$, so ist \hat{u} auch messbar bezüglich der σ -Algebra $\sigma(\xi)$. Mit dem Doob-Dynkin Lemma (z. B. zu finden bei Kallenberg [65]) folgt damit, dass eine messbare Funktion $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|I_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ existiert mit

$$\|\hat{u} - \hat{u}_\xi(\xi)\|_{H^1(D)} = 0 \quad \text{f. s.}$$

Das bedeutet

$$[\hat{u}(\omega)](x) = [\hat{u}_\xi(\xi(\omega))](x) \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

Welche Eigenschaften die Funktion $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|I_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ nun besitzt, wird im Weiteren thematisiert. Analog zu der realisierungsweisen Variationsaufgabe in Problem 4.5 löst $\hat{u}_\xi(\xi)$ damit auch die äquivalente parametrisierte Variationsgleichung fast sicher. Diese lautet

$$b_\xi(\hat{u}_\xi(\xi(\omega)), v; \xi(\omega)) = \langle f_\xi(\xi(\omega)), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D),$$

wobei für $y \in \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ die parametrisierte Bilinearform $b_\xi(\cdot, \cdot; y) : H^1(D) \times H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$b_\xi(u, v; y) := \int_D \kappa_\xi(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

definiert ist. Zusätzlich wird die Menge

$$\Gamma_{\kappa_\xi} := \{y \in \mathbb{R}^{|I_\xi|} : \exists c > 0 \text{ mit } \kappa_\xi(y) \geq c \text{ f. ü. auf } D\} \quad (4.20)$$

eingeführt. Da $\hat{u} = \hat{u}_\xi(\xi)$ fast sicher gilt, kann o. B. d. A. die Funktion \hat{u}_ξ so gewählt werden, dass für alle $y \in \Gamma_{\kappa_\xi}$ die Gleichung

$$b_\xi(\hat{u}_\xi(y), v; y) = \langle f_\xi(y), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \dot{H}^1(D)$$

erfüllt ist.

Die interessierenden Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von \hat{u}_ξ werden nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen untersucht. Dafür sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D), \quad (y, u) \mapsto b_\xi(u, \cdot; y) - f_\xi(y) \quad (4.21)$$

auf den Mengen $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$, $\dot{H}^1(D)$ und $H^{-1}(D)$ definiert.

Die Sobolev-Räume $\dot{H}^1(D)$ und $H^{-1}(D)$ sind Hilberträume und im Falle einer endlichen Anzahl von Basiszufallsvariablen, d. h. $|\mathcal{I}_\xi| < \infty$, trifft dies auch auf $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$ mit der üblichen euklidischen Norm zu. Werden jedoch abzählbar viele Basiszufallsvariablen, d. h. $\mathcal{I}_\xi = \mathbb{N}$, zur Darstellung der Eingangsdaten benötigt, dann handelt es sich bei $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um einen Fréchetraum. Das heißt, die Topologie dieses Raumes wird durch die abzählbare Familie von Halbnormen $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|y\|_n := (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$, für $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erzeugt, mittels derer eine translationsinvariante Metrik d definiert werden kann. Damit ist $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$ in jedem Fall ein vollständiger, metrischer Vektorraum.

Die formale Ableitung von F im ersten Argument für $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ ist dann mit $D_1F(y, u) : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ und

$$[D_1F(y, u)](h_y) = \int_D [D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla \cdot dx - [Df_\xi(y)](h_y), \quad h_y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, \quad (4.22)$$

gegeben, wobei die Abbildungen $D\kappa_\xi(y) : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $Df_\xi(y) : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ die Ableitungen von κ_ξ und f_ξ bezeichnen. Die formale Ableitung von F im zweiten Argument für $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ ist dann $D_2F(y, u) : \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ mit

$$[D_2F(y, u)](h_u) = \int_D \kappa_\xi(y) \nabla h_u \cdot \nabla \cdot dx, \quad h_u \in \dot{H}^1(D). \quad (4.23)$$

Für die Definition der im Folgenden auftretenden Begriffe wie Fréchet- und Gâteaux-Differenzierbarkeit oder Homöomorphismus sei auf die Literatur verwiesen (z. B. Ioffe [63]).

Proposition 4.18 *Seien zu den Basiszufallsvariablen $\xi := (\xi_i)_{i \in \mathcal{I}_\xi}$ die messbaren Funktionen $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ gegeben. Bezeichne weiterhin $F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ die Funktion wie in Formel (4.21) und sei die Menge Γ_{κ_ξ} wie in (4.20) definiert.*

1. Sind κ_ξ und f_ξ stetige Funktionen, dann ist auch die Funktion F stetig.
2. (i) Sei $|\mathcal{I}_\xi| < \infty$. Sind κ_ξ und f_ξ stetig Fréchet-differenzierbar, dann ist die Funktion F im ersten Argument ebenfalls stetig Fréchet-differenzierbar und die partielle Ableitung in $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ ist mit $D_1F(y, u)$ in (4.22) gegeben.
- (ii) Sei $\mathcal{I}_\xi = \mathbb{N}$. Sind κ_ξ und f_ξ Gâteaux-differenzierbar und die beiden Abbildungen $(y, h_y) \mapsto [D\kappa_\xi(y)](h_y)$ von $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $(y, h_y) \mapsto [Df_\xi(y)](h_y)$ von $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig, dann ist die Funktion F im ersten Argument

ebenfalls Gâteaux-differenzierbar mit der Ableitung $D_1F(y, u)$ in (4.22) und die Abbildung $(y, u, h_y) \mapsto [D_1F(y, u)](h_y)$ von $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \times \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ ist stetig.

3. Ist κ_ξ stetig, so ist die Funktion F im zweiten Argument stetig Fréchet-differenzierbar. Die partielle Ableitung ist mit $D_2F(y, u)$ in (4.23) für $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ gegeben. Gilt $F(y_0, u_0) = 0$ für einen Punkt $(y_0, u_0) \in \Gamma_{\kappa_\xi} \times \dot{H}^1(D)$, dann ist $D_2F(y_0, u_0) : \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ ein linearer Homöomorphismus.

Beweis.

Zu 1.: Die Stetigkeit der Funktion $F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ in einem beliebigen Punkt $(y_0, u_0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ folgt mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|F(y_0, u_0) - F(y, u)\|_{H^{-1}(D)} \\ &= \sup_{\substack{v \in \dot{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D \kappa_\xi(y_0) \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \langle f_\xi(y_0), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right. \\ & \quad \left. - \int_D \kappa_\xi(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \langle f_\xi(y), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right| \\ &= \sup_{\substack{v \in \dot{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D \kappa_\xi(y_0) \nabla(u_0 - u) \cdot \nabla v \, dx + \int_D (\kappa_\xi(y_0) - \kappa_\xi(y)) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right. \\ & \quad \left. - \langle f_\xi(y_0) - f_\xi(y), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right| \\ &\leq \|\kappa_\xi(y_0)\|_{L^\infty(D)} \|u_0 - u\|_{H^1(D)} + \|\kappa_\xi(y_0) - \kappa_\xi(y)\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \\ & \quad + \|f_\xi(y_0) - f_\xi(y)\|_{H^{-1}(D)} \end{aligned}$$

unmittelbar aus der Stetigkeit von κ_ξ und f_ξ auf $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$.

Zu 2.(i): Um nachzuweisen, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ im ersten Argument stetig Fréchet-differenzierbar ist mit Ableitung $D_1F(y, u) : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ muss gezeigt werden, dass zum einen $D_1F(y, u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))$ mit

$$\frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|F(y + h_y, u) - F(y, u) - [D_1F(y, u)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow 0, \quad \text{für } \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} \rightarrow 0$$

gilt und zum anderen die Abbildung $D_1F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))$, definiert durch $(y, u) \mapsto D_1F(y, u)$, stetig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|F(y + h_y, u) - F(y, u) - [D_1F(y, u)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \\ &= \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|F(y + h_y, u) - F(y, u) - \int_D [D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla \cdot \, dx \\ & \quad + [Df_\xi(y)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \\ &= \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \left\| \int_D \left(\kappa_\xi(y + h_y) - \kappa_\xi(y) - [D\kappa_\xi(y)](h_y) \right) \nabla u \cdot \nabla \cdot \, dx \right. \\ & \quad \left. - (f_\xi(y + h_y) - f_\xi(y) - [Df_\xi(y)](h_y)) \right\|_{H^{-1}(D)} \\ &\leq \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \sup_{\substack{v \in \dot{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D \left(\kappa_\xi(y + h_y) - \kappa_\xi(y) - [D\kappa_\xi(y)](h_y) \right) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|f_\xi(y + h_y) - f_\xi(y) - [Df_\xi(y)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \\
\leq & \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|\kappa_\xi(y + h_y) - \kappa_\xi(y) - [D\kappa_\xi(y)](h_y)\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \\
& + \frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|f_\xi(y + h_y) - f_\xi(y) - [Df_\xi(y)](h_y)\|_{H^{-1}(D)}
\end{aligned}$$

und da κ_ξ und f_ξ auf $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$ Fréchet-differenzierbar sind, d. h.

$$\frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|\kappa_\xi(y + h_y) - \kappa_\xi(y) - [D\kappa_\xi(y)](h_y)\|_{L^\infty(D)} \rightarrow 0, \quad \text{wenn } \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} \rightarrow 0,$$

und

$$\frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|f_\xi(y + h_y) - f_\xi(y) - [Df_\xi(y)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow 0, \quad \text{wenn } \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} \rightarrow 0,$$

für alle $y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$, folgt

$$\frac{1}{\|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}} \|F(y + h_y, u) - F(y, u) - [D_1F(y, u)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} \rightarrow 0$$

und für alle $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \mathring{H}^1(D)$. Des Weiteren ist $D_1F(y, u) : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ linear und die Stetigkeit ergibt sich aus der Beschränktheit

$$\begin{aligned}
& \|[D_1F(y, u)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \\
& = \sup_{\substack{v \in \mathring{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D [D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y)](h_y), v \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \right| \\
& \leq \|D\kappa_\xi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, L^\infty(D))} \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} \|u\|_{H^1(D)} + \|Df_\xi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))} \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}},
\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $D\kappa_\xi(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, L^\infty(D))$ und $Df_\xi(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))$ für alle $y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$ gilt. Die Stetigkeit von $D_1F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \mathring{H}^1(D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))$ lässt sich mittels der Stetigkeit der beiden Abbildungen $D\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, L^\infty(D))$ und $Df_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))$ zeigen. Für einen beliebigen Punkt $(y_0, u_0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \mathring{H}^1(D)$ gilt also

$$\begin{aligned}
& \|D_1F(y_0, u_0) - D_1F(y, u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, H^{-1}(D))} \\
& = \sup_{\substack{h_y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \\ \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}=1}} \|[D_1F(y_0, u_0)](h_y) - [D_1F(y, u)](h_y)\|_{H^{-1}(D)} \\
& = \sup_{\substack{h_y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \\ \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}=1}} \sup_{\substack{v \in \mathring{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D [D\kappa_\xi(y_0)](h_y) \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y_0)](h_y), v \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \right. \\
& \quad \left. - \int_D [D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y)](h_y), v \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \right| \\
& = \sup_{\substack{h_y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \\ \|h_y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}}=1}} \sup_{\substack{v \in \mathring{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D [D\kappa_\xi(y_0)](h_y) \nabla (u_0 - u) \cdot \nabla v \, dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_D [D\kappa_\xi(y_0) - D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y_0) - Df_\xi(y)](h_y), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \\
& \leq \|D\kappa_\xi(y_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\xi|}, L^\infty(D))} \|u_0 - u\|_{H^1(D)} + \|D\kappa_\xi(y_0) - D\kappa_\xi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\xi|}, L^\infty(D))} \|u\|_{H^1(D)} \\
& \quad + \|Df_\xi(y_0) - Df_\xi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\xi|}, H^{-1}(D))}
\end{aligned}$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\|D_1F(y_0, u_0) - D_1F(y, u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{|\xi|}, H^{-1}(D))} < \varepsilon$ wenn $\|y_0 - y\|_{\mathbb{R}^{|\xi|}} + \|u_0 - u\|_{H^1(D)} < \delta$.

Zu 2.(ii): Die Gâteaux-Differenzierbarkeit von F im ersten Argument folgt analog zum Beweis von Punkt 2 (i) aus der Gâteaux-Differenzierbarkeit von κ_ξ und f_ξ auf $\mathbb{R}^{|\xi|}$. Des Weiteren ist $(y, u, h_y) \mapsto [D_1F(y, u)](h_y)$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D) \times \mathbb{R}^{|\xi|}$ nach $H^{-1}(D)$ stetig, da für einen beliebigen Punkt $(y_0, u_0, h_{y_0}) \in \mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D) \times \mathbb{R}^{|\xi|}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \| [D_1F(y_0, u_0)](h_{y_0}) - [D_1F(y, u)](h_y) \|_{H^{-1}(D)} \\
& = \sup_{\substack{v \in \dot{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D [D\kappa_\xi(y_0)](h_{y_0}) \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y_0)](h_{y_0}), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right. \\
& \quad \left. - \int_D [D\kappa_\xi(y)](h_y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle [Df_\xi(y)](h_y), v \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} \right| \\
& \leq \| [D\kappa_\xi(y_0)](h_{y_0}) \|_{L^\infty(D)} \|u_0 - u\|_{H^1(D)} \\
& \quad + \| [D\kappa_\xi(y_0)](h_{y_0}) - [D\kappa_\xi(y)](h_y) \|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \\
& \quad + \| [Df_\xi(y_0)](h_{y_0}) - [Df_\xi(y)](h_y) \|_{H^{-1}(D)}
\end{aligned}$$

gilt und die beiden Abbildungen $(y, h_y) \mapsto [D\kappa_\xi(y)](h_y)$ von $\mathbb{R}^{|\xi|} \times \mathbb{R}^{|\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $(y, h_y) \mapsto [Df_\xi(y)](h_y)$ von $\mathbb{R}^{|\xi|} \times \mathbb{R}^{|\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig sind.

Zu 3.: Analog zu Punkt 2 (i) sind die Bedingungen der stetigen Fréchet-Differenzierbarkeit von $F : \mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ im zweiten Argument mit Ableitung $D_2F(y, u)$ zu zeigen. Es gilt

$$\frac{1}{\|h_u\|_{H^1(D)}} \|F(y, u + h_u) - F(y, u) - [D_2F(y, u)](h_u)\|_{H^{-1}(D)} = \frac{1}{\|h_u\|_{H^1(D)}} \cdot 0 = 0.$$

Des Weiteren ist $D_2F(y, u) : \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ für festes $(y, u) \in \mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ linear und stetig aufgrund der Beschränktheit

$$\| [D_2F(y, u)](h_u) \|_{H^{-1}(D)} = \sup_{\substack{v \in \dot{H}^1(D) \\ \|v\|_{H^1(D)}=1}} \left| \int_D \kappa_\xi(y) \nabla h_u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\kappa_\xi(y)\|_{L^\infty(D)} \|h_u\|_{H^1(D)}.$$

Die Stetigkeit von $D_2F : \mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow \mathcal{L}(\dot{H}^1(D), H^{-1}(D))$, $(y, u) \mapsto D_2F(y, u)$, lässt sich wiederum mittels der Stetigkeit von $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ zeigen. Für ein beliebiges Element $(y_0, u_0) \in \mathbb{R}^{|\xi|} \times \dot{H}^1(D)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned}
& \|D_2F(y_0, u_0) - D_2F(y, u)\|_{\mathcal{L}(\dot{H}^1(D), H^{-1}(D))} \\
& = \sup_{\substack{h_u \in \dot{H}^1(D) \\ \|h_u\|_{H^1(D)}=1}} \left\| \int_D \kappa_\xi(y_0) \nabla h_u \cdot \nabla \cdot \, dx - \int_D \kappa_\xi(y) \nabla h_u \cdot \nabla \cdot \, dx \right\|_{H^{-1}(D)}
\end{aligned}$$

$$\leq \|\kappa_\xi(y_0) - \kappa_\xi(y)\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon$$

für $\|y_0 - y\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}} + \|u_0 - u\|_{H^1(D)} < \delta$.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Ableitung $D_2F(y_0, u_0) : \mathring{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ ein linearer Homöomorphismus für $(y_0, u_0) \in \Gamma_{\kappa_\xi} \times \mathring{H}^1(D)$ mit $F(y_0, u_0) = 0$ ist, d. h., dass $D_2F(y_0, u_0) : \mathring{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ linear, stetig und bijektiv ist und eine lineare, stetige Inverse besitzt. Die Linearität und Stetigkeit von $D_2F(y_0, u_0)$ ist gerade gezeigt worden. Für die übrigen Eigenschaften wird ausgenutzt, dass für $y_0 \in \Gamma_{\kappa_\xi}$ eine Konstante $c_0 > 0$ existiert mit $\kappa_\xi(y_0) \geq c_0 > 0$ f. ü. auf D . Weil die Gleichung

$$[D_2F(y_0, u_0)](h_{u_1} - h_{u_2}) = 0 \quad \text{in } H^{-1}(D)$$

äquivalent zu

$$[D_2F(y_0, u_0)](h_{u_1} - h_{u_2}) = \int_D \kappa_\xi(y_0) \nabla(h_{u_1} - h_{u_2}) \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathring{H}^1(D)$$

ist, folgt für $v := h_{u_1} - h_{u_2}$ mit einer Konstanten $C > 0$

$$0 = \int_D \kappa_\xi(y_0) |\nabla(h_{u_1} - h_{u_2})|^2 \, dx \geq C \|h_{u_1} - h_{u_2}\|_{H^1(D)}^2.$$

Das heißt $\|h_{u_1} - h_{u_2}\|_{H^1(D)} = 0$ und damit ist die Injektivität gezeigt. Um die Surjektivität nachzuweisen, sei ein $g \in H^{-1}(D)$ gegeben. Für y_0 sind die Bedingungen des Lax-Milgram Lemmas erfüllt und die Gleichung

$$[D_2F(y_0, u_0)](h_u) = g \quad \text{in } H^{-1}(D),$$

d. h.

$$\int_D \kappa_\xi(y_0) \nabla h_u \cdot \nabla v \, dx = \langle g, v \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \quad \text{für alle } v \in \mathring{H}^1(D),$$

besitzt deshalb eine eindeutige Lösung $h_u \in \mathring{H}^1(D)$. Damit existiert die inverse Abbildung $(D_2F(y_0, u_0))^{-1} : H^{-1}(D) \rightarrow \mathring{H}^1(D)$. Sie ist ebenfalls linear und die Stetigkeit folgt aus der Beschränktheit wie folgt. Dazu seien $g \in H^{-1}(D)$ und $(D_2F(y_0, u_0))^{-1}(g) = h_u \in \mathring{H}^1(D)$ gegeben, d. h. $[D_2F(y_0, u_0)](h_u) = g$ in $H^{-1}(D)$, dann folgt nach dem Lemma von Lax-Milgram

$$C \|h_u\|_{H^1(D)}^2 \leq \int_D \kappa_\xi(y_0) |\nabla h_u|^2 \, dx = \langle g, h_u \rangle_{H^{-1}, \mathring{H}^1} \leq \|g\|_{H^{-1}(D)} \|h_u\|_{H^1(D)}$$

und damit gilt

$$\|(D_2F(y_0, u_0))^{-1}(g)\|_{H^{-1}(D)} \leq C^{-1} \|g\|_{H^{-1}(D)}.$$

□

Bemerkung 4.19 Aussagen über Ableitungen höherer Ordnung von F , d. h. höhere Differenzierbarkeit von F , lassen sich analog zu Proposition 4.18 treffen.

Satz 4.20 Seien $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig, dann ist die Abbildung $u_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \mathring{H}^1(D)$ stetig auf dem Inneren von Γ_{κ_ξ} , d. h. auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$.

Beweis.

Der Nachweis der Stetigkeit von \hat{u}_ξ wird auf den Satz über implizite Funktionen zurückgeführt (siehe Glöckner [53, Proposition 2.1]). Nach Proposition 4.18 Punkt 1 ist die Funktion $F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig und nach Punkt 3 stetig Fréchet-differenzierbar im zweiten Argument. Des Weiteren gilt für alle $y \in \Gamma_{\kappa_\xi}$, dass $F(y, \hat{u}_\xi(y)) = 0$ und $D_2F(y, \hat{u}_\xi(y))$ ein linearer Homöomorphismus ist. Damit existiert nach obigem Satz über implizite Funktionen für $(y_0, \hat{u}_\xi(y_0))$ mit $y_0 \in \text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}$ und eine stetige Funktion $u : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \supseteq U \rightarrow \dot{H}^1(D)$ mit $F(y, u(y)) = 0$ für alle $y \in U$. Weil jedoch die Abbildung $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ eindeutig durch $F(y, \hat{u}_\xi(y)) = 0$ für $y \in \Gamma_{\kappa_\xi}$ bestimmt ist, folgt

$$u(y) = \hat{u}_\xi(y) \quad \text{in } \dot{H}^1(D) \text{ für alle } y \in U \cap \Gamma_{\kappa_\xi}.$$

Da $(y_0, \hat{u}_\xi(y_0))$ mit $y_0 \in \text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$ beliebig gewählt werden kann, folgt, dass \hat{u}_ξ stetig ist auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$. \square

Satz 4.21

- (i) Sei $|\mathcal{I}_\xi| < \infty$. Sind $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig Fréchet-differenzierbar, dann ist die Abbildung $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ ebenfalls stetig Fréchet-differenzierbar auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$.
- (ii) Sei $I_\xi = \mathbb{N}$. Sind $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ zweimal Gâteaux-differenzierbar und die Abbildungen zu den jeweiligen Ableitungen, wie in Proposition 4.18 Punkt 2 (ii) gefordert, stetig, dann ist die Abbildung $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$ Gâteaux-differenzierbar und die Abbildung $(y, h_y) \mapsto [D\hat{u}_\xi(y)](h_y)$ von $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi}) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ ist ebenfalls stetig.

Beweis.

Zu (i): Dieses Resultat folgt wiederum mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen für Banachräume (siehe z. B. Dieudonne [32, Satz 10.2.1]). Nach Proposition 4.18 Punkt 2 (i) und Punkt 3 ist $F : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \times \dot{H}^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ stetig partiell Fréchet-differenzierbar und damit stetig Fréchet-differenzierbar. Nach der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 4.20 kann dann geschlussfolgert werden, dass $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ stetig Fréchet-differenzierbar ist auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$.

Zu (ii): Dieses Resultat wird basierend auf einer Verallgemeinerung des Satz über implizite Funktionen für Banachräume (siehe Glöckner [53, Theorem 2.3]) nachgewiesen. Unter den Voraussetzungen für κ_ξ und f_ξ und nach Proposition 4.18 Punkt 2 (ii) ist auch F zweimal Gâteaux-differenzierbar und die entsprechenden Abbildungen der jeweiligen Ableitungen sind stetig. Damit folgt analog zu obigen Überlegungen unter Verwendung des Theorems 2.3 aus Glöckner [53], dass $\hat{u}_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ Gâteaux-differenzierbar ist auf $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi})$ und die Abbildung $(y, h_y) \mapsto [D\hat{u}_\xi(y)](h_y)$ von $\text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi}) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \dot{H}^1(D)$ stetig ist. \square

Bemerkung 4.22

- (a) Entsprechende Aussagen zu Ableitungen höherer Ordnung, d. h. höhere Regularität, von \hat{u}_ξ lassen sich analog zu Satz 4.21 treffen.

(b) Im Falle, dass der Koeffizient κ ein lognormales Zufallsfeld ist wie in Beispiel 4.4 (b) und als Basiszufallsvariablen die auftretenden Zufallsgrößen ξ_i , $i \in \mathbb{N}$, gewählt werden, ergibt sich mit $\xi := (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für $\kappa_\xi(y) := \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i \psi_i\right)$, $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge $\Gamma_{\kappa_\xi} = \text{int}(\Gamma_{\kappa_\xi}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Das heißt, man erhält Glattheitsaussagen für \hat{u}_ξ auf ganz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Damit steht die Regularität der schwachen Lösung \hat{u} , parametrisiert durch Basiszufallsvariablen ξ , in direktem Zusammenhang mit der Regularität der in ξ parametrisierten Eingangsdaten. Aussagen über die Regularität der schwachen Lösung \hat{u} in der räumlichen Variablen $x \in D$, d. h. von $\hat{u}_\xi(y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $y \in \xi(\Omega)$, können aus der Theorie der rein deterministischen (partiellen) Differentialgleichungen übernommen werden und darum sei an dieser Stelle auf die diesbezügliche Literatur (z. B. Evans [35]) verwiesen.

4.2.4 Stochastische Galerkin-Methode

Eine Möglichkeit die stochastische Variationsformulierung numerisch zu lösen, bietet die von Ghanem und Spanos (siehe [49]) begründete stochastische Galerkin-Methode, die in diesem Abschnitt betrachtet werden soll. Die Idee der stochastischen Galerkin-Methode ist es (wie bereits in Abschnitt 4.1 zu den zufälligen algebraischen Gleichungen erwähnt), endlichdimensionale Teilräume des Lösungs- und Testfunktionenraumes zu definieren und auf diesen Räumen die Lösung der stochastischen Variationsaufgabe – genannt stochastische Galerkin-Lösung – zu berechnen. Das heißt, es muss sowohl eine Diskretisierung in der räumlichen Dimension als auch in der stochastischen vorgenommen werden. Die Diskretisierung in der stochastischen Dimension erfolgt dabei wieder auf Grundlage von Polynomen in gewissen Basiszufallsvariablen, mit denen die Eingangsdaten und damit auch die schwache Lösung parametrisiert werden können.

In der Literatur herrschen vor allem zwei mögliche stochastische Galerkin-Ansätze vor. Der standardmäßige stochastische Galerkin-Ansatz, der für Koeffizienten κ benutzt wird, die sich durch Konstanten von Null und Unendlich trennen lassen, verwendet identische endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume (siehe z. B. Le Maître und Knio [68], Xiu [108] oder Schwab und Gittelsohn [87]). Dieser Ansatz wurde bzw. wird auch häufig noch auf Probleme angewandt, bei denen sich der Koeffizient nicht durch Konstanten sondern nur durch Zufallsgrößen von Null und Unendlich beschränken lässt. Da in diesem Falle aber nicht in analoger Weise bewiesen werden kann (siehe Abschnitt 4.1), dass die Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm (Norm des Lösungsraumes \dot{U}_ρ^1) konvergiert, entwickelten Galvis und Sarkis in [42] und auch Gittelsohn in [51] für lognormale Zufallsfelder als Koeffizienten κ einen alternativen stochastischen Galerkin-Ansatz, der auf unterschiedlichen Ansatz- und Testfunktionenräumen basiert. Mit anderen Worten, beide verwenden einen stochastischen Petrov-Galerkin-Ansatz, um eine in der natürlichen Norm konvergente Folge von stochastischen Petrov-Galerkin-Lösungen zu erhalten. In diesem Abschnitt nun wird dieser Ansatz in Analogie zu Galvis und Sarkis in [42] für beliebige Koeffizienten κ , die sich nur durch Zufallsgrößen von Null und Unendlich trennen lassen, verallgemeinert (siehe dazu auch [78]). Dabei wird sowohl die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen stochastischen Galerkin-Lösung als auch deren Approximationsqualität untersucht. Insbesondere werden A-priori-Fehlerabschätzungen angegeben, die die verschiedenen Ursprünge des Approximationsfehlers offenlegen und einen Hinweis darauf geben, wovon die Approximationsgüte bzw. Konvergenzgeschwindigkeit der Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen

abhängt. Insbesondere soll näher untersucht werden, wie die Wahl der Basiszufallsvariablen die Approximationsqualität beeinflusst. Denn dass sie einen Einfluss haben, haben schon Karniadakis, Xiu und deren Co-Autoren in ihren verschiedensten Arbeiten [73, 110, 111, 112, 113, 114] festgestellt. Daran schließt sich dann eine kurze Betrachtung zu verschiedenen Aspekten für die numerische Berechnung dieser stochastischen Petrov-Galerkin-Lösungen an. Des Weiteren wird ein konkretes Beispiel angegeben, für das der standardmäßig genutzte stochastische Galerkin-Ansatz in dem Sinne fehlschlägt, dass die Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen nicht in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergiert (vgl. ebenfalls [78]).

Seien also nach Definition 4.16 im Folgenden auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ die Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ gegeben. Des Weiteren werde angenommen, dass die Zufallsvariable ξ die Verteilung $F_\xi^{\mathbf{P}}$ hat und jede Zufallsgröße ξ_i , $i \in I_\xi$, endliche mit ϑ gewichtete Momente beliebiger Ordnung, d. h. $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|\xi_i|^{n\vartheta}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und eine stetige Verteilungsfunktion $F_{\xi_i}^{\mathbf{P}}$ besitzt (vgl. dazu auch Annahme 3.1 in Abschnitt 3.1.1). Die Verteilungen $F_\xi^{\mathbf{P}}$ bzw. $F_{\xi_i}^{\mathbf{P}}$ sind dabei die Verteilungen, die ξ bzw. ξ_i bezüglich des Maßes \mathbf{P} , d. h. als Zufallsvariablen des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, haben. Da im späteren Verlauf dieses Abschnitts diese Zufallsvariablen auch als Zufallsvariablen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit anderen Wahrscheinlichkeitsmaßen betrachtet werden und damit im Allgemeinen andere Verteilungen besitzen, wird das Maß, bezüglich dessen die Verteilung zu verstehen ist, in ihrer Bezeichnung mitgeführt.

Aufgrund dessen, dass $\sigma(f, \kappa) \subseteq \sigma(\xi)$ und die schwache Lösung \hat{u} nach Lemma 4.7 bezüglich der σ -Algebra $\sigma(f, \kappa)$ messbar ist, ist \hat{u} auch messbar bezüglich der σ -Algebra $\sigma(\xi)$. Der zu diskretisierende Lösungsraum der schwachen Lösung \hat{u} ist demnach

$$L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P}; \dot{H}^1(D)) \subset \dot{U}_\vartheta^1$$

und als endlichdimensionaler Ansatzraum der stochastischen Galerkin-Lösung dient der Raum

$$U_{N,K,hp} := U_{hp} \otimes U_{N,K} \subset \dot{H}^1(D) \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P}).$$

Nach Proposition 2.10 ist dann dieser Tensorproduktraum $H^1(D) \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P})$ isometrisch isomorph zu $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P}; \dot{H}^1(D))$ und damit ist $U_{N,K,hp}$ ein Teilraum von \dot{U}_ϑ^1 . Mit $U_{hp} \subset \dot{H}^1(D)$ sei dabei ein endlichdimensionaler Teilraum von $\dot{H}^1(D)$ bezeichnet, den man durch die Verwendung einer geeigneten h -, p -, oder hp -Version der Finiten-Elemente-Diskretisierung (siehe z. B. Canuto et al. [26]) in der räumlichen Dimension erhält, und $U_{N,K}$ sei ein endlichdimensionaler Teilraum von $L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \vartheta d\mathbf{P}) \subseteq L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P})$ mit $\{1, \dots, K\} \subseteq I_\xi$. Um verallgemeinertes polynomielles Chaos, d. h. Polynome in den zugrunde liegenden Basiszufallsvariablen, für die stochastische Galerkin-Lösung, d. h. zur Definition des Unterraumes $U_{N,K}$, verwenden zu können, müssen auf jeden Fall die Konstanten im Raum $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ enthalten sein (vgl. Abschnitt 2.2). Darum wird im Folgenden angenommen, dass die Zufallsgröße ϑ einen endlichen Erwartungswert besitzt. Unter dieser Annahme kann dann folgender endlichdimensionaler Unterraum definiert werden

$$U_{N,K} := \text{span} \left\{ \xi^\alpha := \prod_{i \in I_\xi} \xi_i^{\alpha_i}, \alpha \in \Lambda_{N,K} \right\},$$

wobei die endliche Indexmenge

$$\Lambda_{N,K} \subset \Lambda := \{ \alpha \in \mathbb{N}_0^{|I_\xi|} : \alpha \text{ hat nur endlich viele Nicht-Null-Elemente} \}$$

derart gewählt sei, dass die Familie $(\Lambda_{N,K})_{N,K}$ die Eigenschaft $\bigcup_{N,K} \Lambda_{N,K} = \Lambda$ besitzt. Zum Beispiel können mit $\Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(1)}$,

$$J_{N,K}^{(1)} := \{ \alpha \in \Lambda : \alpha_i = 0 \forall i > K, |\alpha| \leq N \}, \quad |\alpha| := \sum_{i \in I_\xi} \alpha_i, \quad (4.24)$$

die Polynome in den ersten K Basiszufallsvariablen mit beschränktem totalen Grad ausgewählt werden. Alternativ können auch die Polynome in den ersten K Basiszufallsvariablen verwendet werden mit $\Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(2)}$,

$$J_{N,K}^{(2)} := \{ \alpha \in \Lambda : \alpha_i = 0 \forall i > K, \alpha_i \leq N \forall 1 \leq i \leq K \}, \quad (4.25)$$

d. h. der Polynomgrad in den einzelnen Argumenten ist beschränkt.

Für den endlichdimensionalen Testfunktionenraum wird für eine reellwertige Zufallsgröße $\nu > 0$ f. s. der Raum

$$V_{\nu,N,K,hp} := \{ u\nu : u \in U_{N,K,hp} \}$$

definiert. Die Gewichtung der Elemente $u \in U_{N,K,hp}$ mit der Zufallsgröße ν in der Definition des diskretisierten Testfunktionenraumes spielt sowohl für die Existenz einer eindeutigen stochastischen Galerkin-Lösung als auch für deren Konvergenz gegen die schwache Lösung eine Rolle. Deshalb werden folgende Annahmen getroffen.

Annahme 4.23 *Für die endlichdimensionalen Unterräume $U_{N,K,hp} = U_{hp} \otimes U_{N,K}$ des Raumes $\dot{H}^1(D) \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \vartheta d\mathbf{P})$ und die reellwertige Zufallsgröße $\nu > 0$ f. s. existieren Konstanten $C, c > 0$, sodass die Bedingungen*

$$\begin{aligned} (a) : \quad a(u, u\nu) &\geq c|u|_{U_\vartheta^1}^2, & (b) : \quad |u|_{U^1} < \infty, \\ (c) : \quad |u\nu|_{U^1} &\leq C|u|_{U_\vartheta^1}, & (d) : \quad |u\nu|_{U^1} < \infty \end{aligned}$$

für alle $u \in U_{N,K,hp}$ erfüllt sind.

Beispiele, wie die Zufallsgröße ν gewählt werden kann, sodass die Annahme 4.23 erfüllt ist, werden später angegeben. Zunächst wird jedoch die endlichdimensionale Ersatzaufgabe für $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ formuliert.

Problem 4.24 (Stochastische Galerkin-Formulierung)

Gesucht ist ein $\hat{u}_{N,K,hp} \in U_{N,K,hp}$, sodass die Gleichung

$$a(\hat{u}_{N,K,hp}, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_{\nu,N,K,hp} \quad (4.26)$$

erfüllt ist.

Da sich hier im Allgemeinen die endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume unterscheiden, ist dieser stochastische Galerkin-Ansatz insbesondere ein stochastischer Petrov-Galerkin-Ansatz. Unter den Voraussetzungen in Annahme 4.23 kann für das Problem 4.24 die Existenz einer eindeutigen stochastischen Galerkin-Lösung geschlussfolgert werden.

Korollar 4.25 *Unter der Annahme 4.23 existiert für jede rechte Seite $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ ein eindeutiges $\hat{u}_{N,K,hp} \in U_{N,K,hp}$, welches das Problem 4.24 löst.*

Beweis.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt wieder durch die Anwendung des Satzes 4.12.

Aufgrund der Bedingungen (b), (c) und (d) von Annahme 4.23 gelten die Beziehungen

$$X_1 = U_{N,K,hp} \subset \mathring{U}_{\vartheta}^1, \quad X_2 = U_{N,K,hp} \subset \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1,$$

$$Y_1 = V_{\nu,N,K,hp} \subset \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1 \quad \text{und} \quad Y_2 = V_{\nu,N,K,hp} \subset \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1$$

und X_1, X_2, Y_1 und Y_2 definieren Hilberträume, wobei jeweils als Skalarprodukt das Skalarprodukt der entsprechenden Obermenge verwendet wird. Außerdem gilt, dass $X_2 \subseteq X_1$ und $Y_2 \subseteq Y_1$ dicht und stetig eingebettet sind.

Bedingung (i) des Satzes 4.12, die Stetigkeit der eingeschränkten Bilinearformen $a|_{X_1 \times Y_2}$ und $a|_{X_2 \times Y_1}$, folgt aus der Stetigkeit der Bilinearformen $a|_{\mathring{U}_{\vartheta}^1 \times \mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1}$ und $a|_{\mathring{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1 \times \mathring{U}_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}$.

Die Bedingung (ii) aus Satz 4.12 ist erfüllt, da sich die inf-sup-Bedingung mit Hilfe der Bedingungen (a) und (c) aus Annahme 4.23 herleiten lässt, denn es gilt

$$c|u|_{U_{\vartheta}^1} \leq \frac{a(u, u\nu)}{|u|_{U_{\vartheta}^1}} \leq C \frac{a(u, u\nu)}{|u\nu|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \leq C \sup_{v \in V_{\nu,N,K,hp} \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{|v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \quad (4.27)$$

für alle $u \in U_{N,K,hp} \setminus \{0\}$. Diese inf-sup-Bedingung wird auch diskrete inf-sup-Bedingung genannt, weil sie auf den endlichdimensionalen Teilräumen gebildet wird. Ebenso lässt sich für jedes $v \in Y_1$ mit $u := \frac{v}{\nu}$ ein Element in X_2 definieren, sodass nach Bedingung (a) aus Annahme 4.23 die Bedingung (iii) des Satzes 4.12

$$a(u, v) = a(u, u\nu) \geq c|u|_{U_{\vartheta}^1}^2 > 0$$

gilt. □

Eine mögliche Idee, wie nun für das hier betrachtete Modellproblem (4.5) zu $U_{N,K}$ ein passendes $\nu > 0$ gewählt werden könnte, damit Annahme 4.23 erfüllt ist, liefert die zu Problem 4.9 äquivalente stochastische Variationsformulierung (4.19). Sowohl in der Bilinearform $a_{\frac{\mu}{\vartheta}}$ als auch in der Linearform auf der rechten Seite tritt dort als Gewicht die Zufallsgröße ϑ/μ auf, womit ein potentieller Kandidat für die Zufallsgröße $\nu > 0$ – bezeichnet mit ν^* – gefunden wäre, d. h.

$$\nu^* := \frac{\vartheta}{\mu}.$$

In diesem Falle sind die Bedingungen (a) und (c) der Annahme 4.23 mit den Konstanten $c = 1$ und $C = 1$ automatisch erfüllt und Bedingungen (b) und (d) sind identisch, da

$$|u\nu^*|_{U_{\frac{\kappa_{max}^2}{\vartheta}}^1} = |u|_{U_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1} \quad \text{für alle } u \in U_{N,K,hp}.$$

Beispiel 4.26 Die Bedingung (b) bzw. (d) aus Annahme 4.23 ist für $\nu = \nu^* = \frac{\vartheta}{\mu}$ zum Beispiel dann erfüllt, wenn $\frac{\kappa_{max}}{\mu} \in L^r(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ für ein $r > 2$ ist. Dann gilt nämlich für alle $\varphi \in U_{hp}$ und alle $\alpha \in \Lambda$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |\varphi \xi^\alpha|_{U^1_{\frac{\kappa_{max} \vartheta}{\mu^2}}}^2 &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(|\varphi|_{H^1(D)}^2 \xi^{2\alpha} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right) \\ &\leq |\varphi|_{H^1(D)}^2 \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^{2\alpha s, \vartheta} \right)^{1/s} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2} \right)^r \vartheta \right)^{1/r} < \infty \end{aligned}$$

für $1 < r, s < \infty$ mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Für jede andere reellwertige Zufallsgröße $\tilde{\mu} > 0$ f. s., die eine untere Schranke an den Koeffizienten κ darstellt und für die $0 < c\mu \leq \tilde{\mu}$ gilt, erfüllt die Zufallsgröße $\tilde{\nu}^* = \vartheta/\tilde{\mu}$ die Annahme 4.23. Das heißt, es lassen sich für das Ausgangsproblem ganz verschiedene endlichdimensionale Ersatzaufgaben definieren, deren jeweilige stochastische Galerkin-Lösungen nicht identisch sind. Dabei hängt ν^* bzw. $\tilde{\nu}^*$ nicht von N oder K ab, d. h. für jedes Paar (N, K) wird die Ersatzaufgabe mit dem gleichen ν^* bzw. $\tilde{\nu}^*$ gelöst. Es lässt sich jedoch auch mit

$$\nu_K^* := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\vartheta}{\mu} \middle| (\xi_1, \dots, \xi_K) \right)$$

eine Zufallsgröße definieren, die sich für verschiedene K unterscheidet, aber den Vorteil besitzt, nur bezüglich der Basiszufallsvariablen, die auch im Ansatzraum $U_{N,K}$ berücksichtigt werden, messbar zu sein. Für dieses ν_K^* ist allerdings nur Bedingung (a) von alleine erfüllt und alle anderen müssten durch das Voraussetzen weiterer Bedingungen erst noch geschlussfolgert werden.

Korollar 4.27 Sei Annahme 4.23 erfüllt, dann gilt für $\hat{u} \in \dot{U}^1_{\frac{\kappa_{max} \vartheta}{\mu^2}}$ folgende Fehlerabschätzung

$$|\hat{u} - \hat{u}_{N,K,hp}|_{U^1_{\vartheta}} \leq \tilde{C} \inf_{z \in U_{N,K,hp}} |\hat{u} - z|_{U^1_{\frac{\kappa_{max} \vartheta}{\mu^2}}}$$

für die schwache Lösung \hat{u} und die stochastische Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,K,hp}$ mit einer geeigneten Konstanten $\tilde{C} > 0$, die nur von ν abhängt.

Bemerkung 4.28 Im Falle des Modellproblems (4.5) und der Variationsformulierung auf dem Energieraum $V_{a, \frac{\vartheta}{\mu}}$ kann eine bessere Fehlerabschätzung für die stochastische Galerkin-Lösung zu $\nu^* = \vartheta/\mu$ gefunden werden (siehe auch [78]), nämlich

$$|\hat{u} - \hat{u}_{N,K,hp}|_{U^1_{\vartheta}} \leq \tilde{C} \inf_{z \in U_{N,K,hp}} |\hat{u} - z|_{U^1_{\frac{\kappa_{max} \vartheta}{\mu}}}.$$

Dieses Resultat kann jedoch im Gegensatz zu Korollar 4.25 und 4.27 nicht auf beliebige zufällige Randwertprobleme übertragen werden, da die zugehörige Bilinearform symmetrisch sein muss.

Beweis.

Mit Hilfe der diskreten inf-sup-Bedingung (4.27) und unter Verwendung der Beziehung $a(\hat{u} - z, v) = a(\hat{u}_{N,K,hp} - z, v)$ für alle $v \in V_{\nu, N, K, hp}$ erhält man

$$|\hat{u} - \hat{u}_{N,K,hp}|_{U^1_{\vartheta}} \leq |\hat{u} - z|_{U^1_{\vartheta}} + |\hat{u}_{N,K,hp} - z|_{U^1_{\vartheta}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\hat{u} - z|_{U_\vartheta^1} + \frac{C}{c} \sup_{v \in V_{\nu, N, K, hp} \setminus \{0\}} \frac{|a(\hat{u}_{N, K, hp} - z, v)|}{|v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \\
&= |\hat{u} - z|_{U_\vartheta^1} + \frac{C}{c} \sup_{v \in V_{\nu, N, K, hp} \setminus \{0\}} \frac{|a(\hat{u} - z, v)|}{|v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \\
&\leq |\hat{u} - z|_{U_\vartheta^1} + \frac{C}{c} \sup_{v \in V_{\nu, N, K, hp} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\kappa_{max} |\hat{u} - z|_{H^1(D)} |v|_{H^1(D)} \right)}{|v|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \\
&\leq |\hat{u} - z|_{U_\vartheta^1} + \frac{C}{c} |\hat{u} - z|_{U_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1} \leq \left(\frac{c + C}{c} \right) |\hat{u} - z|_{U_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1}
\end{aligned}$$

für alle $z \in U_{N, K, hp}$. □

Im Falle von $\vartheta \equiv 1$ und konstanter unterer Schranke an den Koeffizienten κ muss keine Gewichtung durch eine Zufallsgröße ν erfolgen bzw. $\nu \equiv 1$ erfüllt die Bedingungen in Annahme 4.23. Lässt sich der Koeffizient κ von oben ebenfalls durch eine Konstante beschränken, so ist der Raum $\dot{U}_{\frac{\kappa_{max}^2}{\mu^2}}^1$ identisch mit \dot{U}^1 . Außerdem kann in diesem Fall die

Konstante \tilde{C} durch C/c verbessert werden, womit man ein analoges Resultat zum Lemma von Céa (siehe z. B. Brenner/Scott [23]) für rein deterministische Randwertprobleme erhält. Kann der Koeffizient κ allerdings nur durch Zufallsgrößen beschränkt werden, so ist im Allgemeinen eine Gewichtung im endlichdimensionalen Testfunktionenraum unumgänglich, um eine in \dot{U}^1 , d. h. in der natürlichen Norm, gegen die schwache Lösung konvergente Folge stochastischer Galerkin-Lösungen zu bekommen (siehe folgendes Beispiel 4.29). Der Hauptgrund dafür ist, dass im Allgemeinen für ungewichtete Testfunktionenräume, d. h. $\nu \equiv 1$, keine diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist, die jedoch im Beweis des Korollars 4.27 eine entscheidende Rolle spielt. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \kappa_{min} d\mathbf{P}; \dot{H}^1(D))$ nicht stetig in \dot{U}^1 eingebettet werden kann.

Beispiel 4.29 *Es soll das eindimensionale Randwertproblem auf $D = (0, 1)$ mit Koeffizienten $\kappa = \exp(\xi)$ und rechter Seite $f = \exp(\xi)|\xi - 1|$ mit $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ betrachtet werden (vgl. auch Beispiel 2 in Abschnitt 4.1). Das heißt, es ist für $\omega \in \Omega$ die Lösung von*

$$-(\exp(\xi(\omega))u'(x, \omega))' = \exp(\xi(\omega))|\xi(\omega) - 1|, \quad x \in D, \quad u(0, \omega) = u(1, \omega) = 0,$$

gesucht. Der Einfachheit halber wird $\vartheta \equiv 1$ und $\mu = \kappa_{min} = \exp(\xi)$ gesetzt.

Die Abbildung $[\hat{u}(\omega)](x) = \frac{1}{2}|\xi(\omega) - 1|(x - x^2)$ ist dann sowohl die pfadweise als auch die schwache Lösung, da die rechte Seite $f \in U_{\exp(-2\xi)}^{-1}$ ist und damit $\hat{u} \in \dot{U}^1$ gilt. (Die Abbildung \hat{u} ist in diesem Fall sogar die klassische Lösung.)

Wählt man nun wie bei der standarmäßigen stochastischen Galerkin-Methode die endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume

$$U_{N, hp} \equiv V_{N, hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span}\{\xi^n, n = 0, \dots, N\},$$

dann konvergiert die Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen nicht gegen die Lösung \hat{u} in \dot{U}^1 . Es sind dabei die gleichen Effekte wie im Beispiel 2 aus Abschnitt 4.1 zu beobachten, wo es um rein algebraische Gleichungen ging.

Eine ausführliche Darstellung dieses Beispiels wird im Abschnitt 4.2.5, Beispiel 1, gegeben.

Bemerkung 4.30 *Natürlich können auch andere endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume U_M und V_M als die obigen definiert werden, sodass eine eindeutige stochastische Galerkin-Lösung für $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ existiert, die gegen die schwache Lösung \hat{u} konvergiert. Zum Beispiel können stückweise definierte Polynome wie beim „multi-element generalized polynomial chaos“ von Wan und Karniadakis in [99, 100, 101, 102] oder auch Funktionen, die wie bei Soize und Ghanem [91] oder Le Maître und Knio [68] keine Polynome mehr sind, verwendet werden. Es müssen nur für diese Funktionenräume U_M und V_M die Teilmengenbeziehungen $U_M \subset \dot{U}_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}^1$ und $V_M \subset \dot{U}_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}^1$, die diskrete inf-sup-Bedingung*

$$\inf_{u \in U_M \setminus \{0\}} \sup_{v \in V_M \setminus \{0\}} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^1} \|v\|_{U_{\frac{\mu^2}{\vartheta}}^1}} \geq c > 0$$

und, dass für jedes $v \in V_M \setminus \{0\}$ ein $u \in U_M$ existiert mit $a(u, v) > 0$, gelten, d. h., die Bedingungen des Satzes 4.12 müssen erfüllt sein.

Im Folgenden sei nun angenommen, dass im weiteren Verlauf dieses Abschnittes Annahme 4.23 für den Ansatzraum $U_{N,K}$ und die Zufallsgröße ν erfüllt ist. Dann besitzt die reellwertige Zufallsgröße $\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}$ aufgrund Bedingung 4.23 (b) einen endlichen Erwartungswert, d. h. $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} < \infty$. An dieser Stelle wird nun aus Übersichtlichkeitsgründen ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{Q} mit

$$d\mathbf{Q} := \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right)^{-1} \kappa_{max}^2 \vartheta \mu^{-2} d\mathbf{P}$$

definiert und die Räume $U_{\mathbf{Q}}^m$ und $\dot{U}_{\mathbf{Q}}^m$ anstelle von $U_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}^m$ und $\dot{U}_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}^m$, $m \in \mathbb{Z}$ betrachtet.

Diese Räume sind zwar jeweils mengenmäßig identisch doch $U_{\mathbf{Q}}^m$ und $\dot{U}_{\mathbf{Q}}^m$ sind einfacher zu handhaben, da ihnen ein Wahrscheinlichkeitsraum, nämlich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q})$, zugrunde liegt. Damit kann analog zu Korollar 4.27 folgende Aussage aufgestellt werden.

Korollar 4.31 *Sei die Annahme 4.23 erfüllt, dann gilt für $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$, die von ν abhängt, die Fehlerabschätzung*

$$\|\hat{u} - \hat{u}_{N,K,hp}\|_{U_{\vartheta}^1} \leq C \inf_{z \in U_{N,K,hp}} \|\hat{u} - z\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \quad (4.28)$$

für die schwache Lösung \hat{u} und die stochastische Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,K,hp}$.

Beweis.

Dies folgt unmittelbar aus Korollar 4.27. □

Damit lässt sich also im Allgemeinen der Approximationsfehler bis auf eine Konstante durch einen Bestapproximationsfehler in einer stärkeren, der $U_{\mathbf{Q}}^1$ -Norm, abschätzen. Liegt nun die Familie der Räume $(U_{N,K,hp})_{N,K,hp}$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D)) \subset \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$ bzw. liegt $(U_{N,K})_{N,K}$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ und $(U_{hp})_{hp}$ dicht in $\dot{H}^1(D)$, dann kann, wenn

die schwache Lösung ebenfalls zu dem Raum $\mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1$ gehört, die Konvergenz der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen $(\hat{u}_{N,K,hp})_{N,K,hp}$ gegen die schwache Lösung \hat{u} in der natürlichen Norm, der Norm des Lösungsraumes $\mathring{U}_{\mathcal{D}}^1$, geschlussfolgert werden.

Dabei ist $\hat{u} \in \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1$, wenn zum Beispiel f zu $U_{\frac{\kappa_{\max}^2}{\mu^4}}^{-1}$ gehört und eine notwendige Bedingung für die Dichtheit von $(U_{N,K})_{N,K}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ lautet, dass die Familie der $(U_{N,K})_{N,K}$ vollständig in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P})$ ist. Das heißt mit anderen Worten, die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ orthonormalen Polynome $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ (siehe Abschnitt 2.2), bilden eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \vartheta d\mathbf{P})$. Unter welchen Voraussetzungen dies der Fall ist, ist in Abschnitt 3.1.1 untersucht worden und das Beispiel 2 in Abschnitt 4.2.5 zeigt, wie man durch eine ungeeignete Wahl der Basiszufallsvariablen, die diese Voraussetzungen eben nicht erfüllen, eine Folge von stochastischen Galerkin-Lösungen erhält, die nicht gegen die schwache Lösung konvergiert in $\mathring{U}_{\mathcal{D}}^1$. Andererseits kann man aufgrund der vielfältigen Möglichkeiten, die Zufallsgröße ν zu wählen, ganz verschiedene Folgen von stochastischen Galerkin-Lösungen erhalten, die sich im Allgemeinen voneinander unterscheiden, jedoch alle in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergieren, wenn die Familie der $(U_{N,K})_{N,K}$ dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ liegt (siehe Beispiel 4 in Abschnitt 4.2.5).

A-priori-Fehlerabschätzungen. Neben der Frage, ob die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergiert, interessiert auch, wie schnell sie das im Falle einer Konvergenz tut und inwiefern dieses Verhalten von der Wahl der Basiszufallsvariablen abhängt. Deshalb wird im Folgenden der Approximationsfehler eingehender untersucht. Um die verschiedenen Fehlerquellen zu identifizieren, werden drei bezüglich der $U_{\mathbf{Q}}^1$ -Norm orthogonale Projektionen

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} &: \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1 \rightarrow U_{N,K,hp}, \\ &\text{die orthogonale Projektion auf } U_{N,K,hp}, \\ \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} &: \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1 \rightarrow \mathring{H}^1(D) \otimes U_{N,K}, \\ &\text{die orthogonale Projektion auf } \mathring{H}^1(D) \otimes U_{N,K}, \\ \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} &: \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1 \rightarrow \mathring{H}^1(D) \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{Q}), \\ &\text{die orthogonale Projektion auf} \\ &\quad \mathring{H}^1(D) \otimes L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{Q}) \simeq L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{Q}; \mathring{H}^1(D)) \end{aligned}$$

eingeführt. Damit kann für $\hat{u} \in \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1$ der Approximationsfehler (4.28) der stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,K,hp}$ für $z = \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}$ durch zweimalige Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \hat{u}_{N,K,hp}\|_{U_{\mathcal{D}}^1} \leq C &\left[\|\hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} + \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \right. \\ &\quad \left. + \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

in drei verschiedene Fehleranteile aufgespalten werden. Die drei Terme

$$\begin{aligned} e_1 &:= \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1}, \quad e_2 := \|\hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \quad \text{und} \\ e_3 &:= \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \end{aligned}$$

stellen damit die verschiedenen durch die Diskretisierung des unendlichdimensionalen Lösungsraumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$ entstandenen Approximationsfehler dar. Der erste Term e_1 spiegelt dabei den Approximationsfehler wider, der durch die räumliche Diskretisierung zustande kommt. Die zweite Größe e_2 gibt den Approximationsfehler an, der durch die Verwendung nur der ersten K Basiszufallsvariablen $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$ entsteht, und der dritte Fehlerterm e_3 entspricht dem Approximationsfehler, der sich aufgrund des Beschränkens des Polynomgrades ergibt. Diese drei unterschiedlichen Fehlergrößen werden nun nacheinander untersucht, beginnend mit dem ersten Fehlerterm e_1 .

Die Fehlergröße e_1 beschreibt, wie bereits erwähnt, den räumlichen Approximationsfehler, der bei der Diskretisierung des $\dot{H}^1(D)$ durch den endlichdimensionalen Finite-Element-Raum U_{hp} entsteht. Aufgründdessen können auch die Fehlerabschätzungen, die aus der deterministischen Finiten-Element-Theorie bekannt sind, genutzt werden. In dem Fall, dass eine hp -Version des Finiten-Element-Diskretisierungsansatzes (siehe z. B. Canuto et al. [26]) angewendet wird, lässt sich der Fehler e_1 zum Beispiel wie folgt abschätzen. Unter den Annahmen aus Section 5.8.3 in Canuto et al. [26] und vorausgesetzt, dass sich das Gebiet D durch eine glatte, reguläre und invertierbare Abbildung $F : \hat{D} \rightarrow D$ des Referenzgebietes $\hat{D} := (-1, 1)^d$, $d = 1, 2, 3$, darstellen lässt, kann folgende Abschätzung angegeben werden.

Korollar 4.32 *Sei Annahme 4.23 erfüllt, dann gilt für $\hat{u} \in U_{\mathbf{Q}}^k \cap \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1$, $k \in \mathbb{N}$, die Abschätzung*

$$e_1 = \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \leq Ch^{m-1} p^{-(k-1)} \|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^k},$$

wobei $m = \min\{k, p + 1\}$ und die Konstante $C > 0$ unabhängig von N , K , h , p und \hat{u} ist.

Beweis.

Nach Canuto et al. [26, Gleichung (5.8.25), S. 318] für den deterministischen Fall erhält man

$$\left\| \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}(\omega) - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}(\omega) \right\|_{H^1(D)} \leq Ch^{m-1} p^{-(k-1)} \|\hat{u}(\omega)\|_{H^k(D)} \quad \text{f. s.}$$

mit $m = \min\{k, p + 1\}$ und einer Konstanten $C > 0$, die unabhängig von N , K , h , p , \hat{u} und $\omega \in \Omega$ ist. Quadriert man diesen Ausdruck und bildet den Erwartungswert $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$ bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{Q} , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left\| \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u} \right\|_{H^1(D)}^2 \\ \leq C^2 h^{2(m-1)} p^{-2(k-1)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \|\hat{u}\|_{H^k(D)}^2 = C^2 h^{2(m-1)} p^{-2(k-1)} \|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^k}^2 \end{aligned}$$

mit $m = \min\{k, p + 1\}$ und der Konstanten $C > 0$ unabhängig von N , K , h , p und \hat{u} . \square

Bemerkung 4.33 *Gilt zusätzlich, dass die Abbildung F affin linear ist, so kann analog zu Canuto et al. [26]*

$$e_1 = \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K,hp}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \leq Ch^{m-1} p^{-(k-1)} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |\hat{u}|_{H^{m;k}(D)}^2 \right)^{1/2}$$

mit $m = \min\{k, p + 1\}$ und einer Konstanten $C > 0$ gezeigt werden. Dabei bezeichnet $|\cdot|_{H^{m;k}(D)}$ die Halbnorm

$$|u|_{H^{m;k}(D)} := \left(\sum_{j=m}^k \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u \right\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2},$$

in der keine gemischten Ableitungen auftreten (vgl. Canuto et al. [26, S. 318 und Gleichung (5.8.12) auf S. 314]).

Je glatter also die Lösung \hat{u} in der räumlichen Variablen x auf dem Gebiet D ist, d. h. je höher deren Regularität in x , umso bessere Konvergenzraten lassen sich für den Fehler e_1 erzielen. Die Basiszufallsvariablen selbst bzw. die Wahl dieser spielen bei dieser A-priori-Abschätzung allerdings keine Rolle, d. h. unabhängig davon, welche Basiszufallsvariablen man wählt, die A-priori-Fehlerabschätzung für e_1 verändert sich nicht.

Der zweite Fehler e_2 tritt üblicherweise nur dann auf, wenn abzählbar viele Basiszufallsvariablen genutzt werden. Braucht man nur endlich viele Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ mit $I_\xi = \{1, \dots, M\} \subset \mathbb{N}$ zur Darstellung der zufälligen Eingangsdaten, so werden im Allgemeinen auch all diese bei der Aufstellung des endlichdimensionalen Unterraumes $U_{N,K}$ berücksichtigt, das heißt, man wählt $K = M$. In diesem Falle ist, da \hat{u} messbar ist bzgl. der σ -Algebra $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_M)$, die orthogonale Projektion $\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},M}^1} \hat{u}$ gleich der schwachen Lösung \hat{u} und der Fehler e_2 damit gleich Null. Für abzählbar viele Basiszufallsvariablen zeigt das folgende Korollar, dass dieser Fehler immer gegen Null konvergiert.

Korollar 4.34 Sei $I_\xi = \mathbb{N}$. Dann folgt für $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$, dass gilt

$$e_2 = \|\hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Die orthogonale Projektion $\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} v$ auf $L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$ ist (vgl. z. B. Ume-gaki/Bharucha-Reid [98]) gleich dem bedingten Erwartungswert von $v \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$ bezüglich der von den Zufallsgrößen ξ_1, \dots, ξ_K erzeugten σ -Algebra, $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_K)$, d. h.

$$\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} v = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(v \mid (\xi_1, \dots, \xi_K) \right) \quad \text{in } \dot{H}^1(D) \text{ f. s.}$$

Da für die σ -Algebren die Beziehung $\sigma \left(\bigcup_{K \geq 1} \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K) \right) = \sigma(\xi)$ gilt, folgt (siehe z. B. Bobrowski [19])

$$\left\| v - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} v \right\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} = \left\| v - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(v \mid (\xi_1, \dots, \xi_K) \right) \right\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \infty,$$

für alle $v \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$. Aufgrund der Eigenschaft $\hat{u} \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$ lässt sich sofort

$$\|\hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \infty$$

schlussfolgern. □

Der Fehler e_2 hängt damit natürlich von der Wahl der Basiszufallsvariablen ab. Betrachtet man zwei verschiedene Parametrisierungen mit einmal endlich vielen und einmal abzählbar vielen Basiszufallsvariablen, so ist der Fehler einmal Null ab einem gewissen $K \in \mathbb{N}$ und einmal strikt größer Null für alle $K \in \mathbb{N}$. Für den Fall aber, dass zwei verschiedene Folgen von Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ und $\eta = (\eta_i)_{i \in I_\eta}$ der Gestalt $I_\xi = I_\eta$ und $\xi_i = T_i(\eta_i)$, $i \in I_\xi$, für eine messbare Transformation $T : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ miteinander verglichen werden sollen, lässt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass die jeweiligen orthogonalen Projektionen fast sicher identisch und damit auch die jeweiligen Fehler e_2 gleich groß sind.

Proposition 4.35 *Sei neben $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ eine weitere Folge von Basiszufallsvariablen $\eta = (\eta_i)_{i \in I_\eta}$ gegeben mit $I_\eta = I_\xi$ und $\xi_i = T_i(\eta_i)$, $i \in I_\xi$, für $T : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ messbar. Mit den Bezeichnungen $\hat{\zeta}_1 = (\eta_1, \dots, \eta_K)$, $\zeta_1 = (\xi_1, \dots, \xi_K) =: t(\hat{\zeta}_1)$ und $\zeta_2 = (\xi_i)_{i > K}$ folgt dann, dass Wahrscheinlichkeitskerne $\chi(\zeta_1, \cdot)$ und $\hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, \cdot)$ existieren, die*

$$\mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in \cdot \mid \zeta_1 \right) = \chi(\zeta_1, \cdot) \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in \cdot \mid \hat{\zeta}_1 \right) = \hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, \cdot) \quad f. s.$$

erfüllen. Des Weiteren gilt, dass für $u \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}) \subseteq L^2(\Omega, \sigma(\eta), \mathbf{Q})$ die jeweiligen bedingten Erwartungswerte gleich sind, d. h.

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u \mid (\xi_1, \dots, \xi_K) \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u \mid (\eta_1, \dots, \eta_K) \right) \quad f. s. ,$$

genau dann, wenn

$$\chi(t(\hat{\zeta}_1), B) = \hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, B) \quad f. s.$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\zeta_2(\Omega))$ gilt.

Beweis.

Für den Nachweis der Existenz solcher Wahrscheinlichkeitskerne χ und $\hat{\chi}$ sei auf Theorem 5.3 in Kallenberg [65] verwiesen.

Sei $u \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$, dann existiert eine messbare Funktion u_1 , sodass $u = u_1(\zeta_1, \zeta_2)$ f. s. gilt. Mit u_2 sei dann die Funktion bezeichnet, die sich durch $u_2(\hat{\zeta}_1, \zeta_2) := u_1(t(\hat{\zeta}_1), \zeta_2)$ ergibt. Damit folgt für $\chi(t(\hat{\zeta}_1), B) = \hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, B)$ f. s. für alle $B \in \mathcal{B}(\zeta_2(\Omega))$, dass die bedingten Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u \mid \zeta_1 \right) &= \int_{\zeta_2(\Omega)} u_1(z_1, z_2) \chi(z_1, dz_2) \Big|_{z_1 = \zeta_1 = t(\hat{\zeta})} = \int_{\zeta_2(\Omega)} u_1(t(\hat{z}_1), z_2) \chi(t(\hat{z}_1), dz_2) \Big|_{\hat{z}_1 = \hat{\zeta}_1} \\ &= \int_{\zeta_2(\Omega)} u_2(\hat{z}_1, z_2) \hat{\chi}(\hat{z}_1, dz_2) \Big|_{\hat{z}_1 = \hat{\zeta}_1} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u \mid \hat{\zeta}_1 \right) \end{aligned}$$

ebenso fast sicher gleich sind.

Sind für $u \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ die bedingten Erwartungswerte fast sicher identisch, dann ergibt sich für $u_B(\omega) := \mathbb{1}_{\{\zeta_2(\omega) \in B\}}(\omega)$ für $B \in \mathcal{B}(\zeta_2(\Omega))$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \chi(t(\hat{\zeta}_1), B) &= \chi(\zeta_1, B) = \mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in B \mid \zeta_1 \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u_B \mid \zeta_1 \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(u_B \mid \hat{\zeta}_1 \right) = \mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in B \mid \hat{\zeta}_1 \right) = \hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, B) \quad f. s. \end{aligned}$$

und die Aussage ist gezeigt. \square

Bemerkung 4.36 Das Resultat der Proposition 4.35 kann auf Zufallsvariablen u mit Werten in $\dot{H}^1(D)$, d. h. für $u \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$, verallgemeinert werden.

Korollar 4.37 Zu den Voraussetzungen wie in Proposition 4.35 sei nun angenommen, dass die Basiszufallsvariablen $\eta = (\eta_i)_{i \in I_\eta}$ (und damit auch $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$) unabhängig sind. Dann folgt für $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$, dass gilt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\hat{u} \middle| (\xi_1, \dots, \xi_K) \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\hat{u} \middle| (\eta_1, \dots, \eta_K) \right) \quad \text{in } \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1.$$

Beweis.

Die Wahrscheinlichkeitskerne sind aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen (vgl. z. B. Kallenberg [65]) durch

$$\chi(\zeta_1, B) = \mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in B \middle| \zeta_1 \right) = \mathbf{Q}(\zeta_2 \in B) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\chi}(\hat{\zeta}_1, B) = \mathbf{Q} \left(\zeta_2 \in B \middle| \hat{\zeta}_1 \right) = \mathbf{Q}(\zeta_2 \in B),$$

gegeben, sodass sich mit Proposition 4.35 die Aussage ergibt. \square

Das heißt, für unabhängige Basiszufallsvariablen $\eta = (\eta_i)_{i \in I_\eta}$ und $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ mit $I_\eta = I_\xi$ und $\xi_i = T_i(\eta_i)$, $i \in I_\xi$, für ein messbares $T : \mathbb{R}^{|I_\eta|} \rightarrow \mathbb{R}^{|I_\xi|}$ ist der jeweilige Approximationsfehler

$$e_2 = \|\hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1}$$

für jedes $K \in \mathbb{N}$ gleich groß und nicht von der Wahl dieser Basiszufallsvariablen abhängig. Damit kann unterschiedliches Approximationsverhalten der entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösungen für solche Folgen von Basiszufallsvariablen nur noch in der dritten Fehlergröße e_3 offenbar werden oder die erfolgten Abschätzungen sind zu grob gewesen.

Die Untersuchung des dritten Fehlerterms e_3 bedient sich nun der Hilfe des verallgemeinerten polynomiellen Chaos (siehe Kapitel 3.1). Um also jedes beliebige Element in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}; \dot{H}^1(D))$ durch eine verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung darstellen zu können, müssen die Polynome in ξ im Raum $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ dicht liegen. Aufgrund der Annahme 4.23 (b) ist $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |\xi_i|^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in I_\xi$ erfüllt. Es existieren also die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q})$ orthonormalen multivariaten Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ (vgl. dazu auch Abschnitt 2.2), d. h.

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} (p_\alpha(\xi) p_\beta(\xi)) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \text{für } \alpha, \beta \in \Lambda.$$

Die Verteilung $F_\xi^{\mathbf{Q}}$ von ξ als Zufallsvariable des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_\xi^{\mathbf{Q}}(y) &= \mathbf{Q}(\xi \leq y) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \mathbb{1}_{\{\xi \leq y\}} = \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\mathbb{1}_{\{\xi \leq y\}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right) \\ &= \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right)^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\mathbb{1}_{\{\xi \leq y\}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \middle| \xi \right) \right). \end{aligned}$$

Da der bedingte Erwartungswert $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \middle| \xi \right)$ per Definition $\sigma(\xi)$ -messbar ist, existiert nach dem Lemma von Doob-Dynkin eine messbare Funktion $t_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}} : \mathbb{R}^{|I_\xi|} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}(\xi) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \middle| \xi \right).$$

Die Verteilung $F_\xi^{\mathbf{Q}}$ von ξ ist daraufhin durch

$$dF_\xi^{\mathbf{Q}}(y) = \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2} \right)^{-1} t_{\frac{\kappa_{max}^2 \vartheta}{\mu^2}}(y) dF_\xi^{\mathbf{P}}(y)$$

bestimmt. Damit sind die Fragestellungen, ob die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ in dem Raum $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ oder ob die Polynome $\{p_\alpha(y), \alpha \in \Lambda\}$ in $L^2(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|}), dF_\xi^{\mathbf{Q}})$ eine Orthonormalbasis bilden, äquivalent. Bedingungen, für die dies erfüllt ist, sind in Abschnitt 3.1.1 und speziell in den Sätzen 3.2, 3.4 und 3.6 und Korollar 3.5 zur Verallgemeinerung des Satzes von Cameron und Martin behandelt worden.

Angenommen die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ liegen dicht und $\hat{u} \in \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1$, dann kann die schwache Lösung, da sie $\sigma(\xi)$ -messbar ist, in eine verallgemeinerte polynomielle Chaostreihe entwickelt werden, d. h.

$$\hat{u} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \hat{u}_\alpha p_\alpha(\xi),$$

wobei die verallgemeinerten polynomiellen Chaostkoeffizienten durch

$$\hat{u}_\alpha = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\hat{u} p_\alpha(\xi)) \in \mathring{H}^1(D), \quad \alpha \in \Lambda,$$

gegeben sind. Ebenso besitzen die Orthogonalprojektionen $\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u}$ und $\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}$ verallgemeinerte polynomielle Chaostentwicklungen, nämlich

$$\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} = \sum_{d(\alpha) \leq K} \hat{u}_\alpha p_\alpha(\xi), \quad d(\alpha) := \max\{i \in \mathcal{I}_\xi : \alpha_i \neq 0\},$$

und

$$\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} = \sum_{\alpha \in \Lambda_{N,K}} \hat{u}_\alpha p_\alpha(\xi).$$

In diesem Fall lässt sich dann für den Fehler e_3 Folgendes schlussfolgern.

Korollar 4.38 *Bilden die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$, dann konvergiert der Approximationsfehler e_3 gegen Null, d. h.*

$$e_3 = \|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \rightarrow 0 \quad \text{für } N, K \rightarrow \infty.$$

Bilden insbesondere die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda \text{ mit } d(\alpha) \leq K\}$ für jedes $K \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, K\} \subseteq \mathcal{I}_\xi$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega, \sigma(\xi_1, \dots, \xi_K), \mathbf{Q})$, dann gilt für jedes dieser K

$$\|\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Da die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ dicht liegen und

$$\bigcup_{\substack{N \geq 0, \\ K \geq 1}} \Lambda_{N,K} = \bigcup_{K \geq 1} \{\alpha \in \Lambda : d(\alpha) \leq K\} = \Lambda$$

ist, gilt

$$\Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} \rightarrow \Pi_{\mathring{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} \quad \text{in } \mathring{U}_{\mathbf{Q}}^1,$$

wenn $N, K \rightarrow \infty$. Die zweite Aussage folgt dann analog. \square

Basierend auf den Aussagen der Korollare 4.32, 4.34 und 4.38 können nun Bedingungen angegeben werden, unter denen die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung konvergiert.

Korollar 4.39 *Unter der Annahme 4.23 folgt für $\hat{u} \in U_{\mathbf{Q}}^k \cap \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$, $k \geq 2$, dass, wenn die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ im Raum $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ dicht liegen, die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen $\hat{u}_{N,K,hp}$ in $\dot{U}_{\mathcal{V}}^1$ gegen die schwache Lösung \hat{u} konvergiert.*

Beweis.

Mit der Abschätzung (4.29) lässt sich dies sofort aus den Korollaren 4.31, 4.32, 4.34 und 4.38 ableiten. \square

Wie bereits mehrfach betont, interessiert neben der Frage, ob Konvergenz in der natürlichen Norm vorliegt oder nicht, im Falle von Konvergenz auch, wie schnell die Approximation gegen die schwache Lösung konvergiert und in welcher Form sie von der Wahl der Basiszufallsvariablen abhängig ist. Dass die Konvergenzgeschwindigkeit von der Art der Basiszufallsvariablen abhängt, ist in einer Serie von Arbeiten von Xiu und Karniadakis [73, 110, 111, 112, 113, 114] beobachtet worden. Der räumliche Diskretisierungsfehler bzw. dessen A-priori-Fehlerabschätzung nach Korollar 4.32 wird nicht durch die Wahl der Basiszufallsvariablen beeinflusst. Ebenso ist der Approximationsfehler, der durch die Berücksichtigung nicht aller Basiszufallsvariablen entsteht, für gewisse Klassen von unterschiedlichen Basiszufallsvariablen gleich groß und hängt damit auch nicht von der Wahl dieser Basiszufallsvariablen ab. Deshalb könnte die unterschiedliche Approximationsqualität stochastischer Galerkin-Lösungen für verschiedene Folgen von Basiszufallsvariablen durch den Approximationsfehler

$$e_3^2 = \|\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1}^2 = \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2$$

ausgedrückt werden. Somit spielen die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ und die Abklingrate von $\|u_\alpha\|_{H^1(D)}$ eine große Rolle. Wüsste man für $q := (q_i)_{i \in I_\xi}$ mit $\underline{q} := \inf q_i > 0$, dass

$$\sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 (1 + \alpha)^{2q} < \infty$$

gilt, wobei $(1 + \alpha)^q := \prod_{i=1}^{d(\alpha)} (1 + \alpha_i)^{q_i}$, dann könnte man

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1}^2 &\leq \max_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \left(\frac{1}{(1 + \alpha)^{2q}} \right) \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 (1 + \alpha)^{2q} \\ &\leq \begin{cases} \left(\frac{K}{N+K} \right)^{2q} \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 (1 + \alpha)^{2q}, & \Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(1)}, \\ \left(\frac{1}{N+1} \right)^{2q} \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 (1 + \alpha)^{2q}, & \Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(2)} \end{cases} \end{aligned}$$

mit $J_{N,K}^{(1)}, J_{N,K}^{(2)}$ wie in den Formeln (4.24), (4.25) schlussfolgern. Damit ließe sich für festes $K \in \mathbb{N}$ bzw. unabhängig von $K \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, K\} \subseteq I_\xi$ eine algebraische Konvergenz-

rate der Ordnung q ableiten. Andererseits, würde für $\lambda := (\lambda_i)_{i \in I_\xi}$ mit $\underline{\lambda} := \inf \lambda_i > 1$

$$\sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} |\hat{u}_\alpha|_{H^1(D)}^2 \lambda^{2\alpha} < \infty$$

gelten, dann könnte der Fehler durch

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1}^2 &\leq \max_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \left(\frac{1}{\lambda^{2\alpha}} \right) \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 \lambda^{2\alpha} \\ &\leq \left(\frac{1}{\underline{\lambda}^{2(N+1)}} \right) \sum_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \|\hat{u}_\alpha\|_{H^1(D)}^2 \lambda^{2\alpha} \end{aligned}$$

abgeschätzt werden, was eine exponentielle Konvergenzrate nach sich ziehen würde. Zusammenfassend kann man Folgendes aussagen.

Korollar 4.40 *Unter der Annahme 4.23 und dass die Polynome $\{p_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ bilden, gilt für $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$*

$$\begin{aligned} e_3 = \|\Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\dot{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} &\leq \max_{\substack{d(\alpha) \leq K \\ \alpha \notin \Lambda_{N,K}}} \left(\frac{1}{\rho(\alpha, \lambda, q)} \right) \|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q},\rho}^1} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{\inf(\lambda_i)^{N+1}} \left(\frac{K}{N+K} \right)^{\inf(q_i)} \|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q},\rho}^1}, & \Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(1)}, \\ \frac{1}{\inf(\lambda_i)^{N+1}} \left(\frac{1}{N+1} \right)^{\inf(q_i)} \|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q},\rho}^1}, & \Lambda_{N,K} = J_{N,K}^{(2)}, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $\|\hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q},\rho}^1} := \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} \|u_\alpha\|_{H^1(D)}^2 \rho(\alpha, \lambda, q)^2 \right)^{1/2}$ und

$$\rho(\alpha, \lambda, q) := \lambda^\alpha (\alpha + 1)^q := \prod_{i=1}^{d(\alpha)} \lambda_i^{\alpha_i} (\alpha_i + 1)^{q_i}, \quad \alpha \in \Lambda,$$

mit $(\lambda_i)_{i \in I_\xi}, \lambda_i \geq 1$ und $(q_i)_{i \in I_\xi}, q_i \geq 0$.

Folglich bestimmt die Abklingrate der verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten die Approximationsqualität und es ist zu vermuten, dass diese Rate maßgeblich von der Art der Chaostwicklung, d. h. von der Wahl der Basiszufallsvariablen und deren zugehörigen multivariaten orthonormalen Polynomen abhängt. Da

$$\hat{u}_\alpha = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\hat{u} p_\alpha(\xi)) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\hat{u}_\xi(\xi) p_\alpha(\xi)) \in \dot{H}^1(D), \quad \alpha \in \Lambda,$$

gilt, ist anzunehmen, dass die Glattheit von \hat{u}_ξ eine große Rolle spielt und diese Eigenschaft ist natürlich von der Wahl der Basiszufallsvariablen abhängig. Im eindimensionalen Fall, d. h. für $|I_\xi| = 1$, lässt sich für sehr spezielle Randwertprobleme 4.5 folgende Aussage treffen.

Korollar 4.41 *Sei $|I_\xi| = 1$ und die Basiszufallsvariable ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q})$ standardnormalverteilt. Seien κ und f derart, dass die schwache Lösung $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$ in ω und x separiert, d. h. $[\hat{u}(\omega)](x) = \hat{u}_\Omega(\omega) \hat{u}_D(x)$ für messbare Funktionen $\hat{u}_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\hat{u}_D : D \rightarrow \mathbb{R}$. Des Weiteren seien κ_ξ, f_ξ und \hat{u}_ξ bzw. $\hat{u}_{\Omega,\xi}$ die jeweiligen Parametrisierungen bzgl. ξ von κ, f und \hat{u} bzw. \hat{u}_Ω und für κ bzw. κ_ξ gelte, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ ein $c > 0$ existiert mit $\kappa_\xi(y) \geq c f. \ddot{u}. \text{ auf } D$.*

- (i) Sind κ_ξ und f_ξ unendlich oft stetig differenzierbar, so konvergiert der Fehler e_3 exponentiell schnell gegen Null, wenn $\hat{u}_{\Omega,\xi} \in H^k(\mathbb{R}, d\Phi)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.
- (ii) Sind κ_ξ und f_ξ nur k -mal stetig differenzierbar, $k \in \mathbb{N}_0$, dann kann a priori zunächst nur eine algebraische Abklingrate des Fehlers e_3 gegen Null gefolgert werden.

Beweis.

Mit den Sätzen 4.20 und 4.21 aus Abschnitt 4.2.3 folgt, dass die Parametrisierung \hat{u}_ξ bzw. $\hat{u}_{\Omega,\xi}$ entweder (i) unendlich oft stetig differenzierbar oder (ii) k -mal stetig differenzierbar ist. Unter Verwendung der Aussagen in Satz 3.25 und Proposition 3.28 in Abschnitt 3.2.1 ergeben sich dann die jeweiligen Abklingraten für den Fehler

$$e_3 = \|\Pi_{\hat{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} - \Pi_{\hat{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u}\|_{U_{\mathbf{Q}}^1} = \|\hat{u}_D\|_{H^1(D)} \|\hat{u}_\Omega - {}^{(N)}\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega, \mathbf{Q})},$$

da $\Pi_{\hat{U}_{\mathbf{Q},K}^1} \hat{u} = \hat{u} = \hat{u}_\Omega \hat{u}_D$ und $\Pi_{\hat{U}_{\mathbf{Q},N,K}^1} \hat{u} = {}^{(N)}\hat{u}_\Omega \hat{u}_D$ ist. Dabei ist ${}^{(N)}\hat{u}_\Omega$ die polynomielle Chaosapproximation der Ordnung N in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Q})$. \square

Qualitativ ähnliche Ergebnisse lassen sich auch im Unterschied zum letzten Korollar für eine bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{Q} betaverteilte oder gammaverteilte Basiszufallsgröße formulieren. Beispiel 3 einer zufälligen algebraischen Gleichung in Abschnitt 4.1 illustriert dies für den Fall, dass man sogar ohne Gewichtungen auskommt, d. h. $\vartheta \equiv \nu \equiv 1$, und $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P}$ ist, da sich der dortige Koeffizient durch Konstanten von Null und Unendlich trennen lässt.

Angenommen, solche Konvergenzaussagen wie in Korollar 4.41 ließen sich auf abzählbar viele Basiszufallsvariablen und Hilbertraumwertige zu entwickelnde Zufallsvariablen ausdehnen, dann würde vornehmlich die Glattheit der parametrisierten schwachen Lösung die zu erwartende Approximationsqualität der entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösung angeben. Dass die Regularität der parametrisierten schwachen Lösung direkt mit der Regularität der parametrisierten Eingangsdaten zusammenhängt, ist in Abschnitt 4.2.3 analysiert worden. Folglich lassen die Folgen von Basiszufallsvariablen, die eine glattere Abhängigkeit der parametrisierten Eingangsdaten nach sich ziehen, eine bessere Approximationsqualität, d. h. schnellere Konvergenzrate, ihrer stochastischen Galerkin-Lösungen erwarten und sollten daher bevorzugt für die numerische Berechnung mittels stochastischer Galerkin-Methode genutzt werden (siehe auch Beispiel 3 in Abschnitt 4.2.5).

Numerische Aspekte bei der Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung.

Aufgrund der durch die Zufallsgröße ν eingeführten Gewichtung des endlichdimensionalen Testfunktionenraumes unterscheidet sich das zugehörige Galerkin-System von dem ohne Gewichtung (siehe z. B. Ghanem [46], Le Maître und Knio [68] oder auch Eiermann et al. [33]). Auf welche Art und Weise sich damit auch die Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,K,hp} \in \hat{U}_{\vartheta}^1$ und deren dazugehörige Charakteristiken wie Erwartungswertfunktion $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta)$ und zweite Momentenfunktion $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta)$ verändern, soll in diesem Abschnitt besprochen werden.

Es seien nun im Folgenden die Voraussetzungen des Korollars 4.39 erfüllt. Um das Galerkin-System aufzustellen, wird eine Basis $\{q_\alpha(\xi)\varphi_i, \alpha \in \Lambda_{N,K}, i \in I_{hp}\}$ von $U_{N,K,hp}$ gewählt, bestehend aus Polynomen $q_\alpha(\xi)$ aus $U_{N,K}$ und Finite-Element-Ansatzfunktionen φ_i aus U_{hp} . Als Basis des Testfunktionenraumes $V_{\nu,N,K,hp}$ werden daraufhin die Funktionen

$\{q_\alpha(\xi)\varphi_i\nu, \alpha \in \Lambda_{N,K}, i \in I_{hp}\}$ verwendet. Daraus ergibt sich für $\hat{u}_{N,K,hp} = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i q_\alpha(\xi)$

dann das Gleichungssystem

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

wobei

$$A := \left(a(q_\alpha(\xi)\varphi_i, q_\beta(\xi)\varphi_j\nu) \right)_{\beta j, \alpha i}, \quad \mathbf{f} := \left[\langle f, \varphi_j q_\beta(\xi)\nu \rangle \right]_{\beta j}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{u} := \left[u_{\alpha i} \right]_{\alpha i}^T.$$

Die stochastischen Galerkin-Koeffizienten $(u_{\alpha i})_{\alpha i}$ hängen natürlich sowohl von der Wahl der jeweiligen Basisfunktionen $\varphi_i, i \in I_{hp}$, und $q_\alpha, \alpha \in \Lambda_{N,K}$ als auch von hp, N und K ab. Auf eine überladene Indexschreibweise soll jedoch an dieser Stelle verzichtet werden.

Mit Hilfe der parametrisierten Eingangsdaten $\kappa_\xi(\xi)$ mit $\kappa_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow L^\infty(D)$ und $f_\xi(\xi)$ mit $f_\xi : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_\xi|} \rightarrow H^{-1}(D)$ erhält man

$$\begin{aligned} a(\varphi_i q_\alpha(\xi), \varphi_j q_\beta(\xi)\nu) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\left(\int_D [\kappa_\xi(\xi)](x) \nabla \varphi_i(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \right) q_\alpha(\xi) e q_\beta(\xi)\nu \right) \\ &= \int_D \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left([\kappa_\xi(\xi)](x) q_\alpha(\xi) q_\beta(\xi)\nu \right) \nabla \varphi_i(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx \end{aligned}$$

und

$$\langle f, \varphi_j q_\beta(\xi)\nu \rangle = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\langle f_\xi(\xi), \varphi_j \rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1} q_\beta(\xi)\nu \right) = \left\langle \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(f_\xi(\xi) q_\beta(\xi)\nu \right), \varphi_j \right\rangle_{H^{-1}, \dot{H}^1}$$

für $i, j \in I_{hp}, \alpha, \beta \in \Lambda_{N,K}$.

Im Folgenden werden nun drei verschiedene Möglichkeiten, die Basispolynome $q_\alpha, \alpha \in \Lambda$, zu wählen, vorgestellt. Da $U_{N,K,hp}$ ein Unterraum von \dot{U}_ϑ^1 ist und nach den Voraussetzungen des Korollars 4.39, muss die Zufallsgröße ϑ einen endlichen Erwartungswert besitzen und o. B. d. A. kann dieser als Eins angenommen werden. Verwendet man nun als erste Variante die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ orthonormalen Polynome $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ als Basispolynome $\{q_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$, dann benötigt man zur Auswertung der Erwartungswerte

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\kappa_\xi(\xi) \bar{p}_\alpha(\xi) \bar{p}_\beta(\xi)\nu \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\kappa_\xi(\xi) \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi)} \bar{p}_\alpha(\xi) \bar{p}_\beta(\xi)\vartheta \right)$$

und

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(f_\xi(\xi) \bar{p}_\beta(\xi)\nu \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{f_\xi(\xi) \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi)} \bar{p}_\beta(\xi)\vartheta \right)$$

zum Beispiel die verallgemeinerten polynomiellen Chaosreihen von $\kappa_\xi(\xi) \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi) / \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi)$ und $f_\xi(\xi) \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi) / \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi)$ in den Polynomen $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ bzw. deren verallgemeinerte polynomielle Chaoskoeffizienten. In dem Fall, dass die Zufallsgröße $\nu = \nu^* = \vartheta/\mu$ die Bedingungen an ν erfüllt, bedeutet dies, da μ messbar ist bzgl. der σ -Algebra $\sigma(\xi)$, die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen von $\kappa_\xi(\xi)/\mu$ und $f_\xi(\xi)/\mu$ zu kennen. Selbst wenn man die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten der einzelnen Faktoren kennt, ist es schon im Falle von eindimensionalem polynomiellen Chaos kompliziert, auf die Chaoskoeffizienten des Produktes zu schließen (vgl. dazu Abschnitt 3.2.2 zu Produkten von eindimensionalen polynomiellen Chaosentwicklungen). Die zugehörigen gewichteten Momente der stochastischen Galerkin-Lösung $u_{N,k,hp} \in \dot{U}_\vartheta^1$,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta),$$

lassen sich dann wie gewohnt wegen $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\bar{p}_\alpha(\xi)\bar{p}_\beta(\xi)\vartheta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, durch

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \bar{p}_\alpha(\xi)\vartheta\right) = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\bar{p}_\alpha(\xi)\vartheta) = \sum_{i \in I_{hp}} u_{0i} \varphi_i$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda_{N,K} \\ i, j \in I_{hp}}} u_{\alpha i} u_{\beta j} \varphi_i \varphi_j \bar{p}_\alpha(\xi) \bar{p}_\beta(\xi)\vartheta\right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda_{N,K} \\ i, j \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i u_{\beta j} \varphi_j \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\bar{p}_\alpha(\xi) \bar{p}_\beta(\xi)\vartheta) = \sum_{\alpha \in \Lambda_{N,K}} \sum_{i, j \in I_{hp}} u_{\alpha i} u_{\alpha j} \varphi_i \varphi_j \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda_{N,K}} \left(\sum_{i \in I_{hp}} u_{\alpha i} \varphi_i\right)^2 \end{aligned}$$

berechnen.

Eine zweite Möglichkeit zur Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung gibt es, wenn der Erwartungswert von ν , der dann wieder ohne jegliche Einschränkungen als Eins angenommen werden soll, endlich ist und $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}|\xi_i|^n \nu < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in I_\xi$ gilt. Dies ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn die deterministischen Funktionen $f \in H^{-1}(D)$ zum Raum $U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ gehören, d. h., wenn $H^{-1}(D) \subset U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ gilt. Denn das bedeutet, dass der Erwartungswert $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\frac{\vartheta}{\mu^2}$ endlich ist. Da nach den Voraussetzungen (Annahme 4.23 (c)) für den Testfunktionenraum $V_{\nu, N, K, hp}$ die Zufallsgrößen $\xi_i^n \nu \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu^2/\vartheta d\mathbf{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in I_\xi$ sind, folgt aufgrund von

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}|\xi_i|^n \nu \leq \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}|\xi_i|^{2n} \nu^2 \frac{\mu^2}{\vartheta}\right)^{1/2} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\frac{\vartheta}{\mu^2}\right)^{1/2} < \infty$$

die Endlichkeit des Erwartungswertes von ν und sämtlicher mit ν gewichteter Momente aller ξ_i , $i \in I_\xi$. In diesem Fall können dann auch die Polynome $\{\tilde{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$, die orthonormal sind in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$, als Basispolynome $q_\alpha(\xi)$ fungieren. Für die Berechnung der Erwartungswerte $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa_\xi(\xi)\tilde{p}_\alpha(\xi)\tilde{p}_\beta(\xi)\nu)$ und $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f_\xi(\xi)\tilde{p}_\beta(\xi)\nu)$ bräuchte man dann zum Beispiel lediglich die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung von κ_ξ und f_ξ in den Polynomen $\{\tilde{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ zu kennen. Die Bestimmung der ersten beiden mit der Zufallsgröße ϑ gewichteten Momente der zugehörigen stochastischen Galerkin-Lösung verkompliziert sich allerdings ein wenig. Man muss für diese Momente

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \tilde{p}_\alpha(\xi)\vartheta\right) = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\tilde{p}_\alpha(\xi)\vartheta)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda_{N,K} \\ i, j \in I_{hp}}} u_{\alpha i} u_{\beta j} \varphi_i \varphi_j \tilde{p}_\alpha(\xi) \tilde{p}_\beta(\xi)\vartheta\right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda_{N,K} \\ i, j \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i u_{\beta j} \varphi_j \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\tilde{p}_\alpha(\xi) \tilde{p}_\beta(\xi)\vartheta) \end{aligned}$$

die Erwartungswerte $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\tilde{p}_\alpha(\xi)\tilde{p}_\beta(\xi)\vartheta)$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, ausrechnen. Dabei gilt jedoch nicht die Beziehung $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\tilde{p}_\alpha(\xi)\tilde{p}_\beta(\xi)\vartheta) = C_\alpha\delta_{\alpha\beta}$. Kennt man allerdings die verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung der Polynome $\tilde{p}_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Lambda_{N,K}$, in den Polynomen $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$, d. h., kennt man die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten $\tilde{c}_\beta^{(\alpha)}$, sodass

$$\tilde{p}_\alpha(\xi) = \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \tilde{c}_\beta^{(\alpha)} \bar{p}_\beta(\xi)$$

gilt, dann ergibt sich für die stochastische Galerkin-Lösung durch Umformungen

$$\begin{aligned} \hat{u}_{N,K,hp} &= \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \tilde{p}_\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} u_{\alpha i} \varphi_i \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \tilde{c}_\beta^{(\alpha)} \bar{p}_\beta(\xi) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \bar{p}_\beta(\xi) \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} \tilde{c}_\beta^{(\alpha)} u_{\alpha i} \varphi_i \right). \end{aligned}$$

Für die gewichteten Momente der stochastischen Galerkin-Lösung folgt dann

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta) = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} \tilde{c}_0^{(\alpha)} u_{\alpha i} \varphi_i \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta) = \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} \tilde{c}_\beta^{(\alpha)} u_{\alpha i} \varphi_i \right)^2.$$

Will man – als dritte mögliche Variante – als Basispolynome $\{q_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda_{N,K}\}$ die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ orthonormalen Polynome $\{\hat{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda_{N,K}\}$ verwenden, dann müssten sämtliche Momente $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}|\xi_i|^n$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $i \in I_\xi$ existieren und endlich sein. Die Berechnung des Galerkin-Systems bedeutet dann die Bestimmung der Erwartungswerte

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\kappa_\xi(\xi)\hat{p}_\alpha(\xi)\hat{p}_\beta(\xi)\nu\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\kappa_\xi(\xi)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)\hat{p}_\alpha(\xi)\hat{p}_\beta(\xi)\vartheta\right)$$

und

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(f_\xi(\xi)\hat{p}_\beta(\xi)\nu\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(f_\xi(\xi)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)\hat{p}_\beta(\xi)\vartheta\right).$$

Mit anderen Worten heißt das, die verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklungen bzw. dazu äquivalent die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\kappa_\xi(\xi)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)$ und $f_\xi(\xi)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi)$ zu bestimmen. Die entsprechenden gewichteten Momente $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta)$ und $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta)$ der stochastischen Galerkin-Lösung müssen jedoch analog zu oben über die Umentwicklung der Polynome $\{\hat{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda_{N,K}\}$ in die Polynome $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda_{N,K}\}$, d. h. mit Hilfe von

$$\hat{p}_\alpha(\xi) = \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \hat{c}_\beta^{(\alpha)} \bar{p}_\beta(\xi)$$

ausgewertet werden. Es ergibt sich dann

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}\vartheta) = \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} \hat{c}_0^{(\alpha)} u_{\alpha i} \varphi_i \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_{N,K,hp}^2\vartheta) = \sum_{\beta \in \Lambda_{N,K}} \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda_{N,K} \\ i \in I_{hp}}} \hat{c}_\beta^{(\alpha)} u_{\alpha i} \varphi_i \right)^2.$$

Im Falle von $\vartheta \equiv 1$ ist natürlich diese mit der zuerst besprochenen Berechnungsmöglichkeit identisch.

Können alle drei Ansätze zur Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung verfolgt werden, dann werden sich im Allgemeinen die jeweiligen stochastischen Galerkin-Koeffizienten in \underline{u} unterscheiden. Zusammen mit den Basispolynomen liefern sie dann aber alle das gleiche Ergebnis, d. h. die gleiche stochastische Galerkin-Lösung. Allein der numerische Aufwand der Berechnung dieser Lösungen kann sich, je nachdem welche Variante verwendet wird, von Fall zu Fall unterscheiden.

Beispiel 4.42 Sei für ein gegebenes Randwertproblem die standardnormalverteilte Zufallsgröße ξ eine geeignete Basiszufallsvariable und für $0 < \varepsilon < 1$ die Zufallsgröße $\nu = t_\nu(\xi) = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\xi^2\right)/\sigma$ mit $\sigma := 1/\sqrt{1-\varepsilon}$ ein zulässiges Gewicht für den endlich-dimensionalen Testfunktionenraum $V_{\nu,N,hp}$, ($K = 1$), im Sinne von Annahme 4.23, d. h.

$$V_{\nu,N,hp} = \text{span}\{u_{hp}\xi^n\nu, u_{hp} \in U_{hp}, n = 0, \dots, N\}.$$

Dann besitzt die Basiszufallsvariable ξ als Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$ ebenfalls eine Normalverteilung und die zugehörige Dichtefunktion $f_\xi^{\nu d\mathbf{P}}$ ist gegeben mit

$$\begin{aligned} f_\xi^{\nu d\mathbf{P}}(y) &= t_\nu(y)f_\xi^{\mathbf{P}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}y^2\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2(1-\varepsilon)}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit sind die zur Zufallsgröße ξ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$ gehörenden orthonormalen Polynome $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ im Sinne von Satz 2.16 nach Korollar 2.19 die im Argument skalierten Hermite-Polynome

$$\tilde{p}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{He}_n\left(\frac{\xi}{\sigma}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei nun $\vartheta \equiv 1$. Folgt man dann der ersten Variante zur Berechnung der stochastischen Galerkin-Lösung und verwendet die Hermite-Polynome $\{\text{He}_n(\xi)/\sqrt{n!}, n = 0, \dots, N\}$, so müssen beispielsweise für den Koeffizienten $\kappa = \kappa_\xi(\xi)$ die polynomiellen Chaoskoeffizienten

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\kappa_\xi(\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \nu\right) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\kappa_\xi(\xi) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\xi^2\right) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}\right)$$

bestimmt werden. Wählt man die zweite Variante, dann hat man die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten bzgl. $\{\tilde{p}_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ zu berechnen. Für den Koeffizienten κ hieße dies zum Beispiel die polynomiellen Chaoskoeffizienten von $\kappa_\xi(\sigma\xi)$ zu bestimmen, da

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa_\xi(\xi)\tilde{p}_n(\xi)\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \kappa_\xi(y) \frac{\text{He}_n(y/\sigma)}{\sqrt{n!}} t_\nu(y) f_\xi^{\mathbf{P}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \kappa_\xi(y) \frac{\text{He}_n(y/\sigma)}{\sqrt{n!}} f_\xi^{\nu d\mathbf{P}}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \kappa_\xi(\sigma z) \frac{\text{He}_n(z)}{\sqrt{n!}} f_\xi^{\mathbf{P}}(z) dz = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\kappa_\xi(\sigma\xi) \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}\right). \end{aligned}$$

Zur Auswertung der Charakteristiken der stochastischen Galerkin-Lösung in diesem Fall benötigt man jedoch die polynomiellen Chaoskoeffizienten $c_i^{(n)}$, für die

$$\frac{\text{He}_n(\xi/\sigma)}{\sqrt{n!}} = \sum_{i=0}^n c_i^{(n)} \frac{\text{He}_i(\xi)}{\sqrt{i!}}$$

gilt. Diese sind hier allerdings explizit bekannt (siehe Formel (2.10) in Abschnitt 2.2.2) und mit

$$c_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{i! \left(\frac{n-i}{2}\right)!}} \sigma^{-n} \left(\frac{1-\sigma^2}{2}\right)^{(n-i)/2}, & n+i \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad i = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben.

Ein weiterer wichtiger numerischer Aspekt ist, ob sich die jeweiligen multivariaten orthonormalen Polynome $\{\bar{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$, $\{\tilde{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ bzw. $\{\hat{p}_\alpha(\xi), \alpha \in \Lambda\}$ als Tensorprodukte entsprechender univariater orthonormaler Polynome in ξ_i ergeben und dann die Erwartungswerte ebenfalls in solche Produkte zerfallen. Aus stochastischer Sicht ist diese Frage äquivalent dazu, ob die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ als Zufallsgrößen auf dem jeweiligen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$, $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$ bzw. $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ unabhängig sind. Auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sind die Basiszufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, genau dann unabhängig, wenn die Verteilung $F_\xi^{\mathbf{P}}$ von $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ sich als Produkt der Verteilungen $F_{\xi_i}^{\mathbf{P}}$ von ξ_i , $i \in I_\xi$, ergibt, d. h.

$$dF_\xi^{\mathbf{P}}(y) = \prod_{i \in I_\xi} dF_{\xi_i}^{\mathbf{P}}(y_i), \quad y = (y_i)_{i \in I_\xi} \in \mathbb{R}^{|I_\xi|}.$$

Die Unabhängigkeit der Basiszufallsgrößen auf den beiden anderen Wahrscheinlichkeitsräumen lässt sich wie folgt charakterisieren. Seien mit $t_\vartheta : \mathbb{R}^{|I_\xi|} \rightarrow \mathbb{R}$ und $t_\nu : \mathbb{R}^{|I_\xi|} \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen gegeben, die nach dem Lemma von Doob-Dynkin

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi) = t_\vartheta(\xi) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi) = t_\nu(\xi)$$

erfüllen, dann lauten die jeweiligen Verteilungen $F_\xi^{\vartheta d\mathbf{P}}$ und $F_\xi^{\nu d\mathbf{P}}$ von ξ

$$dF_\xi^{\vartheta d\mathbf{P}}(y) = t_\vartheta(y) dF_\xi^{\mathbf{P}}(y) \quad \text{und} \quad dF_\xi^{\nu d\mathbf{P}}(y) = t_\nu(y) dF_\xi^{\mathbf{P}}(y).$$

Die Verteilung der einzelnen ξ_i , $i \in I_\xi$, auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ bzw. $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$ lassen sich dann analog mit

$$dF_{\xi_i}^{\vartheta d\mathbf{P}}(y_i) = t_{\vartheta,i}(y_i) dF_{\xi_i}^{\mathbf{P}}(y_i) \quad \text{bzw.} \quad dF_{\xi_i}^{\nu d\mathbf{P}}(y_i) = t_{\nu,i}(y_i) dF_{\xi_i}^{\mathbf{P}}(y_i)$$

angeben, wobei $t_{\vartheta,i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $t_{\nu,i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die messbaren Funktionen bezeichnen, für die

$$t_{\vartheta,i}(\xi_i) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta|\xi_i) \quad \text{bzw.} \quad t_{\nu,i}(\xi_i) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\nu|\xi_i), \quad i \in I_\xi,$$

gelten. Die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $\xi = (\xi_i)_{i \in I_\xi}$ auf dem jeweiligen Wahrscheinlichkeitsraum ist daraufhin genau dann gegeben, wenn die jeweilige Verteilung von ξ das Produkt der entsprechenden Verteilungen der einzelnen Zufallsgrößen ξ_i , $i \in I_\xi$, ist, d. h.

$$F_\xi^{\vartheta d\mathbf{P}}(dy) = \prod_{i \in I_\xi} F_{\xi_i}^{\vartheta d\mathbf{P}}(dy_i) \quad \text{bzw.} \quad F_\xi^{\nu d\mathbf{P}}(dy) = \prod_{i \in I_\xi} F_{\xi_i}^{\nu d\mathbf{P}}(dy_i)$$

gilt. Wenn zum Beispiel die Zufallsgrößen $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ unabhängig sind als Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und die Funktionen t_ϑ bzw. t_ν sich als Produkt

$$t_\vartheta(y) = \prod_{i \in I_\xi} t_{\vartheta,i}(y_i) \quad \text{bzw.} \quad t_\nu(y) = \prod_{i \in I_\xi} t_{\nu,i}(y_i)$$

schreiben lassen, dann kann die Unabhängigkeit der $(\xi_i)_{i \in I_\xi}$ als Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \vartheta d\mathbf{P})$ bzw. $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu d\mathbf{P})$ geschlussfolgert werden.

4.2.5 Beispiele

Dieser Abschnitt dient dazu, durch Beispiele sowohl theoretischer als auch numerischer Natur die Aussagen der vorangegangenen Abschnitte zu illustrieren und zu untermauern. Es werden Beispiele dafür gegeben, dass die Anwendung der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Methode zu unsinnigen Ergebnissen führen kann, wenn man die theoretischen Erkenntnisse aus dem Abschnitt 4.2.4 außer Acht lässt. Das heißt, es werden Beispiele konstruiert, für die die Folge der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Lösungen nicht in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergiert. Gleichzeitig werden im Gegenzug dazu diese Beispiele unter Berücksichtigung der Ergebnisse mit einem geeigneten stochastischen Galerkin-Ansatz gelöst und die Konvergenz der Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm gezeigt. Die Abhängigkeit der Approximationsqualität bzw. Konvergenzgeschwindigkeit der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen von den Basiszufallsvariablen wird ebenfalls anhand von numerischen Beispielen veranschaulicht.

Diese Beispiele werden (vorwiegend) der Einfachheit halber eindimensionale Randwertprobleme der Form

$$-(\kappa(x, \omega)u'(x, \omega))' = f(x, \omega), \quad x \in D = (0, 1), \quad \omega \in \Omega,$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0, \omega) = u(1, \omega) = 0, \quad \omega \in \Omega,$$

oder gemischten Randbedingungen

$$u(0, \omega) = 0 \quad \text{und} \quad \kappa(1, \omega)u'(1, \omega) = F(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

sein. Obwohl die gemischten Randbedingungen von denen des Modellproblems (4.5) abweichen, behält die in den vorherigen Abschnitten entwickelte Theorie ihre Gültigkeit (vgl. Bemerkung 4.14). Des Weiteren werden immer bis auf Beispiel 5 schwache Lösungen mit endlichem zweiten Moment gesucht, d. h. $\vartheta \equiv 1$. Als Gewicht ν in der Definition des endlichdimensionalen Testfunktionenraumes $V_{\nu, N, K, hp}$ wird, wenn nicht anders erwähnt, die auf Erwartungswert Eins normierte Zufallsgröße $\nu^* = \mu^{-1} / \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mu^{-1})$ verwendet. Die Diskretisierung in der räumlichen Variablen erfolgt immer mit Hilfe eines Gauß-Lobatto-Legendre-Spektralelementes (siehe z. B. Canuto et al. [26]) geeigneter Ordnung p , damit der räumliche Diskretisierungsfehler in diesen Beispielen und Fehlerbetrachtungen nahezu keine Rolle mehr spielt und vernachlässigt werden kann und so der Einfluss der Diskretisierung bzgl. der stochastischen Parameter auf den Approximationsfehler deutlich wird. Wenn nicht näher auf die Ordnung p eingegangen wird, dann wird $p = 50$ verwendet. Als Fehlermaße dienen hauptsächlich der relative Approximationsfehler in der natürlichen Norm

$$\delta_{N, K, hp} := \frac{\|\hat{u} - \hat{u}_{N, K, hp}\|_{U_{\vartheta}^1}}{\|\hat{u}\|_{U_{\vartheta}^1}}$$

und die relativen Fehler des ersten bzw. zweiten Momentes als Funktionen der räumlichen Variablen

$$\delta_{N, K, hp}^{(1)} := \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u} - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}_{N, K, hp}|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}|}$$

bzw.

$$\delta_{N, K, hp}^{(2)} := \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}^2 - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}_{N, K, hp}^2|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}^2|}.$$

Kommen nur endlich viele Basiszufallsvariablen zur Darstellung der Eingangsdaten zum Einsatz, so wird aus schreibtechnischen Gründen und zur Bewahrung der Übersichtlichkeit der Index K bei der Bezeichnung der endlichdimensionalen Unterräume, der stochastischen Galerkin-Lösung und der relativen Fehler unterdrückt.

Im ersten Beispiel wird gezeigt, dass die Gewichtung der Ansatzfunktionen im endlichdimensionalen Testfunktionenraum $V_{\nu,N,K,hp}$ durch die Zufallsgröße ν notwendig ist, um zu gewährleisten, dass die Folge stochastischer Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergiert. Dafür wird das in Abschnitt 4.2.4 gegebene Beispiel 4.29 nun ausführlich behandelt.

Beispiel 1. Es wird auf $D = (0, 1)$ das eindimensionale Randwertproblem mit zufälligem Koeffizienten $\kappa = \exp(\xi)$ und zufälliger rechter Seite $f = \exp(\xi)|\xi - 1|$, wobei die Zufallsgröße $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist, betrachtet. Das heißt, es ist die Lösung von

$$\begin{aligned} -(\exp(\xi(\omega))u'(x, \omega))' &= \exp(\xi(\omega))|\xi(\omega) - 1|, & x \in (0, 1), \omega \in \Omega, \\ u(0, \omega) &= u(1, \omega) = 0, & \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

gesucht. Der Koeffizient κ ist dabei eine stark messbare Zufallsvariable in $L^\infty(D)$ und es gilt

$$0 < \kappa_{min} := \exp(\xi) \leq \kappa \leq \exp(\xi) =: \kappa_{max} < \infty.$$

Als Zufallsgröße μ dient damit der Koeffizient selbst, d. h. $\mu = \exp(\xi)$. Da $f \in U_{\exp(-2\xi)}^{-1}$ ist, existiert die eindeutige schwache Lösung $\hat{u} \in \mathring{U}^1$, d. h. $\vartheta \equiv 1$, mit

$$[\hat{u}(\omega)](x) = [\hat{u}_\xi(\xi(\omega))](x) = \frac{1}{2}|\xi(\omega) - 1|(x - x^2), \quad x \in (0, 1), \omega \in \Omega.$$

Sie ist ebenso die pfadweise Lösung und auch die klassische. Wählt man nun bei der Anwendung der stochastischen Galerkin-Methode $\nu \equiv 1$ und damit die endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionenräume

$$U_{N,hp} \equiv V_{\nu,N,hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span} \left\{ \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}}, n = 0, \dots, N \right\},$$

d. h. den standardmäßigen stochastischen Galerkin-Ansatz, so wird man im Folgenden feststellen, dass die entsprechende Folge stochastischer Galerkin-Lösungen nicht in \mathring{U}^1 gegen die schwache Lösung \hat{u} konvergiert. Betrachtet man die stochastische Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ näher, so ergibt sie sich als Produkt, $\hat{u}_{N,hp} = \hat{u}_{hp}\hat{u}_N$, der deterministischen Funktion $\hat{u}_{hp} \in U_{hp}$, die die Gleichung

$$\int_D \hat{u}'_{hp}(x)v'_{hp}(x) dx = \int_D v_{hp}(x) dx \quad \text{für alle } v_{hp} \in U_{hp} \quad (4.30)$$

löst, und der Zufallsgröße $\hat{u}_N \in U_N$, die die Gleichung

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(\xi)\hat{u}_N \frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(\xi)|\xi - 1| \frac{\text{He}_m(\xi)}{\sqrt{m!}} \right) \quad \text{für alle } m = 0, \dots, N \quad (4.31)$$

erfüllt. Mit den Bezeichnungen $\hat{u}_D(x) := \frac{1}{2}(x - x^2)$ und $\hat{u}_\Omega(\omega) := |\xi(\omega) - 1|$ gilt $\hat{u} = \hat{u}_{hp}\hat{u}_\Omega$ und man erhält die Abschätzung

$$\|\hat{u} - \hat{u}_{N,hp}\|_{U^1} = \|\hat{u}_D\hat{u}_\Omega - \hat{u}_{hp}\hat{u}_N\|_{U^1} = \|\hat{u}_\Omega(\hat{u}_D - \hat{u}_{hp}) + \hat{u}_{hp}(\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N)\|_{U^1}$$

$$\begin{aligned} &\geq \|\hat{u}_{hp}(\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N)\|_{U^1} - \|\hat{u}_\Omega(\hat{u}_D - \hat{u}_{hp})\|_{U^1} \\ &= \|\hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)} \|\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N\|_{L^2(\Omega)} - \|\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{u}_D - \hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)}. \end{aligned}$$

Da die Beziehungen $\|\hat{u}_D - \hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)} \rightarrow 0$ und $\|\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ gelten, konvergiert der letzte Term $(\|\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{u}_D - \hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)})$ gegen Null und $\|\hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)}$ gegen $\|\hat{u}_D\|_{H^1(D)}$. Der Fehler $\|\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N\|_{L^2(\Omega)}$ konvergiert jedoch nicht gegen Null wie in Beispiel 2 des Abschnittes 4.1 bewiesen wurde.

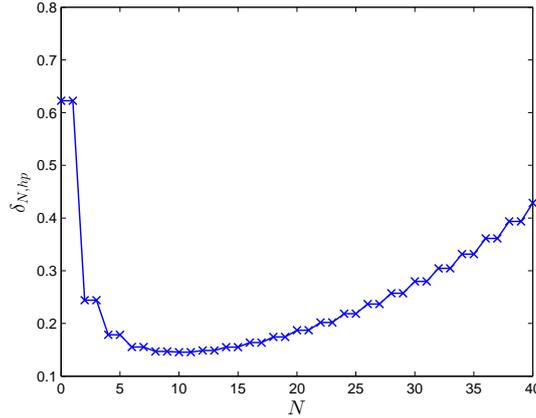


Abb. 4.4: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ der standardmäßigen stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ an die schwache Lösung \hat{u} für wachsenden Polynomgrad N .

Damit konvergiert sowohl der absolute als auch der relative Approximationsfehler

$$\delta_{N,hp} = \frac{\|\hat{u} - \hat{u}_{N,hp}\|_{U^1}}{\|\hat{u}\|_{U^1}}$$

nicht gegen Null, was bedeutet, dass mit diesen stochastischen Galerkin-Lösungen keine beliebig gute Approximation an die schwache Lösung in \dot{U}^1 erreicht werden kann. Diese stochastischen Galerkin-Lösungen konvergieren also nicht gegen die schwache Lösung in \dot{U}^1 . Diese Aussage wird auch durch die in Abbildung 4.4 erkennbare Tendenz des relativen Approximationsfehlers $\delta_{N,hp}$ unterstützt. Als räumliche Diskretisierung genügt es in diesem Fall ein Gauß-Lobatto-Legendre-Spektralelement der Ordnung $p = 3$ zu verwenden.

Setzt man jedoch $\nu = \exp(-1/2) \exp(-\xi)$ und damit den endlichdimensionalen Testfunktionsraum

$$V_{\nu,N,hp} = \{u \exp(-\xi), u \in U_{N,hp}\} = \text{span} \left\{ u_{hp} \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \exp(-\xi), u_{hp} \in U_{hp}, n = 0, \dots, N \right\}$$

voraus, dann erhält man eine Folge stochastischer Galerkin-Lösungen, die gegen die schwache Lösung in \dot{U}^1 konvergiert. Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{Q} ist wegen $\kappa_{max} = \mu$ hier identisch mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} , sodass $\dot{U}^1 = \dot{U}_{\mathbf{Q}}^1$ gilt, und man erhält nach Korollar 4.31 aus Abschnitt 4.2.4 die Abschätzung

$$\|\hat{u} - \hat{u}_{N,hp}\|_{U^1} \leq C \inf_{z \in \dot{U}_{N,hp}} \|\hat{u} - z\|_{U^1}$$

in keiner stärkeren sondern der gleichen Norm, in der man auch den Approximationsfehler misst. Da die Hermite-Polynome in ξ dicht liegen in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ und $\hat{u} \in \dot{U}^1 \cap U^k$ für

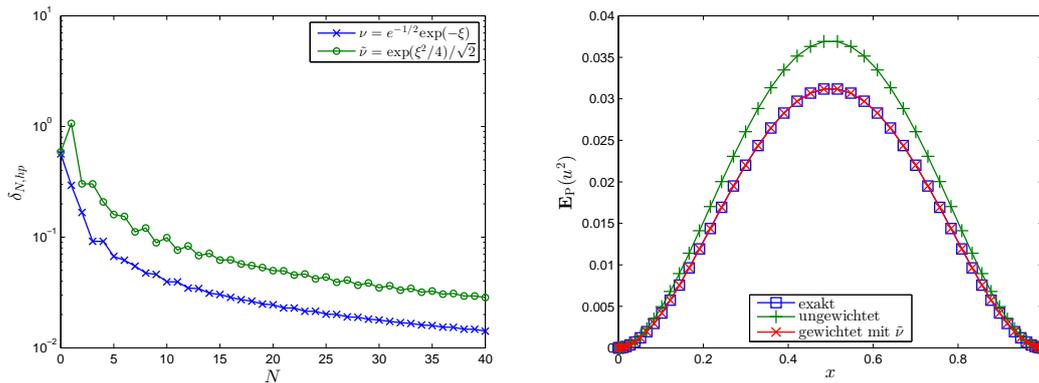


Abb. 4.5: Links: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ der stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ in Abhängigkeit des Polynomgrades N für die Gewichte ν und $\tilde{\nu}$. Rechts: Zweites Moment der schwachen Lösung \hat{u} und der stochastischen Galerkin-Lösungen $\hat{u}_{N,hp}$ für den gewichteten ($\tilde{\nu}$) und ungewichteten Fall zum Polynomgrad $N = 40$ als Funktion der räumlichen Variablen.

ein $k > 1$, folgt nach Korollar 4.39 die Konvergenz der Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen in \bar{U}^1 . Die stochastische Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ ergibt sich in analoger Weise zu (4.30) und (4.31) auch als Produkt eines deterministischen und eines stochastischen Anteils. Der stochastische Anteil \hat{u}_N der stochastischen Galerkin-Lösung stellt in diesem Falle sogar die polynomielle Chaosentwicklung der Ordnung N von \hat{u}_Ω dar. Somit wird zum Beispiel für $N = 0$ der Erwartungswert der Lösung \hat{u} als Funktion in der räumlichen Variablen $x \in D$ exakt durch den Erwartungswert der stochastischen Galerkin-Lösung berechnet.

Die Zufallsgröße $\tilde{\mu} = \exp(-\xi^2/4)$ ist ebenfalls eine untere Schranke an den Koeffizienten κ und es gilt auch $f \in U_{\exp(\xi^2/2)}^{-1}$. Wählt man dazu die passenden Testfunktionen mit

$$\begin{aligned} V_{\nu,N,hp} &= \{u \exp(\xi^2/4), u \in U_{N,hp}\} \\ &= \text{span} \left\{ u_{hp} \frac{\text{He}_n(\xi/\sqrt{2})}{\sqrt{n!}} \exp(\xi^2/4), u_{hp} \in U_{hp}, n = 0, \dots, N \right\}, \end{aligned}$$

d. h. $\tilde{\nu} = \exp(\xi^2/4)/\sqrt{2}$, dann erhält man wiederum eine in der natürlichen Norm gegen die schwache Lösung konvergente Folge von stochastischen Galerkin-Lösungen, deren stochastischer Anteil jedoch nicht mehr die N -te polynomielle Chaosapproximation der schwachen Lösung \hat{u} ist. Demzufolge ist deren relativer Approximationsfehler größer als jener für die stochastische Galerkin-Lösung, die mit dem Gewicht ν berechnet wird. Doch für beide kann in Abbildung 4.5 (linkes Bild) ein Abklingen des Fehlers beobachtet werden. Dabei ist wieder ein Gauß-Lobatto-Legendre-Spektralelement der Ordnung $p = 3$ zur räumlichen Diskretisierung benutzt worden. Im rechten Bild der Abbildung 4.5 wird das zweite Moment der schwachen Lösung \hat{u} als Funktion in der räumlichen Variablen x ,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left([\hat{u}(\cdot)](x) \right)^2 = \frac{1}{2}(x - x^2)^2, \quad x \in D,$$

verglichen mit den zweiten Momenten der stochastischen Galerkin-Lösung der Ordnung $N = 40$ für den Fall, dass man ungewichtet rechnet, und dem Fall, dass man gewichtet rechnet mit der Zufallsgröße $\tilde{\nu}$. Dabei erkennt man, dass man mit Hilfe der gewichteten Rechnung (blaue \square -Kurve) dem wahren zweiten Moment (rote \times -Kurve) schon sehr

nahe kommt, wohingegen das Ergebnis der ungewichteten Rechnung (grüne +-Kurve) deutlich davon abweicht. Der Einfachheit halber wurde hier ein Gauß-Lobatto-Legendre-Spektralelement der Ordnung $p = 50$ verwendet. ■

Das zweite Beispiel zeigt, dass man, wenn man eine Basiszufallsvariable ξ wählt, deren zugehörige orthonormalen Polynome in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ nicht dicht liegen, ebenfalls eine Folge stochastischer Galerkin-Lösungen erhalten kann, die nicht gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergiert.

Beispiel 2. Das Randwertproblem mit den gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} -(\eta(\omega)u'(x, \omega))' &= f(x), & x \in (0, 1), \omega \in \Omega, \\ u(0, \omega) &= 0, & \omega \in \Omega, \\ \eta(\omega)u'(1, \omega) &= F, & \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

und deterministischem Quellterm $f \in C(\bar{D})$, konstantem F und lognormaler Zufallsgröße η als Koeffizienten soll betrachtet werden. Die lognormale Zufallsgröße η ist stark messbar als Zufallsvariable in $L^\infty(D)$ und ihre Verteilung sei durch die Dichtefunktion

$$f_\eta^{\mathbf{P}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} \exp(-(\ln(y))^2/2), & y > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

spezifiziert. Als Zufallsgrößen κ_{min} und κ_{max} kann wieder η selbst gewählt werden und ebenso wird wieder $\mu = \eta$ gesetzt. Damit existiert für $\vartheta \equiv 1$ eine eindeutige schwache Lösung \hat{u} in $U^1 \cap U^k$ für ein $k > 1$ mit

$$[\hat{u}(\omega)](x) = \frac{1}{\eta(\omega)} \int_0^x \left(F + \int_y^1 f(z) dz \right) dy.$$

Zudem sind die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{P} und \mathbf{Q} erneut identisch. Wählt man jetzt als Basiszufallsvariable die lognormale Zufallsgröße η und dienen die Räume

$$U_{N,hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N := \text{span} \{\eta^n, n = 0, \dots, N\}$$

und mit $\nu = 1/\mu$

$$V_{\nu,N,hp} = \{u/\eta, u \in U_{N,hp}\}$$

als endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume, dann konvergiert die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen nicht gegen die schwache Lösung in U^1 . Der Grund hierfür ist, dass die orthonormalen Polynome in der lognormalen Zufallsgröße η nicht vollständig sind in $L^2(\Omega, \sigma(\eta), \mathbf{P})$ bzw. in $L^2(\Omega, \sigma(\eta), \mathbf{Q})$. Analog zu Beispiel 1 zerfällt die schwache Lösung $\hat{u} = \hat{u}_D \hat{u}_\Omega$ in einen deterministischen, $\hat{u}_D(x) = \int_0^x \left(F + \int_y^1 f(z) dz \right) dy$, und einen stochastischen Anteil, $\hat{u}_\Omega(\omega) = 1/\eta(\omega)$, genauso wie die stochastische Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp} = \hat{u}_{hp} \hat{u}_N$ (vgl. Formeln (4.30) und (4.31)). Daher gilt wiederum die Abschätzung

$$\|\hat{u} - \hat{u}_{N,hp}\|_{U^1} \geq \|\hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)} \|\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N\|_{L^2(\Omega)} - \|\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{u}_D - \hat{u}_{hp}\|_{H^1(D)}.$$

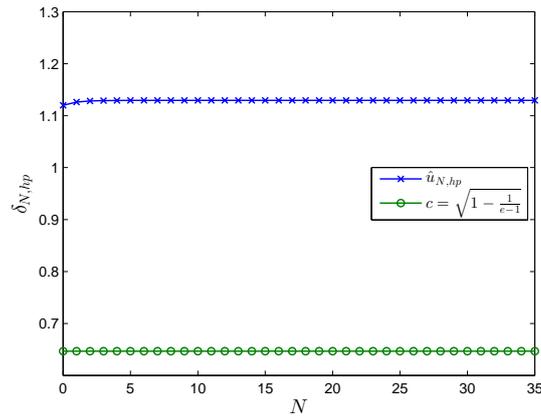


Abb. 4.6: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ der stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ zur Basiszufallsvariablen η für $f \equiv 1$ und $F = 1$.

Da die Zufallsgröße \hat{u}_N die Gleichung

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{u}_N v) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{v}{\eta}\right) \quad \text{für alle } v \in U_N$$

löst, entspricht sie der verallgemeinerten polynomiellen Chaotentwicklung der Ordnung N von $\hat{u}_\Omega = 1/\eta$ in den orthonormalen Polynomen in η , d. h. $\hat{u}_N \equiv {}^{(N)}\hat{u}_\Omega$. Da sich aber der Kehrwert von η nicht durch eine verallgemeinerte polynomielle Chaotentwicklung in orthonormalen Polynomen in η aufgrund von

$$\|\hat{u}_\Omega - \hat{u}_N\|_{L^2(\Omega)} = \|\hat{u}_\Omega - {}^{(N)}\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} > e \sqrt{1 - \frac{1}{e-1}} > 0 \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}_0$$

approximieren lässt (siehe Beispiel 3.9 in Abschnitt 3.1.1), konvergiert die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen nicht in U^1 gegen die schwache Lösung für alle rechten Seiten $f \in C(\bar{D})$ und Konstanten F , für die $\hat{u}_D \neq 0$ ist. Dieser Sachverhalt wird auch in Abbildung 4.6 veranschaulicht, in der der relative Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ der stochastischen Galerkin-Lösung $\hat{u}_{N,hp}$ für die rechte Seite $f \equiv 1$ und die Randbedingung $F = 1$ in Abhängigkeit des Polynomgrades N abgebildet ist. Zum Vergleich ist ebenfalls die untere Fehlerschranke $c = e\sqrt{1 - \frac{1}{e-1}}/\|\hat{u}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{1 - \frac{1}{e-1}}$, die man aus obiger Abschätzung erhält, abgetragen.

Eine lognormale Zufallsgröße η kann man aber auch mit Hilfe einer standardnormalverteilten Zufallsgröße ξ durch $\exp(\xi)$ erzeugen. Wählt man dieses ξ als Basiszufallsvariable und die zugehörigen Hermite-Polynome zum Aufspannen des endlichdimensionalen Unterraumes U_N , dann erhält man wiederum stochastische Galerkin-Lösungen, die in U^1 gegen die schwache Lösung konvergieren. ■

Hat man die Wahl zwischen zwei oder mehreren Basiszufallsvariablen, bei denen man weiß, dass die jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in der natürlichen Norm konvergieren, dann gibt die Glattheit der Eingangsdaten in diesen Basiszufallsgrößen einen Hinweis darauf, wessen Approximationsqualität besser ist. Das heißt, je glatter die Abhängigkeit der Eingangsdaten ist, umso schneller konvergiert die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen bzw. umso besser ist die Approximationsgüte der zugehörigen stochastischen Galerkin-Lösungen.

Beispiel 3. Im dritten Beispiel wird das folgende Randwertproblem betrachtet

$$\begin{aligned} -(\exp(|\xi(\omega)|x)u'(x,\omega))' &= f(x), & x \in (0,1), \omega \in \Omega, \\ u(0,\omega) &= 0, & \omega \in \Omega, \\ \exp(|\xi(\omega)|)u'(1,\omega) &= F, & \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Die rechte Seite f soll wie in Beispiel 2 deterministisch und die Randbedingung F wieder eine Konstante sein. Der Koeffizient

$$[\kappa(\omega)](x) = [\kappa_\xi(\xi(\omega))](x) = [\kappa_{|\xi|}(|\xi(\omega)|)](x) = \exp(|\xi(\omega)|x)$$

mit $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ hängt jedoch diesmal auch von der räumlichen Variablen x ab. Des Weiteren ist er stark messbar und lässt sich durch

$$0 < \kappa_{min} := 1 \leq \kappa(x,\omega) \leq \exp(|\xi|) =: \kappa_{max} < \infty \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

beschränken. Da $\kappa_{max} = \exp(|\xi|) \in L^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für beliebiges $r > 2$ und $\nu = 1/\kappa_{min} = 1$ ist, muss keine Gewichtung des endlichdimensionalen Testfunktionenraumes $V_{\nu,N,hp}$ erfolgen. Es gibt allerdings zwei offensichtliche Kandidaten für die Basiszufallsvariable. Man kann nämlich zum einen die standardnormalverteilte Zufallsgröße ξ (polynomielles Chaos (PC)) oder zum anderen die mit einem Freiheitsgrad Chi-verteilte Zufallsgröße $|\xi|$ (verallgemeinertes polynomielles Chaos (gPC)) – manchmal auch reflektierte Gaußsche Zufallsgröße genannt – als Basiszufallsvariable festlegen. Im ersteren Fall dienen dann die Räume

$$U_{N,hp} \equiv V_{\nu,N,hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span} \{ \xi^n, n = 0, \dots, N \}$$

und im zweiten Fall die Räume

$$U_{N,hp} \equiv V_{\nu,N,hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span} \{ |\xi|^n, n = 0, \dots, N \}$$

als endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume. Die schwache Lösung $\hat{u} \in U^1$, d. h. $\vartheta \equiv 1$, des Randwertproblems kann wieder explizit angegeben werden mit

$$[\hat{u}(\omega)](x) = [\hat{u}_\xi(\xi(\omega))](x) = [\hat{u}_{|\xi|}(|\xi(\omega)|)](x) = \int_0^x \exp(-|\xi(\omega)|y) \left(F + \int_y^1 f(z) dz \right) dy.$$

Die unterschiedliche Approximationsqualität der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen für obiges Randwertproblem mit rechter Seite $f \equiv 1$ und Konstanten $F = 1$ lässt sich in Abbildung 4.7 erkennen. In diesem Fall gilt $\hat{u} \in U_{\mathbf{Q}}^1 \cap U_{\mathbf{Q}}^k$ für ein $k > 1$ und die orthogonalen Polynome in ξ bzw. $|\xi|$ liegen dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q})$ bzw. $L^2(\Omega, \sigma(|\xi|), \mathbf{Q})$ (vgl. Satz 3.2 im Zusammenhang mit Satz 2.14). Damit konvergieren die Folgen der jeweiligen stochastischen Galerkin-Lösungen in U^1 gegen die schwache Lösung. In der Abbildung 4.7 ist dann rechts der relative Fehler des Erwartungswertes und links der relative Fehler des zweiten Momentes als Funktionen der räumlichen Variablen x abgetragen, d. h.

$$\delta_{N,hp}^{(1)} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u} - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}_{N,hp}|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}|} \quad \text{bzw.} \quad \delta_{N,hp}^{(2)} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}^2 - \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}_{N,hp}^2|}{|\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \hat{u}^2|},$$

und man kann beobachten, dass die stochastische Galerkin-Lösung zur Basiszufallsvariablen $|\xi|$ (gPC) die schwache Lösung viel besser approximiert als die stochastische Galerkin-Lösung zur Basiszufallsvariable ξ (PC) bei gleicher räumlicher Diskretisierung und gleichem Polynomgrad N . Der scheinbar andere Verlauf der Fehlerkurve für $0 < x < 0.3$

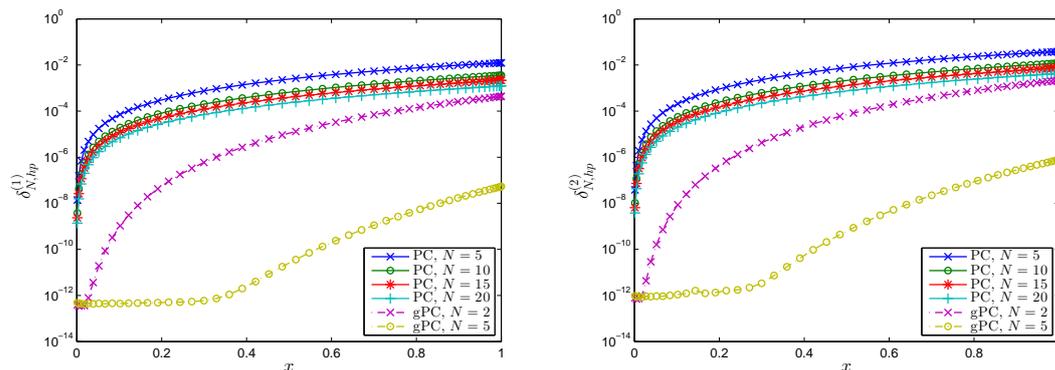


Abb. 4.7: Relativer Fehler des Erwartungswertes $\delta_{N,hp}^{(1)}$ (links) und des zweiten Momentes $\delta_{N,hp}^{(2)}$ (rechts) der stochastischen Galerkin-Lösungen verschiedener Ordnungen N für $f \equiv 1$ und $F = 1$ mit ξ als Basiszufallsvariable (PC) bzw. mit $|\xi|$ als Basiszufallsvariable (gPC).

für die stochastische Galerkin-Lösung der Ordnung $N = 5$ für die Basiszufallsvariable $|\xi|$ (gPC, $N = 5$) lässt sich durch die beschränkte Rechengenauigkeit erklären, da in diesem Fall verschiedene Integrale nur numerisch berechnet werden konnten.

Ein direkter Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit, d. h. der Konvergenzraten, ist in Abbildung 4.8 durch die Darstellung des relativen Approximationsfehlers $\delta_{N,hp}$ gegeben. Da die Parametrisierung $\kappa_{|\xi|}$ und damit die parametrisierte Lösung $\hat{u}_{|\xi|}$ unendlich oft

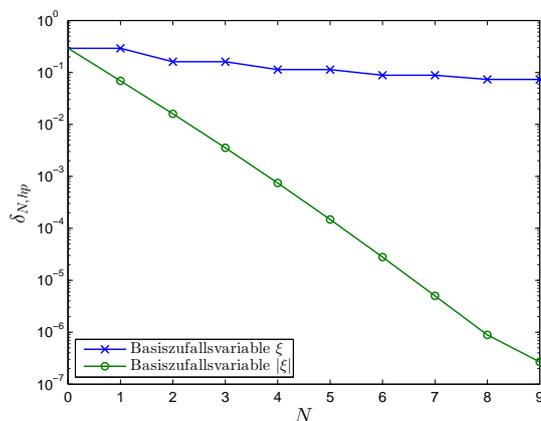


Abb. 4.8: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ in Abhängigkeit der Ordnung N der stochastischen Galerkin-Lösung für die Basiszufallsvariable ξ und der stochastischen Galerkin-Lösung für die Basiszufallsvariable $|\xi|$ bei $f \equiv 1$ und $F = 1$.

differenzierbar sind, ist eine exponentiell schnelle Konvergenz des Approximationsfehlers der stochastischen Galerkin-Lösungen für die Basiszufallsvariable $|\xi|$ zu erwarten und zu beobachten. Dagegen ergibt sich für die stochastischen Galerkin-Lösungen zur Basiszufallsvariablen ξ eine algebraische Konvergenzrate, weil die Parametrisierung κ_{ξ} und damit die Lösung \hat{u}_{ξ} stetig aber nicht differenzierbar sind (vgl. dazu auch Korollar 4.41). ■

In Beispiel 4 wird ein und dasselbe Randwertproblem für unterschiedlich gewichtete endlichdimensionale Testfunktionenräume gelöst und deren stochastische Galerkin-Lösungen miteinander verglichen.

Beispiel 4. Das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} -(\exp(-\xi^2(\omega)x/10)u'(x,\omega))' &= f(x), & x \in (0,1), \omega \in \Omega, \\ u(0,\omega) &= 0, & \omega \in \Omega, \\ \exp(-\xi^2(\omega)/10)u'(1,\omega) &= \exp(-6\xi^2(\omega)), & \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

mit zufälligem Koeffizienten $[\kappa(\omega)](x) = \exp(-x\xi^2(\omega)/10)$, deterministischer rechter Seite $f \in C(\bar{D})$ und zufälligem $F(\omega) = \exp(-6\xi^2(\omega))$ für eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ξ sei gegeben. Der Koeffizient κ ist stark messbar und für die Zufallsgrößen

$$\kappa_{min} := \exp(-\xi^2/10) \quad \text{und} \quad \kappa_{max} := 1$$

gilt die Abschätzung

$$0 < \kappa_{min} \leq \kappa \leq \kappa_{max} < \infty \quad \text{f. ü. und f. s.}$$

Die schwache Lösung $\hat{u} \in U^1$, d. h. $\vartheta \equiv 1$, dieses Randwertproblems ist damit

$$[\hat{u}(\omega)](x) = \int_0^x \exp(\xi^2(\omega)y/10) \left(\exp(-6\xi^2(\omega)) + \int_y^1 f(z) dz \right) dy.$$

Neben der Zufallsgröße κ_{min} bilden auch die Zufallsgrößen $\exp(-\frac{\varepsilon}{10}\xi^2)$ für $\varepsilon \geq 1$ untere Schranken an κ . Für

$$\mu_\varepsilon := \sqrt{\frac{5}{5-\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{10}\xi^2\right), \quad 1 \leq \varepsilon \leq 1.5,$$

gilt dann zum einen $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \mu_\varepsilon^{-1} = 1$, $\mu_\varepsilon^{-1} \in L^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für ein $r > 2$ und zum anderen, dass der Erwartungswert

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\|\hat{u}\|_{H^1(D)}^2 \mu_\varepsilon^{-2} \right) < \infty$$

endlich ist. Das bedeutet, dass $\hat{u} \in U_{\frac{1}{\mu_\varepsilon^2}} \cap U_{\frac{k}{\mu_\varepsilon^2}}$ für ein $k > 1$ ist. (Unter Berücksichtigung von Bemerkung 4.28 kann auch $1 \leq \varepsilon \leq 3$ gewählt werden (siehe auch [78]).) Alle dazu definierten Gewichte

$$\nu_\varepsilon := \frac{1}{\mu_\varepsilon \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mu_\varepsilon^{-1})} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{5}} \exp\left(\frac{\varepsilon}{10}\xi^2\right), \quad 1 \leq \varepsilon \leq 1.5$$

erfüllen die Annahme 4.23 mit den endlichdimensionalen Unterräumen

$$U_{N,hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span}\{\xi^n, n = 0, \dots, N\}$$

und

$$V_{\nu,N,hp}^{(\varepsilon)} = \{u\nu_\varepsilon, u \in U_{N,hp}\}.$$

Jede der entsprechenden stochastischen Galerkin-Lösungen $\hat{u}_{N,hp}^{(\varepsilon)} \in U^1$ konvergiert in U^1 gegen die schwache Lösung \hat{u} , da die entsprechenden Polynome dicht liegen. Für die rechte Seite $f \equiv 1$ sind in Abbildung 4.9 für verschiedene ε , $\varepsilon = 1, 1.25, 1.5$, der relative Approximationsfehler $\delta_{N,hp}$ der zugehörigen stochastischen Galerkin-Lösungen $\hat{u}_{N,hp}^{(\varepsilon)}$ berechnet worden und man kann, entsprechend der Theorie, ein Abfallen des Fehlers beobachten. Zum Vergleich ist ebenfalls der relative Approximationsfehler für den ungewichteten Fall, d. h. für $\nu_0 = 1$ ($\varepsilon = 0$), berechnet worden. Nach einer Phase des Abklingens des relativen

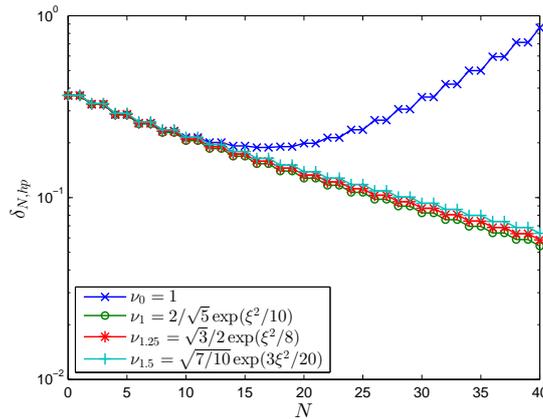


Abb. 4.9: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N, hp}$ in Abhängigkeit der Ordnung N der stochastischen Galerkin-Lösung für verschiedene Gewichte ν_ε , $\varepsilon = 0, 1, 1.25, 1.5$.

Fehlers $\delta_{N, hp}$ lässt sich ab Polynomgrad $N = 19$ ein Anwachsen desselben erkennen, was die Vermutung nahe legt, dass in diesem Fall die stochastischen Galerkin-Lösungen nicht gegen die schwache Lösung \hat{u} in U^1 konvergiert. ■

Im fünften Beispiel wird das zufällige Randwertproblem aus Beispiel 4.8, dessen Lösung kein endliches zweites Moment besitzt, genauer gesagt, nicht in \mathring{U}^1 enthalten ist, noch einmal aufgegriffen. Es werden verschiedene Zufallsgrößen $\vartheta > 0$ eingeführt, damit für die jeweiligen schwachen Probleme die Lösung in \mathring{U}_ϑ^1 liegt. Mittels eines geeigneten stochastischen Galerkin-Ansatzes wird diese dann in der jeweiligen natürlichen Norm durch stochastische Galerkin-Lösungen approximiert.

Beispiel 5. Das hier betrachtete Randwertproblem

$$\begin{aligned} -(\exp(\xi(\omega))u'(x, \omega))' &= \exp(\xi^2(\omega)/4 - |\xi(\omega)|), & x \in (0, 1), \omega \in \Omega, \\ u(0, \omega) &= u(1, \omega) = 0, & \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

für eine standardnormalverteilte Zufallsgröße $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ besitzt als Lösung

$$[\hat{u}(\omega)](x) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\xi^2(\omega)}{4} - |\xi(\omega)| - \xi(\omega)\right) (x - x^2).$$

Der Koeffizient $\kappa = \exp(\xi)$ kann wieder ganz einfach mit

$$0 < \kappa_{min} := \exp(\xi) \leq \kappa \leq \exp(\xi) =: \kappa_{max} < \infty$$

abgeschätzt werden und es sei $\mu = \kappa_{min}$. Die rechte Seite $f = \exp(\xi^2/4 - |\xi|)$ besitzt zwar ein endliches zweites Moment, ist jedoch nicht im Raum $U_{\mu^{-2}}^{-1}$ enthalten. Die Lösung \hat{u} liegt auch nicht im Raum \mathring{U}^1 , d. h. für $\vartheta \equiv 1$ existiert die schwache Lösung nicht. Man muss also für den Lösungsraum ein Gewicht $\vartheta \neq 1$ einführen, sodass $f \in U_{\frac{\vartheta}{\mu^2}}^{-1}$ gilt, um die

Existenz der eindeutigen schwachen Lösung $\hat{u} \in \mathring{U}_\vartheta^1$ zu erhalten. Beispielhaft sind drei auf Erwartungswert Eins normierte Zufallsgrößen

$$\vartheta_1 = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta_3 = e^{-1/2} \exp(\xi)$$

genannt. Mit den Zufallsgrößen

$$\nu_i = \frac{\vartheta_i}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\vartheta_i/\mu)\mu}, \quad i = 1, 2, 3,$$

werden dann die jeweiligen endlichdimensionalen Ansatz- und Testfunktionsräume

$$U_{N, hp} = U_{hp} \otimes U_N \quad \text{mit} \quad U_N = \text{span}\{\xi^n, n = 0, \dots, N\}$$

und

$$V_{\nu, N, hp}^{(i)} = \{u\nu_i, u \in U_{N, hp}\}$$

definiert. Der relative Approximationsfehler $\delta_{N, hp}$ der zugehörigen stochastischen Galer-

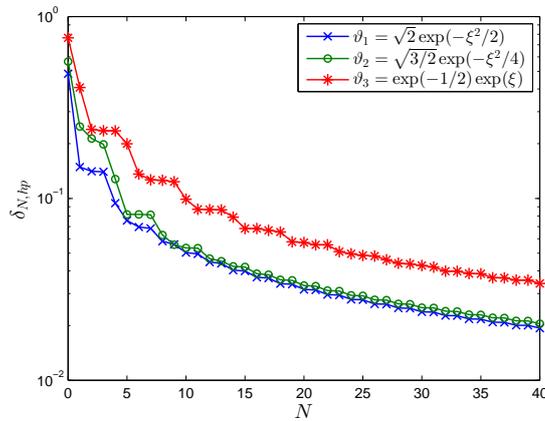


Abb. 4.10: Relativer Approximationsfehler $\delta_{N, hp}$ in Abhängigkeit der Ordnung N der stochastischen Galerkin-Lösung für verschiedene Gewichte ϑ_i , $i = 1, 2, 3$.

kin-Lösungen $\hat{u}_{N, hp}^{(i)}$ im Raum $\mathring{U}_{\vartheta_i}^1$, $i = 1, 2, 3$, ist in Abbildung 4.10 zu sehen und entsprechend der Theorie ein Abfallen aller drei Fehlerkurven (mit der gleichen Konvergenzgeschwindigkeit) zu beobachten. Dabei ist wieder jeweils ein Gauß-Lobatto-Legendre-Spektralelement der Ordnung $p = 3$ für die räumliche Diskretisierung verwendet worden. ■

Das sechste und letzte Beispiel gibt für den praktisch relevanten Fall eines lognormalen Zufallsfeldes als Koeffizienten κ einen geeigneten stochastischen Galerkin-Ansatz zur numerischen Lösung an.

Beispiel 6. Es soll auf einem beschränkten Lipschitzgebiet $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa(x, \omega) \nabla u(x, \omega)) &= f(x) & x \in D, \omega \in \Omega, \\ u(x, \omega) &= 0 & x \in \partial D, \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

mit deterministischer rechter Seite $f \in H^{-1}(D)$ und einem lognormalen Zufallsfeld als Koeffizienten κ betrachtet werden. Das heißt

$$[\kappa(\omega)](x) = \kappa_0(x) + \kappa_1(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \xi_i(\omega)\right)$$

mit unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen $\xi := (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, deterministischen Funktionen $\kappa_0, \kappa_1 \in L^\infty(D)$ mit $\kappa_0 \geq 0$ und $\kappa_1 \geq \underline{\kappa}_1 > 0$ für eine Konstante $\underline{\kappa}_1$ und

deterministischen Funktionen $\psi_i \in L^\infty(D)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{i=1}^\infty \|\psi_i\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Damit ist κ stark messbar und für $\varepsilon > 0$ und Konstanten $C_{min}(\varepsilon)$ und $C_{max}(\varepsilon)$ bilden

$$\kappa_{min}^{(\varepsilon)} := \kappa_1 \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^\infty \psi_i^2 a_i^{2\theta} \right\|_{L^\infty(D)} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right) = C_{min}(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right)$$

und

$$\begin{aligned} \kappa_{max}^{(\varepsilon)} &:= \|\kappa_0\|_{L^\infty(D)} + \|\kappa_1\|_{L^\infty(D)} \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^\infty \psi_i^2 a_i^{2\theta} \right\|_{L^\infty(D)} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right) \\ &= \|\kappa_0\|_{L^\infty(D)} + \|\kappa_1\|_{L^\infty(D)} C_{max}(\varepsilon) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right), \end{aligned}$$

obere und untere Schranken an das lognormale Feld, wenn es Zahlen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots, \quad \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} < \infty \text{ für ein } \theta > 0 \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{i=1}^\infty \psi_i^2 a_i^{2\theta} \right\|_{L^\infty(D)} < \infty.$$

Der Erwartungswert solcher Zufallsgrößen $\eta_s := \exp\left(s \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right)$ ist für $s \in \mathbb{R}$ mit $s < a_1^{2\theta}/2$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta_s &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp\left(s \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \exp\left(s \sum_{i=1}^N a_i^{-2\theta} \xi_i^2\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (1 - 2sa_i^{-2\theta}) x_i^2\right) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{1 - 2sa_i^{-2\theta}}} = \prod_{i=1}^\infty \sqrt{\frac{1}{1 - 2sa_i^{-2\theta}}} \end{aligned}$$

gegeben. Das Produkt und damit der Erwartungswert von η_s ist endlich, weil das Produkt $\prod_{i=1}^\infty (1 - 2sa_i^{-2\theta})$ endlich ist aufgrund von

$$\sum_{i=1}^\infty \ln(1 - 2sa_i^{-2\theta}) \leq -\sum_{i=1}^\infty 2sa_i^{-2\theta} = -2s \sum_{i=1}^\infty a_i^{-2\theta} < \infty$$

nach Voraussetzungen an $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Sei nun $\varepsilon < a_1^{2\theta}/4$ und $\mu_\varepsilon = \kappa_{min}^{(\varepsilon)}$. Dann ist die Zufallsgröße $(\kappa_{max}^{(\varepsilon)})^2/\mu_\varepsilon^2 \in L^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ für ein $r > 1$. Damit besitzt $(\kappa_{max}^{(\varepsilon)})^2/\mu_\varepsilon^2$ auch einen endlichen Erwartungswert und für eine rechte Seite $f \in H^{-1}(D) \subset U_{\mu_\varepsilon}^{-1}$ existiert eine eindeutige schwache Lösung \hat{u} in \dot{U}^1 , d. h. $\vartheta \equiv 1$. Mit den Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und dem Gewicht $\nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^{-1}/\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mu_\varepsilon^{-1})$ eignen sich dann als endlichdimensionale Ansatz- und Testfunktionenräume

$$U_{N,K,hp} = U_{hp} \otimes U_{N,K} \quad \text{mit} \quad U_{N,K} = \text{span}\{\xi^\alpha, \alpha \in \Lambda_{N,K}\}$$

und

$$V_{\nu,N,K,hp}^{(\varepsilon)} = \{u\nu_\varepsilon, u \in U_{N,K,hp}\}.$$

Ist f so gewählt, dass sogar $\hat{u} \in \dot{U}_{\mathbf{Q}^{(\varepsilon)}}^1 \cap U_{\mathbf{Q}^{(\varepsilon)}}^k$ für ein $k > 1$ mit

$$d\mathbf{Q}^{(\varepsilon)} = \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\kappa_{max}^{(\varepsilon)})^2/\mu_\varepsilon^2\right)^{-1} (\kappa_{max}^{(\varepsilon)})^2/\mu_\varepsilon^2 d\mathbf{P}$$

gilt, dann konvergiert die Folge der stochastischen Galerkin-Lösungen gegen die schwache Lösung in \dot{U}^1 , da die orthonormalen Polynome in ξ dicht liegen in $L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{Q}^{(\varepsilon)})$. Für die Berechnung ergeben sich die in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \nu_\varepsilon d\mathbf{P})$ orthonormalen Polynome in ξ als Tensorprodukte von univariaten, im Argument skalierten Hermite-Polynomen. ■

Anhang A

Berechnung verallgemeinerter polynomieller Chaoskoeffizienten

A.1 Berechnung polynomieller Chaoskoeffizienten

Sei eine standardnormalverteilte Zufallsgröße $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gegeben und sei die Dichte der Standardnormalverteilung mit φ und die Verteilungsfunktion mit Φ bezeichnet. Im Folgenden werden nun für verschiedene Zufallsgrößen $\eta \in L^2(\Omega, \sigma(\xi), \mathbf{P})$ die polynomiellen Chaoskoeffizienten

$$\beta_n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\eta \frac{\text{He}_n(\xi)}{\sqrt{n!}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

berechnet (vgl. dazu z. B. auch die Arbeit von Field und Grigoriu [37] oder von Lebedev [69] und Suetin [93]). Weiterhin wird unter Verwendung der Stirling-Formel (siehe Abramowitz/Stegun [1]) das asymptotische Verhalten für $n \rightarrow \infty$ für die Beträge der polynomiellen Chaoskoeffizienten, die nicht Null sind, angegeben.

Chaoskoeffizienten für eine lognormale Zufallsgröße

Sei $\eta := \exp(a\xi)$ mit $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{C}$ prinzipiell ebenso möglich). Dann gilt nach Definition der Hermite-Polynome (2.4) und n -facher partieller Integration

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ax) \text{He}_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ax) (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) dx \\ &= \frac{(-1)^n a^n}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ax) (-1)^n \varphi(x) dx = \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \exp(a^2/2) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Es gilt für eine Konstante $c > 0$

$$|\beta_n| = \frac{|a|^n}{\sqrt{n!}} \exp(a^2/2) \simeq \frac{c|a|^n}{n^{1/4}} \left(\frac{n}{e}\right)^{-n/2} \simeq \frac{c}{n^{1/4}} \left(\frac{|a|^2 e}{n}\right)^{n/2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Chaoskoeffizienten für $\exp(a\xi^2)$, $a < 1/4$

Sei $\eta := \exp(a\xi^2)$ mit $a < 1/4$ ($a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(a) < 1/4$ prinzipiell auch möglich). Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt zum Beispiel unter Zuhilfenahme des Wick-Produkts (siehe Janson [64]). Es gilt mit Hilfe der erzeugenden Funktion (2.7)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sqrt{n!} \beta_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(a\xi^2) \operatorname{He}_n(\xi) \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(a\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \operatorname{He}_n(\xi) \right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\exp(a\xi^2) \exp \left(t\xi - \frac{t^2}{2} \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(1-2a)}{2} \left(x - \frac{1}{1-2a} t \right)^2 \right) \exp \left(\frac{t^2 a}{1-2a} \right) dx \\ &= (1-2a)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{t^2 a}{1-2a} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-2a)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{1-2a} \right)^n \frac{t^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt dann auf

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{a^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}{\left(\frac{n}{2}\right)! (1-2a)^{\frac{n+1}{2}}}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Als asymptotisches Konvergenzverhalten für n gerade ergibt sich für eine Konstante $c > 0$

$$|\beta_n| = \frac{|a|^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}}{\left(\frac{n}{2}\right)! (1-2a)^{\frac{n+1}{2}}} \simeq \frac{|a|^{n/2} (2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}}{(\pi n)^{1/2} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2} (1-2a)^{n/2}} \simeq \frac{c}{n^{1/4}} \left(\frac{2|a|}{1-2a} \right)^{n/2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Chaoskoeffizienten für eine gleichverteilte Zufallsgröße

Sei $\eta := a + (b-a)\Phi(\xi)$, wobei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Zufallsgröße η gleichverteilt auf dem Intervall (a, b) . Es gilt

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + (b-a)\Phi(x)) \operatorname{He}_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erf} \left(x/\sqrt{2} \right) \operatorname{He}_n(x) \varphi(x) dx + \frac{b+a}{2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{He}_n(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

mit der Errorfunktion $\operatorname{erf} \left(x/\sqrt{2} \right) = 2\Phi(x) - 1$. Für das zweite Integral ergibt sich dann aufgrund der Orthogonalität der Hermite-Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{He}_n(x) \varphi(x) dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen Symmetrieeigenschaften ist das erste Integral für alle geraden n gleich Null und somit reicht es, es für $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu berechnen. Die explizite Darstellung der Hermite-Polynome (2.5) führt mit mehrmaliger partieller Integration auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) \operatorname{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\sqrt{(2k+1)!}}{(2k-2j+1)! j! 2^j} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2j+1} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \varphi(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\sqrt{(2k+1)!}}{(2k-2j+1)! j! 2^j} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{k-j-3i} \frac{(k-j)! (2i)!}{i! i!}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Summationsreihenfolge erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) \operatorname{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^k 2^{-i-k} (-1)^{k-i} \frac{\sqrt{(2k+1)!}}{(k-i)! i! (2k+1)} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-i} (-4)^{k-i-j} \frac{(k-i)! (k-j)! (2i)! (2k+1)}{(2k-2j+1)! j! i!}}_{=1 (*)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{(2k+1)!}}{2^k (2k+1) k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} 2^{-i} = \frac{(-1)^k \sqrt{(2k+1)!}}{\sqrt{\pi} 2^{2k} (2k+1) k!}. \end{aligned}$$

Dass die Summe (*) Eins wird, sieht man mit Hilfe der partiellen Summation. Sei dafür

$$f(j) := (-4)^{k-i-j} \frac{(k-i)! (k-j)! (2i)! (2k+1)}{(2k-2j+1)! j! i!} \quad \text{und} \quad \Delta f(j) := f(j+1) - f(j)$$

definiert. Dann folgt nach der partiellen Summation

$$\sum_{j=0}^{k-i} f(j) = f(k-i+1)(k-i+1) - \sum_{j=0}^{k-i} (j+1) \Delta f(j)$$

mit

$$\Delta f(j) = - \left(k + \frac{3}{2}\right) \frac{f(j)}{j+1}, \quad f(k-i+1) = \frac{- \left(k + \frac{1}{2}\right)}{k-i+1}$$

die Behauptung

$$\sum_{j=0}^{k-i} f(j) = \frac{(k-i+1)f(k-i+1)}{- \left(k + \frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Zusammengefasst ergeben sich die polynomiellen Chaoskoeffizienten von η also wie folgt

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{b+a}{2}, & n = 0, \\ \frac{(b-a)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n!}}{\sqrt{\pi} 2^n n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}, & n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das asymptotische Verhalten für ungerade n erhält man für eine Konstante $c > 0$

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &= \frac{(b-a)\sqrt{n!}}{\sqrt{\pi}2^n n \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \simeq \frac{c(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}}{2^n n \sqrt{\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{(n-1)/2}} \\
&\simeq \frac{cn^{1/4} n^{n/2} 2^{n/2} e^{n/2}}{e^{n/2} 2^n n (n-1)^{1/2} (n-1)^{n/2-1/2}} \simeq \frac{cn^{n/2}}{2^{n/2} n^{3/4} (n-1)^{n/2}} \simeq \frac{c}{2^{n/2} n^{3/4}} \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n/2}}_{=\exp(0.5), n \rightarrow \infty} \\
&\simeq \frac{c}{2^{n/2} n^{3/4}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Chaoskoeffizienten für $\exp(a|\xi|)$

Sei $\eta := \exp(a|\xi|)$, $a \in \mathbb{R}$. Die Chaoskoeffizienten sind folgender Gestalt

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n!}} (2a^n \Phi(a) \exp\left(\frac{1}{2}a^2\right) + \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{i-1} a^{n-2i} (2i-3)!!), & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei $(-1)!! := 1$ gelten soll. Dass für ungerade n die Koeffizienten Null sind, ist eine Folge der Symmetrieeigenschaft der Hermite-Polynome. Es reicht also $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu betrachten und der Beweis erfolgt durch Induktion: Für $k = 0$ gilt

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp(ax) \varphi(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) dx = 2\Phi(a) \exp\left(\frac{a^2}{2}\right).$$

Für $k+1$ erhält man mit der Definition der Hermite-Polynome (2.4) und partieller Integration

$$\begin{aligned}
\beta_{2k+2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2k+2)!}} \int_0^\infty \exp(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{He}_{2k+2}(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2k+2)!}} \int_0^\infty \exp(ax) \frac{d^{2k+2}}{dx^{2k+2}} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2k+2)!}} \left(\underbrace{\text{He}_{2k+1}(0)}_{=0} + \underbrace{a \text{He}_{2k}(0)}_{=a(2k-1)!!(-1)^k} \right) + \frac{a^2 \sqrt{(2k)!}}{\sqrt{(2k+2)!}} \beta_{2k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2k+2)!}} \left(2a^{2k+2} \Phi(a) \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} a^{2k+2-2i} (2i-3)!! + (2k-1)!!(-1)^k \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2k+2)!}} \left(2a^{2k+2} \Phi(a) \exp\left(\frac{1}{2}a^2\right) + \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} a^{2k+2-2i} (2i-3)!! \right) \right).
\end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten sei hier nur für $a = 1$ gezeigt. Es gilt mit einer Konstanten $c > 0$ für gerade n

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left| 2\Phi(1) \exp\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{i-1} (2i-3)!! \right| \\
&\simeq \frac{1}{(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}} \left| c + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{i-1} \frac{(2i-2)!}{2^{i-1}(i-1)!} \right| \\
&\simeq \frac{1}{(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}} \left| (-1)^{n/2-1} \frac{(n-2)!}{2^{n/2-1}(n/2-1)!} \right| \\
&\simeq \frac{c}{(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}} \frac{(2\pi(n-2))^{1/2} \left(\frac{n-2}{e}\right)^{n-2}}{2^{n/2} (\pi(n-2))^{1/2} \left(\frac{n-2}{2e}\right)^{n/2-1}} \simeq \frac{c}{n^{1/4}} \frac{n^{-2}}{n^{-1}} \simeq \frac{c}{n^{5/4}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Chaoskoeffizienten für $|\xi|^{2p+1}$, $p \in \mathbb{N}_0$

Sei $\eta := |\xi|^{2p+1}$, $p \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$${}^{(p)}\beta_n = \begin{cases} (-1)^{p+\frac{n}{2}+1} \frac{(2p+1)!\sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2}\right)! \prod_{i=0}^p (n-1-2i)}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über $p \in \mathbb{N}_0$.

Beim Induktionsanfang für $p = 0$ werden also die polynomiellen Chaoskoeffizienten für $\eta = |\xi|$ berechnet. Die Zufallsgröße η wird auch reflektierte Gaußsche Zufallsgröße genannt. Aus Symmetriegründen ist ${}^{(0)}\beta_n = 0$ für alle ungeraden n . Es werden also die ${}^{(0)}\beta_n$ mit $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, betrachtet:

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}\beta_{2k} &= \frac{1}{\sqrt{(2k)!}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \text{He}_{2k}(x) \varphi(x) dx = \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \int_0^{\infty} x \text{He}_{2k}(x) \varphi(x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2k)!}{(2k-2j)! j! 2^j} \int_0^{\infty} x^{2k-2j+1} \varphi(x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2k)!}{(2k-2j)! j! 2^j} \int_0^{\infty} \frac{2^{k-j}}{\sqrt{2\pi}} y^{k-j} \exp(-y) dy \\
&= \frac{2\sqrt{(2k)!}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{2^{k-2j} (k-j)!}{(2k-2j)! j!}.
\end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Summe erfolgt wieder mit der partiellen Summation. Es wird

$$f(j) := (-1)^j \frac{2^{k-2j} (k-j)!}{(2k-2j)! j!}$$

definiert und dann folgt

$$\Delta f(j) := f(j+1) - f(j) = -\frac{(k+\frac{1}{2})}{j+1} f(j).$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(j) = kf(k) + \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) \frac{(k+\frac{1}{2})}{j+1} f(j),$$

was zu der Summe

$$\sum_{j=0}^k f(j) = -\frac{k}{k-\frac{1}{2}} f(k) + f(k) = \frac{-1}{2k-1} f(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)2^k k!}$$

führt. Für die Chaoskoeffizienten erhält man dann

$${}^{(0)}\beta_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{(2k)!}}{\sqrt{2\pi} (2k-1) 2^{k-1} k!},$$

was der Behauptung entspricht.

Sei nun die Induktionsbehauptung für $p-1$ erfüllt, dann bleibt zu zeigen, dass

$${}^{(p)}\beta_n = \begin{cases} (-1)^{p+\frac{n}{2}+1} \frac{(2p+1)! \sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}-1} (\frac{n}{2})! \prod_{i=0}^p (n-1-2i)}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Für n ungerade folgt die Aussage wiederum sofort aus Symmetriegründen. Es reicht also $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu betrachten. Mittels der Drei-Term-Rekursionsformel (2.6) für die Hermite-Polynome folgt

$$\begin{aligned} {}^{(p)}\beta_{2k} &= \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \int_0^\infty x^{2p+1} \text{He}_{2k}(x) \varphi(x) dx = \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \int_0^\infty x^{2p} (\text{He}_{2k+1}(x) + 2k \text{He}_{2k-1}(x)) \varphi(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{(2k)!}} \int_0^\infty x^{2(p-1)+1} (\text{He}_{2k+2}(x) + (4k+1) \text{He}_{2k}(x) + 2k(2k-1) \text{He}_{2k-2}(x)) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2k)!}} \left(\sqrt{(2k+2)!} {}^{(p-1)}\beta_{2(k+1)} + (4k+1) \sqrt{(2k)!} {}^{(p-1)}\beta_{2k} \right. \\ &\quad \left. + (2k)(2k-1) \sqrt{(2k-2)!} {}^{(p-1)}\beta_{2(k-1)} \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme erhält man

$${}^{(p)}\beta_{2k} = \frac{\sqrt{(2k)!} (2p-1)!}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^{k+p+1} (2k+2)(2k+1)}{2^k (k+1)! \prod_{i=0}^{p-1} (2k+1-2i)} + \frac{(4k+1)(-1)^{k+p}}{2^{k-1} k! \prod_{i=0}^{p-1} (2k-1-2i)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{k+p+1}}{2^{k-2} (k-1)! \prod_{i=0}^{p-1} (2k-3-2i)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{k+p+1} \sqrt{(2k)!} (2p-1)!}{\sqrt{2\pi} 2^{k-1} k! \prod_{i=0}^p (2k-1-2i)} \left(\frac{(2k+2)(2k+1)(2k-2p+1)(2k-2p-1)}{2(k+1)(2k+1)} \right. \\
&\quad \left. - (4k+1)(2k-2p-1) + 2k(2k-1) \right) \\
&= \frac{(-1)^{k+p+1} \sqrt{(2k)!} (2p-1)!}{\sqrt{2\pi} 2^{k-1} k! \prod_{i=0}^p (2k-1-2i)} (2p)(2p+1) = \frac{(-1)^{k+p+1} \sqrt{(2k)!} (2p+1)!}{\sqrt{2\pi} 2^{k-1} k! \prod_{i=0}^p (2k-1-2i)}.
\end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten der Chaoskoeffizienten ${}^{(p)}\beta_n$, $p \in \mathbb{N}_0$, sieht dann für eine Konstante $c > 0$ für die geraden n wie folgt aus

$$\begin{aligned}
|{}^{(p)}\beta_n| &= \frac{(2p+1)! \sqrt{n!}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2}\right)! \prod_{i=0}^p (n-1-2i)} \simeq \frac{c(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}}{2^{n/2} n^{p+1} (\pi n)^{1/2} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}} \simeq \frac{cn^{1/4}}{n^{p+1} n^{1/2}} \\
&\simeq \frac{c}{n^{p+5/4}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Chaoskoeffizienten für Sprungfunktion

Sei $\eta := \begin{cases} \xi + a, & \xi \geq 0, \\ \xi - a, & \xi < 0, \end{cases}$ $a \neq 0$. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Hermite-Polynome sind die geraden Koeffizienten Null. Für die ungeraden Koeffizienten $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$\begin{aligned}
\beta_{2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \int_{-\infty}^0 (x-a) \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} (x+a) \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2k+1)!}} \int_{-\infty}^{\infty} x \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx + \frac{2a}{(2k+1)!} \int_0^{\infty} \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der Hermite-Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx = \delta_{k0}.$$

Für das zweite Integral ergibt sich mittels der Definition der Hermite-Polynome (2.4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \text{He}_{2k+1}(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) dx = -\varphi(x) \text{He}_{2k}(x) \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^k (2k-1)!!.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst bedeutet dies

$$\beta_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a, & n = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} a (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-2)!!, & n > 1 \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das asymptotische Verhalten erhält man für ungerade n dann mit einer Konstanten $c > 0$

$$\begin{aligned} |\beta_n| &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |a| (n-2)!! = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |a| \frac{(n-1)!}{2^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \\ &\simeq \frac{c}{(2\pi n)^{1/4} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}} \frac{(2\pi(n-1))^{1/2} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{2^{(n-1)/2} (\pi(n-1))^{1/2} \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{(n-1)/2}} \simeq \frac{c}{n^{1/4}} \frac{n^{-1}}{n^{-1/2}} \\ &\simeq \frac{c}{n^{3/4}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A.2 Berechnung von Chaoskoeffizienten bei lognormalem Chaos

Sei ξ nun eine lognormale Zufallsgröße mit der Dichte

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zu der Zufallsgröße ξ gehörenden orthonormalen Polynome im Sinne von Satz 2.16 (siehe Abschnitt 2.2.4, Korollar 2.27) werden mit $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ bezeichnet. Die verallgemeinerten polynomiellen Chaoskoeffizienten $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Zufallsgröße $\eta = 1/\xi$ bzgl. den Polynomen $\{p_n(\xi), n \in \mathbb{N}_0\}$ lauten

$$\beta_0 = e^{1/2} \quad \text{und} \quad \beta_n = (-1)^n e^{-(n^2+3n-2)/4} \sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der Koeffizient a_0 entspricht dem Erwartungswert von η , d. h.

$$\beta_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{1/2}.$$

Für die anderen Koeffizienten soll die Aussage mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. Genutzt wird dabei die Drei-Term-Rekursionsformel für die Polynome $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$$b_{n+1} p_{n+1}(\xi) = (\xi - a_n) p_n(\xi) - b_n p_{n-1}(\xi), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit den Rekursionskoeffizienten (siehe Abschnitt 2.2.4)

$$a_n = e^{n-1/2} (e^{n+1} + e^n - 1), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$b_n = (e^n - 1)^{1/2} e^{(3n-2)/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Induktionsannahme für $n = 1$ ist dann vermöge

$$\beta_1 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\xi} p_1(\xi) \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\xi} \frac{(\xi - a_0)}{b_1} \right) = \frac{1}{b_1} - \frac{a_0}{b_1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\xi} \right)$$

$$= \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{e-1}}(1-e) = -e^{-1/2}\sqrt{e-1}$$

erfüllt. Unter der Annahme, dass die Formel für die Koeffizienten

$$\beta_n = (-1)^n e^{-(n^2+3n-2)/4} \sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}$$

für alle $k = 1, \dots, n$ gilt, bleibt sie für $n+1$ nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\xi} p_{n+1}(\xi) \right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{1}{\xi} \left(\frac{(\xi - a_n)}{b_{n+1}} p_n(\xi) - \frac{b_n}{b_{n+1}} p_{n-1}(\xi) \right) \right) = \frac{-a_n}{b_{n+1}} \beta_n - \frac{b_n}{b_{n+1}} \beta_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^{n+1} - 1}} \left(-(e^{n/2} + e^{n/2-1} - e^{-n/2-1}) \beta_n - \sqrt{e^n - 1} e^{-3/2} \beta_{n-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}}{\sqrt{e^{n+1} - 1}} \left((-1)^{n+1} e^{-(n^2+3n-2)/4} (e^{n/2} - e^{-n/2-1}) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n (e^i - 1)}}{\sqrt{e^{n+1} - 1}} \left((-1)^{n+1} e^{-(n^2+3n-2)/4} e^{-n/2-1} (e^{n+1} - 1) \right) \\ &= (-1)^{n+1} e^{-((n+1)^2+3(n+1)-2)/4} \sqrt{\prod_{i=1}^{n+1} (e^i - 1)}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Zufällige partielle Differentialgleichungen werden genutzt, um komplexe Systeme in Natur, Physik oder Technik realitätsnäher zu modellieren. In dieser Arbeit wird speziell das stationäre Diffusionsproblem mit zufälligem Koeffizient als lehrreiches Modellproblem betrachtet und mittels der stochastischen Galerkin-Methode unter Verwendung des verallgemeinerten polynomiellen Chaos näherungsweise gelöst. Im Gegensatz zu den üblichen Annahmen, dass der Koeffizient sich durch Konstanten von Null und Unendlich fast sicher trennen lässt oder ein lognormales Zufallsfeld darstellt, wird in der vorliegenden Arbeit für den Koeffizienten nur vorausgesetzt, dass er sich fast sicher durch reellwertige Zufallsgrößen von Null und Unendlich trennen lässt. Unter dieser Voraussetzung werden sowohl eine entsprechende Lösungstheorie für solche Randwertprobleme entwickelt als auch ein geeigneter stochastischer Galerkin-Ansatz zur näherungsweisen Lösung vorgestellt. Dieser stochastische Galerkin-Ansatz basiert auf der Verwendung von verallgemeinertem polynomiellen Chaos und entspricht einem stochastischen Petrov-Galerkin-Ansatz aufgrund der Gewichtung der Testfunktionen durch eine entsprechende reellwertige Zufallsgröße. Die Eigenschaften des verallgemeinerten polynomiellen Chaos werden genutzt, um das Konvergenzverhalten der Folge dieser stochastischen Galerkin-Lösungen in der natürlichen Norm zu untersuchen und A-priori-Fehlerabschätzungen anzugeben. Es wird außerdem gezeigt, dass der standardmäßige stochastische Galerkin-Ansatz in diesem Fall nicht notwendigerweise eine Folge von stochastischen Galerkin-Lösungen liefert, die in der natürlichen Norm gegen die exakte Lösung konvergiert.

Symbolverzeichnis

$\text{int}(A), \bar{A}, A^\perp$	das Innere, der Abschluss, das orthogonale Komplement der Menge A
$C^k(D), k \in \mathbb{N}_0$	Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D
$\mathcal{B}(\cdot)$	σ -Algebra der Borel-Mengen
$\mathcal{O}(\cdot), o(\cdot)$	Landau-Symbole
$\mathbb{1}_A(\cdot)$	Indikatorfunktion der Menge A
f^+	$f^+ := \max\{f, 0\}$
$\text{He}_n, n \in \mathbb{N}_0$	n -tes stochastisches Hermite-Polynom
$\text{H}_n, n \in \mathbb{N}_0$	n -tes physikalisches Hermite-Polynom
$P_n, n \in \mathbb{N}_0$	n -tes Legendre-Polynom
\otimes	Tensorprodukt
\oplus	direkte orthogonale Summe, Abschluss der linearen Hülle der Summanden
$ I $	Anzahl der Elemente der Menge I
Λ	$\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{ I } : \alpha \text{ hat nur endlich viele Nicht-Null-Elemente}\}$ für eine Menge $I \subseteq \mathbb{N}$
$\alpha; \alpha ; d(\alpha)$	Multiindex $\alpha \in \Lambda$; $ \alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i$; $d(\alpha) := \max\{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$
$\delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \Lambda$	Kronecker-Delta $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$\partial^\alpha, \alpha \in \Lambda$ mit $I = \{1, \dots, d\}$	gemischte partielle schwache Ableitung $\partial^\alpha u := \left(\frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d} \right)$
∇	Nabla-Operator
$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}, \mathbf{D}_{\mathbf{P}}^2$	Erwartungswert, Varianz bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P}
$\mathcal{N}(0, 1)$	Standardnormalverteilung
$\mathcal{U}(a, b)$	Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b)
φ, Φ	Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
f_ξ, F_ξ	Dichte- und Verteilungsfunktion der Zufallsgröße ξ
$^{(N)}\eta$	verallgemeinerte polynomielle Chaosapproximation der Ordnung N von der Zufallsgröße η
$I_n, n \in \mathbb{N}$	Einheitsmatrix der Größe n
$n \wedge m; n \vee m$	$\min\{n, m\}; \max\{n, m\}$
$\lfloor y \rfloor$	ganzzahliger Anteil der reellen Zahl y , d. h. $\lfloor y \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq y\}$

$$(c)_j \quad \text{Pochhammer Symbol } (c)_j := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ c(c+1) \dots (c+j-1), & j > 0 \end{cases}$$

$$[a]_0, [a]_n \quad [a]_0 = 1, [a]_n = \prod_{i=1}^n (1 - a^i)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_a \quad \text{Gauß-Symbol } \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_a := \frac{[a]_n}{[a]_{n-j}[a]_j}$$

$$B(n, k, l) \quad B(n, k, l) := \sqrt{\binom{n}{k} \binom{k+l}{l} \binom{n-k+l}{l}}$$

$$C(n, k, l) \quad C(n, k, l) := \sqrt{\binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{n+k-2l}{n-l}}$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc, New York, 1965.
- [2] J. C. Adams, *On the Expression of the Product of any two Legendre's Coefficients by means of Series of Legendre's Coefficients*, Proceedings of the Royal Society of London (1878), 63–71.
- [3] R. Askey and J. A. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 54, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1985.
- [4] F. Augustin, A. Gilg, M. Paffrath, P. Rentrop, and U. Wever, *A Survey in Mathematics for Industry. Polynomial chaos for the approximation of uncertainties: Chances and limits*, Euro. Jnl of Applied Mathematics **19** (2008), 149–190.
- [5] I. Babuška, F. Nobile, and R. Tempone, *A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 3, 1005–1034.
- [6] ———, *A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data*, SIAM Review **52** (2010), no. 2, 317–355.
- [7] I. Babuška, R. Tempone, and G. E. Zouraris, *Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations*, SIAM J. Numer. Anal. **42** (2004), no. 2, 800–825.
- [8] ———, *Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic formulation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194** (2005), 1251–1294.
- [9] M. Bain, *On the Uniform Convergence of Generalized Fourier Series*, J. Inst. Maths. Applics. **21** (1978), 379–386.
- [10] M. Bain and L. M. Delves, *The Convergence Rates of Expansions in Jacobi Polynomials*, Numer. Math. **27** (1977), 219–225.
- [11] M. Bain, L. M. Delves, and K. O. Mead, *On the Rate of Convergence of Multi-dimensional Orthogonal Expansions*, J. Inst. Maths. Applics. **22** (1978), 225–234.
- [12] A. Barth, C. Schwab, and N. Zollinger, *Multi-Level Monte Carlo Finite Element method for elliptic PDEs with stochastic coefficients*, Numer. Math. **119** (2011), no. 1, 123–161.
- [13] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear programming: Theory and algorithms*, 3 ed., Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2006.
- [14] Ch. Berg, *Moment problems and polynomial approximation*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **6** (1996), 9–32.
- [15] Ch. Berg and J. P. R. Christensen, *Density questions in the classical theory of*

- moments*, *Annales de l'institute Fourier* **31** (1981), no. 3, 99–114.
- [16] M. Bieri, *A sparse composite collocation finite element method for elliptic sPDEs*, *SIAM J. Numer. Anal.* **49** (2011), no. 6, 2277–2301.
- [17] M. Bieri, R. Andreev, and C. Schwab, *Sparse tensor discretization of elliptic SPDEs*, *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (2009), no. 6, 4281–4304.
- [18] M. Bieri and C. Schwab, *Sparse high order FEM for elliptic sPDEs*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **198** (2009), no. 13-14, 1149–1170.
- [19] A. Bobrowski, *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2005.
- [20] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, *Math. Z.* **29** (1929), 730–736.
- [21] J. P. Boyd, *The Rate of Convergence of Hermite Function Series*, *Mathematics of Computation* **35** (1980), no. 152, 1309–1316.
- [22] ———, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Second Edition*, DOVER Publications, Inc., 2000.
- [23] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 2nd ed., *Texts in Applied Mathematics*, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [24] I. W. Busbridge, *The evaluation of certain integrals involving products of Hermite polynomials*, *J. London Math. Soc.* **s1-23** (1948), no. 2, 135–141.
- [25] R. H. Cameron and W. T. Martin, *The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals*, *The Annals of Mathematics* **48** (1947), no. 2, 385–392.
- [26] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [27] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon & Breach, New York, 1978.
- [28] K. L. Chung, *A Course in Probability Theory*, Academic Press, New York et al., 2001.
- [29] K. A. Cliffe, M. B. Giles, R. Scheichl, and A. Teckentrup, *Multilevel Monte Carlo methods and applications to elliptic PDEs with random coefficients*, *Computing and Visualization in Science* **14** (2011), 3–15.
- [30] A. Cohen, R. DeVore, and C. Schwab, *Convergence Rates of Best N-term Galerkin Approximations for a Class of Elliptic sPDEs*, *Foundations of Computational Mathematics* **10** (2010), no. 6, 615–646.
- [31] M. K. Deb, I. Babuška, and J. T. Oden, *Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** (2001), 6359–6372.
- [32] J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis*, 2. ed., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [33] M. Eiermann, O. G. Ernst, and E. Ullmann, *Computational aspects of the stochastic finite element method*, *Computing and Visualization in Science* **10** (2007), no. 1, 3–15.

-
- [34] O. Ernst, A. Mugler, E. Ullmann, and H.-J. Starkloff, *On the convergence of generalized polynomial chaos*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis **46** (2012), no. 2, 317–339.
- [35] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.
- [36] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung II*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [37] R. V. Field and M. Grigoriu, *Convergence Properties of Polynomial Chaos Approximations for L^2 -Random Variables*, Sandia Report SAND2007-1262, 2007.
- [38] P. Frauenfelder, C. Schwab, and R. A. Todor, *Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **194** (2005), no. 2-5, 205–228.
- [39] R. A. Freeze, *A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Nonuniform Homogeneous Media*, Water Resources Research (1975), 725–741.
- [40] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Akademiai, Budapest, 1971.
- [41] B. Fuglede, *The multidimensional moment problem*, Expo. Math. **1** (1983), 47–65.
- [42] J. Galvis and M. Sarkis, *Approximating infinity-dimensional stochastic Darcy’s Equations without uniform ellipticity*, SIAM J. Numer. Anal. **47** (2009), no. 5, 3624–3651.
- [43] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Oxford University Press, 2004.
- [44] R. Ghanem, *Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **158** (1998), 199–220.
- [45] ———, *Scales of fluctuation and the propagation of uncertainty in random porous media*, Water Resources Research **34** (1998), no. 9, 2123–2136.
- [46] ———, *Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **168** (1999), 19–34.
- [47] ———, *Stochastic Finite Elements with Multiple Random Non-Gaussian Properties*, Journal of Engineering Mechanics **125** (1999), no. 1, 26–40.
- [48] R. Ghanem and S. Dham, *Stochastic Finite Element Analysis for Multiphase Flow in Heterogeneous Porous Media*, Transport in Porous Media **32** (1998), 239–262.
- [49] R. Ghanem and P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [50] J. Gillis, J. Jedwab, and D. Zeilberger, *A combinatorial interpretation of the integral of the product of Legendre polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), no. 6, 1455–1461.
- [51] C. J. Gittelsohn, *Stochastic Galerkin discretization of the log-normal isotropic diffusion problem*, Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), no. 2, 237–263.
- [52] ———, *Representation of Gaussian fields in series with independent coefficients*, IMA Journal of Numerical Analysis **32** (2012), 294–319.

- [53] H. Glöckner, *Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics **155** (2006), 205–252.
- [54] I. G. Graham, F. Y. Kou, D. Nuyens, R. Scheichl, and I. H. Sloan, *Quasi-Monte Carlo methods for elliptic PDEs with random coefficients and applications*, Journal of Computational Physics **230** (2011), 3668–3694.
- [55] B. Guo, *Error Estimation of Hermite Spectral Method for Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematics of Computation **68** (1999), no. 227, 1067–1078.
- [56] A. Gut, *On the moment problem*, Bernoulli **8** (2002), no. 3, 407–421.
- [57] C. C. Heyde, *On a Property of the Lognormal Distribution*, Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological) **25** (1963), no. 2, 392–393.
- [58] E. Hille, *Contributions to the theory of Hermitian series*, Duke Math. Journal **5** (1939), 875–936.
- [59] ———, *A class of differential operators of infinite order, I*, Duke Math. Journal **7** (1940), 458–495.
- [60] ———, *Contributions to the Theory of Hermitian Series II. The Representation Problem*, Transactions of the American Mathematical Society **47** (1940), no. 1, 80–94.
- [61] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Colloquium Publications, vol. 31, American Mathematical Society, 1957.
- [62] T. Y. Hou, W. Luo, B. Rozovskii, and Z. Hao-Min, *Wiener Chaos expansions and numerical solutions of randomly forced equations of fluid mechanics*, Journal of Computational Physics **216** (2006), 687–706.
- [63] A. D. Ioffe and V. M. Tichomirov, *Theorie der Extremalaufgaben*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [64] S. Janson, *Gaussian Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [65] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Springer, New York et al., 1997.
- [66] A. M. Krall, *Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 133, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2002.
- [67] A. Kufner, *Weighted sobolev spaces*, A Wiley-Interscience publication, Wiley, Chichester, 1985.
- [68] O. P. Le Maître and O. M. Knio, *Spectral Methods for Uncertainty Quantification*, Scientific Computation, Springer, 2010.
- [69] N. N. Lebedev, *Special functions & their applications*, Dover Publications, Inc, 1972.
- [70] G. D. Lin, *On the moment problems*, Statist. & Probab. Lett. **35** (1997), 85–90. Correction: *ibidem*, 50 (2000):205.
- [71] M. Loève, *Probability Theory II. 4th Edition*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978.
- [72] S. V. Lototsky and B. L. Rozovskii, *Wiener Chaos Solutions of Linear Stochastic Evolution Equations*, The Annals of Probability **34** (2006), no. 2, 638–662.
- [73] D. Lucor, C.-H. Su, and G. E. Karniadakis, *Generalized polynomial chaos and ran-*

- dom oscillators*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **60** (2004), 571–596.
- [74] H. G. Matthies and A. Keese, *Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194** (2005), 1295–1331.
- [75] R. Mikulevicius and B. L. Rozovskii, *Stochastic Navier-Stokes Equations for Turbulent Flows*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2004), no. 5, 1250–1310.
- [76] B. Muckenhoupt, *Equiconvergence and Almost Everywhere Convergence of Hermite and Laguerre Series*, SIAM J. Math. Anal. **1** (1970), no. 3, 295–321.
- [77] A. Mugler and H.-J. Starkloff, *On elliptic partial differential equations with random coefficients*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **56** (2011), no. 2, 473–487.
- [78] ———, *On the convergence of the stochastic Galerkin method for random elliptic partial differential equations*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis (2013), accepted.
- [79] A. Nouy, *A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** (2007), 4521–4537.
- [80] A. Nouy and O. P. Le Maître, *Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems*, Journal of Computational Physics **228** (2009), 202–235.
- [81] W. Nowak, *Geostatistical Methods for the Identification of Flow and Transport Parameters in the Subsurface*, Ph.D. thesis, Universität Stuttgart, 2005.
- [82] L. C. Petersen, *On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem*, Math. Scand. **51** (1982), 361–366.
- [83] G. Poëtte and D. Lucor, *Non intrusive iterative stochastic spectral representation with application to compressible gas dynamics*, Journal of Computational Physics **231** (2012), 3587–3609.
- [84] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [85] M. Riesz, *Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant*, Acta Litt. ac. Scient. Univ. Hung. **1** (1923), 209–225.
- [86] R. Scheichl, P. S. Vassilevski, and L. T. Zikatanov, *Multilevel Methods for Elliptic Problems with Highly Varying Coefficients on Nonaligned Coarse Grids*, SIAM J. Numer. Anal. **50** (2012), no. 3, 1675–1694.
- [87] C. Schwab and C. J. Gittelsohn, *Sparse tensor discretizations of high-dimensional parametric and stochastic PDEs*, Acta Numerica **20** (2011), 291–467.
- [88] I. E. Segal, *Tensor algebras over Hilbert spaces. I*, Transactions of the American Mathematical Society **81** (1956), no. 1, 106–134.
- [89] A. N. Shiryaev, *Probability*, Springer, Berlin et al., 1996.
- [90] I. C. Simpson, *Numerical Integration over a Semi-Infinite Interval Using the Lognormal Distribution*, Numer. Math. **31** (1978), 71–76.
- [91] C. Soize and R. Ghanem, *Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure*, SIAM J. Sci. Comput. **26** (2004), no. 2, 395–410.

-
- [92] J. M. Stoyanov, *Counterexamples in Probability, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, New York et al., 1997.
- [93] P. K. Suetin, *Classical orthogonal polynomials*, Nauka, Moscow, 1976.
- [94] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939.
- [95] R. A. Todor and C. Schwab, *Convergence rates for sparse chaos approximations of elliptic problems with stochastic coefficients*, IMA Journal of Numerical Analysis **27** (2007), 232–261.
- [96] F. G. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [97] B. O. Turesson, *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*, Lecture notes in mathematics, vol. 1736, Springer, Berlin, 2000.
- [98] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, *Banach Space-Valued Random Variables and Tensor Products of Banach Spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **31** (1970), 49–67.
- [99] X. Wan, *Adaptive Multi-Element Generalized Polynomial Chaos: Algorithms and Applications*, Ph.D. thesis, Brown University, 2007.
- [100] X. Wan and G. E. Karniadakis, *Beyond Wiener Askey Expansions: Handling Arbitrary PDFs*, Journal of Scientific Computing **27** (2006), 455–464.
- [101] ———, *Multi-Element Generalized Polynomial Chaos for Arbitrary Probability Measures*, SIAM J. Sci. Comput. **28** (2006), no. 3, 901–928.
- [102] ———, *Solving elliptic problems with non-Gaussian spatially-dependent random coefficients*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **198** (2009), 1985–1995.
- [103] N. Wiener, *Homogeneous Chaos*, American Journal of Mathematics **60** (1938), no. 4, 897–936.
- [104] R. Willink, *Normal moments and Hermite polynomials*, Statist. & Probab. Lett. **73** (2005), no. 3, 271–275.
- [105] L. Wuan, *Wiener Chaos Expansion and Numerical Solutions of Stochastic Partial Differential Equations*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, 2006.
- [106] D. Xiu, *Generalized (Wiener-Askey) polynomial chaos*, Ph.D. thesis, Brown University, 2004.
- [107] ———, *Efficient Collocational Approach for Parametric Uncertainty Analysis*, Commun. Comput. Phys. **2** (2007), no. 2, 293–309.
- [108] ———, *Numerical methods for stochastic computations: A spectral method approach*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2010.
- [109] D. Xiu and J. S. Hesthaven, *High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs*, sisc **27** (2005), no. 3, 1118–1139.
- [110] D. Xiu and G. E. Karniadakis, *Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191** (2002), no. 43, 4927–4948.
- [111] ———, *The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*,

- SIAM J. Sci. Comput. **24** (2002), no. 2, 619–644.
- [112] ———, *A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty*, International Journal of Heat and Mass Transfer **46** (2003), no. 24, 4681–4693.
- [113] ———, *Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos*, Journal of Computational Physics **187** (2003), 137–167.
- [114] D. Xiu, D. Lucor, C.-H. Su, and G. E. Karniadakis, *Performance Evaluation of Generalized Polynomial Chaos*, Peter M. A. Sloom, David Abramson, Alexander V. Bogdanov, Jack J. Dongarra et al. (Hg.) - ICCS 2003, LNCS **2660** (2003), 346–354.
- [115] K. Yosida, *Functional Analysis*, reprint of the 1980 ed., Classics in mathematics, Springer, Berlin, 1995.
- [116] D. Zhang, *Stochastic Methods for Flow in Porous Media. Coping with Uncertainties*, Academic Press, San Diego, CA, 2002.

